



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ  
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Belém-Pará

Março-2009



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ  
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

**Efeitos de Temperatura  
e Potencial Químico  
em Teoria Quântica de Campos**

Soraya Galdino Maciel  
*Orientadora:* Prof. Dra. Silvana Perez

Belém-Pará  
Março-2009

# Efeitos de Temperatura e Potencial Químico em Teoria Quântica de Campos

Soraya Galdino Maciel

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Pará (PPGF-UFGPA) como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Mestre em Ciências (Física).

Orientadora: Prof. Dra. Silvana Perez

## Banca Examinadora

---

Prof. Dra. Silvana Perez (Orientadora)

---

Prof. Dr. Ademir Santana (Membro Externo)

---

Prof. Dr. Danilo Teixeira Alves (Membro Interno)

Belém-Pará

Março-2009

## Resumo

Neste trabalho iremos estudar os efeitos do potencial químico em  $(1 + 1)$  dimensões em modelos de teoria de campos a temperatura finita. Em particular, consideraremos férmions não massivos em um campo de fundo de calibre abeliano e calcularemos a ação efetiva por meio da função de  $n$ -pontos. Escreveremos a estrutura das amplitudes correspondentes e generalizaremos cálculos já existentes na literatura sem o potencial químico. Mostraremos através dos cálculos que a anomalia quiral não é afetada pela presença do potencial químico a temperatura finita. Entretanto, na ausência desse potencial as funções ímpares são nulas. Já na presença dele a temperatura finita, a função tem contribuições pares e ímpares. Mostraremos que a origem da estrutura das amplitudes é melhor vista a partir da formulação alternativa da teoria em termos dos espinores *left-* e *right-handed*. Os cálculos são também mais simples nessa formulação e alguns aspectos da teoria ficam mais claros.

## *Abstract*

In this work we study the effects of a nonzero chemical potential in  $(1 + 1)$  dimensions quantum field models at finite temperature. We particularly consider massless fermions in an abelian gauge field background and calculate the effective action by evaluating the  $n$ -point functions. We find that the structure of the amplitudes corresponds to a generalization of the structure noted earlier in a calculation found in the literature without a chemical potential (the associated integrals carry the dependence on the chemical potential). Our calculation shows that the chiral anomaly is unaffected by the presence of a chemical potential at finite temperature. However, unlike in the absence of a chemical potential, odd point functions do not vanish. In fact, we find that all the even point functions are even functions of  $\mu$  while the odd point functions are odd functions of  $\mu$ . We show that the origin of the structure of the amplitudes is best seen from a formulation of the theory in terms of left and right handed spinors. The calculations are also much simpler in this formulation and it clarifies many other aspects of the theory.

*“Dedico a minha mãe  
Raimunda Silva Galdino.”*

*Nos demais,  
todo mundo sabe,  
o coração tem moradia certa,  
fica bem aqui no meio do peito,  
mas comigo a anatomia ficou louca,  
sou todo coração. Maiakovski*

---

## Agradecimentos

Gostaria de agradecer...

- A Deus que é o meu alicerce em todos os momentos da minha vida.
- À minha mãe Raimunda Silva Galdino pela força, dedicação e pelo amor incondicional.
- À minha orientadora e amiga Silvana Perez, pela palavras de companherismo, coragem, força, dedicação, pelas conversas, favorecendo assim, meu crescimento acadêmico e principalmente no meu amadurecimento pessoal, por ter me dado a oportunidade de ser sua aluna, de trabalharmos juntas e desenvolver as atividades de pesquisa.
- Ao Prof. Dr Ashok Das pela força, atenção e confiança que tem me dado no decorrer deste trabalho.
- À toda minha família, em especial a minha mãe Raimunda, meu irmão Eliel Maciel, que sempre me incentivaram no meus estudos.
- Aos professores do Instituto de Física da Universidade Federal do Pará, Prof.Dr. Danilo Teixeira, Prof.Dr. Sérgio Vizeu e Prof.Dr Van Sérgio Alves pelo apoio e confiança.
- Aos meus amigos queridos do curso de Física Leonardo Oliveira, Carlos Alexandre Nascimento, Anderson Costa, Edson Costa, Wagner Pires, Andreson Rego, Thiago Caramês, Herondy Motta, Bárbara Paes, Nilzilene Gomes, Cleidilane Sena, Itamara Campos, Messias Costa, Charles Rocha, pelas horas de estudo e companhia desde sempre muito agradável.
- Aos meus amigos do grupo de Iniciação científica: Penn Lee, Tercio Almeida, Carolina, Tanísia Cardoso e Charles Rocha.
- Ao meu amigo Leonardo Nascimento por toda amizade, confiança, companheirismo e ajuda que tem me dedicado desde o início do curso de Física, estando sempre presente.
- Aos amigos que fiz em João Pessoa, Rebeca Dourado, Rubéns Silva, Daniel Palheta, Rodrigo César, Janaira Bueno, Aline Silva, Erick Silva e Larissa Silva, pela força e companhia que me dedicaram.
- À todos os meus amigos do Espaço Cultural 'Nossa Biblioteca', em especial, Madalena Westerveld, Nazaré Santos, Rosilene Barata, Carlos Alexandre Nascimento da Costa,



Anderson Lima, Anselmo Jr, Valdecira Maciel, Layla Vitor, Michel Torres e Wanderson Souza pelas conversas aconchegantes e pela força que me têm dado sempre.

- Aos meus amigos Adiel Souza, Ivan Ribeiro, Luana Cruz, Ivanilce Santos, Eliane Epifane e Alexandre Xavier pelo apoio, amizade e torcida.
- Aos funcionários do Laboratório de Física Anderson Viana, Angela de Lira, Alzira Andrade e Jaciara Paiva de Oliveira pelo apoio e paciência.
- À CAPES pelo suporte financeiro.
- À todos que de alguma forma contribuíram para a realização desta dissertação.

# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>9</b>
<b>1 Aspectos Gerais</b>	<b>12</b>
1.1 Modelos em (1+1) dimensões . . . . .	12
1.2 Formalismo de tempo real . . . . .	15
1.3 Formalismo de integrais de trajetória e Ação Efetiva . . . . .	23
<b>2 Efeitos de Potencial Químico na TQC em (1 + 1) dimensões</b>	<b>27</b>
2.0.1 O campo clássico e a Ação Efetiva . . . . .	27
2.1 Efeito de Potencial químico na ação efetiva . . . . .	34
2.1.1 Função de 2-pontos . . . . .	35
2.1.2 Função de $n$ -Pontos . . . . .	41
2.1.3 Modo alternativo . . . . .	42
<b>Considerações Finais</b>	<b>45</b>
<b>A Cálculo do traço para a função de <math>n</math>-pontos</b>	<b>47</b>
<b>B Termo quadrático da função de 2-pontos</b>	<b>50</b>

# Introdução

O estudo de efeitos térmicos na Teoria Quântica de Campos (TQC) vem sido bastante utilizado no entendimento de vários sistemas físicos [1, 2, 3]. Por exemplo, os efeitos de temperatura na anomalia quiral foram analisados em [4]. A temperatura zero, essa anomalia surge como consequência do procedimento de regularização das divergências ultravioleta. Entretanto, a temperatura finita tais divergências são anuladas pelos termos proporcionais às distribuições de Bose-Einstein ou Fermi-Dirac e portanto não existe contribuição térmica a esta anomalia.

Paralelamente, os efeitos de potencial químico em modelos de  $(1 + 1)$  dimensões também foram considerados. Por exemplo, em [5] os autores analisaram modelos bidimensionais a temperatura e potencial químico não nulos e usaram o limite de altas densidades para entender a estrutura de transição de fases que ocorre no fenômeno de confinamento em tais modelos. Em [6, 7] foram estudados a densidade finita os condensados de férmions no modelo de Schwinger, tendo os autores encontrado um comportamento oscilatório que depende do potencial químico.

Neste trabalho vamos estudar os efeitos de potencial químico e temperatura em  $(1 + 1)$  dimensões para férmions não massivos imersos em um campo de fundo de calibre abeliano. Na referência [8], a ação efetiva foi calculada perturbativamente neste modelo, a temperatura finita, por meio do cálculo das funções de  $n$ -pontos. Foi demonstrado que todas as funções pares são diferentes de zero, apesar de a temperatura zero a ação efetiva possuir apenas termos quadráticos no campo de fundo [9]. Iremos agora generalizar este estudo, incluindo os efeitos de potencial químico. Mostraremos que nesta generalização surgem contribuições à ação efetiva provenientes das funções de  $n$ -pontos ímpares. Tais contribuições são ímpares no potencial químico, zerando no limite de potencial químico nulo. Além disso, iremos mostrar, a partir do estudo da função de 2-pontos, que a anomalia quiral do modelo de Schwinger não é afetada pela presença do potencial químico.

A dissertação está dividida da seguinte maneira: vamos iniciar o Cap.1 estudando aspectos gerais relacionados com modelos de TQC em  $(1 + 1)$  dimensões. Esses modelos são usados para explicar certos fenômenos físicos que permanecem nesta simplificação e que são difíceis de serem estudados em dimensões maiores. Iremos nos deter no modelo de Schwinger [10], que descreve a eletrodinâmica quântica em  $(1 + 1)$  dimensões com férmions não massivos. Esse modelo possui algumas propriedades importantes, como a quebra espontânea de simetria de calibre  $U(1)$ , por correções radioativas. Além disso, é um modelo exatamente solúvel. Existem também outros modelos importantes, como o proposto por Gross-Neveu onde são considerados  $N$  férmions com auto-interação quártica [11].

A segunda parte do Cap.1 destina-se à apresentação de um resumo do formalismo de caminho temporal fechado ou *closed time path formalism* [1, 2, 3], para a análise de efeitos térmicos na TQC. Neste formalismo, a variável temporal é mantida inalterada, em contraposição ao formalismo de tempo imaginário [3, 12, 13], no qual o tempo é tratado como temperatura. A entidade básica para o entendimento de sistemas quânticos envolvendo muitas partículas, tanto na Mecânica Quântica (MQ) quanto na TQC, é o operador densidade. Este operador é utilizado para encontrar medidas físicas sem precisarmos possuir informação alguma sobre o *ket* do sistema [14, 15].

No capítulo 2 vamos estudar os efeitos do potencial químico em  $(1 + 1)$  dimensões na teoria de campos a temperatura finita. Iniciaremos fazendo um estudo sistemático do formalismo de integral de trajetórias, proposto por Feynman para o estudo de sistemas quânticos. Utilizando este formalismo, faremos uma pequena análise do campo clássico visando o entendimento conceitual da ação efetiva. Veremos que através de uma transformação de Legendre encontramos um funcional denominado ação efetiva. Por meio deste funcional, podemos obter informações sobre as funções de Green da teoria, em particular podemos escrever o propagador completo em termos dela. Finalmente, vamos estudar os efeitos de potencial químico na ação efetiva para férmions não massivos em um campo de fundo abeliano em  $(1 + 1)$  dimensões a temperatura finita. Calcularemos as contribuições térmicas à função de 2-pontos, e depois generalizaremos os resultados, calculando as funções de  $n$ -pontos. Particularmente a função de 2-pontos pode ser utilizada para estudar a anomalia quiral. Em  $(1 + 1)$  dimensões a função de 2-pontos quiral,  $\Gamma_{5,++}^{\mu\nu}(p)$ , pode ser obtida a partir da função de 2-pontos do fóton por meio das identidades das matrizes  $\gamma$  [16]. Vamos mostrar que os resultados se reduzem a [8] quando fazemos o potencial

---

químico tender a zero. Completando a análise, veremos também que a anomalia quiral não é afetada pela presença do potencial químico a temperatura finita. Faremos ainda o cálculo dessas amplitudes por meio de um método alternativo baseado no uso dos campos de de espinores *left e right-handed* e chegaremos aos mesmos resultados. Utilizando esta decomposição, iremos mostrar porque o potencial químico não contribui para a anomalia quiral.

Finalizaremos com as conclusões e perspectivas.

# Capítulo 1

## Aspectos Gerais

### 1.1 Modelos em $(1+1)$ dimensões

Muito embora numa descrição exata da natureza seja necessário trabalharmos com três dimensões espaciais e uma temporal, dependendo do fenômeno que desejamos estudar, modelos simplificados que desprezam uma ou mais dimensões espaciais são suficientes. Em  $(2 + 1)$  dimensões, a eletrodinâmica quântica é modificada pela aparição do termo de Chern-Simons. Já em  $(1 + 1)$  dimensões, certos modelos apresentam solução exata, o que permite um entendimento mais completo da formulação quântica da teoria de campos.

Existem diversos modelos em  $(1 + 1)$  dimensões. Como exemplo, podemos citar o modelo de Gross-Neveu que foi proposto por Gross e Neveu em 1974 [11], onde são considerados  $N$  férmions com auto-interação quártica. Esse modelo possui algumas propriedades tais como: liberdade assintótica e quebra de simetria quiral para férmions de massa nula.

Outro modelo bidimensional foi proposto por Julian Schwinger em 1960 [10], e ficou conhecido na literatura como Modelo de Schwinger. Ele corresponde à Eletrodinâmica Quântica (QED) em  $(1 + 1)$  dimensões, com massa do férmion nula. Possui algumas propriedades importantes, como a presença de uma anomalia, conhecida como anomalia quiral. Além disso, é um modelo exatamente solúvel.

Neste trabalho vamos estudar um modelo bidimensional composto por férmions não mas-

sivos na presença de um campo de fundo abeliano sem dinâmica própria, calculando efeitos de potencial químico na ação efetiva. Também iremos utilizar parte dos cálculos para obter a contribuição do potencial químico para a anomalia quiral do modelo de Schwinger.

O Modelo de Schwinger é descrito pela QED em  $(1+1)$  dimensões com férmions não massivos. A lagrangiana neste caso é dada por:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + i\bar{\psi}\gamma^\mu(\partial_\mu - ieA_\mu)\psi, \quad (1.1)$$

com as matrizes  $\gamma$  satisfazendo:

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}. \quad (1.2)$$

Além disso em  $(1+1)$  dimensões usamos a representação para as matrizes de Dirac dada pelas matrizes de Pauli com:

$$\gamma^0 = \sigma_1, \quad \gamma^1 = -i\sigma_2, \quad \gamma_5 = -i\sigma_3, \quad (1.3)$$

e consideramos a métrica  $\eta^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1)$ .

A primeira peculiaridade deste modelo é que, por causa do campo  $A_\mu$  ter sempre  $(n-2)$  componentes físicas (onde  $n$  é a dimensão do espaço-tempo), como uma consequência da invariância de calibre e da transversalidade, em  $(1+1)$  dimensões o campo  $A_\mu$  não tem componente física.

