MARIA ALICE DE VASCONCELOS FEIO MESSIAS

UM ESTUDO EXPLORATÓRIO SOBRE A *IMAGEM CONCEITUAL* DE ESTUDANTES UNIVERSITÁRIOS ACERCA DO CONCEITO DE LIMITE DE FUNÇÃO

MESTRADO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICAS

UFPA

BELÉM (PA)

2013

MARIA ALICE DE VASCONCELOS FEIO MESSIAS

UM ESTUDO EXPLORATÓRIO SOBRE A *IMAGEM CONCEITUAL* DE ESTUDANTES UNIVERSITÁRIOS ACERCA DO CONCEITO DE LIMITE DE FUNÇÃO

*Dissertação apresentada à banca examinadora da Universidade Federal do Pará como exigência parcial para obtenção do título de **MESTRE EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICAS**, sob a orientação do **Prof. Dr. João Cláudio Brandemberg.***

UFPA

BELÉM (PA)

2013

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da UFPA

Messias, Maria Alice de Vasconcelos Feio, 1987-
Um estudo exploratório sobre a imagem conceitual de estudantes universitários acerca do conceito de limite de função / Maria Alice de Vasconcelos Feio Messias. - 2013.

Orientador: João Cláudio Brandemberg.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Pará, Instituto de Educação Matemática e Científica, Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas, Belém, 2013.

1. Matemática - estudo e ensino. I. Título.
CDD 22. ed. 510.7

Ao meu pai, Nazário de Souza Messias (*In Memoriam*), pelos poucos, porém inesquecíveis momentos de felicidade que em muito contribuíram para a formação do meu caráter.

AGRADECIMENTOS

A *Deus*, por me sustentar frente aos momentos difíceis por mim vivenciados no decorrer deste curso e por permitir que eu concluísse este trabalho.

Ao meu orientador, *Professor Dr. João Cláudio Brandemberg*, pela confiança, paciência e dedicação depositados na realização de minha pesquisa.

Aos membros da banca examinadora, *Prof. Dr. Iran Abreu Mendes*, *Prof.ª Maria José Mendes* e *Prof.ª Maria Lúcia Pessoa Chaves Rocha*, pelos direcionamentos que contribuíram de maneira inconteste para a conclusão deste trabalho.

À minha *Mãe Glória*, pelo amor incondicional, incentivo e apoio dedicados à mim e à minha família desde sempre!

À minha querida prima, *Gleica Amaral*, pela companhia e compreensão nos momentos difíceis que passei para concluir este trabalho.

Ao meu esposo, *Rodolfo Souza,* por entender minhas angústias durante o desenvolvimento de minha pesquisa, pelo amor, compreensão e dedicação que tanto me motivaram a concluir esta jornada.

Ao meu amor maior, minha filha *Maria Clara*, por todos os momentos de felicidade que passamos juntas. Esses momentos motivam cada palavra e cada atitude no meu dia a dia e me fazem entender o verdadeiro sentido de *amor incondicional*.

Aos professores do Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas (PPGECM) da UFPA, pelas contribuições para com minha formação enquanto pesquisadora.

Aos membros do GEHEM (Grupo de Estudos em Pesquisa em História e Educação Matemática), pelas valorosas contribuições em meio às discussões realizadas durante as reuniões do grupo.

A CAPES, pelo apoio financeiro durante o curso.

A autora.

Banca Examinadora

Prof. Dr. João Cláudio Brandemberg – Orientador (UFPA)

Prof. Dra. Maria José Freitas Mendes – Membro interno (UFPA)

Prof. Dr. Iran Abreu Mendes – Membro externo (UFRN)

Prof. Dra. Maria Lúcia Pessoa Chaves Rocha– Membro suplente (IFPA)

RESUMO

Esta é uma pesquisa de caráter exploratório, cujo objetivo foi investigar os elementos que compõem a *imagem conceitual* de estudantes universitários sobre o conceito de limite de uma função de uma variável real. O estudo envolveu 25 estudantes do curso de licenciatura em matemática de duas universidades públicas no estado do Pará (Brasil) e constituiu-se de duas etapas. Primeiramente, aplicamos um questionário que continha tarefas relacionadas aos aspectos conceituais de limite de uma função de uma variável. A segunda etapa consistiu na realização de entrevistas com seis sujeitos que foram selecionados devido às *imagens conceituais evocadas* por eles na etapa anterior, e que por sua vez, encontravam-se em conformidade com os quatro Temas de Discussão (TD) que nortearam essas entrevistas. A análise dos resultados baseou-se, sobretudo, na teoria de Tall e Vinner (1981) e Vinner (1991), bem como nos estudos realizados por Cottril et al (1996), Jordaan (2005), Juter (2006), Nair (2009), dentre outros, que compuseram a fundamentação teórica do presente estudo. Dentre os resultados obtidos, ressaltamos que os estudantes relacionam o conceito de limite de uma função de uma variável real com interpretações estáticas e/ou dinâmicas que, em alguns momentos, constituíram-se como *fatores de conflito potencial*, conforme destacado por Vinner (1991). Além disso, evidenciamos que algumas das *imagens conceituais evocadas* pelos sujeitos investigados não se fizeram coerentes, fato que os influenciou a construir uma *definição conceitual pessoal* diferente da *definição conceitual formal* de limite de uma função de uma variável real.

Palavras-chave: *Imagem Conceitual*, *Imagem Conceitual Evocada,* Limite de uma função, *Definição Conceitual pessoal, Definição conceitual formal*.

ABSTRACT

This is an exploratory research that aimed to investigate the elements that compose university students' *concept image* related to the concept of limit of a function of one real variable. It was investigated the knowledge of 25 students of mathematics' course in two public universities in the state of Pará (Brazil). The data collection was made, at first, through a questionnaire that contained tasks involving limit of one real variable function's conceptual aspects. The second stage consisted in interviews with six students that were selected because of their *evoked concept images* in the previous stage, since they were related to the four Discussion Themes (DT) that leaded those interviews. The data analysis was based on the theory of Tall&Vinner (1981) and Vinner (1991), besides the studies of Cottril et al (1996), Jordaan (2005), Juter (2006), Nair (2009), above others, which composed the theoretical framework of this study. Above the results obtained in this research, we emphasize that the students relate the concept of limit of a function of one real variable with static and/or dynamic interpretations that, in some moments, constituted themselves as *potential conflict factors*, such as described by Vinner (1991). Besides, we've also noticed that some *evoked concept images* weren't coherent, which influenced them to construct a *personal concept definition* different from the *formal concept definition* of limit of a function of one real variable.

Key words: *Concept image*, *Evoked Concept Image*, Limit of a function of one real variable, *Personal Concept Definition, Formal Concept Definition.*

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO

Um *overview do estudo realizado*

Ao longo das últimas décadas do século XX e início do século XXI, diversos estudos e pesquisas em Educação Matemática e em Educação têm mostrado que as dificuldades de aprendizagem em matemática se fazem presentes desde as séries iniciais e se estendem até o segmento superior de ensino. Neste último, percebemos que essas dificuldades se apresentam de maneira expressiva em *Cálculo*, sobretudo no que concerne à apreensão dos conceitos relacionados à função, limite, continuidade, derivada, integral, dentre outros. Em virtude de essas noções serem objeto de estudo de diversas áreas de conhecimento, verificamos – cada vez mais – o empenho de estudiosos em desenvolver pesquisas com o intuito de oportunizar/viabilizar a compreensão dos entraves inerentes à aprendizagem desses tópicos, bem como a superação dos mesmos.

Frente a essas constatações, direcionamos essa pesquisa para o âmbito do *Cálculo* e optamos por investigar a problemática da apreensão do conceito de limite de uma função de uma variável real[1], dada sua importância para o entendimento de outros conceitos. Para fundamentar nosso estudo, fez-se necessário um levantamento bibliográfico acerca do desenvolvimento histórico/conceitual sobre limite de uma função. Esse levantamento viabilizou nosso entendimento acerca das dificuldades inerentes à construção histórica desse conceito. Além disso, realizamos uma busca em dissertações, teses e periódicos que levantassem a discussão sobre a sua aprendizagem.

Nesse sentido, encontramos nos trabalhos de Tall e Vinner (1981), Cornu (1983), Sierpinska (1985), Vinner (1991), Cottrill *et al* (1996), Barto (2004), Jordaan (2005), Zuchi (2005), Juter (2006), Hardy (2009) e Nair (2010) suporte teórico necessário para o levantamento/delimitação das hipóteses de nossa pesquisa, cujo foco principal consistiu em investigar os elementos que

[1] Restringimo-nos à função de uma variável real que, por sua vez, será tratada no decorrer desse trabalho somente pelo termo *função*.

compõem a *Imagem Conceitual* (TALL&VINNER, 1981; VINNER, 1991) de estudantes universitários acerca do conceito de limite de uma função. Os resultados obtidos na investigação foram analisados conforme os pontos de conformidade e/ou não conformidade com o quadro teórico previamente estabelecido. Todas as etapas constituintes de nossa pesquisa são contempladas na presente dissertação e – a fim de viabilizar o entendimento da mesma – estruturamos seus capítulos conforme descrevemos a seguir:

No primeiro capítulo, intitulado *Motivações e direcionamentos para a pesquisa,* apresentamos em linhas gerais os aspectos que nos motivaram à escolha da temática de nossa pesquisa e os direcionamentos que nortearam o desenvolvimento da mesma. Além disso, apresentamos nossas considerações metodológicas, questões de pesquisa, objetivos, bem como a descrição do estudo realizado.

No segundo capítulo, intitulado *Pesquisa à luz do referencial teórico* apresentamos a descrição de pesquisas realizadas no âmbito de nossa investigação, bem como estabelecemos a relação entre tais pesquisas e nossos objetivos para com esse estudo.

Dedicamos o terceiro capítulo a um levantamento histórico do desenvolvimento conceitual de limite de função, a partir do qual afiançamos a importância desse levantamento para o amadurecimento de nossas percepções acerca desse conceito, bem como das dificuldades inerentes a seu aprendizado.

O quarto e o quinto capítulo são dedicados à sistematização e análise dos resultados obtidos nas primeira e segunda etapas da pesquisa, correspondentes ao questionário e às entrevistas realizadas junto aos sujeitos investigados, respectivamente.

Esclarecemos em nossas considerações finais nossas observações quanto aos resultados obtidos e sua relação com nossos objetivos e questões de pesquisa, bem como nossas perspectivas em relação a pesquisas futuras no âmbito da aprendizagem do conceito de limite de função.

CAPÍTULO 1

Motivações e direcionamentos para a pesquisa

1.1. Motivações para a realização da pesquisa

Diante de minha experiência enquanto discente do curso de graduação em licenciatura em matemática e, portanto, da disciplina *Cálculo I,* vivenciei – junto aos meus colegas de curso – dificuldades na apreensão do conceito de limite de uma função, fato que me motivou, ainda na graduação, a realizar um estudo que abordasse essa problemática.

O intuito dessa primeira investigação, concretizada no ano de 2008, foi investigar as dificuldades relacionadas à aprendizagem das noções de limite de função de uma variável. Mediante os resultados obtidos, apresentados em meu trabalho de conclusão de curso, foram evidenciados alguns conflitos referentes à compreensão desse conceito, bem como a importância de realizar outras investigações que contribuíssem para o estabelecimento de uma base mais sólida dos tópicos de *Cálculo.*

Em 2009, tive a oportunidade de ministrar a disciplina *Cálculo I* para os alunos do curso de Engenharia Ambiental no campus de Paragominas da Universidade do Estado do Pará (UEPA) e *Cálculo II* para o curso de Licenciatura em Matemática no campus de Vigia de Nazaré dessa mesma universidade, período em que constatei a multiplicidade de dificuldades inerentes ao aprendizado em *Cálculo* e, novamente, percebi a necessidade de desenvolver um trabalho, cujo foco principal fosse viabilizar o entendimento dos estudantes sobre os conceitos envolvidos nesse campo de estudo.

Decidi, em 2010, participar do processo de seleção para o Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas (PPGECM) da Universidade Federal do Pará (UFPA). Ingressei no programa no ano seguinte e a partir de então, juntamente com meu orientador, iniciei minha trajetória de pesquisa, a qual intenciono descrever no decorrer desse trabalho.

1.2. Alguns direcionamentos

Inicialmente, consideramos que o levantamento bibliográfico se constituiria como primeiro passo de nossa pesquisa. Objetivamos, nesse sentido, verificar os estudos relacionados ao processo de aprendizagem de limite de função desenvolvidos até então, bem como estabelecer o fundamento teórico para nossa investigação[2]. Evidenciamos que grande parte das dificuldades atreladas à aprendizagem de limite de função está voltada para a sua apreensão conceitual[3]. Isso porque para muitos estudantes:

> (...) calcular o limite de uma função num ponto A, nos casos mais “interessantes”, resumir-se-á em descobrir uma maneira de “substituir o A em $f(x)$” sem que tal procedimento implique na emergência de irritantes quocientes com denominador nulo. Em outras palavras, a ideia de aplicar truques adequados de manipulação algébrica que permitirão “eliminar” tais inconveniências. A questão da existência do limite, ou mesmo do que ele significa, ficarão ainda nebulosas (...) (OLIMPIO, 2007, p. 44).

Percebemos ainda que os entraves relativos à aprendizagem do conceito de limite estão ligados, principalmente, à dificuldade em correlacionar as noções intuitiva e formal desse conceito (ZUCHI, 2005). Concordamos com Rodriguez (2009) no sentido de que normalmente:

> O docente explica que uma função f tem limite L quando x tende a a se a distância entre as imagens da função e L pode ser arbitrariamente pequena, sendo os valores de x muito próximos de a. Depois que se comunica oralmente esta frase, relativamente compreensível, escreve-se a definição com épsilon e delta (...) e poucos são os indivíduos que complementam o que fora escrito no quadro com as explicações dadas. (tradução nossa, p. 97)

Diante dessas considerações, voltamos nossa investigação para a aprendizagem conceitual de limite de função e foi nesse âmbito que a teoria sobre *imagem conceitual* e *definição conceitual* (TALL&VINNER, 1981; VINNER, 1991) foi estabelecida como fundamentação teórica central de nossa pesquisa, cujo objetivo principal consistiu em investigar que elementos

[2] A fundamentação teórica desse trabalho encontra-se descrito no capítulo 2.

[3] A apreensão do conceito de limite de uma função por parte de muitos estudantes é caracterizada pelas *evocações de imagens conceituais* que por vezes não estão em acordo com sua *definição conceitual* (TALL&VINNER, 1981; VINNER, 1991), dificultando seu entendimento, fato que vem sendo investigado em inúmeras pesquisas nesse âmbito.

compõem a *imagem conceitual* de estudantes universitários sobre o conceito de limite de função. A definição do referencial teórico foi de fundamental importância, pois nos auxiliou na elaboração do questionário e dos roteiros de entrevista, bem como viabilizou o estabelecimento de nossas interpretações em relação aos resultados obtidos.

Com o intuito de verificar como se deu o desenvolvimento histórico-conceitual das noções relacionadas ao conceito de limite de uma função, realizamos um levantamento histórico, pois acreditamos ser importante conhecer os fatos que permearam sua construção, no sentido de possibilitar o amadurecimento de nossas percepções relacionadas às ideias associadas a esse conceito e, consequentemente, de nossas considerações sobre a análise dos resultados obtidos na pesquisa. Nesse âmbito, afiançamos que,

> O estudo histórico manifesta igualmente um ponto de vista sobre as problemáticas que favoreceram a aparição de determinada noção. Uma noção matemática não é em geral inventada ou fabricada de maneira abstrata a partir do nada. Ela é concebida pouco a pouco como uma ferramenta para resolver os problemas. (CORNU, 1983, p. 37, tradução nossa).

Diante de nossas observações quanto aos fatos que permearam o desenvolvimento do conceito de limite de uma função, tornamos mais matematicamente maduras nossas percepções relacionadas ao surgimento desse conceito, possibilitando-nos identificar/entender com mais clareza algumas das *imagens conceituais evocadas* pelos sujeitos investigados em nossa pesquisa.

Nossa investigação constituiu-se de duas etapas. Primeiramente, aplicamos um questionário contendo questões sobre aspectos conceituais de limite de função para estudantes universitários do curso de licenciatura em matemática de duas universidades públicas no estado do Pará. É importante destacar que esses sujeitos investigados já haviam estudado a disciplina *Cálculo I* e, portanto, limite de função. A segunda etapa consistiu na realização de entrevistas com alguns dos sujeitos investigados na primeira etapa, a fim de descrever e analisar mais profundamente as *imagens conceituais evocadas* por eles ao resolverem tarefas cognitivas sobre o objeto de estudo em questão.

A análise dos resultados norteou-se, sobretudo, nos estudos de Tall e Vinner (1981) e Vinner (1991) sobre *imagem conceitual* e *definição conceitual*. Identificamos também os pontos de conformidade e/ou não conformidade de nossos resultados com aqueles obtidos nas pesquisas destacadas no capítulo teórico dessa dissertação. As respostas dos sujeitos investigados na primeira etapa subsidiaram a elaboração dos roteiros de entrevista utilizados na segunda etapa de nossa investigação[4], permitindo-nos identificar algumas das *imagens conceituais evocadas* pelos indivíduos em relação ao conceito de limite de função.

No decorrer desta dissertação esclarecemos, mais detalhadamente, cada um dos direcionamentos que constituíram nossa pesquisa, a começar pelas considerações metodológicas – que permearam todo seu desenvolvimento – e que se encontram destacadas no tópico subsequente.

1.3. Considerações Metodológicas

Conforme já mencionamos, as dificuldades vivenciadas por estudantes universitários na aprendizagem em *Cálculo* nos motivaram a realizar um estudo que contemplasse a problemática da aprendizagem dos tópicos relacionados a esse campo de conhecimento. Sendo assim, direcionamos nossa pesquisa para a apreensão do conceito de limite de função, dada sua importância para a compreensão de conceitos adjacentes a ele no âmbito do *Cálculo*.

A delimitação das questões norteadoras, objetivos e procedimentos metodológicos foram fundamentais para o delineamento de nossa pesquisa. Ressaltamos sua importância para a construção de nosso objeto de estudo, dado que os aspectos aqui apresentados nortearam o desenvolvimento da pesquisa como um todo, delimitando os passos que deveríamos seguir para que, por fim, pudéssemos alcançar, e responder nossos objetivos e questões norteadoras, respectivamente.

1.4. Questões norteadoras

O presente estudo foi desenvolvido visando responder aos seguintes questionamentos:

[4] A análise dos resultados obtidos, conforme mencionado anteriormente, constituem o quinto e o sexto capítulo dessa dissertação.

- Quais elementos compõem a *imagem conceitual* de estudantes universitários do curso de licenciatura em matemática acerca do conceito de limite de função?

- Existem divergências entre a *definição conceitual formal e a definição conceitual pessoal* apresentada pelos sujeitos investigados no que se refere ao conceito de limite de função?

1.5. Objetivos

1.5.1. Objetivo geral

Esta pesquisa objetivou investigar os elementos que compõem a *imagem conceitual* (TALL&VINNER, 1981; VINNER, 1991) de estudantes universitários do curso de licenciatura em matemática, inferidos a partir da *evocação* de aspectos relacionados ao conceito de limite de função.

1.5.2. Objetivos específicos

- Realizar um levantamento histórico do conceito de limite, de maneira a amadurecer nossas percepções acerca desse conceito, bem como nos auxiliar na escolha dos temas investigados nas duas etapas da pesquisa.
- Identificar – mediante as *imagens conceituais evocadas* pelos sujeitos investigados na pesquisa – as dificuldades relacionadas à apreensão do conceito de limite de função;
- Verificar as correlações entre a *imagem conceitual evocada* pelos sujeitos da pesquisa, sua *definição conceitual pessoal* e a *definição conceitual formal* de limite de função;
- Elucidar os pontos de conformidade e/ou não conformidade dos resultados obtidos em nossa pesquisa em relação à fundamentação teórica pré-estabelecida;

1.6. Descrição geral da pesquisa

A pesquisa realizada foi constituída de oito fases, conforme destacamos no quadro a seguir:

Quadro 1: Descrição das fases da pesquisa

Fases da pesquisa	Breve descrição
Aprofundamento teórico	Buscamos em teses, dissertações e periódicos, pesquisas que levantassem a discussão sobre a aprendizagem do conceito de limite de função. Encontramos, sobretudo, nos estudos de Tall e Vinner (1981) e Vinner (1991) o suporte teórico para subsidiar o desenvolvimento da pesquisa.
Levantamento histórico	Realizamos um levantamento histórico acerca do desenvolvimento conceitual de limite de função, de maneira a identificar os fatos que permearam a construção desse conceito, permitindo-nos um amadurecimento em relação à esse conhecimento matemático.
Elaboração do questionário	O questionário elaborado para a primeira etapa da investigação foi baseado nas pesquisas que constituíram o capítulo teórico dessa dissertação. O questionário continha 07 questões envolvendo o conceito de limite de função e deveria ser respondido individualmente pelos sujeitos investigados.
Aplicação do questionário (1ª etapa da investigação)	25 estudantes do curso de licenciatura em matemática de duas universidades públicas do estado do Pará foram investigados na 1ª etapa de nossa investigação.
Análise dos resultados da 1ª etapa	As respostas dos sujeitos ao questionário proposto na 1ª etapa foram analisadas e organizadas em classes. A análise dos resultados da 1ª etapa subsidiou na elaboração dos Temas de Discussão (TD) que foram explorados na 2ª etapa de nossa investigação.
Elaboração dos Temas de Discussão (TDs)	Foram estabelecidos quatro Temas de Discussão (TD) que contemplam algumas das *imagens conceituais evocadas* pelos sujeitos investigados na 1ª etapa. Os temas foram discutidos durante as entrevistas realizadas na etapa seguinte.
Entrevistas (2ª etapa da investigação)	Foram realizadas entrevistas com 06 estudantes. Os roteiros utilizados foram estruturados conforme os temas de discussão previamente estabelecidos.
Análise dos resultados 2ª etapa	As declarações dos sujeitos durante as entrevistas foram transcritas e analisadas. Os resultados obtidos nos permitiram analisar mais profundamente as *imagens conceituais* dos sujeitos investigados sobre o conceito de limite de função.

1.7. Considerações sobre o capítulo

O delineamento de nossa pesquisa foi de fundamental importância para a organização de cada uma das fases que a constituíram, além de permitir que o leitor tenha um melhor entendimento acerca de nossas intenções com a realização da mesma. A fim de complementar as informações aqui destacadas, explicitamos – no decorrer dessa dissertação – a descrição de nosso referencial teórico, das etapas da investigação, bem como dos resultados obtidos. Dedicamos o capítulo subsequente, portanto, à descrição do suporte teórico estabelecido para essa pesquisa, a fim de esclarecer sua relação com nosso objeto de estudo.

CAPÍTULO 2

Pesquisa à luz do referencial teórico

2.1. Introdução

Os fundamentos dessa pesquisa estão atrelados às noções de *imagem conceitual* e *definição conceitual* (TALL&VINNER, 1981; VINNER, 1991), pois ambas são fundamentais para o delineamento do nosso objeto de estudo, dado que os objetivos e questões de pesquisa apresentados no capítulo anterior encontram-se voltados, principalmente, para a identificação das *imagens conceituais evocadas* pelos sujeitos investigados no que se refere ao conceito de limite de função.

Optamos por utilizar como fundamentação teórica os estudos de Tall e Vinner (1981) e Vinner (1991), pois acreditamos que a partir das atividades propostas e as discussões realizadas nas etapas de investigação de nossa pesquisa possibilitariam a ativação da *cela* da *imagem conceitual* dos sujeitos investigados, permitindo-nos analisar suas interpretações relacionadas ao conceito de limite de uma função e confrontá-las com outras pesquisas realizadas nesse âmbito, conforme destacaremos nos tópicos subsequentes.

Aliado a isso, consideramos necessária a realização de um levantamento acerca de pesquisas realizadas no âmbito do ensino e aprendizagem de *Cálculo* e, mais especificadamente, de limite de função para que pudéssemos comparar as *evocações* dos sujeitos investigados em nossa pesquisa com o os resultados obtidos nesses estudos. Destinamos esse capítulo, portanto, à descrição desse quadro teórico e de sua relação com nossos objetivos e, desde já, afiançamos sua importância, sobretudo, para a construção dos instrumentos utilizados para a obtenção dos dados e para a análise dos resultados obtidos nas duas etapas de nossa investigação.

2.2. *Imagem* e *Definição conceitual*: estabelecendo um *link*[5] com nosso objeto de estudo

Atribuímos à *imagem conceitual* as associações não verbais efetivadas em nossa mente quando em contato com o nome de determinado conceito. Estão incluídas, nesse sentido, suas representações visuais, figuras mentais, impressões e experiências que podem ser traduzidas em formas verbais por meio dessas associações (VINNER, 1991). Dessa maneira,

> Devemos utilizar o termo *imagem conceitual* para descrever a estrutura cognitiva total associada ao conceito, o que inclui todas as figuras mentais, propriedades e processos associados. É construída no decorrer dos anos através de experiências de todos os tipos, diferindo sempre que o indivíduo encontra novos estímulos e maturidade (TALL e VINNER, 1981, p. 152, tradução nossa).

Evidenciamos, portanto, que as experiências vivenciadas pelo indivíduo são de extrema importância para a formação de sua *imagem conceitual* que, por sua vez,

> (...) abrange todas as representações de experiências ligadas a um conceito, no qual pode haver diversos conjuntos de representações construídas em contextos diferentes que possivelmente se fundem quando o indivíduo se torna mais matematicamente maduro (JUTER, 2006, p. 17, tradução nossa).

Em virtude da *imagem conceitual* também ser construída a partir de experiências vivenciadas pelo indivíduo, ela não é necessariamente coerente, podendo conter propriedades e/ou interpretações contraditórias. Ainda assim, segundo Brandemberg (2010), a formação de uma *imagem conceitual* – por meio do exercício de múltiplas representações de um conceito – permite que o sujeito recupere suas impressões e experiências relacionadas a esse conceito e, quem sabe, garanta sua contextualização. Por conseguinte, assumimos que:

> (...) adquirir um conceito significa formar uma imagem conceitual para ele. Saber de cor a definição de um conceito não garante seu entendimento. Entender, assim supomos, significa apresentar uma imagem conceitual. Determinado significado deve estar associado às palavras (VINNER, 1991, p. 69, tradução nossa).

[5] No sentido de conexão; relação.

A expressão *imagem conceitual evocada* é utilizada para designar a parte da *imagem conceitual* que é ativada em um momento particular. Dependendo da situação, inúmeras imagens aparentemente em conflito poderão ser evocadas.

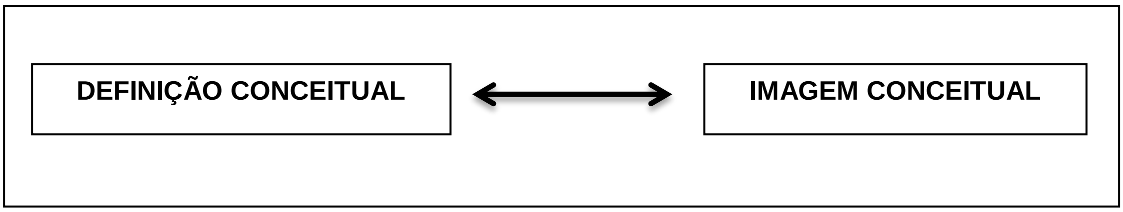
A *definição conceitual* consiste nas definições, memorizadas ou auto – construídas por um indivíduo. Tall e Vinner (1981) atribuem a essa noção toda forma em palavras utilizada para especificar um conceito. Sempre que a definição de um conceito é dada ou construída pelo indivíduo, esta sofrerá variações de tempo em tempo.

Para Cornu (1983), a *definição conceitual* é composta por:

> (...) frases apreendidas mecanicamente, mais ou menos ligadas a um conceito; pode ser uma reconstrução, uma reformulação pessoal de uma definição matemática; é também o conjunto de palavras que empregamos para explicar o conceito. Essa fraseologia é própria ao indivíduo: ela não coincide sempre com a definição formal do conceito, ou seja, com a definição comumente admitida pela comunidade matemática (p. 66, tradução nossa).

Sobre a relação entre *imagem e definição conceitual*, concordamos com Meyer (2003) no sentido de que ambas “pontuam a diferença existente entre os conceitos matemáticos quando formalmente definidos e os processos cognitivos pelos quais eles são concebidos, ou seja, é estabelecida uma distinção entre a matemática como uma atividade mental e a matemática como um sistema formal” (p. 6). Ainda no que se refere a essa relação, Vinner (1991) assume a existência de duas *celas*[6] diferentes, sendo a primeira destinada às definições de um conceito e a segunda, às suas possíveis *imagens conceituais*; apesar das duas *celas* poderem ser formadas independente uma da outra, ambas poderão se correlacionar (ver figura 1).

Figura 1: Relação entre imagem e definição conceitual



Fonte: Vinner (1991, p. 70, tradução nossa)

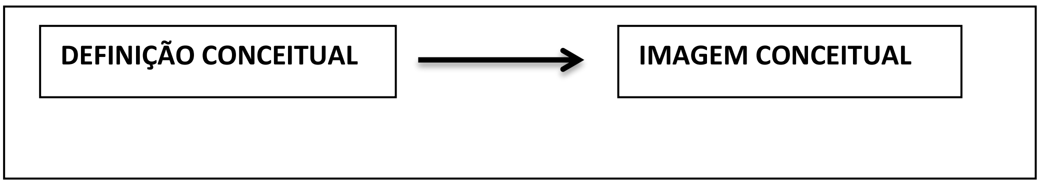
[6] Expressão utilizada por Brandemberg (2010).

A figura 1 representa, segundo Vinner (id.), o ensino em termos da definição. Nesse sentido, a *cela* da *imagem conceitual* – inicialmente vazia – é preenchida após exemplificações e explicações acerca de determinado conceito sem, necessariamente, refletir todos os aspectos referentes à *definição conceitual*. Vinner (1991) aponta a existência de dois possíveis cenários inerentes a este processo:

- A *imagem conceitual* poderá ser modificada, incluindo também outros aspectos referentes ao conceito;
- A *imagem conceitual* permanecerá a mesma. Nesse caso a *cela* da *definição* conceitual apresentará a definição do professor durante determinado período, mas será esquecida ou distorcida, isto é, a definição não será assimilada.

De acordo com Vinner (1991), o processo de apreensão de um conceito poderá ainda ser estabelecido a partir da *definição conceitual*, sendo a *cela* da *imagem conceitual* formada a partir da definição e controlada por ela, conforme mostra figura a figura 2.

Figura 2: Amadurecimento cognitivo do conceito formal



Fonte: Vinner (1991, p. 71, tradução nossa).

No que se refere à formação de um conceito, observamos enquanto possibilidade o processo de resolução de problemas e desempenho em tarefas, sendo que ao propormos a um estudante uma tarefa cognitiva, as *celas* da *imagem conceitual* e da *definição conceitual* são ativadas. Isso porque, de acordo com Brandemberg (2010):

(...) uma pessoa pode criar uma ou múltiplas representações mentais para um mesmo conceito matemático, podemos inferir que é apoiado nessas representações que se torna possível a ampliação concreta do número de representações simbólicas ligadas a um determinado conceito, posto que cada representação mental estará associada a seu modelo de representação simbólica (p. 115)

A expectativa dos professores, nesse sentido, pode ser esquematizada mediante as figuras 3, 4 e 5[7].

Figura 3: Definição x Imagem

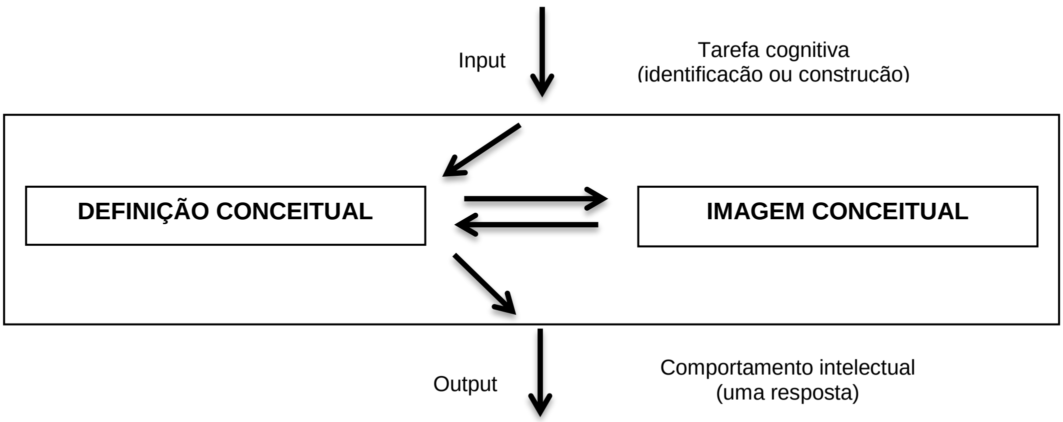
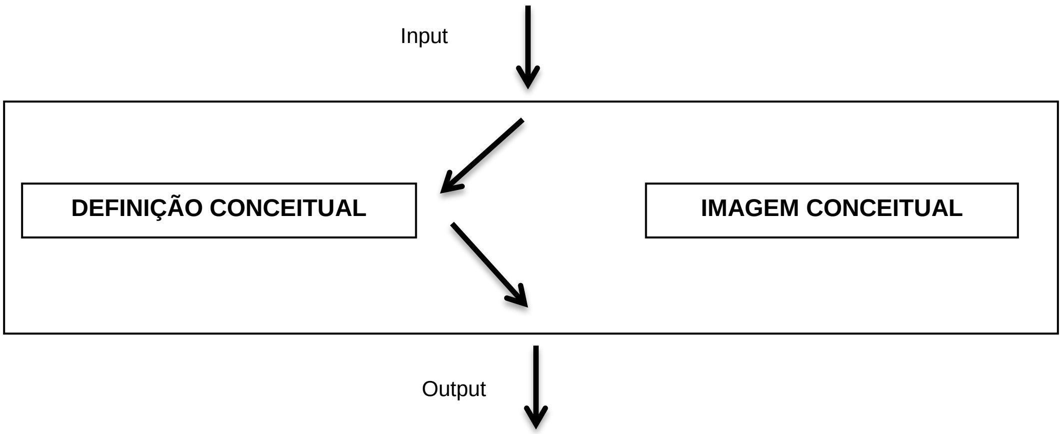


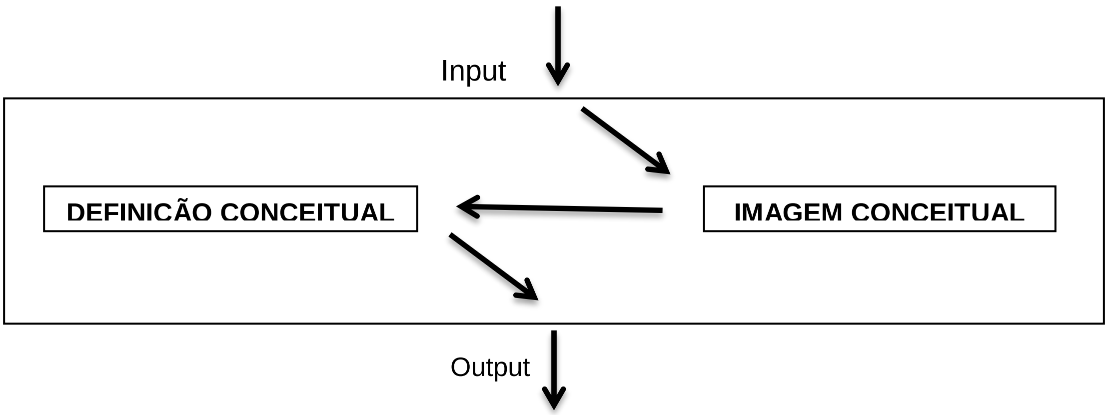
Figura 4: Dedução formal



---

[7] No trabalho de Vinner (1991), a ordem das setas que constituem as figuras 3, 4, 5 e 6 desse trabalho encontra-se invertida (de baixo para cima). No entanto, concordamos com o parecer da banca examinadora no exame de qualificação, no sentido de que a inversão das setas representa com mais clareza a expectativa dos professores quanto à criação de representações mentais de um conceito.

Figura 5: Dedução intuitiva

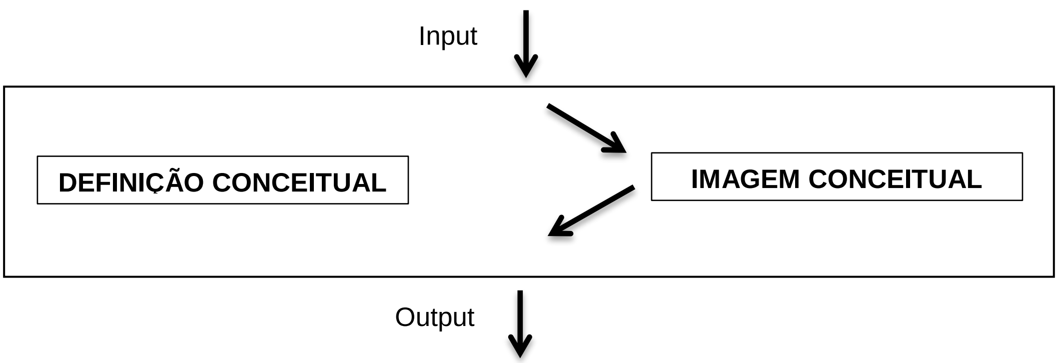


As figuras 3, 4 e 5 descrevem um processo desejável, no qual um indivíduo – para solucionar um problema proposto – deve consultar a *definição conceitual*. Todavia,

> (...) é difícil treinar o sistema cognitivo a agir contra sua natureza e forçá-lo a consultar definições tanto quando forma sua imagem conceitual quanto quando trabalha com uma tarefa cognitiva (VINNER, 1991, p. 72, tradução nossa).

