



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
NÚCLEO PEDAGÓGICO DE APOIO AO DESENVOLVIMENTO CIENTÍFICO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E
MATEMÁTICAS – MESTRADO

Roberto Carlos Dantas Andrade

GEOMETRIA ANALÍTICA PLANA: PRAXEOLOGIAS MATEMÁTICAS
NO ENSINO MÉDIO

Belém
2007

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
NÚCLEO PEDAGÓGICO DE APOIO AO DESENVOLVIMENTO CIENTÍFICO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E
MATEMÁTICAS – MESTRADO

Roberto Carlos Dantas Andrade

GEOMETRIA ANALÍTICA PLANA: PRAXELOGIAS MATEMÁTICAS
NO ENSINO MÉDIO

Dissertação de mestrado como exigência
parcial para obtenção de título de Mestre
em Educação em Ciências e Matemáticas

Orientador: Prof. Dr. Renato Borges Guerra

Belém
2007

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
NÚCLEO PEDAGÓGICO DE APOIO AO DESENVOLVIMENTO CIENTÍFICO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E
MATEMÁTICAS – MESTRADO

Roberto Carlos Dantas Andrade

GEOMETRIA ANALÍTICA PLANA: PRAXELOGIAS MATEMÁTICAS
NO ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada para a obtenção do título de
Mestre em Educação em Ciências e Matemáticas

Defesa: Belém (PA), 07 de maio de 2007

Banca Examinadora

Prof. Dr. Renato Borges Guerra
Presidente, UFPA

Prof. Dr. Luis Carlos Pais
Membro, UFMS

Prof. Dr. Francisco Hermes da Silva
Membro, UFPA

Prof. Dr. Tadeu Oliver Gonçalves
Membro, UFPA

A Ana Lucia, Ana Carla e André Luiz, meus alicerces.

A Maria Gilda Dantas Andrade, por ter acreditado que através da educação poderíamos ultrapassar as barreiras que a vida nos impõe e por ter feito desta a grande opção de sua vida no sentido de buscar sempre para os seus sete filhos um lugar nesta sociedade que pudesse lhes permitir crescer intelectual, pessoal e espiritualmente, sem ter a necessidade de ocupar o lugar de ninguém a não ser o seu próprio que estava reservado por Deus, mas que segundo suas crenças seria necessário conquistá-los e a educação lhes forneceria este poder de conquista. Pronto mãe, sonhamos juntos e conseguimos juntos vencer mais esta etapa e sei que continuaremos sonhando.

AGRADECIMENTOS

A Deus por ter iluminado de bênçãos o caminho que trilhei até este momento.

A minha mãe, Gilda, por ter incentivado e abençoado minhas ações quando da perspectiva de perceber na educação respostas para minha escolha profissional.

A minha esposa, Ana Lúcia, pela compreensão e incentivo nas horas difíceis da pesquisa.

A Ana Carla e André Luiz, meus filhos, que são os verdadeiros porquês de minha vida.

A meus irmãos Carlos, Gildete, Janete, Valdete, Denilson, Valnete e Milton Filho (in memoriam).

A todos os professores do Programa pelas valiosas contribuições. Especialmente aos professores Francisco Hermes e Tadeu Oliver.

A meu professor orientador, Renato Guerra, por ter acreditado no trabalho, pela contribuição efetiva na construção de toda pesquisa e pelos valiosos momentos de desequilíbrio causado por seus questionamentos.

Ao professor Luis Carlos Pais por ter aceitado participar da banca examinadora e pelas valiosas contribuições quando da qualificação.

A meus colegas do mestrado em especial Reginaldo Silva e José Messildo, pela paciência, contribuição e críticas nas leituras preliminares da monografia.

A meus colegas professores da Escola Tenente Rêgo Barros, em especial os colegas da Matemática.

Aos alunos da turma 32A₁ (2006) da Escola Tenente Rêgo Barros por terem aceitado participar da pesquisa.

RESUMO

O objetivo desta pesquisa é a construção e a aplicação de uma organização didática para a Geometria Analítica Plana, a partir do estudo dos Vetores, no 3º ano do ensino médio, à luz da Teoria Antropológica do Didático de Yves Chevallard e da teoria da Aprendizagem Significativa de David Ausubel. A pesquisa é de natureza qualitativa do tipo etnográfica na educação, de acordo com Marli André, e foi desenvolvido com um grupo de alunos em um contexto específico que é a preparação para o vestibular. A manipulação de objetos ostensivos para compreensão dos objetos não-ostensivos da Matemática serviu de categorias para análise das praxeologias vivenciadas em sala de aula. Concluímos que os alunos ao manipular as representações de objetos ostensivos resgatam conhecimentos matemáticos de forma articulada e integrada para a ancoragem de novos conhecimentos matemáticos. Observou-se também que a organização didática permite “economia de tempo”, no que diz respeito ao estudo destes conteúdos nesta etapa da vida escolar.

Palavras-chave: Geometria Analítica Plana, Praxeologias Matemáticas, Aprendizagem Significativa

ABSTRACT

This paper aims the construction and application of a didactic organization to the plane analytic geometry, based on studies about vectors, in the third grade of “Ensino Médio”, on the basis of the anthropology theory of Yves Chevallard and the significant learning theory of David Ausubel. This document has a quality nature and it is a kind of ethnographic in education, according to Marli André, and it was developed with a group of students in a specific context – the “Vestibular” preparation. The ostensible objects manipulation to the comprehension of no ostensible objects in mathematics was a category to the analysis of “praxeologias” in the classroom. We concluded that students manipulating ostensible objects rescue mathematics knowledge in an articulated and integrated form in order to get new math knowledge. It was also observed that the didactic organization allows “time saving” to this content study in this school life stage.

Key words: Plane analytic geometry, mathematics “praxeologias”, significant learning

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Localização de um ponto em um sistema de coordenadas	59
Figura 2: Localização de um ponto e sua representação através de par ordenado	60
Figura 3: Questão do vestibular da UFPA, 2006	68
Figura 4: Sistema de coordenadas que formam entre as retas um ângulo de 30° (construído com os alunos)	69
Figura 5: Localização de um ponto em um sistema de coordenadas que formam entre si um ângulo de 30°	71
Figura 6: Modelo para calcular a distância de um ponto à origem de um sistema de coordenadas não ortogonais (SCNO)	73
Figura 7: Localização do ponto (8, -12) no sistema de coordenadas que formam entre si um ângulo de 30°	81
Figura 8: Proposta para os alunos da localização do ponto (5, 6), para futuro calculo da distância deste ponto a origem do sistema	82
Figura 9: Modelo construído pelos alunos para o calculo da distância do ponto (5, 6) até a origem	82
Figura 10: Modelo para calcular a distância de dois pontos quaisquer de um SCNO	85
Figura 11: Modelo para calcular a distância de um ponto à origem de um sistema de coordenadas ortogonais (SCO)	89
Figura 12: Modelo para calcular a distância de dois pontos quaisquer num SCO	90
Figura 13: Modelo para construir o conceito de Vetor	94
Figura 14: Modelo que evidencia a translação de segmentos orientados	95
Figura 15: Construção de segmentos que representam o Vetor soma e o Vetor diferença num SCO	100
Figura 16: Representações de Vetores	102
Figura 17: Representação do Vetor soma	102
Figura 18: Representação do Vetor diferença	103
Figura 19: Representação do produto de um Vetor por escalar no SCO	104
Figura 20: Representação geométrica do produto de um segmento orientado por número escalar	105
Figura 21: Modelo para identificar algebricamente o produto de um Vetor por um escalar no SCO	106
Figura 22: Modelo para identificar o coeficiente angular de uma reta como a tangente do ângulo	107

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	10
1 REFLEXÕES DO ENSINO-APRENDIZAGEM A PARTIR DAS EXPERIÊNCIAS COMO DOCENTE	13
1.1 FALANDO DAS EXPERIÊNCIAS E INQUIETAÇÕES	13
1.2 GEOMETRIA ANALÍTICA PLANA: NOSSAS CONSTATAÇÕES	20
1.3 CARACTERIZANDO O PROFESSOR PESQUISADOR	26
1.4 CARACTERIZANDO A PROPOSTA DE PESQUISA	28
1.5 CARACTERIZANDO O AMBIENTE NO QUAL FOI DESENVOLVIDA A ORGANIZAÇÃO DIDÁTICA	34
2 A TEORIA ANTROPOLÓGICA DO DIDÁTICO COMO REFERENCIAL NA CONSTRUÇÃO DA ORGANIZAÇÃO DIDÁTICA PARA A GEOMETRIA ANALÍTICA PLANA	36
3 CONSTRUÇÃO, DESENVOLVIMENTO E ANÁLISE DE PRAXEOLOGIAS PARA A GEOMETRIA ANALÍTICA PLANA	49
3.1 A HISTÓRIA DA MATEMÁTICA COMO ORGANIZADOR PRÉVIO	49
3.2 IDENTIFICANDO O SISTEMA DE COORDENADAS PARA LOCALIZAÇÃO DE UM PONTO	59
3.3 CALCULANDO A DISTÂNCIA ENTRE DOIS PONTOS EM UM SISTEMA DE COORDENADAS NÃO ORTOGONAIS.....	72
3.4 DISTÂNCIA DE UM PONTO ATÉ A ORIGEM NO SISTEMA DE COORDENADAS ORTOGONAIS	89
3.5 DISTÂNCIA ENTRE DOIS PONTOS QUAISQUER NO SISTEMA DE COORDENADAS ORTOGONAIS	90
3.6 O CONCEITO DE VETOR	94
3.7 EQUAÇÃO DA RETA	105
4 CONSIDERAÇÕES FINAIS	110
REFERÊNCIAS	112
ANEXOS	117

INTRODUÇÃO

Há muito se tem falado da necessidade que o educador deve ter de refletir sobre suas atividades pedagógicas, o que motivou vários trabalhos acadêmicos, como podemos destacar em Schön (2000), Perrenoud (2002), Zeichner (1993) e outros. Estes trabalhos principalmente o de Zeichner nos inspirou a refletir, de forma “mais consistente”, sobre nossa prática pedagógica, pois apesar de há muito já realizarmos reflexões sobre ela, estas ao nosso entender não nos conduziram a efetivas mudanças, no que se refere a nossas posturas pedagógicas.

As reflexões realizadas no transcorrer de nossa experiência profissional nos motivaram a vários momentos de indagação sobre nossa postura como professor de Matemática do Ensino Básico e também sobre os procedimentos metodológicos por nós adotados. Esses procedimentos sofriam modificações provocadas em grande parte pela vontade do professor em promover um ensino-aprendizagem dos conteúdos de matemática mais consistente e conseqüente para os alunos, do que estimulado por embasamentos teóricos eficazes e capazes, de além de promover um ensino-aprendizagem consistente e conseqüente também o tornasse significativo e prazeroso. Não queremos dizer com isto que refletir sobre a prática sem um referencial teórico, não possibilite mudanças significativas na postura de profissionais da educação, pois nós mesmos ao realizarmos estas reflexões pudemos identificar a necessidade que tínhamos em buscar alternativas para um procedimento metodológico que respondesse às questões por nós identificadas.

As indagações se evidenciaram ainda mais a partir do momento em que nos propusemos a buscar referências que nos possibilitassem responder ou até mesmo amenizar nossas inquietações no que diz respeito ao ensino-aprendizagem da Matemática. Essa busca nos permitiu entrar em contato com os trabalhos de Zeichner (1993) sobre a formação reflexiva de professores, o que nos permitiu identificar a postura que iríamos assumir neste trabalho.

Muitas de nossas indagações surgiram a partir das experiências com alunos que estaríamos preparando para os concursos vestibulares no estado do Pará. Nesse momento de nossa atividade profissional entramos em contato com dois objetos matemáticos, os quais nas organizações matemáticas propostas para o Ensino Médio se encontram totalmente desconectadas, esses objetos são a Geometria Analítica Plana e os Vetores, este último muitas vezes se encontra

ausente dos livros didáticos de Matemática, propostos para esta etapa de ensino, apesar de ambos os objetos matemáticos comporem a grade de conteúdos das universidades paraenses.

O fato de estarem desconectados nos estimulava profissionalmente a trabalhar os conteúdos em momentos distintos, porém ao refletirmos sobre estas ações percebemos que em muitos momentos de ensino éramos repetitivos, quanto à questão de determinados conceitos comuns aos dois objetos, como por exemplo: a distância entre dois pontos que é o mesmo que o módulo de um vetor, a equação da reta que é a mesma equação da reta suporte de um dado vetor e outros. Esta repetição acarretava em “perda de tempo”, pois sabemos que nesta fase de preparação o que se precisa é ganhar tempo. Desta forma começamos a empreender trabalhos que enfatizassem esta conexão, o que resultou na questão de pesquisa desta dissertação.

Propusemo-nos a investigar e construir uma organização didática para a Geometria Analítica Plana, com tratamento no estudo de Vetores, e, em seguida, pô-la em prática, utilizando o caminho da interação entre conhecimentos prévios dos alunos e os novos conhecimentos, destacando as relações com outros saberes da Matemática e de outros campos de conhecimento.

A pesquisa foi caracterizada de natureza qualitativa do tipo etnografia na educação nos termos descritos por Marli André (2005), e como referencial teórico utilizamos a Teoria Antropológica do Didático de Yves Chevallard (1991), enfatizando a construção de praxeologias matemáticas e praxeologias didáticas que destacassem a manipulação de objetos ostensivos de tal forma a possibilitar nos alunos a assimilação dos objetos não-ostensivos da Matemática, como o descrito na página 92 e 117. Quando da efetiva prática com alunos da organização didática construída, optamos como objetivo de aprendizagem a Aprendizagem Significativa proposta por David Ausubel (1968).

Esta dissertação está organizada em três capítulos. No primeiro descrevemos nossas reflexões e inquietações surgidas na experiência profissional, numa primeira etapa de forma geral e, na segunda, de forma específica, no que diz respeito à Geometria Analítica Plana e aos Vetores, ainda faz parte deste primeiro capítulo a descrição da postura que iremos assumir como professor pesquisador. E para concluir este momento, descrevemos os percursos metodológicos assumidos e o ambiente onde foi realizada a intervenção didática.

No segundo capítulo abordamos a Teoria Antropológica do Didático. No terceiro passamos a construir a Organização Didática, a qual optamos por descrevê-la a partir das praxeologias matemáticas construídas pelo professor e em seguida as atividades propostas para intervenção, e simultaneamente realizamos a descrição e a análise das praxeologias matemáticas construídas pelos alunos. Para finalizar descrevemos nossas considerações finais.

1 REFLEXÕES DO ENSINO-APRENDIZAGEM A PARTIR DAS EXPERIÊNCIAS COMO DOCENTE

A experiência como docente tem sido marcada por vários momentos de reflexão, no que diz respeito ao ensino da Matemática. Atuamos como professor de Matemática, há aproximadamente 16 anos, na rede pública estadual, na Escola de Ensino Fundamental e Médio Eunice Weaver, no Bairro da Pratinha (Belém, PA); na rede pública federal, na Escola de Ensino Fundamental e Médio Tenente Rêgo Barros (Belém, PA); e também na rede particular de ensino. Na perspectiva de relatar essas experiências profissionais destacando as inquietações surgidas é que passaremos a descrever nossa trajetória docente.

1.1 FALANDO DAS EXPERIÊNCIAS E INQUIETAÇÕES

No transcorrer desses 16 anos, estivemos em contato com alunos de diferentes classes sociais. Este contato nos possibilitou a observação de comportamentos os mais diversos possíveis, diante das aulas de Matemática que ministrávamos. Estes comportamentos são marcados pelo desinteresse, pela passividade, pois, muitas vezes, alguns alunos chegavam a baixar a cabeça para dormir e outros conversavam assuntos totalmente diferentes do que estava sendo tratado nas aulas; também havia aqueles que esboçavam brincadeiras com o objetivo de interromper a aula. Não podemos deixar de citar uma parcela minoritária, mas significativa, de alunos que se interessavam e participavam das aulas, produzindo a resolução de exercícios e questionando determinados conceitos que ainda não estavam bem claros para eles.

As atitudes de apatia e o não compromisso dos alunos nos inquietavam e inquietam. Foi, então, que começamos a procurar respostas e, ao mesmo tempo, nos fazer as seguintes perguntas: o que estava errado? A escola? A educação? A Matemática? Ou era a proposta metodológica que utilizávamos? Eram as condições sociais e econômicas dos alunos? Buscando respostas para estas questões, começamos a investigar a nossa postura como professor, diante do processo ensino-aprendizagem.

O primeiro passo foi tentar esboçar uma visão de que tipo de professor somos e quais propostas metodológicas estávamos utilizando para o desenvolvimento do

ensino-aprendizagem da Matemática. Em resposta a estas perguntas, encontramos em nossa prática a postura de um professor tradicional, aquele que é o detentor do saber, para quem os alunos são apenas coadjuvantes no cenário da sala de aula. Ao chegar a esta conclusão, nos fizemos as seguintes indagações: o que nos levou a esta postura? Qual era o perfil de professor que tínhamos? Estas novas perguntas nos despertaram novas reflexões; e foram estas reflexões que nos conduziram a um retrospecto de nossa vida estudantil.

Realizamos nossos estudos de ensinamentos fundamental e médio em escolas da rede pública, e nossos professores tinham práticas metodológicas muito semelhantes às nossas, ou seja, posturas muito próximas da nossa no ato do fazer pedagógico. A metodologia desenvolvida pelos nossos professores consistia em escrever o conteúdo da aula no quadro de giz e, em seguida, explicar os assuntos utilizando-se da oratória. No momento seguinte, forneciam uma lista de exercícios, dando tempo para que tentássemos resolvê-los, e, depois, resolviam os exercícios explicando os passos da resolução, cuja resposta, muitas vezes, diferia da nossa. Porém, a cultura - impregnada durante décadas - de uma educação tradicional e, por isso, formalista, fazia-nos aceitar passivamente as explicações dos professores como sendo as únicas respostas corretas. Depois da proposta de resolução apresentada por nossos professores, nos eram oferecidas atividades (exercícios), que deveriam funcionar como atividade de fixação e aprofundamento, para serem realizadas em casa.

Na Universidade Federal do Pará (UFPA) cursei Licenciatura Plena em Matemática, e os professores de Matemática agiam do mesmo jeito quanto ao fazer pedagógico, talvez porque seus professores tenham tido a mesma postura. Aqui, queremos resguardar os professores das disciplinas da área de educação, pois eles, em suas aulas, já promoviam alguns debates, o que despertava certo interesse pela leitura de textos não matemáticos. Essas atitudes causavam uma dinâmica diferente na sala de aula.

Feito este retrospecto, surgiu uma diferença entre o nosso comportamento - que era de um aluno atento, respeitador e aplicado diante do ensino de Matemática, características que não eram apenas nossas, mas também de uma parcela significativa dos alunos desta época - e o comportamento de nossos alunos, já citados anteriormente. Desta forma, o que mudou? Esta pergunta não expressava nossa ingenuidade e nem alienação diante das políticas educacionais e mudanças

sociais sofridas neste período, pois tínhamos consciência das mudanças sofridas pela educação brasileira, tal como, durante as décadas de 1970 e 1980. Esta pergunta era muito mais profunda. O que queríamos saber era o que havia mudado na construção do conhecimento escolar. Como poderia dar aulas de Matemática, desenvolvê-la, criar situações de tal maneira que meus alunos se sentissem críticos, interessados, participativos, ou seja, ativos e não passivos, e que pudessem reconhecer o conhecimento matemático como uma importante forma de linguagem¹ que aponte melhores possibilidades práticas no decorrer de sua vida.

Em todos os contextos sociais verificamos a presença implícita ou explícita da linguagem matemática, a qual, sendo interpretada e manipulada de forma substancial e significativa, contribui para adquirir habilidades e desenvolver competências que propiciam um leque maior de informações que, como consequência, oferecerá mais condições para a resolução dos problemas enfrentados pelos homens no seu cotidiano.

Esta convicção acerca do ensino da Matemática pode ser verificada na assertiva abaixo, quando diz:

A Matemática, por sua universalidade de quantificação e expressão como linguagem, portanto, ocupa uma posição singular. [...]. Possivelmente, não existe nenhuma atividade da vida contemporânea, da música à informática, do comércio à meteorologia, da medicina à cartografia, das engenharias às comunicações, em que a Matemática não compareça, de maneira insubstituível, para codificar, ordenar, quantificar e interpretar compassos, taxas, dosagens, coordenadas, tensões, frequências e quantas outras variáveis houver (BRASIL, 1999, p. 211).

A citação acima, a nosso ver, evidencia a importância da Matemática no cotidiano das pessoas. Esta ciência ao ser interpretada como uma forma de linguagem, não comportará mais, no que diz respeito ao ensino-aprendizagem, a postura metodológica que estávamos assumindo. Nesse sentido, surge a necessidade de rever nossa prática pedagógica.

Tomando como referência nossa prática, identificamos a complexidade existente no mundo da sala de aula, o qual é formado por atividades e conflitos, e, segundo Zeichner (1993, p. 19), este ambiente, apesar da sua atmosfera acelerada

¹ Consideraremos nesta pesquisa a Matemática como linguagem e não como uma ciência, por tratar-se de uma pesquisa que abordará nos aspectos do ensino-aprendizagem.

e imprevisível, requer, sempre, por parte do professor, uma tomada de decisões, a qual nos possibilita pensar em profissionais reflexivos no ensino. Isto implica em destacar que, para o desenvolvimento da prática reflexiva é importante juntar três dimensões da reflexão sobre a prática. São elas: como o aluno compreende e interpreta as informações que recebe; a interação entre professor/aluno: como o professor administra esta relação interpessoal; e as condições de trabalho do professor: como ele as relaciona na escola.

Ao refletirmos sobre o saber e o fazer docente, sentimos a necessidade de uma teoria que, junto com a prática oriunda da reflexão, nos orientasse na escolha da rota mais adequada para o ensino-aprendizagem, possibilitando pensar sobre as razões e as conseqüências pedagógicas. Nesse sentido, concordamos com Giesta (2005, p. 25) ao destacar que:

Pensar sobre a ação possível ou sobre a já realizada é, na opinião de Gimeno Sacristán, guia para a ação futura, como uma sabedoria prudente na previsão ou planejamento da mesma, ainda que essa previsão possa não coincidir com a prática da própria ação.

Desta forma, nos é acentuada a postura do professor que reflete sobre a ação.

A postura do profissional reflexivo, acerca da qual nos orientamos, é destacada por Geraldi et al. (2003) na perspectiva de Dewey, a qual a autora descreve como uma ação reflexiva o processo que não se acaba na busca de soluções lógicas e racionais para os problemas,

mas envolve também a intuição e a emoção; não é apenas um conjunto de técnicas que possa ser empacotado e ensinado aos professores. A busca do professor reflexivo é a busca do equilíbrio entre a reflexão e a rotina, entre o ato e o pensamento (GERALDI et al., 2003, p. 248).

Sendo assim, o professor reflexivo, nesta perspectiva, age direcionado por uma consideração séria e cuidadosa a respeito daquilo que acredita e pratica, analisando o que justifica as causas e as conseqüências de propostas teóricas ou experiências realizadas. Uma das atitudes reflexivas, de acordo com Zeichner (1993), é tornar consciente um saber tácito, trabalhando tal saber, criticando-o, examinando-o, melhorando-o, o que implica dizer que a ação reflexiva provocará a

abertura de espírito, a responsabilidade e a sinceridade. Sem esses elementos, os discursos e as intenções perdem o sentido.

Uma atitude reflexiva não pode prescindir de tomada de decisões no sentido de admitir o erro, ouvir e analisar opiniões, admitir o gerenciamento de conflitos que podem gerar transformações em práticas pedagógicas que estão efetivadas como corretas e que não necessitam de mudanças. Isto implica dizer que, decorrente das decisões tomadas, elas podem assumir dimensões além das pessoais, sociais e/ou políticas. Zeichner (1993) destaca que, assumida a postura do professor reflexivo, este avalie o seu ensino muito mais pela resposta à pergunta “gosto dos resultados?” do que simplesmente por “atingi meus objetivos?”. Em nosso entender, significa dizer que a reflexão não consiste no estar certo ou errado, e sim no construir o conhecimento de forma significativa, tanto na perspectiva do aluno como do professor.

Admitindo a postura reflexiva acima descrita e visando a construção de um profissional com atitudes que coadunem com esta postura, decidimos por participar de estudos e palestras que trabalhassem metodologias diferenciadas para o ensino da Matemática. O primeiro desses foi no Centro de Treinamento de Recursos Humanos, da Secretaria de Educação do Estado do Pará (CTRH/Seduc-PA). O grupo de professores trabalhava com preparação de material metodológico para o ensino da Matemática da 4^o série do ensino médio, na área do magistério chamada Estudos Adicionais, para as turmas dos municípios do interior do estado do Pará.

Com este contato, identificamos uma maneira diferenciada de trabalhar os conteúdos de Matemática. A começar pelo material didático, não era mais um único livro-texto, elaborado por pessoas que estavam fora do contexto em que seria desenvolvido o trabalho. Todo o material foi produzido por nós professores, os quais buscávamos referenciais teóricos em vários livros, levando em consideração a realidade do local onde a atividade seria desenvolvida. Este fato já se tornava algo relevante para que adotássemos uma proposta metodológica que estivesse próxima da construção do conhecimento, a partir da realidade dos aprendizes. Ressaltamos, porém, que os conteúdos da Matemática, como aritmética, geometria e álgebra, continuavam organizados de forma desconectada uns dos outros. Na verdade, a mudança consistia na maneira de abordar os temas, a qual previa uma contextualização no cotidiano dos alunos, onde era realizado o curso. Mesmo assim,

esta foi a nossa primeira quebra de inércia rumo às respostas e às inquietações, anteriormente mencionadas.

Uma segunda experiência da qual participamos, deu-se, ao ingressar como docente na Escola Tenente Rêgo Barros (ETRB), em 1995. Ao chegar nesta instituição, encontramos uma estrutura montada para funcionar como laboratório de ensino da Matemática. Os professores que já se encontravam na escola há mais tempo, nos falaram de um curso ministrado por professores ligados ao Clube de Ciências da UFPA (hoje Núcleo Pedagógico de Apoio ao Desenvolvimento Científico (NPADC)), curso que tinha motivado bastante os professores no trabalho com jogos e estratégias pedagógicas diferentes das usualmente utilizadas - oratória, quadro e giz. Este curso foi o estímulo à construção do laboratório.

A experiência no laboratório começou sob a coordenação do Prof. Wlamir Abreu que também tinha trabalhado no CTRH (Seduc), o qual deu início a uma produção de jogos e atividades para serem desenvolvidos nas turmas de 5^a a 8^a séries do ensino fundamental. De posse deste material produzido, todos os professores destas séries deveriam desenvolvê-lo nas suas aulas, de tal forma a se constituir em um modo diferenciado de ensinar, tornando, assim, as aulas mais significativas, o que provocou maior interesse e participação dos alunos nas mesmas.

Estas atividades evidenciaram a importância do trabalho com atividades lúdicas para o ensino de Matemática. Desta forma, ficamos motivados a engajar cada vez mais no trabalho do laboratório, o que culminou em um curso para professores de 1^a a 4^a séries do 1^o grau (hoje séries iniciais do ensino fundamental) de metodologia do ensino de Matemática, utilizando atividades lúdicas, do qual participei como instrutor (BRASIL, 2006). Estas experiências promoviam em nossa prática mudanças de posturas e metodologias no que tange ao ensino-aprendizagem da Matemática; porém, percebíamos, ainda, certa insuficiência nessas mudanças.

As novas práticas e a visão profissional nos fizeram sentir necessidade de voltar para a universidade com o objetivo de adquirir conhecimentos e referenciais teóricos e práticos para esse novo modelo de professor. Em princípio, participamos de um curso de aperfeiçoamento para professores do ensino médio (Pró-Ciências)

na Universidade do Estado do Pará (UEPA); logo em seguida, cursamos especialização em Educação e Informática, também na UEPA.

Durante a especialização, entramos em contato com profissionais da educação diferentes daqueles que tivemos na graduação. Diferenças estas, no que dizem respeito à prática pedagógica, uma maneira de ensinar que fazia com que sentíssemos necessidade de aprender, utilizando métodos de avaliação variados, materiais bibliográficos bem selecionados, e uma visão definida de utilização das novas tecnologias como recurso pedagógico.

Os fatores citados acima nos levaram a refletir. Porém, o que mais chamou a atenção, foi a utilização das novas tecnologias como recurso didático para a construção do conhecimento. Aqui, pensávamos ter encontrado caminhos motivadores para aulas de Matemática, ou seja, uma proposta metodológica que utilizasse as novas tecnologias como recurso para o ensino de Matemática. A nosso ver, esta proposta permitiria melhor interação entre o professor e os alunos, pois essas tecnologias já faziam parte da vida dos pares envolvidos na difícil tarefa de ensino-aprendizagem da Matemática.

Observando os alunos adolescentes e pré-adolescentes, percebíamos a influência que eles recebiam da televisão, dos *games* e do computador. Essa influência era e é tão grande, a tal ponto que a conversa entre eles sempre trazia e traz um assunto vinculado a estas tecnologias², a saber: as novelas da TV como “Malhação”, o comercial, o filme, um novo *game*, as salas de bate papo na Internet, e, hoje, o novo modelo de celular.

Este fato mostra, em parte, a mudança de comportamento dos alunos da nossa época de aluno do 1º e 2º graus (décadas de 1970 e 1980) em relação ao comportamento dos meus alunos, a partir da década de 1990 em diante. Nós não tínhamos acesso a essas tecnologias e, quando tínhamos, era apenas a televisão; por isso, os assuntos de nossas conversas eram outros. Ora, se as novas tecnologias trazem consigo a principal fonte de informação, por que não inserir as aulas de Matemática neste contexto e torná-las também um assunto de conversação e de interação entre professores e alunos? Foi assim que surgiu a proposta de nossa monografia para a conclusão do curso de especialização “A informática nas aulas de Matemática”. Nesse sentido, percebemos, mais uma vez, que não existe só

² No sentido de aparelhos e materiais eletrônicos.

uma postura e que as várias formas que o professor pode adotar ao se posicionar na sala de aula, seja qual for a situação, precisam ser, principalmente, de posturas críticas.

As experiências e as inquietações descritas nos tópicos anteriores remetem a uma postura de reflexão sobre a ação pedagógica. Esta reflexão é que vem despertar em nós uma atitude investigativa da postura do profissional da educação no que diz respeito ao ensino-aprendizagem, mais especificamente, da Geometria Analítica e Vetores. Nesse sentido, destacamos a fala de Zeichner ao afirmar que:

Os professores que não refletem sobre seu ensino aceitam naturalmente a realidade cotidiana de suas escolas e concentram seus esforços na procura de meios mais eficientes para atingir os seus objetivos e para encontrar soluções para problemas que outras pessoas definiram no seu lugar [...] Os professores não reflexivos aceitam automaticamente o ponto de vista normalmente dominante numa dada situação (ZEICHNER, 1993, p. 18).

Nesta fala, Zeichner nos indica a necessidade de não aceitar com naturalidade os acontecimentos educativos de uma sala de aula, ou seja, é sempre positivo estarmos refletindo sobre eles, seja no sentido de construí-los ou reforçá-los, de tal forma que as atitudes didáticas visem sempre um ensino que objetive a aprendizagem com significados.

1.2 GEOMETRIA ANALÍTICA PLANA: NOSSAS CONSTATAÇÕES

Nosso primeiro contato com a geometria analítica foi em 1984, cursando o 3º ano do então 2º grau na Escola Estadual Magalhães Barata, que se caracterizou pelos seguintes aspectos: O conteúdo foi apresentado como um outro qualquer, ou seja, algo que estava na grade curricular e deveria ser trabalhado, sem se preocupar em identificar a importância do seu estudo e nem a sua conexão com outros assuntos da matemática e com outras disciplinas.

A professora adotou como livro texto, Matemática 3ª série do 2º grau, de lezzi et al. (1980). A metodologia utilizada pela professora era copiar o assunto no quadro, realizar algumas deduções de fórmulas e, em seguida, resolver exercícios do livro. Uma vez feitas estas atividades, ela propunha outros exercícios para nós alunos resolvermos. Os assuntos trabalhados por ela foram apenas ponto e reta, deixando de lado o estudo da circunferência, apesar de constar na grade curricular.

O segundo contato foi no cursinho, com um professor com mais experiência, demonstrada pelo não uso de textos bases, pois o mesmo não utilizava o livro para retirar o conteúdo e os exercícios. Porém, a metodologia continuava sendo a oratória e a resolução de exercícios, ou seja, estes eram os únicos mecanismos de “transmissão de conhecimento”. Este professor, por seu estilo de ensinar sem consultas imediatas em livros, nos parecia ter uma bagagem intelectual mais apurada, o que provocava em nós, alunos, certa respeitabilidade ao que ele falava e atenção nas suas aulas. Com ele, além do estudo do ponto e da reta, trabalhamos também o estudo da circunferência. Ele também não fez conexões explícitas entre a Geometria Analítica e outros conteúdos da Matemática e de outras áreas do conhecimento.

Nesses dois momentos, estudar Geometria Analítica Plana tinha como objetivo o exercício para o vestibular, ou seja, teria que saber resolver os mais variados modelos de exercícios que utilizavam a Geometria Analítica, pois, desta forma, possivelmente, conseguiríamos resolver as questões da prova do vestibular.

Ao chegar à universidade, em 1987, estudamos Geometria Analítica Plana como parte de uma disciplina chamada Álgebra Linear I. Nesta disciplina, tivemos nosso primeiro contato com o estudo de vetores. Porém, a metodologia adotada pelo professor era a mesma dos professores do ensino médio, ou seja, deduções, exercícios e algumas demonstrações: nenhuma novidade. Aprendia-se resolvendo exercícios, ainda também sem nenhuma conexão entre os conteúdos, com a única ressalva de que esta disciplina era pré-requisito para Álgebra Linear II, ou seja, este parecia ser o objetivo desta disciplina.

Como descrevemos anteriormente, iniciamos a atividade docente em 1989, no entanto, só viríamos a trabalhar com Geometria Analítica Plana em 1999, na Escola Tenente Rêgo Barros³. Nesta escola, ocorre um rodízio dos professores nas séries e nos conteúdos. O rodízio acontece quando cada professor, após permanecer dois anos lecionando em uma mesma série, passa a lecionar em uma outra série, ou quando trabalha dois anos com um determinado conteúdo, na mesma série, passa para outro conteúdo.

A metodologia por nós utilizada para trabalhar com Geometria Analítica Plana, foi a mesma de nossos professores. Esta prática é asseverada por Silva (2001) apud

³ Escola vinculada ao Ministério da Aeronáutica, não sendo de formação militar.

Gonçalves (2005, p. 68) quando nos fala que “os futuros professores tendem a reproduzir os procedimentos didático-pedagógicos de seus formadores”. Sendo assim, nossa prática era descrita da seguinte maneira: tomávamos um único livro texto, Matemática para o 2º grau, de Gentil et al. (1998) – como referência para realizar todas as atividades didáticas, ou seja, a seqüência de apresentação do conteúdo era a mesma proposta no livro, bem como as demonstrações e os exercícios. A seqüência de estudos era o estudo do ponto, da reta e da circunferência, também sem identificar conexões, como se este estudo fosse isolado dos demais e até mesmo independentes entre si.

