

Sólitons latentes, cordas negras, membranas negras e
equações de estado em modelos de Kaluza-Klein

Orival Rocha de Medeiros

Orientador: Prof. Dr. Luís Carlos Bassalo Crispino

Belém - PA

4 de junho de 2012



Universidade Federal do Pará
Instituto de Ciências Exatas e Naturais
Programa de Pós-Graduação em Física
Dissertação de Mestrado

Sólitons latentes, cordas negras, membranas negras e equações de estado em modelos de Kaluza-Klein

Orival Rocha de Medeiros

Orientador: Prof. Dr. Luís Carlos Bassalo Crispino

Prof. Dr. Luís Carlos Bassalo Crispino

Prof. Dr. Valdir Barbosa Bezerra

Prof. Dr. Danilo Teixeira Alves

Prof. Dr. Jorge Castiñeiras Rodrigues

Dedico à Heloisa Medeiros

Agradecimentos

Ao professor Dr. Luís Carlos Bassalo Crispino pela orientação durante o desenvolvimento deste trabalho, pelo voto de confiança ao me dar oportunidade de assumir um trabalho tão sério, pelos incentivos em vários momentos difíceis que com certeza foram fundamentais para chegar ao término desta dissertação.

Ao professor Dr. Alexander Zhuk pela grande colaboração durante o desenvolvimento do meu trabalho científico de mestrado.

Ao professor Dr. Jorge Castiñeiras Rodrigues pelos excelentes cursos durante o mestrado.

Aos professores Dr. Marcelo Costa de Lima e Dr. Van Sérgio da Silva Alves pelas aulas inspiradoras.

A minha família de sangue e a outra família adquirida pela vivência, respeito e amizade no decorrer dos anos.

Aos amigos de curso que, de uma forma ou de outra, ajudaram na construção desse trabalho, entre os quais posso destacar Penn Menezes, Glauber Tadaiesky, Tércio Alemeida, Charles da Rocha, Debora Carvalho, Caio Macedo, Carolina Benone, Jeferson Danilo e Luiz Leite.

Ao amigo Leandro A. Oliveira pelas discussões durante o curso e pela leitura crítica de minha dissertação.

Ao CNPq pelo suporte financeiro durante parte do mestrado.

À SEDUC pela concessão de licença para aprimoramento profissional durante o curso de mestrado.

Resumo

Neste trabalho investigamos soluções solitônicas em modelos de Kaluza-Klein com um número arbitrário de espaços internos toroidais, que descrevem o campo gravitacional de um objeto massivo compacto. Cada toro d_i -dimensional possui um fator de escala independente C_i , $i = 1, \dots, N$, que é caracterizado pelo parâmetro γ_i . Destacamos a solução fisicamente interessante correspondente à massa pontual. Para a solução geral obtemos equações de estado nos espaços externo e interno. Estas equações demonstram que a massa pontual solitônica possui equações de estado tipo poeira em todos os espaços. Obtemos também os parâmetros pós-newtonianos que nos possibilitam encontrar as fórmulas da precessão do periélio, do desvio da luz e do atraso no tempo de ecos de radar. Além disso, os experimentos gravitacionais levam a uma forte limitação nos parâmetros do modelo: $\tau = \sum_{i=1}^N d_i \gamma_i = -(2, 1 \pm 2, 3) \times 10^{-5}$. A solução para massa pontual com $\gamma_1 = \dots = \gamma_N = (1 + \sum_{i=1}^N d_i)^{-1}$ contradiz esta restrição. A imposição $\tau = 0$ satisfaz essa limitação experimental e define uma nova classe de soluções que são indistinguíveis para a relatividade geral. Chamamos estas soluções de sólitons latentes. Cordas negras e membranas negras com $\gamma_i = 0$ pertencem a esta classe. Além disso, a condição de estabilidade dos espaços internos destaca cordas/membranas negras de sólitons latentes, conduzindo exclusivamente para as equações de estado de corda/membrana negra $p_i = -\varepsilon/2$, $i = 1, \dots, N$, nos espaços internos e ao número de dimensões externas $d_0 = 3$. As investigações do fluido perfeito multidimensional estático e esfericamente simétrico com equação de estado tipo poeira no espaço externo confirmam os resultados acima.

Palavras-chave: Sólitons, Kaluza-Klein, cordas negras, membranas negras, espaços multidimensionais.

Áreas de Conhecimento: 1.04.04.04-0, 1.05.01.03.7.

Abstract

In Kaluza-Klein models with an arbitrary number of toroidal internal spaces, we investigate soliton solutions which describe the gravitational field of a massive compact object. Each d_i -dimensional torus has its own scale factor C_i , $i = 1, \dots, N$, which is characterized by a parameter γ_i . We single out the physically interesting solution corresponding to a point-like mass. For the general solution we obtain equations of state in the external and internal spaces. These equations demonstrate that the point-like mass soliton has dust-like equations of state in all spaces. We also obtain the parameterized post-Newtonian parameters, which give the possibility to obtain the formulas for perihelion shift, deflection of light and time delay of radar echoes. Additionally, the gravitational experiments lead to a strong restriction on the parameters of the model: $\tau = \sum_{i=1}^N d_i \gamma_i = -(2.1 \pm 2.3) \times 10^{-5}$. The point-like mass solution with $\gamma_1 = \dots = \gamma_N = (1 + \sum_{i=1}^N d_i)^{-1}$ contradicts this restriction. The condition $\tau = 0$ satisfies the experimental limitation and defines a new class of solutions which are indistinguishable from general relativity. We call such solutions latent solitons. Black strings and black branes with $\gamma_i = 0$ belong to this class. Moreover, the condition of stability of the internal spaces singles out black strings/branes from the latent solitons and leads uniquely to the black string/brane equations of state $p_i = -\varepsilon/2$, $i = 1, \dots, N$, in the internal spaces and to the number of the external dimensions $d_0 = 3$. The investigation of multidimensional static spherically symmetric perfect fluid with dust-like equation of state in the external space confirms the above results.

Keywords: Solitons, Kaluza-Klein, black strings, black branes, multidimensional spaces.

Sumário

1	Introdução	4
2	Relatividade geral em 4 dimensões	6
2.1	Espaço-tempo e métrica	6
2.1.1	Gravidade como a curvatura do espaço-tempo	8
2.2	O tensor energia-momento	9
2.2.1	Matéria não-interagente (poeira)	9
2.2.2	Fluido perfeito e equações de estado	12
2.3	Campo gravitacional fraco	13
2.4	Equações de Einstein	15
2.5	A solução de Schwarzschild	16
2.5.1	Soluções das equações de campo no espaço vazio	17
3	A teoria de Kaluza-Klein e a métrica solitônica	19
3.1	A teoria de Kaluza	20
3.2	A teoria de Kaluza-Klein	22
3.3	A métrica solitônica e o limite de campo fraco	23
4	Métrica solitônica generalizada	26
4.1	A métrica solitônica generalizada	26
4.2	Aproximação de campo gravitacional fraco	29
4.3	Cálculo perturbativo do tensor de Ricci na aproximação de campo gravitacional fraco	30
4.4	Equações de estado. Caso geral no limite de campo fraco	32

5	O formalismo PPN e os testes gravitacionais	36
5.1	A métrica de Schwarzschild em coordenadas isotrópicas	37
5.2	Os Parâmetros Pós-Newtonianos (PPN)	39
5.3	Precessão do periélio de Mercúrio	40
5.4	Deflexão da luz	43
6	Sólitons latentes, cordas negras, membranas negras e equações de estado nos modelos de Kaluza-Klein	46
6.1	Limitações experimentais e os sólitons. Sólitons latentes	46
6.2	Limitações experimentais e as equações de estado de um fluido perfeito multidimensional	49
7	Conclusão	54
	Bibliografia	56

Capítulo 1

Introdução

Aspectos físicos observacionais, como energia escura e matéria escura, constituem grandes desafios para a Cosmologia, Astrofísica e Física Teórica. No âmbito do modelo padrão ainda não se tem uma explicação satisfatória para estes problemas. Isso força a busca de soluções para esses problemas para além do modelo padrão, por exemplo, considerando modelos com dimensões extras. Destas generalizações decorrem as modernas teorias de unificação como supercordas, supergravidade e teoria M, que possuem uma formulação mais auto-consistente em espaços com dimensões extras. Obviamente estas teorias devem ser consistentes com as observações.

No capítulo 2 dessa dissertação, faremos uma revisão da relatividade geral em 4 dimensões e também da solução de Schwarzschild. No capítulo 3, apresentaremos a teoria de Kaluza-Klein em 5 dimensões e a métrica solitônica pentadimensional no limite de campo fraco. Na Ref. [1] os autores encontraram soluções para a métrica isotrópica com uma dimensão extra, a métrica de Kaluza-Klein, e obtiveram o elemento de linha solitônico correspondente ao espaço vazio com uma massa puntual, onde os coeficientes foram expandidos assintoticamente, o que permitiu definir várias propriedades para estas soluções. No capítulo 4 e na Ref. [2], generalizamos as soluções da Ref. [1] usando um modelo isotrópico tipo Schwarzschild com dimensões extras toroidais que acompanham N subespaços. Esses tipos de modelos são comumente chamados de modelos de Kaluza-Klein. Os coeficientes da métrica destas soluções foram expandidos assintoticamente e caracterizados para podermos definir completamente a massa puntual solitônica. Com a ajuda desses coeficientes, encontramos as equações de

estado para a massa puntual solitônica. Isto foi feito perturbando os coeficientes da métrica e utilizando a equação de Poisson generalizada. Desta forma, as componentes do tensor energia-momento, tanto das dimensões externas quanto internas (dimensões extras), apareceram naturalmente, mostrando que a única componente não nula é T_{00} . Nas dimensões externas e internas temos $p = 0$. Estas são equações de estado tipo poeira. Como em qualquer teoria física, esses resultados precisam estar de acordo com os dados experimentais e, por isso, no capítulo 5 encontramos as equações da precessão do periélio de Mercúrio e da deflexão da luz a partir da métrica de Schwarzschild em coordenadas isotrópicas com os parâmetros pós-newtonianos. Na primeira parte do capítulo 6 usamos os dados experimentais da sonda espacial Cassini para obter uma restrição para o parâmetro solitônico τ : $\tau = -(2,1 \pm 2,3) \times 10^{-5}$. A condição $\tau = 0$ mostra que existe uma classe de sólitons que chamamos de *sólitons latentes*. Para esses sólitons as equações de estado nos espaços internos são reduzidas a $p_i = (\gamma_i - 1)\varepsilon/2$, para todo $i = 1, \dots, N$. Quando $\gamma_i = 0$, e $i \geq 1$, caracterizamos cordas negras ($N = 1, d_1 = 1$) e membranas negras ($N > 1$) e todos possuem equações de estado $p_i = -(1/2)\varepsilon$. Por fim, Na seção 6.2 mostramos que para um fluido perfeito esfericamente simétrico com equação de estado tipo poeira no espaço externo, a imposição $h_{00} = h_{\alpha\alpha}$ também resulta na condição de sóliton latente. Encontramos, também, para este fluido, a mesma condição de estabilidade da massa puntual solitônica.

Capítulo 2

Relatividade geral em 4 dimensões

Neste capítulo, revisaremos alguns tópicos da teoria da relatividade geral de Einstein. Na Seção 2.1, falaremos sobre espaço-tempo e métrica. Para exemplificar como matéria e energia se distribuem no espaço-tempo iremos construir, na seção 2.2, o tensor energia-momento para matéria não-interagente e para o fluido perfeito. Na seção 2.3, estudaremos o limite de campo gravitacional fraco. Falaremos sobre as equações de Einstein na seção 2.4. Obteremos a solução de Schwarzschild para as equações de Einstein na seção 2.5. Neste capítulo seguiremos as referências [3], [4] e [5].

2.1 Espaço-tempo e métrica

Inicialmente, apresentaremos a gravitação considerando a descrição feita pela teoria gravitacional de Newton. Na teoria newtoniana, a força gravitacional \vec{f} , atuando em uma partícula teste de massa gravitacional m_G , é dada por [3]

$$\vec{f} = m_G \vec{g} = -m_G \nabla \Phi , \quad (2.1)$$

onde \vec{g} é o campo gravitacional e Φ o potencial gravitacional. O potencial gravitacional, por sua vez, é determinado pela equação de Poisson:

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho , \quad (2.2)$$

onde ρ é a densidade de matéria e G é a constante gravitacional de Newton. A Eq. (2.2) é a equação de campo da gravitação newtoniana.

A partir da expressão (2.2), podemos concluir que a gravitação newtoniana não é consistente com a relatividade especial, pois não há uma dependência explícita do tempo, significando que o potencial Φ responde instantaneamente a uma perturbação na densidade de matéria ρ . Isto viola o princípio da relatividade, o qual nos garante que nenhum sinal pode se propagar com velocidade maior que a velocidade da luz c . Uma alternativa para chegarmos a uma equação de campo que leve em conta a finitude da velocidade com que a luz se propaga é considerar que o Laplaciano é equivalente ao D'alembertiano \square^2 no limite $c \rightarrow \infty$, e assim, postular a seguinte equação de campo modificada:

$$\square^2\Phi = -4\pi G\rho. \quad (2.3)$$

No entanto, esta equação não conduz a uma teoria relativística consistente. Isto porque a Eq. (2.3) não é covariante por transformações de Lorentz, uma vez que a densidade de matéria ρ não se transforma como um escalar de Lorentz. As propriedades de transformação de densidade de matéria serão discutidas na seção 2.2.

Além da incompatibilidade existente entre gravitação newtoniana e a relatividade especial, existe também uma diferença fundamental entre o eletromagnetismo e a gravitação. Por exemplo, a equação de movimento de uma partícula de massa inercial m_I no campo gravitacional, dada por:

$$\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = -\frac{m_G}{m_I}\nabla\Phi. \quad (2.4)$$

Experimentalmente, é um fato bem conhecido que a relação m_G/m_I que aparece na equação de movimento, é igual a unidade. A partir da Eq. (2.4) podemos concluir que a trajetória da partícula no campo gravitacional não depende da natureza da partícula. Isto não acontece no eletromagnetismo.

A equivalência entre massa gravitacional e massa inercial é considerada, na teoria newtoniana, uma coincidência.

2.1.1 Gravidade como a curvatura do espaço-tempo

Einstein fez uma suposição que fornece para relatividade a descrição da gravidade e incorpora naturalmente o princípio da equivalência (e, conseqüentemente, a equivalência das massas gravitacional e inercial). A proposta de Einstein foi que a gravidade não deveria ser considerada como uma força no sentido convencional, mas como uma manifestação da curvatura do espaço-tempo, e que esta curvatura seria induzida pela presença de matéria e energia. Esta é a idéia central da teoria da relatividade geral, segundo a qual a gravidade é considerada como uma manifestação do próprio espaço-tempo, e não como a ação de alguma quadriforça \mathbf{f} definida sobre a variedade. Neste contexto, a equação de movimento de uma partícula submetida apenas à influência da gravidade é a de uma partícula “livre” no espaço-tempo curvo, isto é

$$\frac{d\mathbf{p}}{d\tau} = 0 , \quad (2.5)$$

onde \mathbf{p} é o quadrimomento da partícula e τ é o tempo próprio medido ao longo da linha de mundo da partícula. A linha de mundo de uma partícula livre sob a ação da gravidade é conhecida como geodésica.

O princípio da equivalência restringe a geometria possível do espaço-tempo curvo a um espaço pseudo-Riemanniano [3]. O significado matemático do princípio da equivalência é que este requer que em qualquer ponto P na variedade sejamos capazes de definir um sistema de coordenadas x^μ ($\mu = 0, 1, 2, 3$) tal que, na vizinhança local de P , o elemento de linha do espaço-tempo tome a forma

$$ds^2 \approx \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu , \quad (2.6)$$

onde a igualdade (ao invés da aproximação) é válida para o ponto P e os índices gregos (μ, ν, \dots) assumem os valores 0, 1, 2, e 3 em todo este capítulo. Nesta dissertação adotaremos a convenção de soma de Einstein, implicando que há uma soma implícita sobre os índices repetidos [4]. $\eta_{\mu\nu}$ são as componentes covariantes do tensor métrico e são dadas por

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \text{diag}(1, -1, -1, -1) . \quad (2.7)$$

A partir da equação da geodésica, em um sistema de coordenadas arbitrário, o caminho de uma partícula livre, isto é, em movimento apenas sob a influência da gravidade, nas imediações do ponto P , é dado por

$$\frac{d^2 X^i}{dT^2} \approx 0, \quad (2.8)$$

onde $i = 1, 2, 3$ e representamos X^0 por cT . Assim, na vizinhança de P as coordenadas X^μ definem um sistema cartesiano local em que as leis da relatividade especial valem localmente. A fim de que possamos construir esse sistema, o espaço-tempo deve ser uma variedade pseudo-riemanniana. Uma métrica pode ser usada para definir distâncias e comprimentos de vetores. O intervalo infinitesimal, que denotamos por ds , entre dois eventos localizados em x^μ e $x^\mu + dx^\mu$ é definido por

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (2.9)$$

onde $g_{\mu\nu}$ são as componentes covariantes do tensor métrico na variedade pseudo-riemanniana.