Sendo assim, a realidade, em termos de resolução de problemas é sobretudo constituída pelas respostas intuitivas de um sujeito, conforme evidenciamos na figura 6.

Figura 6: Resposta intuitiva



No que concerne às implicações da formação da *imagem conceitual* no ensino, Vinner (1991) recomenda evitar conflitos cognitivos desnecessários junto aos estudantes e somente levantar esses conflitos quando os mesmos forem necessários para levar os estudantes a um estágio intelectual mais elevado.

A título de exemplificação dos estudos de Tall e Vinner (1981) e Vinner (1991), apresentamos no tópico a seguir ilustrações de *imagens conceituais* que se fizeram presentes nas mobilizações de estudantes investigados em outras pesquisas sobre o conceito de limite de função. Ao final desse capítulo, relacionamos nossos objetivos com essas pesquisas e no capítulo dedicado às análises dos resultados, estabelecemos o diálogo entre esse levantamento bibliográfico e os dados obtidos em nosso estudo, destacando seus pontos de conformidade e/ou não conformidade com o suporte teórico estabelecido.

2.3. Levantamento Bibliográfico

Apresentamos neste tópico a descrição pesquisas realizadas sobre o estudo de limite de funções e, posteriormente, relacionamos esses estudos com nossos objetivos. Almejamos com o levantamento bibliográfico verificar que investigações foram desenvolvidas no âmbito do ensino e aprendizagem de limite de função, de maneira a complementar o quadro teórico de nossa pesquisa.

O estudo realizado por Tall e Vinner (1981), por exemplo, objetivou levantar aspectos sobre as *imagens conceituais* de estudantes relacionadas aos conceitos de limite de uma sequência $\lim_{n\to\infty} S_n$, limite de uma função $\lim_{n\to a} f(x)$ e continuidade de uma função $f: D \to IR$. No que concerne ao conceito de limite de sequência, os autores propuseram à estudantes de primeiro ano de um curso de matemática um questionário, no qual deveriam, dentre outras situações, escrever uma definição para limites (caso soubessem de alguma), calcular o limite de algumas sequências, dentre elas, $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{9}{10}+\frac{9}{100}+\cdots+\frac{9}{10^n}\right)$, além de responder e justificar se $0.9999\ldots$ seria igual ou menor que 1. Em seus resultados, evidenciaram as seguintes implicações:

- A maioria dos sujeitos investigados respondeu que $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{9}{10}+\frac{9}{100}+\cdots+\frac{9}{10^n}\right)=2$, entretanto, afirmaram que $0.9999\ldots<1$;

- Ao justificar que $0.9999 ... < 1$, os sujeitos investigados afirmaram que "É apenas menor que um, pois a diferença entre ele e 1 é infinitamente pequena" (TALL&VINNER, 1981, p. 157, tradução nossa);
- Os estudantes apresentavam em suas *imagens conceituais* a ideia de que $S_n \to S$ implica que S_n se aproxima de S, mas nunca o alcança de fato. Essa situação pode ser evidenciada na seguinte justificativa: "$S_n \to S$ significa que S_n chega perto de S quando n se torna maior, mas não alcança S até o infinito" (TALL&VINNER, 1981, p. 158, tradução nossa);
- Os estudantes apresentam dificuldades com o uso dos quantificadores "todo" e "alguns" e com o entendimento das definições de limite e continuidade.

Em se tratando do conceito de limite de função, os autores reiteram que:

> (...) assim como o limite de sequência, o limite de uma função é normalmente considerado um processo dinâmico, em que x se aproxima de a, provocando a aproximação de $f(x)$ em relação à c. Novamente os estudantes consideram $f(x) \neq c$ como parte da imagem conceitual (TALL&VINNER, 1981, p. 159, tradução nossa).

Em um questionário aplicado para estudantes do primeiro ano do curso de matemática, os autores solicitaram que os indivíduos explicassem o que significava a expressão $\lim_{x \to 1} \frac{x^3-1}{x-1} = 3$ e escrevessem uma definição para $\lim_{x \to a} f(x) = c$, caso soubessem. Dentre as observações de Tall e Vinner (1981) sobre os resultados obtidos, destacamos:

- A maioria dos sujeitos investigados apresentou uma noção dinâmica sobre a definição de limite, por exemplo, "o valor que $f(x)$ se aproxima quando os valores de x chegam perto de a é c" (TALL & VINNER, 1981, p. 160, tradução nossa);
- Os autores evidenciaram que a utilização de expressões como "se aproxima", "chega perto", "tende a" levam a ideia de que $f(x) \neq c$, sendo esse um fator de conflito potencial;

Para verificar que *imagem conceitual* os estudantes do primeiro ano de matemática apresentavam sobre continuidade, Tall e Vinner (1981) propuseram algumas funções, seguidas ou não de seu respectivo gráfico e perguntaram aos indivíduos se essas funções eram contínuas, solicitando justificativas para tais afirmações. Dentre os dados obtidos, os autores verificaram que:

- Em relação à $f(x) = x^2$ e $f(x) = \frac{1}{x}$, por exemplo, os estudantes afirmaram ser uma função contínua, em virtude de "ter apenas uma fórmula" (p. 164, tradução nossa);
- Alguns estudantes afirmaram que $f(x) = \frac{1}{x}$ não era contínua, pois o "gráfico não está em um pedaço". Ou seja, para a função ser contínua, seu gráfico não pode ter buracos ou saltos;
- A função $f(x) = \begin{cases} 0 \ (x \leq 0) \\ 1 \ (x \geq 0) \end{cases}$ foi considerada descontínua em virtude de "haver um salto na origem" (TALL&VINNER, 1981, p. 166, tradução nossa)
- A *imagem conceitual evocada* "sem saltos" representa um fator de conflito potencial em relação à definição formal de continuidade.

Finalmente, Tall e Vinner (1981) concluem que:

> (...) a dificuldade em formar uma *imagem conceitual* apropriada e os efeitos coercivos de uma *imagem conceitual* inapropriada que apresenta conflitos em potencial, pode atingir seriamente o desenvolvimento de uma teoria formal na mente do indivíduo (p.167, tradução nossa).

Cornu (1983) objetivou com sua investigação estabelecer uma melhor compreensão da noção de limite. Para isso, realizou testes e entrevistas que o permitiram evidenciar as concepções dos sujeitos acerca do conceito de limite, bem como dos obstáculos epistemológicos inerentes à sua aprendizagem.

Os testes propostos por Cornu (1983) permitiram-no evidenciar aspectos relacionados ao entendimento dos sujeitos investigados sobre as expressões '*tender para*' e *'limite'*. No que concerne à primeira, Cornu (id.) observou diferentes tipos de significação, tais como: tendência a parecer com algo, sem qualquer variação; tendência a se aproximar de algo; aproximação inexorável a um objetivo, a um fim; tensão, esforço tendo em vista algo; tender/convergir a um objetivo (p. 76 – 77). Em se tratando da palavra 'limite', o autor observou algumas interpretações por parte dos estudantes, a saber: limite geográfico (fronteira); limite intransponível (entrave, natural ou imposto); borda protegida; limite impossível de ser alcançável; limite impossível de ser transposto (p. 79). Sobre essas concepções, Cornu (id.) destaca que o termo limite apresenta uma noção acima de tudo estática, sendo impossível de alcançá-lo, atravessá-lo. A expressão *tender para*, ao contrário, apresenta um sentido mais dinâmico.

Mediante uma sequência didática, Cornu (1983) objetivou iniciar junto aos estudantes a aprendizagem de limite, observando o que acontece no momento em que ela ocorre. A escolha das atividades foi realizada de maneira a identificar os principais obstáculos epistemológicos inerentes a esse processo, que no caso da pesquisa de Cornu (id.) foram os seguintes:

- *Aspecto metafísico da noção de limite*: A matemática não se reduz mais aos cálculos e propriedades algébricas simples. Esse obstáculo dificulta a compreensão de limite, principalmente se o mesmo não pode ser calculado diretamente a partir de métodos algébricos.
- *Infinitamente pequeno, infinitamente grande:* A existência de números tão pequenos, porém não nulos – como é o caso do ε – e de maneira análoga, a existência de números maiores que todos os outros, mas não infinito.
- *O limite alcança?:* A dúvida se determinado limite alcança ou não determinado valor.

Ainda sobre a apreensão do conceito de limite, Cornu (1983) destaca que:

> (...) a aquisição da noção de limite necessita da quebra de outros obstáculos: desigualdades, condições suficientes, valor absoluto, passagem da convergência monótona à convergência, etc... mas esses obstáculos não são próprios da noção de limite; são extrínsecos (p. 153 – 154)

Diante de seus resultados, Cornu (id.) evidenciou que há muito a se explorar no âmbito de processo de ensino e aprendizagem da noção de limite. Nesse sentido, sugere a realização de outras pesquisas, pois:

> (...) uma verdadeira aprendizagem da noção de limite necessita não apenas da quebra dos obstáculos, mas também de estabelecer a noção de limite junto a outras noções, sem as quais não poderia se

> desenvolver: quantificadores, desigualdades, condições suficientes, noção de infinito,... Há muito que fazer para a elaboração de situações didáticas para o ensino da noção de limite; essa elaboração deve levar em conta as concepções dos estudantes, os obstáculos, seu campo conceitual (...) (CORNU, 1983, p. 165)

Da mesma maneira, Sierpinska (1985) realizou uma pesquisa cujo intuito foi verificar os obstáculos epistemológicos relativos à noção de limite, já que segundo a autora:

> (...) ao voltar-se para a manifestação de um comportamento determinado tanto na história quanto nos alunos de hoje, o sujeito se motiva em ver uma característica específica do desenvolvimento de determinado conceito e não somente delimita as condições de ensino, por exemplo, seus meios e métodos (p. 8, tradução nossa).

Para alcançar o objetivo traçado, a autora dividiu a pesquisa em duas etapas, sendo que na primeira voltou-se para a identificação da tangente como limite de uma secante variável e na segunda, propôs um problema que consistiu em encontrar a equação da tangente na curva $y = \sin x$ no ponto $x = 0$; duas duplas participaram da investigação, sendo que uma calculadora científica foi disponibilizada na 2ª etapa do estudo. A partir de uma investigação sobre o desenvolvimento histórico da noção de limite e a análise da experimentação realizada, Sierpinska (1985) elucidou uma lista de obstáculos relativos à noção de limite, dentre os quais, destacamos:

- Horror ao infinito

Fazem parte desse grupo os obstáculos do tipo algébrico que reside na dificuldade em transferir automaticamente os métodos da álgebra relacionados à manipulação de grandezas finitas e infinitas, bem como em transferir as propriedades dos termos de uma sequência convergente. Inclui-se também a associação da passagem do limite a um movimento físico, uma aproximação, enquanto a teoria formal estabelece a noção de limite de maneira estática;

- Recusa do status de operação matemática ao limite

Inclui-se nesse grupo o obstáculo físico em que “a questão de saber se uma grandeza variável alcança ou não seu limite é um sintoma desse obstáculo, de uma interpretação literal de expressões ditas dinâmicas empregadas em relação à noção de limite. Do ponto de vista da definição de

Weierstrass, por exemplo, não há senso nessa questão" (SIERPINSKA, 1985, p. 48, tradução nossa).

- Obstáculos ligados ao conceito de função

Incluem-se nesse obstáculo dois aspectos: a atenção exclusiva à vizinhança da relação da função e a não distinção entre as noções de limite e de função limitada (Existência de Ínfimo e Supremo);

- Obstáculo do símbolo

A autora observou que os estudantes evitavam a utilização de uma notação específica para resolver o que lhes fora proposto.

Sierpinska (1985) aponta para a realização de outras pesquisas relacionada ao ensino e aprendizagem de análise e, no que concerne à noção de limite, reitera que:

> Uma das características do ensino clássico de limite é uma introdução rápida de teoremas relativamente com o objetivo de permitir o cálculo de limites mediante manipulações algébricas. Obtém-se, em geral, uma certa satisfação ao ensino, sem que seja assegurado a compreensão da funcionalidade dessa noção (p. 13, tradução nossa).

Cottrill *et* al (1996) desenvolveu um estudo – baseado na teoria APOS[8] (*Action Process Object Schema)* de Dubinsky *et al* – cujo objetivo foi por em prática suas perspectivas teóricas, conhecimento matemático e análises acerca da aprendizagem de estudantes universitários no que concerne à noção de limite. Os dados obtidos na pesquisa foram levantados a partir da observação e das entrevistas realizadas com os estudantes que faziam parte de um curso experimental de cálculo, tendo como estratégia pedagógica a combinação de atividades computacionais, tarefas no ambiente lápis e papel e exercícios.

As atividades propostas no decorrer da pesquisa se basearam em investigações computacionais de aproximação, investigações gráficas do conceito de limite, construções computacionais da aproximação de um valor ao limite, construções computacionais do conceito de limite e investigações com ε, δ. Dentre os dados obtidos na pesquisa, os autores destacam que:

[8] Baseada na teoria de Piaget; caracteriza a formação de determinado conceito matemático mediante um estágio em que é considerado um processo para outro, no qual passa a adquirir o status de objeto através de quatro estágios: Ação, Processo, Objeto e Esquema.

- Para alguns estudantes o limite de uma função f em um ponto a é uma noção estática que não difere do valor da função f no ponto a, ou seja, $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$;
- No que concerne à ideia de limites, alguns dos sujeitos investigados apresentaram uma visão estática, na qual estabeleciam uma investigação da função em um único ponto e não em um grupo de valores;
- Alguns estudantes pensavam em limite como sendo uma aproximação dinâmica de x, entretanto, ao defini-lo atribuíam a noção de uma aproximação da função f de um único valor de x próximo de a;
- Os estudantes em geral apresentavam uma noção vaga das inequações envolvidas na definição formal de limite de função;

Cottrill *et al* (1996) conclui que o estudo realizado permitiu que os pesquisadores pudessem verificar as principais dificuldades apresentadas pelos sujeitos investigados, além viabilizar na construção de situações (em pesquisas posteriores) que favorecessem o entendimento dos estudantes acerca do conceito de limite.

A pesquisa realizada por Barto (2004) objetivou investigar e analisar a produção de significados de estudantes de pós-graduação em educação matemática em relação à continuidade de funções de uma variável real, buscando, dentre outras situações, verificar como ocorre a dinâmica da produção de significados para a continuidade e quais os significados produzidos para objetos matemáticos como ponto, curva, intervalo, épsilon, delta, domínio e imagem de funções. Barto (2004) observou os sujeitos participantes da disciplina *Tópicos de Cálculo Diferencial e Integral* e em seguida, os entrevistou, questionando-os sobre aspectos relacionados às tarefas realizadas em sala.

Dentre os argumentos que emergiram durante a pesquisa da autora, evidenciamos que para os sujeitos investigados, calcular limite de uma função significa realizar uma investigação à esquerda e à direita do ponto, independente desses valores serem iguais; os estudantes calculavam os limites laterais, considerando-os satisfatórios para determinar se uma função era ou não contínua, conforme observado nas respostas dos sujeitos em relação à função $F(x) = \begin{cases} 0, se\ x < 0 \\ 1, se\ x \geq 0 \end{cases}$. Entretanto, quando traçado o gráfico dessa função e de outras descontínuas, a autora observou que para eles uma função contínua é aquela que não tem saltos ou buracos.

Finalmente, Barto (id.) destaca a importância de analisar as argumentações dos estudantes, pois a partir daí podemos elaborar novas tarefas que possam gerar controvérsias, envolvendo-os mais profundamente no decorrer das atividades e possibilitando a validação de suas ideias.

Jordaan (2005) realizou uma pesquisa com o intuito de identificar os erros conceituais apresentados por estudantes de engenharia elétrica da *Tshwane University of Technology* (África do Sul) sobre o conceito de limite de função, buscando – mediante o estudo desenvolvido – verificar como os sujeitos investigados entendiam a noção de limite, que tipo de erros eles apresentavam nesse aspecto e como eles relacionavam continuidade e descontinuidade de uma função em um ponto com a existência do limite naquele ponto. Sua pesquisa foi dividida em duas etapas, a saber:

1ª etapa: Aplicação de um questionário, cujo foco era somente o conceito de limite. Ou seja, aspectos concernentes às manipulações algébricas utilizadas para calcular limites não foram considerados. Os objetivos estabelecidos para essa etapa foram os seguintes: determinar o entendimento dos estudantes sobre limites, continuidade e descontinuidade de função em um ponto, descobrir como os estudantes entendem a (não) existência do limite em um ponto de continuidade/descontinuidade e determinar como os estudantes lidam com um gráfico de função que apresenta descontinuidade em um ponto.

2ª etapa: Realização de uma entrevista com seis dos 42 sujeitos investigados na primeira etapa da pesquisa. Os objetivos estabelecidos para essa etapa são semelhantes àqueles da primeira etapa, a saber: avaliar a compreensão gráfica e simbólica sobre limites, determinar o entendimento dos estudantes sobre continuidade/descontinuidade de uma função em determinado ponto e como o mesmo influencia na compreensão sobre a (não) existência do limite neste ponto.

Os resultados obtidos por Jordaan (2005) permitiram-na enunciar as seguintes observações (JORDAAN, 2005, p. 57, tradução nossa):

Quanto à natureza do conceito de limite:

- Os estudantes veem limite como sendo uma fronteira;
- Os estudantes veem limite como sendo inalcançável;
- Os estudantes veem limite como sendo uma aproximação;
- Os estudantes tem a impressão de que a função sempre apresentará limite em determinado ponto;
- Os estudantes visualizam limite como um processo dinâmico e não como um objeto estático.

Quanto à relação entre continuidade de funções e limites:

- Os estudantes acreditam que a função deve necessariamente estar definida em um ponto para que a mesma apresente limite naquele ponto. Uma função que não esteja definida em um ponto não apresenta limite;
- Os estudantes ponderam que quando uma função tem um limite, então deve ser contínua naquele ponto;

Outras considerações:

- Os estudantes acreditam que o limite é igual o valor da função no ponto. Ou seja, $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Finalmente, a autora recomendou a realização de outras pesquisas no sentido de investigar, dentre outras situações, os processos cognitivos na aquisição da ideia de limite por parte dos estudantes, o papel de uma abordagem centrada na aprendizagem de limites, o efeito da utilização de tecnologias na aprendizagem de limites, bem como o desenvolvimento de estratégias de ensino que assegurem uma real compreensão desse conceito.

Em sua pesquisa, Zuchi (2005) realizou um estudo sobre as dificuldades de ensino-aprendizagem do conceito de limite para, em seguida, propor alternativas que viabilizassem a apreensão desse conceito por parte de estudantes universitários do centro tecnológico da Universidade Estadual de Santa Catarina (Brasil). Como metodologia de pesquisa adotou a Engenharia Didática e – ao aliar a Teoria das Situações de Brousseau à Inteligência

Artificial – buscou verificar quais as dificuldades de aprendizagem os sujeitos investigados apresentavam no que concerne ao conceito de limite, bem como quais situações didáticas poderiam ser criadas para favorecer o processo de ensino-aprendizagem desse conceito.

A investigação constituiu-se de duas fases de experimentação, sendo a primeira no ambiente lápis e papel e a segunda em um ambiente informatizado. A primeira fase foi constituída de duas etapas, a saber:

1ª fase de experimentação: Constituiu-se de uma observação em classe que auxiliou a pesquisadora a detectar as principais dificuldades no processo de ensino – aprendizagem do conceito de limite, bem como da concepção e aplicação de uma micro-engenharia didática (ZUCHI, 2005) que objetivou introduzir o conceito de limite, sob o ponto de vista de aproximação (ε, δ).

2ª fase de experimentação: Foi desenvolvida uma sequência didática no ambiente computacional através do protótipo HOROS constituído de três módulos: *história do cálculo*, *limite do ponto de vista cinemático* e *limite do ponto de vista de aproximação*. O objetivo dessa fase foi introduzir o conceito de limite para os sujeitos investigados na pesquisa.

A partir dos resultados obtidos na pesquisa, a autora observou que:

- Estudantes apresentaram dificuldades na compreensão do conceito de limite proveniente dos seguintes fatores: compreensão da relação entre ε e δ, noção de infinito, abstração, matemática básica e aplicação prática de limites.
- A aplicação da sequência didática através da resolução de situações – problema viabilizou uma evolução no que se refere ao entendimento do conceito de limite;
- A apreensão do conceito de limite deve se dar em meio a atividades que potencializem a relação entre os pontos de vista cinemático e aproximação;
- O obstáculo da linguagem matemática, dificuldades em conteúdos matemáticos, tais como funções e inequações e a passagem da noção intuitiva – sob o ponto de vista cinemático – para a definição formal de limite, sob o ponto de vista de aproximação se fizeram presente no decorrer da pesquisa realizada;

Em seu trabalho, Juter (2006) apresentou a sinopse de uma pesquisa realizada com estudantes universitários na Suécia sobre o desenvolvimento conceitual de limite de função. Mediante a investigação realizada, Juter (2006) objetivou identificar como as percepções dos sujeitos investigados sobre limites se desenvolvem, se essas percepções podem estar relacionadas ao desenvolvimento histórico desse conceito, como os estudantes resolvem tarefas envolvendo limites, bem como evidenciar qual a relação entre as atitudes dos sujeitos investigados e seus respectivos desempenhos em atividades envolvendo limite de função. Sua pesquisa foi constituída por dois estudos, conforme a seguir:

1º estudo: Participaram do estudo 43 estudantes universitários. Os sujeitos investigados preencheram três questionários, cujos principais objetivos foram:

- Obter informações sobre a educação prévia dos estudantes, suas atitudes e conhecimento sobre limites;
- Verificar como os estudantes interpretavam suas situações de aprendizagem;
- Verificar o quanto os estudantes poderiam explicar os cálculos efetuados, bem como o quanto separavam *funções* de *limite de funções* em suas imagens conceituais;
- Verificar se os sujeitos investigados poderiam explicar seus conhecimentos sobre limites em situações não – tradicionais;

2º estudo: Participaram do estudo 112 estudantes universitários. Os sujeitos investigados preencheram três questionários. Em seguida, foram selecionados 34 estudantes para participarem de duas entrevistas. O objetivo desse estudo foi descrever e analisar mais profundamente as situações de aprendizagens dos participantes da pesquisa.

Juter (2006) obteve resultados que a permitiram concluir que:

- Os estudantes conseguiram – em sua maioria – solucionar tarefas rotineiras, mas apresentaram dificuldades em solucionar tarefas não rotineiras;
- Os sujeitos investigados apresentaram dificuldades em entender características específicas da noção de limite, tais como decidir se a

função pode alcançar o valor do limite e/ou determinar o que os componentes da definição representam;

- Os estudantes apresentaram dificuldade em calcular limites, como por exemplo, o $\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1}$;
- Os estudantes apresentaram confusões entre *limite de função* e *função*;
- Os sujeitos da pesquisa não conseguiram estabelecer/entender o significado dos quantificadores envolvidos na definição de limite;
- As imagens conceituais dos indivíduos acerca do conceito de limite se mostraram incoerentes com sua definição;

Por fim, a autora observou que a definição formal de limite de função não foi integrada às imagens conceituais dos estudantes e, portanto, não estava disponível como ferramenta durante a realização das tarefas matemáticas. Além disso, “muitas desconexões no desenvolvimento da aprendizagem foram detectadas no estudo, por exemplo, entre as percepções intuitiva e formal, procedimental e estática, finita e infinita (...)” (JUTER, 2006, p. 38, tradução nossa).

Nair (1009) realizou uma investigação acerca da imagem conceitual de estudantes de Cálculo no que concerne aos conceitos de função racional, assíntotas, limites e continuidade e as possíveis conexões entre os mesmos. Dentre seus objetivos com a pesquisa, a autora almejou verificar que conexões entre os conceitos de assíntotas, continuidade e limite de funções racionais os sujeitos investigados apresentavam, bem como os efeitos de um experimento de ensino realizado no decorrer da pesquisa na compreensão desses conceitos.

A pesquisa constituiu-se de uma entrevista, realizada com 19 estudantes, um experimento de ensino conduzido pela autora e uma segunda entrevista, esses últimos realizados com sete estudantes. As intenções de Nair (2009) com as entrevistas foram, dentre outras, verificar que noção os sujeitos investigados apresentavam sobre limites, continuidade e assíntotas, bem como que conexões (caso existissem) os estudantes estabeleciam entre esses conceitos. A partir das imagens conceituais identificadas nas entrevistas, a autora desenvolveu os planos de aula que foram usados nos episódios de ensino, cujo foco foi *como* os esquemas conceituais dos estudantes mudavam no decorrer de interações matemáticas entre eles e/ou a pesquisadora.

As *imagens conceituais* dos sujeitos investigados sobre limites e continuidade fizeram Nair (2009) verificar as dificuldades relacionadas à utilização da terminologia correta, interpretação de limites a partir do gráfico da função, cálculo de limites e a relação entre limites com o comportamento de assíntotas de funções. Nesse aspecto a autora evidenciou que:

- Ao invés dos estudantes estabelecerem que "$x\ se\ aproxima\ de\ a, f(x) se\ aproxima\ de\ L$", trocavam/confundiam o papel de $x\ e\ y$ e $x\ e\ f(x)$;
- Os sujeitos investigados acreditavam que o limite não existe em determinado ponto se a função não estiver definida naquele ponto;
- Os estudantes acreditam que o $\lim_{x \to a} f(x)$ deve ser necessariamente igual a $f(a)$. Caso contrário, o limite não existirá.
- Os estudantes apresentaram dificuldade em calcular limites infinitos e limites no infinito;
- Quando se deparavam com indeterminações, os sujeitos investigados afirmavam que o limite da função não existia;
- As dificuldades associadas ao conceito de limite de função residem no fato dos estudantes "simplesmente focarem no *processo*, o processo de encontrar limites utilizando procedimentos de substituição direta e simplificação (...)" (NAIR, 2009, p. 114, tradução nossa);
- Alguns estudantes acreditavam que para uma função ser contínua, basta seus limites laterais serem iguais;
- Os resultados indicaram que os estudantes tinham a impressão de que limites são pontos alcançados pela função;

Finalmente, Nair (2009) sugere que mais experimentos sejam desenvolvidos para examinar a compreensão conceitual dos estudantes sobre assíntotas, limites e continuidade. Além disso, recomenda o ensino de cálculo em um ambiente em que as assíntotas sejam introduzidas junto com o conceito de limite para que, posteriormente, seja avaliado o aperfeiçoamento da compreensão desses conceitos, por meio dessa estratégia de ensino.

Brandemberg (2009) realizou uma pesquisa, na qual objetivou analisar o conceito histórico-epistemológico do conceito de grupo, conforme a teoria do pensamento matemático avançado proposto por Deyfrus (1991). A partir dessa análise, o autor intencionou verificar de que maneira uma abordagem de ensino centrada na Teoria dos Números e na Teoria das Equações poderia viabilizar o processo de ensino do conceito de grupo. Para isso, realizou a reconstrução histórica do desenvolvimento do conceito de grupo, bem como uma pesquisa exploratória nos cursos de licenciatura em matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN) e da Universidade Federal do Pará (UFPA).

O autor realizou também uma experiência de ensino de álgebra pautada na relação entre a história da matemática, desenvolvimento de múltiplas representações (DEYFRUS, 1991) e a formação de *imagens conceituais* (VINNER, 1991) e observou que sua abordagem de ensino mostrou-se bastante eficaz, isso porque ao ativar partes das *imagens conceituais* dos sujeitos investigados no que concerne ao conceito de grupo, possibilitou a realização de discussões que contribuíram para a efetivação de um aprendizado mais eficaz em relação a esse conceito.

2.4. Considerações sobre o capítulo

As pesquisas descritas nesse capítulo nos permitiu verificar que a dificuldade na apreensão desse conceito se faz presente na vida acadêmica de grande parte dos estudantes que participam de um curso de *Cálculo*. Percebemos então a necessidade de concentrar nosso estudo no processo de ensino - aprendizagem do conceito de limite de função, dada sua importância para o estudo de conceitos adjacentes e, objetivando fundamentar nossa pesquisa, baseamo-nos na teoria e definições sobre *imagem* e *definição conceitual*, desenvolvidas por Tall e Vinner (1981) e Vinner (1991) e suas relações com o nosso objeto de estudo (limite de função), bem como nos demais estudos apontados nesse capítulo.

A fim de viabilizar o entendimento do leitor acerca da relação entre nossos objetivos para com essa pesquisa e o referencial teórico estabelecido, elaboramos o quadro a seguir:

Quadro 2: **Fundamentação teórica x objetivos da pesquisa realizada**

Referencial teórico	Objetivo(s) do referencial teórico	Relação com nossos objetivos
Tall e Vinner (1981)	Levantar aspectos concernentes à *Imagem Conceitual* de estudantes acerca de três noções: limite de uma sequência $\lim_{n\to\infty} S_n$, limite de uma função $\lim_{n\to a} f(x)$ e continuidade de uma função $f: D \to IR$	Assim como no estudo de Tall e Vinner (1981), objetivamos estudar aspectos concernentes às noções de *imagem* e *definição conceitual*. Em contrapartida, nosso objeto de estudo restringe-se ao conceito de limite de função.
Cornu (1983)	Estabelecer uma melhor compreensão em relação às verdadeiras dificuldades relacionadas à aquisição da noção de limite; Evidenciar concepções dos sujeitos investigados no que se refere ao conceito de limite, bem como os obstáculos característicos de sua aprendizagem.	Da mesma maneira que Cornu (1983), almejamos evidenciar as concepções dos sujeitos investigados sobre o conceito de limite de função. Entretanto, nosso objetivo voltou-se para a análise das *imagens conceituais evocadas* dos indivíduos de nossa pesquisa sem, necessariamente e unicamente, buscar a identificação/classificação de obstáculos epistemológicos inerentes a sua aprendizagem.
Sierpinska (1985)	Verificar os obstáculos epistemológicos de estudantes universitários relativos à noção de limite;	Assim como Sierpinska (1985), voltamos nossa pesquisa para a análise de concepções dos estudantes acerca do conceito de limite de função. Todavia, as *imagens conceituais evocadas* pelos sujeitos investigados em nossa pesquisa não foram analisadas a fim de identificar, necessariamente, obstáculos epistemológicos relativos a esse conceito, mas sim com o propósito de nos auxiliar a categorizá-las e analisá-las para que, em pesquisas futuras, possamos desenvolver atividades que viabilizem seu entendimento.
Cottrill et al (1996)	Estabelecer – através de investigações computacionais de aproximação, investigações gráficas do conceito de limite, construções computacionais da aproximação de um valor ao limite, construções computacionais do conceito de limite e investigações com ε, δ – análises acerca da aprendizagem de estudantes universitários no que concerne à essa noção.	A pesquisa de Cotrill *et al* (1996) apresenta resultados que influenciaram na elaboração dos instrumentos de coletas de dados de nossa pesquisa, sendo assim, almejamos verificar se as *imagens conceituais evocadas* pelos sujeitos investigados encontram-se em acordo com os aspectos apontados por Cottril *et al* (id.). Entretanto, os dados de nosso estudo foram obtidos somente no ambiente lápis e papel e por meio de entrevistas, o que não incluiu o ambiente computacional.
Barto (2004)	Investigar e analisar a produção de significados de estudantes de	Apesar dos objetivos de Barto (2004) não estarem em

	pós-graduação em educação matemática em relação à continuidade de funções de uma variável real; Verificar como ocorre a dinâmica da produção de significados para a continuidade e quais os significados produzidos para objetos matemáticos como ponto, curva, intervalo, épsilon, delta, domínio e imagem de funções.	conformidade com aqueles estabelecidos em nossa pesquisa, seus resultados influenciaram na construção de nossos instrumento de investigação que buscou verificar, dentre outras situações, as *evocações* dos sujeitos investigados acerca da relação (não) existência do limite x (des) continuidade.
Jordaan (2005)	Identificar os erros conceituais apresentados por estudantes sobre o conceito de limite de função; Verificar como os sujeitos investigados entendem a noção de limite e que tipo de erros eles apresentam nesse aspecto, além de evidenciar como eles relacionam continuidade e descontinuidade de uma função em um ponto com a existência do limite naquele ponto;	Os objetivos traçados por Jordaan (2005) encontram-se em conformidade com os que delimitamos para nossa pesquisa, sobretudo em relação à investigação das *imagens conceituais evocadas* pelos sujeitos investigados no que concerne à relação entre continuidade e a existência do limite, sendo esse referencial de suma importância para a análise dos resultados obtidos em nosso estudo.
Zuchi (2005)	Realizar um estudo sobre as dificuldades de ensino-aprendizagem do conceito de limite; Propor alternativas que viabilizassem a apreensão do conceito de limite de função por parte de estudantes universitários;	Os objetivos de Zuchi (2005) quanto ao estudo sobre as dificuldades de aprendizagem em limite de função assemelham-se com os traçados em nossa pesquisa, dado que as *imagens conceituais evocadas* pelos estudantes sobre esse conceito revelam dificuldades que influenciam na construção de uma *definição conceitual pessoal* incoerente com a *definição conceitual formal* de limite de função. Mas, ao contrário de Zuchi (2005), nossos objetivos para essa pesquisa não foram pautados na proposição de atividades para o ensino de limites.
Juter (2006)	Identificar como as percepções dos sujeitos investigados sobre limites se desenvolvem, se essas percepções podem estar relacionadas ao desenvolvimento histórico desse conceito; Evidenciar como os estudantes resolvem tarefas envolvendo limites, bem como qual a relação entre as atitudes dos sujeitos investigados e seus respectivos desempenhos em atividades envolvendo limite de função;	Nossos objetivos se aproximam aos de Juter (2006) no sentido de que assim como a autora, almejamos verificar junto aos sujeitos investigados suas percepções acerca do conceito de limite a partir de tarefas e entrevistas que envolvam tal conceito. Pretendemos evidenciar – da mesma maneira que Juter (2006) – *imagens conceituais* que caracterizem os conhecimentos dos estudantes no que concerne ao conceito de limite de função, bem como a relação entre *imagem*

		conceitual, *definição conceitual pessoal* e *definição conceitual formal*. Ressaltamos que as considerações de Juter (2006) foram de extrema relevância para a análise dos resultados obtidos em nossa pesquisa.
Nair (2009)	Verificar que conexões entre os conceitos de assíntotas, continuidade e limite de funções racionais os sujeitos investigados apresentavam; bem como os efeitos do experimento de ensino realizado no decorrer da pesquisa na compreensão desses conceitos.	Apesar de nossa investigação não promover o estudo dos mesmos conceitos explorados por Nair (2009), suas considerações sobre as *imagens conceituais* de estudantes acerca de limite de funções e continuidades foram fundamentais para a construção dos instrumentos utilizados para obtenção de dados, bem como para a análise das *imagens conceituais evocadas* acerca da relação limite x continuidade apresentadas pelos indivíduos investigados em nossa pesquisa.
Brandemberg (2009)	Analisar o conceito histórico-epistemológico do conceito de grupo; Verificar de que maneira uma abordagem de ensino centrada na Teoria dos Números e na Teoria das Equações poderia viabilizar o processo de ensino do conceito de grupo.	Apesar dos objetivos de Brandemberg (2009) não estarem em conformidade com aqueles estabelecidos em nossa pesquisa, seu levantamento teórico acerca dos estudos de Vinner (1991) sobre *imagem conceitual* e *definição conceitual* constituiu-se de fundamental importância para a construção de nossos objetivos para com essa pesquisa, bem como para o amadurecimento de nossas percepções em relação aos resultados obtidos nas duas etapas de nossa investigação e sua relação com essa fundamentação teórica.

Ressaltamos que o referencial teórico estabelecido nesse capítulo foi fundamental para o desenvolvimento de nosso estudo, tendo em vista que complementou nossas perspectivas em relação às hipóteses e objetivos previamente estabelecidos, e subsidiou tanto na construção do questionário e roteiros de entrevistas quanto na análise das *imagens conceituais evocadas* pelos sujeitos investigados na pesquisa.

Destinamos o capítulo seguinte à descrição de fatos históricos relacionados com o desenvolvimento conceitual de limite de função. Afiançamos, nesse sentido, que o estudo histórico, assim como o levantamento bibliográfico, auxiliou na delimitação dos temas explorados nas duas etapas de investigação.

CAPÍTULO 3. LIMITE DE FUNÇÃO:

Breve descrição sobre seu processo de construção

3.1. Introdução

Objetivamos com esse capítulo apresentar uma breve descrição de fatos históricos relacionados ao desenvolvimento do conceito de limite. Nosso objetivo, nesse sentido, consistiu na busca pelo amadurecimento de nossa percepção quanto às dificuldades inerentes à construção desse conceito por meio do entendimento acerca da dedução das ideias que a permearam, fatos que nos permitiram analisar de maneira mais consistente as mobilizações dos sujeitos investigados acerca desse conceito, bem como viabilizou o estabelecimento de relações entre as *imagens conceituais evocadas* e a fundamentação teórica estabelecida, ou seja, contribuiu para que pudéssemos alcançar nossos objetivos e responder nossas questões de pesquisa, já que nos auxiliou no processo de sistematização e análise dos resultados.

Ressaltamos que o levantamento histórico norteou-se, sobretudo, nas considerações de Boyer (1959). Sabemos que existem outras fontes que exploram de maneira mais minuciosa e atualizada o desenvolvimento conceitual dos tópicos de *Cálculo*. No entanto, nosso objetivo para esse capítulo consistiu em proporcionar ao leitor uma visão geral acerca dos fatos que permearam a construção do conceito de limite de função, dado que as duas etapas de investigação levaram em conta, principalmente, as dificuldades dos estudantes em relação às interpretações estática e/ou dinâmica que permeiam o entendimento desse conceito e que, por sua vez, fizeram-se presente desde os primórdios de sua evolução.

