SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E CIENTÍFICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICAS

JOSÉ CARLOS DE SOUZA PEREIRA

ANÁLISE PRAXEOLÓGICA DE CONEXÕES ENTRE ARITMÉTICA E ÁLGEBRA NO CONTEXTO DO DESENVOLVIMENTO PROFISSIONAL DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA

BELÉM – PARÁ

2012

JOSÉ CARLOS DE SOUZA PEREIRA

ANÁLISE PRAXEOLÓGICA DE CONEXÕES ENTRE ARITMÉTICA E ÁLGEBRA NO CONTEXTO DO DESENVOLVIMENTO PROFISSIONAL DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas do Instituto de Educação Matemática e Científica da Universidade Federal do Pará, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Educação em Ciências e Matemáticas – Área de Concentração em Educação Matemática – Linha de Pesquisa em Percepção Matemática, Processos e Raciocínios, Saberes e Valores.

Orientador: Prof. Dr. José Messildo Viana Nunes

BELÉM – PARÁ

2012

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da UFPA

Pereira, José Carlos de Souza, 1965-
Análise praxeológica de conexões entre aritmética e álgebra no contexto do desenvolvimento profissional do professor de matemática / José Carlos de Souza Pereira. - 2012.

Orientador: José Messildo Viana Nunes.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Pará, Instituto de Educação Matemática e Científica, Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas, Belém, 2012.

1. Matemática - estudo e ensino. 2. Professores de matemática - narrativas pessoais. 3. Professores de ensino fundamental - formação. 4. Prática de ensino. 5. Didática. I. Título.

CDD 22. ed. 510.7

JOSÉ CARLOS DE SOUZA PEREIRA

ANÁLISE PRAXEOLÓGICA DE CONEXÕES ENTRE ARITMÉTICA E ÁLGEBRA NO CONTEXTO DO DESENVOLVIMENTO PROFISSIONAL DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas do Instituto de Educação Matemática e Científica da Universidade Federal do Pará, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Educação em Ciências e Matemáticas – Área de Concentração em Educação Matemática – Linha de Pesquisa em Percepção Matemática, Processos e Raciocínios, Saberes e Valores.

Orientador: ____
Prof. Dr. José Messildo Viana Nunes (IEMCI/UFPA – Presidente da Banca)

1º Examinador: ____
Prof. Dr. Renato Borges Guerra (IEMCI/UFPA – Membro Interno)

2º Examinador: ____
Prof. Dr. Saddo Ag Almouloud (PUC/SP – Membro Externo)

Membro Suplente: ____
Prof. Dr. Francisco Hermes Santos da Silva (IEMCI/UFPA)

AVALIADO EM: _____/_____/_____ CONCEITO: _______________

DIDICATÓRIA

À minha esposa Margarida.

Aos meus filhos Ruan e Jeanne.

À minha mãe biológica Maria Leocádia.

Aos meus tios Osvaldo e Maria.

AGRADECIMENTOS

A Deus que me concedeu saúde e capacidade intelectual para concluir esta pesquisa.

Ao meu orientador, Prof. Dr. José Messildo Viana Nunes, pela solicitude e sábias orientações.

Ao Prof. Dr. Saddo Ag Almouloud pelas sugestões que alargaram a dimensão desta pesquisa.

Ao Prof. Dr. Renato Borges Guerra pelas contribuições e reflexões que engrandecem esta pesquisa.

Ao Prof. Dr. Francisco Hermes Santos da Silva pelas contribuições e sugestões de leituras que me permitiram melhorar o conteúdo deste estudo.

A coordenação do PPGECM pela presença ativa na defesa de seus pós-graduandos.

Ao CNPQ pela bolsa de estudo concedida.

Aos integrantes do Grupo de Estudo em Didática da Matemática (GEDIM) pela amizade e estímulos durante as etapas do curso de mestrado.

A amiga Cristiane Couto Carvalho pela corresponsabilidade na monografia do curso de especialização.

Aos meus familiares em geral.

RESUMO

Este trabalho é uma pesquisa narrativa autobiográfica, que expõe a análise das minhas praxeologias, no contexto do meu desenvolvimento profissional, como professor de matemática. O foco da análise recai sobre os diversos conflitos praxeológicos que vivi durante a elaboração e aplicação em sala de aula de uma proposta didática para ensinar operações polinomiais na sétima série (oitavo ano) do ensino fundamental. Com esta pesquisa pretendi responder a seguinte questão: Quais conexões entre aritmética e álgebra determinaram as minhas praxeologias durante a ampliação didática que desenvolvi, para ensinar adição, subtração, multiplicação e divisão de polinômios, na sétima série (oitavo ano) do ensino fundamental? Para analisar as minhas próprias praxeologias a partir da proposta didática que elaborei, assumi a Teoria Antropológica do Didático (TAD) de Yves Chevallard como referencial teórico principal. A análise que fiz das minhas próprias praxeologias envolveu sistema de numeração decimal, operações aritméticas fundamentais, operações polinomiais, tipos de tarefas e técnicas, universo cognitivo e equipamento praxeológico. Os resultados apontam que as minhas relações pessoais com tipos de objetos ostensivos e não ostensivos e tipos de tarefas e técnicas presentes ou não na proposta didática que elaborei, revelam quais praxeologias passadas e presentes compunham os diversos momentos do meu desenvolvimento profissional como professor de matemática. Assim, antes da graduação vivi as praxeologias de professor leigo, durante e após a especialização o meu universo cognitivo passou por conflitos praxeológicos, revelando que as sujeições institucionais conformavam as minhas praxeologias para ensinar as operações polinomiais.

Palavras-chave: Narrativa Autobiográfica; Aritmética e Álgebra; Teoria Antropológica do Didático; Objetos Ostensivos e Não Ostensivos; Análise Praxeológica.

ABSTRACT

This study is an autobiographical narrative research that demonstrates the analysis of my praxeologies, in the context of my professional development, as a mathematics teacher. The focus of the analysis falls on the various praxeological conflicts I have faced in the classroom during the elaboration and application of an educational proposal for teaching polynomial operations to students in the 7th grade (1st year of junior high school). In this study my intention was to answer the following question: Which connections between arithmetic and algebra determined my praxeologies during the educational amplification I developed, to teach the addition, subtraction, multiplication and division of polynomials, in the 7th grade of fundamental education? In order to analyze my own praxeologies through the educational proposal I elaborated, I used the Anthropological Theory of the Didactic (ATD) of Yves Chevallard as the main theoretical reference. The analysis I made of my own praxeologies involved the system of decimal numeration, fundamental arithmetic operations, polynomial operations, types of tasks and techniques, the cognitive universe and praxeological equipment. The results show that my personal relations with types of ostensive and non ostensive objects and the types of tasks and techniques present or not in the educational proposal I elaborated, reveal which past and present praxeologies made up the different moments in my professional development as a mathematics teacher. In this sense, before graduation I lived the praxeologies of a lay teacher, during and after my specialization my cognitive universe went through praxeological conflicts, revealing that the institutional subjections shaped my praxeologies for teaching polynomial operations.

Key-words: Autobiographical Narrative; Arithmetic and Algebra; Anthropological Theory of the Didactic; Ostensive and non Ostensive Objects; Praxeological Analysis.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

I. INTRODUÇÃO

As premissas desta pesquisa surgiram com o curso de Especialização em Educação Matemática, promovido pelo Núcleo Pedagógico de Apoio ao Desenvolvimento Científico (NPADC), da Universidade Federal do Pará (UFPA). O NPADC adquiriu o *status* de Instituto de Educação Matemática e Científica – IEMCI, atuando nos níveis de graduação, especialização, mestrado e doutorado.

A primeira disciplina da especialização foi Tendências Metodológicas em Educação Matemática. Durante as aulas dessa disciplina, várias abordagens metodológicas e didáticas foram apresentadas pelo professor ministrante. Uma dessas abordagens tratava da dificuldade existente quando se ensina operações com polinômios na sétima série (oitavo ano) do ensino fundamental.

O professor ministrante da disciplina expôs uma ideia que pareceu viável para aplicação em sala de aula. A ideia consistia em relacionar o valor posicional dos algarismos indo-arábicos no sistema de numeração decimal para ensinar adição, subtração, multiplicação e divisão de polinômios, no oitavo ano do ensino fundamental. Nessa associação entre valor posicional e polinômio, um número no sistema de numeração decimal, poderia representar uma expressão algébrica, desde que considerássemos a base dez igual a uma letra, por exemplo, $x = 10$. Essa ideia adquiriu maior consistência quando o professor a fundamentou na Teoria da Aprendizagem Significativa de David Ausubel, na qual os conhecimentos prévios dos alunos devem ser a base para subsequentes aprendizagens.

O passo seguinte foi dialogar com uma colega de curso, sobre a ideia exposta pelo professor. Disse a ela que poderíamos desenvolver uma pesquisa vinculando as quatro operações aritméticas fundamentais com as operações de polinômios ensinadas na sétima série (oitavo ano) do ensino fundamental. Nessa conversa, concordamos que a Teoria da Aprendizagem Significativa de David Ausubel seria a norteadora no desenvolvimento da pesquisa no âmbito da sala de aula. Na aula posterior, conversamos com o professor e perguntamos se ele poderia ser nosso orientador. Ele concordou e a partir daí iniciamos os estudos para a elaboração do projeto de pesquisa.

No decorrer dos estudos de aprofundamento da teoria e do objeto matemático pesquisado, lembrei-me que ao trabalhar no Campus Universitário de Bragança da Universidade Federal do Pará, havia lido um livro intitulado "**Professor e Pesquisador:**

(exemplificação apoiada na matemática)" de José Valdir Floriani, publicado em 2000 pela editora da Universidade Regional de Blumenau (FURB). Nesse livro, o autor apresentava várias propostas didáticas que envolviam conteúdos matemáticos do ensino fundamental. Entre as propostas didáticas enunciadas por Floriani havia uma vinculando o ensino da adição, subtração, multiplicação e divisão de polinômios com as operações aritméticas fundamentais sobre a ótica do valor posicional e da potência de base dez. Vimos, nesse livro, indícios para o desenvolvimento de nossa proposta.

O livro de Marco A. Moreira e Elcie F. Salzano Masini, intitulado "**Aprendizagem Significativa: a teoria de David Ausubel**", publicado em 1982, pela editora Moraes, serviu-nos de referência bibliográfica sobre a teoria ausubeliana.

O estudo desses dois livros conduziu-nos à elaboração do projeto de pesquisa e reorganizamos as ideias iniciais da nossa proposta de pesquisa.

No livro de Floriani (2000), percebemos que a proposta didática para ensinar adição, subtração, multiplicação e divisão de polinômios, precisava ser ampliada e adequada ao ensino de sétima série (oitavo ano) do ensino fundamental. Coube-nos ampliar e adequar a proposta didática de Floriani para que a implementássemos em sala de aula.

O aprofundamento da leitura e a discussão das obras de Floriani (2000) e Moreira e Masini (1982) nos permitiram correlacionar a Teoria da Aprendizagem Significativa à proposta didática de Floriani.

Com o auxílio de nosso professor orientador, conseguimos desenvolver todas as etapas da pesquisa e produzir a nossa monografia, intitulada: "**Aprendizagem Significativa – das Operações Aritméticas às Operações Algébricas**: **o tratamento das operações algébricas a partir das operações aritméticas como conhecimento prévio**".

A pesquisa desenvolvida na especialização nos possibilita construir uma proposta para dar continuidade e aprofundar os estudos em nível de mestrado sobre a conexão entre aritmética e álgebra, que perpassa o ensino das operações com polinômios, a partir do oitavo ano do ensino fundamental.

Após o meu ingresso no mestrado do Programa de Pós-graduação em Educação em Ciências e Matemáticas (PPGECM), do Instituto de Educação Matemática e Científica (IEMCI), da Universidade Federal do Pará (UFPA), passei a fazer parte do Grupo de Pesquisas em Didática da Matemática (GEDIM). Participando do GEDIM, tomei conhecimentos de teorias que compõem a Didática da Matemática, entre estas, a Teoria

Antropológica do Didático (TAD) de Yves Chevallard. Estudando a TAD, percebi a possibilidade de inserir minha proposta de pesquisa neste campo teórico.

Escolhi a TAD porque ela me possibilitou analisar as minhas próprias praxeologias como professor de matemática durante a elaboração e aplicação da proposta didática que consta na monografia de Carvalho e Pereira (2009).

O foco desta pesquisa centra-se na monografia de Carvalho e Pereira (2009). Nessa monografia, o segundo autor (PEREIRA), é o mesmo que desenvolve o estudo aqui exposto.

Para compor essa monografia, os trabalhos, inicialmente, foram divididos de forma que o estudo da teoria de David Ausubel, no livro de Moreira e Masini (1982), ficou sob a responsabilidade da colega de pesquisa (CARVALHO). Para mim coube o estudo e ampliação das ideias contidas no livro de Floriani (2000), que assim fiz e elaborarei uma proposta didática para ensinar adição, subtração, multiplicação e divisão de polinômios no oitavo ano do ensino fundamental. Nessa proposta didática, as operações aritméticas fundamentais são elencadas como conhecimentos prévios à aprendizagem das operações com polinômios citadas neste parágrafo.

Durante o estudo da obra de Floriani (2000) para elaborar a proposta didática, confrontei-me com as minhas limitações como professor de matemática no tratamento das operações aritméticas e operações com polinômios. Entre essas limitações estava o meu desconhecimento sobre os objetos matemáticos ostensivos e não ostensivos, tipos de tarefas e técnicas, tecnologia e teoria (CHEVALLARD; BOSCH, 1999) que permeiam tanto as operações aritméticas quanto as operações com polinômios.

A ostensividade e a não ostensividade dos objetos matemáticos são componentes anunciados por Chevallard e Bosch (1999), que contribuem para uma compreensão dos significados que tem a manipulação ostensiva da álgebra no ensino fundamental.

Por exemplo, quando falo para os alunos que tratarei da soma e da subtração de polinômios, provavelmente, a ideia que eles fazem dessas operações vem por meio da soma e da subtração aritmética. Contudo, a concretude ostensiva algébrica dessas duas operações envolve a representação polinomial, recorrendo-se a uma ou mais variáveis (x, y, z, etc.) e seus respectivos coeficientes (números reais).

A organização para uma atividade matemática requer um construto teórico que dê conta deste fazer. Nesse sentido, assumo a TAD como referencial teórico norteador de nossas análises.

Dessa forma, propus-me responder o seguinte questionamento: **Quais conexões entre aritmética e álgebra determinaram as minhas praxeologias durante a ampliação didática que desenvolvi para ensinar adição, subtração, multiplicação e divisão de polinômios, na sétima série (oitavo ano) do ensino fundamental?**

Para responder o questionamento proposto, elegi como objetivo geral **– Analisar as minhas praxeologias por intermédio das possíveis conexões entre aritmética e álgebra no ensino das operações com polinômios**.

Para concretizar o objetivo geral, nomeei os objetivos específicos que seguem:

- Verificar a evolução histórica de alguns sistemas de numeração precursores do sistema de numeração indo-arábico e as relações que podemos perceber entre aritmética e álgebra quando tratadas pelas civilizações que constituíram esses sistemas;

- Identificar as possíveis conexões entre aritmética e álgebra em algumas obras, considerando o sistema de numeração posicional decimal e da escrita polinomial de base dez;

-Verificar como se deu as minhas relações pessoais com os objetos ostensivos e não extensivos que estruturam a proposta didática;

- Analisar as mudanças das praxeologias que ocorreram na minha prática docente para ensinar operações com polinômios no ensino fundamental.

O desenvolvimento metodológico inicial consta de pesquisa bibliográfica, com o objetivo de realizar um breve estudo do contexto histórico do desenvolvimento de alguns sistemas de numeração, precursores do sistema de numeração indo-arábico, e do uso da aritmética e da álgebra por algumas civilizações. Após essa verificação, prossegui identificando as possíveis conexões entre aritmética e álgebra anunciadas em algumas obras, que explicitam as interlocuções existentes entre o valor posicional dos algarismos indo-arábicos e suas escritas polinomiais na potência de base dez.

Embaso-me em Rampazzo (2002, p. 53) para argumentar que "*qualquer espécie de pesquisa, em qualquer área, supõe e exige uma pesquisa bibliográfica prévia, quer para o levantamento da situação da questão, quer para a fundamentação teórica, ou ainda para justificar os limites e contribuições da própria pesquisa*".

Prossigo citando Severino (2007, p. 122) que assim definiu a pesquisa bibliográfica.

> A pesquisa bibliográfica é aquela que se realiza a partir do registro disponível, decorrente de pesquisas anteriores, em documentos impressos, como livros, artigos, teses etc. Utiliza-se de dados ou de categorias teóricas já trabalhados por outros pesquisadores e devidamente registrados. Os textos tornam-se fontes dos temas a serem pesquisados [...]

O segundo momento da pesquisa bibliográfica abrange a monografia de Carvalho e Pereira (2009), em que constam meus estudos os quais contemplam os episódios que analiso nesta pesquisa.

Para que eu interligasse os meus estudos constantes na monografia de Carvalho e Pereira (2009) com a pesquisa bibliográfica, assumi a pesquisa narrativa como norteadora principal do meu discurso. Assim, associo-me ao que diz Aragão (2011, p. 14), enfatizando que: *"Tem sido cada vez mais frequente o uso de investigações narrativas em estudos e pesquisas sobre a experiência humana. De forma tal que, posso dizer, esta já tem uma longa história intelectual e acadêmica dentro e fora da educação [...]"*. Deste modo, percebo a pesquisa narrativa imbricada na minha prática docente como professor de matemática. Além disso, serve como exemplo do ato de narrar.

A pesquisa narrativa agrega elementos próprios da pessoa que narra. Mas, o enfoque narrativo está interligado as experiências pessoais, profissionais e sociais vividas por essa pessoa. Portanto,

> [...] quando dizemos que nós vivemos vidas relatáveis e contamos as histórias dessas vidas, precisamos dizer – para explicitar – que os pesquisadores que são investigadores narrativos buscam recolher essas vidas, descrevê-las e, por sua vez, contar histórias sobre elas, escrevendo seus relatos de tais experiências em uma narrativa.
>
> A narrativa ocupa lugar importante nas mais variadas disciplinas ou campos de saber, talvez porque narrar seja inerente ao ser humano [...] Isto quer dizer que narrar constitui uma estrutura fundamental da experiência humana vivida e da comunicação dos seres humanos com os outros [...] (ARAGÃO, 2011, p. 15).

Os instrumentos de coletas de dados da pesquisa narrativa são assim descritos por Gonçalves (2011, p. 64-65):

> A coleta de dados numa pesquisa narrativa pode se dar de diferentes modos: na forma de registros de campos, anotações em diários, entrevistas semi ou não estruturadas, história de vida (orais ou escritas), observações diretas, em situações de contar histórias, por meio de cartas, autobiografias, documentos diversos e, além disso, por meio de projetos, relatórios, boletins de rendimento escolar, programações de aula, regulamento e normas escritas, como também analisando metáforas, princípios, imagens e filosofias pessoais de vida e de profissão.

Concernente a esta pesquisa, a coleta de dados primária se deu na época do Curso de Especialização em Educação Matemática, no período 2008 a 2009, do qual cursei e conclui. Nele, eu e outra colega do mesmo curso, realizamos a pesquisa – já referenciada anteriormente – que originou a monografia de Carvalho e Pereira (2009).

Por sua vez, a coleta de dados para pesquisa, que originou a monografia de Carvalho e Pereira (2009) fez uso de diário de campo, observação direta e análise das resoluções de exercícios em classe e extraclasse, propostos aos alunos que participaram como sujeitos dessa pesquisa.

Para esta pesquisa, o sujeito é *uno*, ou seja, eu mesmo. O instrumento de análise são os meus estudos que constam na monografia de Carvalho e Pereira (2009). Deste modo, o texto narrativo autobiográfico se estabelece. Desenvolvo-o estabelecendo 'diálogos' com várias obras e seus autores e na perspectiva da Teoria Antropológica do Didático (TAD). A TAD será mediada sob a insígnia de pesquisadores que interpretaram ou interpretam essa teoria, assim como, do seu idealizador, Yves Chevallard.

A narrativa autobiográfica possibilitou que eu relatasse minhas praxeologias antes e depois do Curso de Especialização e meu desenvolvimento profissional antes e depois desse curso. Isso se interliga ao que Freitas e Fiorentini (2007) referenciam quando mencionam às ideias de Clandinin (1993) sobre a narrativa do professor.

> [...] o professor, ao narrar de maneira reflexiva suas experiências aos outros, aprende e ensina. Aprende, porque, ao narrar, organiza suas ideias, sistematiza suas experiências, produz sentidos a elas e, portanto, novos aprendizados para si. Ensina, porque o outro, diante das narrativas e dos saberes de experiência do colega, pode (re) significar seus próprios saberes e experiências [...] (FREITAS; FIORENTINI, 2007, p. 66).

No que tange ao que dizem Clandinin e Connelly (2000, p. 18, *apud* FREITAS e FIORENTINI, 2007, p. 66) que "*[...] o pensamento narrativo é a forma-chave da experiência e uma maneira-chave de escrever e pensar sobre a mesma. De fato, o pensamento narrativo é parte do fenômeno da narrativa. Pode ser dito que o método narrativo é uma parte ou um aspecto do fenômeno narrativo*". Assim, abstraio que os meus argumentos narrativos autobiográficos dependem dos aportes teóricos que acompanham meus estudos e das minhas próprias experiências pessoais.

Para Saveli (2006, p. 95): "*[...] O exame de narrativas memorialísticas, autobiografias, diários vem se constituindo como uma tendência metodológica no contexto da* *pesquisa [...]"*. Bueno (2002) também considera o método autobiográfico importante para as pesquisas educacionais.

> No contexto do desenvolvimento atual das pesquisas educacionais, é inegável a presença e a importância cada vez mais crescente que os estudos com e sobre histórias de vida de professores vêm adquirindo [...] é importante lembrar que as abordagens autobiográficas na área da educação têm sido notadamente utilizadas na formação continuada de professores [...] (BUENO, 2002, p. 21).

Para Bastos e Colla (citado por ABRAHÃO, 2004, p. 466*): "[...] Reconstruir o vivido permite esclarecer, em parte, o enfrentamento dos desafios epistemológicos da atividade docente, em que as motivações de vida estão intimamente ligadas [...]"*. Pelo exposto, o meu desenvolvimento profissional na carreira docente possui vínculos subjetivos, íntimos e pessoais. Consequentemente, esses vínculos servem de elementos rememorativos para a narrativa autobiográfica que assumi nesta pesquisa.

Dediquei o segundo capítulo a caracterização desta pesquisa e está subdivido em três tópicos. O primeiro tópico trás uma breve revisão sobre o processo de ensino e aprendizagem da álgebra que mostra as concepções da álgebra assumidas pelos professores de matemática do ensino fundamental, como a que constam em Chevallard (1994), Usiskin (1995), Carvalho (2007), Sousa (2007) e Keppke (2007). O segundo tópico mostra um breve estudo histórico sobre a numeração decimal numa perspectiva epistemológica, para isso consultei as obras de Almeida (2007), Eves (2004), Ifrah (1997a, 1997b, 2005), Cajori, (2007), Contador (2008) Galvão (2008) e Garbi (2010). O terceiro tópico narra uma compreensão epistemológica relacionada à adição, subtração, multiplicação e divisão de polinômios, em que contribuíram para isso as obras de De Maio (2009, 2011), Contador (2008), Almouloud (2007), Chevallard e Bosch (1999), Zuin (2005); Floriani (2000), Carvalho e Pereira (2009), Carles (1927), Roxo et al. (1948), Crantz (1949) e Wechelun (1562).

Exponho, no terceiro capítulo, os meus estudos no contexto da Teoria Antropológica do Didático (TAD) de Yves Chevallard. Na composição narrativa desse capítulo, li diversas obras que me ajudaram a compreender os elementos principais dessa teoria (tipos de tarefas T, tipos de técnica τ, tecnologia θ e teoria Θ) que compõe o bloco praxeológico [T, τ, θ, Θ]. Além disso, indico de que forma os elementos teóricos da TAD contribuem para análise que consta no quarto capitulo. Entre as obras lidas estão Chevallard (1999, 2002, 2009a), Almouloud (2007), Chevallard e Bosch (1999), Costa (2008), Silva (2005), Delgado (2006), Pilar Bolea (2003), Fonseca, Bosch e Gascón (2010, s/d).

Reservei o quarto capítulo à análise das minhas praxeologias no percurso do meu desenvolvimento profissional. Essa análise está distribuída em quatro episódios que são:

- Episódio I – As primeira manifestações praxeológicas;
- Episódio II – As minhas limitações no tratamento das operações aritméticas pela escrita polinomial na potência de base dez;
- Episódio III – As limitações da proposta didática e as sugestões para superações;
- Episódio IV – Relatando meus estudos e minha prática docente como parte de uma nova praxeologia.

No episódio I, analiso as minhas praxeologias quando ministrava aulas particulares de matemática e ciências para alunos do 1ª a 8ª séries (1º ao 9º ano) do ensino fundamental. Isso muito antes de ingressar no Curso de Licenciatura em Matemática.

O episódio II contempla a análise das minhas dificuldades praxeológicas para compreender as operações aritméticas por meio da escrita polinomial na base dez e assim estruturar a proposta didática que consta na monografia de Carvalho e Pereira (2009). No episódio III, transcrevo partes dessa proposta didática e esclareço as limitações praxeológicas que ela possui, quando se trata dos tipos de tarefas e da técnica idealizada para solucioná-las, além do que, analiso os tipos de objetos ostensivos e não ostensivos que permitiram atualizar o meu equipamento praxeológico para superar essas limitações.

Por último vem o episódio IV que comporta a análise de tipos de tarefas problemáticas formuladas como parte de meus estudos da obra de Floriani (2000). Nessa análise indico a existência de uma dinâmica cognitiva que conflita o universo cognitivo de uma pessoa quando ela possui um equipamento praxeológico não atualizado (CHEVALLARD, 2009a) para manipular objetos ostensivos e promover o trabalho da técnica e assim solucionar tipos de tarefas complexas e problemáticas. Nesse mesmo episódio consta a análise de alguns momentos da aplicação da proposta didática para uma turma de sétima série (oitavo ano) do ensino fundamental.

Nas considerações finais teço minhas conclusões, indico as contribuições desta pesquisa para a Educação Matemática e proponho algumas questões para futuras pesquisas.

II. CARACTERIZAÇÃO DA PESQUISA

Neste capítulo trataremos de caracterizar a pesquisa por meio dos processos de ensino e aprendizagem da álgebra, do contexto histórico da numeração decimal e do estudo epistemológico da adição, subtração, multiplicação e divisão polinomial.

1. Da Revisão Sobre os Processos de Ensino e Aprendizagem da Álgebra

A forma de apresentação e ensino dos objetos matemáticos da álgebra, que estão legitimados nas instituições escolares de ensino básico, têm explicitado as limitações do professor de matemática em sua prática docente. Na tentativa de diagnosticar e de compreender essas limitações, diversos estudos no Brasil e em outros países do mundo (França, Espanha, Itália, Portugal, México, etc.) têm impulsionado as pesquisas em Educação Matemática. Esses estudos vêm ao encontro da necessidade de se promover pesquisas que levem em conta a formação do professor de matemática e seu desenvolvimento profissional. Outro fator relevante diz respeito aos conceitos e abstrações que estruturam os objetos algébricos. Dentre esses objetos, destaco as operações com polinômios. Além disso, após ler a pesquisa de Keppke (2007), considero que o tratamento dado nos livros didáticos à adição, à subtração, à multiplicação e à divisão de polinômios, é assumido pela grande maioria ou uma expressiva quantidade de professores de matemática como única maneira de ensinar essas operações no âmbito das instituições escolares.

Nas concepções apontadas por Usiskin (1995) o ensino da álgebra caracteriza-se pelas **finalidades da álgebra** que *"são determinadas por, ou relacionam-se com, concepções diferentes da álgebra que correspondem à diferente importância relativa dada aos diversos usos das variáveis"* (USISKIN, 1995, p. 13).

Segundo Usiskin (1995) essas concepções são:

- Álgebra como aritmética generalizada;
- Álgebra como um estudo de procedimentos para resolver certos tipos de problemas;
- Álgebra como estudo de relações entre grandezas e
- Álgebra como estudo das estruturas.

As quatro concepções acima fazem parte da minha prática docente. Essas concepções fluem na minha atuação profissional, principalmente, porque elas estão postas na maioria dos livros didáticos indicados pela noosfera[1] e nas minhas sujeições institucionais, como nas escolas onde desenvolvo minhas atividades profissionais de Professor de Matemática.

Carvalho (2007, p. 18), apoiando-se em Cruz (2005) indica como podemos relacionar, por séries (anos)[2] do Ensino Fundamental, as concepções usiskinianas.

> Pesquisas recentes como a de Cruz (2005), nos revelam que atualmente há uma tendência de se iniciar o ensino da álgebra na 5ª série com atividades de generalização de padrões numéricos e geométricos propostas pelos livros didáticos. Nessas atividades, nossos alunos utilizam letras para traduzir e generalizar padrões reconhecidos por eles numa sequência de números ou de figuras. Na 6ª série, esse trabalho continua com a resolução de equações de primeiro grau. Na 7ª série, a álgebra começa a ser vista como uma estrutura. Aqui, as letras são tratadas como sinais no papel, sem nenhuma referência numérica. Na 8ª série, a álgebra é abordada como estudo de relações entre grandezas. Nessa abordagem, as letras são usadas para indicar um valor que pode variar [..,].

Pelo exposto, concordo em parte, pois na quinta série (sexto ano) conheço poucos livros didáticos de matemática que iniciam a álgebra nessa série (ano) e estes não são os preferidos para serem adotados nas escolas públicas em que tenho contato. Digo isto, pela minha própria experiência na escolha dos livros didáticos de matemática do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD). Nesse sentido, vejo as concepções usiskinianas mais presentes a partir da sexta série (sétimo ano) do ensino fundamental.

Ao ler a dissertação de Sousa (2007) achei pertinente citar a explicitação que ele concebeu para as concepções de Usiskin.

> 1ª concepção – A Álgebra como aritmética generalizada – [...] variáveis vistas como generalizadoras de modelos aritméticos [...] Do mesmo modo que 2 + 3 = 3 + 2, pode ser generalizado por $a + b = b + a$.
> 2ª concepção – A Álgebra como estudo de relações entre grandezas – [...] as variáveis são consideradas parâmetros (um número do qual depende outro número) ou argumentos (representa os valores de domínio de uma função) [...]
> 3ª concepção – A Álgebra como um estudo de procedimentos para resolver certos tipos de problemas – [...] as variáveis são incógnitas ou constantes, ou seja, valores numéricos desconhecidos que podem ser descobertos ao se resolver uma equação ou um sistema [...]
> 4ª concepção – A Álgebra como um estudo das estruturas – [...] as variáveis não possuem significados, tornando-se objeto arbitrário de estruturas, como grupos,

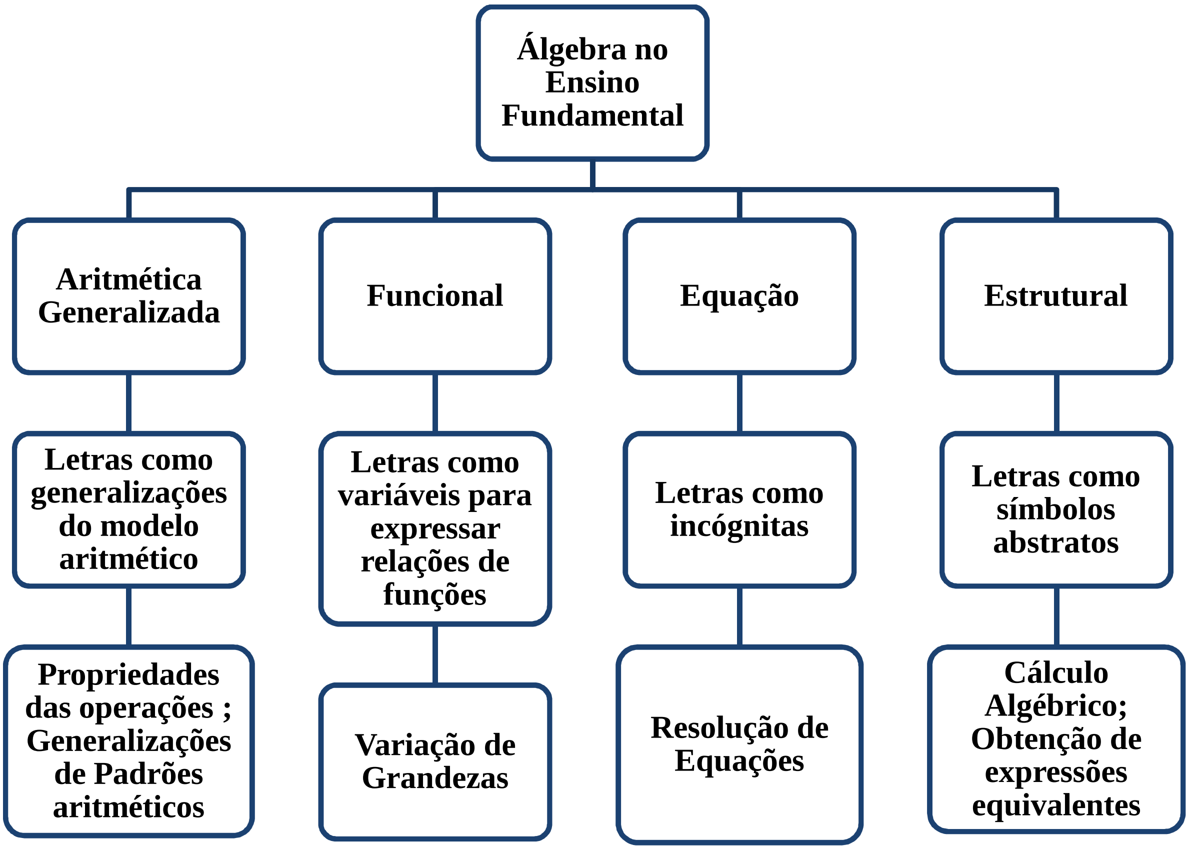
[1] A noosfera é a zona intermediária entre o sistema escolar (e as escolhas do professor) e o ambiente social mais amplo (externo à escola) (D'AMORE, 2007, p. 223).
[2] A legislação brasileira, a partir de 2006, estruturou o Ensino Fundamental em nove anos. Assim, a 5ª série corresponde ao 6º ano, 6ª série ao 7º ano, 7ª série ao 8º ano e 8ª série ao 9º ano.

> anéis, espaços vetoriais, etc. Isso pode ser identificado, quando realizamos operações e fatorações com polinômios (SOUSA, 2007, p. 60-61).

As concepções usiskinianas citadas por Sousa (2007) seguem as mesmas interpretações explicitadas por Usiskin (1995) sem vinculá-las por séries (anos) do ensino fundamental. A vinculação foi anunciada por Carvalho (2007), que se apoiou em Cruz (2005) para correlacionar por séries (anos) as concepções anunciadas por Usiskin.

A partir das ideias de Usiskin, Sousa (2007) elaborou um organograma que "*apresenta de uma forma bastante simplificada, as diferentes interpretações da álgebra escolar e as diferentes funções das letras*" (Ibidem, p. 59). A Figura 1 ilustra isso.

Figura 1: Funções das Letras na Álgebra.



Fonte: Sousa (2007, p. 60).

Na Figura 1, as concepções da álgebra, segundo as ideias concebidas por Usiskin, (1995) são perceptíveis e podem revelar as práticas do Professor de Matemática no Ensino Fundamental. Essa forma de ver a álgebra no ensino fundamental leva Sousa (2007) a denominá-la de *álgebra escolar*. Próximo ao que denomina Sousa (2007), Pilar Bolea (2003, p. 65) considera que o *modelo dominante* da *álgebra escolar* é o da *aritmética generalizada.*

> Nesta interpretação da *álgebra escolar* como *aritmética generalizada*, as características principais do *conjunto de práticas* ou atividades que se identificam como "algébricas" vão ser, por um lado, um prolongamento e generalização unilateral das práticas aritméticas [...]
> Entre as atividades consideradas como prolongamento da aritmética podemos mencionar, entre outras, as práticas que procedem de:
> - Generalizar parte de suas técnicas de resolução.
> - Identificar a álgebra com a linguagem algébrica e por sua vez, a linguagem algébrica como generalização da linguagem aritmética.
> - Definir noções da álgebra a partir da aritmética (equações, variáveis, etc.) (PILAR BOLEA, 2003, p. 66-67, tradução nossa).

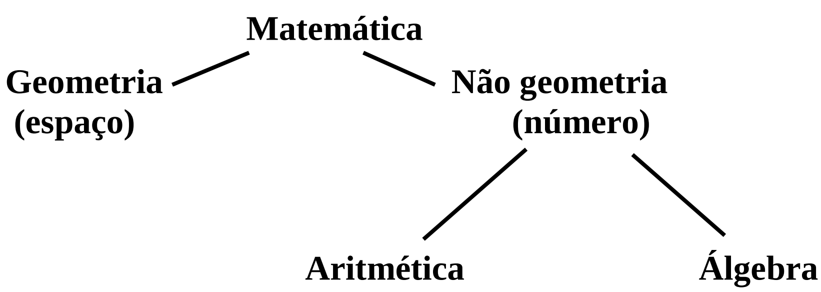
Noto que a concepção da álgebra como aritmética generalizada é a que predomina no processo de ensino da álgebra elementar. Essa concepção assume um papel predominante na minha prática docente como professor de matemática. Além disso, pressuponho que o significado da álgebra no currículo oficial do ensino básico brasileiro possui características próximas das de outros países, entre estes, a França.

Para Chevallard (1994) a palavra álgebra recebe uma significação quando se trata do ensino desta *no programa oficial* da França. Segundo o próprio Chevallard,

> [...] O rótulo "álgebra" tem muito tempo jogado na França um papel estruturante essencial no corpus da matemática ensinada, em conjunto com "aritmética" e "geometria" (deixando aqui de lado a análise matemática), no âmbito de uma estrutura duplamente oposta [...] (Ibidem, p. 181, tradução nossa[3]).

O esquema a seguir resume o que Chevallard considera *ser uma estrutura duplamente oposta*:

Figura 2: Estrutura duplamente oposta.



Fonte: Chevallard (1994, p. 181, tradução nossa).

Atribuo à ideia não ostensiva de número (tratarei mais a frente, neste mesmo capítulo, sobre essa ideia) o elemento de conexão entre aritmética e álgebra no esquema de Chevallard.

[3] [...] L'étiquette "algebre" a longtemps joué en France un róle structurant essentiel dans le corpus des mathématiques enseignees, de concert avec "arithmétique" et "geometrie" (en laissant ici de coté l'analyse mathematique), dans le cadre d'une structure doublement oppositive [...]

Essa ideia não ostensiva de número é o fator preponderante que anuncia a não geometria composta pela aritmética e álgebra. Assim, qualquer ostensividade aritmética (operações aritméticas) advinda por meio dos algarismos indo-arábicos pode ser associada à existência de operações algébricas polinomiais. Além disso, percebamos que a Matemática estruturada, conforme vemos no esquema, exprime duas partes opostas – Geometria (espaço) e Não geometria (número) – que constitui o saber matemático desde Descartes até a reforma da matemática moderna ocorrida na França nos anos sessenta e setenta.

