SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E CIENTÍFICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICAS

FLÁVIO NAZARENO ARAUJO MESQUITA

AS DINÂMICAS PRAXEOLÓGICAS E COGNITIVAS E A CONSTRUÇÃO DO CONHECIMENTO DIDÁTICO DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA

Belém
2011

FLÁVIO NAZARENO ARAUJO MESQUITA

AS DINÂMICAS PRAXEOLÓGICAS E COGNITIVAS E A CONSTRUÇÃO DO CONHECIMENTO DIDÁTICO DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA

Trabalho apresentado ao Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas da Universidade Federal do Pará – Mestrado Acadêmico – vinculado à Linha de pesquisa Formação de Professores, como exigência para realização da defesa de mestrado.

Orientador: Prof. Dr. Renato Borges Guerra

Belém
2011

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP) – Biblioteca do IEMCI, UFPA

Mesquita, Flávio Nazareno Araújo.
As dinâmicas praxeológicas e cognitivas e a construção do conhecimento didático do professor de matemática / Flávio Nazareno Araújo Mesquita, orientador Prof. Dr. Renato Borges Guerra – 2011.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Pará, Instituto de Educação Matemática e Científica, Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas, Belém, 2011.

1. Professores de matemática – formação. 2. Matemática – estudo e ensino. 3. Didática. I. Borges, Renato Guerra, orient. II. Título.

CDD - 22. ed. 371.71

FLÁVIO NAZARENO ARAUJO MESQUITA

AS DINÂMICAS PRAXEOLÓGICAS E COGNITIVAS E A CONSTRUÇÃO DO CONHECIMENTO DIDÁTICO DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA

Trabalho apresentado ao Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas da Universidade Federal do Pará – Mestrado Acadêmico – vinculado à Linha de pesquisa Formação de Professores, como exigência para realização da defesa de mestrado.

Orientador: ____

Prof. Dr. Renato Borges Guerra (UFPA)

1º Examinador: ____

Prof. Dr. Tadeu Oliver Gonçalves (UFPA)

2º Examinador: ____

Prof. Dr. Iran Abreu Mendes (UFRN)

AVALIADO EM: _____/_____/_____ CONCEITO:__________

À minha família e em especial às minhas filhas Flávia Drielle e Lívia Vitória, e a todos os professores comprometidos com a formação de melhor qualidade dos professores que ensinam Matemática.

AGRADECIMENTOS

Durante o processo de seleção para o mestrado as pessoas mais próximas perguntavam sobre a possibilidade de minha aprovação. A resposta que dava era sempre a mesma: o maior risco que existe é o de ser aprovado. Esse “risco” se justificava pelo fato da aprovação me tirar da “condição confortável” que vivia e me colocar diante de um mundo novo, estranho, obscuro.

Assim, ao ingressar no curso tive que superar obstáculos que não seria possível sem a colaboração de várias pessoas que fizeram e fazem parte do meu convívio. Assim, esses agradecimentos são uma forma de expressar e eternizar minha gratidão à minha querida mãe, Maria Amélia Araujo Mesquita, que esteve e está sempre pronta para ajudar com seu amor e carinho. Ao meu pai, Godofredo Gaspar Mesquita, que sempre esteve ajudando com suas palavras e gestos de incentivo. A todos os meus irmãos (Socorro, Paulo, Gerci, Fábio, Cláudio, Moisés, Amélia e Júnior) e todos meus sobrinhos e cunhados que de alguma forma contribuíram nessa minha caminhada.

Às minhas filhas Flávia Drielle e Lívia Vitória, que são minha razão de existência, e minha esposa Maria das Graças pelo companheirismo em todos os momentos.

Ao meu orientador Renato Borges Guerra por sua contribuição decisiva na idealização e conclusão deste trabalho.

A todos os professores do Programa pelas contribuições na minha formação.

Aos professores Tadeu Oliver Gonçalves e Luis Carlos Pais pelas valiosas contribuições na qualificação.

Ao professor Iran Mendes pela sua colaboração decisiva para a realização da defesa deste trabalho.

Aos colegas mestrandos e doutorandos do curso, em especial ao Denivaldo Pantoja, à Patrícia Feitosa pelo companheirismo e todos do Grupo de Estudo de Didática da Matemática pelo incentivo.

Aos funcionários do IEMCI, especialmente à Deyse e ao Eugênio pela colaboração logística.

Para finalizar agradeço a Deus pela saúde e serenidade que tive para seguir nesta caminhada.

RESUMO

Este trabalho é uma pesquisa narrativa autobiográfica que busca compreender de que modo as praxeologias matemáticas por mim vivenciadas enquanto professor de matemática e aluno de cursos de formação continuada podem contribuir, impedir, ou mesmo serem neutras, na construção de uma nova praxeologia didática sobre a fórmula de resolução de equações do 2º grau no ensino fundamental. Sob a luz da teoria antropológica do didático, mais precisamente de sua dimensão cognitiva, são exploradas as noções de dinâmica praxeológica e cognitiva de uma pessoa para análise das duas fases da transposição didática interna, realizadas em uma turma da quarta etapa da EJA. Os resultados apontam que o equipamento praxeológico e o universo cognitivo relativos ao objeto matemático em questão contribuem para construção de uma nova praxeologia matemática. Mas o jeito pontual de pensar e fazer em sala de aula pode determinar as ações docentes e não permitir o fazer das conexões entre os objetos matemáticos intencionados na primeira fase da transposição didática interna sobre o objeto de estudo. Há, portanto, que se romper com esse fazer cultural pontual docente e permitir renovar o equipamento praxeológico e cognitivo do professor.

Palavras-chave: Teoria Antropológica do Didático. Equipamento Praxeológico. Universo Cognitivo. Transposição Didática Interna.

ABSTRACT

This work is an autobiographical narrative research that seeks to understand how the mathematical praxeology, experienced by me, as a math teacher and a student of continuing education courses, can contribute, prevent, or even be neutral in the building of a new didactic praxeology about solving equations of second degree in elementary education. Under lightof anthropological theory didactic, more precisely of its cognitive dimension, are explored notions of dynamic and praxeological a person to analyze the two phases of internal didactic transposition, performed in a class of fourth stage of the EJA. The results indicate that the equipment and the cognitive universe praxeological for the mathematical object in question contribute to buildingnew praxeology mathematics. But the way of thinking and doing occasional classroom teachers can determine the actions and do not allow the connections between mathematical objects intended in the first phase of the didactic transposition of the internal object of study. There is, therefore, to break this cultural spot to allow teachers and renew equipment and cognitive praxeological teacher.

Keywords: Anthropological Theory of Didactics. Equipment praxeology. Cognitive Universe. Didactic Transposition Internal.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

1.1 O PERCURSO DA PRÁTICA DOCENTE COMO OBJETO DE PESQUISA E A DEFINIÇÃO DA METODOLOGIA

No transcurso de minha vida como professor, em alguns momentos, ora sentia que o meu trabalho docente nas escolas estava indo bem, pois havia turmas, alunos, diretores que se mostravam satisfeitos e ora sentia não estar satisfatório pelos resultados negativos como o alto índice de reprovação de alunos, principalmente no ensino fundamental da escola pública, ou a crescente e gradativa quantidade de alunos sem interesse em assistir aulas.

Diante de problemas desse tipo, assumindo ser o detentor maior do conhecimento da Matemática na sala de aula, com a presunção de que não precisava aprender mais nada, imputava aos alunos todas as mazelas relacionadas à aprendizagem. Assim, construía discursos que faziam com que aqueles que tinham dificuldades com a matemática que eu lecionava imputassem sempre para si a culpa por seus fracassos. Falas do tipo: *Não sou professor que falta ao trabalho e sempre dou todo o conteúdo bem explicado e com bastantes exercícios*; *só cai na prova e nos testes o conteúdo que foi trabalhado em sala de aula e do mesmo jeito que foram exercitados* sempre estavam prontos para serem verbalizadas.

No entanto, a recorrência a discursos desses tipos, após algum tempo, já não se mostrava suficiente para justificar a falta de interesse que se acentuava cada vez mais pelos alunos, principalmente do ensino fundamental. Isso me fez pensar que algo poderia estar inadequado na minha prática docente ou que esta poderia estar obsoleta e me conduziu a buscar alternativas para mudar essa situação.

Uma das alternativas foi a busca por formação continuada que se deu inicialmente por meio de cursos aperfeiçoamento que deram maior ênfase em conteúdos matemáticos que ainda não atenderiam minhas expectativas. As problemáticas postas acima acabaram me conduzindo à especialização em educação matemática e ao mestrado na mesma área, sempre em busca de encontrar respostas para atender minhas inquietudes no ensino.

Na especialização, tive o primeiro contato com as tendências em educação matemática, e em especial com etnomatemática e a modelagem matemática que, de um modo geral, trouxeram consequências para minha prática docente, pois influenciaram numa considerável mudança, principalmente nos aspectos motivacionais nas minhas ações em sala de aula. O contato que tive com os saberes dessas áreas me incentivou a um ensino de matemática buscando contextos como o cotidiano, o cultural, o social, entre outros, em que os alunos pudessem observar a importância da disciplina matemática.

No curso de mestrado, fazendo parte do Grupo de Didática da Matemática, tive interesse despertado a respeito do porquê de fórmulas e algoritmos no ensino de matemática na leitura e estudo do trabalho de Guerra e Silva (2006, 2009). Esses textos me ofereceram um pensar a respeito de tais objetos, em especial sobre a fórmula de resolução de equações do 2º grau como articulações de outros objetos matemáticos (SILVA; GUERRA, 2009): operações entre polinômios, produtos notáveis, fatoração dos trinômios do 2º grau com uma variável, sistemas de equações do 1º grau com duas equações e duas variáveis e ainda o teorema fundamental da álgebra, embora este último objeto matemático citado não esteja presente explicitamente no ensino fundamental.

Um objeto matemático, a fórmula de resolução da equação do segundo grau, passa a ser visto como um ente transacional, que acontece de fato quando o relacionamos a outros objetos matemáticos do passado e futuro, com essa intencionalidade de fazê-lo acontecer.

Isso me levou a compreender que as críticas a respeito do uso de fórmulas e algoritmos em matemática citadas por vários autores (BARALDI, 1999; MEDEIROS, 1999; CHAGAS, 2005), no sentido pela forma como são usadas, geralmente, sem nexo no ensino de Matemática, como instrumentos de um ensino meramente mecânico, já não cabia e apontava para uma possibilidade de criar respostas para minhas inquietudes à medida que o saber matemático parece sempre novo e isso de algum modo me parece ser instigante de modo a manter o interesse do sujeito que estuda.

Esse olhar vai se ratificar com as minhas leituras dos textos sobre a transposição didática de Chevallard (2005), que trata da reconstrução do objeto matemático para o ensino, na sua transposição do saber sábio para o saber a ser ensinado em que se destaca o caráter de transacionalidade dos objetos matemáticos de ensino, e de Garcia et al. (2006) que trata do problema da desconexão de saberes matemáticos na escola. Todas essas leituras foram apoiadas por uma compreensão maior da Teoria Antropológica do Didático (TAD) de Chevallard (1999) que descreve o fazer matemático como praxeologias desenvolvidas no seio de instituições que impõem as relações entre os sujeitos dessas instituições e os objetos matemáticos que nelas vivem.

Segundo Chevallard (2009), sob o quadro da TAD, uma *pessoa* é o resultante de seu passado e presente de sujeições institucionais de modo que o conhecimento de uma pessoa em *diacronia* pode ser imaginado como o fazer da *história da pessoa como sujeito* por meio da crônica de suas sujeições e contra sujeições. Ele considera todas *as praxeologias que a pessoa dispõe,* o *equipamento praxeológico da pessoa,* para destacar que, assim como há uma *história da pessoa como sujeito*, existe uma *dinâmica cognitiva*, em que alguns objetos desaparecem do universo cognitivo da pessoa, enquanto outros aparecem, e em correspondência há uma *dinâmica praxeológica* em que o *equipamento praxeológico da pessoa* muda, no sentido de que algumas partes deste equipamento perdem suas características de operação, enquanto outras partes são remodeladas e que novos elementos são adicionados ao longo do tempo.

A partir dessa ótica, despertou-me a *transposição didática interna,* um dos estágios no processo da transposição didática, que sobremaneira revela o papel da relação pessoal do professor com o objeto matemático de interesse nesse estágio do processo da transposição didática. Chevallard (2005) e Ravel (2003) enfatizam as singularidades da atuação do professor nessa fase do processo de transposição, apontando o professor como sujeito fundamental na (re)construção final do saber a ser ensinado que, mesmo sob o assujeitamento institucional, cria sua versão sobre o objeto matemático a ser ensinado numa dinâmica de movimentos do conjunto de relações pessoais e das praxeologias disponíveis em seu equipamento praxeológico de modo único e singular que é só seu - a pessoa, para a elaboração de seu texto do saber eminente a ser ensinado. Meu despertar se justifica à medida que a construção de uma praxeologia, ou uso de uma nova praxeologia, por uma pessoa em uma instituição supõe uma dinâmica cognitiva e praxeológica que resulta da operação de adequação de novas sujeições para a pessoa, o que implica um trabalho de identificar e tratar os conflitos relacionados com o choque das novas sujeições com as sujeições anteriores, quando as primeiras são experimentadas pela pessoa como incompatíveis com a sua identidade.

Esse pensar encaminhou novas compreensões sobre minhas inquietudes, pois pude assim pensar a respeito do aluno em suas sujeições, mas isso encaminha para minha posição inicial que imputava aos alunos a falta de interesse nos estudos. Assim, reformulei minha questão de pesquisa me assumindo como o foco da pesquisa, no sentido de considerar as múltiplas sujeições que vivi e ainda vivo enquanto sujeito nas instituições, considerando as posições que nelas ocupo e as relações pessoais com a fórmula de resolução da equação do segundo grau.

À luz desse entendimento, assumo o problema posto por Chevallard (2009) que se espera que o equipamento praxeológico e, correletivamente, o universo cognitivo da pessoa mude de alguma maneira, e nós queremos saber o que no equipamento praxeológico ou no universo cognitivo da pessoa pode: apoiar a mudança, interfirir ou ser neutro sobre ela? Isso referente à fórmula de resolução da equação do segundo grau, mais especificamente quanto ao uso de uma praxeologia presente no texto de Silva e Guerra (2009) acerca desse objeto matemático inspirada na organização matemática do ensino superior de Queysanne e Delachet (1964), sem perder de vista que:

> Algumas mudanças desejadas não são obtidas, pois não podemos produzir um remodelamento adequado da relação a tal ou tal objeto sensível. Qualquer alteração a este respeito, é uma remodelação da pessoa e não é sem custo - apesar do ganho esperado (CHEVALLARD, 2009, p. 7, tradução nossa).

Seguindo nesse pensar, busco contrapor minhas sujeições umas contras as outras, questionando as relações a esse objeto matemático nas diversas instituições em que atuei e atuo, pensando na realização do texto do saber anterior à ação em sala de aula, até a culminância em sala de aula, a partir de reflexões sobre um aluno hipotético frente ao texto do saber produzido pelo professor e como isso contribuiu para a construção do meu conhecimento didático, no sentido da (re)construção do universo cognitivo e do equipamento praxeológico.

Para tanto, busco em minhas memórias as praxeologias sobre a fórmula de resolução da equação do segundo grau que vivi e ainda vivo nas diferentes instituições em que estive e estou inserido, pois “em geral, nossas relações "pessoais" são frutos de nossa história de submissões institucionais passada e presente” (CHEVALLARD, 2009, p. 3, tradução nossa), de como me tornei professor e como foi se construindo minha prática docente que marca minhas relações pessoais com o saber matemático, em especial com o objeto matemático supracitado.

Assumo, assim, o trabalho investigativo a partir de narrativas de minhas lembranças sobre as praxeologias realizadas em diferentes instituições em que estou e estive inserido, com seus jeitos próprios de fazer e pensar que vivem em minhas memórias , e, nesse sentido, “ é válido pensar em termos pluralistas sobre o uso da memória por diferentes grupos sociais, que devem ter diferentes visões do que é importante ou memorável” (BURKE, 2000 apud MIGUEL; MENDES, 2010, p. 84) pois isso pode revelar as imposições institucionais que amalgam meu fazer docente e com isso alcançar meu o objetivo de (re)construir o equipamento praxeológico e o universo cognitivo de minha pessoa, sem perder de vista que:

> As narrativas constituem as expressões de uma realidade que é do sujeito, não sendo tomadas como uma representação fidedigna de um contexto histórico, mas como o universo de significação social que é subjetivamente real para ele. Ou seja, quando uma pessoa relata os acontecimentos vividos, percebe-se que reconstrói sua trajetória atribuindo-lhe novos significados (PAIXÃO, 2008, p. 47).

Assim, em acordo que “a narrativa autobiográfica não compreende a verdade literal dos acontecimentos, mas, antes, uma representação que deles faz o sujeito” (CUNHA, 1997, p. 3) e que, segundo Chevallard (2009), a relação pessoal a um objeto emerge de uma pluralidade de relações institucionais e que, portanto, nunca é perfeitamente conforme com as relações institucionais, ou seja, a pessoa quase sempre, em certa medida, tem uma relação não conforme com as instituições pois a sua relação pessoal a um objeto é formada pela integração ao longo do tempo de diferentes relações institucionais em que se sujeitou, penso ser, nesse sentido, factível encontrar minhas respostas aos questionamentos postos; o que me leva espontaneamente a assumir a narrativa autobiográfica, de forma a reconstituir episódios de minha vida enquanto professor, como pessoa que ocupa seu lugar nas instituições, de minhas relações pessoais que foram se construindo e se reconstruindo como consequências das várias relações institucionais decorrentes de diferentes sujeições que vivo e vivi.

1.2 A ESTRUTURA DO TEXTO

Na sequência do texto, o capítulo 2 intitulado *Pressupostos teóricos* traz a transposição didática interna e a teoria antropológica do didático que são os alicerces da pesquisa.

No capítulo 3 que tem como título *Sobre a formação do meu equipamento praxeológico e universo cognitivo* trago as narrativas de minhas lembranças de passados distantes e recentes das praxeologias por mim assumidas nas (das) instituições acerca da fórmula resolução de equações do segundo grau, e como foi se construindo o equipamento praxeológico e universo cognitivo de minha pessoa a partir das relações pessoais com esse objeto matemático ao longo de minha formação docente e as tensões ao por em confronto assujeitamentos procedentes de diferentes instituições. Neste capítulo é exibida uma nova praxeologia matemática acerca da fórmula de resolução de equações do segundo grau construída anteriormente à praxeologia didática em sala de aula.

No capítulo 4 *A prática docente sob uma "nova perspectiva" – a realização do texto do saber em sala de aula* é exibida uma "nova" praxeologia didática realizada em sala de aula acerca da resolução de equações do segundo grau considerando uma nova relação pessoal com esse objeto matemático.

Nas considerações finais faço uma síntese do movimento da pesquisa e comentários sobre as análises feitas acerca das dinâmicas praxeológicas e cognitivas.

2 PRESSUPOSTOS TEÓRICOS

Nas leituras, nas disciplinas e nos debates realizados no grupo de estudo de Didática da Matemática no decorrer do curso de mestrado, fui aos poucos percebendo a importância da relação do professor com o saber para que esse possa elaborar organizações matemáticas e didáticas com intencionalidade voltada para as articulações e integrações de objetos matemáticos . Assim, apresento elementos constituintes das teorias estudadas nesses encontros como subsídios para alcançar os objetivos presentes neste trabalho.

2.1 O ENFOQUE EPISTEMOLÓGICO DA DIDÁTICA DA MATEMÁTICA

Segundo Bosch e Chevallard (1999), a busca de respostas provisórias a questionamentos - por que ensinar Matemática na escola? Qual a razão de ser de certos conteúdos matemáticos? Qual o foco do problema do ensino e da aprendizagem de matemática? No professor? Na Matemática? Nos alunos? Ou nas instituições? - levou muitos pesquisadores a focar tais elementos de forma dissociada. De forma geral, a Matemática continha uma blindagem em que ela não estava como o foco principal das pesquisas.

A Didática da Matemática, na perspectiva de Bosch e Chevallard (1999), não se fundamenta em projetos de estudos científicos em torno dos problemas de ensino e aprendizagem da Matemática, ou seja, no sujeito que aprende ou que ensina Matemática, mas em tomar como objeto fundamental de estudo o fazer matemático que tais sujeitos são conduzidos a estudar em conjunto. Dessa forma, o foco da Didática da Matemática está na própria Matemática e a relação dos sujeitos com objetos de natureza matemática.

Bosch e Chevallard (1999, p. 2, grifos no original) afirmam que “a abordagem clássica, com relação a essa questão, estudava problemas de transmissão e de aquisição de *noções matemáticas supostamente dadas*”, onde tais noções eram invisíveis e não problematizadas, ou seja, as respostas eram inquestionáveis. As dimensões cognitivas e matemáticas eram percebidas como duas faces opostas de uma moeda, sendo que uma dessas faces não havia nada a ser estudado, no caso a

Matemática, e na outra face, os sujeitos que se relacionam com ela e que eram os alvos nas pesquisas.

A Teoria das Situações Didáticas (TSD) rompe com esse paradigma ao colocar o aspecto matemático como a essência dos fenômenos didáticos. E a elaboração de uma ciência de estudo desses fenômenos conduz a mostrar os modelos utilizados para submetê-los às leis de uma *epistemologia experimental*. (BOSCH; CHEVALLAR, 1999).

A TSD foca seu estudo nos sujeitos em situação e num determinado meio e postula que um conhecimento é uma situação, criando dessa forma um modelo geral de Matemática segundo o qual os conhecimentos matemáticos podem ser descritos com base em situações fundamentais, dentro dos seus devidos contextos. Isso remete a uma nova ruptura com a abordagem clássica no momento em que a TSD supõe que os conhecimentos matemáticos podem ser aprendidos somente através das atividades que esses conhecimentos permitem realizar e, portanto, através dos problemas que permitam resolver. (BOSCH; CHEVALLAR, 1999).

Segundo Almouloud (2007, p. 32) “o objeto central de estudo nessa teoria não é o sujeito cognitivo, mas a situação didática na qual são identificadas as interações estabelecidas entre professor, aluno e saber”. Sendo assim, o foco de estudo deixa de ser somente um desses elementos em separado e volta-se para eles dentro de um determinado meio. Dessa forma, a TSD apóia-se em três hipóteses: o aluno aprende adaptando-se a um meio que é fator de dificuldades e de desequilíbrios; o meio precisa ser munido de intenções didáticas por parte do professor para promover a aprendizagem matemática criando situações; o meio e as situações devem relacionar os saberes matemáticos de forma enfática (ALMOULOUD, 2007). Assim,

> A Matemática não é somente um sistema de conceitos logicamente consistente que se produz de demonstrações: ela é, em primeiro lugar, uma atividade que se realiza em uma dada *situação e contra um meio*. Além disso, trata-se de uma atividade *estruturada* da qual é possível destacar diferentes fases: ação, formulação e validação, às quais se acrescentam a devolução e a institucionalização (BOSCH; CHEVALLAR, 1999, p. 3, tradução nossa).

Nesse sentido, Bosch e Chevallard (1999, p.3) firmam que

> A noção de *transposição didática* deve ser interpretada como uma noção que permite uma leitura dessa dupla ruptura epistemológica provocada pela teoria das situações. Visto que sua contribuição principal não foi somente evidenciar a *distância* que separa o saber acadêmico do saber ensinado e, portanto, as transformações necessárias que deve ser submetido todo objeto matemático para poder ser ensinado.

Assim, a noção de transposição didática, para esses autores, mostra que o saber matemático está na origem de todos os problemas didáticos.

2.2 A TRANSPOSIÇÃO DIDÁTICA INTERNA

A Transposição Didática proposta por Chevallard (2005) apoiado principalmente na teoria das situações didáticas, pautou-se no “propósito de fazer uma análise epistemológica do saber do ponto de vista didático essencialmente em termos de *objetos do saber*” (ALMOULOUD, 2007, p. 113, grifos no original).

Para Chevallard (2005) a transposição didática é o conjunto de transformações adaptativas que tornam um objeto de saber a ensinar num objeto de ensino. Objeto esse definido previamente como saber a ensinar. Este processo de “condução” do saber é feito em etapas e se dá, fundamentalmente, sob a responsabilidade de instituições, que Chevallard (2005) inicialmente as intitula de noosfera, das quais fazem parte cientistas, professores, especialistas, políticos, autores de livros e outros agentes da educação.

Para Chevallard (2005), noosfera é o entorno do sistema didático, sistema esse que se constitui de aluno-professor-saber e suas relações. São as instituições que compõem a noosfera que farão a seleção de elementos de conhecimento do saber que é assim designado como "saber a ensinar" que são então submetidas ao trabalho de execução. São tais instituições que irão assumir

> A parte visível do trabalho transpositivo, no qual podemos chamar o trabalho externo da transposição didática, em oposição ao trabalho interno, que se realiza no interior mesmo do sistema de ensino, bastante depois do lançamento oficial de novos elementos do saber ensinado. (CHEVALLARD, 2005, p. 36).

