

Seção de choque de absorção de buracos negros de  
Schwarzschild e de buracos acústicos canônicos

Ednilton Santos de Oliveira

Orientador: Prof. Dr. Luís Carlos Bassalo Crispino

Belém - PA

25 de janeiro de 2008



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ  
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA  
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

# Seção de choque de absorção de buracos negros de Schwarzschild e de buracos acústicos canônicos

Ednilton Santos de Oliveira

Orientador: Prof. Dr. Luís Carlos Bassalo Crispino

---

Elcio Abdalla

---

Debora Peres Menezes

---

Luís Carlos Bassalo Crispino

## Agradecimentos

A Deus.

À minha família pelo afeto constante.

Ao professor Crispino pela grande dedicação com que vem me orientando desde minha iniciação científica.

Aos professores do PPGF-UFGA Marcelo Lima, Sérgio Vizeu e Silvana Perez com os quais tive a oportunidade de aprender bastante nas disciplinas do curso de mestrado.

Aos professores George E. A. Matsas e Atsushi Higuchi pelas colaborações que me proporcionaram mais uma experiência significativa no meu mestrado.

Ao CNPq e à UFGA pelo apoio financeiro durante minha iniciação científica.

À CAPES pelo suporte financeiro durante meu mestrado.

## Resumo

Na presente dissertação calculamos a seção de choque de absorção de buracos negros de Schwarzschild para os campos escalar não massivo e eletromagnético. Também calculamos a seção de choque de absorção de buracos acústicos canônicos. Utilizamos um método numérico para obter os resultados em frequências arbitrárias. Obtemos também expressões analíticas para as seções de choque de absorção nos limites de baixas e altas frequências. Os resultados numéricos estão em excelente concordância com os valores das seções de choque de absorção em baixas e altas frequências obtidos analiticamente. No limite em que a frequência tende a zero, a seção de choque de absorção tende ao valor da área do horizonte de eventos tanto para o caso do campo escalar não massivo em Schwarzschild quanto para o buraco acústico canônico. Entretanto, à medida que a frequência aumenta, estes resultados se tornam bastante distintos. Isto mostra que, apesar de a forma do espaço-tempo não exercer influência sobre a seção de choque escalar no limite em que a frequência tende a zero, ela é determinante fora desse limite. Observamos também que os valores das seções de choque de absorção escalar e eletromagnética em Schwarzschild coincidem para frequências e momentos angulares suficientemente grandes. O spin da partícula espalhada, neste caso, apesar de ter grande influência a baixas energias, é menos importante para o valor da seção de choque de absorção quanto maiores forem a frequência e o momento angular da onda incidente.

**Palavras-chave:** Teoria de Campos em espaços curvos, seção de choque de absorção, buracos negros de Schwarzschild, buracos acústicos canônicos.

**Áreas de Conhecimento:** 1.05.01.03-7, 1.05.03.01-3.

## Abstract

In this dissertation we compute the absorption cross section of Schwarzschild black holes for the massless scalar and electromagnetic fields. We also compute the absorption cross section of canonical acoustic holes for sound waves. We use a numerical method to obtain the results in arbitrary frequencies. We also obtain analytic expressions for the low- and high-frequency absorption cross sections. The numerical results are in excellent agreement with the low- and high-frequency absorption cross section values obtained analytically. In the zero-frequency limit the absorption cross section tends to the event horizon area value for both the massless scalar field in Schwarzschild spacetime and the canonical acoustic hole cases. However, as the frequency increases, these two results become very different. This shows that, although the spacetime geometry does not influence the absorption cross section in the zero-frequency limit, it is important for arbitrary frequencies. We also see that massless scalar and electromagnetic absorption cross section values for the Schwarzschild black hole coincide for high enough frequencies and angular momenta. The spin of the scattered particle, in this case, although being very important for low frequencies, becomes less relevant to the absorption cross section value as the frequency and the angular momentum of the incident particle increase.

**Keywords:** Field theory in curved spaces, absorption cross section, Schwarzschild black holes, canonical acoustic holes.

**Knowledge areas:** 1.05.01.03-7, 1.05.03.01-3.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>O campo escalar não massivo no espaço-tempo de Schwarzschild</b>	<b>7</b>
2.1	Equação de Klein-Gordon na geometria de Schwarzschild . . . . .	8
2.2	Soluções assintóticas . . . . .	9
2.3	Soluções em baixas frequências . . . . .	11
<b>3</b>	<b>Ondas sonoras ao redor de um buraco acústico canônico</b>	<b>14</b>
3.1	Equação de Klein-Gordon no espaço-tempo efetivo de um buraco acústico canônico . . . . .	15
3.2	Soluções assintóticas . . . . .	16
3.3	Soluções em baixas frequências . . . . .	17
<b>4</b>	<b>O campo eletromagnético no espaço-tempo de Schwarzschild</b>	<b>19</b>
4.1	Equações de Maxwell na geometria de Schwarzschild . . . . .	19
4.2	Soluções no gauge de Coulomb esférico . . . . .	21
4.3	Soluções no gauge de Feynman modificado . . . . .	26
4.3.1	Soluções assintóticas . . . . .	28
4.3.2	Soluções em baixas frequências . . . . .	28
<b>5</b>	<b>Seções de choque de absorção</b>	<b>31</b>
5.1	Forma da seção de choque de absorção para soluções de Klein-Gordon . . . .	32
5.2	Método numérico para o cálculo da seção de choque em frequências arbitrárias	34
5.3	Seção de choque de absorção para o campo escalar não massivo em Schwarzschild	36

5.4	Seção de choque de absorção de buracos acústicos canônicos . . . . .	39
5.5	Seção de choque de absorção eletromagnética em Schwarzschild . . . . .	42
5.6	Comparação dos resultados . . . . .	48
<b>6</b>	<b>Conclusão</b>	<b>51</b>
<b>A</b>	<b>Seção de choque de absorção em altas frequências</b>	<b>53</b>
<b>B</b>	<b>Método numérico utilizado</b>	<b>56</b>

# Capítulo 1

## Introdução

Nas últimas décadas, o estudo intenso da gravitação produziu resultados importantes. Entre a previsão de novos fenômenos, o surgimento de novas teorias e até mesmo de idéias controversas, a Relatividade Geral se manteve como a principal teoria para se descrever a interação gravitacional em escalas maiores que a escala de Planck.

Apresentada por Albert Einstein em 1915, a Relatividade Geral possui grandes vantagens com relação às outras teorias que tentam explicar a interação gravitacional. A mais importante destas vantagens está baseada na comprovação observacional de fenômenos prescritos pela Relatividade Geral. Exemplos disto são a concordância com os números referentes ao avanço do periélio de Mercúrio, o desvio de raios luminosos na presença de campos gravitacionais intensos e a variação do período de pulsares em sistemas binários por emissão de ondas gravitacionais.

A Relatividade Geral e as teorias que se baseiam na interação por ela descrita têm tido seus avanços bastante restritos ao contexto da física teórica. Um dos maiores exemplos disto é a pesquisa sobre buracos negros que são objetos cuja fenomenologia, em grande parte, não foi ainda comprovada.

Os buracos negros hoje parecem essenciais para o estudo da gravitação, tanto no contexto clássico quanto no quântico. Na verdade, desde que Karl Schwarzschild encontrou, a partir das equações de Einstein, a descrição para o exterior de objetos descarregados, estáticos e esfericamente simétricos, que se trata de uma das soluções exatas mais importantes das equações de Einstein, a geometria de buracos negros tem sido utilizada para descrever muitos



fenômenos gravitacionais.

No que tange ao estudo de fenômenos intrínsecos aos buracos negros, a evaporação destes objetos, prevista por Stephen W. Hawking em 1974 [1], é um marco na gravitação. A radiação Hawking, como ficou conhecida a radiação emitida por buracos negros, reforça o fato de que as conclusões físicas baseadas em conceitos quânticos devem mudar drasticamente em relação às conclusões com base na física clássica.

A importância de pesquisas que tratam a radiação Hawking tem sido evidente desde a previsão deste fenômeno. Esta relevância pode ser medida até mesmo no surgimento de novas teorias de gravitação, cuja comprovação depende de terem a evaporação de buracos negros entre suas previsões. Outro fato marcante pelo qual observamos a importância da radiação Hawking é o surgimento de um novo ramo da física baseado na tentativa de se obter este fenômeno experimentalmente: o estudo de análogos gravitacionais.

Proposto por William G. Unruh em 1981 [2], o estudo de análogos gravitacionais, assim como o estudo da radiação Hawking, tem sido intensamente realizado, não só atrelado à idéia inicial de Unruh, mas buscando a analogia com outros fenômenos gravitacionais, como a absorção de ondas [3] e o efeito da superradiância [4].

Ao seguir o caminho das pesquisas citadas acima, esta dissertação trata da seção de choque de absorção de buracos negros. O espalhamento de ondas por buracos negros tem chamado muita atenção dos físicos teóricos, principalmente depois da descoberta da radiação Hawking. Apesar disto, apenas recentemente importantes análises de seções de choque de buracos negros foram realizadas. Exemplos destas análises são os cálculos para qualquer frequência das seções de choque de absorção eletromagnética [5] e de férmions [6] de buracos negros de Schwarzschild.

O cálculo da seção de choque de absorção de buracos negros tem envolvido tratamentos analíticos e numéricos. A dificuldade em obter soluções completas das equações de campos nos leva a fazer uso de um método numérico para calcular a seção de choque de absorção de buracos negros de Schwarzschild e de buracos acústicos canônicos para frequências arbitrárias.

Métodos numéricos, além de serem amplamente utilizados, há muito são aplicados na Física. No caso da seção de choque de absorção, a primeira utilização de soluções numéricas

foi feita por Norma Sánchez que obteve a seção de choque de absorção de buracos negros de Schwarzschild para o campo escalar não massivo para qualquer frequência [7]. Antes disto, Don N. Page desenvolveu numericamente equações de campo no espaço-tempo de Schwarzschild para obter o espectro de emissão destes buracos negros para partículas de spin 0, 1/2, 1 e 2 [8]. Mais recentemente, podemos citar como exemplos os trabalhos realizados por Luís C. B. Crispino *et al.* que abrangem as abordagens semi-clássicas da emissão de radiação por partículas que orbitam buracos negros [9, 10, 11]. Com base nisto, ressaltamos a relevância da abordagem numérica para o desenvolvimento dos resultados mostrados aqui.

Ressaltamos também a importância das investigações analíticas, utilizando aproximações, das equações de campos usadas como confirmação dos resultados encontrados numericamente. Neste sentido, veremos neste texto que todos os resultados para as seções de choque de absorção em frequências arbitrárias, obtidos numericamente, concordam com os resultados analíticos para baixas e altas frequências.

Como dissemos antes, a pesquisa desenvolvida nesta dissertação se baseia nas soluções das equações para os campos analisados. Neste sentido, desenvolvemos os tratamentos analíticos para o campo escalar não massivo, para o som e para o campo eletromagnético nos capítulos 2, 3 e 4, respectivamente. No capítulo 5 utilizamos os tratamentos mostrados nos capítulos 2, 3 e 4 para calcularmos as seções de choque de absorção no regime de baixas energias. Naquele capítulo mostramos também o método numérico utilizado para a obtenção das seções de choque de absorção em frequências arbitrárias. Ainda no mesmo capítulo faremos comparações entre os resultados obtidos para termos uma melhor compreensão física dos cálculos realizados. No capítulo 6 apresentamos nossas conclusões. A obtenção da seção de choque de absorção em altas frequências, necessária como uma confirmação dos resultados numéricos, é apresentada no Apêndice A. No Apêndice B mostramos a rotina computacional que usamos a fim de fazermos as abordagens numéricas das equações dos campos em questão.

Ao longo deste trabalho adotamos o sistema natural de unidades, no qual  $c = G = \hbar = k_B = 1$ . No caso de buracos acústicos canônicos, faremos  $c' = 1$ , sendo  $c'$  a velocidade do som. Tanto para os buracos negros como para os buracos acústicos canônicos, adotamos a assinatura  $(+, -, -, -)$ .

## Capítulo 2

# O campo escalar não massivo no espaço-tempo de Schwarzschild

No presente capítulo, analisamos o campo escalar não massivo no espaço-tempo ao redor de um buraco negro de Schwarzschild. Vamos considerar o acoplamento mínimo [12] do campo escalar não massivo com o espaço-tempo curvo em questão considerando a equação de Klein-Gordon, cujas soluções descrevem a dinâmica deste campo.

A análise das equações de campo no espaço-tempo de Schwarzschild revela que a maior dificuldade para chegarmos aos nossos objetivos se resume em determinar as propriedades da parte radial das soluções [13]. Portanto, faremos o tratamento analítico destas equações somente em determinados limites, nos quais as equações consideradas podem ser reduzidas a equações de funções especiais com propriedades bem conhecidas. Sendo assim, neste capítulo nos limitaremos a determinar soluções assintóticas para qualquer frequência e no regime de baixas frequências em todo exterior do buraco negro. Para determinar a seção de choque de absorção em frequências arbitrárias, as soluções completas são abordadas apenas numericamente.

## 2.1 Equação de Klein-Gordon na geometria de Schwarzschild

A densidade de lagrangeana para o campo escalar não massivo livre é

$$\mathcal{L} = \frac{\sqrt{-g}}{2} (\nabla^\mu \varphi) (\nabla_\mu \varphi), \quad (2.1)$$

na qual  $g$  é o determinante da métrica de espaço-tempo em questão. Utilizando a equação de Euler-Lagrange podemos obter a equação que rege o comportamento do campo escalar não massivo em um espaço-tempo curvo:

$$\nabla^\mu \nabla_\mu \varphi = 0. \quad (2.2)$$

Através das propriedades de densidades tensoriais [14] é possível mostrar que [15]:

$$\nabla^\mu \nabla_\mu \varphi = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left[ \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \frac{\partial \varphi}{\partial x^\nu} \right] = 0. \quad (2.3)$$

O espaço-tempo de Schwarzschild é descrito pelo intervalo

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (2.4)$$

onde  $r_s = 2M$  é o raio do buraco negro de massa  $M$  e  $d\Omega^2$  representa o intervalo na superfície da esfera unitária  $S^2$ , com assinatura negativa,  $d\Omega^2 = -d\theta^2 - \text{sen}^2\theta d\phi^2$ .

Utilizando a métrica (2.4), podemos encontrar a equação diferencial que rege o comportamento do campo escalar não massivo no espaço-tempo de Schwarzschild. Levando em consideração que o campo pode ser expandido em termos de seus modos normais, temos a seguinte equação para os modos de frequência positiva  $u_{\omega lm}$ :

$$\left[ \frac{1}{f(r)} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 f(r) \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \tilde{\nabla}^2 \right] u_{\omega lm} = 0, \quad (2.5)$$

sendo  $f(r) = 1 - \frac{r_s}{r}$  e  $\tilde{\nabla}_\mu$  a derivada covariante no sub-espaço  $S^2$ , de modo que

$$\tilde{\nabla}^2 \varphi = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} - \cot \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} - \frac{1}{\text{sen}^2 \theta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \phi^2}.$$

Para encontrar as soluções da equação (2.5), separamos as variáveis da seguinte maneira:

$$u_{\omega lm} = \frac{\psi_{\omega l}(r)}{r} Y_{lm}(\theta, \phi) e^{-i\omega t}. \quad (2.6)$$

Para escrever  $u_{\omega lm} \propto e^{-i\omega t}$ , levamos em consideração que o espaço-tempo de Schwarzschild possui um campo de Killing global tipo tempo, dado por  $\xi^\mu = (\partial_t)^\mu = (1, 0, 0, 0)$ . Além disto, os termos  $Y_{lm}(\theta, \phi)$  são os harmônicos esféricos escalares que satisfazem a equação  $\tilde{\nabla}^2 Y_{lm}(\theta, \phi) = l(l+1)Y_{lm}(\theta, \phi)$ . A partir de (2.5) e (2.6), concluímos que a função radial,  $\psi_{\omega l}(r)$ , satisfaz a seguinte equação diferencial:

$$f \frac{d}{dr} \left[ f \frac{d\psi_{\omega l}(r)}{dr} \right] + [\omega^2 - V_S(r)] \psi_{\omega l}(r) = 0, \quad (2.7)$$

sendo o potencial efetivo dado por

$$V_S(r) = f \left[ \frac{r_s}{r^3} + \frac{l(l+1)}{r^2} \right] \quad (2.8)$$

e que está plotado na figura 2.1.

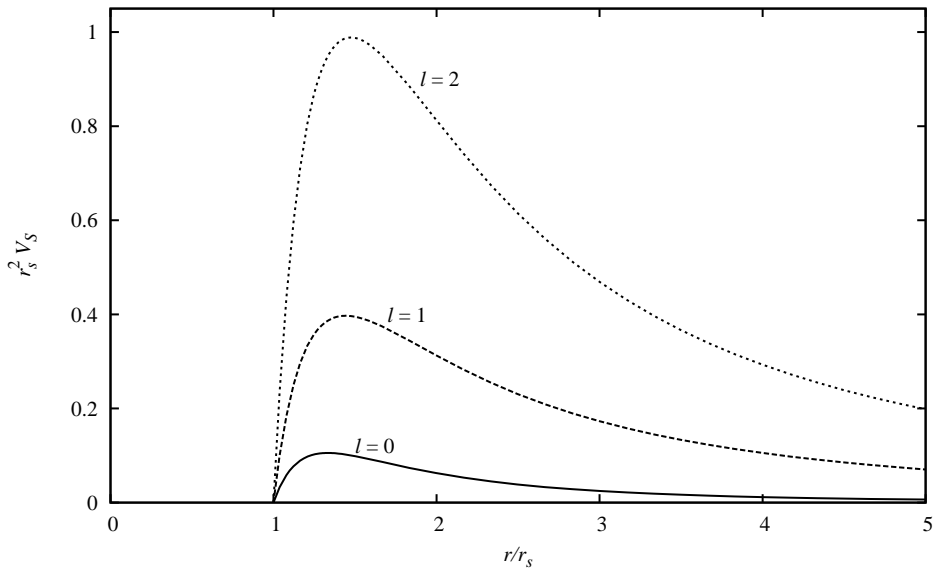


Figura 2.1: O potencial efetivo (2.8) está plotado para os valores de  $l$  iguais a 0, 1 e 2. Podemos ver nesta figura que o potencial vai a zero no horizonte de eventos. Uma inspeção na equação (2.8) pode comprovar isto e também que o potencial vai a zero para  $r \rightarrow \infty$ . Observando a figura também fica claro que o potencial é maior em todos os pontos quanto maior for  $l$ .

