

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

**ANÁLISE DE SISTEMAS NÃO-LINEARES E SÍNTESE DE OPERADORES
INVERSOS POR SÉRIES DE VOLTERRA DIAGONAIS**

RAPHAEL BARROS TEIXEIRA

TD: 18/2019

Belém-PA
2019

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

RAPHAEL BARROS TEIXEIRA

**ANÁLISE DE SISTEMAS NÃO-LINEARES E SÍNTESE DE OPERADORES
INVERSOS POR SÉRIES DE VOLTERRA DIAGONAIS**

Tese de doutorado submetida ao colegiado do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal do Pará, como requisito necessário para obtenção do título de Doutor em Engenharia Elétrica na área de Sistemas de Energia.

Orientador: Prof. Dr. Carlos Tavares da Costa Jr

Coorientador: Prof. Dr. Rafael Suzuki Bayma

Belém-PA

2019

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará
Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a)
autor(a)

T266a Teixeira, Raphael Barros
Análise de Sistemas Não-lineares e Síntese de
Operadores Inversos por Séries de Volterra Diagonais /
Raphael Barros Teixeira. — 2019.
xii, 105 f. : il. color.

Orientador(a): Prof. Dr. Carlos Tavares da Costa Júnior
Coorientador(a): Prof. Dr. Rafael Suzuki Bayma
Tese (Doutorado) - Programa de Pós-Graduação em
Engenharia Elétrica, Instituto de Tecnologia, Universidade
Federal do Pará, Belém, 2019.

1. Sistemas não-lineares. 2. Identificação de
sistemas. 3. Séries de Volterra. 4. Operadores inversos.
5. Análise não-linear. I. Título.

CDD 621.317

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA
**ANÁLISE DE SISTEMAS NÃO-LINEARES E SÍNTESE DE OPERADORES
INVERSOS POR SÉRIES DE VOLTERRA DIAGONAIS**

AUTOR: RAPHAEL BARROS TEIXEIRA

TESE DE DOUTORADO SUBMETIDA À BANCA EXAMINADORA APROVADA PELO COLEGIADO DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA, SENDO JULGADA ADEQUADA PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM ENGENHARIA ELÉTRICA NA ÁREA DE SISTEMAS DE ENERGIA ELÉTRICA.

APROVADA EM 22/08/2019

BANCA EXAMINADORA:

Prof. Dr. Carlos Tavares da Costa Júnior
Orientador - PPGEE/UFPA

Prof. Dr. Rafael Suzuki Bayma
Coorientador - FEE/CAMTUC/UFPA

Prof. Dr. Walter Barra Júnior
Avaliador Interno - PPGEE/UFPA

Prof. Dr. Vinícius Duarte Lima
Membro Eterno ao Programa - FAEST/ICEN/UFPA

Prof. Dr. Eduardo Luiz Ortiz Batista
Avaliador Externo - UFSC

Prof. Dr. Eduardo Mazoni Andrade Marçal Mendes
Avaliador Interno - UFMG

Prof. Dr^a. Maria Emília de Lima Tostes
Coordenadora do PPGEE/ITEC/UFPA

Ao meu pai José Ribamar Teixeira (*em memória*)
e à minha mãe Telma Maria Barros Teixeira,
pelo melhor e mais nobre dos legados.

AGRADECIMENTOS

Como já se disse, doutorado não é fácil, a vida também não! Melhor enfrentá-los em boa companhia. Eu estive com meu pai Ribamar Teixeira, a quem sou grato por seu amor, pela sua crença em mim, por seu orgulho desmedido em cada uma de nossas conquistas. À minha mãe Telma Teixeira por seu amor, sua ternura e sabedoria no enfrentamento dos desafios. Pela obstinação, energia e coragem para subverter a ordem natural das coisas dedico este trabalho a vocês dois.

Agradeço à minha amada bragantina Silvana Araújo, por seu amor, carinho e cuidado. Por estar comigo em minhas celebrações e meus lamentos nesta jornada. Por sua atenção real e interessada à teoria dos operadores funcionais não-lineares, o que fez da fisioterapeuta aquela que mais sabe das coisas todas deste trabalho, até por que sabe dele e dos difíceis desafios dos bastidores necessários para torná-lo realidade.

Ao Cayo Wendell Araújo, à Grazyle Araújo e à nossa Malu, por suas coragens para recriar junto comigo a família, esta sociedade feita de um dia depois do outro e mais amor e mais respeito, diante das transformações e dos desafios todos em nossas vidas.

Às minhas avós Maria Barros e Maria Terezinha Caldas, que não vacilaram quando os problemas de verdade chegaram perto de mim e me carregaram no colo naquele momento mais difícil desta travessia.

Ao meu irmão Ranieri Teixeira, por sua confiança, por seu amor, por desfrutar comigo de uma história que nos enche de orgulho e por, junto com a Thammy Ribeiro, nos trazer a Helena Teixeira, que hoje nos dá tanta alegria e esperança no correr da vida.

Ao coorientador deste trabalho, Prof.Dr. Rafael Suzuki Bayma, por me oferecer este tema rico e importante em possibilidades, por estar comigo nestes 5 anos de lida na busca dos resultados, pela sua enorme generosidade intelectual.

Ao meu orientador Prof. Dr. Carlos Tavares da Costa Júnior, por sua atenção, cordialidade e dedicação diante do encaminhamento do trabalho. Ao Prof. Dr. José Augusto Lima Barreiros, por me receber como orientando na etapa final de sua rica trajetória acadêmica. Ao amigo, Prof. Dr. Cleison Daniel Silva, por acompanhar atento e dar a opinião certa no desenrolar das coisas.

À Faculdade de Engenharia Elétrica e ao Campus Universitário de Tucuruí, pelo investimento de 4 anos na minha qualificação. Ao PPGEE da UFPA, seu corpo docente, pelo conhecimento e pela oportunidade. À Universidade Federal do Pará, espaço onde vivi minha formação superior e onde hoje busco contribuir com entusiasmo a formação de meus alunos.

"A gente quer passar um rio a nado, e passa; mas vai dar na outra banda é num ponto muito mais embaixo, bem diverso do em que primeiro se pensou. Viver nem não é muito perigoso?"
(Grande Sertão Veredas, João Guimarães Rosa)

Resumo

Este trabalho propõe estratégias inovadoras de análise de sistemas não-lineares e de síntese de operadores inversos por meio das séries de Volterra diagonais. Ao expressar a saída explicitamente a partir da entrada as séries de Volterra possibilitam a análise não-linear no domínio da frequência. Contudo, a natureza multidimensional do modelo confere diversas dificuldades ao seu uso sistemático. Este trabalho lança um novo olhar sobre as chamadas séries de Volterra em coordenadas diagonais, com as quais operadores Volterra são expressos como um conjunto de filtros lineares e unidimensionais que processam termos polinomiais não lineares da entrada. A proposição da forma racional para estes filtros conduz a modelos Volterra exatos e compactos, que exibem uma conexão direta com formalismos não-lineares modernos, notadamente os modelos estruturados em blocos, de Wiener e de Hammerstein, e os modelos polinomiais não-lineares auto-regressivos com entrada (NARX). Em particular, propõe-se uma estratégia para a obtenção de modelos Volterra diagonais a partir dos NARX polinomiais. A estratégia é denominada de método derivativo, em razão de depender apenas de resultados consagrados do cálculo diferencial. Isso é importante porque um modelo NARX pode se ajustar relativamente bem a dados experimentais para descrever uma ampla variedade de sistemas. O estudo subsequente da série de Volterra surge como um passo adicional natural de análise. Este resultado abre possibilidades também para a síntese não-linear. Um problema que tem recebido atenção crescente na engenharia de sistemas é o da síntese de operadores não-lineares inversos, pelos quais se busca reverter distorções geradas pelo sistema, preservando a integridade da informação de interesse. Neste caso propõe-se uma estratégia de síntese de operadores Volterra diagonais inversos, na topologia de pós-inversão, para classes particulares de modelos polinomiais não-lineares. Trata-se de uma abordagem numérica onde a síntese é conduzida por um problema de otimização que se inspira no clássico operador inverso de ordem p .

Palavras Chave: Sistemas não-lineares, série Volterra diagonais, identificação de sistemas, análise não-linear, inversão dinâmica.

Abstract

This work proposes innovative strategies for the analysis of nonlinear systems and the synthesis of inverse operators using the Volterra diagonal series. By expressing the output explicitly from the input, the Volterra series enable nonlinear analysis in the frequency domain. However, the multidimensional nature of the model confers several difficulties to its systematic use. This work takes a new look at the so-called Volterra series in diagonal coordinates, in which Volterra operators are expressed as a set of linear and one-dimensional filters that process nonlinear polynomial terms of the input. The proposition of the rational form for these filters leads to exact and compact Volterra models, which exhibit a direct connection with modern nonlinear formalisms, notably the Wiener and Hammerstein block structured models, and the non-linear, autoregressive polynomial models with exogenous input (NARX). In particular, it is proposed a strategy to obtain diagonal Volterra models from the polynomial NARX. The strategy is called derivative method, because it depends only on the established results of the differential calculus. This is important because a NARX model can fit relatively well to experimental data to describe a wide variety of practical systems. A subsequent study through the Volterra series comes as an additional natural step of analysis. This result also opens up possibilities for non-linear synthesis. A problem that has received increasing attention in systems engineering is that of the synthesis of inverse nonlinear operators, through which it tries to reverse distortions generated by the underlying system, preserving the integrity of the information of interest. In this case we propose a strategy of synthesis of Volterra inverse diagonal operators for particular classes of nonlinear polynomial models. It is a numerical approach where the synthesis is driven by an optimization problem that is inspired by the classic inverse p -order operator.

Keywords: Non-linear systems, Volterra series diagonals, systems identification, non-linear analysis, dynamic inversion

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Relação funcional em um sistema LIT.	16
Figura 2 – Diagrama de modelos bloco-estruturados.	18
Figura 3 – Diagrama de blocos da série de Volterra discreta.	22
Figura 4 – Arranjo dos termos polinomiais de segunda ordem.	24
Figura 5 – Arranjo de tomada de termos para a forma simétrica triangular.	25
Figura 6 – Tomada de coeficientes na forma simétrica diagonal.	26
Figura 7 – Inversão de uma função $y = f(x)$ (azul), realizado pela função inversa $v = g(y)$ (vermelho), que resulta na operação ideal $v = g(f(x)) \approx x$ (verde).	37
Figura 8 – Inversor dinâmico estruturado na forma de pós-inversão.	38
Figura 9 – Resposta do inversor linear para uma entrada $u(t)$ (azul). A saída do sistema é $y(t)$ (vermelho). A entrada recuperada pelo inversor é $v(t)$ (verde).	40
Figura 10 – Resposta em frequência do sistema (azul), inversor (vermelho) e equivalente (verde).	40
Figura 11 – Diagrama de blocos da estrutura de um modelo Volterra diagonal com kernels racionais.	46
Figura 12 – Dados de Identificação: Resposta do sistema Wiener a entrada <i>PRMLS</i>	53
Figura 13 – Dados de Validação: Resposta do sistema Wiener e do Modelo Diagonal a uma entrada <i>chirp</i>	54
Figura 14 – Mapa de polos \times e zeros \circ de $H(z)$ para o sistema Volterra diagonal.	56
Figura 15 – Resposta em frequência de $H(z)$ para os sistemas Wiener e diagonal.	56
Figura 16 – Resposta em frequência das diagonais $H_k(z)$, para $k = 0, 1$ e 2	57
Figura 17 – Resposta em frequência das diagonais $H_k(z)$, para $k = 10, 11$ e 12	58
Figura 18 – Energia das componentes diagonais do modelo Volterra.	59
Figura 19 – Ajuste do modelo em função da inclusão das diagonais.	59
Figura 20 – Resposta em Frequência	61
Figura 21 – Resposta dos modelos NARX, ALE, Volterra diagonal e linear a uma entrada senoidal.	77
Figura 22 – Ajuste da resposta funcional de primeira ordem, modelos ALE e Volterra diagonal.	77
Figura 23 – Ajuste funcional ALE-Diagonal de segunda ordem.	78
Figura 24 – Ajuste funcional ALE-Diagonal de terceira ordem.	78
Figura 25 – Energia das diagonais do funcional de grau 2 ordenados pelos atrasos k e pelo valor te da energia.	79

Figura 26 – Ajuste, por NRMSE, do funcional $y_2(t)$, entre os modelos ALE e Volterra diagonal truncado.	80
Figura 27 – Energia das diagonais do funcional de grau 3, ordenados pelos atrasos k e pelo valor decrescente da energia.	80
Figura 28 – Ajuste, por NRMSE, do funcional $y_3(t)$, entre os modelos ALE e Volterra diagonal truncado.	81
Figura 29 – Ajuste entre os modelos NARX e Volterra diagonal truncado medido em função da frequência da entrada.	82
Figura 30 – Resposta dos modelos NARX e diagonal para entrada aleatória.	83
Figura 31 – Resposta senoidal do sistema Duffing e recuperação da entrada por inversor Volterra diagonal analítico.	89
Figura 32 – Densidade espectral de potência dos sinais do sistema Duffing-inversor.	89
Figura 33 – Análise de resposta à entrada senoidal de inversor Volterra diagonal.	98
Figura 34 – Densidade espectral de potência para os sinais no processo de inversão: Restrições suaves para os harmônicos.	99
Figura 35 – Densidade espectral de potência para os sinais no processo de inversão: Restrições suaves para os harmônicos.	99
Figura 36 – Densidade espectral de potência para os sinais no processo de inversão - Projeto 2: Restrições mais severas para os harmônicos.	101
Figura 37 – Densidade espectral de potência para os sinais no processo de inversão: Restrições fortes para os harmônicos.	101
Figura 38 – Ajuste da resposta senoidal entre a entrada atrasada $u(t - l_d)$ e a saída recuperada pelo inversor $v(t)$ para o inversor Volterra diagonal e inversor linear.	102
Figura 39 – Recuperação senoidal magnitude.	103
Figura 40 – Recuperação senoidal de fase, em f_0	104
Figura 41 – Taxa de distorção harmônica (dB) do sinal recuperado pela amplitude da entrada.	105

SUMÁRIO

Resumo	viii	
Abstract	ix	
Lista de figuras	x	
Sumário	xii	
1	INTRODUÇÃO	1
1.1	Motivação	1
1.2	Revisão bibliográfica	3
1.3	Propostas e contribuições	7
1.3.1	<i>Operadores inversos</i>	9
1.4	Objetivos	12
1.5	Escopo do Trabalho	13
2	FUNDAMENTOS DAS SÉRIES DE VOLTERRA	15
2.1	Introdução	15
2.2	Representações Não-lineares	16
2.3	Séries Funcionais de Volterra	18
2.3.1	<i>Série de Volterra discreta</i>	21
2.4	Séries de Volterra Diagonal	23
2.4.1	<i>Forma simétrica diagonal</i>	25
2.5	Análise na Frequência de Sistemas Não-lineares	27
2.5.1	<i>Funções de Resposta em Frequência Generalizadas</i>	28
2.5.2	<i>Funções de resposta em frequência não lineares de saída.</i>	30
2.5.3	<i>Método Variacional</i>	31
2.6	Identificação de Sistemas	33
2.6.1	<i>Algoritmo OLS-ERR</i>	35
2.6.2	<i>Seleção dos dados de modelagem</i>	35
2.7	Fundamentos de operadores inversos	36
2.7.1	<i>A inversa de ordem p.</i>	41
3	REPRESENTAÇÃO E ANÁLISE NÃO-LINEAR	42

3.1	Introdução	42
3.2	Representação Paramétrica de Modelo Diagonal	42
3.2.1	<i>Resposta Senoidal de Modelo Diagonal</i>	46
3.2.2	<i>Relação com modelos de Wiener e Hammerstein</i>	48
3.3	Estudo de Caso I: Sistema Wiener	50
3.3.1	<i>Identificação do sistema Wiener</i>	51
3.3.2	<i>Análise de resposta em frequência do modelo diagonal</i>	55
3.3.2.1	<i>Componentes harmônicas do modelo Diagonal.</i>	60
3.3.3	<i>Convergência analítica da série diagonal</i>	61
4	MÉTODO DERIVATIVO	65
4.1	Introdução	65
4.2	Derivação de Modelo Volterra Diagonal	66
4.3	Estudo de Caso II: Sistema NARX	71
4.3.1	<i>Solução analítica</i>	74
4.3.2	<i>Resultados numéricos</i>	76
5	SÍNTESE DE OPERADORES INVERSOS	84
5.1	Introdução	84
5.2	Síntese de Inversores Volterra	85
5.2.1	<i>Projeto analítico: Inversão do sistema Duffing</i>	86
5.2.2	<i>Restrições à síntese analítica</i>	90
5.3	Síntese numérica de operadores inversos	91
5.3.1	<i>O problema de otimização</i>	92
5.3.2	<i>Estudo de Caso: Inversão de sistema Volterra</i>	95
5.3.3	<i>Resultados - Inversor</i>	98
6	CONCLUSÃO	107
6.1	Propostas futuras	110
	REFERÊNCIAS	112

INTRODUÇÃO

1.1 Motivação

Representação, análise e síntese de sistemas dinâmicos via modelos matemáticos são recursos indispensáveis às ciências naturais e à engenharia. A teoria de sistemas lineares constitui um corpo maduro e consolidado de conhecimento, base conceitual de importantes áreas, destacadamente a teoria de controle ([CHEN, 1999](#)) e a de processamento de sinais ([OPPENHEIM; SCHAFER, 2010](#)). Sistemas não-lineares, por outro lado, exibem grande variedade de comportamentos representados por diferentes formalismos conceituais, tornando as abordagens de análise e síntese pouco abrangentes e sistematizadas para se estabelecerem como técnicas comuns em engenharia ([KHALIL, 2017](#)).

Sistemas reais são não-lineares em última análise. Este fato explica o interesse atual por modelos que representem estes fenômenos, particularmente em sistemas de engenharia contemporâneos que operam no limite de sua eficiência, em regiões onde a linearidade é um pressuposto possivelmente falho. A identificação de sistemas por modelos polinomiais não-lineares, por exemplo, passou a contar recentemente com algoritmos bem estabelecidos para a medição dos modelos a partir de dados reais ([AGUIRRE, 2007](#)). Contudo, estratégias de análise e mesmo a utilização destes modelos em procedimentos de síntese pela engenharia de sistemas permanecem com demandas matemáticas e computacionais em aberto. É o caso, por exemplo, da análise no domínio da frequência ([BILLINGS, 2013](#)).

Sabe-se que o comportamento espectral não-linear exhibe maior complexidade comparativamente ao linear. Enquanto neste o suporte na entrada se reproduz na saída, naquele há a transferência de energia para componentes de frequência diferentes. Este é um princípio básico em sistemas dinâmicos cuja possibilidade de análise é quase inexistente em muitos formalismos não-lineares. Porém, quando se observa a importância do tradicional conceito de função de resposta em frequência (FRF) para a teoria linear, revela-se a necessidade de se buscar ferramentas equivalentes para as dinâmicas não-lineares ([XIAO; JING, 2015](#)).

Este trabalho apresenta contribuições à representação, análise e síntese de sistemas não-lineares por séries de Volterra. Formuladas por Vito Volterra (VOLTERRA, 1959) e aplicados a sistemas não-lineares por Norbert Wiener (WIENER, 1958), estas séries funcionais têm fornecido soluções importantes em muitos campos da engenharia, constituindo-se em objeto de intensa pesquisa e inovação atuais (CHENG *et al.*, 2017).

A série de Volterra estabelece uma relação funcional não-linear explícita da saída diretamente a partir da entrada do sistema, o que é concebido como a generalização da convolução linear por operadores não-lineares parametrizados por funções multidimensionais, os kernels (SCHETZEN, 1980). Uma consequência disto é a possibilidade de análise do comportamento espectral de sistemas não-lineares a partir do conceito das funções de resposta em frequência generalizadas (GFRF)¹ (GEORGE, 1959), uma extrapolação das FRFs lineares definida como a transformada multidimensional de Fourier das funções kernel. As GFRFs figuram entre os principais recursos de análise espectral não-linear contemporâneos (RIJLAARSDAM *et al.*, 2017), particularmente por expressarem as características intrínsecas do sistema, independentemente do sinal de entrada.

Ocorre que a multidimensionalidade dos kernels e das GFRF impõe limitações à determinação destas funções analiticamente, em uma estrutura algébrica fechada. A análise gráfica dos dados de resposta em frequência, notabilizada no caso linear pelos diagramas de Bode, Nyquist e Nichols, oferece grande dificuldade de geração e interpretação quando conduzida por GFRFs, mesmo para funcionais de baixa ordem (YUE*; BILLINGS; LANG, 2005a). A medição do modelo a partir de dados reais e a sua consequente análise por GFRF é um procedimento impraticável na grande maioria dos contextos reais. Outra limitação bastante reconhecida é a necessidade de uma grande quantidade de termos para se atingir níveis de aproximação desejados que expliquem a dinâmica do sistema subjacente (RUGH, 1981). Isto se deve à multidimensionalidade e ao fato de os operadores Volterra serem estruturados como filtros não-lineares de resposta finita ao impulso (FIR), cuja memória pode se mostrar excessivamente longa para não-linearidades.

Contudo, diante das possibilidades que oferecem à análise não-linear, muito esforço tem sido dedicado à busca de formulações conceituais e estratégias computacionais visando contornar estas dificuldades matemáticas e estruturais, além de sistematizar o uso das séries de Volterra em problemas de engenharia. Neste trabalho são propostas contribuições a este problema a partir das chamadas séries Volterra em coordenadas diagonais (RAZ; VEEN, 1998). Esta é uma forma que aproveita a simetria expressa nos kernels e faz uso de uma mudança de variáveis para decompor a estrutura multidimensional de cada funcional em uma série de operadores lineares e unidimensionais, de maneira que um modelo Volterra diagonal possa ser visto como um banco de filtros lineares que processam monômios polinomiais não-lineares da entrada.

Um modelo Volterra diagonal constitui exatamente a mesma relação funcional de um Volterra convencional. Sua grande vantagem é contornar o problema da multidimensionalidade, uma vez que as operações de convolução tornam-se lineares. Apesar dessa importante propriedade,

¹ Generalised Frequency Response Functions

considera-se que esta estrutura tem sido pouco explorada em trabalhos recentes. Muito provavelmente isto se deva a falta de ferramentas para: (i) medir modelos diagonais a partir de dados reais; (ii) analisar estes modelos no domínio do tempo e da frequência; (iii) obter estes modelos a partir de outras representações não-lineares, tais como modelos bloco estruturados (Wiener e Hammerstein) e polinomiais e (iv) utilizar estes modelos em estratégias de síntese não-linear. As proposições deste trabalho visam oferecer contribuições que resultem em estratégias para se lidar com estes quatro problemas elencados. Busca-se ainda sistematizar estes procedimentos para se lidar com possam aproveitados como técnicas efetivas na síntese de operadores inversos, um importante problema de engenharia de sistemas não-lineares que tem recebido grande atenção (JUNG, 2018).

No que segue é apresentada uma breve revisão da literatura buscando apontar o estado da arte de análise e síntese não-linear por séries Volterra. A seguir são tratados em maiores detalhes os problemas que se desejam atacar, em particular os contextos de aplicações de engenharia em que eles se inserem. São ainda elencados os objetivos do trabalho e as contribuições alcançadas. Ao final, o escopo e a estrutura do texto serão descritos.

1.2 Revisão bibliográfica

A teoria dos funcionais é um ramo importante da matemática sob o qual estão assentadas diversas contribuições à engenharia de sistemas dinâmicos. Sua formulação deve muito ao trabalho do matemático italiano Vito Volterra, no final do século XIX, a partir do estudo de funções que dependem de outras funções (VOLTERRA, 1887). Na perspectiva de Volterra um funcional² pode ser entendido como a generalização de uma função polinomial multivariável quando o número de variáveis aumenta indefinidamente. Em Volterra (1959) são apresentados conceitos que fundamentam a moderna análise funcional, em que operadores matemáticos são interpretados a partir de uma disposição em série de funcionais polinomiais com ordem crescente, podendo ser no limite uma série de potência infinita.

Como foi mostrado por Frechet (1910) essas séries exibem a propriedade notável de serem aproximadoras uniformes de operadores matemáticos contínuos. O resultado de Frechét encontra correspondência direta com o celebrado teorema de Weierstrass (COURANT; HILBERT, 1989), para o qual qualquer função contínua em um intervalo fechado pode ser uniformemente aproximada por uma função polinomial. Quando o tempo é incluído como variável independente, estas séries apresentam-se como um formalismo com potencial para mapear a relação entrada-saída de sistemas dinâmicos em que a saída é expressa explicitamente a partir da entrada.

Tal característica leva alguns autores (SCHETZEN, 1980) a descrever esta série funcional como uma série de Taylor com memória. Sua estrutura é composta por um operador multidimensional

² *Funcional* é um termo cunhado por Hadamard, que sintetizou a ideia de *funções de linha* de Volterra (VOLTERRA, 1959).

de convolução para cada termo funcional, sendo o operador linear o funcional de primeira ordem. Os funcionais de maior ordem expressam relações polinomiais não-lineares da entrada, de maneira que a série pode em princípio aproximar operadores dinâmicos não-lineares.

A aplicação em sistemas dinâmicos deve-se ao trabalho de Norbert Wiener³. A partir do estudo da expansão por funcionais da resposta de um circuito não-linear a um ruído branco (WIENER, 1958), Wiener desenvolve uma abordagem abrangente para aplicação em sistemas reais. Deve-se a ele também o lançamento das bases para a possibilidade de análise não-linear na frequência. Esta proposta conduz a diversos estudos ao longo das décadas de 1950 e 1960, a maioria realizada no *Research Laboratory of Electronics* (RLE) do *Massachusetts Institute of Technology* (MIT). Merece destaque nestes trabalhos a sistematização da representação dinâmica não-linear a partir de uma expansão em série de funcionais (BRILLIANT, 1958). Mas é em (GEORGE, 1959) que se apresenta o que talvez mais diferencie as séries de Volterra das demais técnicas de modelagem não-linear, a proposição das GFRF. Isto se dá pelo uso de transformada de Fourier de ordem elevada (TAO, 2012) dos núcleos das séries funcionais, o equivalente à transformada da função de resposta impulsiva do caso linear. Contudo, duas barreiras logo se apresentam para esta abordagem: (i) dificuldades técnicas e computacionais para a determinação das GFRF e (ii) a interpretação das propriedades de um sistema a partir destas funções, tendo em conta principalmente a sua natureza multidimensional.

Neste contexto, o problema de *medir* ou *identificar* os núcleos dos funcionais torna-se o principal desafio e muito esforço é dedicado à sua solução. É o caso da proposta de Barrett (1963) que a partir de uma abordagem para sistemas caixa preta desenvolve a análise não-linear em que a natureza física do sistema dá lugar a uma descrição por funcionais, ou ainda a estratégia proposta por Lee e Schetzen (1965) que faz uso de correlação e funções ortogonais para a determinação de uma representação não-linear por uma série Volterra. Em Barrett (1977) há uma revisão abrangente da bibliografia sobre representação dinâmica por expansão funcional produzida durante todo este período inicial. O problema de determinação dos funcionais que compõem a série recai em desafios ainda hoje não plenamente resolvidos, constituindo-se em uma fonte constante de contribuições ao tema (BILLINGS, 2013).

Nos anos 80, a área encontra uma grande aceitação e passa a configurar entre os formalismos ditos clássicos para o estudo de sistemas não-lineares. Os livros de Rugh (1981) e Schetzen (1980) buscam congregar o conhecimento já consolidado sobre o tema, estabelecendo os fundamentos teóricos, propriedades e restrições, como a conhecida limitação da aplicabilidade destas séries apenas a sistemas que exibem não-linearidades moderadas, ou fracas. São ainda lançados problemas referenciais que se tornaram *benchmarks* em muitos trabalhos de filtragem não-linear, como é o caso do importante problema da *p*-inversa, devido a (SCHETZEN, 1976), em que se busca formular um operador Volterra que, quando disposto em série com um segundo operador, resulta em um sistema Volterra *quase*-linear, em que os efeitos dos funcionais de ordem

³ Embora Wiener não tenha referido Volterra em sua formulação.

elevada podem ser desprezados.

Neste contexto os trabalhos de [Boyd e Desoer \(1984\)](#) e [Boyd e Chua \(1985\)](#) mostram-se particularmente relevantes ao determinarem critérios mais rigorosos acerca das possibilidades de modelagem por série Volterra a partir do conceito de memória assintótica. Mostra-se que a aplicabilidade só é possível para sistemas cuja saída dependa de valores recentes da entrada, de maneira que a influência do passado remoto possa ser desprezada. Esta ideia associa-se ainda ao estudo da estabilidade da série, que já tinha uma formulação prévia baseada em convergência da série em torno de um ponto de equilíbrio estável ([EYKHOFF, 1974](#)).

Estes resultados abriram espaço pra uma gama de aplicações reais, em que a série passou a ser tratada como um modelo polinomial discreto, para o qual tanto a ordem quanto a memória dos operadores devem ser truncados em algum valor finito. O trabalho de [Mathews e Sicuranza \(2000\)](#) confere um tratamento mais pragmático e contemporâneo às séries Volterra, ao descrevê-las como filtros polinomiais não-lineares no tempo discreto. Dessa forma, o modelo passa a ser expresso como uma equação de diferença polinomial não-linear cujos termos dependem unicamente da entrada. Por ser esta uma estrutura linear nos parâmetros a identificação por algoritmos de regressão é facilitada.

O modelo assim posto possui correspondência com os não-lineares com entrada exógena (NARX)⁴, proposta por ([LEONTARITIS; BILLINGS, 1985](#)), para os quais um modelo Volterra pode ser considerado um caso particular. O trabalho de [Koremborg, Billings e Liu \(1987\)](#) critica a aplicação do consagrado algoritmo de mínimos quadrados na identificação destes modelos não-lineares, propõe a aplicação de uma estratégia por mínimos quadrados ortogonais (OLS), e estabelece o conceito da taxa de redução do erro (ERR), como critério para a seleção dos termos relevantes em um modelo polinomial não-linear, a partir da informação contida nos dados de identificação. O algoritmo OLS-ERR tornou-se uma estratégia exitosa para identificação de modelos polinomiais não-lineares ([AGUIRRE, 2007](#)), ([BILLINGS, 2013](#)), ([BAYMA; LANG, 2014](#)) e é um paradigma comum a partir dos quais modelos Volterra discretos passaram a ser identificados.

Um grande esforço também tem sido conduzido no desenvolvimento de algoritmos para a determinação e interpretação de GFRFs. Além do método baseado em funcionais ortogonais de [Lee e Schetzen \(1965\)](#), merecem destaque a abordagem variacional ([RUGH, 1981](#)) que resulta em GFRFs explícitas não-paramétricas e o método *probing* ([JONES; BILLINGS, 1989](#)) que computa uma GFRF de ordem elevada de maneira recursiva, a partir das GFRFs de menor ordem. Essas abordagens constituem estratégias bem estabelecidas em termos matemáticos e computacionais, contudo exibem grande complexidade, devido à necessidade de operar transformações de Fourier em espaços multidimensionais, problema que algumas contribuições recentes ([BAYMA; LANG, 2012](#)) têm buscado contornar.

A busca por uma caracterização de fenômenos não-lineares a partir de estruturas de

⁴ Nonlinear Auto-Regressive with exogenous Input

representação de baixa complexidade e dimensionalidade é uma questão aberta com intensa atividade de investigação recente (CHENG *et al.*, 2017) e que tem levado a uma série de formulações (RIJLAARSDAM *et al.*, 2017). É o caso das funções de resposta em frequência não-lineares da saída (NOFRF)⁵ (LANG; BILLINGS, 2005), que modelam comportamentos não-lineares no domínio da frequência, com o inconveniente de agregarem características da entrada. Ou ainda as funções de resposta em frequência da saída (OFRF)⁶ (LANG *et al.*, 2007), que analisam os efeitos no espectro do sistema devidos a variação dos parâmetros do modelo, o que é conhecido como caracterização paramétrica. Esta abordagem tem gerado aplicações importantes em análise e projeto (ZHU; LANG, 2017), apesar das dificuldades para a determinação analítica destas funções.

Uma representação Volterra que tem recebido grande atenção nos últimos anos é a baseada em um conjunto de equações lineares associadas (ALE)⁷ (WORDEN; STANWAY, 2005). Estas equações de diferença oferecem uma maneira de determinar os funcionais de uma série Volterra a partir de um modelo polinomial ou mesmo de uma equação diferencial. Cada funcional é expresso como a solução de uma ALE. O conjunto de ALEs é solucionado recursivamente, a componente funcional de ordem n depende das de ordem inferior e possivelmente da entrada do sistema. Algoritmos específicos têm sido projetados para a determinação do conjunto ALE seja pela clássica estratégia variacional (RUGH, 1981) ou por formulações mais sofisticadas que permitem, por exemplo, determinar o conjunto de ALEs de um modelo NARX para um número arbitrário de termos (BAYMA; ZHU; LANG, 2018).

A aplicação das séries de Volterra tem sido bastante difundida em diversos sistemas de engenharia. Merecem ser destacados problemas como o cancelamento do eco acústico (GUÉRIN; FAUCON; BOUQUIN-JEANNÈS, 2003) e o controle ativo de ruído (HASSANI; KARAMI, 2015); a modelagem de sistemas fisiológicos (MARMARELIS, 2012). Em neurociência as séries têm sido utilizadas na detecção dos chamados potenciais evocados (FRISTON *et al.*, 2000), que são padrões não-lineares de resposta a estímulos observados no eletroencefalograma (EEG); na supressão de ruído do próprio EEG (HASSANI; KARAMI, 2015), o que tem suscitado soluções para áreas como interface cérebro computador baseadas em séries Volterra (NORCIA *et al.*, 2015). Em filtragem não-linear de imagem (SICURANZA, 2000) as séries aliam a supressão dos efeitos do ruído à preservação das bordas; no processamento e reconhecimento de voz (KROT; TKACHOVA; GONCHAROV, 2000). Avanços recentes em monitoração de estruturas mecânicas (SHIKI, 2016) ou em diagnóstico de faltas baseados em informações espectrais dos núcleos Volterra (BAYMA; LANG, 2014). Aplicações como estas tem permitido situar as séries Volterra como um dos mais importantes paradigmas de filtragem não-linear contemporâneos (MATHEWS; SICURANZA, 2000).

⁵ Nonlinear Output Frequency Response Function

⁶ Output Frequency Response Functions

⁷ Associated Linear Equations

1.3 Propostas e contribuições

Este trabalho parte da série Volterra em coordenadas diagonais visando desenvolver estratégias para a representação, medição, análise e síntese de sistemas Volterra. A principal motivação para isto é a verificação de que tal formalismo efetivamente resolve o problema da multidimensionalidade. Apesar disso os trabalhos que exploram modelos diagonais o fazem baseados muito mais nas suas vantagens computacionais (ZELLER; KELLERMANN, 2010) ou estruturais (MATHEWS; SICURANZA, 2000) do que propriamente visando utilizar estas propriedades para atacar demandas importantes da engenharia de sistemas não-lineares. As propostas deste trabalho buscam lançar luz sobre as séries diagonais e desenvolver abordagens efetivas de análise e síntese não-linear com esta ferramenta.

Propõe-se inicialmente uma alteração estrutural nos filtros Volterra diagonais. Enquanto na literatura estes operadores são tratados exclusivamente como filtros de resposta finita ao impulso (FIR) (MATHEWS; SICURANZA, 2000), admite-se aqui sua representação como filtros de resposta infinita ao impulso (IIR). Isto tem como consequência imediata o fato de a série Volterra diagonal passar a exibir termos auto-regressivos em sua formulação e conduz a uma parametrização do modelo. Com isso algumas vantagens da nova estrutura são evidenciadas. Mostra-se que em termos estruturais a forma IIR recai em uma equação de regressão linear nos parâmetros que possibilita o uso de técnicas de identificação de sistemas para a medição de modelos a partir de dados experimentais. Isto é vantajoso pois algoritmos de identificação são hoje bem fundamentados e difundidos, como o caso do OLS-ERR (BILLINGS, 2013). Além disso, a nova formulação permite a conversão para o domínio da frequência de forma bastante direta. A própria estabilidade do modelo pode ser analisada não mais a partir da ideia de convergência da série, mas pelo bem conhecido conceito linear de posição dos polos das componentes diagonais. Mostra-se que a nova formulação permite ainda que interpretações de conceitos físicos do comportamento do sistema sejam verificados analiticamente. É o caso, por exemplo, da geração de harmônico de modelos Volterra a partir da resposta senoidal em regime permanente. Verifica-se ainda a relação dos modelos diagonais propostos com outros formalismos de representação não-linear, em particular os modelos estruturados em bloco de Wiener e de Hammerstein. Estas propriedades representam inovações e avanços em relação às formulações atuais.

A estrutura proposta é avaliada a partir do estudo de caso de um sistema Wiener, caracterizado por uma dinâmica linear em série com uma não-linearidade polinomial estática na saída. A partir de dados gerados computacionalmente procede-se com a identificação do modelo Volterra utilizando o algoritmo OLS-ERR. O modelo diagonal identificado é analisado no domínio da frequência de uma forma relativamente direta, sendo que a análise é toda conduzida a partir de conceitos tradicionais como a localização de polos e zeros. O modelo resultante mostra-se mais compacto que um Volterra convencional de mesmo desempenho. O uso do sistema Wiener é particularmente relevante por exibir uma representação Volterra exata e permitir que a análise seja conduzida analiticamente, o que corrobora os resultados da estratégia numérica.

O custo do modelo ser estruturado a partir de um banco de filtros lineares é que cada componente funcional passa a ser decomposto em diversos termos. Visando simplificar a estrutura identificada propõe-se então o conceito de energia das componentes diagonais, definido como a norma quadrática da resposta em frequência de cada componente. Isto permite selecionar as componentes mais representativas, sendo esta estratégia proposta visando a simplificação a posteriori dos modelos identificados.

Embora os resultados alcançados para a identificação sejam consistentes é fato que a medição de um modelo Volterra pode se mostrar excessivamente custosa, mesmo para uma estrutura diagonal. Isto é absolutamente verdadeiro para sistemas que demandam componentes funcionais de ordem mais elevada. Uma abordagem mais pertinente neste caso é a de identificar modelos polinomiais com maior capacidade de representação dinâmica, como um NARX polinomial, para então proceder com a análise a partir de um equivalente Volterra. O problema desta perspectiva reside no mapeamento do modelo NARX para o Volterra. Duas metodologias se destacam na literatura para este propósito, o método *probing* (JONES, 2007), baseado em uma estratégia algébrica que formula relações recursivas entre os kernels ou as GFRFs, e o método diaphantino (BAYMA; ZHU; LANG, 2018) um algoritmo numérico que determina o conjunto de ALEs do modelo NARX. Contudo estas estratégias são baseadas em conceitos multidimensionais, cujas dificuldades foram apontadas.

Este trabalho propõe então uma metodologia para a determinação de um modelo Volterra diagonal a partir de um NARX. O método inicia com a determinação do conjunto de ALEs cujas componentes funcionais se deseja incorporar ao modelo, ou se mostram suficientes para uma aproximação razoável. Mostra-se então que ao se conceber os funcionais como uma série de potência e se computar a taxa de variação de cada componente funcional na ALE em relação aos monômios não-lineares de entrada, recai-se em uma equação de diferença linear cuja solução fornece a componente diagonal correspondente. O resultado permite então determinar um modelo Volterra diagonal equivalente, que aproxime um NARX de ordem arbitrária. Por ser baseado inteiramente em resultados consagrados do cálculo diferencial esta estratégia foi denominada de método derivativo e foi publicado em (TEIXEIRA *et al.*, 2018).

Como o resultado do método derivativo é um modelo Volterra expresso em coordenadas diagonais, todas as vantagens desse formalismo podem ser diretamente aproveitadas. A análise de um modelo NARX pode ser conduzida então no domínio do tempo ou da frequência a partir de uma aproximação Volterra equivalente. A sistematização desta abordagem pode ser sequenciada em uma estrutura algorítmica que envolve: (i) identificação de modelo NARX a partir de dados reais (BILLINGS, 2013); (ii) determinação do conjunto de ALEs (BAYMA, 2014); (iii) Aplicação do método derivativo ao conjunto de ALEs para a obtenção do modelo Volterra diagonal (TEIXEIRA *et al.*, 2018); (iv) Análise do modelo diagonal no domínio do tempo e da frequência pelas abordagens aqui propostas. Esta sequência em muito se assemelha àquela comumente empregada no caso linear e evidencia a importância do método proposto como uma contribuição relevante à análise de

sistemas não-lineares com representação Volterra. As propriedades lineares como a transformação de domínio tempo-frequência ou a avaliação da saída via superposição dos efeitos de múltiplas entradas são amplamente aproveitadas no novo cenário.

Procedeu-se então com um segundo estudo de caso para um sistema NARX polinomial, onde se busca verificar a aplicação do método derivativo. O sistema foi desenhado de maneira que os funcionais de graus 1 a 3 de um modelo Volterra diagonal oferecessem uma boa aproximação do NARX. Inicialmente o conjunto de ALEs representativas das três componentes funcionais foram determinadas. Pela aplicação do método derivativo, determinou-se então três equações de diferenças cujas soluções levaram à diagonal representativa do funcional linear e de equações analíticas fechadas que geram as componentes diagonais de segunda e terceira ordem do modelo Volterra. Resultados de ajuste foram obtidos no domínio do tempo e da frequência por estratégias numéricas e analíticas e demonstram a viabilidade do método para a determinação do equivalente Volterra de um modelo NARX. Uma série de procedimentos de análise foram então verificados, no tempo e na frequência, em particular a estratégia de simplificação do modelo obtido a partir do conceito de energia das componentes diagonais foi refinado, de onde foram estabelecidos procedimentos para a determinação do conjunto de componentes que conduz à aproximação de cada funcional.

Esses resultados exitosos do ponto de vista de representação, identificação e análise motivaram a investigação da série Volterra diagonal para a aplicação em um problema de grande importância em projetos de engenharia de sistemas: a síntese de operadores inversos.

1.3.1 Operadores inversos

Em engenharia de sistemas existe a preocupação fundamental em preservar o conteúdo espectral que compõe a informação de interesse. Se os sistemas operam em uma região linear, este requisito costuma ser garantido por meio filtros lineares, projetados para atenuar componentes de frequência indesejadas. Por outro lado, quando a operação atinge regiões onde as não-linearidades são relevantes, fenômenos como a geração de harmônicos passam a produzir conteúdo espectral que não pode ser isolado por operações de filtragem convencionais. Neste caso, uma solução comum de engenharia é a utilização de operadores inversos (JUNG, 2018), os quais compensam distorções provenientes do sistema, recuperando a integridade espectral da informação processada.

Um operador de inversão⁸ é um bloco dinâmico que busca reverter o processamento de um sinal realizado por um sistema. Ou seja, é o bloco que executa o mapeamento entrada-saída na ordem inversa visando reconstruir a entrada. De forma geral, duas topologias se destacam: a pré-inversão, quando o operador precede o sistema, e a pós-inversão, do contrário. Para sistemas Volterra a inversão dinâmica foi classicamente formulada a partir do conceito de p -inversa (SCHETZEN, 1976). Este é um operador que quando disposto em cascata com um sistema produz

⁸ No contexto deste trabalho a inversão equivale à equalização não-linear.

um equivalente cuja representação Volterra exhibe apenas a componente funcional de primeira ordem com energia relevante, de modo que o comportamento global do sistema se aproxima do caso linear (ALIZADEH; RÖNNOW, 2016). Algumas estratégias de inversão baseadas em séries de Volterra tem sido propostas para casos particulares de não-linearidades, é o caso por exemplo dos equalizadores de ponto fixo (NOWAK; VEEN, 1997), do inversor cego não-linear (GIANNAKIS; SERPEDIN, 1997), dos filtros Wiener (TSENG; POWERS, 1993) e o método raiz (REDFERN; ZHOU, 1998). A grande dificuldade do uso destas abordagens é a multidimensionalidade.

