



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Fenômeno de Interferência na Densidade de Energia em Cavidades com Duas Fronteiras Oscilantes

Wagner Pinheiro Pires

Belém-Pará

2009

Fenômeno de Interferência na Densidade de Energia em Cavidades com Duas Fronteiras Oscilantes

Wagner Pinheiro Pires

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Pará (PPGF-UFGA) como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Mestre em Ciências (Física).

Orientador: Prof. Dr. Danilo Teixeira Alves

Banca Examinadora

Prof. Dr. Danilo Teixeira Alves - UFGA (Orientador)

Prof. Dr. Carlos Farina de Souza - UFRJ (Membro Externo)

Prof. Dr. Paulo Américo Maia Neto - UFRJ (Membro Externo)

Belém-Pará

2009

Resumo

Fenômeno de Interferência na Densidade de Energia em Cavidades com Duas Fronteiras Oscilantes

Wagner Pinheiro Pires

Orientador: Prof. Dr. Danilo Teixeira Alves

O primeiro objetivo do presente trabalho é calcular a força quântica exata que atua sobre as fronteiras de uma cavidade, bem como o comportamento exato da densidade de energia numa cavidade não estática, onde ambas as fronteiras executam movimentos prescritos arbitrários. O modelo considerado é o do campo escalar não massivo em $1 + 1$ dimensões, sendo que o campo obedece à condição de Dirichlet em cada uma das fronteiras. Considerando o vácuo como estado inicial do campo, nós mostramos que a densidade de energia em um dado ponto do espaço-tempo pode ser obtida através do traçado de uma sequência de linhas nulas, conectando o valor da densidade de energia nesse ponto a um certo valor conhecido da densidade de energia em um ponto das “zonas estáticas”. O segundo objetivo é mostrar que para movimentos específicos das fronteiras, particularmente para os quais ambas voltam às suas posições iniciais em instantes múltiplos do comprimento inicial da cavidade, o método exato por nós obtido permite encontrar soluções analíticas escritas como uma expansão em série na variável que controla as amplitudes de movimento das fronteiras. Os resultados analíticos por nós obtidos são aplicáveis a uma vasta classe de movimentos, a qual inclui a grande maioria dos casos ressonantes estudados na literatura. O terceiro objetivo do presente trabalho é investigar, através dos métodos de cálculos desenvolvidos aqui, o fenômeno da interferência na energia e na densidade de energia em cavidades com duas fronteiras móveis, obtendo fórmulas genéricas para os termos de interferência respectivos.

*Abstract***Fenômeno de Interferência na Densidade de Energia em Cavidades com Duas Fronteiras Oscilantes**

Wagner Pinheiro Pires

Orientador: Prof. Dr. Danilo Teixeira Alves

We consider a real massless scalar field inside a cavity with two moving mirrors in a two-dimensional spacetime, satisfying Dirichlet boundary condition at the instantaneous position of the boundaries, for arbitrary and relativistic laws of motion. Considering vacuum as the initial field state, we show that the exact value of the the energy density in the cavity can be obtained by tracing back a sequence of null lines, connecting the value of the energy density at the given spacetime point to a certain known value of the energy density at a point in the region where the initial field modes are not affected by the boundaries motion. We obtain formulas for the energy density of the field and the quantum force acting on the boundaries. We also show that for a large class of movements, including resonant cases found in the literature, the exact method proposed here enable us to find analytical solutions written as series in the parameter that controls the amplitudes of the movements. Using these analytical solutions, we investigate the interference phenomena in the energy density and total energy stored in the cavity.

Belém-Pará

2009

*“Para meus pais:
Adonias e Maria
E meu irmão: Adonias”*

*“Quanto maiores são as dificuldades a vencer,
maior será a satisfação.”*

Marcus Tullius Cicero

Agradecimentos

Gostaria de agradecer:

- A Deus.
- A minha família: meus pais, Adonias e Maria e meu irmão, Adonias. Sem eles, eu nada seria e nada teria conseguido.
- A minha mãe, Nilma: pela vida. Que Deus a abençoe e acompanhe sempre.
- A minhas irmãs: Tanya, Tayana e Tayza, e a toda a nossa família, por tudo.
- A Patrícia Gabrielly Silva, por todo o amor (e todos os puxões de orelha), e toda a sua família pelo carinho e apoio.
- A Danilo Alves (e a sua família!), Edney Granhen, Hector Okada, Mateus Lima e aos demais integrantes do Grupo de Casimir - UFPA pelos anos de trabalho e principalmente amizade e paciência.
- Aos professores: Silvana Perez, Van Sérgio Alves, Sérgio Vizeu Pinheiro, João Felipe Medeiros e Carlos Farina, pelos inúmeros bons exemplos de profissionalismo e dedicação ao ensino e à ciência.
- A Andreson Rego, Thiago Caramês e Soraya Maciel: meus amigos, meus irmãos; por todo apoio e amizade.
- Aos amigos da eterna “salinha do provedor”: Shyrsley Santos, Tamires Ribeiro, Elaine Palheta, Marcus Danilo Borges e Camila Silveira.
- Ao PET - Física UFPA, sempre e em todo lugar!
- A Barbara Paes e sua família, assim como ao Grupo de Casimir - UFRJ, pelo apoio imprescindível e inesquecível nos primeiros dias no Rio de Janeiro, sem os quais essa tese teria tido mais dificuldades do que o (a)normal.
- Aos amigos desses caminhos: Eder Cruz e Marilúcia Bezerra (e Lael, bem vindo ao mundo!), Tayla Ferreira, Luciana Neves, Aline Silva, Bruna Cordeiro e Andreia Pelais. Me faltam palavras para descrever toda a importância que vocês tiveram nesse processo.

Sumário

Introdução	7
1 Abordagem exata para o cálculo da densidade de energia	13
1.1 Discussões iniciais sobre a energia na cavidade	13
1.2 Aplicando o método de Cole-Schieve para a cavidade com duas fronteiras móveis	16
1.3 Processos de Reflexão	18
1.3.1 Reflexões para f_G	18
1.3.2 Reflexões para f_F	22
1.4 Aplicação	25
2 Resultados analíticos para densidade de energia	28
2.1 Reescrita das funções \tilde{A}_G e \tilde{A}_F	29
2.2 Reescrita das funções \tilde{B}_G e \tilde{B}_F	38
3 Aplicação dos métodos ao fenômeno de interferência	44
3.1 Termos de interferência para movimentos genéricos	44
3.2 Aplicação	48
3.2.1 Energia de interferência	52
3.2.2 Análise Gráfica	54
Considerações Finais	61
Referências Bibliográficas	64

Introdução

Na década de 70 foram publicados os primeiros trabalhos investigando a radiação emitida por fronteiras em movimento no vácuo quântico (ver Refs. [1, 2, 3, 4]). O problema da radiação gerada em cavidades não estacionárias foi primeiramente investigado por Moore [1], tomando como modelo o campo escalar sem massa em $1 + 1$ dimensões. Considerando uma das fronteiras estática e a outra descrevendo um movimento prescrito, ambas impondo ao campo condição de Dirichlet, Moore obteve a solução exata para o campo na cavidade dada em termos da solução de uma equação funcional conhecida como “equação de Moore”. Fulling e Davies [2] mostraram que partículas podem ser geradas por uma única fronteira não uniformemente acelerada, enfatizando a correlação deste efeito (considerando o vácuo como estado inicial do sistema) com processos de criação de partículas em modelos cosmológicos, e ainda calcularam o valor esperado renormalizado da densidade de energia no interior da cavidade oscilante, escrito em termos das derivadas da solução da equação de Moore. A abordagem ao problema feita por Moore e Fulling-Davies, embora produza resultados exatos em $1 + 1$ dimensões (inclusive para movimentos relativísticos, não-oscilatórios e com larga amplitude), possui limitações para uso prático. Uma delas é que estender a abordagem para dimensões mais altas esbarra no problema de que os artigos de Moore e Fulling-Davies baseiam-se em transformação conforme (aplicáveis a espaços-tempos bidimensionais); outra é que poucas soluções exatas analíticas da equação de Moore são conhecidas. Para a equação de Moore, de fato não existe técnica geral para a obtenção de soluções analíticas.

Em 1982, Ford e Vilenkin [5] apresentaram um método para encontrar a solução perturbativa para o problema do campo na presença de fronteiras móveis, supondo a fronteira oscilando em movimento prescrito, não-relativístico, com pequena amplitude ao redor de uma posição fixa. O ponto chave está em considerar, a priori, o campo como sendo constituído da solução do

problema estático correspondente mais uma perturbação, sendo essa perturbação no campo da mesma ordem da amplitude de oscilação da fronteira. Nessa aproximação eles obtiveram para um campo escalar real sem massa em um espaço-tempo bidimensional que a força de radiação sobre uma fronteira é proporcional à terceira derivada no tempo da posição da fronteira, sendo este o limite não relativístico do resultado obtido na Ref. [2]. Este método tem a vantagem de ser aplicável a problemas envolvendo fronteiras que se movem em espaços com dimensões mais altas. Ford e Vilenkin o aplicaram para o caso de um campo escalar sem massa, em $3 + 1$ dimensões, na presença de uma fronteira plana em movimento [5]. Esse mesmo método foi aplicado por Maia Neto e colaboradores ao caso do campo eletromagnético na presença de uma única placa metálica em movimento e de uma cavidade formada por duas placas metálicas paralelas sendo uma em movimento [6, 7, 8]. Embora o método utilizado por Ford e Vilenkin seja eficiente e generalizável para dimensões mais altas, no caso do campo em cavidades os resultados perdem precisão à medida que o tempo de duração de movimento da fronteira cresce (ver, por exemplo, discussão na Ref. [9]).

Dodonov e colaboradores [10] utilizaram a solução da equação de Moore como sendo uma perturbação da solução do problema estático correspondente (cuja solução é conhecida). Consideraram - de modo semelhante ao feito por Ford-Vilenkin - a perturbação da mesma ordem da amplitude de oscilação da fronteira. Da mesma maneira que no método de Ford-Vilenkin, a solução perturbativa proposta nesse caso para a solução da equação de Moore perde precisão com o crescimento do tempo de movimento da fronteira. Nas Refs. [11, 12], Dodonov e colaboradores divulgam soluções analíticas para a equação de Moore valendo para o limite assintótico de tempo longo.

Em paralelo à busca por soluções analíticas perturbativas para a equação de Moore, Law [13] propõe, no contexto do campo escalar em $1+1D$, um movimento da fronteira basicamente senoidal com frequência ressonante igual ao dobro da menor auto-frequência da cavidade, encontrando a solução exata para a equação de Moore, dado esse movimento específico. Usando a solução obtida para a equação de Moore na fórmula para a densidade de energia na cavidade obtida por Fulling e Davies [2], Law, então, verifica o comportamento do valor esperado do tensor densidade de energia do campo no interior da cavidade oscilante, obtendo que a variação espacial e temporal da densidade de energia do campo se dá através da propagação de dois pacotes de onda que são refletidos pelas fronteiras, podendo a força atrativa de Casimir ser amplificada. Soluções analíticas e exatas para movimentos particulares da fronteira, ou classes

de movimento também foram discutidos nas Refs. [13, 14, 15].

Ravazy e Terning [16], e ainda outros autores [17, 18, 19] buscaram abordar o problema do campo numa cavidade dinâmica através da expansão do campo em série com respeito a bases instantâneas. O campo expandido em série e substituído na equação de onda, gera um conjunto infinito de equações diferenciais acopladas para os coeficientes da expansão. Essa técnica tem a vantagem de ser aplicada em $1 + 1$ [20] e dimensões mais altas [21].

Cole e Schieve [9] obtiveram recursivamente uma forma de expressar a solução exata para a equação de Moore, para um movimento arbitrário da fronteira, em termos da solução já conhecida para o problema da cavidade considerada inicialmente estática. Baseados no mesmo método recursivo, obtiveram uma relação de recorrência para a densidade de energia, com a qual expressaram a estrutura da solução exata da densidade de energia da cavidade em termos de seu valor estático conhecido [22]. O método de Cole-Schieve tem a vantagem de ser simples e elegante e de permitir atacar problemas fora do alcance dos métodos perturbativos. Por outro lado é considerado na literatura como um método capaz apenas de prover resultados numéricos.

A investigação da força de reação de radiação, da criação de partículas e da densidade de energia em cavidades em que ambas as fronteiras são dinâmicas começou a ser divulgada na literatura na década de 90, e ainda existem relativamente poucos trabalhos publicados sobre o tema [23, 24, 25, 26]. Ji e colaboradores adaptaram o método de expansão do campo em bases instantâneas para o problema do campo escalar em $1 + 1$ dimensões em que duas fronteiras executando movimentos prescritos impõem condição de Dirichlet ao campo. Eles mostraram que o número de partículas produzidos cresce quadraticamente com o tempo, e que o número de partículas é igual ao número de partículas que seriam produzidas se apenas a fronteira da esquerda se movimentasse, mais o número de partículas que seria produzido se apenas a fronteira da direita se movimentasse, mais um termo de interferência, que pode ser construtiva ou destrutiva dependendo das condições de movimento das fronteiras. A abordagem de Ji, entretanto, estava restrita a tempos curtos. Dalvit e Mazzitelli [26] estenderam o trabalho de Moore [1], escrevendo a solução do campo na cavidade com duas fronteiras móveis em termos de duas funções que são soluções de duas equações funcionais acopladas que eles chamaram de “equações de Moore generalizadas”. Usando esta forma de expressar o campo, eles calcularam a média do tensor energia-momentum e obtiveram a densidade de energia renormalizada que generaliza para o caso de duas fronteiras a fórmula obtida por Fulling-Davies [2]. Para o caso de movimentos específicos, do tipo oscilações ressonantes, Dalvit-Mazzitelli resolveram as equações

generalizadas de Moore usando um procedimento de grupo de renormalização, obtendo soluções válidas para pequenas amplitudes de oscilação, tanto para tempos curtos quanto para longos. Já Li e Li [27] estenderam o método de Cole e Schieve [9], e propuseram soluções numéricas baseadas em um método geométrico para a equação generalizada de Moore definida em [26] utilizando a aproximação proposta para o caso da cavidade com uma fronteira oscilante feita em [9].

Dada esta breve revisão sobre os trabalhos encontrados na literatura, ressaltamos os seguintes pontos:

1. Até onde sabemos não há na literatura qualquer trabalho que calcule a força de reação de radiação exata sobre fronteiras que compõem cavidades com duas fronteiras móveis, nem que analise a solução exata para a densidade de energia na cavidade.
2. Os trabalhos na literatura, quando fazem referência ao método desenvolvido por Cole e Schieve [9, 22] consideram este método como sendo apenas capaz de produzir resultados numéricos. Até onde sabemos, não há na literatura trabalhos que tenham usado a abordagem de Cole-Schieve para produzir resultados analíticos.
3. Existem poucos trabalhos na literatura sobre o fenômeno de interferência em cavidades com duas fronteiras móveis (ver Refs. [23, 24, 25, 26]). Os formalismos usados nos trabalhos existentes são válidos para movimentos oscilatórios de pequenas amplitudes e desenvolvidos em torno de movimentos específicos.

O presente trabalho tem três objetivos. O primeiro deles é calcular (até onde sabemos pela primeira vez na literatura) a força de reação de radiação exata sobre as fronteiras, bem como o comportamento exato da densidade de energia numa cavidade não estática, onde ambas as fronteiras executam movimentos prescritos arbitrários, sujeitos apenas à típica restrição de que as fronteiras encontram-se estáticas (cavidade de comprimento L_0) até um certo instante - comumente escolhido $t = 0$ - a partir do qual elas começam a movimentar-se. O modelo considerado é o do campo escalar não massivo em $1 + 1$ dimensões, sendo que o campo obedece à condição de Dirichlet em cada uma das fronteiras da cavidade. Considerando o vácuo como estado inicial do campo, nós mostramos que a densidade de energia em um dado ponto do espaço-tempo pode ser obtida através do traçado de uma sequência de linhas nulas, conectando o valor da densidade de energia em um dado ponto do espaço-tempo a um certo valor conhecido da densidade de energia em um ponto das “zonas estáticas”. As zonas estáticas são regiões do espaço-tempo nas

quais os modos do campo, que se propagam sobre linhas nulas contidas nessas regiões, ainda não foram afetados pela perturbação causada pelos movimentos das fronteiras. Deduzimos, então, uma fórmula que permite obter exatamente a densidade de energia na cavidade. Para movimentos genéricos das fronteiras, a fórmula por nós obtida permite encontrar resultados numéricos, ressaltando que ela é aplicável inclusive a movimentos de amplitude grande os quais usualmente estão fora de alcance dos métodos perturbativos encontrados na literatura.

O segundo objetivo do presente trabalho é mostrar que para movimentos específicos das fronteiras, particularmente para os quais ambas voltam às suas posições iniciais em instantes múltiplos de L_0 (ao longo do trabalho consideramos $\hbar = c = 1$), o método exato obtido no contexto do primeiro objetivo do presente trabalho permite encontrar soluções analíticas escritas como uma expansão em série no parâmetro ε , a qual - como será visto mais adiante - controla as amplitudes de movimento das fronteiras. Os resultados analíticos por nós obtidos são aplicáveis a uma vasta classe de movimentos, a qual inclui a grande maioria dos casos ressonantes estudados na literatura. Em comparação com as soluções analíticas encontradas nos artigos, as vantagens do método analítico aqui desenvolvido para a o cálculo da densidade de energia são as seguintes:

- Os métodos aproximados usualmente encontrados na literatura, requerem como parte de seus procedimentos de cálculo que ε seja muito pequeno ($\varepsilon \ll 1$), sendo que nestes casos somente a correção de ordem ε^2 para a densidade de energia pode já ser suficiente para uma descrição próxima ao resultado exato. Entretanto, para o caso de amplitudes maiores $\varepsilon < 1$, levar em conta termos relacionados com ordens mais altas de ε pode vir a ser necessário. O método aqui apresentado permite obter resultados para amplitudes maiores, sendo que a densidade de energia pode ser escrita diretamente em qualquer ordem de expansão na amplitude de movimento, fornecendo um resultado tão exato quanto se queira.
- Os cálculos analíticos encontrados na literatura usualmente são desenvolvidos sobre leis específicas de movimento da fronteira e, em geral, a obtenção de resultados para outras leis de movimento requerem que sejam refeitos os cálculos muitas vezes desde o ponto de partida. Com o presente método, é possível obter toda a descrição analítica para uma forma genérica de lei de movimento. Ou seja, é possível reobter os resultados para leis de movimento diferentes sem custos adicionais de cálculo.

O terceiro objetivo do presente trabalho é investigar, através dos métodos de cálculos de-

envolvidos no contexto dos objetivos 1 e 2 mencionados acima, o fenômeno da interferência na densidade de energia em cavidades com duas fronteiras móveis, obtendo fórmulas genéricas para o termo de interferência na densidade de energia. Aplicamos nossas expressões aos movimentos mencionados na Ref. [24], e obtemos fórmulas para a densidade de energia.

O trabalho está organizado da seguinte forma: no Capítulo 1 calculamos a força de radiação exata sobre as fronteiras, bem como expressamos o comportamento exato da densidade de energia numa cavidade não estática, no modelo do campo escalar não massivo em $1 + 1$ dimensões, sendo que o campo obedece à condição de Dirichlet em cada uma das fronteiras da cavidade. No Capítulo 2 mostramos que para movimentos para os quais ambas as fronteiras voltam às suas posições iniciais em instantes múltiplos de L_0 , o método exato (obtido no contexto do primeiro objetivo do presente trabalho) permite encontrar soluções analíticas escritas como uma expansão em série na variável ϵ . Calculamos, então, soluções analíticas até ordem ϵ^2 para a força de radiação e para a densidade de energia. No capítulo 3 investigamos e obtemos formas analíticas para o fenômeno da interferência na densidade de energia em cavidades com duas fronteiras móveis. Aplicamos nossas fórmulas aos movimentos mencionados na Ref. [24], e relacionamos nossos resultados com os encontrados nessa referência.

