UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM GEOFÍSICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

MODELAGEM DO MÉTODO MT 2D USANDO ELEMENTOS FINITOS ISOPARAMÉTRICOS

IVALDEVINGLES RODRIGUES DE SOUZA JUNIOR

Belém
2017

IVALDEVINGLES RODRIGUES DE SOUZA JUNIOR

MODELAGEM DO MÉTODO MT 2D USANDO ELEMENTOS FINITOS ISOPARAMÉTRICOS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Geofísica do Instituto de Geociências da Universidade Federal do Pará - UFPA, em cumprimento às exigências para obtenção do título de Mestre em Geofísica.

Área de Concentração: Métodos Eletromagnéticos

Orientador: Marcos Welby Correa Silva

Belém
2017

Dados Internacionais de Catalogação de Publicação (CIP)
Biblioteca do Instituto de Geociências/SIBI/UFPA

Souza Junior, Ivaldevingles Rodrigues de, 1992-

Modelagem do método MT 2D usando elementos finitos isoparamétricos / Ivaldevingles Rodrigues de Souza Junior. – 2017.
52 f. : il. ; 30 cm

Inclui bibliografias

Orientador: Marcos Welby Correa Silva

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Pará, Instituto de Geociências, Programa de Pós-Graduação em Geofísica, Belém, 2017.

1. Prospecção – métodos geofísicos. 2. Prospecção magnetotelúrica. 3. Método dos elementos finitos. I. Título.

CDD 22. ed. 622.15

IVALDEVINGLES RODRIGUES DE SOUZA JUNIOR

Modelagem do Método MT 2D usando elementos finitos isoparamétricos

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Geofísica so Instituto de Geociências da Universidade Federal do Pará, como requisito final para obtenção do título de Mestre em Geofísica.

Data de aprovação: 07 de abril de 2017

Banca Examinadora:

Marcos Welby Correa Silva – Orientador.
Doutor em Geofísica
Universidade Federal do Pará

Emanuel José Capechi de Pinho
Doutor em Física
Petrobras

Victor Cezar Tocantins de Souza
Doutor em Geofísica
Universidade Federal do Pará

Dedico esse trabalho a Deus, por me conceder mais uma conquista.
Dedicado, também, à memória de Ivaldevingles R. de Souza.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, por permitir me dar forças perante todos os problemas enfrentados durante o desenvolvimento desse trabalho.

Ao meu orientador, professor Marcos Welby Correa Silva, por aceitar me orientar e por seus diversos ensinamentos durante a elaboração desse trabalho de pesquisa.

Agradeço também a todos os meus amigos e familiares, por todo apoio dado, principalmente a Hilton Farias da Silva e Érico Tenório França, por terem ajudado em algumas etapas da modelagem numérica do método magnetotelúrico.

RESUMO

A modelagem numérica do método magnetotelúrico (MT) apresenta grande importância para a geofísica, visto que esse método pode ser aplicado para diversos fins, por exemplo, ele pode ser utilizado para estudar a crosta terrestre assim como também pode contribuir na exploração de petróleo e gás. Por esse motivo diversos pesquisas vêm sendo realizadas nas últimas décadas para desenvolver ainda mais o MT. Uma das maiores vantagens do magnetotelúrico é a sua modelagem relativamente fácil, pois nessa técnica a fonte é uma onda plana. Existem várias ferramentas numéricas que podem ser usadas para modelar o MT, dentre elas se destaca o método dos elementos finitos (MEF). Sendo que nesse trabalho será testada a eficiência do MEF isoparamétricos para modelagem 2D do MT, cuja principal característica é a realização de uma transformação, com a finalidade de mapear um elemento distorcido para um sistema de coordenadas (coordenadas naturais ξ e η) onde o mesmo se torna regular.

Palavras-chave: Magnetotelúrico. Modelagem 2D. Método dos elementos finitos isoparamétricos.

ABSTRACT

The numerical modeling of the magnetotelluric (MT) method is of great importance for geophysics, since this method can be applied for several purposes, for example it can be used to study the crust of the earth as well as it can contribute to oil and gas exploration. For this reason, several researches have been carried out in recent decades to further develop MT. One of the major advantages of magnetotelluric is its relatively easy modeling, because in this technique the source is a plane wave. Existem várias ferramentas numéricas que podem ser usadas para modelar o MT, There are several numerical tools that can be used to model the MT, among which stands out the finite element method (FEM). In this work the efficiency of the isoparametric MEF for 2D modeling of the MT will be tested, whose main characteristic is the accomplishment of a transformation, with the purpose of mapping a distorted element to a coordinate system (natural coordinates ξ and η) where it becomes regular.

Keywords: Magnetotelluric. 2D Modeling. Isoparametric finite element method.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O Magnetotelúrico (MT) é um método eletromagnético geofísico que visa inferir a distribuição espacial de condutividade elétrica da subsuperfície através de medidas (coletadas na superfície) de campos eletromagnéticos naturais (VOZOFF, 1972). Inicialmente ele foi aplicado principalmente no meio terrestre. Entretanto, nas últimas décadas vem sendo utilizado em ambiente marinho para estudo de grandes estruturas geológicas, como por exemplo bacias oceânicas e zonas de subducção (YANG et al., 2010).

Além de suas vantagens operacionais e econômicas, o método magnetotelúrico também apresenta uma modelagem numérica relativamente fácil. Isso porque o MT tem como fonte ondas planas, para as quais existe solução analítica para os campos eletromagnéticos em modelos geoelétricos unidimensionais.

A base teórica do MT foi publicada no inicio da década de 1950 por TIKHONOV (1950) e CAGNIARD (1953). Desde então vários pesquisadores vêm desenvolvendo técnicas para solucionar numericamente esse método. A técnica que mais tem sido aplicada na modelagem do Magnetotelúrico é o método dos elementos finitos (MEF), principalmente pelo fato de esta técnica ser eficiente para modelar problemas onde a geometria é complexa.

Todavia, o método dos elementos finitos não é aplicado de uma única forma, pois existem diversas variações dessa ferramenta numérica e muitas delas já foram aplicadas no método Magnetotelúrico. Por exemplo, MITSUHATA & UCHIDA (2004) realizando a modelagem do MT utilizando o MEF de arestas, aplicando funçõesde forma vetoriais e nodais para calcular o potencial vetor elétrico e o potencial escalar magnético.

Nesse trabalho o MT será modelado com o MEF isoparamétricos, uma técnica publicada por IRONS (1966) e que já foi bastante estudada em outras áreas do conhecimento, principalmente nas engenharias. Na geofísica esse método já foi discutido por ROY (2007) que descreveu a formulação MEF isoparamétricos no Magnetotelúrico. Além disso NAM et al. (2007) e MOGI (1996) realizaram a modelagem tridimensional do MT utilizando essa metodologia.

1.1 OBJETIVOS

O objetivo desse trabalho é realizar a modelagem numérica do MT utilizando o método dos elementos finitos isoparamétricos (MEFI), aplicando essa técnica em problemas com batimetria, no intuito de averiguar se ela possui alguma vantagem em relação ao métdodo dos elementos finitos mais convencional (MEF nodais com elementos triangulares –MEFT).

Em modelos com batimetria, a malha gerada para o MEFT possui um grande número de nós, uma vez que para se adaptar a uma geometria mais complexa é necessário refinar bastante a malha. No caso do MEFI os cálculos são realizados no domínio onde um elemento distorcido se torna regular, portanto, isso permite que os elementos isoparamétricos sejam mais eficientes para se adaptar a geometria do modelo geoelétrico.

Assim, almeja-se não somente fazer a modelagem numérica do magnetotelúrico, mas também comparar o método dos elementos finitos isoparamétricos com a técnica convencional dos elementos finito, além de avaliar a influência da batimetria na resposta do MT através desses dois recursos numéricos.

2 MÉTODO MAGNETOTELÚRICO

O método magnetotelúrico é uma técnica de exploração passiva (SIMPSON & BAHR, 2005), pois utiliza como fonte os campos eletromagnéticos naturais da Terra. Esses campos não são oriundos apenas de fontes externas ao planeta, mas também podem ser gerados no interior do mesmo.

As componentes dos campos elétrico e magnético induzidos naturalmente no planeta podem ser medidos na superfície, e carregam informações importantes sobre a subsuperfície. Estas duas grandezas físicas estão correlacionadas por outra chamada de impedância, de modo que tal relação, de acordo com CANTWELL (1960), pode ser descrita matematicamente para um problema tridimensional pela seguinte expressão:

$$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} = Z \begin{bmatrix} H_x \\ H_y \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

Onde Z é o tensor impedância dado por:

$$Z = \begin{bmatrix} Z_{xx} & Z_{xy} \\ Z_{yx} & Z_{yy} \end{bmatrix} \tag{2.2}$$

Entretanto, para casos bidimensionais Z_{xx} e Z_{yy} são nulos. Desta forma, aplicando essa consideração na equação (2.1) se determina duas equações, que são:

$$Z_{xy} = \frac{E_x}{H_y} \tag{2.3}$$

$$Z_{yx} = \frac{E_y}{H_x} \tag{2.4}$$

Nota-se que para um problema 2D as impedâncias Z_{xy} e Z_{yx} são independentes, isso permite dividir um caso bidimensional em dois problemas distintos, os quais são denominados de modos de propagação TE e TM. O primeiro significa "transverso elétrico"e diz respeito aos casos em que o campo elétrico é perpendicular à direção z e paralelo ao *strik*. O segundo quer dizer "transverso magnético"e nele o campo magnético é perpendicular à direção z e paralelo ao *strik* (NEVES, 2014).

Determinar Z_{xy} e Z_{yx} é importante, pois elas permitem calcular um valor de resistividade ligado aos materiais presentes abaixo da superfície onde os campos eletromagnéticos foram medidos, por esse motivo tal valor é chamado de resistividade aparente (ρ_a). Além disso, como a impedância é um parâmetro complexo ela possui uma característica inerente a esse conjunto numérico chamada de fase (ϕ).

Tanto a resistividade aparente como a fase são definidas de maneiras distintas nos dois modos de propagação. Sendo que para o modo TE elas são calculas da seguinte maneira:

$$\rho_{a_{yx}} = \frac{1}{\omega\mu_0}\ |Z_{yx}| \tag{2.5}$$

$$\phi_{yx} = arctan\left(\frac{Im(Z_{yx})}{Re(Z_{yx})}\right) \tag{2.6}$$

Já no modo TM (ρ_a) e (ϕ) são definidas em função de Z_{xy}, logo:

$$\rho_{a_{xy}} = \frac{1}{\omega\mu_0}\ |Z_{xy}| \tag{2.7}$$

$$\phi_{xy} = arctan\left(\frac{Im(Z_{xy})}{Re(Z_{xy})}\right) \tag{2.8}$$

Nas equações (2.5) e (2.7) μ_0 representa a permeabilidade magnética do vácuo e ω a frequência angular dos campos eletromagnéticos.

Deste modo, o método magnetotelúrico serve como ferramenta para se compreender a subsuperfície a partir de medidas dos campos elétrico e magnético. Todavia, esses campos são atenuados à medida que se propagam num determinado meio. Esse fenômeno é importante para o MT, já que isso pode significar a perda de informações importantes. Por esse motivo existe uma grandeza específica para mensurar esse decaimento chamada *skin depth*(δ), cujo valor representa a distância na qual a amplitude do campo decai $1/e$, o que representa um decaimento de aproximadamente 37 % (CONSTABLE & SRNKA, 2007). Matematicamente o *skin depth* é definido da seguinte maneira:

$$\delta = \sqrt{\frac{2\ \rho}{\omega\ \mu_0}} \tag{2.9}$$

Onde ρ é a resistividade do meio, ω é a frequência angular dos campos e μ_0 representa a permeabilidade magnética do vácuo.

2.1 FUNDAMENTOS FÍSICO-MATEMÁTICOS DO MAGNETOTELÚRICO

Modelar numericamente o método magnetotelúrico consiste em solucinar um problema onde a fonte é uma onda plana, uma vez que os campos eletromagnéticos naturais são gerados longe da superfície onde são aferidos, por isso aproximá-los como ondas planas é cabível e coerente.

O comportamento físico desses campos é descrito pelas equações de Maxwell, que são a base teórica de todos os métodos elétricos e eletromagnéticos geofísicos (RIJO, 2004).

Essas equações, no domínio da frequência, estão escritas logo abaixo:

$$\nabla \cdot \epsilon \mathbf{E} = \rho; \quad (2.10)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} - (\sigma + i\omega\epsilon)\mathbf{E} = \mathbf{J}; \quad (2.11)$$

$$\nabla \cdot \mu \mathbf{H} = 0; \quad (2.12)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + i\omega\mu\mathbf{H} = \mathbf{0}; \quad (2.13)$$

Segundo RIJO (2008) as equações (2.10) e (2.12) são redundantes em meios homogêneos, uma vez que nesses meios elas se tornam um caso particular das equações (2.11) e (2.13), respectivamente. Definindo a admitividade (η) e a impeditividade ($\mathfrak{z}$) como

$$\eta = \sigma + i\omega\epsilon$$

e

$$\mathfrak{z} = i\omega\mu,$$

as expressões (2.11) e (2.13) se tornam:

$$\nabla \times \mathbf{H} - \eta\mathbf{E} = \mathbf{J}; \quad (2.14)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \mathfrak{z}\mathbf{H} = \mathbf{0}; \quad (2.15)$$

Em um meio estratificado horizontalmente,geralmente denominado de modelo primário, as equações (2.14) e (2.15) serão escritas da seguinte forma:

$$\nabla \times \mathbf{H}^p - \eta^p\mathbf{E}^p = \mathbf{J}; \quad (2.16)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}^p + \mathfrak{z}^p\mathbf{H}^p = \mathbf{0}; \quad (2.17)$$

A presença de uma heterogeneidade 2D gera campos induzidos pela mesma, que são chamados de campos secundários ($\mathbf{E}^s$ e $\mathbf{H}^s$), de modo que os vetores $\mathbf{E}$ e $\mathbf{H}$ serão definidos pela composição das componentes primárias e secundárias, ou seja:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^p + \mathbf{E}^s; \quad (2.18)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}^p + \mathbf{H}^s; \quad (2.19)$$

Além disso, a heterogeneidade também gera variações nas propriedades elétricas dos modelos primários, com isso esses parâmetros podem ser redefinidos levando em consideração essas tais variações. Sendo assim, pode-se escrever:

$$\sigma = \sigma^p + \Delta\sigma \quad (2.20)$$

$$\epsilon = \epsilon^p + \Delta\epsilon \quad (2.21)$$

$$\mu = \mu^p + \Delta\mu \quad (2.22)$$

Substituindo as equações (2.18), (2.19) e as expressões acima em (2.14) e (2.15) encontramos:

$$\nabla \times (\mathbf{H}^p + \mathbf{H}^s) - (\eta^p + \Delta\eta)(\mathbf{E}^p + \mathbf{E}^s) = \mathbf{J} \quad (2.23)$$

$$\nabla \times (\mathbf{E}^p + \mathbf{E}^s) + (\mathfrak{z}^p + \Delta\mathfrak{z})(\mathbf{H}^p + \mathbf{H}^s) = \mathbf{0} \quad (2.24)$$

Reorganizando as variáveis das equações (2.23) e (2.24) considerando (2.16) e (2.17), obtêm-se:

$$\nabla \times \mathbf{H}^s - \eta\mathbf{E}^s = \Delta\eta\mathbf{E}^p \quad (2.25)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}^s + \mathfrak{z}\mathbf{H}^s = -\Delta\mathfrak{z}\mathbf{H}^p \quad (2.26)$$

As expressões (2.25) e (2.26) são as equações de Maxwell para os campos secundários. De modo que comparando essas com as equações de Maxwell para os campos primários (2.16 e 2.17) se nota que nas ultimas o termo fonte é J, enquanto que nas primeiras os termos associados à fonte dos campos secundário são E^p e H^p. Isto é fisicamente coerente, já que os campos primários ao se propagarem pela heterogeneidade induzem a geração dos secundários.