2.2 O tensor energia-momento

2.2.1 Matéria não-interagente (poeira)

Vamos considerar o tipo mais simples de campo de matéria, a saber, o da matéria não-interagente ou poeira. Tal campo pode ser caracterizado por duas quantidades, o campo vetorial quadrivelocidade $u^\mu = dx^\mu/d\tau$, onde τ é o tempo próprio ao longo da linha de mundo de uma partícula de poeira (ver Fig. 2.1) e o campo escalar $\rho_0 = \rho_0(x)$ que descreve a densidade própria do fluxo, que é a densidade medida por um observador que se move com o campo (observador comóvel). Nesta seção adotamos $c = 1$ (unidades naturais). O tensor de segunda ordem mais simples que podemos construir a partir dessas duas quantidades é

$$T^{\mu\nu} = \rho_0 u^\mu u^\nu. \quad (2.10)$$

Este é o tensor energia-momento para o campo de matéria não-interagente (poeira).

Analisemos, agora, este tensor nas coordenadas de Minkowski no contexto da relatividade especial. A quadrivelocidade é

$$u^\mu = \gamma(1, \vec{u}), \quad (2.11)$$

onde $\gamma = (1 - u^2)^{-1/2}$. O tempo próprio é definido por $d\tau^2 = ds^2$ e, usando a relação $ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$, obtemos $d\tau^2 = \gamma^{-2} dt^2$.

A componente 00 de $T^{\mu\nu}$ assume a seguinte forma:

$$T^{00} = \gamma^2 \rho_0 . \quad (2.12)$$

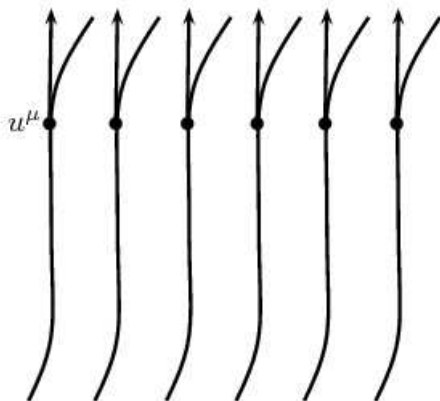


Figura 2.1: Linhas de mundo de partículas de poeira [4].

Do ponto de vista de um observador fixo no sistema de coordenadas, a densidade cresce por um fator γ^2 . Assim, se um campo de matéria de densidade própria ρ_0 passa por um observador fixo com velocidade \vec{u} , então o observador fixo irá medir uma densidade

$$\rho = \gamma^2 \rho_0 . \quad (2.13)$$

A componente T^{00} pode ser interpretada como a densidade de energia relativística do campo de matéria.

As componentes de $T^{\mu\nu}$ podem ser escritas, usando (2.10) e (2.13), na forma

$$T^{\mu\nu} = \rho \begin{bmatrix} 1 & u_x & u_y & u_z \\ u_x & u_x^2 & u_x u_y & u_x u_z \\ u_y & u_x u_y & u_y^2 & u_y u_z \\ u_z & u_x u_z & u_y u_z & u_z^2 \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

Agora mostraremos que as equações que governam o movimento de um campo de matéria não-interagente (poeira), livre de forças, podem ser escritas da seguinte maneira

$$\partial_\mu T^{\nu\mu} = 0 . \quad (2.15)$$

Usando (2.14), a componente $\nu = 0$ da Eq. (2.15) pode ser escrita como

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho u_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho u_z) = 0 . \quad (2.16)$$

A Eq. (2.16) é precisamente a equação da continuidade escrita em coordenadas cartesianas, podendo ser reescrita como

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0 . \quad (2.17)$$

Na dinâmica dos fluidos, a Eq. (2.17) expressa a lei de conservação da massa, de um elemento de fluido com densidade ρ e movendo-se com velocidade \vec{u} . As componentes $\nu = i$, com $i = 1, 2, 3$, da Eq. (2.15), podem ser escritas, usando novamente (2.14), como

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \vec{u}) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u_x \vec{u}) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho u_y \vec{u}) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho u_z \vec{u}) = 0 . \quad (2.18)$$

Combinando esta equação com (2.17), escrevemos

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} \right] = 0 . \quad (2.19)$$

Comparando a equação acima com a equação de Euler para o movimento de um fluido perfeito na dinâmica dos fluidos, a saber

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} \right] = -\nabla p + p \mathcal{X} , \quad (2.20)$$

onde p é a pressão no fluido e \mathcal{X} é a força volumétrica por unidade de massa, podemos ver que (2.19) é simplesmente a equação de Euler na ausência de pressão e de forças externas.

Desta forma, a exigência de que o tensor energia-momento tenha divergência igual a zero é equivalente a exigir a conservação da energia e do momento para o campo de matéria. De fato, (2.15) é por vezes referida como a lei da conservação de energia-momento. Quando consideramos uma métrica não trivial (diferente da métrica de Minkowski), como no caso de espaços curvos, a Eq. (2.15) pode ser generalizada para

$$\nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0 . \quad (2.21)$$

2.2.2 Fluido perfeito e equações de estado

Um fluido perfeito é caracterizado por três quantidades: a quadrivelocidade $u^\mu = dx^\mu/d\tau$, a densidade própria $\rho_0 = \rho_0(x)$ e um campo escalar de pressão $p = p(x)$. No limite quando p tende a zero, o fluido perfeito se reduz a matéria não-interagente. Isto sugere que tomemos o tensor energia-momento para um fluido perfeito da seguinte forma

$$T^{\mu\nu} = \rho_0 u^\mu u^\nu + p S^{\mu\nu} , \quad (2.22)$$

onde $S^{\mu\nu}$ são as componentes de um tensor simétrico. Os únicos tensores simétricos de segunda ordem que podem ser associados com o fluido são $u^\mu u^\nu$ e a métrica $g^{\mu\nu}$. Assim, podemos escrever o tensor $S^{\mu\nu}$, como sendo

$$S^{\mu\nu} = \lambda u^\mu u^\nu + \alpha g^{\mu\nu} , \quad (2.23)$$

onde λ e α são constantes.

Analogamente ao que fizemos na seção anterior, analisemos a lei da conservação $\partial_\nu T^{\mu\nu} = 0$, no espaço plano com coordenadas de Minkovski. Exigimos que a Eq. (2.15) se reduza, no limite apropriado, à equação da continuidade (2.21) e à equação de Euler (2.20) na ausência de forças volumétricas. Esta exigência nos leva a $\lambda = 1$ e $\mu = -1$. Então, a Eq. (2.22) torna-se

$$T^{\mu\nu} = (\rho_0 + p) u^\mu u^\nu - p g^{\mu\nu} , \quad (2.24)$$

Tomamos a Eq. (2.24) como a definição para o tensor energia-momento de um fluido perfeito. Se usarmos a métrica de espaços curvos na relatividade especial, então novamente obtemos a forma covariante (2.21) para a lei de conservação. Na teoria da relatividade geral também obtemos a Eq. (2.24) como definição do tensor energia-momento de um fluido perfeito e a Eq. (2.21) como equação da sua conservação.

Além disso, p e ρ estão relacionados por uma equação de estado que governa um tipo específico de fluido perfeito.

Em geral esta é uma equação da forma $p = p(\rho, T)$, onde T é a temperatura absoluta do fluido. Contudo, vamos nos preocupar apenas com situações onde T é efetivamente constante de modo que a equação de estado se reduz a

$$p = p(\rho) . \quad (2.25)$$

2.3 Campo gravitacional fraco

A descrição da gravitação em termos da curvatura do espaço-tempo pode ser reduzida a da relatividade especial em referenciais inerciais locais [3]. É importante verificar, no entanto, que tal descrição também se reduz à gravitação newtoniana nos limites apropriados.

Na ausência de gravidade, o espaço-tempo tem uma geometria de Minkowski [3]. Assim, um campo gravitacional fraco corresponde a uma região em que o espaço-tempo é apenas “levemente” curvo. Em tal região existem coordenadas x^μ em que a métrica assume a forma

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} , \quad (2.26)$$

onde $|h_{\mu\nu}| \ll 1$. Vamos considerar que no sistema de coordenadas (2.26) a métrica seja estacionária, isto é, todas as derivadas $\partial_0 g_{\mu\nu}$ sejam iguais a zero.

O quadrimomento de uma partícula é definido por $p^\mu \equiv m_0 u^\mu$, onde m_0 é a massa de repouso da partícula com quadrivelocidade $u^\mu = dx^\mu/d\tau$. Da Eq. (2.5) podemos escrever $u^\mu(\nabla_\mu u^\nu) = 0$, e obter a equação da geodésica para uma partícula livre sob a ação da gravidade, a saber

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu{}_{\nu\sigma} \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\sigma}{d\tau} = 0 , \quad (2.27)$$

onde $\Gamma^\mu{}_{\nu\sigma}$ são as componentes da conexão de Cristofell definidas por:

$$\Gamma^\mu{}_{\rho\sigma} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} (\partial_\rho g_{\nu\sigma} + \partial_\sigma g_{\nu\rho} - \partial_\nu g_{\rho\sigma}) . \quad (2.28)$$

Vamos supor que a partícula se mova lentamente, de tal modo que as componentes de sua velocidade satisfaçam $dx^i/dt \ll c$ ($i = 1, 2, 3$). Isto é equivalente a exigir que

$$\frac{dx^i}{d\tau} \ll \frac{dx^0}{d\tau} , \quad (2.29)$$

para $i = 1, 2, 3$ e $x^0 = ct$.

Assim, podemos ignorar os termos de v^i na Eq. (2.27) e obter

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu{}_{00} c^2 \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 = 0 . \quad (2.30)$$

Usando a Eq. (2.28) para o cálculo das componentes da conexão em termos da métrica

e a Eq. (2.26) para $g_{\mu\nu}$, encontramos os coeficientes Γ^μ_{00} , que são dados por

$$\begin{aligned}\Gamma^\mu_{00} &= \frac{1}{2}g^{k\mu} (\partial_0 g_{0k} + \partial_0 g_{0k} - \partial_k g_{00}) \quad \therefore \\ \Gamma^\mu_{00} &= -\frac{1}{2}g^{k\mu} \partial_k g_{00} \quad \therefore \\ \Gamma^\mu_{00} &= -\frac{1}{2}\eta^{k\mu} \partial_k h_{00} ,\end{aligned}\tag{2.31}$$

onde a última igualdade é válida para termos em primeira ordem de $h_{\mu\nu}$.

Assumindo que a métrica seja estacionária, temos

$$\Gamma^0_{00} = 0\tag{2.32}$$

e

$$\Gamma^i_{00} = \frac{1}{2}\delta^{ij} \partial_j h_{00} ,\tag{2.33}$$

onde os índices latinos (i, j, \dots) assumem os valores 1, 2 e 3. Substituindo esses índices na equação da geodésica (2.30) obtemos

$$\frac{d^2 t}{d\tau^2} = 0\tag{2.34}$$

e

$$\frac{d^2 \vec{x}}{d\tau^2} = -\frac{1}{2}c^2 \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 \nabla h_{00} .\tag{2.35}$$

A primeira equação implica que $dt/d\tau = cte$, e, portanto, podemos combinar as Eqs. (2.34) e (2.35) e equações para chegar à seguinte equação de movimento para a partícula:

$$\frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = -\frac{1}{2}c^2 \nabla h_{00} .\tag{2.36}$$

Se compararmos a Eq. (2.36) com a equação de Newton para o movimento de uma partícula no campo gravitacional, Eq. (2.4), veremos que as duas serão idênticas se fizermos a identificação $h_{00} = 2\Phi/c^2$. Assim, nossa descrição da gravitação como curvatura do espaço-tempo, para uma partícula se movendo lentamente, tende à teoria newtoniana se a métrica for, no limite de campo gravitacional fraco, dada por

$$g_{00} = \left(1 + \frac{2\Phi}{c^2}\right) .\tag{2.37}$$

2.4 Equações de Einstein

Assim como as equações de Maxwell regem a forma como os campos elétricos e magnéticos respondem a cargas e correntes, as equações de campo de Einstein regem a forma como o campo gravitacional, representado pela métrica, responde à energia e ao momento.

É necessário encontrar uma equação que substitua a equação de Poisson para o potencial newtoniano

$$\nabla^2\phi = 4\pi G\rho, \quad (2.38)$$

onde $\nabla^2 = \delta^{ij}\partial_i\partial_j$, com $i, j = 1, 2, 3$, é o laplaciano no espaço tridimensional.

No lado esquerdo de (2.38), temos um operador diferencial de segunda ordem atuando em um potencial gravitacional e, no lado direito, a medida da distribuição de massa. Uma generalização relativística de (2.38) deve ter a forma de uma equação tensorial. A generalização tensorial da densidade de massa pode ser o tensor energia-momento $T_{\mu\nu}$ e o potencial gravitacional pode ser substituído pelo tensor métrico. Uma equação relativística que substitua a Eq. (2.38) deve conter derivadas de segunda ordem da métrica e ser proporcional ao tensor $T_{\mu\nu}$, a saber

$$[\nabla^2 g]_{\mu\nu} \propto T_{\mu\nu}. \quad (2.39)$$

No entanto, queremos que ela seja completamente tensorial.

O lado esquerdo dessa equação não é um tensor. É apenas uma notação sugestiva para indicar que gostaríamos de escrever um tensor simétrico de segunda ordem. O operador d'Alembertiano $\square = \nabla^\mu\nabla_\mu$, atuando na métrica $g_{\mu\nu}$, seria nossa primeira escolha, mas isto seria automaticamente igual a zero [5]. O tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$ [5], possui dois índices e é construído com derivadas da métrica, o que nos leva a tentar imaginar que as equações do campo gravitacional sejam

$$R_{\mu\nu} = kT_{\mu\nu}, \quad (2.40)$$

onde k é uma constante. No entanto, existe um problema com a conservação da energia se adotarmos a Eq. (2.40). Sabendo que

$$\nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0, \quad (2.41)$$

pela equação (2.40) teríamos

$$\nabla^\mu R_{\mu\nu} = 0. \quad (2.42)$$

Pórem, uma geometria qualquer isto não é verdade. Pelas identidades de Bianchi [5] podemos ver que

$$\nabla^\mu R_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \nabla_\nu R.$$

Assim, a equação de campo (2.40) implicaria que $R = kg^{\mu\nu}T_{\mu\nu} = kT$. Usando estas expressões em conjunto, teríamos

$$\nabla_\mu T = 0. \quad (2.43)$$

A Eq. (2.43) implica que T é constante em todo o espaço-tempo. Isto não é plausível, uma vez que $T = 0$ no vácuo e na presença de matéria $T \neq 0$. No entanto, há um tensor simétrico, construído a partir do tensor de Ricci, que é conservado: o tensor de Einstein, a saber:

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}, \quad (2.44)$$

que sempre obedece $\nabla^\mu G_{\mu\nu} = 0$. De fato, com base neste raciocínio, Einstein propôs

$$G_{\mu\nu} = kT_{\mu\nu} \quad (2.45)$$

como a equação que descreve a dinâmica do campo gravitacional.

2.5 A solução de Schwarzschild

Nesta seção encontraremos uma solução, com simetria esférica, exata para as equações de campo de Einstein. Vamos considerar uma métrica de um espaço-tempo quadridimensional, esféricamente simétrico e estacionário, representada por meio do seguinte elemento de linha:

$$ds^2 = A(r)dt^2 - B(r)dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2). \quad (2.46)$$

Para mais detalhes indicamos as referências [3, 4].