Operadores inversos possuem grande demanda em etapas comuns de diversos sistemas eletrônicos modernos tais como a amplificação de potência (SCHOUKENS; HAMMENECKER; COOMAN, 2017), a conversão analógico digital (XIAO *et al.*, 2008), a modulação por largura de pulso (PWM) (CHIERCHIE; AASE, 2015) e a equalização de canais de comunicação (BEIDAS, 2011), (TANNIR; KHAZAKA, 2007). Estes blocos exibem efeitos não-lineares que podem degradar a eficiência dos sistemas. Na operação dos amplificadores, por exemplo, a saturação é um fenômeno típico quando a operação se dá com ganhos elevados. Na amplificação de sinais de comunicação regiões de operação não-lineares costumam ser atingidas para elevar a eficiência do sistema. Contudo a distorção devida à saturação compromete a eficiência do canal ao poluir bandas adjacentes com conteúdo espectral gerado pelas não-linearidades. Neste caso, para evitar a degradação dos sinais o uso de operadores inversos torna-se estritamente necessário (TUMMLA *et al.*, 1997).

Os sistemas elencados são fundamentais para diversas áreas da engenharia elétrica, destacadamente os sistemas de controle, de processamento de sinais, de telecomunicações e de processamento de energia. A despeito de cada contexto, quando as não-linearidades presentes nestes sistemas são moderadas, estes podem admitir uma representação Volterra. Efeitos da memória devidos à presença de elementos indutivos e capacitivos tornam relevante também que o projeto de inversão seja considerado no domínio da frequência. Algumas formulações de síntese destes operadores buscam expressar o projeto por soluções analíticas (CARINI; SICURANZA; MATHEWS, 1997), ou seja, operadores com funções kernel bem definidas e fechados, derivados a partir do modelo Volterra do sistema e das condições de p -inversão (RUGH, 1981). Embora esta estratégia tenha o mérito da busca por soluções gerais para o problema, ela sempre está restrita a classes particulares devido à complexidade das relações funcionais envolvidas quando dois operadores não-lineares interagem. Isto permite considerar que uma abordagem sistemática para a síntese de operadores inversos parece ainda não ter se consolidado, e estratégias numéricas que ofereçam soluções factíveis não podem ser desconsideradas.

Neste trabalho propõe-se a investigação das séries Volterra diagonais como formalismo para a síntese de operadores inversos não-lineares. Os resultados atingidos nas etapas de representação e análise expressam uma expectativa de que modelos Volterra diagonais ofereçam um caminho que possibilite aproveitar sua estrutura unidimensional visando a síntese de operadores inversos não-lineares no domínio do tempo e da frequência. Busca-se sintetizar estes operadores para sistemas NARX polinomiais que possuam uma representação Volterra. Discute-se inicialmente

as limitações da estrutura geral de um modelo NARX que impossibilitam a condução do projeto do operador de inversão por uma abordagem analítica. A estratégia proposta é então conduzida numericamente e parte da formulação de um problema de otimização com uma função custo associada à distorção do sinal e restrições que refletem as condições de p -inversão. O projeto busca então determinar o operador de inversão que minimiza a função custo ao tempo em que atende a um conjunto de restrições.

A topologia investigada é do tipo pós-inversa, de forma que o operador de inversão processa a saída do sistema buscando recuperar a entrada com algum grau de fidelidade. A estratégia de síntese numérica baseia-se na minimização da taxa de distorção harmônica (THD) de um conjunto de senoides que são processadas pelo sistema e recuperadas na saída do operador de inversão. O problema é formulado então por uma função custo definida como a soma das THD de cada senoide em uma dada frequência de projeto, sendo desta forma um problema de otimização não-linear. As restrições de magnitude e fase de cada sinal constituem um conjunto de equações de igualdade, uma vez que é desejável que estes parâmetros no sinal de saída do inversor sejam os mesmos da entrada do sistema. As condições de p -inversão são relaxadas ao admitir que a energia do conjunto de harmônicos de saída do inversor sejam menores que a de um dado limiar. Essas condições constituem um conjunto de restrições de desigualdade. O projeto busca então determinar o operador de inversão que minimiza a função custo ao tempo que atende às restrições para um conjunto de senoides dentro de uma faixa de magnitude ampla, dentro da qual o sistema completo possui um comportamento quase-linear.

A estratégia numérica proposta tem o mérito de consolidar uma abordagem sistemática que passa pela identificação do sistema por estruturas polinomiais, como um modelo NARX, a possibilidade de análise através do método derivativo e a síntese do operador de inversão. A principal limitação do projeto está associada à dependência do sinal de entrada, em particular à frequência de operação do sistema. Isto por que a síntese é realizada considerando diversos sinais senoidais em uma frequência particular, com diferentes valores de amplitude. Embora este seja um cenário restrito, este é o caso de muitos sistemas reais tais como canais de comunicação que operam com uma banda de frequência estreita ou mesmo de sistemas de energia, em que a frequência de operação é fixa.

Um estudo de caso é desenvolvido buscando apresentar a estratégia para o projeto de um operador inverso para um modelo NARX polinomial. O operador de inversão projetado como um Volterra diagonal mostrou-se capaz minimizar as distorções nos sinais processados e recuperar a entrada do sistema com fidelidade. Seu desempenho foi avaliado em diferentes cenários no domínio do tempo e da frequência, de maneira que o projeto do operador de inversão baseado em uma estrutura Volterra diagonal apresenta-se como uma ferramenta potencial para atacar o problema da inversão dinâmica não-linear em problemas reais de engenharia.

1.4 Objetivos

Os objetivos do trabalho podem então ser sumarizados a partir da investigação de estratégias para representação, identificação, análise e síntese não-linear no tempo e na frequência por sistemas Volterra em coordenadas diagonais. Para tanto, são estabelecidos os seguintes objetivos específicos:

1. Realizar uma ampla revisão tanto da literatura clássica, desde a proposição das séries funcionais de Volterra até suas formulações contemporâneas. Apontar as principais tendências de aplicação e desafios de pesquisa abordados nos dias atuais;
2. Rever os modelos Volterra diagonais buscando expressá-los na forma paramétrica, como uma série de filtros lineares que processam composições não-lineares da entrada. Estabelecer relações destes modelos com outros formalismos não-lineares, notadamente os modelos estruturados em bloco e os NARX polinomiais;
3. Rever algoritmos e estratégias de identificação de sistemas não-lineares, em particular o algoritmo de mínimos quadrados ortogonais associado a taxa de redução do erro (OLS-ERR), como estratégia para medição de modelos a partir de dados de entrada e saída de sistemas dinâmicos;
4. Implementar algoritmos computacionais, em plataforma Matlab, para identificação dos modelos Volterra diagonais e NARX polinomiais a partir do algoritmo OLS-ERR. Apontar estratégias de simplificações dos modelos diagonais identificados a posteriori, buscando determinar o conjunto de componentes diagonais mais representativas;
5. Desenvolver uma abordagem sistemática de análise no domínio da frequência a partir dos modelos diagonais. Apontar o uso de conceitos clássicos de análise nestes sistemas, notadamente: a localização de polos e zeros, a estabilidade, e a análise espectral a partir das FRF unidimensionais;
6. Estabelecer uma metodologia para a determinação de um equivalente Volterra diagonal de um modelo NARX polinomial. Utilizar estratégias de análise nos modelos equivalentes e estabelecer correspondências com o modelo NARX original;
7. Desenvolver uma estratégia numérica para a síntese de operadores inversos representados por sistemas Volterra em coordenadas diagonais. A metodologia deve propor mecanismos para a formulação do problema de otimização não-linear, tanto para a função custo quanto para as restrições;
8. Avaliar as proposições e desenvolvimentos do trabalho por meio de estudos de caso com modelos de sistemas não-lineares propostos.

1.5 Escopo do Trabalho

Considera-se que o trabalho atingiu seus objetivos propostos, tendo como resultado contribuições inovadoras no campo da representação, análise e síntese não-linear por séries de Volterra em coordenadas diagonais. Além deste capítulo de introdução, o trabalho é desenvolvido em outros cinco, cujo conteúdo é assim estruturado:

No capítulo 2 apresenta as fundamentações teóricas para o desenvolvimento da proposta do trabalho. Mostra-se a formulação das séries de Volterra desde o conceito de funcional, até suas estruturas discretas mais contemporâneas, sendo discutidas suas virtudes e limitações. São derivadas importantes propriedades da série, explora-se a simetria das funções núcleo como paradigma que tem levado a uma maior compacidade da série. A forma simétrica diagonal é derivada, conforme exposto na sua proposição original, de onde são mostradas propriedades importantes da sua estrutura, como a natureza unidimensional dos seus operadores. O capítulo trata ainda da análise no domínio da frequência de modelos Volterra, a partir do conceito de GFRE, e das propostas contemporâneas. As ALEs são apresentadas a partir do método variacional. Apresenta-se a estratégia de identificação de um modelo não-linear com estrutura polinomial por estratégias de regressão, de onde se expõe o algoritmo OLS-ERR. Mostra-se ainda a estratégia que é seguida no trabalho de seleção aleatória das amostras dos sinais de identificação e validação.

O capítulo 3 parte da proposição adotada para o modelo Volterra diagonal, que passa aqui a ser descrito por filtros IIR. Mostra-se como principais implicações desta estratégia a admissão de termos auto-regressivos no modelo, o qual fica parametrizado em uma equação de regressão. Esta oferece vantagens ao permitir a utilização de algoritmos de identificação para a medição de modelos a partir de dados reais do sistema. Mostra-se ainda como a nova estrutura facilita e torna possível a análise no domínio da frequência do modelo proposto. Um estudo de caso é implementado, baseado na identificação e análise do modelo Wiener pela nova estrutura. A análise no domínio da frequência é realizada para o modelo tomando as FRF das componentes diagonais. Os resultados são confrontados com um modelo analítico, derivado a partir do sistema Wiener, o que corrobora os resultados. e analisa-se a convergência da série Volterra expressa no modelo FVD à formulação exata deste sistema.

O capítulo 4 apresenta o método derivativo, como proposição para o determinação de um equivalente Volterra diagonal de um modelo NARX. Discute-se inicialmente a necessidade da determinação de um equivalente Volterra visando a análise ou síntese não-linear. Abordam-se os métodos probing e diophantino como técnicas propostas para esta finalidade. Apresenta-se então resultados baseados no cálculo multivariável que mostram como obter equações de diferença a partir de um conjunto de ALEs de um modelo NARX e de como a solução destas equações recaem nas componentes diagonais de um modelo Volterra. O capítulo apresenta o estudo de caso de um modelo NARX polinomial para o qual uma série Volterra diagonal é determinada. O resultado é avaliado em diferentes por métricas de ajustes e de simplificação de modelo. A análise é realizada

numérica e analiticamente.

O capítulo 5 apresenta a síntese de operadores inversos para sistemas não-lineares. Parte-se de uma forma geral do modelo NARX e discute-se os cenários particulares em que é possível determinar os operadores como uma estrutura algébrica fechada. Um exemplo de projeto de um operador inverso exato é implementado para um sistema Duffing, resultados de inversão no domínio do tempo e da frequência são apresentados. Discute-se as limitações desta estratégia analítica para classes mais abrangentes de modelo NARX. Propõe-se então a abordagem numérica, utilizando estratégias de otimização, com o problema formulado a partir das condições de p -inversão. Um estudo de caso para o projeto de um operador inverso de um sistema Volterra diagonal é discutido. Diversos resultados de análise são discutidos e apontam para as virtudes e fragilidades da estratégia.

O capítulo 6 apresenta as conclusões do trabalho sendo apontados direcionamentos visando o aprimoramento e estudos futuros do tema.

FUNDAMENTOS DAS SÉRIES DE VOLTERRA

2.1 Introdução

Este capítulo estabelece os fundamentos para a proposta deste trabalho. Em princípio são apresentados representações não lineares clássicas de sistemas dinâmicos, em particular os modelos bloco-estruturados e os NARX polinomiais. Desenvolve-se então uma formulação consistente das séries de Volterra desde o conceito de funcional até sua disposição em série de potências visando a aproximação uniforme de um sistema dinâmico não-linear.

A partir da forma discreta da série de Volterra, discutem-se seus aspectos estruturais e propriedades. Verifica-se como o uso de simetrias expressas pelas funções kernel podem conduzir a modelos com maior compacidade. Neste contexto, deduz-se a série diagonal, de onde se destaca a formulação expressa por convoluções unidimensionais de qualquer componente funcional.

Revisam-se abordagens de análise no domínio da frequência por séries Volterra, a saber: GFRF e NOFRF. Apontam-se os principais problemas destas funções que limitam sua aplicabilidade em determinados contextos. Apresenta-se o algoritmo de mínimos quadrados ortogonais e a taxa de redução do erro, que compõem o algoritmo OLS-ERR, como paradigma de determinação dos parâmetros e seleção de termos de um modelo polinomial não-linear identificado a partir de dados medidos.

O capítulo é concluído com um estudo de caso da representação Volterra diagonal de um sistema Wiener, onde são apresentados os procedimentos e conceitos para a identificação do modelo e a análise não linear no domínio da frequência.

2.2 Representações Não-lineares

Um sistema dinâmico pode ser representado matematicamente como um mapeamento, realizado por um operador $\mathcal{H}\{\cdot\}$, entre um conjunto de sinal da entrada \mathcal{U} e outro da saída \mathcal{Y} . Pela natureza dinâmica tanto estes sinais quanto o operador podem evoluir no tempo $t \in \mathbb{R}$. Assim, quando uma entrada $u(t)$ é aplicada a $\mathcal{H}\{\cdot\}$, a saída gerada é

$$y(t) = \mathcal{H}\{t, u(t)\}. \quad (2.1)$$

Sabe-se que um sistema linear constitui uma classe particular para o qual dadas entradas quaisquer $\{u_1(t), u_2(t)\} \in \mathcal{U}$ que produzem, respectivamente, $\{y_1(t), y_2(t)\} \in \mathcal{Y}$, quando combinadas na forma $u(t) = \alpha_1 u_1(t) + \alpha_2 u_2(t)$ geram como saída $y(t) = \alpha_1 y_1(t) + \alpha_2 y_2(t)$. A linearidade é caracterizada por esta superposição dos sinais combinada à homogeneidade devida aos escalares α_1 e α_2 . Por negação, qualquer sistema que *não* atenda a pelo menos uma destas propriedades é dito não-linear.

Este comportamento pode ser estruturado considerando o processamento da informação por meio de combinações lineares dos atrasos da entrada na geração da saída. Assim, $y(t)$ pode ser explicitamente descrita por $u(t)$ ao se computar continuamente sua influência sobre a saída, o que é representado pela integral de convolução

$$y(t) = \int_0^{\infty} h(\tau) u(t - \tau) d\tau, \quad (2.2)$$

cuja estrutura pressupõe causalidade, pois a saída em t não é afetada por informações posteriores a t . A memória é ilimitada e o sistema é caracterizado por $h(\tau)$, definida como *resposta impulsiva* ou núcleo (*kernel*). Como esta função não depende de t , o sistema é do tipo linear e invariante no tempo (LIT). Um operador LIT $\mathcal{H}\{\cdot\}$ mapeando $u(t)$ em $y(t)$ na Figura 1 ilustra esta ideia.

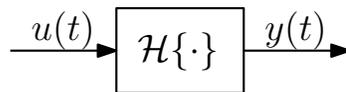


Figura 1 – Relação funcional em um sistema LIT.

Dada a grande variedade de sistemas que não obedecem ao princípio da superposição, diversos formalismos de modelagem matemática não-linear têm sido propostos. Para o caso do tempo t discreto uma consideração pertinente é tomar o operador $\mathcal{H}\{\cdot\}$ como uma função não linear $\mathcal{F}\{\cdot\}$ de atrasos dos sinais de entrada e saída do sistema, o que pode ser representado na forma:

$$y(t) = \mathcal{F}\{u(t-1), u(t-2), \dots, u(t-L), y(t-1), y(t-2), \dots, y(t-L)\}, \quad (2.3)$$

sendo L o atraso máximo das variáveis. Esta estrutura compreende uma classe de modelos importante, com grande aplicabilidade e capacidade de representação, denominados modelos

não-lineares, auto-regressivos com entrada (NARX)¹ (LEONTARITIS; BILLINGS, 1985). Dentre as muitas possibilidades de escolha para $\mathcal{F}\{\cdot\}$, a estrutura polinomial se destaca pela simplicidade matemática dos seus termos, a grande capacidade de aproximação destas funções e a linearidade com relação aos parâmetros do modelo. Neste contexto, (2.3) pode ser expressa conforme estabelecida em (BAYMA, 2014) como

$$Ay(t) = Bu(t) + \sum_{m=1}^M c_m \prod_{l=1}^L y(t-l)^{p(m,l)} u(t-l)^{q(m,l)}, \quad (2.4)$$

onde M e L são respectivamente o número de termos polinomiais não lineares e o atraso máximo das variáveis do modelo, p e q são a potência com que cada variável aparece em um determinado termo, enquanto A e B são operadores lineares de deslocamento temporal, tais que

$$Ay(t) = y(t) + \sum_{l=1}^L a_l y(t-l) \quad e \quad (2.5)$$

$$Bu(t) = \sum_{l=1}^L b_l u(t-l). \quad (2.6)$$

Note-se que $p(m,l)$ e $q(m,l)$ são inteiros não negativos, de modo que

$$\sum_{l=1}^L p(m,l) + q(m,l) \geq 2 \quad (2.7)$$

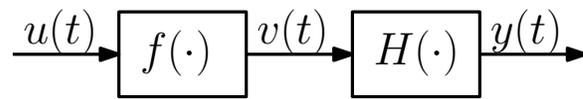
constitui o grau do m -ésimo termo polinomial não-linear.

Modelos NARX têm sido aplicados a uma vasta gama de sistemas reais e exibem boa capacidade de representação dinâmica a partir de uma estrutura compacta, embora sua natureza implícita e recursiva exija a simulação do modelo para $u(t)$ no intervalo completo de t a fim de determinar a saída $y(t)$ correspondente. Além disso, estes modelos não permitem a caracterização do sistema a partir de ferramentas de análise de resposta em frequência, por exemplo.

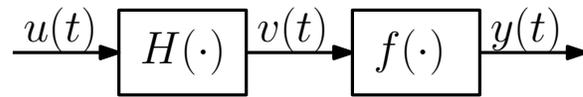
Outra classe importante de modelos não-lineares é a de bloco-estruturados, realizada a partir da interconexão de blocos dinâmicos lineares e estáticos não-lineares. Entre as principais topologias destes modelos estão os sistemas de Hammerstein e o de Wiener. A Figura 2a apresenta o diagrama de um sistema de Hammerstein, em que o bloco estático não-linear atua sobre a entrada gerando uma variável intermediária $v(t)$ que é processada pelo bloco linear $H(\cdot)$ na geração da saída $y(t)$. Para o sistema de Wiener, mostrado na Figura 2b, a ordem dos blocos linear e não-linear é invertida.

Estas estruturas têm a vantagem de produzirem modelos compactos, com grande apelo em situações práticas onde a natureza da não linearidade $f(t)$ é conhecida. Contudo, a falta de acesso a variável intermediária $v(t)$ e a não linearidade paramétrica do modelo dificultam a aplicação de estratégias de identificação.

¹ Do inglês: Nonlinear Auto-Regressive with eXogenous input.



(a) Sistema de Hammerstein.



(b) Sistema de Wiener.

Figura 2 – Diagrama de modelos bloco-estruturados.

Uma classe particular de sistemas não lineares, com importantes aplicações práticas e que se destaca por admitir a possibilidade de análise no domínio da frequência, é aquela em que a saída é explicitamente descrita como uma série de funcionais polinomiais da entrada, conhecida por séries de Volterra. A formulação destes modelos a partir do conceito de funcional visando a representação dinâmica compreende uma rica abordagem conceitual e teórica que fundamenta as proposições deste trabalho.

2.3 Séries Funcionais de Volterra

A teoria dos funcionais constitui um campo importante da matemática comumente remetida aos trabalhos de Vito Volterra (VOLTERRA, 1959). O conceito pode ser estabelecido a partir de uma função polinomial multivariável fazendo o número de variáveis aumentar indefinidamente. Considera-se, por exemplo, uma função polinomial de primeiro grau ²

$$y = \sum_{i=a}^b h_i x_i, \quad (2.8)$$

cujos parâmetros h_i ponderam cada variável x_i em y . Se o número de variáveis aumentar indefinidamente não é mais possível ordená-las sequencialmente, sendo mais apropriado representá-las por uma função contínua, com variável independente t , na forma

$$y = \int_a^b h(t)x(t)dt. \quad (2.9)$$

Nestas condições, y passa a depender da função $x(t)$ e os parâmetros h_i necessitam ser agregados na função $h(t)$. A relação é computada por uma soma contínua sobre um intervalo $[a, b]$. Diz-se assim que y é um funcional de $x(t)$, e que $h(t)$ é o *kernel* (núcleo) do funcional. A correspondência de (2.9) com (2.2) é evidente.

² Grau refere-se à soma dos expoentes dos fatores de um termo polinomial.

Esta ideia pode ser estendida para o caso em que o grau da função polinomial não é unitário. Considerando, por exemplo, uma forma polinomial de segundo grau tem-se

$$y = \sum_{i_1=a_1}^{b_1} \sum_{i_2=a_2}^{b_2} h_{i_1 i_2} x_{i_1} x_{i_2}. \quad (2.10)$$

Novamente, quando cada conjunto de variáveis x_{i_1} e x_{i_2} é extrapolado, y passa a representar um funcional em $x(t_1)$ e $x(t_2)$, sendo determinado por uma integração *bidimensional*

$$y = \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} h_2(t_1, t_2) x(t_1) x(t_2) dt_1 dt_2, \quad (2.11)$$

com parâmetros $h_{i_1 i_2}$ compreendidos na função contínua de duas variáveis $h_2(t_1, t_2)$ e o funcional.

A generalização desta ideia parte da função polinomial n -ésimo grau

$$y = \sum_{t_1=a_1}^{b_1} \cdots \sum_{t_n=a_n}^{b_n} h_{t_1, \dots, t_n} x_{t_1} \cdots x_{t_n}, \quad (2.12)$$

que é extrapolada para o funcional

$$y = \int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_n}^{b_n} h_n(t_1, \dots, t_n) \prod_{i=1}^n x(t_i) dt_i, \quad (2.13)$$

com kernel $h_n(t_1, \dots, t_n)$, cujo sub-índice n é uma forma usual de denotar o grau.

Como (2.12) é formada apenas por termos de grau n , o funcional (2.13) é dito *homogêneo*, uma vez que ao se tomar $x(t) \rightarrow \alpha x(t)$, para $\alpha \in \mathbb{R}$, então

$$y = \alpha^n \int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_n}^{b_n} h_n(t_1, \dots, t_n) \prod_{i=1}^n x(t_i) dt_i. \quad (2.14)$$

Isto permite conceituar (2.13) como funcional polinomial homogêneo de n -ésimo grau.

Agora, considera-se a realização de diversas instâncias de (2.12):

$$y_a = \sum_{t_1=a_1}^{b_1} \cdots \sum_{t_n=a_n}^{b_n} h_{a, t_1, \dots, t_n} x_{t_1} \cdots x_{t_n}, \quad (2.15)$$

$$y_{a+1} = \sum_{t_1=a_1}^{b_1} \cdots \sum_{t_n=a_n}^{b_n} h_{a+1, t_1, \dots, t_n} x_{t_1} \cdots x_{t_n}, \quad (2.16)$$

$$\dots \quad (2.17)$$

$$y_b = \sum_{t_1=a_1}^{b_1} \cdots \sum_{t_n=a_n}^{b_n} h_{b, t_1, \dots, t_n} x_{t_1} \cdots x_{t_n}. \quad (2.18)$$

Como cada y_i possui o seu próprio conjunto de parâmetros h_{i, t_1, \dots, t_n} , o índice i de cada coeficiente corresponde ao do polinômio. Se o número de realizações for extrapolado, com o intervalo (a, b) contínuo em t , as realizações podem ser agrupadas em

$$y_n(t) = \int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_n}^{b_n} h_n(t, t_1, \dots, t_n) \prod_{i=1}^n x(t_i) dt_i. \quad (2.19)$$

Com isso chega-se ao conceito de funcional estabelecido por Volterra, ou seja, uma função $y_n(t)$ definida a partir de um operador n -dimensional sobre uma outra função $x(t)$.

Sabe-se que a expansão de uma função em série de potências permite expressar relações matemáticas sofisticadas em uma estrutura analítica. Um exemplo desta capacidade é enunciado no teorema de Weierstrass (COURANT; HILBERT, 1989), o qual afirma que uma função contínua $f(x)$ em um intervalo $[a, b]$ pode ser uniformemente aproximada por um polinômio de ordem³ N arbitrária, na forma

$$y = \sum_{n=0}^N c_n x^n. \quad (2.20)$$

Dada a natureza polinomial dos funcionais e sua forte analogia com o próprio conceito de função, Volterra definiu o que chamou de funcional regular de ordem N , dado pela disposição em série de funcionais $y_n(t)$ com grau regularmente crescente

$$y(t) = \sum_{n=0}^N y_n(t). \quad (2.21)$$

Como mostrado em (FRECHET, 1910), esta série de funcionais pode aproximar uniformemente operadores que relacione duas funções em um intervalo $[a, b]$. Neste sentido, (2.21) possui uma correspondência direta com o teorema de Weierstrass para aproximação de funções. Note-se que este é precisamente o contexto de um sistema dinâmico $\mathcal{H}\{\cdot\}$ de entrada $u(t)$ e saída $y(t)$, de onde se supõe que esta relação possa ser uniformemente aproximada por uma série de série de Volterra de N -ésima ordem, como é conhecido o funcional regular

$$y(t) = \mathcal{H}\{t, u(t)\} \approx \sum_{n=0}^N y_n(t). \quad (2.22)$$

A ideia de aproximação uniforme está associada ao fato de que (2.22) é tão melhor, quanto maior for N .

Ao se passar de um contexto puramente matemático para uma perspectiva menos abstrata, que envolve a representação de sistemas dinâmicos, os funcionais $y_n(t)$ são descritos de maneira alternativa, tendo como principal diferença em relação à (2.19), uma mudança de variável para que o tempo possa se associar explicitamente à causalidade e ao efeito da memória. Além disso, o limite assumido para o conjunto de variáveis independentes varre todos os valores possíveis, recaindo na forma

$$y_n(t) = \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty h_n(t - \tau_1, \dots, t - \tau_n) \prod_{i=1}^n u(\tau_i) d\tau_i. \quad (2.23)$$

Esta definição guarda uma correspondência direta com a integral de convolução, o que se verifica quando $n = 1$ e a série recai no operador linear, equivalente a (2.2). Como consequência mais

³ Ordem de uma série equivale ao seu termo de maior grau.

profunda desta formulação, ao incluir termos de grau maior que 1 a série passa a exibir funcionais *não-lineares*. Com isso pode-se supor que quando a soma parcial dada em (2.22) é extrapolada em *infinitos* termos funcionais a expansão em série de Volterra de um sistema dinâmico não-linear pode ser, em princípio, determinada por

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n(t), \quad (2.24)$$

onde

$$y_n(t) = \int_0^{\infty} \cdots \int_0^{\infty} h_n(\tau_1, \dots, \tau_n) \prod_{i=1}^n u(t - \tau_i) d\tau_n. \quad (2.25)$$

Esta forma do funcional é mais comum que (2.23), onde a memória passa a se associar ao deslocamento do sinal de entrada, o que é realizado com uma troca de variável. O kernel $h_n(\tau_1, \dots, \tau_n)$ é uma função real, multivariável e invariante no tempo, que corresponde a uma generalização da resposta impulsiva. Cada funcional pode ser assim interpretado como uma operação de convolução em um espaço multidimensional.

2.3.1 Série de Volterra discreta

A forma contínua da série de Volterra, dada por (2.24), possui maior aplicabilidade do ponto de vista teórico matemático, na definição de conceitos e propriedades (RUGH, 1981). As estratégias que a empregam para fins de modelagem dinâmica necessitam determinar de forma precisa e analítica os kernels dos funcionais, o que nem sempre é possível. Deste modo, a série contínua é de difícil determinação e pouco comum em aplicações.

A forma discreta da série (ALPER, 1965) mostra-se mais pertinente para aplicações de filtragem não-linear por se apresentar especialmente apropriada para abordagens computacionais. Neste sentido, a série discreta é o paradigma que prevalece no contexto de aplicações contemporâneas, conforme apresentado em (MATHEWS; SICURANZA, 2000), sendo esta a estrutura do modelo que fundamenta este trabalho.

Assim sendo, um sistema dinâmico não-linear, com entrada $u(t)$ e saída $y(t)$, definidas no tempo discreto $t \in \mathbb{Z}$ pode ser representado por uma série de Volterra discreta de N -ésima ordem

$$y(t) = \sum_{n=1}^N y_n(t), \quad (2.26)$$

com os funcionais $y_n(t)$ dados por

$$y_n(t) = \sum_{k_1=0}^L \cdots \sum_{k_n=0}^L h_n(\tau_1, \dots, \tau_n) \prod_{i=1}^n u(t - \tau_i) \quad (2.27)$$

onde L é o atraso máximo de cada fator do termo polinomial. Note-se que as funções $h_n(\tau_1, \dots, \tau_n)$ são generalizações da resposta ao impulso, e passam a ser expressas por um conjunto de valores

constantes, cada qual definido para um arranjo possível dos valores de atrasos discretos τ_i , de maneira que a série se apresente como uma equação de diferença polinomial e linear nos parâmetros. Esta última propriedade é particularmente importante no contexto de modelagem matemática por permitir o uso de estratégias de regressão linear para a determinação dos coeficientes polinomiais.

A Figura 3 apresenta a série discreta estruturada em diagrama de blocos, onde $\mathcal{H}_n\{\cdot\}$ denota um operador funcional de n -ésimo grau em $u(t)$,

$$y_n(t) = \mathcal{H}_n\{u(t)\}. \quad (2.28)$$

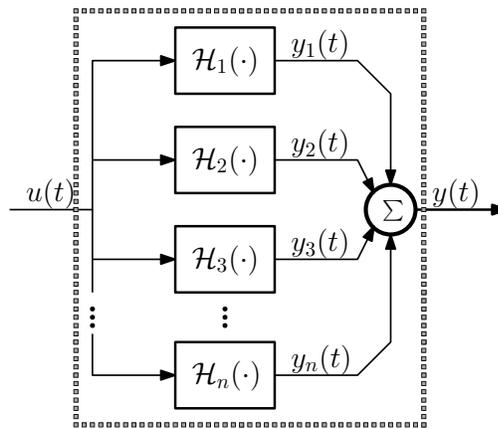


Figura 3 – Diagrama de blocos da série de Volterra discreta.

Embora a série admita um termo de ordem nula ($n = 0$) em (2.24), sua ocorrência não é previsto na forma discreta adotada. O termo funcional correspondente h_0 é uma constante que está associado ao ponto de equilíbrio sob qual se busca aproximar o sistema. Como se sabe, ainda que este não seja nulo, é sempre possível fazer uma transformação de maneira que essa condição seja satisfeita no modelo.

O limite superior de truncamento adotado da ordem N finita em (2.26) é uma necessidade imposta do ponto de vista computacional. Além disso, dado que a série expressa uma aproximação uniforme do sistema à medida que sua ordem aumenta, é pertinente considerar algum valor limite a partir do qual a contribuição das componentes funcionais deixa de ser relevante. Como verificado em (BOYD; CHUA, 1985), este é o caso dos sistemas com memória assintótica, que são estáveis em torno de algum ponto de equilíbrio e a saída não exhibe dependência funcional para valores da entrada com atrasos muito elevados. Esta categoria de sistemas é também descrita como de não-linearidade fraca (SCHETZEN, 1980), em contraposição aqueles de categoria forte, que exibem fenômenos como estrutura variável, bifurcações ou mesmo caos, para os quais uma representação Volterra não se mostraria possível.

Nota-se ainda, em (2.27), que qualquer permutação possível do conjunto de atrasos τ_1, \dots, τ_n expressa um valor $h_n(\tau_1, \dots, \tau_n)$ que pondera sempre o mesmo sinal $\prod_{i=1}^n u(t - \tau_i)$.

Isto gera, em princípio, um problema de ambiguidade, ao possibilitar que diferentes realizações da série representem um mesmo sistema dinâmico. Contudo, é possível impor que os kernels apresentem apenas uma combinação dos índices τ_i , o que resulta nas chamadas formas simétricas, as quais são aproveitadas para fins de melhoria da estrutura do modelo. Esta propriedade é explorada em detalhe na próxima seção, que busca estabelecer a forma simétrica diagonal, objeto de estudo deste trabalho.

2.4 Séries de Volterra Diagonal

A série de Volterra no tempo discreto, conforme definida em (2.26), apresenta alguns inconvenientes de natureza estrutural que podem dificultar sua aplicação. É o caso do número de parâmetros a se determinar, que cresce com a ordem e memória dos funcionais do modelo. Além disso, a estrutura multidimensional exige a implementação de convoluções em espaços de alta dimensão, ao custo de elevado tempo e processamento computacional (MATHEWS; SICURANZA, 2000).

Um grande esforço tem sido conduzido buscando abordagens e estratégias que possam superar ou minimizar estes problemas estruturais da série. Uma estratégia comum é a busca por padrões de simetria entre os termos polinomiais dos funcionais a partir dos quais simplificações estruturais possam ser introduzidas. Para melhor entendimento desta abordagem será ilustrada, para diferentes padrões de simetria, a forma como os coeficientes dos termos polinomiais de um funcional de grau 2 são inseridos em um modelo.

Assim sendo, seja o funcional

$$y_2(t) = \sum_{\tau_1=0}^L \sum_{\tau_2=0}^L h_2(\tau_1, \tau_2) \prod_{i=1}^2 u(t - \tau_i), \quad (2.29)$$

cujos padrões com que os atrasos τ_1 e τ_2 são implementados é observado na Figura 4. Cada ponto representa um termo correspondente de (2.29), e.g.: (0, 2) corresponde ao termo $h_2(0, 2)u(t)u(t - 2)$.

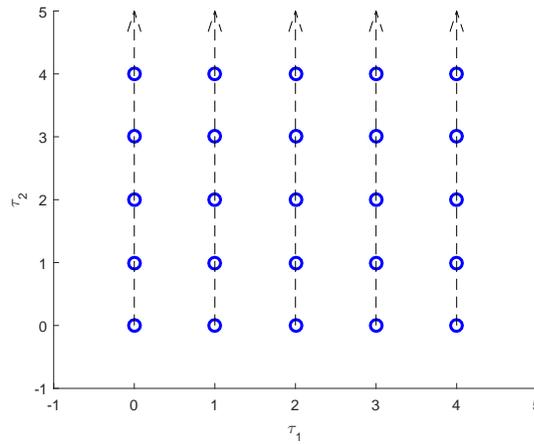


Figura 4 – Arranjo dos termos polinomiais de segunda ordem.

Por este arranjo verificado na tomada dos termos, esta forma padrão do funcional é chamada de retangular. Notar que se for considerada a propriedade de simetria, como os termos $h_2(\tau_1, \tau_2)$ e $h_2(\tau_2, \tau_1)$ multiplicam o mesmo monômio de entrada $u(t - \tau_1)u(t - \tau_2)$, o funcional passa a ser composto por apenas um destes arranjos, o que eliminaria termos com $\tau_1 > \tau_2$. Nesta perspectiva (2.29) é ambígua e computacionalmente ineficiente.

Ao se impor a condição proposta ao kernel, chega-se ao que é definido como forma simétrica *triangular*, que explora a simetria de termos quando os índices são permutados, ou seja: os atrasos (τ_1, τ_2) produzem um termo que pode ser agrupado ao seu simétrico, de maneira que o funcional possa ser redefinido como:

$$y_2(t) = \sum_{\tau_1=0}^{\infty} \sum_{\tau_2=\tau_1}^{\infty} h_2^s(\tau_1, \tau_2) u(t - \tau_1) u(t - \tau_2) \tag{2.30}$$

onde

$$h_2^s(\tau_1, \tau_2) = \frac{1}{2} (h_2(\tau_1, \tau_2) + h_2(\tau_2, \tau_1)) \quad \text{se: } \tau_1 \neq \tau_2, \tag{2.31}$$

$$h_2^s(\tau_1, \tau_2) = h_2(\tau_1, \tau_1) \quad \text{se: } \tau_1 = \tau_2. \tag{2.32}$$

Neste caso $h_2^s(\tau_1, \tau_2)$ é uma função simétrica⁴. A Figura 5 ilustra a tomada de termos para (2.30). Fica evidente que além da redução do número de termos, uma implicação desta simetrização é a redução do número de operações de soma e multiplicação no cômputo do funcional, o que deve conduzir a um melhor desempenho que a forma retangular.

Apesar desta melhoria a forma triangular não altera em nada o aspecto mais determinante para a complexidade de um funcional de Volterra: a sua natureza multidimensional, a qual exige algoritmos sofisticados para a implementação de convoluções. Contudo, um outro arranjo dos

⁴ Embora o sobre-índice ^s seja omitido na notação subsequente, os kernels serão sempre considerados simétricos em relação ao conjunto de atrasos.

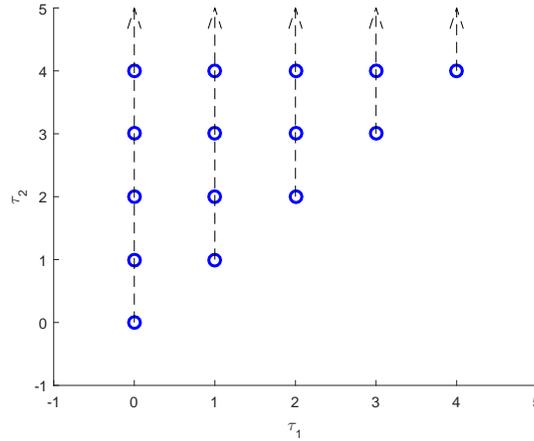


Figura 5 – Arranjo de tomada de termos para a forma simétrica triangular.

termos da sequência polinomial lança luz sobre este problema, e conduz a uma forma simétrica peculiar, cuja estrutura mostra-se vantajosa em relação às simetrias convencionais.

2.4.1 Forma simétrica diagonal

Considera-se inicialmente, sem perda de generalidade, a expansão do funcional de segunda ordem, com simetria triangular, dado por (2.30), nas suas componentes polinomiais:

$$\begin{aligned}
 y_2(t) = & h_2(0,0)u(t)^2 + h_2(1,1)u(t-1)^2 + h_2(2,2)u(t-2)^2 + \dots \\
 & + h_2(0,1)u(t)u(t-1) + h_2(1,2)u(t-1)u(t-2) + h_2(2,3)u(t-2)u(t-3) \dots \\
 & + h_2(0,2)u(t)u(t-2) + h_2(1,3)u(t-1)u(t-3) + h_2(2,4)u(t-2)u(t-4) \dots \quad (2.33)
 \end{aligned}$$

Agora, agrupando as sequências de acordo com o padrão expresso nos termos de atraso como

$$\begin{aligned}
 y_2(t) = & \sum_{\tau=0}^{\infty} h_2(\tau, \tau) u(t-\tau)^2 \\
 & + \sum_{\tau=0}^{\infty} h_2(\tau, \tau+1) u(t-\tau)u(t-\tau-1) \\
 & + \sum_{\tau=0}^{\infty} h_2(\tau, \tau+2) u(t-\tau)u(t-\tau-2) + \dots \quad (2.34)
 \end{aligned}$$

Nota-se que, nas somas parciais geradas a dependência da função $h_2(\cdot)$ sai de duas variáveis, τ_1 e τ_2 , para apenas uma, τ , ocorrendo o mesmo com o produto dos termos de entrada. Além disso, essas somas parciais diferem em apenas um atraso e, como consequência mais importante do rearranjo, passam a representar somas de convolução lineares unidimensionais. Seguindo com o desenvolvimento, $y_2(t)$ pode perfeitamente ser dado por

$$y_2(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\tau=0}^{\infty} h_2(\tau, \tau+k) u(t)u(t-\tau-k), \quad (2.35)$$

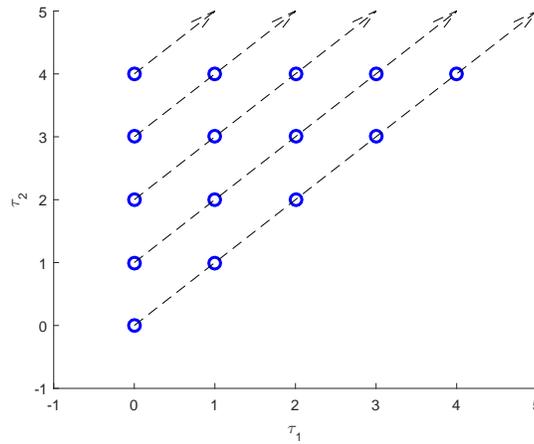


Figura 6 – Tomada de coeficientes na forma simétrica diagonal.

onde para cada k , $h_2(\tau, \tau + k)$ pode ser compreendida como uma componente do kernel de segunda ordem, que processa o sinal correspondente $u(t)u(t - \tau - k)$. Dito de outra forma, o funcional $y_2(t)$ passa a ser expresso como uma série de filtros lineares com resposta impulsiva $h_2(\tau, \tau + k)$, que processam monômios quadráticos da entrada $u(t)u(t - \tau - k)$.

A Figura 6 ilustra a tomada de termos em (2.35). Notar que o número de coeficientes é o mesmo em relação a forma triangular, isto é importante por que ressalta o fato de que a transformação não incorreu na perda nem inclusão de qualquer informação relevante na estrutura do modelo. Porém, a maneira como os termos são introduzidos na soma é diferente. A orientação com que os coeficientes são escolhidos dá origem ao nome do funcional em coordenadas diagonais. Seguindo o mesmo procedimento, resultados semelhantes podem ser atingidos para funcionais de ordem superior. De fato, a generalização para um funcional $y_n(t)$, com kernel n -dimensional $h_n(\tau_1, \dots, \tau_n)$ em simetria triangular, é obtida simplesmente procedendo com uma transformação de índices τ_l na forma

$$\begin{cases} \tau_1 = \tau \\ \tau_l = \tau + k_{l-1}, \quad l \in \{2, 3, \dots, n-1\}, \end{cases} \quad (2.36)$$

Isto conduz a uma série de convoluções lineares unidimensionais

$$y_n(t) = \sum_k h_k(t) * u_k(t) \quad (2.37)$$

onde $*$ denota convolução, sendo definidos:

$$\mathbf{k} = \{k_1, k_2, \dots, k_{n-1}\}, \quad (2.38)$$

$$h_{\mathbf{k}}(t) \triangleq h_n(t, t + k_1, \dots, t + k_{n-1}) \quad \text{e} \quad (2.39)$$

$$u_{\mathbf{k}}(t) \triangleq u(t) \prod_{l=1}^{n-1} u(t - k_l). \quad (2.40)$$

sendo \mathbf{k} o conjunto de termos de atraso cuja aplicação na estrutura do funcional resulta nos kernels diagonais correspondentes $h_{\mathbf{k}}(t)$. Estas novas funções são filtros lineares que processam o sinal $u_{\mathbf{k}}(t)$ e representam seções dos kernels originais parametrizadas em (2.38). A notação adotada deixa o grau do funcional de cada diagonal implícito em (2.38). Esses índices de atrasos determinam a estrutura dos filtros diagonais, de maneira que é pertinente denotar cada diagonal utilizando-os como sub-índice de (2.39) e de (2.40), devendo estar claro que estas são funções de uma única variável, t .