Capítulo 1

Abordagem exata para o cálculo da densidade de energia

1.1 Discussões iniciais sobre a energia na cavidade

Consideremos o campo escalar real, não massivo, em um espaço-tempo bidimensional, confinado numa cavidade inicialmente estática (para $t < 0$) e tendo o vácuo como estado inicial, mas que para $t > 0$ pode ter ambas as fronteiras, a da esquerda e a da direita, movendo-se de acordo com as leis de movimento $x_L = L(t)$ e $x_R = R(t)$, respectivamente, sendo que ambas fronteiras impõem a condição de Dirichlet. O campo na cavidade, em termos dos operadores de criação e aniquilação é dado, de acordo com a referência [26]:

$$\phi(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \psi_k(x, t) + a_k^\dagger \psi_k^*(x, t) \right], \quad (1.1)$$

onde os modos na cavidade são:

$$\psi_k(x, t) = \frac{i}{\sqrt{4\pi k}} \left[e^{-ik\pi G(t+x)} - e^{-ik\pi F(t-x)} \right], \quad (1.2)$$

sendo:

$$v = t + x, \quad (1.3)$$

$$u = t - x, \quad (1.4)$$

e G e F funções que contém a informação completa sobre a energia na cavidade. As funções G e F obedecem as chamadas leis de Moore generalizadas:

$$G[t + L(t)] - F[t - L(t)] = 0 \quad (1.5a)$$

$$G[t + R(t)] - F[t - R(t)] = 2. \quad (1.5b)$$

Notemos que para o caso em que a fronteira da esquerda está parada ($L(t) = 0$) recaímos sobre a equação de Moore descrita para o caso de apenas uma fronteira oscilante: $G[t + R(t)] - G[t - R(t)] = 2$ [1]. Para duas fronteiras móveis, a densidade de energia pode ser calculada da seguinte maneira:

$$\langle T_{00}(x, t) \rangle = \frac{1}{2} \left[\left\langle \left(\frac{\partial}{\partial t} \phi(t, x) \right)^2 \right\rangle + \left\langle \left(\frac{\partial}{\partial x} \phi(t, x) \right)^2 \right\rangle \right], \quad (1.6)$$

de onde podemos obter que [26]:

$$\langle T_{00}(x, t) \rangle = -f_G(v) - f_F(u), \quad (1.7)$$

sendo

$$f_G = \frac{1}{24\pi} \left[\frac{G'''}{G'} - \frac{3}{2} \left(\frac{G''}{G'} \right)^2 + \frac{\pi^2}{2} G'^2 \right], \quad (1.8a)$$

$$f_F = \frac{1}{24\pi} \left[\frac{F'''}{F'} - \frac{3}{2} \left(\frac{F''}{F'} \right)^2 + \frac{\pi^2}{2} F'^2 \right]. \quad (1.8b)$$

Notemos que para situações estáticas temos:

$$f_G(v) = f_F(u) = f_{\text{est}} = \frac{\pi}{48L_0^2}, \quad (1.9)$$

o que corresponde a $-1/2$ vezes a densidade da energia de Casimir que para as condições de Dirichlet vale:

$$\mathcal{T}_{\text{cas}} = -\frac{\pi}{24L_0^2}. \quad (1.10)$$

Percebemos, portanto, a partir de (1.7), que a densidade de energia pode ser calculada a partir de duas funções, uma que se propaga para a direita (caso das retas $u = t - x$) e outra para a esquerda (caso das retas $v = t + x$). Ou seja, para calcular a densidade de energia em um ponto (\tilde{t}, \tilde{x}) da cavidade, devemos calcular os valores da função f_G na linha nula $v = \tilde{t} + \tilde{x}$, e de f_F na linha nula $u = \tilde{t} - \tilde{x}$. Porém, há pontos da cavidade nos quais a densidade de energia ainda é a estática (de Casimir). Ou seja, mesmo considerando um tempo $t > 0$ no qual as fronteiras já se encontram em movimento, nesses pontos a densidade de energia é a da situação

estática, dada por (1.10). Isso acontece por esses pontos ainda não terem recebido a informação do movimento das fronteiras, uma vez que a velocidade na qual essa informação é propagada é limitada pela velocidade da luz. Existem portanto *regiões estáticas* dentro da cavidade onde ainda não há informação do movimento da fronteira ou da esquerda, ou da direita, ou mesmo simultaneamente do movimento das duas fronteiras (ver Fig. 1.1). Se (\tilde{t}, \tilde{x}) pertencer a uma

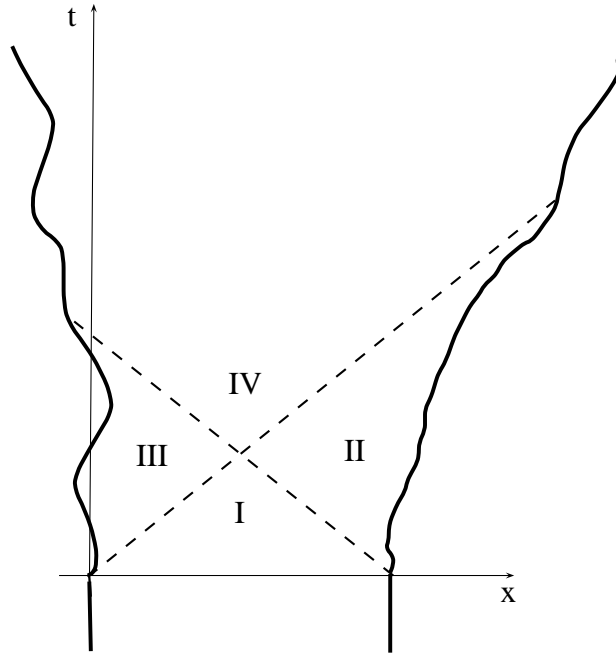


Figura 1.1: Trajetórias das fronteiras são mostradas pelas linhas cheias. As linhas tracejadas são linhas nulas separando as regiões I, II, III e IV.

região da cavidade tal que $v < L_0$ e $u < 0$, pelo princípio da causalidade, a densidade de energia nessa região não é afetada pelo movimento de nenhuma das duas fronteiras, sendo então uma região estática comum para as duas funções, F e G , que compõem a densidade de energia, (a densidade de energia corresponde à densidade estática). Chamaremos essa região de região I (veja Fig.(1.1)). Na região II ($v > L_0$ e $u < 0$), as partes que se propagam para a direita continuam não sendo afetadas pelos movimentos das fronteiras, porém as que se propagam para a esquerda já podem ter sido afetadas. Então a região II ainda é uma região estática para os modos que se propagam para a direita. De maneira similar, na região III ($v < L_0$ e $u > 0$) a parte da solução do campo que se propaga para a esquerda ainda não foi afetada pelos movimentos das fronteiras, enquanto a parte que se propaga para a direita pode já ter sido alterada pela fronteira da esquerda, sendo essa região estática apenas para os modos que se propagam para a

esquerda. E, finalmente, na região IV ($v > L_0$ e $u > 0$), tanto a parte que se propaga para a esquerda quanto a que se propaga para a direita já podem ter sido afetadas pelos movimentos das fronteiras.

1.2 Aplicando o método de Cole-Schieve para a cavidade com duas fronteiras móveis

No contexto do método de Cole-Schieve [9] para resolver recursivamente a equação de Moore para a cavidade com apenas uma fronteira oscilante, nós estendemos para o nosso problema a relação de recorrência para a densidade de energia encontrada na Ref. [22]. Essa generalização nos permite obter recursivamente a densidade de energia para um ponto arbitrário (\tilde{t}, \tilde{x}) da cavidade em termos dos valores conhecidos da densidade de energia calculados nas regiões estáticas já mencionadas.

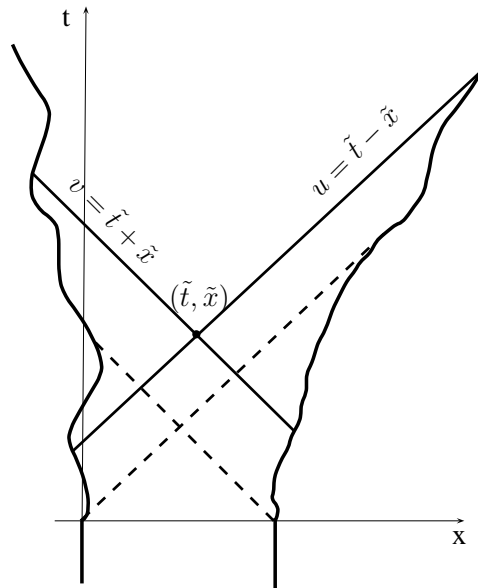


Figura 1.2: Exemplo de ponto (\tilde{t}, \tilde{x}) (nesse caso pertencente à região IV) para o qual calcularemos a densidade de energia recursivamente. As linhas cheias representam as linhas u e v para as quais serão calculadas as funções f_F e f_G , respectivamente, e as linhas tracejadas delimitam as mesmas regiões estáticas mostradas na Fig. 1.1.

Para tanto, precisaremos deduzir como a função f_F em uma linha nula u se relaciona com a função f_G em uma linha nula v e vice-versa. Para isso, tomando a primeira derivada de (1.5a) com relação ao seu argumento, temos:

$$G' [t + R(t)] = F' [t - R(t)] \left[\frac{1 - R'(t)}{1 + R'(t)} \right], \quad (1.11)$$

e de maneira similar para (1.5b):

$$G' [t + L(t)] = F' [t - L(t)] \left[\frac{1 - L'(t)}{1 + L'(t)} \right]. \quad (1.12)$$

Calculando a segunda derivada das expressões acima, encontraremos:

$$G'' [t + R(t)] = F'' [t - R(t)] \left[\frac{1 - R'(t)}{1 + R'(t)} \right]^2 + F' [t - R(t)] \left\{ \frac{-2R''(t)}{[1 + R'(t)]^3} \right\}, \quad (1.13)$$

$$G'' [t + L(t)] = F'' [t - L(t)] \left[\frac{1 - L'(t)}{1 + L'(t)} \right]^2 + F' [t - L(t)] \left\{ \frac{-2L''(t)}{[1 + L'(t)]^3} \right\}. \quad (1.14)$$

Com relação às terceiras derivadas de (1.5a) e (1.5b):

$$\begin{aligned} G''' [t + R(t)] &= F''' [t - R(t)] \left[\frac{1 - R'(t)}{1 + R'(t)} \right]^3 + 3F'' [t - R(t)] \left\{ \frac{-2R''(t) [1 - R'(t)]}{[1 + R'(t)]^4} \right\} + \\ &+ F' [t - R(t)] \left\{ \frac{-2R'''(t) [1 + R'(t)] + 6R''^2(t)}{[1 + R'(t)]^5} \right\}, \end{aligned} \quad (1.15)$$

$$\begin{aligned} G''' [t + L(t)] &= F''' [t - L(t)] \left[\frac{1 - L'(t)}{1 + L'(t)} \right]^3 + 3F'' [t - L(t)] \left\{ \frac{-2L''(t) [1 - L'(t)]}{[1 + L'(t)]^4} \right\} + \\ &+ F' [t - L(t)] \left\{ \frac{-2L'''(t) [1 + L'(t)] + 6L''^2(t)}{[1 + L'(t)]^5} \right\}. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Agora, substituindo (1.12), (1.14) e (1.16) em (1.8a), teremos:

$$\begin{aligned} f_G [t + R(t)] &= f_F [t - R(t)] \left[\frac{1 - R'(t)}{1 + R'(t)} \right]^2 - \frac{1}{12\pi} \frac{R'''(t)}{[1 + R'(t)]^3 [1 - R'(t)]} + \\ &- \frac{1}{4\pi} \frac{R''^2(t) R'(t)}{[1 + R'(t)]^4 [1 - R'(t)]^2}, \end{aligned} \quad (1.17)$$

$$\begin{aligned} f_F [t - L(t)] &= f_G [t + L(t)] \left[\frac{1 + L'(t)}{1 - L'(t)} \right]^2 + \frac{1}{12\pi} \frac{L'''(t)}{[1 + L'(t)] [1 - L'(t)]^3} + \\ &+ \frac{1}{4\pi} \frac{L''^2(t) L'(t)}{[1 + L'(t)]^2 [1 - L'(t)]^4}. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Invertendo (1.17) e (1.18), encontramos $f_F [t - R(t)]$ e $f_G [t + L(t)]$. Definindo:

$$A_q(t) = \left[\frac{1 - q'(t)}{1 + q'(t)} \right]^2, \quad (1.19)$$

$$B_q(t) = -\frac{1}{12\pi} \frac{q'''(t)}{[1+q'(t)]^3 [1-q'(t)]} - \frac{1}{4\pi} \frac{q''^2(t) q'(t)}{[1+q'(t)]^4 [1-q'(t)]^2}, \quad (1.20)$$

sendo que $q(t)$ pode representar tanto $R(t)$ quanto $L(t)$. Podemos escrever, portanto:

$$f_G[t+R(t)] = f_F[t-R(t)] A_R(t) + B_R(t), \quad (1.21a)$$

$$f_G[t+L(t)] = f_F[t-L(t)] A_L(t) + B_L(t), \quad (1.21b)$$

$$f_F[t-R(t)] = \frac{1}{A_R(t)} f_G[t+R(t)] - \frac{B_R(t)}{A_R(t)}, \quad (1.21c)$$

$$f_F[t-L(t)] = \frac{1}{A_L(t)} f_G[t+L(t)] - \frac{B_L(t)}{A_L(t)}. \quad (1.21d)$$

Note em (1.19) que $A_q(t) \neq 0 \forall t$, o que faz com que não haja termos nulos no denominador de f_F . Veremos na próxima sessão como essas expressões nos ajudarão no cálculo da densidade de energia, através de processos de reflexão.

1.3 Processos de Reflexão

Para um ponto (\tilde{t}, \tilde{x}) no espaço-tempo no interior da cavidade, a densidade de energia $\langle T_{00}(\tilde{t}, \tilde{x}) \rangle$ é conhecida se $f_G(v)|_{v=\tilde{t}+\tilde{x}}$ e $f_F(u)|_{u=\tilde{t}-\tilde{x}}$ são conhecidos. A seguir, mostraremos que os valores destas funções podem ser obtidos traçando-se uma sequência de linhas nulas em direção a uma das zonas estáticas, onde valores de f_G ou f_F são conhecidos.

1.3.1 Reflexões para f_G

Vamos supor por generalidade que o ponto (\tilde{t}, \tilde{x}) pertença à região IV mostrada na Fig. (1.1), e que a linha nula $v = z_1$ intercepte a linha de mundo da fronteira da direita no ponto $(t_1, R(t_1))$ (ver Fig. 1.3). Temos, então:

$$f_G(\tilde{t} + \tilde{x}) = f_G[t_1 + R(t_1)]. \quad (1.22)$$

Usando a Eq. (1.21a), temos:

$$f_G[t_1 + R(t_1)] = f_F[t_1 - R(t_1)] A_R(t_1) + B_R(t_1). \quad (1.23)$$

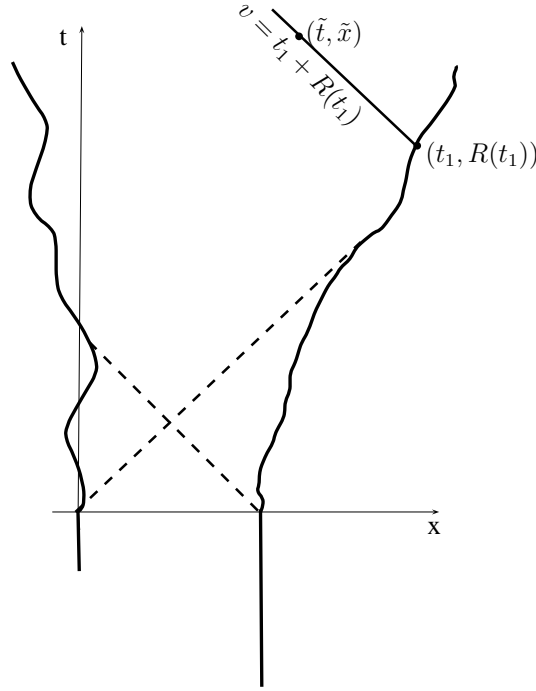


Figura 1.3: A linha nula $v = \tilde{t} + \tilde{x}$ corresponde à linha nula $t_1 + R(t_1)$.

Caso a linha nula $u = t_1 - R(t_1) < 0$, ou seja, a linha nula pertence às regiões I e II que são zonas estáticas para a função f_F , podemos substituir em (1.23), de acordo com a Eq. (1.9), que:

$$f_F [t_1 - R(t_1)] = f_{est}, \quad (1.24)$$

obtendo que:

$$f_G (\tilde{t} + \tilde{x}) = f_{est} A_R(t_1) + B_R(t_1). \quad (1.25)$$

Dizemos assim que o número de reflexões n_G necessário para acessarmos uma região estática foi tal que $n_G = 1$. Caso $u = t_1 - R(t_1) > 0$, então deveremos fazer uma nova reflexão. Antes disso, vamos definir $(t_2, L(t_2))$ como sendo o ponto no qual a linha nula $u = t_1 - R(t_1)$ intercepta a linha de mundo da fronteira da esquerda, o que resulta em que $u = t_1 - R(t_1) = t_2 - L(t_2)$ (ver Fig. 1.4) e conseqüentemente:

$$f_G [t_1 + R(t_1)] = f_F [t_2 - L(t_2)] A_R(t_1) + B_R(t_1). \quad (1.26)$$

Usando a Eq. (1.21d), temos:

$$\begin{aligned} f_G [t_1 + R(t_1)] &= \left\{ f_G [t_2 + L(t_2)] \frac{1}{A_L(t_2)} - \frac{B_L(t_2)}{A_L(t_2)} \right\} A_R(t_1) + B_R(t_1) \\ &= \{ f_G [t_2 + L(t_2)] - B_L(t_2) \} \frac{A_R(t_1)}{A_L(t_2)} + B_R(t_1). \end{aligned} \quad (1.27)$$

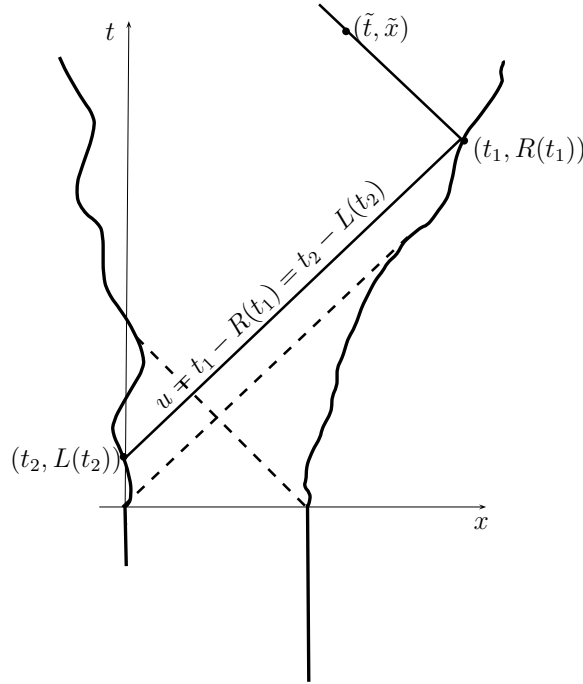


Figura 1.4: O valor da função f_G calculada na linha nula $v = t_1 + R(t_1)$ pode ser mapeada no valor da função f_F calculada na linha nula $u = t_1 - R(t_1)$ que por sua vez corresponde à linha nula $u = t_2 - L(t_2)$.

Caso a linha nula $v = t_2 + L(t_2) < L_0$, ou seja, pertença à zona estática para a função f_G (as regiões I e III), podemos substituir em (1.27) a Eq. (1.9), obtendo:

$$f_G(\tilde{t} + \tilde{x}) = \{f_{est} - B_L(t_2)\} \frac{A_R(t_1)}{A_L(t_2)} + B_R(t_1), \quad (1.28)$$

sendo que $n_G = 2$. Se, por outro lado, $v = t_2 + L(t_2) > L_0$, teremos de fazer nova reflexão (ver Fig. 1.5). Da mesma forma temos, caso $n_G = 3$, obtemos a seguinte equação:

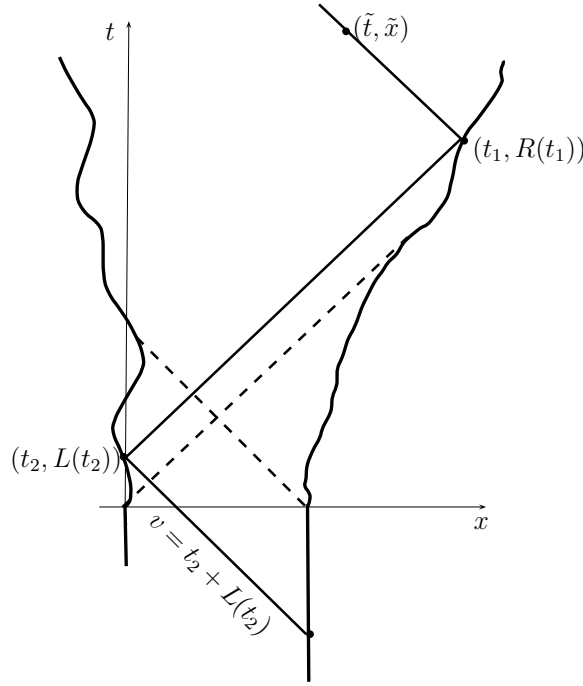


Figura 1.5: O valor da função f_F calculada na linha nula $u = t_2 - L(t_2)$ pode ser mapeada no valor da função f_G calculada na linha nula $v = t_2 + L(t_2)$ que se encontra na região estática e conclui, portanto, o processo de reflexões.

$$f_G(\tilde{t} + \tilde{x}) = f_{est} \frac{A_R(t_3) A_R(t_1)}{A_L(t_2)} + \{B_R(t_3) - B_L(t_2)\} \frac{A_R(t_1)}{A_L(t_2)} + B_R(t_1). \quad (1.29)$$

Caso $n_G = 4$, temos:

$$f_G(\tilde{t} + \tilde{x}) = \{f_{est} - B_L(t_4)\} \frac{A_R(t_3) A_R(t_1)}{A_L(t_4) A_L(t_2)} + \{B_R(t_3) - B_L(t_2)\} \frac{A_R(t_1)}{A_L(t_2)} + B_R(t_1). \quad (1.30)$$

E assim sucessivamente. Todo o processo de reflexões descrito acima pode ser resumido da seguinte forma:

$$f_G(z) = f_{est} \tilde{A}_G(z) + \tilde{B}_G(z), \quad (1.31)$$

onde:

$$\tilde{A}_G(z) = \prod_{k=0}^{\frac{n_G(z)}{2}} \left[(1 - \delta_{k,0}) \frac{A_R(t_{2k-1})}{A_L(t_{2k})} + \delta_{k,0} \right], \quad n_G(z) \text{ par}, \quad (1.32a)$$

$$\tilde{A}_G(z) = \prod_{k=0}^{\frac{n_G(z)-1}{2}} \left[\frac{A_R(t_{2k+1})}{(1 - \delta_{k,0}) A_L(t_{2k}) + \delta_{k,0}} \right], \quad n_G(z) \text{ ímpar}, \quad (1.32b)$$

$$\begin{aligned} \tilde{B}_G(z) &= \sum_{k=0}^{\frac{n_G(z)}{2}} \left\{ (1 - \delta_{k,0}) \left[\frac{B_R(t_{2k-1}) A_L(t_{2k})}{A_R(t_{2k-1})} - B_L(t_{2k}) \right] \times \right. \\ &\quad \left. \times \prod_{j=0}^k \left[(1 - \delta_{j,0}) \frac{A_R(t_{2j-1})}{A_L(t_{2j})} + \delta_{j,0} \right] \right\}, \quad n_G(z) \text{ par}, \end{aligned} \quad (1.33a)$$

$$\begin{aligned} \tilde{B}_G(z) &= \sum_{k=0}^{\frac{n_G(z)-1}{2}} \{ [B_R(t_{2k+1}) - (1 - \delta_{k,0}) B_L(t_{2k})] \times \\ &\quad \times \prod_{j=0}^k \left[(1 - \delta_{j,0}) \frac{A_R(t_{2j-1})}{A_L(t_{2j})} + \delta_{j,0} \right] \}, \quad n_G(z) \text{ ímpar}, \end{aligned} \quad (1.33b)$$

onde $\delta_{m,n}$ representa a delta de Kronecker.

