UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
NÚCLEO DE INOVAÇÃO E TECNOLOGIAS APLICADAS A ENSINO E EXTENSÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO CRIATIVIDADE E INOVAÇÃO
EM METODOLOGIAS DE ENSINO SUPERIOR
MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO

Edilson dos Passos Neri Júnior

Atos e Lugares de Aprendizagem Criativa em Matemática

Belém – Pará
2019

Edilson dos Passos Neri Júnior

Atos e Lugares de Aprendizagem Criativa em Matemática

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação Criatividade e Inovação em Metodologias de Ensino Superior da Universidade Federal do Pará, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Ensino. Área de Concentração: Metodologias de Ensino-Aprendizagem. Linha de Pesquisa: Inovações Metodológicas no Ensino Superior (INOVAMES)

Prof[a]. Dr[a]. Cristina Lúcia Dias Vaz

Belém – Pará
2019

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará
Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

D722a dos Passos Neri Júnior, Edilson
Atos e Lugares de Aprendizagem Criativa em Matemática / Edilson dos Passos Neri Júnior. — 2019.
201 f. : il. color.

Orientador(a): Profª. Dra. Cristina Lúcia Dias Vaz
Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação Criatividade e Inovação em Metodologias de Ensino Superior, Núcleo de Inovação e Tecnologias Aplicadas a Ensino e Extensão, Universidade Federal do Pará, Belém, 2019.

1. Aprendizagem Criativa em Matemática. 2. Interdisciplinaridade. 3. Metodologia STEAM. 4. Matemática Recreativa. 5. Cultura Maker. I. Título.

CDD 371.102

Edilson dos Passos Neri Júnior

Atos e Lugares de Aprendizagem Criativa em Matemática

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação Criatividade e Inovação em Metodologias de Ensino Superior da Universidade Federal do Pará, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Ensino. Área de Concentração: Metodologias de Ensino-Aprendizagem. Linha de Pesquisa: Inovações Metodológicas no Ensino Superior (INOVAMES)

Trabalho: (   ) Aprovado   (   ) Reprovado.

Belém – Pará, ____/____/____

Profª. Drª. Cristina Lúcia Dias Vaz
Orientadora

Prof. Dr. Iran Abreu Mendes
Examinador Externo

Profª. Drª Joelma Morbach
Examinadora Externa

Prof. Dr. Marcos Monteiro Diniz
Examinador Interno

Belém – Pará
2019

Dedico este trabalho a

meus pais, Edilson Neri e Ivone Neri (*in memorian*).
minhas irmãs, Lívia Neri e Luciana Neri.
minha namorada, Jessica Barros.
minha afilhada, Giovana Valentina.
minha amiga, Cristina Vaz.
minhas amigas Cora Coralina, Jéssica Arnour e Amanda Coelho.

Agradecimentos

Tem os que passam

Tem os que passam
e tudo se passa
com passos já passados

tem os que partem
da pedra ao vidro
deixam tudo partido

e tem, ainda bem,
os que deixam
a vaga impressão
de ter ficado

(Alice Ruiz)

Em primeiro lugar, agradeço a Deus por seu infinito amor.

Agradeço aos meus pais, Edilson Neri e Ivone Neri (*in memorian*), que são a base de toda a minha formação pessoal e profissional, pois sem eles, certamente não teria alcançado nada do que conquistei até hoje. Também, agradeço as minhas irmãs, Luciana Neri e Lívia Neri, por todo seu amor e carinho e por seu apoio em todos os momento.

Agradeço também a minha namorada Jessica Barros por estar sempre ao meu lado, me incentivando, apoiando e por me compreender nos momentos de ausência. Amo você! Agradeço também sua família pela amizade, companheirismo e apoio.

Agradeço aos grandes amigos Walter Silva, Mário Benjamin, Luiza Pires, Cora Coralina, Jéssica Arnour, Amanda Coelho pela amizade e parceria.

Agradeço a minha amiga e *irmã de placenta trocada*, Julia Rigamont, por ter embarcado nesta jornada comigo. Neste período dividimos alegrias, tristezas, preocupações, projetos e sonhos. Vivemos também, momentos de superação e conquista! Nossa amizade cresceu e se fortaleceu. Por tudo isso e por me permitir desfrutar da sua amizade, é que faço esse agradecimento especial. Obrigado!

Agradeço aos professores do Programa e a minha turma de mestrado, em especial aos amigos do *Sem Arrastar, Criativos!*.

Agradeço aos monitores do Projeto Newton, que gentilmente aceitaram participar desta pesquisa.

Agradeço ao amigo Denilson Silva, que gentilmente providenciou cópia do exemplar de um livro importante para este trabalho e que estava disponível somente na USP.

Agradeço a minha amiga, professora e orientadora, Cristina Vaz, que com sua sabedoria e cumplicidade, me conduziu nesta caminhada. Foram dois anos maravilhosos, compartilhando alegrias, expectativas e muitos sonhos. Obrigado por sua paciência, disposição e por acreditar em mim.

Agradeço aos Artemáticos Luciano Begot, Marcélia Assim, Helena Rocha e Mayara Vieira por dividirem esse caminhada comigo e por fazerem parte desse momento importante. Cada momento que estivemos juntos foi um aprendizado.

Agradeço aos colegas de laboratório Antônio Hidaka e Giordana de Gregoriis pelo grande apoio e pelas valiosíssimas contribuições para o sucesso deste trabalho.

Agradeço imensamente aos professores Iran Abreu e Marcos Diniz por suas grandes contribuições desde o Exame de Qualificação e a profesora Joelma Morbach por suas contribuições na defesa deste trabalho. Obrigado, professores!

A maior riqueza do homem
é a sua incompletude.
Nesse ponto sou abastado.
Palavras que me aceitam como sou - eu não aceito.

Não agüento ser apenas um sujeito que abre portas,
que puxa válvulas, que olha o relógio,
que compra pão às 6 horas da tarde,
que vai lá fora, que aponta lápis,
que vê a uva etc. etc.

Perdoai
Mas eu preciso ser Outros.
Eu penso renovar o homem usando borboletas.

Manoel de Barros

Resumo

Atos e Lugares de aprendizagem criativa em matemática superior é a cartografia das experiências e vivências interdisciplinares em lugares de aprendizagem que potencializam o aprender criativo a autônomo. Atos norteados pelos princípios da Cultura Maker ("aprender fazendo") e da metodologia STEAM (acrônimo formado pelas iniciais dos nomes, em inglês, das disciplinas ciências, tecnologia, engenharia, arte e matemática). Lugares (reais ou imaginários) que são centros de significados construídos pela experiência, experiência como a possibilidade de que algo nos afete e nos toque, para transformar o que somos e o mundo ao nosso redor. O objetivo principal da pesquisa é investigar como ações interdisciplinares podem promover uma aprendizagem criativa em matemática. Como pontos de partida desta investigação elegemos os *Lugares de Partida* para apresentar os marcos iniciais e teóricos que balizaram a pesquisa. Marcos iniciais que conduziram ao encontro do tema da dissertação e os marcos teóricos que fundamentaram e indicaram os percursos da pesquisa. Como marcos teóricos adotamos método da cartografia como método de pesquisa ancorado na proposta de cartografia dos filósofos Gilles Deleuze e Félix Guattari; o conceito de aprendizagem criativa inspirado nas ideias do educador Paulo Freire e do psicanalista Donald Winnicott e o conceito de interdisciplinaridade proposto por Ivani Fazenda. Deste modo, a pesquisa foi realizada por um pesquisador-cartográfo que é um sujeito da experiência interdisciplinar e que deseja acompanhar processos, realizar ações criativas e produzir recursos educacionais inovadores visando estimular e promover uma aprendizagem criativa em matemática superior. Os lugares escolhidos para realização das ações foram a *Garagem*, o *Atelier* e a *Casa Gardner* . A proposta da *Garagem* é experimentar uma "matemática mão na massa" através da prototipagem de objetivos de aprendizagem na impressora 3D. O *Atelier* é o espaço da interdisciplinaridade entre matemática, tecnologia e arte que visa estimular a sensibilidade através de (re)leituras de obras da arte e produções criativas. Na *Casa Gardner* as ações são permeadas também pelo lúdico, o simples prazer de resolver um problema ou desvendar um enigma. Finalizamos com o *Lugar do Confluxo*, lugar para onde convergiram os resultados da pesquisa; ponto de encontro das experiências vivenciadas e ponto de abertura para novas possibilidades de pesquisa.

Palavras-chave: aprendizagem criativa em matemática, interdisciplinaridade, metodologia STEAM, matemática recreativa, cultura maker.

Abstract

Acts and Places of creative learning in mathematics is the cartography of experiences and interdisciplinary experiences in places of learning that pontentialize creative learning to autonomous. Acts guided by principles of Maker Culture ("learning by doing") and the STEAM methodology (acronym formed by the initials of the disciplines Science, Technology, Engineering, Art e Math). Places (real or imaginary) that are centers of meaning built by experience, experience as a possibility of something in the affection and touches, to transform who we are and the world around us. The main research goal is to investigate how interdisciplinary actions can help creative learning in math. As starting points of the research elected the *Departure Places* to present the initial and theoretical milestones that characterized a research. Initial milestones that take to the theme of the dissertation and the theoretical milestones that justify and indicate the results of the research. As theoretical milestones, we adopt the method of cartography such as method of research based in the proposal of cartography of the philosophers Gilles Deleuze and Felix Guattari; The concept of creative learning inspired by the ideas of the educator Paulo Freire and the psychoanalyst Donald Winnicott and the concept of interdisciplinarity proposed by Ivani Fazenda. Thus, the research was fullfilled by a researcher-cartographer who is a subject of interdisciplinary experience and who wishes to follow processes, accomplish creative actions and conditions innovative educational resources with the objective to estimulate e promotion a creative intelligence in higher mathematics. The places chosen for the actions were the *Garage*, the *Atelier* and the *Gardner House*. The *Garage* proposal is try a "mathematical hands dirty" by prototyping learning objectives in the 3D printer. The *Atelier* is the space of interdisciplinarity between math, technology and art that objective stimulate sensibility by rereading art and creative productions. At *Gardner House*, actions are also permeated by the playful, simple pleasure of solving a problem or unraveling a riddle. Finalizing with the Place of the Conflux, place to where to the results of the research converge; a meeting point of the lived experiences and point of opening for new possibilities of research.

Keywords: creative learning in math, interdisciplinarity, STEAM methodology, recreational math, Maker Culture.


LUGARES DE PARTIDA 17
35 GARAGEM
ATELIER 105
161 CASA GARDNER
LUGAR DE CONFLUXO 189

SUMÁRIO


LUGARES DE PARTIDA
17

1 Lugares de Partida

1.1 Marcos Iniciais

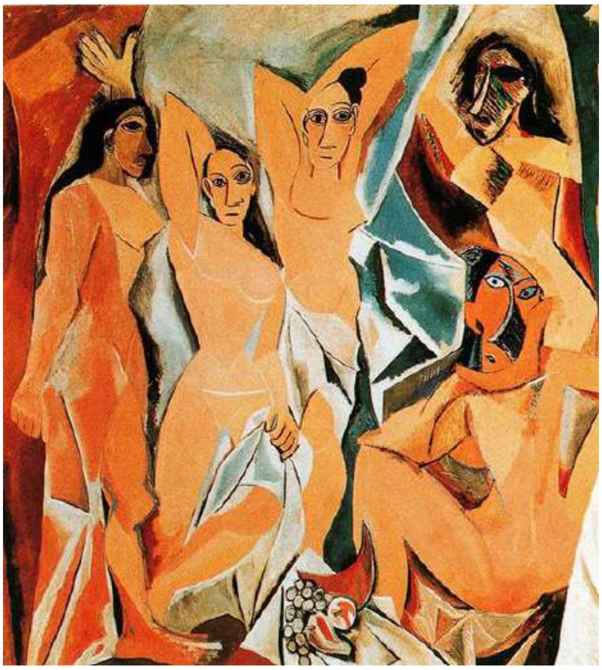
Pontos de partida, múltiplas e infinitas entradas e saídas. Escolho um começo, um porto seguro para falar de lugares especiais por onde andei, caminhei e atuei nesta pesquisa. Lugares de encontros, de aprendizagem e criatividade. Lugares como centros de significados construídos pela experiência (TUAN, 2018).

Há dois anos me propus um desafio: ingressar no mestrado. Desafio este que me *joguei de cabeça* e vivi intensamente cada dia deste curso, ladeado por minha família, amigos e, é claro, por minha orientadora – Cristina Vaz – que me conduziu nesta trajetória, abrindo caminhos, apresentando soluções e me desafiando diariamente a dar alguns passos a mais na vida acadêmica e profissional. Nas linhas seguintes, vou relatar alguns caminhos que me trouxeram até esta pesquisa. Caminhos estes que fazem parte da minha breve trajetória de vida. São caminhos que revelam, dentre outras coisas, meus encontros com a arte, a matemática e a tecnologia.

Começo com uma das primeiras imagens que trago em minha memória: é um quadro do grande artista espanhol Pablo Picasso[1], *Les Demoiselles d'Avignon*, produzido em 1907, que retrata cinco mulheres nuas, que olham fixamente para o observador do quadro.

[1] Pablo Picasso foi um pintor espanhol, escultor, ceramista, cenógrafo, poeta e dramaturgo que passou a maior parte da sua vida na França. É conhecido como o co-fundador do cubismo, ao lado de Georges Braque.

Figura 1 – Les demoiselles d'Avignon, de Pablo Picasso (1907).



Fonte – Disponível em: https://bit.ly/2NtJoz2

Esta obra foi-me apresentada, ainda nos primeiros anos do ensino fundamental maior, pela professora de Artes Visuais, que mostrara à turma as primeiras características do movimento cubista. Sem compreender a técnica do artista e tampouco as influências históricas e sociais representadas na obra, fiquei encantado pelas formas, variações de tonalidades das cores e, sobretudo, pelo traçado do rosto das mulheres. A partir de então, as obras de arte começaram a ter um novo sentido para mim. Sempre que conhecia uma nova obra de arte, no museu ou nos livros, minha atenção se voltava para perceber detalhes e nuances deixadas pelo artista.

Ingressei na universidade para cursar Matemática, uma ciência considerada por muitos como racional, *dura* e *exata*, onde a diversão, emoção e êxtase se traduzem, em alguns momentos, na solução de um problema ou de uma equação. De fato, esse *conceito anterior* que muitas pessoas têm da Matemática foi se confirmando ao longo do curso e, em 2008, já envolvido completamente neste contexto da Matemática Pura, decidi que gostaria de estudar equações diferenciais para o Trabalho de Conclusão de Curso (TCC). Foi então que pedi para ser orientado pela Profa. Cristina Vaz, que me trouxe um artigo que fazia referência a fractais e a equações diferenciais. Sem saber o que eram fractais e conhecendo muito pouco sobre equações diferenciais e, sem hesitar, aceitei o desafio.

Minha primeira *missão*, dada pela professora, era pesquisar sobre fractais: o que eram essas estruturas, quais suas características e qual a importância deles para a Matemática e, logo na minha primeira busca me deparei com os conjuntos de

Mandelbrot e Julia. Minha reação inicial foi de susto, pois nunca tinha visto formas tão belas geradas por algoritmos matemáticos, que se converteu em curiosidade, pois percebi uma outra faceta da Matemática: uma beleza que estava além da resolução equações, números e gráficos.

Considero que os estudos que realizei sobre os fractais me permitiram compreender a complexidade matemática de estruturas que, a uma primeira vista, pareciam ser simples. Estes estudos me permitiram vivenciar três grandes momentos, que agora, uma década depois, consigo visualizar. O primeiro momento seria um aprofundamento matemático, em que debrucei-me a estudar mais detalhadamente uma série de conceitos matemáticos subjacentes aos fractais. O segundo momento seria o de produção, que consistia em gerar computacionalmente os fractais estudados, a partir de uma linguagem de programação em um software de matemática computacional. Finalmente, o terceiro momento seria o de diversão, mas não a diversão que habitualmente compreendemos. Me refiro, à diversão dos matemáticos que citei anteriormente! Nesta última etapa do trabalho, pude "brincar" com os fractais, gerando-os no GeoGebra e vez por outra, atribuindo-lhe uma combinação de cores para ter um "ar mais artístico".

Durante 9 anos, entre a formatura da graduação e o ingresso no mestrado, experimentei com meus alunos da educação básica, na Escola de Aplicação da UFPA (antigo NPI), várias atividades envolvendo matemática e arte, passando pelos fractais e pela simetria, conectando com Escher e outros artistas. Certa vez, propus aos meus alunos de iniciação científica que estudassem as transformações geométricas, as identificassem nas obras de Escher e produzissem uma animação no Geogebra com as obras do artista, de modo que fosse possível visualizar as transformações utilizadas pelo artista. O resultado foi muito satisfatório e notei a surpresa dos alunos ao perceberem que a matemática e arte poderiam estar juntas.

Em meados de 2015, minha orientadora (que nunca deixamos ter contato profissional e pessoal) me convidou para fazer parte de um grupo de estudos (que um tempo depois passou a se chamar Artemáticos), sobre Matemática e Arte, e reuníamos periodicamente em seminários para discutir artigos relacionados a esta temática. Neste mesmo período, ministrei aulas de Cálculo I no Projeto Newton para os alunos dos cursos de engenharia da UFPA e verifiquei a dificuldade dos alunos em compreender conceitos abstratos do cálculo diferencial e integral e, diante dela, desenvolvi algumas animações computacionais na tentiva de minimizar estas dificuldades.

Já no ano de 2017, fui aprovado no Mestrado Profissional em Ensino, do Programa de Pós-graduação Criatividade e Inovação em Metodologias do Ensino Superior (PPGCIMES), do Núcleo de Inovação Tecnológica Aplicada ao Ensino e Extensão (NITAe2) da UFPA. Este mestrado tornou-se um novo ponto de inflexão em minha carreira docente. As discussões sobre metodologias ativas no processo de ensino-aprendizagem, bem como, as discussões sobre Criatividade e Inovação ampliaram meu horizonte e fizeram-me entrar no caminho sem volta da inovação e criatividade no ensino, no sentido de valorizar o aluno como força motriz da própria aprendizagem.

Neste período do mestrado, destaco duas disciplinas que foram importantes para a mudança de rumos em meu projeto: Desenvolvimento de Produtos Educacionais para Tecnologia Assistiva e Matemática & Arte. A primeira disciplina tinha por objetivo "desenvolver competências para o ensino e aprendizagem orientadas para o uso e desenvolvimento de tecnologia eletrônica, TIC e software para auxiliarem pessoas com necessidades especiais". Foi em uma das aulas desta disciplina que fui apresentado à tecnologia de impressão 3D e o software OpenSCAD, utilizado para modelar objetos tridimensionais. A partir disto, comecei a modelar alguns objetos 3D, tais como as primeiras etapas do fractal Esponja de Menger. Conheci também o Arduíno, plataforma de prototipagem eletrônica, utilizada em projetos de baixo de custo. O produto final desta disciplina, realizado em grupo, consistia em os alunos desenvolverem um produto de tecnologia assistiva que integrasse a tecnologia de impressão 3D, Arduíno e dispostivos móveis (celulares ou tablets).

A disciplina Matemática & Arte tinha por objetivo "explorar e aplicar conceitos, técnicas e procedimentos matemáticos em produções artísticas". Nesta disciplina, tive um reencontro com a arte, em que agora, o olhar sobre ela seria interdisciplinar, sem deixar de lado a subjetividade. As ações propostas na disciplina foram fundamentais para a compreensão de que para haver um diálogo interdisciplinar, faz-se necessário romper as barreiras entre as disciplinas e adentrar no outro campo do conhecimento e ali habitar.

Todas essas vivências envolvendo interdisciplinaridade, tecnologia, arte, inovação e criatividade motivaram esta pesquisa, a aventura de visitar espaços (reais e/ou imaginários) que promovam uma aprendizagem criativa em Matemática Superior. Lugares que adentrarei com a intenção de viver experiências de interdisciplinaridade pois, *"interdisciplinaridade não se ensina nem se aprende, apenas vive-se, exerce-se"* (FAZENDA, 1979). Experiência *"como isso de me passa"* (BONDÍA, 2001) e não o que me acontece e sim o que me toca. Lugares que possibilitem uma aprendizagem criativa em matemática.

Para Relph (1976), citado por Leite (1998), os lugares só adquirem identidade e significado através da intenção humana e da relação existente entre aquelas intenções e os atributos objetivos do lugar, ou seja, o cenário físico e as atividades ali desenvolvidas. Para dar significado aos lugares escolhidos pretendo realizar ações interdisciplinares que estimulem a criatividade e promovam a aprendizagem.

Para produzir estas ações interdisciplinares a que me proponho, vou apresentar alguns marcos, que serão fundamentais nesta pesquisa e que serão balizas para o desenvolvimento das atividades e ações que serão desenvolvidas. Apresentarei quatro marcos fundamentais, que são: o método da cartografia, aprendizagem criativa, interdisciplinaridade e cultura maker e metodologia STEAM.

1.2 Marcos Fundamentais

O primeiro marco fundamental que apresentarei refere-se ao método da cartografia, que permeará toda a condução desta pesquisa.

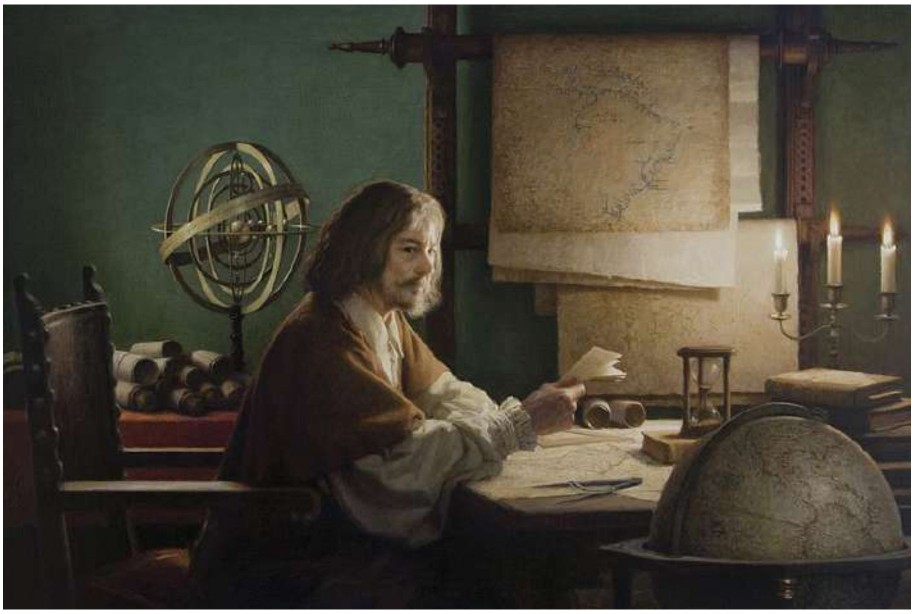
1.2.1 Método da Cartografia

O método da cartografia, como dito anteriormente, balizará nossa trajetória e nos apontará caminhos e rotas. Mas, o que seria o método da cartografia?

Quando falamos em cartografia, a primeira imagem que vem à mente refere-se à construção de mapas, cartas de navegação ou planos de voos, por exemplo. Essa referência que possuímos é oriunda do conceito de cartografar, aprendido nos anos iniciais na escola.

O artista Guillermo Muñoz Vera, de certa forma, materializa esta referência que possuímos sobre o termo cartografar. Em sua obra intitulada "El Cartógrafo", o artista apresenta um homem em seu lugar de trabalho, cercado por papéis, livros e instrumentos de desenho, observando suas anotações, que lhe subsidiarão nas construção de seus mapas.

Figura 2 – El cartógrafo. Guillermo Muñoz Vera, 2010.

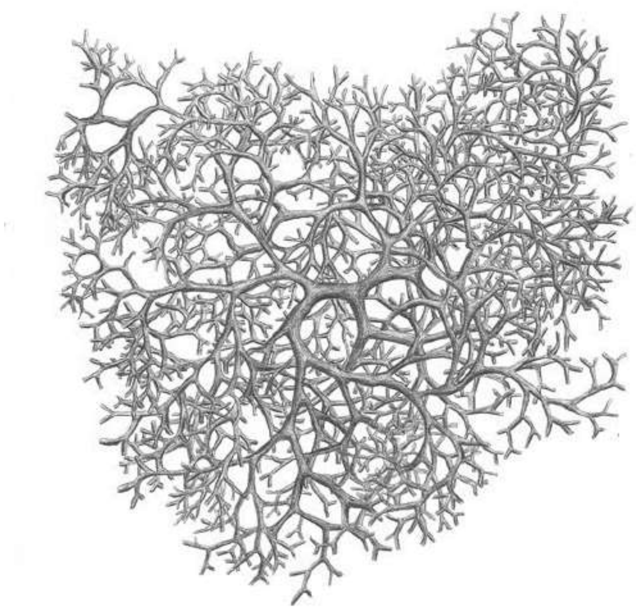


Fonte – Disponível em: https://bit.ly/2qAklzo

Entretanto, ao nos referimos à Cartografia, não fazemos alusão à definição geográfica. Referimo-nos à cartografia no sentido dos filósofos franceses pós-modernos Gilles Deleuze e Félix Guattaria, na década de 90 do século XX, que tem por objetivo acompanhar um processo e não apenas representar um objeto ou uma determinada realidade.

O conceito de cartografia que é apresentado por Deleuze e Guattari na Introdução de *Mil Platôs* (Paris: Minuit, 1980; Rio de Janeiro: Editora 34, 1995) relaciona-se ao conceito de rizoma, termo "emprestado" da botânica e é aplicado na filosofia. Por um lado, na botânica, um rizoma é uma estrutura presente em algumas plantas cujos brotos podem ramificar-se em qualquer ponto e transformar-se em um bulbo ou um tubérculo, como mostra a figura 3.

Figura 3 – Rizoma



Fonte – https://bit.ly/2HjNf19

Já na filosofia, Deleuze e Guattaria utilizaram as características do rizoma para propor o modelo de um processo de investigação que possui múltiplas direções. Um rizoma, segundo Deleuze e Guattari (1995) não é feito de unidades, mas de dimensões, ou antes de direções movediças. Ele não tem começo nem fim, mas sempre um meio pelo qual ele cresce e transborda. Ele constitui multiplicidades lineares a n dimensões, sem sujeito nem objeto, exibíveis num plano de consistência e do qual o Uno é sempre subtraído $(n-1)$. Em outras palavras, o pensamento rizomático se constrói em múltiplas direções e está aberto a novas experimentações. Ele não é linear ou cartesiano. É como "riacho sem início nem fim, que rói suas duas margens e adquire velocidade no meio" (DELEUZE; GUATTARI, 1995).

Para melhor compreender a noção de rizoma, Deleuze e Guattaria elencam as seguintes características:

a) Princípio de conexão e de heterogeneidade: qualquer ponto do rizoma pode ser conectado a qualquer outro e deve sê-lo, diferenciando-o de uma árvore, por exemplo, em que há um ponto fixo. No rizoma, não há começo ou fim e, os pontos do rizoma conectam-se sem uma ordem anteriormente estabelecida.

b) Princípio da multiplicidade: num rizoma, inexiste a unidade, no sentido que tanto o objeto, quanto o sujeito não são únicos.

c) Princípio de ruptura a-significante: um rizoma pode ser segmentado ou quebrado em qualquer lugar. Pode ser também reconstituíndo em suas linhas, em qualquer lugar. Mesmo quando um rizoma é segmentado, as linhas onde ocorreram tal segmentação também fazem parte do rizoma e nestas linhas podem encontrar elementos que reconstituem o rizoma.

d) Princípio da cartografia e da decalcomania: o rizoma não segue um modelo de estrutura ou gerativo. Ele é diferente de um decalque, que segue um padrão de reprodução. O rizoma é como um mapa: é aberto, é conectável em todas as suas dimensões, desmontável, reversível, suscetível de receber modificações constantemente.

Portanto, este último princípio possibilita o seu funcionamento como método de análise de um processo. Além disso, o modelo rizomático de Deleuze e Guattaria orienta metologicamente o olhar do cartógrafo em relação a um campo de pesquisa.

Nesta perspectiva, a cartografia como método de pesquisa, parte do pressuposto que não há regras e objetivos previamente estabelecidos ou que o trabalho do pesquisador faz-se a partir de um algoritmo. Passos e Barros (2015a, p. 17) apontam que, no método da cartografia,

> O desafio é o de realizar uma reversão do sentido tradicional de método – não mais um caminhar para alcançar metas prefixadas (*metá-hódos*), mas o primado do caminhar que traça, no percurso, suas metas. (...) A diretriz cartográfica se faz por pistas que orientam o percurso da pesquisa sempre considerando os efeitos do processo do pesquisar sobre o objeto da pesquisa, o pesquisador e seus resultados.

A cartografia, portanto, nos indica que há um distanciamento das regras previamente definidas pelo método dito científico que, em contrapartida, são substituídas por pistas que tem por objetivo direcioná-la. Ainda, neste processo de reverter o sentido tradicional do método, na cartografia, o pesquisador o ressignifica, com objetivo de não isolar-se do objeto estudado, e sim, imergir nele, não mantendo-se neutro ou distante, ou seja, o pesquisador e a pesquisa misturam-se no processo de cartografar.

Cartografar, de acordo com Costa, Angeli e Fonseca (2012), é também habitar no campo da experiência, é querer o acontecimento e estar aberto à afirmação do acaso. Na cartografia, não busca-se controlar o mundo, prever fenômenos ou encontrar a verdade. Pelo contrário, na cartografia, "trata-se de dizer sim a isto e a aquilo, de afirmar uma verdade no encontro com o mundo".

Embora uma das características da cartografia seja o distanciamento de regras pré-determinadas, o trabalho cartográfico, segundo Passos, Kastrup e Escóssia (2015), é orientado por pistas, que são como referências que concorrem para a manutenção de uma atitude de abertura ao que vai se produzindo e de calibragem do caminhar no próprio percurso da pesquisa – o *hódos-metá* da pesquisa.

No Brasil, o método da cartografia é utilizado em pesquisas no campo da arte, da saúde, das ciências humanas e sociais, sempre na direção de acompanhar processos e produzir subjetividade. Os estudos mais sistemáticos da cartografia, no campo da pesquisa qualitativa, ocorre a partir de 2005 quando um grupo de professores se debruçou para elaborar um conjunto de pistas para nortear este método e, em 2009, publicaram a obra *Pistas do método da cartografia: Pesquisa-intervenção e produção de subjetividade*, sistematizada por Eduardo Passos, Virgínia Kastrup, Liliana da Escóssia e Silvia Tedesco e outros pesquisadores. Assim, esta publicação será referência na construção desta pesquisa.

A seguir, apresento algumas pistas que embora independentes, seguem conectadas tal como um rizoma. Estas pistas balizarão esta pesquisa e consistem em quatro grande ações: intervir, acompanhar processos, atenção do cartógrafo e adotar uma política de narrativa.

A primeira pista do método da cartografia no indica que toda pesquisa cartográfica é **interventiva** e não é possível dissociar o conhecer do fazer. Para Passos e Barros (2015a, p. 30), defender que toda pesquisa é intervenção exige do pesquisador uma imersão no plano da experiência, lá onde conhecer e fazer se tornam inseparáveis, impedindo qualquer pretensão à neutralidade. Podemos dizer que, sob essa ótica, na pesquisa cartográfica há espaço para subjetividade. É legítmo incluir na pesquisa os pressupostos, indagações, sensações até mesmo os afetos do pesquisador, ou seja, na pesquisa cartográfica, considera-se que a realidade toda está em constante conexão com a pesquisa. Costa, Angeli e Fonseca (2012, p. 44) apontam que

> Enquanto no método cartesiano buscamos nos desvencilhar de nós mesmos para abarcar a universalidade de um sujeito epistêmico geral, aqui [na cartografia] não pretendemos a anulação da perspectiva, (...). Devemos infectar o mundo com nossos caprichos e nos infectar com as idiossincrasias do mundo: realidade constituída na relação através do contágio virótico sem qualquer assepsia e esterilidade.

Assim, a primeira pista nos sugere que, enquanto cartógrafos implicados na própria pesquisa, não seremos (e nem desejamos) neutralidade. Tudo aquilo que nos tocou, nos aconteceu ou nos passou, conforme entendimento de Bondía (2001), fará parte da pesquisa, formando uma teia de conexões entre o pesquisador e o objeto da pesquisa.

A segunda pista do método da cartografia refere-se a **acompanhar processos**, que é a premissa básica deste método. Quando falamos em acompanhar processos, remetemo-nos à processualidade, que está presente em cada etapa da pesquisa, ou seja, quando o cartógrafo está em campo, há uma série de processos em curso e que não devem ser separados das suas relações com o mundo e sim, conectá-los e estabelecer um diálogo entre si. Para Costa (2014), "o cartógrafo cartografa sempre o processo, nunca o fim".

A terceira pista do método da cartografia refere-se a **atenção do cartógrafo**. Quando em campo, o cartógrafo deve direcionar a sua atenção aos processos que considera relevante à pesquisa. Para Souza e Francisco (2016, p. 816), o coração da pesquisa está na qualidade do funcionamento da atenção do pesquisador, no sentido que o pesquisador não está em campo para coletar dados que já estão prontos, mas estar atento aos dados que são produzidos ao longo da pesquisa. A atenção do cartógrafo não está somente em focar e selecionar informações, mas está também em conectar os processos em curso, mesmo aqueles que aparentemente não se relacionam.

A quarta, e última pista, que balizará nosso traçado refere-se à uma **política da narrativa**. O exercicío de cartografar implica na escolha de como sua experiência será narrada, de forma a destacar suas conexões, encontros, contradições e reflexões. Quando referimo-nos às escolhas, apontamos para o que Passos e Barros (2015b, p. 151) indicam como tomada de posição com implicaçoes políticas, num sentido mais amplo, em que política é compreendida como forma de atividade humana que, ligada ao poder, coloca em relação os sujeitos, articula-se segundo regras ou normas não necessariamente jurídicas e legais". Passos e Barros (2015b) destacam que podemos pensar a política da narratividade como uma posição que tomamos quando, em relação ao mundo e a si mesmo, definimos uma forma de expressão do que se passa, do que acontece. Sendo assim, o conhecimento que exprimimos acerca de nós mesmos e do mundo não é apenas um problema teórico, mas um problema político. A proposta cartográfica indica que o cartógrafo, ao fazer sua narrativa, evite redundâncias comuns nos relatos de casos, de forma a não gerar uma linearidade casual. Ainda sobre as narrativas, no método da cartografia, permite-se a dissolvência do caso, como um todo, em microcasos que comporão também a cena.

Agora que já estabeleci o primeiro marco fundamental e que permeará todas ações referentes à esta pesquisa, apresentarei o segundo marco fundamental, denominado de Aprendizagem Criativa. Este marco é essencial para fundamentar as ações em cada um dos lugares que visitaremos, pois em cada um deles buscaremos por processos que promovam a aprendizagem de forma criativa.

1.2.2 Aprendizagem Criativa

Criatividade é uma palavra cada vez mais presente em nosso cotidiano e nos mais diferenciados contextos. É comum ouvirmos falar em criatividade no meio empresarial, nas artes, na ciência, na educação e até mesmo relacionada a pessoas excepcionais, que criaram grandes teorias ou realizaram grandes feitos, como Albert Einstein, por exemplo. Mas, o que é ser criativo? Muitas definições para este termo foram propostas e, segundo Alencar (1995 apud ALVES; CASTRO, 2015), não há um consenso para esta definição.

Na busca de um referencial teórico sobre criatividade encontrei as teorias do psicanalista inglês Donald Winnicott e do psicólogo húngaro Mihaly Csikszentmihalyi. Para Winnicott (1975 apud VAZ; ROCHA, 2018) a criatividade relaciona-se com a existência do ser, como uma experiência saúdavel e para Csikszentmihalyi (1998 apud SAKAMOTO, 2012) a criatividade é o resultado de relações sistêmicas que acontecem na interação entre uma pessoa, uma campo e um domínio.

Csikszentmihalyi (1998 apud SAKAMOTO, 2012) afirma que criatividade é a atividade que *flui*[2], no sentido que se experimenta a profunda motivação na realização de uma atividade. Em sua teoria, o autor distingue criatividade de pensamento criativo, pois considera que, apesar da criatividade ser um ato individual, não é um ato isolado, mas um fenômeno sistêmico, que ocorre na interação entre o pensamento de um sujeito e o contexto sociocultural que está inserido. Portanto, a criatividade está associada ao ambiente em que ela surge e pode ser observada a partir das interações entre o indivíduo, o campo e o domínio. Deste modo, a criatividade não deve ser observada apenas do ponto de vista do indivíduo, mas a partir do contexto que está inserido.

Para este autor, a criatividade também pode ser compreendida como uma experiência ótima, que gera prazer e que a distingue de outras atividades humanas, no sentido de que esta atividade inclui um elemento novo a ser descoberto, apesar das dificuldades que surgem durante o processo. Esta experiência ótima é o que caracteriza o *flow* e exemplifica a criatividade (SAKAMOTO, 2012).

Por outro lado, para o pediatra e psicanalista inglês Donald Woods Winnicott, a criatividade está associada à vida, na valorização de desfrutar uma experiência saúdavel de estar vivo. Sakamoto (2012) afirma que criatividade é postulada por

[2] Tradução livre para o conceito de *flow*, desenvolvido por Mihaly Csikszentmihalyi

Winnicott também no sentido de "que a vida é digna de ser vivida", de como o individuo relaciona-se com a realidade externa e de sua percepção de que a vida é significativa.

Para Winnicott (1975 apud SAKAMOTO, 2012), a criatividade é muito influenciada pelas experiências vivenciadas pelo ser humano no início da vida quando ainda é um bebê. Defende que um "ambiente suficientemente bom" promove o desenvolvimento do potencial criativo no indivíduo e que ocorre paralelamente nas etapas do desenvolvimento emocional primitivo: integração básica da personalidade, desenvolvimento de uma noção de identidade pessoal e a constituição de uma visão realística do mundo. É nesta última etapa que o ser humano entra em contato com o mundo externo, permitindo-lhe uma experiência de viver e de se relacionar com outros seres humanos. A noção da existência do Eu (ou *self*) e a representação do mundo constituem-se em aquisições da maturação psicológica no início da vida e representam as duas primeiras criações realizadas pelo Self (SAKAMOTO, 2012, p. 89).

Para Winnicott, um dos fatores principais, relacionado com a criatividade, é o "brincar" porque o brincar é uma comunicação e uma experiência criativa. É no brincar, e somente no brincar, que o indivíduo criança ou adulto, pode ser criativo e utilizar sua personalidade integral; e é somente sendo criativo que o indivíduo descobre o eu (*self*)" (WINNICOTT, 1975 apud CICCONE, 2013, p.4). Nos interessa aqui o "brincar" da fase adulta. O que seria este brincar para Winnicott?

Ao escrever sobre o pensamento winnicottiano, Pires (2010, p. 59) afirma

> Nas fases posteriores do amadurecimento o brincar passa a assumir outras formas, estando sempre presente na vida do indivíduo saudável, pois sem isto a vida seria destituída de prazer e se tornaria somente submissão à realidade objetiva, gerando o sentimento de que ela não vale a pena (...) A arte é uma experiência na qual a adulto pode acessar seu espaço potencial. O movimento artístico é uma forma de brincar do adulto (...) Também aquele que, profissionalmente ou não, realiza uma produção artística pode nisto encontrar o prazer da vivência criativa.

Para ser, existir e viver criativamente não é necessário que tenhamos algum talento especial, afirma Winnicott. Para ele, o viver criativo refere-se àquilo que fazemos e ao fazermos, sentirmo-nos vivos, sentirmos que estamos expressando nosso verdadeiro self, e é isso que nos fortalece. (WINNICOTT, 1975 apud CICCONE, 2013, p.112)

Na perspectiva da teoria de Winnicott, é possível notar que há claro um deslocamento do foco sobre o processo, produto ou indívíduo criativo para o viver criativo, no sentido da existência, como escreve Winnicott (2011, p. 22):

> Seja qual for a definição de criatividade a que cheguemos, ela deve incluir a ideia de que a vida vale a pena – ou não – ser

> vivida, a ponto de a criatividade ser – ou não – uma parte da experiência de vida de cada um. Para ser criativa uma pessoa tem que existir, e ter um sentimento de existência, não na forma de uma percepção consciente, mas como uma posição básica a partir da qual operar. (...) A criatividade é, portanto, a manutenção da vida de algo que pertence à experiência infantil: a capacidade de criar o mundo.

Finalmente, é importante destacar que na teoria winnicotiana, a criatividade não está relacionada ao indivíduo ter algum talento especial, por exemplo, mas está relacionada à própria noção de existência, numa relação indissociável entre o indivíduo e o mundo. Assim, viver criativamente é a percepção da própria existência e ser "você mesmo" de tal forma a interceptar a realidade com um toque pessoal, através da imaginação. Viver criativamente é recriar com um toque próprio aquilo que já existe.

As teorias de Donald Winnicott e Mihaly Csikszentmihalyi apresentam concepções originais que enfatizam vários aspectos sobre a relevância do ambiente e da atitude individual nos processos criativos. Em alguns pontos, estas teoria se complementam e possibilitam um olhar sobre a criatividade como uma postura que pode ser construída para nos expressarmos de forma autêntica e inovadora. Neste sentido, o ambiente escolar pode contribuir para o desenvolvimento e manifestação da criatividade. Neste contexto, o expoente maior é, sem dúvida, o educador Paulo Freire.

Ao escrever sobre Paulo Freire e a criatividade, Rosas (2016, p. 26) afirma

> Como criatividade libertadora, constitutiva da Educação Popular, as atitudes se situam com propósitos de enfrentamento às formas de injustiça, contrárias aos modelos de opressão e das desigualdades (...) A ação criativa, assim pensada, encontra-se enraizada, comprometida com o social, com a busca da "superação de inexperiências democráticas" (FREIRE, 1959). Interage com a perspectiva de criatividade integrada à educação como instrumento de transformação e respeito ao humano em sua humanização.

Freire (2011) considera a educação como processo permanente que tem sua origem na percepção de que somos seres inacabados em constante formação. Este estado de "inacabamento" do ser é próprio da experiência vital. A vida é um processo contínuo de aprendizagem. Deste modo, ter consciência da própria incompletude gera uma força motriz de experiência de viver, para nos tornarmos seres educáveis (FREIRE, 2011, p. 36).

Aprender não é um processo de transferência de conhecimentos entre quem ensina e quem aprende. É um processo de construção do conhecimento, que começa no próprio aprendiz (FREIRE, 2013). Este aprendizado estimula um processo de criação, que naturalmente é mais rico e eficaz do que um processo de repetição.

"Aprender para nós é construir, reconstruir, constatar para mudar, o que não se faz sem abertura ao risco e à aventura do espírito" (FREIRE, 2011, p. 48). A perspectiva freiriana considera a liberdade como característica fundamental no processo de aprendizagem, expressa na tomada de decisões. Dessa forma, a autonomia se constrói no acúmulo de experiências, nas tomadas de decisões e na construção do conhecimento.

Retomando as ideias de Winnicott e Csikszentmihalyi, sobre a importância do ambiente e a capacidade de a "tudo olhar com se fosse a primeira vez" podemos fazer aproximações com as concepções pedagógicas de Paulo Freire, observando que esse olhar de descoberta é essencial para despertar o encantamento do aprendiz, que o ambiente escolar é fundamental para estimular a criatividade e potencializar um aprendizado original e autônomo que possibilite ao aprendiz criar ou recriar o mundo ao seu redor, transformando-o e transformando a si mesmo.

Deste modo, podemos dizer que uma Aprendizagem Criativa acontece quando o aprendiz desfruta da experiência de estar vivo, desfruta do prazer da descoberta e, consciente da sua incompletude, vai em busca de um aprendizado que o possibilite criar ou recriar conhecimento de forma autônoma, imprimindo a sua marca pessoal no processo.

A partir deste entendimento sobre aprendizagem criativa, à luz de Paulo Freire e Donald Winnicott, estabeleci este segundo marco fundamental. Contudo, é necessário estabelecer um terceiro marco fundamental que corresponde a postura que adotarei na construção de uma aprendizagem criativa: a interdisciplinaridade.

1.2.3 Interdisciplinaridade

As discussões sobre a interdisciplinaridade tem sido direcionadas, muitas vezes, para os campos epistemológico e pedagógico. No primeiro campo, os estudos relacionam-se à ciência, o método e o conhecimento, enquanto que no segundo campo, os debates orbitam entorno do currículo, do ensino e da aprendizagem.

Por outro lado, há também estudos acerca da interdisciplinaridade em contextos mais amplos que a educação, tais como na economia, na política e na tecnologia. Estudos nos levam a compreender que há uma mudança de pensamento, deslocando-se do conhecimento específico ou "compartimentado", para o conhecimento multidirecional.

Diante destes contextos, cabe perguntarmos: o que seria interdisciplinaridade? De modo geral, para responder tal indagação, faz-se necessário optar por uma posição, tendo em vista que o entendimento sobre o que é interdisciplinaridade e qual sua finalidade não é consenso absoluto entre os pesquisadores. Entretanto, segundo Thiesen (2007, p. 88) há um ponto de convergência, que é a busca por uma resposta para superar a visão fragmentada dos processos de produção e socialização do conhecimento, de forma a recuperar o caráter de unidade, síntese, totalidade e integração dos saberes.

Para Fazenda (1979), interdisciplinaridade é *"uma atitude de abertura, não preconceituosa, em que todo o conhecimento é igualmente importante*. Considera ainda que a interdisciplinaridade baseia-se no reconhecimento que o conhecimento fragmentado é limitado e, a partir deste reconhecimento faz-se necessário uma atitude pedagógica que seja capaz de romper os limites entre as pessoas (FAZENDA, 1979 apud THIESEN, 2007). Assim, é possível estabelecer uma conexão entre a concepção de aprendizagem, segundo Paulo Freire e a compreensão de interdisciplinaridade de Ivani Fazenda, enquanto atitude ou ação.

Entendendo que aprender é construir conhecimento sendo o próprio aprendiz o sujeito de sua aprendizagem e que deve ocorrer sob a ótica interdisciplinar através da atitude de criar ou (re)construir, sempre com percepção de que somos seres incompletos, podemos observar algumas aproximações entre as ideias de Ivani Fazenda e Paulo Freire.

Por outro lado, Fazenda afirma que a produção de conhecimento, de forma isolada ou individual, é frágil, que é importante estar pré-disposto a dialogar, pesquisar e aceitar o conhecimento do outro. *"A interdisciplinaridade é uma oportunidade concreta para a revisão das relações com o conhecimento, provocando a tessitura de um ambiente interativo, entrelaçando os saberes e as pessoas, ampliando, na prática, o conceito da construção coletiva"* (HAAS, 2011).

Segundo Fazenda (1979 apud THIESEN, 2007), para consolidar a interdisciplinaridade, faz-se necessária uma atitude, isto é, postura interdisciplinar. Mas, quais seriam essas atitudes? Fazenda (1979 apud THIESEN, 2007) responde esta indagação numa "síntese de suas reflexões acerca das possibilidades de construção de uma interdisciplinaridade em ação na qual reafirma categorias fundamentais para o trabalho educativo interdisciplinar":

> Atitude de busca de alternativas para conhecer mais e melhor; atitude de espera perante atos não-consumados; atitude de reciprocidade que impele à troca, ao **diálogo com pares** idênticos, com pares anônimos ou consigo mesmo; atitude de humildade diante da **limitação** do próprio saber; atitude de perplexidade ante a possibilidade de desvendar novos saberes; atitude de desafio diante do novo, desafio de **redimensionar o velho**; atitude de envolvimento e comprometimento com os projetos e as pessoas neles implicadas; atitude, pois, de compromisso de construir sempre da melhor forma possível; atitude de responsabilidade, mas, sobretudo de alegria, revelação, de encontro, enfim, de vida (FAZENDA, 1991 apud HAAS, 2011, grifo do autor)

Deste modo, percebo mais aproximações entre Paulo Freire e Ivani Fazenda no que se refere a efetividade da atitude interdisciplinar que implica, dentre outras coisas, diálogo com os pares e reconhecimento da limitação do próprio saber.

Haas (2011, p. 60) acrescenta que a interdisciplinaridade traz consigo a marca do viver, de tal forma que é na vida que a atitude interdisciplinar se faz presente. Neste caso, esta atitude perante o conhecimento nos permite "substituir uma concepção fragmentada para a unitária do ser humano". Ora, se tomamos uma atitude interdisciplinar perante o conhecimento e esta atitude é uma marca do próprio viver, podemos dizer que estamos interceptando a realidade com uma marca própria. Dizemos então que, neste caso, estamos vivendo criativamente, segundo Winnicott. Em outras palavras, ter uma atitude interdisciplinar diante do conhecimento é uma forma de aprender criativamente.

Até aqui apresentei três marcos fundamentais. O primeiro marco referente à metodologia que permeia esta pesquisa e o segundo e o terceiro que referem-se diretamente ao tipo de ação ou ato que pretendo vivenciar em cada lugar de aprendizagem investigado neste trabalho. Atos interdisciplinares que promovam uma aprendizagem criativa. Alguns princípios que nortearam estes atos. Princípios da cultura maker e a metodologia STEAM que trazem em suas concepções aprendizagem criativa e a interdisciplinaridade. No que segue, apresentarei este último marco fundamental.

1.2.4 Cultura Maker e Metodologia STEAM

O movimento maker é uma cultura que tem crescido rapidamente no mundo inteiro, nos últimos anos. Este movimento tem sua origem por volta do ano de 1996 e está fundamentado na filosofia do "faça você mesmo", do inglês *Do it Yourself (DiY)*. Esta cultura tem a premissa que qualquer pessoa, especialista ou não, pode construir, consertar, transformar ou fabricar diferentes tipos de objetos e projetos, utilizando materiais de baixo custo e com as próprias mãos.

A partir desta premissa, foram construídos alguns espaços específicos, denominados de *makerspaces* (espaços makers) e possuem, geralmente, impressoras 3D, cortadoras à laser, sensores, celulares, tablets, arduínos, computadores, componentes eletrônicos, blocos de montar, entre outros. Nestes locais, encontram-se os *makers*, ou simplesmente "fazedores", que são o seguidores deste movimento. Segundo Borges, Menezes e Fagundes (2016, p. 515), estas pessoas encaram os desafios apresentados pelo processo de fazer como oportunidades de aprendizado e construção do conhecimento, e compartilha sua produção e o conhecimento adquirido, de modo que a sua criação sirva de exemplo ou base para o surgimento de novas e melhores soluções.

Na perspectiva em que os seguidores do movimento maker são estimulados a construir seu conhecimento, algumas instituições de ensino se apropriaram da filosofia *maker* para o campo da educação. Halverson e Sheridan (2014) apontam que uma vertente do foco inicial em fazer e aprender originou-se em ambientes de ensino superior, com os chamados *FabLabs*, criados pelo professor do Massachusetts Institute of Technology (MIT) Neil Gershenfeld (2005). Os FabLabs foram concebidos como ambientes pedagógicos que permitiriam às pessoas comuns resolver seus próprios problemas produzindo (ao invés de comprar ou terceirizando) as ferramentas de que necessitam.[3]

As atividades *makers* desenvolvidas nestes espaços educacionais possuem as características do construtivismo, de Seymour Papert, um matemático sulafricano, professor do Massachusetts Institute of Technology (MIT). Papert considera que o aluno pode construir conhecimento utilizando um computador, de tal forma que seja possível relacionar o concreto e o abstrato. Para isto, Papert apontar a necessidade de ambientes que favoreçam a aprendizagem ativa, que permita o aluno refletir sobre suas ideias, hipóteses ou teorias. “Minha hipótese é que o computador pode concretizar (e personalizar) o pensamento formal [...] Os conhecimentos que antes só eram acessíveis através de processos formais podem agora ser abordados concretamente. E a verdadeira magia vem do fato de que esses conhecimentos incluem os elementos necessários para tornar um sujeito pensador formal[4]" (PAPERT, 1980 apud BORGES; MENEZES; FAGUNDES, 2016, p. 516).

Desta forma, é possível observar que a teoria de Papert está centrada no "fazer", onde a construção do conhecimento se dá a partir do próprio aluno, com base em seus interesses, em um ambiente educacional que permite o livre exercício da criatividade. Ora, nesta perspectiva, podemos dizer que o movimento maker se relaciona com a concepção de aprendizagem de Paulo Freire, tendo em vista que para ambos, a autonomia é elemento base na construção do conhecimento, o que se ratifica nas palavras de Freire (2011), "não posso aprender a ser eu mesmo se não decido nunca (...)".

Aliado ao movimento maker, surge a metodologia STEAM , um acrônimo formado pelas iniciais dos nomes, em inglês, das disciplinas ciências, tecnologia, engenharia, arte e matemática, como uma tendência educacional inovadora que promove a experimentação e o desenvolvimento de projetos interdisciplinares, sob a perspectiva do "aprender fazendo".

A metodologia STEAM surge como uma possibilidade de romper as barreiras do ensino tradicional, contrapondo-se ao ensino fragmento e valorizando a criatividade,

[3] FabLabs were created by Massachusetts Institute of Technology (MIT) professor Neil Gershenfeld (2005) as pedagogical environments that would allow everyday people to solve their own problems by producing (rather than purchasing or outsourcing) the tools they need.

[4] My conjecture is that the computer can concretize (and personalize) the formal. Seen in this light, it is not just another powerful educational tool. (...) I believe that it can allow us to shift the boundary separating concrete and formal. Knowledge that was accessible only through formal processes can now be approached concretely. And the real magic comes from the fact that this knowledge includes those elements one needs to become a formal thinker.

a inovação, o trabalho colaborativo e a aprendizagem autônoma. Segundo Silva et al. (2017),

> a metodologia STEAM, como metodologia ativa, se apresenta como uma tendência inovadora que pretende modificar o status quo da educação atual, permitindo ao estudante, de forma autônoma e criativa, explorar sua curiosidade e desenvolver uma aprendizagem significativa.

Dessa forma, o quarto marco fundamental se relaciona diretamente com a concepção de aprendizagem criativa deste trabalho, entrelaçamento das ideias de Freire (2011), Winnicott (1975) e Fazenda (1979).