> Esta estrutura do saber matemático ensinado - que é a estrutura da matemática que Descartes já reconhece – manteve-se essencialmente até a reforma da matemática moderna, que oficialmente entra em vigor na França, em finais dos anos sessenta (ou no início dos anos setenta, segundo as classes) (CHEVALLARD, 1994, p. 181, tradução nossa[4]).

Os efeitos da matemática moderna no Brasil foram impulsionados pelo professor Osvaldo Sangiorge. Ele escreveu vários livros didáticos de matemática em que preconizava o ensino da álgebra nos moldes da matemática moderna.

> O estudo de monômios e polinômios é também introduzido neste exemplar (***Matemática para a Segunda Série Ginasial - 1963)***. São destinadas a este estudo nove páginas de explicações a respeito do conceito de representação algébrica; expressão algébrica; valor numérico (acompanhada de exemplos de cálculo do valor numérico de determinadas expressões); classificação das expressões algébricas (em racionais e irracionais); monômios; coeficiente; parte literal; monômios semelhantes; polinômios; grau de um polinômio racional inteiro; polinômios homogêneos; ordenados; completos e incompletos e valor numérico de um polinômio (LAVORENTE, 2008, p. 180, grifo nosso).

Os conteúdos de álgebra exposto na citação são os mesmos que constam nos atuais currículos de matemática do ensino fundamental (KEPPKE, 2007). O ensino desses conteúdos ocorre a partir do oitavo ano do ensino fundamental nas instituições escolares de educação básica. Assim, os objetos matemáticos ostensivos e não ostensivos presentes nesses conteúdos se correlacionam com as minhas intenções, nesta pesquisa, para o ensino da álgebra no ensino fundamental.

Outro ponto evidenciado por Lavorente (2008), em alguns livros de Sangiorge, é a recorrência ao quadradinho para representar sentenças matemáticas. Essa mesma ideia é

[4] Cette structure du savoir mathematique enseigné - qui est la structure des mathématiques que reconnait déjà Descartes - s'est maintenue pour l'essentiel jusqu'à la réforme des mathématiques modernes, qui entre officiellement en vigueur en France à la fin des années soixante (ou. au début des années soixante-dix, selon les classes)[...]

exposta por Gregolin (2002, p. 131) em dois exemplos de sentenças matemáticas que não são comuns na 4ª serie (5º ano) do ensino fundamental, mas que considero serem tipos de tarefas importantes para a compreensão algébrica em séries posteriores.

i) $\square \div 5 + 3 = 7$	m) $4 \times \square + 10 = 38$
$\square = (7 - 3) \times 5$	$\square = (38 - 10) \div 4$
$\square = 4 \text{ x } 5$	$\square = 28 \div 4$
$\square = 20$	$\square = 7$

A técnica que se esboça na resolução de sentenças matemáticas com quadradinhos é uma prática legitimada e institucionalizada nas séries iniciais (anos iniciais) do Ensino Fundamental. Além disso, é uma praxeologia de competência dos professores que ensinam matemática para os alunos dessas séries (anos) iniciais.

Esses tipos de tarefas, se trabalhadas com intencionalidade de conectá-las ao ensino da álgebra a partir da 6ª série (7º ano) do Ensino Fundamental, servem para auxiliar a manipulação ostensiva de coeficientes numéricos e letras na resolução de equações com uma variável. Assim, a resolução de equações pressupõe a manipulação ostensiva de operações polinomiais.

Observei que o próprio Gregolin aproxima a resolução de um problema, em que a não ostensividade das sentenças matemáticas com quadradinhos são as ideias subjacentes por trás da manipulação ostensiva de letras para encontrar a solução para o problema. Eis como ele procedeu:

> O conhecimento de forma mais aprofundada de equações e da resolução de problemas através de equações, estudados nas séries finais do Ensino Fundamental, pode prover os professores de uma ferramenta importante para a resolução de problemas. Por exemplo, no problema do tijolo:
>
> “Um tijolo pesa um quilo mais meio tijolo. Quanto pesa um tijolo e meio?”
>
> a) Peso de um tijolo (T); equação: T = 1 + T/2
>
> resolução da equação: T – T/2 = 1 + T/2 – T/2
>
> T/2 = 1
>
> T = 2 →o peso de 1 tijolo é 2 kg
>
> b) Peso de 1,5 T = 1,5 x 2 kg = 3 kg
>
> Na resolução da equação são obtidos os *pesos* de meio tijolo e de um tijolo. O conhecimento dessas relações facilita a visualização de formas alternativas para a representação do problema e respectivas soluções (GREGOLIN, 2002, p. 133).

A pesquisa de Keppke (2007) exibe um estudo sobre a “Álgebra nos Currículos do Ensino Fundamental”. Nesse estudo ele analisa alguns documentos que nortearam ou norteiam o ensino da álgebra no Brasil, entre os quais estão: “os Guias Curriculares (1970), a proposta Curricular para o Ensino de 1º Grau (1980) e os Parâmetros Curriculares Nacionais (1ª edição, anos 1990)” (Ibidem, p. 40).

Desses três documentos, os Parâmetros Curriculares Nacionais é o mais recente e ainda orienta o ensino de matemática na Educação Básica.

Segundo Keppke (2007, p. 49):

> No Brasil, principalmente a partir da década de 1950, podemos observar muitas iniciativas de mudança curricular as quais, em sua maior parte, partiram do governo [...]
> Nesse contexto, o ensino da Álgebra sofreu um processo de simplificação, para atender a uma demanda por ensino que atingia, de fato, todas as classes sociais. A Álgebra passou a ser, com a industrialização, exigência básica para a formação de pessoas de qualquer camada social. A Álgebra passou a ser requisito e exigência já na formação básica. Porém, as dificuldades que surgiram, tanto por parte dos professores quanto por parte dos alunos, no processo de ensino aprendizagem da Álgebra, fizeram com que de porta de entrada para a ascensão social, a Álgebra passa-se a ser, também, barreira instransponível para essa mesma desejada ascensão.

Pelo exposto na citação, compreendo que a álgebra seria a promotora do *status* social no currículo escolar e isso permitiria as camadas sociais menos favorecidas ascender de classe. Porém, o que se verificou foi um processo de ensino da álgebra que ocasionou dificuldades de ensino para os professores e de aprendizado para os alunos.

Em relação aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) assim ressalta Keppke (2007, p. 56 -57):

> No tocante à Álgebra, os PCN sugerem a exploração de situações de aprendizagem para desenvolver o pensamento algébrico no 3º ciclo (5ª e 6ª séries – ***6º e 7º anos do ensino fundamental***), visando que o estudante: reconheça as representações algébricas como um instrumento de expressão de generalizações das propriedades das operações aritméticas [...]
> Para o 4º ciclo, os PCN indicam a exploração de situações de aprendizagem para o desenvolvimento do pensamento algébrico, com os seguintes objetivos: a produção e a interpretação de diferentes escritas algébricas (expressões, igualdades e desigualdades), a identificação de equações, inequações e sistemas, a resolução de situações-problemas por meio de equações e inequações do primeiro grau [...]
> Com relação ao quarto ciclo (7ª e 8ª séries do Ensino Fundamental – ***8º e 9º anos***), os PCN apresentam como proposta aos professores que estimulem e proporcionem aos estudantes novas vivências e situações que possibilitem a eles o uso dos conhecimentos matemáticos, evidenciando sua importância e significado, bem como os estudantes se sintam mais competentes ante esse conhecimento [...] (grifos nosso).

No exposto por Keppke estão duas situações que me levaram a formular uma organização matemática e didática que iniciasse os alunos no estudo de polinômios, a partir de seus conhecimentos prévios de sistema de numeração decimal e operações aritméticas fundamentais: *o desenvolvimento do pensamento algébrico* e *o uso dos conhecimentos matemáticos, evidenciando sua importância e significado*. Além dessas duas situações, outro fator que me impulsionou a conceber um novo tratamento para o ensino de polinômios, relacionava-se as minhas próprias dificuldades para ensinar as operações com polinômios de forma que os alunos compreendessem e assimilassem, significativamente, essas operações.

O tópico seguinte deste capítulo é voltado ao contexto histórico de alguns sistemas de numeração que influenciaram na constituição do sistema de numeração decimal e nas representações numéricas que aparecem em cálculos aritméticos e algébricos.

2. Breve Estudo Histórico sobre a Numeração Decimal

Neste tópico exponho sobre a importância histórica de alguns sistemas de numeração e a contribuição destes para a sistematização do sistema de numeração decimal, mais conhecido por nós como sistema de numeração indo-arábico.

Para este fim, li a dissertação de Almeida (2007), que mostra a influência de alguns sistemas de numeração, apontados por ele, como precursores do nosso sistema de numeração posicional de base dez.

Os sistemas de numeração que Almeida (2007) atribuiu serem relevantes para sua pesquisa foram o Sistema Babilônico, o Sistema Ático, o Sistema Hindu, o Sistema Egípcio e o Sistema Romano. Cada um desses sistemas de numeração foi detalhado por ele, algo que não farei aqui, porém, mais à frente, mostrarei exemplos da representação numérica em alguns desses sistemas.

Da leitura do capítulo 1 (sistemas de numeração) do livro de Eves (2004), julguei relevante e esclarecedora a citação que segue:

> Nosso próprio sistema de numeração é um exemplo de um *sistema de numeração posicional*. Para esse sistema, depois de se escolher uma base *b*, adotam-se símbolos para 0, 1, 2,..., *b-1*. Assim, há no sistema *b* símbolos básicos, no caso de nosso sistema frequentemente chamados *dígitos*. Qualquer número *N* pode ser escrito de maneira única na forma

> $N = a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + ... + a_2 b^2 + a_1 b + a_0$, na qual $0 \leq a_i < b, i = 0,1,...,n$. Por isso então representamos o número *N* na base *b* pela sequência de símbolos $a_n a_{n-1} ... a_2 a_1 a_0$. Assim, um símbolo básico em qualquer numeral dado representa um múltiplo de alguma potência da base, potência essa que depende da posição ocupada pelo símbolo básico. Em nosso próprio sistema de numeração *indo-arábico*, por exemplo, 2 em 206 representa $2(10^2)$ ou 200, ao passo que em 27 o 2 representa 2(10) ou 20. Deve-se notar que para clareza completa necessita-se de um símbolo para o zero, a fim de indicar a ausência possível de alguma potência da base. Um sistema de numeração posicional é uma consequência lógica, embora não necessariamente histórica, de um sistema de agrupamentos multiplicativo (EVES, 2004, p. 36).

Os ‘diálogos’ que mantive com as obras de Ifrah (1997a, 1997b, 2005), levaram-me a conhecer a cultura numérica que contribuiu para o desenvolvimento de práticas sociais de diversas civilizações. Além disso, estas civilizações conseguiram compor sistemas de numeração bem próximos dos que usamos hoje. A civilização babilônica, egípcia, grega, romana, maia, chinesa, hindu e árabe, exemplificam esse feito.

Segundo Ifrah (2005) a invenção dos números fez surgir *“o primeiro procedimento aritmético*” que está associado a um “*[...] artifício conhecido como correspondência um a um, que confere, mesmo aos espíritos mais desprovidos, a possibilidade de comparar com facilidade duas coleções de seres ou de objetos* [...]” (Ibidem, p. 25).

A correspondência biunívoca, estabelecida acima, remete-me a ideias matemáticas mais avançadas – a bijeção entre elementos de conjuntos. O termo bijeção está inserido na álgebra moderna. Daí presumo que essa ideia ou noção pode servir de conhecimento prévio para o ensino e a aprendizagem de outros tópicos dessa mesma álgebra.

Da leitura de Ifrah (1997a) pude compreender que associar partes do corpo humano, como os dedos das mãos à contagem numérica, é um artifício muito presente em nossas ações cotidianas e é uma recorrência habitual de nossos alunos quando estão aprendendo as operações aritméticas fundamentais.

> De toda forma, a mão do homem possui inúmeros recursos na matéria. Constitui uma espécie de “instrumento natural” particularmente desenhado para a tomada de consciência dos dez primeiros números e da aprendizagem da aritmética elementar.
> A mão do homem apresenta-se, portanto, como a “máquina de contar” mais simples e mais natural. É por essa razão que desempenhará, em seguida, um papel considerável na gênese de nosso sistema de numeração... (IFRAH, 1997a, p. 42-43).

Posto isso, seguramente, compreendo que o emprego dos dedos das mãos na contagem numérica contribuiu para que se idealizasse o nosso sistema de numeração usual de base dez.

Contudo, constatei na pesquisa de Almeida (2007) a influência de outros sistemas de numeração que facilitou a estruturação do sistema de numeração hindu-árabe. Posteriormente, a compreensão de outros sistemas de numeração e de suas respectivas bases constitutivas só foi possível porque o sistema de numeração decimal tem parte de sua gênese em alguns destes.

Para melhor legitimação do que exponho no parágrafo anterior, abordarei o contexto histórico de alguns sistemas de numeração que influenciaram na estruturação do nosso sistema posicional decimal.

Inicio este caminhar histórico pelo **sistema de numeração babilônico**, mas antes de tratar desse sistema numérico, vejamos a localização da região que foi conhecida como Mesopotâmia. Região que abrigou civilizações antigas que inventaram a escrita cuneiforme[5], permitindo-lhes um grande avanço para seus registros culturais e sociais. Segundo Cajori (2007), Almeida (2007), Contador (2008), a Mesopotâmia localizava-se na região compreendida entre dois rios, Tigre e Eufrates. A seguir, cito o que Contador (2008) expõe sobre a localização da Mesopotâmia:

> *Mesopotâmia*, nome que significa *Terra entre rios*. Ficava entre os rios Tigre e Eufrates, onde hoje se situa o Iraque, tendo ao norte Síria, Líbano e Israel. Na região mais baixa da Mesopotâmia ficava a Suméria, cujo povo teve participação importante na história da civilização, em particular da Matemática. Tudo leva a crer que a invenção da escrita é uma obra do povo sumeriano, pois existem registros anteriores a 3000 a.C., com cerca de 2.000 sinais de escrita cuneiforme [...] As civilizações antigas dessa região são normalmente chamadas de *babilônias*, devido à cidade de Babilônia, ou a *Caldeia*, devido ao domínio dos Caldeus durante um certo tempo. (CONTADOR, 2008, p. 77).

Agora, esclarecerei sobre o sistema de numeração babilônico, já informando que esse sistema numérico não possuía um símbolo para o zero. Contudo, li em Contador (2008, p. 77) que um dos artifícios era *"um espaço vazio entre os símbolos*", isto servia de indicação para esse algarismo.

Os babilônios adotaram várias bases para suas práticas numéricas, contudo, a base sexagesimal foi a mais importante. A referência dessa base recai sobre os sumérios. Segundo Ifrah (1997a, p. 162): *"[...] Em vez de contar por dezenas, centenas e milhares, os sumérios tinham preferido optar pela base 60, agrupando assim os seres e as coisas por sessentenas e potências de sessenta"*.

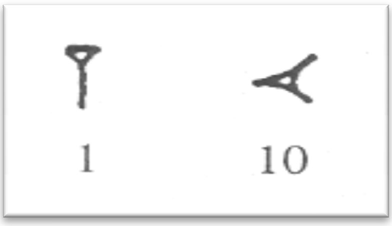
[5] *Cunea* = cunha + *forme* = forma, ou escrita em forma de cunha, é anterior à escrita hieroglífica egípcia, que por sua vez pode derivar dela (CONTADOR, 2008, p. 77 – nota de rodapé).

Além disso, tomei conhecimento que o sistema de numeração babilônico compunha-se apenas de dois símbolos.

> Esta numeração utilizava propriamente apenas dois algarismos: um “cravo” vertical representando a unidade e uma “asna” associada ao número 10 [...] Os números de 1 a 59 eram representados de modo aditivo, repetindo cada um desses dois signos tantas vezes quantas fosse necessário [...] Mas, para além de 59, a escrita se tornava posicional [...] (IFRAH, 2005, p. 237).

Exemplifico com a Figura 3 o exposto na citação anterior, permitindo-nos observar os dois símbolos cuneiformes do sistema de numeração babilônico.

Figura 3: Os dois símbolos da numeração babilônica.



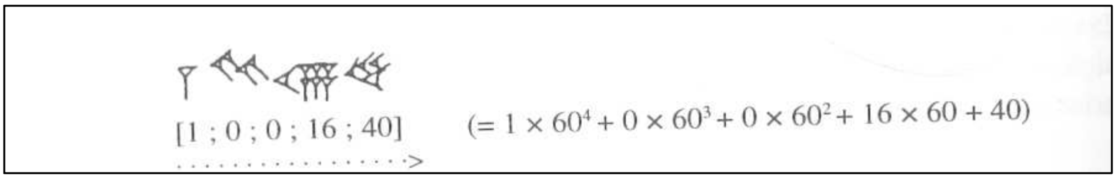
Fonte: Almeida (2007, p. 23).

O sistema de numeração babilônico possuía cinquenta e nove unidades. A composição dessas 59 unidades era caracterizada pela aditividade. Após essas 59 unidades, iniciavam-se as sessentenas e as potências de sessenta que caracterizavam a escrita posicional desse sistema de numeração. Na Figura 4 exemplifico com os números 19 (10 + 9) e 58 (10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 8) a escrita aditiva. Já na Figura 5 mostro um exemplo da escrita posicional.

Figura 4: Escrita dos números 19 e 58 no sistema de numeração babilônico.

Fonte: Almeida (2007, p. 23).

Figura 5: Representação na base sessenta.



Fonte: Ifrah (1997a, p. 310).

Noto na Figura 5 a indicação da posição do valor zero, isto é, um par de cravos inclinados. Assim, essa civilização arranjou uma maneira para indicar o algarismo zero.

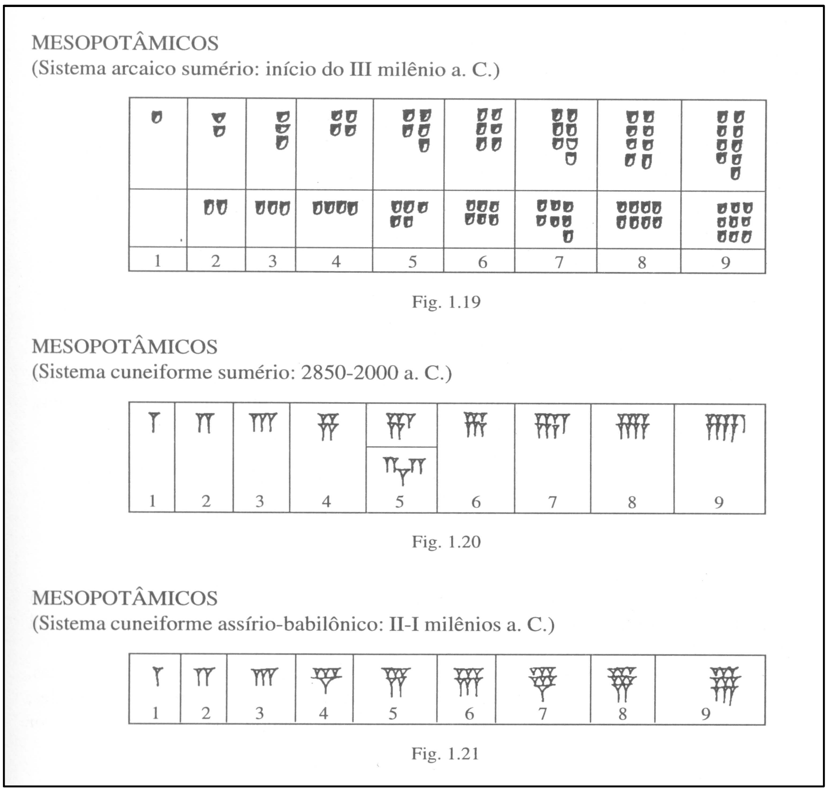
O número $1\times 60^4 + 0 \times 60^3 + 0 \times 60^2 + 16 \times 60 + 40$ quando representado no sistema de numeração decimal corresponde a 12961000, ou seja, $1 \times 10^7 + 2 \times 10^6 + 9 \times 10^5 + 6 \times 10^4 + 1 \times 10^3 + 0 \times 10^2 + 0 \times 10^1 + 0 \times 10^0$.

Provavelmente, os símbolos sumérios eram agrupados em uma correspondência biunívoca quanto ao processo aditivo da composição das 59 unidades, conforme exemplos da Figura 4. Por conseguinte, a escrita posicional, parece-me não considerar isso, pois a representação posicional de [1; 0; 0; 16; 40], mostrada na Figura 5, possui um artifício que indica o valor zero, isto é, dois pares de cravos inclinados. Como o algarismo zero não compunha o sistema de numeração babilônico, talvez, engendrou-se esse artifício para superar dificuldades de representação indicativas de quantidades, onde o valor zero era necessário como símbolo.

Os povos mesopotâmicos, em particular, os sumérios, viveram diversas fases de desenvolvimento cultural. Durante essas fases a escrita suméria sofreu modificações e, consequentemente, seu sistema de numeração não ficou isento.

Ilustro, por intermédio da Figura 6, três fases dessas modificações ocorridas no sistema de numeração babilônico. Nessa figura, Ifrah estabelece a correspondência dos símbolos sumérios com os algarismos indo-arábicos de 1 a 9.

Figura 6: Três fases de modificações do sistema de numeração babilônico.



Fonte: Ifrah (1997a, p. 19).

No sistema de numeração babilônico as operações aritméticas estiveram presentes e permitiram o desenvolvimento de técnicas que possibilitaram a elaboração de tabelas multiplicativas e listas de recíprocos, nas palavras de Galvão (2008, p. 43-44):

> Não há registros de adições e de subtrações, o que é considerado indicativo de que essas operações eram executadas sem dificuldade. No entanto, temos muitas tabelas com multiplicações e lista de recíprocos (em que, para quase todo *n*, calculava-se *1/n*). Aparentemente, a divisão era efetuada através da multiplicação pelo recíproco.
> Quando consideramos o recíproco, encontramos números com representação decimal finita (que são chamados hoje **números regulares**); os números que não tinham representação sexagesimal finita eram chamados pelos mesopotâmicos números que "não dividem". No caso da base 60, os números regulares na forma *1/n* são os que têm no denominador somente fatores 2, 3, e 5.

Além da aritmética, o sistema de numeração babilônico impulsionou ideias algébricas que estão presentes na história da cultura babilônica, principalmente, nas resoluções de problemas e equações.

> Temos registros dos trabalhos dos babilônios na resolução de sistemas lineares, em equações quadráticas e até mesmo nos problemas envolvendo equações cúbicas. Sempre tratavam de situações específicas, mas com métodos que evidenciam o conhecimento de um processo geral. Alguns tabletes dão enunciados, outros, enunciados e soluções, ou instruções para se chegar à solução. Não havia um

> procedimento geral, aparentemente, o estudante deveria fazer muitos problemas do mesmo tipo até que ele conseguisse o domínio da técnica, qualquer que seja o conjunto dado de valores (GALVÃO, 2008, p. 50).

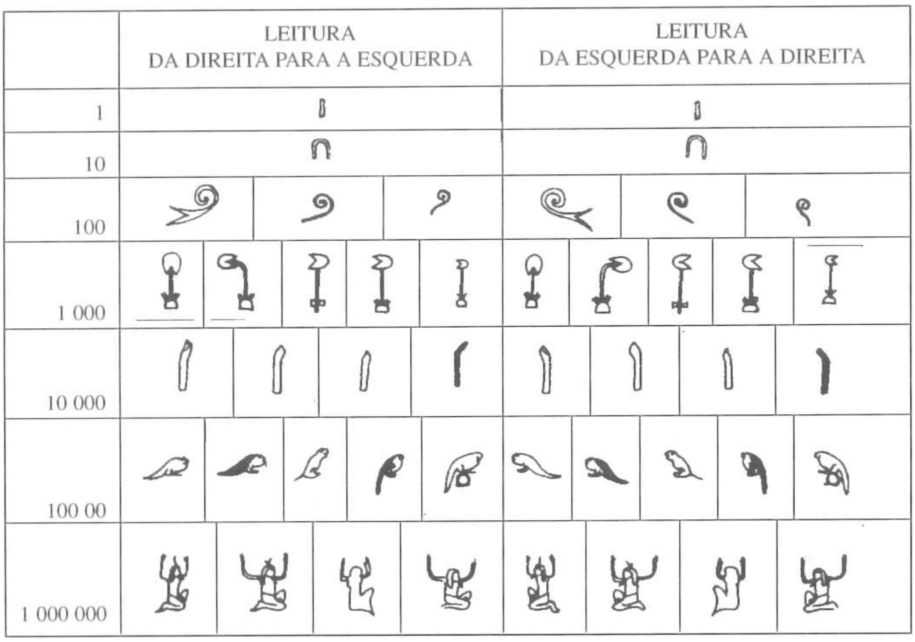
Continuo este meu passear pela história de alguns sistemas de numeração, mostrando as curiosidades do sistema de numeração egípcio.

A civilização egípcia idealizou um sistema de numeração caracterizado pela aditividade e associado à ideia de base dez. Esse sistema de numeração possuía mais símbolos que o sistema de numeração babilônico.

> O algarismo da unidade é um pequeno traço vertical. O da dezena é um sinal em forma de asa, semelhante a uma ferradura disposta como uma espécie de “U” maiúsculo ao inverso. A centena é representada por uma espiral mais ou menos enrolada, como a que se pode realizar com uma corda. O milhar é figurado por uma flor de lótus acompanhada de seus caule, a dezena de mil pelo desenho de um dedo levantado, ligeiramente inclinado, a centena de mil por uma rã ou um girino com uma calda bem pendente e o milhão por um homem ajoelhado levantando os braços na direção do céu (IFRAH, 1997a, p. 341)

A Figura 7 expõe os algarismos do sistema de numeração egípcio.

Figura 7: Algarismos hieroglíficos da numeração egípcia.



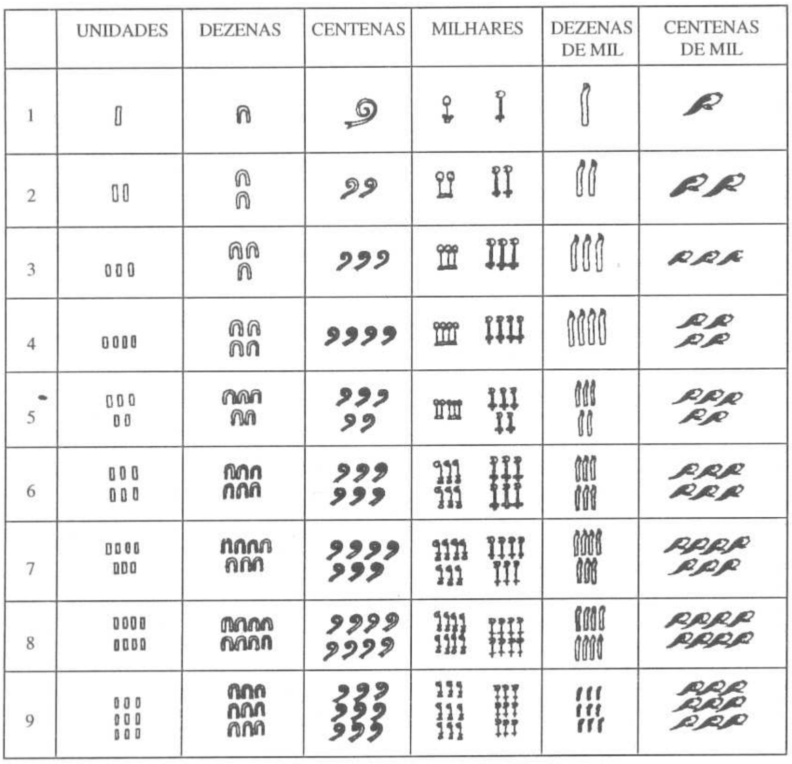
Fonte: Ifrah (1997a, p. 342).

Aproximando os algarismos egípcios com a potência de base dez, temos: unidade (traço vertical) = 10^0; dezena (sinal em forma de “U” invertido) = 10^1; centena (espiral) = 10^2; milhar (flor de lótus) = 10^3; dezena de mil (dedo levantado e ligeiramente inclinado) = 10^4;

centena de mil (rã ou girino) = 10^5 e milhão (homem ajoelhado erguendo as mãos para o céu) = 10^6. A aproximação que fiz, serve para mostrar que os egípcios constituíram um sistema de numeração com ideias próximas do nosso sistema de numeração decimal.

A Figura 8 indica a existência de conversões de ordens no sistema de numeração egípcio. Mesmo sendo um sistema aditivo, isso ocorria, pois havia símbolos que representavam quantidades múltiplas de dez vezes outra. Por exemplo, dez espirais eram trocadas por uma flor de lótus. A referência comparativa para essa conversão são as ordens e as classes do sistema de numeração decimal, ou seja, dez centenas ($10 \times 100 = 1\times 1000 = 1\times 10^3$) é igual a uma unidade de milhar ($1000 = 1 \times 1000 = 1 \times 10^3$).

Figura 8: Numeração hieroglífica egípcia em relação ao sistema de numeração decimal.

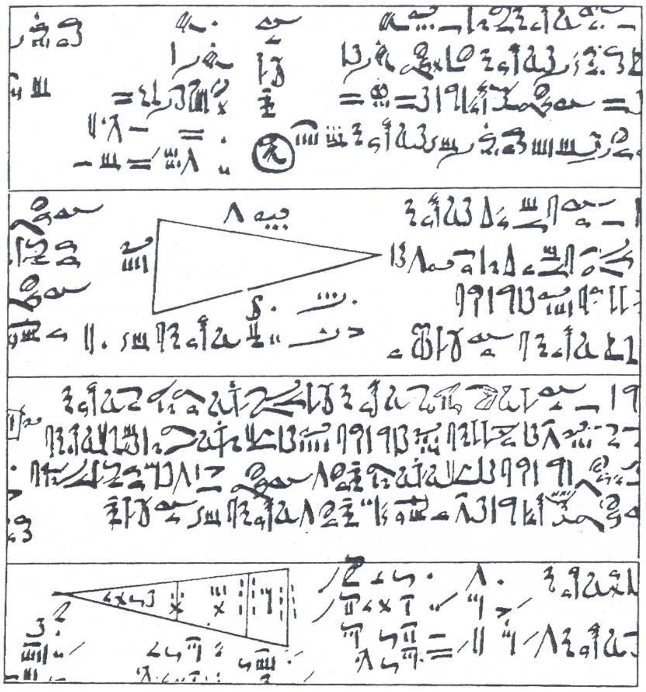


Fonte: Ifrah (1997a, p. 346).

Quando a escrita egípcia passou da hieroglífica para a hierática, os algarismos hieroglíficos, também, foram adaptados para essa nova escrita. O Papiro de Rhind está grafado em caracteres hieráticos (Figura 9). Dessa forma, o Papiro de Rhind é uma prova material da escrita hierática egípcia. Referencio Ifrah (1997a, p. 355), segundo o qual a escrita hieroglífica não predominava nos documentos egípcios.

> Contrariamente ao que se poderia acreditar, o sistema dos hieróglifos não foi a escrita comum no Egito dos faraós: quase não foi empregada para consignar as contas correntes, os recenseamentos ou os inventários, nem para redigir os relatórios, testamentos, documentos econômicos, administrativos, jurídicos, literários, mágicos, religiosos, matemáticos ou astronômicos.
> Assim, desde a época das primeiras dinastias, os escribas simplificaram progressivamente seu traçado para terminar em verdadeiros sinais cursivos, aos quais os autores gregos deram o nome de *sinais hieráticos*.

Figura 9: Detalhe do Papiro de Rhind.



Fonte: Almeida (2007, p. 87).

As informações que conhecemos sobre a matemática egípcia encontram-se em três papiros: *papiro de Rhind ou de Ahmes, papiro de Moscou e papiro do Cairo* (GALVÃO, 2008, p. 72-73). O estudo desses papiros revelou que no sistema de numeração egípcio a aritmética predominava nas práticas de cálculos dos escribas egípcios. Porém, a álgebra também aparece, principalmente, em *problemas algébricos* (GALVÃO, 2008, p. 73).

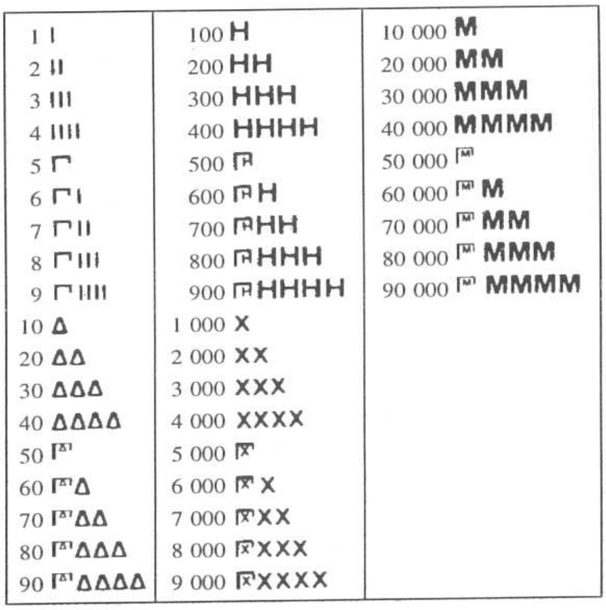
Os egípcios desenvolveram uma técnica particular para resolverem multiplicações e divisões em seu sistema de numeração. Essa técnica é denominada por Contador (2008) como *o método dos dobros*. Não mostrarei tal técnica neste estudo, mas aos interessados em conhecê-la, recomendo consultar Contador (2008).

Prossigo esta narrativa, mostrando as particularidades da numeração dos Gregos e dos Romanos e suas contribuições para o desenvolvimento do sistema de numeração decimal.

A numeração grega antiga, como o sistema numérico ático, possuía característica aditiva e uma grafia muito interessante. De certa forma, essa representação dos números áticos, quando associados ao nosso sistema de numeração usual, expressa uma disposição aditiva de ordens e classes.

A Figura 10 serve como ícone ilustrativo da relação aditiva do sistema de numeração ático e exibe a representação simbólica de alguns números desse sistema. Seguramente, noto certa semelhança do sistema de numeração ático com o sistema de numeração egípcio, porém alguns símbolos estão mais próximos da numeração romana, que considerarei mais à frente.

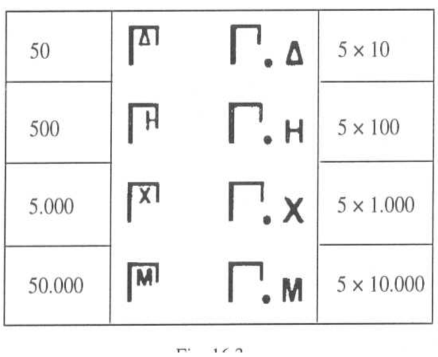
Figura 10: Notação numérica das inscrições da Ática – século V a. C. até o início da era cristã.



Fonte: Ifrah (1997a, p. 383).

Observo no sistema de numeração ático a existência do princípio multiplicativo. Vê-se isso para os números 50, 500, 5.000 e 50.000. A Figura 11 elucida o exposto.

Figura 11: Princípio multiplicativo no sistema de numeração ático.



Fonte: Ifrah (1997a, p.384).

Alguns símbolos da numeração ática estavam associados à escrita grega desses números.

> Existem também representações para os números 10, 10^2 , 10^3 e 10^4 , as quais são, respectivamente **Δ, *H*, *X*** e ***M***. Estes quatro símbolos derivaram das iniciais dos nomes gregos dos números que representam, a saber, *deka* (dez), *hekaton* (cem), *chilioi* (mil), e *myrioi* (dez mil). (ORE, 1948; ROUX, 1988 *apud* ALMEIDA, 2007, p. 52).

A representação simbólica de **Δ** = 10, **H** = 10^2, **X** = 10^3 e **M** = 10^4, no sistema de numeração ático, sugere-me uma aproximação algébrica entre esse sistema e o sistema de numeração decimal.

A numeração grega foi marcada por um contexto histórico de "numerais alfabéticos, onde as letras do alfabeto grego eram empregadas" (CAJORI, 2007, p.88). O emprego dessas letras organizou um novo sistema de números que substituiu o sistema ático. No entanto, esse novo sistema era mais difícil de memorização. A Figura 12 contempla o exposto.

Figura 12: Numeração Greco-alfabético.

α	β	γ	δ	ε	ς	ζ	η	θ
1	2	3	4	5	6	7	8	9
ι	κ	λ	μ	ν	ξ	ο	π	φ
10	20	30	40	50	60	70	80	90
ρ	σ	τ	υ	ϕ	χ	ψ	ω	ϡ
100	200	300	400	500	600	700	800	900
,α	,β	,γ	etc...					
1.000	2.000	3.000						
					$\overset{}{M}$	$\overset{\beta}{M}$	$\overset{\gamma}{M}$	etc...
					10.000	20.000	30.000	

Fonte: Cajori (2007, p. 89).

Prossigo esta narrativa, mostrando certas particularidades do sistema de numeração romano e a influência destes no sistema de numeração decimal.

Os números romanos são apresentados para nossa compreensão em sua forma final pelos algarismos I, V, X, L, C, D e M. Essa forma de apresentação passa uma impressão de simplicidade simbólica desses algarismos. Contudo, não é bem assim.

Ao estudar um pouco mais sobre a evolução histórica da representação dos números romanos, compreendi que eles sofreram adaptações, ao longo do tempo, no contexto das práticas sociais da civilização romana.

A limitação operatória desse sistema fez com que esses algarismos passassem a ter uma função de indicar quantidade.

> Na verdade, os algarismos romanos não são sinais que servem para efetuar operações aritméticas, *mas abreviações destinadas a notificar e reter os números*. É por isso que os contadores romanos (e os calculadores europeus da Idade Média depois deles) sempre apelaram para *ábacos de fichas* para efetuar cálculos.
> Como a maioria dos sistemas da Antiguidade, a numeração romana foi regida, sobretudo, pelo princípio da adição: seus algarismos (I = 1, V = 5, X = 10, L = 50, C = 100, D = 500 e M = 1.000) eram independentes um dos outros, sua justaposição implicava na soma do valores correspondentes (IFRAH, 1997a, p. 396).

Por exemplo, se representarmos o número romano MDLXXV, no sistema de numeração decimal, indicaremos que MDLXXV = 1.000 + 500 + 50 + 10 + 10 + 5 = 1575. O que confirma o exposto na citação.

A correspondência dos algarismos romanos com os números do sistema de numeração decimal é visto, por mim, como uma premissa à introdução da relação que concebi entre aritmética e álgebra. Deste modo, MDLXXV = $1.\ 10^3 + 5.\ 10^2 + 5.\ 10^1 + 1.\ 10^1 + 1.\ 10^1 + 5.\ 10^0 = 1.\ 10^3 + 5.\ 10^2 + (5 + 1 + 1).10^1 + 5.\ 10^0 = 1.\ 10^3 + 5.\ 10^2 + 7.\ 10^1 + 5.\ 10^0$ = 1 unidade de milhar + 5 centenas + 7 dezenas + 5 unidades = 1575.

A introdução da subtração no sistema de numeração romano dificultou a compreensão da representação de alguns números nesse sistema (IFRAH, 1997a). Na Figura 13 temos alguns deles.

