



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Belém-Pará

2010



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

**Quantização canônica do campo de Proca no
espaço-tempo de Rindler e interação de uma fonte
uniformemente acelerada com o banho térmico de
Unruh**

Emerson Benedito Sousa Corrêa

Orientadores: Prof. Dr. Jorge Castiñeiras Rodríguez e
Prof. Dr. Luís Carlos Bassalo Crispino

Belém-Pará

2010

Quantização canônica do campo de Proca no espaço-tempo de Rindler e interação de uma fonte uniformemente acelerada com o banho térmico de Unruh

Emerson Benedito Sousa Corrêa

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Pará (PPGF-UFPA) como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Mestre em Física.

Orientadores: Prof. Dr. Jorge Castiñeiras Rodríguez
e Prof. Dr. Luís Carlos Bassalo Crispino

Banca Examinadora

Prof. Dr. Jorge Castiñeiras Rodríguez (Orientador)

Prof. Dr. Elcio Abdalla (Membro externo)

Prof. Dr. Luís Carlos Bassalo Crispino (Membro interno e orientador)

Belém-Pará

2010

Resumo

Quantização canônica do campo de Proca no espaço-tempo de Rindler e interação de uma fonte uniformemente acelerada com o banho térmico de Unruh

Emerson Benedito Sousa Corrêa

Orientadores: Prof. Dr. Jorge Castiñeiras Rodríguez e Prof. Dr. Luís Carlos Bassalo Crispino

Resumo da Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Pará (PPGF-UFGPA) como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Mestre em Física.

Fazemos a quantização canônica do campo vetorial massivo, primeiro com relação a observadores inerciais e depois com relação a observadores acelerados. Investigamos como uma fonte uniformemente acelerada em Minkowski interage com o campo vetorial massivo no vácuo inercial, através do cálculo da taxa de resposta total. Esta taxa de resposta é calculada em dois referenciais diferentes, um inercial e outro co-acelerado com a fonte. De acordo com o efeito Unruh, no referencial acelerado, o vácuo inercial corresponde a um banho térmico de partículas. Levando em conta este efeito, mostramos, explicitamente, que estas taxas de resposta são idênticas. Este resultado pode ser usado para descrever a interação de elétrons estáticos com partículas Z^0 presentes na radiação Hawking, desde que os elétrons estejam muito próximos do horizonte de eventos de um buraco negro.

Palavras chave: Teoria Quântica de Campos em referenciais acelerados, Rindler wedge, fonte interagindo com o campo de Proca, efeito Unruh.

Belém-Pará

2010

Abstract

Quantização canônica do campo de Proca no espaço-tempo de Rindler e interação de uma fonte uniformemente acelerada com o banho térmico de Unruh

Emerson Benedito Sousa Corrêa

Orientadores: Prof. Dr. Jorge Castiñeiras Rodríguez
e Prof. Dr. Luís Carlos Bassalo Crispino

Abstract da Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Pará (PPGF-UFGPA) como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Mestre em Física.

We perform the canonical quantization of the massive vector field, first with respect to inertial observers and then with respect to accelerated observers. We investigate how the uniformly accelerated source in Minkowski inertial vacuum interacts with the massive vector field through the computation of its total response rate. This response rate is computed with respect to two different frames, one inertial and the other co-accelerated with that source. According with the Unruh effect, in the accelerated frame, the inertial vacuum corresponds to a thermal bath of particles. Taking into account this effect, we show explicitly that these response rates are identical. This result can be used to describe the interaction of static electrons with the Z^0 particles present in the Hawking radiation, provided the electrons are very close to the black hole event horizon.

Keywords: Quantum field theory in accelerated frames, Rindler wedge, source interaction with the Proca field, Unruh effect.

Belém-Pará

2010

*“ Em memória dos meus avós paternos,
Paulo e Dalila
e dos meus avós maternos,
Ubaldo e Benedita.”*

*It is impossible to explain honestly the beauties
of the laws of nature without some deep
understanding of mathematics.*

Richard Feynman

Agradecimentos

É difícil agradecer em tão poucas linhas tudo aquilo que foi feito por mim e para mim nesse período de minha vida. É possível que eu cometa a injustiça de esquecer alguém, entretanto, tentarei quantificar minha gratidão às seguintes pessoas:

- Ao Prof. Dr. Jorge Castiñeiras por me orientar, por me ajudar (com seu vasto conhecimento) a superar o fato de não ter feito iniciação científica em Teoria Quântica de Campos e por ter se tornado meu amigo ao longo desta jornada. Que bom seria se todos os discentes tivessem um orientador competente humilde e educado como eu tive.
- Ao Prof. Dr. Luís Carlos Bassalo Crispino, por me coorientar, por me ensinar, com sua empolgação peculiar, alguns aspectos muito importantes deste trabalho e por sua tenacidade em relação à expansão do programa de pós-graduação em Física da UFPA.
- Aos meus professores do mestrado: Prof. Dr. Marcelo Lima, Prof. Dr. Jorge Castiñeiras, Prof. Dr. João Felipe e Prof^a. Dra. Silvana Perez, pelos ensinamentos, pela solicitude e pelas discussões.
- Ao Prof. Dr. Atsushi Higuchi pela imprescindível mudança de variáveis, necessária para a resolução da integral da taxa de resposta no referencial inercial.
- Aos meus pais, Vidal e Lenice, por tudo que me proporcionaram desde sempre, pelo apoio nas horas mais difíceis, pela compreensão, pelos conselhos e pelas ótimas gargalhadas que sempre damos juntos quando nos vemos.
- Aos jovens Ederson e Mônica que apesar da distância, estiveram sempre tão presentes em minha vida.
- Aos meus irmãos, cunhados, cunhadas e sobrinhos, pela confiança, pela torcida e por dividirem muitos dos seus momentos comigo.
- À minha amada, Michelli, pelo amor, cuidado, compreensão e pelo sorriso diário que me alimenta e faz com que minha vida seja mais bela.
- Aos amigos Leônidas e Odirley pelo incentivo desde os primeiros dias de minha vida acadêmica.

- Ao meu amigo Jaime (o cara mais jocoso que conheço), por me mostrar aspectos interessantes da vida, pela amizade fraterna e por ser o melhor amigo que um Beatlemaníaco pode ter.
- A Elaine, ao Dr. Gláuber e aos meus colegas de mestrado: Andreson, Wagner, Soraya, Penn Lee, Alberto, Orival, Shirsley, Alex, João Paulo, Carlos André, Francisco, Hector, Wallace, Félix, Marcelo, Messias, Leandro e Eduardo, pelas muitas horas de estudo e descontração que tivemos e pelo nosso tradicional duelo no futsal: MATÉRIA CONDENSADA X TQC, do qual nosso time sempre logrou êxito.
- À Escola Estadual Santa Maria de Belém, à Escola Estadual Paes de Carvalho e à Escola Estadual D. Pedro II, por terem me mostrado (a partir de seus alunos) o prazer de ensinar Física.
- À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo suporte financeiro parcial.

Sumário

Introdução	9
1 Campo Vetorial Massivo	11
1.1 A equação do campo vetorial massivo	11
1.2 Soluções da equação de campo	14
1.2.1 Soluções da equação de campo no referencial inercial	16
1.2.2 Soluções da equação de campo no referencial acelerado	19
2 Quantização do campo de Proca e resposta de uma fonte uniformemente acelerada no referencial inercial	38
2.1 Quantização do campo vetorial massivo no referencial inercial	38
2.2 A fonte no referencial inercial	42
2.3 Taxa de resposta no referencial inercial	42
3 Quantização do campo de Proca e resposta de uma fonte uniformemente acelerada no referencial co-acelerado	47
3.1 Quantização do campo vetorial massivo no referencial acelerado	48
3.2 A fonte no referencial acelerado	50
3.3 Taxa de resposta no referencial acelerado	51
Considerações Finais	55
A Intervalo de espaço-tempo no referencial acelerado	57
B Conservação da carga na corrente regularizada no referencial acelerado	59

Introdução

Nos últimos anos a comunidade de físicos que voltou sua atenção para o efeito Fulling-Davies-Unruh (também conhecido como efeito Unruh) foi crescente [1]. Isso mostra a relevância do assunto e sua aplicabilidade em física teórica. Em 1992 Higuchi, Matsas e Sudarky demonstraram explicitamente que a taxa de resposta de uma fonte uniformemente acelerada no espaço-tempo de Minkowski em interação com um campo eletromagnético no vácuo inercial, calculada em um referencial inercial é equivalente a taxa de resposta calculada no referencial co-acelerado com a fonte [2]. Esta equivalência só foi obtida levando-se em conta o efeito Unruh. O efeito Unruh é fundamental para a descrição correta de uma teoria de campos em um referencial acelerado, chamando a atenção para o fato de que o conceito de partícula elementar em Teoria Quântica de Campos (TQC) depende do observador. De acordo com o efeito Unruh, o vácuo de um campo descrito por observadores inerciais no espaço-tempo de Minkowski corresponde a um banho térmico de partículas (banho térmico de Unruh) visto por observadores confinados ao Rindler wedge, sendo que este banho térmico de partículas possui temperatura proporcional à aceleração própria do observador de Rindler, [3], [4], [5]. Esta análise da resposta total de uma fonte com aceleração própria constante, tanto do ponto de vista de observadores co-acelerados com a fonte quanto do ponto de vista de observadores inerciais já foi feita também para os campos de Klein-Gordon [6] e Dirac [7]. Em 2001, Matsas e Vanzella demonstraram a equivalência entre o tempo próprio de vida de um próton uniformemente acelerado, calculado no referencial inercial e no referencial co-acelerado com o próton, usando novamente o efeito Unruh [7].

Aqui realizamos a quantização canônica do campo vetorial massivo (campo de Proca) no espaço-tempo de Rindler e calculamos a taxa de resposta total de uma fonte parada com aceleração própria constante interagindo com as partículas vetoriais massivas neutras de energia zero do banho térmico de Unruh (para uma discussão sobre estas partículas de energia zero, veja [8]). Esta resposta é comparada com aquela calculada por observadores inerciais para tal

fonte acelerada no vácuo inercial. Nossa análise pode ser usada para interpretar o fenômeno da emissão de partículas Z^0 por elétrons uniformemente acelerados em Minkowski do ponto de vista de observadores co-acelerados. É importante lembrar também, que processos analisados no Rindler Wedge levando em conta a presença do banho térmico de Unruh descrevem muito bem o resultado do mesmo processo acontecendo muito próximo do horizonte de eventos de um buraco negro na presença da radiação Hawking [1].

Este trabalho é organizado como se segue: No capítulo 1, mostraremos os elementos básicos para a quantização do campo vetorial massivo no espaço-tempo de Minkowski, *i.e.*, usaremos a densidade lagrangeana *standart* encontrada em livros de TQC e chegaremos à equação de Proca. Tendo a referida equação de campo, nos concentraremos em encontrar um conjunto ortonormalizado de soluções desta equação. Isto será feito segundo dois referenciais, um inercial e outro uniformemente acelerado. Uma vez encontradas as soluções para a equação de campo, estaremos aptos a iniciar o processo de quantização canônica. No capítulo 2, quantizamos o campo de Proca no referencial inercial, postulamos as relações de comutação a tempos iguais para o campo de Proca e seu momento canonicamente conjugado e encontramos a relação de comutação que os operadores criação e aniquilação de partículas devem obedecer. Além disso, na seção 2.2, definimos a fonte uniformemente acelerada no espaço-tempo de Minkowski, que será utilizada para calcular a taxa de resposta no referencial inercial (taxa de emissão de partículas de Minkowski), em nível de árvore da teoria de perturbações, desta fonte em interação com o campo vetorial massivo. No capítulo 3, repetiremos os passos do capítulo 2, considerando agora um referencial acelerado junto com a fonte, *i.e.*, um referencial onde a fonte do campo está em repouso. Quantizamos canonicamente o campo vetorial massivo e calculamos a taxa de resposta total da fonte estática com aceleração própria constate interagindo com as partículas vetoriais massivas de energia zero do banho térmico de Unruh. Comparamos esta resposta total com aquela obtida no capítulo 2 para o referencial inercial. Concluiremos esta dissertação fazendo algumas considerações sobre a interpretação dada nestes dois referenciais sobre o processo de interação da fonte com o campo e sobre o trabalho de maneira geral. Usaremos o sistema de unidades natural onde $c = k_B = \hbar = 1$, a menos que se queira explicitar estas constantes, além da assinatura $(+, -, -, -)$.

Capítulo 1

Campo Vetorial Massivo

O campo vetorial massivo pode ser pensado como o campo de fótons massivos. Isto é, dada a lagrangeana do campo eletromagnético, adiciona-se um termo de massa a esta lagrangeana e obtém-se a lagrangeana do campo de Proca. Na seção 1.1, mostraremos a dinâmica do campo de Proca, *i.e.*, deduziremos sua equação de campo em qualquer referencial. Posteriormente, na subseção 1.2.1 particularizaremos esta equação para um referencial inercial no espaço-tempo de Minkowski e mostraremos sua solução, assaz conhecida [9]. Em seguida, na subseção 1.2.2, deduziremos a solução da equação de campo no referencial acelerado. Antes, porém, faremos uma digressão sobre a solução da equação do campo escalar massivo descarregado no *Rindler wedge*, já que os modos que serão solução da equação de Proca, no referencial acelerado, estarão escritos em termos desse campo escalar.

1.1 A equação do campo vetorial massivo

A ação de um campo clássico é dada por [10]

$$S = \int d^4x \mathcal{L}, \quad (1.1)$$

com a densidade lagrangeana do campo vetorial massivo escrita como

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g} \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} m^2 A_\mu A^\mu - j_\mu A^\mu \right), \quad (1.2)$$

onde $\sqrt{-g}$ é a raiz quadrada de menos o determinante da métrica do espaço-tempo (*i.e.*, $\sqrt{-g} = \sqrt{-\det(g_{\mu\nu})}$) e $F_{\mu\nu}$ é dado por

$$F_{\mu\nu} = \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu, \quad (1.3)$$

sendo ∇_μ a derivada co-variante. Usando o princípio da ação extrema,

$$\frac{\delta S}{\delta A_\nu} = 0,$$

na equação (1.1) , encontramos a equação de Euler-Lagrange para campos,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^\nu} - \nabla_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla_\mu A^\nu} \right) = 0. \quad (1.4)$$

Com a lagrangeana do campo de Proca, (1.2), e a identidade

$$\frac{\partial(F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta})}{\partial(\nabla_\mu A_\nu)} = 4F^{\mu\nu}, \quad (1.5)$$

encontramos a equação que o campo vetorial massivo deve satisfazer, qual seja

$$\nabla_\mu F^{\mu\nu} + m^2 A^\nu = j^\nu \therefore \quad (1.6)$$

$$(\nabla^\mu \nabla_\mu + m^2)A^\nu - \nabla^\nu \nabla_\mu A^\mu = j^\nu. \quad (1.7)$$

Esta equação é conhecida na literatura como a **Equação de Proca**¹

Podemos extrair uma informação valiosa da teoria do campo de Proca. De fato, tomando a quadri-divergência da Equação de Proca e levando em conta que a curvatura do espaço-tempo de Minkowski é zero, notamos que o primeiro termo do primeiro membro da equação resultante se cancela com o terceiro termo do primeiro membro da mesma equação, o que resulta em

$$\nabla_\nu A^\nu = \frac{1}{m^2} \nabla_\nu j^\nu. \quad (1.8)$$

Perceba que na ausência de fontes, ou se existirem fontes tais que estas obedeçam a equação da continuidade, a condição de Lorenz é automaticamente satisfeita na teoria de Proca, constituindo, portanto, um vínculo dessa teoria. Com efeito, as soluções da Equação de Proca (1.7), no vácuo, satisfazem o seguinte conjunto de duas equações,

$$(\nabla^\mu \nabla_\mu + m^2)A_\nu = 0. \quad (1.9)$$

$$\nabla_\nu A^\nu = 0 \quad (1.10)$$

Na próxima seção encontraremos estas soluções.

¹Para uma maneira alternativa de se deduzir a Equação de Proca, generalizando as leis da eletrostática e magnetostática, ver [11].

Observemos que a lagrangeana \mathcal{L} quebra a simetria das variáveis espaciais e temporais. De fato, calculando o momento canonicamente conjugado à variável A_μ , π^μ , obtemos

$$\pi^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_\mu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 A_\mu)} = F^{\mu 0}. \quad (1.11)$$

Vemos que o momento canonicamente conjugado à variável A_0 é zero. Isto poderia constituir um problema ao quantizarmos o campo de Proca. Entretanto, tomando a componente temporal da equação (1.6) no vácuo, vemos que

$$\nabla_i F^{i0} + m^2 A^0 = 0, \quad (1.12)$$

com $i = 1, 2, 3$. Portanto, a componente temporal de A^μ é espúria, visto que não é independente das componentes espaciais. Dessa forma, precisamos de apenas três vetores de polarização para descrever o campo vetorial massivo.

Mas, se quisermos quantizar o campo mantendo a simetria entre as variáveis espaciais e temporais (*i.e.*, de forma explicitamente co-variante) é preciso introduzir uma dinâmica no momento conjugado à variável A_0 . Para isto, podemos introduzir o termo $\nabla^\mu A_\mu$ na ação. De forma que a densidade lagrangeana do campo livre fique da seguinte forma:

$$\mathcal{L}' = \sqrt{-g} \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} m^2 A_\mu A^\mu - \frac{1}{2} \alpha (\nabla^\sigma A_\sigma)^2 \right), \quad (1.13)$$

sendo que α é um parâmetro que será escolhido convenientemente. É fácil mostrar que a equação de campo obtida desta nova lagrangeana é dada por

$$(\nabla^\mu \nabla_\mu + m^2) A^\nu - (1 - \alpha) \nabla^\nu (\nabla_\mu A^\mu) = 0. \quad (1.14)$$

Usando o gauge de Feynman ($\alpha = 1$), a equação de campo tomará a forma

$$(\nabla^\mu \nabla_\mu + m^2) A^\nu = 0,$$

que é a equação (1.9), agora com $\nabla_\mu A^\mu \neq 0$, em geral.

Vejamos qual é o momento canonicamente conjugado ao campo A_μ .

$$\begin{aligned} \pi'^\mu &= \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial (\nabla_0 A_\mu)} = \sqrt{-g} (-F^{0\mu} - \alpha g^{0\mu} \nabla^\sigma A_\sigma) \quad \therefore \\ \pi'^\mu &= \sqrt{-g} (-F^{0\mu} - g^{0\mu} \nabla^\sigma A_\sigma). \end{aligned} \quad (1.15)$$

Nos capítulos 2 e 3 faremos a quantização canônica do campo de Proca e usaremos para a densidade lagrangeana a expressão (1.13) ao invés de (1.2), para mantermos $\pi^0 \neq 0$. A condição de Lorenz não será imposta ao campo A_μ . Ao invés disso, restringiremos o espaço de Hilbert dos estados do campo àquele subespaço onde o valor esperado de $\nabla^\mu A_\mu$ seja zero. Os vetores deste subespaço serão chamados de estados físicos.

1.2 Soluções da equação de campo

Consideraremos o campo vetorial massivo no espaço-tempo de Minkowski. Existem pelo menos dois tipos de observadores neste espaço-tempo, a saber: Um referencial associado a observadores inerciais e um referencial associado a uma família de observadores acelerados. No referencial inercial, o intervalo de espaço-tempo invariante é dado por: $ds^2 = dt^2 - dz^2 - dx^2 - dy^2$. Consequentemente, as componentes da métrica de Minkowski neste referencial são dadas por

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (1.16)$$

Essa representação da métrica de Minkowski irá mudar no referencial associado a observadores acelerados. De fato, pode-se mostrar que a equação que define a linha de mundo de um observador uniformemente acelerado na direção z do referencial inercial definido por (1.16) (com aceleração própria constante a'), é dada por

$$z^2 - t^2 = a'^{-2}, \quad x = cte, \quad y = cte, \quad (1.17)$$

sendo t , z , x e y as coordenadas temporais e espaciais, respectivamente, do referencial inercial. Contudo, existe um sistema de coordenadas (τ, ξ, x, y) que descreve o referencial associado a uma família de observadores uniformemente acelerados. Estas novas coordenadas são chamadas de *coordenadas de Rindler* e estão relacionadas às coordenadas inerciais por

$$z = \frac{e^{a\xi}}{a} \cosh(a\tau); \quad t = \frac{e^{a\xi}}{a} \sinh(a\tau). \quad (1.18)$$

Após uma pequena manipulação, as coordenadas de Rindler nos conduzem ao seguinte resultado

$$z^2 - t^2 = a^{-2} e^{2a\xi}. \quad (1.19)$$

comparando (1.17) com (1.19), vemos que a aceleração própria a' , de um observador com coordenada $\xi = \text{constante}$, está relacionada com o parâmetro a por $a' = ae^{-a\xi}$. Como $\xi = 0 \Leftrightarrow a' = a$, o parâmetro a em (1.18) é a aceleração própria do observador com coordenada $\xi = 0$.

O intervalo invariante de espaço-tempo, em Rindler, é encontrado por simples diferenciação das coordenadas de Rindler, e assume a forma²: $ds^2 = e^{2a\xi}(d\tau^2 - d\xi^2) - dx^2 - dy^2$. Portanto, as componentes da métrica em coordenadas de Rindler são

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} e^{2a\xi} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{2a\xi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (1.20)$$

Percebe-se, pela métrica (1.20), que apesar de o espaço-tempo de Rindler ser preenchido por uma família de observadores que possuem acelerações próprias diferentes, estes observadores “vêm” uns aos outros estáticos ($d\tau = 0 \Rightarrow dS \neq dS(\tau)$).