Dessa forma, o saber a ser ensinado passa por um processo de adaptação até se transformar em saber ensinado. Nesse sentido, o saber ganha uma dinâmica e deixa de ser algo rígido no processo de estudo, uma vez que, segundo Leite (2004), Chevallard considera que o enfoque psicológico restringia sua análise à relação professor-aluno. Assim,

> A teoria da transposição didática pretende desestabilizar esse entendimento, expondo enfaticamente a necessária distância entre o saber ensinado e seus saberes de referência. Mais do que isso, propõe-se a pensar o sistema didático a partir dessa dimensão, com base na abordagem epistemológica do saber ensinado (LEITE, 2004, p. 51).

Isso conduz a reflexões acerca do saber a ensinar na medida em que expõe que o que está posto nos programas escolares não necessariamente é o que está nas obras matemáticas de referência da academia, pois as obras da matemática escolar são reconstruções sob condições de viabilizar o ensino e, portanto, sob condições distintas das obras matemáticas originais. Além disso, para Chevallard, Bosch e Gascón (2001), esse efeito é variável, pois a transposição didática continua dentro do sistema didático com a denominação de transposição didática interna. Lins, Lima e Menezes (2010, p. 119), apoiados em Chevallard (1991), afirmam que

> A transposição didática interna é o passo final da transposição sofrida pelo saber científico, é aquele que acontece intramuros da sala de aula, cujos parceiros envolvidos são o professor e o(s) aluno(s), e que tem no professor o elemento humano responsável por tal transposição.

No entanto, coaduno com Ravel (2003) que considera também a etapa anterior à sala de aula, quando este pensa no momento de preparação do texto do saber corporificado nas notas de aulas, o projeto de curso do professor.

Ravel (2003, p. 3, tradução nossa) busca construir inicialmente sua compreensão destacando que

> Se um observador curioso abrir as portas de salas diferentes e observa vários professores a palestrar sobre o mesmo objeto matemático em um dado nível de ensino, é provável que, no fechar das portas, ele não sinta que observou exatamente o mesmo objeto matemático em todas as classes. E se esse mesmo observador, para

> tentar explicar esse fenômeno, consultar o currículo, a primeira referência em que os professores são obrigados para construir os seus cursos, também pode ser surpreendido que haja uma discrepância entre o objeto matemático no programa e o que foi observado em sala de aula.

Assim, me concentro na investigação do processo da transposição didática interna, ou seja, na passagem do saber a ser ensinado ao saber ensinado em sala de aula realmente, isto é, o que cada professor apresenta aos alunos de forma eficaz.

Asarc (1989 apud RAVEL, 2003, tradução nossa), buscou precisar a idéia de Chevallard (1991), mais precisamente, de que "o conteúdo do conhecimento designado como a ser ensinado explicitamente nos programas e implicitamente, através da tradição, evolui da interpretação dos programas" (CHEVALLARD, 1991, p. 39), afirmando que

> Retornando imediatamente sobre o conceito de saber a ser ensinado, este não pode ser reduzido ao final do programa. Temos observado o fato de que o texto do programa apela por uma interpretação. O saber a ensinar é aquele aos quais os professores acham que tem que ensinar, quando os livros publicados, os anais, e os hábitos, definem acerca da interpretação do programa (ASARC, 1989 apud RAVEL, 2003, p. 4, tradução nossa).

Nesse sentido, a transposição didática interna não é apenas mais um estágio da transposição didática, pois aponta para a importância do papel do professor no processo de transposição. O papel do professor na transposição didática interna não se restringe apenas à ação em sala de aula, uma vez que nesse processo pertence a ele a responsabilidade da "preparação" do texto do saber para ensinar o saber que deve ser ensinado; na preparação da "cartilha didática", termo emprestado de Chevallard (1991), que vem do verbo vestir, o que significa "tornar pronto, colocar em estado de uso eminente" (LE PETIT ROBERT, 2000 apud RAVEL, 2003, p. 4, tradução nossa).

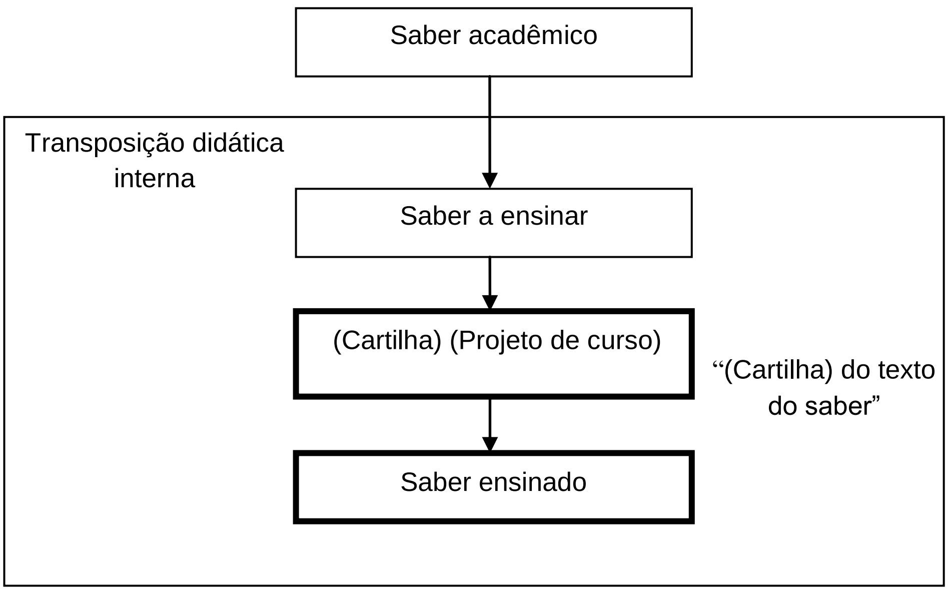
O papel estratégico do professor no processo de transposição didática interna é revelado ainda quando Chevallard, Bosch e Gascón (2001, p. 128, grifos no original), ao tratar do problema do currículo, afirmam que

> O ponto de vista da didática propõe que o problema da elaboração do currículo, que tradicionalmente havia sido considerado como um problema essencialmente psicopedagógico, tem um *componente matemático essencial*. Não se trata unicamente de um problema de seqüenciar e temporizar os conteúdos do currículo, mas de realizar um trabalho matemático de reorganização dos elementos técnicos, tecnológicos e teóricos que compõe cada obra com base nas questões a que esta responde. Trata-se, realmente, de uma verdadeira *reconstrução criativa* das obras que fazem parte do currículo.

Tal reconstrução criativa a que se referem esses autores exige analisar diversas organizações matemáticas que poderiam fazer parte da obra designada no currículo e as diferentes atividades matemáticas concretas de modo a atender a (re)construções segundo a intencionalidade do professor de integrar o currículo, por exemplo.

Assim, a preparação do texto de saber que, segundo Chevallard (2005), não está exposto em nenhum lugar e que nesse estágio da transposição didática, o professor faz uso da ficção de liberdade que lhe cabe para a preparação de sua aula; do seu momento íntimo frente ao saber, nos parece claro como um estágio ou fase da transposição interna, o estágio anterior à ação em sala de aula. A Figura 1 esquematiza o que assumo com Ravel (2003) como transposição didática interna.

Figura 1 - Os dois estágios da transposição didática interna



Fonte: Ravel (2003, p. 6)

Ravel (2003) assume em seu trabalho dois estágios na transposição interna: os estágios da preparação do texto do saber (projeto de curso) e do saber ensinado que se dá na sala de aula pelo professor.

Assumindo que a preparação do curso ou do plano da aula sobre um determinado objeto matemático pelo professor é co-determinada pela relação que este venha a ter com o objeto e pelas praxeologias que este utiliza nas instituições, ou ainda, como diz Pais (2008, p. 14)

> A utilidade do saber permite ao sujeito um referencial de análise capaz de lhe proporcionar um olhar mais amplo e indagador. É exatamente essa possibilidade de transformação que permite uma espécie de transposição interna do saber sobre seu próprio campo epistemológico. Em suma, quando o sujeito passa a ter um relativo domínio sobre um saber, torna-se possível desencadear uma prática transformadora e geradora de novos saberes.

Em busca de melhor compreender o "relativo domínio do saber" me encaminhou a teoria antropológica do didático na forma explorada por Chevallard (2009) que revela sobremaneira o papel do professor frente à TAD.

2.3 A TEORIA ANTROPOLÓGICA DO DIDÁTICO

O estudo da Teoria Antropológica do Didático (TAD) no grupo de Didática da Matemática do Instituto de Educação Matemática e Científica (IEMCI) da Universidade Federal do Pará (UFPA) levou-me a refletir acerca de minhas ações docentes antes e após minha conscientização a respeito da relação pessoal com o saber matemático.

A TAD a partir de noções fundamentais se propõe a modelar as práticas docentes de professores de Matemática nas instituições e ofereceu-me a clareza do momento da transposição didática interna na construção de uma praxeologia matemática e a relação desse fazer com a dinâmica cognitiva e praxeológica que pode estar envolvida nesse processo. Assim, passo a expor os elementos da TAD que fundamentam este trabalho.

A partir de Chevallard (2009), considero as noções de universo cognitivo, equipamento praxeológico e as respectivas dinâmicas cognitivas e praxeológicas que me deram suporte para desenvolver este trabalho. Tais noções requerem que tratemos das quatro noções fundamentais da TAD que fundamentam as noções inicialmente citadas: de objeto, de relação pessoal a um objeto, de pessoa e de instituição.

Um objeto, segundo Chevallard (2009, p.1, tradução nossa), é

> Qualquer entidade, tangível ou intangível, na existência para pelo menos um indivíduo. Então, tudo é objeto, incluindo pessoas. Os objetos são, assim, o número sete, e ainda o número 7, a noção do pai como um jovem pai que leva seu filho, ou a idéia de perseverança (ou coragem, força, etc.), e conceito matemático de derivadas, e também o símbolo ∂, etc. Em particular, qualquer trabalho que seja, qualquer produto da atividade humana intencional, é um objeto.

A segunda noção fundamental é a de relação pessoal de um indivíduo *x* a um objeto *o*, que Chevallard (2009) denota por R (x; o), expressão que significa “todas as interações que *x* pode ter com o objeto *o* - que x manipule, utilize, fale, sonhe, etc” (p. 1, tradução nossa).

A terceira noção fundamental é a de pessoa. Pessoa é o par formado por um indivíduo x e o sistema de relações pessoais R (x, o), em algum momento na história de x. Sobre a palavra pessoa, Chevallard (2009) assume que não deve ser confundida com indivíduo. Cada indivíduo é uma pessoa, mas a pessoa varia de acordo com as relações do indivíduo *x* com um objeto *o*. Tais relações evoluem, pois um objeto que não existia para x passa a existir, ou sua relação muda. Nesta evolução, a invariante é o indivíduo, que está mudando é a pessoa.

Quando me refiro a uma nova relação com o objeto matemático o faço em relação a esta mudança que Chevallard (2009) anuncia. Mesmo que a minha pessoa como indivíduo não mude, uma vez que cada indivíduo é único, minha pessoa se (re)forma constantemente de acordo com as relações pessoais que vou desenvolvendo com um objeto matemático nas instituições.

Nesse ponto, das relações de uma pessoa com um objeto, Chevallard (2009) apresenta o *universo cognitivo* de uma pessoa como o conjunto das relações pessoais de *x* com um objeto *o*, em correspondência com o objeto *o*. Ele simboliza da seguinte forma

$UC(x) = \{ (o, R(x\ ; o)) \ / \ R(x\ ; o) \neq \emptyset \}$

Segundo Chevallard (2009), o termo cognitivo não deve ser entendido em sua corrente intelectualista. Ele cita exemplos, tais como as relações pessoais que um indivíduo tem com sua escova de dentes, o pedal de freio do seu carro, de onde segue, em meu pensar, a minha relação pessoal com fórmula da equação do 2º grau, ou seja, como manipulo, uso, ensino ou mesmo os modos que não ensino.

Essa relação pessoal com um dado objeto matemático é construida por meio das instituições onde esses objetos vivem e onde fui apresentado a ele quando passei a assumir um papel nessas instituições, como aluno, professor, por exemplo, assumindo, em cada caso, jeitos próprios de fazer e pensar. Isso conduz à quarta noção fundamental, a de Instituiução.

Chevallard (2009) a introduz para explicar a formação e evolução do universo cognitivo de uma pessoa x. Dessa forma

> Uma instituição *I* que é um bem social "total", o que certamente pode ser uma parte muito pequena no espaço social (há "micro-instituições"), mas permite - e impõe - para seus sujeitos, isto é para as pessoas *x* que venham para ocupar diferentes posições *p* disponíveis em *I*, a participação das maneiras de pensar e agir próprios de *I* - isto é, praxeologías. O ambiente de sala de aula é uma instituição (incluindo os dois cargos-chave que são os de professor e aluno) (CHEVALLARD, 2009, p. 2, tradução nossa).

Assim, desde o nascimento, cada indivíduo é assujeitado a várias instituições, tais como a sua família, a linguagem etc. Na medida em que é sujeito de uma multiplicidade de instituições do passado e presente, é que o indivíduo se constitui em uma pessoa, pois sempre que se torna sujeito de uma instituição em uma dada posição, o indivíduo já é uma pessoa com um certo universo cognitivo, mas irá subjugar-se às relações institucionais, que irão reformular suas relações pessoais: se o objeto existe para os sujeitos da instituição em posição *p*, a relação pessoal dele ao objeto, R (x; o), tendem a se parecer com a relação institucional, RI (*p;* o), a menos que x revele-se, a este respeito, em não conformidade com I. Assim, em geral, “nossas relações "pessoais" são frutos de nossa história de submissões institucionais do passado e presente” (CHEVALLARD, 2009, p. 3). Nessa dinâmica cognitiva se constitui e evolui o universo cognitivo da pessoa.

No entanto, embora a relação pessoal com um objeto seja fruto de seus assujeitamentos passados e presentes, a relação da pessoa x ao objeto *o*, *R*(*x, o*), em geral não está em conformidade plena com a relação institucional, *RI*(*p,o*), mas seu universo cognitivo tende a evoluir ao fazer parte da instituição *I*, pois suas relações se reformulam. Por outro lado, uma instituição *I* não existe sem os sujeitos, pois estes é que fazem com que ela viva, às vezes mudando seu estilo de vida. De outro modo, essa dialética é fundamental para a vida das instituições.

> O fato de que a relação pessoal *R*(*x*; *o*) está a emergir de uma pluralidade de relações institucionais *RI*(*p* ; *o*), *RI'*(*p'* ; *o*), *RI"*(*p"* ; *o*) tem várias consequências notáveis. Em particular, a relação pessoal *R(x; o)* nunca é perfeitamente coerente com tais relações *RI*(*p* ; *o*): uma pessoa x quase sempre, em certa medida, não esta em conformidade a *I*, porque a sua relação é formada pela integração ao longo do tempo das diferentes relações institucionais de que ela tem sido sujeito - *RI*(*p* ; *o*), *RI'*(*p'* ; *o*), *RI"*(*p"* ; *o*), etc. Inversamente, *R*(*x* ; *o*) quase nunca é realmente *original* na medida em que é um reflexo, ou alterações mais ou menos das relações institucionais que influenciaram a formação da pessoa *x*. Por outro lado, é precisamente a sua capacidade de desenvolver relações pessoais *institucionalmente* inéditas que reconhecemos os criadores no sentido forte do termo [...] (CHEVALLARD, 2009, p. 3, tradução nossa).

Assim a conformidade plena a uma instituição pode ser uma desvantagem na medida em que impediria a pessoa engendrar novas relações e privaria relações pessoais inéditas. Mas Chevallard (2009), a esse respeito, nos chama atenção que a multiplicidade de nossa sujeição é, no entanto, a fonte de nosso sentimento de liberdade das instituições, pois constantemente, para testar ou exercer nossa liberdade, nós jogamos uma sujeição contra as outras, sem apartes, e assim sacudimos o "domínio" das instituições sobre nós. E em seguida afirma que em última análise, para nos liberarmos, criamos uma nova sujeição, voluntariamente, como faz o cientista que cria uma nova teoria para, em seu assujeitamento, se descondicionar das maneiras de pensar e fazer que o impedisse ou limitavam.

Os confrontos de assujeitamentos são traduzidos por confrontos dos mecanismos de assujeitamentos, as maneiras próprias de agir e pensar, nas atividades próprias da instituição, ou melhor, nas atividades da instituição em que os sujeitos da instituição em posição *p* têm que participar. As praxeologías em que os sujeitos da instituição são os atores que as têm que implementar.

Nesse pensar, a noção de praxeologia é o cerne da TAD e, segundo Chevallard (2009), generaliza diferentes noções culturais correntes - aquelas do saber e do saber-fazer, de habilidade, uma palavra genérica para "uma habilidade que é adquirida por treinamento”. A TAD deve ajudar a identificar, sem afetação epistemológico-cultural, sem julgamento de valor *a priori* ou *a posteriori*, de toda estrutura de conhecimento possível.

Segundo Chevallard (2009), um aspecto crucial do conceito de praxeologia é o seguinte: numa perspectiva antropológica, não há prática que não seja acompanhada por um saber, embora desde a posição institucional ocupada por um observador (praxeologias do professor diante das praxeologias dos estudantes, pesquisadores frente às praxeologias de professores, os burgueses perante praxeologias dos proletários etc.), a parte tecnológica- teórica parece estar faltando, porque ela não é visível (ou mal visível). Portanto,

> A estrutura praxeológica mais simples, que se poderia chamar de "atômico", mas na verdade é chamado de "pontual", consiste em um tipo de tarefas T, uma técnica ***t***, a maneira de realizar as tarefas τ de tipo T que constitui a tecnologia θ da técnica, fundamentada por um discurso (logos) sobre a técnica (tekhne). Tal discurso supõe tornar a técnica inteligível e como um meio para realizar as tarefas do tipo T. E, finalmente, (a última, mas não menos importante) uma componente teórica Θ, que regula a tecnologia θ em si (e, portanto, todos os componentes da praxeologia). Uma praxeologia pontual ("ponto" aqui é o tipo de tarefas T) é denotada por $[T / \tau / \theta / \Theta]$. Ele comporta uma parte prático-técnica $\Pi= [T / \tau]$, ou práxis (que pode nomear-se por "saber fazer") e um técnico-teórico $\Lambda= [\theta / \Theta]$, ou logos (que pode identificar-se como um "saber" no sentido usual da palavra) (CHEVALLARD, 2009, p. 4, tradução nossa).

Mesmo diante da possível não clareza da pessoa sobre a parte tecnológico-teórico das praxeologias que são adquiridas por seus assujeitamentos as diferentes instituições em diferentes posições ou não, segundo Chevallard (2009), a pessoa passa a ser dotada de um *equipamento praxeológico, EP(x).* De outro modo, quando a pessoa passa a ocupar um lugar em uma instituição, ela dispõe ou está equipada de um conjunto de praxeologias, mesmo que não possa atualizar tal ou tal praxeologia.

Sob esses *entendimentos* Chevallard (2009) afirma que o conhecimento de uma pessoa, como resultante de seu passado e presente de sujeições institucionais, pode assumir duas formas principais. Em diacronia, em que se pode imaginar o fazer da *história da pessoa como sujeito*, por meio da crônica de suas sujeições e contra sujeições. Em sincronia, em que se pode imaginar o quadro de suas relações pessoais, de seu *universo cognitivo*. Assim, ao longo do tempo, da *história da pessoa como sujeito*, existe uma *dinâmica cognitiva*, em que se faz com que alguns objetos apareçam no universo cognitivo UC (x), enquanto outros desapareçam.

O mesmo pode ser dito a respeito do equipamento praxeológico da pessoa, ou seja, muda ao longo do tempo, algumas partes deste equipamento perdem suas características de operação, enquanto outras partes são remodeladas e que novos elementos são adicionados, havendo assim uma *dinâmica praxeológica*.

Em geral, as praxeologias podem ser combinadas nas instituições pela ação da pessoa enquanto sujeito da instituição, numa dinâmica praxeológica, e correlativamente cognitiva, modificando seu discurso ou sua práxis em relação a um determinado objeto. Segundo Chevallard (2009), uma praxeologia de uma instituição *I* quando transposta para outra instituição *I**, pode sofrer modificações de tal forma que sua parte prático-técnico (saber-fazer) não se altera, mas seu *Logus* (técnico teórico) varie e tenda a se aproximar do discurso de *I**. Ou, de outra forma, o *Logus* pode ser mantido e sua *práxis* alterada que, segundo Chevallard (2009) pode às vezes tornar o discurso "vazio". Dessa forma, as praxeologias se alteram e se (re)combinam nas instituições, e isso se configura em "um fenômeno *central para a história social das praxeologias*" (CHEVALLARD, 2009, p. 4, tradução nossa, grifos no original).

Sob esse olhar, Chevallard (2009) afirma que a formação de uma pessoa para uma instituição, como a formação profissional de uma pessoa, supõe uma dinâmica cognitiva e praxeológica que resulta da operação de adequação de novas sujeições impressas especificamente para a pessoa, o que implica um trabalho de identificar e tratar os conflitos relacionados com o choque das novas sujeições com as sujeições anteriores, quando as primeiras são experimentadas pela pessoa como incompatíveis com a sua identidade.

No entanto, tratar do universo cognitivo ou do equipamento praxeológico de uma pessoa não é tarefa simples. Segundo Chevallard (2009) a simples descrição da relação de uma pessoa *x* em uma instituição *I* com um determinado objeto *o* dificilmente pode ser esgotado, além de apresentar dificuldades de identificar a sensibilidade do objeto matemático para a pessoa que possa impedir novas adequações ou remodelamentos das relações com o objeto. De outro modo, algumas mudanças desejadas não são obtidas, pois não se pode produzir um remodelamento adequado da relação a tal ou tal objeto sensível. Qualquer alteração a este respeito, é uma remodelação da pessoa e não é sem custo - apesar do ganho esperado.

Assim, sob o olhar de “o que é ensinado e aprendido em um estabelecimento de ensino são praxeologias matemáticas, ou mais geral, que são praxeologias partilhadas por grupos de pessoas organizadas em Instituições” (GARCIA et al., 2006, p. 2, tradução nossa) é que analiso a história de minha relação pessoal com a fórmula de resolução da equação do segundo grau[1] desde o início de minha formação recorrendo à narração de flash de memórias das praxeologias vividas com esse objeto, de modo a tornar claro de algum modo a dinâmica praxeológica, e correlativamente a dinâmica cognitiva envolvida nesse processo, enquanto docente e enquanto aluno da escola e dos cursos de formação aos quais me sujeitei.

Ao narrar minha história de vida, estou tratando da minha pessoa enquanto sujeito que cumpriu e cumpre papéis nas instituições com relação ao objeto fórmula de resolução da equação do 2º grau; como aluno e como professor de diferentes níveis de ensino- fundamental, médio, superior. Busco significar a minha relação com o saber matemático, como sofreu e sofre modificações resultantes da minha inserção em várias instituições.

É sob esse entendimento que penso o fazer da transposição didática interna, como um fazer de confrontos de assujeitamentos que (re)formam meu equipamento praxeológico e correlativamente o meu universo cognitivo. Nesse sentido, ao elaborar um novo plano de curso acerca da resolução de equações do segundo grau, terei diferentes influências das instituições que vivi, inclusive a minha nova relação com este objeto matemático na instituição do curso de mestrado.

---

[1] Reforço que outros objetos matemáticos foram abordados no episódio que trata da construção do meu plano de curso, do texto do saber, pois se trata de um processo de construção de técnicas de resolução da equação do 2º grau, onde tarefas tradicionais como *desenvolver os produtos de polinômios (ou produtos notáveis), fatorar os polinômios, calcular as raizes da equação*, tiveram novas intencionalidades.

Nesse sentido, na construção de uma praxeologia como um momento de liberdade diante do saber, que consiste em elaborar minha versão do saber, por meio de uma *epistemologia artificial*[2] acerca da fórmula de resolução da equação do segundo grau, busco fazer revelar a dinâmica praxeológica e cognitiva envolvida na transposição didática interna e apontar os caminhos para a construção das respostas às minhas questões de pesquisa.

[2] Trata-se de uma epistemologia (re)construída acerca de um objeto, ou seja, uma espistemologia não natural (Notas de aula do professor Renato Borges Guerra, 2009).

3 SOBRE A FORMAÇÃO DO MEU EQUIPAMENTO PRAXEOLÓGICO E UNIVERSO COGNITIVO

Neste capítulo narro como ingressei na profissão docente, desde minhas primeiras experiências como aluno do ensino básico até os dias atuais como professor de Matemática e aluno do curso de mestrado em educação matemática. Alguns episódios trazem aspectos que contribuíram no processo de desenvolvimento de meu equipamento praxeológico e universo cognitivo acerca da fórmula de resolução da equação do segundo grau e outros objetos matemáticos relacionados a ela, desde o momento que comecei a dar aulas particulares de matemática, inicialmente do como aluno do ensino médio, depois como aluno do curso de Engenharia Elétrica da UFPA continuando após a formatura neste curso, bem como durante e após o curso de Licenciatura Plena em Matemática e cursos de aperfeiçoamento, especialização e mestrado.

Destaco as transformações ocorridas (ou não) na minha praxeologia durante e após um curso de especialização em Educação Matemática que realizei na Universidade Federal do Pará (UFPA) que me levou a fazer reflexões da própria prática no sentido da pesquisa e do ensino com foco nas minhas ações pedagógicas. E o contato com a Didática da Matemática no percurso do mestrado em Educação em Ciências e Matemática da UFPA, que me suscitou novas reflexões da própria prática, no sentido da formação e ensino, porém com um enfoque no fazer matemático.