Com relação às simetrias satisfeitas pela lagrangeana (1.1), podemos inicialmente notar que da transformação de calibre local, dada por:

$$\begin{aligned} \delta\psi &= -i\epsilon(x)\psi, \\ \delta\bar{\psi} &= i\bar{\psi}\epsilon(x), \\ \delta A_\mu &= \frac{1}{\epsilon(x)}\partial_\mu\epsilon(x), \end{aligned} \quad (1.4)$$

podemos obter a usual lei de conservação:

$$\partial_\mu J^\mu = 0 \quad J^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi. \quad (1.5)$$

Esse modelo apresenta uma simetria adicional global, dada por:

$$\delta\psi = i\epsilon\gamma_5\psi,$$

e

$$\delta\bar{\psi} = i\epsilon\bar{\psi}\gamma_5, \quad (1.6)$$

onde definimos uma nova matriz  $\gamma_5 \equiv \gamma^0\gamma^1$ . De fato, a partir da Eq.(1.1) podemos ver que:

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L} &= \mathcal{L}' - \mathcal{L} \\ &= -\epsilon\psi^\dagger[\gamma^0\gamma^\mu, \gamma_5](\partial_\mu - ieA_\mu)\psi. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Agora, usando a propriedade dos comutadores,

$$[ab, c] = a\{b, c\} - \{a, c\}b, \quad (1.8)$$

chegamos à:

$$\delta\mathcal{L} = 0. \quad (1.9)$$

Assim, a correspondente corrente de Noether conservada é dada por:

$$\partial_\mu J_5^\mu = 0, \quad J_5^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi. \quad (1.10)$$

Antes de continuarmos, vamos listar algumas propriedades das matrizes  $\gamma$  e  $\gamma_5$ , que serão de suma importância nos cálculos do próximo capítulo.

De  $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$ , obtemos:

$$(\gamma^0)^2 = I; \quad (\gamma^1)^2 = -I; \quad (\gamma_5)^2 = I; \quad (1.11)$$

e usando a ciclicidade do traço,

$$\text{Tr}\gamma^0 = -\text{Tr}(\gamma^1)^2\gamma^0 = -\text{Tr}\gamma^1\gamma^0\gamma^1 = -\text{Tr}\gamma^0 = 0, \quad (1.12)$$

e analogamente:

$$\text{Tr}\gamma_5 = \text{Tr}\gamma^0\gamma^1 = 0. \quad (1.13)$$

Utilizando a hermiticidade da hamiltoniana, podemos demonstrar que as matrizes  $\gamma$  também satisfazem:

$$(\gamma^0)^\dagger = \gamma^0; \quad (\gamma^1)^\dagger = \gamma^1 \quad (\gamma_5)^\dagger = \gamma_5. \quad (1.14)$$



Finalmente, podemos reescrever  $\gamma_5$  como:

$$\gamma_5 = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu} \sigma_{\mu\nu}, \quad (1.15)$$

onde o tensor de Levi-Civita em duas dimensões é definido como sendo:

$$\epsilon^{\mu\nu} = -\epsilon^{\nu\mu}, \quad (1.16)$$

e satisfaz:

$$\epsilon^{\lambda\rho} \epsilon^{\mu\nu} = \eta^{\lambda\nu} \eta^{\rho\mu} - \eta^{\lambda\mu} \eta^{\rho\nu}, \quad (1.17)$$

e:

$$\epsilon^{\mu\nu} \gamma_5 = \sigma^{\mu\nu}. \quad (1.18)$$

A partir das formas de  $\gamma^\mu$  e  $\gamma_5$ , vemos que:

$$J_5^\mu = \epsilon^{\mu\nu} J_\nu, \quad (1.19)$$

que fornece uma importante relação entre as duas correntes. Quanticamente, pode-se demonstrar que [16, 23]:

$$\partial_\mu \langle J^\mu \rangle = \partial_\mu \frac{e^2}{\pi} [g^{\mu\nu} - \partial^\mu (\partial^2)^{-1} \partial^\nu] A_\nu = 0,$$

ou seja a simetria de calibre local clássica é preservada quanticamente. Porém, para a simetria quirial, temos que:

$$\partial_\mu \langle J_5^\mu \rangle = \partial_\mu \epsilon^{\mu\nu} \langle J_\nu \rangle \neq 0 \quad (1.20)$$

Vemos, assim, que a simetria clássica expressa pela Eq. (1.10) não é mais preservada quanticamente. Dizemos que a teoria tem uma anomalia na lei de conservação, tal que quando calculamos efeitos quânticos, a corrente clássica não é mais conservada.

## 1.2 Formalismo de tempo real

A Teoria de Campos a Temperatura Finita constitui uma área de pesquisa bastante ampla, onde diversos desenvolvimentos formais e fenomenológicos vêm ocorrendo. O primeiro tratamento sistemático na teoria de campos que incluiu efeitos térmicos foi proposto por Matsubara,

na década de 50, utilizando o formalismo do tempo imaginário [12, 3]. O método de Matsubara explora a relação existente entre o operador de evolução temporal da teoria quântica e a função distribuição da Mecânica Estatística quando o parâmetro tempo é continuado analiticamente no eixo imaginário. A eliminação do tempo torna o formalismo do tempo imaginário intrinsecamente apropriado ao estudo de fenômenos no equilíbrio. Formalmente, fenômenos com variação temporal podem ser tratados neste formalismo por meio de uma nova continuação analítica, para recuperar a variável tempo. Na prática, entretanto, este procedimento pode não ser o mais apropriado, dependendo do problema a ser estudado.

Existem dois outros formalismos onde a variável temporal é mantida inalterada, e a temperatura é introduzida através de condições de contorno. Estes são os chamados formalismos de tempo real. O mais antigo deles, introduzido por Schwinger no contexto de integrais de trajetória, é conhecido como caminho temporal fechado ou *closed time path formalism* [1, 2, 3]. Existe também o formalismo de dinâmica de campos térmicos, ou *Thermofield Dynamics*, no qual é construído o vácuo térmico [3, 24, 25, 26]. Neste trabalho, utilizaremos o formalismo de caminho temporal fechado, que apresentaremos a seguir.

A entidade básica no estudo de sistemas quânticos envolvendo muitas partículas é o operador densidade. Muito embora no contexto da teoria estatística ele seja essencial, na Mecânica Quântica (MQ) ele também assume um papel muito importante. Na formulação usual da MQ, existe uma dificuldade quando queremos trabalhar com várias partículas em diferentes estados físicos. Isso acontece porque os postulados da MQ são enunciados para estados puros, ou seja, coleções de sistemas identicamente preparados, todos eles no mesmo estado quântico, representado por um único *ket*. Entretanto, quando temos várias partículas em diferentes estados quânticos (estados mistos), os postulados básicos da MQ não são suficientes. Há uma ambiguidade na escolha do *ket* que representa o sistema físico de todas as partículas. Existem duas escolhas para lidar com esse tipo de situação: a primeira é utilizar um postulado extra na MQ, chamado Postulado de Simetrização; a outra alternativa é a de se trabalhar com o operador densidade. Neste caso, as medidas físicas são obtidas sem precisarmos conhecer o *ket* do sistema<sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup>As referências [14, 15, 17, 22] apresentam uma discussão detalhada do operador densidade na Mecânica Quântica e na Mecânica Estatística Quântica.

Consideremos, inicialmente, a representação de Schrödinger para a descrição geral de um estado misto em um sistema quântico. As informações físicas sobre o sistema preparado no estado misto estão contidas na matriz densidade, dada por:

$$\rho(t) = \sum_n p_n |\psi_n(t)\rangle \langle \psi_n(t)|, \quad (1.21)$$

onde  $p_n$  é a probabilidade de encontrar o sistema em um particular estado constituinte do estado misto, ou seja,  $|\psi_n(t)\rangle$ . Sem perda de generalidade, vamos assumir que os estados são discretos e que  $p_n$  satisfaz:

$$\sum_n p_n = 1 \quad (1.22)$$

Neste formalismo, a média para um operador qualquer  $A$  tem a forma:

$$\begin{aligned} \langle A \rangle &= \text{Tr}(\rho(t)A) \\ &= \sum_n p_n \langle \psi_n(t) | A | \psi_n(t) \rangle, \end{aligned} \quad (1.23)$$

a evolução temporal da matriz densidade pode ser obtida da evolução temporal dos estados do sistema, ou seja:

$$i \frac{\partial |\psi_n(t)\rangle}{\partial t} = H |\psi_n(t)\rangle. \quad (1.24)$$

onde  $H$  é a hamiltoniana do sistema e iremos adotar um sistema de referências no qual  $\hbar = 1$ . Utilizando a equação acima, obtemos a evolução temporal do operador densidade como sendo:

$$i \frac{\partial \rho(t)}{\partial t} = [H(t), \rho(t)], \quad (1.25)$$

onde assumimos que  $p_n$  não evolui com o tempo, ou seja,  $H(t) = H$ . Além disso, considerando que a Hamiltoniana é independente do tempo, podemos resolver (1.25) e obter a forma geral de  $\rho(t)$  como sendo:

$$\rho(t) = e^{-iHt} \rho(0) e^{iHt}, \quad (1.26)$$

Se a hamiltoniana comutar com  $\rho(0)$ , a matriz densidade será constante no tempo e descreverá um sistema em equilíbrio.

Em geral, porém, a hamiltoniana pode apresentar uma dependência temporal. Nesta situação, podemos escrever a matriz densidade como:

$$\begin{aligned}\rho(t) &= U(t,0)\rho(0)U^\dagger(t,0) \\ &= U(t,0)\rho(0)U(0,t),\end{aligned}\tag{1.27}$$

onde definimos o operador evolução temporal satisfazendo:

$$i\frac{\partial U(t,t')}{\partial t} = H(t)U(t,t'),\tag{1.28}$$

ou explicitamente:

$$U(t,t') = T\left(e^{-i\int_{t'}^t dt'' H(t'')}\right).\tag{1.29}$$

Este operador obedece as seguintes propriedades:

$$U(t,t) = 1,\tag{1.30}$$

$$U(t_1,t_2)U(t_2,t_1) = 1,\tag{1.31}$$

$$U(t_1,t_2)U(t_2,t_1) = U(t_1,t_2),\tag{1.32}$$

para  $t_1 > t_2 > t_3$ .

Podemos introduzir um banho térmico à temperatura  $1/\beta$  no sistema fixando o valor do operador densidade para  $t \leq 0$ . Em outras palavras, em  $t = 0$  colocamos o sistema em contato com o banho térmico e um novo equilíbrio é estabelecido.

Sem entrar em detalhes, iremos obter neste caso, utilizando propriedades básicas do operador densidade, como o fato dele ser hermitiano, positivo e ter traço unitário, que as médias (1.23) agora tomadas no *ensemble* canônico, são dadas por:

$$\langle A(t) \rangle = \frac{\text{Tr}U(T - i\beta, T)U(T, T')U(T', t)AU(t, T)}{\text{Tr}U(T - i\beta, T)U(T, T')U(T', T)},\tag{1.33}$$

onde  $T$  e  $T'$  representam grandes tempos negativo e positivo, respectivamente. Vamos entender melhor o significado dessa média. Na Fig.(1.1) temos que a partir de um tempo  $T$  negativo e grande, o sistema começa a se desenvolver. Então, é introduzido um operador  $\hat{A}$  em  $t$  e o

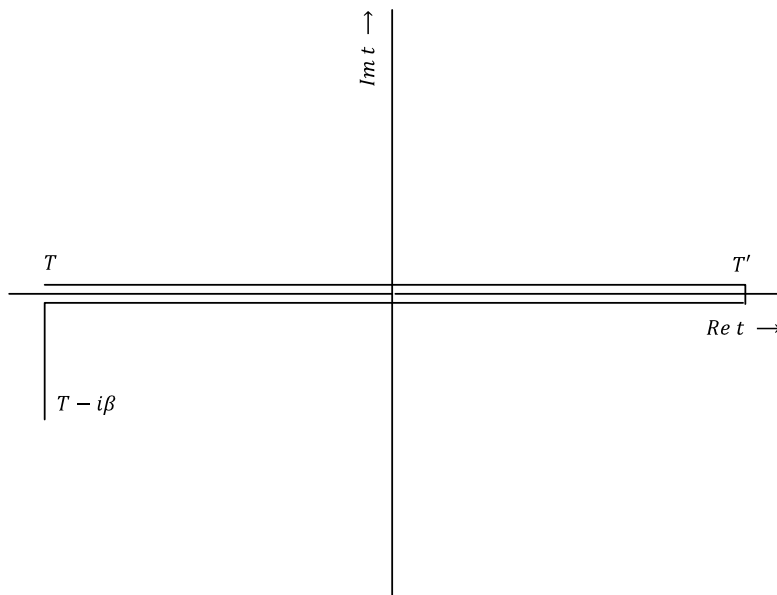


Figura 1.1: Gráfico Temporal

sistema evolui até um tempo positivo  $T'$  e depois retorna para  $T$  (o segundo pedaço do gráfico, referente ao caminho de  $T'$  para  $T$ , está associado ao banho térmico introduzido no sistema). Matematicamente ele irá impor o caráter matricial dos propagadores a temperatura finita, como veremos mais adiante.

Ao fazermos o limite em que  $T \rightarrow -\infty$  e  $T' \rightarrow \infty$ , a média (1.33) nos sugere a definição de um funcional gerador em analogia ao caso de temperatura nula [3], do tipo:

$$Z[J_c] = \text{Tr} U_{J_c}(T - i\beta, T) U_{J_c}(T, T') U_{J_c}(T', T), \quad (1.34)$$

onde  $J_c$  é uma fonte definida ao longo do contorno temporal.

Construímos a Teoria Quântica de Campos a temperatura finita neste formalismo de maneira análoga a construção a temperatura nula, ou seja consideramos as variáveis dinâmicas como sendo os campos e seus momentos conjugados e definimos o funcional gerador das funções de Green via integrais de Feynman. Sem entrar em detalhes, para o campo escalar real de Klein-Gordon o funcional é escrito como:

$$Z[J_c] = \int \mathcal{D}\phi e^{i \int_c dt \int d^3x (J_c \phi + \mathcal{L})}. \quad (1.35)$$

onde a densidade de lagrangeana é dada por:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{m^2}{2} \phi^2. \quad (1.36)$$

Na Eq. (1.35), a integral no tempo é definida ao longo do contorno que descrevemos na Fig.(1.1). Iremos separá-lo em três partes: chamaremos de  $C_+$  o contorno que vai de  $-\infty$  a  $+\infty$  sobre o eixo real, de  $C_-$  o contorno de  $+\infty$  a  $-\infty$  sobre o eixo real e de  $C_3$  o segmento final ao longo do eixo imaginário. Pode-se demonstrar que o último segmento contribui trivialmente para o funcional e pode, portanto ser ignorado. Uma nova representação desta integral, que explicita este comportamento é:

$$\int_c dt = \int_{-\infty}^{\infty} dt_+ - \int_{-\infty}^{\infty} dt_-. \quad (1.37)$$

Dada a integral de trajetória para a função de partição na Eq.(1.35), as várias funções de Green são obtidas por derivação funcional em relação à fonte, e isso corresponde a uma média apropriada no *ensemble*. Devido à diferença nos contornos de integração, essa função de Green é diferente de uma a temperatura zero. Por exemplo, iremos agora ter ordenamento temporal ao longo do contorno  $C$  no plano de tempo complexo, representado pela função de Green  $\langle T_c(A(t_1)B(t_2)) \rangle$ .