2.5.1 Soluções das equações de campo no espaço vazio

As funções $A(r)$ e $B(r)$ da métrica na Eq. (2.46) são determinadas pela solução das equações de Einstein. Estamos interessados na geometria do espaço-tempo fora de uma distribuição esférica de massa. Assim, devemos resolver as equações de campo no espaço vazio, que exigem que o tensor de Ricci seja nulo:

$$R_{\mu\nu} = 0 . \quad (2.47)$$

O tensor de Ricci pode ser escrito como

$$R_{\mu\nu} = \partial_\nu \Gamma^\sigma_{\mu\sigma} - \partial_\sigma \Gamma^\sigma_{\mu\nu} + \Gamma^\rho_{\mu\sigma} \Gamma^\sigma_{\rho\nu} - \Gamma^\rho_{\mu\nu} \Gamma^\sigma_{\rho\sigma} . \quad (2.48)$$

Os elementos $g_{\mu\nu}$ e $g^{\mu\nu}$ diferentes de zero são:

$$\begin{aligned} g_{00} &= A(r) ; & g^{00} &= 1/A(r) ; \\ g_{11} &= -B(r) ; & g^{11} &= -1/B(r) ; \\ g_{22} &= r^2 ; & g^{22} &= -1/r^2 ; \\ g_{33} &= -r^2 \text{sen}^2\theta ; & g^{33} &= -1/(r^2 \text{sen}^2\theta) . \end{aligned} \quad (2.49)$$

Substituindo as componentes da métrica na expressão (2.28) encontramos apenas nove coeficientes da conexão não nulos independentes

$$\begin{aligned} \Gamma^0_{01} &= A'/(2A) ; & \Gamma^1_{00} &= A'/(2B) ; & \Gamma^1_{11} &= B'/(2B) ; \\ \Gamma^1_{22} &= -r/B ; & \Gamma^1_{33} &= -r^2 \text{sen}^2\theta/B ; & \Gamma^2_{12} &= 1/r ; \\ \Gamma^2_{33} &= -\text{sen}\theta \cos\theta ; & \Gamma^3_{13} &= 1/r ; & \Gamma^3_{23} &= \cot g\theta . \end{aligned} \quad (2.50)$$

Agora, iremos substituir estes coeficientes na expressão (2.48), a fim de obter as componentes $R_{\mu\nu}$ do tensor de Ricci. Pode-se verificar que as componentes de $R_{\mu\nu}$ para $\mu \neq \nu$, para este problema específico, são iguais a zero. Já as componentes da diagonal são dadas por

$$R_{00} = -\frac{A''}{2B} + \frac{A'}{4B} \left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) - \frac{A'}{rB} , \quad (2.51)$$

$$R_{11} = \frac{A''}{2A} - \frac{A'}{4A} \left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) , \quad (2.52)$$

$$R_{22} = \frac{1}{B} - \frac{r}{2B} \left(\frac{A'}{A} - \frac{B'}{B} \right) , \quad (2.53)$$

$$R_{33} = R_{22} \text{sen}^2\theta . \quad (2.54)$$

As equações de campo no espaço vazio, (2.47), são obtidas fazendo cada uma das expressões (2.51)-(2.54) igual a zero. Multiplicando (2.51) por B/A , somando a (2.52) e rearranjando os termos, obtemos

$$A'B + AB' = 0 , \quad (2.55)$$

o que implica que $AB = cte$. Vamos usar α para representar essa constante. Substituindo $B = \alpha/A$ em (2.53) obtemos $A + rA' = \alpha$, que pode ser escrita como

$$\alpha = \frac{d(rA)}{dr} . \quad (2.56)$$

Integrando esta equação obtemos $rA = \alpha(r + k)$, onde k é uma constante de integração. Assim $A(r)$ e $B(r)$ podem ser escritos como

$$\begin{aligned} A(r) &= \alpha \left(1 + \frac{k}{r} \right) , \\ B(r) &= \left(1 + \frac{k}{r} \right)^{-1} . \end{aligned} \quad (2.57)$$

Vamos então usar apenas as Eqs. (2.51) e (2.52) para encontrar as soluções de A e B . Note que é simples verificar que estas formas para A e B são satisfeitas separadamente. Como veremos a seguir, a constante de integração k deve representar a massa do objeto que produz o campo gravitacional. Podemos identificar k (e α) considerando o limite de campo fraco, discutido na seção 2.3 desta dissertação, em que é necessário termos

$$\frac{A(r)}{c^2} \rightarrow 1 + \frac{2\Phi}{c^2} , \quad (2.58)$$

onde Φ é o potencial gravitacional newtoniano [ver Eqs.(2.37) e (2.46)]. Além disso, no limite de campo fraco, r pode ser identificado como a distância radial. Para uma massa esfericamente simétrica M temos, assim, $\Phi = -GM/r$, e concluímos que $k = -2GM/c^2$ e $\alpha = c^2$. Portanto, a métrica de Schwarzschild para o espaço-tempo fora de um corpo esférico de massa M é

$$ds^2 = c^2 \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 . \quad (2.59)$$

Em coordenadas isotrópicas este elemento de linha é representado por

$$ds^2 = \frac{[1 - M/(2r)]^2}{[1 + M/(2r)]^2} c^2 dt^2 - \left(1 + \frac{M}{2r} \right)^4 (dr^2 + r^2 d\Omega^2) . \quad (2.60)$$

onde $d\Omega$ é o elemento de ângulo sólido. Esta última equação será demonstrada no capítulo 5 desta dissertação.

Capítulo 3

A teoria de Kaluza-Klein e a métrica solitônica

No final do século XIX e início do século XX acontecimentos importantes na Física aceleraram a procura por uma teoria de unificação de todas as forças da natureza [6]. Primeiramente, em 1864, James Clerk Maxwell unificou eletricidade e magnetismo em um único conjunto de equações, tornando também plausível que o eletromagnetismo e a relatividade pudessem ser representados por uma teoria unificada. Em 1908, Hermann Minkowski introduziu o conceito de espaço-tempo quadridimensional que estabeleceu uma unidade ainda maior com a teoria eletromagnética. Finalmente, em 1915, Albert Einstein deu uma interpretação geométrica para a gravitação.

Em 1914, o físico Gunnar Nordström propôs uma extensão pentadimensional das equações de Maxwell que englobava a gravitação [6]. Quando Einstein publicou sua teoria gravitacional em sua forma covariante, a teoria de Nordström, um modelo escalar, tornou-se obsoleta. Em 1918, Nordström se dedicou ao estudo da teoria da relatividade geral e contribuiu com a famosa solução, para o buraco negro carregado, conhecida como “solução de Reissner-Nordström” [6].

Soluções para as equações de campo no vácuo, em cinco dimensões, com simetria esférica, no espaço tridimensional, têm sido estudadas extensivamente [7].

3.1 A teoria de Kaluza

Um modelo famoso de unificação pentadimensional, mais compatível com a relatividade geral, foi concebido pelo matemático Theodor Kaluza em 1919 [6].

Nesta seção vamos obter o escalar de curvatura \hat{R} em cinco dimensões, no contexto da Teoria de Kaluza. Os termos com chapéu, como \hat{R} , estão relacionados ao espaço-tempo pentadimensional.

Kaluza iniciou com o tensor métrico $g_{\mu\nu}$ (com 16 componentes, 10 das quais independentes) e o estendeu para uma matriz pentadimensional (com 25 componentes, 15 das quais independentes). Ele identificou as componentes extras \hat{g}_{40} , \hat{g}_{41} , \hat{g}_{42} e \hat{g}_{43} como o quadripotencial eletromagnético A_μ . O termo escalar \hat{g}_{44} não possuía um significado muito claro [6]. Kaluza adotou como métrica para o espaço-tempo pentadimensional a matriz

$$\hat{g}_{\hat{\mu}\hat{\nu}}(\hat{x}) = \begin{pmatrix} g_{\mu\nu} + kA_\mu A_\nu & kA_\mu \\ kA_\nu & k \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

e o elemento de linha

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + k (A_\mu dx^\mu + dx^4)^2. \quad (3.2)$$

Note-se que aqui, os índices gregos (μ, ν, \dots) assumem os valores 0, 1, 2, e 3; e os índices gregos com chapéu ($\hat{\mu}, \hat{\nu}, \dots$) assumem os valores 0, 1, 2, 3, e 4.

O determinante da métrica de Kaluza é

$$\hat{g} = kg. \quad (3.3)$$

A ação de Einstein-Hilbert em cinco dimensões

$$\hat{S} = \int d^5x \sqrt{-\hat{g}(x)} \hat{R}(x) \quad (3.4)$$

é reduzida a

$$S = \int d^4x \sqrt{-\hat{g}(x)} \hat{R}(x). \quad (3.5)$$

Escrevendo

$$\hat{R}_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = \begin{pmatrix} \hat{R}_{\mu\nu} & \hat{R}_{\mu 4} \\ \hat{R}_{4\nu} & \hat{R}_{44} \end{pmatrix}, \quad (3.6)$$

com $\hat{R}_{\mu 4} = \hat{R}_{4\mu}$. Podemos calcular $\hat{g}^{\hat{\mu}\hat{\nu}}\hat{R}_{\hat{\nu}\hat{\alpha}}$

$$\hat{g}^{\hat{\mu}\hat{\nu}}\hat{R}_{\hat{\nu}\hat{\alpha}} = \begin{pmatrix} g^{\mu\nu}\hat{R}_{\nu\alpha} - g^{\mu\nu}A_\nu\hat{R}_{4\alpha} & g^{\mu\nu}\hat{R}_{\nu 4} - g^{\mu\nu}A_\nu\hat{R}_{44} \\ -g^{\mu\nu}A_\mu\hat{R}_{\nu\alpha} + (k^{-1} + g^{\mu\nu}A_\mu A_\nu)\hat{R}_{4\alpha} & -g^{\mu\nu}A_\mu\hat{R}_{\nu 4} + (k^{-1} + g^{\mu\nu}A_\mu A_\nu)\hat{R}_{44} \end{pmatrix},$$

para em seguida encontrarmos o escalar de Ricci $\hat{R} = \hat{g}^{\hat{\mu}\hat{\nu}}\hat{R}_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$:

$$\hat{R} = g^{\mu\nu}\hat{R}_{\mu\nu} - g^{\mu\nu}A_\nu\hat{R}_{4\mu} - g^{\mu\nu}A_\mu\hat{R}_{\nu 4} + (k^{-1} + g^{\mu\nu}A_\mu A_\nu)\hat{R}_{44}. \quad (3.7)$$

Considerando $\hat{g}_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = g_{\mu\nu} + kA_\mu A_\nu$, encontramos

$$\begin{aligned} \hat{\Gamma}_{\hat{\mu}\hat{\nu}}^\lambda &= \Gamma_{\mu\nu}^\lambda + \frac{1}{2}k[A_\mu F_\nu^\lambda + A_\nu F_\mu^\lambda], \\ \hat{\Gamma}_{\hat{\mu}\hat{\lambda}}^\lambda &= \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda + \frac{1}{2}kA_\lambda F_\mu^\lambda, \\ \hat{\Gamma}_{\mu 4}^4 &= 0, \\ \hat{\Gamma}_{44}^\lambda &= \Gamma_{44}^\lambda = \hat{\Gamma}_{4\lambda}^\lambda = 0, \\ \hat{\Gamma}_{\hat{\mu} 4}^\lambda &= \frac{1}{2}kF_\mu^\lambda, \\ \hat{\Gamma}_{\hat{\lambda} 4}^\lambda &= 0, \\ \hat{\Gamma}_{\hat{\mu}\hat{\nu}}^4 &= \frac{1}{2}(\nabla_\nu A_\mu + \nabla_\mu A_\nu) - \frac{1}{2}kA_\lambda(A_\mu F_\nu^\lambda + A_\nu F_\mu^\lambda), \end{aligned}$$

onde $F_{\alpha\beta} \equiv \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha$. Feito isso, podemos calcular os termos do tensor de Ricci. A expressão do tensor de Ricci pentadimensional é

$$\hat{R}_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = \partial_{\hat{\nu}}\hat{\Gamma}_{\hat{\mu}\hat{\alpha}}^{\hat{\alpha}} - \partial_{\hat{\alpha}}\hat{\Gamma}_{\hat{\mu}\hat{\nu}}^{\hat{\alpha}} + \hat{\Gamma}_{\hat{\rho}\hat{\nu}}^{\hat{\alpha}}\hat{\Gamma}_{\hat{\mu}\hat{\alpha}}^{\hat{\rho}} - \hat{\Gamma}_{\hat{\rho}\hat{\alpha}}^{\hat{\alpha}}\hat{\Gamma}_{\hat{\mu}\hat{\nu}}^{\hat{\rho}}, \quad (3.8)$$

a partir da qual obtemos

$$\begin{aligned} \hat{R}_{\nu 4} &= \partial_4\hat{\Gamma}_{\nu\alpha}^\alpha - \partial_\alpha\hat{\Gamma}_{\nu 4}^\alpha + \hat{\Gamma}_{\rho 4}^\alpha\hat{\Gamma}_{\nu\alpha}^\rho - \hat{\Gamma}_{\rho\alpha}^\alpha\hat{\Gamma}_{\nu 4}^\rho \quad \therefore \\ \hat{R}_{\nu 4} &= -\partial_\alpha\left(\frac{1}{2}kF_\nu^\alpha\right) + \left(\Gamma_{\rho\alpha}^\alpha + \frac{1}{2}kA_\alpha F_\rho^\alpha\right)\frac{1}{2}kF_\nu^\rho - \frac{1}{2}kF_\rho^\alpha\left[\Gamma_{\nu\alpha}^\rho + \frac{1}{2}k(A_\nu F_\alpha^\rho + A_\alpha F_\nu^\rho)\right] \quad \therefore \\ \hat{R}_{\nu 4} &= -\frac{1}{2}k\nabla_\alpha F_\nu^\alpha - \frac{1}{4}k^2 A_\nu F_\rho^\alpha F_\alpha^\rho, \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$\hat{R}_{4\mu} = -\frac{1}{2}k\nabla_\alpha F_\mu^\alpha - \frac{1}{4}k^2 A_\mu F_\rho^\alpha F_\alpha^\rho, \quad (3.10)$$

e

$$\hat{R}_{44} = -\frac{1}{4}k^2 F_{\alpha\rho} F^{\alpha\rho}. \quad (3.11)$$

Assim, obtemos

$$\begin{aligned} \hat{R}_{\mu\nu} &= R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}k (A_\mu \nabla_\lambda F_\nu^\lambda + A_\nu \nabla_\lambda F_\mu^\lambda) \\ &+ \frac{1}{4}k (F_\nu^\lambda F_{\lambda\mu} + F_\mu^\lambda F_{\lambda\nu}) - \frac{1}{4}k^2 A_\mu A_\nu F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Com as devidas substituições é possível chegar ao escalar de curvatura de Ricci em 5 dimensões, a saber:

$$\hat{R} = R + \frac{1}{4}k F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}. \quad (3.13)$$

3.2 A teoria de Kaluza-Klein

Oskar Klein forneceu uma explicação para o fato de a dimensão extra não poder ser observada. Sua hipótese era que a quinta dimensão fosse compacta e curvada em um círculo extremamente pequeno com raio aproximadamente $10^{-33}m$, próximo à escala de Planck (ver Fig. 3.1).

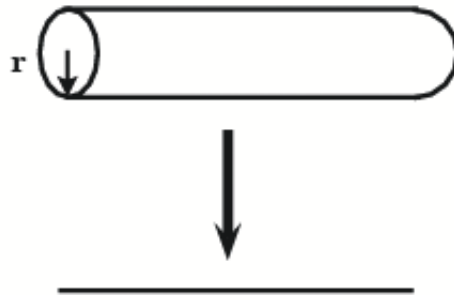


Figura 3.1: O raio da dimensão extra é da ordem da escala de Planck.

A ideia de que as quantidades físicas não dependeriam das dimensões extras (conforme sugerido por Kaluza) foi considerada inadequada por Klein, que postulou a ideia de que a dependência deveria existir, mas ela seria condicionada à existência de uma dimensão extra extremamente pequena.

Klein assumiu que a quinta coordenada deveria ter escala de comprimento e possuiria duas propriedades principais: (1) topologia circular (S^1) e (2) tamanho pequeno. Sob a propriedade (1), qualquer quantidade $f(x, y)$, onde $x = (x^0, x^1, x^2, x^3)$ e $y = x^4$, se tornaria periódica, tal que $f(x, y) = f(x, y + 2\pi r)$ onde r é o raio da quinta dimensão (ou parâmetro de escala da quinta dimensão). Assim, todos os campos são expandidos em séries de Fourier:

$$\begin{aligned} g_{\alpha\beta}(x, y) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} g_{\alpha\beta}^{(m)}(x) e^{imy/r} , \\ A_{\alpha}(x, y) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_{\alpha}^{(m)}(x) e^{imy/r} , \\ \phi(x, y) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \phi^{(m)} e^{imy/r} , \end{aligned} \tag{3.14}$$

onde (m) se refere ao m -ésimo modo de Fourier. De acordo com a teoria quântica, estes modos possuem momento na direção de y da ordem de $|m|/r$. Aqui entra a propriedade (2): se r é suficientemente pequeno, então os momentos na direção y serão tão grandes que estarão fora da detecção de qualquer experimento, para qualquer $m \neq 0$. Apenas os modos em que $m = 0$, os quais são independentes de y , serão observáveis, conforme exige a teoria de Kaluza.

Mesmo que a teoria de Kaluza-Klein tenha unificado geometricamente a gravidade e o eletromagnetismo, estas soluções podem ser aplicadas de diferentes maneiras na gravidade e em física de partículas. Assim, tais soluções, foram interpretadas como monopolos magnéticos [8], buracos negros [9] e sólitons [10].