Desenvolvendo os rotacionais de (2.25) e (2.26), considerando um domínio cujas propriedades elétricas e geométricas não variam na direção y e decompondo os vetores envolvidos, chega-se a três outras expressões a partir de cada umas dessas equações. De tal forma que (2.25) fornece

$$-\frac{\partial H_y{}^s}{\partial z} - \eta E_x^s = \Delta\eta E_x^p \quad (2.27)$$

$$\frac{\partial H_x{}^s}{\partial z} - \frac{\partial H_z{}^s}{\partial x} - \eta E_y^s = \Delta\eta E_y^p \quad (2.28)$$

$$\frac{\partial H_y{}^s}{\partial x} - \eta E_z^s = \Delta\eta E_z^p \quad (2.29)$$

e (2.26) gera:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial {E_y}^s}{\partial z} + \mathfrak{z} H_x^s &= -\Delta\mathfrak{z} H_x^p & (2.30) \\ \frac{\partial {E_x}^s}{\partial z} - \frac{\partial E_z^s}{\partial x} + \mathfrak{z} H_y^s &= -\Delta\mathfrak{z} H_y^p & (2.31) \\ \frac{\partial {E_y}^s}{\partial x} + \mathfrak{z} H_z^s &= -\Delta\mathfrak{z} H_z^p & (2.32) \end{aligned}$$

Sendo assim, isolando os campos E_x^s e E_z^s nas equações (2.27) e (2.29), na sequência substituindo em (2.31) as expressões formadas, chega-se a:

$$E_x^s = -\frac{1}{\eta}\frac{\partial {H_y}^s}{\partial z} - \frac{\Delta\eta}{\eta} E_x^p$$

$$E_z^s = \frac{1}{\eta}\frac{\partial {H_y}^s}{\partial x} - \frac{\Delta\eta}{\eta} E_z^p$$

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\eta}\frac{\partial {H_y}^s}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\eta}\frac{\partial {H_y}^s}{\partial z}\right) + \mathfrak{z} H_y^s = -\Delta\mathfrak{z} H_y^p - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\Delta\eta}{\eta} E_z^p\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\Delta\eta}{\eta} E_x^p\right) \quad (2.33)$$

De maneira semelhante, isolando H_x^s e H_z^s em (2.30) e (2.32), em seguida aplicando a equação obtida em (2.28), formamos:

$$H_x^s = \frac{1}{\mathfrak{z}}\frac{\partial {E_y}^s}{\partial z} - \frac{\Delta\mathfrak{z}}{\mathfrak{z}} H_x^p$$

$$H_z^s = -\frac{1}{\mathfrak{z}}\frac{\partial {E_y}^s}{\partial x} - \frac{\Delta\mathfrak{z}}{\mathfrak{z}} H_z^p$$

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\mathfrak{z}}\frac{\partial {E_y}^s}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\mathfrak{z}}\frac{\partial {E_y}^s}{\partial z}\right) + \eta E_y^s = -\Delta\eta E_y^p + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\Delta\mathfrak{z}}{\mathfrak{z}} H_z^p\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\Delta\mathfrak{z}}{\mathfrak{z}} H_x^p\right) \quad (2.34)$$

A equação (2.33) representa o modo de propagação TM enquanto que (2.34) o modo TE, tal que para solucioná-las é conveniente utilizar algum recurso numérico. Nesse trabalho a técnica aplicada foi o método dos elementos finitos, o qual é uma ferramenta numérica bastante utilizada nos métodos eletromagnéticos.

2.2 MODO TM: SOLUÇÃO UTILIZANDO O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

O método dos elementos finitos é uma técnica numérica que fornece soluções aproximadas para sistemas de equações diferenciais (BECKER et al., 1981). Este se caracteriza por dividir o domínio do problema em vários subdomínios (elementos) e aplicar em cada um desses o método de Galerkin, que basicamente consiste em solucionar as equações através de uma combinação linear de funções bases (SILVA, 2012).

Desta forma, considerando uma família de m funções base (φ_m) e um elemento genérico Ω_e da malha gerada com a discretização do domínio, pode-se aplicar o método de Galerkin na equação (2.33). Com isso obtêm-se:

$$\int_{\Omega_e} \varphi_m \left[-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\eta}\frac{\partial {H_y}^s}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\eta}\frac{\partial {H_y}^s}{\partial z}\right)\right] dxdz + \int_{\Omega_e} \mathfrak{z}\varphi_m H_y^s dxdz$$
$$= -\int_{\Omega_e} \varphi_m \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\Delta\eta}{\eta}E_z^p\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\Delta\eta}{\eta}E_x^p\right)\right] dxdz - \int_{\Omega_e} \Delta\mathfrak{z}\varphi_m H_y^p dxdz \quad (2.35)$$

Sabendo que

$$\begin{aligned}
\varphi_m \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\eta}\frac{\partial H_y^s}{\partial x}\right) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\eta}\varphi_m\frac{\partial {H_y}^s}{\partial x}\right) - \frac{1}{\eta}\frac{\partial\varphi_m}{\partial x}\frac{\partial {H_y}^s}{\partial x} \\
\varphi_m \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\Delta\eta}{\eta}E_z^p\right) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\Delta\eta}{\eta}\varphi_m E_z^p\right) - \frac{\Delta\eta}{\eta}\frac{\partial\varphi_m}{\partial x}E_z^p
\end{aligned}$$

então, pode-se reescrever a expressão (2.35) da seguinte maneira:

$$\int_{\Omega_e} \frac{1}{\eta}\left(\frac{\partial\varphi_m}{\partial x}\frac{\partial {H_y}^s}{\partial x} + \frac{\partial\varphi_m}{\partial z}\frac{\partial {H_y}^s}{\partial z}\right) dxdz + \int_{\Omega_e} \mathfrak{z}\varphi_m H_y^s dxdz$$
$$-\int_{\Omega_e}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\eta}\varphi_m\frac{\partial {H_y}^s}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\eta}\varphi_m\frac{\partial {H_y}^s}{\partial z}\right)\right] dxdz$$
$$= -\int_{\Omega_e} \Delta\mathfrak{z}\varphi_m H_y^P dxdz + \int_{\Omega_e}\frac{\Delta\eta}{\eta}\left(\frac{\partial\varphi_m}{\partial x}E_z^p - \frac{\partial\varphi_m}{\partial z}E_x^p\right) dxdz$$
$$-\int_{\Omega_e}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\Delta\eta}{\eta}\varphi_m E_z^p\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\Delta\eta}{\eta}\varphi_m E_x^p\right)\right] dxdz \quad (2.36)$$

Levando em consideração as equações logo abaixo

$$E_x^p = -\frac{1}{\eta^p}\frac{\partial {H_y}^p}{\partial z}$$

$$E_z^p = \frac{1}{\eta^p}\frac{\partial {H_y}^p}{\partial x}$$

e aplicando estas em (2.36), além de reorganizar a mesmo, encontra-se:

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega_e} \frac{1}{\eta}\left(\frac{\partial \varphi_m}{\partial x}\frac{\partial H_y{}^s}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_m}{\partial z}\frac{\partial H_y{}^s}{\partial z}\right)dxdz + \int_{\Omega_e} \mathfrak{z}\varphi_m H_y^s dxdz \\
&= \int_{\Omega_e}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\eta}\varphi_m \frac{\partial H_y{}^s}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\eta}\varphi_m \frac{\partial H_y{}^s}{\partial z}\right)\right]dxdz \\
&- \int_{\Omega_e} \Delta\mathfrak{z}\varphi_m H_y^p dxdz + \int_{\Omega_e}\frac{\Delta\eta}{\eta}\left(\frac{\partial \varphi_m}{\partial x}E_z^p - \frac{\partial \varphi_m}{\partial z}E_x^p\right)dxdz \\
&- \int_{\Omega_e}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\Delta\eta}{\eta}\varphi_m \frac{1}{\eta^p}\frac{\partial H_y{}^p}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\Delta\eta}{\eta}\varphi_m \frac{1}{\eta^p}\frac{\partial H_y{}^p}{\partial z}\right)\right]dxdz
\end{aligned} \tag{2.37}$$

Como

$$\Delta\eta = \eta - \eta^p$$

então

$$\frac{\Delta\eta}{\eta^p\ \eta} = \frac{1}{\eta^p} - \frac{1}{\eta}. \tag{2.38}$$

Logo, aplicando (2.38) em (2.37), chega-se a seguinte equação:

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega_e} \frac{1}{\eta}\left(\frac{\partial \varphi_m}{\partial x}\frac{\partial H_y{}^s}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_m}{\partial z}\frac{\partial H_y{}^s}{\partial z}\right)dxdz + \int_{\Omega_e} \mathfrak{z}\varphi_m H_y^s dxdz \\
&= -\int_{\Omega_e} \Delta\mathfrak{z}\varphi_m H_y^p dxdz + \int_{\Omega_e}\frac{\Delta\eta}{\eta}\left(\frac{\partial \varphi_m}{\partial x}E_z^p - \frac{\partial \varphi_m}{\partial z}E_x^p\right)dxdz \\
&- \int_{\Omega_e}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\eta^p}\varphi_m \frac{\partial H_y{}^p}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\eta^p}\varphi_m \frac{\partial H_y{}^p}{\partial z}\right)\right]dxdz \\
&+ \int_{\Omega_e}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\eta}\varphi_m \frac{\partial H_y{}^p}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\eta}\varphi_m \frac{\partial H_y{}^p}{\partial z}\right)\right]dxdz \\
&+ \int_{\Omega_e}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\eta}\varphi_m \frac{\partial H_y{}^s}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\eta}\varphi_m \frac{\partial H_y{}^s}{\partial z}\right)\right]dxdz
\end{aligned} \tag{2.39}$$

Finalmente, considerando as expressões

$$H_y = H_y^p + H_y^s$$

$$E_x^s = E_x - E_x^p$$

$$E_z^s = E_z - E_z^p$$

$$E_x = -\frac{1}{\eta}\frac{\partial H_y}{\partial z}$$

$$E_z = \frac{1}{\eta}\frac{\partial H_y}{\partial x}$$

e utilizando o teorema de Green a equação (2.39) se torna:

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega_e} \frac{1}{\eta}\left(\frac{\partial \varphi_m}{\partial x}\frac{\partial {H_y}^s}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_m}{\partial z}\frac{\partial {H_y}^s}{\partial z}\right)dxdz + \int_{\Omega_e} \mathfrak{z}\varphi_m H_y^s dxdz \\
&= -\int_{\Omega_e} \Delta\mathfrak{z}\varphi_m H_y^p dxdz + \int_{\Omega_e} \frac{\Delta\eta}{\eta}\left(\frac{\partial \varphi_m}{\partial x}E_z^p - \frac{\partial \varphi_m}{\partial z}E_x^p\right)dxdz \\
&+ \int_{\partial\Omega_e} \varphi_m \mathbf{E}^s \,.\, \hat{\mathbf{t}} dl
\end{aligned} \tag{2.40}$$

É conveniente fazer uma aproximação da componente Hy para cada elemento. Assim, se os elementos são formados por n nós a aproximação da componente y do campo magnético secundário ($\tilde{H}_e$) será dada por:

$$\tilde{H}_e(x,y) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i \; \tilde{H}_i^e$$

Essa aproximação (considerando que as propriedades físicas não variam dentro dos elementos) permite formar um sistema linear local a partir de (2.40). Tal sistema possui a seguinte forma:

$$K_{m,n}^e \; \tilde{H}_n^e = F_m^e$$

Onde $\tilde{H}_n^e$ é o vetor que contém os valores aproximados de H_y^s em cada nó do elemento em questão, além disso $K_{m,n}^e$ e F_m^e são dados por:

$$K_{m,n}^e = \int_{\Omega_e} \frac{1}{\eta_e}\left(\frac{\partial \varphi_m}{\partial x}\frac{\partial \varphi_n}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_m}{\partial z}\frac{\partial \varphi_n}{\partial z}\right)dxdx + \int_{\Omega_e} \mathfrak{z}_e \varphi_m \varphi_n dxdz \tag{2.41}$$

$$\begin{aligned}
F_m^e = \;\; & - \int_{\Omega_e} \Delta\mathfrak{z}_e \varphi_m \left(\sum_{i=1}^{n} \varphi_i \; H_{yi}^p\right) dxdz \\
& + \int_{\Omega_e} \frac{\Delta\eta_e}{\eta_e}\frac{\partial \varphi_m}{\partial x}\left(\sum_{i=1}^{n} \varphi_i \; E_{zi}^p\right) dxdz \\
& - \int_{\Omega_e} \frac{\Delta\eta_e}{\eta_e}\frac{\partial \varphi_m}{\partial z}\left(\sum_{i=1}^{n} \varphi_i \; E_{xi}^p\right) dxdz \\
& + \int_{\partial\Omega_e} \varphi_m \mathbf{E}^S \,.\, \hat{\mathbf{t}} dl
\end{aligned} \tag{2.42}$$

Para resolver a expressão acima é necessário definir as funções base e averiguar se existe solução analítica. Isso vai depender do tipo de elemento utilizado e do comportamento das funções de forma.

2.3 MODO TE: SOLUÇÃO UTILIZANDO O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Para solucionar o modo TE utilizando o método dos elementos finitos é necessário proceder de maneira análoga ao realizado no modo TM. Portanto, deve-se aplicar o método de Galerkin em (2.34) considerando um elemento genérico Ω_e e um família de m funções base (φ), o que fornece a seguinte expressão:

$$\int_{\Omega_e} \varphi_m \left[-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\mathfrak{z}}\frac{\partial E_y^s}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\mathfrak{z}}\frac{\partial E_y^S}{\partial z}\right)\right] dxdz + \int_{\Omega_e} \eta\varphi_m E_y^s dxdz$$
$$= -\int_{\Omega_e} \Delta\eta\varphi_m E_y^p dxdz + \int_{\Omega_e} \varphi_m \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\Delta\mathfrak{z}}{\mathfrak{z}} H_z^p\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\Delta\mathfrak{z}}{\mathfrak{z}} H_x^p\right)\right] dxdz \quad (2.43)$$

Considerando as identidades

$$\begin{aligned}
\varphi_m \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\mathfrak{z}}\frac{\partial E_y^s}{\partial x}\right) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\mathfrak{z}}\varphi_m \frac{\partial {E_y}^s}{\partial x}\right) - \frac{1}{\mathfrak{z}}\frac{\partial \varphi_m}{\partial x}\frac{\partial {E_y}^s}{\partial x}, \\
\varphi_m \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\Delta\mathfrak{z}}{\mathfrak{z}} H_z^p\right) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\Delta\mathfrak{z}}{\mathfrak{z}}\varphi_m H_z^p\right) - \frac{\Delta\mathfrak{z}}{\mathfrak{z}}\frac{\partial \varphi_m}{\partial x} H_z^p,
\end{aligned}$$

é possível reorganizar a equação (2.43) da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega_e} \frac{1}{\mathfrak{z}}\left(\frac{\partial\varphi_m}{\partial x}\frac{\partial E_y^s}{\partial x} + \frac{\partial\varphi_m}{\partial z}\frac{\partial E_y^s}{\partial z}\right) dxdz + \int_{\Omega_e} \eta\varphi_m E_y^s dxdz \\
- & \int_{\Omega_e} \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\mathfrak{z}}\varphi_m \frac{\partial E_y^s}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\mathfrak{z}}\varphi_m \frac{\partial E_y^s}{\partial z}\right)\right] dxdz \\
= - & \int_{\Omega_e} \Delta\eta\varphi_m E_y^p dxdz - \int_{\Omega_e} \frac{\Delta\mathfrak{z}}{\mathfrak{z}}\left(\frac{\partial\varphi_m}{\partial x} H_z^p - \frac{\partial\varphi_m}{\partial z} H_x^p\right) dxdz \\
+ & \int_{\Omega_e} \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\Delta\mathfrak{z}}{\mathfrak{z}}\varphi_m H_z^p\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\Delta\mathfrak{z}}{\mathfrak{z}}\varphi_m H_x^p\right)\right] dxdz \qquad (2.44)
\end{aligned}$$

Sabendo que

$$H_x^p = \frac{1}{\mathfrak{z}^p}\frac{\partial E_y^p}{\partial z}$$

$$H_z^p = -\frac{1}{\mathfrak{z}^p}\frac{\partial E_y^p}{\partial x}$$

então (2.44) pode ser reescrita da foma como é mostrada abaixo:

