



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM GEOFÍSICA

WILLIAM PARESCHI SOARES

EXEMPLO DE BOM CONDICIONAMENTO INCONVENIENTE
CAUSADO NUMERICAMENTE NA INVERSÃO GRAVIMÉTRICA
PARA A ESTIMAÇÃO DAS DENSIDADES DE UMA CAMADA.

**Belém - Pará
2014**

WILLIAM PARESCHI SOARES

**EXEMPLO DE BOM CONDICIONAMENTO INCONVENIENTE
CAUSADO NUMERICAMENTE NA INVERSÃO GRAVIMÉTRICA
PARA A ESTIMAÇÃO DAS DENSIDADES DE UMA CAMADA.**

Dissertação de Mestrado apresentada
ao Programa de Pós Graduação em
Geofísica do Instituto de Geociências
da Universidade Federal do Pará, para
obtenção do grau de Mestre em
Geofísica.

Área de concentração: Geofísica

Orientador: Cristiano Mendel Martins.

**Belém – Pará
2014**

Dados Internacionais de Catalogação de Publicação (CIP)
Biblioteca do Instituto de Geociências/UFPA

Soares, William Pareschi, 1984-

Exemplo de bom condicionamento inconveniente causado numericamente na inversão gravimétrica para a estimação das densidades de uma camada / William Pareschi Soares. – 2014.

48 f. : il. ; 30 cm

Inclui bibliografias

Orientador: Cristiano Mendel Martins

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Pará, Instituto de Geociências, Programa de Pós-Graduação em Geofísica, Belém, 2014.

1. Geofísica. 2. Inversão (Geofísica). 3. Gravidade (Física) – Medição.
I. Título.

CDD 22. ed. 550

William Pareschi Soares

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM GEOFÍSICA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA OBTENÇÃO DE GRAU EM MESTRE EM GEOFÍSICA

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós Graduação em Geofísica do Instituto de Geociências da Universidade Federal do Pará, para obtenção do grau de Mestre em Geofísica.

Aprovado por:

Banca Examinadora:



Prof. Cristiano Mendel Martins - orientador
Doutor em Geofísica
Universidade Federal do Pará



Prof. João Batista Correa da Silva
Doutor em Geofísica
Universidade Federal do Pará



Profa. Valéria Cristina Ferreira Barbosa
Doutora em Geofísica
Observatório Nacional do Rio de Janeiro

A Deus,
À minha esposa Aline,
Ao meu filho,
Aos meus pais.

AGRADECIMENTOS

Acredito que não existem trabalhos ou pesquisas, em que o pesquisador, ou aluno, não tenha deixado de participar de alguns momentos com a família ou amigos. Esse trabalho tem um pouco do carinho, da paciência, da participação e da torcida, direta ou indiretamente, de parentes e amigos. Assim, agradeço a algumas pessoas que de alguma forma participaram dessa jornada.

À minha esposa Aline, pelo amor, carinho, dedicação, apoio, confiança e companheirismo doados durante nossa vida.

Ao meu filho Wallace pela felicidade impressa na minha vida.

Aos meus pais pelo investimento, incentivo e confiança em meus estudos.

Ao professor Cristiano pela oportunidade, orientação, aprendizagem, paciência e amizade durante o período em que trabalhamos juntos.

Aos amigos do programa pelos bons momentos de estudo.

RESUMO

Um bom condicionamento da matriz sensibilidade pode ser inconveniente para a estimação das densidades de uma camada? Constatamos um exemplo dessa inconveniência causado numericamente na inversão gravimétrica quando as dimensões horizontais das fontes elementares que compõem o modelo interpretativo são muito pequenas. Surpreendentemente neste caso a inversão gravimétrica para a obtenção da camada equivalente não é efetiva, e não ajusta os dados. Verificamos que neste caso o bom condicionamento da matriz sensibilidade ocorre simultaneamente com baixos valores singulares desta matriz. Esta característica da matriz sensibilidade acarreta em severa perda da resolução e leva a estimativas tendenciosas e muito suaves. Ocorre que parte da resolução que seria matematicamente possível de ser obtida é perdida devido a este fenômeno numérico computacional de degradação da matriz sensibilidade. Apresentamos um procedimento de restituição desta resolução para o mapeamento da distribuição de densidade de uma camada, que possibilita novas perspectivas em aplicações de gravimetria, inclusive para estudos ambientais. Contornamos o problema numérico com uma abordagem semi-heurística que estende as dimensões horizontais das fontes elementares, e posteriormente, corrige as estimativas. Obtivemos com este novo procedimento em testes sintéticos a distribuição do contraste de densidade que delineia contatos laterais entre regiões de diferentes contrastes de densidades, que só seriam possíveis de se recuperar com fontes elementares de dimensões maiores. Aplicamos esta metodologia ao conjunto de dados do aterro Thomas Farm Landfill Site.

Palavras-chave: Geofísica, inversão, gravidade.

ABSTRACT

A well-conditioned sensitivity matrix can be inconvenient for estimating densities of a layer? We found an example of this inconvenience numerically caused in the gravimetric inversion when the horizontal dimensions of the elementary sources that make up the interpretive model are very small. Amazingly in this case a gravity inversion to obtain the equivalent layer is not effective and does not fit the data. We found that in this case the well-conditioning of the sensitivity matrix occurs simultaneously with low singular values. This feature of the sensitivity matrix leads to severe loss of resolution and leads to biased estimates and very smooth. It happens that part of the resolution would be mathematically possible to be obtained is lost due to this phenomenon numerical computational degradation of the sensitivity matrix . We present a procedure for repayment of the resolution for mapping the density distribution of a layer, which enables new perspectives on gravimetric applications, including environmental studies. We skirted the numerical problem with a semi-heuristic approach which extends the horizontal dimensions of the elementary sources and subsequently corrects the estimates. We obtained with this new procedure in synthetic tests the distribution of the density contrast outlining lateral contacts between regions of different density contrasts, which would only be possible to recover elemental sources larger. We apply this methodology to the dataset of the Thomas Farm landfill site landfill.

Keywords: Geophysics, inversion, gravity.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1-	Modelo interpretativo sem extensão – <i>Parte inferior</i> – Pacote de detritos discretizado por uma malha $m_x \times m_y$ de M prismas 3D, de dimensões horizontais dx e dy , justapostos ao longo das direções x e y , respectivamente; <i>Parte superior</i> – Malha regularmente espaçada com as posições das observações; <i>Detalhe a direta</i> – Contribuição gravimétrica do j -ésimo prisma na observação g_i posicionada sobre o centro do j -ésimo prisma	15
Figura 2-	Modelo Interpretativo estendido para o procedimento de inversão.	19
Figura 3-	Mapa de contorno (parte superior) e vista em perspectiva (parte inferior) do relevo verdadeiro do aterro simulado.	22
Figura 4-	Mapa da distribuição do contraste de densidade para o aterro simulado.	23
Figura 5-	Distribuição de massa verdadeira do modelo simulado.	24
Figura 6-	Anomalia gravimétrica contaminada com ruído produzida pelo aterro de lixo simulado (Figuras 3 e 4)	25
Figura 7-	Mapa da distribuição do contraste de densidade estimado via inversão linear sem extensão e sem regularização (equação 4).	26
Figura 8-	Anomalia gravimétrica ajustada via inversão linear sem extensão e sem regularização.	26
Figura 9-	Mapa da distribuição do contraste de densidade estimado via inversão linear regularizada sem extensão com parâmetro de regularização $\mu = 10^{-5}$.	27
Figura 10-	Anomalia gravimétrica ajustada via inversão linear regularizada sem extensão com parâmetro de regularização $\mu = 10^{-5}$.	28
Figura 11-	Mapa da distribuição do contraste de densidade estimada via inversão linear regularizada sem extensão, com parâmetro de regularização $\mu = 10^{-6}$, para modelo irreal de grande dimensão horizontal.	29
Figura 12-	Anomalia gravimétrica ajustada via inversão linear regularizada sem extensão, com parâmetro de regularização $\mu = 10^{-6}$, para modelo irreal de grande dimensão horizontal.	30
Figura 13-	Mapa da distribuição do contraste de densidade estimado via inversão estendida com parâmetro de regularização $\mu = 10^{-7}$ e fator de extensão $c = 100$.	31
Figura 14-	Anomalia gravimétrica ajustada pela inversão estendida com parâmetro de regularização $\mu = 10^{-7}$ e fator de extensão $c = 100$.	32

Figura 15-	(a) Mapa do resíduo entre a anomalia gravimétrica verdadeira e ajustada com inversão estendida; (b) Histogramas dos resíduos entre a anomalia gravimétrica verdadeira e ajustada.	32
Figura 16-	Distribuição de massa calculada utilizando a estimativa do contraste de densidade obtida com a inversão estendida (Figura 13).	33
Figura 17-	(a) Valores singulares da matriz A para: inversão sem extensão $dx = dy = 5$ m; inversão sem extensão $dx = dy = 500$ m; inversão estendida com $c = 100$; (b) Auto valores da matriz $A^T A$ para: inversão sem extensão $dx = dy = 5$ m; inversão das observações gravimétricas produzidas por um aterro simulado irreal com grandes dimensões horizontais; inversão estendida com $c = 100$, sendo $dx=dy=5$ m.	35
Figura 18-	Comparação entre os valores da 416ª linha da matriz A e os da 416ª linha da matriz $A^T A$.	36
Figura 19-	Mapa de contorno da superfície topográfica do topo de parte do aterro sanitário Thomas Farm Landfill Site, Indiana, USA, após sua instalação.	40
Figura 20-	Mapa da profundidade do embasamento de parte do aterro Thomas Farm Landfill Site, Indiana, USA.	41
Figura 21-	Vista em perspectiva do relevo da base do aterro.	41
Figura 22-	Vista em perspectiva do relevo do topo sobreposto ao relevo da base do aterro.	42
Figura 23-	Mapa da anomalia gravimétrica residual de parte do aterro Thomas Farm Landfill Site, Indiana, USA.	42
Figura 24-	Anomalia Gravimétrica calculada com contraste de densidade constante e igual à -0.53g/cm^3 .	43
Figura 25-	Mapa da distribuição do contraste de densidade estimado com a inversão estendida.	44
Figura 26-	Mapas das anomalias gravimétricas ajustadas com a inversão estendida, utilizando o parâmetro de regularização μ igual à 10^{-7} e fator de extensão igual à 100.	45
Figura 27-	(a) Mapa da distribuição do resíduo entre a anomalia gravimétrica observada e a ajustada com a inversão estendida; (b) Histograma da distribuição do resíduo entre a anomalia gravimétrica observada e a anomalia gravimétrica ajustada com a inversão estendida.	46
Figura 28-	Mapa da distribuição de massa obtido com o contraste de densidade estimado (Figura 24) com a inversão estendida.	47

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	11
2 METODOLOGIA	14
2.1 Problema direto	14
2.2 Problema inverso	16
2.3 Imprecisão numérica: caracterização	17
2.4 Imprecisão numérica: solução	18
2.5 Distribuição de massa	19
3 RESULTADOS	21
3.1 Aplicação a dados sintéticos	21
3.2 Aplicação a dados reais	39
4 CONCLUSÃO	48
REFERÊNCIAS	49

1 INTRODUÇÃO

A inversão gravimétrica linear pode ser aplicada com o objetivo de estimar a distribuição de densidade em subsuperfície, o relevo do embasamento de bacias sedimentares ou a forma de corpos intrusivos. Em todos estes casos, as estimativas são obtidas via inversão a partir dos dados gravimétricos e informações adicionais conhecidas a priori. Particularmente, a estimação da distribuição do contraste de densidade de uma camada é um problema reconhecidamente efetivo, tanto que a estimativa de uma camada equivalente é largamente utilizada para a representação do campo e para a obtenção do campo transformado no domínio do espaço (MENDONÇA, 1985; LEAO, 1989). No entanto, um problema numérico é introduzido nesta estimação se as dimensões horizontais das fontes elementares que compõem a camada discretizada são muito pequenas. Neste caso a inversão gravimétrica resulta em estimativa suavizada e com valores distantes do verdadeiro, a ponto de não ajustar os dados. Para análise deste problema verificamos o condicionamento da matriz sensibilidade e constatamos que neste caso em que as fontes elementares têm dimensões horizontais pequenas há bom condicionamento, causado pelo maior valor dos elementos da diagonal desta matriz em relação aos demais elementos. Constatamos também que, no entanto, este bom condicionamento da matriz sensibilidade é inoportuno uma vez que por outro lado é acompanhado de valores singulares muito pequenos. Estes valores singulares pequenos na matriz sensibilidade também são numericamente causados por que as dimensões horizontais das fontes elementares são pequenas. Como abordado por Bott (1972), se os valores singulares da matriz sensibilidade são pequenos (ANDERSEN, 1969) conseqüentemente as estimativas são tendenciosas e muito suaves. Portanto o bom condicionamento da matriz sensibilidade acompanhado de simultâneos valores singulares pequenos desavisadamente acarreta em estimação equivocada, suavizada e tendenciosa. Verificamos também que esta condição da matriz sensibilidade leva a uma severa perda de resolução, e que a introdução de regularização não é suficiente para a efetiva estimação da distribuição dos contrastes de densidade.

