



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ  
NÚCLEO DE DESENVOLVIMENTO AMAZÔNICO EM ENGENHARIA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM  
ENGENHARIA DE BARRAGEM E GESTÃO AMBIENTAL

DAVI BARBOSA COSTA DA SILVA

**ANÁLISE NUMÉRICA DA ESTABILIDADE DE TALUDES UTILIZANDO O  
MÉTODO DE GALERKIN LIVRE DE ELEMENTOS**

Tucuruí – PA  
2017

DAVI BARBOSA COSTA DA SILVA

**ANÁLISE NUMÉRICA DA ESTABILIDADE DE TALUDES UTILIZANDO O  
MÉTODO DE GALERKIN LIVRE DE ELEMENTOS**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Barragem e Gestão Ambiental, da Universidade Federal do Pará, como requisito para obtenção do título de Mestre em Engenharia de Barragem e Gestão Ambiental.

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Rassy Teixeira.

Tucuruí – PA  
2017

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD  
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará  
Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a)  
autor(a)**

---

S586a Silva, Davi Barbosa Costa da  
Análise numérica da estabilidade de taludes utilizando o  
Método de Galerkin Livre de Elementos / Davi Barbosa  
Costa da Silva. — 2017.  
147 f. : il. color.

Orientador(a): Prof. Dr. Marcelo Rassy Teixeira  
Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação em  
Engenharia de Barragem e Gestão Ambiental, Núcleo de  
Desenvolvimento Amazônico em Engenharia, Universidade  
Federal do Pará, Tucuruí, 2017.

1. Taludes - Estabilidade. 2. Barragens - Segurança.  
3. Galerkin, Métodos de. I. Título.

CDD 624.151363

---

DAVI BARBOSA COSTA DA SILVA


**ANÁLISE NUMÉRICA DA ESTABILIDADE DE TALUDES UTILIZANDO O  
MÉTODO DE GALERKIN LIVRE DE ELEMENTOS**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Barragem e Gestão Ambiental, da Universidade Federal do Pará, como requisito para obtenção do título de Mestre em Engenharia de Barragem e Gestão Ambiental.

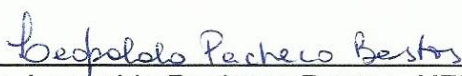
Orientador: Prof. Dr. Marcelo Rassy Teixeira.

Aprovada em 03 de maio de 2017.

BANCA EXAMINADORA:

  
\_\_\_\_\_  
Dr. Marcelo Rassy Teixeira, UFPA – Orientador

  
\_\_\_\_\_  
Dr. Aarão Ferreira Lima Neto, UFPA

  
\_\_\_\_\_  
Dr. Leopoldo Pacheco Bastos, UFPA

Dedico este trabalho a meus tios, Augusto Aleixo da Silva e Verônica Costa da Silva, a meus pais, João Barbosa da Silva e Elvira Costa da Silva, e à Edileuza de Sarges Almeida, por terem me apoiado de forma incondicional.

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço à minha família, pelo incentivo à minha formação e por todo o carinho demonstrado.

Agradeço ao meu orientador e colega de profissão, Marcelo Rassy Teixeira, por ter indicado todos os meios e recursos para que fosse possível realizar esta pesquisa.

Agradeço a Edileuza de Sarges Almeida, pelo companheirismo e apoio, que foi essencial para a elaboração deste trabalho.

Agradeço aos amigos, por estarem sempre presentes e compartilharem os momentos da vida.

Agradeço aos colegas do curso e aos professores, por toda a experiência profissional e conhecimento compartilhados.

E agradeço à Eletrobras/Eletronorte, pela contribuição no acesso ao arquivo técnico da UHE Tucuruí.

## RESUMO

A segurança de barragens está associada à estabilidade das estruturas que as compõem. Em uma barragem de terra, mencionam-se os taludes, que são superfícies que formam um ângulo com a horizontal. O seu estudo utilizando métodos numéricos, como o método de elementos finitos (MEF), possibilita a estimativa de deslocamentos, tensões e deformações. Busca-se neste estudo contribuir na eficiência da análise numérica aplicada aos taludes. Por meio do desenvolvimento de um recurso voltado especificamente para barragens, o objetivo no presente trabalho é apresentar um algoritmo capaz de verificar a estabilidade de taludes no período de sua construção utilizando um método numérico sem malha. Para as análises propostas, utilizou-se o Método de Galerkin Livre de Elementos (MGLE), aplicando-o no método de redução de resistência (MRR). Após a idealização de um modelo e solução utilizando o método de equilíbrio limite e o método de redução de resistência com o auxílio do MEF, ambos em *software* comercial (GeoStudio), obtiveram-se e compararam-se os resultados de um modelo em que se aplica o método de redução de resistência com o uso do MGLE. A análise pelo método de redução da resistência foi dividida em determinação das tensões *in situ* da fundação, construção do aterro e redução da resistência do solo. Numericamente, na etapa de obtenção das tensões *in situ*, o MGLE apresentou melhor resultado quando comparado ao MEF, tendo como referência o modelo matemático clássico da mecânica dos solos para superfícies subhorizontais. Nas etapas de construção do aterro e de redução da resistência, o erro relativo aproximado do MGLE em relação ao MEF foi quase sempre superior a 5%. No entanto, observou-se que nas principais respostas, isto é, na determinação da superfície de ruptura e do fator de redução de resistência, os resultados foram similares, tanto no método de redução de resistência, com o MGLE em relação ao MEF, quanto em relação ao método de equilíbrio limite. Na comparação com este último, foram obtidos fatores de redução de resistência mais conservadores. Apesar de ser uma informação não disponível abertamente, concluiu-se que o modelo constitutivo elastoplástico utilizado no *software* comercial não é o modelo linear elástico perfeitamente plástico, que foi a hipótese adotada para o MGLE. Além das diferenças devido ao comportamento idealizado para o material, a aplicação de método sem malha também requer maiores estudos quanto à definição da representação do domínio da estrutura. A principal vantagem da adoção do método proposto é a possibilidade de serem testadas maiores quantidades de parâmetros em menor tempo, o que o torna útil em estudos preliminares de construção. Para tanto, deve ser observado que, apesar das limitações quanto à quantificação dos deslocamentos, que são úteis para associar resultados numéricos às observações em campo, as condições nas quais ocorre a ruptura podem ser estimadas de maneira satisfatória, conforme mostrado em comparações com os métodos atualmente mais utilizados.

Palavras-chave: estabilidade de taludes. Segurança de barragens. Método de Galerkin livre de elementos. Método de redução de resistência.

## ABSTRACT

The safety of dams is associated to the stability of the structures that compose them. In a earthfill dam, there are mentioned the slopes, which are surfaces that form an angle with the horizontal one. Its study using numerical methods, like the finite element method (FEM), makes possible the estimate of displacements, stresses and strains. It is aimed in this study to contribute in the efficiency of the numerical analysis devoted to the slopes. Through the development of a resource turned specifically to dams, the objective in the present work is to present an algorithm able to check the stability of slopes in the period of its construction using a numerical method without mesh. For the proposed analyses, there was used the element free Galerkin method (EFGM), applying it in the strength reduction method (SRM). After the idealization of a model and solution using the limit equilibrium method and the strength reduction method with the help of the FEM, both in commercial software (GeoStudio), there were obtained and were compared the results of a model in which there is applied the strength reduction method with the use of the EFGM. The analysis by the strength reduction method was divided in determination of the *in situ* stresses of the foundation, construction of the landfill and strength reduction of the soil. Numerically, in the stage of getting the *in situ* stresses, the EFGM presented better result when compared to FEM, taking as a reference the classic mathematical model of the soil mechanics for subhorizontal surfaces. In the stages of construction of the landfill and of strength reduction, the relative approximation error the EFGM regarding the FEM was nearly always superior to 5%. However, it noticed if that in the main answers, i.e. in the determination of the slip surface and of the strength reduction factor, the results were similar, as in the strength reduction method, with the EFGM regarding the FEM, as that regarding the limit equilibrium method. In the comparison with the FEM, there were obtained more conservative strength reduction factors. In spite of being an information not available openly, it concluded if that the elastoplastic constitutive model used in the commercial software is not the linear elastic perfectly plastic model, which was hypothesis adopted for the EFGM. Besides the differences due to the behavior idealized for the material, the application of meshfree method also requires more studies related to the definition of the representation of the domain. The main advantage of the adoption of the proposed method is the possibility to test more parameters in less time, which makes it useful in preliminary construction studies. For that, it must be observed that, in spite of the limitations in displacement estimation, which are useful to associate numerical results to the observations in field, the conditions in which there is slip at slope can be appreciated in satisfactory, conformable way when it was shown in comparisons with the most used methods.

Keywords: slope stability. Dams safety. Element free Galerkin method. Strength reduction method.



## LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Exemplo de talude formado por um aterro experimental instrumentado (DAS; SOBHAN, 2015). Adaptada.....	23
Figura 2: Partes de um talude natural que sofreu ruptura por escorregamento (GERSCOVICH, 2012). Adaptada. ....	24
Figura 3: Categorias dos principais métodos para análise da estabilidade de taludes e etapas do método de redução de resistência. ....	25
Figura 4: Exemplos de elementos utilizados no MEF: (a) elemento quadrilateral de quatro nós; (b) elemento triangular de seis nós; (c) elemento quadrilateral de doze nós para contornos curvos (FISH; BELYTCHKO, 2007). Adaptada. ....	27
Figura 5: Representação de diferentes tipos de taludes. (a) Plano e reto; (b) convexo; (c) côncavo.....	29
Figura 6: Exemplo de modelo de talude convexo analisado com o MEF, após a ruptura (SUN et al., 2016). ....	29
Figura 7: Propriedades do solo para análise de estabilidade. (a) Propriedades uniformes (caso determinístico); (b) resistência variável (TABARROKI et al., 2013). ....	30
Figura 8: Modelos do aterro com muro de arrimo. (a) Representação do aterro experimental construído. (b) Exemplo de modificação feita no modelo numérico, com o prolongamento de camadas de geogrelhas (CHEN, J. F., et al., 2014). Adaptada. ....	31
Figura 9: Aplicação de método de passo múltiplo combinado com a teoria de grafos: (a) diagrama esquemático de uma superfície de ruptura; (b) superfície de ruptura crítica obtida pelo método (ZHENG et al., 2014). Adaptada. ....	32
Figura 10: Aplicação de critério baseado em variação de energia para obtenção do fator de redução de resistência. (a) Geometria do talude e malha em elementos finitos. (b) Critério baseado em deslocamentos, com o valor do fator de redução de resistência obtido. (c) Critério baseado em variação de energia, com indicação do fator de redução de resistência obtido (TU et al., 2016). Adaptada. ....	33
Figura 11: Ilustração de ruptura de talude em uma análise tridimensional (JI; CHAN, 2014). Adaptada.....	34
Figura 12: Modelo em elementos finitos com a inserção das barras representando as geogrelhas (LUO; BATHURST; JAVANKHOSHDEL, 2016). Adaptada. ....	37
Figura 13: Representação do critério de ruptura de Mohr. O estado de tensões indicado pelo círculo A, tangente à envoltória, representa uma situação na qual houve a ruptura, enquanto na situação indicada pelo círculo B, não ocorreu (PINTO, 2006). ....	38

Figura 14: Representação do critério de ruptura de Coulomb (PINTO, 2006). .....	38
Figura 15: Critério de ruptura de Mohr-Coulomb (DAS; SOBHAN, 2015). .....	40
Figura 16: Círculos de Mohr das tensões efetivas (POTTS; ZDRAVKOVIC, 1999). Adaptada. ....	41
Figura 17: Representação geométrica dos invariantes (POTTS; ZDRAVKOVIC, 1999). Adaptada. ....	43
Figura 18: Representação da superfície de Mohr-Coulomb no espaço das tensões principais (POTTS; ZDRAVKOVIC, 1999). Adaptada. ....	46
Figura 19: Representação da função de potencial plástico e do vetor das deformações plásticas, supondo $\sigma_2 = 0$ (POTTS; ZDRAVKOVIC, 1999). Adaptada. ....	47
Figura 20: Representação de uma superfície de potencial plástico e do vetor de deformações no espaço das tensões principais (POTTS; ZDRAVKOVIC, 1999). Adaptada. ....	48
Figura 21: Indicação do vetor de deformações plásticas e sua relação com o critério de Mohr-Coulomb no estado plano (POTTS; ZDRAVKOVIC, 1999). Adaptada. ....	50
Figura 22: Esquema de ruptura de talude por escorregamento (DAS; SOBHAN, 2015). .....	51
Figura 23: Subdivisão da massa de solo em fatias com uma superfície de ruptura circular (DAS; SOBHAN, 2015). ....	53
Figura 24: Modelo rígido-plástico adotado no método do equilíbrio limite (GERSCOVICH, 2012). ....	54
Figura 25: Discretização de um domínio. (a) Geometria e (b) malha de elementos finitos triangulares (FISH; BELYTCHKO, 2007). ....	56
Figura 26: Representação de um domínio usando método sem malha (CENTER FOR ACES, 2002). ....	56
Figura 27: Triângulo de Pascal para monômios em casos bidimensionais (LIU, 2003). .....	59
Figura 28: Superposição do domínios de influência no método dos MQM, garantindo a continuidade da solução (DOLBOW; BELYTCHKO, 1998). ....	61
Figura 29: Exemplo de aproximação pelo MMQM no método de Galerkin livre de elementos em um caso unidimensional. (a) A função peso unitária significa a influência de todos os nós em relação à posição $x = 0,5$ , por exemplo. (b) O resultado geral é uma regressão linear (DOLBOW; BELYTCHKO, 1998). ....	64
Figura 30: Exemplo de aproximação pelo MMQM no método de Galerkin livre de elementos em um caso unidimensional. (a) A função peso possui suporte compacto	

constante, sendo exemplificado o caso da posição  $x = 0,5$ . (b) Para o domínio como um todo, o resultado é uma interpolação linear (DOLBOW; BELYTCHKO, 1998). 65

Figura 31: Exemplo de aproximação pelo MMQM no método de Galerkin livre de elementos em um caso unidimensional. (a) A função peso possui suporte compacto, é suave e se estende além dos pontos considerados na Figura 30a. Aqui, exibe-se o exemplo quando centrada  $x = 0,5$ . (b) Resultado da aproximação para todo o domínio: uma curva suavizada (DOLBOW; BELYTCHKO, 1998). 66

Figura 32: Domínios de influência com diferentes formatos. Outros formatos que podem ser usados além do circular são o retangular e o elíptico (LIU, 2003). 68

Figura 33: Componentes do tensor das tensões de Cauchy, em duas dimensões (FISH; BELYTCHKO, 2007). 71

Figura 34: Relação entre o tensor das tensões e a tração atuante na superfície (FISH; BELYTCHKO, 2007). 72

Figura 35: Domínio estudado. (a) Representação do domínio  $\Omega$ , do contorno  $\Gamma$ , da tração no contorno e do elemento de dimensões  $\Delta x$  e  $\Delta y$ . (b) Equilíbrio de forças no elemento destacado (FISH; BELYTCHKO, 2007). 72

Figura 36: Modelo de barragem analisado. 80

Figura 37: Representação dos apoios considerados no modelo com indicação das ordenadas nas quais se aplicaram as condições de contorno. 82

Figura 38: Disposição dos nós que representam o modelo. (a) Espaçamento entre os nós da fundação. (b) Nós em que se aplicaram condições de contorno, em vermelho. (c) Domínio de influência de um nó. (d, e) Células de integração utilizadas para quadratura de Gauss. 84

Figura 39: Disposição dos pontos de Gauss no interior das células. 85

Figura 40: Nós que compõem as interfaces entre camadas com a indicação das iterações a partir das quais eles passam a ser considerados. 85

Figura 41: Nós no interior dos domínios de influência dos pontos de Gauss que são considerados (destacados em vermelho). Pontos de Gauss (a) em uma camada, (b) na fundação e (c) na interface. (d) Distribuição dos pontos de Gauss na interface. 86

Figura 42: Fluxograma para cálculo das tensões *in situ* e dos deslocamentos, deformações e tensões de construção do aterro. 88

Figura 43: Fluxograma do processo de redução de resistência. 89

Figura 44: Ilustração das variáveis  $H$  e  $n$ , indicando a altura e a inclinação. 90

Figura 45: Pontos e parâmetros analisados para estudo de convergência. 91

Figura 46: Deslocamento vertical na crista em função do número de nós. 93

Figura 47: Deslocamento horizontal na face em função do número de nós.....	93
Figura 48: Tensão vertical em um ponto da fundação em função do número de nós. .....	94
Figura 49: Variação das tensões de acordo com a profundidade nos modelos com espaçamento horizontal de 2 m. ....	95
Figura 50: Variação das tensões de acordo com a profundidade nos modelos com espaçamento horizontal de 1 m. ....	96
Figura 51: Disposição final dos nós após a determinação das suas coordenadas. ..	97
Figura 52: Influência do tamanho adimensional do domínio de suporte. ....	98
Figura 53: Tensões <i>in situ</i> obtidas com o MEF.....	99
Figura 54: Tensões <i>in situ</i> obtidas com o MGLE.....	99
Figura 55: Comparação das tensões <i>in situ</i> obtidas por meio dos diferentes métodos. .....	100
Figura 56: Deslocamentos verticais obtidos com o MEF. ....	101
Figura 57: Deslocamentos verticais obtidos com o MGLE. ....	101
Figura 58: Indicação da seção na qual avaliaram-se os deslocamentos ocorridos no modelo. ....	102
Figura 59: Comparação entre os deslocamentos ao longo da profundidade com os dois métodos numéricos. ....	103
Figura 60: Pontos que sofreram ruptura de acordo com o critério de Mohr-Coulomb. .....	103
Figura 61: Estados de tensão durante a inserção das camadas do aterro em uma camada inferior. Resultados obtidos com o MEF. ....	104
Figura 62: Estados de tensão durante a inserção das camadas do aterro em uma camada inferior. Resultados obtidos com o MGLE. ....	104
Figura 63: Estados de tensão durante a inserção das camadas do aterro em uma camada intermediária. Resultados obtidos com o MEF. ....	105
Figura 64: Estados de tensão durante a inserção das camadas do aterro em uma camada intermediária. Resultados obtidos com o MGLE. ....	105
Figura 65: Evolução dos deslocamentos ao longo da inserção das camadas. Resultados obtidos com o MEF.....	106
Figura 66: Evolução dos deslocamentos ao longo da inserção das camadas. Resultados obtidos com o MGLE. ....	107

Figura 67: Comparação dos deslocamentos obtidos com os dois métodos. ....	107
Figura 68: Comparação entre os deslocamentos de modelo (a) analisado já em seu estágio final e (b) resolvido por meio da inserção gradual das camadas. ....	108
Figura 69: Erros relativos aproximados nos deslocamentos verticais do MGLE em relação ao MEF ao longo da inserção das camadas. ....	110
Figura 70: Tensões verticais utilizando o MEF (compressão com sinal positivo). ...	111
Figura 71: Tensões verticais obtidas com o MGLE. ....	112
Figura 72: Seção na qual foram analisadas as tensões e as deformações. ....	112
Figura 73: Tensões verticais na seção indicada na Figura 72. (a) Comparação dos resultados e (b) erro relativo aproximado após inserção da camada 8. ....	113
Figura 74: Tensões horizontais utilizando o MEF (compressão com sinal positivo). ....	113
Figura 75: Tensões horizontais obtidas com o MGLE. ....	114
Figura 76: Tensões horizontais na seção indicada na Figura 72. (a) Comparação dos resultados e (b) erro relativo aproximado após inserção da camada 8. ....	114
Figura 77: Tensões de cisalhamento utilizando o MEF. ....	115
Figura 78: Tensões de cisalhamento obtidas com o MGLE. ....	115
Figura 79: Tensões de cisalhamento na seção indicada na Figura 72. (a) Comparação dos resultados e (b) erro relativo aproximado após inserção da camada 8. ....	116
Figura 80: Deformações verticais utilizando o MEF (compressão com sinal positivo). ....	117
Figura 81: Deformações verticais utilizando o MGLE. ....	117
Figura 82: Deformações verticais na seção indicada na Figura 72. (a) Comparação dos resultados e (b) erro relativo aproximado após inserção da camada 8. ....	118
Figura 83: Deformações horizontais utilizando o MEF (compressão com sinal positivo). ....	118
Figura 84: Deformações horizontais utilizando o MGLE. ....	119
Figura 85: Deformações horizontais na seção indicada na Figura 72. (a) Comparação dos resultados e (b) erro relativo aproximado após inserção da camada 8. ....	119
Figura 86: Deformações por cisalhamento utilizando o MEF (compressão com sinal positivo). ....	120
Figura 87: Deformações por cisalhamento utilizando o MGLE. ....	120

Figura 88: Deformações por cisalhamento na seção indicada na Figura 72. (a) Comparação dos resultados e (b) erro relativo aproximado após inserção da camada 8. ....	121
Figura 89: Pontos considerados para a obtenção do FRR. ....	122
Figura 90: Deslocamentos verticais na crista para determinação do FRR. ....	123
Figura 91: Curvas tensão-deformação para o ponto indicado na Figura 89, com a tensão representada pela diferença entre as tensões principais. ....	124
Figura 92: Detalhe do deslocamento vertical na crista utilizando o MEF. ....	125
Figura 93: Critério de ruptura no método de redução da resistência (TU et al. 2016). Adaptada. ....	126
Figura 94: Deslocamentos horizontais na face para determinação do FRR. ....	127
Figura 95: Detalhe do deslocamento horizontal na face utilizando o MEF. ....	127
Figura 96: Deslocamentos horizontais no pé do talude para determinação do FRR. ....	128
Figura 97: Detalhe do deslocamento horizontal no pé do talude utilizando o MEF. ....	128
Figura 98: Deformações por cisalhamento no MGLE, com FRR 1,2. ....	129
Figura 99: Solução utilizando um método de equilíbrio limite, com indicação da superfície crítica de ruptura, do fator de segurança e do centro do círculo de ruptura. ....	130
Figura 100: Solução utilizando um método de equilíbrio limite com fator de segurança 0,3% superior ao da superfície crítica de ruptura. ....	131
Figura 101: As quinze superfícies de rupturas com menores fatores de segurança obtidas pelo método de equilíbrio limite. ....	131
Figura 102: Sobreposição das soluções utilizando os dois métodos, mostrando a coincidência das superfícies de ruptura. ....	132
Figura 103: Desenvolvimento das regiões solicitadas no regime plástico no MEF. ....	133
Figura 104: Desenvolvimento das regiões solicitadas no regime plástico no MGLE. ....	133
Figura 105: Deslocamentos ocorridos no aterro analisado com o MEF durante a redução de resistência. ....	134
Figura 106: Deslocamentos ocorridos no aterro analisado com o MGLE durante a redução de resistência. ....	134
Figura 107: Comparação do FRR obtido com o MGLE ao FS obtido com o MEqL, para os aterros com altura de 1 a 9 m e inclinação 1:1,7. ....	136

- Figura 108: Comparação do FRR obtido com o MGLE ao FS obtido com o MEqL, para os aterros com altura de 1 a 9 m e inclinação 1:2..... 136
- Figura 109: Comparação do FRR obtido com o MGLE ao FS obtido com o MEqL, para os aterros com altura de 1 a 9 m e inclinação 1:2,3. .... 136
- Figura 110: Deformações por cisalhamento usando o MGLE para determinação da superfície de ruptura no aterro com 1 m de altura e inclinação 1:2,0. .... 137
- Figura 111: Superfície de ruptura crítica obtida com o método de equilíbrio limite no aterro com 1 m de altura e inclinação 1:2,0. O valor na figura representa o fator de segurança calculado, com a indicação do centro do círculo de ruptura. .... 138
- Figura 112: Superposição das deformações por cisalhamento e da superfície crítica de ruptura para o aterro de 1 m de altura com inclinação 1:2,0. .... 138
- Figura 113: Deformações por cisalhamento usando o MGLE para determinação da superfície de ruptura no aterro com 6 m de altura e inclinação 1:1,7. .... 138
- Figura 114: Superfície de ruptura crítica obtida com o método de equilíbrio limite no aterro com 6 m de altura e inclinação 1:1,7. O valor na figura representa o fator de segurança calculado, com a indicação do centro do círculo de ruptura. .... 139
- Figura 115: Superposição das deformações por cisalhamento e da superfície crítica de ruptura para o aterro de 6 m de altura com inclinação 1:1,7. .... 139
- Figura 116: Deformações por cisalhamento usando o MGLE para determinação da superfície de ruptura no aterro com 8 m de altura e inclinação 1:1,7. .... 140
- Figura 117: Superfície de ruptura crítica obtida com o método de equilíbrio limite no aterro com 8 m de altura e inclinação 1:1,7. O valor na figura representa o fator de segurança calculado, com a indicação do centro do círculo de ruptura. .... 140
- Figura 118: Superposição das deformações por cisalhamento e da superfície crítica de ruptura para o aterro de 8 m de altura com inclinação 1:1,7. .... 140

**LISTA DE TABELAS**

Tabela 1: Resultados utilizados na análise de convergência quando o espaçamento horizontal foi igualado a 2 m. ....	91
Tabela 2: Resultados utilizados na análise de convergência quando o espaçamento horizontal foi igualado a 1 m. ....	92
Tabela 3: Quantidades de nós quando o espaçamento horizontal foi igualado a 2 m. ....	95
Tabela 4: Quantidades de nós quando o espaçamento horizontal foi igualado a 1 m. ....	95
Tabela 5: Fatores de redução de resistência verificados e respectivas propriedades do solo do aterro. ....	122
Tabela 6: Erros relativos aproximados dos deslocamentos verticais na crista na avaliação dos FRR. ....	125



**LISTA DE QUADROS**

Quadro 1: Exemplos de métodos sem malha desenvolvidos e algumas de suas características (LIU, 2003). .....	57
Quadro 2: Propriedades dos materiais utilizados no modelo (JOPPERT JUNIOR, 2007). Adaptada.....	80
Quadro 3: Fatores de redução de resistência, fatores de segurança e erros relativos aproximados obtidos com os modelos. ....	135

**LISTA DE SIGLAS**

ICOLD	<i>International Commission on Large Dams</i>
USCOLD	<i>United States Committee on Large Dams</i>
MEF	Método de Elementos Finitos
MGLE	Método de Galerkin Livre de Elementos
FS	Fator de segurança
FRR	Fator de redução de resistência
MMQM	Método dos Mínimos Quadrados Móveis

## LISTA DE SÍMBOLOS

### Alfabeto latino

$F_s$	Fator de segurança
$c'_f$	Coesão efetiva (para ocorrência de falha)
$c'_d$	Coesão desenvolvida (ou mobilizada)
$u$	Poropressão
$s$	Invariante que representa a distância da origem até o plano de tensões no espaço das tensões principais
$t$	Invariante que representa a distância da diagonal das tensões no espaço das tensões principais até um ponto no plano de tensões
$P$	Função de potencial plástico
$F$	Função de ruptura
$u(x)$	Solução exata de uma equação diferencial
$u^h(x)$	Solução aproximada de uma equação diferencial
$\mathbf{x}$	Vetor de coordenadas no plano cartesiano
$a_i(\mathbf{x})$	$i$ -ésimo coeficiente não constante na aproximação por mínimos quadrados móveis
$\mathbf{p}(\mathbf{x})$	Vetor que representa uma base polinomial no método dos mínimos quadrados móveis
$w_k$	Função peso
$r$	Distância normalizada para definição do domínio de influência
$d_s$	Tamanho do domínio de suporte
$d_c$	Distância característica entre nós
$A_s$	Região coberta pelo domínio de suporte
$n_A$	Número de nós contidos na região do domínio de suporte

<b>n</b>	Vetor normal unitário
<b>b</b>	Força de corpo
<b>D</b>	Matriz de rigidez do material
<b>E</b>	Módulo de elasticidade
<b>t</b>	Trações atuantes na face de um elemento infinitesimal
$\bar{\mathbf{t}}$	Força prescrita na fronteira natural
$\bar{\mathbf{u}}$	Deslocamento prescrito na fronteira essencial
<b>u</b>	Vetor de deslocamentos
$W_f$	Trabalho realizado pelas forças externas em um corpo
$W_i$	Energia na interface entre duas regiões de um corpo
<b>K</b>	Matriz de rigidez na forma fraca da equação de equilíbrio de forças
<b>U</b>	Vetor deslocamento na forma fraca da equação de equilíbrio de forças
<b>G</b>	Matriz que controla a imposição das condições de contorno na fronteira essencial
$G_i$	Matriz que controla a imposição das condições de contorno na fronteira de interface entre duas regiões
<b>F</b>	Vetor de forças
<b>q</b>	Deslocamentos prescritos na fronteira essencial

#### Alfabeto grego

$\tau_f$	Resistência ao cisalhamento (ou tensão de cisalhamento para ocorrência de falha)
$\tau_d$	Tensão de cisalhamento desenvolvida (ou mobilizada)
$\sigma'$	Tensão normal efetiva
$\phi'_f$	Ângulo de atrito interno efetivo (para ocorrência de falha)
$\phi'_d$	Ângulo de atrito interno desenvolvido
$\sigma$	Tensão normal

$\sigma_1$	Tensão principal maior
$\sigma_2$	Tensão principal intermediária
$\sigma_3$	Tensão principal menor
$\theta$	Invariante (ângulo de Lode)
$\sigma_m$	Média das tensões
$\sigma_{xx}$	Tensão normal horizontal atuante em um plano vertical
$\sigma_{yy}$	Tensão normal vertical atuante em um plano horizontal
$\sigma_{zz}$	Tensão normal horizontal atuante em um plano vertical
$\tau_{xy}$	Tensão de cisalhamento atuante no plano xy
$\varepsilon$	Deformação específica
$\varepsilon^p$	Deformação específica no regime plástico
$\psi$	Ângulo de dilatância
$\gamma$	Deformação por cisalhamento. Peso específico.
$\Omega$	Domínio
$\Phi$	Função de forma
$\alpha$	Tamanho adimensional do domínio de suporte
$\varepsilon_{xx}$	Deformação específica na direção horizontal
$\varepsilon_{yy}$	Deformação específica na direção vertical
$\varepsilon_{zz}$	Deformação específica na direção horizontal, ortogonal ao plano xy
$\varepsilon_{xy}$	Deformação por cisalhamento
$\nabla_S$	Operador diferencial gradiente
$\boldsymbol{\tau}$	Tensor das tensões de Cauchy
$\boldsymbol{\sigma}$	Vetor das tensões
$\nu$	Coefficiente de Poisson

$\Pi_S$	Energia de deformação do sistema
$\Gamma_t$	Fronteira natural
$\Gamma_u$	Fronteira essencial
$\Gamma_i$	Fronteira de interface entre duas regiões
$\lambda$	Multiplicadores de Lagrange

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO.....</b>	<b>23</b>
<b>1.1</b>	<b>Justificativa .....</b>	<b>26</b>
<b>1.2</b>	<b>Objetivos .....</b>	<b>28</b>
1.2.1	Geral.....	28
1.2.2	Específicos .....	28
<b>2</b>	<b>REVISÃO DE LITERATURA.....</b>	<b>29</b>
<b>2.1</b>	<b>Estudos Relacionados.....</b>	<b>29</b>
<b>2.2</b>	<b>Estabilidade de Taludes .....</b>	<b>37</b>
2.2.1	Resistência ao cisalhamento dos solos.....	37
2.2.2	Invariantes .....	41
2.2.3	Função de potencial plástico e regra de fluxo .....	46
2.2.4	Derivada da função de potencial plástico.....	50
2.2.5	Fator de segurança de taludes .....	51
2.2.6	Modelos para análise da estabilidade de taludes .....	53
<b>2.3</b>	<b>Métodos sem Malha.....</b>	<b>55</b>
2.3.1	Método de Galerkin Livre de Elementos .....	58
2.3.2	Método dos Mínimos Quadrados Móveis.....	58
2.3.3	Obtenção do sistema de equações lineares no MGLE .....	69
<b>2.4</b>	<b>Integração Numérica Utilizando a Quadratura de Gauss.....</b>	<b>79</b>
<b>3</b>	<b>METODOLOGIA .....</b>	<b>80</b>
<b>3.1</b>	<b>Propriedades dos Solos.....</b>	<b>81</b>
<b>3.2</b>	<b>Geometria .....</b>	<b>81</b>
<b>3.3</b>	<b>Condições de Contorno .....</b>	<b>82</b>
<b>3.4</b>	<b>Posicionamento dos Nós.....</b>	<b>83</b>
<b>3.5</b>	<b>Procedimentos para a Análise .....</b>	<b>87</b>
<b>3.6</b>	<b>Modelos Adicionais para Validação.....</b>	<b>90</b>
<b>4</b>	<b>RESULTADOS E DISCUSSÕES.....</b>	<b>91</b>
<b>4.1</b>	<b>Estudo da Convergência.....</b>	<b>91</b>
<b>4.2</b>	<b>Definição do Domínio de Influência no MGLE .....</b>	<b>97</b>
<b>4.3</b>	<b>Tensões <i>in situ</i> .....</b>	<b>98</b>

<b>4.4</b>	<b>Fase de Construção</b> .....	<b>100</b>
4.4.1	Deslocamentos .....	101
4.4.2	Tensões e deformações .....	111
<b>4.5</b>	<b>Redução da Resistência</b> .....	<b>121</b>
4.5.1	Determinação do fator de redução de resistência .....	121
4.5.2	Determinação da superfície de ruptura .....	129
4.5.3	Comportamento da estrutura durante a redução da resistência .....	132
<b>4.6</b>	<b>Modelos Adicionais</b> .....	<b>135</b>
<b>5</b>	<b>CONCLUSÕES</b> .....	<b>142</b>
5.1	Definição da Quantidade de Nós .....	142
5.2	Comportamento no <i>Software</i> Comercial e no MGLE .....	142
5.3	Dificuldade na Definição da Geometria .....	143
5.4	Teste Mais Eficiente de Parâmetros .....	143
5.5	Obtenção do FRR e da Superfície de Ruptura .....	144
5.6	Sugestões para Trabalhos Futuros.....	144
	<b>REFERÊNCIAS</b> .....	<b>145</b>

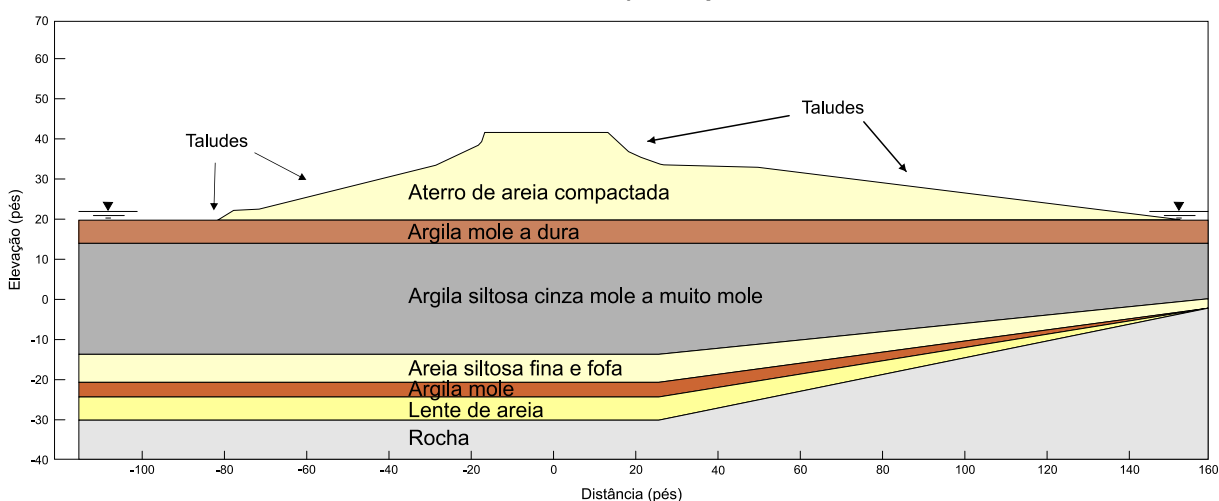


## 1 INTRODUÇÃO

Em se tratando da manutenção de barragens, verifica-se que são aplicáveis tanto medidas preventivas quanto corretivas. Sob este enfoque, podem ser mencionadas a modernização nas técnicas de instrumentação e auscultação de barragens e ainda a possibilidade de reinstrumentação nos casos em que se notam equipamentos em mau estado de conservação (SILVEIRA, 2015).

É possível afirmar ainda que a segurança de barragens está associada à estabilidade das estruturas que as compõem. No caso de barragens de terra, observa-se a existência de taludes, que são superfícies expostas que formam um ângulo com a horizontal (Figura 1).

**Figura 1: Exemplo de talude formado por um aterro experimental instrumentado (DAS; SOBHAN, 2015). Adaptada.**



Quanto à finalidade da manutenção, o objetivo dos procedimentos de segurança de barragens é proteger a sociedade e o meio ambiente contra operação indesejável, ou mesmo de falha de barragens e reservatórios. Com este intuito, são necessárias atividades normais e extraordinárias de inspeção e manutenção, bem como avaliações de rotina, sempre tendo em mente a essencialidade de uma cultura de segurança, isto é, segurança integrada em todas as atividades (CASTRO, 2015).

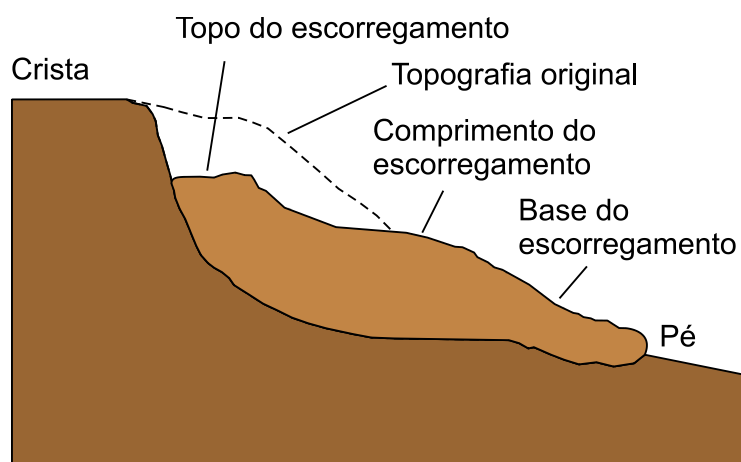
Se for considerado o atual estágio de conhecimento sobre o desenvolvimento de modelos matemáticos e numéricos, verifica-se que é possível acrescentar a manutenção preditiva às medidas já mencionadas. Justifica-se esta afirmação ao notar que para qualquer uma das fases da barragem, isto é, planejamento, projeto, construção, primeiro enchimento e primeiro vertimento, operação, desativação e usos

futuros, um modelo numérico, associado a planos de inspeção e instrumentação, possibilitaria a realização de medidas que garantissem a integridade do empreendimento (DUNCAN, 1996).

Uma característica que diferencia os taludes de barragens é a existência de diferentes situações que afetam a estrutura, devendo a sua estabilidade ser verificada considerando-se os períodos de construção, enchimento de reservatório, operação em longo prazo e esvaziamento rápido de reservatório. Além disto, um importante aspecto a ser inserido nos modelos envolvendo taludes de barragens é a influência das etapas de execução no período construtivo, no qual o efeito das novas camadas sobrejacentes influencia nos resultados (FARIAS; CORDÃO NETO, 2010; DUNCAN, 1996).

Em levantamento estatístico sobre causas de rupturas de barragens em todo o mundo, considerando relatórios de comitês como o ICOLD (*International Commission on Large Dams*) e o USCOLD (*United States Committee on Large Dams*), verificou-se que cerca de 65% entre 900 barragens eram de terra. A maior parte das ocorrências registradas foi nos Estados Unidos. Dentre estas 600 barragens, aproximadamente, cerca de 50% possuía até 15m de altura. Ainda em relação a este total de aproximadamente 600 barragens, a segunda maior causa de ruptura foi a ruptura por cisalhamento, fenômeno denominado escorregamento, ilustrado na Figura 2 (cerca de 8%). Este número foi inferior apenas às rupturas devido ocorrência de *piping*<sup>1</sup> (25%) (ZHANG; XU; JIA, 2007).

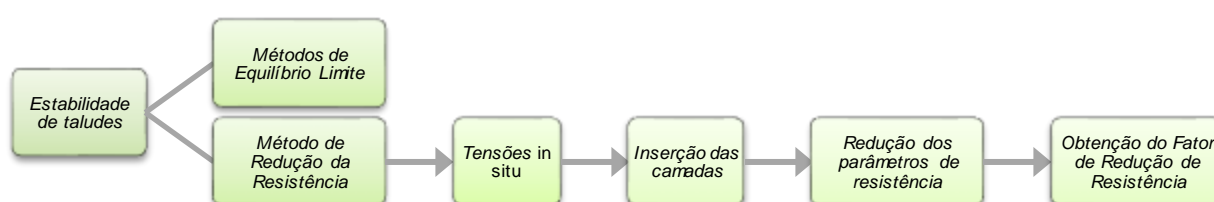
**Figura 2: Partes de um talude natural que sofreu ruptura por escorregamento (GERSCOVICH, 2012). Adaptada.**



<sup>1</sup> Evento relacionado à percolação no qual ocorre erosão interna no maciço devido a partículas que são carregadas a partir de um ponto próximo da jusante. O processo se desenvolve no sentido da jusante para a montante até que cause a ruptura.

Há duas categorias de métodos para se avaliar a estabilidade de taludes: os métodos de equilíbrio limite e o método de redução de resistência (Figura 3). O primeiro tem sido desenvolvido desde a primeira metade do século XX e oferece boas respostas quanto à previsão da forma de ocorrência da ruptura (DAS; SOBHAN, 2015; GERSCOVICH, 2012). A segunda categoria possui desenvolvimento mais recente, sendo, atualmente, aplicada com o uso de métodos numéricos, sobretudo o método de elementos finitos (MEF) (DUNCAN, 1996; GERSCOVICH, 2012).

**Figura 3: Categorias dos principais métodos para análise da estabilidade de taludes e etapas do método de redução de resistência.**



A principal vantagem dos métodos de redução de resistência é que possibilitam a avaliação da estabilidade do talude por meio dos deslocamentos e das deformações por cisalhamento. Desta forma, o comportamento previsto pode ser confirmado por meio da observação dos deslocamentos ocorridos, com equipamentos como estação total e radares de estabilidade. Com a associação entre o método numérico e o monitoramento, quaisquer valores de deslocamento que atinjam níveis pré-estabelecidos poderão ser reavaliados em modelo numérico para que se emitam os alertas necessários (DUNCAN, 1996; GERSCOVICH, 2012; KHALILZAD; GABR; HYNES, 2014).

O estudo da estabilidade de taludes pelo método de redução da resistência, de forma geral, consiste em duas etapas: verificação e quantificação da segurança. A etapa de verificação subdivide-se em outras duas: o cálculo dos deslocamentos, tensões e deformações iniciais, no regime elástico e, posteriormente, cálculo iterativo considerando o comportamento elastoplástico do solo. A etapa de quantificação da segurança, por sua vez, consiste em reduzir os parâmetros de resistência de modo a encontrar quais valores provocariam a ruptura do talude por escorregamento (Figura 3).

Em estudo recente, demonstrou-se que os métodos do equilíbrio limite e da redução da resistência não podem ser diretamente relacionados, apesar de seus

resultados serem aproximadamente iguais. Verificou-se ainda que um não substitui o outro de modo completo (TANG et al., 2016). Portanto, os resultados obtidos neste trabalho complementam as análises de equilíbrio limite, devendo os dois métodos serem utilizados em conjunto.

Nas aplicações e desenvolvimentos do método de redução da resistência encontradas na literatura, notam-se diferentes abordagens. O método é aplicável nos casos em que se deseja obter ábacos que constituem soluções simplificadas e preliminares para problemas complexos (SUN et al., 2016) ou, ainda, quando se deseja incluir a variabilidade espacial das propriedades de resistência do solo (TABAROKI et al., 2013; LUO; BATHURST; JAVANKHOSHDEL, 2016).

O método pode ser utilizado também quando se deseja verificar a contribuição de elementos estruturais de reforço, como, por exemplo, geogrelhas (CHEN, J. F., et al., 2014). Além da influência de elementos estruturais, outro fator que interfere na resistência ao cisalhamento do solo é a presença de ar e água, com ou sem a ocorrência de fluxo. A inclusão dos efeitos de percolação e a inserção de interação entre fases líquidas e gasosas caracteriza outra área investigada neste assunto (CHO, 2016).

Também é de interesse na pesquisa e aplicação do método de redução de resistência o estabelecimento de um critério numérico que permita a determinação do fator de redução de resistência. Um fato conhecido e adotado é o de que as deformações por cisalhamento e os deslocamentos horizontais indicam o local de ocorrência da superfície de ruptura (MATSUI; SAN, 1992; MATTHEWS; FAROOK; HELM, 2014). Entretanto, a determinação do valor do fator de redução de resistência utilizando estes resultados é subjetivo. Outros critérios podem ser obtidos para reduzir a dependência do usuário dos *softwares* (TU et al., 2016; CHEN, X., et al., 2014).

Métodos alternativos aos de equilíbrio limite e ao de redução da resistência também são objetos de estudo neste ramo da geotecnia. O objetivo destes métodos, muitas vezes, consiste em determinar mais rapidamente a posição da superfície de ruptura e o fator de segurança do talude (ZHENG et al., 2014; LIU; SHAO; LI, 2015).

## 1.1 Justificativa

A maioria das aplicações do método de redução da resistência é realizada utilizando o MEF. Do ponto de vista do usuário final, o MEF pode ser dividido nas etapas de pré-processamento, processamento e pós-processamento. Na etapa de

pré-processamento são inseridos no *software* os dados referentes à geometria, propriedades do material e condições de contorno.

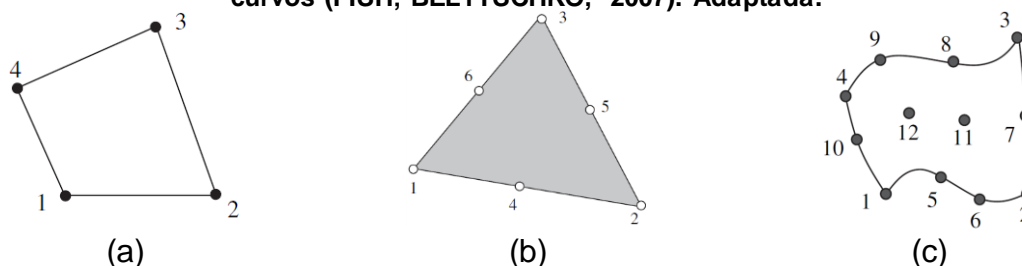
Na etapa de definição da geometria, um importante processo é a geração da malha de elementos finitos. A malha consiste em uma representação simplificada do sistema real, cuja definição influencia de maneira direta nos resultados a serem avaliados. Na estabilidade de taludes, importa conhecer os deslocamentos e deformações por cisalhamento, assim como as tensões atuantes no regime plástico.

Considerando apenas o aspecto da geometria, o processo para a determinação da malha a ser utilizada envolve uma série de escolhas. Primeiro, o usuário deve saber qual tipo de elemento irá utilizar (triangular, quadrilateral, ou uma combinação dos dois tipos, em problemas bidimensionais; Figura 4a e b). Elementos triangulares possuem como vantagem a possibilidade de representar com excelente aproximação praticamente qualquer tipo de geometria. No entanto, seu uso não é recomendado devido à sua menor acurácia (FISH; BELYTSCHKO, 2007).

Uma vez determinado o tipo de elemento a ser usado, deve-se decidir a sua dimensão no modelo. Um critério prático para se construir a malha de elementos finitos consiste em determinar quais as regiões de maior interesse para que se possa representá-las com elementos de menor tamanho. Nestas regiões, diz-se que a malha está mais refinada, sendo obtidos resultados mais precisos. No entanto, quando a região a ser avaliada é extensa, um modelo muito refinado resultará em maior tempo de processamento, o que pode dificultar as análises.

Outra questão a ser definida durante a criação da malha é sobre a ordem do elemento. Elementos de ordem superior são necessários quando se deseja representar uma geometria complexa com menos elementos. Os elementos de ordem superior possuem por característica a possibilidade de serem ajustados a contornos curvos (Figura 4c) (FISH; BELYTSCHKO, 2007).

**Figura 4: Exemplos de elementos utilizados no MEF: (a) elemento quadrilateral de quatro nós; (b) elemento triangular de seis nós; (c) elemento quadrilateral de doze nós para contornos curvos (FISH; BELYTSCHKO, 2007). Adaptada.**



Para a elaboração do presente trabalho, partiu-se da premissa de que um método sem malha é capaz de fornecer resultados similares ao método de elementos finitos, porém sem a necessidade de conectividade entre os nós que representam o modelo. A representação do domínio por meio de nós elimina a necessidade de escolha do tipo de elemento, uma vez que bastará conhecer as coordenadas dos nós, etapa que já era necessária no MEF. Um método sem malha elimina também a necessidade de se definir a ordem do elemento que será utilizado. Havendo contornos curvilíneos, basta que se posicionem os nós sobre o contorno.

Para as análises propostas, está sendo utilizado o Método de Galerkin Livre de Elementos (MGLE). Portanto, com a intenção de promover melhorias nos procedimentos relacionados à segurança, busca-se no presente trabalho o desenvolvimento de um algoritmo utilizando um método sem malha cujos resultados possam ser associados ao monitoramento de taludes de barragens.

## 1.2 Objetivos

### 1.2.1 Geral

O objetivo no presente estudo é desenvolver um algoritmo que possibilite a determinação dos deslocamentos, tensões e deformações em taludes de barragens, em seu período de construção, utilizando método numérico sem malha. O método a ser utilizado é o Método de Galerkin Livre de Elementos.

### 1.2.2 Específicos

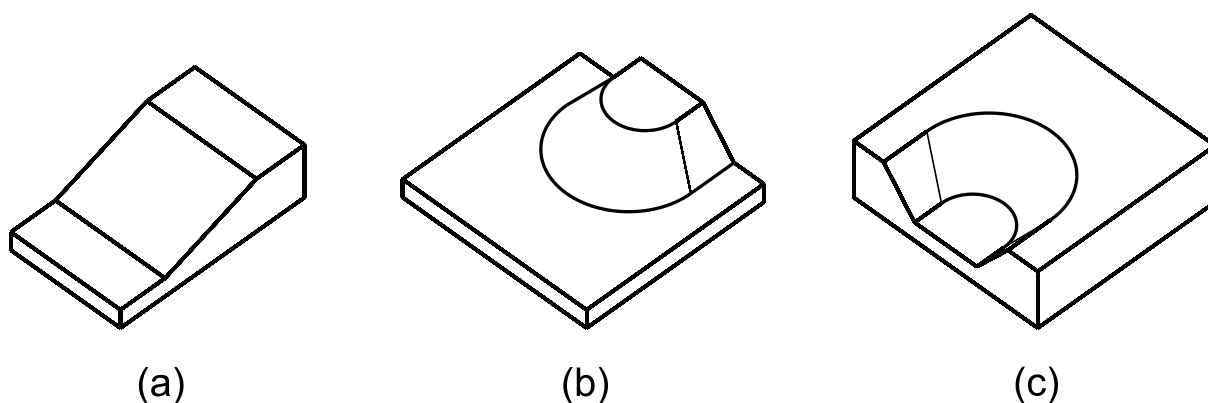
- a) Definir um modelo constitutivo adequado para o solo com base em suas propriedades, avaliando propostas já publicadas no meio científico;
- b) Obter as formulações forte e fraca para a aplicação do método numérico;
- c) Elaborar algoritmo para cálculo dos deslocamentos, tensões e deformações elásticas;
- d) Desenvolver algoritmo para a realização das análises em modelo elastoplástico do solo;
- e) Calcular e comparar o fator de redução de resistência calculado usando o MGLE aos resultados obtidos por meio de *software* comercial GeoStudio, que utiliza o MEF e o método de equilíbrio limite.

## 2 REVISÃO DE LITERATURA

### 2.1 Estudos Relacionados

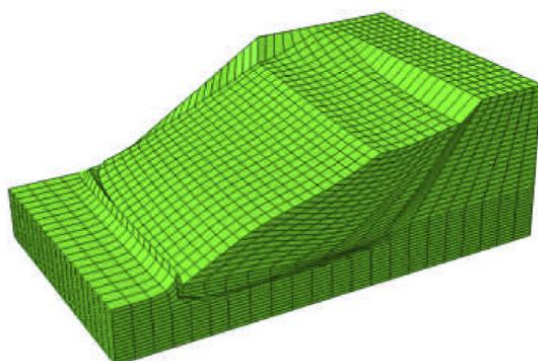
Com o intuito de se propor ábacos de estabilidade de taludes tridimensionais côncavos e convexos (Figura 5) assumindo a hipótese de solo homogêneo, utilizou-se em outra pesquisa o método de redução de resistência. Os ábacos de estabilidade proporcionam a vantagem de se realizar verificações preliminares antes de se elaborar modelos mais complexos. Os casos de taludes com curvatura plana, entretanto, requerem um estudo específico (SUN et al., 2016).