Nas equações (1.32a) a (1.33b), introduzimos a notação $n_G(z)$ para explicitar que o número de reflexões depende do ponto do espaço tempo que está sendo considerado. Enfatizamos que $n_G(z)$ é o número de reflexões, nas duas fronteiras, que temos de fazer a partir da linha nula $v = t_1 + R(t_1) = \tilde{t} + \tilde{x}$ até chegarmos em uma das regiões estáticas, ou seja, quando o argumento u ou v da função f no processo de reflexões for $u < 0$, para f_F ou $v < L_0$ para f_G . Vemos que $n_G(z)$ par se refere ao término do processo de reflexões na região estática de G (que na fig. (1.1) corresponde às regiões I e III) e se $n_G(z)$ for ímpar, estamos nas zonas estáticas I e II, referentes ao argumento da função F .

1.3.2 Reflexões para f_F

De maneira similar ao que fizemos na seção anterior, para o mesmo ponto (\tilde{t}, \tilde{x}) , pertencente à região IV, temos outra reta que passa por ele, $u = \tilde{t} - \tilde{x}$, que deverá ter suas reflexões analisadas até chegarmos na região estática. Podemos escolher um ponto $(t_1, L(t_1))$ sobre a linha de mundo da fronteira da esquerda (note-se que t_1 aqui em geral não é o mesmo t_1 que ocorre para as reflexões de f_G) tal que teremos $u = t_1 - L(t_1) = \tilde{t} - \tilde{x}$. Com isso, temos:

$$f_F(\tilde{t} - \tilde{x}) = f_F[t_1 - L(t_1)]. \quad (1.34)$$

Usando a equação (1.21d), teremos:

$$f_F[t_1 - L(t_1)] = \{f_G[t_1 + L(t_1)] - B_L(t_1)\} \frac{1}{A_L(t_1)}. \quad (1.35)$$

Caso a linha nula $v = t_1 + L(t_1) < L_0$, ou seja, a linha nula pertence às regiões I e III, que são zonas estáticas para a função f_G , podemos substituir em (1.35) que

$$f_G [t_1 + L(t_1)] = f_{est}, \quad (1.36)$$

obtendo que

$$f_F (\tilde{t} - \tilde{x}) = [f_{est} - B_L(t_1)] \frac{1}{A_L(t_1)}. \quad (1.37)$$

Neste caso, dizemos que o número de reflexões n_F para acessarmos uma região estática foi tal que $n_F = 1$. Se $t_1 + L(t_1) > L_0$ precisaremos fazer mais uma reflexão, agora na fronteira da direita. Para tanto, podemos calcular t_2 tal que o ponto $(t_2, R(t_2))$ sobre a linha de mundo da fronteira da direita pertença à reta $v = t_1 + L(t_1)$, ou seja, $t_1 + L(t_1) = t_2 + R(t_2)$. Então teremos:

$$f_F [t_1 - L(t_1)] = f_G [t_2 + R(t_2)] \frac{1}{A_L(t_1)} - \frac{B_L(t_1)}{A_L(t_1)} \quad (1.38)$$

e, usando (1.21a), obtemos:

$$\begin{aligned} f_F [t_1 - L(t_1)] &= \{f_F [t_2 - R(t_2)] A_R(t_2) + B_R(t_2)\} \frac{1}{A_L(t_1)} - \frac{B_L(t_1)}{A_L(t_1)} \\ &= f_F [t_2 - R(t_2)] \frac{A_R(t_2)}{A_L(t_1)} + \{B_R(t_2) - B_L(t_1)\} \frac{1}{A_L(t_1)}. \end{aligned} \quad (1.39)$$

Com isso completamos essa reflexão. Se $t_2 - R(t_2) < 0$ entramos numa zona estática da função f_F , tendo portanto $n_F = 2$ e $f_F [t_2 - R(t_2)] = f_{est}$, resultando em:

$$f_F (\tilde{t} - \tilde{x}) = f_{est} \frac{A_R(t_2)}{A_L(t_1)} + \{B_R(t_2) - B_L(t_1)\} \frac{1}{A_L(t_1)}, \quad (1.40)$$

o que completa essa reflexão.

Se a reta $u = t_2 - R(t_2) > 0$, deveremos fazer nova reflexão, dessa vez na fronteira da esquerda e o processo continua de forma análoga. Da mesma forma, para $n_F = 3$ temos:

$$f_F (\tilde{t} - \tilde{x}) = \{f_{est} - B_L(t_3)\} \frac{A_R(t_2)}{A_L(t_3) A_L(t_1)} + \{B_R(t_2) - B_L(t_1)\} \frac{1}{A_L(t_1)}. \quad (1.41)$$

De maneira geral, temos:

$$f_F (z) = f_{est} \tilde{A}_F (z) + \tilde{B}_F (z), \quad (1.42)$$

sendo:

$$\tilde{A}_F (z) = \prod_{k=0}^{\frac{n_F(z)}{2}} \left[(1 - \delta_{k,0}) \frac{A_R(t_{2k})}{A_L(t_{2k-1})} + \delta_{k,0} \right], \quad n_F(z) \text{ par}, \quad (1.43a)$$

$$\tilde{A}_F(z) = \prod_{k=0}^{\frac{n_F(z)-1}{2}} \left[\frac{(1 - \delta_{k,0}) A_R(t_{2k}) + \delta_{k,0}}{A_L(t_{2k+1})} \right], \quad n_F(z) \text{ ímpar}, \quad (1.43b)$$

$$\begin{aligned} \tilde{B}_F(z) = & \sum_{k=0}^{\frac{n_F(z)}{2}} \left\{ (1 - \delta_{k,0}) \frac{A_L(t_{2k+1})}{A_R(t_{2k})} [B_R(t_{2k}) - B_L(t_{2k-1})] \times \right. \\ & \left. \times \prod_{j=0}^k \left[\frac{(1 - \delta_{j,0}) A_R(t_{2j}) + \delta_{j,0}}{A_L(t_{2j+1})} \right] \right\}, \quad n_G(z) \text{ par}, \end{aligned} \quad (1.44a)$$

$$\begin{aligned} \tilde{B}_F(z) = & \sum_{k=0}^{\frac{n_F(z)-1}{2}} \left\{ \left[(1 - \delta_{k,0}) \frac{A_L(t_{2j+1})}{A_R(t_{2j})} B_R(t_{2k}) - B_L(t_{2k+1}) \right] \times \right. \\ & \left. \times \prod_{j=0}^k \left[\frac{(1 - \delta_{j,0}) A_R(t_{2j}) + \delta_{j,0}}{A_L(t_{2j+1})} \right] \right\}, \quad n_G(z) \text{ ímpar}. \end{aligned} \quad (1.44b)$$

Nas equações (1.43a) a (1.44b), introduzimos a notação $n_F(z)$ para explicitar que o número de reflexões depende do ponto do espaço tempo que está sendo considerado. Como dissemos anteriormente, $n_F(z)$ é o número de reflexões nas duas fronteiras partindo da reta $u = t_1 - L(t_1) = \tilde{t} - \tilde{x}$. As reflexões são feitas até encontrarmos uma reta que esteja na zona estática de uma das funções componentes da densidade de energia, e com isso substituímos o valor da função f calculada na referida reta pelo valor dado em (1.9). Vemos que, para $n_F(z)$ par, entramos na zona estática das retas que são argumento da função F (a reta $u \leq 0$) e, para n_F ímpar, entramos na das retas que são argumento da função G ($v \leq L_0$).

Com os resultados anteriores, podemos escrever:

$$\langle T_{00} \rangle = -f_{\text{est}} \left[\tilde{A}_G(v) + \tilde{A}_F(u) \right] - \tilde{B}_G(v) - \tilde{B}_F(u), \quad (1.45)$$

o que nos permite calcular a densidade de energia na cavidade explicitamente em função de movimentos arbitrários das fronteiras. A força quântica atuando sobre a fronteira da direita é dada por:

$$\mathcal{F}_R(t) = -f_{\text{est}} \left[\tilde{A}_G(t + R(t)) + \tilde{A}_F(t - R(t)) \right] - \tilde{B}_G(t + R(t)) - \tilde{B}_F(t - R(t)). \quad (1.46)$$

Para a fronteira da esquerda temos

$$\mathcal{F}_L(t) = f_{\text{est}} \left[\tilde{A}_G(t + L(t)) + \tilde{A}_F(t - L(t)) \right] + \tilde{B}_G(t + L(t)) + \tilde{B}_F(t - L(t)). \quad (1.47)$$

1.4 Aplicação

Nesta seção calculamos a força quântica atuando sobre fronteiras em uma cavidade, tomando como base as fórmulas obtidas na seção anterior. Conforme já comentado, para movimentos genéricos das fronteiras a fórmula por nós obtida permite encontrar resultados numéricos e exatos, ressaltando que ela é aplicável inclusive a movimentos de amplitude grande os quais usualmente estão fora de alcance dos métodos perturbativos encontrados na literatura. Para ilustrar tal aplicação vamos considerar os seguintes conjuntos de leis de movimento, que resultam em cavidades que se expandem:

$$\begin{aligned} R(t) &= 1 + 0.1 \ln[\cosh(t)], \\ L(t) &= -0.1 \ln[\cosh(t)], \end{aligned} \tag{1.48}$$

$$\begin{aligned} R(t) &= 1 + 0.1 \ln[\cosh(t)], \\ L(t) &= 0, \end{aligned} \tag{1.49}$$

$$\begin{aligned} R(t) &= 0, \\ L(t) &= -0.1 \ln[\cosh(t)]. \end{aligned} \tag{1.50}$$

As funções movimento das fronteiras acima foram elaboradas tomando-se como base a trajetória proposta por Haro [28] para simular o colapso de buracos negros. Foquemos na força $\mathcal{F}_R(t)$ que atua sobre a fronteira da direita. Usando as equações (1.32a) a (1.33b), (1.43a) a (1.44b), e (1.46), obtemos na Fig. 1.6 a força $\mathcal{F}_R(t)$ para as leis de movimento dadas pela Eq. (1.49) (linha cheia), e pelas leis dadas na Eq. (1.50) (linha pontilhada). Notemos que a linha cheia começa a se alterar desde o instante $t = 0$, como esperado visto que a fronteira da direita percebe instantaneamente o efeito de seu próprio movimento. Já a linha pontilhada começa a se alterar para $t = 1$, o que é esperado pois nesse caso a fronteira da direita está parada e leva um tempo $t = L_0 = 1$ para receber a influência da alteração no campo causada pelo movimento da fronteira da esquerda. Na Fig. 1.6 podemos ver descontinuidades nas derivadas. Essas descontinuidades sempre ocorrem quando a frente de onda da densidade de energia encontra a fronteira da direita. No caso da linha cheia, para $t = 0$ a fronteira da direita começa a se movimentar e interage com o campo de vácuo, gerando uma onda na densidade de energia que se propaga até ser refletida pela fronteira da esquerda, retornando e reencontrando a fronteira da direita. Os instantes dos reencontros são os instantes das descontinuidades nas derivadas.

A Fig. 1.7 mostra a força $\mathcal{F}_R(t)$ para o caso dado pela Eq. (1.50) (linha cheia), e a força de Casimir estática $-\pi/(24(R(t) - L(t))^2)$ (linha pontilhada) que atuaria sobre a fronteira da direita se ela e a fronteira da esquerda estivessem paradas em cada ponto das trajetórias dadas na Eq. (1.48).

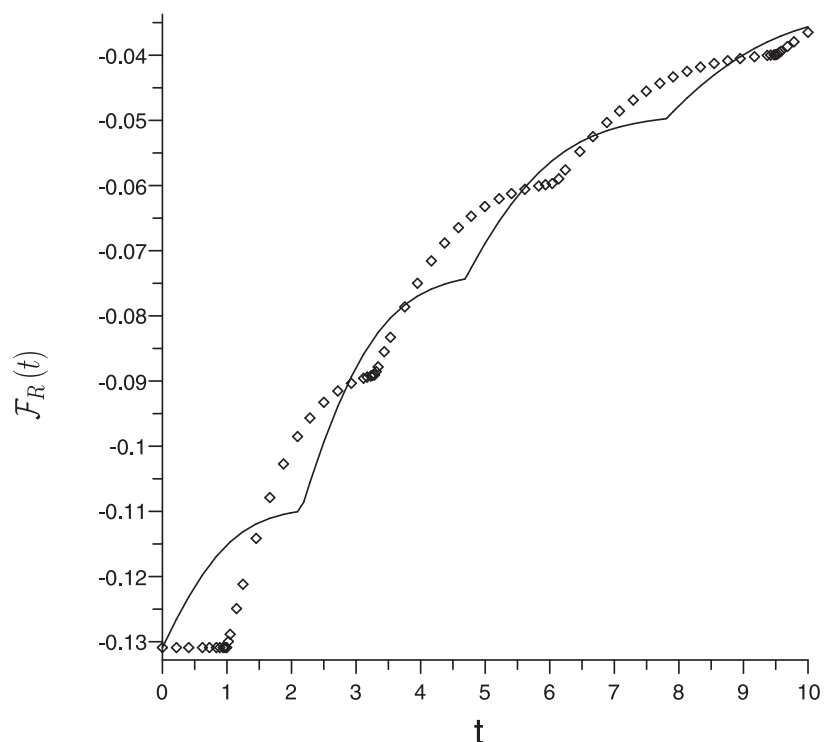


Figura 1.6: A linha cheia mostra a força atuando sobre a fronteira da direita, para o caso em que esta encontra-se em movimento $R(t) = 1 + 0.1 \ln[\cosh(t)]$, sendo que a fronteira da esquerda está em repouso. A linha pontilhada mostra a força atuando sobre a fronteira da direita, para o caso em que esta está em repouso, sendo que a fronteira da esquerda está em movimento $L(t) = -0.1 \ln[\cosh(t)]$.

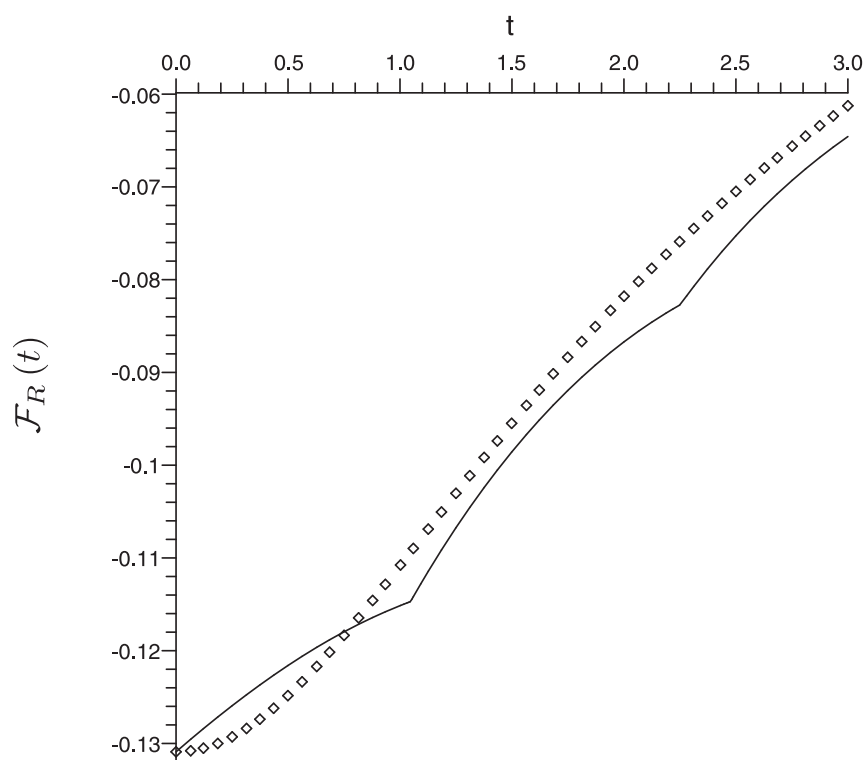


Figura 1.7: A linha cheia mostra a força atuando sobre a fronteira da direita, para o caso em que esta encontra-se em movimento $R(t) = 1 + 0.1 \ln[\cosh(t)]$, sendo que a fronteira da esquerda está em movimento $L(t) = -0.1 \ln[\cosh(t)]$. A linha pontilhada mostra a força de Casimir que agiria sobre a fronteira da direita, caso a fronteira da direita e da esquerda estivessem em repouso em cada ponto das trajetórias descritas nas Eqs.(1.48).

Capítulo 2

Resultados analíticos para densidade de energia

Vimos no capítulo anterior que é possível calcular exatamente a densidade de energia utilizando os processos de reflexões descritos em [9, 27]. Obtemos com isso uma expressão em função dos movimentos das fronteiras, dada pela equação (1.45), na qual utilizamos funções auxiliares (1.32a-1.33b) e (1.43a-1.44b). O que faremos nesse capítulo é partir das fórmulas por nós obtidas e chegar a resultados analíticos.

Vamos adotar para as leis de movimento $R(t)$ e $L(t)$ as seguintes estruturas:

$$R(t) = L_0 [1 + \varepsilon \Lambda_R(\alpha_R t)] \quad (2.1)$$

$$L(t) = \varepsilon L_0 \Lambda_L(\alpha_L t), \quad (2.2)$$

onde $\Lambda_L(\alpha_L t)$ e $\Lambda_R(\alpha_R t)$ obedecem a seguinte condição:

$$\Lambda_L(0) = \Lambda_R(0) = 0, \quad (2.3)$$

para que tenhamos as seguintes condições satisfeitas:

$$L(0) = 0 \quad (2.4)$$

$$R(0) = L_0. \quad (2.5)$$

Com as leis de movimento escritas dessa forma, vamos obter uma estrutura geral para a densidade de energia. Vamos fazer esse cálculo para cada termo $\tilde{A}(z)$ e $\tilde{B}(z)$ deduzido no capítulo anterior.

2.1 Reescrita das funções \tilde{A}_G e \tilde{A}_F

Nessa seção vamos reescrever as equações (1.32a), (1.32b), (1.43a) e (1.43b) levando em consideração o novo formato para as leis de movimento mostrado em (2.1) e (2.2). Começamos reescrevendo as equações para $A_L(t)$ e $A_R(t)$, que integrarão as expressões das funções $\tilde{A}(z)$:

$$A_R(t) = \frac{[1 - \varepsilon L_0 \frac{\partial}{\partial t} \Lambda_R(\alpha_R t)]^2}{[1 + \varepsilon L_0 \frac{\partial}{\partial t} \Lambda_R(\alpha_R t)]^2}, \quad (2.6)$$

$$A_L(t) = \frac{[1 - \varepsilon L_0 \frac{\partial}{\partial t} \Lambda_L(\alpha_L t)]^2}{[1 + \varepsilon L_0 \frac{\partial}{\partial t} \Lambda_L(\alpha_L t)]^2}. \quad (2.7)$$

Com isso poderemos substituir (2.6) e (2.7) em cada uma das funções \tilde{A} . Especificaremos aqui o cálculo feito para a expressão de $\tilde{A}_G(z)$ no caso em que o número de reflexões é par, sendo que a determinação dos outros termos é similar.

Substituindo (2.6) e (2.7) em (1.32a), temos:

$$\begin{aligned} \tilde{A}_G(z) = & \prod_{k=0}^{\frac{n_G(z,\varepsilon)}{2}} \left\{ (1 - \delta_{k,0}) \left[\frac{1 - \varepsilon L_0 \frac{d}{dt} \Lambda_R(\alpha_R t)|_{t=t_{2k-1}(z,\varepsilon)}}{1 + \varepsilon L_0 \frac{d}{dt} \Lambda_R(\alpha_R t)|_{t=t_{2k-1}(z,\varepsilon)}} \right]^2 \times \right. \\ & \left. \times \left[\frac{1 + \varepsilon L_0 \frac{d}{dt} \Lambda_L(\alpha_L t)|_{t=t_{2k}(z,\varepsilon)}}{1 - \varepsilon L_0 \frac{d}{dt} \Lambda_L(\alpha_L t)|_{t=t_{2k}(z,\varepsilon)}} \right]^2 + \delta_{k,0} \right\} \end{aligned} \quad (2.8)$$

Na equação acima introduzimos a notação $t = t_{2k}(z, \varepsilon)$ para expressar que os instantes de reflexão dependem do ponto (\tilde{t}, \tilde{x}) no qual escolhemos calcular a densidade de energia e da amplitude dos movimentos das fronteiras, controlados pelo parâmetro ε . Quanto ao número de reflexões $n_G(z)$, introduzimos uma nova notação que é $n_G(z, \varepsilon)$, a fim de indicar que para uma lei de movimento genérica o número de reflexões depende também da amplitude de movimento das fronteiras. O fato de haver essa dependência é compreensível uma vez que, se mudamos a amplitude de oscilação de uma fronteira, a linha nula refletida por ela vai mudar (ver Fig. 2.1).

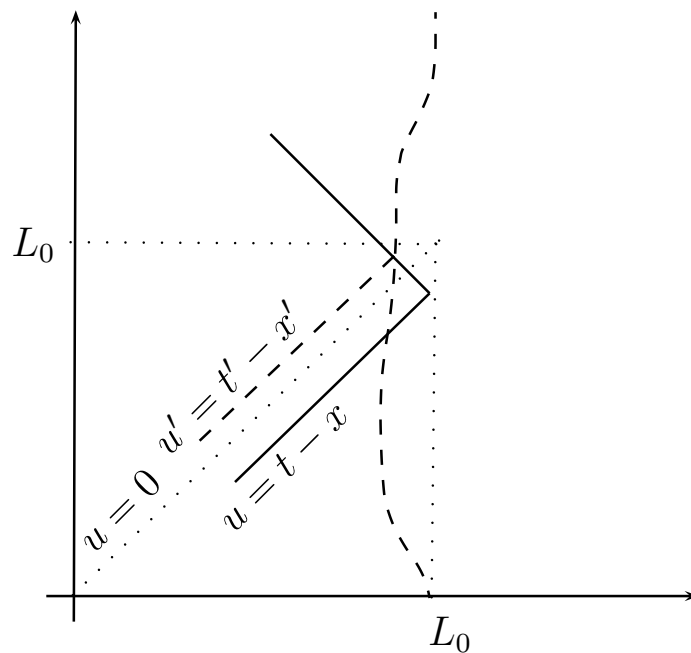


Figura 2.1: Variação das linhas nulas na cavidade para diferentes ε do movimento da fronteira da direita. As linhas cheias representam os movimentos e as linhas nulas originais. As linhas tracejadas, o movimento com o parâmetro alterado e a linha nula que resultou dessa mudança na lei de movimento.