Durante este ano, escutamos dos alunos, inclusive daqueles que tinham desempenho satisfatório, o comentário de que esta era a parte da Matemática mais complicada e difícil, ocasionando, como conseqüência, baixo rendimento por parte destes do ponto de vista da avaliação somativa. Apesar de acharem o professor muito eficiente, esta eficiência talvez fosse pelo diálogo aberto e franco que mantínhamos com eles. Diante desta situação, não podíamos nos acomodar, pois, entendíamos que isto implicava a não aprendizagem e não utilidade deste conteúdo, o que era oposto ao nosso pensamento, uma vez que, a nosso ver, a Matemática é muito útil no sentido da sua aplicação nas diversas áreas do conhecimento, como nos confirmam os PCN e as experiências cotidianas. Desta forma, procuramos, mais uma vez, estratégias metodológicas que, além de melhorar nossas aulas, pudessem também enfatizar a importância desse conteúdo para a leitura de mundo dos alunos.

No ano seguinte, mais familiarizados com o conteúdo, não nos prendemos em um único livro-texto. Porém, foi no volume sete da coleção Fundamentos da Matemática Elementar, de Iezzi et al. (1993) que baseamos nossas seqüências didáticas. A proposta metodológica começou a sofrer modificações. Nesse momento, iniciamos um trabalho que, pretensamente, estimulasse os alunos na busca de demonstrações ou justificativas de alguns tópicos como: as coordenadas do baricentro de triângulo, o cálculo da área de um triângulo dadas as coordenadas dos vértices. Esta estratégia visava com que o aluno passasse a perceber a utilidade de se estudar Geometria Analítica, descobrindo o significado das fórmulas utilizadas.

É possível identificar que, nesse momento, nossa prática no cotidiano escolar nos instigou a questionar nossa atuação junto ao aluno, despertando-nos a análise de nossa intervenção pedagógica e os resultados dos sucessos e dos insucessos, os quais se obtêm no contexto do ensino-aprendizagem. Esta reflexão nos permitiu

dar conta do que diz Giesta (2005, p. 19): “o educador que, corajosamente, analisa sua prática e as respostas que dela obtém, evita, também, a alienação e a apatia frente às situações emergentes da educação escolarizada e do exercício do magistério”.

Ao evitar a alienação e a apatia, decorrentes das situações didáticas, estamos nos opondo aos dilemas que se apresentam ao professor no cotidiano da sala de aula, o que pode representar pontos de conflito e insegurança. Na tentativa de solucionar esses conflitos, é necessário que tomemos cuidado, pois, na maioria das vezes, o professor escolhe uma atitude de ação tomando como base uma linha geral, influenciado pela economia de tempo e de pensamento, sem se preocupar com a coerência desta para solucionar o conflito. Este tipo de atitude pressupõe certa facilitação na solução de conflitos na sala de aula, porém, é desta forma que o professor passa a se acostumar em fazer tudo sem questionamento.

Sacristán (1991) apud Giesta (2005) destaca que a consolidação da consciência profissional desenvolve sua explicitação, clarificação, no estabelecimento de ligações, onde são extraídas as derivações das opções que se agrupam em torno de dilemas vivenciados pelos professores. Porém, a autora assevera que o ensino como atividade racional ou reflexiva, pode, na realidade, ser uma prática utópica a que se aspira, pois muitos obstáculos postos pela característica da função, das peculiaridades humanas, da formação inicial, da vivência profissional docente, do contexto organizativo da escola dificultam que se concretize.

Ao sermos questionados pelos alunos do porquê de constar na grade curricular a Geometria Analítica, também não encontramos respostas satisfatórias, a não ser a de estudar para possivelmente acertar as questões propostas nas provas de concursos, como o vestibular e as escolas militares, já que muitos alunos da escola tinham este objetivo. Esta situação também nos preocupou muito. Como poderia despertar nos alunos o interesse e mostrar-lhes a importância do estudo da Geometria Analítica, se nós mesmos ainda não nos tínhamos dado conta desse questionamento. Talvez, esse fosse um obstáculo para a aprendizagem. Como os aprendizes poderiam estudar este assunto de forma prazerosa e significativa, se não tivessem consciência de sua utilidade e aplicação?

Após dois anos trabalhando com este conteúdo, tivemos que interrompê-lo em função do rodízio que existe entre os professores na escola, voltando a trabalhar

com Geometria Analítica no ano seguinte, junto com as mudanças promovidas no processo seletivo de ingresso na UFPA (Vestibular). Uma mudança a ser considerada, residia no conteúdo programático do vestibular, que era o acréscimo do estudo dos Vetores, o qual foi imediatamente inserido na grade curricular da escola (ETRB), sendo seu estudo realizado no terceiro ano do ensino médio. Desta forma e sem fazer nenhuma conexão com a Geometria Analítica, trabalhamos o estudo de Vetores. Ao pesquisarmos bibliografias para que servissem de livro-texto, nos deparamos com o problema de não encontrar livros voltados para o ensino médio que trabalhassem o estudo dos Vetores. Sendo assim, tivemos que recorrer a bibliografias voltadas para a graduação, no caso, o livro de Steinbruch e Winterle (1987). Apesar de o texto fazer referência à Geometria Analítica Plana, as conexões não eram explícitas, ou seja, o estudo de Vetores constava em capítulos separados. Portanto, nossa seqüência didática utilizou o texto apenas para o estudo dos Vetores, enquanto que o estudo dos conceitos próprios da Geometria Analítica continuava alicerçados por bibliografias especiais para o ensino médio.

Além desta mudança no vestibular, foi introduzida outra muito mais significativa, além das questões objetivas: a inclusão de questões analítico-discursivas e contextualizadas. Esta mudança nos estimulou a pesquisar aplicações da Geometria Analítica Plana e Vetores, de tal forma que pudesse elaborar questões que simulassem as que viriam a ser enfrentadas por nossos alunos na prova do vestibular. Nesse sentido, houve uma mudança significativa no trabalho com os alunos no ato de ensinar, pois, neste momento, começamos a identificar algumas conexões entre a Geometria Analítica e outros conteúdos da Matemática. Como exemplo, no estudo da reta começamos a perceber que alguns problemas que só resolvíamos através de conceitos ligados à função do 1º grau, agora poderiam ser resolvidos também, de forma mais “simples”, através dos conceitos da Geometria Analítica Plana.

Outro exemplo foi o cálculo de área e de volume, através do estudo dos produtos entre Vetores, e também começamos perceber a conexão entre Vetores, Geometria Analítica, Geometria Sintética. A percepção, anteriormente descrita, nos fez mudar mais uma vez a forma de ensinar o conteúdo, e, a partir deste momento, com o estudo de Vetores, muitos tópicos da Geometria Analítica Plana seriam justificados, como a distância entre dois pontos que nada mais é do que o módulo de um vetor; a equação da reta, que é a mesma da reta suporte de um dado vetor, e

outros. Esta nova maneira de ensinar Geometria Analítica e Vetores, buscando suas interconexões, a nosso ver, tornou as aulas mais interessantes. Porém, realizar apenas estas interconexões não foi suficiente para uma aprendizagem significativa da Geometria Analítica e Vetores, já que a metodologia de ensino era a mesma, baseada na narrativa e nas demonstrações, transferindo para o aluno grande quantidade de informações. Informações estas que deveriam ser memorizadas, e que Freire (1987) denominaria de Educação Bancária.

A narração, de que o educador é o sujeito, conduz os educandos à memorização mecânica do conteúdo narrado. Mais ainda, a narração os transforma em “vasilhas”, em recipientes a serem “enchidos” pelo educador. Quanto mais vá “enchendo” os recipientes com seus “depósitos”, tanto melhor educador será. Quanto mais se deixem docilmente “encher” tanto melhores educandos serão (FREIRE, 1987, p. 58, grifos do autor).

Esse procedimento estimula a Aprendizagem Receptiva Mecânica, onde o aprendiz recebe a informação e busca a assimilação dessas informações através da memorização, o que supostamente é realizado através da repetição de atividades sistemáticas e pela recapitulação do conteúdo. Isto implica dizer que a generalização e a transferência de aprendizagens são limitadas e dependem do treino. Para chegarmos a este entendimento, recorreremos às definições propostas por Moreira e Masini.

Aprendizagem Mecânica se dá através da aquisição de informações com pouca ou nenhuma interação com conceitos ou proposições relevantes existentes na estrutura cognitiva. O conhecimento é armazenado de forma arbitrária. Aprendizagem Receptiva é o tipo de aprendizagem no qual o conteúdo inteiro do que deve ser aprendido é apresentado ao aprendiz de forma mais ou menos final (MOREIRA; MASINI, 1982, p.100).

Após o relato destas experiências com a Geometria Analítica, devemos considerar que a falta de conexões explícitas entre a Geometria Analítica e o estudo de Vetores, e destes com outros conteúdos, não só no contexto da Matemática, mas também no contexto do cotidiano do aluno, inclusive o cotidiano escolar, venha nos permitir acreditar ser este um dos principais motivos da não aprendizagem da Geometria Analítica. Sendo assim, faz-se necessário destacar as possíveis conexões existentes entre a Geometria Analítica e o estudo dos Vetores, e destes

com outros conteúdos não só da Matemática, mas também com conteúdos de outras áreas.

Nesse sentido, nos propomos a investigar e construir uma organização didática para a Geometria Analítica Plana, com tratamento no estudo de Vetores, e, em seguida, pô-la em prática, utilizando o caminho da interação entre conhecimentos prévios dos alunos e os novos conhecimentos, destacando as relações com outros saberes da Matemática e de outros campos de conhecimento.

1.3 CARACTERIZANDO O PROFESSOR PESQUISADOR

Tomando como base as relações que se desenvolvem no interior da escola, percebemos que estas não acontecem de forma estática e sim de forma dinâmica, como todas as demais. Professores e alunos estão envolvidos em relações complexas na sala de aula, que envolvem relações sociais, políticas, e também epistemológicas do próprio saber que está lá, porque professor é sempre professor de alguma coisa. Contudo, o espaço reduzido da “aula” indica que toda produção que dela deriva é produto coletivo, ou seja, a produção do saber na sala de aula resulta do trabalho do professor e do aluno. Entretanto, verificamos que em muitos casos, inclusive o nosso, essa relação de reciprocidade é negada pela atuação arbitrária do professor sobre a personalidade do aluno.

Considerando a produção resultante da sala de aula como produto coletivo, faz-se necessário admitir mais uma vez a postura do profissional reflexivo, e, desta forma, buscar caminhos que orientem esta postura. Assim sendo, entendemos que um caminho salutar seria o do professor que assume o papel de pesquisador.

Ao analisar a postura do professor pesquisador, Freire (2002, p. 32) nos indica que “não há ensino sem pesquisa e nem pesquisa sem ensino”, isto significa dizer que há uma relação de cumplicidade entre ensino e pesquisa. Ao ensinar estaremos pesquisando e ao pesquisar, no contexto da sala de aula, estaremos ensinando. Ao explicitar este argumento, Freire nos fala:

Fala-se hoje, com insistência, no professor pesquisador. No meu entender o que há de pesquisador no professor não é uma qualidade ou uma forma de ser ou de atuar que se acrescente à de ensinar. Faz parte da natureza da prática docente a indagação, a busca, a pesquisa. O de que se precisa é que, em sua formação permanente,

o professor se perceba e se assuma, porque professor, como pesquisador (FREIRE, 2002, p. 32).

Freire, ao descrever a postura do professor pesquisador, salienta a necessidade da formação continuada, e que esta possa propiciar reflexões críticas que evidenciem a tomada de consciência do professor como pesquisador, de tal forma a assumi-la com um caráter não substantivo e sim reflexivo.

Com o objetivo de caracterizar a postura de professor pesquisador que pretendemos assumir, buscamos no trabalho de Philippe Perrenoud, o qual ao tratar da profissionalização do ofício do professor, nos chama a atenção para a relevância da autonomia. Nesse sentido, descreve que em muitos países (inclusive no Brasil) o ofício de professor é considerado como uma *semi-profissão*, isto implica em caracterizá-lo por uma “semi-autonomia e por uma semi-responsabilidade” (ETZIONE, 1969 apud PERRENOUD, 2002, p.12). Sendo assim, deveremos sempre estar atentos para o fato de que, para acontecer uma evolução na profissionalização do ofício de professor, este deveria assumir riscos e romper com a prática de se esconder atrás do sistema escolar, dos textos e dos programas, ou seja, como nos expõe Perrenoud.

[...] seria preciso redefinir suas obrigações contratuais nesse sentido. Em troca de maior responsabilidade pessoal, disporiam de maior autonomia – ou de uma autonomia menos clandestina – na escolha de suas estratégias didáticas, de seus procedimentos e de suas modalidades de avaliação, de suas formas de agrupar os alunos e de organizar o trabalho, de estabelecer um contrato e uma ordem, de conceber os dispositivos de ensino-aprendizagem ou de monitorar os meios de formação (PERRENOUD, 2002, p. 12).

Desta forma, fica muito bem caracterizado que a autonomia e a responsabilidade de um profissional da educação (no nosso caso) dependem de grande capacidade de refletir sobre e na ação. Esta capacidade está no centro do desenvolvimento permanente, em função da experiência de competências e dos saberes profissionais.

Paquay e Wagner (2001) destacam que não basta para o professor, como característica de sua autonomia, a auto-regulação de sua ação. Faz-se necessário, na medida em que pode orientar seu próprio aprendizado, uma análise crítica de suas práticas e dos resultados destas. Assim, o professor passa a ser considerado um estrategista que não se fia apenas nos conhecimentos de base, embora estes

estejam testados. Ele os atualiza regularmente, experimenta novas abordagens a fim de melhorar a eficácia de sua prática. Nesse sentido, Paquay e Wagner (2001, p. 140) asseveram que “através da reflexão sobre a prática e seus efeitos, o prático constitui para si um saber da experiência em evolução”.

A caminho do prático pesquisador, concordamos com Paquay e Wagner, os quais não vêem ruptura neste caminho e sim uma continuidade, o que é confirmado na seguinte fala.

Para ser reconhecido como “professor pesquisador”, é preciso não apenas ser capaz de empregar uma conduta reflexiva de análise e de resolução de problemas, mas também de produzir metodicamente mecanismos e ferramentas para a intervenção, e de explicitar seus fundamentos e de avaliar sistematicamente seus efeitos (PAQUAY; WAGNER, 2001, p. 140).

Esta postura de professor pesquisador, descrita por esses autores, se aproxima de forma qualitativa da que pretendemos, pois a mesma evidencia que não basta refletir e analisar, mas também, torna-se necessária a produção de organizações didáticas para intervenção, as quais devem explicitar seus fundamentos sistematicamente.

1.4 CARACTERIZANDO A PROPOSTA DE PESQUISA

Esta pesquisa propõe-se a investigar e a construir uma organização didática que procure identificar as conexões existentes entre Geometria Analítica Plana e Vetores com conteúdos da Matemática e/ou de outros saberes do currículo escolar, objetivando a construção de praxeologias matemáticas para o objeto matemático, Geometria Analítica Plana, com tratamento no estudo dos Vetores. Após isto, pôr em prática a organização didática construída, de tal forma que esta possibilite a aprendizagem significativa nos termos propostos por David Ausubel.

Na primeira fase da pesquisa, recorreremos às nossas reflexões a partir de nossa experiência no ensino-aprendizagem dos conteúdos acima descritos, a fim de identificar as conexões entre os assuntos e a postura do profissional que assumimos. Também fizemos revisões bibliográficas no que diz respeito à construção do conhecimento da Geometria Analítica Plana no contexto da história da Matemática, para verificar em que parâmetros ou contextos se deram o desenvolvimento da Geometria Analítica e do estudo dos Vetores, bem como de

outros conhecimentos matemáticos que possam ter servido de subsunçores⁴ para o desenvolvimento destes conhecimentos. Ainda neste momento, foi realizado um estudo bibliográfico na perspectiva de identificar possíveis conexões existentes entre os conteúdos da Geometria Analítica e dos Vetores.

Na segunda fase, realizamos reflexão com base na história destes conteúdos e de nossas experiências pedagógicas de como poderíamos propor praxeologias matemáticas à luz da antropologia do didático, proposta por Yves Chevallard. Para apresentação e desenvolvimento destes conteúdos no ensino médio, sobretudo, buscando as possíveis articulações destes conteúdos com aspectos da vida diária dos alunos, na busca da contextualização nos conhecimentos prévios. Na impossibilidade de contextualização no cotidiano do aluno, procuramos estabelecer uma contextualização no tempo e no espaço vinculada a uma contextualização pró-ativa ou retroativa na Matemática nos termos propostos por Silva e Santo (2004), Silva e Guerra (2005).

Com base na reflexão estabelecida na segunda fase, buscamos construir a organização didática a qual permitisse promover as interconexões entre a Geometria Analítica Plana e o estudo dos vetores. Esta organização didática procurou destacar os subsunçores comuns ou não a ambos os conteúdos, objetivando uma aprendizagem significativa. A organização didática foi posta em prática numa turma de terceiro ano do ensino médio de uma escola de ensino básico da rede federal de ensino vinculada ao Primeiro Comando Aéreo Regional (I Comar), Ministério da Aeronáutica, na cidade de Belém, Pará.

Quando da construção da organização didática utilizamos na primeira atividade a história da Matemática, na perspectiva dos ecos e vozes segundo Miguel e Miorim (2004), os quais descrevem esta perspectiva no sentido de utilizar a história da Matemática resgatando os acontecimentos históricos e trazendo à tona as várias vozes do contexto e suas devidas ressonâncias. Os textos selecionados enfocaram a construção do conhecimento da Geometria Analítica e dos Vetores, com o objetivo de que o aluno identificasse como se deu essa construção, além do que lhe permitisse identificar os conceitos subsunçores de ambos os conteúdos.

Nas atividades subseqüentes, utilizamos problemas abertos e de processos nos termos propostos por Huete e Bravo (2006), onde definem estes problemas

⁴ No sentido de conhecimento prévio que fará a ligação entre o conceito que o aluno já possui e o novo conceito.

como sendo aqueles que necessitam de conhecimentos acumulados ao longo da experiência escolar e cotidiana para sua resolução. Os problemas foram elaborados a partir de um único tema o qual descrevia a procura de um tesouro, sofrendo modificações em alguns dados, de tal forma a possibilitar ao aluno a variação de suas construções no sentido de identificar a importância do sistema de coordenadas para a localização de um objeto no plano, e também a relação das coordenadas de localização com cada um dos semi-eixos do sistema.

Esta pesquisa se caracteriza como sendo de natureza qualitativa, do tipo etnográfica, por promover uma observação participante, “a qual o pesquisador tem sempre um grau de interação com a situação estudada, afetando-a e sendo por ela afetado” (ANDRÉ; DALMAZO, 2005, p. 28). Além do que, o uso da etnografia propõe que a relação entre pesquisador e objeto pesquisado seja de interação constante, ou seja, o pesquisador é o instrumento principal na análise e na coleta dos dados. Outro fator que enquadra esta pesquisa como uma etnografia na educação é que ela dá ênfase no processo, naquilo que está ocorrendo, e não no resultado final.

As técnicas etnográficas são utilizadas por antropólogos e sociólogos, porém no início dos anos 1970 os pesquisadores da área de educação começaram a utilizar estas técnicas, o que originou a etnografia como metodologia de pesquisa na área educacional. Segundo Lüdke e André (1986, p. 13), a transposição da etnografia da área da antropologia e da sociologia para área da educação requereu algumas adaptações o que provocou certo afastamento do seu sentido original.

Para Lüdke e André (1986), a etnografia se caracteriza por ter um sentido próprio que é a descrição de um sistema de significados culturais de um determinado grupo. Esta caracterização também permite enquadrar esta pesquisa como do tipo etnográfica, pois a mesma pretende além de elaborar praxeologias para Geometria Analítica Plana, pô-las em prática na perspectiva de análise dessas práticas, as quais serão desenvolvidas em uma sala de aula, formada por alunos que possuem características comuns, como o fato de estarem se preparando para os concursos vestibulares.

Quanto ao uso da etnografia na educação, Wolcott (1975) apud Lüdke e André (1986, p. 14) “chama a atenção para o fato de que o uso da etnografia em educação deve envolver uma preocupação em pensar o ensino e aprendizagem dentro de um contexto cultural amplo”. Nesses termos, percebemos que na construção das seqüências didáticas existe uma preocupação com o contexto

escolar no qual estão inseridos os alunos, no sentido de destacar as relações existentes entre o conteúdo central que é a Geometria Analítica Plana e outros conteúdos, além de buscar identificar as aplicações destes conteúdos no cotidiano destes alunos seja ele o cotidiano escolar ou não.

Ao descrevermos o ambiente escolar no qual desenvolvemos a seqüência didática o identificamos como sendo um ambiente integrante de uma cultura escolar, e apoiado nas contribuições de Forquin (1993), que chama a atenção, inclusive, para o fato de que a cultura escolar se refere aos conhecimentos intencionalmente trabalhados na escola, de modo especial, na sala de aula e supõe uma seleção entre os materiais disponíveis em um determinado momento histórico e social. É que constatamos a relação desta pesquisa com a etnografia na educação, pois é ele quem afirma:

Educar, ensinar é colocar alguém em presença de certos elementos da cultura a fim de que ele deles se nutra, que ele os incorpore à sua substância, que ele construa a sua identidade intelectual e pessoal em função deles. Ora, um tal projeto repousa necessariamente, num momento ou noutro, sobre uma concepção seletiva e normativa da cultura (FORQUIN, 1993, p. 168).

Deste modo percebemos que ao eleger a Matemática, mais precisamente a Geometria Analítica Plana, como objeto matemático para construção das organizações didáticas, estaríamos elegendo intencionalmente um determinado elemento da cultura escolar o qual deverá possibilitar a construção de uma determinada identidade intelectual e pessoal. Além do que a seleção deste objeto se dá no momento histórico e social específico para a comunidade escolar, que é a preparação para o vestibular.

Segundo Forquin (1993, p. 167), a cultura escolar pode ser definida como:

o conjunto de conteúdos cognitivos e simbólicos que selecionados, organizados, “normalizados” rotinizados, sob efeitos de imperativos de didatização, constituem habitualmente o objeto de uma transmissão deliberada no contexto das escolas.

Desta forma poderíamos descrever a cultura escolar como um conjunto de *normas* que definem conhecimentos a ensinar e condutas a indicar, e um conjunto de *práticas* que permitem a transmissão desses conhecimentos e a incorporação desses comportamentos; normas e práticas coordenadas a finalidades que podem variar de acordo com finalidades religiosas, sociopolíticas ou simplesmente de

socialização. Normas e práticas não podem ser analisadas sem se levar em conta os agentes que são chamados a obedecer a essas ordens e, portanto, a utilizar dispositivos pedagógicos encarregados de facilitar sua aplicação, a saber, os professores.

O conjunto de conteúdos cognitivos se estabelece na cultura escolar a partir de reflexões estabelecidas pelos professores em consonância com as normas determinadas pela Lei de Diretrizes e Bases da Educação Brasileira e/ou os Parâmetros Curriculares Nacionais. Estas reflexões se fazem necessárias pelas modificações que surgem de geração em geração, ou seja, a única restrição exercida sobre o professor é o grupo de alunos que tem diante de si, isto é, os saberes que funcionam e os que “não funcionam” diante deste público. “Aliás, é a mudança de público que impõe freqüentemente à mudança dos conteúdos ensinados” (JULIA, 2001, p. 10). Nesse sentido Julia (2001) nos cita o seguinte exemplo:

Uma das primeiras gramáticas escolares do francês (a de Noël e Chapsal) foi abandonada a partir do momento em que o ensino primário tornou-se um ensino de massa. Seu conteúdo era julgado demasiado complicado, e era necessário chegar rapidamente a uma simplificação dos métodos e dos exercícios (CHERVEL, 1977 apud JULIA, 2001, p. 11).

Considerando as questões sobre o conteúdo a ser ensinado faz-se necessário refletir sobre a evolução das disciplinas escolares, levando em conta diversos elementos que, em ordem de importância variada, compõem esta estranha alquimia: os conteúdos ensinados, os exercícios, as práticas de motivação e de estimulação dos alunos, que fazem parte destas “inovações” que não são vistas, as provas de natureza quantitativa e qualitativa que asseguram o controle das aquisições. Assim sendo realizamos reflexões sobre a evolução da disciplina Matemática, mais precisamente no conteúdo da Geometria Analítica Plana e dos Vetores, como descrevemos na primeira fase desta pesquisa.

Wolcott (1975) apud Lüdke e André (1986, p. 14) propõe alguns critérios para utilização da abordagem etnográfica nas pesquisas que focalizam as escolas, os quais destacamos:

1- “O problema de redescoberta no campo”. O que significa que o pesquisador deve evitar a definição rígida e *a priori* de hipóteses, isto não significa a

inexistência de planejamento ou de teoria, mas a inconveniência de uma atitude inflexível em relação ao problema estudado.

2- “O pesquisador deve realizar a maior parte do trabalho de campo pessoalmente”, desta forma é destacado que a pessoa que escreve a etnografia deve ter tido uma experiência direta com a situação de estudo. Fato este que coaduna com a nossa posição de professor que reflete na ação e sobre a ação.

3- “O trabalho deve ter uma duração considerável de pelo menos um ano escolar”. No nosso caso já tínhamos contatos anteriores com a comunidade escolar, na qual as praxeologias foram postas em práticas, porém as atividades específicas desta pesquisa foram realizadas em seis meses.

4- “O pesquisador deve ter tido experiências com outros grupos da cultura escolar”. A justificativa desse critério é que o contraste ajuda a entender melhor o sentido que o grupo estudado atribui a suas experiências. Como nossas reflexões são baseadas nas experiências que tivemos com alunos com características e objetivos semelhantes, este critério também condiz com a postura de pesquisa que assumimos.

5- “A abordagem etnográfica combina vários métodos de coletas de dados”. Há dois métodos básicos utilizados pela etnografia: a observação direta das atividades do grupo estudado e entrevistas com os informantes para captar suas explicações. Quanto ao nosso trabalho além de utilizar a observação, com registros escritos, de voz, fotográficos e vídeos, também foi utilizado as anotações realizadas pelos alunos.

6- “O relatório etnográfico deve conter uma grande quantidade de dados primários”. Significa dizer que além das descrições apuradas da situação estudada, o estudo etnográfico deve apresentar muito material produzido pelos informantes, como documentos, desenhos e outros produtos que possam ilustrar a perspectiva dos participantes. Estes critérios são evidenciados neste relatório de forma bastante criteriosa.

Esses critérios caracterizam de forma substancial o uso da etnografia como metodologia desta pesquisa, uma etnografia não nos termos usados na antropologia, mas sim na sua adaptação para a educação nos termos propostos por Wolcott (1975), e na releitura realizada por Lüdke e André (1986).

1.5 CARACTERIZANDO O AMBIENTE ONDE FOI DESENVOLVIDA A ORGANIZAÇÃO DIDÁTICA

A organização didática construída foi posta em prática na Escola de Ensino Fundamental e Médio Tenente Rêgo Barros (ETRB), localizada na cidade de Belém, no estado do Pará (Brasil). Apesar de estar ligada à Aeronáutica não tem como objetivo a formação militar e sim o ensino básico, de acordo com as normas da Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB) (BRASIL, 1996). Neste sentido, suas atividades educacionais objetivam, principalmente, a formação e a preparação de indivíduos para o exercício da cidadania. De acordo com o Capítulo II, Art. 22, da LDB: “A educação básica tem por finalidades desenvolver o educando, assegurar-lhe a formação comum indispensável para o exercício da cidadania e fornecer-lhe meios para progredir no trabalho e em estudos posteriores”.

Esta escola foi fundada no dia 06 de abril de 1941, com o objetivo de ministrar instrução aos cabos e soldados do Núcleo do 7º Corpo de Base Aérea, bem como prepará-los para o exame de admissão a outros cursos militares. A idéia inicial de seção de instrução evoluiu rapidamente para escola assistencial, através de convênio firmado entre o comandante do Núcleo de Base e a Prefeitura de Belém, passando a se chamar Escola Primária Tenente Rêgo Barros.

Em 1969, passou para a categoria de Grupo Escolar através de ato do Secretário de Educação. Em 1973, veio a funcionar como Escola de 1º grau após a reforma do ensino, e, em 1982 foi implantado o ensino de 2º grau. Atualmente, a Escola Tenente Rêgo Barros é caracterizada como escola de natureza assistencial do Comando da Aeronáutica, atuando nos níveis fundamental e médio.

No início, a escola contava com apenas 2 (duas) professoras cedidas pela Prefeitura de Belém, com formação em Magistério. Hoje, a escola atende além dos filhos de militares e de funcionários civis da Aeronáutica, filhos de militares de outras forças e filhos de pessoas que não têm nenhum vínculo com as forças armadas, ou seja, da comunidade em geral.

A escola possui, hoje, um prédio com 61 salas de aula; três laboratórios, distribuídos da seguinte maneira: Matemática, Física e Biologia; um museu de ciências; um ginásio poliesportivo coberto e mais três quadras descobertas; uma biblioteca com acervo de 10.146 livros e 137 títulos de revistas; um restaurante; um

auditório com capacidade para 60 lugares; um teatro com capacidade para 600 lugares; esta estrutura ocupa uma área de 14.663 metros quadrados.

Neste ano de 2006, estão matriculados 1829 alunos. Destes, 1380 no ensino fundamental e 449 alunos no ensino médio, assim distribuídos: 1ª série (137 alunos), 2ª (117 alunos), 3ª (126), 4ª (173), 5ª (189), 6ª (240), 7ª (185), 8ª (223), 1ª série do ensino médio (181 alunos), 2ª (136), 3ª (122). Quanto ao quadro docente, 97% são civis do quadro de Magistério da Aeronáutica e o restante é Militar da Aeronáutica, com formação pedagógica em licenciatura nas devidas disciplinas que atuam. A escola é constituída por 122 docentes, destes, 16 têm Magistério, 40 têm graduação, 54 têm especialização e 12 têm mestrado, além de 10 se especializando, 6 mestrandos, 2 doutorandos.

Para a realização da intervenção, escolhemos trabalhar com uma classe da 3ª série do ensino médio. O motivo que nos incentivou essa escolha está baseado na grade curricular da escola que segue, nesse nível de ensino, os conteúdos que são exigidos pelas universidades Estadual e Federal do Pará, quando da realização de seus processos seletivos de ingresso (vestibulares). Sendo assim, o conteúdo de Geometria Analítica e Vetores está no programa do 3º ano do ensino médio.

A escola possui três turmas de terceiro ano, cada turma tem em média 40 alunos. O ensino de Matemática é trabalhado por dois professores, um com uma carga horária de 2 aulas semanais de 45 minutos cada, e outro com carga horária de 3 aulas semanais de 45 minutos. A escolha da turma para o desenvolvimento da pesquisa se deu em função da disponibilidade de horário da turma, pois foi critério da proposta que a atividade seria realizada em uma turma dentro do horário destinado para o professor titular.

As atividades foram realizadas na turma 32A₁, com uma carga horária semanal de 3 horas aulas com 45 minutos cada: uma às quartas-feiras de 12h às 12h 45min, e outras duas aulas às quintas-feiras de 15h às 16h 30min, tendo início no dia 16 de março e término previsto para o dia 17 de junho, totalizando uma carga horária de 38 horas aulas. Esta turma possui 42 alunos, numa faixa etária que vai de 16 anos até 19 anos. Na turma, 30 alunos entraram na escola na educação infantil.

2 A TEORIA ANTROPOLÓGICA DO DIDÁTICO COMO REFERENCIAL NA CONSTRUÇÃO DA ORGANIZAÇÃO DIDÁTICA PARA A GEOMETRIA ANALÍTICA PLANA

Na construção da organização didática buscamos apoio na Teoria Antropológica do Didático nos termos propostos por Yves Chevallard (1991). Quanto à Teoria da Aprendizagem Significativa, proposta por David Ausubel (1968) a utilizaremos apenas como caminho metodológico para pôr em prática a organização didática construída. Desta forma enfatizaremos neste quadro teórico a Teoria Antropológica do Didático e resguardaremos a descrição dos conceitos mais relevantes da Aprendizagem Significativa para o momento em que eles forem surgindo no decorrer das atividades com os alunos.

Caminhos à Abordagem Antropológica do Didático

Esta teoria foi concebida por Yves Chevallard, na França, na década de 1990. A didática, nesta perspectiva, se torna o estudo do homem (ou das sociedades) aprendendo, ensinando e pesquisando Matemática. A Matemática, como uma atividade humana, pode ser modelada nos termos de praxeologias, chamadas de praxeologias matemáticas ou organizações matemáticas. Esta proporciona um método de descrição e análise das práticas institucionais e o estudo das condições das mesmas. Deste modo, segundo Rossini (2005, p. 2):

Essa teoria permite abordar a complexidade que envolve a prática profissional do professor, que se encontra diante do problema de reconstruir as organizações matemáticas que aparecem nos programas oficiais e nos livros didáticos ao preparar um determinado tema para o ensino e aprendizagem em sala de aula. Cabe ao professor construir organizações didáticas tendo por objetivo proporcionar condições favoráveis para aprendizagens das organizações matemáticas em estudo.

Ao refletir sobre a teoria antropológica do didático e ao concordarmos com Rossini (2005), percebemos a relevância desta teoria para a nossa pesquisa, pois, a partir dela, poderemos desenvolver e analisar organizações didáticas que venham a atender nossas inquietações no ensino-aprendizagem da Geometria Analítica e Vetores. Assim, é pertinente tecermos algumas considerações a respeito desta teoria.

Para Chevallard et al. (2001), ao analisar a relação entre prática e teoria em toda atividade, inclusive a atividade matemática, existem duas partes que vivem em simultaneidade. De um lado, estão as tarefas e as técnicas, que eles denominam de prática, ou do grego a *práxis*, e de outro lado, as tecnologias e as teorias, as quais, segundo os autores, do grego o *logos*. O *logos* é composto de elementos que possibilitam a justificativa e o entendimento do que é feito, ou seja, é o domínio do discurso fundamentado sobre a prática.

Quanto à relação entre *práxis* e *logos*, estes autores descrevem que:

[...] não há *práxis* sem *logos*, mas que também não há *logos* sem *práxis*. As duas estão unidas como dois lados de uma folha de papel. Quando juntamos as palavras gregas *práxis* e *logos* encontramos a palavra *praxeologia* (CHEVALLARD et al. 2001, p. 251).

Desta forma, descrevemos a *praxeologia matemática* como uma organização matemática vivenciada em sala de aula que deva permitir que os alunos atuem com eficácia para resolver problemas e, ao mesmo tempo, entender o que fazem de maneira racional. Em uma maneira simplificada, nós podemos dizer que o que aprendemos e ensinamos em uma instituição educacional são praxeologias matemáticas.

Na atividade matemática (praxeologia matemática), concordamos com Chevallard et al. (2001) quando ele defende a existência de dois níveis, que podem ser descritos da seguinte maneira:

- O nível da *práxis*, que inclui alguns tipos de problemas que são estudados, assim como as técnicas/tarefas – este bloco é considerado como saber fazer - requeridas para resolver esses problemas.
- O nível do *logos* ou do "conhecimento", do discurso que descreve, explica e justifica as técnicas usadas. Isto é chamado de tecnologia, e o argumento formal, que justifica tal tecnologia, é a teoria.

Objetivando a elaboração de uma praxeologia matemática, é imprescindível destacar, na perspectiva da Antropologia do Didático, que, tanto o matemático pesquisador como os alunos de Matemática, cada qual em seu nível, utilizam técnicas didáticas como instrumentos para construir uma praxeologia matemática. Já o professor utiliza técnicas didáticas para reorganizar certas obras matemáticas, de modo que dêem resposta às questões que os alunos apresentam, ou seja, o

professor, ao reconstruir as organizações matemáticas objetivando o ensino, estará construindo uma organização didática.