3.3 A métrica solitônica e o limite de campo fraco

Uma importante classe de soluções na teoria de Kaluza-Klein são fornecidas por métricas que são estáticas, esfericamente simétricas e satisfazem as equações de Einstein pentadimensionais no espaço vazio [10]. Usando coordenadas isotrópicas, o elemento de linha correspon-

dente pode ser escrito como [9]

$$ds^2 = A^2(r)c^2dt^2 + B^2(r)(dr^2 + r^2d\Omega^2) + C^2(r)d\psi^2. \quad (3.15)$$

Os coeficientes $A(r)$, $B(r)$ e $C(r)$, determinados a partir da solução das equações de campo de Einstein, são dados por

$$\begin{aligned} A(r) &= \left(\frac{ar - 1}{ar + 1} \right)^{\varepsilon k}, \\ B(r) &= \left(1 - \frac{1}{a^2r^2} \right) \left(\frac{ar + 1}{ar - 1} \right)^{\varepsilon(k-1)}, \\ C(r) &= \left(\frac{ar + 1}{ar - 1} \right)^{\varepsilon}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

De acordo com [1] obtemos o seguinte elemento de linha

$$\begin{aligned} ds^2 &= \left(\frac{ar_3 - 1}{ar_3 + 1} \right)^{2\varepsilon k} c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{1}{a^2r_3^2} \right)^2 \left(\frac{ar_3 + 1}{ar_3 - 1} \right)^{2\varepsilon(k-1)} (dr_3^2 + r_3^2 d\Omega^2) \\ &\quad - \left(\frac{ar_3 + 1}{ar_3 - 1} \right)^{2\varepsilon} d\xi^2, \end{aligned} \quad (3.17)$$

onde a , ε e k são constantes e os parâmetros ε e k satisfazem a condição

$$\varepsilon^2(k^2 - k + 1) = 1.$$

Esta solução é conhecida na literatura como solução solitônica. Estas soluções ($R_{AB} = 0$) em 5 dimensões contêm as soluções das equações de Einstein ($R_{\alpha\beta} = 8\pi T_{\alpha\beta}$) em 4 dimensões na presença de matéria.

Soluções localizadas de energia finita podem legitimamente ser chamadas “sólitons” no mesmo sentido usado em outras partes da Física.

No limite de campo fraco $1/(ar_3) \ll 1$, obtemos para os coeficientes da métrica (3.17) as seguintes fórmulas:

$$\begin{aligned} B(r_3) &\approx -1 - \frac{4\varepsilon(k-1)}{ar_3}, \\ C(r_3) &\approx -1 - \frac{4\varepsilon}{ar_3}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Vamos agora comparar essas expressões (3.18) com os coeficientes assintóticos da métrica da Ref. [11], na qual o elemento de linha da massa pontual, no limite de campo fraco, em

um espaço-tempo $(1 + D)$ -dimensional com dimensões extras toroidais é dado por

$$\begin{aligned}
ds^2 &\approx \left(1 - \frac{r_g}{r_3} + \frac{r_g^2}{2r_3^2}\right) c^2 dt^2 - \left(1 + \frac{1}{(D-2)} \frac{r_g}{r_3}\right) (dr_3^2 + r_3^2 d\Omega_2^2) \\
&- \left(1 + \frac{1}{(D-2)} \frac{r_g}{r_3}\right) \sum_{i=1}^N ds_i^2,
\end{aligned} \tag{3.19}$$

onde $r_g = 2G_N m/c^2$, e G_N é a constante gravitacional de Newton. Fazendo esta comparação, obtemos

$$\begin{aligned}
A(r_3) &\approx 1 - \frac{r_g}{r_3} + \frac{r_g^2}{2r_3^2}, \\
B(r_3) &\approx -1 - \frac{r_g}{2r_3}, \\
C(r_3) &\approx -1 - \frac{r_g}{2r_3}.
\end{aligned} \tag{3.20}$$

A métrica escrita com esses coeficientes fornece o comportamento assintótico correto no caso de uma fonte cuja representação matemática pode ser expressa por uma delta de Dirac. É a solução exata das equações de Einstein para a massa gravitacional em repouso uniformemente espalhada sobre a dimensão extra [1].

Capítulo 4

Métrica solitônica generalizada

Neste capítulo, generalizamos a métrica solitônica, apresentada no capítulo anterior, conforme a Ref. [12]. Encontramos as soluções de campo de Einstein nesse espaço-tempo para uma massa puntual no limite de campo fraco. Em seguida, encontramos as equações de estado para essa situação.

4.1 A métrica solitônica generalizada

Neste trabalho, optamos por uma forma mais geral para os sólitons, como na Ref. [12], onde as dimensões extras estão contidas em N subespaços toroidais, de acordo com a expressão

$$ds^2 = \tilde{A}^2(r_3)c^2 dt^2 + \tilde{B}^2(r_3)(dr_3^2 + r_3^2 d\Omega_2^2) + \sum_{i=1}^N \tilde{C}_{(i)}^2(r_3) ds_{(i)}^2, \quad (4.1)$$

onde $d\Omega_2^2$ é o elemento de ângulo sólido bidimensional e

$$ds_{(i)}^2 = \sum_{a,b=1}^{d_{(i)}} \delta_{ab}(x_{(i)}) dx_{(i)}^a dx_{(i)}^b, \quad d_{(i)} \geq 1, \quad (4.2)$$

com o índice i denotando as dimensões internas ou dimensões extras.

Note-se que N é o número de subespaços toroidais e d_i é a i -ésima dimensão do i -ésimo subespaço. Quando $N = 1$ e $d_i = 1$ a métrica solitônica (4.1) é reduzida a (3.15).

Considerando

$$V = \prod_{i=1}^N [C_{(i)}]^{d_i}, \quad (4.3)$$

as equações de campo de Einstein no vácuo tornam-se

$$\frac{\tilde{A}''}{\tilde{A}'} + \frac{\tilde{B}'}{\tilde{B}} + \frac{2}{r_3} + \frac{V'}{V} = 0, \quad (4.4)$$

$$\frac{\tilde{A}''}{\tilde{A}} + 2\frac{\tilde{B}''}{\tilde{B}} + \frac{\tilde{B}'}{\tilde{B}} \left(\frac{2}{r_3} - \frac{\tilde{A}'}{\tilde{A}} - 2\frac{\tilde{B}'}{\tilde{B}} \right) - \frac{\tilde{B}'V'}{\tilde{B}V} + \sum_{i=1}^N \frac{d_i \tilde{C}_i''}{\tilde{C}_i} = 0, \quad (4.5)$$

$$\frac{\tilde{B}''}{\tilde{B}} + \frac{\tilde{B}'}{\tilde{B}} \left(\frac{3}{r_3} + \frac{\tilde{A}'}{\tilde{A}} \right) + \frac{\tilde{A}'}{r_3 \tilde{A}} + \frac{V'}{V} \left(\frac{\tilde{B}'}{\tilde{B}} + \frac{1}{r_3} \right) = 0, \quad (4.6)$$

$$\frac{\tilde{A}'}{\tilde{A}} + \frac{\tilde{B}'}{\tilde{B}} + \frac{2}{r_3} + \frac{V'}{V} + \left(\frac{\tilde{C}_i''}{\tilde{C}_i'} - \frac{\tilde{C}_i'}{\tilde{C}_i} \right) = 0, \quad (4.7)$$

onde $'$ denota a derivação em relação a r_3 .

Combinando a Eq. (4.4) com a Eq. (4.7), obtemos $\tilde{C}_i'/\tilde{C}_i = -\gamma_i \tilde{A}'/\tilde{A}$, onde γ_i é uma constante de integração. Assim, $\tilde{C}_i \propto \tilde{A}^{-\gamma_i}$ e $V'/V = -\tau \tilde{A}'/\tilde{A}$, onde

$$\tau = \sum_{i=1}^N d_i \gamma_i. \quad (4.8)$$

Portanto,

$$V = V_0 \tilde{A}^{-\tau}, \quad (4.9)$$

onde V_0 é uma constante de integração. A partir das Eqs. (4.9) e (4.4), segue-se que $\tilde{B} \propto \tilde{A}^\tau \tilde{A}'/r_3$. Substituindo essas expressões na Eq. (4.6), obtemos uma equação para \tilde{A} , cuja solução é

$$\tilde{A}(r_3) = \left(\frac{ar_3 - 1}{ar_3 + 1} \right)^\theta, \quad (4.10)$$

onde a e θ são constantes de integração. A partir de agora assumimos que $a \neq 0$ e $\theta \neq 0$.

Conseqüentemente, as demais funções métricas serão dadas por

$$\tilde{B}(r_3) = \left(1 - \frac{1}{a^2 r_3^2} \right) \left(\frac{ar_3 + 1}{ar_3 - 1} \right)^{\theta(1-\omega)}, \quad (4.11)$$

e

$$\tilde{C}_{(i)}(r_3) = \left(\frac{ar_3 + 1}{ar_3 - 1} \right)^{\theta \gamma_{(i)}}. \quad (4.12)$$

Finalmente, a fim de satisfazer a Eq. (4.5), as constantes de integração θ e γ_i devem obedecer a relação

$$\theta^2 [(\tau - 1)^2 + (\sigma + 1)] = 2, \quad (4.13)$$

onde

$$\sigma \equiv \sum_{i=1}^N d_i \gamma_i^2. \quad (4.14)$$

Desta maneira, o elemento de linha (4.1) pode ser reescrito como

$$ds^2 = \left(\frac{ar_3 - 1}{ar_3 + 1} \right)^{2\theta} c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{1}{a^2 r_3^2} \right)^2 \left(\frac{ar_3 + 1}{ar_3 - 1} \right)^{2\theta(1-\tau)} (dr_3^2 + r_3^2 d\Omega_2^2) - \sum_{i=1}^N \left(\frac{ar_3 + 1}{ar_3 - 1} \right)^{2\theta\gamma_i} ds_i^2, \quad (4.15)$$

onde $ds_i^2 = \sum_{j=1}^{d_i} d\xi_{(i)j}^2$ é o elemento de linha do toro d_i -dimensional.

Na literatura, uma parametrização diferente, em termos dos parâmetros k e ε , é comumente usada quando $N = 1$ no espaço interno (ver Ref. [9]). A relação entre essas parametrizações é a seguinte: $\theta = \varepsilon k$ e $\gamma_1 \equiv \gamma = 1/k$. Assim, $\theta\gamma = \varepsilon$ e $\theta(1 - \tau) = \varepsilon(k - d)$, onde $d \equiv d_1$. Note-se que a métrica (4.15) recai em (3.17) quando $N = 1$ e $d = 1$.

No limite de campo fraco, i.e., $1/(ar_3) \ll 1$, os coeficientes da métrica na Eq. (4.1), representados na forma da Eq. (4.15) são dados por

$$A(r_3) \approx 1 - \frac{4\theta}{ar_3} + \frac{16\theta^2}{a^2} \frac{1}{2r_3^2}, \quad (4.16)$$

$$B(r_3) \approx -1 - \frac{4\theta(1 - \tau)}{ar_3}, \quad (4.17)$$

$$C_i(r_3) \approx -1 - \frac{4\theta\gamma_i}{ar_3}. \quad (4.18)$$

Estas expansões irão nos ajudar a definir propriedades importantes das soluções solitônicas (4.1), como por exemplo, as restrições observacionais nos parâmetros dos sólitons e equações de estado para a fonte de matéria. Estas equações serão úteis para estudar o caso em que uma massa m em repouso é escolhida como fonte de matéria.

A comparação dos coeficientes da métrica nas Eqs. (4.15)-(4.18), com os coeficientes correspondentes da métrica na Eq. (3.19), mostra que para a massa puntual temos

$$\frac{4\theta}{a} = r_g, \quad (4.19)$$

de onde segue que *senal* $a = \text{senal } \theta$. Como a solução (4.15) é invariante sob a escolha $a \rightarrow -a$, $\theta \rightarrow -\theta$, podemos escolher $a, \theta > 0$. O parâmetro γ_i deve ter o mesmo valor para todo o espaço interno. Uma expressão para γ_i é encontrada comparando a Eq. (4.18) com a Eq. (3.19) e substituindo r_g dado em (4.19), a saber:

$$\gamma_1 = \gamma_2 = \dots = \gamma_N = \frac{1}{1 + D'} , \quad (4.20)$$

onde $D' = \sum_{i=1}^N d_i = D - 3$ é o número total de dimensões extras. A condição (4.13) pode ser escrita como $\theta^2 S = 2$, onde $S = \tau^2 - 2\tau + \sigma + 2$, $\tau = D'/(1 + D')$ e $\sigma = D'/(1 + D')^2$. Assim, $S = (2 + D')/(1 + D')$, o que nos leva ao seguinte valor de θ :

$$\theta = \sqrt{\frac{2(1 + D')}{(2 + D')}} . \quad (4.21)$$

A partir da Eq. (4.19), e com o auxílio da Eq. (4.21), obtemos a seguinte expressão para a :

$$a = \frac{4}{r_g} \sqrt{\frac{2(1 + D')}{(2 + D')}} . \quad (4.22)$$

Portanto, as Eqs. (4.19)-(4.22) definem completamente a massa puntual solitônica, isto é, uma solução tipo delta, onde T_{00} é a única componente não nula do tensor energia momento. Para demonstrarmos isto iremos, no próximo capítulo, encontrar as equações gerais de estado para a solução solitônica (4.15).

4.2 Aproximação de campo gravitacional fraco

Tomando como base a Ref. [11], consideremos a forma geral da métrica multidimensional, a saber:

$$ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k = g_{00} (dx^0)^2 + 2g_{0\alpha} dx^0 dx^\alpha + g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta , \quad (4.23)$$

onde os índices latinos podem assumir os valores $i, k = 0, 1, \dots, D$ e os índices gregos podem assumir os valores $\alpha, \beta = 1, \dots, D$, e D é o número total de dimensões espaciais. Assumimos que na ausência de fontes de matéria o espaço-tempo é minkowskiano, para o qual os coeficientes da métrica são $g_{00} = \eta_{00} = 1$, $g_{0\alpha} = \eta_{0\alpha} = 0$, $g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} = -\delta_{\alpha\beta}$. As dimensões

extras têm a topologia de um toro. Na presença de matéria a métrica não é minkowskiana e será investigada no limite de campo fraco. Como o próprio nome sugere, o campo gravitacional é fraco e as velocidades dos corpos teste são pequenas comparadas à velocidade da luz no vácuo c . Neste caso, a métrica será basicamente a de uma pequena perturbação ao espaço-tempo plano, isto é:

$$g_{ik} \approx \eta_{ik} + h_{ik} , \quad (4.24)$$

onde h_{ik} são perturbações até a ordem de $1/c^2$. Em particular, $h_{00} \equiv 2\varphi/c^2$, onde φ é o potencial gravitacional não-relativístico. Para obter as perturbações dos termos até a ordem de $1/c^2$, é necessário considerar a equação de Einstein multidimensional

$$R_{ik} = \frac{2S_D \tilde{G}_D}{c^4} \left(T_{ik} - \frac{1}{D-1} g_{ik} T \right) , \quad (4.25)$$

onde $S_D = 2\pi^{D/2}/\Gamma(D/2)$ é o ângulo sólido total, e \tilde{G}_D é a constante gravitacional no espaço-tempo ($\mathcal{D} = D + 1$)-dimensional.