Pela figura Fig. 2.1 podemos perceber que para certas leis de movimento os números de reflexões nas fronteiras, bem como os instantes de reflexão, mudarão. Nesse caso, a linha nula $u = t - x$ já se encontra na zona estática enquanto que a $u' = t' - x'$ ainda terá que fazer mais uma reflexão para entrar na zona estática.

Uma vez que o próximo passo é expandir (2.8) com relação a ε , devemos encontrar uma maneira de manter os números de reflexões independentes dos movimentos das fronteiras. Para tanto, adotamos as seguintes condições adicionais às leis de movimento das fronteiras:

$$L(NL_0) = 0 \quad (2.9a)$$

$$R(NL_0) = L_0, \quad (2.9b)$$

onde N é um número inteiro. Em outras palavras, as leis de movimento devem estar em suas posições iniciais nos instantes que são múltiplos de L_0 .

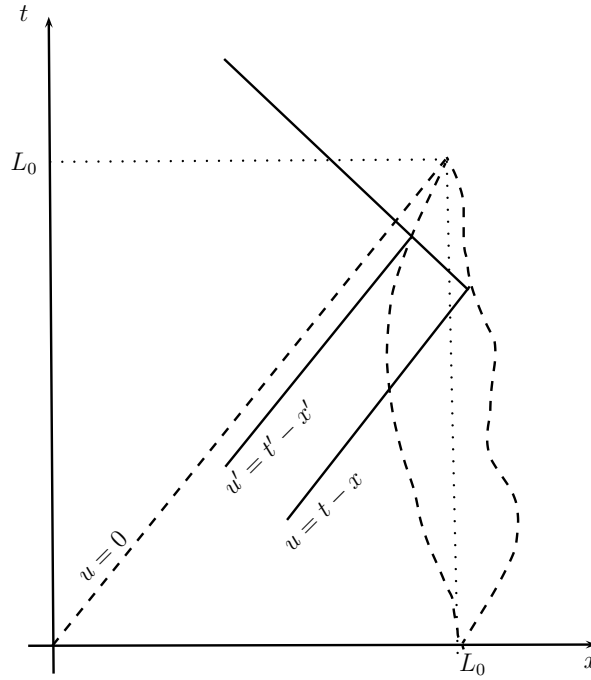


Figura 2.2: Variação das linhas nulas na cavidade para diferentes ε do movimento da fronteira da direita. Nesse caso, a fronteira respeita a condição (2.9b). As linhas cheias as linhas nulas e suas trajetórias quando interceptam uma das fronteiras, representadas pelas linhas tracejadas. As linhas pontilhadas delimitam as zonas estáticas I e II e marcam o tempo $t = L_0$.

Com essas condições temos $n_G(z, \varepsilon) = n_G(z, 0)$, ou seja, o número de reflexões independe da amplitude do movimento das fronteiras. Em outras palavras, é o mesmo do problema estático correspondente, cuja solução para n_G é conhecida. Passamos então a representar novamente n_G dependente apenas do ponto do espaço-tempo, ou seja, $n_G(z)$. A mesma análise vale para n_F . Com isso ainda podemos encontrar uma forma geral para os números de reflexões, como podemos ver na Fig. 2.3:

$$n_G(z) = \begin{cases} \text{int}\left(\frac{z}{L_0}\right), & \text{se } z > L_0 \\ 0, & \text{se } z \leq L_0 \end{cases} \quad (2.10)$$

$$n_F(z) = \begin{cases} \text{int}\left(\frac{z}{L_0}\right) + 1, & \text{se } z > 0 \\ 0, & \text{se } z \leq 0, \end{cases} \quad (2.11)$$

Ressaltamos que essa consideração é um dos pontos fundamentais do presente trabalho.

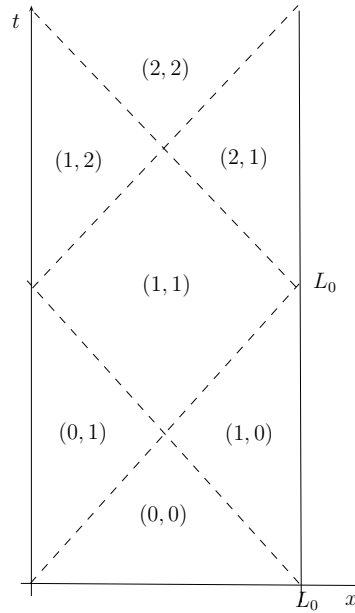


Figura 2.3: Valores de (n_G, n_F) para a cavidade estática

Várias leis de movimento que constam da literatura seguem as condições acima, tais como:

$$R(t) = L_0 - \varepsilon \sin^2 \left(\frac{\pi t}{L_0} \right), \quad (2.12)$$

$$L(t) = 0, \quad (2.13)$$

que são citadas em [13];

$$L(t) = \varepsilon L_0 a_L \sin(\Omega_L t + \phi), \quad (2.14)$$

$$R(t) = L_0 - L_0 \varepsilon a_R \sin(\Omega_R t), \quad (2.15)$$

que são citadas em [24], com $\Omega_q = \gamma_q t / L_0$, sendo γ_q inteiro;

$$R(t) = L_0 - \varepsilon L_0 \sin \left(\frac{2\pi t}{L_0} \right), \quad (2.16)$$

$$L(t) = 0, \quad (2.17)$$

que são citadas em [9, 22];

$$L(t) = \varepsilon a_L \sin \left(\frac{\gamma \pi t}{L_0} \right), \quad (2.18)$$

$$R(t) = L_0 - \varepsilon a_R \sin(\phi) + \varepsilon a_R \sin \left(\frac{\gamma \pi t}{L_0} + \phi \right), \text{ para } \gamma \text{ par}, \quad (2.19)$$

que são citadas em [26].

Sendo assim, vamos expandir (2.8) até a ordem ε^2 :

$$\begin{aligned}
 \tilde{A}_G(z) \approx & 1 + 4\varepsilon L_0 \sum_{k=0}^{\frac{n_G(z)}{2}} \left\{ (1 - \delta_{k,0}) \left[\frac{d}{dt} \Lambda_L(\alpha_L t) \Big|_{t=t_{2k}(z,0)} - \frac{d}{dt} \Lambda_R(\alpha_R t) \Big|_{t=t_{2k-1}(z,\varepsilon=0)} \right] \right\} + \\
 & + 4\varepsilon^2 L_0 \sum_{k=0}^{\frac{n_G(z)}{2}} \left\{ (1 - \delta_{k,0}) \left[\frac{d^2}{dt^2} \Lambda_L(\alpha_L t) \Big|_{t=t_{2k}(z,0)} \frac{d}{d\varepsilon} t_{2k}(z, \varepsilon) \Big|_{\varepsilon=0} + \right. \right. \\
 & \left. \left. - \frac{d^2}{dt^2} \Lambda_R(\alpha_R t) \Big|_{t=t_{2k-1}(z,0)} \frac{d}{d\varepsilon} t_{2k-1}(z, \varepsilon) \Big|_{\varepsilon=0} \right] \right\} + \\
 & + 8\varepsilon^2 L_0^2 \left\{ \sum_{k=0}^{\frac{n_G(z)}{2}} (1 - \delta_{k,0}) \left[\frac{d}{dt} \Lambda_L(\alpha_L t) \Big|_{t=t_{2k}(z,\varepsilon=0)} - \frac{d}{dt} \Lambda_R(\alpha_R t) \Big|_{t=t_{2k-1}(z,0)} \right] \right\}^2.
 \end{aligned} \tag{2.20}$$

Percebemos, na expressão acima, que precisamos conhecer os termos

$$t(z, 0) \text{ e } \frac{d}{d\varepsilon} t(z, \varepsilon) \Big|_{\varepsilon=0}.$$

Conseguiremos deduzir $t(z, 0)$ conforme o que foi descrito na seção 1.3.1. A partir do ponto (\tilde{t}, \tilde{x}) podemos calcular t_1 tal que:

$$z = \tilde{t} + \tilde{x} = t_1(z, \varepsilon) + R[t_1(z, \varepsilon)]. \tag{2.21}$$

Usando a equação (2.1):

$$z = t_1(z, \varepsilon) + L_0 \{1 + \varepsilon \Lambda_R[\alpha_R t_1(z, \varepsilon)]\}, \tag{2.22}$$

para $\varepsilon = 0$:

$$z = t_1(z, 0) + L_0 \rightarrow t_1(z, 0) = z - L_0. \tag{2.23}$$

Caso tenhamos que continuar com o processo de reflexões, o próximo passo é, com o t_1 calculado previamente, encontrar t_2 tal que:

$$t_1 - R(t_1) = t_2 - L(t_2) \tag{2.24}$$

que, usando (2.2) e (2.23) e substituindo $\varepsilon = 0$, temos:

$$t_1(z, 0) - L_0 = t_2(z, 0) \tag{2.25}$$

então:

$$\begin{aligned}
 t_2(z, 0) &= z - L_0 - L_0 \\
 &= z - 2L_0,
 \end{aligned} \tag{2.26}$$

e assim em diante. O que encontraremos, no fim das contas, é que:

$$t_k(z, 0) = z - kL_0. \quad (2.27)$$

Para encontrarmos o segundo termo que necessitamos, partimos da derivada das relação (2.21) com relação a ε , o que nos dá:

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon} t_1(z, \varepsilon) + L_0 \Lambda_R [\alpha_R t_1(z, \varepsilon)] + \varepsilon \alpha L_0 \left[\frac{\partial}{\partial \varepsilon} t_1(z, \varepsilon) \right] \left\{ \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \Lambda_R [\alpha_R t_1(z, \varepsilon)] \right\} = 0. \quad (2.28)$$

Tomando $\varepsilon = 0$:

$$\left. \frac{\partial}{\partial \varepsilon} t_1(z, \varepsilon) \right|_{\varepsilon=0} = -L_0 \Lambda_R [\alpha_R t_1(z, 0)], \quad (2.29)$$

onde, usando a equação (2.23):

$$\left. \frac{\partial}{\partial \varepsilon} t_1(z, \varepsilon) \right|_{\varepsilon=0} = -L_0 \Lambda_R [\alpha_R (z - L_0)]. \quad (2.30)$$

Para encontrarmos $\left. \frac{\partial}{\partial \varepsilon} t_2(z, \varepsilon) \right|_{\varepsilon=0}$, derivamos (2.24) e, usando (2.23), (2.26) e (2.30), obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} t_1(z, \varepsilon) - L_0 \Lambda_R [\alpha t_1(z, \varepsilon)] &= \frac{\partial}{\partial \varepsilon} t_2(z, \varepsilon) - L_0 \Lambda_L [\alpha t_2(z, \varepsilon)] \\ \left. \frac{\partial}{\partial \varepsilon} t_1(z, \varepsilon) \right|_{\varepsilon=0} - L_0 \Lambda_R [\alpha t_1(z, 0)] &= \left. \frac{\partial}{\partial \varepsilon} t_2(z, \varepsilon) \right|_{\varepsilon=0} - L_0 \Lambda_L [\alpha t_2(z, 0)] \\ -2L_0 \Lambda_R [\alpha (z - L_0)] &= \left. \frac{\partial}{\partial \varepsilon} t_2(z, \varepsilon) \right|_{\varepsilon=0} - L_0 \Lambda_L [\alpha (z - 2L_0)] \\ \left. \frac{\partial}{\partial \varepsilon} t_2(z, \varepsilon) \right|_{\varepsilon=0} &= -2L_0 \Lambda_R [\alpha (z - L_0)] + \\ &\quad + L_0 \Lambda_L [\alpha (z - 2L_0)]. \end{aligned} \quad (2.31)$$

E assim por diante, para encontrarmos as derivadas dos outros valores dos tempos. Podemos escrever portanto que:

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{d\varepsilon} t_k(z, \varepsilon) \right|_{\varepsilon=0} &= 2L_0 \sum_{j=0}^{N_G(k)} (1 - \delta_{j,0}) \{ \Lambda_L [\alpha_L (z - 2jL_0)] - \Lambda_R [\alpha_R (z - (2j - 1)L_0)] \} + \\ &\quad - L_0 \theta_1(k) \Lambda_L [\alpha_L (z - kL_0)] - L_0 [1 - \theta_1(k)] \Lambda_R [\alpha_R (z - kL_0)], \end{aligned} \quad (2.32)$$

onde k se refere ao índice do tempo em questão e:

$$N_G(k) = \begin{cases} \frac{k}{2}, & \text{se } k \text{ é par} \\ \frac{k-1}{2}, & \text{se } k \text{ é ímpar,} \end{cases} \quad (2.33)$$

$$\theta_1(k) = \begin{cases} 1, & \text{se } k \text{ é par} \\ 0, & \text{se } k \text{ é ímpar.} \end{cases} \quad (2.34)$$

Portanto, com esses resultados, substituindo (2.27) e (2.32) em (2.20), encontramos:

$$\begin{aligned}
 \tilde{A}_G(z) \approx & 1 + 4\varepsilon L_0 \sum_{k=0}^{\frac{n_G(z)}{2}} \left\{ (1 - \delta_{k,0}) \left[\frac{d}{dt} \Lambda_L(\alpha_L t) \Big|_{t=z-2kL_0} - \frac{d}{dt} \Lambda_R(\alpha_R t) \Big|_{t=z-(2k-1)L_0} \right] \right\} + \\
 & + 4\varepsilon^2 L_0 \sum_{k=0}^{\frac{n_G(z)}{2}} \left\{ (1 - \delta_{k,0}) \left[\frac{d^2}{dt^2} \Lambda_L(\alpha_L t) \Big|_{t=z-2kL_0} \times \right. \right. \\
 & \times \left. \left\{ 2L_0 \sum_{j=0}^k (1 - \delta_{j,0}) \{ \Lambda_L[\alpha_L(z - 2jL_0)] - \Lambda_R[\alpha_R(z - (2j - 1)L_0)] \} + \right. \right. \\
 & \left. \left. - L_0 \Lambda_L[\alpha_L(z - 2kL_0)] \right\} - \frac{d^2}{dt^2} \Lambda_R(\alpha_R t) \Big|_{t=z-(2k-1)L_0} \times \right. \\
 & \times \left. \left\{ 2L_0 \sum_{j=0}^{k-1} (1 - \delta_{j,0}) \{ \Lambda_L[\alpha_L(z - 2jL_0)] - \Lambda_R[\alpha_R(z - (2j - 1)L_0)] \} + \right. \right. \\
 & \left. \left. - L_0 \Lambda_R[\alpha_R(z - (2k - 1)L_0)] \right\} \right\} + \\
 & + 8\varepsilon^2 L_0^2 \left\{ \sum_{k=0}^{\frac{n_G(z)}{2}} (1 - \delta_{k,0}) \left[\frac{d}{dt} \Lambda_L(\alpha_L t) \Big|_{t=z-2kL_0} - \frac{d}{dt} \Lambda_R(\alpha_R t) \Big|_{t=z-(2k-1)L_0} \right] \right\}^2
 \end{aligned} \tag{2.35}$$

De maneira análoga, substituindo as leis de movimento (2.1) e (2.2) em (1.19) para a função 1.32b e usando as relações (2.27) e (2.32), encontramos $\tilde{A}_G(z)$ para n_G ímpar expresso da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
 \tilde{A}_G(z) \approx & 1 + 4\varepsilon L_0 \sum_{k=0}^{\frac{n_G(z)-1}{2}} \left[(1 - \delta_{k,0}) \frac{d}{dt} \Lambda_L(\alpha_L t) \Big|_{t=z-2kL_0} - \frac{d}{dt} \Lambda_R(\alpha_R t) \Big|_{t=z-(2k+1)L_0} \right] + \\
 & + 4\varepsilon^2 L_0 \sum_{k=0}^{\frac{n_G(z)-1}{2}} \left[(1 - \delta_{k,0}) \frac{d^2}{dt^2} \Lambda_L(\alpha_L t) \Big|_{t=z-2kL_0} \times \right. \\
 & \times \left\{ 2L_0 \sum_{j=0}^k (1 - \delta_{j,0}) \{ \Lambda_L[\alpha_L(z - 2jL_0)] - \Lambda_R[\alpha_R(z - (2j - 1)L_0)] \} + \right. \\
 & \left. \left. - L_0 \Lambda_L[\alpha_L(z - 2kL_0)] \right\} - \frac{d^2}{dt^2} \Lambda_R(\alpha_R t) \Big|_{t=z-(2k+1)L_0} \times \right. \\
 & \times \left\{ 2L_0 \sum_{j=0}^k (1 - \delta_{j,0}) \{ \Lambda_L[\alpha_L(z - 2jL_0)] - \Lambda_R[\alpha_R(z - (2j - 1)L_0)] \} + \right. \\
 & \left. \left. - L_0 \Lambda_R[\alpha_R(z - (2k + 1)L_0)] \right\} \right] + \\
 & + 8\varepsilon^2 L_0^2 \left\{ \sum_{k=0}^{\frac{n_G(z)-1}{2}} (1 - \delta_{k,0}) \frac{d}{dt} \Lambda_L(\alpha_L t) \Big|_{t=z-2kL_0} - \frac{d}{dt} \Lambda_R(\alpha_R t) \Big|_{t=z-(2k+1)L_0} \right\}^2
 \end{aligned} \tag{2.36}$$

Da mesma maneira podemos calcular $\tilde{A}_F(z)$ para $n_F(z)$ par e $\tilde{A}_F(z)$ para $n_F(z)$ ímpar, que consiste em substituir as relações (2.6) e (2.7) nas equações (1.43a) e (1.43b) e expandir em ordens de ε , chegando portanto a um resultado similar ao da Eq. (2.20). É preciso notar que as fórmulas de t_k e $\left. \frac{d}{d\varepsilon} t_k(z, \varepsilon) \right|_{\varepsilon=0}$ para as funções $\tilde{A}_F(z)$ são diferentes das usadas para as funções $\tilde{A}_G(z)$. Usando o processo de reflexões descrito na seção 1.3.2, partindo do ponto (\tilde{t}, \tilde{x}) podemos calcular t_1 tal que:

$$z = \tilde{t} - \tilde{x} = t_1(z, \varepsilon) - L[t_1(z, \varepsilon)] \quad (2.37)$$

onde, usando a equação (2.2), temos:

$$z = t_1(z, \varepsilon) - \varepsilon L_0 \Lambda_L [\alpha_L t(z, \varepsilon)]. \quad (2.38)$$

Substituindo $\varepsilon = 0$, temos

$$t_1(z, 0) = z. \quad (2.39)$$

Assim como fizemos anteriormente, o próximo passo é, usando o t_1 previamente calculado, calcular t_2 tal que:

$$t_1 + L(t_1) = t_2 + R(t_2) \quad (2.40)$$

onde, usando as equações (2.1), (2.2) e (2.39) e tomando $\varepsilon = 0$:

$$t_1(z, 0) = t_2(z, 0) + L_0 \rightarrow t_2(z, 0) = z - L_0, \quad (2.41)$$

e assim em diante. Podemos então dizer que:

$$t_k = z - (k - 1) L_0. \quad (2.42)$$

Por processo similar ao feito na seção anterior, podemos encontrar uma relação para as derivadas do tempo. Assim como feito anteriormente, partindo da derivada de (2.37), usando as equações (2.6), (2.7) e (2.42) e tomando $\varepsilon = 0$ teremos:

$$\left. \frac{\partial}{\partial \varepsilon} t_1(z, \varepsilon) \right|_{\varepsilon=0} = -L_0 \Lambda_L (\alpha_L z). \quad (2.43)$$

Para encontrarmos a derivada do tempo t_2 , devemos partir de (2.43) e das equações mencionadas acima, encontrando:

$$\left. \frac{\partial}{\partial \varepsilon} t_2(z, \varepsilon) \right|_{\varepsilon=0} = -L_0 \Lambda_R [\alpha_R (z - L_0)] + 2L_0 \Lambda_L (\alpha_L z), \quad (2.44)$$

e assim por diante. Podemos generalizar esses resultados da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{d\varepsilon} t_k(z, \varepsilon) \right|_{\varepsilon=0} &= 2L_0 \sum_{j=0}^{N_F(k)} \{ \Lambda_L [\alpha_L (z - 2jL_0)] - (1 - \delta_{j,0}) \Lambda_R [\alpha_R (z - (2j - 1)L_0)] \} + \\ &\quad - L_0 \theta_1(k) \Lambda_R [\alpha_R (z - (k - 1)L_0)] + \\ &\quad - L_0 [1 - \theta_1(k)] \Lambda_L [\alpha_L (z - (k - 1)L_0)], \end{aligned} \quad (2.45)$$

onde θ_1 segue a equação (2.34) e

$$N_F(k) = \begin{cases} \frac{k}{2} - 1, & \text{se } k \text{ é par} \\ \frac{k-1}{2}, & \text{se } k \text{ é ímpar.} \end{cases} \quad (2.46)$$

