



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ  
NÚCLEO DE DESENVOLVIMENTO AMAZÔNICO EM ENGENHARIA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM INFRAESTRUTURA E  
DESENVOLVIMENTO ENERGÉTICO**

**OSVALDO SOUSA BORGES NETO**

**ANÁLISE DE DANO EM BARRAGENS DE CONCRETO ATRAVÉS DO  
MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS**

Tucuruí – PA

2019

OSVALDO SOUSA BORGES NETO

**ANÁLISE DE DANO EM BARRAGENS DE CONCRETO ATRAVÉS DO MÉTODO  
DOS ELEMENTOS FINITOS**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Infraestrutura e Desenvolvimento Energético do Núcleo de Desenvolvimento Amazônico em Engenharia, da Universidade Federal do Pará, como requisito para a obtenção do título de Mestre em Infraestrutura e Desenvolvimento Energético. Área de concentração: Estruturas.

Orientador: Plínio Glauber Carvalho dos Prazeres.

Tucuruí – PA

2019

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD  
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará  
Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a)  
autor(a)**

---

B732a    Borges Neto, Osvaldo Sousa  
          Análise de dano em barragens de concreto através do  
          método dos elementos finitos / Osvaldo Sousa Borges Neto.  
          — 2019.  
          84 f. : il. color.

          Orientador(a): Prof. Dr. Plínio Glauber Carvalho dos  
          Prazeres

          Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação em  
          Engenharia de Infraestrutura e Desenvolvimento Energético,  
          Núcleo de Desenvolvimento Amazônico em Engenharia,  
          Universidade Federal do Pará, Tucuruí, 2019.

          1. Barragens de concreto. 2. Modelo de dano. 3.  
          Análise não linear. 4. Elementos finitos. I. Título.

CDD 624.171

---

OSVALDO SOUSA BORGES NETO

**ANÁLISE DE DANO EM BARRAGENS DE CONCRETO ATRAVÉS DO MÉTODO  
DOS ELEMENTOS FINITOS**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Infraestrutura e Desenvolvimento Energético do Núcleo de Desenvolvimento Amazônico em Engenharia, da Universidade Federal do Pará, como requisito para a obtenção do título de Mestre em Infraestrutura e Desenvolvimento Energético. Área de concentração: Estruturas.

Orientador: Plínio Glauber Carvalho dos Prazeres.

Aprovada em \_\_\_\_ de \_\_\_\_\_ de \_\_\_\_\_.

BANCA EXAMINADORA:

---

Prof. Dr. Plínio Glauber Carvalho dos Prazeres / UFPA - Orientador

---

Prof. Dr. / Marcelo Rassy Teixeira / UFPA

---

Prof. Dr. / Luís Antônio Guimarães Bitencourt Jr. / USP

Ao meu Deus criador do céu e da  
terra em quem confio.

## **AGRADECIMENTOS**

Ao professor Plínio pela paciência, confiança e conhecimentos compartilhados. Aos servidores do Campus Universitário de Tucuruí que sempre me deram o apoio para a realização deste trabalho. A minha esposa Bruna pelo companheirismo, incentivo e força que me fizeram chegar aqui. E aos meus familiares e amigos pelo carinho.

## RESUMO

A mecânica do dano em meios contínuos estuda os efeitos da degradação, em modo difuso e progressivo, sofrida por corpos sólidos sob solicitações de natureza mecânica ou não mecânica. Nela, tais efeitos são levados em consideração através da redução das propriedades de resistência e rigidez do material. Materiais como o concreto e as rochas têm como razão básica de seu comportamento não linear, microdefeitos em sua microestrutura que favorecem a concentração de microtensões. Esses microdefeitos constituem o que se entende por dano inicial do material. O intuito deste trabalho é o estudo de modelos constitutivos baseados na mecânica do dano apropriados para a análise dos mecanismos de dano em barragens de concreto. Para tal, utilizou-se um modelo de dano isotrópico com amolecimento linear e o modelo de dano de Cervera *et al.* (1996) na análise de duas seções de barragens de concreto. O modelo de Cervera *et al.* (1996) destacou-se por apresentar bons resultados na identificação do dano além de melhor descrever o aspecto real da curva tensão versus deformação do concreto. Para validação dos resultados repetiu-se o exemplo de uma viga-parede realizado por Proença *et al.* (2002) no qual os resultados da danificação foram compatíveis com o do programa elaborado em linguagem Matlab.

Palavras-chave: Barragens de concreto. Modelo de dano. Análise não linear. Elementos finitos.

## ABSTRACT

The mechanics of damage in continuous mediums studies the effects of degradation, in diffuse and progressive way, suffered by solid bodies under requests of mechanical or non-mechanical nature. Therein such effects are taken into account by reducing the strength and stiffness properties of the damaging material. Materials such as concrete and rocks have as their basic reason for their nonlinear behavior, micro defects in their microstructure that favor the concentration of micro tensions. These micro defects constitute what is understood as the initial damage of the material. The purpose of this work is the study of appropriate damage models for the analysis of damage mechanisms in concrete dams. For this, a linear softening isotropic damage model was used and the damage model of Cervera *et al.* (1996) in the analysis of two sections of concrete dams. The model of Cervera *et al.* (1996) stood out for presenting good results in the identification of damage as well as better describing the real aspect of the stress versus strain curve of the concrete. To validate the results, the example of a wall beam by Proença *et al.* (2002) in which the damage results were compatible with that of the Matlab language program.

Keywords: Concrete dams. Damage model. Non-linear analysis. Finite elements.

## LISTA DE FIGURAS

|  |    |
|--|----|
| Figura 2.1 – RVE de um sólido com dano. Fonte: Proença, 2000.....  | 22 |
| Figura 3.1 – Fluxograma geral. Fonte: Autor, 2019.....   | 31 |
| Figura 3.2 – Pré e pós-processador <i>GiD</i> . Fonte: Manual do <i>GiD 14</i> , 2018.....   | 32 |
| Figura 3.3 – Exemplo de uma malha de elementos finitos, com restrições de apoio gerada na interface do pré-processador do <i>GiD 14</i> (1 – “restringido” e 0 – “livre”) .<br>Fonte: Autor, 2019..... | 33 |
| Figura 3.4 – Carga linearmente variável em uma aresta linear, e cargas nodais equivalentes. Fonte: Adaptado de Cook <i>et al.</i> , 2002.....  | 35 |
| Figura 3.5 – Fluxograma do passo de carga. Fonte: Autor, 2019. ....  | 36 |
| Figura 3.6 – Gráfico do método Newton-Raphson com a matriz de rigidez constante. Fonte: Adaptado de Cook <i>et al.</i> , 2002.....   | 37 |
| Figura 3.7 – Fluxograma do Método Newton-Raphson. Fonte: Autor, 2019. ....   | 40 |
| Figura 3.8 – Fluxograma do cálculo da matriz de rigidez da estrutura. Fonte: Autor, 2019. ....   | 44 |
| Figura 3.9 – Fluxograma do cálculo dos deslocamentos nodais. Fonte: Autor, 2019.<br>.....  | 46 |
| Figura 3.10 – Fluxograma do modelo de dano isotrópico (amolecimento linear).<br>Fonte: Autor, 2019.....  | 50 |
| Figura 3.11 – Fluxograma do modelo de dano de Cervera <i>et al.</i> (1996). Fonte: Autor, 2019. ....   | 54 |
| Figura 3.12 - Parte de um arquivo de saída escrito no padrão do <i>GiD</i> . Fonte: Autor, 2019. ....  | 57 |
| Figura 4.1 – Geometria da viga-parede. Fonte: Proença <i>et al.</i> , 2002.....  | 58 |
| Figura 4.2 – Malha de elementos finitos e condições de contorno da viga-parede.<br>Fonte: Autor, 2019.....   | 58 |
| Figura 4.3 – Distribuição do dano utilizando o modelo de Cervera <i>et al.</i> (1996) de<br>uma viga-parede. Fonte: Autor, 2019.....   | 59 |
| Figura 4.4 – Distribuição do dano utilizando o modelo de Mazars de uma viga-<br>parede. Fonte: Proença <i>et al.</i> , 2002. ....  | 59 |
| Figura 4.5 – Seção de uma barragem com dimensões em metros. Fonte: Pinto,<br>2012. ....  | 60 |

|  |    |
|--|----|
| Figura 4.6 – Diagrama da pressão hidrostática e da subpressão sem sistema de drenagem. Fonte: Pinto, 2012. ....  | 61 |
| Figura 4.7 – Deformada com contorno dos deslocamentos utilizando o programa SAP 2000. Fonte: Pinto, 2012. ....   | 61 |
| Figura 4.8 – Malha e restrições de uma seção de barragem. Fonte: Autor, 2019. ....   | 62 |
| Figura 4.9 – Elementos com carga devido ao empuxo hidrostático e carga devido à subpressão. Fonte: Autor, 2019. ....   | 62 |
| Figura 4.10 – Elementos com as respectivas cargas de corpo. Fonte: Autor, 2019. ....   | 63 |
| Figura 4.11 – Deformada com contorno dos deslocamentos utilizando o programa implementado em <i>Matlab</i> . Fonte: Autor, 2019. ....                                  | 64 |
| Figura 4.12 – Avanço da zona de danificação em compressão considerando o modelo de dano isotrópico (linear). Fonte: Autor, 2019. ....                                  | 65 |
| Figura 4.13 – Avanço da zona de danificação em compressão considerando o modelo de dano de Cervera <i>et al.</i> (1996). Fonte: Autor, 2019. ....                      | 66 |
| Figura 4.14 – Comparação da evolução do dano à compressão máximo numa seção de barragem. Fonte: Autor, 2019. ....  | 67 |
| Figura 4.15 – Comparação das curvas de tensão-deformação normalizadas no ponto de dano máximo de uma seção de barragem. Fonte: Autor, 2019. ....                       | 68 |
| Figura 4.16 – Norma dos deslocamentos para cada iteração dos 3 últimos passos de carga. Fonte: Autor, 2019. ....   | 69 |
| Figura 4.17 – Geometria da seção da barragem de Bariri. Fonte: Autor, 2019. ....   | 70 |
| Figura 4.18 – Malha e restrições da seção da barragem de Bariri. Fonte: Autor, 2019. ....  | 71 |
| Figura 4.19 – Elementos com carga devido ao empuxo hidrostático e carga devido à subpressão da seção da barragem de Bariri. Fonte: Autor, 2019. ....                   | 71 |
| Figura 4.20 – Elementos com as respectivas cargas de corpo da seção da barragem de Bariri. Fonte: Autor, 2019. ....  | 72 |
| Figura 4.21 – Deformada com contorno dos deslocamentos utilizando o programa implementado em <i>Matlab</i> da seção da barragem de Bariri. Fonte: Autor, 2019. ....    | 73 |
| Figura 4.22 – Dano à tração e dano à compressão considerando o modelo de dano isotrópico (linear) da seção da barragem de Bariri. Fonte: Autor, 2019. ....             | 74 |
| Figura 4.23 – Dano à tração e dano à compressão considerando o modelo de dano de Cervera <i>et al.</i> (1996) da seção da barragem de Bariri. Fonte: Autor, 2019. .... | 75 |

|   |    |
|---|----|
| Figura 4.24 – Comparação da evolução do dano máximo à tração da seção da barragem de Bariri. Fonte: Autor, 2019. ....   | 76 |
| Figura 4.25 – Comparação da evolução do dano máximo à compressão da seção da barragem de Bariri. Fonte: Autor, 2019. ....   | 76 |
| Figura 4.26 – Comparação das curvas de tensão-deformação normalizadas no ponto de dano à tração máximo da seção da barragem de Bariri. Fonte: Autor, 2019. ....     | 77 |
| Figura 4.27 – Comparação das curvas de tensão-deformação normalizadas no ponto de dano à compressão máximo da seção da barragem de Bariri. Fonte: Autor, 2019. .... | 78 |
| Figura 4.28 – Norma dos deslocamentos para cada iteração de 4 passos de carga. Fonte: Autor, 2019.....  | 79 |

## LISTA DE FOTOGRAFIAS

|  |    |
|--|----|
| Fotografia 2.1 – Barragem de Três Gargantas, China. Fonte: Wines, 2011. .... | 26 |
| Fotografia 2.2 – Exemplo de barragem de em arco. Fonte: USSD, 2019. ....     | 26 |
| Fotografia 2.3 – Exemplo de Barragem de Contraforte. Fonte: USSD, 2019. .... | 27 |

## LISTA DE QUADROS

|  |    |
|--|----|
| Quadro 3.1 – Parâmetros para alternar a escolha dos modelos de dano. ....              | 47 |
| Quadro 4.1 – Parâmetros da análise para o exemplo de uma viga parede. ....             | 58 |
| Quadro 4.2 – Parâmetros da análise para o exemplo de uma seção de barragem. .          | 63 |
| Quadro 4.3 – Parâmetros da análise para o exemplo da seção da barragem de Bariri. .... | 70 |

## LISTA DE TABELAS

|  |    |
|--|----|
| Tabela 5.1 – Fatores de multiplicação do peso próprio..... | 80 |
|--|----|

## **LISTA DE SIGLAS E ABREVIATURAS**

ICOLD – International Commission on Large Dams

MEF – Método dos Elementos Finitos

RVE – Elemento de Volume Representativo

UHE – Usina Hidrelétrica

USSD – United States Society on Dams

## LISTA DE SÍMBOLOS

- $\Delta D$  – Vetor de incremento de deslocamentos
- $\varepsilon$  – Deformação
- $\nu$  – Coeficiente de Poisson
- $\sigma$  – Tensão nominal
- $\bar{\sigma}$  – Tensão efetiva
- $\bar{\tau}$  – Norma de tensão efetiva
- $\phi$  – Limite elástico
- $A^-$  – Parâmetro de compressão
- $B$  – Matriz de compatibilidade de deformação-deslocamento
- $B^-$  – Parâmetro de compressão
- $C$  – Matriz constitutiva
- $D$  – Vetor de deslocamentos da estrutura
- $d^+$  – Dano à tração
- $d^-$  – Dano à compressão
- $E$  – Módulo de elasticidade
- $f_t$  – Tensão limite de tração
- $f_{c0}$  – Tensão limite de compressão
- $G_f$  – Energia de fratura
- $H$  – Endurecimento
- $J$  – Matriz Jacobiana
- $k$  – Matriz de rigidez do elemento
- $K$  – Matriz de rigidez da estrutura
- $k_0$  – Matriz de rigidez elástica da estrutura
- $np$  – número de pontos de Gauss
- $P_{\text{desq}}$  – Vetor de forças desequilibradas da estrutura
- $P_{\text{int}}$  – Vetor de forças internas da estrutura
- $p_{\text{int}}$  – Vetor de forças internas do elemento
- $P_{\text{step}}$  – Vetor de passo de carga da estrutura
- $t$  – Espessura
- $w$  – peso do ponto de Gauss

## SUMÁRIO

|   |           |
|---|-----------|
| <b>1. INTRODUÇÃO .....</b>  | <b>18</b> |
| <b>1.1 Justificativa.....</b>   | <b>19</b> |
| <b>1.2. Objetivos .....</b>   | <b>20</b> |
| 1.2.1. Objetivo Geral.....  | 20        |
| 1.2.2. Objetivos Específicos .....  | 20        |
| <b>2. ESTADO DA ARTE.....</b>   | <b>20</b> |
| <b>2.1. Mecânica do dano em meios contínuos .....</b>                                     | <b>20</b> |
| <b>2.2. Método dos Elementos Finitos (MEF) .....</b>                                      | <b>24</b> |
| <b>2.3. Barragens de concreto.....</b>  | <b>25</b> |
| <b>2.4. Modelagem numérica de barragens de concreto.....</b>                              | <b>27</b> |
| <b>3. DESCRIÇÃO DO PROGRAMA.....</b>  | <b>29</b> |
| <b>3.1. Arquivo de entrada .....</b>  | <b>32</b> |
| <b>3.2. Cálculo das cargas nodais equivalentes da estrutura.....</b>                      | <b>33</b> |
| 3.2.1. Cálculo das cargas nodais equivalentes do elemento devido às forças de corpo ..... | 34        |
| 3.2.2. Cálculo das cargas nodais equivalentes do elemento devido ao empuxo lateral.....   | 34        |
| 3.2.3. Cálculo das cargas nodais equivalentes do elemento devido à subpressão .....       | 35        |
| <b>3.3. Laço pelo passo de carga .....</b>  | <b>35</b> |
| <b>3.4. Método de Newton-Raphson .....</b>  | <b>36</b> |
| <b>3.5. Cálculo da matriz de rigidez da estrutura .....</b>                               | <b>40</b> |
| <b>3.6. Cálculo dos deslocamentos nodais .....</b>  | <b>45</b> |
| <b>3.7. Cálculo das tensões efetivas.....</b>   | <b>47</b> |
| <b>3.8. Cálculo do dano e das tensões nominais.....</b>                                   | <b>47</b> |
| 3.8.1. Modelo constitutivo de dano isotrópico (amolecimento linear).....                  | 47        |
| 3.8.2. Modelo constitutivo de dano de Cervera .....                                       | 50        |

|   |           |
|---|-----------|
| <b>3.9. Cálculo do vetor de forças desequilibradas da estrutura .....</b>   | <b>55</b> |
| <b>3.10. Atualização dos parâmetros de controle do Newton-Raphson..</b>     |           |
| <b>.....</b>  | <b>55</b> |
| <b>3.11. Arquivo de saída.....</b>  | <b>56</b> |
| <br>  |           |
| <b>4. EXEMPLOS DE VERIFICAÇÃO .....</b>                                     | <b>57</b> |
| <b>4.1. Viga-parede.....</b>  | <b>57</b> |
| <b>4.2. Seção de uma barragem de concreto .....</b>                         | <b>60</b> |
| <b>4.2.1. Simulação da danificação de uma seção de barragem.....</b>        | <b>64</b> |
| <b>4.3. Seção da barragem de Bariri .....</b>                               | <b>69</b> |
| <b>4.3.1. Simulação da danificação da seção da barragem de Bariri .....</b> | <b>73</b> |
| <br>  |           |
| <b>5. CONSIDERAÇÕES FINAIS .....</b>  | <b>79</b> |
| <b>5.1. Conclusão .....</b>   | <b>79</b> |
| <b>5.2. Sugestões para trabalhos futuros.....</b>                           | <b>80</b> |

## 1. INTRODUÇÃO

O concreto é um material amplamente utilizado em todo mundo, tanto em estruturas civis, quanto em grandes obras de infraestrutura. Segundo Mehta e Monteiro (2008), três grandes aspectos levaram o concreto ao posto de material mais usado pelos engenheiros na construção civil: excelente resistência à água; capacidade de moldar em qualquer forma proposta por quem idealiza a estrutura; e valor relativamente barato das matérias-primas que o compõe, bem como sua vasta disponibilidade.

Apesar de, macroscopicamente, aparentar ser um material homogêneo, o concreto é formado pela mistura da pasta de cimento e os agregados. Logo, sua estrutura interna é bastante heterogênea. De acordo com Mehta e Monteiro (2008):

“Cada uma das fases do concreto é de natureza multifásica. Toda partícula de agregado pode conter vários minerais, além de microfissuras e vazios. Analogamente, tanto a matriz da pasta como a zona de transição contém geralmente uma distribuição heterogênea, de diferentes tipos e quantidades de fases sólidas, poros e **microfissuras**, acrescentando-se ainda o fato de estarem sujeitas a modificações com o tempo, umidade ambiente e temperatura, o que torna o concreto, diferente de outros materiais de engenharia, um material com características parcialmente intrínsecas ao material.”

A formação de microfissuras, antes mesmo do concreto ser submetido à carga externa e à propagação delas após aplicação de carga é a principal responsável por características peculiares do concreto como resposta não simétrica à tração e compressão, fragilidade do concreto à tração e seu comportamento não linear (SANTOS, 2015).

Assim, várias pesquisas vêm sendo feitas com o intuito de determinar o comportamento desse material, mas devido suas peculiaridades, a formulação de um modelo constitutivo completo torna-se muito difícil (GUELLO, 2002).

Alguns modelos surgiram com base na teoria da elasticidade, da plasticidade e mais recentemente na mecânica do dano e na mecânica da fratura, sendo que cada modelo possui vantagens e desvantagens.

No que diz respeito às barragens de concreto, uma preocupação constante é a análise de segurança de usinas hidrelétricas com vários anos de utilização através do

desenvolvimento de técnicas em relação ao nível de deterioração das estruturas (TEIXEIRA, 2012).

Logo, esta pesquisa visa estudar modelos constitutivos baseados na mecânica do dano de forma a avaliar quantitativa e qualitativamente sua aplicação para modelagem do comportamento da danificação de barragem de concreto.

### ***1.1 Justificativa***

As barragens sempre desempenharam papel vital para o desenvolvimento humano. Historicamente, elas são utilizadas para inibir a irregularidade e imprevisibilidade do fluxo de água, que pode ocasionar inundações severas em alguns anos e condições de seca em anos subsequentes (JESUS, 2011). Nesse sentido, as barragens agregam diversos benefícios para a sociedade, tais como: controle de inundações, geração de energia elétrica e abastecimento de água (PENG; ZANG, 2012).

No Brasil destacam-se as barragens para a geração de energia elétrica. De acordo com o Ministério de Minas e Energia (2017), as usinas hidrelétricas correspondem a 65% da oferta interna de energia elétrica, com cerca de 220 unidades em operação. Sendo que, as 20 maiores usinas hidrelétricas concentram 54% dessa capacidade. Devido às consequências socioambientais e econômicas que uma falha neste tipo de estrutura pode gerar, o estudo realista de seu comportamento torna-se relevante e a modelagem numérica torna-se um caminho viável para auxiliar na compreensão dos mecanismos de degradação que as barragens de concreto estão sujeitas.

Assim, com o contínuo aumento da capacidade de processamento computacional, o desenvolvimento de modelos mais complexos que forneçam uma previsão mais realista do comportamento do material e da estrutura torna-se cada vez mais importante para ampliar os conhecimentos dos engenheiros e projetistas. Para tal, o conhecimento de um modelo constitutivo que permita uma análise realista do comportamento do concreto considerando a sua microfissuração é fundamental.

## ***1.2. Objetivos***

### **1.2.1. Objetivo Geral**

O objetivo geral deste trabalho é o estudo de modelos de dano apropriados para análise dos mecanismos de dano em barragens de concreto por meio do método dos elementos finitos.

### **1.2.2. Objetivos Específicos**

- Desenvolvimento de um programa de elementos finitos em linguagem Matlab para análise do comportamento do dano em barragens de concreto.
- Modelagem em estado plano de deformação de seções de barragens reais de gravidade de concreto para compreensão de seu comportamento com relação ao dano.
- Comparação dos modelos de dano estudados por meio da simulação da danificação de uma seção de barragem de concreto em estado plano de deformações.
- Avaliação do algoritmo de Newton-Raphson na análise de dano por elementos finitos.

## **2. ESTADO DA ARTE**

Este trabalho é baseado na interação entre os temas: mecânica do dano em meios contínuos, método dos elementos finitos e barragens de concreto. Portanto, este capítulo busca relatar, de forma muito sucinta, as principais pesquisas relacionadas a estes temas até os dias atuais.

### ***2.1. Mecânica do dano em meios contínuos***

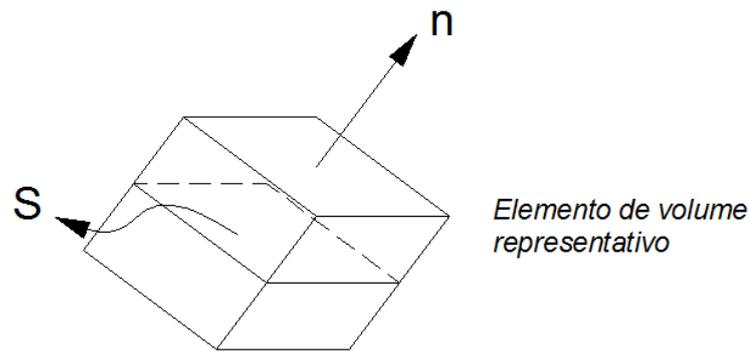
De acordo com Proença (2001), a resposta não linear dos sólidos, observada macroscopicamente, é uma manifestação de processos irreversíveis que ocorrem em sua

microestrutura, tais como: escorregamentos relativos entre cristais, mudanças de fase, difusão de elementos químicos e outros. Alguns desses processos têm origem em microdefeitos, os quais, pelas suas características, favorecem a concentração de microtensões. Esses microdefeitos constituem o que se entende por dano inicial do material. Macroscopicamente, esse processo de evolução do dano inicial, ou danificação, acaba tendo uma influência direta sobre as propriedades elásticas, conforme evidenciam as reduções de resistência e de rigidez.