Note que para um dado \mathbf{k} , (2.40) depende inteiramente da entrada $u(t)$, enquanto o kernel diagonal correspondente depende totalmente de $h_n(\tau_1, \dots, \tau_n)$. Isso permite afirmar que (2.39) congrega toda a informação das propriedades invariantes do sistema. É pertinente notar que o maior valor de atraso especificado, dado por $d = \max(\mathbf{k})^5$, determina a quantidade de componentes diagonais em cada funcional, sendo este um parâmetro importante para a definição da estrutura do sistema.

A forma diagonal apresenta-se assim como uma maneira diferente de interpretar um funcional, simplesmente alterando a forma como cada termo é adicionado à estrutura polinomial, preservando toda informação fundamental do sistema. A estrutura (2.37) é computacionalmente mais eficiente que a triangular quando algoritmos eficazes de convolução, como os baseados em FFT⁶, são usados. Esta representação foi desenvolvida em (RAZ; VEEN, 1998) e encontra importantes aplicações, como em (TAN; JIANG, 2001) onde a partir da formulação original é desenvolvida uma estratégia adaptativa para o controle ativo de ruído, ou em (ZELLER; KELLERMANN, 2010) onde uma estratégia de filtragem não-linear robusta é implementada.

Contudo, a despeito dos avanços introduzidos no contexto de séries Volterra, considera-se que a estratégia diagonal possui um potencial para análise de sistemas não lineares no domínio da frequência que até então parece ter sido subestimado. Neste trabalho, são investigadas estratégias que visam dar contribuição tanto na melhoria das propriedades estruturais deste formalismo de representação, quanto explorar parte do seu potencial de análise e síntese não-linear no domínio da frequência.

2.5 Análise na Frequência de Sistemas Não-lineares

Quando um sistema linear é submetido a uma excitação senoidal sua resposta em regime permanente exibe uma senoide de mesma frequência, diferindo da entrada possivelmente apenas em amplitude e no deslocamento de fase. Este princípio fundamental em análise linear é a base de diversas áreas das engenharias e pode ser genericamente caracterizado pelo conceito de função de resposta em frequência (FRF). Essas funções são estruturadas algebricamente e representam

⁵ $\max(\cdot)$ é a função máximo.

⁶ Fast Fourier Transform

a relação entrada e saída no domínio da frequência, sendo definidas a partir dos operadores de transformação tempo-frequência de Laplace e Fourier.

Pela transformada de Fourier pode-se expressar o espectro $X(\omega)$, sendo ω a frequência angular, de um sinal $x(t)$ de tempo contínuo por meio de

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt, \quad (2.41)$$

a síntese de $x(t)$ a partir de $X(\omega)$ é dado pela transformação inversa

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t} d\omega. \quad (2.42)$$

Por outro lado, em um sistema não-linear uma série de efeitos dinâmicos concorrem na geração de um espectro de saída com frequências bastante diversificadas daquelas do sinal de entrada. Isto é bem evidente em efeitos tipicamente não-lineares tais como a geração de harmônicos e a intermodulação. Embora sejam fenômenos comuns, a grande maioria dos formalismos não-lineares não oferece possibilidade para abordá-los para fins de análise ou síntese, uma vez que sua formulação é restrita ao domínio do tempo.

2.5.1 Funções de Resposta em Frequência Generalizadas

Um atrativo das séries Volterra é a perspectiva de análise não-linear no domínio da frequência. Isto se tornou possível a partir do conceito de função de resposta em frequência generalizada (GFRF) (GEORGE, 1959). Para se apresentar o conceito de GFRF é pertinente rever a definição de FRF ordinária, do caso linear. Então, para um sistema linear com entrada $y(t)$ e saída $u(t)$, no tempo t contínuo, viu-se que a expansão por série de Volterra recai exatamente na integral de convolução, ou seja, o funcional de primeira ordem da série

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)u(t - \tau)d\tau. \quad (2.43)$$

Ao se substituir nesta operação os sinais de entrada e saída a partir da sua composição espectral, tem-se:

$$\int_{-\infty}^{\infty} Y(\omega)e^{j\omega t} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \left[\int_{-\infty}^{\infty} U(\omega)e^{j\omega(t-\tau)} d\omega \right] d\tau \quad (2.44)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-j\omega\tau} d\tau U(\omega)e^{j\omega t} d\omega \quad (2.45)$$

Resolvendo a integral interna do lado direito, resulta:

$$\int_{-\infty}^{\infty} Y(\omega)e^{j\omega t} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega)U(\omega)e^{j\omega t} d\omega \quad (2.46)$$

de onde

$$Y(\omega) = H(\omega)U(\omega), \quad (2.47)$$

sendo que $H(\omega)$ a função de resposta em frequência definida como a transformada de Fourier da função de resposta impulsiva do sistema

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (2.48)$$

Agora, tomando o caso mais geral, em que o sistema é não linear e representável por uma série Volterra, sabe-se que a saída é decomposta pela série de funcionais

$$y(t) = \sum_{n=1}^N y_n(t). \quad (2.49)$$

E como a transformação de Fourier é linear o espectro da saída neste caso também é dado pela soma dos espectros dos funcionais, ou seja:

$$Y(\omega) = \sum_{n=1}^N Y_n(\omega), \quad (2.50)$$

onde:

$$y_n(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Y_n(\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (2.51)$$

Conforme apresentado em (LANG; BILLINGS, 1996), seguindo um procedimento similar ao utilizado para o caso linear, ou seja, ao se aplicar em (2.25) as definições do espectro do funcional e do sinal de entrada, a composição espectral de uma componente funcional resulta

$$Y_n(\omega) = \int_{\sigma=\omega_1+\dots+\omega_n} H_n(\omega_1, \dots, \omega_n) \prod_{i=1}^n U(\omega_i) d\sigma \quad (2.52)$$

de maneira que a determinação de $Y_n(\omega)$ é dada por uma integração no hiperplano $\sigma = \omega_1 + \dots + \omega_n$. A função $H_n(\omega_1, \dots, \omega_n)$ expressa a transformada de Fourier n -dimensional do kernel de n -ésima ordem do sistema, sendo assim denominada de GFRF, e definida como:

$$H_n(\omega_1, \dots, \omega_n) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} h_n(\tau_1, \dots, \tau_n) \prod_{i=1}^n e^{-j\omega_i\tau_i} d\tau_i, \quad (2.53)$$

enquanto a transformação inversa sobre (2.53) resulta no kernel Volterra correspondente

$$h_n(\tau_1, \dots, \tau_n) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} H_n(\omega_1, \dots, \omega_n) \prod_{i=1}^n e^{j\omega_i\tau_i} d\omega_i. \quad (2.54)$$

Este resultado evidencia o fato de que as GFRF e os kernels de uma série Volterra constituem maneiras distintas de se referir às mesmas informações invariantes do sistema em domínios diferentes. Seguindo desenvolvimento similar, para t no tempo discreto a GFRF é definida como

$$H_n(\omega_1, \dots, \omega_n) = \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{k_n=-\infty}^{\infty} h_n(k_1, \dots, k_n) e^{-j(\omega_1 k_1 + \dots + \omega_n k_n)}. \quad (2.55)$$

Note-se que para $n = 1$, a definição de GFRF recai em (2.48), o caso linear.

A GFRF assim definida constitui uma extrapolação da ideia de FRF para dinâmicas não lineares. Dado que a transformada de Fourier da resposta impulsiva define a FRF $H(\omega)$ e congrega as propriedades espectrais do sistema, a mesma interpretação é atribuída ao conjunto de GFRFs, que passam a constituir um recurso importante para o estudo das propriedades invariantes do sistema no domínio da frequência.

Por outro lado também ficam evidentes na própria formulação as dificuldades de se utilizar este conceito principalmente por conta da sua natureza multidimensional. De fato, diferente das FRF que expressam os valores das propriedades espectrais do sistema a partir de um único argumento, a própria frequência, as GFRFs o fazem a partir de um espaço de alta dimensionalidade. Assim, recursos corriqueiros e importantes para a análise linear, como as ferramentas gráficas propostas por Bode e Nyquist, por exemplo, tornam-se proibitivas mesmo para sistemas com componentes funcionais de baixa ordem.

Outra dificuldade é a compreensão destes dados da GFRF fisicamente. Interpretar conceitos como ganho fase imposto a um sinal, devido a ação do operador não linear, ou mesmo a formação de harmônicos e intermodulação de componentes da entrada a partir das GFRF é uma tarefa custosa e nada trivial, embora mostre-se possível em algumas situações particulares (JONES; BILLINGS, 1990). Em (YUE*; BILLINGS; LANG, 2005a) e (YUE*; BILLINGS; LANG, 2005b) apresenta-se uma proposta para a análise dinâmica conduzida por GFRF. Os autores utilizam abordagens gráficas e processamento matemático simbólico. Apesar da boa fundamentação da estratégia, os trabalhos expõem toda a dificuldade matemática e computacional para a condução do problema de análise por esta abordagem.

2.5.2 Funções de resposta em frequência não lineares de saída.

Devido principalmente a estas dificuldades encontradas na condução do problema de análise não linear por GFRF uma série de conceitos alternativos de FRF passaram a ser propostos, buscando caracterizar o comportamento espectral não linear em um espaço de baixa dimensionalidade. Entre as principais propostas nesta direção destacam-se as funções de resposta em frequência não lineares de saída (NOFRF). As NOFRF foram apresentadas em (LANG; BILLINGS, 2005) e formam uma proposta alternativa às GFRF para sistemas não lineares. Busca-se por meio destas funções representar como se dá a troca de energia entre as diferentes componentes espectrais dos suportes de entrada e de saída para um sistema não linear. Assim, a NOFRF associada ao funcional $y_n(t)$ de um sistema Volterra com entrada $u(t)$ é dada por:

$$G_n(\omega) = \frac{\mathcal{F}\{y_n(t)\}}{\mathcal{F}\{u(t)^n\}} = \frac{Y_n(\omega)}{U_n(\omega)} \quad \forall \omega, |U_n(\omega)| \neq 0 \quad (2.56)$$

onde $U_n(\omega)$ representa o espectro generalizado de n -ésimo grau do sinal de entrada, definido como:

$$U_n(\omega) = \mathcal{F}\{u(t)^n\} \quad (2.57)$$

Conforme definido em (2.50), o espectro de saída passa a ser dado por:

$$Y(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} G_n(\omega)U_n(\omega) \quad (2.58)$$

Nota-se que o conceito de NOFRF permite que a determinação do espectro de saída se dê de maneira muito similar ao realizado para sistemas lineares, ou seja a partir da contribuição de cada função unidimensional. Isto representa uma grande vantagem em relação a natureza multidimensional das GFRF. Além disso, nota-se que o suporte de cada componente funcional $Y_n(\omega)$ é o mesmo de $U(\omega)$. E ainda, as funções $G_n(\omega)$ são invariantes a qualquer fator de ganho associado a entrada $u(t)$.

Por outro lado, diferente das GFRF, as características expressas por uma NOFRF são dependentes do sinal de entrada utilizado para determiná-las, de maneira que estas funções não expressam apenas as características invariantes do sistema. Isto é uma propriedade indesejável, que estabelece uma necessidade sintetizar uma entrada de sondagem associada as características que se deseja verificar no sistema sob estudo. Neste sentido, quando o caso não-linear é considerado, mesmo as abordagens contemporâneas de melhor performance carecem de melhorias na sua formulação.

2.5.3 Método Variacional

O método variacional (SCHETZEN, 1980) (RUGH, 1981) é uma estratégia para a determinação componentes funcionais de uma série Volterra e dos kernels/GFRFs correspondentes a partir de um modelo dinâmico de entrada e saída do sistema. Sua base é a propriedade de homogeneidade verificada nos operadores funcionais, segundo a qual, ao se tomar $u(t) \leftarrow \alpha u(t)$, sendo $\alpha > 0$ uma constante auxiliar, cada funcional de ordem n passa a ser escalonado por α^n , de maneira que a saída $y(t)$ seja expressa por

$$y(t) = \sum_{n=1}^N \alpha^n y_n(t). \quad (2.59)$$

Assim, ao se considerar, por exemplo, um modelo NARX polinomial (BAYMA, 2014) na forma

$$Ay(t) = Bu(t) + \sum_{m=1}^M c_m \prod_{l=1}^L y(t-l)^{p(m,l)} u(t-l)^{q(m,l)} \quad (2.60)$$

as componentes funcionais de uma série Volterra que represente este sistema podem ser determinadas pelo método variacional pelos seguintes passos:

1. Substituir $u(t)$ por $\alpha u(t)$ e $y(t)$ por (2.59) em (2.60);
2. Expandir todos os termos gerados pelas não linearidades;
3. Agrupar todos os termos com mesma potência polinomial em α ;
4. Extraís as equações geradas pelo coeficiente dos termos de α por comparação;
5. Resolver as equações resultantes para as componentes funcionais $y_n(t)$, $n \in \{1, 2, \dots, N\}$;

Embora conceitualmente simples, este método guarda algumas dificuldades computacionais, particularmente a expansão multinomial do item (2) é custosa e ineficiente computacionalmente, na medida em que muitos dos termos gerados na expansão são simplesmente desprezados. Porém, o conjunto de equações dele derivado, conhecido por equações lineares associadas (ALE)⁷ (FEIJOO; WORDEN; STANWAY, 2004),(WORDEN; STANWAY, 2005), tem sido objeto de muito interesse em desenvolvimentos contemporâneos por séries de Volterra.

Para um sistema NARX na forma (2.60) o conjunto de ALEs derivado pelo método variacional possui como forma geral

$$Ay_1(t) = Bu(t) \tag{2.61}$$

$$Ay_n(t) = F_n(t) \quad n \in \{2, \dots, N\}, \tag{2.62}$$

onde $F_n(t)$ é um polinômio em relação aos funcionais de ordem inferior e ao sinal de entrada (WORDEN; STANWAY, 2006). Note-se que as ALEs compreendem um conjunto recursivo de equações que representam de forma compacta as relações entre as componentes Volterra. Além disso, uma ALE de ordem n é *linear* em relação ao seu funcional $y_n(t)$, esta é uma propriedade importante pois permite que a solução da equação seja determinada de maneira fechada, analiticamente, ou por meios numéricos através de filtragem linear.

Se $y(t)$ em (2.60) for Volterra, um algoritmo baseado em sistemas de equações diofantinas proposto em (BAYMA; ZHU; LANG, 2018) permite determinar de modo eficiente os termos $F_n(t)$ para um modelo NARX polinomial qualquer. Assim, será possível determinar a saída com grau arbitrário de aproximação, para uma entrada $u(t)$ qualquer, através de suas componentes funcionais y_n .

Para exemplificar a aplicação do método derivativo, considera-se o sistema NARX descrito por

$$Ay(t) = Bu(t) + cy(t)^3 \tag{2.63}$$

onde A , B e C são operadores lineares de deslocamento. Seguindo os passos estabelecidos para o método, busca-se obter as componentes funcionais de graus $n = 1, 2$ e 3 Aplicando então

⁷ Associated Linear Equations

$u(t) = \alpha u(t)$ e $y(t) = \sum_{n=1}^3 \alpha^n y_n(t)$ ao modelo resulta

$$A \left(\sum_{n=1}^3 \alpha^n y_n(t) \right) = B\alpha u(t) + C \left(\sum_{n=1}^3 \alpha^n y_n(t) \right)^3. \quad (2.64)$$

O lado esquerdo expressa basicamente as componentes funcionais de graus 1 a 3 operadas por A como coeficientes de um polinômio em α . No lado direito, a não linearidade cúbica gera termos com potências entre 3 e 9. Por comparação direta, desprezando os termos de grau 4 a 9 do lado direito, é possível chegar ao seguinte conjunto de ALEs:

$$Ay_1(t) = Bu(t) \quad (2.65)$$

$$Ay_2(t) = 0 \quad (2.66)$$

$$Ay_3(t) = Cy_1(t)^3 \quad (2.67)$$

A solução do conjunto de ALEs é então os funcionais $y_1(t)$, $y_2(t)$ e $y_3(t)$.

2.6 Identificação de Sistemas

Quando a determinação de um modelo matemático é considerada para um sistema dinâmico duas abordagens são colocadas. Uma mais clássica e convencional, baseada nas leis naturais, conhecida como modelagem fenomenológica, em que é necessário um conhecimento detalhado da natureza do sistema como também das possivelmente complexas relações entre as suas variáveis. No caso particular de um sistema não linear, criar um modelo por essa abordagem pode se apresentar como uma tarefa árdua, senão impraticável.

A segunda possibilidade segue um conjunto de técnicas denominada identificação de sistemas (AGUIRRE, 2007), (BILLINGS, 2013), por meio do qual modelos matemáticos são gerados a partir de dados experimentais medidos diretamente dos sistemas reais, sem nenhuma consideração sobre a natureza ou aspectos estruturais do sistema, sendo entendido como uma abordagem caixa preta.

Embora se tenha postulado que os sistemas dinâmicos são modelados e caracterizados a partir da série funcional com os kernels e as GFRF, sabe-se que um modelo com esta estrutura é de difícil formulação dadas as complicações de se determinar analiticamente estas funções multidimensionais. Assim, a abordagem contemporânea de séries Volterra (MATHEWS; SICURANZA, 2000) descreve o sistema por uma equação de diferença polinomial conforme a apresentada no caso de um modelo Volterra de tempo discreto ou diagonal.

Neste cenário a utilização da identificação de sistemas é uma estratégia atrativa, uma vez que permite determinar o conjunto de parâmetros a partir de dados de entrada e de saída, uma vez estabelecida uma estrutura inicial para o modelo, aproveitando-se da propriedade de linearidade nos parâmetros exibido pelos funcionais. Assim, considera-se uma forma geral para a

série Volterra diagonal, no tempo discreto possa ser descrito pela equação de regressão, ou seja:

$$y(t) = \sum_{m=1}^M \theta_m \psi_m(t) + e(t) \quad (2.68)$$

Onde θ_m são os parâmetros do modelo, que aqui correspondem aos valores de cada kernel associado a cada termo polinomial, ou regressores, $\psi_m(t)$. O erro $e(t)$ é a discrepância verificada ao tentar explicar a saída $y(t)$ por essa estrutura.

No contexto de identificação de sistemas é pertinente representar essa estrutura na forma vetorial matricial, dada por:

$$y(t) = \boldsymbol{\psi}^T(t)\boldsymbol{\theta} + e(t) \quad (2.69)$$

Sendo $\boldsymbol{\psi}^T(t) = [\psi_1(t) \dots \psi_M(t)]$ a matriz de regressão, que agrega todos os termos candidatos, $\boldsymbol{\theta}^T = [\theta_1 \dots \theta_M]$ é o vetor de parâmetros.

Agora, assume-se que sejam tomadas N amostras de dados de entrada e saída, o que corresponde a N realizações de (2.69), que são agrupadas na forma (2.70):

$$\mathbf{y} = \mathbf{\Psi}\boldsymbol{\theta} + \mathbf{e} \quad (2.70)$$

onde:

$$\begin{aligned} \mathbf{y} &= [y(1) \dots y(N)]^T \\ \mathbf{e} &= [e(1) \dots e(N)]^T \\ \mathbf{\Psi} &= \begin{bmatrix} \psi_1(1) & \dots & \psi_M(1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_1(N) & \dots & \psi_M(N) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

A solução clássica deste problema é por meio do algoritmo de mínimos quadrados (AGUIRRE, 2007), onde o vetor de parâmetros $\boldsymbol{\theta}$ é determinado por:

$$\boldsymbol{\theta} = \left(\mathbf{\Psi}^T \mathbf{\Psi} \right)^{-1} \mathbf{\Psi}^T \mathbf{y} \quad (2.71)$$

No entanto, a utilização (2.71) na estimação dos parâmetros em modelos não-lineares pode conduzir a problemas sérios de condicionamento numérico nas operações matriciais devido ao grande número de termos candidatos ao modelo nestas estruturas. Esse é o caso de modelos Volterra, que como se apontou, tem como característica marcante o grande número de parâmetros a se determinar.

Além disso, o algoritmo de mínimos quadrados clássico não possui uma estratégia para a seleção dos termos polinomiais, de maneira que a estrutura do modelo inicialmente entregue ao algoritmo permanece inalterada, resultando em uma equação de regressão com um número elevado e ineficiente de termos.

2.6.1 Algoritmo OLS-ERR

Algumas limitações do algoritmo clássico para a determinação de parâmetros de modelos não-lineares podem ser superadas com a proposição de um algoritmo de mínimos quadrados ortogonais (KOREMBERG; BILLINGS; LIU, 1987). A estratégia adotada é a ortogonalização do conjunto de dados expresso na matriz de regressão, de maneira que a informação associada a cada termo polinomial do modelo seja independente dos demais. A transformação consiste modificar o problema original de regressão, expresso em (2.70), no seu equivalente ortogonalizado:

$$\mathbf{y} = \mathbf{W}\mathbf{g} + \mathbf{e} \quad (2.72)$$

onde as seguintes relações são verificadas entre a formulação matricial de (2.70) e (2.72):

$$\mathbf{\Psi} = \mathbf{W}\mathbf{V} \quad (2.73)$$

$$\mathbf{W}^T \mathbf{W} = \mathbf{D} \quad (2.74)$$

$$\mathbf{g} = \mathbf{V}\boldsymbol{\theta} \quad (2.75)$$

e \mathbf{D} é diagonal e \mathbf{V} é não singular. Estas matrizes podem ser determinadas por técnicas de ortogonalização, tais como decomposição de valores singulares e método Gram-Schmidt modificado. Uma vez encontradas, a solução do problema pode ser encontrada sem dificuldades numéricas através dos passos:

$$\mathbf{g} = (\mathbf{W}^T \mathbf{W})^{-1} \mathbf{W}^T \mathbf{y} \quad (2.76)$$

$$\mathbf{g} = \mathbf{D}^{-1} \mathbf{W}^T \mathbf{y} \quad (2.77)$$

Uma das principais motivações para a ortogonalização é que, no novo formato, é possível quantificar a relevância de cada regressor através da taxa de redução de erro (*Error Ratio Reduction*), dada por:

$$ERR_i = \frac{g_i^2 \mathbf{w}_i^T \mathbf{w}}{\mathbf{y}^T \mathbf{y}} \leq 1 \quad (2.78)$$

onde g_i o i -ésimo coeficiente do modelo ortogonalizado, \mathbf{w}_i é a i -ésima coluna de \mathbf{W} e ERR_i é a taxa de redução de erro associada ao i -ésimo regressor. ERR_i expressa em quanto o erro de predição será reduzido caso o regressor em questão seja incluído. Isto pode ser utilizado como critério de inclusão de termos, fornecendo ao algoritmo um meio de seleção de estrutura do modelo. O limiar de corte de termos depende de cada problema, mas, valores típicos podem variar entre 10^{-2} e 10^{-4} .

2.6.2 Seleção dos dados de modelagem

Neste trabalho considera-se uma forma alternativa de escolher os dados de regressão. Supondo que N_T amostras estejam disponíveis, o procedimento usual de identificação consiste em escolher

um subconjunto de $N < N_T$ amostras consecutivas para estimar os parâmetros e utilizar um subconjunto restante para a validação do modelo.

Propõe-se que as N amostras para estimação sejam escolhidas *aleatoriamente*, na tentativa de capturar melhor as dinâmicas embutidas nos dados. O procedimento, com dados sequenciais, pode ser desvantajoso porque o intervalo de dados $1 \leq t \leq N$ pode não conter informações críticas para gerar um modelo capaz de generalizar bem as propriedades do sistema. O uso de todo o volume de dados, por outro lado, é contra-indicado por sua aplicação ao algoritmo conduzir a um único modelo.

Na tentativa de evitar estes problemas, propomos que N valores de t sejam escolhidos aleatoriamente, com probabilidade uniforme, no intervalo $[1; N_T]$, de modo a compor equações de regressão provenientes de diferentes pontos das formas de onda coletadas.

A aleatoriedade na escolha das amostras produz um efeito semelhante à presença de ruído nos dados, i.e., ao repetir a estimação para um mesmo conjunto de dados, modelos diferentes podem surgir. Na tentativa de escolher o melhor modelo possível, um índice de desempenho é calculado para cada modelo identificado e o modelo com o melhor índice é escolhido como a representação final para o sistema.

O índice de desempenho escolhido foi o gera a raiz do erro médio quadrático normalizado (NRMSE)⁸:

$$NRMSE = 1 - \frac{\left(\sum_{t=1}^{N_v} [y_v(t) - \hat{y}_v(t)]^2 \right)^{\frac{1}{2}}}{\left(\sum_{t=1}^{N_v} y_v(t)^2 \right)^{\frac{1}{2}}} \quad (2.79)$$

onde N_v é o número de amostras do conjunto de validação, $y_v(t)$ é o sinal de saída do conjunto de validação, $\hat{y}_v(t)$ é a resposta do modelo para o conjunto de validação, calculada por simulação (predição de infinitos passos a frente). O índice varia no intervalo $[-\infty; 1]$, sendo o modelo tão melhor quanto mais próximo de 1 estiver o índice.

2.7 Fundamentos de operadores inversos

Os operadores inversos são utilizados em diversos contextos onde se deseja reverter uma transformação linear ou não-linear. Esta seção apresenta o fundamento desta abordagem desde a ideia de função inversa até sua formalização no contexto de séries de Volterra, onde a inversão é considerada a partir do clássico conceito de p -inversa.

Quando se consideram sistemas estáticos, *sem* memória, a inversão pode ser explanada a partir da ideia de função inversa. Considerando uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, na forma $y = f(x)$

⁸ Do inglês: *Normalized Root Mean Square Error*

a inversão é realizada pela função inversa $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, sendo $g(\cdot) = f^{-1}(\cdot)$ que executa o mapeamento reverso $v = g(y)$, onde $v \cong x$. A Figura 7 ilustra esta ideia graficamente. A função inversa $g(\cdot)$ possui uma curva complementar à $f(\cdot)$ em relação ao espaço linear $y = x$. A operação das duas funções em conjunto por ser avaliada pela aplicação $v = g(f(x)) \cong x$, resultando na inversão ideal.

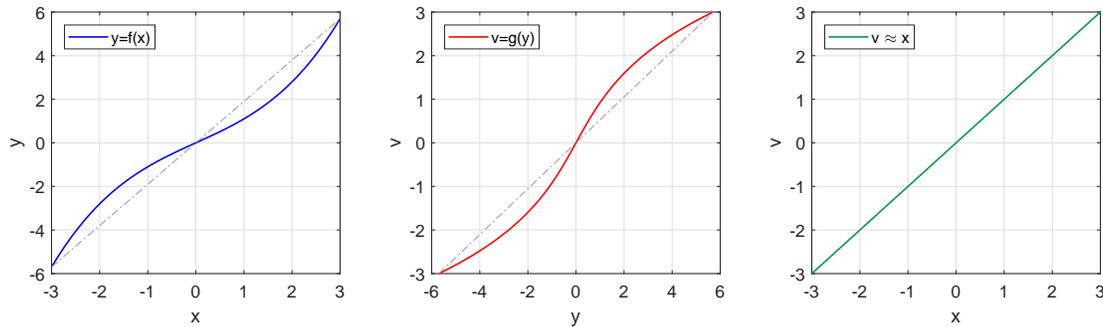


Figura 7 – Inversão de uma função $y = f(x)$ (azul), realizado pela função inversa $v = g(y)$ (vermelho), que resulta na operação ideal $v = g(f(x)) \approx x$ (verde).

É importante verificar que a permutação da ordem de aplicação das funções redundará em um efeito equivalente de inversão, uma vez que $v = f(g(x))$.

Uma questão importante neste contexto é a da existência da função inversa $g(\cdot)$ ideal. Uma condição necessária é a de que $f(\cdot)$ seja bijetora, ou seja, a relação entre o domínio e a imagem deve ser tal que elementos dos dois conjuntos estão associados necessariamente na forma de 1 para 1. Quando este não é o caso, uma abordagem possível é o relaxamento da condição ideal de inversão, propõe-se então funções inversas que recuperem x com algum nível de aproximação em um intervalo limitado.

Este procedimento pode ser conduzido pela aproximação de $f(\cdot)$ por série de Taylor

$$y = f(x) \approx \sum_{n=0}^N a_n x^n. \tag{2.80}$$

Busca-se então determinar $g(\cdot)$ na forma polinomial

$$v = g(x) \approx \sum_{p=0}^P b_p y^p. \tag{2.81}$$

A síntese da inversa pode se dar pela aplicação direta de (2.80) em (2.81) e a determinação dos coeficientes b_p , a partir dos a_n , sujeito a $v \cong x$ para algum intervalo de x . Embora esta seja uma abordagem intuitiva em muitos aspectos ela esta longe de ser trivial. Ocorre que a efetividade da inversão sempre estará sujeita à aproximação de $f(\cdot)$ por (2.80) com algum N elevado, ao passo que a ordem da relação entre as duas funções tende a aumentar para no mínimo $N \cdot P$, o que pode resultar em um conjunto de relações não realizável entre os coeficientes. Este procedimento é

apresentado em (ABRAMOWITZ; STEGUN, 1964), onde um interessante conjunto de equações para os coeficientes b_p é estabelecido para $p \leq 7$.

Passando agora para um contexto mais geral, de sistemas dinâmicos, onde a memória é relevante, a inversão passa a ser tratada no contexto de operadores funcionais, que mapeiam conjuntos de funções, ou no caso de engenharia de sistemas, operadores que processam sinais de entrada para a geração dos de saída. Assim, considera-se $\mathcal{H}\{\cdot\}$ um operador que representa um sistema dinâmico com entrada $u(t)$ e saída $y(t)$, de modo que

$$y(t) = \mathcal{H}\{u(t)\}. \quad (2.82)$$

O inversor é então um operador $\mathcal{G}\{\cdot\}$ que processa a saída $y(t)$ do sistema buscando recuperar uma estimativa $v(t)$ da entrada $u(t)$, ou seja

$$v(t) = \mathcal{G}\{y(t)\}, \quad (2.83)$$

$$v(t) \cong u(t). \quad (2.84)$$

A Figura 8 apresenta esta ideia na forma de um diagrama de blocos. Esta sequência do proces-

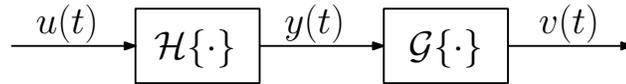


Figura 8 – Inversor dinâmico estruturado na forma de pós-inversão.

samento, onde o inversor sucede o sistema, é denominada *pós-inversão*. Quando a ordem dos operadores é permutada, com o inversor precedendo o sistema, têm-se a *pré-inversão*. Ambas as topologias são importantes em contextos particulares do sistema sob estudo, de forma que alguns formalismos de inversão se dedicam a uma ou a outra, conforme o interesse da aplicação.

Quando o modelo completo do sistema é considerado, a saída invertida (ou recuperada) $v(t)$ é expressa como um funcional de $u(t)$. Isto pode ser verificado aplicando (2.82) em (2.83), de onde resulta

$$v(t) = \mathcal{G}\{\mathcal{H}\{u(t)\}\}, \quad (2.85)$$

$$= \mathcal{L}\{u(t)\}, \quad (2.86)$$

onde o operador $\mathcal{L}\{\cdot\}$ denota uma relação funcional aproximadamente linear entre $u(t)$ e $v(t)$.

No caso de sistemas lineares e invariantes no tempo, em que o operador \mathcal{H} é representado pela função de resposta impulsiva $h(\tau)$, ou pela função de transferência $H(z) = \mathcal{Z}\{h(\tau)\}$, onde

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)}, \quad (2.87)$$

o inversor ideal pode ser sintetizado, de maneira trivial mas em casos bastante particulares, permutando os polinômios $B(z)$ e $A(z)$, que representam operadores LIT de deslocamento, o que

resulta

$$G(z) = H(z)^{-1} = \frac{A(z)}{B(z)}. \quad (2.88)$$

A particularidade aqui está associada a necessidade de o sistema ser de fase mínima, ou seja, possuir zeros estáveis, uma vez que as raízes de $B(z)$ recaem nos polos do inversor, cuja estabilidade precisa ser garantida. Para sistemas de fase não-mínima, uma série de estratégias interessantes estão presentes na literatura, com destaque para aquelas que buscam na aproximar $H(z)$ por uma dinâmica equivalente $\tilde{H}(z)$ com fase mínima, como mostrado em (CHEN; ZHAI; FUKUDA, 2004).

Outra restrição desta abordagem está relacionada ao grau dos polinômios $B(z)$ e $A(z)$ que precisa atender $\deg(B(z)) = \deg(A(z))$, ou seja $H(z)$ precisa ser do tipo bi-própria, do contrário o inversor resulta em um operador não causal e portanto não realizável. Um relaxamento desta condição permite a síntese de inversores para sistemas próprios ($\deg(B(z)) \leq \deg(A(z))$) ou estritamente próprios ($\deg(B(z)) < \deg(A(z))$), ao admitir que o sinal de saída do inversor seja recuperado com algum atraso em relação a entrada do sistema. O atraso de transporte mínimo necessário para a inversão é então dada por $l_i = \deg(A(z)) - \deg(B(z))$, o que resulta

$$v(t) \approx u(t - l_i). \quad (2.89)$$

Aplicando esta condição em (2.88) equivale a embutir um atraso de fase, de modo que

$$G(z) = \frac{z^{-l_i} A(z)}{B(z)}. \quad (2.90)$$

Para exemplificar a inversão no caso linear, considere um sistema definido por

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{0.5z^{-1}}{1 - 0,4326z^{-1} - 0,4900z^{-2}} \quad (2.91)$$

com polos $p_1 = p_2^* = 0,2163 + j0,6657$. Como $\deg(A(z)) = 2$ e $\deg(B(z)) = 1$ o sistema é estritamente próprio, de forma que o inversor e realizável se incluir um atraso de fase com $l_1 = 1$ em (2.88), o que resulta

$$G(z) = \frac{z^{-l_i} A(z)}{B(z)} = \frac{1 - 0,4326z^{-1} - 0,4900z^{-2}}{0,5}. \quad (2.92)$$

A Figura ?? apresenta a resposta do sistema para uma entrada senoidal na forma $u(t) = 0,8\sin(2\pi ft)$, com $f = 0,02$. Como todo o processamento é linear a resposta do sistema e a saída recuperada em regime permanente pelo inversor são senoidais. A saída do sistema é atenuada, em função do ganho de $H(z)$ em f . Este sinal é então processado pelo inversor que recupera a entrada do sistema com fidelidade, a menos de um atraso de fase de 1 amostra, já prevista na síntese do inversor.

Este desempenho do inversor linear nestas condições se verifica em toda a faixa espectral do sistema independente do valor da magnitude da entrada. Para verificar estas propriedades

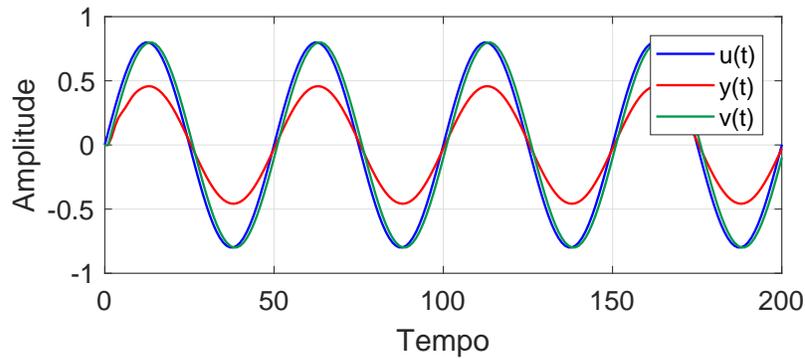
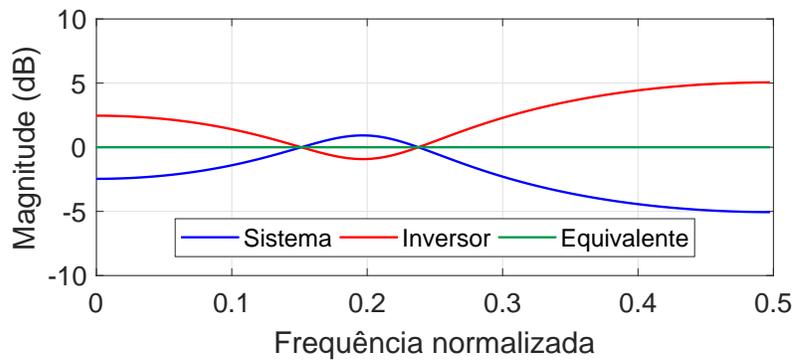
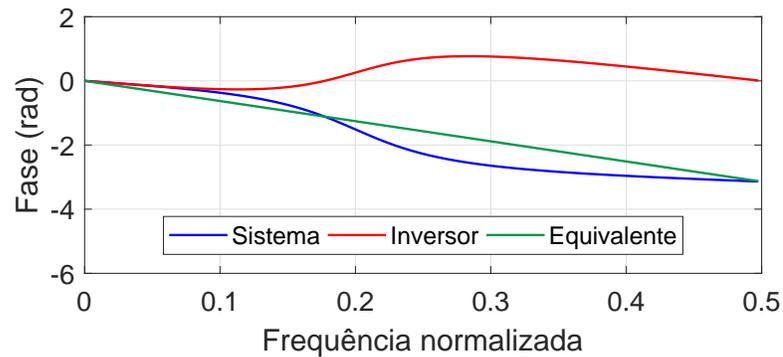


Figura 9 – Resposta do inversor linear para uma entrada $u(t)$ (azul). A saída do sistema é $y(t)$ (vermelho). A entrada recuperada pelo inversor é $v(t)$ (verde).

gerais é mais pertinente se avaliar a resposta em frequência de todos os operadores do processo. A Figura 10 apresenta as curvas de resposta em frequência de magnitude em 10a e de fase em 10b.



(a) Resposta em magnitude.



(b) Resposta em Fase.

Figura 10 – Resposta em frequência do sistema (azul), inversor (vermelho) e equivalente (verde).

Nota-se que a resposta de magnitude do inversor é simétrica à do sistema, a atenuação do sinal em um bloco implica na amplificação no outro, de maneira que o equivalente dos

dois sistemas em cascata possui ganho unitário. No caso da fase esta simetria é quebrada pela necessidade de inclusão do atraso no inversor para torná-lo realizável. O deslocamento de fase do sistema equivalente é, no entanto, linear em todo o espectro.

Agora, passando a um cenário mais geral, em que os sistemas são não-lineares, as estratégias para a inversão dinâmica tornam-se muito mais sofisticadas e desafiadoras. Isto porque o sinal de saída do sistema passa a exibir um conteúdo espectral mais vasto que o da entrada e as próprias componentes de frequência correspondentes às da entrada são afetadas pelas não linearidades. Neste caso, em que a frequência tem um papel importante para explicar os efeitos não-lineares, as séries de Volterra têm se destacado como um formalismo adequado à realizar operadores inversores.

2.7.1 A inversa de ordem p .

No contexto particular de sistemas Volterra, a inversão dinâmica é formulada a partir do conceito de inversa de ordem p ou simplesmente p -inversa (SCHETZEN, 1976). Trata-se de um operador Volterra cuja finalidade é gerar um equivalente não-linear para o qual a representação Volterra tenha como único funcional relevante o de primeira ordem, ou seja, o linear.

Assim, considerando $\mathcal{H}\{\cdot\}$ um sistema Volterra, então (2.82) pode ser dado na forma

$$y(t) = \sum_{n=1}^N \mathcal{H}_n\{u(t)\} \quad (2.93)$$

onde $\mathcal{H}_n\{\cdot\}$ expressa um funcional Volterra de ordem n . Um operador $\mathcal{G}\{\cdot\}$ é dito inverso de ordem p (p -inverso) ideal de $\mathcal{H}\{\cdot\}$, quando sua conexão em cascata com (2.93) produz na saída

$$v(t) = \mathcal{G}\{y(t)\} = \mathcal{L}_1\{u(t)\} + \sum_p^{\infty} \mathcal{L}_p\{u(t)\}. \quad (2.94)$$

Nestas condições ideais de p -inversão é necessário que:

1. O operador \mathcal{L}_1 possua ganho unitário e deslocamento de fase nulo em toda faixa de frequência de interesse;
2. Os operadores \mathcal{L}_n , com $2 \leq n \leq p - 1$ são nulos;
3. Os operadores \mathcal{L}_n , com $p \leq n \leq \infty$ possuem energia irrisória, e seus efeitos podem ser ignorados;

A condição 1 é necessária para a garantia da inversão na sua forma ideal, e está relacionada diretamente a (2.84). Pela condição 2 impõe-se a remoção dos funcionais não-lineares de baixa ordem, tipicamente aqueles com maior energia em uma série Volterra. A condição 3 aponta para o fato de que, embora componentes funcionais de ordem elevada sejam produzidas a partir da conexão entre os dois sistemas não-lineares, estas deverão ter energia mínima e irão constituir o erro da aproximação.

REPRESENTAÇÃO E ANÁLISE NÃO-LINEAR

3.1 Introdução

Este capítulo apresenta proposições para representação e análise de sistemas não lineares a partir da série diagonal de Volterra. Inicialmente é desenvolvida uma forma específica para a série diagonal, na qual os operadores de convolução são estruturados como filtros de resposta infinita ao impulso (IIR), unidimensionais e independentes da entrada.

Estratégias de análise são desenvolvidas para este modelo, as quais permitem expressar a composição dos harmônicos de saída do sistema através de funções racionais, as quais correspondem às suas características invariantes.

Mostra-se ainda que esta estrutura recai em uma forma compacta adequada à identificação do sistema a partir de medições entrada-saída. A estrutura permite ainda que a estabilidade do modelo não-linear assim obtido seja facilmente checada.

A formulação proposta é testada para um sistema não-linear do tipo Wiener, que é particularmente pertinente para avaliar a estratégia uma vez que possui uma representação Volterra exata no tempo e para as FRFs das componentes harmônicas. O modelo do sistema é identificado através do algoritmo OLS-ERR e a avaliação é feita comparativamente a um modelo Volterra convencional com mesmo desempenho no tempo e na frequência, do modelo diagonal proposto.

3.2 Representação Paramétrica de Modelo Diagonal

A utilização da simetria diagonal se apresenta como uma boa estratégia para se enfrentar o problema da multidimensionalidade dos funcionais de uma série Volterra. As operações de convolução deixam de depender do grau do funcional e são agora todas unidimensionais, parame-

trizadas pelo conjunto de atrasos \mathbf{k} . No entanto a forma geral dos filtros diagonais (2.39) acaba por evidenciar muitos parâmetros a partir do conjunto de atraso, de maneira que a notação pode se tornar confusa. Por esse motivo, propõe-se o uso de uma notação onde as componentes diagonais são *lexicograficamente* ordenadas. Isto permite expressar a saída total do sistema como

$$y(t) = \sum_{i=1}^{N_d} h_{\mathbf{k}_i}(t) * u_{\mathbf{k}_i}(t) \quad (3.1)$$

de maneira que as funções $h_{\mathbf{k}_i}(t)$ são organizadas de acordo com grau e grupos de atrasos \mathbf{k} crescentes, indexados por i , sendo truncados em um número máximo de diagonais N_d , cada uma tendo $u_{\mathbf{k}_i}(t)$ como entrada correspondente. A tabela a seguir ilustra uma possível ordenação para um sistema de grau $n = 3$, com atraso máximo de $d = 2$. Nota-se que na ordenação lexicográfica,

Tabela 1 – Organização dos filtros diagonais, a partir de um conjunto de atrasos \mathbf{k}_i .

i	n	\mathbf{k}_i	$u_{\mathbf{k}_i}(t)$
1	1	(0)	$u(t)$
2	2	(0,0)	$u(t)^2$
3	2	(0,1)	$u(t)u(t-1)$
4	2	(0,2)	$u(t)u(t-2)$
5	3	(0,0,0)	$u(t)^3$
6	3	(0,0,1)	$u(t)^2u(t-1)$
7	3	(0,0,2)	$u(t)^2u(t-2)$
8	3	(0,1,1)	$u(t)u(t-1)^2$
9	3	(0,1,2)	$u(t)u(t-1)u(t-2)$
10	3	(0,2,2)	$u(t)u(t-2)^2$

para um dado \mathbf{k} , é válida a relação $k_{l-1} \leq k_l$ para qualquer par de seus termos. A notação permite englobar todo o conjunto de diagonais que compõem o modelo, independente do grau do funcional a que pertencem, embora seja fácil dividi-las nestas componentes se necessário.