**Figura 5: Representação de diferentes tipos de taludes. (a) Plano e reto; (b) convexo; (c) côncavo.**



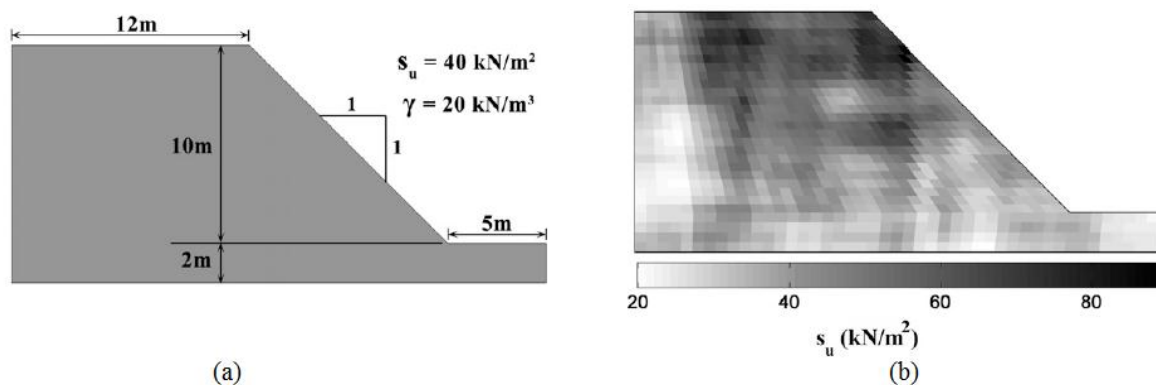
Os autores utilizaram, então, o MEF para avaliar a estabilidade e chegar aos gráficos propostos (SUN et al., 2016). A adoção de método sem malha poderia eliminar a etapa de escolha do tipo de elemento e também possibilitar a modelagem de uma parte maior da estrutura com custo computacional aceitável (Figura 6). No estudo, foram testados elementos hexahédricos e tetraédricos.

**Figura 6: Exemplo de modelo de talude convexo analisado com o MEF, após a ruptura (SUN et al., 2016).**



No método de equilíbrio limite usualmente considera-se que as propriedades do solo são homogêneas (Figura 7a). A adoção de valores aleatórios para parâmetros de resistência (Figura 7b) conduz a algumas dificuldades na obtenção do fator de segurança. No entanto, mostrou-se que se houver um tratamento adequado nos métodos de fatias para o equilíbrio limite, soluções aceitáveis podem ser obtidas. Já no método de redução da resistência não se observam dificuldades relacionadas a campos aleatórios, como no método de equilíbrio limite (TABARROKI et al., 2013). Logo, a adoção de métodos sem malha para os métodos de redução de resistência tendem a possibilitar a utilização de campos aleatórios nas análises.

**Figura 7: Propriedades do solo para análise de estabilidade. (a) Propriedades uniformes (caso determinístico); (b) resistência variável (TABARROKI et al., 2013).**



Na aplicação do método de redução de resistência, deve-se avaliar cada nó que constitui o domínio a fim de se obter o fator de segurança local<sup>2</sup>. Com o objetivo de agilizar o processo de cálculo, apresentou-se um algoritmo que efetua uma busca de nós que estejam próximos à superfície na qual ocorrerá a ruptura do modelo (LUO et al., 2012). As características adotadas para o método proposto neste trabalho permitem a adoção de tal procedimento, visando melhorar a sua eficiência.

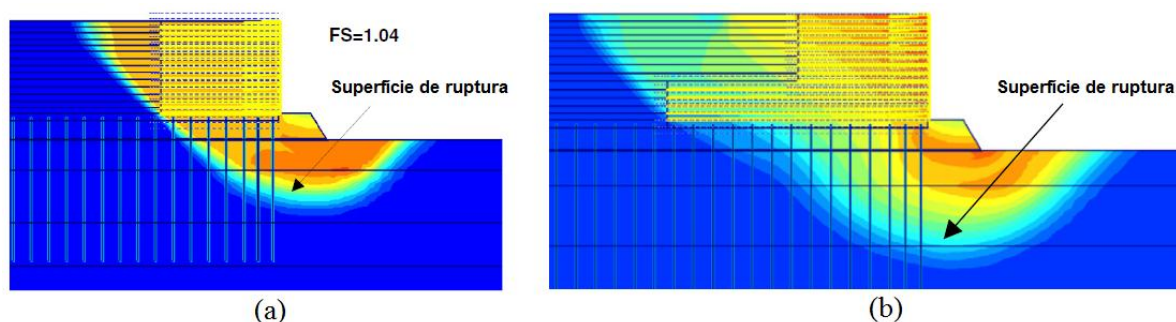
Para a avaliação do comportamento de um aterro experimental reforçado com geogrelhas retido por muro de arrimo, realizou-se a sua instrumentação e, posteriormente, modelagem em elementos finitos (Figura 8a), sendo feita a análise por método de redução de resistência. Após a validação do modelo, foi realizada uma análise paramétrica do número de camadas de geogrelhas com comprimento

<sup>2</sup> Fator de segurança calculado para um ponto em particular. Ao longo de uma superfície de ruptura, podem existir diferentes fatores de segurança devido às diferenças entre as tensões de cisalhamento desenvolvidas em locais distintos. Nos métodos de equilíbrio limite, ao contrário, geralmente considera-se que a tensão de cisalhamento ao longo da superfície de ruptura é uniforme, havendo apenas um fator de segurança global.



estendido (Figura 8b), a fim de se observar os novos fatores de segurança (CHEN, J. F., et al., 2014). Uma análise com o uso de método sem malha considerando a interação entre o solo e elementos de reforço pode ser feita, mas o método apresentado neste trabalho precisaria ser modificado para se incluir este efeito.

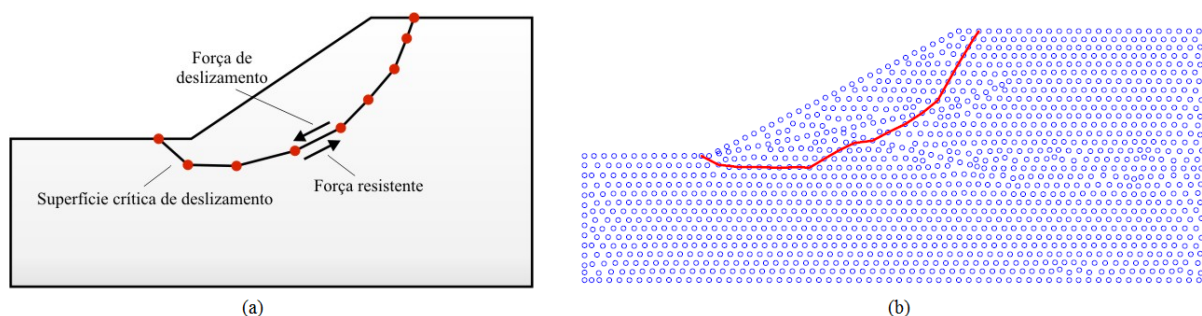
**Figura 8: Modelos do aterro com muro de arrimo. (a) Representação do aterro experimental construído. (b) Exemplo de modificação feita no modelo numérico, com o prolongamento de camadas de geogrelhas (CHEN, J. F., et al., 2014). Adaptada.**



Tanto o método de equilíbrio limite quanto o método de redução de resistência possuem limitações. Destacando as principais para cada um deles, enquanto este requer alto esforço computacional para se chegar a uma solução, aquele considera a massa de solo como um corpo rígido. Em ambos os métodos adota-se a hipótese de que o solo pode ser tratado como um meio contínuo. Uma outra classe de métodos, chamados descontínuos, conduzem a um comportamento mais típico do solo (meio formado por partículas), mas sua aplicação ainda é relativamente difícil em comparação aos métodos contínuos (ZHENG et al., 2014).

A fim de se conseguir um método que requeira menor tempo de processamento, observa-se a combinação entre um método de passo múltiplo e a teoria de grafos para a obtenção da superfície crítica de ruptura e a determinação do fator de segurança crítico. Consiste num problema de otimização, no qual se busca a superfície de ruptura que conduzirá ao menor fator de segurança (Figura 9) (ZHENG et al., 2014). Este método, portanto, caracteriza-se como uma alternativa aos métodos de redução de resistência, que por sua vez, são aplicados utilizando-se o método de elementos finitos ou, ainda, métodos sem malha, conforme se propõe neste trabalho.

**Figura 9: Aplicação de método de passo múltiplo combinado com a teoria de grafos: (a) diagrama esquemático de uma superfície de ruptura; (b) superfície de ruptura crítica obtida pelo método (ZHENG et al., 2014). Adaptada.**



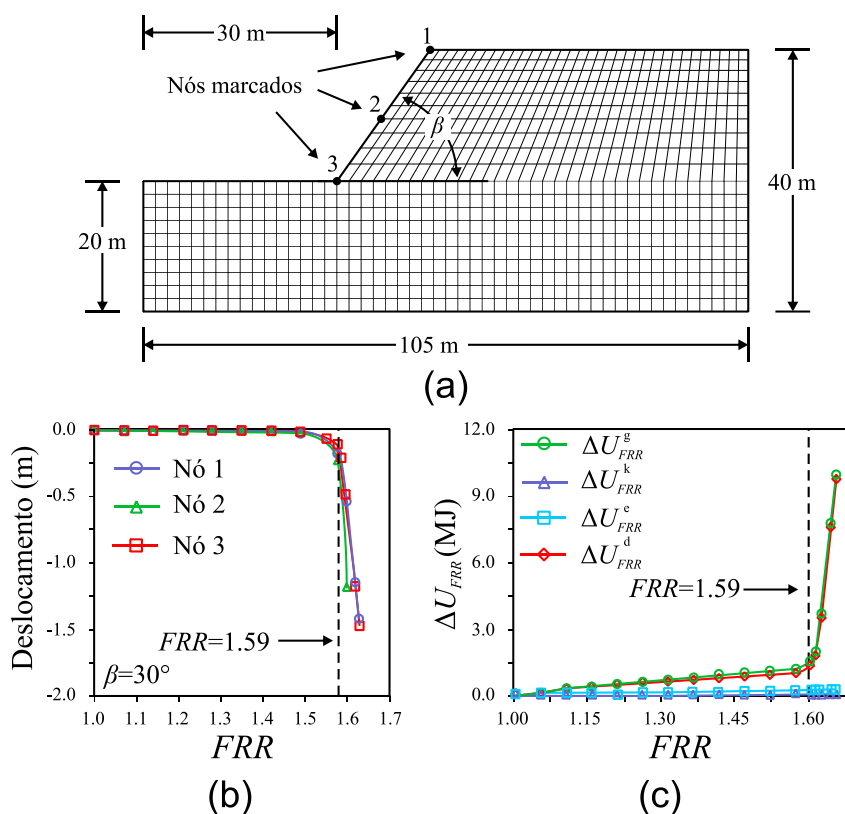
Visando observar a influência da presença do ar no fluxo de água em taludes numa situação de infiltração por chuva intensa, foram criados modelos para comparação do comportamento do solo não saturado. Foram feitas simulações com dois diferentes tipos de solo. Em cada cenário foi considerado tanto o fluxo das duas fases (água e ar) nos vazios quanto apenas o fluxo da água. A partir das situações induzidas, realizou-se análise de estabilidade pelo método de redução da resistência, usando o método de elementos finitos (CHO, 2016). A influência da percolação no comportamento mecânico do solo<sup>3</sup> também pode ser estudada utilizando os métodos sem malha. Este comportamento é de particular interesse em engenharia de barragens, devido à ocorrência de percolação de água pelo interior da massa de solo. O efeito, entretanto, não foi incluído no algoritmo desenvolvido neste trabalho.

No método de redução de resistência, os critérios usualmente adotados para verificar a ocorrência de escorregamento no talude são mudanças súbitas nos campos de tensão, deformação e deslocamentos. Apesar de observáveis, a indicação de um valor que represente o fator de redução de resistência<sup>4</sup> consiste em uma tarefa subjetiva, pois requer a escolha de locais que possam indicar a ocorrência de instabilidade (Figura 10), onde ocorre a divergência em relação às iterações anteriores (TU et al., 2016).

<sup>3</sup> Estudada por meio de análise acoplada.

<sup>4</sup> Que expressa o grau de segurança do talude, de forma similar ao fator de segurança.

**Figura 10: Aplicação de critério baseado em variação de energia para obtenção do fator de redução de resistência. (a) Geometria do talude e malha em elementos finitos. (b) Critério baseado em deslocamentos, com o valor do fator de redução de resistência obtido. (c) Critério baseado em variação de energia, com indicação do fator de redução de resistência obtido (TU et al., 2016). Adaptada.**



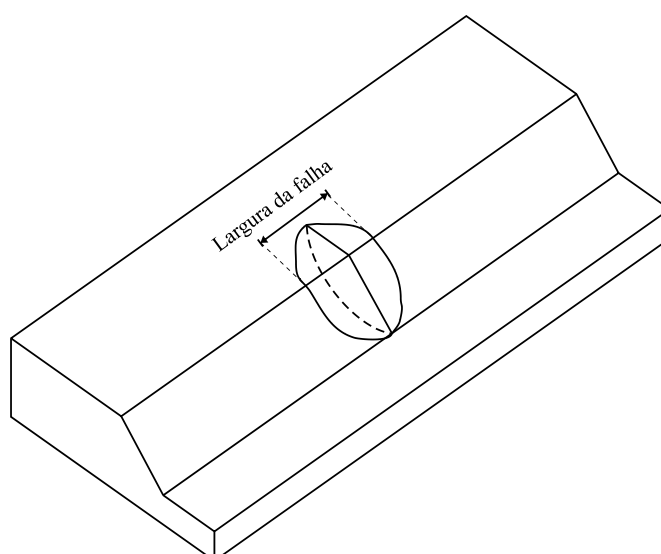
Para fins práticos, portanto, a utilização de um critério que dependa menos do usuário é desejável; tal critério pode ser considerada a variação de energia, que consiste numa grandeza escalar. Para a conservação da energia, avaliam-se a energia potencial gravitacional, a energia cinética, a energia de deformação e a energia dissipada. Das análises realizadas, conclui-se que a indicação de instabilidade se deve principalmente à variação de energia potencial, tanto para casos bidimensionais quanto para casos tridimensionais (TU et al., 2016). As variáveis utilizadas, geralmente com o método de elementos finitos, são a tensão, a deformação, o deslocamento e o tempo, todas possíveis de serem determinadas nos métodos sem malha. Este resultado, portanto, pode ser aplicável no método proposto no presente trabalho.

Outro método proposto na literatura para a determinação do fator de segurança baseia-se na teoria de reforço da deformação. Em termos gerais, o critério de falha

fica relacionado à energia plástica complementar<sup>5</sup>. A tensão que excede o valor que caracteriza o escoamento do material é a responsável pela existência de forças não equilibradas, que caracterizam a ruptura do talude. De acordo com os autores, além da teoria abordada permitir o cálculo do fator de segurança, consegue-se determinar também a força que será resistida por estruturas de reforço, admitindo que nestes elementos estruturais atuarão as forças não balanceadas, sendo esta a principal contribuição do trabalho (LIU, 2003). Na presente abordagem, utilizando método sem malha, é possível desenvolver a formulação para que se obtenha as forças atuantes nos elementos de reforço. No entanto, esta interação não foi incluída.

O estudo do escorregamento considerando o estado plano de deformações (ou, de modo menos rigoroso, o estado plano de tensões) é amplamente difundido na literatura técnica. A ruptura de taludes, entretanto, manifesta-se como um fenômeno espacial. Logo, modelos mais realistas devem levar em consideração o comprimento na direção normal ao plano, assim como os parâmetros que influenciam este tipo de representação. Com este intuito, nota-se a divulgação de trabalhos nos quais é feita a modelagem em três dimensões, incluindo a largura da falha (Figura 11) (JI; CHAN, 2014). Tal abordagem, geralmente utilizando o método de elementos finitos, pode ser aplicada nos métodos sem malha, haja vista que a formulação no método de Galerkin livre de elementos, por exemplo, possui similaridades em duas e em três dimensões.

**Figura 11: Ilustração de ruptura de talude em uma análise tridimensional (JI; CHAN, 2014). Adaptada.**



<sup>5</sup> Energia no regime plástico do material.

No método de redução de resistência, uma questão crucial é a determinação do fator de redução de resistência (fator de segurança). O critério para determinação geralmente adotado é baseado nos campos de deslocamento, tensões e deformações, sendo subjetivo. Também há métodos baseados em balanço de energia e também na energia de deformação. Qualquer que seja o critério adotado, sempre deverá ser especificado inicialmente quais os fatores de redução a serem testados até que seja possível estimar com confiança o valor que caracteriza a convergência (ou, em outros termos, a divergência, à medida em que o fator é gradativamente aumentado). Para suprir esta necessidade, nota-se o desenvolvimento de esquemas de busca do fator de segurança, a fim de obter mais rapidamente o fator de redução de resistência (CHEN et al., 2014). Por se basearem nos resultados obtidos em cada iteração (deslocamentos, tensões e deformações), é possível que tais métodos sejam incorporados quando da utilização dos métodos sem malha.

Uma alternativa ao métodos de equilíbrio limite e ao método de redução da resistência é um procedimento denominado método da resistência limite melhorado. Ele consiste no cálculo das tensões normais e de cisalhamento utilizando o método de elementos finitos para a substituição direta na equação utilizada no método de equilíbrio limite (Equação 1). Assim como o método de equilíbrio limite, ele requer que a definição prévia de uma superfície de ruptura, que, segundo os autores, pode ser estimada a partir da análise inicial no regime elástico (LIU; SHAO; LI, 2015). As tensões necessárias para os cálculos neste método também podem ser obtidas por meio de métodos sem malha, o que indica a possibilidade de uma comparação com o método de elementos finitos.

$$F_s = \frac{\tau_f}{\tau_d} = \frac{c'_f + \sigma' \tan \phi'_f}{c'_d + \sigma' \tan \phi'_d} \quad 1$$

onde:

$F_s$ : fator de segurança

$\tau_f$ : resistência do solo ao cisalhamento

$\tau_d$ : tensão de cisalhamento desenvolvida

$c'_f$ : intercepto de coesão efetiva

$c'_d$ : coesão efetiva desenvolvida

$\sigma'$  : tensão normal efetiva

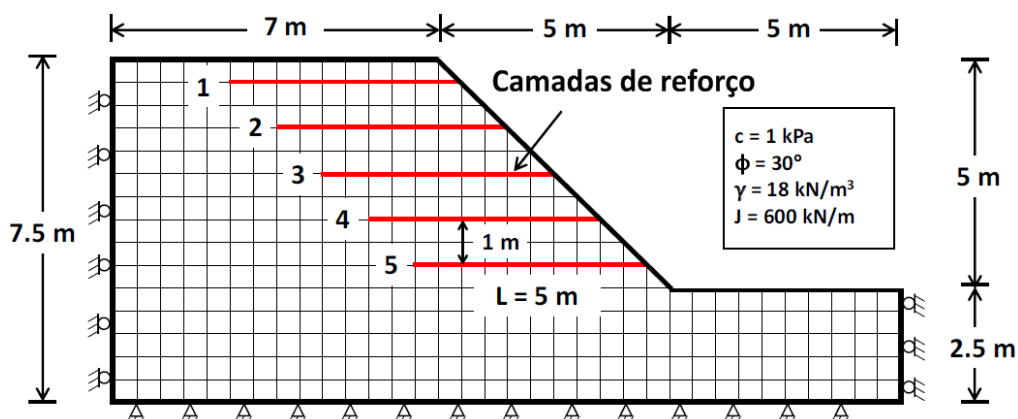
$\phi'_f$  : ângulo de atrito interno efetivo

$\phi'_d$  : ângulo de atrito interno desenvolvido

Outro método que deve ser apontado como alternativa aos métodos de equilíbrio limite e de redução da resistência é a análise limite com elementos finitos. Assim como no método de redução da resistência, na análise limite é possível considerar tanto a plasticidade associada, com o ângulo de atrito interno igual ao ângulo de dilatação, quanto a plasticidade não associada (ângulos diferentes). Neste último caso ocorre uma distinção entre os métodos, pois incluiu-se a influência do ângulo de dilatação sobre os demais parâmetros de resistência do solo (ângulo de atrito interno e coesão). Os autores ainda afirmaram que, por se tratar de uma análise utilizando elementos finitos, o refinamento da malha influencia nos resultados, havendo maior sensibilidade no modelo de plasticidade não associada (TSCHUCHNIGG; SCHWEIGER; SLOAN, 2015a). Para as aplicações utilizando método sem malha, portanto, considera-se a plasticidade associada, pois é utilizado o método de redução da resistência. A aplicação da análise limite, entretanto, mostra-se possível.

O fator de segurança de um talude depende dos parâmetros de resistência do solo. Devido à incerteza relacionada à distribuição de tais parâmetros no espaço, a consideração de uma análise probabilística de estabilidade pode ser necessária. Os resultados deste tipo de análise dependem da média e do desvio padrão das variáveis que definem a resistência do solo. Logo, para dois solos de propriedades semelhantes, a probabilidade de ocorrer a ruptura pode ser totalmente distinta devido ao modo como a resistência varia ao longo do espaço em cada caso. Realizando este tipo de análise com o estudo da influência de reforço com geogrelhas em taludes, observa-se um caso resolvido pelo método de redução da resistência, com o uso do método de elementos finitos. As geogrelhas foram inseridas como barras no modelo (LUO; BATHURST; JAVANKHOSHDEL, 2016). Análises similares podem ser realizadas com os métodos sem malha. Deve-se, entretanto, observar a interação entre os elementos de reforço e o solo, o que requer um estudo específico.

Figura 12: Modelo em elementos finitos com a inserção das barras representando as geogrelhas (LUO; BATHURST; JAVANKHOSHDEL, 2016). Adaptada.



## 2.2 Estabilidade de Taludes

### 2.2.1 Resistência ao cisalhamento dos solos

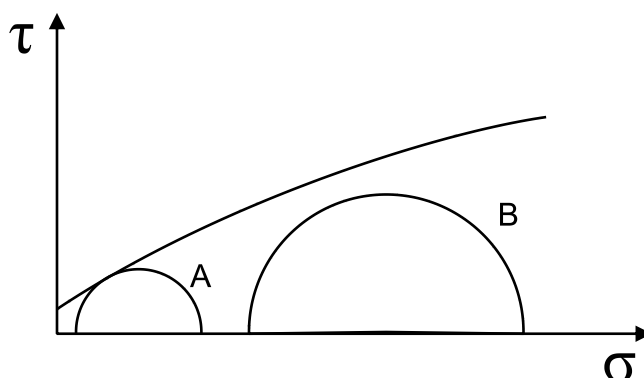
A ruptura nos solos geralmente ocorre por cisalhamento. A resistência aos esforços tangenciais nos solos é definida como a máxima tensão de cisalhamento que o solo é capaz de suportar sem que ocorra ruptura ou, ainda, a tensão de cisalhamento do solo na superfície em que a ruptura ocorrer (PINTO, 2006).

Entre os critérios de ruptura<sup>6</sup> que se aplicam aos solos, observa-se a vasta utilização daqueles que estabelecem as máximas tensões (PINTO, 2006). Os critérios de Mohr e de Coulomb são dois dentre os mais utilizados (DAS; SOBHAN, 2015; GERSCOVICH, 2012; PINTO, 2006; ZIENKIEWICZ; TAYLOR, 2000).

A teoria de Mohr data de 1900, podendo ser enunciada como: “não há ruptura enquanto o círculo representativo do estado de tensões se encontrar no interior de uma curva, que é a envoltória dos círculos relativos a estados de ruptura, observados experimentalmente para o material”, estando ilustrado na Figura 13 (DAS; SOBHAN, 2015; PINTO, 2006). A utilização do estado de tensões implica na combinação das tensões normal e de cisalhamento na análise, sendo que não necessariamente serão as máximas tensões que provocarão a ruptura. De modo geral, a relação entre a tensão normal e a tensão de cisalhamento em um plano de ruptura pode ser expressa conforme a Equação 2, sendo curva a envoltória definida pela função (DAS; SOBHAN, 2015).

<sup>6</sup> “Formulações que procuram refletir as condições em que ocorre a ruptura dos materiais” (PINTO, 2006).

Figura 13: Representação do critério de ruptura de Mohr. O estado de tensões indicado pelo círculo A, tangente à envoltória, representa uma situação na qual houve a ruptura, enquanto na situação indicada pelo círculo B, não ocorreu (PINTO, 2006).



$$\tau_f = f(\sigma)$$

2

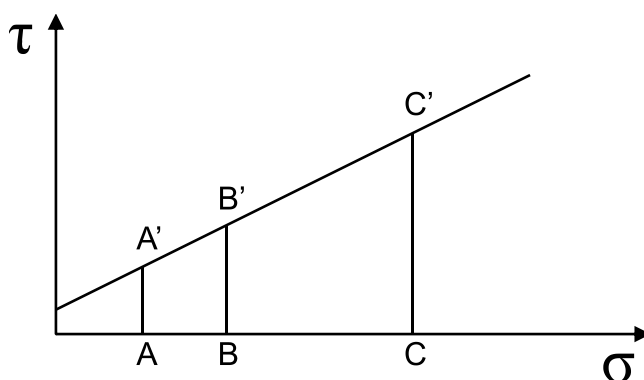
onde:

$\tau_f$ : resistência ao cisalhamento

$\sigma$ : tensão normal

O critério de Coulomb, apresentado em 1776, por sua vez, pode ser enunciado como: “não há ruptura se a tensão de cisalhamento não ultrapassar um valor dado pela expressão  $c + f\sigma$ , sendo  $c$  e  $f$  constantes do material e  $\sigma$  a tensão normal existente no plano de cisalhamento”, sendo ilustrado na Figura 14. Os parâmetros  $c$  e  $f$  são denominados, respectivamente, coesão e coeficiente de atrito interno, que é expresso como a tangente de um ângulo (ângulo de atrito interno) (DAS; SOBHAN, 2015; PINTO, 2006). Quando a envoltória de ruptura de Mohr é aproximada por uma função linear, expressa na Equação 3, obtém-se o chamado critério de ruptura de Mohr-Coulomb, de uso bastante difundido (DAS; SOBHAN, 2015).

Figura 14: Representação do critério de ruptura de Coulomb (PINTO, 2006).





$$\tau_f = c + \sigma \tan \phi \quad 3$$

onde:

$\tau_f$ : resistência ao cisalhamento

$c$ : intercepto de coesão

$\sigma$ : tensão normal

$\phi$ : ângulo de atrito interno

Na Equação 3,  $\tau_f$  representa a resistência ao cisalhamento,  $\sigma$  a tensão normal,  $c$  a coesão e  $\phi$  o ângulo de atrito interno. Em solos saturados, faz-se necessário considerar o valor da tensão efetiva ( $\sigma'$ ), calculado em termos da tensão total ( $\sigma$ ) e da poropressão ( $u$ ), conforme a Equação 4 (DAS; SOBHAN, 2015).

$$\sigma' = \sigma - u \quad 4$$

onde:

$\sigma'$ : tensão efetiva

$\sigma$ : tensão total

$u$ : poropressão da água

Desta forma, a resistência ao cisalhamento em solos saturados é expressa na forma da Equação 5, na qual  $c'$  e  $\phi'$  representam a coesão e o ângulo de atrito, respectivamente, com base na tensão efetiva (DAS; SOBHAN, 2015).

$$\tau_f = c' + \sigma' \tan \phi' \quad 5$$

onde:

$\tau_f$ : resistência ao cisalhamento

$c'$ : intercepto de coesão efetiva

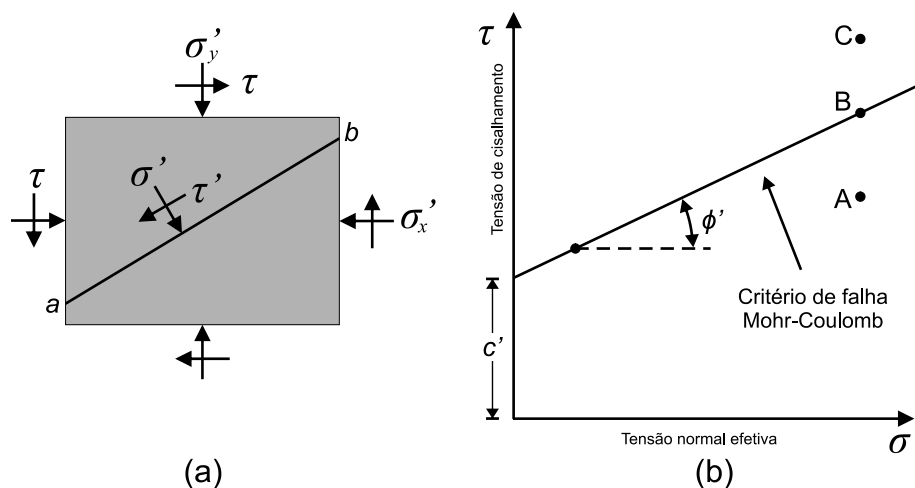
$\sigma'$ : tensão normal

$\phi'$ : ângulo de atrito interno efetivo

O significado da Equação 5 pode ser esclarecido com o auxílio da Figura 15. Considere-se uma massa de solo submetida às tensões normais  $\sigma'_x$  e  $\sigma'_y$  e à tensão de cisalhamento  $\tau$  em um plano  $ab$ . Se a magnitude de  $\sigma'$  e  $\tau$  forem tais que representem graficamente o ponto A na Figura 15b, não haverá ruptura por cisalhamento. Se  $\sigma'$  e  $\tau$  representarem o ponto B, ocorrerá a ruptura por

cisalhamento. Um estado representado pelo ponto C é impossível de ocorrer, pois ele está localizado acima da envoltória de ruptura, e a ruptura já teria ocorrido, neste caso (DAS; SOBHAN, 2015).

Figura 15: Critério de ruptura de Mohr-Coulomb (DAS; SOBHAN, 2015).



Adotando o estado de tensões indicado pelo círculo de Mohr na Figura 16 e considerando que as tensões principais são denotadas por  $\sigma'_1 = \sigma'_y$  e por  $\sigma'_3 = \sigma'_x$ <sup>7</sup>, a Equação 5 pode ser reescrita conforme a Equação 6 (POTTS; ZDRAVKOVIC, 1999).

$$\sigma'_1 - \sigma'_3 = 2c' \cos \phi' + (\sigma'_1 + \sigma'_3) \sin \phi' \quad 6$$

onde:

$\sigma'_1$ : tensão principal maior efetiva

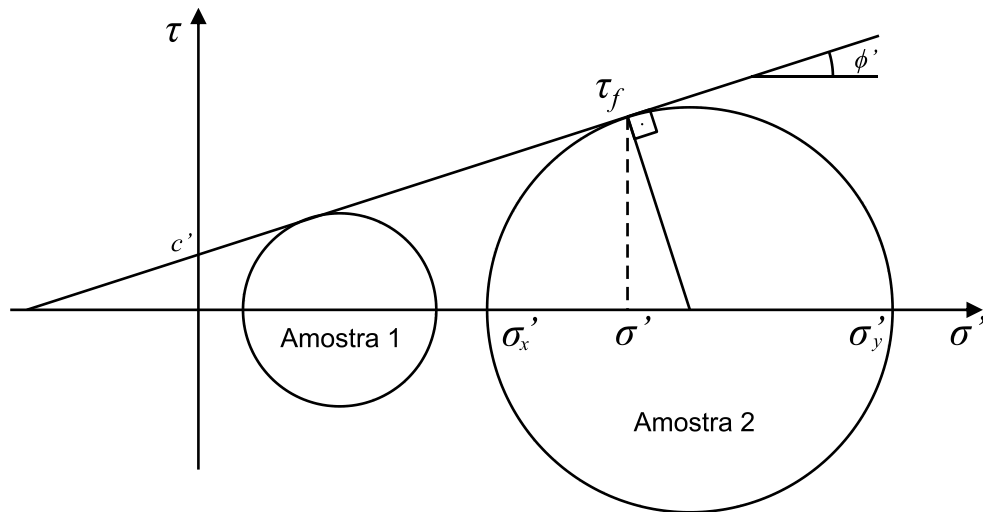
$\sigma'_3$ : tensão principal menor efetiva

$c'$ : intercepto de coesão efetiva

$\phi'$ : ângulo de atrito interno efetivo

<sup>7</sup> Esta hipótese contempla muitos casos onde a superfície do terreno é horizontal (ou subhorizontal). Havendo carregamentos externos, as tensões atuantes nos planos vertical e horizontal ( $\sigma'_x$  e  $\sigma'_y$  na Figura 15, respectivamente) poderão não ser as principais, e a tensão de cisalhamento não será nula nestes casos.

Figura 16: Círculos de Mohr das tensões efetivas (POTTS; ZDRAVKOVIC, 1999). Adaptada.



Portanto, o critério de Mohr-Coulomb pode ser reescrito de acordo com a Equação 7, na qual um resultado igual a zero indica a ocorrência de ruptura por cisalhamento. O parâmetro de estado  $\{\mathbf{k}\}$  é considerado constante para materiais elásticos perfeitamente plásticos e, para solos saturados, é formado pelas propriedades do material (ângulo de atrito  $\phi'$  e intercepto de coesão  $c'$ ) (POTTS; ZDRAVKOVIC, 1999).

$$F(\{\boldsymbol{\sigma}'\}, \{\mathbf{k}\}) = \sigma'_1 - \sigma'_3 - 2c' \cos \phi' - (\sigma'_1 + \sigma'_3) \sin \phi' \quad 7$$

onde:

$F$ : função do critério de ruptura de Mohr-Coulomb

$\boldsymbol{\sigma}'$ : vetor das tensões

$\mathbf{k}$ : vetor com os parâmetros de resistência (ângulo de atrito interno e coesão)

$\sigma'_1$ : tensão principal maior efetiva

$\sigma'_3$ : tensão principal menor efetiva

$c'$ : intercepto de coesão efetiva

$\phi'$ : ângulo de atrito interno efetivo

### 2.2.2 Invariantes

Os componentes do vetor das tensões  $\{\boldsymbol{\sigma}'\}$  dependem da direção adotada para os eixos coordenados. As tensões principais ( $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  e  $\sigma_3$ ), entretanto, sempre atuam

no mesmo plano e possuem o mesmo valor, sendo invariantes, portanto (POTTS; ZDRAVKOVIC, 1999).

Nas aplicações em mecânica dos solos, é conveniente expressar as tensões como uma combinação dos valores das tensões principais. Uma escolha adequada para estes invariantes consiste nas Equações 8 a 10 (POTTS; ZDRAVKOVIC, 1999; SHERIF, 2012).

$$s = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{\sqrt{3}} \quad 8$$

$$t = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \quad 9$$

$$\theta = \tan^{-1} \left( \frac{1}{\sqrt{3}} \left( \frac{2(\sigma_2 - \sigma_3)}{(\sigma_1 - \sigma_3)} - 1 \right) \right) \quad 10$$

onde:

$s$ : invariante que representa a distância entre a origem e o plano das tensões

$\sigma_1$ : tensão principal maior

$\sigma_2$ : tensão principal intermediária

$\sigma_3$ : tensão principal menor

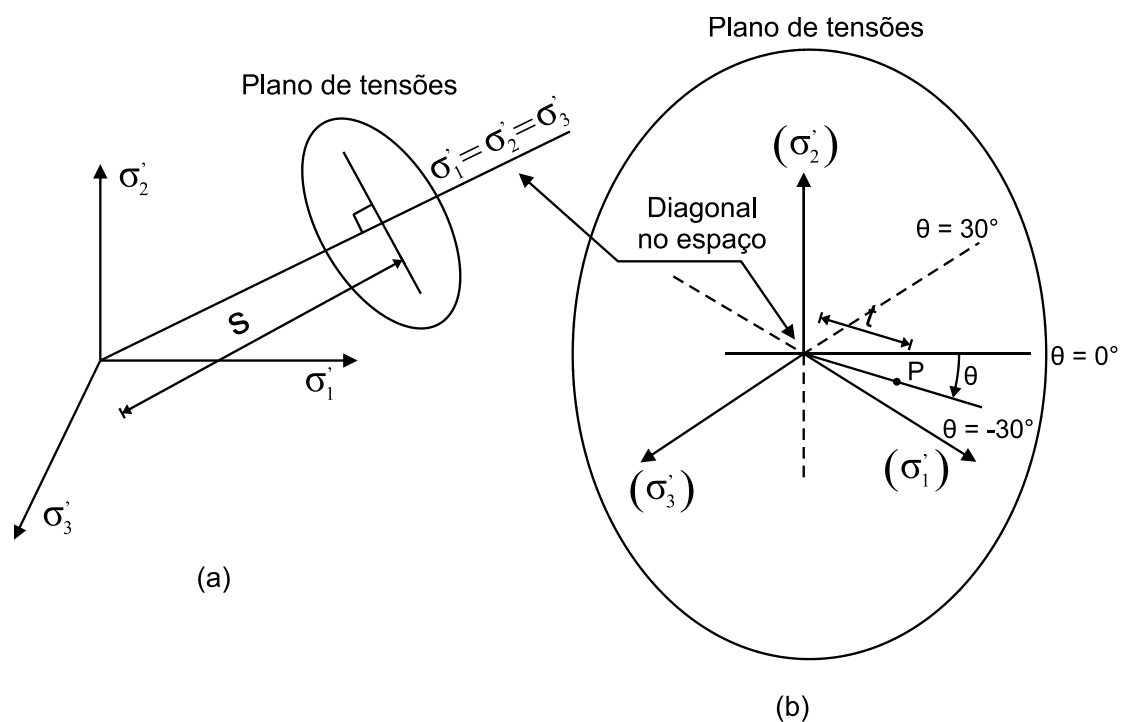
$t$ : invariante que representa a distância entre a diagonal no espaço das tensões

$\theta$ : ângulo de Lode (invariante)

Tais expressões possuem um significado geométrico no espaço das tensões principais (Figura 17). O invariante expresso na Equação 8 indica a tensão efetiva média e indica também a distância da origem até o plano de tensões principais (Figura 17a). No plano das tensões principais, o invariante da Equação 9 relaciona-se com a distância da diagonal do espaço das tensões<sup>8</sup> até o estado de tensões indicado pelo ponto P. Nesse mesmo plano, o invariante expresso na Equação 10 (chamado ângulo de Lode) indica a inclinação da distância expressa pelo invariante da Equação 9 (Figura 17b) (POTTS; ZDRAVKOVIC, 1999; SHERIF, 2012).

<sup>8</sup> Reta na qual  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ , indicada na Figura 17a (POTTS & ZDRAVKOVIC, 1999).

Figura 17: Representação geométrica dos invariantes (POTTS; ZDRAVKOVIC, 1999). Adaptada.



Para a realização de cálculos numéricos, um importante procedimento é a utilização das tensões no plano cartesiano em vez das tensões principais. Desta forma, os invariantes podem ser calculados diretamente a partir das tensões obtidas pela solução da equação diferencial do caso linear elástico (Equação 78). As expressões necessárias são mostradas nas Equações 11 a 13 (POTTS; ZDRAVKOVIC, 1999; SHERIF, 2012).

$$\sigma_m = p = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}}{3} \quad 11$$

$$q = t \sqrt{\frac{3}{2}} \quad 12$$

$$\theta = \frac{1}{3} \text{sen}^{-1} \left( \frac{-3J_3 \sqrt{6}}{t^3} \right) \quad 13$$

onde:

$\sigma_m$ : tensão hidrostática

$p$ : invariante que representa a tensão hidrostática

$\sigma_{xx}$ : tensões normais atuantes em um plano vertical ao longo do eixo x

$\sigma_{yy}$  : tensões normais atuantes no plano horizontal ao longo do eixo y

$\sigma_{zz}$  : tensões normais atuantes em um plano vertical ao longo do eixo z

$q, t$  : invariante associado à distância entre a diagonal no espaço das tensões principais e o estado de tensão

$\theta$  : ângulo de Lode

$J_3$  : invariante associado ao determinante da tensão desviadora

O invariante  $t$ , presente nas Equações 12 e 13 é o mesmo que foi definido na Equação 9. Ele pode ser reescrito na forma cartesiana de acordo com a Equação 14 (SHERIF, 2012).

$$t = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 + 6\tau_{xy}^2} \quad 14$$

$t$  : invariante associado à distância entre a diagonal no espaço das tensões principais e o estado de tensão

$\sigma_{xx}$  : tensões normais atuantes em um plano vertical ao longo do eixo x

$\sigma_{yy}$  : tensões normais atuantes no plano horizontal ao longo do eixo y

$\sigma_{zz}$  : tensões normais atuantes em um plano vertical ao longo do eixo z

$\tau_{xy}$  : tensões de cisalhamento atuantes no plano xy

A variável  $J_3$  pode ser calculada por meio da Equação 15, na qual  $s_x$ ,  $s_y$  e  $s_z$  indicam as tensões desviadoras, calculadas por meio das Equações 16 a 18 (SHERIF, 2012).

$$J_3 = s_x s_y s_z - s_z \tau_{xy}^2 \quad 15$$

$$s_x = \sigma_{xx} - p \quad 16$$

$$s_y = \sigma_{yy} - p \quad 17$$

$$s_z = \sigma_{zz} - p \quad 18$$

onde:

$J_3$ : invariante associado ao determinante da tensão desviadora

$\sigma_{xx}$ : tensões normais atuantes em um plano vertical ao longo do eixo x

$\sigma_{yy}$ : tensões normais atuantes no plano horizontal ao longo do eixo y

$\sigma_{zz}$ : tensões normais atuantes em um plano vertical ao longo do eixo z

$\tau_{xy}$ : tensões de cisalhamento atuantes no plano xy

$p$ : invariante que representa a tensão hidrostática

$s_x, s_y, s_z$ : tensões desviadoras

As tensões principais podem ser expressas em termos dos invariantes definidos anteriormente, conforme indicado nas Equações 19 a 21 (POTTS; ZDRAVKOVIC, 1999; SHERIF, 2012).

$$\sigma_1 = p + \frac{2}{3}q \operatorname{sen}\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) \quad 19$$

$$\sigma_2 = p + \frac{2}{3}q \operatorname{sen}(\theta) \quad 20$$

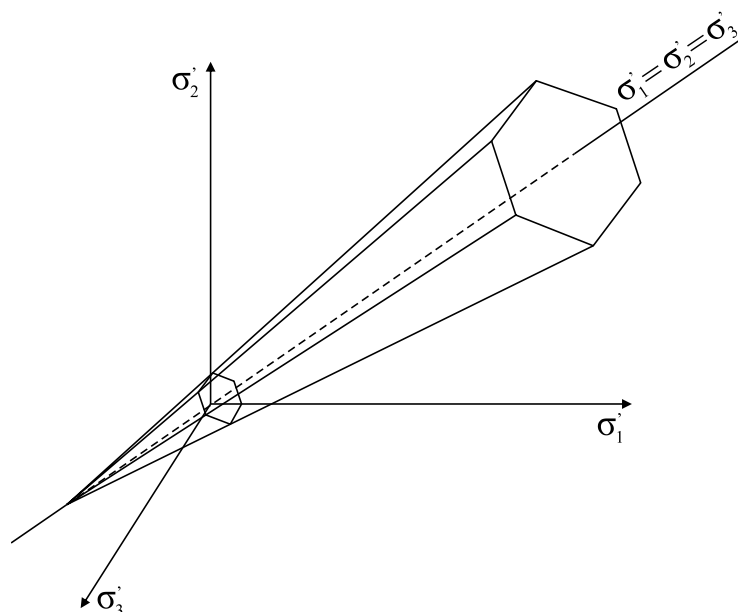
$$\sigma_3 = p + \frac{2}{3}q \operatorname{sen}\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \quad 21$$

Após as definições feitas, a Equação 7 pode ser reescrita em termos dos invariantes definidos nas Equações 11 a 13. Assim, obtém-se o critério de Mohr-Coulomb expresso na Equação 22 (SHERIF, 2012).

$$F(\{\boldsymbol{\sigma}\}, \{\mathbf{k}\}) = p \operatorname{sen} \phi + q \left( \frac{\cos \theta}{\sqrt{3}} - \frac{\operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi}{3} \right) - c \cos \phi \quad 22$$

Assim como no caso da envoltória exibida na Figura 16, o critério de Mohr-Coulomb pode ser representado no espaço das tensões principais (Figura 18) (POTTS; ZDRAVKOVIC, 1999). Portanto, ao se obter as tensões atuantes em um elemento de solo, é possível expressar as tensões principais em termos dos invariantes (Equações 11 a 13), e, a partir das definições geométricas destes valores, verificar se a envoltória foi ultrapassada. Tal processo é representado matematicamente pelo cálculo de  $F(\{\boldsymbol{\sigma}\}, \{\mathbf{k}\})$ , indicado na Equação 22.

Figura 18: Representação da superfície de Mohr-Coulomb no espaço das tensões principais (POTTS; ZDRAVKOVIC, 1999). Adaptada.



### 2.2.3 Função de potencial plástico e regra de fluxo

O critério de Mohr-Coulomb é considerado um modelo no qual o material é elástico e perfeitamente plástico. Após determinar os valores das tensões que indicam a ocorrência de falha, deve-se verificar a magnitude das deformações plásticas ocorridas, assim como a direção em que ocorre a falha (POTTS; ZDRAVKOVIC, 1999).

A direção em que ocorre a falha é obtida por meio da chamada regra de fluxo, expressa na Equação 23. Nela,  $\Delta \epsilon^p$  representa os componentes da deformação plástica,  $P$  indica a chamada função de potencial plástico e  $\Lambda$  consiste em um multiplicador escalar. O vetor dos parâmetros de estado  $\{\mathbf{m}\}$  é considerado desprezível no cálculo da deformação plástica, uma vez que apenas as derivadas da função de potencial plástico em relação às tensões é necessária para conhecer o seu valor. O parâmetro  $\Lambda$  controla a magnitude da deformação plástica (POTTS; ZDRAVKOVIC, 1999; SHERIF, 2012).

$$\Delta \epsilon^p = \Lambda \frac{\partial P(\{\boldsymbol{\sigma}\}, \{\mathbf{m}\})}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad 23$$

onde:

$\Delta \epsilon^p$  : incremento de deformação plástica



$\Lambda$ : escalar associado aos parâmetros de resistência do solo

$P$ : função de potencial plástico

$\sigma$ : vetor das tensões

$\mathbf{m}$ : vetor de parâmetros de estado associado à função de potencial plástico

A função de potencial plástico é uma função da forma indicada na Equação 24 (POTTS; ZDRAVKOVIC, 1999).

$$P(\{\sigma\}, \{\mathbf{m}\}) = 0 \quad 24$$

onde:

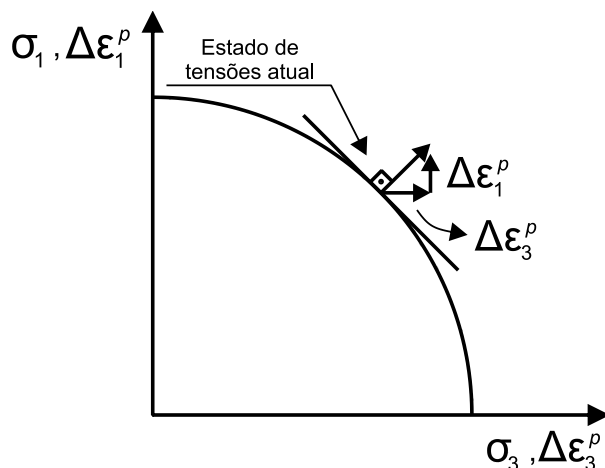
$P$ : função de potencial plástico

$\sigma$ : vetor das tensões

$\mathbf{m}$ : vetor de parâmetros de estado associado à função de potencial plástico

A interpretação geométrica da Equação 23 supondo  $\sigma_2 = 0$  pode ser visualizada na Figura 19. Considerando que as direções principais para as tensões e para as deformações coincidem, a representação gráfica destas duas grandezas pode ser feita nos mesmos eixos (POTTS; ZDRAVKOVIC, 1999).

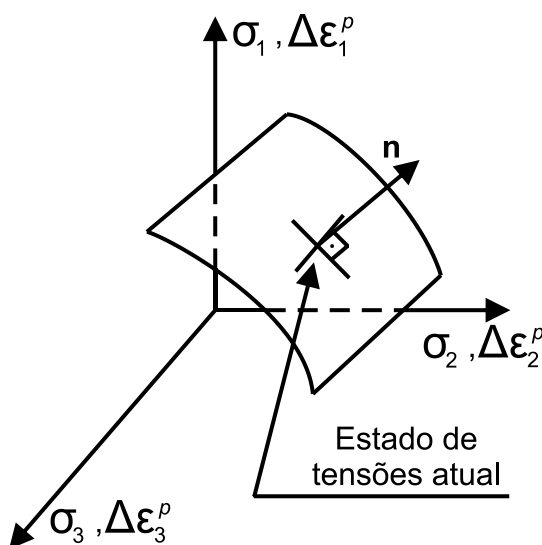
**Figura 19: Representação da função de potencial plástico e do vetor das deformações plásticas, supondo  $\sigma_2 = 0$  (POTTS; ZDRAVKOVIC, 1999). Adaptada.**



Observando a Figura 19, nota-se que o vetor que representa o acréscimo de deformações plásticas é normal à curva que indica o estado de tensões. Os componentes deste vetor normal fornecem a magnitude das deformações em cada direção. Tal característica recebe o nome de condição de normalidade (POTTS; ZDRAVKOVIC, 1999).

No espaço das tensões principais, considerando agora  $\sigma_2 \neq 0$ , o vetor das deformações plásticas apresenta três componentes. Em eixos cartesianos, a exemplo do vetor das tensões, são necessários seis componentes para especificar o vetor das deformações. O aspecto da superfície que representa os estados de tensões está ilustrado na Figura 20 (POTTS; ZDRAVKOVIC, 1999).

**Figura 20: Representação de uma superfície de potencial plástico e do vetor de deformações no espaço das tensões principais (POTTS; ZDRAVKOVIC, 1999). Adaptada.**



Muitas vezes, por simplificação, pode-se assumir que a função de potencial plástico (Equação 24) é igual à função que define o patamar de escoamento (Equação 22). No caso dos solos, a função que define o escoamento é o critério de ruptura por cisalhamento, como, por exemplo, o Mohr-Coulomb. Esta condição pode ser expressa pela igualdade exibida na Equação 25. Neste caso, tem-se uma regra de fluxo dita associada, na qual aplica-se a condição de normalidade (POTTS; ZDRAVKOVIC, 1999; SHERIF, 2012).

$$P(\{\boldsymbol{\sigma}\}, \{\mathbf{m}\}) = F(\{\boldsymbol{\sigma}\}, \{\mathbf{k}\}) \quad 25$$

onde:

$P$ : função de potencial plástico

$F$ : função do critério de ruptura de Mohr-Coulomb

$\boldsymbol{\sigma}$ : vetor das tensões

$\mathbf{m}$ : vetor de parâmetros de estado associado à função de potencial plástico

$\mathbf{k}$ : vetor com os parâmetros de resistência (ângulo de atrito interno e coesão)

Para se obter uma generalização quanto à função de potencial plástico, é imposta a condição de que ela se difere da função de escoamento, ou de ruptura, conforme a desigualdade indicada na Equação 26. Em tal situação, tem-se uma regra de fluxo classificada como não associada (POTTS; ZDRAVKOVIC, 1999; SHERIF, 2012).

$$P(\{\boldsymbol{\sigma}\}, \{\mathbf{m}\}) \neq F(\{\boldsymbol{\sigma}\}, \{\mathbf{k}\}) \quad 26$$

A escolha da regra de fluxo influencia no modelo constitutivo do material, pois é ela quem governará os efeitos de dilatação. Por consequência, as variações de volume e de resistência dependerão da função de potencial plástico escolhida. Numericamente, uma regra de fluxo associada resulta em uma matriz constitutiva e em uma matriz de rigidez simétricas. A solução de problemas da mecânica requer, em algum momento, que seja feita a inversão da matriz de rigidez; matrizes simétricas requerem menor esforço computacional para serem invertidas (POTTS; ZDRAVKOVIC, 1999).

Portanto, além do comportamento do material, o uso de uma função associada ou não associada causará impacto na solução numérica, tanto em termos de velocidade de processamento quanto em termos de armazenamento (POTTS; ZDRAVKOVIC, 1999).

Suponha-se que seja adotada uma condição de regra de fluxo associada. Neste caso, a função de potencial plástico assume a forma indicada na Equação 27, com  $\psi$  representando o ângulo de dilatância. Devido à condição de regra de fluxo associada, seu valor se iguala ao ângulo de atrito interno ( $\psi = \phi'$ ) (POTTS; ZDRAVKOVIC, 1999; SHERIF, 2012).

$$P(\{\boldsymbol{\sigma}\}, \{\mathbf{m}\}) = p \operatorname{sen} \psi + q \left( \frac{\cos \theta}{\sqrt{3}} - \frac{\operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \psi}{3} \right) - c \cos \psi \quad 27$$

onde:

$P$ : função de potencial plástico

$\boldsymbol{\sigma}$ : vetor das tensões efetivas

$\mathbf{m}$ : vetor de parâmetros de estado associado à função de potencial plástico

$p$ : invariante que representa a tensão hidrostática

$q$ : invariante associado à distância entre a diagonal no espaço das tensões principais e o estado de tensão

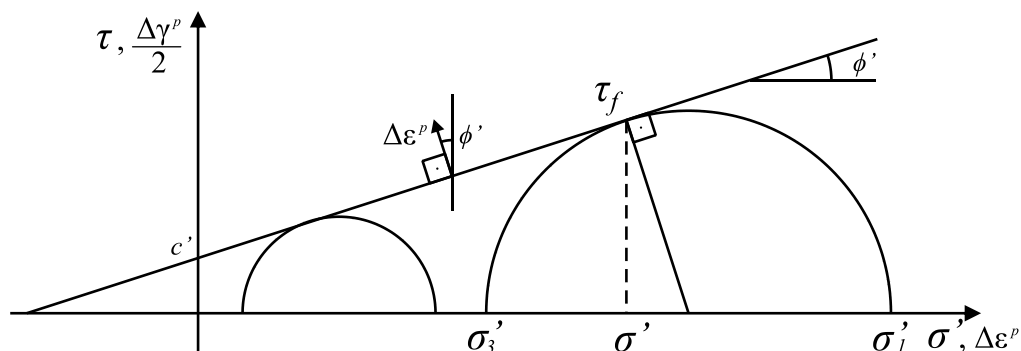
$\theta$ : ângulo de Lode

$c$ : intercepto de coesão

$\psi$ : ângulo de dilatação

Se o estado de tensões for aquele indicado na Figura 21, o vetor de acréscimo de deformação plástica se encontrará inclinado a um ângulo  $\phi'$  com a vertical, indicando a ocorrência de deformações negativas e, portanto, de tração<sup>9</sup>. Também deve-se notar que, em tal situação, haverá deformação volumétrica plástica (POTTS; ZDRAVKOVIC, 1999).