Para a teoria de Klein-Gordon obtemos assim:

$$\begin{aligned} iG_c(t-t') &= \langle T_c(\phi(t)\phi(t')) \rangle \\ &= \theta_c(t-t') \langle \phi(t)\phi(t') \rangle + \theta_c(t'-t) \langle \phi(t')\phi(t) \rangle \\ &= (-i)^2 \frac{1}{Z[J_c]} \frac{\delta^2 Z[J_c]}{\delta J_c(t) \delta J_c(t')} \Big|_{J_c=0}. \end{aligned} \quad (1.38)$$

onde  $t$  e  $t'$  são dois pontos quaisquer no contorno. Definimos ainda uma função  $\theta$  generalizada como:

$$\theta_c(t-t') = \begin{cases} \theta(t-t'), & t, t' \text{ em } C_+ \\ \theta(t'-t), & t, t' \text{ em } C_- \\ 0, & t \text{ em } C_+, t' \text{ em } C_- \\ 1, & t' \text{ em } C_+, t \text{ em } C_- \end{cases}$$

Calculando explicitamente o funcional gerador, na equação (1.35), obtemos:

$$Z[J_c] = N e^{-\frac{1}{2} \int_c dt dt' \int d^3x d^3y J_c(\vec{x}, t) G_c(\vec{x}-\vec{y}, t-t') J_c(\vec{y}, t)}. \quad (1.39)$$

onde  $N$  é constante de normalização e  $G_c$  satisfaz:

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2)G_c(\vec{x} - \vec{y}, t - t') = -\delta^3(x - y)\delta_c(t - t'). \quad (1.40)$$

A função delta no contorno é dada por:

$$\delta_c(t - t') = \frac{d\theta_c(t - t')}{dt} \begin{cases} \delta(t - t'), & t, t' \text{ em } C_+ \\ -\delta(t - t'), & t, t' \text{ em } C_- \\ 0, & \text{em outro caso.} \end{cases}$$

e satisfaz:

$$\int_c dt' \delta_c(t - t') f(t') = f(t). \quad (1.41)$$

Usando agora a transformada de Fourier na parte espacial, a equação (1.40) ganha a forma:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_k^2 \right) G_c((t - t'), \omega_k) = -\delta_c(t - t').$$

com:

$$\omega = (\vec{k}^2 + m^2)^{\frac{1}{2}}. \quad (1.42)$$

Para obter a solução desta equação diferencial, devemos utilizar as condições gerais das médias dos campos nos *ensembles* e neste caso obtemos:

$$G_c(t - t', \omega) = \frac{n_B(\omega)}{2i\omega} [\theta_c(t - t') e^{\beta\omega - i\omega(t-t')} + e^{i\omega(t-t')} + \theta_c(t - t')(e^{-i\omega(t-t')} + e^{\beta\omega - i\omega(t-t')})]. \quad (1.43)$$

onde a função distribuição bosônica,  $n_B$ , é definida como sendo:

$$n_B(w_k) = \frac{1}{e^{\beta w_k} - 1}; \quad n_B(w_{k+p}) = \frac{1}{e^{w_{k+p}} - 1}. \quad (1.44)$$

Percebe-se que no limite da temperatura zero,  $\beta \rightarrow \infty$ , o propagador reduz a convenção  $C_+$ .

Do que vimos até aqui, podemos perceber que a introdução do banho térmico duplica os graus de liberdade do sistema. A Fig.(1.1) mostra este fato por meio dos dois caminhos  $C_+$  e  $C_-$  e o propagador (1.43) reflete os caminhos nas diferentes possibilidades da função  $\theta_c$ . Uma outra forma de apresentar esta estrutura é por meio de uma nova definição, onde todos os caminhos no tempo estão no circuito  $C_+$ , porém temos mais de um propagador. Se construirmos os propagadores nesta formulação de maneira consistente, iremos obter [3, 10]:

$$\begin{aligned}
G_{++}(t-t', \omega) &= -\frac{i}{2\omega} \left[ (\theta(t-t') + n_B(\omega))e^{-i\omega(t-t')} + (\theta(t'-t) + n_B(\omega))e^{i\omega(t-t')} \right], \\
G_{+-}(t-t', \omega) &= -\frac{i}{2\omega} \left[ n_B(\omega)e^{-i\omega(t-t')} + (1 + n_B(\omega))e^{i\omega(t-t')} \right], \\
G_{-+}(t-t', \omega) &= -\frac{i}{2\omega} \left[ (1 + n_B(\omega))e^{i\omega(t-t')} + n_B(\omega)e^{i\omega(t-t')} \right], \\
G_{--}(t-t', \omega) &= -\frac{i}{2\omega} \left[ (\theta(t'-t) + n_B(\omega))e^{-i\omega(t-t')} + (\theta(t-t') + n_B(\omega))e^{i\omega(t-t')} \right] \quad (1.45)
\end{aligned}$$

Definindo novas variáveis de campo e fonte como sendo:

$$\phi_1 = \begin{pmatrix} \phi_+ \\ \phi_- \end{pmatrix} \quad e \quad J_a = \begin{pmatrix} J_+ \\ J_- \end{pmatrix}, \quad (1.46)$$

onde  $a = +, -$ ;  $\phi_+, J_+ \in C_+$  e  $\phi_-, J_- \in C_-$  e assumindo matrizes no espaço bidimensional, podemos reescrever o funcional geral para a teoria livre na eq. (1.43) como:

$$Z[J_+, J_-] = N e^{-\frac{i}{2} \int d^4x d^4y J^a(x) G_{ab}(x,y) J^b(y)}, \quad (1.47)$$

com a ação sendo escrita como:

$$\begin{aligned}
S &= S(\phi_+, J_+) - S(\phi_-, J_-) \\
&= \int d^4x (\mathcal{L}(\phi_+, J_+) - \mathcal{L}(\phi_-, J_-)). \quad (1.48)
\end{aligned}$$

Nesta representação, as componentes do propagador podem ser obtidas como:

$$iG_{ab}(x, y) = (-i)^2 \frac{1}{Z} \frac{\delta^2 Z[J]}{\delta J^a(x) \delta J^b(y)} \Big|_{j=0}, \quad (1.49)$$

sendo que a integral temporal nesse caso é no intervalo,  $-\infty \leq t \leq \infty$ . Em linhas gerais, o propagador da teoria a temperatura finita adquire a forma matricial, ou seja:

$$G = \begin{pmatrix} G_{++} & G_{+-} \\ G_{-+} & G_{--} \end{pmatrix}. \quad (1.50)$$

Tomando a transformada de Fourier completa, obtemos as funções de Green no espaço dos momentos, ou seja:

$$\begin{aligned}
G_{++}(p) &= \left[ \frac{1}{p^2 - m^2 + i\epsilon} - 2i\pi n_B(|p^0|) \delta(p^2 - m^2) \right], \\
G_{+-}(p) &= -2i\pi [\theta(-p^0) + n_B(|p^0|)] \delta(p^2 - m^2), \\
G_{-+}(p) &= -2i\pi [\theta(p^0) + n_B(|p^0|)] \delta(p^2 - m^2), \\
G_{--}(p) &= \left[ -\frac{1}{p^2 - m^2 - i\epsilon} - 2i\pi n_B(|p^0|) \delta(p^2 - m^2) \right]. \quad (1.51)
\end{aligned}$$



Um resultado imediato é que a parte que contém temperatura (proporcional a  $n_B$ ) envolve apenas partículas reais, ou seja, que satisfazem a relação  $p^2 = m^2$ . Em outras palavras, o banho térmico não envolve partículas virtuais. Outro comportamento interessante é que os efeitos de temperatura são normalizados pelo termo  $n_B$  e portanto divergências ultravioletas não aparecem nos diagramas de Feynman a temperatura finita.

Finalizando, podemos mostrar também que as componentes da matriz função de Green satisfazem às relações de vínculo:

$$G_{++} + G_{--} = G_{+-} + G_{-+}. \quad (1.52)$$

### 1.3 Formalismo de integrais de trajetória e Ação Efetiva

Antes de Feynman, a MQ era basicamente construída tomando como base o formalismo hamiltoniano. Ele, porém, estava curioso em saber o papel da ação clássica na formulação da MQ. Tendo esta pergunta em mente, um dos primeiros casos analisados por Feynman foi o problema da dupla fenda.

Hoje sabe-se que a fórmula de Feynman é deduzida em um caso particular da MQ, aquele em que a energia depende apenas quadraticamente do momento. Sistemas importantes porém fogem desse caso particular. No caso geral é necessário considerar que o momento é independente da função de trajetória e somar sobre não apenas as curvas  $x$  mas também os momenta  $p$ , e nesse caso a soma não é sobre a função da ação clássica.

A técnica de integrais de trajetória tornou-se uma ferramenta fundamental da física teórica. Uma das principais vantagens das integrais de trajetória na TQC é que ela é invariante de Lorentz. O outro método bastante usado na quantização de campos, a quantização canônica, estabelece uma condição de quantização em tempos iguais, sendo assim claramente não covariante por transformações de Lorentz. Por esse e outros motivos, as integrais de trajetória foram e continuam sendo um dos melhores métodos de quantização, principalmente na TQC.

A entidade básica da MQ, que carrega toda a informação sobre o sistema físico, é a função

de onda e pode ser escrita como:

$$\begin{aligned}\psi(x, t) &= \langle x | \psi(t) \rangle \\ &\equiv \langle x | e^{-\frac{iHt}{\hbar}} | \psi \rangle \\ &\equiv \langle x, t | \psi \rangle.\end{aligned}\tag{1.53}$$

onde consideramos  $t_0 = 0$ . Além disso,  $|\psi(t)\rangle$  é o vetor de estado com:

$$|\psi(t_0 = 0)\rangle \equiv |\psi\rangle.\tag{1.54}$$

e  $\langle x, t |$  é o autoestado do operador coordenada:

$$\langle x | e^{-\frac{iHt}{\hbar}} = \langle x, t |.\tag{1.55}$$

Agora, considerando que no instante inicial  $t_i$  o sistema encontra-se num estado representado por  $\psi(x_i, t_i)$ , a evolução até um estado  $\psi(x_f, t_f)$  é dada por:

$$\begin{aligned}\psi(x_f, t_f) &\equiv \langle x_f, t_f | \psi \rangle \\ &= \langle x_f, t_f | \left( \int dx_i |x_i, t_i\rangle \langle x_i, t_i| \right) | \psi \rangle \\ &= \int dx_i (\langle x_f, t_f | x_i, t_i \rangle) \langle x_i, t_i | \psi \rangle.\end{aligned}\tag{1.56}$$

A parte entre parênteses da expressão acima é chamada de Propagador de Feynman. Esse propagador será de fundamental importância para o entendimento do funcional gerador das funções de Green. Também podemos escrevê-lo na forma:

$$K(x_f, t_f; x_i, t_i) \equiv \langle x_f, t_f | x_i, t_i \rangle.\tag{1.57}$$

tal que a Eq.(1.56) fica:

$$\psi(x_f, t_f) = \int dx_i K(x_f, t_f; x_i, t_i) \psi(x_i, t_i).\tag{1.58}$$

Da definição (1.57), vale a pena ressaltar que:

$$\begin{aligned}K(x_f, t_f; x_i, t_i) &= \langle x_f, t_f | x_i, t_i \rangle \\ &= \langle x_f | e^{-\frac{iH(t_f-t_i)}{\hbar}} | x_i \rangle \\ &= U(x_f, t_f; x_i, t_i),\end{aligned}\tag{1.59}$$

ou seja,  $K$  nada mais é do que o operador de evolução temporal do sistema quântico, satisfazendo:

$$\begin{aligned}\langle x_f, t_f | x_i, t_i \rangle &= \langle x_f, t_f | \left( \int dx |x, t\rangle \langle x, t| \right) |x_i, t_i\rangle \\ &= \int dx \langle x_f, t_f | x, t \rangle \langle x, t | x_i, t_i \rangle,\end{aligned}\quad (1.60)$$

ou na notação (1.57):

$$K(x_f, t_f; x_i, t_i) = \int dx K(x_f, t_f; x, t) K(x, t; x_i, t_i). \quad (1.61)$$

Agora, vamos dividir o intervalo  $\Delta t \equiv (t_f - t_i)$  em  $N$  pedaços de tamanho  $\epsilon$ , tal que  $N\epsilon = \Delta t$ .

Então o propagador fica:

$$\begin{aligned}K(x_f, t_f; x_i, t_i) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int dx_1 dx_2 \dots dx_{N-1} \langle x_f, t_f | x_{N-1}, t_{N-1} \rangle \langle x_{N-1}, t_{N-1} | x_{N-2}, t_{N-2} \rangle \\ &\times \langle x_{N-2}, t_{N-2} | \dots | x_1, t_1 | x_i, t_i \rangle.\end{aligned}\quad (1.62)$$

Para um particular  $t$  temos:

$$\begin{aligned}\langle x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1} \rangle &= \langle x_n | e^{-\frac{it_n H}{\hbar}} e^{\frac{+it_{n-1} H}{\hbar}} | x_{n-1} \rangle \\ &= \langle x_n | e^{\frac{(-it_n + t_{n-1}) H}{\hbar}} | x_{n-1} \rangle \\ &= \langle x_n | e^{-\frac{i\epsilon H}{\hbar}} | x_{n-1} \rangle \\ &\equiv \int \frac{dp_n}{2\pi\hbar} e^{\frac{-ip_n(x_n - x_{n-1})}{\hbar}} e^{-\frac{i\epsilon}{\hbar} H\left(\frac{x_n + x_{n-1}}{2}, p_n\right)}.\end{aligned}\quad (1.63)$$

onde nas passagens intermediárias utilizamos a fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff. Colocando esse resultado de volta na Eq. (1.62) obtemos:

$$K(x_f, t_f; x_i, t_i) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int dx_1 \dots dx_{N-1} \frac{dp_1}{2\pi\hbar} \dots \frac{dp_N}{2\pi\hbar} e^{\frac{i}{\hbar} \sum_{n=1}^N [p_n(x_n - x_{n-1}) - \epsilon H\left(\frac{x_n + x_{n-1}}{2}, p_n\right)]}. \quad (1.64)$$

No limite  $\epsilon \rightarrow 0$  ( $N \rightarrow \infty$ ), o argumento da exponencial torna-se:

$$\frac{i}{\hbar} \sum_{n=1}^N \epsilon \left[ p_n \left( \frac{x_n - x_{n-1}}{\epsilon} \right) - H \left( \frac{x_n - x_{n-1}}{2}, p \right) \right] \rightarrow \frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} dt [p\dot{x} - H(x, p)]. \quad (1.65)$$

Se considerarmos a hamiltoniana quadrática (como o caso de partícula livre clássica), podemos fazer uma transformada de Legendre inversa e obter a própria lagrangiana do sistema, ou seja:

$$L = p\dot{x} - H. \quad (1.66)$$

Neste caso, podemos escrever:

$$\begin{aligned}\frac{i}{\hbar} \sum_{n=1}^N \epsilon \left[ p_n \left( \frac{x_n - x_{n-1}}{\epsilon} \right) - H \left( \frac{x_n - x_{n-1}}{2}, p \right) \right] &= \frac{i}{\hbar} \int dt L \\ &\equiv \frac{iS}{\hbar}.\end{aligned}\quad (1.67)$$

Muito embora tenhamos apresentado a dedução para o caso de hamiltonianas quadráticas, Feynman postulou que este resultado é válido sempre. Dessa forma, podemos reescrever  $K$  como:

$$K(x_f t_f; x_i t_i) = \int \mathcal{D}x \mathcal{D}p e^{\frac{i}{\hbar} S}, \quad (1.68)$$

onde definimos:

$$\mathcal{D}x = \lim_{N \rightarrow \infty} dx_1 \dots dx_{N-1} \quad (1.69)$$

e

$$\mathcal{D}p = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{dp_1}{(2\pi\hbar)^N} \dots dp_N. \quad (1.70)$$

Este é o propagador de Feynman, no contexto da MQ.