3.1 AS MINHAS DIFICULDADES E OS SUCESSOS COM A MATEMÁTICA ENQUANTO ALUNO DO ENSINO BÁSICO E O INÍCIO DE UMA PRÁTICA DOCENTE

Ainda quando aluno do 1º grau (Ensino Fundamental, atualmente) tive muitas dificuldades de entender a Matemática da escola. Lembro-me de obter apenas as notas necessárias para ser aprovado ao final do ano e usava a estratégia de sempre repetir várias vezes, antes das provas, os exercícios que o(a) professor(a) resolvia em sala. Recordo que na 8ª série só adquiri certa habilidade para resolver equações do segundo grau usando fórmula após duas avaliações sobre as mesmas, tendo resolvido uma grande quantidade de equações.

No entanto, essa ação de repetição daquilo que o professor fazia parecia insuficiente para me sair bem nas avaliações. Isso me levou a resolver exercícios que o professor não abordava em sala. E no momento em que percebi que conseguia chegar aos resultados corretos, obtive maior confiança e passei a estudar conteúdos em livros didáticos que não eram usados na escola ou que seriam estudados em séries seguintes. Como exemplo, lembro-me que li num livro de ensino médio as definições das progressões (aritméticas e geométricas) e apliquei as fórmulas nos exercícios. Quando consultava os resultados no final do livro e percebia que estava correto senti que começava a gostar da Matemática. Em outro momento, estudei equações do segundo grau usando um livro que não era adotado pela escola. Havia muitos invariantes de um livro para o outro, mas era comum haver também abordagens diferentes. Por exemplo, no livro que não era o adotado pela escola surgiram exercícios do tipo *Qual a condição para que a equação* $(2m - 10)x^2 - 5mx + 2m = 0$ *seja uma equação do 2º grau com variável x? Qual o valor de n na equação* $x^2 - 2x + n = 0$ *cuja variável é x, tal que ela tenha duas raízes reais e iguais?*

Dentro dos invariantes dos livros que estudei, estava uma forma de resolução da equação do segundo grau que se dava sempre com o uso da fórmula para as equações completas (do tipo $ax^2 + bx + c = 0$, com $a, b, c \neq 0$) e outras técnicas para as incompletas do tipo $ax^2 + bx = 0$ e $ax^2 + c = 0$. Os exemplos abaixo mostram a resolução de equações que se enquadravam em cada um desses "casos".

a) $x^2 - 7x + 12 = 0$

Resolução: Usando a fórmula a seguir com a = 1, b = -7 e c = 12,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

para calcular as raízes x = 3 e x = 4.

b) $x^2 - 5x = 0$

Resolução: Usando como técnica a fatoração do polinômio $x(x - 5) = 0$, donde se obtém x = 0 e x = 5.

c) $x^2 - 25 = 0$

Resolução: Usando a técnica da extração da raiz quadrada, $x^2 = 25$, $x = \pm\sqrt{25}$ $x = \pm 5$

Percebo, agora, que a escola não foi a única instituição em que se deu inicialmente minha relação pessoal com as equações do 2º grau, mas outra instituição se mostrou determinante na construção do meu equipamento praxeológico: o livro didático. Embora tenha sido na escola, enquanto aluno do ensino fundamental, que tive a primeira relação com tal objeto matemático.

Ao iniciar o 2º grau (ensino médio, atualmente), minha disciplina preferencial já era Matemática e durante o curso neste nível, obtive sucesso em tal disciplina, porém não conseguia obter nota máxima em nenhuma das avaliações escolares e isso se tornou um desafio para mim. Estudei obstinadamente em busca da nota 10, o que só veio a acontecer no 3º ano (último ano) do ensino médio.

Devido a um aparente destaque que eu tinha em matemática, durante o ensino médio, as pessoas mais próximas do meu convívio começaram a me solicitar ajuda pedindo explicações sobre conteúdos e exercícios matemáticos do nível fundamental e até mesmo do ensino médio. Parafraseando Chevallard, Bosch e Gascón (2001), o fato de um indivíduo considerar válido o conhecimento matemático que eu tinha naquele momento, fazia de mim um matemático para ele. Assim, passei a ser requisitado para dar aulas particulares.

A primeira aula particular com retorno financeiro se deu quando eu era adolescente entre 14 e 15 anos de idade e foi direcionada para um aluno de 4ª série do primário (séries iniciais do ensino fundamental, atualmente). Os resultados dessas aulas pareciam bons, pois fizeram com que eu ampliasse bastante minha clientela de alunos no decorrer do tempo.

Um dos acontecimentos que mais me deixou envaidecido ocorreu com um aluno do 1º ano (ensino médio) de uma escola de Belém que precisava obter nota 9,5 (nove e meio) na avaliação de recuperação e conseguiu a nota 10 (dez). Pelo histórico desse aluno com relação à Matemática, isso parecia impossível para seus colegas que imputaram a mim o apelido de “milagreiro”. No entanto, percebo hoje esse fato não como milagre, mas que a decisão do aluno de entrar em processo de estudo com responsabilidade pelo seu aprendizado foi fundamental para seu sucesso.

Observo assim, a importância da responsabilidade do aluno com o processo de estudo, pois as garantias de que isso ocorra no momento de ensino ninguém pode assegurar. Considero que ao assumir a responsabilidade pelo estudo da Matemática enquanto aluno foi o que me conduziu inicialmente a estabelecer as primeiras relações com os objetos matemáticos por meio das praxeologias estudadas.

Fui professor de aula particular de Matemática por muito tempo, inclusive de um aluno que acompanhei desde a 6ª série até este entrar na universidade. Devido a aparentes sucessos alcançados, parecia que já estava definida a minha profissão para o futuro: professor de matemática. Mas, no decorrer de minha formação, ocorreram influências externas que me levaram a optar pelo curso de Engenharia Elétrica e entre elas foi o preconceito levantado por muitas pessoas em relação à profissão docente, principalmente no que concerne à questão financeira. Assim, fiz o curso de ensino médio na Escola Estadual Deodoro de Mendonça, que a partir do 2º ano habilitava em áreas tecnológicas com aulas no Centro Interescolar Maria da Silva Nunes (atual Escola Técnica Estadual do Pará).

Após conseguir a aprovação em Engenharia pensei em cursar também licenciatura em Matemática, pois havia essa possibilidade de fazer dois cursos de áreas afins concomitantemente. Mas no ano em que ingressei, tal possibilidade foi descartada por lei, e assim cursei toda a engenharia, inclusive fiz estágios dentro dessa área. Mas continuava ministrando aulas particulares de Matemática e também de Física que se constituía em minha principal fonte de renda.

Após o término do curso em Engenharia tive dificuldades de empregar-me na área e decidi, então, buscar trabalho em escolas. Uma dessas escolas fez contato e me disponibilizou, inicialmente, turmas do ensino fundamental para dar aula de Matemática de 5ª a 8ª séries[3], no ano de 1995. Em seguida, no mesmo ano letivo,

[3] Atualmente, o ensino fundamental para as séries finais inicia no 6º ano (5ª série) e vai até o 9º ano (8ª série).

fiquei responsável por turmas do ensino médio para ministrar aulas de Matemática e Física, inclusive para o supletivo[4].

Um dos fatos que ficou marcado foi quando o diretor dessa escola, durante sua entrevista, perguntou sobre minha formação. Eu disse que era formado em Engenharia, e ele falou em seguida: *Não tem problema, pois esses professores de Matemática sabem menos matemática que um engenheiro*. Isso, de certa forma, se constituiu um incentivo para que eu começasse a docência, pois me senti envaidecido e detentor do conhecimento com tal fala.

Inicialmente pensava que aquela atividade era apenas passageira até eu conseguir trabalho na Engenharia, pois esta era minha formação. No entanto, os meus primeiros resultados pareciam satisfatórios para a escola, pois recebia muitos elogios dos alunos e não demorou até eu ficar responsável por várias turmas de tal forma que nem me interessava mais em Engenharia. Recordo que a professora de Geografia dessa escola me disse que eu tinha um jeito atencioso de tratar o aluno, pois ela percebia quando passava pela porta da sala em que eu estava dando aula, que eu tirava dúvidas dos alunos em particular, sentando ao lado deles. Tal hábito se devia ao fato de ter por muito tempo ministrado aulas particulares. Ao refletir sobre esta primeira parte da minha prática docente, percebo que meu fazer pedagógico me coloca em evidência na instituição. E, nesse tempo, era comum eu ouvir elogios do tipo "você é muito didático em sala", ou seja, o pedagógico e o didático se confundiam.

E assim iniciei e permaneço até os dias atuais na função de professor nas escolas, porém já tendo a formação acadêmica em Licenciatura Plena em Matemática desde o final de 1999 e com pós-graduação em nível de especialização concluída em 2008.

3.2 AS INFLUÊNCIAS SOBRE MINHA PRÁTICA DOCENTE INICIAL EM SALA DE AULA

Ao ser apresentado a uma turma de 5ª série, com cerca de 40 alunos, imaginei que poderia estar diante de um grande desafio, pois até aquele momento não havia dado aula para mais do que uma pequena turma de 3 ou 4 alunos nas

[4] Nos dias atuais, sua denominação é Educação de Jovens e Adultos (EJA).

aulas particulares. Os materiais que me deram suporte naquele momento foram o giz, o quadro e, principalmente, o livro didático.

As experiências que tive enquanto aluno da escola básica e professor de aulas particulares, influenciaram nas minhas ações iniciais como professor dessa escola, uma vez que o processo de formação docente pode ser desenvolvido desde as primeiras experiências vivenciadas na escola como aluno e por meio de observação do trabalho dos professores. Sobre tais experiências Gonçalves e Mendes (2007, p. 48), apoiados em Camargo (1998), afirmam que “[...] situações vivenciadas como alunos são de forte influência no trabalho do professor em sala de aula, porque correspondem a experiências relativas ao ensino, à aprendizagem [...]”.

Nessas aulas iniciais, minha estratégia era resolver com os alunos a maior quantidade de exercícios possível pondo estes com as dificuldades em ordem crescente, de acordo como eu obtive certo êxito enquanto aluno e ratificada enquanto professor de aulas particulares. Nesse sentido, Liston e Zeichner (1993) citados por Gonçalves (2006, p. 182) reafirmam que

> Está claro que os futuros professores ascendem a sua formação profissional com uma bagagem histórica de experiências educativas como estudantes. Têm idéias prévias sobre o que significa ser um bom professor, o conteúdo que deve ensinar, como deve fazê-lo e o tipo de ambiente de aula que gostaria de proporcionar. Não chega em branco.

Dessa forma, parecia que para ser professor de Matemática bastava ter o ímpeto de entrar numa sala e transmitir os conteúdos pré-estabelecidos pelos programas da disciplina fazendo uso de uma grande quantidade de exercícios, de tal forma que os alunos “aprendessem a fazer”, sempre com a utilização dos livros didáticos adotados pela escola.

Assim a influência do livro didático no meu fazer didático se deu de maneira considerável, pois ao me deparar pela primeira vez com uma turma, uma das minhas atitudes iniciais foi situar o conteúdo no livro didático adotado pela escola, uma vez que fui contratado com o ano letivo já em andamento.

A abordagem inicial que fiz dos conteúdos foi fortemente pautada nas sequências de conteúdos propostas pelo livro, inclusive transcrevendo para o quadro seus exercícios, integralmente. Para exemplificar, na 7ª série do ensino fundamental, a sequência (Quadro 1) dos conteúdos no livro Praticando Matemática[5], que foi adotado pela escola naquele ano, era a seguinte:

Quadro 1 – Sumário do livro de 7ª série *Praticando Matemática*

• Raiz quadrada. • Conjunto dos números reais. • **Valor numérico de uma expressão algébrica.** • **Expressões algébricas.** • **Termos semelhantes.** • **Operações com monômios.** • **Operações com polinômios.** • **Produtos notáveis.** • **Fatoração.**	• Frações algébricas. • Equações fracionárias. • Equações literais do 1º grau. • Introdução à geometria. • Ângulos. • Triângulos. • Congruência de triângulos. • Quadriláteros. • Polígonos convexos. • Circunferência e círculo.

Fonte: Andrini (1989-a, p. 4)

E também o livro de 8ª série com os conteúdos dispostos da seguinte forma (Quadro 2):

Quadro 2 – Sumário do livro de 8ª série *Praticando Matemática*

• Potenciação • Radicais • **Equações do 2º grau** • **Equações biquadradas** • Equações irracionais • **Problemas do 2º grau** • Produto cartesiano • Relações e funções • Função do 1º grau • **Função do 2º grau** • Grandezas proporcionais • Semelhança	• Relações métricas num triangulo retângulo • Razões trigonométricas • Relações métricas num triângulo qualquer • Relações métricas na circunferência • Polígonos regulares • Área de polígonos • Medida da circunferência e área do círculo:

Fonte: Andrini (1989-b, p. 5)

[5] Este livro faz parte de uma coleção para 5ª, 6ª, 7ª e 8ª séries do ensino fundamental com aprovação no PNLD sob o código 0412-0.

Segui estas sequências por muito tempo, e até hoje direciono os conteúdos da 7ª e 8ª séries (ensino fundamental) usando, de certa forma, tais organizações, porém explorando novas relações com os objetos matemáticos, principalmente os que aparecem em negrito, nas sequências acima, pois eles se relacionam diretamente com a fórmula de resolução de equações do segundo grau que é o objeto matemático em destaque neste trabalho.

O fato é que, dessa forma, o planejamento de uma aula se tornava fácil, pois bastava elencar algumas páginas do livro, copiar no quadro alguns conceitos, definições e exemplos e resolver exercícios junto aos alunos.

Silva Júnior e Réginer (2007, p. 13) fazem considerações a respeito dessa conduta diante do livro e destacam que

> O livro didático de matemática é para o professor algo mais que um simples material de uso no ensino-prendizagem. Ele é um objeto de apoio didático que os professores, em sua grande maioria, utilizam para estruturar e ministrar as suas aulas, apoiando-se nas considerações feitas por toda sua estrutura do texto do saber, em seus exemplos com analogias e seus exercícios os mais variados [...].

Skovsmose (2007), também em relação à dependência que o professor pode ter do livro didático, considera que

> O ensino tradicional de matemática é dominado pelo uso do livro-texto, que é seguido, mais ou menos, página por página. Outras espécies de materiais são usadas somente como complementos. O livro-texto ocupa a cena. As aulas são estruturadas da mesma maneira (SKOVSMOSE, 2007, p. 33-34).

Observo que minha prática docente até então se dava pautada nessa perspectiva, reafirmando que ainda fazia com que os alunos "resolvessem" todos os exercícios sugeridos no livro e os que eu elaborava no quadro ou em listas. Isso fazia parecer que as dificuldades de realizar as provas fossem reduzidas, pois as mesmas eram sempre elaboradas de acordo com os exercícios. Nesse sentido, Skovsmose (2008) ressalta que

> Muitas vezes, fazendo exercícios, os alunos não vão aprender matemática para toda a vida, mas na prática de realização de lista de exercícios em busca das "respostas certas" vão aprender as regras,

> aprender como se dá o jogo disciplinado e não criativo [...] (SKOVSMOSE, 2008, p..2, grifos no original).

Dessa forma, observei “bons resultados” de grande parte dos alunos que, devido seu fazer se tornar repetitivo reproduzia tal fazer nas provas e testes. Mas questiono hoje se esses alunos aprenderam realmente a fazer Matemática ou se tiveram um aprendizado que serviu somente naquele momento para passarem para a série seguinte.

Pais (2006, p. 47) trata o livro didático como um dos elementos da transposição didática, pois este “contém registros publicados para defender a validade do saber a ser ensinado”. No que se refere a sua importância, ressalta que

> A presença extensiva que o livro didático ocupa na educação escolar indica a existência de um recurso pedagógico consolidado, porque resistiu a diversas mudanças ocorridas na educação e no uso das tecnologias da comunicação (PAIS, 2006, p. 47-48).

Isso é relevante uma vez que é difícil encontrar uma escola que não adote livro didático de Matemática. Vale considerar que essa consolidação do livro nas escolas também perpassa por aspectos comerciais e econômicos.

Em outro enfoque, Pais (2006) faz crítica ao livro didático, pois considera que

> Mesmo que seus aspectos visuais tenham se modificado nas últimas décadas, em função do avanço tecnológico, continua inalterada sua estrutura básica no que diz respeito ao predomínio de uma apresentação seqüencial e linear de conteúdos (PAIS, 2006, p. 48).

E ainda ressalta que esses aspectos são difíceis de serem modificados, tendo em vista “a contingência do próprio modelo estrutural do livro impresso, pelo encadeamento de linhas, páginas e capítulos” (PAIS, 2006, p. 48). Dessa forma, cabe ao professor a maneira como vai usar essa ferramenta institucional.

O fato é que, naquele momento, pautado meu fazer didático em grande parte no livro didático, o resultado parecia ser considerado bom pela escola, pois cada vez mais me foram ofertadas novas turmas.

Após algum tempo, meu fazer docente havia se tornado rotineiro que já não precisava olhar no livro para ensinar os conteúdos que estavam contidos nele.

Dessa forma, não era raro ouvir perguntas dos alunos tais como: *como o senhor consegue saber tanta Matemática de cabeça, sem usar o livro*? *Será que um dia vou aprender toda essa Matemática*?

Devido a tais comentários, sentia-me envaidecido a tal ponto de evitar ao máximo consultar o livro na sala de aula, usando-o apenas para resolução de alguns exercícios por entender que já tinha o domínio dos conceitos e definições dos conteúdos e dos exercícios.

Minha praxeologia estava definida de tal forma que mesmo após ter ingressado em outros estabelecimentos de ensino e estes terem adotado outros livros didáticos com novas configurações em relação à sequência e abordagem dos conteúdos, meu planejamento se pautava naquelas sequências e abordagens que já estavam consolidadas. Para exemplificar, havia livro que inseria a geometria em todas as suas unidades, conforme será exposto a seguir, contudo eu não considerava tal organização matemática no meu fazer docente. Lembro que havia um consenso com relação a tais sequências de conteúdos, pois em reuniões pedagógicas de início de ano letivo o quadro de professores de Matemática das escolas que trabalhei coadunava com as sequências as quais eu havia estabelecido em todas as séries. Ou seja, a organização dos programas parecia consensual e de certa forma paradigmático.

Assim, usava os livros novos sem segui-los integralmente de forma contrária como havia feito no início de minha prática docente. Por exemplo, o livro “Matemática: uma aventura no pensamento” (GUELLI, 2005-a e b)[6], que foi adotado em uma escola pública que trabalhei, inseria objetos da geometria em todas as unidades contidas no volume da 7ª e 8ª séries. As unidades do livro da 7ª série estão dispostas no quadro 3 a seguir.

---

[6] Este livro faz parte de uma coleção para 5ª, 6ª, 7ª e 8ª séries do ensino fundamental com aprovação no PNLD (2005) sob o código 820020.

Quadro 3 – Sumário do livro *Matemática: uma aventura do pensamento* da 7ª série

Unidade1 – Do número natural ao número real –Posições relativas de duas circunferências – Comprimento da circunferência – Área do círculo **Unidade 2** – Operações com polinômios – Posições relativas de retas e planos – Poliedros – Volume de prismas e pirâmides **Unidade 3** – Fatoração – Identidades notáveis	– Matemática financeira – Polígonos semelhantes – Corpos geométricos redondos – Volumes – Estatística e probabilidade **Unidade 4** – Equações com frações algébricas – Sistema de equações – Transversais e tipos de ângulos **Unidade 5** – Inequações – Congruência de triângulos – Primeiras demonstrações – ângulo central, ângulo inscrito

Fonte: Guelli (2005-a, p. 4-6).

E a disposição das unidades do livro de 8ª série está exposta no quadro 4 abaixo.

Quadro 4 – Sumário do livro *Matemática: uma aventura do pensamento* da 8ª série

Unidade 1 – Números reais – Aproximação por decimais – Potências e raízes – Teorema de Pitágoras. **Unidade 2** – Equações do segundo grau – Teorema de Pitágoras – Áreas e volumes de prismas e pirâmides **Unidade 3** – Equações biquadradas e com radicais – Semelhança de polígonos – Semelhança no triângulo retângulo – Matemática financeira	**Unidade 4** – Funções polinomiais – Feixe de retas paralelas cortadas por duas transversais – Sistemas de equações – Inequações – Sistemas de inequações **Unidade 5** - Fatoração de polinômios – Divisão de polinômios – Razões trigonométricas – Segmentos secantes e tangentes a uma circunferência – Área de polígonos regulares – Área de setores circulares – Áreas e volumes de cilindros cones e esferas – Estatística e probabilidade

Fonte: Guelli (2005-b, p. 4-6).

No entanto, eu encaminhava os conteúdos usando as sequências propostas nos quadros 1 e 2 que já estavam estabelecidas na minha praxeologia, no meu equipamento praxeológico, e ao usar estes livros localizava as páginas onde se encontravam os exercícios dos conteúdos que apresentava aos alunos.

Alguns alunos perguntavam por que eu "pulava" os conteúdos? Dava como resposta que esses conteúdos só seriam trabalhados depois, pois eles necessitavam de alguns "pré-requisitos".

No entanto, percebo hoje que tal prática parecia isolar os objetos matemáticos que eram trabalhados em forma de pacotes de conteúdos. Nesse sentido

> O ensino se transforma em um conjunto reduzido de atividades matemáticas isoladas, de "casos" matemáticos encadeados arbitrariamente e independentes entre si, que não permite ao aluno a dominar nenhuma técnica [...]. (CHEVALLARD et al., 2001, p. 285, grifos no original).

A partir dessa prática na Matemática escolar Garcia, Bosch e Gascón (2001) consideram o problema da desconexão dos conteúdos como sendo curricular e formulam as seguintes questões:

> Como organizar o ensino da matemática escolar, de forma a provocar a ligação dos diferentes tipos de conteúdo: conceitos, procedimentos e atitudes? Como conseguir que esse conhecimento matemático aprendido pelos alunos não serão reduzidos a um conjunto de técnicas desconectadas mais ou menos algorítmicas e sem qualquer sentido? (GARCIA; BOSCH; GASCÓN, 2001, p. 10, tradução nossa).

Esses questionamentos foram também motivadores de minhas reflexões, pois percebo que em minha ação docente não considerava conexões e integrações de conteúdos matemáticos com justificativas matemáticas bem definidas. E, recordo que justificava os conteúdos trabalhados em uma determinada série falando para os alunos que esses conteúdos seriam importantes para as séries posteriores ou para conteúdos posteriores na mesma série. Observo hoje que essa justificativa se configurava em senso comum e não tinha abrangência no sentido de evidenciar as articulações e integrações de objetos matemáticos, tão necessárias no processo de estudo. Observo ainda que o uso desta justificativa pudesse não ser suficiente para motivar o aluno a se envolver com o estudo, pela fraqueza argumentativa da mesma.

Quando ensinava equações do segundo grau na 8ª série, eu argumentava que estas poderiam ser resolvidas por meio de fatoração e que os alunos já haviam estudado na 7ª série. No momento de apresentação e uso da fórmula, falava para eles que sua aplicação era apenas uma revisão do estudo de valor numérico de uma expressão algébrica. Justificava o ensino dessas equações afirmando que elas seriam importantes na resolução de equações que redutíveis a equações do segundo grau (equações biquadradas, fracionárias, irracionais etc.), e em outros conteúdos nos quais elas poderiam surgir. Ou seja, os objetos matemáticos eram trabalhados de forma estanque nas suas respectivas séries e os alunos obrigados a lembrar deles em séries posteriores para aplicá-los no devido momento. A praxeologia que havia se estabelecido para mim desde minha formação escolar enquanto aluno não havia mudado em relação à resolução de equações do segundo grau e foi confirmada em minha prática docente ao tomar as praxeologias apresentadas no livro de Andrini (1989 a e b).

Para ilustrar a forma de abordagem da equação do segundo grau no livro de Andrini (1989), há no Quadro 5 uma parte da unidade 5 do livro (p. 48-50).

Quadro 5 – Uma abordagem de equações do 2º grau no livro *Praticando Matemática*

5 - Equação do 2º grau

Definição

Uma equação do 2º grau com uma variável tem a forma

$ax^2 + bx + c = 0 \qquad a \neq 0$

x é a incógnita

a, b e c números reais, chamados de coeficientes

Exemplos:

1) $x^2 - 7x + 10$, *onde* $a = 1$, $b = -7$ *e* $c = 10$

3) $8x^2 - 4x = 0$, *onde* $a = 8$, $b = -4$ *e* $c = 0$

Exercícios

2) Determine os valores dos coeficientes a, b e c nas equações seguintes:

a) $2x^2 + 8x + 7 = 0$ g) $4x^2 - 16 = 0$

e) $-x^2 - 4x + 9 = 0$ h) $x^2 - 3x = 0$

3) Coloque na forma $ax^2 + bx + c = 0$ *as seguintes equações do 2º grau:*

a) $5x + 3x^2 = 4x - 7$ b) $x^2 + 4x = 2(x - 1)$

4) Coloque na forma $ax^2 + bx + c = 0$ *as seguintes equações do 2º grau:*

Resolvido $(x + 3)^2 = 1$, $x^2 + 6x + 9 = 1$, $x^2 + 6x + 9 - 1 = 0$, $x^2 + 6x + 8 = 0$

a) $(x - 5)^2 - 9 = 0$ b) $(x + 1)^2 - x = 7$

Fonte: Andrinni (1989-b, p. 48-50)

Em seguida, o livro apresentava *equações completas e incompletas*, os casos de resolução de equações incompletas e, como ilustrado no Quadro 6, uma construção da fórmula de resolução das equações do 2º grau.

