



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ  
INSTITUTO DE TECNOLOGIA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

ELIAS GOMES DOS SANTOS

ANÁLISE DA FORMA DA PARTÍCULA NA APLICAÇÃO DO MÉTODO  
DOS ELEMENTOS DISCRETOS (DEM)

UFPA/ITEC/PPGEM  
BELEM-PARÁ  
2013

ELIAS GOMES DOS SANTOS

ANÁLISE DA FORMA DA PARTÍCULA NA APLICAÇÃO DO MÉTODO  
DOS ELEMENTOS DISCRETOS (DEM)

Dissertação apresentada à banca examinadora para  
obtenção do grau de Mestre em Engenharia Mecânica,  
Instituto de Tecnologia, Universidade Federal do Pará.  
Área de Concentração Térmica e Fluidos.  
Orientador: Prof. Ing. Dr. André Luiz Amarante Mesquita.

UFPA/ITEC/PPGEM  
BELÉM  
2013

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)

---

Santos, Elias Gomes dos, 1976-

Análise da forma da partícula na aplicação do método dos elementos discretos (DEM) / Elias Gomes dos Santos. - 2013.

Orientador: André Luiz Amarante Mesquita.  
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Pará, Instituto de Tecnologia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Belém, 2013.

1. Partículas (Física, química, etc.). 2. Calibração. 3. Análise numérica. 4. Método dos elementos finitos. I. Título.

CDD 23. ed. 620.1

---

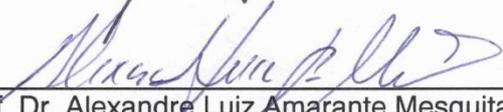
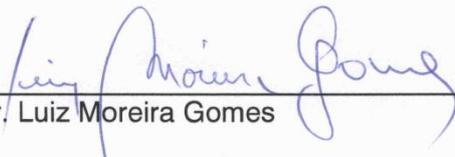
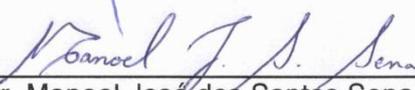
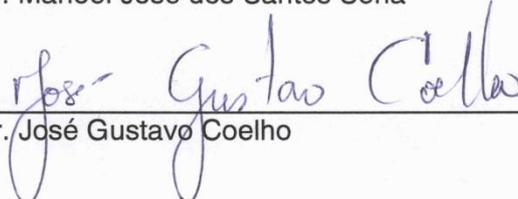
**Elias Gomes dos Santos**

**ANÁLISE DA FORMA DA PARTÍCULA NA APLICAÇÃO DO MÉTODO DOS  
ELEMENTOS DISCRETOS (DEM)**

Dissertação apresentada para a  
obtenção do Grau de Mestre em  
Engenharia Mecânica do Instituto de  
Tecnologia da Universidade Federal  
do Pará. Área de Concentração em  
Térmicas e Fluidos.

Data de aprovação: 06 de agosto de 2013.

Banca examinadora:

 _____ Prof. Dr. André Luiz Amarante Mesquita	– Orientador PPGEM/ITEC/UFPA
 _____ Prof. Dr. Alexandre Luiz Amarante Mesquita	– Membro Interno PPGEM/ITEC/UFPA
 _____ Prof. Dr. Luiz Moreira Gomes	– Membro Externo ao PPGEM FACEN/ITEC/UFPA
 _____ Prof. Dr. Manoel José dos Santos Sena	– Membro Externo ao Programa IESAM
 _____ Prof. Dr. José Gustavo Coelho	– Membro Externo ao Programa UFTM

## **DEDICATÓRIA**

*Aos meus pais, meus irmãos, minhas irmãs e à minha  
família pelo carinho, confiança e apoio.*

## **A G R A D E C I M E N T O S**

Primeiramente à DEUS, nosso Senhor Jesus Cristo, por todas as providências divinamente necessárias à realização desta pesquisa.

Em segundo lugar, ao professor Dr. André Luiz Amarante Mesquita, pelo companherismo, acompanhamento, confiança e suporte dado por sua empresa (Solve Engenharia).

À FAPESPA e à VALE pelo apoio ao desenvolvimento das pesquisas ligadas ao projeto Estudo de Parâmetros Geológicos e Processos para Viabilizar as Soluções Técnico-científicas Demandadas pela Cadeia Produtiva de Mineração, Metalurgia e Materiais do Estado do Pará, e do subprojeto Desenvolvimento de Tecnologia em Transporte de Minérios.

Ao Dr. Luiz Moreira Gomes e Rodrigo Gester, representando os professores do campus II de Marabá que me confiaram suas cartas de crédito, como necessárias ao processo seletivo do curso de mestrado.

Aos meus amigos contemporâneos de mestrado Luiz Carlos da Silva Carvalho, Elizeu Melo da Silva e Charles Aran Sabel dos Santos.

Sou grato ainda aos professores Erb Ferreira Lins e Jerson Rogério Pinheiro Vaz, pelos respectivos cursos de CFD (Computational Fluids Mechanical) e FORTRAN/MATLAB, além de suas assistências na manutenção do serviço remoto, junto ao SERVIDOR DO EDEM no laboratório da Engenharia Mecânica (LABEM).

Também são dignos de agradecimentos todo o corpo docente que compõe a grade curricular do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal do Pará (PPGEM/UFPA).

São afetivos os votos a todos os amigos que adquiri no ambiente do curso, contados dos alunos da Graduação em Engenharia Mecânica aos da Pós-Graduação.

À Secretaria Estadual de Educação do Pará (SEDUC/PA). Em particular, agradeço às pessoas amigas, pelo apoio, no sentido de minimizar os problemas burocráticos entrelaçados ao pedido de Licença para Aprimoramento Profissional.

Finalmente, a todos àqueles não citados diretamente, mas que ao fazerem esta leitura sintam que contribuíram de forma direta ou indireta na realização desta pesquisa.

O homem científico não pretende alcançar um resultado imediato, ele não espera que suas ideias avançadas sejam imediatamente aceitas. Seus trabalhos são como sementes para o futuro, seu dever é lançar as bases para aqueles que estão por vir e apontar o caminho (...). Nikola Tesla

## RESUMO

O presente trabalho analisa o efeito da forma da partícula por meio do método dos Elementos Discretos (DEM). São analisadas quatro partículas com formas e esfericidades diferentes – uma esférica e três não-esféricas. O ângulo de repouso é o principal instrumento de avaliação dos escoamentos. A análise inicia com a calibração da partícula esférica usando dados da literatura, em seguida, estes parâmetros calibrados são empregados para a simulação dos escoamentos das partículas não-esféricas. São feitas comparações dos esforços computacionais e, estas informações, são usadas para verificar as vantagens que a partícula esférica oferece sobre as outras três formas. Nesse cenário, procedimentos foram desenvolvidos para ajudar no processo de calibração dos ângulos de repouso, tendo como base, o conhecimento da sensibilidade de alguns parâmetros DEM. Os resultados mostram a influência das partículas não-esféricas e, principalmente, que é possível obter com a partícula esférica, escoamentos similares aos das partículas não-esféricas, com ganho computacional.

**Palavras-chave:** Método DEM, calibração, ângulo de repouso, esfericidade, forma da partícula.

## ABSTRACT

This work analyzes the effect of particle shape through the Discrete Element Method (DEM). Are employed four particles with different shapes and sphericity – one spherical and three non-spherical. The repose angle is the main tool to evaluating of the flow. The analysis starts with the calibration of the spherical particle using available literature data, then theses calibrated parameters are employed for the flow simulation of the non-spherical particles. Comparisons are performed on the computational effort, and this information is used to verify the advantages that the spherical particle provides on the three other shapes. In this scenario, procedures were developed to help in the calibration process of the repose angle, based in the knowledge of the sensitivity of some DEM parameters. The results show the influence of non-spherical shapes and, mainly, that is possible to obtain with the spherical shape, similar flows to the non-spherical shapes with computational gain.

**Keywords:** DEM method, calibration, angle of repose, sphericity, particle shape

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 - Partículas DEM formadas por sobreposição de esferas.....	18
Figura 1.2 – Microscopia do Sinter feed seco: presença de finos e formas variada das partículas: (a) aumento 20X; (b) aumento 50X.....	20
Figura 1.3- Pontes de líquido devido à umidade: aumentado 380 X.....	21
Figura 1.4 – Finos de minério de ferro liquefeito.....	21
Figura 1.5 - Típicos valores de umidade do minério de ferro Carajás (sinter feed).....	21
Figura 1.6 - Fluxograma para as análises das quatro partículas DEM.....	23
Figura 2.1 - Composição de um elemento de solo não saturado.....	27
Figura 2.2 - Círculos inscritos dentro da secção de uma partícula para captura da forma.....	29
Figura 2.3 -Distribuição randômica de partículas em forma de discos que foi transformada na sua correspondente angular.....	29
Figura 2.4 - Material coesivo com falso ângulo de repouso.....	30
Figura 2.5- Ângulo de repouso medido numericamente (DEM).....	31
Figura 2.6 – Ângulo de repouso: (a) média $\beta_E$ ; (b) $\beta = 43,5^\circ$ ; (c) $\beta = 55,5^\circ$ ;.....	32
Figura 2.7- Lugares geométricos que definem o ângulo de atrito interno.....	34
Figura 2.8 - Efeito capilar.....	35
Figura 2.9 - Estados de umidade em materiais granulares.....	37
Figura 2.10 - Fotografia eletrônica das pontes de líquidos em sistemas granulares.....	40
Figura 2.11 – Ponte de líquido e os raios de curvatura de menisco sobre a porção infinitesimal da superfície curva.....	40
Figura 2.12 – Forças adesivas entre uma partícula esférica de diâmetro $x = 10\mu\text{m}$ em função da distância à parede.....	41
Figura 2.13 - Variação das forças adesivas para três partículas com diâmetro entre 0.5 e 50 $\mu\text{m}$ calculadas sobre condições ideais.....	42
Figura 2.14 – Esquema resumo das forças adesivas de um sistema de granulares.....	43
Figura 3.1 – Forças e símbolos envolvidos nas interações das partículas i e j nas direções normal e tangencial.....	46
Figura 3.2- Esquema simplificado das forças de contato.....	47
Figura 3.3-Representação das forças de contato entre as partículas i, j e k.....	48
Figura 3.4-Modelo básico de contato viscoelástico para DEM.....	49
Figura 3.5- Sobreposição de contato: (a) partícula-partícula; (b) partícula-parede.....	50
Figura 3.6 - Forças de contato mecânico interpartículas.....	51

Figura 3.7- Modelo de contato vértice e lado: interação de uma partícula angular com outras partículas vizinhas .....	51
Figura 3.8- Esforço cisalhante .....	52
Figura 3.9 - Deformações por compressão .....	53
Figura 3.10- Algoritmo básico DEM.....	54
Figura 3.11 - Exemplo do gerenciamento do tempo de simulação com plotagem da Energia Cinética Total das partículas na zona de estagnação .....	55
Figura 3.12 – Fases do testes de gerenciamento do tempo de simulação testando o parâmetro atrito de rolamento: (a) 30s; (b) 40s; (c) escoamento lento, 50s .....	56
Figura 3.13- Esfera rolando sobre um plano: (a) sem deformação; (b) com deformação .....	58
Figura 3.14 – Teste de dois modelos de atrito de rolamento: marcadores inferiores – não dependa da velocidade angular; marcadores superiores – considera a velocidade angular ....	59
Figura 3.15 -Colisão partícula-partícula.....	64
Figura 3.16 – Representação simplificada dos contatos entre duas partículas esféricas de raios R1 e R2 .....	66
Figura 4.1- Único ângulo medido na primeira análise apresentada ao CONEM 2012 .....	68
Figura 4.2- Caixa de fluxo em três dimensões com comportas laterais móveis.....	69
Figura 4.3 –Geometria em escala para o diâmetro $d$ da partícula: (a) formação da pilha antes da descarga; (b) formação da zona de estagnação sobre a placa central após o escoamento ...	70
Figura 4.4 – Ângulo de repouso em função do tamanho da partícula: $\circ$ - $\mu_{r,pp}=0,05\text{mm}$ e $\mu_{s,pp} = 0,2$ ; $\Delta$ - $\mu_{r,pp} = 0,01\text{mm}$ e $\mu_{s,pp} = 0,4$ ; $\square$ - $\mu_{r,pp} = 0,05 \text{ mm}$ e $\mu_{s,pp} = 0,4$ .....	71
Figura 4.5 – Ângulo de repouso em função do atrito estático com diferentes atritos de rolamento: $\circ$ - $\mu_{r,pp} = 0,01\text{mm}$ ; $\times$ - $\mu_{r,pp} = 0,025 \text{ mm}$ ; $\Delta$ - $\mu_{r,pp} = 0,05 \text{ mm}$ ; $+$ - $\mu_{r,pp} = 0,1\text{mm}$ ...	72
Figura 4.6 – Ângulo de repouso em função do atrito de rolamento para diversos coeficientes de atrito estático: $\diamond$ $\mu_{s,pp} = 0,2$ ; $\Delta$ $\mu_{s,pp} = 0,3$ ; $+$ $\mu_{s,pp} = 0,4$ ; $\circ$ $\mu_{s,pp} = 0,5$ e; $\times$ $\mu_{s,pp} = 0,6$ .....	72
Figura 4.7 –Ângulo de repouso em função do atrito de rolamento partícula-parede, $\mu_{r,pw}$ , com atrito estático fixo, $\mu_{s,pp} = 0,4$ , e diferentes atritos de rolamento partícula-partícula , $\mu_{r,pp}$ : $\square$ $\mu_{r,pp} = 0,05 \text{ mm}$ e $\Delta$ $\mu_{r,pp} = 0,1\text{mm}$ .....	73
Figura 4.8 - Escoamento físico e numérico em condições similares com partículas de diâmetro $d = 5 \text{ mm}$ : (a) resultado físico; (b) resultado numérico com $\mu_{r,pp} = 0.05 \text{ mm}$ e $\mu_{s, pp} = 0,4$ .....	73
Figura 4.9 - Ângulo de repouso em função do coeficiente de atrito estático partícula-partícula, para diferentes atritos de rolamento.....	74

Figura 4.10 - Ângulo de repouso em função do coeficiente de atrito de rolamento partícula-partícula, para diferentes atritos estáticos.....	75
Figura 4.11 – (a) tempo de CPU com aumento do atrito estático; (b) tempo de CPU com aumento do atrito de rolamento .....	75
Figura 4.12 - Resistência ao escoamento revelada na parte inferior da caixa (fixo $\mu_{s,pp}=0,6$ ).	76
Figura 4.13 - Ângulo de repouso em função do coeficiente de restituição para diferentes atritos estáticos .....	76
Figura 4.14 - Ângulo de repouso em função do coeficiente de restituição para diferentes atritos de rolamento .....	77
Figura 4.15 - Variação inicial do ângulo de repouso em função apenas do coeficiente de atrito estático $\mu_{s,pp}$ para $\mu_{r,pp} = 0,05\text{mm}$ fixo em 7 s de simulação (condições iniciais) .....	78
Figura 4.16 - Crescimento do ângulo de repouso com ajustes dos parâmetros de atrito: $n=2$ , $\mu_{s,pp} = 0,6$ e $\mu_{r,pp} = 0,05\text{mm}$ ; $n=3$ , $\mu_{s,pp} = 0,9$ e $\mu_{r,pp} = 0,05\text{ mm}$ ; $n = 4$ , $\mu_{s,pp} = 1,0$ e $\mu_{r,pp} = 0,1\text{mm}$ ; $n = 5$ , $\mu_{s,pp} = 1,35$ e $\mu_{r,pp} = 0,2\text{mm}$ .....	80
Figura 4.17 -Variação inicial do ângulo de repouso em função apenas do parâmetro atrito de rolamento $\mu_{r,pp}$ para $\mu_{s,pp} = 0,4$ e variados tempos de simulação (condições iniciais).....	81
Figura 4.18 - Crescimento do ângulo de repouso com ajustes dos parâmetros de atrito: $n = 2$ , $\mu_{s,pp} = 0,4$ e $\mu_{r,pp} = 0,1\text{mm}$ ; $n = 3$ , $\mu_{s,pp} = 0,5$ e $\mu_{r,pp} = 0,2\text{mm}$ ; $n=4$ , $\mu_{s,pp} = 0,4$ e $\mu_{r,pp} = 0,4\text{mm}$ ; $n = 5$ , $\mu_{s,pp} = 0,5$ e $\mu_{r,pp} = 0,8\text{mm}$ .....	82
Figura 4.19 – Comportamento dos ângulos de repouso na geração randômicas de partículas (a) Forma 1; (b) Forma 2; (c) Forma 3; (d) Forma 4.....	83
Figura 4.20 – Comportamento do ângulo de repouso em seis simulações randômicas com Modelo de Hertz-Mindlin com coesão JKR, distribuição normal e partícula esférica.....	84
Figura 4.21-Dimensões que geram incertezas nas medições .....	85
Figura 4.22 - Calibração e validação de $\beta$ com erro de 2,9%.....	89
Figura 4.23- Fluxo de Couette com material granulado esférico em caso bidimensional: (a) sem vibração das paredes e com colapso inelástico; (b) com vibração da parede e sem colapso inelástico.....	90
Figura 4.24 - Formas de partículas obtidas por variação dos parâmetros N e A (a) circular ( $N=2$ , $A = 1.0$ ); (b) quadrada com cantos arredondados ( $N=6$ , $A=1.0$ ); (c) elíptica ( $N=2$ , $A=0.5$ ); (d) ladrilho ( $N=6$ , $A=0.5$ ).....	90
Figura 4.25 - Formas obtidas pela variação dos parâmetros N e A: (a) $A=1.0$ e $N=2$ (circular); (b) $A=0,5$ e $N=2$ (elíptica) .....	91
Figura 4.26 - Formas das partículas analisadas circunscritas por um diâmetro de 10 mm .....	91

Figura 4.27 - Forma 4 em seções diferentes .....	91
Figura 4.28 - Estágios iniciais das simulações: (a) forma 1, com 2000 partículas ; (b) forma 2, com 5200 partículas; (c) forma 3, com 4200 partículas; (4) forma 4, com 4000 partículas ...	93
Figura 4.29 – Estágios inicial, intermediário e final da partícula de forma 2 .....	94
Figura 4.30- Estágios inicial, intermediário e final da partícula de forma 3 .....	94
Figura 4.31- Estágios inicial, intermediário e final da partícula de forma 4 .....	94
Figura 4.32 – Ângulos de repouso em função da forma da partícula com modelo de Hertz-Mindlin com Atrito de Rolamento (sem deslizamento) RVD .....	95
Figura 4.33 - Tempo de CPU em função da forma das partículas: Forma 1 (7s); forma 2 (5s); forma 3 (5s) e forma 4 (4s).....	96
Figura 4.34 – Comparação dos tempos de CPU das partículas esféricas (calibradas) e não-esféricas (escoadas) com o modelo de Hertz-Mindlin com Atrito de Rolamento (sem deslizamento) RVD .....	99
Figura 4.35- Efeitos coesivo e adesivo produzidos pelo parâmetro energia de superfície $\gamma_{pp} = 0,20 \text{ J/m}^2$ : (a) escoamento coesivo no lado direito (b) desprendimento gradual das partículas do lado direito.....	100
Figura 4.36 – Comparação dos tempos de CPU na calibração das partículas não-esféricas com partículas esféricas para os dois modelos avaliados.....	101
Figura 4.37 - Influência do tamanho da partícula sobre as forças adesivas: interação partícula-parede.....	102

## LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1- Exemplo de valores que otimizam o ângulo de repouso $\beta$ em geometria 3D .....	33
Tabela 3.1 - Variáveis relacionadas com os movimentos de translação e de rotação .....	48
Tabela 3.2 - Variação do tempo de simulação em função do ângulo de repouso para 2000 partículas e variação do atrito de rolamento .....	56
Tabela 4.1 - Parâmetros utilizados na análise de Zhou et al. (2002) .....	70
Tabela 4.2 - Variação inicial do ângulo de repouso em função apenas de $\mu_{s,pp}$ .....	78
Tabela 4.3 - Ajuste do ângulo de repouso para parâmetro de atrito de rolamento, $\mu_{r,pp} = 1,0$ .....	79
Tabela 4.4 - Resultados intermediários dos ajustes dos coeficientes de atritos .....	79
Tabela 4.5 – Dados finais de ajuste dos pontos de decrescimento do ângulo de repouso com partícula esférica com diâmetro de 10 mm.....	79
Tabela 4.6- Variação inicial do ângulo de repouso em função apenas de $\mu_{r,pp}$ .....	80
Tabela 4.7 – Dados da simulação para o ângulo de $32,3^\circ$ com variação do atrito estático partícula-partícula e forma esférica .....	81
Tabela 4.8- Dados de ajuste dos pontos de decrescimento do ângulo de repouso com partícula esférica com diâmetro de 10 mm.....	82
Tabela 4.9 – Maiores diferenças entre as medidas esquerda e direita de $\beta$ com base em $\beta$ ....	83
Tabela 4.10- Síntese das variações dos ângulos de repouso em simulações randômicas com o modelo de Hertz-Mindlin com coesão JKR (partícula esférica com distribuição granulométrica).....	84
Tabela 4.11 -Valores convertidos em função do tamanho do pixel .....	86
Tabela 4.12- Resultados das análises feitas para o espalhamentos dos ângulo de repouso, devido à geração randômica das partículas com a inclusão de diferentes desvios-padrão.....	87
Tabela 4.13- Parâmetros da calibração da partícula esférica de diâmetro 10 mm e obtenção do ângulo de repouso $28,9^\circ$ , comparado com aproximadamente $28,1^\circ$ de Zhou et al. (2002) .....	88
Tabela 4.14 -Dados tratados pelo software SolidWorks .....	92
Tabela 4.15 - Cálculo das esfericidades no Excel .....	93
Tabela 4.16- Ângulos de repouso das partículas não-esféricas pelos parâmetros da validação da forma 1 .....	95
Tabela 4.17 – Parâmetros da calibração dos ângulos de repouso com Hertz-Mindlin com Atrito de Rolamento (sem deslizamento) RVD e partícula esférica .....	98
Tabela 4.18 – Comparação dos resultados da calibração dos escoamentos usando o modelo de Hertz-Mindlin com Atrito de Rolamento (sem deslizamento) RVD.....	98

Tabela 4.19- Parâmetros da calibração dos ângulos de repouso com Hertz-Mindlin com Coesão JKR das formas não-esféricas com partícula esférica de 10 mm .....	100
Tabela 4.20 -Comparação dos ângulos de repouso entre a forma esférica e não-esférica no modelo de Hertz-Mindlin com coesão JKR .....	100

## NOMENCLATURA

Símbolo	Descrição	unidade
$d$	Comprimento	m
$e$	Coefficiente de restituição	-
$e$ ou $e^*$	Índice de vazios ( $e^*$ usado para diferir do coef. de restituição)	-
$E$	Módulo de Young ou constante de proporcionalidade	
$E^*$	Módulo de Young equivalente	Pa (ou GPa)
$E\%$	Erro percentual	%
$e_{pp}$	Coefficiente de restituição partícula-partícula	-
$e_{pw}$	Coefficiente de restituição partícula-parede	-
$F$	Força	N
$F_n$	Força normal	N
$F_n^d$	Componente de amortecimento normal	N
$F_t$	Força tangencial	N
$g$	Aceleração da gravidade	m/s <sup>2</sup>
$G$	Módulo de cisalhamento ou módulo de elasticidade	Pa (ou GPa)
$G^*$	Módulo de cisalhamento equivalente	Pa (ou GPa)
$h$	Altura	m
$m^*$	Massa equivalente em relação as partículas $i$ e $j$	-
$r$	Raio da partícula	m
$R^*$	Raio equivalente entre partículas $i$ e $j$ contato	m
$R_{eq}$	Raio equivalente de uma esfera cujo volume é igual ao de uma partícula	
$S$	Grau de saturação	-
$S_s$	Superfície da partícula	m <sup>2</sup>
$S_t$	Rigidez tangencial	-
$V_T$	Volume total	m <sup>3</sup>
$\nu$	Coefficiente de Poisson	-
$V_a$	Volume de ar	m <sup>3</sup>
$v_n^{rel}$	Componente normal da velocidade relativa	m/s
$V_s$	Volume do sólido	m <sup>3</sup>
$v_t^{rel}$	Componente tangencial da velocidade relativa	m/s
$V_v$	Volume de vazios	m <sup>3</sup>
$V_w$	Volume de água	m <sup>3</sup>
$V_T$	Volume total do sistema	m <sup>3</sup>
$w$	Teor de umidade	%
$\beta^*$ e $S_n$	Rigidez normal	-
$\beta_D$	Média do par de ângulo de repouso medido no lado direito da caixa de fluxo (frente e verso)	Grau
$\beta_E$	Média do par de ângulo de repouso medido no lado esquerdo da caixa de fluxo (frente e verso)	Grau
$\beta$	Ângulo de repouso	Grau
$\beta_{ef}$	Ângulo de repouso medido no lado esquerdo e frontal	Grau
$\beta_{ev}$	Ângulo de repouso medido no lado esquerdo e verso	Grau
$\beta_{df}$	Ângulo de repouso medido no lado direito e frontal	Grau
$\beta_{dv}$	Ângulo de repouso medido no lado direito e verso	Grau
$\delta_n$	Distância sobreposta normal no contato partícula-partícula	m
$\delta_t$	Distância sobreposta tangencial	m

$\delta_R$	Incerteza da função R	
$\varepsilon$	porosidade	-
$\varepsilon_i$	Deformação de um corpo por uma tensão na direção $i$ como $\varepsilon_x$ e $\varepsilon_y$	m
$\mu$	Média aritmética	
$\sigma$	Desvio-padrão	-
$\sigma_i$	Tensão normal	Pa
$\mu_r$	Coeficiente de atrito de rolamento	m
$\mu_{r,pp}$	Coeficiente de atrito de rolamento partícula-partícula	m
$\mu_{r,pw}$	Coeficiente de atrito de rolamento partícula-parede	m
$\mu_s$	Coeficiente de atrito estático	-
$\mu_{s,pp}$	Coeficiente de atrito estático partícula-partícula	-
$\mu_{s,pw}$	Coeficiente de atrito estático partícula-parede	-
$\rho$	Massa específica	Kg/m <sup>3</sup>
$\rho_{bulk}$	Massa específica aparente	Kg/m <sup>3</sup>
$\rho_s$	Massa específica do sólido	Kg/m <sup>3</sup>
$\tau_i$ ou $M$	torque	N
$\tau$ ou $\tau_c$	Tensão cisalhante no círculo de Mohr	Pa
$\psi$	Esfericidade	-
$p_a$	Pressão exercida pelo ar	Pa
$p_L$	Pressão exercida pelo líquido	Pa
$r_1$	Raio de curvatura na dimensão x	m
$r_2$	Raio de curvatura na dimensão y	M
$R_n$	Média das variações randômicas do ângulo de repouso	%
$\varphi$	Ângulo de atrito interno	radianos

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>18</b>
1.1	CONSIDERAÇÕES INICIAIS	18
1.2	MOTIVAÇÃO DA DISSERTAÇÃO	19
1.3	OBJETIVOS DA DISSERTAÇÃO	22
1.4	METODOLOGIA	22
1.5	ESTRUTURA DO TRABALHO	25
<b>2</b>	<b>FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA</b>	<b>26</b>
2.1	SÓLIDOS GRANULARES E ESCOAMENTO GRANULAR	26
2.2	MASSA ESPECÍFICA REAL E APARENTE	27
2.3	ESFERICIDADE ( $\Psi$ )	27
2.4	FORMA DA PARTÍCULA	28
2.5	ÂNGULO DE REPOUSO (B)	29
2.6	ÂNGULO DE ATRITO INTERNO	33
2.7	TEOR DE UMIDADE (W)	34
2.8	TENSÃO SUPERFICIAL E CAPILARIDADE	34
2.9	POROSIDADE (E)	36
2.10	ESTADOS DE LIQUIDEZ EM SISTEMAS GRANULARES	37
2.10.1	Estado pendular	37
2.10.2	Estado funicular	37
2.10.3	Estado capilar	38
2.10.4	Estado de polpa	38
2.11	FORÇAS ATUANTES EM ESCOAMENTO DE SÓLIDOS GRANULARES	39
2.11.1	Escoamento de sólidos granulares finos e secos	39
2.11.2	Escoamento de granulados úmidos	39
2.11.3	Forças Adesivas	40
<b>3</b>	<b>MÉTODO DOS ELEMENTOS DISCRETOS (DEM)</b>	<b>44</b>
3.1	INTRODUÇÃO	44
3.2	FORMULAÇÃO MATEMÁTICA	47
3.3	IMPLEMENTAÇÃO ATRAVÉS DE SOFTWARE COMERCIAL – EDEM	49
3.3.1	Detecção de contatos	50
3.3.2	Passo de tempo de Rayleigh ( $T_R$ )	51
3.3.3	Algoritmo básico do Método	53
3.3.4	Gerenciamento do tempo de simulação	54
3.4	CONCEITUAÇÃO DE TIPOS DE ATRITO	57
3.5	FORÇAS DE CONTATO MECÂNICO	60
3.5.1	Modelo de Hertz-Mindlin sem Deslizamento	60
3.5.2	Hertz-Mindlin com Atrito de Rolamento (sem deslizamento) RVD	63
3.5.3	Modelo de Hertz-Mindlin com Coesão JKR	64
<b>4</b>	<b>ANÁLISE DA ESFERICIDADE DA PARTÍCULA NO MÉTODO DEM</b>	<b>67</b>
4.1	INTRODUÇÃO	67
4.2	ESCOAMENTO DE REFERÊNCIA – EXPERIMENTO DE ZHOU	68
4.2.1	Geometria e Condições Experimentais	68
4.2.2	Resultados Numéricos de Zhou	71
4.3	ANÁLISE DE SENSIBILIDADE DE PARÂMETROS NO MÉTODO DEM	73

4.3.1	Coefficiente de atrito estático.....	74
4.3.2	Coefficiente de atrito de rolamento .....	74
4.3.3	Coefficiente de restituição .....	76
4.3.4	Combinação dos Parâmetros de Atritos para Aumento do Ângulo de Repouso .....	77
4.3.5	Efeitos da Geração Randômica de Partículas .....	82
4.3.6	Incerteza do Ângulo de Repouso ( $\beta$ ) .....	84
4.4	CALIBRAÇÃO DE MODELOS DEM.....	87
4.4.1	Metodologia.....	87
4.4.2	Calibração Para o Experimento de Zhou.....	88
4.5	ANÁLISE DO EFEITO DA FORMA DA PARTÍCULA .....	89
4.5.1	Geração de Partículas Não-Esféricas.....	91
4.5.2	Esfericidade das Formas Geradas .....	91
4.5.3	Escoamento de Partículas Não-Esféricas - Experimento de Zhou.....	93
4.5.4	Utilização de Partículas Esféricas para Simulação de Escoamentos de Partículas Não-Esféricas .....	96
4.5.5	Discussão .....	100
5	CONCLUSÃO.....	103
	REFERÊNCIAS .....	104
	APÊNDICES .....	108
	APÊNDICE A .....	109
	APÊNDICE B.....	119
	APÊNDICE C.....	123

---

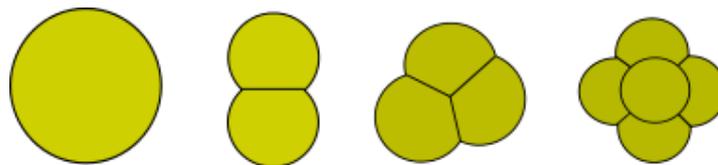
# 1 INTRODUÇÃO

## 1.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

As iniciais DEM significam *Discrete Element Method* (Método dos Elementos Discretos), que atualmente é o método numérico mais utilizado em análise de escoamento de materiais granulados (ZHU *et al.*, 2008). São exemplos de materiais granulados a areia, minério, solo, arroz, feijão, milho, soja, etc.

Neste trabalho são analisados os efeitos da forma da partícula na aplicação do método DEM utilizando o pacote computacional EDEM 2.4. O estudo emprega quatro formas de partículas com diferentes esfericidades, incluindo a forma esférica (Figura 1.1).

**Figura 1.1 - Partículas DEM formadas por sobreposição de esferas**



Particulados como arroz, feijão, milho ou areia possui formas bem definidas, entretanto, alguns materiais não apresentam forma regular, sendo, portanto, necessário criar condições mais simples para representá-los, pois simulações mais complexas requerem, principalmente, mais recursos computacionais. Além disso, materiais granulares finos podem não ter uma forma representativa num conjunto de suas partículas e é preciso se valer de formas aproximadas.

O ângulo de repouso é o principal instrumento da análise de dados. Em escoamentos de material granular, o ângulo da pilha fornece uma compreensão dos atritos e da coesão.

No trabalho encontram-se, por exemplo, mecanismos de calibração, a incerteza e o erro dos ângulos de repouso. A calibração é uma combinação de parâmetros físicos que ajustam escoamentos distintos por meio da comparação de seus ângulos de repouso. Geralmente, este processo consta de duas etapas: experimental e numérica. Neste caso, os experimentais foram obtidos da literatura.

O erro e a incerteza estão em tópicos específicos. Além destes, encontram-se os esforços computacionais, a sensibilidade de parâmetros DEM da interação partícula-partícula, o que foi método adotado para o gerenciamento do tempo da simulação, o cálculo das

esfericidades das partículas DEM e uma lógica de combinação de parâmetros de atritos para aumentar o ângulo de repouso, decorrente da necessidade de calibração.

Dois modelos de força de contato mecânico foram testados: o modelo de Hertz-Mindlin com Atrito de Rolamento (sem deslizamento) Dependente da Velocidade Relativa de Rotação, proposto por ZHOU et al. (1999) e o modelo de Hertz-Mindlin com Coesão JKR (1971). O primeiro é também conhecido como modelo de Hertz-Mindlin com Atrito de Rolamento (sem escorregamento) RVD. Estes são apenas dois de uma variedade de modelos predisponíveis no pacote do EDEM. Foram escolhidos para a análise dos atritos e da energia de superfície das partículas como úteis ao processo de calibração do ângulo de repouso. Contudo, são descritos três deles, contando com o modelo de Hertz, que tem os outros dois como extensões. As descrições estão em tópicos específicos deste trabalho.

## 1.2 MOTIVAÇÃO DA DISSERTAÇÃO

A aplicação do método DEM à variadas formas de partículas gera interesse dos projetos de engenharia que lidam com aglomerados mais finos de pós de minério de ferro. Estes *aglomerados*, que se encontram entre 0,15 a 6,35 mm de diâmetro são conhecidos como *sinter-feed* (QUARESMA, 2001).

Sabe-se que a mineração do ferro tem grande participação na economia brasileira. Que as principais minas brasileiras de minério de ferro (de hematita e os itabiritos) se encontram nos Estados: Pará (Serra dos Carajás), Minas Gerais e Mato Grosso do Sul (PEREIRA, 2005).

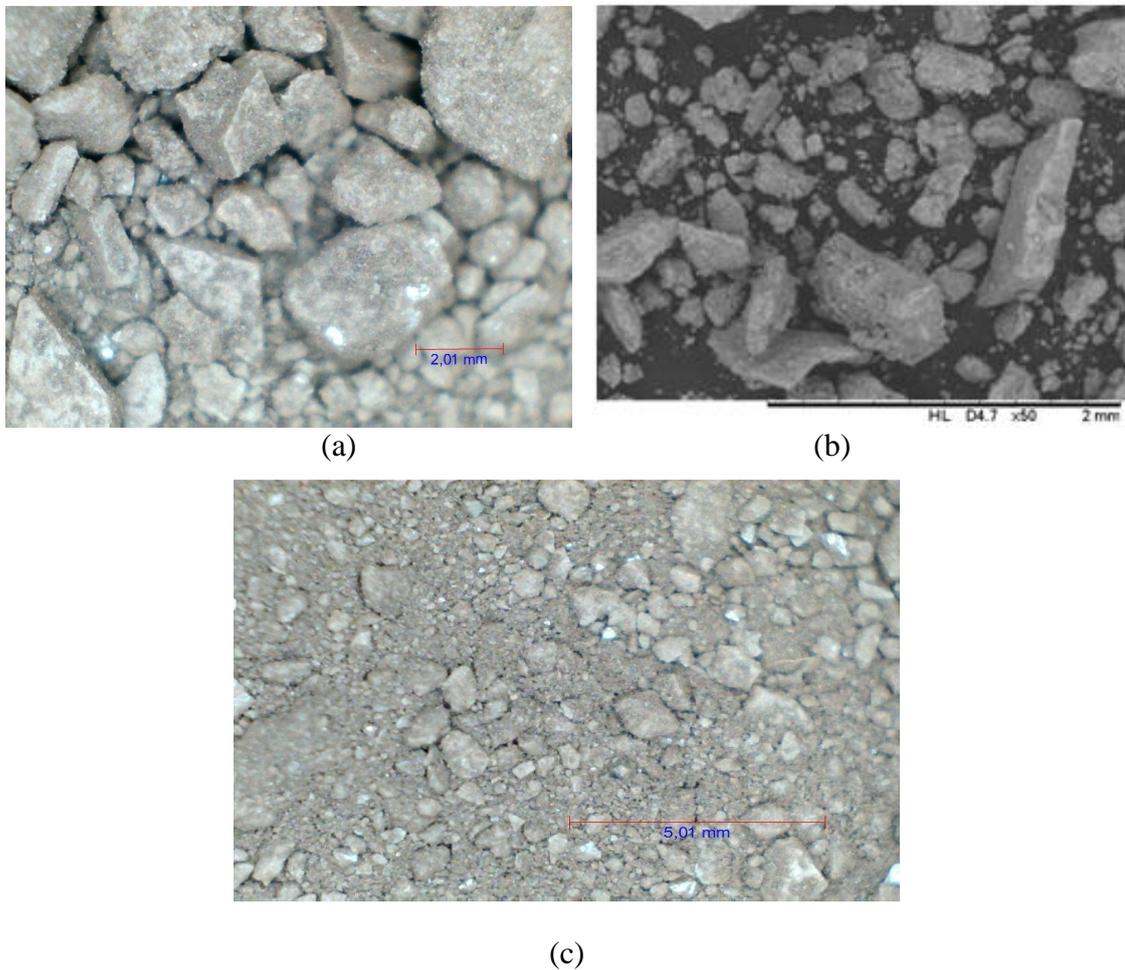
Uma vez que o Pará contribui com a produção anual de 110 000 000 toneladas de minério de ferro (DNPM, 2011), há necessidade de manutenção das condições de escoamento desse minério. Nesse sentido, modelos de simulações DEM são cada vez mais explorados e aprimorados. Assim, o método pode ser aplicado para resolver problemas no manuseio do minério de ferro, influenciado pela forma e tamanho de suas partículas, bem como para solução de problemas decorrentes da umidade, da liquefação, do Limite de Umidade Transportável (TML) nos navios (SPENCER e TILSLEY, 2011), de problemas com pontes de líquido (MITARAI e NORI, 2006) ou ainda para o estudo de particulados finos responsáveis pelas forças de van der Waals (SCHULZE, 2007).