Em particular para a partícula livre e o oscilador harmônico quântico a integral acima pode ser realizada de forma exata, pois só envolve integrais gaussianas, e em ambos os casos obtemos:

$$K(x_f t_f; x_i t_i) \approx e^{\frac{i}{\hbar} S[x_{cl}]}, \quad (1.71)$$

onde  $x_{cl}$  é a trajetória clássica do sistema.

# Capítulo 2

## Efeitos de Potencial Químico na TQC em $(1 + 1)$ dimensões

Neste capítulo vamos estudar os efeitos do potencial químico em  $(1 + 1)$  dimensões na TQC a temperatura finita<sup>1</sup>. Em particular, vamos considerar férmions não massivos imersos em um campo de fundo abeliano sem dinâmica própria e calcular a ação efetiva por meio da função de  $n$ -pontos. Através dos cálculos, iremos mostrar que a anomalia quirial não sofre nenhum efeito do potencial químico a temperatura finita. Mostraremos que a estrutura das amplitudes é melhor entendida a partir da formulação da teoria em termos de dois novos espinores *left* e *right-handed*. Os cálculos também são mais simples nessa formulação e o comportamento geral da anomalia já é justificado da própria lagrangeana.

Iniciaremos mostrando os aspectos conceituais referentes ao formalismo de integral de trajetória e ação efetiva e depois estudaremos o modelo específico.

### 2.0.1 O campo clássico e a Ação Efetiva

Nesta seção iremos apresentar o estudo na TQC da ação efetiva. Começaremos definindo um novo funcional, chamado de funcional gerador das funções de Green, que fará o papel análogo

---

<sup>1</sup>Os cálculos apresentados aqui referem-se ao artigo [18]

ao operador evolução temporal da MQ, ou seja:

$$\begin{aligned} Z[J] &= \lim_{t_i, t_f \rightarrow \mp\infty} \langle x_f t_f | x_i t_i \rangle \\ &\rightarrow \langle 0|0 \rangle_J \equiv N \int \mathcal{D}\phi e^{\frac{i}{\hbar} S[\phi, J]}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Utilizando o funcional acima, as funções de Green da teoria são dadas por:

$$\langle 0|T(\phi(x_1)\phi(x_2)\dots\phi(x_n))|0\rangle = \frac{(-i\hbar)^n}{Z[J]} \frac{\delta^n Z[J]}{\delta J(x_1)\delta J(x_2)\dots\delta J(x_n)} \Big|_{J=0}. \quad (2.2)$$

No geral, vamos assumir, em analogia com a Eq.(1.71), que  $Z[J]$  pode ser escrito na forma:

$$Z[J] \equiv e^{\frac{i}{\hbar} W[J]}, \quad (2.3)$$

onde  $W[J]$  é o outro funcional, gerador das funções de Green conexas. Porém  $W[J]$  não pode ser interpretado como ação, pois sua dependência está em  $J$  e não em  $\phi$ . Buscando uma comparação com a Eq.(1.71) vamos fazer o mapeamento de  $J$  com algum campo 'clássico'.

Para exemplificar, vamos considerar a lagrangiana do campo escalar relativístico auto inter-agente com interação quártica em  $(3 + 1)$  dimensões, dada por:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) &= \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{m^2}{2} \phi^2 - \frac{\lambda}{4!} \phi^4 \\ &= \mathcal{L}_0 - \frac{\lambda}{4!} \phi^4, \end{aligned} \quad (2.4)$$

com:

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{m^2}{2} \phi^2. \quad (2.5)$$

A função de Green de Feynman é dada por:

$$G_F(x - x') = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - m^2 + i\epsilon)} e^{-ik(x-x')}, \quad (2.6)$$

e satisfaz a equação diferencial:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} (\partial_\mu \partial^\mu + m^2 - i\epsilon) G_F(x - x') = -\delta^4(x - x'), \quad (2.7)$$

No caso  $\lambda = 0$  o cálculo de  $Z[J] \equiv Z_0[J]$  envolve somente integrais gaussianas e é dado por:

$$\begin{aligned} Z_0[J] &= N [\det(\partial_\mu \partial^\mu + m^2)]^{-1/2} e^{-\frac{i}{2\hbar} \int \int d^4 x d^4 x' J(x) G_F(x-x') J(x')} \\ &\equiv Z_0[0] e^{-\frac{i}{2\hbar} \int \int d^4 x d^4 x' J(x) G_F(x-x') J(x')}, \end{aligned} \quad (2.8)$$

onde usamos:

$$\int \mathcal{D}\eta e^{i \int_{t_i}^{t_f} dt \eta(t) O(t) \eta(t)} = N [\det O(t)]^{-1/2}. \quad (2.9)$$

com  $O(t)$  um operador hermitiano e  $N$  uma constante de normalização. Utilizando  $Z_0[J]$ , podemos calcular o valor esperado no vácuo de  $\phi(x)$ , ou seja:

$$\begin{aligned} \langle 0 | \phi(x) | 0 \rangle &= \left. \frac{(-i\hbar) \delta Z_0[J]}{Z_0[J] \delta J(x)} \right|_{J=0} \\ &\equiv 0. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Agora para dois campos  $\phi(x)$  e  $\phi(y)$ , temos:

$$\begin{aligned} \langle 0 | T \phi(x) \phi(y) | 0 \rangle &= \left. \frac{(-i\hbar)^2 \delta^2 Z_0[J]}{Z_0[J] \delta J(x) \delta J(y)} \right|_{J=0} \\ &= \left. \frac{(-i\hbar)^2 \delta}{Z_0[J] \delta J(x)} \left[ \frac{\delta}{\delta J(y)} Z_0[0] e^{-\frac{i}{2\hbar} \int d^4x d^4y J(x) G_F(x-y) J(y)} \right] \right|_{J=0} \\ &\equiv i\hbar G_F(x-y). \end{aligned} \quad (2.11)$$

Para o cálculo de  $Z[J]$  quando  $\lambda \neq 0$ , vamos utilizar a relação funcional:

$$\phi(x) \rightarrow \frac{\delta}{\delta J(x)}, \quad (2.12)$$

e então podemos reescrever o funcional  $Z[J]$  como:

$$\begin{aligned} Z[J] &= N \int \mathcal{D}_\phi e^{\frac{i}{2\hbar} \int d^4x \left( \frac{1}{2} \partial_\mu \partial^\mu \phi - \frac{m^2}{2} \phi^4 + J\phi \right)} \\ &= N \int \mathcal{D}_\phi \left( e^{-\frac{i\lambda}{4\hbar} \int d^4x \phi^4} \right) e^{\frac{i}{\hbar} S_0[\phi, J]}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

onde:

$$S_0[\phi, J] = \frac{1}{2} \partial_\mu \partial^\mu \phi - \frac{m^2}{2} \phi^4 + J\phi. \quad (2.14)$$

Fazendo a mudança da equação (2.12), ficamos com:

$$Z[J] = \left( e^{-\frac{i\lambda}{4\hbar} \int d^4x \left( \frac{\delta}{\delta J(x)} \right)^4} \right)^4 Z_0[J]. \quad (2.15)$$

Expandindo em Taylor em torno de  $\lambda = 0$  temos:

$$\begin{aligned} Z[J] &= Z_0[0] \left[ 1 - \frac{i\lambda\hbar^3}{4!} \int d^4x \frac{\delta^4}{\delta J^4 x} + \frac{1}{2} \left( -\frac{i\lambda\hbar^3}{4!} \right)^3 \left( \int d^4x \frac{\delta^4}{\delta J^4(x)} \right) \left( \int d^4y \frac{\delta^4}{\delta J^4(y)} \right) + \dots \right] \\ &\quad \times e^{-\frac{i}{2\hbar} \int \int d^4x_1 d^4x_2 J(x_1) G_F(x_1-x_2) J(x_2)}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Trabalhando apenas com os termos de ordem  $\lambda$  da equação acima ficamos com:

$$Z[J] = Z_0[0] \left( 1 - \frac{i\lambda\hbar^3}{4!} \int d^4x \frac{\delta^4}{\delta J^4 x} \right) e^{-\frac{i}{2\hbar} \int \int d^4x_1 d^4x_2 J(x_1) G_F(x_1-x_2) J(x_2)} \quad (2.17)$$

A função de 2-pontos e a função de 4-pontos podem ser obtidas da Eq.(2.17) como sendo:

$$\langle 0|T\phi(y_1)\phi(y_2)|0\rangle = i\hbar G_F(y_1 - y_2) - \frac{\lambda\hbar^2}{2} G_F(0) \int d^4x G_F(x - y_1) G_F(x - y_2). \quad (2.18)$$

e

$$\begin{aligned} \langle T\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)\phi(x_4)\rangle_0 &= -\hbar^2 [G_F(y_2 - y_1)G_F(y_4 - y_3) + G_F(y_3 - y_1)G_F(y_4 - y_2) \\ &\quad + G_F(y_3 - y_3)G_F(y_4 - y_1)] \\ &\quad - i\hbar^3 \left[ \frac{\lambda}{4} G_F(y_4 - y_3)G_0 \int d^x G_F(x - y_2)G_F(x - y_1) \right. \\ &\quad + \frac{\lambda}{4} G_F(y_4 - y_2)G_0 \int d^x G_F(x - y_3)G_F(x - y_1) \\ &\quad + \frac{\lambda}{4} G_F(y_3 - y_2)G_0 \int d^x G_F(x - y_4)G_F(x - y_1) \\ &\quad + \frac{\lambda}{4} G_F(y_4 - y_1)G_0 \int d^x G_F(x - y_3)G_F(x - y_2) \\ &\quad + \frac{\lambda}{4} G_F(y_3 - y_1)G_0 \int d^x G_F(x - y_4)G_F(x - y_2) \\ &\quad \left. + \frac{\lambda}{4} G_F(y_2 - y_1)G_0 \int d^x G_F(x - y_4)G_F(x - y_3) \right] \\ &\quad - \frac{i\lambda\hbar^4}{4!} \int d^4x G_F(x - y_4)G_F(x - y_3)G_F(x - y_2)G_F(x - y_2). \end{aligned} \quad (2.19)$$

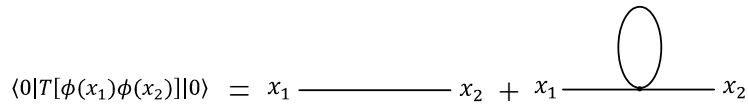


Figura 2.1: Função 2-pontos para a teoria  $\lambda\phi^4$

Podemos ver a estrutura geral dos diagramas de Feynman na figura acima. Existem duas classes para representar esses diagramas, uma onde o diagrama é conectado e outra onde o diagrama é desconectado. São chamados diagramas de Feynman desconexos os diagramas que não são conectados.

Vemos assim que o funcional  $Z[J]$  gera todas as funções de Green. Pode-se demonstrar que o logaritmo de  $Z[J]$  contém apenas os diagramas conexos (conhecidos por funções de Green conexas) e é definido como:

$$W[J] = -i\hbar \ln Z[J]. \quad (2.20)$$



$$\begin{aligned}
 \langle 0|T[\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)\phi(x_4)]|0\rangle = & \begin{array}{c} x_1 \text{-----} x_2 \\ x_3 \text{-----} x_4 \end{array} + \begin{array}{c} x_1 \text{-----} x_3 \\ x_2 \text{-----} x_4 \end{array} + \begin{array}{c} x_1 \text{-----} x_4 \\ x_2 \text{-----} x_3 \end{array} \\
 + & \begin{array}{c} \text{O} \\ x_3 \text{-----} x_4 \\ x_1 \text{-----} x_2 \end{array} + \begin{array}{c} \text{O} \\ x_2 \text{-----} x_4 \\ x_1 \text{-----} x_3 \end{array} + \begin{array}{c} \text{O} \\ x_2 \text{-----} x_3 \\ x_1 \text{-----} x_4 \end{array} \\
 + & \begin{array}{c} \text{O} \\ x_1 \text{-----} x_4 \\ x_2 \text{-----} x_3 \end{array} + \begin{array}{c} \text{O} \\ x_1 \text{-----} x_3 \\ x_2 \text{-----} x_4 \end{array} + \begin{array}{c} \text{O} \\ x_1 \text{-----} x_2 \\ x_3 \text{-----} x_4 \end{array} \\
 + & \begin{array}{c} x_1 \quad \quad x_4 \\ \quad \quad \quad \diagdown \quad \diagup \\ \quad \quad \quad \diagup \quad \diagdown \\ x_2 \quad \quad x_3 \end{array}
 \end{aligned}$$

Figura 2.2: Função 4-pontos para a teoria  $\lambda\phi^4$

Comparando as Eqs. (1.71) e (2.3) vamos definir um novo campo  $\phi_c$ , conhecido como campo clássico, como:

$$\frac{\delta W[J]}{\delta J(x)} = \phi_c(x), \tag{2.21}$$

e, por meio de uma transformada de Legendre, podemos escrever um novo funcional de W com relação às variáveis  $J(x)$  e  $\phi(x)$  como:

$$\Gamma[\phi_c] = W[J] - \int d^4x J(x)\phi_c(x). \tag{2.22}$$

Assim, temos que:

$$\begin{aligned}
 \frac{\delta \Gamma[\phi_c]}{\delta \phi_c(x)} &= \frac{\delta W[J]}{\delta \phi_c(x)} - \left[ \int d^4y \left( \frac{\delta J(y)}{\delta \phi_c(x)} \right) \phi_c(y) + \int d^4(x) J(x) \frac{\delta \phi_c(x)}{\delta \phi_c(x)} \right] \\
 &= \frac{\delta W[J]}{\delta \phi_c(x)} - \int d^4y \left( \frac{\delta J(y)}{\delta \phi_c(x)} \right) \phi_c(y) - J(x) \\
 &= \int d^4y \frac{\delta W[J]}{\delta J(y)} \frac{\delta J(y)}{\delta \phi_c(x)} - \int d^4y \frac{\delta J(y)}{\delta \phi_c(x)} \frac{\delta W[J]}{\delta J(y)} - J(x), \tag{2.23}
 \end{aligned}$$

ou seja:

$$\frac{\delta \Gamma[\phi_c]}{\delta \phi_c(x)} = -J(x). \tag{2.24}$$

Nessa dedução usamos as regras de derivadas de funcionais e recaímos na definição do campo clássico.