Quadro 6 – Uma construção da fórmula de resolução de equações do 2º grau no livro *Praticando Matemática*

Fórmula geral de resolução

Seja a equação

$ax^2 + bx + c = 0 \qquad a \neq 0$

Vamos transformá-la em equações equivalentes, de modo que o primeiro membro seja um quadrado perfeito.

1) Transpomos c para o 2º membro:

$ax^2 + bx = - c$

2) Multiplicamos ambos os membros por 4a (a ≠ 0)

$4a^2x^2 + 4abx = - 4ac$

3) Adicionamos b^2 a ambos os membros:

$4a^2 + 4abx + b^2 = b^2 – 4ac$

4) Fatoramos o primeiro membro:

$(2ax + b)^2 = b^2 – 4ac$

5) Extraímos a raiz quadrada de ambos os membros:

$2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4a}$

6) Isolando x: $x = \dfrac{- b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Fonte: Andrini (1989-b, p. 54)

O fato é que, mesmo tendo concluído o curso de Licenciatura Plena em Matemática, por força da Lei de Diretrizes e Bases (LDB/1996), que tornou obrigatório o curso de licenciatura para professores do Ensino Básico, não mudei minha praxeologia em sala de aula. Isso pode indicar que o curso de licenciatura não suscitou uma reflexão sobre minha prática, em particular sobre os objetos matemáticos de ensino. Esse fato talvez se deva ao curso estar, naquele momento, mais voltado para estudo de matemática em nível superior sem conexões explícitas com os objetos da matemática escolar.

Na disciplina Análise Matemática em algumas demonstrações havia uso de equações do segundo grau numa forma funcional, com resoluções de inequações com uso da fórmula $\Delta = b^2 - 4ac$. Ou seja, era outra praxeologia que se distinguia da praxeologia escolar. Em nenhum momento ensinei a praxeologia de resolução de equações do 2º grau nas escolas de ensino básico do modo que vivencie enquanto aluno do curso de licenciatura.

Assim, parecia-me que o mais importante era concluir o curso para permanecer de forma legal na profissão e não correr riscos de perda de emprego. Na realidade esse foi o principal fator que me levou a concluí-lo. Desta forma, não posso atribuir ao curso minha maneira de trabalhar em sala de aula, pois esta parecia ter sido concretizada antes do início do mesmo. Porém ressalto que a contribuição do curso foi mínima quanto à mudança do meu equipamento praxeológico e do universo cognitivo.

Em algumas disciplinas pedagógicas, tais como Metodologia do Ensino da Matemática, Estágio Supervisionado, entre outras, obtive algumas informações direcionadas ao ensino básico. No entanto, sentia nesse tempo uma auto-suficiência que não considerava as sugestões metodológicas dessas disciplinas. E tal suficiência me levava a pensar o ensino de Matemática de forma bastante pragmática na qual os alunos precisavam estudar os conteúdos por meio de resolução de uma grande quantidade de exercícios para fixação de técnicas de resolução. Na minha concepção, a Matemática estava pronta e acabada para ser ensinada, bastava que o aluno tivesse interesse e responsabilidade com seus estudos.

Uma reflexão que faço desse comportamento é que as minhas relações pessoais com os objetos matemáticos expostos acima, decorrentes de meus assujeitamentos a diferentes instituições, ficaram enraizadas e ao mudar de instituição, no caso o livro didático ou a escola, resisti em estabelecer novas relações com os objetos matemáticos. Ou seja, meu equipamento praxeológico e meu universo cognitivo parecia não permitir minha mudança, e coadunando com

Chevallard (2009), os objetos eram sensíveis para mim no sentido de não concebê-los sob um novo olhar, sob uma nova praxeologia sem qualquer reação. Assim, enquanto reagia à mudança, as preparações das aulas pareciam um simples ato de "copiar e colar". Os roteiros já estavam prontos.

No entanto, com o passar do tempo, devido também ao fato dos alunos estarem de posse dos livros didáticos, precisava de alguma forma enquadrar minhas aulas de acordo com o que era estabelecido pelas instituições a assim, percebo que aos poucos as instituições foram moldando minha relação pessoal com os objetos do saber matemático, mas não de maneira completa.

As equações do segundo grau apresentavam novas motivações, e as que eu encontrava nos livros eram as motivações geométricas conforme as indicações nas unidades dos livros de Guelli (2005- a e b) apontadas nos Quadros 3 e 4.

Retornando ao livro de Guelli (2005-b), adotado por uma escola pública que trabalhei, a unidade sobre equações do segundo grau também trazia o teorema de Pitágoras e áreas e volumes de um prisma, conforme exposto anteriormente. Nesta unidade do livro, o autor mostra a resolução de equações do segundo grau por meio de fatoração do trinômio quadrado perfeito, conforme o Quadro 7, e uma subunidade em que aparece uma construção da fórmula no Quadro 8. Essas novas organizações praxeológicas propostas nos livros muitas vezes nem chegavam a ser implementadas na escola pela resistência que encontravam por parte dos professores, entre os quais me incluo. Isso reforça a afirmativa de que:

> A praxeologia matemática não emerge de repente, em uma instituição. Ela não tem uma forma definitiva. Pelo contrário, ela é o resultado de uma atividade contínua e complexa, onde existem alguns relacionamentos, que podem ser modelados. Aparecem dois aspectos indivisíveis da atividade matemática: por um lado sobre o processo de construção matemática (processo de estudo ou processo didático) e, por outro lado, o resultado desta construção (a praxeologia matemática). Na verdade, não há praxeologia matemática sem um processo de estudo que a engendre, mas, ao mesmo tempo, não existe qualquer processo de estudo sem uma praxeologia matemática em construção. Processo e produto são as duas faces da mesma moeda (GARCIA et al., 2006, p. 2, tradução nossa).

Assim, a implementação de uma nova praxeologia, além de depender da instituição em que os sujeitos se encontram, precisa passar por um longo processo de estudo e adaptação e nem sempre é percebido pelos seus agentes (no caso os professores, a escola e os alunos).

Quadro 7- Resolução de equações do 2º grau completando quadrado no livro *Matemática: uma aventura do pensamento*

Resolvendo equações por meio da fatoração do trinômio quadrado perfeito

Veja como resolvemos a equação do 2º grau $(x - 3)^2 = 25$:

$x - 3 = \sqrt{25}$ ou $x - 3 = -\sqrt{25}$

$x - 3 = 5$ $\quad$ $x - 3 = -5$

$x = 8$ $\quad$ $x = -2$

$S = \{-2, 8\}$

Então, podemos resolver a equação do 2º grau $x^2 - 6x + 8 = 0$ assim:

1) $x^2 - 6x = -8$

2) $x^2 - 6x + \left(-\frac{6}{2}\right)^2 = -8 + \left(-\frac{6}{2}\right)^2$

3) $x^2 - 6x + 9 = 1$

4) $(x - 3)^2 = 1$

$x - 3 = \sqrt{1}$ ou $x - 3 = -\sqrt{1}$

$x - 3 = 1$ $\quad$ $x - 3 = -1$

$x = 4$ $\quad$ $x = 2$

$S = \{2, 4\}$

Fonte: Guelli (2005-b, p. 61)

Quadro 8- Uma construção da fórmula de resolução da equação do 2º grau no livro *Matemática: uma aventura do pensamento*

A fórmula quadrática

Uma equação do 2º grau na variável x pode ser escrita na forma $ax^2 + bx + c = 0$, sendo a, b e c números reais e $a \neq 0$.

Podemos transformar essa equação do 2º grau e expressar a variável x em termos dos coeficientes a, b e c:

1) $2x + 7x + 3 = 0$	1) $ax^2 + bx + c = 0$
2) $\frac{2}{2}x^2 + \frac{7}{2}x + \frac{3}{2} = 0$	2) $\frac{a}{a}x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$
3) $x^2 + \frac{7}{2}x = -\frac{3}{2}$	3) $x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$
4) $x^2 + \frac{7}{2}x + \left(\frac{7}{4}\right)^2 = -\frac{3}{2} + \left(\frac{7}{4}\right)^2$	4) $x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$
5) $\left(x + \frac{7}{4}\right)^2 = \frac{25}{16}$	5) $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$
6) $x + \frac{7}{4} = \pm\sqrt{\frac{25}{16}}$	6) $x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{-4ac + b^2}{4a^2}}$
7) $x = -\frac{7}{4} \pm \frac{5}{4}$	7) $x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
8) $x = \frac{-7 \pm 5}{4}$	8) $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
9) $x = \frac{1}{2}\ ou\ x = -3$	9) $x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
	$ou \quad x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

As raízes de uma equação expressa na forma $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$, são dadas pela fórmula

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, sendo $\Delta = b^2 - 4ac$

Fonte: Guelli (2005-b, p. 64)

Percebo que ao fazer o confrontamento dessas duas instituições, no caso o livro de Andrini (1989) e o livro de Guelli (2005), as praxeologias diferem-se pelo fazer (práxis).

Conforme o Quadro 5, Andrini (1989) propõe uma sequência que privilegia o uso da fórmula de maneira mais direta, pois ao pedir que se escreva uma equação na forma $ax^2 + bx + c = 0$, quando ela se encontra, por exemplo, na forma,

$(x - 5)^2 - 9 = 0$, que desenvolvendo o quadrado, vem

$x^2 - 10x + 25 - 9 = 0$, e finalmente $x^2 - 10x + 16 = 0$. Daí usa-se a fórmula

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Para calcular as raízes $x = 2$ ou $x = 8$.

O segundo autor propõe inicialmente em sua organização a valorização da fórmula ao propor resoluções de equações completando quadrados (Quadro 7). Tomando-se a equação anterior, Guelli (2005) mostra um caminho inverso ao proposto por Andrini (1989), onde a equação é resolvida completando-se o quadrado da seguinte forma:

Dada a equação $x^2 - 10x + 16 = 0$, obtém-se o quadrado da diferença de dois termos, no primeiro termo, da seguinte forma

$x^2 - 10x = -16$

$x^2 - 10x + \left(-\frac{10}{2}\right)^2 = -16 + \left(-\frac{10}{2}\right)^2$

$x^2 - 10x + 25 = -16 + 25$

$(x - 5)^2 = 9$

$x - 5 = 3$ *ou* $x - 5 = -3$

$x = 8$ *ou* $x = 2$.

O discurso (*Logus*) nos dois casos é invariante, pois os dois autores assumem pelas suas praxeologias que a melhor técnica para resolução de equações do 2º grau é a fórmula. Andrini (1989) não privilegia nenhum processo que revele a necessidade do uso da fórmula tal como Guelli (2005), porém os dois demonstram a fórmula por completamento de quadrados (Quadros 2 e 4). Na busca de encontrar uma técnica mais abrangente, no caso a fórmula de resolução, Guelli assume que a raiz quadrada de um número positivo tem dois resultados simétricos como mostra o Quadro 8 e a resolução da equação anterior em que $(x - 5)^2 = \pm 3$, quando poderia justificar que os sinais + e – aparecem pela fatoração da diferença de dois quadrados, ou seja $(x - 5)^2 - 9 = 0$.

Ao fazer o confronto dessas praxeologias, percebo que em relação ao livro de Andrini (1989), eu era um sujeito que estava de certa forma, em conformidade com essa instituição, pois continuava preparando minhas aulas seguindo sua praxeologia, mesmo estando diante de uma nova instituição, no caso o livro de Guelli (2005) ao qual não estava, naquele momento, em conformidade com sua praxeologia.

Reflito que tal comportamento se deva pelo fato de não aceitar mudança na praxeologia até então por mim dominada, pois já havia dominado um jeito de fazer que parecia não comprometer a confiança que sentia ao transmitir um conteúdo. A minha sensibilidade em relação a essa praxeologia cristalizada era tal que não me permitia mudança, de maneira que mesmo adotando o livro da escola, resistia a ele por perceber uma não conformidade da praxeologia proposta com o meu equipamento praxeológico e correlativamente ao universo cognitivo, pois naquele momento para mim o objeto era alcançado por um jeito específico de fazer e pensar.

3.3 OS CURSOS DE APERFEIÇOAMENTO E PALESTRAS: REAFIRMANDO UMA PRAXEOLOGIA

Após o início de meu trabalho como professor, os principais cursos que fiz, antes da especialização em educação matemática foram, em duas oportunidades, de aperfeiçoamento em Matemática. Participei também de palestras (principalmente de autores de livro didático), e de seminários que geralmente eram realizados por autores de livro da educação, tais como Vasco Moreto, Celso Vasconcelos, Celso Antunes, entre outros. Minha participação nesses eventos, em geral não se dava por achar que poderia haver algo inadequado em minha prática docente, mas sim porque eram oferecidos ou encaminhados pelas escolas que trabalhei e que estas nos “obrigavam” a participar dos mesmos, pois em geral eles eram realizados nos horários de aula. Creio que tais eventos possam ter me instigado de tal modo a pensar sobre minha prática docente no sentido da motivação dos alunos em estudar Matemática e não sobre o meu fazer matemático docente.

Em relação aos cursos de aperfeiçoamentos, os principais fatores que me levaram a participar desses cursos foram: o período de realização, pois estes aconteceram nas férias escolares; a melhora do meu currículo como professor; além da curiosidade em saber que contribuições poderiam me oferecer.

O primeiro aconteceu em 1996 promovido pela Secretaria de Estado de Educação (SEDUC-PA) e ministrado na Universidade Federal do Pará (UFPA). Lembro que minha participação neste curso se deu por meio da informação que me foi dada pelo diretor da escola na qual eu trabalhava. Como naquele momento a minha formação era somente em Engenharia, decidi participar do mesmo para começar a “fazer currículo” na área de Educação.

Em 2004 participei de outro curso de aperfeiçoamento sendo que este foi organizado pelo Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), ministrado em vídeo conferência por professores deste instituto e também de forma presencial por professores da UFPA. A diferença, em relação a minha atitude, é que desta vez fui à busca do curso, porque já começava a sentir necessidade de mudança em minha prática. O que se constituiu numa busca de conhecer algo novo e que fez de mim um sujeito epistêmico que em relação com o saber é levado pelo desejo, aberto para um mundo social no qual ele ocupa uma posição e do qual é elemento que age (CHARLOT, 2000).

Uma das características desses cursos de aperfeiçoamento é que ambos eram destinados a professores de matemática do ensino médio. Os dois cursos foram elaborados em blocos de conteúdos tais como se apresentam nos livros didáticos. Para mim, contribuíram no sentido de ampliação do domínio de conteúdos de matemática escolar, com ênfase nos conteúdos do ensino médio, sendo que no curso do IMPA, observei que em algumas aulas os professores mostravam conexões de conteúdos e tentavam colocar situações que levassem a integrá-los, como fez Andrade (2007).

Em alguns momentos de minha prática docente, considerava que já possuía uma boa experiência para recorrer a determinadas estratégias para iniciar certos conteúdos buscando contextualizações no cotidiano ou em outros campos de conhecimento, porém não passavam de tentativas para motivações ocasionais. Para exemplificar, quando iniciava o ensino de números inteiros, levava aos alunos extratos bancários para que esses pudessem observar a utilização de números negativos no dia-a-dia. No entanto, no momento do estudo das regras de sinais da multiplicação, pareciam que estas não tinham sentido prático.

Trabalhei como professor de cursos preparatórios para o vestibular e os chamados convênios pré-vestibulares nos quais ficava responsável por ensinar certos conteúdos matemáticos. As aulas eram destinadas em sua maioria a resolver exercícios de vestibulares passados e de concursos militares. Nessas instituições os cursos de aperfeiçoamentos reafirmaram minhas relações pessoais com os objetos matemáticos. As construções das aulas, das organizações matemáticas, que foram produtos de meus textos do saber, foram pensadas de acordo com o que era instituído para os cursos preparatórios.

A praxeologia por mim adotada sobre a resolução de equação do segundo grau não sofreu grandes modificações, ou seja, continuava a pensar e trabalhar este objeto como produto acabado, apesar de apresentar situações que pareciam contextualizá-las.

Dessa forma, há momentos em que a equação do segundo grau se constitui em tarefa rotineira, como no caso do momento em que estava trabalhando nos cursos preparatórios para vestibulares. Nesses cursos utilizava as equações do segundo grau apenas como técnica auxiliar nas resoluções de exercícios e problemas de outros conteúdos matemáticos, tais como a geometria analítica, a geometria espacial, entre outros.

Assim, ensinava a resolução de equações do segundo grau para os alunos do ensino fundamental tendo em vista suas utilizações futuras no ensino médio e nos cursos preparatórios para o vestibular. Ou seja, minha praxeologia continuava cristalizada em torno da equação do segundo grau e que a percebia como produto. Isso era inquestionável para mim nessa época.

A minha ação docente ao preparar uma aula e em sala de aula foi reafirmada. Minhas relações com a equação do segundo grau e correlativamente as praxeologia que dominavam na época pareciam inalteradas. Em geral, meu jeito de abordagem da Matemática como professor não sofreu modificações significativas, continuei de certa forma com minha prática já estabelecida de abordar os conteúdos com conceitos ou definições, resolver alguns exercícios como exemplos e aplicar bastantes exercícios para os alunos, tal qual era proposto nos livros de Andrini (1989).

Dessa forma, o meu fazer docente dentro dessas instituições foi reafirmado, sem a consciência de que a minha relação com os objetos matemáticos se dava de acordo com a instituição a qual estava submetido; pois a noção de relação pessoal com o objeto matemático remete às praticas sociais realizadas no contexto da instituição e que colocam em jogo o objeto e as atividades que podem ser feitas na instituição com esse objeto (BOSCH; CHEVALLARD, 1999). Nesse sentido parecia haver uma instituição maior, o livro didático que escolhera inicialmente como referência, que embora pequeno e até mesmo invisível como instrumento do meu fazer para as escolas em que atuava, tinha força de impor a prática em jogo das maneiras de fazer e de pensar próprias - isto é, uma praxeología dominante.

> De maneira geral, em todo *sistema de ensino das matemáticas* podemos encontrar um *modelo epistemológico dominante*, muitas vezes implícito, que se "impõe" aos sujeitos da instituições e que tem uma importância didática crucial, posto que determina o que se entende por "ensinar e aprender matemática" dentro dessa instituição (BOSCH et al., 2006, tradução nossa grifos no original, p. 57).

O domínio que tinha de uma praxeologia (ou será uma praxeologia que me dominou) me fazia pensar ter o domínio sobre a matemática escolar como um todo, de tal forma que não questionava minha prática docente até aparecerem alguns fatos que me levaram a refletir sobre essa prática.

3.4 O INÍCIO DE UMA PRÁTICA DOCENTE NA EDUCAÇÃO DE JOVENS E ADULTOS (EJA) E OS PROBLEMAS NO ENSINO PÚBLICO: QUESTIONANDO A MINHA PRÁTICA

Ao dar aulas nas turmas da EJA do ensino fundamental e médio, não tinha inicialmente informações sobre o programa e os conteúdos abordados nessa modalidade de ensino. Recebi informações sobre as etapas do ensino fundamental e Médio de outros professores mais experientes aos quais perguntei como era disposto o currículo dessas turmas. Eles forneceram as seguintes informações sobre como distribuir os conteúdos de cada etapa[7]:

a) 3ª etapa – seriam trabalhados conteúdos de 5ª e 6ª séries, sendo que os conteúdos da 5ª seriam no 1º semestre do ano letivo, e da 6ª série, no segundo;

b) 4ª etapa – conteúdos da 7ª e 8ª séries, sendo que os da 7ª no primeiro semestre e os da 8ª, no segundo.

c) 1ª etapa – conteúdos do 1º ano do ensino médio e parte dos conteúdos do 2º ano, distribuídos ao longo do ano letivo.

d) 2ª etapa – parte dos conteúdos do 2º ano e os conteúdos do 3º ano, distribuídos ao longo do ano letivo.

Assim, os conteúdos trabalhados na EJA eram bastante resumidos, ou simplesmente não eram alcançados em sua totalidade.

Retomando a transposição didática interna na qual o professor tem gerência sobre os conteúdos que vai trabalhar, a praxeologia adotada na EJA fez parecer que o professor não considera tudo que está determinado ou recomendado pelas instituições.

Como não estava claro para mim a condução do ensino do saber na EJA, mesmo com as recomendações de professores mais experientes, recorri a uma instituição que já continha uma organização matemática para esta modalidade de ensino, no caso, o livro didático, para iniciar uma nova praxeologia. Esses livros eram destinados apenas às etapas do ensino fundamental.

Na 4ª etapa, por exemplo, além das informações que recebi dos professores, fazia meu planejamento também apoiado na sequência posta no livro “Matemática” (SILVA, 1997) recomendado por um divulgador de uma editora de Belém, cujo sumário se encontra no Quadro 9.

---

[7] No Ensino Fundamental do 6º ao 9º ano são duas etapas (3ª e 4ª). No Ensino Médio são duas etapas (1ª e 2ª). Cada etapa se dá em um ano letivo.

Quadro 9: Sequência de conteúdos no livro *Matemática para a EJA*

Unidade 1: Conjunto dos números reais (R)
Unidade 2: Cálculo algébrico
Unidade 3: Produtos notáveis
Unidade 4: Fatoração
Unidade 5: Frações algébricas
Unidade 6: Operações com frações algébricas
Unidade 7: Equações fracionárias
Unidade 8: Geometria
Unidade 9: Estudo do triângulo
Unidade 10: Estudo do quadrilátero
Unidade 11: Estudo da circunferência
Unidade 12: Estudo dos radicais
Unidade 13: Operações com radicais
Unidade 14: Equações do 2º grau
Unidade 15: Discussão das raízes de uma equação do 2º grau
Unidade 16: Equações redutíveis ao 2º grau
Unidade 17: Equações irracionais
Unidade 18: Problemas com equações do 2º grau
Unidade 19: Segmentos proporcionais
Unidade 20: semelhança de triângulo
Unidade 21: Relações métricas num triângulo
Unidade 22: Trigonometria
Unidade 23: Perímetro e área

Fonte: Silva (1997, p. 4)

Nesse livro encontra-se uma praxeologia sobre a resolução de equações do segundo grau (Quadro 10) que não era diferente do que dispunha em meu equipamento praxeológico, ou seja, em essência é a mesma que foi proposta nos livros de Andrini (1989-a e b). A diferença é que o livro de Silva (1997) apresenta os conteúdos dos programas de 7ª e 8ª séries (Quadro 9) contidas num mesmo livro e de forma mais resumida que nos livros de ensino regular.

Quadro 10 - Passos para resolução de equações do 2º grau no livro *Matemática* para a EJA

Exemplo: $x^2 - 3x + 2$, para U = R.

1º passo: identificaremos os coeficientes.

$a = 1$
$b = -3$
$c = 2$

2º passo: calcular o valor de Δ.

$\Delta = b^2 - 4\,a\,c$
$\Delta = (-3)^2 - 4.1.2$
$\Delta = 9 - 8 = 1$

3º passo: calculemos os valores de x (duas raízes), através da fórmula de Bháskara.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{1}}{2.1}$$

$$x = \frac{3 \pm 1}{2}$$

Então:

$$\begin{cases} x' = \dfrac{3+1}{2} = \dfrac{4}{2} = 2 \\ x'' = \dfrac{3-1}{2} = \dfrac{2}{2} = 1 \end{cases}$$

Logo:
V = {1, 2}

Exercício

Resolva as equações abaixo, sendo U = R.

a) $9x^2 - 12x + 4 = 0$
b) $x^2 - 6x + 8 = 0$
c) $x^2 - 12x + 32 = 0$

Fonte: Silva (1997, p. 118)

Assim, pondo frente a frente as praxeologias usadas no ensino regular e na EJA, pude perceber que a nova praxeologia da EJA era aparente, pois mantinham o mesmo jeito de pensar e fazer da instituição ensino regular. Isso de certo modo, para atender o tempo didático do currículo, imprimia a aparente liberdade do professor na escolhas de conteúdos que deviam receber maior atenção ou até mesmo serem eliminados.

Embora pareçam claras as implicações dessa liberdade docente no rendimento dos alunos da EJA, manifestado no desinteresse e reprovações de alunos, principalmente do ensino fundamental, percebi sob um olhar crítico, que outros aspectos poderiam influenciar nesses resultados, colocando inicialmente o meu equipamento praxeológico em questionamento, ou seja, as praxeologias por mim dominadas poderiam não dar conta do exigido pela EJA. Embora, segundo Chevallard (2009), as alterações e as recombinações praxeológicas sejam um fenômeno no coração da história social da praxeologías, isso parece ainda efetivamente não ter acontecido para a EJA.

Sob esse olhar, comecei minha busca por cursos na área de educação matemática onde fiz primeiramente uma especialização e, em seguida o curso de mestrado que serão abordados em seguida.