## 2.2 Soluções assintóticas

As propriedades das soluções da equação radial (2.7) não são fáceis de ser encontradas analiticamente [13]. Portanto, a abordagem analítica mostrada neste texto é feita em certos

limites nos quais a equação diferencial radial pode ser transformada na equação de uma função especial conhecida. Com isto, veremos que as propriedades das soluções nestes limites podem ser utilizadas para nos levar aos resultados da seção de choque em baixas frequências. Lembramos que estes resultados serão úteis para confirmar nossos cálculos numéricos da seção de choque para frequências arbitrárias nos limites apropriados.

Nesta seção estudaremos soluções da equação (2.7) para regiões muito próximas ao horizonte de eventos e regiões muito distantes do buraco negro. Para o estudo assintótico, usamos a coordenada de Wheeler a fim de obter a forma do campo no horizonte de eventos do buraco negro. Esta coordenada é definida como:

$$x = r + 2M \ln \left( \frac{r}{2M} - 1 \right). \quad (2.9)$$

Com a coordenada de Wheeler, a equação radial pode ser escrita na seguinte forma:

$$\frac{d^2 \psi_{\omega l}}{dx^2} + (\omega^2 - V_S) \psi_{\omega l} = 0. \quad (2.10)$$

Para  $r = r_s$ , o potencial efetivo é zero. Assim, em regiões extremamente próximas ao horizonte, a função radial dos modos provenientes do infinito tem a seguinte forma:

$$\psi_{\omega l}(x) \approx A_{\omega l} T_{\omega l} e^{-i\omega x}, \quad (2.11)$$

sendo  $A_{\omega l}$  uma constante de normalização e  $|T_{\omega l}|^2$  o coeficiente de transmissão.

Para  $r \gg r_s$ , a contribuição dominante do potencial dado em (2.8) é  $l(l+1)/r^2$ . Neste caso, é possível escrever a equação (2.7) como:

$$\left\{ r^2 \frac{d^2}{dr^2} + r \frac{d}{dr} + \left[ \omega^2 r^2 - \left( l + \frac{1}{2} \right)^2 \right] \right\} \left( \frac{\psi_{\omega}}{\sqrt{\omega r}} \right) = 0. \quad (2.12)$$

Esta equação é a equação de Bessel [16] de ordem  $l + \frac{1}{2}$ . Assim, para  $r \gg r_s$  a função radial pode ser escrita como:

$$\psi_{\omega l}(r) \approx A_{\omega l} \omega r \left[ (-i)^{l+1} h_l^{(1)*}(\omega r) + i^{l+1} R_{\omega l} h_l^{(1)}(\omega r) \right]. \quad (2.13)$$

Acima,  $h_l^{(1)}(\omega r)$  são as funções de Hankel esféricas ou funções de Bessel esféricas de terceira ordem [17]. Estas funções são definidas como:

$$h_l^{(1)}(\omega r) = j_l(\omega r) + i n_l(\omega r), \quad (2.14)$$

sendo  $j_l(\omega r)$  e  $n_l(\omega r)$  as funções de Bessel e Neumann esféricas, respectivamente. Além disto,  $|R_{\omega l}|^2$  são os coeficientes de reflexão. A relação entre os coeficientes de reflexão e de transmissão, definido anteriormente em (2.11), é  $|R_{\omega l}|^2 + |T_{\omega l}|^2 = 1$ .

Para  $\omega r \gg l(l+1)/2$ , as funções de Hankel esféricas têm o seguinte comportamento:

$$h_l^{(1)}(\omega r) \approx (-i)^{l+1} \frac{e^{i\omega r}}{\omega r}. \quad (2.15)$$

Sendo assim, a forma de  $\psi_{\omega l}$  para  $\omega r \gg l(l+1)/2$  é

$$\psi_{\omega l}(r) \approx A_{\omega l} (e^{-i\omega r} + R_{\omega l} e^{i\omega r}). \quad (2.16)$$

Note ainda que para  $r \gg r_s$ ,  $x \approx r$ . Neste caso, a função  $\psi_{\omega l}(r)$  pode ser transformada para  $\psi_{\omega l}(x)$  apenas substituindo  $r$  por  $x$  nas expressões (2.13) e (2.16).

Para análises futuras, será útil escrevermos a forma completa dos modos de frequência positiva quando  $r \rightarrow \infty$ . Neste caso, substituindo  $\psi_{\omega l}$  obtido em (2.16) na expressão (2.6), obtemos que os modos de frequência positiva no infinito são

$$u_{\omega l m} \approx A_{\omega l} \frac{(e^{-i\omega r} + R_{\omega l} e^{i\omega r})}{r} Y_{lm}(\theta, \phi) e^{-i\omega t}, \quad (\omega r \gg l(l+1)/2). \quad (2.17)$$

## 2.3 Soluções em baixas frequências

Nesta dissertação mostraremos a abordagem analítica para a seção de choque de absorção do campo escalar não massivo em baixas frequências. Portanto, é necessária uma análise do comportamento deste campo em Schwarzschild neste limite. Desta maneira, fazendo  $\omega = 0$  na equação (2.7) é possível escrever

$$\left[ (1-z^2) \frac{d^2}{dz^2} - 2z \frac{d}{dz} + l(l+1) \right] \left\{ \frac{2\psi_{\omega l}[z(r)]}{z+1} \right\} = 0, \quad (2.18)$$

sendo

$$z = \frac{r}{M} - 1.$$

A equação (2.18) é a equação de Legendre para a função  $2\psi_{\omega l}/(z+1)$ . Conseqüentemente, uma solução geral para esta equação é dada por

$$\frac{2\psi_{\omega l}[z(r)]}{z+1} = C_{\omega l}^I P_l(z) + C_{\omega l}^{II} Q_l(z). \quad (2.19)$$

Aqui, as funções  $P_l(z)$  e  $Q_l(z)$  são as funções de Legendre de primeira e segunda espécie, respectivamente [16].

Uma análise das propriedades das funções de Legendre mostra-nos que  $Q_l(1) \rightarrow \infty$  e  $P_l(1) = 1$ , ou seja, enquanto  $Q_l(z)$  diverge no horizonte de eventos ( $z = 1$ ),  $P_l(z)$  é finita neste mesmo limite. Por outro lado, devemos esperar que modos com energias muito próximas de zero devam ser refletidos quase por completo pelo potencial efetivo de espalhamento (2.8) (ver figura 2.1). Sendo assim, modos de baixa energia provenientes do infinito devem ter muita contribuição no infinito e pouca no horizonte de eventos do buraco negro. Para modos de baixas frequências provenientes do horizonte passado, o oposto ocorre. Logo, soluções em baixas frequências escritas em termos de  $Q_l(z)$  representam modos com baixas frequências provenientes do horizonte passado. Modos de baixas frequências provenientes do infinito são representados por soluções dadas em termos das funções  $P_l(z)$ .

No caso da seção de choque de absorção, os modos em questão são aqueles provenientes do infinito. Sendo assim, as soluções para os modos com o quais lidaremos são

$$\psi_{\omega l}(z) = C_{\omega l}^I \frac{z+1}{2} P_l(z). \quad (2.20)$$

As soluções (2.20) são completamente determinadas quando as constantes  $C_{\omega l}^I$  são conhecidas. Sendo assim, vamos determinar estas constantes. Para isto, compararemos as soluções em baixas frequências com as soluções assintóticas obtidas anteriormente.

Iniciamos escrevendo a expressão (2.13) da seguinte maneira:

$$\psi_{\omega l} \approx A_{\omega l} \omega r \left\{ j_l(\omega r) [(-i)^{l+1} + i^{l+1} R_{\omega l}] - i n_l(\omega r) [(-i)^{l+1} - i^{l+1} R_{\omega l}] \right\}, \quad (2.21)$$

onde usamos a definição de  $h_l^{(1)}$  dada por (2.14).

Escrevamos (2.21) para  $\omega \approx 0$  a fim de compará-la com a solução em baixas frequências. Para isto vamos usar que

$$j_l(\omega r) \approx \frac{2^l l!}{(2l+1)!} (\omega r)^l \quad (2.22)$$

e

$$n_l(\omega l) \approx -\frac{(2l)!}{2^l l!} (\omega r)^{-l-1} \quad (2.23)$$

para  $\omega r \ll 1$  [18]. Sendo assim, a equação (2.21), em baixas frequências, pode ser escrita



como:

$$\psi_{\omega l} \approx A_{\omega l} \left\{ [(-i)^{l+1} + i^{l+1} R_{\omega l}] \frac{2^l l!}{(2l+1)!} (\omega r)^{l+1} + i [(-i)^{l+1} - i^{l+1} R_{\omega l}] \frac{(2l)!}{2^l l!} (\omega r)^{-l} \right\}. \quad (2.24)$$

Tomemos agora a equação (2.20) quando  $r \gg r_s$ . Para isto, vamos utilizar a seguinte forma dos polinômios de Legendre:

$$P_l(z) \approx \frac{(2l)!}{2^l (l!)^2} z^l, \quad (2.25)$$

válida quando  $z \gg 1$  ( $r \gg r_s$ ). Com isto, a equação (2.20) para  $r \gg r_s$  pode ser escrita como:

$$\psi_{\omega l} \approx C_{\omega l}^I \frac{(2l)!}{2^{l+1} (l!)^2} \left(\frac{r}{M}\right)^{l+1}. \quad (2.26)$$

Comparando (2.24) com (2.26) concluímos que  $R_{\omega l} \approx (-1)^{l+1} + O(\omega)$  no regime de baixas frequências. Isto mostra que modos com frequências próximas de zero são quase que totalmente refletidos pelo potencial de espalhamento. Também através desta comparação obtemos que:

$$C_{\omega l}^I = (-i)^{l+1} A_{\omega l} \frac{2^{2l+2} (l!)^3}{(2l)! (2l+1)!} (M\omega)^{l+1}. \quad (2.27)$$

Com (2.27) e (2.20) podemos escrever as soluções em baixas frequências como:

$$\psi_{\omega l}(r) \approx A_{\omega l} (-i)^{l+1} \frac{2^{2l+1} (l!)^3}{(2l)! (2l+1)!} (M\omega)^{l+1} \left(\frac{r}{M}\right) P_l\left(\frac{r}{M} - 1\right). \quad (2.28)$$

Note que para determinar completamente as soluções obtidas assintoticamente e em baixas frequências é necessário o conhecimento da constante de normalização  $A_{\omega l}$ . No entanto, mostramos no capítulo 5 desta dissertação que a seção de choque de absorção não depende de constantes de normalização globais. De fato, a seção de choque de absorção depende somente da frequência do campo incidente e da massa do buraco negro. Em termos quânticos, podemos dizer que a seção de choque de absorção não depende do número de partículas incidentes. Em termos de campos concluímos que a seção de choque de absorção não depende da amplitude da onda incidente.

## Capítulo 3

# Ondas sonoras ao redor de um buraco acústico canônico

Em 1981, William G. Unruh provou que em fluidos com fluxo irrotacional e onde a pressão é função apenas da densidade, o potencial da velocidade que descreve uma onda sonora se comporta exatamente como o campo escalar não massivo minimamente acoplado a um espaço-tempo curvo [2]. A motivação de Unruh foi basicamente a de encontrar uma maneira de obter experimentalmente a radiação Hawking. A partir deste momento, surgiu um novo ramo na física que estuda fenômenos análogos à gravitação e que possam, em princípio, ser reproduzidos em laboratório. Além disto, através do estudo de análogos gravitacionais nasceu uma possível forma de conhecer a física em escalas inferiores à de Planck.

Neste capítulo descreveremos as ondas sonoras ao redor de um buraco acústico canônico. Estes objetos são formados por um fluxo esfericamente simétrico em um fluido incompressível [19]. Neste caso, o espaço-tempo efetivo para ondas sonoras é estático e esfericamente simétrico e se comporta de forma semelhante ao espaço-tempo ao redor de um buraco negro de Schwarzschild.

### 3.1 Equação de Klein-Gordon no espaço-tempo efetivo de um buraco acústico canônico

Para encontrarmos a forma do som ao redor de um buraco acústico canônico, iniciamos escrevendo a métrica do espaço-tempo efetivo destes objetos [19]:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_c^4}{r^4}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{r_c^4}{r^4}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (3.1)$$

sendo  $r_c$  o raio do buraco acústico canônico. Além disto, no elemento de linha (3.1) fizemos  $c' = 1$ , sendo  $c'$  a velocidade do som. Este é o espaço-tempo efetivo para ondas sonoras que se propagam no fluido. É válido ressaltar que as equações para o fluido que nos conduzem à conclusão de que ondas sonoras podem ser consideradas em um espaço-tempo curvo efetivo são equações da mecânica clássica [19].

A equação para a onda sonora ao redor de um buraco acústico canônico é a equação de Klein-Gordon no espaço-tempo efetivo dado por (3.1). Utilizando as mesmas ferramentas que utilizamos para o campo escalar não massivo em Schwarzschild, podemos obter, a partir de (2.3), a equação para a onda sonora. Fazendo isto encontramos a seguinte equação diferencial parcial para os modos de frequência positiva:

$$\left[ \frac{1}{h(r)} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( h(r) r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \tilde{\nabla}^2 \right] v_{\omega lm} = 0, \quad (3.2)$$

com

$$h(r) = 1 - \frac{r_c^4}{r^4}.$$

Separando as variáveis como

$$v_{\omega lm} = \frac{\chi_{\omega l}(r)}{r} Y_{lm}(\theta, \phi) e^{-i\omega t}, \quad (3.3)$$

com  $Y_{lm}(\theta, \phi)$  sendo os harmônicos esféricos escalares, nos resta a seguinte equação radial a ser resolvida:

$$h \frac{d}{dr} \left[ h \frac{d\chi_{\omega l}(r)}{dr} \right] + [\omega^2 - V_C(r)] \chi_{\omega l}(r) = 0, \quad (3.4)$$

na qual o potencial efetivo de espalhamento é dado por

$$V_C(r) = h \left[ \frac{4r_c^4}{r^6} + \frac{l(l+1)}{r^2} \right] \quad (3.5)$$

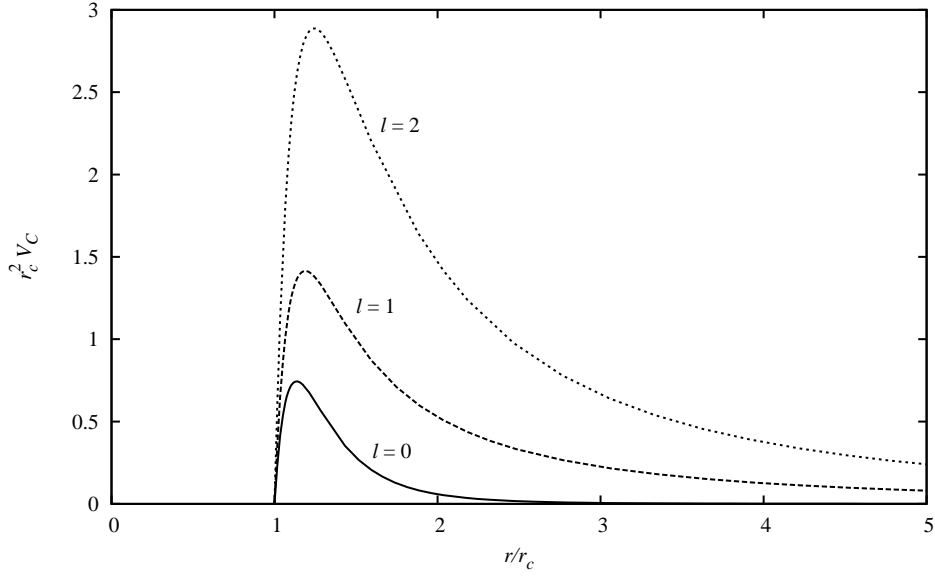


Figura 3.1: Nesta figura temos o potencial para o som ao redor de um buraco acústico canônico. Da mesma forma que no caso escalar não massivo em Schwarzschild, este potencial vai a zero no horizonte de eventos do buraco acústico e no infinito.

e está plotado na figura 3.1.

Como no capítulo anterior, a equação (3.4) é difícil de ser analisada analiticamente. Por este motivo, nas próximas seções tomaremos os limites assintóticos e em baixas frequências onde abordagens analíticas podem ser feitas em termos de funções especiais bem conhecidas.

## 3.2 Soluções assintóticas

Próximo ao horizonte de eventos do buraco acústico encontraremos a forma de  $\chi_{\omega l}(r)$  em função de uma nova coordenada, análoga à coordenada de Wheeler usada no capítulo anterior, definida como:

$$\frac{d}{dx} = h \frac{d}{dr}. \quad (3.6)$$

Usando (3.6), a equação (3.4) pode ser escrita como:

$$\frac{d^2 \chi_{\omega l}(x)}{dx^2} - [\omega^2 - V_C] \chi_{\omega l}(x) = 0. \quad (3.7)$$

Como  $V_C \rightarrow 0$  para pontos suficientemente próximos ao horizonte de eventos, então, nesta

região obtemos que

$$\chi_{\omega l} \approx B_{\omega l} \mathcal{T}_{\omega l} e^{-i\omega x}, \quad (3.8)$$

para modos provenientes do infinito. Nesta expressão,  $B_{\omega l}$  é uma constante de normalização e  $|\mathcal{T}_{\omega l}|^2$  é o coeficiente de transmissão.

Para  $r \gg r_c$ , a contribuição dominante para o potencial efetivo  $V_C(r)$  será proveniente do termo  $l(l+1)/r^2$ . Neste caso, (3.4) fica idêntica à (2.12), de modo que sua solução é dada por

$$\chi_{\omega l} \approx B_{\omega l} \omega r \left[ (-i)^{l+1} h_l^{(1)*}(\omega r) + i^{l+1} \mathcal{R}_{\omega l} h_l^{(1)}(\omega r) \right], \quad (3.9)$$

com  $|\mathcal{R}_{\omega l}|^2$  sendo o coeficiente de reflexão. A relação entre o coeficiente de reflexão e transmissão é  $|\mathcal{R}_{\omega l}|^2 + |\mathcal{T}_{\omega l}|^2 = 1$ .