Agora vamos investigar o limite de campo fraco, para o campo gravitacional gerado pelo movimento de N massas pontuais. O tensor energia-momento, neste caso, é dado por

$$T^{ik} = \sum_{p=1}^N m_p \left[(-1)^D g \right]^{-1/2} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^k}{dt} \frac{cdt}{ds} \delta(r - r_p) , \quad (4.26)$$

onde m_p é a massa de repouso e r_p é o raio que localiza a p -ésima partícula em relação à origem. Todos os raios r e r_p são D -dimensionais, isto é, $r = (x^1, x^2, \dots, x^D)$, onde x^α são coordenadas da métrica de (4.23). A massa de repouso possui densidade

$$\rho \equiv \sum_{p=1}^N m_p \delta(r - r_p). \quad (4.27)$$

4.3 Cálculo perturbativo do tensor de Ricci na aproximação de campo gravitacional fraco

As componentes do tensor energia-momento que figura na Eq. (4.25), na aproximação de campo fraco, podem ser escritas como

$$T_{00} \approx \rho c^2 , T_{0\alpha} \approx 0 , T_{\alpha\beta} \approx 0 \quad \Rightarrow \quad T = T_i^i \approx \rho c^2 . \quad (4.28)$$

As componentes dos tensores de Riemann e de Ricci são

$$\begin{aligned} R^i{}_{klm} &= \partial_l \Gamma^i{}_{km} - \partial_m \Gamma^i{}_{kl} + \Gamma^n{}_{km} \Gamma^i{}_{nl} - \Gamma^n{}_{kl} \Gamma^i{}_{nm} , \\ R_{km} &= g^{il} R_{iklm} . \end{aligned} \quad (4.29)$$

Levando em conta que h_{ik} são da ordem de $1/c^2$ e escrevendo até a mesma ordem obtemos, respectivamente:

$$R_{iklm} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 h_{im}}{\partial x^k \partial x^l} + \frac{\partial^2 h_{kl}}{\partial x^i \partial x^m} - \frac{\partial^2 h_{il}}{\partial x^k \partial x^m} - \frac{\partial^2 h_{km}}{\partial x^i \partial x^l} \right) , \quad (4.30)$$

$$\begin{aligned} R_{km} &\approx \frac{1}{2} \eta^{il} \left(\frac{\partial^2 h_{im}}{\partial x^k \partial x^l} + \frac{\partial^2 h_{kl}}{\partial x^i \partial x^m} - \frac{\partial^2 h_{il}}{\partial x^k \partial x^m} - \frac{\partial^2 h_{km}}{\partial x^i \partial x^l} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 h_m^l}{\partial x^k \partial x^l} + \frac{\partial^2 h_k^l}{\partial x^m \partial x^l} - \frac{\partial^2 h_l^l}{\partial x^k \partial x^m} - \eta^{il} \frac{\partial^2 h_{km}}{\partial x^i \partial x^l} \right) , \end{aligned} \quad (4.31)$$

onde $h_k^i \equiv \eta^{im} h_{mk}$. Com a ajuda do calibre [11]

$$\frac{\partial}{\partial x^k} \left(h_i^k - \frac{1}{2} h_l^l \delta_i^k \right) = 0 , \quad (4.32)$$

a Eq. (4.31) pode ser escrita da seguinte forma

$$R_{km} \approx -\frac{1}{2} \eta^{il} \frac{\partial^2 h_{km}}{\partial x^i \partial x^l} . \quad (4.33)$$

Levando em consideração que as derivadas em relação a $x^0 = ct$ são muito menores que as derivadas em relação a x^α , obtemos, da Eq. (4.33), que

$$\begin{aligned} R_{00} &\approx \frac{1}{2} \Delta h_{00} , \\ R_{0\alpha} &\approx \frac{1}{2} \Delta h_{0\alpha} , \\ R_{\alpha\beta} &\approx \frac{1}{2} \Delta h_{\alpha\beta} , \end{aligned} \quad (4.34)$$

onde $\Delta = \delta^{\alpha\beta} \partial^2 / \partial x^\alpha \partial x^\beta$ é o laplaciano D-dimensional.

Na próxima seção, com ajuda dos resultados acima, encontraremos as equações de estado no limite de campo fraco para uma massa puntual solitônica que obedece a métrica de (4.15).

4.4 Equações de estado. Caso geral no limite de campo fraco

Para descrevermos a massa puntual solitônica iremos agora encontrar as equações de estado. Para isto, representaremos os coeficientes (4.16)-(4.18) da métrica em termos do raio gravitacional de Newton $r_g = 2G_N m/c^2$. Com estes coeficientes podemos obter as perturbações da métrica até os termos da ordem de $1/c^2$. Isto nos dá a possibilidade, com a ajuda da Eq. (4.33), de encontrar as componentes R_{00} e $R_{\alpha\alpha}$ do tensor de Ricci da parte espacial tridimensional e das componentes $R_{\mu_i\mu_i}$, referentes aos coeficientes $C_i(r_3)$ das dimensões extras, e assim chegar às componentes do tensor energia-momento caracterizando a massa puntual solitônica.

É válido notar que, na Eq. (4.15), a dependência dos coeficientes da métrica apenas em r_3 significa que a fonte de matéria está uniformemente distribuída sobre as dimensões extras [13, 14]. Desta forma, o potencial gravitacional não relativístico depende apenas de r_3 e coincide exatamente com o potencial newtoniano. Observando que a função $A(r_3)$ é o coeficiente g_{00} , obtemos $4\theta/a = r_g = 2G_N m/c^2$ e as expansões (4.16)-(4.18) podem ser reescritas como

$$A(r_3) \approx 1 - \frac{r_g}{r_3} + \frac{1}{2} \frac{r_g^2}{r_3^2}, \quad (4.35)$$

$$B(r_3) \approx -1 - (1 - \tau) \frac{r_g}{r_3}, \quad (4.36)$$

$$C_i(r_3) \approx -1 - \gamma_i \frac{r_g}{r_3}. \quad (4.37)$$

As perturbações h_{00} , $h_{\alpha\alpha}$ e $h_{\mu_i\mu_i}$ são obtidas de $g_{00} \approx 1 + h_{00}$, $g_{\alpha\alpha} \approx -1 + h_{\alpha\alpha}$ e $g_{\mu_i\mu_i} \approx -1 + h_{\mu_i\mu_i}$ até a ordem de $1/c^2$, como sendo

$$h_{00} = -\frac{r_g}{r_3}, \quad (4.38)$$

$$h_{\alpha\alpha} = -(1 - \tau) \frac{r_g}{r_3}, \quad \alpha = 1, 2, 3, \quad (4.39)$$

$$h_{\mu_i\mu_i} = -\gamma_i \frac{r_g}{r_3}, \quad (4.40)$$

com

$$\mu_i = 1 + \sum_{j=0}^{i-1} d_j, \dots, d_i + \sum_{j=0}^{i-1} d_j; \quad i = 1, \dots, N,$$

onde $d_0 = 3$.

Partindo das expressões (4.38)-(4.40), utilizando (4.34) e lembrando que $\Delta(1/r_3) = -4\pi\delta(r_3)$, podemos encontrar as componentes do tensor de Ricci até a ordem de $1/c^2$:

$$R_{00} \approx \frac{1}{2}k_N\rho_3c^2, \quad (4.41)$$

$$R_{\alpha\alpha} \approx \frac{1}{2}(1 - \tau)k_N\rho_3c^2, \quad (4.42)$$

$$R_{\mu_i\mu_i} \approx \frac{1}{2}\gamma_i k_N\rho_3c^2, \quad (4.43)$$

onde $k_N \equiv 8\pi G_N/c^4$. Introduzimos também a densidade de massa tridimensional não relativística $\rho_3 = m\delta(r_3)$, que se conecta com a densidade de massa D -dimensional por meio de $\rho_D = m\delta(r_3)/V_{D'} = \rho_3/V_{D'}$, onde $V_{D'}$ é o volume total dos espaços internos. Por exemplo, se o i -ésimo toro tem período $a_{(i)j}$, então

$$V_{D'} = \prod_{i=1}^N \prod_{j=1}^{d_i} a_{(i)j} = \prod_{j=1}^{d_1} a_{(1)j} \cdot \prod_{j=1}^{d_2} a_{(2)j} \cdots \prod_{j=1}^{d_N} a_{(N)j} \dots$$

$$V_{D'} = a_1^{d_1} \cdot a_2^{d_2} \cdots a_N^{d_N}. \quad (4.44)$$

Agora, encontraremos as componentes do tensor energia-momento a partir das equações de Einstein (4.25). Definindo $k_D \equiv 2S_D\tilde{G}_D/c^4$ e tendo em vista que estamos considerando objetos astrofísicos compactos em repouso em nosso espaço tridimensional (que resulta em $T_{11} = T_{22} = T_{33} = 0$), de (4.41)-(4.42) e (4.25), chegamos às seguintes equações

$$\frac{1}{2}k_N\rho_3c^2 \approx k_D \left(T_{00} - \frac{1}{D-1}Tg_{00} \right), \quad (4.45)$$

$$\frac{1}{2}(1 - \tau)k_N\rho_3c^2 \approx k_D \left(-\frac{1}{D-1}Tg_{\alpha\alpha} \right), \quad (4.46)$$

$$\frac{1}{2}\gamma_i k_N\rho_3c^2 \approx k_D \left(T_{\mu_i\mu_i} - \frac{1}{D-1}Tg_{\mu_i\mu_i} \right). \quad (4.47)$$

As componentes T_{00} e $T_{\mu_i\mu_i}$ são encontradas levando em consideração que $Tg_{00} \approx T_{00}$, $\tau = \sum_{i=1}^N \gamma_i d_i = (D-3)/(D-2)$ e $R_{00} = k_D T_{00} [(D-2)/(D-1)]$. Então, de (4.45) temos

$$\frac{1}{2} k_N \rho_3 c^2 \approx k_D T_{00} \left(\frac{D-2}{D-1} \right) . \quad \cdot$$

$$T_{00} \approx \frac{k_N V_{D'}}{k_D} \left(1 - \frac{\tau}{2} \right) \rho_D c^2 . \quad (4.48)$$

De (4.42) e (4.46), podemos escrever

$$T \approx - \frac{(1-\tau)(D-2)T_{00}}{g_{\alpha\alpha}} , \quad (4.49)$$

e substituindo esta expressão em (4.47) chegamos a

$$T_{\mu_i\mu_i} \approx \frac{R_{\mu_i\mu_i}}{k_D} - \frac{D-2}{D-1} (1-\tau) T_{00} \frac{g_{\mu_i\mu_i}}{g_{\alpha\alpha}} .$$

Observando que

$$\frac{g_{\mu_i\mu_i}}{g_{\alpha\alpha}} \approx \frac{-1 - \gamma_i r_g / r_3}{1 - (1-\tau) r_g / r_3} \approx 1 ,$$

segue, então, que

$$T_{\mu_i\mu_i} \approx \frac{k_N V_{D'} (\gamma_i - 1 + \tau)}{2k_D} \rho_D c^2 . \quad (4.50)$$

A equação (4.48) para a componente T_{00} mostra que o parâmetro τ não pode ser igual a 2, pois para $\tau = 2$ temos $T_{00} = 0$, correspondendo à ausência de matéria. Além disso, $T_0^0 = \varepsilon$ é a densidade de matéria. Portanto, até a ordem de $1/c^2$, temos $T_{00} \approx \varepsilon \approx \rho_D c^2$. Utilizando esses resultados, a relação $k_N/k_D = 4\pi G_N / (S_D \tilde{G}_D)$ e a relação $2(D-2)S_D \tilde{G}_D / [(D-1)V_{D'}] = 4\pi G_N$, obtida a partir da Ref. [14], impomos a seguinte relação entre as constantes gravitacional newtoniana e gravitacional multidimensional

$$4\pi G_N = \frac{2}{2-\tau} S_D \tilde{G}_D / V_{D'} . \quad (4.51)$$

No caso particular onde a fonte é puntual, esta relação é encontrada nas Refs. [1, 14]. Da Eq. (4.48) e da Eq. (4.50), obtemos

$$T_{\mu_i\mu_i} \approx \frac{\gamma_i - 1 + \tau}{2 - \tau} T_{00} . \quad (4.52)$$

Considerando que a componente $T_{\mu_i\mu_i}$ define a pressão no i -ésimo espaço interno ($T_{\mu_i\mu_i} \approx p_i$) obtemos a seguinte equação de estado nesse espaço:

$$p_i = \frac{\gamma_i - 1 + \tau}{2 - \tau} \varepsilon, \quad i = 1, \dots, N. \quad (4.53)$$

Uma vez que $T_{11} = T_{22} = T_{33} = 0$, no espaço tridimensional usual temos uma equação de estado tipo poeira, ou seja: $p_0 = 0$. No caso de uma massa puntual, os parâmetros γ_i satisfazem a condição (4.20). Podemos verificar que para estes valores de γ_i , todos $T_{\mu_i\mu_i}$ são iguais a zero. Portanto, para este caso, T_{00} é a única componente não nula do tensor energia-momento no espaço externo (espaço quadridimensional usual), bem como em todos os espaços internos. Assim, temos equações de estado tipo poeira em todos os espaços, ou seja: $p_i = 0$, para todo $i = 1, \dots, N$.

Capítulo 5

O formalismo PPN e os testes gravitacionais

A comparação das teorias métricas da gravitação entre si e com experimentos torna-se particularmente simples quando se leva em conta o limite de campo fraco e de baixas velocidades. Existe uma maneira de elaborar uma forma geral para uma métrica pós-newtoniana de um sistema de fluido perfeito [15]. Esta forma deve ser obedecida pela maioria das teorias métricas, com diferenças de uma teoria para outra apenas nos coeficientes numéricos que aparecem na métrica. Quando o sistema de coordenadas é adequado (escolhendo-se um calibre padrão) e os parâmetros arbitrários são usados no lugar dos coeficientes numéricos, o resultado é conhecido como formalismo Parametrizado Pós-Newtoniano (PPN) e os parâmetros são chamados parâmetros PPN [15].

Neste capítulo, encontraremos expressões para a precessão do periélio de Mercúrio e para a deflexão da luz. Estas expressões serão representadas em função dos parâmetros pós-newtonianos PPN γ e β , utilizados na comparação com os dados experimentais obtidos pela sonda espacial Cassini. As equações serão escritas em coordenadas isotrópicas, isto é, em um sistema conformalmente plano onde a parte espacial da métrica é proporcional a um fator conforme.

Para encontrarmos as equações dos testes clássicos, acima citados, utilizamos os mesmos procedimentos das Refs. [11, 16]. As equações encontradas coincidem com as expressões obtidas na relatividade geral quando $\gamma = \beta = 1$ (ver, e.g., Ref. [16]), e também são as

mesmas encontradas na Ref. [11] em um espaço D -dimensional com $\gamma = \beta = 1$.

5.1 A métrica de Schwarzschild em coordenadas isotrópicas

Consideremos a métrica de Schwarzschild, Eq. (2.59), onde o elemento de linha representa um campo gravitacional estático e esfericamente simétrico no espaço vazio em torno de um objeto massivo. O elemento de linha de Schwarzschild pode, de forma aproximada, representar o campo gravitacional do Sol. Podemos reescrever o elemento de linha da seguinte forma

$$ds^2 = A(r)dt^2 + dl^2 ,$$

onde dl^2 representa a parte espacial do elemento de linha. Obter o elemento de linha de Schwarzschild em coordenadas isotrópicas é transformar o elemento de linha de maneira que a parte espacial nas novas coordenadas tenha a forma conformalmente euclidiana, isto é, dl^2 seja proporcional à sua expressão euclidiana a saber:

$$dl^2 = B(r)d\sigma^2 ,$$

onde $d\sigma^2$ é o elemento de linha do espaço euclidiano tridimensional

$$d\sigma^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 ,$$

em coordenadas cartesianas, ou equivalentemente,

$$d\sigma^2 = dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\text{sen}^2\theta d\varphi^2 ,$$

em coordenadas polares esféricas. Vamos considerar uma transformação onde as coordenadas θ , φ e t permanecem inalteradas, e

$$r \rightarrow \rho = \rho(r) , \tag{5.1}$$

onde ρ é uma coordenada radial, e procuramos encontrar soluções da forma

$$ds^2 = (1 - 2m/r)dt^2 - [\lambda(\rho)]^2[d\rho^2 + \rho^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\varphi^2)] . \tag{5.2}$$

Comparando a Eq. (5.2) com a Eq. (2.59) e impondo que os coeficientes de $d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\varphi^2$ sejam iguais nestas duas expressões, obtemos $r^2 = \lambda^2 \rho^2$ e também $(1 - 2m/r)^{-1} dr^2 = \lambda^2 d\rho^2$. Eliminando λ e obtendo a raiz quadrada, podemos escrever

$$\frac{dr}{(r^2 - 2mr)^{1/2}} = \pm \frac{d\rho}{\rho}, \quad (5.3)$$

que é uma equação diferencial ordinária com variáveis separáveis. Impondo a condição $\rho \rightarrow \infty$, para $r \rightarrow \infty$, obtemos o sinal positivo, e, por integração, encontramos a seguinte transformação de coordenadas

$$r = \rho \left(1 + \frac{m}{2\rho}\right)^2. \quad (5.4)$$

Substituindo esta expressão em $A = (1 - 2m/r)$, obtemos

$$A = \frac{\left(1 - \frac{m}{2\rho}\right)^2}{\left(1 + \frac{m}{2\rho}\right)^2}.$$

Derivando a Eq. (5.4) em relação a ρ , ficamos com

$$dr^2 = \left(1 + \frac{m}{2\rho}\right)^2 \left(1 - \frac{m}{2\rho}\right)^2 d\rho^2.$$

Substituindo esses resultados na Eq. (2.59), conforme a Ref. [4], obtemos o elemento de linha de Schwarzschild em coordenadas isotrópicas

$$ds^2 = \frac{\left(1 - \frac{m}{2\rho}\right)^2}{\left(1 + \frac{m}{2\rho}\right)^2} dt^2 - \left(1 + \frac{m}{2\rho}\right)^4 [d\rho^2 + \rho^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\varphi^2)]. \quad (5.5)$$

O sistema de coordenadas isotrópicas é útil também para comparar modelos diferentes de gravitação (por exemplo, a relatividade geral e uma teoria escalar). A exigência de que as coordenadas sejam isotrópicas remove certa ambiguidade e facilita a comparação entre determinadas teorias.