3.5 CONSTRUINDO NOVAS PRAXEOLOGIAS A PARTIR DO CURSO DE ESPECIALIZAÇÃO

Em 2006 ingressei em um curso de especialização em Educação Matemática da Universidade Federal do Pará (UFPA), no qual tive os primeiros contatos com teorias diversas dessa área. Os contatos com professores do curso e, por meio desses, com vários autores relacionados à educação matemática conduziram-me à relativa mudança de postura diante da abordagem dos conteúdos matemáticos em sala principalmente levando em consideração as questões pedagógicas na escola. Dessa forma, segui o caminho da reflexão da própria prática após realizar estudos nos diversos campos da Educação Matemática, tais como a etnomatemática, a modelagem matemática, entre outros.

Durante e após o curso, tentava, em minha prática docente, na medida do possível, contextualizar os conteúdos e (re)significá-los por meio de vários aspectos, tais como o cotidiano dos alunos e suas práticas culturais, a abordagem de aspectos econômicos, familiares e até mesmo relacionando a Matemática com outras disciplinas, tais como Biologia, Geografia, Artes, Educação Física etc. Isso culminou com um artigo no âmbito da etnomatemática e a reflexão da própria prática do professor. Tal artigo foi construído a partir de um trabalho com turmas de 5ª e 6ª séries sobre o aumento abusivo do preço do leite no ano de 2007 (MESQUITA; LUCENA, 2008). Neste trabalho, foram considerados, além de conteúdos matemáticos como razão, proporção, regra de três, porcentagem, noções de estatística, também alguns temas transversais como saúde e cidadania, entre outros. Vale ressaltar que foi uma atividade que elevou o interesse dos alunos pelas aulas a ponto de no início do ano letivo seguinte eles perguntarem se haveria novos trabalhos dessa natureza.

Isso suscitou um novo olhar para meu fazer docente no sentido de considerar alguns aspectos que poderiam motivar o aprendizado dos alunos. Dessa forma, comecei a dar mais ênfase a situações que chamassem a atenção dos alunos durante as aulas. Nesse sentido, Gonçalves (2006, p. 47) apoiado em Schulman (1986) enfatiza que “o conhecimento do conteúdo requer ir além do conhecimento dos fatos ou conceitos de um domínio” e completa afirmando que isto se refere a “aspectos mais amplos, que ensejam questões tais como o político, o social, o econômico, o cultural e o epistemológico. Ele reforça tal pensamento quando afirma que

> Dada a complexidade que é ser um profissional da educação, *independente da disciplina*, essa abordagem do conhecimento, por certo, virá a possibilitar ao professor lidar, com mais propriedade, com a complexidade educacional do ensinar e aprender matemática (GONÇALVES, 2006, p. 47, grifos nossos).

Esse enfoque levou-me a encarar o trabalho docente de forma mais ampla, no sentido de que o professor seja também responsável pela formação do aluno de maneira mais abrangente e não apenas com relação a contribuições no sentido de ampliação de conhecimentos específicos da disciplina.

Em 2008, fui convidado para participar do projeto “Imagens amazônicas” - desenvolvido pelo Grupo de Estudo e Pesquisa em Educação Matemática e Cultura Amazônica (GEMAZ) – IEMCI/UFPA - como professor da Rede Estadual de Ensino do Pará. Tal projeto preconiza o “diálogo” da matemática escolar com a matemática praticada nos fazeres culturais da região e, inclusive da praticada no cotidiano dos alunos.

Esse projeto influenciou mais ainda a minha prática no sentido de reafirmar a busca de motivações culturais, no cotidiano dos alunos ou de outras ciências na abordagem de conteúdos matemáticos, tais como a construção de papagaios para o ensino de geometria na 7ª série; a montagem de cestas básicas com menor custo para o ensino de operações numéricas para a 6ª série; construção de um sistema solar na sala de aula, na abordagem de potências e notação científica na 8ª série, etc. Recordo que, bastante influenciado por essa formação continuada, em 2008 formei uma comissão de professores para trabalhar temas transversais, tais como violência, saúde, meio ambiente, entre outros, numa escola pública em que dava aulas. Porém com o deflagrar de uma greve que demorou bastante, quase todo o planejamento ficou sem execução.

Ao realizar trabalhos dessa natureza em que os alunos se sentem mais motivados a participar do processo de sua aprendizagem, há uma solicitação por parte deles que em todos os conteúdos matemáticos o professor apresente algo diferente. No entanto, diante das restrições pedagógicas e institucionais nas quais o professor está sujeito, tais como o tempo para atingir determinadas metas educacionais; o espaço e as condições de trabalho, etc.; e a própria necessidade do professor que o leva a trabalhar na regência em sala de aula por até 60 horas semanais ou mais no ensino básico, fazem com que este não possa realizar integralmente tais atividades, tendo que muitas vezes dar aulas sob condições físicas e mentais precárias, trabalhando o “conteúdo pelo conteúdo”. Mas considero que havia dado um grande passo em meu fazer docente, pois os trabalhos realizados forneceram-me fortes argumentos na busca de melhorias das condições de trabalho e a condução de uma prática docente mais significativa para mim.

Quanto à minha relação com o objeto matemático, o curso de especialização me levou a pensar fortemente em contextos da vida cotidiana fora da escola, de saberes tradicionais e da cultura para ajudar o aluno a compreender melhor a razão de ser de certos objetos matemáticos na escola. As equações do segundo grau começaram a ser abordadas nas aulas com tentativas de minha parte de assim contextualizar o ensino deste objeto matemático. O desafio era sempre encontrar situações que envolvessem os objetos matemáticos que queria abordar em sala de aula. Minha ação docente já apresentava modificações, pois sentia a necessidade de fazer o diálogo entre a Matemática da escola e a “matemática” fora dela, ou seja, o saber começa a ser observado numa perspectiva etnomatemática.

No entanto, o ensino de resolução de equações do 2º grau não sofreu mudanças significativas num sentido didático, pois para resolver problemas ou enfrentar situações que envolvesse equações desse tipo, os alunos teriam que saber resolvê-las. Para isso, eu ensinava tal resolução da mesma forma que era ensinada no início de minha prática docente onde me apoiava nas sequências do livro didático da época: apresentação de equações, sua fórmula de resolução e cálculo das raízes. Ou seja, as equações continuavam como um produto acabado, como artefatos para serem utilizadas numa situação.

Nas turmas de 7ª série, ao trabalhar conteúdos numéricos e geométricos, buscava motivações culturais como, por exemplo, a construção de papagaios[8] para auxiliar no ensino de geometria. No entanto, ao iniciar os estudos de expressões algébricas, principalmente as operações entre monômios e polinômios, os produtos notáveis e a fatoração, argumentava com os alunos que eles precisavam aprender esses conteúdos, pois iriam utilizar futuramente em outros conteúdos matemáticos.

Assim, percebo que ocorreu uma mudança no meu fazer docente com forte ênfase no pedagógico, pois minha preocupação em ensinar os conteúdos escolares buscando relacioná-los a saberes do cotidiano ou da tradição de certas culturas como contextos motivacionais ocorreu com maior frequência; como consequência de compreensões que tive dos pressupostos da etnomatemática, da modelagem matemática e de conhecimento pedagógico do conteúdo (SHULMAM, 1986) onde o conhecimento específico do conteúdo é posto como um dos conhecimentos que o professor precisa em sua ação docente, mas que não é suficiente para que este possa ensinar. No entanto, continuava com minha visão do saber matemático como produto que é utilizado em situações ou problemas.

---

[8] Pipas voadoras.

3.6 NOVA RELAÇÃO COM O SABER: REFORMULANDO UMA PRAXEOLOGIA DURANTE O CURSO DE MESTRADO

A partir dos estudos de teorias da Didática da Matemática, ao tomar consciência da responsabilidade como professor na transposição didática interna, percebi a importância da relação pessoal com o objeto matemático tem nesse processo, pois na elaboração do texto do saber, preciso de clareza das conexões que farei entre os objetos matemáticos no sentido de atender minhas intencionalidades. Nesse sentido, Lins e Menezes (2010, p. 121, grifos nossos) afirmam que

> A transposição do texto didático em um saber ensinado perpassa pela *relação que o professor tem com o saber em jogo*. As situações de ensino a serem propostas estão, em certa medida, vinculadas a essa relação. A observação de professores em sala de aula revela que estes parecem se sentir mais à vontade e propõe, muitas vezes, situações de ensino mais interessantes, bem como suas intervenções em relação aos alunos parecem ser melhores quando estes possuem uma relação mais estreita com o saber.

Isso me leva a afirmar que, para minha ação eficaz como agente na transposição didática interna, preciso ter uma relação com o saber matemático que não seja limitada apenas ao domínio do conteúdo, mas partindo dessa relação conduzir meu papel na transposição, por meio de minha ação docente anterior à sala de aula; de não só revelar novos objetos, mas, sobretudo fazer renovar os velhos objetos matemáticos por meio de conexões, articulações e integrações entre os objetos do saber matemático curricular.

Assim, minha compreensão de que o saber realmente ensinado é aquele cuja interpretação é do professor, e este, é fruto de sua relação pessoal com um objeto matemático formada por seus assujeitamentos nas várias posições de diferentes instituições em que foi e é sujeito, é o que encaminha seu momento de "ficção de liberdade" na construção do seu texto de saber. Nesse sentido,

> Quando um professor prepara sua aula, podemos assumir que para ele o texto do saber é, neste momento preciso, temporariamente estável. No entanto, este texto ainda oferece ao professor uma variedade de escolhas. As escolhas feitas pelo professor para construir o seu curso modificando o saber a ensinar, bem como a implementação efetiva dos cursos propostos aos alunos,

> inevitavelmente dão lugar a modificações do projeto. O trabalho do professor é uma tarefa transpositiva (RAVEL, 2003, p. 5, tradução nossa).

Entretanto, a construção de um texto do saber que venha atender minhas intencionalidades a partir de uma organização matemática dada pelas instituições, não pode fazer do saber ensinado algo que seja tão distante do saber a ensinar e nem seja também o saber sábio ou acadêmico de forma plena, mas que seja um saber validado pelas instituições e pela sociedade.

Assim, a liberdade que o professor tem na sua interpretação do saber dentro da transposição didática interna não significa que este deva fazê-la sem considerar aspectos sobre o saber e sobre as restrições pedagógicas. Para exemplificar, não é raro observar tentativas de professores de Matemática de contextualizar conteúdos matemáticos no cotidiano; ou usando estratégias que tendam a distanciar o saber de suas raízes epistemológicas, como exemplificam Bosch e Gascón (2001) ao se referirem ao "*modelo da balança para ensinar a resolver equações do primeiro grau* ou a situação de *espessura de uma folha de papel para introduzir os decimais*" (p. 2, tradução nossa, grifo no original).

No entanto, as relações do professor com os objetos matemáticos, as praxeologias que dispõe, podem lhe conduzir a uma gestão do saber de modo a atender sua intencionalidade sob as condições e restrições institucionais impostas, pois uma praxeologia pode ser a transposição de uma praxeologia existente em outras instituições, ou recobinações dessas. Assim, em alguns casos pode ser que a práxis seja essencialmente a mesma, mas o logos seja mudado ou ainda que o logos seja mantido e a práxis alterada, ou que às vezes a praxeologia seja esvaziada de sua substância. "Alterações e recombinações praxeológicas são, portanto, um fenômeno no coração da história social da praxeologías" (CHEVALLARD, 2009, p. 4).

Esse pensar pode encaminhar possíveis respostas para o problema didático da conexão da matemática escolar, pois trata

> da análise de praxeologias matemáticas no currículo atual e também na *construção* de praxeologias matemáticas. Com relação à *análise*, nós inquiriremos sobre a natureza das limitações e insuficiências

> daquelas praxeologias matemáticas para engendrar e dar sentido a praxeologias mais vastas e mais complexas, superando o *nível temático*. Com relação a *construção*, nós perguntaremos como complementar as praxeologias existentes e como conectá-las? (GARCIA et al., 2006, p. 235, tradução nossa).

Nesse sentido, a conexão da matemática escolar pode ser entendida como a relação passado e futuro em torno de um objeto matemático e isso pode remeter a otimização do tempo didático (CHEVALLARD, 2005), à medida em que o olhar para o objeto é sempre como novo, sua compreensão não fica restrita a um tempo. Está sempre em construção como um novo objeto, sem perder os "traços" característicos do antigo, mas com novas relações. Assim, está sempre em relação com o passado e futuro. Por exemplo, a minha nova relação, enquanto professor, com polinômios me permite fazer relações com o futuro, na 7ª série, com o passado e futuro na 8ª série, como a resolução de equações do 2º grau e equações polinomiais no ensino médio, mesmo que não esteja explicitamente posto. Ou seja,

> Fazer aparecer *um objeto com duas caras, contraditórias entre si*. Por um lado, deve aparecer como algo novo, que produz uma abertura das fronteiras do universo dos conhecimentos já explorados; sua novidade permite que se estabeleça, sobretudo, entre professor e aluno o *contrato didático*: pode constituir-se em um objeto de ensino e campo de uma aprendizagem. Por outro lado, em um segundo momento da dialética do ensino, deve aparecer como objeto antigo, quer dizer, que possibilita uma identificação (por parte dos alunos) que lhe inscreve na perspectiva do universo de conhecimentos anteriores (CHEVALLARD, 2005, p. 77, grifos no original, tradução nossa).

Dessa forma, Chevallard (2005, p. 77) afirma que "o objeto de ensino produz um equilíbrio contraditório entre passado e futuro" no qual ele o denomina de *objeto transacional* entre passado e futuro. Assim, o "não envelhecimento" de um objeto do saber corresponde ao papel de transacionalidade do mesmo, ou seja, se pode dizer que a superação da contradição antigo/novo de um objeto do saber favorece o não envelhecimento desse objeto. Assim como uma espécie de ser vivo evolui para não ser extinto, um objeto do saber também pode "evoluir" no sentido de não se tornar obsoleto e vítima do tempo didático. Isso pressupõe que tal objeto seja renovado no curso de seu estudo.

Nesse sentido, percebo que o papel do professor na relação que une o aluno, o professor e o saber, ou seja, no sistema didático, é fundamental na condução da “máquina didática”, cujo motor é a contradição do antigo e do novo. Assim, a introdução de objetos transacionais, que são objetos do saber convenientemente convertidos em objetos de ensino, pelo professor alimenta o funcionamento do sistema didático. Isso implica que o professor, para conduzir a renovação didática do objeto a ser ensinado, seja o agente da relação que sabe antes que os demais, que já sabe, que sabe mais, e que esta é a mínima condição para tal renovação (CHEVALLARD, 2005).

Dessa forma, parece ficar claro o papel do professor na transposição didática interna, o de buscar a transacionalidade dos objetos matemáticos, de movimentar praxeologias já existentes em seu equipamento praxeológico e correlativamente suas relações pessoais com os objetos matemáticos, o seu universo cognitivo, para (re)construir praxeologias, alterando-as ou recombinando-as.

Nesse sentido, o momento da transposição didática interna, em que o professor elabora seu texto de saber, pode ser visto como o processo de construção de uma organização matemática que irá dar lugar à atividade matemática em que se constitui o “matemático”. De outro modo, é simultaneamente um produto e uma atividade (BOSCH; ESPINOZA; GASCÓN apud VIVIANO, 2010) à medida que forma e reforma praxeologias e, correlativamente, o universo cognitivo do professor.

Adicionalmente, se levo em conta que a co-determinação didática entre a organização matemática e a organização didática correspondente (BOSCH; GASCÓN, 2001) pode caracterizar, segundo Viviano (2010), em forma mais exaustiva a relação do professor de Matemática ao saber matemático, urge que eu elabore e coloque em ação um texto de saber, numa praxeologia didática, sobre a fórmula da equação do segundo grau, de modo a buscar encontrar possíveis respostas aos meus questionamentos sobre o que no meu equipamento praxeológico, correlativamente no meu universo cognitivo, facilita, interfere ou que é indiferente as suas mudanças quando frente a uma nova organização matemática que deve dar lugar a uma nova organização didática.

Para isso, a partir de uma organização matemática acerca da fórmula de resolução de equações do segundo grau presente no trabalho de Silva e Guerra

(2009), busquei reconstruir a praxeologia em relação à fórmula da equação do segundo grau por mim adotada até então. Essa escolha se deu principalmente por possuir em seu desenvolvimento a integração de diferentes objetos de estudo estudados em séries anteriores do nível de ensino fundamental, e de outros objetos matemáticos, de modo implícito, a serem estudados no ensino médio ou mesmo superior.

Tais articulações me pareceram encaminhar de forma facilitadora o meu entendimento sobre o processo de transposição didática interna, de introdução de objetos matemáticos transacionais que se caracterizam por novas relações, preservando as já existentes, com outros objetos matemáticos, que marcam a contradição antigo/novo.

Silva e Guerra (2009) apresentam uma abordagem para o estudo das equações do 2º grau, evocando vários conteúdos posteriores e anteriores a este, no currículo oficial (Quadro 11).

Quadro 11 – Uma nova praxeologia acerca da fórmula de resolução de equação do 2º grau

A equação do 2º grau é apresentada na forma, $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$, que permite escrevê-la como sendo $x^2 + px + q = 0$. Que é um polinômio do segundo grau que pode ser escrito como um produto de polinômios do 1º grau $x^2 + px + q = (x - a)(x - ß)$.

Mas, $(x - \alpha)(x - ß) = x^2 - (\alpha + ß)x + \alpha ß$ que comparada à expressão $x^2 + px + q$, obtém-se $\begin{cases} -(\alpha + \beta) = p \\ \alpha.\beta = q \end{cases}$

Isto é, $- (\alpha + ß)x$ é igual ao termo do primeiro grau px e o termo constante $(\alpha\beta)$ é igual ao termo constante q.

A resolução, portanto, da equação $(x - \alpha)(x - ß) = 0$ tem solução observando-se que o produto de números reais $AB = 0$ é nulo quando pelo menos um dos fatores for nulo ($A = 0$ *ou* $B = 0$). Ou seja, $x - \alpha = 0$ ou $x - ß = 0$, obtendo-se $x = \alpha$ ou $x = ß$. Tudo se resume em fatorar um polinômio do 2º grau em um produto de fatores do primeiro grau: $x^2 + px + q = (x - \alpha)(x - ß)$.

Em alguns exemplos podem ser fatorados mentalmente como a seguir:

$x^2 - 7x + 12 = 0$

$(x - 3).(x - 4) = 0$

Pois, $- (3 + 4) = - 7$ e $3 . 4 = 12$

Em geral, não é tão fácil encontrarmos α e $ß$ por operações mentais. No entanto, observando que o quadrado da diferença de dois termos é igual ao quadrado de sua soma menos quatro vezes o produto entre eles, ou seja, $(\alpha - ß)^2 = (\alpha + ß)^2 - 4\alpha ß = p^2 - 4q$, podemos obter o sistema do primeiro grau

$$\begin{cases} \alpha + ß = s \\ \alpha - ß = \sqrt{p^2 - 4q} \end{cases}$$

que é resolvido pelo método da adição. Assim, o exemplo anterior $x^2 - 7x + 12 = 0$, resulta em $p = - 7$ e $q = 12$, pois donde $2\alpha = 8$ produz $\alpha = 4$, que substituído em $\alpha + ß = 7$ resulta em $ß = 3$.

Após vários exercícios, resolvemos o caso geral, e obtemos a fórmula de resolução da equação do 2º grau

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

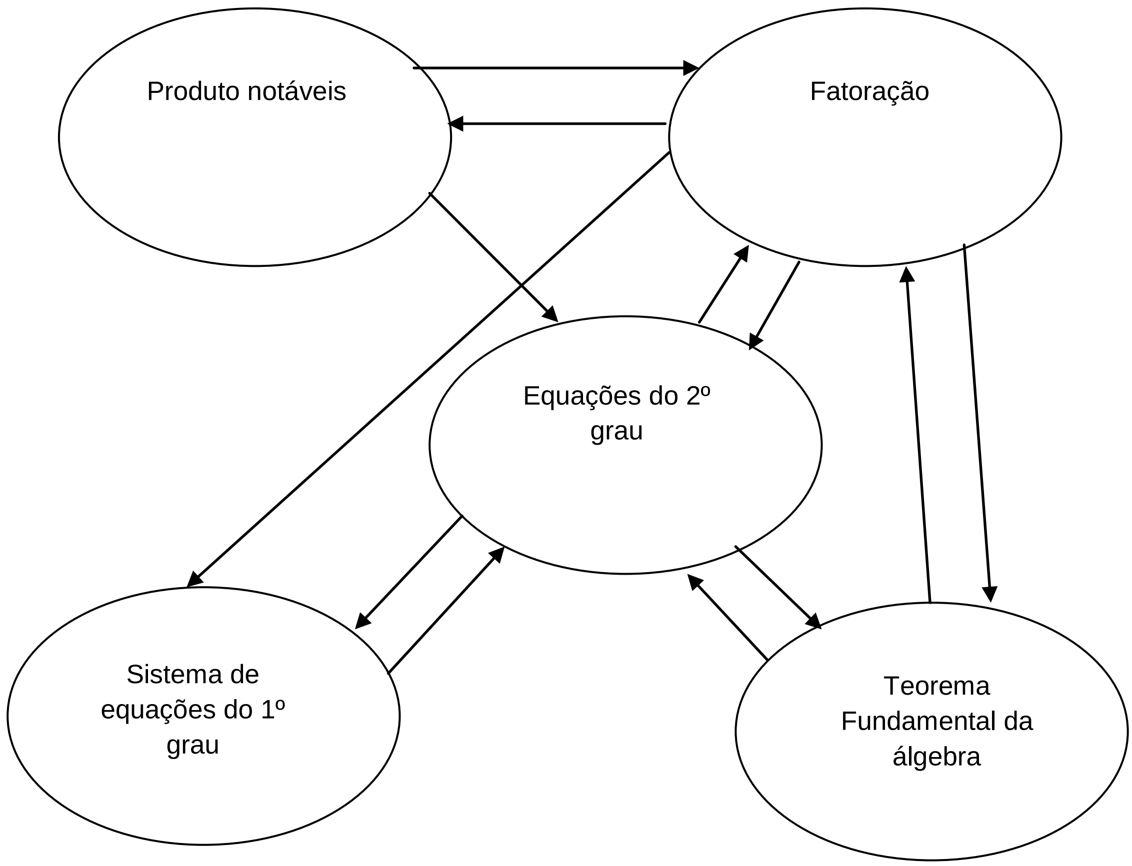
Ao longo desta explanação, foram utilizados vários conteúdos que se interligam, como por exemplo: equação do primeiro grau (6ª e 7ª séries), produtos de polinômios (7ª série), sistema de equação do primeiro grau (6ª série), valor numérico (7ª série), identidade de polinômios (3° ano do EM), fatoração e produtos notáveis (7ª série). Além disso, outros conteúdos estão de forma implícita nesses conteúdos abordados explicitamente, como é o caso de expressões numéricas (no conteúdo valor numérico), iniciada na 4ª série do ensino fundamental; operações fundamentais.

Fonte: Silva e Guerra (2009, p. 93-96)

Na reconstrução da organização matemática que co-determina a organização didática, considerei um aluno hipotético frente às articulações e integrações justificadas de objetos matemáticos conhecidos previamente de outros tempos didáticos, de modo a levar esse aluno a tomar consciência do processo de resolução da equação de segundo grau, sem perder de vista o objeto futuro presente em minha intenção, não a ser explicitada em sala de aula, de levá-los no futuro escolar a compreender a resolução de equações polinomiais por meio do teorema fundamental da álgebra.

A Figura 2 apresenta um esquema que representa a integração dos objetos matemáticos articulados no texto do saber.

Figura 2: Saberes articulados e integrados no texto do saber



Fonte: Elaborada pelo autor (2010)

A Figura 2 ilustra minha nova relação com o saber matemático e revela como foi elaborado meu texto do saber no qual o objeto polinômio é pensado como objeto transacional, ou seja, que é apresentado no ensino fundamental, mas com tratamento para o ensino médio.

O Teorema Fundamental da Álgebra (TFA) (LIMA et al., 1998, p. 219, grifos no original) afirma que *"todo polinômio complexo de grau maior ou igual a 1 possui pelo menos uma raiz complexa".* Isto quer dizer que dado um polinômio $p(x)$, *este pode ser escrito na forma* $p(x) = (x - x_1) \,.\, Q_1(x)$, sendo $Q_1(x) = \frac{p(x)}{x - x_1}$ um polinômio de grau n-1. Ou seja, se $p(x) = (x - x_1) \,.\, Q_1(x)$, e $p(x) = (x - x_1).Q(x) = 0$ *, então* $x = x_1$ é uma raiz.

Assim a fatoração fundamenta a técnica de resolução de uma equação do 2º grau como é exibida no exemplo para equação $x^2 - 5x + 6 = 0$, pois o polinômio $x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$ de onde segue que $(x-2)(x-3)=0$ e que $x-2=0$ ou $x-3=0$ de onde se encontra as raízes $x=2$ e $x=3$. Em geral, se o polinômio pode ser escrito na forma fatorada $(x - x_1).(x - x_2) = x^2 -(x_1+x_2)\, x + x_1.x_2$ podemos, identificando os termos semelhantes entre esses polinômios, encontrar a soma das raízes $S = x_1+x_2$ (no caso em tela $S = 5$) e o produto $P = x_1 \,.\, x_2$ (no caso em tela $P = 6$).