Kachanov (1958) introduziu o conceito de dano através da constatação da ruptura precoce em relação ao esperado em materiais em regime de deformação lenta. Dessa forma ele conclui que o material poderia apresentar defeitos, sendo que, para uma abordagem de meio contínuo, definiu-se uma variável escalar  $\psi$ , denominada de continuidade, podendo apresentar seu valor de 0 até 1. Isto significa que um material completamente livre de defeitos possui  $\psi = 1$ , já um material sem qualquer capacidade de carga possui  $\psi = 0$ . De forma análoga, a quantidade complementar da continuidade,  $1 - \psi$ , denominou-se de dano,  $D$ , significando que um material com  $D = 0$  é livre de danos, e um material com  $D = 1$  representa a completa perda de integridade da estrutura interna do material.

Para a consideração do dano em uma formulação de meio contínuo, faz-se necessário também o conceito de tensão efetiva  $\bar{\sigma}$  e o conceito de Elemento de Volume Representativo (RVE, na sigla em inglês). Segundo Teixeira (2012), o RVE consiste na técnica de subdivisões do domínio do material ao ponto que os seus comportamentos mecânicos não são comprometidos, sendo que, a definição do seu tamanho depende de uma significativa resposta estatística das propriedades aparentes obtidas.

Considere-se uma situação de solitação uniaxial sobre o elemento de volume representativo, constituída por forças  $F$  aplicadas nas faces opostas orientadas pelo versor  $n$ , conforme a Figura 2.1.



**Figura 2.1 – RVE de um sólido com dano. Fonte: Proença, 2000.**

Seja ainda  $S$  a área total de uma seção genérica de normal  $n$  no interior do elemento. Nessas condições, a tensão normal nominal em qualquer ponto da seção genérica é dada pela Equação (2.1).

$$\sigma = \frac{F}{S} \quad (2.1)$$

Admitindo-se que o conjunto de defeitos seja totalmente incapaz de transferir tensões, pode-se definir uma tensão dita efetiva levando-se em conta somente a parte íntegra da seção. Nesse sentido, seja  $\bar{S}$  a parcela íntegra da área total  $S$  da seção considerada. Então as Equações (2.2 e (2.3 definem, respectivamente, a área dos defeitos medidos e a tensão efetiva:

$$S_0 = S - \bar{S} \quad (2.2)$$

$$\bar{\sigma} = \frac{F}{\bar{S}} \quad (2.3)$$

Por definição, o Dano  $D_n$ , no caso associado a um plano de normal  $n$ , fica definido pela relação de acordo com a Equação (2.4).

$$D_n = \frac{S_0}{S} \quad (2.4)$$

Nota-se que a variável de dano assume valores contidos no intervalo  $0 \leq D_n \leq 1$ , sendo que  $D_n = 0$  tem correspondência com a situação de material íntegro e  $D_n = 1$  indica um estado de total deterioração.

Assim sendo, a parcela de seção efetivamente resistente pode ser expressa em função da variável de dano conforme a Equação (2.5).

$$\bar{S} = S(1 - D_n) \quad (2.5)$$

Manipulando as Equações (2.1), (2.3 e (2.5 têm-se a Equação (2.6).

$$\bar{\sigma} = \frac{\sigma}{(1 - D_n)} \quad (2.6)$$

Como a área íntegra é menor do que a nominal, para uma mesma força aplicada a tensão efetiva num meio danificado resulta comparativamente maior do que a tensão nominal. Em particular, nota-se que  $\bar{\sigma} = \sigma$  representa um material localmente íntegro, e  $\bar{\sigma} \rightarrow \infty$  representa um material totalmente danificado localmente (PROENÇA, 2000).

Posteriormente, surgiram proposições de quantidades tensoriais para descrever o dano. Rabotnov (1969) propôs utilizar a variável dano como um redutor da rigidez inicial do material. A terminologia ‘Mecânica do Dano Contínuo’ foi sugerida por Jason e Hult (1977) para designar modelos em Mecânica do Contínuo destinados ao estudo da resposta de materiais em regime de ruptura considerando-se o processo de danificação. Pouco tempo depois Lamaitre e Chaboche (1985) formalizaram-na com base na termodinâmica dos processos irreversíveis.

Modelos constitutivos baseados na mecânica do dano contínuo têm sido usados como ferramenta de análise na perda de rigidez da estrutura, com finalidade de prever a degradação do material. Sua simulação é adequada para materiais quase frágeis, como o concreto, os quais apresentam uma fase inicial em regime elástico, seguida por um encruamento linear negativo (abrandamento), delineando o comportamento não linear do material (RODRIGUES, 2011).

Em relação ao concreto, vários modelos de mecânica do dano em meios contínuos têm sido propostos nos últimos anos, dentre os quais vale destacar o modelo de Mazars (1984), o modelo Cervera *et al.* (1996), o modelo de Dano Isotrópico e o modelo de Dano Bilinear.

## ***2.2. Método dos Elementos Finitos (MEF)***

Encontrar a distribuição de tensões em um sólido é considerado uma tarefa complicada, e em muitos casos sem solução analítica, assim como modelar o comportamento próximo à ruptura é ainda mais complexo. Assim, este estudo faz uso do Método dos Elementos Finitos, que conforme descrito por Cook *et al.* (2002) é um procedimento numérico para análise de estruturas e contínuos, onde o problema abordado é muito complicado para ser resolvido de maneira satisfatória pelos métodos analíticos clássicos. Este procedimento produz muitas equações algébricas simultâneas, que são geradas e resolvidas em um computador, e os resultados são precisos o suficiente para fins de engenharia. Em essência, aproxima-se uma solução complicada por um modelo que consiste em soluções simples contínuas por partes.

O MEF teve origem como um método de análise de tensões, e atualmente, elementos finitos também são usados para analisar problemas de transferência de calor, fluxo de fluidos, campos elétricos e magnéticos, entre outros (COOK *et al.* 2002). Para a análise de estruturas, o MEF ganhou projeção internacional com os trabalhos de Argyris (1954) e Clough (1956), porém um trabalho sobre o problema de torção de Saint-Venant do matemático alemão Richard Courant, publicado em 1943, é considerado até hoje o pioneiro do método (VAZ, 2011).

Na área de análise estrutural, a formulação do MEF pode ser feita a partir do Princípio da Mínima Energia Potencial Total, do Método de Resíduos Ponderados ou do Princípio dos Deslocamentos Virtuais. Ele usa os conceitos de “discretização” do contínuo e de “matriz de interpolação” que fornece os deslocamentos em um ponto no interior do elemento em função de seus deslocamentos nodais (VAZ, 2011).

Atualmente, vários programas computacionais comerciais utilizam-se do Método dos Elementos Finitos para diversos tipos de análises, cada um com sua característica própria de

mercado. Dentre os programas mais conhecidos pode-se citar o SAP, o Ansys, o Abaqus e o Nastran.

### ***2.3. Barragens de concreto***

A Comissão Internacional de Grandes Barragens define barragens como estruturas que cruzam córregos, rios ou canais para confinar e controlar o fluxo de água nos mesmos (ICOLD *apud* SANTOS, 2017). Elas podem ser classificadas de acordo com o material constitutivo em dois grupos: barragens de aterro e barragens de concreto, sendo esta o foco deste estudo.

Segundo Ramos (2011), as barragens de concreto são construções muito resistentes, no entanto, exigem maior rigor na elaboração e execução do projeto, uma vez que pequenos erros podem levar à redução da resistência mecânica do concreto e, conseqüentemente, o rompimento da estrutura. A literatura técnica aponta três tipologias principais: barragens de gravidade, em arco e de contrafortes.

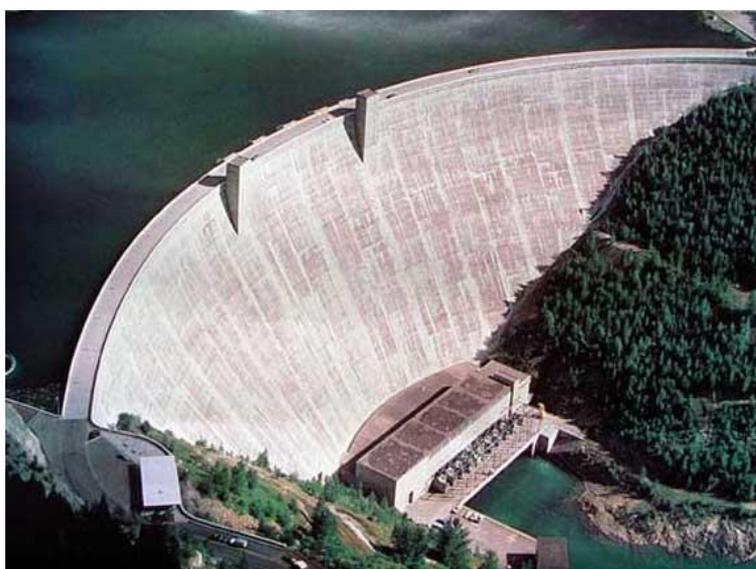
As barragens de gravidade têm por característica resistir aos esforços provocados pela ação da água no reservatório, empuxo hidrostático, através do seu peso próprio e transmiti-los diretamente ao solo de fundação. Deste modo, a análise e tratamento dos maciços da base e a execução das fundações se tornam ainda mais importantes neste tipo de estrutura. Em relação à geometria, é frequente a adoção da seção triangular, o que aumenta a área de concreto na seção de contato com o terreno, assim, garante-se maior estabilidade da estrutura e um comportamento mais satisfatório em relação às ações de deslizamento (SOUSA, 2011).

Atualmente, a maior barragem de gravidade do mundo é a Barragem de Três Gargantas, ilustrada na Fotografia 2.1, localizada no rio Yangtzé na China. O corpo do barramento tem mais de mil e seiscentos metros de extensão e altura total de cento e oitenta e seis metros, sua geração hidrelétrica tem a maior potência instalada do mundo com 18.200 MW (SANTOS, 2017).



**Fotografia 2.1 – Barragem de Três Gargantas, China. Fonte: Wines, 2011.**

Diferente do que acontece em barragens de gravidade, onde o peso próprio da estrutura garante a sua estabilidade estrutural, as barragens em arcos exigem maior rigor na seleção de materiais, uma vez que se deve assegurar a capacidade resistente às tensões de tração e compressão que atuarão sobre o arco. A vantagem desse tipo de barragem em relação às de gravidade é que o volume de concreto utilizado é menor, devido à sua esbeltez (relação altura/comprimento). Sua principal desvantagem está no fato de que o projeto e a execução são bem mais complexos (MARCELINO, 2015). Destaque-se ainda que para sua viabilidade técnica devem existir condições naturais especiais, como margens altas constituídas por rocha resistente e são (RAMOS, 2011). A Fotografia 2.2 ilustra uma barragem em arco.



**Fotografia 2.2 – Exemplo de barragem de em arco. Fonte: USSD, 2019.**

De acordo com Benevolo (1973), as barragens de contrafortes caracterizam-se por serem constituídas por uma sucessão de contrafortes de perfil triangular sobre os quais se apoia uma cortina de retenção formada por placas, simplesmente apoiadas ou contínuas, conforme a Fotografia 2.3. Nesse tipo de barragem, pequenas infiltrações de água não colocam em risco a sua segurança. Entretanto, o seu uso exige maior controle e tratamento dos solos de fundação, pois é necessário que o solo tenha boa resistência, além do emprego de mão de obra altamente qualificada (SANTOS, 2017).



**Fotografia 2.3 – Exemplo de Barragem de Contraforte. Fonte: USSD, 2019.**

De acordo com os dados do ICOLD, as barragens de gravidade são as mais empregadas, uma vez que possui menor exigência das condições naturais do solo de fundação e das margens (SANTOS, 2017).

#### ***2.4. Modelagem numérica de barragens de concreto***

Nas décadas de 40 e 50, durante a fase de projeto de grandes barragens de concreto, utilizavam-se os modelos físicos (ou modelos reduzidos) onde eram admitidas várias hipóteses simplificadoras devido à pouca experiência na modelagem matemática destas estruturas, e por serem mais versáteis e menos dispendiosos que os modelos numéricos. Na sequência de trabalhos pioneiros da década de 50, inseridos no âmbito do programa da

exploração espacial dos Estados Unidos da América, assistiu-se na década de 60 a um desenvolvimento dos métodos numéricos para análise estrutural, em simultâneo com o aparecimento dos primeiros computadores. Desenvolveram-se vários métodos numéricos, entres eles o Método dos Elementos Finitos, que além de ter revolucionado a análise estrutural é também o método mais utilizado, essencialmente para meios contínuos (PINTO, 2012). A seguir será apresentado algumas pesquisas relacionadas ao tema.

Ghrib e Tinawi (1995), apresentaram modelos baseados na mecânica do dano para prever a resposta estática não linear de barragens de concreto não reforçado, e propuseram uma formulação anisotrópica do dano por causa da quebra em função das propriedades básicas da resistência do concreto a compressão e a tração,  $f_c$  e  $f_t$  respectivamente, e da energia de fratura  $G_f$ . Com isso, investigaram a influência do dano inicial na resposta sísmica de uma barragem gravitacional analisada usando cargas estáticas equivalentes.

Em sua pesquisa, Gunn (1998), realizou a análise não linear de barragens de arco, incluindo um modelo constitutivo anisotrópico baseado em mecânica do dano para concreto com o objetivo de avaliar a segurança da estrutura. Ele aplicou em exemplos de validação usando os resultados dos testes experimentais disponíveis e, em seguida, na análise de uma barragem de 77 m de altura na Suíça.

Oliveira (2000) desenvolveu um modelo numérico de elementos finitos tridimensionais, em que se considera uma lei constitutiva viscoelástica associada a uma formulação de dano com amolecimento (do inglês "softening"), que permite estudar o processo de aparecimento e evolução da fissuração ao longo do tempo em barragens de concreto. O modelo mostrou-se adequado para os estudos de previsão do comportamento e avaliação das condições de segurança para cenários de incidente ou acidente. Ele também permitiu representar os aspectos determinantes no processo de iniciação e progressão da fissuração, a degradação de rigidez do material (dano interno) e o enfraquecimento (considerando-se duas variáveis escalares de dano, independentes: uma para a compressão e outra para a tração).

Pinto (2012) utilizou um programa computacional comercial SAP 2000, para a análise de estabilidade global de uma seção genérica de barragem de gravidade de concreto, onde pôde concluir que a barragem atendeu à segurança estrutural, porém, em determinados pontos de sua base surgiram tensões de tração com valores próximos à tensão resistente, o que poderia caracterizar uma região de fissuração, necessitando assim efetuar uma análise não

linear de dano do material, uma vez que este cálculo permitiria determinar a extensão da fissura, diminuindo o estado de tensão local da barragem, e assim avaliar com maior rigor o seu comportamento estrutural.

Já Marconcin (2015), realizou um estudo numérico-experimental para análise de dano em lajes de barragens de enrocamento com face de concreto, no qual a metodologia aplicada envolve os conceitos da mecânica do dano contínuo e leva em consideração o comportamento não linear do concreto, utilizando programação matemática em linguagem Fortran. A solução do problema foi determinada através do método dos elementos finitos. Nesta pesquisa também foi analisada a viabilidade da implementação de um sistema de monitoramento de infiltração, através de ensaios experimentais a partir de leituras de diferentes temperaturas medidas em cabos óticos instalados em uma estrutura. Os resultados experimentais foram confrontados com os numéricos mostrando um estudo da relação entre dano e permeabilidade do concreto. Em sua conclusão foi proposto a instalação do sistema de monitoramento em áreas de maior danificação da estrutura, onde há maior concentração de fissuras.

Neste trabalho pretende-se estudar por meio da mecânica do dano associada ao método dos elementos finitos o problema de seções de barragens de concreto em estado plano de deformação através dos seguintes modelos: modelo isotrópico com amolecimento linear, modelo isotrópico com amolecimento exponencial e modelo de Cervera (1996).

### **3. DESCRIÇÃO DO PROGRAMA**

Neste capítulo será apresentada a estrutura do programa desenvolvido em linguagem *Matlab*. O programa inicia-se com a criação de um arquivo de entrada no qual é definido a geometria do modelo (malha de elementos finitos – coordenadas nodais e conectividade dos nós dos elementos), as propriedades do material, as condições de contorno e os carregamentos.

Sua implementação prossegue com a criação da função principal do programa. Nela o valor do carregamento é dividido em passos de carga, de forma que o programa trabalhe com incrementos de carga, semelhante ao que ocorre num ensaio de compressão do concreto no qual o carregamento é aplicado de forma gradual. Logo, o programa baseia-se no controle de carga. Nesta versão não é possível o controle de deslocamentos. O mesmo para ser

implementado exigiria a implementação de um método *arc length* para seu adequado funcionamento.

Após a aplicação do primeiro passo de carga, o programa iniciará as iterações da análise não linear, executadas por meio de um algoritmo Newton-Raphson no qual é calculada a matriz de rigidez da estrutura, os deslocamentos nodais e as forças internas nodais atualizadas com base nas tensões obtidas por meio do modelo de dano. Essas iterações são repetidas até que haja a convergência dos deslocamentos ou do vetor de forças internas desequilibradas. No item 3.4 este procedimento está descrito de forma detalhada.

Concluído este processamento para o primeiro passo de carga, o programa realiza um incremento no carregamento somando-se o próximo passo de carga ao anterior e repete a análise não linear para o carregamento atualizado. Repete-se o procedimento até que com o último passo de carga o carregamento seja igual ao carregamento informado no arquivo de entrada de dados. Como resultado o programa terá as reações de apoio, os deslocamentos nodais, as tensões, as deformações e os dados de danificação da estrutura.

A Figura 3.1 mostra o fluxograma geral do programa conforme descrito no início deste capítulo, e nos itens a seguir tem-se o detalhamento de cada etapa do fluxograma com sua respectiva numeração.

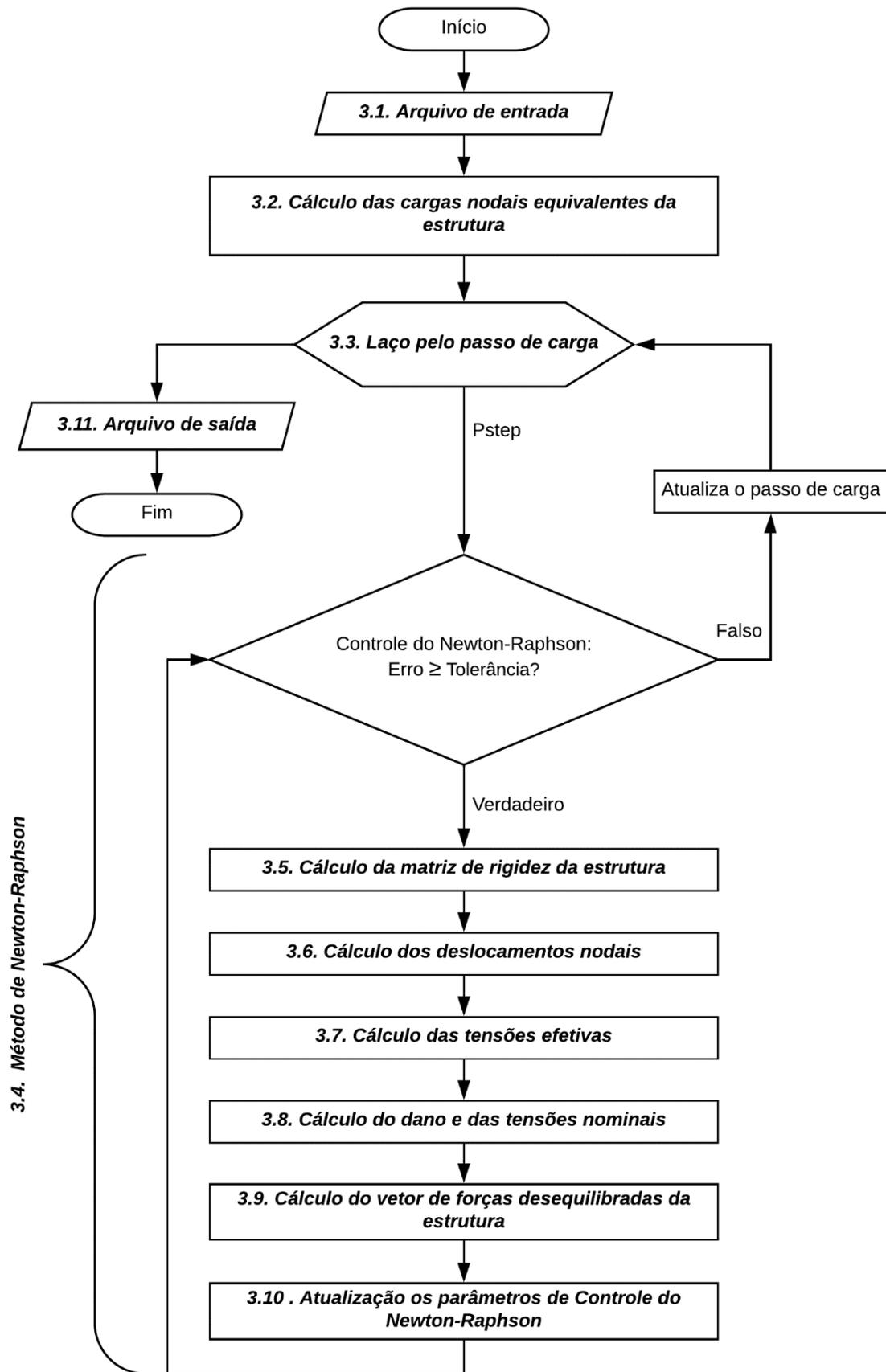
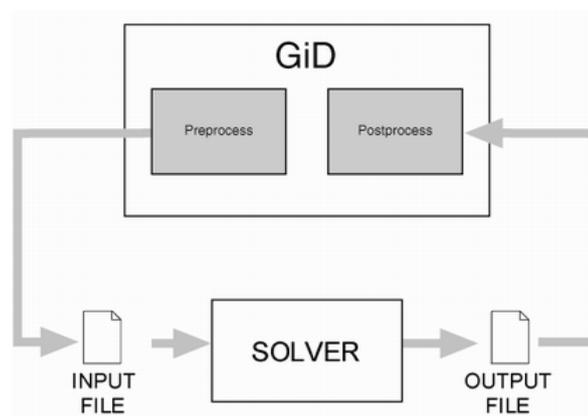


Figura 3.1 – Fluxograma geral. Fonte: Autor, 2019.

### 3.1. Arquivo de entrada

Como exposto anteriormente, o arquivo de entrada é a parte do código onde é definida a geometria do modelo, as propriedades do material, as condições de contorno e o carregamento. Tendo em vista a dificuldade de criar manualmente essas matrizes para grandes estruturas, foi elaborado a integração entre o código desenvolvido em *Matlab* com o programa *GiD 14*, que faz uma discretização do objeto em estudo e gera uma malha de elementos finitos, cada um dos quais é atribuído um material e as condições de contorno desejadas.

O *GiD* é um pré e pós processador universal, adaptável e fácil de usar para simulações numéricas em ciência e engenharia, desenvolvido por um centro de pesquisa ligado à prestigiada Universidade Politécnica da Catalunha, ele foi projetado para cobrir todas as necessidades comuns no campo de simulações numéricas, do pré ao pós-processamento. Assim é possível realizar a modelagem geométrica (*CAD*), a geração de malha, a definição de dados de análise, a transferência de dados para programa de análise, as operações de pós-processamento e a visualização de resultados em sua interface (CIMNE, 2018). A Figura 3.2 ilustra a integração do *GiD* com programas computacionais de análise.