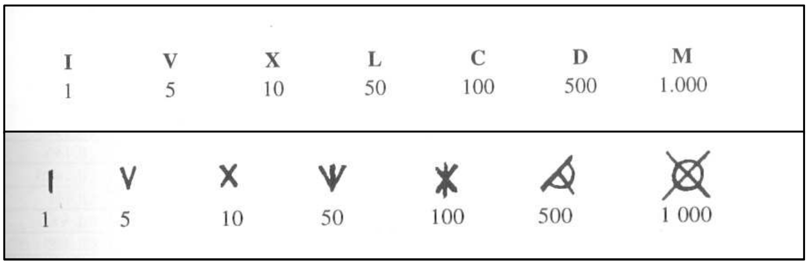
Figura 13: Os números 4, 9, 19, 40, 400 e 900 no sistema de numeração romano.

IV	(= 5 - 1)	em lugar de	**IIII**
IX	(= 10 - 1)	em lugar de	**VIIII**
XIX	(= 10 + 10 - 1)	em lugar de	**XVIIII**
XL	(= 50 - 10)	em lugar de	**XXXX**
XC	(= 100 - 10)	em lugar de	**LXXXX**
CD	(= 500 - 100)	em lugar de	**CCCC**
CM	(= 1.000 - 100)	em lugar de	**DCCCC**

Fonte: Ifrah (1997a, p. 396).

Comparando os algarismos romanos de hoje com as primeiras notações desses, a semelhança é reduzida apenas para os algarismos I, V e X. Para Ifrah (1997a, p. 397) “são apenas modificações tardias de formas mais antigas”. A Figura 14 exemplifica isso.

Figura 14: Os algarismos romanos do passado e os atuais.

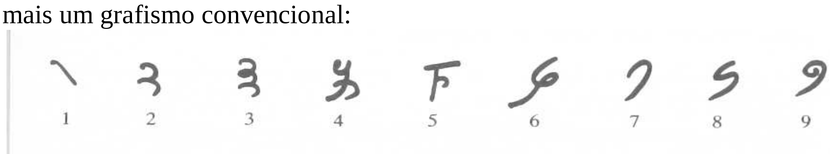


Fonte: Ifrah (1997a, p. 397).

Agora, vou à história da numeração Hindu-Árabe. Duas civilizações que impulsionaram o conhecimento aritmético e algébrico. Sem dúvida, o desenvolvimento da matemática ocidental perpassa pelos estudos matemáticos dessas duas civilizações. A começar pelos algarismos denominados de indo-arábicos: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e 0.

Não vou me deter nas discussões teóricas sobre a origem dos algarismos indo-arábicos, como as que constam em Ifrah (1997b). Mas admitirei o que consta em Ifrah (2005, p. 264-265).

> De fato, foi no norte da Índia, por volta do século V da era cristã, que nasceu o ancestral de nosso sistema moderno e que foram estabelecidas as bases do cálculo escrito tal como é praticado hoje em dia. O que é comprovado por inúmeros documentos e testemunhos, além de ter sido sempre proclamado pelos próprios árabes (a quem, contudo, esta descoberta foi atribuída durante muito tempo por uma certa tradição).
> Esta numeração comportava, no entanto, uma das características do nosso sistema moderno. Seus nove primeiros algarismos (os das unidades simples) eram, de fato, *signos independentes de qualquer intuição sensível*: eram distintos e não buscavam evocar visualmente os números correspondentes. Assim, o algarismo 9, por exemplo, não era mais composto de nove barras ou nove pontos, correspondendo mais um grafismo convencional:



A numeração falada da civilização indiana, mais precisamente a língua *sânscrita*, contribuiu para o que hoje conhecemos como escrita por extenso dos numerais.

> Assim, o número 8.237, por exemplo, pode ser enunciado da seguinte maneira: “oito mil, duzentos, três dezenas e sete”, segundo a decomposição aritmética abaixo:
> $8 \times 10^3 + 2 \times 10^2 + 3 \times 10 + 7$.
> Naturalmente, em lugar de seguir as potências decrescentes da base dez, o enunciado do mesmo número poderia ser feito no sentido inverso, seguindo as potências crescentes de dez a partir da menor unidade, isto é, aproximadamente assim:
> “Sete, três dezenas, duzentos, oito mil”.
> Essa era exatamente o tipo de enunciado que os astrônomos indianos empregavam para exprimir os números “com todas as letras”, através dos nomes de número da língua sânscrita. Procediam assim segundo as potências ascendentes de dez. Logo, para o número precedente, teríamos a seguinte decomposição aritmética:
> $7 + 3 \times 10 + 2 \times 10^2 + 8 \times 10^3 = 8.237$ (IFRAH, 1997b, p. 110).

A solução que os astrônomos indianos encontraram para indicar a ideia do zero foi recorrer à *palavra sânscrita* ***šhûnya***[6]*, que significa “vazio” e, por extensão, “zero”* (IFRAH, 1997b, p. 110). Nascia assim um significado para aquele par de cravos inclinados dos babilônios.

Para diferenciar, por exemplo, 42 de 402. Os hindus pronunciavam 402: “*dvi śūnya catur”* (“DOIS. VAZIO. QUATRO”). Usando a palavra *“śūnya” os* hindus tinham constituído o algarismo zero, mas apenas de forma oral.

Na língua sânscrita, os algarismos das nove unidades simples eram pronunciados: *eka, dvi, tri, catur, pañca, sat, sapta, asta, nava* (IFRAH, 2005, p. 267). Havia certa independência de pronúncias para alguns números conforme a potência de dez. O Quadro 1 ilustra algumas dessas.

Quadro 1: Alguns nomes sânscritos das potência de dez.

FORMA ESCRITA	FORMA ORAL HINDU	POTÊNCIA DE DEZ
10	*dasa*	10
100	*sata*	10^2
1.000	*sahasra*	10^3
10.000	*ayuta*	10^4
100.000	*laksa*	10^5
1.000.000	*prayuta*	10^6
10.000.000	*koti*	10^7
100.000.000	*vyarbuda*	10^8
1.000.000.000	*padma*	10^9

Fonte: Ifrah (2005, p. 268).

Oralmente, o número 45.389, seria assim pronunciado pelos hindus: “nava, asta dasa, tri sata, pañca sahasra, catur ayuta”. Atualmente, isso seria: nove, oito dezenas, três centenas, cinco unidades de milhar, quatro dezenas de milhar. Na potência de dez ou decomposição

[6] Em Ifrah (2005, p. 270) está grafado *śūnya*. Grafia que usarei neste texto.

aritmética: $9 + 8 \times 10 + 3 \times 10^2 + 5 \times 10^3 + 4 \times 10^4$. Logo, incluo a oralidade numérica hindu dentro das ideias iniciais dos objetos ostensivos e não ostensivos, que auxilia na identificação da ordem e da classe que os algarismos indo-arábicos ocupam no sistema de numeração decimal.

O simbolismo numérico possibilitou aos hindus aperfeiçoarem o modo como eles calculavam. Isso os permitiu calcular mais facilmente. Contudo, a organização algorítmica dos calculistas hindus era diferente das que recorremos hoje. Assim descreve Cajori (2007, p. 143): *"[...] Os hindus estavam geralmente inclinados a seguir o movimento da esquerda para a direita como na escrita [...] Por exemplo, para somar 254 e 663 procediam assim: 2 + 6 = 8, 5 + 6 = 11, que muda 8 para 9, 4 + 3 = 7. Portanto, tem-se a soma 917[...]"*. Basicamente, o algoritmo hindu da adição está pautado na posição que cada algarismo ocupa. Só após o resultado obtido, procedem-se as transformações de ordens. É o famoso "vai um".

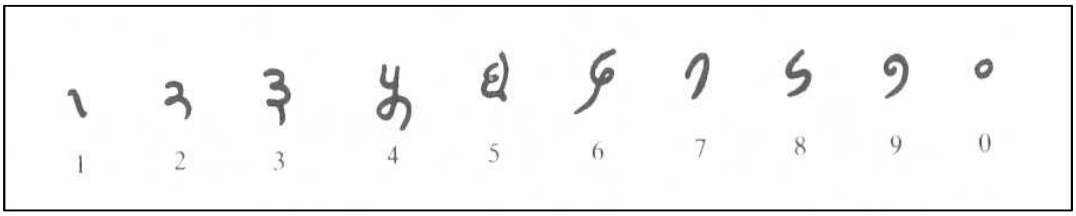
Não prolongarei as discussões sobre a numeração hindu, e sim, aproprio-me das palavras de Garbi (2010, p. 23-24) como enfoque introdutório das contribuições dos árabes para o desenvolvimento do sistema de numeração decimal e da matemática que conhecemos.

> O califa ***al-Mansur*** (reinou de 754 a 775), que construiu Bagdah às margens do Rio Tigre, desejou fazer dela uma nova Alexandria e para lá atraiu sábios de várias regiões, inclusive judeus e cristãos. Em 773, uma delegação de astrônomos e matemáticos hindus visitou sua corte e explicou a ele e a seus eruditos como trabalhar com o eficiente ***sistema indiano de numeração***, logo adotado pelos sábios de Bagdah. O califa ***Harun al-Rashid*** (reinou de 786 a 809), imortalizado nos Contos das 1001 Noites, cercou-se de sábios e artistas e, inclusive, ordenou que os Elementos fossem vertidos para o Árabe. Este fato foi de suma importância pois, muito mais tarde, esta foi a fonte a que a Europa recorreu para reencontrar os perdidos ensinamentos de Euclides. Seu filho, ***Al-Mamun***, que reinou entre 813 e 833, continuou a obra do pai e determinou a pesquisa e a tradução para a língua Árabe de todos os antigos manuscritos gregos que pudessem ser encontrados, criando em Bagdah uma escola científica cuja biblioteca foi a melhor do mundo desde a que existira em Alexandria. Assim foram salvas importantes obras de Euclides, Arquimedes, Apolônio, Cláudio Ptolomeu e outros gênios da Antiguidade Clássica.
> Al-Mamun convidou para sua corte muitos dos melhores cientistas do mundo e entre eles estava o famoso astrônomo e matemático ***Abu-Abdullah Muhammed ibn-Musa al-Khwarizmi*** (783-850) [...] Tendo-lhe sido solicitado por Al-Mamun que produzisse uma obra popular sobre as equações, ele escreveu o livro ***Al-Kitab al-jabr wa'l Muqabalah***, título que pode ser aproximadamente traduzido por "O Livro da Restauração e do Balanceamento". A palavra ***Al-jabr*** era empregada por al-Khwarizmi para designar operações em que, por exemplo, a equação $x – 3 = 6$ passa a $x = 9$, significando uma "restauração" de $x – 3$ de modo a torna-se a incógnita completa x. Foi assim que nasceu a palavra ***Álgebra*** [...] (grifos no original).

A fonte de saberes, que os árabes traduziram para sua língua, torna evidente os contributos desses povos para o Ocidente. Hipoteticamente, se os árabes não tivessem governantes adeptos de outras culturas, a matemática não estaria no estágio que se encontra nos dias atuais.

Os árabes recopiaram, inicialmente, “a numeração posicional e os métodos de cálculos originários da índia” (IFRAH, 2005, p. 299). Nessa época (metade do século IX) os símbolos numéricos hindus tinham a representação conforme na Figura 15.

Figura 15: Os nove algarismos hindus recopiados pelos árabes.



Fonte: Ifrah (2005, p. 299).

Esses algarismos passaram por modificações na cultura árabe antes de assumirem a forma como os conhecemos atualmente. Além disso, a primeira introdução desses algarismos na cultura ocidental cristã ocorreu na Europa (final do século X), por meio do monge francês Gerbert d’Aurillac (IFRAH, 1997b).

> A lenda diz que, para sua iniciação no cálculo indo-arábico, Gerbert d’Aurillac chegou a ir a Sevilha, Fez e Córdoba e que se introduziu nas universidades árabes disfarçado de peregrino muçulmano.
> Isso não é impossível. Contudo, é mais provável que tenha permanecido na Espanha cristã, no mosteiro de Santa Maria de Ripoll, que, segundo G. Beaujouan era “um exemplo surpreendente de inserção de elementos árabes na tradição isidoriana”, e a pequena cidade catalã de Ripoll de fato serviu de intermediária entre os mundos cristão e muçulmano.
> Podemos ter uma certeza: quando retornou a França, Gerbert dominava toda a ciência necessária. Em Reims, onde dirige a escola diocesana, seu ensino exerceu uma influência preponderante sobre as escolas de seu tempo, e devolveu ao Ocidente o gosto pela matemática [...]
> Houve grande resistência à iniciativa de Gerbert, e tal relutância foi devida essencialmente ao conservadorismo dos povos cristãos que se haviam agarrado, por assim dizer, à numeração e aos métodos romanos de cálculo.
> É verdade que a maioria dos clérigos da época, que tinham a si próprios como os dignos fieis herdeiros da “grande” tradição de Roma, não podiam admitir facilmente a superioridade de um outro método (IFRAH, 1997b, p. 458-459).

Percebo que o contexto histórico vivido por Gerbert não foi favorável à introdução dos algarismos indo-arábicos na cultura ocidental cristã. Isso porque o apego à cultura numérica romana dessa época ditava seu controle cultural entre os povos cristãos e clérigos.

O estágio final da grafia numérica Hindu-Árabe, tal como conhecemos hoje na cultura ocidental, é consolidado por volta do século XIII e XIV. Após isso, o que se verifica é o aprimoramento tipográfico proporcionado pela invenção da imprensa por Gutenberg (IFRAH, 2005, p. 310). Assim, os algarismos indo-arábicos atingem a grafia numérica atual, que ensinamos nas instituições escolares, por meio do sistema de numeração decimal.

Neste tópico, vimos que os sistemas de numeração precursores do sistema de numeração decimal constituíram representações simbólicas, impulsionando o surgimento de práticas de cálculos aritméticos e algébricos, que influenciaram as civilizações Hindu e Árabe a aprimorarem a representação dos algarismos indo-arábicos. Assim, nessas duas civilizações, os algarismos indo-arábicos promoveram práticas aritméticas e algébricas por meio do sistema de numeração decimal. Além do que, para esta pesquisa, as diferentes representações simbólicas dos sistemas de numeração precursores da numeração decimal, são compreendidas quando as representamos na potência de base dez. Dessa forma, o contexto histórico da numeração decimal está conectado ao estudo epistemológico das operações polinomiais que exponho no próximo tópico.

3. Um Estudo Epistemológico da Adição, Subtração, Multiplicação e Divisão de Polinômios

O que proponho neste tópico é mostrar que podemos conectar diferentes objetos matemáticos, para idealizar praxeologias que sirvam como novas compreensões dos tipos de objetos matemáticos da álgebra elementar, ou então, contribua para práticas docentes que facilitem os processos de ensino e de aprendizagem da álgebra ensinada na educação básica.

Veremos aqui os pressupostos de um estudo que me levou a propor um **modelo epistemológico alternativo** (este modelo será explicitado no capítulo IV) para o ensino das operações com polinômios no ensino fundamental.

3.1. Aritmética e Álgebra na Base Dez e em Outras Bases

Os sistemas de numeração posicional têm como característica a escolha de bases numéricas de referência. Algumas dessas bases foram escolhidas por meio de partes do corpo humano. Um exemplo disso são os dedos das mãos e dos pés.

> [...] com o surgimento das primeiras civilizações, foi necessário fixar um determinado número de símbolos, e ordenar a sua repetição de forma a facilitar a sua escrita e a sua pronúncia, assim foram adotados vários critérios, sempre ou quase sempre, relacionados com a anatomia humana. Em culturas em que nas fases mais antigas usavam-se os dedos das mãos para contar, a quantidade de elementos de um grupo fixou-se em cinco e consequentemente a base numérica adotada é a *quinária*; quando foram usados os dedos das duas mãos a base adotada foi a *decimal*, e no caso do uso dos dedos dos pés a base adotada foi a *vigesimal*. Assim, surgiram os principais sistemas de numeração das civilizações antigas, o de base dez ou decimal, de base cinco ou quinária, de base vinte ou vigesimal, além da base sessenta ou sexagesimal e o de base doze ou duodecimal [...] (CONTADOR, 2008, p. 29).

Assim, podemos compor um sistema de numeração posicional a partir da escolha de um número *b* que sirva de base (EVES, 2004). A nossa referência para outras base é a base dez do sistema de numeração decimal.

Adotarei a representação $N_{(b)}$, na qual o indicativo em que base o número *N* está representado é *(b)*. O Quadro 2 mostra a relação existente entre diferentes bases e os algarismos indo-arábicos.

Quadro 2: Algarismos indo-arábicos e algumas diferentes bases.

Algarismos Indo-Arábicos	Base 2	Base 3	Base 4	Base 5	Base 6	Base 7	Base 8	Base 9	Base 10
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	10	2	2	2	2	2	2	2	2
3	11	10	3	3	3	3	3	3	3
4	100	11	10	4	4	4	4	4	4
5	101	12	11	10	5	5	5	5	5
6	110	20	12	11	10	6	6	6	6
7	111	21	13	12	11	10	7	7	7
8	1000	22	20	13	12	11	10	8	8
9	1001	100	21	14	13	12	11	10	9

Fonte: Elaborado pelo autor.

Do Quadro 2 surge a possibilidade de outro tratamento para as operações aritméticas fundamentais. Por exemplo, a adição 21 + 12 + 11, na base quatro, que resulta 110. Na base dez, temos a adição: 9 + 6 + 5 = 20. Consequentemente, $110_{(4)} = 1\times 4^2 + 1\times 4^1 + 0\times 4^0 = 16 + 4 + 0 = 20_{(10)}$.

O transporte de ordem no sistema de numeração decimal rege as operações aritméticas fundamentais e imprime condições algorítmicas, principalmente, na subtração e na divisão. Deste modo, esse transporte de ordem, alarga-se a outra base não decimal. Esclareço, a seguir, como podemos entender isso, resolvendo a subtração de 146 por 89. No sistema de numeração decimal temos a resolução que segue.

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 0\ 13\ 16} \\ -\ \cancel{1}\,\cancel{4}\,\cancel{6} \\ 8\ 9 \\ \hline \mathbf{5\ 7} \end{array}$$

Vejamos como seria essa mesma subtração na base 5 (cinco), mas antes vou representar 146 e 89 nessa base.

$$\begin{array}{llllll} 146 & \underline{|\,5\quad} & & & & \\ \text{-1-} & 29 & \underline{|\,5\quad} & & & \\ & \text{- 4 -} & 5 & \underline{|\,5\quad} & & \\ & & \text{- 0 -} & 1 & \underline{|\,5\quad} & \\ & & & \text{- 1 -} & 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{lllll} 89 & \underline{|\,5\quad} & & & \\ \text{- 4 -} & 17 & \underline{|\,5\quad} & & \\ & \text{- 2 -} & 3 & \underline{|\,5\quad} & \\ & & \text{-3 -} & 0 & \end{array}$$

As setas indicam a sequência que devemos dispor os restos das divisões para compor os números na base cinco. Deste modo, temos que 146 e 89 na base dez são, respectivamente, 1041 e 324 na base cinco. Portanto, a subtração de 1041 por 324, segue o algoritmo da subtração do sistema de numeração decimal, porém, adequado ao sistema de numeração de base cinco. Deste modo, a cada agrupamento de cinco equivale mudança de ordem.

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 0\ \ 5\ 3\ 6} \\ \cancel{1}\,\cancel{0}\,\cancel{4}\,\cancel{1} \\ 3\ 2\ 4 \\ \hline \end{array}$$

$\mathbf{2\ 1\ 2} = 2.\ 5^2 + 1.\ 5^1 + 2.\ 5^0 = 50 + 5 + 2 = \mathbf{57}_{(10)}$

A escrita geral de um número *N* nas bases expostas no Quadro 2 seria:

- Base 2 (sistema binário): $N = a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + ... + a_2 b^2 + a_1 b^1 + a_0$; $0 \le a_i < b$, $i = 0, 1, 2, 3,..., n$; $a_i \in \{0, 1\}$ e $b = 2$;
- Base 3: $N = a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + ... + a_2 b^2 + a_1 b^1 + a_0$; $0 \le a_i < b$, $i = 0, 1, 2, 3,..., n$; $a_i \in \{0, 1, 2\}$ e $b = 3$;
- Base 4: $N = a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + ... + a_2 b^2 + a_1 b^1 + a_0$; $0 \le a_i < b$, $i = 0, 1, 2, 3,..., n$; $a_i \in \{0, 1, 2, 3\}$ e $b = 4$;
- Base 5 (sistema quinário): $N = a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + ... + a_2 b^2 + a_1 b^1 + a_0$; $0 \le a_i < b$, $i = 0, 1, 2, 3,..., n$; $a_i \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ e $b = 5$;

- Base 6: $N = a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + ... + a_2 b^2 + a_1 b^1 + a_0$; $0 \le a_i < b$, *i = 0, 1, 2, 3,..., n; a_i ∈ {0, 1, 2, 3, 4, 5} e b= 6;*
- Base 7: $N = a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + ... + a_2 b^2 + a_1 b^1 + a_0$; $0 \le a_i < b$, *i = 0, 1, 2, 3,..., n; a_i ∈ {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6} e b= 7;*
- Base 8: $N = a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + ... + a_2 b^2 + a_1 b^1 + a_0$; $0 \le a_i < b$, *i = 0, 1, 2, 3,..., n; a_i ∈ {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7} e b= 8;*
- Base 9: $N = a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + ... + a_2 b^2 + a_1 b^1 + a_0$; $0 \le a_i < b$, *i = 0, 1, 2, 3,..., n; a_i ∈ {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8} e b= 9.*

As bases do Quadro 2 possuem em comum os algarismos indo-arábicos 0 e 1. Isso me permite incluir os coeficientes do polinômio $x^3 + x^2 + 0x + 1$ nessas bases. Portanto, teremos *x = b ∈ {2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}*. Logo, se *x = b= 2*, 3,5; os valores numéricos do polinômio serão:

- $1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2 + 1 = 8 + 4 + 0 + 1 = 13_{(10)}$;
- $1 \times 3^3 + 1 \times 3^2 + 0 \times 3 + 1 = 27 + 9 + 0 + 1 = 37_{(10)}$;
- $1 \times 5^3 + 1 \times 5^2 + 0 \times 5 + 1 = 125 + 25 + 0 + 1 = 151_{(10)}$.

Em relação à base dez, passo a De Maio (2011, p. 164-165) que descreve:

> A representação no sistema de numeração decimal dos números racionais é conhecida desde o ensino fundamental. Vamos recordá-la:
> O “número” 345 é a representação decimal de 3 centenas + 4 dezenas + 5 unidades, ou
>
> $$345 = 3.\ 10^2 + 4.\ 10^1 + 5.\ 10^0$$
>
> O “número” 2403 é a representação decimal de 2 milhares + 4 centenas + 0 dezenas + 3 unidades, ou
>
> $$2403 = 2.\ 10^3 + 4.\ 10^2 + 0.\ 10^1 + 3.\ 10^0.$$
>
> Analogamente, temos uma representação decimal para os racionais.
>
> **1) Para os racionais do tipo** $\frac{a}{1} \in Q_z$, usamos a mesma representação dos inteiros, ou seja:
>
> $$\frac{345}{1} = 3.\ 10^2 + 4.\ 10^1 + 5.\ 10^0$$
>
> **2) Para os racionais decimais**, ou decimais exatos:
>
> São os racionais do tipo: $\frac{a}{10^n}, 0 < a < 9$
>
> Exemplo: $\frac{8}{1000}$ (oito milésimos) = 0,008 ou 8. 10^{-3} .

Da descrição de De Maio, abstraio as tarefas **t₂** e **t₃**:

- **t_2**: representar o número racional inteiro 345 na forma de potência de base 10.
- **t_3**: representar o número racional decimal $\frac{8}{1000}$ (oito milésimos) na forma de potência de base 10.

Para essas duas tarefas, a técnica, a tecnologia e a teoria estão implícitas no que descreve De Maio (2011).

Tomo o exposto por De Maio (2009, p. 267), segundo o qual *a forma geral para representarmos os números na forma de potências, polinômios, é* $N = ...a_3 \cdot b^3 + a_2 \cdot b^2 + a_1 \cdot b^1 + a_0 \cdot b^0 + a_{-1} \cdot b^{-1} + a_{-2} \cdot b^{-2} + ...$, *onde* $0 \le a_i < b$ *e* $b \ge 2$ *e a e b números naturais*. Essa generalização é plausível à representação de números em bases quaisquer. O mesmo autor (2009, p. 268) usa essa generalização na representação dos números no sistema de numeração decimal, sendo:

$N = ...a_3 \cdot 10^3 + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10^1 + a_0 \cdot 10^0 + a_{-1} \cdot 10^{-1} + a_{-2} \cdot 10^{-2} + ...$, *onde* $a_i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, *$a_i$ = algarismo.*

Pelo exposto no parágrafo anterior, a técnica que resolve a tarefa **t_2** é a representação de $N = 345 = 3.\ 10^2 + 4.\ 10^1 + 5.\ 10^0$ e está justificada na tecnologia de $N = a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10^1 + a_0 \cdot 10^0 = a_2 a_1 a_0$. Já para a tarefa **$t_3$**, a técnica que a resolve é a mesma de **t_2**, com a necessária adequação. Portanto,

$$N = \frac{8}{1000} = 0{,}008 = 8.\ 10^{-3} = 0.\ 10^0 + 0.\ 10^{-1} + 0.\ 10^{-2} + 8.10^{-3} =$$

$$a_0 \cdot 10^0 + a_{-1} \cdot 10^{-1} + a_{-2} \cdot 10^{-2} + a_{-3} \cdot 10^{-3} = a_0 \cdot 10^0 + \frac{a_{-1}}{10^1} + \frac{a_{-2}}{10^2} + \frac{a_{-3}}{10^3} =$$

$$a_0 \cdot 10^0 + a_{-1} \cdot \frac{1}{10} + a_{-2} \cdot \frac{1}{100} + a_{-3}.\frac{1}{1000} = a_0 \cdot 10^0 + a_{-1} \cdot 0{,}1 + a_{-2} \cdot 0{,}01 + a_{-3} \cdot 0{,}001 =$$

$$a_0 + 0{,}a_{-1} + 0{,}0a_{-2} + 0{,}00a_{-3} = a_0{,}a_{-1}a_{-2}a_{-3}.$$

Outra representação que apreendi de Floriani (2000), descrita por De Maio (2009), por meio da soma de dois polinômios, corrobora para a fundamentação da análise que faço nesta pesquisa.

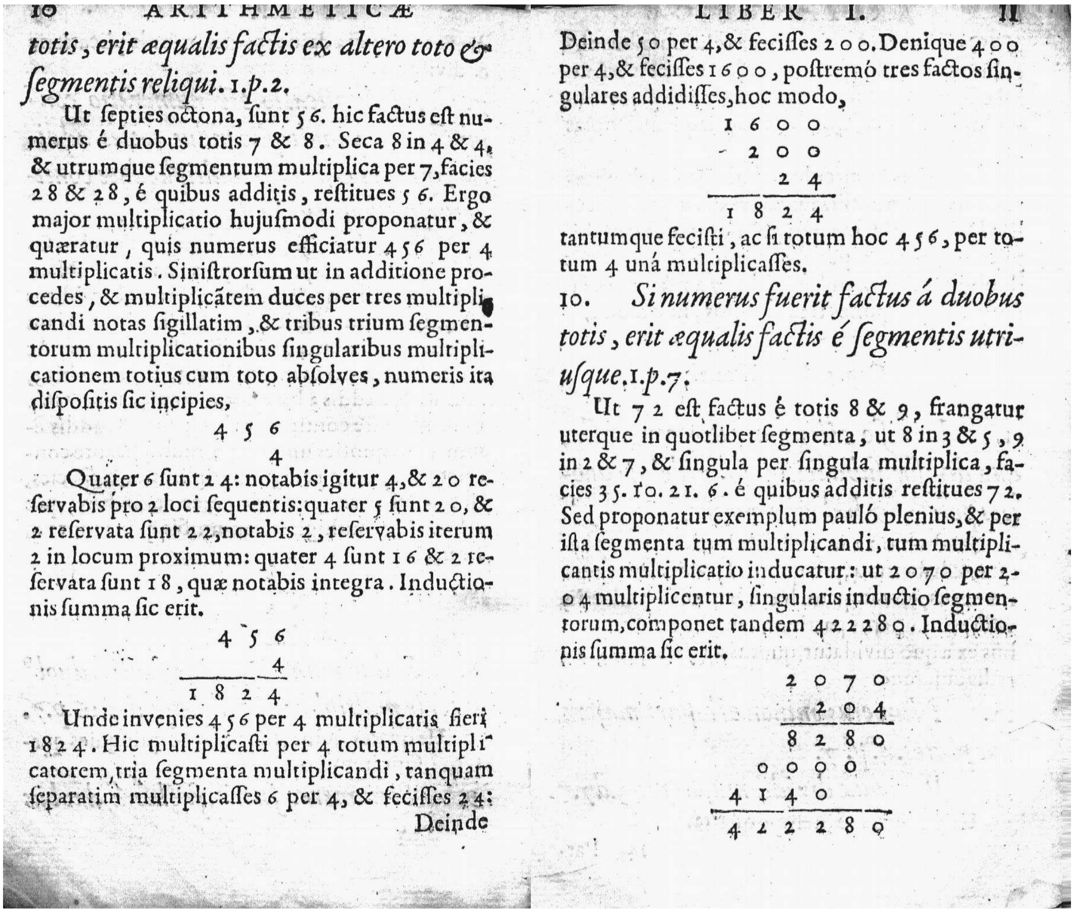
> Sejam os polinômios: *P(x)* = $3+5\cdot x+2\cdot x^2$ *e Q(x)* = $4+3\cdot x+6\cdot x^2$.
> Temos:
>
> $$\begin{array}{r} 3+5\cdot x+2\cdot x^2 \\ +\ 4+3\cdot x+6\cdot x^2 \\ \hline 7+8\cdot x+8\cdot x^2 \end{array}$$
>
> Se tivermos usando numerais, na base decimal, teremos:
>
> $N_1 = 2\times10^2+5\times10^1+3\times10^0$ e $N_2 = 6\times10^2+3\times10^1+4\times10^0$
>
> e a adição será feita assim:
>
> $$\begin{array}{r} 2\times10^2+5\times10^1+3\times10^0 \\ +\ 6\times10^2+3\times10^1+4\times10^0 \\ \hline 8\times10^2+8\times10^1+7\times10^0 \end{array}$$ (DE MAIO, 2009, p. 275).

O vínculo que De Maio faz ao transpor a soma de dois polinômios para a soma de dois números, no sistema de numeração decimal, leva-me a reconhecer, neste estudo, a importância histórica de alguns sistemas de numeração que contribuíram para a existência do sistema de numeração decimal, mais conhecido como sistema de numeração indo-arábico.

Confrontando a notação do número *N*, esboçada por De Maio (2009) e por Eves, (2004), noto que elas são próximas. O que as diferencia é a notação que cada autor assume.

Já apresentei com certos detalhes as obras de De Maio (2009, 2011). Sigo agora para o século XVI, mais precisamente para a edição de 1562 do livro *Arithmetica, Apud Andream Wechelun.* Nessa obra, na página 10 e 11 (Figura 16), observa-se a ideia do valor posicional dos algarismos na explicação resolutiva de uma multiplicação.

Figura 16: Páginas 10 e 11 do livro *Arithmetica, Apud Andream Wechelun* de 1562.



10 ARITHMETICÆ

totis, erit æqualis factis ex altero toto & ſegmentis reliqui. 1.*p*.2.

Ut ſepties octona, ſunt 56. hic factus eſt numerus é duobus totis 7 & 8. Seca 8 in 4 & 4, & utrumque ſegmentum multiplica per 7, facies 28 & 28, é quibus additis, reſtitues 56. Ergo major multiplicatio hujuſmodi proponatur, & quæratur, quis numerus efficiatur 456 per 4 multiplicatis. Siniſtrorſum ut in additione procedes, & multiplicãtem duces per tres multiplicandi notas ſigillatim, & tribus trium ſegmentorum multiplicationibus ſingularibus multiplicationem totius cum toto abſolves, numeris ita diſpoſitis ſic incipies,

4 5 6
4

Quater 6 ſunt 24: notabis igitur 4, & 20 reſervabis pro 2 loci ſequentis: quater 5 ſunt 20, & 2 reſervata ſunt 22, notabis 2, reſervabis iterum 2 in locum proximum: quater 4 ſunt 16 & 2 reſervata ſunt 18, quæ notabis integra. Inductionis ſumma ſic erit.

4 5 6
4
1 8 2 4

Unde invenies 456 per 4 multiplicatis fieri 1824. Hic multiplicaſti per 4 totum multiplicatorem, tria ſegmenta multiplicandi, tanquam ſeparatim multiplicaſſes 6 per 4, & feciſſes 24: Deinde

LIBER I. 11

Deinde 50 per 4, & feciſſes 200. Denique 400 per 4, & feciſſes 1600, poſtremó tres factos ſingulares addidiſſes, hoc modo,

1 6 0 0
2 0 0
2 4
1 8 2 4

tantumque feciſti, ac ſi totum hoc 456, per totum 4 uná multiplicaſſes.

10. *Si numerus fuerit factus á duobus totis, erit æqualis factis é ſegmentis utriuſque.* 1.*p*.7.

Ut 72 eſt factus é totis 8 & 9, frangatur uterque in quotlibet ſegmenta, ut 8 in 3 & 5, 9 in 2 & 7, & ſingula per ſingula multiplica, facies 35. 10. 21. 6. é quibus additis reſtitues 72. Sed proponatur exemplum pauló plenius, & per iſta ſegmenta tum multiplicandi, tum multiplicantis multiplicatio inducatur: ut 2070 per 204 multiplicentur, ſingularis inductio ſegmentorum, componet tandem 422280. Inductionis ſumma ſic erit.

2 0 7 0
2 0 4
8 2 8 0
0 0 0 0
4 1 4 0
4 2 2 2 8 0

Fonte: http://fondosdigitales.us.es/fondos/libros/985/10/arithmetica/.

O resultado (1824) da multiplicação de 456 por 4 é explicada pela posição ocupada pelos algarismos do multiplicando. Dessa forma, 4 vezes 6 resulta 24, porque o seis ocupa a ordem das unidades; 4 vezes 50 resulta 200, porque a posição do cinco é na ordem das dezenas; 4 vezes 400 resulta 1600, devido o quatro ocupar o ordem das centenas. Após esses esclarecimentos, o autor soma os valores 1600, 200 e 24. Note-se que os sinais indicativos de multiplicação e de adição não aparecem impressos nas páginas do livro. Entretanto, várias palavras em latim (*multiplica, multiplicatio, multiplicatis, additione, addidifles, etc.)* explicitam a ocorrência dessas duas operações. Ressalto que o algoritmo da multiplicação explicitado nessa obra é o mesmo que está posto nos livros didáticos atuais. A diferença entre o livro de Wechelun e os atuais está na ausência dos sinais × e +. Em relação à potência de base dez, ela está implícita quando a autor explica que o valor posicional de 5 é 50 e de 4 é 400, ou seja, 5 × 10 e 4 × 100 = 4 × 10 × 10.

Deixo o século XVI e irei ao século XIX, ou melhor, aporto-me no artigo de Zuin (2005) que expõe sobre ***o método analítico na Arithmetica Raciocinada de Pedro d'Alcântara Lisboa, publicada em 1863***. Essa obra apresentava um processo analítico que propunha dar um tratamento às operações aritméticas fundamentais de forma a superar as incompreensões que não eram elucidadas pelos algoritmos tradicionais. Segundo Zuin (2005, p. 36): "*O livro, ao que parece, e destinado ao professor. Existem várias notas de rodapé como, no caso das operações, com orientações para os mestres* [...]". Essa preocupação de Lisboa era um reflexo de sua profissão, pois,

> como professor da Escola Normal da província do Rio de Janeiro, se preocupa em apresentar uma metodologia que facilitasse o entendimento dos algoritmos das operações fundamentais, pois o método pratico limita a compreensão dos procedimentos realizados (ZUIN, 2005, p. 36).

O método analítico proposto por Lisboa (1863 *apud* ZUIN, 2005, p. 38-45) abrangeu as quatros operações aritméticas fundamentais. Exemplifico este método por intermédio do exemplo que consta em Zuin (2005, p. 38-39):

> Sejão, por exemplo, as parcellas 4000, 395, 1453, 1789. Estas parcellas são collocadas, ficando as unidades de uma mesma ordem em columna vertical do seguinte modo:

4000
395
1453
1789

> Em seguida, apresenta o método.

4000	= 4000			
395	= 0 +	300 +	90 +	5
1453	= 1000 +	400 +	50 +	3
1789	= 1000 +	700 +	80 +	9
7637	= 6000 +	1000 + 400	+ 200 + 20 +	10 + 7
	= 7000 + 600 + 30 + 7			

O método analítico de Lisboa, aplicado à adição, pautou-se no valor posicional dos algarismos e no sistema de numeração posicional decimal indo-arábico. Os ajustes operatórios seguiram a conversão de ordens. Esse mesmo argumento é repetido à subtração e à multiplicação. Quando esse método foi aplicado à divisão, ajustes foram necessários, mas a ideia da posição dos algarismos prevaleceu. Entretanto, vale o que argumenta Zuin (2005, p.

44): “*Uma análise apressada deste método faz crer que ele é muito complexo e que não valeria a pena que ele antecedesse ao processo do algoritmo usual. No entanto, Lisboa cumpre a sua proposta de apresentar uma aritmética raciocinada* [...]”.

O oportuno do método analítico de Lisboa consistiu em justificar a técnica do método por intermédio do valor posicional dos algarismos e da conversão de ordens, quando necessária, em cada operação. A potência de base dez, mais uma vez, está implícita na posição que os algarismos indo-arábicos ocupam.

De uma obra do século XIX para algumas obras do século XX é o que pretendo a partir daqui.

O ano é de 1927, a obra é de D. José Dalmau Carles, intitulada “***Aritmética Razonada y Nociones de Álgebra***”. Está em sua 57ª edição em língua espanhola, corrigida e ampliada por D. José Dalmau Casademont. O livro destinava-se ao uso nas escolas normais e também as que se destinassem profissionalizar os alunos às atividades do comércio.

O contributo desta obra para minha pesquisa está na explicação da técnica do processo resolutivo de uma multiplicação que usa a tecnologia da posição dos algarismos nas ordens. Assim é descrito no livro:

> *Multiplicando:* 8427 = 8 milhares + 4 centenas + 2 dezenas + 7 unidades.
>
> *Multiplicador:* .... × 5
>
> *Produto total:* .... 40 milhares + 20 centenas + 10 dezenas + 35 unidades.
>
> Em 35 unidades, há 3 dezenas e 5 unidades; reservo as dezenas e *escrevo 5 unidades*. 3 dezenas mais 10, são 13 dezenas, que compõem 1 centena e 3 dezenas; reservo uma centena e escrevo *3 dezenas*. 1 centena mais 20, são 21 centenas, que compõem 2 milhares e 1 centena; reservo os 2 milhares e escrevo *1 centena*. 2 milhares mais 40 são 42 milhares, que os escrevo *42 milhares.*
> Logo o produto de 8427 por 5 se compõe de 42 milhares, 1 centena, 3 dezenas e 5 unidades = 42135 (CARLES, 1927, p. 38, tradução nossa).

