



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ  
INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM GEOFÍSICA

JAROL DAVID GARCIA PEREZ

# **Modelagem Numérica Bidimensional de Dados CSAMT com Fonte Dipolar Elétrica Usando Elementos Finitos**

Belém  
2016

JAROL DAVID GARCIA PEREZ

# **Modelagem Numérica Bidimensional de Dados CSAMT com Fonte Dipolar Elétrica Usando Elementos Finitos**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Geofísica do Instituto de Geociências da Universidade Federal do Pará como requisito final para obtenção do título de Mestre em Geofísica.

Área de Concentração: Métodos Eletromagnéticos

Orientador: Prof. Dr. Cícero Roberto Teixeira Régis

Coorientador: Prof. Dr. Valdelírio da Silva e Silva

Belém  
2016

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)  
Sistema de Bibliotecas da UFPA

---

Perez, Jarold David Garcia, 1987-

Modelagem numérica bidimensional de dados CSAMT com fonte dipolar elétrica usando elementos finitos / Jarold David Garcia Perez. - 2016.

Orientador: Cícero Roberto Teixeira Régis;

Coorientador: Valdelírio da Silva e Silva.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Pará, Instituto de Geociências, Programa de Pós-Graduação em Geofísica, Belém, 2016.

1. Prospecção - Métodos geofísicos - Modelos matemáticos.
2. Método dos elementos finitos.
3. Prospecção magnetotelúrica. I. Título.

CDD 22. ed. 622.15015118

---

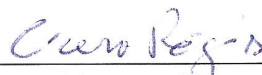
JAROL DAVID GARCIA PEREZ

**Modelagem Numérica Bidimensional de Dados CSAMT com  
Fonte Dipolar Elétrica Usando Elementos Finitos**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação  
em Geofísica da Universidade Federal do Pará para  
obtenção do título de Mestre em Geofísica.

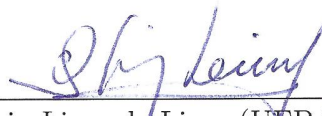
Data de aprovação: 20/08/16

Banca Examinadora:



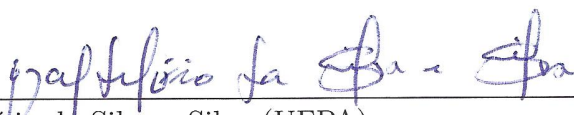
---

Cícero Roberto Teixeira Régis (UFPA)  
Orientador.



---

Olivar Antônio Lima de Lima (UFBA)



---

Valdelício da Silva e Silva (UFPA)

Este trabalho está dedicado à memória de  
meu pai Carlos Romeo Garcia Barrios.

## AGRADECIMENTOS

Agradeço inicialmente a Deus por todo seu amor, bondade e força.

Ao professor Cícero Roberto Teixeira Régis, por sua excelente orientação, por seu incondicional apoio, motivação e amizade durante estes anos.

Ao professor Valdelírio da Silva e Silva por sua orientação, sugestões, disposição e ajuda ante qualquer dúvida.

A meus colegas de curso, em especial a Anderson Almeida e Hilton Farias por sua amizade e disposição ao responder todas minhas perguntas.

A meus amigos Alberto Jose Ruiz Tapia, Laura Yesia Rosellon Guzman, Jhon Stiven Penagos Padilla, por sua incondicional amizade e apoio.

Ao CNPq, pela bolsa recebida durante o mestrado.

Agradeço a minha mãe Jovanis Elena Perez e a minha irmã Estefany Garcia Perez, por todo seu amor, apoio e compreensão em todo momento, por que sempre têm estado a meu lado sem importar as circunstâncias e momentos difíceis.

## RESUMO

Neste trabalho apresenta-se uma aplicação de modelagem numérica 2,5D para simular dados do método audiomagnetotelúrico de fonte controlada-CSAMT (Controlled source audio-magnetotellurics), através do método dos elementos finitos. Para isto se usou a técnica de separação do campo total electromagnético em campos primários e secundários. O conjunto das equações que governam o sistema deve ser expressado no domínio espectral de Fourier, cujas soluções, são obtida como uma contribuição de soluções 2D. Na primeira parte do trabalho apresenta-se uma validação da resposta gerada para campos primários excitados por fonte dipolar elétrica, e uma comparação da resposta 1D com o método magnetotelúrico-MT. Na segunda parte, faz-se uma validação da resposta de um meio bidimensional bem como uma análise dos resultados em termos da resistividade aparente e campo elétrico relacionados a um corpo isolado imerso num semi-espaço homogêneo, ao variar parâmetros, tais como contraste de resistividade entre o meio e o corpo, profundidade do corpo com respeito à superfície e frequência de operação.

O código desenvolvido é capaz de simular com precisão as medidas do método CSAMT em qualquer configuração de levantamento.

Palavras-chaves: CSAMT. Dipolo elétrico. Modelagem 2,5D. Método de elementos finitos.

## ABSTRACT

This work presents the application of a 2,5D numerical modelling scheme to simulate data of the CSAMT (Controlled Source Audio MagnetoTellurics) electromagnetic method using the Finite Element method. We have applied the technique of separating the total electromagnetic field into two parts: the so called primary and secondary fields. The set of equations that govern the system has to be expressed in the spectral domain of the Fourier Transform. The solution is obtained as a composition of 2D solutions. In the first part of the dissertation, we present a validation of the answer generated for primary fields and a comparison of the 1D responses with those from the MT method. The second part of the text presents a validation of the 2,5D responses, as well as an analysis of the results, in terms of apparent resistivity and the measured electrical field related to an isolated body in a homogeneous half-space. We analyze the changes in the results resulting from changes in model parameters like the contrast of resistividade between the half-space and the anomalous body, the depth of the body and the frequency.

The code developed is able to simulate with good precision the measurements of the CSAMT method in any survey configuration.

Keywords: CSAMT. Electrical dipole. 2.5D modeling. Finite element method.



## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	10
<b>2</b>	<b>MEIOS ESTRATIFICADOS – 1D</b>	12
<b>2.1</b>	<b>Campos primários do dipolo elétrico horizontal</b>	13
2.1.1	Componentes dos campos elétricos no domínio espectral	18
<b>2.2</b>	<b>Testes de validação 1D</b>	19
2.2.1	Semi-espaço homogêneo	19
2.2.2	Meio estratificado	23
<b>3</b>	<b>MEIOS BIDIMENSIONAIS</b>	25
<b>3.1</b>	<b>Elementos Finitos 2D</b>	25
<b>3.2</b>	<b>Testes de validação 2.5D</b>	34
3.2.1	Dipolo na direção $y$	34
3.2.2	Dipolo na direção $x$	36
<b>4</b>	<b>ANÁLISE DE MODELOS 2D</b>	38
<b>4.1</b>	<b>Variação no contraste de resistividade e na profundidade de um corpo isolado.</b>	38
<b>4.2</b>	<b>Análise do campo elétrico em um modelo de um corpo isolado</b>	43
<b>5</b>	<b>CONCLUSÕES</b>	47
	<b>REFERÊNCIAS</b>	49

## 1 INTRODUÇÃO

O método Áudio Magnetotelúrico de Fonte Controlada (CSAMT) é um método geofísico de investigação no domínio da frequência que se propõe a obter as propriedades elétricas da sub-superfície, utilizando um dipolo elétrico fixo colocado sobre o terreno, como fonte de sinal artificial. Este dipolo geralmente tem cerca de 1 a 2 km de comprimento. A distância entre o dipolo transmissor a estação de recepção (onde se deseja fazer as sondagens) é geralmente superior a 4 vezes a profundidade de penetração do sinal ( $\delta$ ) (Zonge & Hughes, 1991). As medições são realizadas dentro da faixa de frequência de 0,1 Hz a 10 kHz. Pares de eletrodos não-polarizantes detectam componentes do campo elétrico e as antenas magnéticas componentes do campo magnético. A partir de razões entre as componentes ortogonais e das diferenças entre as fases dos campos coletados nos receptores pode-se determinar, respectivamente, a resistividade aparente e a fase das impedâncias.

O método CSAMT foi originalmente desenvolvido por Goldstein & Strangway (1975) para mapear anomalias causadas por depósitos de sulfetos maciços. Sandberg & Hohmann (1982) aplicaram com sucesso o método no campo de estudos geotérmicos, e sugeriram que a suposição de onda plana só é válida para distância entre receptor e transmissor maior que  $5\delta$ .

Aplicações geotérmicas do CSAMT também foram estudadas por Wannamaker (1997). Estas incluem um mapeamento térmico causado por anomalias resistivas e avaliação de águas subterrâneas.

Para aplicação na indústria de petróleo têm sido realizados mapeamentos de campos elétricos relacionados a uma anomalia geoquímica relacionada em à campos petrolíferos utilizando CSAMT (Yamashita et al., 1985; Hughes, 1984). Outras aplicações na exploração de petróleo levaram-se a cabo por Hughes & Carlson (1987), para mapeamento de feições estruturais de campos de petróleo.

Em geral, a técnica é mais útil para mapeamento de reconhecimento antes do estudo final com sísmica de reflexão, mas também pode ser útil em áreas onde a sísmica não é efetiva, tais como sob basaltos (Yamashita et al., 1985).

Na literatura encontramos alguns trabalhos relacionados com a modelagem numérica de dados CSAMT: Mohammad et al. (2013) realizaram uma modelagem direta da solução completa 1D para aplicação na inversão de dados CSAMT. Os resultados indicam a utilidade do tensor CSAMT para interpretar dados num sistema geologicamente complexo.

Em outro trabalho apresenta-se a modelagem das respostas CSAMT 2D (Mohammad et al., 2012) gerada por dipolo elétrico horizontal mediante a técnica de separação do campo em duas partes: campo primário e secundário. A validação da modelagem apresentada por Mohammad et al. (2012) leva-se a cabo por comparação de resultados numéricos usando a técnica de elementos finitos, com resposta analítica 1D, para os ca-

dos da terra homogênea e em camadas horizontais. Os autores também apresentam uma comparação entre as respostas do CSAMT e MT (método magnetotelúrico) geradas para o mesmo modelo, concluindo que CSAMT apresenta maior sensibilidade para localizar os corpos anômalos.

Nesta dissertação é realizada uma modelagem bidimensional de dados do método CSAMT, pela técnica numérica de elementos finitos nodais numa formulação 2,5D, na qual os sistemas de equações que regem o problema devem ser expressos num domínio espectral de Fourier, e a solução final é obtida como uma contribuição de soluções 2D de cada variável espectral de discretização no domínio de Fourier (Silva (2012a)). A formulação 2,5D apresenta a vantagem de exigir menos tempo de processamento e, principalmente, menos memória do que uma formulação 3D completa. Os resultados obtidos indicam a eficiência e flexibilidade do método de elementos finitos para modelar ambientes complexos.

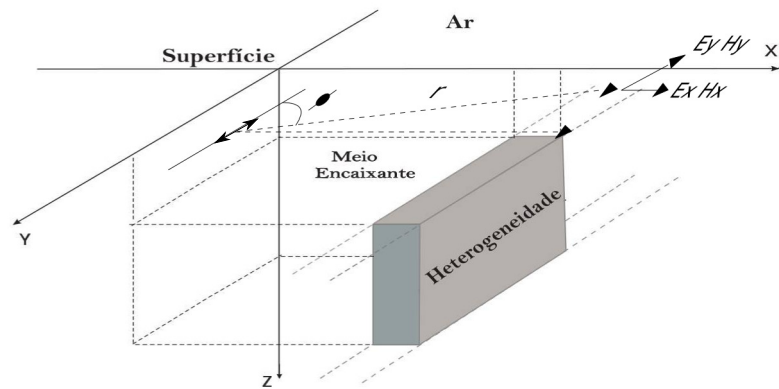
A construção do código de modelagem direta permitiu a realização de diferentes estudos para modelos 1D e 2D, nos quais se analisam respostas de campos elétricos, resistividade aparente e fase, em função de diferentes parâmetros tais como, contrastes de resistividade entre o meio e o corpo, frequência empregada, profundidade do corpo e distancia fonte-receptor.

Além deste capítulo introdutório, esta dissertação está organizada na seguinte sequência: o capítulo 2 descreve a formulação e apresenta resultados da modelagem em meios horizontalmente estratificados (1D); o capítulo 3 traz a descrição da formulação numérica para a modelagem em meios bidimensionais e apresenta resultados de validação do código; o capítulo 4 apresenta os resultados da aplicação do código de modelagem 2,5D; o capítulo 5 sumariza as conclusões deste trabalho.

## 2 MEIOS ESTRATIFICADOS – 1D

Os modelos geofísicos estudados neste trabalho consistem em uma heterogeneidade bidimensional infinita na direção estrutural inserida num meio encaixante 1D, que é constituído por camadas horizontais homogêneas e isotrópicas (figura 2.1).

Figura 2.1: Configuração modelo geofísico.



Fonte: adaptado de Silva (2012b)

A modelagem aqui implementada utiliza o método numérico dos elementos finitos em uma formulação 2,5D. Seguindo a metodologia apresentada em Mohammad et al. (2012), a formulação é construída a partir da separação do campo eletromagnético da fonte dipolar no meio 2D em duas partes: os chamados campos primário e secundário. Primário é o campo da fonte dipolar elétrica inserida no meio 1D estratificado, formado por camadas homogêneas horizontais; enquanto que o campo secundário é definido como a diferença entre o campo total no meio completo e o primário. A formulação é realizada escrevendo as equações diferenciais para o campo secundário, nas quais o primário aparece exclusivamente como termo fonte. Uma das principais vantagens dessa separação é que ela elimina a necessidade de representar numericamente, a fonte electromagnética dentro da malha de discretização, já que ela está contida no próprio campo primário 1D.

Neste capítulo é mostrada a formulação do campo gerado pelo dipolo elétrico num meio estratificado, inicialmente no domínio espacial, das coordenadas  $(x, y, z)$ , depois no domínio espectral da transformada de Fourier na direção estrutural das heterogeneidades no modelo 2D, coordenadas  $(x, k_y, z)$ , que será de fato o campo primário na formulação 2,5D.

## 2.1 Campos primários do dipolo elétrico horizontal

A modelagem dos métodos eletromagnéticos é originalmente derivada das equações de Maxwell, que definem as relações fundamentais entre campos e fluxos elétricos e magnéticos. Os métodos e as relações de campo diferem dependendo do tipo e da configuração da fonte e, naturalmente, do meio circundante através do qual os campos se propagam. O método áudio-magnetotelúrico de fonte controlada (CSAMT) é um método geofísico de investigação no qual se obtém informação a respeito da resistividade do sub-solo, e consiste na transmissão desde um sítio (lugar do transmissor) de um sinal controlado no sub-solo, em diferentes frequências (numa faixa entre 0.1 Hz e 10 kHz) e a medida dos campos elétricos e magnéticos na área de interesse (estações receptoras). A relação entre as componentes horizontais ortogonais dos campos elétrico e do campo magnético ( $E_x$  e  $H_y$  ou  $E_y$  e  $H_x$ ) são utilizadas para calcular as impedâncias a partir das quais são determinados os parâmetros a serem interpretados no método: a resistividade aparente e a fase.

Como já mencionamos anteriormente, nesta dissertação trabalharemos com as equações de Maxwell no domínio da frequência. Para isto, utilizaremos a transformada de Fourier, definida da seguinte maneira:

$$\hat{f}(w) = F[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt, \quad (2.1)$$

$$f(t) = F^{-1}[\hat{f}(w)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(w)e^{i\omega t} dw. \quad (2.2)$$

Também restringimos a análise ao domínio de validade da aproximação quase-estática ( $\sigma \gg \omega\epsilon_0$ ), para obter

$$\nabla \times \mathbf{E} = -i\omega\mu\mathbf{H} - \mathbf{M} \quad (2.3)$$

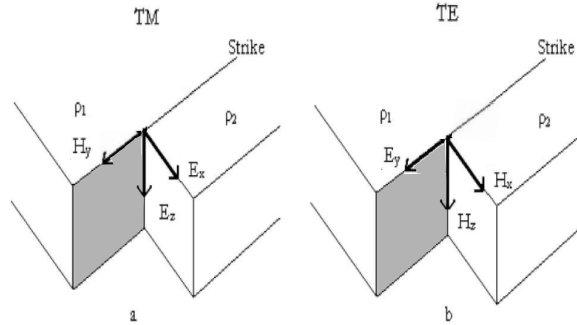
e

$$\nabla \times \mathbf{H} = \sigma\mathbf{E} + \mathbf{J}_{\mathbf{T}}. \quad (2.4)$$

As equações (2.3) e (2.4) representam as leis de Faraday e Ampère, escritas no domínio da frequência. Nelas, as grandezas,  $\sigma$ ,  $\omega$ ,  $\mu$  são a condutividade, frequência angular e permeabilidade magnética respectivamente,  $\mathbf{E}$  representa o campo elétrico,  $\mathbf{H}$  o campo magnético,  $\mathbf{J}_{\mathbf{T}}$  a densidade de corrente elétrica que descreve a fonte. Para modelar o CSAMT,  $\mathbf{J}_{\mathbf{T}}$  é um vetor cuja componente na direção do dipolo é escrita em termos do momento de dipolo e da função delta de Dirac ( $\mathbf{J}_{\mathbf{T}} = I(\omega)ds_x\delta(r)\hat{x}$ ). Por fim,  $\mathbf{M}$  é uma densidade de corrente magnética, que é introduzida como artifício matemático para representar fontes magnéticas. No restante desta dissertação, só trabalharemos com a fonte dipolar elétrica, portanto nas equações seguintes o termo  $\mathbf{M}$  não aparecerá.