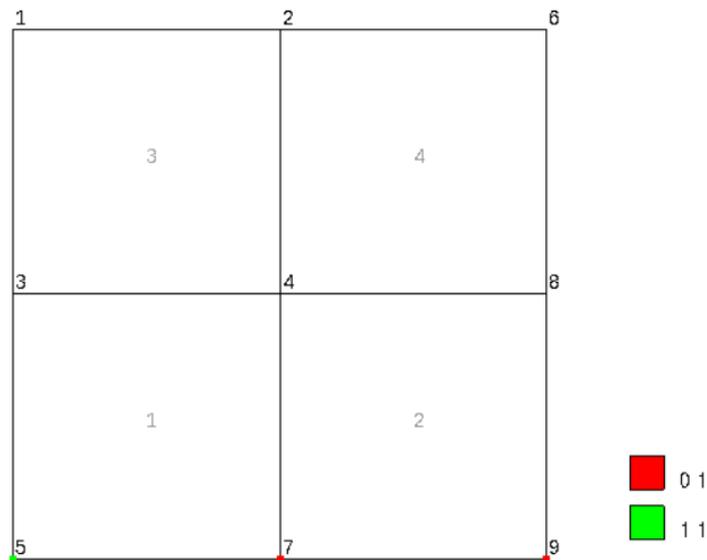


**Figura 3.2 – Pré e pós-processador *GiD*. Fonte: Manual do *GiD 14*, 2018.**

O programa desenvolvido utiliza o elemento quadrilateral Q4, e permite que o usuário defina a quantidade de pontos de integração. O elemento Q4 tem interpolação linear nas duas direções perpendiculares e por isso é também conhecido como elemento

Quadrilateral Bilinear. Ele possui dois graus de liberdade por nó, totalizando 8 graus de liberdade.

A Figura 3.3 ilustra uma malha de 4 elementos e 9 nós com as condições de apoio.



**Figura 3.3 – Exemplo de uma malha de elementos finitos, com restrições de apoio gerada na interface do pré-processador do *GiD 14* (1 – “restringido” e 0 – “livre”). Fonte: Autor, 2019.**

Em relação ao carregamento, o programa é capaz de trabalhar com quatro tipos: cargas nodais, cargas de corpo, empuxo lateral e subpressão. De posse dos valores informados no arquivo de entrada para as cargas de corpo, pressão lateral e subpressão o programa calcula as respectivas cargas nodais equivalentes somando-as as cargas nodais aplicadas, assim têm-se as contribuições de todas as cargas da estrutura. Este procedimento é detalhado no item 3.2 a seguir.

### ***3.2. Cálculo das cargas nodais equivalentes da estrutura***

Para que o programa considere as cargas devido às forças de corpo, ao empuxo lateral e à subpressão de acordo com o método dos elementos finitos é necessário transformá-las em cargas nodais equivalentes da estrutura.

### 3.2.1. Cálculo das cargas nodais equivalentes do elemento devido às forças de corpo

Segundo Cook *et al.* (2002), forças de corpo são aplicadas a todos os pontos materiais e têm dimensões de força por unidade de volume. Elas podem surgir da aceleração gravidade, campo magnético, entre outros. A Equação (3.1) calcula de forma numérica as cargas nodais equivalentes devido às forças de corpo para o elemento Q4.

$$\mathbf{P}eq_{corpo} = \sum_{i=1}^{np} \sum_{j=1}^{np} \mathbf{N}(\xi_i, \eta_i)^T \mathbf{F} |J| w_i w_j t \quad (3.1)$$

onde,  $\mathbf{N}$  representa as funções de forma do elemento,  $\mathbf{F}$  representa a matriz de carga distribuída por unidade de volume nas direções x e y,  $|J|$  representa o determinante da matriz jacobiana,  $np$  representa o número de pontos de Gauss,  $w$  representa o peso do respectivo ponto de Gauss e  $t$  é a espessura do elemento.

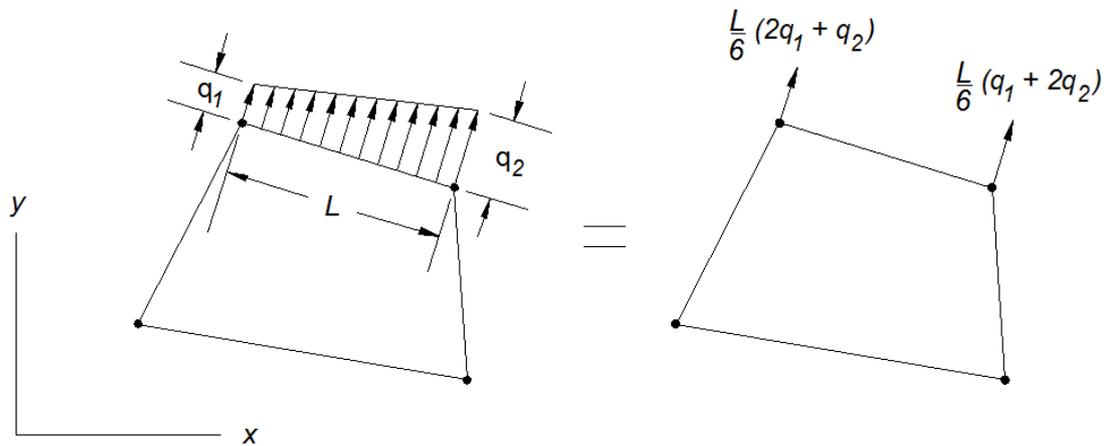
### 3.2.2. Cálculo das cargas nodais equivalentes do elemento devido ao empuxo lateral

De acordo com Cook *et al.* (2002), em um elemento de barra com carga distribuída variando linearmente de intensidade  $q_1$  em  $x = 0$  para  $q_2$  em  $x = L$  (comprimento do elemento) tem a carga nodal equivalente dada pela Equação (3.2).

$$\mathbf{P}eq_{empx} = \frac{L}{6} \begin{bmatrix} 2q_1 + q_2 \\ q_1 + 2q_2 \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

A equação acima também permite calcular a carga nodal equivalente devido a uma carga igualmente distribuída na aresta de um elemento Q4 (ver Figura 3.4). Note que a mesma equação que permite calcular as cargas nodais equivalentes devido ao empuxo lateral também permite calcular a carga de subpressão na base da seção da barragem.

A Figura 3.4 ilustra um caso genérico de carregamento linearmente variável em uma das laterais de um elemento quadrilateral.



**Figura 3.4 – Carga linearmente variável em uma aresta linear, e cargas nodais equivalentes.**  
**Fonte: Adaptado de Cook *et al.*, 2002.**

### 3.2.3. Cálculo das cargas nodais equivalentes do elemento devido à subpressão

Conforme descrito acima, as cargas nodais equivalentes do elemento devido à subpressão são calculadas da mesma forma demonstrada no item 3.2.2, isto é, conhecendo-se os valores de  $q_1$  e  $q_2$ , dados na direção perpendicular à base da seção transversal da barragem, o programa calcula de forma analítica as cargas nodais equivalentes de acordo com a Equação (3.2).

### 3.3. Laço pelo passo de carga

Com o intuito de permitir a obtenção da curva não linear de esforços versus deslocamentos, o programa foi criado de forma que o carregamento final seja aplicado de forma incremental. Para tal, o carregamento é dividido em passos de carga (**Pstep**), conforme mostra o fluxograma da Figura 3.5.

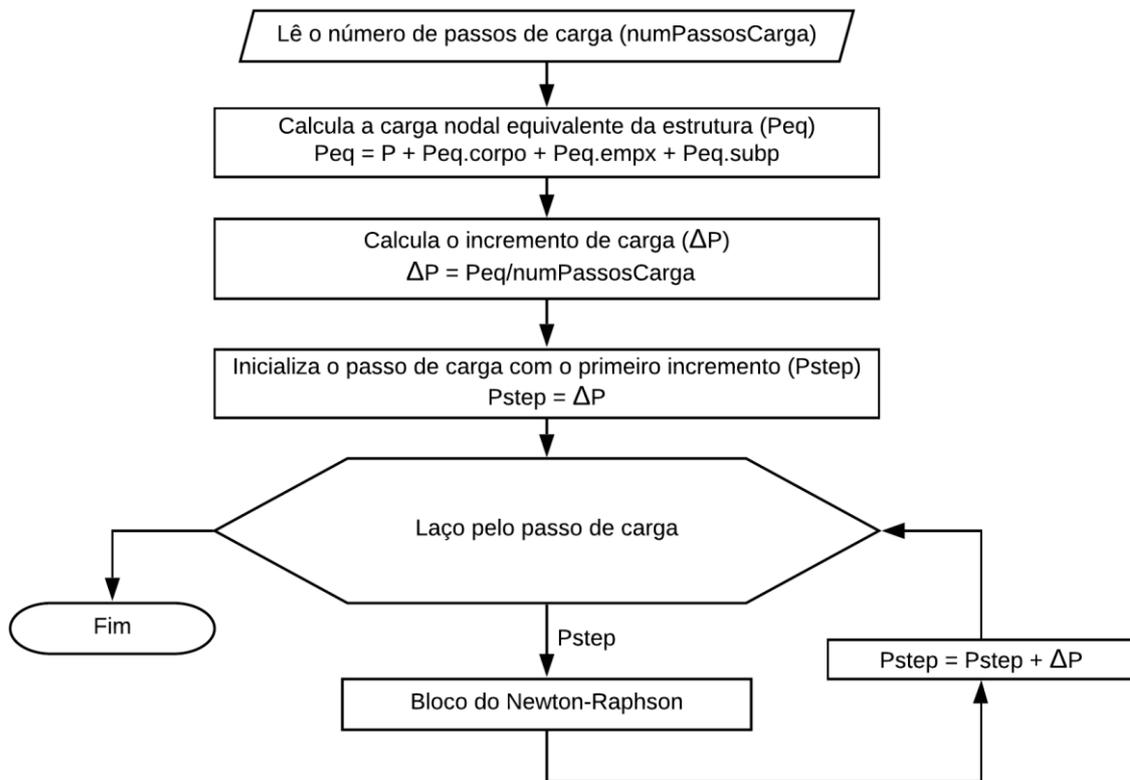


Figura 3.5 – Fluxograma do passo de carga. Fonte: Autor, 2019.

### 3.4. Método de Newton-Raphson

A consideração da danificação do concreto resulta numa análise não linear física, portanto faz-se necessário um método iterativo que garanta a convergência dos resultados. Neste estudo é utilizado o método de Newton-Raphson, que nos textos de cálculo é conhecido como um método para encontrar as raízes de polinômios, equações e sistemas de equações não lineares. Segundo COOK *et al.* (2002), nos problemas de mecânica estrutural ele é descrito como um método de geração da curva de força versus deslocamento, cuja forma não é conhecida no início da análise.



$$\Delta R_1^A = P_A - \mathbf{k}_0 d_1^A \quad (3.4)$$

Onde  $\mathbf{k}_0 d_1^A$  é a força de resistência fornecida pela estrutura em seu estado atual de deformação.

A partir daí são realizadas as "iterações de equilíbrio" destinadas a reduzir o desequilíbrio a zero, calculando-se o próximo incremento de deslocamento através da Equação (3.5).

$$\Delta d = \mathbf{k}_0^{-1} \Delta R_1^A \quad (3.5)$$

Atualizando a solução tem-se a Equação (3.6).

$$d_2^A = d_1^A + \Delta d \quad (3.6)$$

Embora não seja garantido que esse método converge para todos os problemas não lineares, a iteração continuada normalmente faz com que os erros de força diminuam e que os incrementos de deslocamento sucessivos  $\Delta d$  se aproximem de zero e a solução atualizada se aproxime do valor correto  $d_A$  (COOK *et al.*, 2002).

Outro incremento de carga  $\Delta P_B$  agora pode ser adicionado e a iteração iniciada novamente para buscar o deslocamento  $d_B$ , que corresponde à carga total aplicada  $P_B$ . Assim, tem-se as Equações (3.7), (3.8) e (3.9) correspondentes.

$$\Delta d = \mathbf{k}_0^{-1} \Delta P_B \quad (3.7)$$

$$d_1^B = d_A + \Delta d \quad (3.8)$$

$$\Delta R_1^B = P_B - \mathbf{k}_0 d_1^B \quad (3.9)$$

Claramente, aplicando uma sequência de níveis de cargas crescentes e iterando até a convergência para cada um, podemos localizar tantos pontos quanto são necessários para construir uma representação adequada da curva P versus d. A probabilidade de convergência

para uma solução correta em cada nível de carga é aprimorada com etapas de carga pequenas (COOK *et al.*, 2002).

No código de elementos finitos utilizou-se a função *while* para realizar as iterações do método de Newton-Raphson juntamente com três parâmetros de controle: *Pcontrol*, *Dcontrol* e Número Máximo de Iterações. Os dois primeiros parâmetros de controle funcionam como critério de parada, onde se um deles não atender a condição (maior que a tolerância) a iteração é finalizada, ou seja, houve convergência. O terceiro parâmetro (Número Máximo de Iterações) é um critério de parada para quando o problema não convergir. Ele funciona como um contador do número de iterações realizadas e o compara com número máximo de iterações que o usuário define no arquivo de entrada, dessa forma o programa não calculará infinitamente quando o problema não tiver solução.

Vale ressaltar que para cada início de passo de carga é obrigatório o programa executar a rotina do Newton-Raphson pelo menos 1 vez, por isso os parâmetros de controle iniciam com valor unitário. A Figura 3.7 mostra o fluxograma do método de N-R.

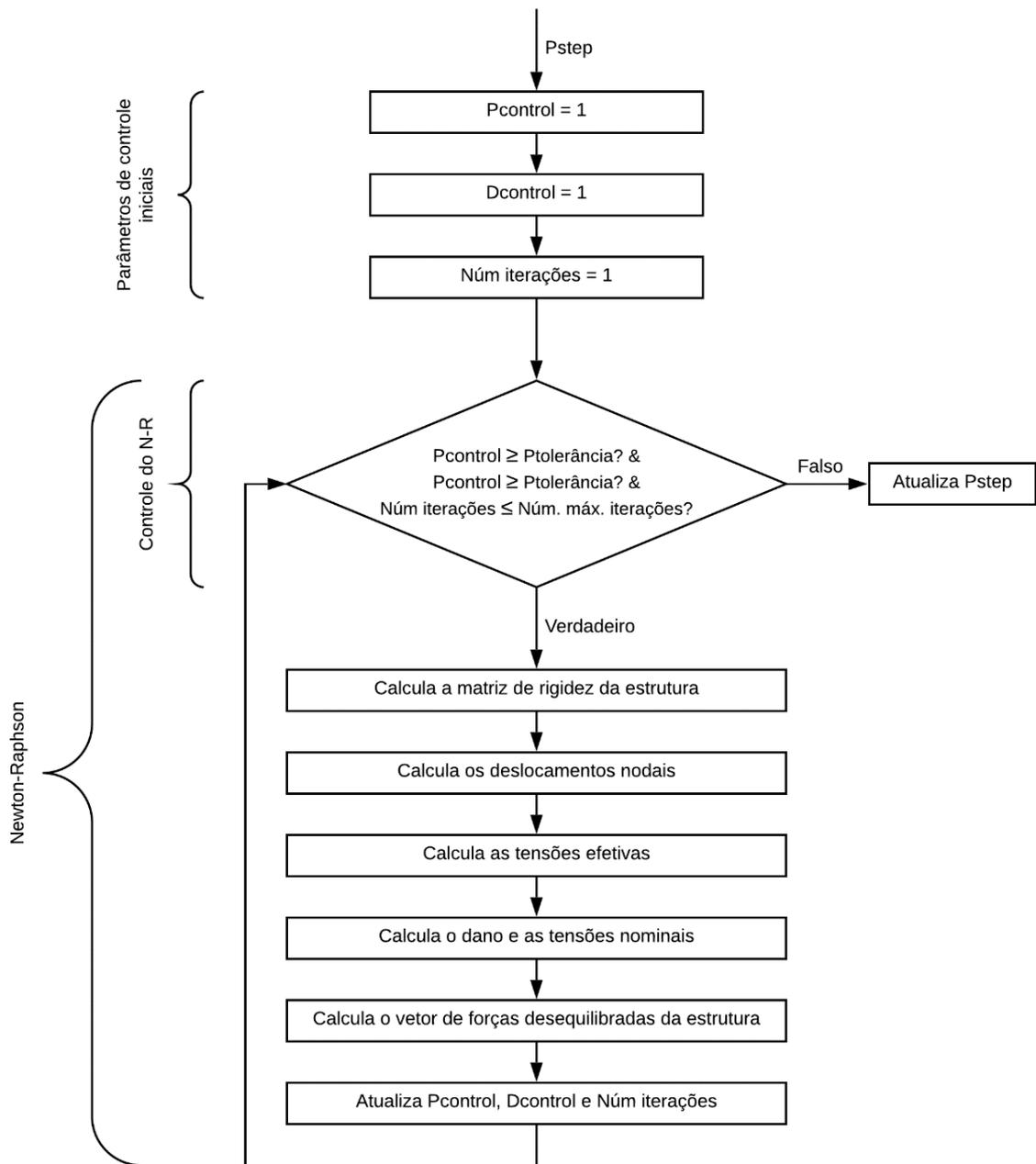


Figura 3.7 – Fluxograma do Método Newton-Raphson. Fonte: Autor, 2019.

### 3.5. Cálculo da matriz de rigidez da estrutura

A matriz de rigidez da estrutura é montada a partir da matriz de rigidez de cada elemento finito. Para o elemento Q4, a matriz de rigidez é calculada conforme a Equação (3.10).

$$\mathbf{k} = \iint \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} dx dy t \quad (3.10)$$

Onde  $t$  é a espessura do elemento,  $\mathbf{B}$  é a matriz de compatibilidade deformaçãodeslocamento e  $\mathbf{C}$  é a matriz constitutiva que expressa a relação entre as tensões e as deformações do material.

Para problemas do estado plano de deformações, a matriz constitutiva é dada pela Equação (3.11).

$$\mathbf{C} = \frac{E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \begin{bmatrix} 1 - \nu & \nu & 0 \\ \nu & 1 - \nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1 - 2\nu)}{2} \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

Onde  $E$  e  $\nu$  são, respectivamente, o módulo de elasticidade e o coeficiente de Poisson do material.

Sendo a matriz  $\mathbf{B}$  do elemento Q4 escrita em termos das coordenadas naturais do elemento, a equação da matriz de rigidez do elemento Q4 pode ser reescrita de acordo com a Equação (3.12).

$$\mathbf{k} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} |J| d\xi d\eta t \quad (3.12)$$

Onde  $|J|$  é o determinante da matriz Jacobiana (matriz da transformação de coordenadas x-y para  $\xi$ - $\eta$ ).

Por questão práticas é mais adequado resolver a integração da equação (3.12) de forma numérica conforme dado pela Equação (3.13).

$$\mathbf{k} = \sum_{i=1}^{np} \sum_{j=1}^{np} \mathbf{B}(\xi_i, \eta_i)^T \mathbf{C} \mathbf{B}(\xi_i, \eta_i) |J| w_i w_j t \quad (3.13)$$

Onde “ $np$ ” representa o número de pontos de Gauss e “ $w$ ” representa o peso do respectivo ponto de Gauss.

Como dito anteriormente,  $\mathbf{B}$  é a matriz de compatibilidade de deformação-deslocamento. Ela é calculada a partir das derivadas das funções de forma do elemento,  $N_i$ , em relação as coordenadas cartesianas x-y, de forma que para o elemento Q4 é dada pela Equação (3.14).

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\delta N_1}{\delta x} & 0 & \frac{\delta N_2}{\delta x} & 0 & \frac{\delta N_3}{\delta x} & 0 & \frac{\delta N_4}{\delta x} & 0 \\ 0 & \frac{\delta N_1}{\delta y} & 0 & \frac{\delta N_2}{\delta y} & 0 & \frac{\delta N_3}{\delta y} & 0 & \frac{\delta N_4}{\delta y} \\ \frac{\delta N_1}{\delta y} & \frac{\delta N_1}{\delta x} & \frac{\delta N_2}{\delta y} & \frac{\delta N_2}{\delta x} & \frac{\delta N_3}{\delta y} & \frac{\delta N_3}{\delta x} & \frac{\delta N_4}{\delta y} & \frac{\delta N_4}{\delta x} \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

Sendo os elementos da matriz  $\mathbf{B}$  calculados de acordo com as Equações (3.15) e (3.16).

$$\frac{\delta N_i}{\delta x} = \Gamma_{11} \frac{\delta N_i}{\delta \xi} + \Gamma_{12} \frac{\delta N_i}{\delta \eta} \quad (3.15)$$

$$\frac{\delta N_i}{\delta y} = \Gamma_{21} \frac{\delta N_i}{\delta \xi} + \Gamma_{22} \frac{\delta N_i}{\delta \eta} \quad (3.16)$$

E a matriz  $\mathbf{\Gamma}$  é calculada conforme as Equações (3.17) e (3.18).

$$\mathbf{\Gamma} = \mathbf{J}^{-1} = \frac{1}{|J|} \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} \\ -J_{21} & J_{11} \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

$$|J| = J_{11} J_{22} - J_{21} J_{12} \quad (3.18)$$

Após a montagem da matriz de rigidez da estrutura, é necessário realizar a imposição das condições de contorno da estrutura na matriz de rigidez. No programa tal imposição das condições de contorno é feita por meio da colocação de um valor unitário no elemento da

diagonal da matriz  $\mathbf{K}$  correspondente ao grau impedido e zerando-se a respectiva linha e coluna correspondente ao grau de liberdade impedido. Tal procedimento tem a desvantagem de se trabalhar com a matriz de rigidez da estrutura em sua dimensão original e tem a vantagem de não necessitar a renumeração dos graus de liberdade da estrutura para se extrair uma submatriz relacionada aos graus de liberdade livres da estrutura.

A Figura 3.8 mostra o fluxograma para o cálculo da matriz de rigidez da estrutura.

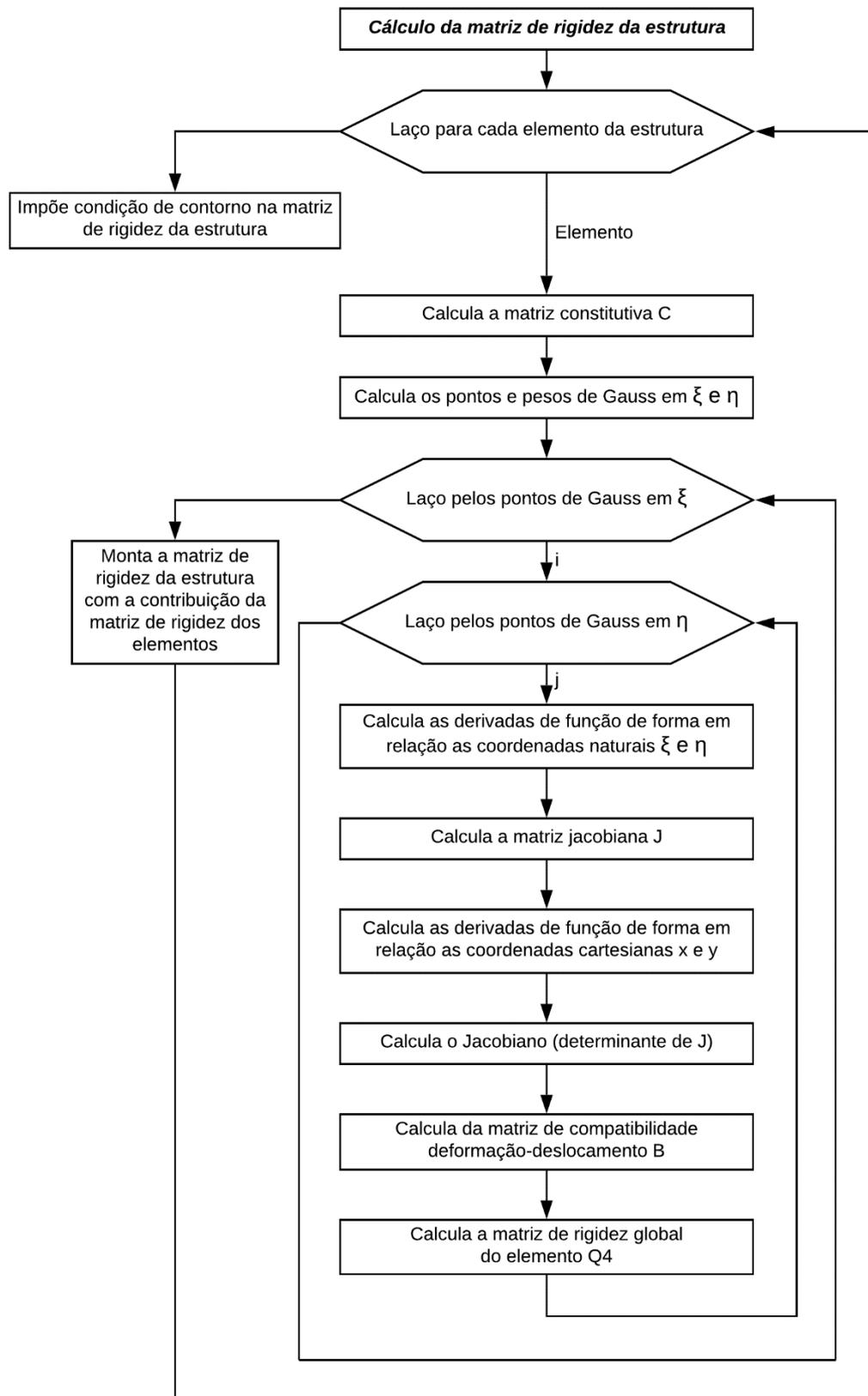


Figura 3.8 – Fluxograma do cálculo da matriz de rigidez da estrutura. Fonte: Autor, 2019.