Escrevendo a Eq. (5.5) na forma

$$ds^2 = A dt^2 - B(d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2 + \rho^2 \text{sen}^2\theta d\varphi^2),$$

onde

$$A = \frac{\left(1 - \frac{m}{2\rho}\right)^2}{\left(1 + \frac{m}{2\rho}\right)^2} \quad e \quad B = \left(1 + \frac{m}{2\rho}\right)^4,$$

e considerando $\frac{m}{2\rho} \ll 1$, podemos expandir A e B como

$$A \approx 1 - \frac{2m}{\rho} + 2 \left(\frac{m}{\rho} \right)^2, \quad (5.6)$$

e

$$B \approx 1 + 2 \frac{m}{\rho}. \quad (5.7)$$

Passando para coordenadas cartesianas, ficamos com:

$$d\mathbf{x}^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2 + \rho^2 \sin^2 \theta d\varphi^2.$$

Podemos agora escrever a métrica Schwarzschild expandida em coordenadas isotrópicas, a saber:

$$ds^2 = \left[1 - 2 \frac{m}{\rho} + 2 \left(\frac{m}{\rho} \right)^2 + \dots \right] dt^2 - \left(1 + 2 \frac{m}{\rho} + \dots \right) [(dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2]. \quad (5.8)$$

O formalismo PPN surgiu, inicialmente, na tentativa de generalizar este resultado para outras teorias.

5.2 Os Parâmetros Pós-Newtonianos (PPN)

O Sistema Solar pode ser um local para a realização de experimentos para se analisar os limites newtoniano e pós-newtoniano, pois seus constituintes possuem campos gravitacionais não tão intensos e velocidades baixas comparadas com a velocidade da luz no vácuo.

Uma versão primitiva do (PPN) foi desenvolvida por Eddington [17], Robertson [18] e Schiff [19]. Este formalismo Eddington-Robertson-Schiff tratou a métrica do Sistema Solar como a de um sol com forma esférica e sem rotação. As componentes da métrica nesta versão do formalismo são dadas por

$$\begin{aligned} g_{00} &= -1 + \frac{2M}{\rho} - 2\beta \left(\frac{M}{\rho} \right)^2; \\ g_{ij} &= \left(1 + 2\gamma \frac{M}{\rho} \right) \delta_{ij}; \\ g_{0i} &= 0, \end{aligned} \quad (5.9)$$

onde M é a massa do Sol, β e γ são parâmetros PPN. Essa versão ainda é bastante usada por ter um cálculo bem mais rápido que o do formalismo atual, mas ela não fornece os valores de outros parâmetros que são importantes na análise de leis de conservação. Comparando a expansão (5.8) da métrica de Schwarzschild com a Eq. (5.9), chega-se em $\gamma = \beta = 1$ para a relatividade geral.

5.3 Precessão do periélio de Mercúrio

Nesta seção seguiremos a Ref. [11]. Os eixos das elipses das órbitas dos planetas em torno do Sol mudam sua direção no decorrer do tempo. Esta alteração é conhecida como a precessão do periélio dos planetas. Nesta seção encontraremos uma expressão para esta precessão em função dos parâmetros β e γ . A figura 5.1 ilustra o deslocamento angular $\delta\psi$ do periélio de um planeta orbitando o Sol.

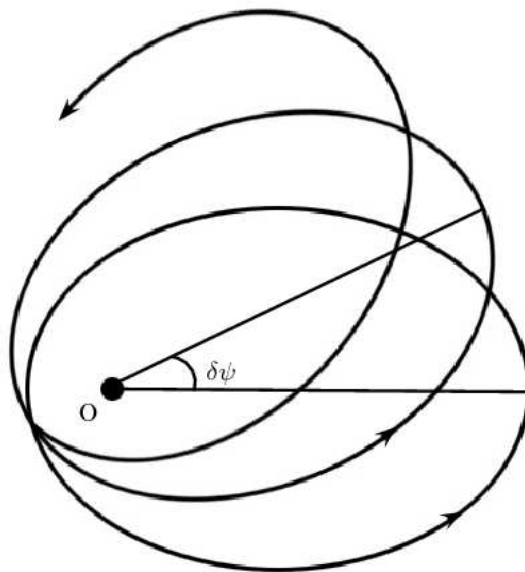


Figura 5.1: Avanço do periélio de um planeta orbitando o Sol [4].

Vamos considerar o movimento de um corpo teste de massa m' no campo gravitacional descrito pelo elemento de linha

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r_3} + \beta \frac{r_g^2}{2r_3^2}\right) c^2 dt^2 - \left(1 + \gamma \frac{r_g}{r_3}\right) (dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \text{sen}^2 \theta d\psi^2) . \quad (5.10)$$

onde $r_g = 2M$ (em unidades naturais) é o raio de Schwarzschild (em três dimensões).

A equação de Hamilton-Jacobi

$$g^{ik} \frac{\partial S}{\partial x^i} \frac{\partial S}{\partial x^k} - m'^2 c^2 = 0, \quad (5.11)$$

onde S é a ação, assume a forma

$$g^{00} \left(\frac{\partial S}{\partial x^0} \right)^2 + g^{11} \left(\frac{\partial S}{\partial x^1} \right)^2 + g^{33} \left(\frac{\partial S}{\partial x^3} \right)^2 - m'^2 c^2 \approx 0 \quad \therefore \quad (5.12)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2} \left(1 + \frac{r_g}{r_3} + \frac{r_g^2}{r_3^2} - \beta \frac{r_g^2}{2r_3^2} \right) \left(\frac{\partial S}{\partial t} \right)^2 - \left(1 - \gamma \frac{r_g}{r_3} \right) \left(\frac{\partial S}{\partial r_3} \right)^2 \\ - \frac{1}{r_3^2} \left(1 - \gamma \frac{r_g}{r_3} \right) \left(\frac{\partial S}{\partial \psi} \right)^2 - m'^2 c^2 \approx 0, \end{aligned} \quad (5.13)$$

sendo m' a massa do corpo teste.

Por separação de variáveis podemos considerar a ação na forma

$$S = -E't + M\psi + S_{r_3}(r_3), \quad (5.14)$$

onde $E' \approx m'c^2 + E$ é a energia do corpo teste, que inclui a energia de repouso $m'c^2$ e a energia não relativística E , e M é o momento angular. Substituindo esta expressão para ação S na Eq. (5.13), obtemos uma expressão para $(dS_{r_3}/dr_3)^2$ considerando termos até a ordem de $1/c^2$, a saber

$$\begin{aligned} \left(\frac{dS_{r_3}}{dr_3} \right)^2 \approx 2m'E + \frac{E^2}{c^2} + \frac{1}{r_3} [m'^2 c^2 r_g + 2m'E(1 + \gamma)r_g] \\ - \frac{1}{r_3^2} \left[M^2 - (2 + 2\gamma - \beta)m'^2 c^2 \frac{r_g^2}{2} \right]. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Integrando a raiz a quadrada da expressão acima em relação a r_3 , obtemos a seguinte expressão para a ação S_{r_3} :

$$\begin{aligned} S_{r_3} \approx \int \left\{ \left(2m'E + \frac{E^2}{c^2} \right) + \frac{1}{r_3} [m'^2 c^2 r_g + 2m'E(1 + \gamma)r_g] \right. \\ \left. - \frac{1}{r_3^2} \left[M^2 - (2 + 2\gamma - \beta) \frac{m'^2 c^2 r_g^2}{2} \right] \right\}^{1/2}. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Lembremos (veja Ref. [20]) que para qualquer integral de movimento I de um sistema com ação S a seguinte equação é válida

$$\frac{\partial S}{\partial I} = \text{constante}.$$

Quanto à trajetória, essa é determinada pela equação $\partial S/\partial M = \text{constante}$, da qual se deduz

$$\frac{\partial S}{\partial M} = \psi + \frac{\partial S_{r_3}}{\partial M} = \text{constante}, \quad (5.17)$$

onde foi usada a Eq. (5.14). Consideremos os planetas do Sistema Solar como corpos testes orbitando o Sol. A variação do ângulo durante uma revolução de um planeta em sua órbita é

$$\Delta\psi = -\frac{\partial}{\partial M}\Delta S_{r_3}, \quad (5.18)$$

onde ΔS_{r_3} é a variação correspondente de S_{r_3} . Estamos assumindo que a precessão do periélio origina-se devido à pequena correção relativística ε para M^2 em S_{r_3} , isto é: $M^2/r_3^2 \Rightarrow (M^2 - \varepsilon)/r_3^2$. De (5.16) podemos encontrar esta correção, a saber:

$$\varepsilon = (2 + 2\gamma - \beta)\frac{m'^2 c^2 r_g^2}{2}. \quad (5.19)$$

Expandindo S_{r_3}

$$\begin{aligned} S_{r_3} &= S_{r_3}(M^2 - \varepsilon) \quad \therefore \\ S_{r_3} &\approx S_{r_3}^{(0)} - \varepsilon \frac{\partial S_{r_3}^{(0)}}{\partial M^2} \quad \therefore \end{aligned} \quad (5.20)$$

$$\Delta S_{r_3} = \Delta S_{r_3}^{(0)} - \frac{(2 + 2\gamma - \beta)}{2M} \pi m'^2 c^2 r_g^2. \quad (5.21)$$

Diferenciando esta equação em relação a M e considerando que $-\partial\Delta S_{r_3}^{(0)}/\partial M = \Delta\psi^{(0)} = 2\pi$, encontramos

$$\frac{\partial\Delta S_{r_3}}{\partial M} \approx \frac{\partial}{\partial M}\Delta S_{r_3}^{(0)} - (2 + 2\gamma - \beta)\frac{\pi m'^2 c^2 r_g^2}{2M^2} \quad \therefore \quad (5.22)$$

$$\Delta\psi \approx 2\pi + (2 + 2\gamma - \beta)\frac{\pi m'^2 c^2 r_g^2}{2M^2}, \quad (5.23)$$

onde o segundo termo do lado direito da Eq. (5.23) representa o deslocamento angular $\delta\psi$ do periélio da órbita em um espaço-tempo com a métrica isotrópica com parâmetros PPN's, que é dado por

$$\delta\psi = (2 + 2\gamma - \beta)\frac{\pi m'^2 c^2 r_g^2}{2M^2}. \quad (5.24)$$

Exprimindo esta grandeza em função do comprimento a do semieixo maior da órbita, da excentricidade e da elipse, e lançando mão da fórmula $M^2 = m^2 c^2 r_g c^2 a(1 - e^2)/2$, obtemos:

$$\delta\psi = \frac{6\pi m G_N}{a(1 - e^2)c^2} \frac{1}{3} (2 + 2\gamma - \beta). \quad (5.25)$$

Para a relatividade geral, onde $\gamma = 1$ e $\beta = 1$, a equação acima coincide exatamente com a Eq. (101.7) da Ref. [16].

5.4 Deflexão da luz

Consideremos agora o caminho percorrido por um raio luminoso num campo gravitacional com elemento de linha dado pela Eq. (5.10). No caso de partículas sem massa, a equação de Hamilton-Jacobi (5.11) é reduzida ao limite eikonal

$$g^{ik} \frac{\partial \Psi}{\partial x^i} \frac{\partial \Psi}{\partial x^k} = 0. \quad (5.26)$$

Para a métrica associada à Eq. (5.10) temos que a Eq. (5.16) pode ser escrita como:

$$\frac{1}{c^2} \left(1 + \frac{r_g}{r_3} + \frac{r_g^2}{r_3^2} - \beta \frac{r_g^2}{2r_3^2} \right) \left(\frac{\partial \Psi}{\partial t} \right)^2 - \left(1 - \gamma \frac{r_g}{r_3} \right) \left(\frac{\partial \Psi}{\partial r_3} \right)^2 - \frac{1}{r_3^2} \left(1 - \gamma \frac{r_g}{r_3} \right) \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} \right)^2 \approx 0. \quad (5.27)$$

Por separação de variáveis a função eikonal Ψ pode ser escrita na forma

$$\Psi = -\omega_0 t + \rho \frac{\omega_0}{c} \varphi + \Psi_{r_3}(r_3), \quad (5.28)$$

onde $\omega_0 = -\partial \Psi / \partial t$ é a frequência da luz e ρ é a distância de maior aproximação de um raio de luz até a massa gravitacional. Tendo em conta que $k = \omega_0 / c$ é o valor absoluto do vetor de onda, então $M \equiv \rho k = \rho \omega_0 / c$ desempenha o papel do momento angular para o feixe de luz. Então, da Eq. (5.27), usando a Eq. (5.28), obtemos até $O(1/c^4)$ a seguinte fórmula:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\Psi_{r_3}}{dr_3} \right)^2 &\approx \left(1 + \gamma \frac{r_g}{r_3} \right) \left(1 + \frac{r_g}{r_3} + \frac{r_g^2}{r_3^2} - \beta \frac{r_g^2}{2r_3^2} \right) \frac{\omega_0^2}{c^2} - \rho^2 \frac{\omega_0^2}{c^2 r_3^2} \\ &\approx \left(1 + \frac{r_g}{r_3} + \gamma \frac{r_g}{r_3} - \frac{\rho^2}{r_3^2} \right) \frac{\omega_0^2}{c^2}. \end{aligned} \quad (5.29)$$

Integrando a raiz quadrada dessa expressão obtemos

$$\Psi_{r_3} \approx \frac{\omega_0}{c} \int \left[1 + (1 + \gamma) \frac{r_g}{r_3} - \frac{\rho^2}{r_3^2} \right]^{1/2} dr_3. \quad (5.30)$$

Considerando os termos com r_g/r_3 como uma pequena correção relativística, expandimos o integrando acima até a ordem de $O(1/c^3)$:

$$\begin{aligned}\Psi_{r_3} &\approx \Psi_{r_3}^{(0)} + \frac{1}{2}(1+\gamma)\frac{r_g\omega_0}{c} \int (r_3^2 - \rho^2)^{-1/2} dr_3 \dots \\ &\approx \Psi_{r_3}^{(0)} + \frac{1}{2}(1+\gamma)\frac{r_g\omega_0}{c} \operatorname{arccosh}\left(\frac{r_3}{\rho}\right),\end{aligned}\quad (5.31)$$

onde a função eikonal não relativística (i.e. ausência de gravidade: $r_g \equiv 0$) é

$$\Psi_{r_3}^{(0)} = \frac{\omega}{c} \int \left(1 - \frac{\rho^2}{r_3^2}\right)^{1/2} dr_3 \equiv \int \left[(\omega_0/c)^2 - \frac{M^2}{r_3^2}\right]^{1/2} dr_3. \quad (5.32)$$

Para esta aproximação não relativística a trajetória da luz é uma linha reta. De fato, neste caso, temos

$$\frac{\partial\Psi^{(0)}}{\partial M} = \Psi^{(0)} + \frac{\partial\Psi_3^{(0)}}{\partial M} = \Psi^{(0)} - \arccos(\rho/r_3) = 0, \quad (5.33)$$

onde a constante é tomada de tal modo que $\psi^{(0)} \rightarrow \pi/2$ para $r_3 \rightarrow \infty$. Assim, a trajetória $\rho = r_3 \cos\psi^{(0)}$ é uma linha reta. No caso não relativístico a variação total do ângulo $\psi^{(0)}$ é $\Delta\psi^{(0)} = -\partial\Delta\psi_{r_3}^{(0)}/\partial M = \pi$.