**Figura 21: Indicação do vetor de deformações plásticas e sua relação com o critério de Mohr-Coulomb no estado plano (POTTS; ZDRAVKOVIC, 1999). Adaptada.**



Duas deficiências deste modelo decorrentes da adoção de uma regra de fluxo associada são que a magnitude das deformações plásticas são maiores do que as que realmente ocorrem no solo e que, uma vez que ocorra a ruptura, o solo continuará se deformando continuamente quando solicitado. Neste último caso, o comportamento real consiste em uma dilatação inicial seguida de uma condição de volume constante. Portanto, sem deformações plásticas incrementais (POTTS; ZDRAVKOVIC, 1999).

#### 2.2.4 Derivada da função de potencial plástico

No cálculo das deformações plásticas, a derivada da função de potencial plástico é avaliada de acordo com a regra da cadeia (Equação 28) (SHERIF, 2012).

<sup>9</sup> Em mecânica dos solos, convencionou-se que a compressão possua um valor positivo.

$$\frac{\partial P}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{\partial P}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial P}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial P}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$$

28

onde:

$P$ : função de potencial plástico

$p$ : invariante que representa a tensão hidrostática

$q$ : invariante associado à distância entre a diagonal no espaço das tensões principais e o estado de tensão

$\theta$ : ângulo de Lode

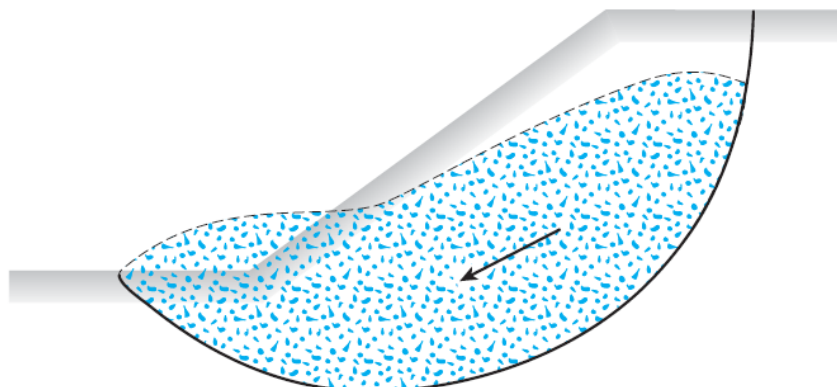
$\boldsymbol{\sigma}$ : vetor das tensões

Devido ao grande número de variáveis e operações envolvidas, é conveniente realizar o cálculo utilizando um sistema de álgebra computacional. Para tanto, as expressões foram obtidas por meio do *software* livre wxMaxima (VODOPIVEC. [20--]).

### 2.2.5 Fator de segurança de taludes

Movimentos de massa de solo e rocha podem ocorrer de diferentes maneiras. Uma das classificações refere-se aos escorregamentos, que consiste no movimento descendente da massa de solo que ocorre em uma superfície de ruptura, conforme ilustrado na Figura 22 (DAS; SOBHAN, 2015).

**Figura 22: Esquema de ruptura de talude por escorregamento (DAS; SOBHAN, 2015).**



A análise de estabilidade pode ser realizada por meio de duas abordagens distintas: determinística e probabilística. A primeira consiste na comparação da resistência do solo ao cisalhamento ( $\tau_f$ ) com as tensões de cisalhamento

desenvolvidas ao longo de uma superfície de ruptura ( $\tau_d$ ), sendo a razão entre essas duas grandezas definida como fator de segurança ( $F_s$ ), conforme expresso na Equação 29 (GERSCOVICH, 2012).

$$F_s = \frac{\tau_f}{\tau_d} \quad 29$$

onde:

$F_s$ : fator de segurança

$\tau_f$ : resistência do solo ao cisalhamento

$\tau_d$ : tensão de cisalhamento desenvolvida

Valores de fator de segurança superiores a 1 indicam estabilidade, enquanto que iguais a 1 significam a ocorrência de ruptura. Resultados menores que 1 não possuem significado físico, considerando o fato de que os valores limite de atrito e coesão desenvolvidos são os próprios parâmetros de resistência (GERSCOVICH, 2012).

A abordagem determinística é realizada por meio da análise inicial dos riscos relacionados a danos materiais e ambientais e a seres humanos, definindo-se o menor valor admissível para o fator de segurança. A partir daí, efetuam-se os cálculos do fator de segurança para as condições dadas, realizando-se a comparação (GERSCOVICH, 2012).

Devido às incertezas no processo de análise de estabilidade, a abordagem determinística tem sido questionada. Uma alternativa é a realização de uma abordagem probabilística na qual é realizado um tratamento estatístico para a representação das incertezas decorrentes do número limitado de amostras e da variabilidade dos parâmetros geotécnicos determinados em ensaios de campo e de laboratório. O intuito da abordagem probabilística é quantificar as incertezas (GERSCOVICH, 2012).

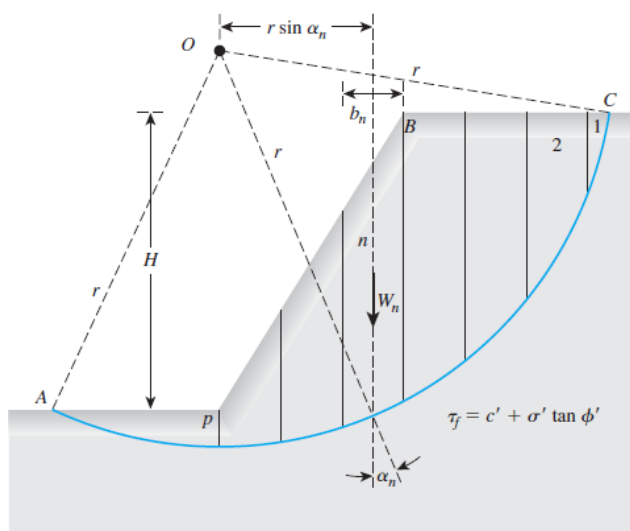
Além das formas apresentadas para se estabelecer o grau de segurança de um talude, recomenda-se que sejam acompanhadas as movimentações e níveis piezométricos ao longo do tempo no talude. O monitoramento deve ser feito durante ou após a execução da obra, tendo por finalidade fornecer informações que sirvam para validar ou propor alterações no modelo (GERSCOVICH, 2012).

## 2.2.6 Modelos para análise da estabilidade de taludes

Para a determinação do fator de segurança, há duas abordagens possíveis de serem utilizadas. São elas a teoria do equilíbrio limite e a método de redução da resistência (GERSCOVICH, 2012; GEO-SLOPE, 2008).

O método do equilíbrio limite se caracteriza pela determinação do equilíbrio de uma massa ativa de solo, delimitada por uma superfície de ruptura. Assume-se que a ruptura se dá ao longo da superfície com todos os elementos atingindo simultaneamente a mesma condição de  $F_s = 1$ . Uma técnica bastante utilizada é a da subdivisão da massa de solo em fatias (Figura 23), cujo equilíbrio é calculado pelas equações da estática. Como o número de incógnitas do problema é maior que o número de equações disponíveis, torna-se necessário realizar algumas simplificações, das quais se originam os diferentes métodos. A superfície potencial de ruptura, que é associada ao  $F_s$  mínimo, é, então, determinada por um processo de procura (GERSCOVICH, 2012).

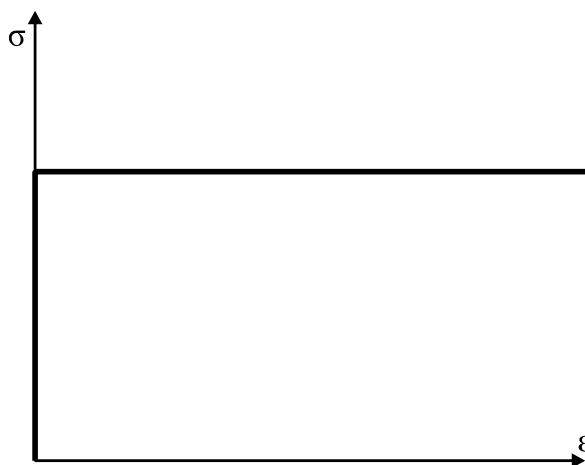
**Figura 23: Subdivisão da massa de solo em fatias com uma superfície de ruptura circular (DAS; SOBHAN, 2015).**



A principal vantagem do método do equilíbrio limite é a sua simplicidade e precisão nos resultados. No entanto, algumas das premissas adotadas consideram um comportamento do solo não compatível com a realidade. Primeiro, a hipótese de que todos os elementos ao longo da superfície de ruptura atinge  $F_s = 1$  simultaneamente implica na utilização de um modelo constitutivo rígido plástico (Figura 24), diferente do comportamento elastoplástico do solo. Desta forma, o método

não permite que se obtenham quaisquer dados sobre as deformações ocorridas. O segundo ponto a se destacar é que as diferentes tensões normais ao longo da superfície de ruptura tornam os  $F_s$  ao longo da superfície diferentes (GERSCOVICH, 2012).

Figura 24: Modelo rígido-plástico adotado no método do equilíbrio limite (GERSCOVICH, 2012).



Quando realizada a análise de tensões e deformações, é possível considerar diversos fatores, como a não linearidade da curva tensão-deformação, a anisotropia, as heterogeneidades, a influência do estado inicial de tensões e as etapas construtivas. As condições de estabilidade podem ser avaliadas comparando-se as tensões de cisalhamento desenvolvidas, determinadas numericamente, com a resistência ao cisalhamento. As principais implicações são a possibilidade de se estabelecer zonas de ruptura sem a delimitação prévia de uma superfície de ruptura, o estabelecimento de níveis de tensão de interesse para a realização dos ensaios de laboratório e o conhecimento da magnitude das deformações, o que permite a comparação direta com o monitoramento realizado em campo (GERSCOVICH, 2012).

Uma técnica utilizada para a análise das tensões e deformações em taludes é o método de redução de resistência (*strength reduction method*, SRM). Ele consiste na redução dos parâmetros de resistência do solo (ângulo de atrito interno e intercepto de coesão) de forma iterativa até que ocorra o colapso da estrutura. O chamado fator de redução de resistência ( $F_{RR}$ ) será dado, então, pela razão entre os parâmetros de resistência do solo obtidos experimentalmente e os valores reduzidos desses parâmetros de modo que haja a ruptura (Equação 30) (GEO-SLOPE, 2008).



$$F_{RR} = \frac{\tan \phi'}{\tan \phi'_f} = \frac{c'}{c'_f} \quad 30$$

onde  $\phi'$  indica o ângulo de atrito interno efetivo,  $c'$  representa o intercepto de coesão efetivo e o subscrito  $f$  denota os valores correspondentes à ocorrência de falha.

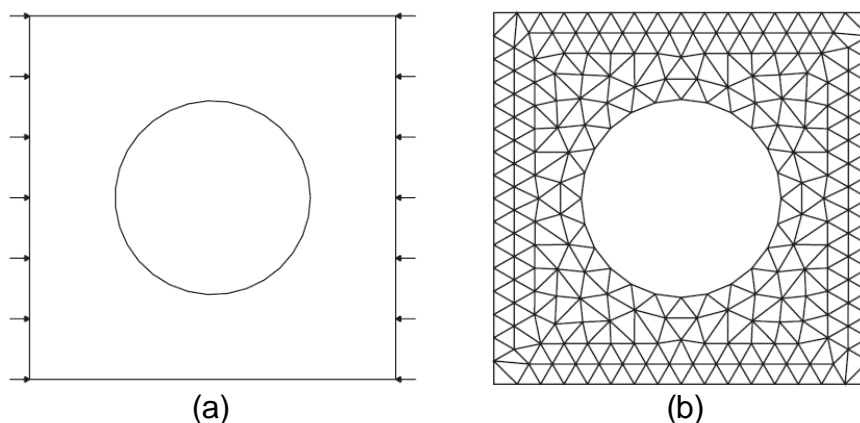
Para um ângulo de atrito interno efetivo  $\phi'$  e um intercepto de coesão  $c'$  quaisquer, o estado de tensões inicial do solo é calculado por meio de uma análise elástica. A partir de então são realizadas análises não lineares considerando o comportamento elastoplástico do material (GEO-SLOPE, 2008). Considera-se que ocorreu ruptura quando não é possível obter uma solução que convirja. Uma alternativa a este critério é considerar que ocorreu falha quando as deformações se tornaram excessivas (GEO-SLOPE, 2008). Neste caso, o critério é subjetivo, mas ainda é relevante pois permite que sejam estabelecidos níveis de alerta antes que ocorra a ruptura, isto é, há a possibilidade de ser feita distinção entre estados limite de serviço e de ruptura.

### 2.3 Métodos sem Malha

Os modelos matemáticos exercem importante função na engenharia. Por meio deles é que problemas de distintas áreas podem ser estudados a fim de se propor soluções práticas. Neste contexto, muitas vezes é necessário o uso de equações diferenciais, sejam elas ordinárias ou parciais. Uma das formas de solução de equações diferenciais parciais caracteriza-se pelo uso de métodos numéricos com o uso de malha (LIU, 2003).

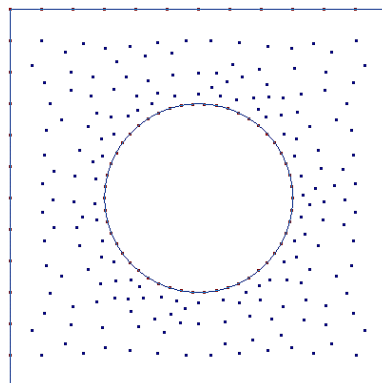
A malha pode ser definida como um conjunto de elementos unidos por pontos, chamados nós, de modo predefinido, cuja totalidade equivale ao domínio do problema. Afirma-se, então, que o domínio está discretizado (Figura 25). A discretização do domínio permite que seja formado um sistema de equações algébrico, cuja solução representará a resposta desejada para o problema (LIU, 2003). Uma das dificuldades existentes nos métodos que dependem de malha é a adaptatividade em problemas que envolvam grandes deformações e formação de fissuras, por exemplo. Em tais casos, há necessidade de recriar a malha, reduzindo a eficiência do método (ZIENKIEWICZ; TAYLOR, 2000; DOLBOW; BELYTSCHKO, 1998).

**Figura 25: Discretização de um domínio. (a) Geometria e (b) malha de elementos finitos triangulares (FISH; BELYTSCHKO, 2007).**



Um método sem malha, por sua vez, possui por característica o estabelecimento do sistema de equações algébrico sem o uso de uma malha predefinida. Em vez dos elementos, é utilizado um conjunto de pontos, também chamados nós, arbitrariamente distribuídos ao longo do domínio para representá-lo, não discretizá-lo (LIU, 2003; DOLBOW; BELYTSCHKO, 1998).

**Figura 26: Representação de um domínio usando método sem malha (CENTER FOR ACES, 2002).**



Muitos métodos sem malha já foram desenvolvidos (Quadro 1). Para ser considerado sem malha, o requisito mínimo é a ausência de malha pelo menos durante a interpolação ou aproximação da variável estudada. Além disso, o requisito ideal é a ausência de malha em todo o processo de solução do problema (LIU, 2003).

**Quadro 1: Exemplos de métodos sem malha desenvolvidos e algumas de suas características (LIU, 2003).**

<b>Método</b>	<b>Sistema de equações a ser resolvido</b>	<b>Método de aproximação de função</b>
Método dos elementos difusos	Forma fraca <sup>10</sup>	Aproximação por Mínimos Quadrados Móveis, Método de Galerkin
Método de Galerkin Livre de Elementos	Forma fraca	Aproximação por Mínimos Quadrados Móveis, Método de Galerkin
Método Petrov-Galerkin Sem Malha Local	Forma fraca local	Aproximação por Mínimos Quadrados Móveis, Método Petrov-Galerkin
Método de Pontos Finitos	Forma forte <sup>11</sup>	Representação por diferenças finitas (séries de Taylor), aproximação por Mínimos Quadrados Móveis
<i>Smooth particle hydrodynamics</i>	Forma forte	Representação integral
<i>Reproducing kernel particle method</i>	Forma forte ou forma fraca	Representação integral
Nuens-hp	Forma fraca	<i>Partition of unit</i> , Mínimos Quadrados Móveis
<i>Partition of unity FEM</i>	Forma fraca	<i>Partition of unit</i> , Mínimos Quadrados Móveis
Método da Interpolação de Pontos	Forma fraca e forma fraca local	Interpolação de pontos
Métodos de nós de contorno	Forma fraca e forma fraca local	Mínimos Quadrados Móveis
Métodos de Interpolação de Pontos de Contorno	Forma fraca e forma fraca local	Interpolação de pontos

De modo geral, este último requisito ainda não é totalmente atendido pelos métodos por diferentes razões. Há métodos que requerem a utilização de malha de fundo para a integração no sistema de matrizes obtido a partir da forma fraca das equações, como no caso do Método de Galerkin Livre de Elementos (MGLE). Outros, como o Método Petrov-Galerkin Sem Malha Local, requerem a criação de malhas de fundo locais, também para integração. Métodos que não requerem nenhuma malha

<sup>10</sup> Forma alternativa da equação de governo do problema (isto é, da forma forte) (FISH; BELYTSCHKO, 2007). É uma formulação necessária no método de elementos finitos e em muitos métodos sem malha.

<sup>11</sup> Equações de governo do problema, juntamente com as condições de contorno (FISH; BELYTSCHKO, 2007). Em muitas aplicações na engenharia, as equações de governo são diferenciais parciais.

também foram desenvolvidos, mas são menos estáveis e menos acurados, como, por exemplo, Método de Diferenças Finitas com malha irregular (LIU, 2003; ZIENKIEWICZ; TAYLOR, 2000).

### 2.3.1 Método de Galerkin Livre de Elementos

O Método de Galerkin Livre de Elementos (MGLE) é um método sem malha com um conjunto de nós sem a presença de conectividade entre si. A conectividade é construída durante a sua execução. Sua aplicação é realizada por meio do Método dos Mínimos Quadrados Móveis, de modo a garantir a continuidade da solução (DOLBOW; BELYTSCHKO, 1998; ZIENKIEWICZ; TAYLOR, 2000).

No MGLE a solução  $u(x)$  é aproximada pela função  $u^h(x)$  utilizando aproximantes de mínimos quadrados móveis (MQM). Tais aproximantes são construídos a partir de três componentes: uma função peso com suporte compacto, isto é, com uma região de influência pequena em relação ao domínio, uma base, geralmente polinomial, e um conjunto de coeficientes dependentes da posição. O suporte da função peso define o domínio de influência de um determinado ponto, que é um subdomínio do problema. Os nós no interior deste subdomínio contribuirão para a aproximação. A conectividade no MGLE, por sua vez, é garantida pela superposição dos domínios de influência (DOLBOW; BELYTSCHKO, 1998).

Nas seções seguintes serão abordados o método dos Mínimos Quadrados Móveis e a obtenção da forma fraca a partir da forma forte e do princípio da energia potencial mínima. O chamado MGLE é derivado do método dos resíduos ponderados, a partir da escolha de uma função peso, como será abordado adiante.

### 2.3.2 Método dos Mínimos Quadrados Móveis

Seja o domínio  $\Omega$  representado por nós de coordenadas  $\mathbf{x}$ , conforme a Equação 31. Aos nós  $1, 2, \dots, k, \dots, n$  está associado um valor representativo do seu deslocamento, denominado parâmetro nodal e denotado por  $u_k$ , que é um parâmetro do qual a função do deslocamento  $u(\mathbf{x})$  é dependente naquele ponto. De modo geral,  $u_k \neq u(\mathbf{x}_k)$  (DOLBOW; BELYTSCHKO, 1998).

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

onde:

$\mathbf{x}$ : vetor das posições

$x, y$ : ordenadas

Define-se como aproximação para a  $u(\mathbf{x})$  a função  $u^h(\mathbf{x})$ , geralmente polinomial (LIU G. , 2003), com coeficientes não constantes (DOLBOW; BELYTSCHKO, 1998). A escolha do polinômio e da sua ordem  $m$  para casos bidimensionais pode ser feita com o auxílio do triângulo de Pascal para monômios (Figura 27)

. Uma base linear para  $u^h(\mathbf{x})$  pode ser expressa como na Equação 32 (DOLBOW; BELYTSCHKO, 1998).

$$u^h(\mathbf{x}) = a_0(\mathbf{x}) + a_1(\mathbf{x})x + a_2(\mathbf{x})y \tag{32}$$

onde:

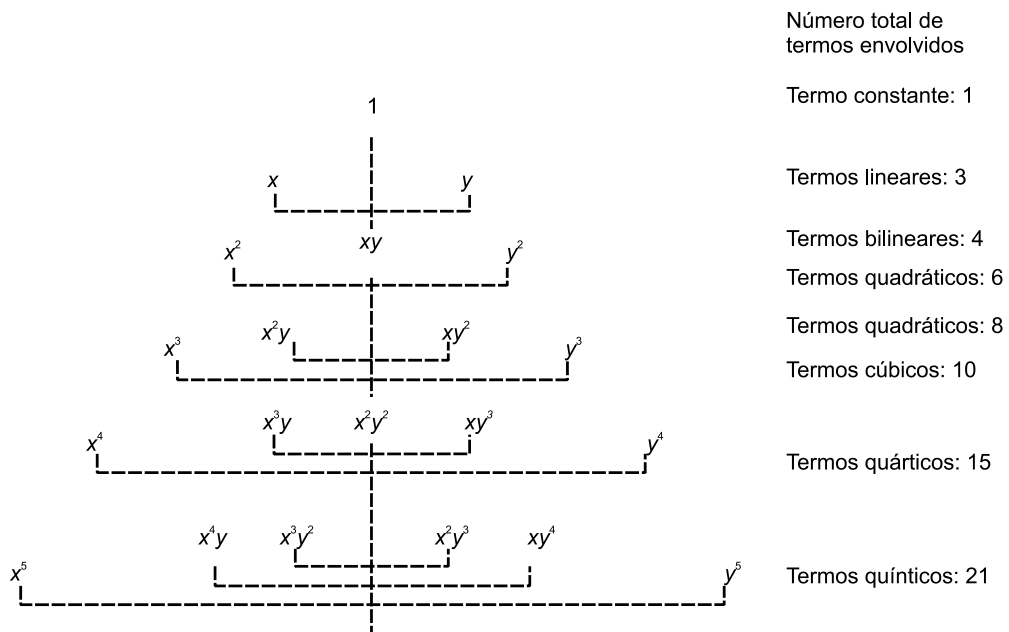
$u^h$ : aproximação da solução

$a_0, a_1, a_2$ : coeficientes não constantes que definem a aproximação  $u^h$

$\mathbf{x}$ : vetor das posições

$x, y$ : ordenadas

**Figura 27: Triângulo de Pascal para monômios em casos bidimensionais (LIU, 2003).**



Na Equação 32 os coeficientes incógnitos  $a_j(\mathbf{x})$  variam com  $\mathbf{x}$ . Representando a base polinomial por  $\mathbf{p}(\mathbf{x})$  (Equação 33) e os coeficientes não constantes por  $\mathbf{a}(\mathbf{x})$  (Equação 34), é possível reescrever a Equação 32 na forma matricial expressa na Equação 35, indicando a aproximação local como sendo  $u_L^h(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}})$  (LIU, 2003; ZIENKIEWICZ; TAYLOR, 2000; DOLBOW; BELYTSCHKO, 1998).

$$\mathbf{p}^T(\mathbf{x}) = [1 \quad x \quad y] \quad 33$$

$$\mathbf{a}^T(\mathbf{x}) = [a_0(\mathbf{x}) \quad a_1(\mathbf{x}) \quad a_2(\mathbf{x})] \quad 34$$

$$u_L^h(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}) = \mathbf{p}^T(\mathbf{x})\mathbf{a}(\bar{\mathbf{x}}) \quad 35$$

onde:

$\mathbf{p}$ : base polinomial para a aproximação

$\mathbf{a}$ : vetor dos coeficientes não constantes da aproximação

$a_0, a_1, a_2$ : coeficientes não constantes que definem a aproximação  $u^h$

$u_L^h$ : aproximação local da solução, centrada em  $\bar{\mathbf{x}}$

$\mathbf{x}$ : vetor das posições

$x, y$ : ordenadas

Ao minimizar a norma discreta  $L_2$ , representada por  $J(\mathbf{x})$ , dada na Equação 36, torna-se possível calcular as incógnitas  $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ . No somatório, consideram-se apenas os  $n$  nós e parâmetros nodais cujos domínio de influência incluem  $\mathbf{x}$ . A norma é ponderada por uma função  $w_k(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k)$ , cuja escolha depende da suavidade da própria função peso e de suas derivadas, conforme o tipo de problema (ZIENKIEWICZ; TAYLOR, 2000; LIU, 2003).

O peso é calculado em função da distância entre os nós do domínio, de coordenadas  $\mathbf{x}_k$ , e o ponto de coordenadas  $\mathbf{x}$ . A continuidade da solução é garantida pela superposição dos domínios de influência (Figura 28) (DOLBOW & BELYTSCHKO, 1998).

$$J(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^n w_k(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k) [u_L^h(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}) - u_k]^2 \quad 36$$

onde:

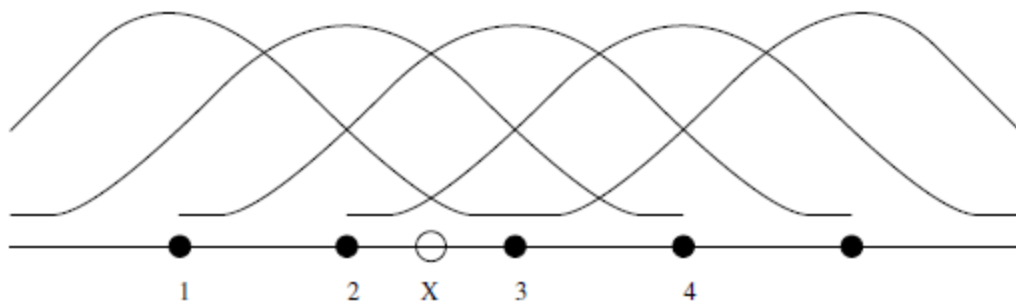
$J$ : norma discreta  $L_2$

$w_k$ : função peso em função da distância do centro  $\mathbf{x}_k$  em relação a  $\mathbf{x}$

$u_L^h$ : aproximação local da solução, centrada em  $\mathbf{x}_k$

$u_k$ : solução exata para a posição  $\mathbf{x}_k$

**Figura 28: Superposição do domínios de influência no método dos MQM, garantindo a continuidade da solução (DOLBOW; BELYTSCHKO, 1998).**



A substituição da aproximação local da Equação 35 na 36 permite escrever a norma ponderada discreta  $L_2$  em termos da base polinomial e dos coeficientes (Equação 37).

$$J(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^n w_k(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k) [\mathbf{p}^T(\mathbf{x}_k) \mathbf{a}(\mathbf{x}) - u_k]^2 \quad 37$$

A minimização da norma expressa na Equação 37 em relação às incógnitas  $\mathbf{a}(\mathbf{x})$  conduz à Equação 38.

$$\frac{\partial J(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{a}} = 2 \sum_{k=1}^n w_k(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k) [\mathbf{p}(\mathbf{x}_k)] [\mathbf{p}^T(\mathbf{x}_k) \mathbf{a}(\mathbf{x}) - u_k] = 0 \quad 38$$

Do resultado obtido na Equação 38, é possível reordenar os termos para escrever a Equação 39.

$$\sum_{k=1}^n w_k(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k) \mathbf{p}(\mathbf{x}_k) \mathbf{p}^T(\mathbf{x}_k) \mathbf{a}(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^n w_k(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k) \mathbf{p}(\mathbf{x}_k) u_k \quad 39$$

A Equação 39 consiste num sistema linear que, quando resolvido em relação aos coeficientes  $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ , permite escrever a Equação 40 (DOLBOW; BELYTSCHKO, 1998; ZIENKIEWICZ; TAYLOR, 2000; LIU, 2003).

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}(\mathbf{x})^{-1} \mathbf{B}(\mathbf{x}) \mathbf{u} \quad 40$$

na qual,

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{x}) &= \sum_{k=1}^n w_k (\mathbf{x} - \mathbf{x}_k) \mathbf{p}(\mathbf{x}_k) \mathbf{p}^T(\mathbf{x}_k) \\ &= \sum_{k=1}^n w_k (\mathbf{x} - \mathbf{x}_k) \begin{bmatrix} 1 & x_k & y_k \\ x_k & x_k^2 & x_k y_k \\ y_k & x_k y_k & y_k^2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad 41$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{x}) &= \left[ w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1) \mathbf{p}(\mathbf{x}_1) \quad w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_2) \mathbf{p}(\mathbf{x}_2) \quad \dots \quad w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n) \mathbf{p}(\mathbf{x}_n) \right] \\ &= \left[ w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1) \begin{bmatrix} 1 \\ x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \quad w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_2) \begin{bmatrix} 1 \\ x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} \quad \dots \quad w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n) \begin{bmatrix} 1 \\ x_n \\ y_n \end{bmatrix} \right] \end{aligned} \quad 42$$

$$\mathbf{u}^T = [u_1 \quad u_2 \quad \dots \quad u_n] \quad 43$$

Desta maneira, a substituição da Equação 43 na 35 possibilita a escrita da Equação 44, onde a aproximação  $u^h(\mathbf{x})$  fica expressa em termos dos parâmetros nodais  $\mathbf{u}$ .

$$u^h(\mathbf{x}) = \Phi(\mathbf{x}) \mathbf{u} \quad 44$$

onde

$$\Phi(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T(\mathbf{x}) \mathbf{A}(\mathbf{x})^{-1} \mathbf{B}(\mathbf{x}) \quad 45$$

sendo

$\Phi(\mathbf{x})$ : função de forma

Na Equação 44, é chamada função de forma. O cálculo das derivadas do deslocamento aproximado por meio da Equação 44 requer o cálculo das derivadas da função de forma definida na Equação 45. Portanto, aplicando a regra do produto, obtém-se a Equação 46.

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{x})_{,x} &= \left( \mathbf{p}^T(\mathbf{x}) \mathbf{A}(\mathbf{x})^{-1} \mathbf{B}(\mathbf{x}) \right)_{,x} \equiv \left( \mathbf{p}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \right)_{,x} \\ &= \mathbf{p}^T_{,x} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{p}^T \mathbf{A}_{,x}^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{p}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}_{,x} \end{aligned} \quad 46$$



onde,

$$\mathbf{B}_{,x} = \left[ w_{,x}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1)\mathbf{p}(\mathbf{x}_1) \quad w_{,x}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_2)\mathbf{p}(\mathbf{x}_2) \quad \dots \quad w_{,x}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n)\mathbf{p}(\mathbf{x}_n) \right] \quad 47$$

e a derivada de  $\mathbf{A}^{-1}$  é obtida a partir da propriedade do produto de uma matriz por sua inversa:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} &= \mathbf{I} \\ (\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A})_{,x} &= (\mathbf{I})_{,x} \\ \mathbf{A}_{,x}^{-1}\mathbf{A} + \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}_{,x} &= 0 \\ \mathbf{A}_{,x}^{-1} &= -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}_{,x}\mathbf{A}^{-1} \end{aligned} \quad 48$$

sendo

$$\mathbf{A}_{,x} = \sum_{k=1}^n w_{k,x}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k) \begin{bmatrix} 1 & x_k & y_k \\ x_k & x_k^2 & x_k y_k \\ y_k & x_k y_k & y_k^2 \end{bmatrix} \quad 49$$

### 2.3.2.1 Função peso

Há diferentes funções peso que podem ser adotadas no MMQM. Para apresentá-las, define-se como distância normalizada ( $r$ ) a relação entre a norma do vetor que expressa a distância entre o ponto  $\mathbf{x}$  e o nó  $\mathbf{x}_k$  e o tamanho do domínio de suporte ( $d_s$ ) do ponto  $\mathbf{x}$  (DOLBOW; BELYTSCHKO, 1998; LIU, 2003). A distância normalizada possui por objetivos simplificar a notação no cálculo da função peso e generalizar as expressões para quaisquer intervalos. Pode ser expressa conforme a Equação 50 (DOLBOW; BELYTSCHKO, 1998; LIU, 2003).

$$r = \frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_k\|}{d_s} \quad 50$$

onde

$r$ : distância normalizada de  $\mathbf{x}$  a  $\mathbf{x}_k$

$d_s$ : tamanho do domínio de suporte

A dimensão do domínio de suporte ( $d_s$ ) para os casos bidimensionais pode ser estimada por meio da Equação 51, onde  $\alpha$  corresponde ao tamanho adimensional do domínio de suporte e  $d_c$ , à distância característica entre os nós nas proximidades do ponto  $\mathbf{x}$  (DOLBOW; BELYTSCHKO, 1998; LIU, 2003).

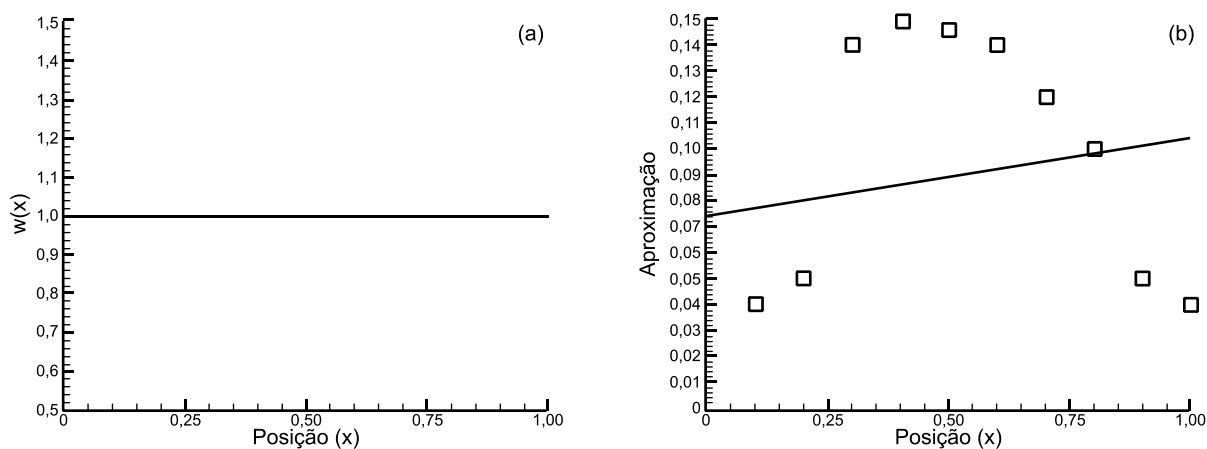
$$d_s = \alpha d_c \quad 51$$

A distância característica  $d_c$  indica uma distância média entre os nós do domínio do problema. Pode ser calculada utilizando-se a Equação 52, na qual a área  $A_s$  consiste em uma região estimada coberta pelo domínio de suporte  $d_s$  e o número de nós contidos na região é denotado por  $n_A$ . A estimativa inicial para a área  $A_s$  não requer grande acurácia, mas deve ser representativa o suficiente para o modelo estudado (LIU, 2003).

$$d_c = \frac{\sqrt{A_s}}{\sqrt{n_A} - 1} \quad 52$$

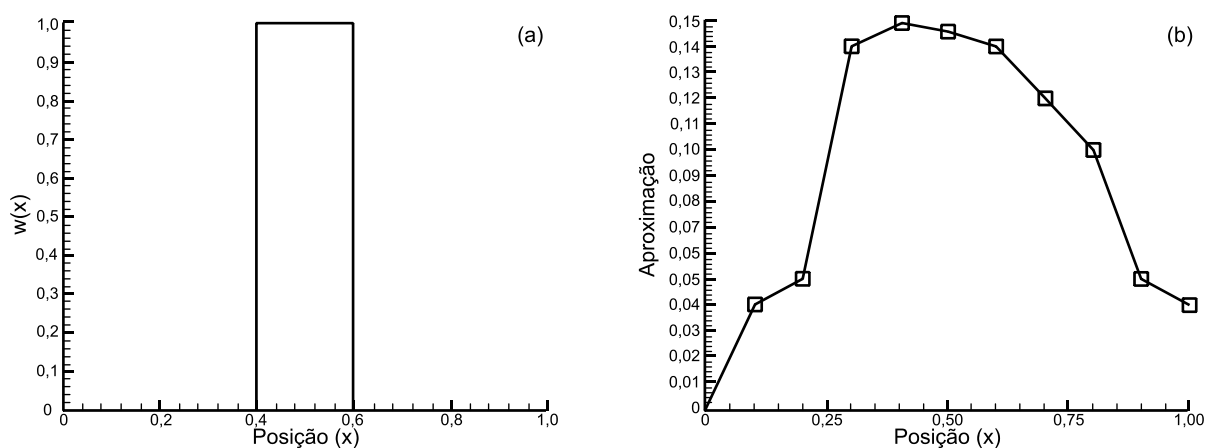
O tamanho adimensional do domínio de suporte ( $\alpha$ ) consiste em um fator que torna a dimensão deste subdomínio ( $d_s$ ) maior que a distância média entre os nós ( $d_c$ ). O valor adotado para  $\alpha$  geralmente encontra-se em um intervalo fechado entre 2 e 4 (DOLBOW; BELYTSCHKO, 1998; LIU, 2003). A escolha da função peso influencia nos resultados da aproximação  $u^h(\mathbf{x})$ . Se uma função peso unitária é adotada, isto é, todos os nós  $\mathbf{x}_k$  no domínio influenciam a aproximação no ponto  $\mathbf{x}$ , o resultado será uma regressão linear (Figura 29) (DOLBOW; BELYTSCHKO, 1998).

**Figura 29: Exemplo de aproximação pelo MMQM no método de Galerkin livre de elementos em um caso unidimensional. (a) A função peso unitária significa a influência de todos os nós em relação à posição  $x = 0,5$ , por exemplo. (b) O resultado geral é uma regressão linear (DOLBOW; BELYTSCHKO, 1998).**



Caso a função peso possua um suporte compacto<sup>12</sup> constante, como no exemplo da Figura 30a, na qual nota-se uma função centrada em  $x = 0,5$  com nós vizinhos nas posições  $x = 0,4$  e  $x = 0,6$ , sendo o domínio de suporte limitado apenas a dois nós na vizinhança, será observada uma interpolação linear quando o procedimento for repetido para os demais nós (Figura 30b). A existência de apenas dois nós no subdomínio definido pela função peso é a causa desse comportamento da aproximação (DOLBOW; BELYTSCHKO, 1998).

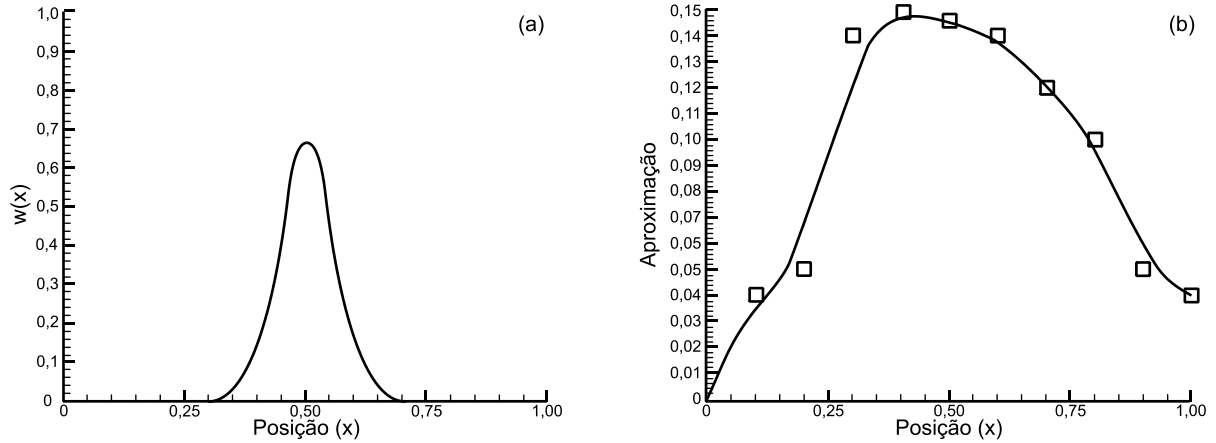
**Figura 30: Exemplo de aproximação pelo MMQM no método de Galerkin livre de elementos em um caso unidimensional. (a) A função peso possui suporte compacto constante, sendo exemplificado o caso da posição  $x = 0,5$ . (b) Para o domínio como um todo, o resultado é uma interpolação linear (DOLBOW; BELYTSCHKO, 1998).**



Na aplicação do MGLE, é desejável que as funções peso sejam suaves no subdomínio. Portanto, no exemplo apresentado, caso haja um suporte compacto com domínio de influência que cubra um intervalo maior (Figura 31a), o resultado da aproximação para todo o domínio será como aquele ilustrado na Figura 31b (DOLBOW; BELYTSCHKO, 1998): a solução se ajusta aos parâmetros nodais, é suave e também contínua.

<sup>12</sup> Isto é, região de influência com dimensões pequenas em relação ao domínio do problema.

Figura 31: Exemplo de aproximação pelo MMQM no método de Galerkin livre de elementos em um caso unidimensional. (a) A função peso possui suporte compacto, é suave e se estende além dos pontos considerados na Figura 30a. Aqui, exibe-se o exemplo quando centrada  $x = 0,5$ . (b) Resultado da aproximação para todo o domínio: uma curva suavizada (DOLBOW; BELYTSCHKO, 1998).



De modo geral, a função peso escolhida no MGLE deve ser diferente de zero apenas em uma pequena vizinhança de  $\mathbf{x}_k$  (DOLBOW; BELYTSCHKO, 1998). O termo *pequena vizinhança* significa o domínio de influência, e a definição, como apresentada, indica que a função deve possuir suporte compacto. Como exemplo de funções que atendem a essa exigência, citam-se as Equações 53 a 59:

- Função *spline*<sup>13</sup> cúbica (Equação 53) (LIU, 2003).

$$w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k) \equiv w(r) = \begin{cases} \frac{2}{3} - 4r^2 + 4r^3 & \text{se } r \leq \frac{1}{2} \\ \frac{4}{3} - 4r + 4r^2 - \frac{4}{3}r^3 & \text{se } \frac{1}{2} < r \leq 1 \\ 0 & \text{se } r > 1 \end{cases} \quad 53$$

- Função *spline* quártica (Equação 54) (LIU, 2003).

$$w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k) \equiv w(r) = \begin{cases} 1 - 6r^2 + 8r^3 - 3r^4 & \text{se } r \leq 1 \\ 0 & \text{se } r > 1 \end{cases} \quad 54$$

- Função peso exponencial (Equação 55) (LIU, 2003).

$$w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k) \equiv w(r) = \begin{cases} \exp\left[-\left(\frac{r}{\alpha}\right)^2\right] & \text{se } r \leq 1 \\ 0 & \text{se } r > 1 \end{cases} \quad 55$$

onde  $\alpha$  é constante e pode ser igualada a 0,3 (LIU, 2003).

<sup>13</sup> Funções usadas para conectar pares de pontos em métodos de aproximação, geralmente utilizadas para substituir polinômios de grau mais alto (CHAPRA; CANALE, 2011).

- Função peso quártica (Equação 56) (LIU, 2003).

$$w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k) \equiv w(r) = \begin{cases} \frac{2}{3} - \frac{9}{32} r^2 + \frac{19}{192} r^3 - \frac{5}{512} r^4 & \text{se } r \leq 1 \\ 0 & \text{se } r > 1 \end{cases} \quad 56$$

- Função truncada de Gauss (Equação 57) (ZIENKIEWICZ; TAYLOR, 2000).

$$w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k) \equiv w(r) = \begin{cases} \frac{\exp[-c(rd_s)^2] - \exp(-cd_s^2)}{1 - \exp(-cd_s^2)} & \text{se } r \leq 1 \\ 0 & \text{se } r > 1 \end{cases} \quad 57$$

na qual  $c$  é constante e maior que zero.

- Função Hermitiana de interpolação (Equação 58) (ZIENKIEWICZ; TAYLOR, 2000).

$$w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k) \equiv w(r) = \begin{cases} 1 - 3r^2 + 2r^3 & \text{se } r \leq 1 \\ 0 & \text{se } r > 1 \end{cases} \quad 58$$

- Função peso simplificada (Equação 59) (ZIENKIEWICZ; TAYLOR, 2000).

$$w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k) \equiv w(r) = \begin{cases} [1 - r^2]^n & \text{se } r \leq 1 \\ 0 & \text{se } r > 1 \end{cases} \quad 59$$

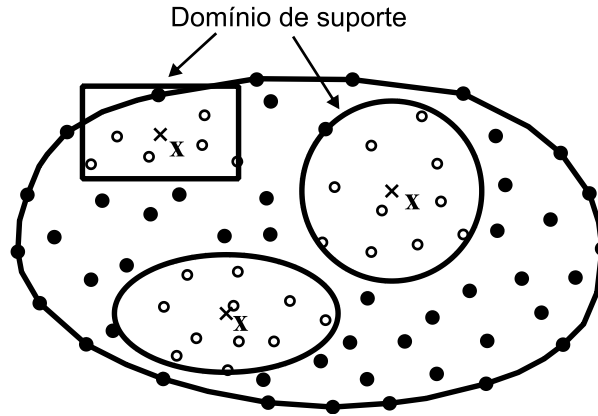
em que  $n$  é inteiro e maior ou igual a 2.

Na escolha da função peso do MMQM, deve-se considerar a sua suavidade e a de suas derivadas. A exemplo do critério adotado no método de elementos finitos (FISH; BELYTCHKO, 2007; ZIENKIEWICZ; TAYLOR, 2000), a escolha deve ser feita de modo que suas derivadas de ordem  $j$ , para  $0 \leq j \leq n$ , existam e sejam contínuas. A função que atende a este requisito é dita de classe  $C^n$  (LIU, 2003; DOLBOW; BELYTCHKO, 1998; FISH; BELYTCHKO, 2007). No presente trabalho adotou-se a função *spline* cúbica, dada pela Equação 53.

As funções peso do modo como estão definidas nas Equações 53 a 59 referem-se a domínios de influência circulares quando aplicadas a casos bidimensionais. O formato, entretanto, pode ser arbitrário (Figura 32) (LIU, 2003; ZIENKIEWICZ; TAYLOR, 2000; DOLBOW; BELYTCHKO, 1998). As mesmas formulações podem

ser utilizadas para subdomínios retangulares, devendo ser realizado um procedimento próprio para isto.

**Figura 32: Domínios de influência com diferentes formatos. Outros formatos que podem ser usados além do circular são o retangular e o elíptico (LIU, 2003).**



Quando retangulares, os domínios de influência podem ser calculados por meio da Equação 60. Nela, consideram-se os pesos em função das distâncias em cada ordenada. É possível adotar uma distância normalizada  $r$  para representar a variável independente na função peso.

$$w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k) = w(x - x_k) \cdot w(y - y_k) \equiv w(r_x) \cdot w(r_y) \quad 60$$

As distâncias normalizadas estão expressas nas Equações 61 e 62. As distâncias máximas do domínio de influência ( $d_{sx}$  e  $d_{sy}$ ) podem ser obtidas de maneira análoga à Equação 51, sendo as dimensões adimensionais  $\alpha$  independentes em cada direção.

$$r_x = \frac{\|x - x_k\|}{d_{sx}} \quad 61$$

$$r_y = \frac{\|y - y_k\|}{d_{sy}} \quad 62$$

O cálculo das derivadas da função peso para domínios retangulares é realizado por meio das Equações 63 e 64 (DOLBOW; BELYTCHKO, 1998).

$$w(r)_{,x} = w(r_x)_{,x} \cdot w(r_y) \quad 63$$

$$w(r)_{,y} = w(r_x) \cdot w(r_y)_{,y} \quad 64$$

### 2.3.3 Obtenção do sistema de equações lineares no MGLE

Para ser obtida uma solução utilizando o MGLE um sistema de equações lineares deve ser resolvido. Este sistema é montado a partir da combinação de dois procedimentos: a obtenção da chamada forma fraca da equação diferencial de governo do problema e a construção da função de aproximação calculando-se as funções de forma. Este raciocínio assemelha-se àquele utilizado no Método de Elementos Finitos (MEF) (DOLBOW; BELYTSCHKO, 1998; FISH; BELYTSCHKO, 2007).

Pode-se afirmar que uma das principais diferenças entre os dois métodos encontra-se na maneira como são construídas as funções de forma. Enquanto no MEF elas são construídas por interpolação para um elemento para posterior aplicação em diferentes problemas, no MGLE elas são construídas por aproximação, por meio do Método dos Mínimos Quadrados Móveis, para os nós (FISH; BELYTSCHKO, 2007; LIU, 2003). No caso do MGLE, há a necessidade de sempre se construir as funções de forma em cada problema (LIU, 2003), como abordado na seção 2.3.2.

Quanto à obtenção da forma fraca, o procedimento nos dois métodos é similar (LIU G. , 2003). A forma fraca da equação de governo pode ser definida como uma equação equivalente à forma forte, isto é, à equação diferencial que rege o problema, e suas condições de contorno (FISH; BELYTSCHKO, 2007).

#### 2.3.3.1 Forma forte da equação de governo

O cálculo das tensões e deformações no regime elástico é realizado com a admissão de algumas hipóteses. São elas (FISH; BELYTSCHKO, 2007):

- as deformações são pequenas;
- o material apresenta comportamento linear;
- os efeitos dinâmicos são desprezados;
- não ocorrem lacunas ou superposições durante a deformação.

Inicialmente, define-se o vetor deslocamento no caso bidimensional conforme a Equação 65 (FISH; BELYTSCHKO, 2007; TEIXEIRA, 2012).

$$\mathbf{u}^T = \begin{bmatrix} u_x & u_y \end{bmatrix} \quad 65$$

onde:

$\mathbf{u}$ : vetor deslocamento no plano, de componentes  $u_x$  e  $u_y$

A partir dos componentes do deslocamento, definem-se as deformações extensionais nas direções  $x$  e  $y$  e a deformação por cisalhamento, de acordo com as Equações 66 a 69, respectivamente (FISH; BELYTCHKO, 2007). Note-se que, em geotecnia, muitas vezes uma dimensão predomina sobre as demais, sendo o estado plano de deformações (no qual  $\varepsilon_{zz} = 0$ ) o mais adequado para representar o comportamento do material (POTTS; ZDRAVKOVIC, 1999).

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x} \quad 66$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y} \quad 67$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \quad 68$$

$$\varepsilon_{zz} = 0 \quad 69$$

onde:

$\varepsilon_{xx}$ : deformação específica normal ao longo do eixo  $x$

$\varepsilon_{yy}$ : deformação específica normal ao longo do eixo  $y$

$\varepsilon_{xy}$ : distorção angular em relação ao plano  $xy$

$\varepsilon_{zz}$ : deformação específica normal ao longo do eixo  $z$

O agrupamento das deformações em um vetor pode ser realizado (FISH; BELYTCHKO, 2007; TEIXEIRA, 2012; POTTS; ZDRAVKOVIC, 1999; SHERIF, 2012), obtendo-se a Equação 70. Define-se, ainda, o operador gradiente conforme a Equação 71 (FISH; BELYTCHKO, 2007; TEIXEIRA, 2012; SHERIF, 2012).

$$\boldsymbol{\varepsilon}^T = \left[ \varepsilon_{xx} \quad \varepsilon_{yy} \quad \varepsilon_{xy} \quad \varepsilon_{zz} \right] \quad 70$$

$$\nabla_s = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 \\ 0 & \partial/\partial y \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad 71$$

onde:

$\nabla_s$ : operador diferencial *nabla*



Desta maneira, o vetor das deformações pode ficar expresso de acordo com a Equação 72 (FISH; BELYTSCHKO, 2007; TEIXEIRA, 2012; POTTS; ZDRAVKOVIC, 1999; SHERIF, 2012).

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \nabla_s \mathbf{u} \quad 72$$

Para as tensões, o tensor de Cauchy é simétrico. No caso bidimensional é escrito de acordo com a Equação 73. A sua representação como um vetor pode ser feita, resultando na Equação 106 (FISH; BELYTSCHKO, 2007; TEIXEIRA, 2012). A representação gráfica dos componentes do tensor de Cauchy está feita na Figura 33.