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega_e} \frac{1}{\mathfrak{z}}\left(\frac{\partial \varphi_m}{\partial x}\frac{\partial E_y^s}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_m}{\partial z}\frac{\partial E_y^s}{\partial z}\right)dxdz + \int_{\Omega_e} \eta\varphi_m E_y^s dxdz \\
&= -\int_{\Omega_e} \Delta\eta\varphi_m E_y^p dxdz - \int_{\Omega_e} \frac{\Delta\mathfrak{z}}{\mathfrak{z}}\left(\frac{\partial \varphi_m}{\partial x}H_z^p - \frac{\partial \varphi_m}{\partial z}H_x^p\right)dxdz \\
&- \int_{\Omega_e} \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\Delta\mathfrak{z}}{\mathfrak{z}}\varphi_m\frac{1}{\mathfrak{z}^p}\frac{\partial E_y^p}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\Delta\mathfrak{z}}{\mathfrak{z}}\varphi_m\frac{1}{\mathfrak{z}^p}\frac{\partial E_y^p}{\partial z}\right)\right]dxdz \\
&+ \int_{\Omega_e} \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\mathfrak{z}}\varphi_m\frac{\partial E_y^s}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\mathfrak{z}}\varphi_m\frac{\partial E_y^s}{\partial z}\right)\right]dxdz
\end{aligned} \tag{2.45}$$

A variação na impeditividade provocada pela presença da heterogeneidade é definida como

$$\Delta\mathfrak{z} = \mathfrak{z} - \mathfrak{z}^p$$

logo:

$$\frac{\Delta\mathfrak{z}}{\mathfrak{z}^p\,\mathfrak{z}} = \frac{1}{\mathfrak{z}^p} - \frac{1}{\mathfrak{z}}. \tag{2.46}$$

Sendo assim, aplicado (2.46), a expressão (2.45) se torna:

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega_e} \frac{1}{\mathfrak{z}}\left(\frac{\partial \varphi_m}{\partial x}\frac{\partial E_y^s}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_m}{\partial z}\frac{\partial E_y^s}{\partial z}\right)dxdz + \int_{\Omega_e} \eta\varphi_m E_y^s dxdz \\
&= -\int_{\Omega_e} \Delta\eta\varphi_m E_y^p dxdz - \int_{\Omega_e} \frac{\Delta\mathfrak{z}}{\mathfrak{z}}\left(\frac{\partial \varphi_m}{\partial x}H_z^p - \frac{\partial \varphi_m}{\partial z}H_x^p\right)dxdz \\
&- \int_{\Omega_e} \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\mathfrak{z}^p}\varphi_m\frac{\partial E_y^p}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\mathfrak{z}^p}\varphi_m\frac{\partial E_y^p}{\partial z}\right)\right]dxdz \\
&+ \int_{\Omega_e} \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\mathfrak{z}}\varphi_m\frac{\partial E_y^p}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\mathfrak{z}}\varphi_m\frac{\partial E_y^p}{\partial z}\right)\right]dxdz \\
&+ \int_{\Omega_e} \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\mathfrak{z}}\varphi_m\frac{\partial E_y^s}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\mathfrak{z}}\varphi_m\frac{\partial E_y^s}{\partial z}\right)\right]dxdz
\end{aligned}$$

Por fim, utilizando as definições

$$E_y = E_y^p + E_y^s$$

$$H_x^s = H_x - H_x^p$$

$$H_z^s = H_z - H_z^p$$

$$H_x = -\frac{1}{\mathfrak{z}}\frac{\partial E_y}{\partial z}$$

$$H_z = \frac{1}{\mathfrak{z}}\frac{\partial E_y}{\partial x}$$

e aplicando o teorema de Green, chega-se a seguinte equação:

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega_e} \frac{1}{\mathfrak{z}}\left(\frac{\partial \varphi_m}{\partial x}\frac{\partial E_y^s}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_m}{\partial z}\frac{\partial E_y^s}{\partial z}\right)dxdz + \int_{\Omega_e} \eta\varphi_m E_y^s dxdz \\
&= -\int_{\Omega_e} \Delta\eta\varphi_m E_y^p dxdz - \int_{\Omega_e} \frac{\Delta\mathfrak{z}}{\mathfrak{z}}\left(\frac{\partial \varphi_m}{\partial x}H_z^p - \frac{\partial \varphi_m}{\partial z}H_x^p\right)dxdz \\
&+ \int_{\partial\Omega_e} \varphi_m \mathbf{H}^s \,.\, \hat{\mathbf{t}} dl
\end{aligned} \tag{2.47}$$

A componente Ey pode se aproximada em cada elemento, desse modo, se os elementos são compostos por n nós a aproximação dessa componente ($\tilde{E}_e$) será definida pelo somatório abaixo:

$$\tilde{E}_e(x,y) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i \; \tilde{E}_i$$

Admitindo que a aproximação acima seja válida e considerando que as propriedades elétricas não variam dentro dos elementos é possível organizar (2.47) na seguinte forma:

$$P_{m,n}^e \; \tilde{E}_n^e = Q_m^e$$

Onde:

$$P_{m,n}^e = \int_{\Omega_e} \frac{1}{\mathfrak{z}_e}\left(\frac{\partial \varphi_m}{\partial x}\frac{\partial \varphi_n}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_m}{\partial z}\frac{\partial \varphi_n}{\partial z}\right)dxdx + \int_{\Omega_e} \eta_e\varphi_m\varphi_n dxdz \tag{2.48}$$

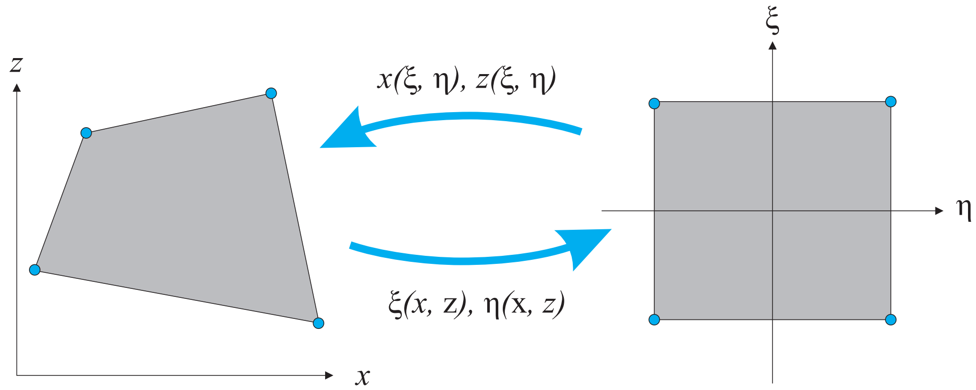
$$\begin{aligned}
Q_m^e = \; & - \int_{\Omega_e} \Delta\eta_e\varphi_m\left(\sum_{i=1}^{n}\varphi_i \; E_{yi}^p\right)dxdz \\
& - \int_{\Omega_e} \frac{\Delta\mathfrak{z}_e}{\mathfrak{z}_e}\frac{\partial \varphi_m}{\partial x}\left(\sum_{i=1}^{n}\varphi_i \; H_{zi}^p\right)dxdz \\
& + \int_{\Omega_e} \frac{\Delta\mathfrak{z}_e}{\mathfrak{z}_e}\frac{\partial \varphi_m}{\partial z}\left(\sum_{i=1}^{n}\varphi_i \; H_{xi}^p\right)dxdz \\
& + \int_{\partial\Omega_e} \varphi_m \mathbf{H}^s \,.\, \hat{\mathbf{t}} dl
\end{aligned} \tag{2.49}$$

As equações acima só podem ser solucionadas após a definição das funções bases e do tipo de elemento utilizados para discretizar o domínio. Elas formam um sistema linear relacionado a um elemento e são essenciais para construir outro sistema maior, o qual está ligado a todo domínio e fornece o valor aproximado de E_y^s para cada nó da malha.

3 ELEMENTOS FINITOS ISOPARAMÉTRICOS

No método dos elementos finitos é necessária uma família de funções para interpolar tanto a geometria quanto as grandezas que se deseja obter. Através dessas funções é possível realizar uma transformação (Figura 3.1), com a finalidade de mapear um elemento distorcido para um sistema de coordenadas (coordenadas naturais ξ e η) onde o mesmo se torna regular (BECKER et al., 1981).

Figura 3.1: Elemento no sistema cartesiano e no sistema de coordenadas naturais.



Fonte: Modificado de BECKER et al. (1981).

Deste modo, supondo um problema de elementos finitos no qual a forma do elemento é definida com n nós, então neste caso a geometria no sistema de coordenadas naturais pode ser aproximada utilizando funções de forma no mesmo domínio ($\phi_i(\xi, \eta)$) e as posições de cada nó (ASSAN, 2003). Esta aproximação obedece as seguintes expressões:

$$x(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^{n} x_i \ \phi_i(\xi, \eta) \tag{3.1}$$

$$z(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^{n} z_i \ \phi_i(\xi, \eta) \tag{3.2}$$

A interpolação das grandezas ocorre de maneira análoga, por exemplo, nos métodos eletromagnéticas geralmente se objetiva encontrar os campos elétricos (E) e magnéticos (H). Sendo assim, para este caso utilizando m nós para interpolar as grandezas e as funções base ($\varphi_i(\xi, \eta)$), ter-se-ia a interpolação desses campos através das duas equações que estão logo s seguir.

$$\hat{E}(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^{m} E_i \ \varphi_i(\xi, \eta) \tag{3.3}$$

$$\hat{H}(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^{m} H_i \ \varphi_i(\xi, \eta) \tag{3.4}$$

A ordem das funções $\phi(\xi, \eta)$ e $\varphi(\xi, \eta)$ define três tipos de elementos (ASSAN, 2003). Esses tipos são:

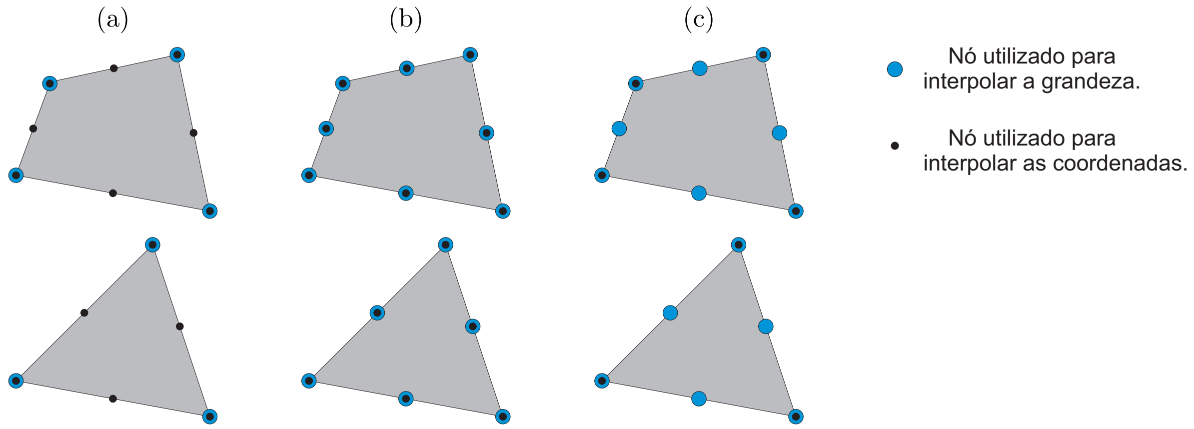
- Superparamétrico: ocorre quando $\phi(\xi, \eta)$ possui ordem maior que $\varphi(\xi, \eta)$, ou seja, o numero de nós utilizados para definir a forma do elemento é maior que a quantidade utilizada para interpolar as grandezas (Figura 3.2a).

- Isoparamétrico: nesse caso as ordens de $\phi(\xi, \eta)$ e $\varphi(\xi, \eta)$ são iguais, sendo assim, a quantidade de nós utilizados para mapear a geometria dos elementos é mesma que a aplicada na aproximação das grandezas (Figura 3.2b).

- Subparamétrico: ocorre quando $\phi(\xi, \eta)$ possui ordem menor que $\varphi(\xi, \eta)$, isto implica que o numero de nós usados para aproximar a forma do elemento é menor que a quantidade utilizada para interpolar as grandezas (Figura 3.2c).

A escolha do tipo de elemento está diretamente ligada à precisão do cálculo das grandezas, sendo que o elemento superparamétrico é o tipo que permite interpolar com maior precisão a grandeza do problema.

Figura 3.2: (a) Elementos Superparamétricos (b) Elementos Isoparamétricos (c) Elementos subparamétricos.



Fonte: Modificado de ASSAN (2003).

Portanto, o Método dos Elementos Finitos Isoparamétricos se caracteriza por realizar uma transformação de sistema de coordenadas, para facilitar as operações numéricas num dado elemento distorcido. Sendo que, nessa técnica as funções de forma utilizadas na interpolação da geometria são as mesmas aplicadas na aproximação das grandezas físicas.

3.1 TRANSFORMAÇÃO DE COORDENADA

A transformação realizada nesta técnica de elemento finito facilita algumas operações numéricas, principalmente a avaliação das integrais de (2.41), (2.42), (2.48) e (2.49). Contudo, essa mudança de sistema de coordenadas pressupõe que as funções $x(\xi, \eta)$ e $z(\xi, \eta)$ são continuas e, portanto, diferenciáveis com relação à ξ e η (BECKER et al., 1981). Desta forma, os diferenciais dx e dz podem ser escritos da seguinte maneira:

$$dx = \frac{\partial x}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial x}{\partial \eta} d\eta \tag{3.5}$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial z}{\partial \eta} d\eta \tag{3.6}$$

As duas expressões anteriores podem ser dispostas na forma de uma equação matricial (3.7), a qual estabelece a relação entre os diferenciais do sistema de coordenadas cartesianas e o sistema de corrdenadas naturais. Tal equação está definida logo baixo.

$$\begin{bmatrix} dx \\ dz \end{bmatrix} = [J] \begin{bmatrix} d\xi \\ d\eta \end{bmatrix} \tag{3.7}$$

Onde $[J]$ é uma matriz 2x2 não singular de derivadas parcias relacionada com a mudança de coordenadas (ASSAN, 2003), sendo esta denominada de matriz jacobiana (equação 3.8).

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial z}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \end{bmatrix} \tag{3.8}$$

A equação (3.7) possibilita calcular os diferenciais dx e dz através de $d\xi$ e $d\eta$, porém o que se deseja realmente é a operação inversa, ou seja, almeja-se encontrar uma expressão que define $d\xi$ e $d\eta$ em função de dx e dz (ROY, 2007). Tal expressão se encontra logo abaixo.

$$\begin{bmatrix} d\xi \\ d\eta \end{bmatrix} = J^{-1} \begin{bmatrix} dx \\ dz \end{bmatrix} = \frac{1}{|J|} \begin{bmatrix} \frac{\partial z}{\partial \eta} & -\frac{\partial x}{\partial \eta} \\ -\frac{\partial z}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ dz \end{bmatrix} \tag{3.9}$$

Sendo que $|J|$ é o determinante da matriz jacobiana, o qual é determinado pela equação:

$$|\mathbf{J}| = det\ \mathbf{J} = \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial z}{\partial \xi} \tag{3.10}$$

Todas as espressões matemáticas descritas nesta seção dependem de $x(\xi, \eta)$ e $z(\xi, \eta)$, portanto, também dependem das funções de forma. De modo que, a escolha da função base a ser utilizada depende do tipo de elemento e do comportamento da grandeza de interesse.