Fincados os marcos fundamentais da pesquisa, destaco a principal indagação do trabalho: **Como ações interdisciplinares podem promover uma aprendizagem criativa em matemática superior?**

Buscando responder esta pergunta, o objetivo principal do trabalho é **investigar como ações interdisciplinares podem promover uma aprendizagem criativa em matemática superior.**

Deste modo, os objetivos específicos são:

i) realizar ações interdisciplinares norteadas pelas princípios da cultura maker e da metodologia STEAM;

ii) realizar ações inovadores em matemática e arte;

iii) realizar ações criativas em matemática recreativa;

iv) produzir recursos educacionais criativos e inovadores resultantes de ações interdisciplinares.

Para atingir estes objetivos vou propor e executar ações nos seguintes lugares: **Garagem**, **Atelier** e **Casa Gardner**.

A **Garagem** é o lugar dos princípios da Cultura Maker. É um centro dos significados "mão na massa": faça você mesmo; aprender fazendo, *matemática mão na massa*. É o espaço para materializar objetos de aprendizagem usando-se o processo de prototipagem tridimensional. Neste lugar, as principais ações são imaginar, planejar e materializar aplicando-se conhecimentos de matemática, engenharia e computação.

O **Atelier** é o lugar da metodologia STEAM. É um centro dos significados da sensibilidade: curar e criar. É o espaço das ações criativas em Matemática e Arte através da imersão no universo de artistas que usam a matemática em suas composições, da leitura e releitura de obras de arte e do fazer artístico.

O **Casa Gardner** é o lugar do *brincar*. É um centro dos significados do lúdico: enigmas e desafios. É o espaço do aprender desvendando mistérios e desafios, resolvendo problemas pelo puro prazer de entender os processos e descobrir a solução.

Como um pesquisador-cartógrafo, adentrei estes lugares atento aos percursos, aos atos, aos encontros, aos afetos. Para esta pesquisa, escolhi uma narrativa para desvelar as descobertas em nossa trajetória. Compartilho com você, as respostas, as criações, os achados que encontrei nos lugares-pesquisa por onde andei.


35
GARAGEM

2

Garagem: Matemática Mão na Massa

Final de semana chegando, abertura para novas possibilidades e encontros. O celular vibra, é uma mensagem do meu amigo Hidaka. Olho com curiosidade, pois Hidaka é um companheiro de aventuras pelo mundo da tecnologia. A mensagem é um convite para visitar um espaço *maker* chamado **Garagem**. Convite interessante!

Acordo no sábado pensando em aceitar a sugestão do Hidaka e imaginando o que vou encontrar na **Garagem**. Meus conhecimentos sobre espaços de aprendizagem criativa são teóricos e minha curiosidade sobre o que fazer nestes ambientes é muito grande. Busco no tablet mais informações. Começo pela Cultura Maker.

O movimento Maker tem como filosofia que *"qualquer pessoa pode conceber, produzir, distribuir e vender qualquer produto".* Traduzindo a palavra *maker* ao pé da letra temos que ser um *maker* é ser um *fazedor*[1], alguém que cria, realiza, executa, que quer ver acontecer, ou seja, alguém que *"coloca a mão na massa"*.

Os espaços Makers, também conhecidos como Laboratórios de Fabricação - *FabLabs*, são ambientes que criação de protótipos e produtos inovadores que estimulam a criatividade, a invenção e o empreendedorismo, usualmente associados a tecnologias ligadas a eletrônica, robótica e computação (FOUNDATION, 2018). Em geral, os espaços Makers são equipados com computadores, impressoras, impressoras 3D, arduínos, componentes eletrônicos, ferramentas de marcenaria e de artesanato.

As motivações de um maker podem ser bem variadas desde a resolução de problemas cotidianos simples a criação de um novo negócio ou simplesmente o puro prazer da descoberta e do divertimento. Uma característica marcante de um maker é o trabalho colaborativo e compartilhado. Este conceito de compartilhamento está associado ao termo *FabLabs*, que é usado para descrever os espaços que fazem parte da rede *Fab Foundation*[2]. A Fab Foundation é uma evolução de um conceito de

[1] https://blog.fazedores.com/sobre/
[2] https://www.fabfoundation.org/

laboratório criado em 2001 no MIT (*Michigan Institute of Technology*, em Massachusetts, nos EUA). É uma rede que conecta mais de 450 FabLabs ao redor do mundo e os ajuda a trocar conhecimentos. No Brasil, quem responde à associação é a Fab Lab Brasil Network[3].

Para fazer parte da rede da *Fab Foundation*, além dos equipamentos, o *FabLab* deve satisfazer alguns princípios, como por exemplo,

> "i) abrir as portas à comunidade pelo menos uma vez por semana de forma gratuita;
> ii) compartilhar ferramentas e processos com os outros laboratórios de mesmo tipo;
> iii) participar ativamente da rede por meio de vídeo conferências e encontros presenciais;
> iv) ter pessoas qualificadas para gerenciar o local, um diretor, um gerente e,
> v) ter alguns técnicos em máquinas, softwares e processos, para ajudar os frequentadores no que eles precisarem." (PINTO et al., 2018)

Segundo Anderson (2012 apud SOSTER, 2018), o Movimento Maker apresenta três características fundamentais: (i) o uso de ferramentas digitais para o desenvolvimento e prototipagem de projetos de novos produtos; (ii) a cultura de compartilhamento de projetos e de colaboração entre comunidades; (iii) a adoção de formatos comuns de arquivos de projetos.

Como espaços de aprendizagem, os *FabLabs* apoiam-se nas teorias de Seymourt Papert e Paulo Freire, que postularam um aprendizado baseado na autonomia, na experiência e na colaboração (BORGES et al., 2015).

Segundo Freire (2011), *"Ensinar não é transferir conhecimento, mas criar as possibilidades para a sua própria produção ou a sua construção."* Para Freire, o ambiente escolar deve ser um espaço democrático e dialógico que estimule a autonomia, criatividade e promova uma aprendizagem global e não fragmentada.

Seymour Papert, matemático e educador, desenvolveu o Construcionismo tomando como principal referência algumas premissas de Piaget e da Teoria Construtivista, propondo a criação e o compartilhamento de determinado objeto físico ou digital para promover a aprendizagem significativa das crianças (SOSTER, 2018). Papert defende a ideia que a aprendizagem é mais significativa quando os alunos podem testar suas ideias, teorias e hipóteses em ambientes ativos de aprendizagem. Esta aprendizagem ativa está fundamentalmente baseada no *aprender fazendo.*

Flores (2016) entende que a aprendizagem através do fazer coisas é o Construcionismo em ação, "quando nós fazemos modelos de ideias, ferramentas para

[3] https://www.fablabs.io/organizations/rede-fab-lab-brasil

investigação, ou inventamos para aprender, isso é Construcionismo” (FLORES, 2016 apud SOSTER, 2018, p. 39).

Na perspectiva de Paulo Freire e Pepert, os espaços Makers podem ser entendidos como ambientes de aprendizagem que possibilitam a ação construcionista (o construcionismo em ação) e, deste modo, potencializam a autonomia, a colaboração, a criatividade e a interdisciplinaridade.

Estudar a cultura Maker e sua aplicação na educação abriu novos horizontes e ampliou o meu olhar. Será que posso me tornar um maker? Um professor maker? Como fazer **matemática mão na massa?**

Novamente busco informações no meu tablet e encontro o *movimento STEAM*, um acrônimo formado pelas iniciais dos nomes, em inglês, das disciplinas ciências, tecnologia, engenharia, arte e matemática.

O movimento STEAM surgiu nos Estados Unidos, nos anos 90, como uma denominação genérica, utilizada pela *National Science Foudation* (NSF), para identificar qualquer evento, política, programa ou prática que envolvesse a integração das disciplinas citadas (BYBEE, 2010 apud SILVA et al., 2017). A principal ideia do movimento STEAM, também conhecido como metodologia STEAM, é promover uma aprendizagem não fragmentada e colaborativa permitindo a integração de saberes e contribuindo para uma visão mais global do mundo.

Sorrio constatando mais um encontro com as premissas de Paulo Freire! E mais ainda, entendo que os princípios dos espaços Makers e a metodologia STEAM podem ser grandes aliados para promover uma aprendizagem criativa em Matemática, uma aprendizagem colaborativa, autônoma, interdisciplinar onde o aluno pode ser o protagonista e imprimir sua marca pessoal durante o processo, uma **matemática mão na massa!**

Percebo que, mesmo sem saber, a metodologia STEAM já fazia parte do meu universo. Lembrei da disciplina *Desenvolvimento de Produtos Educacionais para Tecnologia Assistiva* cursada no segundo semestre do meu mestrado com o professor Dionne Monteiro. Foi um encontro importante que estimulou um fazer mais criativo e interdisciplinar aliando conhecimentos de engenharia (arduíno) e computação (programação). Neste encontro, comecei a pensar como aplicar a impressora 3D para materializar objetos matemáticos.

Levanto-me. Vou visitar a **Garagem** para aprender o processo de impressão 3D aliando engenharia, tecnologia, arte e matemática. Com os ensinamentos de Winnicott, Paulo Freire e Seymour Papert em mente, convido você, caro (a) leitor (a), a seguir comigo o mapa cartográfico das ações interdisciplinares que realizarei na **Garagem**, ações que buscam promover uma aprendizagem criativa em Matemática superior.

A **Garagem** está localizada num bairro próximo a minha casa. É um espaço amplo, bem iluminado, aconchegante e está dividido em duas salas. Na sala maior encontram-se duas bancadas com três computadores cada, uma mesa grande que fica no centro da sala e no fundo, um armário com todo tipo de chave de fenda e componentes eletrônicos, como arduínos[4], placas de desenvolvimento e kits de robótica. Na sala menor, há duas impressoras 3D, uma cortadora à laser e uma estante com cinco prateleiras, sendo que nas três superiores encontrei algumas peças feitas na impressora 3D e nas duas inferiores, encontrei vários rolos de filamentos, que são utilizados na impressora.

Como esta **Garagem** é um espaço de criação, me surpreendi com alguns objetos que encontrei, tais como réguas, lápis, papéis e pranchetas de desenho. Encontrei também serrote, martelo, alicates, lâmpadas e até mesmo materiais de sucata, como garrafas plásticas e caixas de isopor.

Quando cheguei na **Garagem**, acompanhado do meu amigo Hidaka, vi que dois de seus colegas estavam testando o protótipo de um carrinho movido por controle remoto e controlado por um arduíno. Achei muito interessante o protótipo, pois ele foi criado com materiais de baixo custo (papelão), rodinhas de carrinho de brinquedo velho e alguns componentes eletrônicos.

Na sala de impressão, Hidaka me mostrou as peças de um braço robótico (semelhante ao braço de trator) que estava sendo impresso e quando montado, teria acoplado um arduíno e o controle de seus movimentos seria feito pelo celular, via bluetooth.

Olhei rapidamente ao redor da sala e vi que ali, aparentemente, não tinha nada de matemática. Perguntei ao Hidaka se algum dos makers da garagem já tinha produzido alguma peça de matemática, como um sólido geométrico, um cubo mágico ou algo semelhante. Para minha surpresa, a resposta foi negativa pois, segundo ele, nenhum dos makers dessa **Garagem** eram do curso de Matemática. A maioria cursava engenharia ou era engenheiro e alguns eram estudantes de ensino médio.

Decidi criar o meu primeiro modelo e escolhi materializar etapas do fractal Esponja de Menger. Esta escolha foi espontânea pois a Esponja de Menger é um objeto conhecido que estudei com detalhes no meu curso de graduação quando estava produzindo o meu trabalho de conclusão de curso. Além disso, seria uma oportunidade de desenvolver naquela **Garagem** um projeto voltado para a matemática.

Acessei meu trabalho de conclusão de curso[5] pelo tablet. Relembrei o processo recursivo da construção da Esponja de Menger: a construção inicia com um cubo unitário, o qual é dividido em 27 cubos menores. Retira-se, então, o cubo do meio em

4 Arduíno é uma plataforma de prototipagem eletrônica de hardware livre e de placa única.
5 Elementos de Geometria Fractal (2010)

cada face e o cubo central, restando apenas 20 cubos, que formam a primeira etapa do processo. Para a segunda etapa, repete-se os passos anteriores (divisão em 27 cubos menores e retirada dos cubos centrais) em cada um dos vinte cubos da primeira etapa. Repetindo este processo indefinidamente gera-se uma sequência de "cubos vazados" cujo limite é esponja de Menger. Este processo é conhecido como a "construção por remoção" da esponja de Menger. Para definir com seria o processo de modelamento de algumas etapas deste processo, acessei pelo tablet, a animação da construção da Esponja de Menger, disponível no E-book Interativo *Artemática: Explorando o Potencial Artístico da Matemática*[6] (figura 4).

Figura 4 – Animação da construção da Esponja de Menger.

Fonte – O autor (2019).

Vamos modelar três etapas da construção da esponja de Menger usando o procedimento citado acima e o software OpenSCAD. Escolhi o OpenSCAD por que foi o aplicativo usado nas atividades da disciplina *Desenvolvimento de Produtos Educacionais para Tecnologia Assistiva*.

Note que, nesta construção dada na Figura 4, definimos um cubo inicial unitário. Com software OpenSCAD usamos os comandos `module` e `cube` para modelar o cubo inicial unitário, denominado de `Menger0()`, do seguinte modo:

```
//Etapa Inicial
module Menger0(){cube(1);}
```

[6] Disponível em: http://editaedi.ufpa.br/ebooks/artematica/index.html

Depois, reduzimos o cubo inicial unitário por um fator $1/3$. Com o OpenSCAD usamos os comandos `module`, `cube` e `scale` para modelar este objeto, denominado f1, do seguinte modo:

```
module f1(){scale(1/3) Menger0();}
```

Em seguida, reduzimos o cubo inicial unitário por um fator $1/3$ e transladamos por um fator $1/3$ ou $2/3$. Faremos 19 processos deste tipo usando os comandos `module`, `cube`, `scale` e `translate` do seguinte modo:

```
module f2(){translate([0,0,1/3]) scale(1/3) Menger0();}
module f3(){translate([0,0,2/3]) scale(1/3) Menger0();}
module f4(){translate([1/3,0,0]) scale(1/3) Menger0();}
module f5(){translate([1/3,0,2/3]) scale(1/3) Menger0();}
module f6(){translate([2/3,0,0]) scale(1/3) Menger0();}
module f7(){translate([2/3,0,1/3]) scale(1/3) Menger0();}
module f8(){translate([2/3,0,2/3]) scale(1/3) Menger0();}
module f9(){translate([0,1/3,0]) scale(1/3) Menger0();}
module f10(){translate([0,1/3,2/3]) scale(1/3) Menger0();}
```

```
module f11(){translate([2/3,1/3,0]) scale(1/3) Menger0();}
module f12(){translate([2/3,1/3,2/3]) scale(1/3) Menger0();}
module f13(){translate([0,2/3,0]) scale(1/3) Menger0();}
module f14(){translate([0,2/3,1/3]) scale(1/3) Menger0();}
module f15(){translate([0,2/3,2/3]) scale(1/3) Menger0();}
module f16(){translate([1/3,2/3,0]) scale(1/3) Menger0();}
module f17(){translate([1/3,2/3,2/3]) scale(1/3) Menger0();}
module f18(){translate([2/3,2/3,0]) scale(1/3) Menger0();}
module f19(){translate([2/3,2/3,1/3]) scale(1/3) Menger0();}
module f20(){translate([2/3,2/3,2/3]) scale(1/3) Menger0();}
```

Para obter o objeto da primeira etapa do fractal, o "cubo vazado", denominado `Menger1()`, usei os comandos `module` e `union()` para unir os cubos definidos anteriormente:

```
module Menger1(){union(){f1();f2();f3();f4();f5();f6();f7();f8(); f9();
f10();f11();f12();f13();f14();f15();f16();f17();f18();f19();f20();}}
```

Para gerar objeto da segunda etapa do fractal repetimos o processo descrito acima no objeto `Menger1()`, para isto usamos os mesmos comandos e denominamos o objeto de `Menger2()`:

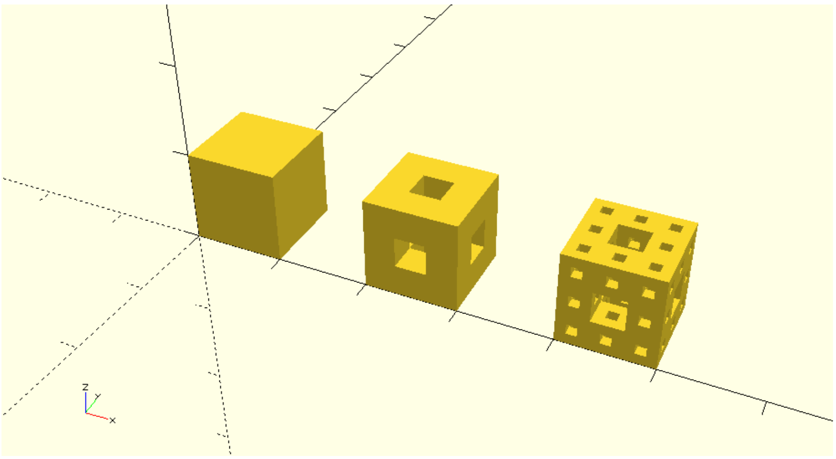
```
module Menger2(){union(){scale(1/3) Menger1();
translate([0,0,1/3]) scale(1/3) Menger1();
translate([0,0,2/3]) scale(1/3) Menger1();
translate([1/3,0,0]) scale(1/3) Menger1();
translate([1/3,0,2/3]) scale(1/3) Menger1();
translate([2/3,0,0]) scale(1/3) Menger1();
translate([2/3,0,1/3]) scale(1/3) Menger1();
translate([2/3,0,2/3]) scale(1/3) Menger1();
translate([0,1/3,0]) scale(1/3) Menger1();
translate([0,1/3,2/3]) scale(1/3) Menger1();
translate([2/3,1/3,0]) scale(1/3) Menger1();
translate([2/3,1/3,2/3]) scale(1/3) Menger1();
translate([0,2/3,0]) scale(1/3) Menger1();
translate([0,2/3,1/3]) scale(1/3) Menger1();
translate([0,2/3,2/3]) scale(1/3) Menger1();
translate([1/3,2/3,0]) scale(1/3Menger1();
translate([1/3,2/3,2/3]) scale(1/3) Menger1();
translate([2/3,2/3,0]) scale(1/3) Menger1();
translate([2/3,2/3,1/3]) scale(1/3) Menger1();
translate([2/3,2/3,2/3]) scale(1/3) Menger1();}}
```

Para visualizar as etapas construídas em uma mesma tela alinhei os objetos construídos do seguinte modo:

```
Menger0();
translate([2,0,0])
Menger1();
translate([4,0,0])
Menger2();
```

Como resultado final deste processo temos o cubo inicial e as três primeiras etapas da construção da Esponja de Menger, como mostra a figura 5.

Figura 5 – Etapas da Esponja de Menger.

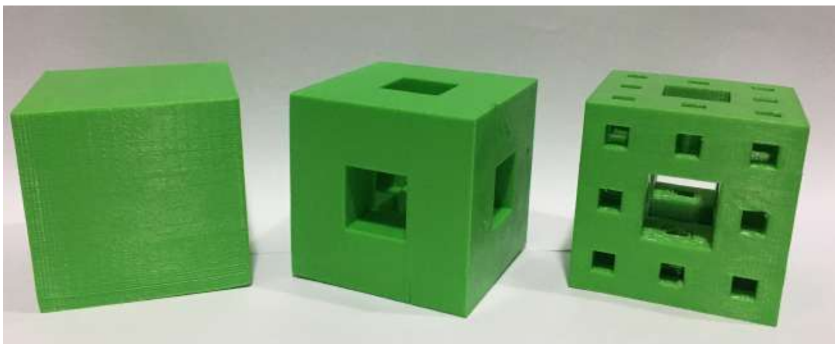


Fonte – O autor (2019).

Fiquei satisfeito com o resultado da minha primeira experiência com a modelagem, pois consegui programar o modelo digital das três primeiras etapas da Esponja de Menger com uma programação relativamente simples que utilizou poucos comandos. Aprendi um software novo, diferente do Geogebra. Mas ainda precisava otimizar a programação pois o algoritmo criado não é eficaz para gerar várias etapas do fractal como por exemplo, a décima etapa. Note que o processo usado para modelar os objetos não é recursivo, porém naquele momento, meu objetivo era fazer um modelo digital e imprimi-lo e este algoritmo atendeu as minhas expectativas.

Após finalizar o modelo digital, conversei com os makers da **Garagem**, que me explicaram como imprimir o meu modelo. Deveria enviá-lo para a impressora num formato especial, com um código que indicaria o procedimento que a impressora deveria seguir para obter o modelo físico. Naquele momento não entendi muito bem como obter esse código, mas com a colaboração dos colegas, materializei os objetos mostrados da figura 6.

Figura 6 – Modelo impresso das etapas da Esponja de Menger.



Fonte – O autor (2019).

Depois de muitas horas de impressão, pude ver pela primeira vez um objeto impresso com a tecnologia de prototipagem tridimensional. Fiquei muito entusiasmado, pois é muito interessante ver impressos objetos que só habitavam na minha imaginação e agora estavam na palma da minha mão. Vislumbrei, naquele momento, como seria o impacto da tecnologia na minha prática docente.

Realizada a primeira experiência senti que estava na hora avançar na direção de novos desafios e indagações e me perguntei: *como o processo de impressão tridimensional*[7] *pode potencializar ações interdisciplinares para promover uma aprendizagem criativa em Matemática superior?*

Para responder esta indagação sabia que precisava pesquisar mais profundamente e depois retornar à **Garagem**. Agendei o meu retorno com o pessoal e voltei para casa alegre com as três etapas da esponja de Menger na mochila.

Durante a semana seguinte, decidi me aprofundar começando com uma curadoria de conteúdos sobre aplicações da impressora 3D no ensino e aprendizagem de matemática. Segundo Vaz e Rocha (2018), uma curadoria de conteúdo envolve pesquisa, descobertas, seleção, categorização e organização de conteúdos capazes de contribuir para o entendimento de determinado assunto. Entre os artigos estudados destaco os seguintes:

(i) *OAs para o Ensino de Cálculo: Potencialidades de Tecnologias 3D*, publicado por Raiane Lemke, Ivanete Zuchi Siple e Elisandra Bar de Figueiredo (LEMKE; SIPLE; FIGUEIREDO, 2016);

(ii) *3D Printing for Mathematical Visualisation*, publicado por Henry Segerman (SEGERMAN, 2012);

(iii) *Illustrating Mathematics Using 3D Printers*, publicado por Oliver Knill e Elizabeth Slavkovsky (KNILL; SLAVKOVSKY, 2013).

O primeiro artigo discute potencialidades tecnológicas da geometria dinâmica aliando o software GeoGebra e a prototipagem rápida na criação de objetos de aprendizagem (OAs). Porém, não descreve os detalhes do processo de impressão 3D, principalmente no que se refere à passagem do modelo computacional para o modelo físico. Os autores apontam várias possibilidades de combinar objetos virtuais e reais, a partir de diferentes enfoques de "visualizações e manipulações" (LEMKE; SIPLE; FIGUEIREDO, 2016). Para os autores, o modelo físico auxilia o aluno na "percepção tátil" do objeto, enquanto que o modelo computacional permite que o aluno altere as dimensões modelo, já que este é um modelo dinâmico, diferentemente do modelo físico, considerado como estático.

[7] Também conhecido como processo de prototipagem rápida.

Apesar deste primeiro artigo não trazer muitos detalhes sobre como imprimir um modelo computacional, os autores apresentam em seu relato, exemplos de objetos 3D que podem ser utilizados pelo professor em sua prática cotidiana. Destaco o modelo de um cone e seus diferentes cortes, exibido em duas formas: a imagem computacional e a imagem do objeto impresso.

O segundo artigo, dividido em duas partes, apresenta trabalhos desenvolvidos com a impressora 3D por matemáticos e artistas digitais e um tutorial. Este tutorial descreve como materializar superfícies parametrizadas, utilizando o software *Mathematica*[8]. Segerman (2012) afirma que a impressão 3D tem se tornado mais acessível ao público, dentre outros motivos, pelo baixo custo e por ser um processo que responde, de modo satisfatório e rápido, com resultados muito próximos do real. Para o autor, o processo de impressão 3D de objetos matemáticos, obedece as seguintes etapas:

Conceito Matemático $\rightarrow$ Modelo Computacional $\rightarrow$ Objeto 3D impresso.

Em cada etapa, as setas indicam um procedimento. A primeira seta do fluxo indica a construção do modelo em um software e a segunda seta indica o procedimento de impressão. Em ambos os casos, para Segerman (2012), os modelos (computacional e impresso) devem se aproximar do conceito matemático.

Para mim, as setas dizem muito pouco sobre os procedimentos, além do que o processo também envolve algo que não pode ser facilmente captado. Algo criativo, imaginativo, subjetivo. O que me encantou na Esponja de Menger, meu primeiro objeto, foi sua complexidade matemática, apesar de seu processo de construção ser relativamente simples.

Segerman (2012) apresenta em seu artigo exemplos de objetos matemáticos que podem ser impressos com a tecnologia de prototipagem tridimensional, tais como a Curva de Hilbert, a Faixa de Möbius e até mesmo algumas superfícies dada a sua parametrização. Neste artigo, destaco a beleza dos objetos modelados e impressos pelo autor e a simplicidade dos algoritmos apresentados.

O terceiro artigo, apresenta como a tecnologia de impressão 3D pode ajudar a visualizar vários objetos matemáticos. Knill e Slavkovsky (2013), afirmam que esta tecnologia é a "última peça" de uma cadeia de técnicas de visualização, que permitem ilustrar conceitos em vários campos da matemática, trazendo dessa forma uma nova perspectiva para educação matemática, pois permitem ilustrar conceitos em vários campos matemáticos, como cálculo, geometria ou topologia.

Neste artigo, os autores descrevem a utilização da impressão 3D no campo educacional através de projetos que adotam a metodologia STEM (acrônimo em

8 https://www.wolframalpha.com/

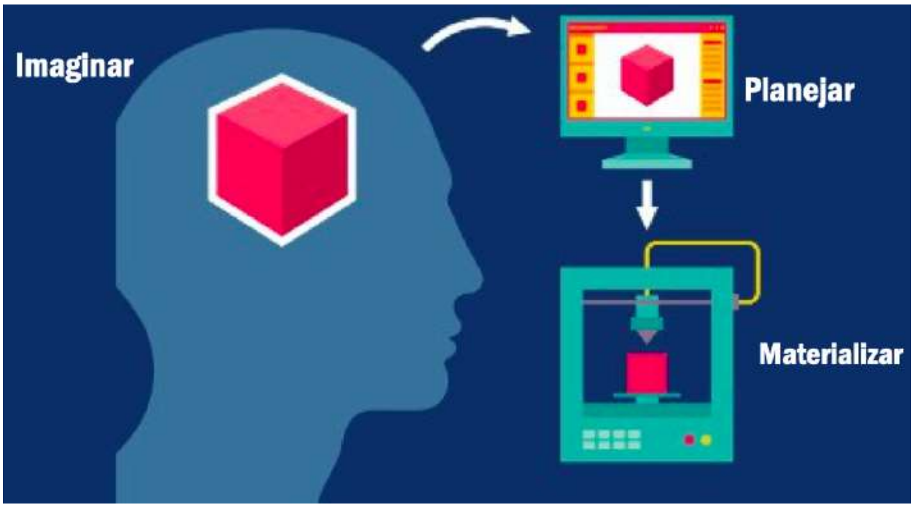
inglês para Ciência, Tecnologia, Engenharia e Matemática). A pesquisa realizada por estes autores indica como podemos concretizar uma "matemática mão na massa", ele apresenta modelos de vários objetos matemáticos: toro, dodecaedro, colar de Apolônio, atrator de Lorentz, faixa de Mobius, gráficos de funções, curva de Hilbert 3D, entre outros. Os autores fazem um levantamento do uso da impressora 3D em sala de aula, apresentam teste de modelagem usando os aplicativos Mathematica, OpenScad e PovRay, apresentam alguns problemas matemáticos que podem ser "ilustrados" com a impressão 3D e indicam aplicativos e projetos que usam a impressão 3D nas artes. É um levantamento geral e ilustrativo sobre a temática que contribuiu para dar um visão geral, indicando caminhos e também como apoio pela riqueza de referências sobre o tema.

Notei que, na pesquisa descrita pelos autores citados, a maior preocupação foi materializar objetos matemáticos para auxiliar o aluno na visualização de conceitos, o que indica o uso da prototipagem rápida centrado no produto final, sem enfatizar a criatividade e a interdisciplinaridade envolvidas no processo.

Como estou interessado, nesta pesquisa, em cartografar como o processo de prototipagem rápida pode potencializar ações interdisciplinares para promover uma aprendizagem criativa em matemática superior, busquei outras fontes de informação e encontrei o caderno *Impressão 3D: imaginar, planejar e materializar*, publicada pela Secretaria de Educação do Estado do Pará em 2018, de autoria de Eziquiel Menta e outros. Este caderno discute as possibilidades de uso da impressão 3D na educação, explicando todo o processo de impressão 3D, desde a concepção dos modelos 3D, até a preparação da impressão e configuração de uma impressora 3D.

Neste guia, Menta et al. (2018, p. 5) ressaltam que até poucos anos atrás, a impressão 3D era um sonho, que somente através do cinema éramos capazes de visualizar, agora é uma realidade possível para alunos e professores materializem objetos para os mais variados usos e finalidades, tudo com muita imaginação e criatividade. O autor indica algumas etapas importantes do processo:

Figura 7 – Etapas do processo de prototipagem rápida



Fonte – Adaptada de http://twixar.me/Sx11 (2019).

A etapa *Imaginar* é o momento da criação. Envolve criatividade, subjetividade e conhecimentos específicos da área atuação. Nesta etapa, precisamos conhecer mais detalhadamente o objeto que vamos modelar, conhecer suas características e propriedades. Para que o modelo seja fiel ao conceito matemático, é necessário fazer uma imersão matemática para conhecer os principais conceitos e propriedades do que deseja-se modelar.

A etapa do *Planejar* é o momento da modelagem computacional. Esta etapa envolve conhecimentos computacionais sólidos: o aplicativo utilizado para modelar, a linguagem de programação e as ferramentas necessárias para obter o modelo. Nesta etapa, revisei os softwares de modelagem computacional que aprendi na minha trajetória acadêmica (Maxima, Geogebra, PovRay, Maple, OpenSCad), para selecionar aqueles que me proporcionem o resultado mais satisfatório e fossem capazes de integrar meus conhecimentos de matemática e de programação científica.

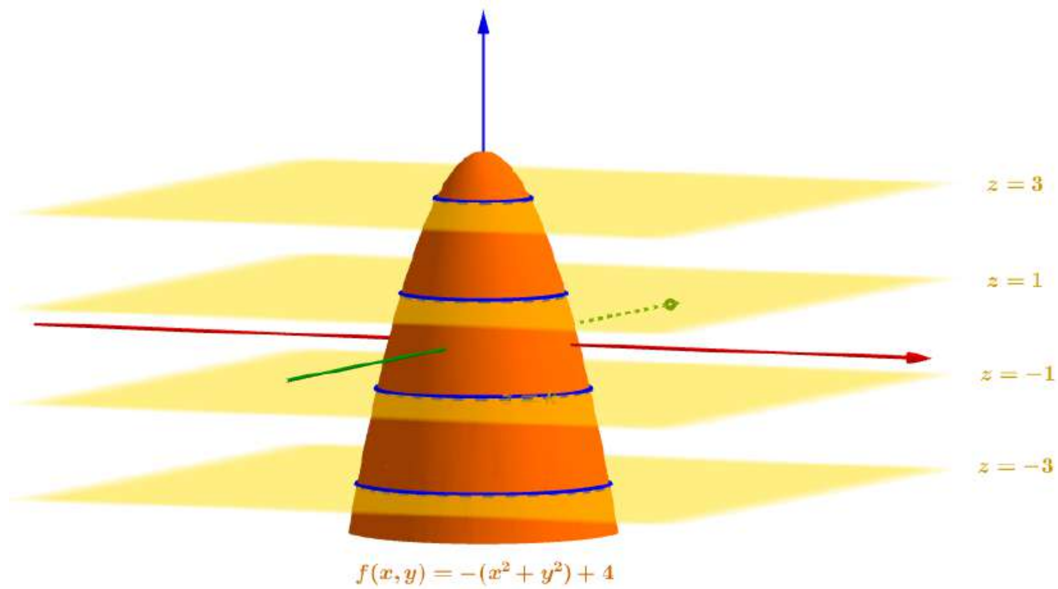
A etapa do *Materializar* é o momento da impressão do modelo computacional. É neste momento que transformamos o modelo computacional em modelo físico. Neste processo, envolve conhecimentos de engenharia, pois é necessário conhecer a matéria-prima e suas características para obter um bom resultado. Também nesta etapa, é necessário fazer testes, reimpressões, escolher a densidade do objeto, dimensões, cor, número de camadas, velocidade de impressão, entre outros. Todos esses parâmetros são definidos quando preparamos o modelo para impressão.

Durante a impressão, é preciso verificar se a impressora está executando corretamente os passos definidos na preparação do modelo. É neste momento que precisamos estar atentos aos possíveis problemas que podem alterar o modelo físico, como por exemplo, o superaquecimento da bandeja onde o objeto é impresso.

Antes de retornar a **Garagem**, decidi procurar o Hidaka para compreender melhor o funcionamento básico de uma impressora 3D. Como sempre, o Hidaka foi muito colaborativo e compartilhou seus conhecimentos comigo. Começamos com uma curadoria de sites que disponibilizam modelos desenvolvidos por outros makers e que são compartilhados gratuitamente. Entre os sites investigados destaco o *Thingiverse*[9], pois este site tem uma seção dedicada a projetos educacionais, dividida por área do conhecimento ou por série. Nesta seção encontrei, por exemplo, modelos de alguns sólidos de revolução, modelos de mosaicos de Escher e até mesmo o modelo de um espirógrafo (um brinquedo para desenhar curvas rolantes). Deste modo, um iniciante pode escolher um modelo pronto em algum site e executar a impressão. A desvantagem desta postura é a perda de todo o processo de programação e, consequentemente, tudo o que isso implica. A vantagem é que permite iniciar o processo complexo de impressão 3D de um modo mais amigável para depois ir se aprofundando.

Para transformar um modelo computacional e um objeto físico é preciso submeter o modelo 3D a um *fatiamento* para que a impressora construa o objeto camada por camada. Isto significa que antes de enviar o arquivo do modelo para impressão precisamos informar todo o caminho que deve ser seguido, para isso deve-se criar um arquivo no formato GCode com as informações necessárias para que a impressora possa executar a operação de impressão 3D. Este procedimento lembra a ideia de *"curvas de níveis"* do Cálculo (figura 8).

Figura 8 – Curvas de níveis



Fonte – O autor (2019).

Toda impressora 3D vem equipada com um software de fatiamento. A impressão

9 https://www.thingiverse.com

3D das camadas é feita a partir do derretimento da matéria-prima (filamento) ou a emissão de luzes sobre um material.

Em resumo, a impressão 3D apresenta três momentos: modelagem, fatiamento do modelo e impressão camada por camada.

Figura 9 – Processo de impressão 3D.

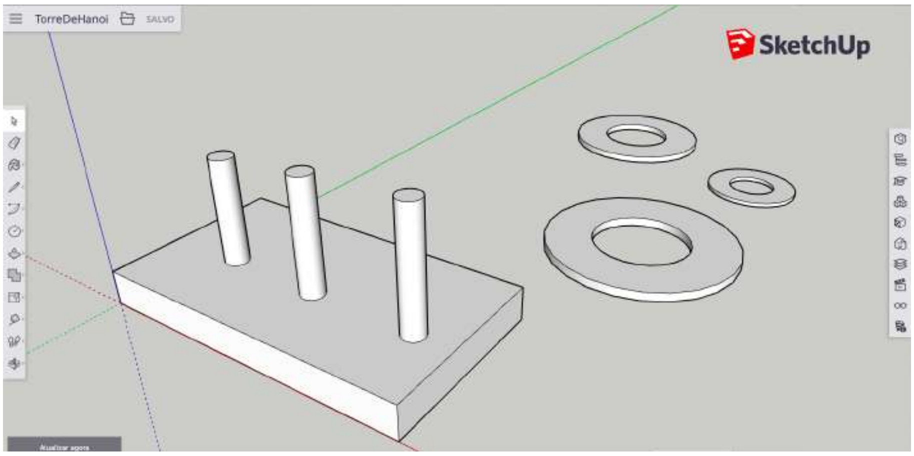
Fonte – FabAcademy - https://bit.ly/2TOQR1f

É importante saber como melhorar o modelo digital para que ele possa ser impresso com qualidade. Mas, mesmo as etapas intermediárias de otimização do modelo digital são fontes de muita aprendizagem.

Mais preparado, voltei a **Garagem** no sábado. Lá encontrei novamente Hidaka e seus colegas makers, que estavam modelando algumas peças para montar uma nova impressa 3D que eles estavam produzindo. Achei bem interessante, pois de uma impressora 3D é possível fazer outras impressoras 3D! Perguntei ao Hidaka que software ele utilizava para fazer seus modelos e ele me informou que usava o ScketchUp, um software de modelagem 3D, muito utilizado por arquitetos, engenheiros e designs.

Fiquei curioso e decidi manusear o SchetchUp em um dos computadores da **Garagem**. Num primeiro contato, modelei um famoso jogo chamado Torre de Hanói que estava na prateleira, próximo aos livros. Percebi que o software utiliza a ferramenta extrusão para transformar formas bidimensionais, como retângulos e círculos, em uma forma tridimensional. Com alguns círculos e um retângulo produzi a base da torre de Hanói e três discos (figura 10).

Figura 10 – Torre de Hanói no ScketchUp.



Fonte – O autor (2019).

Embora de fácil manipulação, percebi que com o SketchUp não era possível construir, por exemplo, etapas da Esponja de Menger com boa precisão tal como fiz com o OpenSCAD, pois teria que desenhar cada um dos cubinhos e posicioná-los manualmente com o mouse.

Assim, para ser um bom maker, eu precisava avançar e conhecer outros aplicativos, principalmente aqueles relacionados com a matemática. Para isto, comecei por uma curadoria de aplicativos e, adotei como primeiro critério de busca selecionar aplicativos usados por alunos e professores de matemática. Selecionei os seguintes softwares:

a) *Maxima*: é um sistema de computação simbólica, que realiza cálculos numéricos, algébricos e permite a visualização de gráficos em duas e três dimensões. O aplicativo permite que usuário programe rotinas a partir de uma linguagem própria, baseada na semântica Lisp.

b) *Maple*: é um aplicativo de álgebra computacional, desenvolvido e comercializado pela Maplesoft. Este software é amplamente utilizado por várias áreas, tais como matemática, física, engenharia, entre outras. O Maple possui uma grande biblioteca de rotinas que permite o cálculo de expressões numéricas, simbólicas e permite o desenho de gráficos em duas e três dimensões.

c) *Mathematica*: é um software de computação algébrica, continuamente desenvolvido pela empresa Wolfram Research e utilizado nas áreas de engenharia, física, matemática, biologia, finanças, entre outras. Este software possui diversos recursos de computação numérica, álgebra computacional e visualização de imagens.

d) *Geogebra*: é um software livre de matemática dinâmica, que envolve álgebra e geometria e foi desenvolvido por Markus Hohenwarter. Este aplicativo é capaz de representar, ao mesmo tempo e em um único ambiente visual, as características geométricas e algébricas de um mesmo objeto.

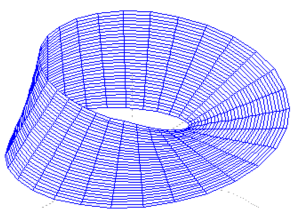
e) *OpenSCAD*: é um software que permite criar modelos CAD 3D e fornece duas técnicas principais de modelagem: a geometria sólida construtiva e a extrusão de contornos 2D.

Decidi testar os aplicativos selecionados e verificar a qualidade das imagens 3D geradas por estes aplicativos. Para este teste, escolhi como modelo a Faixa de Möbius.

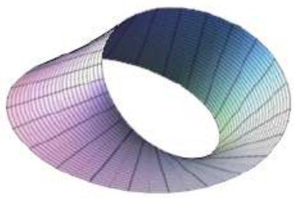
Para os aplicativos de computação simbólica ou de geometria dinâmica modelei a Faixa usando a sua parametrização e para os aplicativos do tipo CAD usei procedimentos geométricos de translação e rotação. Obtive os seguintes modelos:

Figura 11 – Modelos da Faixa de Möbius.

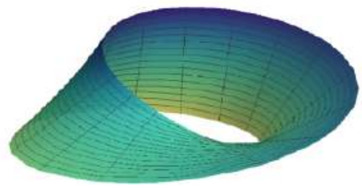
(a) Maxima



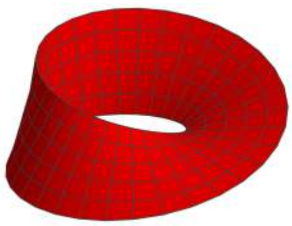
(b) Maple



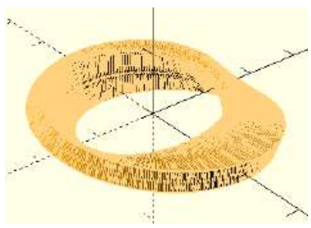
(c) Mathematica



(d) Geogebra



(e) OpenSCAD



Fonte – O autor (2019).

Conclui que as imagens 3D geradas por todos os aplicativos selecionados eram de qualidade satisfatória para a prototipagem rápida e adotei mais alguns critérios de seleção sendo os principais a gratuidade e a exportação de arquivos nos formatos OBJ e STL[10].

[10] Arquivos no formato .stl (do inglês: *Standard Triangle Language*) ou .obj (do inglês: *Object File Wavefront 3D*) são utilizados na impressão 3D e contém os dados do layout do objeto tridimensional.

Quadro 2.1 – Resumo comparativo dos aplicativos.

Critérios	**Aplicativos**				
	Maxima	**Maple**	**Mathematica**	**Geogebra**	**OpenSCAD**
Imagem 3D satisfatória?	Sim	Sim	Sim	Sim	Sim
Exporta em formato obj ou stl?	Sim	Sim	Sim	Sim	Sim
É gratuito?	Sim	Não	Não	Sim	Sim
Utiliza linguagem de programação?	Sim	Sim	Sim	Sim	Sim
Permite desenhar à mão livre?	Não	Sim	Não	Sim	Não
Utiliza funções matemáticas?	Sim	Sim	Sim	Sim	Sim
Permite aplicar texturas no modelo?	Sim	Sim	Sim	Sim	Sim

Fonte – O autor (2019).

Após os testes, optei por não utilizar os softwares *Maple* e *Mathematica* pois, embora muito utilizados no meio acadêmico, sua licença de utilização não é gratuita.

Infelizmente, o software *Maxima* também não será utilizado, embora este aplicativo seja gratuito, ainda não exporta facilmente arquivos nos formatos compatíveis com a impressão 3D. Segundo Eric Barth[11], para gerarmos um arquivo no formato STL com o aplicativo *Maxima* é necessário criar um código específico para gerar um arquivo especial, que posteriormente será convertido no formato STL com outro software através de algoritmo específico.

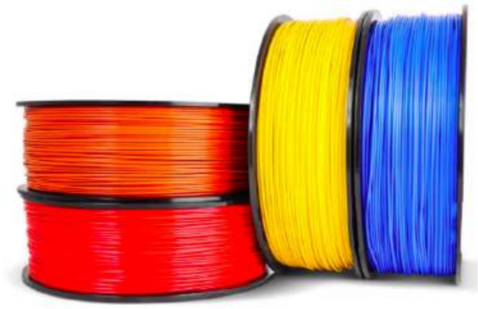
Nesta pesquisa, usaremos o aplicativo Geogebra ou o aplicativo OpenSCAD, pois ambos satisfazem os critérios estabelecidos. O Geogebra é um software de geometria dinâmica, que reúne geometria, álgebra, estatística e cálculo. Em sua versão online, o aplicativo permite que as imagens 3D produzidas em seu ambiente gráfico, possam ser exportadas para o formato .stl, compatível com a impressão 3D. O OpenSCAD é um software para criaçao de modelos sólidos a partir da leitura de um script (código de programação) e, tal como o Geogebra, permite que o usuário exporte seu modelo para o formato .stl. Naturalmente, é preciso ter conhecimentos razoáveis sobre a funcionalidade desses aplicativos selecionados, conhecimentos que adquiri durante a minha trajetória acadêmica. Para aqueles que ainda não conhecem os aplicativos sugiro consultar os seguintes materiais: https://www.geogebra.org/materials e http://www.openscad.org/documentation.html.

[11] The MaximaList, disponível em: https://themaximalist.org/2016/09/30/3d-printing-and-maxima/

Noto que, além do meus conhecimentos matemáticos sobre os objetos escolhidos, também usarei meus conhecimentos sobre o Geogebra ou o Open SCAD, ou seja, minhas habilidades computacionais, o que mostra como acontece a interdisciplinaridade neste processo.

Lembrando as orientações do Hidaka, comecei uma curadoria sobre os materiais para a impressão dos objetos. Estes materiais são chamados de filamentos (figura 12), que consistem em um carretel de um "fio" feito de um polímero termoplástico, que atinge um estado pastoso ao ser aquecido.

Figura 12 – Filamentos variados para impressora 3D.



Fonte – Sheti 3D - https://bit.ly/2UFCNEC

Nesta curadoria de filamentos, destaco algumas características dos materiais (descritas no quadro 2.2) que serão importantes no momento da materialização do modelo.

Quadro 2.2 – Resumo comparativo dos filamentos.

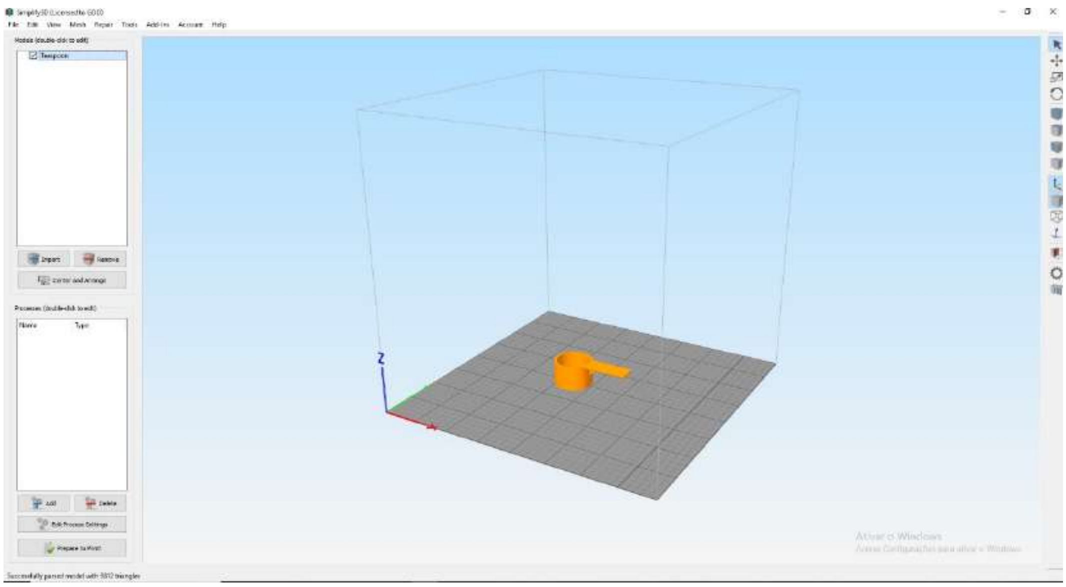
Material	Composição	Propriedades	Acabamento
ABS	Derivados do Petróleo	- Resistente - Durável - Ligeiramente flexível	- Difícil de lixar - Maior brilho e transparência
PLA	Vegetal	- Resistente - Forte - Biodegradável	- Fácil de lixar e permite a utilização de acetona - Médio brilho e transparência
PETG	Plástico	- Resistente - Maleável - Reciclável	- Resistente à produtos químicos - Maior brilho e transparência

Fonte – O autor (2019).

Na fase de preparação das etapas da Esponja de Menger que foram impressas, ou seja, na fase de fatiamento do modelo, usei o software Simplify3D, cuja licença de uso foi adquirida junto com a impressora 3D, que encontra-se na **Garagem**.

O Simplify3D, é um software pago, que possui uma interface gráfica simples (figura 13), na qual é possível preparar por completo o modelo, definindo as camadas, estruturas auxiliares (denominadas de suportes), porcentagem e tipo de preenchimento; projetar o tempo e simular a impressão, de modo a identificar possíveis problemas de impressão antecipadamente.

Figura 13 – Interface gráfica do Simplify3D.

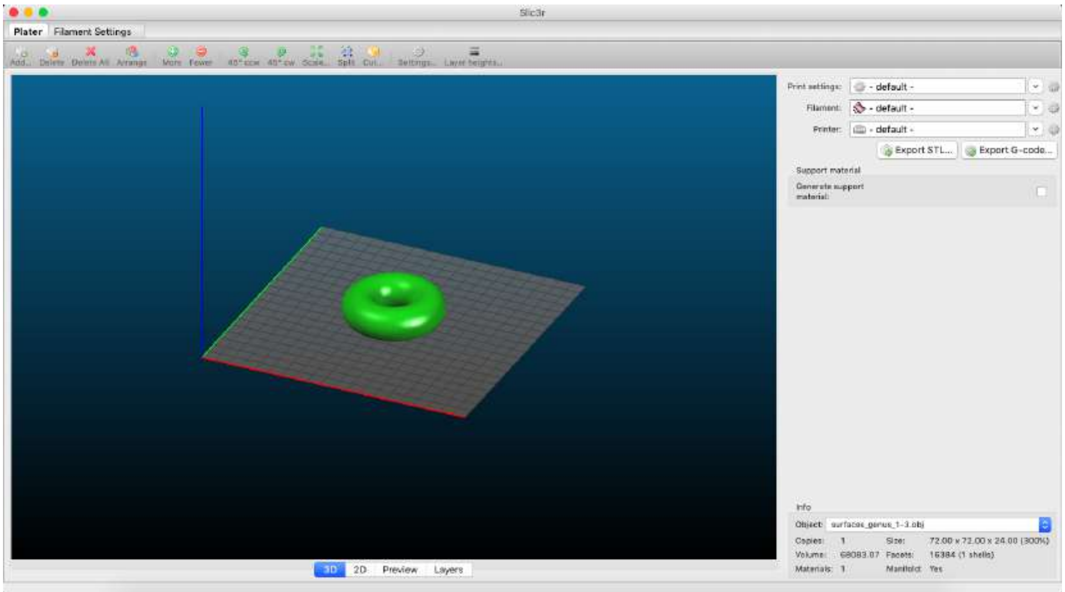


Fonte – O autor (2019).

Não me senti muito satisfeito em usar um software pago, pois sou adepto da política do software livre e/ou aberto. Por esta razão, busquei uma alternativa gratuita para a preparação do modelo. Na busca por um aplicativo de código aberto, encontrei o aplicativo *Slic3r* utilizado para fatiar modelos tridimensionais.

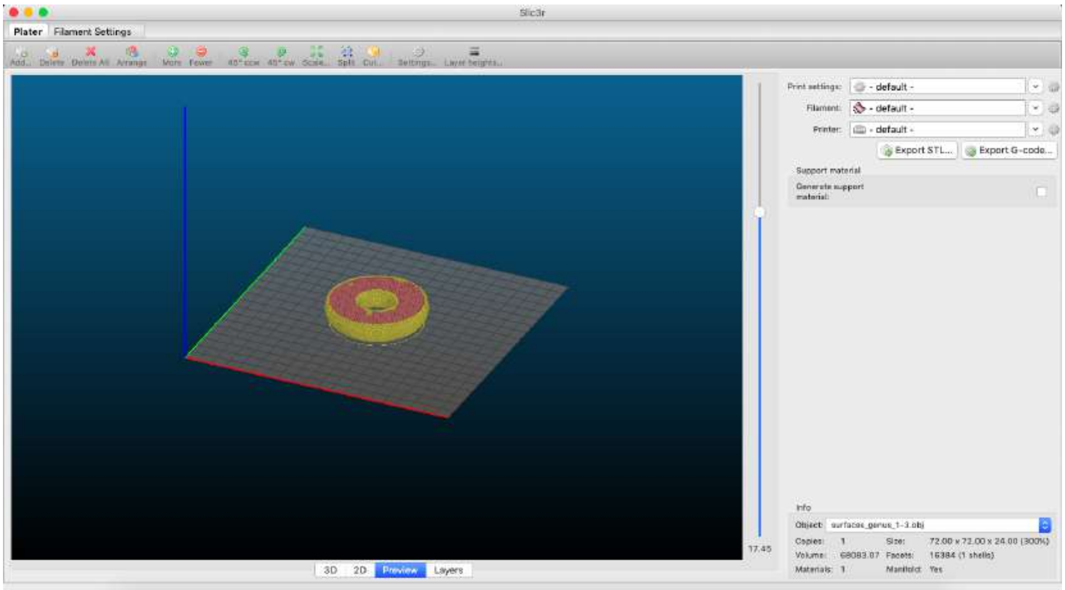
O aplicativo *Slic3r* é um software com interface gráfica simples, de fácil manuseio, de código aberto e disponível para todas as plataformas (Windows, Mac e Linux) (figura 14).

Figura 14 – Interface gráfica do Slic3r - Visualização 3D.



Fonte – O autor (2019).

Figura 15 – Interface gráfica do Slic3r - Simulação da Impressão.



Fonte – O autor (2019).

Ao comparar os dois aplicativos – Simplify3D e Slic3r – observei que ambos possuem praticamente as mesmas funcionalidades, contudo o primeiro é relativamente mais rápido no processamento das informações e possui versão em Português. Como as diferenças entre os aplicativos são mínimas e não comprometem o resultado final dos objetos que serão materializados, optei por migrar do Simplify3D para o Slic3r, para valorizar o uso de softwares livres.

Escolhidos os objetos matemáticos (imaginar), os aplicativos para a modelagem e o aplicativo de preparação do modelo (planejar), senti-me preparado e muito entusiasmado para começar a prototipagem e materializar outros objetos matemáticos. Chamarei cada processo de protopitagem de *Artefato* e vou agora apresentá-los a você.