3.2. Sobre o desenvolvimento do *Cálculo*

O desenvolvimento conceitual do *Cálculo* foi marcado por séculos de indecisões e conflitos ideológicos até a real formalização dos conceitos matemáticos envolvidos. Evidenciamos, portanto, a contribuição e o empenho intelectual de muitos estudiosos, razão pela qual seria impossível de atribuir seus avanços conceituais a uma única figura. Nessa perspectiva, concordamos com Boyer (1959) ao afirmar que:

> (...) raramente – quem sabe nunca – um único matemático ou cientista foi intitulado por receber o crédito completo por uma inovação ou, nenhuma Era merece ser chamada de renascença em relação a determinado aspecto cultural. Por trás de qualquer descoberta ou invenção há, invariavelmente, um desenvolvimento evolucionário de ideias, tornando seu surgimento possível. A história do cálculo nos fornece uma notável ilustração desse fato. (p. 299, Tradução nossa)

A origem do *Cálculo*, segundo Boyer (1959), está centrada nas dificuldades dos matemáticos gregos antigos em expressar razões e proporcionalidades de segmentos de retas, os quais vagamente reconheciam como *contínuo*, em termos de números, que consideravam no campo do *discreto* (BOYER, 1959). Entretanto, somente durante a idade média o estudo quantitativo sobre variabilidade – mesmo que com uma abordagem dialética – foi empreendido, possibilitando no século XVII a introdução de novos campos de estudo, tais como a geometria analítica e a representação sistemática de quantidades variáveis. A partir de então,

> A aplicação do novo tipo de análise agregado à livre utilização dos sugestivos infinitesimais e à aplicação mais extensiva do conceito de número levou em um curto período de tempo aos algoritmos de Newton e Leibniz, que constituíram o cálculo. (BOYER, 1959, p. 4, tradução nossa).

É importante destacar, entretanto, que mesmo com os algoritmos desenvolvidos por Newton e Leibniz, não havia clareza no que concerne à base lógica e formal do assunto. Somente no século XVIII podemos dizer que o *Cálculo* se libertou das intuições acerca de movimento contínuo e grandezas geométricas. Todavia, foi no século seguinte - com as definições rigorosas de número e contínuo – que o conceito de derivada foi constituído como fundamental e uma base mais sólida desse campo de estudo foi estabelecida (BOYER, 1959).

Atualmente, as definições dos tópicos de *Cálculo*, bem como as operações envolvidas encontram-se tão esclarecidas em livros da área que as dificuldades referentes ao desenvolvimento histórico dos conceitos básicos são facilmente esquecidas. Em contrapartida, mais de 2500 anos de tentativas foram necessárias para o desenvolvimento, sistematização e formalização do *Cálculo*.

Reiteramos a relevância do estudo histórico para nossa pesquisa, sobretudo no sentido de nosso amadurecimento em relação ao processo de construção epistemológica do conceito de limite de função por meio das ideias que o permearam e apresentamos a seguir alguns fatos matemáticos que tiveram grande importância para o desenvolvimento do *Cálculo*, sobretudo nos séculos XVII ao XIX.

3.3. Concepções na Antiguidade e na Idade Média

Em se tratando da matemática na Antiguidade, destacamos alguns resultados que podem ser tomados como ponto de partida para a jornada de problematização e formalização do *Cálculo*. Um importante resultado, nesse aspecto, foi a teoria dos pitagóricos sobre a aplicação de áreas que os permitia afirmar se uma figura delimitada por segmentos de retas era maior, equivalente ou menor que uma segunda figura, sendo essa superposição de uma área sobre a outra um primeiro passo, na tentativa de definir de maneira exata a noção de área. Nesse sentido, Boyer (1959) aponta que:

> (...) Os matemáticos gregos não falavam em *área de uma figura*, mas em *razão entre duas superfícies*, uma definição na qual não poderia, por conta do problema da incomensurabilidade, ser considerada precisa antes de um satisfatório conceito de número ser desenvolvido (p. 18, tradução nossa).

Os quatro paradoxos de Zenão de Elea[9] (sec. V a.C), por exemplo, em muito afetaram as concepções da época, por envolver abstrações extrínsecas ao pensamento matemático grego, tais como os conceitos de limite, infinito e continuidade. A argumentação presente nesses paradoxos tem, segundo Caraça (1984), um valor inestimável, no sentido de "mostrar-nos que o

[9] Os paradoxos a que me refiro são: Aquiles e a tartaruga, flecha, estádio e dicotomia.

movimento não pode ser compreendido como uma sucessão de estados particulares; considera-lo assim, equivale a abordar seu estudo por um *método estático* que traz consigo o germen da infecundidade e da incompreensão" (p. 215).

O método de Exaustão também foi de grande importância na trajetória de desenvolvimento conceitual do *Cálculo*. O princípio da exaustão nos permite verificar que

> (...) para todo $\varepsilon > 0$ existe um polígono regular inscrito em um círculo cuja área difere da do círculo menos que ε. Se a razão das áreas dos dois círculos for A_1/A_2 e que o quadrado dos raios r_1^2/r_2^2, então teremos três casos possíveis: $A_1/A_2 < r_1^2/r_2^2$, $A_1/A_2 > r_1^2/r_2^2$ ou $A_1/A_2 = r_1^2/r_2^2$" (CORNU, 1991, p. 160, tradução nossa)

No entanto, apesar de ser equivalente aos argumentos empregados na prova da existência de limite no cálculo diferencial e integral, esse método era completamente geométrico, em virtude do conhecimento de um infinito contínuo não ter sido desenvolvido durante a Antiguidade.

Em se tratando da relação do método da exaustão com a noção de limite, Boyer (1959) destaca que:

> (...) O método da Exaustão corresponde a um conceito institucional, descrito em termos de figuras mentais da percepção sensorial de mundo. A noção de limite, por outro lado, deve ser percebida como um conceito verbal, a explicação na qual é dada em termos de palavras e símbolos – tais como número, sequencia infinita, menor que, maior que – diz respeito não a qualquer visualização mental, mas somente em termos de elementos primários não definidos (...) apesar da ideia de limite aparecer na história da matemática nos tempos antigos, a formulação rigorosa desse conceito não aparece em trabalhos antes do século XIX – e certamente não no método grego de exaustão (p. 36 – 37, tradução nossa).

Arquimedes de Siracusa (287 – 212 a. C) – considerado o maior matemático da Antiguidade – teve, mediante seus notáveis resultados, grande importância para as antecipações do cálculo integral. Dentre seus trabalhos, destacamos as aplicações do método da exaustão, o cálculo do volume de segmentos de conóides e de cunhas cilíndricas, os centros de gravidade do semicírculo, de segmentos parabólicos e de segmentos de uma esfera. Entretanto, não podemos afirmar que os métodos de Arquimedes são a equivalência genuína do método de *integração*, dado que:

> (...) a integral definida requer, para sua formulação correta, uma apreciação das noções de variabilidade e funcionalidade, a formação da soma característica $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$, e a aplicação do conceito de limite de uma sequencia infinita obtida a partir dessa soma, permitindo que n seja aumentado indefinidamente à medida que Δ_x se torna indefinidamente pequeno. Esses aspectos essenciais da integral não estão indicados, certamente, em nenhum trabalho de Arquimedes, por serem extrínsecos a todo o pensamento matemático grego (BOYER, 1959, p. 55, tradução nossa).

No que concerne às contribuições medievais para o desenvolvimento do *Cálculo*, evidenciamos que residem principalmente nas especulações, do ponto de vista filosófico, sobre infinito, infinitesimal e continuidade, além daquelas referentes ao estudo acerca do movimento e variabilidade (BOYER, 1959; BARON, 1985). Essas especulações são consideradas significativas para a instituição dos métodos e conceitos da *nova análise*, pois:

> Ambos, Newton e Leibniz, bem como muitos de seus antecessores, se apoiaram na geração de grandezas para uma base do *Cálculo* – um ponto de vista no qual é considerado como a mais notável contribuição da filosofia escolástica para o desenvolvimento do assunto. (BOYER, 1959, p. 94, tradução nossa)

Dentre aqueles que contribuíram para o desenvolvimento do *Cálculo* no período medieval, destacamos Richard Suiseth, cujos estudos podem ser considerados um primeiro esforço para tornar quantitativamente compreensível alguns conceitos físico – matemáticos. Os termos *fluxus* e *fluens* foram, inclusive, empregados por ele trezentos anos antes do *Cálculo* de Newton. Além disso, Suiseth antecipou que as definições de taxas de variação uniforme e não uniforme deveriam ser expressas numericamente, entretanto, sabemos que a definição rigorosa desses termos foi estabelecida somente depois do desenvolvimento do conceito de limite.

A associação do estudo da variação à representação de coordenadas estabelecida por Nicole Oresme (1323-1382) no período medieval também teve grande importância para o avanço da análise matemática. Assim como outros escolásticos, ele também se dedicou ao estudo de séries infinitas. É claro que esse estudo não era realizado por meio de símbolos, tal qual é feito atualmente, mas sim retoricamente. Sobre as contribuições medievais no âmbito do *Cálculo*, Boyer (1959) aponta que:

> (...) foram, sobretudo, na forma de especulações, largamente sob ponto de vista filosófico com referência ao estudo do movimento a da variabilidade. Essas aquisições tiveram papel fundamental para o desenvolvimento de conceitos e métodos do *Cálculo*, pois conduziram os primeiros descobridores do assunto a associar a geometria estática dos gregos às representações gráficas de variáveis, bem como à ideia de continuidade (p. 94, tradução nossa)

Sabemos que a história do *Cálculo* foi marcada de incertezas, bem como pelo empenho de muitos estudiosos para a fundamentação de seu campo de estudo. Apesar de muitas das contribuições para trajetória do desenvolvimento do *Cálculo* ser estabelecidas após a Idade Média, este período é considerado de suma importância, pois preparou terreno para os estudos posteriores que anteciparam e em muito influenciaram as descobertas de Newton e Leibniz no século XVII, bem como as formalizações de Cauchy e Weirstrass no século XIX. Dedicamos o tópico a seguir a algumas dessas antecipações.

3.4. Século XVII: Contribuições que antecederam o *Cálculo*

Nos anos que anteciparam as descobertas de Newton e Leibniz acerca do *Cálculo*, deparamo-nos com contribuições advindas dos trabalhos de alguns estudiosos, dentre os quais, destacamos Johann Kepler (1571 – 1630) e seu livro *Astronomia Nova*, no qual encontramos uma computação que se assemelha à notação moderna $\int_0^\theta sen\theta d\theta = 1 - cos\theta$ (BOYER, 1959). No entanto, apesar de alguns estudos que se aproximavam a resultados do *cálculo integral*, Kepler não apresentava nenhum tipo de esclarecimento no que se refere aos conceitos básicos envolvidos. Ainda assim, convencionamos importante destacar que:

> (...) apesar da visão escolástica sobre variação apresentar um papel significativo para as antecipações do *Cálculo*, a abordagem estática de Kepler predominou. Incrementos e decrementos, ao invés de taxa de variação, foram elementos fundamentais que levaram aos trabalhos de Leibniz e, apresentaram um papel ainda mais importante no *Cálculo* de Newton (BOYER, 1959, p. 111, tradução nossa).

Boaventura Cavalieri (1598 – 1647) também teve participação, dentre aqueles que anteciparam as descobertas do *Cálculo*. Um de seus resultados, referente à soma dos cubos dos segmentos de um paralelogramo, é equivalente ao que atualmente expressamos da seguinte maneira: $\int_0^a x^n dx = \frac{a^{n+1}}{n+1}$, sendo esse o primeiro teorema geral do cálculo. É claro que Cavalieri não apresentava nenhuma concepção clara acerca dos conhecimentos em termos de *diferencial* e *integral*. Sobre seu livro *Geometria indivisibilibus,* ressaltamos que Cavalieri não enfatizava os elementos algébricos e aritméticos que levaram, *a priori*, às regras de procedimentos do *Cálculo* e, *a posteriori*, às definições de *diferencial* e *integral* (BOYER, 1959).

Dentre os resultados alcançados por Torricelli (1608 – 1647), destacamos a aplicação dos métodos de exaustão, dos indivisíveis e a composição de movimento que são antecipações marcantes da *nova análise*. Além disso, Torricelli realizou diversos estudos relacionados aos problemas de quadraturas e tangentes e, inclusive, reconhecia que um era o inverso do outro. Em contrapartida, não estabeleceu nenhum algoritmo que pudesse ser aplicado em todos os casos, haja vista que não via seus métodos como constituintes de um novo tipo de análise (BOYER, 1959).

Os estudos de Torricelli marcaram um significativo avanço para o *Cálculo*, entretanto os conceitos básicos empregados nos mesmos estavam díspares do ponto de vista moderno e apesar de Torricelli estar ciente do método dos indivisíveis produzir resultados consonantes com os obtidos pelos métodos dos antigos, ele estava longe de descobrir que ambos deveriam ser associados ao conceito de limite.

Os estudos sobre infinitesimais foram bastante difundidos no século XVII e, nesse aspecto, Gilles de Roberval (1602 – 1675) não foi exceção. Em suas proposições sobre indivisíveis, são reconhecidas antecipações do *Cálculo Integral*, sendo algumas delas equivalente à determinação de integrais definidas de funções algébricas e trigonométricas. O equivalente do teorema $\int_0^a x^n dx = \frac{a^{n+1}}{n+1}, n > 0$ foi alcançado por Roberval que, ao contrário de Fermat e Torricelli, não conseguiu chegar aos resultados para outros valores de n. Podemos dizer que seus trabalhos são caracterizados pela flexibilidade e pela utilização de diversos elementos infinitesimais.

No que se refere à Blaise Pascal (1623 – 1662), destacamos seu *traité des sinus du quart de cercle*, no qual determinou a soma dos senos de uma parte de uma curva, ou seja, a área abaixo dela, sendo essa uma considerável observação. Nesse aspecto, verificamos que se Pascal tivesse se dedicado mais em considerações aritméticas e nos problemas das tangentes, ele poderia ter antecipado o conceito de limite e descoberto sua importância para os problemas de tangentes e quadraturas. Entretanto, Boyer (1959) evidencia que:

> (...) sua subestimação no que se refere à importância dos pontos de vista algébrico e analítico podem ter sido responsáveis não apenas por sua inabilidade de definir o conceito central e unificador do *Cálculo integral* – o de limite de uma soma – mas também pela falha ao reconhecer a natureza inversa dos problemas de quadratura e tangentes (p. 152, tradução nossa)

Viète (1540 – 1603) teve um papel importante para o desenvolvimento da matemática do século XVII, devido à sua classificação acerca dos papeis de variável e parâmetros, apesar da notação operacional utilizada por ele ainda ser bastante primitiva em relação aos padrões da modernidade. De qualquer maneira, a busca por generalizações em detrimento de problemas particulares foi um grande passo para a abordagem algorítmica que caracteriza o *Cálculo* (EDWARDS, 1979).

A matemática dos infinitesimais foi fortemente influenciada pelas contribuições de Descartes (1596 – 1650) e Fermat (1601 – 1665) relacionadas à geometria analítica. No que se refere à ideia desse campo de conhecimento, observamos que ela consiste:

> (...) na correspondência entre uma equação $f(x,y) = 0$ e geralmente uma curva, consistindo de todos os pontos cujas coordenadas (x,y) relativas a dois eixos fixos e perpendiculares satisfazem a equação (EDWARDS, 1979, p. 95, tradução nossa).

Ressaltamos que a noção de variável, enfatizada explicitamente pela primeira vez por Descartes e Fermat, foi indispensável para o desenvolvimento do *Cálculo*. O método de determinar máximos e mínimos de Fermat, publicado em 1638, foi inclusive um dos marcos na história do *Cálculo*. Em seus estudos, dados um segmento de reta de comprimento a e uma distância x a partir de uma das extremidades desse segmento a, a área nos segmentos x e $a - x$ será $A = x(a - x)$. Se, ao invés da distância x, for considerada uma distância $x + E$, a área seria $A = (x + E)(a - x - E)$. Dessa maneira, para a área máxima os dois valores serão iguais e os pontos x e $x + E$ coincidirão.

Consequentemente, definindo dois valores de A iguais e fazendo E desaparecer, o resultado será $x = \frac{a}{2}$.

Na verdade, mesmo sem conhecer a noção de limite, ele igualava $f(x)$ e $f(x+E)$ e percebia que os valores eram quase iguais. Em seguida, dividia tudo por E e resolvia $E = 0$, encontrando assim as abscissas dos pontos máximo e mínimo da função. Em outras palavras, fazia $\lim_{E \to 0} \frac{f(x+E) - f(x)}{E}$ e igualava a zero. Nesse aspecto, observamos que o procedimento aplicado por Fermat é praticamente aquele atualmente utilizado no *cálculo diferencial*, exceto que E é substituído por Δx (ou ocasionalmente h).

Os trabalhos de Isaac Barrow (1630 – 1677) também tiveram grande relevância para história do *Cálculo*. Seus resultados incluem inúmeros teoremas sobre os problemas de tangentes e quadraturas, além do reconhecimento acerca da relação entre esses problemas. Todavia, as proposições de Barrow eram dispostas em termos de construções geométricas, caso elas tivessem sido feitas em termos do *Cálculo*, seriam equivalentes a inúmeras regras e teoremas de diferenciação e integração.

Evidenciamos que foram inúmeros os esforços que levaram ao desenvolvimento do *Cálculo* e, frente às contribuições dos estudiosos envolvidos com essa *nova análise*, seria inevitável – cedo ou tarde – a descoberta desse campo de estudo. Essa trajetória foi marcada, sobretudo, pelos estudos de Isaac Newton e Gottfried Wilhelm Leibiniz, cujas observações são apresentadas no tópico a seguir.

3.5. Newton x Leibniz: A descoberta do *Cálculo*

A descoberta do *Cálculo* é atribuída a Isaac Newton (1642 – 1727) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716), em virtude de terem inventado – independente um do outro – algoritmos universalmente aplicáveis que, em sua essência, assemelham-se àqueles empregados atualmente no Cálculo, cuja concepção de derivada e de integral está logicamente desenvolvida. Entretanto, suas descobertas não são apresentadas com o rigor das definições e ideias características dos tempos atuais, haja vista que somente no século XIX as definições rigorosas foram estabelecidas[10].

As primeiras manifestações de Newton sobre o *Cálculo* constam em seu *De analysi* (BOYER, 1959). Nesse estudo, ele não se expressava explicitamente em termos da ideia e/ou notação fluxionária, mas encontrou quadraturas de curvas baseando-se nas noções geométrica e analítica de *infinitamente pequeno*, conforme as seguintes considerações que caracterizaram um passo introdutório ao *Cálculo Diferencial e Integral*:

> Seja uma curva esboçada tal que para a abscissa x e para a ordenada y a área é $z = \left(\frac{n}{m+n}\right) a x^{\frac{m+n}{n}}$. Seja o momento ou crescimento infinitesimal na abscissa, seguindo a notação de James Gregory, igual a O. A nova abscissa será $x + O$ e a área mencionada $z + Oy = \left(\frac{n}{m+n}\right) a(x + O)^{\frac{m+n}{n}}$. Se nessa expressão aplicarmos o teorema binomial, dividindo tudo por O, e depois abandonar os termos que ainda contenham O, o resultado será $y = ax^{\frac{m}{n}}$. Ou seja, se a área é dada por $z = \frac{n}{m+n} a x^{\frac{m+n}{n}}$, a curva será $y = ax^{\frac{m}{n}}$. Reciprocamente, se a curva é $y = ax^{\frac{m}{n}}$, a área será $z = \frac{n}{m+n} a x^{\frac{m+n}{n}}$ (BOYER, 1959, p. 191, tradução nossa)

Em *Methodus fluxionum et serierum* infinitarum, seu segundo trabalho contendo aspectos referente ao *Cálculo*, Newton estabeleceu os conceitos de *fluxões*, que seria a taxa de geração, e de fluentes constituída pela quantidade gerada. Segundo Boyer (1959), esse livro se caracteriza por expor o problema fundamental do *Cálculo* – dada uma relação de quantidade, encontrar a relação do fluxão dessa quantidade e vice-versa. Como exemplo, apresentamos a seguir:

> Se O é um intervalo de tempo infinitamente pequeno, então $\dot{x}o$ e $\dot{y}o$ serão incrementos, ou momentos, infinitamente pequenos das seguintes quantidades x e y. Em $y = x^n$, então, substitui-se $x + xo$ em x e $y + yo$ em y, expande-se, como anteriormente pelo teorema binomial, cancela-se os termos que não contém o e se divide tudo por o. Como, aliás, o foi considerado infinitamente pequeno, os termos que o contém - isto é, os momentos de quantidades – pode ser considerado como zero em comparação com os outros, e devem ser abandonados (BOYER, 1959, p. 194 - 195, tradução nossa).

[10] O rigor matemático não é exclusivo do séc. XIX, entretanto nesse período que foram estabelecidas as principais definições formais que hoje conhecemos no âmbito do *Cálculo*, apesar do grande desempenho de importantes estudiosos no século anterior.

Em seu *De quadratura*, Newton demonstrou mais clareza no que concerne aos elementos essenciais da derivada, enfatizando a ideia de função de uma variável, a formação da relação entre as taxas, a variável independente e a função e a determinação do limite dessa relação quando as taxas se aproximam de zero. No que concerne à noção de limite, Newton enunciou o seguinte lema:

> Quantidades e as razões de quantidades que tendem constantemente a tornar-se iguais num tempo finito, e cuja diferença, antes desse tempo, se torna menor que qualquer diferença dada, serão enfim iguais (CARAÇA, 1984, p. 254).

Em linhas gerais, podemos dizer que as manifestações de Newton sobre a *nova análise* caracterizam-se por três interpretações: Uma em termos de infinitesimais, conforme apresentado em seu *De analysi*; outra em termos de razões ou limites, conforme destacado em seu *De quadratura* e, finalmente, aquela em termos de fluxões, apresentada em seu *Methodus fluxionum*.

Gottfried Wilhelm Leibiniz – independente das considerações de Newton sobre a *nova análise* – desenvolveu seu método para determinar somas e diferenças de infinitesimais, caracterizando-o por uma notação própria: $\int xdx$ para as "somas" (integral de x, conforme chamou) e dx para as "diferenças".

Dentre as manifestações de Leibniz sobre o *Cálculo*, destacamos que – assumindo x e y como sendo $x + dx$ e $y + dy$, respectivamente – ele evidenciou que $d(xy) = xdy + ydx$ e $d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{ydx-xdy}{y^2}$. Além disso, ao perceber que a "diferença" de x^n seria nx^{n-1} e, sabendo que as "somas" eram o inverso das "diferenças", determinou que $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$. No que se refere à definição de diferencial de primeira ordem, verificamos que:

> (...) Ele afirmou que a diferencial dx da abscissa x é uma quantidade arbitrária, e que a diferencial dy da ordenada y é definida como a quantidade, na qual é para dx como a razão da ordenada para a subtangente (BOYER, p. 210, tradução nossa).

Sobre a ideia de limite, Leibniz a justificava a partir da lei de continuidade. Sabemos, entretanto, que a lei de continuidade deve ser definida em termos de limites o que nos leva a perceber que sua ideia de contínuo era vaga, tal como na antiguidade. Além disso, evidenciamos que somente depois do desenvolvimento do conceito de número real foi possível interpretar tanto o cálculo de Newton quanto o de Leibniz em termos de limites, ou seja, os inventores do *Cálculo*, tal como seus antecessores, não conseguiram explicar a ideia de limites pertinentemente.

Atribuímos à notação de Leibniz um papel de suma importância para a base lógica do *Cálculo*, sendo mantida a sua utilização até os dias atuais. Em contrapartida, esse sistema de notação induziu Leibniz ao erro no que concerne à formulação rigorosa desse campo de estudo, haja vista que o fez pensar as relações diferenciais como quocientes, e suas integrais, não como valores limitantes de determinadas funções características, mas como somas.

Finalmente, em se tratando dos estudos de Newton e Leibniz, concordamos com Boyer (1959) ao afirmar que:

> Newton apresentou três interpretações de seu procedimento, e apesar de indicar a preferência pela noção de razões iniciais e finais como a mais rigorosa, ele não elaborou nenhuma em um sistema lógico. Leibniz apresentou uma falta de decisão similar, pois embora tenha empregado o método integral por completo, ele vacilou em sua atitude à respeito das diferenciais, considerando – as como zeros qualitativos, e como variáveis auxiliares (p. 219, tradução nossa).

Sendo assim, acreditamos ser importante destacar que os trabalhos de ambos, Newton e Leibniz, apresentam os procedimentos essenciais do *Cálculo*. Todavia, essas contribuições não se estendem à clareza das concepções envolvidas que foram somente estabelecidas quase um século depois e são essas manifestações posteriores relacionadas às concepções da *nova análise* que destacaremos no tópico a seguir deste capítulo.

3.6. Rumo à formalização do *Cálculo*.

Conforme mencionamos anteriormente, Newton e Leibniz tiveram um papel importante para o *Cálculo*, pois ambos foram os primeiros a desenvolver algoritmos universalmente aplicáveis, cuja essência assemelha-se aos métodos utilizados atualmente, sendo assim, o título de *inventores do Cálculo* lhes é dado com incontestável coerência. Em contrapartida, sabemos que as manifestações tanto de Newton quanto de Leibniz acerca do *Cálculo* não apresentavam rigor e clareza em suas definições e, portanto, havia a necessidade de buscar esse rigor matemático para esclarecer as concepções envolvidas na *nova análise*. Essa busca pelo rigor matemático esteve presente durante o século XVIII e predominou em todo o século XIX, período no qual as principais definições da *nova análise*, inclusive a de limite de função com os épsilons e deltas, foram estabelecidas conforme o rigor que conhecemos hoje.

As manifestações de Benjamin Robins (1707 – 1751) sobre o cálculo, por exemplo, constam em alguns artigos publicados em periódicos da época, como o de título *A discourse concerning the nature and certainty of Sir Isaac Newton's methods of fluxions and of prime and ultimate ratios*[11] (BOYER, 1959). Dentre suas considerações, verificamos que ele distinguiu somente duas interpretações relacionadas ao trabalho de Newton, sendo uma voltada para as fluxões e outra para as primeiras e últimas razões. Estes são, respectivamente, caracterizados por facilitar as demonstrações e pelo rigor matemático. No que concerne às suas considerações sobre limites, verificamos que:

> (...) ele reconheceu que a frase 'a razão final de quantidades desaparecidas' era uma expressão figurativa, referindo – se não à última razão, mas à 'uma quantidade fixa na qual uma quantidade variável, mediante um contínuo aumento ou diminuição, pode continuamente se aproximar,... munida da quantidade variável essa aproximação pode diferir uma da outra tão pouco quanto qualquer quantidade possa ser atribuída',... 'apesar de nunca poderem ser absolutamente iguais' (BOYER, 1959, p. 230, tradução nossa).

Leonhard Euler (1707 – 1783), por ter sido um dos primeiros matemáticos a ter dado notoriedade ao conceito de função, ocupa posição de destaque dentre os que almejavam pela formalização da *nova análise*, sendo responsável pelo estudo e classificação sistemáticos relacionados às funções elementares, bem como suas diferenciais e integrais.

O desenvolvimento do cálculo no decorrer do século XVIII se caracterizou por uma visão de funcionalidade atrelada não a um reconhecimento conceitual de relação, mas somente como uma representação formal, na qual a notação de Leibniz se encontrava perfeitamente adaptada. No

[11] Um discurso concernente a natureza e certeza dos métodos de fluxões e de primeiras e últimas razões de Sir Isaac Newton

que diz respeito à visão de Euler sobre os princípios do *Cálculo*, evidenciamos que ele se restringiu às funções elementares, cuja concepção analítica prevaleceu no *cálculo* do século XVIII (EDWARDS, 1979, p. 301).

Jean Ron d'Alembert (1717 – 1783) reconheceu a importância da *nova análise* e, na tentativa de tornar o conceito de limite – no qual a acreditava ser base do cálculo diferencial – mais compreensível, apresentou a seguinte definição:

> Diz que uma grandeza é o limite de outra grandeza quando a segunda pode aproximar-se da primeira tanto quanto se queira, embora a primeira grandeza nunca possa exceder a grandeza da qual ela se aproxima; de modo que a diferença entre tal qual quantidade e seu limite é absolutamente indeterminável (SIERPINSKA, p. 49, tradução nossa).

Essa ideologia geométrica de D'Alembert influenciou na falta de uma fraseologia clara em sua definição de limite, o que a tornaria aceita e substituiria a interpretação infinitesimal (BOYER, 1959). De qualquer maneira, sua atitude e a de muitos outros resultou no estabelecimento de uma *nova análise*, no qual o conceito de limite se constituiu como fundamental, trazendo à tona a formulação rigorosa do *Cálculo*.

A noção de continuidade do final do século XVIII relacionava-se mais com a expressão analítica de função que com a ideia moderna de continuidade na qual nos voltamos para sua representação gráfica. Nesse sentido, uma função era descontínua se houvesse "falhas" em pontos isolados (onde a expressão analítica mudava) ou falta de qualquer expressão analítica, no caso de curvas livres (EDWARDS, 1979).

Sobre a ideia de continuidade, Louis Arbogast (1759 – 1803) escreveu:

> A lei de continuidade consiste no fato de uma quantidade não poder passar de um estado para outro sem passar por todos os estados intermediários que estão sujeitos à mesma lei. Funções algébricas são consideradas contínuas porque os diferentes valores dessas funções dependem, da mesma maneira, da variável; e, supondo que a variável aumenta continuamente, a função receberá variações correspondentes; mas não passará de um valor para o outro sem também passar através dos valores intermediários (...) (EDWARDS, 1979, p. 303, tradução nossa).

Bolzano (1781 – 1848) foi o primeiro a definir precisamente continuidade de função a partir da ideia de limites. Segundo ele, entender o conceito de continuidade estava relacionado à compreensão de que a frase "uma função $f(x)$ varia de acordo com lei de continuidade para todos os valores de x que estão dentro ou fora de certos limites" significa que "se x é um valor qualquer, a diferença $f(x+\omega)-f(x)$ pode ser menor que qualquer quantidade dada, tomando ω tão pequeno quanto queiramos" (EDWARDS, 1979, p. 308). Ou seja, uma função f é contínua em determinado intervalo se $\lim_{\omega\to 0} f(x+\omega) = f(x)$ para cada valor de x do intervalo. Verificamos ainda que Bolzano:

> (...) definiu a derivada de $F(x)$ para qualquer valor de x como a quantidade $F'(x)$, na qual a razão $\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}$ se aproxima indefinidamente, ou tanto quanto queiramos, a medida que Δx se aproxima de zero, sendo Δx positivo ou negativo (BOYER, 1959, p. 269, tradução nossa).

Cauchy (1789 – 1857) expôs em seus trabalhos – *Cours d'analyse de L'École Polytechnique*[12], *Résumé des leçons sur le calcul infinitesimal*[13] e *Leçons sur le calcul différentiel*[14] – uma incontestável contribuição para o *Cálculo*. Na verdade, suas exposições sobre a *nova análise* foram as primeiras a dar ao cálculo um caráter formal, conforme evidenciamos atualmente.

Em seu *Cours d'analyse*, Cauchy estabeleceu, pela primeira vez, uma definição de limite compreensiva e livre de intuições geométricas. Segundo ele:

> Quando sucessivos valores atribuídos a uma variável se aproximam indefinidamente de um valor fixo até que ao final difere dele tão pouco quanto se queira, esse último é chamado de limite de todos os outros. Assim, por exemplo, um número irracional é o limite de diversas frações, que fornece mais e mais valores aproximados a ele. (EDWARDS, 1979, p. 310, tradução nossa).

Além da definição de limite destacada anteriormente, Cauchy apresentou a definição de um infinitesimal como sendo de ordem n a respeito de um infinitesimal x se $\lim_{\substack{x\to 0\\ y=0}} \left(\frac{y}{x^{n-\varepsilon}}\right) = 0$ e $\lim_{\substack{x\to 0\\ y=0}} \left(\frac{y}{x^{n-\varepsilon}}\right) = \pm\infty$, tal que $\varepsilon > 0$ e estabeleceu ainda a definição de derivada, conforme a seguir:

[12] Curso de análise da escola politécnica.
[13] Resumo de lições sobre o cálculo infinitesimal.
[14] Lições sobre o cálculo diferencial.

> Seja a função $f(x)$. Atribui-se a variável x um incremento $\Delta x = i$; e forma-se a razão $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+i)-f(x)}{i}$. O limite dessa razão (se existir) quando i se aproxima de zero ele representou como $f'(x)$ e chamou de derivada de y em relação à x (BOYER, 1959, p. 275, tradução nossa).

As contribuições de Cauchy se estendem à noção de continuidade, a qual definiu a partir da ideia de limite, apresentando uma precisão matemática muito mais evidente que as definições expostas até então. Para ele, uma função $f(x)$ é contínua se, entre os limites, um incremento infinitamente pequeno i na variável x sempre produz um incremento infinitamente pequeno $f(x+i) - f(x)$ na função.

A formulação de Cauchy sobre continuidade e diferenciabilidade em termos de limite foi de grande importância para a *nova análise* e para os estudos posteriores sobre esse campo de conhecimento, além é claro, de sua definição de integral – que durante o século XVIII era simplesmente reconhecido como o inverso da derivada – a e prova do teorema fundamental do cálculo. De acordo com Edwards (1979):

> Foi Cauchy quem primeiro reconheceu a necessidade de demonstrar a existência das integrais ou funções primitivas antes de saber suas propriedades diversas, ou seja, primeiro fornecer uma definição geral e prova da existência da integral para uma ampla classe de funções que poderiam então fornecer uma base para a discussão de integrais particulares e suas respectivas propriedades (p. 317-318).

No que concerne às manifestações de Weierstrass (1815 – 1897) sobre a *nova análise*, verificamos uma notável clareza e rigor nas definições apresentadas. Sobre a noção de continuidade, ele definiu uma função contínua $f(x)$ em determinado intervalo se, para qualquer valor x_0 neste intervalo e para um número positivo arbitrariamente pequeno ε, for possível encontrar um intervalo próximo de x_0 tal que para todos os valores nesse intervalo a diferença $f(x) - f(x_0)$ for menor em valor absoluto que ε. Além disso, definiu limite, conforme a seguir:

> O número L é o limite da função $f(x)$, tal que $x = x_0$ se, dado qualquer número arbitrariamente pequeno ε, outro número δ possa ser encontrado tal que para todos os valores de x diferindo de x_0 por menos que δ, o valor de $f(x)$ diferir de L por menos que ε (BOYER, 1959, p. 287, tradução nossa).

Diante das considerações de Bolzano e, principalmente, de Cauchy e Weierstrass podemos dizer que a *nova análise* – depois de instituída por Newton e Leibniz no século XVII – atingiu seu rigor máximo, tal como os gregos jamais sonharam em alcançar nos primórdios das concepções envolvidas nesse campo de conhecimento.

3.7. Considerações sobre o capítulo

Objetivamos com este capítulo apresentar alguns aspectos históricos relacionados ao desenvolvimento conceitual do *Cálculo* e acreditamos ser importante conhecer um pouco de seu processo de formação. Nesse sentido, no que concerne ao conhecimento da história do *Cálculo* interpretamos que:

> A familiaridade não apenas com os elementos do cálculo, mas também com a história de seu desenvolvimento, servirá para trazer à tona que a questão não está voltada apenas aos fundadores desse conhecimento – Weierstrass e Cauchy, ou Newton e Leibniz, ou Barrow e Fermat, ou Cavalieri e Kepler, ou Arquimedes e Eudoxo – mas principalmente em que sentido cada um desses homens podem ser apontados como responsáveis pela nova análise (BOYER, 1959, p. 301, tradução nossa).

A partir das considerações desse capítulo, percebemos ainda que a dificuldade em entender e até mesmo aceitar a ideia de limite se fez presente desde os primórdios – com os paradoxos de Zenão – até a real formalização deste conceito, conforme realizada por Weirstrass. Ainda hoje, evidenciamos que esse conceito é responsável pela angústia de estudantes de cursos de *Cálculo*, levando à realização de diversas pesquisas relacionadas ao processo de aprendizagem desse campo conhecimento (conforme evidenciamos no capítulo anterior), fato que nos influenciou a realizar uma pesquisa que contemplasse essa problemática, fato que se consolidou com as duas etapas de investigação, destacadas no capítulo subsequente.

CAPÍTULO 4. ANÁLISE DOS RESULTADOS

Estabelecendo um primeiro diálogo com o referencial teórico

4.1. Introdução

Neste capítulo objetivamos apresentar os instrumentos de investigação utilizados nas etapas da pesquisa, bem como estabelecermos – através da análise dos resultados obtidos – um diálogo com o referencial teórico adotado em nossa pesquisa, que fora constituída de duas etapas: a primeira caracterizada pela aplicação de um questionário contendo questões envolvendo limite de função e a segunda, pela realização de entrevistas com alguns dos sujeitos investigados na 1ª etapa, cujos resultados são discutidos no decorrer do referido capítulo.

4.2. Primeira etapa: O questionário

O questionário proposto aos estudantes na primeira etapa da pesquisa continha sete questões relacionadas ao conceito de limite de função. O intuito dessa primeira etapa foi verificar as *imagens conceituais evocadas* pelos sujeitos investigados no que concerne a esse conceito.

Destacamos, a seguir, cada uma das questões, bem como seus respectivos objetivos.

1ª questão. O número $1,999999\ldots$ é menor ou igual a 2? Justifique sua resposta.

A dualidade *estático/dinâmico* permeia todo o processo de compreensão do conceito de limite e encontra-se presente, sobretudo, na dificuldade dos estudantes em afirmar se uma função pode ou não alcançar o valor do limite. Objetivamos, portanto, com a primeira questão verificar se as *Imagens Conceituais* dos sujeitos investigados mobilizariam uma noção dinâmica do número apresentado, ou seja, $1{,}999999\ldots < 2$ ou estática, em que $1{,}999999\ldots = 2$.