Neste trabalho, os elementos utilizados para discretizar a geometria são quadriláteros compostos de 4 nós. Por isto, como os elementos são isoparamétricos, foram utilizadas quatro funções bases por elemento:

$$\psi_1 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) \tag{3.11}$$

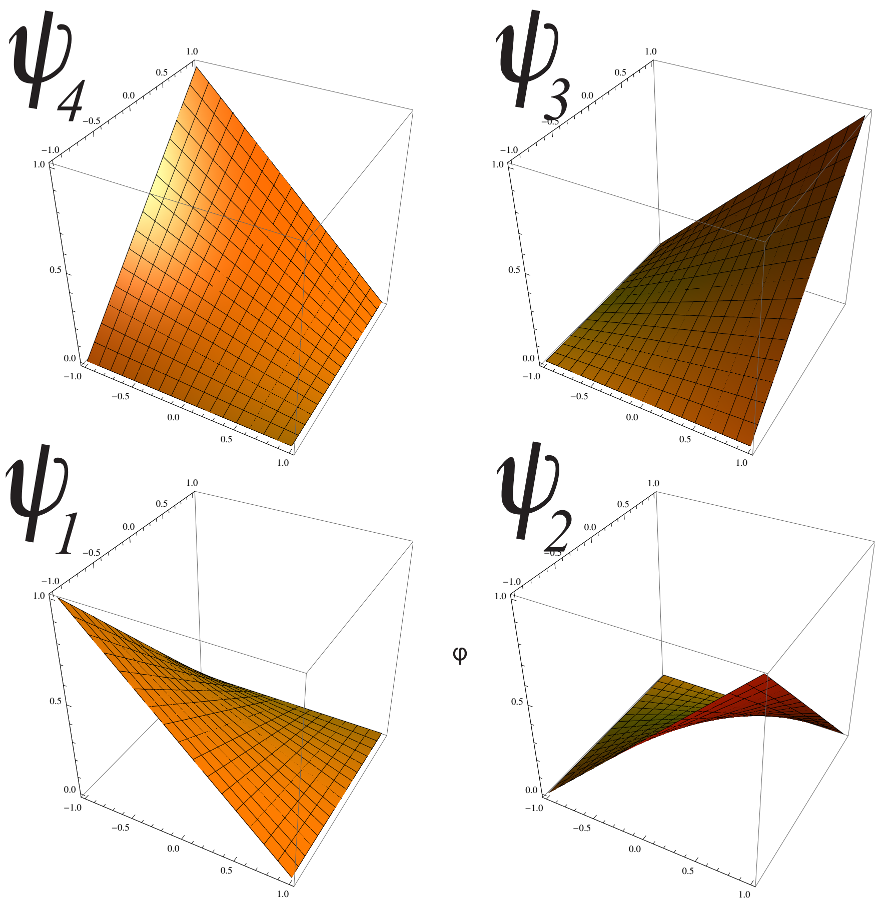
$$\psi_2 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) \tag{3.12}$$

$$\psi_3 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) \tag{3.13}$$

$$\psi_4 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta) \tag{3.14}$$

Estas funções, como pode ser visto na figura 3.3, não são lineares, diferentemente das funções utilizadas comumente em elementos triangulares. Isto porque, para elementos quadrilaterais é necessário um polinômio de interpolação de maior grau, uma vez que a geometria dos mesmos torna o problema mais complexo.

Figura 3.3: Funções base utilizadas no MEF Isoparamétricos.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Portanto utilizando as funções bases definidas anteriormente (ψ_1, ψ_2, ψ_3 e ψ_4), pode-se reescrever (3.1) e (3.2), como visto abaixo:

$$x(\xi,\eta) = \sum_{i=1}^{4} x_i \ \psi_i(\xi,\eta) \tag{3.15}$$

$$z(\xi,\eta) = \sum_{i=1}^{4} z_i \ \psi_i(\xi,\eta) \tag{3.16}$$

Deste modo, as derivadas de (3.15) e (3.16) serão dadas por:

$$\frac{\partial x(\xi,\eta)}{\partial \xi} = \sum_{i=1}^{4} x_i \ \frac{\partial \psi_i(\xi,\eta)}{\partial \xi} \tag{3.17}$$

$$\frac{\partial x(\xi,\eta)}{\partial \eta} = \sum_{i=1}^{4} x_i \ \frac{\partial \psi_i(\xi,\eta)}{\partial \eta} \tag{3.18}$$

$$\frac{\partial z(\xi,\eta)}{\partial \xi} = \sum_{i=1}^{4} z_i \ \frac{\partial \psi_i(\xi,\eta)}{\partial \xi} \tag{3.19}$$

$$\frac{\partial z(\xi,\eta)}{\partial \eta} = \sum_{i=1}^{4} z_i \ \frac{\partial \psi_i(\xi,\eta)}{\partial \eta} \tag{3.20}$$

Com isto a expressão da matriz jacobiana fornecida em (3.8) se torna:

$$[J] = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{4} x_i \ \frac{\partial \psi_i(\xi,\eta)}{\partial \xi} & \sum_{i=1}^{4} x_i \ \frac{\partial \psi_i(\xi,\eta)}{\partial \eta} \\ \\ \sum_{i=1}^{4} z_i \ \frac{\partial \psi_i(\xi,\eta)}{\partial \xi} & \sum_{i=1}^{4} z_i \ \frac{\partial \psi_i(\xi,\eta)}{\partial \eta} \end{bmatrix} \tag{3.21}$$

A matriz acima é utilizada para realizar a transformação do sistema de coordenadas. De maneira que a partir dela é possível escrever um diferencial de área (dA) em função de $d\xi$ e $d\eta$.

$$dA = dx \ dz = |J| \ d\xi \ d\eta \tag{3.22}$$

Desta forma, sabendo que os limites dos elementos no sistema de coordenadas naturais variam de -1 a +1 e utilizando a equação acima e as funções bases definidas (3.11, 3.12, 3.13 e 3.14), pode-se realizar a mudança de coordenadas nas expressões (2.41) e (2.42), tornando estas dependentes dos diferenciais $d\xi$ e $d\eta$. Com isso obtemos:

$$K^e_{m,n} = \int_{-1}^{+1} \frac{1}{\eta_e}\left(\frac{\partial \psi_m}{\partial \xi}\frac{\partial \psi_n}{\partial \xi} + \frac{\partial \psi_m}{\partial \eta}\frac{\partial \psi_n}{\partial \eta}\right) \ |J| \ d\xi d\eta + \int_{-1}^{+1} \mathfrak{z}_e \ \psi_m \psi_n \ |J| \ d\xi d\eta \tag{3.23}$$

$$
\begin{aligned}
F_m^e = & -\int_{-1}^{+1} \Delta\mathfrak{z}_e \psi_m \left(\sum_{i=1}^{n} \psi_i \; H_{yi}^p \right) |J| \; d\xi d\eta \\
& + \int_{-1}^{+1} \frac{\Delta\eta_e}{\eta_e} \frac{\partial\psi_m}{\partial\xi} \left(\sum_{i=1}^{n} \psi_i \; E_{zi}^p \right) |J| \; d\xi d\eta \\
& - \int_{-1}^{+1} \frac{\Delta\eta_e}{\eta_e} \frac{\partial\psi_m}{\partial\eta} \left(\sum_{i=1}^{n} \psi_i \; E_{xi}^p \right) |J| \; d\xi d\eta \\
& + \int_{\partial\Omega_e} \psi_m \mathbf{E}^s \,.\, \hat{\mathbf{t}} dl
\end{aligned} \tag{3.24}
$$

Operando de maneira semelhante nas equações (2.48) e (2.49) se encontra:

$$
P_{m,n}^e = \int_{-1}^{+1} \frac{1}{\mathfrak{z}_e} \left(\frac{\partial\psi_m}{\partial\xi}\frac{\partial\psi_n}{\partial\xi} + \frac{\partial\psi_m}{\partial\eta}\frac{\partial\psi_n}{\partial\eta} \right) |J| \; d\xi d\eta + \int_{-1}^{+1} \eta_e \psi_m \psi_n \; |J| \; d\xi d\eta \tag{3.25}
$$

$$
\begin{aligned}
Q_m^e = & -\int_{-1}^{+1} \Delta\eta_e \psi_m \left(\sum_{i=1}^{n} \psi_i \; E_{yi}^p \right) |J| \; d\xi d\eta \\
& - \int_{-1}^{+1} \frac{\Delta\mathfrak{z}_e}{\mathfrak{z}_e} \frac{\partial\psi_m}{\partial\xi} \left(\sum_{i=1}^{n} \psi_i \; H_{zi}^p \right) |J| \; d\xi d\eta \\
& + \int_{-1}^{+1} \frac{\Delta\mathfrak{z}_e}{\mathfrak{z}_e} \frac{\partial\psi_m}{\partial\eta} \left(\sum_{i=1}^{n} \psi_i \; H_{xi}^p \right) |J| \; d\xi d\eta \\
& + \int_{\partial\Omega_e} \psi_m \mathbf{H}^s \,.\, \hat{\mathbf{t}} dl
\end{aligned} \tag{3.26}
$$

As equações (3.23), (3.24), (3.25) e (3.26) formam dois sistemas lineares independentes, onde as duas primeiras fornecem a solução para o modo de propagação TM e as duas últimas para o modo TE. De forma que elas não serão solucionadas através de expressões analíticas, mas sim numericamente através de uma técnica de integração chamada Quadratura de Gauss-Legendre.

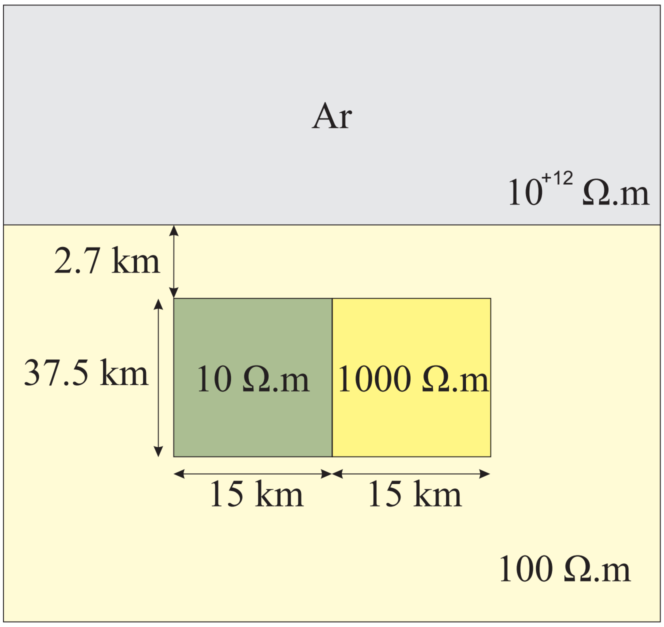
4 RESULTADOS

4.1 VALIDAÇÃO DO ALGORITMO

Para validar o programa de modelagem do MT através do método dos elementos finitos isoparamétricos foi utilizado como referência as respostas fornecidas por RUNG-ARUNWAN & SIRIPUNVARAPORN (2010), os quais utilizam um método numérico chamado *hierarchical domain decomposition* (HDD) para solucionar o magnetotelúrico.

O modelo geoelétrico adotado para validação é composto pelo ar, por um semi-espaço (100 $\Omega.m$) e por duas heterogeneidades situadas uma ao lado da outra. Sendo que a heterogeneidade da esquerda tem resistividade de 10 $\Omega.m$ e a da direita 1000 $\Omega.m$, como visto na figura abaixo:

Figura 4.1: Modelo geoelétrico utilizado para validar o código de modelagem 2D do método magnetotelúrico utilizando o MEF isoparamétricos.



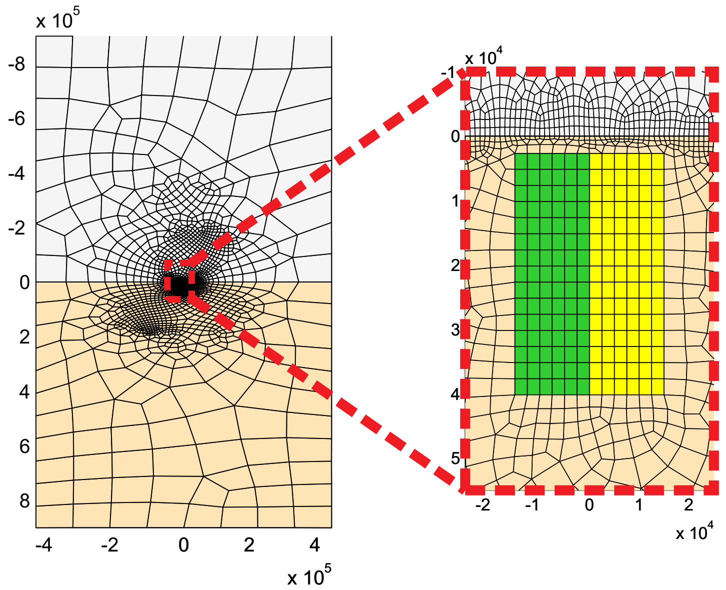
Fonte: Modificado de RUNG-ARUNWAN & SIRIPUNVARAPORN (2010).

Como já foi dito anteriormente, o método dos elementos finitos exige que o domínio seja discretizado em subdomínios. No caso do MEF isoparamétricos aplicado neste trabalho é necessário gerar uma malha com elementos quadrangulares. Além disso, é preciso criar duas malhas uma para o modo TE e outra para o TM, visto que as soluções desses modos de propagação são independentes e, portanto, são calculadas separadamente.

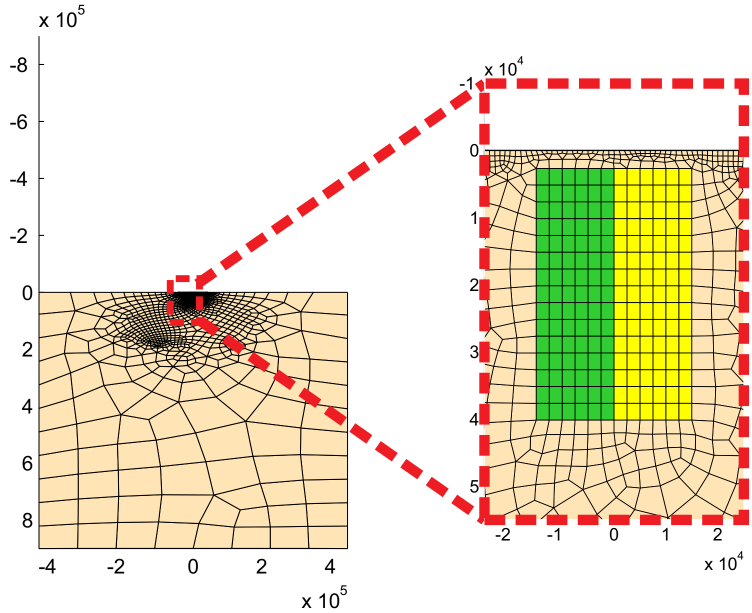
A malha gerada para o modo TE está ilustrada na figura (4.2a) e a criada para o modo TM é mostrada na figura (4.2b). De maneira que estas foram construídas com o auxílio do software COMSOL Multiphysics® e através delas é possível encontrar os campos eletromagnéticos em todo domínio através do sistema linear construído com (3.23), (3.24), (3.25) e (3.26). De posse desses campos se pode calcular a impedância e, por conseguinte, os valores de resistividade aparente e fase.

Figura 4.2: (a) Malha utilizada no modo TE (b) Malha utilizada no modo TM.

(a)



(b)



Fonte: Elaborado pelo autor.