Na perspectiva de construir uma organização didática para o ensino-aprendizagem da Geometria Analítica Plana tomando como base o estudo dos Vetores, construímos/reconstruímos praxeologias, pois isto significa uma reorganização de uma obra matemática para que possa integrar outros objetos. É construir uma nova organização matemática que incluirá a anterior, o que se justifica nas palavras de Chevallard et al. (2001, p. 253):

Para construir a nova organização, terá de elaborar uma nova praxeologia, com um tipo de problema determinado, uma ou várias técnicas, sua tecnologia e sua teoria correspondente. Organizar é criar uma praxeologia. Uma praxeologia nova ou renovada, uma organização praxeológica.

As praxeologias matemáticas não emergem de repente e não têm um formulário pronto e definitivo. Ao contrário, são o resultado de uma atividade complexa e progressiva, onde existem alguns relacionamentos invariáveis em sua dinâmica operativa, que podem ser modelados. Aparecem dois aspectos muito perto da atividade matemática:

- O processo da construção matemática; o processo do estudo e
- O resultado desta construção; a praxeologia matemática.

Enfatizando esses dois aspectos Chevallard et al. (2001, p. 276) destacam que “elaborar uma praxeologia matemática supõe para qualquer estudante, seja matemático pesquisador ou aluno de matemática, é entrar em um *processo de estudo*”. Entendemos que o professor pode se caracterizar ao mesmo tempo como matemático pesquisador e como aluno de matemática. Sendo assim, ele também poderá, além de reconstruir, também construir junto com seus alunos praxeologias matemáticas, em sala de aula.

O processo de estudo, segundo Chevallard et al. (2001), não é um processo homogêneo, e sim está estruturado em diferentes estágios. Estágios estes que não ocorrem ordenadamente, uma vez que estão distribuídos de forma dispersa ao longo do processo de estudo, isto porque cada estágio do processo de estudo faz referência a um aspecto da atividade de estudo.

Ao caracterizar o processo de estudo, Chevallard et al. (2001) destacam como um espaço constituído por seis estágios educacionais: (1) primeiro encontro,

se refere aos objetos matemáticos que constituem um tipo de problema; (2) exploração do tipo de tarefas, é quando relacionamos um determinado tipo de problema com a construção de uma técnica adequada para abordá-los; (3) construção do ambiente tecnológico-teórico, refere-se aos dois níveis de justificativa da prática matemática; (4) trabalho na técnica, se refere ao domínio, precisão e nova criação de técnicas matemáticas; (5) institucionalização e (6) avaliação, referem-se à obra matemática em seu conjunto.

Uma vez que este processo de estudo é uma atividade humana, então ele pode ser modelado em termos de praxeologias, que Chevallard et al. (2001) as descreveram como praxeologias didáticas (organizações didáticas). Deste modo, este processo de estudo, como toda praxeologia, descrito em forma de praxeologias didáticas, inclui um jogo de tarefas educacionais, técnicas educacionais (para enfrentar estas tarefas) e tecnologias e teorias educacionais (para descrever e explicar estas técnicas).

Ao nosso entendimento, e, tomando como base os estudos de Almoulloud (2000a), Miguel (2005) e outros, praxeologia didática são técnicas de estudo utilizadas tanto pelo matemático, quanto pelo professor, como pelo aluno, apesar de que, nem sempre os três se deparam com os mesmos problemas didáticos. Mas, nos três casos, o que fazem é colocar em prática – às vezes criar – uma técnica de estudo da matemática. Quando essas técnicas de estudo se realizam em sala de aula, a tarefa deve ser desenvolvida de forma colaborativa entre professor e alunos.

Estas tarefas colaborativas no contexto da sala de aula podem ocorrer em situações didáticas complexas como, por exemplo, o aluno pode estar desenvolvendo um raciocínio associado a uma questão matemática, mas se esta ação não for devidamente explicitada por ele e compreendida pelo professor, dificilmente será validada como sendo uma atividade matemática. O professor como o coordenador de estudo tem esse desafio de compreender traços do raciocínio do aluno. A partir desses traços, o desafio docente consiste em verificar se existe a presença de uma atividade matemática. No caso afirmativo, o aluno está fazendo Matemática. Na continuidade, é preciso ainda que essa atividade seja institucionalizada pelo professor no plano coletivo da classe. Nesse caso, uma atividade matemática que estava sendo realizada, estritamente, no plano individual,

passa a ter sua validade reconhecida no espaço mais amplo de uma instituição que é a classe.

Na perspectiva da Teoria Antropológica do Didático são enfatizados três tipos de atividade: as estritamente humanas; as estritamente institucionais e as humanas reguladas por critérios institucionais, as quais podemos exemplificar, respectivamente, como sendo o ato de tomar água, emitir uma certidão de nascimento e ministrar uma aula de matemática.

As atividades do terceiro tipo, as atividades humanas reguladas por critérios institucionais, como a exemplificada acima, o ato de ministrar aula de matemática, o professor tem a liberdade de escolha do objeto de ensino, porém esta escolha é vinculada a alguns critérios que devem ser considerados, como série ou faixa etária dos alunos, matriz curricular da instituição e outros. Sendo assim, quando da construção da organização didática, para no caso a organização matemática escolhida, é necessário considerar o conjunto de regras e normas estabelecidas pelas instituições escolares, no sentido de regular a atividade. São esses tipos de atividades que caracterizam as atividades humanas e das instituições sociais, ou seja, o conectivo significa estar na intersecção entre as atividades estritamente humanas e as atividades estritamente institucionais. É no conjunto das atividades humanas e das instituições sociais que se localizam as atividades matemáticas e que segundo Chevallard (2002) apud Almoulloud (2000b) é um dos princípios fundamentais da Teoria Antropológica do Didático.

As tarefas colaborativas em sala de aula se caracterizam por tarefas onde o professor assume o papel de coordenador do processo, cabendo ao aluno contar com o professor para que o ajude a vivenciar os diferentes momentos de aprendizagem. O professor conta com a energia/disposição de seus alunos, o que, possivelmente, acarretará em seu envolvimento no processo de estudo, para que a ajuda do professor seja eficaz.

As necessidades praxeológicas são necessidades de poder atuar mais e melhor, e também de maneira justificada e inteligível. Esta necessidade nos orienta no sentido de identificar e reorganizar praxeologias para que possamos tornar as aulas que envolvem os objetos matemáticos – Geometria Analítica Plana e Vetores – mais significativas para os alunos, de tal forma a orientá-los na construção de suas próprias praxeologias, no que se refere a estes objetos matemáticos.

A Teoria Antropológica do Didático nos possibilita a organização do estudo por dois aspectos conectados, o didático e o matemático, além de permitir, em cada caso, que as atividades propostas na organização matemática pretendida para a Geometria Analítica Plana e Vetores pudessem ser descritas sob o ponto de vista prático e do saber matemático envolvido.

Entendemos o saber matemático como uma forma particular de conhecimento; é resultado da ação humana: é produzido, é ensinado ou se transpõe nas instituições. Como enfatizamos anteriormente, a organização praxeológica de um saber matemático serve para analisar, descrever e estudar as condições da sua realização; para defini-la nos termos de objeto, pessoa e instituição são descritos três postulados que introduzem as noções de tarefas, técnicas, tecnologias e teorias:

- O primeiro diz que: “Toda prática institucional pode ser analisada, de diferentes pontos de vista e de diferentes maneiras, em um sistema de tarefas relativamente bem delineadas” (ALMOULLLOUD, 2000b, p. 162). Neste primeiro postulado, é introduzida a noção de tarefa, a qual, ao nosso entender, e utilizando uma problemática da Geometria Analítica Plana, seria como calcular a distância entre dois pontos. Porém, a semântica da palavra tarefa engloba atividades gerais como tocar violão, abrir uma porta, determinar a área de um triângulo etc. Assim, uma tarefa se expressa por um verbo e supõe um objeto relativamente preciso e de tal forma construído nas instituições e suas reconstruções são objetos didáticos.

Na essência da idéia da praxeologia encontram-se as noções interligadas de tarefa e de tipo de tarefas. Significa dizer que determinar a equação da reta é um tipo de tarefa, ao passo que determinar a equação da reta dado o coeficiente angular e um ponto é uma tarefa. Quando uma tarefa t está associada a um tipo de tarefa T , usando a linguagem matemática, falaremos que t pertence a T . Na maioria dos casos, uma tarefa (e o tipo de tarefa associada) é expressa por meio de um verbo: calcular uma raiz quadrada, limpar uma mesa, desenvolver uma dada expressão literal etc. A noção de tarefas ou tipo de tarefas que iremos assumir é a noção proposta pela Teoria Antropológica do Didático a qual enfatiza a existência de um objeto preciso. Limpar a mesa é um tipo de tarefa, mas, somente, limpar não será. Um objeto sempre aparece colado à ação envolvida na tarefa. Do mesmo modo, calcular a distância entre dois pontos é um tipo de tarefa, mas somente a ação de calcular não é um tipo de tarefa.

Quando falamos simplesmente em calcular estaremos considerando que se trata de um gênero de tarefa, que necessita ainda de um complemento para ter seu sentido mais definido. Um gênero de tarefas somente existe sob a forma de diferentes tipos de tarefas, pois quando falamos de um tipo de tarefa o seu conteúdo fica especificado com bem mais clareza. No contexto do estudo da matemática, calcular é um gênero de tarefa, mas calcular a distância entre dois pontos é um tipo de tarefa e não um gênero de tarefa.

No decorrer da vida escolar, no que se refere aos estudos da Matemática, o gênero calcular sofre ampliações, sempre envolvendo novos tipos de tarefas. Ao incluir novos tipos de tarefa, o gênero calcular assume significados diferentes como por exemplo no ensino médio o aluno aprende a calcular a distância entre dois pontos, depois mais tarde, na graduação aprende a calcular a derivada de uma função etc. Acontece a mesma coisa com os gêneros: demonstrar, construir, ou ainda exprimir alguma coisa em função de outra.

Sendo assim, podemos asseverar o que é destacado em Chevallard (2002, p. 03), tarefas, tipos de tarefas e gêneros de tarefas são dados da construção praxeológica. São artefatos, obras, produções institucionais, cuja reconstrução em tal instituição, por exemplo, em tal classe, é um problema singular que é o próprio objeto da didática.

- O segundo postulado descreve que para a realização de qualquer tarefa é necessário se colocar em ação uma técnica, como afirma Almoulloud (2000b, p. 162) quando diz que “O cumprimento de toda tarefa decorre do desenvolvimento de uma técnica”. A palavra técnica aqui descrita está sendo usada como uma “maneira de fazer” particular e não necessariamente um procedimento estruturado e metódico, ou algorítmico, nem sempre assume o sentido usual. Uma técnica pode resolver algumas tarefas de determinado tipo, mas, não obrigatoriamente todas. Essa característica é definida como a capacidade intelectual da técnica (BOSCH; CHEVALLARD, 1999).

Com as noções de tarefas e técnicas, cria-se o bloco técnico-prático associado a um saber fazer; a vida das instituições (aluno e professor) é feita de fazer escolhas de tarefas e técnicas. A relação institucional a um objeto é constituída pelo conjunto de tarefas que devem ser resolvidas e pelas técnicas usadas pela instituição. Dessa forma, a pessoa realiza diferentes tarefas, simultânea ou

sucessivamente, fazendo emergir uma relação pessoal com os objetos que teve contato.

A afirmativa abaixo chama a devida atenção para o que foi dito:

Na maioria das vezes, as tarefas e as técnicas correspondentes em uma dada instituição, tendem ser sempre as mesmas; em meio a essa rotina, pode surgir uma tarefa problemática, isto é, para a qual não existe uma técnica apropriada, seja porque a tarefa é nova (para o sujeito ou para a instituição), seja porque a técnica existente está sendo questionada. Nesse caso, pode-se obter uma adaptação à técnica existente, ou uma transposição da técnica de outra instituição ou, até mesmo, a criação de uma técnica inédita. Um novo saber-fazer é constituído e é preciso, ainda, organizá-lo para que se possa assegurar o seu funcionamento regular na instituição. Relacionando a essa organização, o terceiro postulado é enunciado (MIGUEL, 2005, p. 42).

- O terceiro postulado é descrito por Almoulloud (2000b) da seguinte forma: “a ecologia das tarefas, quer dizer, as condições e entraves que permitem sua produção e sua utilização nas instituições”. A ecologia da qual se refere Almoulloud, a partir das descrições enfatizadas por Chevallard, diz respeito, ao nosso entender, às transposições de técnicas e/ou tecnologias de uma instituição para outra ou até mesmo da realização de uma tarefa para outra. Na perspectiva da construção de organizações didáticas para ensinar Geometria Analítica Plana a partir do estudo de Vetores, nas instituições de nível médio, buscamos transpor as técnicas e/ou tecnologias utilizadas nas instituições de nível superior, no intuito de enfatizar as conexões existentes entre estes objetos matemáticos, além do que as organizações matemáticas propostas para o ensino médio não evidenciam o estudo dos vetores muito menos essas conexões.

Desta forma, este postulado destaca que, para existir numa instituição, uma técnica, esta deve ser pelo menos compreensível, legível e justificada. Trata-se aqui, de uma condição mínima para permitir o seu controle e garantir a eficácia das tarefas feitas, que são, geralmente, tarefas ao nosso entender realizadas com a colaboração de vários atores. Esse entrave (condição) ecológico implica então a existência de uma tecnologia (discurso descritivo e justificativo das tarefas e técnicas) que Bosch e Chevallard (1999) chamam de tecnologia da técnica. Toda tecnologia precisa também de uma justificação, que chamamos de a teoria da

técnica. Isto é, no nível técnico-prático o aluno aprende a fazer enquanto que no nível teórico-tecnológico ele reconhece como fez, ou seja, sabe o que fez.

Um conjunto de técnicas, de tecnologia e de teorias organizadas para um tipo de tarefa, forma uma *organização “praxeológica” (ou praxeologia) pontual*.

Se considerarmos, por exemplo, o ensino da Matemática no ensino médio, pode-se falar:

- de uma organização praxeológica *pontual* no que diz respeito à resolução de um dado tipo de problema de reta - organização que responderia à seguinte questão: “como determinar a equação de uma reta”;
- de uma organização *local* no que diz respeito à resolução de diferentes tipos de problemas de reta; sejam eles, determinar a equação, encontrar o coeficiente angular, determinar a equação que descreve a família de retas paralelas etc.
- enfim, de uma organização *regional*, no que diz respeito, por exemplo, à noção de função numérica (que corresponde a todo um setor da Matemática ensinada no ensino médio).

Um *saber* diz respeito a uma organização praxeológica particular, com certa “generalidade”, permitindo-lhe funcionar como uma máquina de produção de conhecimento.

Em resumo ao que propõem Chevallard et al. (2001) quanto à distinção entre técnica, tecnologia e teoria, Miguel (2005) descreve que esta diferença é de ordem funcional e deve sempre se referir ao tipo de tarefas que se toma como ponto de referência. Para a autora, no âmbito da tecnologia situam-se os conceitos e as noções que permitem compreender e controlar a atividade humana; nele, representações de objetos ostensivos são manipuladas concretamente para permitir materializar explicações e justificativas necessárias ao desenvolvimento da técnica; a teoria é a especulação abstrata da tecnologia. No plano teórico estão as definições, os teoremas, as noções mais abrangentes e abstratas que servem para explicar, justificar e produzir tecnologias. Cria-se, então, o bloco teórico-tecnológico associado ao saber.

Para melhor descrever estes três postulados, destacaremos como exemplo a seguinte praxeologia: para realizar o tipo de tarefas como calcular a distância entre dois pontos, utilizamos como uma das técnicas, modelar esta distância como a hipotenusa de um triângulo retângulo, o que nos permitirá encontrar a tecnologia

desta técnica a qual será o teorema de Pitágoras o que é justificado através da teoria da semelhança de triângulos. Sendo assim, podemos descrever a semelhança de triângulos como a teoria do tipo de tarefas calcular a distância entre dois pontos.

Analisando a Teoria da Antropologia do Didático percebemos um novo enfoque para o conceito de didática da Matemática, onde a didática identifica tudo que pode ser relacionado ao estudo e ao dispositivo automático de entrada ao estudo, como evidenciam Chevallard et al. (2001, p. 59):

A didática da matemática é a ciência do estudo e da ajuda para o estudo da matemática. Seu objetivo é chegar a descrever e caracterizar os processos de estudo – ou processos didáticos – para propor explicações e respostas sólidas para as dificuldades com as quais se deparam todos aqueles (alunos, professores, pais, profissionais etc.) que se vêem levados a estudar matemática ou ajudar outros a estudá-la.

Nesta perspectiva, podemos destacar que a didática propõe-se a estudar o desenvolvimento da atividade matemática e das necessidades para o seu ensino e aprendizagem. Ao refletirmos sobre as atividades que realizamos, podemos diferenciá-las em dois tipos:

A manual e a intelectual, a matemática é organizada no segundo tipo e trabalha com noções, raciocínios, intuições, idéias e, também com elementos materiais como lápis, papel, régua, compasso, calculadora, computador. Estes últimos, geralmente são de suporte, às vezes indispensáveis, mas não fazem parte da própria atividade (MIGUEL, 2005, p. 32).

Na atividade matemática podemos descrever o formalismo, os gráficos, as palavras etc. como objetos sensíveis particulares que podem intervir na atividade matemática, como representações de outros objetos, com a função de produzir conceitos, mas não se pode considerar apenas essa função instrumental na análise didática do desenvolvimento do saber matemático.

A organização didática nos termos da Antropologia do Didático pressupõe uma intenção didática que se manifesta por meio da formação de instituições, chamadas por Bosch e Chevallard (1999) sistemas didáticos. Tal sistema é composto por dois ou mais sujeitos da instituição, ocupando as posições de

professor e de aluno, e um conjunto de objetos institucionais visados para os sujeitos na posição de aluno.

Ao se tratar da natureza dos objetos didáticos e de seu funcionamento na atividade matemática, Bosch e Chevallard (1999) estabeleceram uma “dicotomia” fundamental distinguindo dois tipos de objetos: os objetos ostensivos e os não-ostensivos. Os objetos ostensivos têm certa materialidade e, por isso, são perceptíveis aos sentidos humanos e podem ser manipulados: sons, grafismos e gestos, ou seja, se manifestam como signos.

Os objetos não-ostensivos são, então, segundo os autores, todos esses “objetos” que, como as idéias, as intuições ou os conceitos, existem institucionalmente sem que, no entanto, eles sejam vistos, ditos, escutados, percebidos ou mostrados por conta própria. Eles só podem ser evocados (interpretados) ou invocados pela manipulação adequada de certos objetos ostensivos associados (uma palavra, uma frase, um gráfico, uma escrita, um gesto, ou todo um discurso). Assim sendo, os objetos “reta, ponto e plano” são objetos não-ostensivos que aprendemos a identificar e a ativar por meio de certas expressões, escritas, e gráficos colocados em jogo nas práticas e situações específicas. A equação da reta e a representação gráfica de uma reta são objetos ostensivos, os quais manipulados adequadamente podem conduzir à aprendizagem dos objetos não-ostensivos. A assertiva é asseverada na citação abaixo.

De maneira um tanto paradoxal, uma vez estabelecida esta dicotomia, postula-se a coexistência permanente dos objetos ostensivos e os objetos não-ostensivos, que chamamos dialética de objetos ostensivos e não-ostensivos: os objetos não-ostensivos emergem da manipulação de objetos ostensivos mas, ao mesmo tempo, esta manipulação sempre é guiada e controlada por objetos não-ostensivos. O conceito de número inteiro ou de função linear não existe sem qualquer atividade manipulativa de ostensivos (tanto lingüístico como gráfico, gestual e da escrita, sem esquecer-se da origem da manipulação concreta de objetos materiais). Reciprocamente, qualquer manipulação de ostensivos é controlada pela "ativação" ou "evocação" de objetos não-ostensivos cujas características podem ser vistas alterados ao longo da atividade (BOSCH, 2000 p. 10)⁵.

Ao analisarmos a ação conjunta dos objetos ostensivos e não-ostensivos em uma organização matemática poderemos descrevê-la em termos de signos os

⁵ Tradução nossa.

objetos ostensivos e em termos de significados os objetos não-ostensivos, além do que podemos destacar a função dos ostensivos como sendo instrumental, isto é, materiais ou ferramentas que na organização matemática servem para ativar os objetos não-ostensivos. A outra função é semiótica, que diz respeito à capacidade de produzir sentido ou significado aos não-ostensivos. As duas funções co-habitam, isto é, vários objetos ostensivos aparecem na realização de uma atividade matemática, sem que se possa ativá-los individualmente, sendo suas funções distintas dependendo da técnica. A co-ativação dos objetos ostensivos e não-ostensivos no desenvolvimento de uma técnica pressupõe a manipulação de objetos ostensivos regulados pelos não-ostensivos. Os objetos ostensivos constituem a parte perceptível da organização matemática. Apesar de estar sendo enfocada a co-ativação no nível da técnica, esta co-ativação de objetos ostensivos e não-ostensivos é sempre presente tanto no nível da técnica como no ambiente tecnoteórico. O que é exemplificado no exposto abaixo.

A técnica que conduz a escrever $(x^3 + x + 1) + (x^2 + 4x - 2) = -1 + 5x + x^2(1 + x)$ supõe uma manipulação de objetos ostensivos escritos (parênteses, letras, cifras etc.), orais (pequenos discursos do tipo “x mais 4x, 5x....”) e gestuais (por exemplo para agrupar os termos de mesmo grau e verificar que não se esqueceu de nenhum). Essa manipulação é monitorada por objetos não-ostensivos, dentre dos quais a noção de arranjos de termos por ordem decrescente dos expoentes, a noção de “termos (ou monômios) de mesmo grau, a noção de “*fatoração por x^2* ”, ou ainda a noção de “resto de ordem 2” etc. (ALMOULLLOUD, 2000b, p. 164).

Na citação acima se percebe a necessidade de evocar objetos não-ostensivos para podermos nos aproximar, culturalmente, dos ingredientes supostos necessários, não para agir, mas para justificar e explicar as ações, seja da tecnologia da técnica, porque é em nível tecnológico que podemos tentar situar conceitos e noções permitindo compreender e controlar a atividade matemática.

A Teoria Antropológica do Didático, nos termos descritos nesta dissertação, nos possibilitou identificar elementos de uma organização matemática, como os níveis do saber fazer (tarefas e técnicas) e do saber (tecnológico e teórico), os quais nos permitiram analisar a organização didática para Geometria Analítica Plana, com tratamento no estudo de Vetores, tanto no momento de sua construção quando da sua efetiva aplicação em sala de aula. Outro elemento da teoria que também nos permitiu análise são os tipos de objetos de uma organização matemática, a saber, os

objetos ostensivos e os objetos não-ostensivos. Ainda neste enfoque, entendemos que a didática da Matemática pressupõe a construção de praxeologias que poderão nos ajudar a resolver os problemas que nos são apresentados durante o desenvolvimento da atividade profissional, no que se refere ao ensino-aprendizagem da Geometria Analítica Plana. Assim sendo, passaremos à construção de praxeologias para a Geometria Analítica Plana com tratamento no estudo dos Vetores.

3 CONSTRUINDO PRAXEOLOGIAS PARA A GEOMETRIA ANALÍTICA PLANA

Ao realizar a primeira fase da pesquisa foi possível identificarmos conexões existentes entre os conteúdos da Geometria Analítica Plana e o estudo dos Vetores - usamos esta nomenclatura em função de que no ensino médio as organizações matemáticas propostas para esses conteúdos os apresentam de forma desconectada. Feita a identificação das conexões, passamos a construir praxeologias matemáticas para estes conteúdos que, além de realizar a clarificação das conexões dos mesmos, também buscasse outras conexões não só dentro da Matemática, mas também com conteúdos de outras disciplinas. Esta etapa serviu como um organizador prévio para a construção da organização didática.

Após a construção de cada praxeologia matemática procuramos pô-las em prática através de uma organização didática, a qual propiciasse ao aluno vários momentos de indagação, investigação e (re)descoberta, que possibilitasse uma aprendizagem significativa da Geometria Analítica Plana, bem como a construção de praxeologias matemáticas deste conteúdo, com destaque para a localização de um ponto no plano, a distância entre dois pontos e a equação da reta, visualizando suas conexões e interconexões com conteúdos da Matemática e de outras áreas de conhecimento.

Além disto, as praxeologias objetivavam a manipulação de objetos ostensivos, por parte dos alunos, para que pudessem através desta manipulação apresentar para o professor pesquisador que possivelmente teriam assimilado os objetos não ostensivos. O que também foi considerado como elemento de análise nesta pesquisa.

3.1 A HISTÓRIA DA MATEMÁTICA COMO ORGANIZADOR PRÉVIO

Em um primeiro momento da organização didática, de acordo com a investigação e a reflexão realizada sobre a prática com o ensino da Geometria Analítica Plana e dos Vetores, podemos identificar como conceito mais relevante e integrativo destes conteúdos o Sistema de Coordenadas, que, de acordo com a teoria ausubeliana, faz-se necessário priorizá-lo, ou seja, buscar integrá-lo de forma

significativa à estrutura cognitiva do aprendiz, num certo nível de prioridade em relação aos outros conceitos.

A estrutura da proposta de ensino da Geometria Analítica Plana e dos Vetores, buscando visualizar as interconexões existentes entre esses conteúdos e as conexões com outros conteúdos da Matemática e/ou de outras áreas de conhecimento, será desenvolvida a partir dos conhecimentos que o aluno já possui, numa perspectiva de relacioná-lo com o novo conhecimento, visando uma aprendizagem significativa.

A citação a seguir introduz a idéia principal da teoria da aprendizagem significativa proposta por David Ausubel: “O mais importante fator isolado que influencia a aprendizagem é o que o aprendiz já sabe. Determine isto e ensine-o de acordo” (AUSUBEL, 1968 apud NOVAK, 1981, p. 9).

Na busca da interação entre conhecimentos prévios e novos conhecimentos é que percebemos na proposta de David Ausubel com sua Teoria Cognitivista, alguns caminhos para a proposta de ensino da Geometria Analítica Plana e dos Vetores, visando uma aprendizagem significativa. Uma das preocupações desse teórico é como ocorre o processo da aprendizagem, dando ênfase à aprendizagem significativa e à descoberta da seqüência hierárquica dos conceitos a serem estudados. Para ele, a aprendizagem se dá através da organização e da integração entre o novo conhecimento e os conceitos já existentes na estrutura cognitiva de quem aprende. A aprendizagem só se dá, significativamente, se o novo conhecimento for ancorado em conhecimentos já existentes na estrutura cognitiva.

A aprendizagem significativa é uma teoria cognitivista da construção de significados que se opõem à aprendizagem por repetição e memorização (aprendizagem mecânica). Nela a aquisição e retenção do conhecimento é o produto de um processo de interação, ativo, integrador, entre o conteúdo de ensino e idéias relevantes presentes na estrutura cognitiva do aluno, ressaltando-se que as aquisições são relacionáveis de forma bem particular.

Para Ausubel, aprendizagem significa organização e integração do material na estrutura cognitiva. [...] A estrutura cognitiva entendida como conteúdo total de idéias de certo individuo e a sua organização; ou conteúdo e organização de suas idéias em uma área particular de conhecimentos (MOREIRA; MASINI, 1982, p. 4).

Moreira e Masini (1982) nos afirmam que para Ausubel o armazenamento de informações é altamente organizado, formando uma espécie de hierarquia conceitual, na qual elementos mais específicos de conhecimento são ligados e assimilados a informações (no sentido de conceito, idéias, proposições) mais gerais e inclusivas. Esta hierarquia conceitual é chamada de estrutura cognitiva.

Desta forma, em um primeiro momento, serão trabalhados organizadores prévios, como a história da Matemática no que diz respeito à temporalidade do surgimento da Geometria Analítica e dos Vetores, visando incentivar a descoberta das possíveis conexões deste com outros assuntos não só dentro da Matemática, mas também com assuntos de outras áreas do conhecimento.

Organizadores prévios são materiais introdutórios que possuem um nível mais alto de abstração, generalidade e inclusividade do que o próprio material de aprendizagem. Servem para suprimir a lacuna entre o que o aluno já sabe e o que deverá aprender. Pode ser representado por uma pergunta, um filme, um texto, um problema, ou seja, atividades que ofereçam idéias essenciais mais inclusivas ou ainda apontando quais idéias anteriores precisam ser retomadas e delineadas.

É também objetivo destes organizadores prévios detectar a existência dos conhecimentos que os alunos já possuem, como por exemplo, semelhança de triângulos, lei dos cossenos e outros da geometria euclidiana e da álgebra. Caso não seja detectada a existência desses conhecimentos, necessários para a aprendizagem da geometria analítica e vetores, será função dos organizadores prévios fornecê-los.

A Teoria Antropológica do Didático pressupõe como caminho metodológico para a construção de uma organização didática, isto é, uma praxeologia didática. Nosso trabalho objetiva a aprendizagem significativa, sendo assim para a construção das praxeologias utilizamos alguns conceitos próprios da aprendizagem significativa, o que não acarretará prejuízo na organização didática. Nesse sentido, a nossa primeira praxeologia utilizou a história da Matemática como organizador prévio.

Atividade 1: Contando a história da Geometria Analítica e dos Vetores

Como primeira atividade da organização didática foi proposto, aos alunos, uma pesquisa na história da Matemática a respeito do surgimento da Geometria Analítica e dos Vetores, objetivando a construção de um texto, destacando em que

parâmetros ou contextos deu-se o desenvolvimento da Geometria Analítica e do estudo dos Vetores, bem como de outros conhecimentos matemáticos que possam ter servido de alavanca estimuladora para o estudo e desenvolvimento destes conhecimentos, destacando também a importância dos mesmos para a Matemática e suas aplicações no estudo de outras áreas.

O objetivo desta atividade foi motivar o aluno, buscando despertar o interesse pelo estudo dos conteúdos, e para que possa perceber a importância do estudo da Geometria Analítica Plana, bem como lhes possibilitar possíveis identificações de conhecimentos prévios que possam servir como conceitos subsunçores, que são conceitos específicos hierarquicamente organizados na estrutura cognitiva do indivíduo.

Para que ocorra a aprendizagem significativa é necessária a existência de conceitos subsunçores na estrutura cognitiva do indivíduo. Moreira e Masini (1982) levantam o seguinte questionamento: e se não existir os conceitos subsunçores? Como ocorrerá a aprendizagem significativa? Em resposta, Moreira e Masini (1982, p.10) afirmam: “a aprendizagem mecânica é sempre necessária quando o indivíduo adquire informação numa área completamente nova para ele”. Significa dizer que, na ausência de conceitos subsunçores, pode-se recorrer à aprendizagem mecânica até que alguns elementos relevantes para a aprendizagem da nova informação, existam na estrutura cognitiva e que sirvam de subsunçores, mesmo que este esteja pouco elaborado.

Assim a atividade ocorreu em duas etapas: na primeira etapa foi proposto que os alunos fizessem pesquisa sobre a epistemologia da Geometria Analítica e dos Vetores e lhes foram indicados alguns *sites* como o Google⁶ e a Enciclopédia Wikipédia⁷. Além desses, eles estavam livres para realizar a pesquisa que poderia ser feita não só necessariamente na Internet, mas também na biblioteca da escola e/ou em outras fontes de pesquisa.

Na aula subsequente foram oferecidos aos alunos três livros que tratam da história da Matemática. Os autores dos livros eram Boyer (1974), Eves (2004) e Struik (1989); além desse material, foram também disponibilizados dois textos, selecionados da Internet por conterem, numa linguagem bem acessível, um breve histórico da produção dos conteúdos, objetos da atividade. Os textos foram:

⁶ www.google.com.br

⁷ www.wikipedia.org

“Surgimento da Geometria Analítica” (DOMINGUES, 2006) e “Uma breve história dos Vetores e seus amiguinhos” (MARCIO, 2005). Esses materiais foram ofertados no intuito de oportunizar aos alunos um maior leque de informações para realizar a atividade proposta.

Num primeiro momento, os alunos realizaram as pesquisas individualmente. Em seguida, houve a socialização das pesquisas que se deu em grupos, pois a turma foi dividida em sete grupos, com uma média de seis alunos. Nesta aula, os alunos reuniram-se e debateram sobre a atividade, a qual propunha a construção de uma narrativa que descrevesse os resultados da pesquisa, considerando os itens enfocados na atividade.

Após esse debate inicial ocorrido nos grupos, apoiado na pesquisa extraclasse realizada individualmente e na pesquisa realizada em grupo na sala de aula nos materiais disponibilizados, começou a segunda etapa da atividade, que foi a construção do texto que expressa os resultados da pesquisa, no sentido de identificar como se deu a produção do conhecimento da Geometria Analítica e dos Vetores, e observando as conexões existentes entre esses conteúdos e outros da própria Matemática ou de outras disciplinas.

Construídos os textos, cada grupo expôs a sua produção a fim de socializar as informações adquiridas. Ao término das apresentações foi proposta a elaboração de um texto que representasse as conclusões da turma a respeito da epistemologia da Geometria Analítica e dos Vetores, que foi aceita pela turma, a qual indicou um representante de cada grupo para compor a comissão elaboradora do texto final.

A apresentação das narrativas de cada grupo se deu através de exposição oral e escrita. Nos dois modelos de apresentação, observou-se que quase todos os grupos destacaram que os estudos da Geometria Analítica e dos Vetores não surgiram como fruto da idéia de uma pessoa e nem em um único momento histórico. Na verdade esta construção se deu ao longo da história da humanidade.

O fato acima é evidenciado pelos seguintes trechos da narrativa do grupo 5 (cinco),

1 Há divergências de opinião sobre quem inventou a geometria analítica e mesmo sobre a época que merece o crédito dessa invenção. É óbvio, porém, que para responder a essas questões é preciso antes que haja um entendimento a respeito do que constitui a geometria analítica. Já vimos que os gregos antigos dedicaram-se consideravelmente à álgebra geométrica e que a ideia de coordenadas foi usada no mundo antigo pelo egípcio e os romanos na agrimensura e pelos gregos na confecção de mapas. Para particularmente a favor dos gregos o fato de que Apolônio deduziu o caráter de sua geometria das seções cônicas de equivalentes geométricas de certas equações cartesianas dessas curvas, uma ideia que parece ter-se originado com MENECMO. No séc. XIV Nicolaus Oresme antecedeu outros aspectos da geometria analítica ao representar graficamente certas leis, confrontando a variável dependente (Latitude) com a independente (Longitude), à medida que se permitia que esta última sofresse pequenos acréscimos. Os que defendem Oresme como o inventor da geometria analítica argumentam com esse aspecto de seu trabalho, que seria a primeira manifestação explícita da equação da reta, e com algumas outras noções + que ele chegou envolvendo espaços de dimensões superiores.

(Construção 1)

algébricos. Sem dúvida, só depois da contribuição dada por esses dois homens (René Descartes e Pierre de Fermat) à geometria analítica é que esta ganhou os contornos ímicos da forma com que estamos familiarizados.

(Construção 2)

Quanto à produção do conhecimento em relação ao estudo dos vetores, destacamos o seguinte trecho da narrativa do grupo 5 (cinco), no qual é enfatizado o surgimento do estudo dos Vetores a partir da representação de números complexos, o que nos permite destacar a conexão existente entre Vetores e números complexos.