Como exemplo, no minério de ferro as forças de van der Waals atuantes nas partículas finas, e as pontes de líquido formadas do conteúdo líquido nas partículas estão mostradas na Figura 1.2 e na Figura 1.3.

Já a liquefação é um fenômeno que ocorre por meio da vibração mecânica do minério úmido que adquire a aparência da Figura 1.4. É importante verificar no minério de ferro *sinter-feed* que suas partículas não possuem forma definida, mas uma vasta variedade de formas angulares. Essa característica não só lhe atribui propriedades específicas favoráveis ao fenômeno da liquefação (PEREIRA, 2005), mas também ver-se a dificuldades para sua reprodução numérica.

Quanto a umidade, o problema mais comum é a formação de pontes de líquidos relacionado à fatores climáticos como os da Figura 1.5.

**Figura 1.2 – Microscopia do Sinter feed seco: presença de finos e formas variada das partículas: (a) aumento 20X; (b) aumento 50X**



**Figura 1.3- Pontes de líquido devido à umidade: aumentado 380 X**

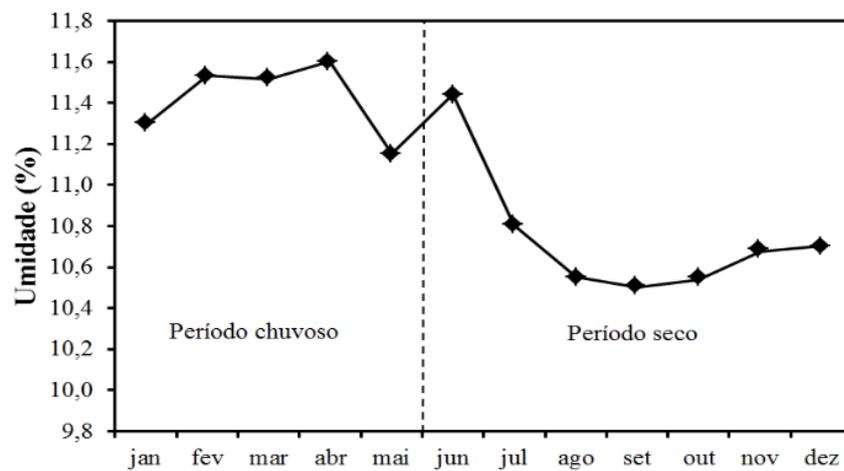


**Figura 1.4 – Finos de minério de ferro liquefeito**



Fonte: Spencer e Tilsley (2011)

**Figura 1.5 - Típicos valores de umidade do minério de ferro Carajás (sinter feed)**



Fonte: Nogueira et al. (2011) com adaptações

### 1.3 OBJETIVOS DA DISSERTAÇÃO

Considerando os problemas que o minério de ferro *sinter-feed* apresenta, o objetivo geral desta dissertação é aplicar o método DEM para reproduzir escoamentos de material granular, usando formas esféricas e buscando reduzir o esforço computacional, isto é, calibrando partículas esféricas de mesmo diâmetro em substituição às não-esféricas.

Especificamente, têm-se seis objetivos: analisar os efeitos das quatro diferentes formas de partículas mostradas (Figura 1.1), donde a partícula esférica é usada na calibração das partículas não-esféricas; realizar cálculos para a incerteza e para a esfericidade das partículas DEM; contabilizar o tempo na simulação e o tempo de CPU; analisar as variações randômicas da geração de partículas; analisar a sensibilidade de parâmetros DEM; combinar parâmetros de atritos para aumentar o ângulo de repouso.

### 1.4 METODOLOGIA

Os escoamentos das partículas foram realizados dentro de uma caixa virtual retangular, com escala, típica da análise de materiais granulares. Esta caixa é comumente conhecida como caixa de fluxo.

A escala da caixa de fluxo está de acordo com as atividades experimentais de Zhou et al. (2002) usando partículas de 10 mm de diâmetro. Os detalhes da geometria da caixa estão no Capítulo 4.

Inicialmente foram criadas e armazenadas na biblioteca DEM, as quatro partículas DEM da Figura 1.1, já apresentadas. A seguir foi feita a calibração da partícula esférica de 10 mm de diâmetro para os dados de Zhou et al. (2002). Esta calibração foi importante, porque ela validou e definiu os parâmetros iniciais de referência para os escoamentos seguintes das partículas não-esféricas, isto é, permitiu que todas as partículas-não esféricas fossem mantidas sob as mesmas condições.

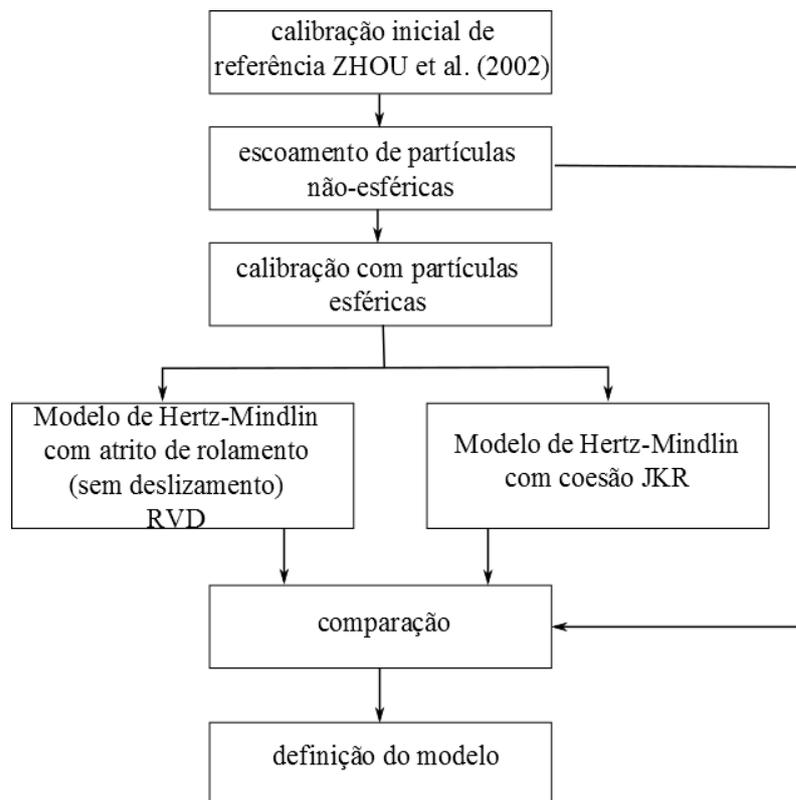
Os escoamentos são analisados pela comparação dos ângulos de repouso. Assim que os ângulos de repouso das partículas não-esféricas são interpretados, na etapa seguinte a partícula esférica é usada para a calibração de todos os ângulos obtidos pelas partículas não-esféricas.

Para obter os resultados dessa análise basta seguir o fluxograma apresentado pela Figura 1.6.

Verá que, ao final, os dois modelos de forças de contato foram checados: o modelo de Hertz-Mindlin com Atrito de Rolamento (sem deslizamento) RVD e o modelo de Hertz-Mindlin com Coesão JKR.

O último modelo apenas acrescenta energia de superfície às partículas. E a calibração do ângulo de repouso permite que os dois modelos sejam comparados e suas propriedades definidas.

**Figura 1.6 - Fluxograma para as análises das quatro partículas DEM**



São etapas numéricas da análise:

- Pré-processamento:
  - Geometria de caixa de fluxo com dinâmica de abertura das comportas laterais ;
  - Definição de propriedades físico-mecânicas iniciais;
  - Geração Randômica de partículas.
- Resolução:
  - Método dos Elementos Discretos – DEM: Modelo de Contato Mecânico
  - Calibração do ângulo de repouso;
- Pós-processamento:
  - Gráficos da energia cinética no gerenciamento do tempo de simulação (em valores inteiros de segundos);

- Medição dos Ângulos de Repouso ;
- Tempo de CPU ;
- Análise dos resultados.
- Discussão ou interpretação dos resultados

## 1.5 ESTRUTURA DO TRABALHO

Este trabalho está dividido em cinco capítulos. O primeiro capítulo introduz o assunto do trabalho e apresenta os objetivos da dissertação. O Capítulo 2 apresenta a fundamentação teórica que define o que é um sistema granular, suas propriedades, grandezas como esfericidade das partículas, distribuição granulométrica, ângulo de atrito interno, umidade, os estados dos sistemas particulados e a descrição para as forças adesivas.

O Capítulo 3 introduz o Método dos Elementos Discretos, seu algoritmo base, as equações governantes, a estimativa do passo de tempo de Rayleigh, o gerenciamento do tempo de simulação, a descrição de três modelos de contato e os conceitos de atrito estático e de rolamento.

No Capítulo 4 estão os resultados desse trabalho. O método DEM é aplicado na análise dos efeitos das formas das partículas e na calibração de escoamentos padrão com a forma esférica. São realizadas análises para a sensibilidade de parâmetros DEM e a combinação de parâmetros de atritos para aumentar o ângulo de repouso.

Finalmente, o Capítulo 5 é a conclusão do trabalho. É uma síntese dos resultados sobre a calibração, com um diâmetro de partícula, o tempo de CPU e alguns parâmetros DEM. No corrente capítulo, dá-se ênfase que a partícula esférica pode representar escoamentos realizados por partículas não-esféricas.

## 2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

### 2.1 SÓLIDOS GRANULARES E ESCOAMENTO GRANULAR

Materiais granulares são conhecidos como um conjunto de partículas que, de maneira geral, são macroscópicas em diferentes formas e tamanhos. São exemplos, areias, minerais, solo, seixo, cimento, carvão, feijão, milho, etc. São reconhecidos como partículas individuais, ou particulados pertencente à área da Tecnologia de Sólidos (SCHULZE, 2007), que possui comportamento interativo partícula com partícula.

São muito comuns encontrar nos campos da Engenharia e da Física abordagens físico-matemática para colisões inelásticas, forças de atrito, quantidade de movimento, energias, etc., envolvendo sistemas não granulares. Mas atualmente, os granulares secos ou úmidos vem conquistando essa atenção na aplicação do método dos Elementos Discretos (DEM). Assim, o que outrora concentrou a atenção de muitos cientistas, atualmente, nessa área, estudos vem sendo realizados buscando entender a dinâmica dos fenômenos dos sistemas particulados. Destaca-se, a influência de forças adesivas, tais como as forças de wan der Waals, efeito capilar e tensão superficial, força eletrostática e pontes de líquido, coexistindo nos velhos fenômenos, como é o caso da coesão e adesão (MITARAI e NORI, 2006).

O interesse sobre o comportamento dinâmico dos materiais granulares pode ser justificado pela grande frequência desses materiais no mercado. Como já fora destacado pela Federação europeia de Engenharia Química, 60% de todos os produtos produzidos na indústria química da Europa, são sólidos granulares e, ainda, 20% dessa produção usam sólidos granulares em seus processos (SCHULZE, 2007).

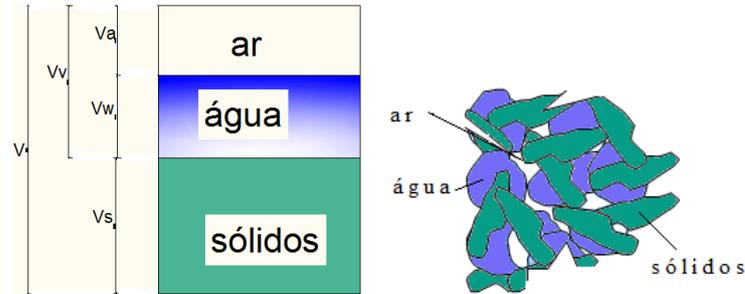
As investigações sobre a umidade, por exemplo, partem desde as observações mais comuns. Mitarai (2006), investigou a capacidade da areia de praia úmida sustentar enormes e relativamente altos castelos de areia que as crianças fazem. Seu estudo ajuda a entender os fundamentos quantitativos das forças das pontes de líquido.

Por outro lado, simulações de sistemas granulares com o uso de modelos numéricos vem se tornando uma ferramenta de investigação na prevenção de diversos problemas da cadeia industrial, a exemplo, o efeito provocado pela umidade sobre sistemas granulares não saturados por líquido, que levam ao fenômeno da liquefação (ASHMAWY et al., 2003).

## 2.2 MASSA ESPECÍFICA REAL E APARENTE

A Figura 2.1 é uma amostra de material particulado. Nela identificamos as variáveis referenciadas no tratamento de sólidos granulares.

**Figura 2.1 - Composição de um elemento de solo não saturado**



$V_T$  é o volume total,  $V_T = V_s + V_v$

$V_v$  é o volume de vazios,  $V_v = V_a + V_w$

$V_a$  é o volume de ar

$V_w$  é o volume de água

$V_s$  é o volume de sólidos

$m_s$  é a massa total dos sólidos

A massa específica aparente é a razão entre a massa total dos sólidos e o volume total dos sólidos, dado segundo a expressão

$$\rho_b = \frac{m_s}{V_T} \quad (2.1)$$

A massa específica real é a razão entre a massa total dos sólidos e o volume dos sólidos, isto é,

$$\rho = \frac{m_s}{V_s} \quad (2.2)$$

## 2.3 ESFERICIDADE ( $\psi$ )

É a razão entre a superfície de uma esfera de volume equivalente ao da partícula,  $S_e$ , e a superfície da partícula,  $S_s$ . É dimensional, e denotado por

$$\psi = \frac{S_e}{S_s} \quad (2.3)$$

Para o cálculo da esfericidade por esta expressão são necessários que o raio equivalente,  $R_{eq}$ , de uma esfera gere o volume da partícula, isto é, dado o volume da partícula,  $V_s$ , pode-se determinar o raio equivalente,  $R_{eq}$ , pela expressão

$$V = \frac{4}{3} \pi R_{eq}^3 \quad (2.4)$$

Assim, raio equivalente,  $R_{eq}$ , é expresso por

$$R_{eq} = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}} \quad (2.5)$$

Sendo, pois,  $S = 4\pi R^2$ , a expressão da superfície da esfera com  $R = R_{eq}$ , então  $S = S_e$ .

A superfície,  $S_e$ , da esfera é dada por

$$S_e = 4\pi R_{eq}^2 \quad (2.6)$$

$$S_e = 4\pi \left( \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}} \right)^2 = \sqrt[3]{\frac{(3V)^2 (4\pi)^{\cancel{2}}}{(4\pi)^{\cancel{2}}}} = \sqrt[3]{36\pi V^2} \quad (2.7)$$

Dependendo da forma da partícula, sua superfície,  $S_p$ , pode ser obtida por métodos matemáticos ou por de softwares específicos.

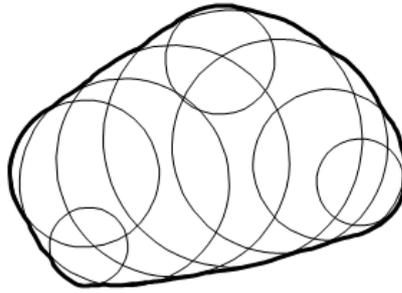
## 2.4 FORMA DA PARTÍCULA

Ashamawy et al. (2003) estudou a susceptibilidade da liquefação transformando variados tamanhos de discos em partículas angulares com distribuição granulométrica equivalentes. Essa investigação é promissora, pois, grande parte dos softwares DEM são limitados em relação à forma das partículas. Foi preciso um conjunto de rotinas num software específico conhecido como *Fish* para tal tarefa.

Por outro lado, para simular partículas angulares de um grupo de areias foi utilizada a projeção bidimensional das partículas, onde estas foram escaneadas em um analisador de imagem digital. Os contornos foram aproximados pelo Método dos Elementos Discretos (DEM) com a sobreposição de círculos nas fronteiras das partículas (Figura 2.2).

Com esse procedimento, foram obtidas partículas representativas das seguintes espécies: esferas de vidro, areia de dunas de Michigan, areia Syncrude Tailings, areia de praia Daytona, areia angular Ottawa e areia arredondada Ottawa.

**Figura 2.2 - Círculos inscritos dentro da secção de uma partícula para captura da forma**

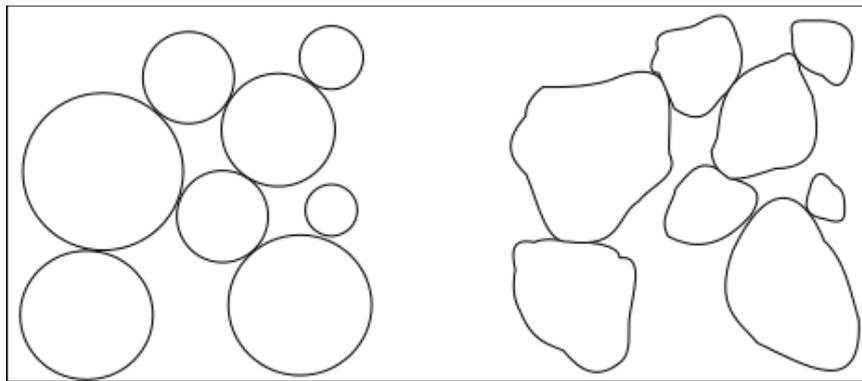


Fonte: Ashmawy et al (2003)

A preocupação do algoritmo em capturar as formas das partículas angulares ligando uma série de círculos ou discos não poderia afetar o tempo computacional. Não há nesse processo nem detecção dos contatos nem tampouco cálculo das forças de contato entre os discos sobrepostos da mesma coleção, cujo número se limita de aproximadamente 10 a 15 discos.

O código DEM gera os discos bidimensionais e as rotinas transformam cada partícula da distribuição em sua equivalente angular. A partícula correspondente angular é igual em área à partícula original. Notemos que o algoritmo seja invocado após a geração de discos e determinada distribuição. Veja a Figura 2.3 como as partículas DEM são transformadas em suas equivalentes angulares.

**Figura 2.3 -Distribuição randômica de partículas em forma de discos que foi transformada na sua correspondente angular**



Fonte: Ashmawy (2003), adaptado pelo autor

## 2.5 ÂNGULO DE REPOUSO ( $\beta$ )

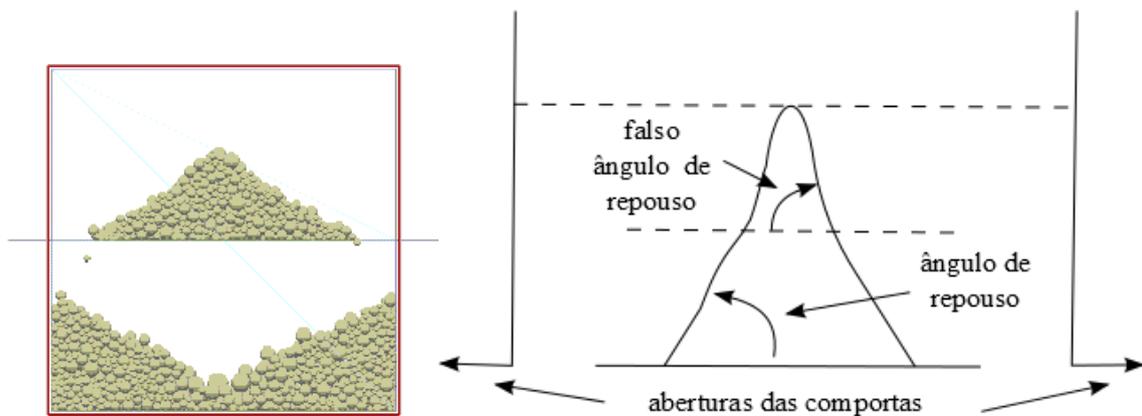
O ângulo de repouso ( $\beta$ ) é fisicamente definido por Schulze (2007, p. 172) como a inclinação medida na base de uma pilha dos sólidos granulares, não compactados, após o escoamento.

É comum encontrar para o ângulo de repouso, a seguinte classificação:

- $\beta < 30^\circ$  - pó de escoamento fácil;
- $30^\circ < \beta < 50^\circ$  - pó de escoamento difícil;
- $\beta > 50^\circ$  - pó coesivo.

O ângulo não medido na base, que geralmente deforma a pilha, é conhecido como falso ângulo de repouso, consoante a Figura 2.4.

**Figura 2.4 - Material coesivo com falso ângulo de repouso**

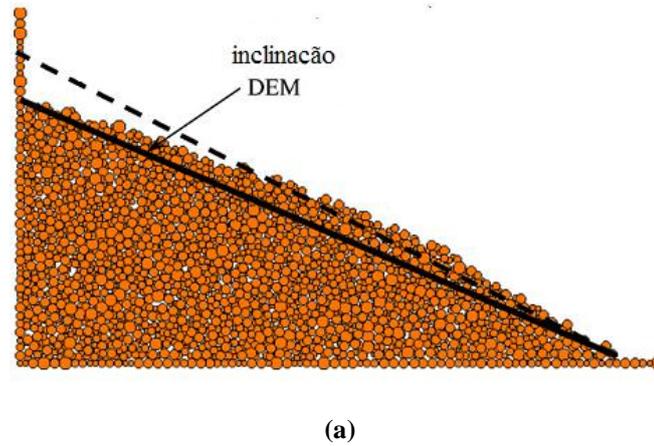


Fonte: Kaye (1997) com adaptações

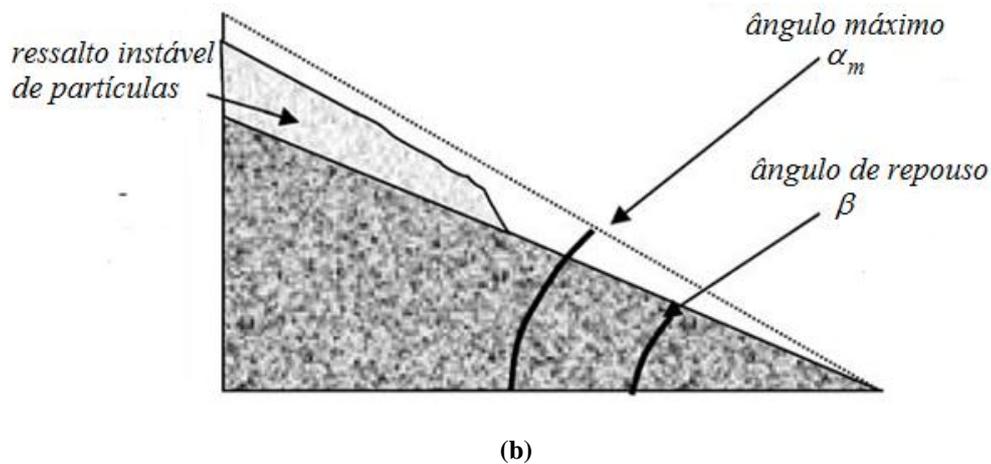
Como consequência da existência do falso ângulo de repouso, verifica-se a dificuldade de precisão numérica (Figura 2.5a). Mesmo assim, o ângulo de repouso costuma ser medido em relação à base da pilha (COETZEE e ELS, 2009). Destaca-se também o trabalho de Robinson e Friedman (2002) que analisaram dois valores na descrição do ângulo de repouso, direta e indiretamente relacionados com a inclinação da pilha, conforme Figura 2.5b - *ângulo máximo de estabilização* da pilha (linha tracejada) e *ângulo de repouso* (linha contínua).

As formas de medir o ângulo de repouso usadas por Robinson e Friedman (2002) são distintas, uma vez que não só nesses trabalhos os ângulos são difíceis de se estabelecer. De acordo com Zhou et al. (1999) a energia cinética das partículas não se anula completamente para que haja a estabilização de uma pilha; razão pela qual não se forma um ângulo de repouso bem definido.

Figura 2.5- Ângulo de repouso medido numericamente (DEM)



Fonte: Coetzee e Els (2009)



Fonte: Robinson e Friedman (2002) com adaptações

Sendo o ângulo de repouso difícil de se medir com precisão, pode-se reduzir os seus erros, tomando, por exemplo, a média de um número maior de medidas. O procedimento é mostrado abaixo para a medida do lado esquerdo da caixa ( $\beta_E$ ), conforme Figura 2.6a e Equação (2.9). Os ângulos medidos aos pares não alteram o significado da média de todas as medidas dos ângulos de repouso em torno da caixa. De fato, a Equação (2.11) demonstra isso. O procedimento é repetido para a medida do lado direito ( $\beta_D$ ) e acrescentado no cálculo da média  $\beta$  (Figura 2.6b e Figura 2.6c)

A Tabela 2.1 apresenta os resultados de dois escoamentos a partir das medidas tomadas separadamente.

As quatro equações a seguir demonstram que estas formas diferentes de obter o ângulo de repouso não alteram o resultado de  $\beta$ .

$$\beta = \frac{\beta_E + \beta_D}{2} \quad (2.8)$$

Com

$$\beta_E = \frac{\beta_{ef} + \beta_{ev}}{2} \quad (2.9)$$

$$\beta_D = \frac{\beta_{df} + \beta_{dv}}{2} \quad (2.10)$$

Onde:

$\beta_{ef}$  - ângulo de repouso medido no lado esquerdo e frontal

$\beta_{ev}$  - ângulo de repouso medido no lado esquerdo e verso

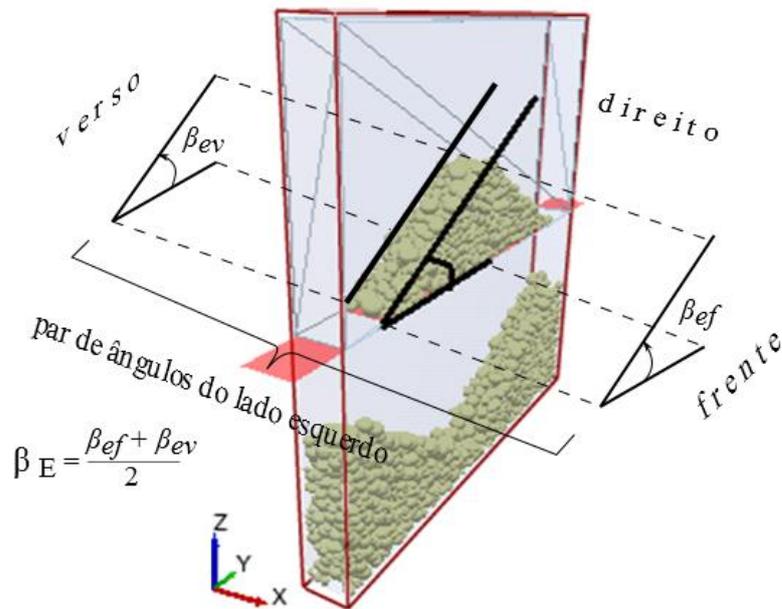
$\beta_{df}$  - ângulo de repouso medido no lado direito e frontal

$\beta_{dv}$  - ângulo de repouso medido no lado direito e verso

O valor do ângulo de repouso  $\beta$  é o mesmo que a média das quatro medidas acima. De fato,

$$\beta = \frac{\beta_E + \beta_D}{2} = \frac{\frac{\beta_{ef} + \beta_{ev}}{2} + \frac{\beta_{df} + \beta_{dv}}{2}}{2} = \frac{\beta_{ef} + \beta_{ev} + \beta_{df} + \beta_{dv}}{4} \quad (2.11)$$

Figura 2.6 – Ângulo de repouso: (a) média  $\beta_E$ ; (b)  $\beta = 43,5^\circ$ ; (c)  $\beta = 55,5^\circ$ ;



(a)

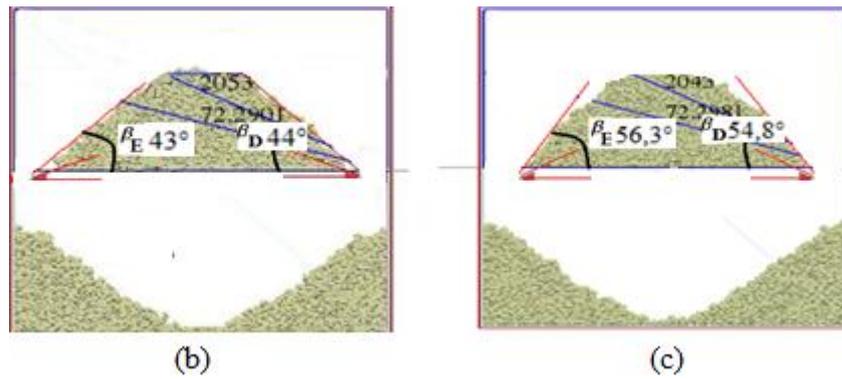


Tabela 2.1- Exemplo de valores que otimizam o ângulo de repouso  $\beta$  em geometria 3D

MEDIÇÃO FRONTAL E VERSO				
$\beta_E$ (esquerdo)		$\beta_D$ (direito)		Média
$\beta_{ef}$	$\beta_{ev}$	$\beta_{df}$	$\beta_{dv}$	$\beta$
42,6	43,4	44,0	44,0	43,50
54,7	57,9	50,0	59,6	55,55

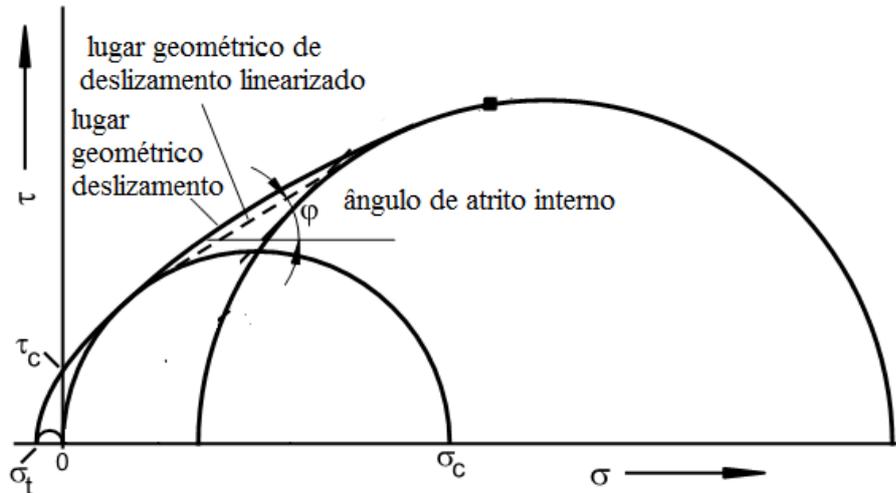
## 2.6 ÂNGULO DE ATRITO INTERNO

As resistências existentes sobre os escoamentos de materiais particulados são parâmetros importantes e podem ser determinados experimentalmente. O ângulo de atrito interno é obtido por teste de cisalhamento com a célula Jenike. Jenike foi quem introduziu esta técnica por volta de 1960 e ela permite descrever as propriedades de fluxo a partir da inclinação da reta tangente sobre o lugar geométrico dos pontos do diagrama  $\sigma_i$ ,  $\tau$  (SCHULZE, 2007).

O diagrama  $\sigma_i \times \epsilon_i$ , ou tensão-deformação convencional, também é uma forma gráfica de representar os valores da tensão normal e da deformação de um corpo. A curva resultante é lida para a abscissa  $\epsilon_i$  e a ordenada  $\sigma_i$ .

Outra técnica conta com o auxílio do Círculo de Tensões de Mohr. Ao contrário do diagrama tensão-deformação convencional, o eixo das abscissas é formado pelas tensões normais,  $\sigma_i$ , e as ordenadas pelas tensões cisalhantes  $\tau_c$ . De acordo com a Figura 2.7, são pares ordenados de tensão ( $\sigma_i$ ,  $\tau_c$ ) que reproduzem o lugar geométrico de deslizamento do material granular enquanto a curva linearizada fornece, para muitas aplicações, o modo mais prático de se obter um valor constante para o ângulo de atrito interno ( $\phi$ ). De fato, uma vez que o lugar geométrico de deslizamento é convexo, o ângulo de atrito interno varia ao longo da curva.

Figura 2.7- Lugares geométricos que definem o ângulo de atrito interno



Fonte: Schulze (2007)

## 2.7 TEOR DE UMIDADE ( $w$ )

A umidade pode ser obtida diretamente medindo a massa de um solo úmido ( $m$ ) e secando-o em uma estufa com temperatura em torno de  $105^{\circ}\text{C}$  a  $110^{\circ}\text{C}$  por pelo menos 24 horas. A diferença entre a massa da amostra,  $m$ , e a massa de solo seca ( $m_s$ ) é a massa de água ( $m_w$ ).

O teor de umidade é definido como a razão entre a massa da água,  $m_w$ , e a massa do sólido úmido,  $m_s$ , dado pela expressão,

$$w = \frac{m_w}{m_s + m_w} \quad (2.12)$$

Com

$$m = m_s + m_w \quad (2.13)$$

Nota-se que quando a massa de solo não contiver líquido,  $m_w = 0$ , e  $m = m_s$ , e, portanto, a umidade é nula.

Naturalmente a umidade não se distribui uniforme numa amostra. Ela é mais influente em aglomerados de partículas menores, devido ao fato de que a superfície específica de partículas menores é maior do que de maiores.

## 2.8 TENSÃO SUPERFICIAL E CAPILARIDADE

A tensão superficial,  $\gamma$ , é definida como a razão entre Força,  $F$ , por unidade de comprimento,  $d$ , denotado por

$$\gamma = \frac{F}{d} \quad (2.14)$$

A unidade no SI é dada em N/m. Em termos de energia de superfície é dada em J/m<sup>2</sup>.

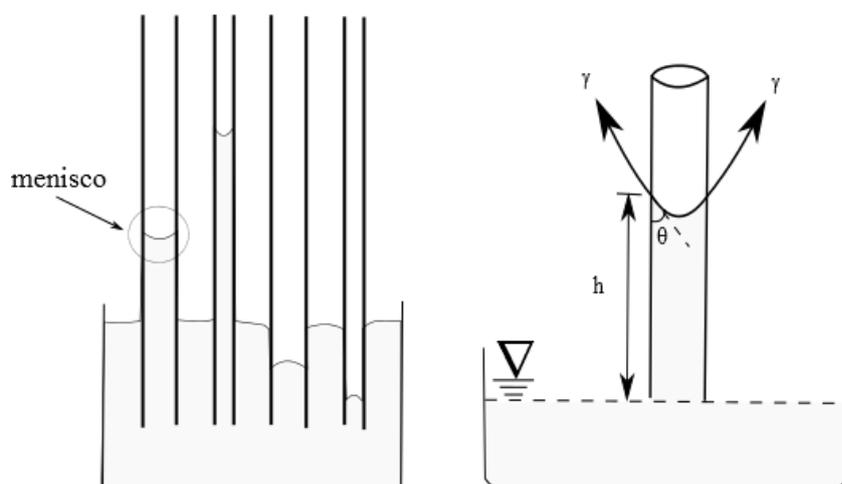
Assim como em tubos de diâmetros pequenos, a água capilar nos solos possui comportamento ascendente pelos interstícios de particulados finos.

Um menisco é formado na parte superior do duto. A Figura 2.8 apresenta as formas de como o menisco pode aparecer. Sua curvatura depende do diâmetro do duto e da substância líquida. O menisco criado pela água é curvado para cima enquanto que o criado pelo mercúrio é curvado para baixo.

De acordo com testes em dutos, o nível de água alcança altitudes  $h$  maiores, quanto menor for o diâmetro do duto (Figura 2.8). Essa altura pode ser obtida pela Equação (2.15). A água em contato com ar e um sólido forma um ângulo entre o sólido e a interface ar/água. Este ângulo é medido da superfície sólida através do líquido. O ângulo formado pode ser pequeno ou grande. Se as forças de adesão puxam as moléculas de água em direção à superfície sólida e molha a superfície, o ângulo de contato é pequeno, todavia, se as forças de coesão resistem a este puxão e cria uma gota com formato mais esférico, o ângulo de contato é grande (RADCLIFFE e SIMUNEK, 2010).

O nível de água livre subterrânea no solo é equivalente à água da vasilha, enquanto que a altura atingida pela ascensão capilar depende em solos é inversamente proporcional ao diâmetro dos vazios entre as partículas.

**Figura 2.8 - Efeito capilar**



Fonte: [www.google.com.br](http://www.google.com.br) com adaptações

$$h = \frac{2\gamma \cos \theta}{\rho g r} \quad (2.15)$$

De acordo com a Equação (2.15) e a Figura 2.8, temos:

$\gamma$  – tensão superficial, em Pa.

$\theta$  – ângulo, em graus, formado no líquido entre o plano tangente à sua superfície no ponto de contato e a parede do recipiente (ângulo de contato)

$\rho$  – massa específica do líquido, em  $\text{kg/m}^3$

$r$  – raio do duto ou do canal interstício entre as partículas do solo, em m

$g$  – força de atração gravitacional, constante e igual a  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$

O aumento da tensão superficial,  $\gamma$ , aumenta a altura  $h$  da coluna de líquido. No caso da água, a tensão superficial diminui com o aumento da temperatura, uma vez que, quimicamente, a temperatura provoca mudanças nas ligações do hidrogênio da molécula de água.

O efeito do ângulo de contato,  $\theta$ , provoca variações na função cosseno, tais como 1 em  $0^\circ$ ; 0 em  $90^\circ$  e de -1 em  $180^\circ$ . Assim a ascensão capilar decresce quando o ângulo de contato aumenta. É negativa para líquido como o mercúrio com ângulo de contato maior que  $90^\circ$ .

A equação de ascensão capilar explica como a água sobe de uma superfície de água livre dentro de pequenos espaços entre as partículas.

## 2.9 POROSIDADE ( $\varepsilon$ )

Consideremos um sistema de sólidos granulares em que as partículas do sistema coexistem com o ar. Se  $V_v$  é o volume de vazios,  $V_s$  o volume de sólidos e  $V_T$  o volume do sistema, podemos estabelecer para o volume do sistema as seguintes razões

$$\frac{V_v}{V_T} + \frac{V_s}{V_T} = 1 \quad (2.16)$$

A segunda parcela do lado esquerdo é o volume de sólido estritamente denso, isto é, a massa dominante do sistema. Por conseguinte, a primeira parcela será a parte do vazio do sistema. Chamamos de  $\varepsilon$  essa parcela, que é definida de porosidade, isto é,

$$\varepsilon = \frac{V_v}{V_T} \quad (2.17)$$

Em geral, a densidade do ar em relação às partículas sólidas é menor.