Note que a família de curvas (1.19), com $-\infty < \xi < \infty$, preenchem apenas duas porções, causalmente desconexas, do espaço-tempo de Minkowski. Estas porções são chamadas de *Rindler wedges*, veja a figura 1.1.

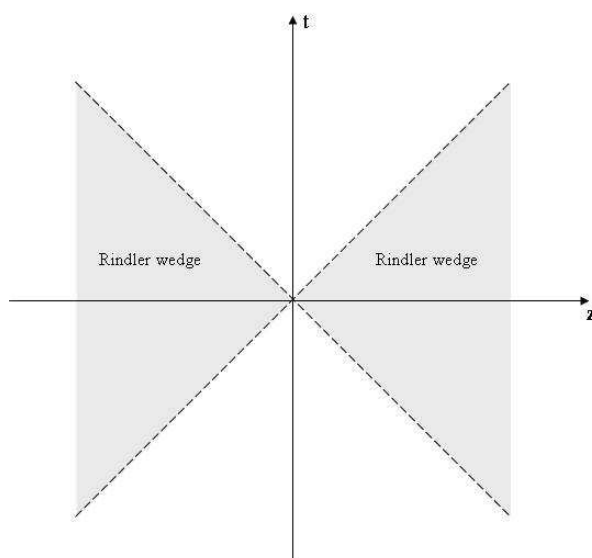


Figura 1.1: Espaço-tempo de Minkowski. As regiões sombreadas correspondem aos Rindler wedges.

²Esta expressão é demonstrada no apêndice A.

1.2.1 Soluções da equação de campo no referencial inercial

As soluções para equação (1.9) em um referencial inercial (veja [9]) são dadas por ondas planas,

$$A_\mu = N_\omega e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} \epsilon_\mu(\vec{k}, \lambda), \quad (1.21)$$

onde $\omega = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2}$ e $\lambda = 1, 2, 3, 4$. Os quadri-vetores $\epsilon_\mu(\vec{k}, \lambda)$ são linearmente independentes (L.I.) e satisfazem as relações,

$$\epsilon_\mu(\vec{k}, \lambda) \epsilon^\mu(\vec{k}, \lambda') = g_{\lambda, \lambda'}, \quad (1.22)$$

com $g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1, g_{44} = 1$, além de

$$\sum_{\lambda=1}^4 \epsilon_\mu(\vec{k}, \lambda) \epsilon_\nu(\vec{k}, \lambda) = \eta_{\mu\nu}. \quad (1.23)$$

As nossas escolhas para os vetores de polarização são as mesmas de [9], quais sejam:

$$\epsilon^\mu(\vec{k}, 1) = (0, \vec{\epsilon}(\vec{k}, 1)), \quad (1.24)$$

$$\epsilon^\mu(\vec{k}, 2) = (0, \vec{\epsilon}(\vec{k}, 2)), \quad (1.25)$$

$$\epsilon^\mu(\vec{k}, 3) = \left(\frac{|\vec{k}|}{m}, \frac{\omega}{m} \hat{k} \right), \quad (1.26)$$

$$\epsilon^\mu(\vec{k}, 4) = \left(\frac{k^\mu}{m} \right), \quad (1.27)$$

onde $\vec{\epsilon}(\vec{k}, 1)$ e $\vec{\epsilon}(\vec{k}, 2)$ são vetores unitários ortogonais entre si (segundo o produto interno de Klein-Gordon generalizado, definido a seguir) e ao vetor de onda, \vec{k} . Da escolha (1.24)-(1.27), notamos que os vetores com $\lambda = 1, \lambda = 2, \lambda = 3$ são ortogonais ao quadri-vetor k^μ .

As soluções (1.21) são ortonormalizadas pelo produto interno de Klein-Gordon generalizado, definido como [12]

$$(A^{(i)}, A^{(j)}) = \int_\Sigma d\Sigma_\mu W^\mu [A^{(i)}, A^{(j)}], \quad (1.28)$$

com

$$W^\mu[A^{(i)}, A^{(j)}] = \frac{i}{\sqrt{-g}} (A_\nu^{(i)*} \pi^{(j)\mu\nu} - A_\nu^{(j)} \pi^{(i)\mu\nu*}), \quad (1.29)$$

$d\Sigma_\mu = d\Sigma^{(3)} n_\mu = \sqrt{-g^{(3)}} d^3 x_M n_\mu$, sendo que n_μ é o versor ortogonal a uma hipersuperfície de Cauchy a $t = \text{constante}$, e $i = \lambda, k_x, k_y, k_z, j = \lambda', k'_x, k'_y, k'_z$. Como a quadri-corrente (1.29) é conservada ($\nabla_\mu W^\mu = 0$) o produto escalar (1.28) não depende da escolha de Σ . Além disso,

$$\pi^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\nabla_\nu A_\mu)}, \quad (1.30)$$

que no caso da lagrangeana (1.13) assumirá a forma

$$\pi^{\mu\nu} = \sqrt{-g} [-F^{\mu\nu} - g^{\mu\nu} \nabla^\alpha A_\alpha] \quad (1.31)$$

ou

$$\pi^{\mu\nu} = \sqrt{-g} [\nabla^\nu A^\mu - \nabla^\mu A^\nu - g^{\mu\nu} \nabla^\alpha A_\alpha]. \quad (1.32)$$

No referencial inercial o produto interno de Klein-Gordon generalizado definido por (1.28) e (1.29) assumirá uma forma bastante simplificada. De fato, usando (1.32), teremos

$$(A^{(i)}, A^{(j)}) = i \int d\Sigma_0 \left[-A_\nu^{(i)*} \nabla^0 A^{(j)\nu} + A_\nu^{(i)*} \nabla^\nu A^{(j)0} - g^{00} A_0^{(i)*} \nabla^\alpha A_\alpha^{(j)} + \right. \\ \left. + A_\nu^{(j)} \nabla^0 A^{(i)\nu*} - A_\nu^{(j)} \nabla^\nu A^{(i)0*} + A_0^{(j)} g^{00} \nabla^\beta A_\beta^{(i)*} \right],$$

onde $\sqrt{-g^{(3)}} = 1$, $n_\mu = (1, 0, 0, 0)$, neste referencial. Além disso, lembremos que no referencial inercial os termos de conexão são nulos. Assim,

$$(A^{(i)}, A^{(j)}) = i \int d^3x_M \left[-A_\nu^{(i)*} \partial_0 A^{(j)\nu} + A_\nu^{(i)*} \partial^\nu A^{(j)0} - A_0^{(i)*} \partial^\alpha A_\alpha^{(j)} + \right. \\ \left. + A_\nu^{(j)} \partial_0 A^{(i)\nu*} - A_\nu^{(j)} \partial^\nu A^{(i)0*} + A_0^{(j)} \partial^\beta A_\beta^{(i)*} \right]. \quad (1.33)$$

Note que

$$\partial^\nu (A_\nu^{(i)*} A^{(j)0}) = (\partial^\nu A_\nu^{(i)*}) A^{(j)0} + A_\nu^{(i)*} \partial^\nu A^{(j)0} \therefore$$

$$A_\nu^{(i)*} \partial^\nu A^{(j)0} = \partial^\nu (A_\nu^{(i)*} A^{(j)0}) - A^{(j)0} \partial^\nu A_\nu^{(i)*}. \quad (1.34)$$

Analogamente, encontramos

$$-A_\nu^{(j)} \partial^\nu A^{(i)0*} = A^{(i)0*} \partial^\nu A_\nu^{(j)} - \partial^\nu (A_\nu^{(j)} A^{(i)0*}). \quad (1.35)$$

Substituindo (1.34) e (1.35) em (1.33), encontramos,

$$(A^{(i)}, A^{(j)}) = i \int d^3x_M [A_\nu^{(j)} \partial_0 A^{(i)\nu*} - A_\nu^{(i)*} \partial_0 A^{(j)\nu} + \partial^\nu (A_\nu^{(i)*} A^{(j)0}) - \partial^\nu (A_\nu^{(j)} A^{(i)0*})] \therefore$$

$$(A^{(i)}, A^{(j)}) = i \int d^3x_M [A_\nu^{(j)} \partial_0 A^{(i)\nu*} - A_\nu^{(i)*} \partial_0 A^{(j)\nu} + \partial_k (A^{(i)*k} A^{(j)0} - A^{(j)k} A^{(i)0*})],$$

onde $k = 1, 2, 3$. Aplicando o teorema de Gauss,

$$(A^{(i)}, A^{(j)}) = i \int d^3x_M [A_\nu^{(j)} \partial_0 A^{(i)\nu*} - A_\nu^{(i)*} \partial_0 A^{(j)\nu}] + i \int d\sigma n_k (A^{(i)*k} A^{(j)0} - A^{(j)k} A^{(i)0*}).$$

Vamos analisar o termo de superfície separadamente.

$$\begin{aligned}
& \int d\sigma n_k (A^{(i)*k} A^{(j)0} - A^{(j)k} A^{(i)0*}) = \int_{z \rightarrow +\infty} d\sigma n_z (A^{(i)*1} A^{(j)0} - A^{(j)1} A^{(i)0*}) + \\
& + \int_{z \rightarrow -\infty} d\sigma (-n_z) (A^{(i)*1} A^{(j)0} - A^{(j)1} A^{(i)0*}) + \int_{x \rightarrow +\infty} d\sigma n_x (A^{(i)*2} A^{(j)0} - A^{(j)2} A^{(i)0*}) + \\
& + \int_{x \rightarrow -\infty} d\sigma (-n_x) (A^{(i)*2} A^{(j)0} - A^{(j)2} A^{(i)0*}) + \int_{y \rightarrow +\infty} d\sigma n_y (A^{(i)*3} A^{(j)0} - A^{(j)3} A^{(i)0*}) + \\
& + \int_{y \rightarrow -\infty} d\sigma (-n_y) (A^{(i)*3} A^{(j)0} - A^{(j)3} A^{(i)0*}).
\end{aligned}$$

Estas integrais produzirão distribuições do tipo $\delta^2(\vec{k} - \vec{k}')$. Por isso, elas se anularão individualmente se $\vec{k} \neq \vec{k}'$. Para o caso em que $\vec{k} = \vec{k}'$ as integrais se anularão aos pares, por causa do sinal “-”. Assim,

$$(A^{(i)}, A^{(j)}) = i \int d^3x_M [A_\nu^{(j)} \partial_0 A^{(i)\nu*} - A_\nu^{(i)*} \partial_0 A^{(j)\nu}]. \quad (1.36)$$

Com o auxílio da equação (1.36), vamos encontrar a constante de normalização N_ω , de (1.21). Usando (1.21), temos que

$$A_\nu^{(j)} \partial_0 A^{(i)\nu*} = N_{\omega'} N_\omega^* (i\omega) e^{-i(\vec{k}-\vec{k}') \cdot \vec{x}} e^{i(\omega-\omega')t} \epsilon_\nu(\vec{k}, \lambda) \epsilon_\nu(\vec{k}', \lambda') \quad (1.37)$$

e

$$A_\nu^{(i)*} \partial_0 A^{(j)\nu} = N_\omega^* N_{\omega'} (-i\omega') e^{-i(\vec{k}-\vec{k}') \cdot \vec{x}} e^{i(\omega-\omega')t} \epsilon_\nu(\vec{k}, \lambda) \epsilon_\nu(\vec{k}', \lambda'). \quad (1.38)$$

Substituindo (1.37) e (1.38) em (1.36), teremos

$$\begin{aligned}
(A^{(i)}, A^{(j)}) &= i \int d^3x_M [i(\omega' + \omega) N_\omega^* N_{\omega'} e^{-i(\vec{k}-\vec{k}') \cdot \vec{x}} e^{i(\omega-\omega')t} \epsilon_\nu(\vec{k}, \lambda) \epsilon_\nu(\vec{k}', \lambda')] \dots \\
(A^{(i)}, A^{(j)}) &= -(\omega' + \omega) N_\omega^* N_{\omega'} (2\pi)^3 e^{i(\omega-\omega')t} \delta(\vec{k} - \vec{k}') g_{\lambda, \lambda'}, \quad (1.39)
\end{aligned}$$

onde usamos a equação (1.22). Com efeito, vemos que a constante de normalização será dada por

$$|N_\omega| = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega}}, \quad (1.40)$$

com $\omega = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2}$. Portanto, o conjunto ortonormalizado que é solução da equação (1.9), no referencial inercial, é dado por

$$A_\mu(\vec{k}, \lambda) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega}} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} \epsilon_\mu(\vec{k}, \lambda). \quad (1.41)$$

A partir de (1.39), vemos que a matriz que representará a ortogonalidade destes modos (lembre que $g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1$ e $g_{44} = 1$), será dada por

$$(A^{(i)}, A^{(j)}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \delta(\vec{k} - \vec{k}'), \quad (1.42)$$

sendo que os elementos das linhas e colunas desta matriz são identificados segundo a sequência $\lambda = 1, 2, 3, 4$.

A solução mais geral para a equação (1.9), será

$$A_\mu(x^\beta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} d^3\vec{k} \sum_{\lambda=1}^4 \left[a_{(\vec{k}, \lambda)} A_\mu(\vec{k}, \lambda) + c.c. \right], \quad (1.43)$$

com $A_\mu(\vec{k}, \lambda)$ sendo dado pela equação (1.41).

No capítulo 2 faremos a quantização canônica destas soluções, *i.e.*, promoveremos o campo A_μ a operador no espaço de Hilbert e as constantes $a_{(\vec{k}, \lambda)}$ serão identificadas como os operadores de aniquilação de partículas do campo de Proca.

1.2.2 Soluções da equação de campo no referencial acelerado

Antes de mostrarmos as soluções da equação (1.9) no referencial acelerado, é instrutivo analisarmos a solução da equação do campo escalar massivo descarregado no referencial acelerado. Esta análise é feita pormenorizadamente em [13].

Digressão sobre o campo de Klein-Gordon massivo no espaço-tempo de Rindler

A equação de Klein-Gordon,

$$(\nabla^\mu \nabla_\mu + m^2)\phi = 0, \quad (1.44)$$

pode ser escrita como

$$(g^{00}\nabla_0^2 + g^{11}\nabla_1^2 + g^{22}\nabla_2^2 + g^{33}\nabla_3^2 + m^2)\phi = 0.$$

No espaço-tempo de Rindler, esta assume a forma

$$\left[e^{-2a\xi}(\partial_\tau^2 - \partial_\xi^2) - \partial_x^2 - \partial_y^2 + m^2 \right] \phi = 0. \quad (1.45)$$

Se $\phi = \phi(\tau, \xi, x, y) = T(\tau)Z(\xi)X(x)Y(y)$, então

$$\left[e^{-2a\xi} \left(\frac{\ddot{T}}{T} - \frac{\ddot{Z}}{Z} \right) - \frac{\ddot{X}}{X} - \frac{\ddot{Y}}{Y} + m^2 \right] = 0 \therefore$$

$$e^{-2a\xi} \left(\frac{\ddot{T}}{T} - \frac{\ddot{Z}}{Z} \right) + (k_{\perp}^2 + m^2) = 0, \quad (1.46)$$

de modo que as soluções dependentes de x e y são, respectivamente: $X \propto e^{ik_x x}$ e $Y \propto e^{ik_y y}$ e $k_{\perp}^2 \equiv k_x^2 + k_y^2$. Prosseguindo, podemos escrever (1.46) como

$$\frac{\ddot{Z}}{Z} - e^{2a\xi}(k_{\perp}^2 + m^2) = \frac{\ddot{T}}{T} \equiv -\omega^2$$

Resolvendo em T , e escrevendo a equação para Z teremos,

$$\frac{d^2 Z}{d\xi^2} - e^{2a\xi} \kappa^2 Z + \omega^2 Z = 0, \quad (1.47)$$

onde $\kappa^2 \equiv k_{\perp}^2 + m^2$ e $T \propto e^{-i\omega\tau}$. Mostraremos em seguida, com uma mudança de variáveis adequada, que as soluções da equação (1.47) podem ser escritas em termos das soluções da equação de Bessel modificada.

Seja, $s \equiv s(\xi)$, tal que

$$s = \frac{\kappa}{a} e^{a\xi} \Rightarrow s^2 a^2 = \kappa^2 e^{2a\xi}.$$

Então,

$$\frac{d}{d\xi} = \frac{ds}{d\xi} \frac{d}{ds} \Rightarrow \frac{d}{d\xi} = as \frac{d}{ds}$$

e

$$\frac{d^2}{d\xi^2} = a^2 s \frac{d}{ds} + a^2 s^2 \frac{d^2}{ds^2}.$$

Logo, a equação (1.47) ficará, agora com $Z(\xi) = Z(s(\xi))$,

$$a^2 s^2 \frac{d^2 Z}{ds^2} + a^2 s \frac{dZ}{ds} - s^2 a^2 Z + \omega^2 Z = 0 \therefore \quad (1.48)$$

$$s^2 \frac{d^2 Z}{ds^2} + s \frac{dZ}{ds} - \left[s^2 + \left(\frac{i\omega}{a} \right)^2 \right] Z = 0. \quad (1.49)$$

Esta é a equação de Bessel modificada, cujas soluções L.I. são [14]

$$Z(s) = C_1 I_{\frac{i\omega}{a}}(s) + C_2 K_{\frac{i\omega}{a}}(s). \quad (1.50)$$

Note que o potencial efetivo $V(\xi) = \kappa^2 e^{2a\xi}$ na equação (1.47) diverge exponencialmente quando $\xi \rightarrow \infty$. Por isso, é necessário que nossas soluções tendam a zero assintoticamente. Com efeito, a solução $I_{\frac{i\omega}{a}}(s)$ será descartada já que esta função não se anula assintoticamente. Ao contrário de $I_{\frac{i\omega}{a}}(s)$, que diverge no infinito, a função de McDonald, $K_{\frac{i\omega}{a}}(s)$, decai exponencialmente neste limite [15]. Dessa forma, o campo de Klein-Gordon, no referencial acelerado, assume a forma

$$\phi = C e^{i(k_x x + k_y y - \omega \tau)} K_{\frac{i\omega}{a}} \left(\frac{\kappa}{a} e^{a\xi} \right), \quad (1.51)$$

onde C é a constante de normalização, a qual determinaremos através do produto interno de Klein-Gordon dado por [16]

$$(\phi, \phi') = i \int_{\Sigma} d\Sigma_{\mu} [\phi^* \nabla^{\mu} \phi' - \phi' \nabla^{\mu} \phi^*],$$

onde, $d\Sigma_{\mu} = d\Sigma^{(3)} n_{\mu} = \sqrt{-g^{(3)}} d^3 x_R n_{\mu} = e^{a\xi} d^3 x_R n_{\mu}$. Em coordenadas de Rindler, o versor ortogonal à hipersuperfície de Cauchy a $\tau = \text{constante}$, n_{μ} , assume a forma

$$n_{\mu} = (e^{a\xi}, 0, 0, 0). \quad (1.52)$$

Lembrando que $g^{00} = e^{-2a\xi}$, o produto interno de Klein-Gordon envolvendo campos escalares poderá ser escrito como

$$(\phi, \phi') = \int d^3 x_R i [\phi^* \partial_0 \phi' - (\partial_0 \phi^*) \phi'], \quad (1.53)$$

onde $d^3 x_R \equiv dx dy d\xi$. Passemos ao cálculo da constante de normalização C , a partir de (1.53):

$$(\phi, \phi') = i C^* C' \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dx dy d\xi \left[e^{-i(k_x x + k_y y - \omega \tau)} K_{\frac{i\omega}{a}}^* (-i\omega') e^{i(k'_x x + k'_y y - \omega' \tau)} K_{\frac{i\omega'}{a}} + \right. \\ \left. - (i\omega) e^{-i(k_x x + k_y y - \omega \tau)} K_{\frac{i\omega}{a}}^* e^{i(k'_x x + k'_y y - \omega' \tau)} K_{\frac{i\omega'}{a}} \right]$$

$$(\phi, \phi') = 2C^* C' (\omega + \omega') e^{i(\omega - \omega')\tau} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dx dy d\xi e^{-i(k_x - k'_x)x} e^{-i(k_y - k'_y)y} K_{\frac{i\omega}{a}}^* K_{\frac{i\omega'}{a}} \dots$$

$$(\phi, \phi') = 2C^* C' (\omega + \omega') e^{i(\omega - \omega')\tau} (2\pi)^2 \delta(k_x - k'_x) \delta(k_y - k'_y) \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi K_{\frac{i\omega}{a}} K_{\frac{i\omega'}{a}}, \quad (1.54)$$

onde usamos o fato de que a função $K_{\frac{i\omega}{a}} \left(\frac{\kappa}{a} e^{a\xi} \right)$ é real se $\frac{\omega}{a}$ e o seu argumento forem reais [1]. Segundo [17], as funções de McDonald formam um conjunto ortonormal³ no intervalo $-\infty < \xi < +\infty$ e $\omega \geq 0$, isto é,

$$\delta(\omega - \omega') = \frac{2\omega}{a\pi^2} \sinh \left(\frac{\pi\omega}{a} \right) \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi K_{\frac{i\omega}{a}} \left(\frac{\kappa}{a} e^{a\xi} \right) K_{\frac{i\omega'}{a}} \left(\frac{\kappa}{a} e^{a\xi} \right). \quad (1.55)$$

³Ao invés de usarmos a notação de [17], vamos usar a notação que temos usado desde o início deste trabalho.