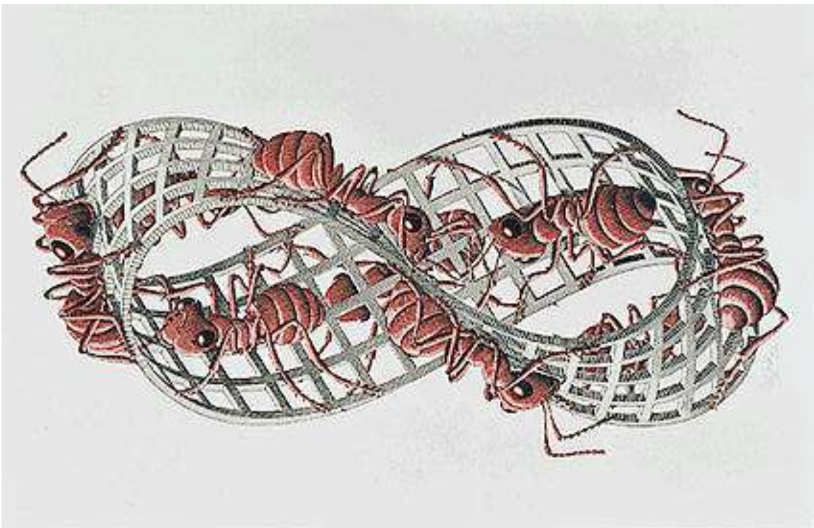
2.1 Artefato 1: Faixa de Möbius

A Faixa de Möbius é um objeto matemático com propriedades geométricas peculiares e bastante interessantes que inspira matemáticos e artistas.

Em 1963, o artista gráfico holandês Maurits Cornelis Escher[12] criou a obra Möbius Strip II (figura 16) inspirada na Faixa de Möbius. Nesta obra, Escher desafia-nos a seguir o percurso de uma formiga e perceber, com certo espanto, que a formiga não muda de lado e volta ao mesmo lugar. Escher explora o fato da Faixa de Möbius ser uma superfície não orientável e ter um só lado desenhando o movimento da formiga ao longo da faixa.

Meu encontro com esta obra aconteceu na disciplina Matemática e Arte cursada no segundo semestre do mestrado, enquanto buscava conexões entre Op Arte, movimento artístico que tem como característica principal a ilusão ótica, e as obras de Escher.

Figura 16 – Möbius Strip II, por M. C. Escher (1963).



Fonte – Disponível em https://bit.ly/2TVGCZV

Recordo que já modelei a Faixa de Möbius no momento que executei o teste

[12] Maurits Cornelis Escher é um artista holandês conhecido por representar em suas obras, construções impossíveis, preenchimento regular do plano e por explorar a ideia de infinito.

nos aplicativos selecionados para produção dos modelos digitais. Agora, detalharei como produzi este modelo.

Para a modelagem, usei o aplicativo Geogebra, que é um software de Geometria e gerei o modelo através da parametrização da superfície, que pode ser encontrada em Carmo (1995, p. 115).

$$X(u,v) = \left(\left(2 - v.\text{sen}\frac{u}{2}\right)\text{sen}(u), \left(2 - v.\text{sen}\frac{u}{2}\right)\cos u, v.\cos\frac{u}{2}\right), \tag{2.1}$$

com $0 < u < 2\pi$ e $-1 < v < 1$.

Para gerar o modelo com o Geogebra basta digitar a parametrização da superfície, codificada na linguagem do aplicativo, na Caixa de Entrada:

```
Superfície(((2-v*sen(u/2))*sen(u), (2-v*sen(u/2))*cos(u), v*cos(u/2)),
u,0,2*Pi,v,-1,1)
```

Além disso, explorei algumas opções de textura do aplicativo. Os resultados obtidos são mostrados na figura 17.

Figura 17 – Modelo 3D da Faixa de Möbius - Geogebra.

(a) Modelo com Textura e Preenchimento

(b) Modelo sem Textura

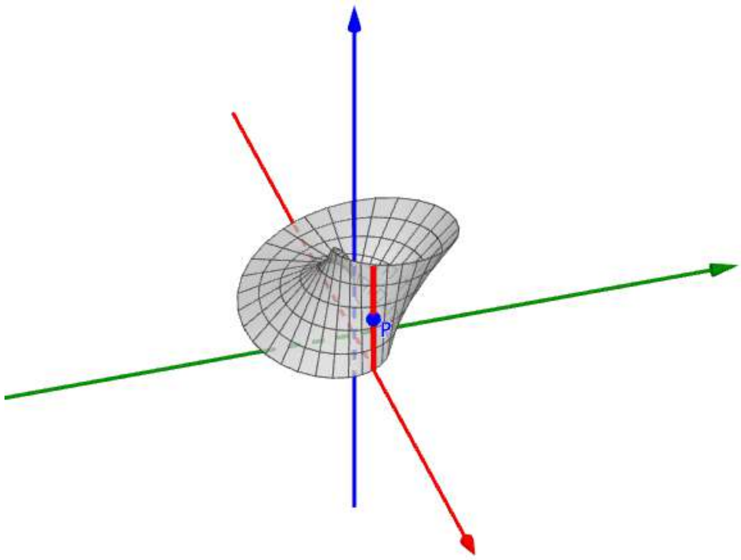
(c) Modelo com Textura

Fonte – O autor (2019).

Por curiosidade, decidi modelar a Faixa de Möbius com o aplicativo OpenSCAD usando a parametrização da superfície. O resultado, no entanto, não foi satisfatório, pois este aplicativo não trabalha diretamente com as funções e precisei realizar um outro procedimento.

A figura 18 ilustra a Faixa de Möbius obtida pela rotação de segmento de reta S em torno de seu ponto médio P ao mesmo tempo que P move-se ao longo de uma circunferência c, de tal modo que, quando P da uma volta em c, o segmento da meia volta em torno de P.

Figura 18 – Procedimento geométrico para construção da Faixa de Möbius.



Fonte – O autor (2019).

A simulação que farei no OpenSCAD seguirá este procedimento. Para isto, estabeleci os valores `altura`, `comprimento` e `espessura` para definir o *"segmento"* S. Como já sabemos, para uma impressão eficiente, devemos introduzir uma "espessura" na peça e por esta razão estamos simulando o segmento como um paralelepípedo.

Defini também os valores `raio` e `torcao` que indicam, respectivamente, o deslocamento de S em relação à origem e a sua rotação em torno do próprio centro:

```
altura=9; comprimento=3; espessura=1; raio=15; torcao=1;
```

A Faixa de Möbius será obtida por um sequência de paralelepípedos transladados 15 unidades em relação à origem, que serão rotacionados em torno do eixo z ao mesmo tempo que rotacionam em relação ao próprio centro.

Esta sequência é obtida pelo comando `for()`, com a variável `i` entre de 0 a 360 (uma volta completa). O resultado é o seguinte:

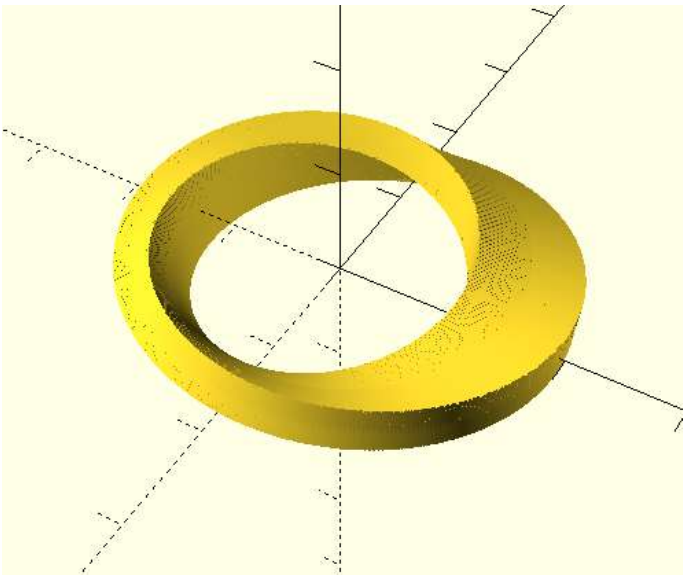
```
for(i=[0:360]){
    hull(){
    rotate([0,0,i])
    translate([raio,0,0])
    rotate([0,90+i*torcao*0.5,0])
    cube([comprimento,espessura,altura],center=true);
}}
```

Como a figura é obtida por uma sequência de paralelepípedos, para garantir que não haja nenhum espaço vazio entre os paralelepípedos e nem "bicos" extras, utilizei o comando `hull()` para compactar o modelo. O algoritmo resultante é:

```
altura=9;
comprimento=3;
espessura=1;
raio=15;
torcao=1;
for(i=[0:360]){
    hull(){
    rotate([0,0,i])
    translate([raio,0,0])
    rotate([0,90+i*torcao*0.5,0])
    cube([comprimento,espessura,altura],center=true);
}}
```

E o modelo 3D é mostrado na figura 19.

Figura 19 – Modelo 3D da Faixa de Möbius - OpenSCAD.



Fonte – O autor (2019).

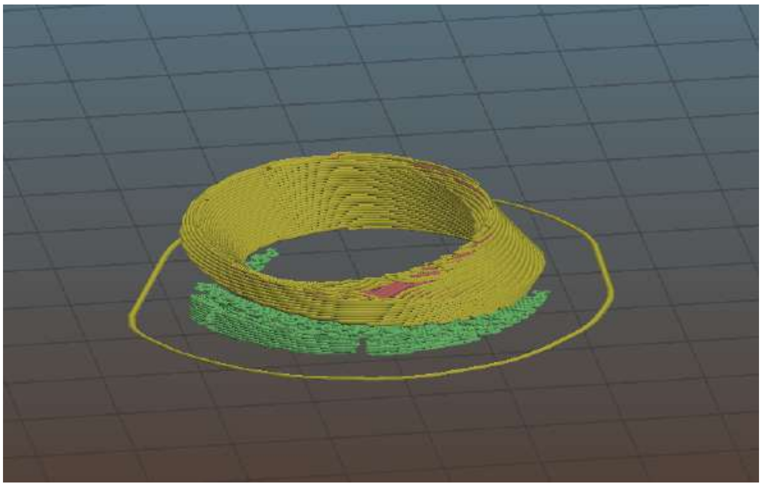
Observei que os modelos gerados com o Geogebra e com o OpenSCAD são semelhantes e optei pelo segundo modelo.

Iniciei a preparação da impressão, renderizando[13] o modelo 3D e exportando o arquivo para o formato STL para, posteriormente, fatiá-lo e enviá-lo para impressão. A

[13] Renderizar é o ato de processar digitalmente um código script para transformar um ou mais arquivos num único resultado final.

figura 20 ilustra o fatiamento do modelo.

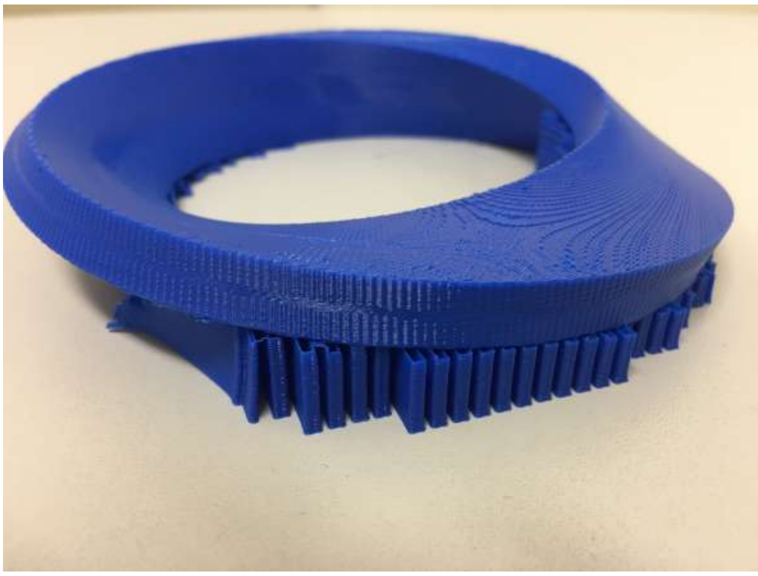
Figura 20 – Modelo 3D da Faixa de Möbius no aplicativo de fatiamento.



Fonte – O autor (2019).

Na figura 20 é possível observar uma pequena estrutura verde, que é denominada de *suporte*. Esta estrutura é gerada automaticamente pelo aplicativo de fatiamento, para dar sustentação e estabilidade para a peça ao longo da impressão e é retirado pelo usuário no final do processo. Entretanto, nem sempre esse tipo de estrutura é necessária. No caso do modelo da Faixa de Möbius, foi necessário utilizar os suportes, para dar melhor sustentabilidade à peça. Após cerca de 4 horas de impressão, obtive o seguinte resultado (figura 21): uma Faixa de Möbius com 15 centímetros em PLA azul.

Figura 21 – Faixa de Möbius impressa em PLA azul.



Fonte – O autor (2019).

Não foi surpresa que o objeto impresso tivesse algumas rugosidades e imperfeições, que são comuns no processo de impressão. Contudo, após retirar os suportes, o resultado foi muito satisfatório (figura 22):

Figura 22 – Faixa de Möbius após retirada dos suportes.

Fonte – O autor (2019).

Após a impressão, me questionei como poderia utilizar este objeto físico, que até então, só poderia ser visto num livro didático ou na tela de um computador. Fiquei brincando com ele, manuseando com as mãos e percebi que poderia estimular a curiosidade do aluno sobre a propriedade da Faixa de Möbius ter *apenas um lado*. Por exemplo, ele poderia explorar a Faixa de Möbius com um lápis percorrendo-a para verificar que saindo de um ponto o traço feito com o lápis retorna ao ponto inicial.

Volto para casa com mais um objeto matemático na mochila, imaginando o que fariam os meus alunos num ambiente de aprendizagem como a **Garagem**. O processo de prototipagem está ficando mais familiar e pretendo imprimir mais objetos para aprimorar meus conhecimentos. Estes dias foram bem interessantes, aprender matemática num espaço Maker é muito divertido e estimulante.

Começo a compreender melhor como usar estes objetos para ensinar matemática e relacionei esta minha reflexão com as ideias que Fischbein (1993) apresentou em dissertação de mestrado sobre *O Processo de Construção de Objetos de Aprendizagem em Cálculo Diferencial e Integral durante uma Atividade de Design.*

> A utilização das Tecnologias de Informação e Comunicação -TIC para a visualização e manipulação das figuras geométricas e gráficos, pode auxiliar o aluno na criação de imagens mentais sobre

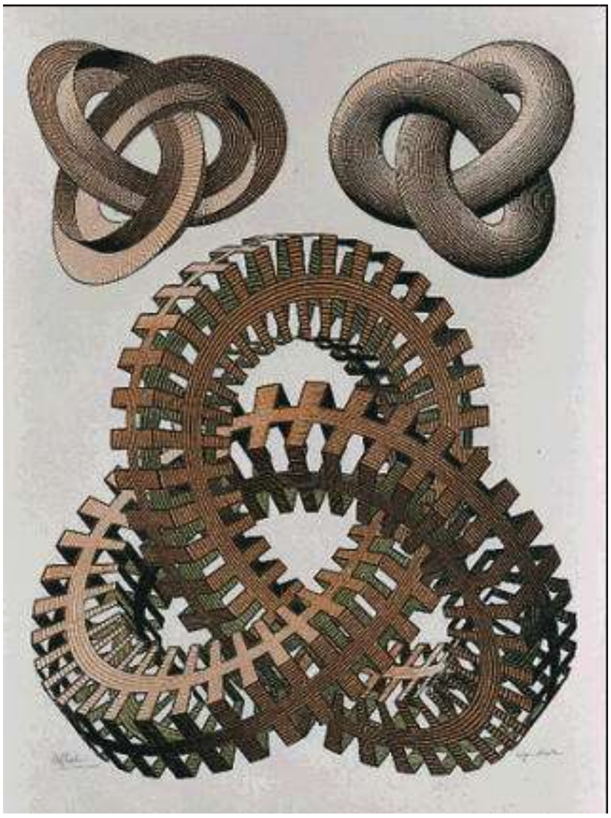
> os objetos exibidos no computador. Dessa forma, o aluno pode criar relações destas imagens com os conceitos matemáticos envolvidos (FISCHBEIN, 1993 apud REIS, 2010, p. 42).

Podemos usar o processo de prototipagem e os objetos impressos para estimular a imaginação dos alunos na construção de conhecimentos sobre as propriedades ou conceitos matemáticos relacionados com este objetos de aprendizagem.

2.2 Artefato 2: Nó Trifólio

Estimulado pelas intrigantes obras de Escher, fiz uma curadoria no site WikiArt.org[14] e encontrei a obra *Knots* (1965). Esta obra é uma xilogravura em vermelho, verde e marrom, com três imagens distintas de um mesmo nó, sendo dois na parte superior e um no centro em tamanho maior que os outros dois, como mostra a figura 23:

Figura 23 – Knots - M. C. Escher (1965).



Fonte – Disponível em https://bit.ly/2Yo2kUK

Como tinha poucos conhecimentos sobre Teoria dos Nós, precisava fazer uma breve *imersão* matemática no assunto. Foi o que fiz.

[14] https://www.wikiart.org/pt

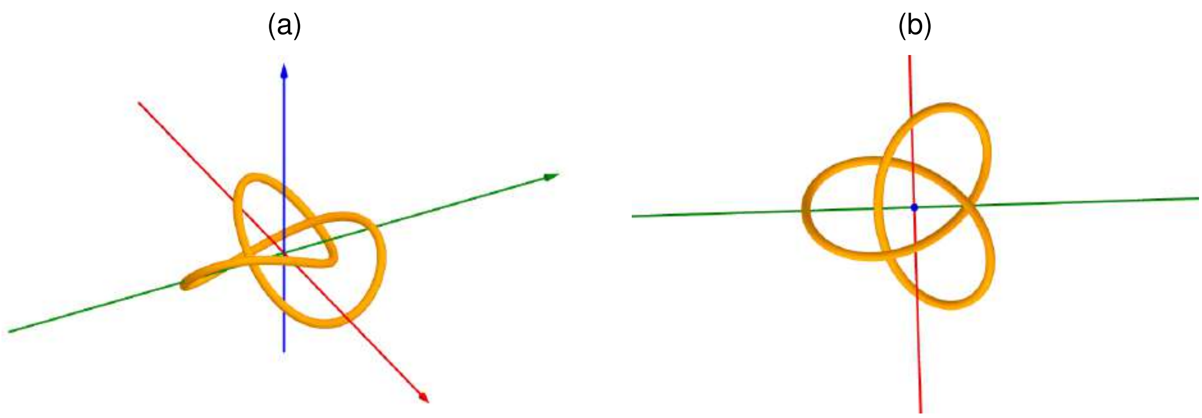
Segundo Colli (2004), a teoria dos nós remonta o final do século XIX e faz parte da topologia algébrica. A topologia algébrica estuda curvas, no espaço, sem auto-interseções e fechadas. A Teoria considera duas curvas equivalentes quando uma pode ser deformada continuamente na outra sem que, neste processo de deformação, aconteçam auto-interseções, rupturas ou colapsos. A Teoria busca obter critérios para afirmar quando duas curvas são equivalentes. Um *nó* não é uma curva particular, mas todo o conjunto de posições que ela pode assumir se for deformada de acordo com esses critérios. Por exemplo, o nó trivial é a classe de curvas que podem se deformar até se tornarem círculos. O exemplo mais simples de um nó não trivial é o nó trevo ou *Nó Trifólio*. Este nó pode ser obtido juntando as duas extremidades, resultando em um laço atado.

Um nó trifólio é definido pelas seguintes equações paramétricas[15]:

$$\begin{cases} x &= \operatorname{sen} t + 2\operatorname{sen}(2t) \\ y &= \cos t - 2\cos(2t) \\ z &= -sen(3t) \end{cases} \tag{2.2}$$

com $t \in [0, 2\pi]$. A figura 24 ilustra nós trifólicos.

Figura 24 – Nó Trifólio.



Fonte – O autor (2019).

A Teoria dos Nós tem muitas aplicações como, por exemplo na Física, em particular na teoria das supercordas e na teoria quântica e na Biologia no estudo das moléculas, tais como polímeros e o DNA.

O processo de modelagem do nó trifólio é semelhante ao da Faixa de Möbius, que consiste em gerar a figura a partir de uma sequência de translações, neste caso, de esferas.

Defini o módulo `no(r,passo,final)`, em que `r` é o raio da esfera a ser transladada, `passo` é o espaço entre cada esfera e `final` é o último valor em que a translação

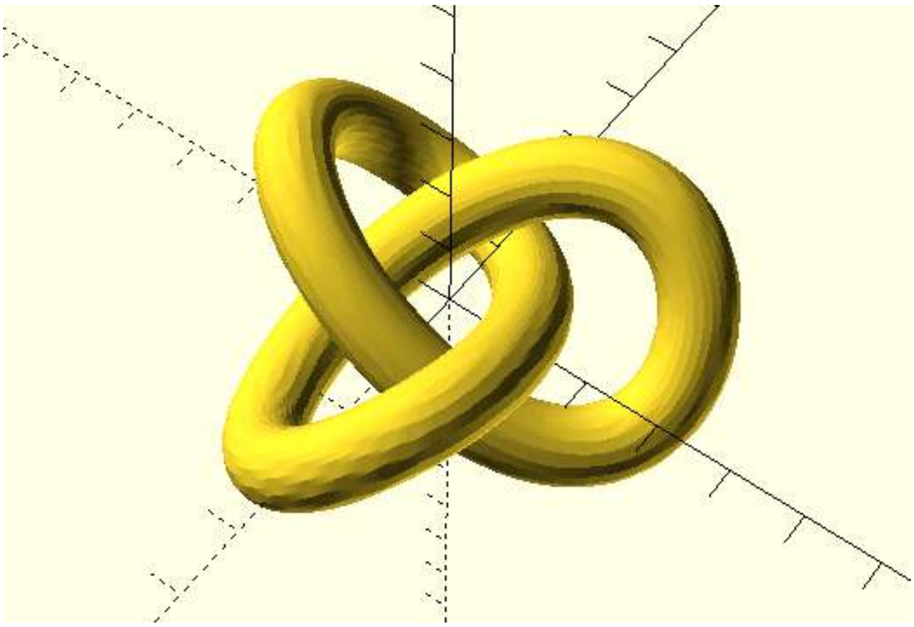
15 http://twixar.me/CtRK

deve ocorrer. Neste modelo, a translação será no traço descrito pela função `f(t)`, dada em (2.2), com t entre 0 a 360. Utilizei o comando `$fn` para definir a qualidade (resolução) da figura. O resultado é o seguinte algoritmo:

```
function f(t) =[sin(t)+2*sin(2*t),cos(t)-2*cos(2*t),-sin(3*t)];
$fn=25;
no(0.5, 1, 360);
module no(r, passo, final) {
for (t=[0: passo: final]) {
translate(f(t)) sphere(r);}}
```

O modelo 3D resultante é:

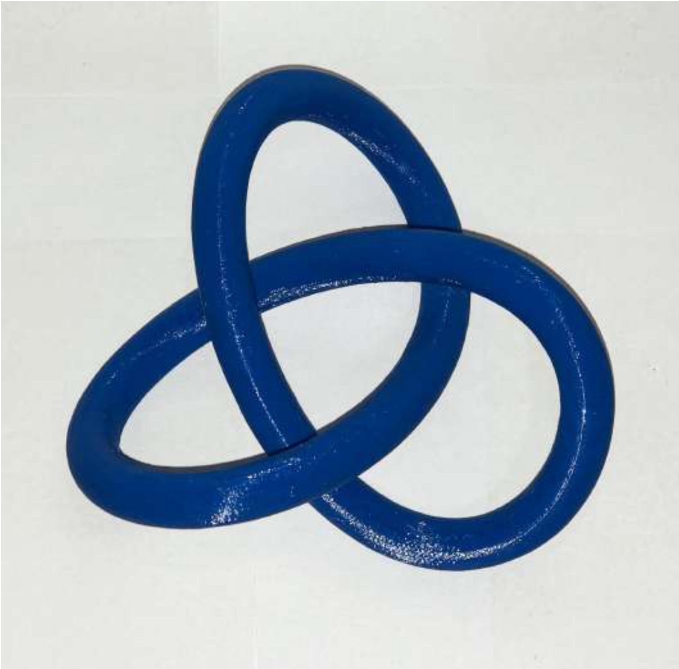
Figura 25 – Modelo digital do Nó Trifólio - OpenSCAD.



Fonte – O autor (2019).

A seguinte figura ilustra objeto Nó Trifólio impresso :

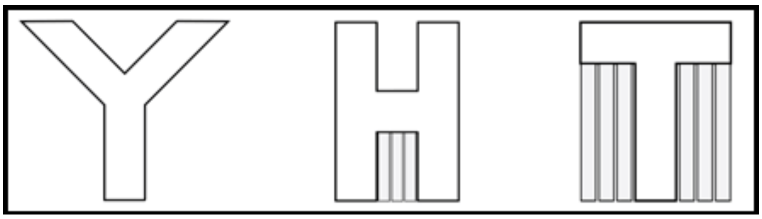
Figura 26 – Objeto impresso - Nó Trifólio.



Fonte – O autor (2019).

Após a impressão do Nó Trifólio, percebi mais uma vez que os suportes foram necessários para dar sustentação à peça. Em geral, o uso de suportes na impressão é necessário para objetos que possuem uma inclinação superior à 45º ou com estruturas que precisam de algum tipo de sustentação (figura 27).

Figura 27 – Ilustração de utilização de suportes.



Fonte – Disponível em: http://twixar.me/KHPK

Até o momento tinha modelado a Faixa de Möbius e o Nó Trifólio e desejava modelar outros objetos matemáticos. Voltei ao site *Thingiverse*[16] para buscar objetos matemáticos. Encontrei alguns mosaicos, a faixa de Móbius, alguns jogos e até mesmo uns fractais. Escolhi o Paraboloide Hiperbólico por ter sido modelado no OpenSCAD. Decidi, então, implementar este objeto matemático, seguindo as instruções de William Clampitt[17].

[16] https://www.thingiverse.com/
[17] http://twixar.me/GKVK

2.3 Artefato 3: Paraboloide Hiperbólico

O paraboloide hiperbólico é uma superfície quádrica, cuja equação geral é

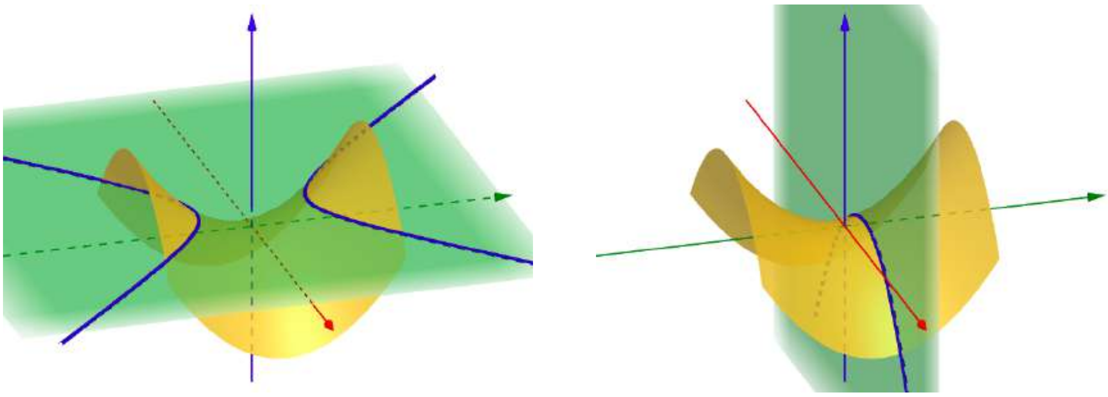
$$\frac{z}{c} = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2},$$

com a, b e c números reais (STEWART, 2013).

O paraboloide hiperbólico, segundo Stewart (2013), é uma superfície cujos cortes horizontais são hipérboles (figura 28a), enquanto que os cortes verticais são parábolas (figura 28b).

Figura 28 – Parabolóide Hiperbólico.

(a) Cortes Horizontais (b) Cortes Verticais



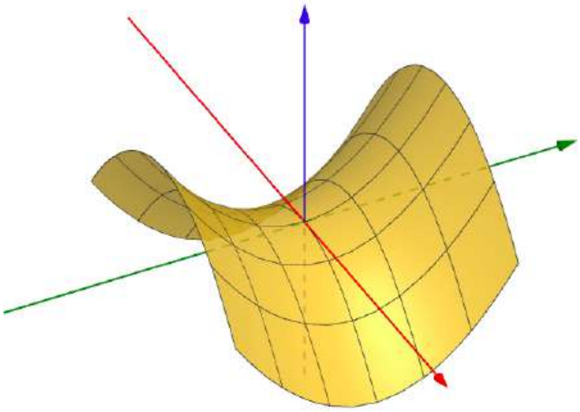
Fonte – O autor (2019).

Queremos modelar, com o software OpenSCAD, o paraboloide hiperbólico dado pela equação

$$z = \frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{4}, \tag{2.3}$$

cujo gráfico é representado na figura 29.

Figura 29 – Paraboloide Hiperbólico.



Fonte – O autor (2019).

Para gerar o modelo digital do paraboloide hiperbólico, introduzi a função dada em (2.3) no intervalo $[-3, 3]$ usando o comando `pow(a,b)`, que define potência sendo `a` a base e `b` o expoente.

```
function f(x,y) = (pow(y,2)/4)-(pow(x,2)/4);
Min=-3;
Max=3;
```

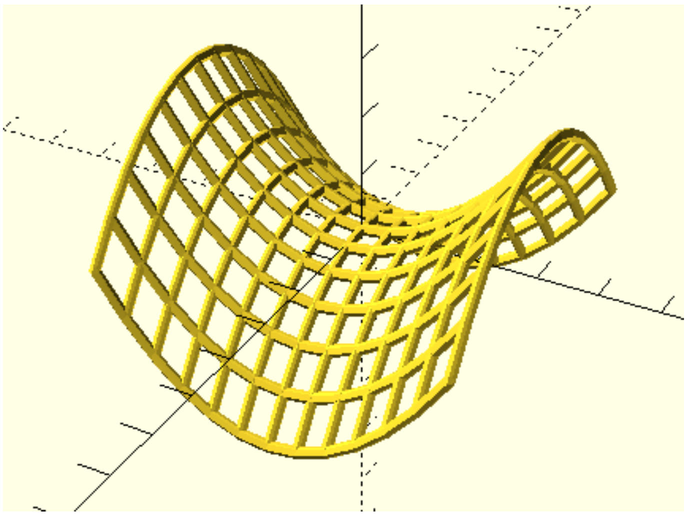
Em seguida, utilizando a mesma técnica da Faixa de Möbius, defini os módulos `px` e `py`, que consiste em criar as curvas dos cortes em relação ao eixo x e ao eixo y, respectivamente.

```
module px(){
  for(y = [Min:0.5:Max])
    for(i = [Min:0.5:Max-0.5])
        hull()
            for(x=[i:0.5:i+0.5])
                translate([x,y,f(x, y)])
                    sphere(0.1);}
module py(){
  for(x=[Min:0.5:Max])
    for(i = [Min:0.5:Max-0.5])
       hull()
            for(y=[i:0.5:i+0.5])
                translate([x,y,f(x, y)])
                    sphere(0.1);}
```

Para visualizar o resultado, criei o módulo `grafico()`, que é a união dos módulos `px()` e `py()`:

```
module grafico(){
    px(); py();}
grafico();
```

Figura 30 – Parabolóide Hiperbólico - OpenSCAD.

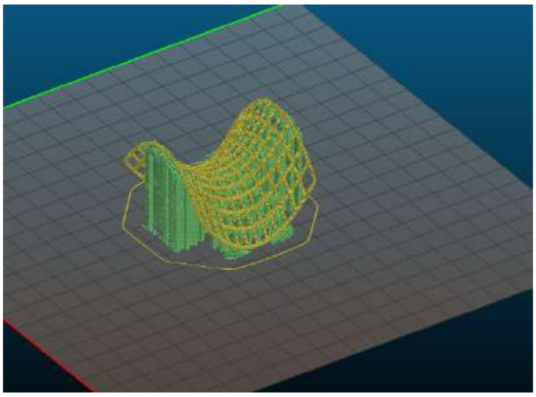


Fonte – O autor (2019).

No momento de preparação (fatiamento) do modelo digital para a impressão 3D (figura 31c), precisei inserir estruturas auxiliares (figura 31a) para dar sustentação à peça durante a impressão (figura 31b). Posteriormente, os suportes foram retirados e objeto final é mostrado na figura 31d.

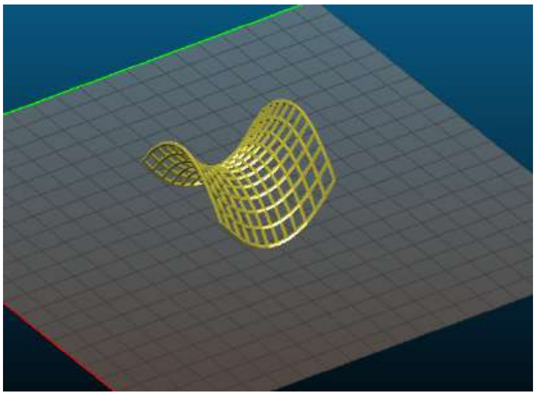
Figura 31 – Parabolóide Hiperbólico - Etapas de Impressão.

(a) Modelo Computacional com Suporte



(b) Objeto Físico com Suporte

(c) Modelo Computacional sem Suporte



(d) Objeto Físico sem Suporte

Fonte – O autor (2019).

Após nove horas de impressão, observei a complexidade desse modelo, que precisou de muitos suportes, que foram descartados posteriormente. A peça final ficou exatamente tal como o modelo, sem qualquer rugosidade ou deformação. Este talvez tenha sido o objeto mais complexo que imprimi!

Quanto mais eu adentrava no mundo da modelagem e impressão 3D, mais motivado eu me sentia. Por minha paixão pelos fractais, achei que seria interessante imprimir o Tapete de Sierpinski e melhorar a programação da Esponja de Menger. Foi o que fiz.

2.4 Artefatos Fractais

Meu primeiro contato com a Geometria Fractal foi na graduação. Naquele momento, estudar Fractais foi um ponto de inflexão em minha formação acadêmica, pois ampliou meu horizonte acadêmico introduzindo na minha formação uma geometria não-euclidiana. Foi um desafio que me fez perceber o quanto a matemática é fascinante.

Naquele momento houve, de imediato, um fascínio e uma *paixão à primeira vista* pelos fractais, por sua beleza singular e propriedades curiosas. É esta mesma paixão que me faz retornar aos Fractais nesta pesquisa de mestrado.

Na graduação, estudei os fractais e suas propriedades e, com auxílio da tecnologia, produzi algoritmos computacionais para gerar os fractais de forma iterativa. Agora, no mestrado, quero materializar os meus fractais preferidos com impressora 3D.

Até meados do século XX, a geometria euclidiana modelava as mais variadas formas do nosso cotidiano usando figuras geométricas como os círculos, triângulos ou quadriláteros, porém era limitada para representar formas mais complexas e irregulares como nuvens, plantas, flocos de neve ou a costa litorânea do Brasil (DALPIAZ, 2016). Era necessário uma nova forma de olhar estes modelos, uma nova geometria para tratar estruturas com fragmentações, dobras, rugosidades e outros tipos de padrão.

A descoberta que a geometria clássica não era suficiente para descrever certos padrões aconteceu em meados da década de 50 do século XX. Em 1958, Mandelbrot foi convidado para trabalhar na IBM[18], em Nova Iorque e, seu trabalho, o levou a estudar os ruídos em sinais elétricos que causavam interferência na comunicação de dados entre computadores. A aleatoriedade e irregularidade dos ruídos nas linhas telefônicas que causavam erros de transmissão, apareciam como as principais dificuldades encontradas pelos engenheiro da IBM para resolver o problema. Entretanto, Mandelbrot resolveu o problema dos ruídos propondo um modelo inovador que usava um conjunto criado pelo matemático Georg Cantor, na década final do século XIX, em seu trabalho sobre números reais. Este conjunto, conhecido como Conjunto de Cantor, é obtido por um processo iterativo e infinito quando retiramos o terço médio de divisões sucessivas no intervalo $[0, 1]$. Mandelbrot, percebeu que os ruídos, apesar de aleatórios, apresentavam um padrão e associou este padrão ao conjunto de Cantor. Este modelo simulou de forma satisfatória o fenômeno e o problema foi resolvido (BARBOSA, 2002).

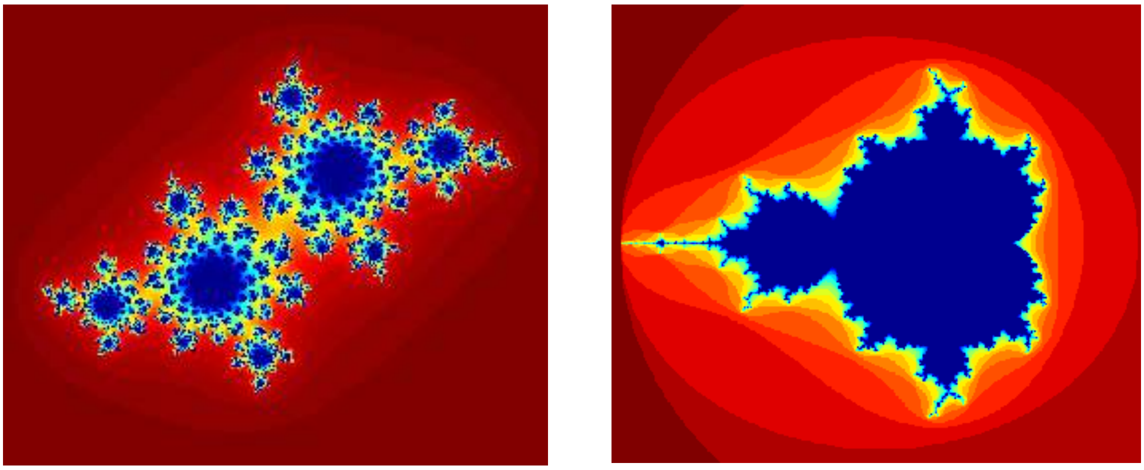
Modelar os ruídos dos sinais telefônicos com a estrutura recursiva do Conjunto de Cantor possibilitou a Mandelbrot compreender como os métodos da geometria clássica não eram adequados para descrever problemas matemáticos relacionados com processos iterativos. Em 1975, Mandelbrot cunhou o nome *fractal* (do latim, *fractus*, que significa *quebrar, fracionar*) para designar os objetos desta nova geometria.

Com a Geometria Fractal é possível modelar diversas formas da natureza, como por exemplo, nuvens, montanhas e traçados de rios, que possuem certo grau de irregularidade e complexidade. Uma característica muito interessante dos fractais, que atraiu os mais diversos profissionais, em particular os artistas digitais, é a beleza impressionante de alguns fractais, como os conjuntos de Julia (figura 32a) e Mandelbrot (figura 32b).

[18] A IBM (*International Business Machines*) é uma empresa norte-americana voltada para a área de tecnologia da informação.

Figura 32 – Fractais

(a) Conjunto de Julia (b) Conjunto de Mandelbrot



Fonte – Disponível em: http://twixar.me/lVRK

No contexto do ensino e aprendizagem em matemática superior podemos explorar muitos conceitos e propriedades importantes: o conceito de limite através do cálculo de áreas ou volumes, a aplicação do Teorema de ponto fixo através da construção digital de fractais pelo processo aleatório, noções de dimensão fractal através do cálculo da dimensão por autossimilaridade, transformações autossimilares através da construção do fractais através do seu sistema de funções iteradas, entre outros (FALCONER, 2003).

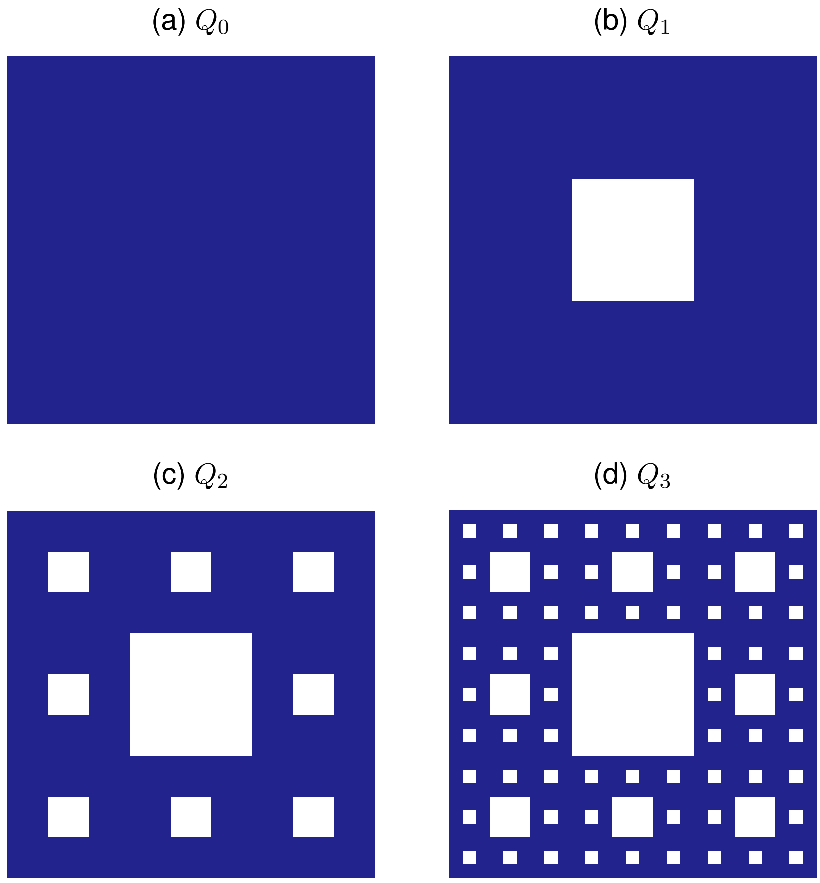
Na **Garagem** quero explorar o processo iterativo do fractal plano *Tapete de Sierpinski* e do fractal espacial *Esponja de Menger* materializando algumas etapas deste fractal. O *mapa* das etapas da Esponja de Menger já iniciei quando descobri este espaço Maker, vou completá-lo cartografando os processos com mais detalhes. O *mapa* das etapas do Tapete de Sierpinski vou cartografar nas próximas linhas.

2.4.1 Artefato 4: Tapete de Sierpinski

A construção do Tapete de Sierpinski (figura 33) inicia com um quadrado Q_0, dividido em nove quadrados menores cujos lados medem $1/3$ do lado de Q_0. Em seguida, retira-se o quadrado central, obtendo-se Q_1, que é formado por oito quadrados menores. Em cada um dos quadrados restantes, repete-se o processo, obtendo Q_2, que possui 64 quadrados com lados que medem $1/27$ do lado de Q_0. Procedendo-se da mesma forma, obtemos a sequência $Q_0 \supset Q_1 \supset Q_2 \supset ...$, onde cada Q_i é formado por 8^i quadrados, similares à Q_0, cujos lados medem $1/3^i$ da medida do lado do quadrado inicial. Segundo Vaz (2019, p. 24), o limite desta sequência

$$Q_\infty = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} Q_i$$

Figura 33 – Construção geométrica das primeiras etapas do Tapete de Sierpinski.



Fonte – O autor (2019).

O Tapete de Sierpinski é o atrator do seguinte conjunto de funções iteradas (VAZ, 2019, p. 51):

$$
\begin{aligned}
f_1(x,y) &= \left(\frac{x}{3},\frac{y}{3}\right); & f_2(x,y) &= \left(\frac{x}{3},\frac{y}{3}\right)+\left(0,\frac{1}{3}\right);\\
f_3(x,y) &= \left(\frac{x}{3},\frac{y}{3}\right)+\left(0,\frac{2}{3}\right); & f_4(x,y) &= \left(\frac{x}{3},\frac{y}{3}\right)+\left(\frac{1}{3},0\right);\\
f_5(x,y) &= \left(\frac{x}{3},\frac{y}{3}\right)+\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right); & f_6(x,y) &= \left(\frac{x}{3},\frac{y}{3}\right)+\left(\frac{2}{3},0\right);\\
f_7(x,y) &= \left(\frac{x}{3},\frac{y}{3}\right)+\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right); & f_8(x,y) &= \left(\frac{x}{3},\frac{y}{3}\right)+\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right).
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

Para elaborar o algoritmo para gerar a primeira etapa do Tapete de Sierpinski, devemos estar atentos as seguintes questões:

(a) o procedimento geométrico para construir este fractal inicia com um quadrado, que é um objeto bidimensional, porém nosso modelo computacional para impressão 3D precisa ter uma espessura mínima. Neste caso, iniciaremos nosso algoritmo com um cubo unitário;

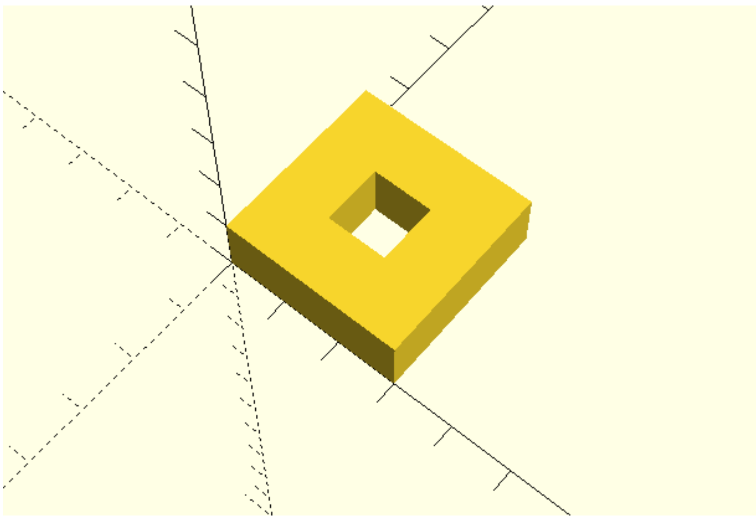
(b) Para aplicar as transformações (translação e homotetia) no objeto inicial utilizaremos o conjunto de funções iteradas (2.4).

Para gerarmos um cubo de aresta 1 usamos o comando `gerador()`. O processo iterativo será simulado com o comando `for()`. Denominaremos o processo de `sierpinski()`, que consiste em reduzir o cubo inicial em $1/3$ e, em seguida, transladá-lo por cada um dos oito vetores que definimos, de acordo com o sistema de funções iteradas (2.4).

```
module sierpinski(){
for(i=[[0,0,0],[0,1/3,0],[0,2/3,0],[1/3,0,0],
[1/3,2/3,0],[2/3,0,0],[2/3,1/3,0],[2/3,2/3,0]]){
translate(i)
scale(1/3)
cube(1);}}
sierpinski();
```

Com este procedimento, geramos apenas a primeira etapa do Tapete de Sierpinski:

Figura 34 – 1ª etapa do Tapete de Sierpinski.

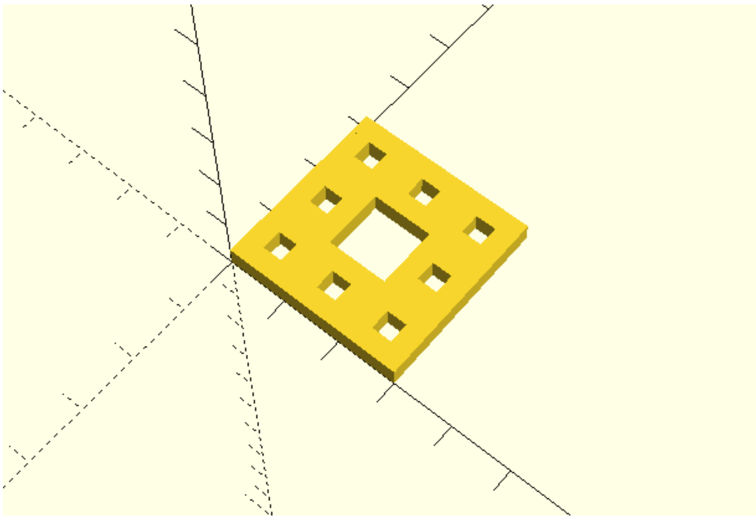


Fonte – O autor (2019).

Agora, vamos gerar a segunda etapa. Para isso, vamos repetir o procedimento anterior, mas desta vez aplicado ao objeto `sierpinski()`:

```
for(i=[[0,0,0],[0,1/3,0],[0,2/3,0],[1/3,0,0],
[1/3,2/3,0],[2/3,0,0],[2/3,1/3,0],[2/3,2/3,0]]){
translate(i)
scale(1/3)
sierpinski();}
sierpinski();
```

Figura 35 – 2ª etapa do Tapete de Sierpinski.



Fonte – O autor (2019).

Não fiquei satisfeito com este procedimento pois não é automático, é trabalhoso se quisermos gerar muitas etapas do fractal. Preciso otimizar o algoritmo e torná-lo automático para construir quantas etapas desejar de modo mais eficiente.

Para produzir as adaptações necessárias no algoritmo anterior, recorri à primeira propriedade dos fractais, que refere-se ao processo de construção recursivo. Neste novo algoritmo, defini os módulos `sierpinski(n)` e `gerador()`, em que o primeiro estabelece o processo de recorrência da construção de uma etapa qualquer do fractal, enquanto que, o segundo define a primeira etapa do fractal.

O módulo `sierpinski(n)` é definido em função da variável `n`, que refere-se ao número de etapas (ou iterações) que deseja-se executar para o fractal. Neste módulo, se

- `n=0`, o programa retorna para o usuário o objeto inicial (que neste caso será um cubo);

- `n=1`, o programa retorna para o usuário o objeto da primeira etapa do fractal;

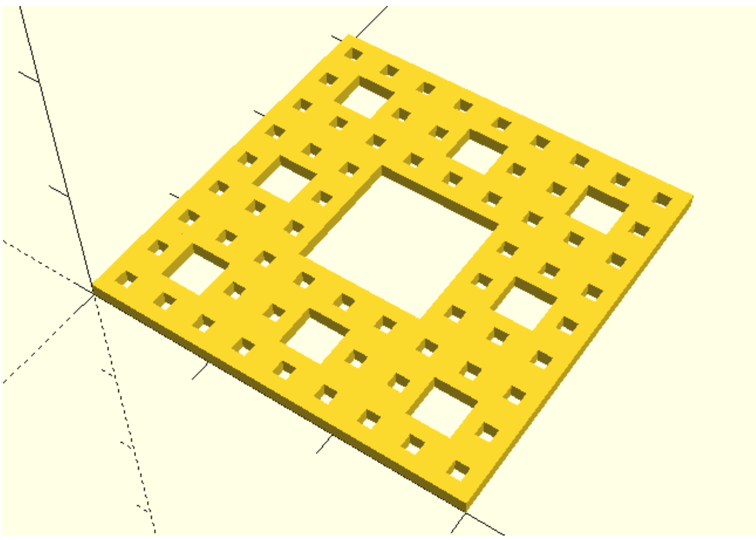
- $n > 1$, o programa retorna para o usuário o objeto da n-ésima etapa do fractal, obtido pela redução de um terço do objeto gerado na etapa $n-1$ e adequadas translações.

O novo algoritmo é dado por:

```
module sierpinski(n){
 if (n==0){
   cube([1,1,1]);}else{
    if (n==1){
        gerador();}else{
            for(i=[[0,0,0],[0,1,0],[0,2,0],[1,0,0],
                     [1,2,0],[2,0,0],[2,1,0],[2,2,0]]){
translate(i)
scale(1/3)
sierpinski(n-1);}}}}
module gerador(){
 for(i=[[0,0,0],[0,1,0],[0,2,0],[1,0,0],
           [1,2,0],[2,0,0],[2,1,0],[2,2,0]]){
translate(i)
cube([1,1,1]);}}
scale(20) sierpinski(3);
```

Note que o algoritmo acima foi executado para $n = 3$ (última linha do algoritmo), o que indica que estamos modelando a terceira etapa do Tapete de Sierpinski. O resultado é mostrado na figura 36:

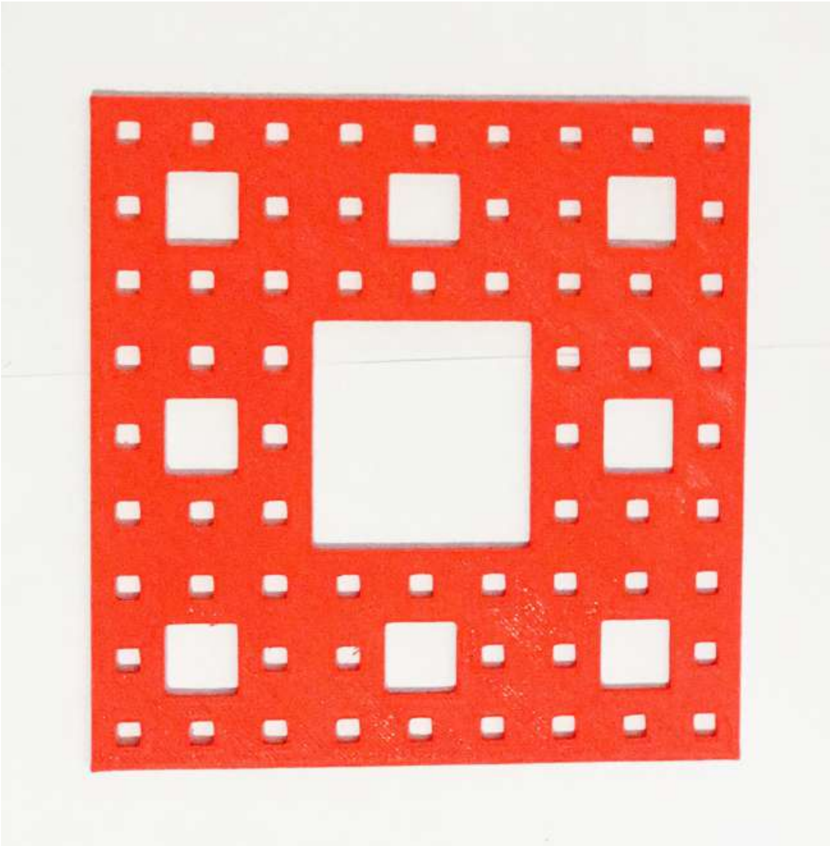
Figura 36 – Modelo da terceira etapa do Tapete de Sierpinski - OpenSCAD.



Fonte – O autor (2019).

A terceira etapa do Tapete de Sierpinski, após duas horas de impressão, é mostrada na figura 37:

Figura 37 – Impressão 3D da terceira etapa do Tapete de Sierpinski.



Fonte – O autor (2019).