O campo eletromagnético obtido como respostas do método CSAMT pode ser dividido em dois modos de propagação, modo transversal elétrico TE, e o modo transversal

Figura 2.2: Campo eletromagnético: modos TM (a) e TE (b).



Fonte: Adaptado de Hellsborn (2009)

magnético TM. Estes constituem uma representação decomposta do campo total, que permite analisar de maneira mais simples seus componentes, como ilustrados na figura 2.2. O modo TE simplesmente indica que o campo elétrico incidente é paralelo à direção estrutural (*strike*), enquanto o modo TM estabelece o mesmo critério, em relação ao campo magnético incidente.

O campo primário é aquele medido na ausência de qualquer heterogeneidade (modelo 1D). A partir das equações (2.3) e (2.4), teremos para o campo primário são

$$\nabla \times \mathbf{H}^p = \sigma^p \mathbf{E}^p + \mathbf{J}_T, \quad (2.5)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}^p = -i\omega\mu\mathbf{H}^p. \quad (2.6)$$

Em que  $\sigma^p$  é a condutividade do meio estratificado 1D. Os campos eletromagnéticos totais resultam da soma do campo primário com o campo secundário.

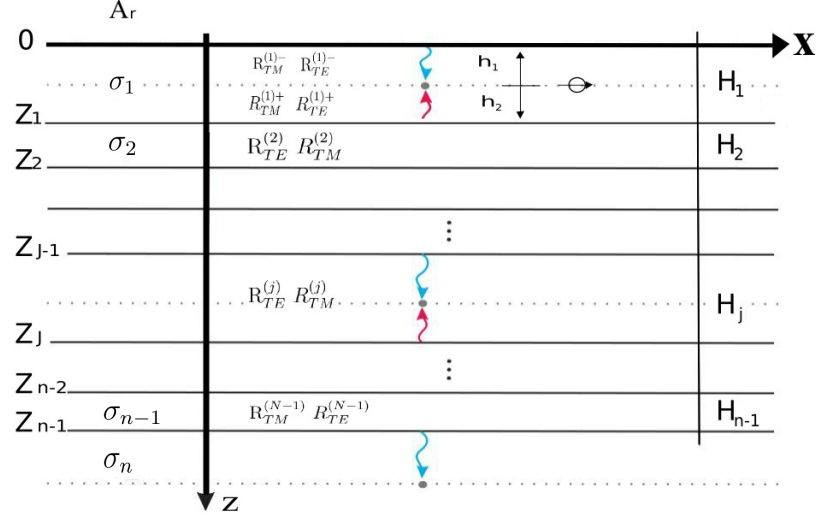
Usando o procedimento proposto por Ward & Hohmann (1988) através dos potenciais vetoriais de Schelkunoff  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{F}$ , e manipulando as equações (2.3) e (2.4), temos que as expressões gerais para os campos elétrico e magnético, em termos destes potenciais são

$$\mathbf{E} = \nabla \times \mathbf{F} - i\omega\mu\mathbf{A} + \frac{1}{\sigma} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) \quad (2.7)$$

$$\mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A} - \sigma\mathbf{F} + \frac{1}{i\omega\mu} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) \quad (2.8)$$

Um caso particular no qual o potencial  $\mathbf{F}$  seja nulo e o potencial  $\mathbf{A}$  tenha só a componente  $\mathbf{A}_z$ , gera um campo eletromagnético de modo transversal magnético (TM) em relação à direção  $z$ . Um caso no qual o potencial  $\mathbf{A}$  seja nulo e o potencial  $\mathbf{F}$  tenha só a componente  $\mathbf{F}_z$  gera um campo no modo transversal elétrico (TE), também em relação a  $z$ . Se escrevermos o campo total como uma composição destes dois casos particulares, as

Figura 2.3: modelo teórico CSAMT num meio estratificado horizontalmente.



componentes, expressas a partir das equações (2.7) e (2.8) são

$$E_x = \frac{1}{\sigma} \frac{\partial^2 A_z}{\partial x \partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial y}, \quad (2.9)$$

$$E_y = \frac{1}{\sigma} \frac{\partial^2 A_z}{\partial y \partial z} + \frac{\partial F_z}{\partial x}, \quad (2.10)$$

$$E_z = \frac{1}{\sigma} \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) A_z, \quad (2.11)$$

$$H_x = \frac{1}{i\omega\mu} \frac{\partial^2 F_z}{\partial x \partial z} + \frac{\partial A_z}{\partial y}, \quad (2.12)$$

$$H_y = \frac{1}{i\omega\mu} \frac{\partial^2 F_z}{\partial y \partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \quad (2.13)$$

$$H_z = \frac{1}{i\omega\mu} \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) F_z. \quad (2.14)$$

em que  $k^2 = -i\omega\mu\sigma$  é o numero de onda.

Estas equações representam o caso geral para a composição do campo eletromagnético em termos dos dois modos de propagação. Para determinar as funções  $A_z$  e  $F_z$  para uma determinada fonte geofísica, no meio de camadas, calculamos inicialmente o campo da fonte em um meio homogêneo e aplicamos as componentes  $E_z$  e  $H_z$  nas equações (2.11) e (2.14), respectivamente. Os campos  $A_z$  e  $F_z$  assim determinados são usados como campos incidentes sobre o meio estratificado.

A configuração usada é mostrada na figura (2.3), na qual  $h_1$  e  $h_2$  determinam a posição em profundidade do dipolo,  $H_i$  é a espessura de cada camada,  $Z_i$  representa a profundidade para cada interface,  $\mathbf{A}_r$  indica o semiespaço que corresponde ao ar e finalmente  $\mathbf{R}_{TE}^{(i)}$  e  $\mathbf{R}_{TM}^{(i)}$  são os respectivos coeficientes de reflexão, para cada modo de propagação relacionado a uma interface generica  $i$ .

É evidente que para uma configuração própria do método CSAMT, onde os receptores e o dipolo se encontram na superfície ( $h_1 = 0, h_2 = H_1$ ) os coeficiente de reflexão  $R_{TM}^{(1)-}$  e  $R_{TE}^{(1)-}$  serão zeros. Neste trabalho, os receptores estão colocados a uma pequena distância abaixo da superfície, porque se deseja calcular os campos secundários  $\hat{E}_x^s, \hat{E}_z^s, \hat{H}_x^s e \hat{E}_z^s$ , a partir da resposta numérica do método por meio de derivadas relacionadas a pontos próximos destes receptores.

Fazendo uma análise similar àquela realizada por Silva (2012a) para os potenciais incidentes para cada modo de propagação, determinam-se as expressões finais para os coeficientes de reflexão e transmissão, para cada uma das camadas do modelo.

A formulação para as componentes do campo eletromagnético no domínio espacial  $(x, y, z)$  em função do momento do dipolo elétrico  $I(\omega) ds_x$ , na primera camada fornece as expressões apresentadas a seguir.

A componente do campo elétrico na direção  $x$  é dada por

$$\begin{aligned} E_{x,(+)}^{(1)} = & -\frac{I(\omega)ds_x\rho_1}{4\pi} \left( \frac{1}{r} - \frac{2x^2}{r^3} \right) \int_0^\infty K'_{x,TM(+)}{}^{(1)} J_1(k_r r) dk_r + \\ & -\frac{I(\omega)ds_x\rho_1}{4\pi} \frac{x^2}{r^2} \int_0^\infty K'_{x,TM(+)}{}^{(1)} J_0(k_r r) k_r dk_r \\ & -\frac{I(\omega)ds_x\zeta}{4\pi} \left( \frac{1}{r} - \frac{2y^2}{r^3} \right) \int_0^\infty K_{x,TE(+)}^{(1)} J_1(k_r r) dk_r + \\ & -\frac{I(\omega)ds_x\zeta}{4\pi} \frac{y^2}{r^2} \int_0^\infty K_{x,TE(+)}^{(1)} J_0(k_r r) k_r dk_r, \end{aligned} \quad (2.15)$$

em que  $k_r^2 = k_x^2 + k_y^2$ ,  $r^2 = x^2 + y^2$ ,  $\zeta = i\omega\mu$ ,  $\rho_1 = \frac{1}{\sigma_1}$  e

$$K'_{x,TM(+)}{}^{(1)} = u_1 \left( e^{-u_1(z-h_1)} - R_{TM}^{(1)-} e^{-u_1(z+h_1)} - R_{TM}^{(1)+} e^{u_1(z-h_1-2h_2)} \right) \quad (2.16)$$

$$K_{x,TE(+)}^{(1)} = \frac{1}{u_1} \left( e^{-u_1(z-h_1)} + R_{TE}^{(1)-} e^{-u_1(z+h_1)} + R_{TE}^{(1)+} e^{u_1(z-h_1-2h_2)} \right) \quad (2.17)$$

Para o campo elétrico na direção  $y$ :

$$\begin{aligned} E_{y,(+)}^{(1)} = & \frac{I(\omega)ds_x\rho_1}{4\pi} \frac{2xy}{r^3} \int_0^\infty K'_{y,TM(+)}{}^{(1)} J_1(k_r r) dk_r + \\ & -\frac{I(\omega)ds_x\rho_1}{4\pi} \frac{xy}{r^2} \int_0^\infty K'_{y,TM(+)}{}^{(1)} J_0(k_r r) k_r dk_r + \\ & +\frac{I(\omega)ds_x\rho_1}{4\pi} \frac{2xy}{r^3} \int_0^\infty K'_{y,TM(+)}{}^{(1)} J_1(k_r r) dk_r + \\ & -\frac{I(\omega)ds_x\rho_1}{4\pi} \frac{xy}{r^2} \int_0^\infty K_{y,TE(+)}^{(1)} J_0(k_r r) k_r dk_r \end{aligned} \quad (2.18)$$



onde

$$K'_{y,TM(+)}{}^{(1)} = u_1 \left( e^{-u_1(z-h_1)} - R_{TM}^{(1)-} e^{-u_1(z+h_1)} - R_{TM}^{(1)+} e^{u_1(z-h_1-2h_2)} \right) \quad (2.19)$$

e

$$K_{y,TM(+)}{}^{(1)} = u_1 \left( e^{-u_1(z-h_1)} - R_{TM}^{(1)-} e^{-u_1(z+h_1)} - R_{TM}^{(1)+} e^{u_1(z-h_1-2h_2)} \right) \quad (2.20)$$

Para o campo elétrico na direção  $z$ :

$$E_{z,(+)}^{(1)} = -\frac{I(\omega)ds_x\rho_1}{4\pi} \frac{x}{r} \int_0^\infty K_{z,TM(+)}^{(1)} J_1(k_r r) k_r^2 dk_r \quad (2.21)$$

onde

$$K_{z,TM(+)}^{(1)} = -e^{-u_1(z-h_1)} + R_{TM}^{(1)-} e^{-u_1(z+h_1)} - R_{TM}^{(1)+} e^{u_1(z-h_1-2h_2)} \quad (2.22)$$

Para o campo magnético na direção  $x$ :

$$\begin{aligned} H_{x,(+)}^{(1)} &= \frac{I(\omega)ds_x}{4\pi} \frac{2xy}{r^3} \int_0^\infty K_{x,TM(+)}^{(1)} J_1(k_r r) dk_r + \\ &\quad - \frac{I(\omega)ds_x}{4\pi} \frac{xy}{r^2} \int_0^\infty K_{x,TM(+)}^{(1)} J_0(k_r r) k_r dk_r + \\ &\quad + \frac{I(\omega)ds_x}{4\pi} \frac{2xy}{r^3} \int_0^\infty K_{x,TE(+)}^{(1)} J_1(k_r r) dk_r + \\ &\quad + \frac{I(\omega)ds_x}{4\pi} \frac{xy}{r^2} \int_0^\infty K_{x,TE(+)}^{(1)} J_0(k_r r) k_r dk_r \end{aligned} \quad (2.23)$$

onde

$$K_{x,TM(+)}^{(1)} = \left( -e^{-u_1(z-h_1)} + R_{TM}^{(1)-} e^{-u_1(z+h_1)} - R_{TM}^{(1)+} e^{u_1(z-h_1-2h_2)} \right) \quad (2.24)$$

e

$$K_{x,TE(+)}^{(1)} = \left( -e^{-u_1(z-h_1)} - R_{TE}^{(1)-} e^{-u_1(z+h_1)} + R_{TE}^{(1)+} e^{u_1(z-h_1-2h_2)} \right) \quad (2.25)$$

Para o campo magnético na direção  $y$ :

$$\begin{aligned} H_{y,(+)}^{(1)} &= \frac{I(\omega)ds_x}{4\pi} \left( \frac{1}{r} - \frac{2x^2}{r^3} \right) \int_0^\infty K_{y,TM(+)}^{(1)} J_1(k_r r) dk_r + \\ &\quad + \frac{I(\omega)ds_x}{4\pi} \frac{x^2}{r^2} \int_0^\infty K_{y,TM(+)}^{(1)} J_0(k_r r) k_r dk_r \\ &\quad + \frac{I(\omega)ds_x}{4\pi} \left( \frac{1}{r} - \frac{2y^2}{r^3} \right) \int_0^\infty K_{y,TE(+)}^{(1)} J_1(k_r r) dk_r + \\ &\quad + \frac{I(\omega)ds_x}{4\pi} \frac{y^2}{r^2} \int_0^\infty K_{y,TE(+)}^{(1)} J_0(k_r r) k_r dk_r \end{aligned} \quad (2.26)$$

onde

$$K_{y,TM(+)}^{(1)} = \left( -e^{-u_1(z-h_1)} + R_{TM}^{(1)-} e^{-u_1(z+h_1)} - R_{TM}^{(1)+} e^{u_1(z-h_1-2h_2)} \right) \quad (2.27)$$

e

$$K_{y,TE(+)}^{(1)} = \left( -e^{-u_1(z-h_1)} - R_{TE}^{(1)-} e^{-u_1(z+h_1)} + R_{TE}^{(1)+} e^{u_1(z-h_1-2h_2)} \right) \quad (2.28)$$

Para a componente do campo magnético na direção  $z$ :

$$H_{z,(+)}^{(1)} = \frac{I(\omega) ds_x y}{4\pi r} \int_0^\infty K_{z,TE(+)}^{(1)} J_1(k_r r) k_r^2 dk_r, \quad (2.29)$$

onde

$$K_{z,TE(+)}^{(1)} = \frac{1}{u_1} \left( e^{-u_1(z-h_1)} + R_{TE}^{(1)-} e^{-u_1(z+h_1)} + R_{TE}^{(1)+} e^{u_1(z-h_1-2h_2)} \right). \quad (2.30)$$

Para avaliar numericamente as integrais nas equações (2.16), (2.18), (2.21), (2.23), (2.26) e (2.29), utilizou-se a técnica de filtros digitais lineares usada por Almeida (2002). O filtro usado para a solução numérica das integrais para transformada de Hankel apresenta 61 abscissas (Kong, 2007).

### 2.1.1 COMPONENTES DOS CAMPOS ELÉTRICOS NO DOMÍNIO ESPECTRAL

Como é mostrado no próximo capítulo, para a solução numérica 2,5D por elementos finitos, é necessário expressar os campos primarios no domínio espectral  $(x, k_y, z)$  para qualquer camada  $j$  que se encontra abaixo da fonte electromagnética (dipolo elétrico horizontal).