Essa questão foi baseada na investigação realizada por Tall e Vinner (1981). Nessa pesquisa, os autores solicitaram que os estudantes calculassem $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{9}{10}+\frac{9}{100}+\cdots+\frac{9}{10^n}\right)$, bem como respondessem se $0,999999\ldots < 1$ ou $0,999999\ldots = 1$, justificando a resposta.

Tall e Vinner (1981) observaram que diferentes partes das *Imagens Conceituais* do conceito de limite foram *evocadas*. Isso porque, para a maioria dos estudantes, o $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{9}{10}+\frac{9}{100}+\cdots+\frac{9}{10^n}\right) = 2$, em contrapartida, $0,999999\ldots < 1$, haja vista que, segundo alguns dos sujeitos investigados, *"(...) a diferença entre esse número e 1 é infinitamente pequena"* ou *"(...) até no infinito o número, apesar de estar perto de 1, ainda assim não é tecnicamente 1"* (TALL&VINNER, 1981, p. 158, tradução nossa).

Acreditamos que os resultados obtidos em nossa investigação estariam em acordo com os de Tall e Vinner (1981), pois a situação exemplificada anteriormente pode ser estendida às dificuldades inerentes ao processo de apreensão do conceito de limite de função, em virtude de serem semelhantes aos conflitos acerca da possibilidade da função alcançar ou não o valor do limite.

A fim de complementar nossas observações acerca das *Imagens Conceituais evocadas* pelos indivíduos de nossa pesquisa, propusemos a 2ª questão do questionário, conforme a seguir.

2ª Questão. Calcule $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}$ e explique o que isso significa.

O objetivo da 2ª questão é verificar – mediante as justificativas dos sujeitos investigados – as associações efetivadas em suas *imagens conceituais* relacionadas ao conceito de limite de função. Nossa expectativa, nesse sentido, residiu nas mobilizações apresentadas pelos estudantes sobre o fato da função alcançar ou não o valor do limite.

Baseamo-nos em resultados obtidos em pesquisas anteriores para elaborar essa questão, pois acreditamos que essa dualidade entre as noções estático/dinâmico do conceito de limite são *fatores de conflito em potencial* (VINNER, 1991). Supomos, nesse sentido, que:

- Os estudantes atribuem à definição de limite uma noção de dinamismo que reside na percepção de que "o valor que $f(x)$ se aproxima quando os valores de x chegam perto de a é c" (TALL&VINNER, 1981, p. 160, tradução nossa);
- Muitos estudantes apresentam dificuldades em entender características específicas da noção de limite, tais como decidir se a função pode alcançar o valor do limite (JUTER, 2006);
- Os estudantes visualizam limite como um processo dinâmico e não como um objeto estático (TALL&VINNER, 1981; JORDAAN, 2005).

Além disso, optamos pela função $f(x) = \frac{1}{x}$, na tentativa de verificar se os estudantes responderiam que $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$ e afirmariam na primeira questão que $1{,}999999\ldots < 2$, levando-nos à interpretação de que diferentes partes das *Imagens Conceituais* foram *evocadas* ao resolverem essas questões sendo essas concepções semelhantes àquelas elucidadas por Tall e Vinner (1981).

3ª Questão. Explique, com suas palavras, o que significa $\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 2$.

Objetivamos com essa questão verificar as associações estabelecidas pelos estudantes no que se refere ao conceito de limite de função. Conjecturamos, nesse sentido, que – assim como Tall e Vinner (1981), Jordaan (2005), Juter (2006) – os sujeitos investigados apresentariam uma noção dinâmica, na qual interpretam que enquanto x se aproxima de a, $f(x)$ se aproxima de c. Ou seja, supomos que $f(x) \neq c$ faz parte da *Imagem Conceitual* dos estudantes participantes de nossa pesquisa. Nesse sentido, acreditamos que:

- A utilização de expressões como "se aproxima", "chega perto", "tende a" confirmam a ideia de que $f(x) \neq c$ (TALL&VINNER, 1981);
- Existe uma adversidade na ideia dos estudantes, na medida em que apresentam uma percepção de limite como sendo uma aproximação dinâmica de x, mas o definem como uma aproximação da função f em relação a um único valor de x próximo de a (COTTRILL *et al,* 1996);

- A ideia de que o limite é um processo de aproximação a um ponto, sendo, entretanto, inalcançável faz parte da *Imagem Conceitual* de muitos estudantes (JORDAAN, 2005).
- Uma das dificuldades relacionadas à apreensão do conceito de limite refere-se ao entendimento de características específicas de sua definição, como por exemplo, decidir se a função pode ou não alcançar o valor do limite (JUTER, 2006);
- É comum que os estudantes tenham a impressão de que limites são pontos (a serem) alcançados pela função (NAIR, 2009).

Com o intuito de complementar nossas considerações sobre a 3ª questão, solicitamos que os sujeitos investigados respondessem às seguintes situações na 4ª questão:

> 4ª questão. Responda as solicitações a seguir:
>
> a) Calcule $\lim_{x\to\infty} \frac{x^3-2}{x^3+1}$.
>
> b) Explique sua resolução.
>
> c) A função $f(x) = \frac{x^3-2}{x^3+1}$ pode alcançar o valor do limite no item (a)? Justifique.

A questão 4 é análoga às apresentadas na pesquisa de Juter (2006). Caracteriza-se por ser uma atividade rotineira que envolve objetivos semelhantes aos destacados nas questões anteriores. Nossa intenção, portanto, norteou-se nas seguintes:

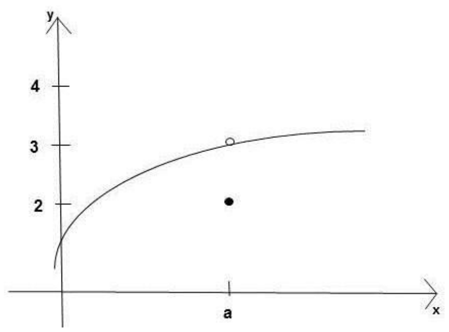
- As associações concernentes ao conceito de limite de função resumem-se, muitas vezes, ao processo de encontrar limites utilizando procedimentos de substituição direta e/ou simplificação (NAIR, 2009);
- Para muitos estudantes calcular o limite de uma função consiste em realizar uma investigação dinâmica à direita e à esquerda de um ponto dado (BARTO, 2004);
- Saber se uma grandeza variável alcança ou não seu limite é um obstáculo epistemológico inerente à aprendizagem do conceito de limite,

sendo este proveniente da recusa de muitos indivíduos em reconhecer o status de operação matemática ao limite (SIERPINSKA, 1985);

- Os estudantes tem a percepção de que a ideia de limite está relacionada a uma aproximação, a um movimento físico; não conseguem admiti-lo como um objeto estático, conforme estabelece a definição weierstrassiana (SIERPINSKA, 1985; JORDAAN, 2005);

5ª Questão. Observe os gráficos abaixo e responda:

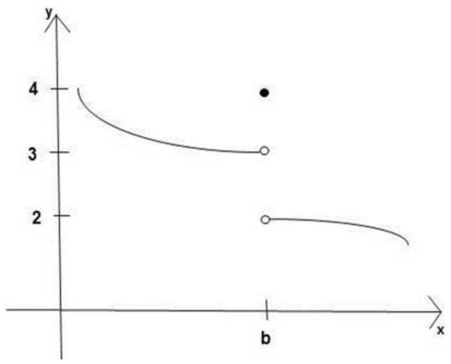
a)



a.1) O limite dessa função existe?

a.2) Justifique sua resposta

b)



b.1) O limite dessa função existe?

b.2) Justifique sua resposta

A elaboração dessa questão norteou-se, sobretudo, nas considerações de Juter (2006) sobre as mobilizações das *Imagens Conceituais* de estudantes em relação ao comportamento da função próximo e no próprio valor do limite. Objetivamos, nesse sentido, verificar como os estudantes interpretariam a (não) existência do limite em funções descontínuas, bem como a importância de relacionar os limites laterais, a fim de observar a unicidade do limite. Ressaltamos que os alunos foram instruídos em considerar os limites em $x = a$ e em $x = b$. Acreditamos que, assim como elucidado em pesquisas anteriores, nossos resultados estariam voltados para alguns aspectos, tais como:

- A existência do limite o limite de uma função f em um ponto a está, necessariamente, atrelada ao valor da função no ponto. Ou seja, os estudantes observam que obrigatoriamente $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ (COTTRILL *et al, 1996)*;
- Calcular o limite de uma função significa apenas realizar uma investigação à direita e à esquerda de um ponto qualquer (BARTO, 2004);
- Uma função que não esteja definida em um ponto não apresenta limite quando a função tende àquele ponto (JORDAAN, 2005);
- O $\lim_{x \to a} f(x)$ deve ser necessariamente igual a $f(a)$. Caso contrário, o limite não existirá (NAIR, 2009). Ou seja, semelhante às considerações de Leibniz no séc. XVII é comum que os sujeitos acreditem que a existência do limite depende da continuidade da função no ponto e não o contrário;

6ª Questão. Observe as sentenças abaixo, assinale aquela(s) que descreve(m) o conceito de limite de função e justifique sua(s) escolha(s). Caso você discorde das sentenças, justifique.

a) O valor do limite descreve como uma função se move enquanto x tende a determinado ponto;
b) O valor do limite é um número ou um ponto no qual a função não pode alcançar;
c) O valor do limite é um número no qual os valores de y da função podem chegar arbitrariamente próximo através de restrições nos valores de x.
d) O valor do limite é um número ou um ponto em que a função se aproxima, mas nunca alcança;
e) O valor do limite é uma aproximação na qual pode ser tão precisa quanto se desejar;
f) O valor do limite é obtido por meio da inserção de números cada vez mais próximos de um número dado até que o valor do limite é alcançado.

Juter (2006) propôs as mesmas sentenças durante a entrevista realizada com os sujeitos investigados em sua pesquisa de pós-doutoramento. Dessa maneira, objetivamos – assim como a autora – verificar as *evocações* dos estudantes sobre a habilidade de uma função atingir (ou não) o limite, bem como qualquer outra mobilização em relação à esse conceito.

As sentenças foram propostas nessa questão para que os sujeitos investigados tivessem algo para comparar com suas *Imagens Conceituais*, o que viabilizaria nossa análise quanto às suas *evocações* nesse aspecto. Optamos por essa questão, pois concordamos que:

- O limite de função apresenta tanto a característica *processual* quanto a *estática*, o que torna mais difícil a real compreensão desse conceito por parte dos estudantes (JUTER, 2006);
- A dificuldade em perceber o limite como um *procept*[15] reside na dificuldade de correlacionar a noção intuitiva, sob o ponto de vista cinemático, com a definição formal, com ε e δ (ZUCHI, 2005);
- A ideia de que $f(x) \neq c$ faz parte da *Imagem Conceitual* de muitos estudantes, ou seja, o limite é caracterizado como sendo inalcançável (TALL&VINNER, 1981);

7ª Questão. Escreva uma definição para $\lim_{x \to a} f(x) = c$.

Finalmente, solicitamos que os estudantes escrevessem uma definição para limite de função. Objetivamos identificar elementos que compõem a *imagem conceitual* dos sujeitos investigados em nossa pesquisa, bem como sua *definição conceitual pessoal* sobre limite de função e a relação desta com a *definição conceitual formal*.

Essa questão foi baseada, sobretudo, nos estudos realizados por Tall e Vinner (1981), mas também nas considerações de Cornu (1981), Sierpinska (1883), Cottrill *et* al (1996), Zuchi (2005), Jordaan (2005), Juter (2006), Nair (2009) que foram unânimes em destacar que as *imagens conceituais* dos estudantes no que se refere ao conceito de limite permeiam a ideia de aproximação, dinamismo, na qual a função jamais poderá alcançar seu limite.

Em virtude das questões anteriores despertarem nos estudantes diferentes possibilidades de *evocações* quanto ao conceito de limite de função, acreditamos que os mesmos estabeleceriam comparações com suas *imagens conceituais* que, por sua vez, seriam mais claramente explicitadas no momento em que os sujeitos apresentassem uma *definição conceitual pessoal p*ara tal conceito e, mesmo se os estudantes escrevessem na íntegra a *definição*

[15] Expressão utilizada por Gray e Tall (1993) que atribuem ao limite de uma função tanto a perspectiva de um processo de aproximação de determinado valor (*Process)* quanto o próprio valor do limite (Concept). Optamos por não traduzir essa expressão.

conceitual formal de limite de função, suas *imagens conceituais evocadas* nas questões anteriores nos permitiria verificar seu entendimento acerca da definição.

4.3. Descrição da 1ª etapa da investigação

Na primeira etapa de nossa pesquisa investigamos os conhecimentos, acerca do conceito de limite de função, de 25 estudantes universitários de licenciatura em matemática de duas universidades públicas no estado do Pará (Brasil) que já haviam cursado a disciplina *Cálculo I*. A investigação foi realizada nos dias 27/04 e 03/05 de 2012. Os sujeitos investigados precisaram de, aproximadamente, 60 minutos para responder o questionário.

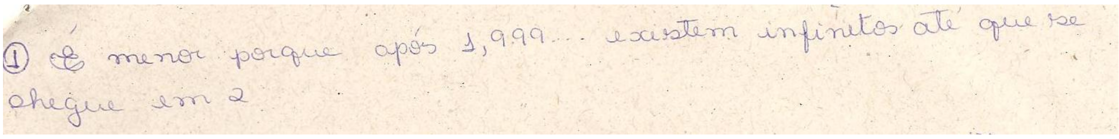
A obtenção dos resultados da primeira etapa de nossa pesquisa foi realizada por meio do questionário respondido pelos sujeitos investigados. Foi nossa intenção realizar um levantamento acerca das *imagens conceituais evocadas* pelos estudantes ao resolverem questões relacionadas ao conceito de limite de função. Para viabilizar a interpretação dos resultados, organizamos os dados – referentes a cada questão – em *classes* para, em seguida, estabelecermos um primeiro diálogo, apoiado nos referenciais teóricos abordados no segundo capítulo dessa dissertação. Ressaltamos que algumas questões apresentam um número maior de *classes*, devido a maior diversidade de *imagens conceituais evocadas* pelos sujeitos.

4.4. Resultados

4.4.1. Resultados obtidos primeira questão

Classe A1: Corresponde ao único sujeito que não respondeu a questão.

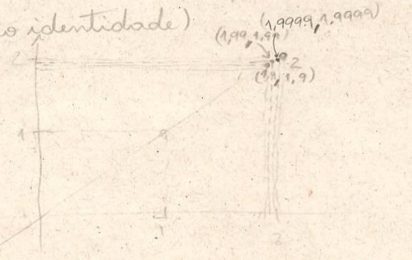
Classe B1: Corresponde aos 16 sujeitos investigados que responderam que $1,999999 \ldots < 2$. Destacamos a seguir 4 das 16 respostas que constituíram essa classe.


① É menor porque após 1,999... existem infinitos até que se chegue em 2

01 O número 1,999... será menor que 2. Intuitivamente, analisando o gráfico de f(x)=x percebemos que o ponto 1,999... pode se aproximar o máximo possível do ponto 2, mas nunca poderá tocá-lo.

Seja f(x) = x (função identidade)

Gráfico:



x	f(x)
1	1
1,9	1,9
1,99	1,99
1,9999	1,9999

① O número 1,9999... é menor que 2 pois, o 9 se repete infinitamente porém, não alcança o valor 2, o correto é dizer que o valor 1,9999 tende a 2 e não arredondá-lo para 2.

01- 1,999... < 2, pois, tende a 2 porém, não é dele.

Fonte: Respostas dos sujeitos S13, S14, S11 e S04.

Classe C1: Corresponde aos 6 sujeitos investigados que responderam que $1{,}999999\ldots = 2$, conforme elucidamos 3 das 6 respostas apresentadas:

1. Igual a 2, pois o número 1,999... tem uma diferença insignificativa para com o número 2.

1º) Seja $1{,}999\ldots = x$ ... ①

① × 10 = $19{,}999 = 10x$ ... ②

② − ①, temos: $18 = 9x$

$\therefore x = 2$

Logo, podemos concluir que 1,999... = 2.

1- O número 1,9999.... é igual a 2 pois:

$x = 1{,}9999\ldots$

$10x = 19{,}9999\ldots$

$10x = 19 + 0{,}9999\ldots$

$y = 0{,}99999\ldots$

$10y = 9{,}9999\ldots$

$10y = 9 + 0{,}9999\ldots$

$10y = 9 + y$

$9y = 9$

$y = 1$

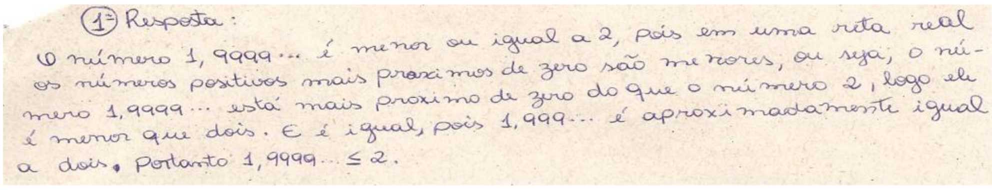
Portanto $10x = 19 + y$ e $y = 1$.

Logo $10x = 19 + 1 = 20$

$x = 2$

Fonte: Respostas dos sujeitos S18, S02 e S20.

Classe D1: Corresponde aos dois sujeitos que responderam que $1{,}999999 \ldots$ é tanto menor quanto igual a 2,conforme evidenciamos na resposta do sujeito S05.


1ª Resposta:
O número 1,9999... é menor ou igual a 2, pois em uma reta real os números positivos mais proximos de zero são menores, ou seja, o número 1,9999... está mais proximo de zero do que o número 2, logo ele é menor que dois. E é igual, pois 1,999... é aproximadamente igual a dois. Portanto 1,9999... ≤ 2.

Fonte: Resposta do sujeito S05.

Nossa intenção com essa questão foi verificar se os estudantes mobilizariam em suas *Imagens Conceituais* uma noção dinâmica do número apresentado, isto é, $1{,}999999\ldots < 2$ ou estática, sendo nesse caso $1{,}999999\ldots = 2$.

A maioria dos sujeitos investigados em nossa pesquisa apresentou uma noção dinâmica acerca do número $1{,}999999 \ldots$, ou seja, para grande parte dos estudantes, por mais próximo que esteja de 2, jamais o alcançará. Nesse sentido, nossos resultados encontram-se em conformidade com aqueles obtidos por Tall e Vinner (1981). As respostas dos sujeitos investigados em nosso estudo são, inclusive, semelhantes àquelas elucidadas por Tall e Vinner (id.), conforme evidenciamos nas respostas do sujeito S13 de nossa investigação e de um dos sujeitos investigados por esses autores:

- *"(...) até no infinito o número, apesar de estar perto de 1, ainda assim não é tecnicamente 1"* (TALL & VINNER, 1981, p. 158, tradução nossa).
- *"É menor porque após* $1{,}9999 \ldots$ *existem infinitos até que se chegue em 2"* (resposta do sujeito S13).

Verificamos, junto às respostas dos estudantes para a 1ª questão, que a noção dinâmica que permeou suas *Imagens Conceituais* está voltada para a ideia de *tender para* um determinado valor sem, entretanto, alcançá-lo (ver respostas dos sujeitos S11 e S04 na *classe B1*). Nesse aspecto, as mobilizações dos sujeitos investigados assemelham-se a significação atribuída por Cornu (1983, p. 76) à expressão '*tender para'*, na qual o autor elucida a ideia de *tendência a se aproximar de algo*, no caso das respostas dos estudantes participantes de nossa pesquisa, de 2.

A resposta do sujeito S14 (*classe B1*) exemplifica claramente que o dinamismo presente nas *Imagens Conceituais Evocadas* pelos estudantes pode ser estendido, inconscientemente, às mobilizações inerentes ao processo de apreensão do conceito e limite de função e, mas especificadamente, aos conflitos acerca da possibilidade da função alcançar ou não o valor do limite, fato que leva os estudantes a cometerem erros conceituais, tais como o do sujeito S14 que evocou o gráfico de uma função identidade $f(x) = x$ para justificar sua resposta ($1{,}999999 \ldots < 2$). Sendo que, ao afirmar: *"$1{,}999999 \ldots$ pode se aproximar o máximo possível do ponto 2, mas nunca poderá tocá-lo"*, o estudante, além de claramente apresentar confusões conceituais na tentativa de se explicar, desconsiderou o domínio da função que ele mesmo mobilizou.

No que concerne à *classe C1* dos resultados obtidos nessa questão, observamos na resposta do sujeito S18 ("*igual a 2, pois o número $1{,}999999 \ldots$ tem uma diferença insignificante para com o número 2*") a ideia de aproximação entre as duas quantidades de maneira que a diferença entre ambas seja tão pequena ou infinitamente pequena que poderá ser desconsiderada. Nesse sentido, podemos atrelar a justificativa do sujeito S18 à ideia de limite levantada por Newton, na qual *"<u>Quantidades</u>, e razões de quantidade, os quais em qualquer tempo finito convergem continuamente à igualdade, e antes do fim daquele tempo <u>se aproximam cada vez mais uma da outra</u> que, finalmente, <u>se tornam iguais</u>"* (BOYER, 1959, p. 197, tradução nossa, grifo nosso).

As respostas dos sujeitos S02 e S20 diferiram de todas as outras provenientes da *classe C1*. Esses estudantes apresentaram claramente uma noção estática acerca do número $1{,}999999 \ldots$. Acreditamos que essa interpretação poderá ser estendida às imagens conceituais desses dois sujeitos no que concerne às suas mobilizações relacionadas ao conceito de limite de função.

Ao contrário de Tall e Vinner (1981), observamos ainda em nossa pesquisa que dois sujeitos afirmaram que $1{,}999999 \ldots$ é tanto menor quanto igual a 2 (ver figura 12). Nesse caso, a justificativa do sujeito S05 mobiliza a dicotomia *estático/dinâmico* por meio da ideia de *procept* (GRAY & TALL, 1993), na qual existe tanto um processo dinâmico de aproximação entre $1{,}999999 \ldots$ e 2 (*process)* quanto a presença de uma noção estática, na qual $1{,}999999 \ldots = 2$ (*concept)*. Acreditamos ser importante verificar junto a esses sujeitos se essa mobilização pode ser estendida às suas *Imagens Conceituais* relativas ao conceito de limite de função.

Afiançamos, por fim, que a 1ª questão propiciou a evocação de determinadas *imagens conceituais* pelos sujeitos investigados, conforme destacamos no quadro a seguir:

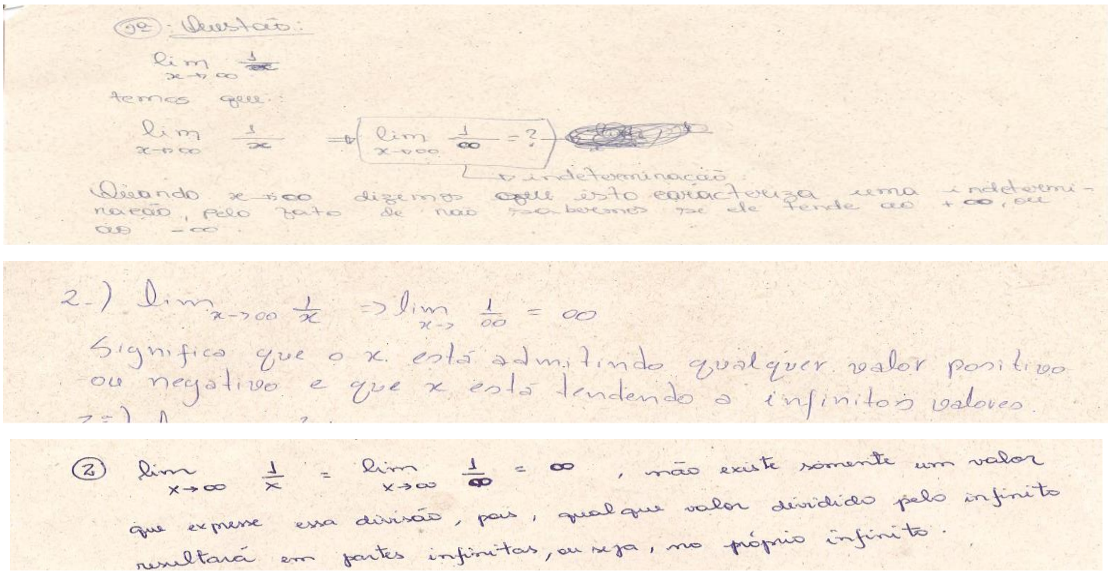
Quadro 3: ***Imagens conceituais evocadas na 1ª questão***

Noção dinâmica; ideia de aproximação em relação a determinado valor, sem alcançá-lo
Tendência a se aproximar de algo (CORNU, 1983)
Noção de infinitamente pequeno
Dicotomia *estático/dinâmica*
Ideia de estar tão próximo de algo, de maneira a alcançá-lo
Noção estática
A ideia de *procept* (GRAY & TALL, 1993)

4.4.2. Resultados obtidos na 2ª questão

Classe A2: Corresponde aos 3 estudantes que não responderam a questão.

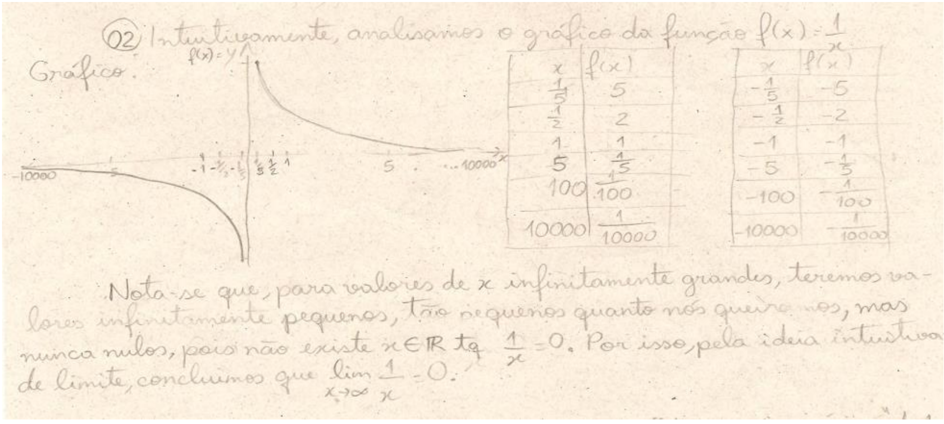
Classe B2: Corresponde aos 8 sujeitos que responderam a questão de maneira incorreta. Destacamos abaixo 3 das 8 anotações referentes a essa classe.



Fonte: Respostas dos sujeitos S03, S11, S09.

Classe C2: Corresponde ao único sujeito que respondeu que $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$, entretanto não explicou o que esse resultado significava.

Classe D2: Corresponde aos 3 sujeitos que responderam que $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$ e evocaram construções gráficas para explicar o resultado.



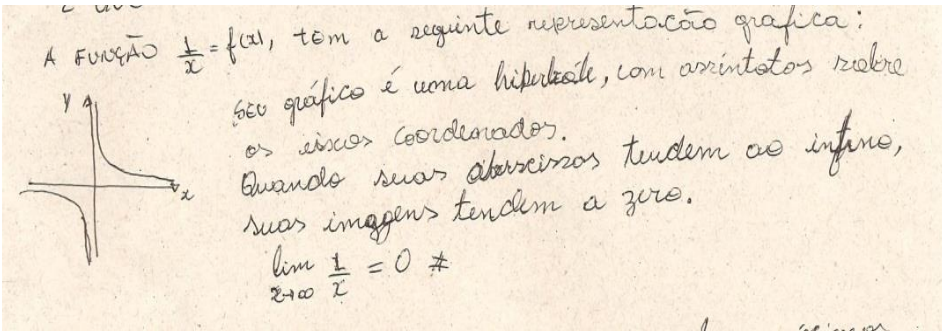
02) Intuitivamente, analisamos o gráfico da função $f(x) = \frac{1}{x}$

Gráfico:

x	$f(x)$
$\frac{1}{5}$	5
$\frac{1}{2}$	2
1	1
5	$\frac{1}{5}$
100	$\frac{1}{100}$
10000	$\frac{1}{10000}$

x	$f(x)$
$-\frac{1}{5}$	-5
$-\frac{1}{2}$	-2
-1	-1
-5	$-\frac{1}{5}$
-100	$-\frac{1}{100}$
-10000	$-\frac{1}{10000}$

Nota-se que, para valores de x infinitamente grandes, teremos valores infinitamente pequenos, tão pequenos quanto nós quisermos, mas nunca nulos, pois não existe $x \in \mathbb{R}$ tq $\frac{1}{x} = 0$. Por isso, pela ideia intuitiva de limite, concluímos que $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$.



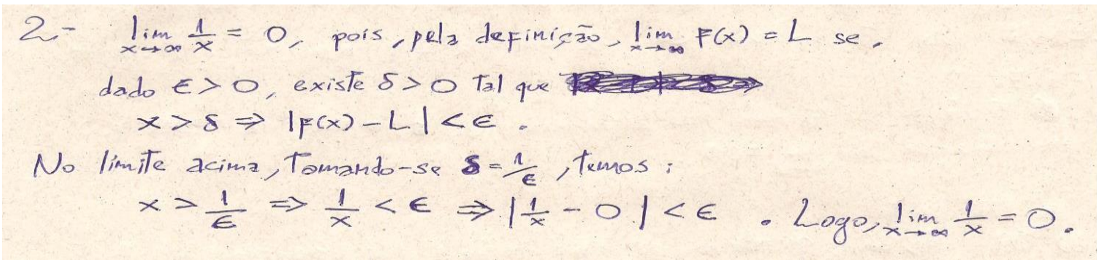
A função $\frac{1}{x} = f(x)$, tem a seguinte representação gráfica:

seu gráfico é uma hipérbole, com assíntotas sobre os eixos coordenados.
Quando suas abscissas tendem ao infinito, suas imagens tendem a zero.

$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$ #

Fonte: Respostas dos sujeitos S14 e S25.

Classe E2: Corresponde a um único sujeito que respondeu $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$, mobilizando aspectos da definição formal de limite de função para explicar o seu significado, conforme destacamos a seguir:

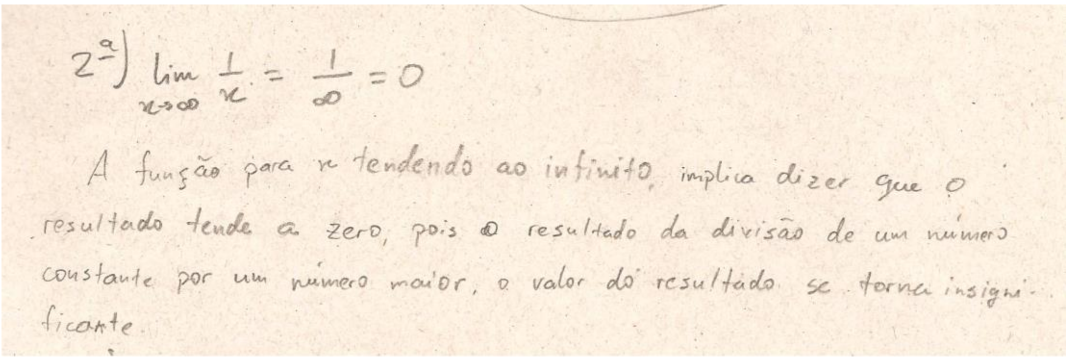


2- $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$, pois, pela definição, $\lim_{x \to \infty} F(x) = L$ se, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $x > \delta \Rightarrow |F(x) - L| < \epsilon$.

No limite acima, tomando-se $\delta = \frac{1}{\epsilon}$, temos: $x > \frac{1}{\epsilon} \Rightarrow \frac{1}{x} < \epsilon \Rightarrow \left|\frac{1}{x} - 0\right| < \epsilon$. Logo, $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$.

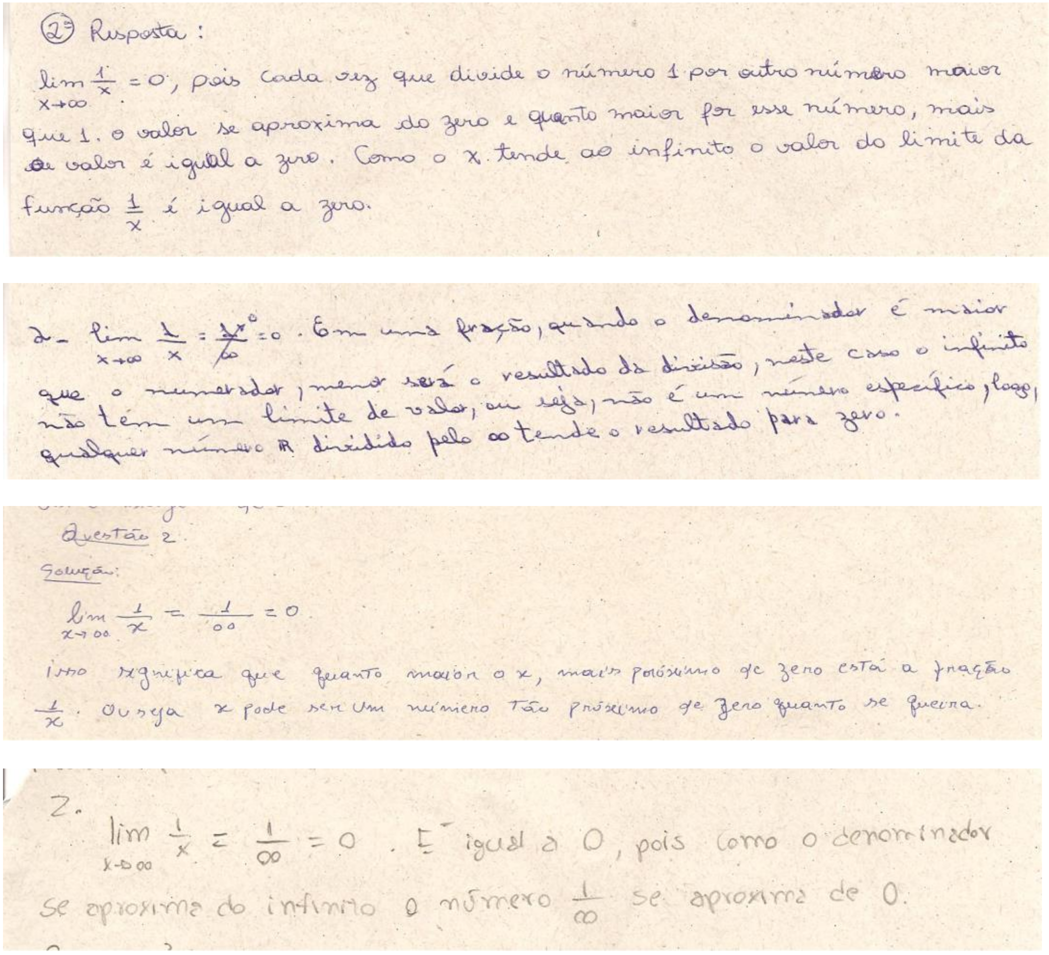
Fonte: Resposta do sujeito S12.

Classe F2: Corresponde aos 9 estudantes que responderam que $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$ e a justificaram conforme as cinco exemplificações a seguir:



2ª) $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{\infty} = 0$

A função para x tendendo ao infinito, implica dizer que o resultado tende a zero, pois o resultado da divisão de um número constante por um número maior, o valor do resultado se torna insignificante.



2ª Resposta:

$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$, pois cada vez que divide o número 1 por outro número maior que 1. o valor se aproxima do zero e quanto maior for esse número, mais ~~de~~ valor é igual a zero. Como o x tende ao infinito o valor do limite da função $\frac{1}{x}$ é igual a zero.

2 – $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} = \frac{1x^0}{\infty} = 0$. Em uma fração, quando o denominador é maior que o numerador, menor será o resultado da divisão, neste caso o infinito não tem um limite de valor, ou seja, não é um número específico, logo, qualquer número ℝ dividido pelo ∞ tende o resultado para zero.

Questão 2.

Solução:

$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} = \frac{1}{\infty} = 0$.

Isso significa que quanto maior o x, mais próximo de zero está a fração $\frac{1}{x}$. Ou seja x pode ser um número tão próximo de zero quanto se queira.

2.

$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} = \frac{1}{\infty} = 0$. É igual a 0, pois como o denominador se aproxima do infinito o número $\frac{1}{\infty}$ se aproxima de 0.

Fonte: Respostas dos sujeitos S02, S05, S07, S16 e S18.

Objetivamos com a 2ª questão verificar as associações efetivadas pelos sujeitos investigados ao explicarem o significado do $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$. Identificamos de imediato, dificuldades concernentes ao cálculo do limite dessa função, conforme destacamos nas *classes A2* e *B2*. No que concerne aos estudantes que não responderam a questão corretamente, evidenciamos que suas *Imagens Conceituais* evocaram elementos, cujas características se pautam na:

- Dificuldade em transportar automaticamente os métodos da álgebra relacionados à manipulação de grandezas finitas e infinitas. Essa situação assemelha-se ao obstáculo intitulado por Sierpinska (1985) de *horror ao infinito*;
- Dificuldade em calcular limites em que $x \to \infty$, conforme destacado por Nair (2009). A autora evidenciou em sua pesquisa problemas relacionados ao cálculo de limites infinitos e no infinito.

- O sujeito S3 associou $\frac{1}{\infty}$ à ideia de indeterminação e, evocou em sua *imagem conceitual*, a não existência do limite em virtude dessa "indeterminação". Esse tipo de mobilização também foi elucidada na pesquisa de Nair (2009).

No que se refere à *classe D2* – em que os sujeitos investigados calcularam corretamente o $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x}$ e evocaram o gráfico para explicar o que esse resultado significava – verificamos que o sujeito S25 mobilizou uma noção dinâmica para explicar o resultado do limite, conforme identificamos em sua justificativa: "*quando suas abscissas tendem ao infinito, suas imagens tendem a zero".* Assim como Tall e Vinner (1981), Jordaan (2005) e Nair (2009), observamos que a ideia de que *o valor que* $f(x)$ *se aproxima quando os valores de* x *chegam perto de* a *é* L faz parte de suas *imagens conceituais*.