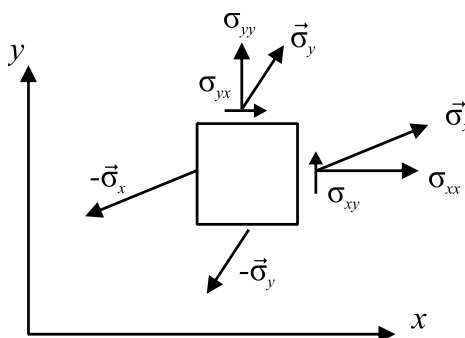
$$\boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad 73$$

$$\boldsymbol{\tau} \equiv \boldsymbol{\sigma}^T = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{yy} & \sigma_{xy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad 74$$

onde:

$\boldsymbol{\tau}$ : tensor das tensões de Cauchy, de componentes  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$ ,  $\sigma_{xy}$ ,  $\sigma_{yx}$  e  $\sigma_{zz}$

**Figura 33: Componentes do tensor das tensões de Cauchy, em duas dimensões (FISH; BELYTSCHKO, 2007).**



Definindo o vetor normal unitário como mostrado na Equação 75, as trações atuantes nas faces de um elemento infinitesimal de um corpo (Figura 33) podem ser definidas conforme a Equação 76 (FISH; BELYTSCHKO, 2007).

$$\mathbf{n}^T = \begin{bmatrix} n_x & n_y \end{bmatrix} \quad 75$$

$$\mathbf{t} = \boldsymbol{\tau} \mathbf{n} \quad 76$$

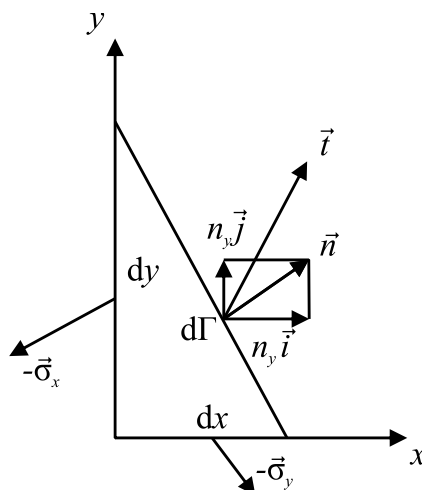
onde:

$\mathbf{n}$ : vetor normal unitário, de componentes  $n_x$  e  $n_y$

$\mathbf{t}$ : vetor das trações atuantes na face de um elemento infinitesimal no plano

$\tau$  : tensor das tensões de Cauchy

Figura 34: Relação entre o tensor das tensões e a tração atuante na superfície (FISH; BELYTSCHKO, 2007).



Definem-se, ainda, as forças de corpo atuantes conforme a Equação 77 (FISH; BELYTSCHKO, 2007).

$$\mathbf{b}^T = [b_x \quad b_y] \quad 77$$

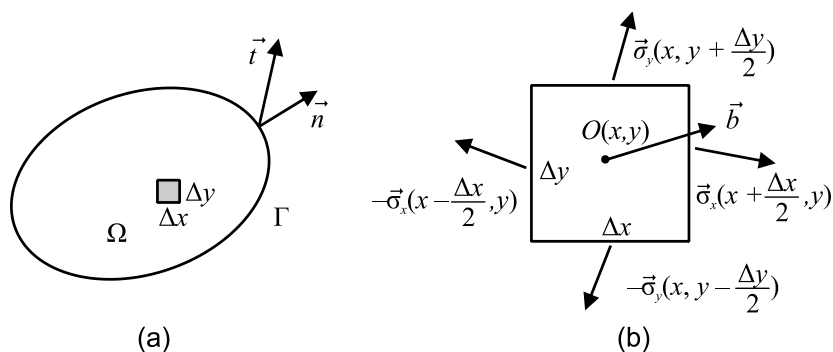
onde:

$\mathbf{b}$ : forças de corpo atuantes no plano, de componentes  $b_x$  e  $b_y$

Considere-se agora o domínio ilustrado na Figura 35a. Do equilíbrio de um elemento de dimensões  $\Delta x$  e  $\Delta y$  (Figura 35b), quando  $\Delta x \rightarrow 0$  e  $\Delta y \rightarrow 0$ , é possível escrever a Equação 78 (FISH; BELYTSCHKO, 2007).

$$\nabla_s^T \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad 78$$

Figura 35: Domínio estudado. (a) Representação do domínio  $\Omega$ , do contorno  $\Gamma$ , da tração no contorno e do elemento de dimensões  $\Delta x$  e  $\Delta y$ . (b) Equilíbrio de forças no elemento destacado (FISH; BELYTSCHKO, 2007).



No regime elástico, a relação entre tensões e deformações pode ser expressa pela Lei de Hooke, de acordo com a Equação 79 (FISH; BELYTCHKO, 2007; TEIXEIRA, 2012). Portanto, sendo linear a relação constitutiva do material, a substituição da Equação 72 na 79 permite escrever a Equação 80.

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} \quad 79$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\nabla_s \mathbf{u} \quad 80$$

na qual

$$\mathbf{D} = \frac{E}{(1-\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 & \nu \\ \nu & 1-\nu & 0 & \nu \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ \nu & \nu & 0 & 1-\nu \end{bmatrix} \quad 81$$

para deformações planas.

onde:

$E$ : módulo de Young

$\nu$ : coeficiente de Poisson

A equação de equilíbrio para o domínio pode, então, ser expressa de acordo com a Equação 82 (FISH; BELYTCHKO, 2007; TEIXEIRA, 2012), onde realizou-se a substituição da Equação 80 na 78. As condições de contorno natural e essencial são dadas pelas Equações 83 e 84, respectivamente (FISH; BELYTCHKO, 2007; TEIXEIRA, 2012).

$$\nabla_s^T \mathbf{D} \nabla_s \mathbf{u} + \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad \text{sobre } \Omega \quad 82$$

$$\bar{\mathbf{t}} = \boldsymbol{\tau} \mathbf{n} \quad \text{sobre } \Gamma_t \quad 83$$

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \quad \text{sobre } \Gamma_u \quad 84$$

onde:

$\Omega$ : domínio do problema

$\bar{\mathbf{t}}$ : trações prescritas na fronteira natural  $\Gamma_t$

$\bar{\mathbf{u}}$ : deslocamentos prescritos na fronteira essencial  $\Gamma_u$

A forma forte da equação de governo do problema, representada pela Equação 82, deve ser resolvida de modo a se determinarem os deslocamentos  $\mathbf{u}$  que satisfaçam o equilíbrio (FISH; BELYTSCHKO, 2007).

### 2.3.3.2 Forma fraca da equação de governo

Para a obtenção da forma fraca da Equação 82, pode ser feito uso de princípios variacionais. Inicialmente, é feito uso do Princípio de Hamilton<sup>14</sup>, representando-se o chamado funcional Lagrangiano por  $L$  e definindo-o matematicamente para estruturas conforme a Equação 85 para problemas não dependentes do tempo (LIU, 2003). Em mecânica dos sólidos, o Princípio de Hamilton é equivalente ao Princípio dos Trabalhos Virtuais (FISH; BELYTSCHKO, 2007).

$$L = W_f - \Pi_s \quad 85$$

onde  $W_f$  indica o trabalho feito pelas forças externas e  $\Pi_s$ , a energia de deformação do sistema.

Quando existem diferentes materiais, deve ser garantida a compatibilidade das deformações na interface. Portanto, definindo  $W_i$  como o potencial na fronteira de interface entre os diferentes materiais, escreve-se na Equação 86 uma forma modificada da Equação 85 (TEIXEIRA, 2012).

$$L = W_f - \Pi_s + W_i \quad 86$$

A energia de deformação pode ser escrita de acordo com a Equação 87, enquanto o trabalho feito pelas forças externas pode ser calculado por meio da Equação 88.

$$\Pi_s = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega \quad 87$$

na qual  $\Omega$  representa o domínio.

$$W_f = \int_{\Omega} \mathbf{u}^T \mathbf{b} \, d\Omega + \int_{\Gamma_f} \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{t}} \, d\Gamma \quad 88$$

<sup>14</sup> Princípio que enuncia a condição para tornar um funcional estacionário. Na verdade, o Princípio de Hamilton é válido para funções de potencial dependentes do tempo (WASHIZU, 1975). As equações nas quais se considera a energia cinética (fazendo o problema dependente do tempo) podem ser encontradas em (LIU, 2003).

em que  $\Gamma_i$  indica o contorno no qual é aplicada a força de superfície  $\bar{\mathbf{t}}$  prescrita.

O potencial na interface entre diferentes materiais é calculado de acordo com a Equação 89 (TEIXEIRA, 2012).

$$W_i = \int_{\Gamma_i} \boldsymbol{\sigma}_i (\mathbf{u}^{MAT1} - \mathbf{u}^{MAT2}) d\Gamma_i \quad 89$$

em que  $\Gamma_i$  indica a fronteira de interface entre os dois materiais, denotados pelos índices sobrescritos *MAT1* e *MAT2*.

Para os casos em que a função de aproximação, como, no presente caso, a aproximação para os deslocamentos  $\mathbf{u}$ , não satisfaz as condições de compatibilidade<sup>15</sup> e as condições de contorno na fronteira essencial<sup>16</sup>, faz-se necessário modificar o Princípio de Hamilton para atender às restrições (LIU, 2003).

Seja  $\mathbf{C}$  uma matriz de coeficientes contendo um número  $k$  de restrições que não podem ser satisfeitas pela aproximação (Equação 90). Existem pelo menos duas maneiras de impor tais restrições. Uma delas consiste no método dos multiplicadores de Lagrange (LIU, 2003).

$$\mathbf{C}^T(\mathbf{u}) = [C_1(\mathbf{u}) \quad C_2(\mathbf{u}) \quad \dots \quad C_k(\mathbf{u})] = \mathbf{0} \quad 90$$

No método dos multiplicadores de Lagrange, o Lagrangiano dado na Equação 85 deve ser modificado, passando a ser escrito conforme a Equação 91 (LIU, 2003).

$$\tilde{L} = L + \int_{\Omega} \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{C}(\mathbf{u}) d\Omega \quad 91$$

onde  $\boldsymbol{\lambda}$  é um vetor de multiplicadores de Lagrange expresso na Equação 92.

$$\boldsymbol{\lambda}^T = [\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \dots \quad \lambda_k] \quad 92$$

Os multiplicadores de Lagrange são funções de coordenadas independentes no domínio  $\Omega$ . Por serem desconhecidas, o número total de incógnitas no problema aumenta. Quando estiverem sendo construídas as funções discretas para o sistema linear, o número de incógnitas nodais também será ampliado. Apesar disto, o método dos multiplicadores de Lagrange força rigorosamente as restrições impostas no problema (LIU, 2003).

<sup>15</sup> Ocorrência de diferentes fases no material, por exemplo (TEIXEIRA, 2012).

<sup>16</sup> Como quando se utiliza a aproximação por mínimos quadrados móveis (DOLBOW & BELYTSCHKO, 1998).

Agora, a fim de construir a forma fraca da equação de governo, considere-se o seguinte enunciado: “a solução para a forma forte da equação de governo é o minimizador do funcional Lagrangiano  $L$ ” (LIU, 2003; FISH; BELYTCHKO, 2007). O enunciado pode ser expresso pela Equação 93. Considerando que o problema possui restrições a serem impostas pelo método dos multiplicadores de Lagrange, escreve-se a Equação 94 (LIU, 2003; FISH; BELYTCHKO, 2007).

$$\delta L = \delta W_f - \delta \Pi_s + \delta W_i = 0 \quad 93$$

$$\delta \tilde{L} = \delta L + \delta \left[ \int_{\Omega} \lambda^T \mathbf{C}(\mathbf{u}) \, d\Omega \right] = 0 \quad 94$$

onde  $\delta$  representa o operador linear de variação de funcional (LIU, 2003; FISH; BELYTCHKO, 2007).

Observando as Equações 87, 88, 89, 93 e fazendo a substituição na Equação 94, é possível escrever a Equação 95 (LIU, 2003; TEIXEIRA, 2012). Na equação foi utilizado o fato de que o operador de variação e a integral são lineares, o que possibilita a alteração da ordem das operações (LIU, 2003).

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\Omega} \delta(\boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma}) \, d\Omega - \int_{\Omega} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{b} \, d\Omega - \int_{\Gamma_i} \delta \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{t}} \, d\Gamma - \\ & - \int_{\Gamma_i} \delta(\boldsymbol{\sigma}_i(\mathbf{u}^{MAT1} - \mathbf{u}^{MAT2})) \, d\Gamma_i - \int_{\Omega} \delta(\lambda^T \mathbf{C}(\mathbf{u})) \, d\Omega = 0 \end{aligned} \quad 95$$

onde  $\mathbf{u}^{MAT1}$  e  $\mathbf{u}^{MAT2}$  representam os deslocamentos na interface entre os materiais 1 (MAT1) e 2 (MAT2)

Estudando a variação na primeira parcela da Equação 95, escreve-se a Equação 96 (LIU, 2003).

$$\delta(\boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma}) = \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\varepsilon}^T \delta \boldsymbol{\sigma} \quad 96$$

Como o resultado na Equação 96 é um escalar, é possível trabalhar com sua transposta sem alterar a igualdade. Logo, considerando a segunda parcela desta equação, escreve-se a Equação 97 (LIU, 2003).

$$\boldsymbol{\varepsilon}^T \delta \boldsymbol{\sigma} = (\boldsymbol{\varepsilon}^T \delta \boldsymbol{\sigma})^T = \delta \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon} \quad 97$$

Utilizando a lei de Hooke expressa na Equação 79, é possível substituir  $\boldsymbol{\sigma}$ , chegando, assim, à Equação 98, na qual está sendo considerada a simetria de  $\mathbf{D}$ , que é uma constante do material (LIU, 2003).

$$\delta \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon} = \delta (\mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon})^T \boldsymbol{\varepsilon} = \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D}^T \boldsymbol{\varepsilon} = \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} = \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} \quad 98$$

A substituição da Equação 98 na 96 permite escrever a Equação 99 (LIU, 2003).

$$\delta (\boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma}) = \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} + \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} = 2 \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} \quad 99$$

Trabalhando com a quarta parcela da Equação 95, calcula-se a variação que está mostrada na Equação 100.

$$\delta W_i = \int_{\Gamma_i} \boldsymbol{\sigma}_i (\delta \mathbf{u}^{MAT1} - \delta \mathbf{u}^{MAT2}) d\Gamma_i + \int_{\Gamma_i} \delta \boldsymbol{\sigma}_i (\mathbf{u}^{MAT1} - \mathbf{u}^{MAT2}) d\Gamma_i \quad 100$$

Observando, agora, a quinta parcela da Equação 95, encontra-se a variação expressa na Equação 101 (LIU, 2003).

$$\delta (\boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{C}(\mathbf{u})) = \delta \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{C}(\mathbf{u}) + \boldsymbol{\lambda}^T \delta \mathbf{C}(\mathbf{u}) \quad 101$$

Considerando que os multiplicadores de Lagrange serão utilizados apenas na fronteira essencial ( $\Gamma_u$ ) em vez de em todo o domínio ( $\Omega$ ), que a restrição  $\mathbf{C}(\mathbf{u})$  é aquela dada na Equação 84 e que pode ser utilizado o resultado obtido na Equação 99, realizam-se as substituições na Equação 95 e escreve-se a Equação 102 (LIU, 2003).

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega - \int_{\Omega} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{b} d\Omega - \int_{\Gamma_i} \delta \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma - \int_{\Gamma_i} \boldsymbol{\sigma}_i (\delta \mathbf{u}^{MAT1} - \delta \mathbf{u}^{MAT2}) d\Gamma_i - \\ - \int_{\Gamma_i} \delta \boldsymbol{\sigma}_i (\mathbf{u}^{MAT1} - \mathbf{u}^{MAT2}) d\Gamma_i - \int_{\Gamma_u} \delta \boldsymbol{\lambda}^T (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) d\Gamma - \int_{\Gamma_u} \delta \mathbf{u}^T \boldsymbol{\lambda} d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad 102$$

Finalmente, consideram-se as relações entre tensão, deformação e deslocamento, expressas nas Equações 72 e 79 para se escrever a forma fraca da equação de governo conforme a Equação 103 (LIU, 2003).

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \delta (\nabla \mathbf{u})^T (\mathbf{D} \nabla \mathbf{u}) d\Omega - \int_{\Omega} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{b} d\Omega - \int_{\Gamma_i} \delta \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma - \int_{\Gamma_i} \boldsymbol{\sigma}_i (\delta \mathbf{u}^{MAT1} - \delta \mathbf{u}^{MAT2}) d\Gamma_i - \\ - \int_{\Gamma_i} \delta \boldsymbol{\sigma}_i (\mathbf{u}^{MAT1} - \mathbf{u}^{MAT2}) d\Gamma_i - \int_{\Gamma_u} \delta \boldsymbol{\lambda}^T (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) d\Gamma - \int_{\Gamma_u} \delta \mathbf{u}^T \boldsymbol{\lambda} d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad 103$$

As condições de contorno na fronteira essencial da equação diferencial a ser resolvida estão representadas nas duas últimas parcelas da Equação 103 (LIU, 2003). Como as funções de forma do MMQM não satisfazem o delta de Kronecker, a imposição das condições de contorno não pode ser feita diretamente (LIU, 2003; DOLBOW; BELYTSCHKO, 1998).

Essa é uma limitação dos métodos sem malha, em geral. Técnicas alternativas para a imposição das condições de contorno são estudadas para o aumento da eficiência. Mencionam-se os exemplos do método da penalidade, no qual a rigidez dos nós na fronteira essencial é ampliada para aproximar a condição necessária sem inserir novas incógnitas no problema, e o método da interpolação de pontos, que é um método sem malha de interpolação, não de aproximação, como ocorre no MGLE quando se utiliza o método dos mínimos quadrados móveis (LIU, 2003; DOLBOW; BELYTSCHKO, 1998; ZIENKIEWICZ; TAYLOR, 2000).

A manipulação da Equação 103 conduz à Equação 104 (TEIXEIRA, 2012).

$$\delta \mathbf{U}^T [\mathbf{K}\mathbf{U} + \mathbf{G}\boldsymbol{\lambda} + \mathbf{G}_i \boldsymbol{\lambda}_i - \mathbf{F}] + \delta \boldsymbol{\lambda}^T [\mathbf{G}^T \mathbf{U} - \mathbf{q}] + \delta \boldsymbol{\lambda}_i^T [\mathbf{G}_i^T \mathbf{U}] = 0 \quad 104$$

onde:

**K** : matriz de rigidez do domínio

**G** : matriz associada à aplicação das condições de contorno na fronteira essencial

**G<sub>i</sub>** : matriz associada à aplicação das condições de contorno na interface entre os materiais

**F** : vetor de forças

**q** : vetor das condições de contorno na fronteira essencial

Devido à arbitrariedade de  $\delta \mathbf{U}$ ,  $\delta \boldsymbol{\lambda}$  e  $\delta \boldsymbol{\lambda}_i$ , é possível igualá-los a zero, alternadamente, obtendo-se o sistema de equações lineares expresso na Equação 105 (LIU, 2003; TEIXEIRA, 2012).

$$\begin{aligned} \mathbf{K}\mathbf{U} + \mathbf{G}\boldsymbol{\lambda} + \mathbf{G}_i \boldsymbol{\lambda}_i - \mathbf{F} &= 0 \\ \mathbf{G}^T \mathbf{U} - \mathbf{q} &= 0 \\ \mathbf{G}_i^T \mathbf{U} &= 0 \end{aligned} \quad 105$$

Escrevendo o sistema na forma matricial, obtém-se, finalmente, a Equação 106 (LIU, 2003; TEIXEIRA, 2012).



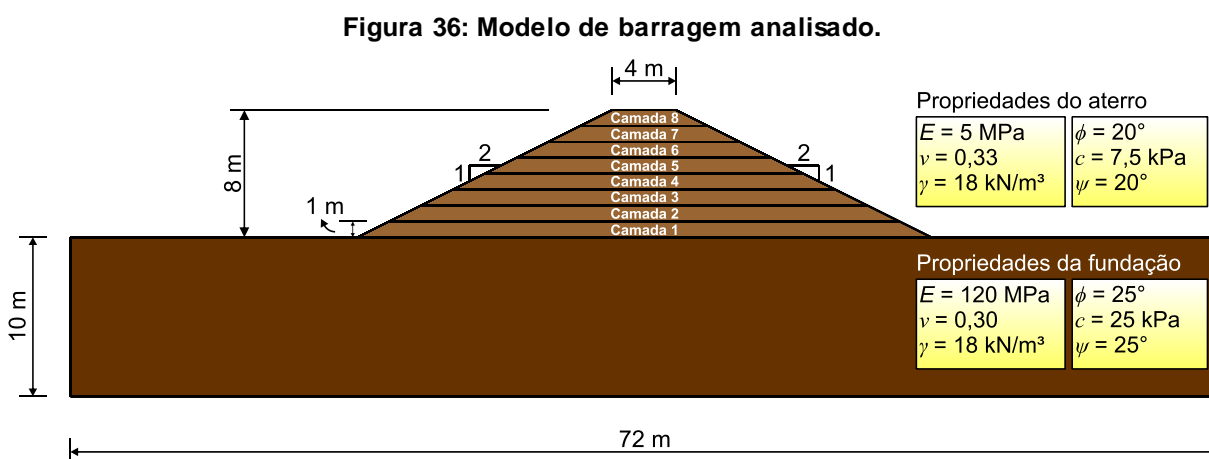
$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{G} & \mathbf{G}_i \\ \mathbf{G}^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{G}_i^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U} \\ \boldsymbol{\lambda} \\ \boldsymbol{\lambda}_i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{q} \\ \bar{\mathbf{0}} \end{Bmatrix} \quad 106$$

#### 2.4 Integração Numérica Utilizando a Quadratura de Gauss

Para a solução das integrais da Equação 103, que estão apresentadas na forma de um sistema linear na Equação 106, adotou-se a Quadratura de Gauss (FISH; BELYTSCHKO, 2007; CHAPRA; CANALE, 2011). Na presente aplicação, foi utilizada uma quadratura 4 x 4, resultando em dezesseis pontos de Gauss em cada célula de integração.

### 3 METODOLOGIA

Para a comparação entre os métodos, foi idealizado um modelo de uma pequena barragem de terra homogênea. Na Figura 36 consta uma ilustração do aterro. As propriedades dos materiais estão indicadas no Quadro 2, a partir de correlações existentes na literatura (JOPPERT JUNIOR, 2007).



**Quadro 2: Propriedades dos materiais utilizados no modelo (JOPPERT JUNIOR, 2007). Adaptada.**

Propriedade	Aterro	Fundação
Tipo de solo	Argila siltosa pouco arenosa	Argila siltosa pouco arenosa
Módulo de elasticidade ( $E$ )	5 MPa	120 MPa
Peso específico ( $\gamma$ )	18 kN/m <sup>3</sup>	18 kN/m <sup>3</sup>
Ângulo de atrito interno ( $\phi$ )	20°	25°
Incepto de coesão ( $c$ )	7,5 kPa	25 kPa
Ângulo de dilatação ( $\psi$ )	20°	25°
Coefficiente de Poisson ( $\nu$ )	0,33	0,30

Para a análise com o MEF, foi utilizado o *software* comercial GeoStudio, enquanto para a criação do algoritmo usando o MGLE foi usado o MATLAB. O GeoStudio também foi utilizado para a aplicação do método de equilíbrio limite, a fim de serem observadas as superfícies de ruptura mais críticas no modelo. O algoritmo criado foi baseado em soluções divulgadas na literatura. Dolbow e Belytschko (1998) apresentaram um algoritmo para a análise linear elástica utilizando o MGLE; Teixeira (2012) contribuiu para a modelagem de materiais multifásicos com o MGLE; e Sherif (2012) aplicou o MEF para a análise numérica elastoplástica de solos.

### 3.1 Propriedades dos Solos

As propriedades dos solos foram estimadas de correlações empíricas divulgadas na literatura (JOPPERT JUNIOR, 2007). A partir dos dados, obtiveram-se o módulo de elasticidade ( $E$ ), o peso específico ( $\gamma$ ) o ângulo de atrito ( $\phi$ ) e o intercepto de coesão ( $c$ ). O coeficiente de Poisson ( $\nu$ ) foi definido de forma a obedecer a desigualdade  $\phi - \nu$  (Equação 107) (ZHENG; LIU; LI, 2005). A partir da definição do ângulo de atrito, portanto, calculou-se o coeficiente de Poisson mínimo, adotando-se esse valor.

$$\text{sen } \phi \geq 1 - 2\nu \quad 107$$

Optou-se por definir o ângulo de dilatação ( $\psi$ ) como sendo igual ao ângulo de atrito interno. Isto significa que, quando o material estivesse no regime plástico, ocorreria fluxo associado. Numericamente, a função de potencial plástico ( $P(\{\sigma\}, \{\mathbf{m}\})$ ) se torna igual à função de escoamento do critério de Mohr-Coulomb ( $F(\{\sigma\}, \{\mathbf{k}\})$ ), conforme a Equação 25<sup>17</sup>.

### 3.2 Geometria

O aterro compactado possui 8 m de altura, com uma crista de 4 m de largura. A altura foi definida para corresponder a uma pequena barragem (inferior a 15 m (BRASIL, 2010)). Já a largura da crista foi estipulada para possibilitar o trânsito de um veículo para inspeções, conforme recomendação técnica (PEREIRA, 2005).

Subdividiu-se o aterro em 8 camadas de 1 m. Tal divisão possuía por objetivo simular o processo de construção em campo (FARIAS; CORDÃO NETO, 2010). Assim, a inserção das camadas no modelo foi gradativa. Caso inserido em apenas uma etapa, os maiores deslocamentos verticais seriam observados na crista; ocorrendo a inserção por camadas, esperava-se que os maiores deslocamentos nessa direção ocorressem a alguns metros acima da fundação (DUNCAN, 1996).

As inclinações dos taludes de montante e de jusante foram definidas com valores iguais (1:2, V:H). A finalidade da simetria foi garantir que a ruptura em ambos os lados ocorresse na mesma etapa de análise. O valor da inclinação foi escolhido a fim de se

---

<sup>17</sup> Ver pág. 48.

obter um fator de redução de resistência superior a 1, haja vista às recomendações presentes na literatura técnica sobre a inclinação mínima (PEREIRA, 2005).

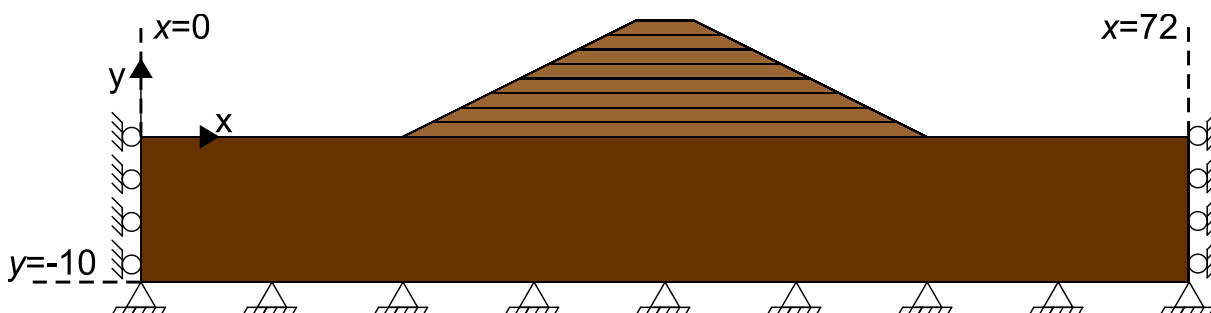
A fundação corresponde ao solo em seu estado natural sob o aterro. Suas propriedades foram definidas de forma a apresentar uma rigidez e uma resistência muito maiores do que as do aterro. Logo, o escorregamento deveria ocorrer apenas nos espaldares da barragem.

As dimensões da fundação foram estabelecidas de modo que o domínio de influência dos nós na fronteira essencial (base e laterais) não atingisse os nós que representariam o aterro. Desta forma, evitou-se que as matrizes referentes à imposição da condição de contorno na fronteira essencial precisassem ser atualizadas a cada iteração. Também se evitou, desta forma, que possíveis concentrações de tensões afetassem o comportamento do aterro.

### 3.3 Condições de Contorno

Foram inseridos apoios nas extremidades do modelo de modo a garantir a sua estabilidade e estaticidade. Os vínculos foram aplicados apenas na área que representou a fundação (Figura 37). A origem do sistema de coordenadas foi estabelecida de modo que a cota (valor da ordenada  $y$ ) de valor zero representasse a superfície do terreno natural. Para a abscissa, definiu-se seu valor nulo como sendo a extremidade esquerda do modelo.

**Figura 37: Representação dos apoios considerados no modelo com indicação das ordenadas nas quais se aplicaram as condições de contorno.**



A fim de simular o efeito do confinamento do solo, restringiu-se o deslocamento horizontal nas extremidades esquerda e direita, nas quais os valores da abscissa eram 0 e 72, respectivamente. O material, portanto, poderia se deslocar livremente na vertical. Tal representação é usualmente adotada em modelos deste tipo (TABARROKI et al., 2013; LIU; WANG; YANG, 2012; TSCHUCHNIGG; SCHWEIGER;

SLOAN, 2015b; LUO; BATHURST; JAVANKHOSHDEL, 2016; CHEN, X., et al., 2014; ZHENG et al., 2014) e procura representar as condições de rugosidade com as superfícies adjacentes (SUN et al., 2016). Para a definição feita no modelo, os apoios nas extremidades esquerda e direita indicam que a rugosidade entre o solo da fundação e o material que o confina não é tão elevada a ponto de impedir o deslocamento vertical.

Para a base (todos os nós com ordenada igual a -10 m), foram restringidos contra deslocamentos horizontal e vertical. De modo análogo ao raciocínio aplicado para as extremidades esquerda e direita, a restrição ao deslocamento horizontal representa uma rugosidade elevada o suficiente entre o solo da fundação e o material adjacente. Quanto à restrição na vertical, refere-se à impossibilidade da massa de solo mais próxima à superfície deslocar o material sobre o qual ela se apoia.

#### 3.4 Posicionamento dos Nós

Para o modelo criado, os nós foram dispostos com espaçamento horizontal e vertical padronizados, conforme mostrado na Figura 38.

As distâncias horizontal e vertical entre os nós foram definidas com diferentes valores, para fins de comparação e definição do espaçamento. Para a fundação no exemplo ilustrado, a distância horizontal foi igual à distância vertical, sendo definida como 1 m (Figura 38a). Quanto ao espaçamento horizontal, foram testados os valores 2 m e 1 m; para o vertical, avaliaram-se as distâncias 2 m, 1 m, 0,67 m, 0,56 m, 0,5 m, e 0,45 m. A fim de garantir uma quantidade maior de nós para as camadas, o espaçamento vertical dos nós que representam o aterro foi fixado como 0,5 m; seu espaçamento horizontal foi definido com o mesmo valor daquele na fundação.

Os nós nos quais se aplicaram as condições de contorno também estão indicados na Figura 38 (b). O deslocamento nestes nós foi definido como zero, de acordo com as restrições indicadas na seção 3.3.

A dimensão do domínio de influência dos nós, indicado na Figura 38c, foi calculada de acordo com a Equação 51<sup>18</sup>. Na ilustração, o domínio de influência exibido refere-se ao nó em destaque. Todos os nós contidos no interior dessa região recebem um peso calculado com a função definida na seção 2.3.2.1; aqueles que

---

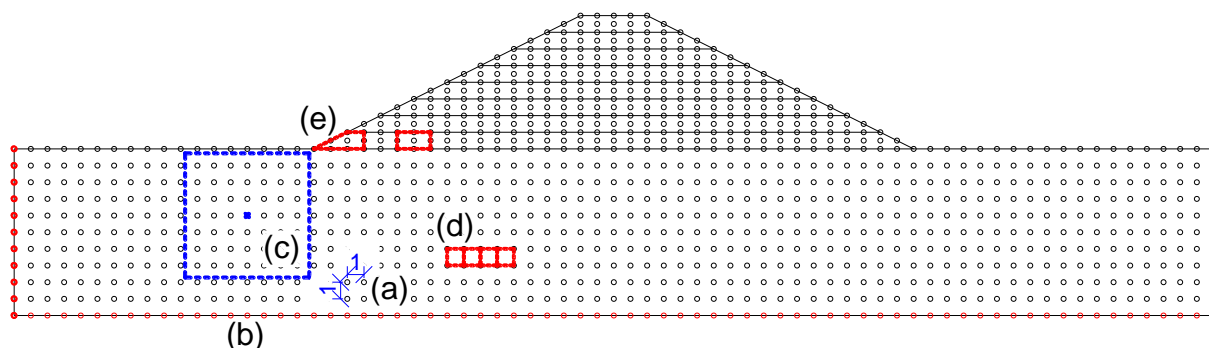
<sup>18</sup> Definida na seção 2.3.2.1, pág. 64.

estão posicionados fora do domínio, portanto, não recebem ou causam nenhuma influência no ponto destacado.

Também estão indicadas na Figura 38 células de integração que são utilizadas na quadratura de Gauss (d, e). O formato das células de integração pode ser arbitrário e as suas extremidades podem ser definidas em quaisquer pontos que não os nós que representam o modelo, desde que contemplem todo o domínio. A opção por associar as células às coordenadas dos nós do aterro e da fundação foi realizada simplesmente para se evitar que fossem definidos novos pares ordenados nos eixos cartesianos.

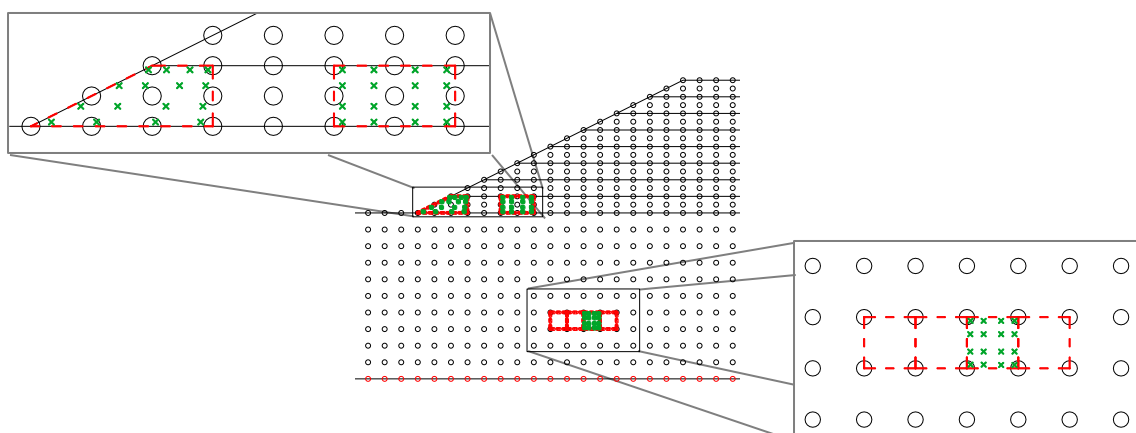
Na fundação, todas as células ficaram com um formato quadrado, havendo conectividade entre dois nós vizinhos. Na Figura 38d estão exibidas quatro células. Para as camadas do aterro, as células foram definidas com dimensões maiores, intercalando outros nós, com o intuito de facilitar o ajuste dos vértices ao formato do aterro. Duas células de integração são mostradas na Figura 38e.

**Figura 38: Disposição dos nós que representam o modelo. (a) Espaçamento entre os nós da fundação. (b) Nós em que se aplicaram condições de contorno, em vermelho. (c) Domínio de influência de um nó. (d, e) Células de integração utilizadas para quadratura de Gauss.**



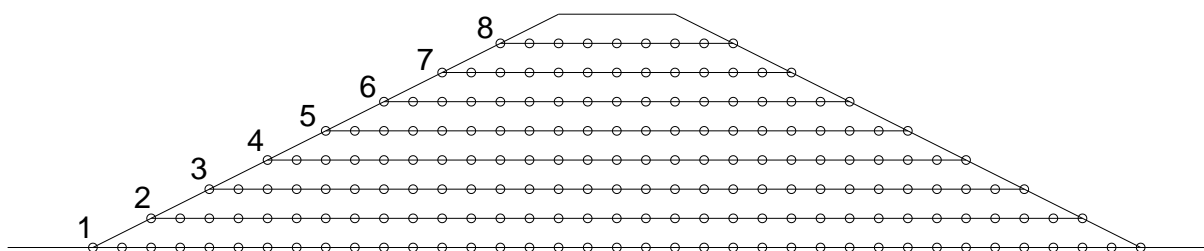
O processo de integração foi definido com quatro pontos de Gauss em cada direção, o que totaliza 16 pontos por célula. Uma ilustração de como os pontos ficam dispostos no seu interior está exibida na Figura 39, sendo que a posição dos pontos de Gauss é ajustada de acordo com o formato da célula.

**Figura 39: Disposição dos pontos de Gauss no interior das células.**



Além da representação da fundação e do aterro, deveriam ser definidas também as coordenadas de nós que representassem a interface entre a barragem e a fundação e também entre as camadas. Na Figura 40 estão indicados estes pontos, juntamente com a indicação da camada com a qual eles passam a ser considerados. Por praticidade, suas coordenadas foram definidas de forma a coincidir com nós já existentes no modelo.

**Figura 40: Nós que compõem as interfaces entre camadas com a indicação das iterações a partir das quais eles passam a ser considerados.**



Durante a execução do algoritmo, um procedimento a ser realizado é a procura de quais nós encontram-se dentro do domínio de influência. Quando há dois materiais diferentes (ou, na presente aplicação, duas camadas distintas) este processo deve ser realizado em três etapas.

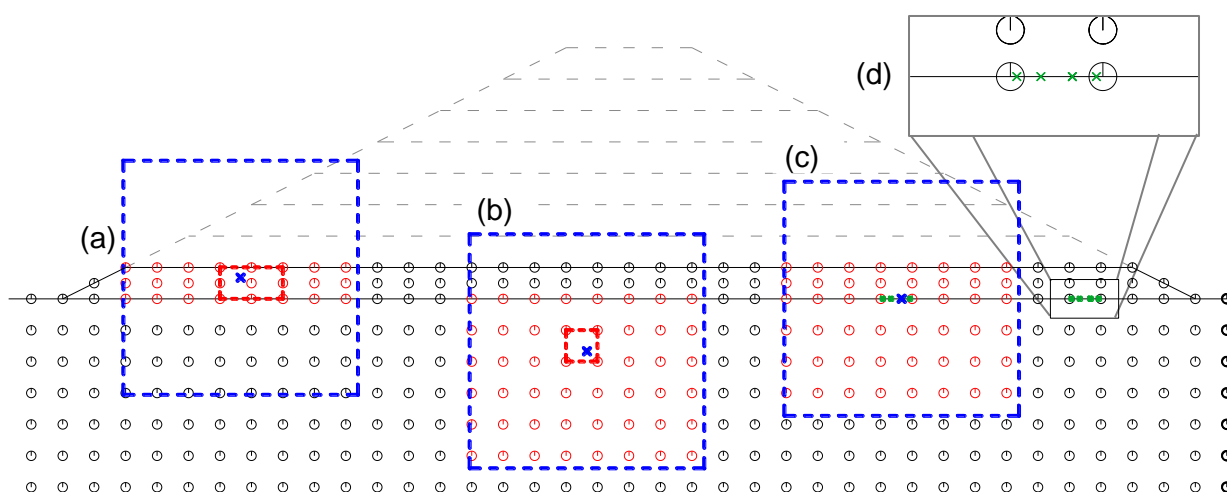
Como exemplo, considere-se o caso da inserção da primeira camada (Figura 41). Nesta etapa já foi realizada uma análise elástica para a fundação; após isto, incluem-se os nós que representam a camada 1 e sua interface com o estrato

subjacente (a interface está indicada pelo número 1 na Figura 40), sendo computado na matriz de forças apenas o peso próprio da nova camada.

Para um ponto de Gauss arbitrário na camada inserida, observa-se que diversos nós estão contidos no seu domínio de influência (Figura 41a). Estes nós podem ser classificados em três categorias: aqueles que pertencem à própria camada, os que pertencem à fundação e os que pertencem a camada superior (este último grupo ainda não está presente no modelo nesta etapa, conforme indicado na figura; no entanto, ao longo da execução, eles serão inseridos, motivo pelo qual foram listados agora).

Por ser um ponto de Gauss pertencente à camada 1, apenas os nós que formam esta parte do modelo devem ser considerados. Isto significa que, das três categorias mencionadas acima, apenas os nós da primeira serão considerados para o ponto de Gauss em questão. Raciocínio análogo deve ser realizado para outro ponto de Gauss arbitrário que pertença à fundação (Figura 41b).

**Figura 41: Nós no interior dos domínios de influência dos pontos de Gauss que são considerados (destacados em vermelho). Pontos de Gauss (a) em uma camada, (b) na fundação e (c) na interface. (d) Distribuição dos pontos de Gauss na interface.**



Além das considerações feitas para os pontos de Gauss que pertençam às camadas e à fundação (Figura 41a e b), o domínio de influência referente aos pontos que formam a interface devem ser incluídos na análise (Figura 41c). Entre dois nós vizinhos que formam a linha de contato, também são gerados pontos de Gauss (quatro pontos, no modelo desenvolvido), conforme ilustrado na Figura 41d.

Portanto, observando a Figura 41c, para um ponto de Gauss arbitrário na interface, devem ser verificados quais nós das camadas adjacentes pertencem ao seu domínio de influência. No exemplo indicado, posteriormente, haverá nós das camadas



superiores que estarão nesta região de influência. No entanto, eles não serão considerados por não pertencerem as camadas próximas à interface (isto é, a fundação e a camada 1, na ilustração da Figura 41).

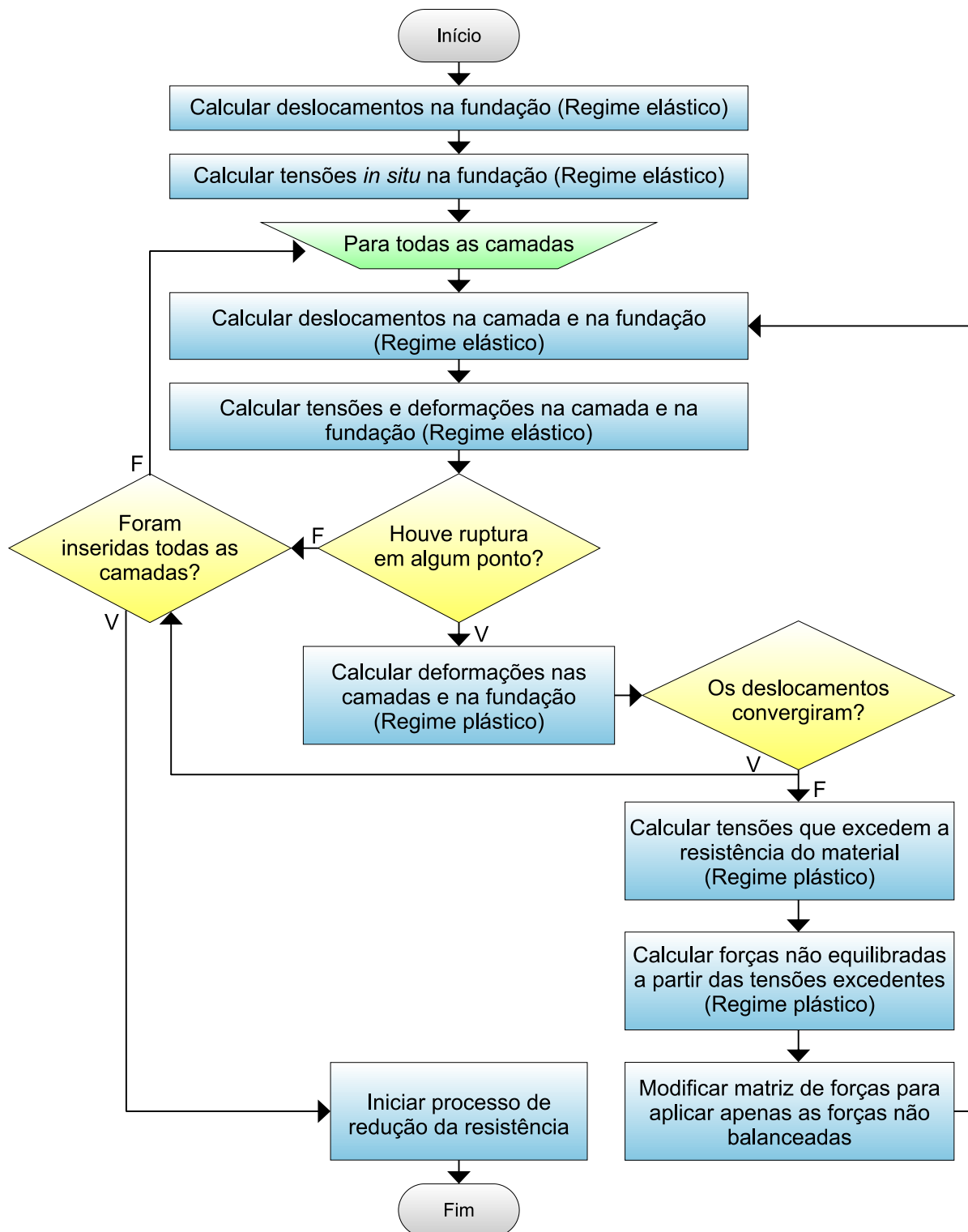
### 3.5 Procedimentos para a Análise

A análise de estabilidade de taludes utilizando o MGLE é feita por meio de iterações. Um fluxograma com a descrição geral dos procedimentos realizados está apresentado na Figura 42. Inicialmente, obtém-se uma solução para o solo da fundação no regime elástico do material. Nesta etapa, considera-se a geometria com a aplicação das condições de contorno, tal qual ilustrado na Figura 37. A força atuante no modelo é o peso próprio do material.

Em seguida inicia-se a inserção das camadas do aterro. Para esta etapa, a força referente ao peso do solo presente na fundação é igualada a zero (pois até então já foram obtidos os deslocamentos e tensões atuantes) e modifica-se a geometria para que se tenha a representação do material que compõe o barramento. Nesta etapa devem ser definidos também os nós presentes na interface entre as camadas de solo, que irão garantir a compatibilidade dos deslocamentos, deformações e tensões entre as diferentes partes do modelo.

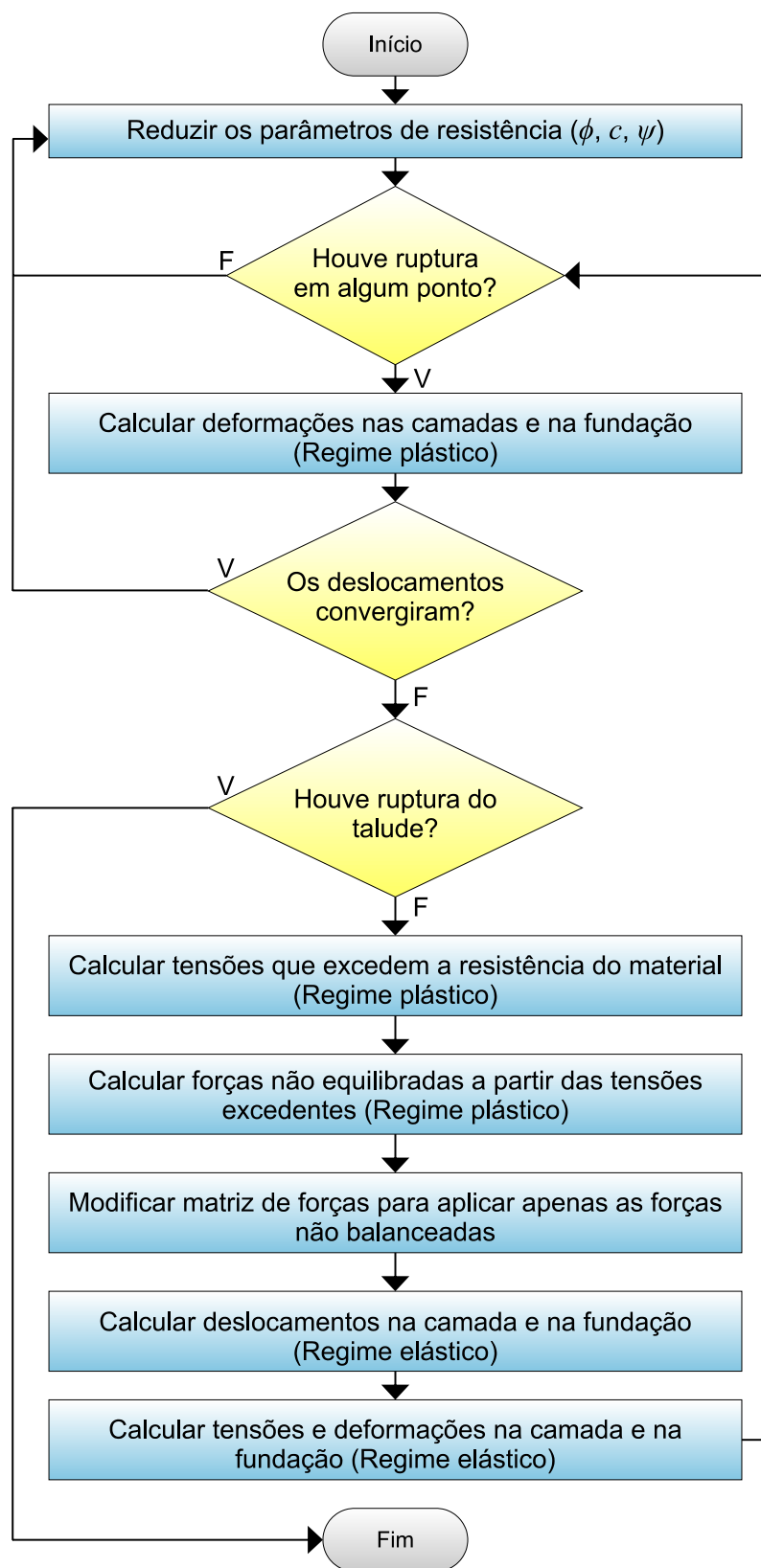
Após a obtenção dos deslocamentos, são calculadas as deformações e as tensões no regime elástico. Verifica-se, então, se nos pontos de Gauss usados na integração numérica o estado de tensões ultrapassa a envoltória de Mohr-Coulomb. Caso isto ocorra, houve ruptura naquele ponto, e ele estará no regime plástico. Neste caso, calculam-se as deformações plásticas em uma nova iteração. Quando um ponto de Gauss encontra-se no regime plástico, deve ser calculada a tensão excedente referente à deformação plástica. A partir desta tensão, calculam-se as forças não balanceadas que atuam no modelo. Estas forças causarão deslocamentos, que, por sua vez, continuarão a causar deformações e tensões. Em uma iteração qualquer, se os valores dos novos deslocamentos forem muito próximos à da iteração anterior, então diz-se que houve convergência e que não é mais necessário repetir a iteração para aquele mesmo ponto.

Figura 42: Fluxograma para cálculo das tensões *in situ* e dos deslocamentos, deformações e tensões de construção do aterro.



Após a simulação do processo de construção do aterro, realiza-se o processo de redução dos parâmetros de resistência. O fluxograma onde constam os procedimentos realizados está presente na Figura 43.

Figura 43: Fluxograma do processo de redução de resistência.



O algoritmo para a redução de resistência consiste em uma alteração das propriedades do solo seguida de uma verificação de ruptura em todos os pontos de

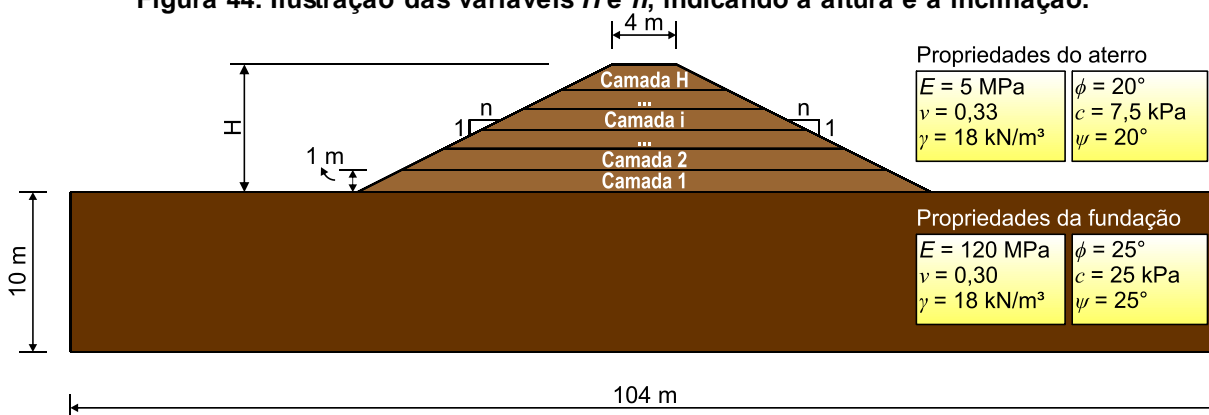
Gauss. Quando ocorre ruptura, calculam-se as forças não balanceadas e, em seguida, o acréscimo dos deslocamentos. Havendo convergência em uma iteração, reduz-se novamente a resistência e repete-se o processo; caso contrário, verifica-se se ocorreu a ruptura do talude. Quando ocorre a ruptura, o processo é interrompido e o fator de redução de resistência é calculado, considerando-se os últimos parâmetros de resistência em que ocorreu a convergência dos deslocamentos.

### 3.6 Modelos Adicionais para Validação

A fim de verificar o desempenho da análise pelo método de redução da resistência usando o MGLE, realizou-se a comparação com o método de equilíbrio limite (MEqL), usando o método de fatias de Spencer<sup>19</sup>. A escolha do método de equilíbrio limite em vez do MEF para a comparação foi devido à maior facilidade para o desenvolvimento dos modelos, haja vista a quantidade de modelos adicionais.