O primeiro sistema vetorial encontrado foram os números complexos a história dos vetores foi das duas dimensões complexas diretamente para as quatro dimensões dos quatérnios. Do produto quaterniônico, os pragmáticos

(Construção 3)

Outro grupo, o número 7 (sete), que evidenciou a construção do estudo dos vetores, nos propõe a seguinte informação:

Os estudos dos vetores primordiais datam aproximadamente do séc. XIX. A partir deles, pede-se responder a grandes indagações existentes. A facilidade de aprender e de aplicar esse recurso deu-se ao trabalho de físicos americanos Joseph Willard Gibbs.

(Construção 4)

Vale ressaltar que para chegar a essa conclusão foi preciso o estudo aplicado antes por Hamilton (Quatérnios), este ao tentar generalizar os complexos para 3 dimensões percebeu que, na verdade, só poderia fazê-lo com 4. Do produto quaterniônico Gibbs e Heaviside destacaram o produto escalar e vetorial usuais e determinaram o exato sistema tri dimensional que até hoje é empregado, atualmente, utilizar-se também matrizes e tensores como componente natural de qualquer sistema vetorial.

(Construção 5)

/ A continuação do trabalho foi feita por Clifford
 que baseado nos ideais de Grassmann criou um
 produto que permite generalização dos complexos, quatro
 termos, dos produtos, do cálculo vetorial e de muito
 usado na física, como exemplo de forças vetoriais,
 temas: Peso, Empuxo, Quantidade de movimento,
 velocidade, aceleração, campo elétrico,
 campo gravitacional, campo magnético.
 Cayley inventou os octônios, cujo produto,
 não associativo, em 8 dimensões, não se
 reduz aos produtos de Complexos, de quatro
 termos, de Grassmann. Existem também:
 Produtos de álgebra de Lie, produtos anti-
 simétricos, não-associativos e obedientes à
 identidade de Jacobi, podem ser vistos como
 generalizações do produto vetorial tridimensional.

(Construção 6)

Nesta atividade observamos a existência de vários debates em relação aos conceitos que surgiram na história da produção da Geometria Analítica e dos Vetores. Entre estes, o debate que mais chamou a atenção aconteceu no grupo 3 (três).

O conceito motivador deste debate foi o conceito de Quartênios. Os alunos tentavam explicar o que seria, a partir da ideia que a palavra expressava. Neste contexto, um dos alunos descreveu Quartênios como sendo um sistema de quatro dimensões, o que provocou na equipe outras indagações no sentido de reproduzir graficamente este sistema. Após vários diálogos, os alunos concluíram que, para representar graficamente um sistema com três dimensões, já se tem certa dificuldade; então, seria impossível fazer a construção gráfica do sistema de quatro ou de cinco dimensões.

Este episódio nos mostra a importância do resgate histórico para o processo de ensino-aprendizagem da Matemática, pois o mesmo, além de possibilitar o entendimento de como se deu a construção dos conceitos próprios da disciplina, neste caso da Geometria Analítica e dos Vetores, promoveu também vários

momentos de indagação e investigação desses conceitos por parte dos aprendizes, o que lhes possibilitou identificar algumas conexões existentes.

Outra questão relevante que destacamos nas narrativas é a idéia central do que seja a Geometria Analítica e os Vetores, como destaca o grupo 7 (sete):

as indagações filosóficas da humanidade / Com seu / livro 'La Géométrie', explicava que raia de um / problema geométrico traduzia-o em linguagem / de equação algébrica e, depois tendo simplificado / ao máximo a equação, resolvia-o geometricamente

(Construção 7)

O que é reforçado pelo grupo 4 (quatro), quando diz:

A marca mais característica, um par de eixos ortogonais, / não usada por nenhum deles. Pois a idéia central era / resolver equações de curvas e superfícies / Descartes usava

(Construção 8)

O texto acima enfatiza a importância do sistema de coordenadas para o estudo da Geometria Analítica Plana, pois o mesmo servirá de referencial para a construção das curvas que teriam sido traduzidas de expressões algébricas. Esta idéia reforça o que já tínhamos citado anteriormente, ao considerarmos o conceito de sistema de coordenadas como o mais inclusivo e integrativo da Geometria Analítica Plana, e que este é um conceito integrativo da Geometria Analítica Plana com o estudo dos Vetores. Sendo assim, poderemos utilizá-los como um conceito subsunçor, segundo Ausubel, para aprendizagem significativa da Geometria Analítica Plana e dos Vetores.

De acordo com as narrativas, o primeiro sistema vetorial que surgiu foi o dos números complexos e que, a partir do estudo destes, na tentativa de buscar sua

generalização, é que ocorreu o aprofundamento do estudo, o qual levou à construção do sistema tridimensional para representação de Vetores.

O exposto no parágrafo acima é confirmado pelo trecho da narrativa do grupo 3 (três), como podemos ver:

O início dos sistemas vetoriais foi através dos números complexos. Querendo generalizar os complexos para três dimensões, Hamilton percebeu que não era necessário tridimensional, sim quatro dimensões (quaternions), em que conseguiu apenas uma forma coerente a um conjunto de idéias. Do produto quaterniônico, Gibbs e Heaviside destacaram os produtos escalares e vetoriais, disso sai o sistema tridimensional

(Construção 9)

O grupo 6 (seis) descreveu a definição de Vetores da seguinte maneira:

Quanto aos vetores, podemos defini-los por um conceito caracterizado por uma magnitude, que é um número positivo e uma direção que pode ser definida por três ângulos por um espaço de três dimensões. Dessa forma, um vetor pode ser definido pelas suas propriedades sobre diferentes mudanças de sistema coordenadas. Também

(Construção 10)

O que é reforçado pelo grupo 1 (um).

visto e baseando-se no dicionário obtive a definição de vetores que diziam: "[...] Matemática/ Uma quantidade que tem módulo e direção e que se transforma, segundo leis bem determinadas, quando se muda o sistema de coordenadas/[...]. Não obstante, procurei um aprofundamento no

(Construção 11)

A atividade teve relevância para a proposta de ensino da Geometria Analítica Plana e dos Vetores, no sentido em que permitiu aos aprendizes a busca e a construção dos conceitos desses conteúdos, a partir do contexto histórico em que ocorreram esses estudos. Além de que, pode ter lhes permitido uma revisão na sua estrutura cognitiva de conceitos que, supostamente, estariam desconectados desses assuntos e que, na construção do conhecimento, serviram de subsunçores para o estudo da Geometria Analítica Plana e dos Vetores. Também enfatizamos o conceito de sistema de coordenadas, como o conceito mais inclusivo e agregador da Geometria Analítica Plana e dos Vetores.

3.2 IDENTIFICANDO O SISTEMA DE COORDENADAS PARA LOCALIZAÇÃO DE UM PONTO NO PLANO

Esta praxeologia matemática foi construída no sentido de evidenciar a importância da utilização de um sistema de coordenadas para a localização de um objeto no plano. Sendo assim, iniciamos o trabalho utilizando um sistema de coordenadas cartesianas não ortogonais. Desta forma, como tarefa pontual enfatizamos quais condições são necessárias para localizar um ponto no plano.

No intuito de resolver este problema utilizamos como técnica a representação e a manipulação de objetos ostensivos, como a representação de um ponto **P** num sistema de coordenadas, formado por duas semi-retas as quais determinam entre si um ângulo, que no nosso caso optamos primeiramente por não ser um ângulo reto (Figura 1). Esta manipulação nos permitiu concluir que para localização de um ponto no plano é necessário a utilização de um sistema de coordenadas, ou seja, posicionamento de uma origem, duas direções e o ângulo entre elas.

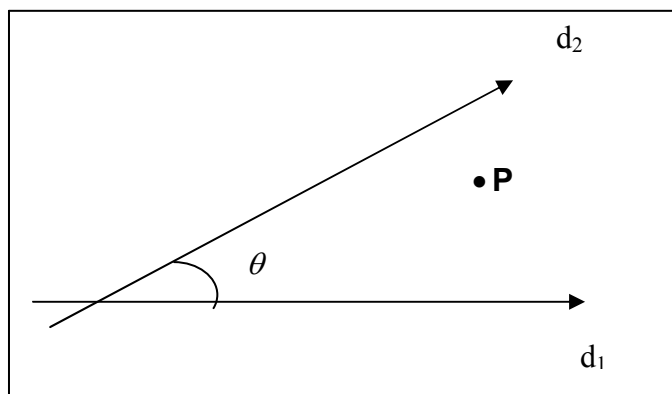


Figura 1: Representação de um ponto no sistema de coordenadas
Fonte: Elaborada pelo autor, em 2006

A manipulação desses objetos ostensivos se deu da seguinte maneira. Para localizar este ponto em relação a esse sistema, utilizaremos as direções d_1 e d_2 da seguinte maneira: caminhar g unidades na direção d_1 e h unidades na direção d_2 , de modo a atingir o ponto P .

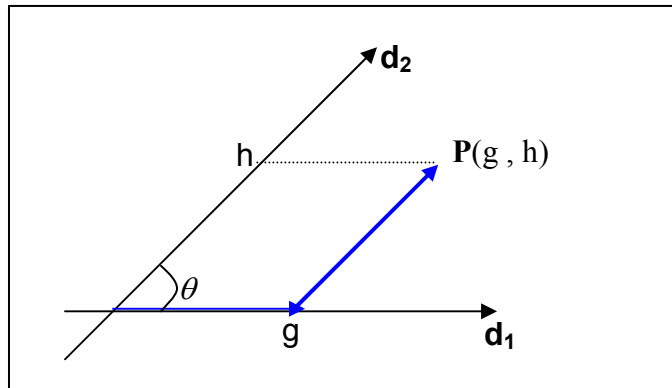


Figura 2: localização de um ponto e sua representação através de par ordenado
Fonte: Elaborada pelo autor, em 2006

Esta construção gráfica (Figura 2) nos permite verificar geometricamente que a localização do ponto P em relação a este sistema é dada pelas coordenadas (g, h) , onde g é a localização do ponto relativo à direção d_1 e h é a localização do ponto relativo à direção d_2 . A técnica desenvolvida nos leva à seguinte tecnologia:

$$P \longleftrightarrow (g, h)$$

Desta forma, poderemos descrever a seguinte teoria: a relação existente entre o ponto P e as coordenadas (g, h) é biunívoca, ou seja, assim como as coordenadas do ponto P são apenas (g, h) , essas coordenadas localizam unicamente o ponto P .

Após a construção desta praxeologia matemática passamos à construção da organização didática que incentivasse a construção das praxeologias matemáticas dos alunos, através da atividade dois.

Atividade 2: Como localizar um tesouro?

Foi proposto um problema (Anexo 1) que enfocou a necessidade de se localizar um objeto no plano. Esta atividade foi primeiramente realizada individualmente para que cada aluno pudesse expressar a sua capacidade de

interpretação de texto, assim como se expressar de forma gráfica, a partir do texto. Em seguida cada aluno deveria socializar sua proposta dentro do seu grupo, que, após esse momento, deveria construir uma ou mais propostas gráficas para o grupo.

Esta construção teria de ser exposta e defendida diante da turma para que fosse analisada por todos, inclusive pelo professor, no sentido de promover o debate em torno das mais variadas possibilidades de expressar graficamente a situação exposta no problema, com o intuito de identificar o conceito que, através de pesquisa nas mais variadas organizações matemáticas propostas para o ensino médio, foi considerado o mais inclusivo dentro da aprendizagem da Geometria Analítica e dos Vetores, que é justamente o conceito de sistema de coordenadas, pois se o aluno conseguir assimilar este conceito, será possível, a partir dele, construir de forma organizada, através de diferenciações progressivas e reconciliações integrativas os outros conceitos, como o de distância entre dois pontos, equação da reta etc.

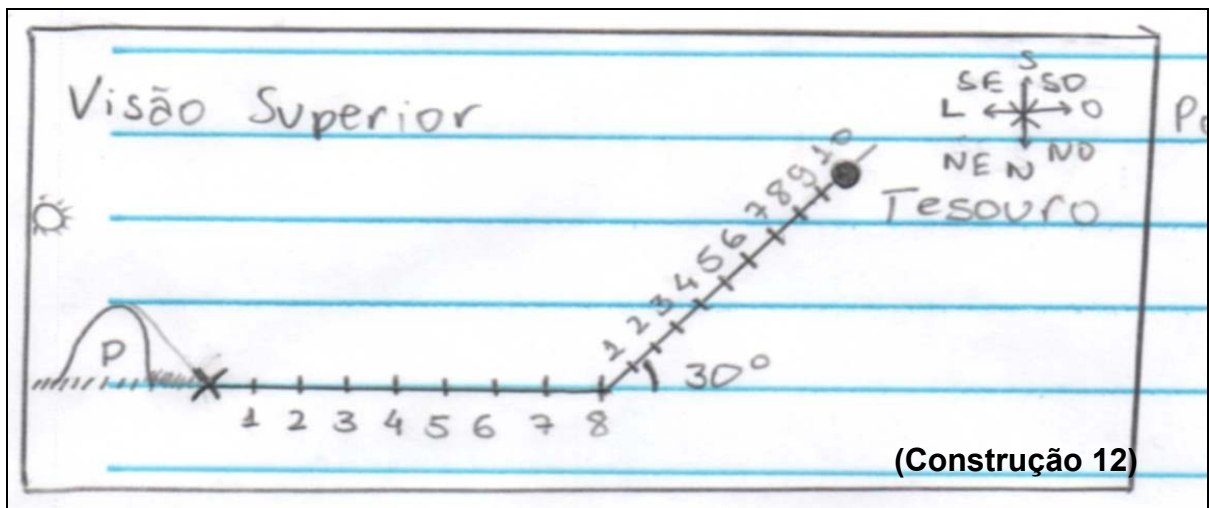
O objetivo desta atividade foi possibilitar aos alunos o exercício de interpretação de texto, além de incentivá-los na busca de conhecimentos já adquiridos da Matemática e de outras disciplinas, assim como orientá-los no sentido de perceber a importância de um sistema de coordenadas para a localização de um objeto no plano. Visou, também, promover a percepção da necessidade de uma origem, uma direção e um ângulo para a construção de um sistema, ou seja, para a localização de um objeto no plano, além de identificar a unicidade da localização de um objeto em um dado sistema. No que diz respeito à Teoria Antropológica do Didático a atividade propunha a manipulação de objetos ostensivos como escrita, representação de semi-retas, ângulos e a representação de ponto objetivando a construção do mapa o qual desencadearia possivelmente na assimilação do conceito de sistema de coordenadas e ainda a sua importância para a realização da tarefa.

Fazendo a análise do momento em que os alunos realizavam a transferência da linguagem verbal para a linguagem gráfica, pudemos observar que os alunos, em função do desafio proposto pelo problema, se mantiveram durante toda a atividade muito interessados no sentido de solucionar o problema, assim como apresentar uma possível resposta. Isto demonstra a importância da utilização de problemas abertos e de processo como elemento motivador para o ensino-aprendizagem.

Foi verificada a preocupação em utilizar a rosa dos ventos para posicionar o Sol no desenho, determinando com isto a direção da sombra, direção esta necessária para localização do objeto. Aqui percebemos a necessidade do resgate, na estrutura cognitiva do aprendiz, de conhecimentos prévios de outras disciplinas para a realização da atividade, o que caracteriza o problema como sendo interdisciplinar.

Quando da análise dos desenhos individuais, observamos certa variação. Estas diferenças nos desenhos individuais se deram por dois motivos. Um foi a posição que cada aluno tomou para o Sol; o outro foi quando da interpretação do ângulo, que o problema propunha a marcação deste a partir da direção da sombra, no sentido anti-horário. As construções individuais estão abaixo relacionadas.

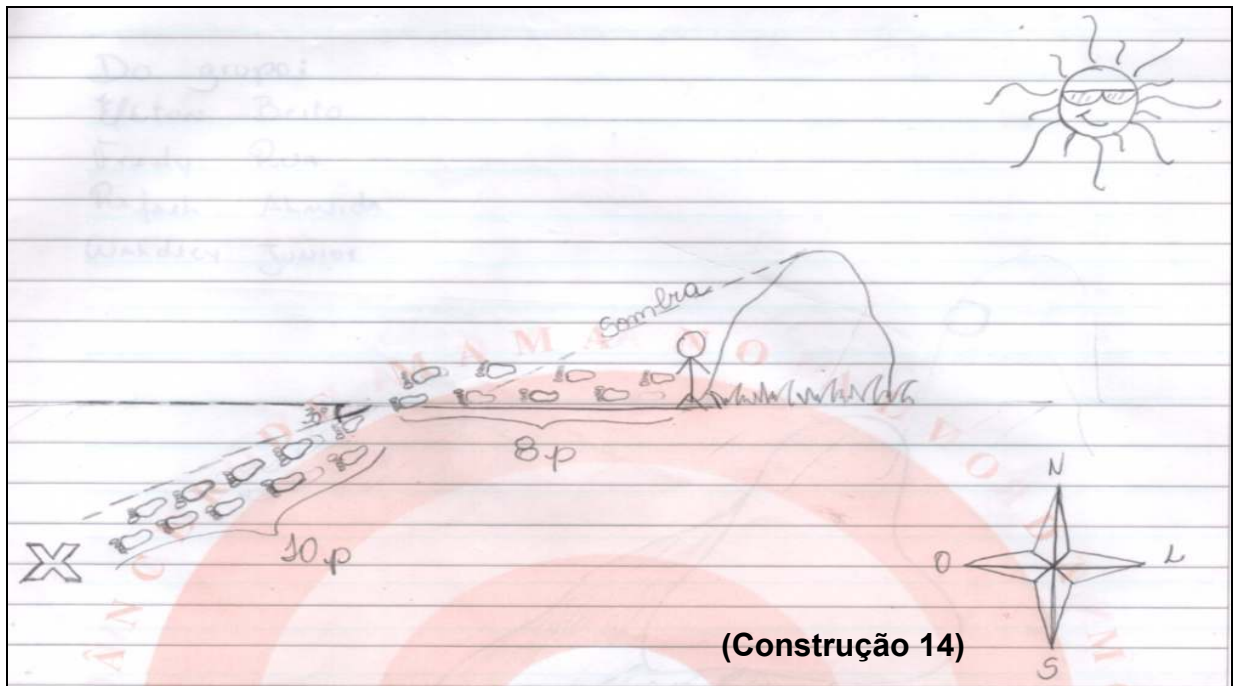
Esta construção foi verificada nos trabalhos de 31 alunos.



Nove alunos tiveram construções semelhantes a esta.



Apenas dois alunos realizaram este tipo de construção.



As formas diferentes de desenho dos mapas nos pareceram motivadas pela construção do ângulo. Na construção dois, percebemos que o aluno ao marcar o ângulo não atentou para o sentido anti-horário, a partir da direção d_1 . Esta conclusão se deu, a partir do relato dos alunos que realizaram a construção dois: “professor, eu pensei que era a partir da direção da sombra no sentido horário, não atentei para a informação do texto”. Quanto à construção três, percebemos que o equívoco está na localização do sol, pois este nasce no leste e se põe no oeste; os alunos, apesar de terem construído a rosa dos ventos, não atentaram para este detalhe.

Durante a socialização nos grupos, evidenciou-se a interação entre os alunos, de tal forma que, através do diálogo entre eles, conseguiram eleger a melhor interpretação gráfica do problema. Desta forma, das oito equipes, 6 optaram pela construção 1 (um) e duas delas pela construção 3 (três), o que significa que nenhuma equipe permaneceu com a construção 2 (dois). Destacamos, abaixo, três das construções apresentadas pelos grupos.

Matemática 23 / 03 / 06

Ficha

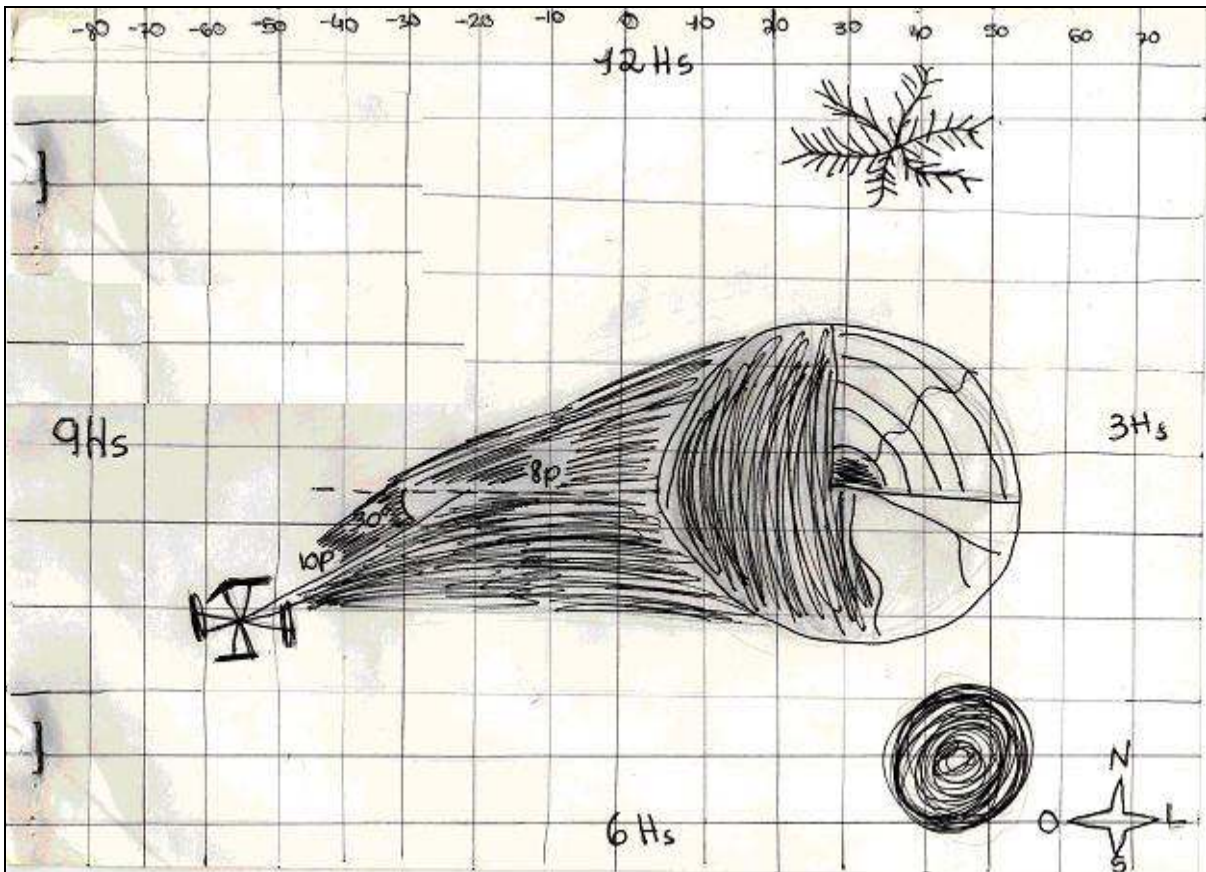
a)

The diagram shows a large irregular shape on the left labeled "Pedra grande". A path of 'x' marks leads from the stone to a horizontal line labeled "8 passos". From the end of this horizontal line, a path of 'x' marks goes up a slope labeled "10 passos" and "30°". At the top of the slope is a small cross-like symbol.

(Construção 15)

A hand-drawn landscape scene. On the left, a backpack sits on the ground. A path of footprints leads from the backpack, down a slope, across a valley, and up another slope to a small hut on the right. The landscape features rolling hills, a sun with rays on the right, and two clouds in the sky. The sun is on a tall pole. The hut has a chimney and a door. The path is marked with footprints and a small angle of 30° is indicated at the start of the path.

(Construção 16)



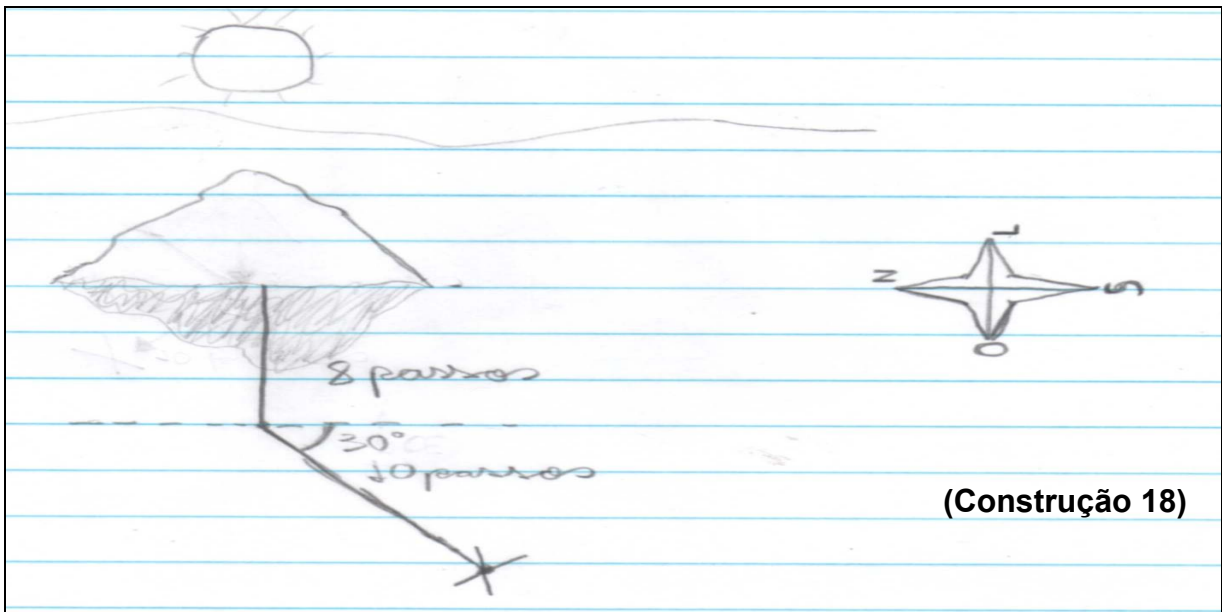
(Construção 17)

A socialização nos grupos foi importante por ter permitido aos alunos uma interpretação coletiva do problema, compartilhando seus conhecimentos para a interpretação de textos escritos numa linguagem verbal e posterior transcrição em linguagem gráfica própria da Geometria Analítica Plana. Desta forma podemos identificar este momento de socialização como o momento de institucionalização da técnica utilizada pelos alunos para construção dos mapas, ou seja, a legitimação da técnica.

A apresentação dos resultados de cada equipe para a turma ocorreu da forma mais variada possível. Cada equipe escolheu um ou dois alunos para apresentar o trabalho. Uma das equipes resolveu encenar sua apresentação: um aluno foi identificado como a pedra, outro como o tesouro, e outro caminhava, descrevendo as direções propostas no texto até chegar ao tesouro.

A encenação, além de transformar o que estava numa linguagem verbal para uma linguagem gráfica, também tornou o problema uma atividade concreta e realizável no contexto. Através desta encenação, toda a turma pôde dialogar sobre o problema, levantando considerações a respeito da atividade, de tal forma a eleger a melhor forma de transcrição gráfica do problema, sendo a Construção 1 (um) eleita.

Durante a apresentação deste grupo, surgiu uma grande polêmica quando da apresentação do mapa que a equipe teria construído.



Muitos alunos questionaram a posição com que eles construíram a sombra, porém, os mesmos justificaram a construção posicionando a rosa dos ventos e identificando a posição leste onde nasce o Sol, o que, de acordo com suas construções, o mapa estaria corretamente escrito. Este foi um momento de destaque da atividade, pois os alunos, motivados pela apresentação, perceberam a importância de seus conhecimentos anteriores no que diz respeito a outras disciplinas, além de destacar a contribuição delas para a realização da tarefa.

Feita a escolha do mapa, iniciou-se o diálogo a respeito da importância da pedra e das direções para a localização do tesouro. Os questionamentos foram estimulados a partir da pergunta: “Qual a importância da pedra para o contexto?”, o que os alunos responderam com o texto: “ela (a pedra) representava a origem do sistema”. Sendo assim, lhes foi perguntado se seria possível localizar o tesouro se não houvesse a origem (a pedra). A resposta foi: “não, pois não é possível a localização de um objeto sem uma referência”.

Observamos, assim, que os aprendizes começam a resignificar o conceito de sistema de coordenadas, e que este tem grande relevância quando se trata da localização de um ponto (ou objeto) no plano, o que enfatiza, mais uma vez, este, como sendo um conceito subsunçor da Geometria Analítica Plana. Desta forma ele servirá como conceito âncora para novos conceitos, proporcionando assim uma perspectiva de aprendizagem significativa, já que na Teoria da Aprendizagem

Significativa faz-se necessário evidenciar o conceito mais integrativo para a partir dele buscar as diferenciações progressivas e reconciliações integrativas.

Outro questionamento foi se seria possível localizar o tesouro, tendo somente a informação da pedra, ou seja, sem as direções. Os alunos deram a seguinte resposta: “não, pois para a localização de um objeto no plano, necessita-se de uma origem, duas direções e o ângulo formado por elas”. De acordo com a resposta dada por eles, perguntamos: “O que é preciso para localizar um objeto no plano?” Em resposta, os alunos enfatizaram que “é necessário um sistema de coordenadas ‘cartesianas’”.

Este episódio nos permitiu confirmar o que já tínhamos identificado em nossas reflexões, que os alunos só reconhecem um tipo de sistema, o sistema que forma entre suas direções um ângulo de 90° , o qual identificam como Sistema de Coordenadas Cartesianas, isto se caracterizou, no nosso entender, como um elemento que pode oferecer limitações para a aprendizagem da Geometria Analítica Plana.

Além de só reconhecerem na sua estrutura cognitiva o sistema de coordenadas ortogonais, não admitindo a translação deste sistema, pois, para eles, primeiro se identifica o sistema e depois o ponto ou objeto, não é considerada a hipótese de, tendo um objeto, construir um sistema para sua localização. A hipótese de que o sistema não pode sofrer translação, impede com que este aluno resolva problemas do seu cotidiano, em evidência o cotidiano escolar, problemas do tipo que foi proposto no processo seletivo de ingresso à UFPA (2006).

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
PROCESSO SELETIVO SERIADO 2006 – 3ª FASE

QUESTÃO 03

A figura abaixo representa um corte transversal de uma casa, no qual o telhado está indicado pelos vetores \vec{v}_1 e \vec{v}_2 , que são ortogonais. Sendo $\vec{v}_1 = (3, 3\sqrt{2})$, **calcule** na seqüência o(a)

- vetor \vec{v}_2 ;
- vetor (\vec{L}) que define a largura da casa em função dos vetores \vec{v}_1 e \vec{v}_2 ;
- medida da largura da casa.

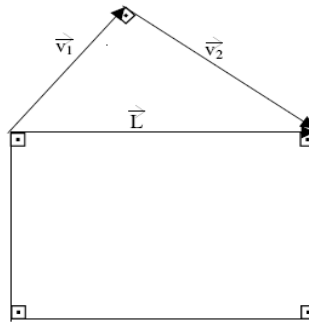


Figura 3: Questão do vestibular da UFPA, 2006
Fonte: UFPA, 2006

Também era objetivo da atividade, fornecer elementos para que o aluno organizasse e ancorasse na sua estrutura cognitiva, que o conceito de sistema de coordenadas mais geral é o que forma entre as direções um ângulo qualquer. Desta forma o sistema de coordenadas ortogonais é um caso particular e não como os alunos estavam admitindo, o único.

Através de uma exposição dialógica, perguntamos se podíamos transportar a segunda direção do problema – direção tomada após a marcação do ângulo de 30° - para a pedra, de tal forma a tomar a pedra como ponto de intersecção entre as direções. A resposta obtida foi a de que podíamos; bastava que mantivéssemos a inclinação deste segmento de reta, ou seja, que conservássemos o ângulo, ou ainda, que trasladássemos o segmento paralelamente, como indica o caso abaixo.

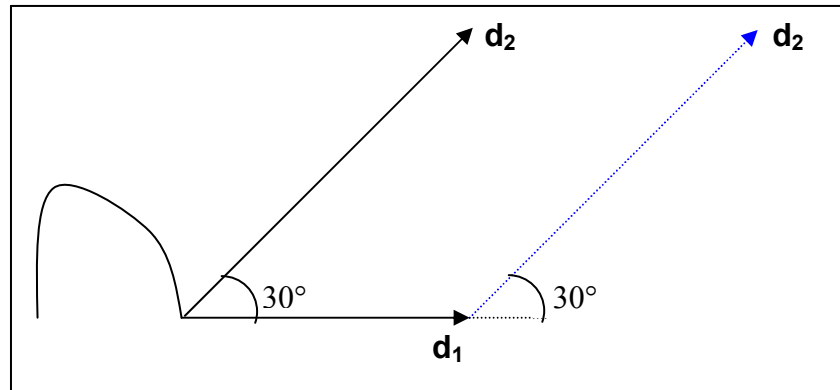


Figura 4: Sistema de coordenadas que formam entre as retas um ângulo de 30° (construído com os alunos).

Fonte: Elaborada pelo autor, em 2006

Em seguida, questionamos com eles se este sistema era realmente um sistema de coordenadas. A resposta foi a seguinte: “não, pois, as direções não formam um ângulo de 90° ”. Sendo assim, apresentamos a eles o sistema de coordenadas não ortogonais, que é um sistema onde o ângulo formado pelos eixos (direções) pode ser um ângulo com qualquer medida. A apresentação deste sistema foi fruto da manipulação de representações de objetos ostensivos como no caso da translação da reta que representa a direção d_2 para a pedra (origem do sistema) provocando assim a transferência da posição do ângulo. Desta forma pudemos perceber a assimilação de um novo conceito.

Nestes termos, a atividade dois também possibilitou a resignificação do conceito de sistema de coordenadas que o aluno possuía, o que pudemos constatar quando do diálogo entre alunos e professor descritos no parágrafo acima. A organização didática construída pelo professor tinha a perspectiva de estimular a ancoragem de forma significativa destes conceitos, pois os alunos já possuíam o conceito de sistema de coordenadas ortogonais o qual deveria servir de subsunção para o conceito de sistema de coordenadas não ortogonais. Esta ancoragem deveria permitir a reelaboração dos dois conceitos na estrutura cognitiva do aluno, o que é próprio de uma aprendizagem significativa.

Observamos, também, que esta ancoragem foi possibilitada quando o aluno realizou a atividade proposta, de localização do tesouro utilizando para isto um sistema de coordenadas não ortogonais, e que ao manipular esta representação possivelmente tenha percebido as diferenças, as semelhanças e as consistências dos dois tipos de sistemas. A percepção dessas diferenças e consistências são

meios descritos por Ausubel, como diferenciação progressiva dos conceitos e reconciliação integrativa, para atingir a aprendizagem significativa.

A aprendizagem significativa de um conceito está ligada à capacidade que o aprendiz tem de perceber, e às diferenciações e semelhanças ou regularidades entre o novo conhecimento e o conhecimento já existente. A estes procedimentos, Ausubel denominou de diferenciação progressiva e reconciliação integrativa, “os quais, segundo Faria (1989), facilitam a seqüência dos conceitos, e, segundo Ausubel (1968), acontecem, simultaneamente, em todos os instantes em que ocorrer a aprendizagem” (BRIGHENTI, 2003, p. 23).

Ainda, conforme o mesmo autor é possível afirmar que:

Ao utilizar esses dois princípios da teoria ausubeliana, é possível uma acomodação do novo conhecimento tanto verticalmente, ao relacionar o novo conteúdo com as idéias âncoras existentes, quanto horizontalmente, ao estabelecer as diferenças e semelhanças entre o que se sabe e o novo. Desta forma será possível reajustar o novo conhecimento às estruturas cognitivas, modificando os subsunçores existentes e ampliando o conhecimento sobre o assunto (BRIGHENTI, 2003, p. 23).