No caso em tela, a fatoração pode ser obtida por inspeção da soma *S=5* e do produto *P = 6*, mas isso nem sempre é possível em todas as tarefas de resolver equações, como, por exemplo, quando as equações têm coeficientes fracionários ou irracionais.

Assim, há necessidade de aprimoramento da técnica utilizada, ou o desenvolvimento de uma (nova) técnica mais abrangente, observando que o teorema fundamental da álgebra se constituiu na tecnologia da técnica ou simplesmente que justifica a técnica de resolução de equações do 2º grau, que em resumo garante que resolver equação polinomial é essencialmente fatorar seu polinômio.

Em resumo, o texto do saber que desenvolvi teve a intenção de conduzir uma organização didática envolvendo antigas tarefas, mais precisamente, praxeologias pontuais anteriormente estudadas como: produtos de polinômios, produtos notáveis, fatoração de polinômios, resolução de sistemas de equações do primeiro grau, articulados de modo a resolver equações do 2º grau, sem perder de vista de fazer valer minhas intencionalidades de evidenciar importância do uso de fórmulas, como uma técnica simples, rápida e segura de se obter as raízes da equação, mas sobretudo, como síntese das articulações e integrações realizadas e que marcam a atividade matemática. Isso se torna possível quando imagino um objeto futuro a ser estudado, no caso a resolução de equações polinomiais à luz do teorema fundamental da álgebra que constitui o elemento tecnológico dessa praxeologia.

As minhas reflexões sobre o objeto em termos da transposição didática, e a consequente reflexão da prática docente me conduziu a uma nova relação com os objetos matemáticos em destaque nesse trabalho. A minha ação docente foi pensada de modo revelar a característica de transacionalidade dos objetos matemáticos e suas articulações entre si, e não de objetos tratados isoladamente.

Após essa tarefa de desenvolver o produto de polinômios seria realizado o trabalho inverso, ou seja, a tarefa de fatorar o trinômio.

Contudo, essa segunda tarefa parece não apresentar técnica de realização tão simples quanto à primeira, pois há necessidade de realização de tentativas e erros que podem não ser fáceis dependendo do polinômio a ser fatorado. Por exemplo, o polinômio $x^2 - x + 5$ não é fatorável se penso em números reais. Assim como o polinômio $x^2 + x - 1$ não é fatorável se considero números inteiros.

Ao remontar uma situação do tipo “quais são dois números x e y cujo produto deles é igual a P e cuja soma deles é igual a S”, organizo o sistema $x + y = S$ e $x.y = P$, que resulta, por exemplo, na equação $x^2 - Sx + P = 0$ que se constitui num novo registro para o sistema em questão.

Para certos valores de S e P, a solução da situação acima parece não apresentar dificuldades se penso em fatorar o trinômio. Por exemplo, $x^2 - 7x + 12 = (x - 3).(x - 4)$. Parece fácil pensar em dois números cuja soma é igual a 7 e o produto deles é igual a 12. No entanto, mesmo usando o recurso de fatorar o produto P para encontrar tais números ($12 = 2x2x3 = 4x3$), há exemplos de polinômios tais como os citados anteriormente ($x^2 - x + 5 = 0, x^2 + x - 1 = 0$), cujo tal recurso não oferece o resultado de forma prática.

Nesse sentido, faz-se necessário o aprimoramento da técnica de fatorar para obter solução prática para toda situação desse tipo. Nesse caso, o uso da fórmula de resolução de equações do 2º grau constitui-se na técnica que alcança tais situações.

No intuito de oferecer uma situação mais concreta, foi pensado o seguinte problema (*situação 1*): *Quais as dimensões de um retângulo cuja área é igual a* P *e cujo semiperímetro é igual a* S*?*

A situação acima nos remete ao seguinte sistema abaixo, se considerarmos x e y as dimensões do retângulo.

$$\begin{cases} x + y = S \\ x.y = P \end{cases} \qquad \text{(Sistema } S_1\text{)}$$

O desenvolvimento da solução do sistema acima, pelo método da substituição, remete à equação $x^2 - Sx + P = 0$ que por sua vez, para ser resolvida, precisa de um método mais abrangente, pois se penso na soma e no produto, volto ao sistema, há um ciclo sem solução para a *situação 1*.

O desenvolvimento da fórmula de resolução da equação do 2º grau posto por Silva e Guerra, consiste em transformar essa tarefa em outro tipo de tarefa presumidamente mais simples: *dada a soma e a diferença de dois números, calcular tais números.*

Isso é possível por meio da relação de diferença entre o quadrado da soma e o quadrado da diferença de dois termos

$$(p + q)^2 - (p - q)^2 = 4\,p\,q \;\Rightarrow\; (p - q)^2 = (p + q)^2 - 4\,p\,q$$

$$\begin{cases} (p - q)^2 = S^2 - 4P \\ p + q = S \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p - q = \sqrt{S^2 - 4P} \\ p + q = S \end{cases} \qquad \text{(Sistema } S_2\text{)}$$

Daí, dada a equação $ax^2 + bx + c = 0$, do sistema acima obtenho a fórmula $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Dessa forma, a transição da tarefa do tipo “resolver a equação do segundo grau” para a tarefa do tipo “dada a soma e a diferença de dois números encontrar esses números”, envolve uma sequência de tarefas pontuais relativas a produtos notáveis, fatoração e sistema de equações de forma articulada em relações até então não conhecidas, caracterizando de certo modo a transacionalidade desses objetos matemáticos

A seguir, descrevo a realização da praxeologia, construída no texto do saber em sala de aula, que constitui outro estágio da transposição didática interna, no qual eu pude refletir sobre minha relação com o saber, sobre a mudança que pode ter ocorrido no meu universo cognitivo por conta da nova praxeologia construída e o que pode ter contribuído, ou impedido nessa mudança.

4 A PRÁTICA DOCENTE SOB UMA “NOVA PERSPECTIVA” – A REALIZAÇÃO DO TEXTO DO SABER EM SALA DE AULA

Aqui tenho por objetivo por em ação o texto de saber a partir da nova praxeológia planejada em acordo com minha compreensão sobre a transposição didática interna, mas agora em frente ao aluno real que pode exigir uma reorganização da praxeologia e consequentemente do meu universo cognitivo.

Para isso foi escolhida uma turma de 4ª etapa da EJA de uma escola púbica por razões, a saber:

a) As praxeologias de referência encontrada nos livros didáticos, nos manuais escolares, para a EJA não apresentava substanciais diferenças das praxeologias adotadas para o ensino regular.

b) Não havia problemas em relação às restrições pedagógicas impostas pelo estabelecimento de ensino, a direção da escola e os professores, quanto ao uso de novas praxeologias.

c) A escolha de uma escola pública se deu por acreditar que o professor gerencia seu fazer docente com maior liberdade, o que propicia, sob minha ótica, uma ação mais autônoma na transposição didática interna. Além de acreditar que raramente uma escola da rede particular autorizaria tal intervenção, embora eu tenha realizado a mesma ação e no mesmo período numa turma de 7ª série de uma escola dessa rede em que era professor.

4.1 AS FASES DA MINHA AÇÃO DOCENTE EM SALA DE AULA: O TEXTO DO SABER POSTO EM AÇÃO

A seguir apresento a sequência da praxeologia separada por estágios onde os objetos matemáticos são expostos de acordo como o texto do saber representado sinteticamente na Figura 2 da seção 3**.**

- ✓ **Primeiro estágio - Produto de polinômios**

A aula foi iniciada a partir da operação de multiplicação entre polinômios, escrevendo no quadro o seguinte produto *(x + 5) (x + 3)*. Perguntei qual seria o resultado daquele produto. Porém não obtive resposta de nenhum deles. Neste momento, percebi que precisava rever as operações entre polinômios para o encaminhamento da praxeologia.

Coloquei no quadro algumas multiplicações do tipo $(x + a)\ (x + b)$, com a e b sendo inteiros. Com intenção de verificar se eles tinham observado regularidade nos produtos, coloquei no quadro um que já havia sido desenvolvido pela maioria dos alunos, conforme descrito a seguir.

Escrevi no quadro o produto $(x + 3)\ (x + 5) = x^2 + 8x + 15$ e apontei para o 8 e para o 15, perguntando a respeito de alguma relação desses resultados com os binômios. A aluna Murielli respondeu que 8 era a soma $3 + 5$ e 15 era a multiplicação 3×5. Escrevi mais algumas situações análogas no quadro pedi para os alunos realizar os produtos de forma rápida. Apesar dessa percepção da aluna, eles tentaram resolver os exercícios sem dar respostas diretas, ou seja, usaram a regra da distribuição. Ao final da aula forneci exercícios (Apêndice 1).

Até aqui a aula estava pautada na realização da tarefa de multiplicar dois binômios do 1º grau, seguindo a regra da distribuição como a técnica de resolução desta tarefa. No momento em que a aluna Murielli observou a soma e o produto dos termos numéricos dos binômios, pensei que eles poderiam pensar na possibilidade de uma nova forma para multiplicar tais binômios que seria também útil para fazer o caminho inverso, no caso a fatoração do trinômio.

Em outras aulas, pedi aos alunos que apresentassem suas resoluções no quadro para identificar suas dificuldades. Alguns alunos pareciam não apresentar dificuldades na resolução, e fizeram os produtos diretamente, sem fazer uso da regra operatória da distribuição enquanto outros alunos fizeram os produtos por distribuição e conseguiram chegar aos resultados. Porém outros apresentaram dificuldades, tais como: não conseguir efetuar a multiplicação correta das variáveis, não colocar sinais dos termos, como, por exemplo, $(x + 3)\times(x + 2) = x + 5 \times 6)$, ou simplesmente nem saber começar os cálculos.

Sendo assim, reuni esses alunos em equipes, onde aqueles que entenderam melhor a maneira de fazer, explicariam aos demais colegas. Os produtos que envolviam monômios e polinômios (Apêndice 1) foram desenvolvidos pela maioria dos alunos, sem grandes dificuldades. Outros alunos disseram ter mais facilidade para fazer o produto de dois binômios.

Os produtos trabalhados nas aulas anteriores foram retomados, porém explicitando a adição e a multiplicação dos termos constantes, como mostra o exemplo 2 abaixo.

Exemplo 2

a) $(x + 4)(x + 3) = x^2 + 4x + 3x + 4 \,.\, 3 = x^2 + (4 + 3)x + 4 \,.\, 3 = x^2 + 7x + 12$

b) $(x - 5)(x - 2) = x^2 - 5x - 2x + 5 .\, 2 = x^2 - (5 + 2)x - 5 \,.\, 2 = x^2 - 7x + 10.$

Após expor outros análogos a esses mudando os sinais dos termos constantes, pedi para que resolvessem os exercícios propostos anteriormente.

Houve apresentações de resoluções no quadro pela maioria dos alunos. Alguns mostraram evolução na ação de fazer os produtos. Realizaram inclusive, os produtos notáveis, onde indiquei os casos que estão presentes nos livros didáticos nos momentos em que estes apareceram, a fim de que eles tomassem conhecimento dos termos usados nesses produtos. Por exemplo: $(x + 5)(x + 5) = (x + 5)^2$ (Quadrado da soma de dois termos), $(x - 5)(x - 5) = (x - 5)^2$ (Quadrado da diferença de dois termos), $(x + 6)(x - 6)$ (Produto da soma pela diferença de dois termos).

Após perceber que houve uma evolução dos alunos com relação ao produto dos binômios, decidi iniciar fatoração sem perder de vista os produtos realizados.

- ✓ **Segundo estágio – Fatoração**

Iniciamos os estudos com fatoração, porém trabalhando com os produtos de polinômios que foram realizados em aulas anteriores, no sentido de articular as tarefas de desenvolver os produtos e fatorar os polinômios. Foram vistos vários trinômios e binômios do 2º grau explicitando os constantes nos livros didáticos em geral tais como: fator comum em evidência, diferença de dois quadrados e o trinômio do 2º grau.

Para ilustrar, escrevi no quadro alguns exemplos, tais como: $ax^2 + bx = x\ (ax + b)$, $x^2 + 2x = x\ (x + 2)$, $x^2 - 5x = x\ (x - 5)$, $5x^2 - 10x = x\ (5x - 10)$, $x^2 - 5x + 6 = (x - 2)\ (x - 3)$, $x^2 - 4x + 4 = (x - 2)\ (x - 2)$, $x^2 - 16 = (x + 4)\ (x - 4)$, entre outros.

Usei figuras geométricas de retângulos e quadrados na intenção de relacionar o termo “quadrado” que é usado em polinômios do 2º grau, com algo bem conhecido pelos alunos. Não houve a intenção de encaminhar a aula num contexto geométrico, pois não era essa a minha intencionalidade e sim uma abordagem com ênfase num fazer algébrico conforme proposto no meu texto do saber.

Todos os polinômios que foram sugeridos eram fatoráveis. Mas expliquei que havia polinômios não passíveis de fatoração, e que não iríamos trabalhar com eles naquele momento. Para os alunos que apresentaram dificuldades para realizar a fatoração do trinômio por soma e produto, sugeri que fatorassem o termo constante do trinômio, pois esse poderia fornecer o produto dos termos constantes dos binômios resultantes. Por exemplo, dado o trinômio $x^2 - 8x + 12$, fatorar o 12 escrevendo $12 = 2.2.3 = 2.6$ e testar a soma desses fatores, no caso $2 + 6 = 8$. Assim, obtive melhores resultados para os trinômios.

E seguindo essa mesma estratégia para os binômios do tipo $x^2 - 16$ ou $x^2 + 5x$, sugeri o registro do termo nulo. Dessa forma, $x^2 - 16$ poderia ser escrito como $x^2 + 0x - 16$ *e* $x^2 + 5x$, como $x^2 + 5x + 0$. A partir disso, a fatoração se dava pela soma e pelo produto novamente. Assim, todos os alunos que realizaram as fatorações, as fizeram dessa forma. Contudo, ressaltei que essas fatorações poderiam ser feitas de forma direta, sem colocação do termo nulo. Ou seja, $x^2 - 16 = (x + 4).(x - 4)$, no qual expliquei que os termos constantes dos binômios teriam que ser simétricos, pois como o termo de x não aparece, isso indica que a soma desses números é zero e o produto deveria ser igual a -16. Para o caso do polinômio $x^2 + 5x$, apenas escrevi x como um fator comum e fiz sua fatoração direta $x^2 + 5x = x.(x + 5)$.

- ✓ **Terceiro estágio – Equações do 2º grau**

Aproveitando o trabalho desenvolvido pelos alunos com fatoração do trinômio do 2º grau, iniciei o cálculo de raízes de equações do 2º grau. Antes discutimos a respeito do produto de dois fatores ser igual a zero. Ex. Quais as possibilidades de $A \cdot B = 0$, sendo A e B dois números?

Em seguida foi mostrada a equação $x^2 - 5x + 6 = 0$. Fizemos a fatoração do trinômio e obtivemos $(x - 2)(x - 3) = 0$, donde calculamos $x = 2$ ou $x = 3$. Foram calculadas raízes de algumas equações do 2º grau completa ou incompleta, conforme o exemplo 3 abaixo.

Exemplo 3

a) $x^2 - 25 = 0 \Rightarrow x^2 + 0x - 25 = 0 \Rightarrow (x - 5)(x + 5) = 0 \Rightarrow x = 5$ *ou* $x = -5$.

b) $x^2 - 5x = 0 \Rightarrow x^2 - 5x + 0 = 0 \Rightarrow (x - 0)(x - 5) = 0 \Rightarrow x = 0$ *ou* $x = 5$.

Falei para os alunos que resolver uma equação do 2º grau é calcular o valor da variável do polinômio do 2º grau para a qual seu valor numérico é igual a zero. Essa explicação não ficou muito clara para os alunos. Então, fizemos a verificação da igualdade em dois exemplos, calculando o valor numérico do trinômio para as raízes encontradas.

Realizamos cálculos de raízes de algumas equações chamadas de completas (com todos os coeficientes de seus trinômios diferentes de zero), até que questionei sobre o que os resultados encontrados tinham de relação com os trinômios das equações? A aluna Cláudia respondeu que “a soma dos números dava o número do meio e a multiplicação deles dava o último número”. A partir daí indiquei que a soma das raízes numa equação do tipo $x^2 - Sx + P = 0$ seria o número S e o produto das mesmas o número P. Deixei outras equações para eles resolverem em casa.

Durante a resolução das equações propostas na aula anterior usando a técnica da fatoração do polinômio a aluna Marília falou “professor, estou cansada de fazer essa matemática tendo que adivinhar”. Expliquei que era isso mesmo que eu estava tentando levar o aluno a refletir e que a partir deste momento o trabalho seria conduzido no sentido de encontrar um jeito de fazer a resolução das equações sem ter que “adivinhar” os resultados. Essa percepção nos remete à restrição de uma técnica como considera Chevallard (1999, p. 3, tradução nossa, grifos no original).

> Em primeiro lugar, uma técnica ô – uma “maneira de fazer” – não tem êxito mais que sobre apenas uma *parte P(ô)* das tarefas do tipo *T* a

> qual é relativa, parte essa que se denomina *alcance* da técnica: a técnica tende a *fracassar* sobre T \ P(ô) de maneira que se pode dizer que "não se sabe, *em geral*, realizar as tarefas do tipo *T*".

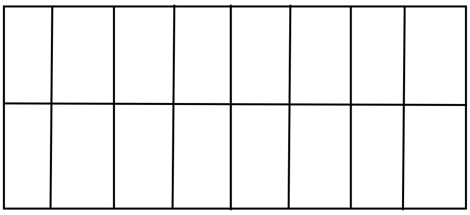
Foi muito importante a fala da aluna, pois pareceu nesse momento que minhas intenções e objetivos estavam sendo realizados. Esta aluna percebeu a dificuldade ou limitação da técnica, o que me proporcionou fazer um discurso sobre o aprimoramento de uma técnica ou utilização de novas maneiras de enfrentar uma tarefa, seja matemática, seja qualquer tarefa do nosso dia-a-dia. Nesse discurso, exibi de maneira clara a intenção de buscar outra forma de calcular as raízes de uma equação do 2º grau e mostrar a importância das generalizações que a álgebra pode proporcionar. A partir daqui as fórmulas e os algoritmos podem ser fundamentados por necessidades sociais e consolidados como facilitadores de atividades com a Matemática.

Esse momento se configurou para mim como o envelhecimento do saber, ou seja, o momento em que ficou claro que deveria agir e provocar a renovação do saber, pois o aluno ao mostrar seu descontentamento com a técnica me leva a refletir sobre as restrições da técnica que foi aplicada. Essa colocação feita pela aluna fez-me pensar que o direcionamento que eu estava dando às aulas encontrava-se realmente com minhas intencionalidades antes planejadas com meu aluno hipotético.

Nessa mesma aula, distribui uma lista de exercícios (Apêndice 2) para que os alunos fizessem fatorações e resolvessem equações fatorando inicialmente o trinômio (2ª questão) ou colocando diretamente os resultados por soma e produto das raízes. O exercício 3 consta de um tipo de tarefa "dados o perímetro e a área de um retângulo, calcular suas dimensões".

Exibi inicialmente a resolução do exercício 3, pois os alunos em princípio não souberam responder como se calcula o perímetro e a área de um retângulo. Durante a resolução recorri à forma da sala de aula para exemplificar o cálculo do perímetro e da área do retângulo. Perguntei aos alunos como um carpinteiro colocaria "molduras" de madeira que estavam nas paredes da sala? Um aluno respondeu que o carpinteiro deveria fazer medidas. Perguntei "medidas de que?" O aluno Abraão gesticulou com o indicador circulando e respondeu que "ele deveria medir todos os lados". Então eu disse que isso forneceria o... O mesmo aluno respondeu "perímetro". Daí, falei para eles que "o perímetro de um retângulo se dá pela soma dos seus lados". Para o cálculo de área desenhei no quadro uma malha retangular (Figura 3) que representava o chão da sala e perguntei para os alunos como um pedreiro faria para calcular a quantidade de lajotas do piso. A grande parte dos alunos contou as quantidades de quadradinhos da fila horizontal e da vertical que estão destacadas na figura e as multiplicaram, dando a resposta. Já o aluno Domingos respondeu que "ele iria medir a largura e o comprimento da sala e multiplicar os dois". Expliquei, então, que "dado um retângulo sua área é o produto das suas dimensões".

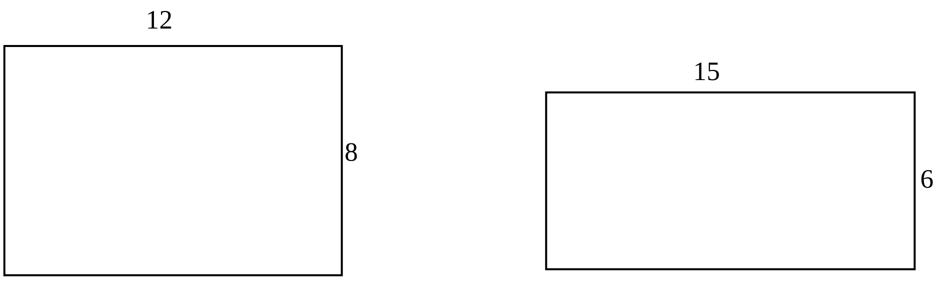
Figura 3 - Malha retangular



Fonte: elaborada pelo autor (2009)

Em seguida, coloquei exemplos de retângulos com dimensões indicadas na Figura 4 e calculamos seus perímetros e suas áreas.

Figura 4 - Retângulos e suas dimensões



Fonte: Elaborada pelo autor (2009)

Voltando à resolução do exercício 3, onde teríamos que calcular as dimensões de um retângulo cujo perímetro é igual a *14* cm e cuja área é igual a *12* cm^2, construímos o sistema abaixo.

$$\begin{cases} 2x + 2y = 14 \\ x \cdot y = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 7 \\ x \cdot y = 12 \end{cases}$$

Perguntei se isso não era algo já conhecido. A aluna Marília respondeu 3 e 4. Exploramos esse problema nas próximas aulas.

Na parte final da aula pedi como uma tarefa de casa para eles fazerem a diferença entre o quadrado da soma e da diferença de dois termos como, por exemplo, $(x + 2)^2 - (x - 2)^2$ e que levassem o resultado na aula seguinte.

Alguns alunos que tentaram resolver a tarefa proposta no final da aula anterior apresentaram erros de regras de sinais. Uma aluna conseguiu chegar ao resultado 8x e pedi para ela expor seus cálculos no quadro.

Em seguida fizemos alguns exercícios análogos a esses, tais como: $(a + b)^2 – (a – b)^2 = 4ab$, $(x_1 + x_2)^2 – (x_1 – x_2)^2 = 4x_1x_2$. Perguntei à turma se eles haviam notado algo nesses resultados. Logo recebi a resposta da aluna Cláudia que “sempre aparecia o 4 na frente das letras”. Retomei a atividade da aula anterior com $(x + 2)^2 – (x – 2)^2 = 4.\ x.\ 2 = 8x$, para que eles percebessem o produto exibindo os termos x e 2 dos binômios e esses multiplicados por 4.

Após isso, reescrevi a igualdade e chegamos à seguinte relação $(x – 2)^2 = (x + 2)^2 – 4.x.2$.

Em seguida pedi para os alunos calcularem y nas igualdades: *a)* $(x – a)^2 = (x + a)^2 – y$, *b)* $(x' – x'')^2 = (x' + x'')^2 – y$, *d)* $(\alpha – \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 – y$. Alguns alunos chegaram ao resultado correto $y = 4ax$ na equação (a). Após a correção de (a) no quadro verde, mais alunos conseguiram fazer a equação (b) ($y = 4x'x''$) e, na equação (c) perguntei se eles poderiam fornecer-me a resposta sem fazer cálculos e eles responderam $y = 4\alpha\beta$; mostrando assim, que tinham observado a regularidade nos resultados. No final pedi para que eles substituíssem y pelo resultado encontrado. Dessa forma, ficou estabelecido para a turma que $(\alpha + \beta)^2 - (\alpha - \beta)^2 = 4\alpha\beta$, ou que $(\alpha – \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 – 4\alpha\beta$. Nenhum aluno questionou a razão de termos realizado esta tarefa.

✓ **Quarto estágio – Sistemas de equações**

Essa aula foi destinada à minha apresentação sobre uma forma de resolver equações do 2º grau sem ter que “adivinhar” suas raízes. Iniciei com o sistema de equações resultante da situação apresentada no exercício 3 que foi trabalhado em aulas anteriores e está indicado abaixo como Sistema S_3.

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ x \cdot y = 12 \end{cases}$$ (Sistema S_3)

Antes de solucionarmos tal sistema, mostrei o sistema do primeiro grau (sistema S_4) abaixo, no qual foram feitas perguntas aos alunos sobre quais seriam os valores de x e y que satisfaziam as duas igualdades. Em pouco tempo houve alunos que deram a resposta correta (*x = 5 e y = 3*).

$$\begin{cases} x + y = 8 \\ x - y = 2 \end{cases}$$ (Sistema S_4)

Falei, porém, aos alunos que isso voltava a ser adivinhação, tal como havia dito à aluna Marília.