A explicação de Carles para o algoritmo da multiplicação leva em conta as ordens e as classes do sistema de numeração decimal. Em resumo, ele explicitou a técnica do algoritmo usual da multiplicação e ainda com reservas (o vai 1, vai 2, vai 3, etc.).

Para esta pesquisa, a decomposição de 8427 em ordens e a respectiva multiplicação por 5, surge como uma conexão para a multiplicação de polinômios. Sabemos que *8 milhares + 4 centenas + 2 dezenas + 7 unidades* = $8 \times 1000 + 4 \times 100 + 2 \times 10 + 7 = 8 \times 10^3 + 4 \times$

$10^2 + 2 \times 10 + 7$. Fazendo-se $x=10$, então, $8 \times 10^3 + 4 \times 10^2 + 2 \times 10 + 7 =$ $\boldsymbol{8x^3 + 4x^2 + 2x + 7}$. Multiplicando esse polinômio por 5, obtemos $\boldsymbol{40x^3 + 20x^2 + 10x + 35}$.

A propósito, qual o produto de 456 por 36, segundo o descrito por Carles?

Seguindo o raciocínio dele temos que:

456 = 4 centenas + 5 dezenas + 6 unidades

36 = ... × (3 dezenas + 6 unidades)

Produto = 4 centenas × 3 dezenas + 5 dezenas × 3 dezenas + 3 dezenas × 6 unidades + 4 centenas × 6 unidades + 5 dezenas × 6 unidades + 36 unidades.

O produto parece confuso, pelo fato de 4 centenas multiplicadas por 3 dezenas, de 3 dezenas multiplicadas por 6 unidades, de 4 centenas multiplicadas por 6 unidades e 5 dezenas multiplicadas por 6 unidades, não estarem na mesma ordem. O que fazer? Lembremo-nos que 4 centenas = 4 × 100, 3 dezenas = 3 × 10 e 5 dezenas = 5 × 10. Portanto, o produto é expresso por: 4 × 100 × 3 × 10 + 5 × 10 × 3 × 10+ 3 × 10 × 6 + 4 × 100 × 6 + 5 × 10 × 6 + 36. Agora, organizamos as potências de dez e teremos,

(4 × 3) × 100 × 10 + 15 × 100 + (3 × 6) × 10 +(4 × 6) × 100 + (5 × 6) × 10 + 36 = 12 × 1000 + 15 × 100 + 18 × 10 + 24 × 100 + 30 × 10 + 36 = 12 × 1000 + (24 + 15) × 100 + (18 + 30) × 10 + 36 = **12 × 1000 + 39 × 100 + 48 × 10 + 36** = 12 milhares + 39 centenas + 48 dezenas + 36 unidades = 12 milhares + 3 milhares + 9 centenas + 4 centenas + 8 dezenas + 3 dezenas + 6 unidades = 15 milhares + 13 centenas + 11 dezenas + 6 unidades = 15 milhares + 1 milhar + 3 centenas + 1 centena + 1 dezena + 6 unidades = 16 milhares + 4 centenas + 3 dezenas + 6 unidades = **16416**.

O resultado **12 × 1000 + 39 × 100 + 48 × 10 + 36**, não é a forma polinomial da multiplicação 456 × 36, quando a representamos por: (400 + 50 + 6) × (30 + 6) = (4 × 100 + 5 × 10 + 6) × (3 × 10 + 6). A forma polinomial é: $\boldsymbol{(4 \times 10^2 + 5 \times 10^1 + 6 \times 10^0) \times (3 \times 10^1 + 6 \times 10^0)}$. Aplicando-se a distributividade na forma polinomial, obtemos o resultado da multiplicação:

$$\boldsymbol{(4 \times 10^2 + 5 \times 10^1 + 6 \times 10^0) \times (3 \times 10^1 + 6 \times 10^0) =}$$

$$\boldsymbol{= (4 \times 3) \times 10^2 \times 10^1 + (4 \times 6) \times 10^2 \times 10^0 + (5 \times 3) \times 10^1 \times 10^1 + (5 \times 6) \times 10^1 \times 10^0 + (6 \times 3) \times 10^0 \times 10^1 + (6 \times 6) \times 10^0 \times 10^0 = 12 \times 10^3 + 24 \times 10^2 + 15 \times 10^2 + 30 \times 10^1 + 18 \times 10^1 + 36 \times 10^0 = 12 \times 10^3 + 39 \times 10^2 + 48 \times 10^1 + 36 \times 10^0}.$$

Compreenda-se que Carles (1927) não trata do que expus no processo resolutivo da multiplicação de 456 por 36. Os detalhes complementares são frutos da minha compreensão dos aportes teóricos que embasaram os meus estudos em Carvalho e Pereira (2009).

Deixo Carles (1927) e ancoro-me na obra de Roxo et al. (1948). Essa obra estava em sua 4ª edição e destinava-se a 1ª série do 2º ciclo[7]. Ela está dividida em três partes: PARTE I – ARITMÉTICA TEÓRICA; PARTE II – ÁLGEBRA e PARTE III – GEOMETRIA. Interessa-me desta obra o que está descrito na PARTE I – ARITMÉTICA TEÓRICA.

> No sistema de base 10, todo número N pode ser escrito sob a forma
>
> $N = u + d \,.\, 10 + c \,.\, 10^2 + ...$
>
> onde *u, d, c*, etc. indicam respectivamente os algarismos das unidades, dezenas, centenas, etc.
>
> Do mesmo modo, no sistema de base *b*, o número *N* poderá ser posto sob a forma de soma ordenada segundo as potências de *b*, do seguinte modo
>
> $N = \alpha + \beta.b + \gamma.b^2$
>
> onde α, β, γ, etc. indicam números menores que *b*. Assim, no sistema centesimal (*b* = 100), o número 7(13)05 representa
>
> $7 \times 100^3 + 13 \times 100^2 + 0 \times 100 + 5 = 7130005.$
>
> É na representação milenária (*b* = 1000) que se baseia a própria leitura dos números no sistema de numeração decimal. Por exemplo
>
> 3208467 = 3(208) (467).
>
> Para indicar que *A* é a representação na base *b* de um número *N*, dado no sistema decimal, escreveremos
>
> $N = A_{(b)}$
>
> Assim
>
> $7130005 = 7(13)05_{(100)}$ (ROXO et al., 1948, p. 64).

Com base na escrita dos números *N*, pertencentes ao sistema de numeração decimal, conforme se encontra em Roxo et al. (1948), proponho a escrita polinomial abaixo para os números inteiros positivos N_1 e N_2 no sistema de numeração decimal:

$$N_1 = x_0 + x_1 \cdot 10 + x_2 \cdot 10^2 + x_3 \cdot 10^3 + ... + x_n \cdot 10^n, 0 \le x_i < 10, i = 0,1,...,n \text{ e}$$

$$N_2 = y_0 + y_1 \cdot 10 + y_2 \cdot 10^2 + y_3 \cdot 10^3 + ... + y_n \cdot 10^n, 0 \le y_i < 10, i = 0,1,...,n \,.$$

Assim, as operações $N_1 + N_2$, $N_1 - N_2$, $N_1 \times N_2$ *e* $N_1 : N_2$, são possíveis nessa representação polinomial?

Fiz essa escrita polinomial para apresentar a obra de Crantz (1949). Essa obra foi traduzida para a língua espanhola por David Soler Carreras que era Engenheiro Chefe da Delegação das Indústrias de Lugo. Ela foi escrita pelo Professor Paul Crantz, que viveu em

[7] Com o presente volume, inicia-se a série MATEMÁTICA – 2º CICLO, destinada aos alunos dos Cursos cientifico e clássico (ROXO et al., 1948, p. 5 – ADVERTÊNCIA).

Berlim. A versão espanhola corresponde a 12ª edição alemã, sob a responsabilidade de M. Hauptmann, Diretor da Escola de Engenheiros de Leipzing. O título espanhol foi inserido nos Manuais Técnicos Labor: *ARITMÉTICA Y ÁLGEBRA*.

A leitura que realizei da versão espanhola do livro de Crantz contribui com novas compreensões sobre o sistema de numeração decimal e sua interlocução com a escrita polinomial na potência de base dez.

A descrição que Crantz (1949) fez do sistema de numeração decimal é semelhante a algumas que já narrei neste capítulo. No entanto, Crantz acrescenta novos esclarecimentos que contribuem para esta pesquisa.

> Em nosso sistema de numeração de base *dez* cada número representa uma soma ordenada segundo as potências decrescentes de 10; assim, por exemplo,
>
> $4759 = 4 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 + 9.$
>
> O *valor relativo dos números* 4, 7, 5, e 9 é neste caso seu produto por 10^3, 10^2, 10 e 1, respectivamente. Se falta uma potência de 10, se indica com o signo 0:
>
> $40759 = 4 \cdot 10^4 + 7 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 + 9$ (CRANTZ, 1949, p. 30, tradução nossa).

A representação do número 40750 na potência de base dez serve para clarificar o porquê de se completar um polinômio incompleto quando a operação for a divisão de polinômios. Deste modo, na divisão do polinômio $4x^4 + 7x^2 + 5x + 9$ pelo polinômio $2x^2 + 3$, primeiro temos que escrevê-los em suas formas completas, ou seja, $4x^4 + \mathbf{0x^3} + 7x^2 + 5x + 9$ e $2x^2 + \mathbf{0x} + 3$. Após isso, aplicamos a técnica conveniente para resolver divisão polinomial.

Para explicar o 'vai 1' na adição 3752 + 5634 = 9386, Crantz recorre a potência de dez: *[...] 7.* $10^2 + 6.\ 10^2$ *dá lugar a* $13.\ 10^2 = 10.\ 10^2 + 3.\ 10^2 = \mathbf{1}.\ 10^3 + 3.\ 10^2$, *portanto, justificado o transporte do **1** para a coluna de valor relativo* 10^3 (CRANTZ, p. 31, tradução nossa).

Na explicação dada por Crantz sobre $13.\ 10^2 = 10.\ 10^2 + 3.\ 10^2 = \mathbf{1}.\ 10^3 + 3.\ 10^2$ está implícita a condição de que os coeficientes a_i devem ser menores que a base $b = 10$ ($0 \leq a_i < b$) no sistema de numeração decimal, ou seja, quando os coeficientes a_i assumirem valor igual ou maior que dez ($a_i \geq 10$) o transporte de ordem ocorre no processo aditivo. Portanto, em $13.\ 10^2$, temos que $a_i = 13 = (10 + 3) = (1.\ 10^1 + 3)$. Desse modo, $13.\ 10^2 = (1.\ 10^1 + 3).\ 10^2 = \mathbf{1}.\ 10^1.\ 10^2 + 3.\ 10^2 = \mathbf{1}.\ 10^3 + 3.\ 10^2$.

Esclareço que na soma de dois ou mais polinômios não há transporte de ordem durante a soma dos coeficientes dos termos semelhantes, uma vez que estes termos são agrupados por variáveis iguais e de mesmo expoente, inclusive quando o expoente da variável for o zero. Neste caso, se tivermos os polinômios $3x^3 + 7x^2 + 5x + 2$ e $5x^3 + 6x^2 + 3x + 4$, o resultado da soma desses dois polinômios ocorre pelo agrupamento dos coeficientes dos termos semelhantes x^3, x^2, x^1 e x^0. Assim, $(3x^3 + \mathbf{7}x^2 + 5x + 2) + (5x^3 + \mathbf{6}x^2 + 3x + 4) = (3 + 5).\ x^3 + (\mathbf{7} + \mathbf{6}).\ x^2 + (5 + 3).\ x^1 + (2 + 4).\ x^0 = 8x^3 + \mathbf{13}x^2 + 8x + 6$.

O tratamento que Crantz propôs à multiplicação merece atenção. Crantz manipula a potência de base dez para clarificar como ocorre a conversão de uma ordem para outra durante o processo multiplicativo do algoritmo tradicional da multiplicação.

> [...] o produto $523\ .\ 412 = (5.\ 10^2 + 2.\ 10 + 3)\ (4.\ 10^2 + 1.\ 10 + 2)$.
>
> Produz um efeito surpreendente resolver, primeiramente, esta operação colocando um fator debaixo do outro e escrevendo imediatamente na terceira linha (da direita à esquerda) o *resultado:*
>
> $$\begin{array}{r} 523 \\ 412 \\ \hline 215476 \end{array}$$
>
> Para isso se procede assim:
>
> $$\left.\begin{matrix}(a\ .\ 10^2 + b\ .\ 10 + c) \\ \\ (\alpha\ .\ 10^2 + \beta\ .\ 10 + \gamma)\end{matrix}\right\} =$$
>
> $$= c\gamma + (b\gamma + c\beta)\ .\ 10 + (a\gamma + c\alpha + b\beta)\ .\ 10^2 + (a\beta + b\alpha)\ .\ 10^3 + a\alpha\ .\ 10^4$$
>
> $6 \quad 7.\ 10 \quad 24.\ 10^2 \quad 13.\ 10^3 \quad 20.\ 10^4$
>
> separando logo $20.\ 10^2$ de $24.\ 10^2$ para somá-lo, como $2.\ 10^3$ a $13.\ 10^3$ e obter $15.\ 10^3$, de onde se separa por sua vez $10.\ 10^3$ para somá-lo como $1.\ 10^4$ a $20.\ 10^4$ e obter $21.\ 10^4 = 2.\ 10^5 + 1.\ 10^4$ (CRANTZ, 1949, p. 31, tradução nossa).

A modelação algébrica proposta por Crantz para a multiplicação de números com três ordens, no sistema de numeração decimal, insere-se na escrita polinomial de N_1 e N_2. Consequentemente, $N_1 + N_2$ e $N_1 \times N_2$ são validadas para essa modelação algébrica. As duas outras operações, isto é, $N_1 - N_2$ *e* $N_1 : N_2$, são validadas, obedecendo-se as particularidades numéricas do sistema de numeração indo-arábico.

Doutro modo, se a escrita polinomial de N_1 e N_2 não for na base dez, essa modelação também é válida. Vejamos uma tarefa para mostrar isso.

- Calcular: $251_{(7)} \times 314_{(7)}$.

Para resolver essa tarefa, representamos N_1 e N_2 na escrita polinomial:

$N_1 = 2.\ 7^2 + 5.\ 7 + 1$ e $N_2 = 3.\ 7^2 + 1.\ 7 + 4.$

Logo, $N_1 \times N_2 = (2.\ 7^2 + 5.\ 7 + 1\ )\ (3.\ 7^2 + 1.\ 7 + 4)$. Então,

$(2.\ 7^2 + 5.\ 7 + 1)\ (3.\ 7^2 + 1.\ 7 + 4) =$

$= 6.\ 7^4 + 2.\ 7^3 + 8.\ 7^2 + 15.\ 7^3 + 5.\ 7^2 + 20.\ 7 + 3.\ 7^2 + 1.\ 7 + 4$

$= 6.\ 7^4 + 2.\ 7^3 + (1.\ 7 +1).\ 7^2 + (2.\ 7 + 1).\ 7^3 + 5.\ 7^2 + (2.\ 7 + 6).\ 7 + 3.\ 7^2 + 1.\ 7 + 4$

$= 6.\ 7^4 + 2.\ 7^3 + 1.\ 7.\ 7^2 + 1.\ 7^2 + 2.\ 7.\ 7^3 + 1.\ 7^3 + 5.\ 7^2 + 2.\ 7.\ 7 + 6.\ 7 + 3.\ 7^2 + 1.\ 7 + 4$

$= 6.\ 7^4 + 2.\ 7^3 + 1.\ 7^3 + 1.\ 7^2 + 2.\ 7^4 + 1.\ 7^3 + 5.\ 7^2 + 2.\ 7^2 + 3.\ 7^2 + 6.\ 7 + 1.\ 7 + 4$

$= 6.\ 7^4 + 2.\ 7^4 + 2.\ 7^3 + 1.\ 7^3 + 1.\ 7^3 + 1.\ 7^2 + 5.\ 7^2 + 2.\ 7^2 + 3.\ 7^2 + 6.\ 7 + 1.\ 7 + 4$

$= (6 + 2).\ 7^4 + (2 + 1 + 1).\ 7^3 + (1 + 5 + 2 + 3).\ 7^2 + (6 + 1).\ 7 + 4$

$= 8.\ 7^4 + 4.\ 7^3 + 11.\ 7^2 + 7.\ 7 + 4 = (7 + 1).\ 7^4 + 4.\ 7^3 + (7 + 4).\ 7^2 + 1.\ 7^2 + 0.\ 7 + 4$

$= 1.\ 7^5 + 1.\ 7^4 + 4.\ 7^3 + 1.\ 7^3 + 4.\ 7^2 + 1.\ 7^2 + 0.\ 7 + 4$

$= 1.\ 7^5 + 1.\ 7^4 + (4 + 1).\ 7^3 + (4 + 1).\ 7^2 + 0.\ 7 + 4$

$= \mathbf{1}.\ 7^5 + \mathbf{1}.\ 7^4 + \mathbf{5}.\ 7^3 + \mathbf{5}.\ 7^2 + \mathbf{0}.\ 7 + \mathbf{4} = \mathbf{115504_{(7)}}.$

Se a escrita polinomial de N_1 e N_2 for representada pelos polinômios $2x^2 + 5x + 1$ e $3x^2 + x + 4$, a tarefa consiste em: **Multiplicar $2x^2 + 5x + 1$ por $3x^2 + x + 4$**. Logo, o resultado que se obtém é o polinômio $6x^4 + 17x^3 + 16x^2 + 21x + 4$. Notam-se nesse polinômio que os coeficientes dos termos algébricos são quase todos diferentes dos que aparecem no resultado da multiplicação da escrita polinomial dos números N_1 e N_2. Isso ocorreu porque, na multiplicação polinomial, o processo resolutivo não exige transporte de ordem. Entretanto, do polinômio $6x^4 + 17x^3 + 16x^2 + 21x + 4$, chega-se ao resultado da multiplicação dos números N_1 e N_2. Para isso, é suficiente tornar $x = 7$ e proceder com os ajustes dos coeficientes e dos expoentes de x pelo produto de potência de mesma base, observem:

$6x^4 + 17x^3 + 16x^2 + 21x + 4 = 6.\ x^4 + 17.\ x^3 + 16.\ x^2 + 21.\ x + 4$

$= 6.\ x^4 + (2.7+ 3).\ x^3 + (2.\ 7+ 2).\ x^2 + (3.\ 7).\ x + 4$

$= 6.\ x^4 + 2.x.\ x^3 + 3.\ x^3 + 2.\ x.\ x^2 + 2.\ x^2 + 3.\ x.\ x + 4$

$= 6.\ x^4 + 2.x^4 + 3.\ x^3 + 2.\ x^3 + 2.\ x^2 + 3.\ x^2 + 0.\ x + 4 = 8.\ x^4 + 5.\ x^3 + 5.\ x^2 + 0.\ x + 4$

$= (\ 7 + 1).\ x^4 + 5.\ x^3 + 5.\ x^2 + 0.\ x + 4 = 1.\ x.\ x^4 + 1.\ x^4 + 5.\ x^3 + 5.\ x^2 + 0.\ x + 4$

$= \mathbf{1}.\ x^5 + \mathbf{1}.\ x^4 + \mathbf{5}.\ x^3 + \mathbf{5}.\ x^2 + \mathbf{0}.\ x + \mathbf{4} = \mathbf{115504_{(7)}}.$

O procedimento descrito para a base sete é valido para quaisquer sistemas de numeração posicional de base não decimal, desde que se obedeça às particularidades das bases numéricas que constituem esses sistemas. Além disso, a escolha de um número para compor a base de um sistema de numeração posicional de base não decimal, exige uma técnica que converta os números de base decimal para essa respectiva base e no sentido inverso também. O passo posterior é compreender os algoritmos das operações aritméticas fundamentais nesse sistema de numeração posicional e sua extensão para a álgebra. Nesse aspecto, adoto as palavras De Maio (2009) para enfatizar o exposto aqui.

> As representações numéricas que usamos na atualidade possuem a forma polinomial em que a variável é a base, e os coeficientes são os algarismos, só que escritos na ordem inversa, que é um legado dos árabes.
> As regras operacionais seguem, portanto, as das operações com polinômios [...]
> Só devemos tomar cuidado com a formação dos grupos múltiplos das bases e operar sempre numa única base, uma variável.
> Se os números não estão representados numa mesma base, faz-se a conversão para uma delas e efetua-se o cálculo (DE MAIO, 2009, p. 275).

A álgebra, no âmbito dos sistemas de numeração posicional de bases não decimal, requer manipulação ostensiva e não ostensiva de objetos matemáticos que estão estruturados em conformidade com o sistema de numeração decimal. Nesse sentido, abordo no próximo subtópico os aspectos relevantes da ostensividade e da não ostensividade dos objetos matemáticos que servem para uma compreensão epistemológica da adição, subtração, multiplicação e divisão de polinômios.

3.2. Objetos Ostensivos e Não Ostensivos nas Operações com Polinômios

As operações polinomiais, segundo minha compreensão, são regidas pela não ostensividade de objetos matemáticos que determinam a manipulação ostensiva desses objetos nos tipos de técnicas que resolvem tipos de tarefas de aritmética e álgebra. Entre as tarefas, está a de somar, subtrair, multiplicar e dividir dois números ou polinômios.

Recorri a Chevallard e Bosch (1999) para uma melhor compreensão sobre objetos ostensivos e não ostensivos.

> [...] o problema da *natureza* dos objetos matemáticos e a sua *função* na atividade matemática nos levam a uma dicotomia que consiste em distinguir dois tipos de objetos: os ostensivos e os não ostensivos. Falamos de ostensivo, lembrando que este termo tem origem no latim *ostendere* que significa mostrar, apresentar com insistência, para nos referir a todo objeto que tem uma natureza sensível, certa materialidade e devido a este fato tal objeto pode ser apreendido pelo sujeito por ser uma realidade perceptível. Assim, um objeto ostensivo é um objeto material qualquer tal como os sons (entre os quais as palavras de uma língua) os grafismos (entre os quais os *grafemas* que permitem a escrita das línguas naturais ou construídas das línguas formais) e os gestos. Os objetos não ostensivos são então todos os objetos como as ideias, as intuições ou os conceitos, existentes institucionalmente, no sentido de que lhes são atribuídas existências, sem poder ser vistos, ditos, mostrados, percebidos por si mesmo. Esses objetos podem ser evocados ou invocados pela manipulação adequada de certos objetos ostensivos associados (palavras, frases, grafismos, escritas, gestos ou um longo discurso). Assim, os objetos *função* e *primitiva de uma função* são objetos não ostensivos que aprendemos a identificar e ativar por meio de expressões escritas e grafismos utilizados nas práticas e situações particulares (CHEVALLARD; BOSCH, 1999, p. 10, tradução nossa).

Busquei em Almouloud (2007) outro exemplo para ilustrar a manipulação dos ostensivos e dos não ostensivos.

> [...] A notação $\vec{V}$ e a palavra "vetor", por exemplo, são objetos ostensivos, enquanto a noção de vetor é um objeto não ostensivo, pois é impossível manipulá-lo (no sentido acima). Pode-se torná-lo presente pela manipulação de certos objetos ostensivos que lhe são associados, como a notação $\vec{V}$, por exemplo. (ALMOULOUD, 2007, p. 120).

Outro exemplo que Chevallard e Bosch (1999) recorrem para esclarecer a manipulação dos ostensivos e dos não ostensivos é uma adição de polinômios. Esse exemplo me permite vê-lo conectado ao que me proponho analisar nesta pesquisa.

> É conveniente se fixar sobre as relações que unem, na atividade humana, objetos ostensivos e objetos não ostensivos. A intervenção dos não ostensivos na práxis de manipulação de objetos ostensivos pode conduzir a dar aos não ostensivos ativados o estatuto de condições de uma manipulação adequada dos instrumentos ostensivos. Assim, a existência para mim, segundo uma relação idônea, do objeto não ostensivo "adição de polinômios" pode parecer como uma condição para que eu escreva: $(x^3 + x + 1) + (x^2 + 4x – 2) = x^3 + x^2 + 5x – 1$. Do mesmo modo, o fato que, contrariamente ao hábito gerado pelo ensino secundário, eu escrevo $(x^3 + x + 1) + (x^2 + 4x – 2) = –1 + 5x + x^2(1 + x)$ invocará a hipótese que existe para mim certos objetos não ostensivos que condicionam a tarefa realizada, motivando-a, regulando o seu desenvolvimento e propondo um critério de parada da transformação operada – poderá se tratar, neste caso, do objeto não ostensivo "desenvolvimento limitado de ordem 1", por exemplo.
>
> A análise do papel dos não ostensivos como condição da manipulação de ostensivos aparece, no entanto ambivalente. Ela pode conduzir, ou dar primazia aos não ostensivos, como se a *intendência ostensiva* devesse necessariamente segui-lo, ou dar primazia aos ostensivos, como se o condicionamento por objetos não ostensivos

> pudesse ser tido como essencial [...] (CHEVALLARD; BOSCH, 1999, p. 12, tradução nossa).

A dialética que existe na manipulação dos ostensivos e dos não ostensivos está posta na resolução da tarefa – **resolver: $(x^3 + x +1) + (x^2 + 4x – 2)$ –** que é uma tarefa $t_0 \in T$. Assim, prosseguindo com essa dialética, infiro que T é: **resolver as operações com polinômios**.

A força dessa dialética, segundo Almouloud (2007), está na atividade matemática.

> Na análise da atividade matemática, a dialética ostensivo/não ostensivo é, geralmente, concebida em termos de signos e de significação: os objetos ostensivos são *signos* de objetos não ostensivos que constituem o *sentido* ou a *significação*. A função semiótica dos ostensivos, sua capacidade de produzir um *sentido* ou significado, não pode ser separada de sua função instrumental, de sua capacidade de integrar-se nas manipulações técnicas, tecnológicas e teóricas. Queremos dizer que os ostensivos são ferramentas materiais para a ação nas organizações matemáticas. As duas funções, semiótica e instrumental, coabitam (ALMOULOUD, 2007, p. 121).

A técnica τ e a tecnologia θ que elucidam a representação **$(x^3 + x +1) + (x^2 + 4x – 2) = – 1 +5x + x^2(1 + x)$** foram descritas por Chevallard e Bosch (1999).

> [...] a co-ativação de ostensivos e não ostensivos está sempre presente e aparece em todos os níveis da atividade, bem como no plano da técnica como no seu entorno tecnológico-teórico. A técnica que conduz a escrita $(x^3 + x + 1) + (x^2 + 4x -2) = –1 + 5x + x^2(1 + x)$ requer uma manipulação de ostensivos escritos (parênteses, letras, números, etc.), orais (pequenos discursos do tipo "*x* mais 4*x*, 5*x*....") e gestos (por exemplo para agrupar os termos do mesmo grau e verificar se nenhum foi esquecido). Esta manipulação é conduzida por não ostensivos, entre os quais a noção de organização dos termos por ordem decrescente dos expoentes, a noção de "termos (ou monômios) do mesmo grau", "fatoração por x^2", ou ainda a noção de "resto de ordem 2", etc. (CHEVALLARD; BOSCH, 1999, p. 12, tradução nossa).

Vou retomar a tarefa t_0, isto é, **resolver: $(x^3 + x +1) + (x^2 + 4x – 2)$** e transformá-la na tarefa t_1, na qual considero os dois trinômios da tarefa t_0, uma escrita polinomial de dois números no sistema de numeração decimal. Para isso, tomo ***x = 10*** e a tarefa t_1 consistirá em: **resolver: $(10^3 + 10 +1) + (10^2 + 4.10 – 2)$**. Para compor a tarefa t_1, considerei a existência dialética ostensiva e não ostensiva entre o sistema de numeração decimal e a variável dos dois polinômios. Deste modo, estou propondo que a resposta da tarefa t_0 é a mesma da tarefa t_1, ou seja, **$(10^3 + 10 +1) + (10^2 + 4.10 – 2) = – 1 +5x + x^2(1 + x) = -1 + 5. 10 + 10^2. (1 + 10)$**.

Ressalto que ao propor a manipulação ostensiva entre a variável *x* e a base 10, estou concebendo uma técnica τ, que consiste em manipular objetos ostensivos, vinculando aritmética à álgebra no tratamento das operações com polinômios.

Parte das ideias que expus nos dois parágrafos anteriores, vieram da minha compreensão da obra de Floriani (2000). Esse autor propôs ideias didáticas que associam a representação dos números do sistema de numeração decimal na escrita polinomial de potência de base dez. A partir dessa representação, ele iguala *x* a *10* e substitui o valor de 10 por *x*, tornando a escrita polinomial de potência de base dez em um polinômio na variável *x*.

> Muitas vezes parecem longínquas as origens de certos conceitos matemáticos. E nem sempre é assim. É o que se tenta mostrar com os polinômios, de uma forma bastante rápida, correndo-se o risco de má interpretação.
> Observar o que se escreve a seguir e concluir.
> Seja o número 5483. Modos de escrevê-lo:
> $5483 = 5000 + 400 + 80 + 3 = 5.\ 10^3 + 4.\ 10^2 + 8.\ 10 + 3.$
> Supondo x = 10, virá $5483 = 5x^3 + 4x^2 + 8x + 3$.
> A escrita polinomial é uma generalização da escrita de números para qualquer base, e não somente na base dez. No exemplo, x pode ser substituído por qualquer base, devendo-se, obviamente, rearranjar os coeficientes (FLORIANI, 2000, p. 107).

Floriani (2000) também mostra a possibilidade de aliarmos o algoritmo usual da soma, subtração, multiplicação e divisão aritmética ao ensino das operações com polinômios. Entretanto, Carvalho e Pereira (2009) esclarecem que há limitações para o que indica Floriani.

> Após passarmos pela soma, subtração e multiplicação com polinômios, chegamos à divisão. Tentaremos aproximar a divisão de polinômios com a divisão usual ensinada dentro do sistema de numeração decimal indo-arábico. Para tanto, precisamos ter certeza de que é possível fazer isso, pois algumas divisões de polinômios transcendem essa situação (CARVALHO; PEREIRA, 2009, p. 42).

A constatação de Carvalho e Pereira (2009, p. 44-46) é mostrada por eles como segue:

> $6x^3 + 6x + 4 : 1x^2 + 2 = 6.10^3 + 6.10 + 4 : 1.10^2 + 2 = 6000 + 60 + 4$ **:** $100 + 2 = 6064 : 102 =$
>
> $$\begin{array}{l|l} \ \ 606'4' & 102 \\ \cline{2-2} \underline{-\ 510\ \ } & 59 = 5x + 9 \\ \ \ 0964 & \\ \ \underline{-\ 918\ \ \ \ } & \\ \ \ \ \ 046 = 4x + 6 & \end{array}$$
>
> $$\begin{array}{l|l} \ \ 6x^3 + 0x^2 + 6x + 4 & 1x^2 + 0x + 2 \\ \cline{2-2} \underline{-(6x^3 + 0x^2 + 12x)} & 6x \\ \ \ \ 0 + 0x^2 + (-6x) + 4 = -\ 6x + 4 & \end{array}$$
>
> $\mathbf{6x^3 + 0x^2 + 6x + 4 = (1x^2 + 0x + 2)\ (6x) + (-\ 6x + 4).}$

O tipo de tarefa (resolver a divisão polinomial) que Carvalho e Pereira (2009) recorreram para mostrar que a divisão polinomial, quando convertida em divisão numérica, por meio da escrita polinomial na potência de base dez nem sempre será possível, pois contém particularidades operatórias que já narrei neste capítulo, como as que seguem:

- Os polinômios $6x^3 + 6x + 4$ e $1x^2 + 2$ são incompletos e isso implica em completá-los para proceder com a divisão polinomial;
- Para completar os dois polinômios, precisamos dos objetos não ostensivos: noção de polinômios incompletos, identificação dos termos que faltam nos polinômios, noção de termos de coeficientes nulos na variável *x*;
- Para evocar os objetos não ostensivos, usamos os objetos ostensivos $0x^2$, $0x$ e sinal de +, que completam os polinômios $6x^3 + 6x + 4 = 6x^3 + 0x^2 + 6x + 4$ e $1x^2 + 2 = 1x^2 + 0x + 2$;
- Se aplicarmos a técnica da escrita polinomial na potência de base dez nos dois polinômios e, em seguida, transformarmos essa escrita nos números inteiros positivos N_1 e N_2, surgem, explicitamente, os termos de coeficientes nulos: $N_1 = 6.10^3 + 6.10 + 4 = 6000 + 60 + 4 = 6\mathbf{0}64$ e $N_2 = 1.10^2 + 2 = 100 + 2 = 1\mathbf{0}2;$
- Transformando $N_1 = 6064$ e $N_2 = 102$ em polinômios na variável $x = 10$, obtemos: $6064 = 6.\ 10^3 + 0.\ 10^2 + 6.\ 10 + 4 = 6x^3 + 0x^2 + 6x + 4$ e $102 = 1.\ 10^2 + 0.\ 10 + 2 = 1x^2 + 0x + 2;$
- A constatação de Carvalho e Pereira (2009) revela que a divisão de $6x^3 + 6x + 4 = 6x^3 + 0x^2 + 6x + 4$ por $1x^2 + 2 = 1x^2 + 0x + 2$, na forma dos números $N_1 = 6064$ e $N_2 = 102$ não são equivalentes, pois o quociente e o resto em ambos os casos diferem;
- Em suma, a técnica e a tecnologia da divisão polinomial de $6x^3 + 6x + 4 = 6x^3 + 0x^2 + 6x + 4$ por $1x^2 + 2 = 1x^2 + 0x + 2$, equivaler-se-ão à técnica e à tecnologia da divisão N_1 por N_2 (ambos números inteiros), quando estes assumirem a escrita polinomial na potência de base dez, ou seja, $N_1 = 6.\ 10^3 + 0.\ 10^2 + 6.\ 10 + 4$ e $N_2 = 1.\ 10^2 + 0.\ 10 + 2$ (mais adiante, capítulo quatro, mostrarei essa equivalência).

O exemplo citado por Carvalho e Pereira (2009) envolve elementos da Teoria Antropológica do Didático (objetos ostensivos e não ostensivos, tipos de tarefas T, tipos de técnica τ, tecnologia θ e teoria Θ) que compreendem as concepções da álgebra assinaladas por Usiskin (1995). Além disso, a epistemologia dos sistemas de numeração, da potência de base dez e de outras bases não decimal (DE MAIO, 2009, 2011; IFRAH, 1997a, 1997b; EVES, 2004; ZUIN, 2005; WECHELUN, 1562; CARLES, 1927; ROXO et al., 1948 e CRANTZ, 1949) conduz a um modelo epistemológico que possui condições e restrições para sua efetiva aplicação no processo de ensino e aprendizagem da álgebra. Porém, é um modelo que alia aritmética e álgebra no ensino de polinômios, sem perder de vista as particularidades do campo teórico dessas duas áreas da Matemática.

O próximo capítulo é destinado ao estudo da Teoria Antropológica do Didático (TAD) e suas interlocuções com os objetos de estudos desta pesquisa.

III. A TEORIA ANTROPOLÓGICA DO DIDÁTICO NAS CONEXÕES ENTRE ARITMÉTICA E ÁLGEBRA

A Teoria Antropológica do Didático (TAD) contempla elementos teóricos que corroboram com as minhas intenções nesta pesquisa. No capítulo anterior citei alguns elementos dessa teoria:

- Tipos de tarefas T: uma tarefa $\mathbf{t_2} \in \mathbf{T}$ **é:** Representar o número racional inteiro 345 na forma de potência de base 10;

- Técnica τ: a técnica que resolve a tarefa $\mathbf{t_2}$, é a representação de N = 345 = 3. 10^2 + 4. 10^1 + 5;
- Tecnologia θ: a técnica τ é justificada na tecnologia de N = $a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10^1 + a_0 \cdot 10^0 = a_2 a_1 a_0$;
- Teoria Θ: elementos teóricos da Aritmética e Álgebra.

Da junção desses quatro elementos da TAD surge o bloco [T, τ, θ, Θ] que designa uma praxeologia. Esse bloco subdivide-se em dois, o bloco prático-técnico [T,τ] (do saber fazer ou da práxis) e o bloco tecnológico-teórico [θ, Θ] (do saber ou do logos).

Na proposta didática que consta na monografia de Carvalho e Pereira (2009) observo uma predominância do bloco do saber fazer em relação ao bloco do saber. Esta predominância do bloco da práxis será mais bem esclarecida no próximo capítulo.

Para alargar este meu ‘diálogo’ com a TAD, recorro ao que está escrito na obra de Almouloud (2007, p. 111):

> Esta teoria é uma contribuição importante para a didática da matemática, pois, além de ser uma evolução do conceito de transposição didática, inserindo a didática no campo da antropologia, focaliza o estudo das organizações praxeológicas didáticas pensadas para o ensino e a aprendizagem de organizações matemáticas [...].

Pelo exposto, vemos que a TAD oportuniza o estudo de organizações praxeológicas didáticas e matemáticas pelo professor de matemática. Nesse estudo podem surgir limitações praxeológicas relacionadas ao saber matemático do professor – como as que relatarei no quarto capítulo desta pesquisa. Além disso, essas limitações praxeológicas podem ser fruto das sujeições institucionais, entre estas, aponto a instituição livro didático, que imprime uma soberania praxeológica na prática docente da maioria dos professores de matemática. Assim, o bloco prático-técnico [T, τ] cumpre um papel nas relações que o professor de matemática estabelece com os tipos de tarefas T e as técnicas τ, que estão postas nos livros didáticos de matemática.

Na TAD, compreendo que o bloco tecnológico-teórico [θ, Θ], ou seja, o que contém a tecnologia θ e a teoria Θ possui dois elementos que podem revelar o grau de conhecimento matemático do professor de matemática quando este estuda objetos matemáticos para elaborar ou reelaborar organizações matemáticas e didáticas.

As situações didáticas que decorrem do bloco da práxis e do logos cercam o meio de atuação profissional do professor de matemática. Nas palavras de Brousseau (2008, p. 21): "*Uma "situação" é um modelo de interação de um sujeito com um meio determinado. O recurso de que esse sujeito dispõe para alcançar ou conservar um estado favorável nesse meio é um leque de decisões que dependem do emprego de um* ***conhecimento preciso*** *[...]".*

O *conhecimento preciso* enunciado por Brousseau (2008), segundo minha compreensão, orienta a formulação de propostas didáticas que facilitem a assimilação de conteúdos de matemática por parte dos alunos, por exemplo, as operações polinomiais ensinadas no oitavo ano do ensino fundamental – meio no qual a álgebra, inicialmente, deveria ser vista como aritmética generalizada. Deste modo, os tipos de tarefas T, a técnica τ, a tecnologia θ e a teoria Θ devem ser pensadas ou refletidas nessas propostas didáticas. Mas, o que são esses elementos da TAD, ou seja, tipos de tarefas T, a técnica τ, a tecnologia θ e a teoria Θ? No que diz Almouloud (2007, p. 114): "*A palavra técnica é aqui utilizada como uma 'maneira de fazer' uma tarefa, mas não necessariamente como um procedimento estruturado e metódico ou algoritmo".*

Se a técnica (ou as técnicas) que resolve (resolvem) determinados tipos de tarefas T for assumida como um procedimento inicial que vislumbra facilitar a compreensão de certos tipos de noções matemáticas, como por exemplo, as operações com polinômios na sétima série (oitavo ano) do ensino fundamental, então devemos considerar o processo de ensino e aprendizagem dos conteúdos de matemática nessa etapa da educação básica. Desse modo, a técnica τ que soluciona a tarefa t_0, **resolver: $(x^3 + x + 1) + (x^2 + 4x - 2)$**, pode ser idealizada por meio da tarefa t_1, **resolver: $(10^3 + 10 + 1) + (10^2 + 4.10 - 2)$**, onde se representa os polinômios **$(x^3 + x + 1)$** e **$(x^2 + 4x - 2)$** na escrita polinomial de base 10, atribuindo-se a variável x o valor 10.