Quando  $\omega r \gg l(l+1)/2$ ,  $h_l^{(1)}(\omega r)$  é dado pela expressão (2.15). Então, a solução da equação (3.4) neste limite pode ser escrita como:

$$\chi_{\omega l}(r) \approx B_{\omega l} (e^{-i\omega r} + \mathcal{R}_{\omega l} e^{i\omega r}). \quad (3.10)$$

Com base em (3.10), no infinito os modos se tornam

$$v_{\omega l m} = B_{\omega l} \frac{(e^{-i\omega r} + \mathcal{R}_{\omega l} e^{i\omega r})}{r} Y_{lm}(\theta, \phi) e^{-i\omega t}. \quad (3.11)$$

### 3.3 Soluções em baixas frequências

Com  $\omega = 0$ , escrevemos (3.4) da seguinte maneira:

$$z(1-z) \frac{d^2}{dz^2} \left[ \frac{\chi_{\omega l}(r)}{r} \right] + \frac{1}{4} (1-5z) \frac{d}{dz} \left[ \frac{\chi_{\omega l}(r)}{r} \right] + \frac{l(l+1)}{16} \left[ \frac{\chi_{\omega l}(r)}{r} \right] = 0, \quad (3.12)$$

sendo que  $z = r^4/r_c^4$ . A equação (3.12) é uma equação hipergeométrica cujas soluções são as funções hipergeométricas. Sendo assim, em baixas frequências,  $\chi_{\omega l}(r)$  poderia ser dada por

$$\begin{aligned} \chi_{\omega l}(r) \approx & \left( \frac{r}{r_c} \right) C_{\omega l}^1 {}_2F_1 \left( (1+l)/4, -l/4, 1/4, r^4/r_c^4 \right) + \\ & C_{\omega l}^2 \left( \frac{r}{r_c} \right)^4 {}_2F_1 \left( (4+l)/4, (3-l)/4, 7/4, r^4/r_c^4 \right), \end{aligned} \quad (3.13)$$

em que  ${}_2F_1$  são as funções hipergeométricas [18]. No entanto, dependendo de seus índices, as funções hipergeométricas não são bem comportadas para  $|z| > 1$ , ou seja, (3.13) não

é uma solução válida no exterior do buraco acústico canônico. Desta maneira, buscamos outra alternativa para obter a seção de choque de absorção em baixas frequências. Veremos no capítulo 5 que para isto é necessário apenas que encontremos as soluções em baixas frequências para modos com  $l = 0$ . Neste caso, vamos inicialmente tomar a forma de (3.9) quando  $\omega \approx 0$  e  $l = 0$ . Assim temos:

$$\chi_{\omega 0}(r) \approx B_{\omega 0} \omega r [(-i + i\mathcal{R}_{\omega 0}) + i(-i - i\mathcal{R}_{\omega 0})(\omega r)^{-1}], \quad (3.14)$$

na qual usamos que  $h_l^{(1)}(x) = j_l(x) + in_l(x)$ , (2.22) e (2.23). Por outro lado, (3.13) para  $l = 0$  fica:

$$\chi_{\omega 0} \approx C_{\omega 0}^1 \left(\frac{r}{r_c}\right) + C_{\omega 0}^2 \left(\frac{r}{r_c}\right)^4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3/4)_n (1)_n}{(7/4)_n} \frac{1}{n!} \left(\frac{r^4}{r_c^4}\right)^n. \quad (3.15)$$

Aqui,  $(l)_n$  são os símbolos de Pochhammer [18]. Para chegar a esta equação, usamos que  ${}_2F_1(a, 0, c, z) = 1$ , o que é válido para qualquer valor de  $|z|$ . Comparando (3.15) com (3.14), concluímos que  $\mathcal{R}_{\omega 0} \approx -1 + O(\omega)$ ,  $C_{\omega 0}^2 = 0$  e que

$$C_{\omega 0}^1 \approx 2B_{\omega 0} r_c \omega, \quad (3.16)$$

a menos de uma fase arbitrária. Sendo assim, em baixas frequências temos

$$\chi_{\omega 0}(r) \approx 2B_{\omega 0} \omega r. \quad (3.17)$$

Da mesma forma que no capítulo anterior, chegamos à forma das soluções assintóticas e em baixas frequências determinadas a menos de uma constante de normalização. Assim como para o campo escalar não massivo, a constante de normalização para o som também não é necessária no cálculo da seção de choque de absorção de buracos acústicos canônicos.

# Capítulo 4

## O campo eletromagnético no espaço-tempo de Schwarzschild

Neste capítulo analisamos o comportamento do campo eletromagnético ao redor de um buraco negro de Schwarzschild. Pudemos concluir que, no caso escalar, o problema se resume em determinar as soluções das equações radiais. Para o campo eletromagnético, além de ser difícil encontrarmos soluções analíticas para as equações radiais, temos que encontrar condições de gauge que tornem a análise matemática do campo mais fácil. Neste sentido, lidaremos aqui com duas condições de gauge diferentes: o gauge de Coulomb esférico e o gauge de Feynman modificado. Como veremos, o gauge de Coulomb esférico torna a análise do campo mais simples. Depois de obter estas soluções, por meio de uma transformação de gauge encontraremos a forma do campo no gauge de Feynman modificado.

### 4.1 Equações de Maxwell na geometria de Schwarzschild

A densidade de lagrangeana para o campo eletromagnético livre é

$$\mathcal{L}_M = -\frac{\sqrt{-g}}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad (4.1)$$

sendo

$$F_{\mu\nu} = \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu, \quad (4.2)$$

onde  $A^\mu$  é o 4-potencial eletromagnético.

No espaço-tempo de Schwarzschild  $R_{\mu\nu} = 0$ . Então, a partir da densidade de lagrangeana (4.1), encontramos que as equações de movimento de Euler-Lagrange para o vetor  $A_\mu$  são

$$\nabla_\mu \nabla^\mu A_\nu - \frac{\partial}{\partial x^\nu} (\nabla_\mu A^\mu) = 0. \quad (4.3)$$

Na geometria de Schwarzschild os símbolos de Christoffel não nulos são

$$\begin{aligned} \Gamma_{tr}^t &= \Gamma_{rt}^t = \frac{1}{2} \frac{f'}{f}; & \Gamma_{tt}^r &= \frac{1}{2} f f'; & \Gamma_{rr}^r &= -\frac{1}{2} \frac{f'}{f}; \\ \Gamma_{\theta\theta}^r &= -r f; & \Gamma_{\phi\phi}^r &= -r f \text{sen}^2 \theta; & \Gamma_{r\theta}^\theta &= \Gamma_{\theta r}^\theta = \frac{1}{r}; \\ \Gamma_{\phi\phi}^\theta &= -\text{sen} \theta \cos \theta; & \Gamma_{r\phi}^\phi &= \Gamma_{\phi r}^\phi = \frac{1}{r}; & \Gamma_{\theta\phi}^\phi &= \Gamma_{\phi\theta}^\phi = \cot \theta, \end{aligned} \quad (4.4)$$

sendo que  $f' = df/dr$ .

Utilizando a métrica de Schwarzschild, implícita em (2.4), junto com as componentes não nulas da conexão, dadas em (4.4), a partir de (4.3) obtemos as seguintes equações para o 4-potencial eletromagnético:

$$\square_e A_t - \frac{1}{f} \frac{\partial^2 A_t}{\partial t^2} + f \frac{\partial^2 A_r}{\partial t \partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial t} (\tilde{\nabla}_i A^i) + f' \frac{\partial A_t}{\partial r} + \frac{2f}{r} \frac{\partial A_r}{\partial t} = 0, \quad (4.5)$$

$$\square_e A_r - \frac{1}{f} \frac{\partial^2 A_t}{\partial r \partial t} + f \frac{\partial^2 A_r}{\partial r^2} + \left( f' + \frac{2f}{r} \right) \frac{\partial A_r}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (\tilde{\nabla}_i A^i) = 0, \quad (4.6)$$

e

$$\left( \frac{1}{f} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - f \frac{\partial^2}{\partial r^2} - f' \frac{\partial}{\partial r} \right) A_i - \frac{2f}{r} \frac{\partial A_r}{\partial x^i} + \frac{1}{r^2} \tilde{\nabla}^2 A_i + \frac{1}{r^2} A_i - \frac{\partial}{\partial x^i} (\nabla_\mu A^\mu) = 0. \quad (4.7)$$

Nas equações acima, os índices latinos representam variáveis na esfera de raio unitário  $S^2$  com assinatura negativa no elemento de linha, já adotado nos capítulos anteriores. Desta maneira temos:

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_i A^i &= -\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} - \frac{1}{\text{sen}^2 \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} - \cot \theta A_\theta, \\ \tilde{\nabla}^2 A_i &= \begin{cases} \tilde{\nabla}_e^2 A_\theta + 2 \cot \theta \frac{1}{\text{sen}^2 \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \cot^2 \theta A_\theta & \text{para } i = \theta \\ \tilde{\nabla}_e^2 A_\phi - 2 \cot \theta \left( \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial \theta} \right) - A_\phi & \text{para } i = \phi \end{cases}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Nas expressões acima, o índice “e” é usado para representar os operadores escalares que são dados por:

$$\square_e = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left( \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \right)$$



e

$$\tilde{\nabla}_e^2 = \frac{1}{\sqrt{\tilde{g}}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \sqrt{\tilde{g}} \tilde{g}^{ij} \frac{\partial}{\partial x^j} \right),$$

com  $\tilde{g}_{ij}$  sendo a métrica na superfície  $S^2$ . Podemos ainda escrever:

$$\square_e = \frac{1}{f} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - f \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \left( f' + \frac{2f}{r} \right) \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \tilde{\nabla}_e^2 \quad (4.9)$$

e

$$\tilde{\nabla}_e^2 = -\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \cot \theta \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}. \quad (4.10)$$

Além disto, temos que

$$\nabla_\mu A^\mu = \frac{1}{f} \frac{\partial A_t}{\partial t} - f \frac{\partial A_r}{\partial r} - \left( f' + \frac{2f}{r} \right) A_r + \frac{1}{r^2} \tilde{\nabla}_i A^i. \quad (4.11)$$

Com as equações acima temos tudo que necessitamos para encontrar o comportamento clássico do campo eletromagnético no espaço-tempo de Schwarzschild. Vale ressaltar que uma escolha de gauge adequada pode fazer com que dificuldades para encontrar soluções das equações de campo sejam amenizadas.

## 4.2 Soluções no gauge de Coulomb esférico

Nesta seção encontraremos as formas para o 4-potencial eletromagnético no gauge de Coulomb esférico. Como veremos, este gauge torna o tratamento das equações da seção anterior mais fácil<sup>1</sup>.

A condição para o gauge de Coulomb esférico é

$$\tilde{\nabla}_i A^i = 0. \quad (4.12)$$

Com esta condição, as equações para o 4-potencial eletromagnético (4.5), (4.6) e (4.7) se tornam

$$\square_e A_t - \frac{1}{f} \frac{\partial^2 A_t}{\partial t^2} + f \frac{\partial^2 A_r}{\partial t \partial r} + f' \frac{\partial A_t}{\partial r} + \frac{2f}{r} \frac{\partial A_r}{\partial t} = 0, \quad (4.13)$$

$$\square_e A_r - \frac{1}{f} \frac{\partial^2 A_t}{\partial r \partial t} + f \frac{\partial^2 A_r}{\partial r^2} + \left( f' + \frac{2f}{r} \right) \frac{\partial A_r}{\partial r} = 0, \quad (4.14)$$

---

<sup>1</sup>Apesar de ser necessário provar que esta condição de gauge é legítima, não provaremos aqui. Uma prova pode ser encontrada em [20].

e

$$\left( \frac{1}{f} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - f \frac{\partial^2}{\partial r^2} - f' \frac{\partial}{\partial r} \right) A_i + \frac{1}{r^2} \tilde{\nabla}^2 A_i + \frac{1}{r^2} A_i - \frac{1}{f} \frac{\partial^2 A_t}{\partial x^i \partial t} + f \frac{\partial^2 A_r}{\partial x^i \partial r} + f' \frac{\partial A_r}{\partial x^i} = 0. \quad (4.15)$$

Para encontrar as soluções das equações acima, vamos agora considerar as diferentes polarizações do campo eletromagnético. Estas polarizações são dadas pelos modos de puro gauge, modos físicos, com duas polarizações diferentes que simbolizaremos com o índice  $\lambda = I$  e  $II$ , e os modos não físicos. Neste trabalho, entretanto, só será necessária a abordagem dos modos físicos e o conhecimento da forma geral dos modos de puro gauge<sup>2</sup>.

Os modos de puro gauge são modos que satisfazem a condição (4.12) e que podem ser escritos como como:

$$A_\mu^{(G)} = \nabla_\mu \Phi. \quad (4.16)$$

Desta definição, podemos concluir que  $F_{\mu\nu}^{(G)} = \nabla_\mu A_\nu^{(G)} - \nabla_\nu A_\mu^{(G)} = 0$ . Neste caso, concluímos que os modos de puro gauge não contribuem para a seção de choque de absorção. Apesar disto, como veremos no futuro, será útil determinar sua forma. Neste caso, da aplicação da condição de gauge (4.12) em (4.16), concluímos que

$$\tilde{\nabla}_e^2 \Phi = 0. \quad (4.17)$$

Desta equação podemos concluir que  $\Phi$  não possui dependência angular. Logo, os modos de puro gauge podem ser escritos como:

$$A_\mu^{(G)} = (\partial_t \Phi(t, r), \partial_r \Phi(t, r), 0, 0). \quad (4.18)$$

Devido ao fato de o espaço-tempo de Schwarzschild ser dotado de um campo de Killing global tipo tempo  $\xi^\mu = (\partial_t)^\mu = (1, 0, 0, 0)$ , os modos físicos podem ser escritos da seguinte maneira:

$$A_\mu^{(\lambda\omega lm)} = \zeta_\mu^{(\lambda\omega lm)} e^{-i\omega t}, \quad (4.19)$$

para  $\omega > 0$ . Quanto aos índices superiores do 4-potencial em (4.19),  $\lambda = I$  e  $II$  se referem à polarização,  $\omega$  é a frequência dos modos e  $l$  e  $m$  são os números quânticos relacionados

---

<sup>2</sup>Os modos não físicos são aqueles que satisfazem as equações (4.13), (4.14) e (4.15) mas não satisfazem a condição (4.12) [20]. Estes modos são importantes na quantização do campo eletromagnético. No entanto, nesta dissertação não lidaremos com quantização, por isso não necessitamos analisar os modos não físicos.

ao momento angular destes modos. Deve ser ressaltado que até aqui nossa análise pode ser usada para modos provenientes tanto do horizonte passado (horizonte de buraco branco) quanto do infinito. Na separação destes modos é necessária a utilização de mais um índice referente a esta diferença. Entretanto, para o cálculo da seção de choque de absorção, lidaremos apenas com modos provenientes do infinito. Sendo assim, não há necessidade de carregar mais um índice em nossa nomenclatura. Por isso, todos os resultados mostrados aqui devem ser entendidos como sendo restritos a modos provenientes do infinito.

Para os modos físicos com  $\lambda = I$  vamos escolher inicialmente

$$A_\mu^{(I\omega lm)} = \left( A_t^{(I\omega lm)}, A_r^{(I\omega lm)}, 0, 0 \right). \quad (4.20)$$

Neste caso  $A_\mu^{(I\omega lm)}$  satisfaz a condição de gauge (4.12) de maneira direta. Fazendo a separação de variáveis como  $\zeta_\mu^{(I\omega lm)} = R_\mu^{(I\omega l)}(r)\Omega_\mu^{(lm)}(\theta, \phi)$ , substituindo em (4.19) e o resultado em (4.15) concluímos que  $\Omega_t^{(lm)}(\theta, \phi) = \Omega_r^{(lm)}(\theta, \phi)$  e que

$$R_t^{(I\omega l)}(r) = \frac{if}{\omega} \frac{d}{dr} [fR_r^{(I\omega l)}(r)]. \quad (4.21)$$

Com estes resultados e (4.14) obtemos que  $\Omega_t^{(lm)}(\theta, \phi) = \Omega_r^{(lm)}(\theta, \phi) = Y_{lm}(\theta, \phi)$  e que

$$f \frac{d}{dr} \left\{ f \frac{d}{dr} [fR_r^{(I\omega l)}(r)] \right\} + [\omega^2 - V_E(r)] fR_r^{(I\omega l)}(r) = 0, \quad (4.22)$$

onde o potencial de espalhamento é

$$V_E = f \frac{l(l+1)}{r^2} \quad (4.23)$$

que mostramos na Figura 4.1. Assim, temos

$$A_\mu^{(I\omega lm)} = \left( \frac{if}{\omega} \frac{d}{dr} [fR_r^{(I\omega l)}(r)], R_r^{(I\omega l)}(r), 0, 0 \right) Y_{lm}(\theta, \phi) e^{-i\omega t}. \quad (4.24)$$

Para  $l = 0$ , (4.24) pode ser escrita como:

$$A_\mu^{(I\omega 00)} = \left( \frac{if}{\omega} \frac{d}{dr} [fR_r^{(I\omega 0)}(r)], R_r^{(I\omega 0)}(r), 0, 0 \right) \frac{1}{\sqrt{4\pi}} e^{-i\omega t}. \quad (4.25)$$

Substituindo (4.25) em (4.13) obtemos que

$$R_r^{(I\omega 0)}(r) = \frac{i}{\omega} \frac{dR_t^{(I\omega 0)}(r)}{dr}.$$

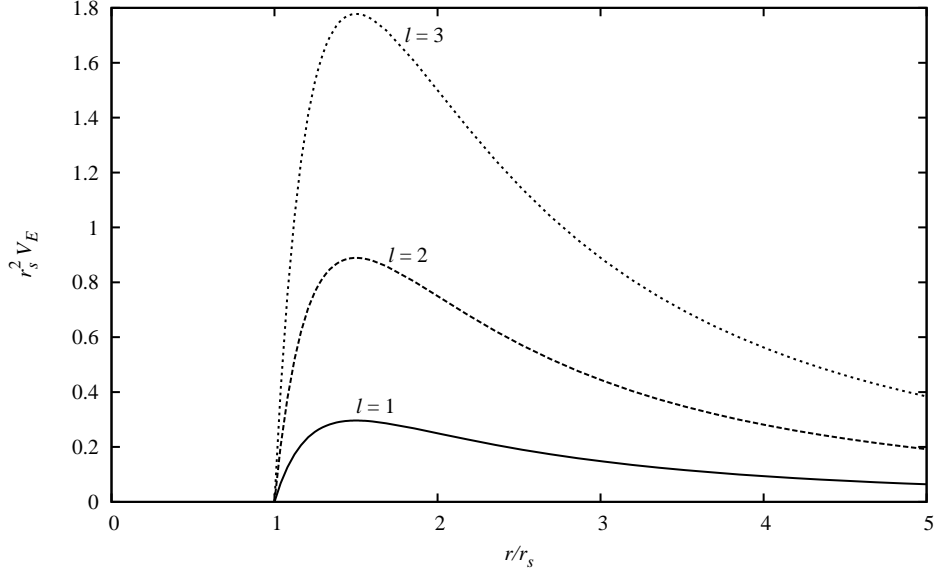


Figura 4.1: Aqui plotamos o potencial efetivo de espalhamento para o campo eletromagnético, dado pela equação (4.23). Podemos ver que este potencial vai a zero no horizonte de eventos do buraco negro e que quanto maior o valor de  $l$ , maior é o valor do potencial em todos os pontos.