Retornando ao caso relativístico (5.31), para o feixe de luz que viaja a partir de uma certa distância $r_3 = R$ até o ponto $r_3 = \rho$ mais próximo ao centro gravitacional até afastar-se novamente a uma distância $r_3 = R$, a variação da função eikonal é

$$\Delta\Psi_{r_3} \approx \Delta_{r_3}^{(0)} + (1+\gamma)\frac{r_g\omega_0}{c} \operatorname{arccosh}\frac{R}{\rho}. \quad (5.34)$$

A variação correspondente do ângulo polar φ é

$$\Delta\varphi = -\frac{\partial\Delta\varphi}{\partial M} = -\frac{\partial\Delta\Psi_{r_3}^{(0)}}{\partial M} + (1+\gamma)\frac{r_g R}{\rho} (R^2 - \rho^2)^{-1/2}. \quad (5.35)$$

Tomando o limite $R \rightarrow \infty$, obtemos

$$\Delta\varphi = \pi + (1+\gamma)\frac{r_g}{\rho}. \quad (5.36)$$

Portanto, o segundo termo da Eq. (5.36) representa a fórmula matemática para a deflexão da luz em coordenadas isotrópicas com os parâmetros PPN, que é dada por

$$\delta\varphi = (1+\gamma)\frac{r_g}{\rho}. \quad (5.37)$$

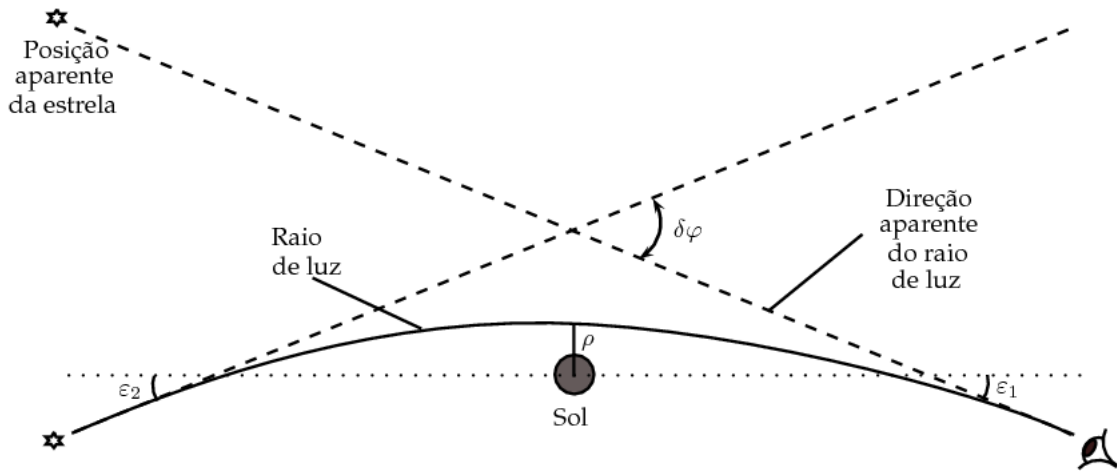


Figura 5.2: Deflexão de um feixe de luz ao passar a uma distância ρ do Sol com ângulos de desvios assintóticos ε_1 e ε_2 e deflexão total $\delta\varphi = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$ [4].

Em outras palavras, um raio que passa a uma distância mínima ρ do centro do campo, desvia sua trajetória em um ângulo igual a $\delta\varphi$.

Tentativas foram feitas para medir esta deflexão durante eclipses totais do Sol, quando a luz do Sol é bloqueada pela Lua, de forma que a posição aparente das estrelas poderia ser registrada. Então, se as fotografias das estrelas nas vizinhanças do Sol durante o eclipse são comparadas com as fotografias da mesma região do céu obtidas no instante em que o Sol não está presente, conclui-se que as estrelas aparentam ter se deslocado radialmente para fora do centro atrativo (Sol) por causa da deflexão da luz (ver Fig. 5.2).

Capítulo 6

Sólitons latentes, cordas negras, membranas negras e equações de estado nos modelos de Kaluza-Klein

6.1 Limitações experimentais e os sólitons. Sólitons latentes

Queremos, agora, obter as restrições experimentais para os parâmetros γ_i discutidos no capítulo 4 desta dissertação. Isto pode ser feito com a ajuda do formalismo PPN discutido no capítulo 5.

No contexto deste formalismo (veja as Refs. [15, 21]) o elemento de linha quadridimensional, estático e esfericamente simétrico, em coordenadas isotrópicas, é parametrizado na forma

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r_e} + \beta \frac{r_g^2}{2r_3^2}\right) c^2 dt^2 - \left(1 + \gamma \frac{r_g}{r_3}\right) \sum_{i=1}^3 (dx^i)^2. \quad (6.1)$$

Na relatividade geral temos $\beta = \gamma = 1$. Para obtermos β e γ na solução solitônica (4.15) basta comparar os coeficientes da Eq. (6.1) com as correspondentes Eqs. (4.35) e (4.36). Desta forma, encontramos diretamente os parâmetros pós-newtonianos da solução

solitônica, a saber:

$$\begin{aligned}\beta_s &= 1, \\ \gamma_s &= 1 - \tau.\end{aligned}\tag{6.2}$$

Com ajuda dos PPN's obtemos as fórmulas dos testes gravitacionais clássicos [11, 15, 22], a saber:

(i) *Precessão do Periélio* [ver Eq. (5.25)]:

$$\begin{aligned}\delta\psi &= \frac{6\pi m G_N}{\lambda(1-e^2)c^2} \frac{1}{3} (2 + 2\gamma_s - \beta_s) \therefore \\ \delta\psi &= \frac{6\pi m G_N}{\lambda(1-e^2)c^2} \frac{3-2\tau}{3} \therefore \\ \delta\psi &= \frac{\pi r_g}{\lambda(1-e^2)} (3-2\tau),\end{aligned}\tag{6.3}$$

onde λ é o semi-eixo maior da elipse e e é a sua excentricidade.

(ii) *Deflexão da luz* [ver Eq. (5.37)]:

$$\begin{aligned}\delta\psi &= (1 + \gamma_s) \frac{r_g}{\rho} \therefore \\ \delta\psi &= (2 - \tau) \frac{r_g}{\rho},\end{aligned}\tag{6.4}$$

onde ρ é a menor distância de aproximação do caminho dos raios de luz que gravitam a massa m .

(iii) *Atraso de ecos de radar (Shapiro time-delay effect)* [15]:

$$\begin{aligned}\delta t &= (1 + \gamma_s) \frac{r_g}{c} \ln \left(\frac{4r_{Terra} r_{planeta}}{R_{Sol}^2} \right) \therefore \\ \delta t &= (2 - \tau) \frac{r_g}{c} \ln \left(\frac{4r_{Terra} r_{planeta}}{R_{Sol}^2} \right).\end{aligned}\tag{6.5}$$

A comparação das Eqs. (6.3)-(6.5) com os dados experimentais nos possibilita impor condições aos parâmetros das soluções solitônicas. Na verdade, também podemos impor tais condições diretamente sobre γ no formalismo PPN. A restrição mais forte em γ vem da experiência “Shapiro time-delay effect” usando a sonda espacial Cassini: $\gamma - 1 = (2, 1 \pm 2, 3) \times 10^{-5}$ [22, 23]. Assim, usando (6.2), encontramos que o parâmetro solitônico τ deve satisfazer a condição

$$\tau = -(2, 1 \pm 2, 3) \times 10^{-5}.\tag{6.6}$$

No caso de um s3liton massivo puntual descrito pelas Eqs. (4.19)-(4.22), temos $\tau = D'/(1 + D')$, que obviamente contradiz a equa33o (6.6) (de acordo com os resultados das Refs. [1, 9, 11, 24, 25]).

A Eq. (6.2) mostra que existe uma classe muito interessante de s3litons, que s3o definidos pela condi33o

$$\tau = \sum_{i=1}^N d_i \gamma_i = 0, \quad (6.7)$$

onde o parâmetro τ da equa33o acima foi definido pela Eq. (4.8).

Sim, pois, considerando apenas os experimentos gravitacionais acima, percebe-se que é imposs3vel diferenciar esses s3litons “Kaluza-Klainianos” da relatividade geral, porque eles possuem $\gamma_s = 1$ como na relatividade geral. Por esta raz3o chamamos estas solu33es de *s3litons latentes*. Para esses s3litons latentes as equa33es de estado (4.53) nos espa3os internos s3o reduzidas a

$$p_i = \frac{\gamma_i - 1}{2} \varepsilon, \quad i = 1, \dots, N. \quad (6.8)$$

Cordas negras ($N = 1, d_1 = 1$) e membranas negras ($N > 1$) s3o caracterizadas pela condi33o $\gamma_i = 0$, para todos $i \geq 1$. Todos eles pertencem a uma classe de s3litons que possuem equa33es de estado

$$p_i = -\frac{1}{2} \varepsilon, \quad i = 1, \dots, N. \quad (6.9)$$

Sabe-se que no caso do espa3o externo tridimensional tais equa33es de estado s3o as 3nicas que n3o perturbam a condi33o de estabiliza33o do espa3o interno para objetos astrof3sicos compactos com equa33es de estado tipo poeira $p_0 = 0$ (no espa3o externo) [2]. Portanto, γ_i diferentes de zero podem ser tratados como uma medida de desestabiliza33o do s3liton latente.

Sabe-se que as cordas negras e membranas negras t3m a topologia quadridimensional no espa3o-tempo de Schwarzschild e espa3os internos planos [2]. Neste caso, n3o parece surpreendente que os experimentos gravitacionais levem aos mesmos resultados como para relatividade geral. No entanto, o s3liton latente, no caso geral, n3o tem qualquer m3trica tipo Schwarzschild para a parte quadridimensional do espa3o-tempo, nem m3tricas planas

para as dimensões extras. Todavia, dentro da precisão considerada, é impossível distingui-los da relatividade geral. Isto é realmente surpreendente.

Para concluir esta seção, é importante mencionar que a relação entre as constantes gravitacional newtoniana e gravitacional multidimensional (4.51) para os sólitons latentes é reduzida à seguinte equação [1, 14]

$$4\pi G_N = S_D \tilde{G}_D / V_{D'} . \quad (6.10)$$

6.2 Limitações experimentais e as equações de estado de um fluido perfeito multidimensional

Nesta seção queremos mostrar que, para um fluido perfeito esfericamente simétrico com equação de estado tipo poeira no espaço externo, a condição $h_{00} = h_{\alpha\alpha}$ resulta na condição de sólito latente (6.7) e as equações de estado (6.8), juntamente com a condição $R_{\mu_i\mu_i} = 0$, ou equivalentemente $h_{\mu_i\mu_i} = 0$, levam à condição de estabilidade (6.9) e destacam $d_0 = 3$ para o número de dimensões externas.

Vamos considerar um fluido perfeito estático, esfericamente simétrico, com tensor energia-momento dado por

$$T^i_k = \text{diag} \left(\varepsilon, \underbrace{-p_0, \dots, -p_0}_{d_0 \text{ vezes}}, \underbrace{-p_1, \dots, -p_1}_{d_1 \text{ vezes}}, \dots, \underbrace{-p_N, \dots, -p_N}_{d_N \text{ vezes}} \right). \quad (6.11)$$

Lembramos que estamos usando a notação: $i, k = 0, 1, \dots, D$; $a, b = 1, \dots, D$; $\alpha, \beta = 1, \dots, d_0$ e $\mu_i = 1 + \sum_{j=0}^{i-1} d_j, \dots, d_i + \sum_{j=0}^{i-1} d_j$; $i = 1, \dots, N$. Para configurações estáticas e esfericamente simétricas temos $g_{0a} = 0$ e $g_{ab} = 0$, $a \neq b$. Uma vez que queremos aplicar este modelo a objetos astrofísicos ordinários, onde a condição $T^0_0 \gg |T^\alpha_\alpha|$ é normalmente assegurada, assumimos a equação de estado tipo poeira no espaço externo d_0 -dimensional, ou seja $p_0 = 0$, mas deixamos as equações de estado arbitrárias no i -ésimo espaço interno, ou seja, $p_i = \omega_i \varepsilon$. Obviamente, ε é igual a zero fora dos objetos astrofísicos compactos. Além disso, consideramos a aproximação de campo fraco em que os coeficientes da métrica podem

ser expressos na forma

$$\begin{aligned}
g_{00} &\approx 1 + h_{00} , \\
g_{aa} &\approx -1 + h_{aa} , \\
h_{00}, h_{aa} &\sim \mathcal{O}(1/c^2) .
\end{aligned} \tag{6.12}$$

Como requisito adicional, impomos que a configuração não deve contradizer as observações experimentais. Isto será obedecido se as seguintes condições forem respeitadas: $h_{00} = h_{\alpha\alpha}$ e $h_{\mu_i\mu_i} = 0$ (veja Ref.[1]). As equações de estado são obtidas como resultado destas condições.

Levando em conta que $T_{\alpha\alpha} = 0$, $T_{00} \approx T^0_0$ e que $T_{\mu_i\mu_i} \approx -T^{\mu_i}_{\mu_i}$ encontramos

$$T = T^0_0 + \sum_{\alpha=1}^{d_0} T^\alpha_\alpha + \sum_{i=1}^N \sum_{\mu_i} T^{\mu_i}_{\mu_i} , \tag{6.13}$$

onde os limites do terceiro somatório da Eq. (6.13) são os mesmos da Eq. (4.40). Assim,

$$\begin{aligned}
T &= \varepsilon + T^1_1 + T^2_2 + \dots + T^N_N \quad \therefore \\
T &= \varepsilon - p_1 d_1 - \dots - p_N d_N \quad \therefore \\
T &= \varepsilon - d_1 \omega_1 \varepsilon - \dots - d_N \omega_N \varepsilon \quad \therefore \\
T &= \varepsilon \left(1 - \sum_{i=1}^N \omega_i d_i \right) .
\end{aligned} \tag{6.14}$$

Agora podemos obter, a partir das equações de Einstein (4.25), as componentes não nulas R_{00} , $R_{\alpha\alpha}$ e $R_{\mu_i\mu_i}$ do tensor de Ricci (com termos até a ordem de $1/c^2$):

$$\begin{aligned}
R_{00} &= k_{\mathcal{D}} \left(T_{00} - \frac{1}{D-1} g_{00} T \right) \quad \therefore \\
R_{00} &\approx k_{\mathcal{D}} \left[\varepsilon - \frac{1}{D-1} \varepsilon \left(1 - \sum_{i=1}^N d_i \omega_i \right) \right] \quad \therefore \\
R_{00} &\approx \frac{\varepsilon k_{\mathcal{D}}}{D-1} \left[\sum_{i=0}^N d_i - 1 - \left(1 - \sum_{i=1}^N d_i \omega_i \right) \right] \quad \therefore \\
R_{00} &\approx \frac{\varepsilon k_{\mathcal{D}}}{D-1} \left[\sum_{i=1}^N d_i + d_0 - 2 + \sum_{i=1}^N d_i \omega_i \right] \quad \therefore \\
R_{00} &\approx \frac{\varepsilon k_{\mathcal{D}}}{D-1} \left[d_0 - 2 + \sum_{i=1}^N d_i (1 + \omega_i) \right] ,
\end{aligned} \tag{6.15}$$

$$\begin{aligned}
R_{\alpha\alpha} &= \left(T_{\alpha\alpha} - \frac{1}{D-1} g_{\alpha\alpha} T \right) \therefore \\
R_{\alpha\alpha} &= k_{\mathcal{D}} \frac{T}{D-1} \therefore \\
R_{\alpha\alpha} &\approx \frac{\varepsilon k_{\mathcal{D}}}{D-1} \left(1 - \sum_{i=1}^N d_i \omega_i \right), \tag{6.16}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{\mu_i \mu_i} &= k_{\mathcal{D}} \left(T_{\mu_i \mu_i} - \frac{1}{D-1} g_{\mu_i \mu_i} T \right) \therefore \\
R_{\mu_i \mu_i} &\approx k_{\mathcal{D}} \left[\omega_i \varepsilon + \frac{1}{D-1} \varepsilon \left(1 - \sum_{i=1}^N d_j \omega_j \right) \right] \therefore \\
R_{\mu_i \mu_i} &\approx \frac{k_{\mathcal{D}} \varepsilon}{D-1} \left[\omega_i (D-1) + 1 - \sum_{i=1}^N d_j \omega_j \right] \therefore \\
R_{\mu_i \mu_i} &\approx \frac{k_{\mathcal{D}} \varepsilon}{D-1} \left[\omega_i \left(\sum_{j=0}^N d_j - 1 \right) + 1 - \sum_{i=1}^N d_j \omega_j - d_i \omega_i + d_i \omega_i \right] \therefore \\
R_{\mu_i \mu_i} &\approx \frac{k_{\mathcal{D}} \varepsilon}{D-1} \left\{ \omega_i \left[\left(\sum_{j=0}^N d_j - d_i \right) - 1 \right] + 1 - \left(\sum_{j=1}^N d_j \omega_j - d_i \omega_i \right) \right\} \therefore \\
R_{\mu_i \mu_i} &\approx \frac{k_{\mathcal{D}} \varepsilon}{D-1} \left[\omega_i \left(\sum_{j=0}^N {}' d_j - 1 \right) + 1 - \sum_{j=1}^N {}' d_j \omega_j \right], \tag{6.17}
\end{aligned}$$

onde $k_{\mathcal{D}} \sim \mathcal{O}(1/c^4)$ foi definido na Seção 4.4, e o símbolo $'$ no somatório da Eq. (6.17) indica que não devemos levar em conta o i -ésimo termo. A partir das Eqs. (6.16) e (6.15), obtemos

$$R_{\alpha\alpha} = \frac{1 - \sum_{i=1}^N d_i \omega_i}{d_0 - 2 + \sum_{i=1}^N d_i (1 + \omega_i)} R_{00}. \tag{6.18}$$