A diferenciação progressiva é o princípio segundo o qual as idéias mais gerais e inclusivas do material a ser aprendido devem ser apresentadas desde o início do processo de ensino-aprendizagem para, posteriormente, ser progressivamente diferenciadas em termos de detalhes e especificidades.

Reconciliação integrativa é a exploração explícita das relações entre conceitos e proposições, atentando para as diferenças e as semelhanças, objetivando reconciliar inconsistências reais ou aparentes.

Outro objetivo desta atividade foi alcançado quando indagamos sobre a localização do tesouro em relação ao sistema de coordenadas propostas no problema, no sentido de identificar a unicidade desta localização.

Para que esta unicidade fosse identificada, pedimos aos alunos que construíssem o sistema de coordenadas para a situação do problema proposto, expressando a localização do tesouro através de par ordenado. A representação construída pela maior parte dos grupos foi:

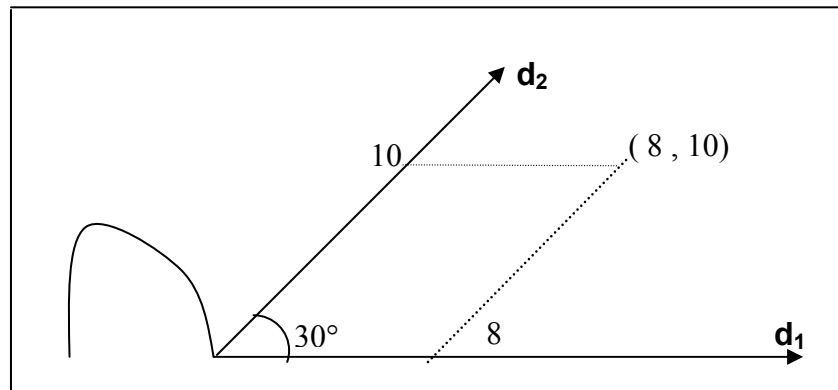


Figura 5: Localização de um ponto em um sistema de coordenadas que formam entre si um ângulo de 30°
 Fonte: Elaborada pelo autor, em 2006

Esta construção foi fruto da interação dialógica professor-alunos e alunos-alunos. A indagação feita foi a seguinte: “neste sistema existiria outra localização para este tesouro nas condições determinadas pelo problema?” Ou ainda: “neste sistema as coordenadas de localização do tesouro são apenas estas?” Os alunos, ao analisarem esta indagação, concluíram que a relação de unicidade entre ponto e coordenadas é verificada.

Esta atividade forneceu novos conceitos, como a localização de pontos no sistema de coordenadas e sua representação através de pares ordenados, o sistema de coordenadas não ortogonais e a unicidade da localização de um objeto em relação a um dado sistema de coordenadas, os quais foram ancorados nos conceitos já existentes na estrutura cognitiva pela diferenciação progressiva e reconciliação integrativa. Funcionou, também, como organizador prévio, no sentido em que preencheu a lacuna entre o novo conceito e o conceito já existente, além de resgatar os conhecimentos prévios dos alunos que serviram de conceitos subsunçores para a aprendizagem da Geometria Analítica Plana.

Identificamos, também, a perspectiva da construção de uma praxeologia matemática, nos moldes da proposta de Chevallard et al. (2001). O tipo de tarefas propostas era o de construção de um mapa, a partir de um texto, para realizar a tarefa. Em um primeiro momento, os alunos recorreram a seus conhecimentos anteriores, não só da Matemática, mas também de conhecimentos de outras disciplinas, construindo, com isto, técnicas, as quais podemos descrever como sendo a manipulação de objetos ostensivos, como a transferência da linguagem escrita para a linguagem gráfica, o que necessitou do manuseio de representações

de ângulos, semi-retas, de pontos e outros. As técnicas sofreram durante a construção, vários momentos de modificações e adequações, na perspectiva de construir um ambiente tecnológico-teórico que justificasse a técnica.

Este ambiente pôde ser identificado a partir dos diálogos entre alunos e professor, quando é escolhido o mapa que mais caracteriza a situação proposta. A tecnologia é que a construção de um sistema de coordenadas se dá a partir da manipulação de representações de ângulos e retas. Esta tecnologia é evidenciada quando do traslado de uma das direções para formalizar a construção de um sistema de coordenadas. A teoria identificada é que “a cada ponto do plano corresponde um par de números reais e reciprocamente a cada par de números reais corresponde um ponto no plano”. Ainda no sentido da análise da praxeologia construída, pudemos perceber que a manipulação dos objetos ostensivos, já descritos, motivou a assimilação da idéia intuitiva de ponto, o que foi possível concluir a partir do discurso dos alunos quando da unicidade da localização de um ponto em um determinado sistema de coordenadas. Esta praxeologia se caracterizou como pontual no sentido em que foram utilizadas várias técnicas para resolver um único tipo de tarefas.

3.3 CALCULANDO A DISTÂNCIA ENTRE DOIS PONTOS EM UM SISTEMA DE COORDENADAS NÃO ORTOGONAIS

Feita a localização do ponto na atividade dois, pudemos realizar a seguinte tarefa: como determinar a distância de um ponto até a origem do sistema, destacando e incentivando o aluno por meio de atividades, a identificação de que a menor distância entre dois pontos é o comprimento de um segmento de reta.

Para realização deste tipo de tarefa, utilizamos o mesmo problema fazendo algumas transformações no percurso como, por exemplo, caminhar g unidades na direção d_1 e h unidades na direção oposta a d_2 , para enfatizar a validade da teoria descrita na praxeologia anterior (Figura 6). Também pudemos destacar que o caminho percorrido, partindo da origem até o ponto pode ser feito de duas maneiras: seguindo a direção d_1 e depois a direção d_2 ($g+h$) ou pode ser realizado em linha reta (D), o que permite dizer que estes percursos têm objetivos iguais, e que o deslocamento é o mesmo, porém a distância percorrida não é a mesma. Aqui

queremos destacar que apesar de identificar diferentes distâncias, calculamos **D** considerando os postulados da Geometria Euclidiana.

Podemos calcular a distância **D** manipulando objetos ostensivos como a representação de segmento orientado e a visualização de um triângulo formado pelos segmentos orientados. A técnica para resolver este tipo de tarefas foi a modelação dos segmentos orientados como lados de um triângulo. A distância foi calculada através destas manipulações e a lei dos cossenos que identificamos como a tecnologia utilizada para calcular a distância entre a origem e um ponto qualquer de um sistema de coordenadas, como o exemplo mostra a seguir:

Caminhar **g** unidades na direção **d₁** e **h** unidades no sentido oposto ao sentido tomado para a direção **d₂**

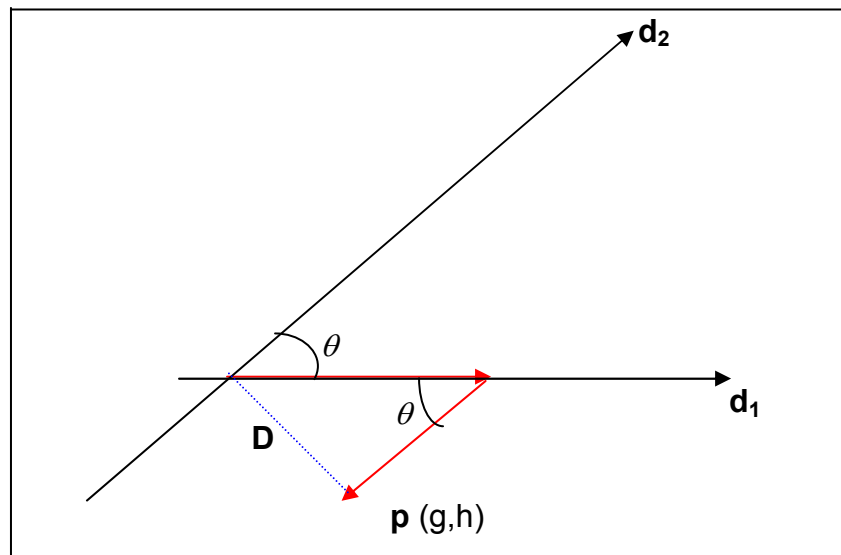


Figura 6: Modelo para calcular a distância de um ponto à origem de um sistema de coordenadas não ortogonais (SCNO)
Fonte: Elaborada pelo autor, em 2006

Aplicando a lei dos cossenos, temos:

$$D^2 = g^2 + h^2 - 2 \cdot g \cdot h \cdot \cos \theta$$

Assim, concluímos que podemos calcular a distância de um ponto qualquer até a origem de um determinado sistema, utilizando a lei dos cossenos, o que se caracterizou como a tecnologia. As relações trigonométricas num triângulo qualquer foi a teoria para a realização deste tipo de tarefas. Para esta praxeologia matemática

pontual construída pelo professor utilizamos para intervenção em sala de aula a organização didática a seguir.

Atividade 3: Como calcular a distância da pedra ao tesouro?

Foi proposto um problema (Anexo 2) que enfatizasse o cálculo da distância de um ponto à origem de um sistema. O objetivo desta atividade foi possibilitar a construção de um mapa com algumas transformações, em relação à construção da atividade 2, para que o aluno percebesse a construção no sentido oposto à direção determinada, incentivando-o assim a analisar o significado da distância de um objeto à origem de um sistema, de tal forma que pudesse diferenciar o caminho percorrido do deslocamento.

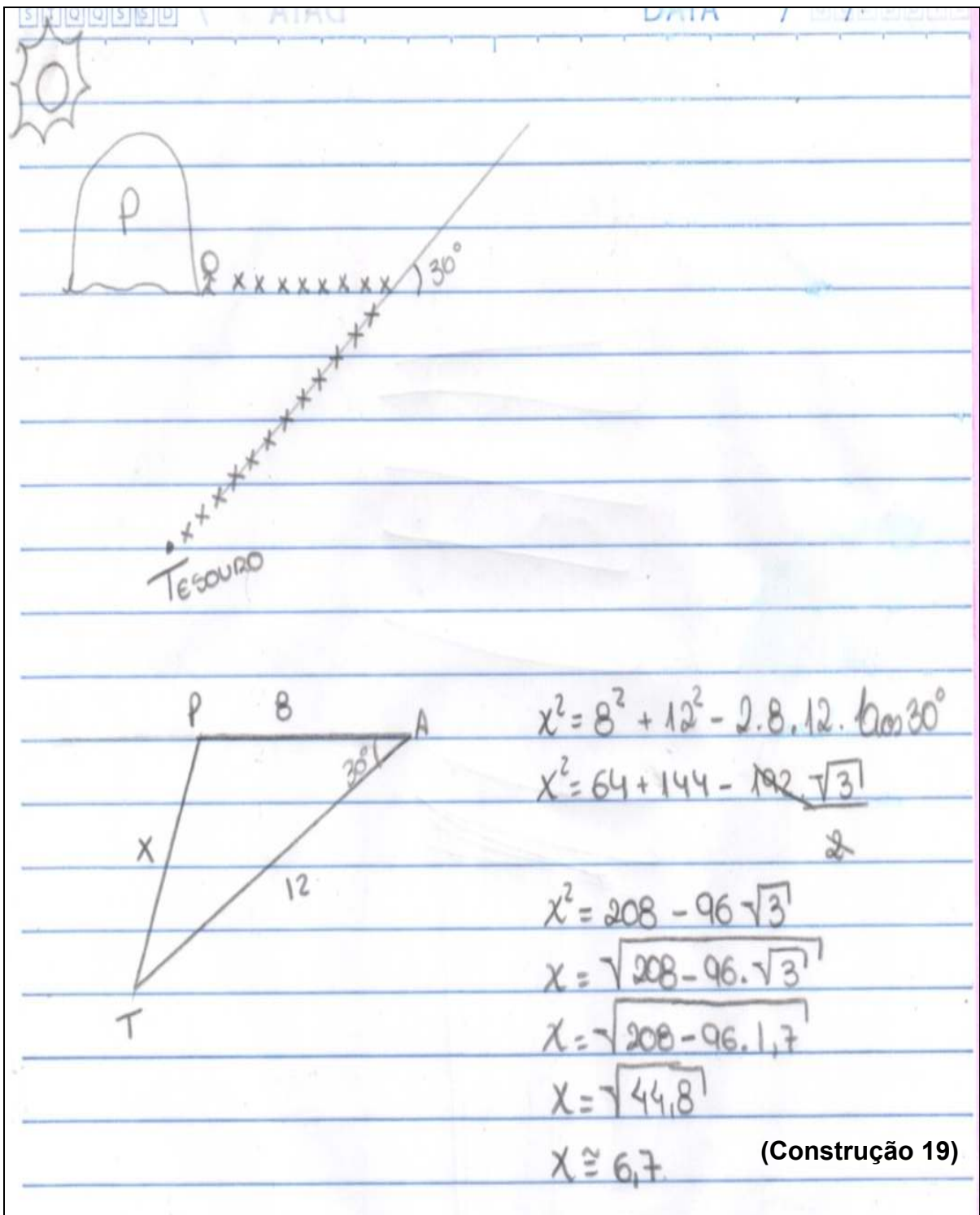
Esta análise possibilitou a busca do aluno na sua estrutura cognitiva de conhecimentos que possibilitasse o cálculo da distância de um objeto à origem, este é um tipo de tarefa. Assim como deveria o aluno relacionar estes conhecimentos com o cálculo da distância de um ponto à origem, conceito próprio da Geometria Analítica Plana, e que, no estudo dos Vetores, nada mais é que seu módulo ou comprimento do segmento orientado que o representa.

A atividade ocorreu em 3 aulas seguidas de 45 minutos cada, com o tempo dividido em três momentos: o primeiro, para a construção do mapa e cálculo da distância da pedra ao tesouro; o segundo, para socialização das técnicas utilizadas por equipe com a turma; e o terceiro, para o diálogo do professor com a classe.

Durante a construção do mapa, observamos que, através de diálogos dentro de cada equipe, os conhecimentos prévios foram sendo resgatados, como no momento da construção, em que o texto fala em marcar o ângulo no sentido anti-horário, a partir da direção da sombra e caminhar doze passos no sentido oposto. Neste momento, os alunos observaram a construção de ângulos opostos pelo vértice, o que possibilitou determinar o valor do ângulo interno do triângulo formado pela direção da sombra, a direção após a marcação do ângulo e a distância entre a pedra e o local onde o tesouro foi enterrado.

A maioria dos desenhos apresentados foi como o da figura (Construção 19), na qual os alunos construíram o mapa fazendo a transferência da linguagem escrita corrente para uma figura representativa do problema. Em seguida interpretaram o desenho relacionando este ao modelo de um triângulo no qual a distância a ser

encontrada seria o lado oposto ao ângulo de 30° , e sendo assim, a resolução do problema se deu através da lei dos cossenos.



$$x^2 = 8^2 + 12^2 - 2 \cdot 8 \cdot 12 \cdot \cos 30^\circ$$

$$x^2 = 64 + 144 - 192 \sqrt{3}$$

$$x^2 = 208 - 96 \sqrt{3}$$

$$x = \sqrt{208 - 96 \sqrt{3}}$$

$$x = \sqrt{208 - 96 \cdot 1,7}$$

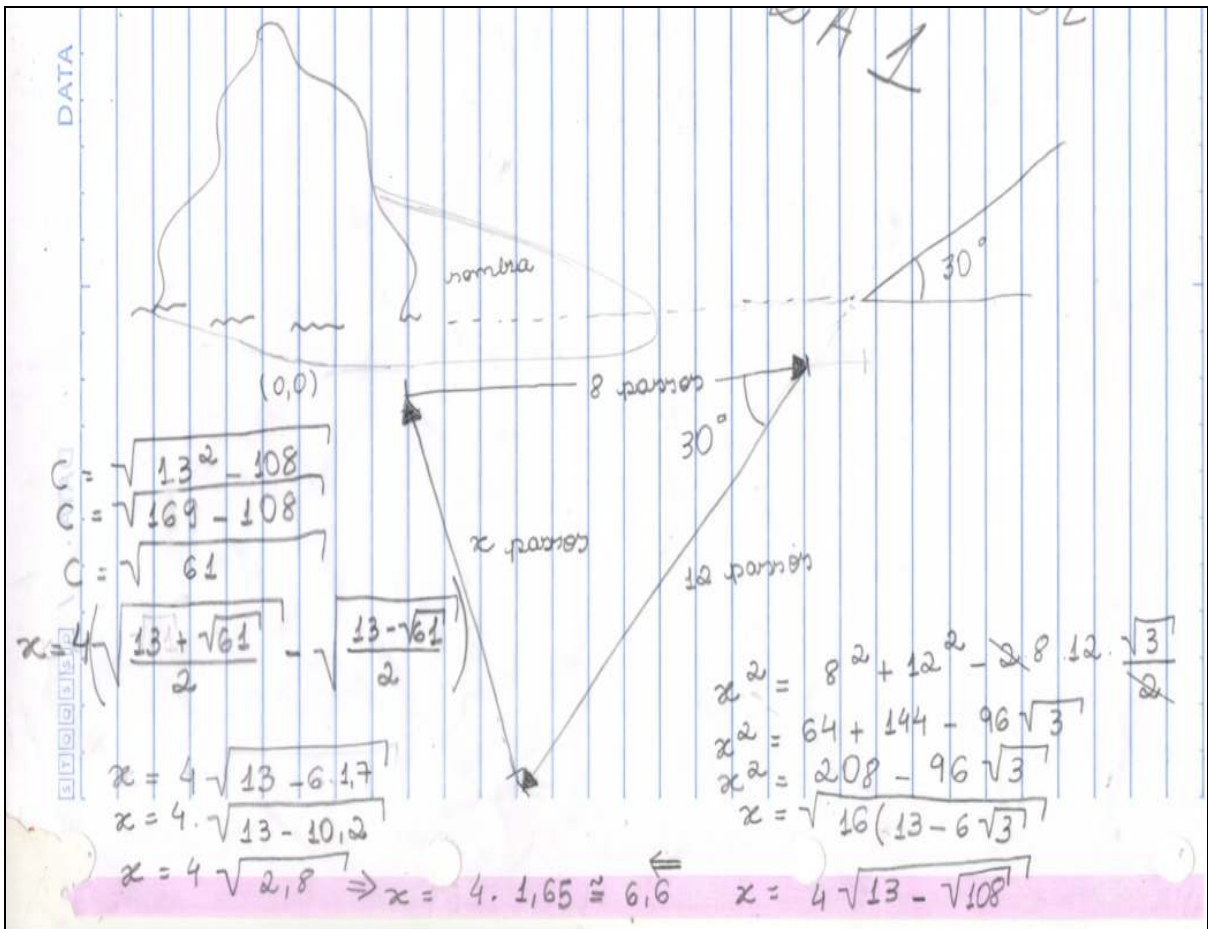
$$x = \sqrt{44,8}$$

$$x \cong 6,7$$

(Construção 19)

Conseguimos perceber que a técnica desenvolvida para realização da tarefa necessitou do resgate das relações trigonométricas no triângulo a qual identificamos como a teoria deste tipo de tarefas, mais precisamente da lei dos cossenos que é a tecnologia. Quanto à realização dos cálculos, houve a necessidade da utilização de

calculadora, pois, surgem no decorrer, cálculos aritméticos que envolvem números irracionais, como raiz de três, os quais sabemos, não possuem representação decimal exata. Destacamos também a construção de um esquema no qual os alunos manipularam objetos ostensivos, como o desenho, a construção gráfica e o cálculo aritmético. Esta manipulação determinou a técnica utilizada para realização da tarefa, além de fornecer elementos para que pudéssemos reconhecer que através destas manipulações os alunos demonstraram a assimilação da tecnologia da técnica que resolve o tipo de tarefa proposto. Outras equipes aplicaram também a lei dos cossenos, diferenciando apenas no momento do cálculo, pois, enquanto a maioria substituiu $\sqrt{3}$ pela aproximação 1,7 outros tentaram aplicar o algoritmo para o cálculo do radical duplo, que consiste em calcular $\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+C}{2}} \pm \sqrt{\frac{A-C}{2}}$, onde $C = \sqrt{A^2 - B}$, como mostra a construção abaixo.



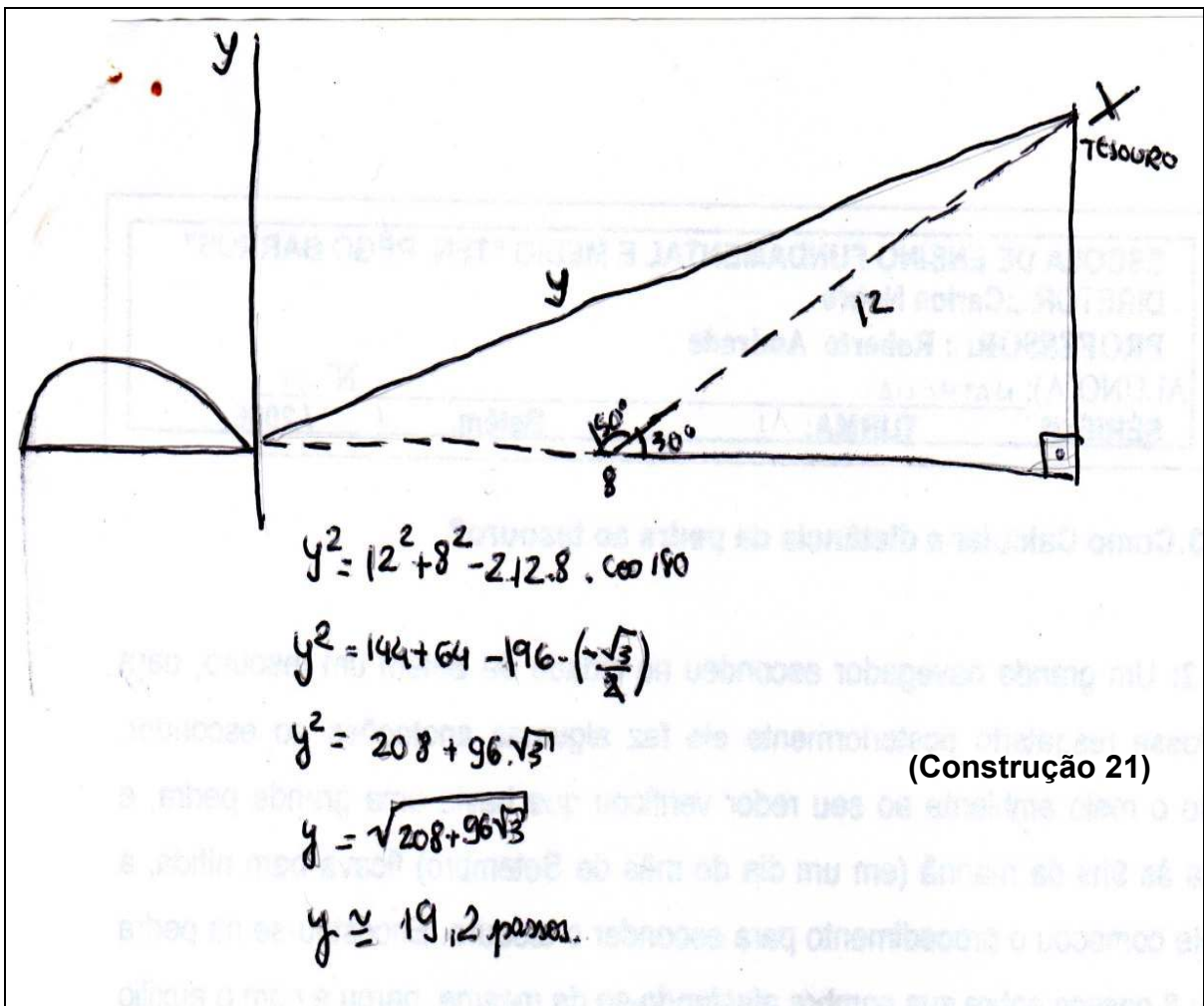
(Construção 20)

Na tentativa de aplicar radical duplo percebemos que os alunos sentiram dificuldade com o valor do C , pois o mesmo também resultava em um número

irracional $C = \sqrt{61}$. Após debaterem bastante, resolveram fazer o que as outras equipes tinham feito: a substituição do $\sqrt{3}$ por 1,7, deixando claro que o valor encontrado seria uma aproximação do resultado.

A intervenção do professor nesta equipe foi no sentido de esclarecer que os resultados seriam sempre aproximações, pois se tratava de números irracionais, os quais não possuem representação decimal exata.

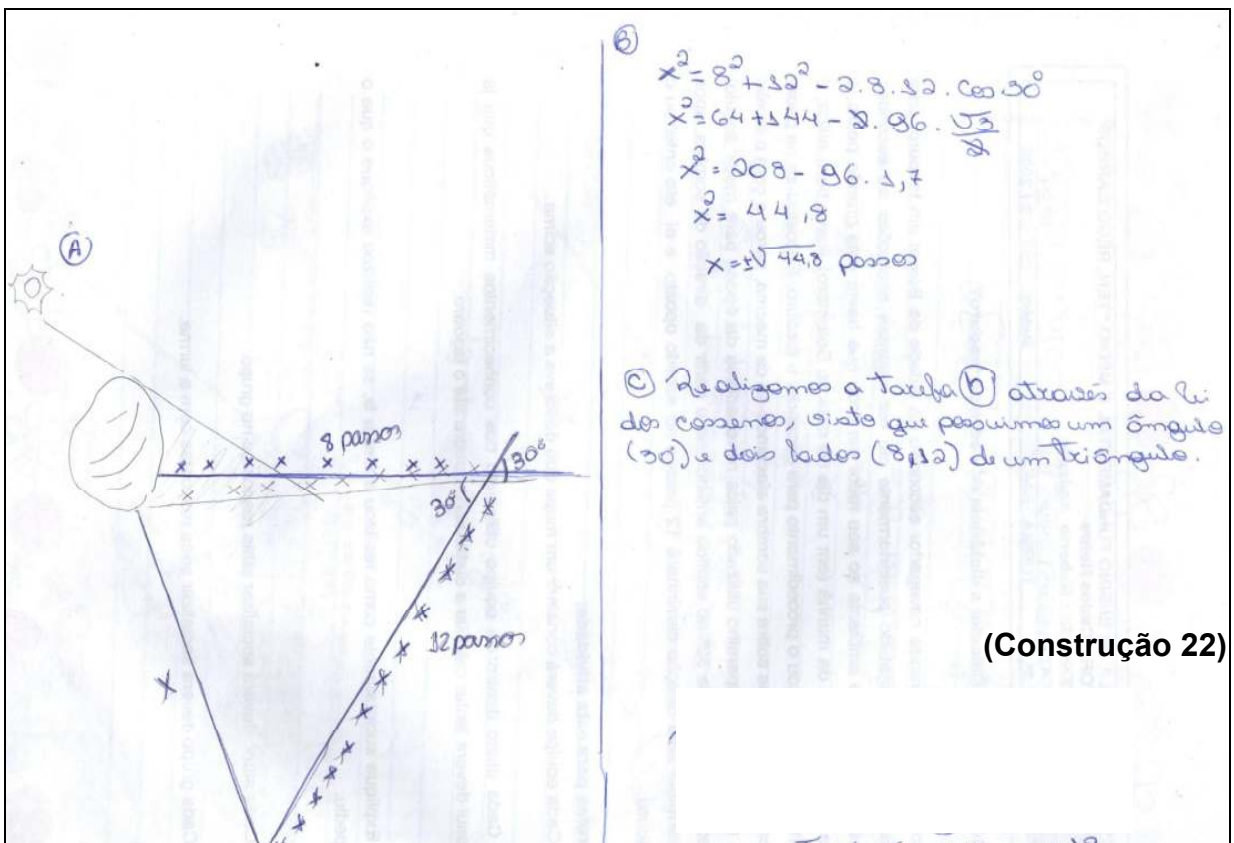
Continuando a análise dos trabalhos, observamos que apenas uma equipe realizou a construção descrita abaixo.



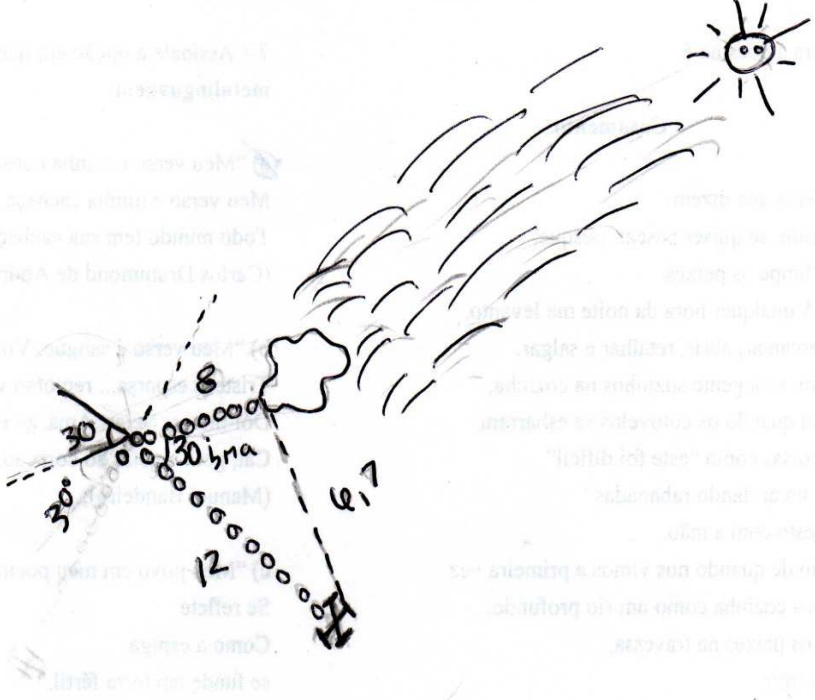
Nesta construção, percebemos que a diferença no resultado se deu em função da construção equivocada, determinada possivelmente, por uma outra interpretação do texto. Porém, essa não se configurou como um obstáculo para realização da atividade que objetivava o cálculo da distância da pedra ao tesouro. A tarefa foi perfeitamente realizada, mostrando, da mesma forma para os outros alunos, o resgate da lei dos cossenos, que serviria de subsunção para o cálculo da distância entre dois pontos. Significa dizer que a técnica de resolução foi a mesma,

porém, a transcrição de uma representação para outra foi diferente. A manipulação de objetos ostensivos ocorreu de forma diferente, neste caso.

Quando da socialização dos resultados de cada equipe com a turma, seis equipes realizaram a mesma construção, variando apenas em relação ao posicionamento do Sol, o que ocasionou a formação da sombra em direções diferentes, porém, o sentido foi o mesmo, da pedra para o final da sombra, como nos mostra as figuras abaixo.



a)



$$x^2 = 8^2 + 12^2 - 2 \cdot 8 \cdot 12 \cdot \cos 30^\circ$$

$$x^2 = 64 + 144 - 2 \cdot 8 \cdot 12 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x^2 = 208 - 96 \cdot \sqrt{3}$$

$$x^2 = 208 - 96 \cdot 1,7$$

$$x^2 = 144,8$$

$$x = \sqrt{144,8}$$

$$x = 6,7$$

c) utilize as lei dos cossenos

(Construção 23)

Quanto à apresentação, apenas três das sete equipes apresentaram suas construções e resultados; as outras afirmaram ter feito construções semelhantes. A

variação entre as construções consistia apenas na maneira de calcular o resultado final, como já tinha observado quando no momento da construção no interior das equipes, pois era fato o desejo de chegar ao resultado exato, o que era impossibilitado pela existência na expressão do número irracional $\sqrt{3}$.

Durante a apresentação de uma das equipes surgiu a polêmica em relação ao cálculo. Neste momento de socialização, houve intervenção do professor, pois o debate residia no resultado se era 6,7; 6,8 ou 6,3. A intervenção foi realizada através de diálogo, resgatando o significado de um número irracional e também realizando questionamentos, a fim de que os alunos promovessem uma busca na sua estrutura cognitiva em relação aos tipos de conjuntos numéricos, objetivando que, através desta busca e reconhecimento, permitissem realizar diferenciações progressivas e reconciliações integrativas, as quais lhes permitiriam identificar que os números irracionais são representados sempre por aproximações decimais.

Este foi um episódio relevante para a aprendizagem, pois, além de desmistificar a exatidão dos números (irracionais), o que ocasiona, possivelmente, supostas exatidões na solução de problemas numéricos propostos no dia-a-dia escolar, fato este, que geralmente não se verifica na solução de problemas do cotidiano social e cultural do aprendiz. Desta forma, houve uma resignificação do conceito de números.

De todas as equipes, apenas uma continuou com a representação da construção 21. Durante a apresentação desta equipe, a discussão levantada foi de que não tinham entendido direito o caminho no sentido oposto do sentido tomado para a direção d_2 no enunciado do problema da atividade 3. A intervenção do professor se deu no sentido de esclarecer o que representava o sentido oposto. Sendo assim, a tarefa foi realizada através de uma encenação do professor, considerando um objeto na sala como a pedra (origem) e realizando as atitudes que eram propostas pelo texto.

Este episódio configurou a dificuldade que esta equipe teve na transformação do texto, que estava em linguagem corrente, para linguagem gráfica, e que a representação da atividade ao ser encenada, os fez perceber onde consistiam suas dificuldades, de tal forma a permitir que realizassem a reconstrução de seu desenho, de forma com o proposto pelo problema.

A atividade evidenciou uma resignificação de vários conceitos existentes na estrutura cognitiva do aluno, como os números irracionais, a lei dos cossenos, estes que eram utilizados apenas para calcular o comprimento do lado de um triângulo, agora serviriam, também, para calcular a distância entre um ponto e a origem de um sistema de coordenadas.

Durante a intervenção final do professor, através do diálogo com a turma, reconstruiu-se a situação proposta pelo problema, no sentido de identificar a localização do tesouro em relação a este sistema, por meio de par ordenado de números reais onde o primeiro indicaria a distância em relação à pedra na direção horizontal, e o segundo em relação a outra direção, após a marcação do ângulo com a horizontal que a determina.

Desta feita, a construção realizada teve duas direções que formavam entre si um ângulo de 30° , onde foi identificada a posição do tesouro pelo par ordenado $(8, -12)$ (Figura 7). Esta figura foi construída pelos alunos no quadro de escrever da sala de aula a partir das conclusões tiradas após o diálogo descrito no parágrafo anterior.