### 3.6. Cálculo dos deslocamentos nodais

De posse da matriz de rigidez da estrutura o próximo passo é calcular os deslocamentos nodais, que no programa é feito em duas etapas pelo fato deste processo está sendo feito de forma iterativa. Primeiro calcula-se o incremento de deslocamentos ( $\Delta\mathbf{D}$ ) através da Equação (3.19).

$$\Delta\mathbf{D} = \mathbf{k}^{-1} \mathbf{P}_{\text{desq}} \quad (3.19)$$

Onde  $\mathbf{k}^{-1}$  é o inverso da matriz de rigidez da estrutura com a imposição das condições de contorno, e  $\mathbf{P}_{\text{desq}}$  é o vetor de carregamento, lembrando que para a primeira iteração  $\mathbf{P}_{\text{desq}}$  é igual ao passo de carga ( $\mathbf{P}_{\text{step}}$ ).

A segunda etapa é atualizar o vetor de deslocamentos da estrutura ( $\mathbf{D}$ ) conforme a Equação (3.20).

$$\mathbf{D} = \mathbf{D} + \Delta\mathbf{D} \quad (3.20)$$

Inicialmente,  $\mathbf{D}$  é um vetor nulo.

A partir da segunda iteração o vetor do carregamento ( $\mathbf{P}_{\text{desq}}$ ) é atualizado pelo vetor de forças desequilibradas, que será abordado no próximo item. A seguir a Figura 3.9 traz o fluxograma do cálculo dos deslocamentos nodais.

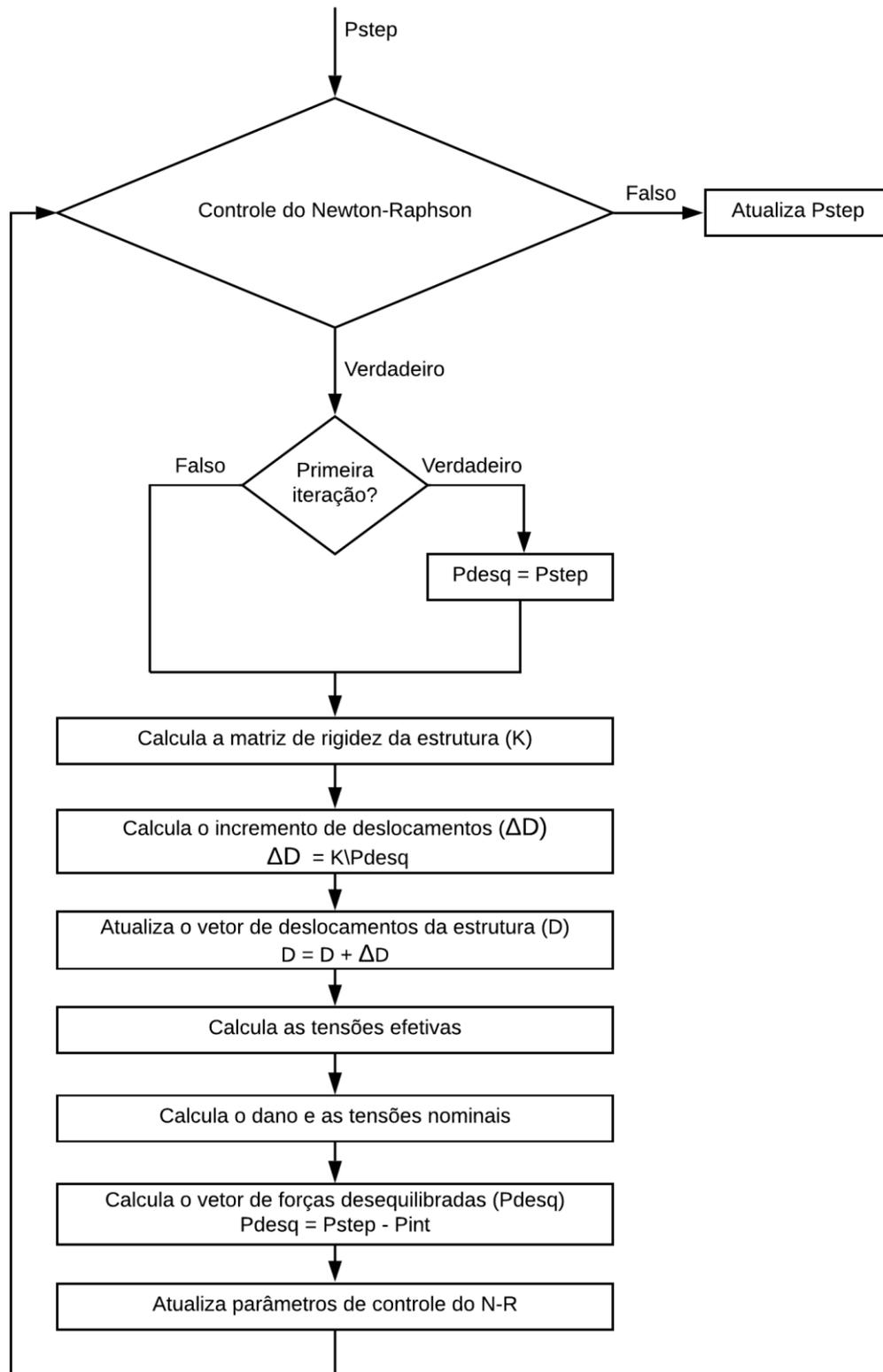


Figura 3.9 – Fluxograma do cálculo dos deslocamentos nodais. Fonte: Autor, 2019.

### 3.7. Cálculo das tensões efetivas

Conhecido os deslocamentos da estrutura  $\mathbf{D}$ , pode-se agora calcular as deformações  $\boldsymbol{\varepsilon}$ , e a partir desta calcular as tensões efetivas (tensões elásticas)  $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ , conforme as Equações (3.21) e (3.22).

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B} \mathbf{D} \quad (3.21)$$

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (3.22)$$

Onde,  $\mathbf{B}$  é a matriz de compatibilidade deformação-deslocamento e  $\mathbf{C}$  é a matriz constitutiva que expressa a relação entre as tensões e as deformações do material.

Logo, conhecidas as tensões efetivas pode-se calcular as tensões nominais de acordo com o modelo de dano escolhido, conforme exposto no próximo item deste trabalho.

### 3.8. Cálculo do dano e das tensões nominais

Neste item estão descritas as formulações dos modelos de dano escolhidos para este estudo, onde no programa implementado em *Matlab* cada modelo de dano corresponde a uma função com os mesmos parâmetros de entrada (tensões efetivas e propriedades do material) e o mesmo parâmetro de saída (tensões nominais). Assim, através da função *switch case* foi definido um número para cada modelo de dano para que o usuário possa definir qual deles irá utilizar em sua análise, conforme mostra o Quadro 3.1.

**Quadro 3.1 – Parâmetros para alternar a escolha dos modelos de dano.**

| <i>switch</i> modelo de dano |   |
|------------------------------|---|
| <i>case 1</i>                | modelo de dano isotrópico (amolecimento linear) |
| <i>case 2</i>                | modelo de dano de Cervera et al. (1996)         |

**Fonte: Autor, 2019.**

#### 3.8.1. Modelo constitutivo de dano isotrópico (amolecimento linear)

Caracterizado por apresentar um modelo escalar de dano com limite elástico e variável de dano diferente para tração e compressão (situação bastante comum em materiais frágeis, como o concreto), faz-se necessário uma separação da tensão efetiva  $\bar{\sigma}$  em tensão efetiva de tração  $\bar{\sigma}^+$  e tensão efetiva de compressão  $\bar{\sigma}^-$ , conforme a Equação (3.23).

$$\bar{\sigma} = \bar{\sigma}^+ + \bar{\sigma}^- \quad (3.23)$$

O tensor de tensão nominal para este modelo é obtido pela redução de cada parte do tensor de tensão efetivo, de acordo com suas respectivas variáveis de dano em tração e compressão conforme a Equação (3.24).

$$\sigma = (1 - d^+) \bar{\sigma}^+ + (1 - d^-) \bar{\sigma}^- \quad (3.24)$$

Na teoria clássica de dano, se um corpo é carregado além de certo limite elástico, então ocorrerá a danificação. Tal limite pode ser definido de acordo com as Equações (3.25) e (3.26).

$$\bar{\Phi}^+(\bar{\tau}^+, r^+) = \bar{\tau}^+ - r^+ \leq 0 \quad (3.25)$$

$$\bar{\Phi}^-(\bar{\tau}^-, r^-) = \bar{\tau}^- - r^- \leq 0 \quad (3.26)$$

Em que,  $\bar{\tau}^+$  e  $\bar{\tau}^-$  são as normas equivalentes de tração e compressão efetivas dadas pelas Equações (3.27) e (3.28).

$$\bar{\tau}^+ = \sqrt{\bar{\sigma}^+ \mathbf{C}^{-1} \bar{\sigma}^+} \quad (3.27)$$

$$\bar{\tau}^- = \sqrt{\bar{\sigma}^- \mathbf{C}^{-1} \bar{\sigma}^-} \quad (3.28)$$

Sendo  $r^+$  e  $r^-$  os limites de dano atuais, que são atualizados continuamente para controlar o tamanho da superfície de dano em expansão. No início da análise, o valor inicial atribuído aos limites de dano é calculado de acordo com as Equações (3.29) e (3.30).

$$r_0^+ = \frac{f_t}{\sqrt{E}} \quad (3.29)$$

$$r_0^- = \frac{f_{c0}}{\sqrt{E}} \quad (3.30)$$

Onde  $f_t$  e  $f_{c0}$  são, respectivamente, a tensão limite em tração e em compressão do material.

A evolução dos limiares de dano pode ser expressa de forma fechada, sempre utilizando os valores mais altos alcançados por  $\bar{\tau}^+$  e  $\bar{\tau}^-$ , durante o processo de carregamento, ou seja,  $r^+ = \max(r_0^+, \bar{\tau}^+)$  e  $r^- = \max(r_0^-, \bar{\tau}^-)$ .

Para descrever a evolução das variáveis de dano  $d^+$  e  $d^-$ , são definidas duas funções para representar o processo de degradação do material em tração e compressão conforme as Equações (3.31) e (3.32).

$$d^+ = \frac{(r^+ - r_0^+)}{r^+(1 - H)} \quad (3.31)$$

$$d^- = \frac{(r^- - r_0^-)}{r^-(1 - H)} \quad (3.32)$$

Onde  $H$  é o parâmetro (dado de entrada do modelo) relacionado ao endurecimento ou ao amolecimento da curva tensão versus deformação do material, a depender de seu sinal.

O fluxograma para o cálculo do dano isotrópico é ilustrado na Figura 3.10.

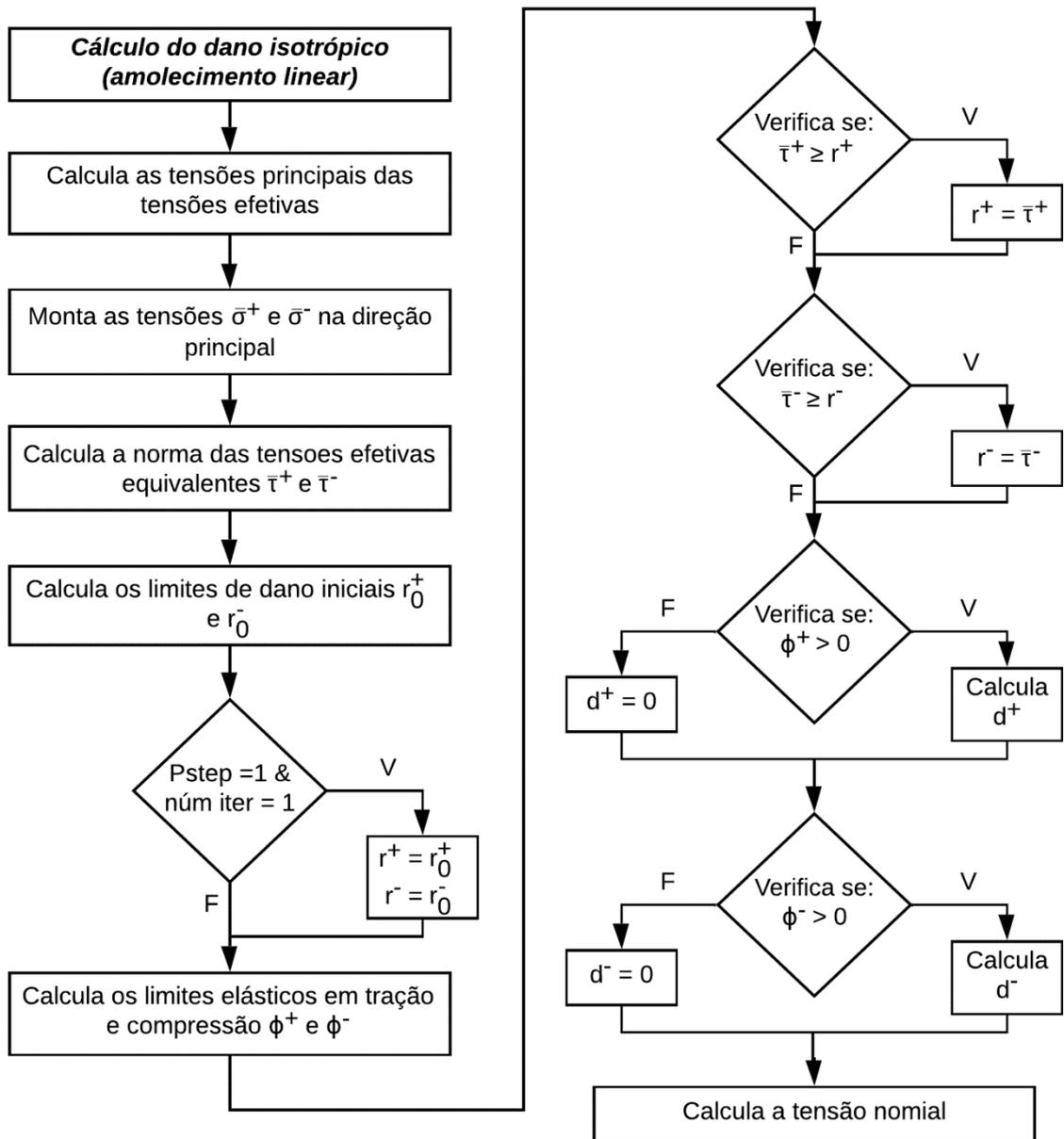


Figura 3.10 – Fluxograma do modelo de dano isotrópico (amolecimento linear). Fonte: Autor, 2019.

### 3.8.2. Modelo constitutivo de dano de Cervera

Este modelo foi desenvolvido para a análise numérica de barragens de concreto submetidas à excitação sísmica. Analogamente ao modelo de dano isotrópico apresentado anteriormente, o modelo de dano de Cervera *et al.* (1996) tem valores diferentes para os limites elásticos e para as variáveis de dano em tração e compressão.

As normas equivalentes de tensão de tração e de compressão efetivas são dadas pelas Equações (3.33) e (3.34).

$$\bar{\tau}^+ = \sqrt{\bar{\sigma}^+ \mathbf{C}^{-1} \bar{\sigma}^+} \quad (3.33)$$

$$\bar{\tau}^- = \sqrt{\sqrt{3} (K \bar{\sigma}_{oct}^- + \bar{\tau}_{oct}^-)} \quad (3.34)$$

Onde,  $\bar{\sigma}_{oct}^-$  e  $\bar{\tau}_{oct}^-$  são, respectivamente, a tensão normal e a tensão cisalhante octaédricas, obtidas de  $\bar{\sigma}^-$  conforme as Equações (3.35) e (3.36).

$$\sigma_{oct} = \frac{1}{3} I_1 \quad (3.35)$$

$$\tau_{oct} = \frac{1}{3} \sqrt{2I_1^2 - 6I_2} \quad (3.36)$$

Sendo  $I_1$  e  $I_2$ , respectivamente, o primeiro e o segundo invariantes de tensões, dados pela Equação (3.37) e (3.38).

$$I_1 = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} \quad (3.37)$$

$$I_2 = \sigma_{xx}\sigma_{yy} - \sigma_{xy}^2 \quad (3.38)$$

A constante  $K$  é uma propriedade do material que depende da taxa entre a resistência a compressão biaxial e uniaxial do concreto,  $\beta$ , calculado através da Equação (3.39).

$$K = \sqrt{2} \frac{(\beta - 1)}{(2\beta - 1)} \quad (3.39)$$

Segundo Cervera *et al.* (1996), valores típicos para concreto são:  $\beta = 1,16$  e  $K = 0,171$ .

Os limites de dano iniciais, são obtidos, conforme as Equações (3.40) e (3.41).

$$r_0^+ = \frac{f_t}{\sqrt{E}} \quad (3.40)$$

$$r_0^- = \sqrt{\sqrt{3} K \left( \frac{-f_{c0}}{3} \right) + \frac{\sqrt{2}}{3} f_{c0}} \quad (3.41)$$

As variáveis de dano  $d^+$  e  $d^-$ , são definidas, respectivamente, de acordo com as funções exponenciais das Equações (3.42) e (3.43).

$$d^+ = 1 - \frac{r_0^+}{r^+} e^{A^+ \left( 1 - \frac{r^+}{r_0^+} \right)} \quad (3.42)$$

$$d^- = 1 - \frac{r_0^-}{r^-} (1 - A^-) - A^- e^{B^- \left( 1 - \frac{r^-}{r_0^-} \right)} \quad (3.43)$$

Onde  $A^-$  e  $B^-$  são parâmetros de entrada do modelo que caracterizam o endurecimento e amolecimento do concreto a compressão, e  $A^+$  é um parâmetro calculado através do equacionamento da energia de fratura do material por unidade de comprimento característico  $l_{ch}$  com a integral de tempo de dissipação, atendendo a Equação (3.44).

$$\frac{1}{A^+} = \frac{1}{2\bar{H}^+} \left( \frac{1}{l_{ch}} - \bar{H}^+ \right) \geq 0 \quad (3.44)$$

Sendo  $\bar{H}^+$  calculado de acordo com a Equação (3.45).

$$\bar{H}^+ = \frac{(f_t)^2}{2EG_f^+} \quad (3.45)$$

Onde  $E$  representa o módulo de elasticidade, e  $G_f^+$  a energia de fratura (tração) do material.

As definições dos limites elásticos em tração  $\bar{\Phi}^+(\bar{\tau}^+, r^+)$  e em compressão  $\bar{\Phi}^-(\bar{\tau}^-, r^-)$ , e da tensão nominal  $\bar{\sigma}$  permanecem válidas conforme as Equações (3.46), (3.47) e (3.48).

$$\bar{\Phi}^+(\bar{\tau}^+, r^+) = \bar{\tau}^+ - r^+ \leq 0 \quad (3.46)$$

$$\bar{\Phi}^-(\bar{\tau}^-, r^-) = \bar{\tau}^- - r^- \leq 0 \quad (3.47)$$

$$\bar{\sigma} = (1 - d^+) \bar{\sigma}^+ + (1 - d^-) \bar{\sigma}^- \quad (3.48)$$

O fluxograma para o cálculo do dano de Cervera *et al.* (1996) é ilustrado na Figura 3.11.

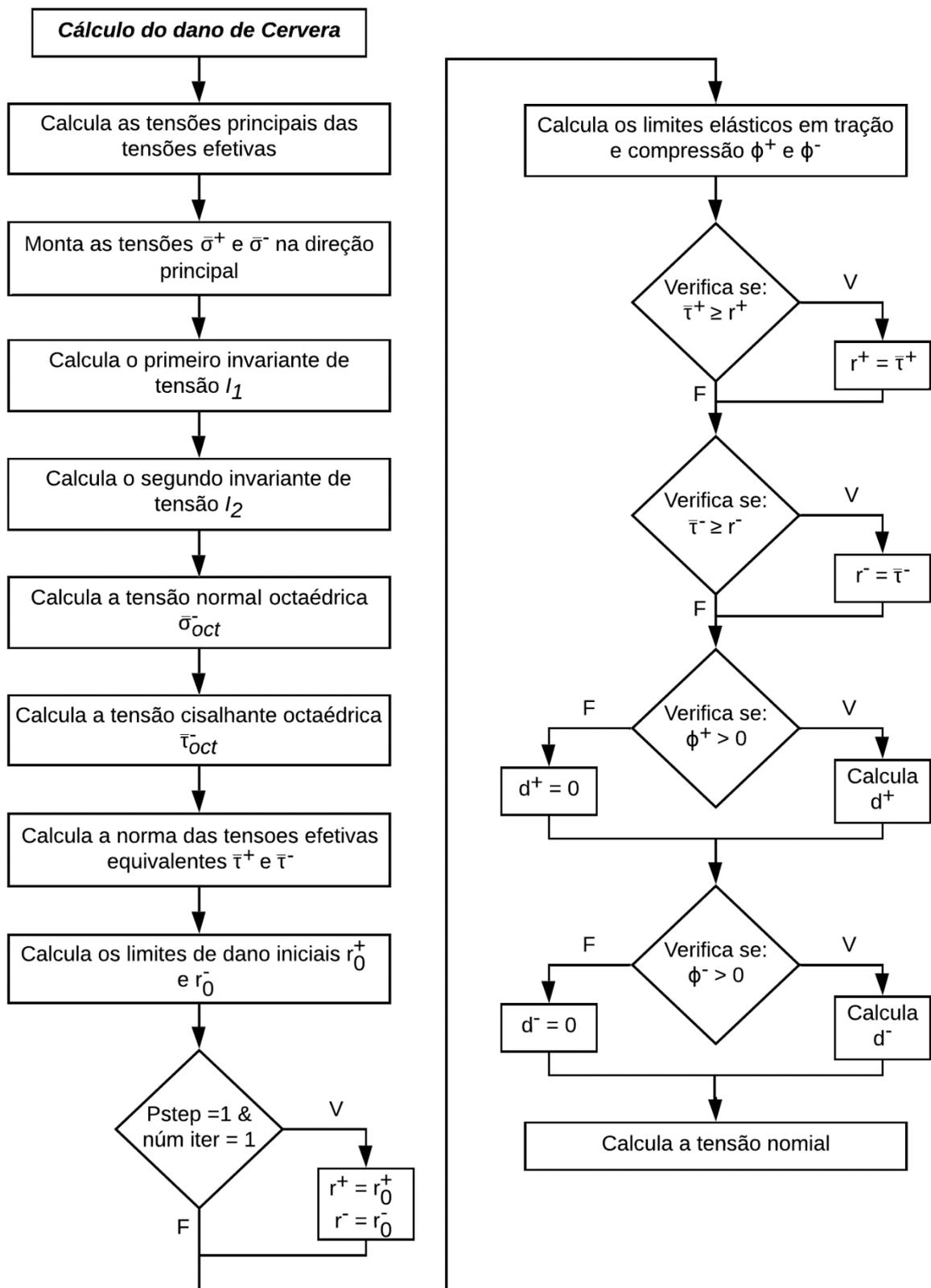


Figura 3.11 – Fluxograma do modelo de dano de Cervera *et al.* (1996). Fonte: Autor, 2019.