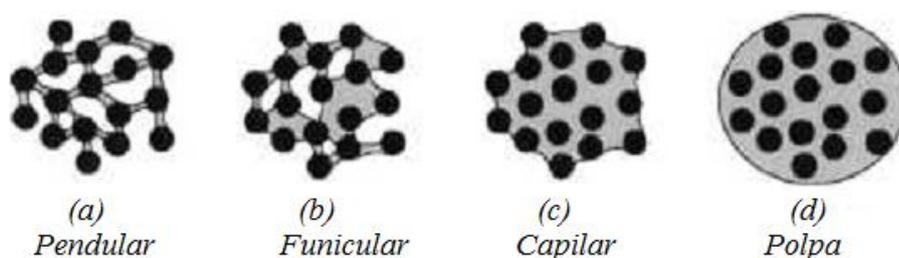
## 2.10 ESTADOS DE LIQUIDEZ EM SISTEMAS GRANULARES

A condição que o material granular estar permite identificar a intensidade ou a natureza das forças adesivas existentes sobre o sistema (SCHULZE, 2007). Para os materiais úmidos serão discutidos alguns estados.

Se uma pequena quantidade de líquido de baixa viscosidade é adicionada a um sistema granular, pontes de líquido se formam entre as superfícies das partículas. A Figura 2.9 é uma forma simples de representar essa ligação por meio de partículas esféricas (SCHULZE, 2007).

De acordo com o volume de líquido do sistema, quatro estados de liquidez são possíveis para caracterizar as concentrações de umidade: estado pendular, estado funicular, estado capilar e estado de polpa.

**Figura 2.9 - Estados de umidade em materiais granulares**



Fonte: Rondet (2008)

### 2.10.1 Estado pendular

Neste estado, a ponte de líquido liga todos os pontos de contato das partículas do sistema. O conteúdo de líquido distribuído são os únicos responsáveis pela força coesiva. Uma forma de identificar este estado são os consequentes espaços vazios entre as partículas ligantes.

### 2.10.2 Estado funicular

Estado de maior conteúdo de líquido que o pendular. A diferença líquida recobre alguns vazios entrepartículas. Os espaços vazios resultantes passam a coexistir com as demais pontes de líquido. Há, partículas ligadas por pontes de líquidos e partículas totalmente imersas no líquido.

Como na parte interna do sistema algumas pontes de líquidos foram descaracterizadas com o aumento da umidade, o estado capilar é atingido com maior porção de líquido. De fato, o estado funicular é intermediário entre o pendular e o capilar.

### 2.10.3 Estado capilar

Os pequenos espaços vazios mais internos são recobertos por líquido, apresentando na interface ar – líquido um menisco, cuja pressão do líquido é menor que a pressão do ar. A diferença de pressão na interface é conhecida por sucção e é responsável pela coesão entre as partículas. Os líquido interior flui até as extremidades do sistemas por efeito capilar e fica curvado entre as partículaas da superfície.

### 2.10.4 Estado de polpa

É neste estado que o material granulado fica saturado por líquido. Todo o sistema granular é imerso no conteúdo líquido, definindo propriamente uma mistura. Imersas, as partículas têm seus pesos reduzidos pelo empuxo. Como resultado final, nenhuma coesão prevalece entre as partículas. O menisco que existia no estado anterior desaparece. A pressão do líquido torna-se maior ou igual que a pressão do ar.

Observa-se que quando o volume de vazio,  $V_v$ , é parcialmente preenchido com líquido,  $V_w$ , a saturação ( $S$ ) é descrita pela Equação (2.18). Quando todos os vazios,  $(\varepsilon.V_T)$ , foram preenchidos, os volumes de líquido e vazio eram iguais, e o grau de saturação atingiu seu máximo, isto é,  $S=1$ . O material granulado tornou-se uma suspensão ou mistura.

Contudo, se não houver qualquer conteúdo de líquido, os espaços vazios existentes constituirão apenas o volume de vazios, sendo nulo o volume de líquido. Neste caso, temos que  $S = 0$  e o sistema é composto por partículas secas.

Perceba que a massa específica aparente do sistema ( $\rho_b$ ) e a porosidade ( $\varepsilon$ ) variam com o acréscimo de líquido.

$$S = \frac{V_w}{V_v} = \frac{V_w}{\varepsilon.V_T} \quad (2.18)$$

Onde  $0 \leq S \leq 1$  e o  $V_w \leq \varepsilon.V_T$

De fato, uma experiência pode ser facilmente imaginada com areia da praia úmida, ao batermos os pés sobre ela (MITARAI, 2006). O exemplo da areia mostra que podemos alterar a saturação variando sua massa específica aparente ( $\rho_b$ ) e a porosidade  $\varepsilon$ . A redução do volume dos vazios na areia obriga o líquido a uma nova redistribuição. Esse comportamento pode ser descrito quantitativamente pela Equação (2.19).

$$\rho_b = (1 - \varepsilon)\rho_s + S.\varepsilon.\rho_w \quad (2.19)$$

Uma vez compactada, o grau de saturação se altera de  $S_i$  para  $S=1$  (saturado) e a Equação (2.19) se reduz à Equação (2.20).

$$\rho_b = (1 - \varepsilon)\rho_s + \varepsilon.\rho_w \quad (2.20)$$

Isso mostra que é possível variar o grau de saturação em função da massa específica aparente, que é função da compactação.

Para demonstrar a Equação (2.19), temos a Equação (2.21),

$$\rho_b = \frac{m}{V_T} \quad (2.21)$$

As massas específicas dos componentes da amostra são

$$\rho_s = \frac{m_s}{V_s} \Rightarrow m_s = \rho_s V_s \quad (2.22)$$

$$\rho_w = \frac{m_w}{V_w} \Rightarrow m_w = \rho_w V_w \quad (2.23)$$

Das equações (2.16) , (2.17) e (2.18) tem-se

$$\frac{V_s}{V_T} = 1 - \varepsilon \Rightarrow V_s = (1 - \varepsilon)V_T \quad (2.24)$$

$$V_w = S.\varepsilon.V_T \quad (2.25)$$

Substituindo a equação (2.13), (2.22), (2.23), (2.24) e (2.25) na Equação (2.21) fica

$$\rho_b = \frac{m}{V_T} = \frac{m_s + m_w}{V_T} = \frac{\rho_s V_s + \rho_w V_w}{V_T} = \frac{\rho_s (1 - \varepsilon) V_T + \rho_w S \varepsilon V_T}{V_T} = \rho_s (1 - \varepsilon) + S.\varepsilon.\rho_w \quad (2.26)$$

## 2.11 FORÇAS ATUANTES EM ESCOAMENTO DE SÓLIDOS GRANULARES

### 2.11.1 escoamento de sólidos granulares finos e secos

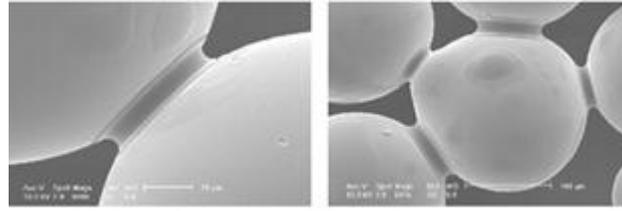
São dominantes as forças de van der Waals e eletrostáticas. A primeira, tem intensidade dependente do tamanho das partículas e da distância entre elas; a segunda, baseia-se na diferença de potencial entre as superfícies das partículas (SCHULZE, 2007).

### 2.11.2 escoamento de granulados úmidos

De acordo com os dados de Schulze (2007), as pontes de líquido são responsáveis pelo aumento das forças de adesão entre partículas. Elas contam com os efeitos da tensão superficial e da diferença de pressão capilar.

A Figura 2.10 mostra a imagem da ponte de líquido obtida por microscopia eletrônica (MEBE) extraída da tese de doutorado de Condotta (2005).

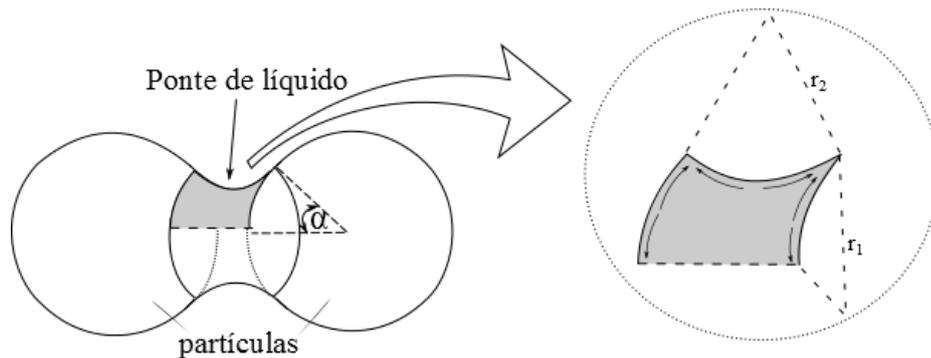
**Figura 2.10 - Fotografia eletrônica das pontes de líquidos em sistemas granulares**



Fonte: Condotta (2005)

A construção matemática dos efeitos capilar da ponte de líquido entre partículas considera as duas curvaturas de menisco. A Figura 2.11 representa os raios da curvatura dos meniscos sobre as partículas. Tomando sobre as superfícies curvas da ponte de líquido, a região diferencial, pode-se mostrar que a sucção (ou diferença de pressão) pode ser analisada pela Equação (2.27), conhecida como equação de Young-Laplace (MITARAI, 2006).

**Figura 2.11 – Ponte de líquido e os raios de curvatura de menisco sobre a porção infinitesimal da superfície curva**



$$\Delta p = p_a - p_L = \gamma \left[ \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right] \quad (2.27)$$

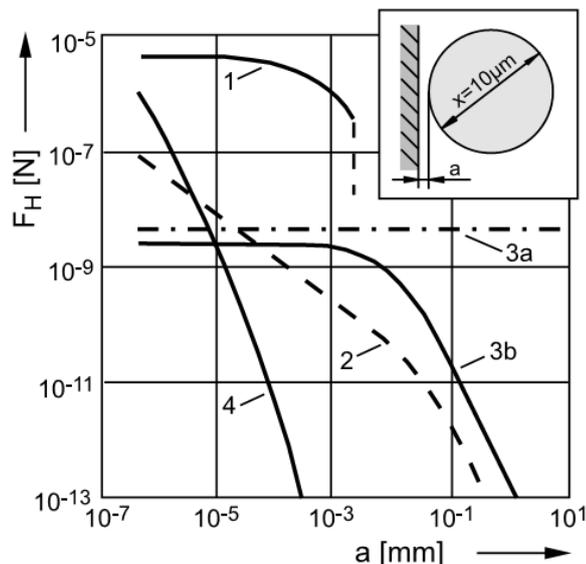
Onde  $p_a$  é a pressão exercida pelo ar;  $p_L$  é a pressão exercida pelo líquido;  $r_1$  e  $r_2$  são os raios de curvatura do menisco formado entre os pontos de contato das partículas (Figura 2.10);  $\gamma$  é a tensão superficial.

Como se vê, a sucção  $\Delta p > 0$  (ou  $p_a > p_b$ , i.e, menisco côncavo) está relacionada com a tensão superficial e, neste caso, com os efeitos da ação capilar das proximidades do ponto de contato entre as partículas esféricas. Assim, justifica-se que forças adesivas nas pontes resultam dos efeitos da tensão superficial e da capilaridade.

### 2.11.3 Forças Adesivas

Inicialmente, para mostrar essas forças é usado a Figura 2.12. Ela apresenta as intensidades em função da distância e da interação partícula-parede (SCHULZE, 2007).

**Figura 2.12 – Forças adesivas entre uma partícula esférica de diâmetro  $x=10\mu\text{m}$  em função da distância à parede**



1 - Forças adesivas devido a pontes de líquidos; 2 - forças adesivas de natureza eletrostática para um condutor; 3 - forças adesivas de natureza eletrostática para um isolante; 3a para esfera-semiespaço, 3b caga esfera-ponto; 4 - forças de van der Waals

Fonte: Schulze (2007)

Verifica-se que as forças de van der Waals e as pontes de líquidos são maiores à pequenas distâncias e menores à distâncias em torno de  $10\text{E}-03\text{ mm}$  ( $1\mu\text{m}$ ). Já as forças eletrostáticas são menores em pequenas distâncias, mas não decrescem tanto com o aumento da distância. Portanto, em maiores distâncias, as forças eletrostáticas são maiores que as demais forças adesivas discutidas aqui.

O termo forças adesivas é usado para representar quaisquer das forças que atuam em sistemas particulados secos ou úmidos: forças de van der Waals, força eletrostática, forças das pontes de líquido. As forças de coesão, de adesão, da tensão superficial, e a força capilar também pertencem a este grupo.

As forças de van der Waals são forças de caráter intermolecular, isto é, são forças eletrostáticas oriundas da indução de dipolos elétricos formado nas partículas.

As forças eletrostáticas ocorrem devido a diferença de potencial elétrico das superfícies das partículas (energia de superfície). É comum a classificação delas por série triboelétrica. A série é uma tabela que define o caráter elétrico das forças eletrostáticas.

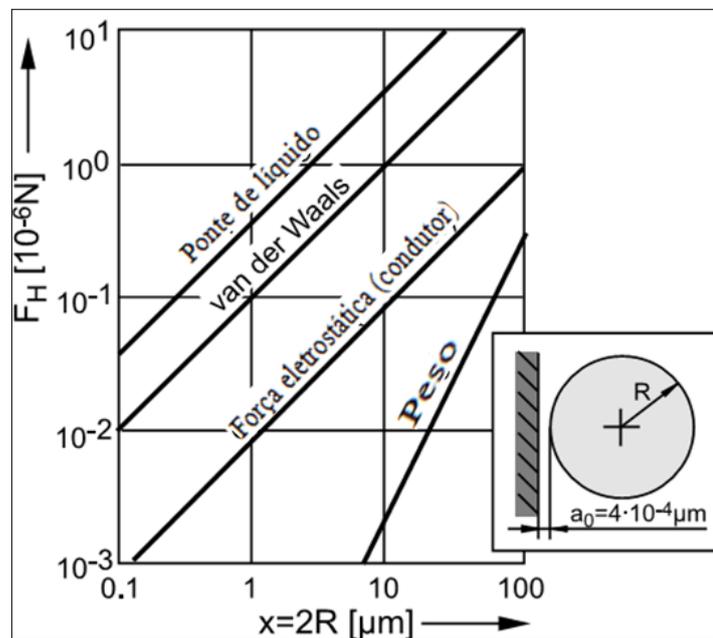
A coesão ocorre da interação entre partículas. Quimicamente, ela é explicada pela atração entre as moléculas de água, decorrente da forte ligação dos hidrogênios da água que

formam Pontes de Hidrogênio. Úmidas, as partículas se unem graças ao efeito combinado da tensão superficial, adesão, coesão e da ação capilar.

A adesão ocorre da atração da molécula de água com uma superfície sólida.

Observe a Figura 2.13. As forças adesivas se mostram intensas em granulares finos e secos, sendo praticamente desprezível em para materiais grosseiros. Segue, que a influência dessas forças depende do diâmetro das partículas.

**Figura 2.13 - Variação das forças adesivas para três partículas com diâmetro entre 0.5 e 50  $\mu\text{m}$  calculadas sobre condições ideais**

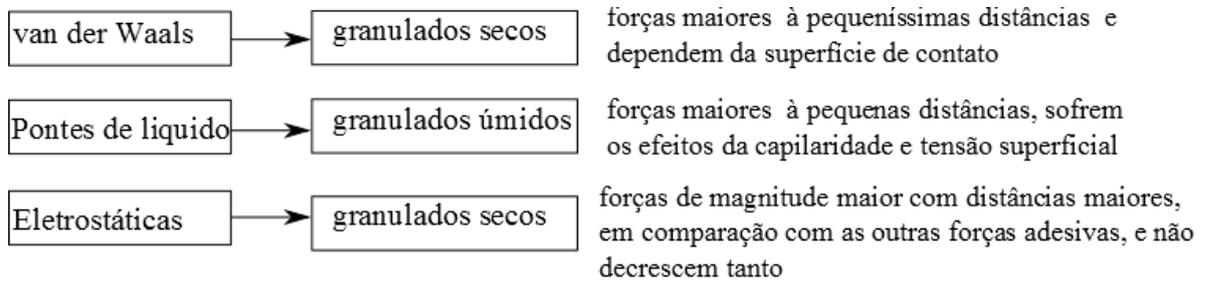


Fonte: Schulze (2007) com adaptações.

Verificando que à medida que aumenta o diâmetro da partícula e a força peso cresce ligeiramente, isso explica, por exemplo, porque partículas grandes e secas do minério de ferro não aderem às superfícies dos vagões no processo de descarregamento, mas apenas as finas, por forças de Wan der Waals ou eletrostática.

Um resumo das propriedades dessas forças é apresentado na Figura 2.14. Nesta algumas características típicas de forças adesivas em sistemas granulares foram destacadas.

**Figura 2.14 – Esquema resumo das forças adesivas de um sistema de granulares**



### 3 MÉTODO DOS ELEMENTOS DISCRETOS (DEM)

#### 3.1 INTRODUÇÃO

Muitos métodos numéricos foram desenvolvidos para aplicação em sistemas contínuos e discretos. Entre os mais conhecidos estão o Método dos Elementos de Contorno (BEM), o Método dos Elementos Finitos (FEM), o Método das Diferenças Finitas (FDM) e o Métodos dos Elementos Discretos (DEM).

Cada método têm limitações e vantagens. A escolha de um método depende da natureza física do problema e de suas condições (D'ADDETTA, 2004).

Para materiais particulados, por exemplo, o método DEM tem se tornado popular. Muitos artigos tem mostrado o potencial dessa poderosa técnica numérica. O método tem como desenvolvedor pioneiro, o Dr. P. A. Cundall e Dr. O. D. L Strack, em 1979, com relatos de aplicação inicial voltada para trabalhos bidimensionais em que as partículas rígidas eram tratadas como discos ou esferas (JING; STEPHANSSON, 2006). O método foi empregado originalmente para problemas que envolviam fraturas de rochas.

Hakuno e Tarumi (1988) tem apresentado disparidade quanto a data de origem do método, mas não há outros relatos que confirmam o ano de 1971, pois há amplo consenso nas publicações científicas da comprovação do ano de 1979.

O primeiro programa computacional a se apropriar do método DEM foi o código bidimensional BALL, onde as interações das partículas eram monitoradas contato por contato e o movimento modelado partícula por partícula (CUNDALL, 1978). Este era baseado no esquema numérico explícito, onde as equações são resolvidas por substituições diretas.

Posteriormente, a partir de 1980, com extensão do código BALL para tridimensional, chegou-se ao programa TRUBAL. Os códigos chegaram então a ser os mais adotados para o tratamento de materiais granulares (JING; STEPHANSSON, 2006). Em 1995 foi introduzido o primeiro software PFC<sup>2D</sup> por Cundall e seus colaboradores. Esta ferramenta evoluiu do tratamento bidimensional para o tridimensional (ITASCA, 1999, apud ASHMAWY et al., 2003).

A diferença básica do método DEM em relação aos outros métodos, é a interação partícula por partícula. O método DEM se apropria de finitas partículas e cada partícula é tratada individualmente pela equação do movimento de Newton e da lei da força-deformação,

para o contato entre as partículas (COETZEE; ELS, 2009). Isso torna o sistema “Discreto”, razão pelo qual o método é chamado de Método dos Elementos Discretos. As posições, velocidades, acelerações são atualizadas pelo cálculo das forças de contato entre elas após cada interação, isto é, a cada passo de tempo (ROCK; WILKINSON, 2008). O método inclui modelos para forças de contato interpartículas, forças de atrito, força magnética, eletrostática, gravitacional e pressão.

Rock e Wilkinson (2008) apontam como limitação do método, a dificuldade de se obter respostas mecânicas globais, considerando que o domínio é discretizado em partículas distintas que estão entre si em contato, ao passo que se deseja resultados de toda a montagem de partículas. Embora reconheçam como limitação, eles fazem as seguintes considerações sobre o método DEM:

- Simplicidade

Seu algoritmo é considerado de simples implementação.

Há estudos dedicados à implementação de algoritmos DEM, como os temas dirigidos (FERREIRA, 2009).

- Flexibilidade

DEM é designado para problemas mais dinâmicos tais como problemas de vibração, propagação de ondas, contatos, etc. Devido esta característica, ele pode ser facilmente modificado para resolver outros problemas tais como, transferência de calor com resistência térmica e problemas estáticos com relaxação (JING; STEPHANSSON, 2006).

- Extensão

Aplicações para o método pauta os campos da Geologia, Indústrias de Mineração, Mecânica dos solos, Engenharia Geotécnica, Engenharia Civil, Sismologia, Engenharia Química (cimento, pó de remédios), Indústrias Alimentícias (que lidam com grãos de arroz, feijão, milho, soja, trigo, etc.), etc. O método apresenta acurácia satisfatória em simular fluxos de sólidos granulares. Estudos de avalanches, problemas com mineração, falhas em rochas são também extensões do método.

É atualmente destaque no ranque dos meios granulares, cujas apreciações ocorrem tanto na comunidade acadêmica quanto nas indústrias.

- Eficiência

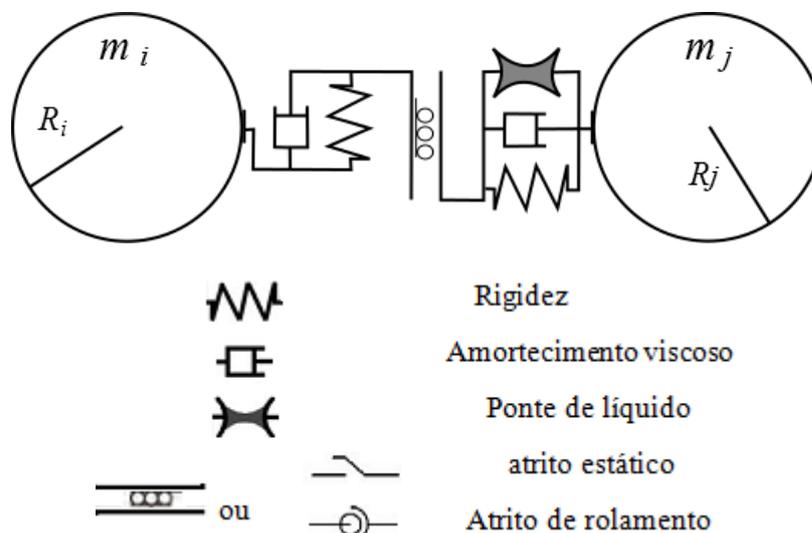
É baseado num princípio em que a malha oferece eficiência aos processos computacional e de gerenciamento de memória. Os modelos numéricos tem a capacidade de serem executados em um desktop com alta resolução. Pode-se estimar a eficiência, por exemplo, pelo passo de tempo de Rayleigh (tópico 3.3.2). Entretanto, a estimativa do tempo computacional passa a depender da máquina que está executando.

Além disso, os programas DEM contam com:

- A representação do contato: definição do modelo de contato mecânico.
- As propriedades dos materiais: características dos materiais como rígidos ou deformáveis.
- A detecção e revisão dos contatos: análise dos tipos de contato tais como vértices, linhas ou faces (de um poliedro que o toca por meio de uma estrutura de dados e algoritmos).
- Calibração : o processo de calibração consiste da variação de parâmetros durante as etapas de simulação e constitui uma fase muito importante na validação dos resultados. Em razão disso, é possível ocorrer que o valor real de um parâmetro não represente o comportamento real do sistema analisado. É por meio da calibração que é possível fazer a concordância experimental com a numérica (LOUREL et al., 2006).

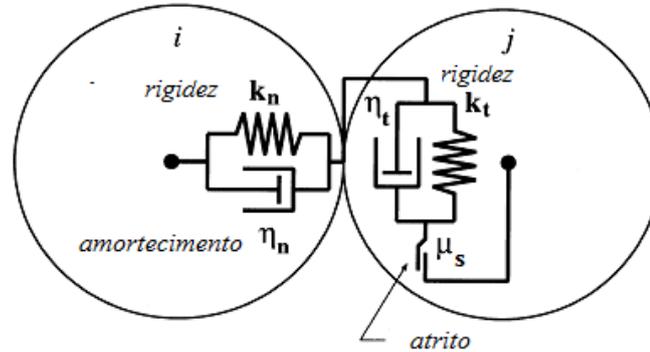
Com base em Groger et al.(2003) e Ai et al.(2011), foi construída a Figura 3.1 para mostrar o que geralmente estão inclusos nos modelos matemáticos.

**Figura 3.1 – Forças e símbolos envolvidos nas interações das partículas i e j nas direções normal e tangencial**



No ponto de contato das partículas  $i$  e  $j$ , a posição do símbolo  $\text{||||}$  ou  $\text{---}$  indicam se as forças de interação são normal ou tangencial, seja para as forças de deformação ou para as forças de amortecimento (Figura 3.2).

Figura 3.2- Esquema simplificado das forças de contato



Fonte: Muguruma et al. (2000)

### 3.2 FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

O Método dos Elementos Discretos tem como governantes as equações do movimento de Newton. Nelas são computados as interações das partículas entre si e destas com a parede. De acordo com Zhou et al. (2002) e Zhu et al (2007), as equações para os movimentos de translação e rotação são, respectivamente,

$$m_i \frac{dV_i}{dt} = m_i g + \sum_{j=1}^k (F_{n,ij} + F_{n,ij}^d + F_{t,ij} + F_{t,ij}^d) + \sum_k F_{i,k}^{nC} \quad (3.1)$$

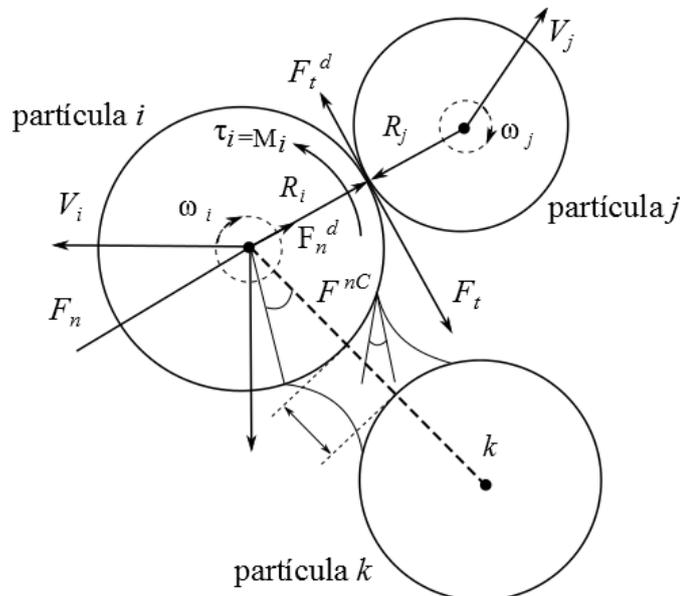
$$I_i \frac{d\omega_i}{dt} = \sum_{j=1}^k (T_{ij} + \tau_{ij}) \quad (3.2)$$

As descrições para suas variáveis são apresentadas na Tabela 3.1, e a ilustração bidimensional das forças estão mostradas na Figura 3.3. As equações não contam com a força de interação partícula-fluido,  $F_f^i$ .

Tabela 3.1 - Variáveis relacionadas com os movimentos de translação e de rotação

Partícula i	
TRANSLAÇÃO	ROTAÇÃO
$m_i$ - massa da partícula	$I_i$ - momento de inércia da partícula
$V_i$ - velocidade de translação partícula i	$\omega_i$ - velocidade de rotação da partícula i
Partículas i e j (k partículas)	
CONTATO NORMAL	CONTATO VISCOSO (TANGENCIAL)
	$T_{ij}$ - torque que causa a rotação da partícula i, no ponto de contato entre as partículas i e j ou com a parede, não no centro delas
	$\tau_{ij}$ - torque de atrito de rolamento que se opõe a rotação da partícula i, devido à deformação
$F_{n,ij}$ - força de contato normal	$F_{t,ij}$ - força de contato tangencial
$F_{n,ij}^d$ - força de amortecimento normal	$F_{t,ij}^d$ - força de amortecimento tangencial devido as camadas de partículas adjacentes
$F_{i,k}^{nC}$ - força de não-contato da partícula i com a partícula k	

Figura 3.3-Representação das forças de contato entre as partículas i, j e k



Fonte: Adaptado de Zhou et al. (1999) e de Zhu et al. (2007)

Estas equações descrevem os movimentos da partícula  $i$  em um intervalo de tempo,  $t$ , devido a sua interação com outras  $k$  partículas ou com a parede.

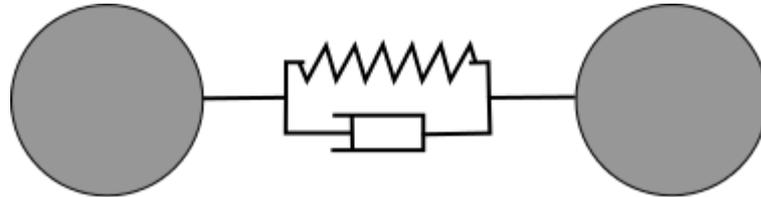
### 3.3 IMPLEMENTAÇÃO ATRAVÉS DE SOFTWARE COMERCIAL – EDEM

De modo geral, procura-se mostrar que o processo de detecção de contato envolve a dinâmica da rotação das partículas, a interação entre as partículas, a interação entre as partículas e os contornos.

Num mesmo esquema de discretização, cada partícula é considerada um corpo rígido. As equações do movimento são estabelecidas para cada uma delas. Velocidades, acelerações e as suas posições são atualizadas através do cálculo das forças de contato entre elas. Quando um contato é detectado entre as partículas, duas forças  $F_1$  e  $F_2$  representam essa interação. De acordo com a terceira lei de Newton, essas forças tem igual magnitude e sentidos opostos, isto é,  $F_1 = -F_2$ .

Tomando as componentes normal,  $F_n$ , e tangencial,  $F_t$ , de qualquer dessas forças, é fácil verificar, vetorialmente, que a combinação linear  $F_1 = F = F_n + F_t$ . Note a presença das simbologias mola/amortecedor na Figura 3.4, representando a dureza e o amortecimento viscoso.

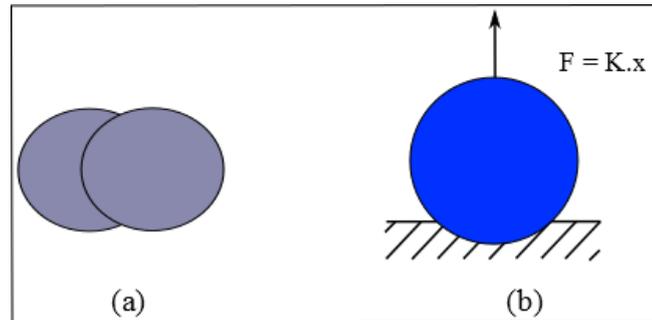
**Figura 3.4-Modelo básico de contato viscoelástico para DEM**



Fonte: Rock e Wilkinson (2008).

A sobreposição entre uma partícula e sua vizinhança (*overlaps*), dependem do passo de tempo, conforme mostra a Figura 3.7.

**Figura 3.5- Sobreposição de contato: (a) partícula-partícula; (b) partícula-parede**



Fonte: adaptado do vídeo Introdução ao Método dos Elementos Discretos (Disponível em: <<http://www.applieddem.com>>) com o guia de usuário EDEM (DEM, 2011).

### 3.3.1 Detecção de contatos

Entre os métodos de detecção de contato podem ser citados: Checagem Direta e Mapeamento Direto. O primeiro calcula todas as possíveis colisões entre os elementos; o segundo, checa as células vizinhas à célula de um elemento considerado e a sua própria célula. (MUNJIZA 2004, apud FERREIRA, 2009).

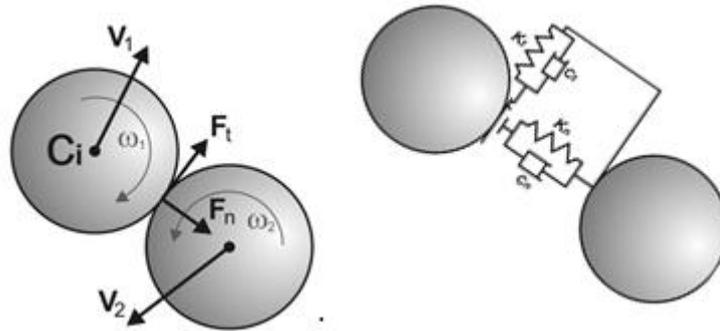
O esquema numérico DEM é pautado essencialmente nas equações do movimento e nos princípios de relaxação (JING; STEPHANSSON, 2006).

Uma vez que a modelagem do domínio é discretizado para várias partículas em contato, por intermédio de suas faces, arestas ou vértices (3D), ou lado e vértice (2D), as equações que regem o contato entre as partículas determinam o comportamento mecânico para todo o sistema de partículas.

O modelo linear de mola/amortecedor é mostrado para a força de contato normal e o modelo de atrito de Coulomb é o limitante para força de contato tangencial. A Figura 3.6 mostra o contato entre duas partículas esféricas.

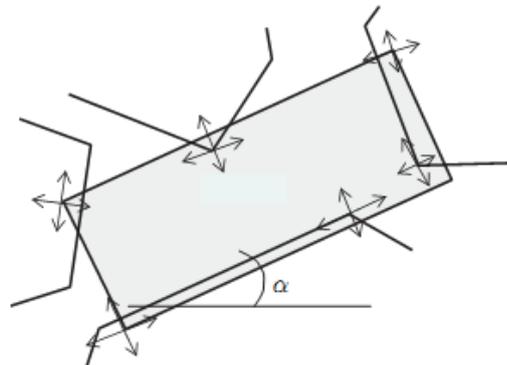
No caso de partículas angulares (não-esféricas), alguns métodos 2D do passado previam o contato com rochas fraturadas em torno de toda a partícula, desde seus vértices até as linhas ao longo do seu comprimento. A Figura 3.7 é um exemplo ilustrativo de como uma partícula de rocha era vista em contato com muitas outras partículas de rocha. As setas indicam o vetor força de contato no pontos de contato. (STEWART, 1981, apud JING; STEPHANSSON, 2006).

**Figura 3.6 - Forças de contato mecânico interpartículas**



Fonte: Ferreira (2009)

**Figura 3.7- Modelo de contato vértice e lado: interação de uma partícula angular com outras partículas vizinhas**



Fonte: Jing e Stephansson (2006).

### 3.3.2 Passo de tempo de Rayleigh ( $T_R$ )

O valor de  $T_R$  é o valor base para a determinação do passo de tempo efetivo,  $\Delta t$ , de uma simulação no EDEM. Qualquer que seja o modelo de contato mecânico utilizado, uma fração do tempo de Rayleigh é tomado como referência padrão. É indicado apenas 20% a 40% do  $T_R$ . Os percentuais são de acordo com o número de contatos por partícula. Para o número de contatos superior a 4, a fração 20% de  $T_R$  é mais adequada (Guia do usuário DEM, 2011).

No guia DEM (2011)  $T_R$  é definido como o tempo que uma onda cisalhante leva para se propagar através de uma partícula sólida. Ele é calculado automaticamente pelo EDEM, em função das propriedades da partícula.

Neste trabalho, utiliza-se apenas 20% de  $T_R$ .

A expressão matemática desse passo de tempo é dado pela Equação (3.3).

$$T_R = \frac{\pi R \sqrt{\frac{\rho}{G}}}{0,1631\nu + 0,8766} \quad (3.3)$$

Onde,  $R$  é o raio da partícula ( $m$ ),  $\rho$  é a massa específica da partícula ( $\text{kg/m}^3$ ),  $G$  é o módulo de cisalhamento ( $\text{Pa}$ ) e  $\nu$  é o coeficiente de Poisson (adimensional). As unidades de medidas podem ser previamente configuradas no EDEM para outra escala.

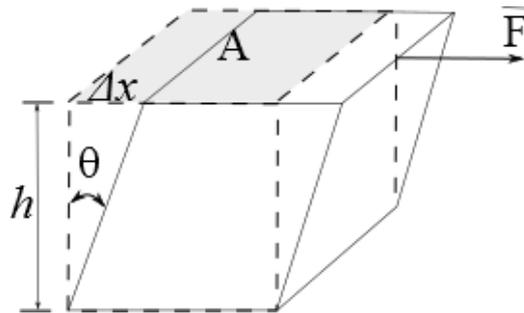
Observe a Figura 3.8. O módulo de cisalhamento é a razão entre a tensão de cisalhamento e sua deformação. Tensão é a razão entre a força  $F$  aplicada ao corpo e sua área.

$$G = \frac{F / A}{\Delta x / h} \quad (3.4)$$

Onde ao longo de  $h$ , as variações de  $\Delta x$  expressa a deformação do corpo por

$$\text{tg}\theta = \frac{\Delta x}{h} \quad (3.5)$$

Figura 3.8- Esforço cisalhante



Adicionalmente, o módulo de Young ou módulo de elasticidade,  $E$ , é uma propriedade mecânica que indica a rigidez de um material e é definido segundo a lei de Hooke como a constante de proporcionalidade dada pela seguinte expressão,

$$\sigma_i = E \cdot \epsilon_i \quad (3.6)$$

Em que  $\sigma_i$  é a tensão,  $E$  é o módulo de Young e  $\epsilon_i$  é a deformação na direção  $i$ . Materiais muito rígidos como o aço tem valores  $E$  altos, enquanto materiais como a borracha tem valores baixos de  $E$ . No diagrama tensão-deformação o módulo de Young representa o declive, e não a parte reta da Equação (3.6). Como a deformação  $\epsilon_i$  é adimensional na Equação (3.6),  $E$  usa as mesmas unidades da tensão, em Pascal, como segue,

$$E = \frac{[\sigma_i]}{[\epsilon_i]} = \frac{[Pa]}{[m/m]} = Pa \quad (3.7)$$

O coeficiente de Poisson,  $\nu$ , é a razão entre as deformações da direção lateral,  $\epsilon_x$ , e da direção longitudinal,  $\epsilon_y$ , definido pela Equação (3.8). Em particular, a Figura 3.9 mostra as variáveis para o caso de compressão axial de um cilíndrico maciço. Durante a compressão o comprimento do cilindro muda na quantidade  $\delta$  e o raio na quantidade  $\delta'$ . O maior valor que  $\nu$  atinge é 0,5.