A seguir vamos estudar mais detalhadamente  $\Gamma_c$ , a ação efetiva. Inicialmente podemos escrever:

$$\begin{aligned}\frac{\delta}{\delta J(x)} &= \int d^4y \frac{\delta\phi_c(y)}{\delta J(x)} \frac{\delta}{\delta\phi_c(y)} \\ &= \int d^4y \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(x)\delta J(y)} \frac{\delta}{\delta\phi_c(y)},\end{aligned}\quad (2.25)$$

tal que:

$$\begin{aligned}\frac{\delta}{\delta J(y)} \left( \frac{\delta\Gamma[\phi_c]}{\delta\phi_c(x)} \right) &= \frac{\delta}{\delta J(y)} (-J(x)) \\ &= -\delta^4(x-y),\end{aligned}\quad (2.26)$$

ou, utilizando a definição (2.22):

$$\int d^4z \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(y)\delta J(z)} \frac{\delta^2 \Gamma[\phi_c]}{\delta\phi_c(z)\delta\phi_c(x)} = -\delta^4(x-y). \quad (2.27)$$

Introduzindo a notação compacta:

$$W^{(n)} = \frac{\delta^n W[J]}{\delta J(x_1) \dots \delta J(x_n)}, \quad (2.28)$$

$$\Gamma^{(n)} = \frac{\delta^n \Gamma[\phi_c]}{\delta\phi_c(x_1) \dots \delta\phi_c(x_n)}, \quad (2.29)$$

podemos escrever a Eq.(2.45) como:

$$W^{(2)}\Gamma^{(2)} = -1. \quad (2.30)$$

Esta equação é fundamental para o entendimento da ação efetiva. Conforme vimos na Eq.(2.2), a função de dois pontos é dada por:

$$\langle 0|T\phi(x)\phi(y)|0\rangle = \frac{(-i\hbar)^2}{Z[J]} \frac{\delta^2 Z[J]}{\delta J(x)\delta J(y)}. \quad (2.31)$$

e para a teoria livre da Eq.(2.11) temos que:

$$\langle 0|T\phi(x)\phi(y)|0\rangle^0 \equiv i\hbar G_F(x-y). \quad (2.32)$$

Já na teoria  $\lambda\phi^4$  da Eq.(2.18) obtemos:

$$\langle 0|T\phi(x)\phi(y)|0\rangle \equiv i\hbar G_F(x-y) - \frac{\lambda\hbar^2}{2} G_F(0) \int d^4x G_F(x-y_1) G_F(x-y_2). \quad (2.33)$$

Por outro lado  $W$  fornece as funções de Green conexas, ou seja,

$$\begin{aligned} -i\hbar \frac{\delta^2 W}{\delta J(x)\delta J(y)} \Big|_{J=0} &\equiv \langle 0|T\phi(x)\phi(y)|0\rangle_c \\ &= \langle 0|T\phi(x)\phi(y)|0\rangle - \langle 0|T\phi(x)|0\rangle\langle 0|T\phi(y)|0\rangle \\ &= \langle 0|T\phi(x)\phi(y)|0\rangle. \end{aligned} \quad (2.34)$$

pois,

$$\langle 0|\phi|0\rangle = 0. \quad (2.35)$$

Usando a notação compacta, a equação acima é escrita como:

$$W^{(2)}|_{J=0} = -G. \quad (2.36)$$

Assim podemos fazer:

$$\left( W^{(2)}\Gamma^{(2)} = -1|_{J=\phi_c=0} \right) \implies G\Gamma^{(2)}|_{\phi_c} = 1. \quad (2.37)$$

$$\Gamma^{(2)}|_{\phi_c} \equiv \frac{\delta^2 \Gamma[\phi_c]}{\delta \phi_c(x_1)\delta \phi_c(x_2)}|_{\phi_c=0} = G^{-1}. \quad (2.38)$$

Podemos perceber que a segunda derivada da ação efetiva é o inverso da função de Green da teoria.

No Geral, temos:

$$\Gamma^{(2)}|_{\phi} = \Gamma_0^2|_{\phi_c} + \sum = G_F^{-1} + \sum. \quad (2.39)$$

Se quisermos escrever o propagador completo em termos da ação efetiva:

$$G\Gamma^{(2)}|_{\phi_c} = 1 \implies G = \frac{1}{G_F^{-1} + \sum}. \quad (2.40)$$

onde a somatória significa as correções quânticas em  $\Gamma^2|_{\phi_c}$ . Então:

$$\begin{aligned} G &= \frac{1}{G_F^{-1} + \sum} \\ &= \frac{1}{G_F^{-1}} - \frac{1}{G_F^{-1}} \sum \frac{1}{G_F^{-1}} + \frac{1}{G_F^{-1}} \sum \frac{1}{G_F^{-1}} \sum \frac{1}{G_F^{-1}} \dots \\ &= G_F - G_F \sum G_F + G_F \sum G_F \sum G_F + \dots \end{aligned} \quad (2.41)$$

A partir de  $\sum$  podemos escrever o propagador completo da teoria para qualquer ordem. Assim, podemos escrever o funcional ação efetiva como:

$$\Gamma[\phi_c] = \sum_{n=1}^{\infty} \int d^4x_1 \dots d^4x_n \frac{1}{n!} \Gamma^{(n)}(x_1, \dots, x_n)|_{\phi_c} \phi_c(x_1) \dots \phi_c(x_n). \quad (2.42)$$

## 2.1 Efeito de Potencial químico na ação efetiva

Nesta seção iremos considerar um modelo envolvendo férmions não massivos imersos em um campo de fundo abeliano não interagente em (1+1) dimensões a temperatura finita e potencial químico não nulo. A densidade de lagrangeana da teoria é dada por: (e assumiremos  $\mu < 0$ ).

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma^\mu(\partial_\mu + ieA_\mu)\psi + \mu\bar{\psi}\gamma^0\psi, \quad (2.43)$$

onde em (1+1) dimensões usamos a representação para as matrizes de Dirac dada pelas matrizes de Pauli em 2-dimensões com:

$$\gamma^0 = \sigma_1, \quad \gamma^1 = -i\sigma_2, \quad \gamma^5 = -i\sigma_3, \quad (2.44)$$

e a métrica tem a forma diagonal  $\eta^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1)$ . No trabalho [8] a ação efetiva completa para férmions não massivos em um campo de fundo abeliano em (1+1) dimensões foi calculado a temperatura finita. Foi mostrado que todas as funções pares são diferentes de zero e a ação é apenas quadrática no campo de fundo [9]. Em particular, mostrou-se que a amplitude de  $n$ -pontos tem uma estrutura simples dada por:

$$\Gamma_{a_1 a_2 \dots}^{\mu_1 \mu_2 \dots (T)}(p_1, p_2, \dots) \propto [\delta(p_{1-})\delta(p_{2-}) \dots \times u_-^{\mu_1} u_-^{\mu_2} \dots] + [\delta(p_{1+})\delta(p_{2+}) \dots \times u_+^{\mu_1} u_+^{\mu_2} \dots] \quad (2.45)$$

com as variáveis do cone de luz para um vetor qualquer  $A^\mu$  definidas em termos de um novo vetor  $u_\pm^\mu$  como:

$$u_\pm^\mu = (1, \mp 1), \quad A_\pm = A^0 \pm A^1 = A \cdot u_\pm; \quad (2.46)$$

notamos que esse quadri-vetor satisfaz as seguintes propriedades algébricas:

$$\eta_{\mu\nu} u_\pm^\mu u_\pm^\nu = 0, \quad \eta_{\mu\nu} u_\pm^\mu u_\mp^\nu = 2. \quad (2.47)$$

Os momentos  $p_1, p_2, \dots$  em (2.45) denotam momentos externos para a amplitude e os índices  $a_i$  representam os índices térmicos e possuem valores  $\pm$  no formalismo de tempo fechado.

Os propagadores a temperatura e potencial químico não nulos no formalismo de caminho temporal fechado são dados por:

$$iS_{++}^{(\beta, \mu)}(p) = \not{p} \left[ \frac{i}{p^2 + i\epsilon} - 2\pi n F(\epsilon(\bar{p}_0)p_0) \delta(\bar{p})^2 \right], \quad (2.48)$$

$$iS_{+-}^{(\beta, \mu)}(p) = 2\pi \not{p} [\theta(-\bar{p}_0) - n_F(\epsilon(\bar{p}_0)p_0)] \delta(\bar{p})^2, \quad (2.49)$$

$$iS_{-+}^{(\beta,\mu)}(p) = 2\pi \not{p} [\theta(\bar{p}_0) - n_F(\epsilon(\bar{p}_0)p_0)] \delta(\bar{p})^2, \quad (2.50)$$

$$iS_{--}^{(\beta,\mu)}(p) = \not{p} \left[ \frac{-i}{\bar{p}^2 - i\epsilon} - 2\pi i n_F(\epsilon(\bar{p}_0)p_0) \delta(\bar{p})^2 \right]. \quad (2.51)$$

onde  $n_F$  é a função distribuição de Fermi-Dirac e  $\epsilon(x)$  é a função sinal, ou seja:

$$\epsilon(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases} \quad (2.52)$$

Das relações (2.48) e (2.51) podemos obter a seguinte relação:

$$(iS_{--})^* = iS_{++}. \quad (2.53)$$

Além disso, introduzimos um novo quadri-vetor  $\bar{k}_\mu$ , dado por:

$$\bar{k}_\mu = (k_0 + \mu, -\vec{k}). \quad (2.54)$$

### 2.1.1 Função de 2-pontos

A ação efetiva para os fótons (campo de calibre abeliano) é obtida pela integração dos campos férmionicos via integrais de trajetória. A temperatura zero ela pode ser calculada de forma fechada e contém apenas termos quadráticos no campo de calibre. Esse resultado tem sido usado extensivamente na solução de modelos em duas dimensões. Para  $\mu \neq 0$  e  $T \neq 0$  ela é dada por:

$$\begin{aligned} +i\Gamma_{++}^{\mu\nu}(p) &= (ie)^2 \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \text{Tr} \gamma^\mu \left[ S_{++}^{(\beta,\mu)}(k+p) \right] \gamma^\nu \left[ S_{++}^{(\beta,\mu)}(k) \right] \\ &= e^2 \int \text{Tr} \gamma^\mu (\bar{k} + p) \left[ \frac{i}{(\bar{k} + p)^2 + i\epsilon} - 2\pi n_F(k_0 \epsilon(\bar{k}_0 + p)) \delta((\bar{k} + p)^2) \right] \\ &\quad \times \gamma^\nu \bar{k} \left[ \frac{i}{\bar{k}^2 + i\epsilon} - 2\pi n_F(k_0 \epsilon(\bar{k}_0)) \delta(\bar{k}^2) \right]. \end{aligned} \quad (2.55)$$

Lembrando que os propagadores podem ser separados em uma parte independente da temperatura e outra dependente, a função de 2-pontos pode ser escrita como:

$$+i\Gamma_{++}^{\mu\nu} = +i\Gamma_{++}^{\mu\nu(0)} + i\Gamma_{++}^{\mu\nu(\beta)}. \quad (2.56)$$

A parte independente da temperatura não apresenta nenhuma novidade e já foi calculada na literatura [9]. Vamos nos concentrar apenas na parte dependente da temperatura, dada por:

$$\begin{aligned}
+i\Gamma_{++}^{\mu\nu(\beta)} &= -e^2 \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \text{Tr} \gamma^\mu (\bar{k} + \not{p}) \gamma^\nu \bar{k} \\
&\times \left\{ \left[ \frac{2\pi i n_F(k_0 \epsilon(\bar{k}_0)) \delta(\bar{k}^2)}{(\bar{k} + p)^2 + i\epsilon} \right] + \left[ \frac{2\pi i n_F(k_0 \epsilon(\bar{k}_0 + p)) \delta((\bar{k} + p)^2)}{\bar{k}^2 + i\epsilon} \right] \right. \\
&\left. + 2\pi n_F(k_0 \epsilon(\bar{k}_0)) 2\pi n_F(k_0 \epsilon(\bar{k}_0 + p)) \delta(\bar{k}^2) \delta((\bar{k} + p)^2) \right\}. \quad (2.57)
\end{aligned}$$

O traço pode ser calculado utilizando a fórmula (A.9). Ficamos assim com:

$$\begin{aligned}
i\Gamma_{++}^{\mu\nu(\beta)}(p) &= -e^2 \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} [\bar{k}_- (\bar{k} + p)_- u_+^\mu u_+^\nu + \bar{k}_+ (\bar{k} + p)_+ u_-^\mu u_-^\nu] \\
&\left[ \frac{2\pi i n_F(\bar{k}_0 - \mu) \epsilon(\bar{k}_0) \delta(\bar{k}^2)}{(\bar{k} + p)^2 + i\epsilon} + \frac{2\pi i n_F((\bar{k}_0 + p_0 - \mu) \epsilon(\bar{k}_0 + p_0)) \delta(\bar{k} + p)^2}{\bar{k}^2 + i\epsilon} \right. \\
&\left. - (2\pi)^2 n_F((\bar{k}_0 + p_0 - \mu) \epsilon(\bar{k}_0 + p_0)) n_F((\bar{k}_0 - \mu) \epsilon(\bar{k}_0)) \delta(\bar{k})^2 \delta(\bar{k} + p)^2 \right] \quad (2.58)
\end{aligned}$$

A parte linear em  $n_F$  de  $i\Gamma_{++}^{\mu\nu(\beta)}$ , denotada por P.L., é dada por:

$$\begin{aligned}
P.L. &= -e^2 \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} [\bar{k}_- (\bar{k} + p)_- u_+^\mu u_+^\nu + \bar{k}_+ (\bar{k} + p)_+ u_-^\mu u_-^\nu] \\
&\times \left[ \frac{2\pi i n_F(\bar{k}_0 \epsilon(\bar{k}^0)) \delta(\bar{k}^2)}{(\bar{k} + p)^2 + i\epsilon} + \frac{2\pi i n_F((k^0 + p^0) \epsilon(\bar{k}_0 + p_0)) \delta((\bar{k} + p)^2)}{k^2 + i\epsilon} \right] \quad (2.59)
\end{aligned}$$

Agora fazendo a seguinte mudança de variáveis no primeiro termo da equação acima:

$$\bar{k} = -(\bar{k}' + p); \quad \vec{k} = -(\vec{k}' + \vec{p}). \quad (2.60)$$

e fazendo  $k_0 + \mu \rightarrow k_0$  nos dois termos podemos reescrever P.L. como:

$$\begin{aligned}
P.L. &= \int \frac{d^2k}{(2\pi)} \frac{\delta(k^2)}{(k + p)^2 + i\epsilon} [\bar{k}_- (\bar{k} + p)_- u_+^\mu u_+^\nu + \bar{k}_+ (\bar{k} + p)_+ u_-^\mu u_-^\nu] \\
&\times [n_F((k_0 + \mu) \epsilon(k_0)) + n_F((k_0 - \mu) \epsilon(k_0))]. \quad (2.61)
\end{aligned}$$