Então, indiquei que havia outros métodos para resolver tal sistema. Um desses métodos é o da substituição e foi este utilizado para resolver o sistema S_4 para o qual também usamos o método da adição que é ensinado na 6ª série do ensino fundamental. Em seguida foi usado o método da substituição na resolução do sistema S_3. Assim, surgiu a equação do 2º grau $x^2 - 7x + 12 = 0$ com apenas uma variável e a solução dessa equação eram os valores das variáveis x e y do sistema. Ainda assim, voltamos novamente à adivinhação das raízes da equação e os alunos calcularam mentalmente esses valores (*x = 3 e y = 4*). Dessa forma, discursei sobre uma possível articulação de objetos matemáticos estudados até então com a finalidade de encontrarmos uma técnica de resolução de equações do 2º grau sem ter que “adivinhar” as raízes.

Assim, exibi a igualdade $(p - q)^2 = (p + q)^2 - 4pq$ (igualdade 1) que já havíamos trabalhado em aulas anteriores. Em seguida voltamos à equação $x^2 - 7x + 12 = 0$ e reforçamos que a soma das raízes era igual a 7 (coeficiente do termo de primeiro grau com o sinal trocado) e o produto das raízes era o termo independente de x do trinômio, mantendo seu sinal.

A questão da troca de sinal na soma das raízes e da manutenção do sinal no produto já havia sido trabalhada com a exibição do trinômio na sua forma fatorada. Escrevi que numa equação do 2º grau de raízes p e q, temos que $p + q = S$ e $p.q = P$ e a equação poderia ser escrita na forma $x^2 – Sx + P = 0$. A partir da igualdade 1, reescrevi o sistema S_2 que havia exposto no texto do saber.

$$\begin{cases}(p-q)^2 = S^2 - 4P \\ p+q = S\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}p-q = \sqrt{S^2-4P} \\ p+q = S\end{cases}$$

(Sistema S_2)

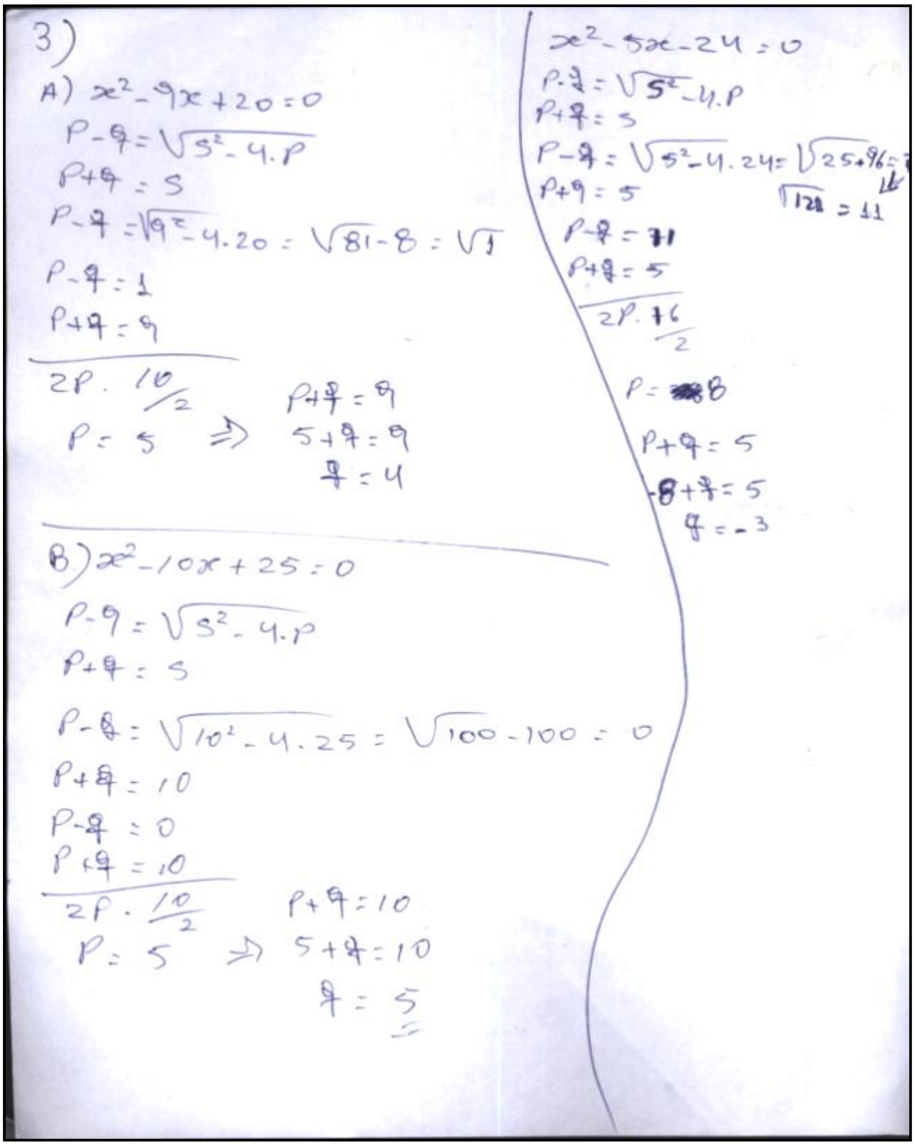
Nota: Ressaltei que se o coeficiente numérico do termo de 2º grau fosse diferente de 1, por exemplo, $2x^2 – 6x + 8 = 0$, então deveríamos dividir todos os temos por esse coeficiente para que a equação ficasse na forma de soma e produto, ou seja, $2x^2/2 – 6x/2 + 8/2 = 0/2 \Rightarrow x^2 – 3x + 4 = 0$. Assim teríamos $S = 3$ e $P = 4$.

A partir disso, as equações do segundo grau foram resolvidas usando-se o sistema S_2. Sugeri o uso de máquina calculadora para agilização dos cálculos. Após a resolução de algumas equações feitas por meio sistema S_2, a aluna Maria Conceição interveio dizendo que não conseguia entender todo aquele cálculo que estava no quadro e que estava com receio de tirar nota baixa na prova. Expliquei para ela que não se tratava simplesmente de entender o que estava naquele momento no quadro, mas sim de todo o processo que foi realizado até chegarmos ao sistema que resolve qualquer equação do 2º grau. Uma vez que foi feito um trabalho abrangendo produto de polinômios (inclusive os produtos notáveis), fatoração, equações do 1º grau entre outros conteúdos. Enquanto isso, outros alunos estavam preocupados em solucionar as equações propostas usando o sistema. O aluno Domingos foi ao quadro e mostrou a resolução de uma equação usando o sistema S_2.

Numa aula posterior foi feita a atividade (Apêndice 3) que serviu para a avaliação, pois a escola se encontrava no período da 3ª avaliação. Foi um momento de observar o fazer individual e em equipe, uma vez que eles se reuniram em quatro equipes. Alguns alunos conseguiram desenvolver os cálculos por meio de debates entre si, como o caso de Artur, Jorge e Pedro. A aluna Cláudia resolveu as questões e tentou explicá-las às suas colegas de equipe. Os alunos Domingos e Marília debateram sobre as questões, contudo no momento de resolver equações, o Domingos optou por usar o sistema S_3 e a Marília, por meio da soma e produto (fatoração). A Maria da Conceição ficou apenas observando o debate da Marília com o Domingos. Dois grupos não conseguiam fazer o registro do que estavam debatendo, então os ajudei a fazê-los.

A resolução do Domingos (Figura 5) mostra que este aluno optou por usar o sistema S_3 (usar uma fórmula) para resolver as equações afirmando que “preferia usar esta forma por ter certeza que chegaria ao resultado correto”. A aluna Marília afirmou que “achava mais fácil” a resolução por fatoração, contudo não conseguiu a resolução de todas as equações por essa técnica.

Figura 5 - Resolução do Domingos



3)

A) $x^2 - 9x + 20 = 0$

$P - q = \sqrt{S^2 - 4.P}$

$P + q = S$

$P - q = \sqrt{9^2 - 4.20} = \sqrt{81 - 8} = \sqrt{1}$

$P - q = 1$

$P + q = 9$

$2P = 10/2$

$P = 5 \Rightarrow P + q = 9$

$5 + q = 9$

$q = 4$

B) $x^2 - 10x + 25 = 0$

$P - q = \sqrt{S^2 - 4.P}$

$P + q = S$

$P - q = \sqrt{10^2 - 4.25} = \sqrt{100 - 100} = 0$

$P + q = 10$

$P - q = 0$

$P + q = 10$

$2P = 10/2$

$P = 5 \Rightarrow P + q = 10$

$5 + q = 10$

$q = 5$

$x^2 - 5x - 24 = 0$

$P - q = \sqrt{5^2 - 4.P}$

$P + q = 5$

$P - q = \sqrt{5^2 - 4.24} = \sqrt{25 + 96} = \sqrt{121} = 11$

$P - q = 11$

$P + q = 5$

$2P = 16/2$

$P = 8$

$P + q = 5$

$8 + q = 5$

$q = -3$

Fonte: Caderno de anotações do aluno (2009)

Em aula posterior foram feitas as resoluções de algumas questões da atividade anterior com o intuito de justificar o uso do sistema de equações. Os alunos participaram respondendo as questões oralmente e eu fiz o registro dessas respostas no quadro. Resolvemos as equações aproveitando as fatorações das questões anteriores.

A aluna Marília disse que quando eu fazia a pergunta com as questões no quadro ela conseguia entender melhor e dava as respostas corretas, contudo, se fosse colocar o registro em seu caderno, não conseguia desenvolver com a mesma segurança. Ressaltei a importância do registro no caderno e nas provas por se tratar de algo com validação institucional.

Continuei discursando sobre as técnicas para resolver equações do 2º grau e voltei novamente ao sistema S_1. Resolvemos a equação $x^2 - 3x + 2 = 0$ usando soma e produto. Todos disseram ter sido “fácil” a questão. Expus no quadro as equações $x^2 - 7x + 5 = 0$ e $2x^2 - 5x + 3 = 0$ e pedi para os alunos resolverem por fatoração. Ninguém conseguiu resolvê-las de forma rápida e direta como as equações anteriores. Assim, recorri ao sistema S_2 e a resolução foi realizada com o auxílio da calculadora. A partir disso, falei a respeito de uma fórmula que poderíamos encontrar a partir do sistema S_2. Aproveitando a equação $2x^2 - 6x + 8 = 0$, desenvolvi a fórmula usual de resolução da equação do 2º grau

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Meu procedimento foi o seguinte:

- Escrevi a equação do 2º grau sob a forma $ax^2 + bx + c = 0$, onde a, b e c são números reais, com $a \neq 0$;
- Por comparação escrevi junto com os alunos $a = 2$, $b = -6$ e $c = 8$;
- Coloquei o sistema S_2 no quadro

$$\begin{cases} p - q = \sqrt{S^2 - 4P} \\ p + q = S \end{cases}$$

- Expliquei aos alunos que resolver a equação seria calcular as raízes p e q;
- Perguntei aos alunos quais os valores de S e P. Após consultarem os seus cadernos, alguns alunos responderam 3 e 4. Então substitui estes valores no sistema, contudo escrevendo $S = 6/2$ e $P = 8/2$

$$\begin{cases} p - q = \sqrt{\left(\frac{6}{2}\right)^2 - 4.\frac{8}{2}} \\ p + q = \frac{6}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p - q = \sqrt{\frac{6^2}{2^2} - 4 \cdot \frac{8}{2}} \\ p + q = \frac{6}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p - q = \sqrt{\frac{6^2 - 4.2.8}{2^2}} \\ p + q = \frac{6}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} p-q=\dfrac{\sqrt{6^2-4.2.8}}{2} \\ p+q=\dfrac{6}{2} \end{cases}$$

Substituindo *6* por – *b*, *2* por *a* e *8* por *c*, obtive

$$\begin{cases} p-q=\dfrac{\sqrt{(-b)^2-4.a.c}}{a} \\ p+q=\dfrac{-b}{a} \end{cases}$$

, donde veio que

$p=\dfrac{-b+\sqrt{(-b)^2-4.a.c}}{2.a}$ e $q=\dfrac{-b-\sqrt{(-b)^2-4.a.c}}{2.a}$. Como *x* é a variável da equação, então escrevi de forma simplificada

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{(-b)^2-4.a.c}}{2.a}$$

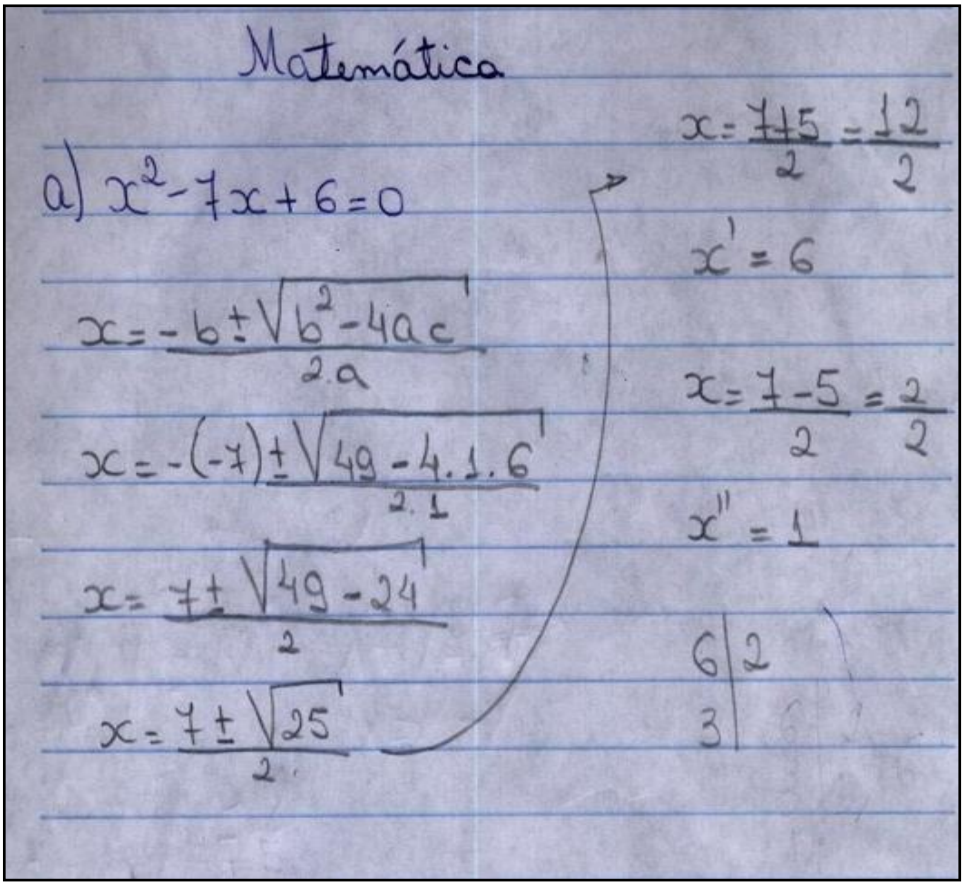
Após expor a fórmula para os alunos, resolvemos a equação $x^2 - 5x + 6 = 0$ e deixamos para resolver outras na aula seguinte. Ressaltei para eles que a fórmula resolve qualquer equação do 2º grau.

Solucionamos algumas equações do 2º grau usando a fórmula. Inicialmente, mostrei alguns exemplos, e em seguida eles se reuniram em grupos para solucionar algumas equações. O maior erro encontrado foi ainda com relação à regra de sinais. No entanto, falei para aqueles que estavam com essas dificuldades e que no uso repetitivo da fórmula poderíamos sempre estar reafirmando a regra de sinais.

- ✓ **Quinto estágio- A importância da fórmula para resolução de equações do 2º grau e para fatorar polinômios**

Após a apresentação que fiz da fórmula de resolução da equação do 2º grau em sua forma usual, escrevi algumas equações no quadro e pedi para que os alunos as solucionassem em grupo, utilizando qualquer método. Durante a resolução das equações eu estava apenas observando a resolução de alguns alunos. Observei a aluna Cláudia e percebi que ela tentava resolver a equação $x^2 – 7x + 6 = 0$ por meio de fatoração do trinômio, fatorando primeiro o termo independente 6 para encontrar os possíveis resultados para a soma e o produto. Contudo, esta aluna decidiu colocar a fórmula para resolver a equação, conforme a Figura 6.

Figura 6 - Resoluções da Cláudia (1)



Fonte: Caderno de anotações da aluna (2009)

Nesse momento, comecei a questionar com a aluna sobre os motivos pelos quais ela optou pelo uso da fórmula e deu-se o seguinte diálogo.

Flávio: Cláudia, por que você optou por usar a fórmula? Você começou fatorando o *6* e decidiu usar a fórmula?

Cláudia: Os números que eu achei não deram certos (no caso *2* e *3*). Os valores que eu achei não me contentaram. Aí eu fui por um lado mais difícil.

Flávio: Tu achas que pela fórmula é mais difícil?

Cláudia: Não. Pela fórmula eu achei mais fácil. Como os valores que eu achei não me contentaram, então eu fui pela fórmula. Eu sei que pela fórmula vai dar certo.

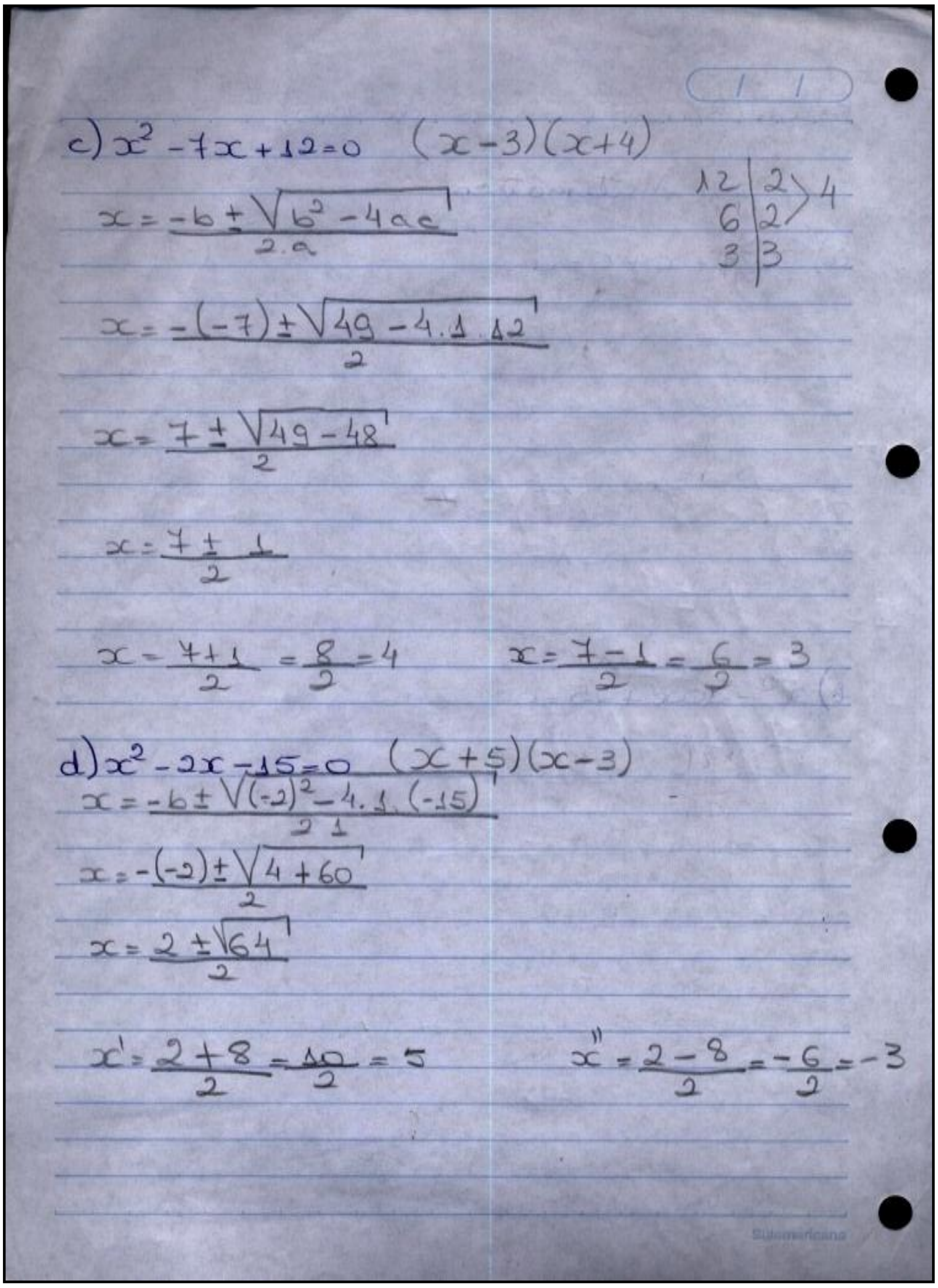
Flávio: Que valores não te contentaram?

Cláudia: Os valores que achei foram *2* e *3* (fig. 7), mas $2 + 3 = 5$ e não *7*. Eu sabia que a fórmula ia me dar a resposta exata. Eu tentei fazer pelo outro método e não deu certo.

A aluna se refere a outro método em relação à técnica da soma e produto para calcular as raízes da equação. Contudo, mostrei a esta aluna que não seria difícil encontrar as raízes por soma e produto, pois bastava continuar a fatoração do termo *6* da equação, ou seja, olhar para os divisores próprios de *6*, no caso, *1* e *6*.

A Figura 7 mostra as resoluções da Cláudia de outras equações usando a técnica da soma e do produto e também da fórmula e a tentativa da aluna em realizar a fatoração dos trinômios, mesmo não sendo esse o propósito da questão. Isso mostra que a fórmula tem sua utilidade não somente para calcular as raízes da equação, mas para transformar o trinômio do 2º grau num produto de dois binômios do 1º grau, tarefa intencional de engendrar a idéia de que fatorar é resolver equação polinomial.

Figura 7 - Resoluções da Cláudia (2)



c) $x^2 - 7x + 12 = 0 \quad (x-3)(x+4)$

$$\begin{array}{r|l} 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \end{array} \; 4$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2.a}$$

$$x = \frac{-(-7) \pm \sqrt{49 - 4.1.12}}{2}$$

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 48}}{2}$$

$$x = \frac{7 \pm 1}{2}$$

$$x = \frac{7+1}{2} = \frac{8}{2} = 4 \qquad x = \frac{7-1}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

d) $x^2 - 2x - 15 = 0 \quad (x+5)(x-3)$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{(-2)^2 - 4.1.(-15)}}{2.1}$$

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{4 + 60}}{2}$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{64}}{2}$$

$$x' = \frac{2+8}{2} = \frac{10}{2} = 5 \qquad x'' = \frac{2-8}{2} = \frac{-6}{2} = -3$$

Fonte: Caderno de anotações do aluno (2009)

Isso revela que a aluna percebeu que há mais de uma forma de resolver a equação e, mesmo tendo certeza do resultado apenas fatorando, ela confirmou sua resposta usando a fórmula. Tomei essas resoluções como exemplo para destacar a importância de fórmulas em Matemática como sintetizadoras de um fazer mais simples e seguro, um aperfeiçoamento da técnica. Ressaltei que não podemos abrir mão de técnicas de que dêem uma solução rápida, simples e segura às equações.

4.2 REFLEXÕES SOBRE A AÇÃO EM SALA DE AULA

A relação entre tarefa, técnica e tecnologia ficou evidenciada para mim desde o planejamento do meu texto de saber, mas as aulas me encaminharam a refletir sobre as tarefas e perceber um aspecto sobre a razão de ser delas no currículo. Uma nova praxeologia construída por articulações e integrações praxeológicas só é realmente exequível e aceita, se todas as praxeologias articuladas e integradas forem do domínio do sujeito, inclusive do professor. No caso deste, se uma das praxeologias articuladas não se faz presente em seu equipamento praxeológico, este poderá abreviar essa praxeologia por mecanização ou algoritmização e correlativamente não mudará sua relação com o objeto em uma nova praxeologia. De outro modo, o não domínio de todas as praxeologias articuladas e integradas interfere na mudança do equipamento praxeológico e correlativamente do seu universo cognitivo de relações com o objeto da nova praxeologia.

Quando tomei a organização matemática posta por Silva e Guerra (2009) para referência do meu texto de saber, considerei principalmente a concepção teórica da transposição didática interna como o momento do professor de fazer valer a transacionalidade do objeto de ensino por meio de articulações e integrações praxeológicas e isso parecia ali ser contemplado.

Assim, busquei ir mais longe me pondo de modo a seguir uma intencionalidade que iria catalisar as articulações, a tecnologia. Claro que tais articulações estão sujeitas às restrições, em nosso caso, de ordem curricular. Só poderia articular praxeologias constantes do currículo e isso parecia ser contemplado na organização de referência, já que a princípio reconheci as praxeologias ali postas, ou seja, faziam parte de meu equipamento praxeológico, mas uma se mostrou não muito conforme com o que seria desejado.