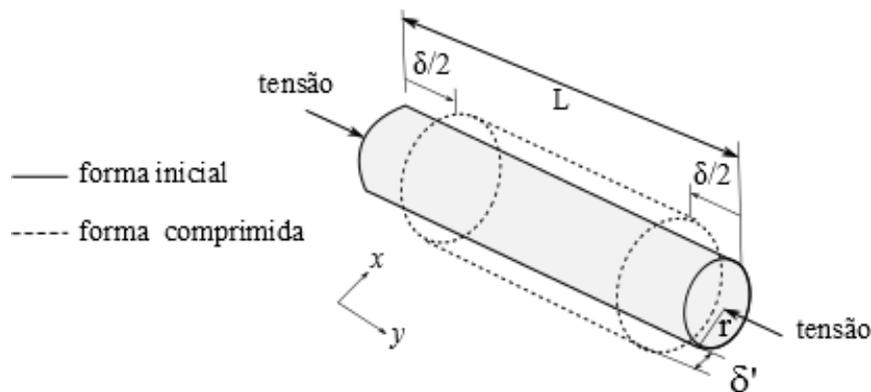
$$\nu = \frac{\epsilon_x}{\epsilon_y} \quad (3.8)$$

As deformações são dadas pelas seguintes expressões

$$\epsilon_x = \frac{\delta'}{r} \quad (3.9)$$

$$\epsilon_y = \frac{\delta}{L} \quad (3.10)$$

**Figura 3.9 - Deformações por compressão**



Uma rápida análise na expressão matemática do  $T_R$  mostra que o aumento do raio da partícula,  $R$  ou da massa específica,  $\rho$ , aumenta o passo de tempo de Rayleigh. Por outro lado, o aumento do módulo de cisalhamento,  $G$ , ou a redução do coeficiente de Poisson,  $\nu$ , reduz o passo de tempo de Rayleigh. Quanto maior o passo de tempo de Rayleigh, menor o tempo de simulação. Desta forma, um passo de tempo relativamente grande reduz o tempo computacional.

Na realidade, cada estimativa de tempo depende especificamente de cada computador. De fato, computadores com diferentes configurações tem  $T_{R_s}$  diferentes. Por esta razão, o guia do usuário EDEM (2011) descreve ao tempo de Rayleigh como uma estimativa de  $\Delta t$ .

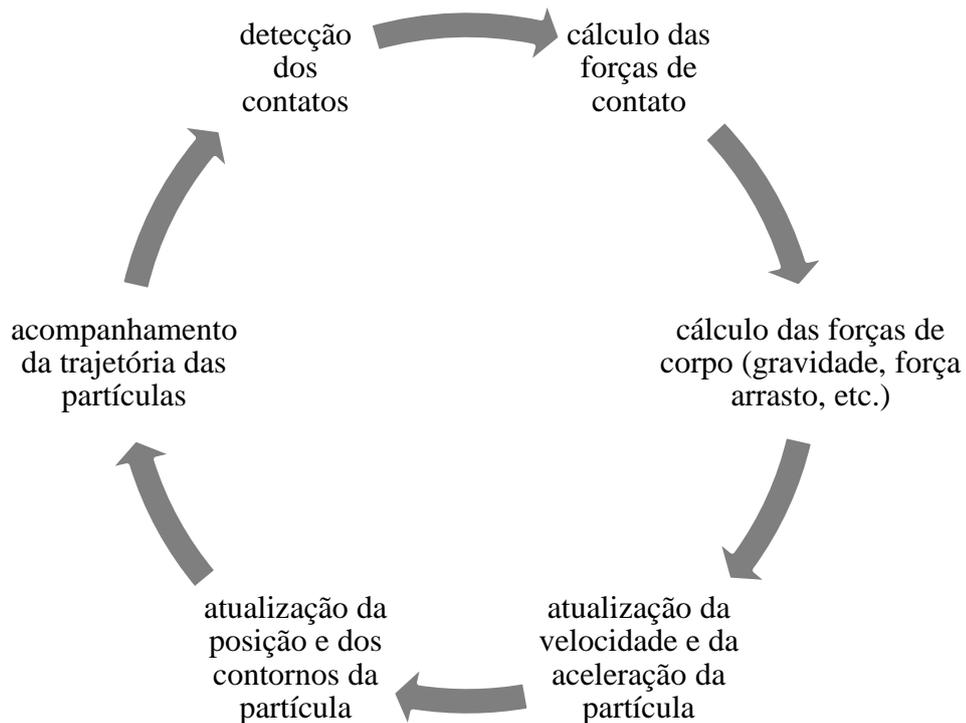
### 3.3.3 Algoritmo básico do Método

O ciclo de cálculos do algoritmo DEM consiste da geração de partículas, do acompanhamento das trajetórias, da detecção de contatos, do cálculo das forças de contato, cálculo das forças de corpo sobre cada partícula (gravidade, força de arrasto, eletrostática,

etc.), da atualização da velocidade e da aceleração, da atualização das posições das partículas e seus contornos (DEM Solutions Ltd, 2005).

A Figura 3.10 é um modelo extraído da DEM Solutions. O ciclo recomeça com a determinação das trajetórias.

**Figura 3.10- Algoritmo básico DEM**



Fonte: DEM Solutions (2005)

### 3.3.4 Gerenciamento do tempo de simulação

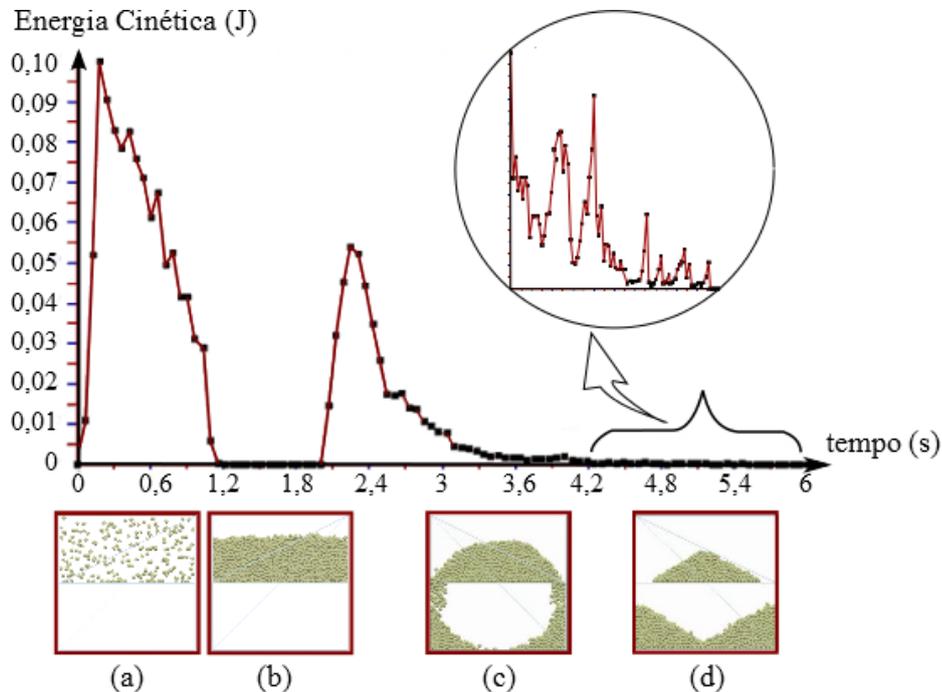
É um procedimento adotado para computar o tempo total de escoamento das partículas. Este tempo é definido a partir da plotagem da Energia Cinética Total, em joule (J), em função do tempo (s). Para exemplificar o procedimento, observe a Figura 3.11 que mostra as etapas desse processo para 6 s.

Na literatura foi constatado dificuldade para anular a energia cinética das partículas na zona de estagnação (ZHOU et al.,1999). Para verificar tal proposição e tomar a medida do ângulo de repouso de forma mais adequada, veja o que acontece no zoom dado no intervalo entre 5,13s a 6s. Embora o gráfico mostre que a energia cinética das partículas pareça estável nesse intervalo, as partículas ainda estão se movimentando (o que fisicamente não se poderia medir o ângulo de repouso). Para lidar com esse impasse, foi adotado qualitativamente como mais estável do escoamento, o tempo como valores inteiros de segundos, no segundo

momento de repouso das partículas. Assim, verifica-se que 6s é o tempo total que se considerará para a presente simulação.

Abaixo do gráfico principal, encontram-se em miniaturas a caixa de fluxo representando as seguintes etapas: geração de partículas durante o primeiro segundo; descanso das partículas por mais um segundo; escoamento das partículas e; o repouso das partículas. De acordo com estas etapas, é no segundo momento de repouso das partículas que são observados os valores da energia cinética próximos de zero e tomada de decisão para medir o ângulo de repouso.

**Figura 3.11 - Exemplo do gerenciamento do tempo de simulação com plotagem da Energia Cinética Total das partículas na zona de estagnação**



(a) Geração das partículas; (b) repouso; (c) escoamento; (d) repouso

A importância deste procedimento é evidenciada com a ajuda da Tabela 3.2 e da Figura 3.12. Ele foi inicialmente testado para variações do parâmetro atrito de rolamento na interação partícula-partícula ( $\mu_{r,pp}$ ).

Observa-se na coluna 6 da Tabela 3.2, pequenas variações do ângulo de repouso com o aumento do tempo de simulação. Isso mostra que o procedimento adotado para gerenciar o tempo de simulação não afetará significativamente os resultados dos ângulos medidos. Particularmente, na quinta linha da quarta coluna, o tempo de simulação é aumentado para 30 segundos e o ângulo de repouso medido atinge  $\beta = 37,9^\circ$ . Vemos que  $\beta$  não variou muito.

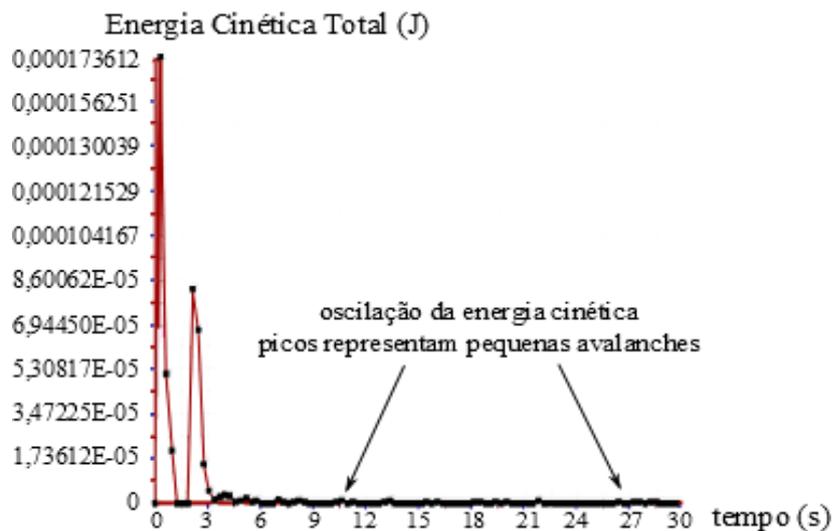
Ao estender mais, o tempo de simulação, o número de partículas que foram retidas (coluna 3) revela que poucas partículas escoaram, ou seja, que o escoamento ocorre com pequenos picos de avalanches (ROBINSON e FRIEDMAN, 2002). Nesse caso, um grande desperdício do tempo de CPU é mostrado na coluna 5 dessa tabela.

A Figura 3.12 mostra as variações da energia cinética das partículas da Tabela 3.2 para os tempos de 30, 40 e 50 segundos. Esses tempos de simulação foram aumentados progressivamente até 50s para mostrar picos de oscilações da energia cinética. Esses picos representam escoamentos em forma de pequenas avalanches, e a presença destas, faz com que seja necessário estender o tempo de simulação e observar se há alterações no ângulo de repouso.

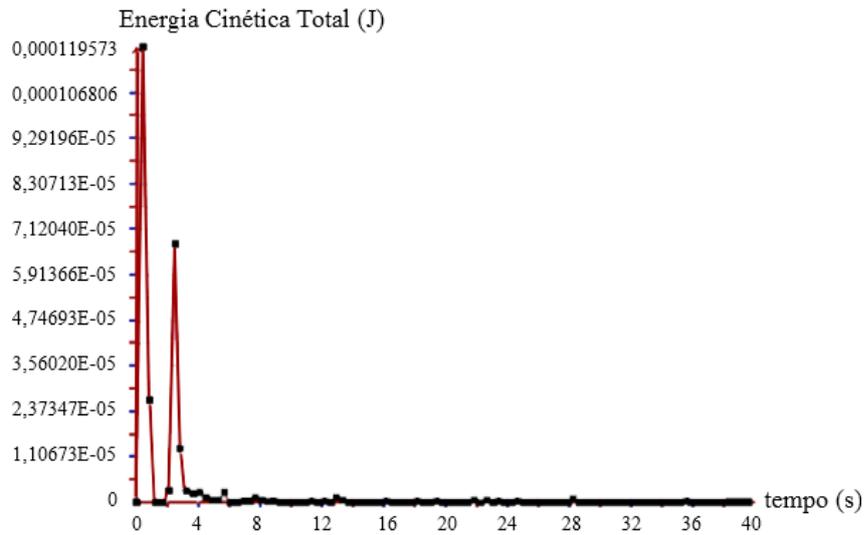
**Tabela 3.2 - Variação do tempo de simulação em função do ângulo de repouso para 2000 partículas e variação do atrito de rolamento**

$\mu_{s,pp}$	$\mu_{r,pp}$	Nº. partículas retidas	tempo de simulação (s)	CPU (min)	Ângulo repouso $\beta$ (graus)
0,5	0,2	726	10	44,28	36,3
		710	13	45,72	33,5
		706	15	46,08	33,5
		703	20	46,92	33,3
0,5	0,8	845	30	73,20	37,9
		806	40	100,2	35,8
		773	50	126,6	33,6
		790	60	150,0	38,5

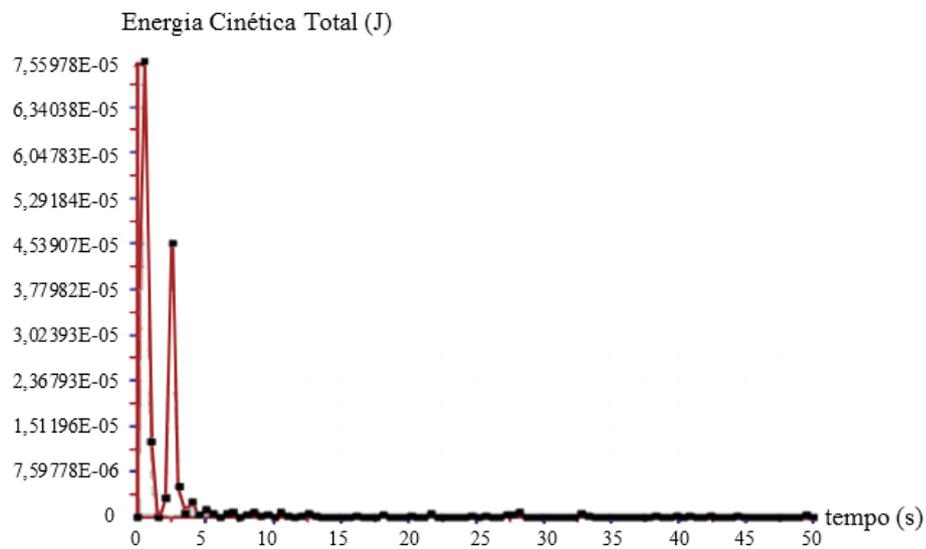
**Figura 3.12 – Fases do testes de gerenciamento do tempo de simulação testando o parâmetro atrito de rolamento: (a) 30s; (b) 40s; (c) escoamento lento, 50s**



(a)



(b)

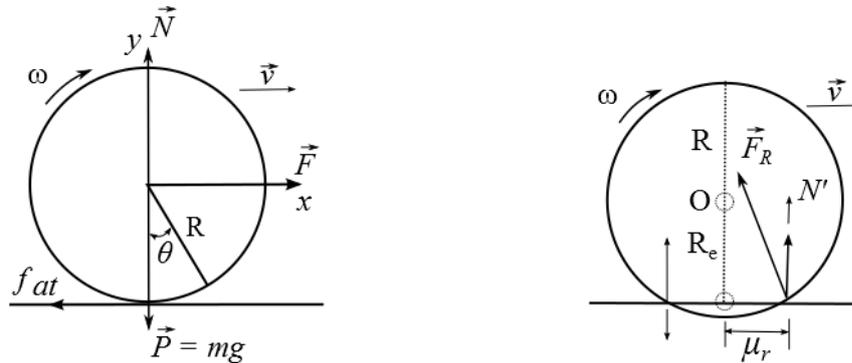


(c)

### 3.4 CONCEITUAÇÃO DE TIPOS DE ATRITO

Consideremos uma esfera que se desloca sobre um plano, conforme Figura 3.13. Especificamente, na Figura 3.13b, existe uma deformação muito pequena na superfície de contato, cuja força de reação  $N'$  do plano sobre a esfera é aplicado na frente da esfera. A variável  $R_e$  é o raio efetivo da partícula e depende do comprimento da deformação. Assim,  $R_e$  é a distância entre o centro de massa e o eixo instantâneo de rotação (DOMÉNECH et al., 1986).

Figura 3.13- Esfera rolando sobre um plano: (a) sem deformação; (b) com deformação



O atrito estático é determinado na Figura 3.13a, cujos movimentos de translação e rotação são expressos, respectivamente, por

$$F - f_{at} = ma \quad (3.11)$$

$$\tau = I \cdot \alpha \quad (3.12)$$

Onde,  $f_{at}$  é a força de atrito estático,  $\tau$  o torque de rotação da esfera,  $I$ , momento de inércia da esfera ( $2/5mR^2$ ),  $\alpha$  a aceleração angular (na direção do eixo que passa no centro de massa e sai do plano do papel) e  $a = \alpha R_e$  onde  $a$  é a aceleração tangencial.

O torque de rotação,  $\tau$ , é

$$\tau = f_{at} \cdot R \quad (3.13)$$

A componente de  $F_R$  na direção horizontal (quando  $N' \rightarrow N$ ) é a força de atrito, dada por

$$f_{at} = F_R \cdot \sin \theta \quad (3.14)$$

Considerando  $\theta = \sin \theta$ , Figura 3.13b, temos que os módulos

$$R_e \cong R \quad (3.15)$$

$$F_R = N = N' = P \quad (3.16)$$

$$\theta = \frac{\mu_r}{R} \quad (3.17)$$

Substituindo (3.16) e (3.17) em (3.14), fica

$$f_{at} \cdot R = N \cdot \mu_r \quad (3.18)$$

Donde, o momento resistência ao rolamento das partículas é dado por (Caldas e Magalhães, 2000)

$$f_{at} \cdot R = \tau \quad (3.19)$$

Logo,

$$\tau = \mu_r N \quad (3.20)$$

Onde  $\mu_r$  é o coeficiente de atrito de rolamento, dado em metros (SI).

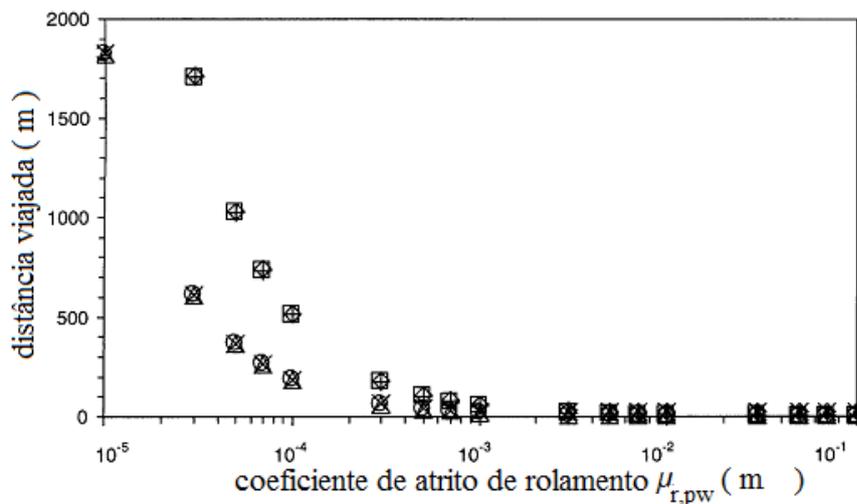
Finalmente, dizemos que o *momento de resistência ao rolamento* das partículas é o análogo do atrito estático para o movimento de translação, que é,  $f_{at} = \mu N$ .

Existem outras tentativas de modelagem para o atrito de rolamento. Uma delas considera que a força normal  $N'$ , de acordo com Doménech et al. (1986) seja,

$$N' = mg \left( \frac{R}{R_e} \right) \cos \theta \quad (3.21)$$

Zhou et al.(1999) compararam dois modelos para o atrito de rolamento. O primeiro deles não considerava a velocidade angular. Verificaram que as partículas alcançavam distâncias maiores com o modelo de atrito de rolamento (sem deslizamento) dependente da velocidade relativa de rotação (RVD Rolling Friction). Na primeira análise foi utilizado uma placa plana para verificar a distância percorrida pelas partículas em função do tempo (s). Nos resultados a distância percorrida pelas partículas é aumentada linearmente quando a resistência ao rolamento é nula. Este fato está de acordo com a formulação teórica do atrito, e mostra que o atrito de rolamento é necessário para parar as partículas esféricas. Os resultados são visualizados na Figura 3.14 pelos marcadores superiores.

**Figura 3.14 – Teste de dois modelos de atrito de rolamento: marcadores inferiores – não dependa da velocidade angular; marcadores superiores – considera a velocidade angular**



Fonte: Zhou et al. (1999)

Por outro lado, Khan e Bushell (2005) fizeram um comentário sobre o atrito de rolamento empregado na formação de pilhas de partículas e discutiram seus aspectos físicos.

### 3.5 FORÇAS DE CONTATO MECÂNICO

O pacote computacional EDEM, 3.4, versão acadêmica, da DEM Solutions, contém os seguintes Modelos de Forças de Contato Mecânico:

- Hertz-Mindlin sem deslizamento;
- Hertz-Mindlin com atrito de rolamento (sem deslizamento) RVD;
- Hertz-Mindlin com Coesão JKR;
- Hertz-Mindlin com Condução de Calor;
- Hertz-Mindlin com Ligação;
- Modelos de Coesão Linear;
- Modelo de Dissipação por Histerese;
- Modelo de Elasticidade Linear;

Estes modelos são as bases das equações governantes dos movimentos de translação e rotação.

A seguir, são descritos os três primeiros destes modelos, tendo como base o Guia do Usuário EDEM (2011). Contudo, apenas os dois últimos são testados na análise apresentada por este trabalho.

#### 3.5.1 Modelo de Hertz-Mindlin sem Deslizamento

Este é o modelo padrão do EDEM. Fundado na teoria de Hertz, de 1882, e empregado para a componente da força de contato normal. O modelo de força tangencial foi proposto por Mindlin-Diresiewics, isto é, Mindlin, em 1949, e Mindlin e Diresiewics, em 1953 (DEM SOLUTIONS, 2011).

Ainda de acordo com o guia do usuário, este modelo, as forças têm componentes de amortecimento descrito por Tsuji, Tanaka e Ishida (1953) (DEM SOLUTIONS, 2011). Já o atrito de deslizamento respeita a lei de Coulomb e o atrito de rolamento é implementado de forma independente (SAKAGUCHI; OZAKI; IGARASHI, 1993, *apud* guia do usuário EDEM, 2011).

São expressões do modelo, as força de contato:

- Normal,  $F_n$ , em função da sobreposição de partículas  $i$  e  $j$ .

$$F_n = \frac{4}{3} E^* \delta_n^{\frac{3}{2}} \sqrt{R^*} \quad (3.22)$$

Sendo

$$\frac{1}{E^*} = \frac{(1-\nu_i^2)}{E_i} + \frac{(1-\nu_j^2)}{E_j} \quad (3.23)$$

e

$$\frac{1}{R^*} = \frac{1}{R_i} + \frac{1}{R_j} \quad (3.24)$$

Onde:

$E^*$  - é o Módulo de Young equivalente e, respectivamente,  $E_i$  e  $E_j$ , o módulo de Young para as partículas esféricas em contato,  $i$  e  $j$ .

$\delta_n$  - é distância sobreposta normal no contato entrepartículas

$R^*$  - é o raio equivalente e, respectivamente,  $R_i$  e  $R_j$ , o raio das partículas esféricas em contato,  $i$  e  $j$ .

$\nu_i$  e  $\nu_j$  - são, respectivamente, os coeficientes de Poisson das partículas  $i$  e  $j$  em contato.

Para  $R_i = R_j$ ,  $R^* = Ri/2$ . O  $R^*$  fica menor que qualquer um dos raios das partículas em contato.

- A componente de amortecimento normal,  $F_n^d$

$$F_n^d = -2\sqrt{\frac{5}{6}} \cdot \beta^* \sqrt{S_n m^*} \cdot v_n^{rel} \quad (3.25)$$

sendo

$$\beta^* = \frac{\ln e}{\sqrt{\ln^2 e + \pi^2}} \quad (3.26)$$

A rigidez normal  $k = S_n$  é a derivada da força normal,  $F_n$ , em função da deformação,  $\delta_n$ , isto é,

$$S_n = k = \frac{dF_n}{d\delta_n} = 2E^* \delta_n^{\frac{1}{2}} \sqrt{R} \text{ ou } 2E^* \sqrt{R^*} \delta_n \quad (3.27)$$

e

$$m^* = \frac{1}{\frac{1}{m_i} + \frac{1}{m_j}} \quad (3.28)$$

Onde:

$\beta^*$ ,  $k$  e  $S_n$  - a rigidez normal

$m^*$  - a massa equivalente,  $m_i$  e  $m_j$  as massas das partículas  $i$  e  $j$

$v_n^{rel}$  - a componente normal da velocidade relativa

$e$  – é o coeficiente de restituição

- A força tangencial,  $F_t$ , é baseada na sobreposição,  $\delta_t$ , (semelhante a que atua sobre uma mola), dada por

$$F_t = -S_t \delta_t \quad (3.29)$$

Com

$$S_t = 8G^* \sqrt{R^* \delta_n} \quad (3.30)$$

Sendo a força tangencial,  $F_t$ , limitada pela lei de Coulomb do atrito, isto é,

$$F_T = \mu_s F_n \quad (3.31)$$

Onde:

$S_t$  – a rigidez tangencial

$\delta_t$  - é distância sobreposta tangencial no contato entrepartículas (*overlap*)

$G^*$  - é o módulo de cisalhamento equivalente

$\mu_s$  - é o coeficiente de atrito estático

- A componente de amortecimento tangencial,  $F_t^d$ ,

$$F_t^d = -2\sqrt{\frac{5}{6}} \cdot \beta \sqrt{S_t m^*} \cdot v_t^{\text{rel}} \quad (3.32)$$

Com

$v_t^{\text{rel}}$  – é a velocidade tangencial relativa

De forma independente, o atrito de rolamento é implementado em função do torque nas superfícies em contato. Esse torque é conhecido como momento de resistência ao rolamento (Caldas e Magalhães, 2000). Apenas quando solicitado, ele é calculado por

$$\tau_i = -\mu_r F_n R_i \omega_i \quad (3.33)$$

Com:

$\mu_r$  – coeficiente de atrito de rolamento dado em metros

$R_i$  – a distância dos pontos de contato medidos a partir do centro de massa (raio em partículas esféricas)

$\omega_i$  – é o versor velocidade angular no ponto de contato

O sinal negativo indica uma oposição ao rolamento da partícula. O versor  $\omega_i$ , está associado ao sentido da rotação da partícula  $i$ .

### 3.5.2 Hertz-Mindlin com Atrito de Rolamento (sem deslizamento) RVD

É uma variação do modelo anterior. Do inglês, RVD significa Relative Velocity Dependent. Essas iniciais complementam que o momento de resistência ao rolamento,  $\mu_r \mathbf{F}_n$ , é dependente da velocidade relativa de rotação,  $\mathbf{R}_{ij}^* \hat{\omega}_{rel}$ . Não se deve confundir os termos “quem depende”, com “quem é dependente”. Quem depende tem papel de variável dependente.

Assim, o que o presente modelo implementa em relação ao modelo padrão de Hertz-Mindlin (MINDLIN, 1949; MINDLIN; DERESIEWICZ, 1953), é o atrito de rolamento dependente da velocidade relativa de rotação. A diferença está na forma de como se calcula a velocidade relativa de rotação para dois contatos (Equação (3.35)).

De acordo com Ai et al. (2011), a velocidade relativa rotacional é calculada com acompanhamento do ponto de contato entre as partículas. Mas para o modelo de Hertz-Mindlin com atrito de rolamento (sem deslizamento) RVD, os cálculos são feitos com base nos valores instantâneos da velocidade relativa de rotação.

É considerado uma extensão para 3D (três dimensões) do modelo discutido por Ai et al. (2011), e não afeta o tempo computacional. Este, além de relacionar o atrito de rolamento com a velocidade relativa de rotação, utiliza-se do mesmo torque para o contato entre as partículas  $i$  e  $j$  (sugerido por Zhou, et al. 1999), i.e,  $\tau_i = \tau_j = \text{constante}$ . Encontra-se na Figura 3.3 sua representação bidimensional. O torque  $M_{i,j} = \tau_i$  é utilizado toda vez em que os efeitos do atrito de rolamento é solicitado (Guia do usuário EDEM, 2011).

$$M_{i,j} = \tau_i = \tau_j = -\mu_r F_{n,ij} V_{\omega,ij} \hat{\omega}_i \quad (3.34)$$

Onde  $V_{\omega,ij}$  é a velocidade tangencial relativa, que produz as velocidades angulares das partículas  $i$  e  $j$ , e

$$V_{\omega,ij} = v_i^{\overline{rel}} = |\omega_j \times R_j - \omega_i \times R_i| = R^* \hat{\omega}_{rel} \quad (3.35)$$

A equação pode ser reescrita para

$$\tau_i = -\mu_r F_{n,ij} R^* \hat{\omega}_{rel} \quad (3.36)$$

Onde  $R^*$  é o raio equivalente de duas partículas  $i$  e  $j$  em contato e

$$\hat{\omega}_{rel} = \frac{\hat{n}_{ij} \times \vec{v}_{t_{ij}}}{v_{t_{ij}}} \quad (3.37)$$

é o versor da velocidade rotacional relativa

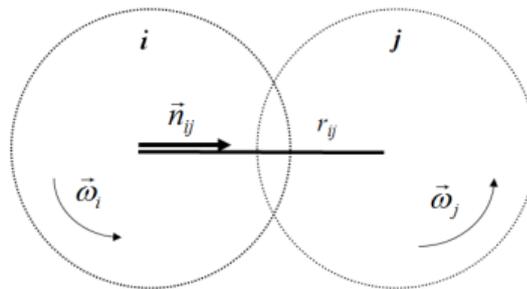
Onde  $v_{t_{ij}}$ , para contato partícula-partícula e partícula-geometria, como segue, respectivamente,

$$\vec{v}_{t_{ij}} = \begin{cases} -\frac{1}{2}(\vec{\omega}_i + \vec{\omega}_j) \times \vec{r}_{ij} & \text{contato partícula-partícula} \\ -R_i \vec{\omega}_i \times \hat{n}_{ij}, & \text{contato partícula-parede} \end{cases} \quad (3.38)$$

com  $\hat{n}_{ij}$  um versor do centro de massa da partícula  $i$  ao ponto de contato

A Figura 3.15 mostra que a orientação de  $n_{ij}$ , é do centro de massa da partícula  $i$  ao seu ponto de contato com a partícula  $j$ .

**Figura 3.15 - Colisão partícula-partícula**



Fonte: Guia do usuário EDEM (2011)

### 3.5.3 Modelo de Hertz-Mindlin com Coesão JKR

Este modelo de coesão é referenciado pelas iniciais dos nomes Johnson-Kendall-Roberts, de 1971. Ele é usado para representar a energia ligante das superfícies das partículas. A expressão matemática do modelo é,

$$F_{JKR} = -4\sqrt{\pi\gamma E^*} a^{\frac{3}{2}} + \frac{4E^*}{3R^*} a^3 \quad (3.39)$$

Onde:

$\gamma$  - é a tensão superficial ou energia de superfície

$a$ - é o raio de contato entre as partículas sobrepostas

Nesta equação a força elástica normal está em função do contato das partículas ou da sobreposição,  $\delta$ , que é definida como

$$\delta = \frac{a^2}{R^*} - \sqrt{\frac{4\pi\gamma a}{E^*}} \quad (3.40)$$

O módulo de Young equivalente,  $E^*$ , e o raio equivalente,  $R^*$ , das partículas  $i$  e  $j$  são definidos, respectivamente, pelas Equações (3.23) e (3.24).

De acordo com as Equações (3.39) e (3.40), se a energia de superfície é nula para força normal, ou seja,  $\gamma = 0$ , a Equação (3.39) se reduz a equação padrão de Hertz-Mindlin sem deslizamento.

Assim, a Equação (3.40) fica

$$a^2 = \delta R^* \Rightarrow a = \sqrt{\delta R^*} \quad (3.41)$$

Deste modo, substituindo a Equação (3.41) na Equação (3.39), obtém-se

$$\begin{aligned} F_{JKR} &= \frac{4E^*}{3R^*} a^3 \Rightarrow F_{JKR} = \frac{4E^*}{3R^*} (\sqrt{\delta R^*})^3 \\ F_{JKR} &= \frac{4E^*}{3} \frac{R^* \sqrt{R^*}}{R^*} \sqrt{\delta^3} = F_{HERTZ} = \frac{4E^*}{3} \sqrt{R^*} \delta^{\frac{3}{2}} \end{aligned} \quad (3.42)$$

O parâmetro  $\gamma$  introduz tanto as energias de superfícies para as forças de van der Waals em pós finos e secos como para as forças das pontes de líquidos em meios úmidos.

Havendo sobre o sistema granular concentração diferenciada de energia, é possível quantificar diferentes valores de energia de superfície.

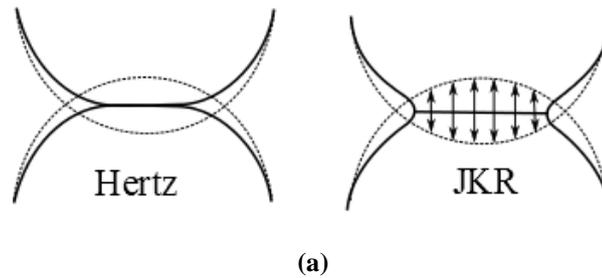
A definição de energia de superfície representa, segundo Fischer e Cripps (2000), o potencial que uma superfície tem para realizar uma ligação química com outros átomos, isto é, a energia potencial da camada superficial dos átomos. Nos líquidos essa ligação se manifesta por meio da tensão superficial. Nos sólidos, entretanto, os efeitos da tensão superficial não são facilmente observáveis, pois os sólidos não se deformam com a mesma percepção que os líquidos nos permitem.

A unidade para energia de superfície é  $J/m^2$  (energia por unidade de área). No EDEM essa energia pode ser configurada para as interações partícula-partícula e partícula-geometria. A unidade  $J/m^2$  expressa a dimensão da tensão superficial ( $[F]/[L]$ ), quando multiplicamos o numerador e o denominador pelo comprimento  $[L]$ , ou seja,

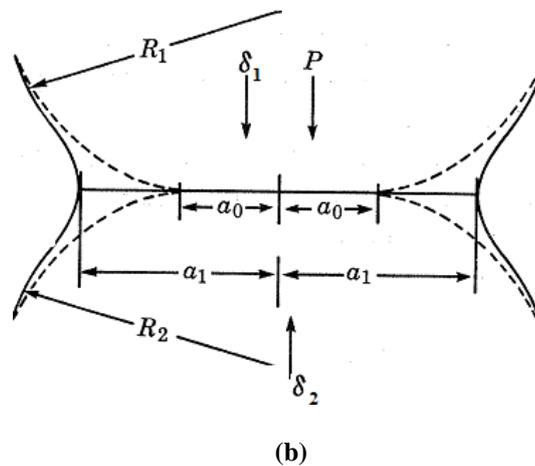
$$[\gamma] = \frac{[F][L]}{[L][L]} = \frac{[J]}{[L^2]} \quad (3.43)$$

Quanto aos locais de atuação dos modelos, a Figura 3.16 mostra que o modelo simplificado de Hertz atua no ponto de contato enquanto que o modelo de Coesão de JKR considera a área de contato sobreposta.

**Figura 3.16 – Representação simplificada dos contatos entre duas partículas esféricas de raios  $R_1$  e  $R_2$**



Fonte:www.Google.com



Fonte: Johnson-Kendall-Roberts (1971)

No EDEM, para a interação partícula-geometria, este modelo quantifica a interação da partícula com qualquer parte da geometria.

No Capítulo 4, por exemplo, Figura 4.2, é negligenciado a energia de superfície das duas comportas laterais da caixa de fluxo com as partículas, omitindo dados de entrada para essa interação. Conseqüentemente, se todos os parâmetros da energia de superfície forem negligenciados, este modelo se reduz ao modelo padrão de Hertz-Mindlin, como fora mostrado.

Assim, a coesão Johnson-Kendall-Roberts (1971) acrescenta ao modelo de Hertz-Mindlin forças de natureza adesiva, seja ela forças de Wan der waals, de coesão, adesão, tensão superficial, força capilar, eletrostática, magnética ou ponte de líquido.

## 4 ANÁLISE DA ESFERICIDADE DA PARTÍCULA NO MÉTODO DEM

### 4.1 INTRODUÇÃO

O método DEM vem se tornando cada vez mais solicitado pela comunidade científica. Segundo Levy e Oii (2011), há várias contribuições numéricas na literatura com a análise de comportamento de materiais granulares usando o Método dos Elementos Discretos (DEM).

Algumas delas nortearam este estudo para a esfericidade das partículas. O trabalho de Zhou et al. (1999 e 2002) para os atritos e de Ashmawy et al. (2003) para a influência da forma da partícula, além da idéia básica de Coetzee e Els (2009) e de Grima et al. (2011), na aplicação do processo de calibração.