Essa forma é particularmente importante quando se considera a possibilidade conversão do modelo para o domínio da frequência, como apontado em (RAZ; VEEN, 1998), isso se dá diretamente, valendo-se da estrutura linear e unidimensional das operações em (3.1). Para tanto, considera-se $\mathcal{Z}\{\cdot\}$ o operador que determina a transformada \mathcal{Z} (OPPENHEIM; SCHAFER, 2010) de um sinal de tempo discreto $x(t)$, $t = 0, 1, \dots$, definida como

$$X(z) = \mathcal{Z}\{x(t)\} = \sum_{t=0}^{\infty} x(t)z^{-t}, \quad (3.2)$$

sendo z uma variável complexa. Aplicando $\mathcal{Z}\{\cdot\}$ em (3.1) chega a ser revelador perceber que o espectro de saída de uma série Volterra possa ser computado de maneira simples, como:

$$Y(z) = \sum_{i=1}^{N_d} H_{\mathbf{k}_i}(z)U_{\mathbf{k}_i}(z), \quad (3.3)$$

onde

$$H_{k_i}(z) = \mathcal{Z}\{h_{k_i}(t)\}, \quad (3.4)$$

$$U_{k_i}(z) = \mathcal{Z}\{u_{k_i}(t)\} \quad \text{e} \quad (3.5)$$

$$Y(z) = \mathcal{Z}\{y(t)\}. \quad (3.6)$$

A interpretação deste resultado é bem direta, (3.3) é a representação explícita do sinal de saída como a soma das respostas de filtros diagonais no domínio da frequência. A composição da saída deu-se a partir das funções de resposta em frequência dos filtros diagonais (3.4). Como o conjunto de filtros diagonais compreende toda a informação invariante do sistema, as equações (3.4) representam estas informações em uma estrutura unidimensional na frequência, resultando em uma melhoria grande em relação às GFRFs. É interessante perceber ainda que diferente das NOFRF, como os filtros diagonais são diretamente relacionados aos kernels do sistema, a informação espectral em (3.4) é independentes do sinal de entrada.

A representação (3.3) exhibe portanto um potencial interessante para problemas de medição, análise e síntese não-linear no domínio da frequência. Contudo, até onde a revisão bibliográfica tem revelado, essa estrutura tem sido pouco explorada para estes propósitos.

De uma forma geral, as operações envolvidas em (3.3) podem ser estruturadas nos seguintes passos:

1. Determina-se os espectros $U_{k_i}(z)$, a partir dos monômios da entrada $u_{k_i}(t)$.
2. Analisa-se o efeito da *filtragem* de cada $U_{k_i}(z)$ por cada função diagonal $H_{k_i}(z)$. Isto é feito da maneira usual para sistemas lineares, através do produto das representações no domínio da frequência.
3. Determina-se o espectro de saída através da soma de todas as parcelas $H_{k_i}(z)U_{k_i}(z)$.

As funções $H_{k_i}(z)$ desempenham assim papel importante, na medida em que compreendem filtros lineares que processam monômios não lineares da entrada. Neste trabalho, propõe-se que estas possam ser escritas na como funções de transferência na forma racional, comumente utilizada em sistemas lineares, ou seja

$$H_{k_i}(z) = \frac{B'_i(z)}{A'_i(z)} \quad (3.7)$$

onde

$$B'_i(z) = \sum_{l=1}^{L'} b'_{li} z^{-l} \quad (3.8)$$

$$A'_i(z) = 1 - \sum_{l=1}^{L'} a'_{li} z^{-l} \quad (3.9)$$

Notar que esta estrutura implica na *parametrização* dos operadores $H_{k_i}(z)$.

Introduzindo essa notação parametrizada em (3.3) a equação pode ser simplificada da seguinte forma:

$$Y(z) = \sum_{i=1}^{N_d} \frac{B'_i(z)}{A'_i(z)} U_{k_i}(z) \quad (3.10)$$

$$= \frac{1}{A(z)} \sum_{i=1}^{N_d} B_i(z) U_{k_i}(z) \quad (3.11)$$

$$(3.12)$$

onde:

$$B_i(z) = B'_i(z) \prod_{j \neq i} A_j(z) \quad (3.13)$$

$$A(z) = \prod_{i=1}^{N_d} A_i(z) \quad (3.14)$$

Desta forma, a equação (3.3) pode ser reescrita na forma:

$$A(z)Y(z) = \sum_{i=1}^{N_d} B_i(z)U_{k_i}(z) \quad (3.15)$$

Notar que, por definição, $A(z)$ e $B_i(z)$ também são operadores polinomiais. Como tal, podem ser escritos:

$$A(z) = 1 - a_1 z^{-1} - \dots - a_L z^{-L_A} \quad (3.16)$$

$$B_i(z) = b_{i,1} z^{-1} + \dots + b_{i,L} z^{-L_B} \quad (3.17)$$

onde, em geral L_A e L_B são os atrasos dos polinômios A e B_i , sendo maiores que L' .

No domínio do tempo, (3.15) representa uma equação de diferenças, cujos termos de realimentação são puramente lineares e os demais são formados por monômios do sinal de entrada.

$$y(t) = \sum_{l=1}^{L_A} a_l y(t-l) + \sum_{i=1}^{N_d} \sum_{l=1}^{L_B} b_{i,l} u_{k_i}(t-l) \quad (3.18)$$

A equação de diferenças (3.18) representa o modelo Volterra diagonal parametrizado, como proposto, o que recai em um caso particular do modelo NARX polinomial, onde os termos de realimentação são puramente lineares e os demais são formados por monômios do sinal de entrada.

A Figura 11 representa esta estrutura, evidenciando os filtros lineares no domínio da frequência, e os sinais no tempo.

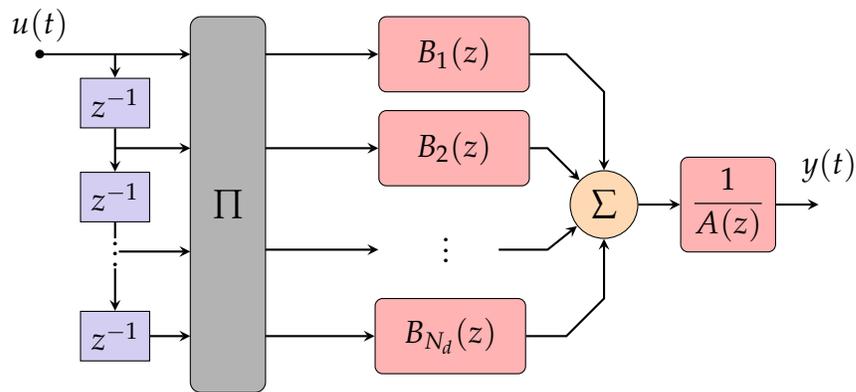


Figura 11 – Diagrama de blocos da estrutura de um modelo Volterra diagonal com kernels racionais.

Para propósitos de identificação, a forma de regressão (3.18) é bastante apropriada, uma vez que a equação é linear em relação aos coeficientes $\{a_l, b_{i,l}\}$.

Outra vantagem da representação é que a estabilidade do modelo depende exclusivamente da posição das raízes do polinômio $A(z)$ em relação ao círculo unitário. Isto é útil porque rotinas de identificação nem sempre resultam em um modelo estável (devido a fatores numéricos), mesmo quando é sabido a priori que o sistema é. A forma (3.15) torna-se útil nesta situação uma vez que a estabilidade do modelo pode facilmente ser verificada.

3.2.1 Resposta Senoidal de Modelo Diagonal

A informação do comportamento espectral em uma representação diagonal, como em (3.3) é completa, no sentido de que o conjunto de FRFs das componentes $H_{k_i}(z)$ comportam toda a caracterização do sistema no domínio da frequência, independente da entrada considerada. É pertinente, contudo, determinar este comportamento para sinais que expressam aspectos físicos particulares do sistema. A forma padrão com que este tipo de análise é conduzida em modelos lineares é por meio da resposta em regime permanente senoidal.

Enquanto no caso linear a saída em regime senoidal é dada por uma única curva de resposta em frequência, no caso não linear, com a presença dos efeitos de geração de harmônicos, cada componente harmônica é caracterizada por uma FRF própria, o que será aqui chamada de função de resposta harmônica. Busca-se estabelecer uma abordagem para a determinação destas FRFs da saída do modelo, que possam ser expressas de forma analítica, seguido da sua avaliação numérica dentro de uma faixa de frequência de interesse.

Essas funções podem ser derivadas diretamente de um modelo diagonal. Nesta derivação adota-se $z = e^{j\omega}$, sendo ω a frequência angular normalizada. Neste caso, a entrada senoidal $u(t)$, com amplitude α , é dada por:

$$u(t) = \frac{\alpha}{2} (e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}) \quad (3.19)$$

Considera-se, sem perda de generalidade, um modelo Volterra diagonal de terceiro grau, onde as componentes diagonais da saída são explicitadas no tempo e na frequência respectivamente como

$$y(t) = \sum_{n=1}^3 y_n(t), \quad (3.20)$$

$$Y(z) = \sum_{n=1}^3 Y_n(z). \quad (3.21)$$

Em um modelo Volterra, sabe-se que a componente de primeira ordem é o próprio funcional linear, de forma que aplicando (3.19) em para a entrada (3.19) em (3.21), a saída do funcional é dada por

$$y_1(t) = \frac{\alpha H_1(e^{j\omega})}{2} (e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}) \quad (3.22)$$

ou seja, como esperado, uma senoide com amplitude modulada pela FRF $H_1(e^{j\omega})$. Em (3.22) foi usado o fato de que se H é um operador LIT, então, em regime permanente têm-se:

$$H\{e^{jn\omega t}\} = H(e^{jn\omega})e^{jn\omega t} \quad (3.23)$$

Procedendo de maneira equivalente para o funcional de segunda ordem, é pertinente expandir os monômios de entrada, na forma

$$u(t)u(t-k) = \frac{\alpha^2}{4} \left(e^{j\omega k} + e^{-j\omega k} + e^{j\omega(2t-k)} + e^{-j\omega(2t-k)} \right), \quad (3.24)$$

da mesma forma, para o funcional de terceiro grau

$$\begin{aligned} u(t)u(t-k_1)u(t-k_2) = \frac{\alpha^3}{8} \left(e^{j\omega(3t-k_1-k_2)} + e^{-j\omega(3t-k_1-k_2)} + \right. \\ \left. e^{j\omega(t+k_1-k_2)} + e^{-j\omega(t+k_1-k_2)} + \right. \\ \left. e^{j\omega(t-k_1+k_2)} + e^{-j\omega(t-k_1+k_2)} + \right. \\ \left. e^{j\omega(t+k_1+k_2)} + e^{-j\omega(t-k_1-k_2)} \right). \end{aligned} \quad (3.25)$$

Nota-se que as componentes harmônicas presentes no suporte dos monômios de entrada serão, uma componente contínua, $\omega = 0$, a fundamental (ω), seu primeiro harmônico ((2ω)) e seu segundo harmônico (3ω). Assim, como os operadores diagonais são todos lineares, a saída irá exibir exatamente estas componentes na saída, de forma que é possível expressar a saída como uma série Fourier na forma:

$$y(t) = \sum_{n=-3}^3 Y_n(e^{jn\omega})e^{jn\omega t} \quad (3.26)$$

onde $Y_n(e^{jm\omega})$ expressa m -ésimo harmônico de saída, devido ao funcional de ordem n . Usando (3.23) e aplicando as entradas (3.24) e (3.25) às respectivas definições dos funcionais diagonais de segunda e terceira ordem,

$$Y_2(z) = \sum_k^{\infty} H_k(z) \mathcal{Z}\{u(t)u(t-k)\} \quad (3.27)$$

$$Y_3(z) = \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} H_{k_1 k_2}(z) \mathcal{Z}\{u(t)u(t-k_1)u(t-k_2)\} \quad (3.28)$$

é possível isolar as seguintes equações para cada uma das componentes harmônicas

$$Y_2(e^{j0\omega}) = \frac{\alpha^2}{4} \sum_{k=0}^{\infty} H_k(e^{j0\omega}) (e^{jk\omega} + e^{-jk\omega}), \quad (3.29)$$

$$Y_1(e^{j\omega}) = \frac{\alpha}{2} H_1(e^{j\omega}) \quad (3.30)$$

$$Y_2(e^{j2\omega}) = \frac{\alpha^2}{4} \sum_{k=0}^{\infty} H_k(e^{j2\omega}) e^{-jk\omega}, \quad (3.31)$$

$$Y_3(e^{j\omega}) = \frac{\alpha^3}{16} \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} H_{k_1, k_2}(e^{j\omega}) (e^{j\omega(k_1-k_2)} + e^{j\omega(-k_1+k_2)} + e^{j\omega(-k_1-k_2)}) \quad (3.32)$$

$$Y_3(e^{j3\omega}) = \frac{\alpha^3}{16} \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} H_{k_1, k_2}(e^{j3\omega}) e^{j\omega(-k_1-k_2)}. \quad (3.33)$$

É importante notar que as saídas das componentes contínua, de primeiro e de segundo harmônico são dadas, respectivamente, por (3.29), (3.31) e (3.33), enquanto a fundamental possui como saída a soma de (3.30) e (3.32), ou seja, contribuições dos funcionais de primeira e de terceira ordem. Embora no caso do funcional de terceiro grau o somatório passe a depender de mais de um índice, ainda assim a função de resposta harmônica resultante em cada caso é unidimensional. Seguindo o mesmo procedimento pode-se desenvolver a resposta das componentes dos harmônicos para funcionais de ordem superior de um modelo diagonal.

A implementação desta estratégia em ambiente computacional de matemática simbólica conduz a funções polinomiais, racionais, unidimensionais que podem ter os valores numéricos facilmente computados a partir da definição de uma faixa ω de interesse, o que permite a avaliação de todas as componentes harmônicas de um modelo Volterra diagonal.

3.2.2 Relação com modelos de Wiener e Hammerstein

Sistemas do tipo Wiener e Hammerstein são classes não-lineares de expressiva relevância prática. Tais sistemas possuem uma representação Volterra exata, a partir da qual se busca derivar um modelo diagonal também exato. Para tanto, considera-se inicialmente o sistema de Hammerstein, cuja parte linear representada por uma resposta ao impulso $h(t)$ e a não-linearidade por um polinômio homogêneo $p(x) = \sum_{n=1}^N c_n x^n$. Este polinômio atua sobre a entrada $u(t)$ de maneira

que a variável de saída do bloco estático seja dada por

$$v(t) = \sum_{n=1}^N c_n u(t)^n. \quad (3.34)$$

Esta sinal é então processado pela parte linear do sistema, de forma que a saída é expressa por

$$y(t) = h(t) * \left(\sum_{n=1}^N c_n u(t)^n \right) = \sum_{n=1}^N c_n h(t) * u(t)^n \quad (3.35)$$

Assim, $y(t)$ é uma série Volterra diagonal, onde cada funcional possui apenas a diagonal principal para a qual $k_i = 0, \forall i$. Os kernels diagonais são descritos então como

$$h_{\mathbf{k}}(t) = \begin{cases} 0 & \mathbf{k} \neq \mathbf{0}_{n-1} \\ c_n h(t) & \mathbf{k} = \mathbf{0}_{n-1} \end{cases} \quad (3.36)$$

onde $\mathbf{0}_{n-1}$ representa um vetor de zeros com $n - 1$ entradas.

Para sistemas do tipo Wiener o bloco linear atua sobre a entrada, gerando a variável intermediária

$$v(t) = h(t) * u(t) = \sum_{\tau=0}^{\infty} h(\tau) u(t - \tau). \quad (3.37)$$

Então, aplicando (3.37) na não linearidade polinomial, resulta

$$y(t) = \sum_{n=1}^N c_n (h(t) * u(t))^n. \quad (3.38)$$

Cada termo polinomial gera um produto n -dimensional da convolução linear, de maneira que pode-se escrever

$$y(t) = \sum_{n=1}^N c_n \left[\sum_{\tau=0}^{\infty} h(\tau) u(t - \tau) \right]^n. \quad (3.39)$$

De onde se tem:

$$y(t) = \sum_{n=1}^N \sum_{\tau_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{\tau_n=0}^{\infty} c_n \prod_{i=1}^n h(\tau_i)^n u(t - \tau_i). \quad (3.40)$$

Neste caso, o sistema possui um número infinito de diagonais. Seja $\mathbf{k} = (0, k_1, \dots, k_{n-1})$ e $r = \max(\mathbf{k})$. Seja n_s o número de ocorrências do inteiro s em \mathbf{k} e $\sigma_{\mathbf{k}}$ o número de permutações com repetição dos elementos de \mathbf{k} (MATHEWS; SICURANZA, 2000)

$$\sigma_{\mathbf{k}} = \frac{n!}{n_0! n_1! \dots n_r!} \quad (3.41)$$

Então, as funções de resposta ao impulso de grau n são dadas por:

$$h_{\mathbf{k}}(t) = c_n \cdot \sigma_{\mathbf{k}} \cdot h(t) \prod_{q=1}^{d-1} h(t + k_q) \quad (3.42)$$

Por exemplo, para $n = 2$

$$h_k(t) = \begin{cases} \frac{2!}{2!} c_2 h(t)^2 & (k = 0) \\ \frac{2!}{0!} c_2 h(t)h(t+k) & (k > 0) \end{cases} \quad (3.43)$$

É importante apontar que a busca pelo equivalente Volterra de modelos bloco estruturados insere-se em um contexto de análise, onde se determina uma representação em que seja possível analisar cenários que não são possíveis pelos modelos originais. É o caso, por exemplo, do equivalente Volterra do modelo Wiener em que os modos de cada função diagonal são n -combinações dos modos da parte linear. Isso cria uma estrutura de relação entre as diferentes diagonais que permite analisar fenômenos como a convergência da série diagonal na geração de harmônicos de saída do sistema.

3.3 Estudo de Caso I: Sistema Wiener

A capacidade de representação de um modelo diagonal, e a consequente análise espectral, foi testada para um sistema não-linear do tipo Wiener. Considera-se, inicialmente, uma representação de tempo t contínuo para este sistema, com a parte linear sendo dada, no domínio de Laplace, pela dinâmica de segunda ordem

$$H_c(s) = \frac{V_c(s)}{U_c(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} a, \quad (3.44)$$

onde ξ e ω_n são, respectivamente o coeficiente de amortecimento e a frequência natural; $U_c(s) = \mathcal{L}\{u(t)\}$ e $V_c(s) = \mathcal{L}\{v(t)\}$. $\mathcal{L}\{\cdot\}$ denota o operador para a transformada de Laplace. Tendo como entrada $u(t)$, o bloco LIT produz na saída $v(t)$. A não linearidade estática é expressa na forma polinomial, que gera a saída $y(t)$ a partir de $v(t)$ como

$$y(t) = v(t) + c_2 v(t)^2. \quad (3.45)$$

Em se tratando de um sistema para testes, os parâmetros foram escolhidos de modo que a não linearidade tenha um valor significativo, em um cenário onde uma representação puramente linear *não* gere desempenho satisfatório. Assim, foram utilizados os seguintes valores para os parâmetros: coeficiente de amortecimento $\xi = 0,3$, frequência natural $\omega_n = 50,0\pi \text{ rad/s}$, e coeficiente do termo quadrático $c_2 = 0,4$.

O modelo linear foi então discretizado pelo método ZOH, sendo adotado um período de amostragem $T_s = 0,01s$, resultando:

$$H_w(z) = \frac{V(z)}{U(z)} = \frac{0,7591 + 0,5403z^{-1}}{1 - 0,09025z^{-1} + 0,3897z^{-2}} \quad (3.46)$$

onde $V(z) = \mathcal{Z}\{v(t)\}$ e $U(z) = \mathcal{Z}\{u(t)\}$. Os polos desta parte linear do sistema são, portanto $p_1 = 0,0451 + 0,6226i$ e $p_2 = \bar{p}_1^1$.

¹ A barra sobre-escrita \bar{p} expressa o valor conjugado da variável complexa p .

O estudo deste sistema por meio da abordagem diagonal se deu pela identificação do modelo, a partir dos dados de entrada e saída, utilizando o algoritmo OLS-ERR. Com resultado expresso em (??) foi também possível determinar um modelo exato diagonal a partir do sistema Wiener, o qual serviu de referência para avaliar os resultados do modelo identificado.

3.3.1 Identificação do sistema Wiener

Um problema típico de identificação envolve basicamente três etapas (AGUIRRE, 2007):

1. Geração de dados: Em que foram levantados os dados de entrada e saída do sistema a partir do modelo (3.44);
2. Modelagem: Em que se realizou a identificação propriamente dita, a partir da aplicação do algoritmo OLS-ERR aos dados de identificação;
3. Validação: Em que foi avaliada a capacidade de generalização da representação diagonal a partir dos dados de validação;

Estas etapas foram realizadas em ambiente computacional, e os detalhes da implementação são apresentados a seguir.

Geração de dados

Nesta etapa foi gerado um conjunto de dados para identificação e um outro para a validação do modelo. Para os dados de identificação em particular, uma preocupação é em excitar o sistema de maneira que o conjunto de amostras de entrada $u(t)$ e saída $y(t)$, coletadas em intervalo de amostragem T_s , exibam informação com uma rica representatividade da dinâmica que se deseja modelar. Isso é atingido tomando como entrada sinais que possuam um espectro suficientemente largo para excitar toda a banda de interesse para o sistema, o que é conhecido como persistência de excitação.

Quando a dinâmica é linear uma escolha comum é pelas sequências binárias pseudo-aleatórias (PRBS)² (AGUIRRE, 2007). Além da facilidade de gerar estas sequências, elas também possuem propriedades espectrais que atendem ao requisito de banda. No entanto, para o caso de um modelo não-linear, um sinal PRBS pode conduzir a uma sub-representação Leontaritis e Billings (1985), uma vez que para as não-linearidades além da frequência é necessário também que se cubra uma faixa de amplitude pertinente para a representação do sistema.

Assim, uma escolha mais apropriada para o caso não-linear é o das sequências *multi-nível* pseudo aleatórias (PRMLS)³ (NOWAK; VEEN, 1994), que preservam as propriedades espectrais de

² Pseudo-Random Binari Sequente

³ Pseudo Random Multi-level Sequence

uma sequência PRBS ao tempo em que testam o sistema em diversos níveis de amplitude. Em [Toker e Emara-Shabaik \(2004\)](#) discutem-se as razões que tornam estas sequências adequadas para a identificação de um modelo Volterra, em particular no que diz respeito ao número de níveis necessários para garantir a persistência de excitação em função da ordem do modelo que se deseja identificar. Além disso apresenta-se uma estratégia para gerar sequências PRMLS que possuem um alto grau de correlação com um ruído branco.

O sinal utilizado para o levantamento dos dados de identificação do sistema Wiener foi uma sequência PRMLS, seque a proposta de ([TOKER; EMARA-SHABAİK, 2004](#)), sendo dado por

$$x(t) = 3x(t-1) + 6x(t-2) + 4x(t-3) + x(t-4) + 5x(t-5) \quad (3.47)$$

$$u_x(t) = x(t) \bmod 7. \quad (3.48)$$

Assim, a partir de uma condição inicial $x_o(t)$, o sinal $u_x(t)$ é criado com o resto da divisão da sequência $x(t)$ pelo número de níveis. Isto gera uma sequência PRMLS de período $7^5 - 1 = 16806$ amostras não correlacionadas, o que confere a característica de pseudo-aleatoriedade.

Além do que, os autores mostram que é possível encontrar uma sequência ótima $u_o(t)$, a partir de $u_x(t)$, ao maximizar sua correlação com a de um ruído branco a partir de

$$u(t) = u_o(t) = \cos(2\pi u(t)/7) - \sin(2\pi u(t)/7), \quad (3.49)$$

sendo este o sinal utilizado para excitar o sistema Wiener. Foram coletadas 1200 amostras tanto da sequência PRMLS aplicada a entrada do sistema, quanto da resposta correspondente verificada na saída, o que perfaz um total de 12s de dados. Estes sinais são apresentados na Figura 12. Verifica-se os 7 níveis distintos da sequência PRMLS gerada e sua marcante característica aleatória.

Para determinação do modelo diagonal pelo algoritmo OLS-ERR é necessário inicialmente especificar parâmetros da estrutura do modelo, a saber:

1. O_d - Vetor de inteiros com a ordem das componentes funcionais para o modelo;
2. L_B - Atraso máximo dos polinômios do numerador;
3. L_A - Atraso máximo dos polinômios do denominador;
4. k - Conjunto de atrasos que determinam as componentes diagonais.

Dentre os diferentes valores buscados para estes parâmetros, os melhores resultados foram dados por: $O_d = [1 \ 2]$, $L_A = 5$, $L_B = 5$ e $k = \{0 \leq k \leq 12\}$, o que resulta em uma estrutura com 13 diagonais do funcional não linear.

A estratégia de seleção de modelo utilizada parte desta estrutura, seleciona aleatoriamente um conjunto de dados dos sinais de identificação, determina os parâmetros por meio do algoritmo OLS e elimina os termos polinomiais cujos ERR são menores que um dado limiar. O algoritmo

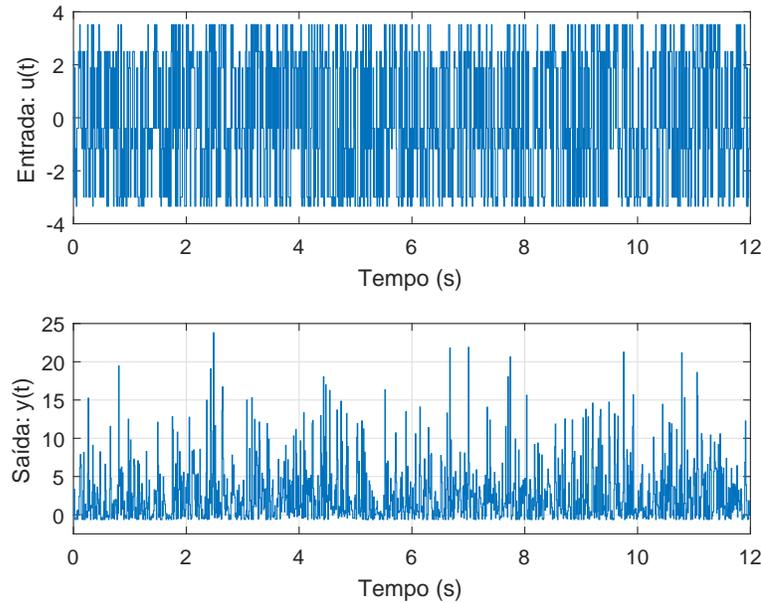


Figura 12 – Dados de Identificação: Resposta do sistema Wiener a entrada *PRMLS*.

exibiu bons resultados quando o limiar de *ERR* foi de 10^{-4} utilizando em cada iteração até 60% dos dados, usando a estratégia de randomização, conforme exposto na seção 2.6.2.

Cada modelo identificado é validado avaliando o ajuste da sua resposta aos dados de validação, o que é medido pela métrica *NRMSE*. Adotou-se como estratégia empírica a identificação de um conjunto de 100 modelos, dos quais foi selecionado aquele com melhor ajuste. Seguindo esta estratégia foi determinado o modelo Volterra diagonal

$$A y(t) = B u(t) + \sum_0^{12} B_k u(t)u(t - k). \quad (3.50)$$

O operador auto-regressivo linear de deslocamento do sistema foi identificado como,

$$A(z) = 1 + 0,1904z^{-1} + 0,2117z^{-2} + 0,0765z^{-3} - 0,0550z^{-4} - 0,0181z^{-5}. \quad (3.51)$$

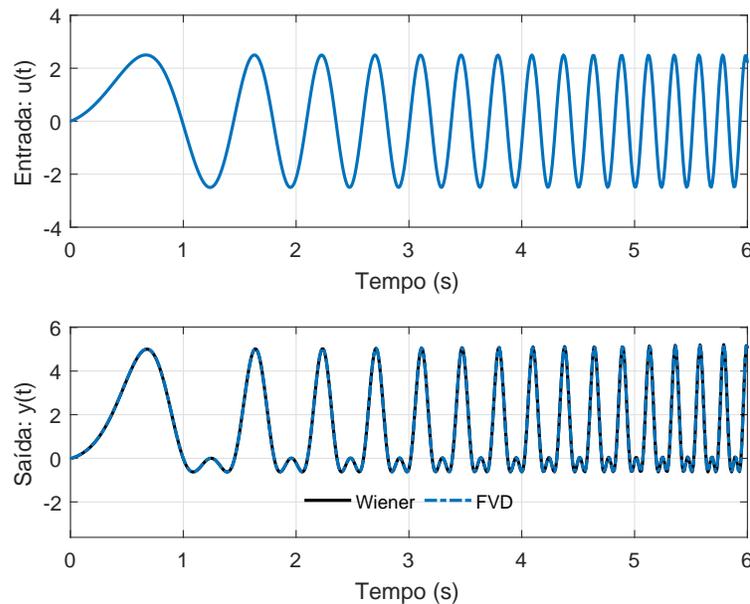
O operador B , que gera os termos atrasados em $u(t)$, e os operadores B_k , das diagonais do funcional não linear, são apresentados na tabela 2 por meio de seus parâmetros. Devido a atuação do algoritmo *OLS-ERR* alguns parâmetros são, como esperado, eliminados da estrutura. Isto é desejável pois é um efeito que confere compacidade ao modelo.

Para validar este modelo identificado foi confrontada a sua resposta, com a do sistema Wiener original, a uma senoide de frequência linearmente variável, sinal popularmente conhecido como *chirp*. Este sinal é descrito por

$$u(t) = \alpha \cos(2\pi f(t)t + \phi). \quad (3.52)$$

Tabela 2 – Parâmetros dos polinômios $B_{2,i}$ do modelo Volterra diagonal identificado..

k	z^0	z^{-1}	z^{-2}	z^{-3}	z^{-4}	z^{-5}
$B(z)$	0	0,7590	0,7537	0,0360	-0,1178	-0,0250
$B_0(z)$	-0,0001	0,2303	0,1922	0,1000	0,0802	0,0107
$B_1(z)$	0	0,3696	-0,0468	0,1059	-0,0016	-0,0157
$B_2(z)$	0,0002	-0,1463	-0,1540	-0,0685	-0,0627	-0,0099
$B_3(z)$	0	-0,1573	0,0043	-0,0474	-0,0050	0,0050
$B_4(z)$	-0,0001	0,0428	0,0605	0,0225	0,0239	0,0043
$B_5(z)$	0	0,0651	0,0037	0,0205	0,0041	-0,0017
$B_6(z)$	0	-0,0108	-0,0232	-0,0067	-0,0090	-0,0019
$B_7(z)$	0	-0,0262	-0,0035	-0,0085	-0,0023	0,0005
$B_8(z)$	0	0,0019	0,0088	0,0018	0,0032	0,0007
$B_9(z)$	0	0,0104	0,0022	0,0035	0,0013	0
$B_{10}(z)$	0	0	-0,0032	0	-0,0011	0
$B_{11}(z)$	0	-0,0040	-0,0012	-0,0013	0	0
$B_{12}(z)$	0	0	0,0011	0	0	0

Figura 13 – Dados de Validação: Resposta do sistema Wiener e do Modelo Diagonal a uma entrada *chirp*.

Sendo $f(t)$ uma função que modula a variação linear da frequência em um suporte de $f \in [0,1 \ 5,0]$ Hz, enquanto a amplitude foi mantida em $\alpha = 2.5$.

Quando submetido ao sinal de validação este modelo e o sistema Wiener apresentam o desempenho mostrado na Figura 13, com os primeiros 6,0s da resposta ao *chirp* para uma simulação de infinitos passos a frente. Nota-se um excelente ajuste entre a curva de resposta do

sistema Wiener e do modelo diagonal, que foi medido como sendo $NRMSE = 99,6\%$. Verifica-se ainda o aspecto qualitativo da dinâmica não-linear a distorção na resposta à entrada com característica senoidal, comportamento que seria impossível com uma representação puramente linear.

3.3.2 Análise de resposta em frequência do modelo diagonal

A partir do modelo identificado é possível conduzir um procedimento de análise que utiliza conceitos comuns à abordagem linear. Para isso é pertinente expressar o modelo no domínio da frequência, de maneira que cada diagonal possa ser vista como uma função de transferência. Isto é realizado de maneira direta, como no caso linear, tomando a transformada \mathcal{Z} de (3.50)

$$Y(z) = \frac{B(z)}{A(z)}U(z) + \sum_{k=0}^{12} \frac{B_k(z)}{A(z)}U_2(z), \quad (3.53)$$

onde $U_2(z) = \mathcal{Z} \{u(t)u(t-k)\}$ o que resulta

$$Y(z) = H(z)U(z) + \sum_{k=0}^{12} H_k(z)U_2(z). \quad (3.54)$$

Como formulado, o polinômio $A(z)$ é o denominador comum a todas as diagonais. Suas raízes compreendem tanto os polos da parte linear do sistema identificado, p_1 e p_2 , quanto os gerados pela não-linearidade quadrática, que como visto são combinações dois a dois dos lineares, ou seja $p_3 = p_1^2$, $p_4 = \bar{p}_3$ e $p_5 = p_1 p_2$. A tabela 3 apresenta os polos dos modelos Wiener e diagonal, onde se verifica um bom ajuste entre os valores previstos e os medidos.

Tabela 3 – Polos teóricos e identificados da diagonais do sistema Wiener.

Polos	Wiener	Diagonal
p_1	$0,0451 + j0,6226$	$0,0450 + j0,6222$
p_3	$-0,3851 + j0,0560$	$-0,3388 + j0,0457$
p_5	$0,3892$	$0,3970$

Considerando a análise da parte linear, é interessante verificar que os zeros compensam os polos gerados pelo funcional não linear de maneira que de $H(z)$ seja equivalente a (3.46). Uma forma usual de analisar este cenário é por meio do diagrama de polos e zeros. A Figura 14 apresenta este diagrama para $H(z)$. Verifica-se que, de fato, há uma compensação dos três polos gerados pela parte não linear, restando apenas um zero com valor $-0,7108$, próximo ao zero de (3.46) ($-0,7118$), e do par de polos lineares. Do bom ajuste paramétrico verificado entre (3.46) e $H(z)$ resulta, na Figura 15, uma equivalência de resposta em frequência de magnitude e fase para estes dois operadores.

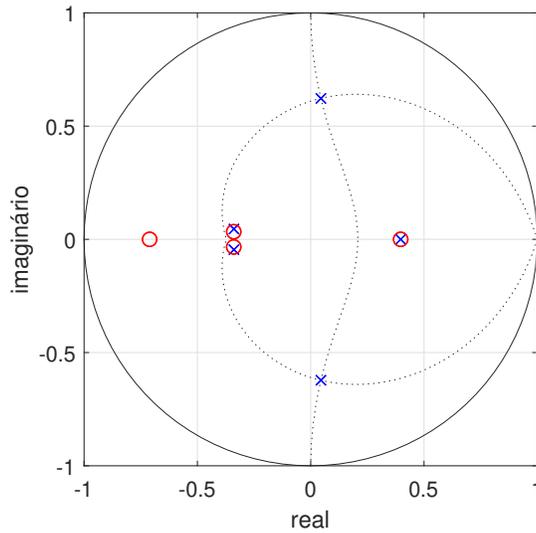
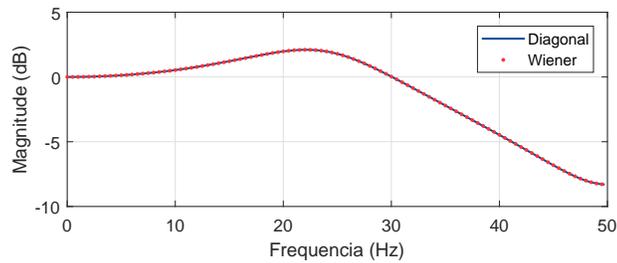
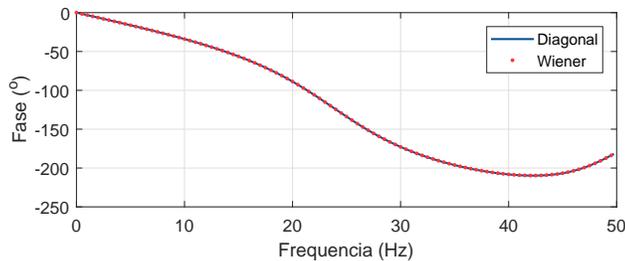


Figura 14 – Mapa de polos \times e zeros \circ de $H(z)$ para o sistema Volterra diagonal.



(a) Resposta de Magnitude.



(b) Resposta de Fase.

Figura 15 – Resposta em frequência de $H(z)$ para os sistemas Wiener e diagonal.

Essa proposta de análise a partir de conceitos da teoria linear pode ser realizada para as funções $H_k(z)$ em (3.54). Isto conduz a uma avaliação da capacidade de generalização do modelo diagonal identificado para explicar as características do sistema Wiener. Neste caso, nota-se que os numeradores destas funções precisam apresentar um par de zeros para compensar os polos da parte linear do sistema em $A(z)$. A Figura 16 apresenta a resposta em frequência em magnitude e o mapa de polos e zeros das três primeiras diagonais.

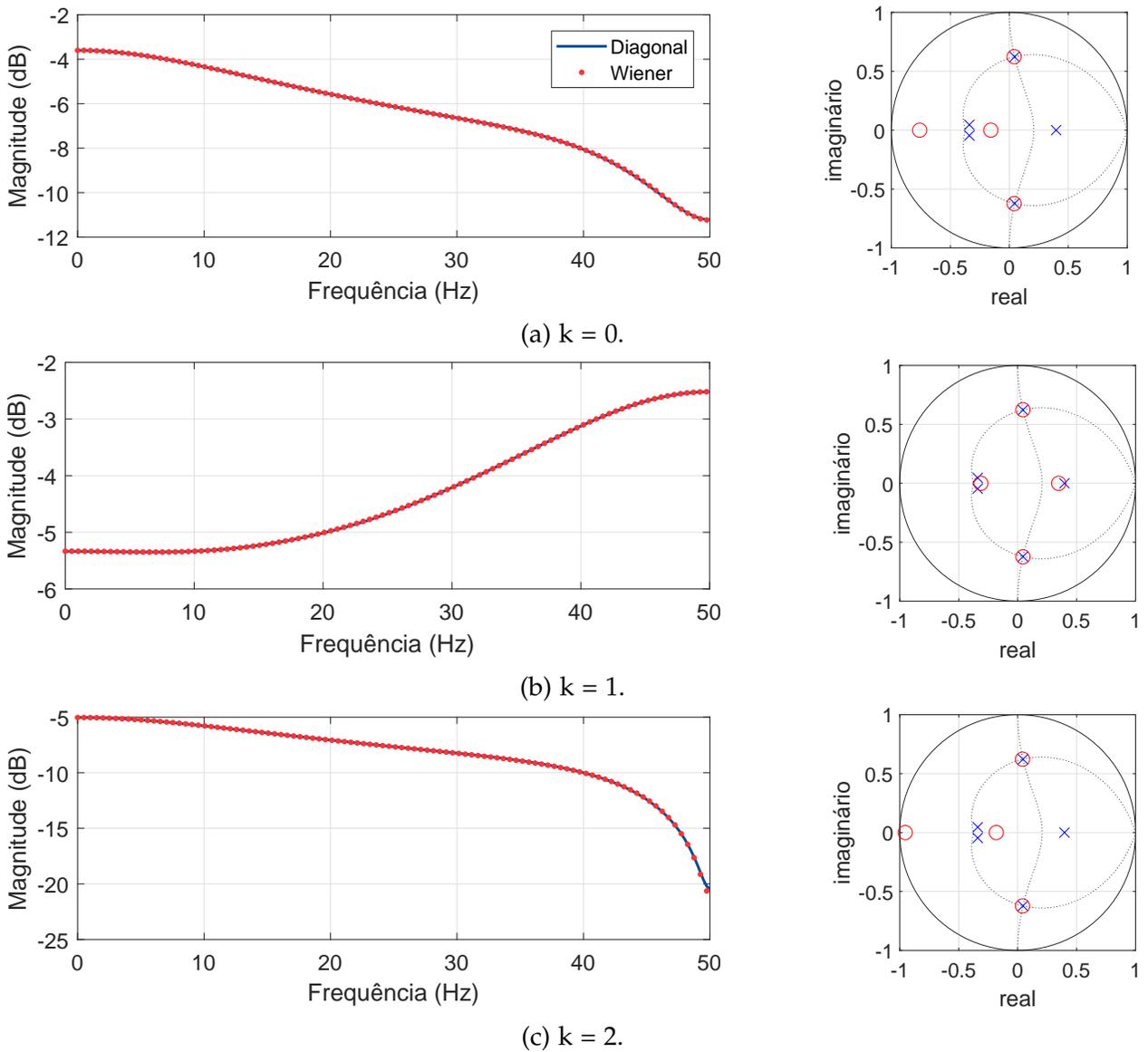


Figura 16 – Resposta em frequência das diagonais $H_k(z)$, para $k = 0, 1$ e 2 .

Nota-se um excelente ajuste de resposta em frequência para as funções diagonais medidas e exatas. Entende-se que este fato corresponde a uma validação do modelo do ponto de vista estrutural. É revelador verificar que cada diagonal exibe um padrão de resposta diferente. Esta diferença está associado à localização dos zeros dos polinômios $B_k(z)$, uma vez que as funções possuem denominadores comuns. O mapa de polos e zeros apresentado para cada caso mostra a compensação do par de polos da parte linear. Verifica-se, porém, que para as diagonais com valores de k mais elevados esse desempenho se deteriora. A Figura 17 apresenta a resposta em frequência para a magnitude e o mapa de polos e zeros para as três últimas diagonais identificadas pelo modelo.