A aceitação da técnica que associa a resolução da soma de dois polinômios por intermédio da representação destes polinômios, na escrita polinomial de base dez, suscita uma reflexão sobre o que diz Chevallard (1992 *apud* ALMOULOUD, 2007, p. 115):

> Um objeto existe a partir do momento em que uma pessoa X ou uma instituição I o reconhece como *existente* (para ela). Mais precisamente, podemos dizer que o objeto O existe para X (respectivamente para I) se existir um objeto, que denotarei por R(X, O) (respectivamente $R_I(O)$), a que chamarei *relação pessoal de X com O* (respectivamente *relação de I com O*).

Pelo que compreendi da citação acima, o objeto matemático precisa ser reconhecido pela pessoa X ou pela instituição I. No caso desta pesquisa, X está associado à minha pessoa como professor de matemática. As instituições I são aqui exemplificadas pelas obras (livros didáticos, livros de Educação Matemática, dissertações, teses, etc.) e pela escola básica.

Os tipos de tarefas T e a técnica τ que estruturam o bloco prático-técnico [T, τ] têm sua justificativa nos dois primeiro postulados da TAD: “1) Toda prática institucional pode ser analisada, sob diferentes pontos de vista e de diferentes maneiras, em um sistema de tarefas bem delineadas; 2) O cumprimento de toda tarefa decorre do desenvolvimento de uma técnica” (ALMOULOUD, 2007, p. 114).

Esses dois postulados desempenham um papel crucial na relação que estabeleci com os objetos ostensivos e não ostensivos, que se encontram no capítulo anterior. Neste caso, a minha pessoa X reconhece os objetos matemáticos, propõe tarefas do tipo T, mas a elaboração destas tarefas está condicionada às técnicas τ reconhecidas pela instituição I. Assim, para um tipo de tarefa T pode existir uma única técnica ou número limitado de técnicas τ reconhecidas institucionalmente.

O que pretendo com os tipos de tarefas T, reconhecidos nas instituições I_i (i = 1,2, 3, ..., n), é que elas me convenham como elemento de estudo para o desenvolvimento de uma organização praxeológica que associe a conexão entre aritmética e álgebra, em que o trabalho da técnica τ funcione por meio de tecnologias θ e em conformidade com a álgebra institucionalizada nas escolas de ensino fundamental.

A legitimação das técnicas τ que solucionam os tipos de tarefas T, passa pelo segundo bloco que rege a praxeologia, o logos, que possui a tecnologia θ que justifica a técnica τ e a teoria Θ que explica e justifica o funcionamento dessa tecnologia. O bloco do logos está contemplado no terceiro postulado da TAD: “3) A ecologia das tarefas, quer dizer, as condições e restrições que permitem sua produção e sua utilização nas instituições" (ALMOULOUD, 2007, p. 116). Este terceiro postulado é explicitado por Chevallard e Bosch (1999):

> O terceiro postulado antropológico se refere à *ecologia das tarefas e das técnicas*, isto é, das condições e das restrições que permitem ou não a produção e a utilização nas instituições. Supomos que, para existir em uma instituição, uma técnica deve aparecer *compreensível*, *legível* e *justificada*. Trata-se de uma restrição institucional mínima para permitir o controle e garantir a eficácia das tarefas, que são geralmente tarefas *cooperativas*, supondo a colaboração de vários atores. Esta restrição ecológica implica na existência de um discurso descritivo e justificativo das tarefas e técnicas que chamamos de *tecnologia* da técnica. O postulado acima anunciado supõe entre outras coisas que toda tecnologia tem a necessidade de uma justificação que é chamada *teoria* da técnica (CHEVALLARD; BOSCH, 1999, p. 6-7, tradução nossa).

Do que esclarecem Chevallard e Bosch, na citação anterior, compreendo que a descrição e a justificação das tarefas e das técnicas implicam em uma tecnologia inteligível para as outras pessoas do seio institucional. Isso permitirá que a técnica habite institucionalmente. Logo, é necessária a justificação da tecnologia por meio da teoria da técnica. Se essa justificação não for passível de aceitação institucional, a técnica pode não ser legitimada, e assim não será reconhecida pela referida instituição.

Para Chevallard e Bosch (1999) a distinção entre técnica, tecnologia e teoria dependem do caráter funcional destas no tipo de tarefas que são tomadas como referencial. Vejo isso imbricado na maneira como assumimos ensinar a adição, tomando-se como referência o sistema de numeração decimal.

Por exemplo, ao somarmos 23268 com 32286, pelo algoritmo usual, os algarismos indo-arábicos são tomados em seu valor absoluto, por ser mais cômodo explicar a funcionalidade da técnica desse algoritmo, em que a tecnologia se resume em apenas somar dois números naturais N_1 e N_2 e o resultado é um número natural N_3, isto é, $N_1 + N_2 = N_3$. A teoria, neste caso, é a aritmética ou uma parte desta (propriedade do fechamento). No entanto, se essa mesma adição for pensada para justificar o transporte de ordem, o valor a ser considerado é o da ordem (posição) que cada algarismo ocupa no sistema de numeração decimal (de modo que 10 unidades é igual a 1 dezena, 10 dezenas é igual a 1 centena, 10 centenas é igual a 1 milhar, 10 milhares é igual 1 dezena de milhar, etc.), ou seja, a teoria aritmética contém elementos tecnológicos do sistema de numeração posicional decimal. A técnica é representar os números N_1 e N_2 como segue:

- $N_1 = 2.10^4 + 3.\ 10^3 + 2.\ 10^2 + 6.\ 10 + 8$ e $N_2 = 3.10^4 + 2.\ 10^3 + 2.\ 10^2 + 8.\ 10 + 6$;
- N_1 = *2 dezenas de milhar + 3 unidades de milhar + 2 centenas + 6 dezenas + 8 unidades* e N_2 = *3 dezenas de milhar + 2 unidades de milhar + 2 centenas + 8 dezenas + 6 unidades*;
- A técnica agora é somar às ordens correspondentes, associando a tecnologia à teoria para proceder ao transporte de ordem quando for necessário. Portanto,

$\boldsymbol{N_1 + N_2}$*= 23268 + 32286 = 5 dezenas de milhar + 5 unidades de milhar + 4 centenas + 14 dezenas + 14 unidades = 5 dezenas de milhar + 5 unidades de milhar + 4 centenas + 10 dezenas + 4 dezenas + 10 unidades + 4 unidades = 5 dezenas de milhar + 5 unidades de milhar + 4 centenas + 1 centena + 4 dezenas + 1 dezena + 4 unidades = 5 dezenas de milhar + 5 unidades de milhar + 5 centenas + 5 dezenas + 4 unidades =* ***55554 =*** $\boldsymbol{N_3}$.

Podemos resolver 23268 + 32286 pela escrita polinomial na potência de base dez. Assim,

$$\begin{array}{rl} & 23268 = 20000 + 3000 + 200 + 60 + 8 = 2 \cdot 10^4 + 3 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10 + 8 \\ + & 32286 = 30000 + 2000 + 200 + 80 + 6 = 3 \cdot 10^4 + 2 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10 + 6 \\ \hline & = 5 \cdot 10^4 + 5 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 14 \cdot 10 + 14 = \end{array}$$

$$= 5 \cdot 10^4 + 5 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + (10 + 4) \cdot 10 + (10 + 4)$$

$$= 5 \cdot 10^4 + 5 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + (1 \cdot 10 + 4) \cdot 10 + (1 \cdot 10 + 4)$$

$$= 5 \cdot 10^4 + 5 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10 \cdot 10 + 4 \cdot 10 + 1 \cdot 10 + 4$$

$$= 5 \cdot 10^4 + 5 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^2 + (4 + 1) \cdot 10 + 4$$

$$= 5 \cdot 10^4 + 5 \cdot 10^3 + (4 + 1) \cdot 10^2 + (4 + 1) \cdot 10 + 4$$

$$= 5 \cdot 10^4 + 5 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 + 4 = 55554.$$

Tanto a tecnologia quanto a teoria, que estão imbuídas no processo anterior, ou seja, somar dois números do sistema de numeração decimal por meio da escrita polinomial na potência de base dez, encontram-se declaradas no capítulo anterior. Além disso, o resultado expresso por *5 dezenas de milhar + 5 unidades de milhar + 4 centenas + 14 dezenas + 14 unidades* é equivalente a $5 \cdot 10^4 + 5 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 14 \cdot 10 + 14$ (escrita polinomial).

Assim,vejo essas duas representações como pré-anúncios da técnica aplicada na soma de dois polinômios com coeficientes inteiros.

A técnica da soma pelo algoritmo usual e pela ordem que os algarismos ocupam, segundo o sistema de numeração decimal, habitam os diferentes tipos de instituições (noosfera, escolas, obras, professores, entre outras). Enquanto que a técnica pela escrita polinomial de potência de base dez, não tem ênfase institucional.

Um dos efeitos da tecnologia sobre a técnica é a modificação dessa técnica de forma que ela alargue sua abrangência ou se sofistique de modo que resulte em uma nova técnica (ALMOULOUD, 2007). Nesse sentido, as ideias de Floriani (2000) de associar o algoritmo usual da adição e da divisão aritmética para resolver adição e divisão de polinômios, teve um intuito, com certa limitação, de propor uma técnica numérico-algébrica para resolver adição, subtração, multiplicação e divisão de polinômios. O elemento tecnológico dessa técnica é considerar a variável no sistema de numeração decimal, na qual ela assume sempre o valor igual a dez, possibilitando transformar um polinômio em um número natural ou inteiro.

Vou retomar a tarefa $t_{0,}$ **resolver:** $\boldsymbol{(x^3 + x + 1) + (x^2 + 4x - 2)}$, e confrontá-la com a tarefa $t_{1,}$ **resolver:** $\mathbf{(10^3 + 10 + 1) + (10^2 + 4.10 - 2)}$, lembrando que a tarefa t_0 tem como solução: $\boldsymbol{-1 + 5x + x^2(1 + x)}$. Essa solução é proposta por Chevallard e Bosch (1999).

A tarefa t_1 é uma consequência dos meus estudos da obra de Floriani (2000) e constam na monografia de Carvalho e Pereira (2009), na qual considerei tais ideias para representar os polinômios da tarefa t_0 como sendo $\mathbf{10^3 + 10 + 1}$ e $\mathbf{10^2 + 4.10 - 2}$. Assim, a tarefa t_1, recai em somar **1011** (1000 + 10 + 1) com **138** (100 + 40 – 2 = 100 + 38). Procedo à soma de **1011** com **138** que resulta **1149**. Representando 1149 na forma polinomial de potência de base dez, ele assume a escrita: $\mathbf{1 \,.\, 10^3 + 1 \,.\, 10^2 + 4 \,.\, 10 + 9}$. Faço $x = 10$ para transformar $\mathbf{1 \,.\, 10^3 + 1 \,.\, 10^2 + 4 \,.\, 10 + 9} = \boldsymbol{1 \,.\, x^3 + 1 \,.\, x^2 + 4 \,.\, x + 9 = x^3 + x^2 + 4x + 9}$. Portanto, a solução da tarefa t_0 seria o polinômio $\boldsymbol{x^3 + x^2 + 4x + 9}$. Para confrontar essa solução com a solução da tarefa t_0, primeiro resolverei a tarefa t_0 e depois compararei a solução encontrada com as obtidas segundo as ideias que concebi de Floriani (2000) e a de Chevallard e Bosch (1999). Assim,

$\boldsymbol{(x^3 + x + 1) + (x^2 + 4x - 2) = x^3 + x^2 + x + 4x + 1 - 2 = x^3 + x^2 + 5x - 1}$. Resumindo as soluções:

- Para a tarefa t_1, o procedimento resolutivo seguiu o que propôs Floriani (2000) e a solução dessa tarefa é $\mathbf{1 \,.\, 10^3 + 1 \,.\, 10^2 + 4 \,.\, 10 + 9}$, que equivale ao polinômio $\boldsymbol{x^3 + x^2 + 4x + 9}$, se $x = 10$;

- Para a tarefa t_0, na qual apliquei a técnica de reduzir termos semelhantes, a solução é: $x^3 + x^2 + 5x - 1$;
- Para Chevallard e Bosch (1999) a solução da tarefa t_0 é: $-1 + 5x + x^2(1 + x)$.

No confronto das três soluções para a tarefa t_0, a solução de Chevallard e Bosch (1999) é legitima, porque ela adveio da técnica de reduzir termos semelhantes. Logo, $x^3 + x^2 + 5x - 1$ é igual a $-1 + 5x + x^2(1 + x)$. Com um pequeno ajuste de fatoração, o polinômio $x^3 + x^2 + 5x - 1 = -1 + 5x + x^2 + x^3 = -1 + 5x + x^2 (1 + x)$.

A solução que resultou do que concebi de Floriani (2000) está correta ou errada? Ou essa técnica precisa de ajustes para que ela produza a mesma solução de Chevallard e Bosch (1999)? Eis os meus entendimentos dessa técnica:

- Ao associarmos tipos de polinômios como números de sistemas de numeração posicional, deve-se observar a conveniência de ser possível ou não;
- São necessários ajustes para que essa técnica satisfaça as condições e restrições das operações com polinômios;
- A eficácia dessa técnica depende das manipulações ostensivas da potência de base dez, segundo o sistema de numeração posicional decimal indo-arábico;
- Quando há coeficientes negativos nos termos dos polinômios, o valor numérico que resulta de se considerar a variável igual a 10, possuirá números que, quando somados, subtraídos, multiplicados ou divididos, produzirão coeficientes diferentes dos obtidos nas operações com polinômios. Isso ocorre porque nas operações com polinômios não há transporte de ordens (entenda-se termos algébricos), mas nas operações com números naturais ou inteiros isso acontece naturalmente.

Retomo a tarefa t_1 e a resolverei, novamente, porém, ajustando a técnica oriunda das ideias que apreendi de Floriani (2000). Desta maneira,

$$(10^3 + 10 + 1) + (10^2 + 4.10 - 2) = (1.\ 10^3 + 1.\ 10^1 + 1.\ 10^0) + (1.\ 10^2 + 4.\ 10^1 - 2.\ 10^0) =$$

$$= 1.\ 10^3 + 1.\ 10^2 + 1.\ 10^1 + 4.\ 10^1 + 1.\ 10^0 - 2.\ 10^0 = 1.\ 10^3 + 1.\ 10^2 + (1 + 4).\ 10^1 + (1 - 2).\ 10^0 = 1.\ 10^3 + 1.\ 10^2 + 5.\ 10^1 - 1.\ 10^0.$$

Da escrita polinomial de base dez resultante $1.\ 10^3 + 1.\ 10^2 + 5.\ 10^1 - 1.\ 10^0$ prossigo com os ajustes necessários à escrita polinomial na variável $x = 10$, que resulta na solução de Chevallard e Bosch (1999). Logo,

$1.\ 10^3 + 1.\ 10^2 + 5.\ 10^1 – 1.\ 10^0 = 1.\ x^3 + 1.\ x^2 + 5.\ x^1 – 1.\ x^0 = x^3 + x^2 + 5x – 1 = – 1 + 5x + x^2 + x^3 = – 1 + 5x + x^2\ (1 + x)$.

A resolução da tarefa t_0 **- resolver:** ***$(x^3 + x +1) + (x^2 + 4x – 2)$*** **-** seguindo as ideias de Floriani (2000) que preconiza a técnica do cálculo dos valores numéricos dos polinômios ***$x^3 + x + 1$ e $x^2 + 4x – 2$***, fazendo-se *$x = 10$*, exige o trabalho dessa técnica por meio do algoritmo da soma aritmética. Porém, a tarefa t_0 não se ajusta a essa técnica. Isso decorre do fato do polinômio ***$x^2 + 4x – 2$*** possuir o coeficiente negativo menos dois (– 2). Assim, esse coeficiente imprime uma mudança na técnica de Floriani (2000) para que ela se ajuste a técnica de Chevallard e Bosch (1999). Portanto, a solução que obtive para a tarefa t_0 por intermédio da tarefa t_1 **- resolver: $(10^3 + 10 +1) + (10^2 + 4.10 – 2)$ -** na qual considerei os valores numéricos dos polinômios ***$x^3 + x +1$ e $x^2 + 4x – 2$***, ou seja, **1011** e **138**, não está totalmente incorreta, mas não segue o mesmo trabalho da técnica de Chevallard e Bosch, que é a de reduzir termos semelhantes. Contudo, quando recorri à técnica que consta na monografia de Carvalho e Pereira (2009), ou seja, pela escrita polinomial da potência de base dez, para resolver a tarefa t_1, encontrei a solução equivalente a de Chevallard e Bosch (1999). Desse modo, a técnica pela escrita polinomial na potência de base dez, quando aplicada na resolução da soma de dois polinômios, segue o mesmo trabalho da técnica que Chevallard e Bosch (1999) usaram para solucionar a tarefa t_0.

O pressuposto de Chevallard e Bosch definindo *"tarefas, técnicas, tecnologias e teorias, foi para anunciarem a noção de organização praxeológica (ou praxeologia) pontual, regional ou global que são o conjunto de técnicas, tecnologias e teorias para as praxeologias pontuais"* (COSTA, 2008, p. 19). Apoio-me em Almouloud (2007) para compreender os tipos de organizações praxeológicas.

> Se considerarmos, por exemplo, o ensino de matemática no Ensino Médio, pode-se falar:
>
> - de uma organização praxeológica *pontual* no que diz respeito à resolução de um certo tipo de problema de proporcionalidade – organização que responderia à seguinte questão: "como resolver um problema desse tipo?";
> - de uma organização *local* no que diz respeito à resolução de diferentes tipos de problemas de proporcionalidade;
> - de uma organização *regional*, no que diz respeito, por exemplo, à noção de função numérica (que corresponde a um setor da matemática ensinada no Ensino Médio) (ALMOULOUD, 2007, p. 117).

Os esclarecimentos de Almouloud sobre os tipos de organizações praxeológicas, fazem-me inferir que:

- No oitavo ano (7ª série) do Ensino Fundamental, o questionamento sobre a resolução de uma operação de polinômios, por exemplo, a adição, constitui uma organização praxeológica pontual;
- Se o propósito for resolver diferentes operações de polinômios. Então, a organização praxeológica é local;
- Ao se conceber as operações de polinômios como manipulações de expressões algébricas, principalmente, do 7º ao 9º ano do Ensino Fundamental, nesse sentido, a organização praxeológica caracteriza-se pela regionalidade.

Os tipos de organizações praxeológicas cumprem um papel importante na compreensão de um saber. Assim, "o saber é considerado como uma organização praxeológica particular que lhe permite funcionar como um aparelho de produção de conhecimento [...]" (COSTA, 2008, p. 19). Nas palavras de Almouloud (2007, p. 117): "Um saber diz respeito a uma organização praxeológica particular, com certa 'generalidade' que lhe permite funcionar como uma máquina de produção de conhecimento [...]".

A compreensão que amplio do que enfatizam Costa (2008) e Almouloud (2007) coaduna com uma reflexão pessoal da minha prática docente como professor de matemática. Nessa reflexão as minhas praxeologias servem como parâmetro mediador entre o meu saber matemático e a modelagem das práticas sociais por meio de conhecimentos matemáticos. Deste modo,

> [...] Como concebemos a matemática uma atividade humana estruturada em organizações praxeológicas, podemos dizer que esses conhecimentos nascem da problematização de certos *tipos de tarefas*, a partir do momento que são olhados como *tipos de problemas* cujo estudo possibilita construir *organizações praxeológicas locais*. A articulação de algumas dessas praxeologias em torno de uma tecnologia comum permite formar *organizações regionais* que chamamos, globalmente, o saber matemático. A *descrição* dessas organizações e o estudo de sua *ecologia institucional* estão no centro do programa de estudo da didática da matemática. (CHEVALLARD; BOSCH, 1999, p.7-8, tradução nossa).

Na compreensão de Bosch, Fonseca e Gascon (2004, *apud* SILVA, 2005, p. 99):

> [...] a reconstrução institucional de uma teoria matemática requer elaborar uma linguagem comum que permita descrever, interpretar, relacionar, justificar e produzir as diferentes tecnologias da Organização Matemática Local (OML) que integram uma Organização Matemática Regional (OMR).

Ainda segundo Silva (2005) para Bosch, Fonseca e Gascon (2004):

> [...] os processos de construção (ou reconstrução escolar) de OML podem ser muito diferentes, a análise conjunta da dinâmica de seu processo de estudo e de sua estrutura permitem determinar o grau de completude da mesma, que dependerá das seguintes condições:
> - uma OML deve responder questões que não podem ser respondidas por nenhuma Organização Matemática Pontual (OMP), que constitui sua razão de ser.
> - o processo de reconstrução deve ter momentos exploratórios que permitam comparar variações das técnicas que aparecem ao abordar as diferentes tarefas.
> - a exploração de OML deve incidir em um verdadeiro trabalho da técnica, provocando o seu desenvolvimento progressivo.
> - na reconstrução de uma OML, devem aparecer novas questões matemáticas relativas às diferentes técnicas que irão surgindo (questionamento tecnológico).
> - no processo de reconstrução de uma OML, é necessário institucionalizar os componentes explícitos da organização, não isolados, mas, no conjunto da organização.
> - é preciso avaliar a qualidade dos componentes da OML construída. Esta avaliação mostrará a necessidade de articulá-la com outras OML para constituir uma OMR (SILVA, 2005, p. 99-101).

Um exemplo de uma Organização Matemática Pontual (OMP) é a tarefa: **calcular A + B**, **em que A =** $\boldsymbol{2x^2 + x + 2}$ ***e*** $\boldsymbol{B = x^2 + x + 3}$. Por conseguinte, se várias destas OMP puderem ser agrupadas por intermédio da tecnologia θ, que justifica as técnicas τ, resultantes da escrita polinomial na potência de base dez e estas técnicas τ, quando mobilizadas, permitem resolver os tipos de tarefa T dessas OMP. Então, do agrupamento dessas várias OMP surge uma Organização Matemática Local (OML). Essa OML é designada por Fonseca, Bosch e Gascón (2010) pela notação $OM_\theta = [T/\tau/ \theta/ \Theta]$.

Da monografia de Carvalho e Pereira (2009, p. 38), extrai-se a atividade citada a seguir, a qual engloba várias OMP que constituem a OML dessa atividade.

> Sejam os seguintes polinômios, $A = 5x^3 + 3x^2 + 2x + 1$, $B = 4x^3 + 5x^2 + 7x + 2$, $C = 4x^2 + 6x + 8$, $D = 7x^2 + 4x + 3$, $E = 9x^2 + 8x + 7$, $F = 3x^2 + 4x + 1$, $G = 5x^2 + 4x + 2$, $H = x^2 + 8x + 4$, $M = x^2 + 2x + 8$, $N = x + 2$, $P = 3x^2 + 2x + 4$, $Q = 4x^2 + 2$, $R = x^3 + 3x^2 + 7x + 6$, $S = x^2 + 2x + 4$. Determinemos A + B, C + D, E – F, G – H, M × N, P × Q e R : S.

Na atividade citada, anteriormente, observo sete tarefas t_i de tipos de tarefas T_i. Denominarei essas tarefas por t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6 e t_7. Quais são elas?

- t_1: Calcular A + B, onde $A = 5x^3 + 3x^2 + 2x + 1$ e $B = 4x^3 + 5x^2 + 7x + 2$;
- t_2: Calcular C + D, onde $C = 4x^2 + 6x + 8$ e $D = 7x^2 + 4x + 3$;
- t_3: Determinar E – F, sendo $E = 9x^2 + 8x + 7$ e $F = 3x^2 + 4x +$;

- t_4: Determinar G – H, sendo G = $5x^2 + 4x + 2$, H = $x^2 + 8x + 4$;
- t_5: Determinar M × N, sendo M = $x^2 + 2x + 8$ e N = $x + 2$;
- t_6: Calcular P × Q, onde P = $3x^2 + 2x + 4$ e Q = $4x^2 + 2$;
- t_7: Determinar o quociente e o resto de R **:** S, onde R = $x^3 + 3x^2 + 7x + 6$ e S = $x^2 + 2x + 4$.

Essas sete tarefas, constam na monografia de Carvalho e Pereira (2009). Elas foram resolvidas pela técnica τ que transforma os polinômios em números naturais, segundo o sistema de numeração decimal indo-arábico e, em seguida, aplicam-se os algoritmos usuais da adição, subtração, multiplicação e divisão aritmética. Será que o trabalho da técnica τ possibilitou obtermos os mesmos resultados da soma, da subtração, da multiplicação e da divisão de polinômios? Esse questionamento subjacente me remete a Fonseca, Bosch e Gascón (s/d), que afirmam que a terceira condição do grau de completude de uma OML deve conter o trabalho da técnica e o seu progressivo desenvolvimento.

> A exploração deve conduzir a um verdadeiro *trabalho da técnica* que se inicia tornando rotineira τ_0 até provocar um *desenvolvimento progressivo dessa técnica*. Este desenvolvimento deve gerar técnicas relativamente novas para a comunidade de estudo: τ_1, τ_2, τ_3... O trabalho da técnica deve prosseguir até que os estudantes atinjam um domínio robusto do conjunto das técnicas, que provocará a ampliação progressiva de Tq e *a emergência de novos tipos de tarefas* T_1, T_2, T_3, etc. (FONSECA; BOSCH; GASCÓN, s/d, p. 2, tradução nossa[8]).

O questionamento subjacente sobre as tarefas t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6 e t_7, tem respostas no estudo de Carvalho e Pereira (2009), mas as plausibilidades dessas respostas estão imersas na organização matemática que as originou. Assim, a análise dessa organização matemática exige um olhar sobre as conexões explícitas e implícitas entre aritmética e álgebra. Além disso, o trabalho da técnica τ possui elementos tecnológicos e teóricos, que não os percebi durante o estudo que fiz da obra de Floriani (2000) em relação ao ensino das operações com polinômios. Portanto, cabe aqui considerar que:

> A praxeologia associada a um saber é a junção de dois blocos: saber-fazer (técnico/prático) e saber (tecnológico/teórico), cuja ecologia refere-se às condições

[8] **3.** La exploración debe desembocar en un verdadero *trabajo de la técnica* que se inicia rutinizando τ_0 hasta provocar un *desarrollo progresivo de dicha técnica*. Este desarrollo debe generar técnicas relativamente nuevas para la comunidad de estudio: τ_1, τ_2, τ_3, ... El trabajo de la técnica debe proseguir hasta que los estudiantes alcancen un dominio robusto del conjunto de las técnicas, lo que provocará la ampliación progresiva de T_q y la *apariciónde nuevos tipos de tareas* T_1, T_2, T_3, etc.

> de sua construção e vida nas instituições de ensino que a produzem, utilizam ou transpõem. Consideram-se aqui as condições de "sobrevivência" de um saber e de um saber-fazer em analogia a um estudo ecológico: qual o habitat? Qual o nicho? Qual o papel deste saber ou saber-fazer na "cadeia alimentar"? Tais respostas ajudam na compreensão na organização matemática determinada por uma praxeologia (ALMOULOUD, 2007, p. 123).

Da citação abstraio que os tipos de objetos matemáticos *O*, sejam ostensivos ou não ostensivos, estruturam organizações praxeológicas que dependem da ecologia institucional imprimida sobre o bloco da práxis e do logos. Nesse sentido, a organização matemática e didática que consta na monografia de Carvalho e Pereira (2009) relaciona esses dois blocos em torno da ecologia de objetos da aritmética e da álgebra, como os que constam no segundo capítulo desta pesquisa.

Com efeito, a praxeologia que proponho para o ensino das operações com polinômios, relaciona uma cadeia alimentar em que a aritmética alimenta a álgebra no ecossistema escolar. No entanto, a relação ecológica inicial dessa praxeologia vem do *habitat* dos sistemas de numeração posicional em bases quaisquer no ecossistema escolar. Contudo, infiro que o produtor inicial da ideia de polinômios nessa cadeia alimentar é o sistema de numeração posicional decimal indo-arábico.

Pelo revelado no parágrafo anterior, situo a organização praxeológica da monografia de Carvalho e Pereira (2009) como parte do quinto problema do Enfoque Antropológico (EA), apontado por Pilar Bolea (2003, p. 44, tradução nossa[9]): **EA5.** Como se expõem, em termos de problemática ecológica, os problemas de pesquisa didática relativos ao ensino e a aprendizagem do algébrico?

Retomo Almouloud (2007) que cita Chevallard (1999), enfatizando os dois tipos de organizações praxeológicas: matemáticas e didáticas. Assim, "[...] as organizações matemáticas referem-se à realidade matemática que se pode construir para ser desenvolvida em uma sala de aula e as organizações didáticas referem-se à maneira como se faz essa construção [...]" (ALMOULOUD, 2007, p. 123).

Para Delgado (2006, p. 32, tradução nossa[10]): *A noção de Praxeologia Matemática ou Organização Matemática corresponde à concepção do trabalho matemático como estudo de tipos de problemas ou tarefas problemáticas [...]*. Agrego ao exposto por Delgado, o que diz

---

[9] **AE5.** *¿Cómo se plantean, en términos de la problemática ecológica, lós problemas de investigación didáctica relativos a la enseñanza y el aprendizaje de lo algebraico?*

[10] La noción de Praxeología Matemática u Organización Matemática corresponde a la concepción del trabajo matemático como estudio de tipos de problemas o tareas problemáticas [...]

Pilar Bolea (2003, p. 52, tradução nossa[11]): *Paralelamente ao modelo da matemática institucionalizada que temos esquematizado, a TAD proporciona, um modelo de atividade matemática institucionalizada que é o meio pelo qual uma pessoa entra em uma obra ou organização matemática*.

Achei esclarecedor o que diz Delgado (2006) e Pilar Bolea (2003) a respeito de organizações didáticas.

> [...] todo processo de estudo da matemática, enquanto atividade institucional de construção ou reconstrução de Organizações Matemáticas, consiste na utilização de uma determinada *Praxeologia* (*ou Organização*) *Didática* [...] com seu componente prático (constituído por tipos de *tarefas e técnicas didáticas*) e seu componente teórico (formado por uma *tecnologia e uma teoria didáticas*) (DELGADO, 2006, p. 35, tradução nossa[12]).
>
> Por *organização didática* se entenderá, em princípio, o conjunto de tipos de tarefas didáticas, de técnicas didáticas, de tecnologias didáticas e de teorias didáticas mobilizadas para projetar e organizar o processo de estudo de uma organização matemática em uma instituição específica [...] (PILAR BOLEA, 2003, p. 57, tradução nossa[13]).

As interpretações de Delgado (2006) e Pilar Bolea (2003), sobre Organizações Matemáticas (OM) e Organizações Didáticas (OD), são vistas por mim como extensões de Chevallard (1999 *apud* ALMOULOUD, 2007), permitindo-me acenar com as seguintes observações:

a) As primeiras Organizações Matemáticas e Didáticas que compuseram as minhas práticas docentes, não legitimadas pelo Curso de Licenciatura, vieram da obra e instituição livro didático;
b) Após o meu ingresso no Curso de Licenciatura Plena em Matemática, as Organizações Matemáticas passaram a ser orientadas pelas obras que os professores formadores desse curso manifestavam em suas práticas docentes e outras obras indicadas para estudo complementar;
c) As Organizações Didáticas que conduziram os meus estudos das Organizações Matemáticas, no Curso de Licenciatura Plena em Matemática, estiveram

[11] Paralelamente al modelo de las matemáticas institucionalizada que hemos esquematizado, la TAD proporciona, um modelo de *actividad matemática* institucionalizada que es el medio mediante el cual una persona *entra* en una obra u organización matemática.

[12] [...] todo proceso de estudio de las Matemáticas, en cuanto actividad institucional de construcción o reconstrucción de Organizaciones Matemáticas, consiste en la utilización de una determinada *Praxeología (u Organización) Didáctica* [...] con su componente práctico (formado por tipos de *tareas y técnicas didácticas*) y su componente teórico (formado por una *tecnología y una teoría didácticas*).

[13] Por *organización didáctica* se entenderá, em principio, el conjunto de lós tipos de tareas didácticas, de técnicas didácticas, de tecnologías didácticas y de teorías didácticas movilizadas para diseñar y gestionar el proceso de estúdio de una organización matemática en una instituición concreta [...]

relacionadas com os tipos de tarefas didáticas, técnicas didáticas, tecnologias didáticas e teorias didáticas que fluíam das minhas sujeições à instituição livro didático e as que pude absorver dos professores formadores desse curso;

d) Durante o Curso de Especialização em Educação Matemática, os meus estudos de algumas obras e suas Organizações Matemáticas, fizeram-me refletir sobre outros tipos de tarefas, de técnicas, de tecnologias e teorias não habituais nas instituições que compõe o meu *mitiê*;

e) Dentre as obras que compuseram os meus estudos no Curso de Especialização em Educação Matemática destaco a de Floriani (2000), pois foi a partir dessa obra que as Organizações Matemáticas sobre polinômios mereceram minha atenção sob outros aspectos didáticos, que gerou a monografia de Carvalho e Pereira (2009).

Para continuar a narrativa deste capítulo, julgo necessário citar o que Chevallard (2002, 2009a) entende por noções de *objeto, relação pessoal* e *pessoa* na composição teórica da TAD.

> [...] a *primeira noção fundamental* é a de *Objeto*: objeto é qualquer entidade, material ou não material, *que existe pelo menos para um individuo.* Então, tudo é objeto, incluindo pessoas. Os objetos são, assim, o número sete, e também o símbolo 7, a noção de pai e também de um jovem pai que leva seu filho, ou a ideia de perseverança (ou coragem, força, etc.) e o conceito matemático de derivada, e também o símbolo ∂, etc. Em particular, qualquer prática, ou seja, todo produto intencional da atividade humana é um objeto.
> A *segunda noção fundamental* é o de *relação pessoal de um indivíduo x para com um objeto o*, que significa o sistema denotado por *R (x,o)* de todas as interações que *x* possa ter com o objeto o - que *x* manipula, utiliza, fala, sonha etc. Dizemos que o existe se a relação pessoal de *x* com o "não é vazia", denota-se por $R\ (x,\ o) \neq \emptyset$.
> A terceira noção fundamental, a de *pessoa*, é o par formado por um indivíduo *x* e o sistema de relações pessoais *R (x, o)* em um dado momento da história de *x*. A palavra pessoa, tal como aqui utilizado, não deve nos enganar: todo mundo é um pessoa, incluindo uma criança muito jovem, o bebê (etimologicamente, aquele que não fala ainda). Bem entendido, que no curso do tempo o sistema de relações pessoais de *x* evolui; um objeto que não existe para ele passa a existir, enquanto outras deixam de existir; para outros enfim a relação pessoal de *x* muda. Nesta evolução, o invariante é o indivíduo, o que muda é a pessoa (CHEVALLARD, 2009a, p. 1, tradução nossa, grifos no original).

Além dessas três noções fundamentais, Chevallard (2009a) especifica o que sejam Universo Cognitivo (*U(x)*) e Equipamento Praxeológico (*EP(x)*).

> Quando um objeto *o* existe para uma pessoa *x*, ou ainda que *x conhece o*, a relação *R(x; o)* especifica a maneira como *x* conhece o. Chama-se então ***universo cognitivo de x*** o conjunto

> ***UC(x) = {(o, R(x; o)) / R(x; o) ≠ ∅}.***
> Deve-se notar que o adjetivo cognitivo não é tomado aqui em sua acepção intelectualista corrente: Eu tenho uma relação pessoal com a minha escova de dente, com a máquina de café da cafeteria, com o pedal do freio do meu carro, etc., todos os objetos que fazem parte do meu universo *cognitivo*, da mesma forma que inclui, por exemplo, a noção de equação quadrática ou de derivada.
> [...] o conjunto de praxeologias que a pessoa dispõe, ou que está *equipada* (mesmo que não possa atualizar tal ou tal praxeologia que venha a ocupar tal posição dentro de tal instituição): é o que chamo de ***equipamento praxeológico*** da pessoa [...] (CHEVALLARD, 2009, p. 1-2; 6, tradução nossa, grifos nossos e no original).

No processo de estudo das Organizações Matemáticas sobre polinômios, fiz o estudo, vislumbrando ensinar as operações com polinômios no oitavo ano do Ensino Fundamental. Daí em diante, o encaminhamento desse estudo seguiu a égide do que apreendi da obra de Floriani (2000). Em seguida, o meu estudo, centrou-se em tipos de tarefas de adição, subtração, multiplicação e divisão de polinômios seguindo a técnica declarada na obra desse autor. Esse estudo de tipos de tarefas revelou as limitações do meu equipamento praxeológico no tratamento dessas operações polinomiais a partir das operações aritméticas fundamentais. Essas limitações decorreram das minhas relações com objetos *o*, em instituições *I* e *I'*, nas posições *p* e *p'*, que revelaram a não conformidade dos meus conhecimentos de operações aritmética e operações com polinômios (objetos *o*) em diferentes instituições, ou seja, na escola e no Curso de Especialização.

> A extensão do significado dado ao verbo *conhecer* nos desenvolvimentos precedentes se justifica pelo fato de que não é *uma* maneira de conhecer um objeto, mas uma pluralidade indefinida. Conheço tal célebre ator de cinema no sentido em que todo mundo conhece; mas não o conheço do modo como seus filhos, que conhecem ele de maneira diferente de seus parentes, ou de seus amigos de infância, ou de seus colegas de trabalho, etc. A relatividade do conhecimento institucional é marcada tanto pela existência de uma diversidade, praticamente, ilimitada de formas de "conhecer" um objeto *o* e pela ausência de uma "boa relação" *universal*, reconhecida em *qualquer* instituição: muitas vezes $R(x, o) \cong R_I(p, o)$ e $R(x, o) \not\cong R_{I'}(p', o)$, mesmo quando $I' = I$ (com, obviamente, $p' \neq p$) (CHEVALLARD, 2002, p. 4, tradução nossa).

A analogia que Chevallard faz do verbo *conhecer* com o modo de conhecer o *célebre ator de cinema*, reporta-me ao livro didático de matemática sendo esse "ator". Além disso, entendo que os professores de matemática são os filhos desse "ator", que o conhecem, diferentemente, dos alunos e de outras pessoas. Assim, os filhos do *célebre ator*, aprendem a interpretar do mesmo modo que seu pai (praxeologia) diversos tipos de papéis (objetos matemáticos *o*) e preparam seus espetáculos (planos de aulas) para apresentarem em um local específico (sala de aula) para uma seleta plateia (alunos).

A conformidade existente entre as relações $R(x, o)$ e $R_I(p, o)$ é a que predomina nas instituições escolares, quando os professores de matemática assumem a praxeologia dos autores dos livros didáticos de matemática. Eram essas praxeologias que existiam no meu equipamento praxeológico (*EP(x)*), antes de estudar a obra de Floriani. Após estudá-la e estruturar a organização praxeológica da Monografia de Carvalho e Pereira (2009), surge a não conformidade das minhas relações, que Chevallard (2002) denota por $R(x, o) \pm R_{I'}(p', o)$. Entenda-se que a posição *p'* indica a minha posição institucional no Curso de Especialização em Educação Matemática.