Com isso, podemos obter as expressões de $\tilde{A}_F(z)$ para $n_F(z)$ par e $\tilde{A}_F(z)$ para $n_F(z)$ ímpar, usando as relações (2.6), (2.7), (1.43a) e (1.43b), bem como as expressões (2.42) e (2.44). Teremos, portanto, para $n_F(z)$ par:

$$\begin{aligned} \tilde{A}_F(z) &\approx 1 + 4\varepsilon L_0 \sum_{k=0}^{\frac{n_F(z)}{2}} \left\{ (1 - \delta_{k,0}) \left[\frac{d}{dt} \Lambda_L (\alpha_L t) \Big|_{t=z-2(k-1)L_0} - \frac{d}{dt} \Lambda_R (\alpha_R t) \Big|_{t=z-(2k-1)L_0} \right] \right\} + \\ &\quad + 4\varepsilon^2 L_0 \sum_{k=0}^{\frac{n_F(z)}{2}} \left\{ (1 - \delta_{k,0}) \left[\frac{d^2}{dt^2} \Lambda_L (\alpha_L t) \Big|_{t=z-2(k-1)L_0} \times \right. \right. \\ &\quad \times \left. \left\{ 2L_0 \sum_{j=0}^{k-1} \{ \Lambda_L [\alpha_L (z - 2jL_0)] - (1 - \delta_{j,0}) \Lambda_R [\alpha_R (z - (2j - 1)L_0)] \} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - L_0 \Lambda_L [\alpha_L (z - 2(k - 1)L_0)] \right\} - \frac{d^2}{dt^2} \Lambda_R (\alpha_R t) \Big|_{t=z-(2k-1)L_0} \times \right. \\ &\quad \times \left. \left\{ 2L_0 \sum_{j=0}^{k-1} \{ \Lambda_L [\alpha_L (z - 2jL_0)] - (1 - \delta_{j,0}) \Lambda_R [\alpha_R (z - (2j - 1)L_0)] \} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - L_0 \Lambda_R [\alpha_R (z - (2k - 1)L_0)] \right\} \right\} + \\ &\quad + 8\varepsilon^2 L_0^2 \left\{ \sum_{k=0}^{\frac{n_F(z)}{2}} (1 - \delta_{k,0}) \left[\frac{d}{dt} \Lambda_L (\alpha_L t) \Big|_{t=z-2(k-1)L_0} - \frac{d}{dt} \Lambda_R (\alpha_R t) \Big|_{t=z-(2k-1)L_0} \right] \right\}^2, \end{aligned} \quad (2.47)$$

e para o caso em que $n_F(z)$ é ímpar:

$$\begin{aligned}
 \tilde{A}_F(z) \approx & 1 + 4\varepsilon L_0 \sum_{k=0}^{\frac{n_F(z)-1}{2}} \left[\frac{d}{dt} \Lambda_L(\alpha_L t)|_{t=z-2kL_0} - (1 - \delta_{k,0}) \frac{d}{dt} \Lambda_R(\alpha_R t)|_{t=z-(2k-1)L_0} \right] + \\
 & + 4\varepsilon^2 L_0 \sum_{k=0}^{\frac{n_F(z)-1}{2}} \left[\frac{d^2}{dt^2} \Lambda_L(\alpha_L t)|_{t=z-2kL_0} \times \right. \\
 & \times \left\{ 2L_0 \sum_{j=0}^k \{ \Lambda_L[\alpha_L(z-2jL_0)] - (1 - \delta_{j,0}) \Lambda_R[\alpha_R(z-(2j-1)L_0)] \} + \right. \\
 & \left. - L_0 \Lambda_L[\alpha_L(z-2kL_0)] \} - (1 - \delta_{k,0}) \frac{d^2}{dt^2} \Lambda_R(\alpha_R t)|_{t=z-(2k-1)L_0} \times \right. \\
 & \times \left\{ 2L_0 \sum_{j=0}^{k-1} \{ \Lambda_L[\alpha_L(z-2jL_0)] - (1 - \delta_{j,0}) \Lambda_R[\alpha_R(z-(2j-1)L_0)] \} + \right. \\
 & \left. - L_0 \Lambda_R[\alpha_R(z-(2k-1)L_0)] \} \right] + \\
 & + 8\varepsilon^2 L_0^2 \left\{ \sum_{k=0}^{\frac{n_F(z)-1}{2}} \frac{d}{dt} \Lambda_L(\alpha_L t)|_{t=z-2kL_0} - (1 - \delta_{k,0}) \frac{d}{dt} \Lambda_R(\alpha_R t)|_{t=z-(2k-1)L_0} \right\}^2.
 \end{aligned} \tag{2.48}$$

Conseguimos assim deduzir todas as expressões para as funções $\tilde{A}_G(z)$ e $\tilde{A}_F(z)$. Essas funções, além de comporem a descrição da densidade de energia, nos ajudarão na obtenção das expressões das funções \tilde{B}_G e \tilde{B}_F , uma vez que as funções \tilde{B} possuem em sua estrutura as funções \tilde{A} segundo as equações (1.44a) e (1.44b).

2.2 Reescrita das funções \tilde{B}_G e \tilde{B}_F

O cálculo das funções $\tilde{B}_G(z)$ e $\tilde{B}_F(z)$, para as leis de movimento (2.1) e (2.2), é feita da mesma maneira que a mostrada na seção anterior para as funções $\tilde{A}_G(z)$ e $\tilde{A}_F(z)$: vamos substituir as referidas leis de movimento nas equações (1.33a), (1.33b), (1.44a) e (1.44b), vamos expandir o resultado em ordens de ε e usar as relações (2.27), (2.32), (2.42) e (2.45).

Vamos especificar o caso da função $\tilde{B}_G(z)$ para $n_G(z)$ par. As demais funções tem deduções semelhantes.

$$\begin{aligned}
\tilde{B}_G(z) = & \sum_{k=0}^{\frac{n_G(z)}{2}} \left\{ \left[-\frac{1}{12\pi} \frac{L_0 \varepsilon \frac{d^3}{dt^3} \Lambda_R(\alpha R t) \Big|_{t=t_{2k-1}(z,\varepsilon)}}{\left[1 - L_0 \varepsilon \frac{d}{dt} \Lambda_R(\alpha R t) \Big|_{t=t_{2k-1}(z,\varepsilon)} \right] \left[1 + L_0 \varepsilon \frac{d}{dt} \Lambda_R(\alpha R t) \Big|_{t=t_{2k-1}(z,\varepsilon)} \right]^3} + \right. \\
& \left. - \frac{1}{4\pi} \frac{L_0^3 \pi^3 \left[\frac{d^2}{dt^2} \Lambda_R(\alpha R t) \Big|_{t=t_{2k-1}(z,\varepsilon)} \right]^2 \frac{d}{dt} \Lambda_R(\alpha R t) \Big|_{t=t_{2k-1}(z,\varepsilon)}}{\left[1 - L_0 \varepsilon \frac{d}{dt} \Lambda_R(\alpha R t) \Big|_{t=t_{2k-1}(z,\varepsilon)} \right]^2 \left[1 + L_0 \varepsilon \frac{d}{dt} \Lambda_R(\alpha R t) \Big|_{t=t_{2k-1}(z,\varepsilon)} \right]^4} \right] \times \\
& \times \left[\frac{1 + \varepsilon L_0 \frac{d}{dt} \Lambda_R(\alpha R t) \Big|_{t=t_{2k-1}(z,\varepsilon)}}{1 - \varepsilon L_0 \frac{d}{dt} \Lambda_R(\alpha R t) \Big|_{t=t_{2k-1}(z,\varepsilon)}} \frac{1 - \varepsilon L_0 \frac{d}{dt} \Lambda_L(\alpha L t) \Big|_{t=t_{2k}(z,\varepsilon)}}{1 + \varepsilon L_0 \frac{d}{dt} \Lambda_L(\alpha L t) \Big|_{t=t_{2k}(z,\varepsilon)}} \right]^2 + \\
& + \frac{1}{12\pi} \frac{L_0 \varepsilon \frac{d^3}{dt^3} \Lambda_L(\alpha L t) \Big|_{t=t_{2k}(z,\varepsilon)}}{\left[1 - L_0 \varepsilon \frac{d}{dt} \Lambda_L(\alpha L t) \Big|_{t=t_{2k}(z,\varepsilon)} \right] \left[1 + L_0 \varepsilon \frac{d}{dt} \Lambda_L(\alpha L t) \Big|_{t=t_{2k}(z,\varepsilon)} \right]^3} + \\
& \left. + \frac{1}{4\pi} \frac{L_0^3 \pi^3 \left[\frac{d^2}{dt^2} \Lambda_L(\alpha L t) \Big|_{t=t_{2k}(z,\varepsilon)} \right]^2 \frac{d}{dt} \Lambda_L(\alpha L t) \Big|_{t=t_{2k}(z,\varepsilon)}}{\left[1 - L_0 \varepsilon \frac{d}{dt} \Lambda_L(\alpha L t) \Big|_{t=t_{2k}(z,\varepsilon)} \right]^2 \left[1 + L_0 \varepsilon \frac{d}{dt} \Lambda_L(\alpha L t) \Big|_{t=t_{2k}(z,\varepsilon)} \right]^4} \right] (1 - \delta_{k,0}) \times \\
& \times \prod_{j=0}^k \left[(1 - \delta_{j,0}) \left(\frac{1 - \varepsilon L_0 \frac{d}{dt} \Lambda_R(\alpha R t) \Big|_{t=t_{2j-1}(z,\varepsilon)}}{1 + \varepsilon L_0 \frac{d}{dt} \Lambda_R(\alpha R t) \Big|_{t=t_{2j-1}(z,\varepsilon)}} \frac{1 + \varepsilon L_0 \frac{d}{dt} \Lambda_L(\alpha L t) \Big|_{t=t_{2j}(z,\varepsilon)}}{1 - \varepsilon L_0 \frac{d}{dt} \Lambda_L(\alpha L t) \Big|_{t=t_{2j}(z,\varepsilon)}} \right)^2 + \delta_{k,0} \right] \Big\}. \tag{2.49}
\end{aligned}$$

Expandindo o resultado acima em ordens de ε encontramos que:

$$\begin{aligned}
\tilde{B}_G(z) \approx & \frac{\varepsilon L_0}{12\pi} \sum_{k=0}^{\frac{n_G(z)}{2}} \left\{ (1 - \delta_{k,0}) \left[\frac{d^3}{dt^3} \Lambda_L(\alpha L t) \Big|_{t=t_{2k}(z,0)} - \frac{d^3}{dt^3} \Lambda_R(\alpha R t) \Big|_{t=t_{2k-1}(z,0)} \right] \right\} + \\
& + \frac{\varepsilon^2 L_0}{12\pi} \sum_{k=0}^{\frac{n_G(z)}{2}} \left\{ (1 - \delta_{k,0}) \left[4L_0 \left(\frac{d^3}{dt^3} \Lambda_L(\alpha L t) \Big|_{t=t_{2k}(z,0)} - \frac{d^3}{dt^3} \Lambda_R(\alpha R t) \Big|_{t=t_{2k-1}(z,0)} \right) \times \right. \right. \\
& \times \sum_{j=0}^k \left\{ (1 - \delta_{j,0}) \left[\frac{d}{dt} \Lambda_L(\alpha L t) \Big|_{t=t_{2j}(z,0)} - \frac{d}{dt} \Lambda_R(\alpha R t) \Big|_{t=t_{2j-1}(z,0)} \right] \right\} + \\
& + 2L_0 \frac{d^3}{dt^3} \Lambda_R(\alpha R t) \Big|_{t=t_{2k-1}(z,0)} \left[2 \frac{d}{dt} \Lambda_L(\alpha L t) \Big|_{t=t_{2k}(z,0)} - \frac{d}{dt} \Lambda_R(\alpha R t) \Big|_{t=t_{2k-1}(z,0)} \right] + \\
& - 2L_0 \frac{d^3}{dt^3} \Lambda_L(\alpha L t) \Big|_{t=t_{2k}(z,0)} \frac{d}{dt} \Lambda_L(\alpha L t) \Big|_{t=t_{2k}(z,0)} + \frac{d^4}{dt^4} \Lambda_L(\alpha L t) \Big|_{t=t_{2k}(z,0)} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} t_{2k}(z,\varepsilon) \Big|_{\varepsilon=0} + \\
& \left. - \frac{d^4}{dt^4} \Lambda_R(\alpha R t) \Big|_{t=t_{2k-1}(z,0)} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} t_{2k-1}(z,\varepsilon) \Big|_{\varepsilon=0} \right] \Big\}. \tag{2.50}
\end{aligned}$$

Usando as equações (2.27) e (2.32), encontramos que:

$$\begin{aligned}
\tilde{B}_G(z) \approx & \frac{\varepsilon L_0}{12\pi} \sum_{k=0}^{\frac{n_G(z)}{2}} \left\{ (1 - \delta_{k,0}) \left[\frac{d^3}{dt^3} \Lambda_L(\alpha_L t) \Big|_{t=z-2kL_0} - \frac{d^3}{dt^3} \Lambda_R(\alpha_R t) \Big|_{t=z-(2k-1)L_0} \right] \right\} + \\
& + \frac{\varepsilon^2 L_0^2}{12\pi} \sum_{k=0}^{\frac{n_G(z)}{2}} \left\{ (1 - \delta_{k,0}) \left[4 \left(\frac{d^3}{dt^3} \Lambda_L(\alpha_L t) \Big|_{t=z-2kL_0} - \frac{d^3}{dt^3} \Lambda_R(\alpha_R t) \Big|_{t=z-(2k-1)L_0} \right) \right] \times \right. \\
& \times \sum_{j=0}^k \left\{ (1 - \delta_{j,0}) \left[\frac{d}{dt} \Lambda_L(\alpha_L t) \Big|_{t=z-2jL_0} - \frac{d}{dt} \Lambda_R(\alpha_R t) \Big|_{t=z-(2j-1)L_0} \right] \right\} + \\
& + 2 \frac{d^3}{dt^3} \Lambda_R(\alpha_R t) \Big|_{t=z-(2k-1)L_0} \left[2 \frac{d}{dt} \Lambda_L(\alpha_L t) \Big|_{t=z-2kL_0} - \frac{d}{dt} \Lambda_R(\alpha_R t) \Big|_{t=z-(2k-1)L_0} \right] + \\
& - 2 \frac{d^3}{dt^3} \Lambda_L(\alpha_L t) \Big|_{t=z-2kL_0} \frac{d}{dt} \Lambda_L(\alpha_L t) \Big|_{t=z-2kL_0} + \frac{d^4}{dt^4} \Lambda_L(\alpha_L t) \Big|_{t=z-2kL_0} \times \\
& \times \left\{ 2 \sum_{j=0}^k (1 - \delta_{j,0}) \{ \Lambda_L[\alpha_L(z - 2jL_0)] - \Lambda_R[\alpha_R(z - (2j-1)L_0)] \} + \right. \\
& \left. - \Lambda_L[\alpha_L(z - 2kL_0)] \right\} - \frac{d^4}{dt^4} \Lambda_R(\alpha_R t) \Big|_{t=z-(2k-1)L_0} \times \\
& \times \left\{ 2 \sum_{j=0}^{k-1} (1 - \delta_{j,0}) \{ \Lambda_L[\alpha_L(z - 2jL_0)] - \Lambda_R[\alpha_R(z - (2j-1)L_0)] \} + \right. \\
& \left. - \Lambda_R[\alpha_R(z - (2k-1)L_0)] \right\} \}. \tag{2.51}
\end{aligned}$$

De maneira similar podemos conseguir os outros termos $\tilde{B}(z)$.

Para a função $\tilde{B}_G(z)$ para n_G ímpar, temos:

$$\begin{aligned}
\tilde{B}_G(z) \approx & \frac{\varepsilon L_0}{12\pi} \sum_{k=0}^{\frac{n_G(z)-1}{2}} \left\{ (1 - \delta_{k,0}) \frac{d^3}{dt^3} \Lambda_L(\alpha_L t) \Big|_{t=z-2kL_0} - \frac{d^3}{dt^3} \Lambda_R(\alpha_R t) \Big|_{t=z-(2k+1)L_0} \right\} + \\
& + \frac{\varepsilon^2 L_0^2}{12\pi} \sum_{k=0}^{\frac{n_G(z)-1}{2}} \left[4 \left((1 - \delta_{k,0}) \frac{d^3}{dt^3} \Lambda_L(\alpha_L t) \Big|_{t=z-2kL_0} - \frac{d^3}{dt^3} \Lambda_R(\alpha_R t) \Big|_{t=z-(2k+1)L_0} \right) \times \right. \\
& \times \sum_{j=0}^k \left\{ (1 - \delta_{j,0}) \left[\frac{d}{dt} \Lambda_L(\alpha_L t) \Big|_{t=z-2jL_0} - \frac{d}{dt} \Lambda_R(\alpha_R t) \Big|_{t=z-(2j-1)L_0} \right] \right\} + \\
& + 2 \frac{d^3}{dt^3} \Lambda_R(\alpha_R t) \Big|_{t=z-(2k+1)L_0} \frac{d}{dt} \Lambda_R(\alpha_R t) \Big|_{t=z-(2k+1)L_0} + \\
& - 2(1 - \delta_{k,0}) \frac{d^3}{dt^3} \Lambda_L(\alpha_L t) \Big|_{t=z-2kL_0} \frac{d}{dt} \Lambda_L(\alpha_L t) \Big|_{t=z-2kL_0} + \\
& + (1 - \delta_{k,0}) \frac{d^4}{dt^4} \Lambda_L(\alpha_L t) \Big|_{t=z-2kL_0} \times \\
& \times \left\{ 2 \sum_{j=0}^k (1 - \delta_{j,0}) \{ \Lambda_L[\alpha_L(z - 2jL_0)] - \Lambda_R[\alpha_R(z - (2j - 1)L_0)] \} + \right. \\
& - \Lambda_L[\alpha_L(z - 2kL_0)] \} - \frac{d^4}{dt^4} \Lambda_R(\alpha_R t) \Big|_{t=z-(2k+1)L_0} \times \\
& \times \left\{ 2 \sum_{j=0}^k (1 - \delta_{j,0}) \{ \Lambda_L[\alpha_L(z - 2jL_0)] - \Lambda_R[\alpha_R(z - (2j - 1)L_0)] \} + \right. \\
& \left. - \Lambda_R[\alpha_R(z - (2k + 1)L_0)] \} \right\}. \tag{2.52}
\end{aligned}$$

Para $\tilde{B}_F(z)$ para n_F par temos:

$$\begin{aligned}
\tilde{B}_F(z) \approx & \frac{\varepsilon L_0}{12\pi} \sum_{k=0}^{\frac{n_F(z)}{2}} \left\{ (1 - \delta_{k,0}) \left[\frac{d^3}{dt^3} \Lambda_L(\alpha_L t) \Big|_{t=z-2(k-1)L_0} - \frac{d^3}{dt^3} \Lambda_R(\alpha_R t) \Big|_{t=z-(2k-1)L_0} \right] \right\} + \\
& + \frac{\varepsilon^2 L_0^2}{12\pi} \sum_{k=0}^{\frac{n_F(z)}{2}} \left\{ (1 - \delta_{k,0}) \left[4 \left(\frac{d^3}{dt^3} \Lambda_L(\alpha_L t) \Big|_{t=z-2(k-1)L_0} - \frac{d^3}{dt^3} \Lambda_R(\alpha_R t) \Big|_{t=z-(2k-1)L_0} \right) \right] \times \right. \\
& \times \sum_{j=0}^k \left\{ \frac{d}{dt} \Lambda_L(\alpha_L t) \Big|_{t=z-2jL_0} - (1 - \delta_{j,0}) \frac{d}{dt} \Lambda_R(\alpha_R t) \Big|_{t=z-(2j-1)L_0} \right\} + \\
& + 2 \frac{d^3}{dt^3} \Lambda_R(\alpha_R t) \Big|_{t=z-(2k-1)L_0} \left[2 \frac{d}{dt} \Lambda_L(\alpha_L t) \Big|_{t=z-2kL_0} - \frac{d}{dt} \Lambda_R(\alpha_R t) \Big|_{t=z-(2k-1)L_0} \right] + \\
& - 4 \frac{d^3}{dt^3} \Lambda_L(\alpha_L t) \Big|_{t=z-2(k-1)L_0} \left[\frac{d}{dt} \Lambda_L(\alpha_L t) \Big|_{t=z-2kL_0} + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \Lambda_L(\alpha_L t) \Big|_{t=z-2(k-1)L_0} + \right. \\
& \left. - \frac{d}{dt} \Lambda_R(\alpha_R t) \Big|_{t=z-(2k-1)L_0} \right] + \frac{d^4}{dt^4} \Lambda_L(\alpha_L t) \Big|_{t=z-2(k-1)L_0} \times \\
& \left\{ 2 \sum_{j=0}^{k-1} \{ \Lambda_L[\alpha_L(z-2jL_0)] - (1 - \delta_{j,0}) \Lambda_R[\alpha_R(z-(2j-1)L_0)] \} + \right. \\
& \left. - \Lambda_L[\alpha_L(z-2(k-1)L_0)] \} - \frac{d^4}{dt^4} \Lambda_R(\alpha_R t) \Big|_{t=z-(2k-1)L_0} \times \right. \\
& \times \left\{ 2 \sum_{j=0}^{k-1} \{ \Lambda_L[\alpha_L(z-2jL_0)] - (1 - \delta_{j,0}) \Lambda_R[\alpha_R(z-(2j-1)L_0)] \} \right. \\
& \left. \left. - \Lambda_R[\alpha_R(z-(2k-1)L_0)] \} \right\}. \tag{2.53}
\end{aligned}$$

Para $\tilde{B}_F(z)$ para n_F ímpar obtemos:

$$\begin{aligned}
\tilde{B}_F(z) \approx & \frac{\varepsilon L_0}{12\pi} \sum_{k=0}^{\frac{n_F(z)-1}{2}} \left\{ \frac{d^3}{dt^3} \Lambda_L(\alpha_L t) \Big|_{t=z-2kL_0} - (1 - \delta_{k,0}) \frac{d^3}{dt^3} \Lambda_R(\alpha_R t) \Big|_{t=z-(2k-1)L_0} \right\} + \\
& + \frac{\varepsilon^2 L_0^2}{12\pi} \sum_{k=0}^{\frac{n_F(z)-1}{2}} \left[4 \left(\frac{d^3}{dt^3} \Lambda_L(\alpha_L t) \Big|_{t=z-2kL_0} - (1 - \delta_{k,0}) \frac{d^3}{dt^3} \Lambda_R(\alpha_R t) \Big|_{t=z-(2k-1)L_0} \right) \times \right. \\
& \times \sum_{j=0}^k \left\{ (1 - \delta_{j,0}) \left[\frac{d}{dt} \Lambda_L(\alpha_L t) \Big|_{t=z-2jL_0} - \frac{d}{dt} \Lambda_R(\alpha_R t) \Big|_{t=z-(2j-1)L_0} \right] \right\} + \\
& + 2(1 - \delta_{k,0}) \frac{d^3}{dt^3} \Lambda_R(\alpha_R t) \Big|_{t=z-(2k+1)L_0} \left[2 \frac{d}{dt} \Lambda_L(\alpha_L t) \Big|_{t=z-2kL_0} + \right. \\
& \left. - \frac{d}{dt} \Lambda_R(\alpha_R t) \Big|_{t=z-(2k-1)L_0} \right] + \\
& - 2 \frac{d^3}{dt^3} \Lambda_L(\alpha_L t) \Big|_{t=z-2kL_0} \frac{d}{dt} \Lambda_L(\alpha_L t) \Big|_{t=z-2kL_0} + \frac{d^4}{dt^4} \Lambda_L(\alpha_L t) \Big|_{t=z-2kL_0} \times \\
& \times \left\{ 2 \sum_{j=0}^k \{ \Lambda_L[\alpha_L(z-2jL_0)] - (1 - \delta_{j,0}) \Lambda_R[\alpha_R(z-(2j-1)L_0)] \} + \right. \\
& \left. - \Lambda_L[\alpha_L(z-2kL_0)] \} - (1 - \delta_{k,0}) \frac{d^4}{dt^4} \Lambda_R(\alpha_R t) \Big|_{t=z-(2k-1)L_0} \times \right. \\
& \times \left\{ 2 \sum_{j=0}^{k-1} \{ \Lambda_L[\alpha_L(z-2jL_0)] - (1 - \delta_{j,0}) \Lambda_R[\alpha_R(z-(2j-1)L_0)] \} + \right. \\
& \left. - \Lambda_R[\alpha_R(z-(2k-1)L_0)] \} \right\}. \tag{2.54}
\end{aligned}$$

Com isso temos todas as funções que descrevem a densidade de energia na cavidade em função dos movimentos das fronteiras (2.1) e (2.2). Destacamos nas expressões aqui deduzidas que, como podemos perceber na estrutura comum das funções $\tilde{A}(z)$ e $\tilde{B}(z)$, na situação estática (pelos movimentos das fronteiras cessarem ou por calculando a densidade de energia na zona estática na qual $n_G(z) = n_F(z) = 0$) recuperamos a densidade de energia estática de Casimir, uma vez que para esses casos qualquer uma das funções \tilde{A} será igual a 1, segundo as equações (2.35), (2.36), (2.47) e (2.48), e qualquer uma das funções \tilde{B} será igual a 0, segundo (2.51), (2.52), (2.53) e (2.54).