Usando (1.55) em (1.54), temos

$$(\phi, \phi') = 2C^*C'(\omega + \omega')e^{i(\omega - \omega')\tau}(2\pi)^2\delta(k_x - k'_x)\delta(k_y - k'_y)\frac{a\pi^2}{2\omega \sinh\left(\frac{\pi\omega}{a}\right)}\delta(\omega - \omega') \therefore$$

$$(\phi, \phi') = \frac{4\pi^4 a}{\sinh\left(\frac{\pi\omega}{a}\right)}|C|^2\delta(k_x - k'_x)\delta(k_y - k'_y)\delta(\omega - \omega'). \quad (1.56)$$

Para que os modos do campo escalar tenham norma unitária, devemos escolher a constante de normalização como sendo

$$|C| = \frac{\sqrt{\sinh\left(\frac{\pi\omega}{a}\right)}}{2\pi^2\sqrt{a}}.$$

Dessa forma, o campo escalar massivo que satisfaz (1.44) normalizado, é escrito como

$$\phi = \frac{\sqrt{\sinh\left(\frac{\pi\omega}{a}\right)}}{2\pi^2\sqrt{a}}e^{i(k_x x + k_y y - \omega\tau)}K_{\frac{i\omega}{a}}\left(\frac{\kappa}{a}e^{a\xi}\right), \quad k_x, k_y \in R, \quad \omega \geq 0. \quad (1.57)$$

Voltemos ao nosso objetivo. Queremos encontrar soluções L.I. para a equação (1.9) no referencial acelerado. Como ponto de partida, usaremos as soluções propostas para o campo vetorial sem massa, listado na referência [2]. Este campo satisfaz a equação

$$(\nabla^\mu \nabla_\mu)A_\nu = 0, \quad (1.58)$$

cujas soluções são

$$A_\nu^{(I, \omega, k_x, k_y)} = C^{(I, \omega, k_x, k_y)}(0, 0, k_y\phi, -k_x\phi), \quad (1.59)$$

$$A_\nu^{(II, \omega, k_x, k_y)} = C^{(II, \omega, k_x, k_y)}(\partial_\xi\phi, -i\omega\phi, 0, 0), \quad (1.60)$$

$$A_\nu^{(G, \omega, k_x, k_y)} = C^{(G, \omega, k_x, k_y)}(-i\omega\phi, \partial_\xi\phi, ik_x\phi, ik_y\phi), \quad (1.61)$$

$$A_\nu^{(L, \omega, k_x, k_y)} = C^{(L, \omega, k_x, k_y)}(0, 0, k_x\phi, k_y\phi). \quad (1.62)$$

Nestas equações, ϕ é a solução da equação do campo escalar sem massa descarregado. Os modos físicos “I” e “II” são definidos como os que satisfazem a condição de Lorenz e não são puro gauge (ou seja, não são escritos como o gradiente de um escalar, como é o caso do modo $A_\nu^{(G, \omega, k_x, k_y)}$). Existem dois modos físicos para o campo vetorial sem massa (que correspondem aos estados de polarização transversal do campo eletromagnético), que são: $A_\nu^{(I, \omega, k_x, k_y)}$ e $A_\nu^{(II, \omega, k_x, k_y)}$. Os

modos (1.59)-(1.62) são normalizados pelo produto interno de Klein-Gordon generalizado, dado por (1.28) e (1.29),

$$(A^{(i)}, A^{(j)}) = \int_{\Sigma} d\Sigma_{\mu} \frac{i}{\sqrt{-g}} (A_{\nu}^{(i)*} \pi^{(j)\mu\nu} - A_{\nu}^{(j)} \pi^{(i)\mu\nu*}),$$

onde $d\Sigma_{\mu} = d\Sigma^{(3)} n_{\mu} = \sqrt{-g^{(3)}} d^3 x_R n_{\mu} = e^{a\xi} d^3 x_R n_{\mu}$, com n_{μ} dado por (1.52), $\pi^{\mu\nu}$ dado por (1.30), além de $i = \lambda, \omega, k_x, k_y$ e $j = \lambda', \omega', k'_x, k'_y$.

Vamos investigar modos com a forma (1.59)-(1.62) (já que a equação do campo vetorial massivo é semelhante à equação do campo vetorial sem massa) mas com ϕ , neste caso, dado por (1.57) e ver se satisfazem a equação (1.9) e a condição de Lorenz (vínculo de Lorenz).

O modo $A_{\nu}^{(I,\omega,k_x,k_y)}$ satisfaz a equação (1.9). Vejamos:

$$(\nabla^{\mu} \nabla_{\mu} + m^2) A_{\nu}^{(I,\omega,k_x,k_y)} = (g^{\mu\rho} \nabla_{\rho} \nabla_{\mu} + m^2) A_{\nu}^{(I,\omega,k_x,k_y)} \quad \therefore$$

$$(\nabla^{\mu} \nabla_{\mu} + m^2) A_{\nu}^{(I,\omega,k_x,k_y)} = g^{\mu\rho} \nabla_{\rho} (\partial_{\mu} A_{\nu}^{(I,\omega,k_x,k_y)} - \Gamma_{\nu\mu}^{\sigma} A_{\sigma}^{(I,\omega,k_x,k_y)}) + m^2 A_{\nu}^{(I,\omega,k_x,k_y)},$$

como $\Gamma_{\nu\mu}^{\sigma} = 0$, para $\sigma = 2$ ou 3 e $A_{\nu}^{(I,\omega,k_x,k_y)}$ é dado por (1.59), o termo $\Gamma_{\nu\mu}^{\sigma} A_{\sigma}^{(I,\omega,k_x,k_y)}$ se anulará. Assim,

$$(\nabla^{\mu} \nabla_{\mu} + m^2) A_{\nu}^{(I,\omega,k_x,k_y)} = g^{\mu\rho} \nabla_{\rho} (\partial_{\mu} A_{\nu}^{(I,\omega,k_x,k_y)}) + m^2 A_{\nu}^{(I,\omega,k_x,k_y)}. \quad (1.63)$$

Usando

$$\nabla_{\rho} (\partial_{\mu} A_{\nu}) = \partial_{\rho} (\partial_{\mu} A_{\nu}) - \Gamma_{\mu\rho}^{\gamma} \partial_{\gamma} A_{\nu} - \Gamma_{\nu\rho}^{\omega} \partial_{\mu} A_{\omega}$$

em (1.63), teremos

$$\begin{aligned} (\nabla^{\mu} \nabla_{\mu} + m^2) A_{\nu}^{(I,\omega,k_x,k_y)} &= g^{\mu\rho} [\partial_{\rho} (\partial_{\mu} A_{\nu}^{(I,\omega,k_x,k_y)}) - \Gamma_{\mu\rho}^{\gamma} \partial_{\gamma} A_{\nu}^{(I,\omega,k_x,k_y)} + \\ &\quad - \Gamma_{\nu\rho}^{\omega} \partial_{\mu} A_{\omega}^{(I,\omega,k_x,k_y)}] + m^2 A_{\nu}^{(I,\omega,k_x,k_y)} \quad \therefore \end{aligned}$$

$$(\nabla^{\mu} \nabla_{\mu} + m^2) A_{\nu}^{(I,\omega,k_x,k_y)} = g^{\mu\rho} [\partial_{\rho} (\partial_{\mu} A_{\nu}^{(I,\omega,k_x,k_y)}) - \Gamma_{\mu\rho}^{\gamma} \partial_{\gamma} A_{\nu}^{(I,\omega,k_x,k_y)}] + m^2 A_{\nu}^{(I,\omega,k_x,k_y)} \quad \therefore$$

$$\begin{aligned} (\nabla^{\mu} \nabla_{\mu} + m^2) A_{\nu}^{(I,\omega,k_x,k_y)} &= \partial^{\mu} \partial_{\mu} A_{\nu}^{(I,\omega,k_x,k_y)} - g^{\mu\rho} \Gamma_{\mu\rho}^0 \partial_0 A_{\nu}^{(I,\omega,k_x,k_y)} + \\ &\quad - g^{\mu\rho} \Gamma_{\mu\rho}^1 \partial_1 A_{\nu}^{(I,\omega,k_x,k_y)} + m^2 A_{\nu}^{(I,\omega,k_x,k_y)}. \end{aligned}$$

Os únicos termos de conexão não nulos, em Rindler, são: $\Gamma^0_{01} = \Gamma^0_{10} = \Gamma^1_{00} = \Gamma^1_{11} = a$. Dessa forma,

$$(\nabla^{\mu} \nabla_{\mu} + m^2) A_{\nu}^{(I,\omega,k_x,k_y)} = (\partial^{\mu} \partial_{\mu} + m^2) A_{\nu}^{(I,\omega,k_x,k_y)}.$$

Note que as componentes não nulas do modo “I” ($A_2^{(I)}$ e $A_3^{(I)}$) satisfazem a equação de Klein-Gordon, logo este modo satisfaz a equação (1.9). É fácil ver que o modo “I” satisfaz a condição de Lorenz (uma demonstração semelhante é mostrada abaixo para o modo “L”), de tal forma que podemos usá-lo como modo físico do campo de Proca.

O modo $A_\nu^{(II,\omega,k_x,k_y)}$ é proporcional a $\epsilon_{\nu\rho}\nabla^\rho\phi$, sendo $\epsilon_{\tau\xi} = -\epsilon_{\xi\tau} = e^{2\alpha\xi}$ as únicas componentes não nulas de $\epsilon_{\mu\nu}$. Logo,

$$(\nabla^\beta\nabla_\beta + m^2)A_\nu \propto (\nabla^\beta\nabla_\beta + m^2)\epsilon_{\nu\rho}\nabla^\rho\phi \propto \epsilon_{\nu\rho}\nabla^\rho(\nabla^\beta\nabla_\beta + m^2)\phi = 0.$$

Este modo também satisfaz a condição de Lorenz. De fato,

$$\nabla^\nu A_\nu^{(II,\omega,k_x,k_y)} \propto \nabla^\nu\epsilon_{\nu\rho}\nabla^\rho\phi \propto \epsilon_{\nu\rho}\nabla^\nu\nabla^\rho\phi = 0.$$

Com efeito, o modo “II” será considerado um modo físico do campo de Proca.

O modo $A_\nu^{(G,\omega,k_x,k_y)}$ satisfaz a equação (1.9):

$$(\nabla^\beta\nabla_\beta + m^2)A_\nu^{(G,\omega,k_x,k_y)} \propto \nabla_\nu(\nabla^\beta\nabla_\beta + m^2)\phi = 0,$$

mas não a condição de Lorenz. Veja,

$$\nabla^\nu A_\nu^{(G,\omega,k_x,k_y)} = C^{(G,\omega,k_x,k_y)}\nabla^\nu\nabla_\nu\phi = -C^{(G,\omega,k_x,k_y)}m^2\phi \neq 0. \quad (1.64)$$

Portanto, o modo “G” não é físico.

Resta-nos examinar o modo $A_\nu^{(L,\omega,k_x,k_y)}$. Este modo, analogamente ao modo “I”, satisfaz a equação de campo [equação (1.9)], mas não a condição de Lorenz, como veremos:

$$\nabla^\nu A_\nu^{(L,\omega,k_x,k_y)} = g^{\nu\alpha}\nabla_\alpha A_\nu^{(L,\omega,k_x,k_y)} = g^{\nu\alpha}(\partial_\alpha A_\nu^{(L,\omega,k_x,k_y)} - \Gamma^\kappa_{\nu\alpha}A_\kappa^{(L,\omega,k_x,k_y)}),$$

Notando que $\Gamma^\kappa_{\nu\alpha}A_\kappa^{(L,\omega,k_x,k_y)} = 0$ (a exemplo do modo “I”), temos

$$\nabla^\nu A_\nu^{(L,\omega,k_x,k_y)} = g^{\nu\alpha}(\partial_\alpha A_\nu^{(L,\omega,k_x,k_y)}) \therefore$$

$$\nabla^\nu A_\nu^{(L,\omega,k_x,k_y)} = g^{22}\partial_2 A_2^{(L,\omega,k_x,k_y)} + g^{33}\partial_3 A_3^{(L,\omega,k_x,k_y)} \therefore$$

$$\nabla^\nu A_\nu^{(L,\omega,k_x,k_y)} = C^{(L,\omega,k_x,k_y)}(-i)(k_x^2 + k_y^2)\phi \therefore \nabla^\nu A_\nu^{(L,\omega,k_x,k_y)} = -iC^{(L,\omega,k_x,k_y)}k_\perp^2\phi \neq 0. \quad (1.65)$$

Assim, o modo “L” não é físico.

Em seguida calculemos as constantes de normalização associadas aos modos (1.59)-(1.62). Começaremos com o modo “I”.

$$(A^{(i)}, A^{(j)}) = \int_{\Sigma} d\Sigma_{\mu} \frac{i}{\sqrt{-g}} (A_{\nu}^{(i)*} \pi^{(j)\mu\nu} - A_{\nu}^{(j)} \pi^{(i)\mu\nu*}), \quad (1.66)$$

com $i = I, \omega, k_x, k_y$ e $j = I, \omega', k'_x, k'_y$.

$$(A^{(i)}, A^{(j)}) = \int d^3 x_R e^{2a\xi} i \left[A_{\nu}^{(i)*} (\nabla^{\nu} A^{(j)0} - \nabla^0 A^{(j)\nu}) - A_{\nu}^{(j)} (\nabla^{\nu} A^{(i)0} - \nabla^0 A^{(i)\nu})^* \right].$$

Como, para o modo “I”, $A_0 = A_1 = 0$, teremos

$$(A^{(i)}, A^{(j)}) = \int d^3 x_R e^{2a\xi} i g^{\nu\rho} \left[-A_{\nu}^{(i)*} \nabla^0 A_{\rho}^{(j)} + A_{\nu}^{(j)} \nabla^0 A_{\rho}^{(i)*} \right] \therefore$$

$$(A^{(i)}, A^{(j)}) = \int d^3 x_R e^{2a\xi} i \left[-g^{22} A_2^{(i)*} g^{00} \nabla_0 A_2^{(j)} - g^{33} A_3^{(i)*} g^{00} \nabla_0 A_3^{(j)} + \right. \\ \left. + g^{22} A_2^{(j)} g^{00} \nabla_0 A_2^{(i)*} + g^{33} A_3^{(j)} g^{00} \nabla_0 A_3^{(i)*} \right].$$

Os únicos termos de conexão não-nulos em Rindler, $\Gamma^0_{01}, \Gamma^0_{10}, \Gamma^1_{00}, \Gamma^1_{11}$, nos permitem escrever

$$(A^{(i)}, A^{(j)}) = C^{(i)*} C^{(j)} [k_x k'_x + k_y k'_y] \int d^3 x_R (\phi^* \partial_0 \phi' - \phi' \partial_0 \phi^*) \therefore$$

$$(A^{(i)}, A^{(j)}) = C^{(i)*} C^{(j)} [k_x k'_x + k_y k'_y] (\phi, \phi').$$

Usando (1.56), já normalizado, teremos

$$(A^{(i)}, A^{(j)}) = C^{(i)*} C^{(i)} (k_x^2 + k_y^2) \delta(k_x - k'_x) \delta(k_y - k'_y) \delta(\omega - \omega') \therefore$$

$$|C^{(I, \omega, k_x, k_y)}| = \frac{1}{k_{\perp}}.$$

Consequentemente, o modo $A_{\nu}^{(I, \omega, k_x, k_y)}$ normalizado, solução da equação (1.9), será dado por

$$A_{\nu}^{(I, \omega, k_x, k_y)} = \frac{1}{k_{\perp}} (0, 0, k_y \phi, -k_x \phi), \quad (1.67)$$

onde $k_{\perp} = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$ e ϕ é solução de (1.45).

Encontraremos a seguir a constante de normalização para o modo $A_{\nu}^{(II, \omega, k_x, k_y)}$.

$$(A^{(i)}, A^{(j)}) = \int_{\Sigma} d\Sigma_{\mu} \frac{i}{\sqrt{-g}} (A_{\nu}^{(i)*} \pi^{(j)\mu\nu} - A_{\nu}^{(j)} \pi^{(i)\mu\nu*}), \quad (1.68)$$

com $i = II, \omega, k_x, k_y$ e $j = II, \omega', k'_x, k'_y$. Prosseguindo, podemos demonstrar que

$$(A^{(i)}, A^{(j)}) = \int d^3 x_R i g^{11} \left[A_1^{(i)*} (\partial_1 A_0^{(j)} - \partial_0 A_1^{(j)}) - A_1^{(j)} (\partial_1 A_0^{(i)} - \partial_0 A_1^{(i)})^* \right],$$

$$(A^{(i)}, A^{(j)}) = -iC^{(i)*}C^{(j)} \int d^3x_R e^{-2a\xi} [\partial_0\phi^*(\partial_1^2\phi' - \partial_0^2\phi') + \partial_0\phi'(\partial_0^2\phi^* - \partial_1^2\phi^*)]. \quad (1.69)$$

Da equação (1.45) e da equação (1.57) é fácil ver que

$$(\partial_0^2 - \partial_1^2)\phi = -e^{2a\xi}(k_\perp^2 + m^2)\phi = -e^{2a\xi}\kappa^2\phi.$$

Assim, (1.69) ficará

$$(A^{(i)}, A^{(j)}) = -iC^{(i)*}C^{(j)}\kappa^2 \int d^3x_R [\partial_0\phi^*(\phi') + \partial_0\phi'(-\phi^*)] \therefore \quad (1.70)$$

$$(A^{(i)}, A^{(j)}) = C^{(i)*}C^{(j)}\kappa^2(\phi, \phi'),$$

e, usando (1.56), teremos que

$$|C^{II,\omega,k_x,k_y}| = \frac{1}{\kappa}. \quad (1.71)$$

O modo $A_\nu^{(II,\omega,k_x,k_y)}$, solução da equação (1.9), normalizado, será escrito como

$$A_\nu^{(II,\omega,k_x,k_y)} = \frac{1}{\kappa}(\partial_\xi\phi, -i\omega\phi, 0, 0). \quad (1.72)$$

Agora calculemos a constante de normalização do modo $A_\nu^{(G,\omega,k_x,k_y)}$. Façamos

$$(A^{(i)}, A^{(j)}) = \int_\Sigma d\Sigma_\mu \frac{i}{\sqrt{-g}} (A_\nu^{(i)*} \pi^{(j)\mu\nu} - A_\nu^{(j)} \pi^{(i)\mu\nu*}),$$

onde $i = G, \omega, k_x, k_y$ e $j = G, \omega', k'_x, k'_y$. Como o tensor de Maxwell associado ao modo puro gauge é nulo, virá

$$(A^{(i)}, A^{(j)}) = \int_\Sigma d\Sigma_\mu i [A_\nu^{(i)*} (-g^{\mu\nu} \nabla^\beta A_\beta^{(j)}) - A_\nu^{(j)} (-g^{\mu\nu} \nabla^\beta A_\beta^{(i)})^*].$$

Usando, (1.61) e (1.64), teremos

$$\begin{aligned} (A^{(i)}, A^{(j)}) &= C^{(i)*}C^{(j)}m^2 \int d^3x_R i [(\partial_0\phi^*)\phi' - (\partial_0\phi')\phi^*] \therefore \\ (A^{(i)}, A^{(j)}) &= C^{(i)*}C^{(j)}m^2[-(\phi, \phi')] \therefore \\ (A^{(i)}, A^{(j)}) &= -|C^{(i)}|^2m^2\delta(k_x - k'_x)\delta(k_y - k'_y)\delta(\omega - \omega') \therefore \end{aligned}$$

$$|C^{(G,\omega,k_x,k_y)}| = \frac{1}{m}. \quad (1.73)$$

Note que o modo “G” tem norma negativa. O modo $A_\nu^{(G,\omega,k_x,k_y)}$, solução da equação (1.9), normalizado, será escrito como,

$$A_\nu^{(G,\omega,k_x,k_y)} = \frac{1}{m}(-i\omega\phi, \partial_\xi\phi, ik_x\phi, ik_y\phi). \quad (1.74)$$

Agora calculemos a constante de normalização associada ao modo $A_\nu^{(L,\omega,k_x,k_y)}$:

$$(A^{(i)}, A^{(j)}) = \int_\Sigma d\Sigma_\mu \frac{i}{\sqrt{-g}} (A_\nu^{(i)*} \pi^{(j)\mu\nu} - A_\nu^{(j)} \pi^{(i)\mu\nu*}), \quad (1.75)$$

com $i = L, \omega, k_x, k_y$ e $j = L, \omega', k'_x, k'_y$. Pode-se mostrar que esta última expressão reduz-se a

$$(A^{(i)}, A^{(j)}) = \int d^3x_R i [A_2^{(i)*} \partial_0 A_2^{(j)} + A_3^{(i)*} \partial_0 A_3^{(j)*} - A_2^{(j)} (\partial_0 A_2^{(i)})^* - A_3^{(j)} (\partial_0 A_3^{(i)})^*].$$

Usando (1.62), ficamos com

$$(A^{(i)}, A^{(j)}) = C^{(i)*} C^{(j)} (k_x k'_x + k_y k'_y) i \int d^3x_R (\phi^* \partial_0 \phi' - \phi' \partial_0 \phi^*) \therefore \quad (1.76)$$

$$(A^{(i)}, A^{(j)}) = C^{(i)*} C^{(j)} (k_x k'_x + k_y k'_y) (\phi, \phi') \therefore$$

$$(A^{(i)}, A^{(j)}) = |C^{(i)}|^2 (k_x^2 + k_y^2) \delta(k_x - k'_x) \delta(k_y - k'_y) \delta(\omega - \omega') \therefore$$

$$|C^{(L,\omega,k_x,k_y)}| = \frac{1}{k_\perp}. \quad (1.77)$$

O modo $A_\nu^{(L,\omega,k_x,k_y)}$, solução da equação (1.9), normalizado, será,

$$A_\nu^{(L,\omega,k_x,k_y)} = \frac{1}{k_\perp} (0, 0, k_x \phi, k_y \phi). \quad (1.78)$$