Quanto à resolução, diferentes autores tratam de diferentes aspectos. Backus e Gilbert (1968; 1970), estudando a unicidade de problemas inversos mostraram o importante compromisso entre resolução e estabilidade da solução (GREEN, 1975). Mesmo fazendo uso do método de regularização (TIKHONOV ; ARSENIN, 1977) para a obtenção de soluções únicas e estáveis em problemas gravimétricos inversos, a falta

de resolução pode ser inevitável. Segundo Silva et al. (2010) é preciso distinguir entre "resolução verdadeira" e "resolução demandada". A primeira é a menor distância entre duas fontes geológica, ou pontos na distribuição da propriedade física, na qual estas fontes podem ser distinguidas pelos dados geofísicos, enquanto que resolução demandada é a resolução que o geofísico espera obter dos dados. Note que a informação a priori introduzida pelo funcional regularizador (regularização de TIKHONOV) bem como o peso atribuído numericamente a regularização (valor atribuído ao parâmetro de regularização de TIKHONOV) não são capazes de simultaneamente aumentar a resolução verdadeira e manter a estabilidade. Presumindo-se uma determinada função regularizadora e um determinado peso para esta função podemos obter uma solução única e estável. Porém, um peso pequeno atribuído à função regularizadora aumenta a resolução demandada, mas também aumenta substancialmente a instabilidade da solução estimada. Por outro lado, um peso grande atribuído à função regularizadora estabiliza a solução, mas reduz a resolução demandada. A instabilidade aparece quando a resolução demandada torna-se maior que a resolução verdadeira o que pode ser interpretado como uma tentativa de se extrair mais informações dos dados do que é fisicamente possível. Portanto a sintonia de um valor para o parâmetro de regularização pode levar na melhor das hipóteses apenas à máxima resolução fisicamente possível de ser extraída, que pode ou não ser suficiente para atender a demanda do geofísico.

Ocorre portanto que parte da resolução que é fisicamente possível de ser recuperada é perdida devido ao fenômeno numérico computacional que degrada a matriz sensibilidade. Reestabelecemos os valores de resolução possíveis de serem recuperados contornamos o problema numérico da matriz sensibilidade com uma abordagem semi-heurística que consiste de duas etapas. Primeiro, estendemos as dimensões horizontais do modelo interpretativo utilizado na inversão gravimétrica para estimar provisoriamente os parâmetros, assim não há degradação da matriz sensibilidade. Estendemos também a malha das estações gravimétricas. Como o volume das fontes do modelo interpretativo foram exageradas, as densidades são subestimadas. Em seguida, corrigimos estes valores subestimados utilizando o desajuste com a anomalia gravimétrica observada.

Esta metodologia foi aplicada a dados sintéticos e reais para estimar a distribuição do contraste de densidade de um aterro de detritos com topografia de topo e de base conhecidas. Em testes controlados, simulamos um aterro com topo plano e detritos

depositados lateralmente em três regiões distintas, cada uma com diferentes contrastes de densidade. Estes detritos simulados estão depositados sobre um embasamento com relevo complexo e segmentado com quatro baixos intercalados por três altos. Mesmo nessa configuração complexa, a estimativa obtida recupera muito bem as três regiões com diferentes contrastes de densidade.

Aplicamos também à inversão proposta ao conjunto de dados do aterro sanitário Thomas Farm Landfill Site, Indiana, USA. Essa área foi utilizada como aterro sanitário durante 30 anos, primeiro para o despejo de lixo urbano e depois para despejo de detritos de construção civil. As topografias do topo e da base deste aterro são conhecidas. A distribuição horizontal do contraste de densidade estimada com a metodologia de inversão proposta delineou regiões de diferentes valores.

Com o conhecimento do volume e forma dos aterros e da distribuição de densidade conhecida e estimada, produzimos mapas da distribuição de massa para os aterros sintético e real, respectivamente. Este mapeamento da distribuição de massa pode auxiliar na identificação de potenciais áreas do aterro onde podem ocorrer fraturas no embasamento possibilitando a injeção do chorume na subsuperfície ainda não contaminada.

2 METODOLOGIAS

2.1 Problema direto

Seja um pacote de aterro sanitário constituído de uma distribuição de densidade horizontalmente heterogênea que está depositado sobre um embasamento de densidade homogênea. Discretizamos este aterro em uma malha $mx \times my$ de M prismas elementares 3D, verticais e justapostos nas direções horizontais x e y em um sistema de coordenadas em que z é positivo para baixo. O topo dos prismas coincide com a superfície do aterro e todos os prismas têm dimensões horizontais iguais à dx e dy ao longo das direções x e y , respectivamente. Presumimos que o contraste de densidade ($\Delta\rho_j$), entre um prisma e o embasamento, é constante dentro de cada um dos M prismas, mas pode mudar de um prisma para o outro a fim de permitir variação na distribuição horizontal de densidade do aterro. As espessuras (t_j) dos M prismas são conhecidas e representam as profundidades do embasamento do aterro em M pontos.

A componente vertical do sinal gravimétrico no i -ésimo ponto de observação (g_i), nas coordenadas x_i , y_i e z_i , está relacionada ao contraste de densidade do j -ésimo prisma ($\Delta\rho_j$) através da relação linear

$$g_i = \sum_{j=1}^M f_i(\Delta\rho_j, t_j, dx, dy, x_j, y_j), j = 1, \dots, M \quad (1)$$

A função linear $f_i(\Delta\rho_j, t_j, dx, dy, x_j, y_j) \equiv f_i(x_i, y_i, z_i)$ calculada no i -ésimo ponto de observação para o j -ésimo prisma com centro localizado nas coordenadas horizontais x_j e y_j , com espessura t_j , é escrita como:

$$f_i(x_i, y_i, z_i) = \gamma \Delta\rho_j \int_0^{t_j} \int_{y_a}^{y_b} \int_{x_a}^{x_b} \frac{(z_i - z'_j) dx'_j dy'_j dz'_j}{\left[(x_i - x'_j)^2 + (y_i - y'_j)^2 + (z_i - z'_j)^2 \right]^{3/2}} \quad (2)$$

sendo γ a constante gravitacional de Newton, x'_j , y'_j e z'_j as coordenadas do centro de um prisma de volume infinitesimal ($dv'_j = dx'_j dy'_j dz'_j$) dentro do j -ésimo prisma e os limites de integração tomados como: $x_a = x_j - dx/2$, $x_b = x_j + dx/2$, $y_a = y_j - dy/2$, $y_b = y_j + dy/2$. A solução algorítmica para a integral da equação 2 segundo PLOUFF (1976) é

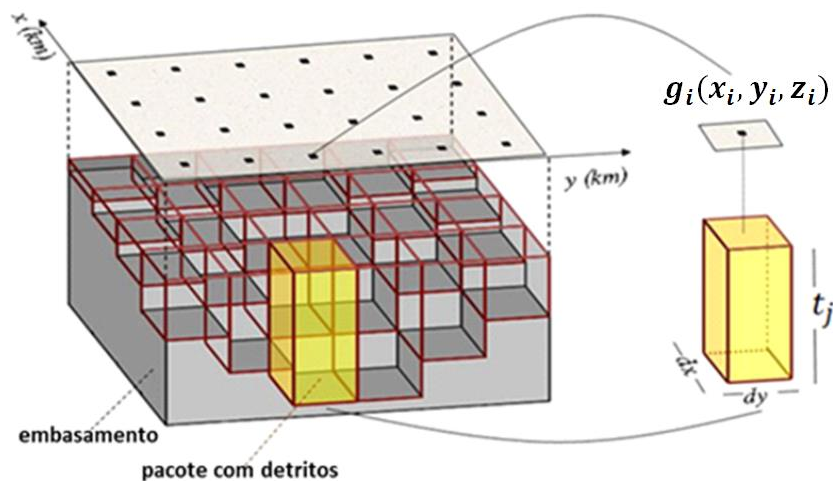
$$f_i(x_i, y_i, z_i) = \gamma \Delta \rho_j \sum_{k=1}^2 \sum_{l=1}^2 \sum_{m=1}^2 \mu_{klm} \left[z_m \arctan \frac{x_k y_l}{z_m R_{klm}} - \log[(R_{klm} + y_l)^{x_k} (R_{klm} + x_l)^{y_k}] \right] \quad (3)$$

sendo, $R_{klm} = \sqrt{x_k^2 + y_l^2 + z_m^2}$, $\mu_{klm} = (-1)^k (-1)^l (-1)^m$, $x_1 = (x_i - x_j) - dx/2$, $x_2 = (x_i - x_j) + dx/2$, $y_1 = (y_i - y_j) - dy/2$, $y_2 = (y_i - y_j) + dy/2$, $z_1 = 0$ e $z_2 = t_j$, para $z_i = 0$.

O termo g_i (equação 1) define o i -ésimo elemento do vetor $\mathbf{g} \equiv (g_1, \dots, g_M)^T$, contendo a anomalia teórica computada através do modelo interpretativo definido de modo único pelo vetor de parâmetros $\mathbf{p} \equiv (\Delta \rho_1, \dots, \Delta \rho_M)^T$, e o sobrescrito T representa transposição.

Por simplicidade, presumimos que os dados gravimétricos observados são interpolados em uma malha regular $m_x \times m_y$ com espaçamentos dx e dy ao longo das direções x e y , respectivamente, e que a posição horizontal do centro de cada prisma coincide com um ponto de observação (Figura 1).

Figura 1- Modelo interpretativo sem extensão – *Parte inferior* – Pacote de detritos discretizado por uma malha $m_x \times m_y$ de M prismas 3D, de dimensões horizontais dx e dy , justapostos ao longo das direções x e y , respectivamente; *Parte superior* – Malha regularmente espaçada com as posições das observações; *Detalhe a direita* – Contribuição gravimétrica do j -ésimo prisma na observação g_i posicionada sobre o centro do j -ésimo prisma.



Fonte: Modificado de Martins (2010).

2.2 Problema inverso

Seja $\mathbf{g}^o \equiv (g^o_1, \dots, g^o_M)^T$ um vetor M -dimensional contendo as observações da componente vertical da anomalia gravimétrica produzidas pelo pacote de detritos do aterro.

A inversão gravimétrica consiste em estimar, a partir de \mathbf{g}^o , o vetor de parâmetros \mathbf{p} contendo a distribuição do contraste de densidade $\Delta\rho_j$ dos M prismas que compõe o modelo interpretativo.

Estes contrastes de densidade estão relacionados aos dados gravimétricos através da relação linear dada pela equação 1. O problema inverso linear de estimar a distribuição do contraste de densidade a partir dos dados gravimétricos pode ser formulado, segundo Medeiros e Silva (1996), como:

$$\hat{\mathbf{p}} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{g}^o. \quad (4)$$

Em que, \mathbf{A} é a matriz sensibilidade, cujo ij -ésimo elemento é definido como:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \equiv \{a_{ij}\} &= \frac{\partial f_i}{\partial p_j} \\ &= \gamma \sum_{k=1}^2 \sum_{l=1}^2 \sum_{m=1}^2 \mu_{klm} \left[z_m \arctan \frac{x_k y_l}{z_m R_{klm}} \right. \\ &\quad \left. - \log[(R_{klm} + y_l)^{x_k} (R_{klm} + x_l)^{y_k}] \right], \end{aligned} \quad (5)$$

sendo f_i definido pela equação 2.

Note que se os termos x_k e y_k tenderem a zero, o resultado do logaritmo natural tende a zero. Esta tendência à zero do logaritmo natural na equação 5 ocorre se dx e dy tenderem a zero.