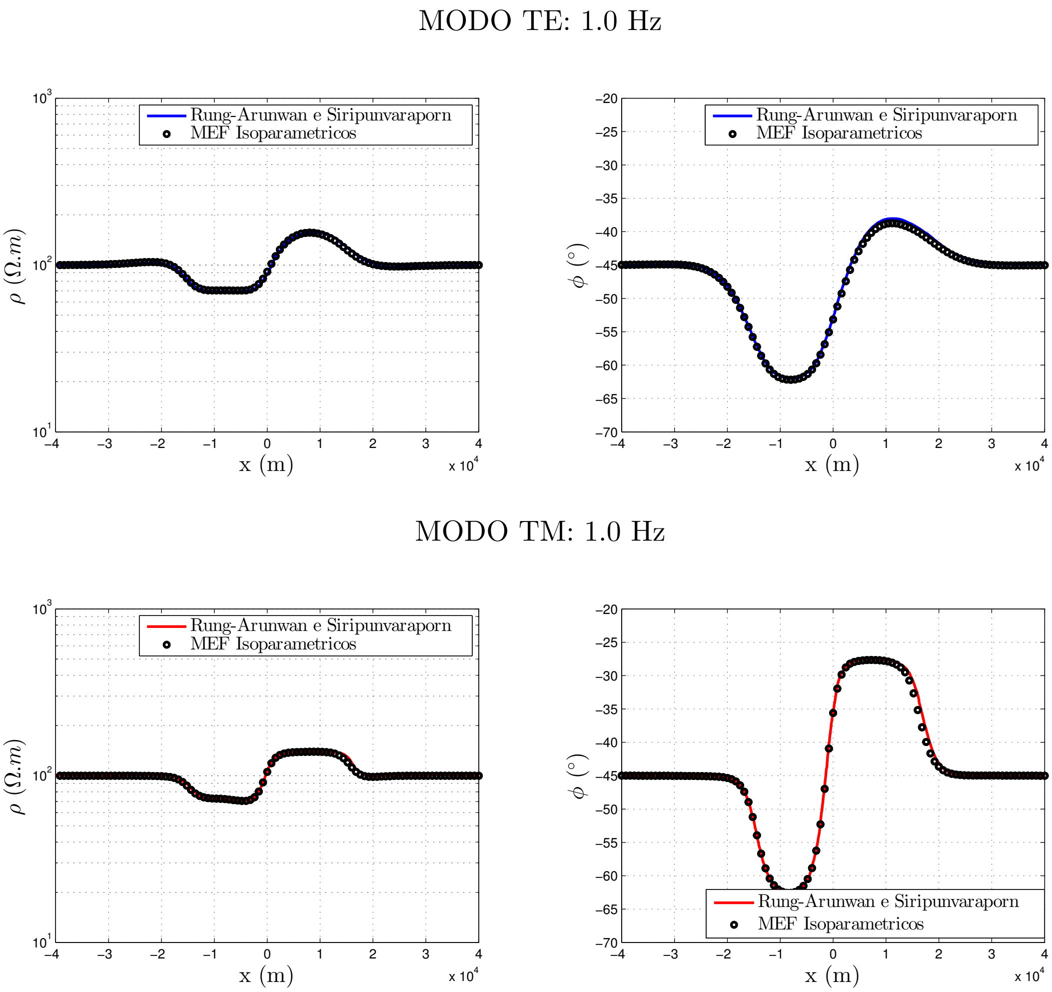
RUNG-ARUNWAN & SIRIPUNVARAPORN (2010) utilizaram as frequências de 1 hz, 0.1 hz e 0.01 hz. Sendo assim, como o objetivo é reproduzir as mesmas respostas encontradas por eles, essas frequências foram utilizadas para resolver a modelagem do MT via MEFI.

As soluções obtidas para frequência de 1 hz estão dispostas nos gráficos da figura (4.3), onde as mesmas são comparadas com as soluções exibidas no artigo de RUNG-ARUNWAN & SIRIPUNVARAPORN (2010).

Observando a figura abaixo se verifica que as respostas obtidas através do método dos elementos finitos isoparamétricos são muito próxima das curvas que estão sendo adotadas como parâmetro de comparação. Além disso, nota-se que o comportamento da resistividade aparente e da fase são semelhante nos dois modos de propagação.

É interessante citar a coerência da curva de resistividade aparente, pois estas (nos dois modos de propagação) apresentam os valores mais baixos de resistividade entre -20 e $0km$ e os valores mais altos entre 0 e $20km$. Isso se deve a presença das heterogeneidades, pois à esquerda do modelo está situado um corpo de resistividade mais baixa que o meio encaixante, enquanto que na direita se encontra outro corpo de resistividade mais alta que o meio. Também se verifica que nas regiões mais distantes das heterogeneidades a resistividade aparente possui valor bem próximo da resistividade do substrato ($100\Omega.m$)

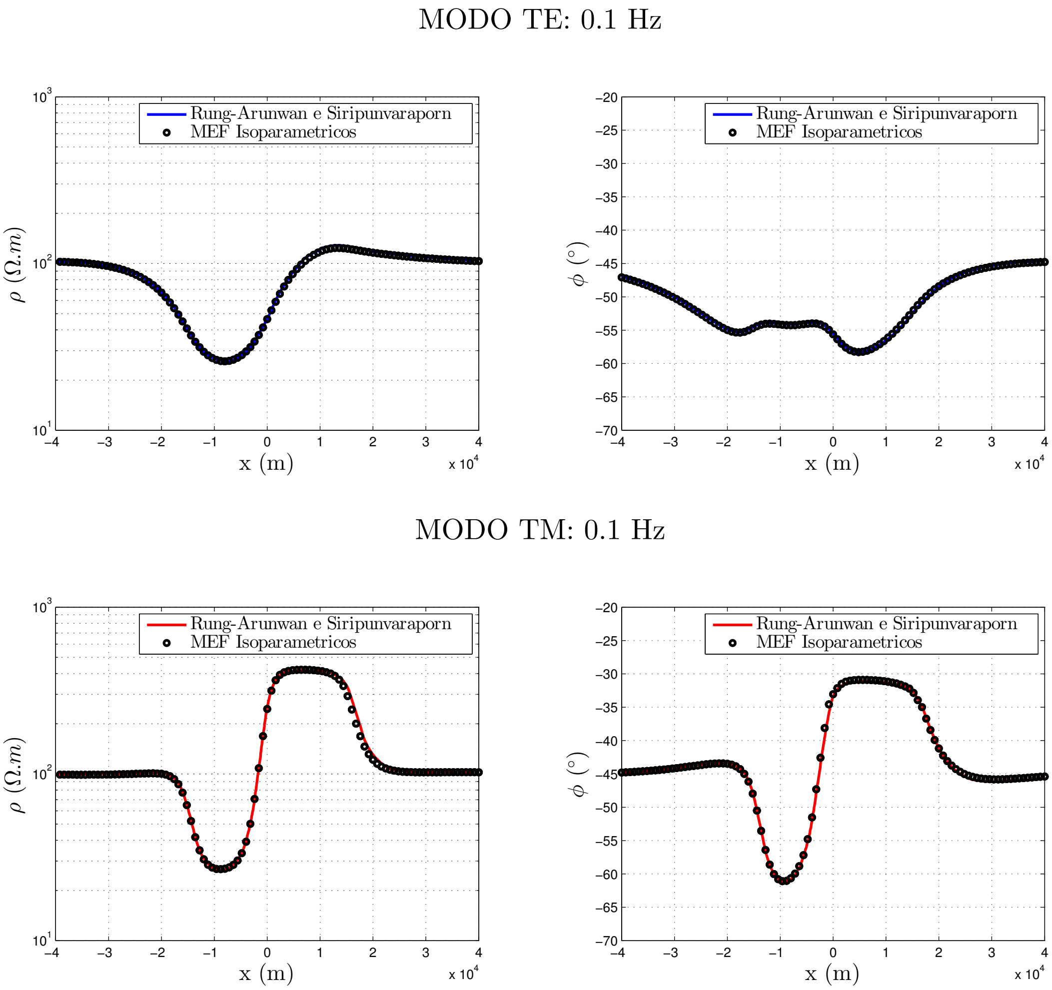
Figura 4.3: Comparação entre as soluções obtidas via MEFI e as fornecidas por RUNG-ARUNWAN & SIRIPUNVARAPORN (2010) para frequência de 1 hz.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Na figura (4.4) estão as curvas de resistividade aparente e fase para a frequência de 0.1 hz, onde se percebe um comportamento semelhante ao apresentado com a frequência de 1.0 hz. Entretanto, agora as curvas de resistividade aparente mostram uma amplitude maior, principalmente no modo TM.

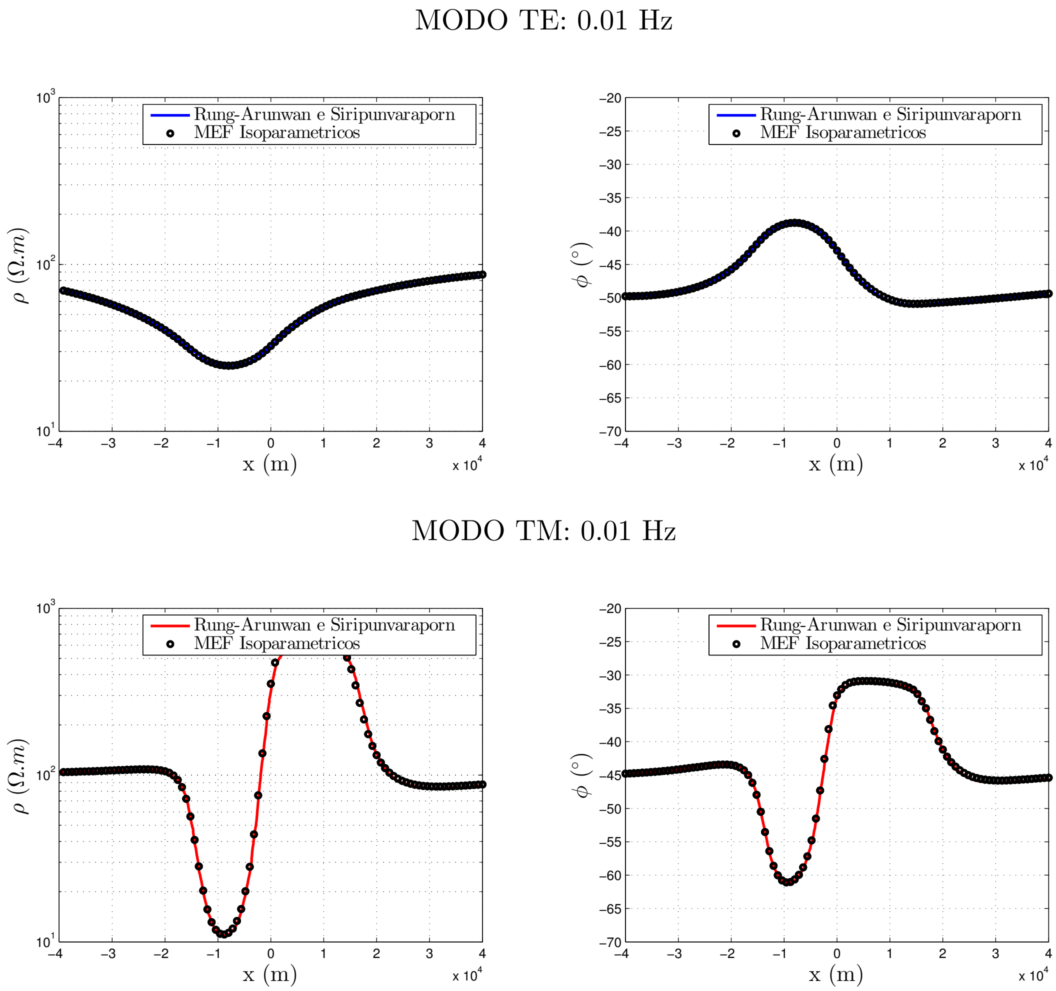
Figura 4.4: Comparação entre as soluções obtidas via MEFI e as fornecidas por RUNG-ARUNWAN & SIRIPUNVARAPORN (2010) para frequência de 0.1 hz.



Fonte: Elaborado pelo autor.

As soluções encontradas para frequência de 0.1 hz estão dispostas na figura (4.5), onde verificamos que a respostas são praticamente as mesmas das apresentadas no no artigo de RUNG-ARUNWAN & SIRIPUNVARAPORN (2010). Além disso, verifica-se que para esta frequência as curvas de resistividade aparente e fase para o modo TE são mais "suaves", aparentemente a resposta só foi sensível à presença do corpo de menor resistividade. Entretando, no modo TM as curvas ainda são sensíveis as duas heterogeneidades, sendo que a resistividade aparente indica valores muito próximos aos do modelo.

Figura 4.5: Comparação entre as soluções obtidas via MEFI e as fornecidas por RUNG-ARUNWAN & SIRIPUNVARAPORN (2010) para frequência de 0.01 hz.



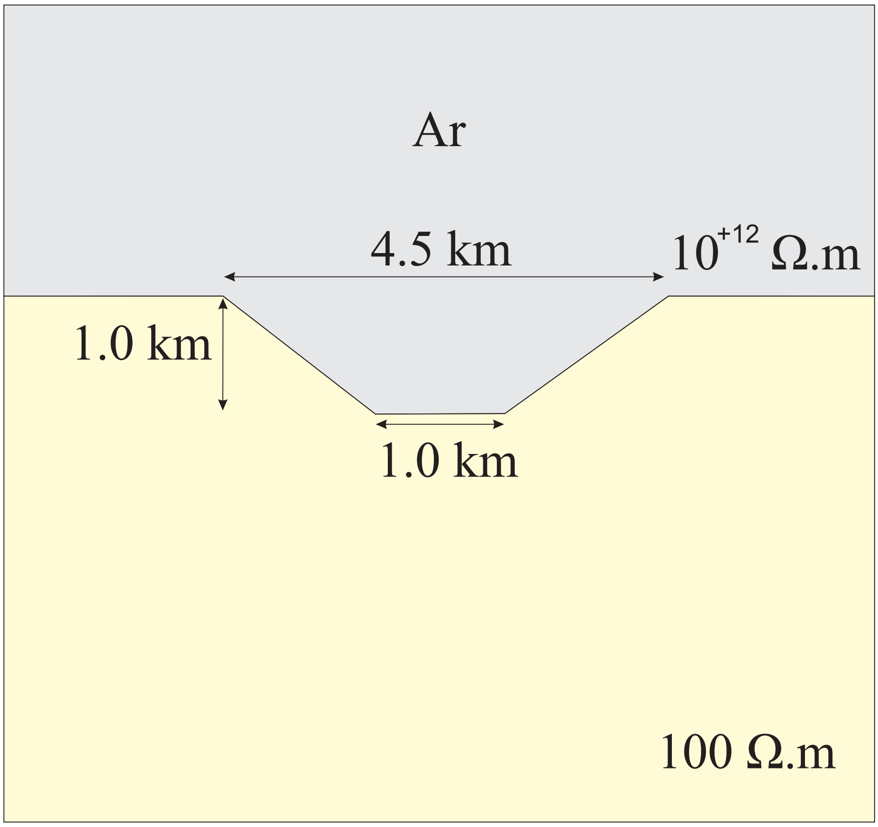
Fonte: Elaborado pelo autor.

Os gráficos mostrados indicam que o método dos elementos finitos isoparamétricos gerou soluções corretas de resistividade aparente e fase para o modelo indicado na figura (4.1), uma vez que as respostas estão bem próximas das soluções de referência. Agora a intenção é testar se esse método apresenta alguma vantagem em relação ao MEF nodais com elementos triangulares(MEFT), o que será feito através dos modelos as seguir.