Escrevendo a função delta como:

$$\delta(k^2) = \frac{\delta(k^0 - |k^1|) + (k^0 + |k^1|)}{2|k^1|}, \quad (2.62)$$

podemos efetuar a integral em  $k_0$ , obtendo:

$$\begin{aligned}
P.L. &= \int \frac{d^1k}{(2\pi)} \frac{2\pi i}{2|2k^1|} \{ [n_F((|k^1| - \mu) \epsilon(|k^1|)) + n_F((|k^1| + \mu) \epsilon(|k^1|))] \\
&\times [(|k^1| - k^1)(|k^1| - k^1 + p_-) u_+^\mu u_+^\nu + (|k^1| + k^1)(|k^1| + k^1 + p_+) u_-^\mu u_-^\nu] \\
&\times \frac{1}{2|k^1| |p + p^2 + i\epsilon} + [n_F((-|k^1| - \mu) \epsilon(-|k^1|)) + n_F((-|k^1| + \mu) \epsilon(-|k^1|))] \\
&\times [(-|k^1| - k^1)(-|k^1| - k^1 + p_-) u_+^\mu u_+^\nu + (-|k^1| + k^1)(-|k^1| + k^1 + p_+) u_-^\mu u_-^\nu] \\
&\times \frac{1}{-2|k^1| |p + p^2 + i\epsilon} \}. \quad (2.63)
\end{aligned}$$

A seguir podemos separar a integral em duas partes, para valores positivos e negativos de  $k^1$  e rearranjar os termos. Após alguns cálculos chegamos a:

$$P.L. = \frac{-ie^2}{2\pi} \int dk^1 \epsilon(k^1) [n_F(|k^1| + \mu) + n_F(|k^1| - \mu)] \\ \times \left[ \frac{(2k^1 + p_+) u_-^\mu u_-^\nu}{(2k^1 + p_+) p_- + i\epsilon} - \frac{(2k^1 p_-) u_+^\mu u_+^\nu}{(2k^1 - p_-) p_+ + i\epsilon} \right], \quad (2.64)$$

onde utilizamos a definição (A.4) para escrever  $p^2$  como:

$$p^2 = (p^0)^2 - (p^1)^2 = p_+ p_-, \quad (2.65)$$

tal que:

$$(2k^1 p_-) + p^2 + i\epsilon = p_- (2k^1 + p_+) + i\epsilon$$

e

$$(-2k^1 p_-) + p^2 + i\epsilon = p_+ (-2k^1 + p_-) + i\epsilon. \quad (2.66)$$

Vamos agora usar a seguinte propriedade da função delta:

$$\frac{A}{Ax + i\epsilon} = \frac{1}{x} - i\pi A \delta(Ax). \quad (2.67)$$

$$\frac{A}{Ax - i\epsilon} = \frac{1}{x} + i\pi A \delta(Ax). \quad (2.68)$$

e colocando este resultado em P.L, obtemos:

$$P.L. = \frac{-ie^2}{2\pi} (-i\pi) \int dk^1 \epsilon(k^1) [n_F(|k^1| - \mu) + n_F(|k^1| + \mu)] \\ \times [(2k^1 + p_+) \delta(p_- (2k^1 + p_+)) u_-^\mu u_-^\nu \\ + (2k^1 - p_-) \delta(p_+ (2k^1 - p_-)) u_+^\mu u_+^\nu], \quad (2.69)$$

onde os termos proporcionais a  $1/p_\pm$  foram desprezados por serem antisimétricos em  $k^1$ .

Utilizando as propriedades gerais da função delta, podemos reescrever a equação acima como:

$$P.L. = \frac{-e^2}{2} \int dk^1 \epsilon(k^1) [n_F(|k^1| - \mu) + n_F(|k^1| + \mu)] \\ \times [\epsilon(2k^1 + p_+) \delta(p_-) u_-^\mu u_-^\nu + \epsilon(2k^1 - p_-) \delta(p_+) u_+^\mu u_+^\nu]. \quad (2.70)$$

Finalmente, utilizando que:

$$\epsilon(2k^1 + p_+) \delta(p_-) = \epsilon(k^1 + p_1) \delta(p_-). \quad (2.71)$$

e

$$\epsilon(2k^1 - p_-)\delta(p_+) = \epsilon(k^1 + p_1)\delta(p_+), \quad (2.72)$$

obtemos a forma da contribuição à  $\Gamma_{++}^{\beta\mu}$  linear em  $n_F$ , ou seja:

$$\begin{aligned} P.L. &= \frac{-e^2}{2} [\delta(p_-)u_-^\mu u_-^\nu + \delta(p_+)u_+^\mu u_+^\nu] \\ &\times \int \frac{d^1}{k} [n_F(|k^1| - \mu) + n_F(|k^1| + \mu)] \epsilon(k^1) \epsilon(k^1 + p^1). \end{aligned} \quad (2.73)$$

A contribuição à função de 2-pontos quadrática em  $n_F$  pode ser obtida de maneira análoga. Como não apresenta nenhuma discussão extra, ela é apresentada no Apêndice B. O resultado é dado por:

$$\begin{aligned} P.Q. &= e^2 [\delta(p_-)u_-^\mu u_-^\nu + \delta(p_+)u_+^\mu u_+^\nu] \int dk^1 \epsilon(k^1) [n_F(\epsilon(k^1)(k^1 - \mu)) \\ &\times n_F(\epsilon(k^1 + p^1)(k^1 + p^1 - \mu))] \epsilon(k^1) \epsilon(k^1 + p^1). \end{aligned} \quad (2.74)$$

Dessa forma, a dependência completa da temperatura e potencial químico pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} i\Gamma_{++}^{\mu\nu(\beta)}(p) &= \frac{-e^2}{2} [\delta(p_-)u_-^\mu u_-^\nu + \delta(p_+)u_+^\mu u_+^\nu] \\ &\times \int dk^1 [n_F(|k^1| - \mu) + n_F(|k^1| + \mu)] \epsilon(k^1) \epsilon(k^1 + p^1) \\ &+ e^2 [\delta(p_-)u_-^\mu u_-^\nu + \delta(p_+)u_+^\mu u_+^\nu] \int dk^1 \epsilon(k^1) [\eta_F(\epsilon(k^1)(k^1 - \mu)) \\ &\times \eta_F(\epsilon(k^1 + p^1)(k^1 + p^1 - \mu))] \epsilon(k^1) \epsilon(k^1 + p^1). \end{aligned} \quad (2.75)$$

Antes de continuarmos existem vários pontos a serem ressaltados já a partir de  $+i\Gamma_{++}$ .

Primeiro a estrutura da função de 2-pontos no limite  $\mu \rightarrow 0$  reduz-se ao resultado apresentado em [8]. Além disso, mesmo na presença de um potencial químico diferente de zero, a função de 2-pontos continua sendo transversal, ou seja:

$$\begin{aligned} p_\mu \Gamma_{++}^{\mu\nu}(p) &\propto p_\mu [\delta(p_-)u_-^\mu u_-^\nu + \delta(p_+)u_+^\mu u_+^\nu] \\ &= \delta(p_-)p_- u_-^\nu + \delta(p_+)p_+ u_+^\nu \equiv 0, \end{aligned} \quad (2.76)$$

onde usamos a Eq. (A.4) para escrever:

$$p \cdot u_\pm = p_\pm. \quad (2.77)$$

Além disso, em (1+1) dimensões a função de 2-pontos quiral  $\Gamma_{5,++}^{\mu\nu}(p)$  pode ser obtida a partir da função de 2-pontos do fóton por meio das identidades das matrizes  $\gamma$  (por exemplo, Eq.



(1.19)). Então, a dependência quiral da função de 2-pontos pode ser obtida a partir de (2.75) correspondendo a:

$$\Gamma_{5,++}^{\mu\nu}(p) = \epsilon_\gamma^\mu \Gamma_{++}^{\mu\nu}(p) \quad (2.78)$$

e a estrutura da função de 2-pontos quiral agora pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} \Gamma_{5,++}^{\mu\nu}(p) &\propto \epsilon^{\mu\lambda} [\delta(p_-) u_{-\lambda}^\nu u_-^\nu + \delta(p_+) u_{+\lambda}^\nu u_+^\nu] \\ &= -\delta(p_-) p_- u_-^\nu + \delta(p_+) p_+ u_+^\nu, \end{aligned} \quad (2.79)$$

onde usamos a identidade:

$$\epsilon^{\mu\lambda} u_{\pm\lambda} = \pm u_{\pm}^\mu. \quad (2.80)$$

Obtemos assim:

$$p_\mu \Gamma_{5,++}^{\mu\nu}(p) \propto -\delta(p_-) p_- u_-^\nu + \delta(p_+) p_+ u_+^\nu \equiv 0. \quad (2.81)$$

Esse resultado mostra que não há contribuição à anomalia quiral proveniente da temperatura finita e potencial químico diferente de zero. A ausência da contribuição dependente da temperatura para a anomalia quiral já é bem conhecida e vamos discutir mais tarde claramente porque o potencial químico não modifica a anomalia.

A componente  $+i\Gamma_{--}^{\mu\nu(T)}$  da função de 2-pontos é dada por:

$$+i\Gamma_{--}^{\mu,\nu(T)} = (ie)^2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^2} \text{Tr} \gamma^\mu [iS_{--}^{(T,\mu)}(\bar{k}+p)] \gamma^\nu [iS_{--}^{(T,\mu)}(\bar{k})] \equiv (i\Gamma_{++}^{\mu,\nu})^* \quad (2.82)$$

Vamos calcular  $+i\Gamma_{-+}^{\mu\nu(T)}$ . Utilizando aos propagadores (2.49) e (2.50) obtemos:

$$\begin{aligned} +i\Gamma_{-+}^{\mu,\nu(T)} &= (ie)^2 \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} [\text{Tr} \gamma^\mu iS_{-+}^{(T,\mu)}(\bar{k}+p) \gamma^\nu iS_{+-}^{(T,\mu)}(\bar{k})] \\ &= (ie)^2 \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} [\theta(\bar{k}^0+p_0) \theta(-\bar{k}^0) - \theta(\bar{k}^0+p_0) n_F(k^0 \epsilon(\bar{k}^0)) \\ &\quad - \theta(-\bar{k}^0) \eta_F((\bar{k}^0+p_0) \epsilon(\bar{k}^0+p_0)) + n_F((\bar{k}^0+p_0) \epsilon(\bar{k}^0+p_0))] \\ &\quad \times \delta((\bar{k}+p)^2) \delta(\bar{k}^2) \text{Tr} \gamma^\mu (\bar{k}+p) \gamma^\nu \not{k}. \end{aligned} \quad (2.83)$$

Novamente podemos escrever:

$$i\Gamma_{-+}^{\mu,\nu(T)} = i\pi_{-+}^{\mu,\nu(0)} + i\pi_{-+}^{\mu,\nu(\beta)} \quad (2.84)$$

e trabalhar apenas com a parte que contém temperatura, ou seja,  $i\pi_{-+}^{\mu,\nu(\beta)}$ . Então:

$$\begin{aligned} +i\Gamma_{-+}^{\mu,\nu(\beta)} &= (ie)^2 \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} [\theta(\bar{k}^0 + p_0)\theta(-\bar{k}^0) - \theta(\bar{k}^0 + p_0)n_F(k^0\epsilon(\bar{k}^0)) \\ &\quad - \theta(-\bar{k}^0)n_F((\bar{k}^0 + p_0)\epsilon(\bar{k}^0 + p_0)) + n_F((\bar{k}^0 + p_0)\epsilon(\bar{k}^0 + p_0))] \\ &\quad \times \delta((\bar{k} + p)^2)\delta(\bar{k}^2)\text{Tr}\gamma^\mu(\bar{k} + p)\gamma^\nu \not{k}. \end{aligned} \quad (2.85)$$

Estudando primeiramente a parte linear, temos:

$$\begin{aligned} P.L. &= (ie)^2 \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} (2\pi)^2 [-\theta(\bar{k}^0 + p_0)n_F(k^0\epsilon(\bar{k}^0)) - \theta(-\bar{k}^0)n_F((k^0 + p^0)\epsilon(\bar{k}^0 + p^0))] \\ &\quad \times \delta((\bar{k} + p)^2)\delta(\bar{k}^2)\text{Tr}\gamma^\mu(\bar{k} + p)\gamma^\nu \not{k}. \end{aligned} \quad (2.86)$$

Devemos agora substituir o traço e as mesmas mudanças de variáveis e substituições feitas no cálculo no termo linear da parte dependente da temperatura de  $i\Gamma_{++}^{T,\nu}(p)$ . Deste modo, chegamos a:

$$\begin{aligned} P.L. &= -(ie)^2 \int \frac{d^2k^1}{(2\pi)^2} (2\pi)^2 [n_F(k^1 - \mu)\epsilon(k^1) + n_F(k^1 + \mu)\epsilon(k^1)] \epsilon(k^1) \\ &\quad \times [\theta(-k^1 - p^1)\delta(p_+)u_+^\mu u_+^\nu + \theta(k^1 + p^1)\delta(p_-)u_-^\mu u_-^\nu]. \end{aligned} \quad (2.87)$$

A parte quadrática é idêntica a  $i\Gamma_{++}^{\mu\nu}$ . Assim ficamos com:

$$\begin{aligned} i\Gamma_{-+}^{\mu\nu} &= -(ie)^2 \int \frac{d^2k^1}{(2\pi)^2} (2\pi)^2 [n_F(k^1 - \mu)\epsilon(k^1) + n_F(k^1 + \mu)\epsilon(k^1)] \epsilon(k^1) \\ &\quad \times [\theta(-k^1 - p^1)\delta(p_+)u_+^\mu u_+^\nu + \theta(k^1 + p^1)\delta(p_-)u_-^\mu u_-^\nu] + (ie)^2 [\delta(p_-)u_-^\mu u_-^\nu + \delta(p_+)u_+^\mu u_+^\nu] \\ &\quad \times (ie)^2 \int \frac{d^2k^1}{(2\pi)^2} (2\pi)^2 [n_F(k^1 - \mu)\epsilon(k^1)n_F(k^1 + p^1 - \mu)\epsilon(k^1 + p^1)] \epsilon(k^1)\epsilon(k^1 + p^1). \end{aligned} \quad (2.88)$$

O cálculo do termo  $i\Gamma_{+-}^{\mu\nu}$  não apresenta nenhuma sutileza extra e é dado por:

$$\begin{aligned} i\Gamma_{+-}^{\mu\nu} &= -e^2 \int d^2k^1 \epsilon(k^1) [n_F((k^1 + \mu)\epsilon(k^1)) + n_F((k^1 - \mu)\epsilon(k^1))] \\ &\quad \times [-\theta(k^1 + p^1)\delta(p_+)u_+^\mu u_+^\nu + \theta(-k^1 - p^1)\delta(p_-)u_-^\mu u_-^\nu] - e^2 [\delta(p_-)u_-^\mu u_-^\nu + \delta(p_+)u_+^\mu u_+^\nu] \\ &\quad \times \int d^2k^1 \epsilon(k^1 + p^1) n_F((k^1 - \mu)\epsilon(k^1)) n_F((k^1 + p^1 - \mu)\epsilon(k^1 + p^1)). \end{aligned} \quad (2.89)$$

Comparando a equação acima com a Eq.(2.75) vemos que:

$$i\Gamma_{+-}^{\mu\nu(T,\mu)}(p) = -i\Gamma_{++}^{\mu\nu(T,\mu)}(p), \quad (2.90)$$

e portanto a parte dependente da temperatura da função retardada de 2-pontos na presença do potencial químico é identicamente nula, ou seja:

$$i\Gamma_R^{\mu\nu(T,\mu)} \equiv i\Gamma_{++}^{\mu\nu(T,\mu)} + i\Gamma_{+-}^{\mu\nu(T,\mu)} = 0. \quad (2.91)$$

A função de 2-pontos adiantada também pode ser obtida de maneira similar.