Examinemos a ortogonalidade dos modos (1.59)-(1.62). Usando a equação (1.31), temos

$$\pi^{(I,\omega,k_x,k_y)\mu\nu} = -\sqrt{-g} F^{\mu\nu}, \quad (1.79)$$

$$\pi^{(II,\omega,k_x,k_y)\mu\nu} = -\sqrt{-g} F^{\mu\nu}. \quad (1.80)$$

Como o tensor de Maxwell associado ao modo puro gauge é nulo, teremos que

$$\pi^{(G,\omega,k_x,k_y)\mu\nu} = \sqrt{-g} g^{\mu\nu} C^{(G)} m^2 \phi. \quad (1.81)$$

Para o modo “L”, teremos

$$\pi^{(L,\omega,k_x,k_y)\mu\nu} = \sqrt{-g} (-F^{\mu\nu} + i g^{\mu\nu} C^{(L)} k_\perp^2 \phi). \quad (1.82)$$

Vamos calcular o produto do modo “I” com o modo “II”:

$$(A^{(i)}, A^{(j)}) = i \int_\Sigma \frac{d\Sigma_\mu}{\sqrt{-g}} [A_\nu^{(i)*} (-\sqrt{-g} F^{(j)\mu\nu}) - A_\nu^{(j)} (-\sqrt{-g} F^{(i)\mu\nu})^*], \quad (1.83)$$

onde $i = I, \omega, k_x, k_y$ e $j = II, \omega', k'_x, k'_y$.

$$(A^{(i)}, A^{(j)}) = i \int_{\Sigma} d\Sigma_{\mu} [A_{\nu}^{(i)*} (\nabla^{\nu} A^{(j)\mu} - \nabla^{\mu} A^{(j)\nu}) - A_{\nu}^{(j)} (\nabla^{\nu} A^{(i)\mu} - \nabla^{\mu} A^{(i)\nu})^*],$$

$$(A^{(i)}, A^{(j)}) = i \int_{\Sigma} d\Sigma_{\mu} \left\{ A_{\nu}^{(i)*} \left[g^{\nu\rho} g^{\mu\sigma} (\nabla_{\rho} A_{\sigma}^{(j)}) - g^{\mu\beta} g^{\nu\alpha} (\nabla_{\beta} A_{\alpha}^{(j)}) \right] + \right. \\ \left. - A_{\nu}^{(j)} \left[g^{\nu\rho} g^{\mu\sigma} (\nabla_{\rho} A_{\sigma}^{(i)}) - g^{\mu\beta} g^{\nu\alpha} (\nabla_{\beta} A_{\alpha}^{(i)}) \right]^* \right\} \therefore$$

$$(A^{(i)}, A^{(j)}) = i \int_{\Sigma} d\Sigma_{\mu} \left\{ A_{\nu}^{(i)*} \left[g^{\nu\rho} g^{\mu\sigma} (\partial_{\rho} A_{\sigma}^{(j)}) - \Gamma_{\sigma\rho}^{\omega} A_{\omega}^{(j)} \right] - g^{\mu\beta} g^{\nu\alpha} (\partial_{\beta} A_{\alpha}^{(j)} - \Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} A_{\gamma}^{(j)}) \right] + \\ - A_{\nu}^{(j)} \left[g^{\nu\rho} g^{\mu\sigma} (\partial_{\rho} A_{\sigma}^{(i)}) - \Gamma_{\sigma\rho}^{\gamma} A_{\gamma}^{(i)} \right] - g^{\mu\beta} g^{\nu\alpha} (\partial_{\beta} A_{\alpha}^{(i)} - \Gamma_{\alpha\beta}^d A_d^{(i)}) \right]^* \right\} \therefore$$

$$(A^{(i)}, A^{(j)}) = i \int_{\Sigma} d\Sigma_0 \left\{ A_{\nu}^{(i)*} \left[g^{\nu\rho} g^{00} (\partial_{\rho} A_0^{(j)}) - \Gamma_{0\rho}^{\omega} A_{\omega}^{(j)} \right] - g^{00} g^{\nu\alpha} (\partial_0 A_{\alpha}^{(j)} - \Gamma_{\alpha 0}^{\gamma} A_{\gamma}^{(j)}) \right] + \\ - A_{\nu}^{(j)} \left[g^{\nu\rho} g^{00} (\partial_{\rho} A_0^{(i)}) - \Gamma_{0\rho}^{\omega} A_{\omega}^{(i)} \right] - g^{00} g^{\nu\alpha} (\partial_0 A_{\alpha}^{(i)} - \Gamma_{\alpha 0}^{\gamma} A_{\gamma}^{(i)}) \right]^* \right\}.$$

Esta última expressão pode ser reduzida a

$$(A^{(i)}, A^{(j)}) = i \int_{\Sigma} d\Sigma_0 \left\{ A_2^{(i)*} \left[g^{22} g^{00} (\partial_2 A_0^{(j)}) - g^{00} g^{22} (\partial_0 A_2^{(j)}) \right] + \right. \\ \left. + A_3^{(i)*} \left[g^{33} g^{00} (\partial_3 A_0^{(j)}) - g^{00} g^{33} (\partial_0 A_3^{(j)}) \right] \right\}.$$

Usando (1.59) e (1.60), encontramos

$$(A^{(i)}, A^{(j)}) = i C^{(I)*} C^{(II)} \int_{\Sigma} d\Sigma_0 \left[k_y \phi^* (-g^{00} i k'_x \partial_1 \phi') - k_x \phi^* (-g^{00} i k'_y \partial_1 \phi') \right].$$

Tendo em vista (1.57), virá

$$(A^{(i)}, A^{(j)}) = i C^{(I)*} C^{(II)} C^* C' e^{i(\omega - \omega')\tau} (-i k_y k'_x + i k_x k'_y) (2\pi)^2 \delta(k_x - k'_x) \delta(k_y - k'_y) \\ \times \int d\xi K_{\frac{i\omega}{a}}^* \partial_1 K_{\frac{i\omega'}{a}} \therefore$$

$$(A^{(i)}, A^{(j)}) = 0. \tag{1.84}$$

Calculemos o produto de “I” com “L”:

$$(A^{(i)}, A^{(j)}) = i \int_{\Sigma} \frac{d\Sigma_{\mu}}{\sqrt{-g}} \left[A_{\nu}^{(i)*} \left(\sqrt{-g} (-F^{(j)\mu\nu} + i g^{\mu\nu} C^{(L)} k_{\perp}^2 \phi') \right) - A_{\nu}^{(j)} (-\sqrt{-g} F^{(i)\mu\nu})^* \right],$$

onde $i = I, \omega, k_x, k_y$ e $j = L, \omega', k'_x, k'_y$.

$$(A^{(i)}, A^{(j)}) = i \int_{\Sigma} d\Sigma_0 \left\{ A_{\nu}^{(i)*} \left[g^{\nu\rho} g^{00} (\partial_{\rho} A_0^{(j)}) - \Gamma_{0\rho}^{\omega} A_{\omega}^{(j)} \right] - g^{00} g^{\nu\alpha} (\partial_0 A_{\alpha}^{(j)} - \Gamma_{\alpha 0}^{\gamma} A_{\gamma}^{(j)}) + \right. \\ \left. + i g^{0\nu} C^{(L)} k_{\perp}^2 \phi' \right] - A_{\nu}^{(j)} \left[g^{\nu\rho} g^{00} (\partial_{\rho} A_0^{(i)}) - \Gamma_{0\rho}^{\omega} A_{\omega}^{(i)} \right] - g^{00} g^{\nu\alpha} (\partial_0 A_{\alpha}^{(i)} - \Gamma_{\alpha 0}^{\gamma} A_{\gamma}^{(i)}) \right]^* \right\} \therefore$$

$$\begin{aligned} (A^{(i)}, A^{(j)}) &= i \int_{\Sigma} d\Sigma_0 \left\{ A_2^{(i)*} \left[-g^{22} g^{00} (\partial_0 A_2^{(j)}) \right] + A_3^{(i)*} \left[-g^{00} g^{33} (\partial_0 A_3^{(j)}) \right] + \right. \\ &\quad \left. + A_2^{(j)} \left[g^{00} g^{22} (\partial_0 A_2^{(i)}) \right]^* + A_3^{(j)} \left[g^{00} g^{33} (\partial_0 A_3^{(i)}) \right]^* \right\}, \end{aligned}$$

que após usarmos (1.59) e (1.62), fica escrita como

$$(A^{(i)}, A^{(j)}) = i C^{(I)*} C^{(L)} \int d^3 x_R \left[(k_y k'_x) (\phi^* \partial_0 \phi' - \phi' \partial_0 \phi^*) + (k'_y k_x) (\phi' \partial_0 \phi^* - \phi^* \partial_0 \phi') \right] \therefore$$

$$(A^{(i)}, A^{(j)}) = C^{(I)*} C^{(L)} \left[(k_y k'_x - k'_y k_x) (\phi, \phi') \right] \therefore$$

$$(A^{(i)}, A^{(j)}) = C^{(I)*} C^{(L)} \left[(k_y k'_x - k'_y k_x) \delta(k_x - k'_x) \delta(k_y - k'_y) \delta(\omega - \omega') \right] \therefore$$

$$(A^{(i)}, A^{(j)}) = 0. \tag{1.85}$$

Analisemos o produto do modo “II” com “L”.

$$(A^{(i)}, A^{(j)}) = i \int_{\Sigma} \frac{d\Sigma_{\mu}}{\sqrt{-g}} \left[A_{\nu}^{(i)*} \left(\sqrt{-g} (-F^{(j)\mu\nu}) + i g^{\mu\nu} C^{(L)} k_{\perp}^{\prime 2} \phi' \right) - A_{\nu}^{(j)} \left(-\sqrt{-g} F^{(i)\mu\nu} \right)^* \right],$$

onde $i = II, \omega, k_x, k_y$ e $j = L, \omega', k'_x, k'_y$.

$$\begin{aligned} (A^{(i)}, A^{(j)}) &= i \int_{\Sigma} d\Sigma_0 \left\{ A_{\nu}^{(i)*} \left[g^{\nu\rho} g^{00} (\partial_{\rho} A_0^{(j)}) - \Gamma_{0\rho}^{\omega} A_{\omega}^{(j)} \right] - g^{00} g^{\nu\alpha} (\partial_0 A_{\alpha}^{(j)}) - \Gamma_{\alpha 0}^{\gamma} A_{\gamma}^{(j)} + \right. \\ &\quad \left. + i g^{0\nu} C^{(L)} k_{\perp}^{\prime 2} \phi' \right] - A_{\nu}^{(j)} \left[g^{\nu\rho} g^{00} (\partial_{\rho} A_0^{(i)}) - \Gamma_{0\rho}^{\omega} A_{\omega}^{(i)} \right] - g^{00} g^{\nu\alpha} (\partial_0 A_{\alpha}^{(i)}) - \Gamma_{\alpha 0}^{\gamma} A_{\gamma}^{(i)} \right]^* \Big\} \therefore \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (A^{(i)}, A^{(j)}) &= i \int_{\Sigma} d\Sigma_0 \left\{ A_0^{(i)*} (g^{00} i C^{(L)} k_{\perp}^{\prime 2} \phi') + A_1^{(i)*} \left[g^{11} g^{00} (\partial_1 A_0^{(j)}) - g^{00} g^{11} (\partial_0 A_1^{(j)}) \right] + \right. \\ &\quad \left. - A_2^{(j)} \left[g^{22} g^{00} (\partial_2 A_0^{(i)}) - g^{00} g^{22} (\partial_0 A_2^{(i)}) \right]^* - A_3^{(j)} \left[g^{33} g^{00} (\partial_3 A_0^{(i)}) - g^{00} g^{33} (\partial_0 A_3^{(i)}) \right]^* \right\}. \end{aligned}$$

Usando (1.60) e (1.62), teremos

$$(A^{(i)}, A^{(j)}) = i C^{(II)*} C^{(L)} \int_{\Sigma} d\Sigma_0 g^{00} \left\{ i k_{\perp}^{\prime 2} \phi' \partial_1 \phi^* + k'_x \phi' \partial_2 (\partial_1 \phi)^* + k'_y \phi' \partial_3 (\partial_1 \phi)^* \right\} \therefore$$

$$\begin{aligned} (A^{(i)}, A^{(j)}) &= C^{(II)*} C^{(L)} e^{i(\omega - \omega')\tau} \int d^3 x_R \left[(k_x k'_x + k_y k'_y) - (k_{\perp}^{\prime 2}) \right] \\ &\quad \times (2\pi)^2 \delta(k_x - k'_x) \delta(k_y - k'_y) \int d\xi (\partial_1 K_{\frac{i\omega}{a}}^*) K_{\frac{i\omega'}{a}} \therefore \end{aligned}$$

$$(A^{(i)}, A^{(j)}) = 0.$$

Agora vamos investigar quais modos são ortogonais ao modo “G”.

$$(A^{(i)}, A^{(j)}) = i \int_{\Sigma} \frac{d\Sigma_{\mu}}{\sqrt{-g}} \left[A_{\nu}^{(i)*} (\sqrt{-g} (-F^{(j)\mu\nu})) - A_{\nu}^{(j)} (\sqrt{-g} C^{(G)} m^2 g^{\mu\nu} \phi)^* \right],$$

onde $i = G, \omega, k_x, k_y$ e $j = X, \omega', k'_x, k'_y$, com $X = I$ ou $X = II$. Escrevendo o modo “G” como $A_\nu^{(G)} = C^{(G)} \nabla_\nu \phi$, teremos

$$\left(A^{(i)}, A^{(j)} \right) = i \int_\Sigma d\Sigma_\mu \left[C^{(G)*} (\nabla_\nu \phi^*) F^{(j)\nu\mu} - A_\nu^{(j)} (C^{(G)} m^2 g^{\mu\nu} \phi)^* \right],$$

que pode ser escrita como

$$\left(A^{(i)}, A^{(j)} \right) = i C^{(G)*} \int_\Sigma d\Sigma_\mu \left[\nabla_\nu (\phi^* F^{(j)\nu\mu}) - \phi^* \nabla_\nu F^{(j)\nu\mu} - A_\nu^{(j)} m^2 g^{\mu\nu} \phi^* \right] \therefore$$

$$\left(A^{(i)}, A^{(j)} \right) = i C^{(G)*} \int_\Sigma d\Sigma_\mu \left[\nabla_\nu (\phi^* F^{(j)\nu\mu}) - \phi^* (\nabla_\nu \nabla^\nu A^{(j)\mu} - \nabla_\nu \nabla^\mu A^{(j)\nu} + m^2 A^{(j)\mu}) \right]. \quad (1.86)$$

Lembremos que tanto o modo “I” quanto o modo “II” satisfazem a condição de Lorenz. Portanto, a equação (1.86) poderá ser escrita, após usarmos a equação (1.9), como

$$\left(A^{(i)}, A^{(j)} \right) = i C^{(G)*} \int_\Sigma d\Sigma_0 \left[\nabla_\nu (\phi^* F^{(j)\nu 0}) \right]. \quad (1.87)$$

Esta integral se anula para $\nu = 0$. Para as outras componentes teremos

$$\left(A^{(i)}, A^{(j)} \right) = i C^{(G)*} \int_\Sigma d\Sigma_0 \left[\nabla_k (\phi^* F^{(j)k0}) \right], \quad (1.88)$$

onde $k = 1, 2, 3$. Usando [18]

$$\nabla_k A^{ik} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_k (\sqrt{-g} A^{ik}),$$

temos

$$\left(A^{(i)}, A^{(j)} \right) = i C^{(G)*} \int_\Sigma d\Sigma_0 \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_k (\sqrt{-g} \phi^* F^{(j)\nu 0}).$$

Como $\sqrt{-g} = \sqrt{-\det g_{\mu\nu}} = g_{00} = e^{2a\xi}$ e $d\Sigma_0 = d^3 x_R e^{2a\xi}$, virá

$$\left(A^{(i)}, A^{(j)} \right) = i C^{(G)*} \int d^3 x_M \partial_k (g_{00} \phi^* F^{(j)k0}).$$

Usando o teorema de Gauss, teremos que

$$\left(A^{(i)}, A^{(j)} \right) = i C^{(G)*} \int d\sigma n^k \phi^* F_{k0}^{(j)}, \quad (1.89)$$

sendo

$$F_{k0}^{(j)} = \partial_k A_0^{(j)} - \partial_0 A_k^{(j)}, \quad (1.90)$$

com $j = I, \omega', k'_x, k'_y$ ou $j = II, \omega', k'_x, k'_y$. Precisamos então calcular os $F_{k0}^{(j)}$. É possível demonstrar, usando (1.59) e (1.90), que

$$F_{10}^{(I, \omega', k'_x, k'_y)} = 0, \quad (1.91)$$

$$F_{20}^{(I, \omega', k'_x, k'_y)} = -C^{(I)} k'_y \partial_0 \phi', \quad (1.92)$$

$$F_{30}^{(I, \omega', k'_x, k'_y)} = C^{(I)} k'_x \partial_0 \phi'. \quad (1.93)$$

Agora podemos encontrar o valor de (1.89) considerando $j = I, \omega', k'_x, k'_y$:

$$\begin{aligned} (A^{(i)}, A^{(j)}) &= iC^{(G)*} \left[\int_{\xi \rightarrow +\infty} d\sigma n^1 \phi^* F_{10}^{(j)} + \int_{\xi \rightarrow -\infty} d\sigma (-n^1) \phi^* F_{10}^{(j)} + \right. \\ &\quad + \int_{x \rightarrow +\infty} d\sigma n^2 \phi^* F_{20}^{(j)} + \int_{x \rightarrow -\infty} d\sigma (-n^2) \phi^* F_{20}^{(j)} + \\ &\quad \left. + \int_{y \rightarrow +\infty} d\sigma n^3 \phi^* F_{30}^{(j)} + \int_{y \rightarrow -\infty} d\sigma (-n^3) \phi^* F_{30}^{(j)} \right]. \end{aligned} \quad (1.94)$$

Substituindo (1.91), (1.92) e (1.93) em (1.94), notamos que esta poderá ser escrita como

$$\begin{aligned} (A^{(i)}, A^{(j)}) &= iC^{(G)*} C^{(I)} \left[-k'_y \int_{x \rightarrow +\infty} d\sigma n^2 \phi^* (\partial_0 \phi') + k'_y \int_{x \rightarrow -\infty} d\sigma n^2 \phi^* (\partial_0 \phi') + \right. \\ &\quad \left. + k'_x \int_{y \rightarrow +\infty} d\sigma n^3 \phi^* (\partial_0 \phi') - k'_x \int_{y \rightarrow -\infty} d\sigma n^3 \phi^* (\partial_0 \phi') \right]. \end{aligned} \quad (1.95)$$

As duas primeiras integrais em (1.95) produzirão distribuições do tipo $\delta(k_y - k'_y)$, e as duas últimas termos do tipo $\delta(k_x - k'_x)$. Com efeito, estas integrais se anularão individualmente ou aos pares. Consequentemente, encontramos que o modo “G” é ortogonal ao modo “I”.

Agora consideremos $j = II, \omega', k'_x, k'_y$. A partir de (1.60), (1.90) e de

$$(\partial_0^2 - \partial_1^2) \phi = -e^{2a\xi} \kappa^2 \phi,$$

encontramos

$$F_{10}^{(II, \omega', k'_x, k'_y)} = C^{(II)} e^{2a\xi} \kappa'^2 \phi', \quad (1.96)$$

$$F_{20}^{(II, \omega', k'_x, k'_y)} = iC^{(II)} k'_x \partial_1 \phi', \quad (1.97)$$

$$F_{30}^{(II, \omega', k'_x, k'_y)} = iC^{(II)} k'_y \partial_1 \phi'. \quad (1.98)$$

De (1.89), vemos que o produto do modo “G” com o modo “II”, dado por

$$\begin{aligned} (A^{(i)}, A^{(j)}) = & iC^{(G)*} \left[\int_{\xi \rightarrow +\infty} d\sigma n^1 \phi^* F_{10}^{(j)} + \int_{\xi \rightarrow -\infty} d\sigma (-n^1) \phi^* F_{10}^{(j)} + \right. \\ & + \int_{x \rightarrow +\infty} d\sigma n^2 \phi^* F_{20}^{(j)} + \int_{x \rightarrow -\infty} d\sigma (-n^2) \phi^* F_{20}^{(j)} + \\ & \left. + \int_{y \rightarrow +\infty} d\sigma n^3 \phi^* F_{30}^{(j)} + \int_{y \rightarrow -\infty} d\sigma (-n^3) \phi^* F_{30}^{(j)} \right], \end{aligned} \quad (1.99)$$

onde $j = II, \omega', k'_x, k'_y$ e $F_{10}^{(j)}, F_{20}^{(j)}$ e $F_{30}^{(j)}$ são dados por (1.96), (1.97), (1.98), respectivamente, poderá ser escrito da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} (A^{(i)}, A^{(j)}) = & iC^{(G)*} C^{(II)} \left[\int_{\xi \rightarrow +\infty} d\sigma n^1 \phi^* (e^{2a\xi} \kappa'^2 \phi') - \int_{\xi \rightarrow -\infty} d\sigma n^1 \phi^* (e^{2a\xi} \kappa'^2 \phi') + \right. \\ & + ik'_x \int_{x \rightarrow +\infty} d\sigma n^2 \phi^* (\partial_1 \phi') - ik'_x \int_{x \rightarrow -\infty} d\sigma n^2 \phi^* (\partial_1 \phi') + \\ & \left. + ik'_y \int_{y \rightarrow +\infty} d\sigma n^3 \phi^* (\partial_1 \phi') - ik'_y \int_{y \rightarrow -\infty} d\sigma n^3 \phi^* (\partial_1 \phi') \right]. \end{aligned} \quad (1.100)$$

As quatro últimas integrais em (1.100) se anularão pelos mesmos argumentos que foram citados para o produto do modo “G” com o modo “I”. Com efeito, ficamos com

$$(A^{(i)}, A^{(j)}) = iC^{(G)*} C^{(II)} \left[\int_{\xi \rightarrow +\infty} d\sigma n^1 \phi^* (e^{2a\xi} \kappa'^2 \phi') - \int_{\xi \rightarrow -\infty} d\sigma n^1 \phi^* (e^{2a\xi} \kappa'^2 \phi') \right]. \quad (1.101)$$

Analisemos a primeira destas integrais. Assintoticamente [19]

$$K_\nu(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-z}}{\sqrt{z}},$$

para $|z| \rightarrow \infty$, $|\arg z| < \pi$ e $Re \nu > -\frac{1}{2}$, o que nos dá

$$K_{\frac{i\omega}{a}} \left(\frac{\kappa}{a} e^{a\xi} \right) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-\frac{\kappa}{a} e^{a\xi}}}{\sqrt{\frac{\kappa}{a} e^{a\xi}}}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \int_{\xi \rightarrow +\infty} d\sigma n^1 \phi^* (e^{2a\xi} \kappa'^2 \phi') = & \kappa'^2 C C' \frac{\pi}{a} \int_{\xi \rightarrow +\infty} d\sigma e^{i(k'_x - k_x)x} e^{i(k'_y - k_y)y} e^{i(\omega - \omega')\tau} \\ & \times e^{-a\xi} e^{2a\xi} \frac{e^{-\left(\frac{\kappa}{a} + \frac{\kappa'}{a}\right) e^{a\xi}}}{\sqrt{\frac{\kappa}{a} \frac{\kappa'}{a} e^{a\xi}}}. \end{aligned}$$

Vemos que esta integral tende a zero quando ξ tende a infinito.