O problema inverso linear de estimar um vetor $\hat{\mathbf{p}}$ (equação 4) é mal posto apresentando solução sem estabilidade. Assim, para transformar esse problema mal posto em outro bem posto usualmente um funcional regularizador é introduzido. No entanto, os funcionais regularizadores inevitavelmente incorporaram algum tipo de informação geológica a priori, que pode ser ou não factual. Como presumimos que a distribuição horizontal do contraste de densidade é predominantemente suave, localmente em uma mesma região, incorporamos esta informação a priori através da regularização conhecida como suavidade (regularizador Tikhonov de primeira ordem,

(TIKHONOV ; ARSENI, 1977). Esta técnica impõe que a estimativa de cada parâmetro $\Delta\rho_j$ (contraste de densidade do j -ésimo prisma) se aproxime da estimativa dos parâmetros adjacentes. Segundo Medeiros e Silva (1996) o estimador regularizado com o funcional de suavidade é dado por:

$$\hat{\mathbf{p}} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A} + \mu \mathbf{B}^T \mathbf{B})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{g}^o, \quad (6)$$

em que μ é um escalar não negativo denominado de parâmetro de regularização, \mathbf{B} é uma matriz $L \times M$ representando o operador discreto de primeiras derivadas horizontais (TWOMEY, 1963), e L é o número total de pares de parâmetros adjacentes. A i -ésima linha da matriz \mathbf{B} contém somente dois elementos não nulos, 1 e -1 , que estão associados ao i -ésimo par de parâmetros adjacentes.

2.3 Imprecisão numérica: caracterização

Para o estimador regularizado ($\hat{\mathbf{p}}$) definido pela equação 6 a matriz pseudo inversa \mathbf{H} é definida por

$$\mathbf{H} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A} + \mu \mathbf{B}^T \mathbf{B})^{-1} \mathbf{A}^T. \quad (7)$$

Considerando uma solução “exata” $\bar{\mathbf{p}}$, obtida a partir de dados fictícios livres de ruído, a matriz resolução \mathbf{R} mede a proximidade entre uma solução particular estimada ($\hat{\mathbf{p}}$) e esta solução exata (MENKE, 1989)

$$\hat{\mathbf{p}} = \mathbf{R} \bar{\mathbf{p}}, \quad (8)$$

sendo a matriz resolução (\mathbf{R}), é definida por

$$\mathbf{R} = \mathbf{H} \mathbf{A}. \quad (9)$$

Note que a matriz resolução do estimador de mínimos quadrados (equação 4) é a matriz Identidade ($\mathbf{R} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{A} = \mathbf{I}$). No entanto, alguns autores (e.g. ANDERSSSEN, 1969; BOTT; INGLES, 1972) observaram que se a matriz $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ for pobremente condicionada isso não ocorre. Anderssen (1969), chama atenção para o fato de que isto dificulta a avaliação computacional precisa da inversa da matriz $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$. Bott e Ingles (1972), chamam atenção para o fato de que isto impõe tendenciosidade à solução.

Decompondo em valores singulares as matrizes \mathbf{A} e $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ temos que $\mathbf{A} = \mathbf{U} \mathbf{S} \mathbf{V}^T$ e $\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \mathbf{V} \mathbf{S}^2 \mathbf{V}^T$. Fica claro que se os valores singulares da matriz \mathbf{A} forem próximos de

zero, os autovalores da matriz $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ são ainda mais próximo de zero, porque eles são o quadrado dos valores singulares da matriz \mathbf{A} .

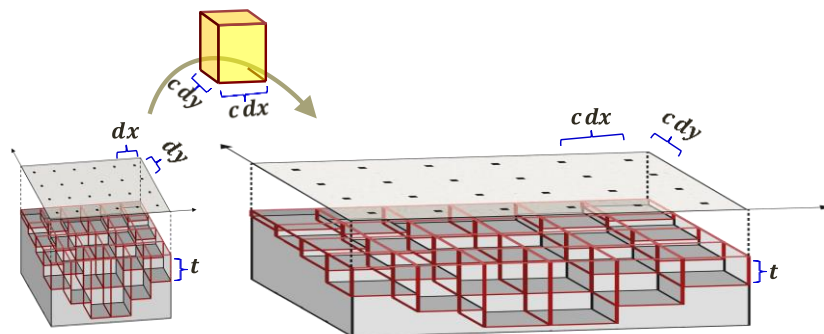
Quando as dimensões horizontais das fontes prismáticas (dx e dy) são suficientemente grandes o termo relacionado com a função logarítmica natural da equação 5 leva a valores singulares da matriz \mathbf{A} grandes, por garantir uma soma aos elementos da diagonal da matriz \mathbf{A} , e a matriz $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ se torna bem condicionada. Por outro lado, se dx e dy tendem à zero a matriz $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ se torna mal condicionada e terá valores singulares próximos à zero.

Adicionalmente, embora todos os elementos da matriz $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ sejam numericamente próximos de zero se dx e dy tendem a zero, os elementos da diagonal são muito maiores que os elementos fora da diagonal, o que a torna diagonal dominante e impõe tendenciosidade e suavidade à solução, a exemplo do que impõe o regularizador Ridge Regression (Regularizador de Tikhonov de ordem zero).

2.4 Imprecisão numérica: solução

A fim de superar a dificuldade numérica computacional imposta à inversão da matriz $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ mal condicionada, propomos um procedimento de inversão que modifica as dimensões do modelo interpretativo, estima os contrastes de densidade provisórios, e os corrige em uma etapa final. Multiplicamos por um fator c as dimensões horizontais dos prismas, dx e dy , que compõem o modelo interpretativo (Figura 1) e os espaçamentos horizontais entre as observações gravimétricas (g_i^o) produzindo assim um novo modelo interpretativo horizontalmente estendido (Figura 2). Aplicamos a inversão gravimétrica regularizada (equação 6), ao vetor de observações gravimétricas (\mathbf{g}^o) com espaçamento estendido entre as observações, para estimar um vetor de parâmetros provisório $\tilde{\mathbf{p}}$ contendo as M estimativas provisórias de contraste de densidade ($\Delta\tilde{\rho}_j$) deste novo modelo interpretativo estendido. Com este procedimento os parâmetros $\Delta\tilde{\rho}_j$ são subestimados pela inversão como consequência do superdimensionamento do volume do modelo interpretativo estendido. No entanto, este procedimento é efetivo para localizar contatos, mapeando no pacote de aterro regiões lateralmente dispostas com diferentes contrastes de densidade.

Figura 2- Modelo Interpretativo estendido para o procedimento de inversão.



Fonte: Do autor

Afim de corrigir a magnitude da distribuição de densidade estimada ($\tilde{\rho}$) calculamos a anomalia gravimétrica produzida com o modelo interpretativo de dimensões originais, mas com a distribuição de densidade subestimada $\tilde{\rho}$. Obtemos assim uma anomalia gravimétrica calculada (\check{g}^c) com forma aproximada à da anomalia gravimétrica observada (g^o), mas com menor amplitude. Calculamos um fator de correção (α_i) para cada i -ésimo contraste de densidade subestimado ($\tilde{\rho}_i$) pela razão entre a i -ésima anomalia gravimétrica verdadeira (g^o_i) e a i -ésima anomalia gravimétrica calculada (\check{g}_i^c):

$$\alpha_i = \frac{|g^o_i|}{|\check{g}_i^c|} . \quad (10)$$

Finalmente, para obtermos o i -ésimo elemento do vetor de parâmetros estimado definitivo $\hat{\rho}_i$, multiplicamos o i -ésimo elemento do vetor de parâmetros estimado provisório $\tilde{\rho}_i$ pelo i -ésimo fator de correção α_i ,

$$\hat{\rho}_i = \tilde{\rho}_i \cdot \alpha_i \quad (11)$$

2.5 Distribuição de massa

Como consideramos constante a distribuição vertical de densidade, utilizamos os dados das espessuras (t_j) dos prismas e a distribuição horizontal do contraste de densidade para avaliar a massa do j -ésimo prisma pelo produto densidade volume,

$$M_j = \rho_j \cdot V_j, \quad (12)$$

sendo $V_j = dx \cdot dy \cdot t_j$ o volume do j -ésimo prisma do modelo interpretativo, em m^3 , e ρ_j a densidade do j -ésimo prisma, em kg/m^3 para que a massa seja expressa em kg, dada por $\rho_j = \Delta\rho_j + \rho_j^*$, sendo ρ_j^* a densidade do embasamento em kg/m^3 .

3 RESULTADOS

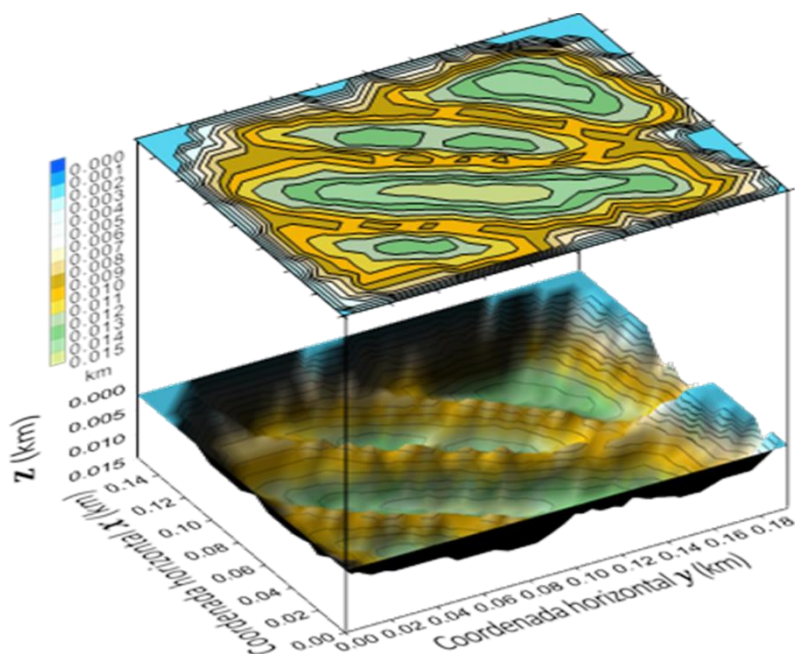
3.1 Aplicação a dados sintéticos:

Apresentamos resultados numéricos dos métodos e procedimentos descritos no Capítulo 2 aplicados a dados sintéticos.

Relevo simulado

Simulamos um aterro de lixo em que o pacote de detritos heterogêneo cobre um embasamento homogêneo com arcabouço estrutural complexo caracterizado por quatro baixos intercalados por três altos. A Figura 3 mostra o mapa de contorno e a vista em perspectiva do relevo verdadeiro do embasamento do aterro simulado. Este aterro estende-se por 130 m e 160 m ao longo das direções x e y (norte-sul e leste-oeste) respectivamente, sendo composto por 26×32 prismas com dimensões horizontais dx e dy de 5.0 m, todos com topo em $z_1 = 0.0$ m. A espessura de cada prisma (t_j) é obtida nas coordenadas horizontais x_j, y_j do centro do j -ésimo prisma, pela profundidade verdadeira do embasamento nas mesmas coordenadas (Figura 3), e o contraste de densidade entre o embasamento e cada um dos prismas ($\Delta\rho_j$) que compõem o aterro está horizontalmente distribuído como mostra o mapa da Figura 4.

Figura 3- Mapa de contorno (parte superior) e vista em perspectiva (parte inferior) do relevo verdadeiro do aterro simulado.

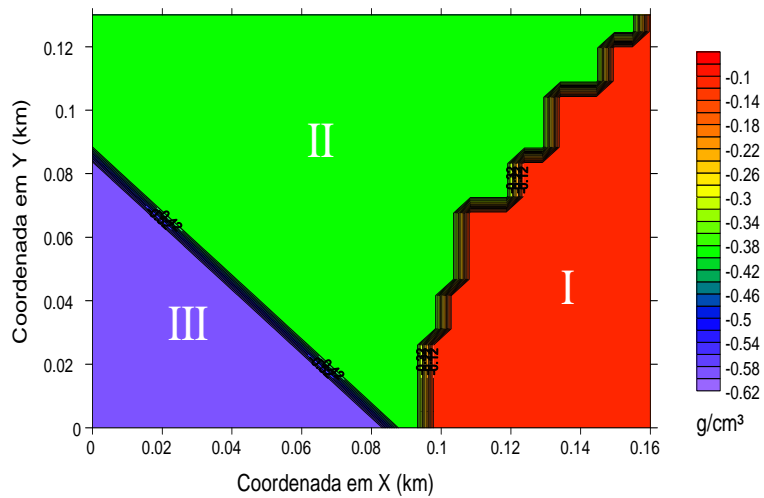


Fonte: Do autor

Distribuição do contraste de densidade

Simulamos uma distribuição do contraste de densidade em três regiões distintas (Figura 4). A região I simulada com baixo contraste de densidade corresponde a depósito de detritos de “construção civil” e as regiões II e III correspondem a depósitos de detritos domésticos, com dois diferentes valores do contraste de densidade, sendo a região III a menos densa.

Figura 4- Mapa da distribuição do contraste de densidade para o aterro simulado.