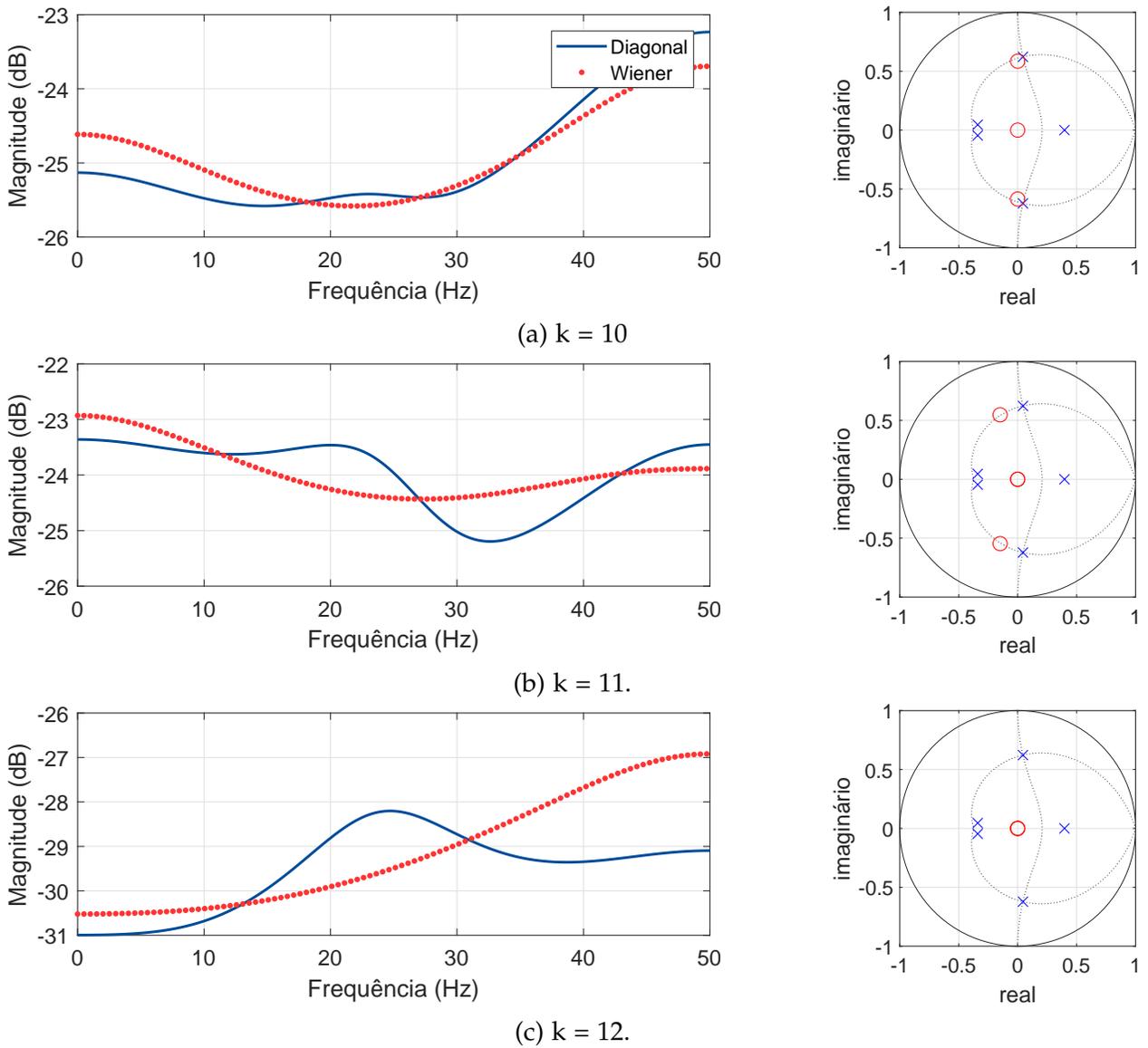


Figura 17 – Resposta em frequência das diagonais $H_k(z)$, para $k = 10, 11$ e 12 .

Verifica-se que nestes casos o ajuste é bastante precário, com uma piora progressiva a medida que k aumenta. O mapa de polos e zeros também apresenta esta problemática, observa-se que não há uma compensação adequada dos polos da parte linear.

Na busca de fatores que explicassem o bom desempenho do modelo apesar da piora no ajuste de resposta em frequência para as diagonais de maior atraso k , foi verificado que as primeiras diagonais possuem ganho médio (em dB) maior que o das últimas, isso é notado diretamente nas Figuras 16 e 17, de onde se conjectura que as primeiras são mais significativas para a resposta. Para quantificar a relevância da contribuição de cada diagonal à resposta global

do sistema propõe-se a medida da energia das curvas de resposta em frequência, dada por

$$E_k = \frac{1}{N_\omega} \sum_{i=1}^{N_\omega} (H_k(e^{j\omega_i}) \bar{H}_k(e^{j\omega_i})), \quad (3.55)$$

sendo N_ω o número de frequências em que a energia E_k é avaliada. Com isso, a energia do conjunto de diagonais do modelo identificado em função de k é apresentado na Figura 18. Observa-se que a

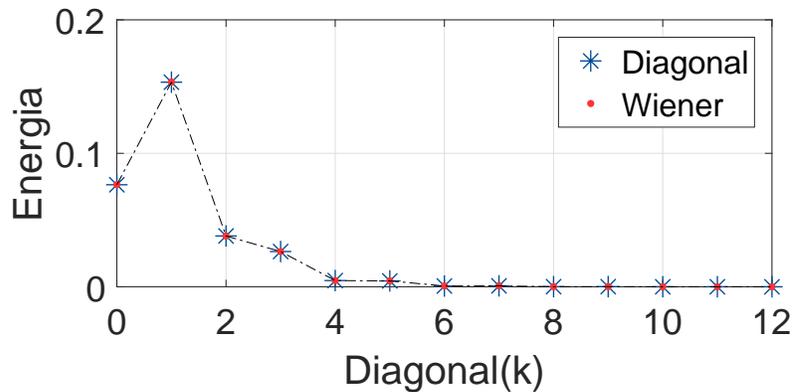


Figura 18 – Energia das componentes diagonais do modelo Volterra.

amplitude da energia cai conforme k aumenta, uma razão para explicar este fato é a relação destas diagonais com regiões de menor amplitude do kernel convencional. Este resultado sugere ainda que as diagonais superiores podem ser removidas do modelo sem prejuízo de representação do sistema, independente do sinal de entrada. Para avaliar esta premissa, o modelo foi simulado para os dados de validação com as diagonais sendo incluídas uma a uma, em cada caso foi avaliada a métrica de ajuste NRMSE, o que é apresentado na Figura 19.

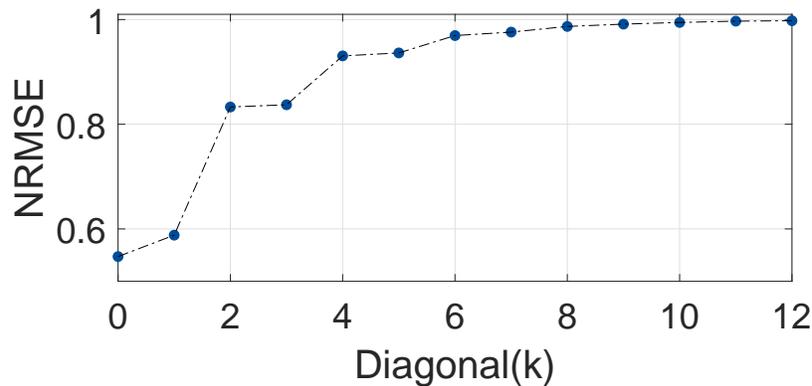


Figura 19 – Ajuste do modelo em função da inclusão das diagonais.

Este resultado corrobora a avaliação realizada por energia das diagonais. Verifica-se que o índice de ajuste NRMSE é gradativamente elevado a medida que k aumenta, sendo que a contribuição da inclusão de novas diagonais vai sendo proporcionalmente reduzida, até a saturação

do índice, de maneira que a inclusão de diagonais para k elevado, de baixa energia, se torna inútil. É possível mostrar que o modelo poderia ser representado por até $k = 8$ diagonais sem grandes prejuízos de desempenho. Isso fornece um procedimento adicional, pós identificação, para seleção de estrutura do modelo.

3.3.2.1 Componentes harmônicas do modelo Diagonal.

O procedimento de análise do sistema foi realizado também visando sua caracterização espectral por meio das componentes harmônicas de saída. Em regime permanente senoidal estas componentes podem ser determinadas de maneira exata, o que se verifica tomando $u(t)$ na forma

$$u(t) = \frac{\alpha}{2}(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}), \quad (3.56)$$

o que implica, para o sistema Wiener

$$v(t) = \frac{\alpha}{2} H(e^{j\omega}) (e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}). \quad (3.57)$$

Aplicando este resultado na saída $y(t) = v(t) + c_2 v(t)^2$ determinar as FRFs exatas das componentes harmônicas na forma

$$Y_2(e^{j0\omega}) = \frac{c_2 \alpha^2}{2} H(e^{j\omega}) H(e^{-j\omega}), \quad (3.58)$$

$$Y_1(e^{j\omega}) = \frac{\alpha}{2} H(e^{j\omega}) \quad e \quad (3.59)$$

$$Y_2(e^{j2\omega}) = \frac{c_2 \alpha^2}{4} H(e^{j\omega})^2. \quad (3.60)$$

Estas funções expressam a magnitude da componente harmônica de saída em função da frequência da entrada. Note que (3.58) explica como o valor contínuo da saída flutua com a frequência, (3.59) é a saída da componente fundamental e (3.60) a do primeiro harmônico.

Resultado semelhante foi desenvolvido para um modelo Volterra diagonal na seção 3.2.1, onde a partir das componentes diagonais chegou-se a composição harmônica de saída em regime permanente senoidal. No caso particular do modelo diagonal identificado as equações (3.29), (3.30) e (3.31), fornecem as mesmas componentes harmônicas que (3.58), (3.59) e (3.60), respectivamente. Assim, é possível avaliar a resposta em frequência dos harmônicos do modelo diagonal e confrontá-lo com a do sistema Wiener, a Figura 20 apresenta estes dados, onde a magnitude da entrada foi adotada $\alpha = 1$. Os dados de resposta em frequência para o sistema e para os modelos foram levantados considerando a entrada na faixa $[0, 1 \ 50]$ Hz, o que corresponde a faixa de Nyquist para a frequência de amostragem considerada.

Os resultados mostram assim a efetividade do modelo diagonal tanto para representar a dinâmica do sistema não linear estudado quanto para expressar, com precisão, seu comportamento no domínio da frequência.

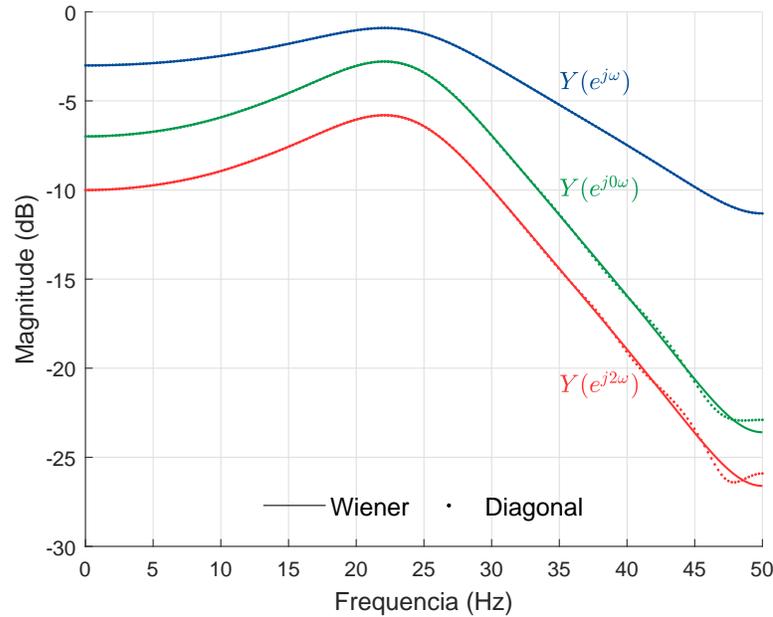


Figura 20 – Resposta em Frequência

3.3.3 Convergência analítica da série diagonal

Um aspecto que se mostra instigante expresso nos resultados anteriores é a correspondência entre a representação diagonal alcançada e a estrutura exata do sistema Wiener. Verifica-se, por exemplo, pelos resultados de ??, que as FRF das componentes harmônicas de um sistema de segunda ordem são dadas por:

$$\hat{Y}_2(z^2) = \frac{\alpha^2}{4} \sum_{k=0}^{\infty} G_k(1) (z^k + z^{-k}) \quad (3.61)$$

$$\hat{Y}_1(z) = \frac{\alpha}{2} \hat{H}(z) \quad (3.62)$$

$$\hat{Y}_2(z^2) = \frac{\alpha^2}{4} \sum_{k=0}^{\infty} G_k(z^2) z^{-k} \quad (3.63)$$

Para o sistema Wiener em estudo, mostrou-se que as RFs podem ser obtidas de forma exata, e são dadas por:

$$Y_2(z^0) = \frac{c_2 \alpha^2}{2} H(z)H(z^{-1}) \quad (3.64)$$

$$Y_1(z) = \frac{\alpha}{2} H(z) \quad (3.65)$$

$$Y_2(z^2) = \frac{c_2 \alpha^2}{4} H(z)^2 \quad (3.66)$$

Como as componentes da série Volterra diagonal convergem para a representação exata do sistema Wiener? Para investigá-la, supõe-se que:

$$h(t) = (\alpha_1 \lambda_1^t + \alpha_2 \lambda_2^t) s(t-1) \quad (3.67)$$

onde $H(z) = \mathcal{Z}[h(t)]$, e $s(t)$ denota a função degrau. Desta forma, verifica-se que:

$$H(z) = \frac{\alpha_1 \lambda_1}{z - \lambda_1} + \frac{\alpha_2 \lambda_2}{z - \lambda_2} = \frac{(\alpha_1 \lambda_1 + \alpha_2 \lambda_2)z + \lambda_1 \lambda_2 (\alpha_1 + \alpha_2)}{(z - \lambda_1)(z - \lambda_2)} = \frac{b_1 z + b_0}{(z - \lambda_1)(z - \lambda_2)} \quad (3.68)$$

Notar que as relações expressas em (3.64):

$$H(z)H(z^{-1}) = \frac{(b_1 z + b_0)(b_0 z + b_1)z}{(z - \lambda_1)(z - \lambda_2)(z\lambda_1 - 1)(z\lambda_2 - 1)} \quad (3.69)$$

$$H(z)^2 = \frac{\alpha_1^2 \lambda_1^2}{(z - \lambda_1)^2} + \frac{\alpha_2^2 \lambda_2^2}{(z - \lambda_2)^2} + \frac{2\alpha_1 \alpha_2 \lambda_1 \lambda_2}{(z - \lambda_1)(z - \lambda_2)} \quad (3.70)$$

são funções racionais.

Como o modelo Wiener possui representações Volterra e FVD exatas. O kernel de ordem 2 pode ser obtido da seguinte forma:

$$y_1(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(t)u(t-k) \quad (3.71)$$

$$y_2(t) = c_2 y_1(t)^2 \quad (3.72)$$

$$= c_2 \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} h(k_1)h(k_2)u(t-k_1)u(t-k_2) \quad (3.73)$$

portanto o kernel de segunda ordem é $h_2(k_1, k_2) = c_2 h(k_1) h(k_2)$. As diagonais são, portanto:

$$d_0(t) = h_2(t, t) = c_2 h(t)^2 \quad (3.74)$$

$$d_k(t) = h_2(t, t+k) = 2c_2 h(t)h(t+k) \quad (3.75)$$

Notar que o termo (3.75) foi obtido após simetriação. Substituindo a forma de exata de $h(t)$ e tirando a transformada \mathcal{Z} , os FVDs verdadeiros do sistema podem ser encontrados:

$$D_0(z) = \frac{c_2 \alpha_1^2 \lambda_1^2}{z - \lambda_1^2} + \frac{c_2 \alpha_2^2 \lambda_2^2}{z - \lambda_2^2} + \frac{2c_2 \alpha_1 \alpha_2 \lambda_1 \lambda_2}{z - \lambda_1 \lambda_2} \quad (3.76)$$

$$D_k(z) = \frac{2c_2 \alpha_1^2 \lambda_1^{k+2}}{z - \lambda_1^2} + \frac{2c_2 \alpha_2^2 \lambda_2^{k+2}}{z - \lambda_2^2} + \frac{2c_2 \alpha_1 \alpha_2 \lambda_1 \lambda_2 (\lambda_1^k + \lambda_2^k)}{z - \lambda_1 \lambda_2} \quad (3.77)$$

É interessante notar que os polos das diagonais são relativamente diferentes dos polos das funções racionais que representam os harmônicos. Ao se igualar as componentes de frequência

obtidas pelas diagonais às obtidas pela formulação do sistema, obtêm-se:

$$\sum_{k=0}^{\infty} D_k(1)(z^k + z^{-k}) = 2c_2 H(z)H(z^{-1}) \quad (3.78)$$

$$\hat{H}(z) = H(z) \quad (3.79)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} D_k(z^2) z^{-k} = c_2 H(z)^2 \quad (3.80)$$

Para verificar como se dá a convergência considera-se o caso de (3.80), cujo lado esquerdo pode ser expresso como:

$$\sum_{k=0}^{\infty} D_k(z^2) z^{-k} = D_0(z^2) + \sum_{k=1}^{\infty} D_k(z^2) z^{-k} = F(z) \quad (3.81)$$

Avalia-se a convergência da soma S , no lado direito, sendo:

$$S = D_k(z^2) z^{-k} \quad (3.82)$$

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2c_2 \alpha_1^2 \lambda_1^{k+2}}{z^2 - \lambda_1^2} + \frac{2c_2 \alpha_2^2 \lambda_2^{k+2}}{z^2 - \lambda_2^2} + \frac{2c_2 \alpha_1 \alpha_2 \lambda_1 \lambda_2 (\lambda_1^k + \lambda_2^k)}{z^2 - \lambda_1 \lambda_2} \right) z^{-k} \quad (3.83)$$

Para tanto é necessário fazer uso do resultado da soma de uma série geométrica, dado por:

$$\sum_{k=1}^{\infty} q^k = \frac{q}{1-q} \quad (3.84)$$

Expandindo a soma (3.83) e aplicando (3.84):

$$S = \frac{2c_2 \alpha_1^2 \lambda_1^2 (\lambda_1 z^{-1})}{(z^2 - \lambda_1^2)(1 - \lambda_1 z^{-1})} + \frac{2c_2 \alpha_2^2 \lambda_2^2 (\lambda_2 z^{-1})}{(z^2 - \lambda_2^2)(1 - \lambda_2 z^{-1})} + \frac{2c_2 \alpha_1 \alpha_2 \lambda_1 \lambda_2}{z^2 - \lambda_1 \lambda_2} \left(\frac{\lambda_1 z^{-1}}{1 - \lambda_1 z^{-1}} + \frac{\lambda_2 z^{-1}}{1 - \lambda_2 z^{-1}} \right) \quad (3.85)$$

$$= \frac{2c_2 \alpha_1^2 \lambda_1^3}{(z^2 - \lambda_1^2)(z - \lambda_1)} + \frac{2c_2 \alpha_2^2 \lambda_2^3}{(z^2 - \lambda_2^2)(z - \lambda_2)} + \frac{2c_2 \alpha_1 \alpha_2 \lambda_1 \lambda_2}{z^2 - \lambda_1 \lambda_2} \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)z - 2\lambda_1 \lambda_2}{(z - \lambda_1)(z - \lambda_2)} \quad (3.86)$$

Têm-se ainda, que:

$$D_0(z^2) = \frac{c_2 \alpha_1^2 \lambda_1^2}{z^2 - \lambda_1^2} + \frac{c_2 \alpha_2^2 \lambda_2^2}{z^2 - \lambda_2^2} + \frac{2c_2 \alpha_1 \alpha_2 \lambda_1 \lambda_2}{z^2 - \lambda_1 \lambda_2} \quad (3.87)$$

Então:

$$F(z) = D_0(z^2) + S = \frac{c_2 \alpha_1^2 \lambda_1^2}{z^2 - \lambda_1^2} \left(1 + \frac{2\lambda_1}{z - \lambda_1} \right) + \frac{c_2 \alpha_2^2 \lambda_2^2}{z^2 - \lambda_2^2} \left(1 + \frac{2\lambda_2}{z - \lambda_2} \right) + \frac{2c_2 \alpha_1 \alpha_2 \lambda_1 \lambda_2}{z^2 - \lambda_1 \lambda_2} \left(1 + \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)z - 2\lambda_1 \lambda_2}{(z - \lambda_1)(z - \lambda_2)} \right) \quad (3.88)$$

$$= \frac{c_2 \alpha_1^2 \lambda_1^2}{z^2 - \lambda_1^2} \frac{z + \lambda_1}{z - \lambda_1} + \frac{c_2 \alpha_2^2 \lambda_2^2}{z^2 - \lambda_2^2} \frac{z + \lambda_2}{z - \lambda_2} + \frac{2c_2 \alpha_1 \alpha_2 \lambda_1 \lambda_2}{z^2 - \lambda_1 \lambda_2} \frac{z^2 - \lambda_1 \lambda_2}{(z - \lambda_1)(z - \lambda_2)} \quad (3.89)$$

$$= \frac{c_2 \alpha_1^2 \lambda_1^2}{(z - \lambda_1)^2} + \frac{c_2 \alpha_2^2 \lambda_2^2}{(z - \lambda_2)^2} + \frac{2c_2 \alpha_1 \alpha_2 \lambda_1 \lambda_2}{(z - \lambda_1)(z - \lambda_2)} \quad (3.90)$$

que é idêntico a $c_2H(z)^2$, conforme esperado.

Este resultado demonstra que a série diagonal de fato consegue convergir para o valor correto de cada componente de frequência. Porém, isto depende fortemente de existir uma estrutura bem definida para as diagonais. Contudo, trata-se de um resultado contundente acerca da capacidade de representação desse formalismo.

MÉTODO DERIVATIVO

4.1 Introdução

A aproximação de um sistema não-linear por uma série de Volterra permite o estudo de suas características invariantes via técnicas de análise. Isto surge como um passo natural de compreensão do sistema, tal como se analisa uma função de transferência após a identificação de um modelo linear. Costumeiramente técnicas de aproximação são realizadas utilizando estruturas multidimensionais, como os kernels e GFRF. Além disso, uma descrição Volterra do sistema nem sempre está prontamente disponível. Identificar experimentalmente um modelo deste tipo nem sempre é viável, pois geralmente é difícil encontrar um equilíbrio entre o ajuste aos dados e sua complexidade.

Neste sentido o método de sondagem (*probing*) (JONES, 2007) e o diaphantino (BAYMA; ZHU; LANG, 2018), estabelecem algoritmos que buscam mapear um modelo NARX para uma aproximação Volterra a partir da determinação de relações recursivas entre as GFRFs. A principal diferença entre os algoritmos é que o *probing* trabalha com cálculos simbólicos recursivos, enquanto o método diophantino utiliza uma abordagem numérica.

A implementação dos métodos de sondagem e diophantino é relativamente complexa e o custo computacional associado torna-se impraticável quando a ordem do sistema é elevada. Uma dificuldade adicional é que seus resultados, as GFRFs do sistema, quando determinadas, exibem suas próprias e já conhecidas dificuldades de análise.

Quando se trata de obter as componentes funcionais, o método mais eficiente é provavelmente o baseado em equações lineares associadas (ALEs). Apesar de exibirem uma forma compacta, esta abordagem não tem sido utilizada para analisar o comportamento e características invariantes do sistema de forma geral.

Este capítulo apresenta um método algébrica e computacional para atacar o problema da

determinação das características invariantes de um sistema não-linear visando sua análise por séries de Volterra diagonais. Como visto, estes modelos compreendem um formalismo efetivo para caracterizar o sistema nos domínios do tempo e da frequência, uma vez que os funcionais podem ser descritos como uma série de convoluções unidimensionais, quando expressos em coordenadas diagonais.

Para isso será conduzido um estudo a partir do caso particular do mapeamento de um modelo NARX polinomial, o que é relevante do ponto de vista prático uma vez que estes modelos podem ser relativamente bem ajustadas a dados experimentais sem aumentar exageradamente a complexidade estrutural (BILLINGS, 2013).

O método proposto é baseado na visão dos funcionais como séries de potência, onde os kernels são isolados usando derivadas. A implementação é direta e requer apenas resultados do cálculo multivariável. O algoritmo é exemplificado através de um sistema NARX simples. Resultados de simulação comprovam a eficácia da representação, que pode ser utilizada para fins de análise e síntese de sistemas não-lineares. Os resultados aqui apresentados foram publicados no trabalho (TEIXEIRA *et al.*, 2018) pela revista *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*.

4.2 Derivação de Modelo Volterra Diagonal

Modelos polinomiais NARX exibem uma boa capacidade de ajuste a dados experimentais em uma estrutura compacta que descreve uma grande variedade de comportamentos dinâmicos verificados em sistemas não lineares (BILLINGS, 2013). Contudo, estes modelos não oferecem uma possibilidade direta de análise do sistema devido principalmente a sua representação implícita da saída. Isto se mostra evidente ao se rever a estruturada deste modelo polinomial

$$Ay(t) = Bu(t) + \sum_{m=1}^M c_m \prod_{l=1}^L y(t-l)^{p(m,l)} u(t-l)^{q(m,l)}. \quad (4.1)$$

Uma estratégia comumente utilizada visando a análise destas representações é a determinação de uma aproximação por série de Volterra, o que em geral é possível se o sistema exibir não-linearidades fracas e for de memória assintótica. Neste caso, a abordagem passa pela determinação do conjunto de equações lineares associadas (ALEs), conforme definidas na seção 2.5.3, uma vez que estas equações estabelecem relações compactas entre as componentes funcionais da representação Volterra a partir do modelo NARX. Para (4.1) o conjunto de ALEs tem a forma geral

$$Ay_1(t) = Bu(t) \quad n = 1 \quad (4.2)$$

$$Ay_n(t) = F_n(t) \quad n \in \{2, \dots, N\}, \quad (4.3)$$

onde $F_n(t)$ é um polinômio em relação aos funcionais de ordem inferior a n e o sinal de entrada. O algoritmo baseado em sistemas de equações diophantinas proposto em (BAYMA; ZHU; LANG, 2018)

permite determinar de modo eficiente os termos $F_n(t)$ para um modelo NARX arbitrário, embora isso não revele as características intrínsecas do sistema.

Torna-se necessária então uma estratégia que permita processar as ALEs visando a determinação do conjunto de kernels do sistema, isto é proposto pelo método descrito a seguir, em uma abordagem baseada na derivação das componentes funcionais. Para tanto, considera-se inicialmente o caso do funcional de primeiro grau, cuja relação é expressa pela soma de convolução

$$y_1(t) = h(t) * u(t) = \sum_{\tau} h(\tau)u(t - \tau), \quad (4.4)$$

Embora possam ocorrer infinitos termos nesta expansão, cada um é único, com coeficiente $h(\tau)$ e o sinal $u(t - \tau)$. Se os atrasos da entrada forem interpretados como variáveis diferentes o funcional pode ser interpretado como um polinômio multivariável. Neste caso, a ideia de isolar cada coeficiente $h(\tau)$ do polinômio é intuitiva, podendo ser realizada por uma derivação em (4.4), no atraso τ correspondente, ou seja

$$\frac{\partial y_1(t)}{\partial u(t - \tau)} = h(\tau). \quad (4.5)$$

Esta operação é invariante ao atraso l em (4.4), dado que o atraso no funcional propaga-se diretamente para o resultado, isto é visto fazendo

$$y_1(t - l) = h(t - l) * u(t - l) = \sum_{\tau} h(\tau - l)u(t - \tau - l), \quad (4.6)$$

cujas derivadas resultam

$$\frac{\partial y_1(t - l)}{\partial u(t - \tau)} = h(\tau - l). \quad (4.7)$$

Em ambos os casos a derivação resultou no isolamento do kernel $h(t)$ do funcional.

Agora, considerando o caso de grau 2, com o funcional expresso em coordenadas retangulares, para um atraso l qualquer, por

$$y_2(t - l) = \sum_{\tau_1} \sum_{\tau_2} h(\tau_1 - l, \tau_2 - l)u(t - \tau_1 - l)u(t - \tau_2 - l), \quad (4.8)$$

a mesma estratégia pode ser aplicada buscando isolar o kernel $h(\tau_1, \tau_2)$. Contudo, neste caso deve-se considerar uma dupla derivação, uma vez que o polinômio é multivariável em $u(t - \tau_1 - l)$ e $u(t - \tau_2 - l)$. Assim, procede-se com

$$\frac{\partial y_2(t - l)}{\partial u(t - \tau_1)} = \bar{\sigma}_2 \sum_{\tau_2} h(\tau_1 - l, \tau_2 - l)u(t - \tau_2) \quad \text{e} \quad (4.9)$$

$$\frac{\partial^2 y_2(t - l)}{\partial u(t - \tau_2) \partial u(t - \tau_1)} = \bar{\sigma}_2 h(\tau_1 - l, \tau_2 - l), \quad (4.10)$$

que é o kernel do funcional a menos do coeficiente inteiro $\bar{\sigma}_2$, o qual é necessário para medir combinações de repetições no conjunto de índices $\{\tau_1, \tau_2\}$, uma vez que $\bar{\sigma}_2 = 2$ quando $\tau_1 = \tau_2$ e $\bar{\sigma}_2 = 1$ do contrário.

Este resultado pode ser generalizado para a extração do kernel de um funcional de n -ésima ordem, com atraso l . Contudo, as operações de derivação passam a exibir uma notação bastante carregada, de maneira que simplificações passam a ser necessárias. Para tanto, considera-se a seguinte definição para o operador diferencial multivariável, em relação às variáveis de interesse

$$\partial_\tau(\cdot) \triangleq \partial(\cdot)/\partial u(t - \tau), \quad (4.11)$$

e para derivadas de ordem $n \geq 2$:

$$\partial_\tau^n(\cdot) \triangleq \partial_{\tau_n} \dots \partial_{\tau_1}(\cdot) \quad (4.12)$$

$$\triangleq \frac{\partial^n(\cdot)}{\partial u(t - \tau_n) \dots \partial u(t - \tau_1)}, \quad (4.13)$$

onde $\tau_n \triangleq (\tau_1, \dots, \tau_n)$.

Assim, de modo geral, para um funcional de grau $n > 1$

$$y_n(t - l) = \sum_{\tau_1} \dots \sum_{\tau_n} h_n(\tau_1 - l, \dots, \tau_n - l) \prod_{i=1}^n u(t - \tau_i - l), \quad (4.14)$$

o kernel pode ser isolado, para qualquer atraso l , a partir da seguinte operação:

$$\partial_{\tau_n}^n(y_n(t - l)) = \bar{\sigma}_{\tau_n} h_n(\tau_1 - l, \dots, \tau_n - l) \quad (4.15)$$

onde $\bar{\sigma}_{\tau_n}$ é definido por:

$$\bar{\sigma}_{\tau_n} = \prod_{i=1}^r \eta_i! , \quad (4.16)$$

sendo r o número de índices únicos em τ_n e $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_r$ representam seus respectivos números de repetições.

É importante notar que, se o grau do operador de derivação for maior que o do funcional, decorre diretamente da derivação polinomial que

$$\partial_{\tau_n}^m(y_n(t - l)) = 0 \quad m > n \quad (4.17)$$

Uma consequência direta de (4.15) é que, dado um operador linear de deslocamento temporal A , tal que $Ay_n(t) = \sum_{l=0}^L a_l y_n(t - l)$, então:

$$\begin{aligned} \partial_\tau^n(Ay_n(t)) &= \bar{\sigma}_{\tau_n} A h_n(\tau_1, \dots, \tau_n) \\ &= \bar{\sigma}_{\tau_n} \sum_{l=0}^L a_l h_n(\tau_1 - l, \dots, \tau_n - l) \end{aligned} \quad (4.18)$$

O processo permite então extrair o kernel de um funcional. Isto foi realizado em coordenadas retangulares, porém, o mesmo pode ser feito considerando a derivação em coordenadas

diagonais, ou através da mudança de variável do kernel retangular para as suas componentes diagonais, sendo $\tau_i = \tau + k_{i-1}$, com $i \in \{1, \dots, n\}$, de modo que combinando (2.39) e (4.15), resulta

$$\partial_n^p(y_p(t-l)) = \sigma_k h_k(n-l) \quad (4.19)$$

onde usa-se k conforme (2.38). A mudança deve também se aplica ao índice de repetições dos termos diagonais, o que é feito fazendo $\sigma_k \triangleq \bar{\sigma}_{(0,k)}$. O resultado expressa então as componentes diagonais $h_k(t)$ do funcional.

Agora, com o procedimento estabelecido, é necessário aplicá-lo à estrutura que relaciona os kernels Volterra ao modelo NARX sob estudo, ou seja, ao conjunto de ALEs. Assim, aplicando inicialmente à ALE de grau 1, têm-se

$$\partial_\tau A y_1(t) = \partial_\tau B u(t). \quad (4.20)$$

Os operadores A e B podem ser retirados da derivação, uma vez que são constantes em relação a $u(t)$, então

$$A \partial_\tau y_1(t) = B \partial_\tau u(t). \quad (4.21)$$

O lado esquerdo da equação é bem definido, uma vez que $\partial_\tau y_1(t) = h(t)$. Quanto ao lado direito, decorre diretamente do cálculo multivariável que

$$\partial_\tau u(t-l) = \delta(n-l), \quad (4.22)$$

onde $\delta(t)$ é a sequência impulso, i.e. $\delta(t) = 1$ se $t = 0$ e $\delta(t) = 0$ do contrário. Assim, para (4.21) têm-se:

$$A h(t) = B \delta(t). \quad (4.23)$$

Isto define uma equação de diferenças cuja solução fornece $h(t)$, podendo ser resolvida no domínio do tempo ou por técnicas de transformada. Tal resultado corrobora a clássica definição do kernel Volterra do funcional de primeira ordem, associado ao modelo linear do sistema, definindo $h(t)$ como uma resposta impulsiva.

Procedendo então para as ALEs de funcionais de ordem mais elevada, ao aplicar o operador (4.12) em (4.3)

$$\partial_k^n A y_n(t) = \partial_k^n F_n(t), \quad (4.24)$$

de onde resulta

$$\sigma_k A h_k(t) = \partial_k^n F_n(t). \quad (4.25)$$

O resultado é uma equação de diferenças no kernel diagonal $h_k(t)$. No lado direito, o termo forçado da equação é determinado a partir de derivação da função $F_n(t)$. Como esta é uma função

polinomial nos termos funcionais de ordem menor que n e da entrada $u(t)$, a derivação resultará nas componentes diagonais dos funcionais e em impulsos, devidos ao sinal de entrada. Em todo caso, a estrutura é linear, de maneira que a despeito da quantidade de termos do lado direito, $h_k(t)$ poderá sempre ser determinada pela superposição de seus efeitos devidos à dinâmica (4.25).

Utilizando este raciocínio, propõe-se o Algoritmo 1 para obter os kernels diagonais de um sistema a partir de seu modelo NARX.

Algorithm 1 Algoritmo que estrutura o método derivativo para a determinação do modelo Volterra diagonal de um sistema NARX.

Entrada: Modelo NARX.

Saída: Modelo Volterra diagonal.

- 1: Obter as ALES até a ordem N desejada;
- 2: Aplicar ∂_k a ALE de grau 1 para obter:

$$Ah_1(n) = B\delta(n)$$

- 3: **for** $n = 2, \dots, N$: **do**
- 4: $V \leftarrow F_n(t)$;
- 5: **for** $i = 1, \dots, n$: **do**
- 6: $V \leftarrow \partial_{\tau_i}(V)$
- 7: Aplicar a substituição (4.15), se necessário;
- 8: **end for**
- 9: Obter a equação de grau n :

$$\bar{\sigma}_\tau Ah_n(\tau_1, \dots, \tau_p) = V;$$

- 10: Substituir $\tau_1 = \tau$;
 - 11: **for** $i = 2, \dots, n$: **do**
 - 12: Substituir $\tau_i = \tau + k_{i-1}$;
 - 13: **end for**
 - 14: Substituir os kernels diagonais, conforme (2.39);
 - 15: **end for**
 - 16: Resolver as equações lineares resultantes.
-

O método é bastante simples de implementar, inclusive manualmente. O algoritmo é aplicável a qualquer modelo NARX polinomial, sem nenhuma restrição particular sobre a estrutura ou valores de coeficientes, embora o mapeamento apenas faça sentido se o modelo admitir a convergência de uma aproximação Volterra, o que é uma limitação da abordagem Volterra, não do método proposto. Por ser baseado em diferenciação e equações de diferenças lineares, o método é muito viável, mesmo para sistemas de ordem elevada.

Observa-se também que o método não sofre problemas de estabilidade ou numéricos. A

própria complexidade do Algoritmo 1 vem de (i) determinação, (ii) diferenciação e (iii) solução das ALEs. A parte (i) é resolvida usando o algoritmo de (BAYMA; ZHU; LANG, 2018), que pode ser implementado em tempo computacional razoável para a maioria dos casos práticos. A parte (ii) é sempre viável, particularmente pelo fato de as funções diferenciáveis serem polinomiais, cujas regras de derivação são facilmente computáveis, por isso esta parte pode ser implementada usando computação simbólica. A parte (iii) está bem estabelecida, pois trata-se de resolver equações de diferenças lineares, de maneira que as soluções podem ser encontradas numericamente ou na forma fechada exata. Este último é mais trabalhoso de se obter, mas fornece uma grande visão sobre as propriedades do sistema.

O método guarda muitas semelhanças com os métodos recursivos para determinação de GFRF (probing, diaphantino). Apesar de ser recursivo, ele possui vantagens diante dos demais. O probing, por exemplo, tem recursões internas, que precisam ser processadas antes de estabelecer a forma final da equação. Já o método diaphantino precisa que as equações diophantinas sejam resolvidas para obter os termos forçados de cada equação.

A abordagem proposta contorna essas dificuldades porque trabalha com uma filosofia inversa, que reduz o grau dos funcionais, enquanto que os outros se concentram em comparar estruturas polinomiais de mesmo grau, o que requer expansão e conseqüente aumento do grau dos termos funcionais enquanto que o diferencial progressivamente os reduz. Por fim, o método resulta na formulação Volterra em coordenadas diagonais, gerando equações lineares e unidimensionais; probing nas GFRF e o diafantino mira nas componentes funcionais, a partir das quais os kernels ainda precisam ser deduzidos.

A seção a seguir demonstra isso a partir de um sistema NARX específico, com coeficientes fechados, onde se busca avaliar se as diagonais calculadas seguindo essa abordagem representam bem o sistema.

4.3 Estudo de Caso II: Sistema NARX

Seja o modelo NARX

$$Ay(t) = Bu(t) + c_1 y(t-1)^3 + c_2 y(t-2)u(t-3) \quad (4.26)$$

onde os operadores A e B , e as constantes c_1 e c_2 serão definidas a posteriori. Busca-se determinar os kernels de uma aproximação Volterra de terceiro grau, ou seja $y(t) = y_1(t) + y_2(t) + y_3(t)$. As ALEs correspondentes podem ser obtidas usando o algoritmo proposto em (BAYMA; ZHU; LANG, 2018) como:

$$Ay_1(t) = Bu(t) \quad (4.27)$$

$$Ay_2(t) = F_2(t) = c_2 y_1(t-2) u(t-3) \quad (4.28)$$

$$Ay_3(t) = F_3(t) = c_1 y_1^3(t-1) + c_2 y_2(t-2) u(t-3) \quad (4.29)$$

É importante verificar a definição das funções $F_2(t)$ e $F_3(t)$ a partir dos funcionais de ordem inferior. Com as ALEs, procede-se com o método derivativo buscando determinar inicialmente as equações de diferença que modelam as diagonais correspondentes de cada grau de interesse.

Para a diagonal de grau, o resultado é direto

$$Ah_1(t) = B\delta(t), \quad (4.30)$$

a clássica definição de $h_1(t)$ como a resposta do sistema quando a entrada é o impulso unitário.

Para as diagonais de grau $n = 2$, inicializa-se o algoritmo 1 fazendo $V \leftarrow F_2(t)$.

Para $i = 1$:

$$\begin{aligned} V \leftarrow \partial_{\tau_1}(V) &= c_2(f + g) \\ f &= \partial_{\tau_1}(y_1(t-2))u(t-3) \\ &= h_1(\tau_1 - 2)u(t-3). \end{aligned} \quad (4.31)$$

$$\begin{aligned} g &= y_1(t-2)\partial_{\tau_1}(u(t-3)) \\ &= y_1(t-2)\delta(\tau_1 - 3). \end{aligned} \quad (4.32)$$

Para $i = 2$:

$$\begin{aligned} V \leftarrow \partial_{\tau_2}(V) &= c_2(\partial_{\tau_2}(f) + \partial_{\tau_2}(g)) \\ \partial_{\tau_2}(f) &= h_1(\tau_1 - 2)\partial_{\tau_2}(u(t-3)) \\ &= h_1(\tau_1 - 2)\delta(\tau_2 - 3) \end{aligned} \quad (4.33)$$

$$\begin{aligned} \partial_{\tau_2}(g) &= \partial_{\tau_2}(y_1(t-2))\delta(\tau_1 - 3) \\ &= h_1(\tau_2 - 2)\delta(\tau_1 - 3) \end{aligned} \quad (4.34)$$

O resultado é

$$\bar{\sigma}_{\tau_2} Ah_2(\tau_1, \tau_2) = V,$$

que, convertido para a forma diagonal resulta

$$Ah_{k_2}(t) = \frac{c_2}{\sigma_{k_2}}(f_1(t) + g_1(t)) \quad (4.35)$$

$$f_1(t) = h_1(n-2)\delta(n+k_1-3) \quad (4.36)$$

$$g_1(t) = h_1(n+k_1-2)\delta(n-3). \quad (4.37)$$

Para diagonais de grau $n = 3$, inicializa-se $V \leftarrow F_3(t)$. Para $i = 1$, $V \leftarrow \partial_{\tau_1}(V)$ resulta:

$$\partial_{\tau_1}(V) = c_1\partial_{\tau_1}(w(t)) + c_2\partial_{\tau_1}(v(t)), \quad (4.38)$$

onde

$$\begin{aligned}\partial_{\tau_1}(w(t)) &= 3y_1^2(t-1)\partial_{\tau_1}(y_1(t-1)) \\ &= 3y_1^2(t-1)h_1(\tau_1-1) = w_1\end{aligned}\quad (4.39)$$

e

$$\partial_{\tau_1}(v(t)) = v_1 + v_2, \quad (4.40)$$

tal que

$$\begin{aligned}v_1 &= \partial_{\tau_1}(y_2(t-2))u(t-3) \\ v_2 &= y_2(t-2)\partial_{\tau_1}(u(t-3)) \\ &= y_2(t-2)\delta(\tau_1-3)\end{aligned}$$

Para $i = 2$, $V \leftarrow \partial_{\tau_2}(V)$, onde:

$$\partial_{\tau_2}(V) = c_1\partial_{\tau_2}(w_1) + c_2\partial_{\tau_2}(v_1 + v_2), \quad (4.41)$$

onde

$$\begin{aligned}\partial_{\tau_2}(w_1) &= 6y_1(t-1)h_1(\tau_1-1)\partial_{\tau_2}(y_1(t-1)) \\ &= 6y_1(t-1)h_1(\tau_1-1)h_1(\tau_2-1) = w_2 \\ \partial_{\tau_2}(v_1) &= v_3 + v_4 \\ v_3 &= \partial_{\tau_1, \tau_2}^2(y_2(t-2))u(t-3) \\ &= \bar{\sigma}_{\tau_1, \tau_2}h_2(\tau_1-2, \tau_2-2)u(t-3) \\ v_4 &= \partial_{\tau_1}(y_2(t-2))\partial_{\tau_2}(u(t-3)) \\ &= \partial_{\tau_1}(y_2(t-2))\delta(\tau_2-3) \\ \partial_{\tau_2}(v_2) &= \partial_{\tau_2}(y_2(t-2))\delta(\tau_1-3) = v_5\end{aligned}$$

Para $i = 3$, $V \leftarrow \partial_{\tau_3}(V)$, de forma que:

$$\partial_{\tau_3}(V) = c_1\partial_{\tau_3}(w_2) + c_2\partial_{\tau_3}(v_3 + v_4 + v_5),$$

sendo

$$\begin{aligned}\partial_{\tau_3}(w_2) &= 6 \partial_{\tau_3}(y_1(t-1)) h_1(n_1-1) h_1(n_2-1) \\ &= 6 h_1(\tau_3-1) h_1(\tau_1-1) h_1(\tau_2-1),\end{aligned}\quad (4.42)$$

$$\begin{aligned}\partial_{\tau_3}(v_3) &= \bar{\sigma}_{\tau_1, \tau_2} h_2(\tau_1-2, \tau_2-2) \partial_{\tau_3}(u(t-3)) \\ &= \bar{\sigma}_{\tau_1, \tau_2} \cdot h_2(\tau_1-2, \tau_2-2) \delta(\tau_3-3),\end{aligned}\quad (4.43)$$

$$\begin{aligned}\partial_{\tau_3}(v_4) &= \partial_{\tau_1, \tau_3}^2 (y_2(t-2)) \delta(\tau_2-3) \\ &= \bar{\sigma}_{\tau_1, \tau_3} h_2(\tau_1-2, \tau_3-2) \delta(\tau_2-3) \quad e\end{aligned}\quad (4.44)$$

$$\begin{aligned}\partial_{\tau_3}(v_5) &= \partial_{\tau_2, \tau_3}^2 (y_2(t-2)) \delta(\tau_1-3) \\ &= \bar{\sigma}_{\tau_2, \tau_3} h_2(\tau_2-2, \tau_3-2) \delta(\tau_1-3).\end{aligned}\quad (4.45)$$

O resultado é

$$\bar{\sigma}_{\tau_3} A h_3(\tau_1, \tau_2, \tau_3) = V, \quad (4.46)$$

que convertido para a forma diagonal resulta

$$A h_{k_3}(t) = \frac{1}{\sigma_{k_3}} \sum_{i=1}^4 x_i(t), \quad (4.47)$$

onde

$$x_1(t) = 6c_1 h_1(t-1) \prod_{i=1}^2 h_1(t+k_i-1), \quad (4.48)$$

$$\begin{aligned}x_2(t) &= c_2 \sigma_{k_1} \cdot h_{k_2}(t-2) \delta(t+k_2-3) \\ &= c_2 \sigma_{k_1} \cdot h_{k_1}(1-k_2) \delta(t+k_2-3),\end{aligned}\quad (4.49)$$

$$\begin{aligned}x_3(t) &= c_2 \sigma_{k_2} \cdot h_{k_2}(t-2) \delta(t+k_1-3) \\ &= c_2 \sigma_{k_2} \cdot h_{k_2}(1-k_1) \delta(n+k_1-3) \quad e\end{aligned}\quad (4.50)$$

$$\begin{aligned}x_4(t) &= c_2 \sigma_{k_2-k_1} \cdot h_{k_2-k_1}(t+k_1-2) \delta(n-3) \\ &= c_2 \sigma_{k_2-k_1} \cdot h_{k_2-k_1}(1+k_1) \delta(t-3).\end{aligned}\quad (4.51)$$

onde (4.49)-(4.51) foram obtidas usando as propriedades do impulso.