Para isto primeiro usamos os campos elétricos no domínio  $(k_x, k_y, z)$ . dado para  $\hat{E}_x^{(j)}$  como

$$\hat{E}_x^{(j)} = \frac{I(\omega) ds_x \rho_j}{2} K_{x,TM}^{(j)f} - \frac{I(\omega) ds_x \zeta}{2} K_{x,TE}^{(j)f} \quad (2.31)$$

onde

$$K_{x,TM}^{(j)f} = \frac{k_x^2 A_j u_j}{k_x^2 + k_y^2} \left( e^{-u_j(z-z_{j-1})} - R_{TM}^{(j)} e^{u_j(z-z_j-H_j)} \right) \quad (2.32)$$

e

$$K_{x,TE}^{(j)f} = \frac{k_y^2}{(k_x^2 + k_y^2)} F_j \left( e^{-u_j(z-z_{j-1})} + R_{TE}^{(j)} e^{u_j(z-z_j-H_j)} \right). \quad (2.33)$$

para  $\hat{E}_y^{(j)}$  esta dado por

$$\hat{E}_{y,TM}^{(j)} = \frac{I(\omega) ds_x \rho_j}{2} K_{y,TM}^{(j)f} + \frac{I(\omega) ds_x \zeta}{2} K_{y,TE}^{(j)f} \quad (2.34)$$

onde

$$K_{y,TM}^{(j)f} = \frac{k_x k_y A_j u_j}{k_x^2 + k_y^2} \left( e^{-u_j(z-z_{j-1})} - R_{TM}^{(j)} e^{u_j(z-z_j-H_j)} \right) \quad (2.35)$$

e

$$K_{y,TE}^{(j)f} = \frac{k_x k_y}{(k_x^2 + k_y^2)} F_j \left( e^{-u_j(z-z_{j-1})} + R_{TE}^{(j)} e^{u_j(z-z_j-H_j)} \right) \quad (2.36)$$

para  $\hat{E}_z^{(j)}$  esta dado por

$$\hat{E}_{z, TM}^{(j)} = \frac{I(\omega)ds_x\rho_j}{2} K_{z, TM}^{(j)f} \quad (2.37)$$

onde

$$K_{z, TM}^{(j)f} = ik_x A_j \left( e^{-u_j(z-z_{j-1})} + R_{TM}^{(j)} e^{u_j(z-z_j-H_j)} \right) \quad (2.38)$$

Para expressar os campos no domínio procurado  $(x, k_y, z)$  utilizamos a transformada inversa de Fourier cosseno ou seno (Almeida, 2002), dependendo da paridade da equação usada. Seguindo o raciocínio de Silva (2012a) teremos que para  $\hat{E}_x^{(j)}$  deve-ser aplicasse a transformada inversa de Fourier cosseno, já que se conclui que ela é uma função par. Para  $\hat{E}_y^{(j)}$  e  $\hat{E}_z^{(j)}$  aplica-se transformada inversa de Fourier seno, por que são funções ímpares, então

$$\hat{E}_{x, TM}^{(j)} = \frac{I(\omega)ds_x\rho_j}{2\pi} \int_0^\infty K_{x, TM}^{(j)f} \cos(k_x x) dk_x - \frac{I(\omega)ds_x\zeta}{2\pi} \int_0^\infty K_{x, TE}^{(j)f} \cos(k_x x) dk_x. \quad (2.39)$$

$$\hat{E}_y^{(j)} = \frac{I(\omega)ds_x\rho_j}{2\pi} \int_0^\infty K_{y, TM}^{(j)f} \sin(k_x x) dk_x + \frac{I(\omega)ds_x\zeta}{2\pi} \int_0^\infty K_{y, TE}^{(j)f} \sin(k_x x) dk_x \quad (2.40)$$

$$\hat{E}_{z, TM}^{(j)} = \frac{I(\omega)ds_x\rho_j}{2\pi} \int_0^\infty K_{z, TM}^{(j)f} \sin(k_x x) dk_x \quad (2.41)$$

## 2.2 Testes de validação 1D

### 2.2.1 SEMI-ESPAÇO HOMOGÊNIO

Suponhamos um semi-espaço homogêneo com condutividade  $\sigma$  e permeabilidade magnética  $\mu_0$ , no qual um dipolo elétrico está colocado na superfície com uma orientação paralela ao eixo x. Neste caso as componentes dos campos elétricos e magnéticos em coordenadas cilíndricas, geradas pelo excitação do dipolo elétrico de comprimento  $dl$  em qualquer ponto na superfície ( $z = 0$ ), com  $r$  como o vetor radial e  $z+$  dirigido para baixo, têm soluções analíticas:

$$E_r = \frac{Idl \cos\phi}{2\pi\sigma r^3} [1 + e^{-ikr}(1 + ikr)] \quad (2.42)$$

$$E_\phi = \frac{Idl \sin\phi}{2\pi\sigma r^3} [2 - e^{-ikr}(1 + ikr)] \quad (2.43)$$

$$E_z = \frac{i\mu_0\omega Idl \cos\phi}{2\pi\sigma r^3} \left[ I_1\left(\frac{ikr}{2}\right) K_1\left(\frac{ikr}{2}\right) \right] \quad (2.44)$$

$$H_r = \frac{i\mu_0\omega Idl\sin\phi}{2\pi\sigma r^3} \left\{ 3I_1\left(\frac{ikr}{2}\right) K_1\left(\frac{ikr}{2}\right) + \left(\frac{ikr}{2}\right) \left[ I_1\left(\frac{ikr}{2}\right) K_1\left(\frac{ikr}{2}\right) - I_0\left(\frac{ikr}{2}\right) K_0\left(\frac{ikr}{2}\right) \right] \right\} \quad (2.45)$$

$$H_\phi = \frac{Idl\cos\phi}{2\pi\sigma r^2} \left[ I_1\left(\frac{ikr}{2}\right) K_1\left(\frac{ikr}{2}\right) \right] \quad (2.46)$$

$$H_z = \frac{3Idl\sin\phi}{2\pi k^2 r^4} \left[ 1 - e^{-ikr} \left( 1 + ikr - \frac{1}{3}k^2 r^2 \right) \right] \quad (2.47)$$

Estas equações são as soluções analíticas de campo primário derivados da excitação de um dipolo elétrico para um meio homogêneo dadas por Wait (1951) e Bannister (1966). Nelas,  $I_m$  e  $K_m$  representam as funções modificadas de Bessel de ordem  $m$ .

Para validar nosso código  $1D$  faremos uma comparação entre a resposta analítica dos campos  $E_\phi$  e  $H_r$  dadas pelas equações (2.43) (2.45), em uma faixa de frequências de 1 Hz a 4094 Hz, para um semiespaço homogêneo, com a resposta gerada pelo código  $1D$  desenvolvido para campos primários usando a transformada dupla de Fourier, calculada numericamente, usando os filtros citados em Key (2012) para 61 abscisas, o qual também permitir-nos-á validar a resposta dos campos para o domínio espectral. Para isto tomamos um semiespaço homogêneo com uma resistividade de 1000  $\Omega\cdot\text{m}$ .

As respostas obtidas para o campo elétrico  $E_x$  e o magnético  $H_y$  em receptores colocados em diferentes posições sobre o eixo  $y$  ( $x = 0$ ) são mostradas nas figuras (2.4) e (2.5). Estas coincidem completamente com as respostas dadas pela solução analítica dando assim uma confiável validação de nosso código  $1D$  para um meio homogêneo.

Ainda com a solução para um semi-espaço homogêneo, podemos verificar um comportamento importante das medidas do método CSAMT, que é a variação das respostas da resistividade aparente, com relação à distância ( $r$ ) fonte–transmissor. Para isto tomamos um semi-espaço homogêneo com uma resistividade de 100 $\Omega\cdot\text{m}$ .

Os resultados mostrados nas figuras (2.6) e (2.7) indicam, para cada frequência, as distâncias as quais as respostas calculadas com o campo de dipolo elétrico se aproximam daquelas para uma onda verdadeiramente plana, que geram resistividades aparentes iguais à verdadeira e fases de 45°. Estas figuras reproduzem os resultados apresentados por Ward & Hohmann (1988) e representam as respostas de um dipolo pontual. Elas representam bem os casos de levantamentos reais nos quais as distâncias  $r$  sejam muito maiores do que a separação entre os eletrodos da fonte.

Figura 2.4: Comparação entre a resposta analítica (linhas tracejadas) do campo elétrico  $E_x$  com a resposta numérica 1D gerada por nosso código para um semiespaço homogêneo de  $1000 \Omega \cdot m$  de resistividade, e posições  $r$  (distancia receptor-fonte) de 1 km, 2 km, 4 km, 8 km, 16 km.

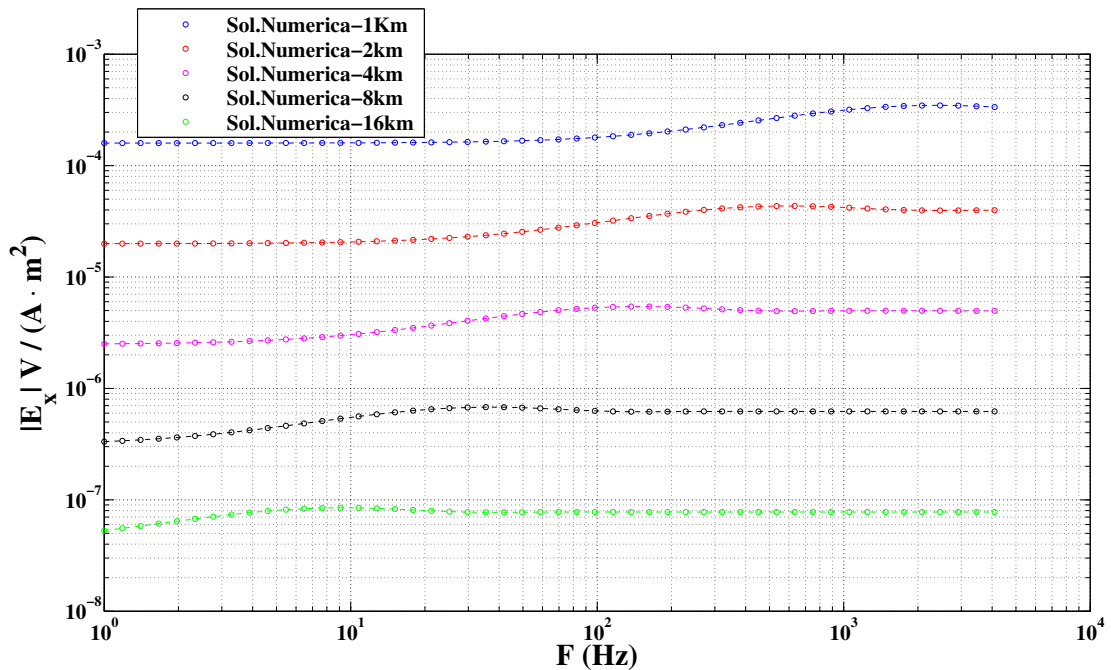


Figura 2.5: Comparação entre a resposta analítica (linha tracejada) do campo magnético  $H_y$  com a resposta numérica 1D gerada por nosso código para um semiespaço homogêneo de  $1000 \Omega \cdot m$  de resistividade, e posições  $r$  (distancia receptor-fonte) de 1 km, 2 km, 4 km, 8 km, 16 km.

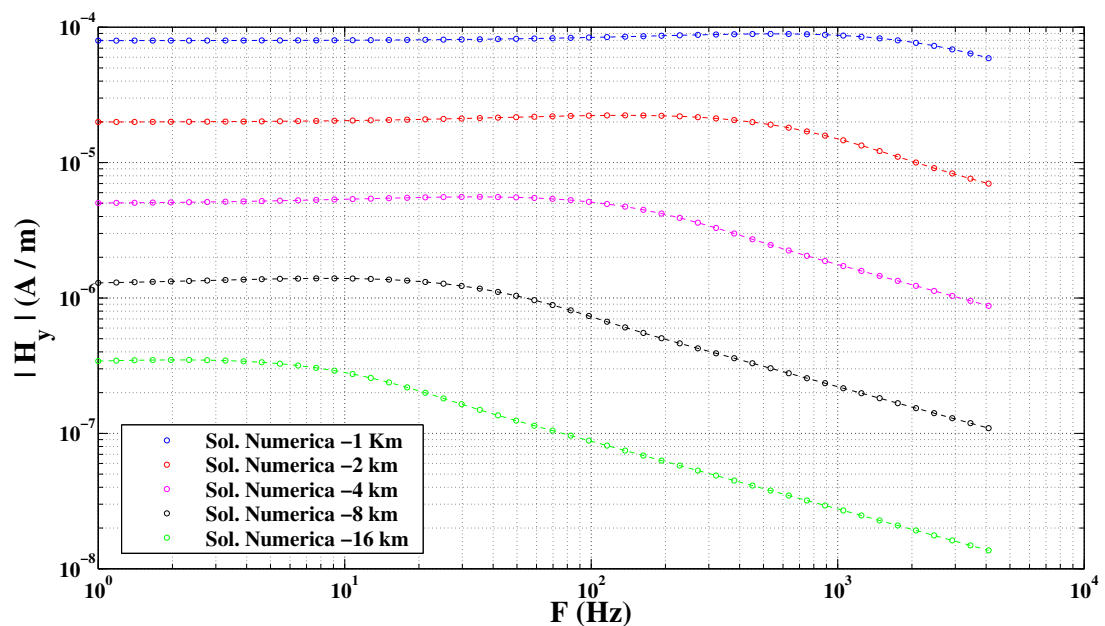


Figura 2.6: Grafico da Resistividade versus período, para um semiespaço homogêneo de  $100 \Omega \cdot m$  de resistividade, e diferentes distancia  $r$  ( fonte - receptor) de  $1km$ ,  $2km$ ,  $4km$ ,  $16km$

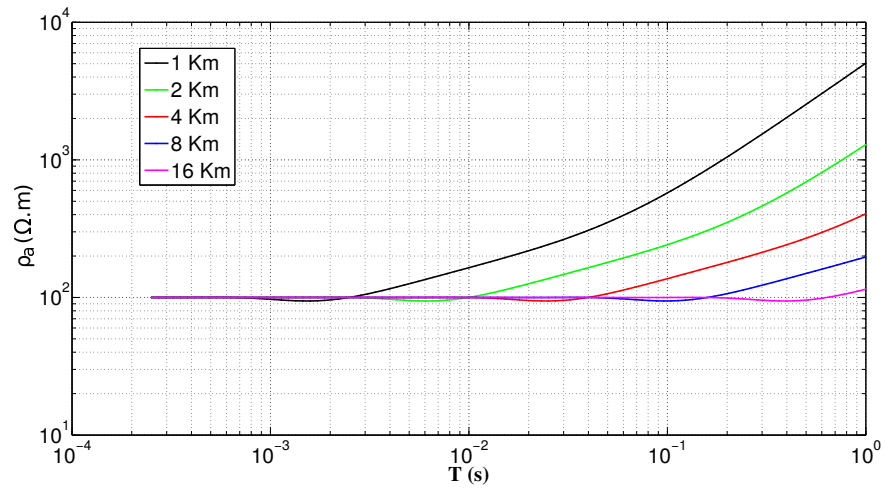
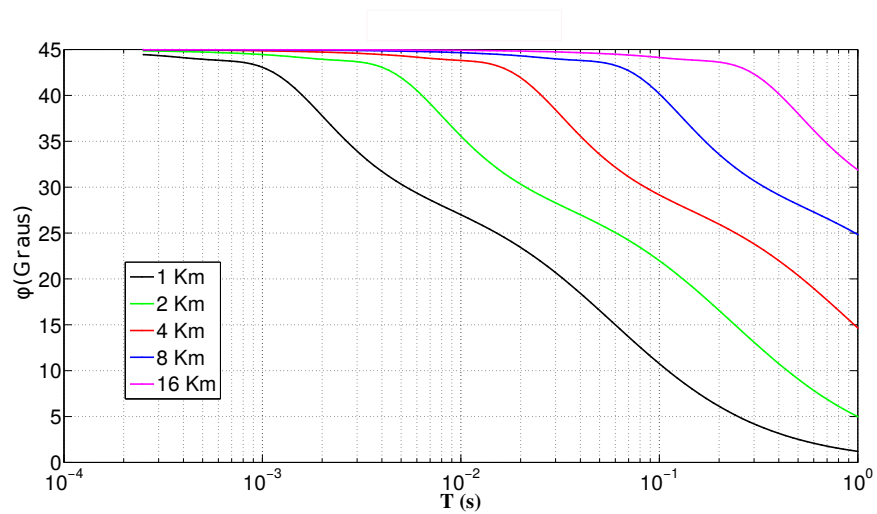


Figura 2.7: Grafico da fase versus período, para um semiespaço homogêneo de  $1000 \Omega \cdot m$  de resistividade, e diferentes distancia  $r$  ( fonte - receptor) de  $1km$ ,  $2km$ ,  $4km$ ,  $16km$



### 2.2.2 MEIO ESTRATIFICADO

Para a validação do campo 1D num meio estratificado obtido a partir de nosso código CSAMT, suas respostas foram comparadas com o método MT (magnetotelúrico de fonte natural) (Goldstein & Strangway, 1975). Para isto se tomou o modelo mostrado na figura (2.8)

As respostas são mostradas nas figuras (2.9) (2.10) para diferentes distâncias fonte-receptor ( $r$ ).

De posse de respostas confiáveis para os campos primários, o próximo passo é aplicá-los na formulação 2,5D para o cálculo dos campos nos modelos bidimensionais, que é o assunto do próximo capítulo.

Figura 2.8: modelo 1D estratificado

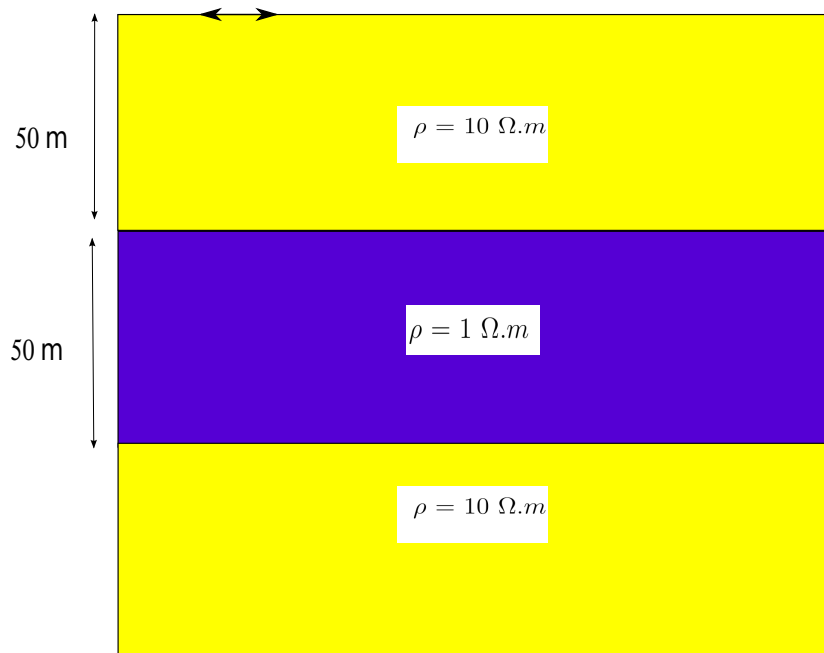


Figura 2.9: Comparação entre a resposta de resistividade aparente do método CSAMT com as do MT (magnetotelúrico), para um meio estratificado.