Analisemos a segunda integral de (1.101). Como

$$\frac{d^2 K_{\frac{i\omega}{a}}}{d\xi^2} + (\omega^2 - e^{2a\xi}) K_{\frac{i\omega}{a}} = 0,$$

veja (1.47), teremos no limite em que $\xi \rightarrow -\infty$:

$$K \frac{i\omega}{a} = \lim_{\xi \rightarrow -\infty} [C_1 \cos(\omega\xi) + C_2 \sin(\omega\xi)] \therefore$$

$$K \frac{i\omega}{a} = \lim_{\xi \rightarrow -\infty} A \sin(\omega\xi + \gamma).$$

Usando uma das representações da distribuição delta, [14], encontramos que

$$K \frac{i\omega}{a} \approx A\pi\omega\delta(\omega).$$

Com efeito,

$$\begin{aligned} \int_{\xi \rightarrow -\infty} d\sigma n^1 \phi^* (e^{2a\xi} \kappa'^2 \phi') &= \kappa'^2 C C' e^{i(\omega - \omega')\tau} A\pi\omega\delta(\omega) B\pi\omega'\delta(\omega') \\ &\times \int_{\xi \rightarrow -\infty} d\sigma e^{i(k'_x - k_x)x} e^{i(k'_y - k_y)y} = 0. \end{aligned}$$

Dessa forma, vemos que o modo “G” é ortogonal ao modo “II”.

Os modos físicos $A_\nu^{(I,\omega,k_x,k_y)}$ e $A_\nu^{(II,\omega,k_x,k_y)}$ são ortogonais entre si e aos modos $A_\nu^{(G,\omega,k_x,k_y)}$ e $A_\nu^{(L,\omega,k_x,k_y)}$. Com efeito, os modos $A_\nu^{(I,\omega,k_x,k_y)}$ e $A_\nu^{(II,\omega,k_x,k_y)}$ integrarão o conjunto de soluções ortonormalizadas da equação do campo vetorial massivo. Contudo, os modos “G” e “L” não são ortogonais. De fato,

$$(A^{(i)}, A^{(j)}) = \int_{\Sigma} d\Sigma_\mu \frac{i}{\sqrt{-g}} (A_\nu^{(i)*} \pi^{(j)\mu\nu} - A_\nu^{(j)} \pi^{(i)\mu\nu*}), \quad (1.102)$$

onde $i = G, \omega, k_x, k_y$ e $j = L, \omega', k'_x, k'_y$. Como $A_\nu^{(G)} = C^{(G)} \nabla_\nu \phi$, teremos

$$(A^{(i)}, A^{(j)}) = i \int_{\Sigma} d\Sigma_\mu [C^{(i)*} \nabla_\nu \phi^* (-F^{(j)\mu\nu} - g^{\mu\nu} \nabla^\beta A_\beta^{(j)}) - A_\nu^{(j)} (0 - g^{\mu\nu} \nabla^\beta A_\beta^{(i)})^*] \therefore$$

$$(A^{(i)}, A^{(j)}) = iC^{(i)*} \int_{\Sigma} d\Sigma_\mu [\nabla_\nu (-\phi^* F^{(j)\mu\nu}) + \phi^* \nabla_\nu F^{(j)\mu\nu} - g^{\mu\nu} \nabla_\nu \phi^* \nabla^\beta A_\beta^{(j)} - A_\nu^{(j)} g^{\mu\nu} m^2 \phi^*] \therefore$$

$$\begin{aligned} (A^{(i)}, A^{(j)}) &= iC^{(i)*} \int_{\Sigma} d\Sigma_\mu [-\nabla_\nu (\phi^* F^{(j)\mu\nu}) + \phi^* \nabla_\nu (\nabla^\mu A^{(j)\nu} - \nabla^\nu A^{(j)\mu}) + \\ &\quad - g^{\mu\nu} \nabla_\nu \phi^* \nabla^\beta A_\beta^{(j)} - A_\nu^{(j)} g^{\mu\nu} m^2 \phi^*]. \end{aligned}$$

Usando (1.9), encontramos que

$$(A^{(i)}, A^{(j)}) = iC^{(i)*} \int_{\Sigma} d\Sigma_\mu [-\nabla_\nu (\phi^* F^{(j)\mu\nu}) + \phi^* g^{\mu\beta} \nabla_\beta \nabla^\nu A_\nu^{(j)} - g^{\mu\nu} \nabla_\nu \phi^* \nabla^\beta A_\beta^{(j)}] \therefore$$

$$(A^{(i)}, A^{(j)}) = iC^{(i)*} \left\{ \int_{\Sigma} d\Sigma_0 [\phi^* g^{0\beta} \nabla_{\beta} \nabla^{\nu} A_{\nu}^{(j)} - g^{0\nu} \nabla_{\nu} \phi^* \nabla^{\beta} A_{\beta}^{(j)}] - \int_{\Sigma} d\Sigma_0 [\nabla_{\nu} (\phi^* F^{(j)0\nu})] \right\}.$$

Usando (1.65), teremos

$$(A^{(i)}, A^{(j)}) = C^{(i)*} C^{(j)} (ik_{\perp}^{\prime 2}) \int d^3x_R i [-\phi^* \partial_0 \phi' + \phi' \partial_0 \phi^*] - iC^{(i)*} \int_{\Sigma} d\Sigma_0 \nabla_k (\phi^* F^{(j)0k}).$$

Substituindo (1.56), (1.73) e (1.77) nesta última expressão, teremos

$$(A^{(i)}, A^{(j)}) = (ik_{\perp}^{\prime 2}) \frac{1}{m} \frac{1}{k'_{\perp}} [-(\phi, \phi')] - iC^{(i)*} \int_{\Sigma} d\Sigma_0 \nabla_k (\phi^* F^{(j)0k}) \therefore$$

$$(A^{(i)}, A^{(j)}) = -i \frac{k_{\perp}}{m} \delta(k_x - k'_x) \delta(k_y - k'_y) \delta(\omega - \omega') - iC^{(i)*} \int_{\Sigma} d\Sigma_0 \nabla_k (\phi^* F^{(j)0k}). \quad (1.103)$$

A integral na equação (1.103) se anula⁴, logo

$$(A^{(i)}, A^{(j)}) = -i \frac{k_{\perp}}{m} \delta(k_x - k'_x) \delta(k_y - k'_y) \delta(\omega - \omega'). \quad (1.104)$$

Resumindo:

$$(A^{(i)}, A^{(j)}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -i \frac{k_{\perp}}{m} \\ 0 & 0 & i \frac{k_{\perp}}{m} & 1 \end{pmatrix} \delta(k_x - k'_x) \delta(k_y - k'_y) \delta(\omega - \omega'), \quad (1.105)$$

onde os elementos das linhas e colunas desta matriz são organizados segundo a sequência $\lambda = I, \lambda = II, \lambda = G$ e $\lambda = L$, com a quadri-divergência destes modos dada por:

$$\nabla^{\mu} A_{\mu}^{(I)} = \nabla^{\mu} A_{\mu}^{(II)} = 0,$$

$$\nabla^{\mu} A_{\mu}^{(G)} = -C^{(G)} m^2 \phi = -m\phi,$$

$$\nabla^{\mu} A_{\mu}^{(L)} = -iC^{(L)} k_{\perp}^2 \phi = -ik_{\perp} \phi.$$

Embora o conjunto normalizado de modos (1.59)-(1.62) satisfaçam a equação (1.9), os modos $A_{\nu}^{(G, \omega, k_x, k_y)}$ e $A_{\nu}^{(L, \omega, k_x, k_y)}$ não satisfazem a condição de Lorenz e tampouco são ortogonais entre si. Procuramos um modo do campo vetorial massivo, tal que este seja ortogonal aos modos “I” e “II” e satisfaça também a condição de Lorenz. Notemos que os modos “G” e “L”, apesar de violarem a condição de Lorenz, são ortogonais aos modos “I” e “II”. Consequentemente, uma

⁴A demonstração é idêntica a que fizemos para o produto do modo “G” com o modo “I”.

combinação linear dos modos “G” e “L”, tal que respeite a condição de Lorenz, constituirá o modo que procuramos. Procuremos tal combinação. Se,

$$A_\nu^{(III,\omega,k_x,k_y)} = C^{(III,\omega,k_x,k_y)}(a_1 A_\nu^{(G,\omega,k_x,k_y)} + a_2 A_\nu^{(L,\omega,k_x,k_y)}),$$

então

$$\nabla^\nu A_\nu^{(III,\omega,k_x,k_y)} = C^{(III,\omega,k_x,k_y)}(a_1 \nabla^\nu A_\nu^{(G,\omega,k_x,k_y)} + a_2 \nabla^\nu A_\nu^{(L,\omega,k_x,k_y)}) \equiv 0 \text{ .}$$

$$\nabla^\nu A_\nu^{(III,\omega,k_x,k_y)} = C^{(III,\omega,k_x,k_y)}(-a_1 m \phi - a_2 i k_\perp \phi) \equiv 0,$$

onde usamos (1.64), (1.65), (1.73) e (1.77). Uma possível escolha, é $a_1 = k_\perp$ e $a_2 = im$. Assim, o modo que procuramos será,

$$A_\nu^{(III,\omega,k_x,k_y)} = C^{(III,\omega,k_x,k_y)}(k_\perp A_\nu^{(G,\omega,k_x,k_y)} + im A_\nu^{(L,\omega,k_x,k_y)}). \quad (1.106)$$

A seguir vamos calcular a constante de normalização do modo “III”.

$$(A^{(i)}, A^{(j)}) = \left(C^{(i)}(k_\perp A^{(G)} + im A^{(L)}), C^{(j)}(k'_\perp A^{(G')} + im A^{(L')}) \right),$$

sendo que $A^{(G)}$ representa o modo $A_\nu^{(G,\omega,k_x,k_y)}$ e $A^{(G')}$ representa o modo $A_\nu^{(G,\omega',k'_x,k'_y)}$, e idem para o modo “L”. Prosseguindo:

$$(A^{(i)}, A^{(j)}) = C^{(i)*} C^{(j)} \left((k_\perp A^{(G)} + im A^{(L)}), (k'_\perp A^{(G')} + im A^{(L')}) \right),$$

onde usamos o fato de que o produto interno definido em (1.28) e (1.29) é antilinear à esquerda e linear à direita [16]. Continuando:

$$(A^{(i)}, A^{(j)}) = C^{(i)*} C^{(j)} \left(k_\perp k'_\perp (A^{(G)}, A^{(G')}) + k_\perp im (A^{(G)}, A^{(L')}) + \right. \\ \left. - im k'_\perp (A^{(L)}, A^{(G')}) + m^2 (A^{(L)}, A^{(L')}) \right),$$

$$(A^{(i)}, A^{(j)}) = |C^{(i)}|^2 \left[k_\perp^2 (-1) + im k_\perp \left(-i \frac{k_\perp}{m} \right) - im k_\perp \left(i \frac{k_\perp}{m} \right) + m^2 \right] \\ \times \delta(k_x - k'_x) \delta(k_y - k'_y) \delta(\omega - \omega'),$$

onde usamos a equação (1.104) e o fato de os modos “G” e “L” serem ortonormalizados. Portanto,

$$(A^{(i)}, A^{(j)}) = |C^{(i)}|^2 \kappa^2 \delta(k_x - k'_x) \delta(k_y - k'_y) \delta(\omega - \omega') \text{ .}$$

$$|C^{(III,\omega,k_x,k_y)}| = \frac{1}{\kappa}. \quad (1.107)$$

Temos, finalmente que o modo $A_\nu^{(III,\omega,k_x,k_y)}$, solução da equação (1.9), normalizado, será dado por

$$A_\nu^{(III,\omega,k_x,k_y)} = \frac{1}{\kappa} (k_\perp A_\nu^{(G,\omega,k_x,k_y)} + im A_\nu^{(L,\omega,k_x,k_y)}),$$

ou

$$A_\nu^{(III,\omega,k_x,k_y)} = \frac{1}{\kappa} \left[-\frac{i\omega k_\perp}{m} \phi, \frac{k_\perp}{m} \partial_\xi \phi, i \left(\frac{k_\perp}{m} + \frac{m}{k_\perp} \right) k_x \phi, i \left(\frac{k_\perp}{m} + \frac{m}{k_\perp} \right) k_y \phi \right]. \quad (1.108)$$

Resta-nos encontrar o modo $A_\nu^{(IV,\omega,k_x,k_y)}$, tal que este modo seja ortogonal a $A_\nu^{(\lambda,\omega,k_x,k_y)}$, com $\lambda = I, II, III$. Se

$$A_\nu^{(IV,\omega,k_x,k_y)} = C^{(IV,\omega,k_x,k_y)} (a_3 A_\nu^{(G,\omega,k_x,k_y)} + a_4 A_\nu^{(L,\omega,k_x,k_y)}), \quad (1.109)$$

então, da escolha (1.109), vemos que o modo $A_\nu^{(IV,\omega,k_x,k_y)}$ é ortogonal a $A_\nu^{(I,\omega,k_x,k_y)}$ e $A_\nu^{(II,\omega,k_x,k_y)}$. Contudo, o modo “IV” tem a mesma estrutura do modo “III”. Vamos então impor que o modo “III” seja ortogonal a “IV”:

$$(A^{(i)}, A^{(j)}) = \left(\frac{1}{\kappa} (k_\perp A^{(G)} + im A^{(L)}), C^{(IV)} (a_3 A^{(G')} + a_4 A^{(L')}) \right) \equiv 0 \text{ .} \quad (1.110)$$

$$(A^{(i)}, A^{(j)}) = \frac{C^{(IV)}}{\kappa} \left(k_\perp a_3 (A^{(G)}, A^{(G')}) + k_\perp a_4 (A^{(G)}, A^{(L')}) + \right. \\ \left. - im a_3 (A^{(L)}, A^{(G')}) - im a_4 (A^{(L)}, A^{(L')}) \right) \equiv 0 \text{ .}$$

$$(A^{(i)}, A^{(j)}) = \frac{C^{(IV)}}{\kappa} \left(k_\perp a_3 (-1) + k_\perp a_4 \left(-i \frac{k_\perp}{m} \right) - im a_3 \left(i \frac{k_\perp}{m} \right) - im a_4 \right) \\ \times \delta(k_x - k'_x) \delta(k_y - k'_y) \delta(\omega - \omega') \equiv 0 \text{ .}$$

$$(A^{(i)}, A^{(j)}) = \frac{C^{(IV)}}{\kappa} \left(k_\perp a_4 \left(-i \frac{k_\perp}{m} \right) - im a_4 \right) \equiv 0. \quad (1.111)$$

Como a constante de normalização $C^{(IV)}$ deve ser diferente de zero, a equação (1.111) será satisfeita se, e somente se, $a_4 = 0$. Assim,

$$A_\nu^{(IV,\omega,k_x,k_y)} = C^{(IV,\omega,k_x,k_y)} \left(a_3 A_\nu^{(G,\omega,k_x,k_y)} \right) \text{ .}$$

$$A_\nu^{(IV,\omega,k_x,k_y)} = C^{(IV,\omega,k_x,k_y)} \left(a_3 C^{(G,\omega,k_x,k_y)} \nabla_\nu \phi \right). \quad (1.112)$$

Escolhemos

$$a_3 = \frac{1}{C^{(IV,\omega,k_x,k_y)}},$$

de tal forma que o modo ortonormalizado $A_\nu^{(IV,\omega,k_x,k_y)}$, solução da equação (1.9), será

$$A_\nu^{(IV,\omega,k_x,k_y)} = \frac{1}{m}(-i\omega\phi, \partial_\xi\phi, ik_x\phi, ik_y\phi). \quad (1.113)$$

Devemos perceber que o modo $A_\nu^{(IV,\omega,k_x,k_y)}$ corresponde ao modo “G”, o qual possui norma negativa. Sintetizando, um conjunto ortonormalizado de modos que são solução da equação (1.9), é:

$$A_\mu^{(I,\omega,k_x,k_y)} = \frac{1}{k_\perp}(0, 0, k_y\phi, -k_x\phi), \quad (1.114)$$

$$A_\mu^{(II,\omega,k_x,k_y)} = \frac{1}{\kappa}(\partial_\xi\phi, -i\omega\phi, 0, 0), \quad (1.115)$$

$$A_\nu^{(III,\omega,k_x,k_y)} = \frac{1}{\kappa} \left[-\frac{i\omega k_\perp}{m}\phi, \frac{k_\perp}{m}\partial_\xi\phi, i\left(\frac{k_\perp}{m} + \frac{m}{k_\perp}\right)k_x\phi, i\left(\frac{k_\perp}{m} + \frac{m}{k_\perp}\right)k_y\phi \right], \quad (1.116)$$

$$A_\nu^{(IV,\omega,k_x,k_y)} = \frac{1}{m}(-i\omega\phi, \partial_\xi\phi, ik_x\phi, ik_y\phi), \quad (1.117)$$

com ϕ dado pela equação (1.57). Os modos I, II e III satisfazem a condição de Lorenz, enquanto que o modo IV não. A matriz que representará a ortonormalidade destes modos do campo de Proca no *Rindler wedge*, será

$$(A^{(i)}, A^{(j)}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \delta(\omega - \omega')\delta(k_x - k'_x)\delta(k_y - k'_y), \quad (1.118)$$

sendo que os elementos das linhas e colunas desta matriz são identificados segundo a sequência $\lambda = I, \lambda = II, \lambda = III$ e $\lambda = IV$.

A solução geral para a equação (1.9), com relação a uma família de observadores acelerados será dada por

$$A_\mu(x^\beta) = \int_{-\infty}^{+\infty} dk_x \int_{-\infty}^{+\infty} dk_y \int_0^{+\infty} d\omega \sum_{\lambda=I}^{IV} \left[a_{(\lambda,\omega,k_x,k_x)} A_\mu^{(\lambda,\omega,k_x,k_x)} + c.c. \right], \quad (1.119)$$

onde os modos $A_\mu^{(\lambda,\omega,k_x,k_x)}$ são dados pelas equações (1.114), (1.115), (1.116) e (1.117) e os $a_{(\lambda,\omega,k_x,k_x)}$ são constantes arbitrárias.

Capítulo 2

Quantização do campo de Proca e resposta de uma fonte uniformemente acelerada no referencial inercial

Neste capítulo quantizaremos o campo de Proca em um referencial inercial e calcularemos a taxa de resposta, *i.e.*, a probabilidade, por unidade de tempo, de emissão de partículas do campo vetorial massivo, com momento transversal fixo, por uma fonte uniformemente acelerada no espaço-tempo de Minkowski em relação a este referencial inercial. Na seção 2.2, definiremos a quadri-corrente que utilizaremos na seção 2.3, a qual é dedicada ao cálculo da amplitude de probabilidade de emissão de uma partícula vetorial massiva com números quânticos $\lambda, \omega, k_x, k_y$ a partir do vácuo de Minkowski. Posteriormente, usaremos esta amplitude para computar a já referida taxa de resposta.