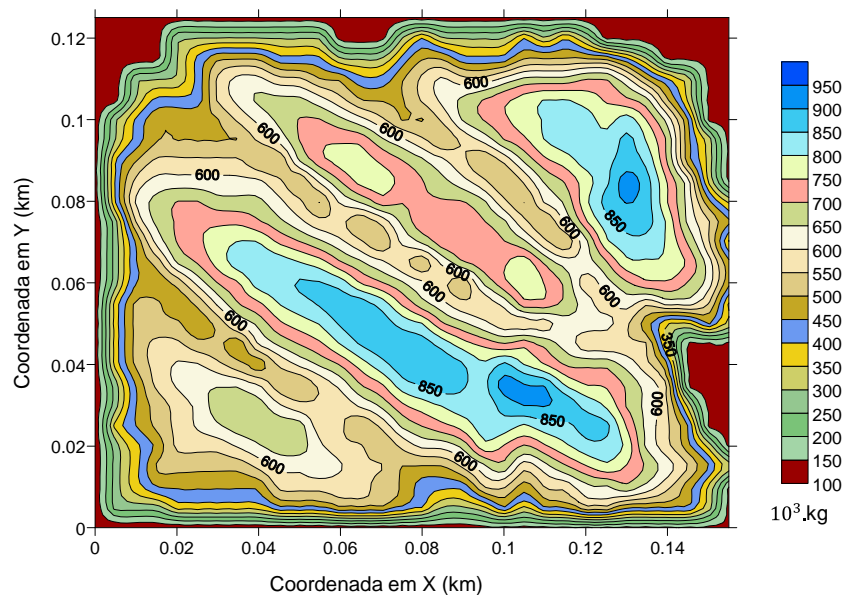
Fonte: Do autor

Distribuição de massa

Utilizando a equação 12 para o cálculo da massa de cada prisma, o relevo da base mostrado na Figura 3, o contraste de densidade da Figura 4 e o valor de 2800 kg/m^3 para o embasamento simulado, calculamos o mapa de massa.

A Figura 5 mostra o mapa verdadeiro da distribuição de massa do modelo simulado.

Figura 5- Distribuição de massa verdadeira do modelo simulado.

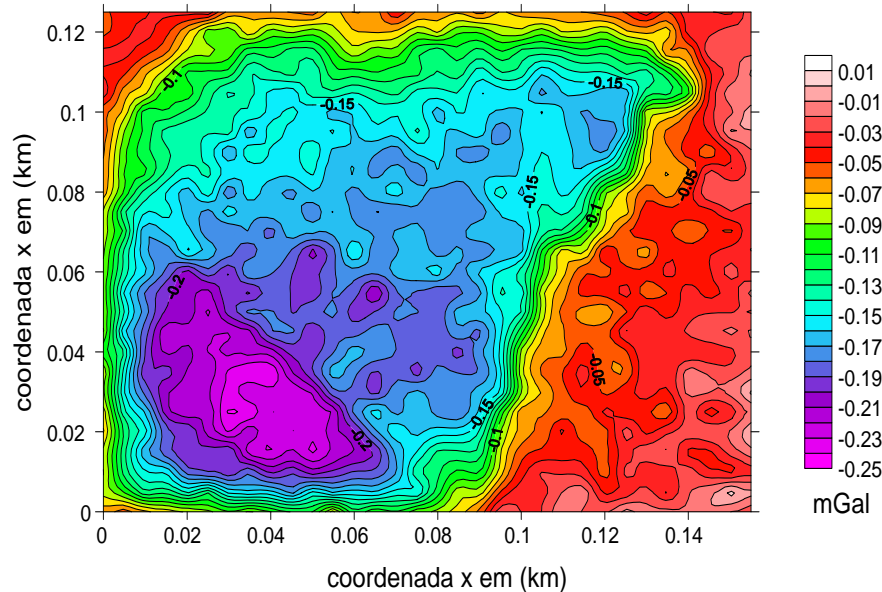


Fonte: Do autor

Anomalia gravimétrica sintética

A Figura 6 mostra a anomalia gravimétrica, contaminada com ruído, produzida pelo modelo simulado de um aterro de lixo com relevo do embasamento mostrado na Figura 3 e distribuição do contraste de densidade mostrado na Figura 4. A anomalia gravimétrica teórica (equação 1) foi avaliada nas mesmas coordenadas horizontais dos centros dos prismas, no plano horizontal $z_o = -5.0 \cdot 10^{-1}$ m, e corrompida por ruído através de realizações de uma variável pseudo-aleatória Gaussiana com média nula e desvio padrão de 0.01 mGal. Como estamos simulando um aterro de lixo com características semelhantes a um aterro de lixo real, as dimensões horizontais e verticais adotadas são pequenas, assim como o sinal gravimétrico produzido é de pequena magnitude. Assim, os dados gravimétricos são contaminados com um ruído de pequena amplitude, igual ao utilizado por Silva et al. (2009).

Figura 6- Anomalia gravimétrica contaminada com ruído produzida pelo aterro de lixo simulado (Figuras 3 e 4)



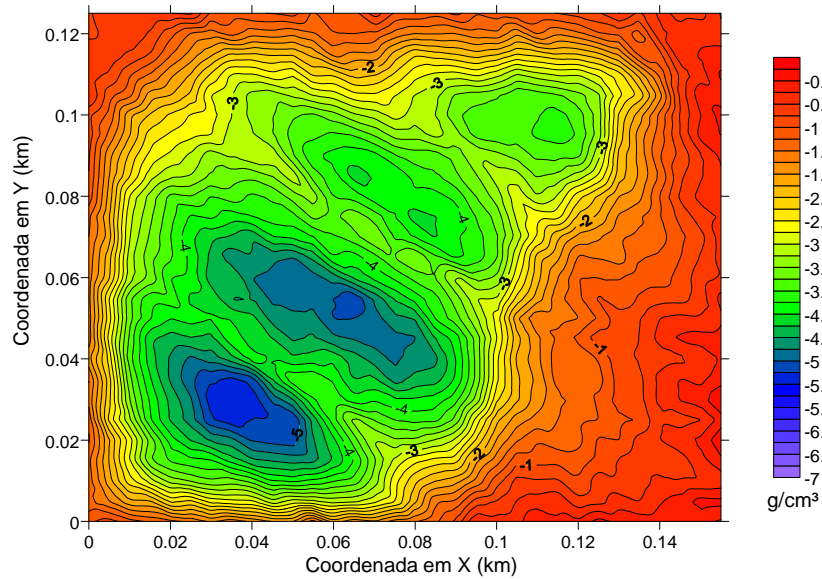
Fonte: Do autor

Inversão linear com modelo interpretativo sem extensão e pequena dimensão horizontal

Inversão não regularizada (somente mínimos quadrados)

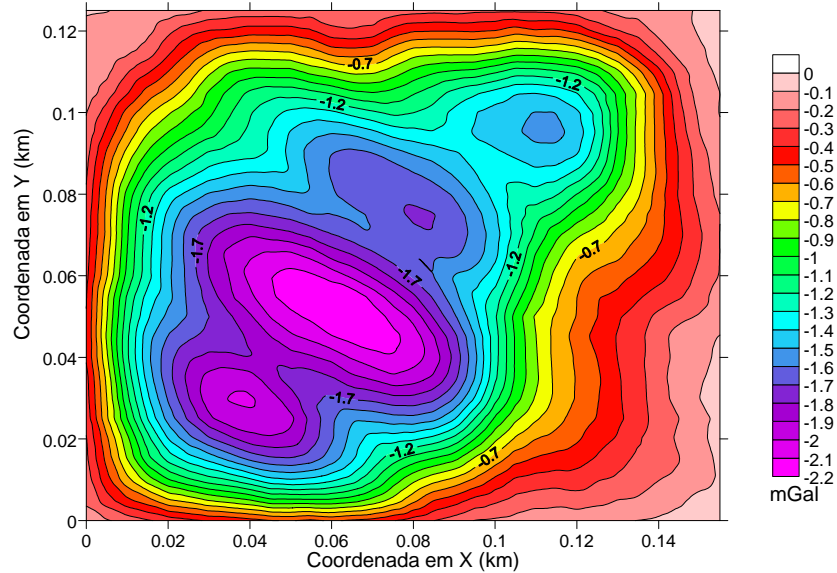
A Figura 7 mostram o mapa da distribuição do contraste de densidade estimado via inversão linear sem regularização (equação 4, estimador dos mínimos quadrados) e modelo interpretativo sem extensão (Figura 1). A Figura 8 mostra a anomalia gravimétrica ajustada por esta inversão. Foram utilizados como dados de entrada as profundidades verdadeiras do relevo do embasamento (Figura 3), que determinam as espessuras verdadeiras (t_j) dos prismas, os valores verdadeiros das dimensões horizontais dos prismas e do espaçamento entre as observações gravimétricas ($dx = dy = 5$ m) e a anomalia gravimétrica verdadeira contaminada com ruído (Figura 6).

Figura 7- Mapa da distribuição do contraste de densidade estimado via inversão linear sem extensão e sem regularização (equação 4).



Fonte: Do Autor

Figura 8- Anomalia gravimétrica ajustada via inversão linear sem extensão e sem regularização.



Fonte: Do autor

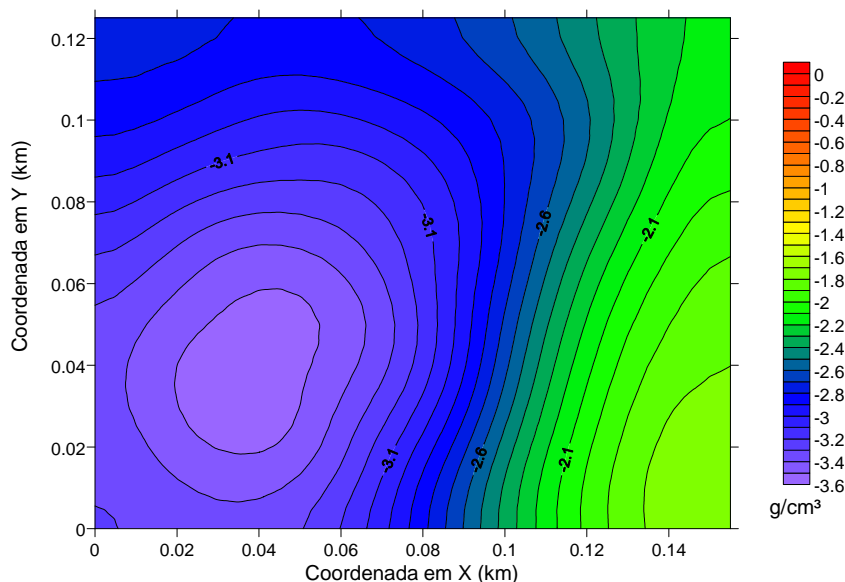
Note que para o modelo utilizado ($dy = dx = 5$ m) a anomalia gravimétrica ajustada (Figura 8) não recupera a anomalia gravimétrica verdadeira (Figura 6). Note também que a distribuição do contraste de densidade estimado (Figura 7) não se assemelha à verdadeira (Figura 4) apresentando-se suavizada e tendendo para valores

até 10 vezes maiores que os valores da distribuição verdadeira. Esta não efetividade principalmente em relação ao ajuste é atípica uma vez que é sabido que a camada equivalente é capaz de ajustar os dados. A estimativa suavizada é obtida por causa da simultânea condição da matriz sensibilidade (\mathbf{A}) de bom condicionamento e baixos valores singulares.

Inversão regularizada

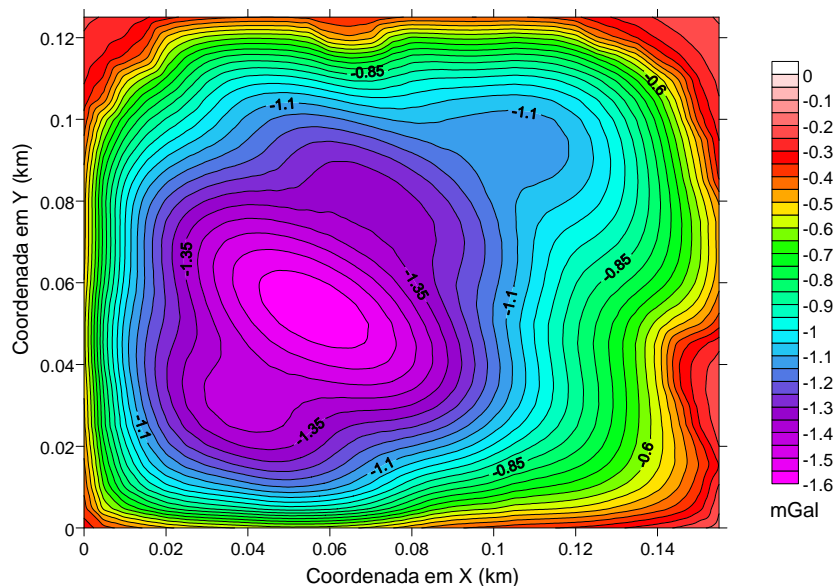
A Figura 9 mostra o mapa da distribuição do contraste de densidade estimado via inversão linear com regularização (equação 6) usando parâmetro de regularização $\mu = 10^{-5}$ e modelo interpretativo sem extensão (Figura 1). A Figura 10 mostra a anomalia gravimétrica ajustada por esta inversão. Novamente, foram utilizados como dados de entrada: as profundidades verdadeiras do relevo do embasamento (Figura 3); os valores verdadeiros das dimensões horizontais $dx = dy = 5$ m; a anomalia gravimétrica verdadeira contaminada com ruído (Figura 6).