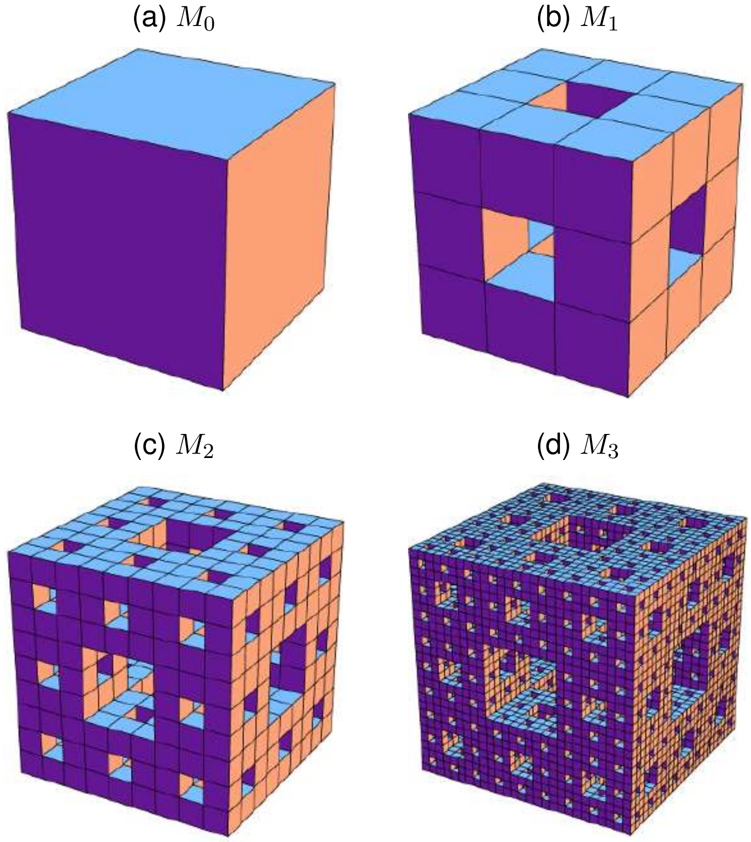
A impressão da terceira etapa do Tapete de Sierpinski foi relativamente simples se comparado, por exemplo, com a impressão do paraboloide hiperbólico, pois sua estrutura não demandou a utilização de suportes. Como o modelo do Tapete de Sierpinski tem aproximadamente cinco centímetros, precisei apenas ampliar o modelo em duas vezes no software fatiador. Os demais parâmetros, como temperatura, preenchimento e velocidade de impressão foram mantidos de acordo com o padrão do material, que neste caso, utilizei o PLA vermelho.

2.4.2 Artefato 5: Esponja de Menger

A construção da Esponja de Menger (figura 38) se inicia com um cubo M_0, dividindo-o em 27 cubos menores congruentes, cuja aresta mede um terço da aresta do cubo inicial. Retira-se então de M_0 os seis cubos menores do centro de cada uma das faces e o cubo menor central, obtendo dessa forma, um "cubo vazado", com 20 cubos menores, de arestas que medem um terço da aresta do cubo inicial obtendo, assim, M_1. Em cada um dos vinte cubos de M_1, realizamos o mesmo procedimento, obtendo-se 400 cubos menores cuja aresta mede um terço da aresta dos cubos de M_1 ou um nono da aresta de M_0. Prosseguindo indefinidamente neste processo, geramos uma sequência $M_0 \supset M_1 \supset M_2 \supset ...$, cujo limite é a Esponja de Menger (VAZ, 2019, p. 24):

$$M_\infty = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} M_i$$

Figura 38 – Construção geométrica das primeiras etapas da Esponja de Menger.



Fonte – Disponível em: http://twixar.me/1q11

A Esponja de Menger é o atrator do seguinte conjunto de funções iteradas (VAZ, 2019, p. 52):

$$
\begin{aligned}
f_1(x,y,z) &= \left(\frac{x}{3},\frac{y}{3},\frac{z}{3}\right); & f_2(x,y,z) &= \left(\frac{x}{3},\frac{y}{3},\frac{z+1}{3}\right);\\
f_3(x,y,z) &= \left(\frac{x}{3},\frac{y}{3},\frac{z+2}{3}\right); & f_4(x,y,z) &= \left(\frac{x}{3},\frac{y+1}{3},\frac{z}{3}\right);\\
f_5(x,y,z) &= \left(\frac{x}{3},\frac{y+1}{3},\frac{z+2}{3}\right); & f_6(x,y,z) &= \left(\frac{x}{3},\frac{y+2}{3},\frac{z}{3}\right);\\
f_7(x,y,z) &= \left(\frac{x}{3},\frac{y+2}{3},\frac{z+1}{3}\right); & f_8(x,y,z) &= \left(\frac{x}{3},\frac{y+2}{3},\frac{z+2}{3}\right);\\
f_9(x,y,z) &= \left(\frac{x+1}{3},\frac{y}{3},\frac{z}{3}\right); & f_{10}(x,y,z) &= \left(\frac{x+1}{3},\frac{y}{3},\frac{z+2}{3}\right);\\
f_{11}(x,y,z) &= \left(\frac{x+1}{3},\frac{y+2}{3},\frac{z}{3}\right); & f_{12}(x,y,z) &= \left(\frac{x+1}{3},\frac{y+2}{3},\frac{z+2}{3}\right);\\
f_{13}(x,y,z) &= \left(\frac{x+2}{3},\frac{y}{3},\frac{z}{3}\right); & f_{14}(x,y,z) &= \left(\frac{x+2}{3},\frac{y}{3},\frac{z+1}{3}\right);\\
f_{15}(x,y,z) &= \left(\frac{x+2}{3},\frac{y}{3},\frac{z+2}{3}\right); & f_{16}(x,y,z) &= \left(\frac{x+2}{3},\frac{y+1}{3},\frac{z}{3}\right);\\
f_{17}(x,y,z) &= \left(\frac{x+2}{3},\frac{y+1}{3},\frac{z+2}{3}\right); & f_{18}(x,y,z) &= \left(\frac{x+2}{3},\frac{y+2}{3},\frac{z}{3}\right);\\
f_{19}(x,y,z) &= \left(\frac{x+2}{3},\frac{y+2}{3},\frac{z+1}{3}\right); & f_{20}(x,y,z) &= \left(\frac{x+2}{3},\frac{y+2}{3},\frac{z+2}{3}\right).
\end{aligned}
\tag{2.5}
$$

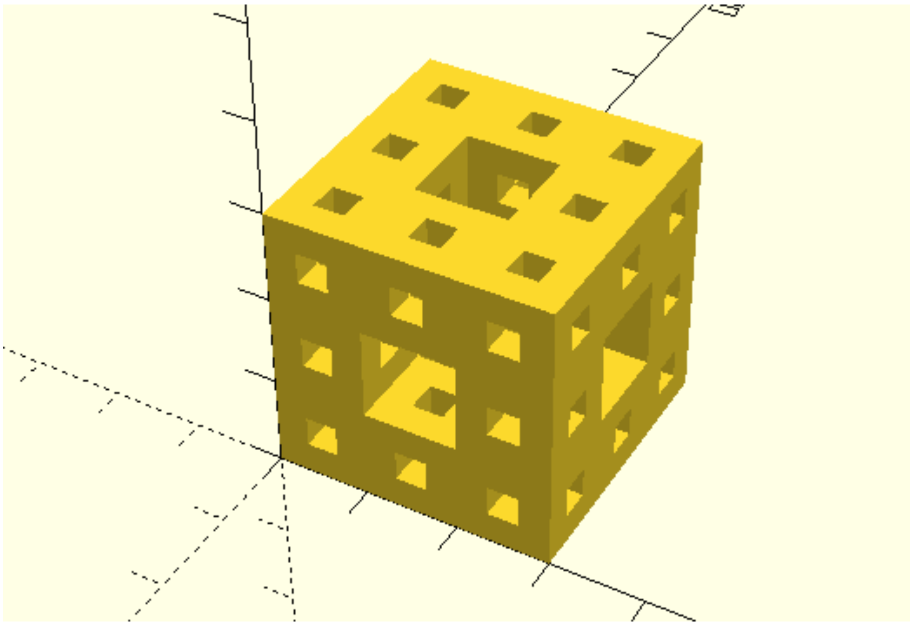
O processo de modelagem da Esponja de Menger é similar ao processo do Tapete de Sierpinski, naturalmente com sistemas de funções iteradas diferentes. Procedendo de modo análogo como fizemos com as etapas do Tapete de Sierpinski, temos o seguinte algoritmo:

```
module Menger(n){
    if(n==0){
        cube(1);
    }else {
        if(n==1){
         gerador();
        }else {
         for(i=[[0,0,0],[1/3,0,0],[2/3,0,0],
        [0,1/3,0],[2/3,1/3,0],[0,2/3,0],
        [1/3,2/3,0],[2/3,2/3,0],[0,0,1/3],
        [2/3,0,1/3],[0,2/3,1/3],[2/3,2/3,1/3],
        [0,0,2/3],[0,1/3,2/3],[0,2/3,2/3],
        [1/3,0,2/3],[1/3,2/3,2/3],[2/3,0,2/3],
        [2/3,1/3,2/3],[2/3,2/3,2/3]]){
        translate(i)
        scale(1/3)
        Menger(n-1);}}}}
```

```
module gerador(){
    for(i=[[0,0,0],[1/3,0,0],[2/3,0,0],
        [0,1/3,0],[2/3,1/3,0],[0,2/3,0],
        [1/3,2/3,0],[2/3,2/3,0],[0,0,1/3],
        [2/3,0,1/3],[0,2/3,1/3],[2/3,2/3,1/3],
        [0,0,2/3],[0,1/3,2/3],[0,2/3,2/3],
        [1/3,0,2/3],[1/3,2/3,2/3],[2/3,0,2/3],
        [2/3,1/3,2/3],[2/3,2/3,2/3]]){
        translate(i)
        scale(1/3)
        cube(1);}}
scale(30)
Menger(2);
```

Note que o algoritmo acima foi executado para $n = 2$ (última linha do algoritmo), o que indica que estamos modelando a segunda etapa da Esponja de Menger. O resultado é mostrado na figura 39:

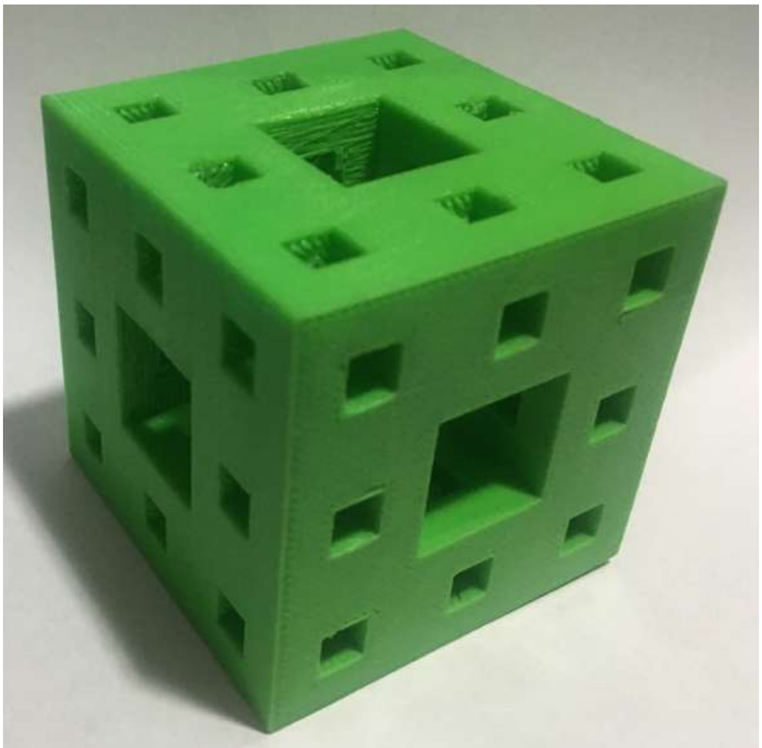
Figura 39 – Modelo digital da 2ª etapa da Esponja de Menger - OpenSCAD.



Fonte – O autor (2019).

A impressão 3D da segunda etapa da Esponja de Menger é mostrada na figura 40:

Figura 40 – Impressão 3D da segunda etapa da Esponja de Menger.



Fonte – O autor (2019).

A impressão da segunda etapa da Esponja de Menger foi um pouco mais complexa, pois foi necessário definir suportes para cada "buraco", o que elevou o tempo de impressão para mais de 7 horas. Na tentativa de reduzir este tempo, alterei o percentual de preenchimento de 20% para 10%, reduzindo o tempo de impressão para aproximadamente 5 horas. Após finalizar, levei cerca de 1 hora para retirar alguns dos suportes, pois a superfície era um pouco mais frágil, em virtude de termos reduzido o seu preenchimento. Fiquei muito feliz em ter em minhas mãos uma aproximação física de fractal que aparentemente é simples, mas que possui complexas propriedades.

Saí da **Garagem** e fui para casa empolgado por conseguir materializar objetos que até então só os via nos livros ou na tela do computador. Enquanto caminhava, percebi que as atividades na **Garagem** sobre impressão 3D promoveram uma aprendizagem criativa. Ter uma atitude maker significa ser o protagonista do seu processo de aprendizagem, construir conhecimento de forma autônoma e colaborativa, ser imaginativo e criativo, aprender assuntos de várias disciplinas e saber conectá-los na solução de problemas.

No caso da impressão 3D de objetos matemáticos, para elaborar cada objeto, precisei fazer uma imersão nos conceitos matemáticos envolvidos, aliando-os aos conhecimentos de computação (para a elaboração do modelo) e engenharia (na seleção da matéria-prima e preparação para a impressão). Fiquei feliz por perceber que é possível aprender de uma forma diferente, onde a construção do conhecimento ocorre com autonomia, criatividade e de forma interdisciplinar. E percebi que respondi a pergunta que me fiz ao entrar na **Garagem**: *como o processo de impressão 3D pode potencializar ações interdisciplinares para promover uma aprendizagem criativa em Matemática superior?*

Nesse momento entendi que tinha me tornado um professor-maker! E um maker compartilha suas descobertas e seu aprendizado e para completar minha formação maker decidi compartilhar minhas experiências através de um *Guia de Impressão 3D* e da oferta de uma oficina para alunos de graduação da Universidade Federal do Pará.

O *Guia de Impressão 3D* (figura 41) apresenta um breve histórico sobre a impressão 3D e as principais informações sobre o seu processo, tais como os softwares de modelagem, como preparar um modelo computacional para impressão e os principais repositórios de modelos digitas. Ao final do Guia, proponho uma oficina sobre impressão 3D.

Figura 41 – Guia de Impressão 3D.

Fonte – O autor (2019).

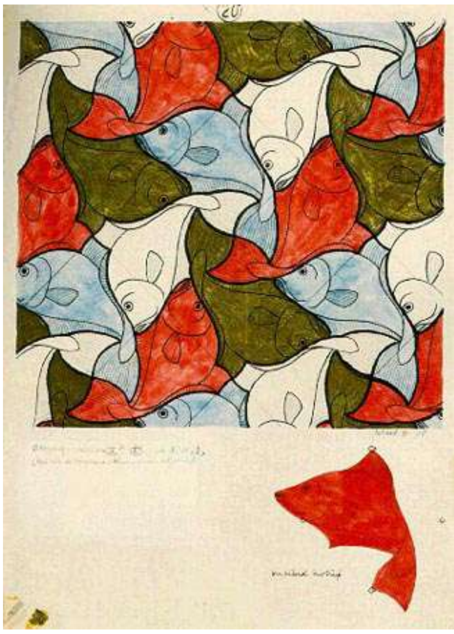
O Guia pode ser acessado no link:

http://twixar.me/Btbn

Para compartilhar minhas experiências na **Garagem**, decidi planejar a oficina *Matemática e Design 3D*, com carga horária de 08 horas, divididas em dois dias. Meu principal objetivo com essa oficina foi cartografar a aprendizagem criativa entendida como uma prática interdisciplinar ancorada na experiência do prazer de (re)descobrir saberes, na valorização da autonomia e no reconhecimento que se é capaz de transformar a realidade de a si mesmo (VAZ; ROCHA; NERI, 2019). Para inspirar os participantes, escolhi algumas obras do artista Escher (figura 42) que usam transformações geométricas na sua composição.

Figura 42 – Obras do artista M. Escher.

(a) Fish (No. 20), 1938



(b) Lizard (No. 25), 1939

(c) Horseman (No. 67), 1946.

(d) Beetle (No. 91), 1953

Fonte – Disponível em: https://www.mcescher.com/

Para cartografar a aprendizagem criativa dos participantes da oficina, fiquei atento ao processo de *Imaginar, Planejar e Materializar* da impressão 3D para registrar indícios de criatividade, autonomia, interdisciplinaridade e satisfação. Para isto, as

Quadro 2.3 – Resumo das atividades realizadas na oficina.

atividades foram executadas em dois dias, da seguinte forma:

Oficina Matemática e Design 3D	
1º Dia	**2º Dia**
1) Apresentação da Oficina 2) Dinâmica para formação das equipes 3) Atividades do Imaginar: conhecer o artista, suas obras e as simetrias no plano 4) Atividades do Planejar (parte 1): montagem do mosaico (em papel)	1) Atividades do Planejar (parte 2): imersão na impressão 3D, modelagem computacional do mosaico 2) Atividades do Materializar: preparação para impressão, impressão 3D e validação dos modelos 3) Feedback de avaliação

No que segue, farei um breve relato do planejamento da Oficina.

No primeiro dia, começaria a oficina com uma breve apresentação dos objetivos e a apresentaria uma dinâmica para formação de duas equipes. A dinâmica consiste em: distribuir para os alunos duas obras de Escher, divididas em quatro partes cada e embaralhadas. Os alunos escolhiam as peças aleatoriamente e buscariam montar a imagem. As equipes foram formadas com os alunos que tivessem as peças para montar uma das obras.

Depois de formados as equipes, os alunos deriam um nome para sua equipe e elegeriam um relator, que seria o responsável em registrar dúvidas, dificuldades e outras informações relevantes sobre as atividades. Esses registros seriam feitos em um diário, entregue pelo mediador da oficina.

As atividades da etapa denominada *Imaginar*, consistem em: apresentar o artista M. Esher e o seu trabalho artístico e explorar a matemática em algumas obras de Escher.

Para apresentação de Escher cada equipe deveria elaborar um jogo (dominó, quiz, baralho, memória, caça-palavras, etc), para apresentar a biografia do artista ou suas principais obras. A definição do tema do jogo será por sorteio. Para elaborá-lo, as equipes contarão com materiais de desenho e pintura e um computador com acesso à internet. Finalizado o jogo, as equipes trocarão os jogos entre si e jogarão. O objetivo desta atividade é que os alunos se apropriem de informações básicas sobre o artista, sobre suas obras e suas influências, através de uma curadoria de conteúdo (durante a montagem do jogo) e do compartilhamento de informações através do próprio jogo.

Para explorar a matemática em algumas obras de Escher: transformações geométricas e pavimentação do plano. Primeiro, o mediador apresentará um vídeo sobre o tema, disponível no link:

https://www.youtube.com/watch?v=7ac0WC3tzwU

Após a exibição do vídeo, os alunos pesquisarão no prédio do PGITEC um exemplo de pavimentação do plano ou de padrões em azulejos. Esse registro poderá ser feito no celular, por vídeo ou foto e compartilhado com os colegas no grupo de Whatsapp da oficina. O objetivo desta atividade é identificar a compreensão dos alunos sobre conceito de pavimentação do plano e de transformações geométricas.

Para finalizar o primeiro dia da oficina, será proposta uma atividade referente à etapa *Planejar* que consiste em construir um mosaico, inspirado nos mosaicos de Escher. Para isso, as equipes assistirão o vídeo sobre uma técnica para construção de mosaicos:

https://www.youtube.com/watch?v=t5vGtkXyycU

O objetivo desta atividade é registrar a aplicação dos conceitos de transformações geométricas e pavimentação do plano em uma atividade prática. Será disponibilizado para as equipes papéis coloridos, tesoura e cola. A proposta é fazer o modelo computacional este mosaico para depois imprimi-ló.

Continuando a etapa *Planejar*, no segundo dia de oficina, os alunos explorarão um software de modelagem e modelarão o mosaico confeccionado anteriormente.

Na etapa *Materializar*, para aprender a fatiar o modelo para impressão, os alunos explorarão o software *Slic3r* e irião imprimir o mosaico.

Finalizada a impressão, os alunos devem investigar se o modelo impresso corresponde com o modelo computacional e registrar no diário suas impressões sobre o processo de impressão 3D.

Para executar este planejamento ofertei a oficina para os monitores do Projeto Newton. O Projeto Newton é um projeto de ensino de Cálculo para estudantes dos cursos de engenharia da Universidade Federal do Pará e adota uma metodologia híbrida, que envolve uso das TIC's no ensino presencial e uma monitoria formada por estudantes de graduação ou pós-graduação em engenharia ou matemática que atende os alunos de Cálculo em plantões de dúvidas e aulas de exercícios. Atualmente a monitoria do projeto Newton, coordenada pela professora Cristina Vaz, é formada por 20 monitores. Além da iniciação à docência, as atividades da monitoria visam uma formação acadêmica mais ampla, buscando desenvolver no monitor habilidades de trabalho em equipe, criatividade, inovação, empreendedorismo e trabalho colaborativo através de oficinas, minicursos e atividades culturais.

Para a nossa oficina se inscreveram oito monitores, sendo dois alunos do curso de Engenharia Biomédica, um de Engenharia Elétrica, três de Licenciatura em Matemática, um do Curso de Mestrado em Engenharia Elétrica e um de Engenharia Civil.

Chegou o dia da oficina. Era uma terça-feira a tarde. Convidei meu amigo e parceiro de **Garagem** Hidaka para me ajudar e, como um bom maker, ele aceitou o convite com alegria e entusiasmo.

Chegamos cedo para arrumar o local da oficina: a sala (figuras 43a e 43b) situada no térreo do prédio do PGITEC[19], da Universidade Federal do Pará. Esta sala se transformou, neste dois dias, num mini-espaço Maker, um ambiente propício para aprendizagem criativa. Embora sendo um espaço improvisado, o local estava equipado de modo adequado para os nossos propósitos: um data show, uma caixa de som, três mesas redondas, dez cadeiras, papéis coloridos variados e materiais diversos para desenho (figura 43c). Chamaremos este ambiente de "sala criativa".

Equipamos a sala criativa com impressora 3D do Hidaka, que gentilmente emprestou para a realização das atividades da oficina. Além disso, junto com a impressora, trouxemos alguns rolos de filamento e algumas das peças que imprimimos juntos (figura 43d).

Hidaka é um colaborador importante na minha pesquisa, um encontro que possibilitou muita troca de conhecimento, muita aprendizagem e colaboração. Sua

[19] Programas de Pós-graduação do Instituto de Tecnologia

participação na oficina é fundamental para o esclarecimento de dúvidas mais técnicas sobre o funcionamento da impressora.

Figura 43 – Materiais de Desenho e Impressora 3D na Sala Criativa.

(a) (b) (c) (d)

Fonte – O autor (2019).

Iniciei a oficina com a apresentação dos objetivos e um breve resumo sobre as atividades planejadas para aquele dia. Informei aos alunos que a oficina seria um momento de trabalho em equipe e de diálogo e que, desta forma, eles poderia se sentir livres para perguntar, tirar dúvidas e compartilhar suas experiências e ideias.

Primeiro, Hidaka e eu nos apresentamos aos aparticipantes e eles também fizeram uma breve apresentação falando sobre o curso, idade, sonhos, etc. Constatei que seis alunos alunos cursam o terceiro ou quinto período letivo e apenas dois alunos cursam o sexto ou sétimo período letivo e que a faixa etária deles estava entre 19 e 26 anos. Perguntei também quantos já tinham escutado falar da impressão 3D e apenas um aluno respondeu que nunca tinha escutado falar sobre a impressão 3D.

Após este momento, iniciamos a formação das equipes através da dinâmica do quebra-cabeças. Informei aos alunos que as obras de arte que eles haviam montado eram do artista chamado Escher. Perguntei se eles conheciam este artista e apenas dois alunos responderam que o conheciam. Estes dois alunos eram do curso de Licenciatura em Matemática. Assim, os outros seis alunos (cinco alunos dos cursos de engenharia e um aluno do curso de matemática) disseram que nunca ouviram falar do artista.

Com a formação das equipes, percebi que tanto a equipe *Fractal*, quanto a equipe *Pato & Peixe*, tinham um aluno que já conhecia Escher.

Iniciamos a fase *Imaginar* com a atividade da confecção dos jogos para apresentar a biografia de Escher e suas obras.

Com o sorteio, para equipe *Fractal* foi sorteado o jogo sobre a biografia do artista, enquanto que para equipe *Pato & Peixe* foi sorteado jogo sobre obras do Escher. As equipes tiveram 60 minutos para produzir o seu jogo.

Neste momento, as equipe discutiram por alguns minutos a dinâmica de produção dos jogos. Observei que as equipes não elegeram formalmente uma liderança, contudo os participantes com espírito de liderança mais evidente tomaram a iniciativa de conduzir a equipe, organizar as ideias e dividir as tarefas. Na equipe *Fractal*, dois participantes (ambos alunos dos cursos de engenharia) assumiram a liderança e partiu deles a iniciativa de pesquisar exemplos de jogos na internet que pudessem inspirar a equipe no desenvolvimento da tarefa. Já na equipe *Pato & Peixe*, o participante oriundo do curso de Matemática tinha o espírito de liderança mais evidente e conduziu a equipe na escolha do formato do jogo. Percebo que em ambas as equipes há um clima de diálogo em que todas as ideias e contribuições dos participantes são levadas em consideração e, de comum acordo, são aceitas ou não.

Quanto ao formato do jogo, a equipe *Fractal* optou por produzir um jogo eletrônico para montar a linha do tempo da vida do artista e escolheram o aplicativos *Power Point*. A equipe *Pato & Peixe* optou por produzir um jogo artesanal, com papéis coloridos, tipo jogo da memória, para apresentar obras do artistas.

Após escolher o formato do jogo, a Equipe *Fractal* realizou uma divisão de tarefas, em que cada integrante desenvolvia uma ação e após um certo tempo, cada integrante apresentou aos demais da equipe o resultado daquilo que ficou encarregado, inclusive a curadoria de conteúdo, que foi realizada por apenas dois alunos e depois compartilhada com os demais.

A Equipe *Pato & Peixe* optou por realizar primeiro uma curadoria de conteúdo e depois dividiram as tarefas da produção do jogo. Notei que esta equipe estava com dificuldades de distinguir quais obras eram, de fato, do artista pois, a busca estava sendo feita no Google Imagens. Sugeri a equipe que eles fizessem a busca no site oficial do artista e assim o fizeram.

Figura 44 – Momento de produção dos jogos.

(a) Equipe Pato & Peixe (b) Equipe Fractal

Fonte – O autor (2019).

Finalizado o momento de produção dos jogos, as equipes trocaram entre si os materiais e jogaram pelo menos duas rodadas. Após este momento, as equipes fizeram uma breve socialização sobre esta primeira atividade. Ambas relataram que a atividade lhes despertou mais curiosidade em conhecer as obras do artista, já que ele utiliza a matemática como recurso para produzir "paradoxos". A participante T.P, aluna do curso de Engenharia Biomédica relatou que já tinha escutado falar de Escher, mas que não conhecia suas obras:

> "Eu já tinha escutado falar no Escher. Foi num vídeo que assisti no facebook. Mas até então eu não conhecia suas pinturas e nem sabia que ele usava matemática. Achei bem interessante esse artista." (Participante T.P)

Por outro lado, o participante L.B (aluno do curso de Matemática) da equipe *Pato & Peixe* destacou que já conhecia Escher e algumas de suas obras, pois já tinha um professor no curso que já havia apresentado bem rapidamente este artista à sua turma:

> "Num dos primeiros semestres do meu curso, um professor comentou sobre Escher. Na época, ele falou que esse artista usava muita matemática em seus desenhos." (Participante L.B)

A Equipe *Fractal* destacou que a opção de jogo da memória, feita pela equipe *Pato & Peixe* foi "ótima", pois permitiu que eles exercitassem a visão para perceber as diferenças entre as obras. A equipe *Pato & Peixe* destacou que que o jogo eletrônico estava bem elaborado e que a foto do artista que apareceu após a conclusão da rodada lhes causou supresa, pois a imagem escolhida era um autorretrato do artista refletido numa esfera.

Figura 45 – Momento de troca dos jogos.

(a) Equipe Fractal (b) Equipe Pato & Peixe

Fonte – O autor (2019).

Na realização dessa atividade, percebo que os participantes se sentiram livres para escolher o formato do jogo, as imagens que utilizariam e como executariam as ideias que haviam planejado. Isso se revela na fala do participante J.N, da equipe *Fractal*:

> "Nós tivemos bastante liberdade para escolher como faríamos o jogo. Em alguns momentos nos sentíamos perdidos por não saber por onde começar, mas recorremos ao professor, que nos auxiliou dando dicas de como poderíamos melhorar nosso jogo. No final, gostamos bastante do nosso jogo, apesar não termos conseguido por em prática todas as nossas ideias, já que o Power Point tem algumas limitações." (Participante J.N)

Já na equipe *Pato & Peixe*, percebo que a avaliação do jogo produzido não foi tão positiva, em virtude de algumas escolhas feitas pela equipe, o que impactou no resultado final da produção. Isto se revela na fala da participante F.S:

> "Eu gostei do nosso jogo, mas ele não ficou do jeito que imaginamos. Escolhemos um papel escuro, que dificultou a visualização da imagens, já que fizemos a impressão em preto e branco. Mesmo com essa questão, foi possível jogar." (Participante F.S)

A participante M.A, da equipe *Fractal*, destaca a criatividade na elaboração dos jogos, fazendo com que este momento da oficina lhe marcasse:

> "Um momento que me marcou bastante na oficina foi a elaboração e troca dos jogos entre as equipes. Pra mim isso foi muito criativo. Foi muito bacana conhecer as obras do Escher através de um jogo, porque elas tem essa questão paradoxal e da simetria, que é algo muito rico visualmente e nos causa uma certa ilusão de ótica.

> Foi muito interessante porque conseguimos aprender as obras e o artista. Então esse momento pra mim foi muito marcante." (Participante M.A)

Fico bem alegre em ouvir esses relatos pois percebo que há traços fortes de autonomia, criatividade, trabalho colaborativo e superação de desafios nessas primeiras atividades da oficina.

Após esta atividade, apresentei às equipes o vídeo sobre a matemática nas obras de Escher: transformações no plano e pavimentação do plano. Perguntei a eles quantos conheciam as transformações no plano e as ideias de pavimentação do plano por polígonos e, para minha surpresa, somente um aluno (que era do curso de Matemática) respondeu que conhecia estes conceitos.

Iniciamos a atividade de busca por padrões geométricos no prédio do PGITEC e a partir das fotos compartilhadas, percebi que os alunos tinham compreendido a ideia de pavimentação do plano com polígonos a partir das imagens compartilhadas (figuras 46 e 47).

Figura 46 – Pavimentação do plano idetificada pelos participantes da oficina.

(a) Padrão no piso do hall

(b) Padrão no piso do banheiro

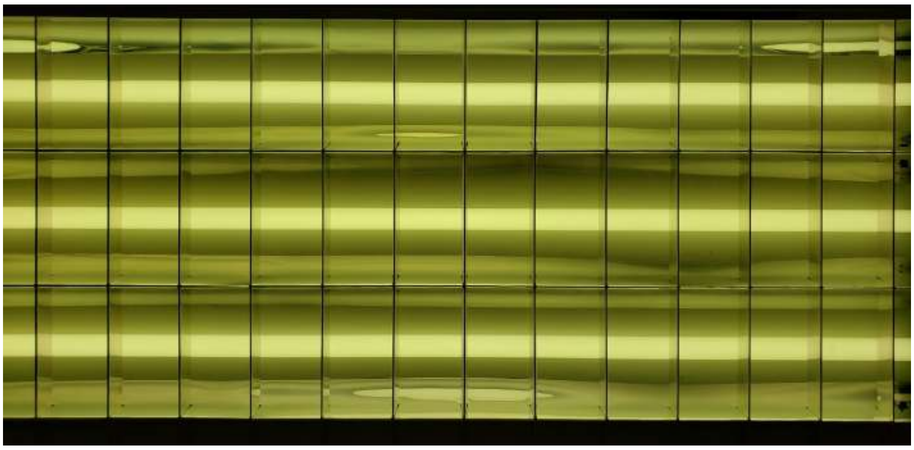
Fonte – O autor (2019).

Figura 47 – Pavimentação do plano idetificada pelos participantes da oficina.

(a) Padrão na calçada do prédio

(b) Padrão na parede do banheiro

(c) Padrão na luminária da sala



(d) Padrão na grade de um carro

Fonte – O autor (2019).

O aluno do curso de engenharia civil constatou que pavimentos em forma de polígonos regulares é muito comum na construção civil. Ele compreendeu porquê os pavimentos são, em sua maioria, hexagonais ou retangulares. Notei que antes, no momento do vídeo, este aluno não foi capaz de fazer conexões entre seus conhecimentos técnicos e a arte do Escher, mas que após encontrar um padrão no prédio conseguiu fazer algumas conexões. Isso pode indicar que seu "olhar" está mais acostumado a "ver" os padrões na sua área de conhecimento (um prédio) e seria interessante ampliar o "olhar" explorando, por exemplo, obras de arte.

As atividades da fase *Imaginar* foram concluídas. Percebo que as equipes estavam bem atentas quanto à produção dos modelos. Neste momento, ambas registram no diário o passo-a-passo para a construção dos modelos e simulam o models utilizando régua, lápis, tesoura e papel colorido.

Notei que os alunos começaram a reunir as informações principais sobre Escher e sobre o padrão de simetria que ele utilizava no diário, como se estivessem produzindo um banco de dados para as atividades subsequentes. Um outro fato interessante é que, após a exibição do vídeo, os alunos retornaram às obras que eles conheceram no processo de curadoria de conteúdo para tentar identificar as transformações geométricas e o padrão que Escher utilizou. Tanto a equipe *Fractal* quanto a equipe *Pato & Peixe* selecionaram algumas imagens no site de Escher, na categoria Simetria, e passaram a apontar em que obras observavam uma translação ou uma rotação.

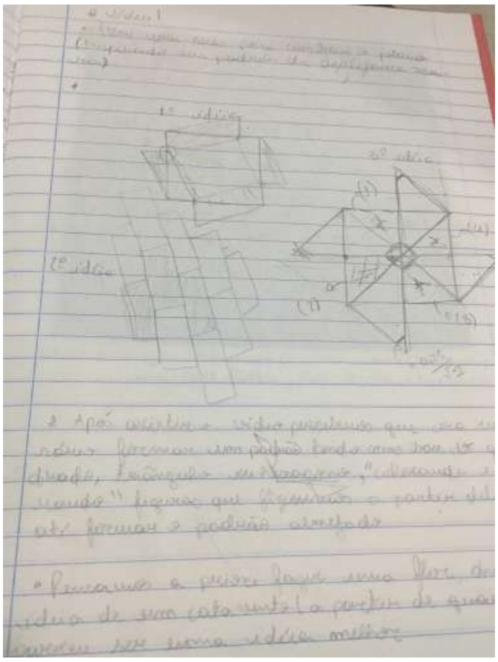
A última atividade do dia, início da fase *Planejar*, consistia em planejar o padrão geométrico do modelo computacional. Os alunos retornaram à galeria do site oficial do artista para buscar as obras na categoria *simetria* e assistiram o vídeo sobre técnica de construção padrões a partir do triângulo, do quadrado e do hexágono.

A equipe *Fractal* optou por criar um padrão iniciando de um quadrado, que se assemelhava a um cataventos (figura 48), enquanto que a equipe *Pato & Peixe* optou por iniciar o padrão por um triângulo, que se assemelhava a um spinner[20] (figura 49).

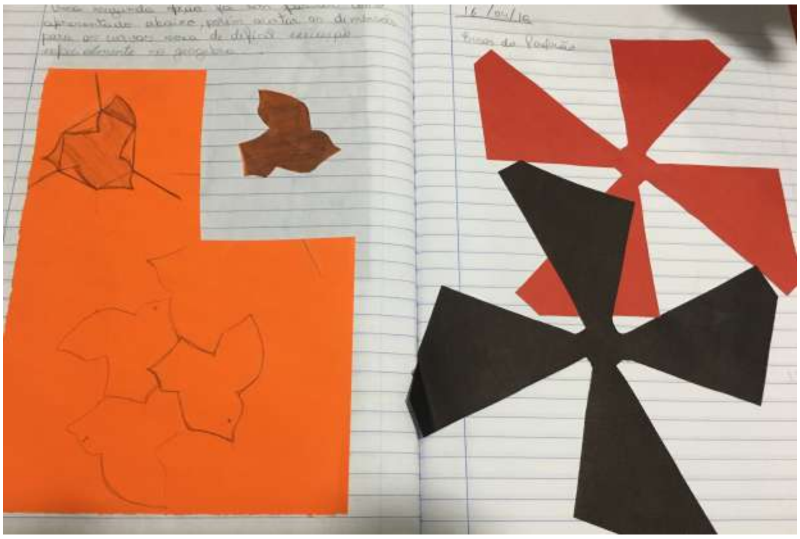
[20] Spinner (ou Spin) é um brinquedo giratório, feito de metal ou plástico.

Figura 48 – Planejamento do modelo - Equipe Fractal.

(a)



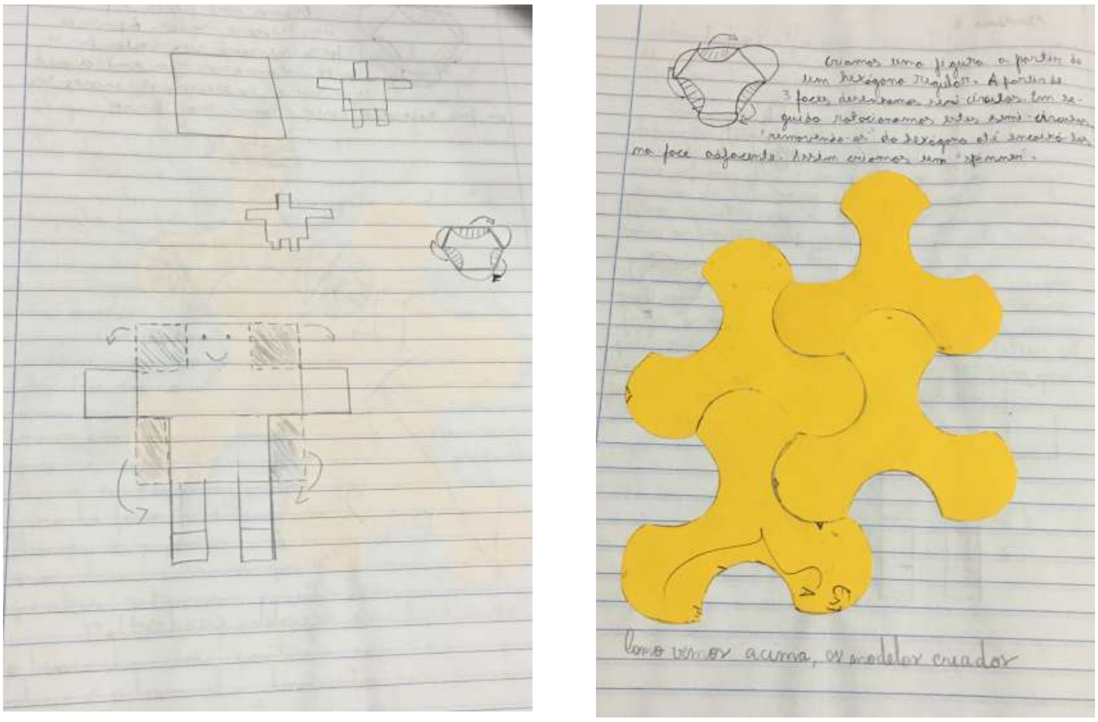
(b)



Fonte – O autor (2019).

Figura 49 – Planejamento do modelo - Equipe *Pato & Peixe*.

(a) (b)



Fonte – O autor (2019).

No planejamento do padrão, um dos integrantes da equipe *Fractal* relatou que inicialmente desejavam construir um padrão que se assemelhasse a uma flor, porém perceberam que teriam mais dificuldades de modelar uma figura não formada por polígonos, com curvas, pois não tinham domínio completo do software de modelamento.

A equipe *Pato & Peixe* optou por produzir um padrão com arcos de circunferência, iniciando com um hexágono, sem se preocupar com as dificuldades da modelagem.

Muito interessante: as equipes tomaram atitudes completamente diferentes sobre como *planejar* o modelo, enquanto uma equipe avaliava as possíveis dificuldades e simplificava o modelo para evitá-las, a outra escolhia o modelo por pura intuição e prazer sem se importar com as dificuldades e a complexidade. Esta posturas afetarão a aprendizagem criativa das equipes? Se sim, como?

Em seguida, as equipes decidiram testar o padrão escolhido usando aplicativos computacionais e averiguar se o padrão que eles criaram realmente pavimentava o plano. A equipe *Pato & Peixe* escolheu o Geogebra e fez uma animação, enquanto que a equipe *Fractal* utilizou o InDesign para fazer a simulação de pavimentação do plano. A escolha das equipes por esse aplicativo se deu em função do conhecimento que os participantes já possuíam e por estes aplicativos estarem disponíveis no computador que utilizavam.

Antes de encerrar o primeiro dia, informei aos alunos que no dia seguinte faríamos a modelagem computacional dos padrões criados pelas equipes. Os participantes estavam curiosos para modelar os objetos que eles acabaram de planejar. Estavam ansiosos para ver a impressão dos modelos! Hidaka explicou aos participantes que quando um objeto será impresso, é preciso estar atento para ver se a impressora está executando o procedimento de forma correta, pois caso contrário, é necessário retornar para o planejamento e alterar o modelo digital.

No dia seguinte, comecei perguntando quem já tinha feito algum tipo de modelagem computacional e três deles informaram que nunca tinham feito qualquer tipo de modelagem. Destes três alunos, dois eram alunos do curso de Matemática. Para os alunos que já tinham feito algum tipo de modelagem computacional, perguntei que softwares eles tinham utilizado. Obtive as seguintes respostas: Blender, fusion360, SketchUp e Geogebra.

Depois desse momento de interação, fiz uma breve apresentação sobre o funcionamento de uma impressão 3D, o processo de modelagem computacional, os repositórios com modelos prontos para imprimir e a matéria-prima para impressão.

Em seguida, o Hidaka fez uma breve fala sobre o processo de preparação de impressão. Hidaka apresentou aos alunos como funciona uma impressora 3D e como o tipo de matéria-prima influencia no resultado final. Muitos alunos perguntavam ao Hidaka detalhes técnicos de engenharia, como a resistência e composição do filamento, temperatura de aquecimento, que produtos químicos poderiam ser utilizados para finalizar uma peça e se era possível imprimir um objeto com mais de uma cor. Percebi que essas perguntas, em sua maioria, eram feitas pelos alunos do curso de engenharia. Por outro lado, os alunos do curso de matemática faziam perguntas voltadas à modelagem computacional: se o Geogebra ou o Máxima produziam modelos compatíveis com a impressora 3D e se poderia utilizar equações para gerar os modelos.

Notei que, os alunos de engenharia se interessaram bastante pelo funcionamento técnico da impressora enquanto que, os alunos de matemática voltaram-se em produzir modelos com software da área de matemática. Isso reflete uma aprendizagem por disciplina e não interdisciplinar onde o aluno busca aprofundar seus conhecimentos em áreas especifícas do seu campo de formação.

Figura 50 – Momento em que Hidaka apresenta o funcionamento da impressora 3D.

(a) Apresentação do software de fatiamento (b) Apresentação da impressão 3D

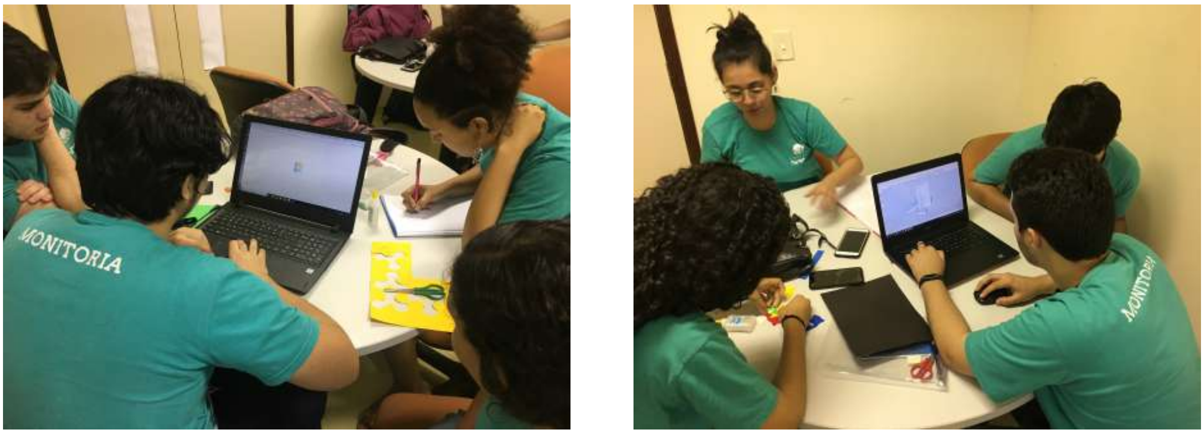
Fonte – O autor (2019).

Após essa introdução sobre o funcionamento da impressora 3D, os alunos tiveram 60 minutos para confeccionar modelo computacional dos padrões produzidos por cada equipe. As equipes escolheram livremente o software de modelamento. A Equipe *Fractal* escolheu o SketchUp, enquanto que a equipe *Pato & Peixe* escolheu o Geogebra.

O interessante nestas escolhas foi que equipe *Fractal* selecionou um software pouco comum para os alunos de matemática e estes se dispuseram a aprendê-lo, enquanto que a equipe *Pato & Peixe* selecionou um aplicativo pouco comum para os alunos de engenharia que também se dispuseram a aprender o aplicativo. Isto ocorreu por influência dos alunos que lideravam as equipes. No caso da equipe *Pato & Peixe*, o aluno que liderava a equipe era do curso de matemática, com grande conhecimento do software Geogebra, enquanto que na equipe *Fractal*, o aluno que liderava a equipe era do curso de Engenharia Elétrica e conhecedor do software SketchUp. Em ambas as equipes houve uma ação interdisciplinar, por parte dos integrantes, na medida em que os alunos de Matemática se dispuseram a aprender o software SketchUP e os alunos de Engenharia se dispuseram a aprender o software Geogebra.

Figura 51 – Momento da modelagem 3D.

(a) Equipe Pato & Peixe (b) Equipe Fractal



Fonte – O autor (2019).

Durante o processo de modelagem, a equipe *Pato & Peixe* teve um problema na hora de finalizar o modelo computacional: havia um "buraco" entre as conexões dos arcos de circunferência. Esse "buraco" faria com o que o modelo quebrasse durante a impressão, inviabilizando o objeto físico.

Nesse momento, alguns alunos da equipe Fractal se juntaram à equipe *Pato & Peixe* para tentar solucionar este problema havendo, assim, um trabalho de colaboração entre os pares e de compartilhamento de saberes, uma das características importantes da cultura maker.

Figura 52 – Momento de colaboração entre as equipes.

Fonte – O autor (2019).

Depois de quase quarenta minutos, a equipe *Pato & Peixe* conseguiu, com a ajuda de integrantes da equipe Fractal, solucionar o problema dos "buracos", utilizando pequenas esferas para preencher os espaços vazios.

É importante retornarmos a fase do *Planejar* onde a equipe *Pato & Peixe* escolheu seu modelo sem se preocupar com as dificuldades computacionais que poderiam surgir durante o processo. Notemos que, neste caso, esta atitude contribuiu para uma aprendizagem criativa, pois gerou um problema desafiador que estimulou a curiosidade e colaboração entre as equipes, além de contribuir para produção de conhecimento. Erros e desafios fazem são importantes para uma aprendizagem criativa e significativa.

Quando a equipe *Pato & Peixe* finalizava seu modelo computacional e a equipe *Fractal* dava início ao processo de preparação do modelo para impressão, faltou energia elétrica na UFPA e a oficina teve que ser interrompida. Aguardamos por quase uma hora a normalização da energia elétrica, o que não aconteceu, e decidimos finalizar a oficina. Foi um momento de grande frustração para todos, pois os participantes não puderam materializar seu modelo computacional. Contudo, retornamos outro dia para imprimir os modelos.

A equipe *Pato & Peixe* foi a primeira a chegar. Iniciamos o processo de impressão com o Hidaka apresentando o filamento que seria utilizado e auxiliando os participantes a fatiarem seu modelo. A equipe ao apresentar seu modelo, informou que precisou fazer uma alteração no formato do objeto, substituindo os arcos de circunferência por segmentos de reta, pois quando exportavam para o formato .OBJ, o modelo com arcos de circunferência apresentava "buracos" em algumas partes. O participante L.B não disse o porquê disto ocorrer, mas que ele havia pesquisado na internet e outros usuários também tiveram problemas semelhantes. De acordo com L.B, este problema poderia estar ocorrendo em virtude de alguma instabilidade no Geogebra, já que a função de exportar em .OBJ era uma versão de testes.

Figura 53 – Preparação do modelo para impressão 3D - Equipe *Pato & Peixe*.

(a) (b)

Fonte – O autor (2019).

Após o início da impressão, estimada em 30 minutos, os participantes trocaram ideias com Hidaka sobre como a impressão 3D pode ser aplicada em projetos de engenharia. Uma das participantes indagou se era possível imprimir de uma vez só um objeto com mais de uma cor. Hidaka prontamente respondeu que sim e que há duas formas de fazer isto, sendo um com maior grau de precisão que a outra. Neste momento, intervi com um exemplo. Mostrei o Nó Trifólio que havia modelado e disse que alguns makers haviam impresso um modelo semelhante ao meu em três cores: azul, verde e vermelho.

Os 30 minutos que o software havia indicado se esgostaram e o modelo ainda não estava concluído. Hidaka explicou que esse tempo era uma estimativa e que era comum o tempo de impressão superá-la pois, na prática, a impressão dependia do modelo da impressora e quais recursos ela tem e qual a velocidade de impressão. Assim, a impressão levou 15 minutos a mais do que o esperado, totalizando 45 minutos de impressão. O resultado obtido é apresentado na imagem a seguir.

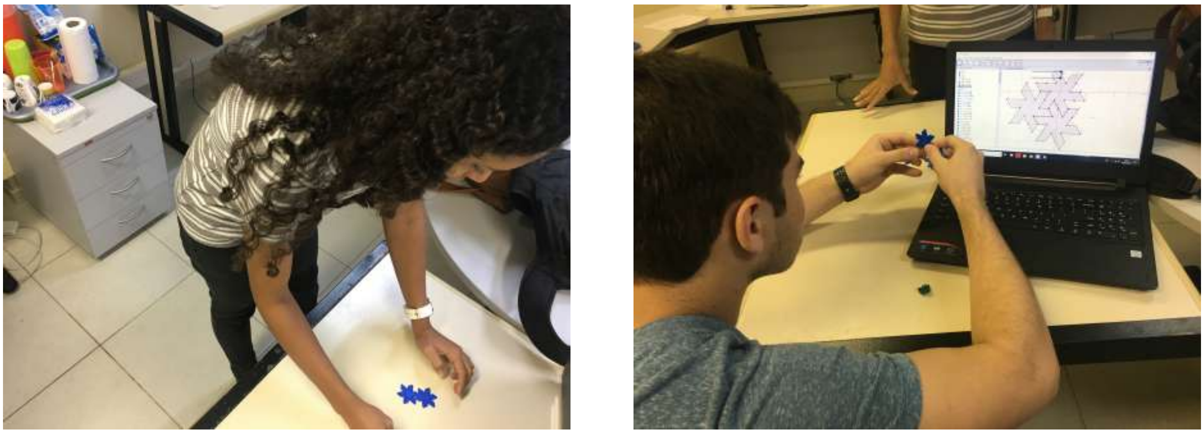
Figura 54 – Modelo Impresso - Equipe *Pato & Peixe*.

Fonte – O autor (2019).

Quando finalizou a impressão, os participantes manipularam o objeto e perceberam que o encaixe das peças não estava exato, como no modelo digital. Hidaka comentou que esse tipo de problema era normal, mas que era facilmente solucionado utilizando um filamento que permitisse o tratamento da peça com uma lixa, por exemplo.

Figura 55 – Manipulação do objeto impresso - Equipe *Pato & Peixe*.

(a) (b)



Fonte – O autor (2019).

A equipe *Pato & Peixe* ficou satisfeita com resultado da impressão. Nas palavras da participante J.S,

> "Ver o resultado do nosso projeto foi muito bacana, porque não ficamos apenas com os conceitos abstratos do que estamos vendo."

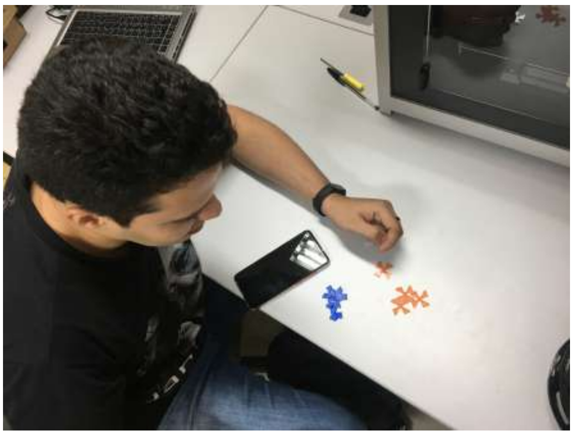
Após a impressão do modelo da equipe *Pato & Peixe*, iniciamos a impressão do modelo da equipe *Fractal*. De forma semelhante ao que foi feito com a primeira equipe, Hidaka retomou a explicação do funcionamento da impressão 3D que havia feito anteriormente e, utilizando os mesmos parâmetros de configuração da impressão do modelo da primeira equipe, iniciou a impressão do modelo da equipe *Fractal*, que foi estimado em 20 minutos. Como a equipe presenciou as explicações que Hidaka fez a primeira equipe, durante a impressão não houve uma grande interação dos participantes com Hidaka. Após cerca de 35 minutos, o modelo foi impresso, obtendo o seguinte resultado:

Figura 56 – Modelo Impresso - Equipe *Fractal*.

Fonte – O autor (2019).