Desta maneira é possível escrever  $A_\mu^{(I\omega 00)} = \nabla_\mu \Phi$  com  $\Phi = (i/\sqrt{4\pi\omega^2})R_t^{(I\omega 0)}(r)e^{-i\omega t}$ . Logo, para  $l = 0$  não existem modos com  $\lambda = I$  que não sejam de puro gauge e, por isso, trataremos de modos físicos com  $\lambda = I$  apenas para  $l \geq 1$ .

Para os modos com  $\lambda = II$  vamos fazer

$$A_\mu^{(II\omega lm)} = \left(0, 0, A_\theta^{(II\omega lm)}, A_\phi^{(II\omega lm)}\right). \quad (4.26)$$

Note que escolhemos  $A_\mu^{(I\omega lm)}$  e  $A_\mu^{(II\omega lm)}$  separadamente de forma conveniente. Isto pode ser feito desde que estes modos satisfaçam as equações para o 4-potencial, as condições de gauge e que eles sejam ortogonais. Neste sentido, ao final desta seção provamos que  $A_\mu^{I\omega lm}$  e  $A_\mu^{II\omega lm}$  escolhidos como (4.20) e (4.26) são ortogonais.

Os modos (4.26) devem satisfazer a condição de gauge (4.12). No entanto, sabemos que  $\tilde{\nabla}^i Y_i^{lm}(\theta, \phi) = 0$ , com  $Y_i^{lm}(\theta, \phi)$  sendo os harmônicos esféricos vetoriais definidos da seguinte maneira [21]:

$$Y_i^{lm}(\theta, \phi) = \frac{1}{\sqrt{l(l+1)}} \epsilon_{ij} \frac{\partial Y_{lm}(\theta, \phi)}{\partial x_i} \quad (l > 0), \quad (4.27)$$

onde  $\epsilon_{\theta\phi} = -\epsilon_{\phi\theta} = \sin\theta$  e  $\epsilon_{\theta\theta} = \epsilon_{\phi\phi} = 0$ . Com isto, concluímos que os modos  $A_\mu^{(II\omega lm)}$

possuem a seguinte forma:

$$A_{\mu}^{(II\omega lm)} = R^{II\omega l}(r) (0, 0, Y_{\theta}^{lm}(\theta, \phi), Y_{\phi}^{lm}(\theta, \phi)) e^{-i\omega t}. \quad (4.28)$$

Ressaltamos que os modos (4.28) são válidos apenas para  $l > 0$ .

Substituindo (4.28) em (4.15) e usando

$$\tilde{\nabla}^2 Y_i^{lm}(\theta, \phi) = [l(l+1) - 1] Y_i^{lm}(\theta, \phi) \quad (4.29)$$

concluimos que

$$f \frac{d}{dr} \left\{ f \frac{d}{dr} [R^{(II\omega l)}(r)] \right\} + [\omega^2 - V_E(r)] R^{(II\omega l)}(r) = 0, \quad (4.30)$$

sendo que  $V_E(r)$  é dado em (4.23).

Notemos agora que  $f R_r^{(I\omega l)}(r)$  e  $R^{(II\omega l)}(r)$  satisfazem a mesma equação. Portanto, definimos duas novas funções como  $r\varphi_{\omega l}^I(r) = f R_r^{(I\omega l)}(r)$  e  $r\varphi_{\omega l}^{II}(r) = R^{(II\omega l)}(r)$  de modo que as funções radiais de  $A_{\mu}^{(I\omega lm)}$  e  $A_{\mu}^{(II\omega lm)}$  possam ser tratadas de maneira bastante semelhante. Sendo assim temos:

$$A_{\mu}^{(I\omega lm)} = \left( \frac{if}{\omega} \frac{d}{dr} [r\varphi_{\omega l}^I(r)], \frac{r\varphi_{\omega l}^I(r)}{f}, 0, 0 \right) Y_{lm}(\theta, \phi) e^{-i\omega t} \quad (4.31)$$

e

$$A_{\mu}^{(II\omega lm)} = r\varphi_{\omega l}^{II}(r) (0, 0, Y_{\theta}^{lm}(\theta, \phi), Y_{\phi}^{lm}(\theta, \phi)) e^{-i\omega t} \quad (4.32)$$

com  $r\varphi_{\omega l}^{\lambda}(r)$  satisfazendo a seguinte equação:

$$f \frac{d}{dr} \left\{ f \frac{d}{dr} [r\varphi_{\omega l}^{\lambda}(r)] \right\} + [\omega^2 - V_E(r)] r\varphi_{\omega l}^{\lambda} = 0. \quad (4.33)$$

Com o que obtemos até aqui já podemos encontrar as formas dos potenciais no gauge de Feynman modificado. Entretanto, nos resta mostrar que realmente  $A_{\mu}^{(I\omega lm)}$  e  $A_{\mu}^{(II\omega lm)}$  representam polarizações ortogonais. Para isto, utilizaremos o produto interno de Klein-Gordon generalizado, definido como [20]:

$$\sigma_{KG} (A^{(i)}, A^{(j)}) \equiv \int_{\Sigma^{(3)}} d\Sigma^{(3)} n_{\mu} W^{\mu} [A^{(i)}, A^{(j)}], \quad (4.34)$$

sendo  $i$  usado para o conjunto de índices  $(\lambda\omega lm)$ . Aqui,  $d\Sigma^{(3)}$  é o elemento invariante do 3-volume da superfície de Cauchy  $\Sigma$  e  $n^{\mu}$  é o vetor unitário ortogonal a  $\Sigma$  apontando para o futuro e dado por  $n^{\mu} = f^{-1/2} \delta_0^{\mu}$ . Além disto, temos a corrente conservada definida como:

$$W^{\mu} [A^{(i)}, A^{(j)}] \equiv i [A_{\nu}^{(i)*} \Pi^{(j)\mu\nu} - \Pi^{i\mu\nu*} A_{\nu}^{(j)}], \quad (4.35)$$

sendo que  $\Pi^{(j)\mu\nu}$  é o momento conjugado associado aos modos  $A_\mu^{(j)}$ , definido como:

$$\Pi^{(j)\mu\nu} \equiv \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla_\mu A_\nu)} \Big|_{A_\mu=A_\mu^{(j)}}. \quad (4.36)$$

Utilizando (4.1) em (4.36) obtemos que

$$\Pi^{(j)\mu\nu} = - [F^{\mu\nu}]_{A_\mu=A_\mu^{(j)}}. \quad (4.37)$$

Substituindo (4.37) em (4.35), o resultado em (4.34) quando  $A_\mu^{(i)} = A_\mu^{(I\omega lm)}$  e  $A_\mu^{(j)} = A_\mu^{(II\omega lm)}$ , com os modos dados em (4.20) e (4.26), e usando que  $\nabla^\mu A_\mu^{(II\omega lm)} = 0$ , obtemos

$$\sigma_{KG} (A^{(I\omega lm)}, A^{(II\omega lm)}) = \int_{\Sigma^{(3)}} d\Sigma^{(3)} n_\mu \nabla_\nu U^{\nu\mu}, \quad (4.38)$$

sendo  $U^{\nu\mu} = A^{(I\omega lm)\nu*} A^{(II\omega lm)\mu} - A^{(II\omega lm)\nu} A^{(I\omega lm)\mu*}$ . Utilizando o teorema de Gauss, concluimos que  $\sigma_{KG} (A^{(I\omega lm)}, A^{(II\omega lm)}) = 0$ . Logo,  $A_\mu^{(I\omega lm)}$  e  $A_\mu^{(II\omega lm)}$  são ortogonais.

É possível provar que o produto interno de Klein-Gordon generalizado é invariante sob transformações de gauge [20]. Sendo assim, quaisquer modos obtidos a partir de  $A_\mu^{(I\omega lm)}$  e  $A_\mu^{(II\omega lm)}$  por uma transformação de gauge devem ser também ortogonais.

### 4.3 Soluções no gauge de Feynman modificado

Para o cálculo da seção de choque de absorção é melhor analisarmos o 4-potencial eletromagnético no gauge de Feynman modificado. Nesta seção abordamos então o 4-potencial quando tomado neste gauge. Para isto, partiremos da estrutura do 4-potencial obtido na seção anterior. Isto é feito através de uma transformação de gauge dada por

$$A_\mu^{(i)} \rightarrow A_\mu'^{(i)} = A_\mu^{(i)} - \nabla_\mu \Psi^{(i)}, \quad (4.39)$$

sendo  $A_\mu'^{(i)}$  a representação do 4-potencial no novo gauge. Usando a transformação acima, (4.20) e (4.26), podemos escrever o 4-potencial no gauge de Feynman modificado da seguinte forma:

$$A_\mu'^{(I\omega lm)} = \left( A_t^{(I\omega lm)} - \partial_t \Psi^I, A_r^{(I\omega lm)} - \partial_r \Psi^I, -\partial_\theta \Psi^I, -\partial_\phi \Psi^I \right) \quad (4.40)$$

e

$$A_\mu'^{(II\omega lm)} = \left( -\partial_t \Psi^{II}, -\partial_r \Psi^{II}, A_\theta^{(II\omega lm)} - \partial_\theta \Psi^{II}, A_\phi^{(II\omega lm)} - \partial_\phi \Psi^{II} \right). \quad (4.41)$$

A condição para o gauge de Feynman modificado é

$$\nabla_\mu A'^{(i)\mu} + K_\mu A'^{(i)\mu} = 0, \quad (4.42)$$

onde  $K^\mu = (0, f', 0, 0)$ . Aplicando a condição (4.42) a (4.40), encontramos que  $\Psi^I$  deve satisfazer a seguinte equação:

$$-\frac{1}{f} \frac{\partial^2 \Psi^I}{\partial t^2} + f \frac{\partial^2 \Psi^I}{\partial r^2} + \frac{2f}{r} \frac{\partial \Psi^I}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \tilde{\nabla}_e^2 \Psi^I + \left( \frac{rf'}{f} - 2 \right) \varphi_{\omega l}^I(r) Y_{lm}(\theta, \phi) e^{-i\omega t} = 0. \quad (4.43)$$

Podemos separar as variáveis desta equação fazendo  $\Psi^I = q(r) Y_{lm} e^{-i\omega t}$ . Com isto obtemos

$$f \frac{d^2 q(r)}{dr^2} + \frac{2f}{r} \frac{dq(r)}{dr} + [\omega^2 - V_E(r)] \frac{q(r)}{f} + \left( \frac{rf'}{f} - 2 \right) \varphi_{\omega l}^I(r) = 0, \quad (4.44)$$

de onde concluímos que

$$\Psi^I = -\frac{f}{\omega^2} \frac{d}{dr} [r \varphi_{\omega l}^I(r)] Y_{lm}(\theta, \phi) e^{-i\omega t}. \quad (4.45)$$

Substituindo (4.45) em (4.40) concluímos que os modos  $A_\mu'^{(I\omega lm)}$  são dados por

$$\begin{aligned} A_\mu'^{(I\omega lm)} = & \frac{1}{\omega^2} \left( 0, l(l+1) \frac{\varphi_{\omega l}^I(r)}{r} Y_{lm}(\theta, \phi), f \frac{d}{dr} [r \varphi_{\omega l}^I(r)] \partial_\theta Y_{lm}(\theta, \phi), \right. \\ & \left. f \frac{d}{dr} [r \varphi_{\omega l}^I(r)] \partial_\phi Y_{lm}(\theta, \phi) \right) e^{-i\omega t}. \end{aligned} \quad (4.46)$$

Para  $\Psi^{II}$  a equação que obtemos é

$$-\frac{1}{f} \frac{\partial^2 \Psi^{II}}{\partial t^2} + f \frac{\partial^2 \Psi^{II}}{\partial r^2} + \frac{2f}{r} \frac{\partial \Psi^{II}}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \tilde{\nabla}_e^2 \Psi^{II} = 0. \quad (4.47)$$

Notando que  $\Psi^{II} = 0$  satisfaz trivialmente (4.47), concluímos que  $A_\mu'^{(II\omega lm)} = A_\mu^{(II\omega lm)}$ . Assim, a forma de  $A_\mu'^{(II\omega lm)}$  é

$$A_\mu'^{(II\omega lm)} = (0, 0, r \varphi_{\omega l}^{II}(r) Y_\theta^{lm}(\theta, \phi), r \varphi_{\omega l}^{II}(r) Y_\phi^{lm}(\theta, \phi)) e^{-i\omega t}. \quad (4.48)$$

Com (4.46) e (4.48) nos basta apenas encontrar a forma da função radial  $\varphi_{\omega l}^\lambda(r)$  dada pela solução da equação (4.33) para termos a forma completa do 4-potencial.

É importante notar, por meio das equações (4.46) e (4.48), que para  $l = 0$  não existem modos físicos.

### 4.3.1 Soluções assintóticas

Vamos agora encontrar soluções analíticas para a equação radial (4.33). Para pontos próximos ao horizonte eventos do buraco negro, usamos a coordenada de Wheeler, já definida no capítulo 2 em (2.9). Com a coordenada de Wheeler a equação (4.33) é escrita como:

$$\frac{d^2}{dx^2} [r\varphi_{\omega l}^\lambda(r)] + [\omega^2 - V_E(r)] r\varphi_{\omega l}^\lambda(r) = 0. \quad (4.49)$$

Para pontos extremamente próximos ao horizonte de eventos do buraco negro,  $r \approx r_s$ , o potencial efetivo vai a zero, como é mostrado na figura 4.1. Neste caso, a forma de  $\varphi_{\omega l}^\lambda$  para modos provenientes do infinito, quando muito próximos ao horizonte de eventos do buraco negro, é

$$r\varphi_{\omega l}^\lambda \approx B_{\omega l}^\lambda T_{\omega l}^\lambda e^{-i\omega x}, \quad (4.50)$$

onde  $B_{\omega l}^\lambda$  é uma constante de normalização e  $|T_{\omega l}^\lambda|^2$  é o coeficiente de transmissão.

Para  $r \gg r_s$ , a equação (4.33) pode ser escrita de forma idêntica à equação radial para o campo escalar não massivo no mesmo limite, (2.12), uma vez que  $V_E \approx l(l+1)/r^2$  neste limite. Sendo assim, concluímos que a solução para  $r\varphi_{\omega l}^\lambda(r)$  possui a mesma forma que  $\psi_{\omega l}(r)$  para  $r \gg r_s$ , dado pela expressão (2.13). Logo, obtemos que

$$r\varphi_{\omega l}^\lambda \approx B_{\omega l}^\lambda \omega r \left[ (-i)^{l+1} h_l^{(1)*}(\omega r) + i^{l+1} R_{\omega l}^\lambda h_l^{(1)}(\omega r) \right], \quad (4.51)$$

para  $r \gg r_s$ . Na expressão (4.51)  $|R_{\omega l}^\lambda|^2$  é o coeficiente de reflexão, cuja relação com o coeficiente de transmissão é  $|R_{\omega l}^\lambda|^2 + |T_{\omega l}^\lambda|^2 = 1$ .

No caso em que  $\omega r \gg l(l+1)/2$ , usando a forma assintótica da função de Hankel esférica (2.15), obtemos que

$$r\varphi_{\omega l}^\lambda \approx B_{\omega l}^\lambda [e^{-i\omega r} + R_{\omega l}^\lambda e^{i\omega r}]. \quad (4.52)$$

### 4.3.2 Soluções em baixas frequências

Para encontrarmos soluções de (4.33) em baixas frequências, vamos escrevê-la como:

$$\frac{d}{dz} \left[ (1-z^2) \frac{d\varphi_{\omega l}^\lambda(z)}{dz} \right] + \left[ l(l+1) - \frac{2}{z+1} - \omega^2 M^2 \frac{(z+1)^3}{z-1} \right] \varphi_{\omega l}^\lambda(z) = 0, \quad (4.53)$$

sendo que

$$z \equiv \frac{r}{M} - 1.$$



Para modos provenientes do infinito, a solução de (4.53) em baixas frequências, ou seja, fazendo  $\omega = 0$  nesta equação, é

$$\varphi_{\omega l}^\lambda(z) \approx C_{\omega l}^\lambda \left[ P_l(z) - \frac{(z-1)}{l(l+1)} \frac{dP_l(z)}{dz} \right] = 0, \quad (4.54)$$

para  $l > 0$ , com  $P_l(z)$  sendo as funções de Legendre de primeiro tipo e  $C_{\omega l}^\lambda$  sendo constantes de normalização que determinaremos a seguir.

Para encontrarmos  $C_{\omega l}^\lambda$ , vamos utilizar basicamente o mesmo processo da seção 2.3. Nesse caso lembremos que

$$P_l(z) \approx \frac{(2l)!}{2^l(l!)^2} z^l,$$

quando  $z \gg 1$ . Com isto, (4.54) pode ser escrita como

$$\varphi_{\omega l}^\lambda(r) \approx C_{\omega l}^\lambda \frac{l(2l)!}{2^l(l+1)(l!)^2} \left( \frac{r}{M} \right)^l, \quad (4.55)$$

em baixas frequências e para  $r \gg r_s$ .