Figura 9- Mapa da distribuição do contraste de densidade estimado via inversão linear regularizada sem extensão com parâmetro de regularização $\mu = 10^{-5}$.



Fonte: Do autor

Figura 10- Anomalia gravimétrica ajustada via inversão linear regularizada sem extensão com parâmetro de regularização $\mu = 10^{-5}$.



Fonte: Do autor

Note que a inversão regularizada, para o modelo utilizado ($dy = dx = 5$ m), novamente não ajusta a anomalia gravimétrica (Figura 10). Note também que utilizando a regularização a distribuição do contraste de densidade estimada (Figura 9) torna-se ainda mais suave, e que a tendenciosidade permanece, com parâmetros estimados tendendo para valores até 5 vezes maiores que os valores da distribuição verdadeira. Portanto a regularização sozinha não é capaz de restituir a conhecida efetividade da camada equivalente para ajustar os dados.

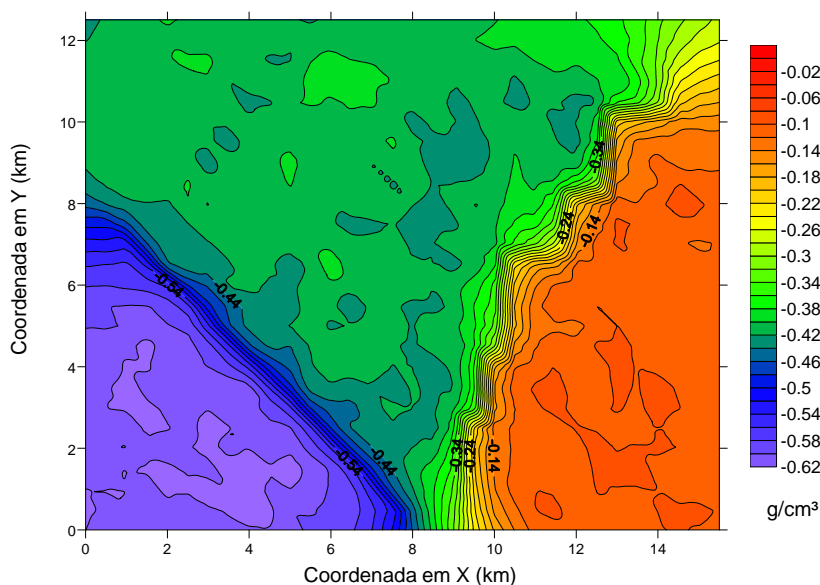
Inversão linear dos dados gravimétricos produzidos por um aterro simulado irreal com grandes dimensões horizontais

Simulamos um novo modelo irreal com grandes dimensões horizontais, para verificar se este problema numérico na inversão ocorre somente se as dimensões horizontais das fontes são pequenas. Produzimos este novo modelo de grandes dimensões horizontais utilizando o modelo original já descrito. Mantivemos conforme o modelo original os valores dos contraste de densidade e as profundidades do embasamento, mas aumentamos as dimensões horizontais dos prismas e os espaçamentos entre as observações $dx = dy = 500$ m. Assim, este novo modelo se estende por 16 e 13 km ao longo das direções horizontais X e Y respectivamente. Para

este novo modelo, calculamos a anomalia gravimétrica (não mostrada) e aplicamos a inversão.

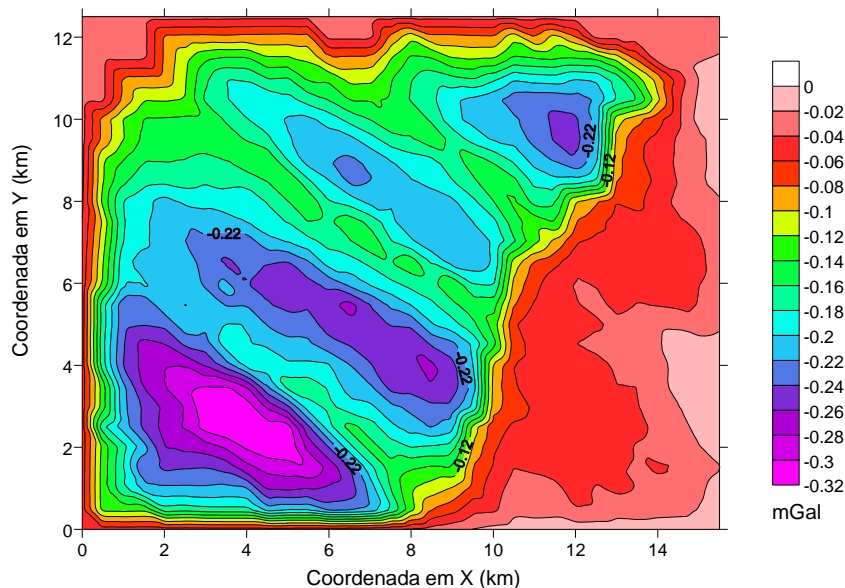
A Figura 11 mostra o mapa da distribuição do contraste de densidade estimado via inversão linear regularizada (equação 6) com parâmetro de regularização $\mu = 10^{-6}$ e a Figura 12 mostra a anomalia gravimétrica ajustada com esta inversão. Foram utilizados como dados de entrada na inversão dos dados deste modelo irreal de grande dimensão horizontal: as profundidades verdadeiras do relevo do embasamento; valores verdadeiros das dimensões horizontais dos prismas e do espaçamento entre as observações gravimétricas ($dx = dy = 500$ m); e os valores da anomalia gravimétrica contaminada com ruído pseudoaleatório de distribuição gaussiana e desvio padrão 0.01 mGal (figura não mostrada).

Figura 11- Mapa da distribuição do contraste de densidade estimada via inversão linear regularizada sem extensão, com parâmetro de regularização $\mu = 10^{-6}$, para modelo irreal de grande dimensão horizontal.



Fonte: Do autor

Figura 12- Anomalia gravimétrica ajustada via inversão linear regularizada sem extensão, com parâmetro de regularização $\mu = 10^{-6}$, para modelo irreal de grande dimensão horizontal.



Fonte: Do autor

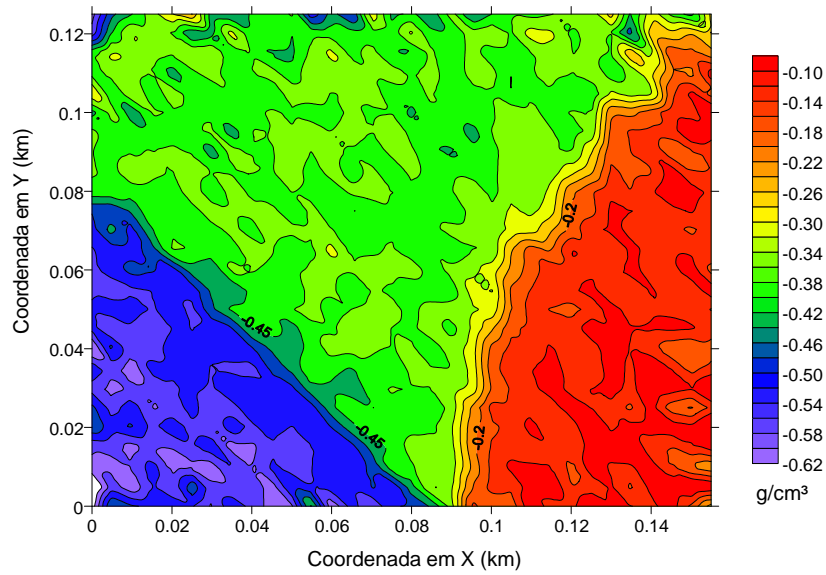
A inversão gravimétrica regularizada, para fontes de dimensões horizontais suficientemente grandes, estima distribuição do contraste de densidade (Figura 11) que recupera a verdadeira bem como ajusta a anomalia gravimétrica (Figura 12).

Inversão linear estendida

Apresentamos resultados numéricos do procedimento de inversão linear com modelo interpretativo estendido descrito no Capítulo 2 e seção 2.4 aplicados a dados sintéticos, que chamaremos por simplicidade de **inversão estendida**.

A Figura 13 mostra o mapa da distribuição do contraste de densidade estimado via inversão linear (equação 6) com parâmetro de regularização $\mu = 10^{-7}$, modelo interpretativo estendido pelo fator de extensão $c = 100$. Foram utilizados como dados de entrada as profundidades verdadeiras do relevo do embasamento (Figura 3) que determinam as espessuras verdadeiras (t_j) dos prismas e a anomalia gravimétrica verdadeira contaminada com ruído (Figura 6).

Figura 13- Mapa da distribuição do contraste de densidade estimado via inversão estendida com parâmetro de regularização $\mu = 10^{-7}$ e fator de extensão $c = 100$.

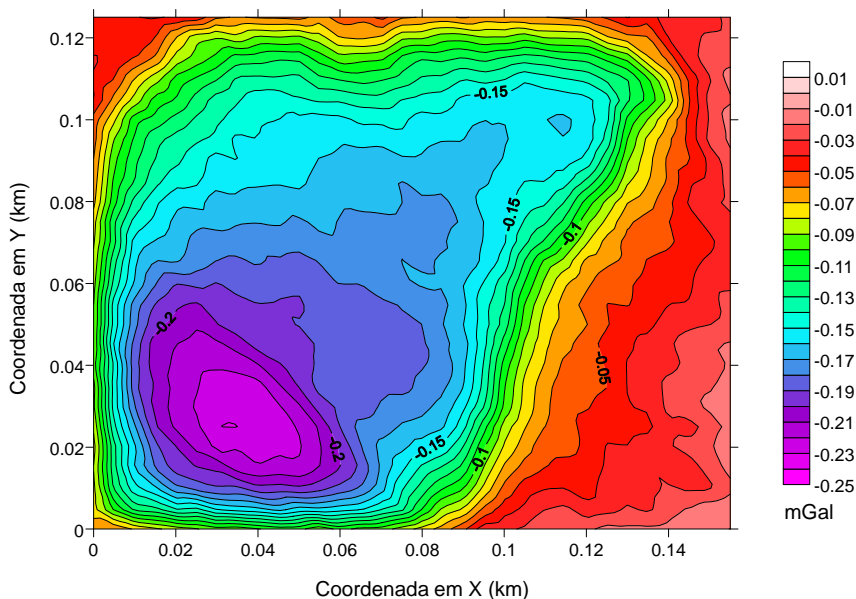


Fonte: Do autor

Note que utilizando a inversão estendida, a distribuição verdadeira do contraste de densidade é bem recuperada.

A Figura 14 mostra a anomalia gravimétrica ajustada pela inversão estendida.

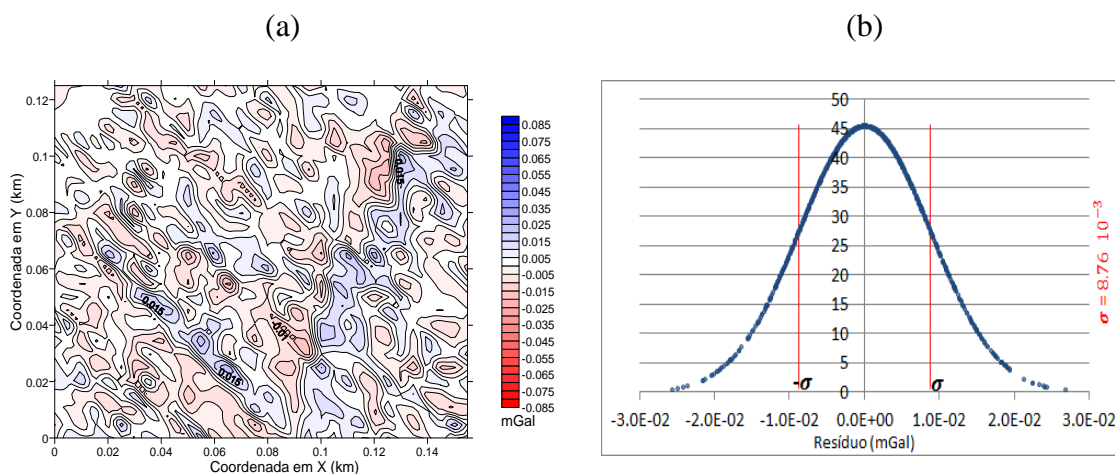
Figura 14- Anomalia gravimétrica ajustada pela inversão estendida com parâmetro de regularização $\mu = 10^{-7}$ e fator de extensão $c = 100$.