O sujeito S12 foi o único sujeito investigado que calculou o limite solicitado, explicando-o mediante a definição formal de limite de função. Entretanto, ao escrever "$x > \delta \to |f(x) - L| < \varepsilon$" não atentou para o fato de que pela definição, $\forall \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0$, tal que $|x - a| < \delta \to |f(x) - L| < \varepsilon$. A recusa, por parte da maioria dos estudantes, em utilizar a definição com ε e δ reflete o *obstáculo do símbolo* destacado por Sierpinska (1985) e encontra-se em acordo com as considerações de Vinner (1991), no sentido de ser "(...) difícil treinar o sistema cognitivo a agir contra sua natureza e forçá-lo a consultar definições tanto quando forma sua imagem conceitual quanto quando trabalha com uma tarefa cognitiva" (VINNER, 1991, p. 72, tradução nossa).

Os resultados agrupados na *classe F2* mostram que as justificativas dos estudantes se apoiaram, sobretudo, na ideia de que *"Em uma fração quando o denominador é maior que o numerador, menor será o resultado da divisão"* (resposta do sujeito S07). Observamos também que a noção de aproximação também foi evocada pelas imagens conceituais desses indivíduos, conforme destacamos na resposta do sujeito S18 (*"como o denominador se aproxima do infinito, o número* $\frac{1}{\infty}$ *se aproxima de zero"*).

A expressão *"(...) tão próximo de zero tanto quanto se queira (...)"* (resposta do sujeito S16) também reflete a ideia de aproximação e dinamismo que se fez presente nas *imagens conceituais* dos sujeitos, cujas respostas constituíram as classes *C2* e *F2* dos resultados obtidos para a 2ª questão. Esse tipo de resultado foi constatado, sobretudo, nos estudos de Tall e Vinner (1981).

Elucidamos, a partir das anotações dos sujeitos investigados, que em suas *imagens conceituais* aparecem elementos que se apoiam nas seguintes evocações:

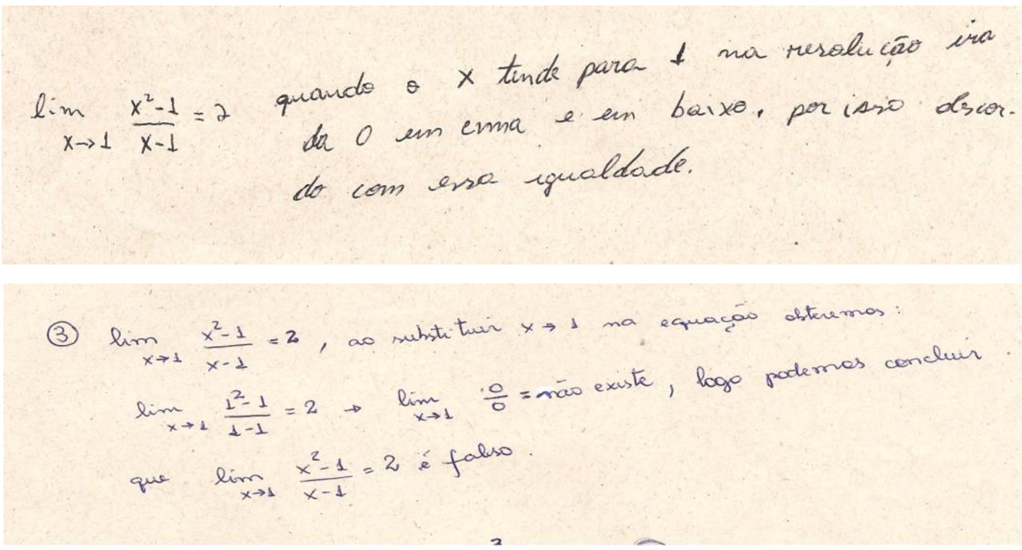
Quadro 4: *Imagens conceituais evocadas* na 2ª questão

Não é possível calcular limites que tendem para o infinito
Indeterminações implicam na não existência do limite
O limite de uma função implica em um processo de aproximação
Expressões do tipo *'tender para'* e *'se aproxima de'* implicam na ideia de que a função se aproxima do limite à medida que $\boldsymbol{x}$ se aproxima de $\boldsymbol{a}$, ou seja, $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ deve ser necessariamente, diferente de $\boldsymbol{L}$. (TALL&VINNER, 1981).

4.4.3. Resultados obtidos na 3ª questão

Classe A3: Corresponde ao único sujeito que não respondeu a questão.

Classe B3: Corresponde aos 5 sujeitos que apresentaram dificuldades em relação à indeterminação proveniente do cálculo do limite da função racional apresentada, conforme observamos nas respostas dos sujeitos S10 e S11:

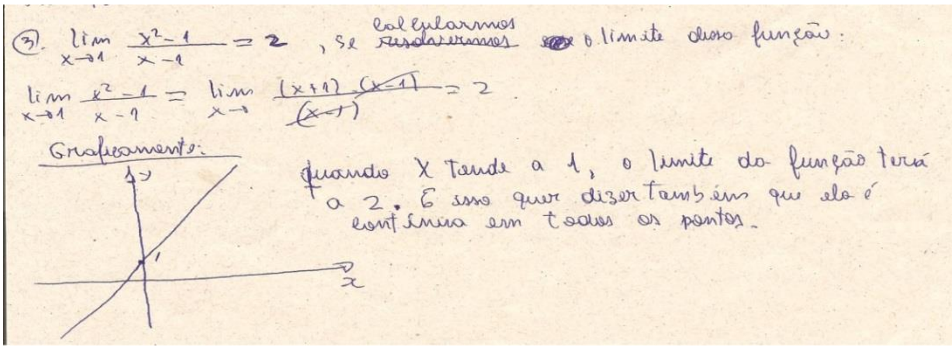


$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 2$ quando o x tende para 1 na resolução irá da 0 em cima e em baixo, por isso discordo com essa igualdade.

③ $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 2$, ao substituir $x \to 1$ na equação obteremos:
$\lim_{x\to 1} \frac{1^2-1}{1-1} = 2 \to \lim_{x\to 1} \frac{0}{0}$ = não existe, logo podemos concluir
que $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 2$ é falso.

Fonte: Respostas dos sujeitos S10 e S11.

Classe C3: Corresponde ao estudante que relacionou o $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1} = 2$ à ideia de continuidade.


③ $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 2$, se calcularmos o limite dessa função:

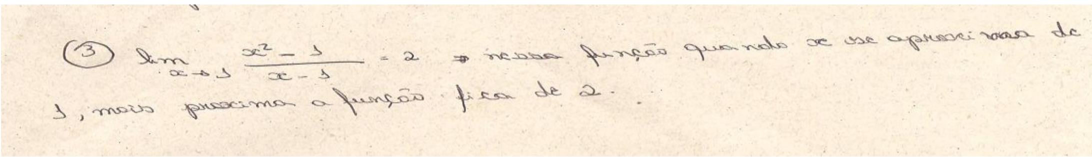
$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to} \frac{(x+1)\,(x-1)}{(x-1)} = 2$

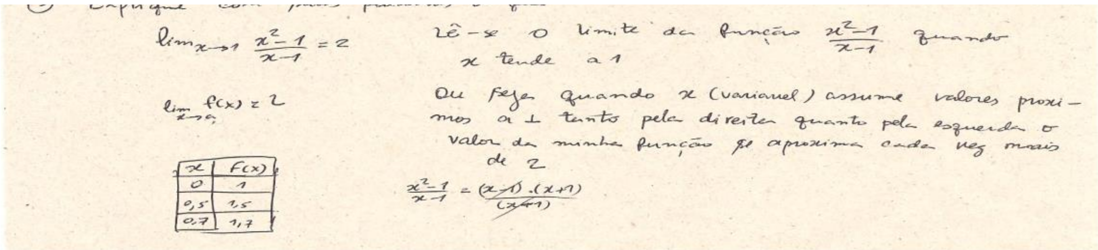
Graficamente:

Quando X tende a 1, o limite da função terá a 2. E isso quer dizer também que ela é contínua em todos os pontos.

Fonte: Resposta do sujeito S22.

Classe D3: Corresponde aos 14 sujeitos que atribuíram ao limite uma noção dinâmica. Destacamos a seguir algumas respostas que se inserem nessa classe:


③ $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 2$ ⇒ nessa função quando x se aproximava de 1, mais próxima a função fica de 2.


$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 2$

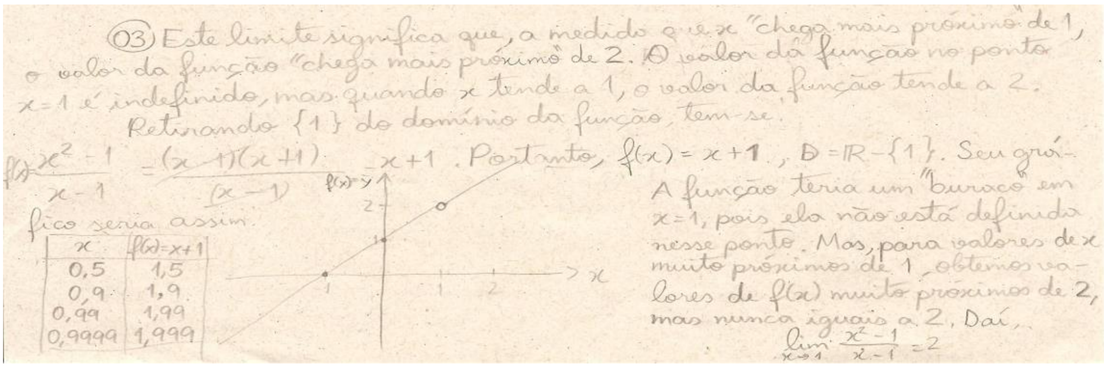
Lê-se o limite da função $\frac{x^2-1}{x-1}$ quando x tende a 1

Ou seja quando x (variável) assume valores próximos a 1 tanto pela direita quanto pela esquerda o valor da minha função se aproxima cada vez mais de 2

$\lim_{x\to 1} f(x) = 2$

x	F(x)
0	1
0,5	1,5
0,7	1,7

$\frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x-1)\cdot(x+1)}{(x-1)}$


③ Este limite significa que, a medida que x "chega mais próximo" de 1, o valor da função "chega mais próximo" de 2. O valor da função no ponto x=1 é indefinido, mas quando x tende a 1, o valor da função tende a 2.

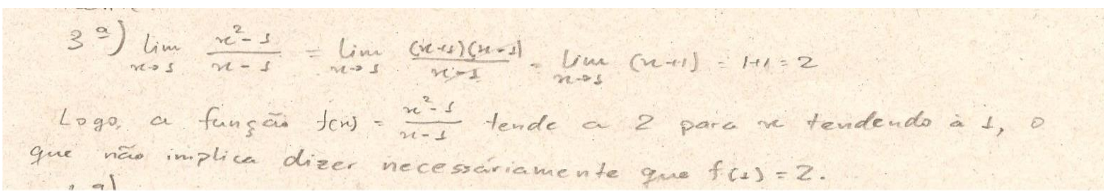
Retirando {1} do domínio da função, tem-se:

$f(x) = \frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)} = x+1$. Portanto, $f(x) = x+1$, $D = \mathbb{R} - \{1\}$. Seu gráfico seria assim:

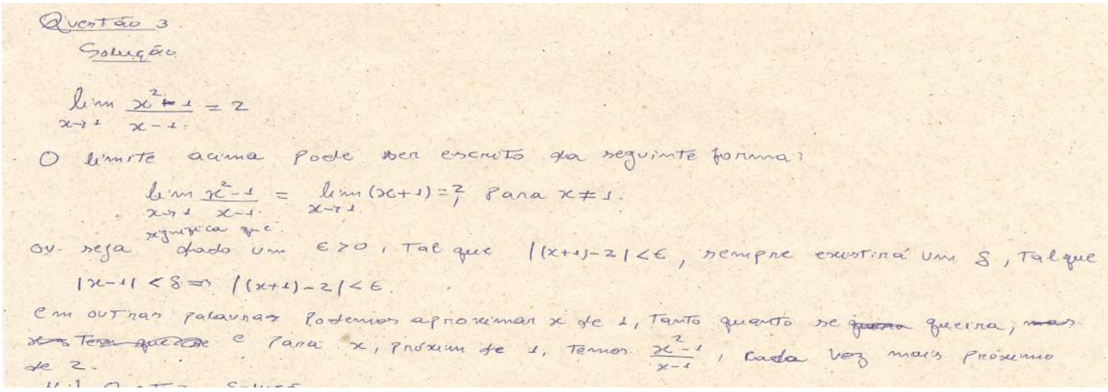
x	f(x)=x+1
0,5	1,5
0,9	1,9
0,99	1,99
0,9999	1,999

A função teria um "buraco" em x=1, pois ela não está definida nesse ponto. Mas, para valores de x muito próximos de 1, obtemos valores de f(x) muito próximos de 2, mas nunca iguais a 2. Daí,

$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 2$


3º) $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} (x+1) = 1+1 = 2$

Logo, a função $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ tende a 2 para x tendendo à 1, o que não implica dizer necessariamente que $f(1) = 2$.



Questão 3

Solução

$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=2$

O limite acima pode ser escrito da seguinte forma:

$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1}(x+1)=2$ para $x\neq 1$.

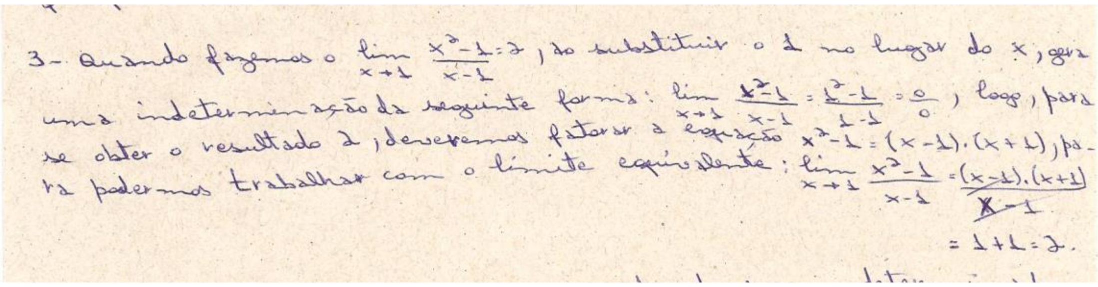
significa que

ou seja dado um $\epsilon>0$, tal que $|(x+1)-2|<\epsilon$, sempre existirá um δ, tal que $|x-1|<\delta \Rightarrow |(x+1)-2|<\epsilon$.

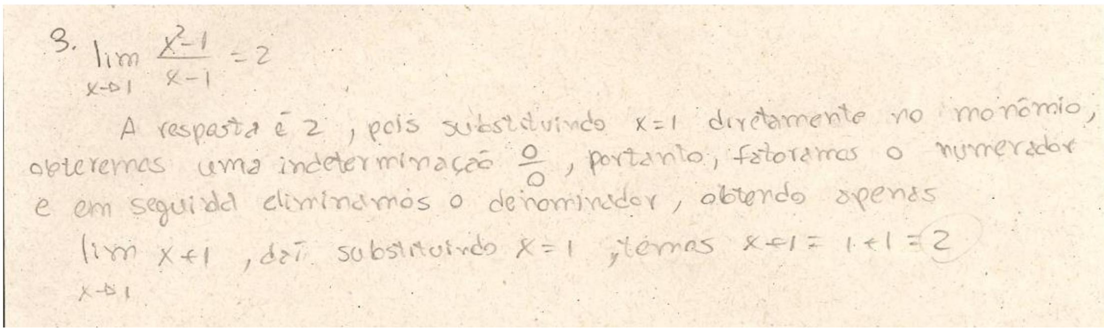
Em outras palavras podemos aproximar x de 1, tanto quanto se ~~quer~~ queira, ~~mas~~ ~~ao termo que~~ e para x, próximo de 1, temos $\frac{x^2-1}{x-1}$, cada vez mais próximo de 2.

Fonte: Respostas dos sujeitos S01, S21, S02, S14 e S16.

Classe E3: Corresponde aos 4 estudantes que atribuíram ao significado do limite as manipulações algébricas necessárias para fazer a indeterminação "desaparecer", conforme destacamos a seguir.



3- Quando fazemos o $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=2$, ao substituir o 1 no lugar do x, gera uma indeterminação da seguinte forma: $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=\frac{1^2-1}{1-1}=\frac{0}{0}$, logo, para se obter o resultado 2, deveremos fatorar a equação $x^2-1=(x-1).(x+1)$, para podermos trabalhar com o limite equivalente: $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=\frac{\cancel{(x-1)}.(x+1)}{\cancel{x-1}}$ $= 1+1=2$.



3. $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=2$

A resposta é 2, pois substituindo $x=1$ diretamente no monômio, obteremos uma indeterminação $\frac{0}{0}$, portanto, fatoramos o numerador e em seguida eliminamos o denominador, obtendo apenas $\lim_{x\to 1} x+1$, daí substituindo $x=1$, temos $x+1 = 1+1 = 2$

Fonte: Respostas dos sujeitos S07 e S18.

Nossa intenção com a 3ª questão foi verificar se as associações estabelecidas pelos estudantes participantes de nossa pesquisa apresentariam como característica uma noção dinâmica, na qual a intepretação está voltada para a ideia de que $f(x)$ se aproxima de L à medida que x se aproxima de a. Ou seja, objetivamos verificar se $f(x) \neq L$ faz parte de suas *Imagens Conceituais.*

Dentre os resultados obtidos, observamos que a indeterminação proveniente do cálculo de $\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1}$ fez com que alguns estudantes não aceitassem o resultado da questão, fato evidente nas respostas dos sujeitos S10 e S11 (*classe B3*). Essa situação reflete a dificuldade dos sujeitos em calcular limites de funções racionais que resultem em indeterminações (JUTER, 2006), o que influencia, segundo Nair (2009), os estudantes a acreditarem que a indeterminação implica na não existência do limite em determinado ponto da função.

O sujeito S18 estabeleceu uma relação entre a existência do limite no ponto $x = 1$ e a continuidade da função em todos os pontos (*"quando x tende a 1, o limite da função tenderá a 2, o que quer dizer também que ela é contínua em todos pontos")*. Nesse sentido, evidenciamos que esse estudante desconsiderou que o domínio da função exclui o ponto $x = 1$, o que resultaria em uma descontinuidade nesse ponto, apesar da existência do limite. A resposta desse sujeito nos levou às seguintes possibilidades:

- O estudante apresenta dificuldades relacionadas ao conceito de função (ZUCHI, 2005);
- O estudante não diferencia *função* e *limite de função* (JUTER, 2006);
- O sujeito acredita que a continuidade de uma função está atrelada somente à existência do limite daquela função em determinado ponto (BARTO, 2004; JORDAAN, 2005; JUTER, 2006; NAIR, 2009).

As respostas da *classe D3* apontam para a mobilização de uma noção dinâmica de limite de função. As expressões *"se aproxima"*, *"assume valores próximos de"*, *"chega mais próximo"*, "*tende a"* reforçam a ideia de uma constante aproximação em relação a determinado valor. Nesse âmbito, evidenciamos resultados semelhantes aos obtidos por Tall e Vinner (1981) e Jordaan (2005), ou seja, as *imagens conceituais* dos sujeitos investigados mobilizam a ideia de que $f(x) \neq L$. A resposta do sujeito S14, dentre todas as outras, é a que melhor representa a *classe D3*.

O sujeito S16 evocou a definição formal de limite para explicar o resultado. No entanto, não o demonstrou mediante a relação entre ε e δ. Na verdade, ele apenas estabeleceu que $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, tal que $|x - 1| < \delta \rightarrow$

$|x + 1 - 2| < \varepsilon$ e assumiu que essa definição significa que *"podemos aproximar x de 1 tanto quanto se queira e para x próximo de 1 temos* $\frac{x^2-1}{x-1}$ *cada vez mais próximo de* 2" (resposta sujeito S16). Nesse sentido, observamos que a recusa do status de operação matemática ao limite (SIERPINSKA, 1985) faz parte da *imagem conceitual* desse sujeito.

Observamos ainda que a ideia de limite, para alguns dos sujeitos investigados, encontra-se relacionada com as manipulações algébricas que eliminam os "inconvenientes" denominadores nulos e permitem o cálculo do limite de uma função racional, conforme destacamos nas respostas dos sujeitos S07 e S18. Finalmente, observamos que as *imagens conceituais evocadas* pelos participantes de nossa pesquisa ao resolverem a 3ª questão encontram-se pautadas nas seguintes mobilizações:

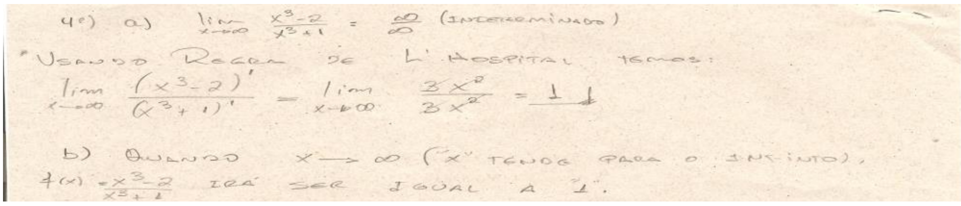
Quadro 5: *Imagens conceituais evocadas na 3ª questão*

A função se aproxima de determinado valor sem, entretanto, atingi-lo. Ou seja, $\boldsymbol{f(x) \neq L}$ (TALL & VINNER, 1981; JUTER, 2006; JORDAAN, 2005; JUTER, 2006);
A indeterminação implica na não existência do limite em determinado ponto (NAIR, 2009)
A recusa do status de operação matemática ao limite (SIERPINSKA, 1985)
A Continuidade de função está atrelada somente à existência do limite da função no ponto, ou seja, independe do domínio da função (BARTO, 2004; JORDAAN, 2005; JUTER, 2006; NAIR, 2009).

4.4.4. Resultados obtidos na 4ª questão

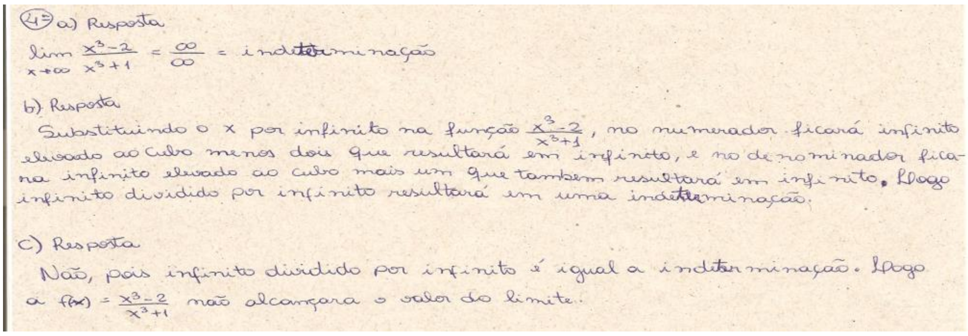
Classe A4: Corresponde aos 8 estudantes que deixaram a questão completamente em branco.

Classe B4: Corresponde aos 2 estudantes que utilizaram a regra de L' Hospital para resolver a questão, conforme exemplificamos com a resposta do sujeito S17.


4°) a) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^3-2}{x^3+1} = \frac{\infty}{\infty}$ (INDETERMINADO)
Usando Regra de L' Hospital temos:
$\lim_{x\to\infty} \frac{(x^3-2)'}{(x^3+1)'} = \lim_{x\to\infty} \frac{3x^2}{3x^2} = \underline{1}$
b) Quando $x \to \infty$ ("x" tendo para o infinito), $f(x) = \frac{x^3-2}{x^3+1}$ irá ser igual a "1".

Fonte: Resposta do sujeito S17.

Classe C4: Corresponde aos 4 sujeitos que não conseguiram resolver de maneira pertinente o que foi solicitado, conforme destacamos a seguir.



(4) a) Resposta

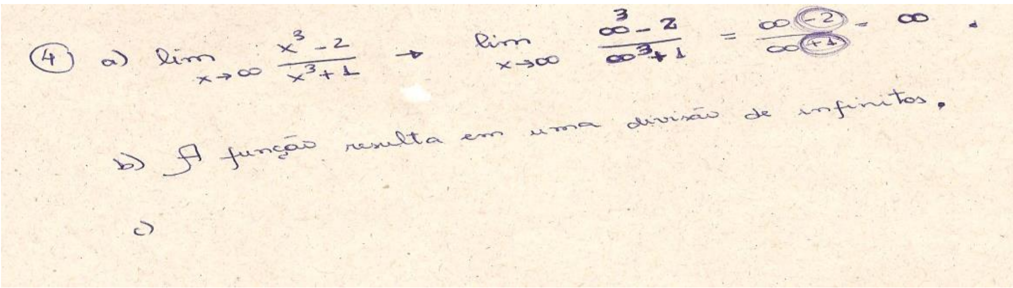
$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3-2}{x^3+1} = \frac{\infty}{\infty}$ = indeterminação

b) Resposta

Substituindo o x por infinito na função $\frac{x^3-2}{x^3+1}$, no numerador ficará infinito elevado ao cubo menos dois que resultará em infinito, e no denominador ficará infinito elevado ao cubo mais um que tambem resultará em infinito. Logo infinito dividido por infinito resultará em uma indeterminação.

c) Resposta

Não, pois infinito dividido por infinito é igual a indeterminação. Logo a $f(x) = \frac{x^3-2}{x^3+1}$ não alcançara o valor do limite.



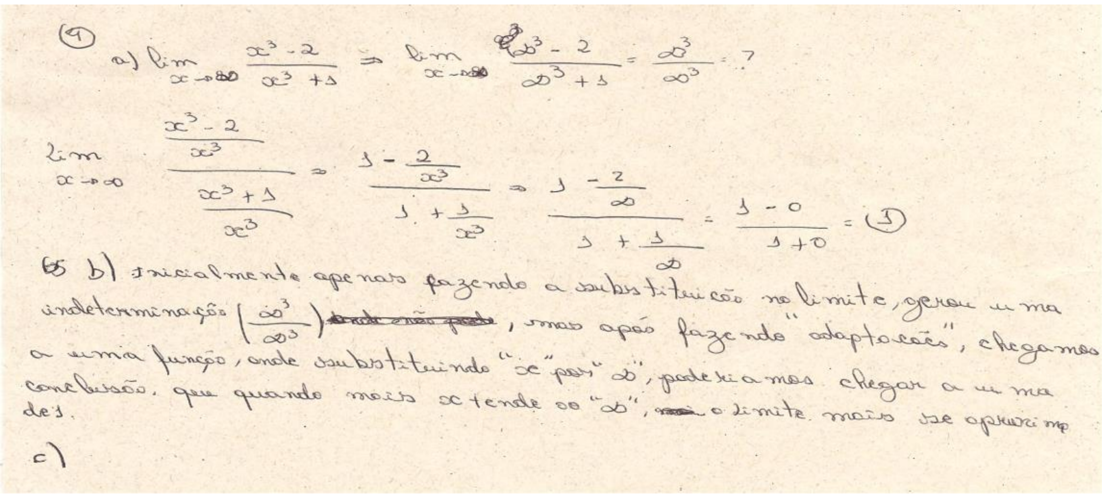
(4) a) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^3-2}{x^3+1} \to \lim_{x\to\infty} \frac{\infty^3-2}{\infty^3+1} = \frac{\infty -2}{\infty +1} = \infty$.

b) A função resulta em uma divisão de infinitos.

c)

Fonte: Respostas dos sujeitos S05 e S11.

Classe D4: Corresponde aos 4 estudantes que calcularam o limite da função corretamente, mas apresentaram dificuldades em explicar, sobretudo, o item c da questão, deixando-o em branco. Destacamos a seguir uma das respostas obtidas nessa essa classe.



(4)

a) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^3-2}{x^3+1} \Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{\infty^3-2}{\infty^3+1} = \frac{\infty^3}{\infty^3} = ?$

$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^3-2}{x^3}}{\frac{x^3+1}{x^3}} \Rightarrow \frac{1-\frac{2}{x^3}}{1+\frac{1}{x^3}} \Rightarrow \frac{1-\frac{2}{\infty}}{1+\frac{1}{\infty}} = \frac{1-0}{1+0} = 1$

b) Inicialmente apenas fazendo a substituicão no limite, gerou uma indeterminação $\left(\frac{\infty^3}{\infty^3}\right)$ ~~onde não pode~~, mas após fazendo "adaptacões", chegamos a uma funçõo, onde substituindo "x" por "∞", poderiamos chegar a uma conclusão. que quando mais x tende ao "∞", ~~mais~~ o limite mais se aproxima de 1.

c)

Fonte: Resposta do sujeito S01.

Classe E4: Corresponde aos 5 sujeitos que calcularam o limite da função de maneira pertinente e, em suas explicações, afirmaram a ideia de que a função não poderá atingir o valor do limite.

04. a) $\lim_{x \to \infty} \frac{x^3-2}{x^3-1} = \frac{\infty^3-2}{\infty^3-1} = \frac{\infty}{\infty} = \text{ind}$

$\to f(x) = \frac{x^3-2}{x^3-1} = \frac{(x^3-1)-1}{x^3-1} = \frac{\cancel{(x^3-1)}}{\cancel{x^3-1}} - \frac{1}{x^3-1} = 1 - \frac{1}{x^3-1}$

$\lim_{x \to \infty} \frac{x^3-2}{x^3-1} = \lim_{x \to \infty} 1 - \frac{1}{x^3-1} = 1 - \frac{1}{\infty^3-1} = 1 - 0 = 1$

b) temos que o limite da função $f(x) = \frac{x^3-2}{x^3-1}$ é uma indeterminação, porém, podemos ainuma-la para a função $f(x) = 1 - \frac{1}{x^3-1}$, obtendo o limite igual a 1.

c) Não. Pois, pela definição de limite uma função não alcança seu limite.

04 a) $\lim_{x \to \infty} \frac{x^3-2}{x^3+1} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^3(1-\frac{2}{x^3})}{x^3(1+\frac{1}{x^3})} \lim_{x \to \infty} \frac{1-\frac{2}{x^3}}{1+\frac{1}{x^3}} = \frac{\lim_{x \to \infty}(1-\frac{2}{x^3})}{\lim_{x \to \infty}(1+\frac{1}{x^3})}$

$= \frac{\lim_{x \to \infty} 1 - \lim_{x \to \infty} \frac{2}{x^3}}{\lim_{x \to \infty} 1 + \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^3}} = \frac{1 - 2 \cdot \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^3}}{1 + \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^3}} = \frac{1-2\cdot 0}{1+0} = \frac{1}{1} = 1$

b) Chega-se na resposta primeiramente simplificando os polinômios que estão na fração, colocando suas partes literais de maior grau em evidência. Feito isso, simplificam-se estes partes literais. Daí, utilizam-se as propriedades dos limites e o fato de que $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$, o que pode ser generalizado para $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^n} = 0$.

$\delta > 0$ $|f(x) - P| < \varepsilon$

c) Não. O valor da função pode assumir valores tão próximos de 1, mas este valor não será igual a 1. Ele tenderá a 1, mas não irá alcançá-lo.

4.

a) $\lim_{x \to \infty} \frac{x^3-2}{x^3+1} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^3(1-\frac{2}{x^3})}{x^3(1+\frac{1}{x^3})} = \lim_{x \to \infty} \frac{1-2/x^3}{1+1/x^3} = 1$

b) colocando x^3 em evidência obtemos monômios que quando inserindo o limite equivale a 0, desse modo eliminando possibilidades da resposta ser uma indeterminação.

c) Não, pois resolvendo a equação gerada caímos num absurdo.

Fonte: Respostas dos sujeitos S04, S14 e S18.

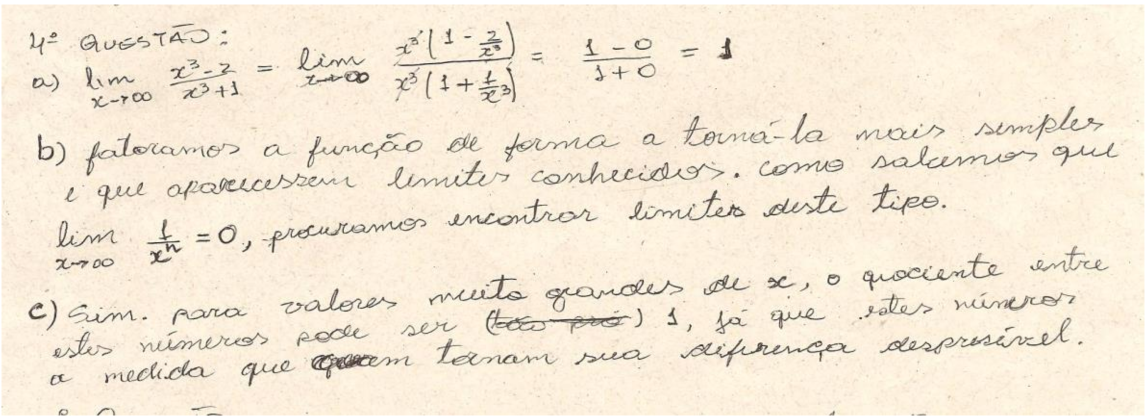
Classe F4: Corresponde aos 2 sujeitos que calcularam o limite corretamente e, em suas explicações, afirmaram que a função alcança o valor do limite, conforme elucidamos nas respostas dos sujeitos S20 e S25.

4) a) $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3-2}{x^3-1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3(-\frac{2}{x^3}+1)}{x^3(-\frac{1}{x^3}+1)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1-\frac{2}{x^3}}{1-\frac{1}{x^3}} = 1$

b) Para resolver podemos por o x^3 em evidência e cancelar como $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$ $n > 0$ então $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3-2}{x^3-1} = 1$

c) Sim pois $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3-2}{x^3+1} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^3(1-\frac{2}{x^3})}{x^3(1+\frac{1}{x^3})} = \lim_{x \to \infty} \frac{1-\frac{2}{x^3}}{1+\frac{1}{x^3}} = 1$

a)


4º QUESTÃO:

a) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^3-2}{x^3+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3(1-\frac{2}{x^3})}{x^3(1+\frac{1}{x^3})} = \frac{1-0}{1+0} = 1$

b) fatoramos a função de forma a torná-la mais simples e que aparecessem limites conhecidos. como sabemos que $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^n} = 0$, procuramos encontrar limites deste tipo.

c) Sim. para valores muito grandes de x, o quociente entre estes números pode ser ~~tão pró~~ 1, já que estes números à medida que crescem tornam sua diferença desprezível.

Fonte: Respostas dos sujeitos S20 e S25.

Objetivamos com essa questão verificar as percepções dos sujeitos investigados acerca do cálculo do limite da função dada e, principalmente, suas evocações acerca da possibilidade da função poder ou não alcançar o limite. Observamos que muitos estudantes apresentaram dificuldade em resolver a questão, fato refletido pela quantidade de questões não resolvidas (8 no total).

No que concerne àqueles que calcularam o limite, verificamos na *classe B4* que dois sujeitos evocaram em suas *Imagens Conceituais* a regra de L' Hospital para "eliminar" a indeterminação proveniente do cálculo do limite. Entretanto, nenhum dos estudantes respondeu o 3º item da questão e, consequentemente, nada podemos concluir acerca de suas percepções relacionadas ao fato da função atingir ou não seu limite em determinado ponto. Ressaltamos que nenhum dos sujeitos investigados por Juter (2006) utilizou a regra de L' Hospital para solucionar uma questão análoga a essa.

Evidenciamos que 4 sujeitos não conseguiram calcular $\lim_{x\to\infty} \frac{x^3-2}{x^3+1}$, o que reflete, mais uma vez, a dificuldade dos estudantes em calcular limites envolvendo o infinito (NAIR, 2009). Os estudantes que participaram da pesquisa de Juter (2006), assim como os sujeitos que participaram de nossa investigação, também apresentaram dificuldades em calcular limites de funções racionais semelhantes àquela proposta em nosso instrumento. Ainda sobre a *classe C4*, observamos que a indeterminação do tipo $\frac{\infty}{\infty}$ foi responsável pela impossibilidade dos estudantes resolverem a questão de maneira pertinente, fazendo o sujeito S05 afirmar que *"infinito dividido por infinito é igual a indeterminação, logo* $f(x) = \frac{x^3-2}{x^3+1}$ *não alcançará o limite"*. Nesse sentido, concluímos que a ideia de que a existência da indeterminação implica no fato da função não alcançar seu limite faz parte da *imagem conceitual* desse sujeito.

Encontramos na *classe D4* um exemplo, dentre os estudantes que resumem a ideia de limite à prática de manipulações algébricas, ou mesmo, “adaptações” – conforme destacado pelo sujeito S01 – de maneira a eliminar inconvenientes indeterminações (OLIMPIO, 2007). Nenhum dos sujeitos, cujas respostas encontram-se organizadas nessa classe, respondeu o item c da questão.

No que concerne à *classe E4*, observamos que os estudantes – assim como em outras pesquisas (TALL & VINNER, 1981; JORDAAN, 2005; JUTER, 2006) – afiançaram a impossibilidade de uma função alcançar seu limite. Observamos, principalmente na resposta do sujeito S04, que sua *definição conceitual pessoal* de limite de função difere da *definição conceitual formal* (VINNER, 1991), haja vista que segundo o próprio sujeito, *“pela definição a função não alcança seu limite*”. Da mesma maneira que Zuchi (2005), evidenciamos que os estudantes apresentam dificuldades em correlacionar as noções intuitiva e formal de limite de função.