Por outro lado, a solução assintótica (4.51) em baixas frequências pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\varphi_{\omega l}^\lambda \approx B_{\omega l}^\lambda \omega \left\{ [(-i)^{l+1} + i^{l+1} R_{\omega l}^\lambda] \frac{2^l l!}{(2l+1)!} (\omega r)^l + i [(-i)^{l+1} - i^{l+1} R_{\omega l}^\lambda] \frac{(2l)!}{2^l l!} (\omega r)^{-l-1} \right\}, \quad (4.56)$$

onde usamos que as formas das funções de Bessel e Neumann esféricas são dadas por (2.22) e (2.23), quando  $\omega r \ll 1$ .

Comparando (4.56) com (4.55), concluímos que  $R_{\omega l}^\lambda \approx (-1)^{l+1} + O(\omega)$  e que

$$C_{\omega l}^\lambda \approx (-i)^{l+1} B_{\omega l}^\lambda \frac{2^{2l+1} (l+1) (l!)^3}{l(2l)! (2l+1)!} M^l \omega^{l+1}. \quad (4.57)$$

Substituindo (4.57) em (4.54) obtemos a seguinte forma para as soluções  $\varphi_{\omega l}^\lambda$  em baixas frequências:

$$\varphi_{\omega l}^\lambda(z) \approx (-i)^{l+1} B_{\omega l}^\lambda \frac{2^{2l+1} (l+1) (l!)^3}{l(2l)! (2l+1)!} M^l \omega^{l+1} \left[ P_l(z) - \frac{(z-1)}{l(l+1)} \frac{dP_l(z)}{dz} \right]. \quad (4.58)$$

Note que para encontrarmos a forma completa das soluções assintóticas e em baixas frequências é necessário que conheçamos  $B_{\omega l}^\lambda$ . Entretanto, assim como no caso do campo

escalar não massivo, a seção de choque de absorção eletromagnética não deve depender do número de partículas incidentes, mas somente da frequência destas partículas, do seu momento angular e da massa do buraco negro. Por isso, neste trabalho não é necessário que encontremos as constantes de normalização globais.

# Capítulo 5

## Seções de choque de absorção

No presente capítulo encontramos a seção de choque de absorção de buracos negros de Schwarzschild para os campos escalar não massivo e eletromagnético e a seção de choque de absorção de buracos acústicos canônicos. Antes de encontrarmos estes resultados em frequências arbitrárias, faremos a abordagem analítica para a seção de choque de absorção em baixas frequências. Utilizaremos os resultados em baixas e altas energias como comprovação da seção de choque de absorção obtida em frequências arbitrárias que é calculada numericamente.

Apesar de usarmos os resultados em baixas e altas frequências para a seção de choque de absorção, neste capítulo abordaremos de forma analítica apenas o cálculo da seção de choque de absorção em baixas frequências. As abordagens, neste caso, são feitas utilizando as soluções dos campos em baixas frequências que encontramos nos capítulos anteriores.

Quanto ao cálculo da seção de choque de absorção de buracos negros de Schwarzschild em altas frequências, além de ser um resultado relativamente fácil de ser determinado, pode ser encontrado em livros texto [22]. Portanto, optamos por mostrar uma forma de determinar o valor da seção de choque de absorção em altas frequências apenas no Apêndice A<sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup>No caso de buracos acústicos canônicos, o valor da seção de choque de absorção em altas frequências pode ser visto em [23]. Sua determinação é bastante semelhante à determinação da seção de choque de absorção em altas frequências para buracos negros de Schwarzschild.

## 5.1 Forma da seção de choque de absorção para soluções de Klein-Gordon

Nesta seção mostraremos qual é a forma da seção de choque para o campo escalar não massivo e para o som de acordo com a matemática mostrada nos capítulos 2 e 3. Uma abordagem única para estes dois casos é possível porque em ambos os casos o tratamento matemático se resume em encontrar soluções da equação de Klein-Gordon em espaços-tempos que são estáticos, esfericamente simétricos e assintoticamente planos.

A seção de choque de absorção é definida como:

$$\sigma = -\frac{\mathcal{F}}{J_I}, \quad (5.1)$$

na qual  $\mathcal{F}$  é o fluxo total da onda espalhada e  $J_I$  é a corrente incidente.

Consideremos que inicialmente a onda espalhada seja plana e proveniente do infinito. Nestas especificações, a onda incidente deve ser solução da equação de Klein-Gordon no espaço-tempo plano, já que estes espaços-tempos são assintoticamente planos. Neste caso, buscamos soluções para a equação

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2} = 0. \quad (5.2)$$

Restringindo a direção do movimento da onda no eixo  $z$ , a solução para (5.2) que descreverá uma onda plana será

$$\vartheta(t, z) = A_\omega e^{i\omega(z-t)}, \quad (5.3)$$

onde  $A_\omega$  é uma constante de normalização.

A corrente para o campo escalar não massivo é definida da seguinte maneira:

$$J_\mu \equiv i [\vartheta^* \nabla_\mu \vartheta - \vartheta \nabla_\mu \vartheta^*]. \quad (5.4)$$

Substituindo então (5.3) em (5.4), encontramos que a corrente incidente é

$$J_I = 2\omega |A_\omega|^2. \quad (5.5)$$

Vamos agora calcular o fluxo total da onda espalhada. Para isto, vamos expandir (5.3) em termos dos polinômios de Legendre como [16]:

$$\vartheta = A_\omega e^{i\omega(z-t)} = A_\omega \sum_{l=0}^{\infty} i^l (2l+1) j_l(\omega r) P_l(\cos \theta) e^{-i\omega t}, \quad (5.6)$$

sendo  $j_l(\omega r)$  as funções de Bessel esféricas. Para  $\omega r \gg l(l+1)/2$  as funções de Bessel esféricas podem ser escritas da seguinte maneira:

$$j_l(\omega r) \approx \frac{i^{l+1}}{2\omega r} [e^{-i\omega r} - (-1)^l e^{i\omega r}]. \quad (5.7)$$

Com esta forma das funções de Bessel, podemos concluir que para  $\omega r \gg l(l+1)/2$  a onda plana é dada por

$$\vartheta(t, r, \theta) \approx iA_\omega \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l (2l+1)}{2\omega} \frac{[e^{-i\omega r} - (-1)^l e^{i\omega r}]}{r} P_l(\cos \theta) e^{-i\omega t}. \quad (5.8)$$

A equação (5.8) é válida quando o campo não é espalhado nem absorvido. Devemos, portanto, encontrar uma forma de generalizar este resultado para as soluções que encontramos nos capítulos 2 e 3. Isto é feito ao analisarmos a parte radial de (5.8). Notamos então que esta parte radial, a menos da constante de normalização, é dada por

$$R(r) = \frac{[ae^{-i\omega r} + be^{i\omega r}]}{r},$$

com  $a = 1$  e  $b = -(-1)^l$ . Observe que  $|a|^2 = |b|^2$ , ou seja, os modos incidentes são totalmente refletidos. Neste caso,  $|a|^2$  está associado à magnitude da onda incidente e  $|b|^2 / |a|^2$  é o coeficiente de reflexão. Sendo assim, fica evidente que em um espalhamento com absorção teremos  $|b/a| = |R_{\omega l}|$ . Neste sentido, podemos escrever uma onda espalhada, havendo absorção, para  $\omega r \gg l(l+1)/2$  como:

$$\vartheta_b(t, r, \theta) \approx iA_\omega \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l (2l+1)}{2\omega} \frac{[e^{-i\omega r} + R_{\omega l} e^{i\omega r}]}{r} P_l(\cos \theta) e^{-i\omega t}, \quad (5.9)$$

sendo que usamos o índice  $b$  para indicar que a onda foi espalhada em um buraco negro ou acústico. Notamos ainda que os modos (5.9) são idênticos aos modos (2.17) e (3.11) quando  $m = 0$ , com as relações entre as constantes de normalização a serem determinadas. Isto mostra que (5.9) é solução da equação de Klein-Gordon em ambos os espaços-tempos de Schwarzschild e do buraco acústico canônico quando  $r \rightarrow \infty$ . De outra forma, podemos concluir que as expressões (2.6) e (3.3) podem ser usadas para descrever modos espalhados pelos buracos desde que  $u_{\omega l 0} = v_{\omega l 0} = 0$ , e que as constantes de normalização estejam corretamente relacionadas com  $A_\omega$ . Note que isto fica evidente quando lembramos que  $P_l(\cos \theta) \propto Y_{l0}(\theta)$ .

Para encontramos o fluxo da onda espalhada, vamos tomar uma superfície esférica de raio infinito de modo que possamos usar a expressão (5.9). Neste caso, o fluxo pode ser escrito como:

$$\mathcal{F} = \oint_{r \rightarrow \infty} J^r r^2 d\Omega, \quad (5.10)$$

com  $d\Omega$  sendo o elemento de ângulo sólido. Substituindo então (5.9) na definição da corrente (5.4) e depois em (5.10), concluímos que o fluxo é dado por

$$\mathcal{F} = -\frac{2\pi}{\omega} |A_\omega|^2 \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) |T_{\omega l}|^2. \quad (5.11)$$

Para chegarmos à equação acima, usamos ainda que  $|T_{\omega l}|^2 + |R_{\omega l}|^2 = 1$  e que

$$\int_0^\pi P_l(\cos\theta) P_{l'}(\cos\theta) \sin\theta d\theta = \frac{2}{2l+1} \delta_{ll'}.$$

Substituindo (5.5) e (5.11) em (5.1), concluímos que a seção choque do campo escalar não massivo para buracos negros de Schwarzschild e do som para o buraco acústico canônico pode ser dada por

$$\sigma_{es} = \sum_{l=0}^{\infty} \sigma_{es}^{(l)} = \frac{\pi}{\omega^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) |T_{\omega l}|^2. \quad (5.12)$$

Nesta expressão podemos usar tanto  $T_{\omega l}$  presente na expressão (2.11) como  $\mathcal{T}_{\omega l}$  que figura em (3.8). Notamos ainda, que a expressão (5.12) independe da constante de normalização  $A_\omega$ . Como já citado antes, isto reflete o fato de que a seção de choque de absorção não depende do número de partículas incidentes, ou, de outra forma, da amplitude da onda incidente.

## 5.2 Método numérico para o cálculo da seção de choque em frequências arbitrárias

O método que empregamos para a obtenção da seção de choque de absorção em frequências arbitrárias resume-se em desenvolver numericamente as equações (2.7), (3.4) e (4.33) no intervalo  $[r \approx r_h, r \rightarrow \infty]$ , com  $r_h$  sendo o raio do buraco negro ou acústico, e aplicarmos o resultado à seção de choque de absorção. Este método é utilizado tanto para os cálculos da seção de choque escalar e eletromagnética em Schwarzschild como para o buraco acústico canônico.

Iniciemos então escrevendo as soluções não normalizadas das equações (2.7), (3.4) e (4.33) em pontos muito próximos ao horizonte de eventos. Neste caso temos:

$$\eta(x_h) \approx e^{-i\omega x_h}, \quad (5.13)$$

com  $x_h \rightarrow -\infty$  ( $r \approx r_h$ ). Note que (5.13) é idêntica à (2.11), (3.8) e (4.50) a menos das constantes de normalização e dos coeficientes de transmissão. Para  $r \rightarrow \infty$  podemos escrever:

$$\eta(r_i) \approx E_{\omega l} e^{-i\omega r_i} + F_{\omega l} e^{i\omega r_i}, \quad (5.14)$$

com  $r_i \rightarrow \infty$ . Analogamente a (5.13), (5.14) é idêntica à (2.16), (3.10) e (4.52) a menos das constantes. Notemos que  $|R_{\omega l}^g|^2 + |T_{\omega l}^g|^2 = 1$  (com o índice  $g$  sendo usado para representar uma expressão geral válida para os três casos abordados aqui) implica que devemos ter

$$|E_{\omega l}|^2 = |F_{\omega l}|^2 + 1. \quad (5.15)$$

Normalizando (5.13) e (5.14), é possível escrever

$$\eta_{\omega l}(x) \approx \begin{cases} D_{\omega l} e^{-i\omega x_h} & (x_h \rightarrow -\infty, r \approx r_h) \\ D_{\omega l} (E_{\omega l} e^{-i\omega x_i} + F_{\omega l} e^{i\omega x_i}) & (x_i \approx r_i \rightarrow \infty). \end{cases} \quad (5.16)$$

As soluções assintóticas das equações para o campo escalar não massivo e eletromagnético em Schwarzschild e para o som ao redor de um buraco acústico canônico podem ser sintetizadas na expressão geral:

$$\eta_{\omega l}^g(x) \approx \begin{cases} A_{\omega l}^g T_{\omega l}^g e^{-i\omega x} & (x \rightarrow -\infty, r \approx r_h) \\ A_{\omega l}^g (e^{-i\omega x} + R_{\omega l}^g e^{i\omega x}) & (x \approx r \rightarrow \infty). \end{cases} \quad (5.17)$$

Comparando (5.16) com (5.17), concluímos que  $T_{\omega l}^g = 1/E_{\omega l}$ . Além disto, tomando o módulo de (5.14) e da sua derivada e usando a relação (5.15), podemos mostrar que

$$|T_{\omega l}^g|^2 = \left\{ \frac{1}{4} \left[ |\eta_{\omega l}^g(r_i)|^2 + \frac{1}{\omega^2} \left| \left[ \frac{d\eta_{\omega l}^g(r)}{dr} \right]_{r=r_i} \right|^2 \right] + \frac{1}{2} \right\}^{-1}. \quad (5.18)$$

O coeficiente de transmissão fica completamente determinado quando desenvolvemos numericamente as equações radiais (2.7), (3.4) e (4.33) desde o horizonte de eventos do buraco negro ou acústico até o infinito e aplicamos o resultado em (5.18). O desenvolvimento numérico destas equações é mostrado no Apêndice B.

### 5.3 Seção de choque de absorção para o campo escalar não massivo em Schwarzschild

Tendo a mão a expressão (5.12), resta-nos agora encontrar a forma do coeficiente de transmissão  $|T_{\omega l}|^2$  para determinar a seção de choque de absorção. Para o caso do campo escalar não massivo em baixas frequências ao redor de um buraco negro estático e descarregado, utilizaremos as soluções analíticas que obtivemos no capítulo 2.

Iniciamos com a expressão (2.11) quando  $\omega \approx 0$ . Neste caso temos:

$$\psi_{\omega l} \approx A_{\omega l} T_{\omega l} (1 + O(\omega)), \quad (5.19)$$

que é válida para  $r \approx r_s$  e  $\omega x \approx 0$ . Por outro lado, a solução em baixas frequências (2.28) pode ser escrita como

$$\psi_{\omega l} \approx A_{\omega l} (-i)^{l+1} \frac{2^{2l+2} (l!)^3}{(2l+1)! (2l)!} (M\omega)^{l+1}, \quad (5.20)$$

quando  $r \approx r_s$ . Comparando (5.19) com (5.20), obtemos que para  $\omega \approx 0$ ,

$$|T_{\omega l}| \approx \frac{2^{2l+2} (l!)^3}{(2l+1)! (2l)!} (M\omega)^{l+1}. \quad (5.21)$$

Substituindo (5.21) em (5.12) e mantendo apenas o termo de menor ordem em  $\omega$ , que é o termo para  $l = 0$ , obtemos:

$$\sigma_s \approx 4\pi r_s^2. \quad (5.22)$$

Assim, concluimos que a seção de choque de absorção de buracos negros de Schwarzschild para o campo escalar não massivo em baixas frequências é igual a área do horizonte de eventos do buraco negro. Este resultado está de acordo com o resultado obtido por Das *et al.* [24] que provou que a baixas frequências a seção de choque de absorção para o campo escalar não massivo de um buraco negro estático, esfericamente simétrico e cujo espaço-tempo ao seu redor seja assintoticamente plano é igual à área da superfície delimitada pelo seu horizonte de eventos.

Para o cálculo da seção de choque de absorção do buraco negro de Schwarzschild para o campo escalar não massivo em frequências arbitrárias resolvemos a equação radial (2.7) numericamente. Para tanto, utilizamos o método numérico descrito na seção 5.2. Resolvendo



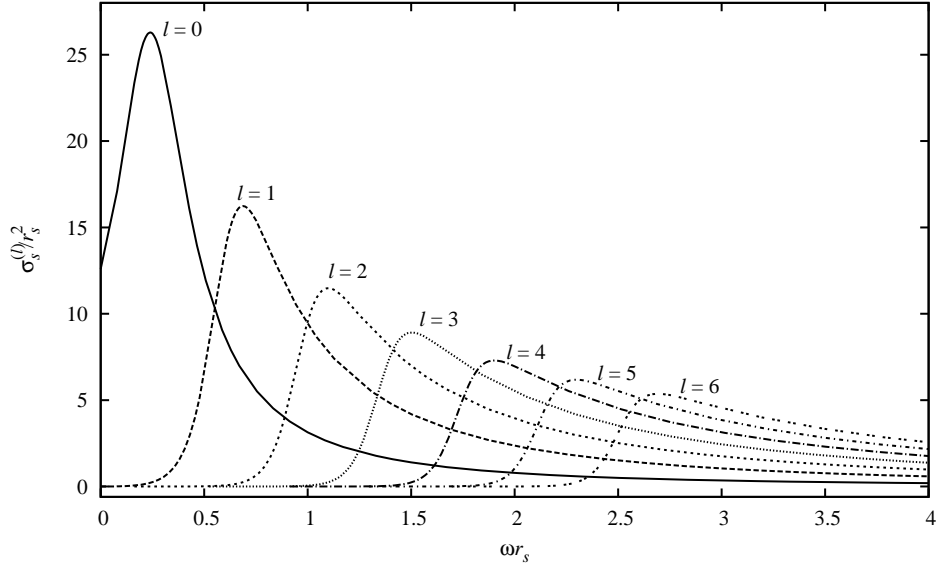


Figura 5.1: Nesta figura mostramos a seção de choque de absorção de buracos negros de Schwarzschild para o campo escalar não massivo para os valores de  $l = 0$  até 6. Podemos perceber que  $\sigma_s^{(l>0)}$  é zero para  $\omega^2 \ll V_S^{\text{máx}}(r)$  e tende a zero para  $\omega^2 \gg V_S^{\text{máx}}(r)$ . Além disto, podemos ver que o valor do máximo da seção de choque de absorção parcial diminui a medida que  $l$  aumenta e a frequência associada a este máximo aumenta.

então a equação (2.7) numericamente e aplicando a solução em (5.18) e depois em (5.12), obtemos os resultados mostrados nas Figuras 5.1 e 5.2 [7].