4.2 MODELO 1 – VALE

O primeiro modelo analisado apresenta apenas dois meios, um com resistividade elevada (10^{12} $\Omega.m$) para simular a camada de ar, e o outro com resistividade igual a 100 $\Omega.m$, sendo que esse representa a subsuperfície. Neste caso, têm-se um vale na interface que delimita os dois meios, essa depressão possui uma extensão de 4.5 km e 1 km de profundidade, como pode ser verificado na ilustração abaixo (Figura 4.6):

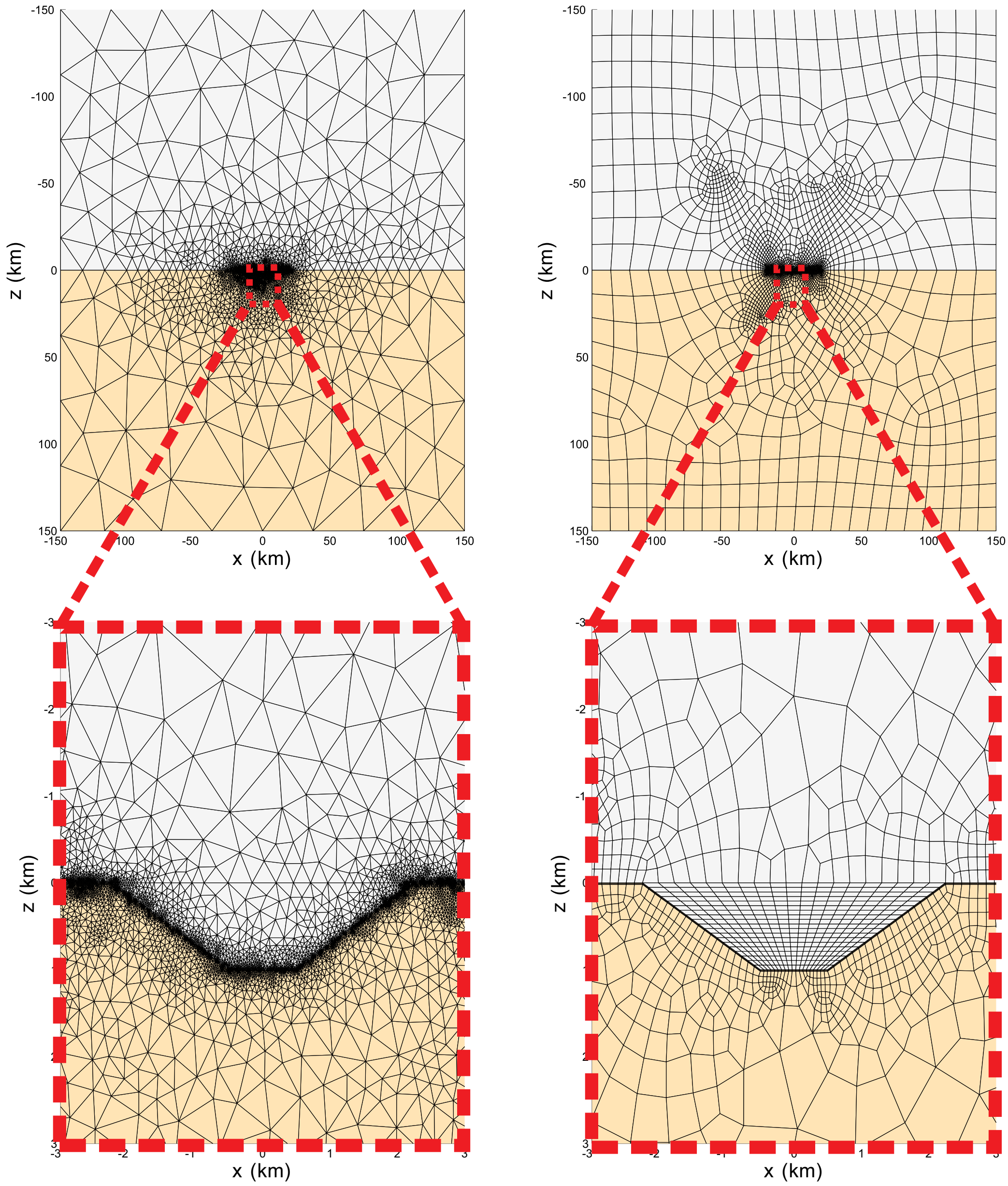
Figura 4.6: Modelo geoelétrico que apresenta um vale na interface ar-sedimento.



Fonte: Elaborado pelo autor.

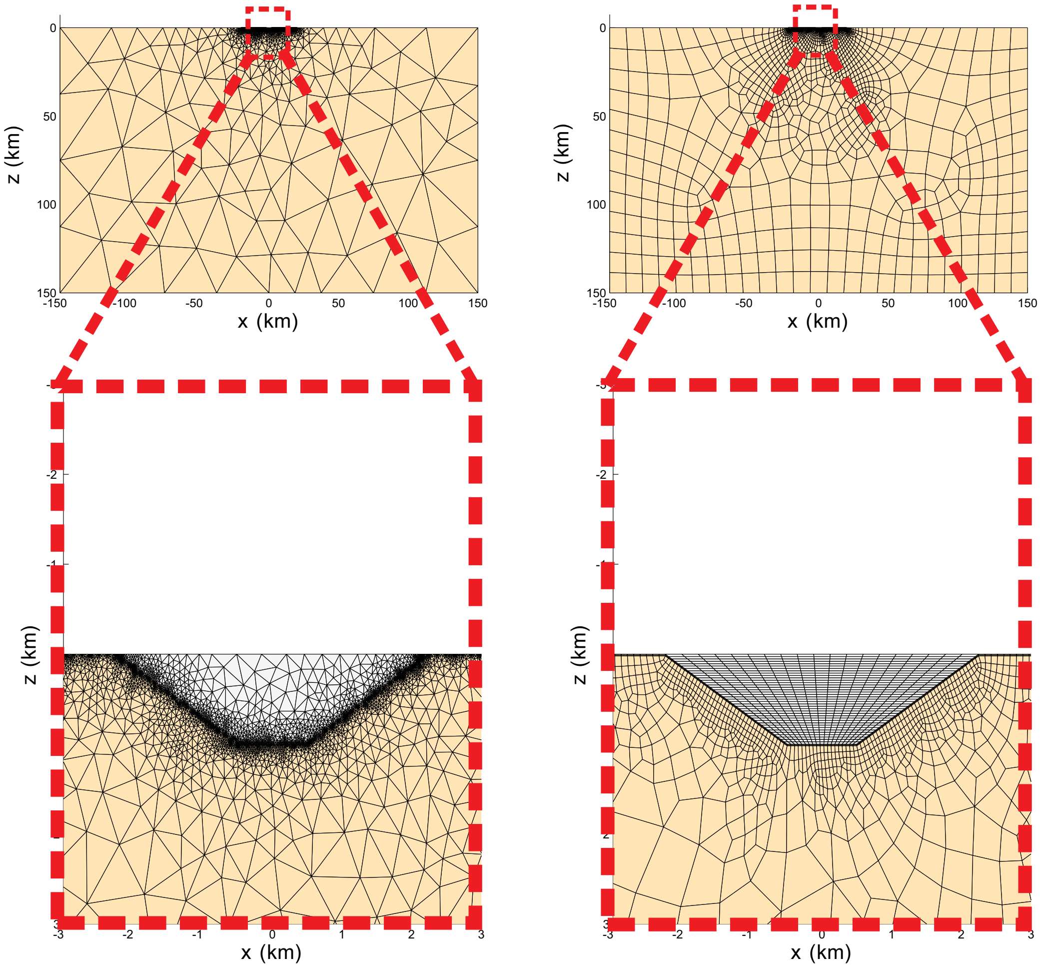
Afim de solucionar a modelagem numérica do MT utilizando as duas técnicas de elementos finitos aplicadas nesse trabalho foram geradas duas malhas para cada modo de propagação. Tal que, para o MEFT o domínio foi discretizado com elementos triangulares não regulares, já no MEFI a malha foi construída com elementos quadrilaterais.

Figura 4.7: Malhas geradas para modo TE: à esquerda temos a malha triangular e à direita se verifica a malha quadrilateral, ambas mostram a região do vale ampliada.



Fonte: Elaborado pelo autor.

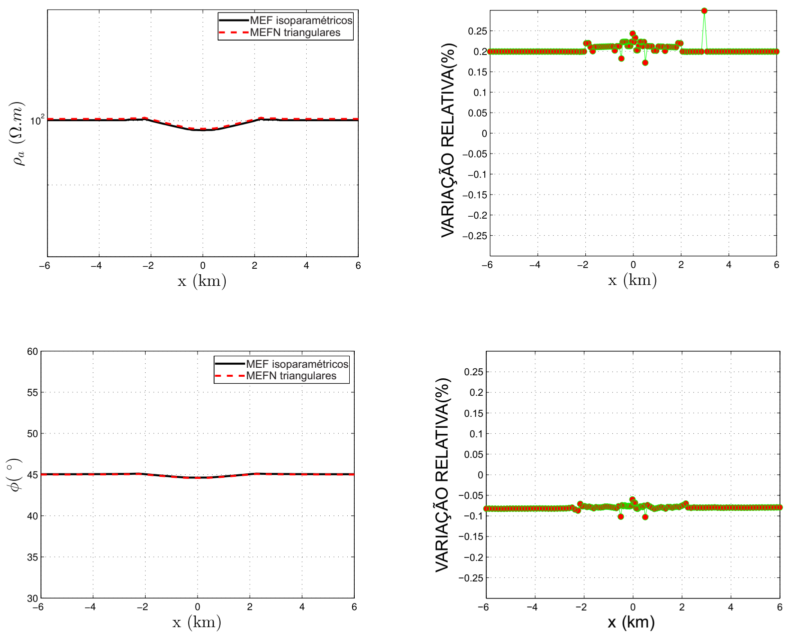
Figura 4.8: Malhas geradas para modo TM: à esquerda temos a malha triangular e à direita se verifica a malha quadrilateral, ambas mostram a região do vale ampliada.



Fonte: Elaborado pelo autor.

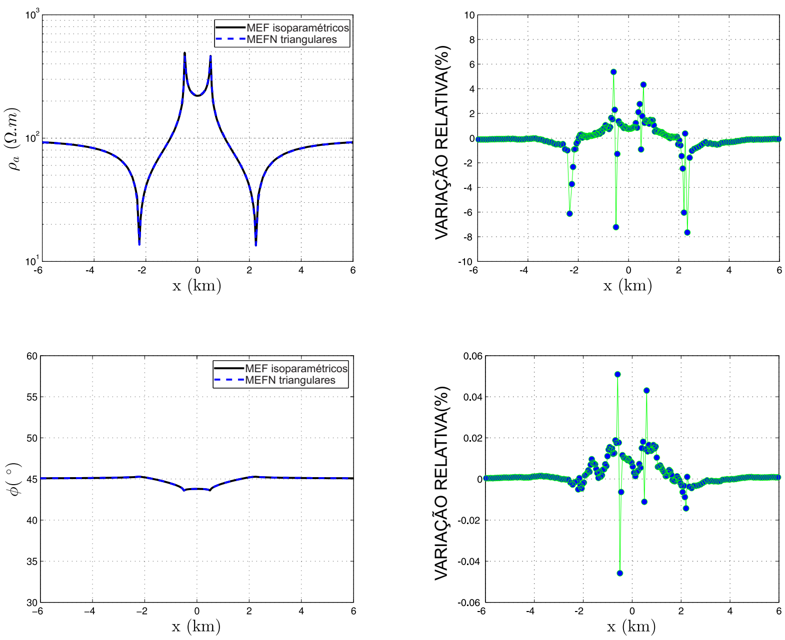
As soluções obtidas para esse primeiro modelo estão dispostas nos gráficos das tês próximas páginas. De maneira que, calculou-se curvas de resistividade aparente e fase para três frequências: 0.01 hz, 0.1 hz e 1 hz. Além disso, também estão apresentados os valores de variação relativa da solução do MEFI tendo como parâmetro a resposta do MEF triangulares.

Figura 4.9: Comparação entre as curvas de resistividade aparente e fase do modo TE obtidas via MEFI e MEFN triangulares para frequência de 0.01 hz e os valores de variação relativa tendo como parâmetro as respostas do MEFN triangulares.



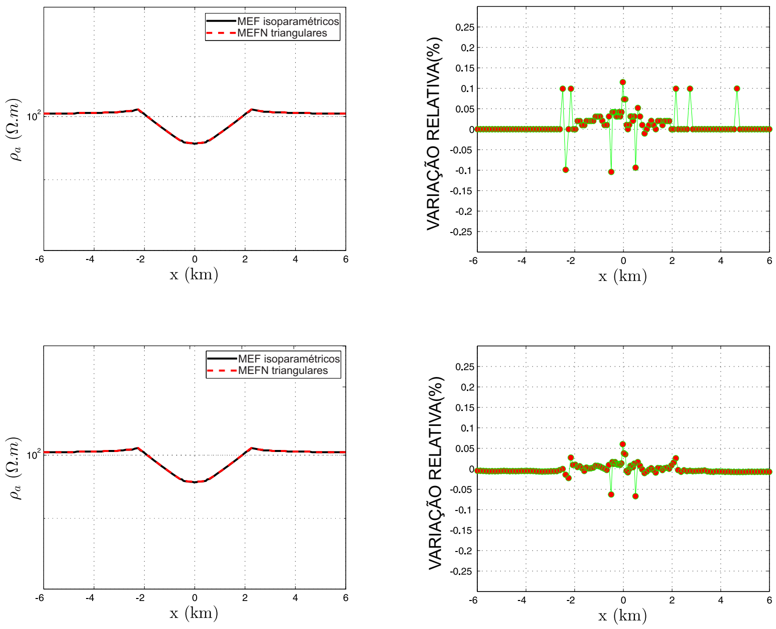
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 4.10: Comparação entre as curvas de resistividade aparente e fase do modo TM obtidas via MEFI e MEFN triangulares para frequência de 0.01 hz e os valores de variação relativa tendo como parâmetro as respostas do MEFN triangulares.



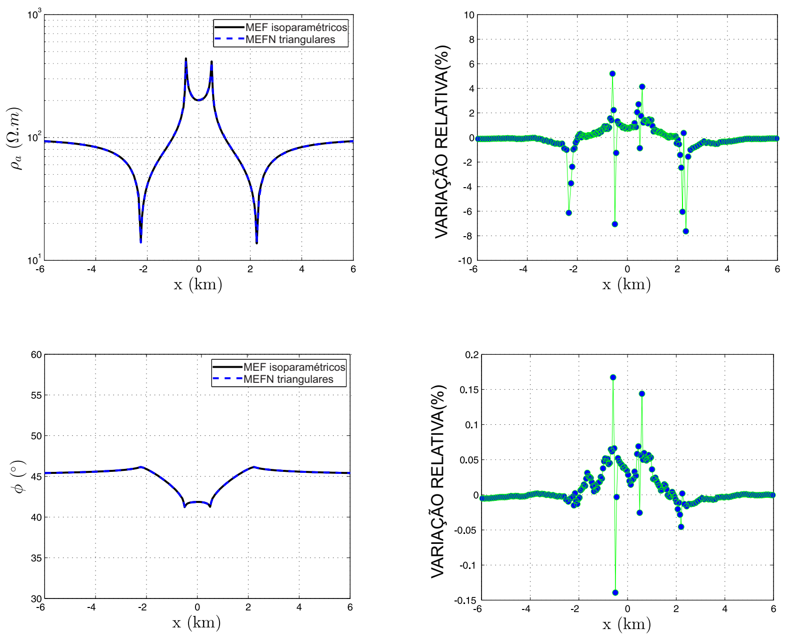
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 4.11: Comparação entre as curvas de resistividade aparente e fase do modo TE obtidas via MEFI e MEFN triangulares para frequência de 0.1 hz e os valores de variação relativa tendo como parâmetro as respostas do MEFN triangulares.



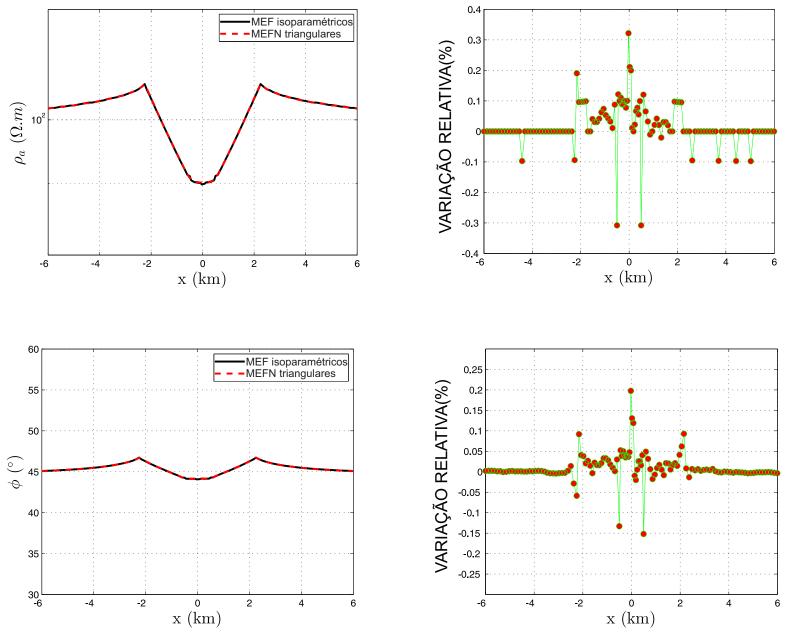
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 4.12: Comparação entre as curvas de resistividade aparente e fase do modo TM obtidas via MEFI e MEFN triangulares para frequência de 0.1 hz e os valores de variação relativa tendo como parâmetro as respostas do MEFN triangulares.