Após a impressão, os participantes manipularam o objeto e se sentiram satisfeitos com o resultado. Entretanto, o participante J. N observou que uma das peças teve uma pequena deformação em uma de suas extremidades. Hidaka observou que a deformação ocorreu por uma perda de temperatura no bico que sai o filamento. Nesse momento, intervi e perguntei se esse tipo de situação era comum, o que foi confirmado por Hidaka. Segundo ele, a perda ou aumento de temperatura no bico da extrusora pode causar deformações na peça e, em alguns casos, é necessário imprimir novamente o modelo.

Figura 57 – Manipulação do objeto impresso - Equipe *Fractal*.



Fonte – O autor (2019).

Finalizada as impressões, alguns participantes avaliaram a oficina. A participante M.A destacou o impacto que a impressão 3D lhe causou e o aprendizado que a oficina lhe proporcionou:

> "Eu nunca tinha visto uma impressora 3D e vê-la fisicamente me causou um impacto. Pra mim, a produção dos jogos no início da oficina foi muito criativo e foi muito importante para conhecer mais sobre Escher e as suas obras. Quanto a produção do modelo 3D, a sensação de ver tudo dando certo e sendo impresso foi uma experiência muito legal, porque nós fomos capazes de pensar no modelo e reproduzi-lo, contando com o auxílio de outras pessoas. Isso mostrou que somos capazes pensar um modelo e imprimir em 3D. A mensagem que fica é: nós somos capazes de produzir! Eu amei participar da oficina e pude aprender como trabalhar com o tempo, em equipe e a ouvir as orientações que foram passadas." (Participante M.A)

Já a participante J.S destacou a importância de desenvolver um projeto de forma interdisciplinar e como modelar e imprimir um modelo lhe foi significativo:

> "O que achei muito interessante, bacana e divertido foi a junção de três temáticas – arte, matemática e tecnologia – em um só projeto foi muito bacana pois não a gente não fica apenas com um conceito abstrato. Eu poderia pegar um quadro do Escher, olhar e achar super interessante e pronto. Ele estava ali, pronto e acabado. Não da pra saber a complexidade dele ou como poderíamos reproduzi-lo. Ai a oficina veio e nos permitiu montar computacionalmente e imprimir um modelo inspirado no Escher. Ver pronto tudo o que foi produzido é muito bacana e me fez perceber que toda essa construção não foi monótona. A partir do momento que juntamos essas três temáticas tornou o projeto mais atraente e divertido." (Participante J.S)

O participante C.E destacou em sua fala a criatividade e autonomia na elaboração do projeto e sua atitude interdisciplinar na hora de planejar o modelo 3D:

> "Eu achei a oficina muita válida e interessante, porque tivemos bastante autonomia pra planejar nossos objetos. A parte de modelar o objeto era meio matemática e embora eu seja engenheiro e quisesse usar os softwares da minha área, sou muito ligado à matemática e gosto muito. Usar o Geogebra foi bem interessante e positivo pois nos ajudou a desenvolver nossa criatividade, o que influenciou diretamente no momento do planejamento." (Participante C.E)

O participante J.N também destacou sua liberdade em cada uma das atividades propostas:

> "Acredito que tivemos bastante liberdade em todas as etapas da oficina. Senti que estava livre pra criar. Algumas ferramentas que escolhemos não nos ajudaram muito, mas tivemos autonomia

> para rever nossas escolhas e desenvolver nossas atividades de outras formas." (Participante J.N)

Finalmente, depois de encerrar a oficina, volto pra casa feliz, após perceber a satisfação dos alunos em aprender ativamente, de forma autônoma e criativa através de um diálogo interdisciplinar entre a matemática, a tecnologia e a engenharia. Percebi o brilho nos olhos dos alunos ao verem um modelo, que até então era só computacional, tornando-se físico. Creio que naquele momento, começou a florecer em cada um dos alunos o espírito maker!

Junto com esta satisfação pessoal surge uma inquietação sobre a metodologia STEAM. Consegui visualizar um processo interdisciplinar entre a matemática e a engenharia, mas embora tivesse usando como inspiração uma obra de arte, esta obra foi usada apenas como motivação e não de modo interdisciplinar. Usamos a cultura maker e a metodologia STEAM, mas faltou a arte. Faltou um processo de criação artístico tanto meu, quanto dos participantes da oficina. Algo que envolvesse mais sensibilidade e a criatividade.

Fiquei com essa inquietação por vários dias, até que decidi compartilha-lá com a Professora Cristina Vaz, na aula da disciplina Matemática e Arte. De início, ela não me deu uma resposta exata, pois ela também se fez as mesmas perguntas de como aliar a arte com a matemática e a tecnologia e começo a pesquisar sobre este assunto para encontrar alguns caminhos. Saí da aula um pouco aliviado por saber que não estava sozinho e que poderia investigar como e porque alguns artistas utilizam a matemática como linguagem em suas composições.

Algumas semanas se passaram, até que certo dia, recebo em meu celular uma mensagem. Era a professora Cristina. Ela conheceu o artista Antônio Peticov, que a convidou para fazer uma visita em seu Instituto, na cidade de São Paulo. Ela estendeu o convite a mim e eu, logicamente, o aceitei. Seguimos juntos para São Paulo, sem saber o que encontraríamos, mas uma coisa era certa: desejamos encontrar caminhos e nada mais estimulante que conversar com um artista tão criativo e inovador como Antônio Peticov.


ATELIER 105

3 Atelier: Matemática Sensível

Sexta-feira, 06h15, Aeroporto Internacional de Belém. Professora Cristina e Eu já estamos na aeronave aguardando o início do voo. No bolso da poltrona à minha frente, há cartões com as instruções de segurança e uma revista da companhia aérea. Em minhas mãos, o celular e o tablet, utensílios indispensáveis na vida deste pesquisador-cartógrafo. O comandante anuncia a partida e em poucos minutos estamos nas alturas rumo à São Paulo.

Pego a revista da companhia aérea para ler durante a viagem. Folheio as páginas em busca de algo me chame atenção, até que encontro a seção da agenda cultural, que indica um passeio pela Bienal de Artes de São Paulo, no Parque do Ibirapuera. Me empolgo com a oportunidade de visitar um dos principais eventos do circuito internacional e pergunto a Professora se ela gostaria de ir ao evento. Como boa parceira de viagem e amante de aventuras, ela não hesita e aceita o convite. Vamos juntos para Bienal de São Paulo!

São 09h50 e o comandante anuncia que o pouso no Aeroporto Internacional de Guarulhos está autorizado. Era uma manhã ensolarada de outono.

Seguimos rumo ao local de nossa hospedagem, no centro da cidade. *Veja aquele lindo grafite, Edilson*, diz a Professora, enquanto seguíamos pela Avenida 9 de Julho. Peguei o celular e fiz uma foto. E foi assim durante todo percurso.

Chegamos ao local de nossa hospedagem e tivemos uma surpresa. Nosso prédio era em frente ao belo Teatro Renault, uma construção de 1929 em estilo *Art Decô*. Meu olhar diante da bela construção logo se voltou para sua arquitetura, simétrica e com forte presença geométrica. Mais uma vez, a arte e a matemática estavam juntas e isto, ficou em minha mente, como uma ideia fixa.

Passado algum tempo, peguei o tablet e fui navegar na internet com a atenção concentrada na busca de como a Matemática e Arte se entrelaçavam.

Em minha pesquisa, encontrei a dissertação de mestrado de Maira Leandra

Alves, intitulada *Muito Além do Olhar: Um Enlace da Matemática com Arte*, na qual a autora investiga, através da leitura de imagens, "como os atributos matemáticos usados por alguns artistas no processo de criação e execução contribuem para a aprendizagem da Matemática por crianças do ensino fundamental". Em seu trabalho, Alves (2007) sugere trabalhar com a Matemática e Arte de forma harmônica, em que ambas as ciências se fundam até o momento que perde-se a referência de "onde uma começa e a outra termina". Noto que a autora propõe um trabalho interdisciplinar, abrindo-se ao diálogo com a Arte e adentrando no "mundo das Artes". Isto me recorda o que Fazenda (1991) aponta como uma atitude interdisciplinar: a busca de alternativas para conhecer mais e melhor, a promoção do diálogo entre os pares e consigo mesmo e até a perplexidade diante da possibilidade de desvendar novos saberes. Interessante! Este trabalho aguça ainda mais a minha curiosidade. Decido avançar na leitura.

Alves (2007) traça um paralelo entre as práticas da Arte-Educação e da Educação Matemática e aponta as dificuldades que ambas as áreas enfrentam, tais como o desrespeito por parte de alguns diante do educador de Arte ou a adoção de práticas tradicionais de ensino-aprendizagem, nas quais o professor (especialmente professores de matemática) é o detentor dos saberes e o aluno é um receptor de conhecimento. Esta prática, me faz recordar de Freire (2011), que argumenta contra tais práticas quando afirma que "ninguém ensina a ninguém" e que o conhecimento deve ser construído com autonomia.

Ainda nessa dissertação, a autora faz um desenho histórico destacando as conexões entre a Matemática e a Arte. Neste desenho, Alves (2007) cita como exemplo a pré-história com as pinturas rupestres, a antiguidade com a arquitetura e a presença da simetria, o período medieval e a presença das figuras geométricas como o pentagrama e os polígonos, o renascentismo com a introdução da perspectiva e os movimentos que surgiram a partir do final do século XIX, tais como o Cubismo (com Picasso) utilizando frequentemente as formas geométricas e a abstração geométrica de Kandinsky. A autora aprofunda, nos capítulos seguintes, a análise de alguns destes movimentos e e conclui que "os conceitos matemáticos inerentes às obras de Arte podem ser de grande auxílio na aprendizagem da Matemática Elementar do Ensino Fundamental" e que com este trabalho, a autora abre "caminho à criatividade dos educadores que se interessam por trilhas desconhecidas, pois não são fórmulas prontas que incentivam a imaginação e a criatividade humana. Para tanto é preciso apenas a curiosidade e o desejo de aprender".

Percebo que este trabalho é rico quanto à presença da Matemática na Arte, dando destaque aos aspectos matemáticos (em relação à técnica) nas obras de arte. Noto que a autora não aborda como os artistas usam a matemática em seu processo criativo. Isso me intrigou e instigou ainda mais a entender o processo de criação dos artistas. Fui dormir aguardando ansiosamente a visita que faríamos, no dia seguinte, ao

Instituto Peticov, o espaço de inspiração e criação do artista. Teria ali, a oportunidade de compreender o processo criativo de um artista, apresentado pelo próprio artista. Um oportunidade singular!

Chegou o dia de conhecer o **Instituto de Arte e Cultura Antônio Peticov**, que localiza-se na rua Nebraska, número 655, no bairro do Brooklin. Quando chegamos fomos recebidos pelo próprio artista. O Instituto Peticov tem como princípio compartilhar bens afetivos e culturais, garantindo a memória da trajetória do artista. Foi construído na residência particular do artista e possui dois andares. O primeiro andar é um espaço semelhante a uma galeria de arte onde várias de suas obras (quadros e esculturas) estão expostas. O segundo andar é formado por três grandes compartimentos: uma sala de estar, uma biblioteca e o atelier do artista.

Na sala de estar (figura 58a) encontramos um computador com impressora, vários jogos e desafios matemáticos, alguns livros e, nas paredes, alguns recortes de jornal com matérias sobre o artista. A biblioteca (figura 58b) é bem grande e espaçosa, com livros variados de arte, matemática, física, história, entre outros títulos. O atelier (figura 58c) tem uma mesa grande, um bancada com diversas tintas e pincéis, alguns cavaletes com telas em branco. Nas paredes deste espaço há também pinturas em telas, algumas finalizadas e outras incompletas. Um clássico atelier de arte. Percebi que, em quase todos os cômodos do Instituto (exceto no atelier), a iluminação era indireta e discreta e muitas destacavam as obras.

Figura 58 – Instituto Antônio Peticov.

(a) Sala de estar

(b) Biblioteca

(c) Ateleir

Fonte – Disponível em: https://www.peticov.com.br

Entre as obras e os objetos matemáticos, iniciamos uma longa conversa. Muito curiosos, perguntamos como artista usa a matemática em sua obra. Peticov começa por suas inspirações, revela que desde muito cedo se fascinava com a proporção dos objetos e a magia dos números, embora as aulas de matemática não fossem as suas prediletas. Conta que as aulas eram bem chatas e que ficou reprovado cinco vezes! Para ele, matemática era outra coisa. Lhe fascinavam as charadas matemáticas e os jogos de desafios.

Peticov continua contando sobre suas experiências com a matemática e relata que durante sua adolescência, conheceu um artista que lhe apresentou a proporção áurea, frequentemente utilizada pelos grandes mestres da pintura na construção de seus trabalhos. Neste início de carreira, a matemática foi acontecendo pela grande curiosidade que o artista tem sobre o assunto. Nas palavras de Peticov, "eu sou muito curioso".

A conversa não tem uma sequência e Peticov começa a contar como as viagens lhe inspiraram e, principalmente, os artistas que lhe impressionaram. Na década de 1970, foi morar em Milão, *com a cara e a coragem*, e encontrou um livro com muitas ilustrações e gráficos detalhados sobre a seção áurea, escrito por Aldo Montú. Esse livro tinha a ilustração de alguns objetos e, sobre suas páginas, havia folhas de papel vegetal com desenhos da geometria que explicavam a estrutura matemática dos objetos reproduzidos nas páginas. O livro lhe fascinou, fazendo com que, nos anos seguintes, adquirisse várias publicações que tratavam de assuntos que aproximavam a matemática da arte. Esta ideia lhe inspirou para criar uma série de pinturas relacionadas com o número de ouro.

Ainda na década 1970, Peticov relata que conheceu a revista *Scientific American*, em que especialmente lhe interessava a seção mensal que tratava exclusivamente de matemática recreativa. Estas leituras expandiram seus conhecimentos de Matemática, mas o que mais lhe interessou foi o matemático Martin Gardner. Perguntei ao Peticov qual a influência de Gardner na sua arte. Peticov, bem objetivamente, responde que, nos anos 2000 frequentou o *Gathering 4 Gardner*[1], onde conheceu vários matemáticos interessando em Matemática recreativa, desafios matemáticos e construção de objetos matemáticos desafiadores e também teve a oportunidade de trocar ideias e aprender matemática. Seu interesse eram as ideias, os problemas e a relação com a arte.

Que artista! Fiquei impressionado de saber como a matemática inspira o seu processo criativo. Ele compreende os conceitos, especialmente o número de ouro, a sequência de Fibonacci e o quadrado latino e usa como linguagem em suas composições. Peticov também se inspira na decomposição da luz branca, no espectro da luz, a qual associação a energia. Nas palavras do próprio artista:

> "Como a luz é associada à energia, e esta ao ato criador, as sete cores representam o processo criativo e através do tempo e do espaço o homem tem dado ou encontrado um significado a para cada uma dessas cores." (PETICOV, 2018)

Estávamos impressionados com tudo o que tínhamos visto e ouvido! Nossas impressões sobre o processo criativo do artista pareciam se confirmar. A Matemática era utilizada não somente como ferramenta, mas como elemento integrador de saberes e como parte integrante da mensagem que o artista quer passar, oriundo de um processo criativo que envolve não somente a produção da obra em si, mas também uma vasta pesquisa sobre aquilo que será retratado.

Uma conversa maravilhosa e muito esclarecedora, um verdadeiro encontro que transformou o nosso olhar, olhar que a partir daquele momento passou a ter também o

[1] Gathering 4 Gardner é uma fundação educacional dedicada a preservar o legado do escritor Martin Gardner.

prisma da arte, do contexto que ela (a obra) foi criada ou inserida, sem deixar de lado as influências da matemática.

De repente, entendi que "algo me afetou, algo me aconteceu" (BONDÍA, 2001), que aquele encontro foi uma experiência, que transformou o meu olhar sobre Matemática e Arte.

Peticov nos mostrou os objetos matemáticos que colecionou ao longo de sua trajetória. Ele tem mais de 200 tipos de cubos mágicos! Contou um pouco a história de alguns objetos e disse que tem muita curiosidade por charadas matemáticas. Depois desta breve exposição, nos incentivou a explorar o Instituto.

Próximo à porta do Instituto, havia uma obra bem interessante. Era uma escultura, chamada *Natura*, que consistia em sete recipientes de diferentes formas e materiais, semelhantes às latas de tinta. De dentro de cada recipiente saía uma luz, que formava a sequência de cores do arco-íris (violeta, anil, azul, verde, amarelo, laranja e vermelho). Outra obra bem interessante estava sobre uma mesa redonda que possuía, no centro, um cilindro cuja superíficie refletia o desenho que estava sobre a mesa: a cena do livro *Alice no país das Maravilhas*, em que Alice toma chá com o coelho. Logo percebi que Peticov havia produzido uma obra de arte anamórfica[2]. Nas paredes, há alguns quadros geométricos, em que o artista privilegia as formas básicas, tais como o quadrado, o triângulo e o círculo. Há também algumas pinturas que fazem referências à música, que lembram partituras, onde as notas musicais são substituídas por pinceladas coloridas.

Seguimos conhecendo os espaços do Instituto e observei que, sobre a mesa dos cubos mágicos, havia um folheto, que me chamou atenção. Era um *folder* de divulgação sobre um lugar, chamado *Atelier Artemático*, um espaço de criação, descobertas e vivências envolvendo matemática e arte. Fiquei muito interessando em visitar este lugar e fotografei o folder com meu celular.

A visita ao Instituto Peticov chegou ao fim! Agradecemos ao artista, que gentilmente nos presenteou com alguns livros e algumas gravuras de suas obras, um ato de afeto e generosidade que aumentou ainda mais nossa admiração por ele. Com certeza, o artista Antônio Peticov afetou profundamente nossa maneira de entender e sentir a arte e a matemática.

Logo que foi possível, mostrei para professora Cristina o folder sobre o *Atelier Artemática*. Ela ficou muito interessada, mas infelizmente tinha que voltar para Belém e me incentivou a explorar este atelier, pois isso seria importante para a minha formação acadêmica. Segui, então, a viagem.

[2] Anamorfose é um efeito de perspectiva que o observador se coloca em um determinado ponto e visualiza a imagem sem deformações.

Cheguei no **Atelier** Artemático numa tarde nublada, típica de São Paulo. O **Atelier** Artemático ficava em um prédio de arquitetura contemporânea, com uma fachada com elementos curvilíneos, que lembravam ondas. Entrei no local e perguntei na recepção se este espaço estava aberto à visitações públicas e a recepcionista me informou que sim e que aquele espaço era um local inspirador para que qualquer visitante pudesse criar e inovar.

Achei bem interessante a proposta deste **Atelier** e decidi conhecer melhor o espaço. Ao entrar neste lugar, me deparei com um grande salão bem iluminado e com várias mesas de formatos e cores diferentes. Percebo que este lugar é um pouco diferente daqueles que vi em filmes ou em livros. Encontrei ali não somente tintas, pincéis e telas mas, também, computadores, projetores, câmeras fotográficas, sistema de som e livros. É um espaço que tem tecnologia e arte.

Sigo conhecendo o **Atelier** e me aproximo da estante com livros. Vejo que os livros estão organizados por temática! Há livros de artes plásticas, música, história, filosofia, teatro, arquitetura, design, dança, fotografia e até mesmo de matemática. Sim, de matemática! Não esperava encontrar este tipo de livro no **Atelier**.

Continuo andando pelo salão e observo alguns quadros na parede. São reproduções de obras com inspirações matemáticas! A primeira reprodução (figura 59a) chama-se *Pitágoras (4)* e faz uma referência à Pitágoras e a um fractal que leva seu nome, a Árvore Pitagórica. A segunda reprodução (figura 59b) chama-se *Opera* e apresenta a aproximação do número π com 64 casas decimais, pintadas de cor preta. Há também os números e, i, π, 0 e 1 destacados por outras cores e o símbolos $+$ e $=$ destacados por seu tamanho maior, o que me parece fazer referência à identidade de Euler[3]. A terceira reprodução, denominada de *Los remarcables números* π *y* e, apresenta a aproximação do π e e, cujos números foram apresentados por círculos dentro de quadrados. Já a última reprodução (figura 59d) faz uma referência ao Teorema de Napoleão.

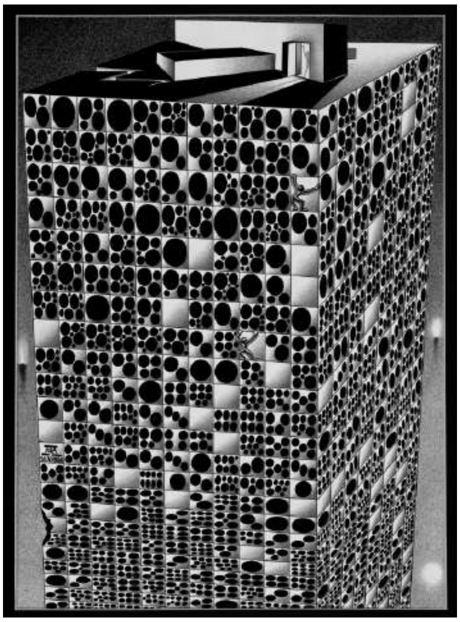
[3] $e^{i\pi} + 1 = 0$

Figura 59 – Algumas reproduções encontradas no Atelier Artemático.

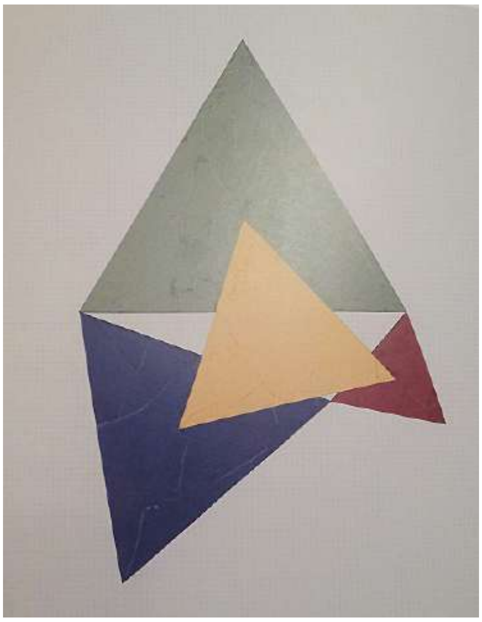
(a) Pitágoras (4), de Mel Bochner (2006)

(b) Opera, de Ugo Nespolo (1941-)

(c) Los remarcables números π y e, de A. T. Fomenko (1985)



(d) Triángulo de Napoleón, de Esther Ferrer (final dos anos 1980)



Fonte – Disponível em: https://culturacientifica.com/

Começo a entender o motivo do **Atelier** se chamar Artemático. É a busca por fazer Arte com matemática e Matemática com arte! Um espaço de criatividade e inovação que conecta tecnologia, arte e matemática. Fico feliz por conhecer um lugar como o **Atelier**, que se apresenta com uma proposta interessante para promover um aprendizagem criativa em Matemática.

As horas passaram voando e preciso retornar ao apartamento onde estou hospedado. Enquanto aguardo o metrô, vejo em uma das paredes da estação uma grande pintura, bem colorida e com vários círculos. Lembrei da artista brasileira que minha amiga Julia apresentou na disciplina Matemática e Arte: Beatriz Milhazes. Meu olhar está mais apurado. O metrô chega.

Durante a viagem, reflito como muitos artistas usam a matemática em suas composições e como o *Atelier Artemático* é um espaço estimulante e inspirador para promover uma aprendizagem criativa em Matemática usando-se as conexões entre estes saberes. Desta breve reflexão surge a pergunta: *como a integração de saberes e/ou abordagens da Matemática e da Arte pode promover uma aprendizagem criativa?* Concluo que o **Atelier** é o espaço ideal para responder esta indagação, por meio da realização de ações interdisciplinares que envolvam os processos que aprendi na disciplina Matemática e Arte.

Chego ao meu destino. É hora de descansar e deixar que o sono renove as energias para as ações do dia seguinte.

Acordo motivado e retorno ao *Atelier Artemático*. Ao chegar, encontro sobre o balcão da recepção guias sobre projetos do **Atelier**, cuja proposta principal é promover aprendizagem criativa com enfoque numa prática interdisciplinar. Essencialmente, a construção do conhecimento é permeada por dois processos: curar e fazer (figura 60).

Figura 60 – Processo de Aprendizagem Criativa em Matemática e Arte.

Fonte – O autor (2019).

Esta proposta me lembrou o processo de criação relatado por Peticov que, de certa forma, tem relação com a proposta do **Atelier**, porém com focos diferentes. Em ambos, percebo um processo de *curar* e um processo de criação, um *fazer*. O *fazer* de Peticov é uma produção artística e o *fazer* no **Atelier** é a confecção de um produto criativo, resultante de um processo de aprendizagem. Mas, em que consiste o *curar* e o *fazer* neste lugar?

Para Vaz e Rocha (2018), o processo de curar consiste em uma curadoria de conteúdo, através de uma imersão interdisciplinar, em que haja descobertas, seleção, categorização, e organização de conteúdos capazes de contribuir para o entendimento dos principais conteúdos abordados no contexto artístico e matemático. E o processo de fazer, por sua vez, consiste em interpretar as curadorias realizadas, conectando a Matemática e a Arte. Estas interpretações podem ser materializadas em produtos criativos, de diferentes formatos, tais como poemas, jogos, atividades lúdicas, produções digitais, animações, peças 3D, Guias, e-books ou releituras interdisciplinares de imagens, entre outros.

Lembrei que certo dia, na disciplina Matemática e Arte, a Professora nos desafiou a entender algumas conexões entre a Matemática e Arte, numa proposta de troca recíproca de conhecimentos, experiências e vivências interdisciplinares. Uma das atividades propostas desafiava os alunos em, a partir de uma curadoria de artistas e suas respectivas obras, selecionar uma obra para realizar um estudo interdisciplinar e, a partir deste, produzir uma releitura da obra escolhida. Lembrei de Peticov e confesso que me senti desafiado, pois não sabia o que era releitura e nem como fazê-la.

No fundo do **Atelier**, havia uma porta que eu não tinha visto. Ela dava acesso uma sala de exposições, em que as obras eram projetadas em telas de TV fixadas na parede por trás de uma moldura, simulando uma tela. Nesta exposição, havia obras representativas de vários movimentos artísticos. Aquelas obras me inspiraram a entender e a fazer uma releitura. Aceitei aquele desafio, proposto um dia pela minha professora, e decidi iniciar uma curadoria. Senti que aquele era o lugar certo para isso.

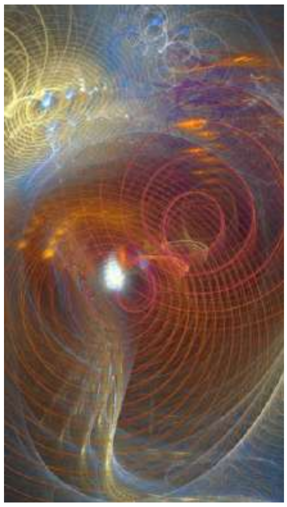
3.1 Croqui 1: Albrecht Dürer

Observei atentamente a cada uma das obras e descobri que em muitas delas os artistas utilizavam a matemática em sua composição como, por exemplo, Leonardo Da Vinci (figura 61a), Piero Della Francesca (figura 61b), Scott Draves (figura 61c), Albrecht Dürer (figura 61d), M. S. Escher (figura 61e) e Charles O. Perry (figura 61f).

Figura 61 – Curadoria de obras de arte.

(a) Salvator Mundi, Leonardo Da Vinci

(b) The Baptism of Christ, de Piero Della Francesaca



(c) Dream 198, de Scott Draves

(d) Melancolia I, de Albrecht Dürer

(e) Clowns (No. 21), de M. S. Escher

(f) Continuum, de Charles Perry

Fonte – Disponível em: https://bit.ly/2UbvE2t

Abaixo de cada uma das obras havia um QR-Code para ser escaneado com o celular. Ao fotografá-lo, uma página do navegador era carregada com mais informações sobre a obra, o artista, o movimento artístico e a matemática utilizada na composição. Poderia ter escolhido estudar a proporção de Leonardo da Vinci, a perspectiva de Piero Della Francesca, a arte digital de Scott Draves, a simetria de Escher ou as esculturas matemáticas de Charles Perry. Entretanto, escolhi estudar a perspectiva na obra Melancolia (destaque na figura 62), de Albrecht Dürer.

Figura 62 – Melancolia I, de Albrecht Dürer (1514).

Fonte – Disponível em: https://bit.ly/2UqxpIh

Inicialmente, escolhi Melancolia I pela farta presença de elementos matemáticos que meu primeiro olhar identificou na obra: a esfera, o poliedro, o quadro mágico e os instrumentos de medida. Embora todos esses elementos me chamassem atenção, com um olhar um pouco mais atencioso e analítico, identifiquei que Dürer introduziu a noção de tridimensionalidade, por meio da técnica de perpectiva. Esta técnica foi amplamente utilizada no período do Renascentismo, sendo Leonardo Da Vinci, Pierro Della Francesca e Albrecht Dürer, referências nesta forma de pintar (ENEGUZZI, 2009).

A partir deste segundo olhar, me interessei em compreender como e por que Dürer utilizou a perspectiva em suas obras. Iniciei com uma breve biografia do artista. Albrecht Dürer (figura 63a) nasceu em Nuremberg, na Alemanha, em 21 de maio de 1471. Filho de um ourives húngaro, Dürer, ainda muito jovem, dedicou-se a aprender, na oficina de seu pai, a arte da ourivesaria. Aos quinze anos de idade, como aprendiz do pintor alemão Michael Wolgemut, dedicou-se a aprender sobre pintura artística, aperfeiçoando seus conhecimentos sobre outras técnicas (FLORES, 2007).

Após finalizar o seu período de estudos, por volta de 1490, Dürer partiu em viagem por outros países. Já em setembro 1494, Dürer, que já estava casado, segue sozinho em viagem para Veneza, em virtude de um surto de peste que acometia Nuremberg, retornando para sua cidade natal no ano seguinte, permancendo nela por uma década, onde produziu um grande número de obras, tais como *A Queda do Homem* (figura 63b) e *Anjo com a chave do poço sem fundo* (figura 63c).

Figura 63 – Obras de Albrecht Dürer produzidas entre 1495 e 1505.

(a) Autorretrato (1500)

(b) A Queda do Homem (1504)

(c) Anjo com a chave do poço sem fundo (cerca de 1496-1498)

Fonte – Disponível em: https://bit.ly/2VfUhaS

Na sua segunda viagem à Itália, em meados de 1505, Dürer aperfeiçou sua técnica de pintura e incorporou a ela traçados semelhantes às das pinturas italianas. Foi neste período que ele conviveu com Giovanni Bellini. Retornou à sua cidade natal em 1507, onde permaneceu até 1520. Foi no período de 1511 à 1514 que Dürer produziu seus trabalhos mais famosos: O Cavaleiro, a Morte e o Diabo (figura 64a), Melancolia I e São Jerônimo em seu Estúdio (figura 64b).

Figura 64 – Obras de Albrecht Dürer produzidas entre 1511 e 1514.

(a) O Cavaleiro, a Morte e o Diabo (1513)

(b) São Jerônimo em seu estúdio (1514)

Fonte – Disponível em: https://bit.ly/2VfUhaS

Após este período, por volta de 1520, Dürer realiza uma viagem aos Países Baixos, onde produziu várias obras. Retornou em 1521 a Nuremberg, onde dedicou-se não somente aos desenhos e a pintura. Neste período, de acordo com Flores (2007), dedicou-se também aos estudos teóricos em geometria e perspectiva, proporções e fortificações, tendo publicado os livros *Unterweisung der Messung mit dem Zirkel und Richtscheit*[4] (1525) e *Arcibus castellisque condendis ac muniendis rationes aliquot*[5] (1527). Já o livro *Vier Bücher von Menschlicher Proportion*[6] (1538) foi publicado após a sua morte, que ocorreu em 6 de abril de 1528, aos 56 anos.

A biografia do artista indica que o mesmo tinha um grande conhecimento sobre a técnica da perspectiva e a ensinava aos jovens artistas e artesãos (ENEGUZZI, 2009, p. 54). Dürer propôs três modelos (figura 65), denominados de máquinas, que auxiliam um jovem aprendiz a representar objetos em perspectiva.

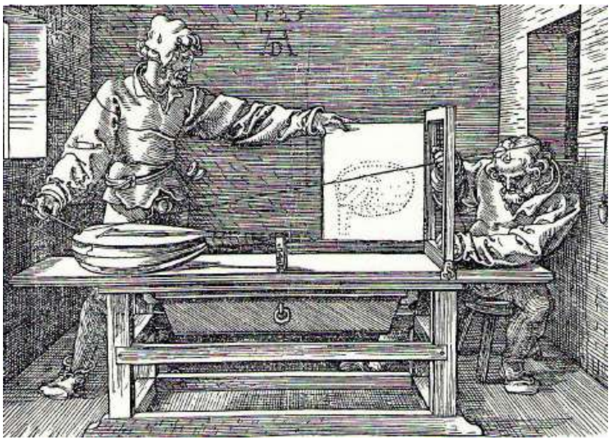
4 Instrução para medições à régua e ao compasso
5 Tratado sobre fortificações
6 Sobre proporção do corpo humano

Figura 65 – Máquinas de Dürer.

(a) Máquina I - Janela de Vidro

(b) Máquina II - Janela Quadriculada

(c) Máquina III - Portinhola



Fonte – Eneguzzi (2009).

Nota-se que os três modelos propostos por Dürer exploram basicamente as ideias de perspectiva: linha do horizonte, ponto de fuga, entre outros. O plano de fundo destas ideias nada mais são do que os conceitos de proporcionalidade, paralelismo, perpendicularismo da geometria clássica (ENEGUZZI, 2009, p. 65).

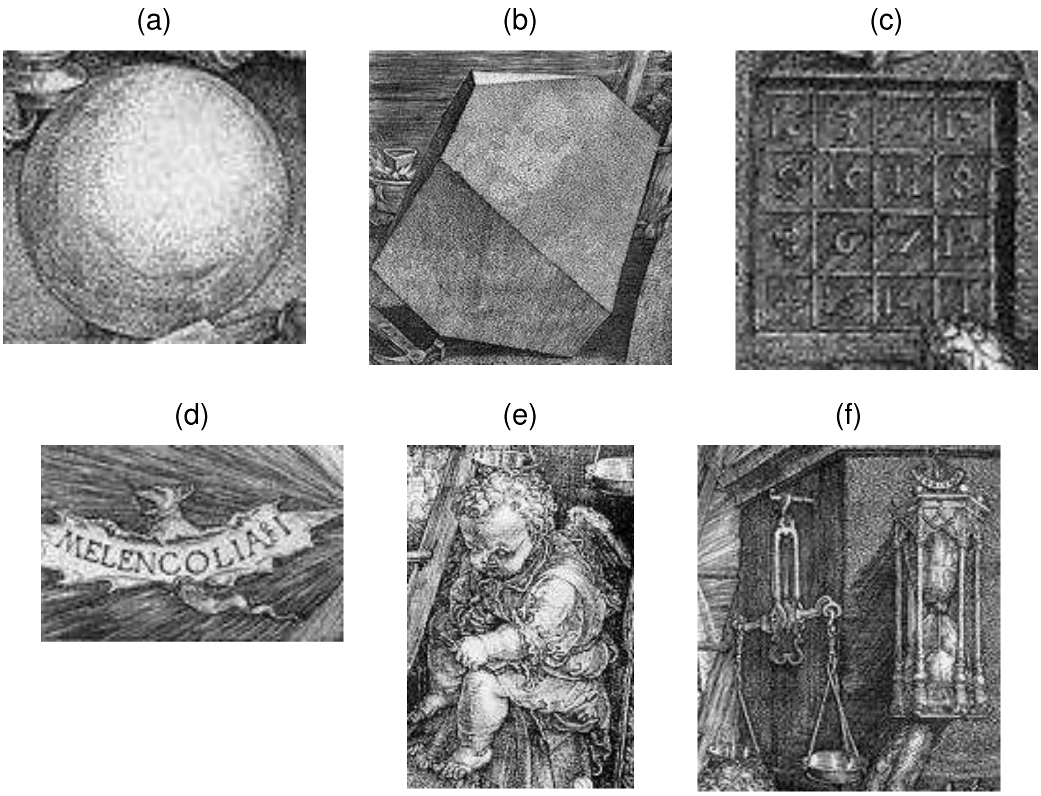
Notei que, meu olhar sobre a obra de Dürer não era interdisciplinar, segundo o entendimento de Fazenda (1991), em que a característica fundamental da atitude interdisciplinar é o diálago e a troca "no aceitar do pensamento do outro". Neste caso, o "outro" era a Arte. Meu olhar era majoritariamente matemático e não estabelecia um diálogo entre a Matemática e Arte. Busquei fazer um diálogo entre estes saberes.

Lembrei de como Peticov conecta a matemática com sua arte e da proposta do **Atelier**! E procurei ter uma postura mais interdisciplinar, para isso precisava compreender como Dürer utilizou a matemática na composição da obra Melancolia I.

Percebi que não era uma tarefa tão fácil assim. Os dias se passaram e eu não conseguia fazer conexões interdisciplinares com a obra Melancolia I. Depois de conversar com alguns *artemáticos*, do **Atelier**, e compartilhar as minha dúvidas, decidi destacar elementos da obra que me chamavam a atenção e investigar o significado de cada um deles no contexto histórico da obra. Foi o que fiz.

Retornei à Melancolia I (figura 62), e me concentrei em compreender o que Dürer representou em sua obra. Nesta gravura, o artista retratou um anjo sentado, segurando um compasso com uma das mãos e com a outra, apoiando o rosto, com um olhar fixo e com fisionomia cansada. À sua volta, encontram-se uma série elementos simbólicos: uma esfera, um poliedro, um quadrado mágico, um morcego segurando uma faixa com o nome da obra, o Putto[7] (figura 66e), uma ampulheta e uma balança (figura 66f).

Figura 66 – Detalhes da obra Melancolia I.



Fonte – Adaptação do autor (2019).

Fiz também uma pesquisa na internet em busca do significado destes elementos ou de pistas me direcionassem pelo caminho que deveria seguir. Encontrei no artigo

[7] Nas artes, é a representação de um menino com asas, geralmente gordinho e nu. É derivado da figura do cupido jovem e simboliza a pureza e o amor.

A Melancolia de Albercht Dürer (1471-1528), de José Carlos Calazans, onde o autor afirma que "o seu estado de melancolia ali ficou retratado, imagem da sua angústia religiosa, reforçada pela morte da mãe que nesse mesmo ano falecera" (CALAZANS, 2012, p. 145). Portanto, para entender a mensagem de Dürer, senti a necessidade de investigar a evolução histórica do conceito de "melancolia". O que significava melancolia na época do renascimento?

Na Grécia antiga, segundo Rodrigues (2009), entre os anos 25 a.C. e 50 d.C., de Aulus Cornélius Celsus recomendava exposição ao sol para o tratamento da melancolia, enquanto que Rufus de Éfiso (entre os anos de 98 e 117) considerava a melancolia originada pela bile negra. Entretanto, o entendimento da melancolia a partir da fisiologia humana é atribuído a Hipócrates, que a definiu como um estado de tristeza de longa duração. Já o médico Cós compreendia a bile negra como um dos quatro humores, junto a fleuma, a bile amarela e o sangue, líquidos presentes no corpo humano. Hipócrates compreendia que as doenças que acometiam o ser humano ocorriam em virtude de uma desarmonia entre os humores:

> "O corpo do homem contém sangue, fleuma, bile amarela e negra – esta é a natureza do corpo, através da qual adoece e tem saúde. Tem saúde, precisamente, quando estes humores são harmônicos em proporção, em propriedade e em quantidade, e sobretudo quando são misturados. O homem adoece quando há falta ou excesso de um desses humores, ou quando ele se separa no corpo e não se une aos demais." (CAIRUS, 1999 apud RODRIGUES, 2009)

Deste modo, Hipócrates entendia melancolia como uma doença, gerada pelo desequilíbrio da bile negra no sangue, seja por excesso ou por falta. Porém, para Aristóteles a melancolia era um "estado de exceção" que acometia não somente os heróis mas, também, aqueles que se dedicavam a arte, política, filosofia e a poesia:

> “Por que razão todos os que foram homens de exceção, no que concerne à filosofia, à ciência do Estado, à poesia ou às artes, são manifestamente melancólicos, e alguns a ponto de serem tomados por males dos quais a bile negra é a origem, como contam, entre os relatos relativos aos heróis, os que são consagrados a Hércules? Com efeito, este último parece verdadeiramente se originar dessa natureza; (...)" (ARISTÓTELES, 1998, p. 81)

Notemos que para Aristóteles o "estado de exceção" tem o sentido de excepcionalidade, estado de alguém que é extraordinário ou que se diferencia dos demais nas mais variadas áreas. Deste modo, para Aristóteles, melancolia não é uma doença mas um estado de "espírito" de pessoas com habilidades extraordinária como artistas, poetas, cientistas e filósofos e, deste modo, entende melancolia como algo positivo.

Em sua argumentação, Aristóteles (1998) associa a melancolia à insconstância da bile negra, que ora estaria muito quente, ora estaria muito fria, levando o indivíduo do estágio de apatia ao estágio de euforia:

> "(...) a bile negra, é com efeito uma mistura do quente com o frio. Porque a natureza é feita desses componentes. É também porque a bile negra torna-se muito quente e muito fria; porque a mesma coisa, por natureza, pode apresentar esses dois estados; (...) Portanto, para resumir, porque a potência da bile negra é inconstante, inconstantes são os melancólicos.

Assim, para Aristóteles, a melancolia era um estado desequilíbrio da bile negra (por falta ou excesso), presente em indivíduos excepecionais, que variava da profunda apatia à grande euforia, tonando-os pessoas inconstantes.

Já na Idade Média, segundo Rodrigues (2009), a melancolia era vista como um doença, como um estado de queda, não sendo somente uma doença mental, mas uma sentença final, diferenciando-se da concepção grega, de tal forma que para "os filósofos clássicos era [a melancolia] desejável; aos teólogos medievais era anátema".

No Renascentismo, período marcado por profundas mudanças entre os séculos XIV e XVI, nas artes, na ciência, sempre em busca pelos clássicos greco-romanos, houve uma crescente valorização do homem. Neste período, de acordo com Clara (2009),

> "ganha força a crença de que o homem melancólico é um ser dotado de capacidades intelectuais, o que torna a melancolia fonte e meio de produção para aqueles que nela buscavam se 'alimentar': poetas, pintores, escritores, filósofos e romancistas – estes eram os lugares ocupados pelos sujeitos de exceção dos gregos. (...) O grande artista ou gênio era visto como aquele que mantinha um certo contato com sua melancolia e a vivenciava no seu mais profundo íntimo."

Dessa forma, durante o Renascimento, momento em que Dürer viveu, a melancolia era vista segundo o pensamento aristotélico, o que nos indica que o artista representou nessa obra, através do anjo, o espírito do conceito de melancolia vigente aquela época. O anjo, ali representando um ser criador entre o humano e o divino, representava a melancolia da criação, com seu olhar fixo ao horizonte, como se contemplasse a sua própria obra e imóvel, como se lhe faltasse ânimo, ou como se estivesse num estado de esgotamento físico e mental após um processo de criação. Observo que esta conclusão contradiz a afirmação de Calazans (2012, p. 145)!

Para compreender melhor as representações simbólicas da obra Melancolia I, aprofundei a pesquisa no contexto histórico de sua criação (1514, século XVI, Europa).

No artigo *Arte, superstição e "filosofia" no Renascimento*, Rogério Miranda de Almeida aponta que, o Renascentismo "nasceu na Itália no século XIV e se expandiu pelo norte da Europa entre os séculos XV e XVI" e foi uma época "de uma criatividade e uma fecundidade extraordinárias, da qual a imagem do universo, herdada da Idade Média, saiu prodigiosamente ampliada e enriquecida" (KOYRÉ, 1973 apud ALMEIDA, 2015). Neste período, o processo de criação dos artista era fortemente influenciado pela ideia do homem como centro do universo, por ideias místicas, pois o Renascimento traz em suas origens a influência do período medieval, o que nos remete as ideias de Platão e Pitágoras (ALMEIDA, 2015).

Para Rodrigues (2009, p. 72), no Renascimento houve uma valorização "de modo extraordinário da melancolia", que foi considerada um "estado de florescimento da inspiração". Muitos artistas, entre eles Dürer, "relacionam a melancolia com o metafísico, o simbólico, o numérico e o esotérico".

A curadoria feita até aqui sobre a obra Melancolia I, processo que envolveu a leitura e o estudo da evolução histórica do conceito de melancolia e do contexto histórico em que a obra foi produzida, me fez compreender que os elementos matemáticos de Melancolia I advém das influências da escola pitagórica.

Segundo Rohden (2008), para Pitágoras, a matemática e a geometria estão ligadas diretamente ao universo, cuja harmonia é descrita pelo números.

Rodrigues (2009) destaca que

> "as figuras geométricas refletem tanto a pitagórica e platônica insistência sobre a importância do número e da forma no cosmos, como também um componente da doutrina alquímica.(...) A geometria, a prática e o conhecimento, exemplificado nos diferentes materiais espalhados, salientam que as realizações concretas deixam claros esses limites. Assim, posso pensar que 'Melencolia I' deve ter surgido como um rico repositário de imagens do simbolismo de crenças e filosofias antigas, medievais e renascentistas, reconhecidos por seus contemporâneos."

Na concepção de Rodrigues (2009), Dürer conhecia o livro *De Occulta Philosophia*, escrito por Agrippa entre 1509 e 1510, e neste livro o quadrado mágico (figura 66c) representa um amuleto, um objeto para trazer sorte. Dürer escolheu o quadrado mágico formado por quatro linhas e quatro colunas, onde a soma dos números em qualquer direção, seja na linha, na coluna ou na diagonal, resulta em 34:

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Este quadrado mágico tem algumas particularidades interessantes! Observe que:

(i) A soma dos números que estão nos cantos do quadrado (16, 13, 1, 4) também resulta na constante mágica 34;

(ii) Os números que compõem o quadrado central (10, 11, 6, 7) também resultam em 34;

(iii) A constante mágica também pode ser observada nos quatro quadrantes:

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 16 & 3 \\ \hline 5 & 10 \\ \hline \end{array} \; ; \; \begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 13 \\ \hline 11 & 8 \\ \hline \end{array} \; ; \; \begin{array}{|c|c|}\hline 9 & 6 \\ \hline 4 & 15 \\ \hline \end{array} \; ; \; \begin{array}{|c|c|}\hline 7 & 12 \\ \hline 14 & 1 \\ \hline \end{array}$$

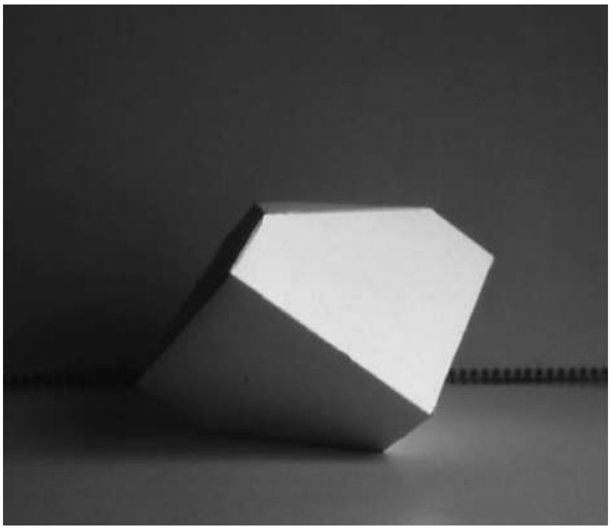
(iv) Os números centrais (15 e 14) compõem o ano em que a obra foi produzida: 1514.

Além do quadrado mágico, Rodrigues (2009) destaca o poliedro (figura 66b), que representa a construção geométrica em perspectiva de "figuras de faces múltiplas". Mas por que este poliedro? A incorporação de poliedros era relativamente frequente nos trabalhos dos artistas do Renascimento (Paolo Ucello, Luca Pacioli, Leonardo da Vinci, Nicolaus Neufchatel). Existem várias teorias que tentam responder esta pergunta. Ainda há dúvidas quanto à geometria real do poliedro e seu significado. Dürer desenvolveu métodos inovadores para a construção de poliedros usando redes e é possível que a rede para este poliedro esteja relacionada ao quadrado mágico.

Hideko (2009) apresenta as seguintes hipóteses para explicar por que e como Dürer desenhou o sólido na gravura:

1. o sólido é um cubo truncado (figura 67) que Dürer desenhou em perspectiva;
2. depois ele ampliou o desenho verticalmente com certa proporção;
3. a taxa de aumento é uma solução aproximada para a duplicação do cubo, ou o chamado problema Deliano, que se originou na Grécia antiga.;
4. ele estava interessado neste problema e deu o tratamento completo a ele em seu livro *Underweysung der Messung*;
5. ele considerava uma descoberta tão importante da geometria e por esta razão desenhou em sua obra.

Figura 67 – Cubo truncado por Ishizu Hideko.



Fonte – Hideko (2009).

Já a esfera pode estar ligada à noção de mudança e regeneração (RODRIGUES, 2009), perfeição (BARBOSA, 2012) ou até mesmo representar a Terra/Mundo (CALAZANS, 2012).

A ampulheta e a balança (figura 66f), frequentemente utilizados em alguns ofícios, são objetos que representam a Ciência (BARBOSA, 2012). Estes objetos misturam a "personificação de certo estado anímico, uma inclinação particular da sensibilidade e a encarnação em forma de alegoria de uma faculdade criadora da inteligência, o poder de pensar o mundo mais geometricamente" (RODRIGUES, 2009).

O Putto (figura 66e) remonta as influências italianas (RODRIGUES, 2009) e representaria o “gênio da história”, que tenta classificar os acontecimentos em ordem cronológica, ou então o “gênio da astrologia”, que se dedica à previsão do mundo futuro (LAMBOTTE, 200 apud BARBOSA, 2012).

Após realizar a curadoria sobre o significado de alguns elementos geométricos, na obra de Dürer, começo a ampliar meu olhar sobre a obra. Uma obra alegórica que retrata, na figura do anjo, um estado de espírito após um processo de criação, quase um esgotamento, que se traduz no olhar fixo do anjo diante (talvez) de sua criação e na posição inclinada de sua cabeça, sustentada por um dos braços. Seu esgotamento não é somente mental, mas é também físico, quando observamos o compasso em sua mão, os pregos, uma serra e o martelo no chão. A esfera me remete à perfeição, o poliedro à tridimensionalidade, a balança e a ampulheta à precisão do criador e o quadrado mágico a um amuleto de proteção feito *daqueles que governam o mundo*.

Trazendo para os dias atuais, poderia dizer que esta obra pode ser uma alegoria do processo criativo de um matemático. O matemático (neste caso, o anjo), no auge do seu esgotamento físico e mental, depois de uma longa jornada de trabalho, que envolve pesquisa, testes e muitas horas de esforço intelectual, olha fixamente para o problema que se dedicara a resolver e que antes lhe desafiava diuturnamente e que agora foi vencido (solucionado). O olhar do anjo é olhar de contemplação da sua criação que revela um misto de satisfação e esgostamento.

Seguindo a proposta do **Atelier**, para interpretar a curadoria realizada, é interessante passar por um processo de criação confeccionando um produto criativo. Decidi fazer uma releitura da obra Melancolia I de Dürer.

O que significa fazer uma releitura de uma obra de arte? Para Pillar (2014, p. 16), é um diálogo entre textos visuais, que pode-se valer ou não de características próprias que a obra contém, sendo considerada como uma "produção de sentindo" onde busca-se explicitar relações de um texto com determinado contexto.

Neste contexto, destaco que reler não é uma cópia da obra original, mas é a construção que cria e recria novos sentindos, como produto final de um processo de criação que leva em consideração as vivências e experiências de quem se propõe a fazê-la. Pillar (2014) diferencia cópia de releitura quanto a ausência de uma transformação, de uma criação ou uma interpretação. Para esta pesquisadora, na releitura busca-se uma recriação e não a reprodução de uma imagem, de tal forma que haja um diálogo com a obra referencial, de maneira explícita ou implícita, em que na primeira modalidade citamos diretamente a obra e, na segunda, a citamos indiretamente.

Para exemplificar estas ideias sobre o diálogo entre duas obras, pesquisei alguns exemplos. O primeiro exemplo refere-se às releituras que citam diretamente a obra inspiradora. São releituras da obra *Las Meninas* (figura 68), de Diego Velázquez e as suas releituras produzidas por Pablo Picasso (figura 68b), Salvador Dalí (figura 68c) e Antonio Peticov (figura 68d).

Figura 68 – Releituras de Las Meninas, por Picasso, Dali e Peticov.

(a) Las Meninas, de Diego Velázquez-1656

(b) Las Meninas (Velazquez) - 1957

(c) The Maids-in-Waiting (Las Meninas) - 1960

(d) As Meninas de Antonio - 2017

Fonte – Disponível em: https://bit.ly/2uJDVvr

Note que nas releituras de Picasso, Dali e Peticov percebemos que os artistas retratam, em suas composições, os principais elementos da obra *Las Meninas* fazendo uma referência direta à obra de Velázquez, entre estes elementos destaco o ambiente (um quarto) e a posição dos personagens no ambiente.

E qual a marca individual dos artistas nestas releituras? A técnica! As releituras diferem entre si e da própria obra inspiradora pela forma que foram pintadas. Picasso geometrizou o formato da composição, usando os traçados cubistas. Dalí desenha números no lugar dos personagens trazendo para tela o irreal e o abstrato do Surrealismo e, por fim, Peticov converte os tons escuros da pintura barroca de Velazquez em cores vibrantes.

O segundo exemplo de diálogo entre as obras irá destacar a citação implícita. A obra *Noite Estrelada* (1889) de Vicent van Gogh (figura 69b), cujos movimentos de onda no céu citam implicitamente a obra *A Grande Onda de Kanagawa* (figura 69a), de Katsushika Hokusai.

Figura 69 – Obras de Hokusai e Van Gogh

(a) A Grande Onda de Kanagawa - entre 1830 e 1833

(b) Noite Estrelada - 1889

Fonte – Disponível em: https://bit.ly/2Edpze4

Assim, a partir destes dois exemplos, compreendi que a releitura é um diálogo entre duas obras, que pode ou não ter uma citação direta à obra tomada como referência, sempre em busca de explicitar a relação entre as obras, a partir do contexto vivenciado por quem a produziu.