### 3.9. Cálculo do vetor de forças desequilibradas da estrutura

De posse das tensões nominais  $\boldsymbol{\sigma}$ , pode-se calcular o vetor de forças desequilibradas da estrutura conforme a Equação (3.49).

$$\mathbf{P}_{\text{desq}} = \mathbf{P}_{\text{step}} - \mathbf{P}_{\text{int}} \quad (3.49)$$

Onde  $\mathbf{P}_{\text{step}}$  é o vetor passo de carga e  $\mathbf{P}_{\text{int}}$  é o vetor de forças internas da estrutura montado a partir do vetor de forças internas de cada elemento finito  $\mathbf{p}_{\text{int}}$ , conforme a Equação (3.50).

$$\mathbf{p}_{\text{int}} = \sum_{i=1}^{np} \sum_{j=1}^{np} \mathbf{B}(\xi_i, \eta_i)^T \boldsymbol{\sigma} |J| w_i w_j t \quad (3.50)$$

Onde,  $\mathbf{B}$  é a matriz de compatibilidade deformação-deslocamento,  $\boldsymbol{\sigma}$  o vetor das tensões nominais obtidas por meio do modelo constitutivo de dano conforme a Equação (3.51),  $|J|$  é o determinante da matriz Jacobiana,  $t$  é a espessura do elemento, “ $np$ ” representa o número de pontos de Gauss e “ $w$ ” representa o peso do respectivo ponto de Gauss.

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{xy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.51)$$

### 3.10. Atualização dos parâmetros de controle do Newton-Raphson

A última etapa da iteração é a atualização dos parâmetros de controle do Newton-Raphson. Isto está relacionado com o critério de parada (ou critério de convergência) de forma que se um dos parâmetros de controle for maior ou igual que a tolerância adotada o processo de iteração é repetido, se não a iteração é finalizada significando que houve convergência.

Nesta implementação foram adotados dois critérios: convergência das forças e convergência dos deslocamentos. Sendo que a tolerância (ou erro) admitida foi de  $1,0 \times 10^{-5}$  para as forças e  $1,0 \times 10^{-7}$  para os deslocamentos.

Assim, após o cálculo das forças desequilibradas o programa calcula a Norma Euclidiana do vetor de forças desequilibradas e do vetor de deslocamentos de acordo com as Equações (3.52) e (3.53).

$$P_{control} = norma(\mathbf{P}_{desq}) = \sqrt{\sum_{i=1}^n |P_{desq\ i}|^2} \quad (3.52)$$

$$D_{control} = norma(\mathbf{D}) = \sqrt{\sum_{i=1}^n |D_i|^2} \quad (3.53)$$

De posse dos dois parâmetros o programa realiza as comparações com os valores de tolerância. Não havendo convergência, o programa finaliza a execução das iterações quando o número de iterações for igual ao valor máximo de iterações determinado pelo usuário.

### ***3.11. Arquivo de saída***

Concluída as etapas de processamento da análise, o programa escreve o arquivo de saída no padrão do pós-processador do *GiD*. Este arquivo contém os dados de deslocamentos, reações de apoio, tensões, deformações e dano. A Figura 3.12 ilustra uma parte do arquivo de saída onde é possível verificar os valores dos deslocamentos em uma malha com 9 nós, e os valores de dano da malha de 4 elementos nos 4 pontos de Gauss por elemento.

```

GiD Post Results File 1.0
# Solver: analiseDano2D

Result "Displacements" "analiseDano2D" 50  Vector
OnNodes
# ComponentNames "X-displacement", "Y-displacement"
Values
  1      1.2892e-18      -1.6567e-03
  2      2.0709e-04      -1.6567e-03
  3      5.2101e-19      -8.2834e-04
  4      2.0709e-04      -8.2834e-04
  5      0.0000e+00       0.0000e+00
  6      4.1417e-04      -1.6567e-03
  7      2.0709e-04       0.0000e+00
  8      4.1417e-04      -8.2834e-04
  9      4.1417e-04       0.0000e+00
end Values

GaussPoints "Given" ElemType
Quadrilateral
Number of Gauss Points: 4
Natural Coordinates: given
-5.7735e-01 -5.7735e-01
-5.7735e-01  5.7735e-01
 5.7735e-01 -5.7735e-01
 5.7735e-01  5.7735e-01
End GaussPoints

Result "Damage on Elements
Quadrilateral" "AnaliseDano2D" 50
Scalar OnGaussPoints "Given"
# ComponentNames "Damage"
Values
  1  6.5625e-01
    6.5625e-01
    6.5625e-01
    6.5625e-01
  2  6.5625e-01
    6.5625e-01
    6.5625e-01
    6.5625e-01
  3  6.5625e-01
    6.5625e-01
    6.5625e-01
    6.5625e-01
  4  6.5625e-01
    6.5625e-01
    6.5625e-01
    6.5625e-01
end Values

```

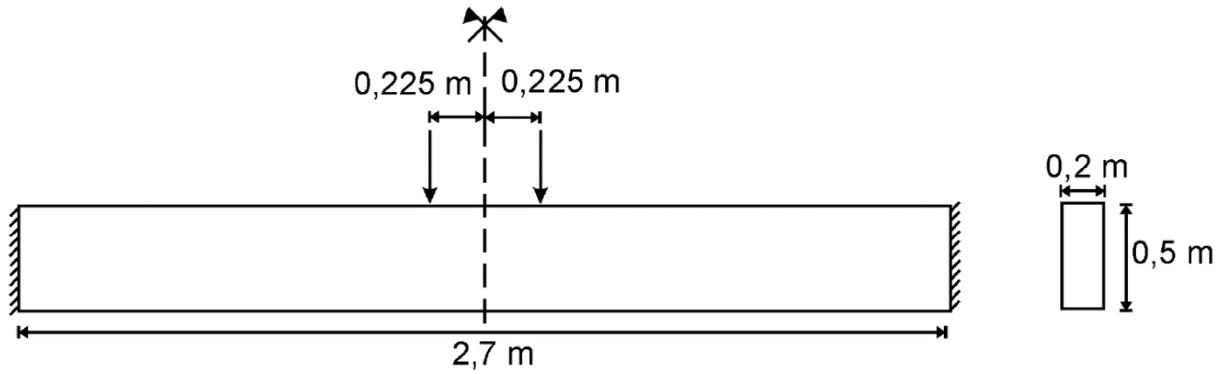
Figura 3.12 - Parte de um arquivo de saída escrito no padrão do *GiD*. Fonte: Autor, 2019.

## 4. EXEMPLOS DE VERIFICAÇÃO

Neste capítulo são apresentados exemplos de verificação nos quais demonstram-se os resultados do programa. Primeiramente, é apresentado um exemplo de uma viga-parede realizado por Proença *et al.* (2002) para validação do programa. Após, tem-se uma simulação de uma seção de barragem de concreto genérica e de uma seção de barragem real.

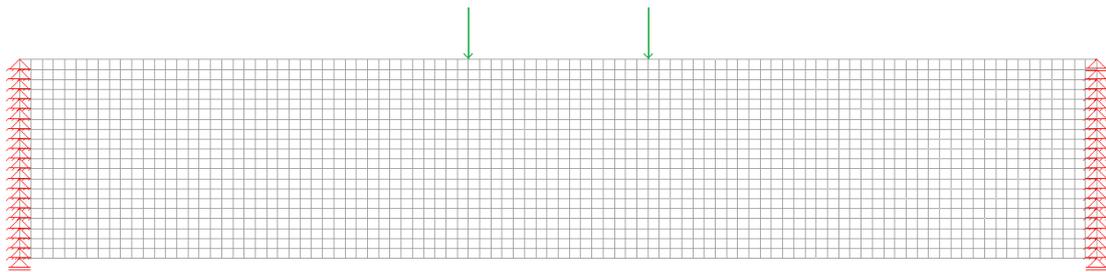
### 4.1. Viga-parede

Este problema foi apresentado por Proença *et al.* (2002), no qual uma viga parede em concreto simples foi submetida a um carregamento concentrado simétrico aplicado a 0,225 m do eixo de simetria. A viga possui 2,70 m de comprimento por 0,50 m de largura e 0,20 m de espessura, conforme a Figura 4.1.



**Figura 4.1 – Geometria da viga-parede. Fonte: Proença *et al.*, 2002.**

Foi utilizada uma malha de 96 por 20 elementos para modelar a viga. A Figura 4.2 ilustra a malha de elementos finitos e condições de contorno.



**Figura 4.2 – Malha de elementos finitos e condições de contorno da viga-parede. Fonte: Autor, 2019.**

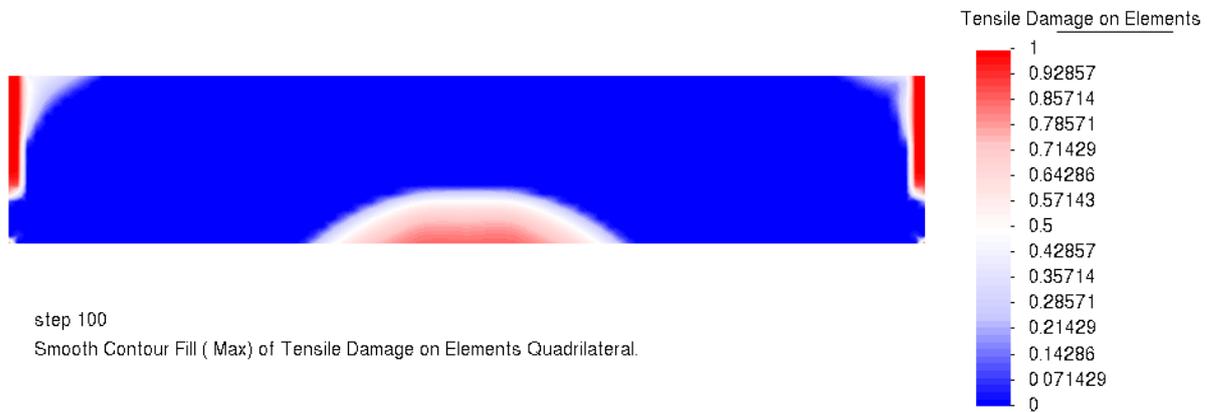
Os parâmetros adotados nas análises estão descritos no Quadro 4.1.

**Quadro 4.1 – Parâmetros da análise para o exemplo de uma viga parede.**

| Propriedades do material                                 |                            |
|--|----------------------------|
| Módulo de elasticidade $E$                               | 24700000 kN/m <sup>2</sup> |
| Coefficiente de Poisson $\nu$                            | 0,20                       |
| Espessura $t$  | 0,20 m                     |
| Tensão limite de tração $f_t$                            | 2,5 MPa                    |
| Tensão limite de proporcionalidade à compressão $f_{c0}$ | 18,0 MPa                   |
| Energia de fratura $G_f$                                 | 75 N/m                     |
| Parâmetro de compressão $A'$                             | 1,00                       |
| Parâmetro de compressão $B'$                             | 0,89                       |

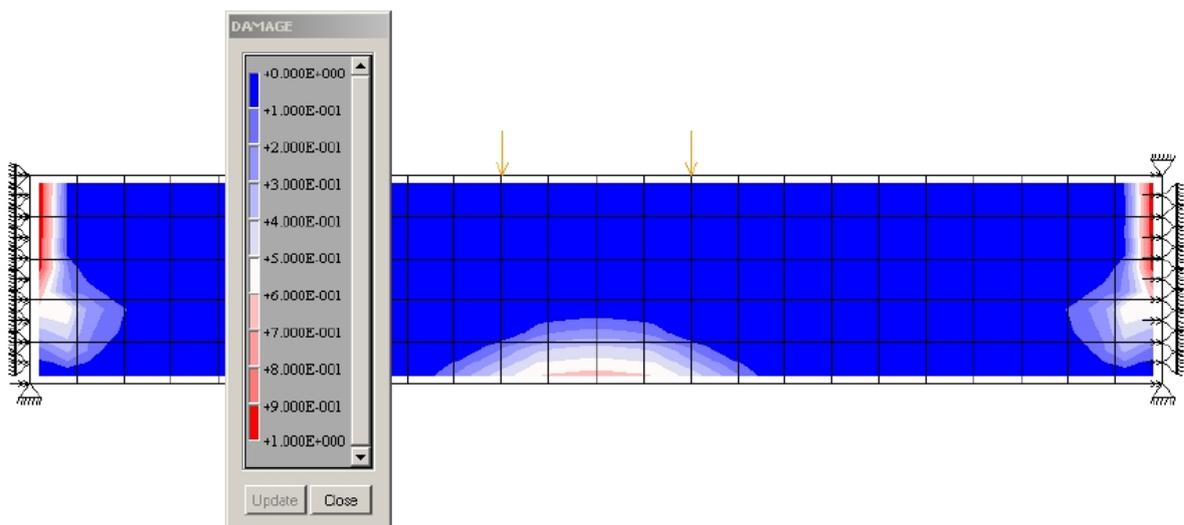
**Fonte: Autor, 2019.**

O resultado da distribuição do dano considerando o modelo de dano de Cervera *et al.* (1996) é mostrado na Figura 4.3 para a carga de 52 kN.



**Figura 4.3 – Distribuição do dano utilizando o modelo de Cervera et al. (1996) de uma vigaparede. Fonte: Autor, 2019.**

A distribuição do dano para a carga de 52 kN apresentado em Proença *et al.* (2002) é mostrado na Figura 4.4.

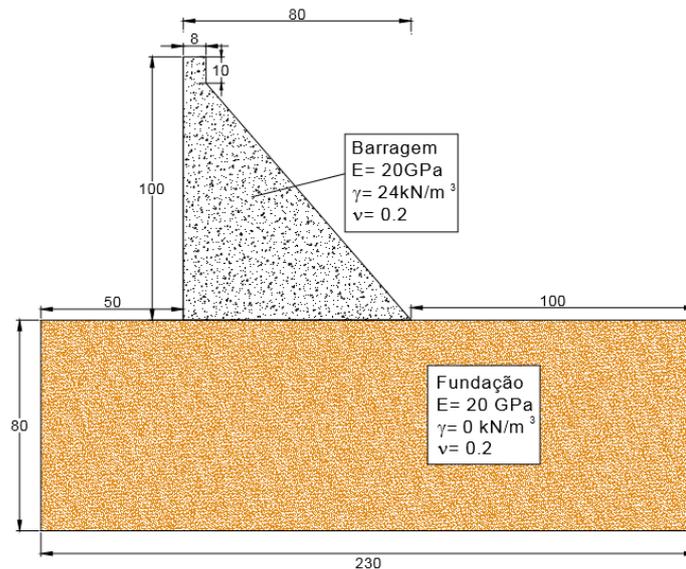


**Figura 4.4 – Distribuição do dano utilizando o modelo de Mazars de uma vigaparede. Fonte: Proença et al., 2002.**

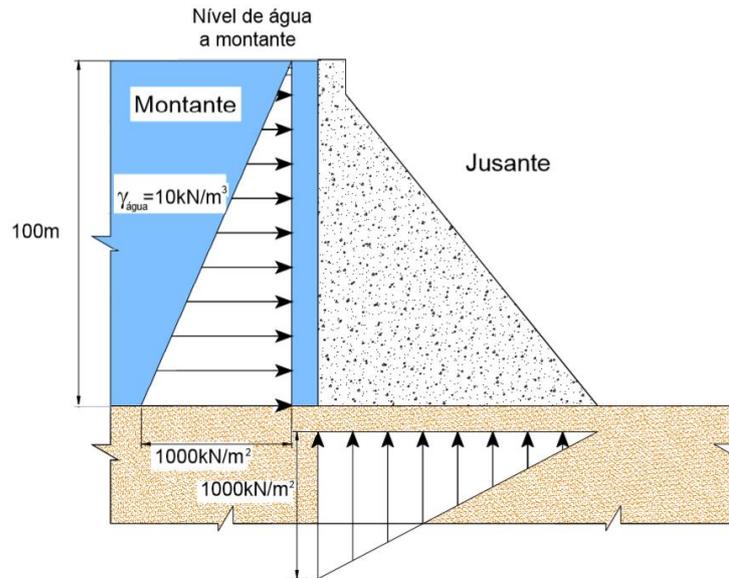
Observa-se que os resultados apresentados são compatíveis aos obtidos por Proença *et al.* (2002). Através deste exemplo é possível validar o programa elaborado em Matlab.

#### 4.2. Seção de uma barragem de concreto

Pinto (2012) realizou uma análise linear estática em uma seção genérica de barragem de concreto utilizando um programa comercial considerando os esforços de peso próprio, de empuxo hidrostático a montante e de subpressão sem sistema de drenagem. A Figura 4.5 ilustra as dimensões da seção da barragem e a Figura 4.6 mostra o carregamento considerado.

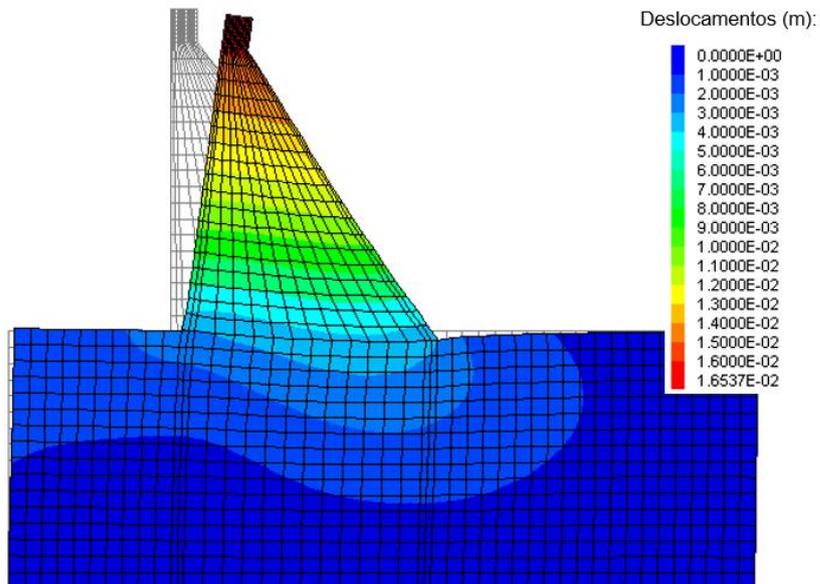


**Figura 4.5 – Seção de uma barragem com dimensões em metros. Fonte: Pinto, 2012.**



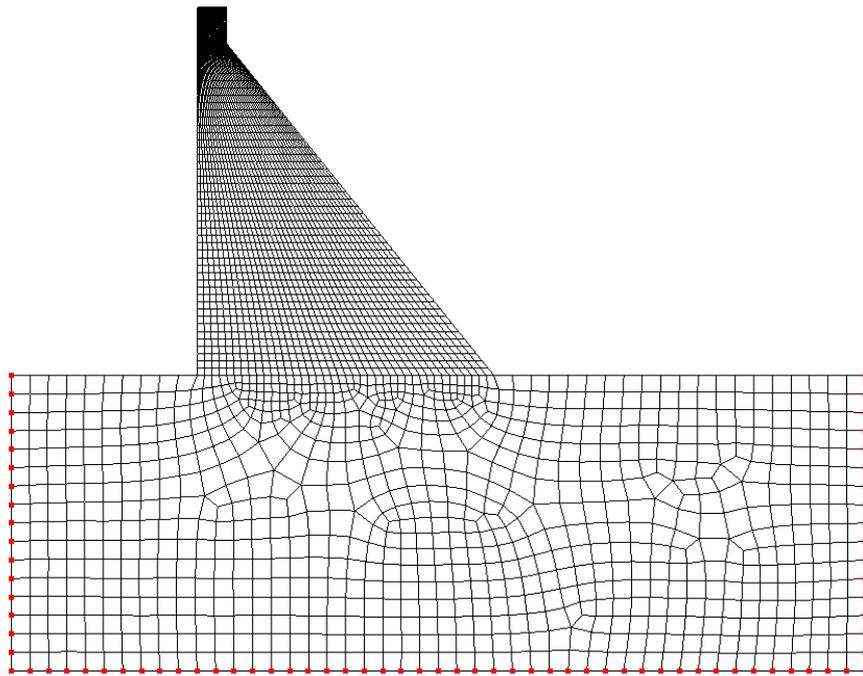
**Figura 4.6 – Diagrama da pressão hidrostática e da subpressão sem sistema de drenagem. Fonte: Pinto, 2012.**

Realizando uma análise linear estática com o programa *SAP 2000*, Pinto (2012) obteve deslocamento máximo de 1,65 cm no topo da barragem, conforme mostra a Figura 4.7.

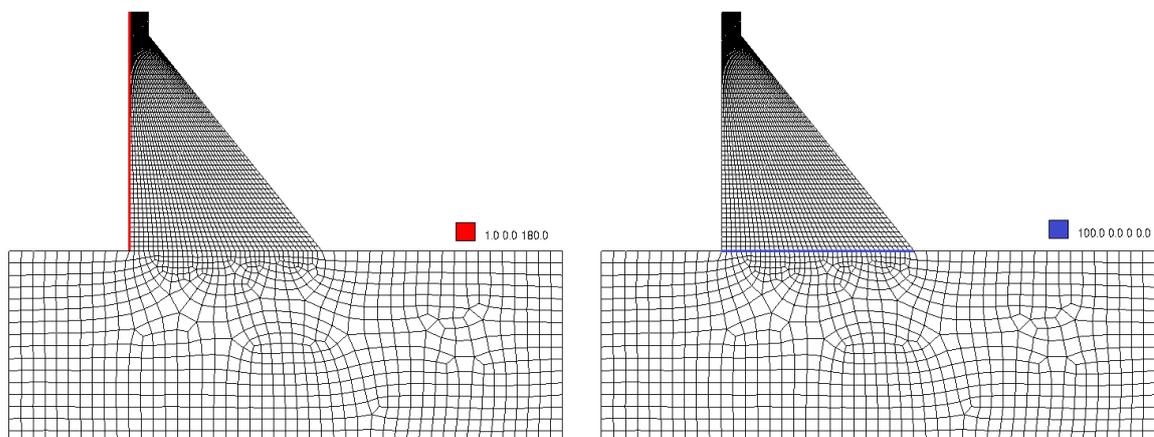


**Figura 4.7 – Deformada com contorno dos deslocamentos utilizando o programa *SAP 2000*. Fonte: Pinto, 2012.**

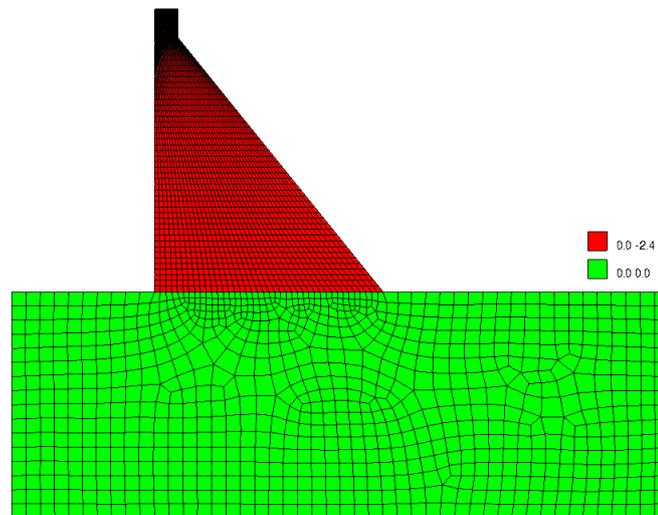
Dessa forma, verificou-se a mesma seção através do programa implementado em *Matlab*, sendo que todas as etapas de pré e pós-processamento foram realizadas utilizando-se o *GiD 14*. A Figura 4.8 mostra a malha de elementos finitos com as restrições adotadas para análise da seção de barragem, a Figura 4.9 mostra as faces dos elementos que possuem cargas devido ao empuxo hidrostático e devido à subpressão. As cargas de corpo estão ilustradas na Figura 4.10.