Zhou et al. (1999), foram quem propuseram um modelo matemático para o rolamento das partículas, analisando-as na placa plana e em pilhas. Em 2002, ele estudou o comportamento do ângulo de repouso a partir das variações dos coeficientes de atrito estático ( $\mu_{s,pp}$  e  $\mu_{s,pw}$ ), e de rolamento ( $\mu_{r,pp}$  e  $\mu_{r,pw}$ ), para partícula-partícula (índice pp) e partícula-parede (índice pw). Os índices *s* e *r* atribuídos à letra grega do atrito,  $\mu$ , referem-se, respectivamente, à estático e rolamento.

No mesmo contexto, Zhou et al. (2002). especificaram uma faixa para os parâmetros de atrito estático e de rolamento. Contudo, percebe-se que a prática de calibração visa a reprodução de microparâmetros (atrito, dureza, amortecimento, força de ligação, coeficiente de restituição, etc.) com macroparâmetros (Coetzee e Els, 2009). Assim, nem sempre dados de um intervalo são eficazes para um procedimento metódico de calibração.

Para contemplar essas analogias, este capítulo propôs-se a analisar as esfericidades das partículas DEM, usando dois modelos: Hertz-Mindlin com Atrito de Rolamento (sem deslizamento) RVD, proposto por Zhou et al. (1999) e Hertz-Mindlin com Coesão JKR, proposto por Johnson-Kendall-Roberts (1971).

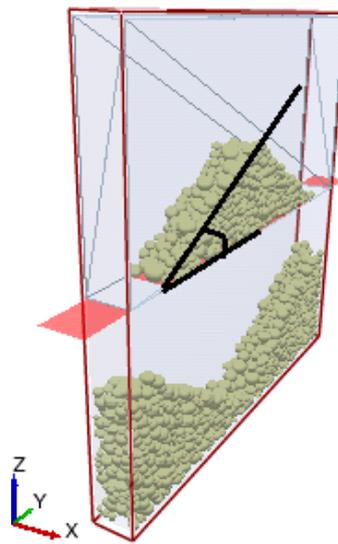
O último desses modelos foi aplicado como uma extensão do primeiro, uma vez que foi incrementado o parâmetro  $\gamma$  para quantificar as energias de superfícies das partículas.

Todas as análises são fundamentalmente pautadas nas potencialidade da ferramenta DEM para as simulações dos escoamentos de partículas de diferentes formas. E como parte de uma observação inicial, a metodologia empregada para medir o ângulo de repouso usava

apenas um valor, coletado na parte frontal da caixa, conforme indicado na Figura 4.1. Após os primeiros resultados, constatou-se que o emprego deste único valor não era suficiente para representar as variações randômicas do ângulo de repouso, sendo, portanto, necessário sua melhoria. Naquela ocasião foi possível verificar apenas que as partículas de formas não-esféricas apresentavam maior resistência ao escoamento.

A partir daí, foi considerada mais precisa a média das quatro medidas definidas de acordo com a Equação (2.11), Subseção 2.5 .

**Figura 4.1- Único ângulo medido na primeira análise apresentada ao CONEM 2012**

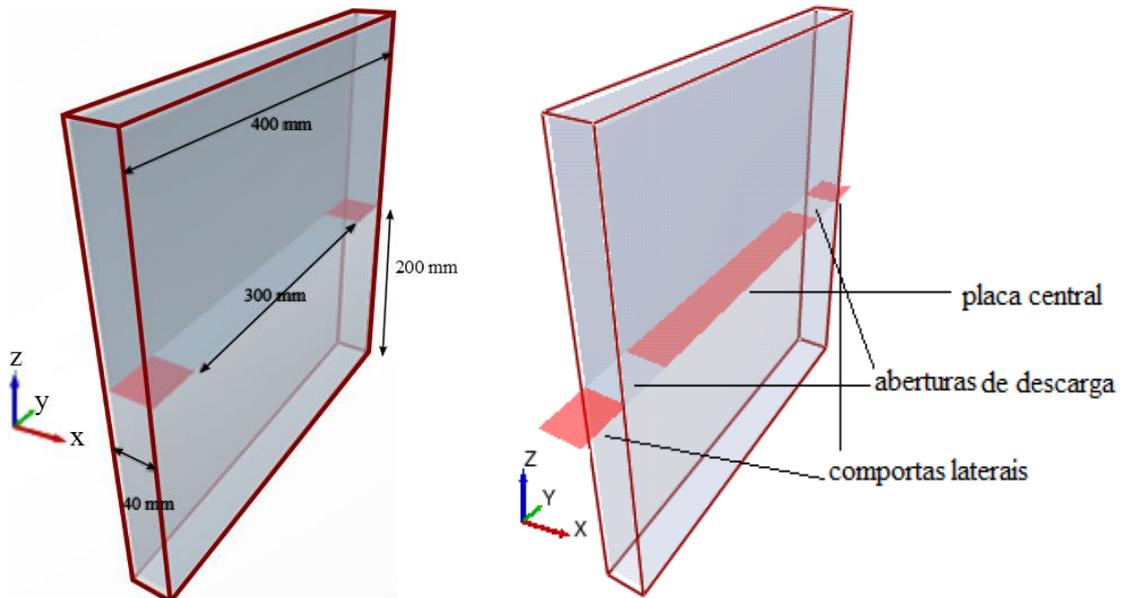


## 4.2 ESCOAMENTO DE REFERÊNCIA – EXPERIMENTO DE ZHOU

### 4.2.1 Geometria e Condições Experimentais

Foi utilizado uma caixa de fluxo virtual e simétrica para o experimento. As dimensões, a escala e a nomenclatura de suas partes estão mostradas na Figura 4.2 para partículas de 10 mm.

**Figura 4.2- Caixa de fluxo em três dimensões com comportas laterais móveis**

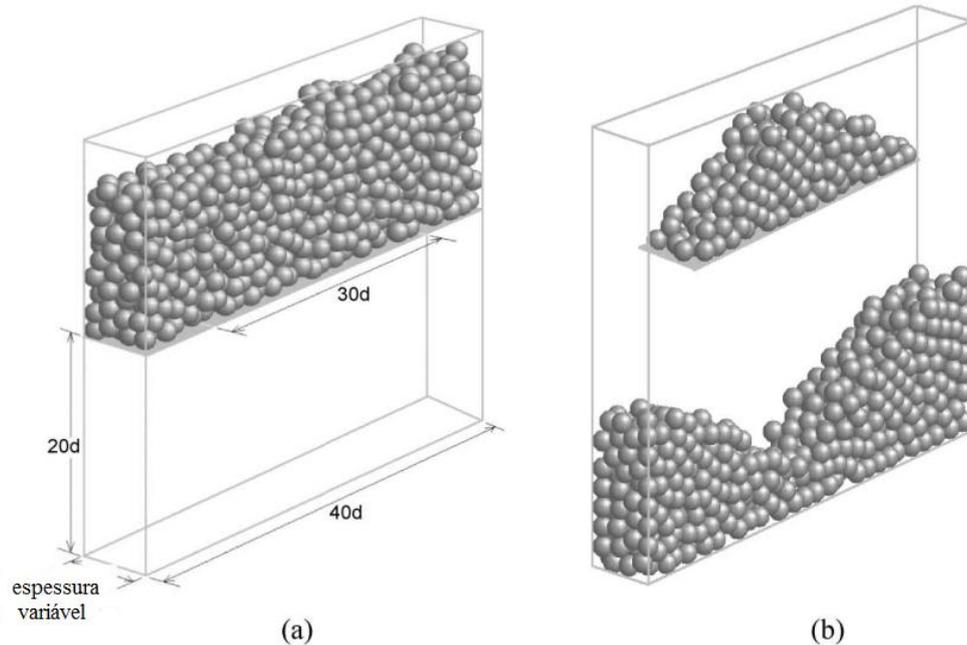


Fonte: Adaptação de Zhou et al. (2002) em escala para partículas de 10 mm

Os estudos de Zhou et al.(2002) avaliaram as partículas de diâmetros de 0,55 mm; 1 mm; 2mm; 5mm e 10 mm, cujas massas específicas eram iguais a  $2500 \text{ kg/m}^3$ . Estes pesquisadores usaram uma caixa de fluxo com dimensões escalonadas em função do diâmetro  $d$  da partícula (Figura 4.3). O comprimento e a altura da caixa eram iguais a  $40d$ , mas a espessura foi variável em relação ao diâmetro da partícula, de  $4d$  a  $36d$ .

A Tabela 4.1 apresenta as variáveis, os símbolos, os valores, a faixa de variação e os resultados obtidos para os ângulos de repouso. A partícula de 10 mm foi tomada como base da presente pesquisa para a investigação do efeito da esfericidade das partículas.

**Figura 4.3 – Geometria em escala para o diâmetro  $d$  da partícula: (a) formação da pilha antes da descarga; (b) formação da zona de estagnação sobre a placa central após o escoamento**



Fonte: Zhou et al. (2002)

Na investigação de Zhou et al.(2002), as partículas de mesmo tamanho foram geradas randômicamente e permaneceram por 1s sobre a placa central, com as comportas laterais fechadas, formando um pacote inicial conforme a Figura 4.3a.

Após este período, as duas comportas laterais são abertas e as partículas caem no fundo da caixa. Uma pilha é formada sobre a placa central como mostra a Figura 4.3b. A inclinação da pilha nesta zona é o ângulo de repouso  $\beta$ . Neste caso, o valor de  $\beta$  foi obtido repetindo três vezes o escoamento (Zhou et al., 2002).

**Tabela 4.1 - Parâmetros utilizados na análise de Zhou et al. (2002)**

Variável	símbolo	valor	faixa de variação	ângulo de repouso
Número de partículas	$N$	2000	-	-
Passo de tempo	$\Delta t$	10E-06 - 10E-05s	-	-
Diâmetro da partícula	$d$	10 mm	2 - 10 mm	[38, 28]
Coefficientes de atrito de rolamento	$\mu_{r,pp}$	0,05 mm	0 - 0,1 mm	[0, 34]
Coefficientes de atrito	$\mu_{r,pw}$	$2\mu_{r,pp}$	0 - 0,2 mm	[0, 30]
	$\mu_{s,pp}$	0,4	0 - 0,6	[0, 33]
	$\mu_{s,pw}$	$1,5\mu_{s,pp}$	0 - 0,6	[0, 28]
Espessura da caixa	-	4d	4d - 24d	[28, 19]
Massa específica	$\rho$	2500 kg/m <sup>3</sup>	500 - 5000 kg/m <sup>3</sup>	[27, 31]
Coefficiente de Poisson	$\nu$	0,3	0,1 - 0,7	[26, 30]
Modulo de Young	$E$	2,16E+06 N/m <sup>2</sup>	10E+05 - 10E+08 N/m <sup>2</sup>	27±1
Coefficiente de restituição	$e$	0,4	0.1 - 0.8	28±1

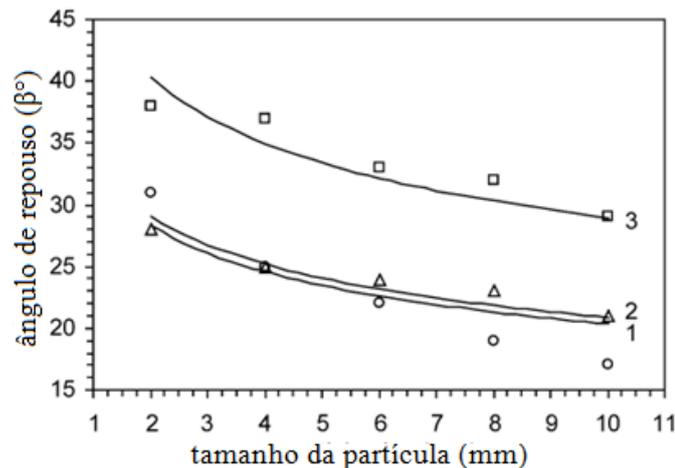
Fonte: Zhou et al. (2002)

#### 4.2.2 Resultados Numéricos de Zhou

Ao adotar as condições experimentais descritas acima, Zhou et al. (2002) notaram que o ângulo de repouso aumentava com o coeficiente de Poisson e com a massa específica, mas não ficou claro para eles o comportamento para o coeficiente de restituição e módulo de Young.

Por outro lado, destacaram as variações dos tamanhos das partículas e dos parâmetros de atritos. No primeiro caso, o aumento do tamanho da partícula reduzia o ângulo de repouso. A Figura 4.4 mostra esse comportamento. As linhas contínuas que ligam os marcadores são apenas ajustes de curvas com o uso de uma equação específica proposta por estes pesquisadores.

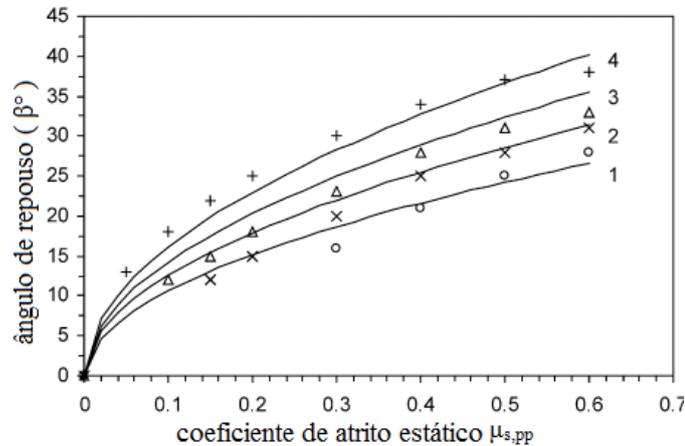
**Figura 4.4 – Ângulo de repouso em função do tamanho da partícula: ○ -  $\mu_{r,pp}=0,05\text{mm}$  e  $\mu_{s,pp} = 0,2$ ;  $\Delta$  -  $\mu_{r,pp} = 0,01\text{mm}$  e  $\mu_{s,pp} = 0,4$ ;  $\square$  -  $\mu_{r,pp} = 0,05\text{ mm}$  e  $\mu_{s,pp} = 0,4$**



Fonte: Zhou et al. (2002)

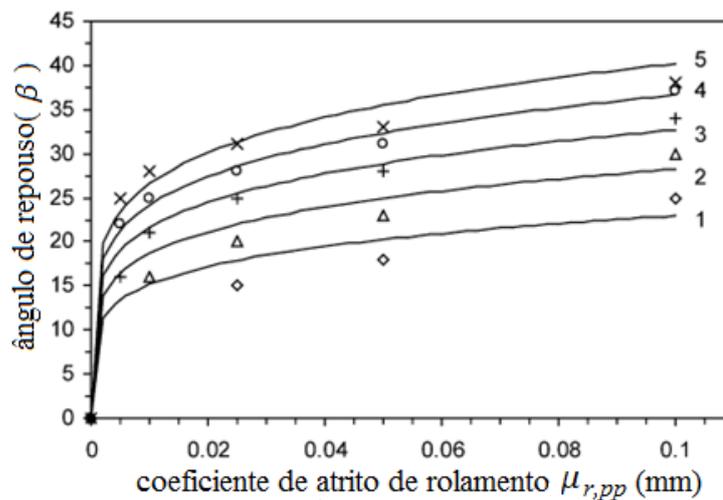
Zhou et al. (2002) consideraram os efeitos dos dois tipos de atrito – o atrito estático e o atrito de rolamento. Foi observado que o ângulo de repouso aumenta para valores crescente tanto do atrito de rolamento,  $\mu_{r,pp}$  quanto do atrito estático,  $\mu_{s,pp}$ . Essa situação é ilustrada pela Figura 4.5 e pela Figura 4.6.

**Figura 4.5 – Ângulo de repouso em função do atrito estático com diferentes atritos de rolamento: o -  $\mu_{r,pp} = 0,01\text{mm}$ ; x -  $\mu_{r,pp} = 0,025\text{ mm}$ ;  $\Delta$ -  $\mu_{r,pp} = 0,05\text{ mm}$ ; + -  $\mu_{r,pp} = 0,1\text{mm}$**



Fonte: Zhou et al. (2002)

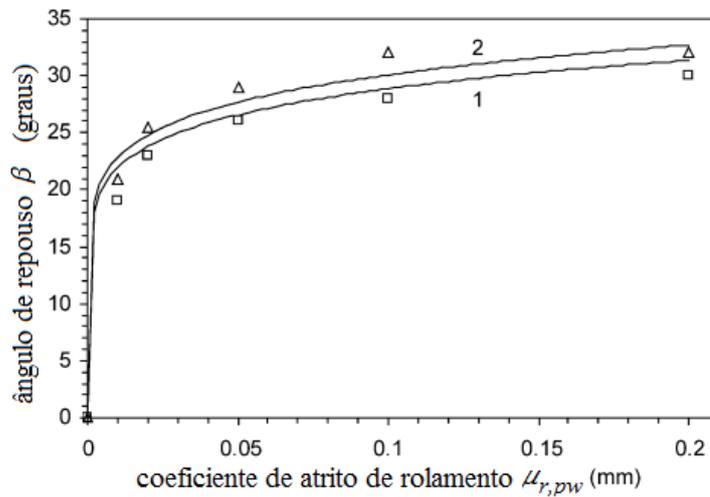
**Figura 4.6 – Ângulo de repouso em função do atrito de rolamento para diversos coeficientes de atrito estático:  $\diamond \mu_{s,pp} = 0,2$ ;  $\Delta \mu_{s,pp} = 0,3$ ; +  $\mu_{s,pp} = 0,4$ ; o  $\mu_{s,pp} = 0,5$  e; x  $\mu_{s,pp} = 0,6$**



Fonte: Zhou et al. (2002)

Segundo os autores, uma outra maneira de se obter o aumento do ângulo de repouso foi aumentando o atrito de rolamento partícula-parede  $\mu_{r,pw}$ ; mantendo o atrito estático,  $\mu_{s,pp}$ , e variando os atritos de rolamento pela relação  $\mu_{r,pw} = 2 \mu_{r,pp}$ . A relação se encontra na Tabela 4.1 e seus resultados estão expressos pela Figura 4.7.

**Figura 4.7 – Ângulo de repouso em função do atrito de rolamento partícula-parede,  $\mu_{r,pw}$ , com atrito estático fixo,  $\mu_{s,pp} = 0,4$ , e diferentes atritos de rolamento partícula-partícula,  $\mu_{r,pp}$ :  $\square$   $\mu_{r,pp} = 0,05$  mm e  $\Delta$   $\mu_{r,pp} = 0,1$ mm**

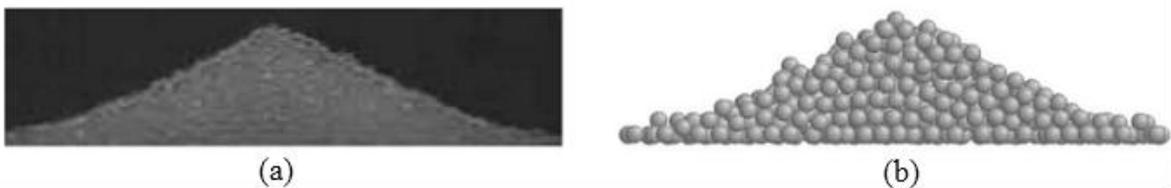


Fonte: Zhou et al. (2002)

Observando todas as análises de Zhou et al.(2002), verifica-se que o diâmetro da partícula desempenha importante papel nas simulações DEM, sendo, pois relevante para a análise de pilhas. Além disso, os atritos estáticos e de rolamento se mostraram fundamentais na variação do ângulo de repouso.

Zhou et al.(2002) também validaram alguns resultados com experimento físicos, entre os quais está o da Figura 4.8 em condições similares ao simulado e verificaram que os resultados foram consistentes.

**Figura 4.8 - Escoamento físico e numérico em condições similares com partículas de diâmetro  $d = 5$  mm : (a) resultado físico; (b) resultado numérico com  $\mu_{r,pp} = 0,05$  mm e  $\mu_{s,pp} = 0,4$**



Fonte: Zhou et al. (2002)

### 4.3 ANÁLISE DE SENSIBILIDADE DE PARÂMETROS NO MÉTODO DEM

Existem muitos parâmetros envolvidos numa simulação DEM e não é fácil relacionar todos eles. Contudo, para estabelecer a influência dos atritos  $\mu_s$  e  $\mu_r$ , do coeficiente de restituição ( $e$ ) é necessário analisar como esses parâmetros variam o ângulo de repouso.

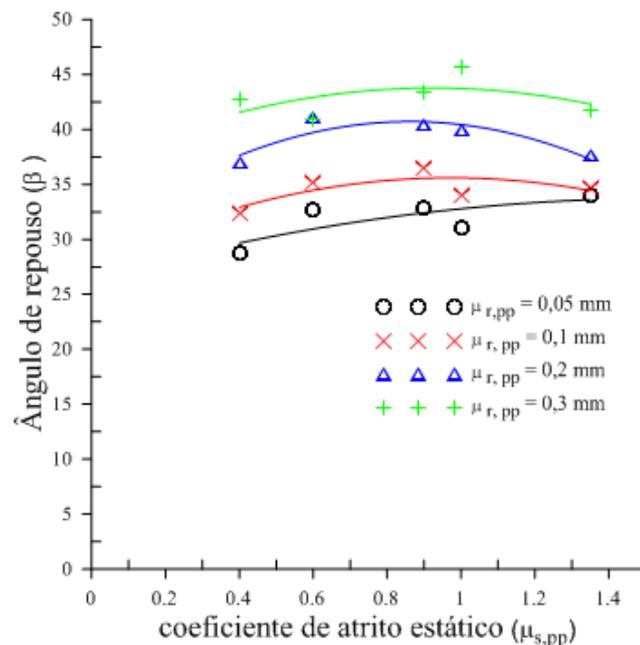
É investigado então, a seguir, os efeitos destes parâmetros na dinâmica do escoamento. É usado a forma esférica e observado apenas a interação partícula-partícula. O modelo de

força de contato usado é o Hertz-Mindlin com Atrito de Rolamento (sem deslizamento) dependente da velocidade angular da partícula (RVD).

### 4.3.1 Coeficiente de atrito estático

O atrito estático ( $\mu_{s,pp}$  ou  $\mu_{s,pw}$ ) controla o movimento de translação das partículas no escoamento. É, portanto, um parâmetro de resistência. A Figura 4.9 mostra como o ângulo de repouso varia em função do coeficiente de atrito estático, para diferentes atritos de rolamento. É observado uma diminuição do ângulo de repouso conforme o atrito de rolamento diminui. De maneira geral, verifica-se que o ângulo de repouso aumenta suavemente com o atrito estático. Por outro lado, é possível combinar os atritos estático e de rolamento para obter valores crescentes do ângulo de repouso.

**Figura 4.9 - Ângulo de repouso em função do coeficiente de atrito estático partícula-partícula, para diferentes atritos de rolamento**

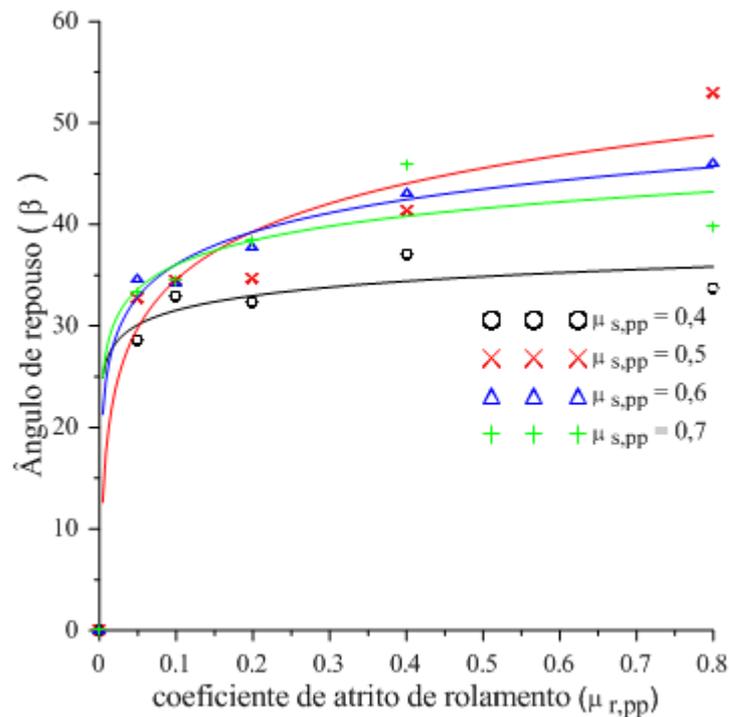


### 4.3.2 Coeficiente de atrito de rolamento

O parâmetro atrito de rolamento ( $\mu_{r,pp}$  ou  $\mu_{r,pw}$ ) é importante no controle do movimento de rotação das partículas. De maneira semelhante ao tópico anterior, verifica-se como o ângulo de repouso varia em função do coeficiente de atrito de rolamento, para diferentes atritos estáticos.

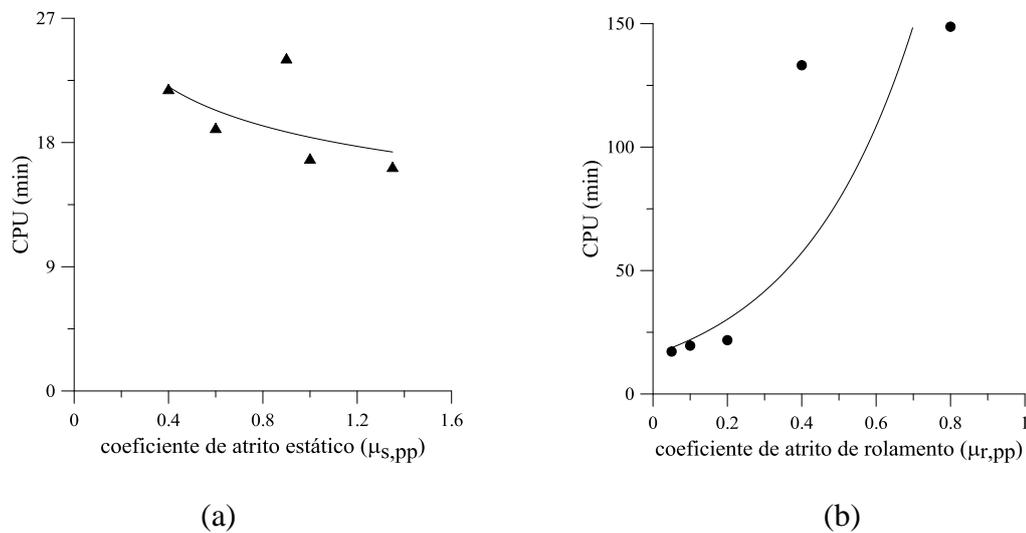
De acordo com os resultados apresentados pela Figura 4.10, o ângulo de repouso diminui com o aumento do atrito estático.

**Figura 4.10 - Ângulo de repouso em função do coeficiente de atrito de rolamento partícula-partícula, para diferentes atritos estáticos**



A principal característica que distingue esta análise daquela apresentada no tópico anterior é mostrada na Figura 4.11. No intervalo investigado, os resultados mostraram que as variações do atrito de rolamento afetaram diretamente o tempo de CPU. De fato, o ângulo de repouso aumentou, mas o tempo computacional de cada simulação foi maior. Já, por outro lado, o aumento de  $\mu_{s,pp}$ , apresenta um tempo de CPU menor.

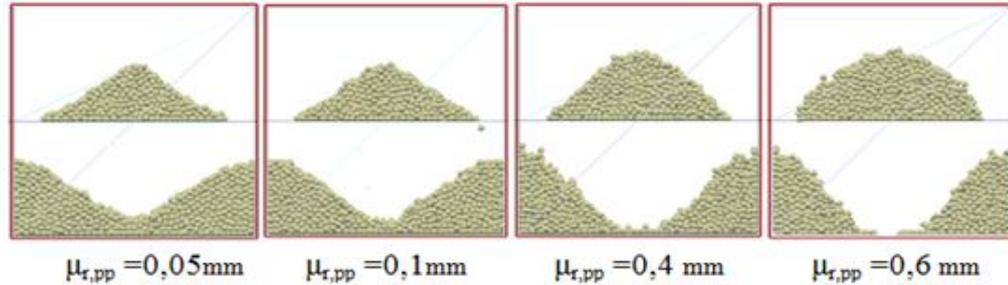
**Figura 4.11 – (a) tempo de CPU com aumento do atrito estático; (b) tempo de CPU com aumento do atrito de rolamento**



Para melhor ilustrar o efeito do atrito de rolamento, a Figura 4.12 apresenta a vista da caixa de fluxo com o aumento deste parâmetro. O aumento do ângulo de repouso na parte

superior e a diminuição de partículas na zona central do fundo da caixa mostram claramente o efeito do aumento da resistência ao escoamento com ao aumento do atrito de rolamento.

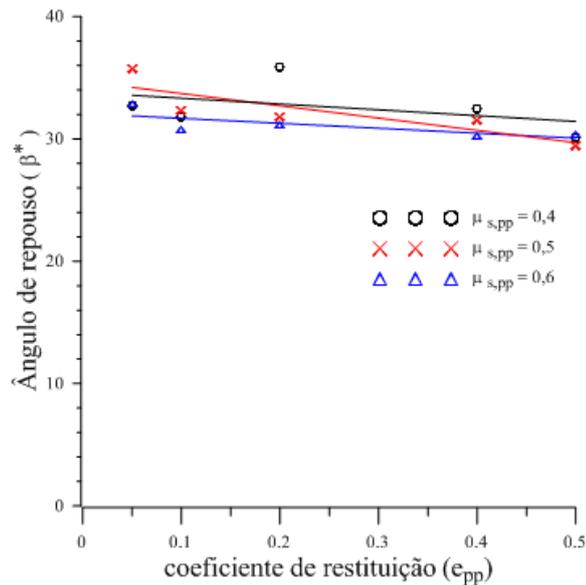
**Figura 4.12 - Resistência ao escoamento revelada na parte inferior da caixa (fixo  $\mu_{s,pp}=0,6$ )**



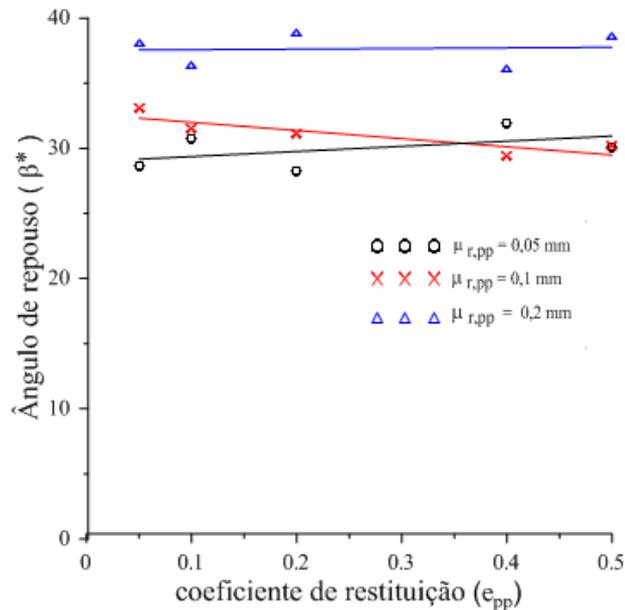
### 4.3.3 Coeficiente de restituição

Verifica-se aqui as variações do ângulo de repouso com a influência do coeficiente de restituição. A Figura 4.13 mostra que o ângulo de repouso diminui com aumento do coeficiente de restituição  $e_{pp}$ . Já a Figura 4.14, observa-se o comportamento em relação ao atrito de rolamento  $\mu_{r,pp}$ . Verifica-se, que o coeficiente de restituição pouco influencia no ângulo de repouso.

**Figura 4.13 - Ângulo de repouso em função do coeficiente de restituição para diferentes atritos estáticos**



**Figura 4.14 - Ângulo de repouso em função do coeficiente de restituição para diferentes atritos de rolamento**



#### 4.3.4 Combinação dos Parâmetros de Atritos para Aumento do Ângulo de Repouso

A seção 4.1 relatou que as partículas não-esféricas apresentaram maiores resistências ao escoamento durante os primeiros resultados deste trabalho, isto é, maiores ângulos de repouso em relação à partícula esférica. Conseqüentemente, a seção 4.5.4 usa a partícula esférica para calibrar os escoamentos das partículas não-esféricas, ou seja, para aumentar o ângulo de repouso. Para ajudar na calibração, é empregado este processo, que combina os parâmetros de atritos para aumentar o ângulo de repouso da partícula esférica.

A lógica do processo consiste em manter um dado ângulo de repouso,  $\beta_n$ , tal que  $\beta_{n-1} < \beta_n < \beta_{n+1}$ , com  $n \in \mathbb{N}^*$  correspondendo ao número da simulação.

A faixa verificada para os parâmetros ultrapassa a de Zhou et al. (2002) e estende um pouco mais a observação da sensibilidade dos parâmetros. Ela é ordenada a partir dos coeficientes iniciais dos atritos obtidos na calibração do experimento de Zhou et al. (2002) mostrados na Tabela 4.13 usando o modelo de Hertz-Mindlin com Atrito de Rolamento.

O processo é acompanhado com tabelas e contém, para cada variação do parâmetro, um valor correspondente do ângulo de repouso. Uma linha (apóstrofo) é adicionada ao número da simulação sempre que ela for refeita para um novo parâmetro de atrito.

A Tabela 4.2 e a

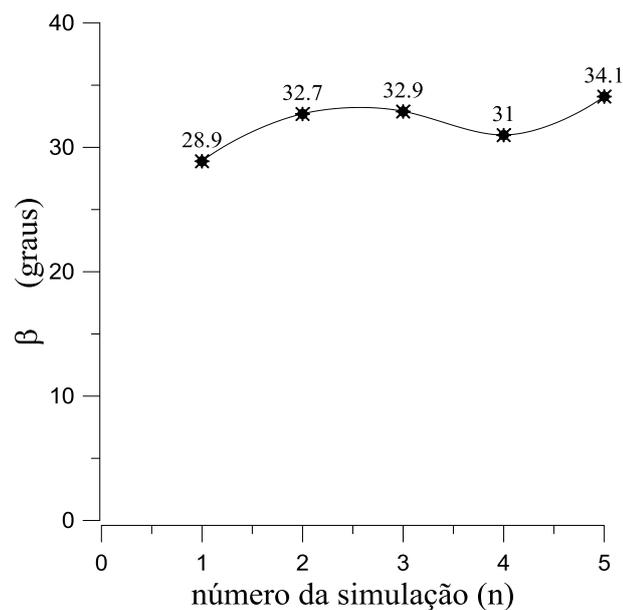
Figura 4.15 são condições iniciais ou o referencial, com o acréscimo gradual do atrito estático, mantendo-se o atrito de rolamento constante. Mostram como é  $\beta$  para uma faixa de parâmetros.

Na simulação 4 o esperado era que  $\mu_{s,pp} = 1,0$  também aumentasse  $\beta$ , pois ele é um parâmetro de resistência ao escoamento maior que o anterior. Entretanto, houve um decréscimo de  $\beta$ . Assim, a metodologia utilizada propõe aumentar o atrito de rolamento quando houver a diminuição do ângulo de repouso. De acordo com o exposto, a Tabela 4.3, mostra a etapa subsequente do processo. Com  $\mu_{s,pp} = 1,0$  fixo, aposta-se em  $\mu_{r,pp}$  para um valor superior; neste caso, para o dobro do anterior,  $\mu_{r,pp} = 2 \times 0,05 = 0,1$  mm. Note que a Tabela 4.3 contém a simulação reajustada da Tabela 4.2, com  $\beta$  aumentando para 34,5 graus.

**Tabela 4.2 - Variação inicial do ângulo de repouso em função apenas de  $\mu_{s,pp}$**

No. Simulação (n)	PARÂMETRO ( $\mu_{s,pp}$ )			CPU (min)
	$\mu_{s,pp}$	$\mu_{r,pp}$ (mm)	$\beta$ (graus)	
1	0,4	0,05	28,9	17,22
2	0,6	0,05	32,7	14,16
3	0,9	0,05	32,9	14,28
4	1,0	0,05	31,0	14,82
5	1,35	0,05	34,1	13,98

**Figura 4.15 - Variação inicial do ângulo de repouso em função apenas do coeficiente de atrito estático  $\mu_{s,pp}$  para  $\mu_{r,pw} = 0,05$ mm fixo em 7 s de simulação (condições iniciais)**



**Tabela 4.3 - Ajuste do ângulo de repouso para parâmetro de atrito de rolamento,  $\mu_{r,pp} = 1,0$** 

No. Simulação (n)	PARÂMETRO ( $\mu_{s,pp}$ )			
	$\mu_{s,pp}$	$\mu_{r,pp}$ (mm)	$\beta$ (graus)	CPU (min)
1	0,40	0,05	28,9	17,22
2	0,60	0,05	32,7	14,16
3	0,90	0,05	32,9	14,28
4'	1,00	0,10	34,5	14,82
5	1,35	0,05	34,1	13,98

Contudo, na atual tabela, a condição de crescimento  $\beta_{n-1} < \beta_n < \beta_{n+1}$  ainda não é satisfatória, pois, na linha de (4'),  $\beta_4 < 34,5$ . Agora, pois, é em  $n = 4$ , que é ajustado o valor de  $\beta$  para 34,5 graus.

Deste modo, o novo valor do atrito de rolamento foi definido em  $n = 4$ . Na sequência, a simulação foi rodada para os parâmetros  $\mu_{s,pp} = 1,35$  com  $\mu_{r,pp} = 0,1$  e verificado as condições de crescimento de  $\beta$ . A Tabela 4.4 mostra a sequência das simulações até a condição  $\beta_{n-1} < \beta_n < \beta_{n+1}$  satisfeita. Os resultados finais estão resumidos na Tabela 4.5 e na Figura 4.16. Além disso, verifiquemos que as variações do atrito de rolamento aumenta o tempo de CPU.