A resposta do sujeito S14, também constituinte da *classe E4*, apresenta uma mobilização dinâmica acerca do conceito de limite de função, isso porque para ele, *“O valor da função pode assumir valores tão próximos de 1, mas este valor não será igual a 1. Ele tenderá a 1, mas não irá alcançá-lo”* (resposta do sujeito S14, grifo nosso). As expressões grifadas representam claramente a noção de que a função deve ser, necessariamente, diferente do limite (TALL&VINNER, 1981; JUTER, 2006), ou seja, jamais poderá alcançá-lo.

A *classe F4* apresenta a resposta dos 2 sujeitos que afirmaram que a função alcança o limite. Nesse sentido, identificamos que o sujeito S20 atribuiu ao limite o status de operação, pois ao resolvê-lo mobilizou a ideia de que a existência do limite implica no fato da função alcançá-lo. No que concerne ao sujeito S25, observamos que evocou o limite como sendo ambos, um processo e um conceito (*procept)*, pois utiliza uma noção dinâmica a medida que aproxima os valores de 1 e também estática, a medida que considera desprezível a diferença entre essas quantidades.

No que concerne às respostas dos sujeitos investigados levantadas para a 4ª questão, observamos que suas *imagens conceituais* evocaram os seguintes aspectos (ver quadro 6):

Quadro 6: *Imagens conceituais evocadas* na 4ª questão

O conceito de limite de função resume-se às manipulações algébricas utilizadas para eliminar as indeterminações que possam surgir
Indeterminação implica na não existência do limite ou na impossibilidade da função alcançá-lo (NAIR, 2009; JUTER, 2006);
A função jamais alcança o valor do limite (*definição conceitual pessoal* x *definição conceitual formal*);
O conceito de limite implica em uma contínua aproximação em relação a determinado valor, mas nunca "chega" nesse valor, ou seja, $f(x) \neq L$ (TALL&VINNER, 1981; JORDAAN, 2005; JUTER (2006);
Limite de função é um *procept* (GRAY & TALL, 1993)

4.4.5. Resultados obtidos na 5ª questão

Classe A5: Corresponde aos 7 estudantes que não responderam a questão.

Classe B5: Corresponde aos 9 estudantes que observaram os limites laterais das funções para, a partir dessa observação, apontar a (não) existência do limite da função no ponto (ver exemplo a seguir).

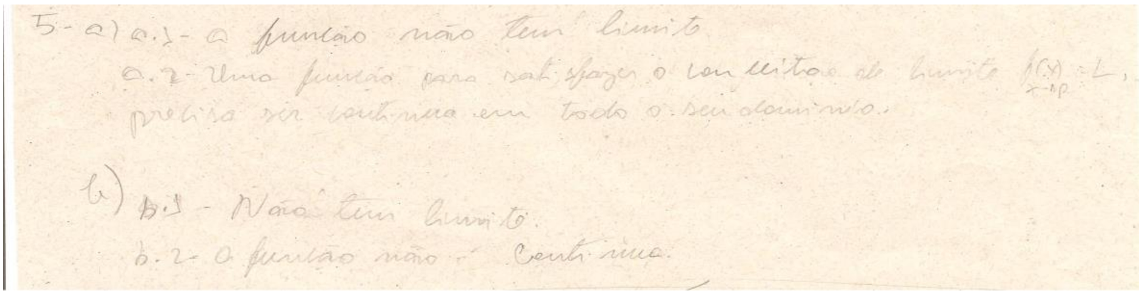
5 - a) Existe.
a.2 Existe, pois, conforme nos aproximamos de a, o valor de ~~[illegible]~~ f(x) aproxima-se do $\lim_{x \to a} f(x)$.

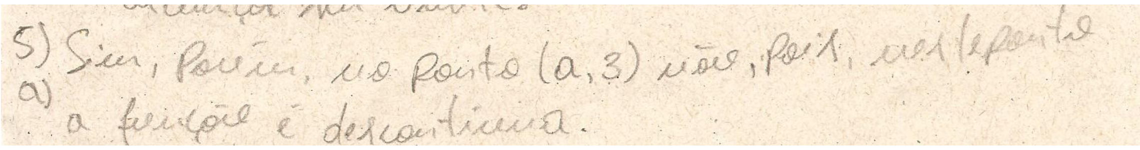
b) Não existe.
b2- Não existe, pois, quando nos aproximamos de a pela esquerda e pela direita obtemos valores diferentes para $\lim_{x \to a} f(x)$. Logo, $\lim f(x)$ não existe.

05 a.1) Sim.
a.2) Quando calcularmos os limites laterais da função, com x tendendo a qualquer valor, eles serão iguais. Quando x tender a a, teremos $\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x)$ (analisando o gráfico).
b.1) Existirá em todos os pontos, exceto em $x = b$.
b.2) Quando calcularmos os limites laterais da função em qualquer ponto diferente de b, eles serão iguais (analisando o gráfico), mas quando x tender a b, os limites laterais da função serão diferentes $\left(\lim_{x \to b^+} f(x) \neq \lim_{x \to b^-} f(x)\right)$.
Logo, a função não terá limite quando x tender a b.

Fonte: Respostas dos sujeitos S12 e S14.

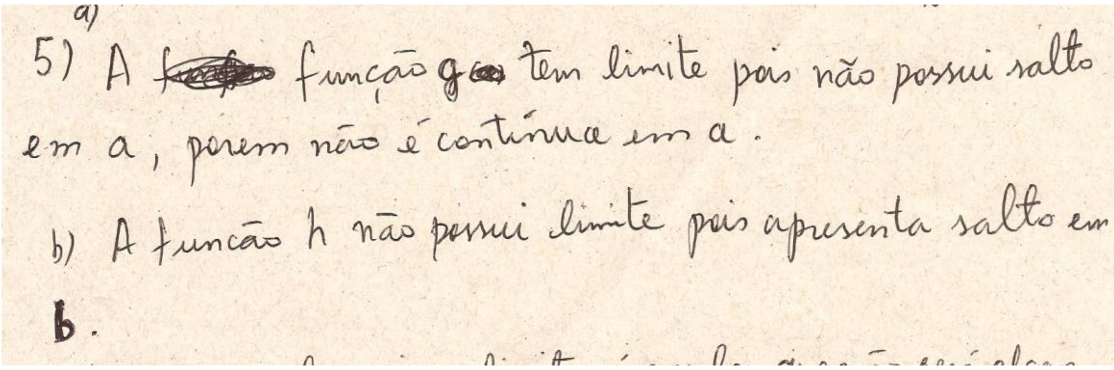
Classe C5: Corresponde aos 4 sujeitos que condicionaram a existência do limite à continuidade, conforme destacamos a seguir.


5- a) a.1- a função não tem limite
a.2- Uma função para satisfazer o conceito de limite $\lim_{x \to p} f(x) = L$, precisa ser contínua em todo o seu domínio.
b) b.1 - Não tem limite.
b.2- a função não é contínua.


5) Sim, Porém, no Ponto (a,3) não, pois, neste ponto
a) a função é descontínua.

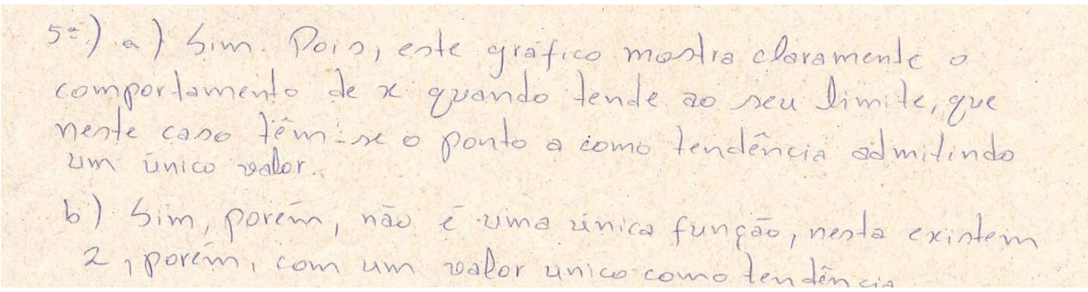
Fonte: Respostas dos sujeitos S15 e S04

Classe D5: Corresponde aos 4 estudantes que condicionaram a existência do limite à presença/ausência de saltos no gráfico da função. A resposta do sujeito S20 exemplifica essa *classe*.


a) 5) A função g tem limite pois não possui salto em a, porem não é contínua em a.
b) A função h não possui limite pois apresenta salto em b.

Fonte: Resposta do sujeito S20

Classe E5: Corresponde a 1 estudante que considera o limite como uma investigação à esquerda e à direita do ponto dado, desconsiderando a unicidade do limite, conforme a seguir.


5º) a) Sim. Pois, este gráfico mostra claramente o comportamento de x quando tende ao seu limite, que neste caso têm-se o ponto a como tendência admitindo um único valor.
b) Sim, porém, não é uma única função, nesta existem 2, porém, com um valor unico como tendência

Fonte: Resposta do sujeito S09

Objetivamos com essa questão verificar como os estudantes interpretariam a (não) existência do limite em funções descontínuas, bem como a importância de relacionar os limites laterais, a fim de observar a unicidade do limite. Observamos que alguns dos sujeitos investigados apresentaram dificuldade em interpretar os gráficos, isso porque, 7 dos 25 estudantes que responderam ao questionário não resolveram a questão.

A investigação à direita e à esquerda do ponto dado fez parte da resolução de 9 estudantes que atribuíram à (não) existência do limite o fato de seus limites laterais existirem e serem iguais. Nesse sentido, nossos resultados não estão em conformidade com os de Barto (2004), cujos sujeitos investigados consideravam somente as investigações à direita e à esquerda do ponto satisfatórias para a existência do limite, descartando a sua unicidade. De qualquer maneira, ainda assim observamos nas respostas dos sujeitos a mobilização de uma ideia de limite de função como sendo uma aproximação contínua em relação a um ponto sem, no entanto, atingir esse ponto (TALL & VINNER, 1981).

Evidenciamos em nossos resultados que – semelhante aos estudos de Cottrill *et al* (1996), Jordaan (2005) e Nair (2009) – os sujeitos investigados condicionam a existência do limite de uma função à continuidade dessa função em todos os pontos, pois para *"uma função satisfazer o conceito de limite...precisa ser contínua em todo o seu domínio"* (resposta do sujeito S15). Nesse sentido, observamos que os sujeitos investigados, apresentam mobilizações em suas *imagens conceituais* semelhante às de Leibniz no séc. XVII, segundo a qual, a existência do limite dependia da continuidade da função no ponto e não o contrário.

Verificamos que os sujeitos, cujas respostas constituíram a *classe D5*, evocaram em suas *imagens conceituais* a mesma ideia que os da *classe C5*, sendo que atribuíram à noção de continuidade a (não) existência de saltos no gráfico da função (TALL & VINNER, 1981; BARTO, 2004), conforme elucidamos na resposta do sujeito S20.

Somente a resposta do sujeito S09 demonstrou-se de acordo com as considerações de Barto (2004) no que concerne à não preocupação com a unidade do limite, mas somente com as investigações à direita e à esquerda do ponto dado. Além disso, observamos que esse estudante apresenta dificuldades no que se refere ao conceito de função, pois para ele, os saltos no gráfico implicam a existência de duas funções diferentes. O sujeito, ao contrário da maioria dos participantes de nossa pesquisa, não evocou a ideia de continuidade para responder a questão.

Dentre os elementos evocados nas *imagens conceituais* dos sujeitos investigados, destacamos:

Quadro 7: *Imagens conceituais evocadas* na 5ª questão

Para o limite de uma função existir, seus limites laterais devem ser iguais.
O conceito de limite de função encontra-se relacionado com uma investigação nas proximidades de determinado ponto, de maneira que a função se aproxime de L sem, no entanto, alcançar esse limite. Ou seja, $\boldsymbol{f(x) \neq L}$ (TALL & VINNER, 1981; JUTER, 2006).
Para que o limite de uma função exista, a função deve estar definida no ponto, ou seja, deve ser contínua nesse ponto (COTTRILL *et al*, 1996; JORDAAN, 2005; NAIR, 2009);
O limite de uma função existe se não houver saltos no gráfico da função;

4.4.6. Resultados obtidos na 6ª questão

Ressaltamos, antes de estabelecer a organização das *classes* para essa questão que, a maioria dos sujeitos investigados assinalou mais de uma alternativa como resposta. Dessa maneira, optamos por organizá-las de acordo com a alternativa escolhida pelos estudantes para, em seguida, destacar algumas das justificativas por eles apresentadas.

Classe A6: Corresponde aos 8 estudantes que não responderam a questão;
Classe B6: Corresponde aos 11 estudantes que assinalaram o item (a);
Classe C6: Corresponde aos 7 estudantes que assinalaram o item (b);
Classe D6: Corresponde aos 8 estudantes que assinalaram o item (c);
Classe E6: Corresponde aos 12 estudantes que assinalaram o item (d);
Classe F6: Corresponde aos 8 estudantes que assinalaram o item (e);
Classe G6: Corresponde aos 3 sujeitos que assinalaram o item (f).

A maioria dos estudantes apresentaram justificativas para a escolha das alternativas, sendo que acreditamos que as respostas dos sujeitos S04, S09, S12, S14, S16, S18 e S25 nos permitem melhor verificar algumas das evocações de suas *imagens conceituais* no que concerne ao conceito de limite, conforme destacamos a seguir:

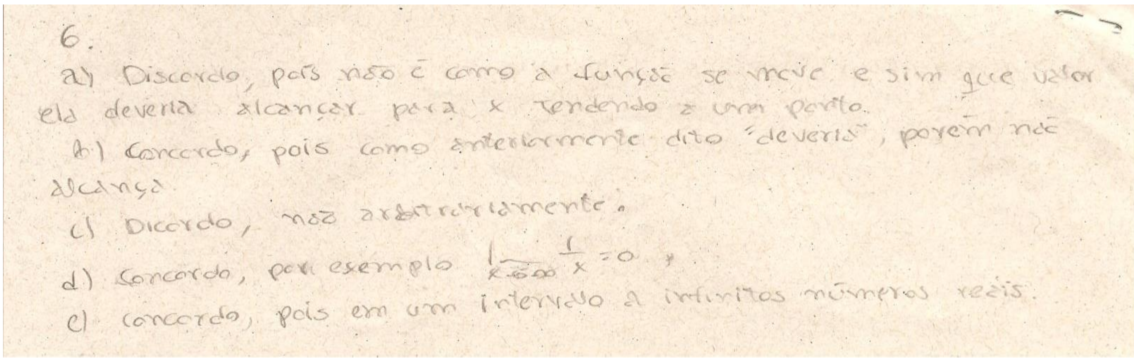
6). temos nas seguintes sentenças: a, b, d, e. conceitos bem próximos, na qual descrevem que o valor ou ponto tende a se aproximar mas não alcança.

6ª) Bem pelos meus conhecimentos o valor do limite não pode ser alcançado, portanto, a alternativa (f) está equivocada, por este fato. Neste sentido as demais alternativas estão corretas pelo fato de que atingem o conceito de limite.

6 – a) Não exatamente como se move, mas de qual valor se aproxima;
b) Se a função é contínua no ponto, podemos alcançar o limite;
c) A definição nos diz que, quando restringimos x, $f(x)$ fica próximo do limite L;
d) O valor pode ser alcançado se a função for contínua;
e) Quanto mais aproximamos x de a, mais precisa fica a aproximação [illegible] de $f(x)$, que é o limite $\lim_{x \to a} f(x)$.
f) Isto acontece apenas se [illegible] o limite existir e a função for contínua. Caso contrário, não há como alcançar o valor do limite.

Logo, a função não [illegible]
06 b) No caso das funções constantes ($f(x) = a$, a cte), o valor do limite dessa função é igual a própria constante, ou seja, o valor do limite é o valor da função. Então, o valor do limite alcança o valor da função no ponto dado, contrariando o que foi dito.
c) Não necessariamente restringimos os valores de x, fazemos aproximações de x, para determinado valor. Assim, determinamos os valores da função nesses valores aproximados de x. É restrito o valor de x na função, não no limite dela.
d) Mesma justificativa de b).
f) O valor do limite não é alcançado através de aproximações, e sim um valor mais próximo possível do valor do limite, mas não igual a ele.

– d) é falso pois pela definição do limite temos que a função tem que ser contínua então o limite fará parte da imagem desta função, logo a função alcançará o valor do limite.



6.

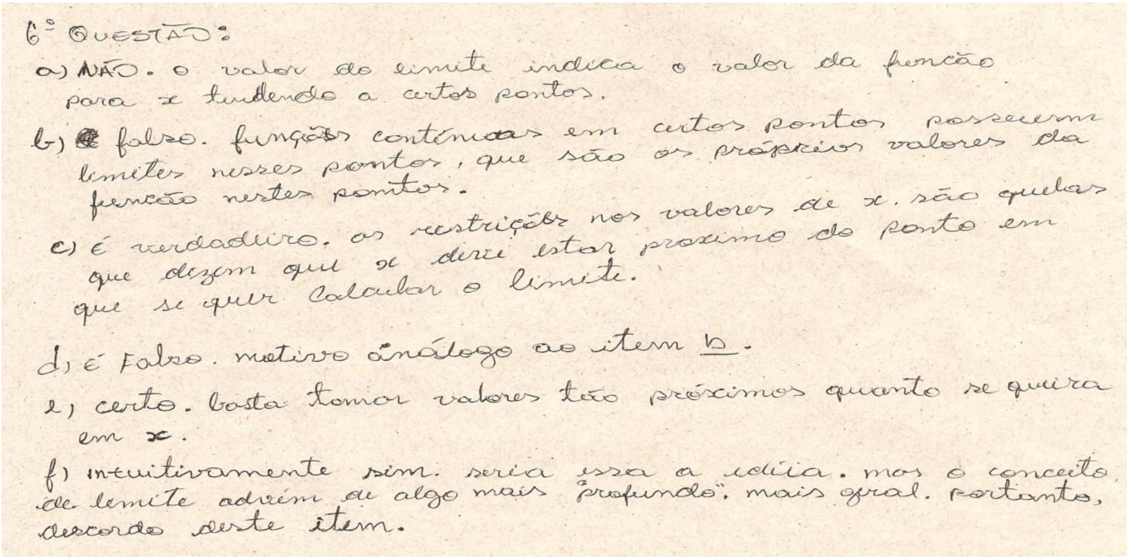
a) Discordo, pois não é como a função se move e sim que valor ela deveria alcançar para x tendendo a um ponto.

b) Concordo, pois como anteriormente dito "deveria", porém não alcança.

c) Discordo, não arbitrariamente.

d) Concordo, por exemplo $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$.

e) Concordo, pois em um intervalo à infinitos números reais.



6ª QUESTÃO:

a) NÃO. o valor do limite indica o valor da função para x tendendo a certos pontos.

b) falso. funções contínuas em certos pontos possuem limites nesses pontos, que são os próprios valores da função nestes pontos.

c) É verdadeiro. as restrições nos valores de x, são aquelas que dizem que se deve estar próximo do ponto em que se quer calcular o limite.

d) É Falso. motivo análogo ao item b.

e) certo. basta tomar valores tão próximos quanto se queira em x.

f) intuitivamente sim. seria essa a ideia. mas o conceito de limite advém de algo mais "profundo", mais geral. portanto, discordo deste item.

Fonte: Respostas dos sujeitos S04, S09, S12, S14, S16, S18 e S25.

Intencionamos com a 6ª questão, investigar as percepções dos estudantes sobre a possibilidade de um limite ser ou não alcançado, bem como qualquer outra mobilização em relação a esse conceito. Ressaltamos que, apesar de termos disponibilizado alternativas para que os estudantes pudessem realizar comparações com suas *imagens conceituais*, oito dos sujeitos investigados não responderam a questão.

Observamos que na maioria das respostas, os estudantes *evocaram* a ideia de que o limite de função consiste em um processo de aproximação, no qual o valor do limite jamais poderá ser alcançado. Nesse sentido, nossos resultados assemelham-se com aqueles obtidos por Tall e Vinner (1981), pois a ideia de que $f(x) \neq L$ faz parte da *imagem conceitual* dos sujeitos participantes de nossa pesquisa. Essa situação pode ser claramente evidenciada na resposta do sujeito S09 (*"Bem pelos meus conhecimentos o valor do limite não pode ser alcançado..."*).

Alguns estudantes atrelaram – assim como na questão anterior – à existência do limite a ideia de continuidade. Nesse sentido, evidenciamos na resposta do sujeito S16 (*"pela definição de limite temos que a função deve ser contínua, então o limite fará parte da imagem dessa função, logo a função alcançará o valor do limite")* a mobilização da ideia de que a função pode alcançar o valor do limite no ponto, já que a função deve estar definida nesse ponto para que o limite exista, ou seja, seus valores sempre irão coincidir (COTTRILL *et al*, 1993; JORDAAN, 2005; NAIR, 2009). Observamos também que o estudante mobilizou o termo *imagem de uma função* em sua resposta, o que nos remete à noção de que $f(a) = \lim_{x \to a} f(x)$.

Evidenciamos que alguns sujeitos afirmaram que a função pode alcançar o valor do limite e, como justificativa, apresentaram exemplos, tais como as funções contínuas, em alguns casos, exemplificadas por eles por meio da função constante. Esses resultados assemelham-se aos obtidos por Juter (2006), sendo que ressaltamos a existência de duas possibilidades:

- Os estudantes asseguram que a função pode assumir o valor de um limite, porque entendem que a definição Weierstrassiana não admite os termos dinâmicos, tais como "se aproxima de", "chega perto de" (menos provável);
- Os estudantes reiteram que a função pode alcançar o valor do limite em alguns casos, conforme observamos na resposta do sujeito S12 (*"Isso acontece quando o limite existir e a função for contínua. Caso contrário, não há como alcançar o limite")*;

Finalmente, elucidamos algumas *imagens conceituais evocadas* pelos sujeitos investigados na 6ª questão, conforme apontamos no quadro 8 a seguir.

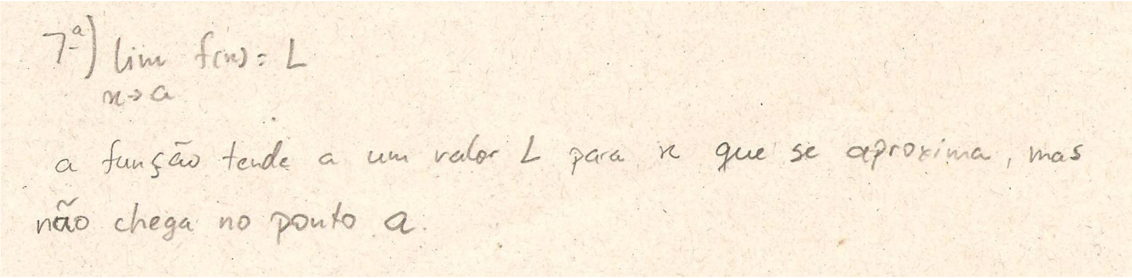
Quadro 8: *Imagens conceituais evocadas* na 6ª questão

$\boldsymbol{f(x) \neq L}$, ou seja, o valor do limite não é alcançado (TALL & VINNER, 1981);
O limite existe se $\boldsymbol{f(a) = \lim_{x \to a} f(x)}$ (COTTRILL *et al*, 1993; JORDAAN, 2005; NAIR, 2009);
A função pode, algumas vezes, alcançar o limite. Exemplo: funções contínuas. Caso contrário, fica muito próximo do valor do limite, mas não o alcança;

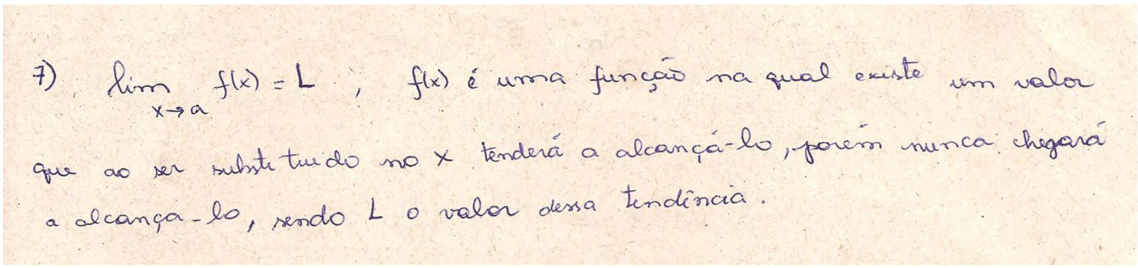
4.4.7. Resultados obtidos na 7ª questão

Classe A7: Corresponde aos 8 sujeitos que não responderam a questão;

Classe B7: Corresponde aos 3 sujeitos que apresentaram uma definição, na qual evocam a ideia de que o valor do limite não pode ser alcançado, conforme evidenciamos nas respostas dos sujeitos S02 e S11:

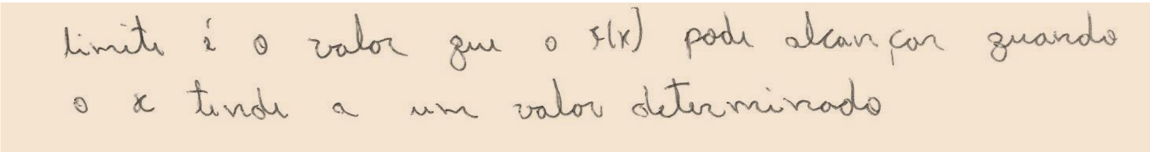

7ª) $\lim_{x \to a} f(x) = L$

a função tende a um valor L para x que se aproxima, mas não chega no ponto a.


7) $\lim_{x \to a} f(x) = L$; f(x) é uma função na qual existe um valor que ao ser substituído no x tenderá a alcançá-lo, porém nunca chegará a alcançá-lo, sendo L o valor dessa tendência.

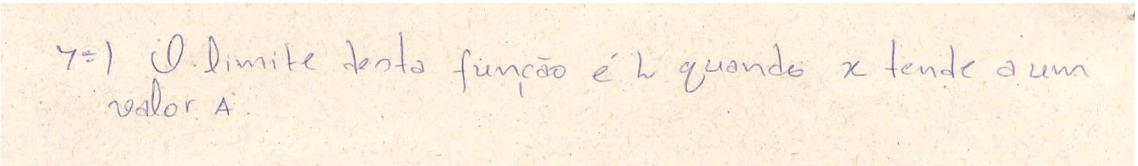
Fonte: Respostas dos sujeitos S02 e S11.

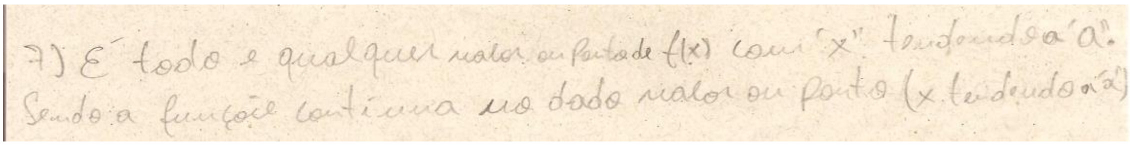
Classe C7: Corresponde aos 2 estudantes que mobilizaram a ideia de que a função pode alcançar o valor do limite (ver resposta do sujeito S08).

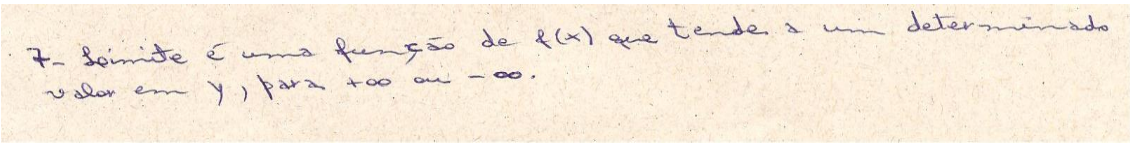

limite é o valor que o f(x) pode alcançar quando o x tende a um valor determinado

Fonte: Resposta do sujeito S08

Classe D7: Corresponde aos 7 estudantes que evocaram em suas *imagens conceituais* a ideia de aproximação, conforme destacamos nas exemplificações a seguir:


7ª) O limite desta função é L quando x tende a um valor A.

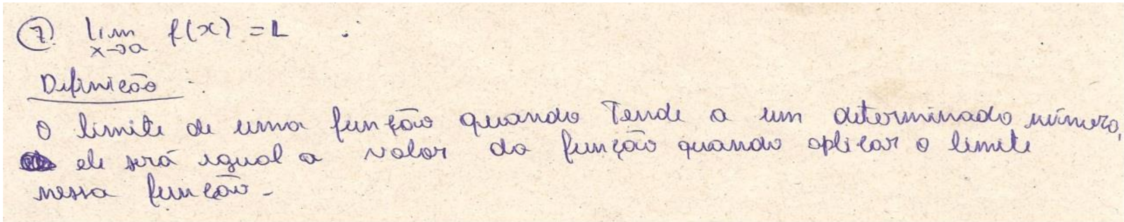

7) É todo e qualquer valor ou ponto de f(x) com "x" tendendo a "a". Sendo a função contínua no dado valor ou ponto (x tendendo a "a")



7- Limite é uma função de $f(x)$ que tende a um determinado valor em y, para $+\infty$ ou $-\infty$.

Fonte: Respostas dos sujeitos S09, S04 e S07

Classe E7: Corresponde ao sujeito que definiu limite da função no ponto como sendo a própria função (ver resposta do sujeito S22).



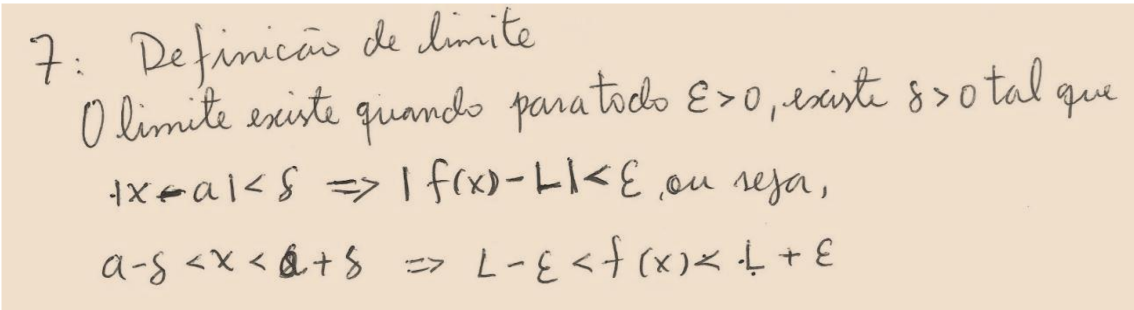
7) $\lim_{x \to a} f(x) = L$.

Definição:

O limite de uma função quando tende a um determinado número, ele será igual a valor da função quando aplicar o limite nessa função.

Fonte: Resposta dos sujeito S22

Classe F7: Corresponde aos 4 estudantes que evocaram a definição formal para definir limite de função, conforme exemplificamos a seguir.

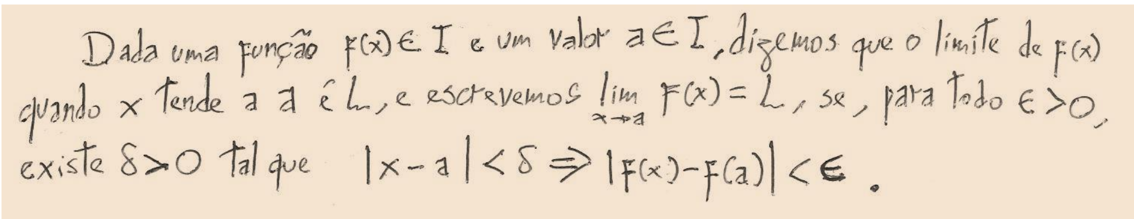


7: Definição de limite

O limite existe quando para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$, ou seja,

$a - \delta < x < a + \delta \Rightarrow L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$



Dada uma função $f(x) \in I$ e um valor $a \in I$, dizemos que o limite de $f(x)$ quando x tende a a é L, e escrevemos $\lim_{x \to a} f(x) = L$, se, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon$.

Fonte: Respostas dos sujeitos S20 e S12.

Objetivamos com a 7ª questão levantar elementos concernentes às *imagens conceituais* dos sujeitos investigados, de maneira e verificar se a *definição conceitual pessoal* desses sujeitos difere da *definição conceitual formal* de limite de função. No entanto, 9 estudantes não responderam a questão. Acreditamos que isso se deu devido à falta de maturidade relacionada aos aspectos manipulativos da representação simbólica (BRANDEMBERG, 2010) de limite, sendo que a reprodução de sua definição formal não foi imediata nas evocações mentais, fato que nos impossibilitou de investigar suas percepções acerca desse conceito.

No que concerne aos estudantes que responderam a questão, verificamos que expressões que refletem uma noção dinâmica acerca do conceito de limite de função se fizeram presente na *definição conceitual pessoal* de alguns indivíduos, tais como o sujeito S11 (*"f(x) é uma função na qual existe um valor que ao ser substituído no x tenderá a alcança-lo, porém nunca chegará a alcançá-lo..."*). Essa definição difere, é claro, da *definição conceitual* formal, na qual não são admitidas expressões dinâmicas.

Nossos resultados encontram-se em conformidade, portanto, com aqueles obtidos por Tall e Vinner (1981), Cornu (1983), Sierpinska (1885), Cottrill *et* al (1996), Zuchi (2005), Jordaan (2005), Juter (2006) e Nair (2009). Ou seja, as *Imagens Conceituais* dos estudantes admitem o conceito de limite mediante a ideia de aproximação, dinamismo, em que a função jamais poderá alcançar seu limite.

O sujeito S22 evocou a ideia de continuidade para definir limite, pois interpretamos que ao afirmar que *"O limite de uma função quando tende a um determinado número será igual ao valor da função quando aplicar o limite nessa função"* (resposta do sujeito S22), ele mobilizou a noção de que $f(a) = \lim_{x \to a} f(x)$ (COTTRILL *et al*, 1996; JORDAAN, 2005; NAIR, 2009).

Observamos que alguns estudantes mobilizaram elementos da definição formal de limite de função para expressar sua *definição conceitual pessoal*, tais como os sujeitos S20 e S12, cujas respostas constituíram a *classe F7*. Nesse sentido, ressaltamos que a definição S12 (*"... .*$\forall \varepsilon > 0, \exists\ \delta > 0$ *tal que* $|x - a| < \delta \rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$*...."*) mostra que o estudante também evocou a ideia de que $f(a) = \lim_{x \to a} f(x)$. Ou seja, o limite de uma função existe em determinado ponto se a função estiver definida naquele ponto, logo, a função deve ser contínua (COTTRILL *et al*, 1996; JORDAAN, 2005; NAIR, 2009).

Elucidamos, portanto, que ao definir limite de função, os sujeitos investigaram evocaram em suas *imagens conceituais* os seguintes aspectos:

Quadro 9: *Imagens conceituais evocadas* na 7ª questão

O limite da função não poderá ser alcançado (TALL & VINNER, 1981; CORNU, 1983; SIERPINSKA, 1885; COTTRILL *et* al, 1996; ZUCHI, 2005; JORDAAN, 2005; JUTER, 2006; NAIR, 2009)
$\boldsymbol{f(a) = \lim_{x \to a} f(x)}$, conforme evidenciamos em Cotrril *et al* (1996), Jordaan (2005) e Nair (2009). Ou seja, para que o limite exista, a função deve ser contínua.

4.5. Encaminhamentos para a 2ª etapa

Verificamos – junto às respostas dos sujeitos investigados na primeira etapa – alguns dos elementos *evocados* em suas *imagens conceituais* ao resolverem tarefas envolvendo o conceito de limite de função. A análise dessas *imagens conceituais* subsidiou a elaboração dos roteiros utilizados na segunda etapa de nossa investigação, isto é, durante as entrevistas. Optamos, nesse sentido, por investigar mais profundamente as *imagens conceituais evocadas* pelos sujeitos investigados e para isso, elaboramos Temas de Discussão (TD) que foram explorados no decorrer das entrevistas.

Foram elaborados 4 Temas de Discussão, explorados no decorrer das entrevistas realizadas na 2ª etapa de nossa investigação. São eles:

Quadro 10: Classificação dos Temas de Discussão (TD)

TD	Tema Explorado	Descrição
TD1	O valor do limite é alcançado?	O objetivo deste TD constituiu-se em investigar as *imagens conceituais evocadas* pelos sujeitos no que se refere a ideia de que a função se aproxima de determinado valor sem alcançá-lo. Ou seja, $f(x) \neq L$ (TALL & VINNER, 1981; JORDAAN, 2005; JUTER, 2006);
TD2	(Des) continuidade implica na (não) existência do limite?	O objetivo desse TD está voltado para a análise das *imagens conceituais evocadas*, conforme os resultados obtidos por Cottrill *et al* (1996), Jordaan (2005) e Nair (2009), ou seja, conforme a percepção de que para o limite de uma função existir em determinado ponto, a função deve ser contínua nesse ponto.
TD3	Indeterminações implicam na não existência do limite?	Esse TD é caracterizado pela busca de *evocações* que se apoiam na ideia de que indeterminações implicam na não existência do limite da função em determinado ponto (NAIR, 2009).

TD4	Limite de função x dicotomia *estático/dinâmico*	Objetivamos com esse TD analisar as *imagens* conceituais dos sujeitos em relação à mobilizações que apresentem a ideia de *procept* (GRAY & TALL, 1993).

A elaboração desses temas baseou-se na síntese das *imagens conceituais evocadas* pelos sujeitos investigados na primeira etapa e, com o intuito de viabilizar tanto a construção dos roteiros seguidos nas entrevistas quanto a escolha dos estudantes que delas participaram, elaboramos o quadro 11 (a seguir), no qual classificamos as *imagens conceituais evocadas* na 1ª etapa por tema de discussão. Ressaltamos que a variação de cores no quadro 11 permite-nos evidenciar as semelhanças entre as *imagens conceituais evocadas* em cada questão, sendo que optamos por não analisar mais profundamente as *imagens evocadas* que não foram agrupadas em nenhum dos TD (como é o caso daquelas que foram identificadas por (*)), por não estarem diretamente relacionadas com nossos objetivos.