Outro fato que merece destaque é que o procedimento descrito nesse capítulo pode ser diretamente estendido para ordens maiores de ε , nos garantindo valores cada vez mais exatos para a densidade de energia.

Capítulo 3

Aplicação dos métodos ao fenômeno de interferência

Vimos nos capítulos anteriores como calcular a densidade de energia na cavidade com duas fronteiras oscilantes usando as leis de movimento das fronteiras. Isso nos traz uma possibilidade de aplicação direta: a análise do fenômeno de interferência na densidade de energia. Esse problema foi tratado na Ref. [24] com relação à taxa de produção de partículas. Nosso objetivo é analisar o mesmo fenômeno, mas do ponto de vista da densidade de energia e posteriormente da energia na cavidade e correlacionar com as conclusões obtidas em [24]. Para tanto, o primeiro passo é extrair as equações dos termos de interferência para a densidade de energia, a partir do que foi encontrado nas seções 2.1 e 2.2.

3.1 Termos de interferência para movimentos genéricos

O termo de interferência pode ser obtido da seguinte maneira:

$$\langle T_{00} \rangle_{\text{int}} = \langle T_{00} \rangle - \langle T_{00} \rangle_L - \langle T_{00} \rangle_R + \mathcal{T}_{\text{cas}}, \quad (3.1)$$

onde $\langle T_{00} \rangle$ representa a densidade de energia quando as duas fronteiras estão se movimentando, $\langle T_{00} \rangle_L$ é a densidade de energia quando apenas a fronteira da direita está se movimentando e $\langle T_{00} \rangle_R$ é a densidade de energia quando apenas a fronteira da esquerda está se movimentando.

Sendo assim, os termos de interferência são aqueles que são funções das leis de movimento $L(t)$ e $R(t)$, simultaneamente. Consequentemente, não haverá termos de interferência de primeira ordem em ε .

Cada um dos termos \tilde{A} e \tilde{B} também pode ser escrito dessa forma:

$$\tilde{A} = \tilde{A}_R + \tilde{A}_L + \tilde{A}^{\text{int}}, \quad (3.2)$$

$$\tilde{B} = \tilde{B}_R + \tilde{B}_L + \tilde{B}^{\text{int}}. \quad (3.3)$$

Assim sendo, podemos escrever:

$$\langle T_{00} \rangle_{\text{int}} = -f_{\text{est}} \left[\tilde{A}_G^{\text{int}}(v) + \tilde{A}_F^{\text{int}}(u) \right] - \tilde{B}_G^{\text{int}}(v) - \tilde{B}_F^{\text{int}}(u), \quad (3.4)$$

Para o termo $\tilde{A}_G(z)$ para $n_G(z)$ par:

$$\begin{aligned} \tilde{A}_G^{\text{int}}(z) \approx & -8\varepsilon^2 L_0^2 \sum_{k=0}^{\frac{n_G(z)}{2}} \left\{ (1 - \delta_{k,0}) \left[\frac{d^2}{dt^2} \Lambda_L(\alpha_L t) \Big|_{t=z-2kL_0} \sum_{j=0}^k (1 - \delta_{j,0}) \Lambda_R[\alpha_R(z - (2j-1)L_0)] + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{d^2}{dt^2} \Lambda_R(\alpha_R t) \Big|_{t=z-(2k-1)L_0} \sum_{j=0}^{k-1} (1 - \delta_{j,0}) \Lambda_L[\alpha_L(z - 2jL_0)] \right] \right\} + \\ & -16\varepsilon^2 L_0^2 \left[\sum_{k=0}^{\frac{n_G(z)}{2}} (1 - \delta_{k,0}) \frac{d}{dt} \Lambda_L(\alpha_L t) \Big|_{t=z-2kL_0} \right] \left[\sum_{k=0}^{\frac{n_G(z)}{2}} (1 - \delta_{k,0}) \frac{d}{dt} \Lambda_R(\alpha_R t) \Big|_{t=z-(2k-1)L_0} \right] \end{aligned} \quad (3.5)$$

Para o termo $\tilde{A}_G(z)$ para $n_G(z)$ ímpar:

$$\begin{aligned} \tilde{A}_G^{\text{int}}(z) \approx & -8\varepsilon^2 L_0^2 \sum_{k=0}^{\frac{n_G(z)-1}{2}} \left[(1 - \delta_{k,0}) \frac{d^2}{dt^2} \Lambda_L(\alpha_L t) \Big|_{t=z-2kL_0} \sum_{j=0}^k (1 - \delta_{j,0}) \Lambda_R[\alpha_R(z - (2j-1)L_0)] + \right. \\ & \left. + \frac{d^2}{dt^2} \Lambda_R(\alpha_R t) \Big|_{t=z-(2k+1)L_0} \sum_{j=0}^k (1 - \delta_{j,0}) \Lambda_L[\alpha_L(z - 2jL_0)] \right] + \\ & -16\varepsilon^2 L_0^2 \left[\sum_{k=0}^{\frac{n_G(z)-1}{2}} (1 - \delta_{k,0}) \frac{d}{dt} \Lambda_L(\alpha_L t) \Big|_{t=z-2kL_0} \right] \left[\sum_{k=0}^{\frac{n_G(z)-1}{2}} \frac{d}{dt} \Lambda_R(\alpha_R t) \Big|_{t=z-(2k+1)L_0} \right] \end{aligned} \quad (3.6)$$

Para $\tilde{A}_F(z)$ para $n_F(z)$ par:

$$\begin{aligned} \tilde{A}_F^{\text{int}}(z) = & -8\varepsilon^2 L_0^2 \sum_{k=0}^{\frac{n_F(z)}{2}} \left\{ (1 - \delta_{k,0}) \left[\frac{d^2}{dt^2} \Lambda_L(\alpha_L t) \Big|_{t=z-2(k-1)L_0} \sum_{j=0}^{k-1} (1 - \delta_{j,0}) \Lambda_R[\alpha_R(z - (2j-1)L_0)] + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{d^2}{dt^2} \Lambda_R(\alpha_R t) \Big|_{t=z-(2k-1)L_0} \sum_{j=0}^{k-1} \Lambda_L[\alpha_L(z - 2jL_0)] \right] \right\} + \\ & -16\varepsilon^2 L_0^2 \left[\sum_{k=0}^{\frac{n_F(z)}{2}} (1 - \delta_{k,0}) \frac{d}{dt} \Lambda_L(\alpha_L t) \Big|_{t=z-2(k-1)L_0} \right] \left[\sum_{k=0}^{\frac{n_F(z)}{2}} (1 - \delta_{k,0}) \frac{d}{dt} \Lambda_R(\alpha_R t) \Big|_{t=z-(2k-1)L_0} \right] \end{aligned} \quad (3.7)$$

Para $\tilde{A}_F(z)$ para $n_F(z)$ ímpar:

$$\begin{aligned} \tilde{A}_F^{\text{int}}(z) \approx & -8\varepsilon^2 L_0^2 \sum_{k=0}^{\frac{n_F(z)-1}{2}} \left[\frac{d^2}{dt^2} \Lambda_L(\alpha_L t) \Big|_{t=z-2kL_0} \left\{ \sum_{j=0}^k (1 - \delta_{j,0}) \Lambda_R[\alpha_R(z - (2j-1)L_0)] \right\} + \right. \\ & \left. + (1 - \delta_{k,0}) \frac{d^2}{dt^2} \Lambda_R(\alpha_R t) \Big|_{t=z-(2k-1)L_0} \left\{ \sum_{j=0}^{k-1} \Lambda_L[\alpha_L(z - 2jL_0)] \right\} \right] + \\ & -16\varepsilon^2 L_0^2 \left[\sum_{k=0}^{\frac{n_F(z)-1}{2}} \frac{d}{dt} \Lambda_L(\alpha_L t) \Big|_{t=z-2kL_0} \right] \left[\sum_{k=0}^{\frac{n_F(z)-1}{2}} (1 - \delta_{k,0}) \frac{d}{dt} \Lambda_R(\alpha_R t) \Big|_{t=z-(2k-1)L_0} \right] \end{aligned} \quad (3.8)$$

De maneira similar podemos deduzir os termos de interferência nas funções $\tilde{B}(z)$. Para a função $\tilde{B}_G(z)$ para $n_G(z)$ par:

$$\begin{aligned} \tilde{B}_G^{\text{int}}(z) \approx & -\frac{\varepsilon^2 L_0^2}{6\pi} \sum_{k=0}^{\frac{n_G(z)}{2}} \left\{ (1 - \delta_{k,0}) \left[2 \frac{d^3}{dt^3} \Lambda_L(\alpha_L t) \Big|_{t=z-2kL_0} \sum_{j=0}^k (1 - \delta_{j,0}) \frac{d}{dt} \Lambda_R(\alpha_R t) \Big|_{t=z-(2j-1)L_0} + \right. \right. \\ & + 2 \frac{d^3}{dt^3} \Lambda_R(\alpha_R t) \Big|_{t=z-(2k-1)L_0} \sum_{j=0}^k (1 - \delta_{j,0}) \frac{d}{dt} \Lambda_L(\alpha_L t) \Big|_{t=z-2jL_0} + \\ & + 2 \frac{d^3}{dt^3} \Lambda_R(\alpha_R t) \Big|_{t=z-(2k-1)L_0} \frac{d}{dt} \Lambda_L(\alpha_L t) \Big|_{t=z-2kL_0} - \frac{d^4}{dt^4} \Lambda_L(\alpha_L t) \Big|_{t=z-2kL_0} \times \\ & \times \sum_{j=0}^k (1 - \delta_{j,0}) \Lambda_R[\alpha_R(z - (2j-1)L_0)] - \frac{d^4}{dt^4} \Lambda_R(\alpha_R t) \Big|_{t=z-(2k-1)L_0} \times \\ & \left. \left. \times \sum_{j=0}^{k-1} (1 - \delta_{j,0}) \Lambda_L[\alpha_L(z - 2jL_0)] \right] \right\}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Para $\tilde{B}_G(z)$ para $n_G(z)$ ímpar:

$$\begin{aligned}
\tilde{B}_G^{\text{int}}(z) \approx & -\frac{\varepsilon^2 L_0^2}{6\pi} \sum_{k=0}^{\frac{n_G(z)-1}{2}} \left[2(1 - \delta_{k,0}) \frac{d^3}{dt^3} \Lambda_L(\alpha_L t) \Big|_{t=z-2kL_0} \sum_{j=0}^k (1 - \delta_{j,0}) \frac{d}{dt} \Lambda_R(\alpha_R t) \Big|_{t=z-(2j-1)L_0} + \right. \\
& + 2 \frac{d^3}{dt^3} \Lambda_R(\alpha_R t) \Big|_{t=z-(2k+1)L_0} \sum_{j=0}^k (1 - \delta_{j,0}) \frac{d}{dt} \Lambda_L(\alpha_L t) \Big|_{t=z-2jL_0} \\
& + (1 - \delta_{k,0}) \frac{d^4}{dt^4} \Lambda_L(\alpha_L t) \Big|_{t=z-2kL_0} \sum_{j=0}^k (1 - \delta_{j,0}) \Lambda_R[\alpha_R(z - (2j-1)L_0)] + \\
& \left. + \frac{d^4}{dt^4} \Lambda_R(\alpha_R t) \Big|_{t=z-(2k+1)L_0} \sum_{j=0}^k (1 - \delta_{j,0}) \Lambda_L[\alpha_L(z - 2jL_0)] \right]. \tag{3.10}
\end{aligned}$$

Para $\tilde{B}_F(z)$ para $n_F(z)$ par:

$$\begin{aligned}
\tilde{B}_F^{\text{int}}(z) \approx & -\frac{\varepsilon^2 L_0^2}{6\pi} \sum_{k=0}^{\frac{n_F(z)}{2}} \left\{ (1 - \delta_{k,0}) \left[2 \frac{d^3}{dt^3} \Lambda_L(\alpha_L t) \Big|_{t=z-2(k-1)L_0} \sum_{j=0}^k (1 - \delta_{j,0}) \frac{d}{dt} \Lambda_R(\alpha_R t) \Big|_{t=z-(2j-1)L_0} + \right. \right. \\
& + 2 \frac{d^3}{dt^3} \Lambda_R(\alpha_R t) \Big|_{t=z-(2k-1)L_0} \sum_{j=0}^k \frac{d}{dt} \Lambda_L(\alpha_L t) \Big|_{t=z-2jL_0} \\
& - 2 \frac{d^3}{dt^3} \Lambda_R(\alpha_R t) \Big|_{t=z-(2k-1)L_0} \frac{d}{dt} \Lambda_L(\alpha_L t) \Big|_{t=z-2kL_0} + \\
& - 2 \frac{d^3}{dt^3} \Lambda_L(\alpha_L t) \Big|_{t=z-2(k-1)L_0} \frac{d}{dt} \Lambda_R(\alpha_R t) \Big|_{t=z-(2k-1)L_0} + \\
& + \frac{d^4}{dt^4} \Lambda_L(\alpha_L t) \Big|_{t=z-2(k-1)L_0} \sum_{j=0}^{k-1} (1 - \delta_{j,0}) \Lambda_R[\alpha_R(z - (2j-1)L_0)] + \\
& \left. + \frac{d^4}{dt^4} \Lambda_R(\alpha_R t) \Big|_{t=z-(2k-1)L_0} \sum_{j=0}^{k-1} \Lambda_L[\alpha_L(z - 2jL_0)] \right\}. \tag{3.11}
\end{aligned}$$

E para $\tilde{B}_F(z)$ para $n_F(z)$ ímpar:

$$\begin{aligned}
\tilde{B}_F^{\text{int}}(z) \approx & -\frac{\varepsilon^2 L_0^2}{6\pi} \sum_{k=0}^{\frac{n_F(z)-1}{2}} \left[2 \frac{d^3}{dt^3} \Lambda_L(\alpha_L t) \Big|_{t=z-2kL_0} \sum_{j=0}^k (1-\delta_{j,0}) \frac{d}{dt} \Lambda_R(\alpha_R t) \Big|_{t=z-(2j-1)L_0} + \right. \\
& + 2(1-\delta_{k,0}) \frac{d^3}{dt^3} \Lambda_R(\alpha_R t) \Big|_{t=z-(2k-1)L_0} \sum_{j=0}^k (1-\delta_{j,0}) \frac{d}{dt} \Lambda_L(\alpha_L t) \Big|_{t=z-2jL_0} + \\
& - 2(1-\delta_{k,0}) \frac{d^3}{dt^3} \Lambda_R(\alpha_R t) \Big|_{t=z-(2k-1)L_0} \frac{d}{dt} \Lambda_L(\alpha_L t) \Big|_{t=z-2kL_0} + \\
& + \frac{d^4}{dt^4} \Lambda_L(\alpha_L t) \Big|_{t=z-2kL_0} \sum_{j=0}^k (1-\delta_{j,0}) \Lambda_R[\alpha_R(z-(2j-1)L_0)] + \\
& \left. + (1-\delta_{k,0}) \frac{d^4}{dt^4} \Lambda_R(\alpha_R t) \Big|_{t=z-(2k-1)L_0} \sum_{j=0}^{k-1} \Lambda_L[\alpha_L(z-2jL_0)] \right]. \quad (3.12)
\end{aligned}$$

Com isso temos todos os termos de interferência relacionados à densidade de energia para movimentos genéricos. Como era de se esperar, as equações acima são tais que, caso qualquer uma das fronteiras esteja em repouso, ou ainda se tivermos $n_G(z) = n_F(z) = 0$ (o que corresponde à situação estática), os termos de interferência serão nulos. O que faremos na próxima seção é aplicar às equações acima as leis de movimento estudadas em [24].

3.2 Aplicação

Vimos na seção passada a dedução dos termos de interferência na densidade de energia. Podemos, a partir dessas expressões, obter os termos de interferência no contexto das leis de movimento propostas na Ref. [24]. Nessa referência os autores consideraram leis de movimento dadas pelas equações (2.14) e (2.15). Comparando com (2.1) e (2.2) temos:

$$\Lambda_L(t) = a_L \sin(\Omega_L t + \phi) \quad (3.13a)$$

$$\Lambda_R(t) = a_R \sin(\Omega_R t), \quad (3.13b)$$

onde a_L e a_R as amplitudes de oscilação das fronteiras da esquerda e da direita, respectivamente; $\Omega_q = \gamma_q \pi / L_0$ a frequência de oscilação das fronteiras, com γ_q sendo um inteiro que indica quantas vezes a frequência de vibração das fronteiras é múltiplo da frequência de vibração natural do campo na cavidade, e ϕ a diferença de fase entre os movimentos, que deve ser múltipla inteira de π e identificamos $\alpha_R = \Omega_R$ e $\alpha_L = \Omega_L$.

Na Ref. [24], os autores encontraram a seguinte relação para $\Omega_R = \Omega_L$:

$$N_k = N_k^L + N_k^R - (-1)^\gamma \sqrt{N_k^L N_k^R} \cos \phi, \quad (3.14)$$

onde N_k é o número de partículas produzidas no modo k quando as duas fronteiras estão se movendo; N_k^L e N_k^R são os números de partículas criados quando apenas a fronteira da esquerda ou a da direita está em movimento, respectivamente. Os autores resumem as suas conclusões com relação ao fenômeno de interferência da seguinte maneira: quando a frequência de vibração das fronteiras é um múltiplo par da frequência fundamental de vibração do campo e $\phi = 0$ há uma interferência construtiva máxima na produção de partículas. Se a frequência de vibração das fronteiras é um múltiplo par da frequência fundamental e $\phi = \pi$ há uma interferência destrutiva máxima. Quando a frequência de vibração é um múltiplo ímpar, e $\phi = \pi$, teremos interferência construtiva máxima e quando $\phi = 0$ teremos interferência destrutiva máxima.

Vamos obter $\tilde{A}_G^{\text{int}}(z)$ para $n_G(z)$ para as leis de movimento descritas na Ref. [24], mencionadas acima.