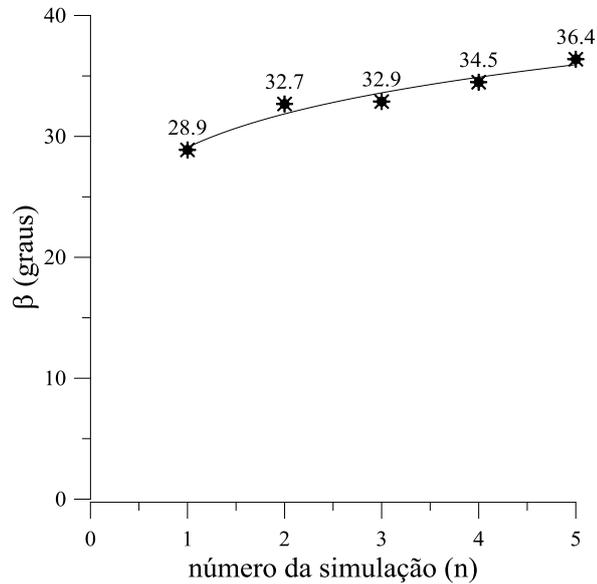
**Tabela 4.4 - Resultados intermediários dos ajustes dos coeficientes de atritos**

No. Simulação (n)	PARÂMETROS			
	$\mu_{s,pp}$	$\mu_{r,pp}$ (mm)	$\beta$ (graus)	CPU (min)
1	0,4	0,05	28,9	17,22
2	0,6	0,05	32,7	14,16
3	0,9	0,05	32,9	14,28
4'	1,0	0,1	34,5	14,82
5'	1,35	0,1	31,9	11,88

**Tabela 4.5 – Dados finais de ajuste dos pontos de decréscimo do ângulo de repouso com partícula esférica com diâmetro de 10 mm**

No. Simulação (n)	PARÂMETROS AJUSTADOS			
	$\mu_{s,pp}$	$\mu_{r,pp}$ (mm)	$\beta$ (graus)	CPU (min)
1	0,40	0,05	28,9	17,22
2	0,60	0,05	32,7	14,16
3	0,90	0,05	32,9	14,28
4'	1,00	0,10	34,5	11,88
5''	1,35	0,20	36,4	13,98

**Figura 4.16 - Crescimento do ângulo de repouso com ajustes dos parâmetros de atrito:  $n=2$ ,  $\mu_{s,pp}=0,6$  e  $\mu_{r,pp}=0,05\text{mm}$ ;  $n=3$ ,  $\mu_{s,pp}=0,9$  e  $\mu_{r,pp}=0,05\text{ mm}$ ;  $n=4$ ,  $\mu_{s,pp}=1,0$  e  $\mu_{r,pp}=0,1\text{mm}$ ;  $n=5$ ,  $\mu_{s,pp}=1,35$  e  $\mu_{r,pp}=0,2\text{mm}$**

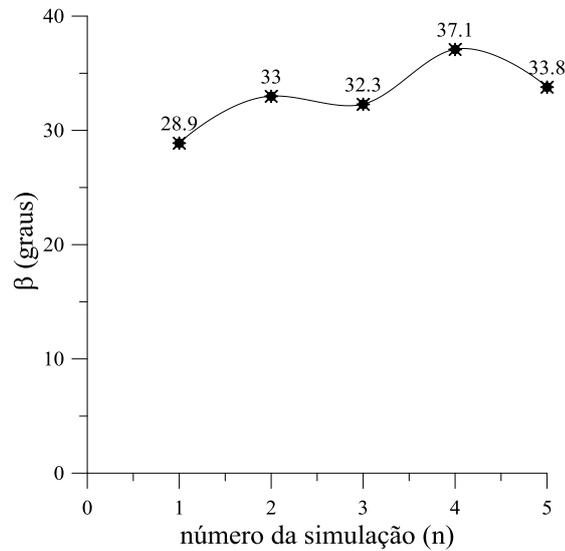


Analisa-se, o aumento do ângulo de repouso com a variação do atrito de rolamento,  $\mu_{r,pp}$  a seguir. O coeficiente de atrito estático partícula-partícula é inicialmente fixo e igual a  $\mu_{s,pp} = 0,4$ . Os pontos de decrescimento de  $\beta$  estão apresentados na Tabela 4.6 e na Figura 4.17. São dois os pontos de decrescimento,  $\beta = 32,3$  e  $\beta = 33,8$  e, correspondem, respectivamente, a  $\mu_{r,pp} = 0,2$  e  $\mu_{r,pp} = 0,8$ .

**Tabela 4.6- Variação inicial do ângulo de repouso em função apenas de  $\mu_{r,pp}$**

No. Simulação (n)	PARÂMETRO ( $\mu_{r,pp}$ )			CPU (min)	Tempo (s)
	$\mu_{s,pp}$	$\mu_{r,pp}$ (mm)	$\beta$ (graus)		
1	0,4	0,05	28,9	17,22	7
2	0,4	0,10	33,0	19,62	8s
3	0,4	0,20	32,3	21,84	10s
4	0,4	0,40	37,1	133,2	55s
5	0,4	0,80	33,8	148,8	60

**Figura 4.17 -Variação inicial do ângulo de repouso em função apenas do parâmetro atrito de rolamento  $\mu_{r,pp}$  para  $\mu_{s,pp} = 0,4$  e variados tempos de simulação (condições iniciais)**



Prosseguindo com o processo, vemos que a Tabela 4.7 e uma atualização da Tabela 4.6. Em  $n = 3$ ,  $\mu_{r,pp} = 0,2$  mm foi mantido e  $\mu_{s,pp} = 0,5$  foi alterado. O ângulo de repouso saltou de 32,3 para 33,3 e, portanto, atende as condições de crescimento  $\beta_2 < \beta_3 < \beta_4$ .

**Tabela 4.7 – Dados da simulação para o ângulo de 32,3° com variação do atrito estático partícula-partícula e forma esférica**

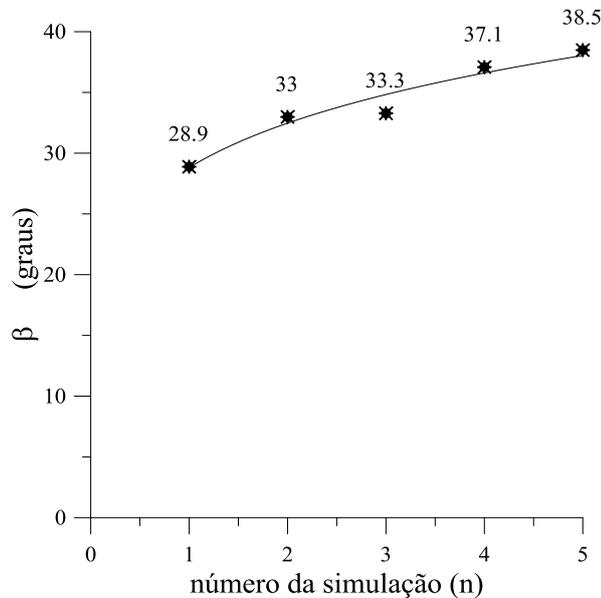
PARÂMETRO ( $\mu_{r,pp}$ )					
No. Simulação (n)	$\mu_{s,pp}$	$\mu_{r,pp}$	$\beta$ (graus)	CPU(min)	Tempo(s)
1	0,4	0,05	28,9	17,22	7
2	0,4	0,1	33,0	19,62	8
3'	0,5	0,2	33,3	46,92	20
4	0,4	0,4	37,1	133,2	55
5	0,4	0,8	33,8	148,8	60

Verifica-se então, o segundo ponto de decrescimento de  $\beta$ . Como  $\beta_4 > \beta_5$  a condição de crescimento entre estes últimos ângulos não é satisfeita, logo em  $n = 5$ ,  $\beta$  será ajustado. Na atual condição, o atrito estático é  $\mu_{s,pp} = 0,5$ , contudo, ainda não fora atualizada em  $\mu_{r,pp} = 0,8$ . Atualizando, pois, o valor de  $\beta$ , tem-se a Tabela 4.8. Nela o valor de  $\beta$  atinge 38,5 e finaliza o processo de crescimento. A Figura 4.18 mostra o crescimento do ângulo de repouso com todos os parâmetros ajustados.

**Tabela 4.8- Dados de ajuste dos pontos de decrescimento do ângulo de repouso com partícula esférica com diâmetro de 10 mm**

PARÂMETROS AJUSTADOS					
No. Simulação (n)	$\mu_{s,pp}$	$\mu_{r,pp}$ (mm)	$\beta$ (graus)	CPU (min)	Tempo (s)
1	0,4	0,05	28,9	17,22	7
2	0,4	0,1	33,0	19,62	8
3'	0,5	0,2	33,3	46,92	20
4	0,4	0,4	37,1	133,2	55
5'	0,5	0,8	38,5	150,0	60

**Figura 4.18 - Crescimento do ângulo de repouso com ajustes dos parâmetros de atrito: n = 2 ,  $\mu_{s,pp} = 0,4$  e  $\mu_{r,pp} = 0,1\text{mm}$  ; n = 3' ,  $\mu_{s,pp} = 0,5$  e  $\mu_{r,pp} = 0,2\text{mm}$ ; n=4,  $\mu_{s,pp} = 0,4$  e  $\mu_{r,pp} = 0,4\text{mm}$ ; n = 5' ,  $\mu_{s,pp} = 0,5$  e  $\mu_{r,pp} = 0,8\text{mm}$**



#### 4.3.5 Efeitos da Geração Randômica de Partículas

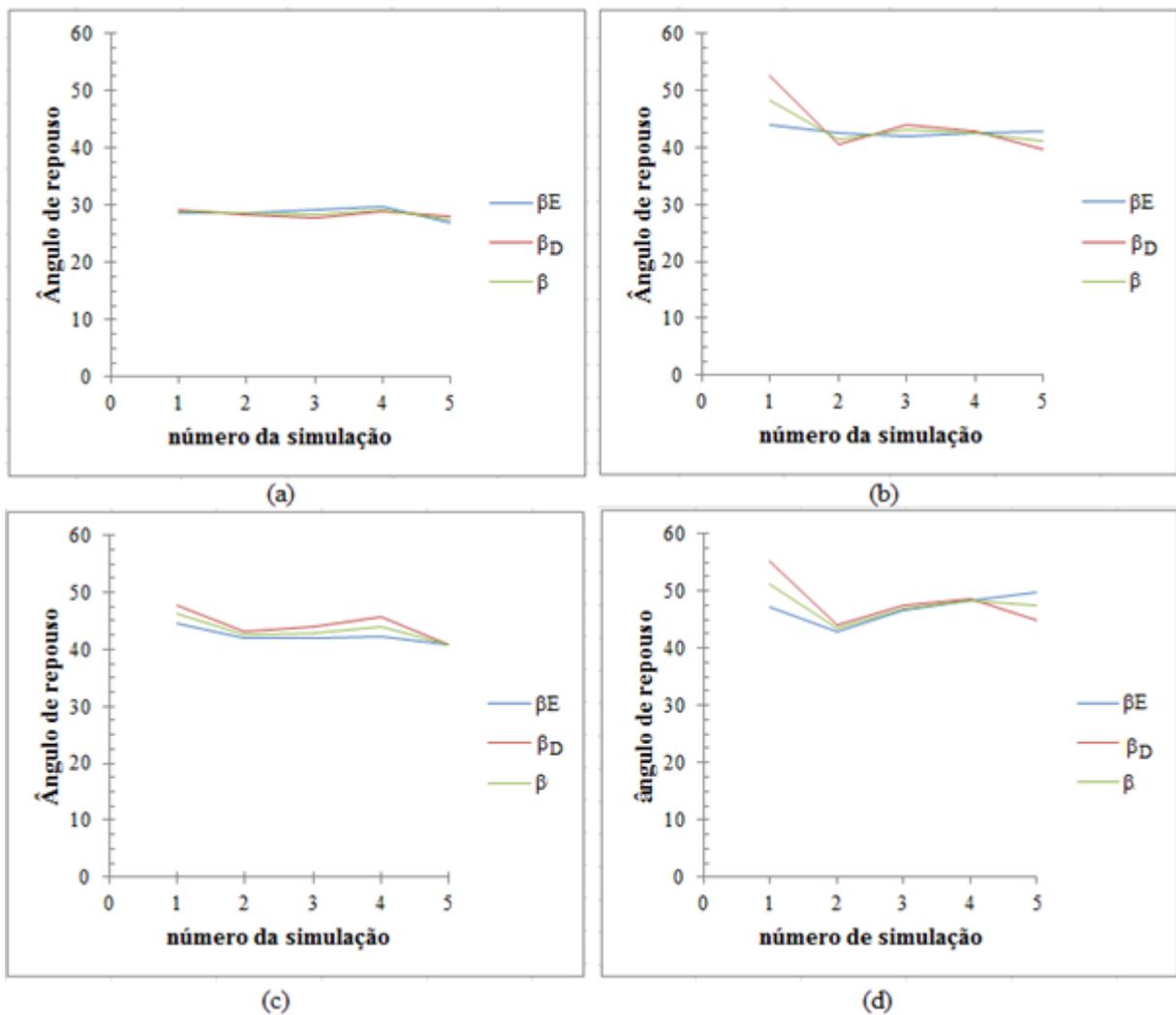
Embora a caixa de fluxo seja simétrica para o escoamento das partículas, os ângulos de repouso não são iguais entre si. Além disso ao repetir uma simulação verifica-se também um espalhamento de suas medidas. A razão destas disparidades é a geração randômica das partículas.

De fato, isso é verificado no comportamento dos ângulos de repouso, conforme mostra a Figura 4.19. Foi constatado em cinco simulações com cada forma de partícula e o modelo de Hertz-Mindlin com Atrito de Rolamento (sem deslizamento) RVD. Os valores dos parâmetros de simulação constam na Tabela 4.13.

As comparações feitas usam o mesmo tempo de simulação para cada partícula. As simulações da forma 1, forma 2, forma 3 e forma 4 usaram, respectivamente, 7s, 5s, 5s e 4s. O valor do ângulo  $\beta$  é calculado conforme descrito no tópico 2.5.

A Tabela 4.9 mostra, para cada forma, o número da simulação e o maior percentual de diferença em relação as medidas esquerda e direita que determinam  $\beta$ .

**Figura 4.19 – Comportamento dos ângulos de repouso na geração randômicas de partículas (a) Forma 1; (b) Forma 2; (c) Forma 3; (d) Forma 4**



**Tabela 4.9 – Maiores diferenças entre as medidas esquerda e direita de  $\beta$  com base em  $\beta$**

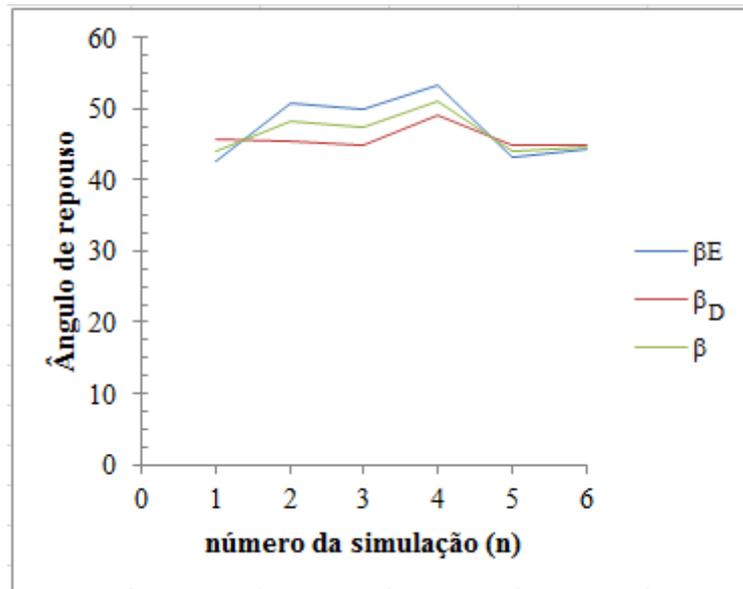
Formas	No. da simulação	Diferença (%)
● Forma 1	3	2,3
●● Forma 2	1	8,9
●●● Forma 3	4	3,7
●●●● Forma 4	1	7,9

Este efeito randômico também foi testado para o modelo de Hertz-Mindlin com Coesão JKR para o número de seis simulações. Além da geração randômica e distribuição granulométrica foi empregada com partículas esféricas.

O maior desvio foi de 9,66%, e compreende uma faixa de segurança para  $\beta$  entre  $42,1^\circ$  a  $51,1^\circ$ . Por outro lado, a maior diferença relativa na ordem 2 da simulação com 11,6% entre as medidas esquerda ( $\beta_E$ ) e direita ( $\beta_D$ ). Veja a Figura 4.20 e a Tabela 4.10.

Veremos, pois, que os dados da Tabela 4.20 estão dentro da faixa de segurança.

**Figura 4.20 – Comportamento do ângulo de repouso em seis simulações randômicas com Modelo de Hertz-Mindlin com coesão JKR, distribuição normal e partícula esférica**



**Tabela 4.10- Síntese das variações dos ângulos de repouso em simulações randômicas com o modelo de Hertz-Mindlin com coesão JKR (partícula esférica com distribuição granulométrica)**

No. da simulação	$\beta_E$	$\beta_D$	$\beta$
1	42,7	45,6	44,15
2	50,8	45,5	48,15
3	50,0	45,0	47,50
4	53,2	49,0	51,10
5	43,2	45,0	44,10
6	44,2	45,0	44,60

#### 4.3.6 Incerteza do Ângulo de Repouso ( $\beta$ )

Seja  $R$  uma função de variáveis  $x_i$  pertencentes às distribuições gaussianas e com incertezas  $\delta_{x_i}$

$$R = R(x_1, x_2, \dots, x_k, \dots, x_{N-1}, x_N) \quad ; \quad \bar{x}_k = \mu_{x_k} \pm \delta_{x_k} \quad (4.1)$$

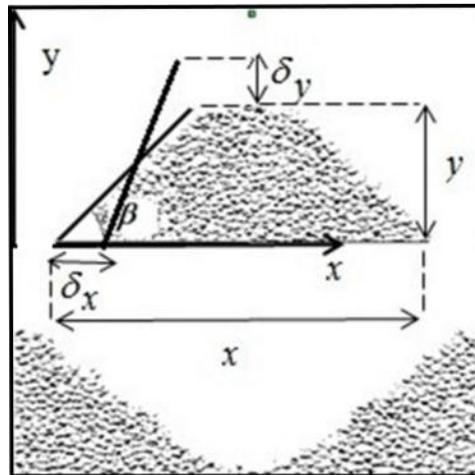
A incerteza de R, denotada  $\delta R$ , é dada por Kline e McClintock como

$$\delta_R = \sqrt{\left(\frac{\partial R}{\partial x_1} \delta_{x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial x_2} \delta_{x_2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial R}{\partial x_N} \delta_{x_N}\right)^2} \quad (4.2)$$

Considere a inclinação da pilha de partículas com ângulo de repouso,  $\beta$ , conforme mostra Figura 4.21. O cálculo apresentado abaixo para a incerteza do ângulo de repouso levou em consideração o tamanho do pixel. A resolução da Figura 4.21, são reais para as dimensões de largura e altura com, respectivamente, 239 x 239 pixels. Tanto a vertical como a horizontal são de 96 dpi (iniciais de “dots per inch” - ou pontos por polegada). O comprimento  $x$  sob a placa central tem 185 pixels. Apenas a metade desse comprimento será útil como referência. A altura  $y$  tem 71 pixels.

Sabendo que uma polegada tem 25,4 mm, podemos concluir que o tamanho linear de 1 pixel é  $2,54 / 96 = 0,026458$  mm. Logo, o comprimento  $x$  da placa central e a altura  $y$  da pilha são, respectivamente, 185 pixels =  $0,026458 \times 185 = 4,89473$  mm e 71 pixels =  $0,026458 \times 71 = 1,878518$  mm. A largura e altura da caixa de fluxo são, ambas,  $0,026458 \times 239 = 6,323462$  mm. A Tabela 4.11 consta das transformações de unidades.

**Figura 4.21-Dimensões que geram incertezas nas medições**



O ângulo de repouso é dado por,

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{y}{x} \Leftrightarrow \beta(x, y) = \operatorname{arctg} \left( \frac{y}{x} \right) \quad (4.3)$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial x} = -\frac{y}{x^2} \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} = -\frac{y}{x^2 + y^2} \quad (4.4)$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial y} = \frac{1}{x} \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} \quad (4.5)$$

Adequando essas expressões à equação (4.2)

$$\delta \beta = \sqrt{\left(\frac{-y}{x^2 + y^2}\right)^2 \delta x^2 + \left(\frac{x}{x^2 + y^2}\right)^2 \delta y^2} \quad (4.6)$$

Em termos percentuais, relativo à medição de  $\beta$ , podemos usar a expressão

$$\frac{\delta \beta}{\beta} = \sqrt{\left(\frac{\partial \beta}{\partial x} \cdot \frac{\delta x}{\beta}\right)^2 + \left(\frac{\partial \beta}{\partial y} \cdot \frac{\delta y}{\beta}\right)^2} \quad (4.7)$$

$$\frac{\delta \beta}{\beta} = \sqrt{\left(\frac{-y}{x^2 + y^2}\right)^2 \left(\frac{\delta x}{\beta}\right)^2 + \left(\frac{x}{x^2 + y^2}\right)^2 \left(\frac{\delta y}{\beta}\right)^2} \quad (4.8)$$

Substituindo os dados da Tabela 4.11 na equação (4.8), para um ângulo de 37,5 (em radianos), segue

$$\begin{aligned} \frac{\delta \beta}{\beta} &= \sqrt{\left(\frac{-1,878518}{(2,447365)^2 + (1,878518)^2}\right)^2 \left(\frac{0,026458}{0,65465}\right)^2 + \left(\frac{2,447365}{(2,447365)^2 + (1,878518)^2}\right)^2 \left(\frac{0,026458}{0,65465}\right)^2} \\ &= 0,0131 \text{ ou } 1,31\% \end{aligned}$$

Verifica-se, portanto, com uma incerteza de um pixel +/- 0,026458 mm na direção de  $x$  e  $y$ , tem-se uma incerteza percentual de 1,31% no ângulo  $\beta$ .

O ângulo 37,5 é obtido substituindo os valores de  $x/2$  e  $y$  ( 2,447 e 1,878 mm) na Equação (4.3).

**Tabela 4.11 -Valores convertidos em função do tamanho do pixel**

$x/2(\text{pixels})$	$y(\text{pixels})$	$\delta x = \delta y$ (um pixel)	$\beta$ (37,5°)	$\delta \beta$	$\delta \beta / \beta$	%
2,447365 mm	1,878518 mm	0,026458 mm	0,65465 rad	0,008576	0,0131	1,31%

Sendo o erro percentual, dado pela equação (4.9), segue,

$$E_{\%} = \sqrt{\left(\frac{\delta \beta * 100}{\beta}\right)^2 + R_n^2} \quad (4.9)$$

Onde  $E_{\%}$  é o erro percentual,  $\frac{\delta \beta}{\beta}$  é a incerteza relativa da medida do ângulo  $\beta$  em relação ao tamanho do pixel (com resolução da tela do computador), e  $R_n$  a média percentual calculada com base em seis variações randômicas do ângulo de repouso (espalhamento).

De acordo com a Equação (4.7) e a Tabela 4.12, temos que

$$\frac{\delta\beta * 100}{\beta} = 1,31 \%$$

e

$$R_n = 5\%$$

Substituindo esses valores na Equação (4.9), resulta

$$E_{\%} = \sqrt{(1,31)^2 + 5^2} = 5,16\% \quad (4.10)$$

A Tabela 4.12 foi construída para cada desvio-padrão. Cinco repetições foram feitas para cada curva sob as mesmas condições. O ângulo médio e o máximo desvio foram calculados. Consta também dos limites inferior e superior, com base na variação do ângulo de repouso. A variação percentual foi calculada para cada desvio desvio-padrão, como a razão entre máximo desvio e o ângulo médio de  $\beta$ .

**Tabela 4.12- Resultados das análises feitas para o espalhamentos dos ângulo de repouso, devido à geração randômica das partículas com a inclusão de diferentes desvios-padrão**

Desvio-padrão ( $\sigma$ )	Ângulo médio ( $\beta$ )	Desvio $\Delta\beta$ (máximo)	$\beta - \Delta\beta$	$\beta + \Delta\beta$	Varição Percentual (graus)
1,00	30,42	0,17	30,25	30,59	0,56
1,25	30,85	3,30	27,55	34,15	10,70
1,50	30,77	0,50	30,27	31,27	1,62
2,00	32,57	1,27	31,30	33,84	3,90
4,00	32,95	3,00	29,95	35,95	9,10
8,00	32,19	1,32	30,87	33,51	4,10
Média Randômica ( $R_n$ )					4,99

Finalmente, com uma incerteza de +/-1 pixel nas medições de  $x$  e  $y$ , e com a variação randômica de aproximadamente 5% na determinação de  $\beta$ , tem-se um erro de aproximadamente 5,16% para mais ou para menos. Isto significa, por exemplo, que se um ângulo é medido como 29 graus, esse valor tem uma margem entre 27,5° e 30,49°.

#### 4.4 CALIBRAÇÃO DE MODELOS DEM

##### 4.4.1 Metodologia

A caixa usada foi mostrada na subseção 4.2.1 escalonada para partículas esféricas de 10 mm (ZHOU et al., 2002). Não obstante, as partículas que escoam estão melhor representadas na Figura 4.26, e foram mantidas inscritas no diâmetro de 10 mm. Elas foram criadas com junção de esferas e estocadas dentro da biblioteca específica do EDEM.

Alternadamente, cada partícula é pré-selecionadas antes de ser randomicamente gerada. Um volume de aproximadamente  $1\,920\,000\text{ mm}^3$  partículas do mesmo tamanho é gerado em um segundo. Após o intervalo de 1s, as comportas são abertas e inicia-se o escoamento das partículas. Por conseguinte, uma pilha de partículas se estabiliza sobre a placa central da caixa de fluxo formando a chamada zona de estagnação, conforme discutido no tópico 4.2.1.

O volume das partículas é baseado na altura de 120 mm a partir da placa central, conforme mostra Figura 4.28, ou seja, o volume de material granular é  $1,92\text{E-}03\text{ m}^3$  (ou  $40 \times 400 \times 120\text{ mm}^3 = 1\,920\,000\text{ mm}^3$ ).

O EDEM foi preconfigurado de tal forma que o tamanho das células cúbicas (mesh) foram mantidas com exatamente 10 mm de aresta, totalizando 8405 células. Devido a isso o algoritmo de detecção de contatos (ou colisões) atua nas meshes e calcula as forças envolvidas (Guia do usuário EDEM, 2011).

#### 4.4.2 Calibração Para o Experimento de Zhou

Esta calibração é o referencial para validar os parâmetros do escoamento da partícula esférica da Figura 4.26 usada no experimento de Zhou et al. (2002).

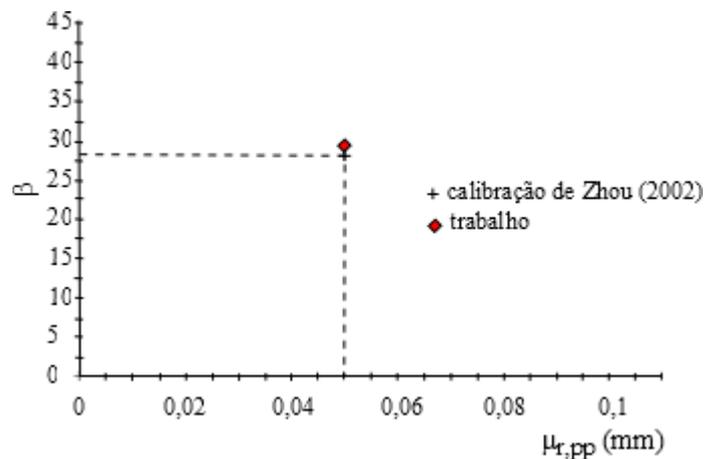
Os parâmetros obtidos dessa calibração estão apresentados pela Tabela 4.13. O ângulo de repouso calibrado foi 28,9 graus como mostra a Figura 4.22.

Os ângulos contabilizam uma incerteza percentual de 1,31% graus e considera os desvios (espalhamentos randômicos), totalizando num erro de mais ou menos 5,16% sobre a medida aferida para  $\beta$ . Essas diferenças nas medições foram apresentadas no tópico 4.3.6.

**Tabela 4.13- Parâmetros da calibração da partícula esférica de diâmetro 10 mm e obtenção do ângulo de repouso 28,9°, comparado com aproximadamente 28,1° de Zhou et al. (2002)**

Variável \ Material	Esferas de vidro	Caixa de vidro
propriedades mecânicas	partícula	parede
Coefficiente de Poisson ( $\nu$ )	0,3	0,3
Módulo de cisalhamento (G)	$8,31\text{e}+07\text{ Pa}$	$8,31\text{e}+07\text{ Pa}$
Massa específica ( $\rho$ )	$2500\text{ kg/m}^3$	$2500\text{ kg/m}^3$
<b>Interação</b>	<b>Partícula-partícula (pp)</b>	<b>Partícula-parede (pw)</b>
Coefficiente de restituição ( $e$ )	$e_{pp} = 0,5$	$e_{pw} = 0,25$
Coefficiente de atrito estático ( $\mu_s$ )	$\mu_{s,pp} = 0,4$	$\mu_{s,pw} = 0,6$
Coefficiente de atrito de rolamento ( $\mu_r$ )	$\mu_{r,pp} = 0,05\text{ mm}$	$\mu_{r,pw} = 0,1\text{ mm}$

**Figura 4.22 - Calibração e validação de  $\beta$  com erro de 2,9%**



Fonte: Zhou et al (2002) - Pontos capturados com o aplicativo Engauge Digitizer.

#### 4.5 ANÁLISE DO EFEITO DA FORMA DA PARTÍCULA

Alguns métodos foram empregados no passado na análise bidimensional de partículas não-circulares. Atualmente, tem crescido a atenção aos efeitos da forma da partícula em transporte de chutes, em descarga de silos e muitas outras aplicações industriais.

Antes de apreciar a presente análise, segue um breve histórico de estudos morfológicos das partículas.

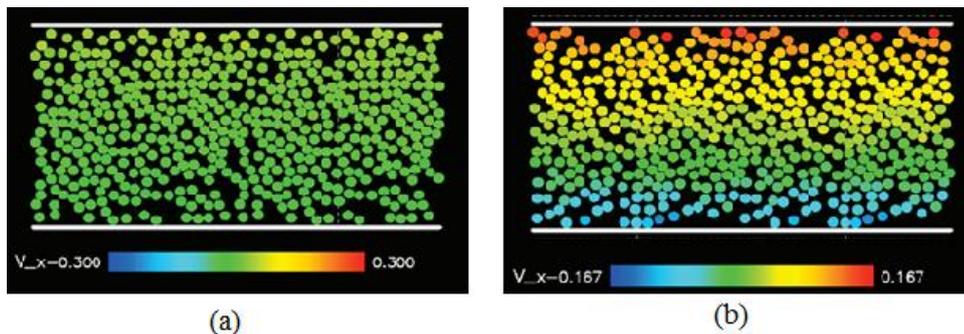
Robinson e Friedman (2002,) estudaram as formas das partículas pelo fator de forma e relacionaram com o ângulo de repouso. Segundo eles, o aumento da angularidade das partículas aumentavam o ângulo de repouso.

Até o Final do século XX, a presença de formas regulares de partículas eram destacadas na grande maioria dos trabalhos, sendo a mais empregada a forma esférica. As atividades experimentais nesse contexto simplicista eram realizadas sem a devida atenção à forma da partícula. Hoje, pode-se encontrar alguns registros de trabalhos com formas variadas, como as realizados por Cleary (2008), que analisou os efeitos da forma da partícula, centrado em considerações sobre a influência dos efeitos que a geometria da partícula requer. Encontra-se entre seus recentes trabalhos, o tratamento, em 2D, para escoamento granular, cujo comportamento é mostrado pela Figura 4.23 (fluxo de Couette).

Da literatura, verifica-se ainda que a variação das formas das partículas eram significantes, uma vez que elas eram responsáveis por afetar os resultados de muitos ensaios e que muitos dos resultados empíricos negligenciavam a forma das partículas, enquanto se analisava outras variantes (CLEARY, 2008).

De maneira geral, a análise dos efeitos da forma é muito escassa dentro dos trabalhos de pesquisas do passado, tanto, que atualmente o trabalho de Cleary (2008) foi revisto por meio da ferramenta DEM. A aplicação do método DEM, permitiu observar o comportamento do fenômeno do colapso inelástico, que é o movimento das partículas para o centro das placas com a perda de contato com as paredes. Foi Campbell (1985) o primeiro a observar a configuração do colapso inelástico.

**Figura 4.23- Fluxo de Couette com material granulado esférico em caso bidimensional: (a) sem vibração das paredes e com colapso inelástico; (b) com vibração da parede e sem colapso inelástico**

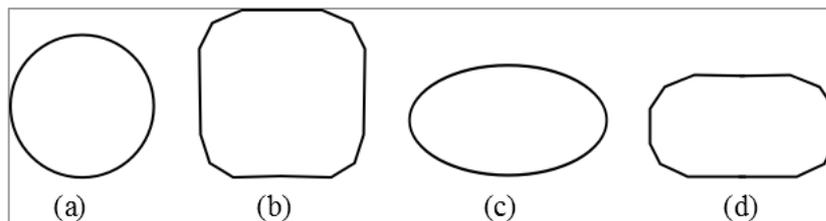


Fonte: CLEARY (2008)

Foi a equação da superquádrica (Equação (4.11)) que ajudou a revelar que as partículas não-circulares ausentava o colapso inelástico. Essa observação eximiu a aplicação de alternativas de controle da estabilidade do fluxo. A Figura 4.23b mostra como vibrações nas paredes eliminavam o colapso inelástico. Esse fato levou à uma maior apreciação da variação da forma da partícula. Além disso, o foco dado à forma da partícula fez verificar também a influência dos valores da rotação das partículas e do transporte de energia.

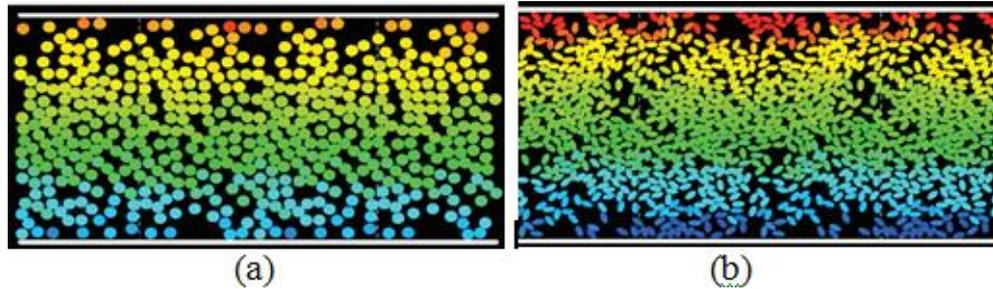
$$x^N + \left(\frac{y}{A}\right)^N = S^N \quad (4.11)$$

**Figura 4.24 - Formas de partículas obtidas por variação dos parâmetros N e A (a) circular (N=2, A=1.0); (b) quadrada com cantos arredondados (N=6, A=1.0); (c) elíptica (N=2, A=0.5); (d) ladrilho (N=6, A=0.5)**



Fonte: Adaptado de Cleary (2008)

**Figura 4.25 - Formas obtidas pela variação dos parâmetros N e A: (a) A=1.0 e N=2 (circular); (b) A=0,5 e N=2 (elíptica)**



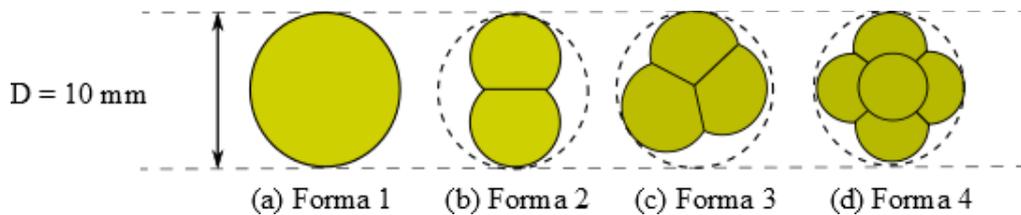
Fonte: Cleary (2008).

Com base nestes contextos, verifica-se a necessidade das novas análises para os efeitos das formas das partículas, como as apresentadas aqui, para o escoamento de materiais granulares.

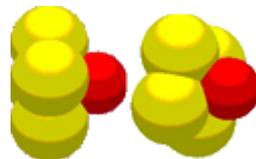
#### 4.5.1 Geração de Partículas Não-Esféricas

Nesta seção, é introduzido o efeito da forma das partículas DEM em 3D. São utilizados quatro formas distintas de partículas inscritas numa seção de diâmetro de 10 mm. Essas partículas foram formadas por sobreposição de esferas, conforme mostradas na Figura 4.26 e Figura 4.27.

**Figura 4.26 - Formas das partículas analisadas circunscritas por um diâmetro de 10 mm**



**Figura 4.27 - Forma 4 em seções diferentes**



#### 4.5.2 Esfericidade das Formas Geradas

De acordo com a definição de esfericidade ( $\psi$ ), dada no tópico 2.3, equação (2.3), temos,

$$\psi = \frac{S_e}{S_p}$$

O volume de cada partícula (em mm<sup>3</sup>), bem como sua superfície (em mm<sup>2</sup>), estão listados na Tabela 4.14. Cada partícula da junção possui coordenadas do centro de massa C e raio R definidos no EDEM. A partir dos centros de massa, C, foram reconstituídas todas as partículas no software SolidWorks. Este, além do volume, calcula as superfícies.

**Tabela 4.14 -Dados tratados pelo software SolidWorks**

	● Forma 1	● Forma2	● Forma 3	● Forma 4
Volume (mm <sup>3</sup> )	523,60	190,85	260,92117	260,41785
Superfície (mm <sup>2</sup> )	314,16	169,65	214,79068	243,96045

- Esfericidade da Forma 1

Para obter a superfície equivalente,  $S_e$ , precisamos obter o raio equivalente ( $R_{eq}$ ). De acordo com os dados da Tabela 4.14 e da expressão do raio equivalente (Equação (2.5)), segue,

$$R_{eq} = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot (523,60)}{4\pi}} = 5$$

Substituindo esse valor na Equação (2.6) fica

$$S_e = 4\pi 5^2 = 314,16$$

De acordo com a Tabela 4.15

$$S_p = 314,16$$

Portanto, a esfericidade da forma 1 é

$$\psi = \frac{S_e}{S_p} = \frac{314,16}{314,16} = 1$$

- Esfericidade da Forma 2

De forma análoga,

$$R_{eq} = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot (190,85)}{4\pi}} = 3,5716414$$

$$S_e = 4\pi \cdot (3,5716414)^2 = 160,3044459$$

$$\psi = \frac{S_e}{S_p} = \frac{160,3044459}{169,65} = 0,944913$$

- Esfericidades da forma 3 e da forma 4

Repetindo os procedimentos para a forma 3 e a forma 4 são obtidos os dados da Tabela 4.15.