Quadro 11: *Imagens conceituais evocadas x Temas de discussão*

QUESTÃO	*IMAGEM CONCEITUAL EVOCADA*	TD
Questão 1	Dicotomia estático/dinâmico; procept	TD4
	Tendência a se aproximar de algo (CORNU, 1983)	TD1
	É possível alcançar algo mediante uma aproximação	TD1
	Noção de infinitamente pequeno	*
Questão 2	Não é possível calcular limites que tendem ao infinito	*
	Indeterminações implicam na não existência do limite	TD3
	Tendência a se aproximar de algo (CORNU, 1983)	TD1
	"tender para"; "se aproxima de" implicam na ideia de que $f(x) \neq L$	TD1
Questão 3	Limite não é uma operação matemática (SIERPINSKA, 1985)	TD1
	Indeterminações implicam na não existência do limite	TD3
	Contiuidade em um ponto independe do domínio da função	*
	A função se aproxima de um valor sem atingí-lo, ou seja, $f(x) \neq L$	TD1
Questão 4	Indeterminações implicam na não existência do limite	TD3
	A função não alcança o valor do limite quando há indeterminações	TD1
	A função jamais alcança o valor do limite	TD1
	O limite resume-se a uma manipulação algébrica	*
	Dicotomia estático/dinâmico; procept	TD4
	A função se aproxima de um valor sem atingí-lo, ou seja, $f(x) \neq L$	TD1
Questão 5	A existência do limite em um ponto está atrelada aos seus limites laterais	*
	A função se aproxima de um valor sem atingí-lo, ou seja, $f(x) \neq L$	TD1
	Para o limite existir a função deve ser contínua	TD2
	O limite da função não é único	*
Questão 6	A função se aproxima de um valor sem atingí-lo, ou seja, $f(x) \neq L$	TD1
	O limite existe se $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$	TD2
	A função pode, algumas vezes, alcançar o limite. Ex.: Funções contínuas	TD1
Questão 7	A função jamais alcança o valor do limite	TD1
	O limite existe se $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$	TD2

A partir dos TD, elaboramos os roteiros de entrevistas utilizados na segunda etapa da pesquisa. Apresentamos a descrição/análise desses momentos junto aos indivíduos investigados no capítulo seguinte.

CAPÍTULO 5

Analisando mais profundamente as *imagens conceituais evocadas*

5.1. Introdução

No capítulo anterior sistematizamos e analisamos os resultados na primeira etapa, obtidos por meio do questionário proposto. Esses resultados aliados ao referencial teórico pré-estabelecido nos subsidiaram na elaboração dos Temas de Discussão (TD) explorados durante as entrevistas que constituíram a segunda etapa de nossa investigação.

Nosso objetivo com esse capítulo constituiu-se, portanto, em descrever e justificar a escolha desses temas discutidos durante as entrevistas, bem como analisar os resultados obtidos a partir das mesmas, de maneira a apontar – mais uma vez – os pontos de conformidade e/ou não conformidade com referencial teórico.

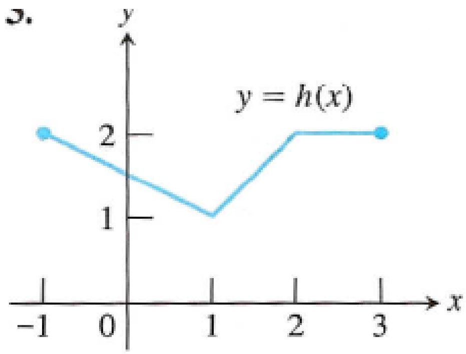
5.2. Segunda etapa: as entrevistas

As entrevistas realizadas na segunda etapa da pesquisa nortearam-se nos roteiros elaborados para cada tema de discussão. O intuito dessa etapa consistiu em estabelecer uma análise mais profunda em relação às *imagens conceituais evocadas* pelos sujeitos investigados na etapa anterior.

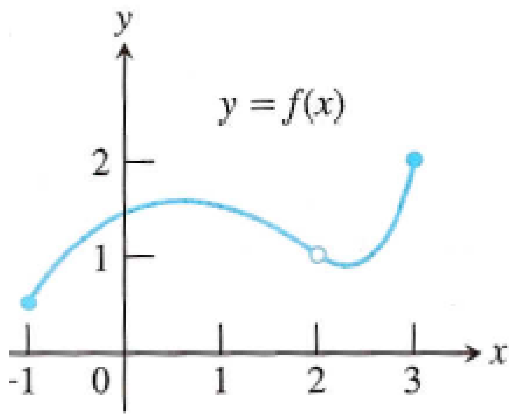
Destacamos a seguir, os quatro roteiros elaborados e os objetivos traçados para cada um deles.

Roteiro de entrevista TD1 – *O valor do limite é alcançado?*
1. Perguntar o que significa $\lim_{x \to a} f(x) = L$. • A função alcança o valor do limite?

- Observe essa função, definida no intervalo [-1,3] (mostrar o gráfico a seguir):



- A função $h(x)$ alcança o valor do limite em $x = 2$?
- Então eu posso dizer que a função sempre alcança o valor do limite em determinado ponto?
    - Caso o sujeito discorde, solicitar um contraexemplo.
    - Caso o sujeito concorde, mostrar o gráfico a seguir:



- A função, nesse caso, alcança o valor do limite em $x = 2$?
    - Em caso de resposta afirmativa, pedir que o sujeito justifique sua afirmação;
    - Em caso de resposta negativa, perguntar:
- Então, para a função alcançar o valor do limite em um ponto ‘p’ qualquer, ela deve estar definida naquele ponto?
- E se ela não estiver definida naquele ponto?
- Você poderia escrever uma definição para $\lim_{x \to a} f(x) = L$ e, mais uma vez, dizer o que significa?

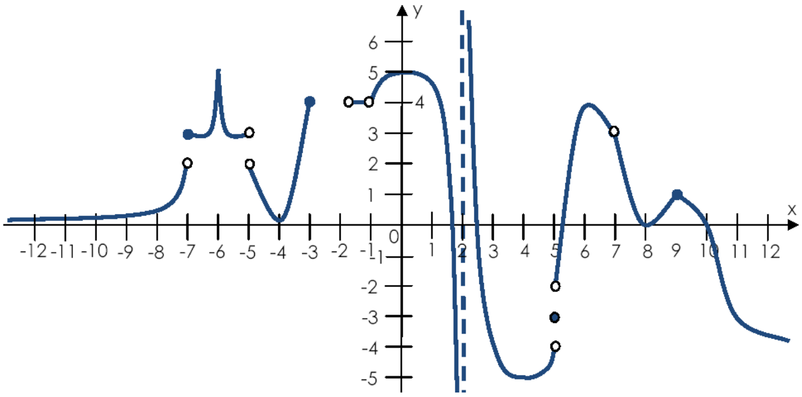
O roteiro de entrevista do TD1 foi elaborado com o intuito de investigar as *imagens conceituais evocadas* dos sujeitos acerca da possibilidade do valor do limite poder ou não ser alcançado. Optamos por esse tema em virtude de evidenciarmos, na 1ª etapa de nossa investigação, *evocações* que mobilizaram uma ideia de aproximação em relação a determinado valor sem, no entanto, alcançá-lo, ou seja, $f(x) \neq L$ (TALL & VINER, 1981; JORDAAN, 2005; JUTER,

2006) e, a fim de analisá-las mais profundamente, incluímos no TD1 a gráficos de uma função contínua e de uma descontínua para verificar se – da mesma maneira que Juter (2006) observou – evidenciaríamos junto aos sujeitos a relação, mais uma vez, entre a (des)continuidade de funções com o fato de o limite ser ou não alcançado.

Além disso, ressaltamos decidimos perguntar o que significa $\lim_{x\to a} f(x) = L$, no sentido de verificar a *imagem conceitual* e *definição conceitual pessoal* dos mesmos, suas relações com a *definição conceitual formal* de limite de função e, sobretudo, se a *evocação* de um limite inalcançável faria parte das *imagens conceituais* dos indivíduos.

Roteiro de entrevista TD2 – (Des)*continuidade implica na (não) existência do limite?*

1. Mostrar o gráfico da função abaixo:



- Observe esse gráfico e responda:
  - O $\lim_{x\to -7} f(x)$ existe? Justifique.
  - E quando $x \to 5$? Justifique.
  - O $\lim_{x\to 7} f(x)$ existe? Justifique.
  - E quando $x \to 9$? Justifique.

- Caso seja mobilizada a ideia de que o limite existe se $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$, perguntar:
  - Então, o limite da função em determinado ponto deve ser igual ao valor da função nesse ponto? (aguardar resposta). E se não for?
  - Devemos, portanto, considerar o domínio da função como um fator decisivo para evidenciarmos a (não) existência do limite?
  - Então quando o limite de uma função existe?
  - Escreva uma definição para $\lim_{x\to a} f(x) = L$ e, em seguida, explique-a.

O TD2 explora a relação entre (des)continuidade de função em um ponto e a existência do limite nesse ponto. Optamos por incluir essa temática para discussão, dado que evidenciamos na 1ª etapa de nossa investigação que muitos sujeitos investigados evocaram a ideia de que o limite de uma função em determinado ponto existe se a mesma for contínua naquele ponto (COTTRILL *et al*, 1996; JORDAAN, 2005; NAIR, 2009).

Incluímos um gráfico de função descontínua para ser analisado pelos sujeitos. Nosso intuito foi levantar possíveis *evocações* que estivessem voltadas para a ideia de que o limite de uma função existe se $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$. Assim como no TD1, acreditamos ser importante pedir que o sujeito defina limite de função, bem como explique o seu significado, pois dessa maneira podemos comparar suas *imagens conceituais evocadas* e sua *definição conceitual pessoal* com a *definição conceitual formal* de limite de função, fato que em muito contribui para a validação de nossas hipóteses de pesquisa.

Roteiro de entrevista TD3 - *Indeterminações implicam na não existência do limite?*

1. Os limites das seguintes funções existem? Justifique.

- $\lim_{x \to \infty} 5 + \frac{1}{x}$
- $\lim_{x \to 1} \frac{x^2+x-2}{x^2-x}$
- $\lim_{x \to \infty} \frac{-2x^3-2x+3}{3x^3+3x^2-5x}$
- $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2-2}{x^3}$

2. O que faz você concluir que o limite de determinada função não existe?

- Em caso de respostas que evoquem a ideia de que indeterminações implicam na não existência do limite, perguntar ao sujeito:
  - A presença de *indeterminações* representa sempre um ponto de descontinuidade na função?
  - Em caso de resposta afirmativa, perguntar:
    - Então, eu posso dizer que o ponto de descontinuidade influencia na questão da existência do limite? Explique.
  - Em caso de resposta negativa, pedir que explique o que as *indeterminações* representam; solicitar exemplos.

3. Você poderia escrever uma definição para limite de função e, em seguida, explicá-la?

O TD3 é composto por questionamentos que levantam a discussão acerca da influência da indeterminação na (não) existência do limite em determinado ponto. Optamos por incluir essa temática na 2ª etapa de nossa pesquisa devido às *imagens conceituais evocadas* por alguns sujeitos na etapa anterior, nas quais evidenciamos mobilizações voltadas para a ideia de que indeterminações implicam na não existência do limite (NAIR, 2009). Para isso, solicitamos que fosse verificado e justificado se o limite de algumas funções existia.

Além disso, inserimos questionamentos relacionados ao que uma indeterminação representa (sempre um ponto de descontinuidade?). Aliado a isso, relacionamos esse ponto de descontinuidade com a questão da existência do limite o que nos remete à discussão do TD2, do qual fazem parte *evocações* do tipo: *limite existe se, e somente se,* $lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ (COTTRILL *et al*, 1996; JORDAAN, 2005; NAIR, 2009). Solicitamos, da mesma maneira que nos TD1 e TD2, uma definição para limite de função, seguida de uma explicação acerca de seu significado. Mais uma vez, objetivamos relacionar as *imagens conceituais evocadas* no que se refere a esse conceito, a forma em palavras utilizada para defini-lo, ou seja, sua *definição conceitual pessoal* e a sua *definição conceitual formal*.

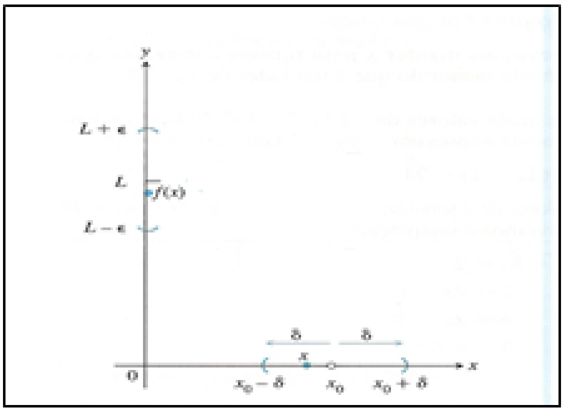
Roteiro de entrevista TD4 *Limite de função x dicotomia estático/dinâmico*

1. Você poderia escrever uma definição para limite de função e, em seguida, explicá-la?
2. Você concorda ou discorda com essa afirmação: *A função alcança o valor do limite por meio de aproximações*. Explique.
3. Observe a definição de limite:

[Seja $f(x)$ definida em um intervalo aberto em torno de x_0, *exceto talvez em* x_0] (parte I). [Dizemos que $f(x)$ tem **limite** L quando x tende a x_0 e escrevemos $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ se para todo número ε >0 existir um δ >0] (parte 2) tal que, [para todos os valores de x, 0 < $|x - x_0|$ < $\delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$] (parte 3).

a) Explique, com suas palavras, o que significa cada parte da definição de limite de função.
b) A definição evoca a ideia de aproximação? Explique.
c) A definição evoca a ideia de que é possível alcançar o valor do limite? Explique.
d) O que é o limite? O que ele representa?

4. Mostrar a figura abaixo:



a) De que maneira você pode relacionar a definição de limite com essa figura?

Objetivamos com o TD4 discutir aspectos relacionados à dicotomia estático/dinâmica que se fez presente nas evocações de alguns dos sujeitos investigados na 1ª etapa. Para isso, solicitamos uma definição de limite de função, seguida da explicação de seu significado por parte do sujeito, de maneira e verificar quais tipos de *imagens conceituais* seriam *evocadas* e se as mesmas relacionariam a definição com as expressões ditas dinâmicas – tais como ‘tender para’, ‘se aproxima de’ – que mobilizam a ideia de que o valor do limite não pode ser alcançado pela função (TALL & VINNER, 1981; CORNU, 1983; SIERPINSKA, 1885; COTTRILL *et al*, 1996; ZUCHI, 2005; JORDAAN, 2005; JUTER, 2006; NAIR, 2009).

A definição de limite de função incluída no roteiro do TD4 foi de fundamental importância, pois a partir dela foi possível questionar os sujeitos no que se refere à presença e/ou ausência de dinamismo nessa definição, ou seja, por meio da definição foi possível promover a ativação da *cela* da *imagem conceitual* (BRANDEMBERG 2010) e analisá-la mais profundamente com base nas *evocações* dos participantes. Ressaltamos que incluímos a figura no roteiro com o intuito de verificar como (ou se) seria estabelecida uma relação com a definição por meio dessa representação visual.

5.3. Descrição e análise da 2ª etapa da investigação

Na segunda etapa de nossa pesquisa, selecionamos 11 dos 25 sujeitos investigados na etapa anterior para participarem das entrevistas, entretanto analisamos mais profundamente a *imagem conceitual* de apenas 06 indivíduos, pois os demais não compareceram às sessões.

A escolha dos sujeitos investigados deu-se a partir da análise dos resultados obtidos na etapa anterior. Ou seja, selecionamos os estudantes, cujas *imagens conceituais evocadas* melhor representam seu respectivo tema de discussão (ver quadro 12).

Quadro 12: Escolha dos sujeitos por TD

Sujeito Investigado	TD	Relação Sujeito x TD
S02 S14 S25	TD1	Com o TD1, objetivamos explorar junto aos sujeitos investigados suas percepções acerca da possibilidade do valor do limite em determinado ponto poder ou não ser alcançado. Os sujeitos foram selecionados, em virtude de suas *evocações* na 1ª etapa estarem voltadas para esse tema. Dentre elas, destacamos: *- Tendência a se aproximar de algo;* *- É possível alcançar algo mediante uma aproximação;* *-* $f(x) \neq L$*;* *- A função de aproxima de um valor sem atingi-lo;* *- A função pode, algumas vezes, alcançar o valor do limite.*
S09	TD2	Com o TD2, objetivamos explorar junto ao sujeito investigado suas percepções voltadas para a relação entre *limite e continuidade.* O sujeito selecionado para esse tema evocou, na etapa anterior, *imagens conceituais* que contemplaram a ideia de que para o limite existir a função deve ser contínua, ou seja, $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.
S05	TD3	Com o TD3, objetivamos analisar mais profundamente as *evocações* do sujeito S05 relacionadas à ideia de que indeterminações implicam na não existência do limite em determinado ponto, haja vista que o mesmo apresentou *imagens conceituais* apoiadas nesse tipo de mobilização na 1ª etapa de nossa investigação.
S04	TD4	Com o TD4, objetivamos investigar evocações do sujeito S04 que estivessem voltadas para a ideia de *procept* (GRAY & TALL, 1983), já que esse sujeito apresentou, na primeira etapa de nossa investigação, mobilizações apoiadas tanto em interpretações dinâmicas quanto estáticas acerca do conceito de limite de uma função.

A investigação foi realizada na última semana de setembro de 2012 e cada entrevista durou, em média, 15 minutos. Ressaltamos que a análise das entrevistas foi fundamental para complementar nossas interpretações acerca das *imagens conceituais evocadas* pelos sujeitos investigados na 1ª etapa. As transcrições na íntegra das entrevistas encontram-se nos apêndices deste trabalho.

Destacamos nos tópicos subsequentes a descrição de alguns trechos dos episódios[16], analisando-os de acordo com os pontos de conformidade e/ou não conformidade com o referencial teórico previamente estabelecido. Ressaltamos que apesar de termos elaborado um roteiro para cada TD, realizamos outros questionamentos que pudessem complementar nossas análises, sendo esses questionamentos realizados conforme as particularidades de cada sujeito investigado.

5.3.1. Episódio 1

O primeiro episódio apresenta a entrevista realizada com o sujeito S02 sobre o TD1, ou seja, sobre suas percepções acerca da possibilidade de uma função poder ou não *alcançar* o valor do limite em determinado ponto, haja vista que esse sujeito *evocou* na 1ª etapa da pesquisa *imagens conceituais* características desse tema de discussão.

Ao perguntarmos ao sujeito S02 o que significava $\lim_{x\to a} f(x) = L$, evidenciamos a *evocação* de uma *imagem conceitual* voltada para a ideia de aproximação, conforme destacamos a seguir.

E: Primeiro, eu gostaria de saber o que significa o $lim_{x\to a} f(x) = L$. O quê isso significa pra ti?

S02: É o valor que <u>tende</u> a L no ponto A, <u>não que chegue</u> em L, mas <u>próximo</u> de L.

E: Essa proximidade depende de que exatamente?

S02: Até onde eu sei, você <u>aproxima</u> tanto pela direita quanto pela esquerda de tal modo que eles <u>quase se encontram</u>, mas <u>não chegam</u> naquele ponto.

As respostas do sujeito S02 *evocam* as expressões ditas dinâmicas que são inerentes a uma *imagem conceitual* pautada na percepção de que o limite é um valor do qual nos aproximamos, porém, não atingimos ou ultrapassamos, estando esses aspectos mobilizados em acordo com as observações de Tall e Vinner (1981), Jordaan (2005) e Juter (2006), ou seja, a ideia de que $f(x) \neq L$ fez parte da *imagem conceitual* desse sujeito.

No que concerne ao fato da função *alcançar ou não* o valor do limite em determinado ponto, evidenciamos que S02 considera a existência do limite

[16] Organizamos a análise dos resultados da 2ª etapa em episódios. Cada episódio corresponde à entrevista com um dos sujeitos. A análise foi composta, portanto, de 6 episódios.

nesse ponto. Ou seja, se o limite existir, então ele pode ser alcançado, fazendo-nos concluir que, nesse momento, *a definição conceitual pessoal* apresentada anteriormente pelo sujeito entra em conflito com a *imagem conceitual evocada* por ele (ver o trecho da entrevista a seguir).

E: Então, eu vou te mostrar um exemplo e outra função (segundo gráfico do roteiro). Nesse caso, o que eu posso falar do limite dessa função no ponto 2?

S02: No ponto 2..., ela existe. Tanto que existe uma aproximação tanto pela direita quanto pela esquerda só que ela não é contínua porque no ponto $x = 2$ *ela é um intervalo aberto.*

E: Certo, e isso influencia ou não no fato da função alcançar ou não o limite?

S02: Não. Também não.

E: Então eu posso dizer que a função alcança o limite?

S02: A função alcança o limite, mas ela não é contínua.

E: Então, para a função alcançar o limite ela pode ou não estar definida neste ponto?

S02: Sim.

Consideramos, portanto, que para esse sujeito investigado o fato da função *alcançar ou não* o limite constituiu-se como um *fator de conflito potencial* (VINNER, 1991) e, por isso, acreditamos ser necessário que tal aspecto seja discutido em sala de aula, de maneira a viabilizar a formação da *imagem conceitual* dos estudantes, tornando-a coerente não só com a *definição conceitual pessoal* dos mesmos, mas também com a *definição conceitual formal* de limite de função.

Por fim, ressaltamos que S02 definiu limite a partir da *evocação* da ideia de aproximação, conforme podemos verificar tanto no início da entrevista quanto no momento em que, mais uma vez, solicitamos que ele definisse limite de função:

E: E, depois dessa conversa que nós tivemos você poderia escrever uma definição para limite e explicar, mais uma vez, o que significa.

S02: Bem, existe uma função né, para todo x que ela tende à a, existe um limite L que ela tem que se aproximar lateralmente, tanto pela direita quanto pela esquerda. Essa aproximação é o limite L.

A análise do episódio 1 nos possibilitou evidenciar a dificuldade de S02 em relação ao entendimento do conceito de limite de função, dada a incoerência presente na relação entre as *imagens conceituais evocadas* por ele e a *definição conceitual formal* de limite de função, fato que se fez presente também na primeira etapa de nossa investigação e que se estendeu aos demais episódios destacados no decorrer desse capítulo.

5.3.2. Episódio 2

O segundo episódio refere-se à entrevista realizada com o sujeito S14 sobre o TD1, ou seja, sobre o fato da função poder ou não *alcançar* o valor do limite em determinado ponto. Esse sujeito também *evocou*, na 1ª etapa da pesquisa, *imagens conceituais* características desse tema de discussão. Mais uma vez, lembramos que realizamos outros questionamentos que pudessem complementar nossas análises.

O sujeito S14 evocou, inicialmente, a ideia de que $f(x) \neq L$ (TALL & VINER, 1981; JORDAAN, 2005; JUTER, 2006). Isso pode ser evidenciado na *definição conceitual pessoal* de limite de função apresentada na entrevista (ver transcrição, a seguir).

E: Então, a primeira coisa que eu queria te perguntar é o que significa pra você $lim_{x \to a} f(x) = L$.

S14: É... olhando assim para um gráfico, seria <u>o valor que a função teria no ponto, se o gráfico dela passasse por esse ponto</u>. Basicamente isso.

Quanto à questão de a função alcançar *ou não* o limite, S14 se remete a duas situações: a existência do limite e a continuidade da função. Isto é, se o limite existe em determinado ponto e a função for contínua nesse ponto, então ele pode ser alcançado, conforme destacamos no seguinte trecho da entrevista realizada.

E: ok, tu podes, então, me dar um exemplo de uma função que não alcança o valor do limite em determinado ponto?

S14: ok (pausa)... essa função aqui, formada por $f(x) = \begin{cases} x, \ se\ x \leq 1 \\ 3 - x, \ se\ x > 1 \end{cases}$, *vamos supor essa função (desenha o gráfico)... no ponto 1, essa função não vai ser contínua no ponto 1, aí agora eu quero calcular o limite dela quando x tender a 1, no ponto onde ela não é contínua. Se eu for calcular esse limite, no caso como a função tem duas sentenças, então o que que a gente vai fazer, calcular os limites laterais. Os limites pela esquerda e pela direita, né? Então se* *eu for calcular o limite pela esquerda, o que eu vou encontrar? Vou encontrar 1. Se eu for encontrar o limite pela direita, eu vou encontrar 2. Os limites laterais são diferentes, então o limite da função não vai existir, então como é que eu vou alcançar? Então o limite não existe.*

E: Tá. Se o limite existe, então a função alcança?

S14: Sim. Peraí, deixa eu pensar um pouquinho (risos). Vamos analisar, se o limite da função existe e a função alcança o valor do limite é porque a função tem que ser contínua pra poder alcançar o limite no ponto dado. É, acredito que sim, se ela for contínua, então ela alcança o valor do limite.

Nesse sentido, a *imagem conceitual* do sujeito S14 encontra-se em acordo com as observações de Juter (2006). Isso porque, o sujeito destacou que a função pode, algumas vezes, alcançar o valor do limite (nesse caso, se ela for contínua), sendo que evidenciamos o conflito entre essas *evocações* e a *definição conceitual pessoal* destacada por ele anteriormente (na qual mobilizou a ideia de que $f(x) \neq L$).

Observamos, ainda que S14, ao estabelecer uma definição conceitual para limite de função, apresentou conflitos relacionados ao fato da existência do limite em determinado ponto estar vinculada ao domínio da função, caracterizando-se para esse sujeito, um *fator de conflito potencial* (VINNER, 1991), haja vista que, em outros momentos, suas *imagens conceituais* desvinculam a existência do limite em relação à continuidade e, consequentemente, ao fato da função estar definida no ponto estudado (ver transcrição, a seguir).

E: então, depois dessas perguntas que eu te fiz, dessa discussão que a gente teve, eu queria que tu escrevesses uma definição para limite de uma função e dizer, mais uma vez o que ela significa. Como tu definirias limite então? Fique à vontade.

S14: Intuitivamente, o limite ele é um valor que a função tem ou teria no ponto P, dependendo da continuidade; se ela for contínua no P, então o limite dessa função em p vai ser a própria $f(P)$*. Se ela não for, e se o limite existir, seria o valor que essa função teria, digamos assim, no ponto P. Agora, formalmente, envolvendo épsilon e o delta, esse eu já tenho um pouco de dificuldade (...)*

E: Certo. Mas então assim, você coloca, seja uma função f e um ponto P no domínio de f, então P tem que pertencer ao domínio de f?

S14: P... sim.

E: Certo. Aí, continuando.... você colocou aqui esse f(x) é a função e esse f(P) é o limite?

S14: Sim... se a função for contínua.

E: Então, para melhor ajustar aqui, quando você coloca $|f(x) - f(P)| < \varepsilon$ me dá a entender que f(P) é o limite entendeu? Então, como você poderia escrever isso aqui melhor?

S14: Tirando do módulo? (pensou um pouco)... é o limite aqui... é porque eu tô me confundindo, mas aqui é o limite, vai ser f(P) se for contínua.

Assim como em etapas anteriores de nossa investigação, os resultados obtidos no episódio 2 encontram em conformidade com os estudos de Tall e Vinner (1981), no sentido de que as *imagens conceituais evocadas* pelo indivíduo influenciam na construção de uma *definição conceitual pessoal* que difere da *definição conceitual formal* de limite de função, principalmente no que concerne à sua relação com a noção de continuidade (COTTRILL *et al*, 1996; JORDAAN, 2005; JUTER, 2006; NAIR, 2009).

5.3.3. Episódio 3

O terceiro episódio apresenta a entrevista realizada com o sujeito S25 sobre o TD1, logo, sobre a questão da função poder ou não *alcançar* o valor do limite em determinado ponto. Na 1ª etapa da pesquisa, as *imagens conceituais evocadas* por esse sujeito possuem características desse tema de discussão. Ressaltamos, mais uma vez, que realizamos outros questionamentos que pudessem complementar nossas análises quanto a esse tema.

O sujeito S25 evocou que $f(x) \neq L$ quando a função for descontínua no ponto estudado não podendo, nesse caso, alcançar o valor do limite. No caso da função ser contínua, então $f(x) = L$ e, consequentemente, o valor do limite poder ser alcançado. Nesse sentido, sua *imagem conceitual* encontra-se em acordo com as observações de Juter (2006), conforme evidenciamos na *definição conceitual pessoal* de limite de função apresentada a seguir:

E: Então, bem, a primeira coisa que eu gostaria de perguntar o que para ti significa $lim_{x \to a} f(x) = L$.

S25: Matematicamente falando. Assim, o limite seria um valor que essa função f deveria assumir nesse ponto A, pode ser que assuma esse valor L e pode ser que não.
E: Certo. Em que casos você diz que assume ou não assume?
S25: Quando a função for contínua, ela vai assumir esse valor de f e quando ela não for contínua, deveria ter esse valor que ela assumiria, mas não necessariamente.

Observamos que – para o sujeito S25 – está claro que o conceito de limite de função mobiliza a ideia de *procept* (GRAY & TALL, 1993). Isso porque, sua *imagem conceitual evoca* tanto uma constante aproximação em relação a determinado valor (*process),* quanto o próprio valor do limite (*concept)*, já que a sua existência independe da função assumir esse valor.

5.3.4. Episódio 4

O quarto episódio apresenta a análise da entrevista realizada com o sujeito S09 sobre o TD2, ou seja, sobre as percepções voltadas para a relação entre *limite e continuidade*, mais precisamente na questão da influência da (des)continuidade na (não) existência do limite. Optamos por selecionar esse sujeito para essa etapa, em virtude de suas *evocações* na 1ª etapa estarem em acordo com os tópicos explorados nesse tema de discussão. Entretanto, ressaltamos que outros questionamentos podem ter sido feitos de modo a complementar nossas análises sobre as *imagens conceituais evocadas* pelo sujeito.

No decorrer da entrevista, o sujeito S09 *evocou* que a existência do limite em determinado ponto não está, necessariamente, atrelada somente à questão da (des)continuidade (ver transcrição, a seguir).
E: Então, eu vou te mostrar esse gráfico (mostra o gráfico do roteiro), e aí eu queria saber contigo se $lim_{x \to -7} f(x)$ *existe.*
(depois de algum tempo)
S09: Não.
E: Por quê?
S09: Porque tem esse salto aí... por isso não existe.
E: Certo. E quando $x \to 5$*?*
S09: Pelo mesmo motivo.

E: E quando $x \to 7$*?*

S09: Nesse caso, o limite existe, é $f(7)$*.*

E: E quando $x \to 9$*?*

S09: Quando $x \to 9$*, também* $f(9)$*.*

Nos pontos $x = -7$ e $x = 5$, o limite – conforme destacado por S09 – não existe, sendo que esse "salto" elucidado pelo sujeito é uma consequência dos limites laterais serem diferentes (no caso de $X = -7, \lim_{x \to -7^+} f(x) = 3$ e $\lim_{x \to -7^-} f(x) = 2$). Entretanto, em nenhum momento S09 mencionou que o fato dos limites laterais serem diferentes implica na não existência do limite no ponto. Para ele, o limite não existe em virtude de a função ter um salto[17]. Nesse sentido, nossos resultados se assemelham aos de Tall e Vinner (1981).

A transcrição não nos permite afirmar que para S09 a existência do limite em determinado ponto depende da continuidade nesse ponto, haja vista que em $x = 7$ a função é descontínua. Todavia, segundo ele, o limite existe e seria igual a $f(7)$. Entretanto, evidenciamos que de alguma maneira, a relação *(des)continuidade x (não)existência do limite* faz parte de sua *imagem conceitual*. Pautamos essa afirmação nas seguintes possiblidades:

- O sujeito atrela à ideia de descontinuidade somente a existência dos *saltos* no gráfico de uma função. Se for esse o caso, então para o sujeito a existência do limite dependeria da continuidade da função (no caso de $\lim_{x \to -7} f(x)$, por exemplo), fato que aproximaria nossos resultados com os Cottrill *et al* (1996), Jordaan (2005) e Nair (2006);
- Para o sujeito, uma função é descontínua quando a mesma apresenta "*saltos"* e "*buracos"* em um ponto P (BARTO, 2004). Sendo que, nesse último caso, o limite existirá e assumirá o valor de $f(P)$, alcançando-o, ou seja, ele se aproximará tanto de $f(p)$ que se tornará esse valor (TALL&VINNER, 1981).

No decorrer da entrevista, observamos que o sujeito menciona os intervalos na tentativa de explicar quando o limite em determinado ponto existe ou não existe, sendo que o domínio da função se configurou como um *fator de*

[17] O sujeito interpreta o salto no gráfico de uma função como uma característica de descontinuidade que, por sua vez, implicaria – segundo sua *imagem conceitual evocada* – na não existência do limite dessa função.

conflito potencial (VINNER, 1991) para esse sujeito, conforme destacamos na transcrição a seguir:

E: Então, quando eu posso afirmar que o limite existe?

S09: Vamos dizer que eu quero calcular o limite de f quando $x \to a$, para pontos cada vez mais próximos de a no domínio, o valor das imagens tem que tá cada vez mais próxima de $f(a)$.

E: Então, eu devo considerar o domínio da função como sendo fundamental para a existência ou não existência do limite?

S09: Eu acho que não o domínio e sim as imagens.

E: então o valor da função no ponto deve pertencer ao conjunto imagem para que o limite exista?

S09: É.

E: Então, quando o limite não existe?

S09: Seria (pausa) se tu determinas um intervalo próximo de a e um intervalo próximo de $f(a)$. (depois de algum tempo). Tá, o limite não existe se eu tomar um intervalo próximo de a, contendo a, eu pegar algum valor desse intervalo e a imagem não pertencer ao intervalo próximo de $f(a)$.

E: Então o caso do intervalo em torno de a, a tem que estar definido nesse intervalo?

S09: tem que tá no intervalo.

Diante das respostas de S09, percebemos também que o mesmo considera o limite como sendo uma aproximação dinâmica em relação à x, conforme evidenciamos em suas palavras ("*para pontos cada vez mais próximos de a...").* Entretanto, quando define o valor do limite em$P$, restringe-se a esse ponto, já que no caso do salto em $x = -7$, não analisou o comportamento do gráfico nas proximidades desse ponto e, consequentemente, desconsiderou seus limites laterais. Nesse âmbito, nossos resultados assemelham-se com as considerações de Cottrill *et al* (1996).

5.3.5. Episódio 5

O quinto episódio apresenta a análise da entrevista realizada com o sujeito S05 sobre o TD3, isto é, sobre *evocações* que se apoiam na ideia de que indeterminações implicam na não existência do limite da função em determinado ponto (NAIR, 2009). As *evocações* do sujeito S05 na 1ª etapa se encontram em acordo com os tópicos explorados nesse tema de discussão. Mais uma vez, ressaltamos que outros questionamentos podem ter sido feitos de modo a complementar nossas análises sobre as *imagens conceituais evocadas* pelo sujeito investigado.

Observamos que o sujeito S05 apresenta dificuldades no que concerne a limites tendendo para infinito. Elucidamos tais dificuldades envolvendo infinito nos trechos a seguir:

E: Então, eu gostaria que você observasse essas funções e me dissesse se o limite existe em cada uma delas. No caso de não existirem, eu gostaria que tu me explicasse o por quê.

(depois de um tempo)

S05: Bem, no caso <u>dessas que envolvem o infinito</u> eu tenho um pouco de dificuldade (...).

(...)

E: E se fosse um resultado do tipo $\frac{\infty}{\infty}$? Você acha que esse limite existiria ou não existiria?

S05: $\frac{\infty}{\infty}$ (pensa um pouco). Eu acho que não existiria.

(...)

E: Certo, então você diz que o limite é um valor máximo que a função vai tender. E <u>se ela tender ao infinito</u>, esse limite existiria ou não? Isso vai influenciar na existência ou não do limite?

S05: Eu acho que vai.

E: De que maneira tu achas que vai influenciar?

S05: <u>É porque a função não vai chegar até lá, então se ela não chegar é porque o limite não vai existir</u>.

Evidenciamos que o sujeito S05 assumiu ter a dificuldade em se tratando ao cálculo de limites envolvendo o infinito, fato que aproxima nossos resultados aos obtidos por Nair (2009). Além disso, o sujeito *evocou* durante a entrevista as seguintes *imagens conceituais*:

- No que se refere ao cálculo de limites, resultados do tipo $\frac{\infty}{\infty}$, implicam na não existência do limite (NAIR, 2009);

- O limite - quando tende ao infinito - não existe devido o mesmo nunca conseguir chegar a lugar algum;

Ressaltamos que as *imagens conceituais evocadas* pelo sujeito S05 estão intimamente relacionadas com sua concepção de infinito, que neste caso, configurou-se como um *fator em conflito potencial* (VINNER, 1991).

No que concerne à *definição conceitual pessoal* de S05 (*limite é o valor máximo que a função vai tender*), observamos a *evocação* de uma *imagem conceitual* voltada para a ideia de aproximação constante em relação a determinado valor, sendo esse valor intransponível (CORNU, 1983). O entendimento de S05 sobre limite de função contribuiu para a construção de uma *definição conceitual pessoal* que interferiu nas suas percepções quanto aos limites envolvendo infinitos e que se encontra incoerente com sua *definição conceitual formal* (TALL & VINNER, 1981).

5.3.6. Episódio 6

O sexto e último episódio apresenta a análise da entrevista realizada com o sujeito S04 sobre o TD4, ou seja, sobre as *imagens conceituais evocadas* voltadas para a ideia de *procept* (GRAY & TALL, 1993). Ressaltamos que as *evocações* do sujeito S04 na 1ª etapa se encontram em acordo com os tópicos explorados nesse tema de discussão. Lembramos que outros questionamentos podem ter sido feitos no decorrer da entrevista, de maneira a complementar nossas análises sobre as *imagens conceituais evocadas* pelo sujeito investigado.