Ao todo foram definidos 27 modelos, sendo realizada a variação de dois parâmetros: a altura do aterro e a inclinação dos taludes em cada face (Figura 44). A expectativa era que conforme se aumentasse a altura dos modelos, o FRR (ou o FS, no caso do método de equilíbrio limite) diminuísse e que a diminuição da inclinação, denotada por 1:n, representando o formato V:H (vertical e horizontal), aumentasse o FRR. Desta maneira, a menor altura estabelecida foi 1 m e a maior, 9 m, enquanto que a maior inclinação foi 1:1,7 e a menor, 1:2,3, com o aterro sempre dividido em camadas de 1 m. Ressalte-se que, por limitações de *hardware* para as análises, os FRRs testados com o método sem malha variavam com um incremento de 0,2.

Figura 44: Ilustração das variáveis  $H$  e  $n$ , indicando a altura e a inclinação.



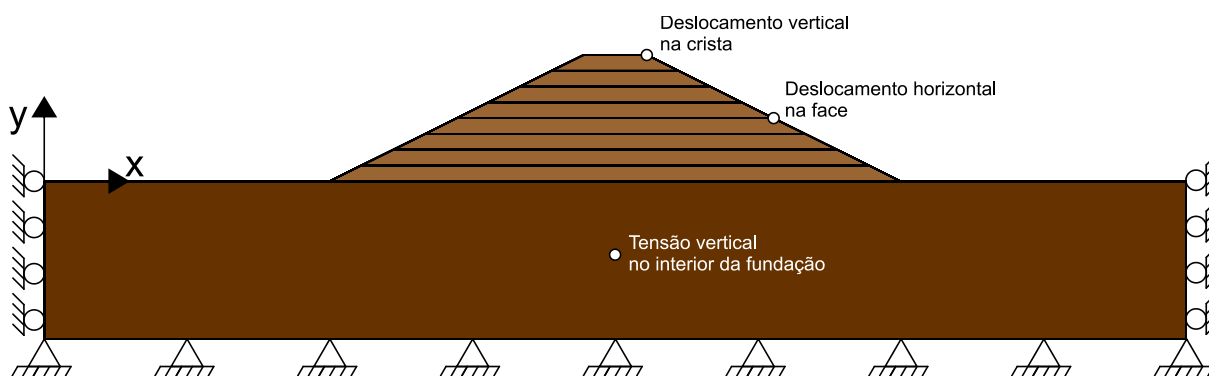
<sup>19</sup> Método de equilíbrio limite no qual são satisfeitas as equações de equilíbrio e também consideradas as forças atuantes entre as fatias de solo (GERSCOVICH, 2012).

## 4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

### 4.1 Estudo da Convergência

O estudo da convergência foi realizado a fim de se definir a quantidade de nós que representariam o domínio. Os critérios para a representação buscam evitar uma quantidade excessiva de nós, pois isto aumenta as exigências computacionais para a análise. Fazem ainda com que os resultados apresentem baixo erro em comparação a valores de referência quando a análise for realizada. Para os diferentes espaçamentos testados, avaliaram-se os resultados de alguns parâmetros em pontos previamente defidos (Figura 45).

**Figura 45: Pontos e parâmetros analisados para estudo de convergência.**



Os espaçamentos adotados, o número de nós (apenas na fundação, para comparação) e os resultados dos parâmetros avaliados estão mostrados na Tabela 1 (quando o espaçamento horizontal foi definido igual a 2 m) e na Tabela 2 (casos onde o espaçamento horizontal foi fixado em 1 m).

**Tabela 1: Resultados utilizados na análise de convergência quando o espaçamento horizontal foi igualado a 2 m.**

Espaçamento horizontal (m)	Espaçamento vertical (m)	Nº de nós na fundação	Deslocamento na crista (m)	Deslocamento na face (m)	Tensão vertical na fundação (kPa)
2	2	222	-0,0247	0,0161	-67,8
2	1	407	-0,0227	0,0176	-67,5
2	0,67	592	-0,0239	0,0163	-66,8
2	0,56	703	-0,0255	0,0154	-68,3
2	0,50	777	-0,0255	0,0177	-82,9
2	0,45	851	-0,0260	0,0166	-82,3

**Tabela 2: Resultados utilizados na análise de convergência quando o espaçamento horizontal foi igualado a 1 m.**

<b>Espaçamento horizontal (m)</b>	<b>Espaçamento vertical (m)</b>	<b>Nº de nós na fundação</b>	<b>Deslocamento na crista (m)</b>	<b>Deslocamento na face (m)</b>	<b>Tensão vertical na fundação (kPa)</b>
1	2	438	-0,0249	0,0152	-60,2
1	1	803	-0,0241	0,0142	-61,8
1	0,67	1.168	-0,0263	0,0108	-56,8
1	0,56	1.387	-0,0281	0,0105	-55,4
1	0,50	1.533	-0,028	0,0184	-78,7
1	0,45	1.679	-0,027	0,0186	-79,1

Observando o comportamento nos gráficos (parâmetro em função do número de nós na fundação) exibidos na Figura 46, Figura 47 e Figura 48, percebe-se que não houve um comportamento que possibilitasse a definição de um número adequado de nós.

Verifica-se na Figura 46 que ocorre variação no deslocamento vertical sem que haja a tendência a certo valor. Grandes espaçamentos (isto é, quantidade relativamente pequena de nós) resultaram em erros na execução do algoritmo; pequenos espaçamentos, por sua vez, inviabilizaram a execução devido à alta exigência para armazenamento e processamento.

Para os deslocamentos horizontais mostrados na Figura 47, as duas séries (espaçamentos de 1 m e de 2 m) aparentavam convergência até o quarto resultado. No entanto, quando a quantidade de nós foi aumentada, verificou-se nova oscilação dos valores. Novamente, não houve nenhuma tendência, sendo que quantidades mais elevadas de nós impossibilitaram a análise.

Quanto às tensões (Figura 48), verificou-se que os valores aparentavam certa estabilidade até a quarta tentativa. O maior erro relativo até a quarta execução, considerando as duas séries, havia sido cerca de 8%. No entanto, quantidades maiores de nós resultaram em valores muito distintos daqueles que já haviam ocorrido. Como não foi possível gerar um modelo representado por mais nós, não foi possível concluir que houve convergência.

Figura 46: Deslocamento vertical na crista em função do número de nós.

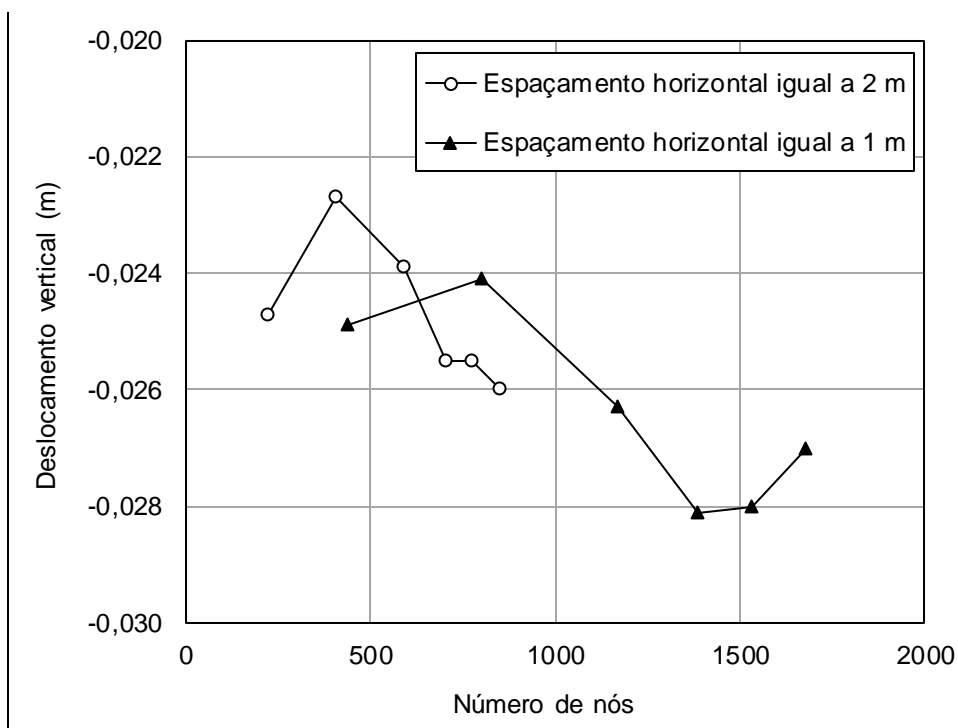


Figura 47: Deslocamento horizontal na face em função do número de nós.

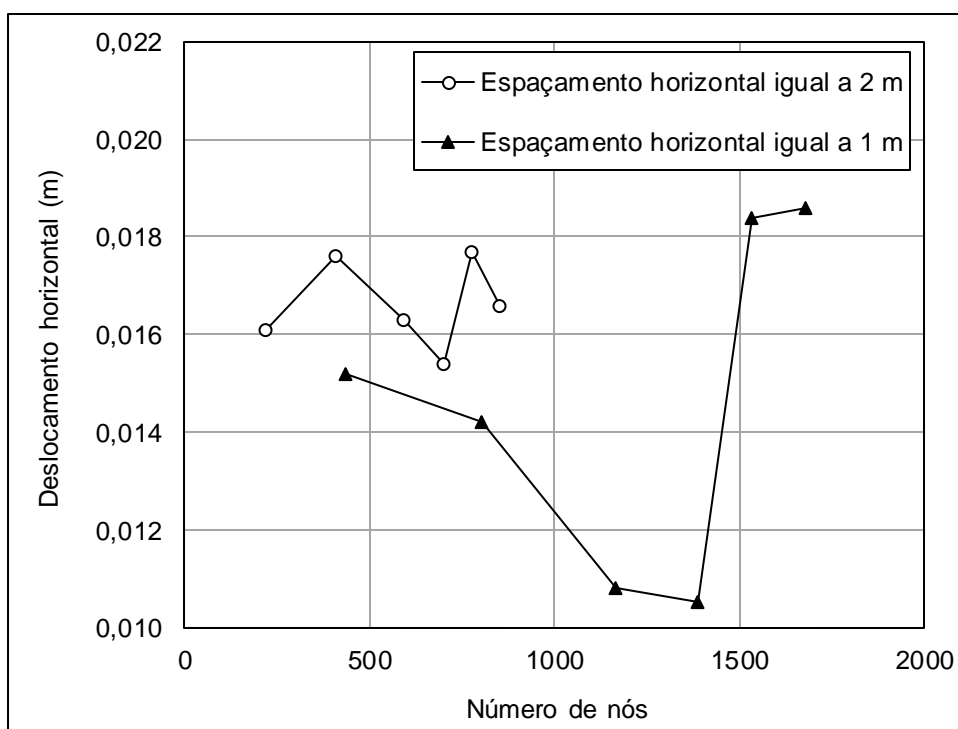
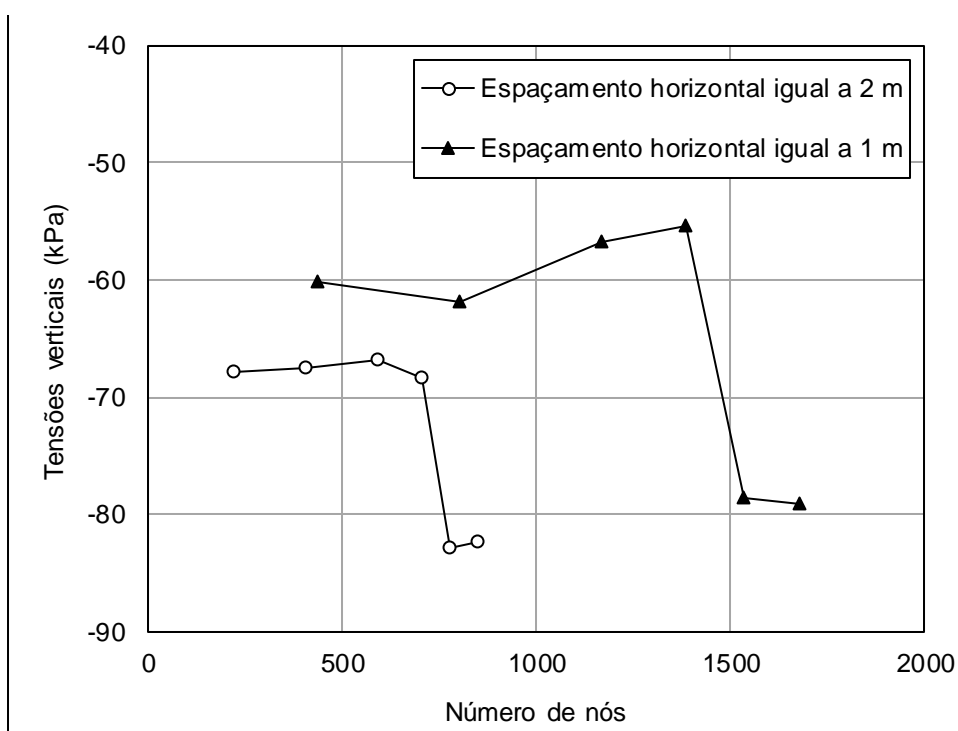


Figura 48: Tensão vertical em um ponto da fundação em função do número de nós.



Devido à impossibilidade de verificar a convergência em função do número de nós, foi necessário encontrar uma nova forma para se determinar como deveria ser representado o modelo. Avaliou-se, então quais configurações conduziram a resultados mais próximos de um valor teórico.

Com esta finalidade, foram observadas as tensões atuantes na fundação antes que o aterro fosse construído. Assim, o solo estaria submetido apenas ao seu próprio peso, sem camadas construídas acima da superfície. Na teoria, para superfícies subhorizontais<sup>20</sup>, as tensões a uma profundidade  $z$  (com origem na superfície do terreno) podem ser calculadas de acordo com a Equação 108, na qual  $\gamma$  representa o peso específico do solo (PINTO, 2006).

$$\sigma = \gamma z \quad 108$$

Os resultados da execução do algoritmo para as quantidades de nós na fundação indicadas na Tabela 3 e na Tabela 4 são mostrados na Figura 49 e na Figura 50.

<sup>20</sup> Que apresentam uma inclinação aproximadamente igual a zero.



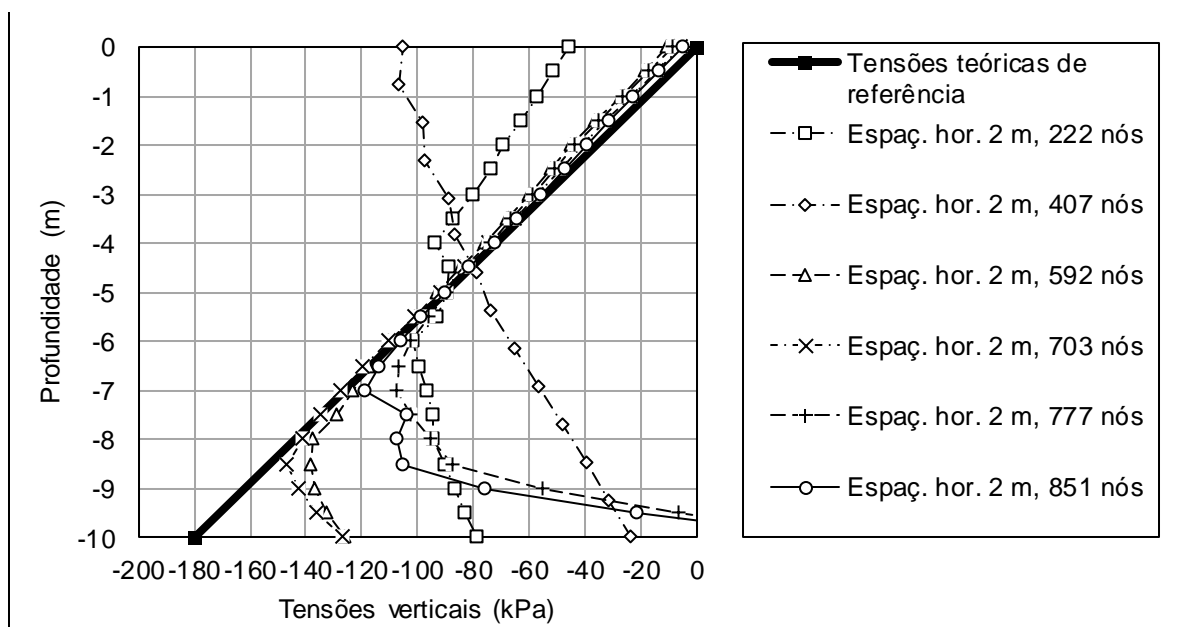
Tabela 3: Quantidades de nós quando o espaçamento horizontal foi igualado a 2 m.

Espaçamento horizontal (m)	Espaçamento vertical (m)	Nº de nós na fundação	Nº de nós na horizontal	Nº de nós na vertical	Resultado
2	2	222	37	6	Descartado
2	1	407	37	11	Descartado
2	0,67	592	37	16	Válido
2	0,56	703	37	19	Válido
2	0,50	777	37	21	Descartado
2	0,45	851	37	23	Descartado

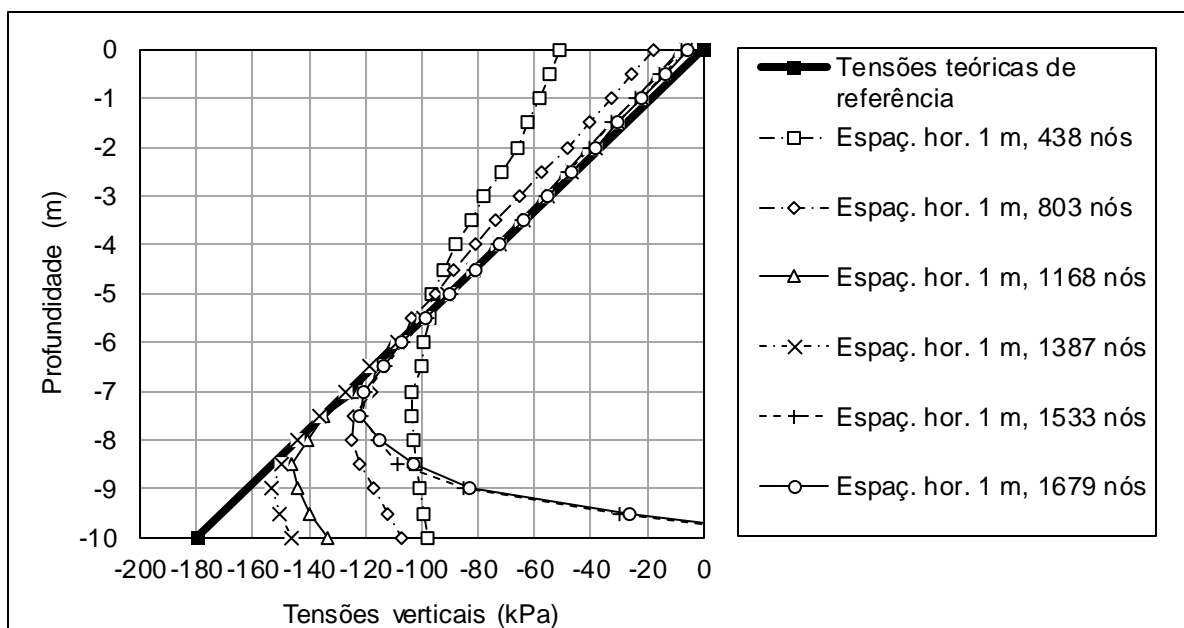
Tabela 4: Quantidades de nós quando o espaçamento horizontal foi igualado a 1 m.

Espaçamento horizontal (m)	Espaçamento vertical (m)	Nº de nós na fundação	Nº de nós na horizontal	Nº de nós na vertical	Resultado
1	2	438	73	6	Descartado
1	1	803	73	11	Descartado
1	0,67	1168	73	16	Válido
1	0,56	1387	73	19	Válido
1	0,50	1533	73	21	Descartado
1	0,45	1679	73	23	Descartado

Figura 49: Variação das tensões de acordo com a profundidade nos modelos com espaçamento horizontal de 2 m.



**Figura 50: Variação das tensões de acordo com a profundidade nos modelos com espaçamento horizontal de 1 m.**



A partir dos resultados obtidos para as duas séries (espaçamentos de 1 m e de 2 m), percebe-se que nem todos os modelos poderiam ser considerados válidos, pois se distanciavam do valor de referência. Dentre os seis modelos para cada situação, os dois que possuíam menos nós foram aqueles que apresentaram maiores desvios, desde as cotas superiores até as inferiores, na fronteira essencial.

No caso dos modelos com menos nós, nota-se que os resultados apresentaram desvio elevado tanto nas profundidades menores quanto maiores (à exceção do modelo com espaçamento horizontal de 1 m que possuía 803 nós) (Figura 49 e Figura 50). Logo, não representavam a fundação com eficácia.

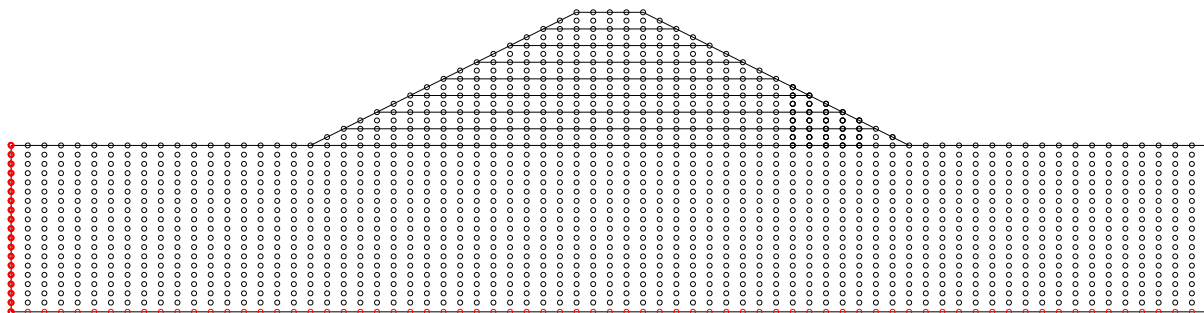
Quanto aos modelos com mais nós, foi verificado baixo desvio nas cotas mais próximas da superfície. No entanto, à medida em que se aproximava da fronteira essencial, na cota -10 m, os resultados se desviaram demasiadamente (Figura 49 e Figura 50). Como consequência, considerou-se que estas configurações também não representariam bem o modelo.

As opções restantes, portanto, foram aquelas que apresentavam 37 ou 73 nós na horizontal e 16 ou 19 nós na vertical, conforme indicação na Tabela 1 e na Tabela 2 e na Figura 49 e na Figura 50. Em todos estes casos houve um desvio relativamente elevado na fronteira essencial e em suas proximidades (por volta de 17%).

Optou-se, então, por considerar o modelo com menor erro relativo na cota -10 m (deve ser observado que nesta profundidade ocorreu o maior erro relativo em

comparação com o modelo teórico). Portanto, a escolha foi o caso no qual o espaçamento horizontal era de 1 m e o espaçamento vertical de 0,56 m, resultando em 73 nós na horizontal e em 19 nós na vertical. Na Figura 51 é mostrada a disposição final adotada.

**Figura 51: Disposição final dos nós após a determinação das suas coordenadas.**



#### 4.2 Definição do Domínio de Influência no MGLE

Para a definição do domínio de influência, deve-se escolher uma função peso que satisfaça as exigências no Método dos Mínimos Quadrados Móveis (suporte compacto e comportamento monotônico em torno de um ponto central). No presente trabalho, foi adotada uma função peso *spline* cúbica (Equação 53<sup>21</sup>).

A função peso considerada é dependente de uma distância normalizada, que está relacionada à distância de um ponto em relação aos demais em sua vizinhança (variável  $r$ , definida na Equação 50<sup>22</sup>). Para o cálculo de  $r$ , deve-se determinar a dimensão do domínio de suporte ( $d_s$ , Equação 51<sup>23</sup>). Esta última variável é dependente de um tamanho adimensional deste domínio adimensional ( $\alpha$ ), que, em termos práticos, significa um fator de escala (isto é, para uma distância característica  $d_c$  entre os nós, a dimensão do domínio de suporte  $d_s$  será  $\alpha$  vezes a distância  $d_c$ ).

A recomendação encontrada na literatura é de que  $\alpha$  deva estar compreendido num intervalo fechado entre 2 e 4 (DOLBOW; BELYTSCHKO, 1998; LIU, 2003). A fim de se realizar uma escolha adequada, diferentes valores do tamanho adimensional  $\alpha$  foram testados. Avaliou-se, então, o quanto os resultados numéricos se afastavam do

<sup>21</sup> Ver pág. 66.

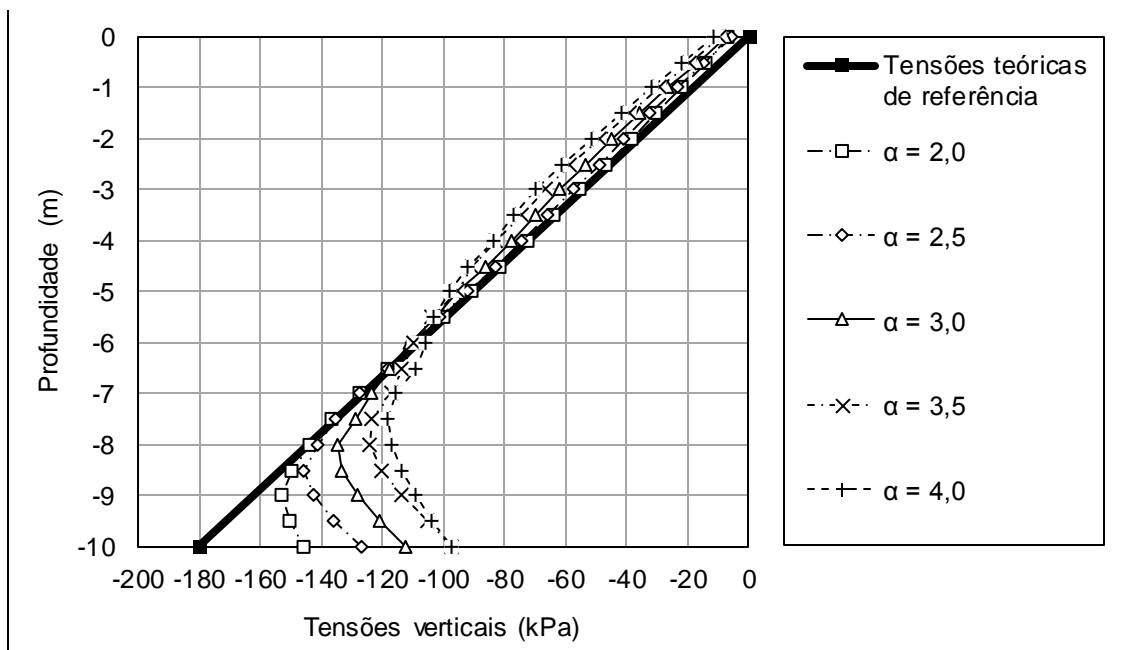
<sup>22</sup> Ver pág. 63.

<sup>23</sup> Ver pág. 64.

valor teórico de referência. O valor escolhido para  $\alpha$  foi definido como sendo aquele que causou o menor desvio.

Conforme os resultados exibidos na Figura 52, verifica-se que quanto menor valor de  $\alpha$ , melhor é a aproximação em relação ao valor teórico. Portanto, foi definido que o tamanho adimensional do domínio de suporte deveria ser 2,0.

**Figura 52: Influência do tamanho adimensional do domínio de suporte.**



### 4.3 Tensões *in situ*

Os valores das tensões *in situ* na fundação foram calculados no regime elástico. Os resultados no *software* de referência utilizando o MEF e no algoritmo utilizando o MGLE estão apresentando na Figura 53 e na Figura 54, respectivamente.

Figura 53: Tensões *in situ* obtidas com o MEF.

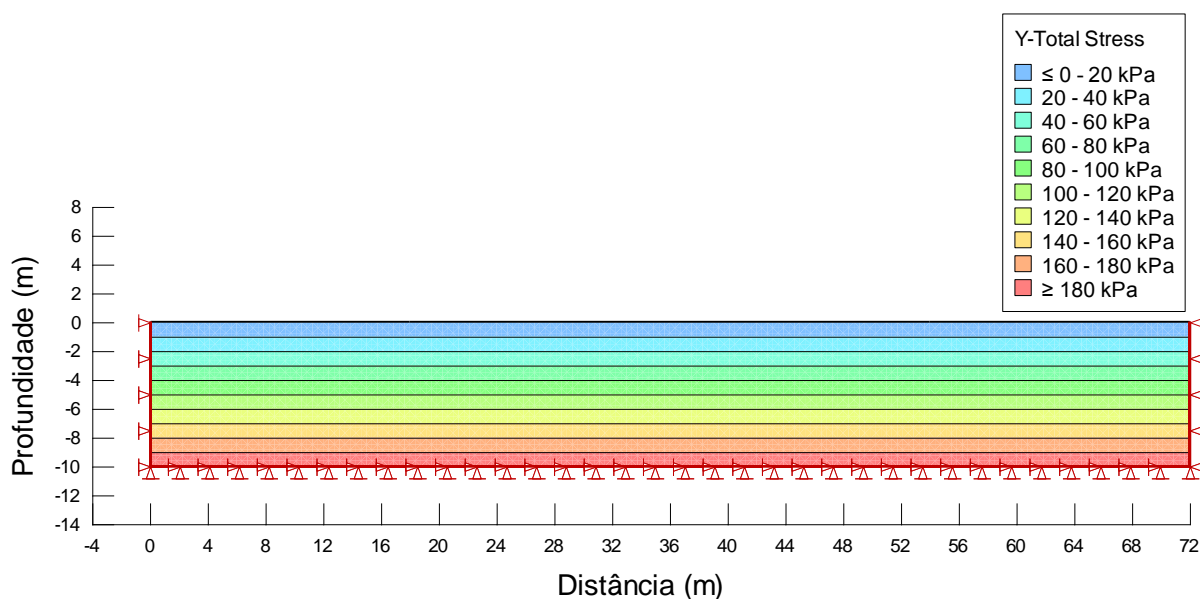
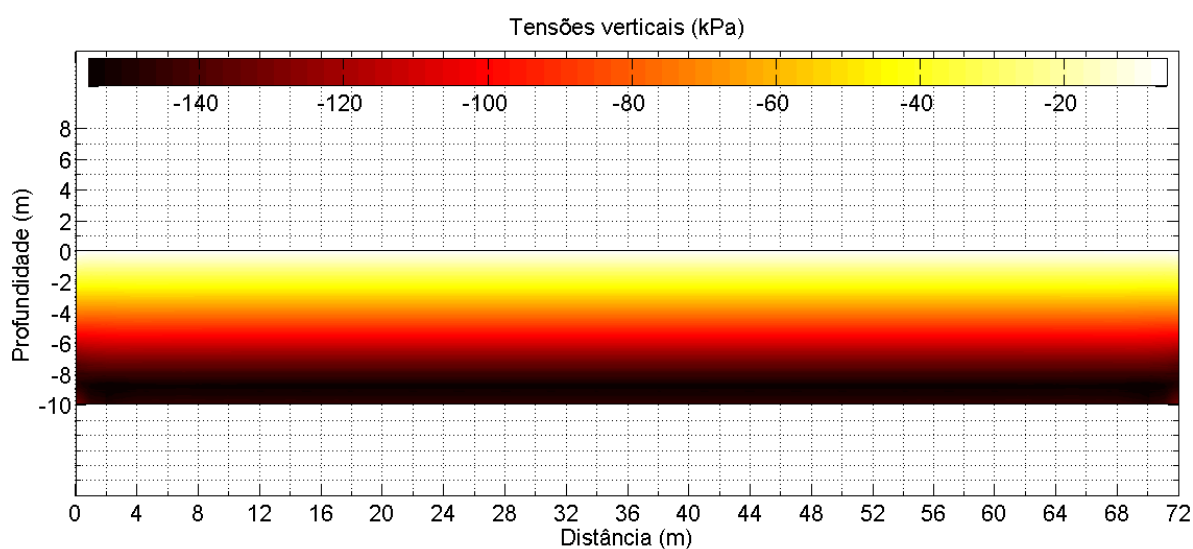


Figura 54: Tensões *in situ* obtidas com o MGLE.



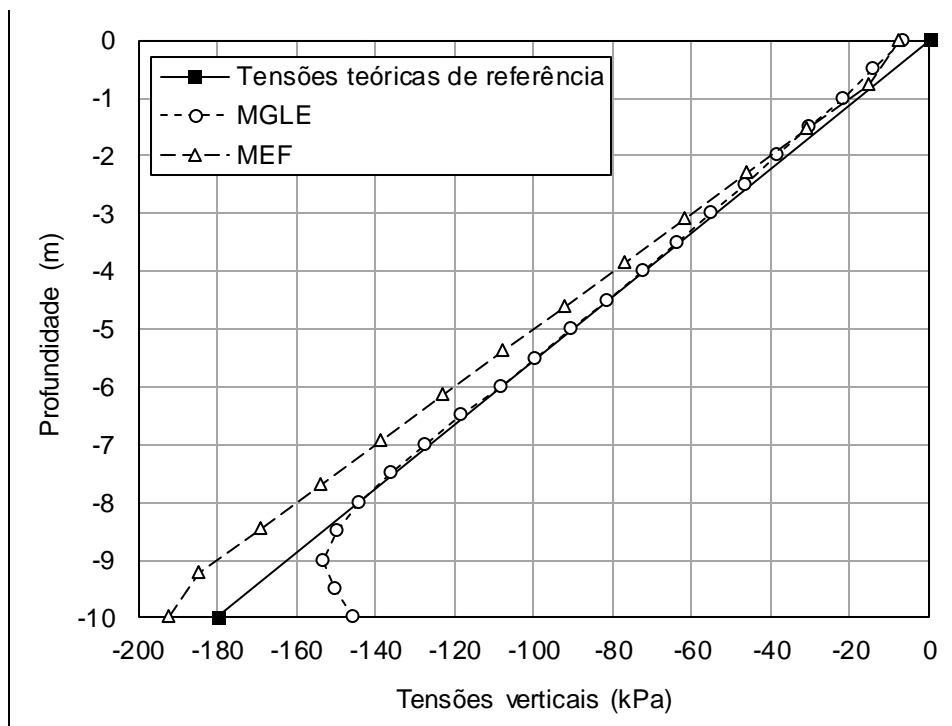
Observa-se que os modelos resolvidos com os dois métodos apresentaram resultados similares. Esses resultados podem ser comparados ainda àquele obtido com a solução da mecânica dos solos clássica (Equação 95<sup>24</sup>).

Assim, representando no mesmo gráfico os valores teóricos e os resultados obtidos no MEF e no MGLE, nota-se a proximidade dos resultados (Figura 55). No MGLE houve maior erro em relação à formulação teórica nas extremidades do modelo. No entanto, pode-se considerar significativa apenas a discrepância próxima

<sup>24</sup> Ver pág. 76.

à fronteira essencial, onde o erro relativo aproximado se situou entre 5 e 12%. O MEF, por sua vez, apresentou um erro relativo aproximado em torno de 10% ao longo do perfil de solo.

Figura 55: Comparação das tensões *in situ* obtidas por meio dos diferentes métodos.



Como o aterro a ser analisado encontra-se distante dos pontos onde foram aplicadas as condições de contorno, tais diferenças próximas à fronteira essencial poderão ser desprezadas.

A profundidade na qual se observaram o início das maiores diferenças entre o MGLE e o modelo teórico foi em torno de 8 m ( $y = -8$  m). Portanto, caso se optasse por diminuir a profundidade da fundação que é representada no modelo, seria necessário respeitar um valor mínimo de 2 m, a fim de evitar interferências no aterro, que ainda seria inserido. Tal valor não deve ser fixado para aplicações futuras, mas avaliado de acordo com o estudo das tensões nesta etapa.

#### 4.4 Fase de Construção

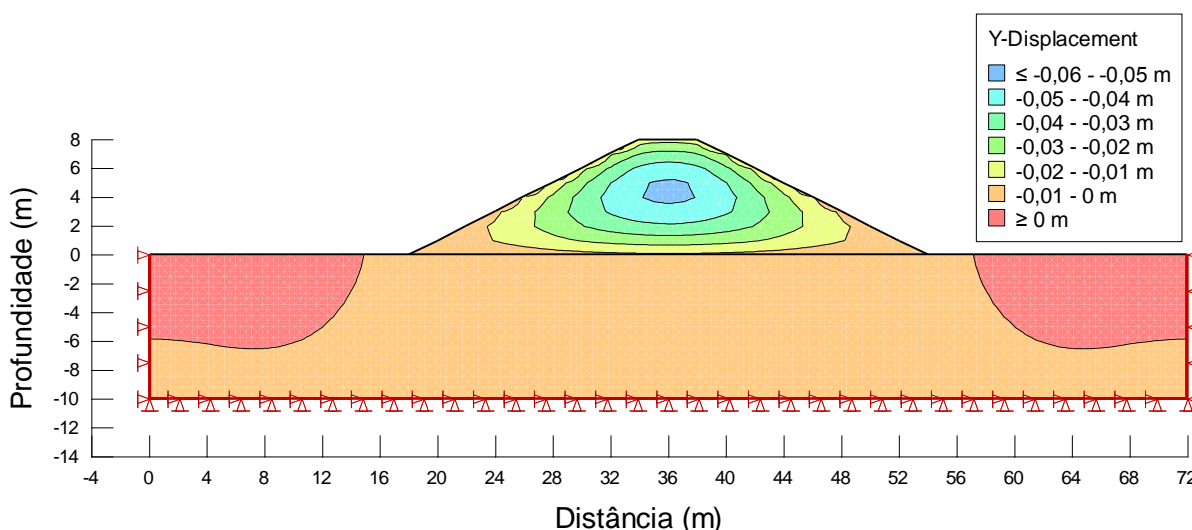
Durante a representação da construção do aterro, três variáveis foram observadas: os deslocamentos, as deformações e as tensões. Os resultados são mostrados nas seções seguintes.

#### 4.4.1 Deslocamentos

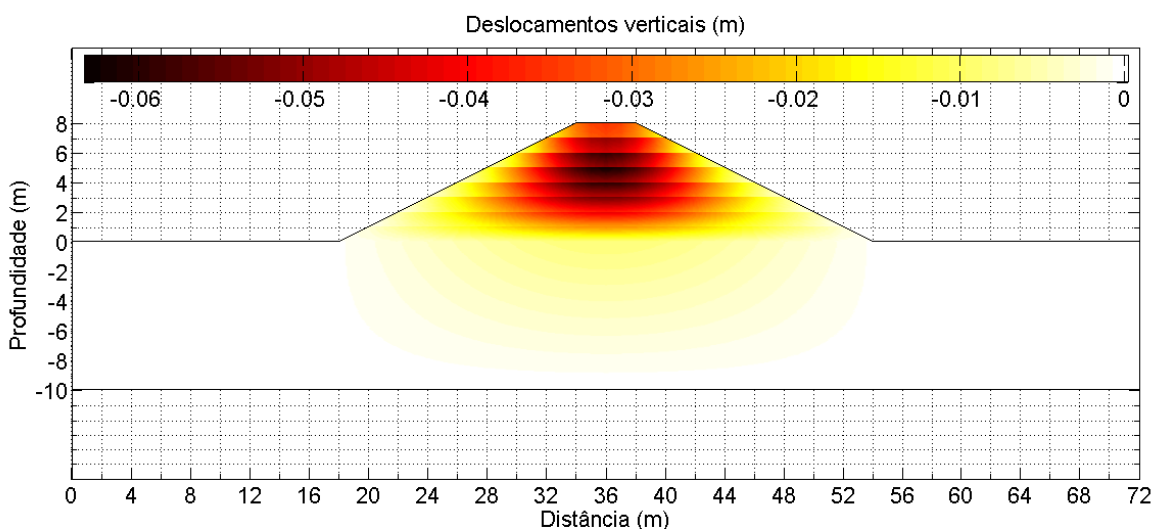
Devido ao interesse no comportamento da estrutura (isto é, da fundação e do aterro) a partir do início da construção, foram estabelecidos como referência os deslocamentos após o cálculo das tensões *in situ*. Logo, apesar da ocorrência de deslocamentos elásticos devido ao peso próprio da fundação, este estado foi considerado como o inicial, avaliando-se os deslocamentos a partir desta etapa.

Os deslocamentos do modelo de referência, utilizando o MEF, e do modelo utilizando o MGLE após a inserção da última camada estão apresentados na Figura 56e na Figura 57, respectivamente.

**Figura 56: Deslocamentos verticais obtidos com o MEF.**



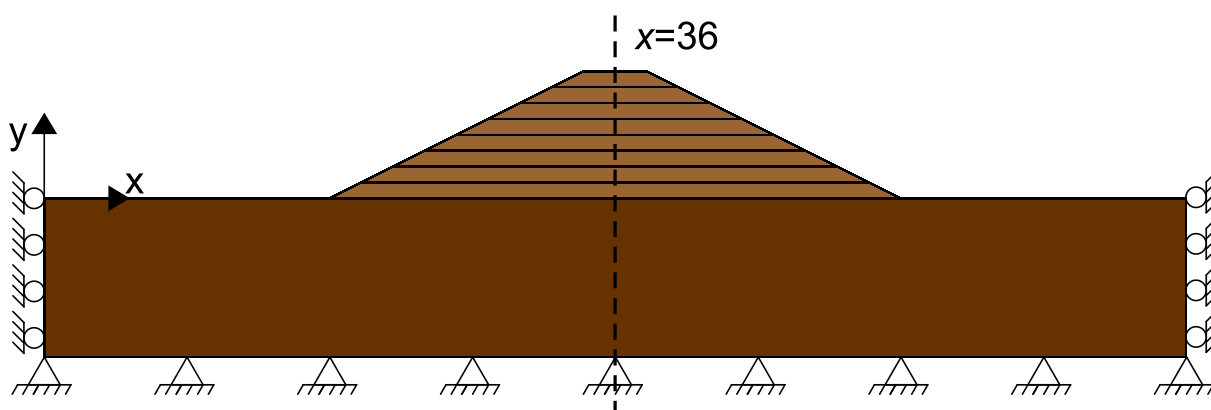
**Figura 57: Deslocamentos verticais obtidos com o MGLE.**



Observando os deslocamentos ocorridos em diversos pontos cuja abscissa seja  $x = 36$  m (Figura 58), é possível comparar os resultados obtidos por meio dos dois métodos (Figura 59). Os deslocamentos no modelo de referência em todas as cotas (eixo  $y$ ) apresentaram-se inferiores àqueles obtidos pelo MGLE. Na avaliação do comportamento da estrutura, constatou-se que o modelo desenvolvido com o método sem malha se comportou no regime plástico no estágio final de construção. Os pontos de Gauss que foram solicitados neste regime estão indicados na Figura 60.

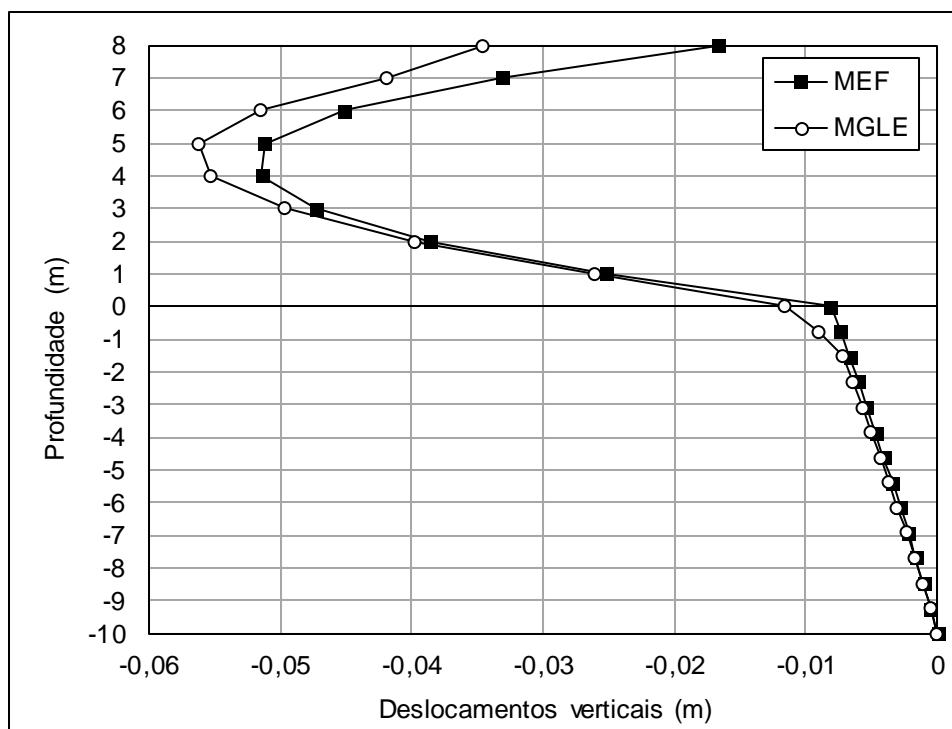
Na Figura 59, verifica-se que na proximidade da fundação com o aterro houve desvios maiores que ao longo das demais profundidades na fundação. Nestas posições, os erros relativos aproximados variaram entre 22 e 44%. Outros locais em que se verificaram erros elevados foi a partir da cota 3 m, no aterro. Os erros relativos aproximados foram crescentes desta cota até a cota 8 m, variando entre 7 e 26%.

**Figura 58:** Indicação da seção na qual avaliaram-se os deslocamentos ocorridos no modelo.

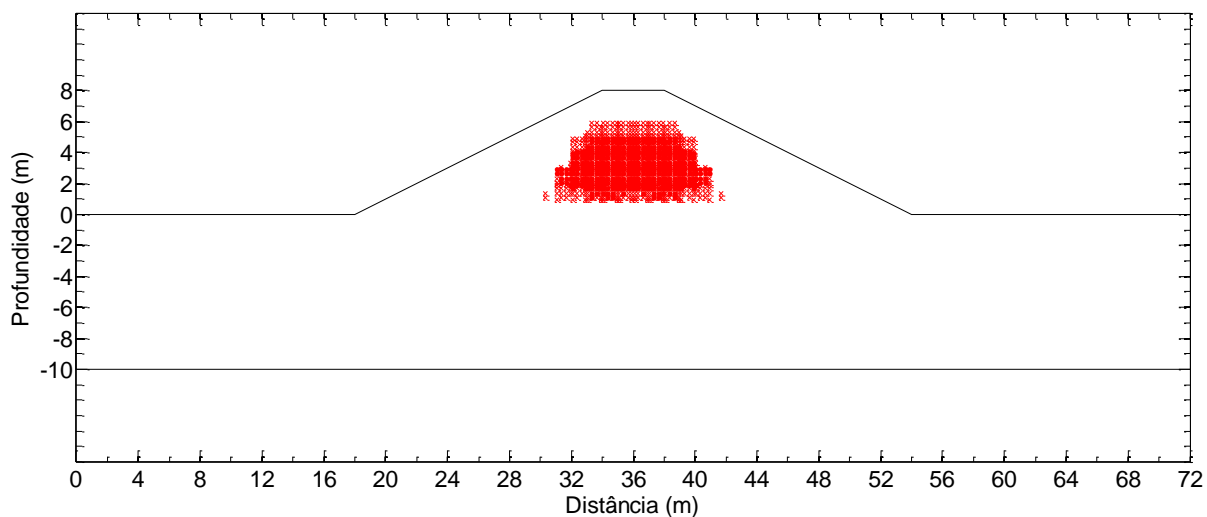




**Figura 59: Comparação entre os deslocamentos ao longo da profundidade com os dois métodos numéricos.**

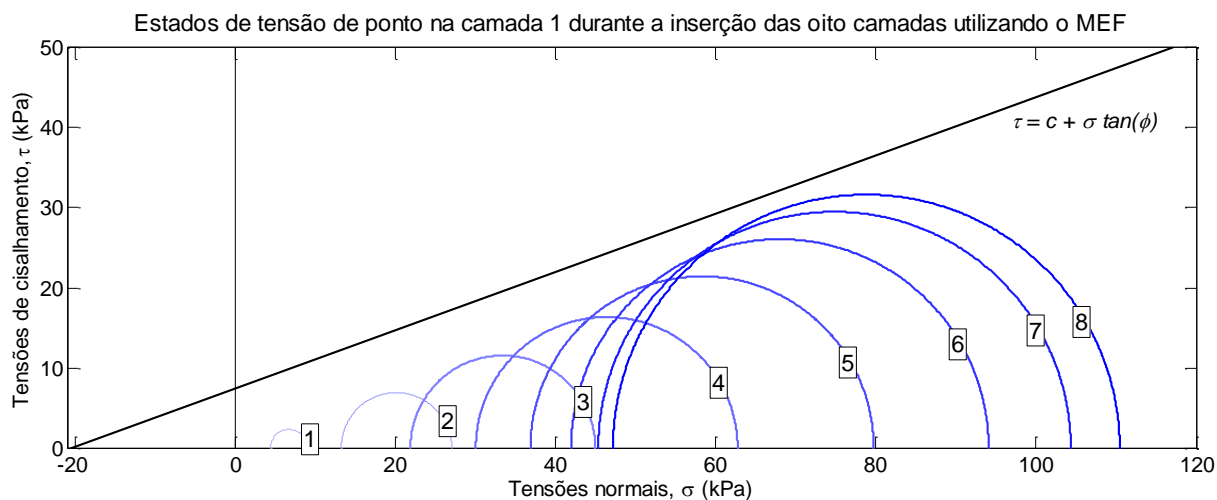


**Figura 60: Pontos que sofreram ruptura de acordo com o critério de Mohr-Coulomb.**

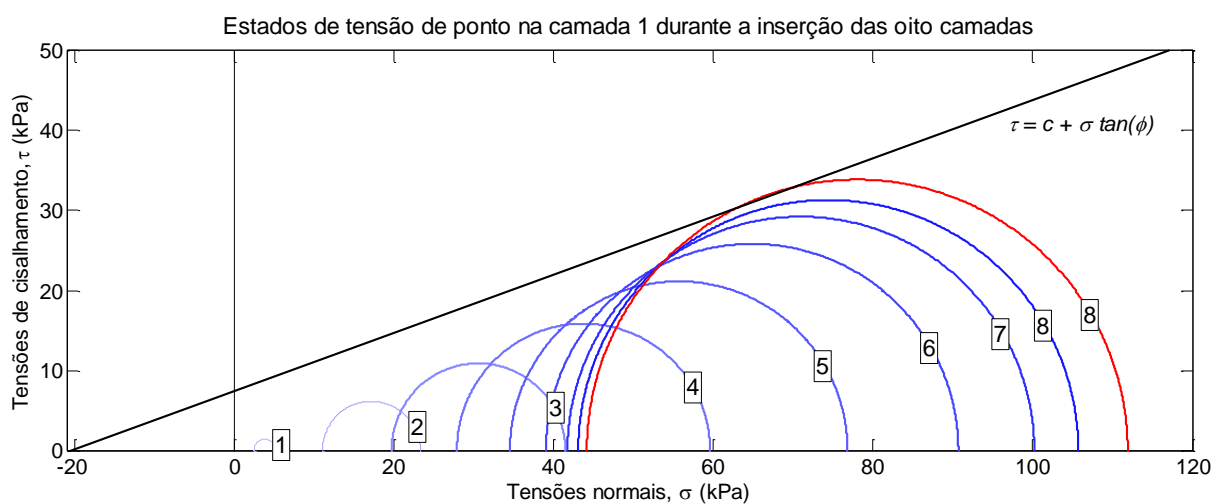


A análise do estado de tensões para alguns destes pontos permitiu que se observasse a evolução do seu comportamento durante a construção do modelo até atingir a condição de ruptura, conforme indicação na Figura 61 e na Figura 63. Nas figuras indicadas, os números que sobrepõem os respectivos círculos de Mohr correspondem à camada que estava sendo avaliada quando foram obtidas as tensões.