Tabela 4.15 - Cálculo das esfericidades no Excel

SolidWorks	Deduzido		SolidWorks	Esfericidade	Partículas
Volume (mm <sup>3</sup> )	$R_{eq}$ (mm)	$S_e$ (mm <sup>2</sup> )	$S_p$ (mm <sup>2</sup> )	$\psi$	Formas
523,60000	5,0000039	314,1597551	314,16000	1,00	FORMA 1 
190,85000	3,5716414	160,3044459	169,65000	0,94	FORMA 2 
260,92117	3,9640602	197,4650939	214,79068	0,92	FORMA 3 
260,41785	3,9615096	197,2110705	243,96045	0,81	FORMA 4 

#### 4.5.3 Escoamento de Partículas Não-Esféricas - Experimento de Zhou

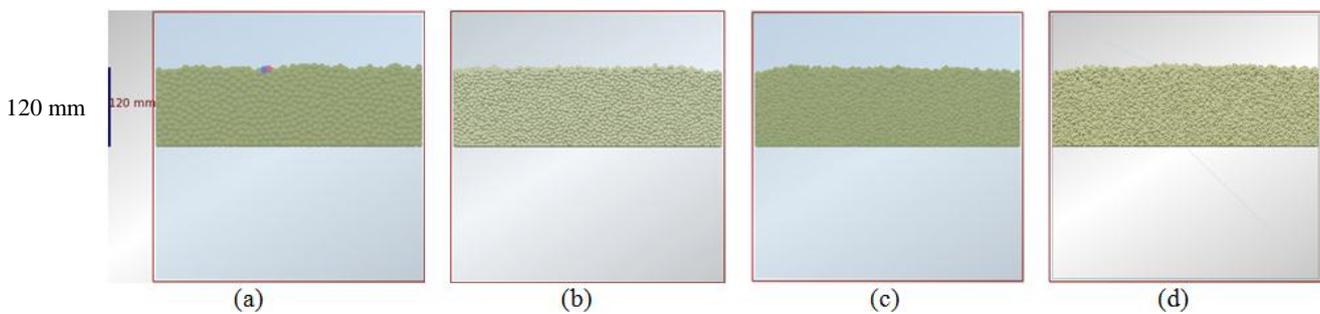
Uma vez calibrado o escoamento da partícula esférica de 10 mm para o experimento de Zhou et al. (2002), e obtidos os parâmetros da Tabela 4.13, foram mantidos para escoar as três formas não-esféricas. A Figura 4.28 mostra os volumes iniciais, enquanto da Figura 4.29 à Figura 4.31, vê-se os estágios iniciais, os intermediários e de medição do ângulo de repouso na zona de estagnação.

Os resultados encontram-se na Tabela 4.16, com destaque às variações de  $\beta$  em função das formas na Figura 4.32.

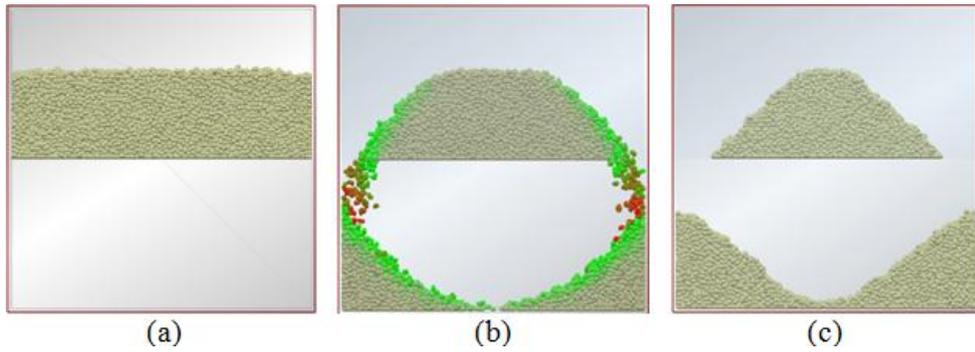
O tempo total de simulação das partículas foi gerenciado de acordo com a forma da partícula. Como fora definido, ele representa o tempo máximo para escoamento das partículas. Por conseguinte, o tempo de CPU não deve ser confundido com o tempo de simulação. De fato, o primeiro é o tempo cronológico da simulação, isto é, o tempo real da duração do processamento; o segundo, é o tempo necessário para a formação da zona de estagnação.

A Figura 4.33 compara o tempo de CPU das partículas, mostrando que a forma esférica apresenta o menor esforço computacional.

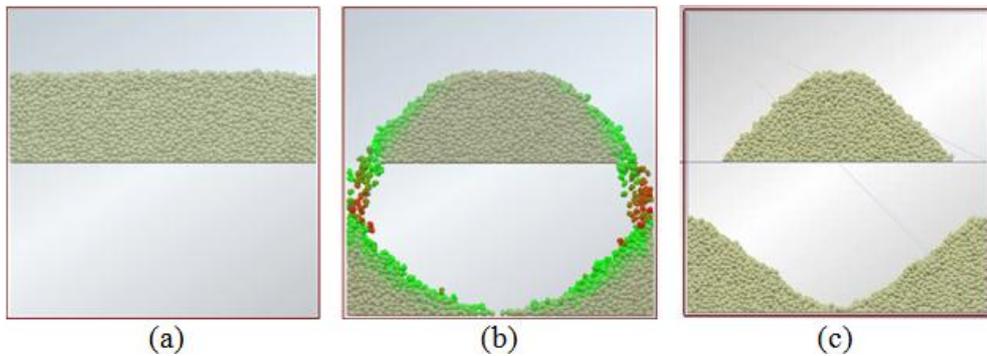
**Figura 4.28 - Estágios iniciais das simulações: (a) forma 1, com 2000 partículas ; (b) forma 2, com 5200 partículas; (c) forma 3, com 4200 partículas; (d) forma 4, com 4000 partículas**



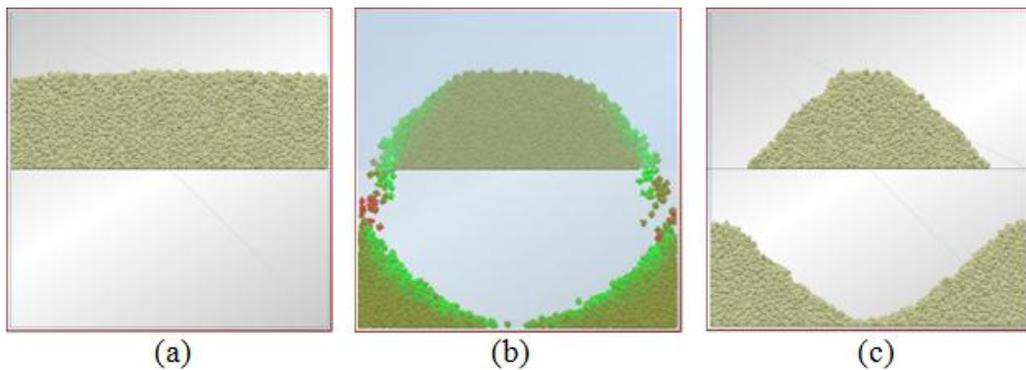
**Figura 4.29 – Estágios inicial, intermediário e final da partícula de forma 2**



**Figura 4.30- Estágios inicial, intermediário e final da partícula de forma 3**



**Figura 4.31- Estágios inicial, intermediário e final da partícula de forma 4**



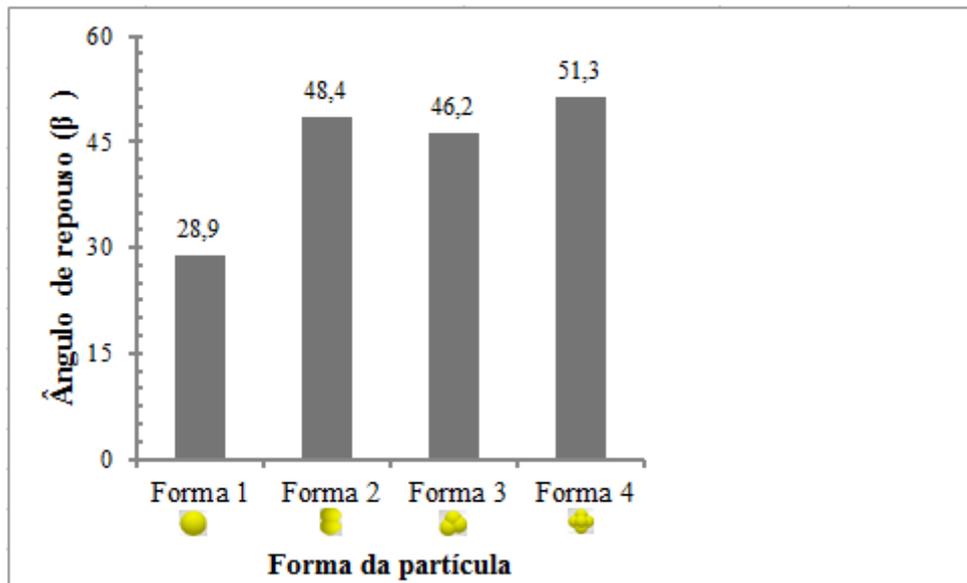
De acordo com os resultados apresentados na Tabela 4.16, a esfericidade apresentou relação inversa com o ângulo de repouso, mas não é possível generalizar essa afirmação apenas com os dados desta tabela. Por outro lado, verifica-se numericamente os efeitos da angularidade sobre as partículas não-esféricas observando as maiores inclinações de suas pilhas em relação a forma esférica. Nessas condições, uma eventual calibração espera a resposta para a seguinte pergunta: utilizando a forma esférica, até que ponto é possível

aumentar o ângulo de repouso e substituir as partículas não-esféricas? Que alterações são mais necessárias? a troca do modelo de contato ou da faixa de variação dos parâmetros de atritos?

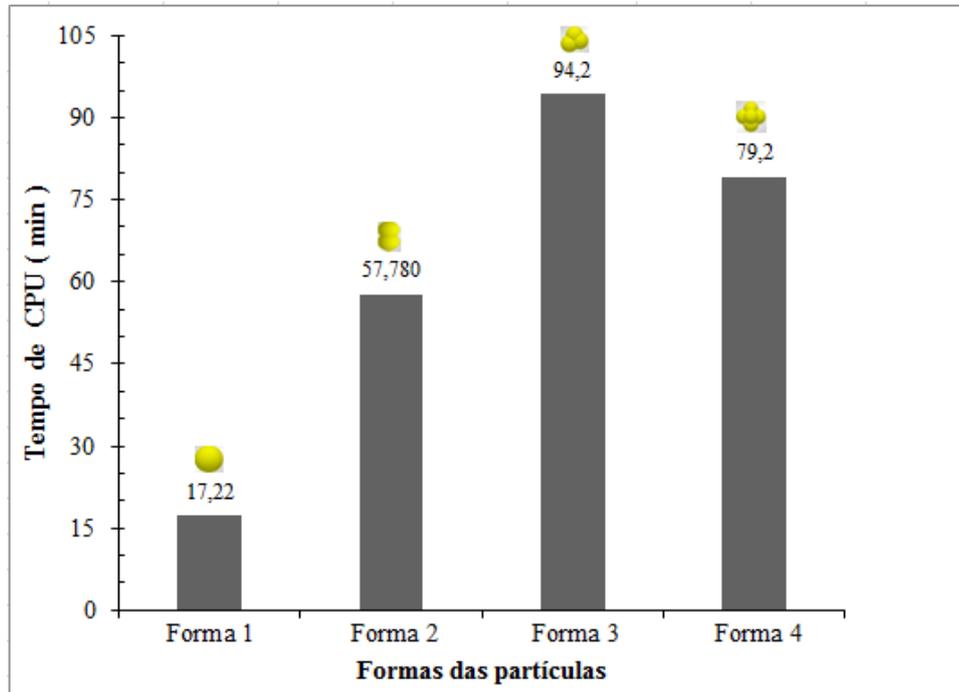
**Tabela 4.16- Ângulos de repouso das partículas não-esféricas pelos parâmetros da validação da forma 1**

Geometria DEM	Esfericidade ( $\psi$ )	Número de Partículas	Tempo de CPU (min)	Ângulo de repouso ( $\beta$ ) e incerteza
● Forma 1	1,00	2000	17,22	28,9 ±1,49
●● Forma 2	0,94	5200	57,78	48,4 ±2,49
●●● Forma 3	0,92	4200	94,20	46,2 ±2,38
●●●● Forma 4	0,81	4000	79,20	51,3 ±2,64

**Figura 4.32 – Ângulos de repouso em função da forma da partícula com modelo de Hertz-Mindlin com Atrito de Rolamento (sem deslizamento) RVD**



**Figura 4.33 - Tempo de CPU em função da forma das partículas: Forma 1 (7s); forma 2 (5s); forma 3 (5s) e forma 4 (4s)**



#### **4.5.4 Utilização de Partículas Esféricas para Simulação de Escoamentos de Partículas Não-Esféricas**

##### *4.5.4.1 Modelo de Hertz-Mindlin com Atrito de Rolamento (sem deslizamento) RVD*

O presente modelo é testado a partir dos parâmetros de calibração da forma esférica encontrados na Tabela 4.13. A Tabela 4.16 mostra que os ângulos de repouso foram diferentes entre si, deixando claro a influência das partícula não-esféricas e, ao mesmo tempo, destacando a forma esférica com o menor tempo de CPU e menor ângulo de repouso.

Nesta situação, para aumentar o ângulo de repouso da forma esférica de modo a obter os resultados das partículas não-esféricas, faz-se necessário alterar alguns parâmetros, conforme já demonstrado no tópico 4.3.4.

Nesse sentido, Grima et al. (2011) contextualizam que ao longo dos anos ainda não houve nenhuma metodologia padrão para determinação de parâmetros que não fosse por calibração, e que o método DEM é por natureza uma aproximação, visto que na realidade não é computacionalmente fácil dispor, com alta fidelidade, de modelos matemáticos que incluam todas as formas aleatórias de partículas. No âmbito destas discussões, portanto, as pretensas simulações serão calibradas.

Por outro lado, a calibração é também praticada com experimentos físicos. Mesmo assim, poucas são as pesquisas em que microparâmetros são diretamente obtidos experimentalmente (Coetzee e Els, 2009).

A calibração descrita a seguir foi realizada com o auxílio dos procedimentos do tópico 4.3. Os resultados na Tabela 4.17 mostram os parâmetros variantes e calibrados. Nas sete primeiras simulações procurou-se responder ao primeiro questionamento. O ângulo  $52,40^\circ$  é maior que o de todas as partículas não-esféricas, isto é,  $51,3^\circ < 52,40^\circ$ . Os ajustes procedentes foram para reduzi-lo, calibrando os ângulos das partículas não-esféricas, conforme mostrados na mesma tabela.

Note ainda nesta tabela, como a relação de Zhou et al. (2002),  $\mu_{r,pw} = 2\mu_{r,pp}$ , é fortemente correlacionada com o ajuste de  $\mu_{r,pp}$  e  $\mu_{r,pw}$  para aumentar  $\beta$  (linhas 4 a 7 e 9 a 12) e balancear a equação (como nas linhas 7 e 12). Note, nas fases intermediárias, que valores da calibração são atingidos antes mesmo validar a igualdade (linhas 17 e 18).

Seguindo as linhas da tabela, verifica-se que toda configuração aleatória contém a letra “A”. Isso significa que a calibração não é totalmente sistemática e previsível. Assim o “A” indica a linha onde ela ocorreu para servir de referência para uso dos métodos estudados no tópico 4.3.4.

Parâmetros como  $\mu_{s,pw}$ , coeficiente de restituição,  $e_{pw}$ , massa específica da partícula  $\rho$ , módulo de cisalhamento,  $G$ , e o coeficiente de Poisson,  $\nu$ , foram inalterados.

A Tabela 4.18 compara os resultados dos escoamentos das partículas não-esféricas com os da calibração com a partícula esférica de 10 mm.

**Tabela 4.17 – Parâmetros da calibração dos ângulos de repouso com Hertz-Mindlin com Atrito de Rolamento (sem deslizamento) RVD e partícula esférica**

Simulação forma esférica	Interação partícula- partícula			Interação partícula- parede			Ângulos de repouso	Valor de referência
No.	$e_{pp}$	$\mu_{s,pp}$	$\mu_{r,pp}$	$e_{pw}$	$\mu_{s,pw}$	$\mu_{r,pw}$	$\beta$	
1	0,5	0,4	0,05	0,25	0,6	0,1	28,90	
2	0,5	0,5	0,05	0,25	0,6	0,1	34,70	
3	0,5	0,6	0,05	0,25	0,6	0,1	32,50	
4	0,25	0,6	0,05	0,25	0,6	0,1	30,55A	
5	0,25	0,6	0,1	0,25	0,6	0,1	32,25	
6	0,25	0,6	0,1	0,25	0,6	0,4	42,10	
7	0,25	0,6	0,2	0,25	0,6	0,4	52,40	
8	0,25	0,7	0,2	0,25	0,6	0,4	52,25A	
9	0,25	0,8	0,05	0,25	0,6	0,4	43,50A	
10	0,25	0,8	0,1	0,25	0,6	0,4	47,90	
11	0,25	0,8	0,1	0,25	0,6	0,3	45,75	
12	0,25	0,8	0,15	0,25	0,6	0,3	46,25	46,2
13	0,25	0,85	0,2	0,25	0,6	0,4	50,55A	
14	0,25	0,9	0,2	0,25	0,6	0,4	54,55	
15	0,25	0,7	0,1	0,25	0,6	0,4	41,15A	
16	0,25	0,9	0,2	0,25	0,6	0,2	44,15A	
17	0,25	0,9	0,15	0,25	0,6	0,4	51,40	51,3
18	0,25	0,9	0,1	0,25	0,6	0,4	48,90	48,4

□ parâmetro alterado

A – Simulação de atualização

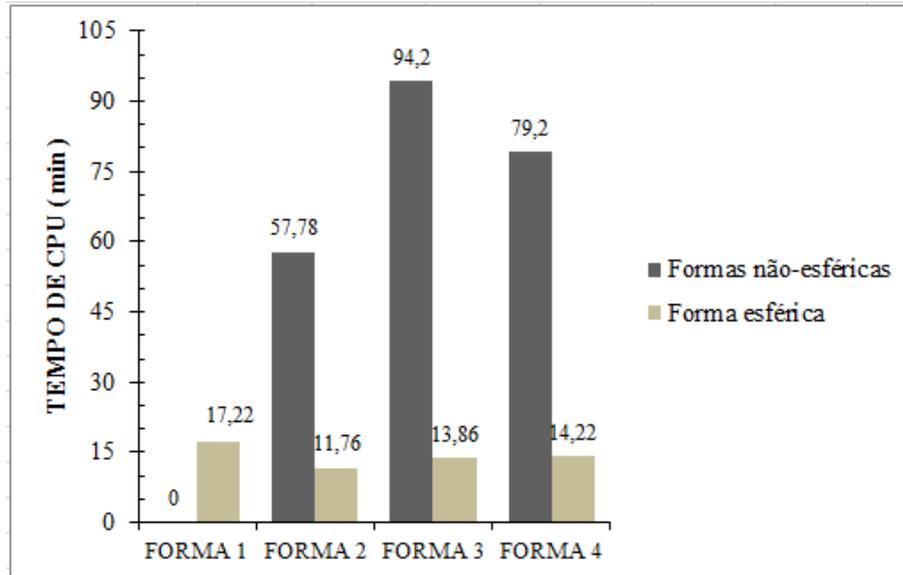
● ângulo de repouso calibrado com a esfera

**Tabela 4.18 – Comparação dos resultados da calibração dos escoamentos usando o modelo de Hertz-Mindlin com Atrito de Rolamento (sem deslizamento) RVD**

Forma não-esférica escoadas ( $\beta$ )	Forma esférica p/ calibração ( $\beta$ )	Diferença relativa (%)
48,4	48,90	1,03
46,2	46,25	0,11
51,3	51,40	0,19

O tempo de CPU entre as partículas esféricas e não-esféricas é mostrado na Figura 4.34. A partícula esférica apresentou, mais uma vez, uma margem vantajosa no processamento.

**Figura 4.34 – Comparação dos tempos de CPU das partículas esféricas (calibradas) e não-esféricas (escoadas) com o modelo de Hertz-Mindlin com Atrito de Rolamento (sem deslizamento) RVD**



#### 4.5.4.2 Modelo de Hertz-Mindlin com Coesão JKR

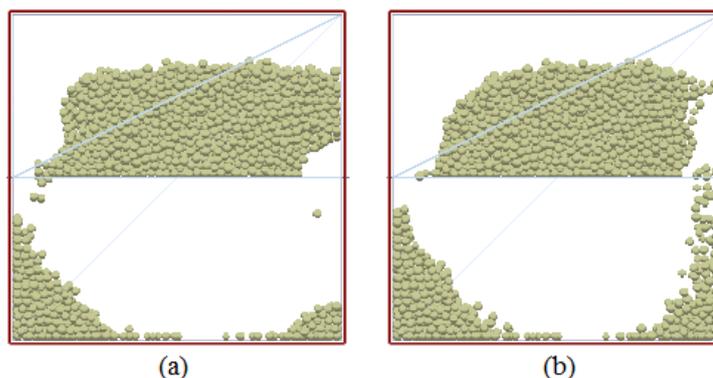
Nesta seção, o presente modelo conta com distribuição Normal de partículas, média  $\mu = 1,0$  e desvio-padrão  $\sigma = 0,05$  em função do raio da partícula. A Figura 4.35 é uma amostra de um dos efeitos produzidos pelo modelo. Neste caso, representa o comportamento coesivo entre partículas e adesivo nas paredes.

Com o mesmo propósito do modelo anterior, a intenção é calibrar o ângulo de repouso das partículas não-esféricas, mas usando partículas esféricas.

As forças impulsivas sobre as partículas foram desconsideradas para o tempo de abertura das comportas, configuradas para 0,01s. Os resultados finais da calibração estão resumidos na Tabela 4.19 e comparados com os escoamentos das formas não-esféricas na Tabela 4.20. Nesta tabela consta para os ângulos das partículas não-esféricas com  $48,4^\circ$  (forma 2) e  $46,2^\circ$  (forma 3) o ângulo de  $44,6^\circ$  como de suas calibrações. Houve dificuldade de aproximar melhor este resultado.

Vê-se que as interações  $\gamma_{pp}$ ,  $\gamma_{pcf}$  e  $\gamma_{ppc}$  não são padrões da literatura. Mas são usadas como referencia às energias de superfícies. É o EDEM quem as cria automaticamente para serem nomeadas. Neste caso, representam as ligações entre partículas  $\gamma_{pp}$  e entre partícula-parede ( $\gamma_{pw}$ ).  $\gamma_{pcf}$  é a interação partícula-caixa-de-fluxo e  $\gamma_{ppc}$  a interação partícula-placa-central.

**Figura 4.35- Efeitos coesivo e adesivo produzidos pelo parâmetro energia de superfície  $\gamma_{pp} = 0,20 \text{ J/m}^2$ : (a) escoamento coesivo no lado direito (b) desprendimento gradual das partículas do lado direito**



**Tabela 4.19- Parâmetros da calibração dos ângulos de repouso com Hertz-Mindlin com Coesão JKR das formas não-esféricas com partícula esférica de 10 mm**

Energia de superfície ( $\text{J/m}^2$ )					● Partícula esférica							
Partícula-partícula	Partícula-parede				Tempo Simulação	CPU min	$\beta$ (graus)	Incerteza	Referencial:			
	$\gamma_{pp}$	$\gamma_{pcf}$	$\gamma_{ppc}$	$\mu_{r,pw}$					$\mu_{s,pw}$	Forma 2, ●	$\beta = 48,4$	Forma 3, ●
0,15	0,01	0,01	0,05	0,4	5s	17,94	44,6	$\pm 2,3$				
0,15	0,01	0,01	0,05	0,405	5s	17,04	47,25	$\pm 2,4$				

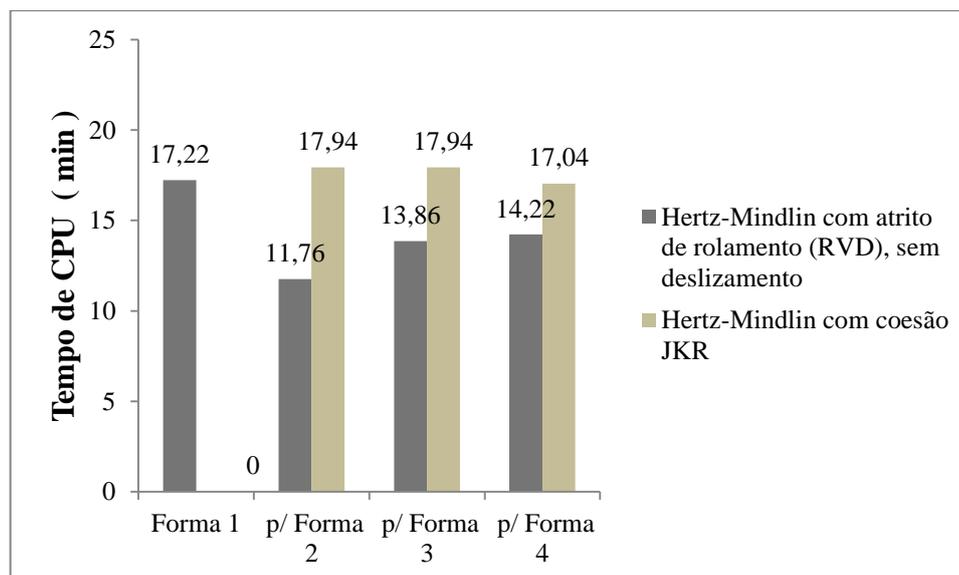
**Tabela 4.20 -Comparação dos ângulos de repouso entre a forma esférica e não-esférica no modelo de Hertz-Mindlin com coesão JKR**

Forma não-esférica (escoada)	Forma esférica (calibrada)	Diferença relativa (%)
$(\beta)$	$(\beta)$	
48,4 ●	44,60 ●	7,8
46,2 ●	44,60 ●	3,5
51,3 ●	47,25 ●	7,9

#### 4.5.5 Discussão

Os tempos de CPU computados entre os dois modelos são discutidos a seguir com base na Figura 4.36. Embora a forma esférica tenha sido testada em ambos os modelos, o primeiro modelo apresentou melhores vantagens de computação. Ele é empregado em escoamentos em que os efeitos das forças adesivas não são importantes. Contudo, quando as energias de superfícies são solicitadas no segundo modelo, os ângulos de repouso foram calibrados com valores menores de atritos na interação com a parede. Percebe-se que a maior variação de CPU entre os modelos está na calibração da forma 2, de 52,5%.

**Figura 4.36 – Comparação dos tempos de CPU na calibração das partículas não-esféricas com partículas esféricas para os dois modelos avaliados**



Já em relação ao comportamento numérico dos parâmetros DEM, é sempre desejado que a faixa de domínio usada esteja limitada adequadamente. É uma boa estratégia conhecer como os parâmetros estão relacionadas com análises de suas sensibilidades. Por outro lado, nem sempre esta faixa de variação assegura resultados satisfatórios, uma vez que outros parâmetros estão sempre envolvidos.

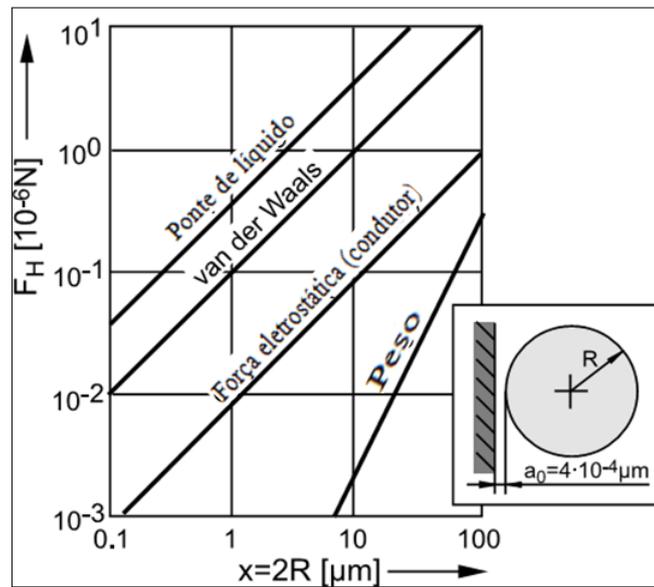
Entretanto, há situações em que variações de  $\beta$  ocorrem sem controle. Veja que a diferença percentual apresentada na calibração das partículas de formas 2 e 3 da Tabela 4.20 é fixada decorrente da geração randômica das partículas. Ao se repetir as mesmas configurações de parâmetros, o ângulo  $\beta$  varia para mais ou para menos 2,3 graus.

Além disso, os dois modelos apresentaram comportamentos típicos tanto para valores do atrito estático como do atrito de rolamento. No Apêndice C estão apresentados esses comportamentos usando a energia cinética total das partículas, em Joules, em função do tempo de simulação, em segundos. O modelo de coesão JKR adiciona  $\gamma$  aos efeitos combinados dos atritos estudados no primeiro modelo, isto é, nesta tabela, (c) é a composição dos efeitos de (a) e (b). O fenômeno de arqueamento foi obtido com o aumento de  $\gamma$ . Próximo de obtê-lo foi observado que as partículas param de escoar continuamente. Devido às defasagem no escoamento, o ângulo de repouso é formado em tempos intermitentes e por um tempo maior.

Vale dizer que o parâmetro  $\gamma$  foi interpretado com base no trabalho de Schulze (2007), exceto para a força peso. De fato, segundo a Figura 4.37, se uma partícula esférica é

relativamente grande, a força peso se torna dominante e, conseqüentemente, os efeitos de natureza microscópicas são negligenciados, quando então passam a ser contabilizados pelos macroscópicos. Para as observações feitas, os coeficientes de atritos foram fundamentais na projeção e calibração das pilhas.

**Figura 4.37 - Influência do tamanho da partícula sobre as forças adesivas: interação partícula-parede**



Fonte: Schulze (2007)

## 5 CONCLUSÃO

Uma das etapas mais importantes da utilização do método DEM é a calibração. Não há na atualidade metodologias genéricas que empregam sistematicamente este método. São muitos os parâmetros que envolvem um processo de calibração, cabendo, pois, observar os mais reponsáveis de um comportamento físico ou numérico que se deseja analisar.

Ao analisar os coeficientes de atritos dos modelos de Hertz-Mindlin, no presente trabalho foi verificado que estes parâmetros são muito influentes no controle de inclinação de pilhas de partículas. Por conseguinte, ao ser constatado a influência das formas das partículas nos escoamentos, fez-se alterações dos mesmos no processo de calibração.

Partiu-se da análise de sensibilidade desses parâmetros para constatar que a maior resistência das partículas não-esféricas se dava quando os pacotes de partículas estavam mais inclinados.

Assim, tendo em vista a baixa resistência ao escoamento apresentada pela partícula esférica, foi necessário usar a análise de sensibilidade dos parâmetros de atritos e criar um procedimento para aumentar o ângulo de repouso. O procedimento desenvolvido mostrou-se eficiente para o aumento dos ângulo de repouso da partícula esférica, que por sua vez foi usada para obter os ângulos das partículas não-esféricas.

Observou-se que os atritos desempenharam bem o papel de dissipação das energias cinéticas das partículas na interação com outras partículas e com a parede, de maneira que, quando controlados de forma adequada, são bem empregados no controle de escoamentos em pilhas. Contudo, não foram diretamente analisados para as interações partícula-parede.

Por estes passos, concluiu-se que é possível usar a forma esférica e obter resultados similares para os ângulos de repouso de partículas não-esféricas e, ainda, com vantagens computacionais. Entre os dois modelos testados, o menor tempo de CPU foi do modelo de Hertz-Midlin com atrito de rolamento Dependente da Velocidade Relativa de Rotação.

Ficam para trabalhos futuros, entender como o EDEM gera uma distribuição granulométrica de partículas, bem como fazer a calibração com partícula esférica de mesmo diâmetro. Além desses, analisar diâmetros de partículas em função do tempo computacional é um tema interessante.

## REFERÊNCIAS

- AI, J; CHEN, J.G; ROTTER, J. M; OOI, J . Y. Assessment of rolling resistance models in discrete element simulations. **Elsevier, Powder Technology**, Edingburgh, v. 206, p. 269-282, Sept. 2010.
- ASHMAWY, A. K.; SUKUMARAN, B.; HOANG, V. V. Evaluating the Influence of Particle Shape on Liquefaction Behavior Using Discrete Element Modeling. Proceedings of The Thirteenth . **International Offshore and Polar Engineering Conference**. 2003.
- CALDAS, H.; MAGALHÃES, M. E. Rolamento sem escorregamento: atrito estático ou atrito de rolamento? **Departamento de Física, UFES**, Vitória - E.S, v. 17, p. 257-269, dez. 2000.
- CAMPBELL, C.S; BRENNEN C.E. Computer simulation of granular shear flows. **Journal of Fluid Mechanics**, v. 151, p.167–188, 1985.
- CLEARY, P. W. The effect of particle shape on simple shear flows. **Elsevier, Powder Technology**, Austrália, v. 179, p. 144-163, June 2007.
- COETZEE, C. J; ELS, D. N . J. Calibration of discrete element parameters and the modelling of silo discharge and bucket filling. **Elsevier - Science Direct: Computer and Eletronics in Agriculture**, v. 65. (2009a), p.198-212, Oct. 2008.
- COETZEE, C. J; ELS, D. N . J. Calibration of granular material parameters for DEM modelling and numerical verification by blade - granular material interaction. **Elsevier - Science Direct: Jornal da Terramecânica**, v. 46. (2009b), p. 15-26, Feb. 2009.
- CONDOTTA, P. M. R. Coulabilite des Poudres Cohesives: mesures aux faibles contraintes, granulaires humides et application a une poudre industrielle. 2005. Tese de doutorado. **Instituto Nacional Politécnico de Toulouse**. 2005.
- CUNDALL, P. A.; STRACK, O.D.L. A Discrete Numerical Model for Granular Assemblies. **Géotechnique**, v. 29, p. 47-65, 1979.
- D'ADDETTA, G. A. Discrete Models for Cohesive Frictional materials. 2004. Tese de doutorado - Universidade de Stuttgart, Stuttgart, 2004.
- DEM Solutions, Ltd. 2005. Disponível em: < <http://www.dem-solutions.com>>. Acesso em: 22 mar. 2011.
- Disponível em : <<http://www.infoescola.com> >. Acesso em: 04 maio. 2011.
- Disponível em: <<http://www.militanciaviva.blogspot.com> >. Acesso em: 25 abr. 2011.
- Disponível em: <<http://www.minasdehistoria.blog.br> >. Acesso em: 25 abr. 2011.
- Disponível em: <<http://www.applieddem.com>>. Acesso em: 11 jun. 2011
- DNPM ( Departamento Nacional de Pesquisa Mineral ). Minério de ferro puxa crescimento do PIB em 2010. 2011. Disponível em: <

<http://www.dnpm.gov.br/conteudo.asp?IDSecao=99&IDPagina=72&IDNoticiaNoticia=526>  
>. Acesso em: 13 jun. 2012.

DOMÉNECH, A; DOMÉNECH, T.; CEBRIÁN, J. Introduction to the study of rolling friction. **American Association of Physics Teachers**, Valencia-Spain, v. 55, n.3, p. 231-235, mar. 1987.

FERREIRA, S. T. Estudo e implementação do Método dos Elementos Discretos em 3D. Tema Dirigido - Instituto Militar de Engenharia (IME), Rio de Janeiro, 2009.

FISCHER-CRIPPS, A. C. Introduction to Contact Mechanics. Mechanical Engineering Series. **Springer**, 2000. Disponível em: < [www.google.com](http://www.google.com) >. Acesso em: 14 fev. 2013.

GRIMA, B. A.; HASTIE, D.; CURRY, D.; WYPYCH, P.; LAROCHE, R. The beginning of a new era in design: calibrated discrete element modeling. **Australian Bulk Handling**, Australia, p.14-21, Oct. 2011.

GROGER, T; TUZUN, U; HEYES, D. M. Modelling and measuring of cohesion in wet granular materials. **Powder Technology**, v. 133, p. 203-215, Apr. 2003.

GUEDES, I.C.; ETCHEBEHERE, M. L. C; MORALES, N.; STEVAUX, J. C; SANTONI, G. C. Feições de liquefação no vale do rio Santo Anastácio (S.P) – indicações de atividade sísmica quaternária? **Revista UnG Geociências**, v.7, n.1, p. 64 -77. 2008.

GUIA DO USUARIO EDEM. DEM Solutions. EDEM 2.4. 2011.

HAKUNO, M; TARUMI, Y. A granular assembly simulation for the seismic liquefaction of sand. **Structural Eng. /Earthquake Eng.** (Japan Society of Civil Engineers), v. 5, n. 2, p. 333-342, Oct. 1988.

JING, L; STEPHANSSON, O. **Fundamentals of Discret Element Methods for Rock Engineering**: theory and Applications. 1. ed. Stockholm, Elsevier, 2007.

JOHNSON, K. L; KENDALL, K; ROBERTS, A. D. Surface Energy and the Contact of Elastic Solid. **The Royal Society**, Londres, v.324, n.1558, p. 301-313, Sept. 1971.

KAYE, B. H. **Powder Mixing**.1. ed. Cambridge.Chapman & Hall.1997. 284 p.

KHAN, K. M; BUSHELL, G. 2005. Comment on ‘Rolling friction in the dynamic simulation of the sandpile formation’. **Elsevier, Physica A**, Australia, v. 352, p. 522-524, Feb. 2005.

LEVY, A.; OOI, J. Y. Discrete element simulation: challenges in application and model calibration. **Springer-Verlag (Granular Matter)**, v. 13, p. 643-656, Feb. 2011.

LOUREL, I. ; WU, W. ; MORRISON, D. J. Experimental validation on the computational modelling of granular flow using the discrete element method (DEM). In: **Asia-Pacific Bulk Materials Handling Conference**, 2006, Australia. Conference, Australia, p. 25-27.

MITARAI, N; NORI, F. Wet Granular materials. **Advances in Physics**, USA, v. 55, p. 1- 45. Jan. – Apt. (Taylor & Francis). 2006.