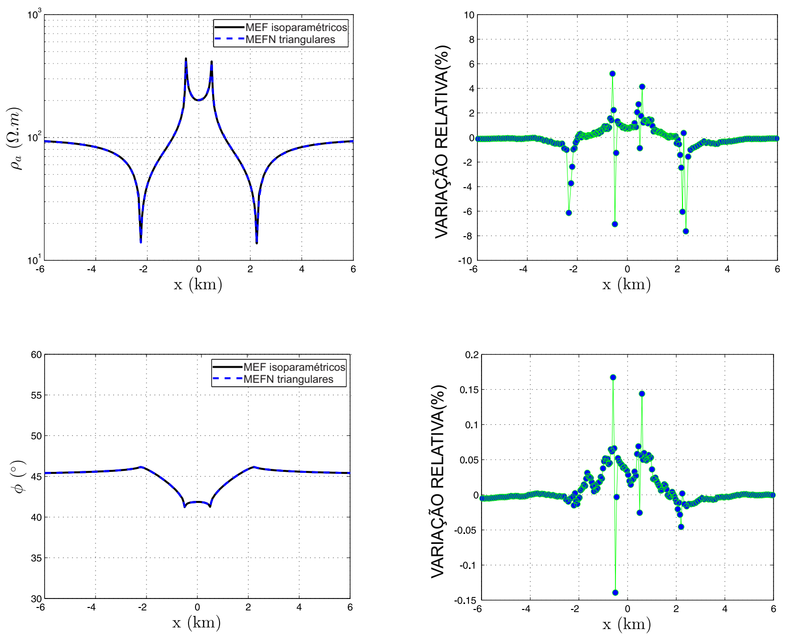
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 4.13: Comparação entre as curvas de resistividade aparente e fase do modo TE obtidas via MEFI e MEFN triangulares para frequência de 1 hz e os valores de variação relativa tendo como parâmetro as respostas do MEFN triangulares.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 4.14: Comparação entre as curvas de variação aparente e fase do modo TM obtidas via MEFI e MEFN triangulares para frequência de 1 hz e os valores de resistividade relativa tendo como parâmetro as respostas do MEFN triangulares.



Fonte: Elaborado pelo autor.

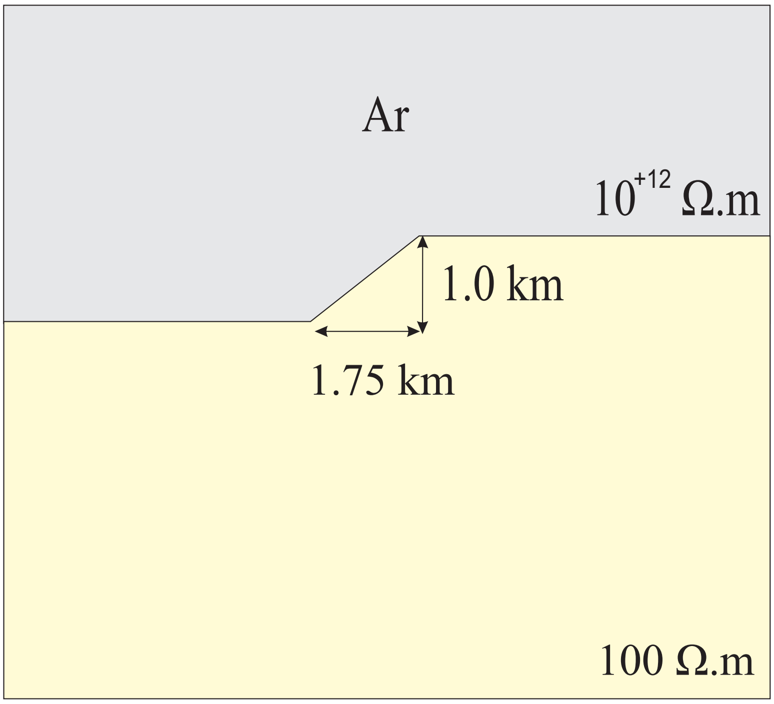
Os gráficos mostrados anteriormente evidenciam que as soluções entre o MEF isoparamétricos e o MEF nodais são muito próximas. Também se constata o efeito que a topografia tem sobre o sinal, mesmo sem a presença de uma heterogeneidade as cuvas de resistividade aparente se mostraram sensíveis à presença do vale.

As resposta de resistividade aparente no modo TE foram bem mais suaves que as do modo TM, de modo que nesse ultimo vemos de forma bem clara os limites do vale.

4.3 MODELO 2 – RAMPA

O segundo modelo avaliado também é composto por dois semi-espaços, o meio superior possui resistividade igual a 10^{12} $\Omega.m$ e o inferior tem resistividade igual a $100\Omega.m$. Nele a interface que separa os dois semi-espaços apresenta uma elevação no lado direito do modelo, de maneira que a diferença de nível entre a região mais baixa e a mais alta é de 1 km (Figura 4.15)

Figura 4.15: Modelo com uma topografia mais elevada à direita.

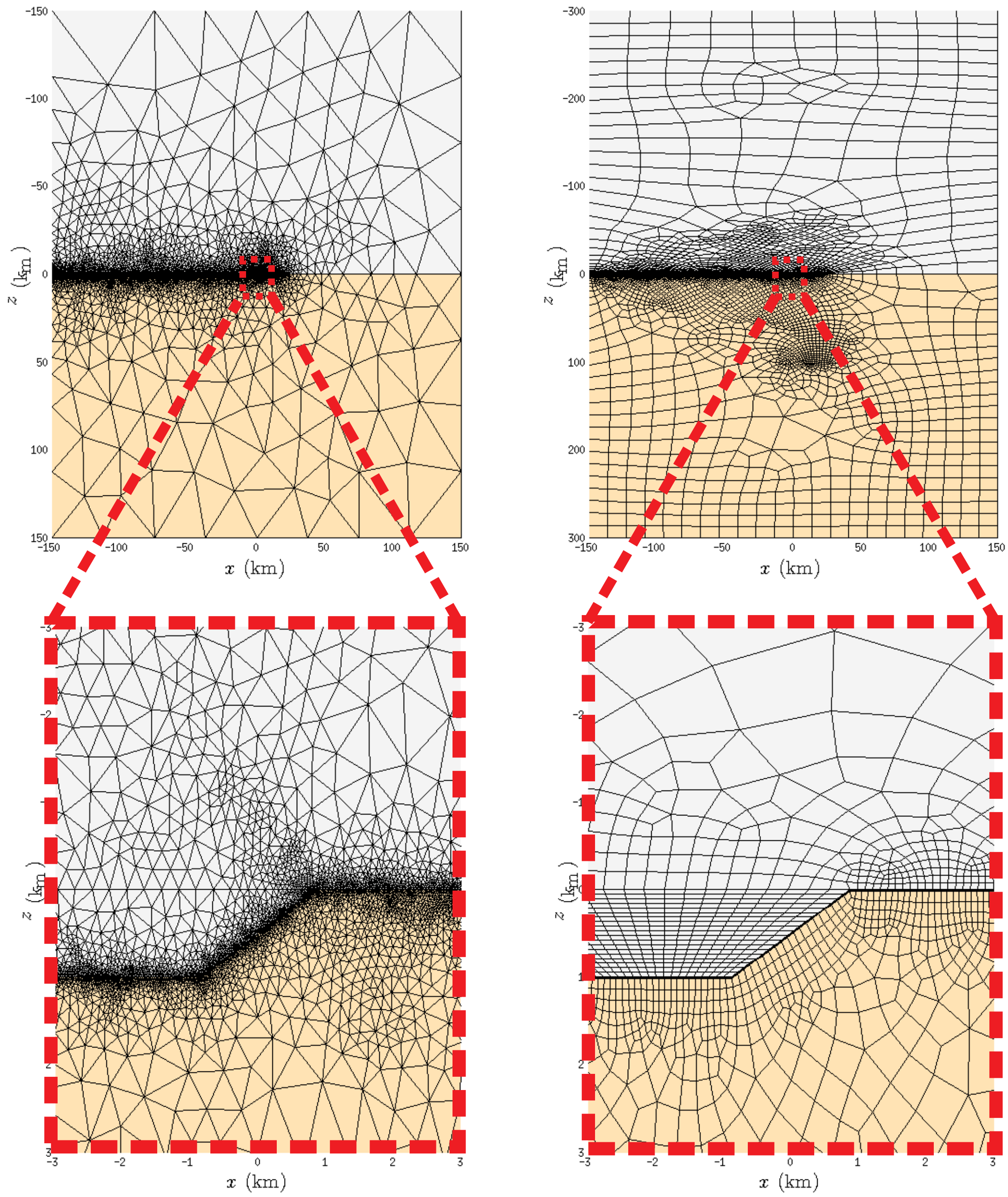


Fonte: Elaborado pelo autor.

As malhas geradas para o modo TE estão dispostas na figura 4.16, onde se constata que na região do aclive ocorre uma maior concentração de elementos, ou seja, nessa zona tanto a malha triangular quanto a quadrangular são mais refinadas. Entretanto, nota-se que na triangular essa região é bem mais refinada, esse mesmo comportamento também pode ser verificado nas malhas construídas para o modo TM (Figura 4.17).

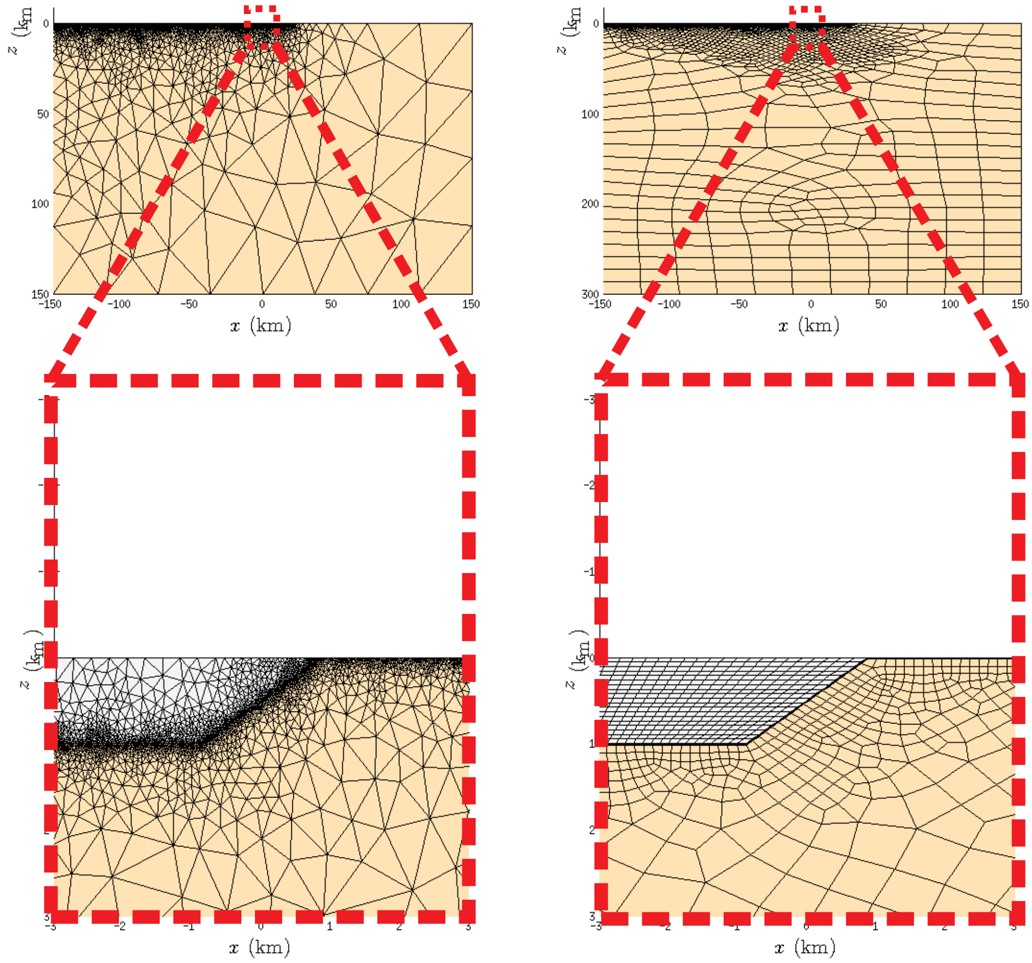
É importante ressaltar que esse maior refinamento não se deve somente à elevação, pois nessa região também foi inserida uma certa quantidade de nós para realizar derivadas numéricas. Contudo, a mesma quantidade de nós foi inserida nas duas malhas, portanto isso não justificaria a maior concentração de elementos na malha triangular.

Figura 4.16: Malhas geradas para modo TE: à esquerda temos a malha triangular e à direita se verifica a malha quadrilateral, ambas mostram a região do aclive ampliada.



Fonte: Elaborado pelo autor.

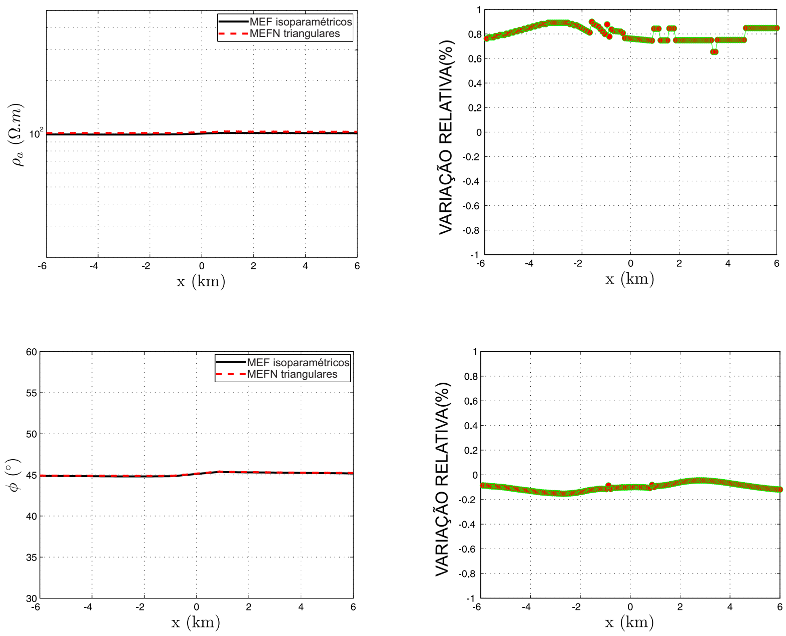
Figura 4.17: Malhas geradas para modo TM: à esquerda temos a malha triangular e à direita se verifica a malha quadrilateral, ambas mostram a região do aclive ampliada.



Fonte: Elaborado pelo autor.

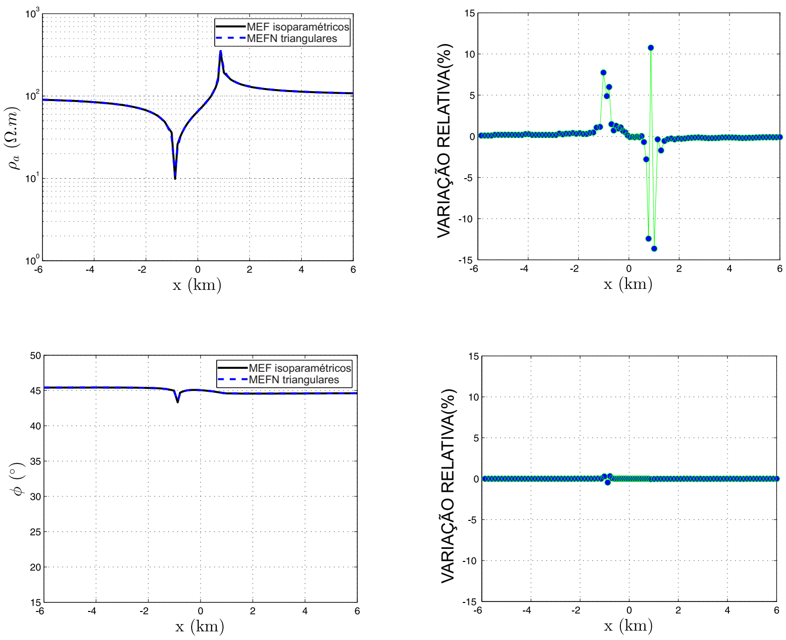
Tendo as duas malhas triangulares e as duas quadrangulares, descritas anteriormente, foi possível calcular as soluções do magnetotelúrico utilizando as duas metodologias de elementos finitos aplicadas nesse trabalho. As respostas obtidas estão dispostas nos gráficos dados a seguir.