No limite de campo fraco as componentes do tensor de Ricci são

$$R_{00} \approx \frac{1}{2} \Delta h_{00}, \quad R_{\alpha\alpha} \approx \frac{1}{2} \Delta h_{\alpha\alpha}, \quad \alpha = 1, \dots, D. \tag{6.19}$$

Portanto, das Eqs. (6.18) e (6.19), obtemos

$$h_{\alpha\alpha} = \frac{1 - \sum_{i=1}^N d_i \omega_i}{d_0 - 2 + \sum_{i=1}^N d_i (1 + \omega_i)} h_{00}, \quad \alpha = 1, \dots, d_0. \tag{6.20}$$

Como mencionamos anteriormente, para que a teoria esteja de acordo com os dados experimentais, devemos exigir que $h_{\alpha\alpha} = h_{00}$. Desta forma, segue que

$$3 - d_0 - \sum_{i=1}^N d_i = 2 \sum_{i=1}^N d_i \omega_i. \tag{6.21}$$

No caso do espaço externo tridimensional ($d_0 = 3$), a Eq. (6.21) torna-se

$$\sum_{i=1}^N d_i \left(\omega_i + \frac{1}{2} \right) = 0. \quad (6.22)$$

Se fizermos a seguinte parametrização

$$\omega_i = \frac{\gamma_i - 1}{2}, \quad i = 1, \dots, N, \quad (6.23)$$

chegamos a mesma condição de sóliton latente (6.7). Assim, a exigência de que o fluido perfeito multidimensional tenha equação de estado tipo poeira ($p_0 = 0$) no espaço externo leva aos mesmos resultados dos experimentos gravitacionais fornecidos pela relatividade geral e, nos espaços internos, leva às equações de estado dos sólitons latentes (6.8). No entanto, sabe-se que os espaços internos podem ser estabilizados se o fluido perfeito multidimensional (com $p_0 = 0$) tiver as mesmas equações de estado $\omega_i = -1/2$ em todos os espaços internos e externo tridimensional ($d_0 = 3$) [2]. Em outras palavras, isto ocorre se todos $\gamma_i = 0$ na equação (6.23). Vamos mostrar que a condição adicional $R_{\mu_i \mu_i} = 0$ assegura o cumprimento destas condições. De fato, a partir da Eq. (6.17), obtemos

$$\begin{aligned} R_{\mu_i \mu_i} = 0 \quad \therefore \\ \omega_i \left(\sum_{j=0}^N 'd_j - 1 \right) + 1 - \sum_{j=1}^N 'd_j \omega_j = 0 \quad \therefore \\ \omega_i \left(d_0 + \sum_{j=1}^N d_j - d_i - 1 \right) + 1 - \left(\sum_{j=1}^N d_j \omega_j - d_i \omega_i \right) = 0 \quad \therefore \\ \omega_i \left(\sum_{j=1}^N d_j + 2 \right) = \sum_{j=1}^N d_j \omega_j - 1, \end{aligned} \quad (6.24)$$

onde $d_0 = 3$ e, usando a Eq. (6.21), obtemos

$$2 \sum_{i=1}^N d_i \omega_i = - \sum_{i=1}^N d_i. \quad (6.25)$$

Substituindo este resultado na Eq. (6.24), encontramos

$$\omega_i = -\frac{1}{2}. \quad (6.26)$$

Portanto, a exigência de estabilidade dos espaços internos leva, para o fluido perfeito multidimensional (com $p_0 = 0$), às equações de estado da corda/membrana negra nos espaços internos, e, adicionalmente, seleciona o número de espaços externos como sendo $d_0 = 3$.

Para concluir as considerações deste fluido perfeito, queremos obter os coeficientes da métrica até a ordem $\mathcal{O}(1/c^2)$ [ver Eq. (6.12)]. Para fazer isto, é necessário definir a função $\varphi \equiv h_{00}c^2/2$. Podemos mostrar que esta função satisfaz a equação

$$\Delta\varphi = \frac{c^2}{2}\Delta h_{00} \approx c^2 R_{00} \approx S_D \tilde{G}_D \rho_D, \quad (6.27)$$

pois, a partir da Eq. (6.15), obtemos

$$\begin{aligned} R_{00} &\approx \frac{\varepsilon k_D}{D-1} \left(d_0 - 2 + \sum_{i=1}^N d_i + \sum_{i=1}^N d_i \omega_i \right) \quad \therefore \\ R_{00} &\approx \frac{\varepsilon k_D}{D-1} \left[-2 + D - \frac{1}{2}(D-3) \right] \quad \therefore \\ R_{00} &\approx \frac{1}{2} \varepsilon k_D, \end{aligned} \quad (6.28)$$

onde usamos o vínculo (6.21) para um d_0 arbitrário. Considerando $\varepsilon \approx \rho_D c^2$, $k_D = 2S_D \tilde{G}_D / c^4$ e com ajuda da Eq. (6.19), podemos escrever

$$\Delta h_{00} \approx 2 \frac{S_D \tilde{G}_D}{c^2} \rho_D. \quad (6.29)$$

Assim, substituindo a função do potencial φ , definida anteriormente, na Eq. (6.29), vemos que a Eq. (6.27) é satisfeita.

Portanto, para obter os coeficientes da métrica necessitamos resolver estas equações com as condições de contorno adequadas. Queremos reduzir esta equação à equação ordinária tridimensional de Poisson no espaço externo ($d_0 = 3$). Para fazê-lo, vamos considerar o caso em que a matéria é uniformemente distribuída nas dimensões extras. Neste caso, $\rho_D = \rho_3 / V_{D'}$ (veja a Seção 4.4), e o potencial não relativístico φ depende apenas das coordenadas externas, e Δ é reduzido ao operador laplaciano tridimensional Δ_3 . Portanto, a Eq. (6.27) é reduzida a

$$\Delta_3 \varphi \approx \left(S_D \tilde{G}_D / V_{D'} \right) \rho_3 = 4\pi G_N \rho_3, \quad (6.30)$$

onde usamos a relação (6.10) entre as constantes gravitacional newtoniana e a constante gravitacional multidimensional. A Eq. (6.30) é a equação usual de Poisson. É válido notar que $\rho_3 = 0$ fora de um objeto astrofísico compacto. Isto é necessário para resolver a Eq. (6.30) dentro e fora do objeto, sendo que estas soluções devem coincidir nas fronteiras.

Capítulo 7

Conclusão

No capítulo 4 desta dissertação consideramos a solução solitônica mais geral (que conhecemos) expressa em termos de modelos de Kaluza-Klein com compactificação toroidal de dimensões extras, onde cada toro d_i -dimensional possui um fator de escala independente $C_i(r_3)$, $i = 1, \dots, N$; que é caracterizado pelo parâmetro γ_i . Uma característica desta solução é que os coeficientes da métrica dependem apenas do escalar $r_3 = |\vec{r}_3|$ do espaço externo (nosso espaço tridimensional). Assumimos o espaço externo com três dimensões ($d_0 = 3$), pois queremos estabelecer a relação entre os sólitons e as observações experimentais. Isto acontece quando a fonte de matéria é uniformemente distribuída nas dimensões extras. Neste caso, o potencial gravitacional não relativístico coincide exatamente com o potencial newtoniano. Entre as soluções solitônicas conhecidas na literatura, estudamos uma que corresponde à massa puntual. Esta solução tem um interesse especial porque generaliza a aproximação de massa puntual da relatividade geral, que funciona muito bem para descrever os experimentos gravitacionais. Então, na seção 4.2, investigamos o limite de campo fraco e obtivemos (para o caso geral) as equações de estado para fonte de matéria solitônica. Estas equações mostram que no caso de uma massa puntual, T_{00} é a única componente do tensor energia-momento diferente de zero e as equações de estado nos espaços externo e interno correspondem à poeira ($p_i = 0, i = 0, \dots, N$).

No capítulo 5 encontramos expressões para a precessão do periélio de Mercúrio e para a deflexão da luz, no contexto da relatividade geral, em função dos parâmetros pós-newtonianos PPN, γ e β .

No capítulo 6 usamos também a aproximação de campo fraco para obter restrições experimentais aos parâmetros das soluções solitônicas. Para obtê-las, encontramos os parâmetros pós-newtonianos PPN β_s e γ_s para as soluções solitônicas. Para a solução solitônica, o parâmetro $\beta = 1$ coincide com o parâmetro β na relatividade geral. No entanto, o parâmetro $\gamma_s = 1 - \tau = 1 - \sum_{i=1}^N d_i \gamma_i$ é diferente do seu valor na relatividade geral ($\gamma = 1$). O parâmetro PPN γ possui essas restrições devido às medidas do retardo do tempo obtidas por meio da sonda espacial Cassini. Com ajuda desta restrição obtivemos a limitação no parâmetro solitônico τ : $\tau = -(2, 1 \pm 2, 3) \times 10^{-5}$. A massa puntual solitônica contradiz esta restrição. Obviamente, soluções com $\tau = \sum_{i=1}^N d_i \gamma_i = 0$ satisfazem este limite. Esta é uma nova classe de soluções solitônicas. Para estas soluções, temos $\gamma_s = 1$, como na relatividade geral, e, portanto, é experimentalmente impossível diferenciar estes modelos de Kaluza-Klein da relatividade geral. Por esta razão chamamos estas soluções de sólitons latentes. Para os sólitons latentes as equações de estado são $p_0 = 0$ no espaço externo e $p_i = [(\gamma_i - 1)/2]\varepsilon$ nos espaços internos. Todos esses resultados foram obtidos para o caso realista do espaço externo tridimensional. Gostaríamos de destacar mais uma vez que os sólitons latentes satisfazem os experimentos gravitacionais mencionados acima com o mesmo nível de precisão da relatividade geral. Cordas negras ($N = 1, d_1 = 1$) e membranas negras ($N > 1$) são caracterizadas pela condição de que para todo $\gamma_i = 0, i \geq 1$. Portanto, elas pertencem à classe de sólitons latentes e possuem as equações de estado $p_i = -1/2\varepsilon, i = 1, \dots, N$. Sabe-se que, no caso do espaço externo tridimensional, tais equações de estado são as únicas que não quebram a condição de estabilidade do espaço interno para o objeto compacto astrofísico com equação de estado tipo poeira ($p_0 = 0$) no espaço externo [2].

Na seção 6.2, consideramos um fluido perfeito esfericamente simétrico, estático e multidimensional com equação de estado tipo poeira ($p_0 = 0$) no espaço externo e equações arbitrárias de estado ($p_i = \omega_i \varepsilon$) nos espaços internos. O número de dimensões do espaço externo d_0 foi considerado arbitrário. No caso $d_0 = 3$, tais fluidos perfeitos descrevem objetos astrofísicos observáveis em modelos de Kaluza-Klein. Fizemos nossas análises no limite de campo fraco, onde os coeficientes da métrica podem ser expressos na forma $g_{00} \approx 1 + h_{00}$, $g_{\alpha\alpha} \approx -1 + h_{\alpha\alpha}$, $a = 1, \dots, D$; e $h_{00}, h_{\alpha\alpha} \sim \mathcal{O}(1/c^2)$ (lembrando que $h_{\alpha\alpha}, \alpha = 1, \dots, d_0$ descreve perturbações no espaço externo e $h_{\mu_i\mu_i}, i = 1, \dots, N$ descreve perturbações nos

espaços internos). Mostramos que a exigência da concordância com os experimentos gravitacionais até o mesmo nível de precisão da relatividade geral, $h_{00} = h_{\alpha\alpha}$, resulta em uma restrição para os parâmetros ω_i , que coincide exatamente com a condição de sóliton latente, $\sum_{i=1}^N d_i \gamma_i = 0$, no caso em que $d_0 = 3$. Em outras palavras, para $d_0 = 3$, as equações de estado no espaço interno são $p_i = [(\gamma_i - 1)/2]\varepsilon$. A exigência adicional $h_{\mu_i\mu_i} = 0$, juntamente com a condição anterior $h_{00} = h_{\alpha\alpha}$, (i) leva à equação $\omega_i = -1/2$ (i.e. $\gamma_i = 0$) e (ii) seleciona $d_0 = 3$. Portanto, chegamos às equações de estado nos espaços internos da corda/membrana negra. Precisamente estas equações (complementadas pela condição $p_0 = 0$) satisfazem a condição de estabilidade do espaço interno no caso $d_0 = 3$. Vimos que as seções 6.1 e 6.2 concordam uma com a outra, como era de se esperar.

Podemos resumir a principal conclusão desta dissertação da seguinte maneira: Para objetos astrofísicos compactos com equação de estado tipo poeira no espaço externo ($p_0 = 0$), a exigência de concordância com os experimentos gravitacionais demanda a condição (6.7), isto é, $\tau = -(2, 1 \pm 2, 3) \times 10^{-5}$. No entanto, para estar no mesmo nível de precisão da relatividade geral devemos ter $\tau = 0$. Em outras palavras, devemos considerar os sólitons latentes com equações de estado (6.8) nos espaços internos (no caso em que $d_0 = 3$). Além disso, a condição de estabilidade dos espaços internos distingue as cordas/membranas negras dos sólitons latentes e leva exclusivamente a $p_i = -\varepsilon/2$ como a equação de estado nos espaços internos das cordas/membranas negras, e o número de dimensões externas $d_0 = 3$. O principal problema relacionado com as cordas/membranas negras é encontrar um mecanismo fisicamente razoável que possa explicar como as partículas ordinárias formando os objetos astrofísicos podem ter equações de estado tão específicas ($p_i = -\varepsilon/2$) nos espaços internos.

Referências Bibliográficas

- [1] M. Eingorn e A. Zhuk, Phys. Rev. D **83**, 044005 (2011); (arXiv:gr-qc/1010.5740).
- [2] M. Eingorn, O. R. Medeiros, L. C. B. Crispino e A. Zhuk, Phys. Rev. D **84**, 024031 (2011); (arXiv:gr-qc/1101.3910v3).
- [3] M. P. Hobson, G. Efstathiou e A. N. Lasenby. *General Relativity - An Introduction for Physicists* (Cambridge University Press, Cambridge, 2006).
- [4] R. D’Inverno, *Introducing Einstein’s Relativity* (Clarendon Press, Oxford, 1992).
- [5] S. M. Carroll, *Spacetime and Geometry - An Introduction to General Relativity* (Addison Wesley, San Francisco, 2004).
- [6] P. Halpern, Physics in Perspective **9**, 309 (2007).
- [7] H. Liu e P. S. Wesson, Phys. Lett. B **381**, 420 (1996).
- [8] R. D. Sorkin, Phys. Rev. Lett. **51**, 87 (1983).
- [9] A. Davidson e D. Owen, Phys. Lett. B **155**, 247 (1985).
- [10] P. S. Wesson, Phys. Lett. B **276**, 299 (1992).
- [11] M. Eingorn e A. Zhuk, Class. Quant. Grav. **27**, 205014 (2010); (arXiv:gr-qc/1003.5690).
- [12] J. P. de Leon, Grav. Cosmol. **15**, 345 (2009); (arXiv:gr-qc/0905.2010).
- [13] M. Eingorn e A. Zhuk, Phys. Rev. D **80**, 124037 (2009); (arXiv:hep-th/0907.5371).

- [14] M. Eingorn e A. Zhuk, *Class. Quant. Grav.* **27**, 055002 (2010); (arXiv:gr-qc/0910.3507).
- [15] C. M. Will, *Theory and Experiment in Gravitational Physics* (Cambridge University Press, Cambridge, 1981).
- [16] L. D. Landau e E. M. Lifshitz, *The Classical Theory of Fields, 4ª edição, Volume 2* (Pergamon Press, Oxford, 2000).
- [17] A. Eddington, *The Mathematical Theory of Relativity* (Cambridge University Press, Cambridge, 1924).
- [18] H. P. Robertson, *Relativity and Cosmology* (Academic Press, New York, 1962).
- [19] L. L. Schiff, *Comparison of theory and observation in general relativity* (American Mathematical Society, Providence, 1967).
- [20] L. D. Landau e E. M. Lifshitz, *Mechanics, 3ª edição, Volume 1* (Pergamon Press, Oxford, 2000).
- [21] N. Straumann, *General Relativity and Relativistic Astrophysics* (Springer-Verlag, Berlin, 1984).
- [22] C. M. Will, *100 Years of Relativity: Space-time Structure: Einstein and Beyond*, editado por A. Ashtekar (World Scientific, Singapore, 2005); (arXiv:gr-qc/0504086).
- [23] B. Bertotti, L. Iess e P. Tortora, *Nature* **425**, 374 (2003).
- [24] D. Kramer, *Acta Phys. Polon. B* **2**, 807 (1970).
- [25] D. J. Gross e M. J. Perry, *Nucl. Phys. B* **226**, 29 (1983).