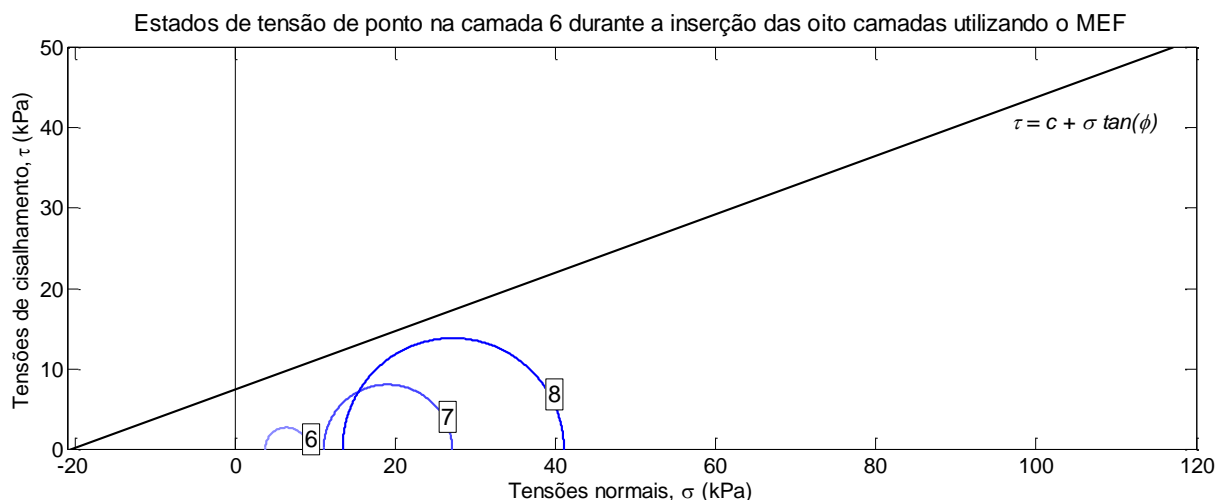
**Figura 61: Estados de tensão durante a inserção das camadas do aterro em uma camada inferior. Resultados obtidos com o MEF.**



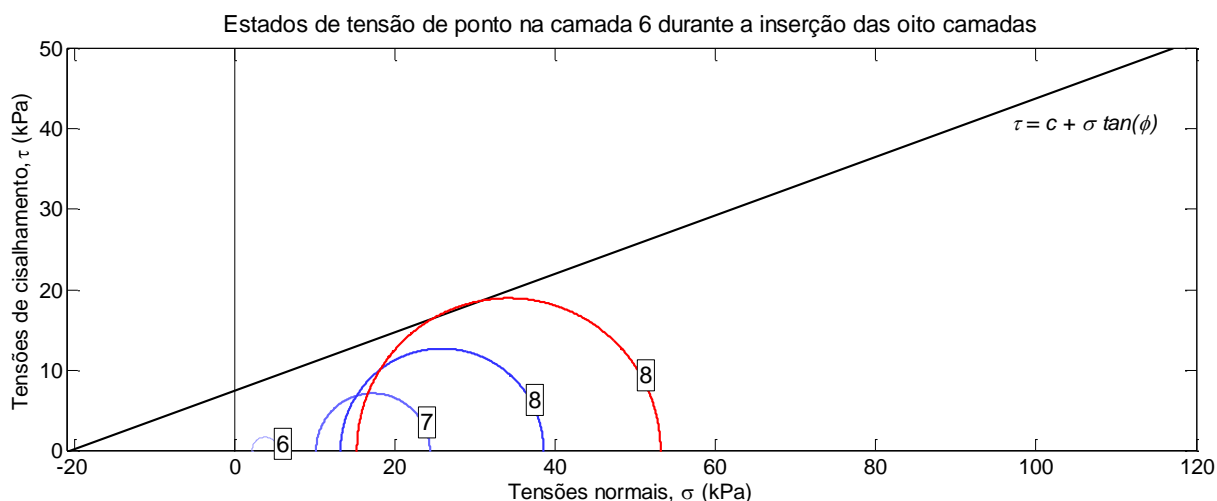
**Figura 62: Estados de tensão durante a inserção das camadas do aterro em uma camada inferior. Resultados obtidos com o MGLE.**



**Figura 63: Estados de tensão durante a inserção das camadas do aterro e em uma camada intermediária. Resultados obtidos com o MEF.**



**Figura 64: Estados de tensão durante a inserção das camadas do aterro e em uma camada intermediária. Resultados obtidos com o MGLE.**



Comparando-se os estados de tensão obtidos pela aplicação dos dois métodos numéricos, nota-se diferença entre as tensões principais. Durante o desenvolvimento do algoritmo para cálculo usando o MGLE, as tensões no estado plano de deformações foram consideradas aquelas referentes à solução da equação diferencial de governo do problema (Equação 103<sup>25</sup>). Como consequência, as tensões principais menores apresentaram valor inferior em comparação à solução obtida com o uso do *software* comercial, resultando em círculos de maior diâmetro e, portanto, mais próximos do critério de falha.

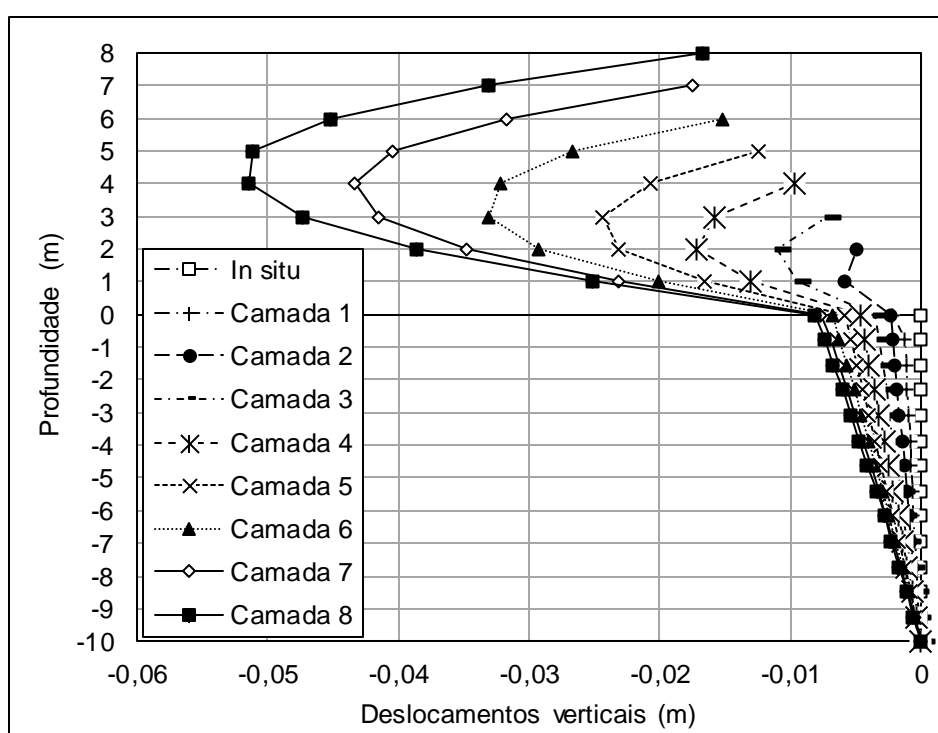
Os deslocamentos ocorridos durante a inserção das camadas também pode ser comparado ao longo das etapas. Para tal análise, foi considerada uma seção traçada

<sup>25</sup> Ver pág. 77.

na posição  $x = 36$  m, que corresponde ao centro do modelo (Figura 58<sup>26</sup>). Na Figura 65, Figura 66 e Figura 67 estão exibidos os deslocamentos quando utilizado o MEF no *software* comercial, o MGLE no algoritmo desenvolvido e a sobreposição dos dois resultados apresentados.

Deve ser observado que antes da inserção da primeira camada (quando foram calculadas as tensões *in situ*) os deslocamentos foram igualados a zero, pois este é o estado de referência.

**Figura 65: Evolução dos deslocamentos ao longo da inserção das camadas. Resultados obtidos com o MEF.**



<sup>26</sup> Ver pág. 102.

Figura 66: Evolução dos deslocamentos ao longo da inserção das camadas. Resultados obtidos com o MGLE.

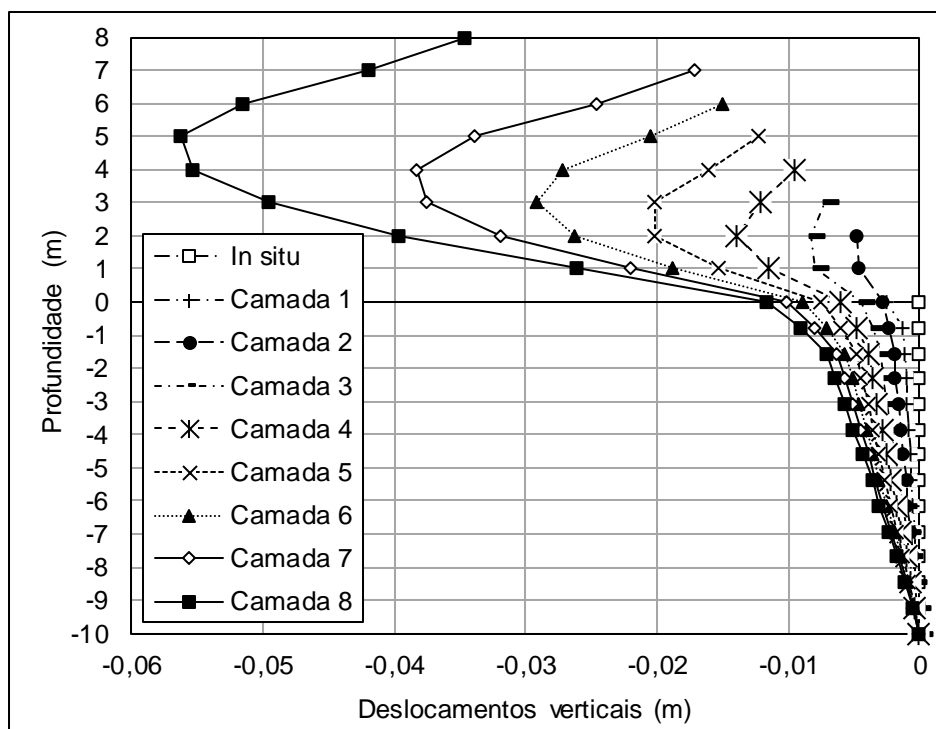
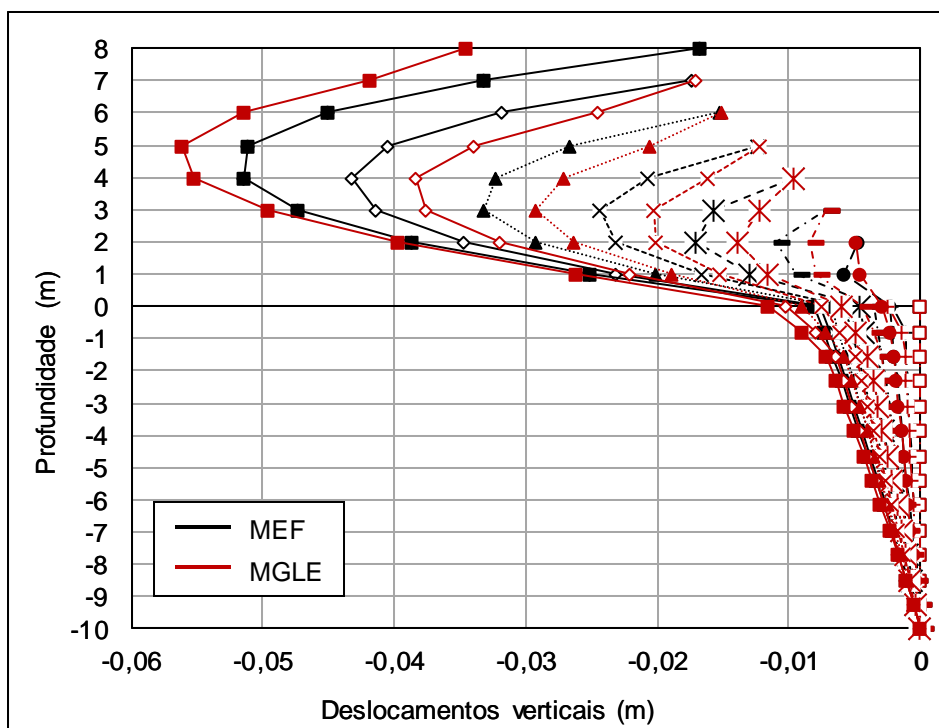


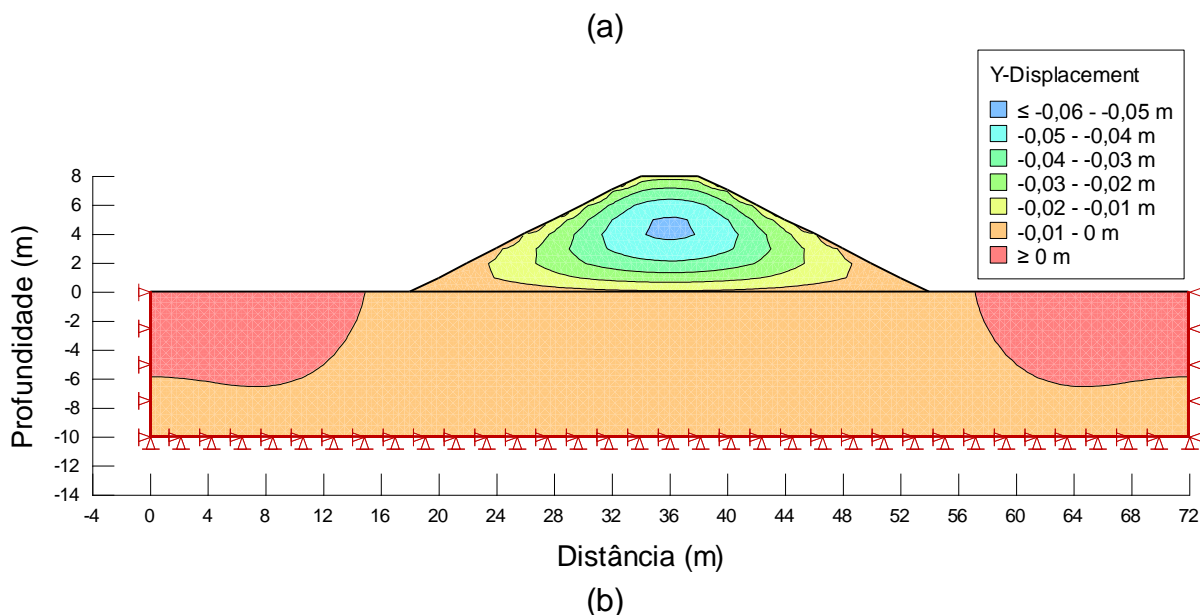
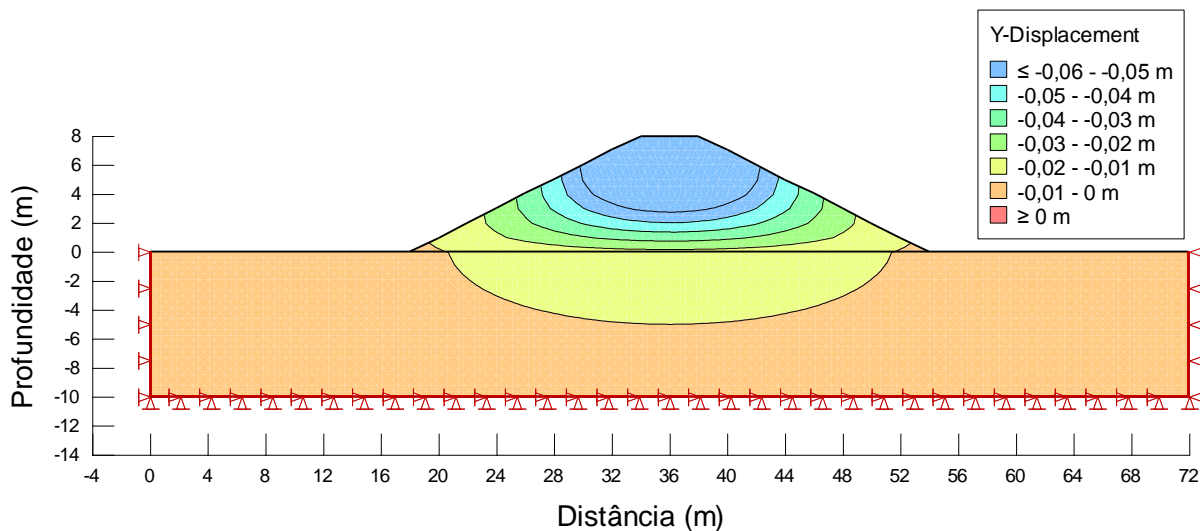
Figura 67: Comparação dos deslocamentos obtidos com os dois métodos.



Em relação ao comportamento geral esperado, houve uma boa resposta em ambos os modelos. Para a situação de construção de aterros, os maiores deslocamentos verticais são esperados no seu interior. Em um modelo no qual se

analisasse diretamente o formato final, os maiores deslocamentos ocorreriam na extremidade superior (Figura 68a).

**Figura 68: Comparação entre os deslocamentos de modelo (a) analisado já em seu estágio final e (b) resolvido por meio da inserção gradual das camadas.**



Quando inseridas as camadas uma a uma, de fato os maiores deslocamentos ocorrem no topo do modelo, considerando até a etapa já inserida. Mas como esses valores serão acumulados ao longo da análise, um ponto localizado na altura final da estrutura apresentará menores recalques acumulados em relação a diversos outros pontos no interior do aterro.

Quanto aos gráficos exibidos da Figura 67, seus resultados devem ser interpretados em duas etapas. Inicialmente, ao analisar os deslocamentos ocorridos na fundação (isto é, abaixo da cota  $y = 0$  m), nota-se que houve concordância entre

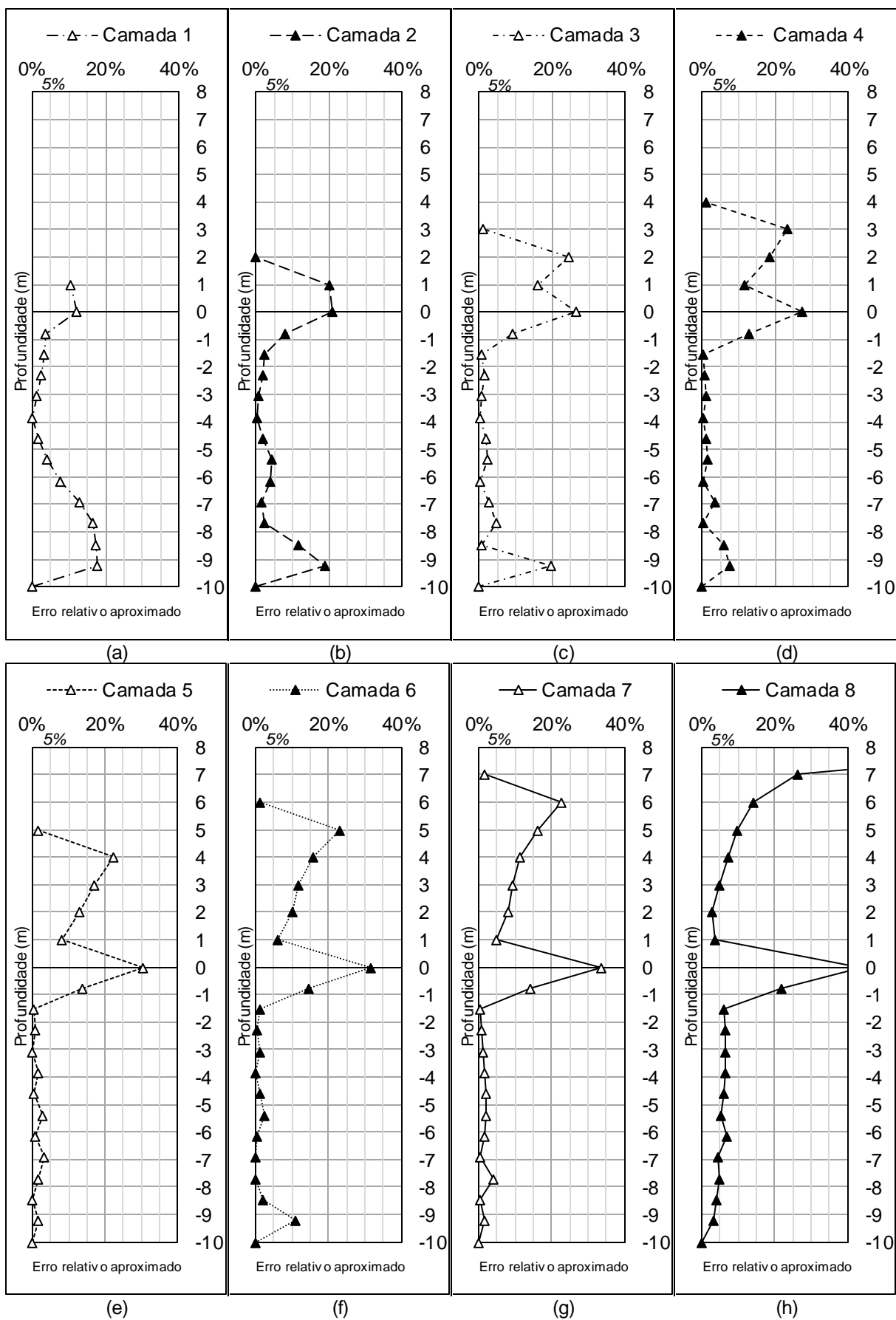
os resultados no MGLE e no MEF. Ao longo do desenvolvimento dos recalques<sup>27</sup> na fundação, o menor erro relativo observado foi aproximadamente 0%, enquanto o maior valor foi 44%, na etapa 8. Os maiores erros ficaram localizados próximos à superfície do terreno. No interior da fundação, os erros se mantiveram quase sempre abaixo de 5%. Deve-se observar também que na cota  $y = -10$  m, que é referente ao local de aplicação da condição de contorno de deslocamento vertical nulo, os valores corresponderam à condição imposta.

Quanto aos deslocamentos ocorridos no aterro (cotas com  $y$  maior que 0 m), em todas as etapas notou-se um desvio dos resultados do MGLE em comparação com o MEF. Os valores dos erros relativos por etapa de construção estão apresentados na Figura 69. Observa-se que os erros ficaram quase sempre superiores a 5% no aterro.

---

<sup>27</sup> Deslocamentos verticais.

**Figura 69: Erros relativos aproximados nos deslocamentos verticais do MGLE em relação ao MEF ao longo da inserção das camadas.**





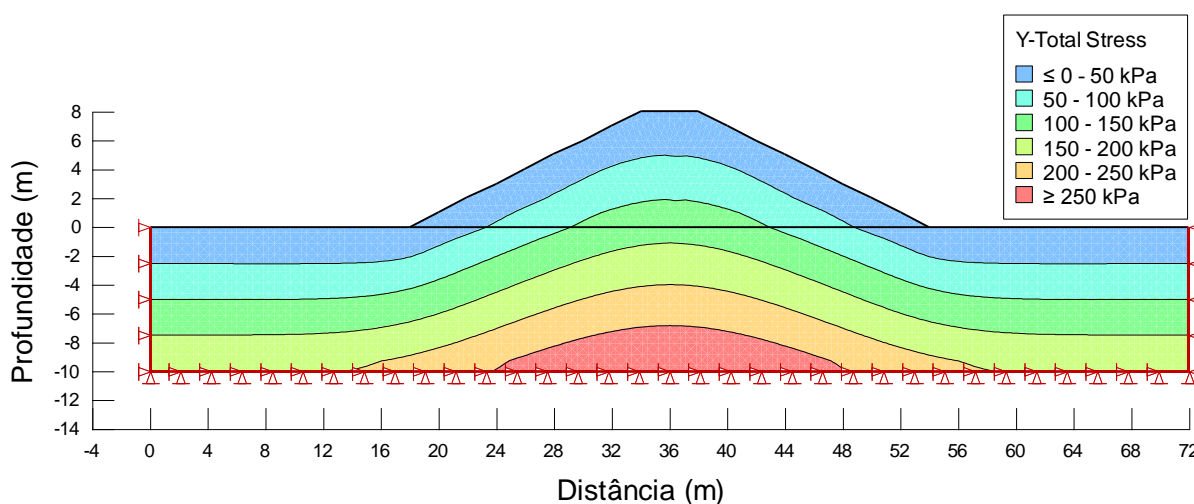
Na inserção da camada 8 no modelo do MGLE, conforme explicado anteriormente, a estrutura se comportou no regime plástico, resultando em deslocamentos superiores em relação ao modelo de referência. Entretanto, as diferenças em cada etapa de construção foram da ordem de milímetros. Qualitativamente, portanto, esta diferença pode ser desprezada.

#### 4.4.2 Tensões e deformações

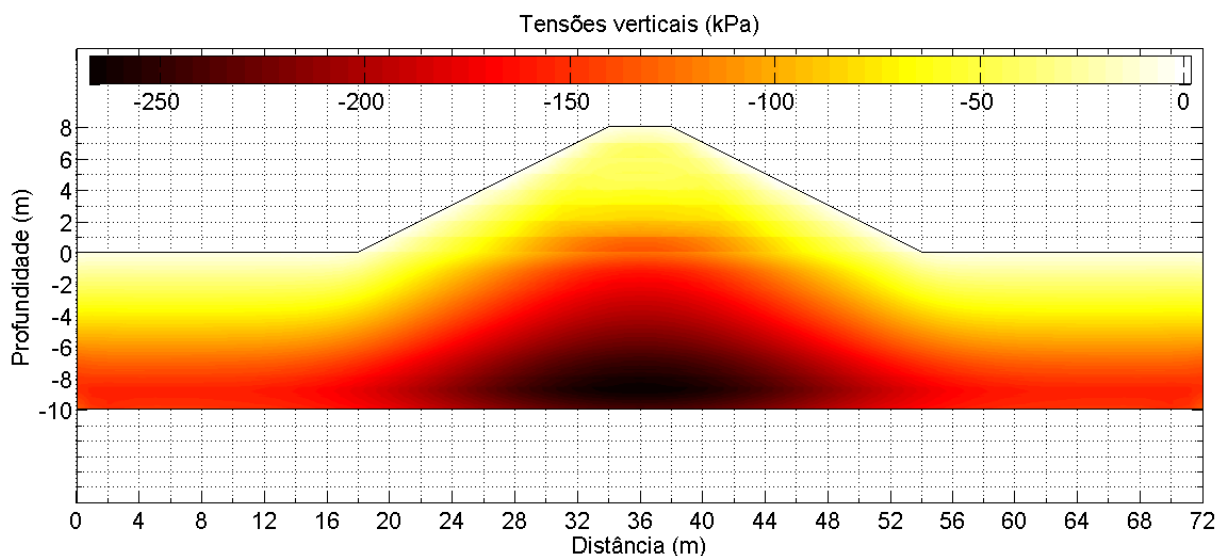
As tensões podem ser classificadas como um parâmetro complementar na análise da estabilidade de taludes utilizando o método de redução de resistência (DUNCAN, 1996). Para o presente estudo, entretanto, observações quanto à sua distribuição podem ser realizadas com o intuito de comparar os métodos.

Na Figura 70 e na Figura 71 são exibidos os resultados para as tensões verticais utilizando o MEF e o MGLE, respectivamente. De modo geral, pode ser notado que os valores nos dois modelos foram similares. Devido ao formato trapezoidal do aterro, a proporcionalidade entre a tensão vertical e a profundidade deixa de existir em alguns pontos, conforme se nota nas inclinações dos contornos nas figuras.

**Figura 70: Tensões verticais utilizando o MEF (compressão com sinal positivo).**

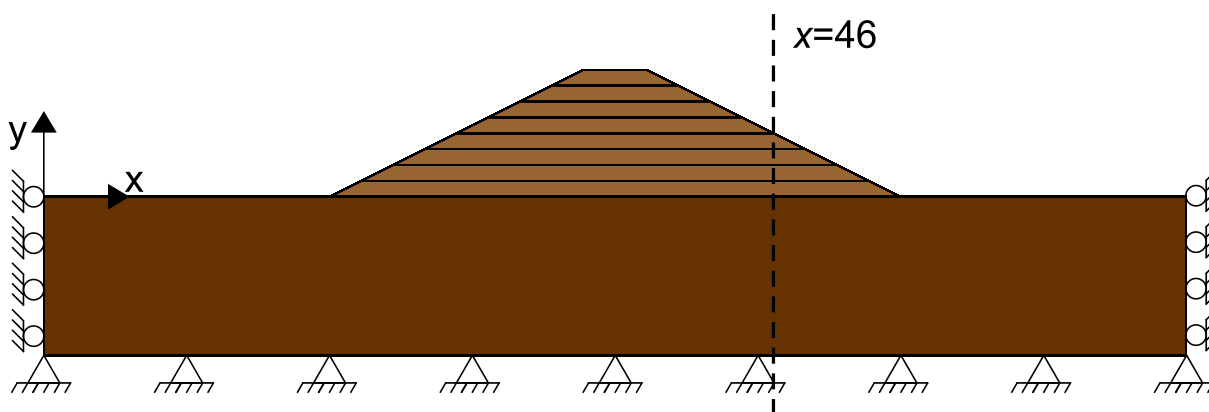


**Figura 71: Tensões verticais obtidas com o MGLE.**



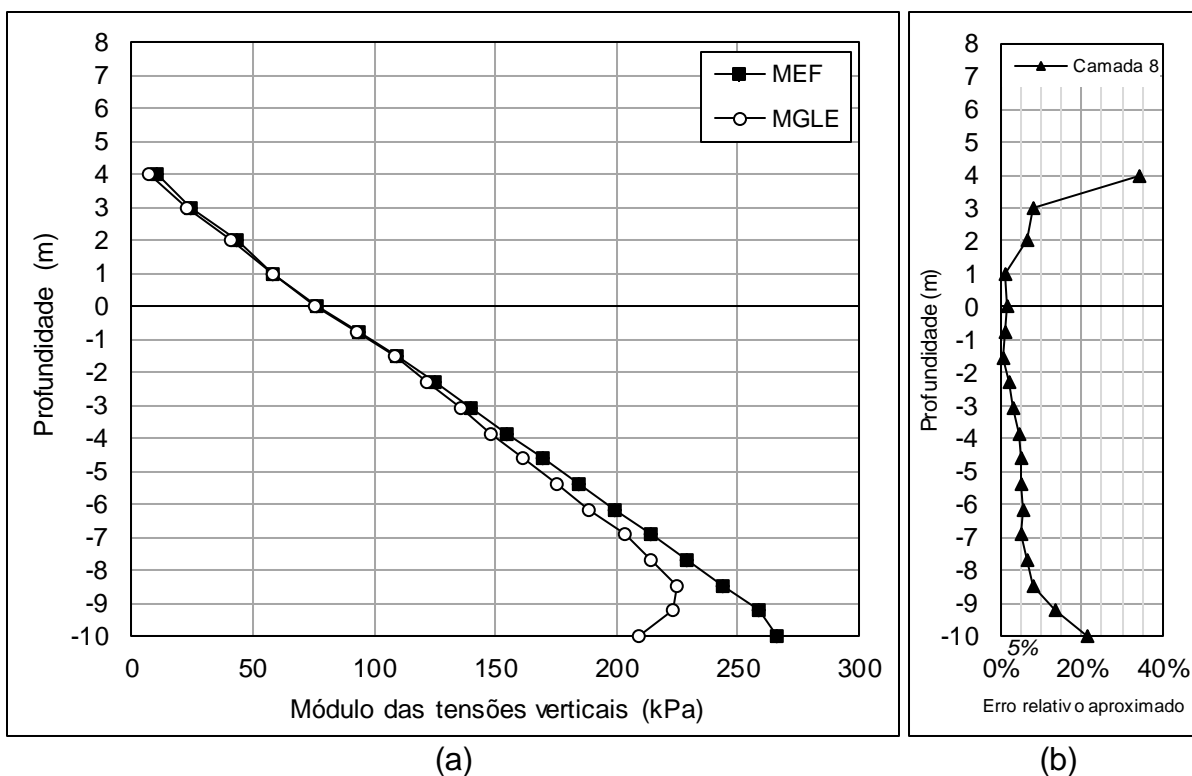
Para a melhor comparação e quantificação do erro, foi traçada uma seção vertical ao longo do aterro em seu estágio final de construção. O critério para escolha da seção foi a observação de valores em uma região que passasse por um ponto da provável superfície de ruptura. Uma indicação da seção foi realizada na Figura 72.

**Figura 72: Seção na qual foram analisadas as tensões e as deformações.**



A comparação das tensões verticais ao longo da seção indicada está exibida na Figura 73. Nota-se que os valores se assemelharam nos dois métodos. O erro relativo ficou abaixo de 5% da cota -7 m até a cota 1 m; o maior desvio ocorreu na face do talude (cota 4 m).

Figura 73: Tensões verticais na seção indicada na Figura 72. (a) Comparação dos resultados e (b) erro relativo aproximado após inserção da camada 8.



Os resultados para as tensões horizontais estão indicados na Figura 74 e na Figura 75. Para estas tensões em relação ao aterro, observaram-se maiores valores nas proximidades do contato entre a primeira camada e a fundação. De forma geral, os contornos das tensões foram semelhantes.

Figura 74: Tensões horizontais utilizando o MEF (compressão com sinal positivo).

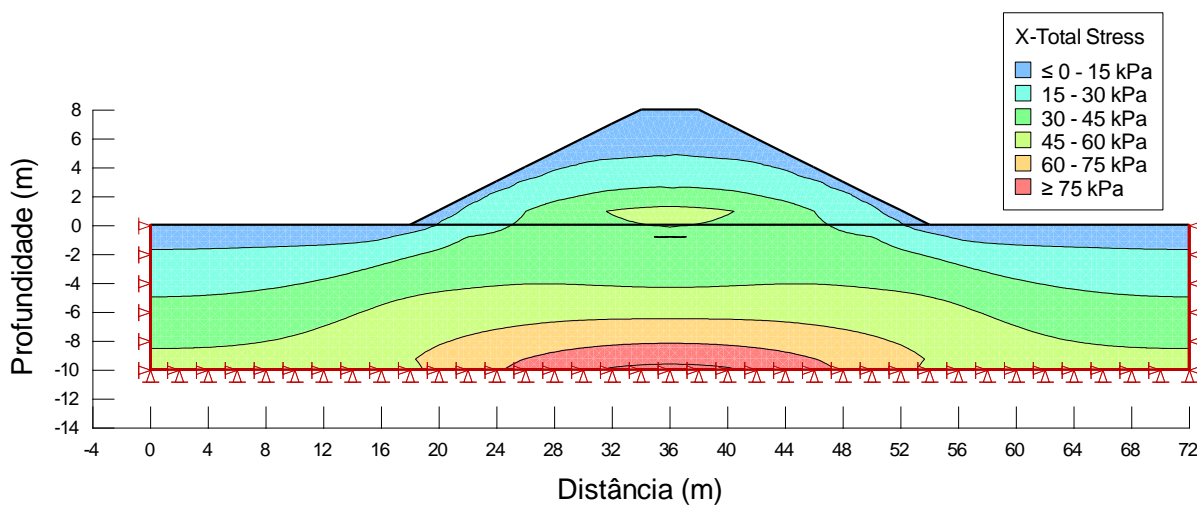
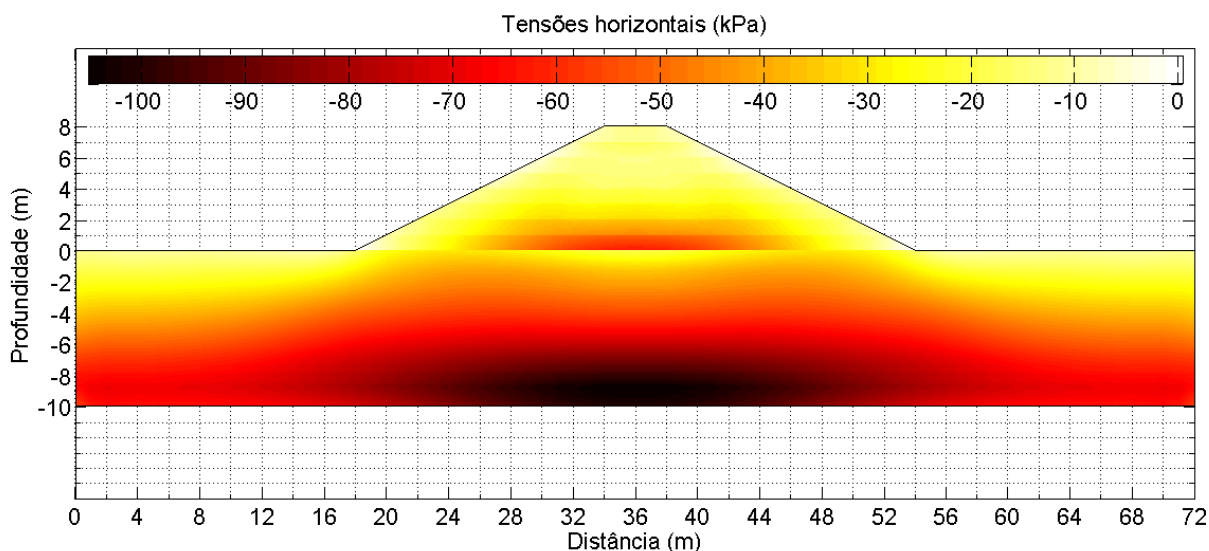
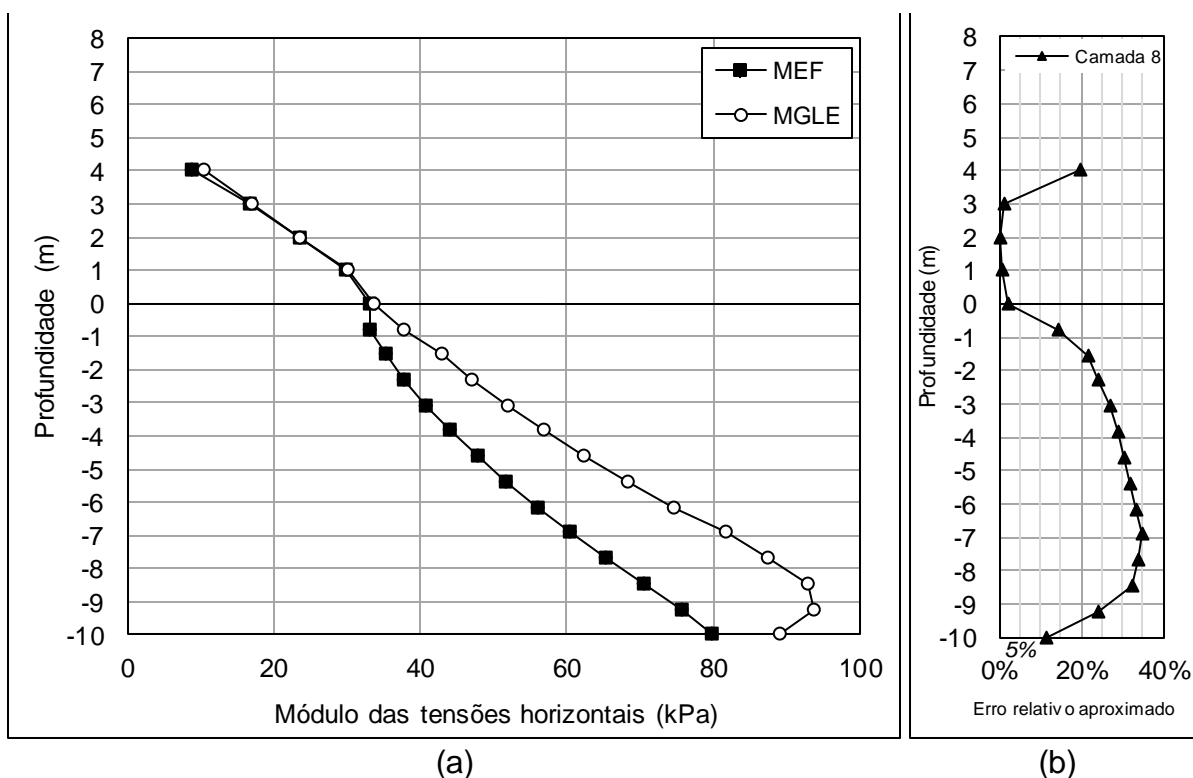


Figura 75: Tensões horizontais obtidas com o MGLE.



Ao comparar os resultados na seção indicada na Figura 72, observa-se que no aterro houve baixo erro relativo, com exceção do resultado na cota 4 m (Figura 76). Os maiores desvios deste parâmetro ocorreram ao longo da fundação.

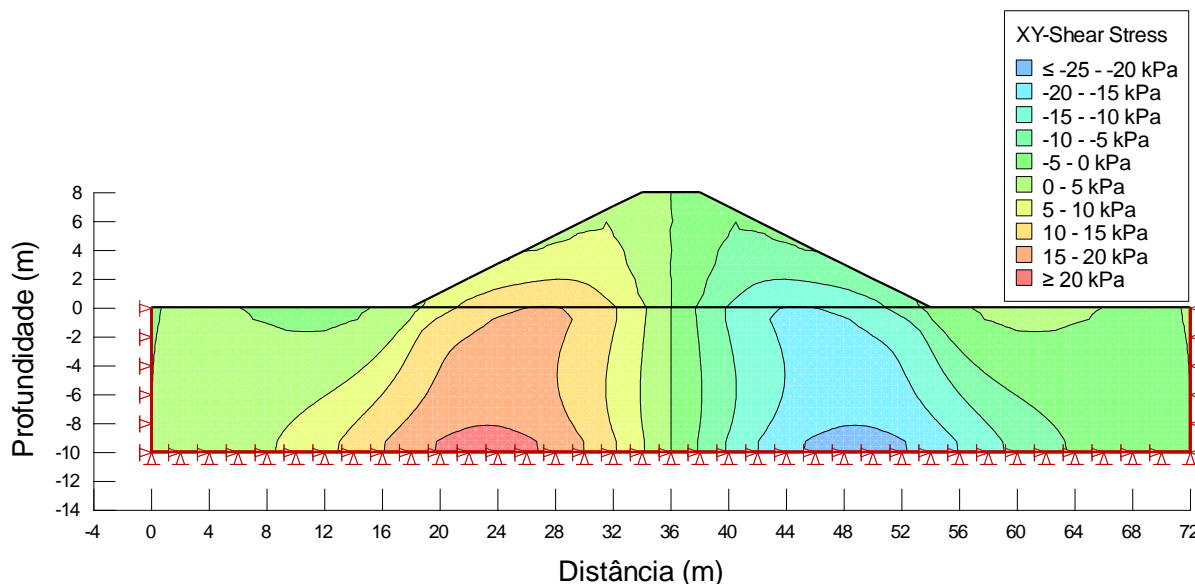
Figura 76: Tensões horizontais na seção indicada na Figura 72. (a) Comparação dos resultados e (b) erro relativo aproximado após inserção da camada 8.



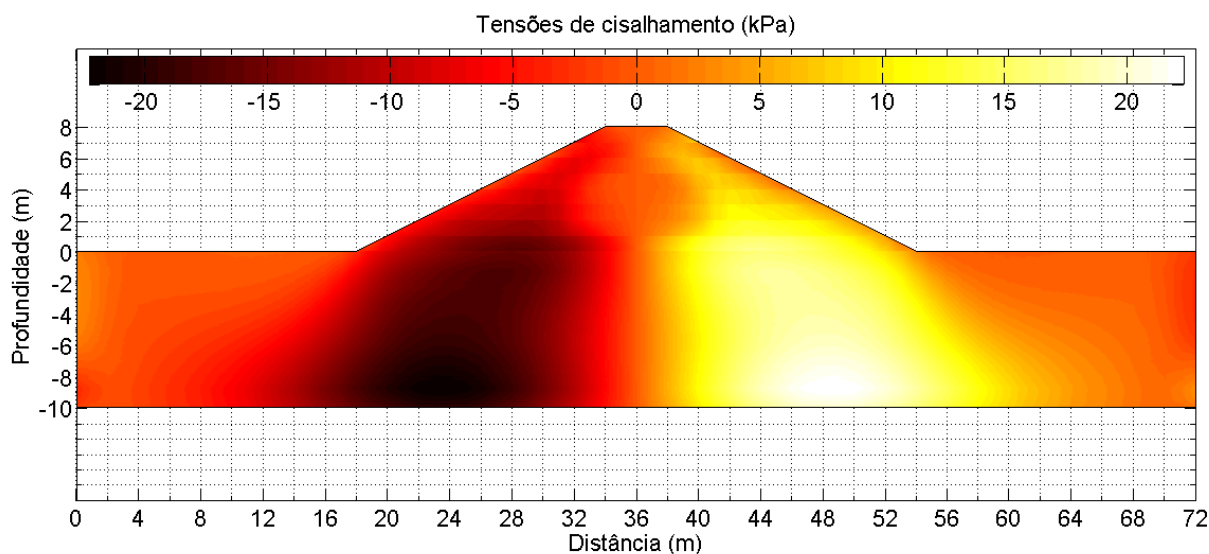
Quanto às tensões de cisalhamento ocorridas no modelo (Figura 77 e Figura 78), verifica-se que ocorreu simetria em relação ao eixo do aterro ( $x = 36$  m), havendo

igualdade no módulo em ambos os lados do modelo. De modo geral, os resultados nos dois métodos foi semelhante.

**Figura 77: Tensões de cisalhamento utilizando o MEF.**

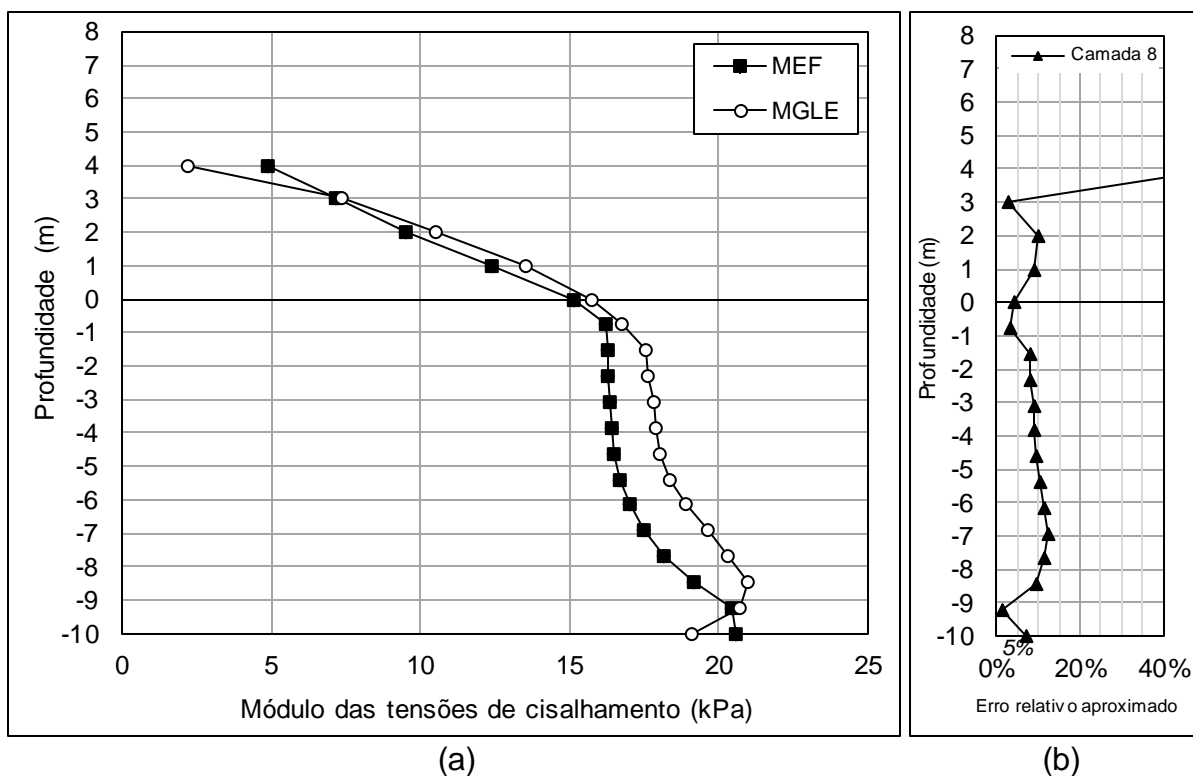


**Figura 78: Tensões de cisalhamento obtidas com o MGLE.**



Comparando os valores e observando os erros relativos (Figura 79), novamente verifica-se que a face do talude (cota 4 m) ocorreu o maior erro relativo. Nas demais profundidades, o erro esteve sempre em torno de 10%.

Figura 79: Tensões de cisalhamento na seção indicada na Figura 72. (a) Comparação dos resultados e (b) erro relativo aproximado após inserção da camada 8.



Nota-se que o MGLE apresentou uma tendência a erros elevados na superfície do modelo. Portanto, em uma análise que requeira maior acurácia, deve-se dedicar maior atenção em torno desta região. Tal comportamento também foi observado quanto às deformações; no entanto, para estes parâmetros, o erro relativo se elevou em relação às tensões, apesar do comportamento ao longo das diversas profundidades se assemelhar.

Para estas constatações, podem ser observados, inicialmente, os valores das deformações verticais (Figura 80 e Figura 81). O aspecto geral ao longo do modelo foi similar com os dois métodos. Nota-se que as maiores deformações ocorreram logo acima da fundação, nas camadas inferiores do aterro. A fundação, por sua vez, apresentou baixos valores de deslocamento, haja vista sua rigidez mais elevada em comparação com o material do aterro, conforme já esperado. Observa-se ainda que as faces dos taludes, nesta direção, foram comprimidas.

Figura 80: Deformações verticais utilizando o MEF (compressão com sinal positivo).

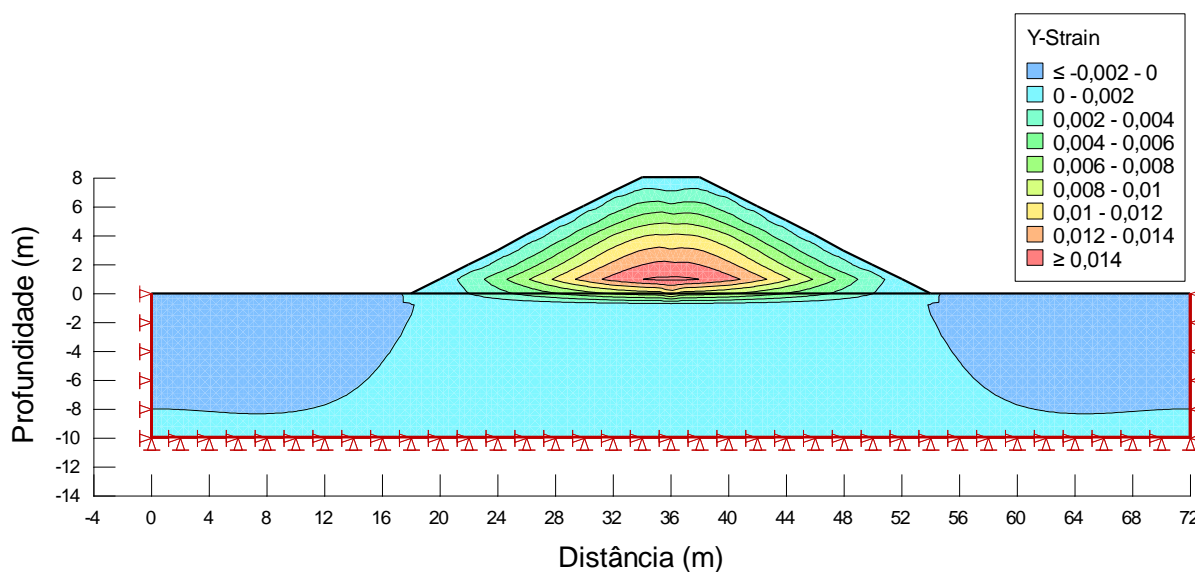
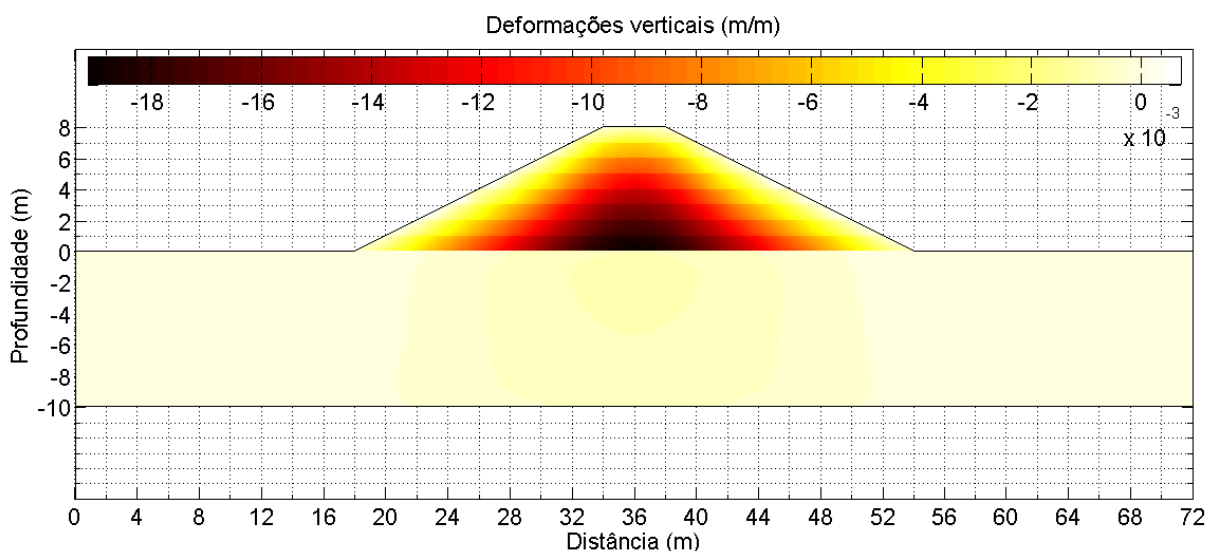
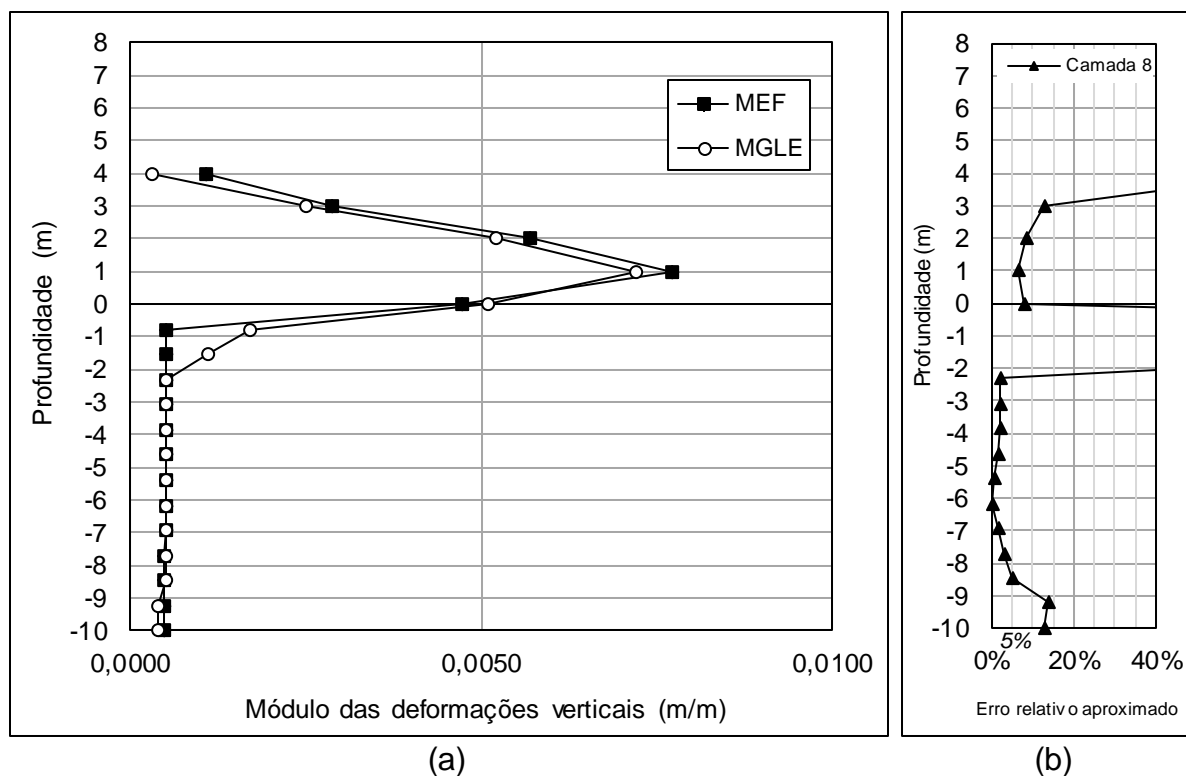


Figura 81: Deformações verticais utilizando o MGLE.