Na Figura 5.1 plotamos a seção de choque de absorção parcial  $\sigma_s^{(l)}$  de buracos negros de Schwarzschild para o campo escalar não massivo. A seção de choque de absorção parcial é a seção de choque para modos com valores de  $l$  fixos. Podemos ver na Figura 5.1 que estas seções de choque de absorção partem de um valor finito, nulo para  $l > 0$ , atingem um máximo e caem para zero. Entendemos isto observando o potencial efetivo de espalhamento (2.8) plotado na Figura 2.1. Neste caso, quando  $\omega^2 \ll V_S^{\text{máx}}(r)$ , sendo  $V_S^{\text{máx}}(r)$  o máximo do potencial  $V_S(r)$ , a seção de choque de absorção parcial para  $l > 0$  é zero. Ela cai também a zero quando  $\omega^2 \gg V_S^{\text{máx}}(r)$ . Além disto, podemos ver que para  $\omega = 0$ , a única contribuição para a seção de choque de absorção vem dos modos para quais  $l = 0$ , o que está de acordo com o resultado obtido analiticamente, dado pela expressão (5.22). Notemos ainda que o valor máximo da seção de choque de absorção parcial diminui na medida em que  $l$  cresce, enquanto que o valor da frequência relacionada a este máximo aumenta. Isto está de acordo

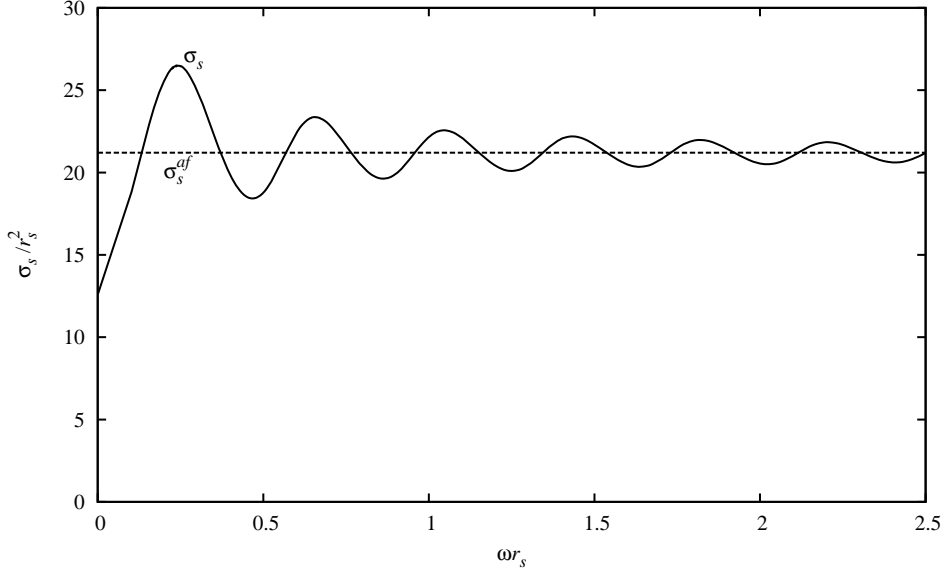


Figura 5.2: Aqui plotamos a seção de choque de absorção total de buracos negros de Schwarzschild para o campo escalar não massivo. Esta seção de choque de absorção para  $\omega = 0$  é  $\sigma_s^{bf} = 4\pi r_s^2$ , como esperado do resultado analítico para baixas frequências. Podemos ver que a medida que a frequência cresce, este resultado oscila em torno do valor clássico  $\sigma_s^{af} = (27/4)\pi r_s^2$ , com uma pequena diminuição na amplitude de oscilação. É possível concluir ainda, comparando esta figura com a Figura 5.1, que cada máximo aqui é correspondente a um máximo da seção de choque de absorção parcial como esperado.

com o fato de que o máximo do potencial  $V_S(r)$  cresce com o aumento de  $l$ .

Na Figura 5.2, plotamos a seção de choque de absorção total de buracos negros de Schwarzschild para o campo escalar não massivo. A seção de choque de absorção total,  $\sigma_s$ , é a soma em todos os valores de  $l$  das seções de choque de absorção parcial  $\sigma_s^{(l)}$ . Podemos ver que a seção de choque de absorção total inicia seu valor no resultado obtido analiticamente para baixas frequências,  $\sigma_s \approx 4\pi r_s^2$ , e oscila de forma amortecida em torno do resultado clássico,  $\sigma_s^{af} = (27/4)\pi r_s^2$  [22, 25]. (Mostramos uma das formas de obter a seção de choque de absorção para partículas não massivas no contexto clássico no Apêndice A.) Uma vez que  $\sigma_s^{(l)} \rightarrow 0$  quando  $\omega^2 \gg V_S^{\text{máx}}(r)$  e que a seção de choque de absorção deve ser  $\sigma_s^{af} = (27/4)\pi r_s^2$  para  $\omega \rightarrow \infty$ , devemos esperar que as contribuições neste limite dos  $\sigma_s^{(l)}$  para a seção de choque de absorção total devam vir dos modos em que  $l \rightarrow \infty$ . Neste sentido, concluímos que o resultado clássico deva ser recuperado para energia e momento

angular muito altos. Podemos ver também que a seção de choque de absorção total possui máximos locais correspondentes aos máximos da seção de choque de absorção parcial.

## 5.4 Seção de choque de absorção de buracos acústicos canônicos

Iniciaremos o cálculo da seção de choque de absorção de buracos acústicos canônicos tratando do resultado em baixas frequências obtido de forma analítica. Grande parte deste trabalho foi desenvolvido na seção 5.1 de forma que necessitamos apenas encontrar o coeficiente de transmissão  $|\mathcal{T}_{\omega l}|^2$  para obtermos os resultados que procuramos. Para encontrar  $\mathcal{T}_{\omega l}$ , vamos utilizar as soluções analíticas em baixas frequências obtidas no capítulo 3.

Lembremos que obtivemos a solução em baixas frequências de (3.4) apenas quando  $l = 0$ . Entretanto, observando o cálculo da seção de choque em baixas frequências para o campo escalar não massivo em Schwarzschild, vemos que a contribuição para este resultado vem quase completamente do modo para  $l = 0$ . Nesse sentido, devemos esperar que a seção de choque de absorção de buracos acústicos canônicos em baixas frequências deve também ter uma contribuição dominante dos modos em que  $l = 0$ . Isto se deve ao fato de o buraco acústico canônico, apesar de não ser idêntico, ter seu espaço-tempo efetivo muito semelhante ao espaço-tempo de Schwarzschild. Muito mais que isto, este espaço-tempo tem as mesmas propriedades dos buracos negros que por sua vez devem ter a seção de choque de absorção para o campo escalar não massivo em baixas frequências igual a área do horizonte de eventos, segundo Das *et al.* [24]. Desta maneira, além de esperar que a seção de choque em baixas frequências de buracos acústicos canônicos deva ter contribuição muito maior dos modos com  $l = 0$ , este resultado deve ser o mesmo do buraco negro de Schwarzschild para o campo escalar não massivo em termos do raio do horizonte de cada caso.

Escrevamos então (3.8) quando  $\omega x \approx 0$ . Temos:

$$\chi_{\omega l}(x) \approx B_{\omega l} \mathcal{T}_{\omega l} (1 + O(\omega)), \quad (5.23)$$

válida para  $r \approx r_c$  e  $\omega \rightarrow 0$ . Agora, fazendo  $r \approx r_c$  em (3.17), que é uma expressão válida

em baixas frequências, obtemos que

$$\chi_{\omega 0}(r) \approx 2B_{\omega 0}\omega r_c. \quad (5.24)$$

As expressões (5.23) e (5.24) foram encontradas para os mesmos limites,  $r \approx r_c$  e  $\omega \rightarrow 0$ . Sendo assim, comparando estas duas expressões, obtemos que o coeficiente de transmissão para  $l = 0$  é

$$|\mathcal{T}_{\omega 0}|^2 \approx 4\omega^2 r_c^2. \quad (5.25)$$

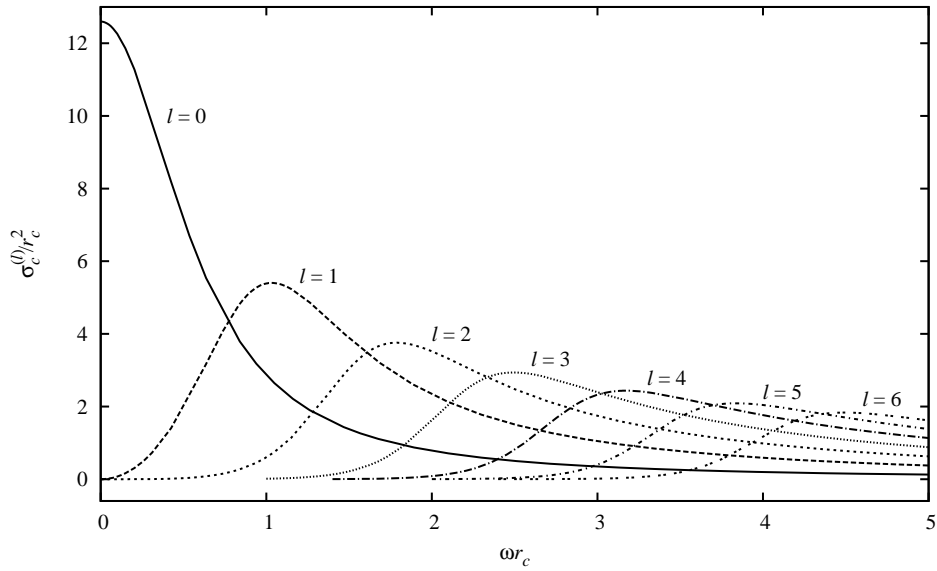


Figura 5.3: Nesta figura é mostrada a seção de choque de absorção parcial de buracos acústicos canônicos para os valores de  $l = 0$  a 6. Da mesma forma que no caso escalar em Schwarzschild,  $\sigma_c^{(l>0)}$  é zero quando  $\omega^2 \ll V_C^{\text{máx}}(r)$  e para  $\omega^2 \gg V_C^{\text{máx}}(r)$ . Aqui, também, o máximo de cada seção de choque de absorção parcial tem um valor menor e uma frequência correspondente maior para valores maiores de  $l$ .

Substituindo (5.25) em (5.12), obtemos então a contribuição da seção de choque de absorção parcial para  $l = 0$  em baixas frequências, que é

$$\sigma_c^{(0)} \approx 4\pi r_c^2. \quad (5.26)$$

Como esperávamos, este resultado é análogo ao resultado obtido para Schwarzschild e está de acordo com o resultado de Das *et al.* [24].

Para frequências arbitrárias, a equação (3.4) é abordada numericamente. Usando então o método da seção 5.2, obtemos os resultados plotados nas figuras 5.3 e 5.4 [3].

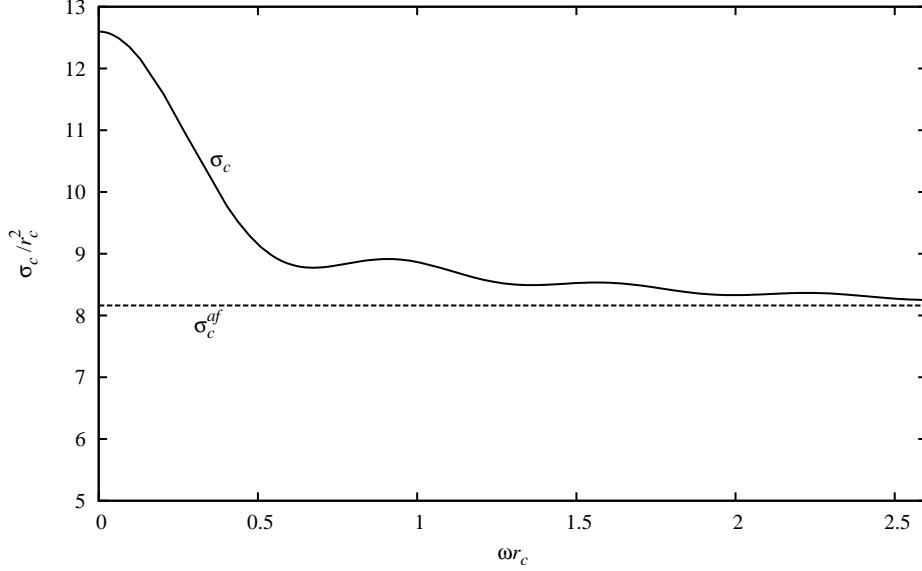


Figura 5.4: Aqui plotamos a seção de choque de absorção total de buracos acústicos canônicos. Podemos perceber a concordância desta seção de choque de absorção com os resultados obtidos para baixas e altas frequências,  $\sigma_c^{bf} = 4\pi r_c^2$  e  $\sigma_c^{af} = (3\sqrt{3}/2)\pi r_c^2$ , respectivamente.

Na Figura 5.3 plotamos a seção de choque de absorção parcial de buracos acústicos canônicos  $\sigma_c^{(l)}$ . Da mesma forma que no caso escalar em Schwarzschild, estas seções de choque de absorção partem de valores finitos, zero para os casos em que  $l > 0$ , alcançam uma máximo e depois caem a zero. Temos também que, a menos do termo em que  $l = 0$ , a seção de choque de absorção parcial é zero quando  $\omega^2 \ll V_c^{\text{máx}}(r)$  e  $\omega^2 \gg V_c^{\text{máx}}(r)$ . Notamos também que a seção de choque de absorção para  $l = 0$  e  $\omega \rightarrow 0$  está em completa concordância com o resultado (5.26) obtido analiticamente. Além disto, podemos ver que para  $\omega \rightarrow 0$ ,  $\sigma_c^{(l>0)} \rightarrow 0$ . Isto mostra que, como esperávamos, a contribuição da seção de choque de absorção em baixas frequências é significativa apenas para os modos com  $l = 0$ .

Na Figura 5.4 mostramos a seção de choque de absorção total de buracos acústicos canônicos. Podemos perceber que este resultado inicia com o valor obtido analiticamente para baixas frequências,  $\sigma_c^{bf} \approx 4\pi r_c^2$ , e tende com uma pequena oscilação ao valor clássico,  $\sigma_c^{af} = (3\sqrt{3}/2)\pi r_c^2$  [23].

## 5.5 Seção de choque de absorção eletromagnética em Schwarzschild

A seção de choque de absorção eletromagnética, assim como o caso escalar, também é encontrada usando (5.1). Iniciemos o cálculo da seção de choque de absorção escolhendo os modos incidentes como sendo provenientes do infinito, ondas planas, com polarização circular e se movendo na direção definida pelo eixo  $z$ . Desta maneira temos  $A_\mu(t, z) = (0, A_x(t, z), A_y(t, z), 0)$ , sendo

$$A_x = e^{i\omega(z-t)} \quad (5.27)$$

e

$$A_y = ie^{i\omega(z-t)}, \quad (5.28)$$

que são soluções no espaço-tempo de Minkowski para o 4-potencial eletromagnético que satisfazem a condição de Lorenz [26]

$$\nabla_\mu A^\mu = 0. \quad (5.29)$$

Usando a definição de corrente para o campo eletromagnético (4.35) e as expressões (5.27) e (5.28), obtemos que a corrente incidente é

$$W_I = 4\omega. \quad (5.30)$$

Para encontramos o fluxo do 4-potencial depois de a onda ter sido espalhada, vamos primeiramente fazer uma expansão em termos dos polinômios de Legendre das expressões (5.27) e (5.28). Nesse caso temos,

$$A_x = e^{i\omega(z-t)} = \sum_{l=0}^{\infty} i^l (2l+1) j_l(\omega r) P_l(\cos \theta) e^{-i\omega t} \quad (5.31)$$

e

$$A_y = ie^{i\omega(z-t)} = \sum_{l=0}^{\infty} i^{l+1} (2l+1) j_l(\omega r) P_l(\cos \theta) e^{-i\omega t}. \quad (5.32)$$

A partir de (5.31) e (5.32) encontramos que as componentes em coordenadas polares esféricas do campo incidente são:

$$A_r = \sum_{l=1}^{\infty} i^{l+1} (2l+1) \left[ \frac{j_l(\omega r)}{\omega r} \right] P_l^1(\cos \theta) e^{i(\phi - \omega t)}, \quad (5.33)$$

$$A_\theta = \sum_{l=0}^{\infty} i^l (2l+1) [r j_l(\omega r)] P_l(\cos \theta) \cos \theta e^{i(\phi - \omega t)} \quad (5.34)$$

e

$$A_\phi = \sum_{l=0}^{\infty} i^{l+1} (2l+1) [r j_l(\omega r)] P_l(\cos \theta) \sin \theta e^{i(\phi - \omega t)}. \quad (5.35)$$

Nas expressões acima,  $P_l^m(\cos \theta)$  são as funções associadas de Legendre. Para encontrarmos (5.33) a partir de (5.27) e (5.28), usamos as seguintes propriedades das funções associadas de Legendre e das funções de Bessel esféricas [16]:

$$(2l+1)\sqrt{1-x^2}P_l^{m-1}(x) = P_{l-1}^m(x) - P_{l+1}^m(x), \quad (5.36)$$

e [18]

$$j_{l+1}(x) + j_{l-1}(x) = (2l+1)\frac{j_l(x)}{x}. \quad (5.37)$$

Notemos agora que as componentes  $A_i^{(\lambda\omega lm)}$  dos modos do 4-potencial eletromagnético em Schwarzschild, dadas por (4.46) e (4.48), podem ser escritas como

$$A_i^{(\lambda\omega lm)} = \partial_i \Upsilon^{(\lambda\omega lm)} + \epsilon_{ij} \partial^j \Xi^{(\lambda\omega lm)}, \quad (5.38)$$

com  $\Upsilon^{(I\omega lm)} = \Xi^{(I\omega lm)} = 0$ ,

$$\Upsilon^{(I\omega lm)} = \frac{f}{\omega^2} \frac{d}{dr} [r \varphi_{\omega l}^I(r)] Y_{lm}(\theta, \phi) e^{-i\omega t} \quad (5.39)$$

e

$$\Xi^{(II\omega lm)} = \frac{-1}{\sqrt{l(l+1)}} r \varphi_{\omega l}^{II}(r) Y_{lm}(\theta, \phi) e^{-i\omega t}. \quad (5.40)$$

Sendo assim, para encontrarmos a relação entre o 4-potencial incidente, dado por (5.33), (5.34) e (5.35), e o 4-potencial em Schwarzschild no gauge de Feynman modificado, vamos escrever as componentes (5.34) e (5.35) do 4-potencial eletromagnético da seguinte maneira:

$$A_i = \partial_i \Phi + \epsilon_{ij} \partial^j \Psi, \quad (5.41)$$

onde  $\Phi$  e  $\Psi$  necessitam ser determinados.