**Figura 4.8 – Malha e restrições de uma seção de barragem. Fonte: Autor, 2019.**



**Figura 4.9 – Elementos com carga devido ao empuxo hidrostático e carga devido à subpressão. Fonte: Autor, 2019.**



**Figura 4.10 – Elementos com as respectivas cargas de corpo. Fonte: Autor, 2019.**

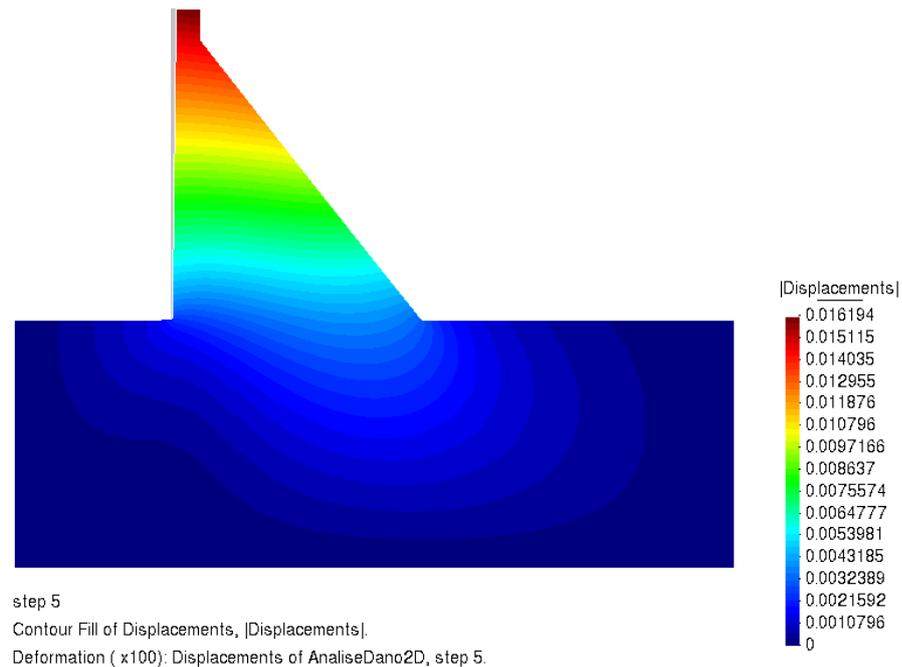
O Quadro 4.2 mostra os parâmetros adotados nas análises. Para a fundação considerou-se material linearmente elástico.

**Quadro 4.2 – Parâmetros da análise para o exemplo de uma seção de barragem.**

| Propriedades do material                                 |                           |
|--|---------------------------|
| Módulo de elasticidade $E$                               | 2000000 tf/m <sup>2</sup> |
| Coefficiente de Poisson $\nu$                            | 0,20                      |
| Espessura $t$  | 1,00 m                    |
| Tensão limite de tração $f_t$                            | 200 tf/m <sup>2</sup>     |
| Tensão limite de proporcionalidade à compressão $f_{c0}$ | 2000 tf/m <sup>2</sup>    |
| Endurecimento $H$  | 0,10 tf/m                 |
| Energia de fratura $G_f$                                 | 150 N/m                   |
| Parâmetro de compressão $A^-$                            | 1,00                      |
| Parâmetro de compressão $B^-$                            | 0,89                      |

**Fonte: Autor, 2019.**

O resultado dos deslocamentos é mostrado na Figura 4.11, sendo o deslocamento máximo de 1,62 cm no topo da barragem, a diferença nos valores de deslocamento máximo se dá por causa do uso do elemento Q4 que tem interpolação linear e portanto é mais rígido que o elementos Q8. Para o carregamento considerado, o dano é igual a zero em todos os elementos para os modelos de dano implementados, significando que a seção analisada está com boa margem de segurança.



**Figura 4.11 – Deformada com contorno dos deslocamentos utilizando o programa implementado em *Matlab*. Fonte: Autor, 2019.**

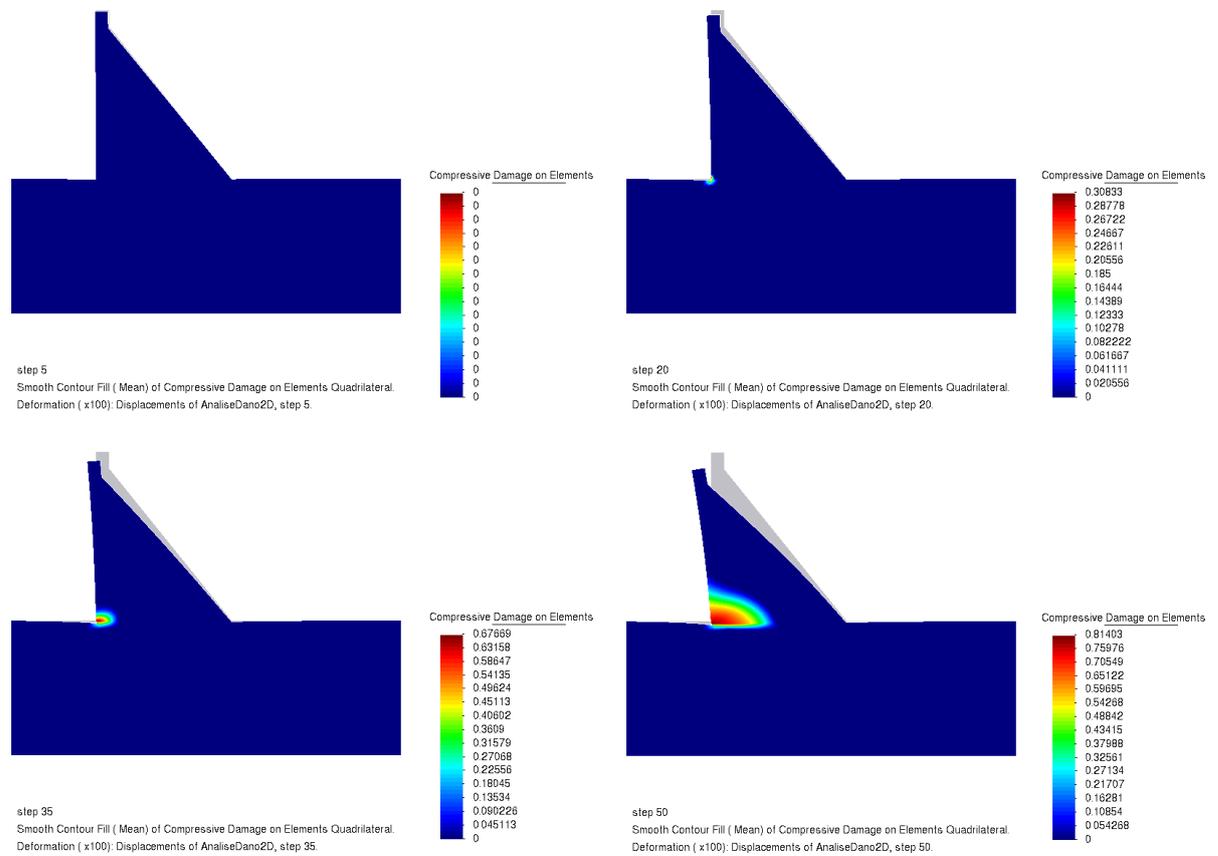
A semelhança das deformadas demonstra que o programa realiza de forma correta a análise linear estática de uma estrutura, pois mesmo que em sua implementação considere-se a danificação, nos casos que o dano é zero o resultado corresponderá a uma análise linear, como neste exemplo.

Logo, para verificação da capacidade do programa calcular a danificação de uma seção de barragem aumentou-se o carregamento.

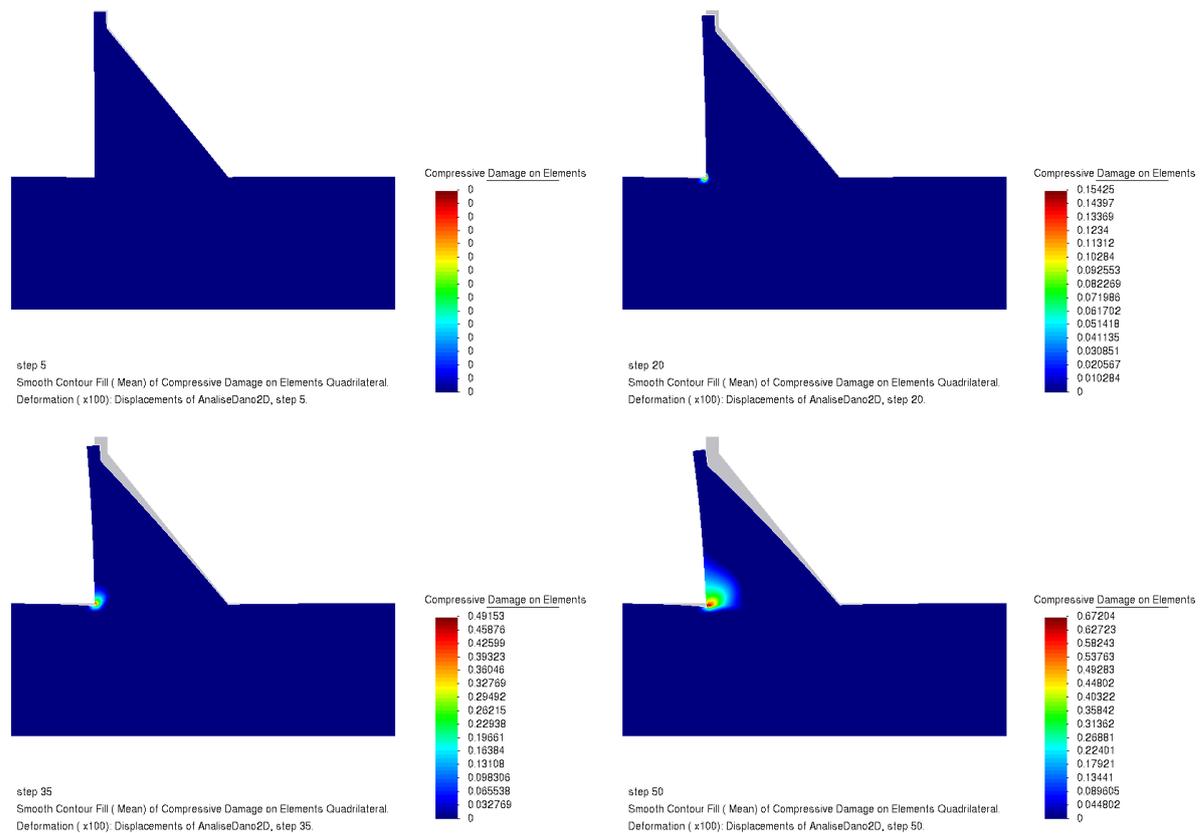
#### 4.2.1. Simulação da danificação de uma seção de barragem

Com intuito de demonstrar a aplicabilidade dos modelos de dano, verificou-se o avanço da zona de danificação em compressão. Para tal aumentou-se o peso da estrutura através da multiplicação do peso próprio por um valor  $F$ , conforme explicado mais a frente.

O avanço das zonas danificadas à compressão em diferentes passos é mostrado considerando o modelo de dano isotrópico com amolecimento linear (Figura 4.12) e o modelo de dano de Cervera *et al.* (Figura 4.13). Não houve dano à tração. As imagens são geradas na interface do pós-processador do *GiD 14*.



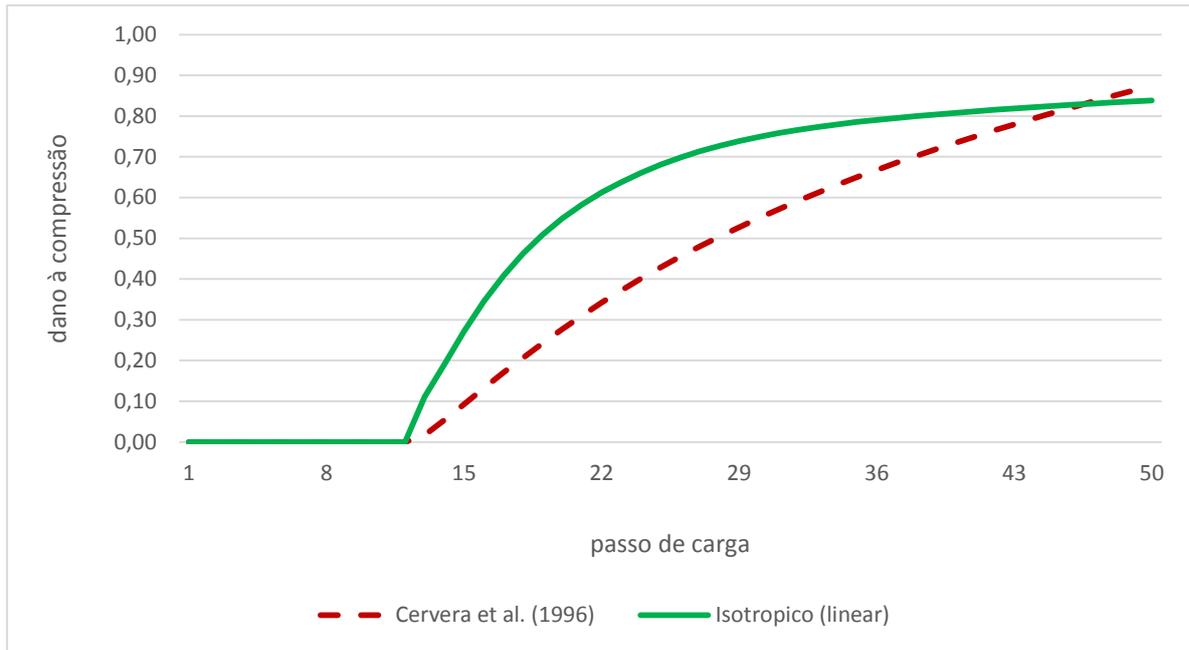
**Figura 4.12 – Avanço da zona de danificação em compressão considerando o modelo de dano isotrópico (linear). Fonte: Autor, 2019.**



**Figura 4.13 – Avanço da zona de danificação em compressão considerando o modelo de dano de Cervera *et al.* (1996). Fonte: Autor, 2019.**

Os resultados mostram que o programa é capaz de simular o comportamento do dano à compressão bem como ilustrar sua evolução, sendo que no modelo de dano isotrópico com amolecimento linear a propagação da danificação da estrutura se deu de forma gradual e atingiu mais elementos a partir do ponto de dano máximo; já no modelo de dano de Cervera *et al.* (1996) a propagação da danificação da estrutura também ocorreu gradualmente a partir do ponto de dano máximo, porém a região danificada ficou mais contida se comparada ao primeiro.

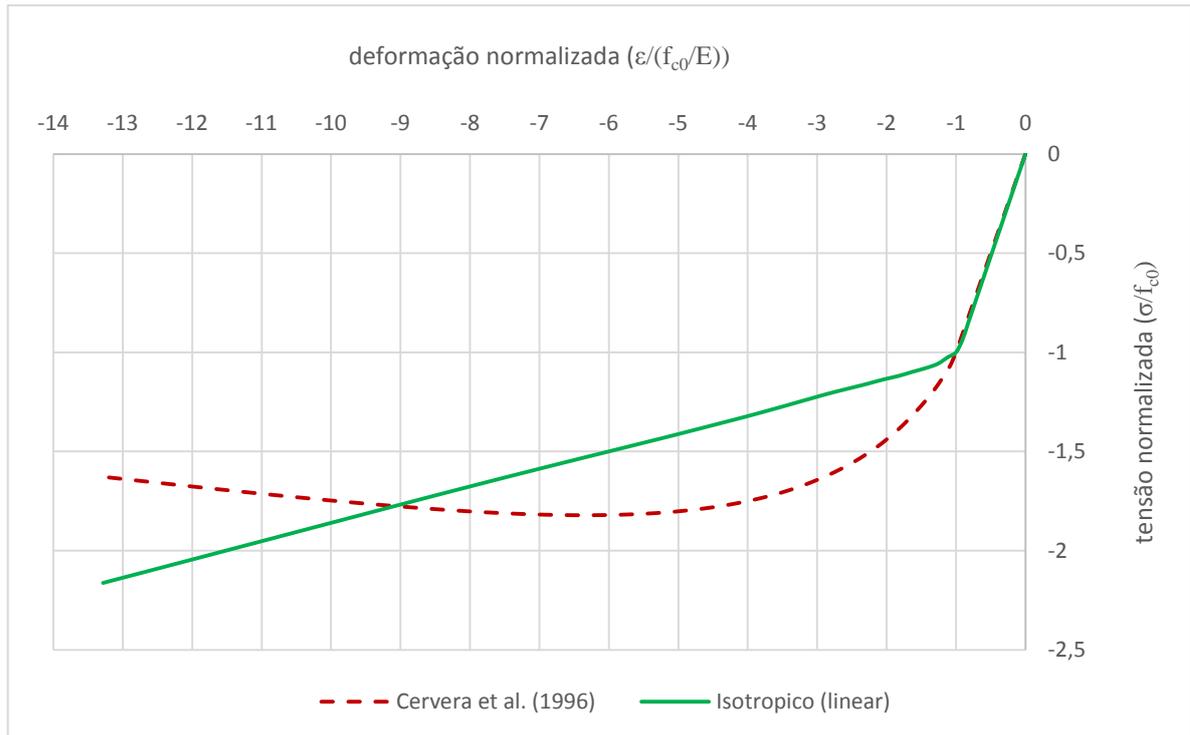
A simulação foi realizada aumentando-se o peso da barragem em 8 vezes e o controle de carga foi distribuído em 50 passos. Em ambos os modelos o início da danificação se deu no passo 13. A Figura 4.14 ilustra a comparação da evolução do dano à compressão no ponto de dano à compressão máximo da seção da barragem (calcanhar) de acordo com os passos de carga.



**Figura 4.14 – Comparação da evolução do dano à compressão máximo numa seção de barragem.**  
**Fonte: Autor, 2019.**

Comparando-se os modelos de dano verifica-se que no modelo de Cervera *et al.* (1996) o dano evolui de forma quase linear à medida que os incrementos de carregamentos são aplicados, já no modelo isotrópico com amolecimento linear o dano evolui mais rápido no começo e depois de certo ponto ele aumenta mais lentamente à medida que os incrementos de carregamentos são aplicados.

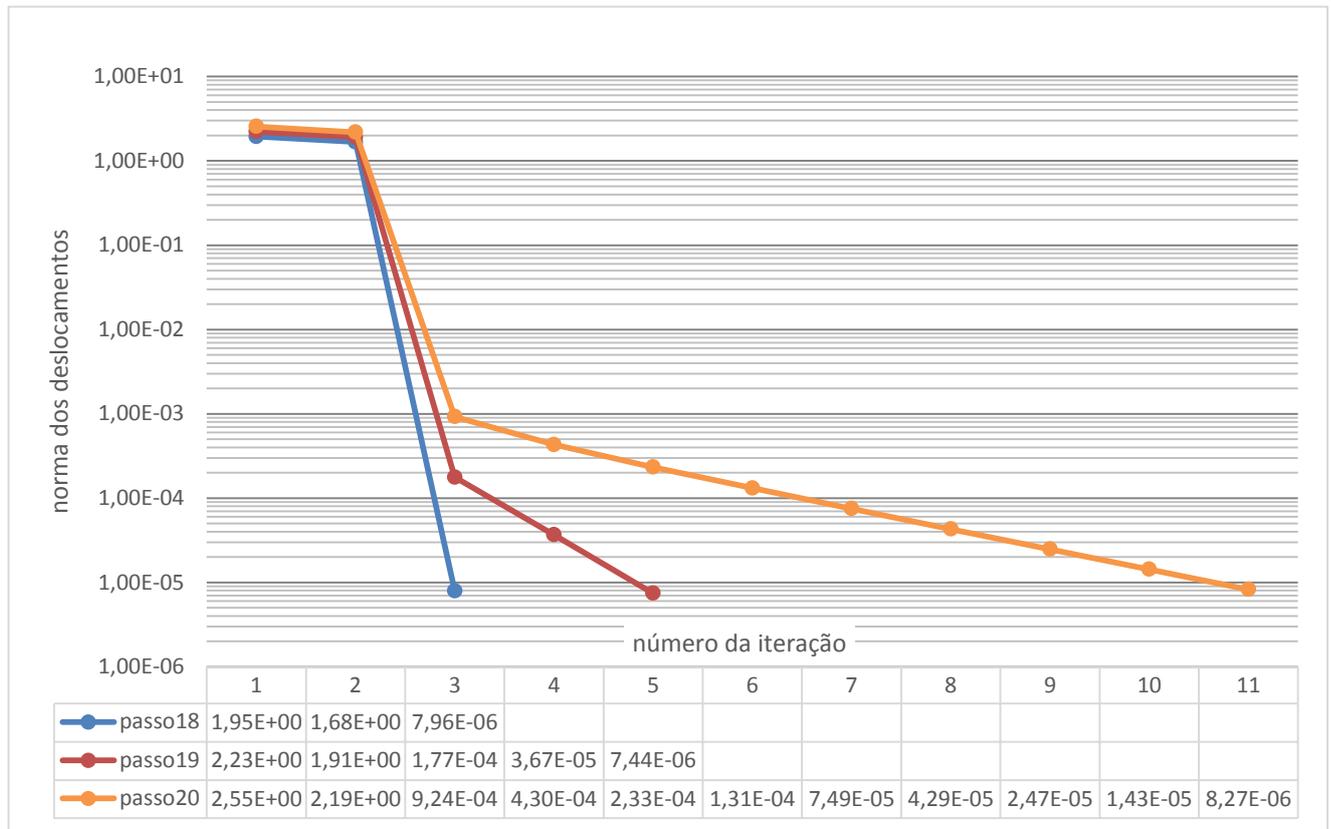
Na Figura 4.15 tem-se a comparação das curvas de tensão-deformação normalizadas para os modelos constitutivos de dano obtidas no ponto de dano máximo da seção da barragem (calcanhar).



**Figura 4.15 – Comparação das curvas de tensão-deformação normalizadas no ponto de dano máximo de uma seção de barragem. Fonte: Autor, 2019.**

Observa-se que no modelo de dano isotrópico com amolecimento linear a tensão aumenta linearmente com a deformação após o regime elástico, e no modelo de dano de Cervera *et al.* (1996) a tensão aumenta até certo ponto e depois diminui lentamente com o aumento da deformação após o regime elástico, este destaca-se por melhor reproduzir o aspecto real da curva tensão-deformação do concreto.

A Figura 4.16 mostra a norma dos deslocamentos para cada iteração dos 3 últimos passos de carga, onde a tolerância admitida foi de  $10^{-5}$ , ou seja, quando a norma dos deslocamentos é menor ou igual a tolerância significa que houve convergência dos resultados.