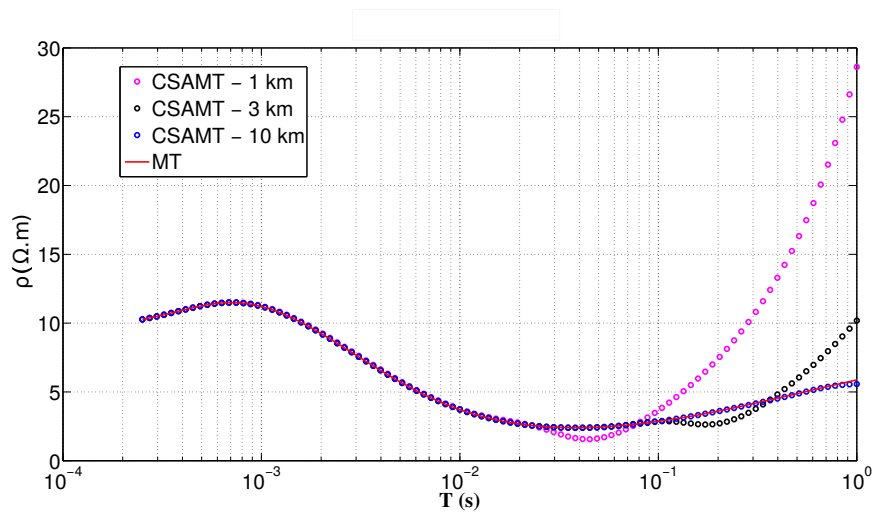
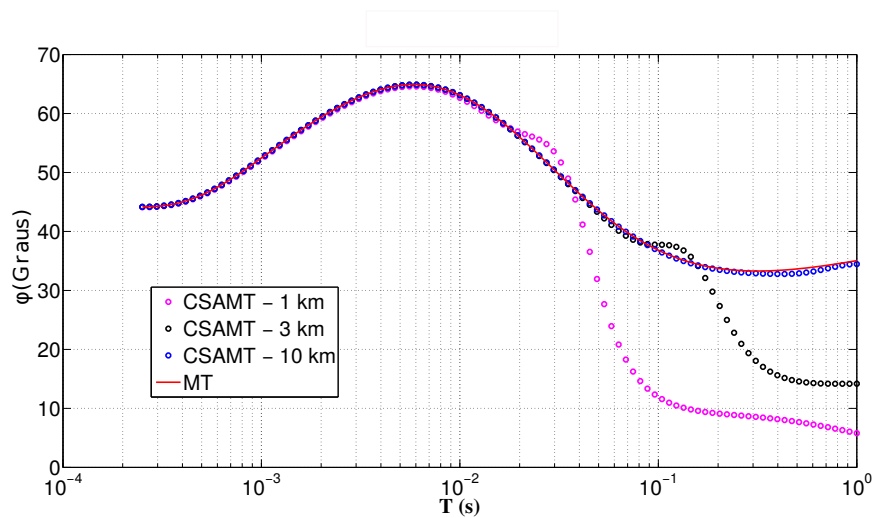


Figura 2.10: Comparação entre as respostas da fase do método CSAMT com as do MT (magnetotelúrico), para um meio estratificado.





### 3 MEIOS BIDIMENSIONAIS

Para a modelagem 2D do CSAMT consideramos que as propriedades físicas do meio não variam em uma determinada direção (direção do *strike*). Desta maneira, se possibilita a decomposição de um problema de natureza 3-D (emite sinal nas três direções) como é o caso do dipolo elétrico horizontal, em uma série de problemas 2D. Para isto usamos a transformada de Fourier, que simplifica todas as formulações das equações presentes.

Dentro do domínio espectral em relação à variável da direção do strike ( $y$ ), o problema é decomposto em uma sequência de problemas 2D que resolvemos aplicando o método dos elementos finitos.

#### 3.1 Elementos Finitos 2D

O método de elementos finitos é uma importante técnica usada para a aproximação de soluções de equações diferenciais parciais. É uma aplicação do método de Galerkin (método baseado no teorema das projeções), restrito a uma classe de funções bases bem específicas (Jin, 2014).

O método tem como fim determinar uma representação aproximada para o campo da variável  $u(x, z)$ , a qual está governada pela seguinte equação diferencial:

$$L(u(x, z)) = h(x, z). \quad (3.1)$$

Em um domínio  $\Omega$ , onde  $L$  é um operador diferencial e  $h(x, z)$  é uma função conhecida das variáveis independentes. A equação (3.1) deve ser complementada com as condições de contorno associadas a um problema dado. Então, a variável dependente pode ser aproximada para:

$$u_m = \sum_{i=1}^m \alpha_i \phi_i, \quad (3.2)$$

em que  $\phi$  são as funções de aproximação supostas,  $\alpha$  são parâmetros ou funções desconhecidas de uma das variáveis independentes e  $m$  é o número de incógnitas do sistema. Substituindo a solução aproximada  $u_m$  no problema original teremos:

$$L(u_m) + r = h(x, z) \quad (3.3)$$

Em (3.3)  $r$  é o chamado erro residual. Devemos impor que  $L(u_m)$  seja a projeção ortogonal de  $h(x, y)$  no subespaço que contém  $L(u_m)$ , por que queremos obter  $u_m$  tal que  $L(u_m)$

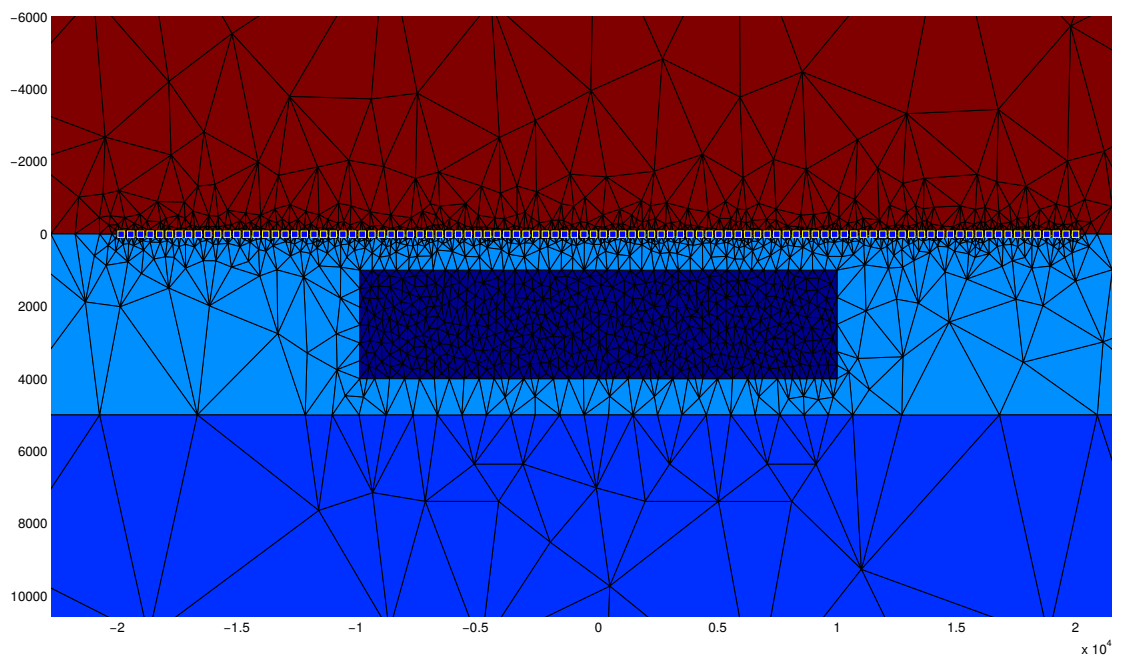
seja o mais próximo possível de  $h(x, z)$ , isto é

$$\sum_{j=1}^m \alpha \int_{\Omega} L(\phi_j) \omega_i d\Omega = \int_{\Omega} h(x, z) \omega_i d\Omega, \quad i = 1, \dots, m \quad (3.4)$$

Devido às diferentes possibilidades na seleção das funções peso que podem ser empregadas, existem diferentes critérios e métodos que se relacionam a estas funções. Por exemplo, método de colocação, subdomínio, mínimos quadrados, Galerkin, etc. Entre estes, o mais amplamente usado nas aplicações de elementos finitos é o método de Galerkin, que é o método que empregamos neste trabalho, no qual as funções de peso são as mesmas funções base. Para mais detalhes sobre o método de elementos finitos ver (Becker et al., 1981)

O método divide o domínio  $\Omega$  em um número finito de sub-regiões  $e$ , chamadas elementos, cujo comportamento se especifica mediante um número finito de parâmetros associados a certos pontos característicos denominados “nós” (figura 3.1). Estes nós são os

Figura 3.1: exemplo de uma malha 2D de elementos finitos



pontos de união da cada elemento com seus adjacentes. Neste trabalho só consideramos elementos de tipos triangulares. Se consideramos um elemento  $e$  qualquer, e supondo que a aproximação da função  $u(x, y)$ , dada para este elemento é linear

$$u^e(x, z) = \alpha + \beta x + \gamma z, \quad (3.5)$$

(3.5) representa o plano que passa pelos três nós, dos valores nodais  $(u_1^e, u_2^e, u_3^e)$  em  $\Omega_e$  formam um sistema de equações lineares que pode ser resolvido para as variáveis  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  cuja solução é:

$$\alpha = \frac{(u_1^e a_1 + u_2^e a_2 + u_3^e a_3)}{2\Delta^{(e)}}, \quad (3.6)$$

$$\beta = \frac{(u_1^e b_1 + u_2^e b_2 + u_3^e b_3)}{2\Delta^{(e)}}, \quad (3.7)$$

$$\gamma = \frac{(u_1^e c_1 + u_2^e c_2 + u_3^e c_3)}{2\Delta^{(e)}}, \quad (3.8)$$

onde  $\Delta^{(e)}$  representa a área do elemento e as variáveis  $a$ ,  $b$  e  $c$  são dadas por

$$\begin{aligned} a_1 &= x_2 z_3 - x_3 z_2, & b_1 &= z_2 - z_3, & c_1 &= x_3 - x_2, \\ a_2 &= x_3 z_1 - x_1 z_3, & b_2 &= z_3 - z_1, & c_2 &= x_1 - x_3, \\ a_3 &= x_1 z_2 - x_2 z_1, & b_3 &= z_1 - z_2, & c_3 &= x_2 - x_1. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Quando substituímos (3.6), (3.7) e (3.8) em (3.5) obtemos

$$u_e(x, y) = \Psi_1^{(e)} u_1^{(e)} + \Psi_2^{(e)} u_2^{(e)} + \Psi_3^{(e)} u_3^{(e)} \quad (3.10)$$

Sendo  $\Psi^{(e)}$  a função base é representada pela expressão a seguir:

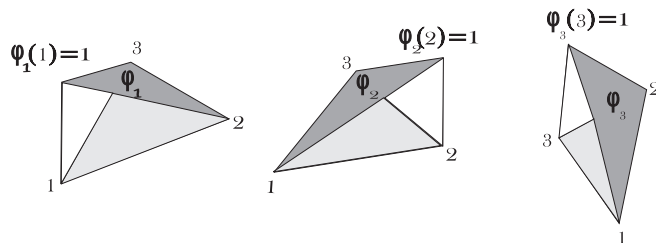
$$\Psi_i^{(e)} = \frac{a_i + b_i x + c_i z}{2\Delta^{(e)}} \quad i = 1, 2, 3. \quad (3.11)$$

Então, (3.10) pode ser escrita como uma combinação linear de (3.11)

$$u^e(x, z) = \sum_{i=1}^3 u_i^e \Psi_i \quad (3.12)$$

As características dos elementos estão descrita na figura (3.2).

Figura 3.2: Funções bases:  $\Psi_i = 1$  no nó  $i$  e 0 nos demais



As expressões serão calculadas considerando que as propriedades físicas ao longo da direção do *strike* são invariantes. No desenvolvimento que mostraremos a seguir será adotado o eixo cartesiano  $y$  como aquele que está paralelo à direção do *strike*, e a modelagem será realizada no plano  $xz$ , ainda que o código desenvolvido nesta dissertação tenha a vantagem de trabalhar com o *strike* tomado na direção  $y$  ou na  $x$  e a modelagem possa ser

realizada no plano  $xz$  ou no  $yz$ . Mais diante daremos detalhes sobre isto. Por enquanto nos limitaremos a trabalhar na primeira condição anteriormente mencionada.

Como já mencionamos anteriormente os campos totais vêm expressos pela somatória dos campos primários e secundários

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^p + \mathbf{E}^s, \quad (3.13)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}^p + \mathbf{H}^s. \quad (3.14)$$

Nas equações (3.13) e (3.14) os índices  $p$  e  $s$  fazem referência aos campos primários e secundários, respectivamente.

Substituindo as equações (2.5), (2.6), (3.13) e (3.14), junto com  $\sigma = \sigma^p + \Delta\sigma$  em (2.3) e (2.4), chegamos às equações

$$\nabla \times \mathbf{E}^s = -i\omega\mu\mathbf{H}^s, \quad (3.15)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}^s = \sigma\mathbf{E}^s + \Delta\sigma\mathbf{E}^p, \quad (3.16)$$

que são as expressões para o campo secundário. No qual  $\Delta\sigma$  é aquela devida ao contraste de condutividade entre a heterogeneidade e modelo primário.

Com ajuda da transformada de Fourier dada por

$$\hat{F}(x, k_y, z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y, z) e^{-ik_y y} dy, \quad (3.17)$$

e tomando as expressões para o campo secundário, dadas pelas equações (3.15) e (3.16), e expandindo os rotacionais em coordenadas cartesianas temos

$$ik_y \hat{E}_z^s - \frac{\partial}{\partial z} \hat{E}_y^s = -\zeta \hat{H}_x^s, \quad (3.18)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \hat{E}_x^s - \frac{\partial}{\partial x} \hat{E}_z^s = -\zeta \hat{H}_y^s, \quad (3.19)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \hat{E}_y^s - ik_y \hat{E}_x^s = -\zeta \hat{H}_z^s \quad (3.20)$$

e

$$ik_y \hat{H}_z^s - \frac{\partial}{\partial z} \hat{H}_y^s = \eta \hat{E}_x^s + \Delta\eta \hat{E}_x^p, \quad (3.21)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \hat{H}_x^s - \frac{\partial}{\partial x} \hat{H}_z^s = \eta \hat{E}_y^s + \Delta\eta \hat{E}_y^p \quad (3.22)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \hat{H}_y^s - ik_y \hat{H}_x^s = \eta \hat{E}_z^s + \Delta\eta \hat{E}_z^p, \quad (3.23)$$

em que  $k^2 = -\zeta\eta$  e  $u^2 = k_y^2 - k^2$ , representam o numero de onda e a constante de propagação da onda no domínio  $(x, k_y, z)$  respectivamente, no qual  $\eta = \sigma$ .

Das manipulações que resultaram das equações anteriores obtêm-se as expressões para as componentes dos campos secundários  $E_x^s, E_z^s, H_x^s, H_z^s$  dadas por

$$\hat{E}_x^s = -\frac{ik_y}{u^2} \frac{\partial}{\partial x} \hat{E}_y^s - \frac{\zeta}{u^2} \frac{\partial}{\partial z} \hat{H}_y^s - \frac{\zeta}{u^2} \Delta \eta \hat{E}_x^p, \quad (3.24)$$

$$\hat{E}_z^s = -\frac{ik_y}{u^2} \frac{\partial}{\partial z} \hat{E}_y^s + \frac{\zeta}{u^2} \frac{\partial}{\partial x} \hat{H}_y^s - \frac{\zeta}{u^2} \Delta \eta \hat{E}_z^p, \quad (3.25)$$

$$\hat{H}_x^s = \frac{\eta}{u^2} \frac{\partial}{\partial z} \hat{E}_y^s - \frac{ik_y}{u^2} \frac{\partial}{\partial x} \hat{H}_y^s + \frac{ik_y}{u^2} \Delta \eta \hat{E}_z^p, \quad (3.26)$$

$$\hat{H}_z^s = -\frac{\eta}{u^2} \frac{\partial}{\partial x} \hat{E}_y^s - \frac{ik_y}{u^2} \frac{\partial}{\partial z} \hat{H}_y^s - \frac{ik_y}{u^2} \Delta \eta \hat{E}_x^p. \quad (3.27)$$

fazendo algumas manipulações algébricas nas equações (3.24), (3.25), (3.26) e (3.27), e aplicando o critério de Galerkin, obteremos:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega^e} \nabla \cdot \left( \frac{\eta^e}{u^2} \nabla \hat{E}_y^s \right) \phi_i d\Omega^e - \int_{\Omega^e} \eta^e \hat{E}_y^s \phi_i d\Omega^e + \int_{\Omega^e} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{ik_y}{u^2} \frac{\partial \hat{H}_y^s}{\partial z} \right) \phi_i d\Omega^e \\ & - \int_{\Omega^e} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{ik_y}{u^2} \frac{\partial \hat{H}_y^s}{\partial x} \right) \phi_i d\Omega^e = - \int_{\Omega^e} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{ik_y}{u^2} \hat{J}_x^s \right) \phi_i d\Omega^e \\ & + \int_{\Omega^e} \hat{J}_y^s \phi_i d\Omega^e - \int_{\Omega^e} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{ik_y}{u^2} \hat{J}_z^s \right) \phi_i d\Omega^e \end{aligned} \quad (3.28)$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega^e} \nabla \cdot \left( \zeta^e \nabla \hat{H}_y^s \right) \phi_i d\Omega^e - \int_{\Omega^e} \zeta^e \hat{H}_y^s \phi_i d\Omega^e - \\ & \int_{\Omega^e} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{ik_y}{u^2} \frac{\partial \hat{E}_y^s}{\partial z} \right) \phi_i d\Omega^e - \int_{\Omega^e} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{ik_y}{u^2} \frac{\partial \hat{E}_y^s}{\partial x} \right) \phi_i d\Omega^e = \\ & - \int_{\Omega^e} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\zeta^e}{u^2} \hat{J}_x^s \right) \phi_i d\Omega^e + \int_{\Omega^e} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\zeta^e}{u^2} \hat{J}_z^s \right) \phi_i d\Omega^e \end{aligned} \quad (3.29)$$