2.1 Quantização do campo vetorial massivo no referencial inercial

Para quantizar o campo de Proca é preciso transformar o campo A_μ em operador de um espaço de Hilbert. Este campo, como vimos é dado por (1.43). Na versão quântica, o campo

vetorial massivo será dado pela expansão

$$\hat{A}_\mu = \int d^3\vec{k} \sum_{\lambda=1}^4 \left(\hat{a}_{(\vec{k},\lambda)} A_\mu(\vec{k}, \lambda) + \hat{a}_{(\vec{k},\lambda)}^\dagger A_\mu^*(\vec{k}, \lambda) \right), \quad (2.1)$$

ou

$$\hat{A}_\mu = \int d^3\vec{k} \frac{1}{((2\pi)^3 \omega_{\vec{k}})^{\frac{1}{2}}} \sum_{\lambda=1}^4 \left(\hat{a}_{(\vec{k},\lambda)} e^{-ikx} + \hat{a}_{(\vec{k},\lambda)}^\dagger e^{ikx} \right) \epsilon_\mu(\vec{k}, \lambda),$$

onde $kx = k_\beta x^\beta$. O segundo passo no processo de quantização é a imposição das relações de comutação a tempos iguais para o campo (agora operador) \hat{A}_μ e seu momentum canonicamente conjugado $\hat{\Pi}^\mu$,

$$\left[\hat{A}^\mu(t, \vec{x}), \hat{A}^\nu(t, \vec{x}') \right] = \left[\hat{\Pi}^\mu(t, \vec{x}), \hat{\Pi}^\nu(t, \vec{x}') \right] = 0, \quad (2.2)$$

$$\left[\hat{A}^\mu(t, \vec{x}), \hat{\Pi}^\nu(t, \vec{x}') \right] = i\eta^{\mu\nu} \delta(\vec{x} - \vec{x}'). \quad (2.3)$$

Com o auxílio do produto interno (1.28)-(1.29), projetamos o campo \hat{A} na base $A^{(i)}$ (onde o índice i denota os números quânticos λ, k_z, k_x e k_y),

$$\left(A^{(i)}, \hat{A} \right) = i \int \frac{d\Sigma^{(3)}}{\sqrt{-g}} n_\mu (A_\nu^{(i)*} \hat{\Pi}^{\mu\nu} - \hat{A}_\nu \pi^{(i)\mu\nu*}) .:$$

$$\left(\hat{A}, A^{(i)} \right) = i \int \frac{d\Sigma^{(3)}}{\sqrt{-g}} (A_\nu^{(i)*} \hat{\Pi}^\nu - \hat{A}_\nu n_\mu \pi^{(i)\mu\nu*}). \quad (2.4)$$

Agora façamos $(\hat{A}, A^{(j)})$, onde o índice j denota os números quânticos λ', k'_z, k'_x e k'_y .

$$\left(\hat{A}, A^{(j)} \right) = i \int \frac{d\Sigma^{(3)}}{\sqrt{-g}} n_\mu (\hat{A}_\nu^\dagger \pi^{(j)\mu\nu} - A_\nu^{(j)} \hat{\Pi}^{\dagger\mu\nu}).$$

Como estamos trabalhando com campos reais, temos que

$$\hat{A}_\mu = \hat{A}_\mu^\dagger,$$

de onde segue que,

$$\left(\hat{A}, A^{(j)} \right) = i \int \frac{d\Sigma^{(3)}}{\sqrt{-g}} (\hat{A}_\nu n_\mu \pi^{(j)\mu\nu} - A_\nu^{(j)} \hat{\Pi}^\nu). \quad (2.5)$$

Calculemos o comutador de (2.4) com (2.5).

$$\begin{aligned}
\left[(A^{(i)}, \hat{A}), (\hat{A}, A^{(j)}) \right] &= i \int \frac{d\Sigma^{(3)}}{\sqrt{-g}} \left(A_{\nu}^{(i)*} \hat{\Pi}^{\nu}(t, \vec{x}) - \hat{A}_{\nu}(t, \vec{x}) n_{\mu} \pi^{(i)\mu\nu*} \right) \\
&\quad \times i \int \frac{d\Sigma'^{(3)}}{\sqrt{-g'}} \left(\hat{A}_{\beta}(t, \vec{x}') n'_{\alpha} \pi^{(j)\alpha\beta} - A_{\beta}^{(j)'} \hat{\Pi}^{\beta}(t, \vec{x}') \right) + \\
&\quad - i \int \frac{d\Sigma'^{(3)}}{\sqrt{-g'}} \left(\hat{A}_{\beta}(t, \vec{x}') n'_{\alpha} \pi^{(j)\alpha\beta} - A_{\beta}^{(j)'} \hat{\Pi}^{\beta}(t, \vec{x}') \right) i \int \frac{d\Sigma^{(3)}}{\sqrt{-g}} \left(A_{\nu}^{(i)*} \hat{\Pi}^{\nu}(t, \vec{x}) - \hat{A}_{\nu}(t, \vec{x}) n_{\mu} \pi^{(i)\mu\nu*} \right).
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Para simplificar a notação vamos usar

$$\hat{A}_{\nu}(t, \vec{x}) = \hat{A}_{\nu}, \quad \hat{A}_{\nu}(t, \vec{x}') = \hat{A}'_{\nu},$$

e analogamente para $\hat{\Pi}^{\nu}$. Após multiplicarmos os termos cruzados em (2.6), encontramos,

$$\begin{aligned}
\left[(A^{(i)}, \hat{A}), (\hat{A}, A^{(j)}) \right] &= \int \frac{d\Sigma^{(3)}}{\sqrt{-g}} \int \frac{d\Sigma'^{(3)}}{\sqrt{-g'}} \left\{ n'_{\alpha} \pi^{(j)\alpha\beta} A_{\nu}^{(i)*} \left[\hat{A}'_{\beta}, \hat{\Pi}^{\nu} \right] + A_{\nu}^{(i)*} A_{\beta}^{(j)'} \left[\hat{\Pi}^{\nu}, \hat{\Pi}'^{\beta} \right] + \right. \\
&\quad \left. + n_{\mu} \pi^{(i)\mu\nu*} n'_{\alpha} \pi^{(j)\alpha\beta} \left[\hat{A}_{\nu}, \hat{A}'_{\beta} \right] - n_{\mu} \pi^{(i)\mu\nu*} A_{\beta}^{(j)'} \left[\hat{A}_{\nu}, \hat{\Pi}'^{\beta} \right] \right\}.
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Usando as equações (2.2)-(2.3), teremos,

$$\left[(A^{(i)}, \hat{A}), (\hat{A}, A^{(j)}) \right] = i \int \frac{d\Sigma^{(3)}}{\sqrt{-g}} \left\{ n_{\alpha} \pi^{(j)\alpha\beta} A_{\beta}^{(i)*} - n_{\mu} \pi^{(i)\mu\nu*} A_{\nu}^{(j)} \right\} \therefore$$

$$\left[(A^{(i)}, \hat{A}), (\hat{A}, A^{(j)}) \right] = (A^{(i)}, A^{(j)}). \tag{2.8}$$

Vamos escrever o lado esquerdo da equação (2.8) em termos dos operadores $\hat{a}_{(\lambda, \vec{k})}$ e $\hat{a}_{(\lambda', \vec{k}')\dagger}$.

$$(A^{(i)}, \hat{A}) = \left(A^{(i)}, \int d^3 \vec{k} \sum_{\lambda'} (\hat{a}^{(j)} A^{(j)} + \hat{a}^{(j)\dagger} A^{(j)*}) \right) \therefore$$

$$(A^{(i)}, \hat{A}) = \int d^3 \vec{k} \sum_{\lambda'} \hat{a}^{(j)} (A^{(i)}, A^{(j)}) + \int d^3 \vec{k} \sum_{\lambda'} \hat{a}^{(j)\dagger} (A^{(i)}, A^{(j)*}).$$

Usando o fato de que os modos $A^{(i)}$ e $A^{(j)}$ são ortonormalizados e que os modos de frequência positiva são ortogonais aos modos de frequência negativa,

$$(A^{(i)}, A^{(j)*}) = (A^{(i)*}, A^{(j)}) = 0,$$

teremos

$$(A^{(i)}, \hat{A}) = \hat{a}^{(i)},$$

ou seja,

$$\left(A^{(i)}, \hat{A} \right) = \hat{a}_{(\lambda, \vec{k})}. \quad (2.9)$$

Do mesmo modo, demonstra-se que

$$\left(\hat{A}, A^{(j)} \right) = \hat{a}_{(\lambda', \vec{k}')}^\dagger. \quad (2.10)$$

Substituindo (2.9) e (2.10) em (2.8), obtemos

$$[\hat{a}_{(\lambda, \vec{k})}, \hat{a}_{(\lambda', \vec{k}')}^\dagger] = \left(A^{(i)}, A^{(j)} \right) \therefore \quad (2.11)$$

$$[\hat{a}_{(\lambda, \vec{k})}, \hat{a}_{(\lambda', \vec{k}')}^\dagger] = \eta_{\lambda, \lambda'} \delta(\vec{k} - \vec{k}'), \quad (2.12)$$

sendo $diag(\eta_{\lambda, \lambda'}) = (1, 1, 1, -1)$. Note que o símbolo $\eta_{\lambda, \lambda'}$ não representa a métrica de Minkowski.

De maneira similar, é possível demonstrar que

$$[\hat{a}_{(\lambda, \vec{k})}, \hat{a}_{(\lambda', \vec{k}')}^\dagger] = [\hat{a}_{(\lambda, \vec{k})}^\dagger, \hat{a}_{(\lambda', \vec{k}')}^\dagger] = 0. \quad (2.13)$$

O estado de vácuo é definido como aquele estado que é aniquilado por todos os operadores $\hat{a}_{(\lambda, \vec{k})}$, *i.e.*, $\forall \lambda, \omega, k_x, k_y$,

$$\hat{a}_{(\lambda, \vec{k})} |0\rangle_M = 0. \quad (2.14)$$

A partir de $|0\rangle_M$ contrói-se o espaço de Hilbert do operador campo \hat{A}_μ pela aplicação sucessiva do operador $\hat{a}_{(\lambda, \omega, k_x, k_y)}^\dagger$ sobre este estado.

Os estados físicos do campo de Proca são definidos como aqueles que satisfazem

$$\nabla^\mu \hat{A}_\mu^{(+)} |EF\rangle_M = 0, \quad (2.15)$$

sendo $A_\mu^{(+)}$ a parte do campo de frequência positiva. A escolha dos modos de frequência positiva, em detrimento dos modos de frequência negativa, são escolhidos para assegurar que o estado de vácuo pertença ao espaço de Hilbert do campo. De fato, os modos de frequência positiva estão associados a operadores de aniquilação, os quais, quando aplicados de maneira conveniente a um estado do campo, garante o estado de vácuo. De (2.15), vemos que

$${}_M \langle E.F | \nabla^\mu \hat{A}_\mu |EF\rangle_M = 0. \quad (2.16)$$

Logo, o modo com $\lambda = 4$ não produzirá estados físicos do campo vetorial massivo.

2.2 A fonte no referencial inercial

A fonte uniformemente acelerada no referencial inercial pode ser caracterizada pela quadricorrente

$$j^\mu = (j^0, j^1, 0, 0), \quad (2.17)$$

sendo

$$j^0 = qaz\delta(x)\delta(y)\delta(\xi), \quad (2.18)$$

$$j^1 = qat\delta(x)\delta(y)\delta(\xi), \quad (2.19)$$

$$j^2 = 0, \quad (2.20)$$

$$j^3 = 0, \quad (2.21)$$

onde q é o acoplamento entre o campo e a carga e a é a aceleração própria da carga.

2.3 Taxa de resposta no referencial inercial

Dada a ação de interação,

$$\hat{S}_{int} = \int d^4x \sqrt{-g} j^\mu \hat{A}_\mu,$$

a amplitude de emissão de uma partícula do campo de Proca, a partir do vácuo de Minkowski, em nível de árvore da teoria de perturbações, será dada por

$$A_{(\vec{k}, \lambda)}^{em} = {}_M \langle 1, \vec{k}, \lambda | i \int d^4x \sqrt{-g} j^\mu \hat{A}_\mu | 0 \rangle_M.$$

Como

$$|1, \vec{k}, \lambda \rangle_M = \hat{a}_{(\lambda, \vec{k})}^\dagger |0 \rangle_M \stackrel{c.d}{\leftrightarrow} {}_M \langle 1, \lambda, \vec{k} | = {}_M \langle 0 | \hat{a}_{(\lambda, \vec{k})}, \quad (2.22)$$

onde a abreviação *c.d* significa correspondente dual, virá, usando a expansão (2.1),

$$A_{(\vec{k}, \lambda)}^{em} = {}_M \langle 0 | \hat{a}_{(\vec{k}, \lambda)} i \int d^4x j^\mu \sum_{\lambda'=1}^4 \int d^3\vec{k}' \left[\hat{a}_{(\vec{k}', \lambda')} A_\mu(\vec{k}', \lambda') + \hat{a}_{(\vec{k}', \lambda')}^\dagger A_\mu^*(\vec{k}', \lambda') \right] | 0 \rangle_M \therefore$$

$$A_{(\vec{k},\lambda)}^{em} = i \int d^4x j^\mu \sum_{\lambda'=1}^4 \int d^3\vec{k}' A_{\mu}^*(\vec{k}', \lambda') \eta_{\lambda,\lambda'} \delta(\vec{k} - \vec{k}'), \quad (2.23)$$

onde foi usado a equação (2.12). Assim,

$$A_{(\vec{k},\lambda)}^{em} = i \int \frac{d^4x}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega}} j^\mu e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)} \epsilon_{\mu}(\vec{k}, \lambda). \quad (2.24)$$

A taxa de resposta no referencial inercial é definida por

$${}^{in}P_{(k_x, k_y)}^{tot} = \sum_{\lambda=1}^3 \int_{-\infty}^{+\infty} dk_z \frac{|A_{(\vec{k},\lambda)}^{em}|^2}{T}, \quad (2.25)$$

onde a soma é feita sobre os modos que satisfazem (2.15). Tomando o módulo quadrático de (2.24), teremos, após usarmos (1.23),

$${}^{in}P_{(k_x, k_y)}^{tot} = \int_{-\infty}^{+\infty} dk_z \int \frac{1}{(2\pi)^3 2\omega} d^4x d^4x' j^\mu(x^\alpha) j^\nu(x'^\beta) e^{i\omega(t-t')} e^{-i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')} \left(-\eta_{\mu\nu} + \frac{1}{m^2} k_\mu k_\nu \right),$$

e usarmos também que devido ao fato de a quadri-corrente obedecer a equação da continuidade, termos do tipo $j^\mu k_\mu$ não contribuirão para a taxa de resposta, [2].

Desta forma, usando (2.17), teremos

$${}^{in}P_{(k_x, k_y)}^{tot} = -\frac{q^2 a^2}{(2\pi)^3 2T} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_z \int \frac{1}{\omega} d^4x d^4x' (zz' - tt') e^{i\omega(t-t')} e^{-i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')} \\ \times \delta(x)\delta(x')\delta(y)\delta(y')\delta(\xi)\delta(\xi') \therefore$$

$${}^{in}P_{(k_x, k_y)}^{tot} = -\frac{q^2 a^2}{(2\pi)^3 2T} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_z \int \frac{1}{\omega} dt dt' dz dz' (zz' - tt') e^{i\omega(t-t')} e^{-ik_z(z-z')} \delta(\xi)\delta(\xi').$$

Façamos a mudança de variáveis dada por (1.18), cujo jacobiano será

$$J = \frac{\partial(z, t)}{\partial(\xi, \tau)} = e^{2a\xi}.$$

Logo, podemos escrever

$${}^{in}P_{(k_x, k_y)}^{tot} = -\frac{q^2 a^2}{(2\pi)^3 2T a^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_z \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\omega} d\tau d\tau' \cosh[a(\tau - \tau')] \\ \times e^{i\frac{\omega}{a}[\sinh(a\tau) - \sinh(a\tau')]} e^{-i\frac{k_z}{a}[\cosh(a\tau) - \cosh(a\tau')]}, \quad (2.26)$$

onde usamos

$$\cosh(x - y) = \cosh x \cosh y - \sinh x \sinh y.$$

De

$$\sinh x - \sinh y = 2 \sinh \left(\frac{x-y}{2} \right) \cosh \left(\frac{x+y}{2} \right)$$

e

$$\cosh x - \cosh y = 2 \sinh \left(\frac{x+y}{2} \right) \sinh \left(\frac{x-y}{2} \right),$$

podemos escrever (2.26), como

$$\begin{aligned} {}^{in}P_{(k_x, k_y)}^{tot} &= -\frac{q^2}{(2\pi)^3 2T} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_z \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\omega} d\tau d\tau' \cosh[a(\tau - \tau')] \\ &\quad \times e^{i\frac{\omega}{a} \left\{ 2 \sinh \left[\frac{a(\tau - \tau')}{2} \right] \cosh \left[\frac{a(\tau + \tau')}{2} \right] \right\}} e^{-i\frac{k_z}{a} \left\{ 2 \sinh \left[\frac{a(\tau + \tau')}{2} \right] \sinh \left[\frac{a(\tau - \tau')}{2} \right] \right\}} \dots \\ {}^{in}P_{(k_x, k_y)}^{tot} &= -\frac{q^2}{(2\pi)^3 2T} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_z \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\omega} d\tau d\tau' \cosh[a(\tau - \tau')] \\ &\quad \times e^{i\frac{2}{a} \sinh \left[\frac{a(\tau - \tau')}{2} \right] \left\{ \omega \cosh \left[\frac{a(\tau + \tau')}{2} \right] - k_z \sinh \left[\frac{a(\tau + \tau')}{2} \right] \right\}}. \end{aligned}$$

A mudança de variáveis

$$T = \frac{\tau + \tau'}{2}, \quad \sigma = \tau - \tau',$$

com

$$J = \frac{\partial(\tau, \tau')}{\partial(\sigma, T)} = 1,$$

nos conduz a

$$\begin{aligned} {}^{in}P_{(k_x, k_y)}^{tot} &= -\frac{q^2}{(2\pi)^3 2T} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_z \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\omega} d\sigma dT \cosh(a\sigma) \\ &\quad \times e^{i\frac{2}{a} \sinh \left(\frac{a\sigma}{2} \right) [\omega \cosh(aT) - k_z \sinh(aT)]}. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Para eliminamos a integral em T , fazemos a mudança de variáveis

$$k'_z = k_z \cosh(aT) - \omega \sinh(aT),$$

$$\omega' = \omega \cosh(aT) - k_z \sinh(aT),$$

com $\omega^{2'} = \kappa^2 + k_z^{2'}$, $\kappa^2 = k_\perp^2 + m^2$ e jacobiano

$$J = \frac{\partial(k_z, \sigma, T)}{\partial(k'_z, \sigma', T')} = \frac{\omega}{\omega'}.$$

Assim, (2.27) se simplificará para

$${}^{in}P_{(k_x, k_y)}^{tot} = -\frac{q^2}{(2\pi)^3 2T} \int_{-\infty}^{+\infty} dk'_z \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\omega'} d\sigma' \int_{-\infty}^{+\infty} dT' \cosh(a\sigma') e^{i\frac{2}{a}\omega' \sinh\left(\frac{a\sigma'}{2}\right)}.$$

Resolvendo a integral em T' , ficamos com

$${}^{in}P_{(k_x, k_y)}^{tot} = -\frac{q^2}{2(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{+\infty} dk'_z \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\omega'} d\sigma' \cosh(a\sigma') e^{i\frac{2}{a}\omega' \sinh\left(\frac{a\sigma'}{2}\right)}. \quad (2.28)$$

Esta integral é divergente (veja [2]). No entanto, podemos fazer $\sigma' \rightarrow \sigma' + 2i\epsilon$, sendo ϵ um número real positivo e pequeno e, no final, tomamos o limite $\epsilon \rightarrow 0$. Com isso, teremos

$$\begin{aligned} {}^{in}P_{(k_x, k_y)}^{tot} = & -\frac{q^2}{2(2\pi)^3} \cosh(2i\epsilon) \int_{-\infty}^{+\infty} dk'_z \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\omega'} d\sigma' \cosh(a\sigma') e^{i\frac{\omega'}{a} \left(e^{\frac{a\sigma'}{2}} e^{ia\epsilon} - e^{-\frac{a\sigma'}{2}} e^{-ia\epsilon} \right)} + \\ & + \sinh(2i\epsilon) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} dk'_z \int_{-\infty}^{+\infty} d\sigma' (\dots) \right). \end{aligned}$$

O termo envolvendo $\sinh(2i\epsilon)$ se anulará quando tomarmos o limite $\epsilon \rightarrow 0$. Assim, trabalharemos apenas com

$${}^{in}P_{(k_x, k_y)}^{tot} = -\frac{q^2}{2(2\pi)^3} \cosh(2i\epsilon) \int_{-\infty}^{+\infty} dk'_z \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\omega'} d\sigma' \cosh(a\sigma') e^{i\frac{\omega'}{a} \left(e^{\frac{a\sigma'}{2}} e^{ia\epsilon} - e^{-\frac{a\sigma'}{2}} e^{-ia\epsilon} \right)}. \quad (2.29)$$

Façamos mais uma mudança de variáveis:

$$s_+ = \frac{\omega' + k'_z}{\kappa} e^{\frac{a\sigma'}{2}}, \quad s_- = \frac{\omega' + k'_z}{\kappa} e^{-\frac{a\sigma'}{2}},$$

cujo jacobiano associado é

$$J = \frac{\partial(k'_z, \sigma')}{\partial(s_+, s_-)} = -\frac{\kappa}{2a} \left(s_+^{-\frac{1}{2}} s_-^{-\frac{1}{2}} + s_+^{-\frac{3}{2}} s_-^{-\frac{3}{2}} \right)$$

e

$$\omega' = \frac{\kappa}{2} \left(s_+^{\frac{1}{2}} s_-^{\frac{1}{2}} + s_+^{-\frac{1}{2}} s_-^{-\frac{1}{2}} \right).$$