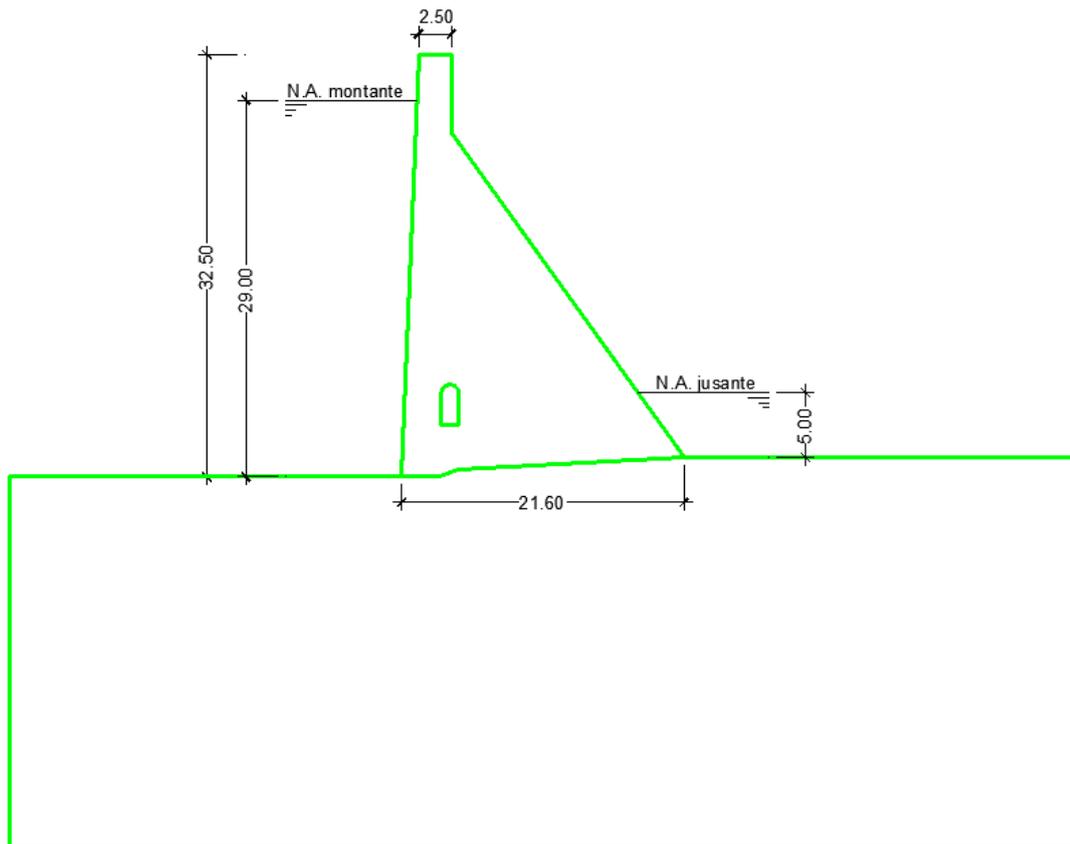


**Figura 4.16 – Norma dos deslocamentos para cada iteração dos 3 últimos passos de carga. Fonte: Autor, 2019.**

Observa-se que a convergência dos resultados se dá de forma linear, mostrando que o algoritmo de Newton-Raphson está funcionando de forma satisfatória.

### **4.3. Seção da barragem de Bariri**

A barragem de Bariri está localizada no Rio Tietê no estado de São Paulo. Analisou-se a seção MD-01 (muro direito 1), representada na Figura 4.17.



**Figura 4.17 – Geometria da seção da barragem de Bariri. Fonte: Autor, 2019.**

O Quadro 4.3 mostra as propriedades do material adotadas.

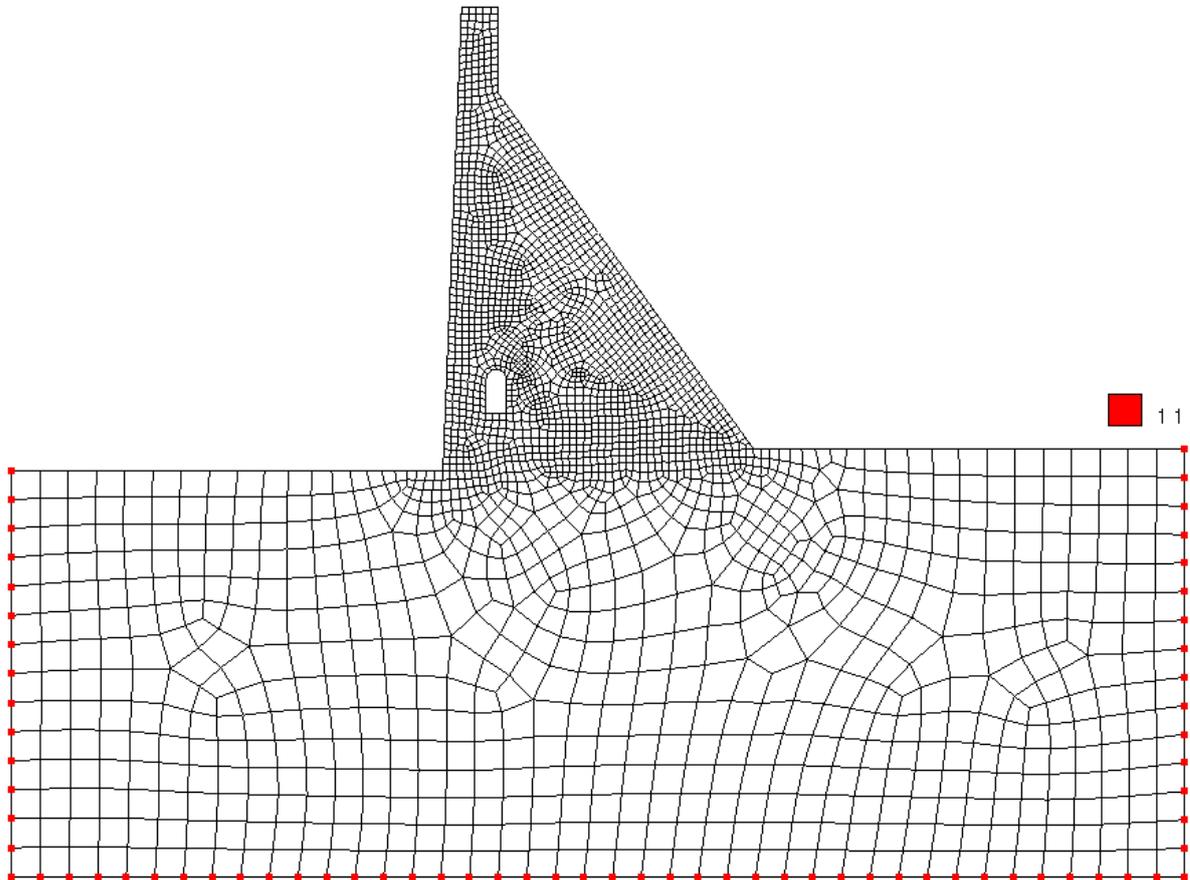
**Quadro 4.3 – Parâmetros da análise para o exemplo da seção da barragem de Bariri.**

| Propriedades do material                                 |                           |
|--|---------------------------|
| Módulo de elasticidade $E$                               | 2000000 tf/m <sup>2</sup> |
| Coefficiente de Poisson $\nu$                            | 0,20                      |
| Espessura $t$  | 1,00 m                    |
| Tensão limite de tração $f_t$                            | 200 tf/m <sup>2</sup>     |
| Tensão limite de proporcionalidade à compressão $f_{c0}$ | 2000 tf/m <sup>2</sup>    |
| Endurecimento $H^-$                                      | 0,10 tf/m                 |
| Amolecimento $H^+$                                       | -0,05 tf/m                |
| Energia de fratura $G_f$                                 | 150 N/m                   |
| Parâmetro de compressão $A^-$                            | 1,00                      |
| Parâmetro de compressão $B^-$                            | 0,89                      |

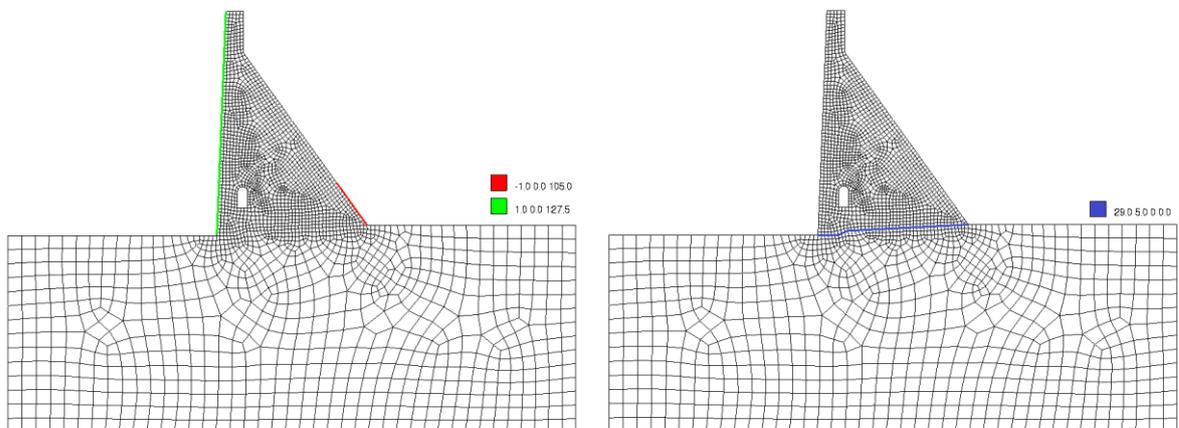
**Fonte: Autor, 2019.**

Dessa forma, verificou-se a seção através do programa implementado em *Matlab*, onde as etapas de pré e pós-processamento foram realizadas utilizando-se o *GiD 14*. A Figura 4.18 mostra a malha de elementos finitos com as restrições. A Figura 4.19 mostra as faces dos

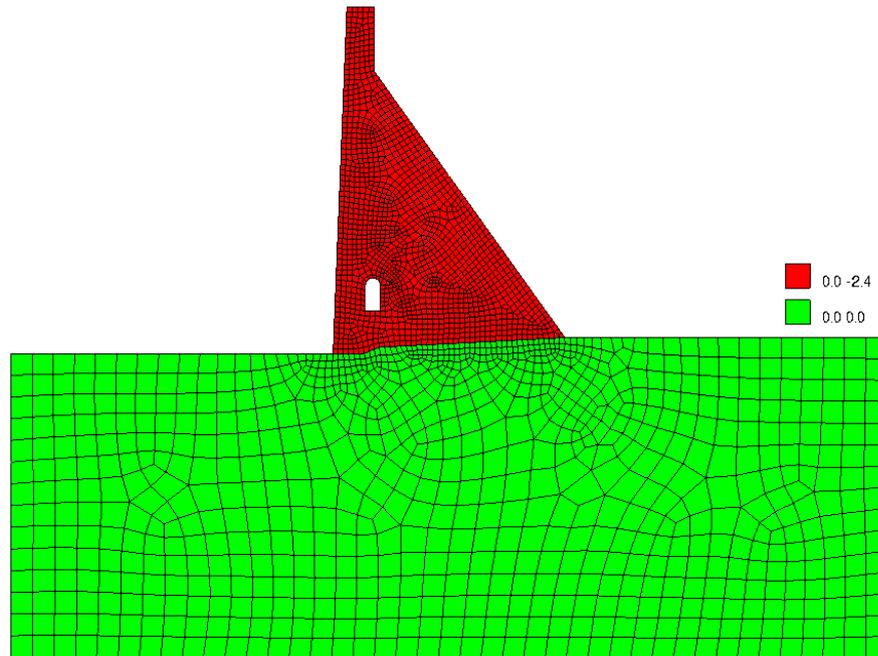
elementos que possuem cargas devido ao empuxo hidrostático e a Figura 4.20 ilustra as cargas de corpo.



**Figura 4.18 – Malha e restrições da seção da barragem de Bariri. Fonte: Autor, 2019.**

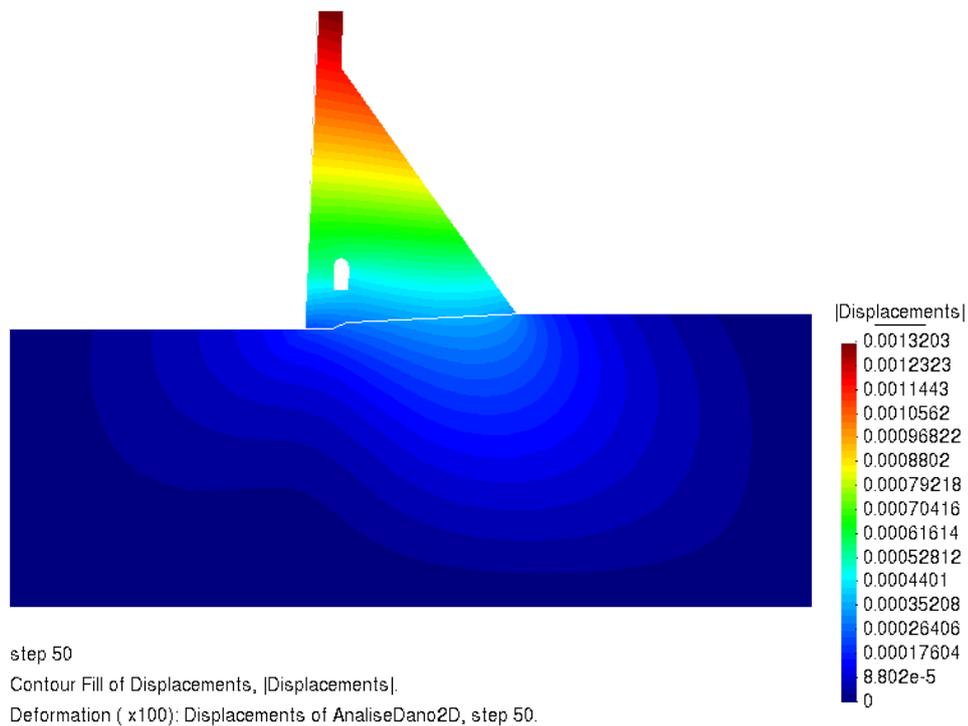


**Figura 4.19 – Elementos com carga devido ao empuxo hidrostático e carga devido à subpressão da seção da barragem de Bariri. Fonte: Autor, 2019.**



**Figura 4.20 – Elementos com as respectivas cargas de corpo da seção da barragem de Bariri.  
Fonte: Autor, 2019.**

O resultado dos deslocamentos é mostrado na Figura 4.21. Para o carregamento considerado o dano é igual a zero em todos os elementos para todos os modelos de dano implementados, significando que a seção analisada está com boa margem de segurança.



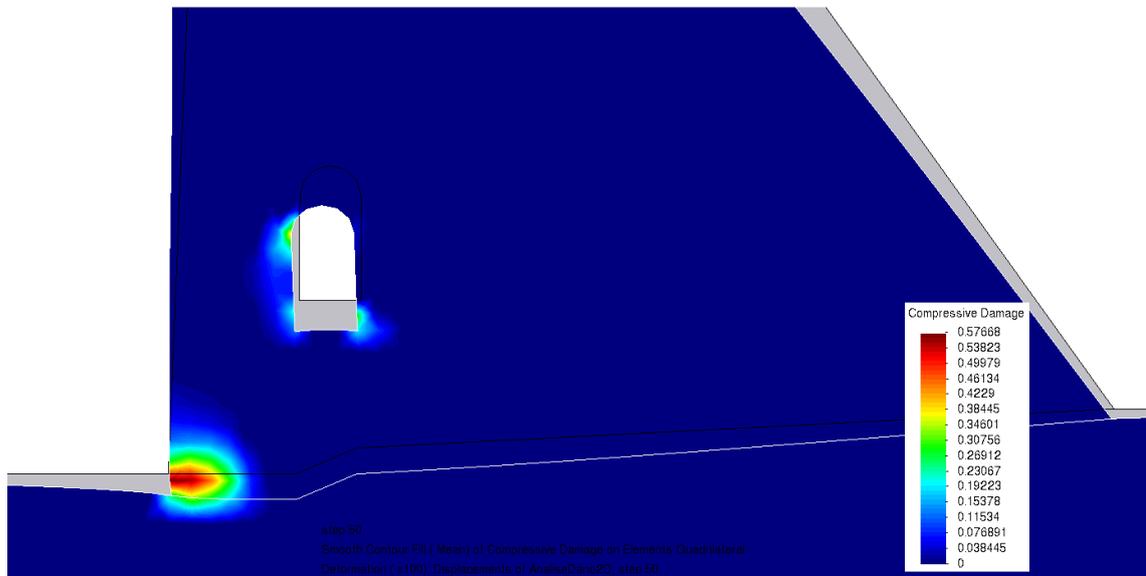
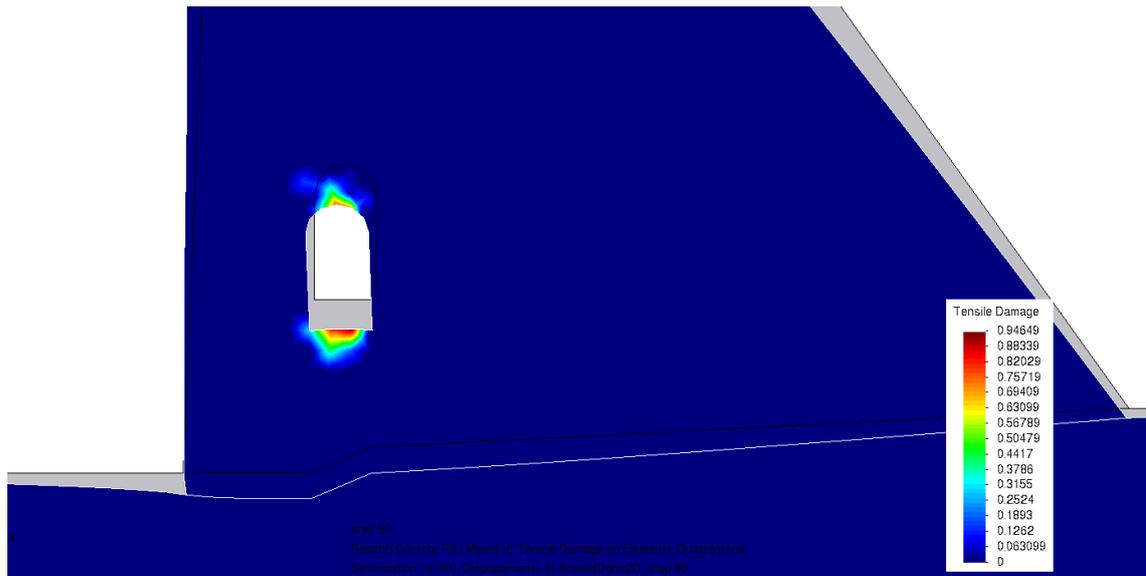
**Figura 4.21 – Deformada com contorno dos deslocamentos utilizando o programa implementado em Matlab da seção da barragem de Bariri. Fonte: Autor, 2019.**

Logo, para verificação da capacidade do programa calcular a danificação de uma seção de barragem aumentou-se o carregamento.

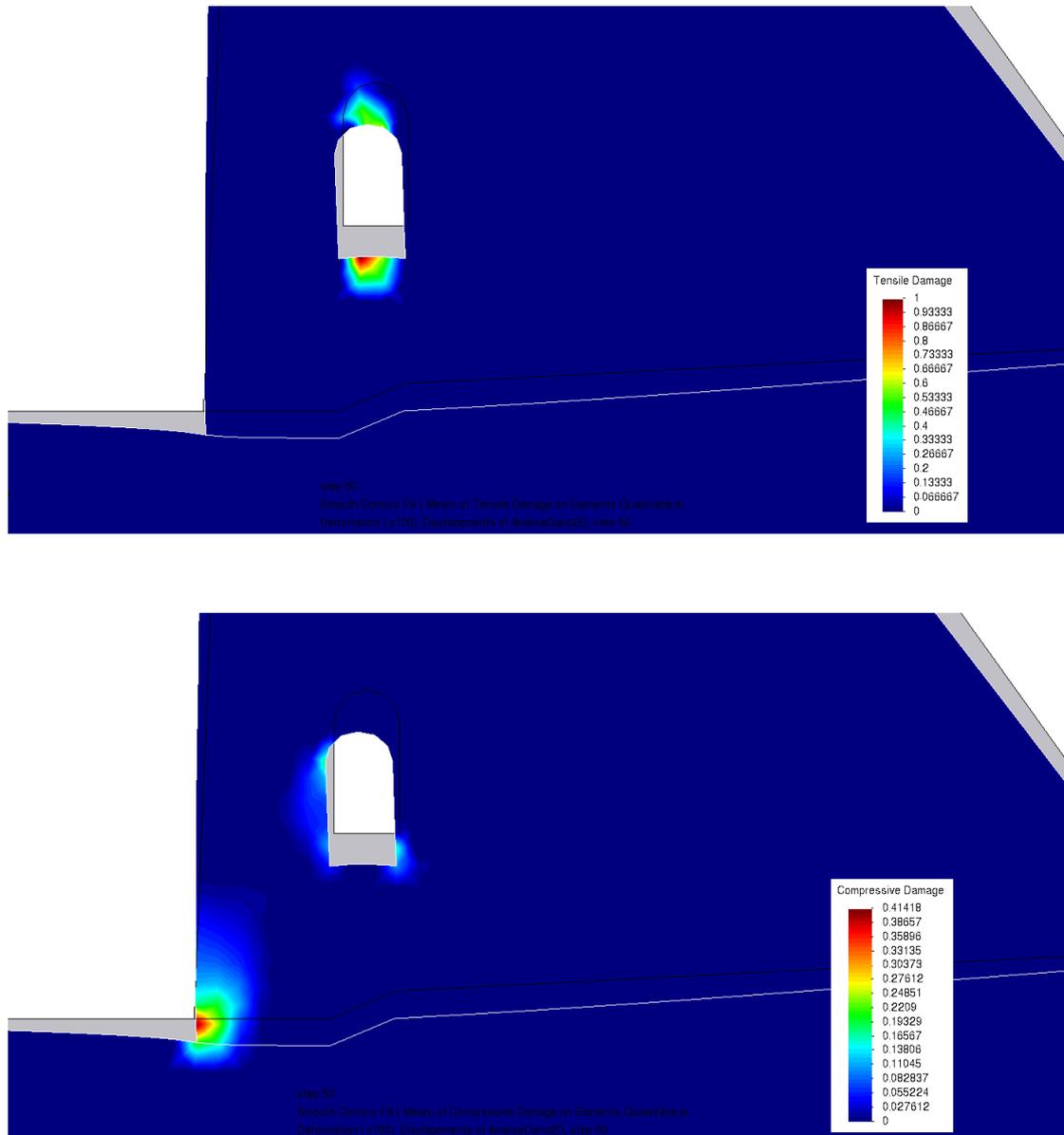
#### 4.3.1. Simulação da danificação da seção da barragem de Bariri

Assim como no exemplo anterior, verificou-se o avanço da zona de danificação, para tal aumentou-se o peso da estrutura através da multiplicação do peso próprio por um valor  $F$ . Os parâmetros adotados nas análises foram os mesmos e considerou-se a fundação como material linearmente elástico.

O resultado do dano à tração e do dano à compressão para o último passo é mostrado considerando o modelo de dano isotrópico com amolecimento linear (Figura 4.22) e o modelo de dano de Cervera *et al.* (Figura 4.23). As imagens são geradas na interface do pós-processador do *GiD 14*.