Fonte: Do autor

A Figura 15-a mostra o resíduo entre a anomalia gravimétrica verdadeira (Figura 6) e a anomalia gravimétrica ajustada pela inversão estendida e a Figura 15-b mostra o histograma da distribuição do resíduo entre a anomalia gravimétrica verdadeira e a ajustada.

Figura 15- (a) Mapa do resíduo entre a anomalia gravimétrica verdadeira e ajustada com inversão estendida; (b) Histogramas dos resíduos entre a anomalia gravimétrica verdadeira e ajustada.



Fonte: Do autor

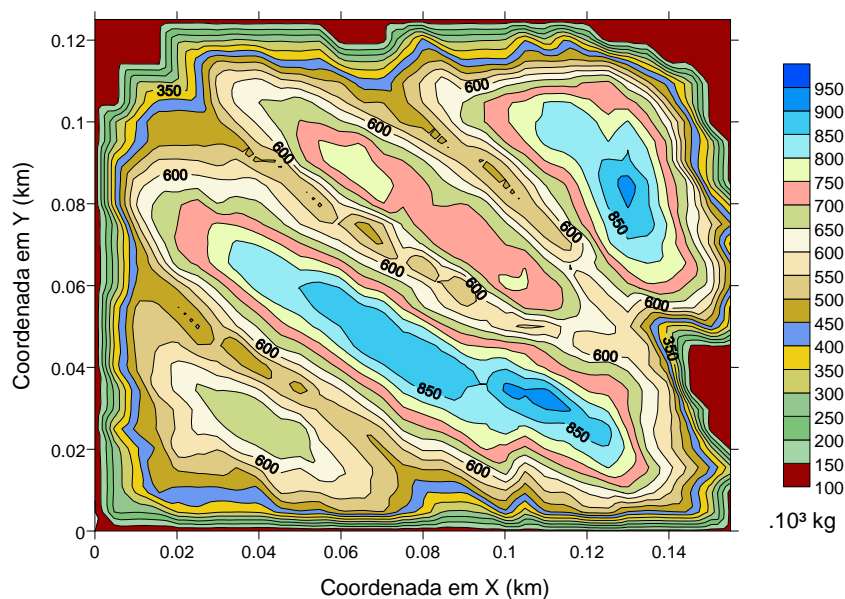
Note que o mapa do resíduo obtido com o procedimento de inversão estendida apresenta muitas regiões com valores próximos à zero.

O histograma da Figura 15-b mostra que a distribuição do resíduo apresenta forma que se aproxima de uma distribuição Gaussiana, e desvio padrão ($\sigma = 8.7 \cdot 10^{-3}$) menor que o desvio padrão do ruído (10^{-2}) que foi adicionado ao dado simulado.

Realizamos outros testes sintéticos (não mostrados) com anomalias gravimétricas contaminadas com outras sequencias de ruídos pseudoaleatório geradas com diferentes sementes, mas mantendo o mesmo desvio padrão de 0.01 mGal. Com estes outros testes verificamos estabilidade com as estimativas da inversão estendida.

A Figura 16 mostra o mapa de massa obtido via equação 12, utilizando o contraste de densidade estimado pela inversão estendida (Figura 13) e densidade efetiva do embasamento igual a 2800 kg/m^3 .

Figura 16- Distribuição de massa calculada utilizando a estimativa do contraste de densidade obtida com a inversão estendida (Figura 13).



Fonte: Do autor

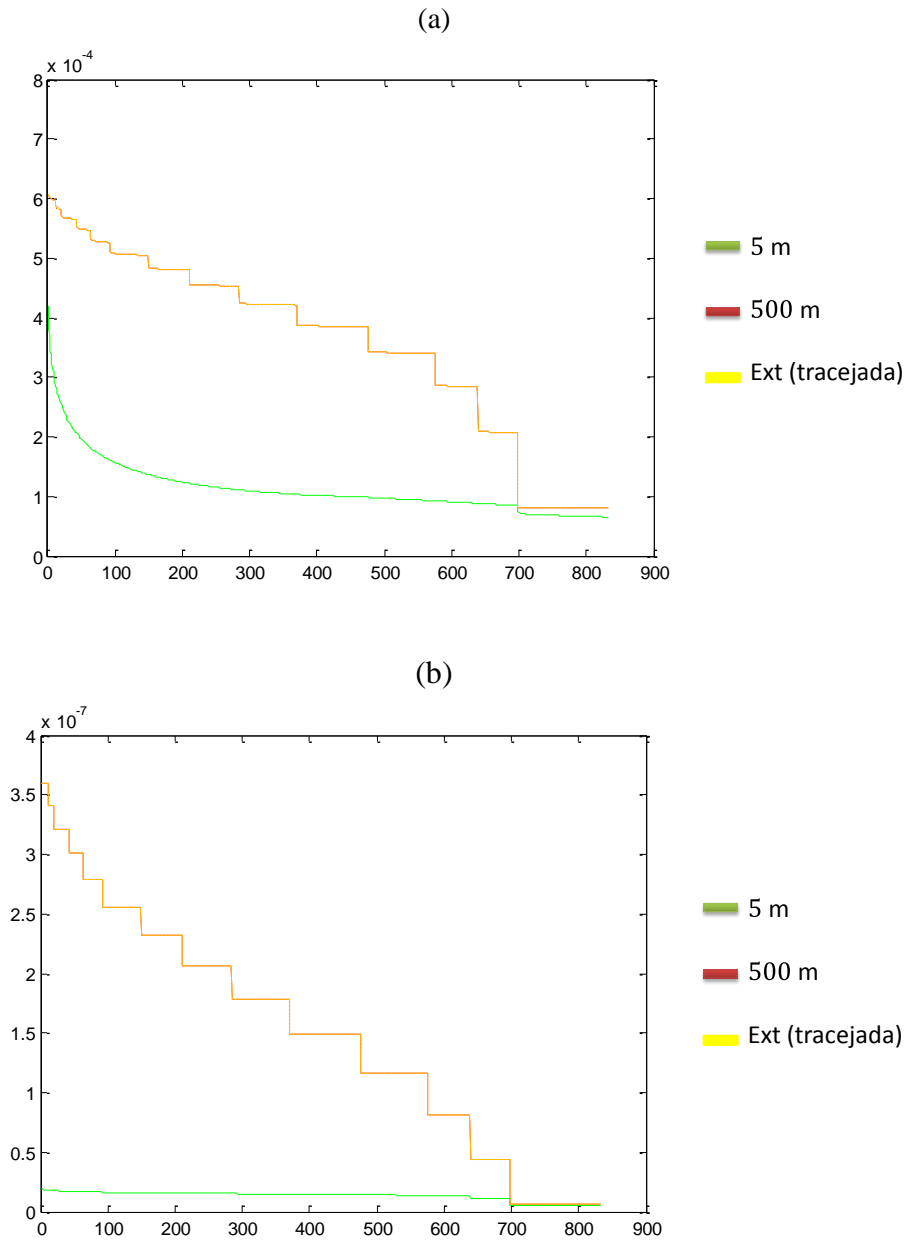
Note que o mapa de massa estimado pela inversão estendida (Figura 16) recupera com boa aproximação o mapa de massa verdadeiro (Figura 5).

Imprecisão numérica: comprovações

A imprecisão numérica ocorre devido aos valores singulares das matrizes \mathbf{A} e consequentemente aos autovalores da matriz $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ (equação 6) serem muito pequenos quando as dimensões dx e dy estão próximas de zero. Esta característica da matriz $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ leva a soluções demasiadamente suaves. Adicionalmente, como a matriz $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ é diagonal dominante, a inversão linear, para pequenas dimensões (dx e dy) introduz tendenciosidade a valores distantes dos verdadeiros. Note que as estimativas de mostradas na Figura 7 indicam valores de constante de densidade em uma escala quase 10 vezes maior que os verdadeiros.

No teste com modelo de dimensões horizontais dx e dy grandes (com valores iguais a 500 m de um aterro simulado não realístico de grande dimensão horizontal de 16 km x 13 km não mostrado), os valores singulares da matriz $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ não são pequenos e a inversão é eficaz. A Figura 17 mostra uma comparação entre os valores singulares das matrizes \mathbf{A} e $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ em três condições: inversão sem extensão $dx = dy = 5$ m; inversão das observações gravimétricas produzidas por um aterro simulado irreal com grandes dimensões horizontais; inversão estendida com $c = 100$ m, sendo $dx = dy = 5$ m.

Figura 17- **(a)** Valores singulares da matriz \mathbf{A} para: inversão sem extensão $dx = dy = 5$ m; inversão sem extensão $dx = dy = 500$ m; inversão estendida com $c = 100$; **(b)** Auto valores da matriz $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ para: inversão sem extensão $dx = dy = 5$ m; inversão das observações gravimétricas produzidas por um aterro simulado irreal com grandes dimensões horizontais; inversão estendida com $c = 100$, sendo $dx=dy=5$ m.



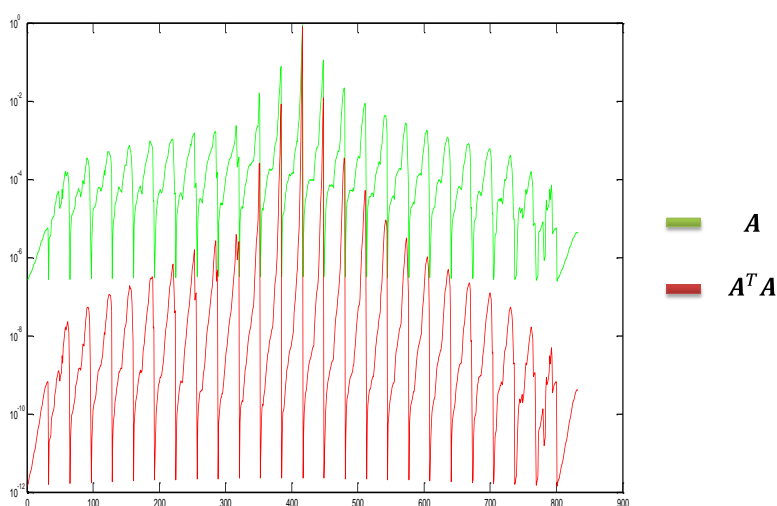
Fonte: Do autor

Note que os valores singulares das matrizes \mathbf{A} e os auto valores da $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ são pequenos no caso em que as dimensões horizontais dx e dy são pequenos (linha verde contínua Figura 17 (a) e (b), respectivamente), e que mesmo o maior valor singular da matriz \mathbf{A} é pequeno, e que todos os auto valores de $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ são muito próximos a zero.

Note também que o procedimento de extensão restitui às matrizes \mathbf{A} e $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ (linhas amarelas tracejadas) os valores singulares e auto valores do caso em que as dimensões horizontais são grandes, $dx = dy = 500$ m (linha vermelha contínua).

A Figura 18 mostra uma comparação dos valores dos elementos da linha número 416 (linha do meio) da matriz \mathbf{A} com os elementos da linha 416 da matriz $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ para o teste sintético descrito da inversão sem extensão com $dx = dy = 5$ m. Nesta Figura, ambas as matrizes estão normalizadas, todos os seus ij -ésimos elementos estão divididos pelo elemento de maior valor, assim o maior valor possível é 1 inteiro.

Figura 18- Comparação entre os valores da 416ª linha da matriz \mathbf{A} e os da 416ª linha da matriz $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$.



Fonte: Do autor

Note que ambas as matrizes são diagonais dominantes, mas que a matriz $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ é mais diagonal dominante uma vez que, como os valores fora da diagonal da Matriz \mathbf{A} são menores que zero, seus quadrados tendem mais severamente para valores próximos de zero.