Com esta nova mudança, (2.29) poderá ser reescrita como

$$\begin{aligned} {}^{in}P_{(k_x, k_y)}^{tot} = & -\frac{q^2}{2a(2\pi)^3} \cosh(2i\epsilon) \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} ds_+ ds_- \frac{(s_+^{-\frac{1}{2}} s_-^{-\frac{1}{2}} + s_+^{-\frac{3}{2}} s_-^{-\frac{3}{2}})}{(s_+^{\frac{1}{2}} s_-^{\frac{1}{2}} + s_+^{-\frac{1}{2}} s_-^{-\frac{1}{2}})} \cosh \left[\ln \left(\frac{s_+}{s_-} \right) \right] \\ & \times e^{\frac{i\kappa}{2a} \left(s_+ e^{ia\epsilon} - \frac{1}{s_+ e^{ia\epsilon}} - s_- e^{-ia\epsilon} + \frac{1}{s_- e^{-ia\epsilon}} \right)}. \quad \dots \\ {}^{in}P_{(k_x, k_y)}^{tot} = & -\frac{q^2}{4a(2\pi)^3} \cosh(2i\epsilon) \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} ds_+ ds_- (s_+^{-2} + s_-^{-2}) e^{\frac{i\kappa}{2a} \left(s_+ e^{ia\epsilon} - \frac{e^{-ia\epsilon}}{s_+} \right)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times e^{-\frac{i}{2}\frac{\kappa}{a}\left(s_- e^{-ia\epsilon} - \frac{e^{ia\epsilon}}{s_-}\right)} \dots \\
{}^{in}P_{(k_x, k_y)}^{tot} &= -\frac{q^2}{4a(2\pi)^3} \cosh(2i\epsilon) \left[\int_0^{+\infty} ds_+ s_+^{-1-1} e^{\frac{i}{2}\frac{\kappa}{a} e^{ia\epsilon} \left(s_+ - \frac{e^{-2ia\epsilon}}{s_+}\right)} \right. \\
& \quad \times \left(\int_0^{+\infty} ds_- s_-^{-1-1} e^{\frac{i}{2}\frac{\kappa}{a} e^{ia\epsilon} \left(s_- - \frac{e^{-2ia\epsilon}}{s_-}\right)} \right)^* + \\
& \quad \left. + \left(\int_0^{+\infty} ds_- s_-^{-1-1} e^{\frac{i}{2}\frac{\kappa}{a} e^{ia\epsilon} \left(s_- - \frac{e^{-2ia\epsilon}}{s_-}\right)} \right)^* \int_0^{+\infty} ds_+ s_+^{-1-1} e^{\frac{i}{2}\frac{\kappa}{a} e^{ia\epsilon} \left(s_+ - \frac{e^{-2ia\epsilon}}{s_+}\right)} \right].
\end{aligned} \tag{2.30}$$

Esta relação é do tipo [19]

$$\int_0^\infty dx x^{\nu-1} e^{i\frac{\mu}{2}\left(x - \frac{\beta^2}{x}\right)} = 2\beta^\nu e^{i\nu\frac{\pi}{2}} K_\nu(\beta\mu),$$

sendo K_ν a função de McDonald, $Im\mu > 0$ e $Im(\beta^2\mu) < 0$. Comparando esta última relação com a equação (2.30), identificamos

$$\mu = \frac{\kappa}{a} e^{ia\epsilon}, \quad \beta = e^{-ia\epsilon}$$

Logo,

$$Im\mu = \frac{\kappa}{a} \sin(a\epsilon), \quad Im\beta^2\mu = -\frac{\kappa}{a} \sin(a\epsilon),$$

sendo $\sin(a\epsilon) \approx a\epsilon > 0$. Com efeito, a equação (2.30) será dada, no limite em que $\epsilon \rightarrow 0$, por

$${}^{in}P_{(k_x, k_y)}^{tot} = \frac{q^2}{4\pi^3 a} \left| K_1\left(\frac{\kappa}{a}\right) \right|^2. \tag{2.31}$$

No próximo capítulo calcularemos novamente a taxa de resposta, dessa vez em um referencial co-acelerado com a fonte.

Capítulo 3

Quantização do campo de Proca e resposta de uma fonte uniformemente acelerada no referencial co-acelerado

Neste capítulo quantizamos o campo de Proca com respeito a uma família de observadores acelerados e investigamos qual a resposta que esta família de observadores atribui a uma fonte parada com relação a eles. Devido à situação ser estática, a emissão espontânea da fonte é zero. Por outro lado, a emissão estimulada (que para cada intervalo infinitesimal de frequência é o produto da probabilidade de emissão espontânea vezes o número de partículas) sofre uma indeterminação do tipo $0 \times \infty$. Esta indeterminação se deve ao fato de que o número de partículas no banho térmico de Unruh vai para infinito quando a frequência das partículas vai para zero. Por isso, introduziremos um regulador na fonte (2.17). Para obter a resposta, calcularemos a amplitude de probabilidade de emissão de uma partícula do campo vetorial massivo com números quânticos $(\lambda, \omega, k_x, k_y)$ a partir do vácuo de Rindler. Esta amplitude será calculada considerando os modos (1.72) e (1.108) do campo vetorial massivo.

3.1 Quantização do campo vetorial massivo no referencial acelerado

Nesta seção, vamos quantizar o campo de Proca no Rindler wedge¹. Primeiro transformamos o campo A_μ , equação (1.119), em um operador do espaço de Hilbert. Depois impomos as relações de comutação a tempos iguais para o campo quântico \hat{A}_μ e seu momento canonicamente conjugado $\hat{\Pi}_\mu$:

$$[\hat{A}^\mu(t, \vec{x}), \hat{A}^\nu(t, \vec{x}')] = [\hat{\Pi}^\mu(t, \vec{x}), \hat{\Pi}^\nu(t, \vec{x}')] = 0, \quad (3.1)$$

$$[\hat{A}^\mu(t, \vec{x}), \hat{\Pi}^\nu(t, \vec{x}')] = i \frac{g^{\mu\nu}}{\sqrt{-g^{(3)}}} \delta(\vec{x} - \vec{x}'), \quad (3.2)$$

com

$$\hat{\Pi}^\mu = n_\nu \hat{\Pi}^{\nu\mu}, \quad (3.3)$$

sendo n_ν o versor ortogonal a hipersuperfície de Cauchy.

O campo \hat{A}_μ é dado pela expansão

$$\hat{A}_\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} dk_x \int_{-\infty}^{+\infty} dk_y \int_0^{+\infty} d\omega \sum_{\lambda=I}^{IV} \left[\hat{a}_{(\lambda, \omega, k_x, k_x)} A_\mu^{(\lambda, \omega, k_x, k_x)} + \hat{a}_{(\lambda, \omega, k_x, k_x)}^\dagger A_\mu^{(\lambda, \omega, k_x, k_x)*} \right]. \quad (3.4)$$

A seguir vamos calcular a projeção do campo \hat{A} na base $A^{(i)}$ (onde o índice i denota os números quânticos $\lambda, \omega, k_x, k_y$). Usando a equação (1.28) e (1.29), encontramos

$$(A^{(i)}, \hat{A}) = i \int_\Sigma \sqrt{-g^{(3)}} d^3x (A_\nu^{(i)*} \hat{\Pi}^\nu - \hat{A}_\nu \pi^{\nu(i)*}) \quad (3.5)$$

e

$$(\hat{A}, A^{(j)}) = i \int_\Sigma \sqrt{-g^{(3)}} d^3x (\hat{A}_\nu^\dagger \pi^{\nu(j)} - A_\nu^{(j)} \hat{\Pi}^{\nu\dagger}). \quad (3.6)$$

Usando as equações (3.5) e (3.6) e as equações postuladas (3.1) e (3.2), encontramos que

$$[(A^{(i)}, \hat{A}), (\hat{A}, A^{(j)})] = (A^{(i)}, A^{(j)}). \quad (3.7)$$

Como os modos $A^{(i)}$ e $A^{(j)}$ são ortonormais, virá,

$$[(A^{(i)}, \hat{A}), (\hat{A}, A^{(j)})] = \eta_{\lambda, \lambda'} \delta(\omega - \omega') \delta(k_x - k'_x) \delta(k_y - k'_y), \quad (3.8)$$

¹Esta quantização foi apresentada por nosso grupo no XXX Encontro Nacional de Física de Partículas e Campos, veja o livro de resumos do evento.

onde $diag(\eta_{\lambda,\lambda'}) = (1, 1, 1, -1)$. Agora vamos escrever os produtos internos do lado esquerdo da equação (3.8) usando a expansão (3.4) para o campo quântico. Após alguns cálculos, chegamos a

$$(A^{(i)}, \hat{A}) = \hat{a}^{(i)} \quad .:$$

$$(A^{(\lambda,\omega,k_x,k_y)}, \hat{A}) = \hat{a}_{(\lambda,\omega,k_x,k_y)}. \quad (3.9)$$

Analogamente,

$$(\hat{A}, A^{(j)}) = \hat{a}^{\dagger(j)} \quad .:$$

$$(\hat{A}, A^{(\lambda',\omega',k'_x,k'_y)}) = \hat{a}^{\dagger}_{(\lambda',\omega',k'_x,k'_y)}. \quad (3.10)$$

Com efeito, a equação (3.8) se escreverá como

$$[\hat{a}_{(\lambda,\omega,k_x,k_y)}, \hat{a}^{\dagger}_{(\lambda',\omega',k'_x,k'_y)}] = \eta_{\lambda,\lambda'} \delta(\omega - \omega') \delta(k_x - k_{x'}) \delta(k_y - k_{y'}). \quad (3.11)$$

Seguindo passos análogos, encontramos,

$$[\hat{a}_{(\lambda,\omega,k_x,k_y)}, \hat{a}_{(\lambda',\omega',k'_x,k'_y)}] = [\hat{a}^{\dagger}_{(\lambda,\omega,k_x,k_y)}, \hat{a}^{\dagger}_{(\lambda',\omega',k'_x,k'_y)}] = 0. \quad (3.12)$$

O vácuo de Rindler é definido como aquele estado que é aniquilado por todos os operadores $\hat{a}_{(\lambda,\omega,k_x,k_y)}$:

$$\forall_{\lambda,\omega,k_x,k_y} \quad \hat{a}_{(\lambda,\omega,k_x,k_y)} |0\rangle_R = 0. \quad (3.13)$$

A partir de $|0\rangle_R$ constrói-se uma base do espaço de Hilbert onde o operador campo \hat{A}_μ atua pela aplicação sucessiva do operador de criação $\hat{a}^{\dagger}_{(\lambda,\omega,k_x,k_y)}$ sobre este estado de vácuo.

Os estados físicos do campo de Proca são definidos como aqueles que satisfazem

$$\nabla^\mu \hat{A}_\mu^{(+)} |EF\rangle_R = 0, \quad (3.14)$$

sendo $A_\mu^{(+)}$ a parte do campo de frequência positiva. De (3.14), vemos que

$${}_R\langle E.F | \nabla^\mu \hat{A}_\mu |EF\rangle_R = 0. \quad (3.15)$$

Dessa forma, vemos que o modo com $\lambda = IV$ não produzirá estados físicos do campo vetorial massivo.

3.2 A fonte no referencial acelerado

A fonte definida na equação (2.17) não produzirá contribuições para a taxa de emissão espontânea, em um referencial co-acelerado com ela, pois esta fonte é estática neste referencial. Todavia, isso não se verificará com as taxas de emissão estimulada e absorção de partículas de Rindler. Para uma fonte estática, as partículas que são importantes na descrição das taxas de resposta são as partículas de energia zero. Mas, o número de partículas com essa energia no Rindler wedge é infinito. Conseqüentemente, as taxas de emissão induzida e absorção serão indefinidas. Por isso, será necessário introduzir um regulador na fonte (2.17) a fim de eliminar tal indeterminação. Considerando que a fonte oscila no tempo com uma frequência E [2], teremos

$$j^0 = q\sqrt{2} \cos(E\tau) \delta(x) \delta(y) \delta(\xi), \quad (3.16)$$

$$j^1 = j^2 = j^3 = 0, \quad (3.17)$$

onde o fator $\sqrt{2}$ é necessário para garantir que a média temporal do quadrado da carga (que aparece a nível de árvore na probabilidade de emissão) seja igual a q^2 . Apesar de que a quadri-corrente (3.16)-(3.17) resolve o problema citado acima, ela não satisfaz a equação da continuidade. Para tanto, escolhemos como quadri-corrente um dipolo oscilante [12],

$$j^0 = q\sqrt{2} \cos(E\tau) \left[\delta(\xi) - e^{-2a\xi} \delta(L - \xi) \right] \delta(x) \delta(y), \quad (3.18)$$

$$j^1 = q\sqrt{2} E \sin(E\tau) e^{-2a\xi} \theta(\xi) \theta(L - \xi) \delta(x) \delta(y), \quad (3.19)$$

$$j^2 = j^3 = 0. \quad (3.20)$$

Com esta estrutura é possível demonstrar que j^μ satisfaz a equação da continuidade². Note que a equação (3.19) corresponde a uma corrente entre as duas cargas pontuais do dipolo, a primeira delas localizada em $\xi = 0$ e a outra em $\xi = L$. Entretanto, queremos calcular a taxa de interações de uma carga puntual com o campo quântico \hat{A}_μ . Dessa forma, existe uma carga adicional em $\xi = L$. Com efeito, ao final de nossos cálculos devemos tomar o limite $L \rightarrow \infty$ para eliminarmos tal carga. Além disso, nas equações (3.18)-(3.19) existe o termo de dependência temporal (regulador), necessário para garantir o não anulamento da probabilidade de emissão espontânea. No final de nossos cálculos, tomaremos o limite em que $E \rightarrow 0$ para recuperarmos a fonte estática em Rindler.

²Esta equação de conservação é demonstrada no apêndice B.

3.3 Taxa de resposta no referencial acelerado

A partir de agora calcularemos a taxa de resposta da fonte (3.18)-(3.20) interagindo com o campo vetorial massivo no referencial co-acelerado com a fonte³. Contudo, calcularemos primeiro a amplitude de probabilidade de emissão de uma partícula de Rindler do campo de Proca com números quânticos $\lambda, \omega, k_x, k_y$. Neste caso, λ representa as polarizações físicas, *i.e.*, $\lambda = I, II$ e III . O modo “I” não contribuirá para a amplitude de emissão, pois tendo as componentes A_0 e A_1 nulas, não poderá se acoplar com a corrente (3.18)-(3.19). Assim, em nível de árvore da teoria de perturbações:

$$A_{(\omega, k_x, k_y)}^{em} = \sum_{\lambda=III} R \langle \lambda, \omega, k_x, k_y | i \int d^4x \sqrt{-g} j^\mu \hat{A}_\mu(x) | 0 \rangle_R, \quad (3.21)$$

sendo

$$| \lambda, \omega, k_x, k_y \rangle_R = \hat{a}_{(\lambda, \omega, k_x, k_y)}^\dagger | 0 \rangle_R \stackrel{c.d.}{\leftrightarrow} R \langle \lambda, \omega, k_x, k_y | = R \langle 0 | \hat{a}_{(\lambda, \omega, k_x, k_y)}. \quad (3.22)$$

Note que a soma em (3.21) é feita apenas para os modos físicos e que o modo com $\lambda = I$ não se acoplará com a fonte. Logo,

$$A_{(\omega, k_x, k_y)}^{em} = \sum_{\lambda=III} R \langle 0 | \hat{a}_{(\lambda, \omega, k_x, k_y)} i \int d^4x j^\mu \sum_{\lambda'=I}^{IV} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' \int_{-\infty}^{+\infty} dk'_x \int_{-\infty}^{+\infty} dk'_y \\ \times \left(\hat{a}_{(\lambda', \omega', k'_x, k'_y)} A_\mu^{(\lambda', \omega', k'_x, k'_y)} + \hat{a}_{(\lambda', \omega', k'_x, k'_y)}^\dagger A_\mu^{(\lambda', \omega', k'_x, k'_y)*} \right) | 0 \rangle_R.$$

Usando (3.11),

$$A_{(\omega, k_x, k_y)}^{em} = i \sum_{\lambda=III} \int d^4x j^\mu \sum_{\lambda'=I}^{IV} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' \int_{-\infty}^{+\infty} dk'_x \int_{-\infty}^{+\infty} dk'_y A_\mu^{(\lambda', \omega', k'_x, k'_y)*} \\ \times \delta_{\lambda, \lambda'} \delta(\omega - \omega') \delta(k_x - k'_x) \delta(k_y - k'_y) \therefore$$

$$A_{(\omega, k_x, k_y)}^{em} = i \sum_{\lambda=III} \int d^4x \left(j^0 A_0^{(\lambda, \omega, k_x, k_y)*} + j^1 A_1^{(\lambda, \omega, k_x, k_y)*} \right).$$

Usando (1.72), (1.108), (3.18) e (3.19), teremos

$$A_{(\omega, k_x, k_y)}^{em} = i \frac{q\sqrt{2}}{\kappa} \frac{\sqrt{\sinh\left(\frac{\pi\omega}{a}\right)}}{2\pi^2\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau d\xi e^{2a\xi} \\ \times \left[\delta(\xi) - e^{-2a\xi} \delta(L - \xi) \right] \left[\partial_\xi K_{\frac{i\omega}{a}}^* + i \frac{\omega}{m} k_\perp K_{\frac{i\omega}{a}}^* \right] \cos(E\tau) e^{i\omega\tau} + \\ + E \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau d\xi e^{2a\xi} e^{-2a\xi} \theta(\xi) \theta(L - \xi) \left[i\omega K_{\frac{i\omega}{a}}^* + \frac{k_\perp}{m} \partial_\xi K_{\frac{i\omega}{a}}^* \right] \sin(E\tau) e^{i\omega\tau} \therefore$$

³Este cálculo foi apresentado por nosso grupo no II Workshop Challenges of New Physics in Space, veja o livro de resumos do evento.

$$\begin{aligned}
 A_{(\omega, k_x, k_y)}^{em} = & i \frac{q\sqrt{2}}{\kappa} \frac{\sqrt{\sinh\left(\frac{\pi\omega}{a}\right)}}{2\pi^2\sqrt{a}} \left\{ \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau d\xi e^{2a\xi} \left[\delta(\xi) - e^{-2a\xi} \delta(L - \xi) \right] \right. \\
 & \times \left(e^{i(E+\omega)\tau} + e^{i(\omega-E)\tau} \right) \left[\kappa e^{a\xi} K'_{i\frac{\omega}{a}} \left(\frac{\kappa}{a} e^{a\xi} \right) + i \frac{\omega}{m} k_{\perp} K_{i\frac{\omega}{a}} \left(\frac{\kappa}{a} e^{a\xi} \right) \right] + \\
 & \left. + \frac{E}{2i} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau d\xi \theta(\xi) \theta(L - \xi) \left[i\omega K_{i\frac{\omega}{a}} \left(\frac{\kappa}{a} e^{a\xi} \right) + \frac{k_{\perp}}{m} \kappa e^{a\xi} K'_{i\frac{\omega}{a}} \left(\frac{\kappa}{a} e^{a\xi} \right) \right] \left(e^{i(E+\omega)\tau} - e^{i(\omega-E)\tau} \right) \right\},
 \end{aligned}$$

onde foi operada a regra da cadeia nas funções de McDonald e usado o fato de que estas funções são reais se $\frac{\omega}{a} > 0$ e se $\left(\frac{\kappa}{a} e^{a\xi}\right)$ for real e positivo, [1]. Com o auxílio de uma das representações da distribuição delta [14], teremos

$$\begin{aligned}
 A_{(\omega, k_x, k_y)}^{em} = & i \frac{q\sqrt{2}}{\kappa} \frac{\sqrt{\sinh\left(\frac{\pi\omega}{a}\right)}}{4\pi^2\sqrt{a}} \left\{ 2\pi [\delta(\omega + E) + \delta(\omega - E)] \right. \\
 & \times \left[\left[\kappa K'_{i\frac{\omega}{a}} \left(\frac{\kappa}{a} \right) + i \frac{\omega}{m} k_{\perp} K_{i\frac{\omega}{a}} \left(\frac{\kappa}{a} \right) \right] - \left[\kappa e^{aL} K'_{i\frac{\omega}{a}} \left(\frac{\kappa}{a} e^{aL} \right) + i \frac{\omega}{m} k_{\perp} K_{i\frac{\omega}{a}} \left(\frac{\kappa}{a} e^{aL} \right) \right] \right] + \\
 & \left. - i 2\pi E [\delta(\omega + E) - \delta(\omega - E)] \int_0^L d\xi \left[i\omega K_{i\frac{\omega}{a}} \left(\frac{\kappa}{a} e^{a\xi} \right) + \frac{k_{\perp}}{m} \kappa e^{a\xi} K'_{i\frac{\omega}{a}} \left(\frac{\kappa}{a} e^{a\xi} \right) \right] \right\}.
 \end{aligned}$$

Como $\omega > 0$, teremos

$$\begin{aligned}
 A_{(\omega, k_x, k_y)}^{em} = & i \frac{q\sqrt{2}}{\kappa} \frac{\sqrt{\sinh\left(\frac{\pi\omega}{a}\right)}}{2\pi\sqrt{a}} \delta(\omega - E) \left\{ \kappa K'_{i\frac{\omega}{a}} \left(\frac{\kappa}{a} \right) + i \frac{E}{m} k_{\perp} K_{i\frac{\omega}{a}} \left(\frac{\kappa}{a} \right) - \kappa e^{aL} K'_{i\frac{\omega}{a}} \left(\frac{\kappa}{a} e^{aL} \right) + \right. \\
 & \left. - i \frac{E}{m} k_{\perp} K_{i\frac{\omega}{a}} \left(\frac{\kappa}{a} e^{aL} \right) + i E \int_0^L d\xi \left[i E K_{i\frac{\omega}{a}} \left(\frac{\kappa}{a} e^{a\xi} \right) + \kappa \frac{k_{\perp}}{m} e^{a\xi} K'_{i\frac{\omega}{a}} \left(\frac{\kappa}{a} e^{a\xi} \right) \right] \right\} \therefore
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_{(\omega, k_x, k_y)}^{em} = & i \frac{q\sqrt{2}}{\kappa} \frac{\sqrt{\sinh\left(\frac{\pi\omega}{a}\right)}}{2\pi\sqrt{a}} \delta(\omega - E) \left\{ \kappa K'_{i\frac{\omega}{a}} \left(\frac{\kappa}{a} \right) + i \frac{E}{m} k_{\perp} K_{i\frac{\omega}{a}} \left(\frac{\kappa}{a} \right) - \kappa e^{aL} K'_{i\frac{\omega}{a}} \left(\frac{\kappa}{a} e^{aL} \right) + \right. \\
 & \left. - i \frac{E}{m} k_{\perp} K_{i\frac{\omega}{a}} \left(\frac{\kappa}{a} e^{aL} \right) - E^2 \int_0^L d\xi K_{i\frac{\omega}{a}} \left(\frac{\kappa}{a} e^{a\xi} \right) + i \frac{E}{m} k_{\perp} \left[K_{i\frac{\omega}{a}} \left(\frac{\kappa}{a} e^{aL} \right) - K_{i\frac{\omega}{a}} \left(\frac{\kappa}{a} \right) \right] \right\}.
 \end{aligned}$$

Tomando o limite em que $L \rightarrow \infty$ e lembrando que a função de McDonald decai exponencialmente [15], teremos

$$A_{(\omega, k_x, k_y)}^{em} = i \frac{q\sqrt{2}}{\kappa} \frac{\sqrt{\sinh\left(\frac{\pi\omega}{a}\right)}}{2\pi\sqrt{a}} \delta(\omega - E) \left\{ \kappa K'_{i\frac{\omega}{a}} \left(\frac{\kappa}{a} \right) - \lim_{L \rightarrow \infty} E^2 \int_0^L d\xi K_{i\frac{\omega}{a}} \left(\frac{\kappa}{a} e^{a\xi} \right) \right\}. \quad (3.23)$$

A probabilidade de emissão de uma partícula de Rindler, por unidade de tempo e momentum transverso [2], será

$$dW_{0 \rightarrow 1}^{em}(\omega, k_x, k_y) = \frac{\left| A_{(\omega, k_x, k_y)}^{em} \right|^2}{T} d\omega, \quad (3.24)$$

onde $T = 2\pi\delta(0)$ corresponde ao tempo em que a fonte interagiu com os modos do campo de Proca. Assim,

$$dW_{0 \rightarrow 1}^{em}(\omega, k_x, k_y) = \frac{q^2}{4\kappa^2\pi^3 a} \sinh\left(\frac{\pi\omega}{a}\right) [\delta(\omega - E)] \quad (3.25)$$

$$\times \left| \kappa K'_{i\frac{\omega}{a}} \left(\frac{\kappa}{a} \right) - \lim_{L \rightarrow \infty} E^2 \int_0^L d\xi K_{i\frac{\omega}{a}} \left(\frac{\kappa}{a} e^{a\xi} \right) \right|^2.$$

Esta é a probabilidade de emissão de uma partícula de Rindler do campo vetorial massivo a partir do vácuo de Rindler.