Embora o meu equipamento praxeológico (*EP(x)*) conflitasse, cognitivamente, com os tipos de praxeologias assumidas por mim antes da graduação, durante e após a graduação no exercício das minhas atividades profissionais como professor de matemática, consegui avançar nos meus estudos durante o Curso de Especialização em Educação Matemática e elaborei uma organização matemática e didática diferenciada, com elementos praxeológicos diferentes dos usuais nas instituições escolares.

Os efeitos dessa nova praxeologia conflitaram com o meu universo cognitivo (*UC(x)*), motivando-me a constituir uma dinâmica cognitiva para atualizar o meu equipamento praxeológico (*EP(x)*) que me permitiu uma nova prática docente como professor de matemática. Além do que, essa atualização do meu equipamento praxeológico, revelou-me a possibilidade de criar novas praxeologias para o ensino da álgebra na educação básica e com perspectivas institucionais futuras. Deste modo, a minha formação pessoal e profissional estão de acordo com que infere Chevallard (2009a).

> [...] A formação de uma pessoa para uma instituição, por exemplo, a formação *profissional* de uma pessoa, supõe assim uma dinâmica cognitiva e praxeológica que resulta da exploração adequação de novas sujeições imprimida especificamente para a pessoa, o que implica um trabalho de identificação e tratamento dos conflitos relacionados ao choque das ***novas sujeições com as sujeições anteriores,*** quando os primeiros são experimentados pela pessoa como incompatíveis com a sua identidade (CHEVALLARD, 2009a, p. 7, tradução nossa, grifos nossos e no original).

E é na perspectiva dialética entre o que expus neste capítulo e no capítulo anterior que narro, no próximo capítulo, a análise dos episódios que manifestam as praxeologias que assumi ou construí na minha prática docente como professor de matemática em diversos momentos de sujeições institucionais. Além de analisar essas praxeologias, constarão no capítulo seguinte, partes da organização matemática e didática que elaborei como um dos autores (PEREIRA) da monografia de Carvalho e Pereira (2009).

IV. EPISÓDIOS QUE MANIFESTAM AS PRAXEOLOGIAS DE MINHA PRÁTICA DOCENTE NO PERCURSO DO MEU DESENVOLVIMENTO PROFISSIONAL

Neste capítulo continuo o meu ‘dialogo’ autobiográfico na perspectiva de produzir uma análise qualitativa que me permita vislumbrar reflexões pessoais já influenciadas de palavras dos autores das obras que constam no segundo e terceiro capítulos.

A Teoria Antropológica do Didático (TAD) e a monografia de Carvalho e Pereira (2009) são cernes centrais nesta análise. Além disso, outras obras poderão ser consultadas para elucidar possíveis incompreensões que surjam durante o processo de análise dos episódios que os nomeio conforme constam a seguir.

1. Episódio I: As primeiras manifestações praxeológicas

Este episódio tem seu início desde o meu ingresso no curso técnico de Eletrônica da Escola Técnica Federal do Pará (hoje, IFPA), que para me custear nesse curso, comecei a ministrar aulas particulares de Matemática e Ciências para estudantes de 1ª a 8ª séries (1º ao 9º anos). Isto anuncia uma prática docente que denomino como não legitima ou leiga, mas motivada, extrinsecamente, por uma necessidade intrínseca de profissionalização técnica, que oportunizava certa ascensão social.

Para ensinar os alunos de 1ª a 8ª séries (1º ao 9º anos), recorria às obras legitimadas pela noosfera, ou seja, os livros didáticos de Matemática e Ciências adotados pelas escolas na década de oitenta. Lembro-me de duas coleções de livros de Matemática de 5ª a 8ª séries (6º ao 9º anos) que marcaram a minha prática docente leiga no ensino de matemática:

- A Conquista da Matemática de Giovanni, Castrucci e Giovanni Jr.;
- Matemática e Realidade de Gelson Iezzi et al.

Dos livros de Ciências guardo poucas lembranças, mas a coleção Ciências de 5ª a 8ª séries (6º ao 9º ano) de Ayrton Cesar Marcondes foi a predominante nessa época.

Reconheço as influências praxeológicas desses autores na minha prática docente leiga para ensinar, principalmente, matemática de 5ª a 8ª séries (6º ao 9º anos).

Os livros didáticos de 1ª a 4ª séries (1º ao 5º anos), dessa época, não me lembro do nome de nenhum deles, talvez, porque nessas séries (anos) predominavam as anotações das aulas no caderno. Deste modo, a interpretação praxeológica que assumia para ensinar os alunos dessa fase escolar era influenciada pelos professores que lecionavam para esses alunos.

Dessas práticas docentes leigas que assumi, resultou a minha escolha profissional. Nas palavras de Chevallard (2009a, p. 3, tradução nossa): ‘*Em geral, nossas relações "pessoais" são frutos de nossa história de submissões institucionais passada e presente’*.

Para Raymond, Bultt e Yamagishi (1993 *apud* TARDIF, 2008, p. 73):

> Todas as autobiografias mencionam que experiências realizadas antes da preparação formal para o magistério levam não somente a compreender o sentido da escolha da profissão, mas influem na orientação e nas práticas pedagógicas atuais dos professores e professoras.

Segundo Tardif (Ibidem, p. 73) esses mesmos pesquisadores enfatizam que “[...] *As experiências escolares anteriores e as relações determinantes com professores contribuem também para modelar a identidade pessoal dos professores e seu conhecimento prático”*.

O exposto na citação e no parágrafo acima tem sua conexão quando cursei a sexta e a sétima séries ginasiais, no início da década de oitenta. Nessas séries, o meu desempenho em matemática foi o melhor possível. Além disso, os tipos de tarefas que compunham as aulas de matemática eram as que os professores de matemática escreviam na lousa ou ditavam. Os livros didáticos ainda não eram uma realidade efetiva nas escolas públicas. Existiam, mas não eram obrigatórios. A obrigatoriedade principal recaia sobre o professor de matemática que deveria escrever na lousa o conteúdo de matemática, assim como, os tipos de tarefas. Os gêneros de tarefas que recordo, regiam-se pelos verbos: **efetuar, calcular, resolver, responder, completar,** entre outros. Segundo Almouloud (2007, p. 115): *“As tarefas são identificadas por um verbo de ação, que sozinho caracteriza um gênero de tarefa, por exemplo: calcular, decompor, resolver, somar; que não definem o conteúdo em estudo [...]”*.

Os livros das coleções “A Conquista da Matemática” e “Matemática e Realidade” eram recheados de gêneros de tarefas regidas pelos verbos que citei no parágrafo anterior. Assim, quando ministrava aulas particulares de matemática de 1ª a 8ª séries (1º ao 9º anos), assumia praxeologias condizentes com as dos professores de matemática da década de oitenta.

Outras praxeologias começaram a compor o meu equipamento praxeológico, a partir do meu ingresso no Curso de Licenciatura em Matemática, em 1996, pois no segundo ano de curso já desenvolvia atividade docente como professor de matemática.

Essas outras praxeologias restringiram-se aos meus estudos das disciplinas da graduação e as dos livros de matemática do ensino médio. Efetivamente, a minha prática docente no ensino de matemática de 5ª a 8ª séries (1º ao 9º anos), no período da graduação (1996 a 1999), continuavam muito próximas das praxeologias da época que ensinava antes de ser universitário.

2. Episódio II: As minhas limitações no tratamento das operações aritméticas mediadas pela escrita polinomial na potência de base dez

Quando iniciei o tratamento das operações aritméticas por intermédio da escrita polinomial na potência de base dez, começaram a surgir certas limitações que eu julgava não tê-las, pois considerava as operações aritméticas fundamentais elementares demais para mim como professor de matemática.

Essa constatação trouxe à tona um problema que considero ser da maioria dos professores que ensinam matemática no ensino fundamental. Talvez isso seja um problema inerente à formação que recebi para me tornar legalmente um professor licenciado pleno em matemática. Além disso, o meu universo cognitivo estava limitado a uma compreensão algorítmica das operações aritméticas fundamentais em nível de matemática escolar. Essa limitada compreensão proviera da não atualização do meu equipamento praxeológico no período de minha prática docente leiga, e, consequentemente, as minhas praxeologias não evoluíram.

As limitações do meu equipamento praxeológico serão mais bem esclarecidas examinando a resolução da tarefa, **resolver: 8596 – 5468**, que extraí da monografia de Carvalho e Pereira (2009, p. 21):

Processo tradicional:

$$\begin{array}{rrrrr} & & & 8 & 16 \\ & 8 & 5 & \cancel{9} & \cancel{6} \\ - & 5 & 4 & 6 & 8 \\ \hline & \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{8} \end{array}$$

> Usando a potência de base 10:
> $8596 - 5468 = (8000 + 500 + 90 + 6) - (5000 + 400 + 60 + 8) = (8.10^{3} + 5.10^{2} + 9.10^{1} + 6.10^{0}) - (5.10^{3} + 4.10^{2} + 6.10^{1} + 8.10^{0}) = (8.10^{3} - 5.10^{3}) + (5.10^{2} - 4.10^{2}) + (9.10^{1} -6.10^{1}) + (6.10^{0} - 8.10^{0}) = (8 - 5).10^{3} + (5 - 4).10^{2} + (9 - 6).10^{1} + (6.10^{0} - 8.10^{0}) = 3.10^{3} + 1.10^{2} + \mathbf{3.10^{1}} + (6.10^{0} - 8.10^{0}) = 3.10^{3} + 1.10^{2} + \mathbf{2.10^{1} + 10.10^{0}} +(6.10^{0} - 8.10^{0}) = 3.10^{3}+ 1.10^{2} + \mathbf{2.10^{1}} + (\mathbf{10.10^{0}} + 6.10^{0} - 8.10^{0})= 3.10^{3} + 1.10^{2} + 2.10^{1} + (\mathbf{16.10^{0}} - 8.10^{0}) = 3.10^{3} + 1.10^{2} + 2.10^{1} + (16 - 8).10^{0} = \mathbf{3}.10^{3} + \mathbf{1}.10^{2} + \mathbf{2}.10^{1} + \mathbf{8}.10^{0} = \mathbf{3128}$.

O *processo tradicional* compõe o meu equipamento praxeológico desde quando exercia a prática docente leiga. Esse processo é a modelação dominante na educação básica para se ensinar subtração com números naturais. É com base nesse processo tradicional que vi as ideias de Floriani (2000) para resolver subtrações por intermédio da escrita polinomial na potência de base dez e, posteriormente, subtrações polinomiais.

Os destaques em negritos que aparecem na citação indicam como "o empresta 1" acontece numa subtração com reservas. Abstrair isso na escrita polinomial na potência de base dez representou modificar o modo como eu resolvia e ensinava subtrações com números naturais. As implicações disso recaíram na nova relação do meu equipamento praxeológico EP(x) (CHEVALLARD, 2009a), consequentemente, a minha relação pessoal, com o objeto subtração, modificou-se cognitivamente. Entretanto, as minhas sujeições institucionais conflitavam com essa maneira de tratar a subtração com números naturais. Assim, conforme enfatiza Mesquita (2011, p. 25):

> Essa relação pessoal com um dado objeto matemático é construída por meio das instituições onde esses objetos vivem e onde fui apresentado a ele quando passei a assumir um papel nessas instituições, como aluno, professor, por exemplo, assumindo, em cada caso, jeitos próprios de fazer e pensar [...]

Os reflexos das minhas sujeições institucionais refletiram no tratamento da multiplicação aritmética implicando em mudanças praxeológicas. A tarefa **– resolver: 105 × 23 –** servirá de 'ponte' para mais esclarecimentos sobre isso.

> Usando a potência de base 10:
>
> $105 \text{ x } 23 = (100 + 0 + 5) \text{ x } (20 + 3) = (1.10^{2} + 0.10^{1} + 5.10^{0}) \text{ x } (2.10^{1} + 3.10^{0}) = (1.10^{2} \text{ x } 2.10^{1}) + (1.10^{2} \text{ x } 3.10^{0}) + (0.10^{1} \text{ x } 2.10^{1}) + (0.10^{1} \text{ x } 3.10^{0}) + (5.10^{0} \text{ x } 2.10^{1}) + (5.10^{0} \text{ x } 3.10^{0}) = (1 \text{ x } 2).10^{2+1} + (1 \text{ x } 3).10^{2+0} + (0 \text{ x } 2).10^{1+1} + (0 \text{ x } 3).10^{1+0} + (5 \text{ x } 2).10^{0+1} + (5 \text{ x } 3).10^{0+0} = 2.10^{3} + 3.10^{2} + 0.10^{2} + 0.10^{1} + \mathbf{10.10^{1}} + \mathbf{15.10^{0}} = 2.10^{3} + (3 +0).10^{2} + 0.10^{1} + \mathbf{10^{1}.10^{1}} + \mathbf{(10 + 5) .10^{0}} = 2.10^{3} + 3.10^{2} + 0.10^{1} + \mathbf{10^{1+1}} + \mathbf{10^{1}.10^{0} + 5.10^{0}} = 2.10^{3} + 3.10^{2} + 0.10^{1} + \mathbf{10^{2}} + \mathbf{10^{1+0}} + \mathbf{5.10^{0}} = 2.10^{3} + 3.10^{2} + 0.10^{1} + \mathbf{1.10^{2}} + \mathbf{1.\ 10^{1}} + \mathbf{5.10^{0}} = 2.10^{3} + (3+1).10^{2} + (0 + 1).\ 10^{1} + 5.10^{0} = \mathbf{2}.10^{3} + \mathbf{4}.10^{2} + \mathbf{1}.10^{1} + \mathbf{5}.10^{0} = \mathbf{2415}$ (CARVALHO; PEREIRA, 2009, p. 22).

Antes, para eu resolver uma multiplicação de números naturais, recorria ao algoritmo usual institucionalizado. Esse algoritmo satisfazia as exigências da minha prática docente, porque as organizações matemáticas eram regidas por esse algoritmo. Essas organizações matemáticas estão em conformidade com as instituições que me formaram para ser professor de matemática. Deste modo, o processo resolutivo de uma multiplicação pela escrita polinomial na potência de base dez, impunha uma praxeologia nada usual para mim como professor de matemática.

O processo resolutivo de uma multiplicação de números naturais (números inteiros positivos) pela escrita polinomial na potência de base dez revela o uso da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição. Agregada a essa propriedade surge a necessidade de outra propriedade: a associativa. O processo resolutivo prossegue com a manipulação ostensiva e não ostensiva da propriedade da multiplicação de potência de mesma base, assim os ajustes do "vai 1, vai 2,..." ocorre, ou seja, o "transporte de ordem" finaliza a multiplicação.

Os ajustes aritméticos envolvidos na manipulação ostensiva da resolução de uma multiplicação de inteiros positivos, por meio da escrita polinomial na potência de base dez, levam-me a admitir a escrita polinomial na potência de base dez como uma representação ostensiva necessária para que eu opere qualquer multiplicação de inteiros positivos. Com efeito, a técnica que me permite escrever 105 x 23 = 2.10^3 + $\mathbf{4}.10^2$ + $\mathbf{1}.10^1$ + $\mathbf{5}.10^0$ = **2415**, envolve os ostensivos escritos: **algarismos indo-arábicos, parênteses, símbolos operatórios,** etc.

Na distributividade os ostensivos orais orientam a aplicação dessa propriedade. Por exemplo, explicar que $\mathbf{1.10^2}$ deve ser multipicado por $\mathbf{2.10^1}$ **e** $\mathbf{3.10^0}$. Os ostensivos gestuais servem para orientar a distributividade, a fim de não nos esquecermos de multiplicar nenhuma potência de base dez e seus respectivos coeficientes.

Os não ostensivos organizam a escrita polinomial na potência de base dez em ordem decrescente para permitir que se escreva o produto resultante na forma de número inteiro positivo, obedecendo a ordem que indica a potência de base dez no sistema de numeração decimal indo-arábico.

A compreensão de que o algoritmo usual da multiplicação de números inteiros positivos tinha sua legitimação no valor posicional dos algarismos indo-arábico no sistema de numeração decimal, exigiu de mim um tratamento diferente daquele que estava consolidado em minha prática docente. Isso, de certa forma, conflitou-me cognitivamente, promovendo modificações no universo cognitivo (UC(x)) da minha pessoa como professor de matemática em plena atividade profissional. Consequentemente, a técnica que possibilita resolver as multiplicações de inteiros positivos por intermédio da escrita polinomial na potência de base dez, serve para evidenciar que existem incompreensões pessoais no tratamento da multiplicação aritmética quando esta é resolvida por meio do algoritmo usual.

Das quatro operações aritméticas fundamentais, a divisão é a que exige maior cuidado. Ela possui certa complexidade que fica implícita se resolvida pelo algoritmo euclidiano. Essa complexidade tornar-se-á explicita se o processo resolutivo for por meio da escrita polinomial na potência de base dez.

A seguir exponho uma tarefa (**dividir 20558 por 25**) que elaborei para compor a monografia de Carvalho e Pereira (2009, p. 24-26). O tratamento que dei a essa tarefa segue o processo tradicional (algoritmo euclidiano) e a escrita polinomial na potência de base dez.

Processo Tradicional:

205’5’8 | 25

- 200   **822**

55

- 50

58

- 50

8

Usando a potência de base 10:

$20558 : 25 = (20000 + 0 + 500 + 50 + 8) \mathbf{:} (20 + 5) = (2.10^4 + 0.10^3 + 5.10^2 + 5.10^1 + 8.10^0) \mathbf{:} (2.10^1 + 5.10^0)$

$20.10^3 + 5.10^2 + 5.10^1 + 8.10^0$ | $2.10^1 + 5.10^0$

$-(20.10^3 + 50.10^2)$ $\mathbf{10}.10^2 - \mathbf{2}.10^2 + \mathbf{2}.10^1 + \mathbf{2}.10^0$

$0 - 4.10^3 - 5.10^2 + 5.10^1 + 8.10^0$

$- (- 4.10^3 -10.10^2)$

$0 +5.10^2 + 5.10^1 + 8.10^0$

$- (4.10^2 + 10.10^1)$

$1.10^2 - 5.10^1 + 8.10^0 = \mathbf{5.10^1 + 8.10^0}$

$- (4.10^1 + 10.10^0)$

$1.10^1 - 2.10^0.$

Na resolução da divisão pela escrita na potência de base dez está implícita a transformação do termo que resulta da subtração: $5.\ 10^2 – 50.\ 10^2 = – 45.\ 10^2 = – 40.\ 10^2 – 5.\ 10^2 = – 4.\ 10^1.\ 10^2 – 5.\ 10^2 = – 4.\ 10^3 – 5.\ 10^2$.

O resultado obtido da divisão de 20558 por 25 está em conformidade com a técnica do algoritmo euclidiano, reconhecido institucionalmente e legitimado nos livros didáticos de matemática. Porém, esse algoritmo esconde particularidades internas que não são reveladas, pois a mecanicidade algorítmica esconde essas particularidades.

Para que eu enxergasse as particularidades não reveladas pelo algoritmo euclidiano, recorri ao sistema de numeração decimal indo-arábico, considerando as ordens e as classes que estruturam o valor posicional dos algarismos indo-arábicos nesse sistema de numeração. Assim, pude retomar a ideia de valor absoluto e de valor relativo dos algarismos indo-arábicos. Essa ideia é difundida nos anos iniciais do ensino fundamental sem a devida atenção que ela merece. Admito que antes do curso de especialização não percebia a relevância que esse conteúdo tem no tratamento das operações aritméticas fundamentais, e, por vezes, achava perda de tempo ensiná-lo.

Vou prolongar um pouco mais as discussões sobre a divisão de 20558 por 25. Tomo por base a minha compreensão da resolução desta pelo processo tradicional e anuncio alguns esclarecimentos:

- Primeiro: a divisão de 20558 por 25 parece ser trivial, porém, por que temos que agrupar as três últimas ordens (da direita para esquerda) para iniciar o processo resolutivo, ou seja, juntar 2 dezenas de milhar, 0 unidade de milhar e 5 centenas?
- Segundo: lembremo-nos que o valor absoluto de 2 dezenas de milhar é simbolizada pelo algarismo 2 que é menor que 25.
- Terceiro: transformando 2 dezenas de milhar em unidade de milhar, temos 20 unidades de milhar, cujo valor absoluto desse valor é 20, ainda menor que 25.
- Quarto: transformando 20 unidades de milhar em centenas, obtemos 200 centenas que deve ser somada as 5 centenas, totalizando 205 centenas, cujo valor absoluto é 205, logo maior que 25.
- Quinto: dividindo-se 205 centenas por 25 unidades, obtém-se 8×25 unidades = 200 centenas, restando 5 centenas. Essas 5 centenas são transformadas em 50 dezenas que somadas com as 5 dezenas, resultam 55 dezenas.

- Sexto: dividindo-se as 55 dezenas por 25 unidades, obtém-se 2 × 25 unidades = 50 dezenas, restando 5 dezenas. Essas 5 dezenas são transformadas em 50 unidades que somadas com as 8 unidades, resultam 58 unidades.

- Sétimo: em fim, dividi-se 58 unidades por 25 unidades, obtendo-se 2 × 25 unidades = 50 unidades, restando 8 unidades.

Esses ditos esclarecimentos nortearam, implicitamente, o processo resolutivo da divisão pela escrita polinomial na potência de base dez (EVES, 2004; DE MAIO, 2009, 2011). Mas, mesmo assim, não foi suficiente para que eu identificasse as incoerências que cometi no uso dessa técnica.

Uma dessas incoerências ocorreu quando transformei $\mathbf{2.10^4}$ em $\mathbf{20.\ 10^3}$. Isso contradiz a escrita polinomial na potência de base dez, no sistema de numeração decimal, na qual os coeficientes a_i obedecem à sentença $0 \leq a_i < b, i = 0,1,...,n$, onde b = *10*. Apesar dessa incoerência, ajustando-se o quociente e o resto, chega-se ao quociente e ao resto obtidos no processo tradicional. Portanto, o quociente: $\mathbf{10}.10^2$ – $\mathbf{2}.10^2$ + $\mathbf{2}.10^1$ + $\mathbf{2}.10^0$ = (**10 – 2**). 10^2 + $\mathbf{2}.10^1$ + $\mathbf{2}.10^0$ = **8**. 10^2 $\mathbf{2}.10^1$ + $\mathbf{2}.10^0$ = **822**. Procedendo-se desta mesma forma para o resto: $\mathbf{1}.10^1$ – $\mathbf{2}.10^0$ = **10**. 10^0 – **2**. 10^0 = (**10 – 2**). 10^0 = **8**. 10^0 = **8**.

Os sete esclarecimentos que expus na página anterior, aproximam-se do que expõem Carles (1927) e Roxo et al. (1948) em suas obras.

Para novas conclusões, vou refazer a divisão de 20558 por 25, seguindo a rigorosidade da escrita polinomial na potência de base dez conforme exige o sistema de numeração decimal.

$$
\begin{array}{l|l}
2.10^4 + 0.10^3 + 5.10^2 + 5.10^1 + 8.10^0 & 2.10^1 + 5.10^0 \\ \cline{2-2}
-\ (2.10^4 + 5.10^3) & 1.10^3 - 2.\ 10^2 + 2.\ 10^1 + 2.\ 10^0 \\ \cline{1-1}
\quad -\ 5.\ 10^3 + 5.10^2 + 5.10^1 + 8.10^0 & \\
\quad -\ (\ -\ 4.\ 10^3 - 10.\ 10^2 = -\ 4.\ 10^3 - 1.\ 10^3 = -\ 5.\ 10^3) & \\ \hline
\qquad 5.10^2 + 5.10^1 + 8.10^0 & \\
\qquad -\ (4.\ 10^2 + 10.\ 10^1 = 4.\ 10^2 + 1.\ 10^2 = 5.\ 10^2) & \\ \hline
\qquad\quad 5.10^1 + 8.10^0 & \\
\qquad\quad -\ (4.\ 10^1 + 10.\ 10^0 = 4.\ 10^1 + 1.\ 10^1 = 5.10^1) & \\ \hline
\qquad\qquad \mathbf{8}.10^0 = \mathbf{8} &
\end{array}
$$

Observemos que o quociente deve ser ajustado para que coincida com o obtido pelo processo tradicional. Assim,

$\mathbf{1.10^3} - 2.\ 10^2 + 2.\ 10^1 + 2.\ 10^0 = \mathbf{1.\ 10.\ 10^2} - 2.\ 10^2 + 2.\ 10^1 + 2.\ 10^0 =$

$= \mathbf{10.\ 10^2} - 2.\ 10^2 + 2.\ 10^1 + 2.\ 10^0 = \mathbf{(8 + 2).\ 10^2} - 2.\ 10^2 + 2.\ 10^1 + 2.\ 10^0 =$

$= \mathbf{8.\ 10^2 + 2.\ 10^2} - 2.\ 10^2 + 2.\ 10^1 + 2.\ 10^0 = \mathbf{8}.\ 10^2 + \mathbf{2}.\ 10^1 + \mathbf{2}.\ 10^0 = \mathbf{822}.$

Os ajustes que procedi no processo resolutivo da divisão descrita na página anterior se justificam no que consta na obra de Crantz (1949). Contudo, tenho consciência que esses ajustes são possíveis porque as ideias que manipulei são do campo aritmético. Transportá-las ao campo algébrico requer condições e restrições próprias da álgebra. No episódio que segue elucido essas condições e restrições.

3. Episódio III: As limitações da proposta didática e as sugestões para superações

Inicio este episódio citando Keppke (2007, p. 29) que menciona que

> O ponto de destaque é que tomando a ideia de coexistência entre Álgebra e Aritmética, a coexistência das duas permitiria ver a Álgebra como tratando de afirmações que envolvem — assim como a Aritmética — números, operações Aritméticas e igualdades (desigualdades) e ver a Aritmética — assim como a Álgebra — como uma ferramenta que toma parte do processo de organização da atividade humana.

Assumir o que diz Keppke requer admitir a dialética entre aritmética e álgebra no contexto das atividades humanas. Inspirado nisso e nas ideias de Floriani (2000) estruturei uma proposta didática, com aspirações de organização matemática e didática, propondo-a como uma alternativa praxeológica para o professor de matemática usá-la em sala de aula.

Os tipos de tarefas que especifico nessa proposta didática revelam a manipulação de objetos matemáticos ostensivos por meio dos não ostensivos (CHEVALLARD; BOSCH, 1999) que conflitaram o meu universo cognitivo e permitiram mobilizar nova relação do meu equipamento praxeológico (CHEVALLARD, 2009a). Além disso, as mudanças praxeológicas que proponho para ensinar polinômios explicita a conexão entre aritmética e álgebra em tipos de organizações praxeológicas (CHEVALLARD, 1999; PILAR BOLEA, 2003; SILVA, 2005; DELGADO, 2006; ALMOULOUD, 2007).

Quadro 3: Início da construção da proposta didática.

Como forma de facilitar a compreensão do aluno, adotaremos a potência de base 10 em nossa proposta didática e a variável predominante será a letra x.

Consideremos os valores numéricos: 20, 21, 100, 102, 125, 1000, 3254 e 20000. Vamos representar esses números como se fossem expressões algébricas na variável x:

D U

2 0 = $2.10^1 + 0.10^0 = 2.x^1 + 0.10^0 = 2x \rightarrow$ um termo algébrico $\rightarrow$ monômio (polinômio do 1º grau de coeficiente 2)

D U

2 1 = $2.10^1 + 1.10^0 = 2.x^1 + 1.x^0 = 2x + 1 \rightarrow$ dois termos algébricos $\rightarrow$ binômio (polinômio do 1º grau de coeficientes 2 e 1)

C D U

1 0 0 = $1.10^2 + 0.10^1 + 0.10^0 = 1.x^2 + 0.x^1 + 0.x^0 = x^2 \rightarrow$ um termo algébrico $\rightarrow$ monômio (polinômio do 2º grau de coeficiente 1)

C D U

1 0 2 = $1.10^2 + 0.10^2 + 2.10^0 = 1.x^2 + 0.x^1 + 2.x^0 = x^2 + 2 \rightarrow$ dois termos algébricos $\rightarrow$ binômio (polinômio do 2º grau de coeficientes 1 e 2)

C D U

1 2 5 = $1.10^2 + 2.10^2 + 5.10^0 = 1.x^2 + 2.x^1 + 5.x^0 = x^2 + 2x + 5 \rightarrow$ três termos algébricos $\rightarrow$ trinômio (polinômio do 2º grau de coeficientes 1, 2 e 5)

UM C D U

1 0 0 0 = $1.10^3 + 0.10^2 + 0.10^1 + 0.10^0 = 1.x^3 + 0.x^2 + 0.x^1 + 0.x^0 = x^3 \rightarrow$ um termo algébrico $\rightarrow$ monômio (polinômio do 3º grau de coeficiente 1)

UM C D U

3 2 5 4 = $3.10^3 + 2.10^2 + 5.10^1 + 4.10^0 = 3.x^3 + 2.x^2 + 5.x^1 + 4.x^0 = 3x^3 + 2x^2 + 5x + 4$ $\rightarrow$ quatro termos algébricos$\rightarrow$ (polinômio do 3º grau de coeficientes 3, 2, 5 e 4)

DM UM C D U

2 0 0 0 0 = $2.10^4 + 0.10^3 + 0.10^2 + 0.10^1 + 0.10^0 = 2.x^4 + 0.x^3 + 0.x^2 + 0.x^1 + 0.x^0 = 2x^4 \rightarrow$ um termo algébrico $\rightarrow$ monômio (polinômio do 4º grau de coeficiente 2)

Fonte: Carvalho; Pereira (2009, p. 37-38).

A premissa que norteou o que proponho no Quadro 3 está associada ao sistema de numeração decimal indo-arábico.

> Todos os polinômios que acabamos de estruturar vieram a partir de números escritos no sistema de numeração decimal indo-arábico. Esses mesmos polinômios são expressões algébricas, em virtude de substituírem x por 10.
> Olhando com mais detalhe como surgiram os polinômios, verificamos que as ordens são extremamente importantes e elas servem de referência para a classificação desses polinômios. Além disso, as ordens onde o zero as representam ficam implícitas na escrita polinomial (CARVALHO; PEREIRA, 2009, p. 38).

As vertentes praxeológicas iniciais da proposta didática associam as ideias algébricas a conteúdos matemáticos aritméticos ministrados nos anos iniciais do ensino fundamental, com maior incidência do terceiro ao quinto ano.

O prolongamento praxeológico se dá pela escrita polinomial na potência de base dez, associando-a a expressões algébricas, tomando-se $x = 10$. Essa recorrência como processo de algebrização explicitam as classificações polinomiais que aparecem nos livros didáticos de matemática do ensino fundamental.

Ao estruturar esse processo de algebrização, os confrontos institucionais foram inevitáveis, como as dos livros didáticos que compuseram as minhas praxeologias antes e depois de formado para exercer a profissão de professor de matemática.

Embora eu vislumbrasse apenas ampliar os estudos de Floriani (2000) para usá-los em sala de aula, inevitavelmente, surgiram indagações sobre os conteúdos essenciais para o ensino da álgebra elementar, que hoje as vejo à luz da TAD. Uma destas indagações é semelhante a um dos problemas docentes (PD) que Pilar Bolea (2003) indica como específico do ensino da álgebra escolar: “Que conteúdos da álgebra tenho que ensinar e explicar e como ensiná-los para que meus alunos os aprendam?” (p. 18, tradução nossa[14]).

Percebo o problema docente, apontado por Pilar Bolea, no âmbito da TAD mais especificamente nas praxeologias do professor de matemática. Principalmente nos tipos de tarefas T_i que temos que elaborar para iniciar nossos alunos no estudo da álgebra elementar.

Alguns desses tipos de tarefas T_i podem ter seus pressuposto no sistema de numeração decimal indo-arábico, como as que seguem:

- T_1: Identificar as ordens que cada algarismo indo-arábico ocupa;
- T_2: Representar os números na escrita polinomial de potência de base dez;
- T_3: Escrever a expressão algébrica que resulta de se tomar $x = 10$;
- T_4: Classificar o tipo de polinômio a partir da expressão algébrica obtida;
- T_5: Identificar o grau e o coeficiente de cada tipo de polinômio.

Esses tipos de tarefas estão em conformidade com as obras (livros didáticos) institucionalizadas pela noosfera. O que difere destas obras é a maneira de transpor as

[14] **PD1.** *¿Qué contenidos de álgebra tengo que enseñar y explicar y cómo harcelo para que mis alumnos lo aprendan?*

ideias iniciais que conectam a aritmética à álgebra. Isso sugere uma aritmetização da álgebra (USISKIN, 1995; KEPPKE, 2007; SOUSA, 2007).

Na compreensão de Gascón (1993 *apud* PILAR BOLEA, 2003, p. 66): “[...] *o modelo implícito dominante no ensino Secundário*[15] *identifica a* ***álgebra elementar*** *com uma espécie de* ***aritmética generalizada*** [...]” (tradução nossa[16], grifos no original, aqui grifos nosso).

O esboço inicial dessa aritmetização (Quadro 3) está associado aos não ostensivos: noção de ordens e classes no sistema de numeração decimal, noção de potenciação, noção de expressão algébrica, noção de classificação de tipos de polinômios e noção do que seja o grau e o coeficiente em um polinômio. Na manipulação desses não ostensivos estão os ostensivos: os algarismos indo-arábicos, os símbolos de somar e de multiplicar, a base e o expoente na potenciação, a letra *x* sendo a variável, a representação de uma expressão algébrica, o expoente da variável que representa o grau do polinômio e os números implícitos e explícitos que identificam os coeficientes de um polinômio.

Veremos nos Quadros 4, 5, 6, 7, 8 e 9, outras partes da estruturação da proposta didática que consta na monografia de Carvalho e Pereira (2009).

Quadro 4: Atividade proposta para se explorar tarefas t_i de tipos de tarefas T_i.

Continuando nossa proposta didática, vejamos como podemos adequar as ideias propostas por Floriani para resolver as seguintes operações com polinômios:

- Sejam os seguintes polinômios, $A = 5x^3 + 3x^2 + 2x + 1$, $B = 4x^3 + 5x^2 + 7x + 2$, $C = 4x^2 + 6x + 8$, $D = 7x^2 + 4x + 3$, $E = 9x^2 + 8x + 7$, $F = 3x^2 + 4x + 1$, $G = 5x^2 + 4x + 2$, $H = x^2 + 8x + 4$, $M = x^2 + 2x + 8$, $N = x + 2$, $P = 3x^2 + 2x + 4$, $Q = 4x^2 + 2$, $R = x^3 + 3x^2 + 7x + 6$, $S = x^2 + 2x + 4$. Determinemos $A + B$, $C + D$, $E – F$, $G – H$, $M \times N$, $P \times Q$ e $R : S$.

Como já destacamos, estaremos considerando sempre $x = 10$, em virtude de nossa proposta considerar o sistema de numeração de potência de base 10, por ser familiar a todos os alunos de sétima série do ensino fundamental.

Fonte: Carvalho; Pereira (2009, p. 38-39).

[15] Ensino Médio

[16] [...] el modelo implícito en la ensenãnza Secundária identifica el *álgebra elemental* con una especie de *aritmética generalizada*[...]

As tarefas t_i do Quadro 4 foram nomeadas no capítulo anterior por t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6 e t_7. Neste capítulo apresento a exploração dessas tarefas e a aplicação da técnica para resolver cada uma delas.

Quadro 5: Resolução da tarefa t_1.

$$\begin{array}{rlll} A = & 5x^3 + 3x^2 + 2x + 1 = & 5.10^3 + 3.10^2 + 2.10 + 1 = & 5000+300+20+1 \\ + B = & 4x^3 + 5x^2 + 7x + 2 = & 4.10^3 + 5.10^2 + 7.10 + 2 = & 4000+500+70+2 \\ \hline A+B = & 9x^3 + 8x^2 + 9x + 3 & 9.10^3 + 8.10^2 + 9.10 + 3 & 9000+800+90+3 \end{array}$$

Observemos que:

- $\mathbf{9}x^3 + \mathbf{8}x^2 + \mathbf{9}x + \mathbf{3} = \mathbf{9893}$
- $\mathbf{9}.10^3 + \mathbf{8}.10^2 + \mathbf{9}.10 + \mathbf{3} = \mathbf{9893}$
- **9**000+**8**00+**9**0+**3** = **9893**

Observe ainda que $5x^3 + 3x^2 + 2x + 1 = 5.10^3 + 3.10^2 + 2.10 + 1 =$ 5000+300+20+1 = **5321** e $4x^3 + 5x^2 + 7x + 2 = 4.10^3 + 5.10^2 + 7.10 + 2=$ 4000+500+70+2 = **4572**. Somando **5321** com **4572**, obtemos **9893**.

Na situação acima é evidente que os coeficientes do polinômio que resulta de A + B são os mesmos algarismos que aparecem no resultado de **5321 + 4572.**

Fonte: Carvalho e Pereira (2009, p. 39).

A tarefa t_1, exemplificada no Quadro 5, obedece às condições e restrições da técnica τ que permite converter os polinômios A e B em dois números inteiros positivos, em que a variável *x* assume o valor 10.

Os limites do alcance da técnica τ dependem dos coeficientes dos polinômios a serem somados. A soma desses coeficientes não deve superar o maior algarismo indo-arábico, ou seja, o algarismo nove. Essa é a condição e, também, a restrição necessária para que a técnica τ funcione corretamente.

Para Chevallard (1999) o êxito de uma técnica τ pode estar limitado a uma parte $P(\tau)$ das tarefas do tipo T, ou seja, é o que se denomina por alcance da técnica. Desse modo, a tarefa t_1 pertence a uma parte das tarefas do tipo T, na qual o alcance da técnica τ garante o processo resolutivo de tal tarefa.

Quadro 6: Resolução da tarefa t_2.

Em comparação ao processo da soma do polinômio A com o polinômio B, veremos que a soma do polinômio C com o polinômio D exigirá um maior cuidado nesse processo aditivo. Vejamos o que ocorre:

$$\begin{array}{rlclclcl}
C = & 4x^2 + 6x + 8 & = & 4.10^2 + 6.10 + 8 & = & 400 + 60 + 8 & = & 4\ 6\ 8 \\
+\ D = & 7x^2 + 4x + 3 & = & 7.10^2 + 4.10 + 3 & = & 700 + 40 + 3 & = & 7\ 4\ 3 \\
\hline
C+D = & 11x^2 + 10x + 11 & & 11.10^2 + 10.10 + 11 & & 1100 + 100 + 11 & & \mathbf{1211}
\end{array}$$

Fonte: Carvalho; Pereira (2009, p. 39).

A tarefa t_2 extrapola as condições e restrições do alcance da técnica τ. A necessidade de aperfeiçoá-la é inevitável (CHEVALLARD, 1999; FONSECA; BOSCH; GASCÓN, s/d).

Agora o alcance da técnica τ não permite converter os polinômios em números inteiros positivos e depois somá-los. A funcionalidade dessa técnica se restringe à representação dos polinômios até a decomposição dos números inteiros positivos, observando-se o valor posicional dos algarismos indo-arábicos no sistema de numeração decimal. Isso é o que mostra a tarefa t_2.