A Tabela 1 apresenta o resultado da avaliação da norma Euclidiana entre a diferença da matriz Resolução (equação 9) e a matriz Identidade, para a matriz Resolução da inversão dos aterros de lixo simulados com fontes prismáticas de pequenas e grandes dimensões horizontais ($dx = dy = 5$ m e $dx = dy = 500$ m, respectivamente) em quatro configurações distintas: i) inversão linear não regularizada (estimador de mínimos quadrados) sem extensão; ii) inversão das observações gravimétricas produzidas por um aterro simulado irreal com grandes dimensões

horizontais; iii) inversão linear regularizada sem extensão; iv) inversão linear regularizada com extensão. Os valores dos parâmetros de regularização (μ) selecionados estão indicados entre parênteses nos casos em que a regularização é utilizada na inversão. É esperado que quanto mais próximos a zero estejam os valores destas avaliações da norma euclidiana, mais próximo esteja o vetor de parâmetros estimados ($\hat{\mathbf{p}}$) do vetor de parâmetros exatos ($\bar{\mathbf{p}}$).

Tabela1 – Norma Euclidiana da diferença entre a matriz resolução e a Matriz Identidade.

	Dimensão horizontal dos prismas 5 m	Dimensão horizontal dos prismas 500 m
i) Mínimos quadrados	1.08110^{-7}	$1.084 \cdot 10^{-12}$
ii) Mínimos quadrados com Extensão	$1.084 \cdot 10^{-12}$	***
iii) Inversão Regularizada sem extensão	$4.16 \cdot 10^{-5}$ ($\mu = 10^{-5}$)	2.9810^{-5} ($\mu = 10^{-6}$)
iv) Inversão Regularizada com extensão	1.5510^{-5} ($\mu = 10^{-7}$)	***

*** não houve avaliação

Fonte: Do autor.

Note que utilizando o procedimento de inversão com extensão o valor da avaliação da Norma Euclidiana da diferença entre a Matriz Resolução e a Matriz Identidade é menor, sendo a inversão regularizada ou não.

A Tabela 2 mostra a avaliação do número de condicionamento das matrizes sensibilidade (\mathbf{A}) e sensibilidade ao quadrado ($\mathbf{A}^t\mathbf{A}$) em três situações distintas: i) inversão linear não regularizada (estimador de mínimos quadrados) sem extensão para pequenas dimensões, $dx = dy = 5$ m; ii) inversão das observações gravimétricas produzidas por um aterro simulado irreal com grandes dimensões horizontais; iii) inversão linear regularizada com extensão. Quanto maior o valor do número de condicionamento, pior condicionada está a matriz.

Tabela2 – Número de condicionamento das matrizes A e A^tA .

	Número de condicionamento A	Número de condicionamento A^tA
i) Mínimos quadrados ($dx = dy = 5$ m)	6.4842	4.1244
ii) Inversão grandes dimensões ($dx = dy = 500$ m)	7.4475	54.2418
iii) Inversão com extensão ($dx = dy = 5$ m)	7.4475	54.2418

Fonte: Do autor.

Note que o numero de condicionamento mostra que a matriz sensibilidade (A) é bem condicionada em todos os casos, mas principalmente no caso i), isto explica o resultado da estimativa ser suave. Como neste caso simultaneamente os valores singulares são baixos, a estimativa também é tendenciosa e não há ajuste aos dados.

3.2 Aplicação a dados reais:

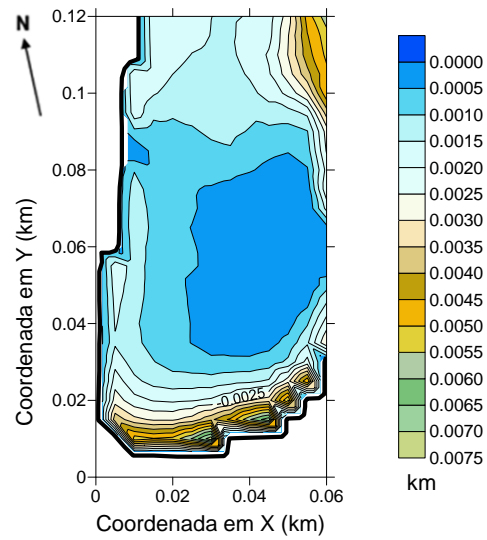
Aplicamos os procedimentos desenvolvidos e testados em dados sintéticos, ao conjunto de dados reais do aterro Thomas Farm Landfill Site, Indiana, USA.

Aterro Thomas farm landfill site

O aterro sanitário Thomas Farm Landfill Site, Indiana, USA, foi utilizado como depósito de detritos por aproximadamente 30 anos, se estende por aproximadamente 65 m e 165 m nas direções horizontais e atinge profundidade máxima de 13m. Segundo Roberts et al. (1991), no período anterior à 1973, o aterro foi utilizado para o descarte de detritos doméstico e posteriormente foram depositados detritos de construção civil.

Discretizamos parte da porção sudoeste do pacote contendo o aterro em 12×24 primas verticais com dimensão horizontal de 5.0 m nas direções x e y . Parte da superfície topográfica da área após a instalação do aterro e contemporânea ao levantamento gravimétrico é mostrada em curvas de nível na Figura 18 e foi obtida por fotos aéreas em 1988. Este mapa bem como o mapa da profundidade do embasamento do aterro e o mapa da anomalia gravimétrica, foram obtidos a partir da digitalização dos mapas apresentados por Roberts et al.(1991), e são mostrados apenas dentro dos limites informados do aterro (limite mostrado com linha preta espessa nas Figuras 18 e 19 e de 22 a 27).

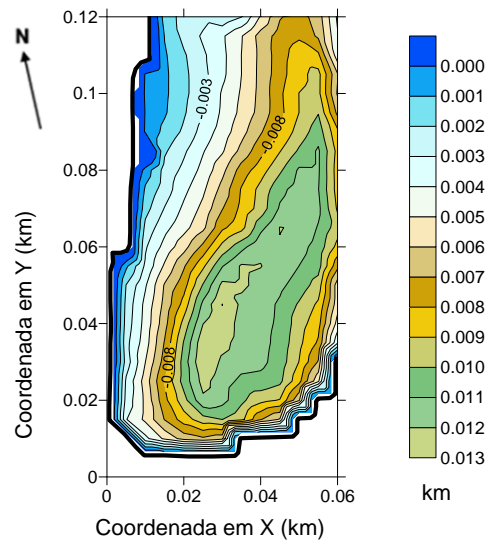
Figura 19- Mapa de contorno da superfície topográfica do topo de parte do aterro sanitário Thomas Farm Landfill Site, Indiana, USA, após sua instalação.



Fonte: Modificado de Roberts et al. (1991).

A Figura 19 mostra um mapa da profundidade do embasamento de parte do aterro antes de sua instalação, adquiridas por fotos aéreas de 1958.

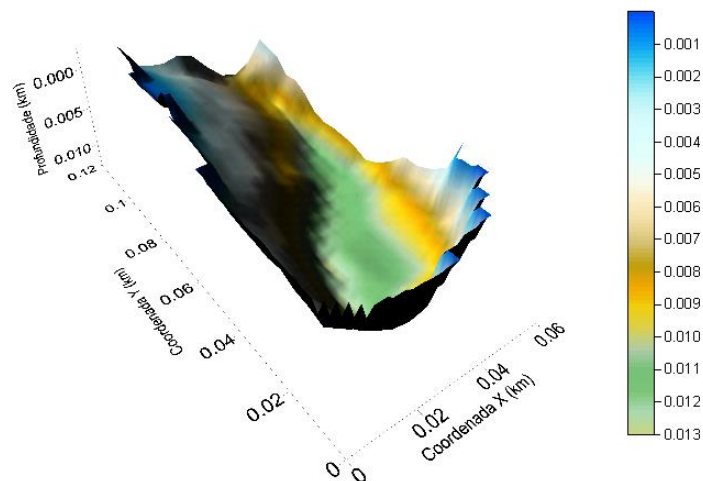
Figura 20- Mapa da profundidade do embasamento de parte do aterro Thomas Farm Landfill Site, Indiana, USA.



Fonte: Modificado de Roberts et al. (1991)

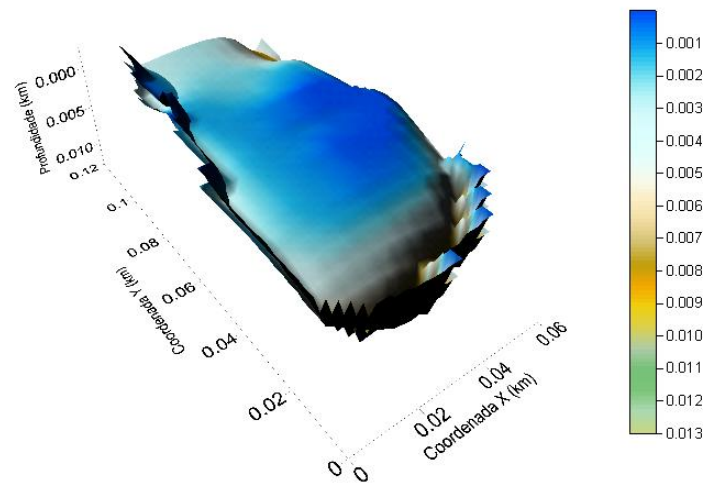
As Figuras 21 e 22 mostram a vista em perspectiva da base e do topo do aterro.

Figura 21- Vista em perspectiva do relevo da base do aterro.



Fonte: do autor

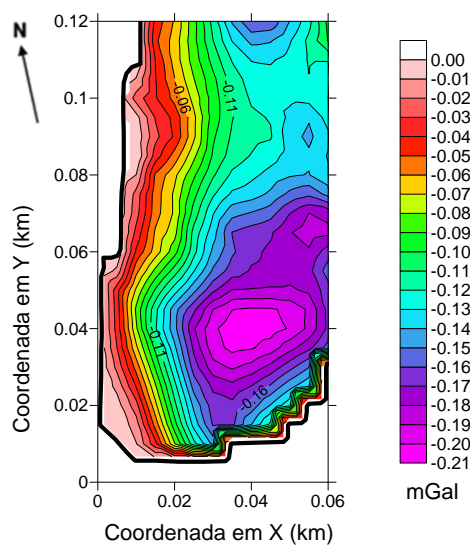
Figura 22- Vista em perspectiva do relevo do topo sobreposto ao relevo da base do aterro.



Fonte: Do autor

A Figura 23 mostra o mapa da anomalia gravimétrica residual modificada de Roberts et al., 1991, interpolada em uma malha regularmente espaçada em 5.0 m nas direções horizontais x e y .

Figura 23- Mapa da anomalia gravimétrica residual de parte do aterro Thomas Farm Landfill Site, Indiana, USA.

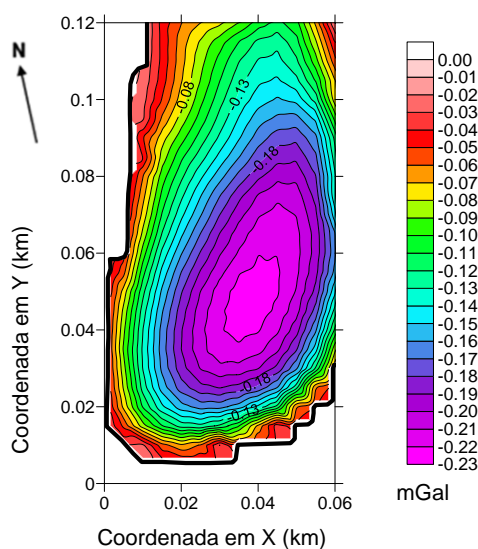


Fonte: Modificado de Roberts et al. (1991)

Segundo Roberts et al. (1991), considerando-se homogênea a distribuição de contraste de densidade, o valor de -0.53 g/cm^3 fornece o melhor ajuste com a anomalia residual (g^c).

Utilizando o valor sugerido por Roberts et al. (1991) para o contraste de densidade (-0.53 g/cm^3) e os limites do topo e da base do aterro (Figuras 19 e 20, respectivamente), calculamos o mapa da anomalia gravimétrica (Figura 24) para a porção sudoeste do aterro em estudo.

Figura 24- Anomalia Gravimétrica calculada com contraste de densidade constante e igual à -0.53 g/cm^3 .