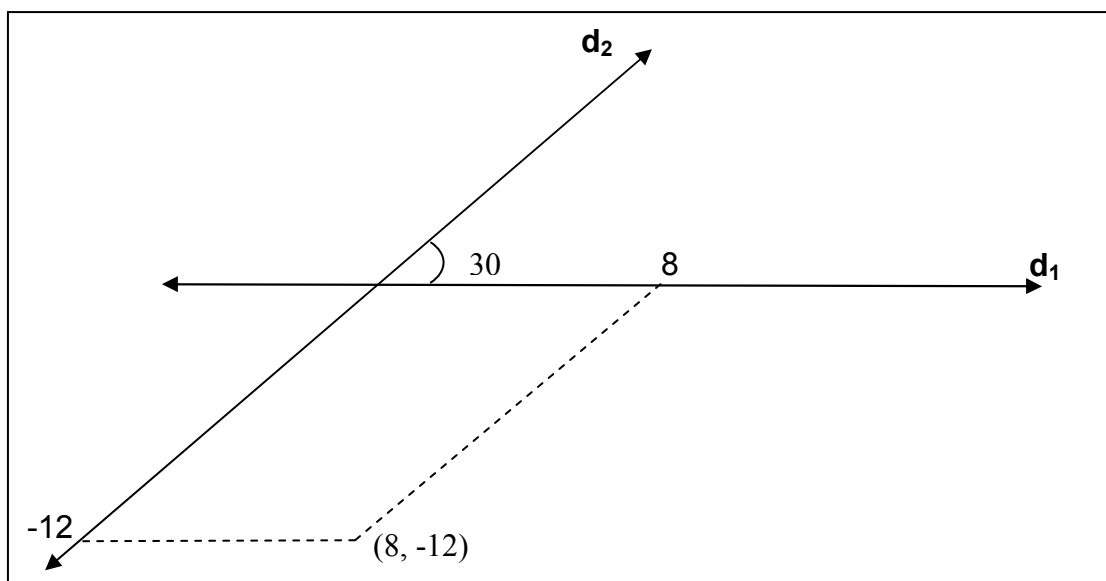


Figura 7: Localização do ponto $(8, -12)$ no sistema de coordenadas que formam entre si um ângulo de 30°

Fonte: Elaborada pelo autor, em 2006

Após esta construção, foi proposto aos alunos a tarefa de calcular a distância de um objeto da origem deste sistema, sendo o objeto localizado na posição $(5, 6)$. O objetivo desta tarefa pertencente ao tipo de tarefas “calcular a distância entre dois pontos” era provocar no aluno o uso da técnica até então construída. Sendo assim,

os alunos optaram por construir no quadro, como realização da tarefa, uma figura representativa do problema. A manipulação de objetos ostensivos elaborada pelos alunos, foi a seguinte: construíram o sistema e posicionaram o ponto (5, 6) no sistema (Figura 8). Em seguida, aplicaram a lei dos cossenos, determinando, assim, a distância deste ponto até a origem deste sistema.

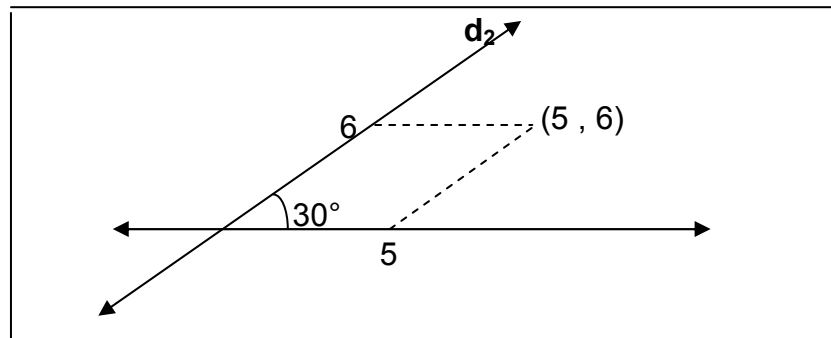


Figura 8: Proposta para os alunos da localização do ponto (5, 6), para futuro cálculo da distância deste ponto à origem do sistema
Fonte: Elaborada pelo autor, em 2006

A resolução se deu da seguinte maneira: denotaram de x a distância a ser calculada, o que, ao ser construída, formava um triângulo com lados 5, 6 e x , onde x é o lado oposto ao ângulo de 150° , que é o suplemento do ângulo de 30° . Desta forma, aplicaram a lei dos cossenos, como descrevemos abaixo:

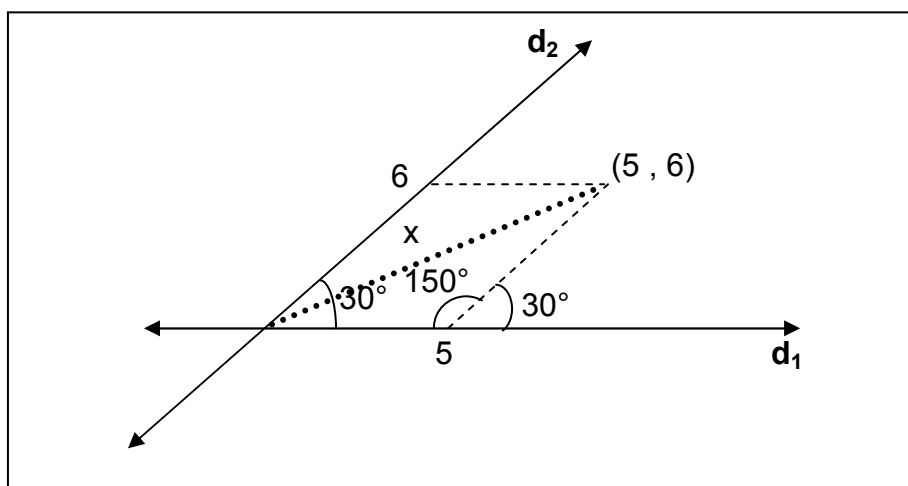


Figura 9: Modelo construído pelos alunos para o cálculo da distância do ponto (5, 6) até a origem
Fonte: Elaborada pelo autor, em 2006

$$X^2 = 5^2 + 6^2 - 2 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \cos 150^\circ$$

$$X^2 = 25 + 36 - 60 \left(\frac{-\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$X^2 = 41 + 30\sqrt{3}$$

$$X^2 = 41 + 30 \cdot 1,7$$

$$X^2 = 41 + 51$$

$$X^2 = 92$$

$$X = \sqrt{92}$$

$$X = 9,59$$

Na técnica acima descrita, percebemos que os alunos durante a construção da resolução evidenciam o resgate de conceitos de ângulos suplementares e a relação entre cossenos desses ângulos, como no exemplo de $\cos 150^\circ = -\cos 30^\circ$. Neste momento pudemos destacar a aplicação do teorema de Tales quando da determinação do ângulo de 150° , pois esta é a tecnologia que determina esse tipo de ângulo, já que temos paralelas cortadas por transversais. Nestes termos ficam evidenciadas as conexões existentes entre os objetos matemáticos no caso o estudo dos triângulos, lei dos cossenos, representação decimal de números irracionais e o teorema de Tales.

Mais uma vez evidenciou como sendo a lei dos cossenos a tecnologia que permite calcular a distância de um ponto qualquer até a origem de um sistema de coordenadas, no qual o ponto está localizado. A tarefa também permitiu identificar a lei dos cossenos como um conceito subsunçor para o cálculo da distância de um ponto até a origem de um sistema qualquer. Daí poderemos descrever a teoria que justifica a tecnologia: a distância entre a origem de um sistema de coordenadas a um ponto qualquer localizado neste sistema é calculado por meio da lei dos cossenos.

A atividade, no geral, além de funcionar como organizador prévio, no sentido em que promove o resgate dos conhecimentos dos alunos, os conceitos subsunçores, também procurava a resignificação da lei dos cossenos. Esta lei é geralmente utilizada para calcular a medida do lado de um triângulo, e, nesta atividade, através da manipulação de objetos ostensivos, os alunos a utilizaram para calcular a distância entre a origem de um dado sistema de coordenadas e um ponto

qualquer localizado neste sistema, o que, no nosso entender, e como é proposto por Ausubel, promoveu a assimilação das conexões existentes entre vários conceitos da Matemática, principalmente em relação à Trigonometria, à Geometria Analítica e à Geometria Sintética.

Como um dos objetivos da organização didática era a retenção desses conceitos de forma não arbitrária, pois desta forma os conceitos são organizados na estrutura cognitiva do aprendiz, de tal maneira que o novo conceito pode ser ancorado nos conceitos subsunçores já existentes, através da diferenciação progressiva e reconciliação integrativa, e que assim sendo, o novo conceito e o subsunçor são modificados e resignificados, promovendo, assim, uma aprendizagem significativa. Esta perspectiva espera-se ter sido atingida em função das respostas que os aprendizes emitiram durante toda atividade 3, respostas estas evidenciadas através da manipulação de objetos ostensivos da matemática, apresentadas ao professor e descritas nas construções.

Distância entre dois pontos quaisquer

Na tentativa de provocar a ampliação desta praxeologia pontual, que resolve a tarefa “calcular a distância de um ponto à origem” para solucionar um tipo de tarefas que é “calcular a distância entre dois pontos”, passamos a descrever a praxeologia matemática construída pelo professor, antes da efetiva intervenção em sala de aula com os alunos.

Pudemos, também, utilizando técnica semelhante, calcular a distância entre dois pontos quaisquer localizados neste sistema. Em um primeiro momento localizamos os pontos em um sistema de coordenadas que formam entre si um ângulo θ (Figura 10). Em seguida passamos a descrever a praxeologia matemática.

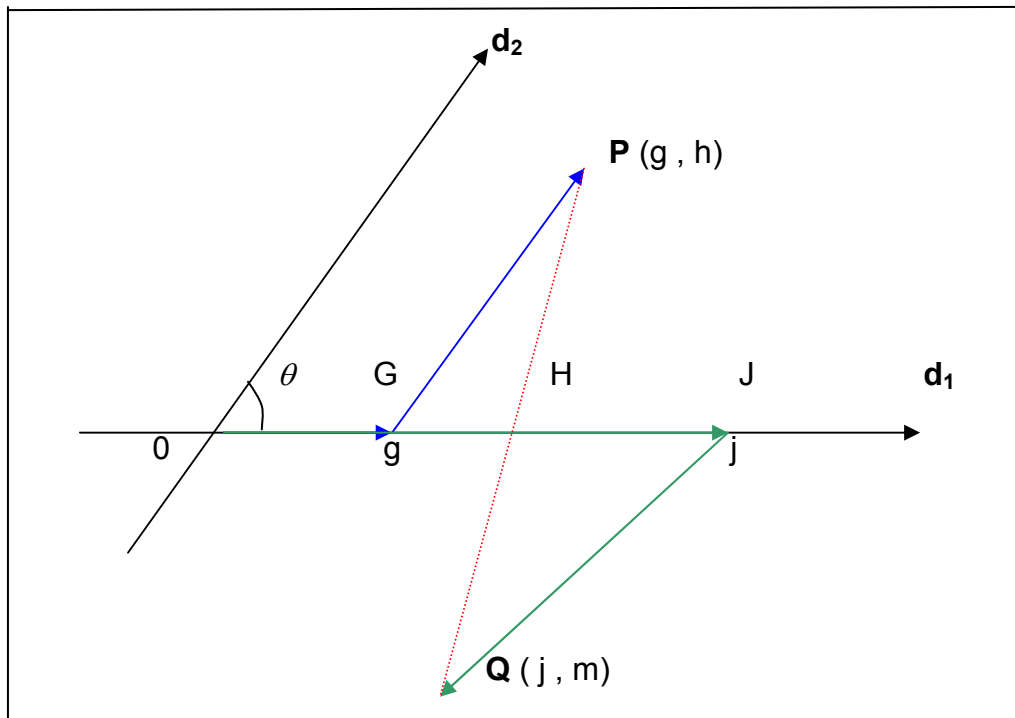


Figura 10: Modelo para calcular a distância de dois pontos quaisquer de um SCNO
 Fonte: Elaborada pelo autor, em 2006

Para calcular a distância \overline{PQ} , considere o ponto **H**, que é a intersecção entre a direção \mathbf{d}_1 e o segmento \overline{PQ} . Chame de **G** e **J** os pontos extremos dos percursos g e j , respectivamente, na direção \mathbf{d}_1 . Com isto, observe que os triângulos **GHP** e **JHQ** são semelhantes, pois possuem três ângulos congruentes dois a dois; logo, os segmentos opostos a ângulos congruentes, são proporcionais. $\frac{\overline{HQ}}{\overline{PH}} = \frac{\overline{HJ}}{\overline{GH}} = \frac{m}{h}$, aplicando as propriedades das proporções teremos $\frac{\overline{HJ} + \overline{GH}}{\overline{GH}} = \frac{m+h}{h}$, como conhecemos h , j e $\overline{HJ} + \overline{GH}$ é a diferença entre j e g , podemos, desta forma, encontrar \overline{GH} , o que permitirá, através da lei dos cossenos, encontrar \overline{PH} .

$$\overline{PH}^2 = \overline{GH}^2 + h^2 - 2 \overline{GH} \cdot h \cdot \cos \theta$$

Utilizando procedimento análogo, podemos encontrar a medida do segmento \overline{HQ} que será:

$$\overline{HQ}^2 = \overline{HJ}^2 + m^2 - 2 \cdot \overline{HJ} \cdot m \cdot \cos \theta$$

De posse das medidas dos segmentos \overline{PH} e \overline{HQ} , poderemos encontrar a medida do segmento \overline{PQ} , que é igual à soma de \overline{PH} e \overline{HQ} .

$$\overline{PQ} = \overline{PH} + \overline{HQ}$$

Há necessidade de que o aprendiz tenha na sua estrutura cognitiva, alguns conceitos que servirão para ancorar os novos conceitos, como a lei dos cossenos, os ângulos opostos pelo vértice, a semelhança de triângulos e outros que não estão explicitamente identificados. Além do que esta praxeologia matemática permitiu evidenciar as conexões existentes entre os objetos matemáticos, a partir de uma tarefa pontual, identificando uma técnica e sua tecnologia, o que, possivelmente, nos possibilitará, quanto ao desenvolvimento em sala de aula, incentivar os alunos na busca de uma justificativa para a tecnologia, ou seja, a identificação da teoria.

Sendo assim, enfatizamos uma técnica que calcula a distância entre dois pontos quaisquer neste sistema, com o objetivo de pôr essa praxeologia matemática em prática na perspectiva de provocar a construção dos alunos utilizamos a seguinte atividade.

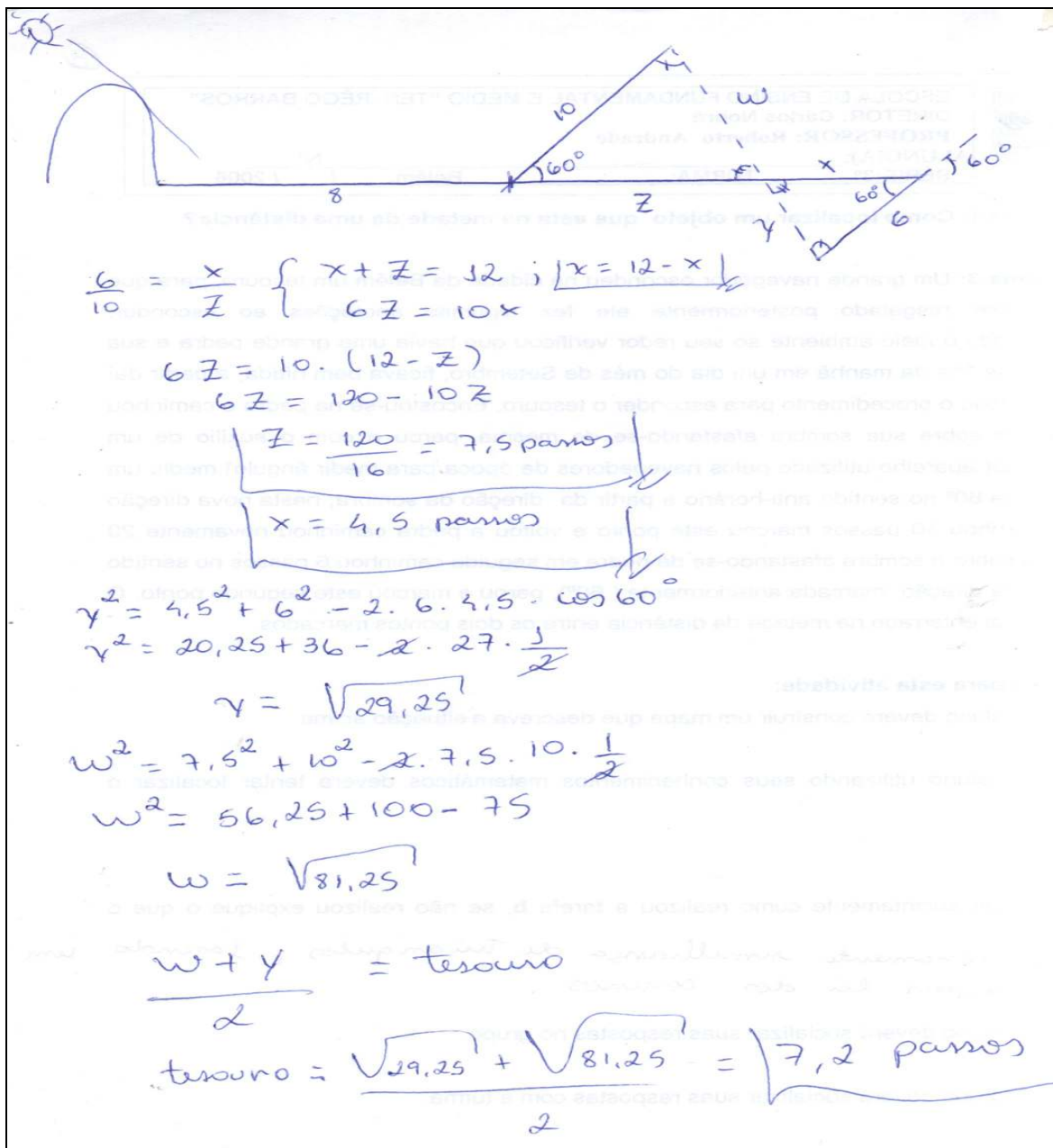
Atividade 4: Como localizar um objeto que está na metade de uma distância?

Propusemos aos alunos o problema (Anexo 3) no qual evidenciamos a descoberta de um tesouro que se encontrava na metade da distância entre dois pontos marcados num sistema de coordenadas não ortogonais. Este problema seguia o mesmo roteiro dos outros com algumas modificações na construção do mapa, pois o ângulo era de 60° , e os dois pontos marcados não estavam na origem. Desta forma o sistema construído teria um ângulo entre as retas cuja medida era de 60° .

O objetivo desta atividade era que o aluno manipulasse objetos ostensivos, como o sistema de coordenadas não ortogonais, e também pudesse passar da tarefa na atividade 3, para um tipo de tarefas na atividade 4 que é “calcular a distância entre dois pontos num dado plano”, isto é, manipular de forma intencional objetos ostensivos de forma a significar a situação vivida na tarefa anterior como uma nova situação, mais geral, promovendo deste modo a busca de passagem do objeto ostensivo para o não ostensivo.

Para realizar o problema proposto a turma se dividiu em grupos e cada grupo deveria construir o mapa que descrevesse a situação exposta no problema. Em seguida utilizar de seus conhecimentos prévios para localizar o tesouro. Cada grupo deveria evidenciar como realizou a localização do tesouro socializando suas conclusões.

Como as construções foram similares optamos por apresentar apenas a que segue abaixo.



(Construção 24)

Observamos nesta construção o resgate de conhecimentos prévios como semelhança de triângulos, propriedades das proporções, média aritmética e outros

conceitos, como são descritos pelos alunos quando perguntados para explicar sucintamente de que maneira desenvolveram a tarefa.

Primeiramente semelhança de triângulos, fazendo um sistema e depois lei dos cossenos.

(Construção 25)

A manipulação desses objetos ostensivos proporcionou o desenvolvimento de uma técnica para resolver esse tipo de tarefa. A técnica evidenciou mais uma vez a lei dos cossenos para calcular a distância entre dois pontos, portanto esta é a tecnologia da técnica. Sendo assim, podemos junto com os alunos enfatizar a seguinte técnica: para calcular a distância entre dois pontos quaisquer localizados num sistema de coordenadas aplica-se a lei dos cossenos.

As atividades acima foram trabalhadas num sistema de coordenadas não ortogonais por termos identificado durante nossa prática que o aprendiz, no ensino médio, trabalha apenas com o sistema de coordenadas ortogonais, o que possivelmente desenvolve no aluno a crença de que só existe este tipo de sistema que serve para localização de um objeto. Esta idéia pode provocar certos obstáculos no ensino-aprendizagem da Geometria Analítica Plana e dos Vetores.

Identificamos, durante o estudo bibliográfico, que a utilização do sistema de coordenadas ortogonais é um caso e não o único e que o seu emprego é preferível pela simplicidade que é estabelecida quando do emprego de técnicas para resolver alguns tipos de tarefas da Geometria Analítica Plana e dos Vetores. É este o motivo que nos conduz à especificidade do estudo no sistema de coordenadas ortogonais.

Destacamos também que o estudo da Geometria Analítica Plana nas instituições de ensino médio, só se dá no sistema ortogonal e como é objetivo das praxeologias construídas à sua institucionalização, nos propusemos buscar e evidenciar o porquê dos livros didáticos, para este nível de ensino, só enfocarem desta forma. Isso nos permitiu a institucionalização das praxeologias construídas.

A simplicidade acima descrita será evidenciada nas praxeologias matemáticas a seguir descritas, primeiramente pelo professor e em seguida pelos alunos quando da realização das atividades propostas nas organizações didáticas.

3.4 DISTÂNCIA DE UM PONTO ATÉ A ORIGEM NO SISTEMA DE COORDENADAS ORTOGONAIS

Para o sistema de coordenadas cartesianas ortogonais, continuamos com o desenvolvimento das atividades utilizando a mesma linha de pensamento. Desta forma, propomos a seguinte situação: se o sistema formar entre as direções d_1 e d_2 um ângulo de 90° , poderemos aplicar a mesma técnica/tecnologia para calcular a distância de um ponto à origem e a distância entre dois pontos. Para solucionar esta tarefa procuramos desenvolver a seguinte técnica.

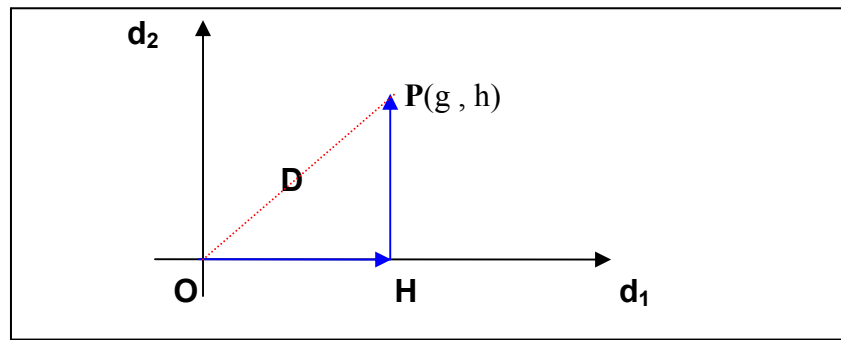


Figura 11: Modelo para calcular a distância de um ponto a origem de um sistema de coordenadas ortogonais (SCO)

Fonte: Elaborada pelo autor, em 2006

Marcando g unidades na direção d_1 e h unidades na direção d_2 , poderemos calcular a distância D do ponto P até a origem, aplicando a lei dos cossenos no triângulo OHP , teremos:

$$D^2 = g^2 + h^2 - 2.g.h.\cos 90^\circ$$

Como o $\cos 90^\circ$ é igual a zero chegaremos à seguinte conclusão: $D^2 = g^2 + h^2$, ou seja, o quadrado da distância de um ponto à origem é igual à soma dos quadrados dos percursos nas direções do sistema. Isto nada mais é do que o teorema de Pitágoras, pois o triângulo OHP formado na Figura 11 é retângulo.

3.5 DISTÂNCIA ENTRE DOIS PONTOS QUAISQUER NO SISTEMA DE COORDENADAS ORTOGONAIS

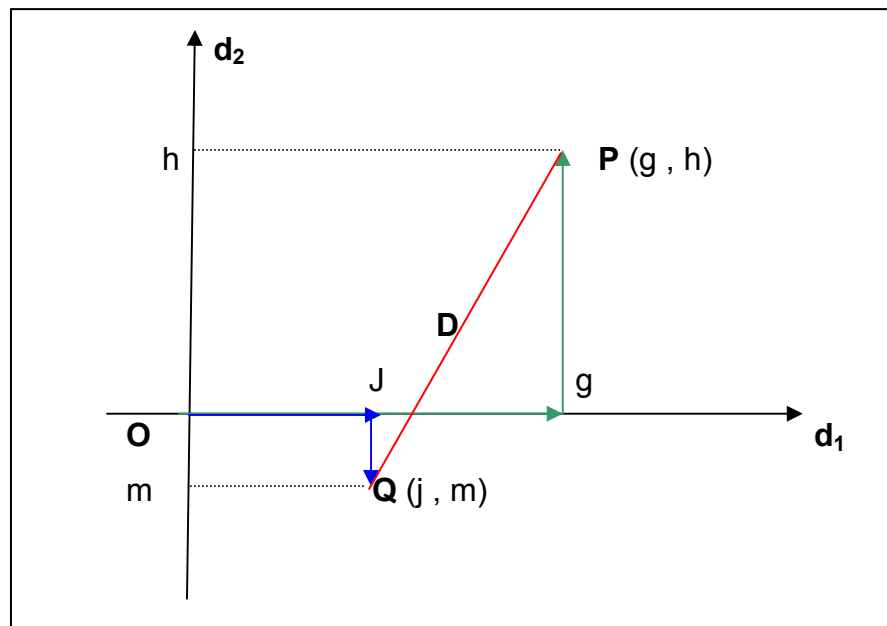


Figura 12: Modelo para calcular a distância de dois pontos quaisquer num SCO
Fonte: Elaborada pelo autor, em 2006

Para a realização desta tarefa, desenvolveremos a técnica onde indicaremos o ponto **P** pelas coordenadas **g** e **h**, **P** (**g**, **h**) e o ponto **Q** pelas coordenadas **j** e **m**, **Q** (**j**, **m**) sendo **g** e **j** na direção **d₁** e **h** e **m** na direção **d₂**. Para calcular a distância entre esses dois pontos, observaremos que os triângulos formados são retângulos, o que permite o transporte do segmento que mede (**g** – **j**) para coincidir com ponto **Q**, de tal maneira, a formar um novo triângulo retângulo, cujos lados são a hipotenusa **D** (distância entre os pontos **P** e **Q**), e os catetos (**g** – **j**) e (**h** + **m**) e, com isto, aplicamos o teorema de Pitágoras, no que resulta:

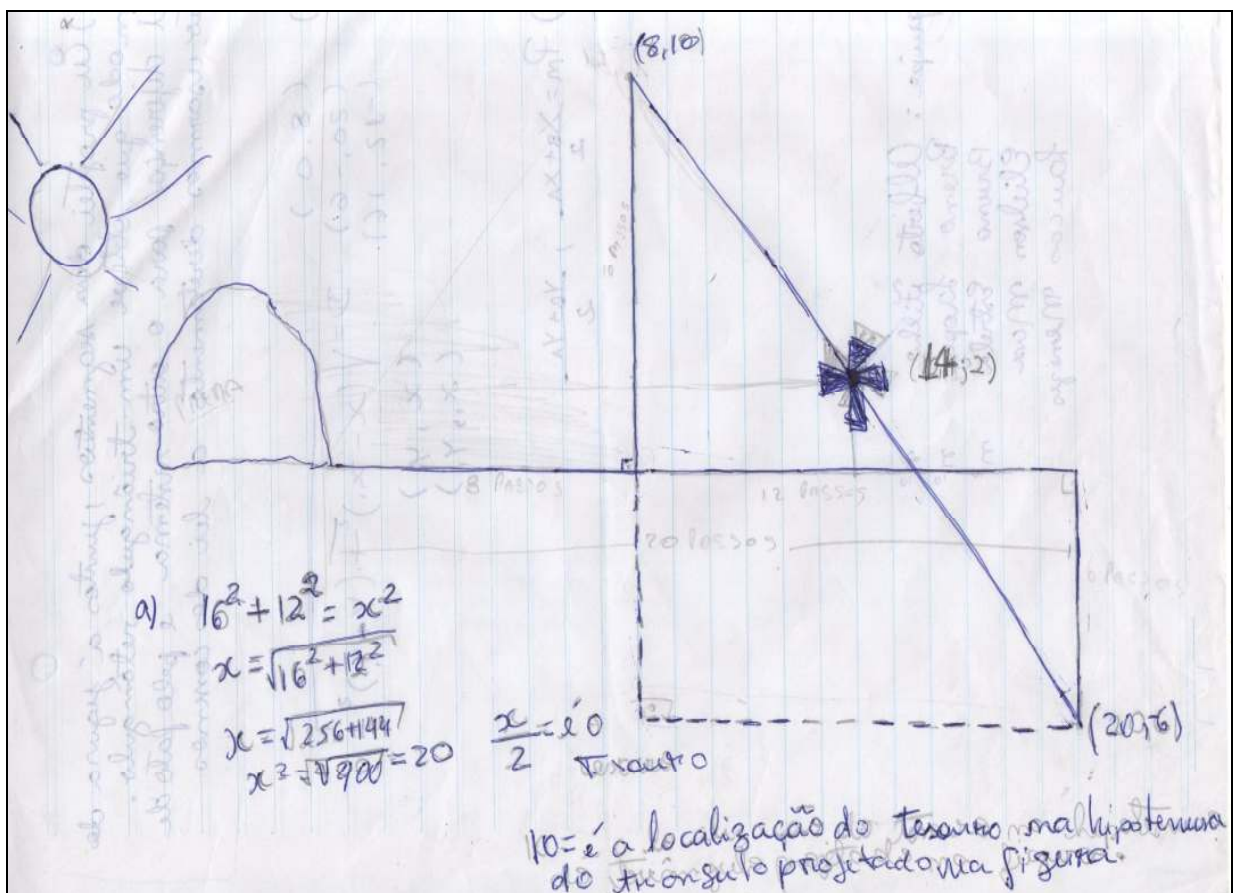
$$D^2 = (g - j)^2 + (h + m)^2, \text{ ou seja } D = \sqrt{(g - j)^2 + (h + m)^2}$$

Desta forma, poderemos generalizar esta expressão observando que (**g** – **j**) é a diferença entre as coordenadas dos pontos na direção **d₁**, o que não difere de **h** + **m**, pois o **m** é negativo, logo, a expressão **h** + **m** = **h** – (–**m**), o que também representa a diferença entre as coordenadas dos pontos relativa à direção **d₂**, chegamos à tecnologia da técnica. Sendo assim, podemos concluir que, para calcular a distância entre quaisquer dois pontos de um sistema que possuir direções ortogonais, é calcular a raiz quadrada da soma dos quadrados das diferenças de

coordenadas correspondentes. Isso nada mais é do que uma aplicação do teorema de Pitágoras, já que as situações constroem sempre, neste caso, um triângulo retângulo, que se torna também mais um conceito subsunçor. É o teorema de Pitágoras a tecnologia que se utilizou para calcular a distância entre dois pontos quaisquer de um sistema de coordenadas ortogonais.

Para realizar a intervenção em sala de aula elaboramos a atividade 5, na qual propomos um problema (Anexo 4) utilizando ainda a busca do tesouro, sendo que desta vez o mapa construído evidenciaria a construção de um sistema de coordenadas ortogonais. A atividade destacava o cálculo da distância entre dois pontos, e ainda o cálculo do ponto médio de um segmento.

A mudança no ângulo tinha como objetivo provocar que os alunos passassem a manipular objetos ostensivos da Matemática, num sistema de coordenadas ortogonais. O objetivo era provocar neles a percepção de diferenças existentes em comparação ao trabalho anteriormente realizado, no sistema de coordenadas não ortogonais, e que quando evidenciada esta diferença, ela enfatizasse que a manipulação neste sistema, dentro das praxeologias matemáticas se dá pela facilitação promovida por este sistema, o que é destacado na construção abaixo.



(Construção 26)

Na Construção 26 percebemos que ao construir o mapa os alunos identificaram a formação de um triângulo retângulo, o que de imediato lhes possibilitou o uso do teorema de Pitágoras, este triângulo foi construído a partir da translação de uma das medidas. Percebemos também a utilização de pares ordenados para localização dos pontos, o que nos permitiu concluir a compreensão, por parte dos alunos da utilização de um sistema de coordenadas ortogonais. Ainda na representação acima é evidenciada a localização do tesouro no ponto de coordenadas (14,2), que, durante a socialização com a classe o grupo, foi questionado, no sentido de mostrar como seus integrantes tinham encontrado essas coordenadas. A este questionamento o grupo respondeu que foi através da média aritmética entre as coordenadas das extremidades do segmento, o que pode ser visualizado nas respostas abaixo, dos subitens do problema proposto aos alunos. A letra **b** responde à seguinte questão: “explique quais diferenças encontradas neste cálculo em relação ao cálculo realizado nos outros sistemas”, a letra **c** destaca a distância entre dois pontos e a letra **d** evidencia a média aritmética para calcular o ponto médio de um segmento.

b) Eu projetei dois segmentos, juntos a figura de modo que obtive um triângulo retângulo. A diferença para o outro sistema é pelo fato de não usarmos diretamente a lei dos cossenos

c) $(8, 0)$
 $(20, -6)$
 $(-12, 16)$

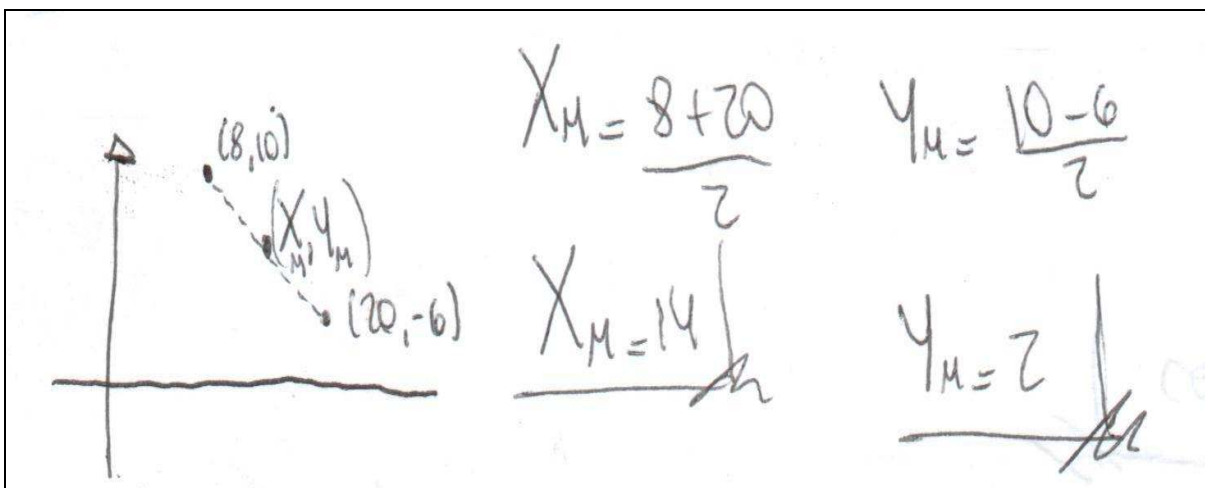
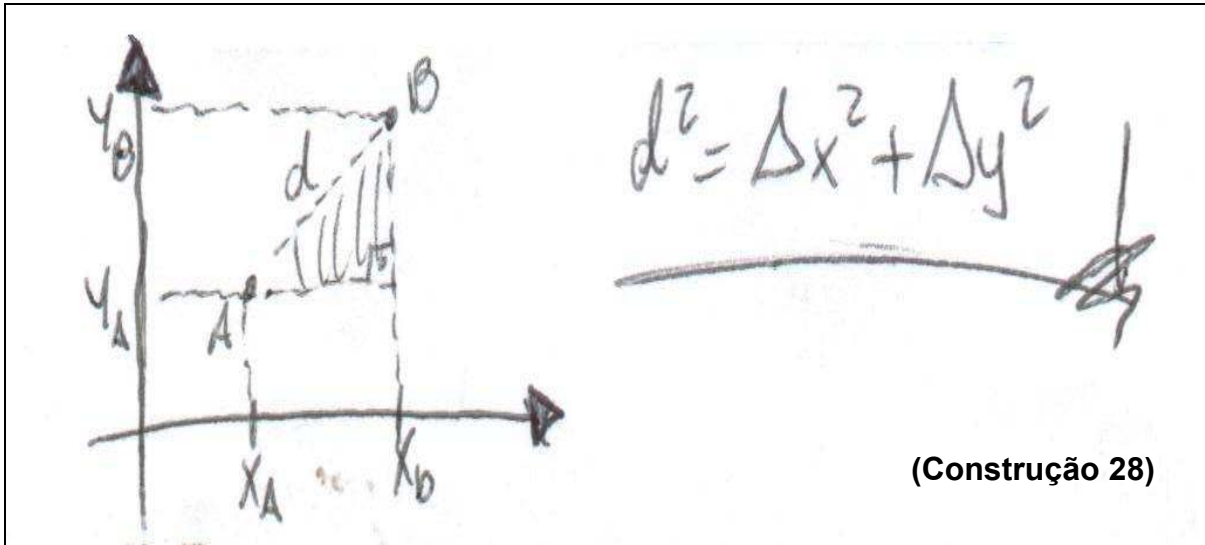
$$D = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2}$$

(x, y)
 (x_1, y_1)

(Construção 27)

d) $P_m = \frac{x_B + x_A}{2}, \frac{y_B + y_A}{2}$

Essas questões são também evidenciadas nas construções:



Mais uma vez podemos destacar que no tipo de tarefas “calcular a distância entre dois pontos”, agora realizado no sistema de coordenadas ortogonais, foi identificado como técnica a manipulação de objetos ostensivos, que desencadearia na aplicação do teorema de Pitágoras, que passa a ser a tecnologia.