Ao definir limite, o sujeito S04 *evocou* um *processo* de aproximação. Nesse sentido, nossos resultados encontram-se em conformidade com os estudos de Tall e Vinner (1981), Cornu (1983), Sierpinska (1985), Cottrill *et al* (1996), Zuchi (2005), Jordaan (2005) e Juter (2006), pois estão pautadas na ideia de dinamismo (ver transcrição a seguir).

E: Bem, eu gostaria que você escrevesse uma definição para limite de função e depois explicasse essa definição.

(depois de algum tempo)

S04: Bem, pra mim limite é um valor que a função se aproxima.

E: Bem, eu vou te fazer uma afirmação e eu queria que você me dissesse se você concorda ou não com o que eu disse: A função alcança o valor do limite por meio de aproximações. Tu concordas ou discordas?

S04: O limite é de certa maneira uma aproximação...

O sujeito S04 mobilizou – assim como os sujeitos investigados por Juter (2006) - que a função pode, algumas vezes, alcançar o valor do limite e isso depende, basicamente, da questão da continuidade. Nesse caso, observamos que sua *imagem conceitual evocada* encontra-se em acordo com a ideia de *procept* (GRAY & TALL, 1983), isto é, entende o limite tanto como um processo de constante aproximação (*process)* quanto como um valor alcançado pela função (*concept)*, conforme elucidamos na transcrição a seguir:

E: então, eu vou te mostrar uma definição de limite que eu dividi em três partes e eu gostaria que tu me explicasses cada uma dessas partes (mostra a definição). A primeira, [Seja $f(x)$ definida em um intervalo aberto em torno de x_0, exceto talvez em x_0]. O que tu tens a dizer dessa primeira parte? O que ela significa pra ti?

S04: Ela pode chegar no ponto x_0 ou não, neh? No caso dela chegar, ela vai ser contínua, senão, vai ter a descontinuidade.

Nossos resultados também se encontram em acordo com os estudos de Zuchi (2005). Isso porque, assim como os indivíduos investigados em sua pesquisa, S04 também teve dificuldades em explicar o que a relação entre ε e δ representa. Além disso, evidenciamos que esse sujeito, não percebe a inversão da relação entre os eixos presente na definição de limite de função (ZUCHI, 2005; JUTER, 2006).

*E: Certo. A segunda parte: Dizemos que $f(x)$ tem **limite** L quando x tende a x_0 e escrevemos $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ se para todo número ε >0 existir um δ >0]. O que tu tens a dizer dessa segunda parte?*

S04: Até onde eu me lembro da definição, épsilon e delta são os intervalos.

E: Mas o que essa relação entre épsilon e delta significa, para ti?

S04: Não to lembrado onde. Me corrija se eu tiver errado, mas épsilon é a aproximação no gráfico do x e x_0 e o delta no caso é a aproximação não no eixo das abcissas e sim no eixo das ordenadas.

(...)

E: Bem, então olha a definição como um todo. Tu achas que ela evoca a ideia de aproximação?

S04: Sim porque existe um intervalo em x e x_0, tem essa questão de aproximação.

E: Ok... então, mais uma vez pela definição tu achas que ela evoca a ideia de que é possível que o valor do limite seja alcançado?

S04: O valor do limite?

E: Ela evoca essa ideia de que nos aproximamos do limite de modo que o alcançamos?

S04: Não tem essa ideia de que chega no ponto porque é um intervalo aberto, a inequação, a questão da exclusão do ponto não dá a ideia de que você pode chegar nele, mas que se aproxima dele.

E: Certo. Então, a partir dessa definição, o que é limite? O que ele representa? De acordo com a tua interpretação da definição.

S04: É uma aproximação. É uma aproximação em um intervalo em x e em f(x).

E: Certo. E quem é que "comanda" essa relação?

S04: o eixo x. Porque é o limite de x tendendo a um valor.

No que concerne à figura mostrada durante a entrevista, observamos que o sujeito não correlacionou, de fato, a definição formal de limite e sua representação gráfica (ZUCHI, 2005), mas entende que existe uma relação que é estabelecida nos intervalos compreendidos pela definição, do qual o valor do limite pertencerá.

E: Certo, agora eu vou te mostrar uma figura (mostra o gráfico). De que maneira tu poderias relacionar a definição de limite com esse gráfico?

S04: Esse x definido nesse intervalo aqui... pode perceber que é menor que delta, mas também não é zero. Acho que não é isso não... não sei.

E: E se eu tiver $x \to x_0$, se eu me voltar pro eixo das ordenadas, ele vai permanecer sempre nesse intervalo ou ele pode "sair" desse intervalo (referindo-se ao intervalo em torno de f(x)).

S04: Não, ele não sai do intervalo.

Evidenciamos, por fim, que a *definição conceitual pessoal* de limite de função do sujeito S04 não se encontra em conformidade com sua *definição conceitual formal* (TALL & VINNER, 1981), dado que esta última não admite as expressões ditas “dinâmicas”, tais como *se aproxima*, *tende a*, dentre outras (SIERPINSKA, 1985).

5.4. Considerações sobre o capítulo

A partir da análise dos resultados obtidos nas duas etapas de nossa investigação, verificamos as *evocações* que caracterizaram as *imagens conceituais* sobre limite de função dos sujeitos investigados. A segunda etapa, nos permitiu analisar mais profundamente os aspectos concernentes às *imagens conceituais evocadas* na etapa anterior. A análise das entrevistas realizadas (de acordo com cada TD) complementou nossa percepção acerca das *imagens conceituais* dos indivíduos envolvidos (sujeitos) na pesquisa, fato que nos possibilitou elucidar os pontos de conformidade e ou não conformidade dos resultados obtidos em relação ao referencial teórico estabelecido e, enfim, estabelecer considerações quanto aos objetivos traçados para essa pesquisa.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com essa pesquisa nos propusemos a investigar os elementos que compõem a *imagem conceitual* de estudantes universitários sobre limite de função, inferidos a partir da *evocação* de aspectos relacionados a esse conceito. Para que isso fosse possível, a pesquisa foi constituída de duas etapas. Na primeira, elaboramos um questionário contendo tarefas envolvendo limite de funções[18] e o aplicamos a 25 estudantes de licenciatura em matemática de duas universidades públicas do estado do Pará. Na segunda, realizamos entrevistas com alguns dos sujeitos investigados na etapa anterior, de maneira a complementar nossas análises concernentes às *imagens conceituais evocadas* no decorrer da investigação.

Os resultados obtidos nos subsidiaram a verificar as *imagens conceituais evocadas* pelos estudantes investigados no que concerne ao conceito de limite de função, bem como investigar se existiam divergências entre a *definição conceitual formal e a definição conceitual pessoal* dos indivíduos sobre esse conceito. Nesse sentido, observamos que as *imagens conceituais* dos sujeitos pautaram-se, sobretudo, nas cinco importantes *evocações* a seguir:

[E1] A ideia de limite como sendo um valor a ser alcançado pela função por meio de constantes aproximações. Desse modo, o limite em determinado ponto é tido como um valor que *deve* coincidir com o valor da função nesse ponto, ou seja, $\lim_{x \to p} f(x) = f(p)$;

[E2] O limite é um valor, do qual a função se aproxima tanto quanto queiramos sem, no entanto, alcançá-lo. Isto é, $f(x) \neq L$;

[E3] A existência do limite em um ponto *p* depende da continuidade em *p*;

[E4] Indeterminações implicam na não existência do limite;

[E5] O limite é um processo de aproximação em relação a determinado ponto, permitindo-nos alcançá-lo e estabelecê-lo como o valor do limite.

[18] Lembramos, mais uma vez, que nos restringimos às funções de uma variável real.

Ressaltamos que as *evocações* E1, E2 e E5 assemelham-se aos resultados obtidos por Tall e Vinner (1981), Jordaan (2005) e Juter (2006). Isso porque, os resultados permitiram-nos evidenciar que, de fato, os estudantes relacionavam o conceito de limite de função com interpretações estáticas e/ou dinâmicas que, em alguns momentos, constituíram-se como *fatores de conflito potencial* (VINNER, 1991), principalmente no que concerne à possibilidade do valor do limite poder ou não ser alcançado.

E3 encontra-se em conformidade com as pesquisas realizadas por Cottrill *et al* (1996), Jordaan (2005) e Nair (2009) e E4 assemelha-se aos resultados de Nair (2009). Essas evocações – tais como E1, E2 e E5 – nos permitiram evidenciar que algumas das *imagens conceituais evocadas* pelos sujeitos investigados não se fizeram coerentes com a *definição conceitual*, fato que os influenciou a construir uma *definição conceitual pessoal* diferente da *definição conceitual formal* de limite de função.

Evidenciamos – por meio das *imagens conceituais evocadas* pelos sujeitos investigados – os elementos que compõem essas mobilizações. Além disso, observamos que existem divergências entre a *definição conceitual pessoal* apresentada pelos estudantes e a sua *definição conceitual formal*. Sendo assim, acreditamos que as duas etapas da pesquisa nos possibilitaram responder de maneira satisfatória as duas questões propostas nessa dissertação.

Ressaltamos que foi possível alcançar, também de maneira satisfatória, os objetivos traçados para essa pesquisa, já que conseguimos identificar as principais dificuldades relacionadas à apreensão do conceito de limite de uma função, correlacionar *imagens conceituais evocadas*, *definição conceitual pessoal e definição conceitual formal* desse objeto de estudo e, por fim, elucidar os pontos de conformidade e/ou não conformidade desses resultados em relação à fundamentação teórica pré-estabelecida.

Reiteramos que os resultados obtidos em nossa investigação foram de grande relevância no sentido de nos permitir verificar alguns dos conflitos que permeiam as *imagens conceituais* dos estudantes em relação ao conceito de limite de função. Nesse sentido, esperamos que as discussões levantadas neste trabalho sirvam de subsídio para o desenvolvimento de pesquisas futuras que busquem viabilizar o processo de ensino e aprendizagem das noções de limite de função por meio de atividades que auxiliem na formação de *imagens conceituais* consistentes e, sobretudo, coerentes com sua *definição conceitual formal*.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BARTO, M. C. *Um olhar sobre as ideias matemáticas em um curso de cálculo: a produção de significados para continuidade*. Dissertação de mestrado (Educação Matemática). PUC (SP), 2004.

BOYER, C. *The history of calculus ant its conceptual development*. New York: Dover publications, 1959.

BRANDEMBERG, J. C. *Uma análise histórico-epistemológica do conceito de grupo*. Tese de doutorado (Educação Matemática). UFRN (Natal), 2009.

___________________ *Uma análise histórico-epistemológica do conceito de grupo.* São Paulo: Editora Livraria da Física, 2010.

CARAÇA, B.J. *Conceitos fundamentais da matemática*. Lisboa: Editora Livraria Sá da Costa, 1984.

CORNU, B. *Apprentissage de la notion de limite – conceptions et obstacles*. Tese de doutorado (matemática). Université Scientifique et Medicale de Grenoble, 1983.

_________. Limits. *In:* TALL, David (Ed.) *Advanced Mathematical Thinking.* Kluwer publications, 1991.

COTRILL *et al*. Understanding the limit concept: beginning with a coordinate process schema. *In: Journal of mathematical behavior*, vol. 15, 1996, p. 167 – 192.

EDWARDS, C. H. *The historical development of the calculus*. New York: Springer-Verlag, 1979.

GRAY, E. M; TALL, D. Success and failure in mathematics: The flexible meaning of symbols as process and concept. *In: Mathematics teaching*, n. 142, p. 6 – 10, 1993.

JORDAAN, T. *Misconceptions of the limit concept in a mathematics course for engineering students*. Dissertação de mestrado (Educação Matemática). University of South Africa, 2005.

JUTER, K. *Limits of functions: University students' concept development*. Tese de doutorado (Educação Matemática). Lulea University of Technology, 2006.

MEYER, C. *Derivada/Reta tangente: Imagem conceitual e Definição conceitual.* Dissertação de mestrado (Educação Matemática). PUC, São Paulo, 2003.

NAIR, G. S. *College students' concept image of asymptotes, limits and continuity of rational functions*. Tese de doutorado (Filosofia). Ohio State University, 2010.

OLIMPIO, A. Primeiro ano num curso de matemática: a definição de função e a dualidade local/global em conceitos de cálculo. *In: Boletim de Educação Matemática.* Rio Claro (SP), Ano 20, n. 28, pp. 39 a 67, 2007.

REIS, F. *A tensão entre o rigor e a intuição no ensino de cálculo e análise: A visão de professores – pesquisadores e autores de livros didáticos*. Tese de doutorado (Educação). Unicamp, 2001.

RODRÍGUEZ, M. Consideraciones didácticas para la enseñanza del límite funcional. *In: Memorias Del 10º Simposio de Educación Matemática*. Chivilcoy – Buenos Aires – Argentina, p. 92 – 98, 2009.

SIERPINSKA, A. Obstacles epistemologiques relatifs a la notion de limite. *In: Recherches en didactique des mathématique*, vol. 6, n.1, p. 6 – 67, 1985.

TALL, D. Concept image and concept definition. *In: Senior Secondary Mathematics Education*, p. 37 – 41, 1988.

_________. The psychology of advanced mathematical thinking. *In:TALL, David (Ed.) Advanced Mathematical Thinking*. Kluwer publications, 1991.

_________. The transition to advanced mathematical thinking: functions, limits, infinity and proof. *In: Handook of research on mathematics teaching and learning*, p. 495 – 511, 1992.

TALL, D; VINNER, S. Concept image and concept definition with particular reference to limits and continuity. *In: Educational Studies in Mathematics,* n. 12, p. 151 – 169, 1981.

THOMAS, G.B. *Cálculo*. São Paulo: Addison Wesley, vol 1, 2002.

VINNER, S. The role of definitions in teaching and learning. *In: Advanced Mathematical Thinking* (Ed. David Tall). Kluwer publications, 1991.

ZUCHI, I. *A abordagem do conceito de limite via sequência didática: do ambiente lápis e papel ao ambiente computacional*. Tese de doutorado (Engenharia de Produção). UFSC, 2005.

APÊNDICE I

QUESTIONÁRIO (1ª ETAPA)

Caro (a) aluno (a),

Objetivamos com este questionário obter informações acerca de concepções relacionadas ao conceito de limite de função. Sua colaboração, nesse sentido, é de fundamental importância e, portanto, solicitamos que você o preencha de maneira mais espontânea possível. Desde já agradecemos sua participação e lembramos que sua identidade será totalmente preservada.

Nome: ____ *Data:* ____/____/____.

*E-mail:*__________________________________ *Tel/Cel:*______________________

1. O número $1{,}999999\ldots$ é menor ou igual a 2? Justifique sua resposta.

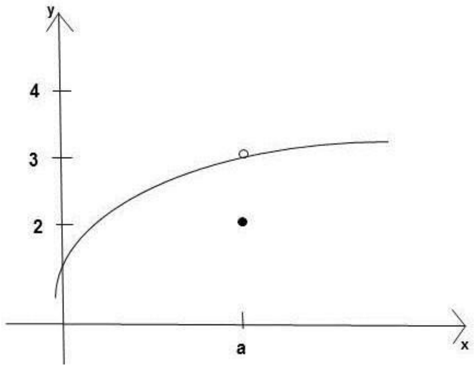
2. Calcule $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}$ e explique o que isso significa.

3. Explique, com suas palavras, o que significa $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 2$.

4. Responda as solicitações a seguir:
   a) Calcule $\lim_{x\to\infty} \frac{x^3-2}{x^3+1}$.
   b) Explique sua resolução.
   c) A função $f(x) = \frac{x^3-2}{x^3+1}$ pode alcançar o valor do limite no item 4a? Justifique.

5. Observe os gráficos abaixo e responda:

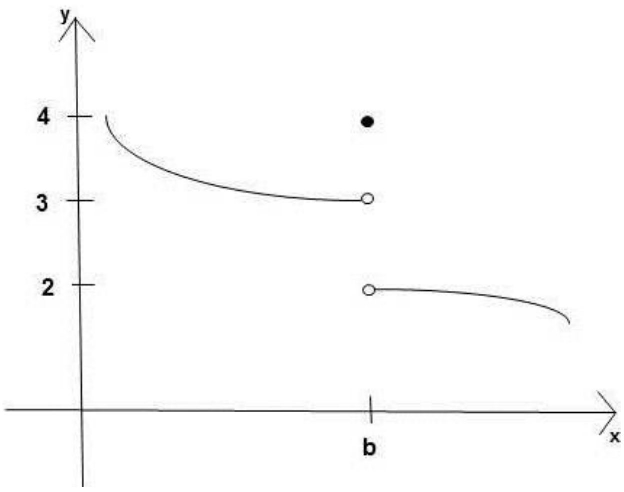
a)



a.1) O limite dessa função existe?

a.2) Justifique sua resposta

b)



b.1) O limite dessa função existe?

b.2) Justifique sua resposta

6. Observe as sentenças abaixo, assinale aquela(s) que descreve(m) o conceito de limite de função e justifique sua(s) escolha(s). Caso você discorde das sentenças, justifique.

a) O valor do limite descreve como uma função se move enquanto x tende a determinado ponto;
b) O valor do limite é um número ou um ponto no qual a função não pode alcançar;
c) O valor do limite é um número no qual os valores de y da função podem chegar arbitrariamente próximo através de restrições nos valores de x.
d) O valor do limite é um número ou um ponto em que a função se aproxima mais nunca alcança;
e) O valor do limite é uma aproximação na qual pode ser tão precisa quanto desejar;
f) O valor do limite é obtido por meio da inserção de números cada vez mais próximos de um número dado até que o valor do limite é alcançado.

7. Escreva uma definição para $\lim_{x \to a} f(x) = L$.

APÊNDICE II

TRANSCRIÇÃO DOS EPISÓDIOS (SEGUNDA ETAPA)

EPISÓDIO 1 (TD1)

E.: Primeiro, eu gostaria de saber o que significa o $\lim_{x \to a} f(x) = L$. O que que isso significa pra ti?

S02.: É o valor que tende a L no ponto a, não que chegue em L, mas próximo de L.

E.: Essa proximidade depende de que exatamente?

S02: até onde eu sei, você aproxima tanto pela direita quanto pela esquerda de tal modo que eles quase se encontram, mas não chegam naquele ponto.

E.: Então, a partir de agora, eu vou te mostrar esse gráfico aqui (primeiro gráfico do roteiro) que se encontra definido no intervalo [1,3]. Então eu te pergunto, essa função, ela alcança o valor do limite no ponto $x = 2$? Esse valor é alcançado?

S02: No ponto 2 sim...porque... peraí (risos)... porque tanto pela direita quanto pela esquerda tem uma continuidade, ela chega na própria função.

E.: tá, então o limite dessa função no caso seria 2 quando x *tende* a 2?

S02: não, isso ai dependeria também da função, de como a função ela é modelada...

E.: mas assim, nesse gráfico, nesse intervalo dessa função?

S02: ela tenderia a 2.

E.: mas esse valor 2, ele é alcançado? Ou a gente se aproxima dele mas não o alcança?

S02: nesse caso ele é alcançado, porque tanto o valor da função no ponto quanto o limite dela são iguais... a função é contínua.

E: Certo... então eu posso dizer que sempre a função alcança o valor do limite em determinado ponto ou isso acontece algumas vezes, nesse caso, em que situações?

S02: não... isso também depende. Por exemplo, uma função fracionária, tem momento em que ela não chega, principalmente quando x *tende* a 0.

E: você poderia então me dar um contra exemplo para essa afirmação: *a função sempre alcança o valor do limite*?

S02: essa função aqui (mostra o contra exemplo), como ela é intervalada, ela não tem limite pela direita, mas tem pela esquerda... portanto, o limite não existe.

E: então, o valor do limite é alcançado quando o limite existe e não é alcançado quando o limite não existe?

S02: também não...

E: por que não?

S02: (silêncio) é alguma coisa que eu não tô lembrando...(começa a escrever no papel o exemplo de uma função). Por exemplo nesse caso aqui, pra uma função em 2, pra $x = 2$ ela é igual a 2, mas pra outra função pra $x \neq 2$ ela vai dar um valor diferente (referindo-se a uma função que exemplificou), ou seja, o limite existe, mas não que a função chegue nesse limite.

E: então, eu vou te mostrar um exemplo e outra função (segundo gráfico do roteiro). Nesse caso, o que eu posso falar do limite dessa função no ponto 2?

S02: no ponto 2..., ela existe. Tanto que existe uma aproximação tanto pela direita quanto pela esquerda só que ela não é contínua porque no ponto $x = 2$ ela é um intervalo aberto.

E: certo, e isso influencia ou não no fato da função alcançar ou não o limite?

S02: não. Também não.

E: então eu posso dizer que a função alcança o limite?

S02: A função alcança o limite, mas ela não é contínua.

E: então, para a função alcançar o limite ela pode ou não estar definida neste ponto?

S02: sim.

E: E, depois dessa conversa que tivemos, você poderia escrever uma definição pra limite e explicar, mais uma vez, o que significa.

S02: (depois de algum tempo e mostrando a definição que escreveu) bem, existe uma função né, para todo x que ela tende a a, existe um limite L que ela tem que se aproximar lateralmente, tanto pela direita quanto pela esquerda. Essa aproximação é o limite L

E: Ok. Muito obrigada pela colaboração.

S02: De nada.

EPISÓDIO 2 (TD1)

E: Então, a primeira coisa que eu queria te perguntar é o que significa pra você $\lim_{x \to a} f(x) = L$.

S14: é... olhando assim para um gráfico, seria o valor que a função teria no ponto, se o gráfico dela passasse por esse ponto. Basicamente isso.

E: então, nesse sentido, eu queria que você observasse o gráfico aqui, definido no intervalo [1,3]. Tu acreditas que essa função, ela alcança o valor do limite em $x = 2$?

(silencio)

E: é...observa esse intervalo, é como se eu te dissesse assim: olha, qual o limite dessa função quando x tende a 2, aí tu vais dizer: é *tanto.* É *tanto,* ok, mas essa função alcança esse valor ou chega próximo desse valor, mas não alcança.

S14: No caso, ela é contínua no ponto dado, então ela alcança.

E: Ok, então eu posso dizer que a função sempre alcança o valor do liite em determinado ponto?

S14: não. Porque ela pode não ser contínua no ponto.

E: ok, tu podes então me dar um exemplo de uma função que não alcança o valor do limite em determinado ponto?

S14: ok (pausa)... essa função aqui, formada por $f(x) = \begin{cases} x, \ se\ x \leq 1 \\ 3 - 1, \ se\ x > 1 \end{cases}$, vamos supor essa função (desenha o gráfico)... no ponto 1, essa função não vai ser contínua no ponto 1, aí agora eu quero calcular o limite dela quando x tender a 1, no ponto onde ela não é contínua. Se eu for calcular esse limite, no caso como a função tem duas sentenças, então o que que a gente vai fazer, calcular os limites laterais. Os limites pela esquerda e pela direita, né? Então se eu for calcular o limite pela esquerda, o que eu vou encontrar? Vou encontrar 1. Se eu for encontrar o limite pela direita, eu vou encontrar 2. Os limites laterais são diferentes, então o limite da função não vai existir, então como é que eu vou alcançar? Então o limite não existe.

E: certo. Então a descontinuidade implica na não existência do limite?

S14: é... do limite calculado no ponto onde ela é descontinua.

E: então se eu tiver uma função descontínua em determinado ponto, então naquele ponto o limite não vai existir?

S14: é, porque nesse ponto os limites laterais são diferentes. Tá? No caso onde ela tiver mais de uma sentença. É, mas em geral quando os limites laterais forem diferentes, o limite não existe.

E: Então, a função não alcança o limite quando o imite não existe?

S14: Olha, quando você fala em *a função não alcança o limite*... ela não vai chegar, porque o limite não existe.

E: tá. Se o limite existe, então a função alcança?

S14: Sim. Peraí, deixa eu pensar um pouquinho (risos). Vamos analisar, se o limite da função existe e a função alcança o valor do limite é porque a função tem que ser contínua pra poder alcançar o limite no ponto dado. É, acredito que sim, se ela for contínua, então ela alcança o valor do limite.

E: ok, então eu vou te mostrar outro gráfico (mostra o segundo gráfico do TD1) pra gente continuar. Esse gráfico aí... essa função alcança o valor do limite no ponto $x = 2$?

S14: Alcançar, ela não vai alcançar, justamente porque ela não é contínua no ponto 2. Não vai existir.

E: certo.

S14: Ah...nesse caso, pois é...nesse caso ela não vai alcançar o limite, vai chegar o mais próximo não, peraí, você pode repetir a pergunta?

E: essa função, representada no gráfico, ela alcança o valor do limite quando $x = 2$?

S14: Ah... a função? não, porque ela não tem valor nesse ponto.

E: Mas, o limite existe quando $x \ tende \ a \ 2$?

S14: O limite vai existir, porque olhando pro gráfico os limites laterais são iguais.

E: então, para uma função alcançar o limite em um ponto *p*, ela deve estar definida nesse ponto?

S14: Não. Porque nesse caso ela não tá definida no ponto 2, mas o limite vai existir.

E: então o fato dela tá definida ou não no domínio não vai influenciar?

S14: não, não vai influenciar, porque podemos encontrar limite em funções contínuas e descontínuas.

E: O fato dela estar ou não definida em um ponto influencia no fato dela alcançar ou não o limite?

S14: aqui o que influencia é a continuidade, se o gráfico dela tem salto ou não.

E: então, depois dessas perguntas que eu te fiz, dessa discussão que a gente teve, eu queria que tu escrevesses uma definição pra limite de uma função e dizer, mais uma vez o que ela significa. Como tu definirias limite então. Fique à vontade.

S14: ai, ai, deixa eu pensar um pouquinho (risos).

(depois de algum tempo)

S14: Intuitivamente, o limite ele é um valor que a função tem ou teria no ponto p, dependendo da continuidade; se ela for contínua no *p*, então o limite dessa função em *p* vai ser a própria $f(p)$. Se ela não for, e se o limite existir, seria o valor que essa função teria, digamos assim, no ponto *p*. Agora, formalmente, envolvendo épsilon e delta, esse eu já tenho um pouco de dificuldade, até porque em sala essa parte é meio que pulado. A professora falou assim, olha não se preocupem com a definição agora no cálculo vocês tem que se preocupar mais com as contas e essas coisas de definições é visto mais na *análise,* por isso que eu não tenho tanta certeza na definição formal.

E: certo. Mas então assim, você coloca, seja uma função *f* e um ponto *p* no domínio de *f*, então *p* tem que pertencer ao domínio de *f*?

S14: *p*... sim.

E: Certo. Aí, continuando.... você colocou aqui esse *f(x)* é a função e esse *f(p)* é o limite?

S14: Sim... se a função for contínua.

E: Então, pra melhor ajustar qui, quando você coloca $|f(x) - f(p)| < \varepsilon$ me dá a entender que *f(p)* é o limite entendeu? Então, como você poderia escrever isso aqui melhor?

S14: tirando do módulo? (pensou um pouco)... é o limite aqui... é porque eu to me confundindo, mas aqui é o limite, vai ser *f(p)* se for contínua.

E: então, o limite depende da continuidade ou a continuidade depende do limite?

S14: O limite vai depender da continuidade, peraí! Bom, não depende, porque a função pode não ser contínua num ponto e o limite pode existir.

E: e a continuidade depende do limite?

S14: a continuidade depende do limite? Sim.

E: Por que?

S14: por causa dos limites laterais. Se os limites laterais forem diferentes, a função não é contínua, porque não existe limite.

E: Então limites laterais implicam na existência do limite e, consequentemente, na continuidade?

S14: não, não necessariamente. Implica na existência do limite, mas não na continuidade.

E: Qual outro fator então que me leva a afirmar que a função é contínua, além da existência do limite naquele ponto?

S14: ela (a função) pode não ser contínua, mas o limite existe.... a análise do gráfico me diz se a função é contínua.

E: ok, entendi... eu te agradeço pela colaboração.

EPISÓDIO 3 (TD1)

E: Então, bem, a primeira coisa que eu gostaria de perguntar o que pra ti significa $\lim_{x\to a} f(x) = L$.

S25: Matematicamente falando. Assim, o limite seria um valor que essa função *f* deveria assumir nesse ponto *a*, pode ser que assuma esse valor L e pode ser que não.

E: Certo. Em que casos você diz que assume ou não assume?

S25: Quando a função for contínua, ela vai assumir esse valor de *f* e quando ela não for contínua , deveria ter esse valor que ela assumiria, mas não necessariamente.

E: Certo, então seu te mostrasse esse gráfico dessa função *h(x)* e te perguntasse *essa função alcança o valor do limite no ponto* $x = 2$?

S25: pode repetir a pergunta?

E: O gráfico dessa função que, nesse caso, está sendo estudada nesse intervalo, aí eu queria saber se essa função, ela alcança o valor do limite no ponto 2?

S25: Alcança.

E: Por quê?

S25: Ela é contínua nesse ponto.

E: Então, no caso, a função sempre alcança o valor do limite em determinado ponto se ela for contínua? E se ela for descontínua, ela pode alcançar ou não?

S25: não.

E: então, por exemplo, nessa função, no ponto $x = 2$, tu dirias que a função alcança o valor do limite?

S25: Não.

E: então, o fato da função alcançar ou não determinado ponto depende basicamente da continuidade?

S25: Isso.

E: Tu consegues pensar em algum exemplo?

S25: Eu penso na função formada por duas sentenças, por exemplo, a função (escreve no papel) $f(x) = \begin{cases} 1, se\ x \geq 0 \\ -1, se\ x < 0 \end{cases}$. Se eu quiser saber o limite quando $x \to 0$, aí eu vou ter que ver por onde ela tá tendendo, no caso tenho que ver os limites laterais. Se eu faço o limite lateral pela esquerda, ela não alcança e o limite lateral pela direita ela não alcança.

E: Basicamente, pra função alcançar o valor de limite em um ponto qualquer, ela precisa estar definida neste ponto.

S25: ;Certo.

E: e se ela não tiver definida, então ela não alcança.

S25: não.

E: Bem, a partir do que a gente conversou, tu poderias escrever um ema definição para limite de função e, em seguida, explicar seu significado.

(depois de algum tempo)

S25: limite de uma função *f* é o valor que a função deveria ter caso estivesse definida nesse ponto Se *f* for contínua o valor do limite é o próprio valor da função neste ponto.

E: ok, te agradeço pela participação.

EPISÓDIO 4 (TD2)

E: Então, eu vou te mostrar esse gráfico (mostra o gráfico do roteiro), e aí eu queria saber contigo se $\lim_{x \to -7} f(x)$ existe.

(depois de algum tempo)

S09: Não.

E: Por quê?

S09: Porque tem esse salto aí... por isso não existe.

E: Certo. E quando $x \to 5$?

S09: Pelo mesmo motivo.

E: E quando $x \to 7$?

S09: Nesse caso, o limite existe, seria $f(7)$.

E: E quando $x \to 9$?

S09: Quando $x \to 9$, também $f(9)$.

E: Então, quando eu posso afirmar que o limite existe?

S09: Vamos dizer que eu quero calcular o limite de *f* quando $x \to a$, para pontos cada vez mais próximos de a no domínio, o valor das imagens tem que tá cada vez mais próximas de $f(a)$.

E: Então, eu devo considerar o domínio da função como sendo fundamental para a questão da existência ou não existência do limite?

S09: Eu acho que não o domínio e sim as imagens.

E: então o valor da função no ponto deve pertencer ao conjunto imagem para que o limite exista?

S09: É.

E: Então quando o limite não existe?

S09: Seria (pausa) se tu determinas um intervalo próximo de *a* e um intervalo próximo de $f(a)$. (depois de algum tempo). Tá, o limite não existe se eu tomar um intervalo próximo de *a*, contendo *a*, eu pegar algum valor desse intervalo e a imagem não pertencer ao intervalo próximo de $f(a)$.

E: Então o caso do intervalo em torno de *a*, *a* tem que estar definido nesse intervalo?

S09: tem que tá no intervalo.

EPISÓDIO 5 (TD3)

E: então, eu gostaria que você observasse essas funções e me dissesse se o limite existe em cada uma delas. No caso de não existirem, eu gostaria que tu me explicasse o por que.

(depois de um tempo)

S05: Bem, no caso dessas que envolvem o infinito eu tenho um pouco de dificuldade. Nós tivemos troca de professor durante a disciplina e aí, eu realmente não sei te responder.

E: Tá, mas no caso desses limites quando $x \to 1$ e $x \to 2$?

(Depois de algum tempo, passa a tentar resolver as questões em uma folha de papel)

S05: bem, no caso desse aqui (aponta para o item b), pra mim ele existe, mas ele é indeterminado.

E: E teria alguma maneira de tu calculares ele?

(depois de algum tempo)

S05: Eu sei calcular esse daqui (aponta o item d).

E: Mas qual seria a diferença entre o limite do item a e o limite do item d?

S05: O do item d a gente pode encontrar direto, mas o outro não, a gente não pode saber o valor do limite, apesar dele existir.

E: Certo. Então pra ti, quando o limite de uma função não existe?

S05: Quando tem zero no denominador. No caso, daqueles que tem infinito sobre infinito, eu sei que tem uma outra forma de saber, porque tem indeterminação, mas eu não lembro.

E: Mas quando tem zero no denominador então o limite não existe?

S05: É.

E: E se fosse um resultado do tipo $\frac{4}{\infty}$? Você acha que esse limite existiria ou não existiria?

S05: $\frac{4}{\infty}$ (pensa um pouco). Eu acho que não existiria.

E: Então, o que eu queria saber contigo é se uma indeterminação representa sempre um ponto de descontinuidade na função? O que isso representa?

S05: eu não sei.

E: mas você não tem não ideia do que represente?

S05: Não, não tenho.

E: Tudo bem. Nesse caso, eu gostaria que tu escrevesses uma definição para limite de função em seguida, eu queria que tu tentasses explicar essa definição pra mim.

(depois de alguns minutos)

S05: Eu penso assim uma função contínua... O limite dele pode ser qualquer número...

E: E como tu escreverias isso em palavras? O que seria limite? Como você poderia explicar?

S05: O limite, ele é um valor que a função tende.

E: Certo, então você diz que o limite é um valor máximo que a função vai tender. E se ela tender ao infinito, esse limite existiria ou não? Isso vai influenciar na existência ou não do limite?

S05: Eu acho que vai.

E: De que maneira tu achas que vai influenciar?

S05: É porque a função não vai chegar até lá, então se ela não chegar é porque o limite não vai existir.

EPISÓDIO 6 (TD4)

E: Bem, eu gostaria que você escrevesse uma definição para limite de função e depois explicasse essa definição.

(depois de algum tempo)

S04: Bem, pra mim limite é um valor que a função se aproxima.

E: Bem, eu vou te fazer uma afirmação e eu queria que você me dissesse se você concorda ou não com o que eu disse: A função alcança o valor do limite por meio de aproximações. Tu concordas ou discordas?

S04: O limite é de certa maneira uma aproximação...

E: então, eu vou te mostrar uma definição de limite que eu dividi em três partes e eu gostaria que tu me explicasses cada uma dessas partes (mostra a definição). A primeira, [Seja $f(x)$ definida em um intervalo aberto em torno de x_0, *exceto talvez em* x_0]. O que tu tens a dizer dessa primeira parte? O que ela significa pra ti?

S04: Ela pode chegar no ponto x_0 ou não, neh? No caso dela chegar, ela vai ser contínua, senão, vai ter a descontinuidade.

E: Certo. A segunda parte: Dizemos que $f(x)$ tem **limite** L quando x tende a x_0 e escrevemos $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ se para todo número ε >0 existir um δ >0]. O que tu tens a dizer dessa segunda parte?

S04: Até onde eu me lembro da definição, épsilon e delta são os intervalos.

E: mas o que essa relação entre épsilon e delta significa, pra ti?

S04: Não to lembrado onde, me corrija se eu tiver errado, mas épsilon é a aproximação no gráfico do x e x_0 e o delta no caso é a aproximação não no eixo das abcissas e sim no eixo das ordenadas.

E: Bem, agora vou te falar a parte 3 da definição: tal que, [para todos os valores de x, 0 < $|x - x_0|$ < $\delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$. O que tu me dirias dessa parte?

S04: Agora tu me pegou (risos).

E: Bem, então olha a definição como um todo. Tu achas que ela evoca a ideia de aproximação?

S04: Sim porque existe um intervalo em x e x_0, tem essa questão de aproximação.

E: Ok... então, mais uma vez pela definição tu achas que ela evoca a ideia de que é possível que o valor do limite seja alcançado?

S04: O valor do limite?

E: Ela evoca essa ideia de que nos aproximamos do limite de modo que o alcançamos?

S04: Não tem essa ideia de que chega no ponto porque é um intervalo aberto, a inequação, a questão da exclusão do ponto não dá a ideia de que você pode chegar nele, mas que se aproxima dele.

E: Certo. Então, a partir dessa definição, o que é limite? O que ele representa? De acordo com a tua interpretação da definição.

S04: É uma aproximação. É uma aproximação em um intervalo em x e em f(x).

E: Certo. E quem é que "comanda" essa relação?

S04: o eixo x. Porque é o limite de x tendendo a um valor.

E:Certo, agora eu vou te mostrar uma figura (mostra o gráfico). De que maneira tu poderias relacionar a definição de limite com esse gráfico?

S04: esse x definido nesse intervalo aqui... pode perceber que é menor que delta, mas também não é zero. Acho que não é isso não... não sei.

E: E se eu tiver $x \to x_0$, se eu me voltar pro eixo das ordenadas, ele vai permanecer sempre nesse intervalo ou ele pode "sair" desse intervalo (referindo-se ao intervalo em torno de f(x)).

S04: não, ele não sai do intervalo.

E: certo. O L, ele necessariamente vai perceber ao conjunto imagem da função?

S04: Ele é a imagem da função.

E: E se ela for descontínua?

S04: nesse caso ela fica próximo, mas não chega na imagem da função, não pertence à imagem da função.