Partindo da equação (3.5) e substituindo (3.13a) e (3.13b) temos:

$$\begin{aligned} \tilde{A}_G^{\text{int}}(z) &= -8\varepsilon^2 L_0^2 \sum_{k=0}^{\frac{n_G(z)}{2}} \left\{ (1 - \delta_{k,0}) \left[-a_L \left(\frac{\gamma_L \pi}{L_0} \right)^2 \sin \left[\frac{\gamma_L \pi (z - 2kL_0)}{L_0} + \phi \right] \right] \times \right. \\ &\quad \times \sum_{j=0}^k (1 - \delta_{j,0}) a_R \sin \left[\frac{\gamma_R \pi (z - (2j-1)L_0)}{L_0} \right] + \\ &\quad - a_R \left(\frac{\gamma_R \pi}{L_0} \right)^2 \sin \left[\frac{\gamma_R \pi (z - (2k-1)L_0)}{L_0} \right] \times \\ &\quad \left. \times \sum_{j=0}^{k-1} (1 - \delta_{j,0}) a_L \sin \left(\frac{\gamma_L \pi (z - 2jL_0)}{L_0} + \phi \right) \right] \Big\} + \\ &\quad - 16\varepsilon^2 L_0^2 \left\{ \sum_{k=0}^{\frac{n_G(z)}{2}} (1 - \delta_{k,0}) a_L \frac{\gamma_L \pi}{L_0} \cos \left[\frac{\gamma_L \pi (z - 2kL_0)}{L_0} + \phi \right] \right\} \times \\ &\quad \times \left\{ \sum_{k=0}^{\frac{n_G(z)}{2}} (1 - \delta_{k,0}) a_R \frac{\gamma_R \pi}{L_0} \cos \left[\frac{\gamma_R \pi (z - (2k-1)L_0)}{L_0} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Usando:

$$\sin \left[\frac{\gamma_R \pi (z - (2j - 1) L_0)}{L_0} \right] = (-1)^{\gamma_R} \sin \left(\frac{\gamma_R \pi z}{L_0} \right), \quad (3.16)$$

$$\cos \left[\frac{\gamma_R \pi (z - (2k - 1) L_0)}{L_0} \right] = (-1)^{\gamma_R} \cos \left(\frac{\gamma_R \pi z}{L_0} \right), \quad (3.17)$$

$$\sin \left[\frac{\gamma_L \pi (z - 2j L_0)}{L_0} + \phi \right] = \sin \left(\frac{\gamma_L \pi z}{L_0} + \phi \right), \quad (3.18)$$

$$\cos \left[\frac{\gamma_L \pi (z - 2k L_0)}{L_0} + \phi \right] = \cos \left(\frac{\gamma_L \pi z}{L_0} + \phi \right), \quad (3.19)$$

temos:

$$\begin{aligned} \tilde{A}_G^{\text{int}}(z) &= -8\varepsilon^2 L_0^2 \sum_{k=0}^{\frac{n_G(z)}{2}} \left\{ (1 - \delta_{k,0}) \left[-a_L \left(\frac{\gamma_L \pi}{L_0} \right)^2 \sin \left[\frac{\gamma_L \pi z}{L_0} + \phi \right] \times \right. \right. \\ &\quad \times a_R (-1)^{\gamma_R} \sin \left[\frac{\gamma_R \pi z}{L_0} \right] k + \\ &\quad - a_R \left(\frac{\gamma_R \pi}{L_0} \right)^2 (-1)^{\gamma_R} \sin \left[\frac{\gamma_R \pi z}{L_0} \right] \times \\ &\quad \left. \times a_L \sin \left(\frac{\gamma_L \pi z}{L_0} + \phi \right) (k - 1) \right\} + \\ &\quad - 16\varepsilon^2 L_0^2 \left\{ a_L \frac{\gamma_L \pi}{L_0} \cos \left[\frac{\gamma_L \pi z}{L_0} + \phi \right] \sum_{k=0}^{\frac{n_G(z)}{2}} (1 - \delta_{k,0}) \right\} \times \\ &\quad \times \left\{ a_R \frac{\gamma_R \pi}{L_0} (-1)^{\gamma_R} \cos \left[\frac{\gamma_R \pi z}{L_0} \right] \sum_{k=0}^{\frac{n_G(z)}{2}} (1 - \delta_{k,0}) \right\}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Usando:

$$\sum_{k=0}^{\frac{n_G(z)}{2}} (1 - \delta_{k,0}) = \frac{n_G(z)}{2} \quad (3.21)$$

$$\sum_{k=0}^{\frac{n_G(z)}{2}} k (1 - \delta_{k,0}) = \frac{n_G(z)}{4} \left[\frac{n_G(z)}{2} + 1 \right] \quad (3.22)$$

$$\sum_{k=0}^{\frac{n_G(z)}{2}} (k - 1) (1 - \delta_{k,0}) = \frac{n_G(z)}{4} \left[\frac{n_G(z)}{2} - 1 \right] \quad (3.23)$$

chegamos em:

$$\begin{aligned} \tilde{A}_G^{\text{int}}(z) &= \varepsilon^2 \pi^2 a_L a_R (-1)^{\gamma_R} \sin \left(\frac{\gamma_R \pi z}{L_0} \right) \sin \left(\frac{\gamma_L \pi z}{L_0} + \phi \right) (\gamma_L^2 + \gamma_R^2) n_G^2(z) + \\ &\quad + 2\varepsilon^2 \pi^2 a_L a_R (-1)^{\gamma_R} \sin \left(\frac{\gamma_R \pi z}{L_0} \right) \sin \left(\frac{\gamma_L \pi z}{L_0} + \phi \right) (\gamma_L^2 - \gamma_R^2) n_G(z) + \\ &\quad - 4\varepsilon^2 \pi^2 a_L a_R (-1)^{\gamma_R} \cos \left(\frac{\gamma_R \pi z}{L_0} \right) \cos \left(\frac{\gamma_L \pi z}{L_0} + \phi \right) \gamma_L \gamma_R n_G^2(z). \end{aligned} \quad (3.24)$$

Conseguimos assim a expressão do termo de interferência para $\tilde{A}_G^{\text{int}}(z)$ para $n_G(z)$ par. De modo análogo conseguimos as demais expressões para $\tilde{A}^{\text{int}}(z)$ e $\tilde{B}^{\text{int}}(z)$.

Para o termo $\tilde{A}_G^{\text{int}}(z)$ para $n_G(z)$ ímpar:

$$\begin{aligned} \tilde{A}_G^{\text{int}}(z) &= \varepsilon^2 \pi^2 a_L a_R (-1)^{\gamma_R} \sin\left(\frac{\gamma_R \pi z}{L_0}\right) \sin\left(\frac{\gamma_L \pi z}{L_0} + \phi\right) (\gamma_L^2 + \gamma_R^2) [n_G^2(z) - 1] + \\ &\quad - 4\varepsilon^2 \pi^2 a_L a_R (-1)^{\gamma_R} \cos\left(\frac{\gamma_R \pi z}{L_0}\right) \cos\left(\frac{\gamma_L \pi z}{L_0} + \phi\right) \gamma_L \gamma_R [n_G^2(z) - 1]. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Para o termo $\tilde{A}_F^{\text{int}}(z)$ para $n_F(z)$ par:

$$\begin{aligned} \tilde{A}_F^{\text{int}}(z) &= \varepsilon^2 \pi^2 a_L a_R (-1)^{\gamma_R} \sin\left(\frac{\gamma_R \pi z}{L_0}\right) \sin\left(\frac{\gamma_L \pi z}{L_0} + \phi\right) (\gamma_L^2 + \gamma_R^2) n_F^2(z) + \\ &\quad - 2\varepsilon^2 \pi^2 a_L a_R (-1)^{\gamma_R} \sin\left(\frac{\gamma_R \pi z}{L_0}\right) \sin\left(\frac{\gamma_L \pi z}{L_0} + \phi\right) (\gamma_L^2 - \gamma_R^2) n_F(z) + \\ &\quad - 4\varepsilon^2 \pi^2 a_L a_R (-1)^{\gamma_R} \cos\left(\frac{\gamma_R \pi z}{L_0}\right) \cos\left(\frac{\gamma_L \pi z}{L_0} + \phi\right) \gamma_L \gamma_R n_F^2(z). \end{aligned} \quad (3.26)$$

Para o termo $\tilde{A}_F^{\text{int}}(z)$ para $n_F(z)$ ímpar:

$$\begin{aligned} \tilde{A}_F^{\text{int}}(z) &= \varepsilon^2 \pi^2 a_L a_R (-1)^{\gamma_R} \sin\left(\frac{\gamma_R \pi z}{L_0}\right) \sin\left(\frac{\gamma_L \pi z}{L_0} + \phi\right) (\gamma_L^2 + \gamma_R^2) [n_F^2(z) - 1] + \\ &\quad - 4\varepsilon^2 \pi^2 a_L a_R (-1)^{\gamma_R} \cos\left(\frac{\gamma_R \pi z}{L_0}\right) \cos\left(\frac{\gamma_L \pi z}{L_0} + \phi\right) \gamma_L \gamma_R [n_F^2(z) - 1]. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Para o termo $\tilde{B}_G^{\text{int}}(z)$ para $n_G(z)$ par:

$$\begin{aligned} \tilde{B}_G^{\text{int}}(z) &= \frac{\varepsilon^2 \pi^3}{12L_0^2} a_L a_R (-1)^{\gamma_R} \cos\left(\frac{\gamma_R \pi z}{L_0}\right) \cos\left(\frac{\gamma_L \pi z}{L_0} + \phi\right) \gamma_L \gamma_R \times \\ &\quad \times \left[\gamma_R^2 n_G(z) \left(\frac{1}{2} n_G(z) - 1\right) + \gamma_L^2 n_G(z) \left(\frac{1}{2} n_G(z) + 1\right) \right] + \\ &\quad - \frac{\varepsilon^2 \pi^3}{24L_0^2} a_L a_R (-1)^{\gamma_R} \sin\left(\frac{\gamma_R \pi z}{L_0}\right) \sin\left(\frac{\gamma_L \pi z}{L_0} + \phi\right) \times \\ &\quad \times \left[\gamma_R^4 n_G(z) \left(\frac{1}{2} n_G(z) - 1\right) + \gamma_L^4 n_G(z) \left(\frac{1}{2} n_G(z) + 1\right) \right]. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Para $\tilde{B}_G^{\text{int}}(z)$ para $n_G(z)$ ímpar:

$$\begin{aligned} \tilde{B}_G^{\text{int}}(z) &= \frac{\varepsilon^2 \pi^3}{24L_0^2} a_L a_R (-1)^{\gamma_R} \cos\left(\frac{\gamma_R \pi z}{L_0}\right) \cos\left(\frac{\gamma_L \pi z}{L_0} + \phi\right) \gamma_R \gamma_L (\gamma_L^2 + \gamma_R^2) [n_G^2(z) - 1] + \\ &\quad - \frac{\varepsilon^2 \pi^3}{48L_0^2} a_L a_R (-1)^{\gamma_R} \sin\left(\frac{\gamma_R \pi z}{L_0}\right) \sin\left(\frac{\gamma_L \pi z}{L_0} + \phi\right) (\gamma_L^4 + \gamma_R^4) [n_G^2(z) - 1]. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Para $\tilde{B}_F^{\text{int}}(z)$ para $n_F(z)$ par:

$$\begin{aligned} \tilde{B}_F^{\text{int}}(z) &= \frac{\varepsilon^2 \pi^3}{12L_0^2} a_L a_R (-1)^{\gamma_R} \cos\left(\frac{\gamma_R \pi z}{L_0}\right) \cos\left(\frac{\gamma_L \pi z}{L_0} + \phi\right) \gamma_L \gamma_R \times \\ &\times \left[\gamma_R^2 n_F(z) \left(\frac{1}{2} n_F(z) + 1\right) + \gamma_L^2 n_F(z) \left(\frac{1}{2} n_F(z) - 1\right) \right] + \\ &- \frac{\varepsilon^2 \pi^3}{24L_0^2} a_L a_R (-1)^{\gamma_R} \sin\left(\frac{\gamma_R \pi z}{L_0}\right) \sin\left(\frac{\gamma_L \pi z}{L_0} + \phi\right) \times \\ &\times \left[\gamma_R^4 n_F(z) \left(\frac{1}{2} n_F(z) + 1\right) + \gamma_L^4 n_F(z) \left(\frac{1}{2} n_F(z) - 1\right) \right] \end{aligned} \quad (3.30)$$

E, para $\tilde{B}_F^{\text{int}}(z)$ para $n_F(z)$ ímpar:

$$\begin{aligned} \tilde{B}_F^{\text{int}}(z) &= \frac{\varepsilon^2 \pi^3}{24L_0^2} a_L a_R (-1)^{\gamma_R} \cos\left(\frac{\gamma_R \pi z}{L_0}\right) \cos\left(\frac{\gamma_L \pi z}{L_0} + \phi\right) \gamma_R \gamma_L (\gamma_L^2 + \gamma_R^2) [n_F^2(z) - 1] + \\ &- \frac{\varepsilon^2 \pi^3}{48L_0^2} a_L a_R (-1)^{\gamma_R} \sin\left(\frac{\gamma_R \pi z}{L_0}\right) \sin\left(\frac{\gamma_L \pi z}{L_0} + \phi\right) (\gamma_L^4 + \gamma_R^4) [n_F^2(z) - 1]. \end{aligned} \quad (3.31)$$

O que será feito na próxima seção é calcular a energia através da integral de (1.45) em toda a cavidade.

3.2.1 Energia de interferência

Nesta seção vamos calcular a parte da energia armazenada na cavidade associada ao termo (3.1). Faremos os cálculos para instantes $t = NL_0$, onde $N \geq 1$ é um inteiro. Para esses instantes as fronteiras voltam às suas posições iniciais e podemos separar diretamente a energia das partículas criadas da energia de Casimir.

Para $N = 1$, durante a integração envolvendo $n_G(v)$, $v = t + x$ irá variar de L_0 a $2L_0$. De um modo geral, para $N \geq 1$, $v \geq L_0$. Durante as integrações envolvendo $n_F(u)$, o argumento $u = t - x$ irá variar de 0 a L_0 . De um modo geral, para $N \geq 1$, $u \geq 0$. Para fins práticos podemos substituir as equações (2.10) e (2.11) por:

$$n_G(z) = \text{int}\left(\frac{z}{L_0}\right), \quad (3.32)$$

$$n_F(z) = \text{int}\left(\frac{z}{L_0}\right) + 1. \quad (3.33)$$

Para o caso em que as frequências de oscilação das fronteiras são diferentes, integramos a Eq. (3.24) em x de (0 a L_0) e encontramos uma expressão nula. E isso acontece com todos os termos de interferência. Portanto, para frequências das fronteiras diferentes, a energia de

interferência é zero, o que está em acordo com os resultados obtidos na Ref. [24]. Apesar disso, para esses casos, mostramos aqui que a densidade de energia não é identicamente zero, apenas sua integral.

Mas, para o caso em que as frequências são iguais, ou seja, quando temos $\gamma_L = \gamma_R = \gamma$, encontramos, ao fazer as considerações acima mencionadas, resultados diferentes de zero. Para a função $\tilde{A}_G^{\text{int}}(z)$ para $n_G(z)$ par, temos:

$$\tilde{A}_G^{\text{int}}(N) = \int_0^{L_0} \tilde{A}_G^{\text{int}}(NL_0 + x) dx = -L_0 a_L a_R \varepsilon^2 \pi^2 \gamma^2 (-1)^\gamma (N^2 + 2N + 1) \cos \phi. \quad (3.34)$$

Para $\tilde{A}_G^{\text{int}}(z)$ para $n_G(z)$ ímpar:

$$\tilde{A}_G^{\text{int}}(N) = -L_0 a_L a_R \varepsilon^2 \pi^2 \gamma^2 (-1)^\gamma (N^2 + 2N) \cos \phi. \quad (3.35)$$

Para $\tilde{A}_F^{\text{int}}(z)$ para $n_F(z)$ par:

$$\tilde{A}_F^{\text{int}}(N) = -L_0 a_L a_R \varepsilon^2 \pi^2 \gamma^2 (-1)^\gamma N^2 \cos \phi. \quad (3.36)$$

Para $\tilde{A}_F^{\text{int}}(z)$ para $n_F(z)$ ímpar:

$$\tilde{A}_F^{\text{int}}(N) = -L_0 a_L a_R \varepsilon^2 \pi^2 \gamma^2 (-1)^\gamma (N^2 - 1) \cos \phi. \quad (3.37)$$

Para $\tilde{B}_G^{\text{int}}(z)$ para $n_G(z)$ par:

$$\tilde{B}_G^{\text{int}}(N) = \frac{\varepsilon^2 \pi^3}{48L_0} a_L a_R \gamma^4 (-1)^\gamma (N^2 + 2N + 1) \cos \phi \quad (3.38)$$

Para $\tilde{B}_G^{\text{int}}(z)$ para $n_G(z)$ ímpar:

$$\tilde{B}_G^{\text{int}}(N) = \frac{\varepsilon^2 \pi^3}{48L_0} a_L a_R \gamma^4 (-1)^\gamma (N^2 + 2N) \cos \phi \quad (3.39)$$

Para $\tilde{B}_F^{\text{int}}(z)$ para $n_F(z)$ par:

$$\tilde{B}_F^{\text{int}}(N) = \frac{\varepsilon^2 \pi^3}{48L_0} a_L a_R \gamma^4 (-1)^\gamma N^2 \cos \phi \quad (3.40)$$

Para $\tilde{B}_F^{\text{int}}(z)$ para $n_F(z)$ ímpar:

$$\tilde{B}_F^{\text{int}}(N) = \frac{\varepsilon^2 \pi^3}{48L_0} a_L a_R \gamma^4 (-1)^\gamma (N^2 - 1) \cos \phi \quad (3.41)$$

As equações acima podem ser combinadas, seguindo (3.4), o que nos dá a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} E_{\text{int}}(N) &= \int_0^{L_0} \langle T_{00} \rangle_{\text{int}} dx \\ &= \frac{\varepsilon^2 \pi^2}{48L_0} a_L a_R \gamma^2 (-1)^\gamma \left\{ 2N^2 + 2N + (-1)^N \right\} (48L_0^2 f_{\text{est}} - \pi \gamma^2) \cos \phi. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Com a equação acima, podemos concluir o seguinte:

- Para frequências iguais e que sejam múltiplos pares da frequência de oscilação natural da cavidade, teremos interferência construtiva quando a diferença de fase for $\phi = \pi$ e destrutiva quando $\phi = 0$;
- Para frequências iguais e que sejam múltiplos ímpares da frequência de oscilação natural da cavidade, teremos interferência construtiva quando a diferença de fase for $\phi = 0$ e destrutiva quando $\phi = \pi$;

O que faremos a seguir é visualizar graficamente os nossos resultados.

3.2.2 Análise Gráfica

Com os resultados anteriores podemos obter de forma direta gráficos para a densidade e energia para o termo de interferência. Em todos os casos adotamos o comprimento inicial da cavidade como sendo $L_0 = 1$.

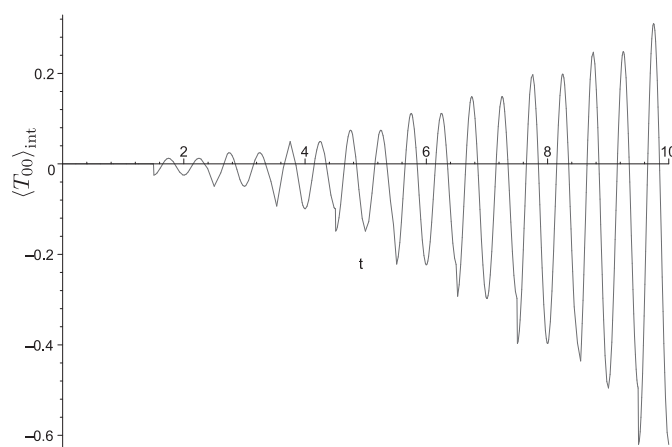


Figura 3.1: Termo de interferência na densidade de energia na cavidade para $\gamma_L = \gamma_R = 2$ e $\phi = 0$, calculada na posição $x = L_0/2$ em função do tempo.

Nas Fig. 3.1 mostramos o termo de interferência na densidade de energia na cavidade para $\gamma_L = \gamma_R = 2$ e $\phi = 0$, calculada na posição $x = L_0/2$, sendo $L_0 = 1$. Na Fig. 3.2 mostramos o termo de interferência na densidade de energia na cavidade para $\gamma_L = \gamma_R = 3$ e $\phi = \pi$, calculada na posição $x = L_0/2$, sendo $L_0 = 1$. Em ambas as figuras observamos que a parte negativa da função se acentua mais rapidamente do que a parte positiva, o que corresponde ao caso de interferência destrutiva. Se integramos as correspondentes densidades de energia na cavidade

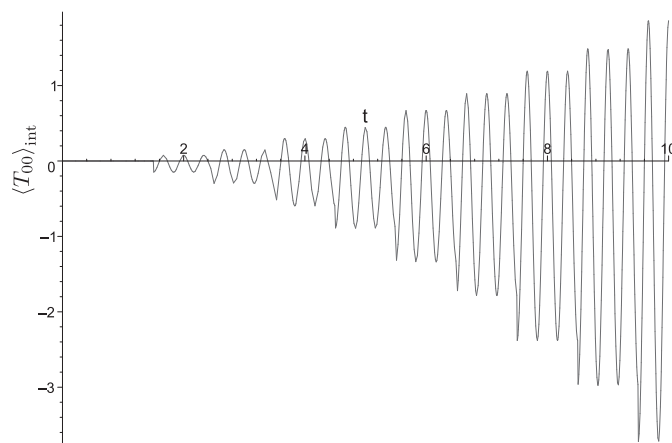


Figura 3.2: Termo de interferência na densidade de energia na cavidade $\gamma_L = \gamma_R = 3$ e $\phi = \pi$, calculada na posição $x = L_0/2$ em função do tempo.

veremos que a energia de interferência vai tendendo a valores cada vez mais negativos, tal como visualizado na Fig. 3.9.

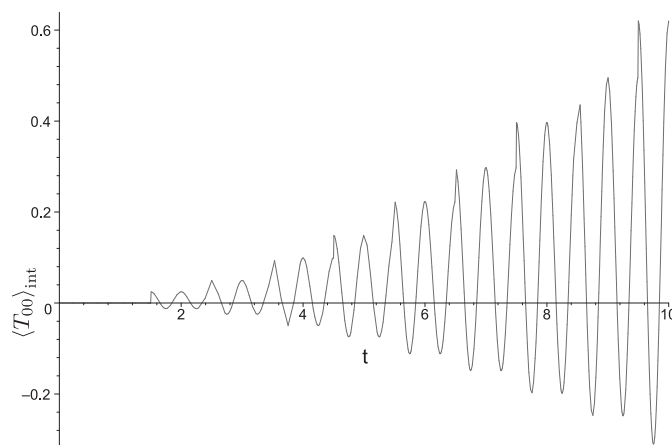


Figura 3.3: Termo de interferência na densidade de energia na cavidade para $\gamma_L = \gamma_R = 2$ e $\phi = \pi$, calculada na posição $x = L_0/2$ em função do tempo.

Na Fig. 3.3 mostramos o termo de interferência na densidade de energia na cavidade para $\gamma_L = \gamma_R = 2$ e $\phi = \pi$, calculada na posição $x = L_0/2$, sendo $L_0 = 1$. Na Fig. 3.4 mostramos o termo de interferência na densidade de energia na cavidade para $\gamma_L = \gamma_R = 3$ e $\phi = 0$, calculada na posição $x = L_0/2$, sendo $L_0 = 1$. Em ambas as figuras observamos que a parte positiva da função se acentua mais rapidamente do que a parte negativa, o que corresponde ao caso de interferência construtiva. Se integrarmos as correspondentes densidades de energia na cavidade veremos que a energia de interferência vai tendendo a valores cada vez mais positivos, tal como

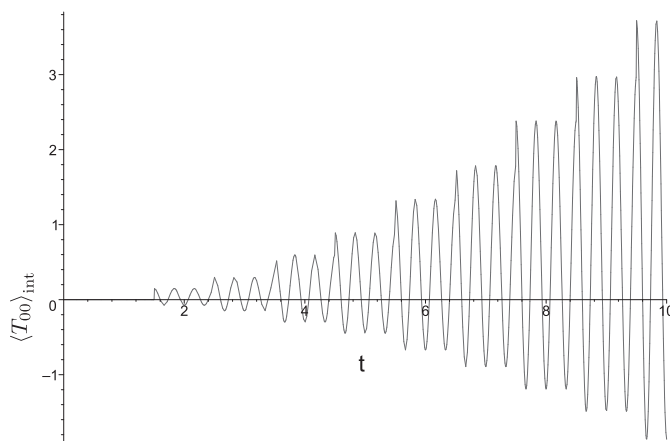


Figura 3.4: Termo de interferência na densidade de energia na cavidade para $\gamma_L = \gamma_R = 3$ e $\phi = 0$, calculada na posição $x = L_0/2$ em função do tempo.

visualizado na Fig. 3.8.