3.6 O CONCEITO DE VETOR

Nas praxeologias matemáticas anteriores, exploramos questões que destacaram a localização de pontos no Sistema de Coordenadas e o cálculo da distância entre dois pontos. Podemos entender esta distância entre dois pontos como o comprimento do segmento orientado \overrightarrow{QP} , significa que sua origem é no ponto $Q(x_q, y_q)$ e sua extremidade no ponto $P(x_p, y_p)$.

Faremos, então, a localização desses pontos no sistema de coordenadas ortogonais, utilizando o problema proposto para a construção anterior, modificando as coordenadas dos pontos para facilitar o entendimento.

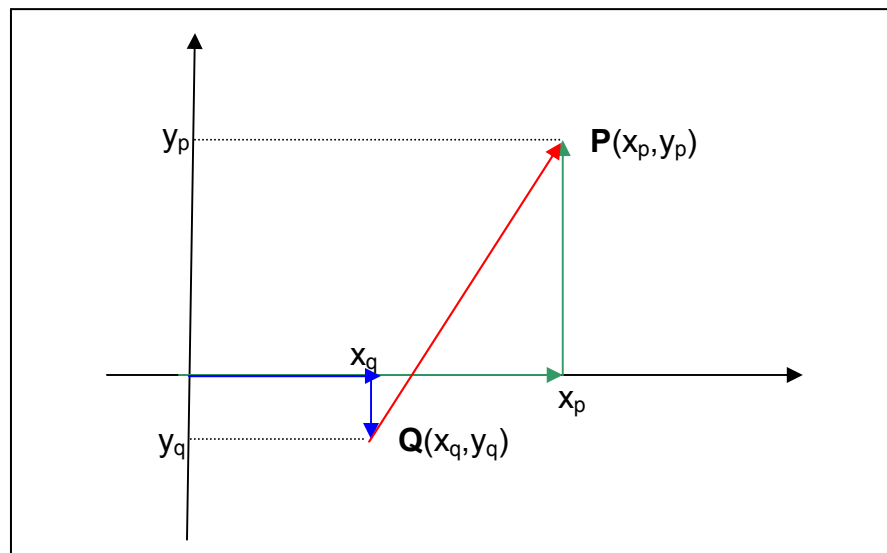


Figura 13: Modelo para construir o conceito de Vetor
Fonte: Elaborada pelo autor, em 2006

Após a localização do segmento orientado \overrightarrow{QP} , poderemos levantar o seguinte questionamento: qual o significado da realização da diferença entre os pares P e Q ?, ou seja, se fizermos $P - Q = (x_p, y_p) - (x_q, y_q) = (x_p - x_q, y_p - y_q)$. Este resultado determina um novo par de coordenadas dadas pelos resultados das diferenças entre as abscissas, o que determina a abscissa do novo par, e a diferença entre as ordenadas, que determina a ordenada do novo par.

Tomando esse par, e o denominando de $K(x_p - x_q, y_p - y_q)$, como o ponto extremo de um segmento que tem sua origem coincidindo com a origem dos eixos coordenados podemos interpretar este segmento como o translado do segmento orientado \overrightarrow{QP} para a origem do sistema, ou seja, a origem do segmento passa ser a

origem do sistema e a extremidade passa a ser o ponto determinado pela diferença entre as coordenadas dos pontos **P** e **Q** (Figura 14).

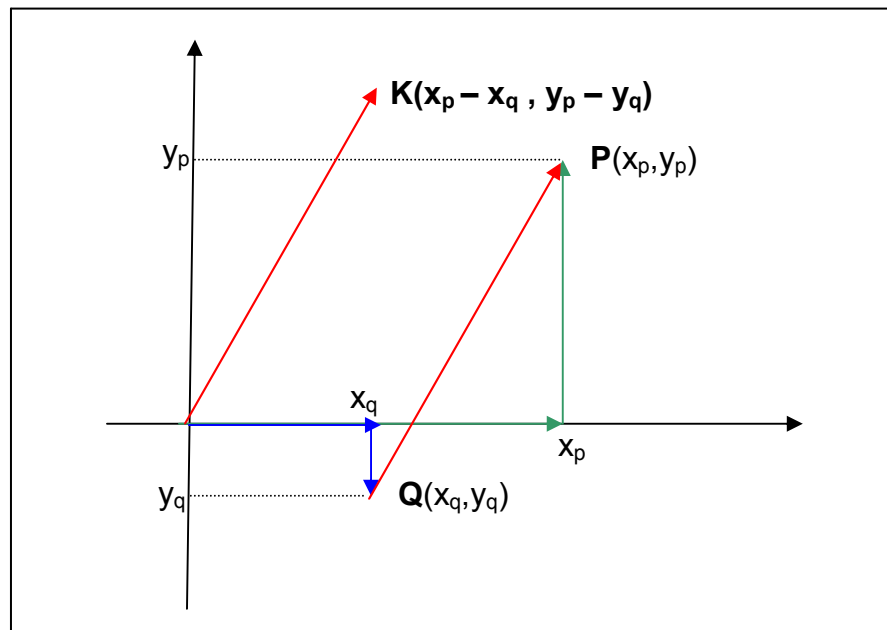


Figura 14: Modelo que evidencia a translação de segmentos orientados
Fonte: Elaborada pelo autor, em 2006

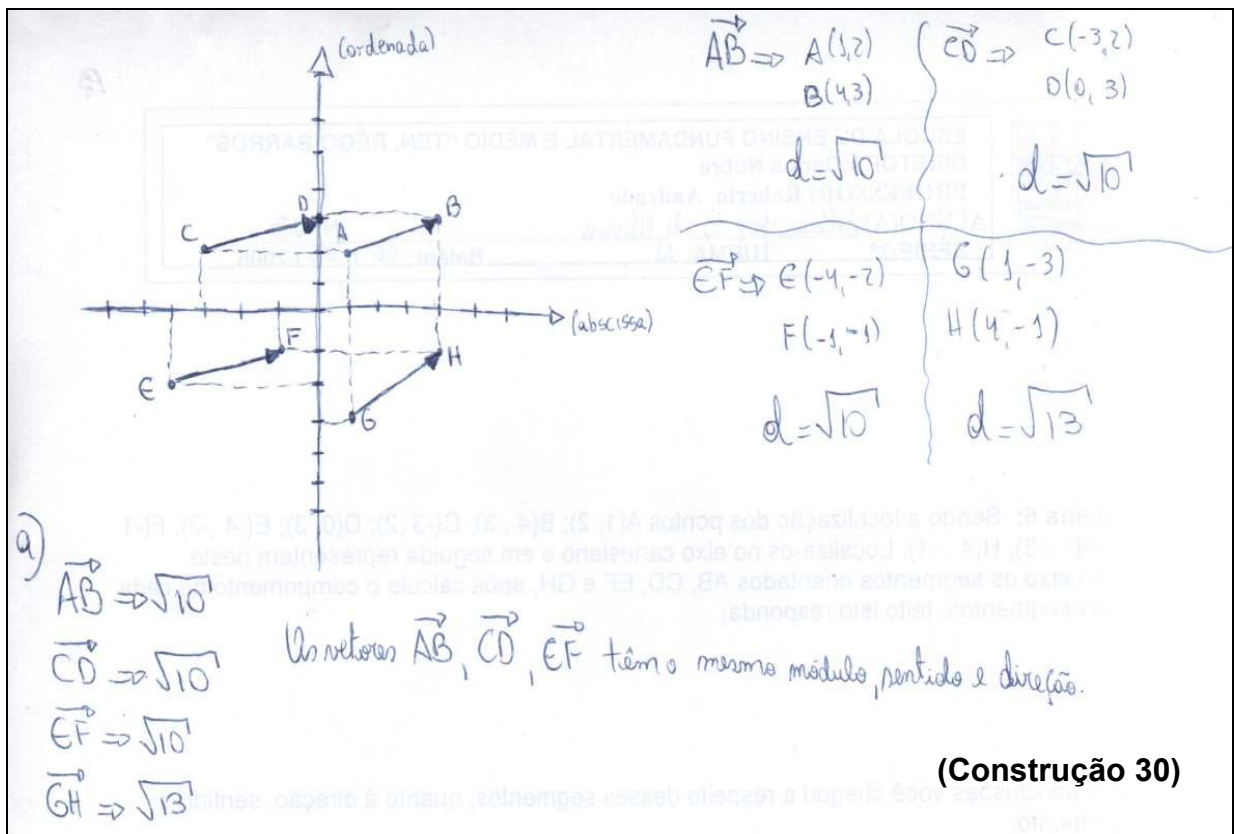
Ao realizarmos a diferença entre os pares e, conseqüentemente, identificar a translação do segmento, conseguimos perceber, por construção e/ou através de cálculos algébricos, que o segmento trasladado conserva direção, sentido e comprimento do segmento anterior, o que permite identificá-los como segmentos eqüipolentes, ou seja, que possuem mesma direção, sentido e comprimento. Desta forma, poderemos propor tarefas que permitam a construção da percepção de que não existem apenas esses dois segmentos eqüipolentes, ou seja, podemos construir uma infinidade de segmentos que possuem mesma direção, mesmo sentido e mesmo comprimento e, daí, levar a definição desse conjunto de segmentos eqüipolentes como um vetor. Significa dizer que manipulando os objetos ostensivos, sistema de coordenadas, segmentos orientados, subtração de coordenadas de pontos, poderemos fazer emergir o objeto não-ostensivo que é o conceito de Vetores.

Como o Vetor é o conjunto de segmentos orientados que tem mesma direção, mesmo sentido e mesmo comprimento, então, para representar o Vetor, poderemos escolher qualquer um dos segmentos. No sentido de “facilitar” a manipulação e a

operacionalização do estudo com Vetores, poderemos escolher como representação o segmento que tem como origem a origem do sistema de coordenadas.

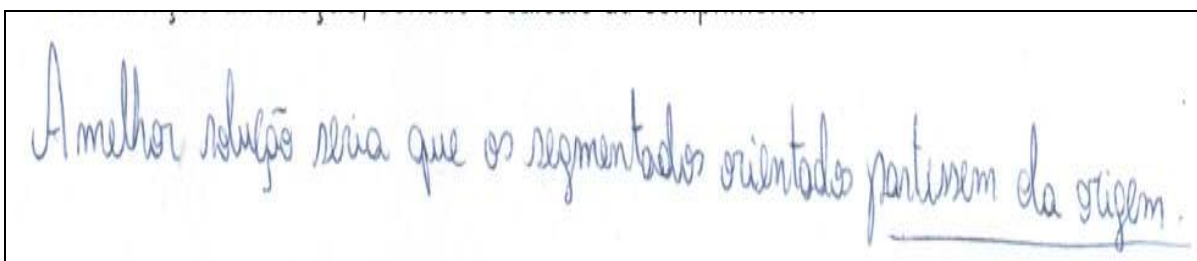
Para por em prática a praxeologia acima construída pelo professor, foram propostas aos alunos duas atividades as quais identificaremos, como atividade 6 e atividade 7, as duas propiciaram através da contextualização pró-ativa e retroativa da Matemática, nos termos propostos por Silva e Guerra (2005) um resgate, na estrutura cognitiva dos alunos, de conhecimentos já adquiridos objetivando a aquisição de novos conhecimentos, o que está de acordo com o que propõe a aprendizagem significativa.

Na Atividade 6 (Anexo 5) propusemos aos alunos que representassem no sistema de coordenadas ortogonais quatro segmentos orientados, dos quais lhes foram fornecida a localização das extremidades. Após localizar estas extremidades o aluno deverá representar cada um dos segmentos e em seguida calcular o comprimento, objetivando compará-los, também identificar a direção, e o sentido de cada um através da manipulação de ostensivos. Sendo assim uma das construções apresentadas pelos alunos é a Construção 30.



Observamos nesta construção o resgate de conhecimentos anteriormente trabalhados, como a localização de pontos no Plano Cartesiano, o cálculo da distância entre dois pontos, a adoção da palavra módulo para se referir ao comprimento do segmento orientado, a representação de segmentos orientados. Esses elementos são considerados objetos ostensivos da Matemática, e que por meio da manipulação destes, apresentada pelos alunos, pudemos identificar e construir o conceito de Vetor que é o objeto não-ostensivo.

Quando perguntado aos alunos que conclusões eles tinham chegado a respeito desses segmentos, quanto a direção, sentido e comprimento, e qual seria a melhor representação desses segmentos no Sistema de Eixos, para que facilitasse a determinação da direção, sentido e cálculo do comprimento (o módulo), o destaque foi que ao calcular o comprimento, três deles têm mesmo tamanho e apenas um deles tem tamanho diferente. Através do diálogo com a turma o professor perguntou se qualquer um deles poderia ser a representação dos outros. Em resposta um dos alunos falou “não, porque apesar de visualmente parecer terem mesma direção, mesmo sentido, apenas três têm mesmo módulo”. Esta fala nos possibilitou identificar que poderíamos representar os segmentos que tinham mesmo módulo, mesma direção e mesmo sentido, os quais foram descritos pelo professor como segmentos equípolos. Quanto à melhor representação para os três segmentos, foi evidenciada a seguinte resposta.



A melhor solução seria que os segmentos orientados partissem da origem.

(Construção 31)

Desta forma pudemos chegar à definição de segmentos equípolos utilizando a manipulação de objetos ostensivos. Continuando o diálogo perguntamos qual seria a extremidade deste segmento que tem a origem na origem do sistema e que representaria os outros três segmentos que tinham visualmente a mesma direção, o mesmo sentido e o mesmo módulo. Para motivar os alunos na busca da solução desta questão pedimos para que calculassem a diferença entre as

coordenadas dos pontos de cada segmento, realizando sempre extremidade menos origem. Ao realizar a diferença os alunos perceberam que os segmentos que tinham os mesmos módulos apresentavam mesmo resultado (3, 1). Assim, concluíram que este resultado representaria a extremidade do segmento, e a origem a origem do sistema.

Através desta praxeologia didática pudemos, através da manipulação de objetos ostensivos, esclarecer um equívoco que os alunos vinham cometendo que era definir vetor como segmento orientado o que é percebido na construção acima, pois, a partir do entendimento do que seja segmentos eqüipolentes, conseguimos chegar ao conceito de vetor, qual seja, o conjunto de segmentos eqüipolentes e que o segmento orientado seria uma representação do vetor. Sendo assim o segmento orientado é o objeto ostensivo e o vetor é o objeto não ostensivo.

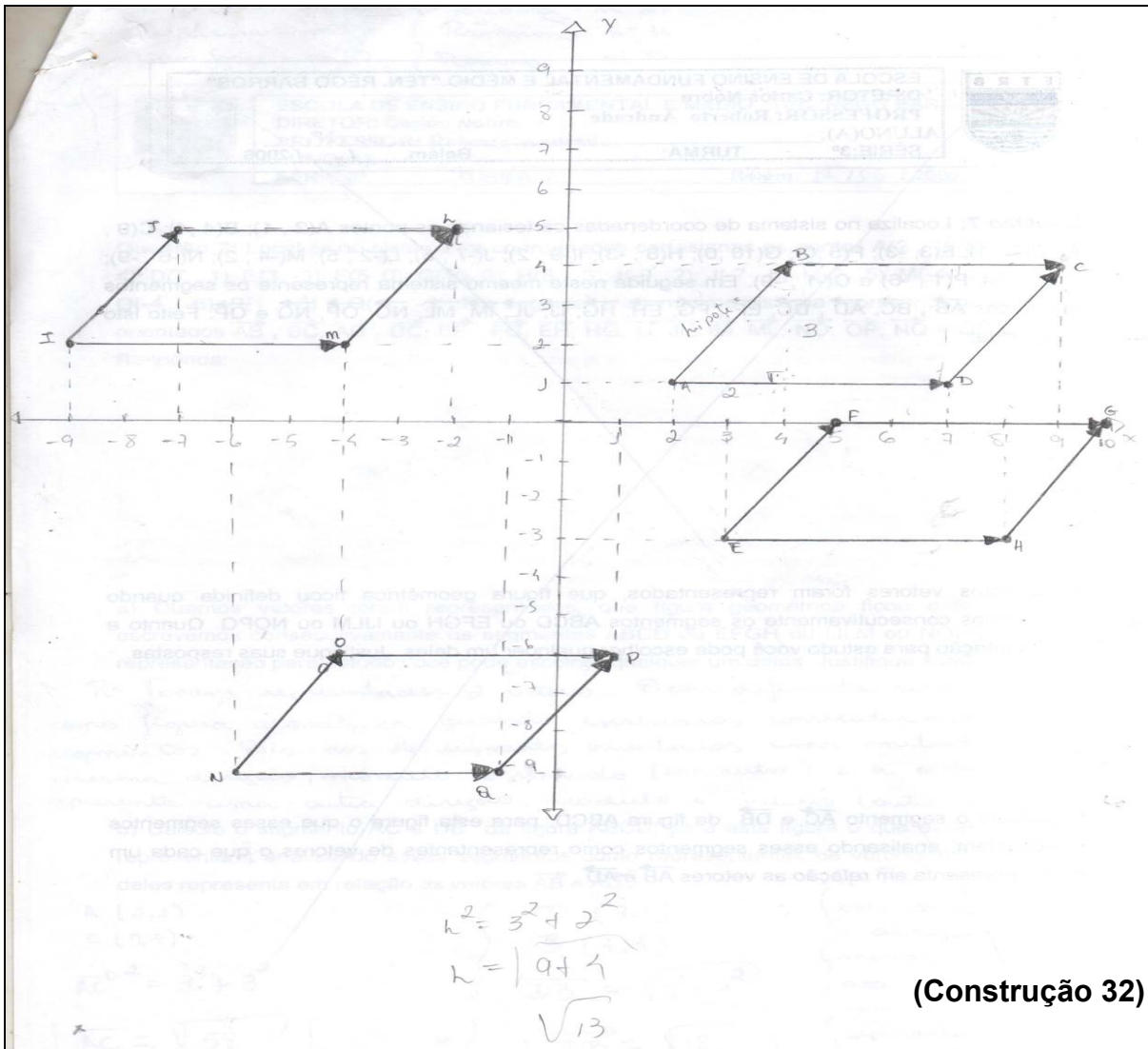
A seguir passaremos à atividade 7, na qual evidenciaremos as operações de adição e subtração entre vetores e a multiplicação de um vetor por um escalar, para isto recorreremos mais uma vez à contextualização pró-ativa e retroativa da Matemática. Através de diálogos com os alunos pudemos identificar que estes já realizavam estas operações com segmentos orientados nas aulas de Física, por isso nos propomos evidenciá-las através desta atividade.

Foi proposta aos alunos a localização de vários pontos, os quais quando orientados consecutivamente descreveriam paralelogramos que estariam localizados em posições diversas, do sistema de coordenadas ortogonais, sendo que os segmentos orientados descritos dois a dois possuem mesma direção mesmo sentido e mesmo módulo, logo podem ser identificados como representações de dois vetores.

O comando da questão 7 é:

Localize no sistema de coordenadas ortogonais os pontos A(2,1); B(4,4); C(9,4); D(7,1); E(3, -3); F(5, 0); G(10,0); H(8, -3); I(-9, 2); J(-7,5); L(-2, 5); M(-4, 2); N(-6,-9); O(-4,-6); P(1,-6) e Q(-1,-9). Em seguida neste mesmo sistema represente os segmentos orientados \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{BC} , \overrightarrow{AD} , \overrightarrow{DC} , \overrightarrow{EF} , \overrightarrow{FG} , \overrightarrow{EH} , \overrightarrow{HG} , \overrightarrow{IJ} , \overrightarrow{JL} , \overrightarrow{IM} , \overrightarrow{ML} , \overrightarrow{NO} , \overrightarrow{OP} , \overrightarrow{NQ} e \overrightarrow{QP} .

Uma das representações realizada foi:

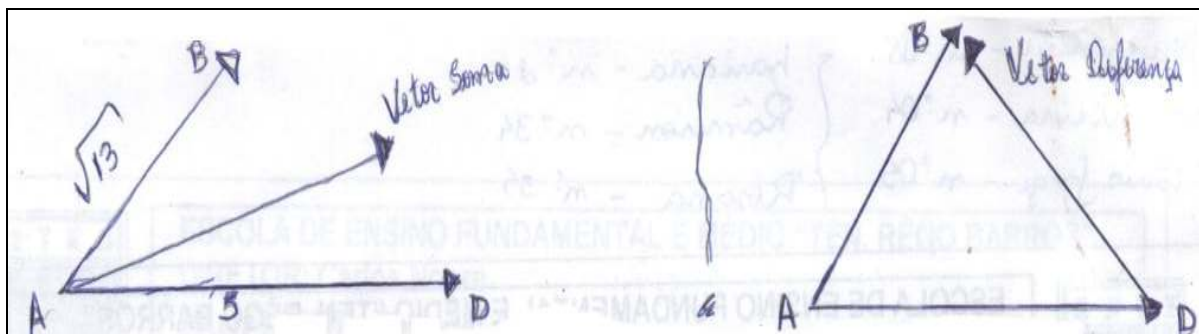


Quando perguntamos sobre a quantidade de vetores obtivemos a seguinte resposta:

R: Foram representados 2 vetores. Ficou definida um paralelogramo como figura geométrica quando escrevemos consecutivamente os segmentos. Pois dos 16 segmentos orientados uma metade apresenta mesma direção, módulo e sentido (um vetor) e a outra metade apresenta uma outra direção, módulo e sentido (outro vetor).

(Construção 33)

Após os alunos localizarem e identificarem os dois vetores, lhes foi solicitado a identificação do vetor soma e do vetor diferença. Do que obtivemos como resposta a representação seguinte.



(Construção 34)

Através da interação dialógica entre professor e alunos, a partir da Construção 34 solicitamos a construção de uma representação que evidenciasse o vetor soma e o vetor diferença no sistema de eixos utilizando uma das representações dos vetores identificados na Construção 32. A representação foi construída no quadro e reproduzida na Figura 15.

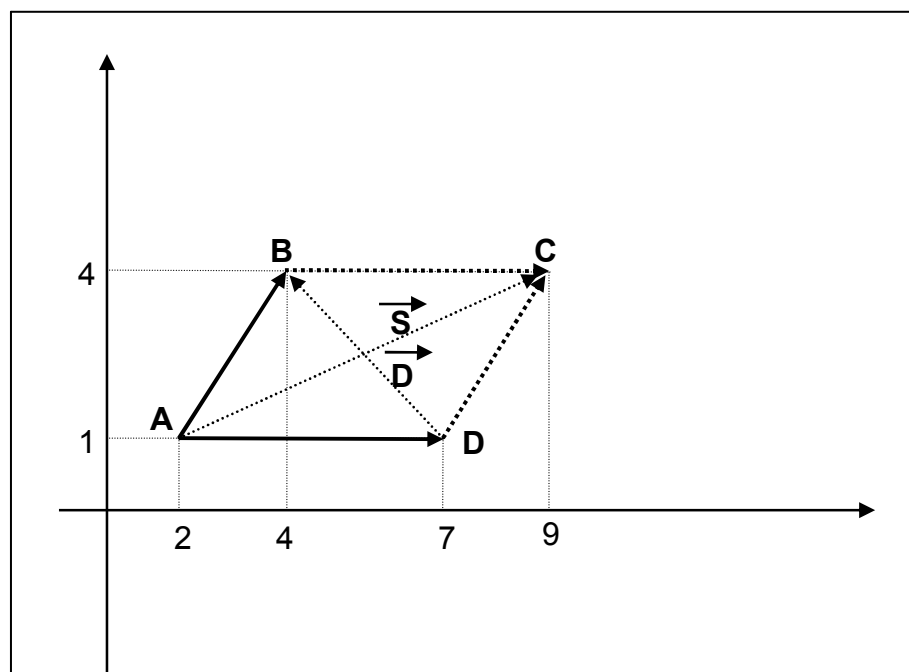


Figura 15: Construção de segmentos que representam o vetor soma e o vetor diferença num SCO

Fonte: Elaborada pelo autor, em 2006

Esta construção permitiu identificar os representantes dos vetores \vec{AD} e \vec{AB} , a partir deles pode ser identificada a posição dos vetores soma \vec{S} e diferença \vec{D} , esta

identificação ocorreu utilizando a técnica do paralelogramo. Também foi identificado que estes vetores podem ser representados pelos segmentos orientados \overrightarrow{AC} e \overrightarrow{DB} respectivamente. Estes fatos são observados na Construção 35.

$A(2,1)$
 $C(9,4)$
 $\overrightarrow{AC}^2 = 7^2 + 3^2$
 $\overrightarrow{AC} = \sqrt{58}$

$D(7,1)$
 $B(4,4)$
 $\overrightarrow{DB} = \sqrt{3^2 + 3^2}$
 $\overrightarrow{DB} = \sqrt{18}$

$R =$ Para a figura ABCD
 estes segmentos representam
 a diagonal maior e
 menor. Em relação
 aos vetores \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{AD}
 estes segmentos como
 representantes de vetores
 representam o vetor
 soma (\overrightarrow{AC}) e o vetor
 diferença (\overrightarrow{DB}).

(Construção 35)

Solicitamos também que os alunos apresentassem uma tecnologia da técnica que resolve o tipo de tarefas que é o “cálculo da soma e diferença entre dois segmentos orientados”, aqui tomados como representações de vetores. A tecnologia apresentada foi descrita na Construção 36.

$\overrightarrow{S} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$
 $\overrightarrow{S} = B - A + C - B$
 $\overrightarrow{S} = C - A$
 $\overrightarrow{S} = \overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{D} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$
 $\overrightarrow{D} = B - A - (D - A)$
 $\overrightarrow{D} = B - A - D + A$
 $\overrightarrow{D} = B - D$
 $\overrightarrow{D} = \overrightarrow{DB}$

(Construção 36)

Após estas constatações solicitamos aos alunos, para que a partir das conclusões sobre o cálculo do vetor soma e do vetor diferença, determinassem as coordenadas desses vetores. A solicitação realizada teve a seguinte construção algébrica.

No primeiro momento foi feito o cálculo das coordenadas de cada vetor:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (4,4) - (2,1) = (2,3), \text{ logo } \overrightarrow{AB} = (2,3).$$

$\vec{AD} = D - A = (7,1) - (2,1) = (5,0)$, logo $\vec{AD} = (5,0)$. Em seguida adotamos $\vec{AB} = \vec{u}$ e $\vec{AD} = \vec{v}$. Aqui percebemos a técnica utilizada e a diferença entre pares ordenados e podemos descrever o nível tecnológico-teórico como sendo a álgebra. Ao realizar estes cálculos perguntamos à turma o que representava cada um desses resultados e ainda como ficariam as localizações desses vetores no sistema de eixos quando da utilização desses pares ordenados. Em resposta a estes questionamentos os alunos realizaram a construção, representada na Figura 16.

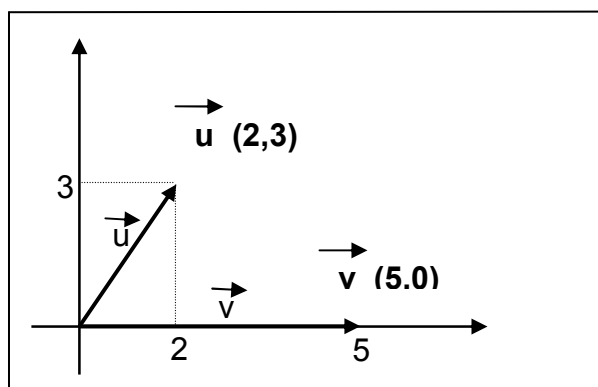


Figura 16: Representações de Vetores
Fonte: Elaborada pelo autor, em 2006

A partir daí os alunos puderam concluir então que se $\vec{S} = \vec{AC} = C - A = (9,4) - (2,1) = (7,3)$, que é o mesmo que fazer $\vec{S} = \vec{u} + \vec{v} = (2,3) + (5,0) = (7,3)$. Desta forma, pudemos identificar que dados os vetores $\vec{u} = (x_1, y_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2)$, o vetor soma será determinado pela soma das coordenadas correspondentes de cada vetor, ou seja, $\vec{S} = (x_1+x_2, y_1+y_2)$ (Figura 17).

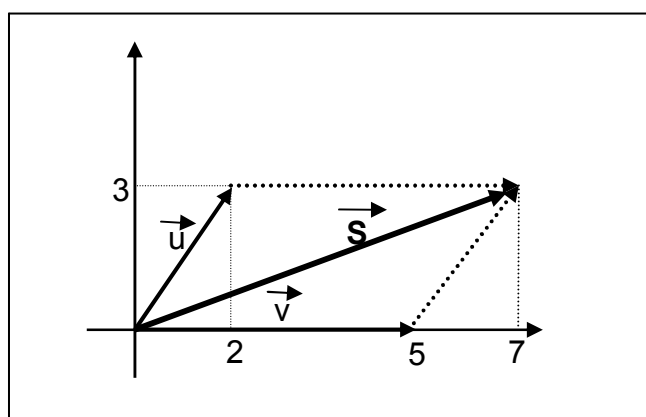


Figura 17: Representação do Vetor soma
Fonte: Elaborada pelo autor, em 2006

Do mesmo modo podemos identificar o vetor diferença $\vec{D} = (x_1 - x_2, y_1 - y_2)$, pois $\vec{D} = \vec{DB} = D - B = (7, 1) - (4, 4) = (3, -3)$, e graficamente a representação construída é a Figura 18.

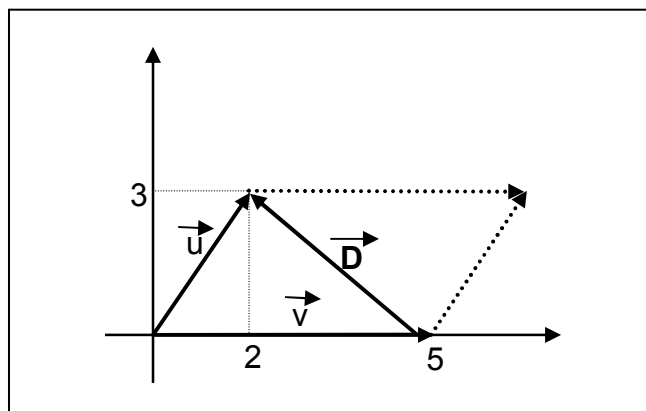
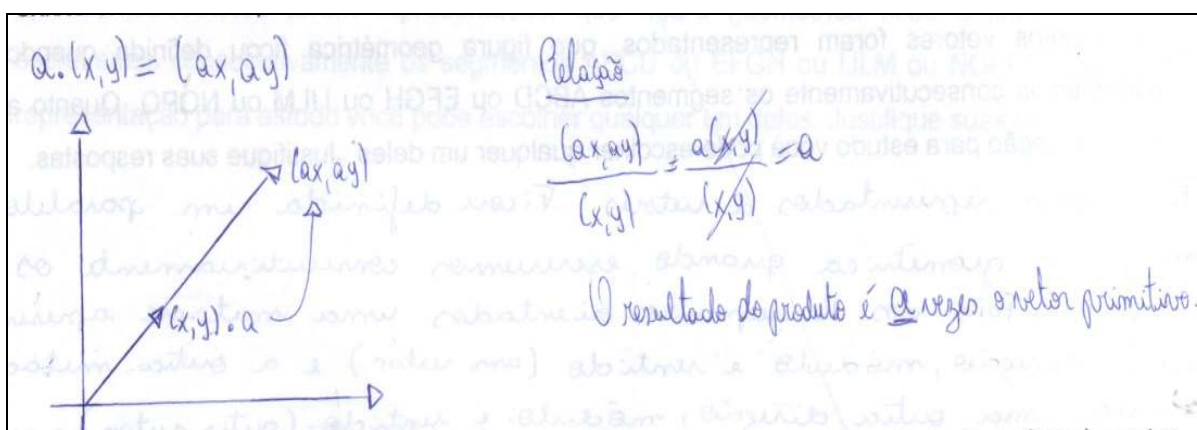


Figura 18: Representação do Vetor diferença
Fonte: Elaborada pelo autor, em 2006

Após a realização destas atividades pudemos constatar que os alunos conseguiram construir uma praxeologia para o tipo de tarefas, soma e diferença entre dois segmentos orientados, os quais foram admitidos como representações de dois vetores. Ainda na mesma seqüência propusemos aos alunos a realização de um outro tipo de tarefas para a determinação do produto de número real (um escalar) por um vetor. O problema proposto foi “determine genericamente como se calcula o produto de número real por um vetor e como representar este produto geometricamente”, além disto, responda justificando que relação existe entre o vetor primitivo e o resultado (resultante) do produto.



(Construção 37)

Aqui percebemos nas respostas dos alunos que a técnica para calcular o produto de um escalar por vetor é como se fosse a propriedade distributiva, apesar de que sabemos que isto nada mais é do que uma metáfora. Há um certo equívoco nesta comparação pois a propriedade distributiva só ocorre entre duas operações o que não é o caso, ou seja, a técnica funciona, multiplicando-se cada uma das coordenadas do vetor pelo número escalar. Outro equívoco cometido pelos alunos na Construção 37 se deu quando utilizaram a divisão entre pares ordenados para justificar o produto. Isto é um equívoco, pois a operação de divisão não se define entre pares ordenados. Este episódio foi debatido com os alunos do qual resultou na Figura 19, onde identificamos a tecnologia que justifica a técnica de multiplicação de um vetor por escalar como sendo o teorema de Tales.