Quadro 7: Resolução da tarefas t_3 e t_4.

$$\begin{array}{rlclclcl}
E - F = E - (+F) = E = & 9x^2 + 8x + 7 & = & 9.10^2 + 8.10 + 7 & = & 900+80+7 & = & 987 \\
-\ (+F) = & -(3x^2 + 4x + 1) & = & -(3.10^2 + 4.10 + 1) & = & -(300+40+1) & = & -\ 341 \\
\hline
 & \mathbf{6}x^2 + \mathbf{4}x + \mathbf{6} & & \mathbf{6}.10^2 + \mathbf{4}.10 + \mathbf{6} & & \mathbf{6}00+\mathbf{4}0+\mathbf{6} & & \mathbf{646}
\end{array}$$

$$\begin{array}{rlclclcl}
G - H = G = & 5x^2 + 4x + 2 & = & 5.10^2 + 4.10 + 2 & = & 500 + 40 + 2 & = & 542 \\
-\ H = & -\ (1x^2 + 8x + 4) & = & -(1.10^2 + 8.10 + 4) & = & -\ (100 + 80 + 4) & = & -\ 184 \\
\hline
 & 4x^2 + (-4x) + (-2) & & 4.10^2 + (-4.10) + (-2) & & 400 + (-40) + (-2) & & \mathbf{358}
\end{array}$$

Fonte: Carvalho; Pereira (2009, p. 40).

No Quadro 7 a tarefa t_3, assemelha-se a tarefa t_1, vista no Quadro 5. Já a tarefa t_4 possui características próximas da tarefa t_2 que expus no quadro 6. Percebamos que a tarefa t_4 não se limita aos números inteiros positivos. Dois coeficientes que resultam da soma dos polinômios G e H possuem sinal negativo. Esse ostensivo evoca elementos tecnológicos que servem para ampliar o trabalho da técnica τ. Além disso, transformar os polinômios G e H em dois números inteiros positivos não faz sentido para essa tarefa. O resultado obtido quando se fez isso, mostrou que considerar o polinômio G = 542 e H = 184 e depois subtraí-los não confere equivalência aos coeficientes do polinômio $4x^2 + (-4x) + (-2)$. A saída para essa tarefa é a mesma anunciada para a tarefa t_2 quando se tratar da aplicação da técnica τ.

Com a tarefa t_4, os elementos tecnológicos da técnica τ passam a ser do âmbito do conjunto dos números inteiros. Porém, a teoria ainda é a aritmética.

Vejamos o que ocorre quando usamos a técnica τ na resolução da multiplicação e da divisão de polinômios (Quadros 8 e 9).

Quadro 8: Resolução das tarefas t_5 e t_6.

$M \times N = (1x^2 + 2x + 8) \times (1x + 2) = (1.10^2 + 2.10 + 8) \times (1.10 + 2) = (100+20+8) \times (10 + 2) = 128 \times 12 = \mathbf{1536}$

$$\begin{array}{lll}
1x^2 + 2x + 8 & 1.10^2 + 2.10 + 8 & 100+20+8 \\
\times \quad 1x + 2 & \times \quad (1.10 + 2) & \times \; 10 + 2 \\
\hline
1x^3 + 2x^2 + 8x & 1.10^3 + 2.10^2 + 8.10 & 1000 + 200 + 80 \\
\quad +2x^2 + 4x + 16 & \quad +2.10^2 + 4.10 + 16 & \quad + 200 + 40 + 16 \\
\hline
1x^3 + 4x^2 + 12x + 16 & 1.10^3 + 4.10^2 + 12.10 + 16 & 1000 + 400 + 120 + 16
\end{array}$$

$P \times Q = (3x^2 + 2x + 4) \times (4x^2 + 2)$

$$\begin{array}{lclclcl}
3x^2 + 2x + 4 & = & 3.10^2 + 2.10 + 4 & = & 300 + 20 + 4 & = & 324 \\
\times \; 4x^2 + 0x + 2 & = & 4.10^2 + 0.10 + 2 & = & 400 + 0 + 2 & = & \times \; 402 \\
\hline
12x^4+8x^3+16x^2 & & 12.10^4+8.10^3+16.10^2 & & 120000 + 8000 + 1600 & & \mathbf{130248} \\
\quad +0x^3+0x^2+0x & & \quad + 0.10^3 + 0.10^2 + 0.10 & & \quad + 0 \; + \; 0 \; + 0 & & \\
\qquad +6x^2 + 4x + 8 & & \qquad + 6.10^2 + 4.10 + 8 & & \quad + 600 + 40 + 8 & & \\
\hline
12x^4 + 8x^3 + 22x^2 + 4x + 8 & & 12.10^4 + 8.10^3 + 22.10^2 + 4.10 + 8 & & 120000+8000+2200+40+8 & &
\end{array}$$

Fonte: Carvalho; Pereira (2009, p. 41).

As tarefas t_5 e t_6 seguem o processo resolutivo estabelecido nos livros didáticos. A estrutura resolutiva segue o algoritmo aritmético da multiplicação. A resolução dessas duas tarefas pela conversão dos polinômios M, N, P e Q em números inteiros positivos não satisfaz as mesmas ideias da multiplicação do polinômio M pelo N e do polinômio P pelo Q. O porquê disso são os coeficientes desses polinômios que, quando multiplicados e somados, ultrapassam o valor do algarismo indo-arábico nove.

O funcionamento da técnica τ nas tarefas t_5 e t_6 está condicionado aos valores dos coeficientes dos polinômios. Por exemplo, obtemos pela técnica τ o produto do polinômio $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ pelo polinômio $x^3 + x^2 + x + 1$.

- $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 1.\ 10^4 + 1.\ 10^3 + 1.10^2 + 1.\ 10 + 1 = 11111$;
- $x^3 + x^2 + x + 1 = 1.\ 10^3 + 1.10^2 + 1.\ 10 + 1 = 1111$;
- $(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)\ (x^3 + x^2 + x + 1) = x^7 + 2x^6 + 3x^5 + 4x^4 + 4\ x^3 + 3\ x^2 + 2x + 1 = 1.10^7 + 2.\ 10^6 + 3.\ 10^5 + 4.\ 10^4 + 4.\ 10^3 + 3.\ 10^2 + 2.\ 10 + 1 = 12344321$;
- $11111 \times 1111 = 12344321$.

A aplicabilidade da técnica τ na multiplicação de polinômios está restrita a tipos de polinômios: **monômio, binômio, trinômio e polinômios de até nove termos com coeficientes positivos iguais a 1**.

A melhor forma de se aplicar a técnica τ na multiplicação de polinômios é representá-los na escrita polinomial de potência de base dez e, em seguida, representar os termos algébricos desses polinômios como valores posicionais no sistema de numeração decimal. Após isso, multiplicar como exposto no quadro 8. O expoente da variável é indicado pela quantidade de zeros de cada valor numérico obtido em ordem decrescente.

Ilustro o exposto no parágrafo anterior, recorrendo à tarefa de uma obra do Ensino Médio.

> Considerando os polinômios $P_1(x) = x^3 + 2x - 1$, $P_2(x) = x^3 - 3x$ e $P_3(x) = x + 4$, determine: $P_1(x)\ .\ P_2(x)\ .\ P_3(x)$ (BUCCHI, 1998, p. 194).

Vou resolver a tarefa proposta em duas etapas. A primeira etapa consiste multiplicar $P_1(x)$ com $P_2(x)$. Na segunda etapa multiplicarei o produto resultante pelo polinômio $P_3(x)$.

Vejamos a resolução dessa tarefa:

- $P_1(x) = x^3 + 2x - 1 = 1\ .10^3 + 0.\ 10^2 + 2.\ 10 - 1 = 1000 + 0 + 20 - 1$;
- $P_2(x) = x^3 - 3x = 1.\ 10^3 + 0.\ 10^2 - 3.\ 10 = 1000 + 0 - 30$;
- $P_3(x) = x + 4 = 1.\ 10 + 4 = 10 + 4$;
- $(1000 + 0 + 20 - 1) \times (1000 + 0 - 30) =$

1000 + 0 + 20 – 1

× 1000 + 0 – 30

1000000 + 0 + 20000 – 1000

+ 0 + 0 + 0 + 0

- 30000 + 0 - 600 + 30

1000000 + 0 – 10000 – 1000 – 600 + 30 = $x^6 – x^4 – x^3 – 6x^2 + 3x$

1000000 + 0 – 10000 – 1000 – 600 + 30

× 10 + 4

10000000 + 0 - 100000 - 10000 - 6000 + 300

+ 4000000 + 0 - 40000 - 4000 - 2400 + 120

1**0000000** + 4**000000** - 1**00000** - 5**0000** - 10**000** - 21**00** + 12**0**

Portanto, $P_1(x)$. $P_2(x)$. $P_3(x)$ = 1**0000000** + 4**000000** - 1**00000** - 5**0000** - 10**000** - 21**00** + 12**0 =** $x^7 + 4x^6 – x^5 – 5x^4 – 10x^3 – 21x^2 + 12x$.

Não foi minha intenção elaborar a técnica τ para ensinar operações com polinômios no Ensino Médio. O que me propus foi elaborá-la para possibilitar aos professores de matemática do Ensino Fundamental uma alternativa praxeológica para tratar a adição, a subtração, a multiplicação e a divisão de polinômios numa perspectiva que conecte a aritmética à álgebra. Deste modo, a tarefa anterior, serve para evidenciar a manipulação dos objetos ostensivos e não ostensivos (CHEVALLARD e BOSCH, 1999; ALMOULOUD, 2007) que permitiram a evolução da teoria aritmética até a álgebra (ALMEIDA, 2007; IFRAH, 1997a, 1997b e 2005; CAJORI, 2007; CONTADOR, 2008; GALVÃO, 2008; WECHELUN, 1562) se consolidar como uma teoria dominante nas práticas sociais humanas (PILAR BOLEA, 2003; DE MAIO, 2009 e 2011, CHEVALLARD, 2009a).

Na compreensão de Andrade (2007), os ostensivos e os não ostensivos são fundamentais na idealização de uma técnica.

> [...] A co-ativação dos objetos ostensivos e não ostensivos no desenvolvimento de uma técnica pressupõe a manipulação de objetos ostensivos regulados pelos não ostensivos. Os objetos ostensivos constituem a parte perceptível da organização matemática. Apesar de estar sendo enfocada a coativação no nível da técnica, esta co-ativação de objetos ostensivos e não ostensivos é sempre presente tanto no nível da técnica como no ambiente tecno-teórico [...] (Ibidem, p. 47).

Abstraio da citação acima que a co-ativação dos objetos ostensivos e não ostensivos estão em dialética para que a técnica τ funcione na divisão de polinômios. Vejamos como isso ocorreu na tarefa t_7 que exibo no Quadro 9.

Quadro 9: Resolução da tarefa t_7.

R **:** S = $1\,x^3 + 3x^2 + 7x + 6$ **:** $1x^2 + 2x + 4 = 1.10^3 + 3.10^2 + 7.10 + 6$ **:** $1.10^2 + 2.10 + 4$ = 1000+300+70+6 **:** 100+20+4 = 1376 **:** 124 =

137'6'	124	$1\,x^3 + 3x^2 + 7x + 6$	$1x^2 + 2x + 4$
- 124	**11 = 1x + 1**	$-\ (1x^3 + 2x^2 + 4x)$	**1**x + **1** = **11** (quociente)
0136		$0 + 1x^2 + 3x + 6$	
- 124		$-\ (1x^2 + 2x + 4)$	
0**12 = 1x + 2**		0 + **1**x + **2** = **12** (resto)	

Fonte: Carvalho; Pereira (2009, adaptado de FLORIANI, 2000, p. 110).

A tarefa t_7 é uma tarefa que admite o trabalho da técnica τ por meio da conversão dos polinômios em números inteiros positivos.

Os objetos ostensivos – algarismos indo-arábicos, variável x, símbolos operatórios, escrita polinomial na potência de base dez, entre outros – estão em diálogo com os não ostensivos – noção de potenciação, correspondência do valor da variável na escrita polinomial de potência de base dez, equivalência do expoente da base dez com ordens e classes no sistema de numeração posicional, noção dos termos da divisão aritmética em relação a divisão de polinômios.

A tarefa t_7 é um caso particular em que se consegue aplicar a técnica τ, convertendo o polinômio dividendo e o polinômio divisor em dois números inteiros positivos e proceder à divisão de polinômios no âmbito da divisão aritmética. No Quadro 10, indico mais um exemplo dessa tarefa.

Quadro 10: Resolução de outro exemplo da tarefa t_7.

$$
\begin{array}{rl}
1444'6' & \underline{|\ 412} \\
-\ 1236 & \mathbf{35} = \mathbf{3x{+}5} \\
\hline
02086 & \\
-\ 2060 & \\
\hline
0026 = \mathbf{2x + 6} &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l|l}
12x^3 + 23x^2 + 13x + 16 & 4x^2 + 1x + 2 \\
\cline{2-2}
-(12x^3 + 3x^2 + 6x) & \mathbf{3x + 5} = \mathbf{35} \\
\cline{1-1}
0 + 20x^2 + 7x + 16 & \\
-\ (20x^2 + 5x + 10) & \\
\cline{1-1}
0\ + \mathbf{2x + 6} = \mathbf{26} &
\end{array}
$$

Fonte: Carvalho e Pereira (2009, p. 43).

A grande maioria dos tipos de tarefas de divisão de polinômios foge a alusão da técnica τ. A conversão do polinômio dividendo e do polinômio divisor nesses tipos de tarefas é mais uma espécie de cálculo do valor numérico desses polinômios que, propriamente, a aplicação da técnica τ. No Quadro 11 exibo as tarefas t_8 e t_9 que ilustram isso.

Quadro 11: Resolução das tarefas t_8 e t_9.

***t_8*:** 6x3 + 6x + 4 : $1x^2$ + 2 = 6.10^3 + 6.10 + 4 : 1.10^2 + 2 = 6000 + 60 + 4 **:** 100 + 2 = 6064 : 102 =

$$
\begin{array}{rl}
606'4' & \underline{|\ 102} \\
-\ 510 & 59 = 5x + 9 \\
\hline
0964 & \\
-\ 918 & \\
\hline
046 = 4x + 6 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l|l}
\mathbf{6x^3 + 0x^2 + 6x + 4} & \mathbf{1x^2 + 0x + 2} \\
\cline{2-2}
-(6x^3 + 0x^2 + 12x) & \mathbf{6x} \\
\cline{1-1}
0 + 0x^2 - 6x + 4 = \mathbf{-\ 6x + 4} &
\end{array}
$$

***t_9*:** $5x^4$ +2 : $3x^2$ + 1x = 5.10^4 + 2 : 3.10^2 +1.10 = 50000 + 2 : 300 + 10 = 50002 : 310 =

$$
\begin{array}{rl}
500'0'2' & \underline{|\ 310} \\
-\ 310 & 161 = 1x^2 + 6x + 1 \\
\hline
1900 & \\
-1860 & \\
\hline
00402 & \\
-310 & \\
\hline
092 = 9x + 2 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l|l}
5x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 0x + 2 & 3x^2 + 1x \\
\cline{2-2}
-\ (5x^4 + \frac{5}{3}x^3) & \frac{5}{3}x^2 - \frac{5}{9}x + \frac{5}{9} \\
\cline{1-1}
-\ \frac{5}{3}x^3 + 0x^2 + 0x + 2 & \\
-\ (-\ \frac{5}{3}x^3 - \frac{5}{9}x^2) & \\
\cline{1-1}
+\ \frac{5}{9}x^2 + 0x + 2\ \ -(\frac{5}{9}x^2 + \frac{5}{9}x) = -\ \frac{5}{9}x + 2 &
\end{array}
$$

Fonte: Carvalho; Pereira (2009, p. 44-47).

As tarefas t_8 e t_9 possuem polinômios incompletos. Esses tipos de polinômios na divisão polinomial possuem abstrações nem sempre de fácil compreensão no ensino da álgebra elementar. Assim, converter esses polinômios em números inteiros positivos, ajuda a visualizar os coeficientes nulos que estão implícitos nesses polinômios. Agora, proceder à divisão aritmética em equivalência à divisão polinomial, nesses casos, não é o recomendável porque o quociente e o resto que se obtém na divisão aritmética são diferentes do quociente e do resto da divisão polinomial. Vemos assim um tipo de restrição que impõe limites ao uso da técnica τ no tratamento da divisão polinomial no Ensino Fundamental.

Na tarefa t_9, a técnica τ passa por uma sofisticação tecnológica e teórica. Isso é motivado porque tanto o quociente quanto o resto são compostos por números racionais. Deste modo, a tecnologia está no conjunto dos números racionais e a teoria está mais próxima do campo algébrico, mas ainda se sustenta na aritmética.

Entendo que o contexto histórico-epistemológico descrito no segundo capítulo, do qual mostro alguns sistemas de numeração, precursores do sistema de numeração indo-arábico (ALMEIDA, 2007; IFRAH, 1997a, 1997b), serviram de base teórica para que os Hindus e os Árabes aperfeiçoassem a representação dos ostensivos algarismos indo-arábicos e assim desenvolvessem técnicas de cálculos aritméticos que permitiram a resolução de vários problemas algébricos (GALVÃO, 2008; CONTADOR, 2008). Associo essas ideias com as que estão postas na tarefa t_9. A funcionalidade da técnica τ é restritiva, mas serve para dirimir o porquê de se completar com coeficientes nulos os polinômios incompletos.

A condição imposta pela tarefa t_9, ou seja, o uso do objeto ostensivo fração, envolve o trabalho da técnica em diferentes tipos de tarefas e assim aperfeiçoá-la.

O aperfeiçoamento da técnica τ, com base nos tipos de tarefas que apresentei neste capítulo, deve contemplar os elementos tecnológico-teóricos do conjunto dos números reais e tratar as quatro operações com polinômios, aqui expostos, na perspectiva da escrita polinomial na potência de base dez. Para isso, o professor de matemática precisa, primeiro, propor tipo de tarefas que envolvam as quatro operações aritméticas fundamentais e tornar rotineira a técnica resolutiva dessas operações por meio da escrita polinomial na potência de base dez. O passo seguinte é converter essas mesmas operações em operações polinomiais e avaliar a aplicabilidade da técnica τ nessas operações. Para Chevallard (1999) o alcance da técnica cumpre um papel importante nesses tipos de tarefas T_i.

> Em primeiro lugar, uma técnica ô[17] - uma "maneira de fazer" – não tem êxito mais que sobre uma *parte P(ô)* das tarefas do tipo T que é relativa a parte que se denomina *alcance* da técnica: a técnica tende a *fracassar* sobre T\P(ô) de maneira que podemos dizer "não se sabe, *em geral*, realizar as tarefas do tipo T" (Ibidem, s. n./p., tradução nossa[18], grifos no original).

Os encaminhamentos tecnológico-teóricos, advindos com a tarefa t_9 estão em conformidade com a Teoria Antropológica do Didático. Nesse aspecto, avalio a técnica τ como uma alternativa didática que auxiliará a prática do professor de matemática no tratamento da adição, da subtração, da multiplicação e da divisão de polinômios, no âmbito da álgebra elementar ensinada no oitavo ano do ensino fundamental. Entretanto, ela é apenas um caminho inicial para o ensino dessas operações polinomiais. Deste modo, recomendo não se perder de vista as concepções da álgebra, indicadas por Usiskin (1995), pois, o ensino da álgebra no contexto escolar caminha no sentido do estudo das estruturas algébricas, na qual a abstração é a essência principal.

4. Episódio IV: Relatando meus estudos e minha prática docente como parte de uma nova praxeologia

As praxeologias assumidas por mim antes do curso de especialização são partes estruturantes do meu equipamento praxeológico. Essas praxeologias se revelam na minha prática docente em uma dinâmica cognitiva combinada ao equipamento praxeológico que se atualizou durante o curso de especialização.

Essa atualização do meu equipamento praxeológico iniciou na primeira disciplina do curso de especialização, denominada de Tendências Metodológicas em Educação Matemática. O professor ministrante dessa disciplina propôs uma abordagem metodológica e didática, na qual associava o ensino de polinômios, no ensino fundamental, ao valor posicional dos algarismos indo-arábicos no conjunto dos números naturais (nesta pesquisa são ditos números inteiros positivos).

[17] O mesmo que τ.

[18] En primer lugar, una técnica ô -una "manera de hacer"- no tiene éxito más que sobre una *parte P*(ô) de las tareas del tipo *T* a la cual es relativa, parte que se denomina *alcance* de la técnica: la técnica tiende a *fracasar* sobre *T* \ P(ô) de manera que se puede decir que "no se sabe, *en general*, realizar las tareas del tipo *T* ".

Impulsionado por isso, lembrei-me que já lera um livro que propunha uma ideia parecida. Esse livro tinha por título "**Professor e Pesquisador: (exemplificação apoiada na matemática)**", escrito em 2000 por José Valdir Floriani.

Decidi investir na proposta do professor, retomei o estudo da obra de Floriani (2000). Porém, enfocando compreender que tipo de proposta para o ensino de polinômios esse autor indicava em sua obra. Ao estudar a obra de Floriani, motivei-me com a proposta didática que ele indicava, porque concernia equivalência com a do professor.

Ao aprofundar o estudo da obra de Floriani, conflitos cognitivos afloraram. Os exemplos de tipos de tarefas que ele apresentava em sua obra estavam em conformidade com a técnica idealizada por ele, dentro do limite de alcance dessa técnica.

Quando resolvi explorar outros exemplos que não constavam na obra de Floriani (2000), os embates praxeológicos foram inevitáveis. Percebi que o alerta que Floriani fez para se evitar exemplos com transporte de unidades ou exemplos com coeficientes negativos fazia sentido, porque eram tipos de tarefas problemáticas. Esses tipos de tarefas problemáticas estão de acordo com Chevallard (1999, s.n./p, tradução nossa[19]): "[...] *em um universo de tarefas rotineiras, surgem a todo momento, aqui e ali, as tarefas problemáticas que não se sabe ainda resolvê-las* [...].

Uma dessas tarefas eu a enuncie como sendo a tarefa t_{10}: *Dados os polinômios* $A = -2x^4 - 11x^3 - x^2 + 18x + 8$ *e* $B = x^2 + 5x + 2$*, determinar o quociente de A por B.*

Enunciando a tarefa t_{10}, não me dei conta da sua complexidade. Parecia ser rotineira resolvê-la pela maneira como propunha Floriani, enganei-me. Vejamos o que fiz na tentativa de resolvê-la.

Primeiro calculei o valor numérico de cada um dos polinômios, atribuindo a *x* o valor 10. Em seguida dividi o valor numérico de A por B. Assim:

- $A = -2.\ 10^4 - 11.10^3 - 1.10^2 + 18.\ 10 + 8 = -20000 - 11000 - 100 + 180 + 8 = -31100 + 188 = -30912 = (-1).(30912);$
- $B = 1.\ 10^2 + 5.\ 10 + 2 = 100 + 50 + 2 = 152;$

[19] [...] en un universo de tareas rutinarias, surgen en todo momento, aquí y allí, las tareas problemáticas que no se sabe -aún- realizar [...]

309’1’2’ | 152

- 304 $\quad$ 203 = (-1) . (203)= -203 = $-2x^2 - 3$

00512

- 456

056 = (-1) . (56) = -56 = -5x – 6.

Para verificar se a resolução acima coincidia com as mesmas respostas pelo valor posicional e pela escrita na potência de base dez, procedi como segue:

- 20000 – 11000 – 100 + 180 + 8 | 100 + 50 + 2

- (- 20000 – 10000 – 400) $\quad$ - 200 - 10 + 10 - 5 + 2 = -200 -3 = -203

- 1000 + 300 + 180 + 8 =

= -1000 + 400 + 80 + 8

- (-1000 – 500 – 20)

+ 900 + 100 + 8 = 1000 + 0 + 0 + 8

- (1000 +500 + 20)

- 500 - 20 + 8

- (-500 - 250 -10 = -700 - 60)

200 + 40 + 8

- (200 + 100 + 4 = 300 + 0 + 4)

- 100 + 40 + 4 = -56

$- 2.\ 10^4 - 11.\ 10^3 - 1.\ 10^2 + 18.\ 10 + 8$ | $1.\ 10^2 + 5.\ 10 + 2$

$-(- 2.\ 10^4 - 10.\ 10^3 - 4.\ 10^2)$ $\quad$ $- 2.\ 10^2 - 1.\ 10 + 8 = -2x^2 - x + 8$

$- 1.\ 10^3 + 3.\ 10^2 + 18.\ 10 + 8$

$-(- 1.\ 10^3 - 5.\ 10^2 - 2.\ 10)$

$8.\ 10^2 + 20.\ 10 + 8$

$-(8.\ 10^2 + 40.\ 10 + 16)$

$- 20.\ 10 - 8 = -20x - 8$

A complexidade da tarefa t_{10} não foi explicitada e nem tratada por Floriani. Ele apenas alertou que o professor deveria estudá-la para poder propô-la aos alunos.

A resolução da divisão do número inteiro negativo – 30912 pelo número inteiro positivo 152, não estava de acordo com as intenções da proposta sugerida pelo professor ministrante da disciplina Tendências Metodológicas em Educação Matemática.

As minúcias que envolvem essa tarefa não faziam parte da minha formação, muito menos, da minha prática docente. Para avançar no processo resolutivo, adotei os procedimentos que julguei necessários. Os procedimentos adotados não constam na maioria dos livros didáticos de matemática. Tive que adaptá-los ou imaginá-los. Um exemplo disso é o processo resolutivo pelo valor posicional. O quociente, **- 200 - 10 + 10 - 5 + 2,** não é o modelo institucionalizado. Possui particularidades que fogem à convencionalidade do algoritmo euclidiano.

Na resolução pela escrita na potência de base dez, os coeficientes dos termos não seguem o rigor de que eles sejam maiores ou iguais a zero e menores que dez. O coeficiente do termo **18. 10** transgride isso. No termo **-11.** $\mathbf{10^3}$, temos um coeficiente negativo que descaracteriza o rigor da escrita na potência de base dez. Deste modo, igualei a escrita na potência de base dez a de um polinômio na variável *x*.

O confronto das respostas obtidas nos três processos resolutivos foi imediato. O quociente e o resto pelo algoritmo usual e pelo valor posicional foram os mesmos, mas diferiram do quociente e do resto pela escrita na potência de base dez. Então, qual deles é igual ao quociente e ao resto da divisão do polinômio A por B? A resposta a essa pergunta está descrita no processo resolutivo da divisão polinomial. Vejamos o que fiz:

$$\begin{array}{l|l}
-2x^4 - 11x^3 - 1x^2 + 18x + 8 & 1x^2 + 5x + 2 \\ \cline{2-2}
\underline{-(-2x^4 - 10x^3 - 4x^2)} & -2x^2 - 1x + 8 \\
\quad -1x^3 + 3x^2 + 18x + 8 & \\
\quad \underline{-(-1x^3 - 5x^2 - 2x)} & \\
\qquad 8x^2 + 20x + 8 & \\
\qquad \underline{-(8x^2 + 40x + 16)} & \\
\qquad\quad -20x - 8 &
\end{array}$$

A resolução acima motivou algumas observações:

- O quociente que resultou da divisão de –30912 por 152 é o mesmo obtido pelo valor posicional, ou seja, -203 que gera o polinômio $-2x^2 - 3$, logo diferente de $-2x^2 -1x + 8$;
- O quociente e o resto, respectivamente, resultantes da divisão pela escrita na potência de base dez são $-2.\ 10^2 -1.\ 10 + 8$ e $-20.\ 10 - 8$, que geraram os polinômios $-2x^2 - x + 8$ e $-20x - 8$;
- Os polinômios $-2x^2 - x + 8$ e $-20x - 8$ são, respectivamente, o quociente e o resto da divisão do polinômio A por B.

Ao anunciar a tarefa t_{10}, criei uma relação em não conformidade (CHEVALLARD, 2002) com os tipos de tarefas constantes na obra de Floriani (2000) e na Monografia de Carvalho e Pereira (2009). Nascia assim uma alteração praxeológica não prevista no trabalho da técnica τ, que apenas preconizava tipos de tarefas T_i associados ao sistema de numeração decimal. Vejo isso, implícito nas seguintes palavras de Chevallard (2009a, p. 4, tradução nossa): “[...] *Alterações e recombinações praxeológicas são, portanto, um fenômeno no coração da história social das praxeologías”.*

A tarefa t_{10} possui objetos não ostensivos que começam a ser materializados ostensivamente no sétimo ano do ensino fundamental: **representação dos números inteiros positivos e negativos, usando os sinais + e – ; operações algébricas com números negativos e positivos (-2 – (- 2), (+5) . (- 2), (-2) ÷ (+1)); regra de jogo de sinais do tipo (+) . (-) = -** , (-) ÷ (-) = +, etc. Antes disso, predomina os algarismos indo-arábicos na composição posicional do sistema de numeração decimal e a extensão destes para os números naturais.

A aplicação da proposta didática em sala de aula rendeu alguns momentos inusitados que conflitaram o meu universo cognitivo e modificaram o meu equipamento praxeológico para ensinar operações com polinômios. Esses momentos constam na monografia de Carvalho e Pereira (2009) e alguns deles são frutos das ideias dos próprios alunos que remodelaram a maneira de solucionar tipos de tarefas T_i pela técnica τ.

A turma a qual apliquei a proposta didática era de sétima série (oitavo ano) do ensino fundamental e possuía, inicialmente, 29 alunos. Desses, efetivamente, participavam das aulas 21 alunos que foram identificados por: “A01, A02, A04, A05, A06, A07, A08, A09, A10, A11, A12, A14, A15, A16, A18, A19, A23, A24, A25, A26, A28 e A29” (CARVALHO; PEREIRA, 2009, p. 5). A aplicação da proposta didática em sala de aula ocorreu no primeiro semestre do ano letivo de 2008.

A proposta didática foi efetivada num total de 18 aulas, cada uma com duração de 90 minutos (CARVALHO; PEREIRA, 2009, p. 49). Durante algumas dessas aulas, os alunos foram estimulados a solucionarem tipos de tarefas T_i com base em seus conhecimentos prévios sobre sistema de numeração decimal e operações aritméticas fundamentais. O propósito dessas aulas estava vinculado à teoria ausubeliana da Aprendizagem significativa. As outras aulas foram destinadas ao tratamento das operações polinomiais de somar, subtrair, multiplicar e dividir, recorrendo à técnica τ, manipula ostensivamente o valor posicional dos algarismos indo-arábicos e a escrita polinomial na potência de base dez.

Na aula de número 13(09/06/2008) propus aos alunos a seguinte tarefa:

- Somar os polinômios: $2x + 3$ com $6x^2 +2x +5$ e $x^2 + x + 5$ com $4x^3 + x^2 +5x +1$ (CARVALHO; PEREIRA, 2009, p. 71).

Essa tarefa objetivava que os alunos utilizassem a técnica τ para solucioná-la. De fato, eles assim fizeram, mas o que marcou a resolução dessa tarefa foi opinião dos alunos.

> Na opinião dos alunos, a forma mais simples seria não usar a representação na potência de base 10, mas sim utilizar o valor posicional, pois seria menos complicado. Eles ainda disseram que o expoente da incógnita representava a quantidade de zero(s) que devemos escrever atrás do coeficiente. Consequentemente, **$2x + 3 = 20 + 3 = 23$** e **$6x^2 + 2x +5 = 600 + 20 +5 = 625$. Dessa forma, $2x + 3 + (6x^2 + 2x +5) = 20 + 3 + (600 + 20 + 5) = 600 + 20 + 20 + 3 + 5 = 600 + 40 + 8 = 6x^2 + 4x + 8$** (CARVALHO; PEREIRA, 2009, p. 71-72, grifos no original).

A opinião desses alunos mostra que a técnica τ foi mais bem compreendida pela manipulação ostensiva do valor posicional dos algarismos indo-arábicos, porque significou para eles menor dificuldade para solucionarem esse tipo de tarefa de somar polinômios. No âmbito da TAD, vejo isso implícito no bloco do saber-fazer (ALMOULOUD, 2007).

Outra tarefa que os alunos se confrontaram na aula 13 serviu para mostrar que nem sempre a representação dos polinômios pelo valor posicional dos algarismos indo-arábicos convém para certos tipos de tarefas que envolvem soma de polinômios.

> Aos alunos foi pedido que somassem o polinômio **$6x^4 + 2x^2 + 3x + 9$ com o polinômio $x^4 + x^2 + 3x + 6$.**
> O aluno **A14** foi o primeiro a terminar a questão. Ele usou a potência de base 10 para resolvê-la, então pedimos a ele que mostrasse no quadro de escrever o que tinha feito para resolver a adição. O processo segue abaixo:
> **$6x^4 + 2x^2 + 3x + 9 = 6.10^4 + 2.10^2 + 3.10^1+ 9$**
> **$x^4 + x^2 + 3x + 6 = 1.10^4 + 1.10^2 + 3.10^1 + 6$**

> **$6.10^4 + 2.10^2 + 3.10^1 + 9 + 1.10^4 + 1.10^2 + 3.10^1 + 6 = 6.10^4 + 1.10^4 + 2.10^2 + 1.10^2 + 3.10^1 + 3.10^1 + 9 + 6 = 7.10^4 + 3.10^2 + 6.10^1 + 15 = 7x^4 + 3x^2 + 6x + 15$**
> Outros alunos preferiram usar o valor posicional, conforme já tinham enfatizado.
> **$6x^4 + 2x^2 + 3x + 9 = 60000 + 200 + 30 + 9 = 60239$**
> **$x^4 + x^2 + 3x + 6 = 10000 + 100 + 30 + 6 = 10136$**
> $$\begin{array}{r} 1 \\ 60239\,+ \\ \underline{10136} \\ 70375 \end{array} = 7x^4 + 0x^3 + 3x^2 + 7x + 5 = 7x^4 + 3x^2 + 7x + 5$$
> Os alunos que fizeram conforme o processo acima, observaram que o resultado era diferente do resultado que o aluno **A14** tinha encontrado, isto é, os polinômios eram diferentes em dois termos algébricos (CARVALHO; PEREIRA, 2009, p. 72-23, grifos no original).

O descrito na citação evidencia o limite do alcance da técnica τ pelo valor posicional dos ostensivos algarismos indo-arábicos em certos tipos de tarefas T_i. Percebo nessa mesma citação a avaliação dos tipos de tarefas T_i que Chevallard (1999) expõe em três critérios:

> - *critério da identificação*: os tipos de tarefas *T* estão claramente *abertos* e identificados? Em particular, estão representados pelo corpus K_i efetivamente disponíveis de espécimes suficientemente numerosos e adequadamente regulados? Ou, ao contrário, não são conhecidos mais que alguns espécimes poucos representativos?
> -*critérios das razões de ser*: as razões de ser dos tipos de tarefas *Ti*, estão explicitadas? Ou ao contrário, estes tipos de tarefas aparecem desmotivados?
> - *critério de pertinência*: os tipos de tarefas considerados proporcionam uma boa amostra das situações matemáticas encontradas? São pertinentes na visão das necessidades matemáticas dos alunos, para hoje em dia? Para amanhã? Ou ao contrário aparecem como "isoladas" sem relação verdadeira – ou explicita – com o resto da atividade (matemática e extramatemática) dos alunos? (CHEVALLARD, 1999, s/n.p., tradução nossa[20]).

Pelo que compreendi, Chevallard quer que os tipos de tarefas T tenham uma razão de ser, pertinentes com outros tipos de tarefas que devemos enfrentar. Deste modo, a tarefa que citei de Carvalho e Pereira (2009, p. 72-73) propiciou isso para mim e para os alunos no momento de sua efetivação em sala de aula. Além do que ocorreu mais uma atualização do meu equipamento praxeológico. A citação a seguir complementa o que exponho aqui.

---

[20] - *criterio de identificación*: los tipos de tareas *T*, ¿están claramente *despejados* y bien identificados? En particular, ¿están representadas por los corpus *Ki* efectivamente disponibles de especímenes suficientemente numerosos y adecuadamente calibrados? ¿O, al contrario, no son conocidos más que por algunos especímenes poco representativos?
- *criterio de las razones de ser*: las *razones de ser* de los tipos de tareas *Ti* ,¿están explicitadas? ¿O al contrario, estos tipos de tareas aparecen desmotivados?
- *criterio de pertinencia*: los tipos de tareas considerados ¿proporcionan una buena muestra de las situaciones matemáticas encontradas? ¿Son pertinentes en la visión de las necesidades matemáticas de los alumnos, para hoy en día? ¿Para mañana? ¿O al contrario aparecen como "aisladas" sin relación verdadera -o explícita- con el resto de la actividad (matemática y extramatemática) de los alumnos?

> Explicamos que o aluno A14 ao aplicar a potência de base 10 para resolver a soma de $6x^4 + 2x^2 + 3x + 9$ com $x^4 + x^2 + 3x + 6$, ele fez o procedimento de somar termos semelhantes e nesse processo não ocorre transformação de ordem (decomposição de termo algébrico) porque não é necessária. Entretanto, quando se utiliza o valor posicional, a soma é aritmética e neste caso, a transformação de ordem ocorre naturalmente.
> Com a observação acima, os alunos reclamaram dizendo que propusemos a questão mais difícil para eles, diferente das que tínhamos feito como exemplos iniciais.
> Explicamos que não era bem isso. O que ocorreu nos exemplos resolvidos por nós, foi o fato de não haver necessidade de transformação de ordens na soma aritmética, entretanto, na soma de 60239 com 10136 ocorre essa transformação porque 9 unidades mais 6 unidades é igual a 15 unidades. Como 1 dezena é igual a 10 unidades, então em 15 unidades temos 1 dezena e 5 unidades. Essa uma dezena é o 1 que aparece na soma que eles fizeram (adição com reserva).
> O aluno **A14** quis saber se os valores envolvidos na soma de polinômios eram sempre os coeficientes dos termos semelhantes e se ao somar coeficientes maiores ou iguais a 10 o resultado ficaria de fato, na frente da letra. Respondemos que sim e que na soma, assim como na subtração, isso aconteceria.
> As situações evidenciadas nesta aula nos ofertaram algumas situações cruciais à proposta didática que aplicávamos em sala de aula. Entre elas destacamos, principalmente, os questionamentos dos alunos frente às dificuldades e as dúvidas surgidas durante a resolução da adição de polinômios proposta (CARVALHO; PEREIRA, 2009, p. 73).

Depois da aula 13, o fato mais marcante para mim se revelou na aula final da aplicação da proposta didática, ou seja, a aula 18. Nessa aula, eu e colega de pesquisa da monografia de Carvalho e Pereira (2009) propusemos aos alunos que resolvessem um exercício contendo vários tipos de tarefas T. Uma dessas tarefas era somar $5x^3 + 3x^2 + 2x + 1$ com $4x^3 + 5x^2 + 7x + 2$.

Para essa tarefa um aluno apresentou um processo resolutivo diferente dos outros alunos que empregavam a técnica τ para solucionar as tarefas propostas. Ao analisarmos o processo desse aluno, reconhecemos a pertinência do que ele tinha feito, porém, havia um erro no processo resolutivo esboçado por ele e orientamo-lo a corrigi-lo, que assim o procedeu. O Quadro 12 mostra o que o aluno fez antes e depois da nossa orientação e as nossas observações sobre o processo resolutivo esboçado.

Quadro 12: Resolução apresentada por um aluno para a tarefa: somar $5x^3 + 3x^2 + 2x + 1$ com $4x^3 + 5x^2 + 7x + 2$.