Havia uma praxeologia que envolvia a relação entre quadrado da soma e quadrado da diferença que se mostrou na praxeologia didática como uma dificuldade. Essa praxeologia não fazia parte de meu equipamento praxeológico como professor do ensino fundamental e isso me levou a tratá-la em sala de aula - embora fosse um passo estratégico que resolve o problema - como algo mecânico que em um momento lançaria mão e depois esqueceria. O trabalho com a diferença entre quadrado da soma e da diferença de dois termos, $(\alpha + \beta)^2 - (\alpha - \beta)^2 = 4\alpha\beta \Rightarrow (\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta$, foi evocado por mim apenas quando estávamos trabalhando com as equações do 2º grau, de tal forma que pareceu uma tarefa isolada e não interligada aos objetos produtos notáveis e fórmula de resolução da equação do segundo grau. Ou seja, isso não fazia parte do meu universo cognitivo, nem das praxeologias que dispunha para o ensino fundamental, de tal forma que, mesmo sendo direcionado pelo texto do saber anterior à sala de aula, minha ação em sala foi redirecionada, de modo a recorrer a antigas práticas docentes como a mecanização.

Assim, como pode ser notado em meu relato, no processo de resolução da equação do segundo grau, após mecanizar a praxeologia em questão, eu a abandono e assumo a resolução da equação do segundo grau como a resolução do sistema de equações do primeiro grau que passa a ser obtido diretamente por uma fórmula, processo esse que embaça realmente o pensar sobre o objeto equação do segundo grau como o objeto sistema de duas equações lineares de duas variáveis, pois o que permite pensar um como outro é a praxeologia não dominada por mim para esse nível de ensino.

Tudo se passa como o sujeito que estuda a demonstração de um teorema e seguindo as articulações de proposições válidas tem a sensação que essas surgem como passos de mágicas ou adivinhações convenientes. Embora se perceba as articulações, nada fica *a posteriori*. Não houve uma nova relação para mim enquanto professor de ensino fundamental com o objeto de conexão entre o quadrado da soma e o quadrado da diferença e o produto de dois números. Segundo Chevallard (2009, p. 7, tradução nossa):

> A formação de uma pessoa como sujeito de uma instituição, por exemplo a formação *profissional* de uma pessoa, exige uma dinâmica cognitiva e praxeológica resultantes da exploração adequada dos novos assujeitamentos impressos especificamente para a pessoa, que implica em um trabalho de identificação e resolução de conflitos relacionados com o choque desses assujeitamentos novos com assujeitamentos antigos, quando experimentados pela primeira vez pelo indivíduo são incompatíveis com a sua identidade.

Em meu caso, poderia dizer que o meu texto de saber foi construído movimentando praxeologias dominadas por mim enquanto professor de diferentes níveis de ensino. E isso não me despertou a possibilidade de uma dada praxeologia envolvida não ser por mim dominada para o nível de ensino fundamental. Isso me levou a abreviá-la quando em sala de aula. Naquele momento não tive a consciência disso e quanto isso estava prejudicando o desenvolvimento por mim desejado da nova praxeologia. Não surge para mim uma nova relação de conexão objetiva entre as equações do segundo grau e a resolução de sistemas de equações lineares.

No entanto, minha ação em sala de aula fez revelar com força uma nova relação com a fórmula da equação do segundo grau para o ensino fundamental, não como um novo processo de articulações de praxeologias geradas à luz de uma tecnologia que poderia otimizar o tempo didático e fazer acontecer as transacionalidades, como pensei inicialmente, mas como uma síntese de um processo complexo e árduo e que por isso teria que ser valorizada. Isso é enfático em meus relatos. Deixo claro explicitamente em meus relatos essa intencionalidade subjacente, desde a elaboração do texto do saber até a culminância em sala de aula como revela o trecho de meu relato *Tomei essas resoluções como exemplo para destacar a importância de fórmulas em Matemática como síntese de um fazer mais simples e seguro, um aperfeiçoamento da técnica. Ressaltei que não podemos abrir mão de técnicas que dêem uma solução rápida e segura às equações*, além de, *Nesse discurso, exibi de maneira clara minha intenção de buscar outra forma de calcular as raízes de uma equação do segundo grau e mostrar a importância das generalizações que a álgebra pode proporcionar*. *A partir daqui as fórmulas e algoritmos podem ser fundamentados por necessidades sociais e consolidados como facilitadores de atividades com a matemática*. Esse pensar não é de quem deseja as transacionalidades que podem levar a fórmula como consequência, mas de quem deseja revelar a funcionalidade, ou aplicações, da fórmula.

Outra nova relação estabelecida é a relação entre fatoração de polinômios do segundo grau e a resolução da equação do segundo grau. Não havia uma praxeologia objetivamente falando em meu equipamento praxeológico para qualquer nível de ensino sobre esse fazer para todos os tipos de equações do segundo grau, incompletas e completas. Os livros textos não tornam visíveis as tecnologias e tratam os tipos de equações de forma isoladas (completas e incompletas). O pensar de uma tecnologia que dê conta de todos os casos, a leitura conveniente do teorema fundamental da álgebra, foi estratégico e me fez olhar as equações, inclusive sua fórmula, de modo único. Isso pode ser notado em meu relato quando escrevo *"Isso mostra que a fórmula tem sua utilidade não somente para calcular as raízes da equação*, *mas para transformar o trinômio do 2º grau num produto de dois binômios do 1º grau*, *tarefa intencional de engendrar a idéia de que fatorar é resolver equação polinomial"*.

Enriqueceu meu equipamento praxeológico e correlativamente meu universo cognitivo, pois questões até então tratadas de modo não muito claro, ou errôneo, nos manuais escolares, foram para mim esclarecidas. Para exemplificar, o livro de Guelli (2005-b) trata a equação incompleta $x^2 - p = 0$ como técnica/tecnologia para resolução das equações completas, e para isso precisa mostrar a sua resolução. Isso é feito alegando explicitamente e de modo meramente algorítmico que a raiz quadrada de um número positivo assume dois valores, um positivo e outro negativo o que segundo ele justifica escrever $x= \pm\sqrt{p}$, quando a justificativa correta é que $x^2 - p = 0 \Rightarrow (x - \sqrt{p})(x +\sqrt{p})=0$ que leva justificar que as raízes são simétricas.

Assim uma nova relação com as equações do segundo grau de fato foi estabelecida e com forte nível de co-determinação didática, como busquei revelar acima. Para isso, a praxeologia sobre cálculos de raízes de polinôminos, por mim estudada no curso superior fundamentada na aplicação do teorema fundamental da álgebra, quando estudada como saber indiscutível, ou intuitivamente verificável, pôde se tornar uma praxeologia pontual para o ensino fundamental com desdobramento surpreendente para o desenvolvimento da nova praxeologia didática em questão.

Claro que a nova praxeologia didática de todo não foi prejudicada, pois articula várias praxeologias do ensino fundamental presentes em meu equipamento praxeológico que sem dúvida contribuíram para um fazer de articulação, mesmo mecânico como por vezes pareceu em meus relatos, e a consequente mudança do meu universo cognitivo como revelado anteriormente.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao narrar a minha história de formação escolar e acadêmica até me tornar professor de Matemática, seguida das formações continuadas que fiz na área de educação matemática, busquei lembrar as praxeologias sobre a fórmula de resolução de equações do 2º grau que usava e as mudanças, ou não, que ocorreram ao longo de minha formação docente até os momentos de realização deste trabalho, em que me deparo com um novo despertar com relação às equações por meio da praxeologia matemática proposta por Silva e Guerra (2009). A partir desse momento experiencio uma nova praxeologia didática em duas fases da transposição didática interna, a primeira fase quando coloquei praxeologia matemática no desfiladeiro do meu discurso (CHEVALLARD, 2005), e a segunda fase do efetivo saber ensinado em sala de aula, com o propósito de encontrar o que nas praxeologias que dispunha, o meu equipamento praxeológico até então, pode ter favorecido, interferido ou mesmo ter ficado neutro às mudanças.

Para tanto, o presente trabalho foi estruturado de acordo com a formação de meu equipamento praxeológico e o universo cognitivo em busca de construir uma possível resposta a minha questão de pesquisa, a saber:

a) A experiência enquanto aluno do ensino básico e superior no curso de Engenharia, e professor de aulas particulares.

A minha relativa intimidade com o saber matemático quando comparada com a de outros alunos da escola básica me conduziu para o caminho do fazer docente e formatou de certo modo minhas concepções de como ensinar Matemática. Embora o saber matemático esteja presente, a minha relação com o saber ainda era frágil e distante do fazer matemático dos professores licenciados em Matemática que em tese teriam melhor domínio dos objetos matemáticos da escola. Nessa fase, dispunha de uma praxeologia da escola sobre as equações do segundo grau estudada enquanto aluno do ensino básico que norteou minhas ações desde a primeira vez em sala de aula como professor e foi se reafirmando ao longo tempo em meu convívio em outras instituições. As praxeologias matemáticas e didáticas não estavam em discussão, ou eram indiscutíveis.

b) O papel dos livros didáticos.

A experiência que trouxe enquanto aluno das instituições de ensino básico e superior e as experiências obtidas nas aulas particulares me deram a noção dos conteúdos programáticos das turmas em que iniciei minha prática em sala de aula, mas a praxeologia didática era fundamentada na praxeologia do livro didático que formatou e conduziu minha ação docente, pois em sala de aula seguia o roteiro tal e qual o do livro didático.

As praxeologias matemáticas e didáticas, e em particular a das equações do segundo grau, foram progressivamente internalizadas e se tornaram rotineira de modo que os objetos matemáticos eram indiscutíveis em minhas preocupações enquanto professor. Essas se restringiam a questões de como fazer os alunos estudarem mais, ou melhor, como motivá-los a estudarem.

c) A formação inicial no curso de licenciatura em Matemática.

A conclusão do curso de licenciatura não favoreceu mudanças significativas em minha prática docente, mais precisamente sobre a praxeologia didática que dispunha sobre a resolução das equações do 2º grau. Embora essa formação tenha sua importância por oferecer um repertório mais amplo sobre os saberes matemáticos e, em particular, sobre o jeito de fazer e pensar o conhecimento matemático, inclusive sobre os objetos de ensino como a equação do segundo grau, mas em fazeres da matemática superior, não contribuiu para mudanças e, em última análise, foi indiferente à praxeologia que dispunha, pois não houve durante o curso nenhum tratamento dos objetos de ensino básico como tal, que permaneceram indiscutíveis.

d) A formação continuada para uma mudança ou aprimoramento da prática.

A busca que fiz por formação continuada se deu no sentido de encontrar sugestões metodológicas, principalmente como abordar certos conteúdos matemáticos de modo a desenvolver, aumentar o meu equipamento praxeológico.

No entanto, no curso de especialização em Educação Matemática, não encontrei “fórmulas” prontas e acabadas para a construção de praxeologias. Por outro lado, encontrei fundamentações teóricas que fortaleceram e renovaram a minha forma de agir e pensar em sala de aula. As (re)construções que fiz sobre as praxeologias levaram-me a considerar aspectos independentes dos conteúdos matemáticos, tais como o cotidiano, o social, o cultural. Em particular, ao ensinar a resolução de equações do segundo grau, meu equipamento praxeológico e universo cognitivo a respeito desse objeto matemático ainda era tal que não favorecia mudanças sobre a praxeologia que dispunha.

A continuação da formação em nível de mestrado e os estudos da didática da matemática revelaram-me a importância de minha relação pessoal com o saber na minha prática docente. Pude pensar minha ação docente inicial com relação pessoal com o saber que mobilizava objetos matemáticos, rígidos, isolados, prontos e acabados em si, como a fórmula de resolução de equações do segundo grau.

Nos estudos da transposição didática interna, quando contextualizados por meio de uma praxeologia sobre equações do segundo grau, proposta por Silva e Guerra (2009), em que a coloco em meu discurso na construção do meu texto de saber, fez-me dar conta que as praxeologias em torno de objetos matemáticos podem ser distintas em instituições distintas em um mesmo nível de ensino. Assim, pude vislumbrar o objeto de ensino no sentido defendido por Chevallard (2005), da transacionalidade, em meio de articulações e integrações de outros objetos matemáticos transacionais em um projeto de ensino, aqui entendido como o texto do saber.

Ao preparar o texto do saber a partir da organização matemática de Silva e Guerra (2009) sobre a fórmula de resolução das equações do 2º grau, não encontrei naquele momento dificuldades, pois reconheci neste imediatamente praxeologias matemáticas pontuais como as dos produtos notáveis, resolução de sistemas de duas equações lineares e duas incógnitas, fatorações de polinômios. É importante destacar as mobilizações entre elas, as quais atendiam a intenção de encontrar a fórmula por meio de um fazer conduzido por uma tecnologia que reclamava ser justificada por uma teoria. Mostrava-se inteligível e, sobretudo, (re)significava as praxeologias matemáticas pontuais em uma praxeologia matemática local. Sob esse entendimento posso dizer que as praxeologias matemáticas de meu equipamento praxeológico contribuíram fortemente para construção de uma nova praxeologia e correlativamente para modificar minha relação com a fórmula de equação do segundo grau.

Embora motivado pela gestão do ensino que poderia otimizar o tempo didático para o estudo dos objetos matemáticos demandados na 4ª etapa da EJA, nas ações em sala de aula houve momentos em que rompi com as articulações entre as praxeologias pontuais como havia planejado, ora por ainda manter as relações com os objetos do modo posto em praxeologias pontuais, ora por descobrir que a praxeologia que detinha sobre um objeto não era adequada para a posição ocupada na instituição ensino da EJA.

Assim, me parece claro que embora tenha havido uma nova relação com o objeto, a fórmula da equação do segundo grau, materializada em uma praxeologia matemática não se converteu plenamente em uma nova praxeologia didática.

Há que se repensar a praxeologia matemática de modo a tornar mais exequível a praxeologia didática para a EJA, mas isso inclui repensar a atividade matemática que ora parece ter criado dificuldades, senão obstáculos, na construção da praxeologia didática. Parece que na vontade de tornar mais rápida e simples essa atividade, fui conduzido a isolar os objetos em praxeologias pontuais e isso acaba por impedir, como gostaria, um fazer de articulações que se justificam à medida em que se busca converter o problema em outros de praxeologia mais simples, por exemplo.

Assim, a dinâmica praxeológica não é simples. Exige muito mais que um conjunto de praxeologias matemáticas e didáticas conhecidas, bem como uma compreensão do jeito de fazer e pensar as praxeologias didáticas e matemáticas desse conjunto que permita construções inéditas de praxelogias, pelo menos para a pessoa, por meio das praxeologias já dominadas por ela. Tal ineditismo sem dúvida pode revelar novas relações com os objetos e a correspondente mudança do universo cognitivo da pessoa.

As praxeologias matemáticas que dispunha, muito contribuíram para a compreensão da organização matemática de referência que usei para construir a praxeologia matemática a ser objeto de estudo. Mas, o jeito pontual de pensar e fazer em sala de aula determinou as minhas ações docentes, como uma cultura de fazer docente que não permite um olhar de ligações construídas para atender uma intencionalidade sobre o objeto de estudo. Há que se romper com esse fazer cultural do fazer pontual que se permita renovar o equipamento praxeológico didático.

A revolução que tomou conta do meu pensar sobre minhas praxeologias docentes não implicou que uma praxeologia venha sobrepor outra, mas que a prática docente, como equipamento praxeológico, vai sendo singularizada pela dinâmica praxelológica que vai caracterizando o seu constante aperfeiçoamento. Tal aperfeiçoamento não ocorre de forma repentina e por isso a história do docente pode revelar a importância do papel das praxeologias matemáticas e didáticas em meio à formação continuada para o desencadeamento de reflexões críticas sobre a própria prática e o conseqüente aperfeiçoamento profissional docente.

REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, S. *Fundamentos da Didática da Matemática*. Curitiba: UFPR, 2007.

ANDRADE, Roberto Carlos Dantas. *Geometria analítica plana*: praxeologias matemáticas no ensino médio. 2007. 121 f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemáticas) - Núcleo Pedagógico de Apoio ao Desenvolvimento Científico, Universidade Federal do Pará, Belém, 2007.

ANDRINI, A. *Praticando Matemática*: 7ª série. São Paulo: Editora do Brasil, 1989(a).

______. *Praticando Matemática*: 8ª série. São Paulo: Editora do Brasil, 1989(b).

BARALDI, I. M. *Matemática na escola*: que ciência é esta? Bauru: EDUSC, 1999.

BOSCH, M., CHEVALLARD, Y. La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. *Recherches en didactique des mathématiques*, v. 19, n. 1, p. 77-124, 1999

BOSCH, M., GARCIA, F. J., GASCÓN, J., HIGUERAS, L. R. La modelización matemática y El problema de La articulación de La matemática escolar: una propuesta desde La teoría antropológica de lo didáctico. *Educación Matemática*, Santilana, Distrito Federal, México, v. 18, n. 2, p. 37-74, ago. 2006

BOSCH, M.; GASCÓN, J. *Las prácticas docentes del profesor de matemáticas.* Versión provisional. Presentación parcial en el marco de las Xl École d´Été de Didactique dês Mathematiques, 2001.

CHAGAS, Elza M. P. de F. "O que está sendo ensinado em nossas escolas é, de fato, matemática?" In: *Revista Iberoamericana de Educación*, vol. 36, nº 3, 2005.

CHARLOT, Bernard. *Da relação com o saber*: elementos para uma teoria. Tradução de Bruno Magne. Porto Alegre: Artes Médicas, 2000.

CHEVALLARD, Y. El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, v. 19, n. 2, p. 221-266, 1999.

______. *La Transposición Didáctica:* del saber sabio al saber enseñado. 3. ed. 2. reimp. Buenos Aires: Aique Grupo Editor, 2005.

______. *La TAD face au professeur de mathématiques.* Communication au Séminaire DiDiST de Toulouse le 29 avril 2009.

CHEVALLARD, Y.; BOSCH, M.; GASCÓN, J. *Estudar Matemática*: o elo perdido entre o ensino e a aprendizagem. Porto Alegre: Artmed Editora, 2001.

CUNHA, M. I. Conta-me agora! As narrativas como alternativas pedagógicas na pesquisa e no ensino. *Revista de Faculdade de Educação*, São Paulo, v. 33, n. 1-2, 1997.

FONSECA, M. C. F. R. O simbolismo na Matemática. *Bolema*, São Paulo, v. 5, n. 6, p. 7-19. 1990.

GARCÍA, F. J.; GASCÓN, J.; HIGUERAS, L. R.; BOSCH, M., Mathematical modelling as a tool for the connection of school mathematics. *ZDM,* v. 38, p. 226-246, 2006

GASCÓN, J. Incidencia del modelo epistemológico de las matemáticas sobre las prácticas docentes. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, México, v. 4, n. 2, p. 129,159, 2001

GONÇALVES, T. O. *A constituição do formador de professores de Matemática:* a prática formadora. Belém: Cejup, 2006.

GONÇALVES, T. O.; MENDES, M. J. F. Reflexões sobre a formação do professor de Matemática. In: ______. *Formação e inovação curricular no ensino de Ciências e Matemáticas:* pesquisando idéias, saberes e processos. Belém: Cejup, 2007. (Coleção Pesquisa em Educação em ciências e Matemáticas)

GUELLI, O. *Matemática*: uma aventura do pensamento/8ª série. 2. ed. São Paulo: Ática, 2005(a).

______. *Matemática*: uma aventura do pensamento/7ª série. 2. ed. São Paulo: Ática, 2005(b).

GUERRA, R. B.; SILVA, F. H. S. Fórmulas e algoritmos e o ensino de matemática**.** In: REUNIÃO DE DIDÁTICA DA MATEMÁTICA DO CONE SUL*, 7*. São Paulo, 2006.

______. Reflexões sobre modelagem matemática crítica e o fazer matemático escolar. *Perspectiva da Educação Matemática*, Campo Grande, v*.* 2, n. 3, p. 95-119, jan/jun 2009.

LEITE, M. S. *Contribuições de Basil Bernstein e Yves Chevallard para a discussão do conhecimento escolar*. Rio de Janeiro: PUC, Departamento de Educação, 2004.

LIMA, E.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C. *A Matemática do ensino médio*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1998. (Coleção do Professor de Matemática, v.3)

LINS, M., LIMA, A. P. B, MENEZES, M. B.. A emergência de fenômenos didáticos em sala de aula: a negociação de uma sequência didática em álgebra inicial. In: LIMA, A. P. B et al. *Pesquisas em fenômenos didáticos*: alguns cenários. Recife: UFRPE, 2010.

MEDEIROS, J. C. F. Por uma Educação Matemática como intersubjetividade. In: BICUDO, M. A. V. *Educação Matemática*. São Paulo: Editora Moraes, 1999.

MESQUITA, F. N. A; LUCENA, I. C. R., Refletindo a própria prática: abordagem etnomatemática na sala de aula. In: SIMPÓSIO INTERNACIONAL DE PESQUISAS EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA – SIPEMAT, **Anais...** Recife, 2008.

MIGUEL, A.; MENDES, I. A.Mobilizing in mathematics teacher education: memories,social practices, and discursive games. **ZDM Mathematics Education**,v.42,381-392, april 2010.

PAIS, L. C. *Ensinar e aprender Matemática*. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

______. Transposição didática. *Educação matemática*: uma (nova) introdução. 3. ed. 2008. p. 11-46.

PAIXÃO, Cristhian Corrêa da. *Narrativa autobiográfica de formação*: processos de vir a ser professor de Ciências. 2008. 112 f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemáticas) - Núcleo de Pesquisa e Desenvolvimento da Educação Matemática e Científica, Universidade Federal do Pará, Belém, 2008.

QUEYSANNE, M.; DELACHET, A. *A álgebra moderna*. Tradução de Gita K. Ghinzberg. São Paulo: Difusão Européia do Livro, 1964. (Coleção Saber Atual)

RAVEL, Laetitia. *Des programmes a la classe*: etude de la transposition didactique interne:Exemple de l’arithmétique en Terminale S spécialité mathématique. Thèse préparée au sein de l’équipe de Didactique des Mathématiques (DDM), Laboratoire Leibniz-IMAG. 2003.

SHULMAN, L. S. Those who understand: knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, v. 15, n. 2, p. 4-14, 1986.

SILVA, C. X. *Supletivo*: Matemática. São Paulo: Ática, 1997.

SILVA, F. H. S.; GUERRA, R. B. Contextualização do ensino da matemática. In: SILVA, F. H. S. *Formação de professores*: mitos do processo. Belém: UFPA, 2009.

SILVA JUNIOR, C. G.; REGNIER, J. C. *Critérios de adoção e utilização do livro didático de Matemática no ensino fundamental do Nordeste brasileiro*. 2007. Disponível em: <http://www.asi4.uji.es/actas/p2a5.pdf>. Acesso em: 12 abr. 2009.

SKOVSMOSE, O. *Educação crítica*: incerteza, matemática. São Paulo: Cortez, 2007.

______. Matemática crítica. *Revista Presença Pedagógica*, n. 83, v. 14, set./out. 2008. Disponível em: www.presencapedagogica.com.br/capa6/ artigos/83.pdf. Acesso em: 08 jul. 2009.

VIVIANO, Antônio. La relación del profesor de matemáticas al saber matemático: el caso de la ecuaciòn cuadrática.In: *International conference on the anthropological theory of the didactic*, 3. Sant Hilari Sacalm, Catalunya, Spain, p. 487-501, 2010

APÊNDICES

APÊNDICE 1 – LISTA DE EXERCÍCIOS 1

LISTA DE EXERCÍCIOS 1

1 – Efetue as operações

a) 4x . (2x + 3) b) 3x . (x – 1) c) x (x + 5) d) x (2x + 3)

e) x (ax + b) f) 2a (a – b) g) ay (a – y) h) $ax^2(2x + ax)$

i) (x + 2) (x – 3) j) (x + 7) (x – 5) k) (x – 3) (x – 2)

l) (x – 5) (x – 6) m) (x – 1) (x – 7) n) (x + 4) (x + 4)

o) (x + 5) (x + 5) p) (x + 1) (x + 1) q) (x – 2) (x – 2)

r) (x – 1) (x – 1) s) (x – 5) (x – 5) t) (x + 3) (x – 3)

u) (x – 6) (x + 6) v) (x + 4) (x – 4)

APÊNDICE 2 – LISTA DE EXERCÍCIOS 2

LISTA DE EXERCÍCIOS 2 (Fatoração e equações do 2º grau)

1- Fatore os polinômios abaixo

a) $x^2 - 7x + 12$ b) $x^2 - 10x + 25$ c) $x^2 - 5x$

d) $x^2 - 16$ e) $x^2 - 5x - 6$ f) $x^2 - 5x + 6$

g) $x^2 - 7x$ h) $x^2 + 6x + 9$ i) $x^2 + 4x - 21$

2 – Faça cada polinômio da questão anterior igual a zero e solucione a equação resultante.

3 – Quais as dimensões do retângulo da figura abaixo, sendo seu perímetro igual a 14 cm e sua área igual a 12 cm^2 ?

APÊNDICE 3 – ATIVIDADE AVALIATIVA

ATIVIDADE AVALIATIVA (TRABALHO EM GRUPO)

1 – Efetue os produtos abaixo

a) $(x + 2) . (x + 3)$ b) $(x – 4) . (x – 5)$ c) $(x – 5) . (x – 5)$

2- Escreva os polinômios de forma fatorada como um produto de dois binômios

a) $x^2 – 9x + 20$ b) $x^2 – 10x + 25$ d) $x^2 + 5x + 6$

3 – Qual a solução para as equações abaixo?

a) $x^2 – 9x + 20 = 0$ b) $x^2 – 10x + 25 = 0$ d) $x^2 – 5x – 24 = 0$

4 – Quais as dimensões de um sendo seu perímetro igual a 20 cm e sua área igual a 24 cm^2?