Considerando as propriedades físicas constantes em  $\Omega^e$  e aplicando a identidade  $\alpha \nabla \cdot \mathbf{A} = \nabla \cdot (\alpha \mathbf{A}) - \nabla \alpha \cdot \mathbf{A}$ , nas primeiras integrais esquerda de (3.28) e (3.29), o teorema da divergência, o teorema de Green e fazendo as devidas manipulações, obtêm-se

$$\begin{aligned} & \frac{-\eta^e}{u_e^2} \int_{\Omega^e} \left[ \nabla \hat{E}_y^s \cdot \nabla \phi_i + u_e^2 \hat{E}_y^s \phi_i \right] d\Omega^e + \frac{ik_y}{u_e^2} \int_{\Omega^e} \left[ R \nabla \hat{H}_y^s \right] \cdot \nabla \phi_i d\Omega^e = \\ & \oint_{\partial \Omega^e} \left( -\frac{ik_y}{u_e^2} \frac{\partial \hat{H}_y^s}{\partial z} - \frac{\eta^e}{u_e^2} \frac{\partial \hat{E}_y^s}{\partial x} - \frac{ik_y}{u_e^2} \hat{J}_x^s \right) \phi_i n_x dl^e \\ & - \oint_{\partial \Omega^e} \left( -\frac{ik_y}{u_e^2} \frac{\partial \hat{H}_y^s}{\partial x} + \frac{\eta^e}{u_e^2} \frac{\partial \hat{E}_y^s}{\partial z} + \frac{ik_y}{u_e^2} \hat{J}_z^s \right) \phi_i n_z dl^e \\ & + \frac{ik_y}{u_e^2} \int_{\Omega^e} \hat{J}_t^s \cdot \nabla \phi_i d\Omega^e + \int_{\Omega^e} \hat{J}_y^s \phi_i d\Omega^e \end{aligned} \quad (3.30)$$

$$\begin{aligned}
& \frac{-\zeta^e}{u_e^2} \int_{\Omega^e} \left[ \nabla \hat{H}_y^s \cdot \nabla \phi_i + u_e^2 \hat{H}_y^s \phi_i \right] d\Omega_e - \frac{iky}{u_e^2} \int_{\Omega^e} \left[ R \nabla \hat{E}_y^s \right] \cdot \nabla \phi_i d\Omega^e = \\
& \oint_{\partial\Omega^e} \left( -\frac{\zeta^e}{u_e^2} \frac{\partial \hat{H}_y^s}{\partial x} + \frac{iky}{u_e^2} \frac{\partial \hat{E}_y^s}{\partial z} + \frac{\zeta^e}{u_e^2} \hat{J}_z^s \right) \phi_i n_x dl^e \\
& + \oint_{\partial\Omega^e} \left( -\frac{iky}{u_e^2} \frac{\partial \hat{E}_y^s}{\partial x} - \frac{\eta^e}{u_e^2} \frac{\partial \hat{H}_y^s}{\partial z} - \frac{\zeta^e}{u_e^2} \hat{J}_x^s \right) \phi_i n_z dl^e \\
& - \frac{\zeta^e}{u_e^2} \oint_{\Omega^e} \hat{J}^s \cdot [R \nabla \phi_i] d\Omega^e
\end{aligned} \tag{3.31}$$

Das duas equações acima e de (3.24), (3.25) e (3.26), (3.27) chega-se em

$$\begin{aligned}
& \frac{-\eta^e}{u_e^2} \int_{\Omega^e} \left[ \nabla \hat{E}_y^s \cdot \nabla \phi_i + u_e^2 \hat{E}_y^s \phi_i \right] d\Omega^e + \frac{iky}{u_e^2} \int_{\Omega^e} \left[ R \nabla \hat{H}_y^s \right] \cdot \nabla \phi_i d\Omega^e = \\
& \frac{iky}{u_e^2} \int_{\Omega^e} \hat{\mathbf{J}}_t^s \cdot \nabla \phi_i d\Omega^e + \int_{\Omega^e} \hat{J}_y^s \phi_i d\Omega^e - \oint_{\partial\Omega^e} \left[ R \hat{\mathbf{H}}_t^s \phi_i \right] \cdot \hat{n} d\Omega^e
\end{aligned} \tag{3.32}$$

e

$$\begin{aligned}
& \frac{-\zeta^e}{u_e^2} \int_{\Omega^e} \left[ \nabla \hat{H}_y^s \cdot \nabla \phi_i + u_e^2 \hat{H}_y^s \phi_i \right] d\Omega_e - \frac{iky}{u_e^2} \int_{\Omega^e} \left[ R \nabla \hat{E}_y^s \right] \cdot \nabla \phi_i d\Omega^e = \\
& - \frac{\zeta^e}{u_e^2} \int_{\Omega^e} \hat{\mathbf{J}}_t^s \cdot [R \nabla \phi_i] d\Omega^e + \oint_{\partial\Omega^e} \left[ R \hat{\mathbf{E}}_t^s \phi_i \right] \cdot \hat{n} d\Omega^e
\end{aligned} \tag{3.33}$$

Em que  $\mathbf{J}_t^s = (J_x^s, J_z^s)$  é a densidade de corrente secundária tangencial,  $R = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $\hat{\mathbf{E}}_t^s = (\hat{E}_x^s, \hat{E}_z^s)$ , é o campo elétrico secundário tangencial e  $\hat{\mathbf{H}}_t^s = (\hat{H}_x^s, \hat{H}_z^s)$  é o campo magnético secundário tangencial.

Na fronteira de cada elemento as contribuições das integrais de linha são canceladas, indicando que a continuidade dos campos devem ser calculada somente nas bordas do domínio da modelagem, na qual se considera as condições de contorno homogêneas de Dirichlet. Além disso, de acordo com (RIJO, 2005), as equações, (3.32) e (3.33), representam um sistema de equações dos campos acoplados  $\hat{E}_y^s$  e  $\hat{H}_y^s$  caracterizando os modos de propagação TE e TM, respectivamente.

Finalmente, escrevendo os campos secundários,  $\hat{E}_y^s$ ,  $\hat{H}_y^s$  e as componentes do campo primário  $\hat{\mathbf{E}}^P$  que definem  $\hat{\mathbf{J}}^s$ , como uma combinação linear das funções bases como definida anteriormente, ou seja,

$$\hat{E}_y^s = \sum_{j=1}^3 \hat{E}_{y_j}^s \phi_j \quad e \quad \hat{H}_y^s = \sum_{j=1}^3 \hat{H}_{y_j}^s \phi_j \tag{3.34}$$

$$\hat{E}_x^p = \sum_{j=1}^3 \hat{E}_{x_j}^p \phi_j, \quad \hat{E}_y^p = \sum_{j=1}^3 \hat{E}_{y_j}^p \phi_j \quad e \quad \hat{E}_z^p = \sum_{j=1}^3 \hat{E}_{z_j}^p \phi_j \quad (3.35)$$

e substituindo nas equações (3.32) e (3.33), obtêm-se

$$\begin{aligned} \frac{-\eta^e}{u_e^2} \sum_{j=1}^3 \int_{\Omega^e} [\nabla \phi_j \cdot \nabla \phi_i + u_e^2 \phi_j \phi_i] d\Omega_e \hat{E}_{y_j}^s + \frac{ik_y}{u_e^2} \sum_{j=1}^3 \int_{\Omega^e} [R \nabla \phi_j] \cdot \nabla \phi_i d\Omega_e \hat{H}_{y_j}^s = \\ \frac{ik_y \Delta \eta^e}{u_e^2} \sum_{j=1}^3 \int_{\Omega^e} \phi_j \frac{\partial \phi_i}{\partial x} d\Omega_e \hat{E}_{x_j}^p + \Delta \eta^e \sum_{j=1}^3 \int_{\Omega^e} \phi_j \phi_i d\Omega_e \hat{E}_{y_j}^p \\ + \frac{ik_y \Delta \eta^e}{u_e^2} \sum_{j=1}^3 \int_{\partial \Omega^e} \phi_j \frac{\partial \phi_i}{\partial z} d\Omega_e \hat{E}_{z_j}^p \end{aligned} \quad (3.36)$$

e

$$\begin{aligned} \frac{-\zeta^e}{u_e^2} \sum_{j=1}^3 \int_{\Omega^e} [\nabla \phi_j \cdot \nabla \phi_i + u_e^2 \phi_j \phi_i] d\Omega_e \hat{H}_{y_j}^s - \frac{ik_y}{u_e^2} \sum_{j=1}^3 \int_{\Omega^e} [R \nabla \phi_j] \cdot \nabla \phi_i d\Omega_e \hat{E}_{y_j}^s = \\ \frac{\zeta^e \Delta \eta^e}{u_e^2} \sum_{j=1}^3 \int_{\Omega^e} \phi_j \frac{\partial \phi_i}{\partial z} d\Omega_e \hat{E}_{x_j}^p - \frac{\zeta^e \Delta \eta^e}{u_e^2} \sum_{j=1}^3 \int_{\partial \Omega^e} \phi_j \frac{\partial \phi_i}{\partial x} d\Omega_e \hat{E}_{z_j}^p \end{aligned} \quad (3.37)$$

Utilizando a identidade para a integração de polinômios em triângulos (Jin (2014)),

$$\int_{\Omega^e} \phi_1^\alpha \phi_2^\beta \phi_3^\gamma dx dz = 2A \frac{\alpha! \beta \gamma!}{(\alpha + \beta + \gamma + 2)!} \quad (3.38)$$

Têm-se que:

$$\int_{\Omega^e} \nabla \phi_j \cdot \nabla \phi_i d\Omega_e = \frac{1}{4A} (b_j b_i + c_j c_i) \quad (3.39)$$

$$\int_{\Omega^e} \phi_j \phi_i d\Omega_e = \begin{cases} \frac{A}{6} & \text{se } i = j \\ \frac{A}{12} & \text{se } i \neq j \end{cases} \quad (3.40)$$

$$\int_{\Omega^e} [R \nabla \phi_j] \cdot \nabla \phi_i d\Omega_e = \frac{1}{4A} (b_j c_i - b_i c_j) \quad (3.41)$$

$$\int_{\Omega^e} \phi_j \frac{\partial \phi_i}{\partial x} d\Omega^e = \frac{b_i}{6} \quad (3.42)$$

$$\int_{\Omega^e} \phi_j \frac{\partial \phi_i}{\partial z} d\Omega^e = \frac{c_i}{6} \quad (3.43)$$

Para  $i, j = 1, 2$  e  $3$ , chega-se as seguintes representações matriciais para as integrais das equações (3.36) e (3.37)

$$K_e^{TE} = -\frac{\eta^e}{4Au_e^2} \begin{bmatrix} b_1^2 + c_1^2 & b_2b_1 + c_2c_1 & b_3b_1 + c_3c_1 \\ b_1b_2 + c_1c_2 & b_2^2 + c_2^2 & b_3b_2 + c_3c_2 \\ b_1b_3 + c_1c_3 & b_2b_3 + c_2c_3 & b_3^2 + c_3^2 \end{bmatrix} + \frac{\eta_e^2 A}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (3.44)$$

$$K_e^{ACTE} = \frac{ik_y}{4Au_e^2} \begin{bmatrix} b_1c_1 - b_1c_1 & b_2c_1 - b_1c_2 & b_3c_1 - b_1c_3 \\ b_1c_2 - b_2c_1 & b_2c_2 - b_2c_2 & b_3c_2 - b_2c_3 \\ b_1c_3 - b_3c_1 & b_2c_3 - b_3c_2 & b_3c_3 - b_3c_3 \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

$$F_e^{TE} = \frac{ik_y \Delta \eta^e}{6u_e^2} \left[ (b_1, b_2, b_3) \begin{pmatrix} \hat{E}_{x_1}^p \\ \hat{E}_{x_2}^p \\ \hat{E}_{x_3}^p \end{pmatrix} + (c_1, c_2, c_3) \begin{pmatrix} \hat{E}_{z_1}^p \\ \hat{E}_{z_2}^p \\ \hat{E}_{z_3}^p \end{pmatrix} \right] + \quad (3.46)$$

$$\frac{\Delta \eta^e A}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{E}_{z_1}^p \\ \hat{E}_{z_2}^p \\ \hat{E}_{z_3}^p \end{bmatrix}$$

$$K_e^{TM} = -\frac{\zeta^e}{4Au_e^2} \begin{bmatrix} b_1^2 + c_1^2 & b_2b_1 + c_2c_1 & b_3b_1 + c_3c_1 \\ b_1b_2 + c_1c_2 & b_2^2 + c_2^2 & b_3b_2 + c_3c_2 \\ b_1b_3 + c_1c_3 & b_2b_3 + c_2c_3 & b_3^2 + c_3^2 \end{bmatrix} + \frac{\zeta^e A}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (3.47)$$

$$K_e^{ACTE} = -K_e^{ACTM} \quad (3.48)$$

e



$$F_e^{TM} = \frac{\zeta^e \Delta \eta^e}{6u_e^2} \left[ (c_1, c_2, c_3) \begin{pmatrix} \hat{E}_{x_1}^p \\ \hat{E}_{x_2}^p \\ \hat{E}_{x_3}^p \end{pmatrix} - (b_1, b_2, b_3) \begin{pmatrix} \hat{E}_{z_1}^p \\ \hat{E}_{z_2}^p \\ \hat{E}_{z_3}^p \end{pmatrix} \right] \quad (3.49)$$

Escrevendo os vetores, solução local, fonte local e matriz local como em (Silva (2012b)), assim como a montagem da matriz global, têm-se

$$\left[ \hat{E}_{y_1}^s \quad \hat{H}_{y_1}^s \quad \hat{E}_{y_2}^s \quad \hat{H}_{y_2}^s \quad \hat{E}_{y_3}^s \quad \hat{H}_{y_3}^s \right]^t \quad (3.50)$$

$$F_e = \left[ F_1^{TE} \quad F_1^{TM} \quad F_2^{TE} \quad F_2^{TM} \quad F_3^{TE} \quad F_3^{TM} \right]^t \quad (3.51)$$

e

$$K_e = \begin{bmatrix} K_{11}^{TE} & K_{11}^{ACTE} & K_{12}^{TE} & K_{12}^{ACTE} & K_{13}^{TE} & K_{13}^{ACTE} \\ -K_{11}^{ACTE} & K_{11}^{TM} & -K_{12}^{ACTE} & K_{12}^{TM} & -K_{13}^{ACTE} & K_{13}^{TM} \\ K_{21}^{TE} & K_{21}^{ACTE} & K_{22}^{TE} & K_{22}^{ACTE} & K_{23}^{TE} & K_{23}^{ACTE} \\ -K_{21}^{ACTE} & K_{21}^{TM} & -K_{22}^{ACTE} & K_{22}^{TM} & -K_{23}^{ACTE} & K_{23}^{TM} \\ K_{31}^{TE} & K_{31}^{ACTE} & K_{32}^{TE} & K_{32}^{ACTE} & K_{33}^{TE} & K_{33}^{ACTE} \\ -K_{31}^{ACTE} & K_{31}^{TM} & -K_{32}^{ACTE} & K_{32}^{TM} & -K_{33}^{ACTE} & K_{33}^{TM} \end{bmatrix} \quad (3.52)$$

A construção das matrizes e vetores locais e globais  $K_e, F_e$  e  $K_g, F_g$ , respetivamente são descritas com mais detalhes em (Meunier, 2010).

Podemos expressar este sistema matricial local em um único sistema linear global, dado por

$$G_g c = f_g. \quad (3.53)$$

Na equação (3.53)  $G_g$  é chamada matriz global,  $f_g$  representa o vetor fonte e  $c$  é o vetor solução do sistema associada aos campos secundários  $\hat{E}_y^s$  e  $\hat{H}_y^s$ .

A solução encontrada pelo método de elementos finitos nos dá as respostas dos campos secundários  $\hat{E}_y^s$  e  $\hat{H}_y^s$  no domínio espectral  $(x, k_y, z)$ . A partir desta podem ser determinados  $\hat{E}_x^s, \hat{E}_z^s, \hat{H}_x^s$  e  $\hat{H}_z^s$ , por meio da derivada numérica. Finalmente aplica-se a transformada

inversa de Fourier cosseno ou seno, para assim obter todos os campos no domínio espacial  $(x, y, z)$ .

Seguindo o mesmo raciocínio de Silva (2012a), pode ser concluído que para obter as componentes  $E_x^s$ ,  $E_z^s$ ,  $H_y^s$  no domínio espacial  $(x, y, z)$  para um dipolo elétrico que se encontra na direção  $X$  é necessário aplicar a transformada inversa de Fourier cosseno, devido a sua paridade, e para as componentes  $E_y^s$ ,  $H_x^s$ ,  $H_z^s$  a transformada inversa de Fourier seno.

É necessário aclarar que a paridade destas funções depende do eixo escolhido para orientação da direção do dipolo. Em nosso caso, para o método CSAMT o dipolo encontra-se na direção  $Y$ , então a paridade das funções se invertem, ou seja, cosseno para  $E_y^s$ ,  $H_x^s$ ,  $H_z^s$  e seno para  $E_x^s$ ,  $E_z^s$ ,  $H_y^s$ .