Antes de prosseguirmos com o cálculo da taxa de resposta no referencial acelerado, falaremos brevemente do efeito Unruh. Sabe-se que o vácuo de Minkowski, no referencial acelerado, corresponde a um banho térmico com temperatura, em cada ponto [21],

$$T = \frac{\hbar a}{2\pi k_B c}, \quad (3.26)$$

sendo a a aceleração própria do observador no ponto dado e k_B e c as constantes de Boltzmann e a velocidade da luz, respectivamente. Este é o efeito Fulling-Davies-Unruh⁴. Uma intuição falsa a respeito desse efeito é a que se segue: O efeito Fulling-Davies-Unruh não afirma, por exemplo, que um detector de partículas irá se comportar de maneira idêntica em um referencial acelerado e em um referencial inercial com uma temperatura dada por (3.26). Na verdade, dado um detector no referencial inercial, sua descrição será equivalente em um referencial acelerado se o banho térmico for considerado neste último referencial. O leitor pode encontrar uma sequência de aplicações do efeito Fulling-Davies-Unruh na referência [1].

A partir de agora calcularemos a probabilidade de emissão de uma partícula do campo vetorial massivo quando já existirem n partículas no mesmo estado. Esta probabilidade é dada por [23]

$$dW_{(\omega, k_x, k_y)}^{em} = n dW_{0 \rightarrow 1}^{em}(\omega, k_x, k_y) + dW_{0 \rightarrow 1}^{em}(\omega, k_x, k_y), \quad (3.27)$$

sendo que o primeiro termo denota a emissão estimulada pelas n partículas que já estão no estado em que a partícula emitida estará e o segundo termo é apenas o termo de emissão espontânea, dado por (3.25). Para um banho térmico à temperatura T , a densidade de partículas com energia ω é [23]

$$n(\omega) = \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{k_B T}} - 1}. \quad (3.28)$$

Assim, considerando este banho térmico na temperatura prevista pelo efeito Fulling-Davies-Unruh, teremos

$$dW_{(\omega, k_x, k_y)}^{em} = dW_{0 \rightarrow 1}^{em}(\omega, k_x, k_y) \left(\frac{1}{e^{\frac{2\pi\omega}{a}} - 1} + 1 \right). \quad (3.29)$$

⁴Para uma demonstração deste efeito veja [20].

Portanto, usando (3.25), a probabilidade de emissão de uma partícula de Rindler para um estado com n partículas já existentes, é dada por

$$P_{k_x, k_y}^{em} = \frac{q^2}{4\pi^3 a} \int_0^\infty d\omega \sinh\left(\frac{\pi E}{a}\right) \delta(\omega - E) \left| K'_{i\frac{\omega}{a}}\left(\frac{\kappa}{a}\right) - \frac{E^2}{\kappa} \int_0^L d\xi K_{i\frac{\omega}{a}}\left(\frac{\kappa}{a} e^{a\xi}\right) \right|^2 \left(\frac{1}{e^{\frac{2\pi\omega}{a}} - 1} + 1 \right).$$

Tomando o limite para a fonte estática ($E \rightarrow 0$), ficamos com

$$P_{k_x, k_y}^{em} = \lim_{E \rightarrow 0} \frac{q^2}{4\pi^3 a} \left| K'_{i\frac{\omega}{a}}\left(\frac{\kappa}{a}\right) - \frac{E^2}{\kappa} \int_0^L d\xi K_{i\frac{\omega}{a}}\left(\frac{\kappa}{a} e^{a\xi}\right) \right|^2 \left[\frac{\sinh\left(\frac{\pi E}{a}\right)}{(e^{\frac{2\pi E}{a}} - 1)} + \sinh\left(\frac{\pi E}{a}\right) \right]. \quad (3.30)$$

Note que

$$\frac{\sinh\left(\frac{\pi E}{a}\right)}{(e^{\frac{2\pi E}{a}} - 1)} = \frac{1}{2} \frac{(e^{\frac{\pi E}{a}} - e^{-\frac{\pi E}{a}})}{(e^{\frac{2\pi E}{a}} - 1)} = \frac{1}{2e^{\frac{\pi E}{a}}} \frac{(e^{\frac{\pi E}{a}} - e^{-\frac{\pi E}{a}})}{(e^{\frac{\pi E}{a}} - e^{-\frac{\pi E}{a}})} = \frac{1}{2e^{\frac{\pi E}{a}}}.$$

Com efeito, removendo o regulador da equação (3.30) (*i.e.*, $L \rightarrow \infty$, $E \rightarrow 0$), encontramos

$$P_{k_x, k_y}^{em} = \frac{q^2}{8\pi^3 a} \left| K'_0\left(\frac{\kappa}{a}\right) \right|^2, \quad (3.31)$$

para k_x e k_y fixos. Como [19]:

$$\frac{dK_0(z)}{dz} = -K_1(z),$$

temos que

$$P_{(k_x, k_y)}^{em} = \frac{q^2}{8\pi^3 a} \left| -K_1\left(\frac{\kappa}{a}\right) \right|^2 \therefore$$

$$P_{(k_x, k_y)}^{em} = \frac{q^2}{8\pi^3 a} \left| K_1\left(\frac{\kappa}{a}\right) \right|^2. \quad (3.32)$$

Analogamente, a probabilidade de absorção de uma partícula do campo vetorial massivo pela fonte estática em Rindler será [2]:

$$P_{(k_x, k_y)}^{abs} = \frac{q^2}{8\pi^3 a} \left| K_1\left(\frac{\kappa}{a}\right) \right|^2. \quad (3.33)$$

Dessa forma, a taxa de resposta total de uma fonte no referencial acelerado é dada por

$$P_{(k_x, k_y)}^{tot} = P_{(k_x, k_y)}^{em} + P_{(k_x, k_y)}^{abs} \therefore$$

$$P_{(k_x, k_y)}^{tot} = \frac{q^2}{4\pi^3 a} \left| K_1\left(\frac{\kappa}{a}\right) \right|^2. \quad (3.34)$$

Percebe-se que a resposta no espaço-tempo de Rindler é igual a resposta calculada com relação a observadores inerciais, dada pela equação (2.31). Esta igualdade, no entanto, só ocorreu devido à consideração do banho térmico de Unruh.

Considerações Finais

Neste trabalho, quantizamos canonicamente o campo de Proca de forma co-variante em dois referenciais, primeiro no inercial e depois no acelerado. Uma dificuldade encontrada inerente a esta quantização, foi o fato de a componente temporal do momentum canonicamente conjugado ao campo de Proca livre ter valor nulo. Para sanar tal dificuldade, introduzimos o termo $\nabla^\mu A_\mu$ na densidade lagrangeana deste campo, obtendo assim uma nova lagrangeana e, conseqüentemente, novas equações de campo. Entretanto, com o uso do gauge de Feynman, mostramos que o conjunto das soluções das novas equações do campo livre contém, além das soluções da equação (1.7), soluções da equação (1.9), que não satisfazem a condição de Lorenz [equação (1.10)]. Assim, quando trocamos os campos por operadores, o operador correspondente ao momento canonicamente conjugado não é mais o operador nulo, o que permite a imposição das relações de comutação a tempos iguais (não nulas) entre o campo e seu momento canonicamente conjugado. Para eliminar dos nossos cálculos as contribuições dos modos que não satisfazem a equação de Proca, restringimos os estados físicos do campo de Proca a um subespaço do espaço de Hilbert. Este subespaço dos estados físicos contém cada um dos vetores do espaço de Hilbert, em que o valor esperado do operador $\nabla^\mu A_\mu^{(+)}$ introduzido na densidade lagrangeana é zero. Estas quantizações foram usadas para calcular, em nível de árvore, a taxa de resposta de uma fonte, do campo de Proca uniformemente acelerada, tanto do ponto de vista dos observadores inerciais quanto do ponto de vista dos observadores co-acelerados com a fonte, assumindo que o campo está no vácuo inercial. Como no referencial co-acelerado a fonte é estática, a probabilidade de emissão espontânea é zero. Por outro lado, neste referencial, a taxa de emissão estimulada (assim como a taxa de absorção) fica indeterminada, pois de acordo com o efeito Unruh o vácuo inercial corresponde, no referencial acelerado, a um banho térmico de partículas onde o número de partículas com frequências entre ω e $\omega + d\omega$ vai para infinito quando ω vai para zero. Assim, a taxa de resposta total, que é duas vezes o produto da probabilidade de emissão

espontânea pelo número de partículas, sofre uma indeterminação do tipo $0 \times \infty$. Para resolver esta indeterminação usamos um regulador e obtivemos explicitamente que a taxa de resposta no referencial inercial é idêntica à taxa de resposta no referencial co-acelerado com a fonte. Isto é, para cada partícula emitida pela fonte no referencial inercial, temos, no referencial co-acelerado, a emissão ou a absorção de uma partícula de energia zero. Ao resolvermos a equação de Klein-Gordon em Rindler, percebemos que, neste espaço-tempo, não existe uma relação entre momento total e energia, como a relação de dispersão que existe em Minkowski. Com efeito, as partículas de energia zero, que são as partículas relevantes para a interação da fonte com o campo no referencial acelerado, terão momento não-nulo. Além disso, o observador de Rindler não conseguirá identificar que uma partícula de Rindler de energia zero foi emitida (absorvida) para (de) o banho térmico de Unruh, já que, como foi mostrado em [8], neste caso a taxa de detecção de partículas massivas com energia $E < mc^2$ vai para zero quando E vai para zero.

A taxa de resposta no referencial inercial pode ser usada para descrevermos a emissão de partículas Z^0 por elétrons uniformemente acelerados. O cálculo no referencial co-acelerado, além de nos ajudar a compreender este processo do ponto de vista dos observadores parados junto com a carga, nos permite também prever a resposta de elétrons estáticos, muito próximos do horizonte de um buraco negro de Schwarzschild, em interação com as partículas Z^0 da radiação Hawking, desde que a aceleração própria do elétron em ambos os casos seja a mesma [1].

Análises das respostas de fontes uniformemente aceleradas em referenciais inerciais e em referenciais co-acelerados foram realizadas para interações da fonte com os seguintes campos: Klein-Gordon não massivo [6], Klein-Gordon massivo [8], Dirac [7], Maxwell [2], e nesta dissertação, para o campo de Proca. Temos assim, a intenção de estender esta análise para o campo de spin 2. Outro possível desdobramento futuro, pode ser o cálculo da taxa de resposta de uma fonte estática no espaço-tempo de Schwarzschild (não necessariamente próxima ao horizonte) em interação com as partículas vetoriais massivas da radiação Hawking e a comparação do resultado com a taxa de resposta obtida nesta dissertação. Vale a pena lembrar que, quando esta comparação é feita considerando o campo escalar sem massa no lugar do campo de Proca, estas taxas surpreendentemente coincidem [6].

Apêndice A

Intervalo de espaço-tempo no referencial acelerado

Neste apêndice vamos mostrar que o elemento invariante de espaço-tempo no referencial inercial, $ds^2 = dt^2 - dz^2 - dx^2 - dy^2$, juntamente com as coordenadas de Rindler (1.18) levam ao elemento invariante de espaço-tempo no referencial acelerado dado por: $ds^2 = e^{2a\xi}(d\tau^2 - d\xi^2) - dx^2 - dy^2$. A partir das coordenadas de Rindler é fácil mostrar que

$$a^2(z^2 - t^2) = e^{2a\xi} \quad (\text{A.1})$$

e

$$\frac{t}{z} = \tanh(a\tau). \quad (\text{A.2})$$

Diferenciando (A.1) e (A.2), teremos

$$zdz - tdt = \frac{e^{2a\xi}}{a} d\xi \quad (\text{A.3})$$

e

$$\frac{1}{z} dt - \frac{t}{z^2} dz = \frac{a}{\cosh^2(a\tau)} d\tau. \quad (\text{A.4})$$

Elevando ao quadrado (A.3) e (A.4), teremos

$$z^2 dz^2 + t^2 dt^2 - 2ztdzdt = \frac{e^{4a\xi}}{a^2} d\xi^2 \quad (\text{A.5})$$

e

$$\frac{1}{z^2} dt^2 + \frac{t^2}{z^4} dz^2 - 2\frac{t}{z^3} dt dz = \frac{a^2}{\cosh^4(a\tau)} d\tau^2. \quad (\text{A.6})$$

Multiplicando (A.6) por z^4 , encontramos

$$z^2 dt^2 + t^2 dz^2 - 2z t dt dz = \frac{a^2 z^4}{\cosh^4(a\tau)} d\tau^2. \quad (\text{A.7})$$

Lembrando que

$$z = \frac{e^{a\xi}}{a} \cosh(a\tau) \Rightarrow z^4 = \frac{e^{4a\xi}}{a^4} \cosh^4(a\tau),$$

podemos substituir esta última expressão na equação (A.7), o que resultará em

$$z^2 dt^2 + t^2 dz^2 - 2z t dt dz = \frac{e^{4a\xi}}{a^2} d\tau^2. \quad (\text{A.8})$$

Fazendo (A.8)-(A.5), teremos

$$(z^2 - t^2)(dt^2 - dz^2) = \frac{e^{4a\xi}}{a^2} (d\tau^2 - d\xi^2). \quad (\text{A.9})$$

Usando a equação (A.1), encontramos finalmente que

$$dt^2 - dz^2 = e^{2a\xi} (d\tau^2 - d\xi^2). \quad (\text{A.10})$$

Como as coordenadas x e y não são afetadas pela mudança de coordenadas (1.18), ficamos com

$$ds^2 = dt^2 - dz^2 - dx^2 - dy^2 = e^{2a\xi} (d\tau^2 - d\xi^2) - dx^2 - dy^2 \quad (\text{A.11})$$

e a relação está demonstrada.

Apêndice B

Conservação da carga na corrente regularizada no referencial acelerado

Neste apêndice demonstraremos que a fonte j^μ satisfaz a equação

$$\nabla_\mu j^\mu = 0, \quad (\text{B.1})$$

com $j^\mu = (j^0, j^1, 0, 0)$, de forma que,

$$j^0 = q\sqrt{2} \cos(E\tau) \left[\delta(\xi) - e^{-2a\xi} \delta(L - \xi) \right] \delta(x)\delta(y), \quad (\text{B.2})$$

$$j^1 = q\sqrt{2}E \sin(E\tau) e^{-2a\xi} \theta(\xi)\theta(L - \xi) \delta(x)\delta(y). \quad (\text{B.3})$$

Prova:

$$\nabla_\mu j^\mu = \partial_\mu j^\mu + \Gamma^\mu_{\mu\alpha} j^\alpha \therefore$$

$$\nabla_\mu j^\mu = \partial_0 j^0 + \Gamma^0_{01} j^1 + \partial_1 j^1 + \Gamma^1_{11} j^1 \therefore$$

$$\begin{aligned} \nabla_\mu j^\mu &= -q\sqrt{2}E \sin(E\tau) \left[\delta(\xi) - e^{-2aL} \delta(\xi - L) \right] \delta(x)\delta(y) + a j^1 + \\ &+ q\sqrt{2}E \sin(E\tau) \left\{ -2ae^{-2a\xi} \theta(\xi)\theta(L - \xi) + e^{-2a\xi} \left[\delta(\xi)\theta(L - \xi) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \theta(\xi)\delta(L - \xi)(-1) \right] \right\} \delta(x)\delta(y) + a j^1 \therefore \end{aligned}$$

$$\nabla_\mu j^\mu = -E \tan(E\tau) j^0 + a j^1 - 2a j^1 + q\sqrt{2}E \sin(E\tau) e^{-2a\xi} (\delta(\xi) - \theta(\xi)\delta(L - \xi)) \delta(x)\delta(y) + a j^1 \therefore$$

$$\nabla_{\mu} j^{\mu} = -E \tan(E\tau) j^0 + q\sqrt{2}E \sin(E\tau) [\delta(\xi) - e^{-2aL} \delta(L - \xi)] \delta(x) \delta(y).$$

Usando a equação (3.18), chegamos a

$$\nabla_{\mu} j^{\mu} = 0. \quad c.q.d. \tag{B.4}$$

Referências Bibliográficas

- [1] L. C. B. Crispino, A. Higuchi e G. E. A. Matsas, *Rev. Mod. Phys.* **80**, 787 (2008).
- [2] A. Higuchi, G. E. A. Matsas e D. Sudarsky, *Phys. Rev. D* **46**, R3450 (1992).
- [3] S. A. Fulling, *Phys. Rev. D* **7**, 2850 (1973).
- [4] P. C. W. Davies, *J. Phys. A* **8**, 609 (1975).
- [5] W. G. Unruh, *Phys. Rev. D* **14**, 870 (1976).
- [6] J. Castiñeiras, I. P. Costa e Silva, e G. E. A. Matsas, *Phys. Rev. D* **67**, 067502 (2003).
- [7] G. E. A. Matsas e D. A. T. Vanzella, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 151301 (2001).
- [8] J. Castiñeiras, L. C. B. Crispino, G. E. A. Matsas, e D. A. T. Vanzella, *Phys. Rev. D* **65**, 104019 (2002).
- [9] W. Greiner e J. Reinhardt, *Field Quantization*, Springer-Verlag (1996).
- [10] N. A. Lemos, *Mecânica Analítica*, 2ed. Editora Livraria da Física (2007).
- [11] E. S. Gonçalves, *A Massa do Fóton e a Eletrodinâmica de Proca*, Tese de Mestrado, **IFT-UNESP** (2008).
- [12] A. Higuchi, G. E. A. Matsas e D. Sudarsky, *Phys. Rev. D* **45**, R3308 (1992).
- [13] J. Castiñeiras, I. P. Costa e Silva e G. E. A. Matsas, *Phys. Rev. D* **67**, 067502 (2003).
- [14] G. B. Arfken e H. J. Weber, *Mathematical Methods for Physicists*, Elsevier Academic Press (2005).
- [15] Bateman, *Higher Transcendental Functions*, Vol. 2, McGraw-Hill (1953).

-
- [16] L. C. B. Crispino, *Quantização a Baixas Freqüências de Campos Bosônicos no Espaço-Tempo de Schwarzschild e Aplicações*, Tese de Doutorado, **IFT-UNESP** (2001).
- [17] L. N. Pringle, *Phys. Rev. D* **39**, 2178 (1989).
- [18] L. Landau e E. Lifshitz, *Teoria do Campo*, Mir (1980).
- [19] I. S. Gradshteyn e I. M. Ryzhik, *Tables of Integrals, Series and Products*, Academic Press (1980).
- [20] W. G. Unruh, e R. M. Wald, *Phys. Rev. D* **29**, 1047 (1984).
- [21] G. E. A. Matsas, *Rev. Bras. Ens. Fis.* **27**, 137 (2005).
- [22] R. d’Inverno, *Introducing Einstein’s Relativity*, Oxford University Press Inc. (1992).
- [23] R. P. Feynman, R. B. Leighton e M. Sands, *Lições de Física de Feynman*, Vol. 3, Bookman (2008).