Figura 4.18: Comparação entre as curvas de resistividade aparente e fase do modo TE obtidas via MEFI e MEFN triangulares para frequência de 0.01 hz e os valores de variação relativa tendo como parâmetro as respostas do MEFN triangulares.



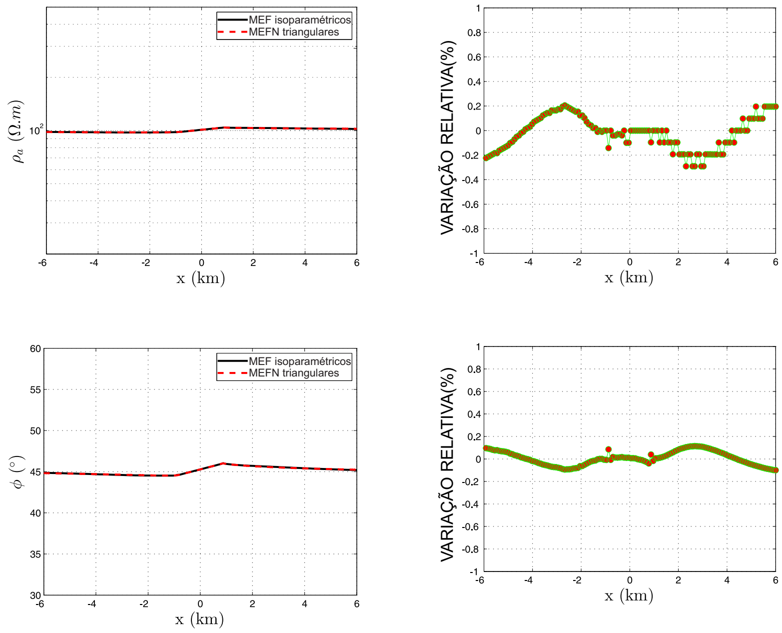
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 4.19: Comparação entre as curvas de resistividade aparente e fase do modo TM obtidas via MEFI e MEFN triangulares para frequência de 0.01 hz e os valores de variação relativa tendo como parâmetro as respostas do MEFN triangulares.



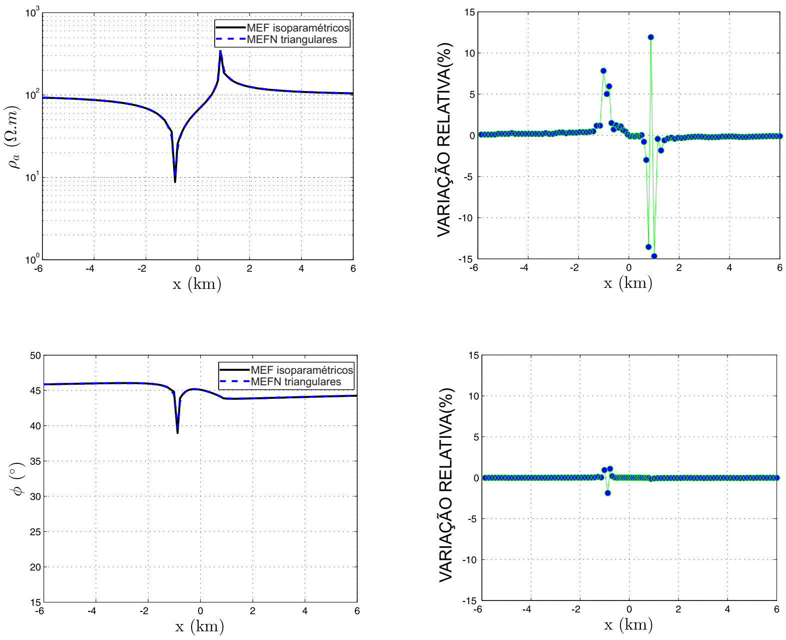
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 4.20: Comparação entre as curvas de resistividade aparente e fase do modo TE obtidas via MEFI e MEFN triangulares para frequência de 0.1 hz e os valores de variação relativa tendo como parâmetro as respostas do MEFN triangulares.



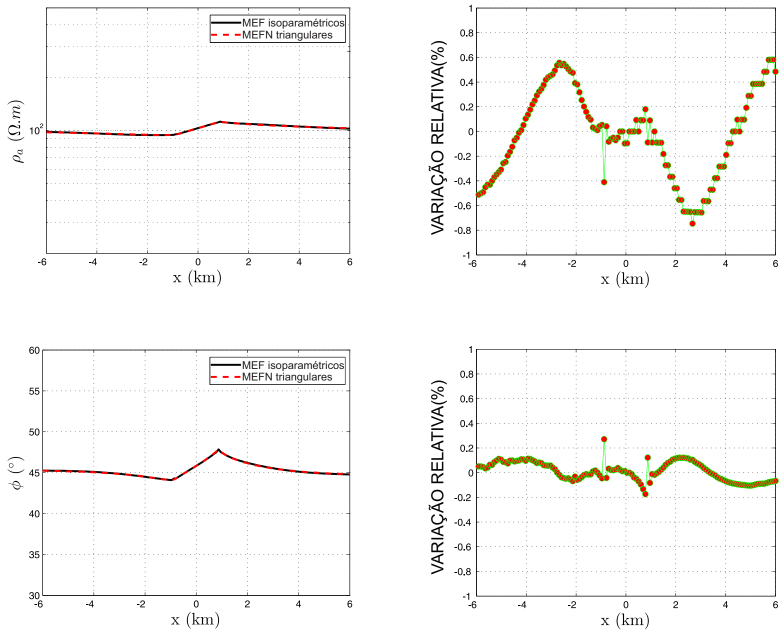
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 4.21: Comparação entre as curvas de resistividade aparente e fase do modo TM obtidas via MEFI e MEFN triangulares para frequência de 0.1 hz e os valores de variação relativa tendo como parâmetro as respostas do MEFN triangulares.



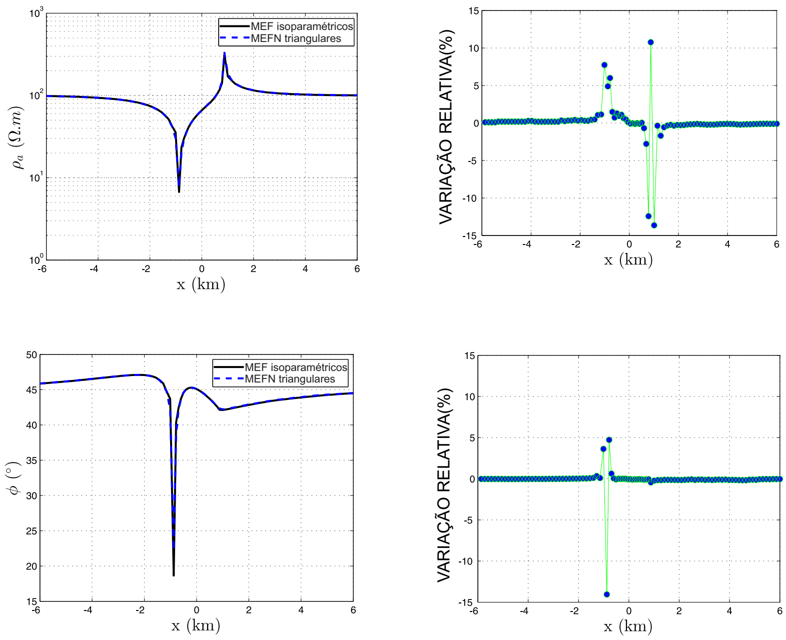
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 4.22: Comparação entre as curvas de resistividade aparente e fase do modo TE obtidas via MEFI e MEFN triangulares para frequência de 1 hz e os valores de variação relativa tendo como parâmetro as respostas do MEFN triangulares.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 4.23: Comparação entre as curvas de resistividade aparente e fase do modo TE obtidas via MEFI e MEFN triangulares para frequência de 1 hz e os valores de variação relativa tendo como parâmetro as respostas do MEFN triangulares.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Assim como no modelo anterior, notamos que os dois métodos de elementos finitos apresentaram soluções bem próximas. Contudo, novamente a malha triangular gerou muito mais nós que a quadrangular, além disso os elementos quadrangulares apresentaram um comportamento mais regular, por esse motivo a quantidade de elementos na heterogeneidade é menor na malha criada para MEFI, uma vez que ela teve mais facilidade para se adaptar a geometria do modelo.

4.4 DESEMPENHO

As modelagens desse trabalho foram realizadas em uma máquina que possui um processador intel Core i5 e tem 4 GB de memória RAM. Foram realizados testes para verificar o tempo que cada método de elementos finitos exigia para gera a solução do magnetotelúrico.

Com relação ao primeiro modelo, a malha triangular criada para o modo TE apresenta 23690 nós e 47342 elementos, enquanto que a malha quadrangular gerada possui 7085 nós e 7040 elementos (Figura 4.7). No modo TM o domínio discretizado com triângulos é constituído por 16816 nós e 31301 elementos, ao passo que o domínio discretizado com quadriláteros apresenta 7378 nós e 7050 elementos (Figura 4.8).

A tabela abaixo contêm mais informações sobre esse teste:

Tabela 4.1: Tabela com os dados referentes a execução das modelagens do magnetotelúrico para o primeiro modelo.

	MEFNT		MEFI	
	TE	TM	TE	TM
Numero de elementos	47342	25601	7040	7050
Numero de nós	23690	13841	7085	7378
Tempo de montagem do sistema(Frequência= 0.01 hz)	0.008s	0.00398s	0.059s	0.056s
Tempo de montagem do sistema(Frequência= 0.1hz)	0.028s	0.012s	0.12s	0.123s
Tempo de montagem do sistema(Frequência= 1.0hz)	0.02s	0.016s	0.111s	0.123s
Tempo de solução do sistema(Frequência= 0.01hz)	0.352s	0.14s	0.084s	0.08s
Tempo de solução do sistema(Frequência= 0.1hz)	0.2s	0.172s	0.087s	0.084s
Tempo de solução do sistema(Frequência= 1.0hz)	0.252	0.18s	0.08s	0.072s

Tomando como base a tabela acima, pode-se inferir que o MEF nodais com elementos triangulares é mais eficiente na montagem do sistema linear, entretanto, em se tratando do tempo de solução do sistema o MEF isoparamétricos é mais rápido. Constata-se também a grande diferença entre o número de nós utilizados nos dois métodos, isso mostra que MFEI proporcionou uma grande economia de memória por possibilitar a utilização de uma malha com menos nós.

Da mesma forma, também foi calculado o tempo de execução das modelagens para o segundo modelo. A tabela abaixo apresenta os dados referentes a este modelo.

Tabela 4.2: Tabela com os dados referentes a execução das modelagens do magnetotelúrico para o segundo modelo.

	MEFNT		MEFI	
	TE	TM	TE	TM
Numero de elementos	54473	39620	21812	23956
Numero de nós	27272	20588	21891	24512
Tempo de montagem do sistema(Frequência= 0.01 hz)	0.03s	0.026s	0.102s	0.2s
Tempo de montagem do sistema(Frequência= 0.1 hz)	0.053s	0.386s	0.326s	0.204s
Tempo de montagem do sistema(Frequência= 1.0 hz)	0.058s	0.58s	0.336s	0.302s
Tempo de solução do sistema(Frequência= 0.01 hz)	0.54s	0.38s	0.318s	0.304s
Tempo de solução do sistema(Frequência= 0.1 hz)	0.524s	0.378s	0.348s	0.289s
Tempo de solução do sistema(Frequência= 1.0 hz)	0.52s	0.304s	0.28s	0.261s

Novamente se verifica que o MEFI é mais eficiente no tempo de solução do sistema linear, isso se deve a menor quantidade de nós utilizada nesse método, o que também indica uma economia considerável de memória.

5 CONCLUSÃO

Com base na comparação feita com as respostas obtidas de RUNG-ARUNWAN & SIRIPUNVARAPORN (2010), pode-se dizer que o MEF isoparamétricos possibilita realizar com precisão a modelagem numérica do método magnetotelúrico. E as respostas encontradas coincidiram com as destes autores.

Além disso, os testes feitos com os modelos mostraram que MEFI possibilita economizar memória, pois a malha quadrangular permitiu discretizar o domínio com uma menor quantidade que a triangular. Isso porque, para se ajustar a batimetria dos modelos com elementos triangulares é necessário uma grande quantidade de nós. Isso explica porque a malha triangular gerou uma densa "nuvem"de pontos nas regiões onde a topografia não era regular.

Também por conta da malha, o tempo para solucionar os sistemas lineares foi menor no MEF isoparamétrico em todos os testes realizados. Entretanto, na montagem do sistema ele sempre se mostrou menos eficiente, o que deve ao fato da matriz local e o vetor fonte serem calculados através de uma técnica de integração numérica.

Diante de tudo isso, constatou-se que o MEF isoparamétricos é uma boa ferramenta para modelagem numérica do Magnetotelúrico. De modo que sua principal vantagem é permitir a utilização de uma malha que economiza memória. É interessante citar que os elementos quadrangulares podem ser viáveis não somente para problemas com batimetria, mas para outros casos também, como por exemplo a construção de uma malha para inversão e em problemas tridimensionais.

REFERÊNCIAS

ASSAN, A.E. Método dos elementos finitos - primeiros passos. São Paulo: Unicamp, 2003.

BECKER, E.B.; CAREY, G.F.; ODEN, J.T. Finite elements: an introduction. New Jersey: Prentice-Hall, 1981.

CAGNIARD, Louis. Basic theory of the magneto-telluric method of geophysical prospecting. **Geophysics**, v. 18, n. 3, p. 605-635, 1953.

CANTWELL, Thomas. **Detection and analysis of low frequency magnetotelluric signals**. 1960. Tese de Doutorado. Massachusetts Institute of Technology.

CONSTABLE, Steven; SRNKA, Leonard J. An introduction to marine controlled-source electromagnetic methods for hydrocarbon exploration. **Geophysics**, v. 72, n. 2, p. WA3-WA12, 2007.

IRONS, Bruce M. Engineering applications of numerical integration in stiffness methods. **AIAA journal**, v. 4, n. 11, p. 2035-2037, 1966.

MITSUHATA, Yuji; UCHIDA, Toshihiro. 3D magnetotelluric modeling using the T-Ω finite-element method. **Geophysics**, v. 69, n. 1, p. 108-119, 2004.

MOGI, Tohru. Three-dimensional modeling of magnetotelluric data using finite element method. **Journal of applied geophysics**, v. 35, n. 2-3, p. 185-189, 1996.

NAM, Myung Jin et al. 3D magnetotelluric modelling including surface topography. **Geophysical Prospecting**, v. 55, n. 2, p. 277-287, 2007.

NEVES, F.A. Modelagem direta bidimensional do método magnetotelúrico com o método dos elementos finitos de arestas, 2014. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal do Pará.

RIJO, L. Eletrical geophysics 1-d earth direct modeling. Notas de aula, 2004. Universidade Federal do Pará.

RIJO, L. Electrical geophysics 2d-3d earth modeling. Relat. téc., 2008. Universidade Federal do Pará.

ROY, Kalyan Kumar. **Potential theory in applied geophysics**. Springer Science & Business Media, 2007.

RUNG-ARUNWAN, Tawat; SIRIPUNVARAPORN, Weerachai. An efficient modified hierarchical domain decomposition for two-dimensional magnetotelluric forward modelling. **Geophysical Journal International**, v. 183, n. 2, p. 634-644, 2010.

SILVA, H.F. Modelagem numérica de dados mcsem 2.5-d, 2012. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal do Pará.

SIMPSON, Fiona; BAHR, Karsten. **Practical magnetotellurics**. Cambridge University Press, 2005.

TIKHONOV, A. N. On determining electrical characteristics of the deep layers of the Earth's crust. In: **Doklady**. 1950. p. 295-297.

VOZOFF, Keeva. The magnetotelluric method in the exploration of sedimentary basins. **Geophysics**, v. 37, n. 1, p. 98-141, 1972.

YANG, Junmo; MIN, Dong-Joo; YOO, Hai-Soo. Sea effect correction in magnetotelluric (MT) data and its application to MT soundings carried out in Jeju Island, Korea. **Geophysical Journal International**, v. 182, n. 2, p. 727-740, 2010.