As equações de diferença (4.35) e (4.47) estabelecem uma base para calcular qualquer kernel diagonal $h_{k_1}(t)$ e $h_{k_1, k_2}(t)$. Note que uma diagonal não influencia no procedimento da outra. Embora as soluções possam ser obtidas numericamente, é interessante resolver (4.35) e (4.47) analiticamente, o que fornece informações importantes sobre a estrutura geral do sistema.

4.3.1 Solução analítica

Suponha que os operadores A e B sejam definidos como: $A(z) = 1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2}$, $B(z) = b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}$. Sejam $p_1 \neq p_2$ as raízes de $A(z)$, de modo que:

$$h_1(t) = (r_1 p_1^{t-1} + r_2 p_2^{t-1}) s(t-1) \quad (4.52)$$

onde $s(t)$ é a função degrau, i.e. $s(t) = 1$ para $t \geq 0$ e $s(t) = 0$ do contrário.

Considere a equação $Ah(t) = x(t)$. Sejam as respostas de estado nulo para $x(t) = \delta(t)$ e $x(t) = \rho^t s(t)$, $\rho \neq p_1$, $\rho \neq p_2$ respectivamente descritas como:

$$\xi(t) = (\mu_1 p_1^t + \mu_2 p_2^t) s(t) \quad (4.53)$$

$$\zeta(t, \rho) = (\beta_1(\rho) p_1^t + \beta_2(\rho) p_2^t + \beta_3(\rho) \rho^t) s(t) \quad (4.54)$$

onde $\mu_1 = p_1/(p_1 - p_2)$ e $\mu_2 = p_2/(p_2 - p_1)$ e:

$$\beta_1(\rho) = \frac{p_1^2}{(p_1 - \rho)(p_1 - p_2)} \quad (4.55)$$

$$\beta_2(\rho) = \frac{p_2^2}{(p_2 - \rho)(p_2 - p_1)} \quad (4.56)$$

$$\beta_3(\rho) = \frac{\rho^2}{(\rho - p_1)(\rho - p_2)} \quad (4.57)$$

Usando (4.52) e (4.53), a solução de (4.35) pode ser obtida por superposição e invariância no tempo como:

$$h_{k_1}(n) = \frac{1}{\sigma_{k_1}} \left(h_{k_1}^{(1)}(t) + h_{k_1}^{(2)}(t) \right), \quad (4.58)$$

$$(4.59)$$

onde

$$h_{k_1}^{(1)}(t) = c_2 h_1(1 - k_1) \xi(t + k_1 - 3), \quad (4.60)$$

$$h_{k_1}^{(2)}(t) = c_2 h_1(1 + k_1) \xi(t - 3). \quad (4.61)$$

Para resolver (4.47), o termo $x_1(t)$ é avaliado usando (4.52):

$$x_1(t) = 6c_1 \sum_{i=1}^4 \alpha_i(k_1, k_2) \lambda_i^{t-2} s(n-2) \quad (4.62)$$

onde os modos característicos são $\lambda_1 = p_1^3$, $\lambda_2 = p_2^3$, $\lambda_3 = p_1^2 p_2$, $\lambda_4 = p_1 p_2^2$, que possuem como resíduos associados, respectivamente,

$$\alpha_1(k_1, k_2) = r_1^3 p_1^{k_1+k_2}, \quad (4.63)$$

$$\alpha_2(k_1, k_2) = r_2^3 p_2^{k_1+k_2}, \quad (4.64)$$

$$\alpha_3(k_1, k_2) = r_1^2 r_2 (p_1^{k_1} p_2^{k_2} + p_1^{k_2} p_2^{k_1} + p_1^{k_1+k_2}) \quad e \quad (4.65)$$

$$\alpha_4(k_1, k_2) = r_2^2 r_1 (p_1^{k_1} p_2^{k_2} + p_1^{k_2} p_2^{k_1} + p_2^{k_1+k_2}). \quad (4.66)$$

A solução de (4.35) pode então ser obtida como:

$$h_{k_1, k_2}(t) = \frac{1}{\sigma_{k_1, k_2}} \sum_{i=1}^4 h_{k_1, k_2}^{(i)}(t), \quad (4.67)$$

$$(4.68)$$

sendo

$$h_{k_1, k_2}^{(1)}(t) = 6c_1 \sum_{i=1}^4 \alpha_i(k_1, k_2) \zeta(t-2, \lambda_i), \quad (4.69)$$

$$h_{k_1, k_2}^{(2)}(t) = c_2 \sigma_{k_1} h_{k_1} (1 - k_2) \zeta(t + k_2 - 3), \quad (4.70)$$

$$h_{k_1, k_2}^{(3)}(t) = c_2 \sigma_{k_2} h_{k_2} (1 - k_1) \zeta(t + k_1 - 3) \quad e \quad (4.71)$$

$$h_{k_1, k_2}^{(4)}(t) = c_2 \sigma_{k_2 - k_1} h_{k_2 - k_1} (1 + k_1) \zeta(t - 3). \quad (4.72)$$

Uma inspeção dos resultados demonstra que os modos de (4.58) serão exatamente aqueles produzidos pela parte linear do sistema, i.e. p_1^t e p_2^t . Nas diagonais de grau 3, estes modos estarão presentes devido aos termos (4.70)-(4.72), mas estarão acompanhados dos modos cúbicos λ_i^t , $i = 1, 2, 3, 4$, produzidos pela combinação três a três dos modos lineares. Isso introduz novas componentes transitórias e comportamentos de alta frequência, o que é possível concluir devido à formulação diagonal ser unidimensional e baseada em teoria linear. As equações podem ainda ser Z-transformadas para fins de análise ou design no domínio da frequência.

4.3.2 Resultados numéricos

A aplicação do método derivativo ao modelo NARX resultou na equação (4.52) para o funcional linear e em (4.58) e (4.67), com as quais é possível obter qualquer diagonal de segunda ou terceira ordem, respectivamente, bastando apenas indicar o vetor \mathbf{k} de atrasos correspondente.

Para fins de validação desta estrutura, resultados numéricos foram gerados. O valor dos parâmetros do sistema foram escolhidos de modo que o comportamento não linear produzido fosse suficientemente fraco, no sentido usado em (SCHETZEN, 1980), para que uma representação Volterra fosse possível. Assim, foram adotados $a_1 = 1,3315$, $a_2 = -0,49$, $b_1 = -0,10$, $b_2 = 0,12$, $c_1 = -0,2$ e $c_2 = 0,09$, de maneira que o polinômio $A(z)$ tenha polos $p_1 = p_2^* = 0,7 e^{j0,1\pi}$.

A partir das equações (4.58) e (4.67) o modelo Volterra diagonal foi estabelecido. Inicialmente foram adotadas k_1 máximo de 50, em (4.58), o que produz o mesmo número de diagonais de segunda ordem e k_1, k_2 máximos de 40 para (4.67), o que gerou um total de 820 diagonais de terceira ordem. Com isso o modelo diagonal completo pode ser gerado, e a simulação pode ser realizada com cada diagonal filtrando o sinal de entrada correspondente, a saída do modelo é a soma da resposta de todas as diagonais.

Como primeiro resultado numérico foi avaliada a resposta do modelo para uma senoide com frequência normalizada em relação a de amostragem com valor de 0.04, e amplitude de 1.2, o resultado é apresentado na Figura 21, com as respostas sendo avaliadas para os modelos NARX, ALE, Volterra diagonal e o linear.

Nota-se um típico comportamento não-linear na resposta, com a saída exibindo distorções em relação à entrada senoidal. O modelo ALE de terceira ordem exibe uma boa aproximação do

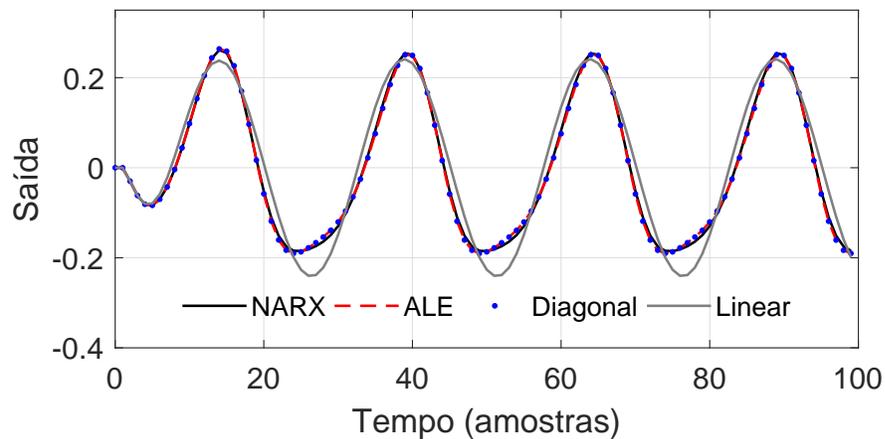


Figura 21 – Resposta dos modelos NARX, ALE, Volterra diagonal e linear a uma entrada senoidal.

NARX, o ajuste entre estes dois modelos é de 96,17%, medido pela métrica NRMSE. Já o ajuste do modelo diagonal, nota-se que este reproduz exatamente a resposta do modelo ALE. Em termos numéricos, o ajuste ALE-Diagonal é medido em 100%, de maneira que o ajuste NARX-Diagonal é o mesmo medido para o modelo ALE. Quanto ao linear, o ajuste medido foi de 77,42%.

O valor do ajuste entre o modelo NARX e o ALE/Diagonal deve ser considerado levando em conta que foram computados apenas as três primeiras componentes funcionais da série Volterra, é de se esperar que um maior número de componentes funcionais conduza a um ajuste ainda melhor. Contudo neste caso entra em cena a relação de compromisso entre o ajuste necessário em um determinado contexto e a complexidade do modelo Volterra utilizado. Já a relação exata entre o modelo ALE e o diagonal é esperada, tendo em vista que os kernels diagonais foram derivados diretamente da representação ALE do sistema. Esta exatidão fica evidente quando se considera o ajuste de cada componente funcional entre os dois modelos.

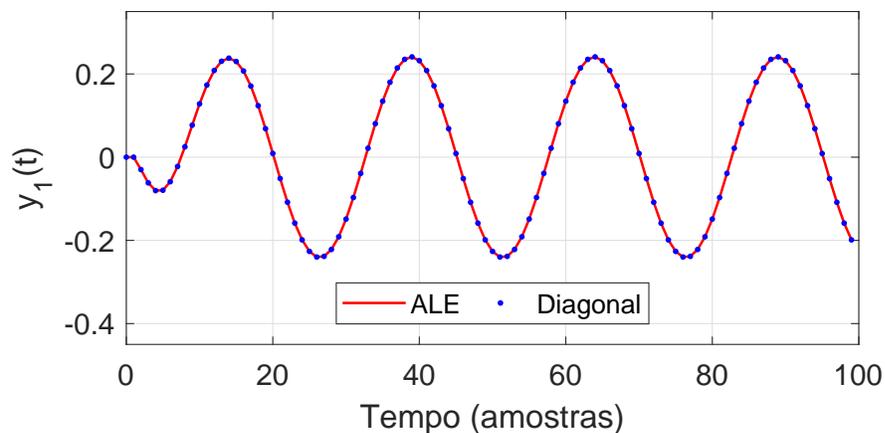


Figura 22 – Ajuste da resposta funcional de primeira ordem, modelos ALE e Volterra diagonal.

A Figura 22 apresenta este resultado para o funcional de primeira ordem. O ajuste medido

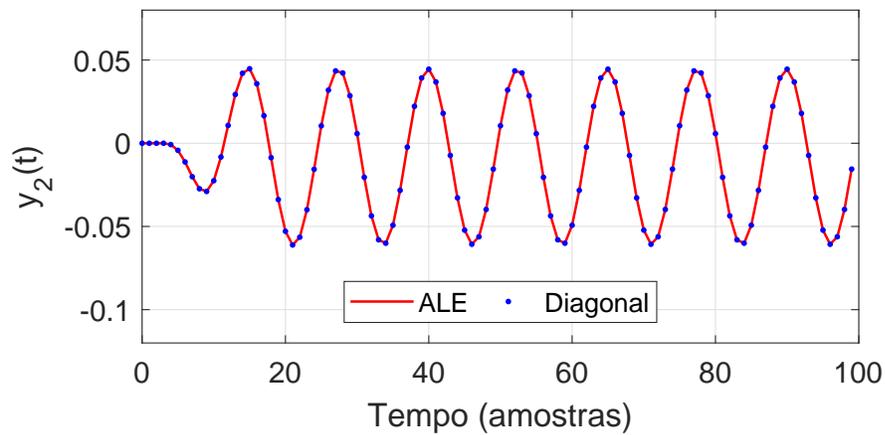


Figura 23 – Ajuste funcional ALE-Diagonal de segunda ordem.

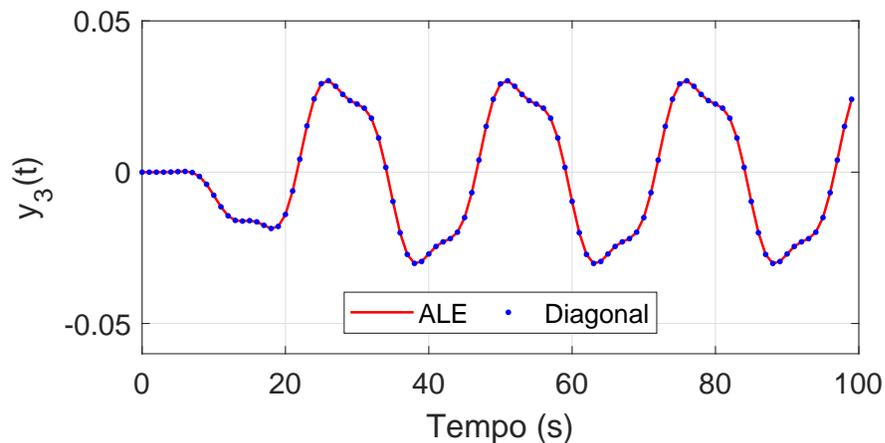


Figura 24 – Ajuste funcional ALE-Diagonal de terceira ordem.

em cada caso é de 100%, resultado que decorre da relação direta entre as equações (4.30) e (4.27).

As Figuras 23 e 24 apresentam o ajuste para as componentes funcionais de segunda e terceira ordem, para os modelos ALE e Volterra diagonal. O ajuste alcançado nos dois casos é também de 100%, ou seja, o modelo diagonal reproduz com exatidão a operação dinâmica derivada do modelo ALE para a geração das componentes funcionais da série Volterra.

Contudo, pode ser discutível o fato de que a quantidade de componentes diagonais em cada funcional foi escolhido de maneira arbitrária. Isto conduz a discussão sobre a contribuição de cada diagonal na composição do operador funcional, ou seja, quantas diagonais são de fato necessárias para atingir um valor igual, ou ligeiramente menor, do ajuste? E ainda, qual a ordenação destas diagonais?

Como os filtros diagonais são independentes da entrada, uma maneira proposta para avaliar a sua contribuição é por meio do conceito de energia, conforme apresentado na seção ?? e definida em (3.55). Assim, foi calculada inicialmente a energia para as 40 diagonais de grau 2, cujo resultado é apresentado na figura 25. Nota-se que a grande maioria das diagonais possui um valor

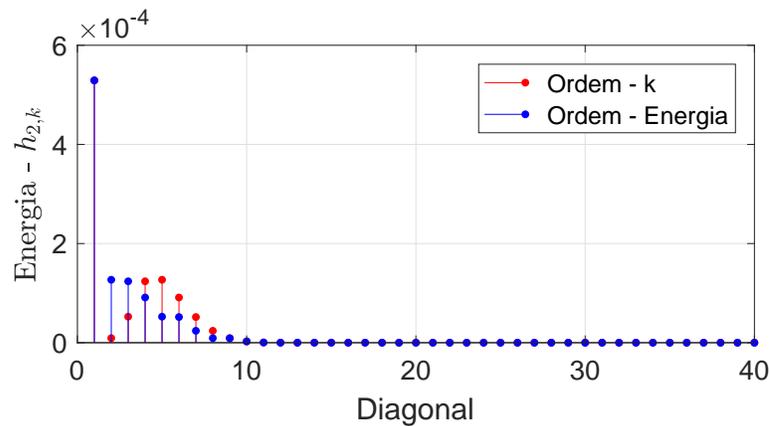


Figura 25 – Energia das diagonais do funcional de grau 2 ordenados pelos atrasos k e pelo valor da energia.

de energia pequeno, quando comparado a um grupo, de maior energia, no caso as primeiras 10 diagonais. Contudo, esta análise evidencia também que o ordenamento pelo conjunto de atrasos k_2 não corresponde à ordem pelo valor da energia das diagonais, por exemplo, a diagonal para $k = 4$ possui energia maior para a de $k = 1$.

Reordenou-se então o conjunto de diagonais do funcional de segunda ordem, sequenciando-as pela ordem decrescente da energia. Isto é também apresentado na Figura 25. Do resultado obtido duas premissas foram sugeridas: (i) O grupo de diagonais com maior energia é o responsável pelas maiores contribuições da resposta do funcional; (ii) O reordenamento de diagonais pelo valor da energia pode conduzir a um procedimento empírico para o truncamento do modelo em um número de diagonais suficiente para cada ajuste desejado.

Para avaliar numericamente estas premissas procedeu-se então com a determinação do ajuste, via NRMSE, entre a resposta do funcional pelo modelos ALE e pelo Volterra diagonal, com os dois ordenamentos de diagonais. A métrica foi avaliada, em cada caso, com o modelo correspondente sendo truncado na k -ésima diagonal. O resultado é apresentado na Figura 26, onde foi atribuído o valor de 0% para o ajuste cujo NRMSE resultou negativo.

Note que, as curvas obedecem a premissa (i) uma vez que o ajuste medido para as diagonais ordenadas pela energia é sempre maior ou igual à ordenação pela sequência dos ks . A premissa dois também é satisfeita, pois agora é possível estabelecer uma relação entre o número de diagonais e o ajuste desejado para o modelo. Nota-se que a métrica se aproxima de 100% com apenas 15 diagonais, e que a inclusão de um número superior de diagonais de segunda ordem é desnecessário, de maneira que este é um procedimento efetivo para o truncamento do modelo.

O mesmo procedimento foi repetido para as diagonais do funcional de grau 3. A Figura 27 apresenta a energia de cada diagonal, ordenadas tanto pela sequência dos ks , quanto re-ordenadas pelo valor da energia. Verifica-se, pela curva de ordenação por ks , que as diagonais de maior energia, e portanto de mais relevância para representar a componente funcional, estão dispersas ao

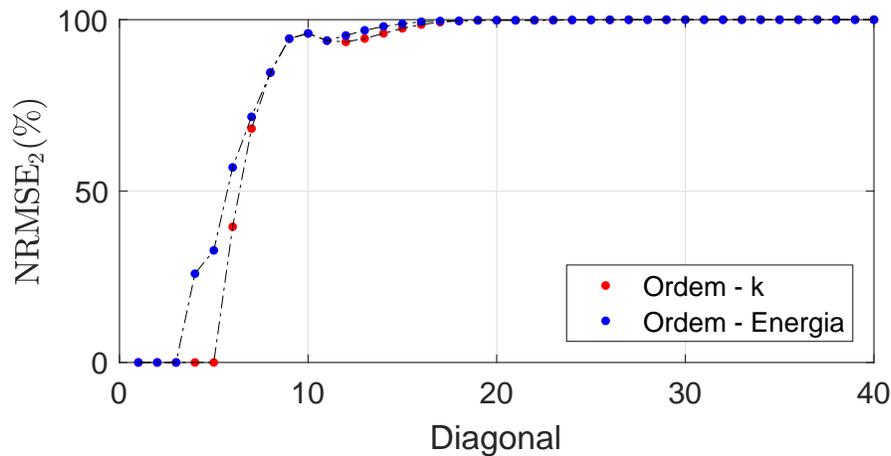


Figura 26 – Ajuste, por NRMSE, do funcional $y_2(t)$, entre os modelos ALE e Volterra diagonal truncado.

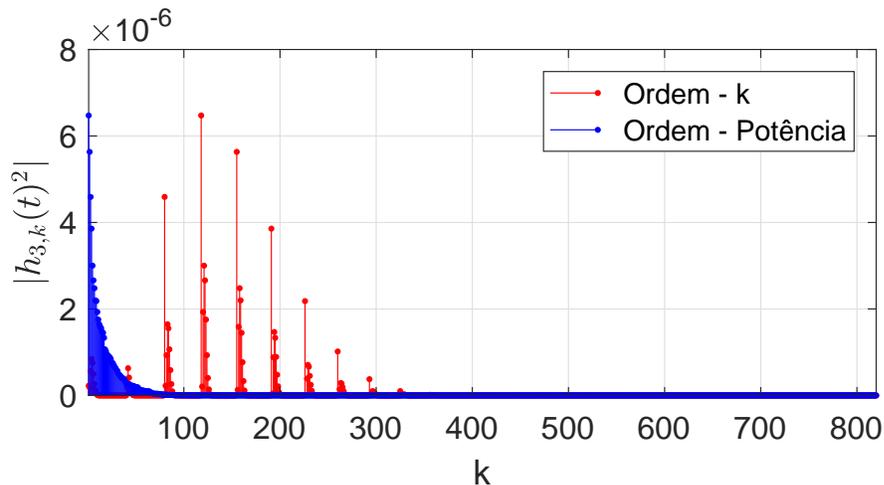


Figura 27 – Energia das diagonais do funcional de grau 3, ordenados pelos atrasos k e pelo valor decrescente da energia.

longo da sequência, embora ao que parece apenas um pequeno grupo de diagonais se evidencia sobre o conjunto considerado. Isto torna claro que o problema do truncamento usando esta sequência não é trivial. Por outro lado, quando as diagonais são ordenadas pela energia a das mais relevantes possui um decaimento suave, sendo possível destacá-las e quantificá-las facilmente dentre as demais.

A Figura 28 apresenta a medida do ajuste para o funcional de grau 3, por NRMSE, para as duas sequências consideradas, quando o funcional é truncado na k -ésima diagonal correspondente. Fica claro que o ordenamento por energia apresenta uma convergência muito mais uniforme, e com um número menor de diagonais, que a sequência por ks . Esta se mostra bastante irregular e com uma convergência disforme, que exige um grande número de diagonais. Para efeito de comparação, a sequência por energia necessita de cerca de 95 diagonais para se aproximar de

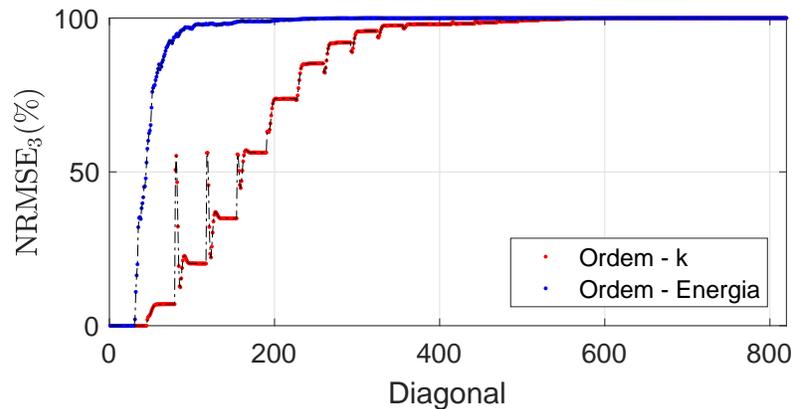


Figura 28 – Ajuste, por NRMSE, do funcional $y_3(t)$, entre os modelos ALE e Volterra diagonal truncado.

100% de ajuste, enquanto a sequência por k s necessita de algo em torno de 500, resultados que corroboram as premissas (i) e (ii).

É importante ressaltar que estes resultados dependem apenas do conjunto de diagonais, sendo independentes do sinal de entrada. Contudo, como diferentes escolhas dos parâmetros do modelo NARX conduzirão a conjuntos diferentes de diagonais, o resultado pode ser considerado um caso particular. No entanto, é pertinente concluir que se a escolha dos parâmetros gerar um modelo NARX com memória assintótica, e portanto com uma representação Volterra admissível, o procedimento aqui proposto sempre será adequado como estratégia de validação ou de simplificação *a posteriori* do modelo diagonal.

Com base nestes resultados pode-se considerar um cenário mais geral para a avaliação do ajuste entre os modelos NARX e Volterra diagonal truncado pela estratégia de energia de diagonais. Isto é mostrado na Figura 29, que apresenta o valor do ajuste entre os dois modelos, por NRMSE, quando a entrada $u(t) = 1.2 \cos(2\pi ft)$ foi calculada para 50 diferentes valores da frequência normalizada na faixa $10^{-3} \leq f \leq 0,45$.

São apresentadas três curvas de ajuste, considerando dois truncamentos no número de diagonais quadráticas (N_2) e cúbicas (N_3). O primeiro com $N_2 = 5$ e $N_3 = 45$ representa o cenário cujo modelo foi truncado com um número menor que o ideal, o segundo, com $N_2 = 20$ e $N_3 = 100$ representa o cenário com todas as diagonais mais relevantes dos dois funcionais. A terceira curva exhibe o ajuste entre o NARX e o modelo linear, dado pelo funcional de primeira ordem.

O primeiro cenário, com menor número de diagonais, apresenta um ajuste em torno de 70% em baixas frequências, elevando este valor em alta frequência, sem uma tendência de convergência bem definida. A segunda curva, com todas as diagonais, exhibe um ajuste bastante regular em todo o espectro, com valores de NRMSE sempre superiores a 90%. A terceira curva, apenas com o funcional linear, exhibe valores precários de ajuste em praticamente todo o espectro.

Um ultimo cenário, avaliou o ajuste do modelo para um ruído branco gaussiano, com média nula e variância σ_u^2 . Neste caso, além do fator aleatoriedade, os modelos são testados para uma entrada com múltiplos valores de amplitude e com um rico suporte espectral. A avaliação foi executada para o sistema com os mesmos modelos diagonais truncados do caso anterior e o modelo linear. O sinal de entrada foi realizado com uma única sequência aleatória em seis simulações diferentes, entre as quais a variância da entrada foi aumentada gradativamente, de acordo com os valores da Tabela ??, onde também é apresentado o ajuste de cada modelo testado, para cada valor diferente da variância de entrada. Pelos valores obtidos nota-se que os modelos

Tabela 4 – Valores de ajustes entre a resposta do sistema NARX, Volterra diagonal e linear para entrada gaussiana.

σ_u^2	NRMSE(%)		
	$N_2 = 10, N_3 = 100$	$N_2 = 5, N_3 = 45$	Linear
0,0625	98,28	97,48	88,23
0,2500	98,10	96,10	76,63
0,5625	97,00	94,70	65,40
1,0000	94,20	92,78	54,78
1,5625	89,32	89,36	44,94
2,2500	83,96	82,86	35,92

diagonais truncados apresentam ajustes bem superiores ao modelo linear em todas as simulações. O primeiro modelo, com o número maior de diagonais, exibe o melhor ajuste em todos os cenários. No entanto, os valores dos ajustes tendem a cair com o aumento da amplitude da entrada. O decaimento é crítico no caso linear, e é mais compassado nos diagonais. No caso dos modelos Volterra essa redução pode ser atenuada com a inclusão de novas componentes funcionais, ao custo de uma maior complexidade estrutural do modelo.

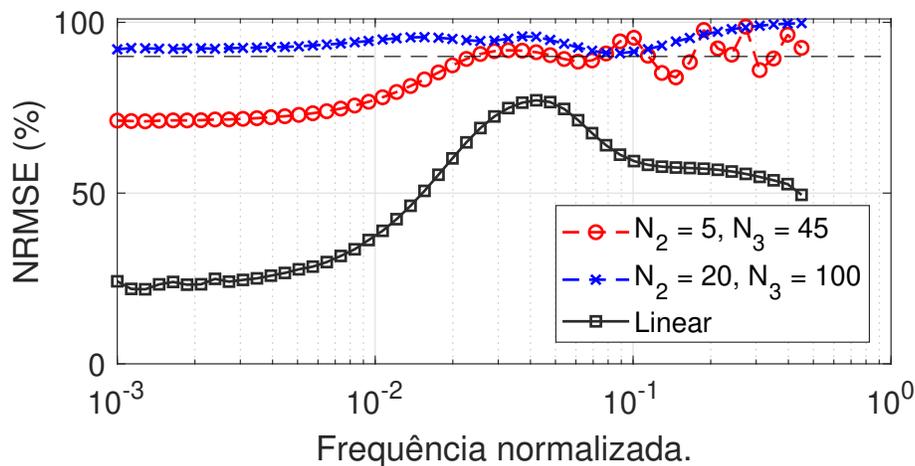


Figura 29 – Ajuste entre os modelos NARX e Volterra diagonal truncado medido em função da frequência da entrada.

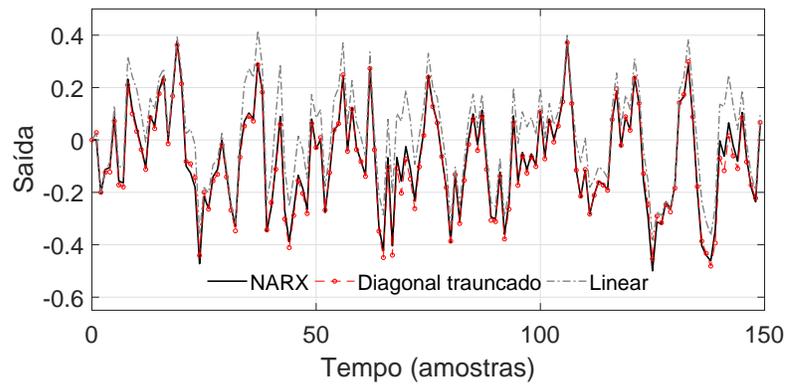


Figura 30 – Resposta dos modelos NARX e diagonal para entrada aleatória.

A figura 30 apresenta a resposta desta simulação para o primeiro modelo diagonal truncado e o linear. Observa-se que de resposta do modelo NARX e do diagonal possuem uma boa concordância para a grande maioria das 150 amostras do sinal. Os dados do modelo linear são relevantes para a comparação.

SÍNTESE DE OPERADORES INVERSOS

5.1 Introdução

O projeto de operadores inversos para sistemas não-lineares constitui um desafio matemático na medida em que a interação de dois sistemas com não-linearidades diversas geram estruturas com uma grande diversidade ou mesmo complexidade de operação. No caso dos sistemas Volterra a estratégia clássica é pela busca da chamada inversa de ordem p , cujas propriedades buscam estabelecer a recuperação do sinal de entrada com algum grau de aproximação. O objetivo deste capítulo é a busca por uma estratégia numérica de síntese de operadores inversos para sistemas NARX, baseada em estruturas Volterra diagonais, que se assemelham às condições da inversa de ordem p .

Apresenta-se inicialmente uma forma genérica de um modelo NARX onde os termos polinomiais são agrupados em diferentes categorias. Discute-se então as restrições que cada grupo da estrutura polinomial oferece para a síntese analítica destes operadores, dentre as quais a estabilidade, a causalidade e a possibilidade de isolamento algébrico da variável de interesse. Estas restrições impossibilitam a síntese algébrica em muitos cenários o que torna a abordagem analítica um caminho bastante restrito. O capítulo apresenta, no entanto, um caso particular em que a síntese algébrica é realizada, para a inversão de um sistema Duffing. O operador inverso analítico projetado é confrontado com um linear exibindo resultados bastante expressivos.

Diante das dificuldades da síntese algébrica para classes abrangentes de sistemas polinomiais, parte-se então para uma estratégia numérica baseada em otimização de sistemas. A função custo é formulada como a soma da taxa de distorção harmônica de um conjunto de senoides usadas para a síntese do operador. As condições de inversão recaem em um conjunto de restrições de igualdade e de desigualdade, que conferem maior robustez ao projeto. O projeto é conduzido para um estudo de caso de um modelo polinomial simples, mas que oferece condições

de se analisar todos os detalhes importantes da proposta. O operador de inversão determinado exhibe bons resultados, os quais são medidos em diversos cenários numéricos, que corroboram as expectativas estabelecidas para o projeto.

5.2 Síntese de Inversores Volterra

Considera-se uma forma polinomial genérica, nas variáveis $u(t)$ e $y(t)$, em que os termos são divididos em três grupos, os de entrada $u(t)$, os de saída $y(t)$ e os cruzados, dependentes de $u(t)$ e $y(t)$. Considera-se ainda que cada um dos grupos de termos é gerado a partir de um operador particular, ou seja

$$\mathcal{A}\{y(t)\} + \mathcal{C}\{u(t), y(t)\} = \mathcal{B}\{u(t)\}, \quad (5.1)$$

onde \mathcal{A} , \mathcal{C} e \mathcal{B} são os operadores polinomiais dos termos de saída, entrada e cruzados, respectivamente. Note-se que esta é uma forma bastante geral, que comporta diversas relações polinomiais de interesse entre as variáveis, sejam estas lineares, NARX ou Volterra diagonal.

Tendo como perspectiva o projeto do operador inverso analítico para sistemas representados por (5.1) é pertinente que se avalie cada operador em particular, buscando ressaltar aspectos na estrutura que limitam ou impossibilitam a síntese analítica do inversor. Os operadores \mathcal{A} e \mathcal{B} são ambas estruturas polinomiais, que geram termos lineares e não-lineares monovariáveis, a saída $y(t)$ e a entrada $u(t)$ respectivamente. Suas operações sobre as variáveis são tais que é possível agregar diferentes atrasos de um mesmo monômio da variável em um único operador linear de deslocamento.

Considera-se por exemplo, que o operador \mathcal{A} gere a forma polinomial

$$\mathcal{A}\{y(t)\} = A_0y(t) + A_1y(t)y(t-1) + A_2y(t)y(t-3) + A_3y(t)^2y(t-1). \quad (5.2)$$

Neste caso A_i é i -ésimo operador linear de deslocamento que agrega termos atrasados de um monômio polinomial na variável $y(t)$. Considera-se, por exemplo,

$$\begin{aligned} A_0y(t) &= a_{01}y(t) + a_{02}y(t-1) + a_{03}y(t-2), & \text{ou de} \\ A_2y(t) &= a_{21}y(t)y(t-3) + a_{22}y(t-1)y(t-4). \end{aligned}$$

Evidentemente, dado que a operação é linear, estes operadores podem ser facilmente descritos no domínio da frequência, como

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}\{A_0\} &= A_0(z) = a_{01} + a_{02}z^{-1} + a_{03}z^{-2}, \\ \mathcal{Z}\{A_2\} &= A_2(z) = a_{21} + a_{22}z^{-1}. \end{aligned}$$

Esta estratégia permite tanto a agregação de diferentes termos por um único operador quanto simplifica a análise desses operadores visando a inversão. Uma exemplificação similar pode ser conduzida para o operador \mathcal{B} , polinomial monovariável em $u(t)$.

O operador $\mathcal{C}\{u(t), y(t)\}$ atua sobre as duas variáveis simultaneamente, gerando necessariamente termos polinomiais cruzados entre entrada e saída do sistema. A título de exemplificação, considera-se a forma polinomial

$$\mathcal{C}\{u(t), y(t)\} = C_1 u(t)y(t) + C_2 u(t)y(t-1) + C_3 u(t)^2 y(t) + C_4 u(t)y(t-1)^3. \quad (5.3)$$

Os operadores C_i são lineares de deslocamento, representados na frequência por $\mathcal{Z}\{C_i\} = C_i(z)$ e agregam diferentes atrasos dos monômios cruzados em que atuam. Uma generalização dessa estrutura polinomial cruzada pode ser definida como:

$$\mathcal{C}\{u(t), y(t)\} = \sum_p \sum_{p=n+m} C_{p,i} \prod_{n=1}^N u(t-k_i) \prod_{m=1}^M y(t-k_i) \quad (5.4)$$

onde n e m são índices que controlam a potência de cada variável no termo cruzado, enquanto $p = n + m$ controla a potência total do termo.

Com essa perspectiva busca-se então avaliar as possibilidades de síntese de um operador inverso analítico diretamente de (5.1). Isso está associado à possibilidade ou não de isolar $u(t)$ do modelo, tomando esta variável como resultado de operações em $y(t)$. Se a realização desta estratégia incluir atrasos de $u(t)$ o inversor é auto-regressivo.

Modelos que admitem o isolamento algébrico de $u(t)$ em (5.1) por uma estrutura realizável são casos bastante particulares. Se isso for possível a estrutura resultante é um inversor dito exato do modelo original. Idealmente a inversão formulada desta forma seria capaz de reverter qualquer distorção não-linear realizada pelo modelo sistema original. A seção a seguir apresenta um caso particular de interesse em muitas aplicações de engenharia em que isso é possível: o projeto de inversão analítica de um sistema Duffing. Busca-se com o exemplo ilustrar um caso particular em que a determinação de um operador de inversão pela estratégia analítica é possível.

5.2.1 Projeto analítico: Inversão do sistema Duffing

O oscilador de Duffing é um *benchmark* comum na avaliação de sistemas Volterra. Seu modelo dinâmico no tempo t contínuo é dado por:

$$\ddot{y}(t) + 2\zeta\omega_n\dot{y}(t) + \omega_n^2 y(t) + \kappa\omega_n^2 y(t)^3 = \beta\omega_n^2 u(t), \quad (5.5)$$

onde ζ, ω_n, κ e β são os parâmetros, $u(t)$ e $y(t)$ as variáveis de entrada e saída. Neste modelo a não-linearidade devida ao termo cúbico na saída produz uma diversidade de comportamentos dinâmicos, alguns dos quais impossíveis de representação por uma série Volterra, por incorrerem na geração de diversos pontos de equilíbrio. Para alguns arranjos destes parâmetro uma série Volterra com aproximação uniformemente convergente de $y(t)$ como funcional de $u(t)$ é possível.

A discretização deste modelo pode ser realizada tomando as aproximações em avanço das derivadas

$$\dot{y}(t) = \frac{y(t+1) - y(t)}{T_s} \quad e \quad (5.6)$$

$$\ddot{y}(t) = \frac{y(t+2) - 2y(t+1) + y(t)}{T_s^2}, \quad (5.7)$$

onde T_s é o período de amostragem. Adotando a notação expressa em (5.1), resulta:

$$A_0 y(t) + A_1 y(t)^3 = B u(t) \quad (5.8)$$

cujos operadores são dados por

$$A_0(z) = 1 - a_{01}z^{-1} - a_{02}z^{-2}, \quad (5.9)$$

$$A_1(z) = a_{12}z^{-2} \quad e \quad (5.10)$$

$$B(z) = bz^{-2} \quad (5.11)$$

Os parâmetros deste modelo discreto são relacionados aos do contínuo na forma:

$$a_{01} = 2 - 2\xi\omega_n T_s, \quad (5.12)$$

$$a_{02} = -1 + 2\xi\omega_n T_s - \omega_n^2 T_s^2, \quad (5.13)$$

$$a_{12} = -\kappa\omega_n^2 T_s^2 \quad e \quad (5.14)$$

$$b = \beta\omega_n^2 T_s^2. \quad (5.15)$$

A síntese de um inversor para o modelo discreto do sistema Duffing pode ser realizada analiticamente isolando $u(t)$ em (5.8). Isso pode ser conduzido algebricamente, no domínio da frequência por:

$$U(z) = G'_0(z)Y(z) + G'_1(z)Y_3(z), \quad (5.16)$$

onde $Y_3(z) = \mathcal{Z}\{y(t)^3\}$,

$$G'_0(z) = \frac{A_0(z)}{B(z)} \quad e$$

$$G'_1(z) = \frac{A_1(z)}{B(z)}.$$

Note que (5.16) recai em uma estrutura Volterra diagonal, com entrada $y(t)$, a saída do sistema, e saída $u(t)$, a entrada do sistema recuperada (ou invertida), de forma que no domínio do tempo pode-se escrever:

$$u(t) = g'_0(t) * y(t) + g'_1(t) * y(t)^3. \quad (5.17)$$

Embora este projeto pareça matematicamente razoável, existem ressalvas que devem ser observadas. A primeira é o cuidado com o fato de o operador $B(z)$ passar a ser o denominador

das diagonais. Disto resulta a condição de que $u(t)$ só pode ser isolado se seu operador for de fase mínima, do contrário a implementação resultará em um operador instável. Além disso é possível observar por (5.8) que o operador $B(z)$ sempre produzirá operações atrasadas de pelo menos duas amostras em relação àquelas do operador $A(z)$, o que resulta na impossibilidade de uma realização causal para a função diagonal $G'_0(z)$.