## 2.1.2 Função de $n$ -Pontos

O cálculo das funções de  $n$ -pontos, muito embora seja trabalhoso, não apresenta nenhuma sutileza extra em relação ao que já foi apresentado. Assim, sem entrar em detalhes, vamos apresentar somente os resultados. As amplitudes com números ímpares de fótons externos desaparecem a temperatura zero, bem como a temperatura finita (na ausência de potencial químico). Entretanto, como iremos ver, isso não é verdade quando o potencial químico é diferente de zero. A amplitude da função de 3-pontos irá consistir de 2 gráficos nos quais 2 das linhas externas de fótons são trocadas. Denotando os momentos independentes para as linhas de fóton por  $p$  e  $q$ , associados com as linhas de fótons com índices  $(\nu, \lambda)$ , a parte dependente da temperatura para a função de 3-pontos na presença de potencial químico diferente de zero é dada por:

$$\begin{aligned}
 i\Gamma_{+++}^{\mu\nu\gamma(T,\mu)}(p, q) &= \frac{i\pi e^3}{4} [\delta(p_-)\delta(q_-)u_-^\mu u_-^\nu u_-^\lambda + \delta(p_+)\delta(q_+)u_+^\mu u_+^\nu u_+^\lambda] \\
 &\times \int dk^1 \epsilon(k^1) \epsilon(k^1 + P_{T(3)}^1) I_3^{(T,\mu)} \\
 &+ \text{todas as permutações do momento externo,} \quad (2.92)
 \end{aligned}$$

onde identificamos  $p_{T(p3)}^1 = p^1 + q^1$  por simplicidade e o integrando  $I_3^{(T,\mu)}$  é definido como:

$$\begin{aligned}
 I_3^{(T,\mu)} &= [n_F((k^1 - \mu)\epsilon(k^1)) + n_F((k^1 + p^1 - \mu)\epsilon(k^1 + p^1)) + n_F((k^1 + P_{T(3)}^1 - \mu)\epsilon(k^1 + P_{T(3)}^1)) \\
 &- 2n_F((k^1 - \mu)\epsilon(k^1))n_F((k^1 + p^1 - \mu)\epsilon(k^1 + p^1)) - 2n_F((k^1 - \mu)\epsilon(k^1)) \\
 &\times n_F((k^1 + P_{T(3)}^1 - \mu)\epsilon(k^1 + P_{T(3)}^1)) - 2n_F((k^1 + p^1 - \mu)\epsilon(k^1 + p^1)) \\
 &\times n_F((k^1 + P_{T(3)}^1 - \mu)\epsilon(k^1 + P_{T(3)}^1)) + 4n_F((k^1 - \mu)\epsilon(k^1))n_F((k^1 + p^1 - \mu)\epsilon(k^1 + p^1)) \\
 &\times n_F((k^1 + P_{T(3)}^1 - \mu)\epsilon(k^1 + P_{T(3)}^1)) - (\mu \rightarrow -\mu)]. \quad (2.93)
 \end{aligned}$$

Existem vários aspectos a ser notados a partir desse resultado. Primeiro, o limite nulo para o potencial químico [observe que o ultimo termo  $-(\mu \rightarrow -\mu)$  em (2.93)], a função de 3-pontos desaparece [8]. Na presença do potencial químico, entretanto, existe uma contribuição não nula. Podemos continuar os cálculos da estrutura geral para função de  $n$ -pontos a temperatura finita e potencial químico não nulo. Entretanto, um padrão para a função de  $n$ -pontos já aparece.

Vemos que a estrutura das amplitudes é sempre decomposta em duas partes, uma somente com produtos do tipo  $u_+\delta(p_+)$  e outros com produtos na forma  $u_-\delta(p_-)$  (que é uma generalização para  $\mu \neq 0$  do resultado obtido em [8]). A integral associada também tem uma simples

generalização ou seja: (para  $n \geq 2$ , para  $n = 1$  a amplitude é identicamente nula)

$$i\Gamma^{\mu_1 \dots \mu_n (T, \mu) + \dots + (p_1, \dots, p_{n-1})} = \frac{(-ie)^n (\pi)^{n-1}}{4} [\delta(p_{1-}) \dots \delta(p_{(n-1)-}) u_-^{\mu_1} \dots u_-^{\mu_n} + \delta(p_{1+}) \dots \delta(p_{(n-1)+}) \times u_+^{\mu_1} \dots u_+^{\mu_n}] \int dk^1 \epsilon(k^1) \epsilon(k^1 + p^1) \epsilon(k^1 + P_{T(3)}^1) \dots \epsilon(k^1 + P_{T(n)}^1) I_n^{(T, \mu)}$$

+todas as permutações para o momento externo, (2.94)

para  $n \geq 2$  e onde  $P_{T(n)}^1 = p_1^1 + p_1^2 + \dots + p_1^{n-1}$  e  $I_n^{(T, \mu)}$  é dado por:

$$I_n^{(T, \mu)} = [(n_F((k^1 - \mu)\epsilon(k^1)) + n_F((k^1 + p_1^1 - \mu)\epsilon(k^1 + p_1^1)) + \text{permutações lineares}]$$

$$- 2[n_F((k^1 - \mu)\epsilon(k^1))n_F((k^1 + p_1^1 - \mu)\epsilon(k^1 + p_1^1)) + \text{permutações quadráticas}]$$

$$+ 2^2[n_F((k^1 - \mu)\epsilon(k^1))n_F((k^1 + p_1^1 - \mu)\epsilon(k^1 + p_1^1))n_F((k^1 + p_1^1 + p_2^2 - \mu)\epsilon(k^1 + p_1^1 + p_2^2))$$

$$+ \text{permutações cúbicas}] + \dots + (-1^n)(\mu \rightarrow -\mu)].$$
(2.95)

A simetria (antisimetria) para todas as amplitudes indo de  $\mu \rightarrow -\mu$  é manifestada. O limite  $\mu \rightarrow 0$  em todas as funções ímpares do potencial químico é nulo e as amplitudes pares reduzem-se ao calculado em [8]. A ação efetiva para fótons agora segue a partir da forma explícita das amplitudes.

### 2.1.3 Modo alternativo

A particular estrutura para as amplitudes em (2.92) envolvendo produtos da função delta no cone de luz com vetores no cone de luz é bastante interessante. A fim de entender melhor a estrutura para a função de  $n$ -pontos nesse modelo, apresentaremos nesta seção uma derivação alternativa em termos de férmions unidimensionais que também esclarecem vários outros aspectos dos nossos resultados.

Inicialmente definimos dois novos espinores,  $\psi_{L,R}$  respectivamente como:

$$\psi_L = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)\psi$$

$$\equiv P_L \psi,$$
(2.96)

e

$$\psi_R = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5)\psi$$

$$\equiv P_R \psi,$$
(2.97)

onde  $P_{L,R} = 1/2(\mp\gamma_5)$  com  $P^2 = P$ . Deste modo podemos, reescrever a densidade de Lagrangeana como uma soma em duas partes dos *left e right-handed* espinores, ou seja:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= i\bar{\psi}\gamma^\mu(\partial_\mu - ieA_\mu)\psi + \mu\bar{\psi}\gamma^0\psi \\ &= i\psi_R^\dagger(\partial_- - i\mu + ieA_-)\psi_R + i\psi_L^\dagger(\partial_+ - i\mu + ieA_+)\psi_L,\end{aligned}\quad (2.98)$$

onde usamos a notação (2.46) para escrever:

$$\partial_\pm \equiv \partial.u_\pm = \partial_0 \mp \partial_1, \quad A_\pm \equiv A.u_\pm = A_0 \mp A_1. \quad (2.99)$$

Da Eq.(2.98), podemos concluir que a densidade de Lagrangeana para a teoria efetiva torna-se uma soma de duas densidades desacopladas, uma parte com férmions *left* e outra com férmions *right* que se deslocam independentes interagindo com componentes do cone de luz do campo de calibre. Mais ainda, muito embora o campo de calibre diferencie as componentes *right e left*, o potencial químico as trata da mesma forma. Esta é outra maneira de entender porque o potencial químico não acrescenta nenhuma contribuição extra à anomalia quiral.

Na presença do potencial químico, os propagadores tem a forma:

$$\langle T\psi_R^\dagger\psi_R \rangle = iS_R^\mu = \frac{i\bar{k}_+}{\bar{k}_+\bar{k}_- + i\epsilon}, \quad (2.100)$$

e

$$\langle T\psi_L^\dagger\psi_L \rangle = iS_L^\mu = \frac{i\bar{k}_-}{\bar{k}_+\bar{k}_- + i\epsilon}, \quad (2.101)$$

onde:

$$\bar{k}_\pm = k_0 + \mu \pm k^1 = \bar{k}^0 \pm k^1. \quad (2.102)$$

Além disso,

$$\begin{aligned}\langle T\psi\bar{\psi} \rangle &\equiv \langle T\psi(P_R + P_L)\psi^\dagger\gamma^0 \rangle \\ &= \frac{i\not{k}}{\bar{k}^2 + i\epsilon},\end{aligned}\quad (2.103)$$

ou seja, recuperamos o propagador de Feynman completo da teoria.

Podemos agora generalizar os propagadores a temperatura e potencial químico finitos, escrevendo por exemplo:

$$\begin{aligned}iS_{++}^{(T,\mu)} &= \bar{k}_+P_R \left[ \frac{i}{\bar{k}_+\bar{k}_- + i\epsilon} - 2\pi n_F(k_0\epsilon(\bar{k}_0))\delta(\bar{k}^2) \right] \\ &= P_R \left[ \frac{i}{\bar{k}_- + i\epsilon\epsilon(\bar{k}_+)} - 2\pi n_F(k_0\epsilon(\bar{k}_0))\delta(\bar{k}_-)\epsilon(k^1) \right].\end{aligned}\quad (2.104)$$

e,

$$\begin{aligned} iS_{--}^{(t,\mu)} &= \bar{k}_- P_L \left[ \frac{i}{\bar{k}_+ \bar{k}_- + i\epsilon} - 2\pi n_F(k_0 \epsilon(\bar{k}_0)) \delta(\bar{k}^2) \right] \\ &= P_L \left[ \frac{i}{\bar{k}_+ + i\epsilon \epsilon(\bar{k}_-)} + 2\pi n_F(k_0 \epsilon(\bar{k}_0) \epsilon(k^1)) \delta(\bar{k}_+) \right]. \end{aligned} \quad (2.105)$$

Calculando  $i\Gamma_{++}^{R(T,\mu)}$ , temos:

$$\begin{aligned} i\Gamma_{++}^{R(T,\mu)} &= e^2 \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} iS_{++}^{R(\beta\mu)}(k+p) iS_{++}^{R(\beta\mu)}(k) \\ &= e^2 \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \left[ \frac{i}{\bar{k}_- + i\epsilon \epsilon(\bar{k}_+)} - 2\pi n_F(k_0 \epsilon(\bar{k}_0)) \delta(\bar{k}_-) \epsilon(k^1) \right] \\ &\quad \times \left[ \frac{i}{(\bar{k}+p)_- + i\epsilon \epsilon(\bar{k}+p)_+} - 2\pi n_F((k_0+p_0) \epsilon(\bar{k}_0+p_0)) \delta(\bar{k}+p)_+ \epsilon(k^1+p^1) \right]. \end{aligned} \quad (2.106)$$

Trabalhando apenas com os termos que contém temperatura, obtemos:

$$\begin{aligned} i\Gamma_{++}^{R(\beta,\mu)} &= e^2 \int \frac{d^2 k}{(2\pi)} \left[ \frac{(-i)n_F(k_0 \epsilon(\bar{k}_0)) \delta(\bar{k}_-) \epsilon(k^1)}{p_- + k_- + i\epsilon \epsilon(\bar{k}_+ + p_+)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{(-i)n_F((k_0+p_0) \epsilon(\bar{k}_0+p_0)) \delta(\bar{k}_- + p_-) \epsilon(k^1+p^1)}{\bar{k}_- + i\epsilon \epsilon(\bar{k}_+)} \right. \\ &\quad \left. \times (2\pi)n_F(k_0 \epsilon(\bar{k}_0)) n_F((k_0+p_0) \epsilon(\bar{k}_0+p_0)) \delta(\bar{k}_-) \delta(\bar{k}_- + p_-) \epsilon(k^1) \epsilon(k^1+p^1) \right]. \end{aligned} \quad (2.107)$$

O cálculo agora é análogo ao da seção anterior e é dado por:

$$\begin{aligned} i\Gamma_{++}^{R(T,\mu)} &= -\frac{e^2}{2} \delta(p_-) \int dk^1 \epsilon(k^1) \epsilon(k^1+p^1) \\ &\quad \times [n_F((k^1-\mu) \epsilon(k^1)) + n_F((k^1+\mu) \epsilon(k^1)) \\ &\quad - 2n_F((k^1-\mu) \epsilon(k^1)) n_F((k^1+p^1-\mu) \epsilon(k^1+p^1))] . \end{aligned} \quad (2.108)$$

Neste ponto, podemos fazer uma comparação com o termo calculado anteriormente, utilizando as Eqs.(2.47) e (2.75) obtemos:

$$u_\mu^+ u_\nu^+ i\Gamma_{++}^{\mu\nu} = 4i\Gamma_{++}^R, \quad (2.109)$$

ou seja, obtemos o termo *right*. Podemos também, de forma idêntica, calcular o termo *left*. Vemos assim a justificativa das deltas que aparecem no cálculo.

# Considerações Finais

Neste trabalho estudamos sistematicamente os efeitos de potencial químico e temperatura na ação efetiva em  $(1 + 1)$  dimensões em um campo de fundo abeliano.

Primeiramente, no cap.1 revisamos os modelos exatos em  $(1 + 1)$  dimensões, particularmente o modelo de Schwinger onde a simetria de calibre local é preservada quanticamente, mas que apresenta uma anomalia quântica relacionada com a transformação quiral (que é uma simetria clássica do modelo). Paralelamente, apresentamos um estudo do formalismo de tempo real, utilizado no trabalho para as análises de temperatura.

No Cap.2 generalizamos os cálculos feitos em [8] acrescentando o potencial químico a temperatura finita na ação efetiva para férmions não massivos em um campo de fundo abeliano. Calculamos explicitamente os efeitos térmicos à função de 2-pontos e depois generalizamos o cálculo para a função de  $n$ -pontos. Percebemos que, a temperatura finita, as funções pares não se anulam. Entretanto, quando acrescentamos os efeitos de potencial químico a temperatura finita, os termos ímpares da função de  $n$ -pontos são diferentes de zero surgindo uma nova contribuição para a ação efetiva. Vimos também que os efeitos de potencial químico não afetam a anomalia quiral do modelo de Schwinger. Além disso, as funções ímpares são zero no limite de potencial químico nulo, recuperando assim os resultados obtidos em [8]. Outro fato relevante é que todas as amplitudes (pares e ímpares) das funções continuam tendo a estrutura geral descrita em [8].