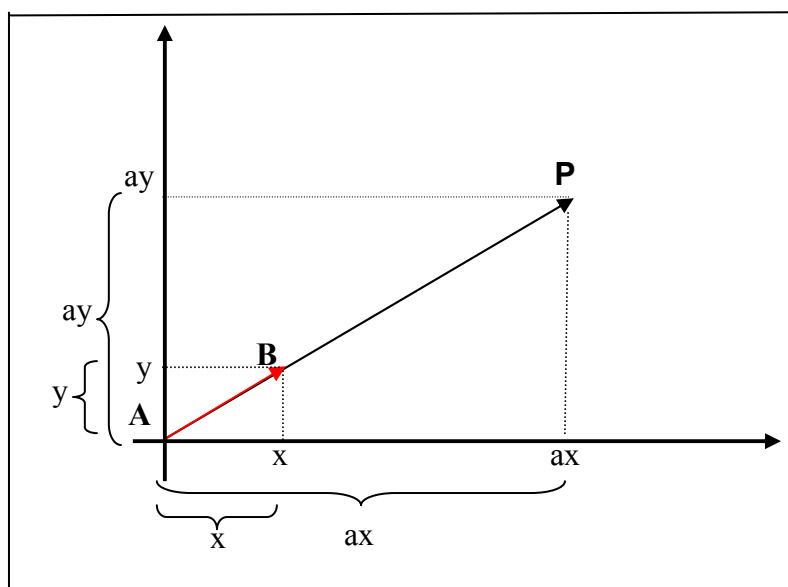


Figura 19: Representação do produto de um vetor por escalar no SCO
Fonte: Elaborada pelo autor, em 2006

Para aplicarmos o teorema de Tales tomamos o módulo do vetor $\vec{AB} = |AB|$ e o módulo do $\vec{AP} = |AP|$ e sendo as coordenadas de $\vec{AB} (x, y)$ e de $\vec{AP} (ax, ay)$, daí podemos algebricamente constatar que $|AP| = |a| |AB|$, pelo teorema de Tales teremos $\frac{|AP|}{|AB|} = \frac{ax}{x} = a$, ou ainda, $\frac{|AP|}{|AB|} = \frac{ay}{y} = a$. Ficou assim evidenciado o nível tecnológico-teórico para a o tipo de tarefas “multiplicação de um escalar por um vetor”.

Geometricamente o produto de número escalar por um vetor modifica o tamanho do segmento (o módulo), isto é, se o escalar for maior que um, o segmento representante é alongado, se for uma fração própria e positiva o segmento é contraído. Da mesma forma que se for negativo, além de alongar para escalar inteiro e contraído, para escalar fracionário, muda de sentido.

As conclusões acima foram estabelecidas a partir da interação dialógica entre professor e alunos na busca da construção do conhecimento no que diz respeito às operações de adição, subtração de vetores e multiplicação de um vetor por um escalar, o que caracteriza na Teoria Antropológica do Didático como a construção de praxeologias matemáticas ou organizações matemáticas.

3.7 EQUAÇÃO DA RETA

O professor, juntamente com os alunos, na perspectiva de construir uma organização didática para que pudéssemos encontrar a equação da reta, optamos por escolher o caminho que evidenciasse a conexão existente entre a equação de uma reta que passa por dois pontos e a equação da reta suporte de um vetor gerada pelos múltiplos escalares desse vetor. Como resultado desta construção apontamos a organização a seguir.

Tomemos um vetor \overrightarrow{AB} no plano cartesiano ortogonal de coordenadas (a, b) e um escalar $t \in \mathbb{R}$. Ao multiplicar o vetor \overrightarrow{AB} por um escalar inteiro maior que 1 ($t > 1$), encontraremos, como resultado, um outro vetor que chamaremos de \overrightarrow{AP} , cujas coordenadas serão (ta, tb) , que, geometricamente, poderemos representar na Figura 20.

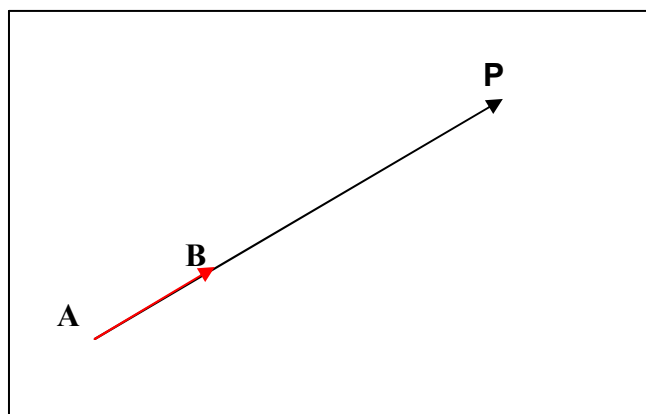


Figura 20: Representação geométrica do produto de um segmento orientado por número escalar

Fonte: Elaborada pelo autor, em 2006

Como $\vec{AP} = P - A$ e $\vec{AB} = B - A$, teremos então que $\vec{AP} = t (\vec{AB})$.
Representando num sistema de coordenadas ortogonais (Figura 21).

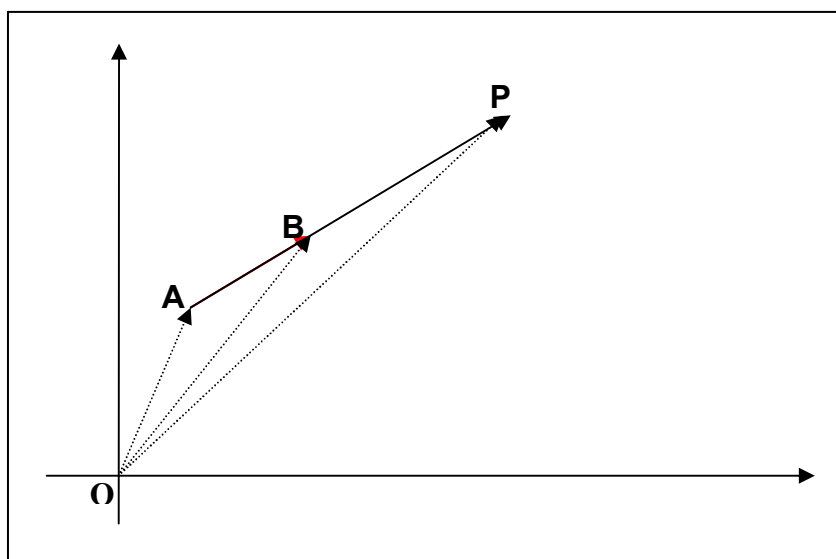


Figura 21: Modelo para identificar algebricamente o produto de um Vetor por um escalar no SCO
Fonte: Elaborada pelo autor, em 2006

Sendo $\vec{AB} (a, b)$, $\vec{OA} (x', y')$, $\vec{OP} (x, y)$ e $\vec{OB} (x_b, y_b)$, onde $a = x_b - x'$ e $b = y_b - y'$, teremos $\vec{OP} = \vec{OA} + t (\vec{AB})$, no que implica em:

$(x, y) = (x', y') + t (a, b)$, através da igualdade chegaremos em $\begin{cases} x = x' + t.a \\ y = y' + t.b \end{cases}$. Esta

expressão que representa a equação da reta que passa pelos pontos **A** e **B**, ou seja, equação da reta que passa pelo segmento orientado \vec{AB} .

A expressão acima pode ser escrita em função do número real **t** para chegarmos à expressão que não tenha o escalar **t**. Poderemos isolá-lo em uma das equações e, em seguida, substituí-lo na outra equação, como abaixo.

$$\begin{cases} x = x' + t.a \\ y = y' + t.b \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} t = \frac{x - x'}{a} \\ t = \frac{y - y'}{b} \end{cases} \longrightarrow \frac{x - x'}{a} = \frac{y - y'}{b}$$

$$y - y' = \frac{b}{a} (x - x') \longrightarrow \boxed{y = y' + \frac{b}{a} (x - x')}$$

Feito isto, poderemos também substituir a e b , tomados anteriormente como $a = x_b - x'$ e $b = y_b - y'$, na equação:

$$y = y' + \frac{y_b - y'}{x_b - x'} (x - x')$$

Identificando $\frac{y_b - y'}{x_b - x'}$ como o coeficiente angular da reta (o que representaremos, a partir de agora, por m), ou seja, a tangente do ângulo que a reta forma com o eixo horizontal, o qual é a inclinação da reta em relação ao eixo horizontal (direção do vetor) (Figura 22).

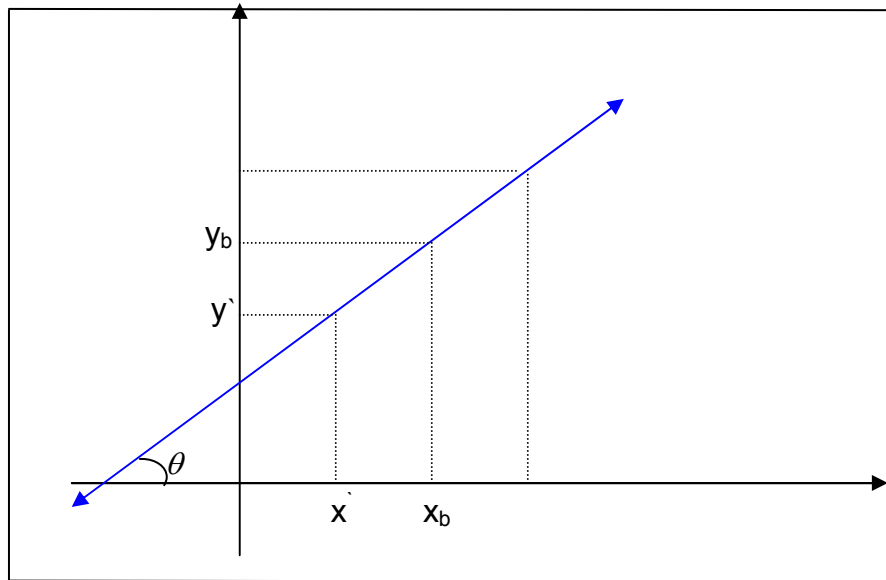


Figura 22: Modelo para identificar o coeficiente angular de uma reta como a tangente do ângulo
Fonte: Elaborada pelo autor, em 2006

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{y_b - y'}{x_b - x'} \quad m = \frac{y_b - y'}{x_b - x'}$$

Sendo assim, para encontrar a equação da reta suporte que passa pelo segmento orientado \overrightarrow{AB} , dados os pontos $A(x_a, y_a)$ e $B(x_b, y_b)$, usaremos a seguinte expressão:

$$y = y_a + \frac{y_b - y_a}{x_b - x_a} (x - x_a), \text{ ou } y = y_a + m (x - x_a)$$

Esta expressão representa a tecnologia da técnica para resolver um tipo de tarefas que é a determinação da equação da reta.

Exemplo: Encontrar a equação da reta que passa pelo segmento orientado \overrightarrow{AB} , onde $A = (2, 3)$ e $B = (5, 4)$.

Resolução

$$y = 3 + \frac{4-3}{5-2} (x - 2)$$

$$y = 3 + \frac{1}{3} (x - 2)$$

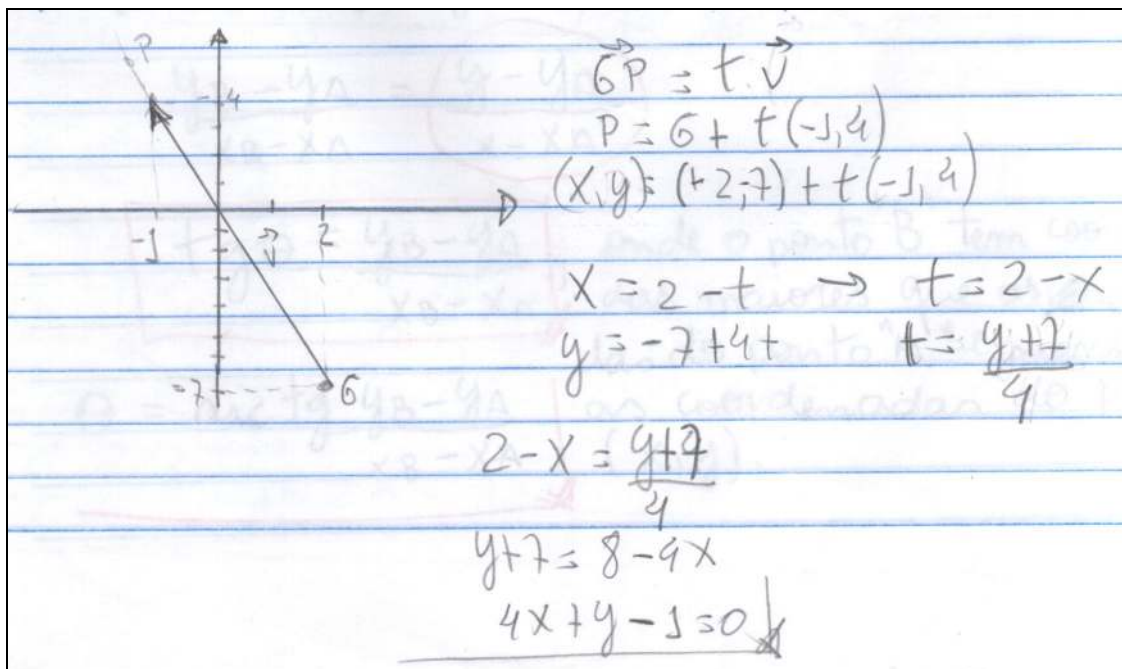
$$y = \frac{x}{3} + \frac{7}{3} \text{ (Equação reduzida da reta)}$$

$$x - 3y + 7 = 0 \text{ (Equação geral da reta)}$$

A organização didática acima descreve como tipo de tarefas a “determinação da equação da reta”, a técnica utilizada para resolver este tipo de tarefas foi construída a partir do produto de um número escalar pelo segmento de reta representante de um vetor, o que nos possibilitou perceber a tecnologia para esta técnica a qual é que dado um representante de um vetor e ao multiplicá-lo por um escalar inteiro, estaremos alongando este segmento que poderemos considerar como a representação da reta que contém este segmento orientado, isto é, se imaginarmos um escalar bem grande, o que possibilitará, de forma intuitiva, a assimilação da idéia de infinidade própria da reta. Daí poderemos concluir a teoria para essa tecnologia, a qual descrevemos da seguinte maneira, a equação da reta suporte de um vetor que passa pelas coordenadas de um de seus segmentos representantes, é determinada a partir da multiplicação de um escalar inteiro pelo segmento orientado representante do vetor. Destacamos também que o vetor determina um feixe de retas paralelas, ou seja, o vetor determina a direção da reta.

Também podemos observar que na construção da praxeologia matemática dos alunos, para a determinação da equação da reta, ocorreu a manipulação de objetos ostensivos da Matemática como gráfico, representação de um segmento de reta, igualdade de pares ordenados, sistemas de equações e outros. A manipulação desses objetos conclui com outro objeto ostensivo que é a representação algébrica de uma reta. O que possivelmente permite aos alunos assimilar a idéia geral do que

seja uma reta, que é o objeto matemático não-ostensivo. A seguir apresentamos a Construção 38 realizada pelos alunos que nos possibilitou chegar a estas conclusões.



(Construção 38)

Desta forma conseguimos a partir de uma organização matemática construir uma organização didática que possibilitou aos alunos a construção de suas organizações matemáticas para o tipo de tarefas, que foi determinar a equação de uma reta, o que ao nosso entender possivelmente propiciou a aprendizagem significativa dos conteúdos relacionados nesta atividade.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A realização desta pesquisa nos permitiu evidenciar as conexões existentes entre a Geometria Analítica Plana e o estudo dos Vetores, fato este que nos propiciou a construção das praxeologias didáticas e matemáticas para estes objetos matemáticos de forma conectada, ou seja, a Geometria Analítica Plana foi estudada tendo como fio condutor os Vetores. As conexões nos permitiram visualizar caminhos que puderam responder a muitas das indagações por nós levantadas quando da reflexão sobre a prática com estes conteúdos.

As respostas vieram no sentido em que pudemos vivenciar através da relação que os alunos mantiveram com estes objetos matemáticos. Esta era uma relação de interesse e muita motivação por parte dos discentes e dos docentes, pois as praxeologias matemáticas construídas nos permitiram evidenciar a importância dos objetos matemáticos trabalhados, para a vida prática do aluno, no contexto de seu cotidiano escolar, no que diz respeito à continuidade de seus estudos e a interpretação de problemas do dia-a-dia que necessitem do conhecimento dos objetos matemáticos envolvidos.

Podemos também destacar que após a construção das praxeologias matemáticas buscamos elaborar organizações didáticas que enfatizassem um resgate dos conhecimentos que o aluno já possuía na perspectiva de acomodação na sua estrutura cognitiva de novos conceitos. Isso nos permitiu observar a assimilação dos conceitos de forma organizada capaz de nos permitir concluir que possivelmente este foi um caminho para a aprendizagem significativa.

Concordamos com os autores que enfatizam a respeito da aprendizagem que esta não se dá de forma instantânea, significa dizer que a aprendizagem é uma construção a qual ocorre constantemente durante toda nossa vida. Dia após dia estamos buscando, recebendo e acumulando conhecimentos, os quais segundo David Ausubel, se estes forem acomodados organizadamente na estrutura cognitiva, possivelmente permitirá a aprendizagem significativa.

Vários episódios das organizações didáticas, quando da intervenção em sala de aula, ressaltam momentos de indagação por parte dos alunos, quanto a suas construções no sentido de questionar se o que haviam construído está certo ou errado. Estas indagações refletiram a insegurança que os alunos têm quando postos

a construir o conhecimento, porém as organizações didáticas lhes permitiam a observação da validade das suas construções, pois os momentos de socialização das atividades permitiam a construção de um modelo que serviria de referência para toda a turma, sendo assim a insegurança era amenizada. Estes momentos de socialização foram os momentos mais importantes de toda pesquisa, pois era justamente neles que se dava a interação dialógica entre os participantes da atividade, professor e alunos.

Na interação dialógica buscávamos aproximar as construções realizadas pelos alunos das organizações matemáticas construídas antes da intervenção, esta aproximação se dava no sentido de enfatizar as conexões entre os conteúdos e também na relação que estes conteúdos têm com outros objetos matemáticos, o que também permitia a visualização por parte dos alunos da aplicabilidade da Geometria Analítica Plana. Esta interação também evidenciou vários momentos de institucionalização dos objetos estudados, no que diz respeito às praxeologias construídas pelos alunos. Além disso, a manipulação de vários objetos ostensivos da Matemática, realizada pelos alunos, nos permitiu identificar a construção por partes destes do conhecimento da Geometria Analítica Plana.

Ainda podemos destacar que a organização didática construída permitiu desenvolver os conteúdos da Geometria Analítica Plana e dos Vetores, realizando o estudo de sistema de coordenadas cartesianas, estudo do ponto, equação da reta, conceito de vetores, operações com vetores e aplicação desses objetos matemáticos de forma contextualizada como o proposto pelas universidades do estado do Pará nas grades de conteúdos para os concursos vestibulares e o que é proposto pelo PCN do Brasil. Os conteúdos foram abordados de forma conectada o que possibilitou “economia de tempo”, economia esta necessária para os alunos que estão nesta fase educacional.

Sendo assim podemos destacar a importância e a relevância da Teoria Antropológica do Didático, no que diz respeito à construção de praxeologias matemáticas e didáticas para o desenvolvimento de processos de estudos, no nosso caso da Geometria Analítica Plana. Poderemos também apontar futuros estudos utilizando esta teoria com outros objetos matemáticos bem como em outros níveis de ensino, no sentido de contribuir não só com o processo de ensino-aprendizagem, mas também na formação de futuros professores de Matemática.

REFERÊNCIAS

ANDRÉ, Marli Eliza; DALMAZO, Afonso. **Etnografia da prática escolar**. 12. ed. Campinas: Papirus, 2005.

ALMOULLLOUD, A. S. VII EPEM. **Mr-21 A Geometria na escola básica: que espaços e formas tem hoje?** São Paulo: EPEM - USP/SP, 2004. 10p. Disponível em: <www.sbempaulista.org.br/anais/epem>. Acesso em: 28 set. 2005

_____. **Fundamentos da didática da Matemática**, CEMA, PUC-SP, 2000a.

_____. A teoria antropológica do didático. In: ENCONTRO BRASILEIRO DE ESTUDANTES DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 4., 2000, Rio Claro. **Anais...** Rio Claro: Unesp, 2000b. p. 161-169.

ANDERY, Maria Amália et al. **Para compreender a ciência**. 5. ed. Rio de Janeiro: Espaço e Tempo, 1994.

BARALDI, Ivete Maria, **Matemática na escola: que ciência é esta?** Bauru: EDUSC, 1999.

BEZERRA, Roberto Zaremba. **Matemática no ensino médio**. Rio de Janeiro: Livro Técnico, 1998.

BRASIL, Presidência da República. Lei 9.394 de 20 de dezembro de 1996. Estabelece as diretrizes e bases de educação nacional. **Diário Oficial [da República Federativa do Brasil]**, Brasília, p. 27833, 23 dez. 1996.

_____. Ministério da Educação. **Parâmetros curriculares nacionais: ensino médio**. Brasília, 1999.

_____. Presidência da República. Lei 11.274 de 06 de fevereiro de 2006. Altera a redação dos arts. 29, 30, 32 e 87 da lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996, que estabelece as diretrizes e bases de educação nacional, dispondo sobre a duração de 9 (nove) anos para o ensino fundamental, com matrícula obrigatória a partir dos 6 (seis) anos de idade. **Diário Oficial [da República Federativa do Brasil]**, Brasília, p. 01, 07 fev. 2006.

BRIGHENTI, Maria Jose Lourenço. **Representações gráficas: atividades para o ensino-aprendizagem de conceitos trigonométricos**. São Paulo: EDUSC, 2003.

BOSCH, M.; CHEVALLARD, Yves. La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs Objectd'étude et problematique. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, Paris, v. 19, n. 1, p. 77-124, 1999.

BOSCH, M. Un punto de vista antropológico: la evolución de los "instrumentos de representación" en la actividad matemática. In: SEMINARIO INTERUNIVERSITARIO DE INVESTIGACIÓN EN DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS, 15, 2000, Huelva (Espanha). **Anais...** Huelva: SEIEM, 2000.

BOYER, C. **História da Matemática**. Tradução: Elza F. Gomide. Edgar Blucher. São Paulo, 1974.

CARVALHO, Alex Moreira et al. **Aprendendo metodologia científica**. Rio de Janeiro: O Nome da Rosa, 2000.

CHEVALLARD, Yves et al. **Estudar matemáticas: o elo entre o ensino e a aprendizagem**. Tradução: Daisy Vaz de Moraes. Porto Alegre: Artmed, 2001.

_____. Organiser l'étude. 3. Écologie & régulation. **Actes de la XI école d'été de didactique**. Grenoble: La pensée sauvage, p. 41-56, 2002.

DOMINGUES, Hygino H. **Surgimento da Geometria Analítica**. Disponível em: <www.somatematica.com.br>. Acesso em 14 mar. 2006.

EVES, Howard. **Introdução à história da Matemática**. Tradução: Higinio A. Domingues. São Paulo: Unicamp, 2004.

FREIRE, Paulo. **Pedagogia do oprimido**. 17. ed. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1987.

_____. **Pedagogia da autonomia**. 22. ed. São Paulo: Paz e Terra, 2002.

FORQUIN, Jean-Claude. **Escola e cultura: as bases sociais e epistemológicas do conhecimento escolar**. Porto Alegre: Artes Médicas, 1993.

GENTIL, Nelson et al. **Matemática para o 2º grau**. v. 3. São Paulo: Ática, 1998.

GERALDI, Corinta M. Grisolia. et al. Refletindo com Zeichner: um encontro orientado por preocupações políticas teóricas e epistemológicas. In: GERALDI, Corinta Maria Grisolia; FIORENTINI, Dario; PEREIRA, Elisabete Monteiro de Aguiar (orgs). **Cartografia do trabalho docente**. 3. ed. São Paulo: Mercado de Letras, 2003.

GIESTA, Nágila Carpolíngua. **Cotidiano escolar e formação reflexiva do professor: moda ou valorização do saber docente?** Araraquara-SP: Junqueira & Marin, 2005.

GONÇALVES, Elisa Pereira. **Conversas sobre iniciação à pesquisa científica**. Campinas: Alínea, 2005.

GONÇALVES, Tadeu Oliver; FIORENTINI, Dario. Formação e desenvolvimento Profissional de docentes que formam matematicamente futuros professores. In: FIORENTINI, Dario; NACARATO, Adair Mendes (orgs), **Cultura, formação e desenvolvimento profissional de professores que ensinam Matemática: investigando e teorizando a partir da prática docente**. São Paulo: Musa, 2005.

GONÇALVES, Tadeu Oliver; GONÇALVES, Terezinha V. O. Reflexões sobre uma prática docente situada: buscando novas perspectivas para a formação de professores. In: GERALDI, Corinta Maria Grisolia; FIORENTINI, Dario; PEREIRA, Elisabete Monteiro de Aguiar (orgs). **Cartografia do trabalho docente**. 3. ed. São Paulo: Mercado de Letras, 2003.

HUETE, Sánchez J. C.; BRAVO, Fernández J. A. **O ensino da Matemática: fundamentos teóricos e bases psicopedagógicas**. Porto Alegre: Artmed, 2006.

IEZZI, Gelson et al. **Matemática 3ª série do 2º grau**. São Paulo: Atual, 1980.

IEZZI, Gelson et al. **Fundamentos de Matemática elementar**. v. 7. São Paulo: Atual, 1993.

JULIA, D. A cultura escolar como objeto histórico. **Revista Brasileira de História da Educação**, Campinas, n. 1, p. 9-45, 2001.

LIMA, Elon lages et al. **A Matemática no ensino médio**, v. 3. Rio de Janeiro: SBM, 2005.

LÜDKE, Menga; ANDRÉ, Marli E. D. A. **Pesquisas em educação: abordagens qualitativas**. São Paulo: EPU, 1986.

MARCIO. **Uma breve história dos Vetores e seus amiguinhos**. Disponível em: <www.ime.unicamp.com.br>. Acesso em: 18 out. 2005.

MIGUEL, Antonio; MIORIM, Maria Ângela. **História na educação matemática: propostas e desafios**. Belo Horizonte: Autêntica, 2004.

MIGUEL, Maria Inêz Rodrigues. **Ensino e aprendizagem do modelo de Poisson: uma experiência com modelagem**. 2005. 266f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2005.

MOREIRA, Marco A; MASSINI, Elcie S. F. Salzano. **Aprendizagem significativa: a teoria de David Ausubel**. São Paulo: Moraes, 1982.

NOVAK, Joseph Donald. **Uma teoria de educação**. Tradução: Marco Antonio Moreira. São Paulo: Pioneira, 1981.

NUNES, Isauro Beltran; RAMALHO, Betania Leite (org), **Fundamentos do ensino-aprendizagem das ciências naturais e da matemática**: o novo ensino médio. Porto Alegre: Sulina, 2004.

PAQUAY, L.; WAGNER, Marie-Cécile, Competências profissionais privilegiadas nos estágios e na videoformação. In: PAQUAY, Léopold et al. **Formando professores profissionais**: Quais estratégias? Quais competências? Tradução: Fátima Murad e Eunice Gruman. 2 ed. Porto Alegre: Artemed, 2001.

PERRENOUD, Philippe. **A prática reflexiva no ofício de professor**: profissionalização e razão pedagógica. Tradução: Cláudia Schilling. Porto Alegre: Artmed, 2002.

ROSSINI, Renata. Saberes docentes sobre o tema função: uma investigação das Praxeologias. In: ENCONTRO BRASILEIRO DE ESTUDANTES DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 9., 2005. São Paulo. **Anais...** São Paulo: Feusp, 2005.

SCHÖN, Donald A. **Educando o profissional reflexivo**: um novo design para o ensino-aprendizagem. Tradução: Roberto Cataldo Costa. Porto Alegre: Artes Médicas Sul, 2000.

SILVA, Circe Mary Silva da. **A matemática positivista e sua difusão no Brasil**. Rio de Janeiro: EDUSFE, 1999.

SILVA, F. H. S.; SANTO, A. O. do E. A contextualização: uma questão de contexto. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 8., Recife 2004. **Anais...** Recife: SBEM, 2004. p. 12 - 32.

SILVA, Francisco Hermes Santos; GUERRA, Renato Borges. Contextualização do ensino da Matemática. In: CONGRESSO INTERNACIONAL DE ENSINO DA MATEMÁTICA, 3. 2005, Canoas. **Anais...** Canoas: Ulbra, 2005. Comunicação científica, artigo completo

STEINBRUCH, Alfredo; WINTERLE, Paulo. **Geometria analítica**. 2. ed. São Paulo: McGraw-Hill, 1987.

STRUIK, D. **História concisa das Matemáticas**. Lisboa: Gradativa, 1989.

ZEICHNER, Kenneth M. Para além da divisão entre professor pesquisador e pesquisador acadêmico. In: GERALDI, Corinta Maria Grisolia; FIORENTINI, Dario; PEREIRA, Elisabete Monteiro de Aguiar (orgs). **Cartografia do trabalho docente**. 3. ed. São Paulo: Mercado de Letras, 2003.

_____. **A formação reflexiva de professores**: idéias e práticas. Tradução: A. J. Carmona Teixeira, Maria João Carvalho e Maria Nóvoa. Lisboa: Educa, 1993.

ANEXOS

Anexo 1

Problema 1: Um grande navegador escondeu na cidade de Belém um tesouro. Para que este fosse resgatado posteriormente, ele fez algumas anotações ao escondê-lo. Observando o meio ambiente ao seu redor verificou que havia uma grande pedra, cuja sombra, às 9h da manhã, em um dia do mês de setembro, ficava bem nítida. A partir daí, ele começou o procedimento para esconder o tesouro. Encostou-se na pedra e caminhou 8 passos sobre sua sombra. Afastando-se da mesma, parou, e, com o auxílio de um astrolábio (aparelho utilizado pelos navegadores da época para medir ângulo) mediu um ângulo de 30° no sentido anti-horário, a partir da direção da sombra. Nesta nova direção, ele caminhou 10 passos, e, aí, enterrou o tesouro. Se você fosse o navegador, como construiria um mapa para que futuramente pudesse resgatar o tesouro.

Tarefas para esta atividade:

- a) Cada aluno dentro do grupo deverá, a partir do texto, construir um mapa para que, no futuro, o navegador pudesse resgatar o tesouro.
- b) Os mapas construídos deverão ser socializados dentro da equipe, cada equipe deverá escolher o mapa mais coerente com as informações do texto, ou confeccionar um mapa com a contribuição de todos.
- c) Cada grupo deve socializar o mapa escolhido com a turma, explicando os critérios utilizados para a escolha da construção apresentada.
- d) A turma deve escolher o mapa que melhor representa a situação exposta no texto, destacando o motivo da escolha.
- e) Se a pedra fosse destruída por algum motivo, daria para construir o mapa e encontrar o tesouro, ou seja, qual a importância da pedra para a localização do tesouro?
- f) Se só houvesse a pedra e não fosse guardada nenhuma outra informação, daria para localizar o tesouro, ou seja, qual a importância das outras informações para localização do tesouro?

Anexo 2

Problema 2: Um grande navegador escondeu na cidade de Belém um tesouro. Para que este fosse resgatado posteriormente, ele fez algumas anotações ao escondê-lo. Observando o meio ambiente ao seu redor verificou que havia uma grande pedra, cuja sombra, às 9h da manhã, em um dia do mês de setembro, ficava bem nítida. A partir daí, ele começou o procedimento para esconder o tesouro. Encostou-se na pedra e caminhou 8 passos sobre sua sombra; afastando-se da mesma, parou, e com o auxílio de um astrolábio (aparelho utilizado pelos navegadores da época para medir ângulo) mediu um ângulo de 30° no sentido anti-horário, a partir da direção da sombra. Após determinar esta direção, caminhou 12 passos no sentido oposto, e, aí, ele enterrou o tesouro.

Tarefas para esta atividade:

- a) Cada equipe deverá construir um mapa que descreva a situação acima.
- b) Cada aluno, dentro da equipe, utilizando os conhecimentos matemáticos que já possui, deverá tentar calcular a distância da pedra até o tesouro.
- c) Explique sucintamente como realizou a tarefa **b**. Se não realizou, explique o que o impediu.
- d) Cada aluno deverá socializar suas respostas com os membros do seu grupo.
- e) Cada grupo deverá socializar suas respostas com a turma.

Anexo 3

Problema 3: Um grande navegador escondeu na cidade de Belém um tesouro. Para que este fosse resgatado posteriormente ele fez algumas anotações ao esconder. Observando o meio ambiente ao seu redor verificou que havia uma grande pedra, cuja sombra às 9h da manhã em um dia do mês de setembro, ficava bem nítida. A partir daí ele começou o procedimento para esconder o tesouro. Encostou-se na pedra e caminhou 8 passos sobre sua sombra afastando-se da mesma, parou e com o auxílio de um astrolábio (aparelho utilizado pelos navegadores da época para medir ângulo) mediu um ângulo de 60° no sentido anti-horário a partir da direção da sombra, nesta nova direção ele caminhou 10 passos marcou este ponto e voltou a pedra caminhou novamente 20 passos sobre a sombra afastando-se da pedra em seguida caminhou 6 passos no sentido oposto da direção marcada anteriormente (60°), parou e marcou este segundo ponto. O tesouro foi enterrado na metade da distância entre os dois pontos marcados.

Tarefas para esta atividade:

- a) Cada aluno deverá construir um mapa que descreva a situação acima.
- b) Cada aluno utilizando seus conhecimentos matemáticos deverá tentar localizar o tesouro.
- c) Explique sucintamente como realizou a tarefa **b**, se não realizou explique o que o impediu.
- d) Cada aluno deverá socializar suas respostas no grupo.
- e) Cada grupo deverá socializar suas respostas com a turma.

Anexo 4

Problema 4: Um grande navegador escondeu na cidade de Belém um tesouro. Para que este fosse resgatado posteriormente ele fez algumas anotações ao esconder. Observando o meio ambiente ao seu redor verificou que havia uma grande pedra, cuja sombra às 9h da manhã em um dia do mês de setembro ficava bem nítida. A partir daí ele começou o procedimento para esconder o tesouro. Encostou-se na pedra e caminhou 8 passos sobre sua sombra afastando-se da mesma, parou e com o auxílio de um astrolábio (aparelho utilizado pelos navegadores da época para medir ângulo) mediu um ângulo de 90° no sentido anti-horário a partir da direção da sombra, após determinar esta direção caminhou 12 passos no sentido oposto e aí ele enterrou o tesouro.

Tarefas para esta atividade:

- a) Cada grupo deverá construir um mapa e utilizando os conhecimentos matemáticos que já possui deverá tentar calcular a distância da pedra até o tesouro.
- b) Identifique que tipo de sistema vocês estão trabalhando, localize nele o tesouro e explique quais as diferenças encontradas neste cálculo em relação ao cálculo realizado nos outros sistemas. Após, socialize no seu grupo.
- c) Em seu grupo e ainda neste sistema represente genericamente a localização de um ponto qualquer e determine a expressão que calcula a distância de um ponto qualquer à origem.
- d) Que relação tem essa distância com o seguimento orientado que sai da origem até o ponto?

Anexo 5

Problema 5: Sendo a localização dos pontos A (1, 2); B (4, 3); C (-3, 2); D (0, 3); E (-4, -2); F (-1, -1); G (1, -3); H (4, -1), localize-os no eixo cartesiano e em seguida represente neste mesmo eixo os segmentos orientados AB, CD, EF e GH. Após calcule o comprimento de cada um dos segmentos. Feito isto responda:

- a) A que conclusões você chegou a respeito desses segmentos, quanto a direção, sentido e comprimento?

- b) Qual seria para você a melhor representação desses segmentos, para que facilitasse a determinação da direção, sentido e cálculo do comprimento?