Assim, o inversor para o sistema Duffing só é possível se se admitir algum atraso entre a variável de saída do inversor, que será denotada de $v(t)$, e a entrada do sistema, ou seja, o inversor deve admitir que

$$v(t) \approx u(t - l_i), \quad (5.18)$$

sendo l_i o seu atraso de transporte. Aplicando esta condição em (5.16) é possível escrever:

$$V(z) = G_0(z)Y(z) + G_1(z)Y_3(z), \quad (5.19)$$

onde $Y_3(z) = \mathcal{Z}\{y(t)^3\}$,

$$\begin{aligned} G_0(z) &= z^{-l_i}G'_0(z) & e \\ G_1(z) &= z^{-l_i}G'_1(z). \end{aligned}$$

Para o atraso do inversor $l_i = 2$ e aplicando os operadores às funções diagonais têm-se:

$$\begin{aligned} G_0(z) &= z^{-2} \frac{A_0(z)}{B(z)} = \frac{1 - a_{01}z^{-1} - a_{02}z^{-2}}{b} & e \\ G_1(z) &= z^{-2} \frac{A_1(z)}{B(z)} = \frac{a_{12}}{b} z^{-2}, \end{aligned}$$

que são operadores FIR realizáveis.

Para verificar a efetividade deste projeto considere um sistema Duffing com parâmetros $\xi = 0,5$, $\omega_n = 0,1\pi \text{ rad/s}$, $\kappa = 1,8$ e $\beta = 0,75$. A aplicação destes parâmetros na forma discreta (5.8) resulta nos operadores lineares de deslocamento:

$$A_0(z) = 1 - 1,6858z^{-1} + 0,7845z^{-2}, \quad (5.20)$$

$$A_1(z) = 0,1777z^{-2} \quad e \quad (5.21)$$

$$B(z) = 0,074z^{-2} \quad (5.22)$$

que implementados em (5.19) produzem o operador de inversão.

O sistema é avaliado então com a aplicação de uma entrada senoidal na forma

$$u(t) = \alpha \sin(2\pi ft) \quad (5.23)$$

para $\alpha = 1$ e $f = 0,03$ (frequência normalizada). Os resultados são apresentados na Figura 31. Nota-se que a saída do sistema Duffing exibe uma distorção bastante evidente com relação à

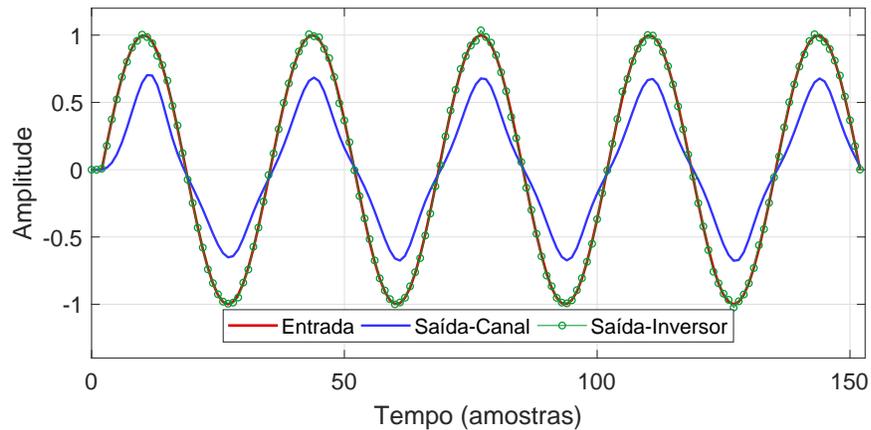


Figura 31 – Resposta senoidal do sistema Duffing e recuperação da entrada por inversor Volterra diagonal analítico.

entrada atrasada $u(t - 2)$. À este sinal de saída também foi adicionado um ruído branco gaussiano, com média nula e variância $2e-5$. Verifica-se que a ação dinâmica do inversor recupera com boa precisão a entrada, desfazendo completamente a distorção.

Estes efeitos ficam mais evidentes no domínio da frequência, o que é realizado por meio da análise da densidade espectral de potência dos sinais, determinada pelo método do periodograma modificado para 2000 amostras dos sinais usando uma janela de Kaiser com $\beta = 30$ (OPPENHEIM; SCHAFER, 2010). A Figura 32 apresenta estes resultados. Verifica-se pelo espectro da entrada a

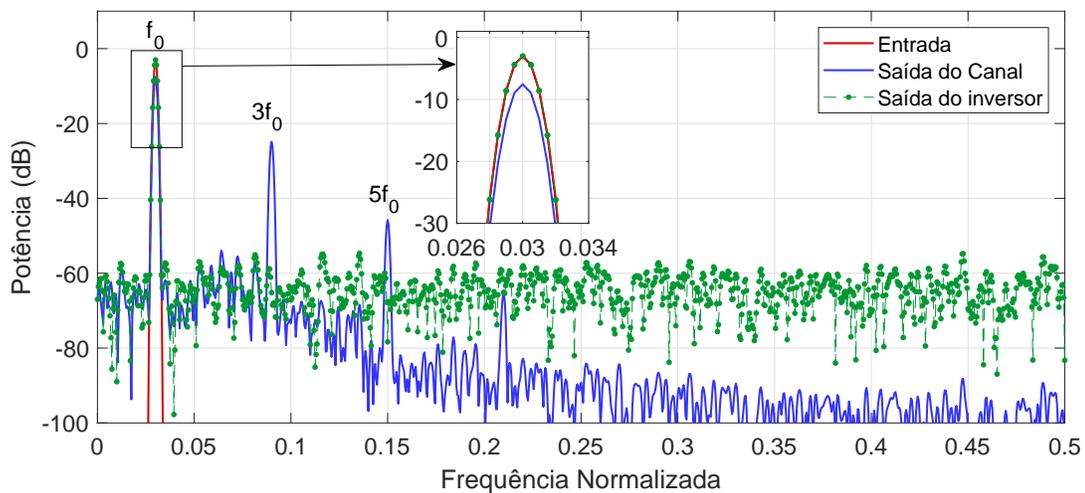


Figura 32 – Densidade espectral de potência dos sinais do sistema Duffing-inversor.

sua energia concentrada apenas na frequência fundamental, enquanto a saída do sistema exibe energia em uma série de harmônicos ímpares, com destaque para o 3º e 5º harmônicos cujas energias superam à do ruído. O sinal invertido recuperado mostra que a energia das componentes harmônicas são todas eliminadas, embora o ruído em alta frequência tenha se mantido em um

patamar maior que o da saída do canal. A figura ressalta ainda, no detalhe, a recuperação precisa da magnitude da entrada.

Este resultado é absolutamente consistente para todas as situações em que o modelo Duffing admitir uma representação Volterra. Independente da escolha particular do conjunto de parâmetros do sistema, o operador (5.19) sempre produzirá uma inversão com alta precisão, admitindo o atraso de transporte necessário para a sua realização. Como dito, esta é uma situação particular e rara para a síntese do inversor, de maneira que as restrições devam ser pontuadas.

5.2.2 Restrições à síntese analítica

A primeira restrição à síntese analítica é a necessidade de se admitir o atraso de transporte para o sinal recuperado. Como o sistema (5.2) é dinâmico, sua saída sempre será produzida com algum atraso em relação à entrada, de maneira que a ação dinâmica de um operador de inversão não terá como reproduzir em sua saída a entrada recuperada sem nenhum atraso. Se isso ocorresse o operador seria não-causal e portanto não realizável. Apesar disso, é pertinente considerar que esta condição seja aceitável na grande maioria dos cenários reais de aplicação em engenharia. O atraso necessário irá refletir um deslocamento de fase entre a entrada e o sinal recuperado, cuja tolerância deve ser avaliada em cada contexto.

Outra restrição que diz respeito à relação de atraso entre os operadores de deslocamento das variáveis em (5.2). Considera-se, por exemplo, o caso particular

$$A_0y(t) + A_1y(t)^3 = B_0u(t) + B_1u(t)^2 \quad (5.24)$$

em que os operadores B_0 e B_1 processam monômios da entrada $u(t)$. Para que a síntese analítica seja possível o operador B_0 deve produzir termos que estejam sempre *adiantados* em relação a B_1 , do contrário torna-se impossível isolar $u(t)$ algebricamente em uma estrutura realizável, uma vez que este sinal sempre ficaria dependente amostras suas em instantes superiores a t . Note que esta condição deve ser observada, em relação a B_0 , independente da quantidade de operadores B_i presentes no lado direito.

Uma condição em que a restrição parece ser absoluta é quando o lado direito não possui termos em $u(t)$ isolados, mas apenas em monômios não lineares desta variável, como em

$$A_0y(t) + A_1y(t)^3 = Bu(t)u(t-1). \quad (5.25)$$

Nestas condições não parece razoável admitir a possibilidade de um operador de inversão por síntese analítica, visto que o sinal $u(t)$ não pode ser isolado sem que isto incorresse em uma estrutura ambígua, já que ele participa como um fator multiplicativo na composição de um termo não-linear.

A restrição devida à estabilidade já discutida, impossibilita a síntese analítica como formulada para sistemas com fase mínima, com zeros fora do círculo unitário, visto que não

há nenhuma possibilidade de reconstituir um sinal a partir de um operador instável. Mesmo para o caso linear a síntese de operadores inversos nestas condições mostra-se um desafio, sendo ainda um caso sob investigação na literatura, de maneira que é pertinente considerá-lo como uma restrição forte para o cenário não-linear.

Como último fator de restrição para a síntese de operadores inversos analíticos de sistemas NARX como (5.2), estão aqueles modelos em que o operador $\mathcal{C}\{u(t), y(t)\}$ é não nulo, e que portanto geram termos cruzados entre $u(t)$ e $y(t)$. A impossibilidade aqui está associado tanto à questão da composição do termo não-linear, que não pode ser desconstituído algebricamente, à necessidade de presença do termo isolado em $u(t)$ e a relação de causalidade entre os respectivos operadores.

Este conjunto de restrições parecem impossibilitar a estratégia analítica para a grande maioria dos modelos NARX. Casos como o do sistema Duffing são exceções raras, que devem ser celebradas. Assim, dada a impossibilidade para a síntese analítica destes operadores nestes cenários é pertinente então considerar soluções por estratégias numéricas, que será buscada neste trabalho. O resultado expresso no projeto do inversor para o operador Duffing, que resultou em uma forma Volterra diagonal para o inversor, inspirou o uso desta estrutura na abordagem proposta por este trabalho, a qual é apresentada a seguir.

5.3 Síntese numérica de operadores inversos

As restrições elencadas para a síntese analítica do operador de inversão exigem a tomada de um caminho alternativo. Este trabalho propõe uma estratégia numérica baseada em otimização em que é possível fazer uso das condições de p -inversão para a síntese de inversores Volterra. Por esta abordagem busca-se determinar o conjunto de parâmetros de operador a partir de uma estrutura proposta. Esta estrutura é a baseada em um modelo Volterra em coordenadas diagonais, que processa a saída do sistema $y(t)$ visando a recuperação de uma variável $v(t)$ que aproxima a entrada $u(t)$ admitindo um atraso de transporte, de modo que $v(t) \approx u(t - l_i)$. O modelo proposto para o operador Volterra diagonal de inversão é então dado por:

$$Pv(t) = Qy(t) + \sum_{d=1}^{N_d} Q_d y_d(t) \quad (5.26)$$

Onde são definidos os seguintes operadores LIT de deslocamento: P - auto-regressivo do inversor, Q - entrada do inversor, seu funcional linear, e os Q_d associados ao conjunto de N_d diagonais não-lineares dos funcionais de ordem superior. As diagonais processam então monômios não-lineares da saída do sistema, de modo que a d -ésima diagonal processa o termo não-linear de ordem n

dado por

$$y_d(t) = y(t) \prod_{i=1}^{n-1} y(t - q_i), \quad (5.27)$$

sendo q_i o atraso do i -ésimo fator de cada termo.

Note que na forma proposta (5.26) já embute a atraso de transporte, de maneira que sua saída é a variável recuperada $v(t)$. Por ser uma estrutura Volterra diagonal este sistema é facilmente convertido para o domínio da frequência, o que resulta:

$$P(z)V(z) = Q(z)Y(z) + \sum_{d=1}^{N_d} Q_d(z)Y_d(z) \quad (5.28)$$

onde $Y_d(z) = \mathcal{Z}\{y_d(t)\}$. A qual pode ser manipulada algebricamente para isolar $V(z)$, o que resulta

$$V(z) = \frac{Q(z)}{P(z)}Y(z) + \sum_{d=1}^{N_d} \frac{Q_d(z)}{P(z)}Y_d(z). \quad (5.29)$$

Nesta estrutura o polinômio $P(z)$ é comum ao conjunto de diagonais do inversor, suas raízes determinam a estabilidade do operador. As diagonais expressas nesta forma podem ser dadas tanto na forma racional (ou IIR), com $P(z) = 1$, como na forma polinomial (FIR), de modo que a estrutura possa ser generalizada por meio de

$$V(z) = G(z)Y(z) + \sum_{d=1}^{N_d} G_d(z)Y_d(z). \quad (5.30)$$

As funções $G(z)$ definem portanto os filtros diagonais. Dada a natureza unidimensional e a definição dos operadores a saída do operador de inversão pode então ser expressa no domínio do tempo a partir da soma das convoluções lineares

$$v(t) = g(t) * y(t) + \sum_{d=1}^{N_d} g_d(t) * y_d(t), \quad (5.31)$$

sendo $g_d(t)$ a resposta impulsiva do d -ésimo filtro diagonal.

5.3.1 O problema de otimização

A estratégia proposta para a síntese do inversor parte de uma estrutura como (5.30) e busca ajustar os parâmetros dos seus operadores numericamente. A ideia pode então ser conduzida indexando estes parâmetros em um vetor x , argumento de uma função objetivo $f(x)$ a qual mensura por um valor escalar alguma medida de qualidade associada à recuperação do sinal de entrada. Sob uma perspectiva de otimização, a estratégia busca então minimizar ou maximizar $f(x)$ satisfazendo a eventuais restrições de igualdade ou de desigualdade do problema, expressas respectivamente na forma $r_e(x) = 0$ e $r_i(x) < 0$. Nestes termos, o problema geral de otimização pode ser formulado como:

$$\begin{aligned} & \underset{x}{\text{minimize}} && f(x) \\ & \text{sujeito a} && \begin{cases} r_e(x) = 0 \\ r_i(x) \leq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

O valor de x que minimiza a função custo satisfazendo as restrições é a solução ótima para o problema proposto.

No projeto do inversor Volterra tanto a função custo avaliadas quanto as restrições podem ser definidas como funções não-lineares com relação ao vetor de parâmetros x , o que conduz a necessidade de algoritmos de programação não-linear para a determinação da solução. Neste caso o problema de otimização pode ser solucionado pelo método do ponto interior, que representa uma das estratégias mais bem estabelecidas para o problema de otimização não-linear. Neste algoritmo o problema de otimização a ser resolvido deve ser formulado da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} & \underset{x}{\text{minimize}} && f(x) \\ & \text{sujeito a} && \begin{cases} C(x) \leq 0 \\ C_e(x) = 0 \\ Ax \leq b \\ A_e x \leq b_e \\ l_b \leq x \leq u_b \end{cases} \end{aligned} \quad (5.32)$$

onde A e A_e são as matrizes e b e b_e os vetores que compõem, respectivamente, as restrições lineares por desigualdade e por igualdade do problema; $C(x)$ e $C_e(x)$ os conjuntos de restrições não-lineares de desigualdade e igualdade; l_b e l_u são valores limites para x . O algoritmo de otimização recebe a função custo, as restrições e um valor inicial x_0 para o vetor de parâmetros e executa a busca pela solução ótima do problema proposto.

Busca-se então formular o problema de otimização tendo como perspectiva a síntese do operador de inversão. O cenário proposto para ser avaliado consiste na aplicação de um conjunto de senoides na entrada do sistema para uma faixa de amplitudes e de frequências de interesse para um conjunto de saída correspondente é determinada. Estes conjuntos podem ser expressos respectivamente como

$$\mathcal{U} = \{u_i(t) = \alpha_i \cos(\omega_i t) \mid i = 1, 2, \dots\} \quad \text{e} \quad (5.33)$$

$$\mathcal{Y} = \{y_i(t) \mid i = 1, 2, \dots\}, \quad (5.34)$$

sendo α_i e ω_i a i -ésima amplitude e frequência que definem a senoide $u_i(t)$, esta por sua vez é o sinal de entrada que gera a saída correspondente $y_i(t)$. Como o sistema é não-linear sua saída exibirá um espectro com uma componente em ω_i e os seus harmônicos.

Por definição, o operador de inversão é o bloco que deve processar cada sinal de saída em \mathcal{Y} e buscar recuperar os sinais correspondentes em \mathcal{U} com alguma aproximação, ou seja, deve-se buscar pelos sinais do conjunto

$$\mathcal{V} = \{v_i(t) \mid i = 1, 2, \dots\}, \quad (5.35)$$

tal que $v_i(t) \approx u_i(t - l_i)$, sendo l_i o atraso de transporte.

Como $u_i(t)$ é senoidal pura uma maneira apropriada de medir a qualidade da recuperação é através da taxa de distorção harmônica (THD) de $v_i(t)$. Esta é a principal métrica utilizada para medir a distorção de um sinal com relação à sua componente fundamental. Para o sinal $v(t)$ a THD pode ser definida como

$$THD(v(t)) = \frac{\sum_{n=2}^N |V(n\omega)|^2}{|V(\omega)|^2} \quad (5.36)$$

ou seja, é a razão entre a soma da energia dos N harmônicos pela energia da fundamental. Quanto menor a THD , menor será a energia das suas componentes em relação à fundamental e portanto mais próximo de uma senoide pura estará o sinal. Isto sugere então o uso desta métrica como função objetivo a ser minimizada na formulação do problema de síntese do inversor. Como o projeto proposto é baseado em um conjunto de sinais \mathcal{V} , a função deve refletir a distorção do conjunto completo. Assim, define-se a função objetivo como a soma das $THD(\cdot)$ do conjunto, ou seja

$$J(x) = \sum_i THD(v_i(t, x)) \quad (5.37)$$

Trata-se portanto de uma função não-linear em relação aos parâmetros do projeto, que mede a $THD(\cdot)$ a partir do vetor x dos operadores. O problema fica definido como a busca por um conjunto de parâmetros x^* ótimo que defina um operador de inversão que recupere os sinais $v_i(t)$ com a menor distorção para todo conjunto de sinais senoidais utilizados na síntese.

Pelos requisitos impostos ao operador de inversão a minimização de (5.37) é necessária mas não suficiente para o projeto, afinal os sinais recuperados devem ser senoides com mesma magnitude, frequência e fase daquelas em \mathcal{U} . Além disso é desejável que a energia das componentes harmônicas individuais de cada sinal $v_i(t)$ seja menor que algum valor de projeto embutido no problema. Estas condições podem claramente ser atendidas se o problema for factível para dois grupos de restrições não-lineares:

- Restrições por igualdade: Minimizar a função objetivo fazendo a magnitude e a fase de $v_i(t)$ serem iguais às da entrada correspondente $u_i(t)$;
- Restrições por desigualdade: Minimizar a função objetivo de modo que a magnitude dos harmônicos seja menor que um determinado limiar de projeto;

As restrições de igualdade recaem sobre a magnitude e a fase do sinal a ser invertido. A equação de restrição que modela a condição de amplitude é dada diretamente igualando a de entrada do sistema à recuperada na inversão, sendo expressa no problema de otimização por

$$|V_i(\omega)| - |U_i(\omega)| = 0. \quad (5.38)$$

A de fase deve incluir o termo correspondente ao atraso de transporte do inversor l_i , que gera uma diferença de ωl_i entre os dois sinais, sendo portanto

$$\angle V_i(\omega) + \omega l_d - \angle U_i(\omega) = 0. \quad (5.39)$$

As restrições de desigualdade devem ser definidas a partir da medição da magnitude dos harmônicos de cada sinal $v_i(t)$. Desta forma, cada componente harmônica deve atender à condição

$$|V_i(n\omega)| \leq \delta_{n\omega_i} \quad (5.40)$$

onde $\delta_{n\omega_i}$ é algum limiar estabelecido pelo projeto.

Note que cada sinal $v_i(t)$ irá gerar duas restrições de igualdade e N de desigualdade para cada componente harmônica cuja magnitude se deseja atenuar. Estas condições guardam correspondência com o problema da p -inversa de uma forma relaxada. Enquanto lá o que se deseja é minimizar a energia dos funcionais do sistema completo, aqui o que se busca é a minimização das harmônicas geradas pelo sistema.

A necessidade de se medir a magnitude das componentes harmônicas implica na utilização de ferramentas de análise espectral, em particular a *DTFT*. É importante perceber ainda que como (5.40) é atendida para o sinal no domínio da frequência, a determinação deste conjunto de inequações em função dos parâmetros de projeto do operador de inversão faz uso direto da vantagem do modelo Volterra diagonal poder ser transformado para este domínio com relativa facilidade.

A expectativa estabelecida para este projeto é a de que se o problema de otimização for factível, o operador de inversão deve ser capaz de generalizar os resultados de recuperação dos sinais presentes no conjunto \mathcal{U} de síntese, passando a ter resultado satisfatório para outros sinais com magnitude/frequência em uma região nas imediações daqueles de \mathcal{U} , com diferença de fase devida somente ao atraso de transporte l_i .

5.3.2 Estudo de Caso: Inversão de sistema Volterra

A proposta foi avaliada em um sistema Volterra, cujas propriedades não permitem a síntese analítica do inversor. Trata-se do sistema Volterra diagonal $\mathcal{H}\{\cdot\}$, definido por

$$Ay(t) = B_1u(t) + B_3u(t)^3 \quad (5.41)$$

onde,

$$A(z) = 1 - 1,1326z^{-1} + 0,49z^{-2} \quad (5.42)$$

$$B_0(z) = 0,6z^{-2} \quad (5.43)$$

$$B_3(z) = -0,3z^{-2} \quad (5.44)$$

Os polos de $A(z)$ são $p_1 = p_2^* = 0,7e^{j0,2\pi}$. No domínio da frequência o modelo é dado por

$$Y(z) = H_0(z)U(z) + H_1U_3(z), \quad (5.45)$$

sendo $U_3(z) = \mathcal{Z}\{u(t)^3\}$,

$$H_0(z) = \frac{B_0(z)}{A(z)} \quad \text{e} \quad (5.46)$$

$$H_1(z) = \frac{B_1(z)}{A(z)}. \quad (5.47)$$

Quando processa um sinal senoidal na entrada a não-linearidade cúbica do sistema gera harmônicos de terceira ordem além de uma componente na frequência fundamental. Isso pode ser verificado tomando-se a entrada na forma

$$u(t) = \alpha \cos(\omega t) = \alpha \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2}, \quad (5.48)$$

de maneira que

$$u(t)^3 = \frac{3\alpha^3}{8} (e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}) + \frac{\alpha^3}{8} (e^{j3\omega t} + e^{-j3\omega t}) \quad (5.49)$$

$$= \frac{3\alpha^3}{4} \cos(\omega t) + \frac{\alpha^3}{4} \cos(3\omega t). \quad (5.50)$$

A composição harmônica da saída do sistema é formada por duas componentes:

$$Y(\omega) = \alpha H_0(\omega) + \frac{3\alpha^3}{4} H_1(\omega) \quad \text{e} \quad (5.51)$$

$$Y(3\omega) = \frac{\alpha^3}{4} H_1(3\omega). \quad (5.52)$$

A distorção devida à geração de harmônico possui energia na saída do sistema toda concentrada em $Y(3\omega)$, que se busca eliminar com a inversão. Contudo a maior dificuldade na recuperação da entrada deve-se ao fato de que a componente fundamental na saída do sistema recebe contribuição tanto da parte linear quanto da não-linearidade cúbica. Este fato torna difícil uma abordagem com filtro puramente linear que vise, por exemplo, isolar $Y(\omega)$ e recuperar $u(t)$ apenas a partir desta componente.

Busca-se então sintetizar um inversor que realize uma operação não-linear entre na saída do sistema visando recuperar $u(t)$. A proposta estabelece um inversor com estrutura Volterra diagonal na forma

$$v(t) = g(t) * y(t) + \sum_{d=1}^{N_d} g_d(t) * y_d(t) \quad (5.53)$$

sendo $y_d(t) = y(t)y(t - q_1)y(t - q_2)$. Este operador pode ser expresso no domínio da frequência por:

$$V(z) = G(z)Y(z) + \sum_{d=1}^{N_d} G_d(z)Y_d(z) \quad (5.54)$$

Como a operação de inversão vai gerar termos cúbicos em $y(t)$, o sinal recuperado deverá passar a exibir harmônicos com energia em todas as componentes ímpares entre ω e 9ω . Em princípio isso parece um contra-senso, pois o que se busca com a inversão é justamente a eliminação das componentes harmônicas para se recuperar a entrada. Contudo a perspectiva aqui é a de impor as condições relaxadas de p -inversão ao operador, ou seja, busca-se recuperar a entrada mantendo a *magnitude* dos harmônicos abaixo de um valor mínimo, de maneira que seu efeito na distorção do sinal recuperado seja minimizado.

Neste caso é pertinente descrever a composição harmônica esperada para a saída invertida do sistema a partir de (5.54), que deve ser:

$$V(\omega) = G_0(\omega)Y(\omega) + \sum_{d=1}^{N_d} G_d(\omega)Y(\omega) \quad (5.55)$$

$$V(3\omega) = G_0(3\omega)Y(3\omega) + \sum_{d=1}^{N_d} G_d(3\omega)Y(3\omega) \quad (5.56)$$

$$V(5\omega) = \sum_{d=1}^{N_d} G_d(5\omega)Y(5\omega) \quad (5.57)$$

$$V(7\omega) = \sum_{d=1}^{N_d} G_d(7\omega)Y(7\omega) \quad (5.58)$$

$$V(9\omega) = \sum_{d=1}^{N_d} G_d(9\omega)Y(9\omega) \quad (5.59)$$

De posse do modelo do sistema e da estrutura proposta para o operador de inversão o problema pode então ser definido em maiores detalhes. Buscou-se inicialmente determinar o conjunto de senoides mínimos necessários para a síntese do operador. Nos melhores resultados atingidos para o modelo proposto o projeto fez uso de três senoides de mesma frequência $f_0 = 0,05$ (normalizada), com amplitudes $\alpha_i \in \{0,2 \ 0,5 \ 0,8\}$.

A estrutura do modelo do operador de inversão necessita de três parâmetros para ser definida: o número de diagonais cúbicas (N_d), o número de termos polinomiais do numerador e denominador das diagonais e o atraso de transporte mínimo do inversor l_i . Este atraso foi arbitrado como $l_i = 2$, que é a diferença provocada pelo próprio sistema (5.41) ao processar sua entrada $u(t)$ na geração da saída $y(t)$. Disto implica que o operador de inversão deva possuir um atraso nulo entre a saída do sistema $y(t)$ e a variável recuperada $v(t)$ para garantir o atraso $l_i = 2$ do projeto. Nestas condições, os filtros diagonais que ofereceram os melhores desempenho foram na forma FIR, de ordem 6. O operador foi então definido possuindo um total de $N_d = 6$ diagonais cúbicas, mais a linear $G_0(z)$.

Foram então projetados três operadores de inversão: (i) um linear, baseado na formulação vista na seção 2.7, o qual servirá de parâmetro para se avaliar o desempenho dos não-lineares; (ii) um Volterra diagonal cujas restrições de desigualdade não embutem os limiares de projeto $\delta_{n\omega_i}$ estabelecidos em (5.40) e um segundo Volterra diagonal em que foram arbitrados os limiares nas restrições.

O projeto foi codificado computacionalmente aproveitando implementações do algoritmo do ponto interior disponíveis em pacotes de softwares de otimização. Em todos os cenários o sistema foi considerado de ruído aditivo, de maneira que à sua saída é adicionado um ruído branco, gaussiano, com média nula e variância de $1 \cdot 10^{-4}$, de forma a conferir maior realismo à simulação computacional. Os resultados do projeto são discutidos a seguir.

5.3.3 Resultados - Inversor

Com a síntese numérica do operador de inversão concluída segue-se então com a análise dos seus resultados em diferentes cenários de avaliação. Inicialmente considerou-se um cenário simples, onde o inversor diagonal projetado não utilizou os limiares de restrições para os harmônicos. Assim, o sistema foi excitado por um sinal senoidal, como definido em (5.23) com amplitude $\alpha = 0,7$ e frequência $f_0 = 0,05$. A Figura 33 exibe os sinais de entrada atrasada de l_d amostras e a saída do sistema, bem como o sinal recuperado pelo inversor diagonal e pelo linear.

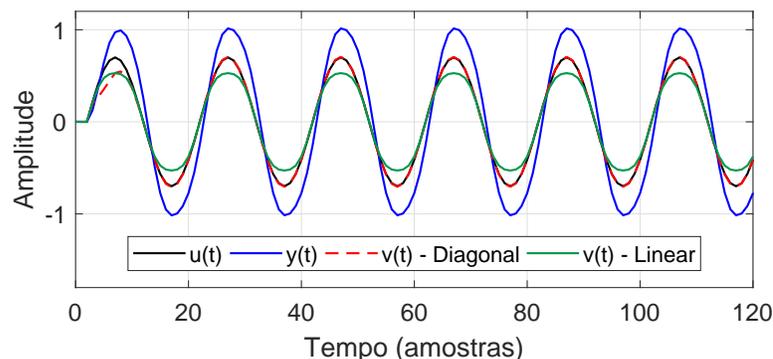


Figura 33 – Análise de resposta à entrada senoidal de inversor Volterra diagonal.

Observa-se que a saída do inversor recupera com fidelidade a entrada do sistema, o que não se mostra possível para o inversor linear. Embora seja sutil, é possível perceber a leve distorção no sinal de saída do sistema, que é bastante atenuada pelo inversor diagonal, ao passo que o sinal recuperado pelo inversor linear permanece distorcido.

Estes aspectos podem ser melhor analisados no domínio da frequência. Assim, levantou-se a curva de densidade espectral de potência de todos os sinais pelo método do periodograma com as mesmas configurações utilizadas na análise do sistema Duffing. A Figura 34 apresenta a densidade espectral de potência para cada um dos sinais senoidais do processo. Analisando as

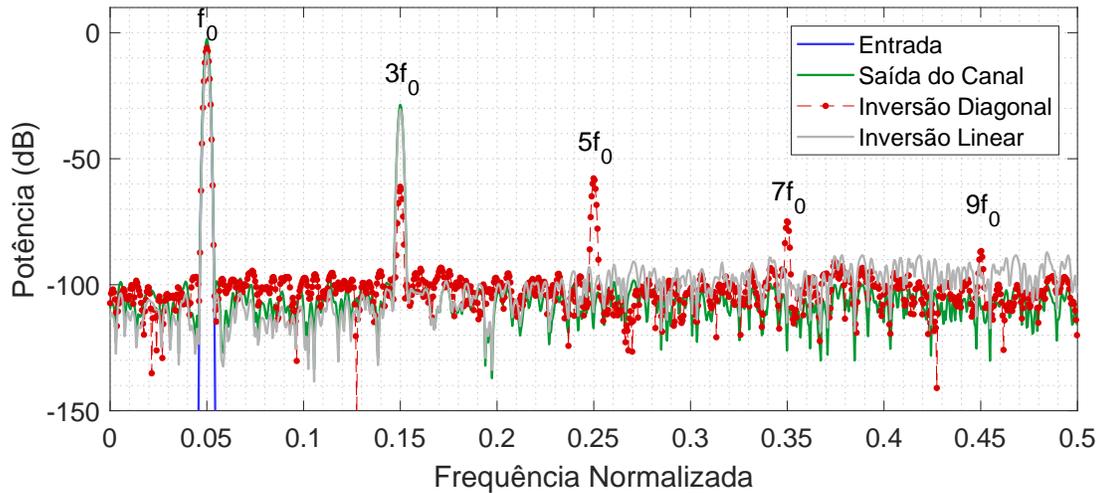


Figura 34 – Densidade espectral de potência para os sinais no processo de inversão: Restrições suaves para os harmônicos.

componentes harmônicas dos sinais, verifica-se a de entrada centrada em f_0 , a de saída do sistema e a do inversor linear em f_0 e $3f_0$, e os harmônicos ímpares na saída do inversor de f_0 até $9f_0$. Esta multiplicidade de componentes deve-se às duas operações não-lineares cúbicas, no sistema e no inversor. Ao mensurar a distorção devido à presença das componentes harmônicas verificou-se que a saída do canal exibe $THD_y = -25,98 \text{ dB}$, na saída do inversor linear $THD_l = -22,49 \text{ dB}$ e na saída do inversor Volterra diagonal $THD_d = -50,05 \text{ dB}$, ou seja, a utilização de um inversor linear piora a distorção do sinal. Isso demonstra que embora o inversor diagonal possua uma maior quantidade de componentes harmônicas a distorção total em sua saída é bem menor do que na do canal, ou mesmo do inversor linear.

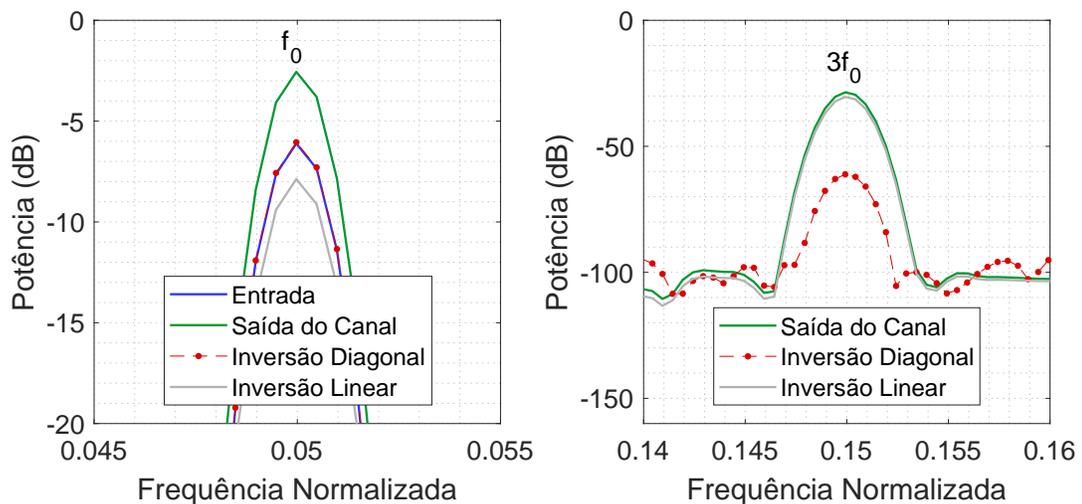


Figura 35 – Densidade espectral de potência para os sinais no processo de inversão: Restrições suaves para os harmônicos.

Contudo, além de reduzir a distorção provocada pelo sistema o inversor deve ter condição de recuperar com fidelidade o sinal de entrada na harmônica fundamental. Além disso, como o sistema gera a distorção apenas no terceiro harmônica, esta é a componente cujo comportamento deve ser analisado em maior destaque. A Figura 35 apresenta, no detalhe, a amplitude dos sinais na frequência fundamental f_0 e no harmônico $3f_0$. Na fundamental é possível verificar o ajuste preciso de magnitude entre o sinal de entrada do sistema e o recuperado na saída do sistema. Como esta componente recebe energia tanto da própria fundamental quanto da parcela do termo cúbico, é possível dizer que o inversor diagonal reverteu a distorção em f_0 provocada pelo sistema. Isso não se mostra possível para o operador linear, cuja amplitude do sinal recuperado exibe um erro considerável.

Ao se analisar o desempenho dos dois projetos na compensação da distorção de terceiro harmônico, verifica-se que o operador linear provoca uma tímida atenuação na energia desta componente, mantendo-a praticamente inalterada -30 dB . Quando o inversor diagonal é considerado, verifica-se uma atenuação bastante expressiva desta componente harmônica, cuja energia cai a -60 dB .

O projeto exibe portanto resultados preliminares satisfatórios. Contudo é questionável se não pode haver melhorias mediante a imposição das condições mais restritas ao problema de otimização. Buscou-se então arbitrar um valor limite $\delta_{n\omega_i}$ para a magnitude de cada componente harmônica de saída, conforme a condição estabelecida em (5.40). Esta é uma condição razoável se se considerar que a energia dos harmônicos compõem o numerador da taxa de distorção harmônica, a função custo do problema de otimização. Buscar um projeto factível em que seja possível impor um valor mínimo para estas componentes aumenta a possibilidade de garantia de se atingir uma solução que conduza a bons resultados. No cenário de busca utilizado para esta alteração o projeto que gerou os melhores resultados utilizou como valores de limiar para cada harmônico $\delta_{3\omega_i} = -35\text{dB}$, $\delta_{5\omega_i} = -45\text{dB}$, $\delta_{7\omega_i} = -55\text{dB}$ e $\delta_{9\omega_i} = -65\text{dB}$. O operador de inversão resultante determinado foi formado pelo seguinte conjunto de filtros diagonais:

$$\begin{aligned}
 G_0(z) &= 1,5661 - 2,4108z^{-1} + 1,8783z^{-2} - 0,3944z^{-3} + 0,0640z^{-4} - 0,3483z^{-5} + 0,1483z^{-6} \\
 G_1(z) &= -0,0860 + 0,3865z^{-1} + 0,0110z^{-2} + 0,1857z^{-3} + 0,5234z^{-4} + 0,0013z^{-5} + 0,1329z^{-6} \\
 G_2(z) &= -0,0029 + 0,0353z^{-1} - 0,0195z^{-2} + 0,0214z^{-3} - 0,0112z^{-4} - 0,0135z^{-5} + 0,0817z^{-6} \\
 G_3(z) &= -0,2783 - 0,8289z^{-1} - 0,4762z^{-2} - 1,3876z^{-3} - 0,8747z^{-4} - 0,2574z^{-5} - 1,0087z^{-6} \\
 G_4(z) &= 0,2586 + 0,0580z^{-1} + 0,1237z^{-2} + 0,3855z^{-3} + 0,0421z^{-4} + 0,1358z^{-5} + 0,4923z^{-6} \\
 G_5(z) &= -0,1844 + 0,1241z^{-1} - 0,3039z^{-2} - 0,0445z^{-3} - 0,1287z^{-4} - 0,0768z^{-5} + 0,2037z^{-6} \\
 G_6(z) &= 0,0094 + 0,7827z^{-1} + 0,2234z^{-2} + 0,8499z^{-3} + 0,2980z^{-4} + 0,1517z^{-5} + 0,0282z^{-6}
 \end{aligned}$$

O projeto a partir das novas condições de restrição mostrou-se factível, seus resultados em termos de resposta em frequência são apresentados na Figura 36 para as mesmas condições estabelecidas no caso anterior.

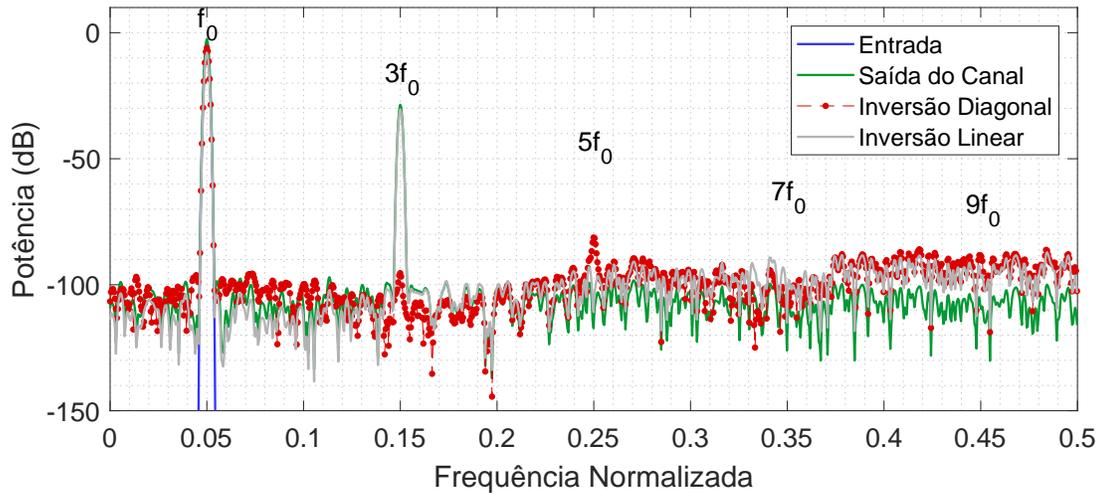


Figura 36 – Densidade espectral de potência para os sinais no processo de inversão - Projeto 2: Restrições mais severas para os harmônicos.

A melhoria é bastante expressiva quando se verifica que a energia de todas as componentes harmônicas são reduzidas de forma expressiva. Apenas a componente $5f_0$ exibiu energia na ordem de -80 dB , todas as demais mantiveram-se abaixo disso, em níveis tais que seus efeitos se comparam aqueles do ruído nos dados. O sinal recuperado possui energia totalmente concentrada na fundamental, a qual apresentou $THD_d = -73\text{ dB}$, uma melhoria de mais de 20 dB em relação ao projeto anterior. Esses dados também precisam ser observados no detalhe. A Figura 37 mostra que a recuperação de magnitude na fundamental se deu de forma precisa, enquanto a harmônica $3f_0$ teve a energia reduzida em quase 70 dB , o que lhe deixou com o mesmo nível de energia do ruído.

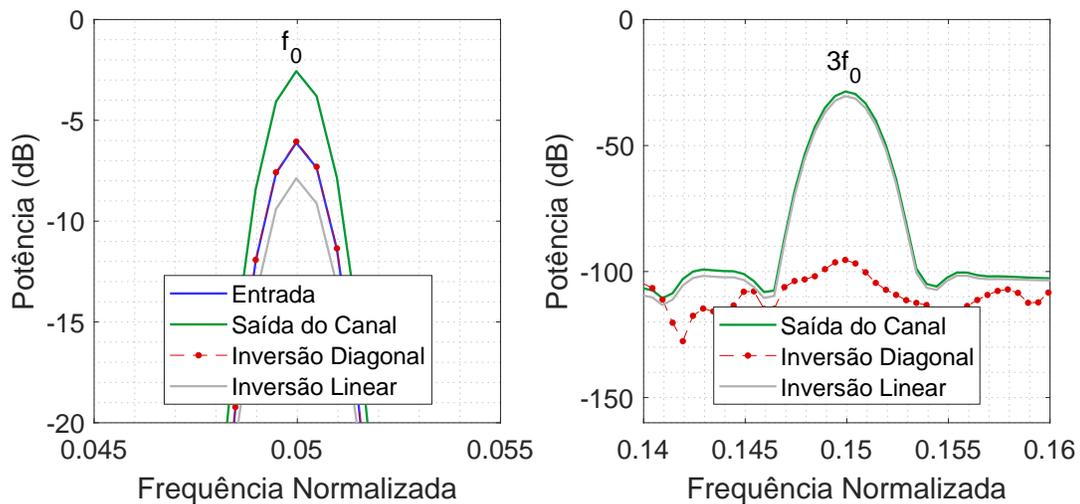


Figura 37 – Densidade espectral de potência para os sinais no processo de inversão: Restrições fortes para os harmônicos.

Estes resultados são relevantes e coerentes com a expectativa do projeto. Porém, trata-se de um cenário restrito, uma vez que é limitado a uma senoide em uma única amplitude. Buscando verificar o desempenho do inversor em uma perspectiva mais abrangente, foram gerados dados de resposta do sistema ao sinal senoidal com a amplitude variando na faixa de $0,01 \leq \alpha \leq 1,4$, com todas as senoides na frequência do projeto f_0 . Para avaliar o desempenho do inversor fez-se uso da métrica NRMSE, que mediu o ajuste entre a entrada $u(t)$ do sistema atrasada de l_d amostras para compensar o atraso de transporte do inversor, e a saída do inversor $v(t)$. A Figura 38 apresenta estes resultados para o inversor Volterra diagonal e para o inversor linear.