Na Fig. 3.5 temos o caso em que as frequências de vibração das fronteiras são diferentes. Nesse caso não há efeitos de interferência. Isso pode ser visualizado pela simetria do gráfico entre as partes positivas e negativas da função, sendo que nós já mostramos que a energia de interação correspondente a esse caso é nula. Ou seja, apesar da densidade de energia de interferência não ser nula, a energia é.

Nas Fig. 3.6 e 3.7 comparamos os termos de interferência da densidade de energia para o caso de frequências diferentes através dos dois métodos desenvolvidos no presente trabalho: o método exato numérico descrito no capítulo 1 e o método analítico descrito no capítulo 2. Primeiramente percebemos que a integral dos gráficos pontilhados em x são nulos, como já mostramos para esse caso. Além disso, chamamos atenção ao fato de que, com o passar do tempo, os resultados obtidos pelos dois métodos tornam-se cada vez mais diferentes uma vez que, no método analítico, nós consideramos apenas até a segunda ordem de aproximação em ε . Mais ordens de aproximação na energia farão com que o resultado analítico se aproxime do resultado numérico.

Nas figuras 3.8 e 3.9 comparamos a energia de interação obtida pela equação (3.42) com a obtida usando a equação 3.14 que foi retirada da Ref. [24]. Mostramos que os resultados da literatura estão em boa concordância com os nossos.

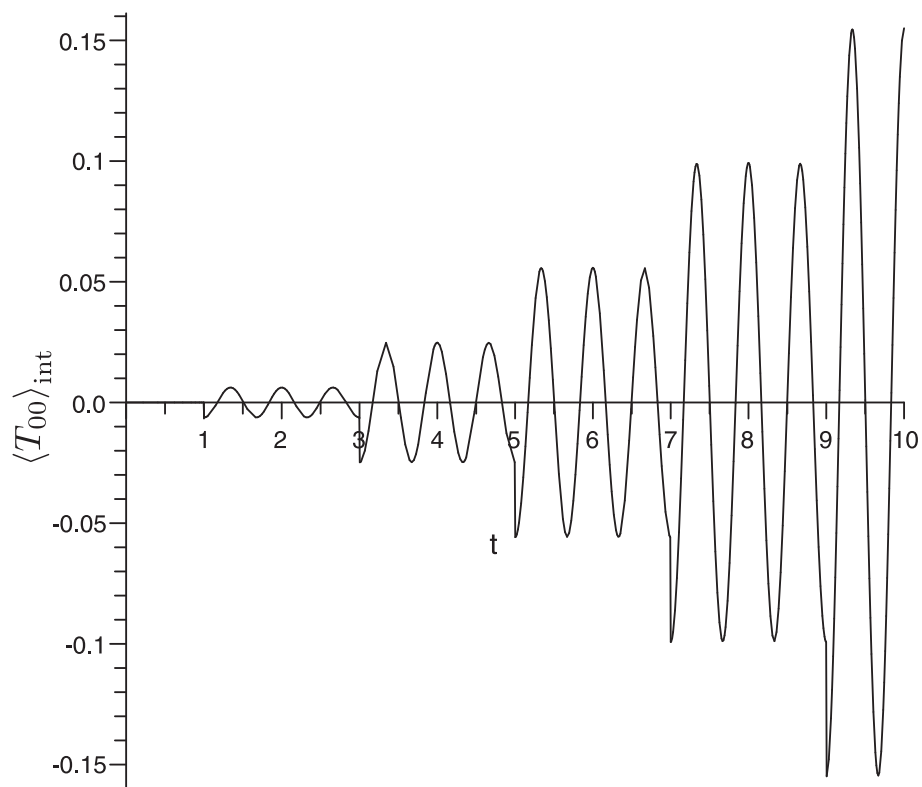


Figura 3.5: Termo de interferência na densidade de energia na cavidade para $\gamma_L = 2$, $\gamma_R = 1$ e $\phi = \pi$, calculada na posição $x = L_0/2$ em função do tempo.

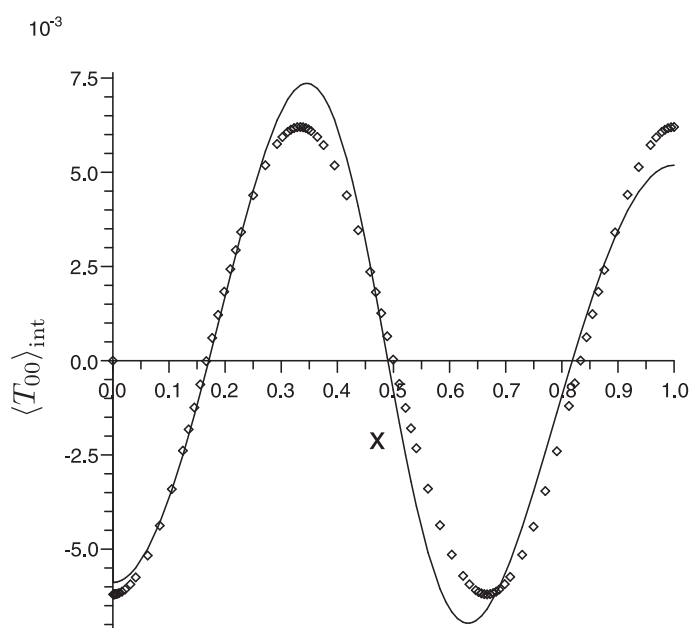


Figura 3.6: Termo de interferência na densidade de energia na cavidade para $\gamma_L = 2$, $\gamma_R = 1$ e $\phi = \pi$, calculada no instante $t = 2L_0$ em função da posição x na cavidade. A linha cheia representa o cálculo feito através do método numérico, enquanto a linha pontilhada representa o cálculo feito da maneira analítica.

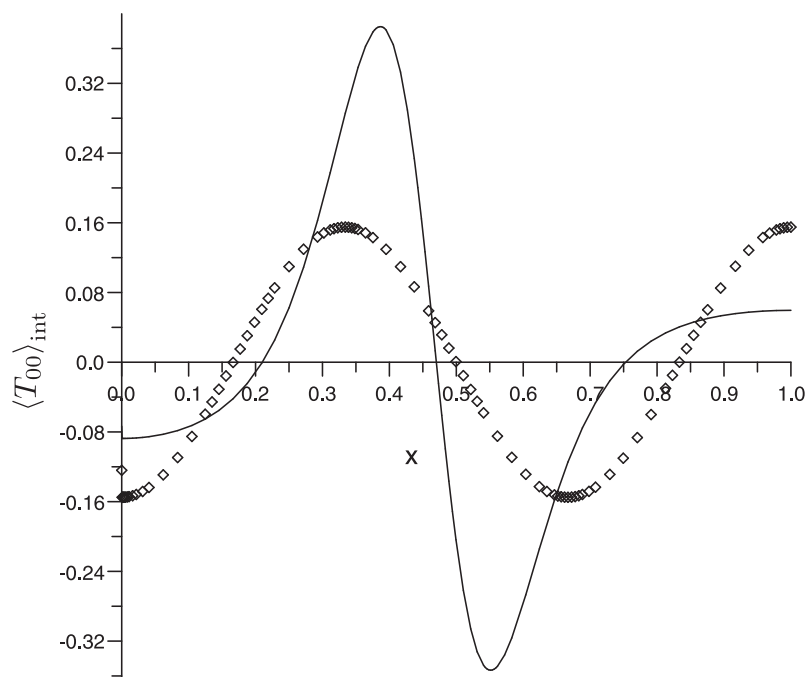


Figura 3.7: Termo de interferência na densidade de energia na cavidade para $\gamma_L = 2$, $\gamma_R = 1$ e $\phi = \pi$, calculada no instante $t = 10L_0$. A linha cheia representa o cálculo feito através do método numérico, enquanto que a linha pontilhada representa o cálculo feito da maneira analítica.

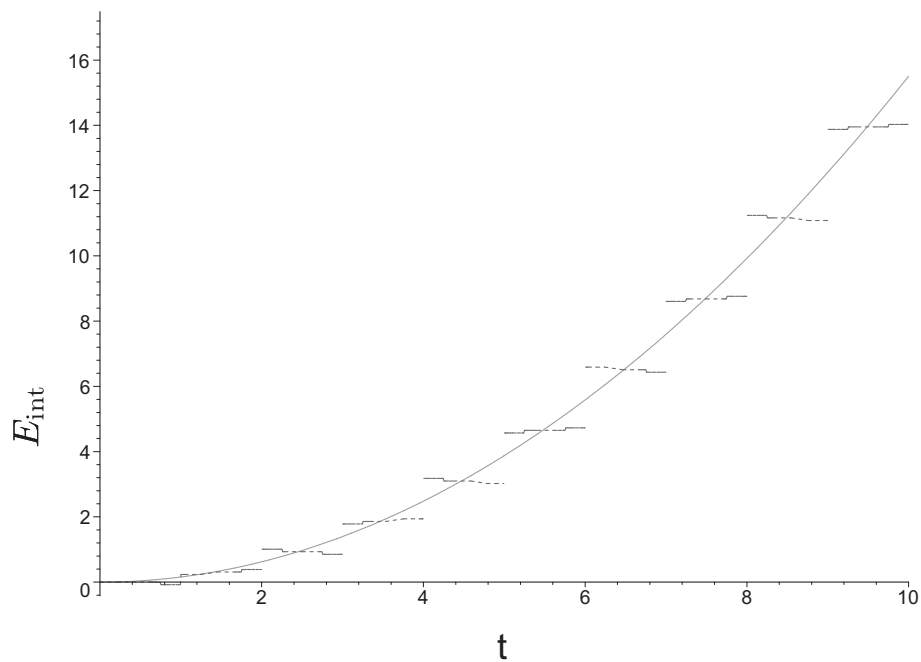


Figura 3.8: Comparação entre a energia de interferência obtida em [24] (linha cheia) e pelo nosso método analítico (linhas tracejadas). Os parâmetros são $\gamma_R = 2$, $\gamma_L = 2$ e $\phi = \pi$

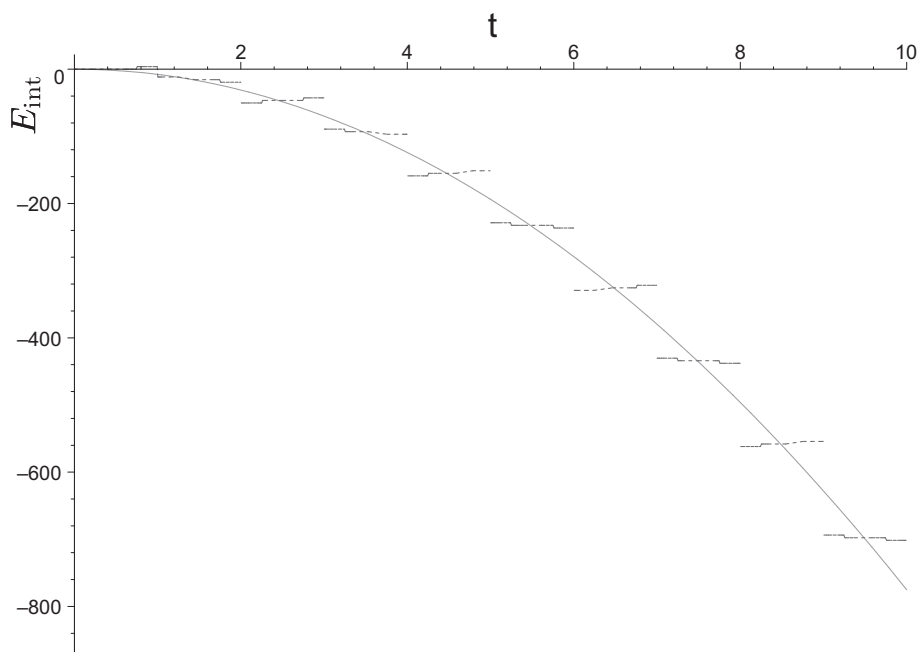


Figura 3.9: Comparação entre a energia de interferência obtida em [24] (linha cheia) e pelo nosso método analítico (linhas tracejadas). Os parâmetros são $\gamma_R = 5$, $\gamma_L = 5$ e $\phi = \pi$

Considerações Finais

Neste trabalho calculamos o comportamento exato da densidade de energia em uma cavidade em $1+1$ dimensões, com duas fronteiras que executam leis de movimento prescritas, que impõem ao campo que se encontra inicialmente no estado de vácuo, condições de contorno de Dirichlet. Obtivemos uma expressão para a densidade que é composta por termos que possibilitam o cálculo numérico direto para quaisquer leis de movimento que respeitem as condições iniciais típicas de estarem estáticas até um tempo $t = 0$. A obtenção dessa expressão foi possível através de um traçado de linhas nulas a partir de um ponto (t, x) da cavidade, até as chamadas regiões estáticas, por um processo de reflexão dessas linhas nulas nas fronteiras. Com isso, essa expressão é função desse número de reflexões, tanto para a reta $v = t + x$ quanto para a $u = t - x$, que passam pelo ponto inicial (t, x) . Esses termos nos possibilitaram o tratamento numérico exato da densidade de energia, bem como a obtenção do comportamento gráfico da força quântica exata sobre as fronteiras. Sendo um procedimento geométrico, ele é válido para qualquer lei de movimento que respeite as condições de contorno citadas acima, inclusive as que estão fora de alcance dos métodos perturbativos encontrados na literatura.

Com essas expressões exatas, particularizamos nosso estudo para o caso de leis de movimento em que as fronteiras são condicionadas a retornarem a suas posições iniciais em tempos múltiplos de L_0 . Essa particularização permitiu obter expressões analíticas para a densidade de energia bem como os termos de interferência genéricos para essa classe de leis de movimento, aplicáveis a um grande grupo de problemas. A densidade de energia para essas leis de movimento genéricas foi expandida em série de um parâmetro ε , que controla a amplitude nas leis de movimento. Uma vantagem clara do método é que ele tem aplicação direta a diversos problemas, uma vez que não é necessário que se recomece a calcular resultados desde o início do processo, caso se queira trabalhar com outras leis de movimento. Esse método analítico teve boa concordância

com o método numérico exato por nós desenvolvido, sendo que essa concordância é tanto melhor quanto menor o tempo considerado para os movimentos das fronteiras. Destacamos que o nosso método analítico foi desenvolvido através de um processo que até então os trabalhos da literatura tratavam como passível apenas de obtenção de resultados numéricos.

Na última parte deste trabalho aplicamos nossas fórmulas analíticas às leis de movimento propostas na Ref. [24] para analisar os efeitos de interferência na densidade de energia e comparar com os resultados obtidos na mesma referência para a interferência na criação de partículas. Concluimos que, quando a combinação de parâmetros das leis de movimento causa interferência destrutiva na produção de partículas, o termo de interferência na densidade de energia tende a ficar negativo com o passar do tempo. A consequência desse fato para a energia de interferência na cavidade é o decréscimo dela conforme o tempo passa. No caso de interferência construtiva na produção de partículas, ocorre o contrário: com a densidade de energia se tornando cada vez mais positiva e a energia de interferência crescendo com o passar do tempo. No caso em que as frequências de vibração são diferentes, os resultados encontrados na Ref. [24] indicam que não há interferência na produção de partículas. Para esse caso obtivemos uma energia de interferência que realmente é nula para todos os instantes e para qualquer diferença de fase entre os movimentos das fronteiras. Porém existe fenômeno de interferência na densidade de energia na cavidade, cuja integral em todo o espaço da cavidade (ou seja, a energia) se anula.

Entre as imediatas extensões deste trabalho está a correção de nossas fórmulas levando em conta termos proporcionais a ε elevado a potências maiores do que 2, para as forças sobre as fronteiras, a densidade de energia, a energia, e seus respectivos termos de interferência. Como já mencionado, uma das vantagens do nosso método é permitir direta extensão (com relativo baixo custo de cálculos) para ordens seguintes. Essa análise em ordens maiores pode trazer informações novas, por exemplo, quanto ao problema da interferência.

Outra extensão desse trabalho, que já encontra-se em andamento, consiste em levar em conta condições de contorno de Neumann nas fronteiras. Temos uma forma preliminar (sujeita ainda a confirmação) da densidade de energia para esse caso dada por:

$$\begin{aligned} f_G &= \frac{1}{24\pi} \left\{ \frac{G'''}{G'} - \frac{3}{2} \left(\frac{G''}{G'} \right)^2 + \pi^2 \left[\frac{1}{2} - 3(\beta - \beta^2) \right] G'^2 \right\} \\ f_F &= \frac{1}{24\pi} \left\{ \frac{F'''}{F'} - \frac{3}{2} \left(\frac{F''}{F'} \right)^2 + \pi^2 \left[\frac{1}{2} - 3(\beta - \beta^2) \right] F'^2 \right\} \end{aligned}$$

a qual estende as equações (1.8a) e (1.8b) deste trabalho. Nessa expressão, se $\beta = 0$ temos

condições de contorno de Neumann ou de Dirichlet nas duas fronteiras. Para $\beta = 1/2$, temos o condição de Dirichlet em uma fronteira e Neumann na outra. Substituindo o resultado acima na equação (1.45) temos:

$$\langle T_{00} \rangle = -f_{\text{est}} \left[\tilde{A}_G(v) + \tilde{A}_F(u) \right] - \tilde{B}_G(v) - \tilde{B}_F(u),$$

onde, para esse caso:

$$f_{\text{est}} = \frac{\pi}{24L_0^2} \left[\frac{1}{2} - 3(\beta - \beta^2) \right]$$

Com isso podemos ver claramente que toda a informação relativa às condições de contorno está armazenada no coeficiente f_{est} , enquanto os termos restantes da densidade de energia dependem apenas das leis de movimento.

Outra extensão direta é encontrar a expansão das funções G e F e, através de procedimento análogo ao feito aqui, escrever o próprio operador de campo perturbativamente a qualquer ordem de expansão em ϵ .

Mais uma extensão possível é levar em conta outros estados iniciais na cavidade que não o vácuo a fim de verificar as forças sobre as fronteiras, a densidade de energia, a energia, e seus respectivos termos de interferência levando em conta esses estados iniciais. Seria interessante estudar estados coerentes porque o problema em $3 + 1$ dimensões para esses estados, com partículas com momentos perpendiculares à placa é equivalente ao caso unidimensional.

Também temos interesse em estender o método apresentado nessa tese para contemplar uma variedade maior de leis de movimento para as fronteiras. A dificuldade atual é conseguir a descrição dos números de reflexões nas fronteiras em função de ϵ . Uma vez obtidas as expressões de $n_G(z, \epsilon)$ e $n_F(z, \epsilon)$, a limitação de que as fronteiras retornem à posição inicial em tempos múltiplos de L_0 não precisaria mais ser levada em consideração.

Acreditamos, ainda, que é possível estender o método a condições de contorno mais realistas para as fronteiras.

Referências Bibliográficas

- [1] G. T. Moore, J Math. Phys. **11**, 2679 (1970).
- [2] S. A. Fulling e P.C.W. Davies, Proc. R. Soc. London, **A 348**, 393 (1976).
- [3] P. C. W. Davies e S.A. Fulling, Proc. R. Soc. London, **A 356**, 237 (1977).
- [4] B. S. DeWitt, Phys. Rep. **19**, 295 (1975); P. C. W. Davies e S.A. Fulling, Proc. R. Soc. London, **A 354**, 59 (1977);
- [5] L. H. Ford e A. Vilenkin, Phys. Rev. D **25**, 2569 (1982).
- [6] P. A. Maia Neto, J. Phys. A **27**, 2167 (1994);
- [7] P. A. Maia Neto e L. A. S. Machado, Phys. Rev. A **54**, 3420 (1996).
- [8] D. F. Mundarain e P. A. Maia Neto, Phys. Rev. A **57**, 1379 (1998).
- [9] C.K. Cole e W.C. Schieve, Phys. Rev. A **52**, 4405 (1995).
- [10] V. V. Dodonov, A. B. Klimov e V. I. Man'ko, Phys. Lett. A **149**, 225 (1990).
- [11] V. V. Dodonov, A. B. Klimov e V. I. Man'ko, Phys. Rev. A **149**, 225 (1990).
- [12] V.V. Dodonov, A.B. Klimov e D.E. Nikonov, J. Math. Phys. **34**, 2742 (1993).
- [13] C. K. Law, Phys. Rev. Lett. **73**, 1931 (1994).
- [14] Y. Wu, K. W. Chan, M. C. Chu, e P. T. Leung, Phys. Rev. A **59**, 1662 (1999).
- [15] P. Wegrzyn, J. Phys. B **40**, 2621 (2007).
- [16] M. Razavy e J. Terning, Phys. Rev. D **31**, 307 (1985).
- [17] G. Calucci, J. Phys. A **25**, 3873 (1992).

- [18] C. K. Law, Phys. Rev. A **49**, 433 (1994).
- [19] C. K. Law, Phys. Rev. A **51**, 2537 (1995).
- [20] V. V. Dodonov e A. B. Klimov, Phys. Rev. A **53**, 2664 (1996).
- [21] M. Crocce, D. A. R. Dalvit e F. D. Mazzitelli, Phys. Rev. A **64**, 013808 (2001).
- [22] C.K. Cole e W.C. Schieve, Phys. Rev. A **64**, 023813-1 (2001).
- [23] A. Lambrecht, M.-T. Jaekel, e S. Reynaud, Phys. Rev. Lett. **77**, 615 (1996).
- [24] J. Y. Ji, H.H. Jung e K. S. Soh, Phys. Rev. A **57**, 4952 (1998).
- [25] V.V. Dodonov, J. Phys. A **31**, 9835 (1998).
- [26] D.A.R. Dalvit e F.D. Mazzitelli, Phys. Rev. A **59**, 3049 (1999).
- [27] L. Li e B.Z. Li, Phys. Lett. A **300**, 27-32 (2002).
- [28] J. Haro, J. Phys. A, **38** L307 (2005).