## 3.2 Testes de validação 2.5D

### 3.2.1 DIPOLO NA DIREÇÃO $Y$

Para validar o código desenvolvido neste trabalho para o CSAMT 2.5-D, podemos fazer uma comparação entre as respostas do código 1-D com a resposta 2.5-D. Para isto escolhemos o modelo estratificado descrito na figura (3.3), no qual a camada mais condutiva do modelo 1D, se toma como uma heterogeneidade presente no modelo 2D com extensão lateral infinita. Nestas condições os campos totais para o modelo 1D e 2.5D têm que ser muito próximos. As figuras (3.4), (3.5) e (3.6) mostram os comportamentos dos campos  $E_x$ ,  $E_y$  e  $E_z$  para esta configuração, na qual a heterogeneidade tem uma extensão lateral infinita. Os comportamentos destes campos são os esperados o que indica uma coerência nas respostas, fazendo uma primeira validação dos resultados obtidos por nosso código.

Figura 3.3: Modelo estratificado usado para validação do código para uma frequência  $f = 5Hz$

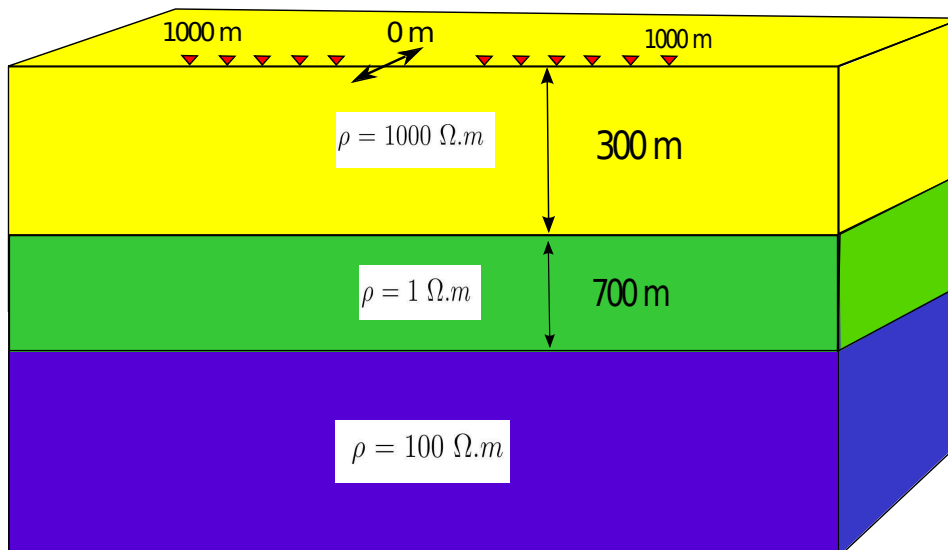


Figura 3.4: Campo elétrico  $E_x$  versus distância fonte-receptor. O gráfico mostra uma comparação das respostas semi-analíticas do modelo 1D com modelo 2.5D para validação do código, para a frequência  $f = 5Hz$ .

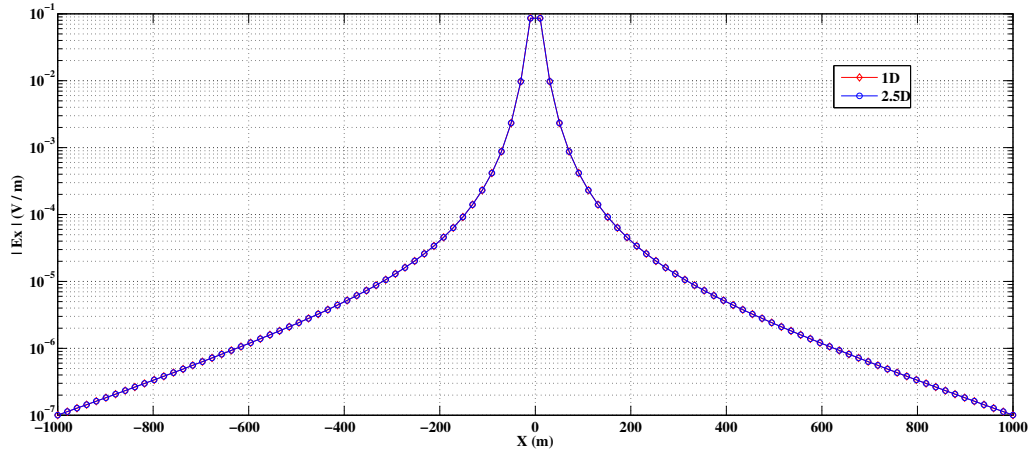


Figura 3.5: Campo elétrico  $E_y$  versus distância fonte-receptor. O gráfico mostra uma comparação do modelo 1D com modelo 2.5D para validação do código, para a frequência  $f = 5Hz$ .

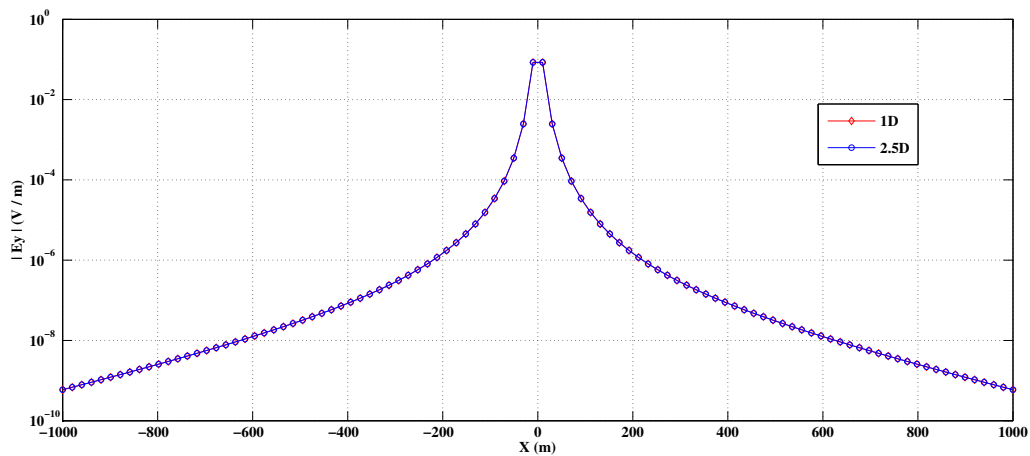
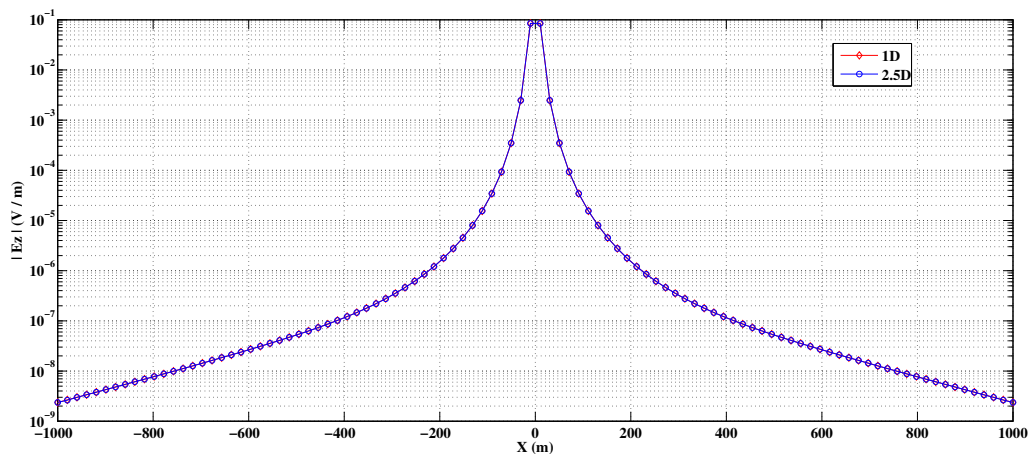


Figura 3.6: Campo elétrico  $E_z$  versus distância fonte-receptor. O gráfico mostra uma comparação do modelo 1D com modelo 2.5D para validação do código para uma frequência  $f = 5Hz$ .



### 3.2.2 DIPOLO NA DIREÇÃO $X$

Como um segundo teste de validação, fizemos uma comparação da resposta obtida por Abubakar et al. (2006) para o método eletromagnético de fonte controlada marinho (MCSEM) e a gerada por nosso código, para uma linha de medidas na mesma direção do dipolo fonte. O modelo apresenta uma camada (mar) com resistividade  $0.33 \Omega \cdot m$  e  $1000m$  de espessura, limitada por dois semi-espaço. O semi-espaço superior foi modelado com resistividade de  $10^{12} \Omega \cdot m$  e o semi-espaço inferior com  $1 \Omega \cdot m$ , no qual se encontra um corpo resistivo de  $100 \Omega \cdot m$  e  $100m$  de espessura, que representa um reservatório de hidrocarbonetos. O dipolo está a  $950 m$  de profundidade em direção perpendicular ao *strike* como podemos ver na figura (3.7).

A resposta obtida para o campo elétrico  $E_x$  é mostrada na figura (3.8), e coincide completamente com a dada por Abubakar et al. (2006), tendo desta forma uma segunda validação para o código 2,5D desenvolvido.

Figura 3.7: Modelo 2D usado para calcular a resposta de um levantamento MCSEM na frequência de  $f = 0,635 \text{ Hz}$ . Fonte: Abubakar et al. (2006).

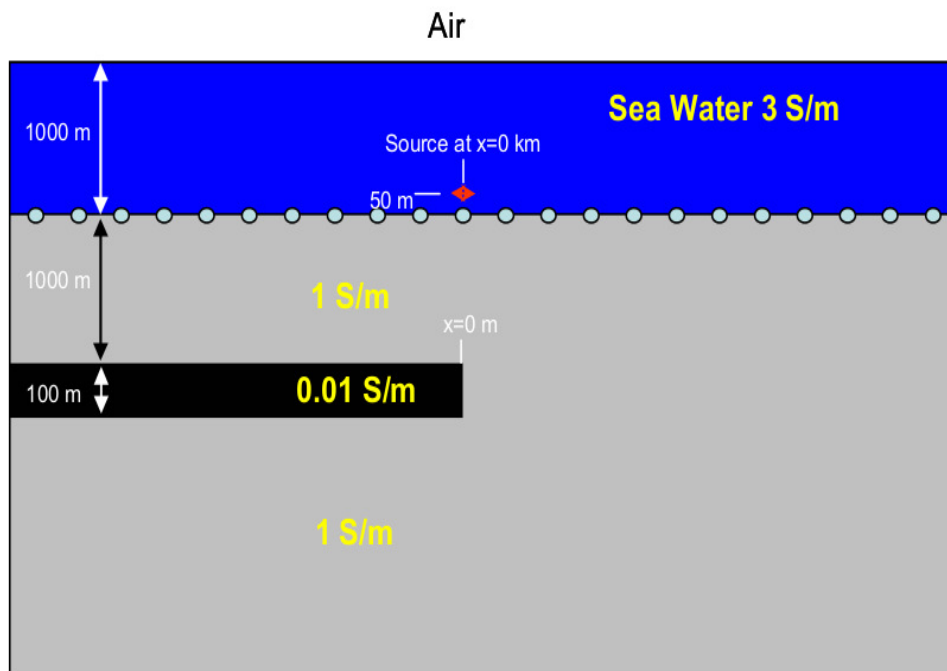
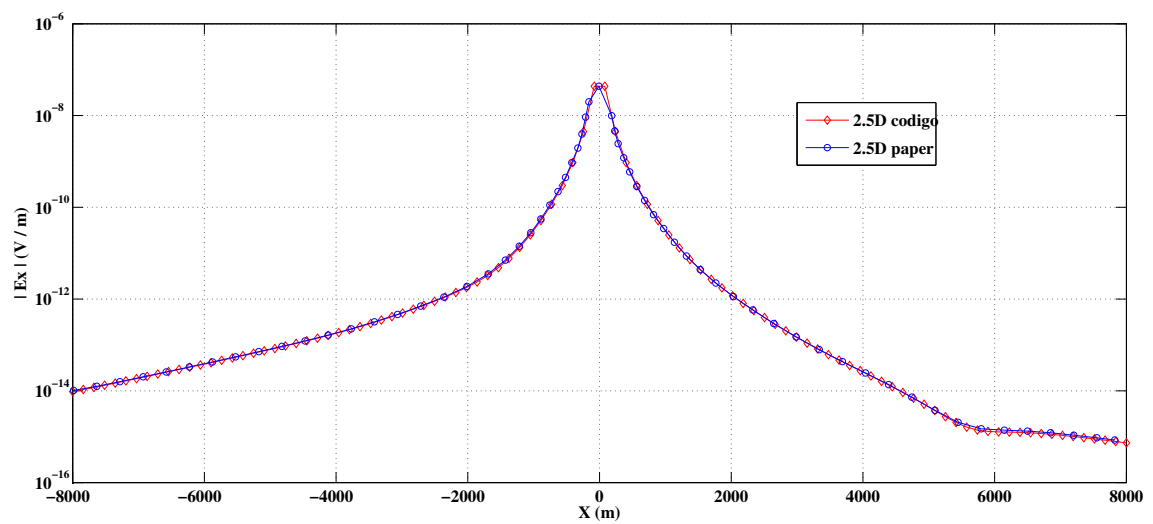


Figura 3.8: Comparação da resposta para uma configuração MCSEM gerada por nosso código (linha vermelha), com a resposta mostrada por Abubakar et al. (2006) (linha azul).



## 4 ANÁLISE DE MODELOS 2D

Para explorar o código de modelagem desenvolvido, vamos estudar o comportamento das respostas do método CSAMT em diferentes configurações para um corpo isolado variando parâmetros como, profundidade do corpo, contraste de resistividade entre o corpo e o meio e frequência de fonte. Tudo isto permitiu fazer uma análise das respostas, em termos do campo elétrico e da resistividade aparente, de um corpo isolado e da influência que tem a variação destes parâmetros sobre a detectabilidade do corpo.

### 4.1 Variação no contraste de resistividade e na profundidade de um corpo isolado.

Em nossa primeira investigação faremos uma observação da variação do contraste de resistividade entre uma heterogeneidade e um semi-espaco de  $100 \Omega \cdot m$ , como ilustram as figuras (4.1) e (4.4) este corpo tem  $100m$  de espessura,  $3000m$  de extensão lateral e seu centro se encontra localizado a  $16500m$  da fonte. Os receptores estão distribuídos desde  $10000m$  a  $20500m$ .

Apresentam-se os comportamentos da resistividade aparente obtida a partir dos campos  $E_x$  e  $H_y$  que são as respostas geradas por nosso código 2.5D, em cada ponto de medida, para uma frequência de  $0.1Hz$  e  $1Hz$ .

Para o primeiro estudo se tomaram profundidades do topo do corpo a  $1000m$ ,  $700m$  e  $300m$ , e resistividades de  $1 \Omega \cdot m$ ,  $10 \Omega \cdot m$ ,  $30 \Omega \cdot m$  para o corpo, e  $100 \Omega \cdot m$  para o meio. Os parametros do modelo e as respostas para a cada frequência são mostradas nas figuras (4.1), (4.2) e (4.3).

Fica evidente nas figuras (4.2c) e (4.3c) o comportamento esperado de maior influência do corpo mais raso, sendo esta influência ainda maior para a frequência de  $1Hz$  como se pode ver na figura (4.3c).

Figura 4.1: Modelo para investigação na variação de profundidade e contraste entre o meio homogêneo e um corpo condutivo para uma frequência de  $f = 0.1Hz$  e  $f = 1Hz$

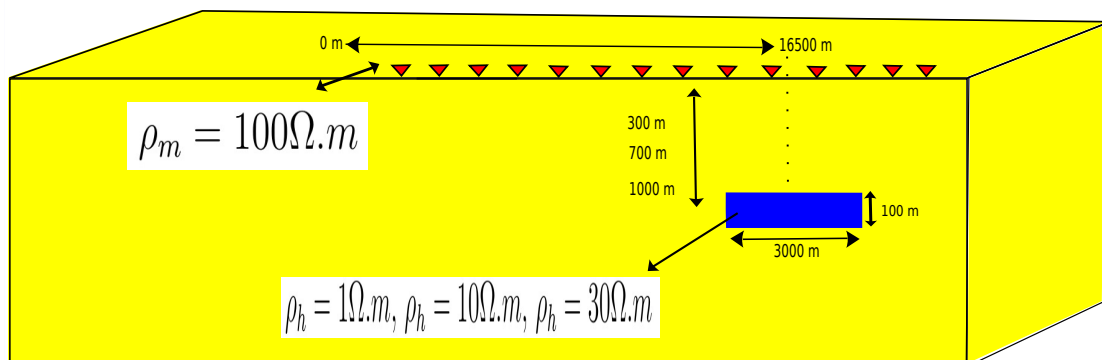
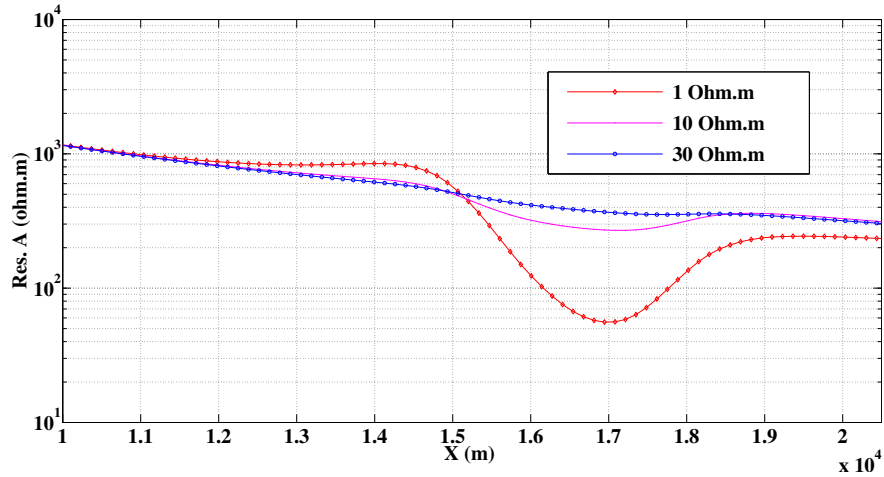
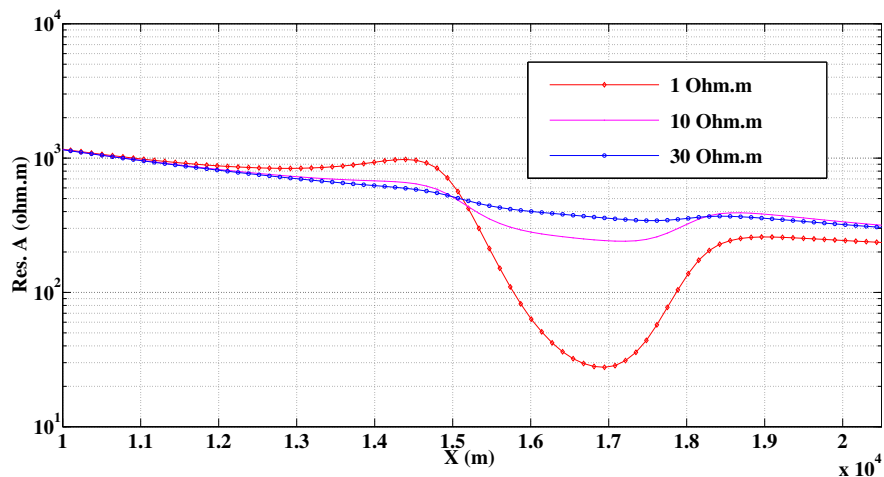


Figura 4.2: Gráficos de resistividade aparente versus distância para diferentes resistividades, para o corpo ( $1 \Omega.m$ ,  $10 \Omega.m$ ,  $30 \Omega.m$ ), e  $100 \Omega.m$  para o meio, e 3 profundidades diferentes do corpo e uma frequência de  $0,1Hz$ .