Ora, se reler uma obra é o produto de um processo criativo em que o autor dialoga com a obra inspiradora com o objetivo de criar algo próprio e original, podemos dizer que as ideia de Pillar (2014) e de Winnicott (1975) se aproximam. Usando com referência o conceito de releitura com citação implícita, iniciei o processo de fazer uma releitura da obra Melancolia I.

Iniciei pelo que melancolia significa para mim. Deste modo, não vou representar na minha releitura a melancolia representada por Dürer em sua obra, pois este artista associava a melancolia as estado de espírito daqueles que passavam por processos de criação. Note que, neste sentido, ser melancólico era algo positivo.

Associo a melancolia ao fim de tarde pós-chuva com um arco-íris no horizonte. De certa maneira, associo a melancolia a um estado de tristeza. Assim, na minha releitura, a melancolia será representado pelo arco-irís. Naturalmente, como não sou artista e não conheço nenhuma técnica artística, optei por usar um recurso digital, um aplicativo usado por artistas e matemáticos para produzir arte digital. O aplicativo escolhido foi o software POV-Ray[8]. A releitura é apresentada na Figura 70.

Figura 70 – Releitura da obra Melancolia I por Edilson Neri.

Fonte – O autor (2019).

Da obra original, escolhi a esfera e os números da última linha do quadrado mágico, que representam o ano em que o artista produziu a obra. Esses elementos foram inseridos na releitura com texturas, foco de luz e em um novo cenário que simula um deserto, que paradoxalmente possui um arco-íris no horizonte e que se contrapõe ao cenário povoado e com árvores na obra original. Ainda na releitura da obra, o cubo foi utilizado para lembrar o poliedro da obra original e a sua textura foi pensada para lembrar das árvores na obra de Dürer. Igualmente, a ampulheta da obra original passou a ser dois cones unidos por suas pontas.

Na produção da releitura, utilizei as noções de linha do horizonte e o ponto de fuga da técnica de perspectiva. Também usei técnicas de luz e sombra para gerar o efeito de brilho na esfera e a sombra dos objetos no solo. Estes elementos estão relacionados à obra original, pois Dürer também usou técnica de luz e sombra para dar o efeito tridimensional em alguns elementos de sua obra. Dessa forma, optei por reler Melancolia I citando-a indiretamente, conforme entendimento de Pillar (2014), através

8 O POV-Ray é um software que usa o algoritmo de ray tracing para gerar imagens com realismo. Está disponível gratuitamente, em versões para MAC, Linux e Windows, no site http://www.povray.org

dos elementos figurativos e utilizando uma técnica diferente para produzir um efeito tridimensional semelhante à da obra do artista.

Reler uma obra de arte não foi uma tarefa simples, sobretudo, porque escolhi como referência o grande artista Albrecht Dürer. Fiz a curadoria e a releitura sem me preocupar em pesquisar releituras feitas por artistas da obra Melancolia I. Depois que produzir uma releitura, fiquei muito curioso sobre releituras desta obra. Realizei um processo longo de curadoria de artigos, livros e sites que tratavam sobre a evolução do conceito de melancolia de Aristóteles à Freud. E para minha surpresa, encontrei muitas releituras de Melancolia I, apresentarei algumas a seguir.

Figura 71 – Releituras Melancolia I.

(a) Alegorie Melancholie (1528) - Lucas Cranach st.

(b) Melancolia (1539) - Hans Sebald Beham

(c) Melancholy Saturn (1595/6) - Jacob de Gheyn II

(d) Melancholie (1620) - Domenico Feti

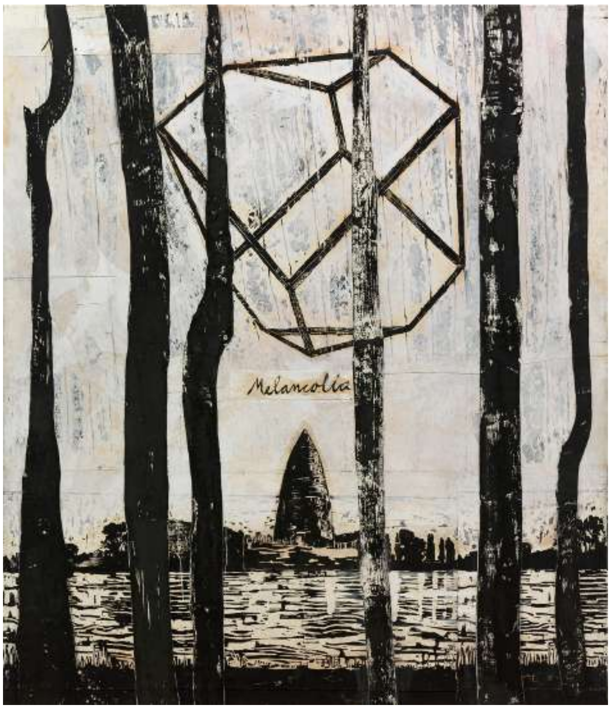
(e) Melancholie (1804) - Caspar David Friedrich

Fonte – Disponível em: https://bit.ly/2LXMXwL

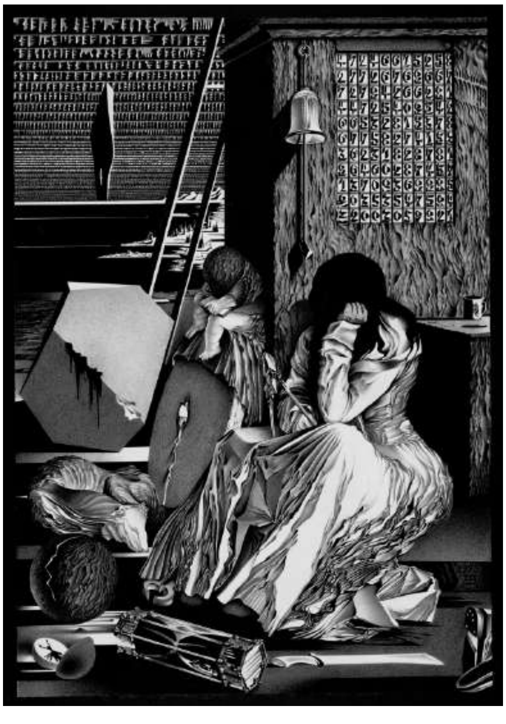
Figura 72 – Releituras Melancolia I.

(a) Melancholie (1896) - Edvard Munch

(b) The Rhine-Melancholia (1982-2013) - Anselm Kiefer



(c) Anti-Dürer (1974) - A. T. Fomenko



Fonte – Disponível em: https://bit.ly/2LXMXwL

Agora que cheguei ao fim desse estudo sobre a obra Melancolia I, percebo que meu percurso me permitiu estabelecer uma conexões entre a Matemática e a Arte, a partir da associação de características do período renascentista às influências de Pitágoras na arte. Vejo que minha aprendizagem se tornou mais significativa, a partir de um processo criativo, que envolveu uma curadoria de conteúdo e um fazer criativo, em que pude aprender sobre a arte renascentista e sobre arte digital feita no aplicativo Pov-Ray.

Percebo também que, neste processo, minha aprendizagem criativa aconteceu no momento em que me permiti dialogar com o outro, sair da zona de conforto da matemática a adentrar o território da arte, conforme Fazenda (1991) compreende como atitude interdisciplinar. Além disso, pude observar que a minha aprendizagem foi criativa, inspirado nas concepções de aprendizagem de Freire (2011) e criatividade de Winnicott (1975), em que de forma autônoma busquei construir o conhecimento, que se materializou em uma produção autoral que reuniu os conhecimentos adquidos neste processo.

Essa experiência no **Atelier** me deixou mais confiante em buscar outros artistas que proporcionassem uma nova experiência de aprendizagem e que me inspirasse em uma nova produção criativa.

Retornei ao **Atelier** para aprofundar a pesquisa. Na seção de Matemática, encontrei o livro intitulado *Livro de Problemas de Almada Negreiros*, de autoria de dois professores portugueses e publicado em 2015, sobre alguns problemas matemáticos de Almada Negreiros. Inicialmente, pensei que Almada Negreiros era um matemático, mas ao ler as primeiras páginas deste livro, publicado pela Sociedade Portuguesa de Matemática, notei que os autores apresentavam construções geométricas inspiradas em desenhos do artista.

Como o livro apresentava o artista de forma sucinta, fiz uma busca na internet e encontrei o vídeo *A Geometria de Almada*[9], o sétimo episódio da oitava temporada da série *Isto é Matemática*. Fiquei muito impressionado com a beleza da arte de Almada Negreiros e sua influência no movimento modernista. Percebi que este artista tem uma vasta obra que usa a matemática em suas composições e compreendi que era uma boa oportunidade de exercitar a minha criatividade e realizar um aprendizagem criativa no sentido descrito anteriormente.

3.2 Croqui 2: Almada Negreiros

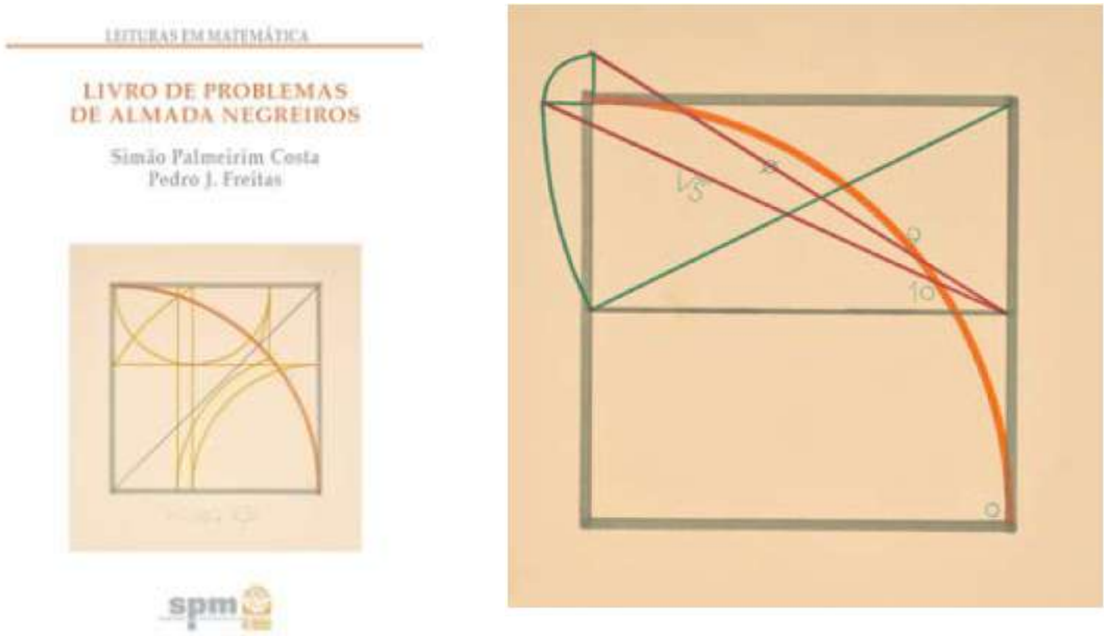
Como mencionei anteriormente, conheci o artista português Almada Negreiros através do *Livro de Problemas de Almada Negreiros* (figura 73a), publicado em 2015 pela Sociedade Portuguesa de Matemática. Neste livro, Pedro J. Freitas e Simão Palmeirim Costa analisam alguns elementos matemáticos presentes numa série de desenhos do artista que, "apesar de o autor ter como intenção primeira produzir obras de arte, muito do seu trabalho pode ser apreciado matematicamente" (FREITAS; COSTA, 2014, p. 1).

[9] Disponível em http://twixar.me/9TxK

Freitas e Costa (2015) destacam que encontram-se no espólio do artista uma coleção de desenhos com conteúdo exclusivamente gemétrico, tal como o desenho A-590 (figura 73b), que apresenta construções baseadas num quadrado com um quarto de circunferência inscrita, onde são marcados os números ϕ (número de ouro), $\sqrt{5}$, 9 e 10, que representam, respectivamente, as medidas das diagonais de dois retângulos omitidos e uma aproximação da nona e a décima parte de uma circunferência.

Figura 73 – Livro de Problemas de Almada Negreiros (2015).

(a) Capa do livro (b) A-590



Fonte – Disponível em: https://bit.ly/2JWmp1D

Busquei mais informações sobre Almada Negreiros na dissertação de mestrado *COMEÇAR de Almada Negreiros Arte e o Poder Formatador da Matemática*, de Rute Marina das Neves Viegas Vaz, que apresenta um estudo biográfico do artista.

José Sobral de Almada Negreiros nasceu em São Tomé e Príncipe, em 1893, filho do tenente de cavalaria António Lobo de Almada Negreiros e de Elvira Sobral de Almada Negreiros e viveu desde muito jovem em Lisboa. Destacou-se no universo artístico do século XX através da sua dedicação à literatura e participou de forma ativa no grupo ligado à Revista Orpheu, responsável pela introdução do Modernismo nas artes e letras em Portugal. Além de Almada Negreiros, faziam parte da Revista Orpheu os artistas portugueses Fernando Pessoa e Mário de Sá-Carneiro.

Almada destaca-se de vários artistas de sua época por sua atuação multidisciplinar. Suas obras perpassam vários campos da arte, tais como a poesia, dramaturgia, pintura, desenho, entre outros. Além disso, foi um artista essencialmente autodidata, pois não frequentou qualquer escola de ensino artístico. O autorretrato do artista (figura 74), produzido em 1945, traduz de certa forma, a busca pelo conhecimento. Nesta obra, Almada desenha a própria imagem sobre um fundo repleto de citações a Homero, Delacroix, Braque, Picasso, Arquitas de Tarento, Aristóteles, Platão, Vitrúvio, Luca Pacioli e Francisco de Holanda.

Figura 74 – Autorretratos de Almada Negreiros.

(a) Autorretrato, de 1945.

(b) Autorretrato, de 1927.

Fonte – Fundação Calouste Gulbenkian

Em 1911, com apenas 14 anos de idade, Almada Negreiros apresenta o desenho *A Sátira* (figura 75a), que utiliza traçados simples na composição da obra e, nos anos seguintes, Almada colaborou com ilustrações para várias revistas.

Em 1925, os trabalhos de Almada começam a apresentar elementos matemáticos de modo muito particular e original. Almada introduz na obra um tipo de pavimentação geométrica, como ilustra a obra *Desenho à Lápis de Arlequim* (figura 75b). Este tipo de composição aparecerá em várias obras que retratam diferentes contextos.

Figura 75 – Primeiras obras de Almada Negreiros.

(a) A Sátira, de 1911.

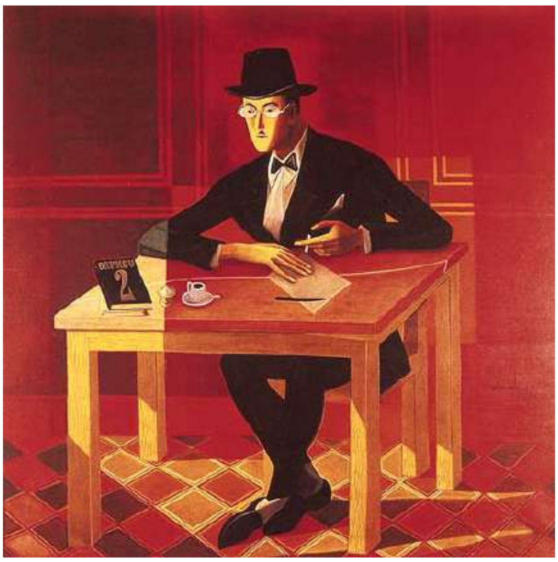
(b) Desenho a lápis de Arlequim, de 1925.

Fonte – Disponível em: https://bit.ly/2TO9IFq

Duas obras de grande destaque produzidas por Almada, denominadas de *Retrato de Fernando Pessoa* (figura 76), foram pintadas em 1954 e 1964. Nestas obras, o artista retrata o poeta Fernando Pessoa, um dos membros da Geração d'Orpheu, sendo a primeira produzida por encomenda para o Restaurante Irmãos Unidos (figura 76a) e a segunda para a Fundação Calouste Gulbenkian (figura 76b).

Figura 76 – Retrato de Fernando Pessoa.

(a) Versão de 1954.



(b) Versão de 1964.

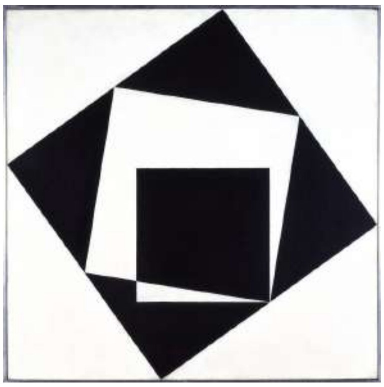
Fonte – Disponível em: https://bit.ly/2FGMkoC

Note que as obras, produzidas quase de forma simétrica, possuem a composição e a paleta de cores semelhantes, onde o poeta é retratado em sua mesa de trabalho, como se estivesse produzindo algo (uma poesia ou um texto). Na mesa, encontram-se objetos do universo do artista: um livro cujo título é Orpheu, uma xícara de café, papel e caneta. Nestas obras, é possível perceber a presença da geometrização num chão recoberto por losangos, em tons de amarelo, laranja e preto, dando a noção de piso xadrez ao espectador.

Em 1957, alguns trabalhos de Almada apresentam uma tendência mais abstrata. Ele produziu quatro pinturas abstratas, sem moldura, pintadas em preto e branco e medindo 60cm por 60cm, intituladas *A porta da Harmonia* (figura 77a), *O ponto da Bauhütte* (figura 77b), *Quadrante I* (figura 77c) e *Relação 9/10* (figura 77d).

Figura 77 – Coleção de Obras Abstratas de Almada Negreiros.

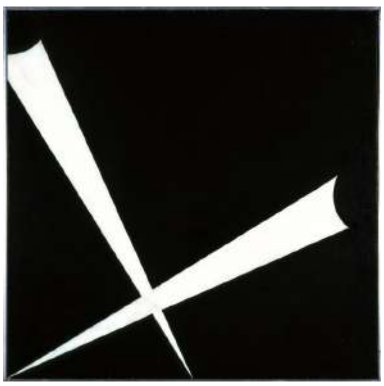
(a) Porta da Harmonia



(b) Ponto de Bauhutte

(c) Quadrante I

(d) Relação 9/10

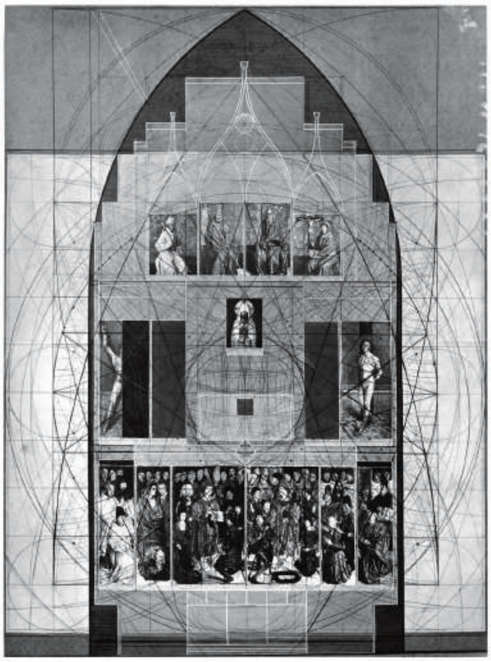


Fonte – Fundação Calouste Gulbenkian.

Até aqui, percebi a forte presença da geometria nas obras de Almada Negreiros. Isto se deve, dentre outros motivos, pelo interesse do artista nesta temática, a partir do contato que teve com os painéis de Nuno Gonçalves, expostos nos Museu Nacional de Arte Antiga (Portugal). De acordo com Freitas (2016, p.136), Almada teria visitado esta exposição e ficado fascinado não só com os painéis, mas também com o *Ecce*

Homo, uma obra também renascentista, que naquele tempo era atribuído a Nuno Gonçalves. Diante deste fascínio, Almada dedicou-se a estudar o Ecce Homo, de modo a compreender relações de proporção na pintura e relacioná-la a outros elementos geométricos, tais como o quadrado e a circunferência, como mostra a figura 78, que apresenta um estudo para a organização de painéis, destinados a um altar no mosteiro da Batalha, o *Ecce Homo*.

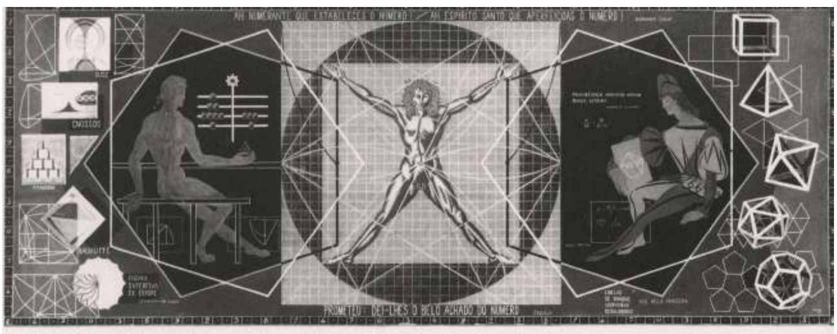
Figura 78 – Estudo de Almada para um altar do mosteiro da Batalha.



Fonte – Disponível em: https://bit.ly/2FRm3VY

Em 1958, Almada Negreiros produziu uma tapeçaria intitulada *O Número* (figura 79), exposta no Tribunal de Contas de Lisboa. Por sua complexidade e riqueza de detalhes, escolhi realizar um estudo mais detalhado desta obra buscando intersecções e conexões entre a arte a matemática.

Figura 79 – O Número, de 1958.

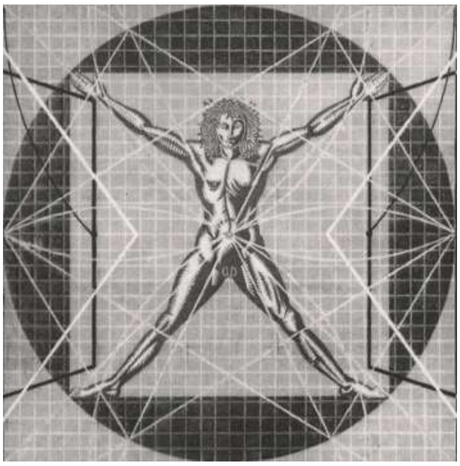


Fonte – Disponível em: https://bit.ly/2CZbcHJ

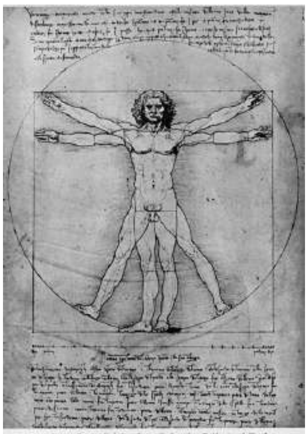
Inicialmente, na área central da tapeçaria, temos um homem de braços braços e pernas abertos em X, enquadrado e inscrito num círculo, por seu lado inscrito num quadrado sobre uma tela quadriculada (figura 80a), que nos remete ao desenho do Homem Vitruviano, de Leonardo Da Vinci (figura 80b).

Figura 80 – Obra de Almada Negreiros, obra de Leonardo da Vinci e de obra de Cesare Cesariano.

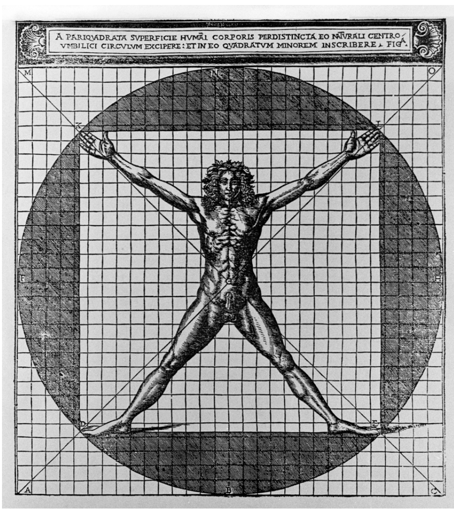
(a) Parte central da obra Número, Almada Negreiros (1958)



(b) Homem Vitruviano, Leonardo da Vinci (1492)



(c) Homo ad circulum, Cesare Cesariano (1521)



Fonte – Disponível em: https://bit.ly/2uEmVGQ

Contudo, num segundo olhar, percebi a existência de diferenças entre o desenho de Almada Negreiros e o de Leonardo Da Vinci, no que se refere ao número de membros do homem central, a posição do círculo e do quadrado (na obra de Da Vinci, o quadrado não está inscrito no círculo) e a presença da malha quadriculada apenas no desenho de Almada.

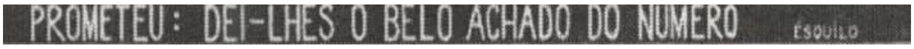
De acordo com Aniello (2007, p. 338), "o desenho central da tapeçaria de Almada é uma exata cópia do desenho de Cesariano", no qual, ao contrário de Da Vinci, Almada e Cesariano distorcem o homem para pode inscrevê-lo no quadrado. Ainda, observando o centro da tapeçaria, é possível perceber que Almada acrescenta uma marca pessoal ao desenho de Cesariano: dois retângulos oblíquos e cujo centro se situa no umbigo do homem.

Na figura central da tapeçaria, há também duas inscrições, uma no topo e outra na base. No topo, tem-se a frase *Ah! Numerante que estabeleces o Número!/ Ah! Espírito Santo que aperfeiçoas o Número!* (figura 81a), do escritor, filósofo, poeta renascentista e missionário catalão Raimundo Lúlio. Na base, tem-se a frase *"Prometeu: dei-lhes o belo achado do número"* (figura 81b), um pensamento do dramaturgo grego Ésquilo.

Figura 81 – Inscrições na parte superior e inferior da tapeçaria Número.

(a) Inscrição superior

(b) Inscrição inferior

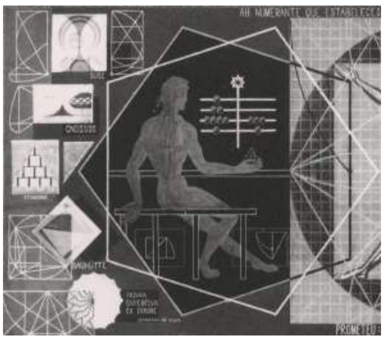


Fonte – Adaptação do autor (2019).

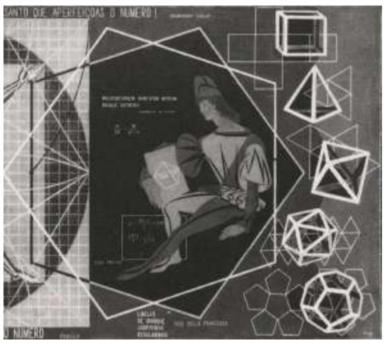
Ao lado do homem central da tapeçaria, existem duas figuras humanas. À esquerda um homem grego (figura 82a) e à direita um homem renascentista (figura 82b), ambos emoldurados por dois pentágonos.

Figura 82 – Figuras humanas na tapeçaria Números.

(a) Homem grego



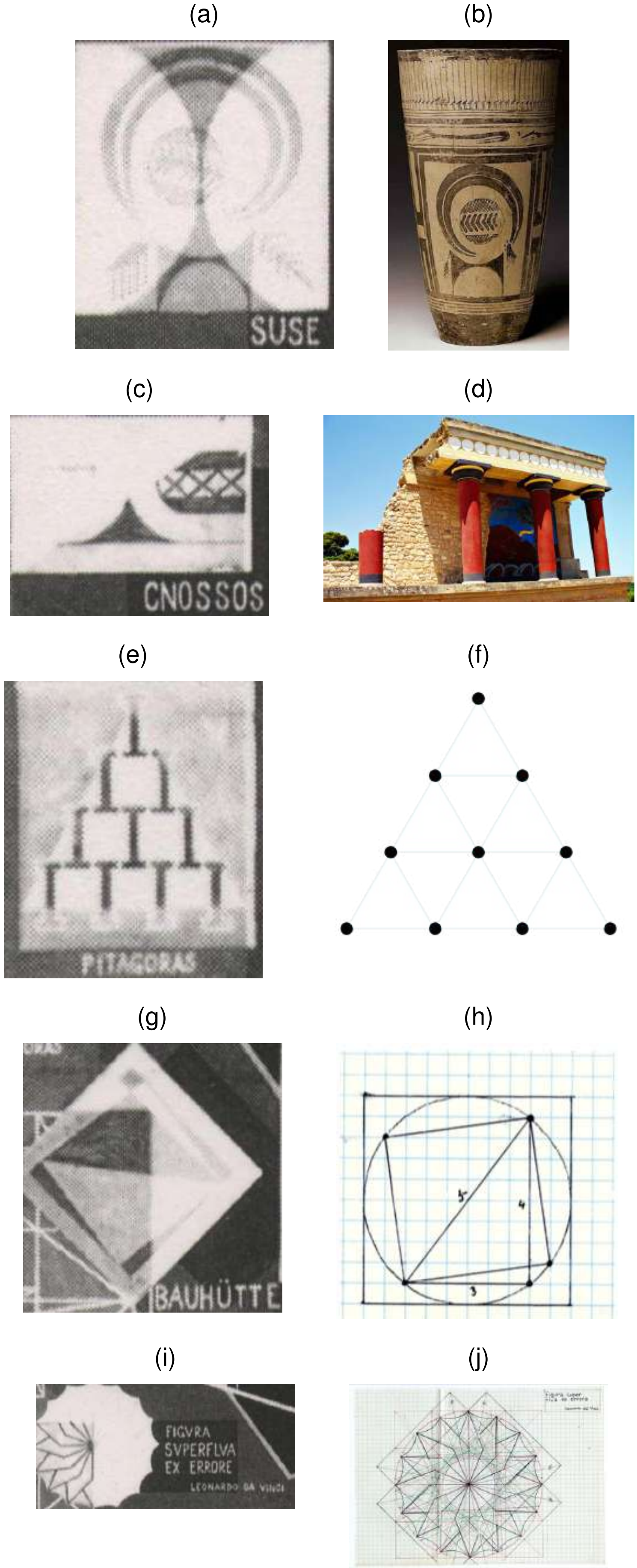
(b) Homem renascentista



Fonte – Adaptação do autor (2019).

Ao lado do homem grego, na figura 82a, temos cinco elementos: o Vaso de Susa, um friso do Palácio de Cnossos, a Tetraktis Pitagórica, o Ponto de Bauhütte e a *Figura Supérflua Ex-Errone*.

Figura 83 – Referências que ladeiam o homem grego.



Fonte – Adaptação do autor (2019).

O Vaso de Susa (figuras 83a e 83b) é uma peça produzida entre os anos 4.000 e 3.500 antes de Cristo na Babilônia, que encontra-se no Museu do Louvre, em Paris. Os frisos do Palácio de Cnossos (figuras 83c e 83d), representa época grega da idade do Bronze. A tetraktis (figuras 83e e 83f) ilustra representação dos números através de uma figura geométrica muito estudada pela escola pitagórica.

O ponto de Bauhütte (figuras 83g e 83h) ilustra um problema, proposto em versos medievais, no livro *Le Nombre d'Or*, de Matila Ghyka, por construtores de catedrais que formavam uma associação chamada Bauhütte e, finalmente, a *Figura Supérflua Ex-Errone* (figura 83i e 83j) reproduz um desenho de Leonardo da Vinci, que aparece no livro *De divina proportione* de Luca Pacioli.

Ainda, ao redor do homem grego é possível perceber, segundo Aniello (2007, p. 340), a possível representação de Homero, Euclides e Pitágoras, a partir dos teoremas desenhados nos pés do homem grego e do ábaco na direção de uma das suas mãos. Freitas (2016, p. 139) acrescenta que estas referências, seguem uma certa ordem cronológica.

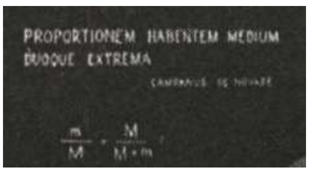
Já o homem à direita (figura 82b) representa o homem renascentista, que possui à sua volta os cinco sólidos de Platão com suas respectivas planificações, que se contrapõem aos cinco elementos ao redor do homem grego.

Próximo ao homem renascentista, o artista refere-se aos matemáticos Campanus de Novara (figura 84a), Luca Pacioli (figura 84b) e Piero della Francesca (figura 84c).

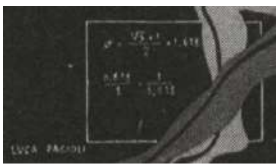
Campanus de Novara traduziu do árabe e publicou uma versão dos Elementos de Euclides. Luca Pacioli conhecido por sua obra *De Divina Proportioni*, ilustrada por Leonardo Da Vinci, é considerado o pai da contabilidade. Piero della Francesca, que também era pintor, ficou conhecido pelos seus trabalhos com a técnica da perspectiva. Ao lado deste último, aparece a frase *"De quinque corporibus regularibus"*, que significa "os cinco corpos regulares".

Figura 84 – Referências à matemáticos renascentistas.

(a)



(b)



(c)

Fonte – Adaptação do autor (2019).

Por último, o homem renascentista segura uma placa que representa o número de ouro através da interseção de duas diagonais de um pentágono regular.

Segundo Freitas (2016, p. 139), as escolhas dos elementos e desenhos na obra, "são reflexo daquilo que Almada chamava *o cânone*", que possui algumas constantes e que permeiam não somente a Idade Média, mas todas as épocas. O autor afirma que compreender o sentido de "canône" não é tarefa simples, pois o artista não explicou o seu significado. Freitas recorre à trechos de entrevistas de Almada em 1960 para concluir que:

> "depois de encontrar este cânone na composição de obras de arte antiga, Almada propõe-se agora desvendá-lo, usando construções geométricas que encontrou por si próprio (ou mesmo 'dentro de si'), e revelá-lo na sua própria arte, tomando-o agora como tema e não como ferramenta de análise ou composição."(FREITAS, 2016, p. 140)

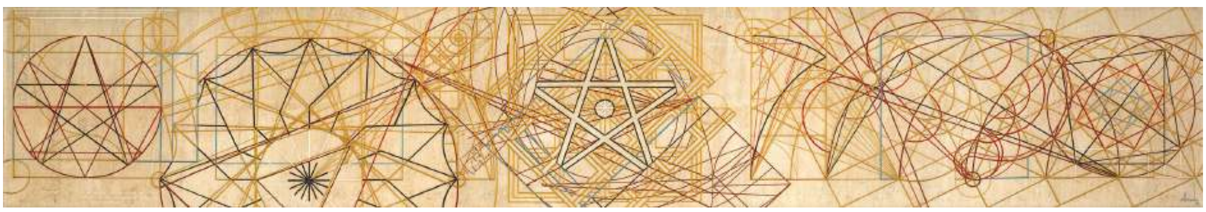
Com relação ao conteúdo deste cânone, a partir da análise das entrevistas de Almada, Freitas (2016, p. 141) explica que

> "o cânone que Almada vai revelar nas suas obras conterá divisões da circunferência em partes iguais, quadrados e circunferências em relação (em geral, uma circunferência inscrita no quadrado), a razão de ouro (média e extrema razão) e a famosa relação nove/dez, que se refere ora às divisões da circunferência em nove e dez partes, ora à razão 9/10."

Assim, Almada expressa na obra *O Número* a evolução temporal de alguns elementos deste cânone, através das construções geométricas que acompanham os desenhos ao redor dos homem grego e do renascentista.

Além desta obra, Almada produziu muitas outras, também com forte teor matemático. No final da década de 60, foi proposto a Almada a criação de uma grande obra para decorar a parede da Fundação Calouste Gulbenkian, em Lisboa. Esta obra, denominada de *Começar* (figura 85), reúne uma série de estudos geométricos e alguns elementos do *cânone*.

Figura 85 – Painel *Começar*, 1969. Desenho inciso e pintado sobre pedra calcária, de dimensões 12,87 x 2,31 m.

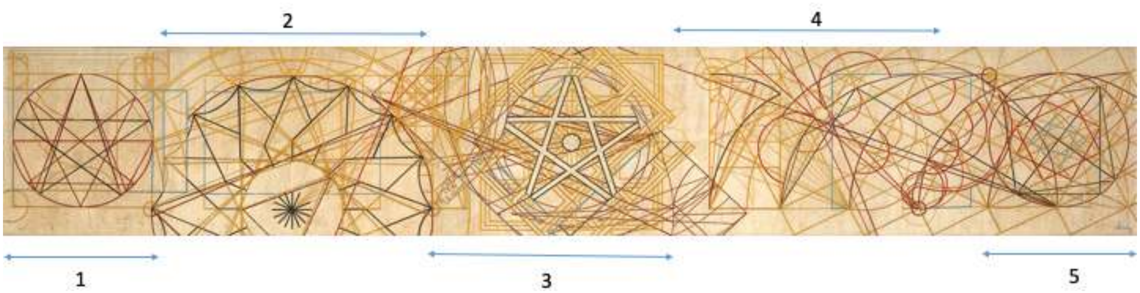


Fonte – Fundação Calouste Gulbenkian

Começar é uma obra emblemática de Almada e sua grandiosidade se traduz na complexidade geométrica desta obra. Se dividirmos este painel em cinco partes (figura 86), da esquerda para direita, encontraremos os seguintes elementos:

1) Estrelas pentagonais: observa-se três pentagramas de cores diferentes, inscritos numa circunferência;
2) *Figura superflua Ex-errore*: A grande estrela de 16 pontas, chamada Figura superflua exerrore, é inspirada numa ilustração de Leonardo da Vinci para o livro *De divina proportione* de Luca Pacioli;
3) Grande estrela central: uma estrela de cinco pontas, numa moeda do tempos de D. Afonso Henriques;
4) Divisões da circunferência: geometrização de uma figura simbólica da cultura grega, um machado duplo, que é a base para propostas da divisão da circunferência em partes iguais;
5) Ponto de Bauhütte: uma construção da autoria de Almada que pretende determinar geometricamente o ponto comum a uma circunferência, um quadrado e um triângulo.

Figura 86 – Painel *Começar*, dividido em cinco partes.



Fonte – Adaptação do autor (2019).

Ainda, no final da década de 60 e início da década 70, Almada produziu para o Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências da Universidade de Coimbra, afrescos, intitulados *Matemática Universal* (figura 87). Sobre estes afrescos, Vaz (2013, p. 76) destaca:

> "Almada optou por prescindir de algarismos ou fórmulas, recorreu essencialmente ao desenho figurativo, ao signo linguístico (a avaliar pela quantidade de texto presente no painel da esquerda) e também à figuração geométrica. Ainda se podem observar elementos comuns aos dois frescos, sendo a circunferência o elemento mais utilizado, como centro definidor de ambas as composições, mais evidente na da esquerda. Sobressai também, em ambos, o fundo quadriculado."

Figura 87 – Matemática Universal.

(a) Afresco 1 (b) Afresco 2

Fonte – Vaz (2013).

Nestes afrescos, Almada Negreiros revela, mais uma vez, seus conhecimentos matemáticos. Estas pinturas mostram claramente que o artista possuía um amplo conhecimento sobre a história da Matemática, pois o artista representou a matemática em quatro períodos distintos: Antiguidade, a Idade Média, a Idade Moderna e a Época Contemporânea.

Almada Negreiros produziu várias obras abstratas usando em suas composições relações geométricas. Na figura 88, apresentamos algumas destas obras.

Figura 88 – Obras Abstratas de Almada Negreiros (sem título e sem data).

(a) (b) (c)

Fonte – Fundação Calouste Gulbenkian.

Após concluir a curadoria sobre Almada Negreiros e compreender que a matemática nas obras de Almada é usada para expressar elementos de um Cânone, sinto-me motivado a entender como as obras produzida por construções geométricas podem ser geradas no computador.

Esta motivação me fez escolher uma ação criativa diferente da realizada com a obra Melancolia, escolhi fazer um livro digital (figura 89) sobre Alamada Negreiros, para apresentar o artista e sua arte, de modo que fosse possível identificar como a Matemática e a Arte se entrelaçam. Este livro digital consta dos seguintes capítulos:

1. Uma breve biografia de Almada Negreiros;
2. As principais obras do artista;
3. A matemática na arte de Almada.

Figura 89 – Livro digital sobre Almada Negreiros.

Fonte – O autor (2019).

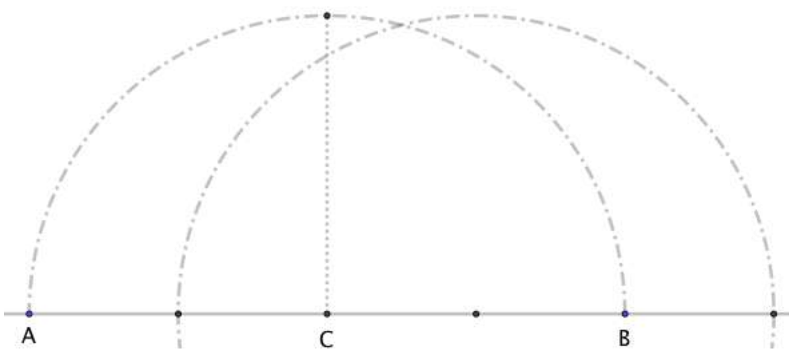
O Guia pode ser acessado no link:

http://twixar.me/Btbn

Além deste livro digital, percebi que seria interessante gerar no computador as construções geométricas que o artista utilizou para produzir a obra (Ponto de Bauhütte, figura 77b). Utilizo o Geogebra para produzir uma animação com base em uma construção do Ponto de Bauhütte atribuída a Lima de Freitas, em Vaz (2013). Primeiro, descreverei a construção.

Sobre uma reta, marcamos os pontos A e B e construímos uma semicircunferência que passe pelos pontos. Sobre a reta, marcamos ponto C, ponto médio de AB. Com extremos em C e na semicircunferência, traçamos a perpendicular ao segmento AB. Determinamos os pontos médios dos raios da circunferência com extremos A e B, respectivamente. Em seguida, traçamos uma semicircunferência de centro no ponto médio de CB ao qual pertence o ponto médio de AC.

Figura 90 – Construção do Ponto da Bauhutte.

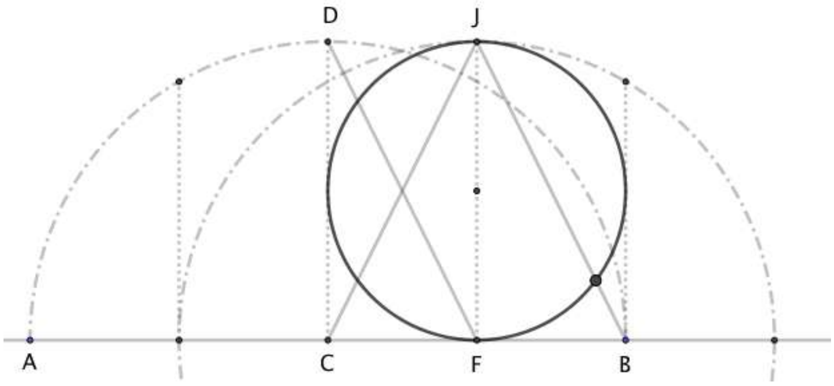


Fonte – O autor (2019).

Traçamos três segmentos de reta perpendiculares à reta AB aos quais pertencem os pontos médios de AC, de CB e B, respectivamente, em que o extremo oposto interseta a semicircunferência e encontramos o ponto médio do segmento de reta FJ.

Traçamos a circunferência de centro no ponto médio de JF e que passa pelos pontos J e F. Desenhamos o segmento de reta DF, BJ e CJ.

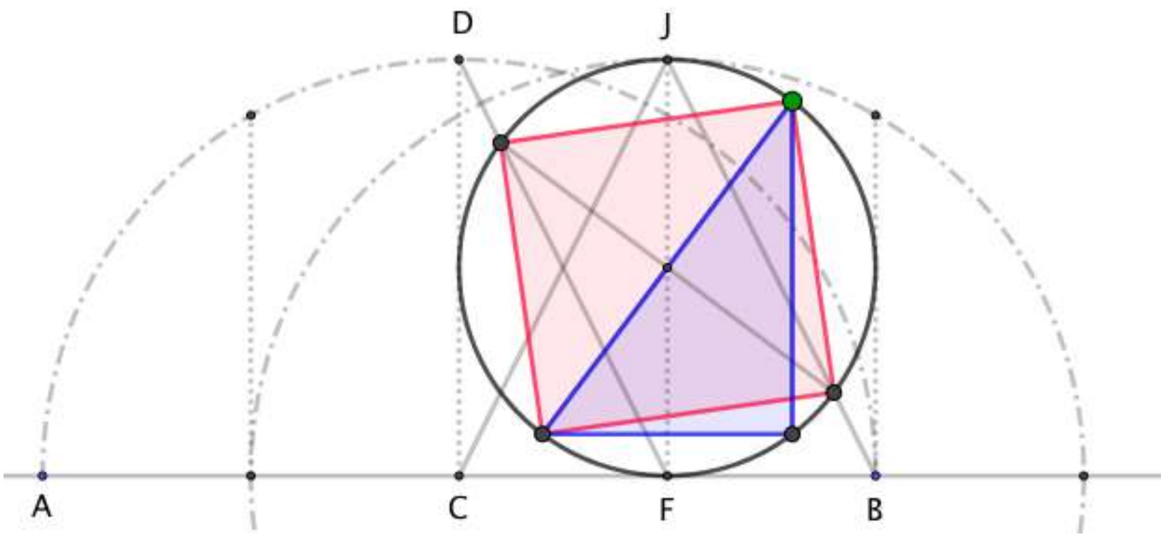
Figura 91 – Construção do Ponto da Bauhutte.



Fonte – O autor (2019).

Encontrar os pontos N de interseção do segmento BJ com a circunferência e P de interseção do segmento DF com a circunferência. Desenhamos o segmento PN que passa no centro da circunferência e o segmento QR, que é perpendicular a PN e passa pelo centro da circunferência, L. Desenhamos o quadrado de vértices $PQRN$, inscrito na circunferência. Traçamos o segmento RT, que é perpendicular a AB e cujos extremos pertencem à circunferência. Finalmente, desenhamos o segmento TQ, obtendo assim o triângulo retângulo QTR. Obtemos assim o traçado de Almada da construção do Ponto da Bauhütte.

Figura 92 – Construção do Ponto da Bauhutte.



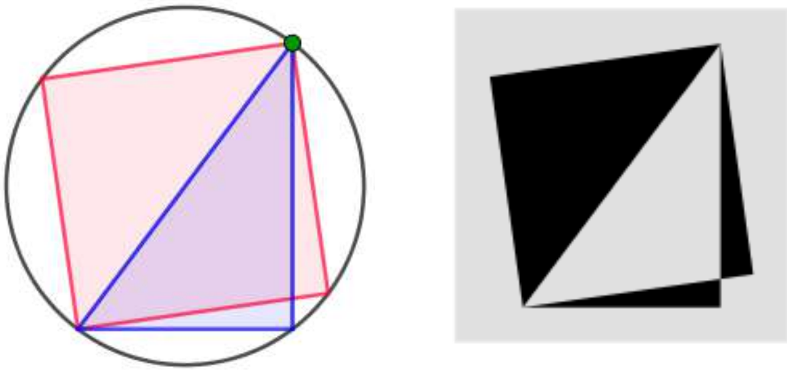
Fonte – O autor (2019).

A partir dessa construção, pude identificar como Almada Negreiro usou a construção do ponto de Bauhütte para compor a sua obra.

O artista manteve o quadrado vermelho e o triângulo azul da Figura 92, estes são os elementos principais da construção do ponto de Bauhütte: um ponto que é o vértice comum de um quadrado e um triângulo inscritos em uma circunferência. Além disso, o artista pintou estes elementos de modo muito especial: a interseção do triângulo com o quadrado pintou de branco; a parte do triângulo que não intercepta o quadrado, ele pintou de preto; a parte triangular formada pela diagonal, onde não encontra-se o triângulo azul, pintou de preto e o que restou do quadrado também pintou de preto.

Figura 93 – O Ponto de Bauhütte - Reconstrução no software Geogebra.

(a) Construção geométrica (b) Reprodução do autor



Fonte – O autor (2019).

A animação da obra Ponto de Bauhütte pode ser visualizada no seguinte link:

https://www.geogebra.org/m/bexyDnjy

Após concluir esta animação, percebo que o processo de curadoria foi semelhante ao que realizei com Melancolia I, contudo, meu fazer criativo se diferenciou quanto ao formato da produção. Na obra de Dürer produzi um releitura, enquanto que na de Almada, produzi uma animação e um livro digital. Para produzir a animação, usei conhecimentos matemáticos de Construção geométrica, habilidades no uso do Geogebra e conhecimentos sobre a arte de Almada Negreiro. Uma atitude intercisciplinar para promover uma aprendizagem criativa.

Fiquei mais confiante com mais esta experiência interdisciplinar, que me proporcionou um visão diferente das construções geométricas, feitas por um artista sem formação matemática. Volto para o apartamento, feliz por ter vivenciado mais esta experiência.

No caminho, enquanto estava no metrô, começo a navegar pelo Twitter, para ler as notícias do dia. Noto que o perfil da *Mathematical Association of America* retuita a notícia que o *National Museum of American History* emprestará ao *National Museum of Mathematics* algumas obras de um artista chamado Crockett Johnson para uma exposição alusiva aos 113 anos que o artista completaria neste ano.

Nunca ouvi falar neste artista, mas fiquei curioso em saber por que o Museu Nacional de Matemática vai homenageá-lo, salvei o link para ler quando chegasse no hotel. Foi o que fiz. No hotel li com mais atenção a reportagem. Crockett Johnson é um pintor, ilustrador e cartunista americano que tem a matemática como linguagem artística. Na reportagem haviam imagens (figura 94) de obras do artista.

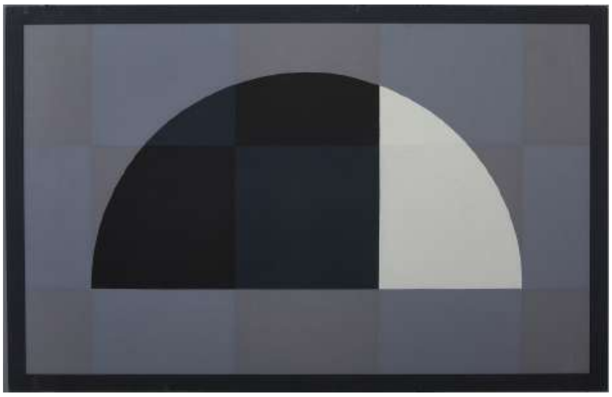
Figura 94 – Algumas obras matemáticas de Crockett Johnson.

(a) Proof of the Pythagorean Theorem (Euclid)

(b) One Surface and One Edge (Möbius)

(c) Curve Tangents (Fermat)

(d) Square Root of Two (Descartes)



Fonte – Disponível em: http://twixar.me/RBzK

Percebo que uma das características destas obras era a combinação de conceitos matemáticos com elementos artísticos, em efeitos de cores em tons diferenciados. Ainda de acordo com a reportagem, grande parte das obras deste artista encontram-se no Museu Nacional de História Americana e são disponibilizadas no site do museu.

Acessei o site do Museu e conheci outras obras de Crockett e me fascinei com a pintura a *Square Roots to Sixteen (Theodorus of Cyrene)* (figura 95):

Figura 95 – Square Roots to Sixteen (Theodorus of Cyrene), de Crockett Johnson (1967).

Fonte – Disponível em https://s.si.edu/2UhjLax

Salvei esta e outras imagens em meu celular para mostrar aos artemáticos quando fosse ao **Atelier**. O dia seguinte seria dedicado a compreender o processo criativo de Crockett Johnson.

3.3 Croqui 3: Crockett Johnson

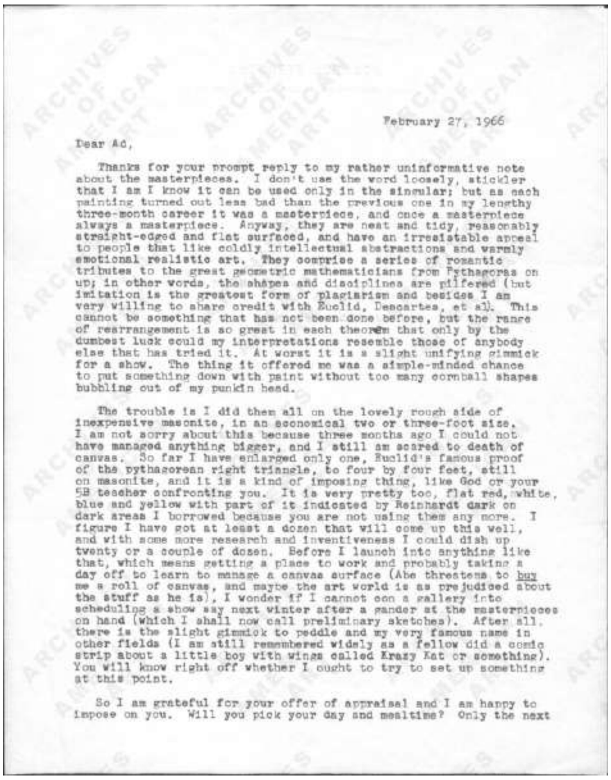
Cheguei ao **Atelier** e mostrei as obras de Crockett aos artemáticos que lá estavam. Apresentei também a obra *Square Roots to Sixteen (Theodorus of Cyrene)*, que escolhi estudar para compreender como o artista usa a matemática em suas obras.

Pelo nome da obra, tratava-se da construção da raiz quadrada de 16. Este problema não é algo novo para mim, pois fiz a construção da raiz quadrada de 16 na disciplina Construções Geométricas que cursei na minha graduação. Contudo, questionei-me sobre quem era Crockett Johnson, como ele usava a matemática em suas obras e a relação entre a obra e Theodoro de Cyrene. Com estas perguntas em mente, comecei a pesquisar sobre o artista.

Crockett Johnson é o pseudônimo do famoso ilustrador e cartunista David Johnson Leisk, que nasceu em Corona, Queens, Nova York, em 20 de outubro de 1906. Johnson é muito conhecido pelas histórias em quadrinho Barnaby (1942-1952) e pela série de livros Harold.

Ao longo de seus 68 anos de vida, a carreira artística de Crockett passou por três grandes fases. A primeira fase foi a de cartunista com histórias em quadrinhos, a segunda fase foi de escritor e ilustrador de livros infantis e a terceira fase foi a de pintor. Naturalmente, concentro minha atenção na terceira fase da carreira do artista. Esta fase tem início em meados da década 60, quando ele produziu "uma série de homenagens românticas aos grandes matemáticos geométricos a partir de Pitágoras"[10], como o próprio autor define em uma correspondência (figura 96).

Figura 96 – Carta de Crockett.