Para a determinação de  $\Phi$  e  $\Psi$ , vamos inicialmente considerar a condição de gauge (5.29).

Neste caso, usando que

$$\nabla_\mu A^\mu = \frac{\partial A_t}{\partial t} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r^2} \tilde{\nabla}_i A^i = 0 \quad (5.42)$$

no espaço-tempo plano, podemos concluir que

$$\tilde{\nabla}^2 \Phi = \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r), \quad (5.43)$$

onde foi necessário considerar que  $\epsilon_{ij}$  é um tensor anti-simétrico e que  $\tilde{\nabla}_i \epsilon^{ij} = 0$ . Aplicando (5.33) em (5.43), além de usarmos o método de separação de variáveis e que  $P_l^1(\cos \theta) e^{i\phi} \propto Y_{l1}(\theta, \phi)$ , obtemos que

$$\Phi = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{i^{l+1}}{\omega} \frac{2l+1}{l(l+1)} \frac{d}{dr} [r j_l(\omega r)] P_l^1(\cos \theta) e^{i(\phi - \omega t)}. \quad (5.44)$$

Para encontrarmos  $\Psi$ , notemos que  $\epsilon^{ij} \tilde{\nabla}_i A_j = \epsilon^{ij} \partial_i A_j$ , uma vez que a conexão é simétrica. Desta maneira, usando a relação (5.41) entre  $A_i$  e  $\Psi$ , obtemos a seguinte equação para  $\Psi$ :

$$\tilde{\nabla}^2 \Psi = \frac{1}{\sin \theta} \left( \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial \theta} \right). \quad (5.45)$$

Tomando (5.34) e (5.35) e substituindo em (5.45), usando a relação entre as funções associadas de Legendre e os harmônicos esféricos escalares e [16]

$$P_l^m(x) = (-1)^m (1-x^2)^{m/2} \frac{dP_l(x)}{dx^m},$$

concluimos que

$$\Psi = \sum_{l=1}^{\infty} i^{l-1} \frac{(2l+1)}{l(l+1)} [r j_l(\omega r)] P_l^1(\cos \theta) e^{i(\phi - \omega t)}. \quad (5.46)$$

Vamos agora tomar (5.44) e (5.46) quando  $\omega r \gg l(l+1)/2$ . Neste caso, usamos a expressão (5.7), que é a forma da função de Bessel esférica neste limite, para escrevermos  $\Phi$  e  $\Psi$  como:

$$\Phi \approx \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^{l+1}}{2\omega^2} \frac{(2l+1)}{l(l+1)} \frac{d}{dr} [e^{-i\omega r} - (-1)^l e^{i\omega r}] P_l^1(\cos \theta) e^{i(\phi - \omega t)} \quad (5.47)$$

e

$$\Psi \approx \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^l}{2\omega} \frac{(2l+1)}{l(l+1)} [e^{-i\omega r} - (-1)^l e^{i\omega r}] P_l^1(\cos \theta) e^{i(\phi - \omega t)}. \quad (5.48)$$

As expressões (5.47) e (5.48) são expressões válidas no infinito quando a onda inicial dada por (5.27) e (5.28) não sofre nenhum tipo de espalhamento. Para generalizarmos este resultado para o caso do espalhamento em Schwarzschild, temos que comparar (5.47) e (5.48) com (5.39) e (5.40) no mesmo limite. Neste sentido, lembrando que

$$r\varphi_{\omega l}^\lambda \approx B_{\omega l}^\lambda [e^{-i\omega r} + R_{\omega l}^\lambda e^{i\omega r}],$$



quando  $\omega r \gg l(l+1)/2$ , podemos concluir que no caso da onda incidente dada por (5.27) e (5.28), espalhada por um buraco negro de Schwarzschild, os potenciais escalares  $\Phi$  e  $\Psi$  se comportam da seguinte maneira:

$$\Phi_{bn} \approx \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^{l+1} (2l+1)}{2\omega^2 l(l+1)} \frac{d}{dr} (e^{-i\omega r} + R_{\omega l}^I e^{i\omega r}) P_l^1(\cos \theta) e^{i(\phi - \omega t)} \quad (5.49)$$

e

$$\Psi_{bn} \approx \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^l (2l+1)}{2\omega l(l+1)} (e^{-i\omega r} + R_{\omega l}^{II} e^{i\omega r}) P_l^1(\cos \theta) e^{i(\phi - \omega t)}, \quad (5.50)$$

onde o índice “bn” é usado para descrever os potenciais da onda espalhada no buraco negro. Note que as expressões (5.49) e (5.50) são idênticas às expressões (5.39) e (5.40) quando  $r\varphi_{\omega l}^{\lambda}$  é dada por (4.52),  $m = 1$  e as constantes de normalização são devidamente relacionadas. Notemos ainda que embora (5.39) e (5.40) sejam funções escalares relacionadas a soluções obtidas no gauge de Feynmann modificado, no infinito este gauge se reduz ao gauge de Lorenz ( $f' \rightarrow 0$ ) e por isso é possível fazer a relação destas expressões com (5.49) e (5.50).

O fluxo em uma superfície esférica de raio infinito pode ser escrito como:

$$\mathcal{F} = \oint_{r \rightarrow \infty} W^r r^2 d\Omega. \quad (5.51)$$

Substituindo (5.49) e (5.50) em (5.41) e substituindo o resultado em (4.35), obtemos que

$$\mathcal{F} = i \oint d\Omega \left[ -\Phi_{bn}^* \frac{\partial}{\partial r} (\tilde{\nabla}^2 \Phi_{bn}) - \Psi_{bn}^* \frac{\partial}{\partial r} (\tilde{\nabla}^2 \Psi_{bn}) + (\tilde{\nabla}^2 \Phi_{bn}) \frac{\partial \Phi_{bn}^*}{\partial r} + (\tilde{\nabla}^2 \Psi_{bn}) \frac{\partial \Psi_{bn}^*}{\partial r} \right]. \quad (5.52)$$

Para chegarmos a esta expressão, usamos ainda integração por partes, o teorema de Gauss e que  $A_r$  cai com  $1/r^2$  para  $r \rightarrow \infty$ .

Substituindo (5.49) e (5.50) em (5.52) e usando que [16]

$$\int_0^{\pi} P_l^m(\cos \theta) P_{l'}^m(\cos \theta) \sin \theta d\theta = \frac{2}{2l+1} \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \delta_{ll'}$$

obtemos que o fluxo é

$$\mathcal{F} = -\frac{2\pi}{\omega} \sum_{l=1}^{\infty} (2l+1) \left( |T_{\omega l}^I|^2 + |T_{\omega l}^{II}|^2 \right). \quad (5.53)$$

Substituindo (5.30) e (5.53) em (5.1), obtemos que a seção de choque de absorção eletromagnética em Schwarzschild tem a seguinte forma:

$$\sigma_e = \sum_{l=1}^{\infty} \sigma_e^{(l)} = \frac{\pi}{2\omega^2} \sum_{l=1}^{\infty} (2l+1) \left( |T_{\omega l}^I|^2 + |T_{\omega l}^{II}|^2 \right). \quad (5.54)$$

Com a expressão (5.54), podemos perceber que resta-nos apenas conhecer os coeficientes de transmissão para determinar a seção de choque de absorção. Façamos isto inicialmente no contexto de baixas energias. Para isto, usaremos então as soluções que obtivemos da equação (4.33) neste limite.

Para a determinação do coeficiente de transmissão  $|T_{\omega l}^\lambda|^2$  em baixas frequências, escrevemos a expressão (4.50) quando  $\omega x \approx 0$ . Neste caso temos

$$\varphi_{\omega l}^\lambda \approx \frac{1}{r_s} B_{\omega l}^\lambda T_{\omega l}^\lambda (1 + O(\omega)), \quad (5.55)$$

desde que  $r \approx r_s$  e  $\omega x \approx 0$ . A mesma solução nos mesmos limites pode ser obtida quando fazemos  $r \approx r_s$  em (4.58). Sendo assim obtemos que

$$\varphi_{\omega l}^\lambda = (-i)^{l+1} B_{\omega l}^\lambda \frac{2^{2l+1}(l+1)(l!)^3}{l(2l)!(2l+1)!} M^l \omega^{l+1}. \quad (5.56)$$

Desde que (5.55) e (5.56) são expressões que descrevem a mesma solução nos mesmos limites, podemos compará-las para obter o coeficiente de transmissão. Fazendo isto, concluímos que em baixas frequências

$$|T_{\omega l}^I| = |T_{\omega l}^{II}| = \frac{2^{2l+2}(l+1)(l!)^3}{l(2l)!(2l+1)!} (M\omega)^{l+1}. \quad (5.57)$$

Substituindo este resultado em (5.54) e mantendo apenas o termo de menor ordem em  $\omega$ , que é o termo no qual  $l = 1$ , obtemos que a seção de choque de absorção eletromagnética em baixas frequências de buracos negros de Schwarzschild é [8, 27]

$$\sigma_e^{bf} \approx \frac{4}{3} \pi r_s^4 \omega^2. \quad (5.58)$$

Sendo assim concluímos que a seção de choque de absorção eletromagnética em Schwarzschild vai a zero quando a frequência tende a zero, diferentemente da seção de choque de absorção para o campo escalar não massivo.

O cálculo da seção de choque de absorção em frequências arbitrárias é feito através do método numérico que demonstramos na seção 5.2. Os resultados assim obtidos são mostrados nas figuras 5.5 e 5.6 [5].

A Figura 5.5 mostra a seção de choque de absorção eletromagnética parcial. Como no caso escalar e para o som para  $l > 0$ , esta seção de choque de absorção tende a zero quando

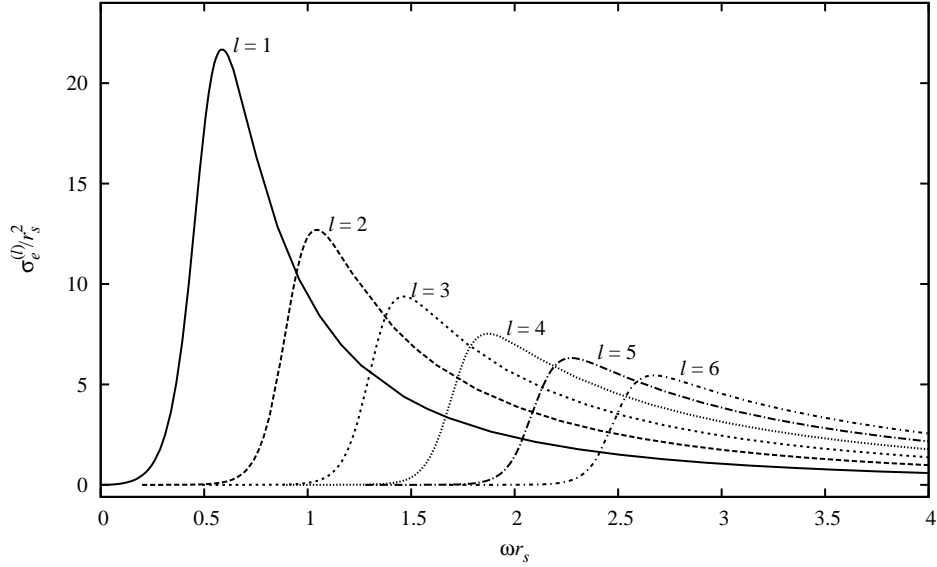


Figura 5.5: Aqui temos a seção de choque de absorção eletromagnética parcial de buracos negros de Schwarzschild plotada para os valores de  $l = 1$  até 6. Como no caso escalar e para o som para  $l > 0$ , esta seção de choque de absorção tende a zero para  $\omega^2 \ll V_S^{\text{máx}}(r)$  e para  $\omega^2 \gg V_S^{\text{máx}}(r)$ . Ainda mais, o valor máximo da seção de choque de absorção diminui e tem o valor correspondente da frequência cada vez maior a medida que  $l$  cresce.

$\omega^2 \ll V_e^{\text{máx}}(r)$  e  $\omega^2 \gg V_e^{\text{máx}}(r)$ . ( $V_e(r)$  está plotado na Figura 4.1.) Podemos perceber ainda que quanto maior o valor de  $l$ , maior é a frequência correspondente ao valor máximo da seção de choque de absorção parcial,  $\sigma_e^{(l)\text{máx}}$ , além de menor ser este máximo.

Na figura 5.6 plotamos a seção de choque de absorção eletromagnética total para buracos negros de Schwarzschild. Plotamos também o resultado que obtivemos analiticamente no limite de baixas energias, dado por (5.58), de modo que podemos perceber a concordância dos resultados nos limites em questão. Desta forma, podemos ver claramente que a seção de choque de absorção eletromagnética, assim como a seção de choque escalar, parte do valor obtido analiticamente para baixas frequências e oscila em torno do limite ótico,  $\sigma_s^{af} = (27/4)\pi r_s^2$ , quando  $\omega$  cresce. Ainda como no caso escalar, aqui os máximos locais correspondem aos máximos das seções de choque de absorção parciais.

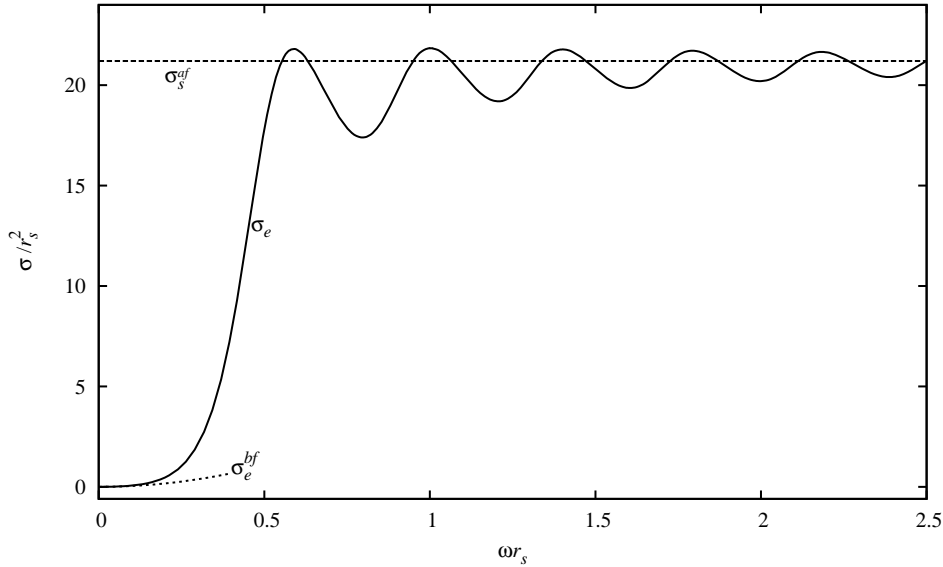


Figura 5.6: Aqui plotamos a seção de choque de absorção eletromagnética total de buracos negros de Schwarzschild junto com os resultados em baixas e altas energias. Desta maneira, podemos perceber a concordância do resultado numérico com os resultados obtidos analiticamente nestes limites. Como na seção de choque de absorção escalar, esta seção de choque de absorção tem máximos locais que correspondem aos máximos de cada seção de choque de absorção parcial que compõem a seção de choque de absorção total.

## 5.6 Comparação dos resultados

Nesta seção fazemos algumas comparações entre os resultados que obtivemos neste capítulo. Na Figura 5.7 mostramos a comparação entre a seção de choque de absorção escalar de buracos negros de Schwarzschild e a seção de choque de absorção de buracos acústicos canônicos. Podemos perceber que estes resultados só coincidem quando  $\omega = 0$ . Assim, concluímos que em baixas frequências a seção de choque de absorção não depende da forma do espaço-tempo ao redor do buraco, mas apenas do seu tamanho [24]. Já para frequências maiores que zero, o espaço-tempo tem grande influência sobre a seção de choque de absorção.

Na Figura 5.8 são mostrados os resultados para a seção de choque de absorção de buracos negros de Schwarzschild para os campos escalar não massivo e eletromagnético. Observando esta figura, podemos perceber que à medida que  $\omega$  cresce estes resultados ficam cada vez mais parecidos e tendem a coincidir. Podemos assim perceber que o spin das partículas espalhadas

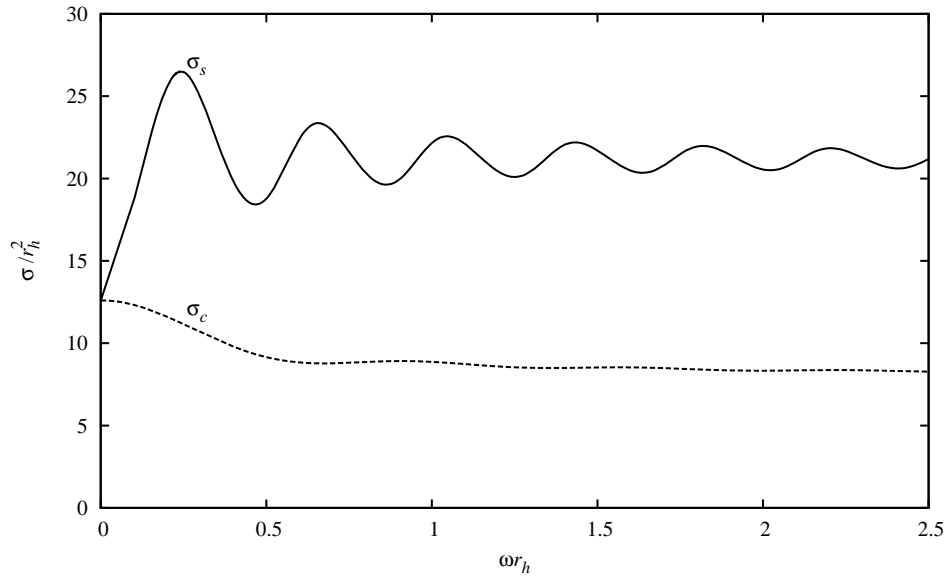


Figura 5.7: Comparação entre a seção de choque de absorção total de buracos negros de Schwarzschild para o campo escalar não massivo e a seção de choque de absorção de buracos acústicos canônicos. Apesar de as relações entre os valores das seções de choque de absorção e os raios dos horizontes serem as mesmas para  $\omega r_h = 0$ , elas são bastante diferentes para frequências maiores que zero.

tem influência sobre a seção de choque de absorção apenas para frequências pequenas.