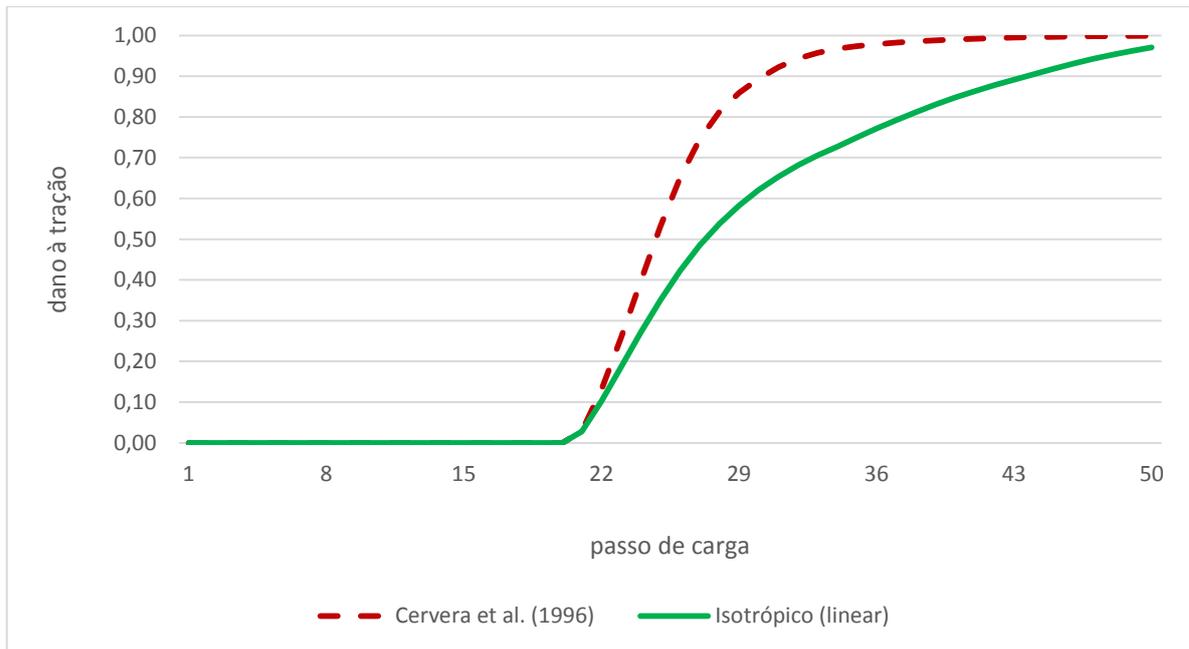
**Figura 4.22 – Dano à tração e dano à compressão considerando o modelo de dano isotrópico (linear) da seção da barragem de Bariri. Fonte: Autor, 2019.**



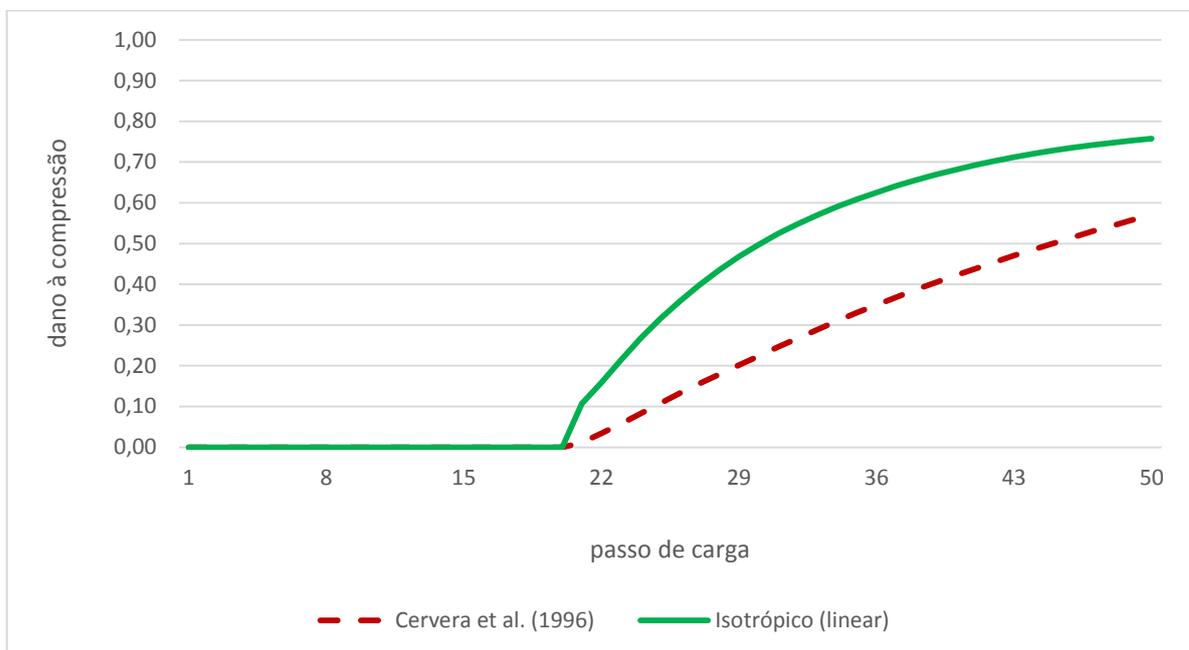
**Figura 4.23 – Dano à tração e dano à compressão considerando o modelo de dano de Cervera *et al.* (1996) da seção da barragem de Bariri. Fonte: Autor, 2019.**

Para seção barragem de Bariri os resultados também foram satisfatórios e mostram que o programa é capaz de simular o comportamento do dano à tração e do dano à compressão simultaneamente em seções de barragens reais.

A simulação foi realizada aumentando-se o peso da barragem em 15 vezes e o controle de carga foi distribuído em 50 passos. Em ambos os modelos o início da danificação se deu no passo 21. A Figura 4.24 ilustra a comparação da evolução do dano à tração no ponto de dano máximo (galeria) e a Figura 4.25 ilustra a comparação da evolução do dano à compressão no ponto de dano máximo (calcanhar).



**Figura 4.24 – Comparação da evolução do dano máximo à tração da seção da barragem de Bariri. Fonte: Autor, 2019.**

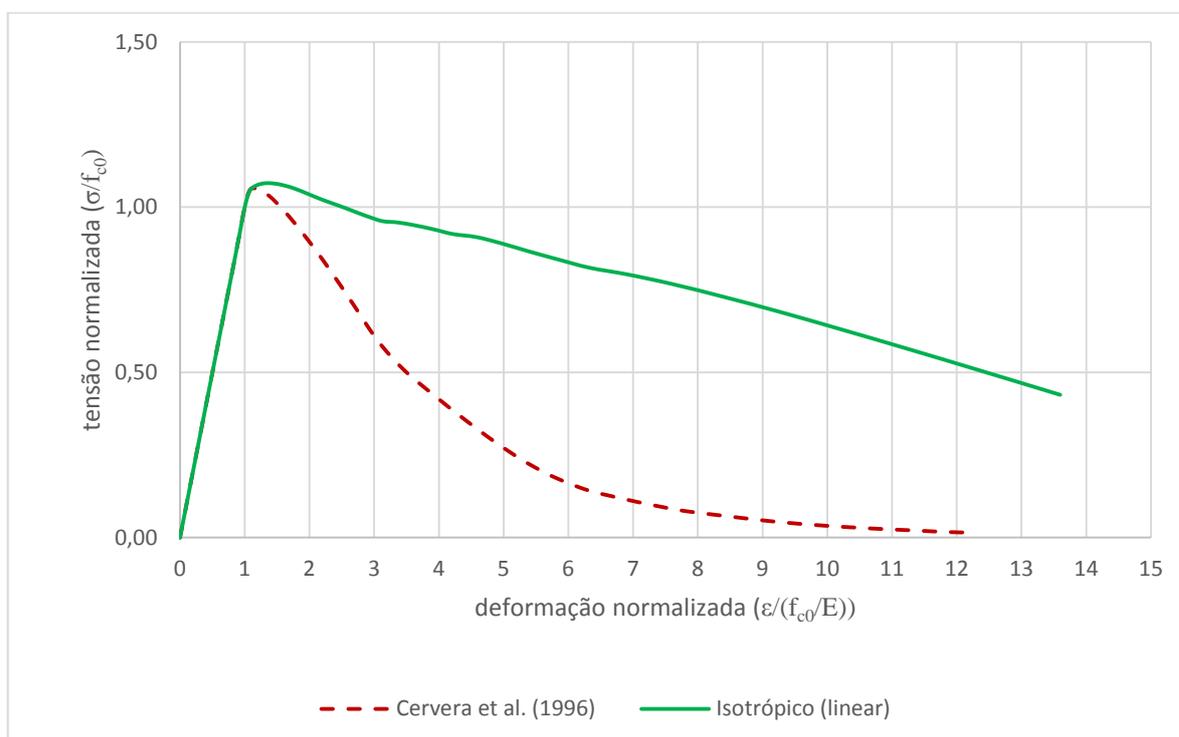


**Figura 4.25 – Comparação da evolução do dano máximo à compressão da seção da barragem de Bariri. Fonte: Autor, 2019.**

A evolução do dano à compressão manteve-se semelhante ao exemplo anterior. Já a configuração da evolução do dano à tração mostrou-se diferente, sendo que no modelo de

Cervera *et al.* (1996) o dano à tração evolui mais rápido e atingiu o valor de 0,99 para o último passo de carga, enquanto o modelo isotrópico com amolecimento linear o valor do dano à tração foi de 0,97 para o último passo de carga.

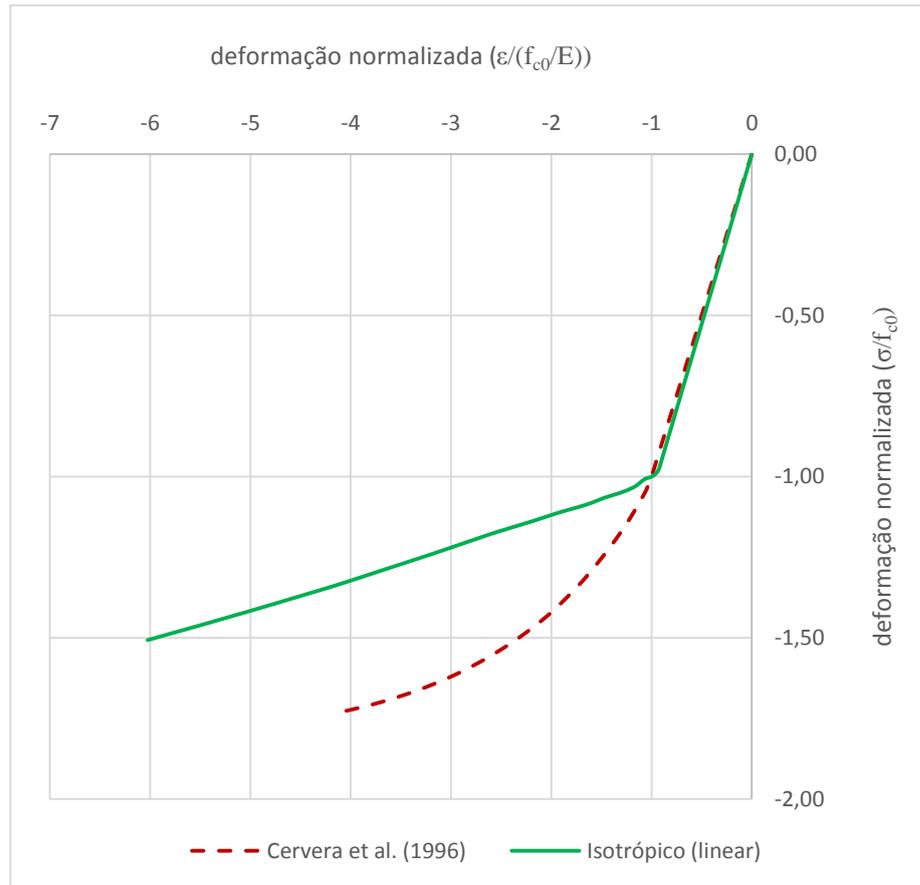
Na Figura 4.26 tem-se a comparação das curvas de tensão-deformação normalizadas para os modelos constitutivos de dano implementados no ponto de dano à tração máximo da seção da barragem (galeria).



**Figura 4.26 – Comparação das curvas de tensão-deformação normalizadas no ponto de dano à tração máximo da seção da barragem de Bariri. Fonte: Autor, 2019.**

Nota-se que o programa é capaz de descrever o comportamento do material de acordo com o modelo constitutivo implementado para o caso de tração, evidenciado pelo decaimento da curva em ambos modelos constitutivos.

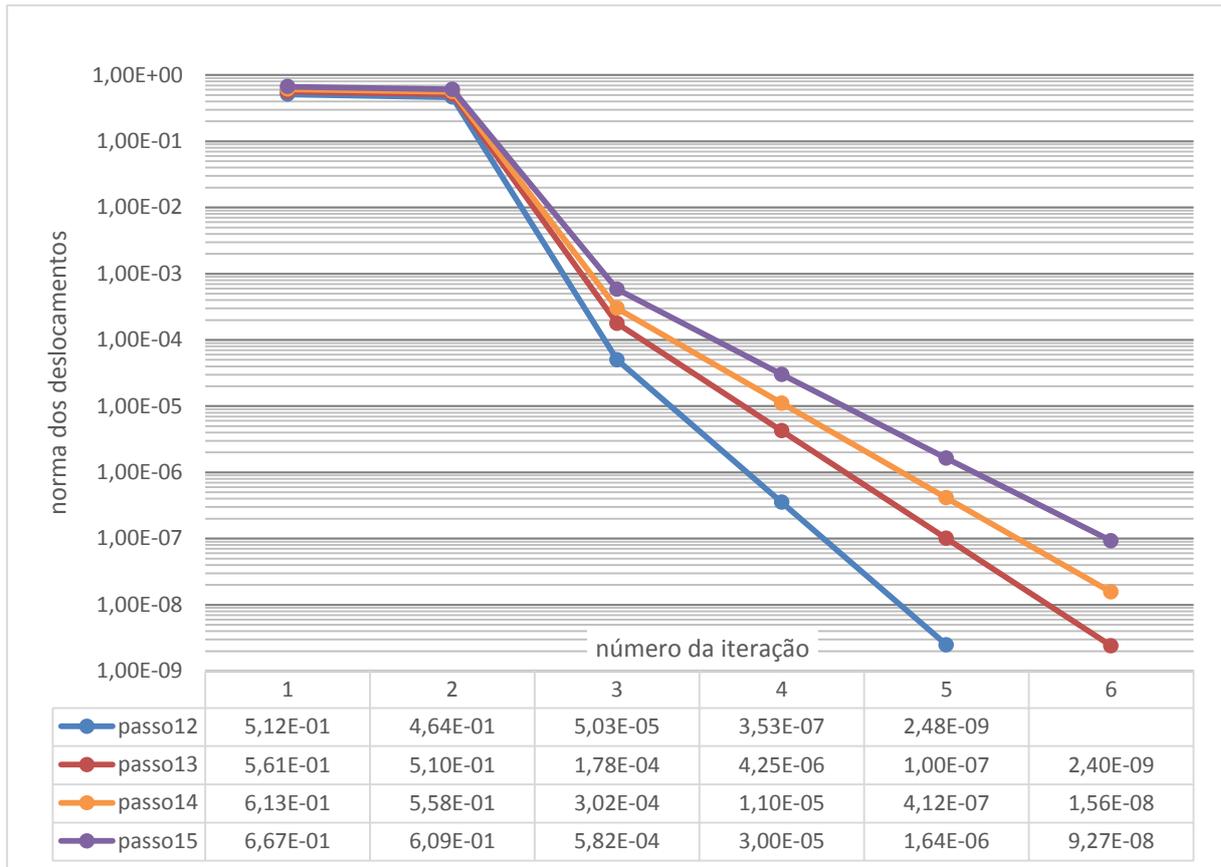
Na Figura 4.27 tem-se a comparação das curvas de tensão-deformação normalizadas para os modelos constitutivos de dano implementados no ponto de dano à compressão máximo da seção da barragem (calcanhar).



**Figura 4.27 – Comparação das curvas de tensão-deformação normalizadas no ponto de dano à compressão máximo da seção da barragem de Bariri. Fonte: Autor, 2019.**

Observa-se que a configuração das curvas tensão versus deformação para o caso de compressão manteve-se semelhante ao exemplo anterior, mesmo o dano à compressão não ter atingido valores próximos ao máximo.

A Figura 4.28 mostra a norma dos deslocamentos para cada iteração de 4 passos de carga, onde a tolerância admitida foi de  $10^{-7}$ , ou seja, quando a norma dos deslocamentos é menor ou igual a tolerância significa que houve convergência dos resultados.



**Figura 4.28 – Norma dos deslocamentos para cada iteração de 4 passos de carga. Fonte: Autor, 2019.**

Observa-se que a convergência dos resultados é atingida com poucas iterações, mostrando que o algoritmo de Newton-Raphson está funcionando de forma satisfatória mesmo em um exemplo de seção de barragem real.

## 5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

### 5.1. Conclusão

Este trabalho teve como objetivo a análise dos mecanismos de dano em barragens de concreto utilizando dois modelos constitutivos de dano: o modelo isotrópico com amolecimento linear e o modelo de Cervera *et al.* (1996). Para tal, foi elaborado um programa em linguagem Matlab e utilizado o Método de Elementos Finitos.

De acordo com os resultados o programa é capaz de realizar a análise de dano de estruturas bidimensionais, uma vez que seu código foi implementado com o elemento finito Q4. Foi utilizado Método de Newton-Raphson que realiza as iterações para geração da curva não linear força versus deslocamento.

Avaliando os modelos implementados pode-se concluir que ambos apresentaram bons resultados na análise de dano (tração e compressão) de seção de barragens, uma vez que eles foram capazes de mostrar as regiões de danificação e a propagação da mesma bem como descrever o comportamento do material através das curvas de tensão *versus* deformação. Neste ponto destaca-se o modelo de dano de Cervera *et al.* (1996) que melhor reproduziu o aspecto real da curva tensão-deformação do concreto.

Para simular a danificação aumentou-se o peso próprio das estruturas, a Tabela 5.1 mostra a comparação desses dados para as duas seções analisadas. Verifica-se que elas estão com boa margem de segurança, sendo que a barragem de Bariri, por exemplo, suportaria 6 vezes seu peso sem danificar.

**Tabela 5.1 – Fatores de multiplicação do peso próprio.**

| Seção              | Modelo de dano                   | Fator de multiplicação do peso próprio |                  |
|--------------------|----------------------------------|--|------------------|
|                    |                                  | Início da danificação                  | Total da análise |
| Barragem genérica  | isotrópico (amolecimento linear) | 1,92                                   | 8,0              |
|                    | Cervera et al. (1996)            | 1,92                                   | 8,0              |
| Barragem de Bariri | isotrópico (amolecimento linear) | 6,0                                    | 15,0             |
|                    | Cervera et al. (1996)            | 6,0                                    | 15,0             |

**Fonte: Autor, 2019.**

Em relação ao algoritmo de Newton-Raphson pode-se avaliá-lo de forma satisfatória, uma vez que e as normas de deslocamentos diminuíram de forma linear a cada iteração até a tolerância admitida.

## ***5.2. Sugestões para trabalhos futuros***

A partir deste trabalho, sugere-se a elaboração de novas pesquisas nessa linha, sugere-se como pontos para os trabalhos futuros:

- Implementação do método arc length para possibilitar o controle de deslocamentos.
- Implementar elementos com funções de forma quadráticas ou superiores.
- Implementar elementos unidimensionais que permitam a simulação das armaduras no concreto.
- Implementar elementos tridimensionais para análise de outros tipos de estruturas como barragens em arco.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BENEVOLO, N. **Diretrizes para o Projeto de Barragens de Concreto**, 1973. Rio de Janeiro, 1973.

CERVERA, M.; OLIVER, J.; MANZOLI, O. L. **A rate-dependent isotropic damage model for the seismic analysis of concrete dams**. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, volume 25, pág. 987, 1996.

CIDADE DE TUCURUÍ – **Usina Hidrelétrica de Tucuruí**. Disponível em <[http://cidadedetucurui.com/inicio/usina\\_hidreletrica\\_tucurui/USINA\\_HIDRELETRICA\\_TUCURUI.htm](http://cidadedetucurui.com/inicio/usina_hidreletrica_tucurui/USINA_HIDRELETRICA_TUCURUI.htm)>. Acesso em: 02 jul. 2019.

CIMNE – INTERNATIONAL CENTRE FOR NUMERICAL METHODS IN ENGINEERING. **Products Pre-Post Software GiD**. Disponível em <<http://www.cimne.com/vpage/2/Technology/products>>. Acesso em: 17 mai. 2018.

COOK, R. D., MALKUS, D. S., PLESHA, M. E., AND WITT, R. J. **Concepts and Applications of Finite Element Analysis**. Ed. John Wiley and Sons, INC. Nova Iorque, 2002.

CORDEIRO, C. G., SOUZA, R. O. C. **Análise de Estabilidade Global de Barragens de Gravidade de Concreto**. Trabalho de Conclusão de Curso – Universidade Federal do Pará. Belém, 2018.

GHRIB, F., TINAWI, R. **Nonlinear Behavior of Concrete Dams Using Damage Mechanics**. Journal of Engineering Mechanics 121, 1995.

GUELLO, G. A. **Simulação computacional de estruturas de concreto por meio da mecânica do dano**. Dissertação (Mestrado em Engenharia) – Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2002.

GUNN, R. M. **Non-Linear Analysis of Arch Dams Including an Anisotropic Damage Mechanics Based Constitutive Model for Concrete**. Tese (Doutorado) – Civil Engineering, Faculty of Engineering and Environmental Studies. Brighton, 1998.

JESUS, R. D. **Optimização da forma estrutural de uma barragem**. Dissertação (Mestrado Integrado em Engenharia Civil) – Faculdade de Engenharia, Universidade do Porto. Porto, 2011.

MARCELINO, A. T. M. C. **Métodos de segurança no enchimento de barragens: aproveitamento hidrelétrico do Baixo Sabor**. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro. Vila Real, 2015.

MARCONCIN, L. R. **Uma abordagem numérico-experimental para análise de dano em lajes de barragens de enrocamento com face de concreto**. Tese (Doutorado) – Universidade Federal do Paraná. Curitiba, 2015.

MEHTA, P. K., MONTEIRO, P. J. M. **Concreto – Microestrutura, propriedades e materiais**. IBRACON, 2008.

MINISTÉRIO DE MINAS E ENERGIA (MME). **Boletim Mensal de Energia**, de outubro de 2017. Brasília, 2017.

MINISTÉRIO DE MINAS E ENERGIA (MME). **Plano de Desenvolvimento Regional Sustentável (PDRS) e a Implantação de Usinas Hidrelétricas Estruturantes: Relatório Técnico 02 (RT02) – Avaliação das Experiências de Planejamento Regional Associados a Empreendimentos Hidrelétricos**. Brasília, 2018.

NORTE ENERGIA – **Usina Hidrelétrica de Belo Monte**. Disponível em <<https://www.norteenergiasa.com.br/pt-br/imprensa/releases/na-reta-final-100282>>. Acesso em: 02 jul. 2019.

OLIVEIRA, S. M. B. **Modelos para análise do comportamento de barragens de betão considerando a fissuração e os efeitos do tempo. Formulações de dano**. Tese (Doutorado) – Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto. Porto, 2000.

PENG, M.; ZHANG, L. M. Analysis of human risks due to dam-break floods – part 1: a new model based on Bayesian networks. **Natural Hazards**, 64: 903-933, 2012.

PINTO, C. M. A. **Utilização de modelos numéricos no cálculo estrutural de barragens gravidade de betão**. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Instituto Superior de Engenharia de Lisboa. Lisboa, 2012.

PROENÇA, S. P. B. **Elementos de Mecânica do Dano em Meios Contínuos**. Notas de aula. São Carlos, 2000.

PROENÇA, S.; BITTENCOURT T.; GUELLO G. **Simulação computacional de estruturas de concreto por meio da mecânica do dano**. South-American Congress on Computational Mechanics. Santa Fe, 2002.

RAMOS, R. J. B. **Barragens em betão compactado com cilindros (BBC) – Evolução e utilização em Portugal**. Dissertação (Mestrado em Engenharia Geológica) – Faculdade de Ciência e Tecnologia, Universidade Nova de Lisboa. Lisboa, 2011.

RODRIGUES, A. **Um modelo constitutivo de dano composto para simular o comportamento de materiais quase frágeis**. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Bauru, 2011.

RODRIGUES, E. A.; MANZOLI, O. L.; BITTENCOURT JR., L. A. G.; DOS PRAZERES, P. G. C.; BITTENCOURT, T. T. **Failure behavior modeling of slender reinforced concrete columns subjected to eccentric load**. Latin American Journal of Solids and Structures 12, 2015.

SANTOS, M. B. **Análise Computacional do Rompimento Hipotético da Barragem de Tucuruí-Pa com o Auxílio do Software Mike Flood**. Dissertação (Mestrado em Engenharia) – Universidade Federal do Pará. Tucuruí, 2017.

SANTOS, N. O. **Modelos de Dano para Concreto**. Dissertação (Mestrado em Engenharia) – Universidade Federal do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro, 2015.

SOUSA, R. J. C. **Controlo da qualidade na execução de fundações numa barragem: aproveitamento Hidroeléctrico do Baixo Sabor**. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto. Porto, 2011.

TEIXEIRA, M. R. **Uma contribuição para a modelagem numérica da heterogeneidade do concreto com o método de galerkin livre de elementos**. Tese (Doutorado) – Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2012.

UNITED STATES SOCIETY ON DAMS (USSD). **Types of dams**. Disponível em: <<http://www.usdams.org/dam-levee-education/overview/types-of-dams/>>. Acesso em: 26 jun. 2019.

VAZ, L. E. **Método dos elementos finitos em análise de estruturas**. Ed. Elsevier, Rio de Janeiro, 2011.

WINES, M. **China Admits Problems With Three Gorges Dam**, 2011. Disponível em <<http://www.nytimes.com/2011/05/20/world/asia/20gorges.html>>. Acesso em: 05 mar. 2018.