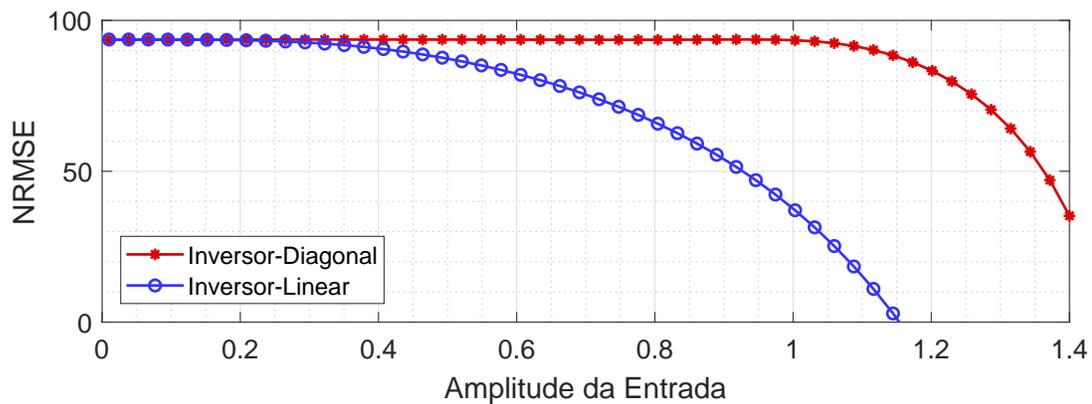


Figura 38 – Ajuste da resposta senoidal entre a entrada atrasada $u(t - l_d)$ e a saída recuperada pelo inversor $v(t)$ para o inversor Volterra diagonal e inversor linear.

Os dados da Figura 38 demonstram que os dois inversores apresentam resultados idênticos em termos de NRMSE para senoides de baixas amplitudes, ambas com 94% de ajuste, que pode ser celebrado como um bom desempenho. Porém, a medida que a amplitude é elevada o desempenho do inversor linear degrada-se rapidamente e continuamente, caindo abaixo dos 80% ao passar de $\alpha = 0,6$. O inversor Volterra diagonal, por outro lado, mantém nas amplitudes mais elevadas da entrada o mesmo desempenho verificado nas baixas, passando a se deteriorar apenas para α acima de 1,1. Isto comprova uma expectativa positiva com relação ao projeto, o fato de o inversor diagonal conseguir bons resultados em regimes de operação onde efeitos não-lineares são mais fortes, ou seja, em amplitudes mais elevadas, ao passo que mantém o mesmo desempenho do linear em baixas amplitudes. Por outro lado, isso também exhibe um limite para o desempenho do inversor diagonal, que não pode se manter para valores indefinidos de amplitude.

Este resultado ressalta um fato bastante reconhecido e importante em análise e síntese de sistemas dinâmicos, o de que não há razão para incluir operadores não-lineares em projetos cujos sistemas operam sempre em regiões aproximadamente lineares, no caso em baixas amplitudes. Do contrário, quando a não linearidade se manifesta, apenas operadores não-lineares serão capazes de oferecer soluções com desempenho satisfatório.

Buscando então expandir este cenário de avaliação do inversor diagonal, verificou-se também o seu desempenho ao longo da frequência. Assim, foram levantadas respostas do sistema para toda a faixa de amplitude na qual o inversor obteve um resultado satisfatório ($0 \leq \alpha \leq 1,4$), mas considerando diversos pontos de operação de frequência para valores abaixo e acima de f_0 , na faixa $10^{-3} \leq f \leq 0,1$. Para cada ponto (f, α) é gerada uma senoide que se propaga pelo sistema e então é recuperada, com atraso l_d pelo inversor diagonal. Para a apresentação destes resultados, considerando que se trata da análise para com dois parâmetros do sinal, foi adotado um gráfico em malha cujas células refletem o valor do NRMSE que mede o ajuste entre a entrada e o sinal recuperado. Estes dados são apresentados na Figura 39a, para o inversor diagonal e na Figura 39b para o inversor linear. Buscando ressaltar a diferença de desempenho entre os dois operadores foi gerada também a malha da Figura 39c que expressa o valor de ajuste pelo inversor diagonal menos o valor verificado para o linear em cada ponto.

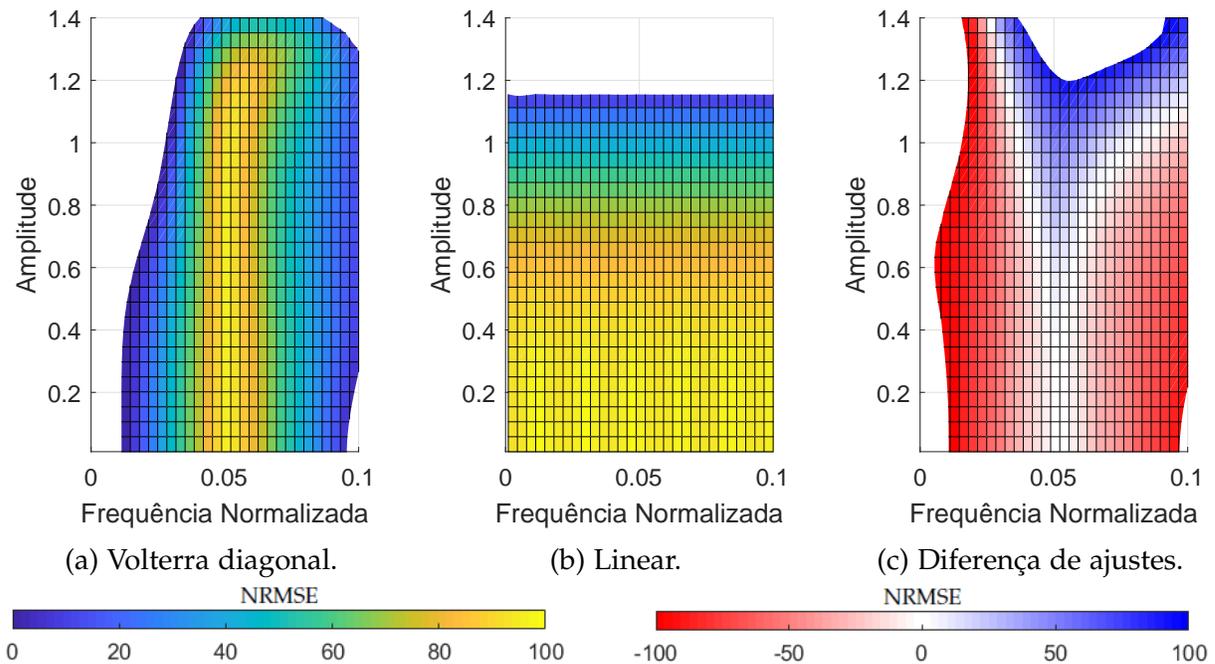


Figura 39 – Recuperação senoidal magnitude.

Na Figura 39a observa-se então um valor elevado de NRMSE para toda a excursão de amplitude com a frequência em f_0 . Nota-se contudo, que este desempenho é restrito a uma região bastante estreita em torno da frequência de projeto. Isto se deve ao fato de que o projeto de otimização ter como objetivo determinar operadores cujo compromisso é minimizar a distorção apenas para sinais nesta frequência, não tendo nenhum compromisso para o desempenho em outro ponto de operação. Esse comportamento é verificado mesmo para sinais de baixa amplitude. O inversor diagonal projetado só garante desempenho satisfatório para pontos na vizinhança de f_0 . O inversor linear, por outro lado, possui desempenho satisfatório em toda faixa de frequência analisada, mas tem desempenho degradado para regiões de operação com amplitudes elevadas,

sendo que esta redução de desempenho se verifica de maneira uniforme para qualquer valor de frequência. Quando os dados gerados pelos dois projetos são confrontados, por meio da Figura 39c, fica evidente (i) as regiões onde os dois projetos possuem o mesmo desempenho, sinais de amplitudes baixas, em torno de f_0 ; (ii) as regiões onde o desempenho do operador diagonal é inferior ao linear, sinais de baixa amplitude com frequência afastada da vizinhança de f_0 , e (iii) regiões onde o inversor diagonal possui desempenho superior ao linear, para sinais de altas amplitudes em torno de f_0 .

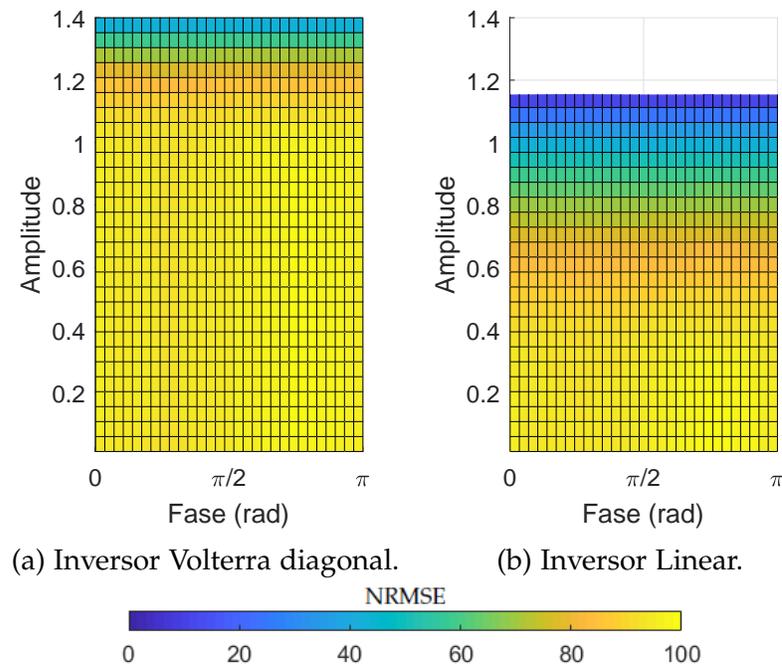


Figura 40 – Recuperação senoidal de fase, em f_0 .

O desempenho dos dois projetos foi avaliado ainda para a recuperação de fase do sinal de entrada. Os dados foram levantados para sinais senoidais gerados na frequência do projeto f_0 , onde foram variadas a fase ϕ , na faixa $0 \leq \phi \leq \pi$ rad e a amplitude. Esta avaliação é particularmente importante tendo em conta que o projeto não variou a fase nas componentes senoidais utilizadas durante a síntese do inversor, tendo se limitado à amplitude dos sinais. A único aspecto relativo à fase considerado foi aquele devido ao atraso de transporte do inversor diagonal, necessário para a sua realização. As Figuras 40a e 40b apresentam então o gráfico em grade para o desempenho dos inversores Volterra diagonal e linear, com valores de NRMSE que medem a recuperação de senoides com parâmetros (ϕ, α) , na frequência f_0 .

Apesar de a fase não ter sido considerada no projeto do inversor nota-se que em ambos os casos, no diagonal e no linear, os operadores conseguem realizar a recuperação de fase adequadamente, visto que a sua variação não interfere no valor verificado para o ajuste entre o sinal de entrada defasado e a saída recuperada. Nos dois cenários o desempenho se mostra uniforme, para a faixa de defasamento considerada em todas as amplitudes. O desempenho para

os dois operadores é degradado apenas com a variação de amplitude, de modo similar ao já avaliado previamente.

Com o desempenho dos dois projetos tendo se mostrado muito mais sensível à variação de amplitude e considerando que a estratégia de síntese por otimização baseou-se na minimização da taxa de distorção harmônica dos sinais recuperados, buscou-se por fim avaliar a THD da saída do inversor em função da amplitude do sinal de entrada na frequência f_0 . A Figura 41 apresenta os dados de THD do inversor linear e do diagonal. Para o diagonal foram considerados dois cenários no cômputo do THD, um em que são consideradas todas as componentes harmônicas ($3f_0 - 9f_0$) e outro em que a distorção é medida levando em conta apenas o harmônico $3f_0$. Os

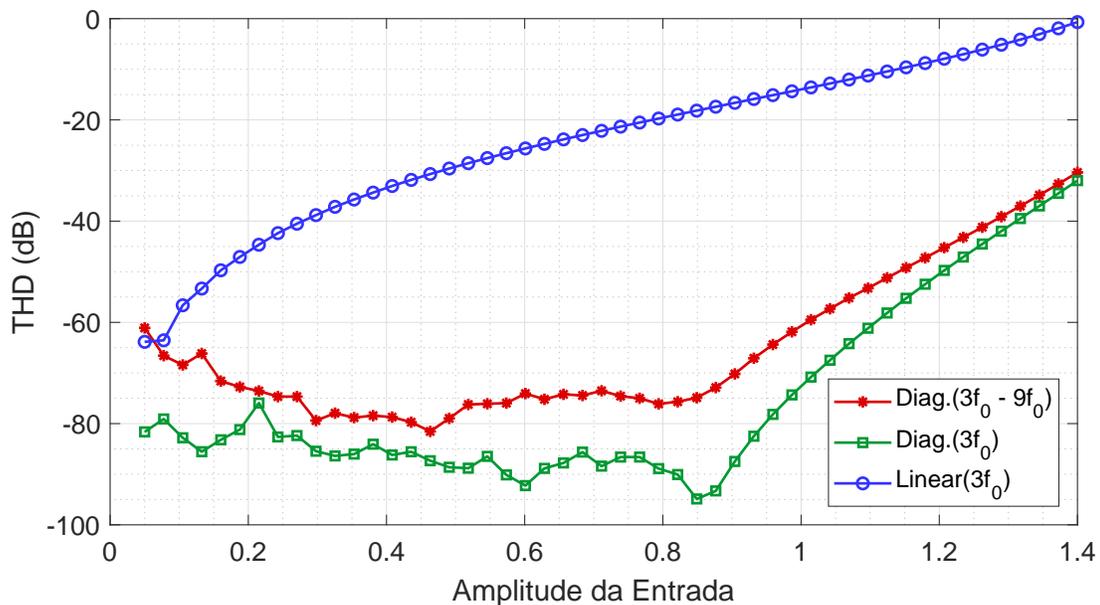


Figura 41 – Taxa de distorção harmônica (dB) do sinal recuperado pela amplitude da entrada.

dados demonstram a distorção nos sinais de saída recuperados pelos dois inversores partem do mesmo valor inicial, para sinais de baixas amplitudes, em torno de -60 dB . Porém, o inversor linear tem o desempenho continuamente degradado a medida que a amplitude é elevada, de modo que a distorção tende a 0 dB quando a amplitude da entrada aproxima-se do valor máximo considerado, de 1,4. Por outro lado, a distorção verificada no sinal recuperado pelo inversor Volterra diagonal, mantém-se em valores pequenos tipicamente abaixo de -70 dB para amplitudes de até 0,9. A partir deste valor a THD do inversor diagonal tende a aumentar continuamente, mantendo-se porém sempre em pelo menos 30 dB abaixo da distorção do linear. No cenário em que a distorção é computada apenas para o harmônico $3f_0$ nota-se uma variação similar à curva com todas as componentes harmônicas. Olhar para este cenário é importante porém para que se verifique o impacto das distorção devido aos harmônicos gerados pelo inversor diagonal de $5f_0$ a $9f_0$ frente a distorção devida unicamente ao sistema em $3f_0$. Isto comprova o fato de que embora o

inversor diagonal produza uma maior quantidade de componentes harmônicas, estas interferem pouco na distorção total de saída. Este fato está de acordo com a expectativa gerada para o projeto, baseado nas premissas do operador inverso de ordem p .

CONCLUSÃO

Este trabalho apresentou novas contribuições à análise e síntese de sistemas não-lineares representados por séries funcionais de Volterra em coordenadas diagonais. O desenvolvimento da proposta foi motivado pelas dificuldades verificadas na condução destes procedimentos com base nas representações Volterra convencionais, devido à multidimensionalidade dos operadores e tendo em conta que o modelo diagonal supera este problema ao expressar cada funcional como um banco de filtros lineares, unidimensionais, que processa monômios não-lineares da entrada. Considera-se porém que o formalismo diagonal vem sendo subestimado em aplicações de engenharia de sistemas, possivelmente devido à falta de abordagens para a identificação destes modelos, a análise não-linear no domínio do tempo e da frequência, a conversão de outras representações não-lineares e a metodologias para a síntese de operadores. O trabalho foi desenvolvido então buscando oferecer contribuições nestes quatro aspectos do problema.

A revisão bibliográfica permitiu contextualizar as propostas diante de problemas contemporâneos tratados à luz das séries de Volterra. Sua aplicação à representação de sistemas dinâmicos foi desenvolvida desde o conceito fundamental de funcional, o que permitiu verificar propriedades, virtudes e limitações deste formalismo, além de situá-lo como uma estratégia clássica para a representação e análise não-linear.

A primeira proposta, que reviu a representação diagonal em filtros FIR e passou a admitir uma estrutura com operadores IIR, mostrou-se vantajosa tanto para a identificação do modelo, que recaiu em uma equação de regressão linear nos parâmetros, quanto para a análise no domínio da frequência. Isto se mostrou vantajoso por algumas razões. O modelo exibiu uma maior compacidade quando comparada a formulação Volterra convencional. Passou a ser possível analisar aspectos como a estabilidade do sistema Volterra a partir de conceitos comuns de sistemas lineares, como polos e zeros. O algoritmo OLS-ERR mostrou-se uma opção adequada para a identificação Volterra a partir de dados reais, na medida em que associa a ortogonalização do conjunto de dados a estratégia de seleção dos termos polinomiais via ERR. Considera-se então que

a abordagem possui potencial para medição e análise de características de sistemas não lineares.

Os resultados do estudo de caso de um sistema Wiener demonstraram que a representação diagonal, além de suas notórias vantagens computacionais já exploradas em outros trabalhos, apresenta outras que se estendem também ao campo de análise de sistemas não-lineares no domínio da frequência, reduzindo o problema da multidimensionalidade dos kernels. Neste aspecto, torna-se atrativa a utilização da nova formulação tanto em problemas ainda em aberto quanto a revisitação de outros já tratados pela abordagem Volterra. Em particular, mostrou-se que o modelo diagonal passou a ser facilmente convertido para o domínio da frequência, de uma maneira tão direta quanto à utilizada para o caso linear. A estrutura resultante é uma forma algébrica unidimensional e independente do sinal de entrada. Estes aspectos constituem avanços se comparados à uma GFRF ou NOFRE, o que se comprova pela relativa facilidade de determinação e análise do modelo, à possibilidade de visualização e interpretação dos dados no domínio da frequência, a unidimensionalidade dos operadores e a independência do sinal de entrada.

Mostrou-se que a partir de um modelo diagonal no domínio da frequência é possível determinar características diretamente associadas ao sinal de saída, e.g. harmônicos, podem ser calculadas pela formulação. Expressões foram derivadas para sistemas de grau 2 e 3, sendo possível ver claramente como cada diagonal influencia o harmônico de saída em função da frequência do sinal de entrada senoidal. O resultado pode ser facilmente estendido para não-linearidades de grau mais elevado ou para o cálculo de intermodulações. O próprio conjunto de FRFs das componentes diagonais admitiu a representação gráfica na frequência, cujo comportamento foi analisado a partir de conceitos comuns de polos e zeros. Uma possibilidade de análise do sistema por estas funções consiste basicamente de entender como cada filtro atua sobre o espectro de cada monômio da entrada, o que é realizado inteiramente à luz de conceitos consagrados da teoria linear. De modo geral, estas FRFs permitem visualizar características importantes do sistema. No estudo de caso, observou-se que dois valores distintos de um parâmetro físico produziram conjuntos de diagonais distintos. Isso sugere relativo potencial de aplicação em problemas que exigem distinção entre diferentes modos de operação do sistema, tais como diagnóstico de faltas e monitoramento de condições, por exemplo.

O custo de se quebrar a multidimensionalidade é a necessidade de expressar cada funcional não mais a partir de um único kernel, mas por uma série de operadores de convoluções lineares. O número de componentes diagonais pode se mostrar grande, contudo a introdução do conceito de energia das diagonais permite a simplificação do modelo, ao selecionar apenas aqueles operadores cuja magnitude de resposta em frequência mostra-se relevante para explicar a dinâmica do modelo subjacente. Assim, devido à baixa energia dos filtros correspondentes, grupos de monômios podem ser eliminados do modelo sem grandes prejuízos para a representação da saída. O conceito foi importante tanto na simplificação à posteriori de modelos identificados, quanto na seleção e truncamento das componentes diagonais resultantes a partir do mapeamento de modelos NARX. O método de simplificação gerou modelos compactos e com uma aproximação equivalente àqueles

com o conjunto completo de diagonais.

O trabalho avançou ainda sobre o importante campo da análise de sistemas não-lineares por meio de seus modelos Volterra equivalentes. Dada a possibilidade de analisar um sistema por meio de sua representação Volterra é desejável então estabelecer métodos que relacionem este tipo de modelo a representações não-lineares tradicionais. Propõe-se então que este problema possa ser contornado com a utilização da representação Volterra em coordenadas diagonais. Um novo algoritmo de mapeamento entre um modelo NARX polinomial e características invariantes de um sistema não-linear foi introduzido. O algoritmo é baseado na visão dos funcionais como séries de potências. O algoritmo consiste de obter as ALEs e aplicar derivadas, observando regras apropriadas de mudanças de variáveis. O resultado é um conjunto de equações de diferenças, cuja solução revela características do sistema, expressas no conjunto de componentes diagonais. Demonstrou-se que, neste formato, é possível obter soluções analíticas e unidimensionais, o que fornece grande *insight* sobre as propriedades do sistema.

O método foi exemplificado através da extração de características de um modelo NARX simples. Comparações com a resposta exata em diferentes cenários mostram que a aproximação diagonal é sensata. Isso possibilita expressar explicitamente a saída em função da entrada para classes relativamente amplas de sistemas, o que pode ser útil para problemas de análise e síntese, sobretudo considerando especificações no domínio da frequência, já que a formulação é parcialmente descrita em termos de convoluções. Até então, os estudos sobre este assunto se restringiram a redução de complexidade de séries Volterra, de modo que os resultados aqui apresentados contribuem para exploração mais profunda da representação.

Embora tenha sido desenvolvido para um sistema com poucos termos polinomiais, a extensão para modelos com maior estrutura torna-se direta com o uso de ferramentas computacionais. O algoritmo não impõe limitações de ordem do modelo nem do número ou natureza dos termos polinomiais presentes. O algoritmo é sistemático e requer para implementação apenas o uso de derivadas multivariáveis e teoria clássica de sistemas lineares discretos. Resultados numéricos são apresentados para demonstrar que a aproximação do sistema é válida. Os resultados atingidos foram computados e expressos em uma forma explícita fechada, algo dificilmente obtido por outros métodos. Simulações mostraram que a aproximação diagonal é uma maneira adequada de representar a saída do sistema. A aplicação do conceito de energia de diagonais mostrou-se importante para determinar o conjunto mínimo de diagonais necessárias para se estabelecer a aproximação desejada com o modelo NARX original.

Tendo desenvolvido ferramentas adequadas para a representação, medição, simplificação, mapeamento e análise de modelos, o trabalho buscou avançar para problemas de síntese não-linear por séries de Volterra. Apresentou-se então o problema da inversão dinâmica de sistemas não-lineares, classicamente tratado no contexto de sistemas Volterra pela chamada inversa de ordem p . Discutiu-se a relevância destes operadores em contextos práticos de engenharia e as dificuldades da realização via modelos Volterra convencionais, por conta da multidimensionalidade, ou mesmo

baseados em procedimentos analíticos, em que se busca determinar uma forma fechada para o operador de inversão a partir do modelo do sistema não-linear.

O trabalho propôs então a síntese de um operador de inversão baseado na estrutura Volterra diagonal para um modelo NARX polinomial. Discutiu-se as restrições impostas à realização do operador a partir do modelo do sistema. Foi introduzida uma estratégia numérica para a inversão de sinais senoidais, baseada em procedimentos de otimização, em que se busca determinar o operador de inversão para um NARX polinomial a partir da recuperação de sinais senoidais distorcidos pelo processamento não-linear do sistema. O problema de otimização foi então formulado tendo como função custo a soma das taxas de distorções harmônicas das senoides e como restrições as condições de p -inversão. A estratégia buscou então sintetizar um operador inverso que minimizasse a distorção harmônica do sinal de saída, garantindo a recuperação da magnitude e da fase.

O problema se mostrou factível e para o estudo de caso proposto, foi projetado então um operador de inversão Volterra diagonal cujo desempenho foi testado e medido por diversas estratégias numéricas. O operador determinado mostrou-se compacto e capaz de atender aos requisitos de projeto para uma ampla faixa de magnitude do sinal de entrada, em regiões de operação onde os efeitos não-lineares são latentes. A estratégia proposta apresenta como limitação ou fragilidade o fato de ser dependente do sinal de entrada, ou seja, os resultados alcançados foram limitados à inversão de sinais senoidais. Além disso, o projeto resultou em um operador de inversão que é ótimo em uma faixa restrita frequência, de maneira que o operador resultante está limitado à inversão de sinais com banda estreita.

Considera-se porém que a proposta de inversão é inovadora ao inserir as séries Volterra diagonais em um contexto de síntese de operadores não-lineares. O projeto resultante aproveitou todas as vantagens deste formalismo em relação aos modelos convencionais, particularmente a sua natureza unidimensional e a possibilidade de transformação de domínios de tempo e frequência de forma direta. O desempenho do operador mostrou-se também bastante satisfatório, mesmo diante das limitações apontadas. A sistematização da proposta por meio de uma estratégia numérica de otimização abre espaço para diversas possibilidades de formulação do problema. A estrutura diagonal do operador favoreceu particularmente a implementação computacional, uma vez que é baseada inteiramente em operações de convoluções lineares.

6.1 Propostas futuras

Os resultados alcançados conferem às séries Volterra diagonais um papel de destaque na condução de importantes problemas de representação, análise e síntese não-linear. As contribuições abriram um leque de possibilidades que merecem ser investigadas em maiores detalhes visando explorar o potencial de aplicação em contextos reais de engenharia de sistemas e na investigação adicional em estudos futuros.

Com respeito à representação e identificação diagonal é importante investigar a possibilidade de utilização do formalismos em série Volterra com múltiplas entradas, estes modelos tem sido utilizados em muitas aplicações recentes, porém todos utilizando estruturas multidimensionais. Mostra-se necessário também o estudo de estratégias de identificação visando medir o modelo diagonal a partir de dados reais, em particular o projeto de sinais de sondagem que possam excitar regiões de magnitude e faixas de frequência ideais para cada sistema, buscando a recuperação de modelos Volterra.

As estratégias de análise necessitam também ser consolidadas, em particular a partir da interpretação ou utilização dos dados de resposta em frequência dos filtros diagonais, por exemplo em problemas engenharia que demandam a diferenciação de regimes de operação de sistemas dinâmicos. Embora os modelos diagonais sejam equivalentes aos Volterra convencionais, não está claro, pelos desenvolvimentos deste trabalho, a relação dos filtros diagonais com as GFRE. A investigação deste problema pode lançar luz sobre importantes propriedades dos modelos diagonais.

As ferramentas aqui propostas precisam ainda ser testadas em um sistema real de engenharia. Diversas possibilidades são aventadas. Em particular as estratégias de inversão em amplificadores de potência, na equalização de canais de comunicação, na conversão analógico digital e na modulação de sinais PWM são algumas possibilidades importantes, demandadas em diversas aplicações.

Com respeito ao projeto do operador de inversão os desafios são diversos. Em particular investigar estratégias visando o projeto de inversores para uma dada banda de frequência não limitada a um único ponto. Analisar as implicações deste projeto, em particular com relação aos limites de amostragem. Investigar também o projeto de inversão no domínio da frequência de maneira independente do sinal de entrada.

Dada a quantidade de ferramentas desenvolvidas neste trabalho e as possibilidades que se abrem à sua continuação; considerando ainda que as técnicas foram estabelecidas visando o desenvolvimento em um ambiente computacional, uma demanda importante de contribuição futura é a estruturação destas técnicas em um pacote de software a ser utilizado nas etapas de identificação, conversão e análise de modelos diagonais e a sua utilização em problemas de síntese não-linear.

REFERÊNCIAS

- ABRAMOWITZ, M.; STEGUN, I. A. *Handbook of Mathematical Functions*. 9. ed. [S.l.]: Dover Publications, 1964. 38
- AGUIRRE, L. A. *Introdução a Identificação de sistemas: Técnicas lineares e não-lineares aplicadas a sistemas reais*. [S.l.]: Editora UFMG, 2007. 1, 5, 33, 34, 51
- ALIZADEH, M.; RÖNNOW, D. A two-tone test for characterizing nonlinear dynamic effects of radio frequency amplifiers in different amplitude regions. *Measurement*, Elsevier, v. 89, p. 273–279, 2016. 10
- ALPER, P. A consideration of the discrete Volterra series. *IEEE Transactions on Automatic Control*, IEEE, v. 10, n. 3, p. 322–327, 1965. 21
- BARRETT, J. The use of functionals in the analysis of non-linear physical systems. *International Journal of Electronics*, Taylor & Francis, v. 15, n. 6, p. 567–615, 1963. 4
- _____. Bibliography on volterra series hermite functional expansions and related subjects. *Measurement And Control*, 1977. ISSN 09298533. Disponível em: <<http://alexandria.tue.nl/extra1/erap/publichtml/7704263.pdf>>. 4
- BAYMA, R. S. *New Methods for Analysis of Nonlinear Systems in the Frequency Domain with Applications in Condition Monitoring and Fault Diagnosis*. [S.l.]: The University of Sheffield, Department of Automatic Control and Systems Engineering, 2014. 8, 17, 31
- BAYMA, R. S.; LANG, Z. Q. A new method for determining the generalised frequency response functions of nonlinear systems. *IEEE Transactions On Circuits and Systems I-regular Papers*, Ieee-inst Electrical Electronics Engineers Inc, v. 59, n. 12, p. 3005–3014, dez. 2012. 5
- BAYMA, R. S.; LANG, Z.-Q. Fault diagnosis methodology based on and nonlinear system modelling and frequency analysis. In: IFAC, SOUTH AFRICA. AUGUST. *19th World Congress The International Federation of Automatic Control*. [S.l.], 2014. 5, 6
- BAYMA, R. S.; ZHU, Y.; LANG, Z.-Q. The analysis of nonlinear systems in the frequency domain using nonlinear output frequency response functions. *Automatica*, Elsevier, v. 94, p. 452–457, 2018. 6, 8, 32, 65, 66, 71
- BEIDAS, B. F. Turbo volterra equalization of intermodulation distortion in multicarrier satellite systems. In: IEEE. *MILITARY COMMUNICATIONS CONFERENCE, 2011-MILCOM 2011*. [S.l.], 2011. p. 358–363. 10
- BILLINGS, S. A. *Nonlinear System Identification: NARMAX Methods in the Time, Frequency, and Spatio-Temporal Domains*. [S.l.]: John Wiley and Sons, 2013. 1, 4, 5, 7, 8, 33, 66
- BOYD, L. C. S.; DESOER, C. Analytical foundations and of volterra and series. *IMA Journal of Mathematical Control & Information*, v. 1, p. 243–282, 1984. 5

- BOYD, S.; CHUA, L. Fading memory and the problem of approximating nonlinear operators with Volterra series. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, v. 32, n. 11, p. 1150–1161, nov 1985. ISSN 0098-4094. Disponível em: <<http://ieeexplore.ieee.org/xpl/articleDetails.jsp?arnumber=1085649>>. 5, 22
- BRILLIANT, M. B. *Theory of the analysis of nonlinear systems*. [S.l.], 1958. 4
- CARINI, A.; SICURANZA, G. L.; MATHEWS, V. J. On the inversion of certain nonlinear systems. *IEEE Signal Processing Letters*, IEEE, v. 4, n. 12, p. 334–336, 1997. 10
- CHEN, C. T. *Linear System Theory and Design*. Oxford University Press, 1999. (Linear System Theory and Design). ISBN 9780195117776. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=Fqi4oRgmOocC>>. 1
- CHEN, X.; ZHAI, G.; FUKUDA, T. An approximate inverse system for nonminimum-phase systems and its application to disturbance observer. *Systems & Control Letters*, Elsevier, v. 52, n. 3-4, p. 193–207, 2004. 39
- CHENG, C.; PENG, Z.; ZHANG, W.; MENG, G. Volterra-series-based nonlinear system modeling and its engineering applications: A state-of-the-art review. *Mechanical Systems and Signal Processing*, v. 87, Part A, p. 340 – 364, 2017. 2, 6
- CHIERCHIE, F.; AASE, S. O. Volterra models for digital pwm and their inverses. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*, IEEE, v. 62, n. 10, p. 2606–2616, 2015. 10
- COURANT, R.; HILBERT, D. *Methods of Mathematical Physics*. 1. ed. [S.l.]: Wiley-VCH, 1989. Volume 1. ISBN 0471504475,9780471504474,9780585294285. 3, 20
- EYKHOFF, P. *System Identification. Parameter and State Estimation*. [S.l.]: John Wiley, 1974. 5
- FEIJOO, J. V.; WORDEN, K.; STANWAY, R. System identification using associated linear equations. *Mechanical Systems and Signal Processing*, Elsevier, v. 18, n. 3, p. 431–455, 2004. 32
- FRECHET, M. Sur les fonctionnelles continues. *Ann. de L'Ecole Noemale sup.*, v. 27, n. 3, 1910. 3, 20
- FRISTON, K. J.; MECHELLI, A.; TURNER, R.; PRICE, C. J. Nonlinear responses in fmri: the balloon model, volterra kernels, and other hemodynamics. *NeuroImage*, Elsevier, v. 12, n. 4, p. 466–477, 2000. 6
- GEORGE, D. A. *Continuous nonlinear systems*. [S.l.], 1959. 2, 4, 28
- GIANNAKIS, G. B.; SERPEDIN, E. Linear multichannel blind equalizers of nonlinear fir volterra channels. *IEEE Transactions on Signal Processing*, IEEE, v. 45, n. 1, p. 67–81, 1997. 10
- GUÉRIN, A.; FAUCON, G.; BOUQUIN-JEANNÈS, R. L. Nonlinear acoustic echo cancellation based on volterra filters. *IEEE Transactions on Speech and Audio Processing*, IEEE, v. 11, n. 6, p. 672–683, 2003. 6
- HASSANI, M.; KARAMI, M. R. Noise estimation in electroencephalogram signal by using volterra series coefficients. *Journal of medical signals and sensors*, Medknow Publications, v. 5, n. 3, p. 192, 2015. 6
- JONES, J. C. P. Simplified computation of the Volterra frequency response functions of non-linear systems. *Mechanical Systems and Signal Processing*, v. 21, n. 3, p. 1452–1468, 2007. 8, 65

- JONES, J. C. P.; BILLINGS, S. A. Interpretation of non-linear frequency response functions. *International Journal of Control*, Informa UK Limited, v. 52, n. 2, p. 319–346, aug 1990. 30
- JONES, J. P.; BILLINGS, S. Recursive algorithm for computing the frequency response of a class of non-linear difference equation models. *International Journal of Control*, Taylor & Francis, v. 50, n. 5, p. 1925–1940, 1989. 5
- JUNG, Y. *Inverse system identification with applications in predistortion*. [S.l.]: Linköping University Electronic Press, 2018. v. 1966. 3, 9
- KHALIL, H. K. *Nonlinear Systems*. Third. Prentice Hall, 2017. (Pearson Education). ISBN 9780130673893. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=t{_}d1QgAAC>. 1
- KOREMBERG, M.; BILLINGS, S. A.; LIU, Y. P. *An Orthogonal Parameter Estimation Algorithm for Nonlinear Stochastic System*. [S.l.], 1987. 5, 35
- KROT, A. M.; TKACHOVA, P. P.; GONCHAROV, B. A. Nonlinear signal decomposition into functional series for speech recognition: A new approach. In: *EUSIPCO*. [S.l.: s.n.], 2000. p. 1–4. 6
- LANG, Z. Q.; BILLINGS, S. A. Output frequency characteristics of nonlinear systems. *International Journal of Control*, v. 64, p. 1049–1067, 1996. 29
- _____. Energy transfer properties of non-linear systems in the frequency domain. *International Journal of Control*, Taylor & Francis Ltd, v. 78, n. 5, p. 345–362, mar. 2005. 6, 30
- LANG, Z. Q.; BILLINGS, S. A.; YUE, R.; LI, J. Output frequency response function of nonlinear volterra systems. *Automatica*, Elsevier, v. 43, n. 5, p. 805–816, 2007. 6
- LEE, Y.; SCHETZEN, M. Measurement of the wiener kernels of a non-linear system by cross-correlation. *International Journal of Control*, Taylor & Francis, v. 2, n. 3, p. 237–254, 1965. 4, 5
- LEONTARITIS; BILLINGS. Input output parametric models for non-linear systems .1. deterministic non-linear systems. *International Journal of Control*, p. 303–328, 1985. 5, 17, 51
- MARMARELIS, V. *Analysis of physiological systems: The white-noise approach*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2012. 6
- MATHEWS, V. J.; SICURANZA, G. L. *Polynomial signal processing*. Wiley, 2000. (Wiley series in telecommunications and signal processing). ISBN 9780471034148. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=xvNSAAAAMAAJ>>. 5, 6, 7, 21, 23, 33, 49
- NORCIA, A. M.; APPELBAUM, L. G.; ALES, J. M.; COTTEREAU, B. R.; ROSSION, B. The steady-state visual evoked potential in vision research: a review. *Journal of vision*, The Association for Research in Vision and Ophthalmology, v. 15, n. 6, p. 4–4, 2015. 6
- NOWAK, R. D.; VEEN, B. D. V. Random and pseudorandom inputs for volterra filter identification. *IEEE Transactions on Signal Processing*, IEEE, v. 42, n. 8, p. 2124–2135, 1994. 51
- _____. Volterra filter equalization: A fixed point approach. *IEEE Transactions on signal processing*, IEEE, v. 45, n. 2, p. 377–388, 1997. 10
- OPPENHEIM, A. V.; SCHAFER, R. W. *Discrete-time signal processing*. [S.l.]: Pearson, 2010. ISBN 0131988425. 1, 43, 89

- RAZ, G. M.; VEEN, B. D. V. Baseband volterra filters for implementing carrier based nonlinearities. *IEEE Transactions on Signal Processing*, IEEE, v. 46, n. 1, p. 103–114, 1998. 2, 27, 43
- REDFERN, A. J.; ZHOU, G. T. A root method for volterra system equalization. *IEEE Signal Processing Letters*, IEEE, v. 5, n. 11, p. 285–288, 1998. 10
- RIJLAARSDAM, D.; NUIJ, P.; SCHOUKENS, J.; STEINBUCH, M. A comparative overview of frequency domain methods for nonlinear systems. *Mechatronics*, v. 42, p. 11–24, 2017. 2, 6
- RUGH, W. J. *Nonlinear system theory: the Volterra/Wiener approach*. [S.l.]: Johns Hopkins University Press, 1981. 2, 4, 5, 6, 10, 21, 31
- SCHETZEN, M. Theory of pth-order inverses of nonlinear systems. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, IEEE, v. 23, n. 5, p. 285–291, 1976. 4, 9, 41
- _____. The volterra and wiener theories of nonlinear systems. Wiley, 1980. 2, 3, 4, 22, 31, 76
- SCHOUKENS, M.; HAMMENECKER, J.; COOMAN, A. Obtaining the preinverse of a power amplifier using iterative learning control. *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, IEEE, v. 65, n. 11, p. 4266–4273, 2017. 10
- SHIKI, S. B. Application of volterra series in nonlinear mechanical system identification and in structural health monitoring problems. Universidade Estadual Paulista (UNESP), 2016. 6
- SICURANZA, G. *Nonlinear image processing*. [S.l.]: Academic press, 2000. 6
- TAN, L.; JIANG, J. Adaptive volterra filters for active control of nonlinear noise processes. *IEEE Transactions on signal processing*, IEEE, v. 49, n. 8, p. 1667–1676, 2001. 27
- TANNIR, D.; KHAZAKA, R. Efficient nonlinear distortion analysis of rf circuits. In: IEEE. *Design, Automation & Test in Europe Conference & Exhibition, 2007. DATE'07*. [S.l.], 2007. p. 1–6. 10
- TAO, T. *Higher order Fourier analysis*. [S.l.]: American Mathematical Society Providence, RI, 2012. v. 142. 4
- TEIXEIRA, R.; BAYMA, R.; LOPES, D.; TAVARES, C. A differential approach for obtaining diagonal volterra kernels. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, IEEE, 2018. 8, 66
- TOKER, O.; EMARA-SHABAİK, H. E. Pseudo-random multilevel sequences: Spectral properties and identification of hammerstein systems. *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, Oxford University Press, v. 21, n. 2, p. 183–205, 2004. 52
- TSENG, C.-H.; POWERS, E. J. Nonlinear channel equalization in digital satellite systems. In: IEEE. *Proceedings of GLOBECOM'93. IEEE Global Telecommunications Conference*. [S.l.], 1993. p. 1639–1643. 10
- TUMMLA, M.; DONOVAN, M. T.; WATKINS, B. E.; NORTH, R. Volterra series based modeling and compensation of nonlinearities in high power amplifiers. In: IEEE. *1997 IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing*. [S.l.], 1997. v. 3, p. 2417–2420. 10
- VOLTERRA, V. *Sopra le funzioni che dipendono de altre funzioni*. In Rend. R. Accademia dei Lincei 2 Sem, 1887. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=ITCenQAACAAJ>>. 3
- _____. *Theory of Functionals and of the Integral and Integro-Differential Equations*. New York: Dover, 1959. 2, 3, 18

WIENER, N. *Nonlinear problems in random theory*. [S.l.]: The MIT press, 1958. 2, 4

WORDEN, J. A. V. F. K.; STANWAY, R. Associated linear equations for volterra operators. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2005. 6, 32

_____. Analysis of time-invariant systems in the time and frequency domain by associated linear equations (ales). *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2006. 32

XIAO, H.; HONG, M.; JUAN, P.; CHEN, T. State-of-the-art in volterra series modeling for adc nonlinearity. In: IEEE. *2008 Second Asia International Conference on Modelling & Simulation (AMS)*. [S.l.], 2008. p. 1043–1047. 10

XIAO, Z.; JING, X. Frequency-Domain Analysis and Design of Linear Feedback of Nonlinear Systems and Applications in Vehicle Suspensions. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, PP, n. 99, p. 1–1, 2015. ISSN 1083-4435. Disponível em: <<http://ieeexplore.ieee.org/lpdocs/epic03/wrapper.htm?arnumber=7127002>>. 1

YUE*, R.; BILLINGS, S.; LANG, Z.-Q. An investigation into the characteristics of non-linear frequency response functions. part 1: Understanding the higher dimensional frequency spaces. *International Journal of Control*, Taylor & Francis, v. 78, n. 13, p. 1031–1044, 2005. 2, 30

_____. An investigation into the characteristics of non-linear frequency response functions. part 2: New analysis methods based on symbolic expansions and graphical techniques. *International Journal of Control*, Taylor & Francis, v. 78, n. 14, p. 1130–1149, 2005. 30

ZELLER, M.; KELLERMANN, W. Fast and robust adaptation of dft-domain volterra filters in diagonal coordinates using iterated coefficient updates. *IEEE Transactions on Signal Processing*, IEEE, v. 58, n. 3, p. 1589–1604, 2010. 7, 27

ZHU, Y.; LANG, Z. Design of nonlinear systems in the frequency domain: An output frequency response function-based approach. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, IEEE, 2017. 6