A análise dos valores das deformações verticais ao longo da seção escolhida (Figura 82) permite apontar que na fundação houve baixo erro relativo entre as cotas -2 e -8 m (abaixo de 5%). Os maiores desvios foram observados na vizinhança da fronteira essencial (cota -10 m), na interface entre os materiais de rigidezes diferentes (cotas 0 a 2 m) e na face do talude (cota 4 m).

Figura 82: Deformações verticais na seção indicada na Figura 72. (a) Comparação dos resultados e (b) erro relativo aproximado após inserção da camada 8.



Também verificou-se similaridade nos resultados das deformações horizontais nos dois modelos (Figura 83 e Figura 84). Note-se que, nesta direção, as faces dos taludes foram comprimidas, enquanto o interior do aterro foi tracionado.

Figura 83: Deformações horizontais utilizando o MEF (compressão com sinal positivo).

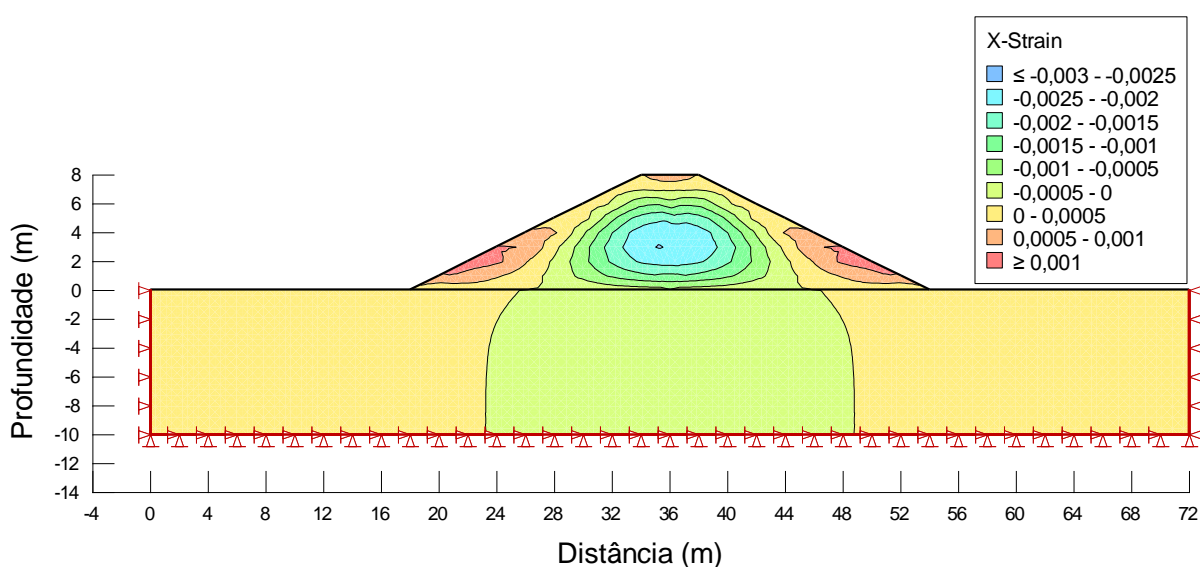
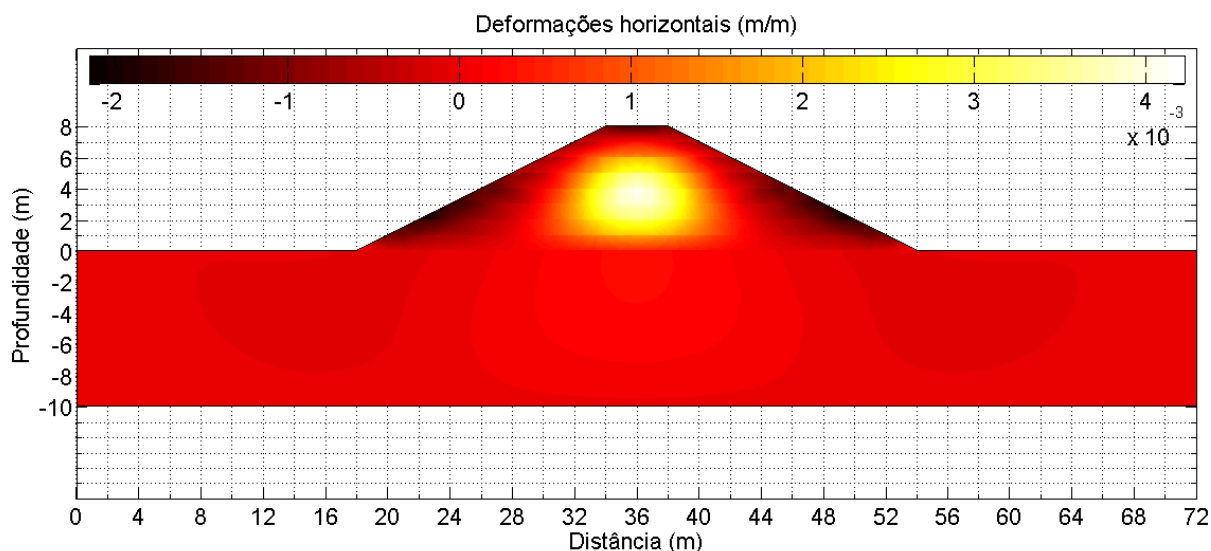


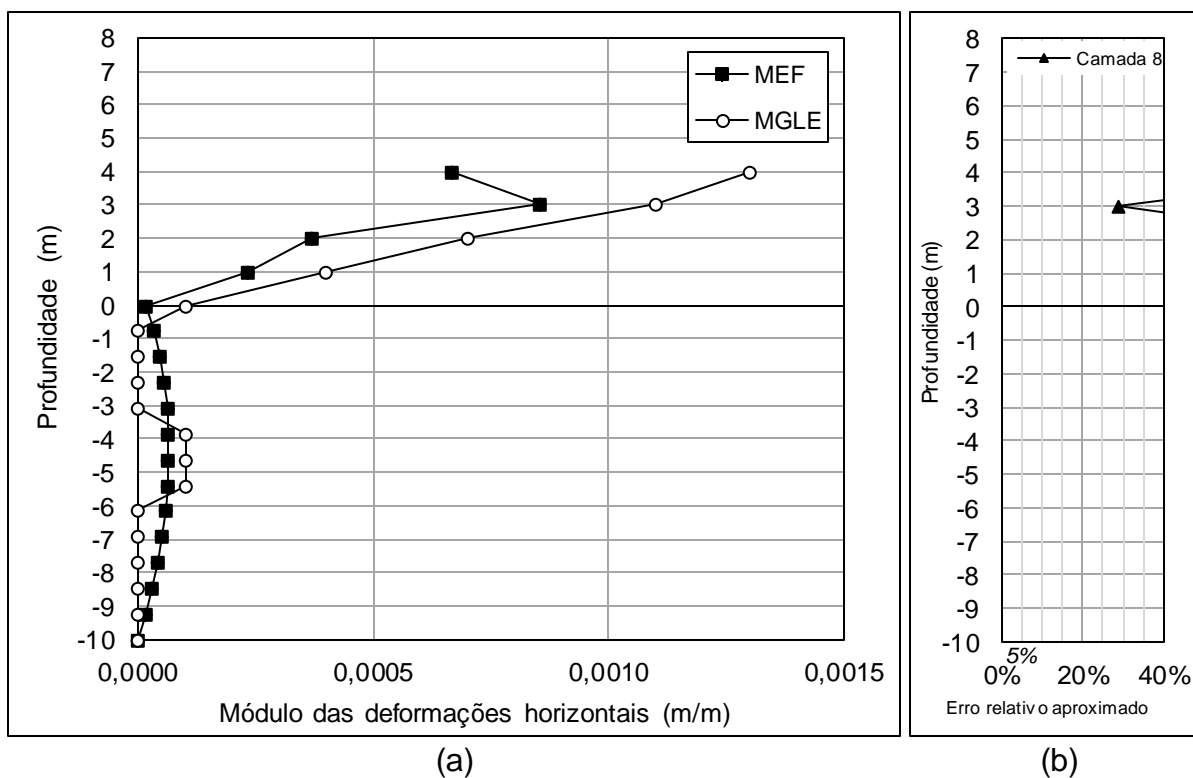


Figura 84: Deformações horizontais utilizando o MGLE.



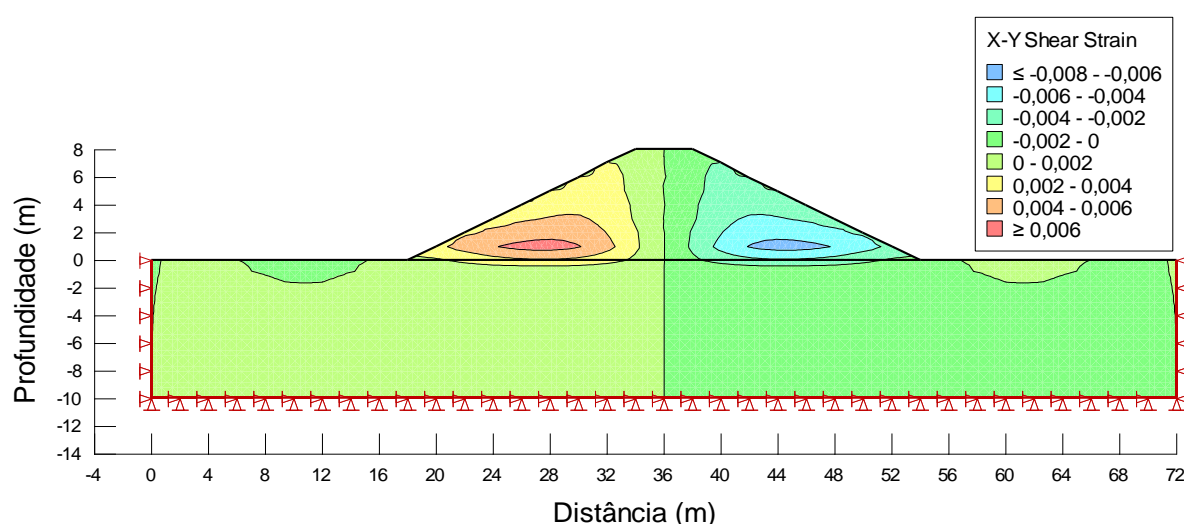
Quando comparados os valores ao longo da seção escolhida, verifica-se que o comportamento nos dois modelos foi aproximado, com exceção das deformações que ocorreram na face do talude (cota 4 m). No entanto, os erros relativos foram sempre superiores a 20%.

Figura 85: Deformações horizontais na seção indicada na Figura 72. (a) Comparação dos resultados e (b) erro relativo aproximado após inserção da camada 8.

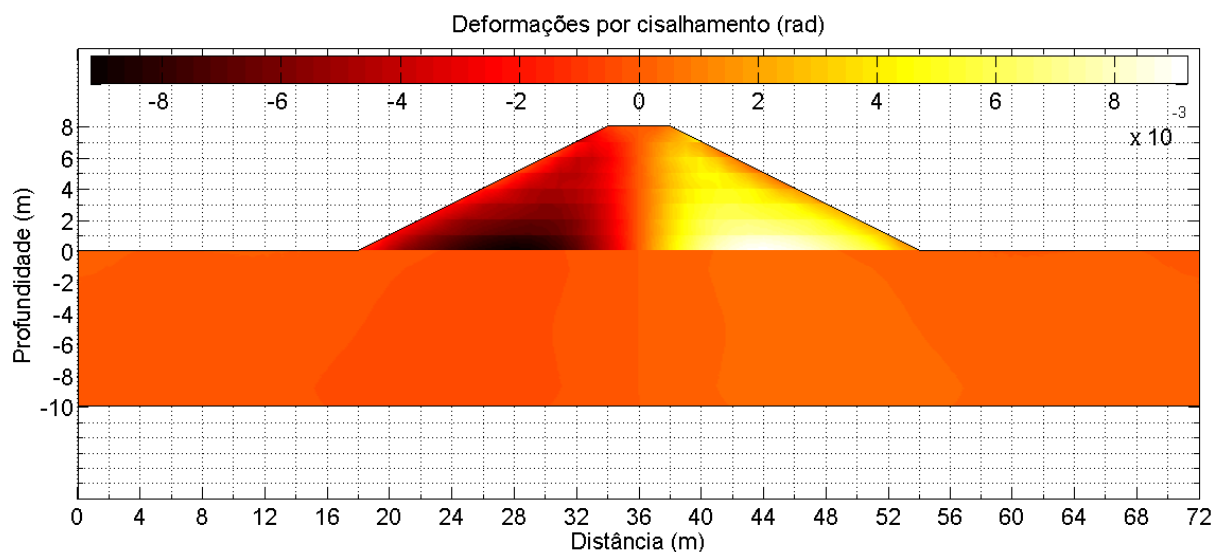


Em relação à deformação por cisalhamento, os maiores valores localizaram-se nas camadas inferiores do aterro (Figura 86 e Figura 87). O desenvolvimento da deformação por cisalhamento indica o local de ocorrência da superfície de ruptura. Nesta etapa (após a construção do aterro), é possível verificar onde ocorrerá o deslizamento, apesar de não se ter alcançado valores que provoquem a ruptura. Pelos valores apresentados, nota-se a tendência a uma ruptura próxima ao pé do talude, que é o comportamento mais esperado quando se realiza a análise de estabilidade em solos.

**Figura 86: Deformações por cisalhamento utilizando o MEF (compressão com sinal positivo).**



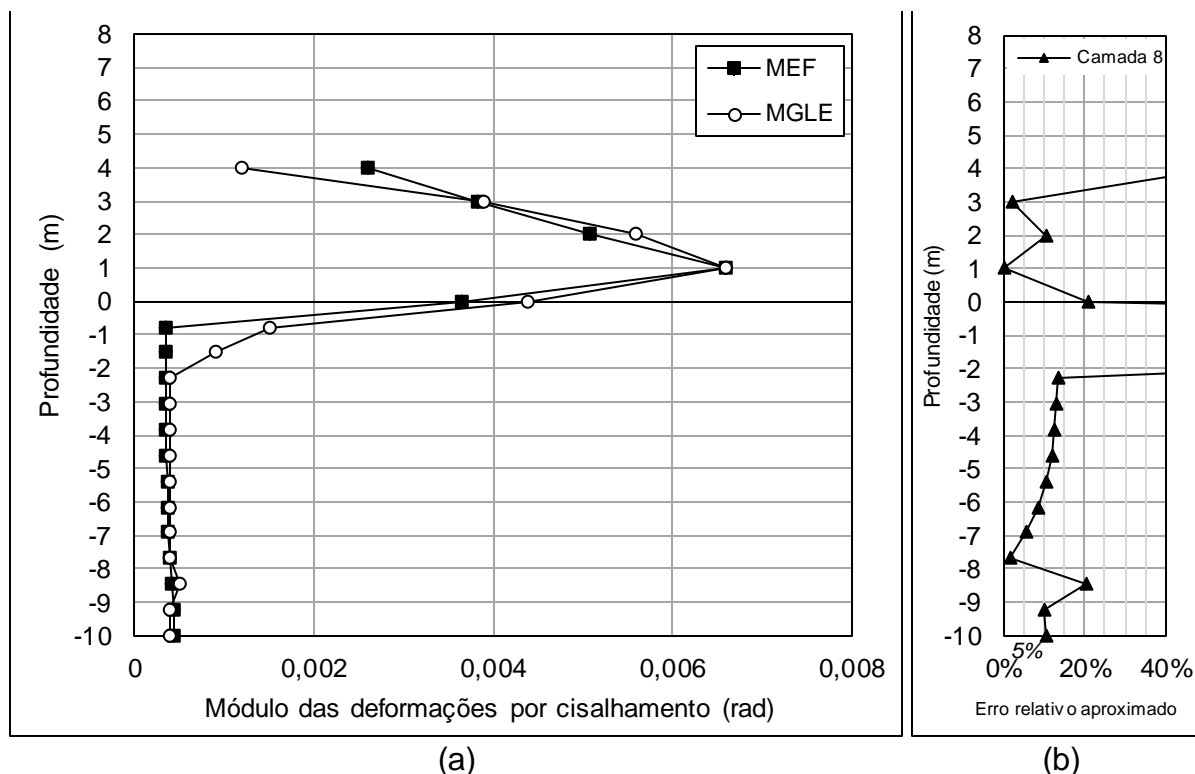
**Figura 87: Deformações por cisalhamento utilizando o MGLE.**



Novamente, ao serem comparados os dois métodos quanto aos resultados obtidos (Figura 88), observou-se a similaridade no comportamento da estrutura. Os

erros relativos, no entanto, oscilaram ao longo das profundidades, sendo mais elevados na vizinhança do contato entre materiais de propriedades diferentes (cota 0 m) e na face do talude (cota 4 m).

**Figura 88: Deformações por cisalhamento na seção indicada na Figura 72. (a) Comparação dos resultados e (b) erro relativo aproximado após inserção da camada 8.**



#### 4.5 Redução da Resistência

O processo de redução da resistência consistiu na diminuição gradativa do intercepto de coesão e do ângulo de atrito interno (e, por consequência, do ângulo de dilatação). A análise pode ser dividida em três etapas, que são: a determinação do fator de redução de resistência, a determinação da superfície de ruptura e a observação do comportamento da estrutura ao longo da diminuição da resistência.

##### 4.5.1 Determinação do fator de redução de resistência

A determinação do fator de redução de resistência (FRR) foi realizada comparando-se os parâmetros calculados (deslocamentos e deformações) com o fator de redução de resistência adotado. Inicialmente, definiram-se os fatores de

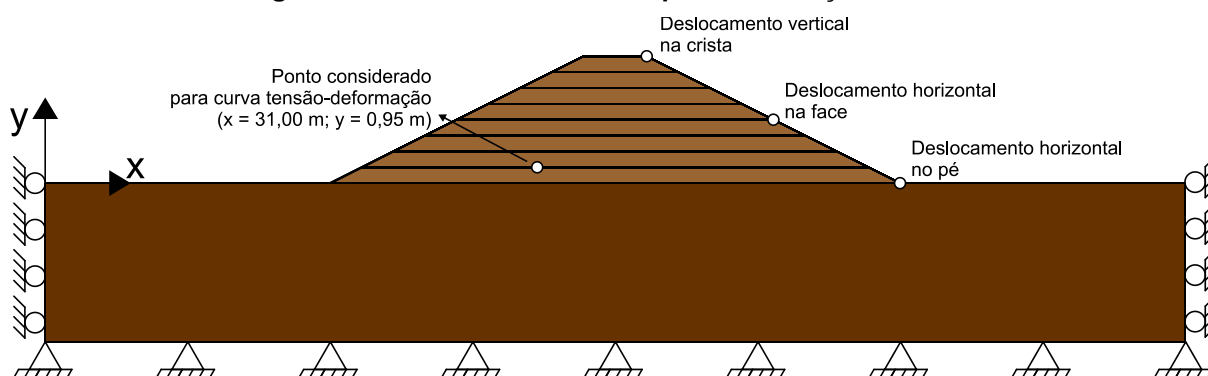
resistência indicados na Tabela 5. Os valores dos parâmetros de resistência foram calculados de acordo com a Equação 30<sup>28</sup>.

**Tabela 5: Fatores de redução de resistência verificados e respectivas propriedades do solo do aterro.**

FRR	Coesão (c, em kPa)	Ângulo de atrito interno ( $\phi$ , em graus)
1,0	7,50	20,00
1,1	6,82	18,31
1,2	6,25	16,87
1,3	5,77	15,64
1,4	5,36	14,57
1,5	5,00	13,64
1,6	4,69	12,82
1,7	4,41	12,08

Os pontos escolhidos para a comparação estão indicados na Figura 89. A escolha de tais pontos ocorreu baseando-se na metodologia presente em trabalhos similares (TU et al., 2016; DUNCAN, 1996; MATTHEWS; FAROOK; HELM, 2014). Também se justifica porque são pontos que possibilitam o monitoramento por meio de marcos superficiais, o que permite que os deslocamentos reais de um aterro possam ser comparados a valores teóricos.

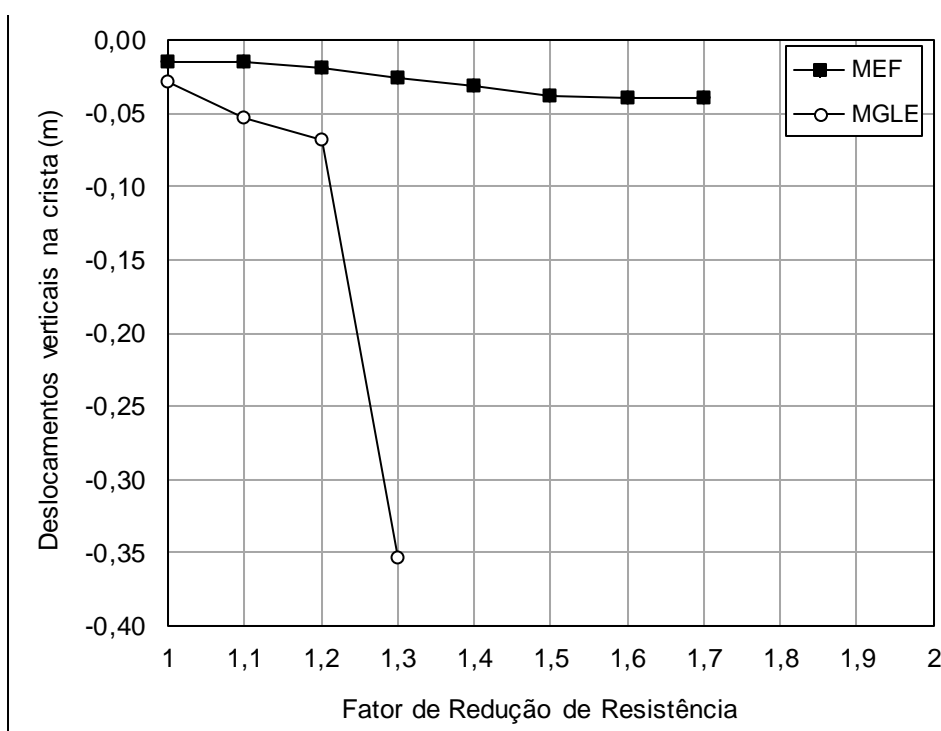
**Figura 89: Pontos considerados para a obtenção do FRR.**



A comparação entre os deslocamentos verticais ocorridos na crista utilizando os dois métodos está exibida na Figura 90.

<sup>28</sup> Ver pág. 55.

Figura 90: Deslocamentos verticais na crista para determinação do FRR.

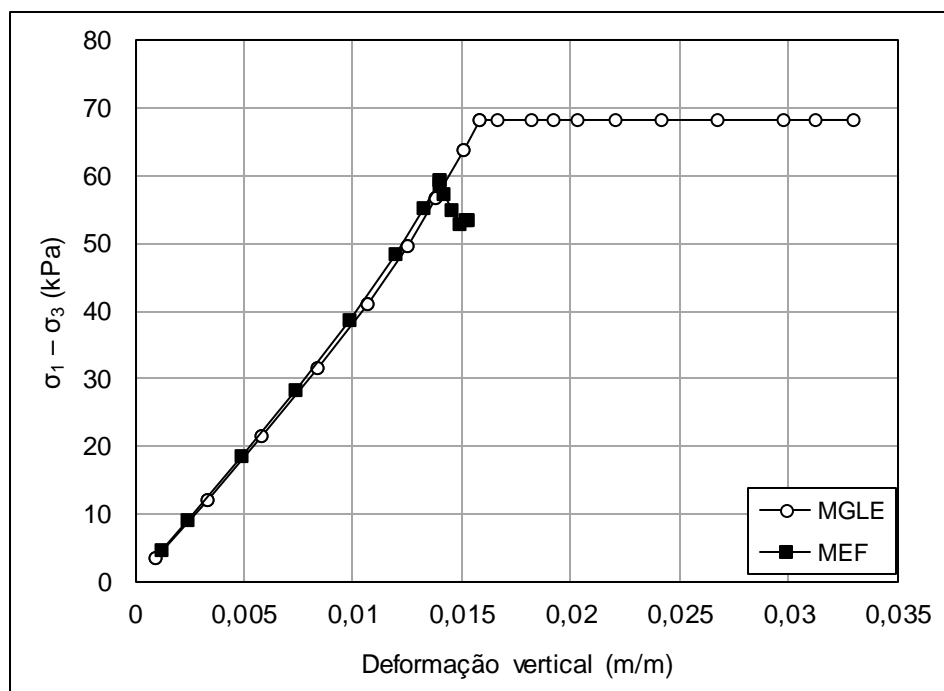


Inicialmente, percebe-se a pequena diferença entre os dois métodos quando o FRR era igual a 1, isto é, antes que houvesse qualquer redução de resistência. Tal diferença ocorreu devido à solicitação no regime plástico no MGLE, conforme abordado nas seções anteriores.

Ao traçar o diagrama tensão-deformação para o ponto no interior do aterro, indicado na Figura 89, nota-se o comportamento elástico perfeitamente plástico do material para o MGLE, enquanto o modelo constitutivo resultante da aplicação do MEF com o *software* comercial indica a ocorrência de valores limitados da deformação (Figura 91).

Verifica-se que a curva que representa o comportamento do solo modelado com o MEF apresentou um trecho de endurecimento e outro de relaxamento. Tais comportamentos são característicos de argilas sobreadensadas (PINTO, 2006) e há modelos que representam, de modo aproximado, este efeito (POTTS; ZDRAVKOVIC, 1999).

Figura 91: Curvas tensão-deformação para o ponto indicado na Figura 89, com a tensão representada pela diferença entre as tensões principais.

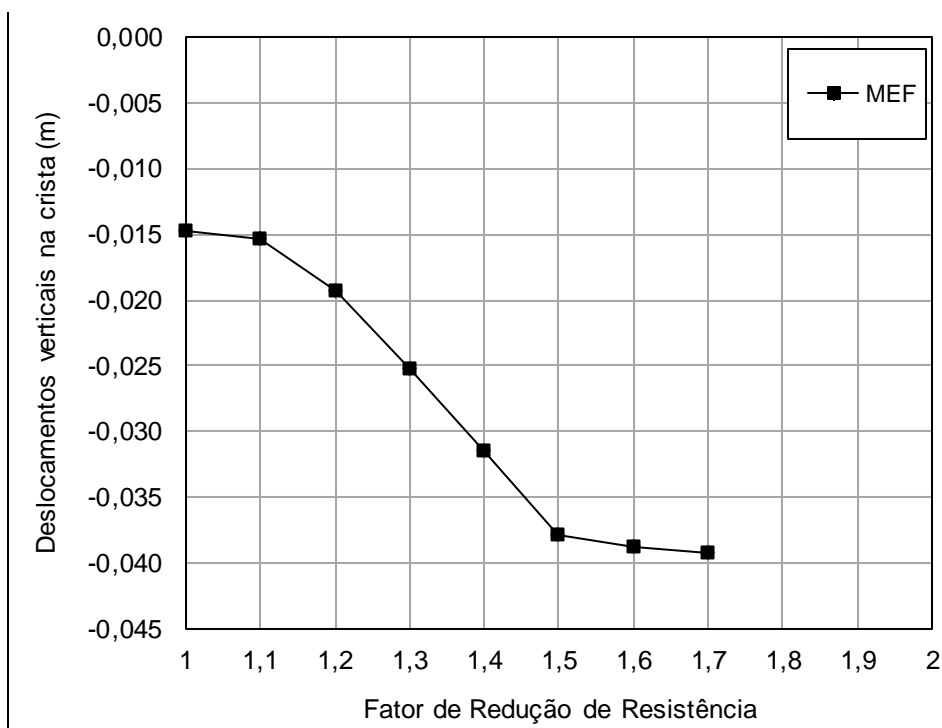


A alteração dos parâmetros de resistência do solo referentes ao FRR igual a 1,1 não resultou em diferença significativa no MEF. Nesta primeira redução, observou-se um erro relativo de 5% em comparação com o deslocamento referente ao FRR 1,0. No MGLE, entretanto, o erro relativo foi de 88%.

Deve-se ressaltar que esta diferença não ocorreu subitamente. À medida em que havia a ruptura nos pontos no interior do aterro, houve o surgimento de tensões não balanceadas. A partir destas tensões, obtia-se a força não balanceada a ser aplicada nos nós e, então, calculavam-se os acréscimos de deslocamentos. Conforme o processo se repetia, estes incrementos se tornaram cada vez menores, a ponto de não ocorrerem diferenças significativas em relação à iteração anterior (adotou-se um critério de 1%). Portanto, o erro relativo de 88% corresponde ao término do cálculo com FRR 1,1 em comparação com o término do cálculo com o FRR 1,0.

Quando o FRR foi definido igual a 1,2, o efeito no MEF foi mais significativo. O erro relativo foi de 26%, resultando em uma inclinação mais acentuada na sua curva. Para melhor visualização deste resultado, exibe-se a Figura 92 apenas com os resultados utilizando elementos finitos.

**Figura 92: Detalhe do deslocamento vertical na crista utilizando o MEF.**



Para o MGLE, o erro relativo calculado foi 29%. A facilidade com a qual o material estava se deformando devia-se ao fato de que diversos pontos já estarem solicitados no regime plástico. Os incrementos, entretanto, ainda ocorriam de forma a não comprometer a estabilidade da estrutura.

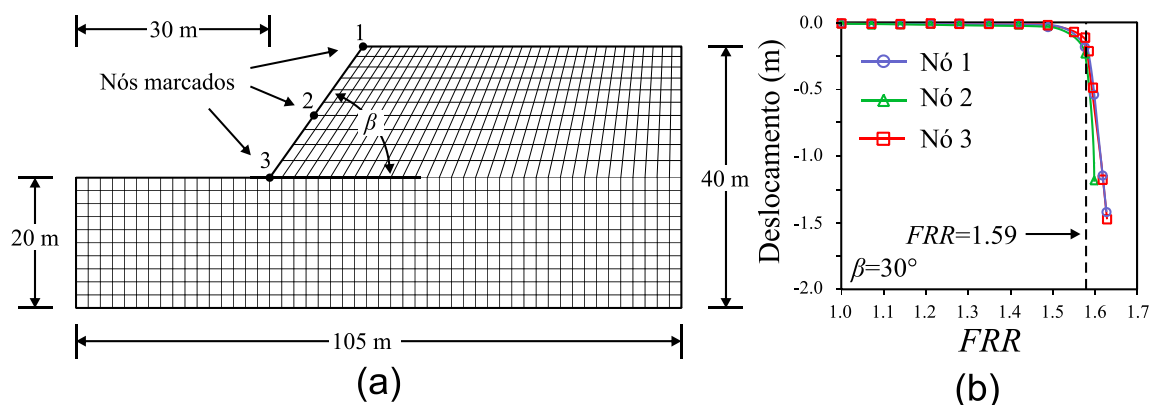
No cálculo para FRR igual a 1,3, o erro relativo no MEF atingiu seu valor máximo, sendo igual a 31%. Nesta etapa, observou-se que ocorreu um ponto de inflexão na curva FRR x deslocamento. Apesar de difícil visualização no gráfico, é possível chegar a esta conclusão observando os erros relativos mostrados na Tabela 6. Para FRR maiores, verificou-se a convergência no MEF.

**Tabela 6: Erros relativos aproximados dos deslocamentos verticais na crista na avaliação dos FRR.**

FRR	MGLE	MEF
1,0	-	-
1,1	88%	5%
1,2	29%	26%
1,3	419%	31%
1,4	-	25%
1,5	-	20%
1,6	-	2%
1,7	-	1%

No MGLE, verifica-se na Figura 90 e na Tabela 6 que o deslocamento aumentou de modo significativo. Foi desnecessário, a partir daí, realizar o cálculo para FRR superiores. O comportamento apresentado se assemelhou a um modelo encontrado na literatura (Figura 10, reproduzida a seguir) (TU et al., 2016).

**Figura 93: Critério de ruptura no método de redução da resistência (TU et al. 2016). Adaptada.**



Portanto, a partir dos deslocamentos verticais na crista do talude e também a partir dos erros relativos calculados, nota-se que a instabilidade da estrutura no MGLE ocorreu quando seu fator de redução de resistência atingiu o valor 1,3 e que, no MEF, a instabilidade ocorreu quando o fator de redução de resistência era 1,2. Em ambos os casos, registraram-se grandes acréscimos de deslocamento.

A observação do comportamento dos nós localizados na face e no pé do talude permitem que se chegue à mesma conclusão. Na Figura 94 apresentam-se os deslocamentos horizontais na face, sendo estes resultados reproduzidos em uma escala mais adequada para o MEF na Figura 95.



Figura 94: Deslocamentos horizontais na face para determinação do FRR.

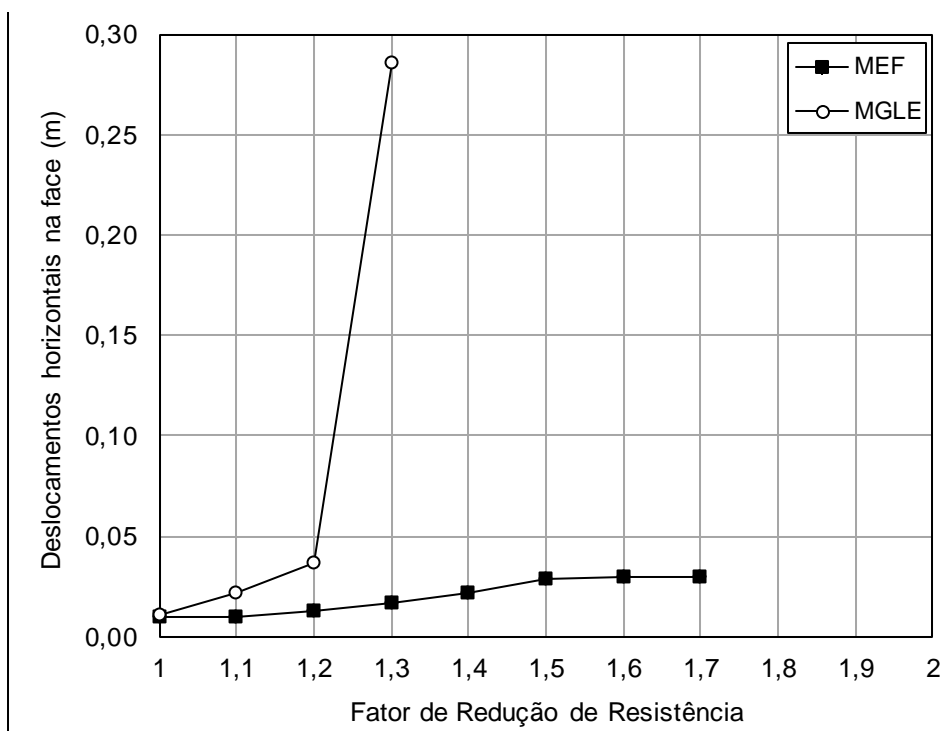
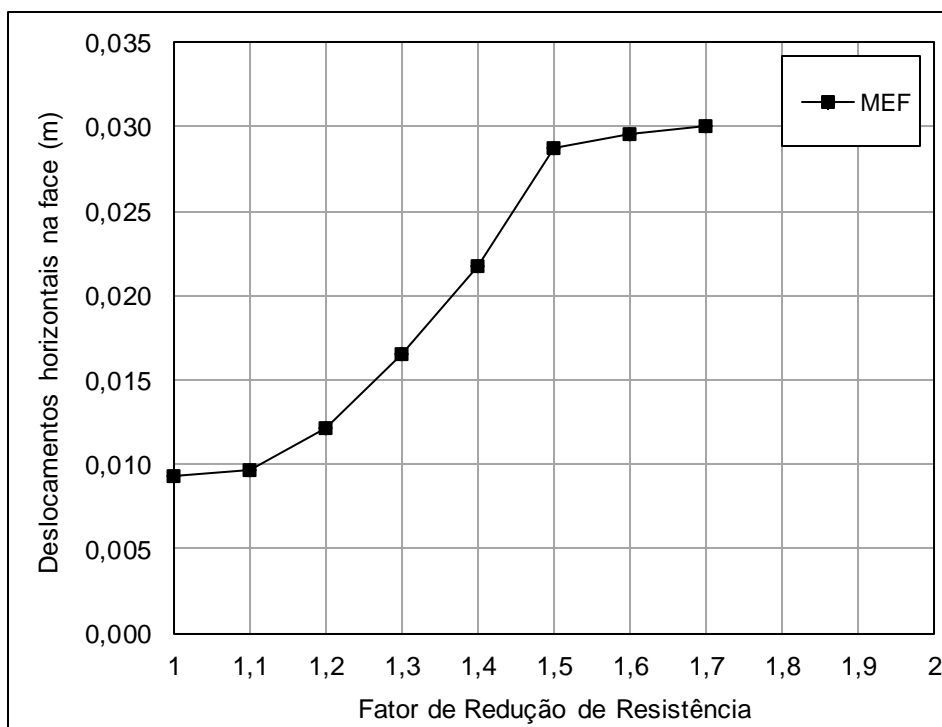


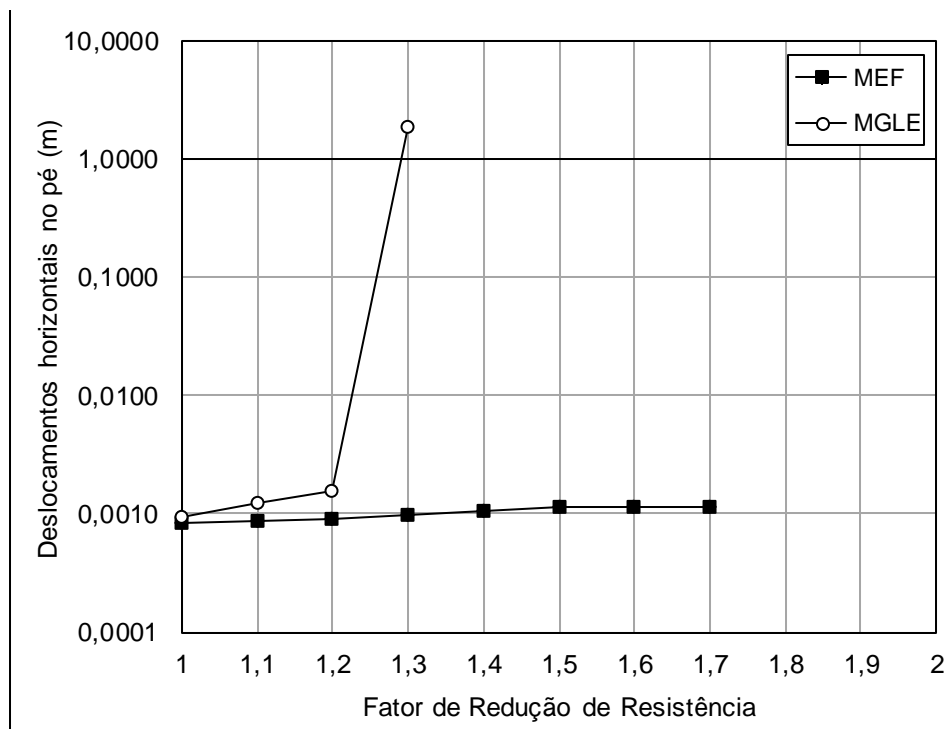
Figura 95: Detalhe do deslocamento horizontal na face utilizando o MEF.



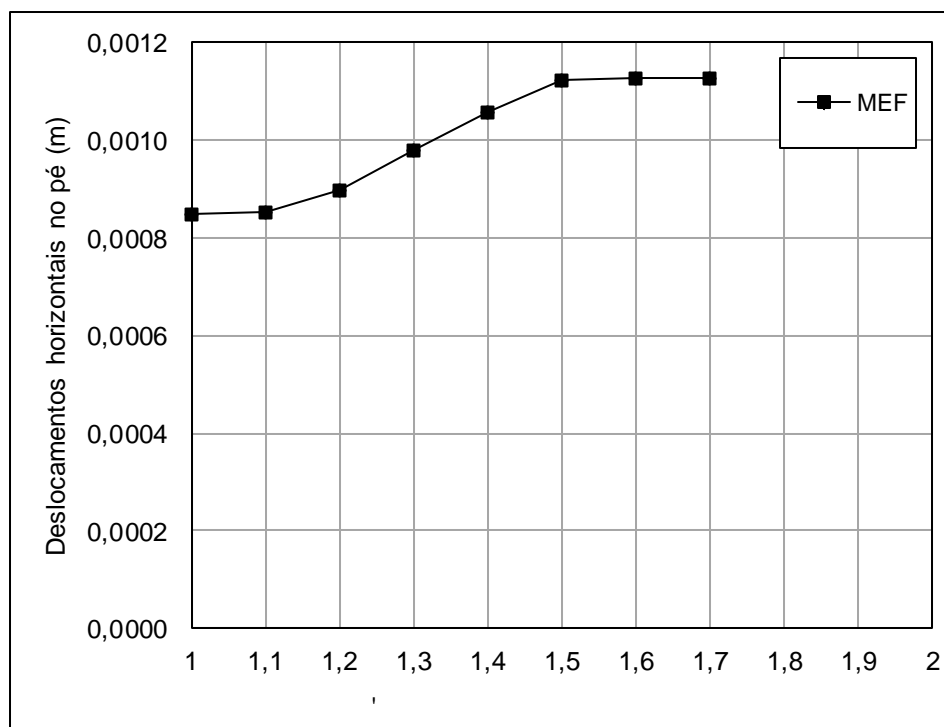
Em relação ao pé do talude, a ordem de grandeza dos deslocamentos horizontais foi bastante reduzida para os primeiros FRR. Entretanto, o comportamento que evidencia a instabilidade causada pela redução da resistência também foi

observado. Os resultados estão apresentados na Figura 96 e, em escala adaptada para o MEF, na Figura 97.

**Figura 96: Deslocamentos horizontais no pé do talude para determinação do FRR.**



**Figura 97: Detalhe do deslocamento horizontal no pé do talude utilizando o MEF.**

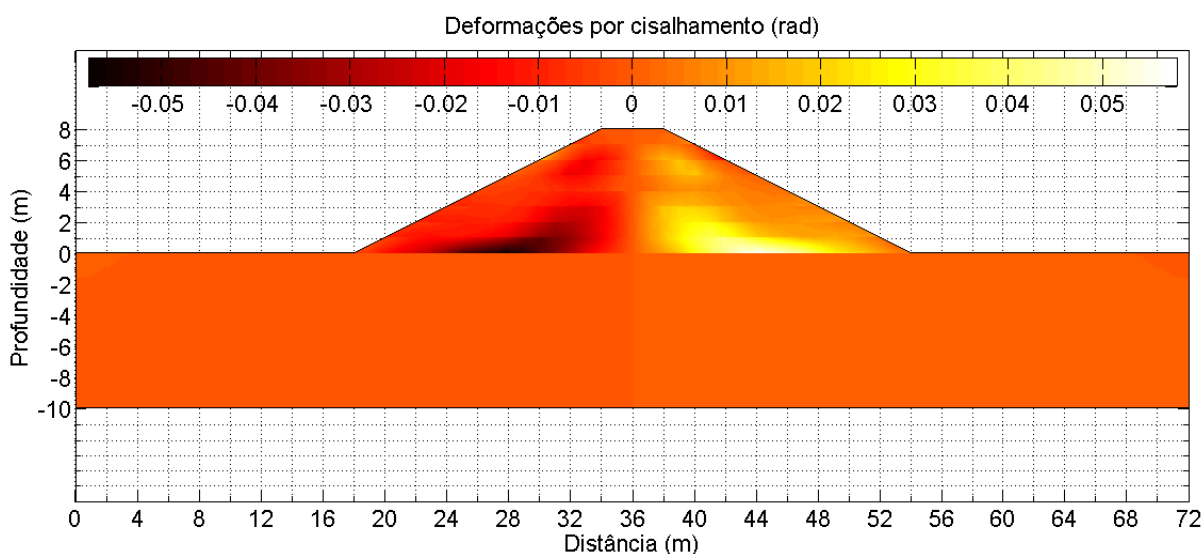


#### 4.5.2 Determinação da superfície de ruptura

Para determinar a superfície de ruptura no método de redução de resistência, verifica-se como se desenvolvem as deformações por cisalhamento (MATSUI; SAN, 1992; DUNCAN, 1996; MATTHEWS; FAROOK; HELM, 2014). Entretanto, a utilização de dois métodos baseados em redução da resistência dificulta a validação dos resultados. Por este motivo, a comparação da superfície de ruptura observada no MGLE foi realizada com um método de equilíbrio limite.

O resultado das deformações por cisalhamento quando o FRR no MGLE era igual a 1,2 está exibido na Figura 98. Observa-se que os maiores valores de deformação ocorreram na parte inferior do aterro e também próximo ao eixo de simetria definido por uma reta vertical na distância 36 m. O formato observado é aproximadamente circular, o que se aproxima do comportamento que ocorre na ruptura de taludes (DAS; SOBHAN, 2015).

**Figura 98: Deformações por cisalhamento no MGLE, com FRR 1,2.**

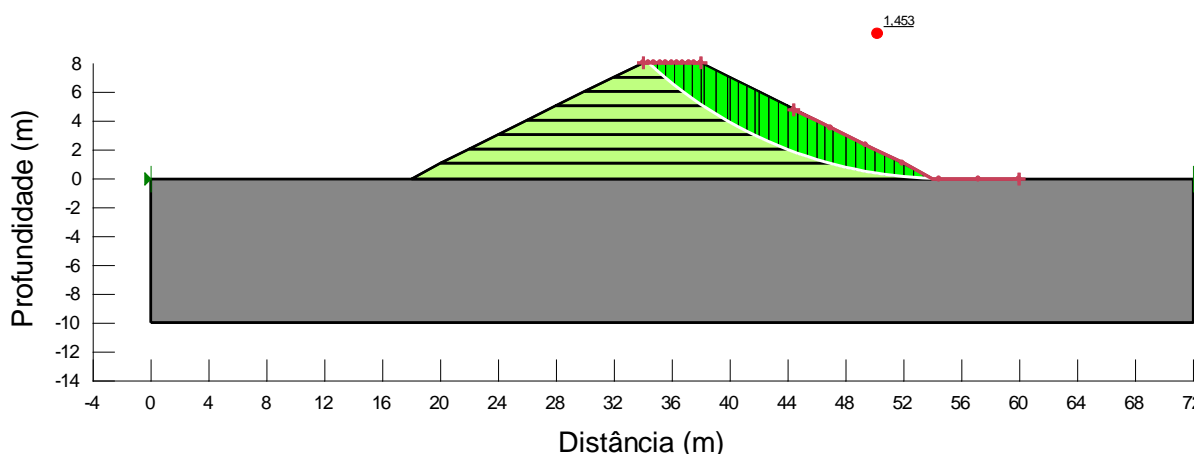


Para a aplicação do método de equilíbrio limite no modelo foi escolhido o método de Spencer<sup>29</sup>. As propriedades do solo foram as mesmas referentes a um FRR igual a 1, isto é, coesão igual a 7,5 kPa e ângulo de atrito interno igual a 20°. As propriedades da fundação foram mantidas as mesmas do MGLE, com coesão de 25 kPa e ângulo de atrito interno igual a 25°.

<sup>29</sup> Método de equilíbrio limite no qual são satisfeitas as equações de equilíbrio e também consideradas as forças atuantes entre as fatias de solo (GERSCOVICH, 2012).

Na Figura 99 está apresentada a geometria com a superfície crítica de ruptura no talude à direita do aterro e a indicação do fator de segurança, que consiste na razão entre a tensão de cisalhamento resistente do material e a tensão de cisalhamento mobilizada, conforme definido na Equação 29<sup>30</sup>. O formato da superfície de ruptura é circular, por hipótese do método.

**Figura 99: Solução utilizando um método de equilíbrio limite, com indicação da superfície crítica de ruptura, do fator de segurança e do centro do círculo de ruptura.**



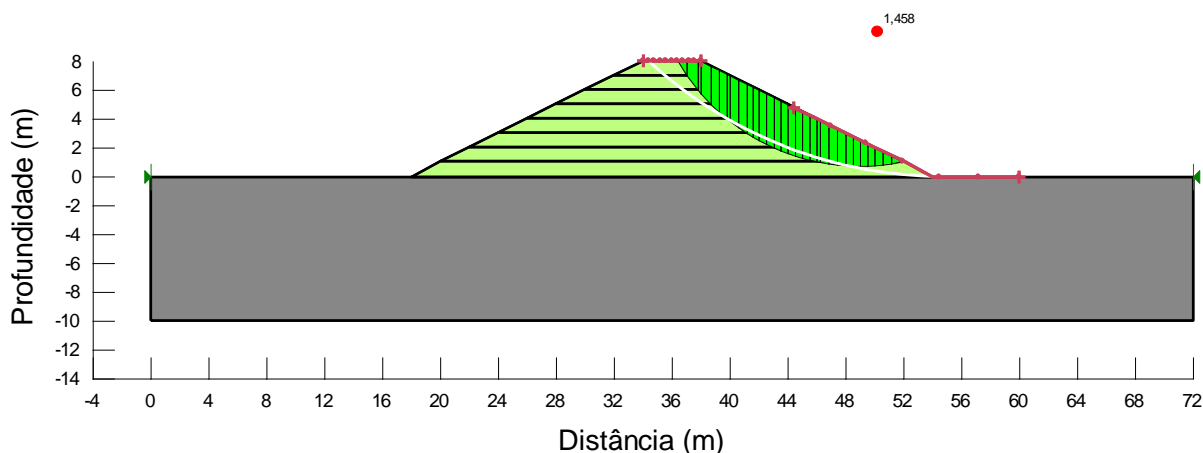
Verifica-se que o círculo crítico de ruptura se originou na crista do talude do lado oposto do aterro, desenvolvendo-se até o pé, na cota 0 m. O fator de segurança calculado foi 1,453, sendo, portanto, 12% superior ao FRR obtido no método de redução de resistência com aplicação do MGLE.

O formato indicado pelas maiores deformações por cisalhamento no MGLE (Figura 98) foi coincidente com a solução do método de equilíbrio limite (Figura 99) no pé do talude, mas diferiu em relação ao comportamento na crista. No entanto, a observação de outras superfícies de ruptura no método de equilíbrio limite permite constatar que o resultado obtido com o método de redução de resistência não está incorreta.

Uma superfície de ruptura que não fosse a crítica foi encontrada (Figura 100). A diferença entre os fatores de segurança foi pequena (0,3%), sendo que o seu formato se assemelhou ao que indicaram as deformações por cisalhamento na Figura 98.

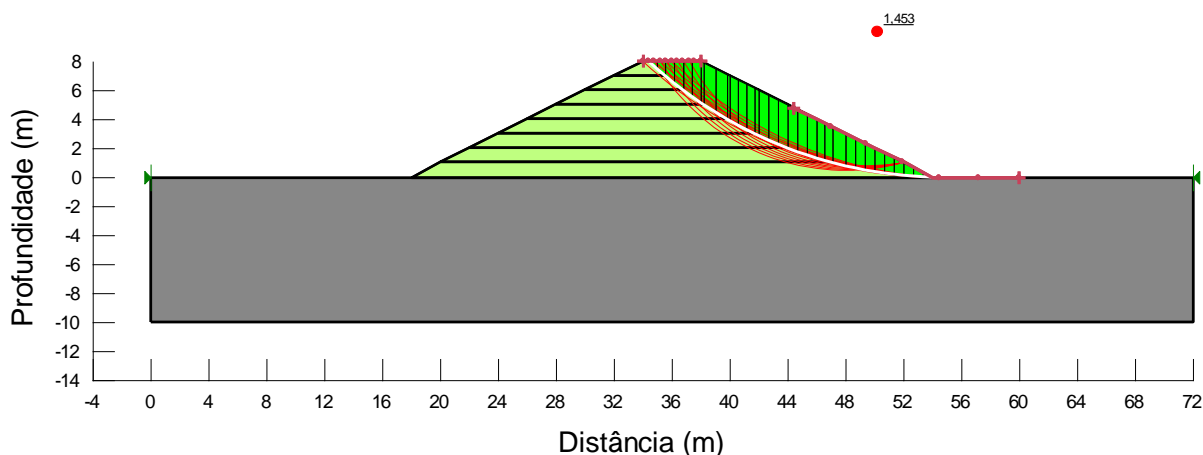
<sup>30</sup> Ver pág. 52.