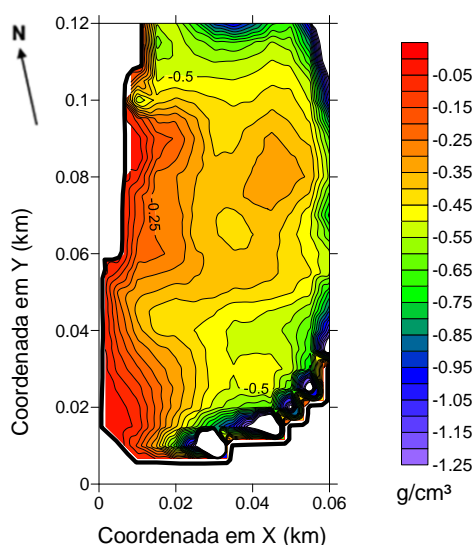


Fonte: Do autor

Comparando as anomalias gravimétricas observada (Figura 23) e a calculada com distribuição homogênea do contraste de densidade (Figura 24) nota-se que a premissa de que a distribuição do contraste de densidade do aterro é homogênea não explica completamente a anomalia observada. No mesmo artigo Roberts et al. (1991) estimam diferentes valores de densidade em três perfis gravimétricos. Assim, para obter uma anomalia calculada que melhor explique os dados observados, presumimos haver variação horizontal na distribuição do contraste de densidade em toda a extensão do aterro.

Aplicamos ao conjunto de dados do aterro Thomas Farm Landfill Site, Indiana, USA o procedimento de inversão estendida. Para obtermos a estimativa da distribuição horizontal do contraste de densidade do aterro, utilizamos como dados de entrada a anomalia gravimétrica (Figura 23) e as cotas das superfícies que limitam o aterro no topo e na base (Figuras 19 e 20 respectivamente). A seguir apresentamos os resultados obtidos com o procedimento de inversão estendida. São mostrados: na Figura 25 o mapa da distribuição do contraste de densidade estimado; na Figura 26 a anomalia gravimétrica ajustada; Figura 27 a distribuição do resíduo e o histograma; e na Figura 28 o mapa da distribuição de massa obtida. Utilizamos para o cálculo da massa do aterro a densidade do embasamento igual a 2120 kg/m^3 , segundo indicado por Robert et al. (1991).

Figura 25- Mapa da distribuição do contraste de densidade estimado com a inversão estendida.

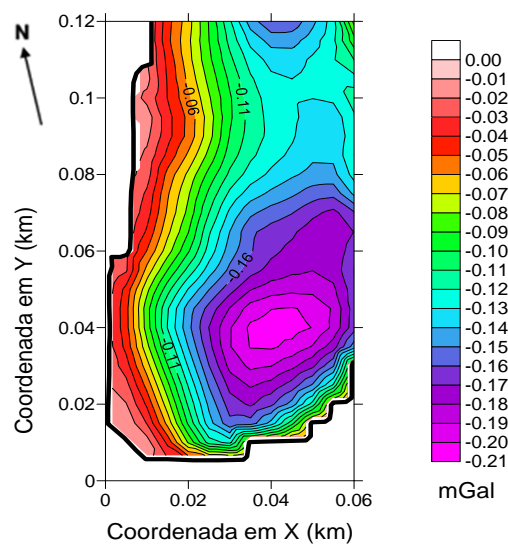


Fonte: Do autor

O mapa da Figura 25 apresenta distribuição horizontal não homogênea para o contraste de densidade estimado. A inversão linear estendida delimitou regiões de diferentes valores de contraste de densidade. Considerando que no aterro estão distribuídos detritos de construção civil, presumivelmente com pequeno contraste de

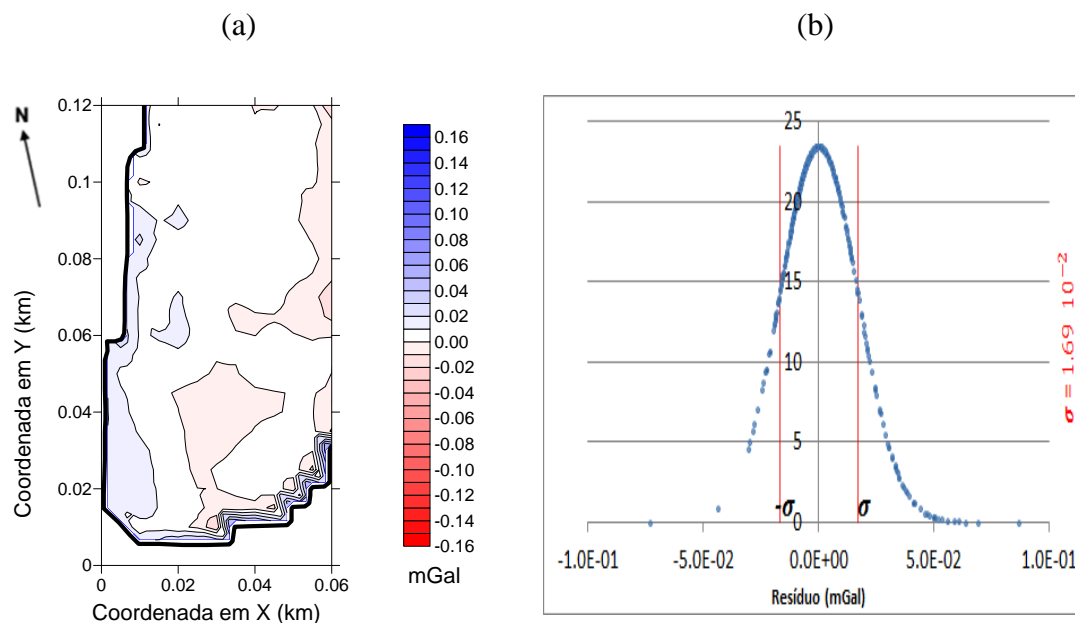
densidade e detritos de lixo urbano com maior contraste de densidade, pode haver regiões bem definidas com valores de contraste de densidade distintos, uns próximos a zero e outros maiores. Quanto à ocorrência de valores de densidade que escapam da escala mostrada, note que estas ocorrências estão localizadas nas regiões em que a topografia do topo do aterro mergulha sobre a topografia da base (ver Figura 22).

Figura 26- Mapas das anomalias gravimétricas ajustadas com a inversão estendida, utilizando o parâmetro de regularização μ igual à 10^{-7} e fator de extensão igual à 100.



Fonte: Do autor

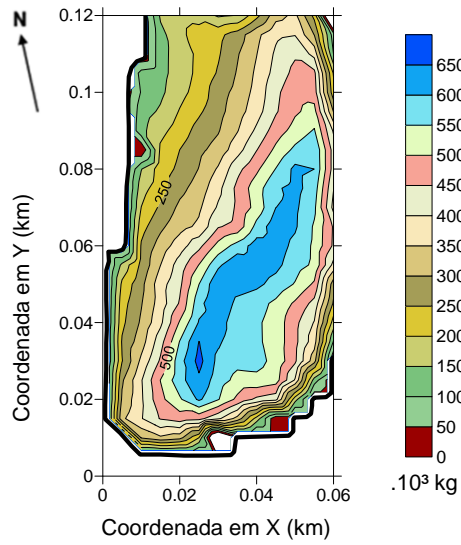
Figura 27- **(a)** Mapa da distribuição do resíduo entre a anomalia gravimétrica observada e a ajustada com a inversão estendida; **(b)** Histograma da distribuição do resíduo entre a anomalia gravimétrica observada e a anomalia gravimétrica ajustada com a inversão estendida.



Fonte: Do autor

Note que anomalia gravimétrica ajustada (Figura 26) se aproxima muito da anomalia gravimétrica observada (Figura 23) e que o desajuste da inversão estendida (Figura 27a) é da ordem de zero em praticamente todos os pontos do mapa. Note também que o histograma da Figura 27b apresenta distribuição com forma que se aproxima de uma distribuição Gaussiana e média nula, com desvio padrão de $1.7 \cdot 10^{-2}$, que corresponde a 0.8% do valor máximo da anomalia e 1.6% do valor médio da anomalia.

Figura 28- Mapa da distribuição de massa obtido com o contraste de densidade estimado (Figura 24) com a inversão estendida.



Fonte: Do autor

Note que a distribuição de massa mostrada na Figura 25 apresenta regiões muito pesadas referentes a faixas de valores maiores que $550 \cdot 10^3 \text{ kg}$.

4 CONCLUSÕES

Mostramos que o clássico problema de inversão de dados gravimétricos para estimar a distribuição do contraste de densidade de uma camada com dimensões verticais conhecidas não é efetivo se as fontes elementares têm dimensões horizontais pequenas. Esta impossibilidade de efetividade da inversão se deve a uma condição numericamente imposta a matriz sensibilidade que se torna inconvenientemente bem condicionada com simultâneos valores singulares próximos de zero.

Para contornar este problema numérico desenvolvemos um novo procedimento de inversão que consiste estender horizontalmente o modelo interpretativo e a malha das estações gravimétricas. Em seguida, estimamos uma distribuição de contraste de densidade aparente que produz uma anomalia gravimétrica predita que subestima os dados gravimétricos observados. Então, calculamos um fator de correção para cada posição do dado gravimétrico como a razão entre o dado predito e o dado observado na mesma posição. Finalmente, multiplicamos a estimativa da distribuição de contraste de densidade aparente pelo fator de correção e obtemos uma nova distribuição de contraste de densidade que produz dados gravimétricos preditos que ajustam os dados gravimétricos observados.

Testes com dados gravimétricos sintéticos produzidos por um aterro sanitário com pequenas dimensões mostraram a efetividade da metodologia desenvolvida, inclusive para delinear contatos entre regiões de diferentes valores de contraste de densidade.

Aplicamos este novo procedimento de inversão ao conjunto de dados do aterro Thomas Farm Landfill Site, Indiana, USA, cujas dimensões horizontais e vertical são da ordem de alguns poucos metros. (65 x 165 m nas direções horizontais e 13 m na profundidade máxima). Esta inversão recuperou uma estimativa da distribuição dos contrastes de densidade que delinea áreas de diferentes valores de contraste de densidade, corroborando a hipótese de deposição de diferentes materiais no aterro. Os mapas de massa estimados apresentam regiões que excedem 600 toneladas.

Outra possibilidade de aplicação deste novo método é a estimativa da susceptibilidade magnética de uma camada de pequenas dimensões.

REFERÊNCIAS

ANDERSSSEN, R. S. On the solution of certain over determined systems of linear equations that arise in geophysics. **Jornal Geophys. Res.**, 74, p. 1045-1051. 1969.

BACKUS, G.; GILBERT, F. The resolving power of gross Earth data, **Geophys. J. Royal Astron. Soc.**, 16, p. 169–205. 1968.

BACKUS, G.; GILBERT, F. Uniqueness in the inversion of inaccurate gross Earth data, **Philos. Trans. Royal Soc. London**, 266, p. 123–192. 1970.

BOTT, M. H. P.; INGELS, A. Matrix Methods for Joint Interpretation of Two-dimensional Gravity and Magnetic Anomalies with application to the Iceland-Faeroe Ridge. **Geophys. J. Royal Astron. Soc.**, 30, p. 55–67. 1972.

GREEN, W. Inversion of gravity profiles by use of a Backus and Gilbert approach. **Geophysics**, v.40, n.5, p. 763–772, 1975.

LEÃO, J.W.D; SILVA, J. B. C. Discrete linear transformations of potential field data: **Geophysics**, 54, p. 497–507. 1989.

MARTINS, C. M.; BARBOSA, V. C. F.; SILVA, J. B. C. Simultaneous 3D depth-to-basement and density-contrast estimates using gravity data and depth control at few points: **Geophysics**, 75, p. I21–I28. 2010.

MEDEIROS, W. E.; SILVA, J. B. C. Geophysical inversion using approximate equality constraints: **Geophysics**, 61, p. 1678 – 1688. 1996.

MENDONÇA, C. A. Interpolação de dados de campo potencial através da camada equivalente: Tese de doutorado, Geofísica UFPA, 1985.

MENKE, W. **Geophysical data analysis: discrete inverse theory**, theory. [S.l.]: Academic Press, 1984.

PLOUFF, D. Gravity and magnetic fields of polygonal prisms and application to magnetic terrain corrections. **Geophysics**, v.41, p.727-41. 1976.

ROBERTS, R. L.; HINZE, W. J.; LEAP, D. I. Application of the gravity method to investigation of a landfill in the glaciated midcontinent, U.S.A Invest **Geophysics**, v. 2, n.5, p.253–259. 1991.

SILVA, J. B. C.; OLIVEIRA, A. S.; BARBOSA, V. C. F. Gravity inversion of 2D basement relief using entropic regularization. **Geophysics**, v. 75, p. I29-I35. 2010.

SILVA, J. B. C.; TEIXEIRA, W. A.; BARBOSA V. C. F. Gravity data as a tool for landfill study. **Environ Geol**, 57, p. 749-757. 2009.

TIKHONOV, A. N.; ARSENIN ,V. Y. **Solutions of ill-posed problems**. [S.l.]: W. H. Winston & Sons, 1977.

TWOMEY, S. On the numerical solution of Fredholm integral equations of the first kind by the inversion of the linear system produced by quadrature: **Journal of the Association for Computing Machinery**, 10, p. 97–101. 1963.