February 27, 1966

Dear Ad,

Thanks for your prompt reply to my rather uninformative note about the masterpieces. I don't use the word loosely, stickler that I am I know it can be used only in the singular; but as each painting turned out less bad than the previous one in my lengthy three-month career it was a masterpiece, and once a masterpiece always a masterpiece. Anyway, they are neat and tidy, reasonably straight-edged and flat surfaced, and have an irresistable appeal to people that like coldly intellectual abstractions and warmly emotional realistic art. They comprise a series of romantic tributes to the great geometric mathematicians from Pythagoras on up; in other words, the shapes and disciplines are pilfered (but imitation is the greatest form of plagiarism and besides I am very willing to share credit with Euclid, Descartes, et al). This cannot be something that has not been done before, but the range of rearrangement is so great in each theorem that only by the dumbest luck could my interpretations resemble those of anybody else that has tried it. At worst it is a slight unifying gimmick for a show. The thing it offered me was a simple-minded chance to put something down with paint without too many cornball shapes bubbling out of my punkin head.

The trouble is I did them all on the lovely rough side of inexpensive masonite, in an economical two or three-foot size. I am not sorry about this because three months ago I could not have managed anything bigger, and I still am scared to death of canvas. So far I have enlarged only one, Euclid's famous proof of the pythagorean right triangle, to four by four feet, still on masonite, and it is a kind of imposing thing, like God or your 5B teacher confronting you. It is very pretty too, flat red, white, blue and yellow with part of it indicated by Reinhardt dark on dark areas I borrowed because you are not using them any more. I figure I have got at least a dozen that will come up this well, and with some more research and inventiveness I could dish up twenty or a couple of dozen. Before I launch into anything like that, which means getting a place to work and probably taking a day off to learn to manage a canvas surface (Abe threatens to buy me a roll of canvas, and maybe the art world is as prejudiced about the stuff as he is), I wonder if I cannot con a gallery into scheduling a show say next winter after a gander at the masterpieces on hand (which I shall now call preliminary sketches). After all, there is the slight gimmick to peddle and my very famous name in other fields (I am still remembered widely as a fellow did a comic strip about a little boy with wings called Krazy Kat or something). You will know right off whether I ought to try to set up something at this point.

So I am grateful for your offer of appraisal and I am happy to impose on you. Will you pick your day and mealtime? Only the next

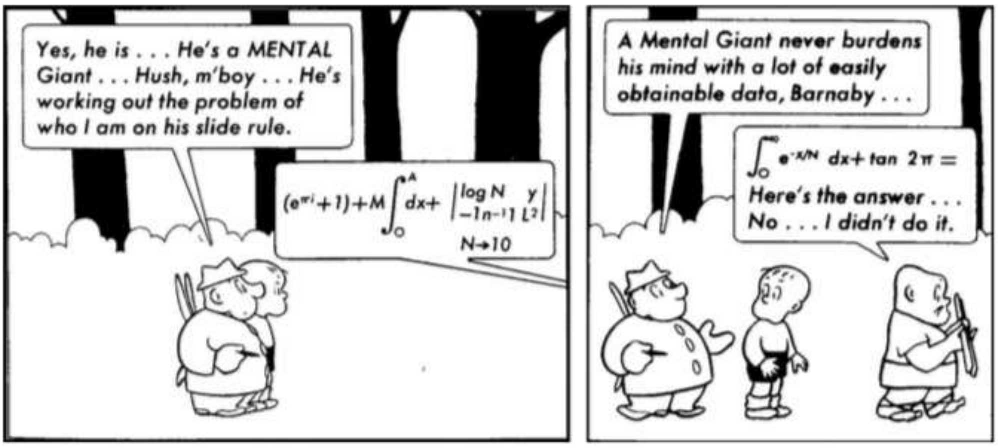
Fonte – Disponível em: https://s.si.edu/2V4HF68

Estas obras são pinturas inspiradas em teoremas e construções geométricas. Crockett estudou arte na universidade Cooper Union em New York e não tinha formação matemática. Em seu trabalho como cartunista, os símbolos matemáticos apareceram pela primeira vez em 1943 (figura 97). Para compor suas obras estudou matemática

10 “a series of romantic tributes to the great geometric mathematicians from Pythagoras on up”

numa coletânea de ensaios sobre intitulada *The World of Mathematics*, de James Newman.

Figura 97 – Tirinha de Crockett com símbolos matemáticos.



Fonte – Disponível em: https://www.maa.org/press/periodicals

O artista explica que, "ao descobrir tardiamente os valores estéticos no triângulo retângulo pitagórico e da geometria euclidiana, iniciei uma série de pinturas geométricas derivadas de famosos teoremas matemáticos, antigos e modernos"[11]. Grundhauser (2017, tradução nossa) escreve

> Apesar de não ter uma educação formal em matemática avançada, Johnson era fascinado pela álgebra complexa. Com o tempo, ele arriscou experimentar seus próprios teoremas matemáticos. (...) Esta experimentação combinada a sua experiência artística e sua paixão pela matemática, permitiram a Johnson publicar duas provas matemáticas completamente originais em revistas acadêmicas. Uma delas, intitulada *A construção de um heptágono regular*, publicada na edição de 1975 da revista Gazeta de matemática, é uma prova alternativa a prova feita originalmente por Arquimedes.[12]

Crockett se correspondia com vários matemáticos, profissionais e amadores e adquiriu vários livros de matemática, muitos dos quais eram livros de geometria, nos

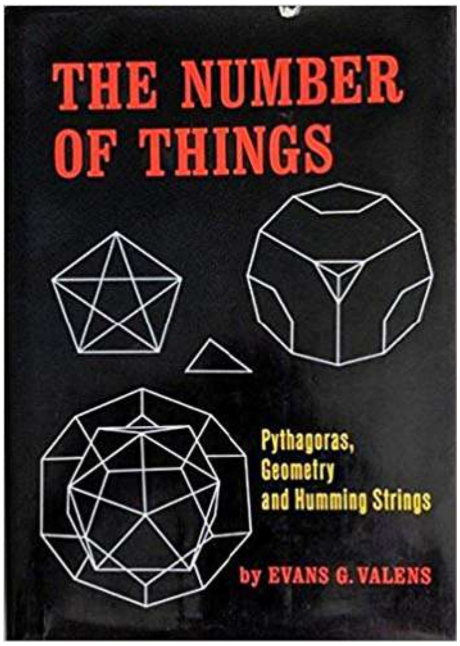
[11] "Upon belatedly discovering aesthetic values in the Pythagorean right triangle and Euclidian geometry, I began a series of geometric paintings deriving from famous mathematical theorems, both ancient and modern".

[12] Despite his lack of a formal advanced mathematical education, Johnson was fascinated by complex algebra. Eventually, he began experimenting with his own mathematical theorems. (...) Through his own experimentation, combining his artistic experience with his passion for math, Johnson was eventually able to publish two completely original mathematical proofs in scholarly journals. One, titled 'A Construction for a Regular Heptagon', was published in a 1975 edition of the Mathematical Gazette, providing an alternative to a proof originally credited to Archimedes.

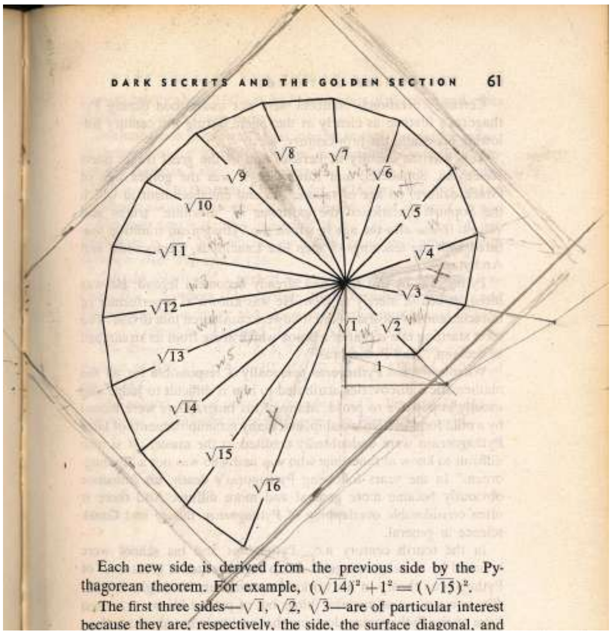
quais ele encontrou diagramas visualmente interessantes, principalmente os diagramas do livro *The Number of Things* (figura 98a), de Evans G. Valens. Este livro, cuja primeira edição é de 1964, tem vários problemas da geometria clássica, principalmente da escola pitagórica. Na página 61 (figura 98b) encontra-se a construção da Espiral de Theodoro de Cyrene, um filósofo e matemático grego, que viveu durante o século V a.C.

Figura 98 – Livro The Number of Things, de Evans G. Valens.

(a) Capa do livro



(b) Página 61 - Destaque para a Teodoro de Cirene



Fonte – O autor (2019).

O que se sabe sobre Theodoro vem de Platão (2001, p. 43), que escreveu sobre ele em sua obra Theaetetus

> *Teeteto* - Agora, Sócrates, ficou muito fácil a questão. Quer parecer-me que é igualzinha à que nos ocorreu recentemente, numa discussão entre mim e este teu homônimo.
> *Sócrates* - Qual foi a questão, Teeteto?
> *Teeteto* - A respeito de algumas potências, Teodoro, aqui presente, mostrou que a de três pés e a de cinco, como comprimento não são comensuráveis com a de um pé. E assim foi estudando uma após outra, até a de dezessete pés. Não sei por que parou aí. Ocorreu-nos, então, já que é infinito o número dessas potências, tentar e reuni-las numa única, que serviria para designar todas.

Neste trecho, Theaetetus fala a Sócrates sobre o trabalho mais famoso de Theodoro: o estudo da irracionalidade das raízes dos números inteiros não-quadrados.

Theorodo provou que as raízes $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \cdots, \sqrt{17}$ são números irracionais usando argumentos geométricos.

Sobre a razão que fez Theodoro parar no número 17, Valens (1965, tradução nossa) escreve

> "Por que Teodoro parou na raiz quadrada 17? Plutarco afirma que os pitagóricos "têm horror pelo número 17", porque está entre dois números que têm alguma magia: 16 que é um quadrado com uma área igual ao seu perímetro e 18, que é o dobro de um quadrado e também é um retângulo (3 $\times$ 6) com área igual ao seu perímetro."[13]

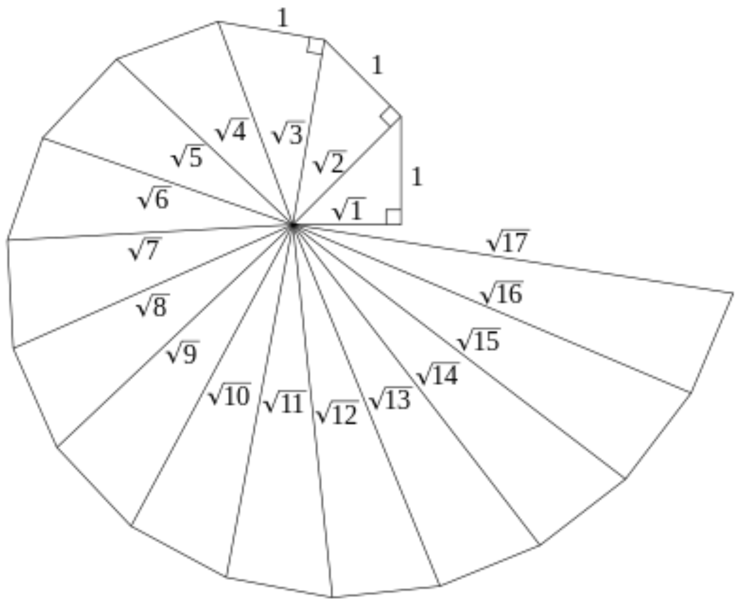
Com a matemática deste livro, Crockett faz uma "homenagem" aos matemáticos gregos criando a obra *Square Roots to Sixteen (Theodorus of Cyrene)*, que é o quadro nº 45 da série composta por 100 obras. Para entender a criação de Crockett, recordei a construção da espiral pitágorica.

Inicio a construção com um segmento de reta vertical de comprimento unitário. Em seguida, traço um novo segmento também unitário, perpendicular ao segmento inicial. Traço um novo segmento de forma a obter um triângulo (que neste caso será retângulo) com catetos unitários. Pelo teorema de Pitágoras, tem-se que a hipotenusa deste triângulo tem comprimento igual à raiz quadrada de 2.

A construção do segundo triângulo inicia desenhando-se um segmento unitário perpendicular à hipotenusa do triângulo anterior. Traço um terceiro segmento para formar um novo triângulo retângulo com catetos cujos comprimentos são, respectivamente, 1 e $\sqrt{2}$. Aplico novamente o Teorema de Pitágoras para calcular medida $\sqrt{3}$ da hipotenusa. Continuo este procedimento até que a última hipotenusa tenha comprimento igual $\sqrt{16}$.

[13] "Why did Theodorus stop short of the square root 17? Plutarch said the Pythagoreans 'have a horror for the number 17' because it lies between two somewhat magical numbers: 16, which is a square with an area equal to its perimeter, and 18, which is the double of a square and is also a rectangle (3 x 6) with an area equal to its perimeter." (VALENS, 1965, p. 61)

Figura 99 – Construção da espiral de Teodoro.



Fonte – Disponível em: http://twixar.me/M6hn

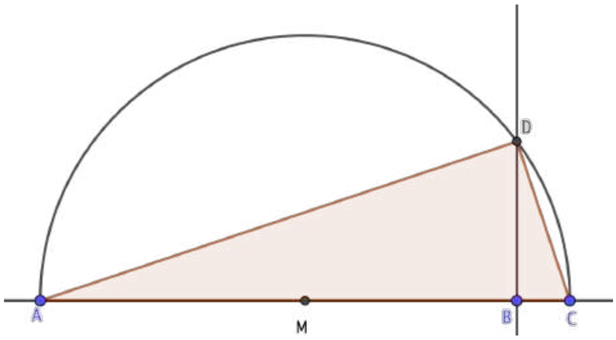
Na obra de Crockett (figura 95), temos a impressão de profundidade devido a escolha das tonalidades. Note que os três triângulos cinza-escuros são aqueles cujas hipotenusas são números inteiros (as raízes quadradas de 4, 9 e 16). Os seis triângulos brancos são aqueles cujas hipotenusa são as raízes quadradas de inteiros pares. Finalmente, os seis triângulos cinza-claros são aqueles cujas hipotenusa são as raízes quadradas de inteiros ímpares. O fundo preto faz o contraste com os tons cinzas escolhido pelo artista. Que ideia criativa!

Diferente de Almada, Crockett usou diretamente um resultado matemático e somente com a escolha das cores criou uma obra interessante. Uma grande homenagem!

Inspirado em Crockett, decidi fazer uma releitura desta obra. Optei por fazer outra construção da $\sqrt{16}$ do seguinte modo:

Dado um segmento $\overline{AB} = 16$ sobre uma reta r, marquei o ponto C, tal que $\overline{BC} = 1$. Tracei uma semicircunferência com centro no ponto médio de $\overline{AC}$ e a perpendicular a $\overline{AC}$ passando por B. O ponto D é a interseção entre a perpendicular e a semicircunferência.

Figura 100 – Construção geométrica de $\sqrt{16}$.



Fonte – O autor (2019).

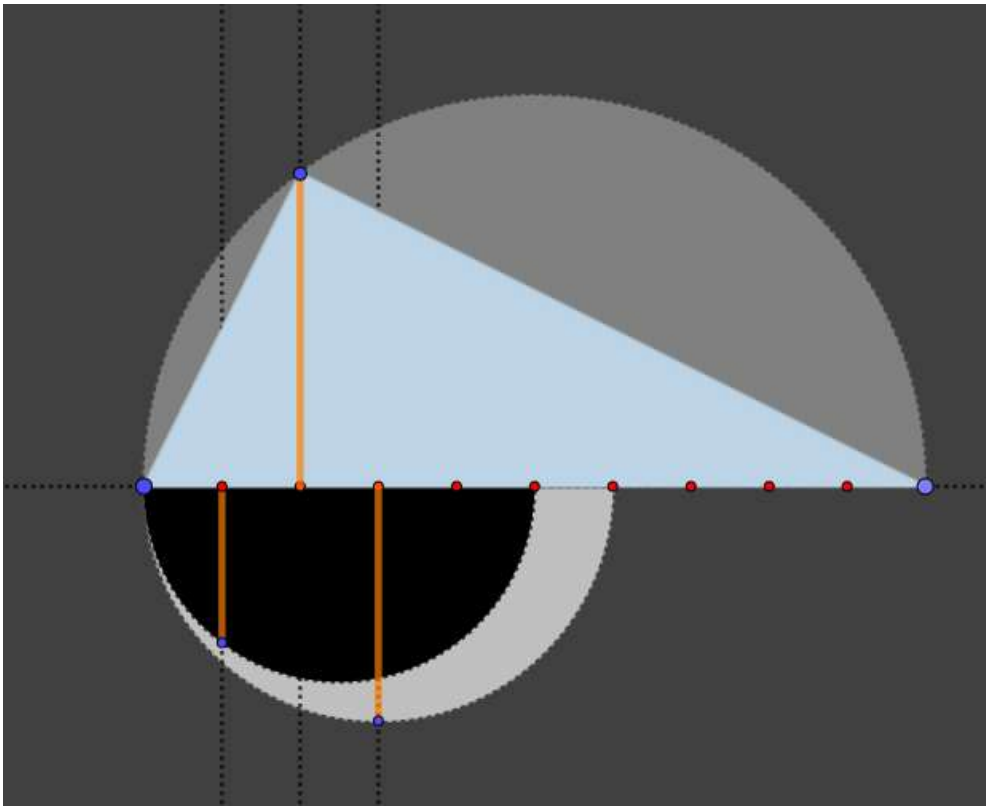
Note que, resultou na construção do triângulo retângulo ACD com ângulo reto em D. Agora, pelas relações métricas do triângulo retângulo, tem-se:

$$\overline{AD}^2 = \overline{AB} \cdot \overline{BC} = 16 \cdot 1 \Rightarrow \overline{AD} = \sqrt{16}.$$

Para a produção da releitura, usarei o processo descrito acima do seguinte modo: para construir a $\sqrt{16}$, tomei $\overline{AB} = 8$ e $\overline{BC} = 2$. Para a construir a $\sqrt{9}$, tomei $\overline{AB} = \overline{BC} = 3$ e para construir a $\sqrt{4}$, tomei $\overline{AB} = 4$ e $\overline{BC} = 1$.

Além disso, optei por manter algumas cores da paleta utilizada na obra original (cores frias e neutras) e utilizei as cores quentes para dar destaque aos números naturais de 1 a 9 e os números $\sqrt{4}$, $\sqrt{9}$ e $\sqrt{16}$ (os números 0 e 10 foram pintados de azul pois são os vértices do triângulo). O resultado final é mostrado na figura (figura 101):

Figura 101 – Releitura de *Square Roots to Sixteen*, por Edilson Neri.



Fonte – O autor (2019).

Além desta releitura, fiz outra produção criativa, que consiste em uma animação do processo de construção da espiral de Teodoro para reproduzir a obra de Crockett, que pode ser visualizada no link a seguir:

https://www.geogebra.org/m/ajrdc7fn

Novamente, tal como nas duas produções anteriores, utilizo a tecnologia como ferramenta no processo de criação interdisciplinar, envolvendo a matemática e arte.

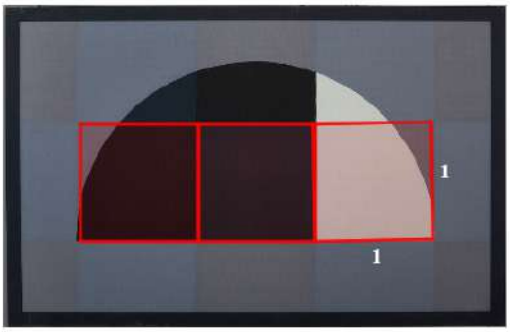
Uma característica que me chamou atenção nas obras de Crockett é a utilização de sobretons de cores para "disfarçar" informações. Isso me lembrou algumas obras de Escher e do movimento Op Arte.

Falo com os artemáticos do **Atelier** sobre esta característica e ficamos por algum tempo tentando desvendar o que pode estar "escondido" em algumas obras do Crockett.

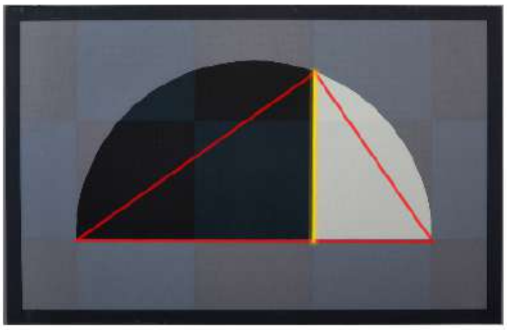
Exploramos a obra intitulada *Square Root of Two* (Raiz quadrada de dois), figura 94d. Nela o artista utilizou tons de cinza para "disfarçar" as marcações que definem o comprimento unitário (figura 102a). Também, "disfarça" um triângulo inscrito num semi-círculo (figura 102b).

Figura 102 – Detalhes da obra *Square Root of Two*.

(a)



(b)



Fonte – Adaptação do autor (2019).

Com o olhar matemático mais apurado, noto que o triângulo vermelho é retângulo, pois está inscrito num semi-círculo, com a hipotenusa coincidindo com diâmetro. Pelas relações métricas no triângulo retângulo, temos que o quadrado da medida do segmento amarelo (altura) é igual ao produto entre a medida das projeções dos catetos, que medem, respectivamente, uma e duas unidades. Logo, a altura do triângulo é igual a raiz quadrada de dois.

Este exercício mental de tentar encontrar na obra de Crockett os passos da demonstração que foram omitidos é, ao mesmo tempo, instigante e divertido, entretanto, eu precisava deixar o **Atelier**. O dia ia acabando e minha viagem também chegava ao fim. Meu retorno estava marcado para o dia seguinte.

Volto para casa pensando nas experiências que vivenciei no **Atelier**, um espaço que pude exercitar minha criatividade. O ambiente do **Atelier** me proporcionou uma aprendizagem mais significativa e criativa quando me permiti dialogar com a arte, numa atitude interdisciplinar. Todavia, somente essa atitude de abertura não é suficiente, uma vez que são necessários conhecimentos de arte, matemática e tecnologia. Conhecimentos que busquei adquiridos durante a minha formação acadêmica e no **Atelier** através dos processos de Curar e Fazer.

No processo de Curar, pude vivenciar a experiência de conectar a matemática e a arte, enquanto que no processo de fazer, pude desenvolver minhas produções de forma autônoma, reunindo todos os conhecimentos que adquiri nas curadorias. Assim, entendo que o **Atelier** é um espaço que pode promover uma aprendizagem criativa em matemática.

Despeço-me do **Atelier** com o sentimento que "algo me aconteceu, algo me tocou".

Chega o dia de retornar. Estou no aeroporto aguardando o vôo e ainda muito tocado com tudo que vivi na cidade de São Paulo. Entretanto, falta algo que não sei explicar o que é. Uma sensação de "incompletude".

Quando estive na **Garagem** aprendi que os princípios da cultura Maker e da metedologia STEAM potencializam uma aprendizagem criativa em matemática e construí conhecimento sobre a prototipagem 3D de objetos matemáticos de forma autônoma. No **Atelier**, a aprendizagem criativa em matemática foi potencializada a partir dos processos de Curar e Fazer, em que pude utilizar a tecnologia no fazer criativo. Tanto na **Garagem**, quanto no **Atelier**, as ações foram interdisciplinares. No primeiro caso, a interdisciplinaridade aconteceu entre a matemática, engenharia e ciência da computação, enquanto que no segundo, a interdisciplinaridade aconteceu entre a matemática e a arte.

Lembrei dos momentos que, junto com os artemáticos, tentei desvendar os mistérios das obras do Crockett. Foram momentos lúdicos e prazerosos que resgataram uma antiga alegria, aquela alegria que sinto ao resolver um problema de matemática ou demonstrar um teorema. Uma diversão muito peculiar dos matemáticos. Fiquei pensando se existe algum lugar onde os matemáticos podem se divertir resolvendo problemas ou provando teoremas pelo simples desafio e prazer de resolvê-los. Eu não sabia se um lugar deste existia, mas sabia de alguém que passou a sua vida brincando com a matemática e escreveu vários livros de matemática recreativa: Martin Gardner!

Recordo que Peticov nos falou de uma conferência sobre Martin Gardner que reunia pessoas do mundo todo para explorar ideias e desenvolver ações de matemática recreativa. Acesso o site do evento e vejo que a próxima conferência será em Atlanta, na **Casa Gardner**. Fico muito interessado em participar da conferência, principalmente, por ser uma oportunidade de conhecer a **Casa Gardner**. Quando chegar, vou planejar esta viagem para Atlanta. Será a viagem mais desafiadora de todas, pois não sei nada sobre a **Casa Gardner**, mas imagino que lá posso encontrar aquilo que ainda falta! É para lá que vou.

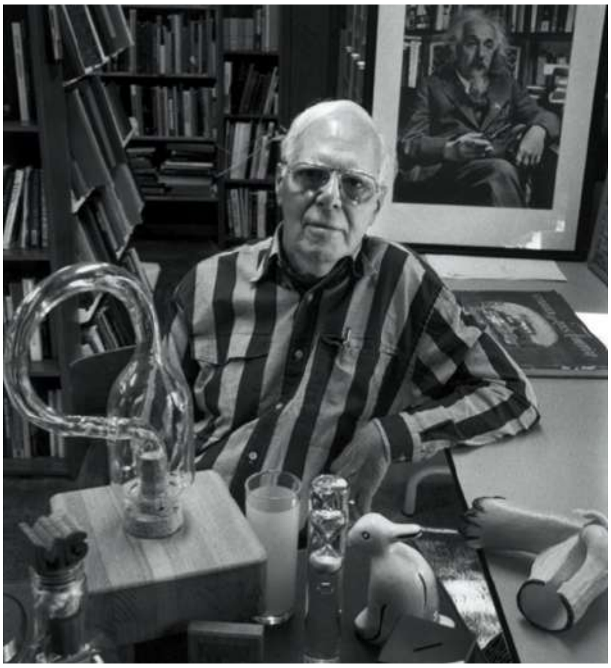

161 CASA GARDNER

4 Casa Gardner: Matemática Lúdica

Quando decidi conhecer a **Casa Gardner**, iniciei meu planejamento para esta viagem. Neste planejamento, como em qualquer viagem que faço, realizei uma série de buscas sobre o evento, o local que ele ocorreria e sobre o próprio Martin Gardner, que até então, só o conhecia de *ouvir falar*.

Durante alguns meses me dediquei a conhecer um pouco mais sobre Gardner e suas contribuições para a Matemática. Em minhas pesquisas, descobri que Martin Gardner (figura 103) foi autor de mais de uma centena de livros de matemática recreativa e divulgação científica.

Figura 103 – Martin Gardner (1914-2010).



Fonte – Disponível em: https://is.gd/MIOceZ

Gardner nasceu e cresceu na cidade de Tulsa, em Oklahoma (Estados Unidos) e desde pequeno sempre demonstrou interesse em jogos e quebra-cabeças. Bacharel em Filosofia, em 1936, pela Universidade de Chicago, Gardner iniciou sua carreira por volta da década de 1950, em Nova Iorque, atuando como escritor e designer na revista Humpty Dumpty (ARANDA, 2000). Seu trabalho com quebra-cabeças de dobraduras de papel lhe rendeu um convite para ser colunista da revista *Scientific American* que, por mais de 20 anos, escreveu para a coluna *recreational mathematics* (matemática recreativa/recreativa), divulgando e popularizando matemática. Mas, o que seria matemática recreativa?

Santos (2014) entende que matemática recreativa é um termo difícil de ser definido e que relaciona-se, dentre outras coisas, à análise de problemas conhecidos "através de abordagens pouco comuns". Para este autor,

> "o melhor é mesmo não a tentar definir. As definições tendem a fechar, e a matemática recreativa, na sua génese, é aberta. Embora possa servir de ponte para a descoberta de conceitos muito importantes, a utilidade não é a sua preocupação: **engenho**, **imaginação** e **beleza** é o que importa." (SANTOS, 2014, grifo nosso)

Observo que essa matemática que Gardner amplamente divulgava é uma porta que se abre à criatividade, permitindo que cada pessoa traga seu toque pessoal ao resolver um problema, uma charada ou até mesmo um desafio. Lembro de Winnicott (1975), que entende a criatividade como "uma sensação individual de realidade da experiência e do objeto", ou seja, a criatividade está relacionada ao tipo de interação que a pessoa estabelece com a realidade. Para Winnicott, "é no brincar, e somente no brincar, que o indivíduo criança ou adulto, pode ser criativo e utilizar sua personalidade integral" (CICCONE, 2013 apud WINNICOTT, 1975).

Santos (2014) também destaca que as ideias matemáticas, muitas vezes abordadas de forma abstrata, aparecem em várias contextos da vida cotidiana e que estas ideias possuem potencial de nos cativar "de forma mais intensa". Contudo, para que estas ideias toquem as pessoas, é necessário escolher "contextos surpreendentes, bem humorados, estéticos e culturais". Para este autor, "foi isso que Gardner compreendeu em todo o seu esplendor". Mais uma vez, ao se referir a Gardner, Santos (2014) traz a noção da experiência enquanto algo que toca ou marca o indíviduo, fazendo-me recordar de Bondía (2001), que entende a experiência como "algo que lhe passa, que lhe acontece, que lhe toca".

Fico animado, pois percebo que a criatividade também pode estar associada à resolução de um problema ou um desafio, que por vezes pode nos ser apresentado de forma lúdica, tal como Gardner fazia. Isto é interessante, pois abre-se uma possibilidade para que possamos aprender criativamente, tendo como base a construção do conhecimento com autonomia, segundo Freire (2011), e imprimindo a nossa marca individual sobre este processo, segundo Winnicott (1975).

Quando estive na **Garagem** e no **Atelier**, recordo que vez por outra me deparei com alguma situação que precisava resolver algum tipo de *problema*. Na **Garagem**, por exemplo, precisei verificar a melhor forma de imprimir a Faixa de Möbius. Para resolvê-lo, precisei buscar conhecimentos de engenharia e aprendi que em algumas vezes é necessário utilizar suportes para dar sustentação à peça durante a impressão. Já no **Atelier**, para compreender o significado do quadrado mágico na obra de Dürer, por exemplo, precisei recorrer à Arte para obter respostas. Em ambos os lugares, a busca por soluções para um *problema* (não necessariamente no mesmo sentido de "problema matemático") se deu quando me adentrei a outra área. Agora que farei uma viagem para conhecer a **Casa Gardner**, tenho a plena certeza que lá encontrarei muitos problemas, desafios e charadas desafiadoras!

Indago-me *como o lúdico pode promover uma aprendizagem criativa em matemática?*

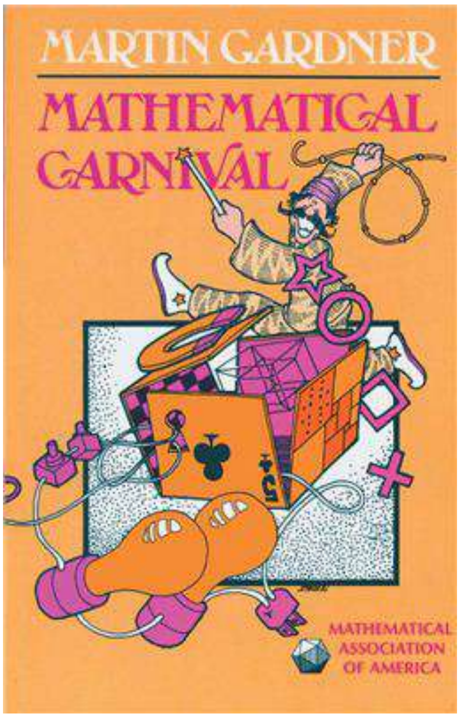
Buscar respostas para esta indagação será minha missão na **Casa Gardner**. Esta missão, em especial, será uma experiência diferente das que vivenciei na **Garagem** e no **Atelier**, pois um lugar de diversão, num primeiro olhar, não me parece ser um lugar de aprendizagem. Porém, não é uma diversão qualquer! É uma diversao muito particular, daqueles que são amantes da matemática: o prazer de resolver um problema ou demonstrar um teorema. Não sei se encontrarei exatamente isso na **Casa Gardner**, mas essas são minhas expectativas sobre este lugar tão diferente. A ansiedade em conhecer a **Casa Gardner** aumenta a cada dia...

O dia da viagem chegou. Serão 10 horas de vôo até Atlanta. Durante esse tempo, aproveitarei para ler um dos livros de Gardner, que adquiri na internet: *Mathematical Carnival* (figura 104a). Neste livro, Gardner apresenta dezenove enigmas divertidos, que envolvem desde jogos com moedas, até o problema da trisecção de um ângulo. Neste livro, Gardner (1989, p. 1, tradução nossa) afirma que a melhor maneira de "tornar a matemática interessante para estudantes e leigos é abordá-lo em um espírito de jogo"[1]. Há um artigo, em especial, que me fez recordar da experiência que vivenciei no **Atelier**. É o artigo intitulado *The Art of M. C. Escher* (figura 104b), que apresenta uma visão geral sobre as obras de Escher, traçando um paralelo com a matemática que o artista se apropria para gerar efeitos de ilusão de ótica, característicos do movimento Op Art que, segundo Gardner (1989), é "matemática".

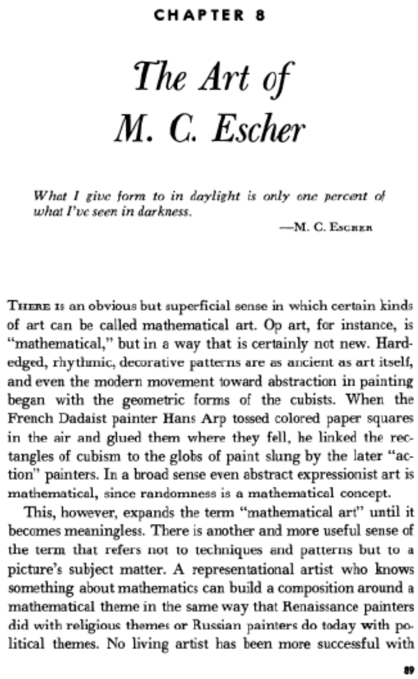
1 The best way, it has always seemed to me, to make mathematics interesting to students and laymen is to approach it in a spirit of play.

Figura 104 – Mathematical Carnival, de Martin Gardner.

(a)



(b)



CHAPTER 8

The Art of M. C. Escher

What I give form to in daylight is only one percent of what I've seen in darkness.
—M. C. Escher

There is an obvious but superficial sense in which certain kinds of art can be called mathematical art. Op art, for instance, is "mathematical," but in a way that is certainly not new. Hard-edged, rhythmic, decorative patterns are as ancient as art itself, and even the modern movement toward abstraction in painting began with the geometric forms of the cubists. When the French Dadaist painter Hans Arp tossed colored paper squares in the air and glued them where they fell, he linked the rectangles of cubism to the globs of paint slung by the later "action" painters. In a broad sense even abstract expressionist art is mathematical, since randomness is a mathematical concept.

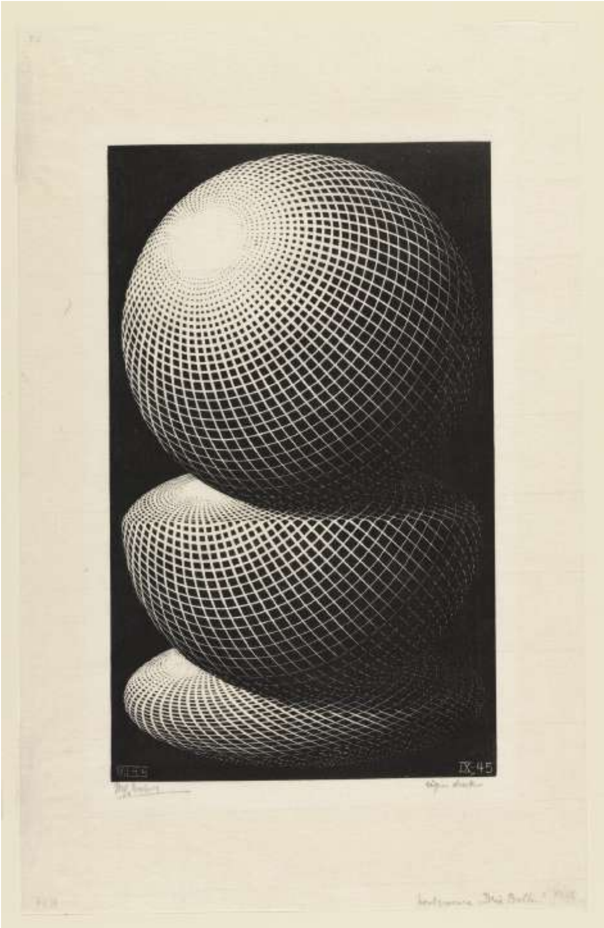
This, however, expands the term "mathematical art" until it becomes meaningless. There is another and more useful sense of the term that refers not to techniques and patterns but to a picture's subject matter. A representational artist who knows something about mathematics can build a composition around a mathematical theme in the same way that Renaissance painters did with religious themes or Russian painters do today with political themes. No living artist has been more successful with

89

Fonte – O autor (2019).

Gardner (1989) finaliza o artigo indagando se o leitor pode adivinhar, com certo grau de verossimilhança, o que Escher representou na obra *Three Spheres I* (figura 105). Paro uns minutos para tentar responder a provocação de Gardner. De início, confesso que não consegui responder imediatamente o que ali estava representado. Creio que precisava de mais um tempo para compreender melhor a imagem. Peguei um lápis, puxei uma seta para foto da obra e escrevi: "pesquisar mais". Retornarei em momento oportuno para este capítulo. Fechei o livro e fui assistir TV. Ainda tinha mais umas quatro horas de vôo!

Figura 105 – Three Spheres I, de M. C. Escher (1945).



Fonte – Disponível em https://www.moma.org/collection/works/61527

Para me distrair durante o tempo de vôo que restava, procurei por algum canal de notícias para me atualizar dos acontecimentos do dia. A programação da TV era norte-americana e o telejornal que era exibido noticiava sobre uma exposição, numa galeria em Nova York, de ilustrações de um designer chamado Federico Babina. A notícia dizia que o artista produziu uma série de desenhos de prédios inspirados no estilo de pintura de grandes artistas. Achei bem interessante a proposta do designer e, embora não tivesse oportunidade de ir a Nova York ver a exposição pessoalmente, peguei meu tablet e fiz uma busca por mais detalhes sobre estas ilustrações. Nesta busca, encontrei o seguinte pôster (figura 106):

Figura 106 – Archist, de Federico Babina.

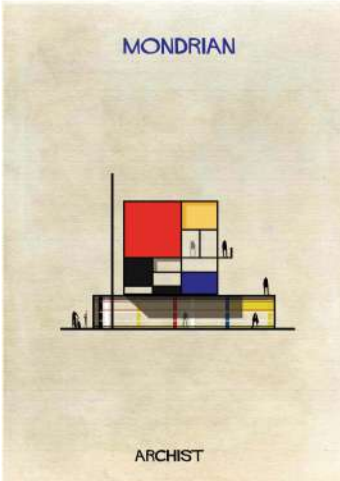
Fonte – Disponível em: https://is.gd/0gGnj9

O trabalho me impressionou muito e decidi ver com mais detalhes as ilustrações de Babina. Por sorte, o artista disponibilizava cada uma das ilustrações em seu site. Das 27 ilustrações, as que mais me chamaram atenção foram as que se referiam à Pablo Picasso (figura 107a), Piet Mondrian (figura 107b), Salvador Dalí (figura 107c), Joan Miró (figura 107d), Andy Warhol (figura 107e) e Marcel Duchamp (figura 107f). Nestas ilustrações, eu conseguia perceber as características dos artistas que eram referenciados nos desenhos de Federico. Que produção criativa! O designer interpelou a realidade a sua marca pessoal. Eis, mais uma vez, a criatividade segundo Winnicott (1975).

Figura 107 – Ilustrações de Federico Babina.

(a)

(b)

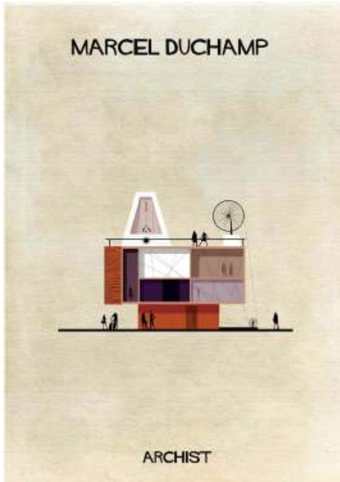


(c)

(d)

(e)

(f)



Fonte – Disponível em: https://is.gd/0gGnj9

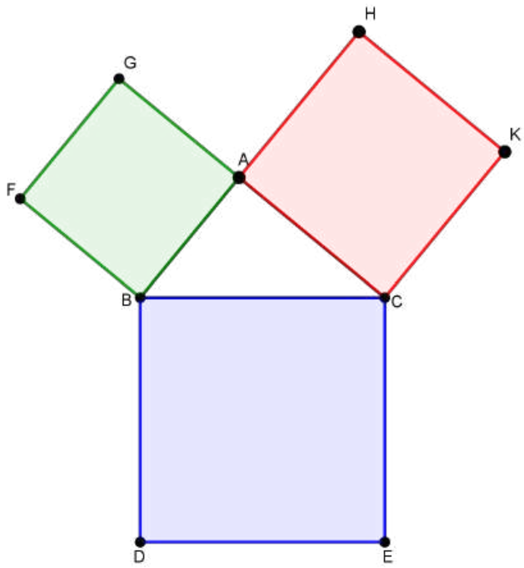
Essas ilustrações de Federico e o artigo de Gardner me inspiraram a fazer uma produção criativa, que me relembra, de certa forma, minha experiência no **Atelier**.

Me pergunto, inspirado em Babina, se é possível "ilustrar" uma demonstração matemática? Como associar a esta ilustração o estilo de um artista?

Vou tentar responder estas perguntas. Mas qual demonstração escolher? Vejo meus arquivos no tablet e localizo a versão digital do livro *Os Elementos*, de Euclides. Sigo direto para a demonstração do Teorema de Pitágoras, o teorema mais famoso (talvez!) da Matemática e que possui algumas dezenas de demonstração, das mais variadas formas. Preciso reler a demonstração de Euclides (2009):

Teorema 1. *Em um triângulo retângulo, o quadrado sobre o lado oposto ao ângulo reto é igual à soma dos quadrados sobre os lados que forma o ângulo reto.*

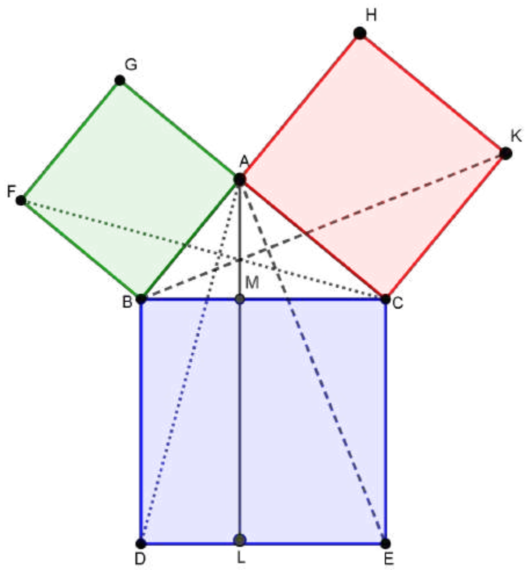
Figura 108 – Teorema de Pitágoras.



Fonte – O autor (2019).

Seja um triângulo ABC, com $B\hat{A}C = 90°$. Inicialmente, tracemos o segmento AL, de tal forma que ele seja paralelo aos lados BD e CE. Tracemos também os segmentos FC, AD, BK e AE.

Figura 109 – Demonstração do teorema de Pitágoras



Fonte – O autor (2019).

Temos que:

$$B\hat{A}C = B\hat{A}G = 90^{\text{o}} \text{ e } F\hat{B}A = D\hat{B}C = 90^{\text{o}}. \tag{4.1}$$

Como o ângulo $A\hat{B}C$ é comum a $D\hat{B}A$ e $F\hat{B}C$ e por (4.1), temos que $D\hat{B}A = F\hat{B}C$. Por outro lado, como $DB = BC$ e $FB = BA$, temos que $FB + BC = BD + AB$. Como $F\hat{B}C = D\hat{B}A$, segue que $AD = FC$. Logo,

$$ABD = FBC. \tag{4.2}$$

Além disso, o retângulo $BMDL$ tem o dobro da área do triângulo ABD, pois possuem a mesma base BD e estão na mesma reta paralela. Consequentemente, por (4.2), temos que o retângulo $BDLM$ também tem o dobro da área do triângulo FBC.

Por construção, como $ABFG$ é um quadrado, logo FB e AG são paralelos, assim como, no retângulo $BDLM$, os segmentos BD e LM também são paralelos. Como os ângulos $B\hat{A}C$ e $B\hat{A}G$ formam 90º com o segmento AB, os segmentos AC e AG formam ângulos adjacentes iguais a dois retos, desde que não estejam posicionados do mesmo lado. Portanto, CA também está alinhado a AG.

Assim, o quadrado $BFGA$ possui a mesma base que o triângulo BFC e estão na mesma paralela GC. Logo, a área do quadrado $BFGA$ é o do dobro da área do triângulo BFC e, consequentemente, será o dobro da área do triângulo ABD. Conclui-se, então, que a área do quadrado $BFGA$ é igual á área do retângulo $BDLM$.

Analogamente, prova-se que a área do quadrado $ACKH$ é igual à área do retângulo $CELM$. Como o quadrado $BDEC$ é a união dos retângulos $BDLM$ e $CELM$, temos que a área deste quadrado é igual a soma das áreas dos quadrados $CAHK$ e $BFGA$.

Agora que já relembrei a demonstração do Teorema de Pitágoras, feita por Euclides, vou escolher um artista e usar o seu estilo na ilustração da demonstração.

Escolho o artista francês Albert Jean Gorin, que utiliza com frequência as cores primárias. Escolho a Composição nº 45 (figura 110), pela presença de linhas que alternam entre o branco e o preto. Decido utilizar esta característica, além das cores primárias, em minha produção.

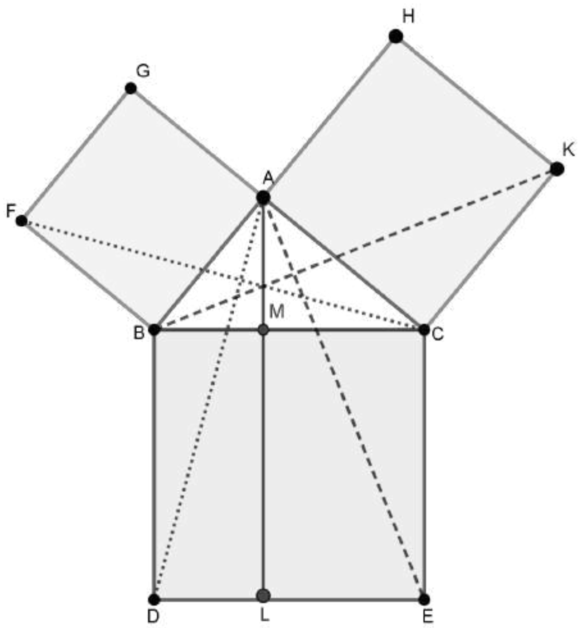
Figura 110 – Composition no. 43, 1958.

Fonte – O autor (2019).

Fonte – Disponível em http://twixar.me/QKWn

No Geogebra, reproduzo os passos da demonstração de Euclides para obter uma imagem semelhante (figura 111) a que se encontra no livro.

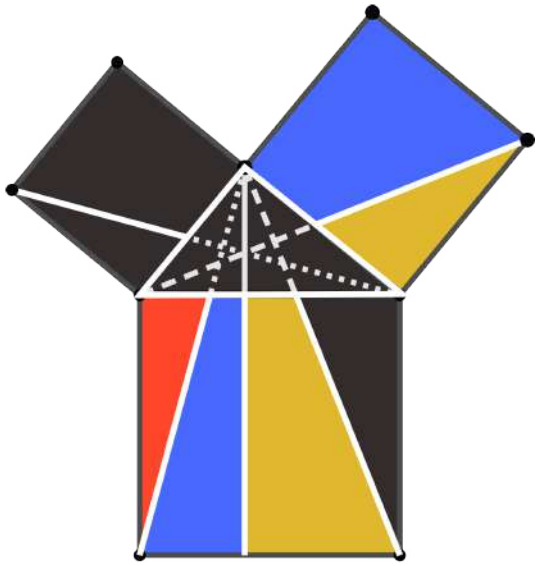
Figura 111 – Demonstração do Teorema de Pitágoras.



Fonte – O autor (2019).

Sobre a figura 111, aplico, sem me preocupar com um padrão específico, as cores primárias e utilizo o branco para dar destaque às linhas. Obtive o seguinte resultado (figura 112):

Figura 112 – Teorema de Pitágoras no estilo de Gorin.



Fonte – O autor (2019).

Paro por um minuto, analiso minha produção e parafraseio a pergunta que Gardner (1989) faz em seu livro: será que alguém poderá adivinhar o que representei nesta imagem?

Minha intuição diz que sim. É possível identificar o que ali representei, mas com uma condição: o observador deve conhecer previamente que aquela imagem é a demonstração do Teorema de Pitágoras feita por Euclides. Talvez seja por isso que eu não tenha conseguido responder a pergunta de Gardner! É claro que precisarei, no momento adequado, argumentar com mais rigor matemático, para dar uma resposta mais consistente. Mas isto é algo para outro momento. Por outro lado, destaco que esta atividade, que como disse anteriormente, me lembrou do **Atelier**, me permitiu aprender, um pouco mais sobre o artista e o Teorema de Pitágoras.

O tempo parece que passou mais rápido, enquanto fazia esta atividade no Geogebra. O comandante anuncia o pouso no aeroporto de Atlanta. É final da noite da véspera da abertura da conferência e o clima na cidade está agradável. Estou cansado da viagem longa, então seguirei para o hotel e descansarei. A programação da Conferência Gardner inicia na noite do dia seguinte, então aproveitarei a manhã deste dia para conhecer a **Casa Gardner.**

O dia amanhece e mesmo meio cansado da viagem, me sinto muito empolgado e ansioso para conhecer a **Casa Gardner**. Logo após o café da manhã, sigo para **Casa de Gardner** e ao longo do trajeto vou observando a paisagem, composta por grandes prédios, que se misturam à instalações de arte e murais, que enfeitam parques, túneis e muros. A cidade conserva ainda algumas instalações esportivas da época em que foi sede dos jogos olímpicos, como o Centennial Olympic Park. A cidade é linda e encantadora.

Finalmente chego à **Casa Gardner**. O local, visto de fora, é aparentemente grande e, diferentemente do que imaginava, o espaço não é exatamente uma casa. O espaço é um prédio, não muito alto, com cerca de 3 andares e mais o térreo. Ao entrar no prédio, me deparo com um hall que possui bem no centro, uma grande escultura do Triângulo de Penrose. Nas paredes à direita e a à esquerda deste hall, há uma sequência de quadros, que apresenta um pouco da trajetória de Gardner, com fotos do arquivo pessoal da família. Ao fundo do hall, há uma porta grande e a sua direita, dois elevadores. A porta grande leva o visitante a um grande salão, que está arrumado para o evento de abertura: grandes mesas redondas com toalhas de mesa brancas e arranjos de flores no centro. Ao que tudo indica, o evento de abertura será um jantar.

Tomo o elevador e vou para o primeiro andar. Este é o andar dedicado aos jogos e desafios. O espaço possui várias mesas retangulares e sobre elas há vários jogos, alguns que já conheço, como por exemplo o xadrez, o cubo mágico e a torre de Hanói. Há outros que não conheço, mas são semelhantes a quebra-cabeças.

Sigo a visitação e vou para o segundo andar. Este é o andar dedicado às esculturas matemáticas. Há poliedros, nós, modelos de projeção estereográfica, paraboloides, esferas, toros, pseudoesfera, garrafa de Klein, esponja de Menger, a Curva de Hilbert 3D e muitas outras estruturas. As peças que são exibidas nesse espaço são dos mais diferentes tamanhos e materiais. Há peças feitas na impressora 3D, de vidro, de madeira, entre outros. Simplesmente fascinante!

O terceiro e último andar é dividido em duas salas. A primeira sala é dedicada ao legado de Martin Gardner. Ali são exibidos os livros que Gardner escreveu, entrevistas em jornais e revistas, prêmios e honrarias. A segunda sala é semelhante a uma pequena sala de cinema, em que é exibido um breve documentário sobre a vida e obra de Gardner.

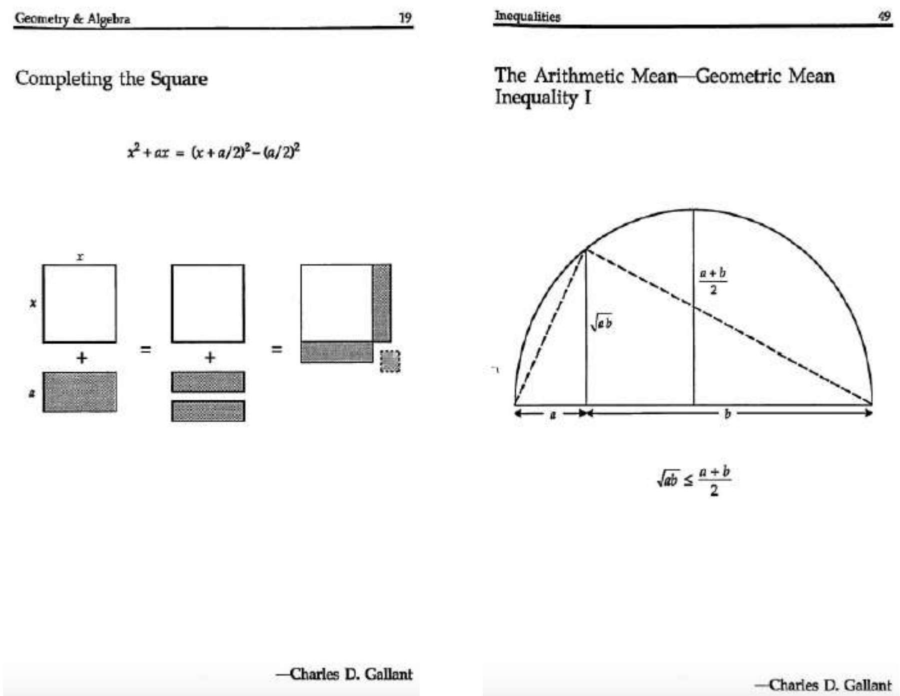
A visita foi rápida, mas bem estimulante. Minha expectativa é grande para os dias que virão. Antes de sair, recebo a programação da conferência e minha identificação. Retorno ao hotel para almoçar e me preparar para a abertura da conferência. Enquanto retorno, marco no panfleto com a programação as atividades que tenho interesse. Algumas das atividades ocorrem simultaneamente, então é possível escolher quais pretendo participar. A programação é bem diversificada. Há shows de *matemágica*, competição para quem monta o cubo mágico mais rapidamente, pequenas palestras, apresentações artísticas, lançamento de livros, apresentações de trabalhos e uma tradicional troca de quebra-cabeças entre os participantes.