- Resolução com erro:

$5x^3 + 3x^2 + 2x + 1$		5	3	2	1	
$4x^3 + 5x^2 + 7x+2$	+		*4*	*5*	*7*	*2*
		5	*+7*	*+7*	*+8*	$+2 = 5x^3 +7x^2 + 7x + 8x + 2$

- Resolução com erro corrigido:

$5x^3 + 3x^2 + 2x + 1$		5	3	2	1	
$4x^3 + 5x^2 + 7x+2$	+	*4*	*5*	*7*	*2*	
		9	*+ 8*	*+ 9*	*+ 3*	$= 9x^3 +8x^2 + 9x + 3$

A ideia desse aluno assemelha-se ao dispositivo de Briot-Ruffini, aplicado em divisões de polinômios. Porém, há uma diferença substancial entre o dispositivo de Briot-Ruffini e o processo esboçado pelo aluno. Questionado, ele não soube explicar como idealizou tal processo.

Para nós, ele mobilizou a ideia de somar ordens por intermédio da disposição de um quadro retangular, método comumente usado nos livros didáticos, a partir da segunda série do ensino fundamental.

Fonte: Carvalho e Pereira (2009, p. 85-86).

O processo resolutivo que o aluno esboçou pelo traçado *retangular* é próximo do Quadro de Valor de Lugar (QVL), muito utilizado para ensinar somar e subtrair nos anos iniciais do ensino fundamental. Este dispositivo recorre à noção não ostensiva de ordem que os algarismos indo-arábicos ocupam no sistema de numeração decimal e assim possibilita a manipulação ostensiva dos algarismos na adição e subtração aritmética.

Se para o aluno não teve sentido o que ele fez, para mim significou alterações praxeológicas na proposta didática que elaborei, porque os outros alunos se interessaram pela maneira como ele resolveu essa tarefa. Implicitamente, esse aluno promoveu uma dinâmica cognitiva no meu universo cognitivo (*U(x)*), pois a técnica de calcular pelo QVL não fazia parte do meu equipamento praxeológico ou estava esquecida cognitivamente. No que tange a isso, Chevallard (2009a) considera que na

> “[...] história da pessoa como sujeito, existe uma dinâmica cognitiva, que faz com que alguns objetos desapareçam de (*U(x)*), enquanto outros irão aparecer, e há uma *dinâmica praxeológica* pela qual o equipamento praxeológico de *x*, [...] muda – algumas partes desse equipamento perdem suas características de operação, enquanto outras partes são renovadas e novos elementos são adicionados ao longo do tempo [...] (CHEVALLARD, 2009, p. 6-7, tradução nossa).

Nesta pesquisa, compreendo que a ideia do aluno é resultante do sistema de numeração decimal e dos algoritmos das operações aritméticas fundamentais, conforme exposto no segundo capítulo em Wechelun (1562), Carles (1927), Ifrha (1997a, 1997b) e Zuin (2005). Isso se revelou num tipo de tarefa T de multiplicar polinômios, porque os alunos recorrem à ideia do colega, mas solucionaram esse tipo de tarefa T pela associação ao valor posicional no sistema de numeração decimal. Deste modo, eles adequaram à técnica τ à ideia do colega. O Quadro 13 mostra como esses alunos fizeram para solucionar o tipo de tarefa T.

Quadro 13: Resolução da tarefa t.

$(3x^2 + 2x + 4) \text{ X } (4x^2 + 2) = (3x^2 + 2x + 4) \text{ X } (4x^2 + 0x + 2) =$

$= (300 + 20 + 4) \text{ X } (400 + 0 + 2)$

	300	20	4		X	
	400	0	2			
	120000	8000	1600			
		0	0	0		
+			600	40	8	
	12**0000**	+ 8**000**	+ 22**00**	+4**0**	+ 8	= $\boldsymbol{12x^4 + 8x^3 + 22x^2 + 4x + 8}$

Fonte: Carvalho e Pereira (2009, p.88).

O que narrei neste episódio completa a análise que me propus neste capitulo. Assim, dou por concluído os capítulos desta pesquisa e avanço às considerações finais.

V. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta pesquisa foi motivada por meus estudos no Curso de Especialização em Educação Matemática. Esses estudos me permitiram estruturar uma proposta didática com uma praxeologia diferenciada para ensinar somar, subtrair, multiplicar e dividir polinômios. A partir disso, propus-me fazer uma análise das minhas praxeologias por intermédio das possíveis conexões entre aritmética e álgebra no contexto das minhas práticas docentes, desenvolvidas na sétima série (oitavo ano) do ensino fundamental.

Para desenvolver esta pesquisa, assumi a metodologia da pesquisa narrativa, com enfoque autobiográfico, porque se tratou de um estudo da minha pessoa como professor de matemática no contexto do meu desenvolvimento profissional. Porém, a maneira como narro os capítulos desta dissertação, imprimem novos desdobramentos metodológicos que absorvem os elementos da Teoria Antropológica do Didático (TAD) nos moldes da pesquisa narrativa.

Esses novos desdobramentos metodológicos possibilitam-me estruturar um texto narrativo, envolvendo os referenciais teóricos, principalmente a TAD, da introdução ao capítulo IV. Assim, no capítulo III imprimo um diálogo narrativo que explicita os elementos teóricos da TAD (CHEVALLARD; BOSCH, 1999; CHAVALLARD, 2002; PILAR BOLEA, 2003; ALMOULOUD, 2007; CHEVALLARD, 2009a), interligando-os às possíveis conexões entre aritmética e álgebra, evidenciadas na proposta didática que consta na monografia de Carvalho e Pereira (2009).

Ressalto que a metodologia pensada para conduzir esta pesquisa passou por adequações ao longo dos procedimentos adotados para garantir, cientificamente, o estudo ora concluído. Entre estes procedimentos, cito o meu percurso de estudo das obras que tratam de Organizações Matemáticas (OM) e Organizações Didáticas (OD) sobre aritmética e álgebra (capitulo II), que garantiram um fluxo textual narrativo de acordo com as minhas intenções de pesquisa.

O referencial teórico principal para a análise foi a Teoria Antropológica do Didático (TAD) de Yves Chevallard que aprofundei estudos no Grupo de Pesquisa em Didática da Matemática (GEDIM). Com esses estudos compreendi que a TAD propicia analisar tipos de tarefas, tipos de técnicas, objetos ostensivos e não ostensivos, relações pessoais e institucionais com objetos e instituições. Além disso, a TAD oportuniza estudo de várias obras (entre estas temos os livros, dissertações, teses, artigos, elaborações de aulas, etc.) e assim compreender e analisar as Organizações Matemáticas (OM) e as Organizações Didáticas (OD) que constam nessas obras.

O aprofundamento dos meus estudos sobre os dois blocos – do saber fazer ou práxis [T,τ] e do saber ou logos [θ, Θ] – que compõe o bloco [T, τ, θ, Θ] de uma praxeologia na TAD (CHEVALLARD, 1999; ALMOULOUD, 2007), revelaram-me os tipos de tarefas T que copunham a Monografia de Carvalho e Pereira (2009) e a técnica τ que solucionava esses tipos de tarefas. Além disso, percebi que a tecnologia θ e a teoria Θ da técnica τ, eram do sistema de numeração posicional decimal e da aritmética.

Motivado pelos elementos teóricos da TAD, decidi estudar algumas obras de história da matemática e outras que serviram como livros textos para estudar e ensinar matemática em diferentes épocas. Das leituras dessas obras extraí algumas contribuições que indicam as possíveis conexões entre aritmética e álgebra, que estão narradas no capítulo II desta pesquisa. Entre essas contribuições cito a evolução histórica de alguns sistemas de numeração precursores do sistema de numeração decimal indo-arábico (IFRAH, 1997a, 1997b; ALMEIDA, 2007; CAJORI, 2007; CONTADOR, 2008; GALVÃO, 2008). É nessa evolução histórica de alguns sistemas de numeração que percebo os indícios da necessidade da manipulação de símbolos para os cálculos aritméticos e, posteriormente, destes para o algébrico.

Entendo que o elo inicial da conexão entre aritmética e álgebra está na representação de números naturais na escrita polinomial de potência de base dez e uso desta representação no processo resolutivo das operações aritméticas fundamentais e das operações polinomiais. Essa constatação está descrita no item 3.1 do capítulo II, no qual cito das obras de Wechelun (1562), Carles (1927), Roxo et al. (1948), Crantz (1949), Floriani (2000), Eves (2004), Zuin (2005), De Maio (2009, 2011) trechos que revelam essa conexão entre aritmética e álgebra por meio da escrita polinomial na potência de base dez.

Ao aprofundar o estudo sobre objetos matemáticos ostensivos e não ostensivos (CHEVALLARD; BOSCH, 1999), compreendi a importância que esses objetos tiveram na minha relação praxeológica com a proposta didática contida na monografia de Carvalho e Pereira (2009), na qual sou o segundo autor (PEREIRA).

Das minhas compreensões epistemológicas sobre os objetos ostensivos e não ostensivos que constituem alguns sistemas de numeração precursores do sistema de numeração decimal indo-arábico, levou-me a ver a proposta didática que elaborei para ensinar soma, subtração, multiplicação e divisão polinomial, sendo um modelo epistemológico de referência que contempla as quatro concepções que Usiskin (1995) indica como parte do processo de ensino e aprendizagem da álgebra elementar – na compreensão de Sousa (2007) e Pilar Bolea (2003), trata-se da álgebra escolar como aritmética generalizada.

Considerando a proposta didática que elaborei para a monografia de Carvalho e Pereira (2009) uma organização praxeológica (ALMOULOUD, 2007), infiro que as influências praxeológicas assumidas por mim antes da graduação se tornaram parte do meu equipamento praxeológico EP (x) e ainda fazem parte dele. Entretanto, após o curso de graduação e de especialização, novos elementos praxeológicos conflitaram o meu universo cognitivo UC(x) e promoveram uma atualização do meu equipamento praxeológico (CHEVALLARD, 2009a), mas não suficiente para corrigir as minhas incompreensões sobre certos objetos ostensivos e não ostensivos presentes tanto nas operações aritméticas quanto nas operações algébricas.

No capítulo IV, destinado à análise dos episódios que manifestam as minhas praxeologias, desenvolvi um discurso narrativo conectando as ideias discutidas nos capítulos II e III com os conteúdos da proposta didática que elaborei. Nesse mesmo capitulo, exponho a análise das minhas praxeologias em diferentes momentos da minha prática docente assim resumida:

- Antes do curso de graduação: aulas particulares de Matemática e Ciências para estudantes de 1ª a 8ª séries (1º ao 9º anos) do ensino fundamental – influências praxeológicas dos autores dos livros didáticos de Matemática e de Ciências de 5ª a 8ª séries (6º ao 9º anos) e interpretação praxeológica dos professores que lecionavam para estudantes da 1ª a 4ª séries (1º ao 5º anos);
- Durante e após o curso de graduação: influências praxeológicas dos autores dos livros didáticos de matemática do ensino fundamental e médio e outras praxeologias dos meus estudos das disciplinas do curso de graduação;
- Durante o curso de especialização em Educação Matemática: as mesmas do item anterior e início de uma nova praxeologia por meio de uma proposta didática para ensinar operações polinomiais a partir das ideias de Floriani (2000);
- Após o curso de especialização: a nova praxeologia da proposta didática que elaborei, instaura-se como parte do meu equipamento praxeológico, mas ainda

> não era plenamente compreendida por mim, ora a usava independente, ora em conjunto com as antigas praxeologias.

A não compreensão plena dessa nova praxeologia conflitava o meu universo cognitivo e, hoje, revelo nesta pesquisa que isso decorria das minhas limitações no tratamento das operações aritméticas por meio da escrita polinomial dos números naturais na potência de base dez. De certa forma, o meu equipamento praxeológico não estava atualizado, suficientemente, para compreender que os erros que cometi na elaboração da proposta didática eram frutos das minhas sujeições institucionais passadas e presentes.

Nos episódios II e III do capitulo IV, narro as correções que fiz na proposta didática que elaborei, assim obtive uma organização praxeológica segundo o que propõe os elementos teóricos da Teoria Antropológica do Didático. Além desses dois episódios, em parte do episódio IV contém novas contribuições que revelam as minhas praxeologias atuais que modelam o meu equipamento praxeológico para ensinar as operações algébricas polinomiais, na perspectiva de vê-las conectadas entre dois campos teóricos da Matemática: Aritmética e Álgebra.

Enfatizo que as correções feitas por mim na proposta didática que elaborei, remodelaram mais o meu equipamento praxeológico. Porém, isso só foi possível por intermédio dos referenciais teóricos que embasam esta pesquisa, principalmente as obras que tratam dos sistemas de numeração, da escrita polinomial na potência de base dez e das que explicitam a lastro teórico da Teoria Antropológica do Didático.

A análise que expus no capítulo IV desta pesquisa, constitui uma compreensão sobre as possíveis conexões entre aritmética e álgebra, implícitas e explicitas na proposta didática que compõe a monografia de Carvalho e Pereira (2009), na qual considero relevante observar os seguintes itens:

- A técnica τ que associa transformar polinômios em números inteiros positivos, atribuindo-se o valor 10 à variável é regida por condições e restrições, porque nem sempre as tarefas t_i estão dentro do alcance da técnica τ, um exemplo disso é a tarefa t_{10} analisada no episódio IV do capítulo IV: *Dados os polinômios* $A = -2x^4 - 11x^3 - x^2 + 18x + 8$ *e* $B = x^2 + 5x + 2$*, determinar o quociente de A por B;*
- Os tipos de tarefas T_i determinam o alcance da técnica τ;

- Associar a ideia de existência de uma relação entre ordens e classes, no sistema de numeração decimal, ajuda inicialmente na composição de uma expressão algébrica, conforme tratada no oitavo ano do ensino fundamental;
- A escrita polinomial na potência de base dez dos números positivos serve para conectar aritmética e álgebra, e, nisso os objetos ostensivos e não ostensivos ditam as regras dessa conexão;
- Os elementos tecnológicos e teóricos, muitas vezes, confundem-se na resolução dos tipos de tarefas T_i pela técnica τ;
- A organização praxeológica da monografia de Carvalho e Pereira (2009) pode promover conflitos no universo cognitivo do professor de matemática e assim ocorrer à atualização do equipamento praxeológico desse professor;
- A proposta didática é viável de ser aplicada em sala de aula, conforme evidenciou a análise contida no episódio V.

Após destacar algumas constatações do capítulo da análise e de outros capítulos, retomo a questão de pesquisa: **Quais conexões entre aritmética e álgebra determinaram as minhas praxeologias durante a ampliação didática que desenvolvi para ensinar adição, subtração, multiplicação e divisão de polinômios, na sétima série (oitavo ano) do ensino fundamental?** E, desse modo, explano as considerações que atestam que a questão de pesquisa foi respondida e o objetivo geral atingido, que foi: - **Analisar as minhas praxeologias por intermédio das possíveis conexões entre aritmética e álgebra no ensino das operações com polinômios**.

Um dos fatores que norteou esta pesquisa foi a escolha metodológica. A metodologia da pesquisa narrativa imprimiu uma fluidez dissertativa que me permitiu interligar as referências consultadas, da introdução ao capítulo da análise, sem perder de vista a questão de pesquisa e o objetivo geral.

Quando caracterizo a pesquisa por meio de outros estudos que mostram os processos de ensino e aprendizagem da álgebra no Brasil e em outros países (CHEVALLARD, 1994; USISKIN, 1995; CHEVALLARD; BOSCH, 1999; PILAR BOLEA, 2003; CARVALHO, 2007; KEPPKE, 2007; SOUSA, 2007; LAVORENTE, 2008; DE MAIO, 2009, 2011), tenho a intenção de provocar questionamentos praxeológicos na prática docente do professor de matemática, quando este ensina os conteúdos de álgebra no ensino fundamental e médio.

Foram esses questionamentos praxeológicos, inconscientemente, que me motivaram elaborar a proposta didática a partir das ideias de Floriani (2000), mas que passaram despercebidos por mim, porque o propósito da proposta didática era a aprendizagem significativa das operações polinomiais por meio das operações aritméticas fundamentais.

Na caracterização desta pesquisa (capítulo II), encontram-se várias discussões teóricas (sistemas de numeração, aritmética e álgebra na base dez e em outras bases, objetos ostensivos e não ostensivos nas operações polinomiais) que contribuem para uma compreensão mais consistente do processo de ensino e aprendizagem da álgebra a partir de elementos da teoria aritmética. Há, nesse mesmo capítulo, análise preliminar de elementos praxeológicos que me permitiram conectar aritmética e álgebra na proposta didática que elaborei.

As contribuições teóricas da TAD estão postas no capitulo III. Nesse capítulo há os esclarecimentos que explicitam os elementos que embasam a TAD (CHEVALLARD, 1999; CHEVALLARD, 2002; SILVA, 2005; ALMOULOUD, 2007; CHEVALLARD, 2009a). Contudo, esses elementos são narrados em um 'diálogo' com o que discuti no capítulo II e acrescidos de outra análise preliminar das ideias que constam na monografia de Carvalho e Pereira (2009). É nesse capítulo que os elementos teóricos da TAD (tipo de tarefas T, técnica τ, tecnologia θ e teoria Θ) – elementos estes que constitui o bloco praxeológico – tomam corpo na conexão entre aritmética e álgebra, segundo as manipulações ostensivas e não ostensivas das operações polinomiais que estão descritas na proposta didática que estruturei para ensinar essas operações no oitavo ano do ensino fundamental.

A análise das minhas praxeologias, explicitada no capítulo IV, desvelaram que o meu equipamento praxeológico passou por novas relações pessoais, ora em conformidade, ora em não conformidade com objetos ostensivos e não ostensivos. Isso ocorreu durante meus estudos para ampliar as ideias de Floriani (2000) e assim elaborar a organização praxeológica que alia o ensino das operações polinomiais por intermédio das operações aritméticas fundamentais. Essa organização praxeológica possui em sua constituição tipo de tarefas T e a técnica τ. Esses dois elementos do bloco do saber fazer prevaleceram nas minhas praxeologias quando propus a Organização Matemática Local (OML), que possui as seguintes tarefas t_i:

- t_1: Calcular A + B, onde $A = 5x^3 + 3x^2 + 2x + 1$ e $B = 4x^3 + 5x^2 + 7x + 2$;
- t_2: Calcular C + D, onde $C = 4x^2 + 6x + 8$ e $D = 7x^2 + 4x + 3$;
- t_3: Determinar E – F, sendo $E = 9x^2 + 8x + 7$ e $F = 3x^2 + 4x +$;

- t_4: Determinar G – H, sendo $G = 5x^2 + 4x + 2$, $H = x^2 + 8x + 4$;
- t_5: Determinar $M \times N$, sendo $M = x^2 + 2x + 8$ e $N = x + 2$;
- t_6: Calcular $P \times Q$, onde $P = 3x^2 + 2x + 4$ e $Q = 4x^2 + 2$;
- t_7: Determinar o quociente e o resto de R **:** S, onde $R = x^3 + 3x^2 + 7x + 6$ e $S = x^2 + 2x + 4$.

Essas tarefas t_i foram analisadas no capítulo IV e elas serviram para mostrar o trabalho e o alcance da técnica τ. Além disso, a resolução das tarefas t_i mediadas pela técnica τ, revelam que as minhas praxeologias para o ensino das operações polinomiais são intermediadas por tipos de tarefas $T_{i,}$ pressupondo-as em conexão com elementos aritméticos do sistema de numeração decimal indo-arábico, como as que se seguem:

- T_1: Identificar as ordens que cada algarismo indo-arábico ocupa;
- T_2: Representar os números na escrita polinomial de potência de base dez;
- T_3: Escrever a expressão algébrica que resulta de se tomar $x = 10$;
- T_4: Classificar o tipo de polinômio a partir da expressão algébrica obtida;
- T_5: Identificar o grau e o coeficiente de cada tipo de polinômio.

A aplicação da proposta didática em sala de aula revelou novos conflitos praxeológicos relativos à minha prática docente como professor de matemática. Um desses conflitos ocorreu quando solicitei aos alunos que solucionassem a tarefa: somar $5x^3 + 3x^2 + 2x + 1$ com $4x^3 + 5x^2 + 7x + 2$. Essa tarefa promoveu um embate praxeológico no momento que um aluno exibiu um processo resolutivo diferente dos outros alunos, mas que contemplava elementos da técnica τ. Esse aluno exibiu um processo resolutivo que recorria às ideias do Quadro de Valor de Lugar (QVL) para somar os coeficientes dos polinômios e assim solucionou a tarefa proposta. Geralmente, o QVL é aplicado no processo resolutivo das operações aritméticas de somar e de subtrair nos anos iniciais do ensino fundamental.

A praxeologia do QVL não estava em conformidade com as minhas intenções didáticas contidas na proposta didática que elaborei. Isso conflitou o meu universo cognitivo, porque a praxeologia do QVL não fazia parte do meu equipamento praxeológico para ensinar as operações aritméticas de somar. Porém, esse conflito promoveu novas relações pessoais com objetos ostensivos e não ostensivos que atualizou o meu equipamento praxeológico, ampliando as minhas ideias para conectar as operações aritméticas às operações algébricas. Essas novas relações pessoais, permitiram-me concluir que o QVL é um elemento praxeológico implícito na técnica τ, porque essa técnica tem suas implicações tecnológicas no sistema de numerações decimal indo-arábico.

Pelas considerações que teci até aqui, julgo ter atingido todos os objetivos específicos e, consequentemente, o objetivo geral. Logo, a questão de pesquisa foi respondida.

Na perspectiva da Educação Matemática, esta pesquisa propõe um modelo epistemológico de referência que visa contribuir para o ensino das operações polinomiais no âmbito das instituições escolares. Além do que traz esclarecimentos epistemológicos sobre alguns objetos ostensivos e não ostensivos que conduz a prática docente do professor de matemática em sala de aula. Principalmente, no que tange ao processo de ensino e aprendizagem das operações polinomiais de somar, subtrair, multiplicar e dividir.

Para a TAD, esta pesquisa evidenciou alguns elementos teóricos como: objetos ostensivos e não ostensivos, tipo de tarefas T e técnica τ, tecnologia θ e teoria Θ, organização matemática e didática, equipamento praxeológico e universo cognitivo.

As contribuições para futuras pesquisas em Didática da Matemática estão relacionadas ao modelo narrativo aqui exposto e sua imbricação com elementos teóricos da TAD.

Durante a execução das etapas desta pesquisa, brotaram várias questões subjacentes que não estão contempladas neste estudo, mas que merecem reflexões e estudos futuros.

1. Quais as compreensões que os professores de matemática do ensino fundamental têm sobre os tipos de tarefas que envolvem as operações com polinômios?
2. De que maneira os professores de matemática do oitavo ano do ensino fundamental compreendem as técnicas que ensinam para seus alunos aplicarem nos tipos de tarefas de adição, subtração, multiplicação e divisão polinomial?
3. Quais conflitos cognitivos ocorrem quando o professor de matemática da educação básica passa por um processo de formação continuada e tem que atualizar seu equipamento praxeológico?
4. Quais objetos matemáticos ostensivos e não ostensivos são mais sensíveis para o professor de matemática elaborar um texto do saber que vise conectar aritmética e álgebra no processo de ensino e aprendizagem da álgebra elementar?

Além dessas quatro questões subjacentes, há uma questão que surgiu das minhas reflexões – não relatadas nesta pesquisa – sobre alguns conflitos cognitivos que outros colegas (professores de matemática) deixavam transparecer durante as aulas do curso de especialização, em relação às abordagens que os professores ministrantes das disciplinas manifestavam como alternativas para o ensino e aprendizagem de matemática. Essa questão tornou-se ainda mais inquietante para mim, após as novas compreensões que teci, nesta pesquisa, sobre o modelo epistemológico que proponho para ensinar operações polinomiais. Desse modo, suponho que a dinâmica cognitiva, o universo cognitivo e o equipamento praxeológico (CHEVALLARD, 2009a) cumprem papéis decisivos no processo de estudo de um novo modelo epistemológico de referência para que o professor de matemática atualize seu equipamento praxeológico. Assim, vejo na metodologia do "*parcours d'étude et de recherche* (PER)" (MARIETTI, CHEVALLARD, 2009; CHEVALLARD, 2009b) a base para responder a seguinte questão: Quais conflitos cognitivos são manifestados pelos professores de matemática, num processo de estudo de um novo modelo epistemológico de referência, que os permita atualizar seus equipamentos praxeológicos para ensinar operações polinomiais no ensino básico?

REFERÊNCIAS

ABRAHÃO, Maria Helena Menna Barreto (Org.). **A Aventura (auto)biográfica: teoria e empiria**. Porto Alegre: EDIPUCRS, 2004.

ALMEIDA, Fernando Manuel Mendes de Brito. **Sistemas de Numeração Precursores do Sistema Indo-Árabe**. Dissertação (Mestrado em Ensino da Matemática). Faculdade de Ciências da Universidade do Porto. Porto, 2007.

ALMOULOUD, Saddo Ag. **Fundamentos da Didática da Matemática**. Curitiba: Editora da UFPR, 2007.

ANDRADE, Roberto Carlos Dantas. **Geometria Analítica Plana**: praxeologias matemáticas no Ensino Médio. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemáticas). Universidade Federal do Pará, Núcleo de Apoio Desenvolvimento Científico. Belém, 2007.

ARAGÃO, Rosália M. R. de. Memórias de Formação e Docência: bases para pesquisa narrativa e biográfica. In: CHAVES, S. N.; BRITO, M. R. (Org.). **Formação e Docência**: perspectivas da pesquisa narrativa e autobiográfica. Belém: CEJUP, 2011.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. NBR 14724: informação e documentação: trabalhos acadêmicos: apresentação. Rio de Janeiro, 2011.

BASTOS, M. H. C.; COLLA, A. L. A idealização do professor na representação da docência. Retratando mestres. In: ABRAHÃO, Maria Helena Menna Barreto (Org.). **A Aventura (Auto)Biográfica**: teoria e empiria. Porto Alegre: EDIPUCRS, 2004.

BUCCHI, Paulo. **Curso Prático de Matemática –** vol. 3. São Paulo: Moderna, 1998.

BOLEA CATALÁN, Pilar. **El processo de algebrización de organizaciones matemáticas escolares**. Zaragoza: Prensas Universitárias de Zaragoza: Departamento de Matemática Aplicada, Universidad de Zaragoza, 2003. (Monografias del Seminário Matemático “Garcia de Galdeano”, 29). Tesis - Universidad de Zaragoza.

BORBA, M. C.; ARAÚJO, J. L. (Orgs.). **Pesquisa qualitativa em educação matemática**. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

BROUSSEAU, Guy. **Introdução ao Estudo da Teoria das Situações Didáticas**: conteúdos e métodos de ensino. Tradução Camila Bogéa. São Paulo: Ática, 2008. (Educação em ação).

BUENO, Belmira Oliveira. O método autobiográfico e os estudos com histórias de vida de professores: a questão da subjetividade. **Revista Educação e Pesquisa**, São Paulo, v.28, n.1, p. 11-30, jan./jun. 2002. Disponível em: <http://www.scielo.br/pdf/ep/v28n1/11653.pdf>. Acesso em: 31 mai. 2011

CAJORI, Florian. **Uma História da Matemática**. Tradução Lázaro Coutinho. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda., 2007.

CARLES, D. José Dalmau. **Aritmética Razonada y Nociones de Álgebra:** Tratado Teórico – Prático – Demostrado. 57ª Edición, corregida y aumentada por D. José Maria Dalmau Casademont. Barcelona: Juan Darne, 1927. Madrid: Libreria y Casa Editorial, 1927. Gerona: Editores Dalmau Carles, Pla S. A., 1927.

CARVALHO, Cláudia Cristina Soares de. **Uma análise praxeológica das tarefas de prova e demonstração em tópicos de álgebra abordados no primeiro ano do Ensino Médio**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). PUC/SP. São Paulo, 2007. Disponível em: <http://www.pucsp.br/pos/edmat/ma/dissertacao/claudia_cristina_carvalho.pdf>. Acesso em: 29 mai. 2011.

CARVALHO, Cristiane C.; PEREIRA, José C. S. **Aprendizagem significativa – das operações aritméticas às operações algébricas**: o tratamento das operações algébricas a partir das operações aritméticas como conhecimento prévio. Monografia (Especialização em Educação Matemática). Núcleo de Pesquisa e Desenvolvimento da Educação Matemática e Científica da Universidade Federal do Pará. Belém, 2009.

CHEVALLARD, Yves. Enseignement de l'algebre et transposition didactique. **Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino**. Vol. 52, n. 2, 1994. Disponível em: <http://seminariomatematico.dm.unito.it/rendiconti/cartaceo/52-2/175.pdf>. Acesso em: 09 mai. 2012.

______________. El análisis de las prácticas docentes en la teoria antropológica de lo didáctico. **Recherches en Didactiques des Mathématiques**, v. 19, n. 2, p. 221-266, 1999. Traducción de Ricardo Campos. Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Sevilla. Com la colaboración de Teresa Fernández García, Catedrática de Francés, IES Martinéz Montañes, Sevilla. Disponível em: <http://jose-desktop.uacm.edu.mx/nolineal/libros/campomedio/El_analisis_de_las_practicas_docentes_en_la_teoria_antropologica_de_los_didactico.pdf>. Acesso em: 18 abr. 2012.

______________. **Approche anthropologique du rapport au savoir et didactique des mathematiques**. 2002. Disponível em: <http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Approche_anthropologique_rapport_au_savoir.pdf>. Acesso em: 02 jun. 2012.

_____________. **La TAD face au professeur de mathématiques**. 2009a. Disponível em: <http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=162>. Acesso em: 24 abr. 2011.

_____________. **La notion d'ingénierie didactique, un concept à refonder**: questionnement et éléments de réponse à partir de la TAD. 2009b. Disponível em: <http://yves.chevallard.free.fr/>. Acesso em: 04 abr. 2012.

CHEVALLARD, Yves; BOSCH, Marianna. **La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs**. 1999. Disponível em: <http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Sensibilite_aux_ostensifs.pdf>. Acesso em: 24 abr. 2011.

CONTADOR, Paulo Roberto Martins. **Matemática, uma breve história**. 3. ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2008. v. 1.

COSTA, Mariza Canjirano da. **Possibilidades de articulação dos ostensivos e não ostensivos no ensino da noção de sistemas de duas equações lineares a duas incógnitas**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). UNIBAN/SP. São Paulo, 2008. Disponível em: <http://www.uniban.br/pos/educamat/pdfs/teses/Mariza%20Canjirano%20da%20Costa.pdf>. Acesso em: 03 mai. 2011.

CRANTZ, Paul. Manuales Técnicos Labor Nº 2: **Aritmética y Álgebra**. Versión de la Duodécima Edición Alemana por David Soler Carreras. Barcelona, Madrid, Buenos Aires, Rio de Janeiro: Editorial Labor S. A., 1949.

CRESWELL, John W. **Projeto de pesquisa**: métodos qualitativo, quantitativo e misto. Tradução Magda Lopes. rev. téc. Dirceu da Silva. 3. ed. Porto Alegre: Artmed, 2010.

CRUZ, Eliana da Silva. **A Noção de Variável em Livros Didáticos de Ensino Fundamental**: um estudo sob a ótica da organização praxeológica. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). PUC/SP. São Paulo, 2005. Disponível em: <http://www.sapientia.pucsp.br/tde_busca/index.php?tipoPesquisa=1>. Acesso em: 01 mai. 2011.

D'AMORE, Bruno. **Elementos de didática da matemática**. Tradução Maria Cristina Bonomi. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2007.

DE MAIO, Waldemar. **Álgebra: estruturas algébricas básicas e fundamentos da teoria dos números**. Rio de Janeiro: LTC, 2011. (Fundamentos de matemática; 16).

DE MAIO, Waldemar. **Álgebra: estruturas algébricas e matemática discreta.** Rio de Janeiro: LTC, 2009. (Fundamentos de matemática).

DELGADO,Tomás Ángel Sierra. **Lo Matemático en el Diseño y Analisis de Organizaciones Didácticas:** los sistemas de numeración y la medida de magnitudes. Memoria para optar al Grado de Doctor. Universidad Complutense de Madrid, Facultad de Educación, Departamento de Didáctica y Organización Escolar. Madrid, 2006.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. Tradução Hygino H. Domingos. Campinas, SP: Editora da UNICAMP, 2004.

FLORIANI, José Valdir. **Professor e pesquisador**: exemplificação apoiada na matemática. 2. ed. Blumenau: Ed. da FURB, 2000.

FONSECA,C.; BOSCH, M.; GASCÓN, J. **El momento del trabajo de la técnica en la completación de organizaciones matemáticas:** el caso de la "regla de Ruffini". s/d. Disponível em: <http://www4.ujaen.es/~aestepa/TAD/Comunicaciones/Fonseca_Bosch_Gascon.pdf>. Acesso em: 08 abr. 2012.

FREITAS, M. T. M.; FIORENTINI, D. As possibilidades formativas e investigativas da narrativa em educação matemática. **Horizontes**, Revista Semestral do Programa de Pós-Graduação *Stricto Sensu* em Educação da Universidade São Francisco. v. 25, n. 1, p. 63-71, jan./jun. 2007. Disponível em: <http://www.saofrancisco.edu.br/itatiba/mestrado/educacao/uploadAddress/edicao_completa%5B11019%5D.pdf#page=63> . Acesso em: 01 jun. 2011.

GALVÃO, Maria Elisa Esteves Lopes. **História da Matemática**: dos números à geometria. Osasco: Edifieo, 2008. (Coleção Texto).

GARBI, GILBERTO G. **O romance das equações algébricas**. 4. ed. rev. ampl. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2010.

GONÇALVES, Terezinha Valin Oliver. A pesquisa Narrativa e a Formação de Professores: reflexões sobre uma prática formadora. In: CHAVES, S. N.; BRITO, M. R. (Org.). **Formação e Docência**: perspectivas da pesquisa narrativa e autobiográfica. Belém: CEJUP, 2011.

GREGOLIN, Vanderlei Rodrigues. **O Conhecimento Matemático Escolar**: Operações com Números Naturais (e adjacências) no Ensino Fundamental. Tese (Doutorado em Educação). Universidade Federal de São Carlos, Centro de Educação e Ciências Humanas. São Carlos, 2002. Disponível em: < http://portal.fclar.unesp.br/publicacoes/tese_vrg.pdf>. Acesso em: 21 abr. 2011.

GRESSLER, Lori Alice. **Introdução à pesquisa**: projetos e relatórios. 2. ed. rev. atual. São Paulo: Loyola, 2004.

IFRAH, Georges. **História universal dos algarismos, volume 1**: a inteligência dos homens contada pelos números e pelo cálculo. Tradução Alberto Muñoz e Ana Beatriz Katinsky. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1997a.

IFRAH, Georges. **História universal dos algarismos, volume 2**: a inteligência dos homens contada pelos números e pelo cálculo. Tradução Alberto Muñoz e Ana Beatriz Katinsky. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1997b.

IFRAH, Georges. **Os números**: a história de uma grande invenção. Tradução Stella Maria de Freitas. rev. téc. Antônio José Lopes, Jorge José de Oliveira 11. ed. São Paulo: Globo, 2005.

KEPPKE, Charston Lima. **Álgebra nos Currículos do Ensino Fundamental**. Dissertação (Mestrado Profissional no Ensino de Matemática). PUC/SP. São Paulo, 2007.

LAVORENTE, Carolina Riego. **A Matemática Moderna nos livros de Osvaldo Sangiorgi**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). PUC/SP. São Paulo, 2008.

MARIETTI, Julia; CHEVALLARD, Yves. **Le concept de PER et sa céception actuelle en Mathematiques et Ailleurs** :Une étude préparatoire. 2009. Mémoire de 1re année du master de sciences de l’éducation. Disponível em: <http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Memoire_de_MR1_de_Julia_Marietti.pdf>. Acesso em: 14 set. 2012.

MESQUITA, Flávio Nazareno Araújo. **As dinâmicas praxeológicas e cognitivas e a construção do conhecimento didático do professor de matemática**. Dissertação (Mestrado Acadêmico). Universidade Federal do Pará, Instituto de Educação Matemática e Científica. Belém, 2011.

MOREIRA, M. A.; MASINI, E. F. S. **Aprendizagem significativa**: a teoria de David Ausubel. São Paulo: Centauro, 2001.

MUNIZ, Anderson Soares**. Uma análise das técnicas utilizadas por alunos na resolução de problemas algébricos do primeiro grau, propostos em um livro didático do 7º ano do Ensino Fundamental**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Disponível em: <http://www.edumat.ufms.br/Mestrado/Dissertacoes/Muniz.2010.pdf> Acesso em: 29 mai. 2011.

RAMPAZZO, Lino. **Metodologia científica**: para alunos dos cursos de graduação e pós-graduação. 2. ed. São Paulo: Loyola, 2002.

ROXO, E.; CUNHA, H. L.; PEIXOTO, R.; NETTO, C. D. **Matemática – 2º Ciclo – 1ª Série**. 4. ed. Rio de Janeiro: Livraria Francisco Alves, 1948.

SAVELI, Esméria De Lourdes. Narrativas Autobiográficas de Professores: um caminho para a compreensão do processo de formação. **Revista Práxis Educativa**. Ponta Grossa, PR, v. 1, n. 1, p. 94-105, jan./jun. 2006. Disponível em: <http://www.eventos.uepg.br/ojs2/index.php/praxiseducativa/article/view/354/362>. Acesso em: 31 mai. 2011.

SEVERINO, Antônio Joaquim. **Metodologia do trabalho científico**. 23. ed. rev. atual. São Paulo: Cortez, 2007.

SILVA, Maria José Ferreira da. Investigando saberes de professores do Ensino Fundamental com enfoque em números fracionários. Tese (Doutorado em Educação Matemática). PUC/SP. São Paulo, 2005. Disponível em: <http://www4.pucsp.br/pos/edmat/do/tese/maria_jose_ferreira_silva.pdf>. Acesso em: 05 abr. 2012.

SOUSA, Adilson Sebastião de. **Metacognição e Ensino de Álgebra**: análise do que pensam e dizem professores de matemática da educação básica. Dissertação (Mestrado em Educação). Universidade de São Paulo, Faculdade de Educação. São Paulo, 2007. Disponível em: <http://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/48/48134/tde-29012009-120830/pt-br.php> . Acesso em: 14 jun. 2011.

TARDIF, Maurice. **Saberes docentes e formação profissional**. 9. ed. Petrópolis, RJ: Vozes, 2008.

USISKIN, Zalman. Concepções sobre a álgebra da escola média e utilizações das variáveis. In: COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P. **As Ideias da Álgebra**. Trad. Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1995.

ZUIN, Elenice de Souza Lodron. Somar, subtrair, multiplicar e dividir números inteiros: o método analítico na *Arithmetica Raciocinada* de Pedro d'Alcantara Lisboa, publicada em 1863. **Revista Educação em Questão**. Natal, v. 23, n. 9, p. 31-52, mai. /ago. 2005. Disponível em: <http://www.revistaeduquestao.educ.ufrn.br/pdfs/v23n09.pdf>. Acesso em: 25 mar. 2012.

WECHELUM, Andrean. **Arithmética**. 1562. Cum Privilegio Regis. Disponível em: <http://fondosdigitales.us.es/fondos/libros/985/10/arithmetica/> Acesso em: 09 set. 2011.