(a) Profundidade do bloco: 1000 m.



(b) Profundidade do bloco: 700 m.



(c) Profundidade do bloco: 300 m.

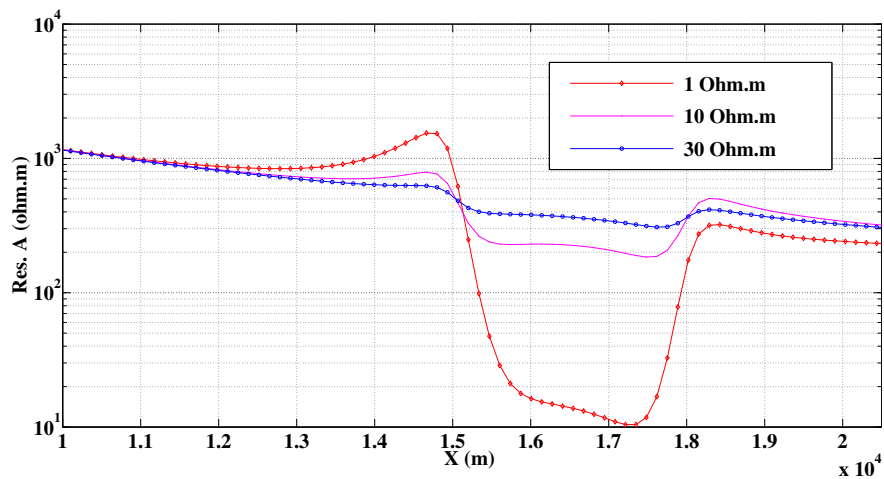
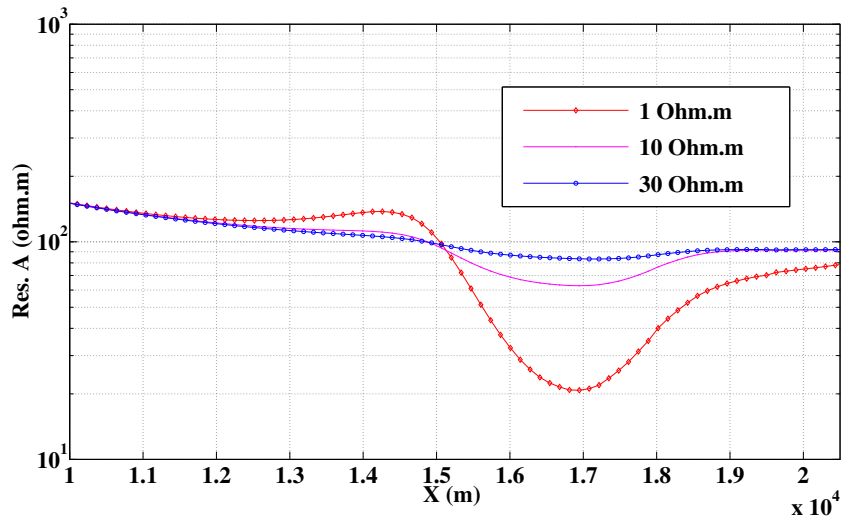
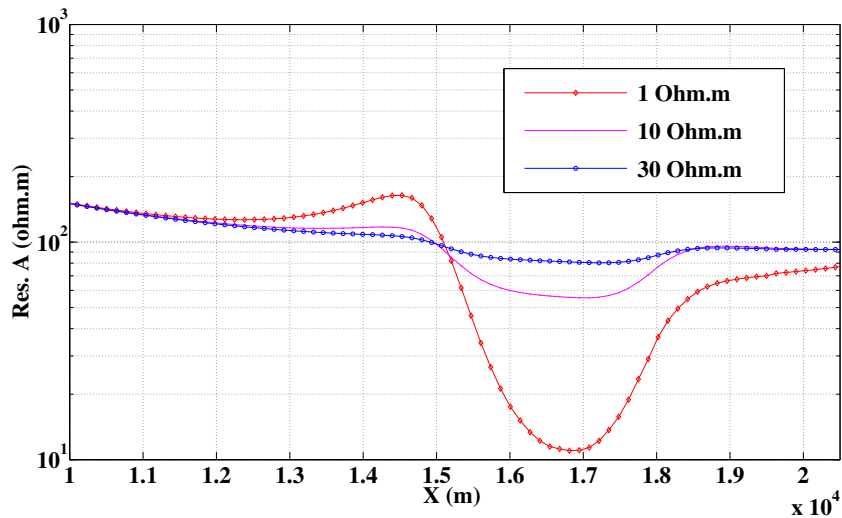


Figura 4.3: Graficos de resistividade aparente versus distância para diferentes resistividades, para o corpo ( $1 \Omega.m$ ,  $10 \Omega.m$ ,  $30 \Omega.m$ ), e  $100 \Omega.m$  para o meio, e 3 profundidades diferentes do corpo e uma frequência de  $1Hz$ .

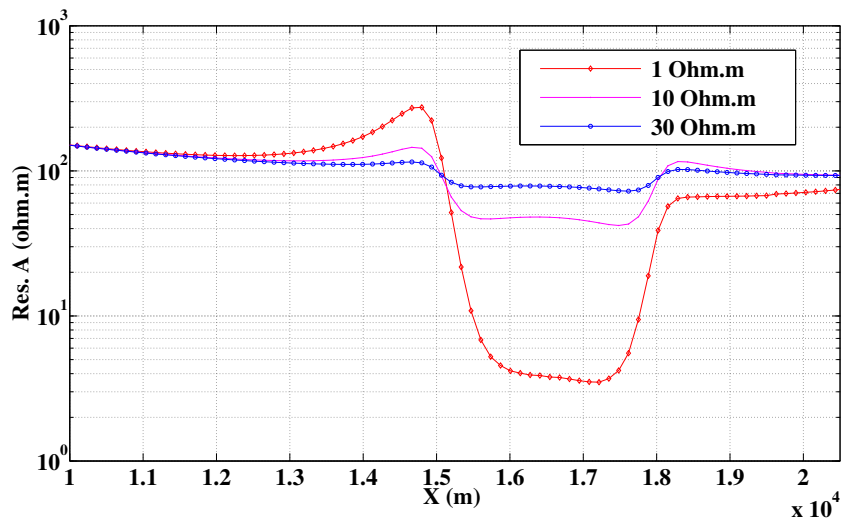
(a) Profundidade do bloco: 1000 m.



(b) Profundidade do bloco: 700 m.



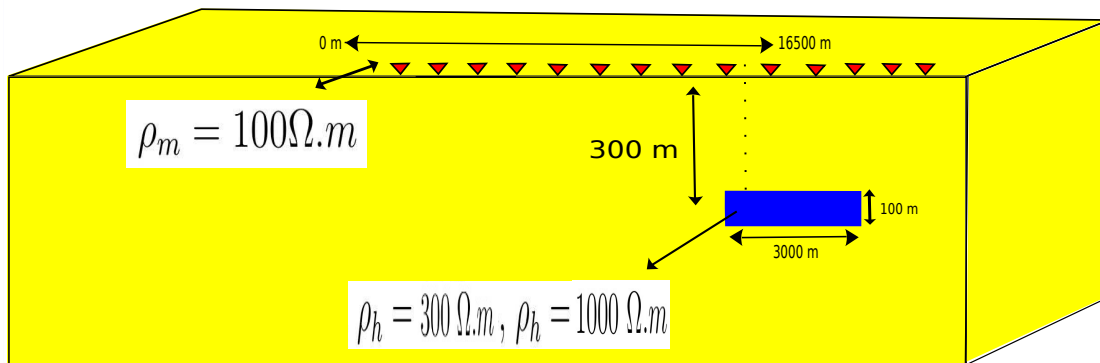
(c) Profundidade do bloco: 300 m.





Por outro lado um fator importante que se deve levar em consideração é a influência que tem na resposta a profundidade do corpo para a mesma frequência. Como podemos apreciar nas figuras (4.2) e (4.3) à medida que o corpo se aproxima da superfície o valor da resistividade aparente relacionada ao corpo chega a um valor mais próximo ao valor da resistividade verdadeira deste. Por outro lado, também se vê uma clara influência das bordas do corpo na resposta para um contraste de resistividade mais elevado.

Figura 4.4: Modelo para investigação na variação de profundidade e contraste entre o meio homogêneo e um corpo resistivo para uma frequência de  $f = 0.1Hz$  e  $f = 1Hz$



Para o segundo estudo tomou-se uma profundidade para o topo do corpo de  $300m$ , já que, como se viu anteriormente, com esta se consegue obter uma melhor resposta relacionada à resistividade aparente. Se tomaram valores de resistividades de  $300 \Omega \cdot m$  e  $1000 \Omega \cdot m$  para o corpo, e  $100 \Omega \cdot m$  para o meio encaixante. Os parâmetros do modelo e as respostas para cada frequência são mostradas nas figuras (4.4), (4.5) e (4.6).

Tanto na figura (4.5) como na figura (4.6) se vê que as respostas para os diferentes contrastes de resistividades não apresentam uma diferença significativa, além disso o valor de resistividade aparente relacionada à zona onde se encontra o corpo é muito baixo comparado com a resistividade real deste.

Por outro lado como se pode ver na figura (4.6) observa-se novamente uma melhor resposta na resistividade aparente para a frequência de  $1Hz$ .

Figura 4.5: Gráfico de resistividade aparente versus distância para diferentes resistividades, para o corpo ( $300 \Omega.m$ ,  $1000 \Omega.m$ ), e  $100 \Omega.m$  para o meio, para uma profundidade do corpo de  $300m$  e uma frequência de  $0,1Hz$ .

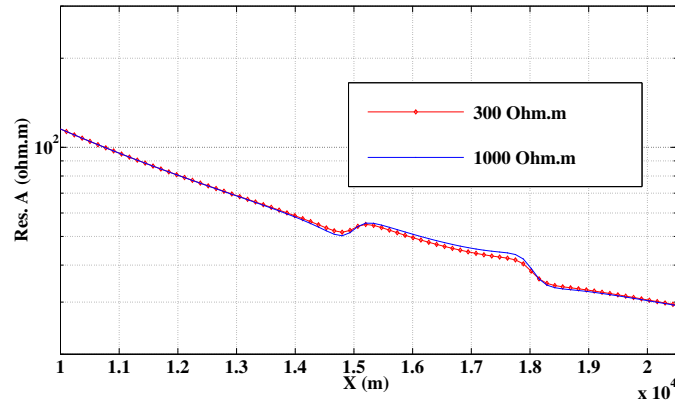
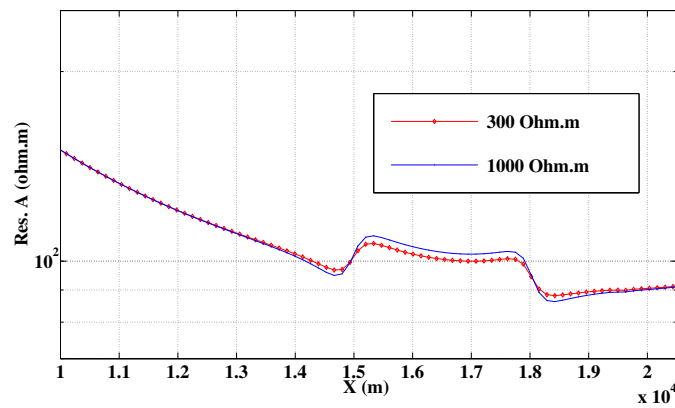


Figura 4.6: Gráfico de resistividade aparente versus distância para diferentes resistividades, para o corpo ( $300 \Omega.m$ ,  $1000 \Omega.m$ ), e  $100 \Omega.m$  para o meio, para uma profundidade do corpo de  $300m$  e uma frequência de  $1Hz$ .



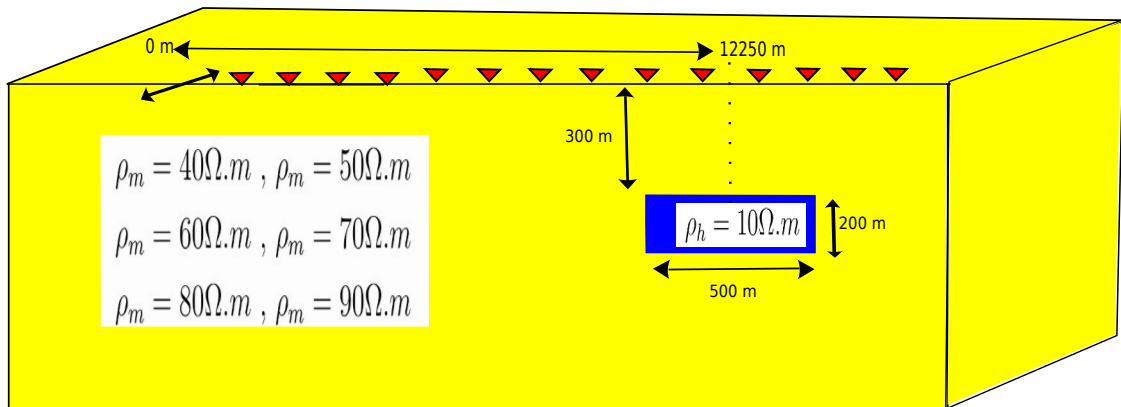
## 4.2 Análise do campo elétrico em um modelo de um corpo isolado

Por meio do modelo mostrado na figura (4.7) estudaremos a visualização de um corpo condutivo imerso num meio homogêneo resistivo. Nesta figura o corpo de  $10\Omega\cdot m$  esta inserido num meio que pode apresentar uma resistividade variando de  $40\Omega\cdot m$  a  $90\Omega\cdot m$ , em pasos de  $10\Omega\cdot m$ , dependendo do modelo estudado. Isto se fez com o fim de analisar a influência que tem o contraste de resistividade entre o meio e o corpo nas bordas desta heterogeneidade, para uma mesma profundidade.

Para isto estudamos o comportamento da amplitude campo elétrico  $E_x$  numa faixa de frequências entre  $0,1Hz$  e  $1000Hz$  dentro da configuração mostrada na figura (4.7), no qual as observações vão de  $5000m$  a  $15000m$  de distância do dipolo.

Nesta configuração o corpo esta a profundidade de  $300m$  da superfície, tem uma espesura de  $200m$  com uma extensão lateral de  $500m$  e centro localizado a  $12250m$  da fonte.

Figura 4.7: Modelo para investigação do contraste entre o meio homogêneo e um corpo condutivo para uma faixa de frequência entre  $0.1Hz$  e  $1000Hz$ .



Nas figuras (4.8),(4.9),(4.10), (4.11), (4.12), (4.13) consegue-se visualizar facilmente uma anomalia localizada entre  $12.100 m$  e  $12.600 m$  aproximadamente, a qual é completamente coerente com o modelo estudado, em termos de resolução lateral. Evidentemente a detecção da anomalia dependerá da configuração tomada e envolve parâmetros como profundidade e tamanho do corpo, distância da fonte e obviamente o contraste de resistividade entre a heterogeneidade e o meio.