**Figura 100: Solução utilizando um método de equilíbrio limite com fator de segurança 0,3% superior ao da superfície crítica de ruptura.**



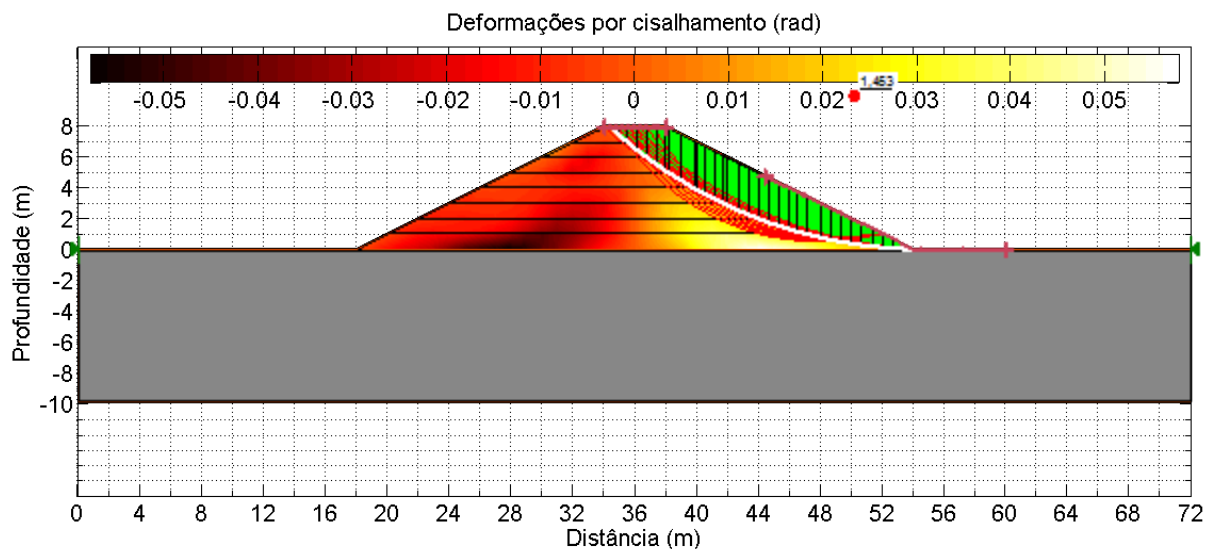
A validade da superfície de ruptura obtida utilizando o MGLE fica mais evidente quando se observam os contornos das quinze superfícies de ruptura mais críticas no método de equilíbrio limite. Com fatores de segurança variando entre 1,453 e 1,487, os resultados estão exibidos na Figura 101. Nota-se que apenas a superfície crítica se originou da crista do talude do lado oposto e se estendeu até o pé do talude analisado. As demais superfícies de ruptura se originaram na região central da crista e se estenderam aproximadamente até a cota 1 m.

**Figura 101: As quinze superfícies de rupturas com menores fatores de segurança obtidas pelo método de equilíbrio limite.**



Realizando a sobreposição das soluções utilizando os dois métodos, é possível observar a validade do resultado com o MGLE, conforme ilustrado na Figura 102.

**Figura 102: Sobreposição das soluções utilizando os dois métodos, mostrando a coincidência das superfícies de ruptura.**



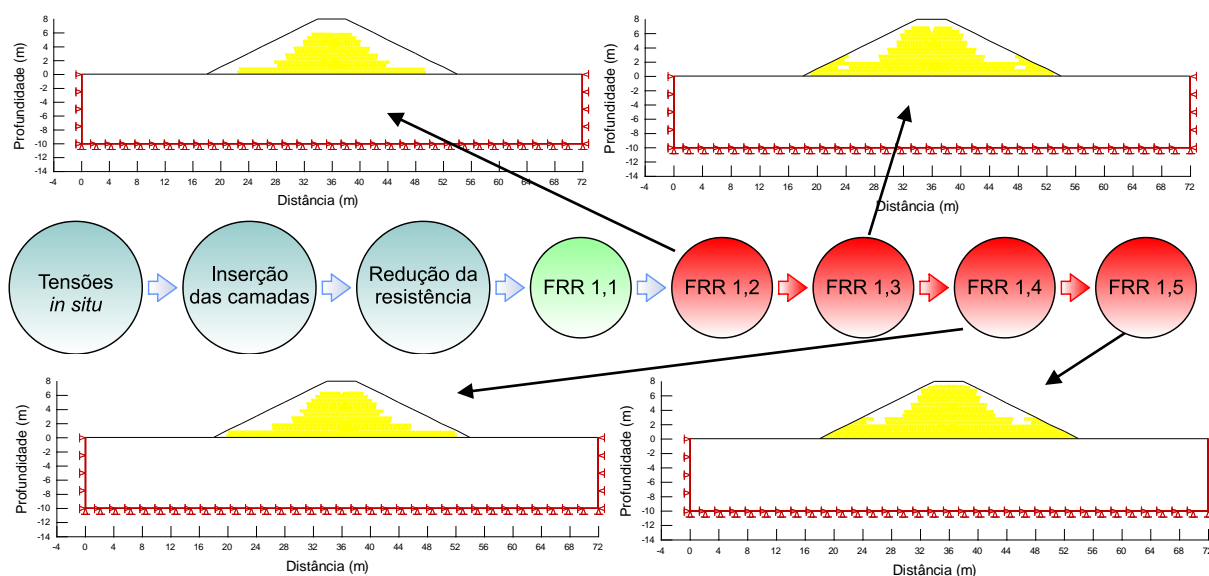
#### 4.5.3 Comportamento da estrutura durante a redução da resistência

As estruturas analisadas com o método de elementos finitos e com o método de Galerkin livre de elementos resultaram em fatores de redução de resistência próximos, com os valores 1,2 e 1,3, respectivamente, e abaixo do fator de segurança obtido por método de equilíbrio limite (1,45). Também verificou-se que a superfície de ruptura que se originou no MGLE foi similar à solução utilizando um método de equilíbrio limite.

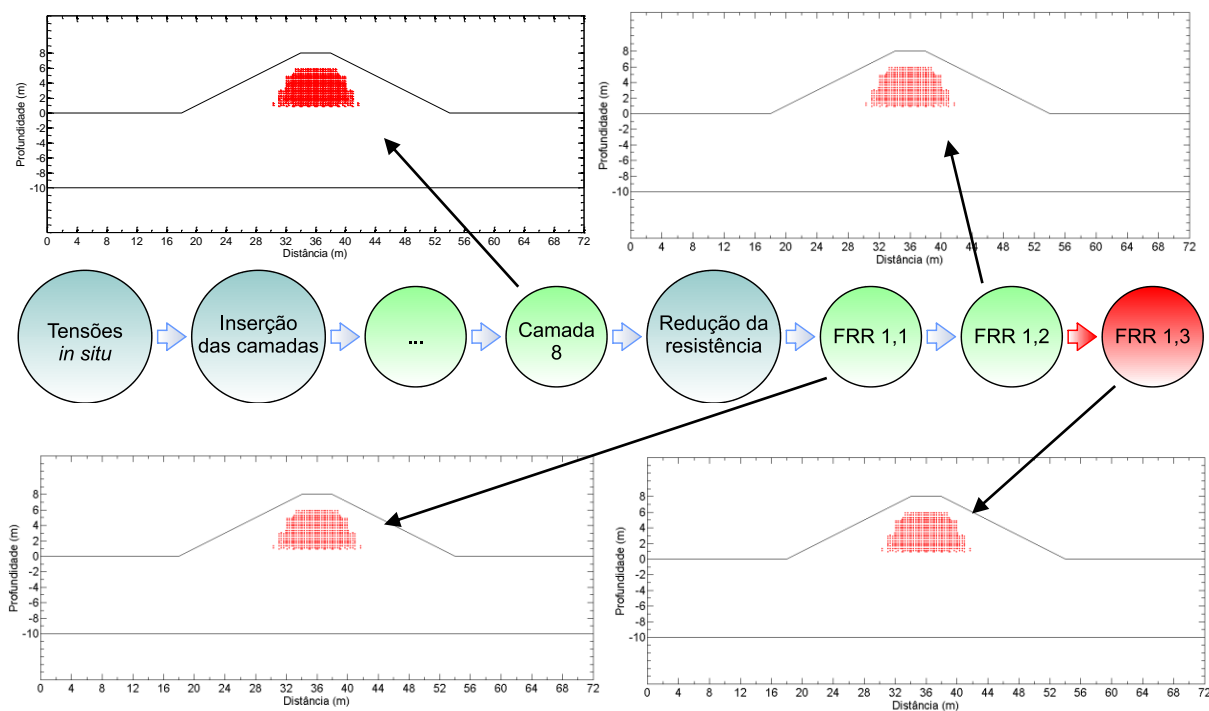
Apesar da semelhança destes resultados finais, foi observado ainda que o MEF e o MGLE apresentaram diferenças nos deslocamentos, tensões e deformações ao longo da análise. Além das distinções já apresentadas, podem ser destacados alguns outros aspectos.

Os dois métodos diferiram na maneira como se desenvolveu o processo de ruptura no aterro. Enquanto no MEF as regiões que foram solicitadas no regime plástico se desenvolveram gradualmente conforme se aumentava o fator de redução de resistência (Figura 103), no MGLE as regiões que sofreram ruptura surgiram ainda na inserção da oitava camada (Figura 104).

**Figura 103: Desenvolvimento das regiões solicitadas no regime plástico no MEF.**



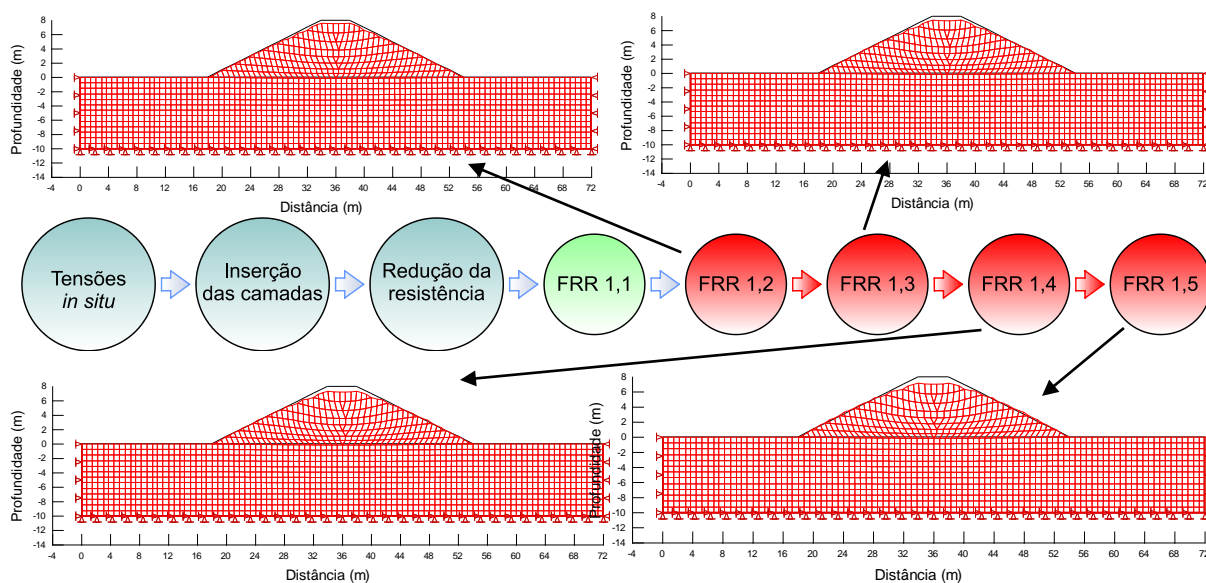
**Figura 104: Desenvolvimento das regiões solicitadas no regime plástico no MGLE.**



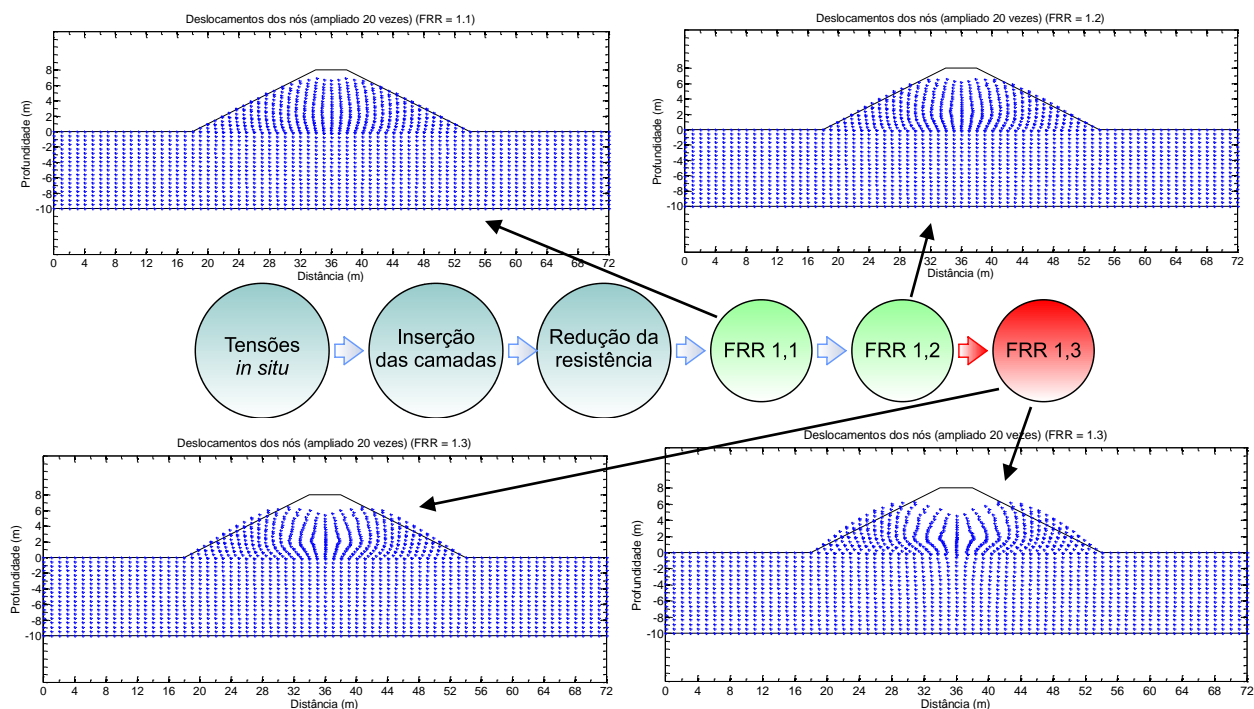
Acrescenta-se que até um FRR igual a 1,1, ainda não havia ocorrido solicitação no regime plástico no MEF. O formato da região que se apresentou neste regime se assemelhou à superfície de ruptura observada tanto no MGLE quanto no método de equilíbrio limite. Já no MGLE, as regiões que atingiram o critério de Mohr-Coulomb não mostraram de forma clara alguma semelhança com o formato da superfície de ruptura.

Em relação aos deslocamentos, é possível visualizar o formato que a estrutura assumiu conforme se reduzia os parâmetros de resistência. O resultado deste processo, para o MEF, está indicado na Figura 105, com uma ampliação de 20 vezes. Para o MGLE, o processo de deformação está exibido na Figura 106, com o mesmo fator de escala.

**Figura 105: Deslocamentos ocorridos no aterro analisado com o MEF durante a redução de resistência.**



**Figura 106: Deslocamentos ocorridos no aterro analisado com o MGLE durante a redução de resistência**





Conforme já havia sido mostrado na Figura 90<sup>31</sup>, os deslocamentos no MGLE foram mais acentuados. Além deste comportamento estar relacionado com o início precoce da ruptura em diversos pontos, verifica-se que o modelo constitutivo que caracterizava os materiais em cada método eram diferentes. No MGLE, por haver total controle sobre os seus parâmetros, atribuiu-se um comportamento linear elástico e perfeitamente plástico.

Quanto ao MEF, por se tratar de um *software* comercial, pouco se podia afirmar sobre o comportamento do material empregado. Sabe-se que, no regime elástico, a curva tensão-deformação é linear; para o critério de ruptura, foi definido no *software* o critério de Mohr-Coulomb. Mas quanto ao comportamento no regime plástico, esta opção não é clara.

#### 4.6 Modelos Adicionais

Ao comparar os fatores de redução de resistência obtidos com o MGLE aos fatores de segurança obtidos com o método de equilíbrio limite (MEqL), observaram-se resultados considerados satisfatórios. No Quadro 3 estão indicados os FRRs, FSs e os erros relativos aproximados ( $\epsilon_a$ ) de cada FRR em relação ao FS correspondente.

**Quadro 3: Fatores de redução de resistência, fatores de segurança e erros relativos aproximados obtidos com os modelos.**

Altura (m)	Inclinação (1:n)								
	1,7			2,0			2,3		
	FRR	FS	$\epsilon_a$	FRR	FS	$\epsilon_a$	FRR	FS	$\epsilon_a$
1	3,2	4,2	24%	3,0	4,6	35%	2,8	5,0	44%
2	2,8	2,6	8%	2,8	2,8	0%	2,6	3,1	16%
3	2,4	2,0	20%	2,4	2,2	9%	2,4	2,4	0%
4	2,0	1,7	18%	2,2	1,9	16%	2,2	2,4	8%
5	1,8	1,6	13%	1,6	1,7	6%	2,0	1,9	5%
6	1,6	1,4	14%	1,6	1,6	0%	1,6	1,7	6%
7	1,4	1,3	8%	1,6	1,5	7%	1,6	1,6	0%
8	1,2	1,3	8%	1,4	1,4	0%	1,4	1,6	13%
9	1,2	1,2	0%	1,2	1,3	8%	1,4	1,5	7%

Os gráficos dos resultados para cada inclinação e alturas testadas estão exibidos na Figura 107, Figura 108 e Figura 109.

<sup>31</sup> Ver pág. 123.

Figura 107: Comparação do FRR obtido com o MGLE ao FS obtido com o MEqL, para os aterros com altura de 1 a 9 m e inclinação 1:1,7.

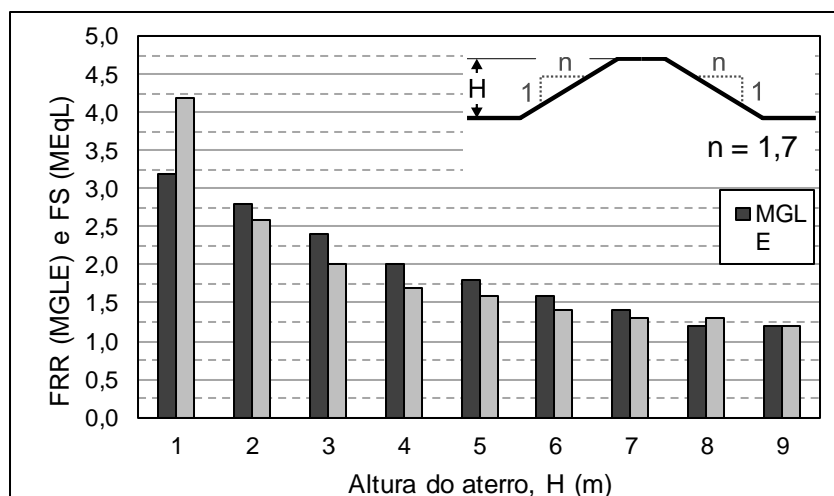


Figura 108: Comparação do FRR obtido com o MGLE ao FS obtido com o MEqL, para os aterros com altura de 1 a 9 m e inclinação 1:2.

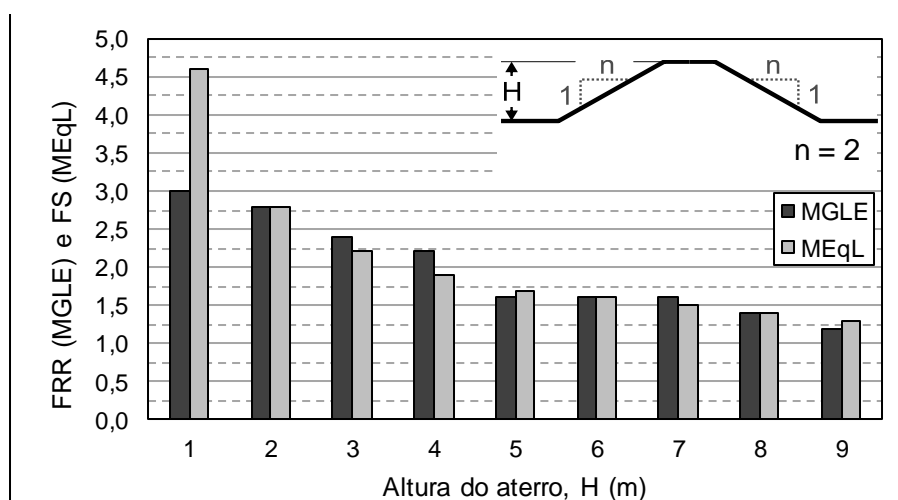
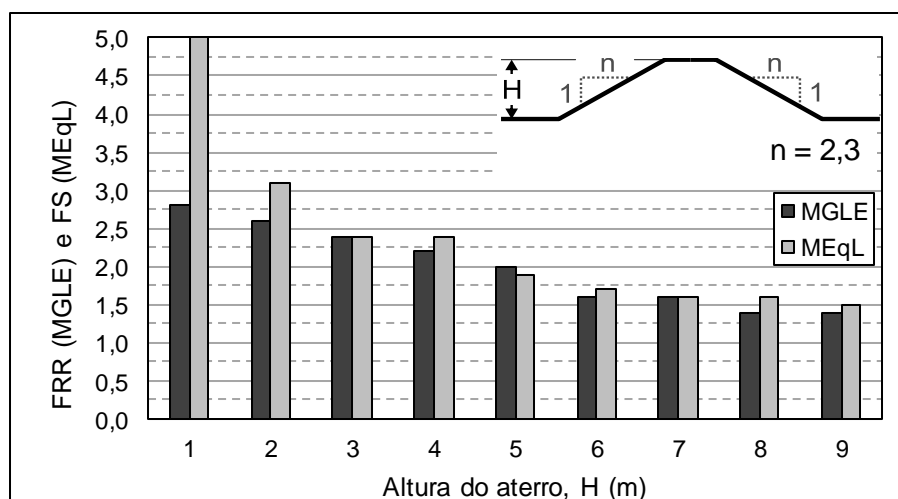


Figura 109: Comparação do FRR obtido com o MGLE ao FS obtido com o MEqL, para os aterros com altura de 1 a 9 m e inclinação 1:2,3.



Uma característica comum a todos os modelos testados cuja altura do aterro fosse 1 m foi o elevado erro relativo aproximado, sempre superior a 20%. Nestes casos, o fator de redução de resistência obtido com o MGLE foi mais conservador estando em torno de 3,0 para estes casos.

Observando todas as alturas de aterro testadas, o modelo com inclinação 1:1,7 foi aquele que apresentou os maiores desvios em relação ao valor de referência (FS). Apenas 4 dentre os 9 casos mostraram um erro relativo aproximado inferior a 10%. Comparando com os modelos cuja inclinação foi 1:2,0, a quantidade de casos cujo  $\epsilon_a$  foi inferior a 10% foi 7, dentre os 9. Para a inclinação 1:2,3, observou-se uma quantidade próxima com esta característica: 6 de 9 casos tiveram um erro relativo aproximado inferior a 10%.

Portanto, ao todo, dos 27 modelos adicionais, 63% apresentaram erro relativo aproximado menor que 10%. A quantidade de casos com erro relativo de até 10% poderia ser mais elevada caso, em vez de incrementos iguais a 0,2 no método de redução de resistência, fosse adotado um incremento de 0,1 no FRR.

Em relação às superfícies de ruptura, verificou-se que o MGLE apresentou de modo satisfatório a região na qual ocorreria o deslizamento. Selecionaram-se alguns casos para ilustração.

Para o modelo com 1 m e inclinação 1:2, as deformações por cisalhamento obtidas com o método sem malha estão exibidas na Figura 110, a superfície crítica de ruptura está mostrada Figura 111 e a superposição das duas ilustrações foi realizada na Figura 112.

**Figura 110: Deformações por cisalhamento usando o MGLE para determinação da superfície de ruptura no aterro com 1 m de altura e inclinação 1:2,0.**

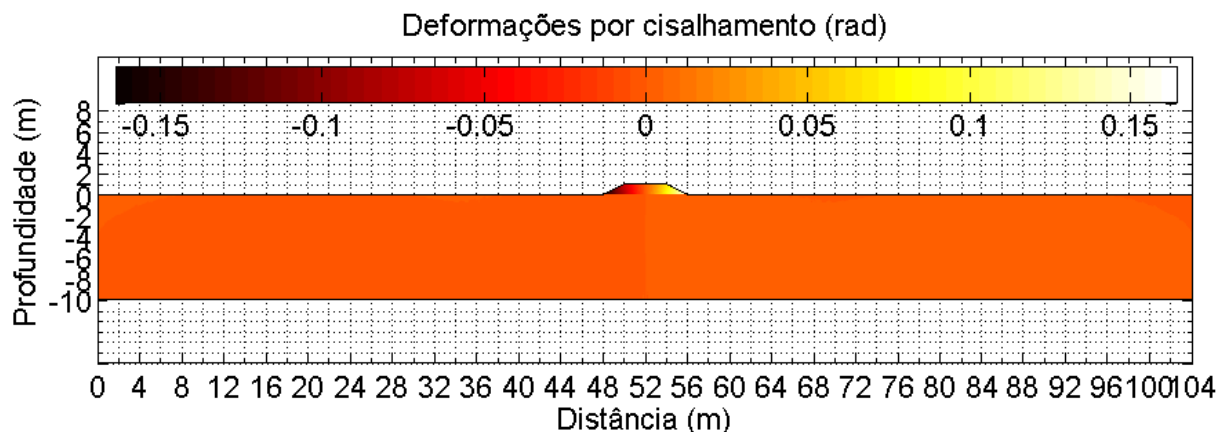


Figura 111: Superfície de ruptura crítica obtida com o método de equilíbrio limite no aterro com 1 m de altura e inclinação 1:2,0. O valor na figura representa o fator de segurança calculado, com a indicação do centro do círculo de ruptura.

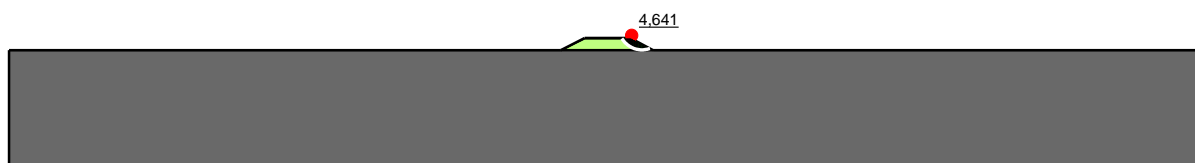
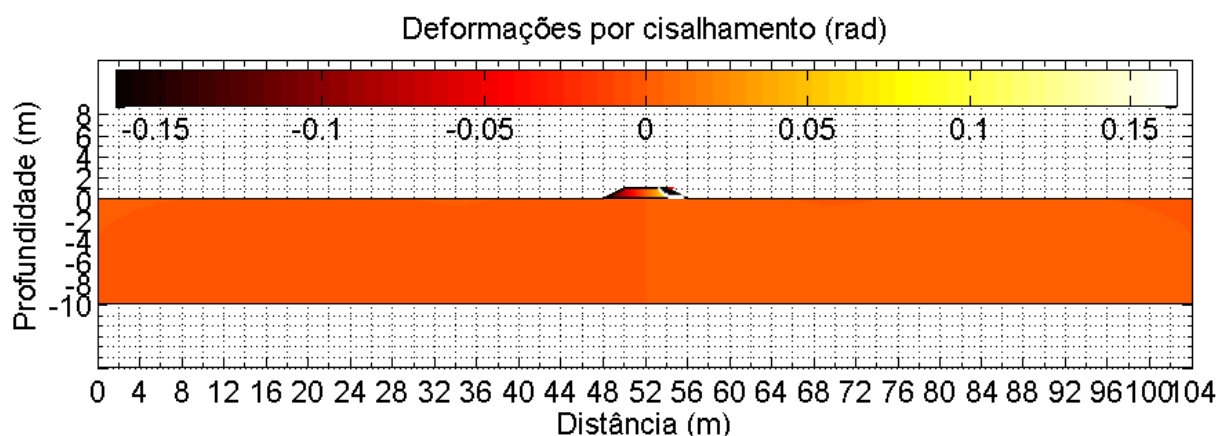


Figura 112: Superposição das deformações por cisalhamento e da superfície crítica de ruptura para o aterro de 1 m de altura com inclinação 1:2,0.



Verifica-se que as maiores deformações por cisalhamento ocorreram no pé do talude, com valores praticamente nulos no centro do aterro. Ao comparar com o formato circular da superfície de ruptura obtida no MEqL, nota-se que na vizinhança da região de maiores valores de deformação por cisalhamento foi o local por onde ficou posicionado o círculo crítico de ruptura (Figura 112).

Os resultados para o aterro com 6 m de altura e inclinação 1:1,7 estão exibidos da Figura 113 à Figura 115.

Figura 113: Deformações por cisalhamento usando o MGLE para determinação da superfície de ruptura no aterro com 6 m de altura e inclinação 1:1,7.

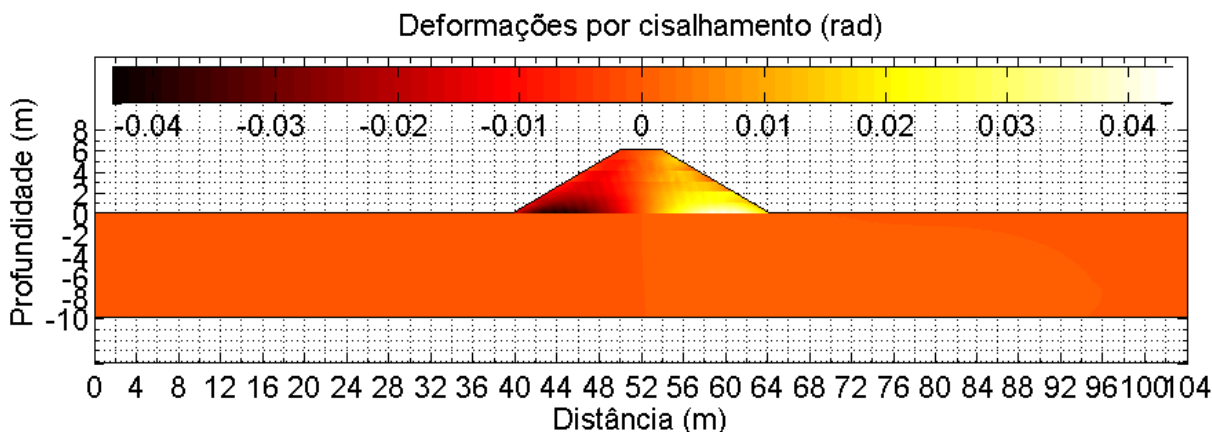


Figura 114: Superfície de ruptura crítica obtida com o método de equilíbrio limite no aterro com 6 m de altura e inclinação 1:1,7. O valor na figura representa o fator de segurança calculado, com a indicação do centro do círculo de ruptura.

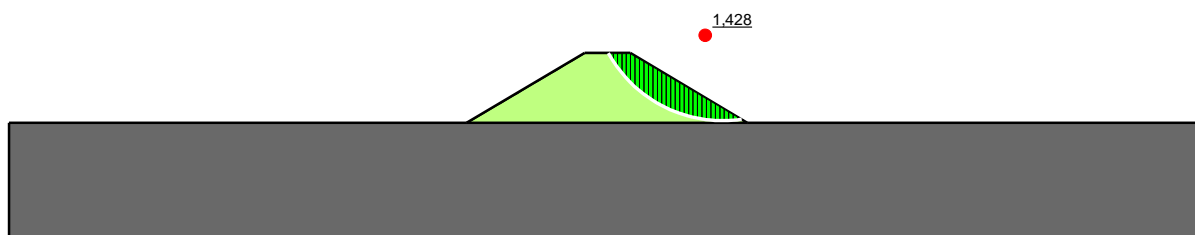
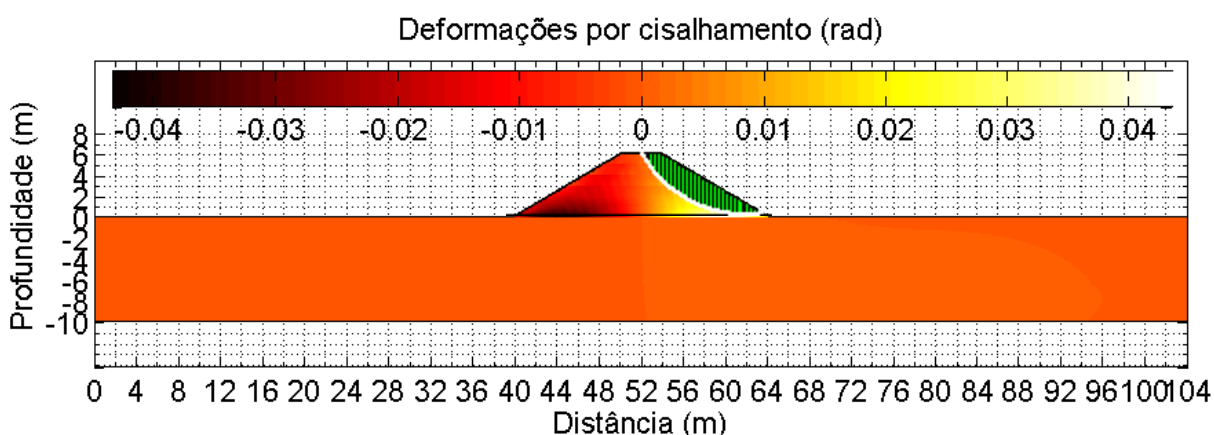


Figura 115: Superposição das deformações por cisalhamento e da superfície crítica de ruptura para o aterro de 6 m de altura com inclinação 1:1,7.



No caso do aterro com 6 m de altura e inclinação 1:1,7, também se observou que no centro as deformações por cisalhamento foram próximas de zero. O círculo crítico de ruptura foi obtido passando entre as posições nas quais as deformações foram nulas e diferentes de zero e também nas posições com maiores valores de deformações por cisalhamento.

Uma diferença em relação ao aterro com 1 m de altura foi que, na crista do modelo de 6 m, a superfície de ruptura foi observada no centro, que definia a linha de simetria a estrutura (Figura 115); no aterro de menor altura, o círculo de ruptura interceptou a crista entre o centro e a extremidade do topo (Figura 112).

Para o aterro com 8 m de altura e inclinação 1:1,7, a posição da superfície de ruptura foi aproximadamente igual, considerando-se as proporções, ao caso com 6 m de altura e inclinação 1:1,7, conforme se observa na Figura 116, Figura 117 e Figura 118.

Figura 116: Deformações por cisalhamento usando o MGLE para determinação da superfície de ruptura no aterro com 8 m de altura e inclinação 1:1,7.

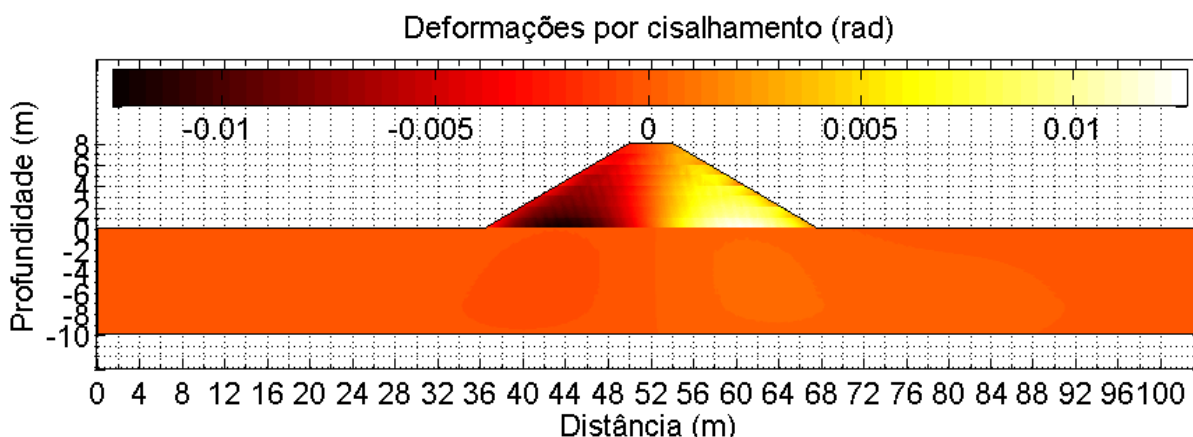


Figura 117: Superfície de ruptura crítica obtida com o método de equilíbrio limite no aterro com 8 m de altura e inclinação 1:1,7. O valor na figura representa o fator de segurança calculado, com a indicação do centro do círculo de ruptura.

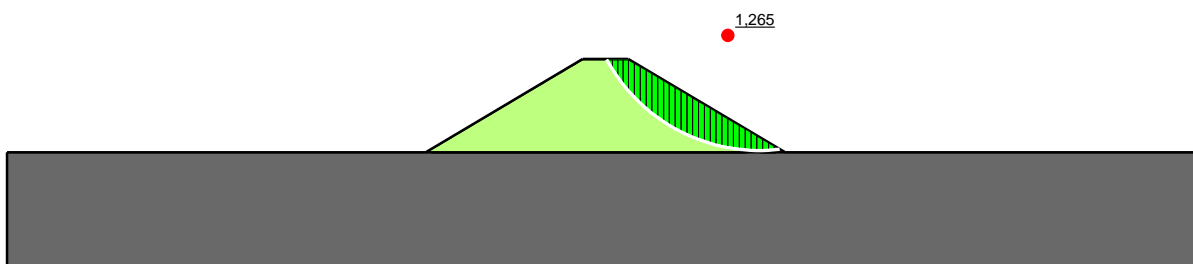
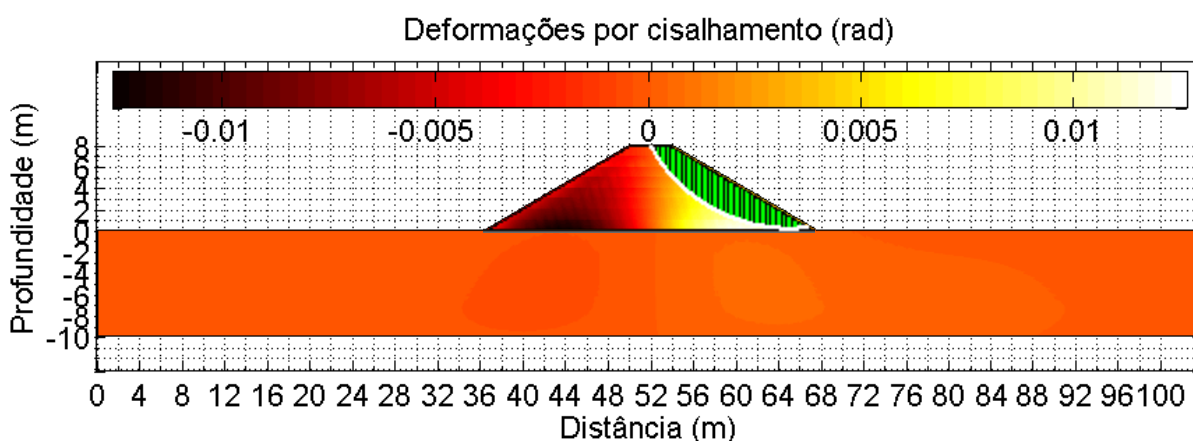


Figura 118: Superposição das deformações por cisalhamento e da superfície crítica de ruptura para o aterro de 8 m de altura com inclinação 1:1,7.



Para o caso com 8 m de altura que foi ilustrado, novamente observa-se o círculo crítico de ruptura passando pelo centro do aterro. Logo, nota-se a tendência de uma relação entre a largura da crista e a altura do aterro, haja vista que quando a altura do aterro era inferior à largura da crista (caso com altura igual a 1 m e crista igual a 4 m), a superfície de ruptura obtida com o MEqL interceptou o topo fora do centro; nos casos

em que a altura foi maior que a largura da crista (casos com alturas de 6 m e 8 m, com crista igual a 4 m), o círculo interceptou a linha de simetria do aterro no topo.

## 5 CONCLUSÕES

Mostrou-se no presente trabalho a aplicação do método de redução de resistência utilizando-se um método numérico sem malha (método de Galerkin livre de elementos, MGLE) para a análise da estabilidade de taludes de barragens. Estas estruturas ficam submetidas a distintas situações, desde a sua construção até a sua desativação. Basicamente, quatro etapas devem ser verificadas, a saber: o período de construção, de enchimento de reservatório, de operação em longo prazo e de esvaziamento rápido de reservatório.

Após a fundamentação teórica da mecânica dos solos e do método numérico, apresentaram-se um modelo simplificado de uma pequena barragem e outros 27 modelos adicionais, variando a altura total do aterro e as inclinações dos taludes. Os modelos analisados eram compostos por uma fundação de solo argiloso rígido e um aterro compactado de solo também argiloso. A análise em termos de tensões totais foi realizada buscando simular a etapa de construção da barragem, sendo os resultados comparados com aqueles obtidos por meio do método de elementos finitos (MEF), no *software* comercial GeoStudio.

### 5.1 Definição da Quantidade de Nós

Verificou-se que na aplicação do MGLE o número de nós que representam o modelo deve ser moderado. A determinação desta quantidade não foi possível utilizando apenas o próprio método sem malha. Como os resultados não apresentavam convergência, recorreu-se à solução de um problema cujo resultado fosse facilmente calculado. Utilizando a mesma solução como referência, também foi definido o tamanho do domínio de influência, concluindo-se, portanto, a representação do modelo.

### 5.2 Comportamento no *Software* Comercial e no MGLE

A realização da análise pelo método de redução de resistência consiste na obtenção de uma solução no regime elástico do material e, a partir daí, na redução gradual dos parâmetros de resistência, sempre verificando a ocorrência de ruptura. O regime plástico foi definido pelo critério de Mohr-Coulomb. O fator de redução de resistência (FRR) é determinado quando os deslocamentos aumentam de forma



demasiada. A superfície de ruptura, por sua vez, é obtida observando-se as deformações por cisalhamento.

A partir da aplicação do MGLE e comparação com o MEF, verificou-se que o comportamento elastoplástico no *software* comercial não é o elástico perfeitamente plástico. Logo, os erros relativos aproximados elevados que foram obtidos nas análises se devem ao comportamento elástico perfeitamente plástico adotado no modelo com o MGLE. Esta hipótese difere do comportamento presente no *software* no qual se criou o modelo para solução com o MEF, não sendo uma opção ajustável.

### 5.3 Dificuldade na Definição da Geometria

Constatou-se ainda que o método sem malha pode ser aplicado para a análise de estabilidade de taludes, mas ainda requer ênfase na representação geométrica do domínio. A não convergência quando observada apenas a quantidade de nós em relação ao comportamento do modelo mostra-se uma desvantagem para o método. Devido a esta característica, uma solução conhecida deve ser utilizada para que se obtenha uma representação adequada e confiável.

Apesar disto, a similaridade nos resultados finais, isto é, no FRR e na posição da superfície de ruptura, quando comparado ao MEF e ao método de equilíbrio limite, de uso bastante difundido, apontam para a sua aplicabilidade. Portanto, o MGLE ainda não pode ser recomendado para os estudos de estabilidade de taludes pelas dificuldades de convergência, mas sua aplicação fornece resultados aceitáveis.

### 5.4 Teste Mais Eficiente de Parâmetros

Por ter sido totalmente criado a partir de soluções divulgadas na literatura técnico-científica, o presente algoritmo possibilita maior controle nos parâmetros das análises e pode ser utilizado para estudos preliminares da construção de barragens, observando as dificuldades a serem superadas em relação à convergência na definição da representação do domínio. Uma vez desenvolvida a programação, a quantidade de parâmetros que podem ser testados é muito maior e mais rápida do que no *software* usado na comparação.

Uma limitação observada na utilização do *software* comercial escolhido é a relativa complexidade para definição da geometria e das propriedades dos materiais. Apesar de um processo de fácil entendimento, a quantidade de informações a ser

inserida durante a criação do modelo torna a tarefa de utilizá-lo bastante exigente em relação ao tempo. A concepção do algoritmo proposto neste trabalho possibilita a ênfase em aspectos que são fundamentais para barragens, como, por exemplo, as dimensões e as propriedades dos materiais a serem empregados. Este foco no teste de parâmetros resulta em redução de tempo na análise e na maior agilidade para a avaliação de diversas características da geometria ou de propriedades que afetem o comportamento mecânico.

### 5.5 Obtenção do FRR e da Superfície de Ruptura

Por fim, a utilização do MGLE trouxe respostas satisfatórias quanto às condições de ruptura (FRR e posição da superfície de ruptura), mas ainda há deficiências quanto ao estado limite de serviço. A quantificação por meio do fator de redução de resistência e a determinação da superfície de ruptura possibilitam a adoção de medidas que aumentem a segurança durante a concepção da estrutura, mas a obtenção numérica dos deslocamentos para associação a técnicas de instrumentação e monitoramento ainda requer um modelo constitutivo e representações mais realistas.

### 5.6 Sugestões para Trabalhos Futuros

No desenvolvimento deste estudo foram notadas tanto dificuldades quanto aspectos que estavam além dos objetivos estabelecidos. Tais situações motivaram o registro de tópicos que se mostraram relevantes em relação ao presente trabalho. Assim, as sugestões para futuras abordagens ao tema podem ser listadas de modo simplificado como:

- a influência de diferentes modelos constitutivos de solo nas análises feitas com o MGLE;
- o estudo de sensibilidade das variáveis;
- métodos para a determinação da quantidade de nós nos modelos utilizando o MGLE;
- análise de modelos de geometria mais complexa em relação àquela apresentada; e
- modelagem nas demais etapas da vida útil de uma barragem, além da de construção.

## REFERÊNCIAS

BRASIL. Lei nº 12.334, de 20 de setembro de 2010. Estabelece a Política Nacional de Segurança de Barragens. *Diário Oficial da República Federativa do Brasil*, Brasília, DF, 20 set. 2010. Disponível em: <[http://www.planalto.gov.br/ccivil\\_03/\\_Ato2007-2010/2010/Lei/L12334.htm](http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_Ato2007-2010/2010/Lei/L12334.htm)>. Acesso em: 26 nov. 2016.

CASTRO, G. F. *A regulamentação e fiscalização sobre segurança de barragens no Brasil e no mundo*. In: Simpósio sobre segurança de barragens e riscos associados, [20--], Porto Alegre. Palestra.

CENTER FOR ACES. *MFree2D for Windows98 and NT*. [S.l.: s.n.], 2002. Disponível em: <<http://www.ase.uc.edu/~liugr/MFree2D.html>>. Software.

CHAPRA, S.; CANALE, R. *Métodos numéricos para engenharia*. 5.ed. Porto Alegre: AMGH, 2011. Tradução de: CASTRO, H.

CHEN, J. F. et al. Stability analyses of a reinforced soil wall on soft soils using strength reduction method. *Engineering Geology*, v. 177, p. 83-92, 2014.

CHEN, X. et al. A two-grid search scheme for large-scale 3-D finite element analyses of slope stability. *Computers and Geotechnics*, v. 62, p. 203-215, 2014.

CHO, S. E. Stability analysis of unsaturated soil slopes considering water-air flow caused by rainfall infiltration. *Engineering Geology*, v. 211, p. 184-197, 2016.

DAS, B.; SOBHAN, K. *Fundamentos de engenharia geotécnica*. São Paulo: Cengage Learning, 2015.

DOLBOW, J.; BELYTSCHKO, T. An introduction to programming the meshless element free Galerkin method. *Archives of Computational Methods in Engineering*, v. 5, n. 3, p. 207-241, 1998.

DUNCAN, J. State of the art: limit equilibrium and finite-element analysis of slopes. *Journal of Geotechnical Engineering*, v. 122, n. 7, p. 577-596, 1996.

FARIAS, M. M.; CORDÃO NETO, M. P. Advanced numerical simulation of collapsible earth dams. *Can. Geotech. J.*, v. 47, 1351-1364, 2010.

FISH, J.; BELYTSCHKO, T. *A first course in finite elements*. Chichester: John Wiley & Sons, 2007.

GEO-SLOPE International Ltd. *Strength Reduction Stability*. Calgary, 2008.

GERSCOVICH, D. *Estabilidade de taludes*. São Paulo: Oficina de Textos, 2012.

JI, J.; CHAN, C. L. Long embankment failure accounting for longitudinal spatial variation - A probabilistic study. *Computers and Geotechnics*, v. 61, p. 50-56, 2014.

JOPPERT JUNIOR, I. *Fundações e contenções em edifícios: qualidade total na gestão do projeto e execução*. São Paulo: PINI, 2007.

KHALILZAD, M.; GABR, M.; HYNES, M. Deformation-based limit state analysis of embankment dams including geometry and water level effects. *International Journal of Geomechanics*, v. 15, n. 5, 2014.

LIU, G. *Mesh free methods: moving beyond the finite element method*. Boca Raton: CRC Press, 2003.

LIU, S. Y.; SHAO, L. T.; LI, H. J. Slope stability analysis using the limit equilibrium method and two finite element methods. *Computers and Geotechnics*, v. 63, p. 291-298, 2015.

LIU, Y.; WANG, C.; YANG, Q. Stability analysis of soil slope based on deformation reinforcement theory. *Finite elements in analysis and design*, v. 58, p. 10-19, 2012.

LUO, N.; BATHURST, R. J.; JAVANKHOSHDEL, S. Probabilistic stability analysis of simple reinforced slopes by finite element method. *Computers and Geotechnics*, v. 77, p. 45-55, 2016.

LUO, X. et al. Slope safety factor search strategy for multiple sample points for reliability analysis. *Engineering Geology*, v. 129-130, 27-37, 2012.

MATSUI, T.; SAN, K. C. (1992). Finite element slope stability analysis by shear strength reduction technique. *Japanese Society of Soil Mechanics and Foundation Engineering*, v. 32, n. 1, p. 59-70, 1992.

MATTHEWS, C.; FAROOK, Z.; HELM, P. Slope stability analysis - limit equilibrium or the finite element method? *Ground Engineering*, pp. 22-28, May 2014.

PEREIRA, G. M. *Projeto de usinas hidrelétricas: passo a passo*. São Paulo: Oficina de Textos, 2005.

PINTO, C. *Curso básico de mecânica dos solos em 16 aulas*. 3.ed. São Paulo: Oficina de Textos, 2006.

POTTS, D. M.; ZDRAVKOVIC, L. *Finite element analysis in geotechnical engineering: Theory*. Londres: Thomas Telford Publishing, 1999.

SHERIF, F. N. *MATLAB FEM code: from elasticity to plasticity*. 2012. 113 f. Master's thesis, Department of Civil and Transport Engineering, Faculty of Engineering Science and Technology, Norwegian University of Science and Technology, Trondheim, 2012.

SILVEIRA, J. *Modernização e reinstrumentação de barragens*. In: Simpósio sobre segurança de barragens e riscos associados, 2015, Porto Alegre. Palestra.

SUN, C. et al. (2016). 3D stability charts for convex and concave slopes in plan view with homogeneous soil based on the strength-reduction method. *Int. J. Geomech.*, 2016.

TABARROKI, M. et al. Determining the factors of safety of spatially variable slopes modeled by random fields. *J. Geotech. Geoenviron. Eng.*, v. 139, n. 12, p. 2082-2095, 2013.

TANG, H. et al. Proof of nondeterministic polynomial-time complete problem for soil slope-stability evaluation. *Int. J. Geomech.*, v. 16, n. 5, 2016.

TEIXEIRA, M. Uma contribuição para a modelagem numérica da heterogeneidade do concreto com o método de Galerkin livre de elementos. 2012. 115 f. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas), Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2012.

TSCHUCHNIGG, F.; SCHWEIGER, H. F.; SLOAN, S. W. Slope stability analysis by means of finite element limit analysis and finite element strength reduction techniques. Part I: numerical studies considering non-associated plasticity. *Computers and Geotechnics*, v. 70, p. 169-177, 2015.

TSCHUCHNIGG, F.; SCHWEIGER, H. F.; SLOAN, S. W. Slope stability analysis by means of finite element limit analysis and finite element strength reduction techniques. Part II: Back analyses of a case history. *Computers and Geotechnics*, v. 70, p. 178-189, 2015.

TU, Y. et al. New criteria for defining slope failure using the strength reduction method. *Engineering Geology*, v. 212, p. 63-71, 2016.

VODOPIVEC, A. *wxMaxima 16.04.2*. [20--]. Software

WASHIZU, K. *Variational methods in elasticity and plasticity*. 2.ed. Oxford: Pergamon Press Ltd., 1975.

ZHANG, L.; XU, Y.; JIA, J. (2007). Analysis of earth dam failures - a database approach. In: *International Symposium on Geotechnical Safety & Risk*, 1., 2007, Shanghai. *Proceedings...* Shanghai, [s.n.], 2007. p. 293-302.

ZHENG, H.; LIU, D. F.; LI, C. G. Slope stability analysis based on elasto-plastic finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 64, p. 1871-1888, 2005.

ZHENG, W. et al. Unified continuum/discontinuum modeling framework for slope stability assessment. *Engineering Geology*, v. 179, p. 90-101, 2014.

ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L. *The finite element method: solid mechanics*. 5.ed. Oxford: Butterworth Heinemann, 2000. v. 2.

ZIENKIEWICZ, O.; TAYLOR, R. *The finite element method: the basis*. 5.ed. Oxford: Butterworth Heinemann, 2000. v. 1.