A origem da estrutura tornou-se clara a partir da formulação da teoria em termos de férmions unidimensionais dos espinores *left e right-handed*. Mostramos um modo alternativo de calcular a função de  $n$ -pontos, por meio desses espinores. A estrutura do tensor bem como a estrutura da função delta para as amplitudes são triviais e recaímos de maneira simples nos mesmos resultados que obtivemos anteriormente.

Como continuidade deste trabalho, estamos atualmente analisando este modelo no formalismo de tempo imaginário. Como neste formalismo, por meio de uma continuação analítica, o tempo é levado na temperatura, saímos do espaço de Minkowski, indo para o espaço euclidiano. Neste caso, não é claro como estruturas definidas em termos de variáveis do cone de luz são generalizadas.

Outra possibilidade de continuidade do trabalho seria a abordagem não perturbativa no cálculo da ação efetiva para temperatura finita. Uma vez que encontramos uma forma fechada para a função de  $n$ -pontos, fica a pergunta se seria possível escrever uma forma fechada para a ação efetiva, efetuando-se explicitamente as integrais de Feynmann.



# Apêndice A

## Cálculo do traço para a função de $n$ -pontos

No cálculo da função de  $n$ -pontos precisamos calcular o traço envolvendo várias funções  $\gamma$ , algumas delas contraídas com momento. Iremos a seguir deduzir a forma geral destes traços.

Vamos começar calculando o traço de duas matrizes  $\gamma$ :

$$\begin{aligned}\text{Tr}\gamma^\mu \not{a} \gamma^\nu \not{b} &= \text{Tr}\gamma^\mu a_\rho \gamma^\rho \gamma^\nu b_\sigma \gamma^\sigma \\ &= a_\rho b_\sigma \text{Tr}\gamma^\mu \gamma^\rho \gamma^\nu \gamma^\sigma \\ &= 2a_\rho b_\sigma (\eta^{\mu\rho} \eta^{\nu\sigma} - \eta^{\mu\nu} \eta^{\rho\sigma} + \eta^{\mu\sigma} \eta^{\rho\nu}) \\ &= 2a^\mu b^\nu - 2a^\sigma b^\sigma + 2a^\nu b^\mu\end{aligned}\tag{A.1}$$

Vamos agora definir um vetor como sendo:

$$A_\pm^\mu = (\eta^{\mu\nu} \pm \epsilon^{\mu\nu}) A_\nu.\tag{A.2}$$

Então:

$$\begin{aligned}a^\mu \pm &= (\eta^{\mu\nu} \pm \epsilon^{\mu\nu}) a_\nu \\ &= (\eta^{00} a_0 \pm \epsilon^{01} a_1, \eta^{11} a_1 \pm \epsilon^{10} a_0) \\ &= (a_0 \pm a_1, -a_1 \mp a_0) \\ &= (a^0 \pm a^1)(1, \mp 1) \equiv a_\mp u_\pm^\mu,\end{aligned}\tag{A.3}$$

onde:

$$u_+^\mu = (1, -1), \quad u_-^\mu = (1, 1), \quad k_\pm = (k^0 \mp k^1). \quad (\text{A.4})$$

Note que:

$$\epsilon^{\mu\nu} u_{\nu+} = (1, -1)u_+^\mu; \quad \epsilon^{\mu\nu} u_{\nu-} = (-1, -1)u_-^\mu. \quad (\text{A.5})$$

Usando a Eq.(A.2), vamos reescrever o traço como:

$$b_+^\mu a_+^\mu + b_-^\mu a_-^\mu = 2[a^\mu b^\nu + \epsilon^{\mu\sigma} \epsilon^{\nu\rho} a_\sigma b_\rho]. \quad (\text{A.6})$$

Vamos usar a seguinte propriedade:

$$\epsilon^{\mu\sigma} \epsilon^{\nu\rho} = \eta^{\mu\rho} \eta^{\nu\sigma} - \eta^{\mu\nu} \eta^{\sigma\rho}. \quad (\text{A.7})$$

Assim:

$$\begin{aligned} b_+^\mu a_+^\mu + b_-^\mu a_-^\mu &= 2[a^\mu b^\nu + (\eta^{\mu\rho} \eta^{\nu\sigma} - \eta^{\mu\nu} \eta^{\sigma\rho}) a_\sigma b_\rho] \\ &= 2[a^\mu b^\nu - \eta^{\mu\nu} a \cdot b + a^\nu b^\mu] \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

e usando a Eq(A.4) chegamos a:

$$\text{Tr} \gamma^\mu \not{a} \gamma^\nu \not{b} = a_- b_- u_+^\mu u_+^\nu + a_+ b_+ u_-^\mu u_-^\nu. \quad (\text{A.9})$$

Vamos agora calcular o traço de três matrizes  $\gamma$ .

$$\text{Tr} \gamma^\mu \not{a} \gamma^\nu \not{b} \gamma^\lambda \not{c} = a_{\mu 1} b_{\nu 1} c_{\lambda 1} \text{Tr} \gamma^\mu \gamma^{\mu 1} \gamma^\nu \gamma^{\nu 1} \gamma^\lambda \gamma^{\lambda 1}. \quad (\text{A.10})$$

Novamente sabemos que:

$$\begin{aligned} \text{Tr} \gamma^\mu \gamma^{\mu 1} \gamma^\nu \gamma^{\nu 1} \gamma^\lambda \gamma^{\lambda 1} &= [\eta^{\mu\mu 1} (\eta^{\nu\nu 1} \eta^{\lambda\lambda 1} + \eta^{\nu\lambda 1} \eta^{\nu 1\lambda} - \epsilon t a_{\nu\lambda} \eta^{\nu 1\lambda 1}) \\ &+ \eta^{\lambda\lambda 1} (\eta^{\mu\mu 1} - \eta^{\mu\nu} \eta^{\mu 1\nu 1}) \\ &+ \eta_{\nu\nu 1} (\eta^{\mu\lambda 1} \eta^{\mu 1\lambda} - \eta^{\mu\lambda} \eta^{\mu 1\lambda 1})]. \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Então, vamos escrever:

$$\begin{aligned} \text{Tr} \gamma^\mu \not{a} \gamma^\nu \not{b} \gamma^\lambda \not{c} &= a_{\mu 1} b_{\nu 1} c_{\lambda 1} 2[\eta^{\mu\mu 1} (\eta^{\nu\nu 1} \eta^{\lambda\lambda 1} + \eta^{\nu\lambda 1} \eta^{\nu 1\lambda} - \epsilon t a_{\nu\lambda} \eta^{\nu 1\lambda 1}) \\ &+ \eta^{\lambda\lambda 1} (\eta^{\mu\mu 1} - \eta^{\mu\nu} \eta^{\mu 1\nu 1}) \\ &+ \eta_{\nu\nu 1} (\eta^{\mu\lambda 1} \eta^{\mu 1\lambda} - \eta^{\mu\lambda} \eta^{\mu 1\lambda 1})] \\ &= 2[a^\mu (b^\nu c^\lambda + b^\lambda c^\nu - \eta^{\nu\lambda} b \cdot c) \\ &+ c^\lambda (a^\nu b^\mu - \eta^{\mu\nu} a \cdot b) + b^\nu (a^\lambda c^\mu - \eta^{\mu\lambda} a \cdot c)] \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

Usando a Eq.(A.2) e algumas manipulações algébricas, chegamos à:

$$\text{Tr}\gamma^\mu \not{a}\gamma^\nu \not{b}\gamma^\lambda \not{c} \equiv a_+^\mu b_+^\nu c_+^\lambda u_+ a_-^\mu b_-^\nu c_-^\lambda \quad (\text{A.13})$$

ou

$$\text{Tr}\gamma^\mu \not{a}\gamma^\nu \not{b}\gamma^\lambda \not{c} \equiv a_+^\mu b_+^\nu c_+^\lambda u_-^\mu u_-^\nu u_-^\lambda + a_-^\mu b_-^\nu c_-^\lambda u_+^\mu u_+^\nu u_+^\lambda \quad (\text{A.14})$$

No geral pode-se demonstrar que:

$$\begin{aligned} \text{Tr}\gamma^{\mu_1} A_1 \gamma^{\mu_2} A_2 \dots \gamma^{\mu_n} A_n &= A_{1+} A_{2+} \dots A_{n+} u_-^{\mu_1} u_-^{\mu_2} \dots u_n^{\mu_n} \\ &+ A_{1-} A_{2-} \dots A_{n-} u_+^{\mu_1} u_+^{\mu_2} \dots u_n^{\mu_n}. \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

# Apêndice B

## Termo quadrático da função de 2-pontos

O termo quadrático da função de 2-pontos é dado por:

$$P.Q. = e^2 \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} n_F[(k^0 - \mu)\epsilon(k^0)] n_F[(k^0 + p^0 - \mu)\epsilon(k^0 + p^0)] \delta(k^2) \delta((\vec{k} + p)^2) \text{Tr}(\gamma^\mu \vec{k} \gamma^\nu \vec{k}). \quad (\text{B.1})$$

Usando a Eqs.(2.60) e (2.62), podemos efetuar a integral em  $k_0$  obtendo:

$$P.Q. = e^2 \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \left( \frac{(2\pi)^2}{2|k^1|} \right) [\eta_F((|k^1| - \mu)\epsilon(|k^1|)) \eta_F((|k^1| + p^0 - \mu)\epsilon(|k^1| + p^0))] [ (|k^1| - k^1)(|k^1| + p^0 - k^1 - p^1) u_+^\mu u_+^\nu + (|k^1| + k^1)(|k^1| + p^0 + k^1 + p^1) u_-^\mu u_-^\nu ] \delta(p^2 + 2p^0|k^1| - 2k^1p^1) + [\eta_F((-|k^1| - \mu)\epsilon(-|k^1|)) \eta_F((-|k^1| + p^0 - \mu)\epsilon(-|k^1| + p^0))] [ (-|k^1| - k^1)(-|k^1| + p^0 - k^1 - p^1) u_+^\mu u_+^\nu + (-|k^1| + k^1)(-|k^1| + p^0 + k^1 + p^1) u_-^\mu u_-^\nu ] \delta(p^2 + 2p^0|k^1| - 2k^1p^1). \quad (\text{B.2})$$

Separando a integral em duas partes, para valores positivos e negativos de  $k_1$  e rearranjando os termos, após algumas manipulações algébricas chegamos a:

$$P.Q. = e^2 \int d^2k^1 \epsilon(k^1) [\eta_F(\epsilon(k^1)(k^1 - \mu)) \eta_F(\epsilon(k^1 + p^1)(k^1 + p^1 - \mu)) \times \epsilon(2k^1 + p_+) \delta(p_-) u_-^\mu u_-^\nu + \eta_F(\epsilon(k^1)(k^1 + \mu)) \eta_F(\epsilon(k^1 - p^1)(k^1 - p^1 + \mu)) \times \epsilon(2k^1 - p_-) \delta(p_+) u_+^\mu u_+^\nu], \quad (\text{B.3})$$

e usando (2.71) e (2.72) finalmente obtemos:

$$\begin{aligned}
 P.Q. = & e^2[\delta(pu_-)u_-^\mu u_-^\nu + \delta(pu_+)u_+^\mu u_+^\nu] \int d^2k^1 \epsilon(k^1) [\eta_F(\epsilon(k^1)(k^1 - \mu)) \\
 & \eta_F(\epsilon(k^1 + p^1)(k^1 + p^1 - \mu))] \epsilon(k^1) \epsilon(k^1 + p^1),
 \end{aligned} \tag{B.4}$$

que é a construção quadrática em  $n_F$  para  $\Gamma_{++}^{\beta\mu}$ .

# Referências Bibliográficas

- [1] J.I. Kapusta, *Finite Temperature Field Theory* (Cambridge University Press, Cambridge, England 1989).
- [2] M.L. Bellac *Thermal Field Theory*( Cambridge University Press, Cambridge, England 1996).
- [3] A. Das, *Finite Temperature Field Theory*(World Scientific, Singapore, 1997).
- [4] L. Dolan and R. Jackiw, Phys. Rev. **D 9**, 3320 (1974); A. Das and A. Karev, Phys. Rev. **D 36**, 623 (1987).
- [5] W. Fischler, J. B. Kogut and L. Susskind, Phys. Rev. **D19**, 1188 (1979).
- [6] Y. C. Kao and Y. W. Lee, Phys. Rev. **D50**, 1165 (1994).
- [7] H. R. Christiansen and F. A. Schaposnik, Phys. Rev. **D53**, 3260 (1996).
- [8] A. Das and A. J. da Silva, Phys. Rev. **D 59**, 105011 (1999).
- [9] A. Das and A. Karev, Phys. Rev. **D 36**, 2591 (1987).
- [10] J. Schwinger, Phys. Rev. **D 128**,2425 (1962).
- [11] D. J. Gross and A. Neveu, Phys. Rev. **D10**,3235 (1974).
- [12] T. Matsubara, Prog. Theo. Phys.**14**, 351 (1955).
- [13] S. Perez, *Efeitos da Temperatura na Teoria Quântica de Campos em (2+1) Dimensões*, Tese de Doutorado (Universidade de são Paulo), 2003 (Não publicado).
- [14] U. Fano, Phys. Rev. Lett.**D29**, 74 (1957).

- [15] S. G. Maciel, *Introdução à Mecânica Estatística Quântica: Estudos sobre o operador densidade*, Trabalho de conclusão de curso (Universidade Federal do Pará), 2007 (Não publicado).
- [16] R. A. Bertlmann, *Anomalies in Quantum Field Theory*, (Oxford Science Publications, Oxford, 1999).
- [17] C. Cohen-Tannoudji *Quantum Mechanics* (John Wiley, Paris, France, 1977).
- [18] Soraya G. Maciel and Silvana Perez, Phys. Rev. **D78**, 065005-1-7 (2008).
- [19] J. J. Sakurai, *Modern Quantum Mechanics* (Addison-Wesley, New York 1985).
- [20] M. E. Peskin and D. V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory* (Addison-Wesley Publishing Company, Cambridge 1996).
- [21] L. H. Ryder, *Quantum Field Theory* (Cambridge University Press, Cambridge, England 1992).
- [22] B. Ter Haar, Rep. Prog. Phys. **24**, 304 (1961).
- [23] A. Das, *Field Theory A path Integral Approach* (Second edition World Scientific, Rochester, USA 2006).
- [24] R.J. Kubo, Phys. Japan **12**, 2133 (1957).
- [25] N. P Landsman and C. G. Van Weert, Phys. Reports **145**, 2313 (1987).
- [26] P.C Martin and J. Schwinger, Phys. Rev **115**, 1342 (1959).
- [27] A. Das and C. R. Hagen, Phys. Rev. **55**, 1021 (1997).
- [28] A. Das and V. S. Mathur, *ibid* **33**, 489 (1986).
- [29] A. Das and R. Hagen, Phys. Rev. **D 32**, 2024 (1985).
- [30] R. Jackiw and R. Rajaraman, Phys. Rev. **D54**, 1416 (1984).
- [31] A. Basseto, L. Griguolo and P. Zanca, Phys. Rev. **D 50**, 1077 (1994).