Por outro lado fazendo uma comparação entre estas figuras nota-se que à medida que aumenta o contraste de resistividade entre o corpo e o meio se vê um aumento na amplitude do campo correspondente à zona onde se encontra a heterogeneidade, o qual era de se esperar devido que se tem uma menor atenuação na amplitude do campo elétrico relacionada ao meio quando este é mais resistivo. Esta possibilidade de distinguir corpos isolados será de suma importância quando se pretenda fazer inversão de dados electro-magnéticos (Silva, 2012b) relacionados a nosso método, o que finalmente será o objetivo

Figura 4.8:  $E_x$  para  $\rho_{meio} = 40\Omega.m$

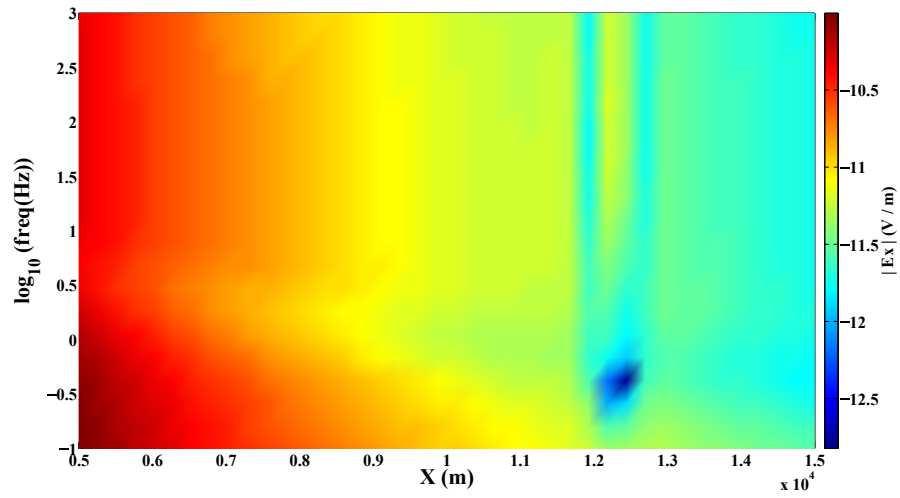


Figura 4.9:  $E_x$  para  $\rho_{meio} = 50\Omega.m$

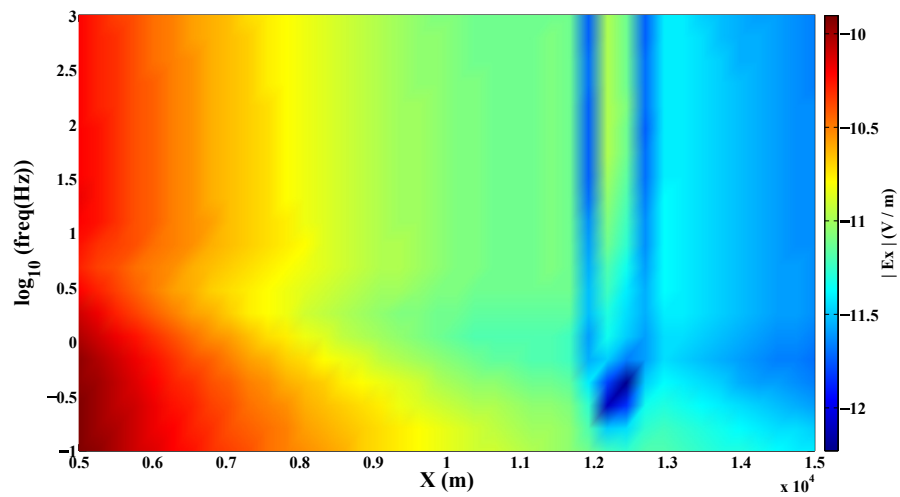


Figura 4.10:  $E_x$  para  $\rho_{meio} = 60\Omega.m$

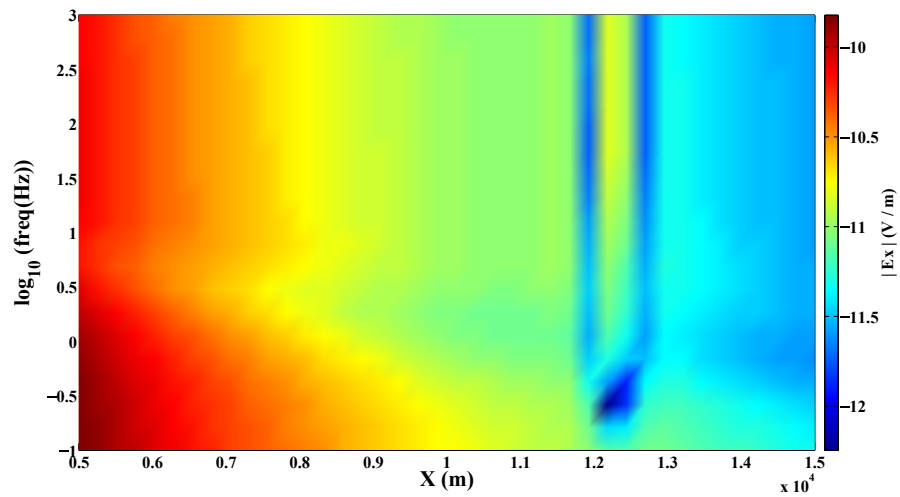


Figura 4.11:  $E_x$  para  $\rho_{meio} = 70\Omega.m$

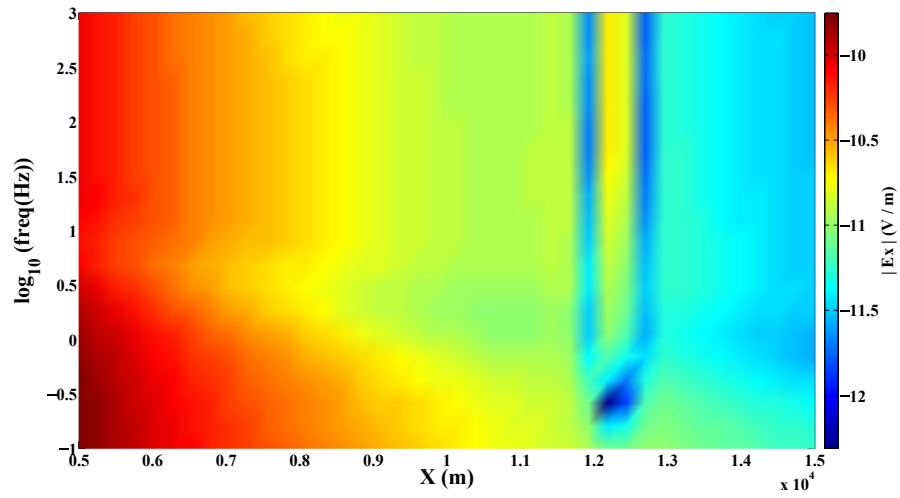


Figura 4.12:  $E_x$  para  $\rho_{meio} = 80\Omega.m$

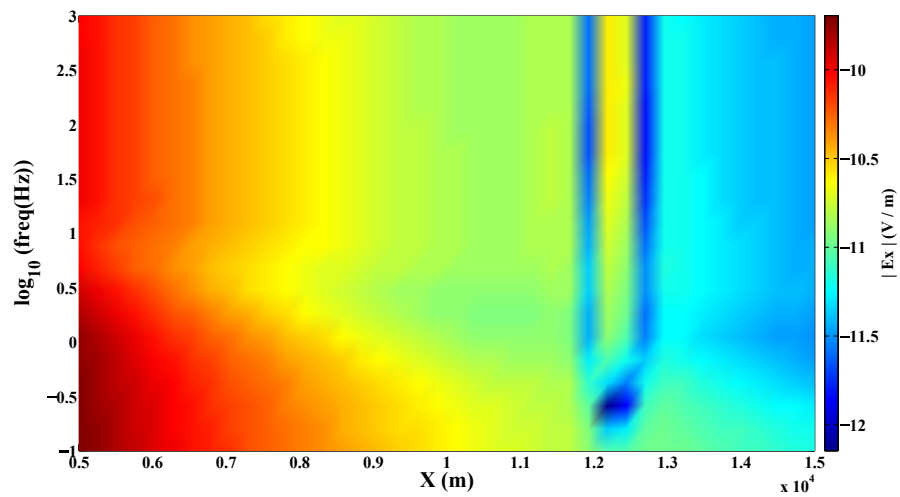
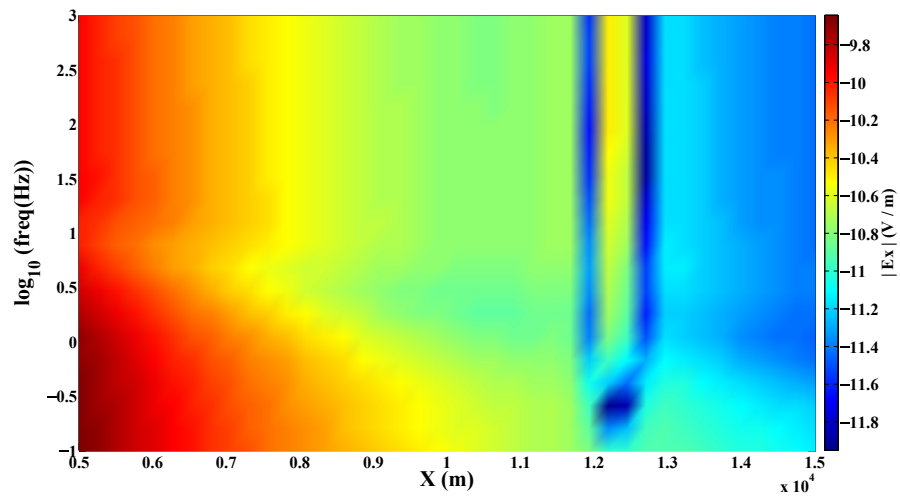


Figura 4.13:  $E_x$  para  $\rho_{meio} = 90\Omega.m$



de estudo em futuras etapas de nossa investigação.

Também é importante notar o efeito que tem o aumento do contraste sobre as zonas relacionadas às bordas do corpo. Pode-se ver que a influência do corpo condutivo se faz sentir a partir de uma frequência de pouco menos de 1 Hz até a frequência máxima empregada, que foi de 1 kHz.

## 5 CONCLUSÕES

Nesta dissertação fez-se uma modelagem numérica do método CSAMT num ambiente bidimensional, utilizando o método numérico de elementos finitos numa formulação 2,5D. A formulação teórica usada foi construída a partir da separação do campo electromagnético de uma fonte dipolar num meio 2D, em primário e secundário. Usando transformadas de Fourier obtivemos equações diferenciais parciais que governam o comportamento dos campos num meio bidimensional.

As soluções dadas pela técnica de elementos finitos foram obtidas no domínio  $(x, k_y, z)$ , a resposta final é levada ao domínio espacial usando a transformada inversa de Fourier. Para a implementação numérica das integrais foi usada a técnica de filtros digitais, conforme descrita em Almeida (2002). Nesta implementação, das 61 abscissas presentes no filtro, só foram necessárias entre 21 e 27 (dependendo da configuração do modelo), devido a que a contribuição na resposta para as abscissas restantes era praticamente nula. Para a solução do sistema de equações lineares construído para cada valor da variável espectral no domínio de Fourier foi usado o pacote PARDISO, que aproveita os múltiplos núcleos dos processadores atuais numa implementação em paralelo. O tipo de malha que se usou foi não estruturada, a qual tem grande flexibilidade para gerar estruturas complexas.

Apresentamos diferentes exemplos de modelos relacionados a dados CSAMT para meios 1D e 2D nos quais se estudaram respostas de campos, resistividade aparente e fase, variando parâmetros tais como contrastes de resistividade entre em meio e o corpo, frequência de trabalho, profundidade na qual se encontra o corpo e distância fonte-receptor.

Obteve-se uma resposta coerente na validação do campo primário 1D para uma transformada dupla de Fourier tanto para um meio homogêneo como um meio estratificado. Para isto se fez uma comparação entre resposta analítica dada por Wait (1951) e Bannister (1966), e a obtida por nosso código gerado para um meio homogêneo, e uma comparação entre o método TM e o resultado dado por este mesmo código para um meio estratificado. Isto se analisou para diferentes distâncias  $r$  ( fonte - receptor), com o qual se pôde ver a influência deste parâmetro com a condição de onda plana, na qual se baseia toda a formulação apresentada.

Apresentou-se um estudo de um corpo isolado inserido num meio que apresenta uma resistividade de  $100\Omega.m$  para duas diferentes frequências uma de 0,1 Hz e outra de 1 Hz. Foi estudada a influência que tem diferentes parâmetros como contraste de resistividade e profundidade do corpo, sobre a resposta de resistividade aparente associada ao modelo.

Observou-se que em modelos onde o corpo é mais condutivo do que o meio se obtém uma melhor resposta de resistividade aparente relacionada ao meio para profundidades mais rasas. Também se nota uma clara influência das bordas do corpo na intensidade das

respostas. Por outro lado para corpos resistivos a resistividade aparente relacionada à zona onde se encontra o corpo foi muito baixa comparada com a resistividade real deste.

Também se fez um estudo relacionado à detectabilidade do corpo isolado. Para isto se usou uma faixa de frequências entre 1 Hz e 1000 Hz. Em um estudo como este, é possível identificar em que posições o corpo anômalo pode ser detectado pelos dados em cada configuração de levantamento. Por outro lado também se analisou o comportamento do campo elétrico à medida que se varia a resistividade do meio onde um corpo de  $10\Omega\cdot\text{m}$  se encontra inserido. Neste vimos, ainda que levemente, um aumento na amplitude do campo electromagnético à medida que aumenta o contraste de resistividade entre o corpo e o meio, o que é completamente coerente, já que para valores de resistividade mas altos associados ao meio, o campo sofrerá menos atenuação.

O objetivo geral proposto para este trabalho foi completamente desenvolvido. O código para a modelagem 2,5D de dados CSAMT se mostrou eficaz e eficiente.

Como recomendações para trabalhos posteriores citamos trabalhar com meios anisotrópicos, estruturas mas complexas e finalmente implementar um bom algoritmo de inversão para o método CSAMT 2,5D.



## REFERÊNCIAS

- Abubakar, A., Habashy, T., Druskin, V., Knizhnerman, L., Alumbaugh, D. & Zerilli, A. (2006) Two-and-half-dimensional forward and inverse modeling for marine csem problems: Presented at the 76th annual international meeting.
- Almeida, F.L. (2002) *Filtros otimizados para as transformadas seno, co-seno e de Hankel  $J_0$ ,  $J_1$  e  $J_2$* . Dissertação de mestrado, Centro de Geociências, Universidade Federal do Pará.
- Bannister, P.R. (1966) Quasi-static fields of dipole antennas at the earth's surface. *Radio Science*, **1**(11), 1321–1332.
- Becker, E.B., Carey, G.F. & Oden, J.T. (1981) Finite elements, an introduction: Volume i. ., 258, 1981.
- Goldstein, M. & Strangway, D. (1975) Audio-frequency magnetotellurics with a grounded electric dipole source. *Geophysics*, **40**(4), 669–683.
- Hellsborn, H. (2009) *A note on electromagnetic field theory and 1D Modeling of synthetic CSAMT data*. Institutionen för Geovetenskaper.
- Hughes, L.J. & Carlson, N.R. (1987) Structure mapping at Trap Spring Oilfield, Nevada, using controlled-source magnetotellurics. *First Break*, **5**(11).
- Hughes, L. (1984) Final report on CSAMT survey at Trap Spring field, Nye county, Nevada: an evaluation of CSAMT for Great basin petroleum exploration, Zonge Engineering & Research Organization. *Inc., Tucson, Arizona*.
- Jin, J.M. (2014) *The finite element method in electromagnetics*. John Wiley & Sons.
- Key, K. (2012) Is the fast hankel transform faster than quadrature? *Geophysics*, **77**(3), F21–F30.
- Kong, F. (2007) Hankel transform filters for dipole antenna radiation in a conductive medium. *Geophysical Prospecting*, **55**(1), 83–89, doi:10.1111/j.1365-2478.2006.00585.x.
- Meunier, G. (2010) *The finite element method for electromagnetic modeling*, vol. 33. John Wiley & Sons.
- Mohammad, I.H., Srigutomo, W., Sutarno, D. & Sumintadiredja, P. (2013) Interpretation of 1d vector controlled-source audio-magnetotelluric (csamt) data using full solution modeling. *Journal of Mathematical and Fundamental Sciences*, **45**(2), 172–188.

- Mohammad, I.H., Srigutomo, W., Sutarno, D. & Sumintadireja, P. (2012) The modeling of 2d controlled source audio magnetotelluric (csamt) responses using finite element method. *Journal of Electromagnetic Analysis and Applications*, **4**(07), 293.
- Sandberg, S.K. & Hohmann, G.W. (1982) Controlled-source audiomagnetotellurics in geothermal exploration. *Geophysics*, **47**(1), 100–116.
- Silva, H.F. (2012a) *modelagem numerica de dados MCSEM 2.5D*. Dissertação de mestrado, Centro de Geociências, Universidade Federal do Pará.
- Silva, V.D.S.E. (2012b) *Modelagem 2.5D dos campos usados no método eletromagnético a multi-frequência - EMMF*. Tese de Doutorado, Centro de Geociências, Universidade Federal do Pará.
- Wait, J.R. (1951) The magnetic dipole over the horizontally stratified earth. *Canadian Journal of Physics*, **29**(6), 577–592.
- Wannamaker, P.E. (1997) Tensor CSAMT survey over the sulphur springs thermal area, valles Caldera, New Mexico, United States of America, part i: Implications for structure of the western caldera. *Geophysics*, **62**(2), 451–465.
- Ward, S.H. & Hohmann, G.W. (1988) *Electromagnetic theory for geophysical applications*, Society of Exploration Geophysicists, SEG, vol. 1, cap. 4. 131–311.
- Yamashita, M., Hallof, P. & Pelton, W. (1985) Csamt case histories with a mhi-channel csamt system and discussion of near-firld data correction. Relat. téc., Phoenix Geophysics, Ltd.
- Zonge, K.L. & Hughes (1991) Electromagnetic methods in applied geophysics. *Electromagnetic methods in applied geophysics*, **2**, 713–809.