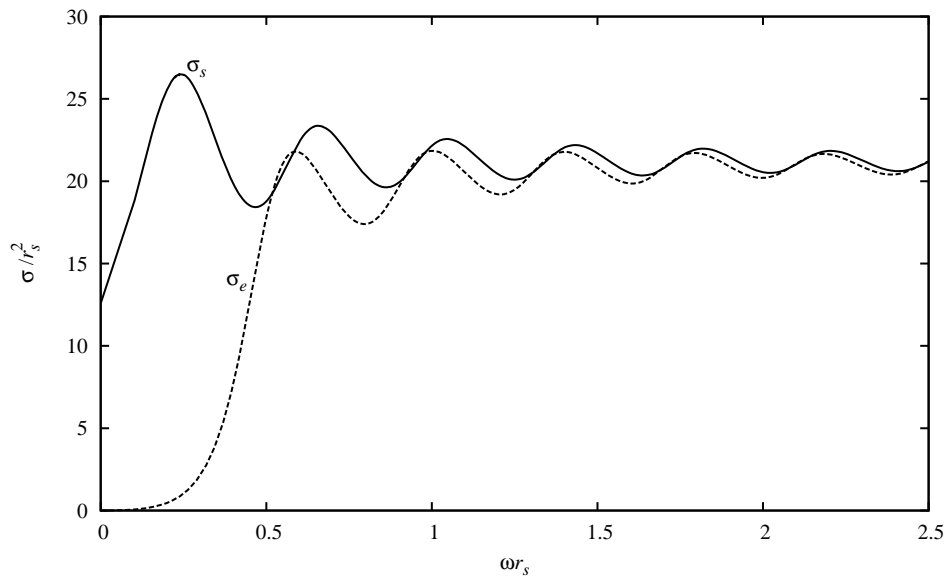


Figura 5.8: Comparação entre a seção de choque de absorção de buracos negros de Schwarzschild para os campos escalar não massivo e eletromagnético. Percebe-se que estes resultados tendem aos mesmos valores quando  $\omega$  for suficientemente grande.

# Capítulo 6

## Conclusão

Vimos nesta dissertação o cálculo da seção de choque de absorção de buracos negros de Schwarzschild para os campos escalar não massivo e eletromagnético e de buracos acústicos canônicos.

A respeito da matemática necessária para a obtenção dos resultados mostrados aqui, usamos métodos numéricos para encontrar as soluções das equações de campo. Isto se deveu ao fato de tais soluções não poderem ser escritas em termos de funções especiais conhecidas. Com isto, tratamentos analíticos só foram possíveis nos limites assintóticos ou em baixas frequências. Desta maneira, obtivemos de forma analítica as seções de choque de absorção em baixas e altas frequências. Da comparação de nossos resultados numéricos com os obtidos analiticamente concluímos que eles estão em excelente concordância.

Fizemos ainda comparações entre as seções choque de absorção de buracos negros de Schwarzschild para o campo escalar não massivo e eletromagnético e entre a seção de choque escalar em Schwarzschild e de buracos acústicos canônicos. No primeiro caso, concluímos que a seção de choque de absorção depende do spin das partículas principalmente no regime de energias pequenas. Neste caso, na medida em que a frequência e o número quântico  $l$  aumentam, os valores destas seções de choque de absorção coincidem. Na comparação da seção de choque escalar de buracos negros de Schwarzschild com a seção de choque de absorção de buracos acústicos canônicos, vimos que no limite  $\omega = 0$  elas têm a mesma expressão em termos dos raios dos horizontes de eventos. Isso está de acordo com as conclusões de Das *et al.* mostradas em [24]. Para frequências diferentes de zero, entretanto, pudemos ver

que os resultados são bastante diferentes. Sendo assim, percebemos que no limite  $\omega = 0$  a forma do espaço-tempo não influencia na expressão da seção de choque de absorção escalar, mas para espalhamentos nos quais a frequência tem valores significativos, a geometria do espaço-tempo é determinante.



# Apêndice A

## Seção de choque de absorção em altas frequências

Neste apêndice reproduzimos o cálculo da seção de choque de absorção de buracos negros de Schwarzschild para partículas não massivas no contexto da Relatividade Geral [22]. Uma vez que o conceito de spin não está presente neste contexto, concluímos que o resultado obtido aqui deve ser válido tanto para o campo escalar não massivo quanto para o campo eletromagnético.

Iniciemos com a descrição de uma geodésica tipo luz, que é a curva do movimento de qualquer partícula não massiva livre. Como o espaço-tempo de Schwarzschild é esfericamente simétrico, é possível considerar, por simplicidade, uma geodésica tipo luz no plano definido por  $\theta = \pi/2$ . Neste caso, a partir da métrica de Schwarzschild (2.4) podemos escrever:

$$\dot{s}^2 = f\dot{t}^2 - f^{-1}\dot{r}^2 - r^2\dot{\phi}^2 = 0, \quad (\text{A.1})$$

sendo que o ponto denota derivação com relação a um parâmetro afim.

Agora, vamos usar que a contração entre os vetores de Killing e as 4-velocidades de geodésicas definem constantes de movimento ao longo destas geodésicas. No caso do vetor de Killing estático tipo tempo do espaço-tempo de Schwarzschild,  $\xi^\mu = (\partial_t)^\mu = (1, 0, 0, 0)$ , temos:

$$E = \xi_\mu \frac{dx^\mu}{d\tau} = g_{\mu\nu} \xi^\mu \frac{dx^\nu}{d\tau} = f\dot{t}, \quad (\text{A.2})$$

com  $\tau$  sendo o parâmetro afim. No caso em que  $r \rightarrow \infty$ , pode ser mostrado que  $E$  é a

energia por unidade de massa de repouso da partícula cujo movimento está sendo considerado [28]. Outra constante de movimento é obtida quando usamos o vetor de Killing rotacional do espaço-tempo de Schwarzschild,  $\zeta^\mu = (\partial_\phi)^\mu = (0, 0, 0, 1)$ . A constante de movimento relacionada a este campo de Killing é o momento angular da partícula por unidade de massa e é dado por:

$$L = -\zeta_\mu \frac{dx^\mu}{d\tau} = -g_{\mu\nu} \zeta^\mu \frac{dx^\nu}{d\tau} = r^2 \dot{\phi}. \quad (\text{A.3})$$

Substituindo (A.2) e (A.3) em (A.1) obtemos a seguinte equação:

$$\frac{1}{2}E^2 = \frac{1}{2}f \frac{L^2}{r^2} + \frac{1}{2}\dot{r}^2. \quad (\text{A.4})$$

A equação (A.4), devido ao termo  $(1/2)\dot{r}^2$ , pode ser considerada como uma equação que descreve o movimento unidimensional de uma partícula com energia total por unidade de massa  $(1/2)E^2$  sujeita ao seguinte potencial efetivo:

$$V(r) = \frac{1}{2}f \frac{L^2}{r^2}. \quad (\text{A.5})$$

O potencial  $V(r)$  está plotado na Figura A.1. Analisando a equação (A.4), podemos concluir que a partícula, uma vez ultrapassando o máximo deste potencial, cairá no buraco negro. O caso limite é dado então por  $(1/2)E^2 = V^{\text{máx}}$ , sendo  $V^{\text{máx}}$  o máximo do potencial. Pode ser encontrado que o máximo do potencial fica em  $r = 3M$ . Neste caso, a situação limite que divide as condições nas quais a partícula será ou não absorvida pelo buraco negro é dada por

$$\frac{1}{2}E^2 = V(r = 3M) = \frac{L^2 M}{[2(3M)^2]}. \quad (\text{A.6})$$

No contexto relativístico, a seção de choque de absorção é dada por

$$\sigma_s^{af} = \pi b_c^2, \quad (\text{A.7})$$

onde  $b_c$  é o parâmetro de impacto crítico aparente. O parâmetro de impacto aparente é dado por

$$b = \frac{L}{E}. \quad (\text{A.8})$$

Do caso limite (A.6) concluímos que o parâmetro de impacto crítico é

$$b_c^2 = \frac{L^2}{E^2} = 27M^2. \quad (\text{A.9})$$

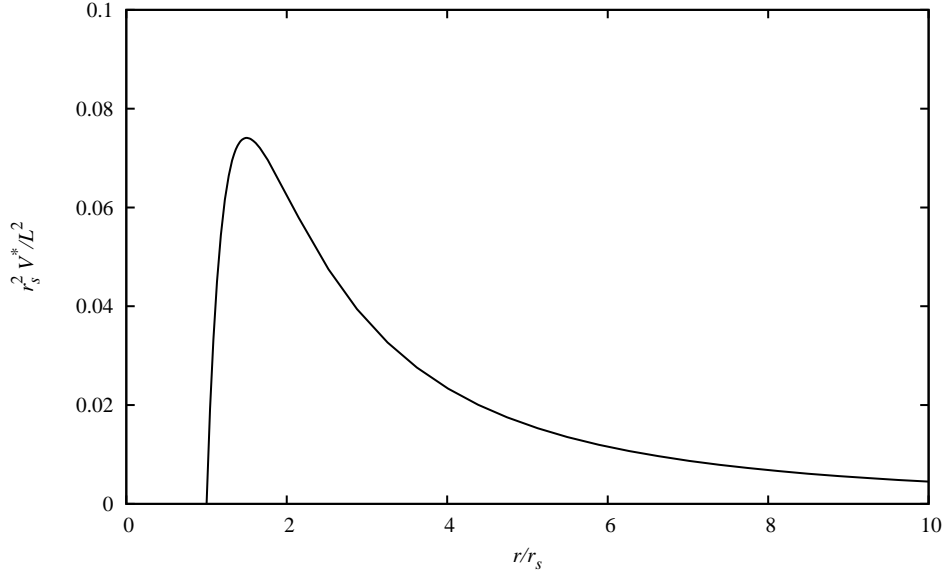


Figura A.1: Potencial para um espalhamento clássico no espaço-tempo de Schwarzschild. Este potencial é semelhante aos potenciais de espalhamento para os campos escalar não massivo e eletromagnético estudados nesta dissertação.

Substituindo este resultado em (A.7), concluímos que a seção de choque de absorção no limite clássico é

$$\sigma_s^{af} = 27\pi M^2 = (27/4)\pi r_s^2. \quad (\text{A.10})$$

O método utilizado aqui para encontrar o valor da seção de choque de absorção de buracos negros de Schwarzschild em altas frequências pode ser usado também para o cálculo da seção de choque de absorção em altas frequências de buracos acústicos canônicos. Neste caso, o valor que obtemos é [23]

$$\sigma_c^{af} = \frac{3\sqrt{3}}{2}\pi r_c^2. \quad (\text{A.11})$$

# Apêndice B

## Método numérico utilizado

O método numérico explicado na seção 5.2 se resume em desenvolvermos numericamente as equações radiais, para os três casos abordados nesta dissertação, do horizonte de eventos ao infinito e aplicar o resultado à expressão (5.18) para obtermos o coeficiente de transmissão para qualquer frequência. Para obter os resultados mostrados aqui, usamos o programa computacional *Mathematica 5.0*.

Para o desenvolvimento numérico das equações radiais, é necessária a escolha das condições iniciais das soluções. Neste caso faremos

$$\eta(x_h) = 1, \tag{B.1}$$

sendo  $x_h \rightarrow -\infty$  ( $r \approx r_h$ ). Usando (5.13), a outra condição inicial fica:

$$\left. \frac{d\eta(r)}{dr} \right|_{r \approx r_h} = \left. \frac{-i\omega}{f(r)} \right|_{r \approx r_h}. \tag{B.2}$$

Aqui,  $f(r) = 1 - r_s/r$  no caso de um buraco negro de Schwarzschild e  $f(r) = 1 - r_c^4/r^4$  no caso do buraco acústico canônico.

Na Figura B.1 mostramos a rotina desenvolvida para o software *Mathematica 5.0* para o cálculo da seção de choque de absorção eletromagnética em Schwarzschild.

```

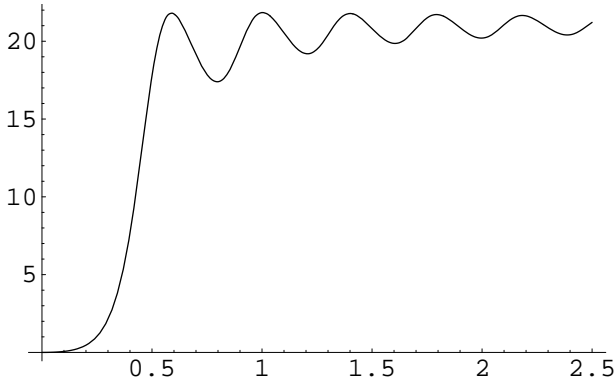
r_s = 1; r_h = 1.00001 r_s; r_i = 1000 r_s;
f[r_] := (1 - r_s/r); DSr_h[\omega_] := ( -i \omega / (1 - r_s/r_h) ); V_E[r_, l_] := (1 (1+l) / r^2) f[r];
psi[\omega_, l_] :=
R[r] /. First[NDSolve[{(\omega^2 - V_E[r, l]) R[r] + f[r] \partial_r (f[r] \partial_r R[r]) == 0, R[r_h] == 1,
R'[r_h] == DSr_h[\omega]}, R, {r, r_h, r_i}, MaxSteps -> 10^7]];
T[\omega_, l_] := (1/4 ((Abs[psi[\omega, l]])^2 + 1/\omega^2 (Abs[\partial_r psi[\omega, l]])^2) + 1/2)^-1 /. r -> r_i;
sigma[\omega_, l_] := pi / \omega^2 (2 l + 1) T[\omega, l];
sigma_bf[\omega_] := 4/3 pi \omega^2

```

```

Plot[Sum[sigma[\omega, l], {l, 1, 6}], {\omega, 0.001, 2.5}, PlotRange -> All]

```



- Graphics -

Figura B.1: Aqui temos a rotina usada no software *Mathematica 5.0* para o cálculo da seção de choque de absorção eletromagnética em Schwarzschild. Nesta rotina,  $DSr_h$  é a condição inicial para a derivada da solução,  $\psi[\omega_-, l_-] := R[r]$  representa a função radial  $r\varphi_{\omega l}^\lambda$ , solução da equação (4.33) e  $\sigma[\omega_-, l_-]$  é a seção de choque de absorção parcial. Além disto,  $T[\omega_-, l_-]$  não representa  $T_{\omega l}^\lambda$ , mas  $|T_{\omega l}^\lambda|^2$  e  $Abs$  é usado para o módulo de uma função. Os comandos são `NDSolve`, para resolver a equação diferencial numericamente e `Plot` para plotar uma função.

# Referências Bibliográficas

- [1] S. W. Hawking, *Nature* **248**, 30 (1974); S. W. Hawking, *Commun. Math. Phys.* **43**, 199 (1975).
- [2] W. G. Unruh, *Phys. Rev. Letters* **46**, 1351 (1981).
- [3] L. C. B. Crispino, E. S. Oliveira e G. E. A. Matsas, *Phys. Rev. D* **76**, 107502 (2007).
- [4] V. Cardoso e S. Yoshida, *J. High Energy Phys.* **7**, 009 (2005).
- [5] L. C. B. Crispino, E. S. Oliveira, A. Higuchi e G. E. A. Matsas, *Phys. Rev. D* **75**, 104012 (2007).
- [6] C. Doran, A. Lasenby, S. Dolan e I. Hinder, *Phys. Rev. D* **71**, 124020 (2005).
- [7] N. Sanchez, *Phys. Rev. D* **18**, 1030 (1978).
- [8] D. N. Page, *Phys. Rev. D* **13**, 198 (1976).
- [9] L. C. B. Crispino, A. Higuchi e G. E. A. Matsas, *Class. Quantum Grav.* **17**, 19 (2000).
- [10] J. Castiñeiras, L. C. B. Crispino, R. Murta e G. E. A. Matsas, *Phys. Rev. D* **71**, 104013 (2005).
- [11] J. Castiñeiras, L. C. B. Crispino e D. P. M. Filho, *Phys. Rev. D* **75**, 024012 (2007).
- [12] N. D. Birrel e P. C. W. Davies, *Quantum Fields in Curved Space* (Cambridge University Press, Cambridge, 1982).
- [13] B. P. Jensen e P. Candelas, *Phys. Rev. D* **33**, 1590 (1986); **35**, 4041(E) (1987).

- [14] R. D’Inverno, *Introducing Einstein’s Relativity* (Clarendon Press, Oxford, 1992).
- [15] L. Landau e E. Lifshitz, *Teoria do Campo, Física Teórica*, volume 2 (Editora Mir, URSS, 1980).
- [16] I. S. Gradshteyn e I. M. Ryzhik, *Tables of Integrals, Series, and Products* (Academic Press, New York, 1980).
- [17] M. Abramowitz e I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions* (Dover Publications, New York, 1965).
- [18] G. Arfken, *Mathematical Methods for Physicists*, 3ª edição (Academic Press, San Diego, 1985).
- [19] M. Visser, *Class. Quantum Grav.* **15**, 1767 (1998).
- [20] L. C. B. Crispino, *Quantização a baixas frequências de campos bosônicos no espaço-tempo de Schwarzschild e aplicações*, Tese de Doutorado, IFT-UNESP (2001).
- [21] A. Higuchi, *Class. Quantum Grav.* **4**, 721 (1987).
- [22] R. Wald, *General Relativity* (The University of Chicago Press, Chicago, 1984).
- [23] I. Zolnerkevic, *Acústica de fluidos ideais análoga à gravitação*, Tese de Mestrado, IFT-UNESP (2004).
- [24] S. R. Das, G. Gibbons e S. D. Mathur, *Phys. Rev. Letters* **78**, 417 (1997).
- [25] B. Mashhoon, *Phys. Rev. D* **7**, 2807 (1973).
- [26] J. D. Jackson, *Classical electrodynamics* 3ª edição, (John Wiley & Sons Inc., New Jersey, 1999).
- [27] R. Fabbri, *Phys. Rev. D* **12**, 933 (1975).
- [28] E. S. Oliveira, *Seção de Choque de Absorção de Buracos Negros de Schwarzschild para o Campo Escalar Não Massivo em Baixas Frequências*, Trabalho de Conclusão de Curso, UFPA (2006).