MUGURUMA, Y.; TANAKA, T. ; TSUJI, Y. Numerical simulation of particulate flow with liquid bridge bet ( particles simulation of centrifugal tumbling granulator). **Powder Technology**, v. 109, p. 49-57. 2000

NOGUEIRA, L. R.; PATROCÍNIO, M.; MENDES, P. J. S; GUIMARÃES, M. A; SILVA, R. V. G; MESQUITA, A. L. A. ; MARTELLI, A. M. T. Uma metodologia para a simulação de chutes de transferência – aplicação para o minério de ferro. In: **41º Seminário de Redução de Minério de Ferro e Matérias-primas e 12º Seminário Brasileiro de Minério de Ferro**, 2011, Vila Velha (ES). Seminário,Vila Velha: ABM, 2011, p.1-12.

PEREIRA, E. L. Estudo do Potencial de liquefação de rejeitos de minério de ferro sob carregamento estático. 2005. 210f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) - Departamento de Engenharia Civil, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2005.

PINTO, C. S. **Curso básico de Mecânica dos solos em 16 aulas**. 3. ed. S.P. Oficina de Textos. 2006.

QUARESMA, L. F. Ferro. Disponível em:  
<<http://www.dnpm.gov.br/assets/galeriadocumento/balancomineral2001>>. Acesso em: 11 set. 2012.

RADCLIFFE, D. E.; SIMUNEK, J. **Soil Physics with Hydrus: modeling and Applications**. CRC Press, 2010.

ROBINSON, D. A.; FRIEDMAN, S. P. Observations of the effects of particle shape and particle size distribution on avalanching of granular media. **Elsevier - Physica A**, v. 311, p. 99-110, Mar. 2002.

ROCK. A. D. WILKINSON, D. Numerical Modelling. In: Velocity variations in Cross-Hole Sonic Logging Surveys: causes and impact in Drilled Shafts.Federal Highway Administration, Disponível em:  
<[http://www.cflhd.gov/programs/techDevelopment/geotech/velocity/documents/05\\_chapter\\_3\\_numerical\\_modeling.pdf](http://www.cflhd.gov/programs/techDevelopment/geotech/velocity/documents/05_chapter_3_numerical_modeling.pdf)>. Acesso em: jan. 2012.

RONDET, E. Texturation capillaire de milieux granulaires humides. 2008. 241f. Tese (Doutorado em Engenharia em Processos de Energia) - University Montpellier II, Escola de Doutorado: ciências dos alimentos, Franca. 2008.

SCHULZE, D. **Powders and Bulk solids: behavior, characterization, storage and Flow**. Germany, Springer, 2007.

SPENCER. C; TILSLEY, D. Bulk Cargo liquefaction (iron ore fines and nickel ore). **Standard cargo**, Londres, p. 1- 8. Feb. 2011.

ZHOU, Y.C.; WRIGHT, B.D.; YANG, R.Y; XU, B.H; YU,A.B. Rolling friction in the dynamic simulation of sandpile formation. **Elsevier, Physica A**, Australia, v. 269, p. 536-553, Feb.1999.

ZHOU, Y.C.; XU, B.H; YU. A.B; ZULLI, P. An experimental and numerical study of the angle of repose of coarse spheres. **Elsevier, Powder Technology**, Australia, v. 125. p. 45-54. 2002.

ZHU, H.P.; ZHOU, Z. Y. YANG. R. Y.; YU, A.B. Discrete particle simulation of particulate systems: Theoretical developments. **Chemical Engineering Science**, Austrália, v. 62, p. 3378 – 3396. Mar. 2007.

ZHU, H.P.; ZHOU, Z. Y. YANG. R. Y.; YU, A.B. Discrete particle simulation of particulate systems: a review of major applications and findings. **Elsevier, Chemical Engineering Science**, v. 63, p. 5728-5770. Dec. 2008.

## **APÊNDICES**

## APÊNDICE A

(FICHAS DOS REGISTROS DAS SIMULAÇÕES)

### EFEITOS DAS FORMAS DAS PARTÍCULAS NÃO-ESFÉRICAS A PARTIR DOS PARÂMETROS DE REFERÊNCIAS OU DE VALIDAÇÃO DA PARTÍCULA ESFÉRICA

SIMULAÇÃO	Nº. partículas (retidas/Total/porosidade(%))	Tempo de simulação (s)	PASSO DE TEMPO (segundos) Cell size: 2R 8 núcleos (processador)		Salvar dados (segundos)	Nº de Células R=5mm	Dist. Probabilidade 1-fixo, 2-logonormal 3-normal 4-randômico	CPU (horas)	Ângulo de repouso $\beta_E$ , $\beta_D$ e $\beta$			
			Rayleigh	Fixo (20% $t_R$ )					$\beta_E$	$\beta_D$	$\beta$	
			●	FORMA 1					602/2000/45,89	7s	9.31e-05	1,86178e-05
●	FORMA 2	2413/5200/43,26	5s	5,59e-05	1,11707e-05	0,01	8405	1	0,963	44,1	52,7	48,4
●	FORMA 3	1951/4200/42,97	5s	5,59e-05	1,11707e-05	0,01	8405	1	1,57	44,6	47,8	46,2
●	FORMA 4	2043/4000/46,07	4s	3,72E-5	7,4471E-06	0,01	8405	1	1,32	47,2	55,3	51,25

**COMBINAÇÃO DOS ATRITOS COM O MODELO DE HERTZ-MINDLIN COM ATRITO DE ROLAMENTO (SEM DESLIZAMENTO) DEPENDENTE DA VELOCIDADE RELATIVA DE ROTAÇÃO (RVD) E USO DA PARTÍCULA ESFÉRICA**

**RVD 1: Variação inicial do ângulo de repouso em função do coeficiente de atrito estático**

Forma esférica: ● 10 mm (Referência inicial a calibração com base em Zhou et al. (2002),  $\mu_{r,pp}=0,05$ ;  $\beta=28,9^\circ$ )

No. simulação	$\mu_{s,pp}$ (atrito estático partícula- partícula)	Nº. partículas (2000) retidas/Total/poro- sidade(%)	Tempo de simulação (s)	PASSO DE TEMPO (segundos) Cell size: 2R 8 núcleos (processador)		Salvar dados (segundo s)	Nº de Células (R=5mm )	Dist. Probabilidade 1-fixo, 2-logonormal 3-normal 4-randômico	CPU (horas)	Ângulo de repouso $\beta_E$ , $\beta_D$ e $\beta$		
				Rayleigh	Fixo (20% $t_R$ )					$\beta_E$	$\beta_D$	$\beta$
1	0,4	602/2000/45,89	7s	9.31e-05	1,86178e-05	0,01	8405	1	0,287	28,7	29,1	28,9
2	0,6	633/2000/45,84	6s	9.31e-05	1,86178e-05	0,01	8405	1	0.236	32,90	32,47	32,7
3	0,9	629/2000/46,27	7s	9.31e-05	1,86178e-05	0,01	8405	1	0.238	29,20	36,57	32,9
4	1,0	642/2000/46,41	7s	9.31e-05	1,86178e-05	0,01	8405	1	0.247	31,00	31,00	31,0
5	1,35	668/2000/46,19	6s	9.31e-05	1,86178e-05	0,01	8405	1	0.233	33,69	34,51	34,1

**RVD 1.1 - Combinação dos atritos para ajustar o ângulo de repouso a partir de  $\mu_{r,pp} = 1,0$  e  $\beta = 31^\circ$**

Fixa o valor que decresceu $\mu_{s,pp}=1,0$ (saturado para o crescimento de $\beta$ ) e varia (aumenta $\mu_{r,pp}$ , para aumentar o ângulo) o outro parâmetro de atrito, isto é, $\mu_{r,pp}=0,05$ para 0,1												
$\mu_{s,pp}$	$\mu_{r,pp}$	Nº. partículas (2000) retidas/Total/porosidade(%)	Tempo de simulação	PASSO DE TEMPO (segundos) Cell size: 2R 8 núcleos (processador)		Salvados (segundos)	Nº de Células R=5mm	Distrib. Probabilidade 1-fixo 2-logonormal 3-normal 4-randômico	CPU (horas)	Ângulo repouso $\beta_E, \beta_D$ e $\beta$		
				Rayleigh	Fixo (20% $t_R$ )					$\beta_E$	$\beta_D$	$\beta$
Fixado 1,0	Variado para 0,1	682/2000/46,46	7s	9.31e-05	1,86178e-05	0,01	8405	1	0.224	29,0	40,0	34,5
Variado 1,35	0,1	693/2000/46,63	6s	9.31e-05	1,86178e-05	0,01	8405	1	0.198	34,7	29,0	31,9
1,35	0,2	769/2000/47,66	7s	9.31e-05	1,86178e-05	0,01	8405	1	0.243	38,0	34,7	36,4
FINALIZADO												

**RVD 2- Variação inicial do ângulo de repouso em função do atrito de rolamento**

Forma representativa:  10 mm ( Referência inicial a calibração com base em Zhou et al. (2002) para $\mu_{s,pp}=0,4$ ; $\beta=28,9^\circ$ )												
No. simulação	$\mu_{r,pp}$ (atrito estático partícula-partícula)	Nº. partículas (2000) retidas/Total/porosidade(%)	Tempo de simulação	PASSO DE TEMPO (segundos) Cell size: 2R 8 núcleos (processador)		Salvados (segundos)	Nº de Celulas R=5mm	Distrib.Probabilidade 1-fixo 2-logonormal, 3-normal, 4-randômico	CPU (horas)	Ângulo repouso $\beta_E, \beta_D$ e $\beta$		
				Rayleigh	Fixo (20% $t_R$ )					$\beta_E$	$\beta_D$	$\beta$
1	0,05	602/2000/45,89	7s	9.31e-05	1,86178e-05	0,01	8405	1	0,287	28,7	29,1	28,9
2	0,1	670/2000/46,08	8s	9.31e-05	1,86178e-05	0,01	8405	1	0,327	32,0	34,0	33,0
3	0,2	727/2000/46,14	10s	9.31e-05	1,86178e-05	0,01	8405	1	0,364	30,4	34,2	32,3
4	0,4	690/2000/48,07	55s	9.31e-05	1,86178e-05	0,01	8405	1	2,22	38,5	35,6	37,1
5	0,8	744/2000/48,86	60	9.31e-05	1,86178e-05	0,01	8405	1	2,48	34,4	33,2	33,8

**RVD 2.3 - Combinação dos atritos para ajustar o ângulo de repouso a partir de  $\mu_{s,pp} = 0,4$  e  $\beta = 32,3^\circ$  e para  $33,8^\circ$**

Fixa o valor que decresceu $\mu_{r,pp} = 0,2$ (saturado para o crescimento de $\beta$ ) e varia (aumenta $\mu_{s,pp}$ , para aumentar o ângulo) o outro parâmetro de atrito, isto é, de $\mu_{s,pp} = 0,4$ para $\mu_{s,pp} = 0,5$												
$\mu_{s,pp}$	$\mu_{r,pp}$	Nº. partículas (2000) retidas/Total/porosidade(%)	Tempo de simulação	PASSO DE TEMPO (segundos) <i>Cell size: 2R</i> 8 núcleos (processador)		Salvar dados (segundos)	Nº de Celulas	Distrib.Probabilidade 1-fixo 2-logonormal 3-normal 4-randomico	CPU (horas)	Ângulo repouso $\beta_E, \beta_D$ e $\beta$		
				Rayleigh	Fixo (20% $t_R$ )					$\beta_E$	$\beta_D$	$\beta$
Aumentado para 0,5: ajustar ângulo de $32,3^\circ$	Fixo 0,2	726/2000/47,01	10s	9.31e-05	1,86178e-05	0,01	8405	1	0,738	37,5	35,0	36,3
		710/2000/47,01	13s						0,762	37,0	30,0	33,5
		706/200/47,01	15s						0,768	37,0	30,0	33,5
		703/2000/47,01	20s						0,782	36,9	29,6	<u>33,3</u>
Aumentado para 0,5: ajustar ângulo de $33,8^\circ$	Fixo 0,8	845/2000/50,55	30s	9.31e-05	1,86178e-05	0,01	8405	1	1,22	41,4	34,3	37,9
		806/2000/50,55	40s						1,67	37,2	34,3	35,8
		773/2000/50,55	50s						2,11	32,1	35,0	33,6
		790/2000/50,17	60s						2,50	41,7	35,2	<u>38,5</u>

**RVD 3 – Processo intermediário usado como base para a obtenção do maior ângulo dos demais escoamentos, isto é, para a obtenção de 58,3°**

Ajustar Atrito estático ( $\mu_{s,pp}$ )	Ajustar Atrito rolamento ( $\mu_{r,pp}$ ):	Nº. partículas (2000) retidas/Total/p orosidade(%)	Tempo de simulação	PASSO DE TEMPO (segundos) Cell size: 2R 8 núcleos (processador)		Salvados (segundos)	Nº de Celulas	Distrib.Probabilida de 1-fixo 2-logonormal 3-normal 4-randomico	CPU (horas)	Ângulo repouso $\beta_E$ , $\beta_D$ e $\beta$		
				Rayleigh	Fixo (20% $t_R$ )					$\beta_E$	$\beta_D$	$\beta$
				Variado: <b>0,5</b> Calibrado ângulo de 33,8° etapa única	Fixo 0,8					845/2000/50,55 806/2000/50,55 773/2000/50,55 790/2000/50,17	30s 40s 50s 60s	9.31e-05
Variado: <b>0,6</b> etapa 2	Fixo 0,8	837/2000/50,55 783/2000/50,55 755/2000/50,55 734/2000/50,55	30s 40s 50s 60s	9.31e-05	1,86178e-05	0,01	8405	1	1,13 1,53 1,93 2,33	56,5 41,4 36,8 32,5	43,1 37,8 31,0 30,8	49,8 39,6 33,9 31,7
Variado: <b>0,8</b> etapa3	Fixo 0,8	784/2000/51,23	60s	9.31e-05	1,86178e-05	0,01	8405	1	2,28	35,8	34,2	35,0
Variado 1,35 etapa 4	Fixo 0,8	807/2000/51,81	60s	9.31e-05	1,86178e-05	0,01	8405	1	2,41	46,6	70,0	58,3

**RVD 4 – COMBINAÇÃO DE PARÂMETROS PARA AUMENTAR O ÂNGULO DE REPOUSO DAS FORMAS NÃO-ESFÉRICAS COM USO DA PARTÍCULA ESFÉRICA**

□ parâmetro alterado    □ ângulo calibrado

Simulação	Interação partícula-partícula			Interação partícula-parede			Ângulo de repouso (β)	
No.	$e_{r,pp}$	$\mu_{s,pp}$	$\mu_{r,pp}$	$e_{r,pw}$	$\mu_{s,pw}$	$\mu_{r,pw}$	forma esférica	equivalente não-esférica
1	0,5	0,4	0,05	0,25	0,6	0,1	28,9	
2	0,5	0,5	0,05	0,25	0,6	0,1	34,7	
3	0,5	0,6	0,05	0,25	0,6	0,1	32,5	
4	0,25	0,6	0,05	0,25	0,6	0,1	30,55	
5	0,25	0,6	0,1	0,25	0,6	0,1	32,25	
6	0,25	0,6	0,1	0,25	0,6	0,4	42,1	
7	0,25	0,6	0,2	0,25	0,6	0,4	52,4	
8	0,25	0,7	0,2	0,25	0,6	0,4	52,25	
9	0,25	0,8	0,05	0,25	0,6	0,4	43,5	
10	0,25	0,8	0,1	0,25	0,6	0,4	47,9	
11	0,25	0,8	0,1	0,25	0,6	0,3	45,75	
12	0,25	0,8	0,15	0,25	0,6	0,3	46,25	46,2
13	0,25	0,85	0,2	0,25	0,6	0,4	50,55	
14	0,25	0,9	0,2	0,25	0,6	0,4	54,55	
15	0,25	0,7	0,1	0,25	0,6	0,4	41,15	
16	0,25	0,9	0,2	0,25	0,6	0,2	44,15	
17	0,25	0,9	0,15	0,25	0,6	0,4	51,4	51,3
18	0,25	0,9	0,1	0,25	0,6	0,4	48,9	48,4

**RVD 5 - ANÁLISE DA SENSIBILIDADE DE PARÂMETROS DEM**

*ÂNGULO DE REPOUSO EM FUNÇÃO DO COEFICIENTE DE ATRITO ESTÁTICO ( $\mu_{s,pp}$ ) PARA DIFERENTES ATRITOS DE ROLAMENTO*

Para $\mu_{r,pp}=0,05$ fixo						
PARÂMETRO VARIÁVEL ( $\mu_{s,pp}$ )						
$\mu_{s,pp}$	$\mu_{r,pp}$	$\beta_m$ (grau)	CPU (h)	Tempo (s)		
0,4	0,05	28,7	0,287	7		
0,6	0,05	32,7	0,236	6		
0,9	0,05	32,9	0,238	7		
1,0	0,05	31,0	0,247	7		
1,35	0,05	34,1	0,233	6		

Para $\mu_{r,pp}=0,1$ fixo						
PARÂMETRO VARIÁVEL ( $\mu_{s,pp}$ )						
$\mu_{s,pp}$	$\mu_{r,pp}$	$\beta_E$	$\beta_D$	$\beta_m$ (grau)	CPU (h)	Tempo (s)
0,4	0,1	33,7	31,2	32,45	0,316	6
0,6	0,1	35,4	35	35,2	0,228	6
0,9	0,1	34,5	38,5	36,5	0,230	6
1,0	0,1	34,1	34	34,05	0,268	7
1,35	0,1	33	36,5	34,75	0,272	7

Para $\mu_{r,pp}=0,2$ fixo						
PARÂMETRO VARIÁVEL ( $\mu_{s,pp}$ )						
$\mu_{s,pp}$	$\mu_{r,pp}$	$\beta_E$	$\beta_D$	$\beta_m$ (grau)	CPU (h)	Tempo (s)
0,4	0,2	37,5	36,4	36,95	0,281	7
0,6	0,2	38,9	43,2	41,05	0,273	7
0,9	0,2	39,4	41,3	40,35	0,404	9
1,0	0,2	39,4	40,3	39,85	0,310	8
1,35	0,2	37	38,1	37,55	0,312	8

Para $\mu_{r,pp}=0,3$ fixo						
PARÂMETRO VARIÁVEL ( $\mu_{s,pp}$ )						
$\mu_{s,pp}$	$\mu_{r,pp}$	$\beta_E$	$\beta_D$	$\beta_m$ (grau)	CPU (h)	Tempo (s)
0,4	0,3	43,7	41,6	42,65	0,363	9
0,6	0,3	41,8	40,0	40,9	0,316	8
0,9	0,3	45,7	41	43,35	0,4	10
1,0	0,3	46,5	44,7	45,6	0,279	7
1,35	0,3	42,5	41	41,75	0,269	7

*ÂNGULO DE REPOUSO EM FUNÇÃO DO COEFICIENTE DE ATRITO DE ROLAMENTO  
( $\mu_{r,pp}$ ) PARA DIFERENTES ATRITOS ESTÁTICO*

Para $\mu_{s,pp}=0,4$ fixo						
<b>PARÂMETRO VARIÁVEL (<math>\mu_{r,pp}</math>)</b>						
$\mu_{s,pp}$	$\mu_{r,pp}$	$\beta_m$ (graus)	CPU(h)	Tempo(s)		
0,4	0,05	28,7	0,287	7		
0,4	0,1	33	0,327	8		
0,4	0,2	32,3	0,364	10		
0,4	0,4	37,1	2,22	55		
0,4	0,8	33,8	2,48	60		

Para $\mu_{s,pp}=0,5$ fixo						
<b>PARÂMETRO VARIÁVEL (<math>\mu_{r,pp}</math>)</b>						
$\mu_{s,pp}$	$\mu_{r,pp}$	$\beta_E$	$\beta_D$	$\beta_m$	CPU(h)	Tempo(s)
0,5	0,05	32,2	33,4	32,8	0,276	7
0,5	0,1	34,8	34,2	34,5	0,272	6
0,5	0,2	37,3	32,3	34,8	0,275	7
0,5	0,4	42,3	40,4	41,35	0,536	13
0,5	0,8	47,7	58,4	53,05	0,54	13

Para $\mu_{s,pp}=0,6$ fixo						
<b>PARÂMETRO VARIÁVEL (<math>\mu_{r,pp}</math>)</b>						
$\mu_{s,pp}$	$\mu_{r,pp}$	$\beta_E$	$\beta_D$	$\beta_m$	CPU(h)	Tempo(s)
0,6	0,05	34,7	34,6	34,65	0,398	9
0,6	0,1	34,1	34,7	34,4	0,309	6
0,6	0,2	38,6	37,2	37,9	0,376	9
0,6	0,4	43,8	42,6	43,2	0,349	6
0,6	0,8	46,7	45,7	46,2	0,805	20

Para $\mu_{s,pp}=0,7$ fixo						
<b>PARÂMETRO VARIÁVEL (<math>\mu_{r,pp}</math>)</b>						
$\mu_{s,pp}$	$\mu_{r,pp}$	$\beta_E$	$\beta_D$	$\beta_m$	CPU(h)	Tempo(s)
0,7	0,05	32,8	34	33,4	0,271	7
0,7	0,1	34,6	34,6	34,6	0,344	6
0,7	0,2	38,5	38,6	38,55	0,306	6
0,7	0,4	45,3	46,4	45,85	0,315	8
0,7	0,8	38,2	41,3	39,75	1,24	30

**ÂNGULO DE REPOUSO EM FUNÇÃO DO COEFICIENTE DE RESTITUIÇÃO ( $e_{pp}$ ) PARA DIFERENTES ATRITOS ESTÁTICOS**

- Para  $\mu_{s,pp}$  de 0,4 a 0,6

Para  $\mu_{s,pp}=0,4$  fixo

<b>PARÂMETRO VARIÁVEL (<math>e_{pp}</math>)</b>							
$e_{pp}$	$\mu_{s,pp}$	$\mu_{r,pp}$	$\beta_E$	$\beta_D$	$\beta_m$	CPU(h)	Tempo(s)
0,05	0,4	0,05	33,3	32,1	32,7	0,518	6
0,1	0,4	0,05	31,3	32,4	31,85	0,324	8
0,2	0,4	0,05	35,3	36,5	35,9	0,317	7
0,4	0,4	0,05	32	33	32,5	0,323	7
0,5	0,4	0,05	30,7	29,5	30,1	0,311	6

$\mu_{s,pp}=0,5$  fixo

<b>PARÂMETRO VARIÁVEL (<math>e_{pp}</math>)</b>							
$e_{pp}$	$\mu_{s,pp}$	$\mu_{r,pp}$	$\beta_E$	$\beta_D$	$\beta_m$	CPU(h)	Tempo(s)
0,05	0,5	0,05	36,5	35,1	<b>35,8</b>	0,355	7
0,1	0,5	0,05	32,2	32,5	<b>32,35</b>	0,278	7
0,2	0,5	0,05	32	31,7	<b>31,85</b>	0,234	6
0,4	0,5	0,05	31	32	<b>31,5</b>	0,277	6
0,5	0,5	0,05	29,4	29,6	<b>29,5</b>	0,278	7

$\mu_{s,pp}=0,6$  fixo

<b>PARÂMETRO VARIÁVEL (<math>e_{pp}</math>)</b>							
$e_{pp}$	$\mu_{s,pp}$	$\mu_{r,pp}$	$\beta_E$	$\beta_D$	$\beta_m$	CPU(h)	Tempo(s)
0,05	0,6	0,05	32,2	33,4	<b>32,8</b>	0,269	6
0,1	0,6	0,05	31,8	29,7	<b>30,75</b>	0,32	8
0,2	0,6	0,05	30,6	31,8	<b>31,2</b>	0,323	7
0,4	0,6	0,05	29,5	31,0	<b>30,25</b>	0,273	7
0,5	0,6	0,05	30,7	30	<b>30,35</b>	0,227	6

- Para  $\mu_{r,pp}$  de 0,05 a 0,2

Para  $\mu_{r,pp}=0,05$  fixo

<b>PARÂMETRO VARIÁVEL (<math>e_{pp}</math>)</b>							
$e_{pp}$	$\mu_{s,pp}$	$\mu_{r,pp}$	$\beta_E$	$\beta_D$	$\beta_m$	CPU(h)	Tempo(s)
0,05	0,4	0,05	28,4	28,8	28,6	0,243	6
0,1	0,4	0,05	31,5	30	30,75	0,238	6
0,2	0,4	0,05	28,7	27,9	28,3	0,239	6
0,4	0,4	0,05	31,6	32,4	32	0,236	6
0,5	0,4	0,05	30	30,3	30,15	0,235	6

$\mu_{r,pp}=0,1$ fixo							
<b>PARÂMETRO VARIÁVEL (<math>e_{pp}</math>)</b>							
$e_{pp}$	$\mu_{s,pp}$	$\mu_{r,pp}$	$\beta_E$	$\beta_D$	$\beta_m$	CPU(h)	Tempo(s)
0,05	0,4	0,1	33	33,2	33,1	0,280	7
0,1	0,4	0,1	32	31	31,5	0,283	7
0,2	0,4	0,1	31,7	30,5	31,1	0,235	6
0,4	0,4	0,1	30,7	28,1	29,4	0,231	6
0,5	0,4	0,1	30,1	30,3	30,2	0,291	7
$\mu_{r,pp}=0,2$ fixo							
<b>PARÂMETRO VARIÁVEL (<math>e_{pp}</math>)</b>							
$e_{pp}$	$\mu_{s,pp}$	$\mu_{r,pp}$	$\beta_E$	$\beta_D$	$\beta_m$	CPU(h)	Tempo(s)
0,05	0,4	0,2	37	39,2	38,1	0,281	7
0,1	0,4	0,2	35,8	37	36,4	0,285	7
0,2	0,4	0,2	38	39,7	38,85	0,285	7
0,4	0,4	0,2	37,2	35,2	36,2	0,240	6
0,5	0,4	0,2	39,6	37,7	38,65	0,237	6

## APÊNDICE B

### CALIBRAÇÃO COM O USO DO MODELO DE HERTZ-MINDLIN COM COESÃO JKR E PARTÍCULA ESFÉRICA

#### JKR 1– PRETESTES/CALIBRAÇÃO COM O MODELO DE HERTZ-MINDLIN COM COESÃO JKR PARA OBTER, COM A PARTÍCULA ESFÉRICA, RESULTADOS EQUIVALENTES DAQUELES DO MODELO DE HERTZ-MINDLIN COM ATRITO DE ROLAMENTO (SEM DESLIZAMENTO) RVD DAS PARTÍCULAS NÃO-ESFÉRICAS

Energia de superfície (J/m <sup>2</sup> ) HERTZ-MINDLIN COM JKR					Forma esférica: ● 10 mm (condição inicial (calibração), $\mu_{r,pp} = 0,05$ ; $\mu_{s,pp} = 0,4$ ; $\beta = 28,7^\circ$ com Modelo RVD) – obter com modelo JKR:												
					Forma 2 ● $\beta = 48,4^\circ$	Forma 3 ● $\beta = 46,2^\circ$	Forma 4, ● $\beta = 51,3^\circ$	$\mu_{r,pw} = 2 \cdot \mu_{r,pp}$	$\mu_{s,pp}$ (atrito estática partícula-partícula)	Nº. partículas (2000) retidas/Total/porosidade(%)	Tempo de simulação	PASSO DE TEMPO (segundos) Cell size: 2,35R=10mm 8 núcleos (processador)		Quadro Save As	Nº de Celulas (R=5mm)	Distrib.Probabilidade Fábrica de partículas (tempo inicial: 1e-12) 1-fixo, 2-logonormal, 3-normal, 4-randomico	CPU (horas)
$T_R =$ tempo de Rayleigh (s)	Fixo (19,99% a 20,6 % de $t_R$ )	$\beta_E$	$\beta_D$	$\beta$													
Partícula-partícula	Partícula-parede: Pcf - partícula com caixa de fluxo Ppc - partícula com a placa central ps e/d - partícula com as saídas esquerda/direita				0,05	0,4	artigo	7s	-	-	-	CONEM	1	-	-	-	28,7
	Pcf	Ppc	Pse	psd													
-	-	-	RVD		0,05	0,4	artigo	7s	-	-	-	CONEM	1	-	-	-	28,7

VARIAÇÃO COM INTERAÇÃO PARTÍCULA-PARTÍCULA COM JKR																	
<b>0,04</b>	0,01	0,01			0,05	0,4	906/2000/47,35	5s	7,91e-05	1,58251e-05	0,01	8405	3	0,289	41,5	40,4	<b>40,95</b>
<b>0,05</b>	0,01	0,01	JKR		0,05	0,4	932/2000/46,63	6s	7,91e-05	1,58251e-05	0,01	8405	3	0,360	39,4	43,4	<b>41,40</b>
<b>0,06</b>	0,01	0,01			0,05	0,4	975/2000/47,33	5s	7,91e-05	1,58251e-05	0,01	8405	3	0,297	47,2	42,9	<b>45,05</b>
<b>0,065</b>	0,01	0,01			0,05	0,4	999/2000/47,41	4s	7,91e-05	1,58251e-05	0,01	8405	3	0,333	51,1	42	46,55
<b>0,07</b>	0,01	0,01			0,05	0,4	940/2000/47,01	5s	7,91e-05	1,58251e-05	0,01	8405	3	0,291	44,7	49,2	<b>46,95</b>

<b>0,10</b>	0,01	0,01			0,05	0,4	957/2000/47,49	5s	7,91e-05	1,58251e-05	0,01	8405	3	0,295	51,1	52,7	<b>51,90</b>
<b>0,15</b>	0,01	0,01			0,05	0,4	937/2000/47,76	5s	7,91e-05	1,58251e-05	0,01	8405	3	0,299	43,2	45	44,1
<b>0,20</b>	0,01	0,01			0,05	0,4	1414/2000/47,16	5s	7,68e-05	1,58251e-05	0,01	8405	ARQUEAMENTO 3	0,299	90	46,5	----
<b>VARIAÇÃO DA INTERAÇÃO PARTÍCULA-GEOMETRIA COM JKR</b>																	
0,15	<b>0,015</b>	<b>0,015</b>			0,05	0,4	922/2000/47,11	5s	7,91e-05	1,58251e-05	0,01	8405	3	0,321	46,2	45,8	45,75
0,15	<b>0,020</b>	<b>0,020</b>			0,05	0,4	945/2000/47,51	5s	7,91e-05	1,58251e-05	0,01	8405	3	0,403	44,8	44,4	44,6
0,15	<b>0,025</b>	<b>0,025</b>			0,05	0,4	958/2000/47,58	5s	7,91e-05	1,58251e-05	0,01	8405	3	0,298	44,7	45,8	45,25
0,15	<b>0,030</b>	<b>0,030</b>			0,05	0,4	991/2000/47,11	7s	7,91e-05	1,58251e-05	0,01	8405	3	0,459	50,5	46,1	48,3
0,15	<b>0,035</b>	<b>0,035</b>			0,05	0,4	956/2000/47,43	5s	7,91e-05	1,58251e-05	0,01	8405	3	0,316	52,6	44	48,3
<b>0,15</b>	0,0105	0,0105			0,05	0,4	971/2000/47,24	5s	7,91e-05	1,58251e-05	0,01	8405	3	0,333	44,2	56,5	50,35
<b>0,60</b>	0,0105	0,0105			0,05	0,4	996/2000/48,10	5s	7,91e-05	1,58251e-05	0,01	8405	3	0,290	48,8	46,8	<b>47,8</b>
<b>VARIAÇÃO DO ATRITO DE ROLAMENTO COM JKR</b>																	
0,05	0,01	0,01			<b>0,050</b>	0,4	932/2000/46,63	6s	7,91e-05	1,58251e-05	0,01	8405	3	0,360	39,4	43,4	<b>41,40</b>
0,15	0,01	0,01			<b>0,055</b>	0,4	983/2000/47,71	5s	7,68e-05	1,58251e-05	0,01	8405	3	0,299	50	53,8	51,9
0,15	0,01	0,01	-	-	<b>0,100</b>	0,4	1141/2000/48,78	5s	7,91e-05	1,58251e-05	0,01	8405	3	0,292	65,2	63,4	64,3
0,15	0,01	0,01	-	-	<b>0,150</b>	0,4	1197/2000/49,67	9s	7,91e-05	1,58251e-05	0,01	8405	3	0,545	64,7	57,4	
0,15	0,01	0,01	-	-	<b>0,200</b>	0,4	1262/2000/50,30	6s	7,91e-05	1,58251e-05	0,01	8405	3	0,392	65,7	68,5	
0,15	0,01	0,01	-	-	<b>0,250</b>	0,4	1351/2000/50,94	6s	7,91e-05	1,58251e-05	0,01	8405	3	0,394	81,8	83,8	
												OBS:	<b>BOM PARA MINERIO</b>	<b>FERRO</b>			
<b>VARIAÇÃO DO ATRITO ESTÁTICO COM MODELO HERTZ-MINDLIN COM COESÃO JKR (CALIBRAÇÃO DA FORMA 4)</b>																	
0,15	0,01	0,01			0,05	<b>0,405</b>	971/2000/47,31	<5s	7,91e-05	1,58251e-05	0,01	8405	3	0,284	49,2	45,3	<b>47,25</b>
0,15	0,01	0,01			0,05	<b>0,405</b>	990/2000/47,36	4s	7,91e-05	1,58251e-05	0,01	8405	3	0,257	49,1	45,5	<b>45,3</b>
0,15	0,01	0,01			0,05	<b>0,425</b>	934/2000/47,09	8s	7,91e-05	1,58251e-05	0,01	8405	3	0,567	45,3	41,4	43,35
0,15	0,01	0,01			0,05	<b>0,450</b>	1005/2000/47,87	5s ou (4,3)	7,91e-05	1,58251e-05	0,01	8405	3	0,304	53	49,4	51,2
0,15	0,01	0,01			0,05	<b>0,475</b>	963/2000/47,41	6s	7,91e-05	1,58251e-05	0,01	8405	3	0,360	46,4	45	45,7
0,15	0,01	0,01			0,05	<b>0,50</b>	1033/2000/48,16	4s	7,91e-05	1,58251e-05	0,01	8405	3	0,313	51,8	52,5	52,15
0,15	0,01	0,01			0,05	<b>0,55</b>	963/2000/48,10	5s(tende arquear)	7,91e-05	1,58251e-05	0,01	8405	3	0,327	46	44,2	45,1
0,15	0,01	0,01	-	-	0,05	<b>0,60</b>	912/2000/48,10	7s (arco)	7,91e-05	1,58251e-05	0,01	8405	3	0,479	36,4	44,5	40,45

**JKR 2- Repetição da simulação com as mesmas condições utilizadas para calibração da FORMA 2: partículas esféricas, distribuição normal (com a configuração Padrão do EDEM) e geração randômica de partículas (obter o ângulo do modelo H.M RVD igual a 44,1°)**

<b>0,15</b>	0,01	0,01			0,05	0,4	940/2000/47,14	5s	7,68e-05	1,58251e-05	0,01	8405	3	0,303	42,7	45,6	<b>44,15</b>
<b>0,15</b>	0,01	0,01			0,05	0,4	940/2000/47,14	5s	7,91e-05	1,58251e-05	0,01	8405	3	0,287	50,8	45,5	48,15
<b>0,15</b>	0,01	0,01			0,05	0,4	939/2000/47,54	5s	7,91e-05	1,58251e-05	0,01	8405	3	0,285	50	45	47,5
<b>0,15</b>	0,01	0,01			0,05	0,4	975/2000/47,73	5s	7,91e-05	1,58251e-05	0,01	8405	3	0,292	53,2	49	51,1
<b>0,15</b>	0,01	0,01			0,05	0,4	937/2000/47,76	5s	7,91e-05	1,58251e-05	0,01	8405	3	0,299	43,2	45	<b>44,1</b>
<b>0,15</b>	0,01	0,01			0,05	0,4	937/2000/47,76	5s	7,91e-05	1,58251e-05	0,01	8405	3	0,299	44,2	45	<b>44,6</b>

**JKR 3- Quadro resumido de JKR-2: com a forma esférica obteve-se os ângulos correspondentes da formas mostradas no quadro**

<b>Pp</b>	<b>Pcf</b>	<b>Ppc</b>	$\mu_{r,pp}$	$\mu_{s,pp}$	granulometria	CPU (h)	Tempo(s)	Retidas	$\beta E$	$\beta D$	$\beta$
<b>0,15</b>	0,01	0,01	0,05	0,4	Normal	0,303	5	940	42,7	45,6	<b>44,15</b>
<b>0,15</b>	0,01	0,01	0,05	0,4	Normal	0,287	5	940	50,8	45,5	48,15
<b>0,15</b>	0,01	0,01	0,05	0,4	Normal	0,285	5	939	50	45	47,5
<b>0,15</b>	0,01	0,01	0,05	0,4	Normal	0,292	5	975	53,2	49	51,1
<b>0,15</b>	0,01	0,01	0,05	0,4	Normal	0,299	5	937	43,2	45	<b>44,1</b>
<b>0,15</b>	0,01	0,01	0,05	0,4	Normal	0,299	5	937	44,2	45	<b>44,6</b>

Onde: pp – interação partícula-partícula; pcf- interação partícula-caixa de fluxo; ppc – interação partícula- placa central

**JKR 4-Ângulos calibrados das formas não-esféricas com a forma esférica**

Partícula-partícula	Partícula-geometria				Nº. partículas (2000)		Tempo(s)	CPU (h)	β (graus)
	Pcf	Ppc	μr	μs	Porosidade (%)	retidas			
<b>0,15</b>	0,01	0,01	0,05	0,4	47,76	937	5s	0,299	44,10° ●
<b>0,15</b>	0,01	0,01	0,05	0,4	47,76	937	5s	0,299	44,60° ●
0,15	0,01	0,01	0,05	<b>0,405</b>	47,31	971	<5s	0,284	<b>47,25°</b> ●

Forma representativa: ● 10 mm modelo JKR:

Forma 2 ● β = 48,4°

Forma 3 ● β = 46,2°

Forma 4 ● β = 51,3°

Energia de superfície (J/m<sup>2</sup>)  
HERTZ-MINDLIN COM  
COESÃO JKR

Onde: pp – interação partícula-partícula; pcf- interação partícula-caixa de fluxo; ppc –interação partícula- placa central

## APÊNDICE C

**Típicos comportamentos dos escoamentos entre os dois modelos de contato mecânico gerenciado pela energia cinética total das partículas medida sobre a placa central da caixa de fluxo**