A hora do evento de abertura se aproxima. Cheguei a **Casa Gardner** com certa antecedência, para escolher o melhor lugar na platéia. Os convidados aos poucos vão chegando ao local e de longe avisto um conhecido: Peticov. Vou até ele para cumprimentá-lo. Conversamos por um tempo até iniciar a programação, que teve uma apresentação musical, a exibição de um vídeo sobre a **Casa Gardner**, as boas vindas dos organizadores e finalizando com um jantar de recepção. O evento estava ótimo, mas precisava retornar para o hotel, pois no dia seguinte, assistiria uma conferência no início da manhã, proferida pelo professor de Matemática do *Lewis & Clark College* em Portland (Oregon, EUA), Roger B. Nelsen. Ele falará sobre *Proofs Whitout Words - PWW* (Provas Sem Palavras) e parece ser interessante.

No dia seguinte, chego para assistir à conferência do professor Roger B. Nelsen. Esta conferência não tem aquele formato tradicional que estamos acostumados a participar, em que o palestrante faz sua apresentação e a plateia não interage. Nas conferências da **Casa Gardner**, os participantes são estimulados a interagir e fazer contribuições. Ele inicia apresentando seus três livros de *Proofs Without Words*, que traz uma série de várias "provas sem palavras" (PWWs, sigla de *Proof Whitout Words*, em inglês), que consistem em imagens ou diagramas que ajudam uma pessoa a entender por que uma afirmação matemática pode ser verdadeira (NELSEN, 1993). Segundo o professor, seus livros são organizados em capítulos com provas sem palavras de algumas áreas da matemática, como Geometria, álgebra, trigonometria, cálculo, geometria analítica, desigualdades, sequências e séries, como apresentado nos exemplos a seguir (figuras 113 e 114).

Figura 113 – Provas Sem Palavras

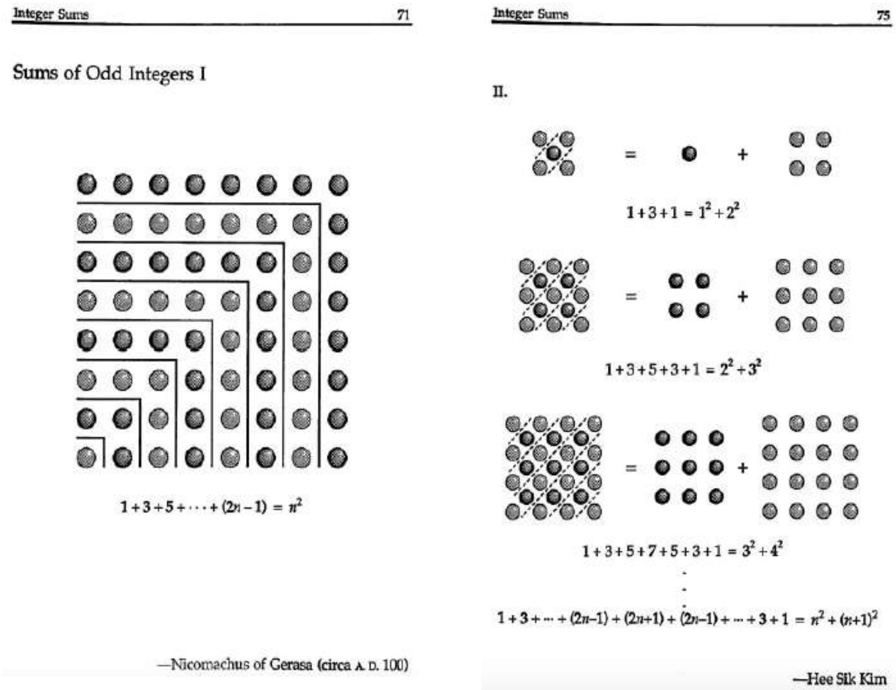
(a) (b)



Fonte – Nelsen (1993)

Figura 114 – Provas Sem Palavras

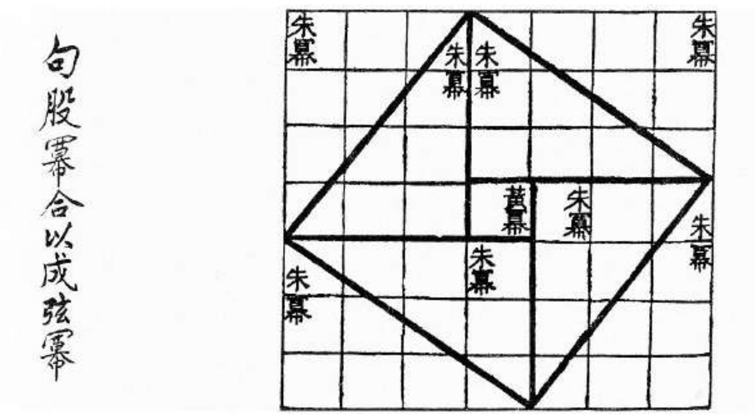
(a) (b)



Fonte – Nelsen (1993)

Entretanto, segundo o professor Nelsen (2000, p. 9), as provas sem palavras não são "uma inovação recente", pois são utilizadas há muito tempo. Por exemplo, os chineses, séculos antes de Cristo, já expressavam algumas ideias e fatos matemáticos a partir de imagens, como mostra a figura 115.

Figura 115 – Prova pictórica do Teorema de Pitágoras, por Zhoubi Suanjing 500–200 a.C., na China.



Fonte – Disponível em: https://goo.gl/Sxmxt1.

O professor Nelsen fez um relato histórico sobre seu trabalho com as provas sem palavras, que resultou na publicação, na década de 90, do seu primeiro livro intitulado *Proofs without Words: Exercises in Visual Thinking*, no ano 2000, o livro *Proofs without Words II: More Exercises in Visual Thinking* e, recentemente, no ano de 2015, o livro *Proofs without Words III: Further Exercises in Visual Thinking*. Na sequência, o professor Nelsen apresenta alguns enigmas, em forma de prova sem palavras, e finaliza com a seguinte frase atribuída a Martin Gardner em Nelsen (2015, p. 7):

"Uma prova maçante pode ser complementada por um análogo geométrico tão simples e bonito que a verdade de um teorema é quase vista de relance."[2]

4.1 Enigma 1: A Soma dos "n" Primeiros Números Naturais

O primeiro enigma que o professor Nelsen apresentou foi a soma dos n primeiros naturais, cujo objetivo é compreender a prova da seguinte afirmação:

$$1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n = \frac{n \times (n+1)}{2}. \ (n \in \mathbb{N}). \tag{4.3}$$

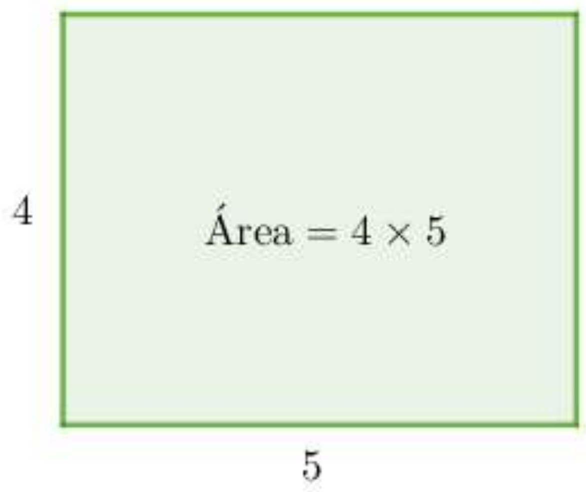
Como provaremos esta afirmação (equação 4.3) com uma imagem? Questiona, o professor. E imediatamente responde: observe que podemos reescrever (4.3) da seguinte forma:

$$2 \times (1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n) = n \times (n+1). \ (n \in \mathbb{N}). \tag{4.4}$$

Note que, o lado direito de (4.4) indica que temos o produto de dois números. Este produto entre dois números pode ser representado pela **área de um retângulo**. Por exemplo, se $n = 4$, o produto $n \times (n+1)$ será escrito como 4×5, ou seja, um retângulo de dimensões 4 e 5.

2 A dull proof can be supplemented by a geometric analogue so simple and beautiful that the truth of a theorem is almost seen at a glance.

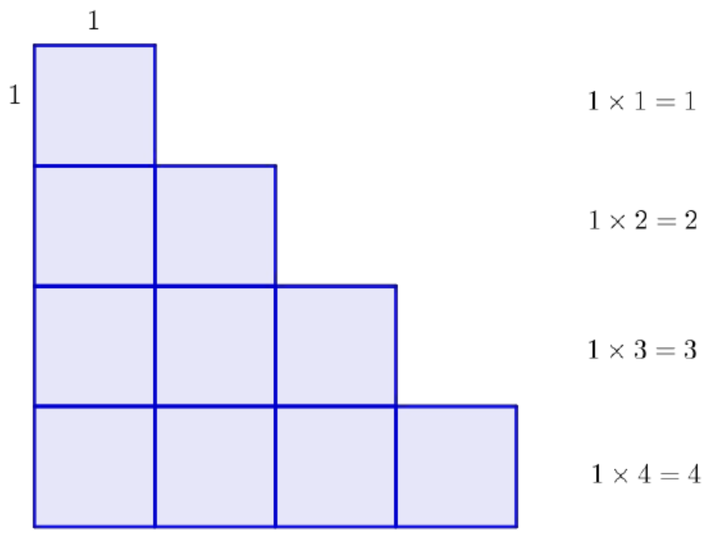
Figura 116 – Retângulo de dimensões 4 e 5.



Fonte – O autor (2019).

Já no lado esquerdo de (4.4) temos o dobro da soma de números naturais. Já que estamos representando o lado direito de (4.3) por uma área, vamos representar a soma que está no lado esquerdo como uma área. Se definirmos que o número é igual à área de um quadrado de lado unitários, podemos pensar o número 2 como $1 + 1$, ou seja, dois quadrados de lado unitário lado a lado. O número 3, de forma semelhante ao anterior será representado por três quadrados lado a lado e, finalmente, o número 4, será representado com quatro quadrados lado lado. Então, a soma destes quatro primeiros naturais pode ser representada pela figura 117:

Figura 117 – Representação de $1 + 2 + 3 + 4$.



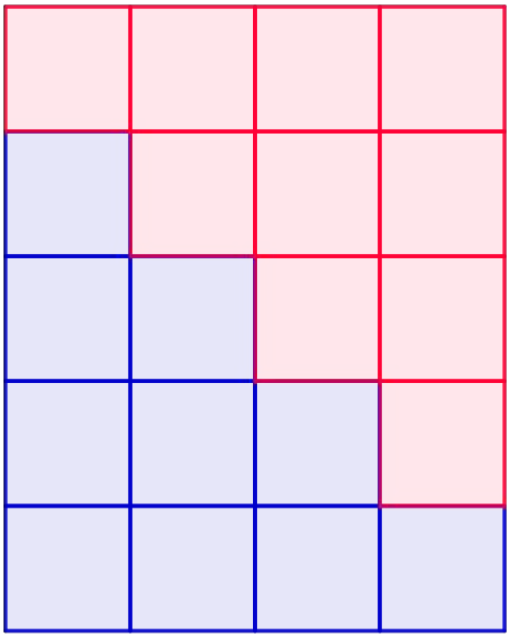
Fonte – O autor (2019).

Observe que, para $n = 4$, a afirmação (4.4) pode ser escrita do seguinte modo:

$$2(1 + 2 + 3 + 4) = 4(4 + 1).$$

Neste caso, para representarmos $2(1 + 2 + 3 + 4)$, duplicaremos a figura 117:

Figura 118 – Retângulo de dimensões 4 e 5.



Fonte – O autor (2019).

Obtivemos assim, um retângulo de mesma área do retângulo da figura 116.

Enquanto o professor Nelsen apresentava sua prova sem palavras da soma dos números naturais, lembrei do episódio em que Gauss calculou rapidamente a soma dos 100 primeiros naturais. De maneira geral, seja

$$S_n = 1 + 2 + 3 + 4 + ... + n$$

Somando a igualdade acima, membro a membro, com ela mesma, porém com as parcelas do segundo membro em ordem invertida, temos que

$$\begin{array}{ccccccccccccc} S_n & = & 1 & + & 2 & + & 3 & + & 4 & + & ... & + & n \\ S_n & = & n & + & (n-1) & + & (n-2) & + & (n-3) & + & ... & + & 1 \\ \hline 2.S_n & = & (n+1) & + & (n+1) & + & (n+1) & + & (n+1) & + & ... & + & (n+1) \end{array}$$

Segue que

$$2.S_n = n.(n+1) \;\Rightarrow\; S_n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Recordo também que o método da indução pode ser utilizado para atestar a veracidade de (4.3). Considere a sentença, para $n \in \mathbb{N}$:

$$P(n): \ 1+2+3+4+...+n = \frac{n(n+1)}{2} \tag{4.5}$$

Note que

$$P(1): \ 1 = \frac{1.(1+1)}{2}$$

é verdadeira. Agora, supondo que para algum $n \in \mathbb{N}$, tenhamos $P(n)$ verdadeira. Somando $(n+1)$ a ambos os membros de (4.5), temos que

$$\begin{aligned} 1+2+3+4+...+n+(n+1) &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\ &= \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2}, \end{aligned}$$

o que nos indica que $P(n+1)$ também é verdadeiro. Logo pelo Teorema da Indução, $P(n)$ é verdadeira para todo n natural (HEFEZ, 2009).

Paro por uns minutos e observo que tenho três formas diferentes de obter uma *prova* para a soma do n primeiros naturais, mas não tenho a plena certeza se a prova sem palavra apresentada pelo professor Nelsen é, de fato, uma prova (ou demonstração) matemática. Faço esse questionamento ao professor, que de imediato diz que realmente as provas sem palavras são objetos de questionamento se são ou não demonstrações. Ele cita Brown (2008 apud NELSEN, 2000, p. 10, tradução nossa), que diz:

> "Os matemáticos, como o resto de nós, nutrem idéias inteligentes; em particular, eles se deliciam com uma imagem engenhosa. Mas essa apreciação não subjuga um ceticismo predominante. Afinal, um diagrama é - na melhor das hipóteses - apenas um caso especial e, portanto, não é possível estabelecer um teorema geral. Ainda pior, pode ser francamente enganador. Embora não seja universal, a atitude predominante é que as imagens não são mais que dispositivos heurísticos; são psicologicamente sugestivos e pedagogicamente importantes - mas não provam nada."[3]

O professor Nelsen cita também Miller (2012, p. 22, tradução nossa), indicando que

[3] Mathematicians, like the rest of us, cherish clever ideas; in particular they delight in an ingenious picture. But this appreciation does not overwhelm a prevailing scepticism. After all, a diagram is – at best – just a special case and so can't establish a general theorem. Even worse, it can be downright misleading. Though not universal, the prevailing attitude is that pictures are really no more than heuristic devices; they are psychologically suggestive and pedagogically important – but they prove nothing.

> (...) a definição da prova varia dependendo de qual filosofia matemática que aderimos ou que livro-texto consultamos, torna-se então difícil determinar o que atende aos critérios e o que não é, ou mesmo quais critérios são.[4]

Miller (2012) busca nas escolas filosóficas do Platonismo e do Formalismo, algumas pistas para subsidiar seus argumentos sobre a definição de prova matemática. Para a primeira escola os objetos estão postos e nós o descobrimos e as verdades sobre esses objetos podem ser obtidas por qualquer meio conveniente. Já para a segunda escola, a verdade de um teorema ou afirmação matemática baseia-se no método axiomático.

Com os esclarecimentos do professor Nelsen, vejo que as provas sem palavras podem ser uma experiência importante de aprendizagem criativa, a despeito do debate entre as escolas filosóficas, pois despertam o olhar geométrico sobre afirmações expressas de forma algébrica.

Uma ideia que tive, ainda durante a conferência, foi fazer uma animação da prova sem palavra dada pelo professor Nelsen. Acesso o Geogebra no meu tablet e me divirto fazendo esta animação. O resultado pode ser acessado no link:

https://www.geogebra.org/m/aCFQekMQ

A conferência do professor Nelson estava ótima. Ele desafiou a plateia a fazer pelo menos um dos três enigmas que ele estava propondo: a soma dos quadrados dos primeiros naturais, o Teorema de Pitágoras e o Teorema de Viviani. Para isso, ele nos entregou um folheto com os três enigmas e disse que tínhamos liberdade para fazer nossas provas sem palavras.

[4] (...) the denifition of proof varies depending on which mathematical philosophy we adhere to or which textbook we consult, it then becomes difficult to determine what meets the criteria, and what does not, or even what those criteria are.

4.2 Enigma 2: A Soma dos Quadrados dos "n" Primeiros Números Naturais

Inicio escolhendo o enigma da soma dos quadrados dos n primeiros naturais:

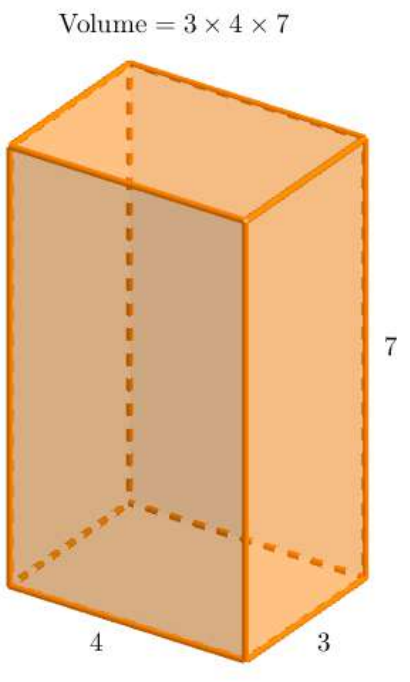
$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \quad (4.6)$$

A ideia é proceder de forma semelhante à soma dos primeiros n naturais. Inicio reescrevendo a afirmação 4.6 do seguinte modo:

$$6 \times (1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + ... + n^2) = n(n+1)(2n+1). \quad (4.7)$$

Observo que a experssão à equerda em 4.7 é o produto entre três números, que posso representar geometricamente como o volume de um paralelepípedo. Por exemplo, se $n = 3$ as dimensões do paralelepípedo serão 3, 4 e 7 (figura 119).

Figura 119 – Volume do Paralelepípedo.



Fonte – O autor (2019).

No lado esquerdo de 4.7, represento o 1^2 como o volume de cubo de aresta igual a 1.

$$1^2 = 1 \times 1 \times 1.$$

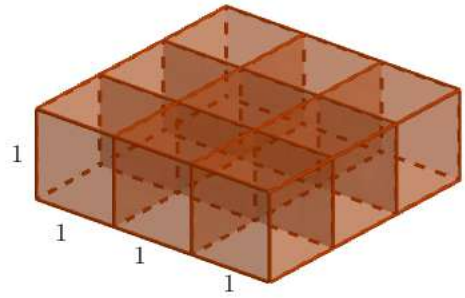
Já o 2^2, represento como o volume de um paralelepípedo de comprimento e largura igual a 2 e altura igual a 1:

$$2^2 = 2 \times 2 \times 1$$

Deste modo, o 3^2 será representado por paralelepípedo de dimensões 3, 3 e 1 (figura 120):

$$3^2 = 3 \times 3 \times 1$$

Figura 120 – Representação de 3^2.



Fonte – O autor (2019).

Note que, temos um prisma de base quadrada, cujas arestas da base seriam iguais a 3 e a altura do prisma igual a 1. Este prisma seria formado por nove cubos de aresta igual a 1 (1^2). Portanto, represento $1^2 + 2^2 + 3^2$ empilhando em camadas cada um dos primas:

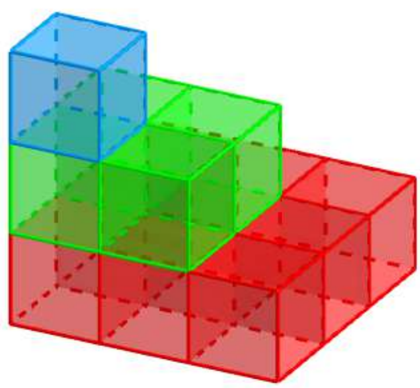


Figura 121 – Representação de $1^2 + 2^2 + 3^2$.

Agora, vamos juntos três "peças" de $1^2 + 2^2 + 3^2$, para formar a seguinte figura:

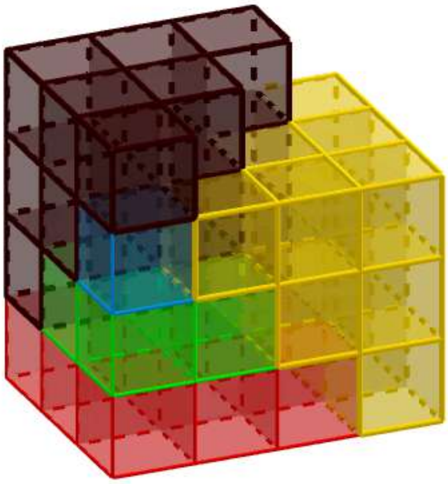


Figura 122 – Representação de $3 \cdot (1^2 + 2^2 + 3^2)$.

Para finalizar, empilho outra "peça", idêntica a anterior, para formar o seguinte prisma:

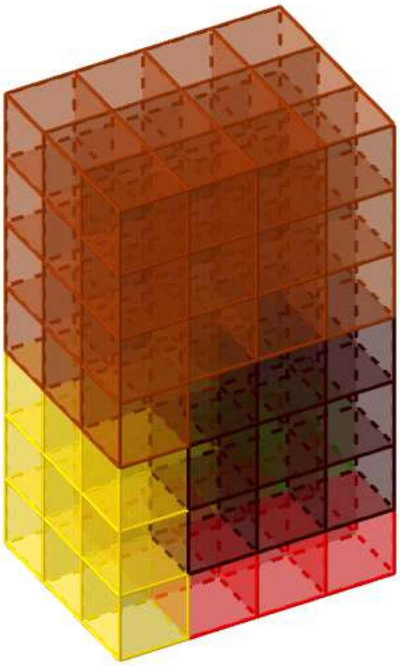


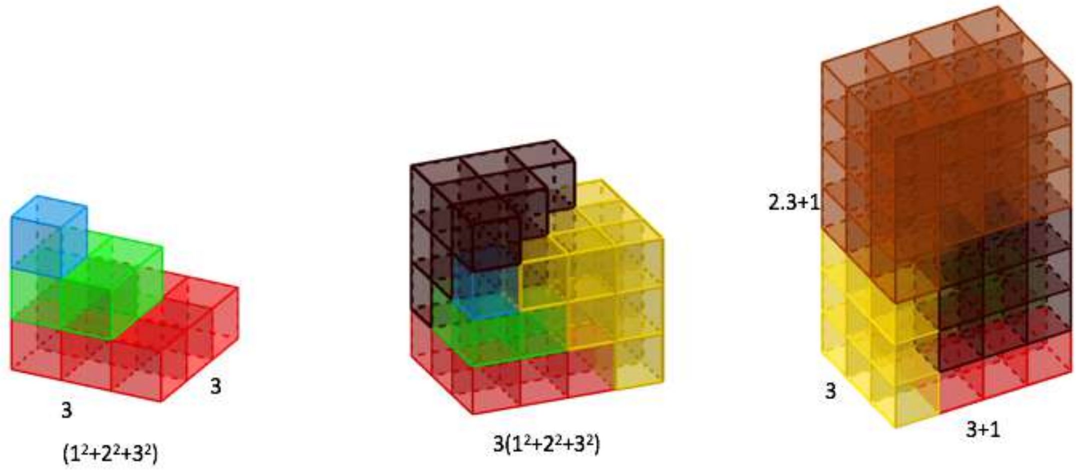
Figura 123 – Representação de $2 \cdot 3 \cdot (1^2 + 2^2 + 3^2)$.

Desta forma representei visualmente afirmação 4.6 para o caso $n = 3$, ou seja,

$$6 \cdot (1^2 + 2^2 + 3^2) = 3 \cdot 4 \cdot (2 \cdot 3 + 1).$$

Portanto, a representação visual da soma dos quadrados dos primeiros três naturais é:

Figura 124 – Representação de $6(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + ... + n^2) = n(n+1)(2n+1)$ com $n = 3$.



Fonte – O autor (2019).

Com este enigma, pude perceber que a representação geométrica nos ajuda a explicar o porquê uma afirmação é verdadeira, levando a informação que inicialmente é abstrata, para um nível concreto, tornado a informação ou o fato matemático mais claro.

Vou continuar resolvendo os enigmas do professor Nelsen. Farei a prova do Teorema de Pitágoras. Naturalmente, existe pelo menos uma centena de demonstrações do Teorema de Pitágoras e precisarei escolher uma delas para fazer minha prova sem palavras.

4.3 Enigma 3: O Teorema de Pitágoras por Leonardo Da Vinci

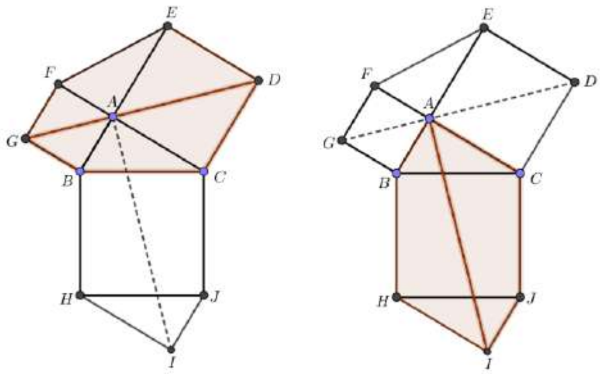
O terceiro enigma proposto pelo professor Nelsen, como disse anteriormente, é o Teorema de Pitágoras. Desta vez, vou utilizar a demonstração atribuída a Leonardo da Vinci, baseada em comparação de áreas (FERREIRA, 2013, p. 24).

Inicio desenhando um triângulo ABC retângulo em $\hat{A}$. Sobre o lado $\overline{BC}$, desenho o quadrado $BCJH$. Analogamente, sobre o lado $\overline{AB}$, desenho o quadrado $ABGF$ e sobre o lado $\overline{AC}$, desenho o quadrado $ACDE$. Sobre o lado $\overline{HJ}$, desenho o triângulo HIJ, congruente ao triângulo ABC. Finalmente, traço os segmentos $\overline{AI}$ e $\overline{DG}$.

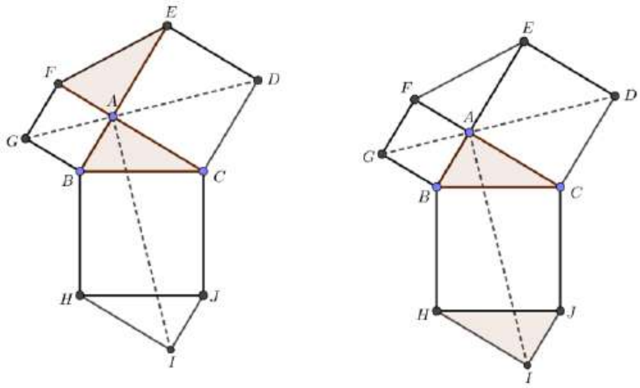
Nas figuras 125 e 126, apresento a sequência de comparações entre as áreas, destacando em cada figura os polígonos que possuem a mesma área.

Figura 125 – Prova Sem Palavras do Teorema de Pitágoras.

(a) $DEFG \equiv BCDG$ e $ABHI \equiv ACJI$



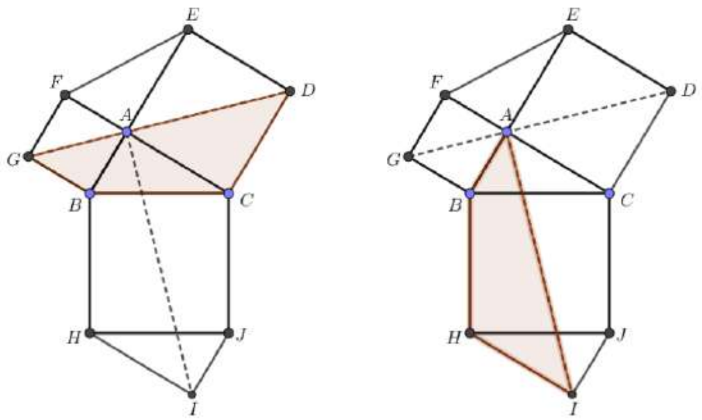
(b) $AEF \equiv ABC$ e $ABC \equiv HIJ$



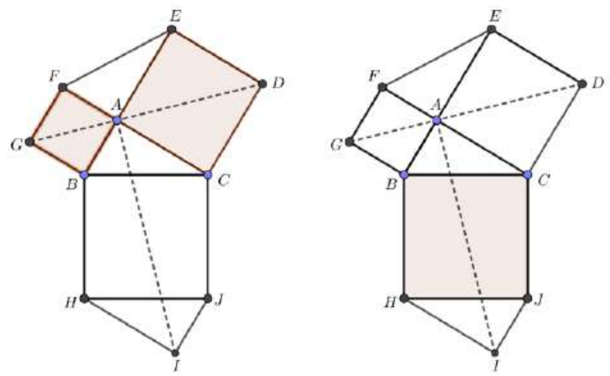
Fonte – O autor (2019).

Figura 126 – Prova Sem Palavras do Teorema de Pitágoras.

(a) $BCDG \equiv ABHI$



(b) $AFGB + ACDE = BCHJ$



Fonte – O autor (2019).

Observe que, como os quadriláteros BCDG, FGDE, ABHI e AIJC são congruentes, logo, os hexágonos BCDEFG e ABHIJC são congruentes. Assim, temos que as áreas:

$$BCDEFG = ABGF + ACDE + 2(ABC)$$
$$ABHIJC = BCHJ + 2(ABC)$$

Como estes hexágonos são congruentes, temos:

$$BCHJ + 2(ABC) = ABGF + ACDE + 2(ABC)$$
$$BCHJ = ABGF + ACDE.$$

Nessa prova sem palavras identifico a complexidade em produzi-la, pois há um exercício visual de comparação de áreas. Para compreendê-la, é necessário estar atento aos passos da construção inicial.

4.4 Enigma 4: O Teorema de Viviani

Resolverei este último enigma proposto pelo professor Nelsen, em forma de animação, utilizando o Geogebra. Essa prova sem palavras será sobre o Teorema de Viviani.

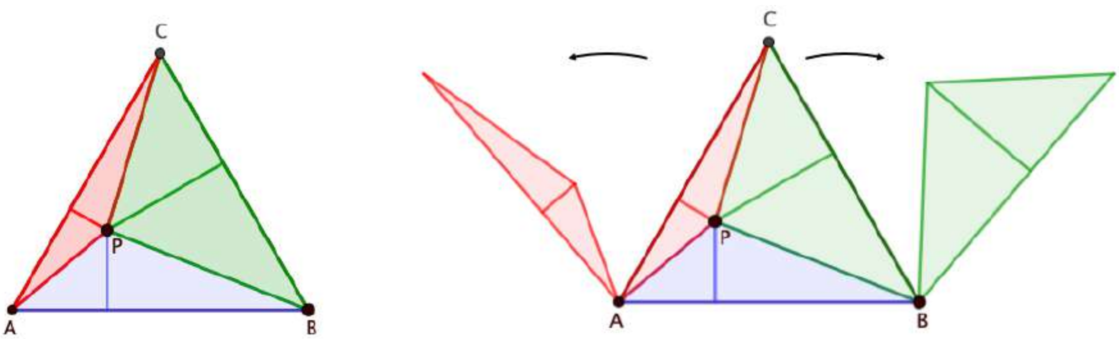
Teorema 2 (de Viviani)**.** *Se o triângulo ABC é equilátero e P é um ponto interior, então a soma das distâncias de P aos lados do triângulo é igual à altura do mesmo, ou seja,*

$$\overline{CD} = \overline{PE} + \overline{PF} + \overline{PG}.$$

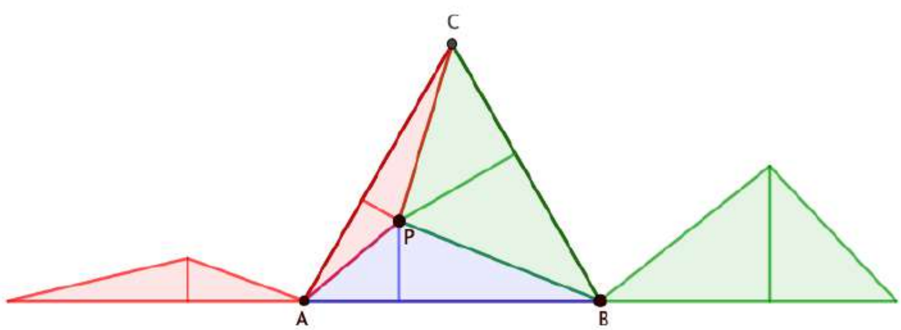
Inicialmente, marquei um ponto P interior ao triângulo ABC. Em seguida, construí os triângulos APC, ABP e PCB e tracei a distância de P a cada um dos lados de ABC (figura 127a). Rotacionei os triângulos APC e PCB (figura 127b), de modo a obter a figura 127c. Finalmente, transladei os triângulos APC e ABP, de modo que os segmentos que ligam P a cada um dos lados coincidam com os vértices dos triângulos (figuras 128a e 128b). A figura 128c mostra que a soma das distâncias de P aos lados do triângulo ABC é igual a sua altura.

Figura 127 – Prova Sem Palavras do Teorema de Viviani.

(a) (b)



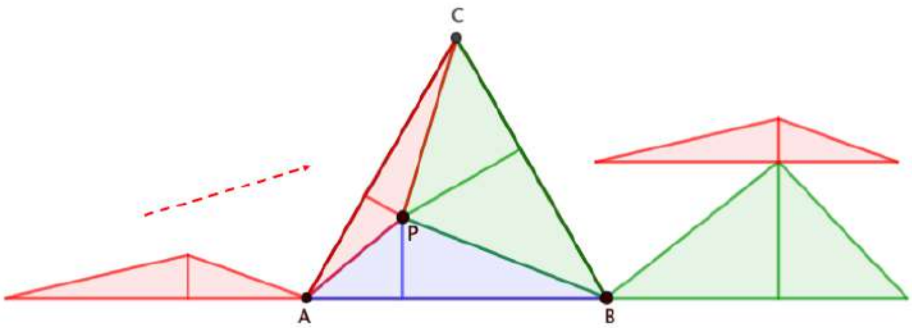
(c)



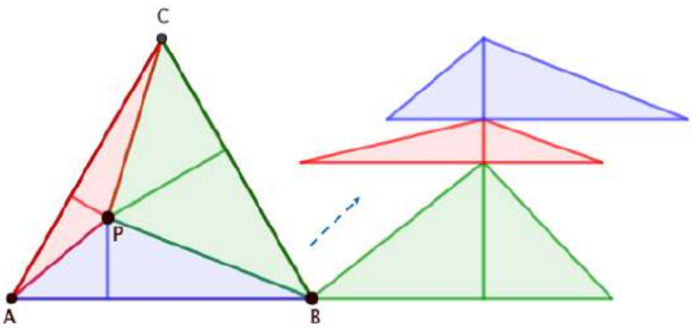
Fonte – O autor (2019).

Figura 128 – Prova Sem Palavras do Teorema de Viviani.

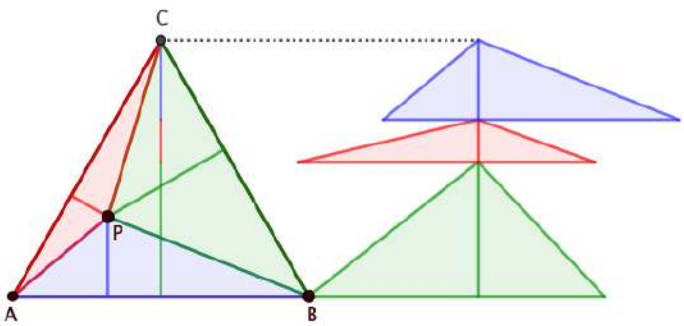
(a)



(b)



(c)



Fonte – O autor (2019).

A animação desta prova sem palavras está disponível no link:

https://www.geogebra.org/m/da7arf2j

Esta última prova sem palavras que produzi possui um diferencial. Como ela foi feita no Geogebra, um aplicativo de geometria dinâmica, ele permite que manipulemos a construção para verificar se o resultado obtido é válido, não somente para um caso específico, mas para os demais casos.

A conferência do professor Nelsen foi excelente. Resolver os enigmas que ele propôs me despertaram para a possibilidade de aprender de modo criativo e lúdico. A resolução de enigmas e desafios estimulam o raciocínio lógico e a criatividade. As provas sem palavras, embora não sejam consideradas como uma demonstração, no rigor do modelo axiomático, facilitam a compreensão e desenvolvem o pensamento geométrico.

Após a conferência do professor Nelsen, continuo na **Casa Gardner** para participar de outras programações e assistir os shows de matemágica. Um programação muito divertida e cheia de truques e brincadeiras que despertam nossa admiração e paixão pela matemática.

Estar na Casa Gardner foi sensacional, pois pude vivenciar novas experiências e compreender que a matemática recreativa também nos permite aprender criativamente, pois amplia nosso olhar sobre os desafios e problemas de matemáticos. Agora, preciso retornar para minha cidade. Volto satisfeito e disposto a compartilhar minhas experiências. É o que farei.


LUGAR DE CONFLUXO
189

5
Lugar de Confluxo

Este é o Lugar de confluxo, o lugar para onde convergiram alguns resultados da pesquisa. **Garagem**, **Atelier** e **Casa Gardner**, centros de significados construídos pela experiências, pelas ações interdisciplinares e pelos afetos. Adentrei nestes lugares com o objetivo de investigar como ações interdisciplinares podem promover uma aprendizagem criativa. Em cada um lugar destes lugares construí, de forma autônoma e interdisciplinar, conhecimento a partir de vivências concretas e ativas que envolveram imaginação, planejamento, colaboração, criação e o brincar.

Na **Garagem**, coloquei a "mão na massa" para aprender fazendo; no **Atelier**, exercitei a minha sensibilidade descobrindo conexões entre a matemática e a arte e, na **Casa Gardner**, construi provas sem palavras pelo simples prazer de resolver problemas geométricos. Todos estes ambientes são inspiradores e adequados para a realização de projetos criativos e inovadores.

Mas, será que a aprendizagem criativa acontece somente nestes lugares? Não tenho uma resposta exata para esta pergunta, mas tenho alguns indicativos! A aprendizagem criativa pode ocorrer nas *zonas mistas* (espaços de interseção) entre a Garagem e o Atelier, o Atelier e a Casa Gardner e, entre a Casa Gardner e a Garagem. Por exemplo, entre a Garagem e o Atelier, a aprendizagem criativa pode ocorrer quando associamos a impressora 3D à arte. Já entre a Garagem e a Casa Gardner, a aprendizagem cristiava pode ocorrer quando associamos a impressão 3D ao lúdico. Finalmente, entre o Atelier e a Casa Gardner, a aprendizagem criativa pode ocorrer ao associarmos o brincar dos matemáticos à literatura, tal como fez Malba Tahan em O Homem que Calculava ou Lewis Carroll, em Alice no País das Maravilhas. Todas essas possibilidades nos permitem ampliar nosso horizonte sobre a aprendizagem criativa em lugares como centro de siginificados.

Dessa forma, uma aprendizagem criativa tem início com uma mudança de atitude, uma atitude de abertura para o novo, para diferentes saberes, para a colaboração e para autonomia. Se desenvolve em ambientes inspiradores, colaborativos e democráticos. Acontece quando temos domínio suficiente dos conteúdos, métodos e técnicas envolvidos no processo.

Portanto, ações interdisciplinares promovem uma aprendizagem criativa porque possibilitam uma mudança de atitude, permitem conectar saberes e estimulam a criação de ambientes inspiradores e colaborativos.

Referências

ALENCAR, E. M. L. S. de. *Criatividade*. 2ª. ed. Brasília: Editora Universidade de Brasília, 1995.

ALMEIDA, R. M. de. Arte, supertição e "filosofia" no renascimento. *Rev. Filos.*, v. 27, n. 42, p. 895–916, Setembro/Dezembro 2015.

ALVES, M. L. *Muito Além do Olhar: Um Enlace da Matemática com Arte*. Dissertação (Mestrado) — Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Rio Grande do Sul, Julho 2007.

ALVES, M. L. da C.; CASTRO, P. F. de. Criatividade: Histórico, definições e avaliação. *Revista Educação*, v. 10, n. 2, p. 47–58, 2015.

ANDERSON, C. *Makers: A Nova Revolução Industrial*. [S.l.]: Elsevier, 2012.

ANIELLO, B. José de almada negreiros, do caos à estrela dançante. *Artis*, n. 6, p. 325–355, Dezembro 2007.

ARANDA, V. T. Bibliografía de martin gardner. *Autores Científico-Técnicos y Académicos*, n. 17, p. 17–24, Dezembro 2000.

ARISTÓTELES. *O homem de gênio e a melancolia: o problema XXX, 1.* Rio de Janeiro: Lacerda Editores, 1998.

BARBOSA, P. R. A. A melancolia, o anjo e os herdeiros de saturno. *Revista Confluências Culturais*, v. 1, n. 1, p. 09–19, Setembro 2012.

BARBOSA, R. M. *Descobrindo a Geometria Fractal - Para a Sala de Aula*. Belo Horizonte: Autêntica, 2002.

BONDÍA, J. L. Notas sobre a experiência e o saber de experiência. In: SME, L. (Ed.). *Revista Brasileira de Educação*. Campinas (SP), 2001.

BORGES, K. S.; MENEZES, C. S. de; FAGUNDES, L. da C. Projeto maker como forma de estimular o raciocínio formal através do pensamento computacional. *Anais do XXII Workshop de Informática na Escola*, p. 515–524, 2016.

BORGES, K. S. et al. Possibilidade e desafios de um espaço maker com objetivos educacionais. *Revista Tecnologia Educacional*, v. 31, p. 22–32, Julho/Setembro 2015.

BROWN, J. R. *Philosophy of mathematics: a contemporary introduction to the world of proofs and pictures*. 2ª. ed. Nova York: Routledge, 2008.

BYBEE, R. W. Advancing stem education: A 2020 vision. *Technology and Engineering Teacher*, v. 70, n. 1, p. 30–35, Setembro 2010.

CAIRUS, H. Da natureza do homem corpus hippocraticum. *História, Ciências, Saúde-Manguinhos*, v. 6, n. 2, Outubro 1999.

CALAZANS, J. C. A melancolia de albercht dürer (1471-1528). *Revista Lusófona de Ciência das Religiões*, n. 16/17, p. 135–152, 2012.

CARMO, M. P. do. *Geometría Diferencial de Curvas y Superficies*. Espanha: Alianza Universidad, 1995.

CICCONE, S. D. *Criatividade na obra de D. W. Winnicott*. Dissertação (Mestrado) — PUC-Campinas, São Paulo, 2013.

CLARA, C. J. da S. S. Melancolia: da antiguidade à modernidade. uma breve análise histórica. *Mental*, v. 7, n. 13, 2009.

COLLI, E. *Introdução à Teoria dos Nós*. São Paulo: [s.n.], 2004. Disponível em: <https://www.ime.usp.br/~colli/cursos/LabMat-2004/Nos.pdf>.

COSTA, L. A.; ANGELI, A. do Amparo Carotta de; FONSECA, T. M. G. Pesquisar na diferença: Um abecedário. In: ____. Porto Alegre: Sulina, 2012. cap. Cartografar, p. 43–46.

COSTA, L. B. da. Cartografia: uma outra forma de pesquisar. *Revista Digital do LAV*, v. 7, n. 2, p. 66–77, Maio/Agosto 2014.

CSIKSZENTMIHALYI, M. *Creatividad: el fluir y la psicología del descubrimiento y la invenci*. Barcelona: Paidós, 1998.

DALPIAZ, M. R. *Um Estudo sobre Fractais: Origem e Proposta Didática para Aplicação em Aula*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba, 2016.

DELEUZE, G.; GUATTARI, F. *Mil Platôs: Capitalismo e Esquizofrenia*. Rio de Janeiro: Editora 34, 1995. v. 1.

ENEGUZZI, T. M. *Os Perspectógrafos de Dürer na Educação Matemática: História, Geometria e Visualização*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2009.

EUCLIDES. *Os Elementos*. 1ª. ed. São Paulo: Editora Unesp, 2009.

FALCONER, K. *Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications*. 2ª. ed. England: Wiley, 2003.

FAZENDA, I. *Integração e interdisciplinaridade no ensino brasileiro: efetividade ou ideologia*. São Paulo: Loyola, 1979.

FAZENDA, I. *Interdisciplinaridade: um projeto em parceria*. São Paulo: Loyola, 1991. v. 13. (Coleção Educar, v. 13).

FERREIRA, L. de L. A. *O Teorema de Pitágoras e suas Demonstrações*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual de Maringá, Maringá, Março 2013.

FISCHBEIN, E. The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics*, v. 24, n. 2, p. 139–162, 1993.

FLORES, C. Teoria e representação geométrica na obra de albrecht dürer: um ensino de matemática para pintores e artesãos. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, n. 11, p. 179–188, Setembro 2007.

FLORES, C. *Constructionism, a Learning Theory and a Model for Maker Education*. 2016. Disponível em: <http://fablearn.stanford.edu/fellows/blog/constructionism-learning-theory-and-model-maker-education>.

FOUNDATION, F. *What Is A Fab Lab?* 2018. Disponível em: <http://www.fabfoundation.org/index.php/what-is-a-fab-lab/index.html>.

FREIRE, P. *Educação e Atualidade Brasileira*. Tese (Tese de Concurso para a cadeira de História e Filosofia da Educação) — Escola de Belas Artes de Pernambuco, Recife, 1959.

FREIRE, P. *Pedagogia da Autonomia: Saberes Necessários à Prática Educativa*. São Paulo: Paz e Terra, 2011.

FREIRE, P. *Educação e Mudança*. 1ª. ed. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 2013.

FREITAS, P. J. . Geometria, entre suporte e tema da obra de arte, em almada negreiros. *Revista Convocarte*, n. 3, p. 136–145, 2016.

FREITAS, P. J.; COSTA, S. P. Os problemas de matemática de almada negreiros. In: *Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática*. Lisboa: Sociedade Portuguesa de Matemática, 2014. p. 1–4.

FREITAS, P. J.; COSTA, S. P. *Livro de Problemas de Almada Negreiros*. 1ª. ed. Lisboa: Sociedade Portuguesa de Matemática, 2015.

GARDNER, M. *Mathematical Carnival*. Washington: The Mathematical Association of America, 1989.

GRUNDHAUSER, E. *The Artful Precision of the Creator of 'Harold and the Purple Crayon'*. 2017. Disponível em: <https://www.atlasobscura.com/articles/crockett-johnson-math-art-paintings-harold-purple-crayon>.

HAAS, C. M. A interdisciplinaridade em ivani fazenda: construção de uma atitude pedagógica. *International Studies on Law and Education*, p. 54–64, Maio 2011.

HALVERSON, E. R.; SHERIDAN, K. The maker movement in education. *Harvard educational review*, v. 84, n. 4, p. 495–504, 2014.

HEFEZ, A. *Indução Matemática*. Rio de Janeiro: SBM, 2009.

HIDEKO, I. Another solution to the polyhedron in dürer's melencolia: A visual demonstration of the delian problem. *The Japanese Society for Aesthetics*, n. 13, p. 179–194, 2009.

KNILL, O.; SLAVKOVSKY, E. Illustrating mathematics using 3d printers. *ArXiv.org*, p. 1–22, Junho 2013.

KOYRÉ, A. *Études d'histoire de la pensée scientifique*. Paris: Gallimard, 1973.

LAMBOTTE, M.-C. *Estética da Melancolia*. Rio de Janeiro: Companhia Freud, 200.

LEITE, A. F. O lugar: Duas acepções geográficas. *Anuário do Instituto de Geociências*, v. 21, p. 9–20, 1998.

LEMKE, R.; SIPLE, I. Z.; FIGUEIREDO, E. B. de. Oas para o ensino de cálculo: Potencialidades de tecnologias 3d. *Cinted-UFRGS*, v. 14, n. 1, p. 1–10, Junho 2016.

MENTA, E. et al. *Impressão 3D: imaginar, planejar e materializar*. Paraná: Secretaria de Estado de Educação do Paraná, 2018.

MILLER, R. L. On proofs without words. *Mathematical Association of American*, Maio 2012.

NELSEN, R. B. *Proofs Without Words: Exercises in Visual Thinking*. Estados Unidos: Mathematical Association of America, 1993.

NELSEN, R. B. *Proofs without words II: more exercises in visual thinking*. Estados Unidos: Mathematical Association of America, 2000.

NELSEN, R. B. *Proofs without Words III: Further Exercises in Visual Thinking*. Estados Unidos: Mathematical Association of America, 2015.

PAPERT, S. *Mindstorm: children, computer and powerful ideas*. New York: Basic Books, 1980.

PASSOS, E.; BARROS, R. B. de. Pistas do método da cartografia: Pesquisa-intervenção e produção de subjetividade. In: ____. 1ª. ed. [S.l.]: Sulina, 2015. v. 1, cap. A cartografia como método de pesquisa-intervenção, p. 17–31.

PASSOS, E.; BARROS, R. B. de. Pistas do método da cartografia: Pesquisa-intervenção e produção de subjetividade. In: ____. 1ª. ed. Porto Alegre: Sulina, 2015. cap. Por uma política da narratividade, p. 150–172.

PASSOS, E.; KASTRUP, V.; ESCÓSSIA, L. da. *Pistas do método da cartografia: Pesquisa-intervenção e produção de subjetividade*. 1ª. ed. Porto Alegre: Sulina, 2015.

PETICOV, A. Localizador universal: projeto para a ufpa. São Paulo. 2018.

PILLAR, A. D. *A educação do olhar no ensino das artes*. [S.l.]: Editora Meditação, 2014.

PINTO, S. L. U. et al. O movimento maker: Enfoque nos fablabs brasileiros. *Anais da 26ª Conferência ANPROTEC*, Fortaleza, p. 1–16, Outubro 2018.

PIRES, F. A. R. *Criatividade no Processo de Amadurecimento em Winnicott*. Dissertação (Mestrado) — Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2010.

PLATÃO. *Platão Diálogos - Teeto Crátilo*. 3ª. ed. Belém: Editora Universitária UFPA, 2001. v. 9.

REIS, E. L. dos. *O Processo de Construção de Objetos de Aprendizagem em Cálculo Diferencial e Integral durante uma Atividade de Design*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2010.

RELPH, E. C. *Place and Placelessness*. London: Pion, 1976.

RODRIGUES, A. de F. *De Marsilio Ficino a Albrecht Dürer considerações sobre a inspiração filosófica de "Melencolia I"*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, Outubro 2009.

ROHDEN, H. *O Pensamento Filosófico na Antiguidade*. São Paulo: Martin Claret, 2008.

ROSAS, A. da S. Paulo freire na trilha da criatividade libertadora. *Revista Interritórios*, v. 2, n. 2, p. 18–31, 2016.

SAKAMOTO, C. K. Criatividade e a construção da realidade contemporânea. *Trama Interdisciplinar*, v. 3, n. 1, p. 86–96, 2012.

SANTOS, C. P. dos. Cinco tributos a martin gardner. In: ____. Portugal: SPM, 2014. cap. Martin Gardner: O homem que trouxe mais matemática a mais milhões, p. 97–11.

SEGERMAN, H. 3d printing for mathematical visualisation. *The Mathematical Intelligencer*, p. 56–62, 2012.

SILVA, I. O. et al. Educação científica empregando o método steam e um makerspace a partir de uma aula-passeio. *Latin American Journal of Science Education*, v. 4, n. 2, p. 1–9, Outubro 2017.

SOSTER, T. S. *Revelando as Essências da Educação Maker: Percepções das Teorias e das Práticas*. Tese (Doutorado) — Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2018.

SOUZA, S. R. L. de; FRANCISCO, A. L. O método da cartografia em pesquisa qualitativa: Estabelecendo princípios... desenhando caminhos... *Atas CIAIQ*, v. 2, p. 811–820, 2016.

STEWART, J. *Cálculo*. 7ª. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2013. v. 2.

THIESEN, J. da S. A interdisciplinaridade como um movimento de articulação no processo ensino-aprendizagem. *PerCursos*, v. 8, n. 1, p. 87–102, Junho 2007.

TUAN, Y.-F. Lugar: Uma perspectiva experencial. *Geograficidade*, v. 8, n. 1, p. 4–15, Janeiro 2018.

VALENS, E. G. *The Number of Things: Pythagoras, Geometry and Humming Strings*. 1ª. ed. London: E P Dutton, 1965.

VAZ, C.; ROCHA, H.; NERI, E. Cartas de marear: percursos para uma aprendizagem criativa em matemática e arte. UFPA. 2019.

VAZ, C. L. D. Noções elementares sobre dimensão. UFPA. 2019.

VAZ, C. L. D.; ROCHA, H. do Socorro Campos da. *Matemática e Arte em trilhas, olhares e diálogos*. Belém: Editaedi, 2018.

VAZ, R. M. das N. V. *COMEÇAR de Almada Negreiros Arte e o Poder Formatador da Matemática*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Nova de Lisboa, Lisboa, 2013.

WINNICOTT, D. W. O brincar e a realidade. In: ____. Rio de Janeiro: Imago, 1975. cap. O Brincar: a atividade criativa e a busca do eu (self), p. 79–93.

WINNICOTT, D. W. Tudo começa em casa. In: ____. 5ª. ed. [S.l.]: WMF Martins Fontes, 2011. cap. Vivendo de modo criativo, p. 23–39.

Índice