

Modos Quasinormais e Pólos de Regge para os Buracos  
Acústicos Canônicos

Leandro Amador de Oliveira

Orientador: Prof. Dr. Luís Carlos Bassalo Crispino

Belém - PA

8 de outubro de 2010



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ  
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA  
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

# Modos Quasinormais e Pólos de Regge para os Buracos Acústicos Canônicos

Leandro Amador de Oliveira

Orientador: Prof. Dr. Luís Carlos Bassalo Crispino

---

Prof. Dr. Luís Carlos Bassalo Crispino

---

Prof. Dr. Dionisio Bazeia Filho

---

Prof. Dr. Clovis Achy Soares Maia

---

Prof. Dr. Danilo Teixeira Alves

## Agradecimentos

- Ao meu pai Edson Alves de Oliveira e minha mãe Lia da Silva Amador por terem me apoiado em todos os momentos da minha vida.
- Aos meus colegas de graduação e mestrado pelo incentivo moral nos momentos difíceis.
- Aos professores que tive na graduação e no mestrado pelo bons cursos ministrados.
- Ao professor Dr. Luís Carlos Bassalo Crispino pelo seu incentivo desde o curso de Física Elementar I na graduação e pela excelente orientação durante o mestrado.
- Ao Dr. Samuel R. Dolan pela excelente e proveitosa colaboração durante o mestrado.
- Aos meus colegas do GTQCEC pelas discussões durante as reuniões semanais de grupo.

## Resumo

Usando o formalismo relativístico no estudo da propagação de perturbações lineares em fluidos ideais, obtêm-se fortes analogias com os resultados encontrados na Teoria da Relatividade Geral. Neste contexto, de acordo com Unruh [W. Unruh, Phys. Rev. Letters **46**, 1351 (1981)], é possível simular um espaço-tempo dotado de uma métrica efetiva em um fluido ideal barotrópico, irrotacional e perturbado por ondas acústicas. Esse espaço-tempo efetivo é chamado de espaço-tempo acústico e satisfaz as propriedades geométricas e cinemáticas de um espaço-tempo curvo. Neste trabalho estudamos os modos quasinormais (QNs) e os pólos de Regge (PRs) para um espaço-tempo acústico conhecido como buraco acústico canônico (BAC). No nosso estudo, usamos o método de expansão assintótica proposto por Dolan e Ottewill [S. R. Dolan e A. C. Ottewill, Class. Quantum Gravity **26**, 225003 (2009)] para calcularmos, em termos arbitrários do número de *overtone*  $n$ , as frequências QNs e os momentos angulares para os PRs, bem como suas respectivas funções de onda. As frequências e as funções de onda dos modos QNs são expandidas em termos de potências inversas de  $L = l + \frac{1}{2}$ , onde  $l$  é o momento angular, enquanto que os momentos angulares e funções de onda dos PRs são expandidos em termos do inverso das frequências de oscilação do buraco acústico canônico. Comparamos os nossos resultados com os já existentes na literatura, que usam a aproximação de Wentzel-Kramers-Brillouin (WKB) como método de determinação dos modos QNs e dos PRs, e obtemos uma excelente concordância dentro do limite da aproximação eikonal ( $l \geq 2$  e  $l \gtrsim n$ ).

**Palavras-chave:** Espaços-Tempos Acústicos, Perturbações Lineares, Buracos Acústicos

**Áreas de Conhecimento:** 1.05.01.03-7, 1.05.03.01-3.

## Abstract

Using the relativistic framework in the study of the propagation of linear perturbations in ideal fluids, we obtain a strong analogy with the results found in the Theory of General Relativity. In this context, according to Unruh [W. Unruh, Phys. Rev. Letters **46**, 1351 (1981)], it is possible to mimic a spacetime with an effective metric in an ideal fluid, barotropic, irrotational and perturbed by acoustic waves. These spacetimes are called acoustic spacetimes and satisfy the geometric and kinematic properties of a curved spacetimes. In this work, we study the quasinormal modes and the Regge poles for the so called canonical acoustic hole. In our study, we use an asymptotic expansion method proposed by Dolan e Ottewill [S. R. Dolan and A. C. Ottewill, Class. Quantum Gravity **26**, 225003 (2009)] to compute, for arbitrary overtones  $n$ , the quasinormal frequencies and angular momentum of the Regge poles, as well as their correspondent wavefunctions. The quasinormal frequencies and quasinormal wavefunction are expanded in inverse powers of  $L = l + \frac{1}{2}$ , where  $l$  is the angular momentum, while the angular momentum and wavefunction of the Regge poles are expanded in inverse powers of the frequency of oscillation of the canonical acoustic hole. We validate our results against existing ones obtained using Wentzel-Kramers-Brillouin (WKB) approximation, and we obtain excellent agreement in the limit of the eikonal approximation ( $l \geq 2$  e  $l \gtrsim n$ ).

**Keywords:** Acoustic Spacetimes, Linear Perturbations, Acoustic Holes

**Knowledge areas:** 1.05.01.03-7, 1.05.03.01-3.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>Introdução à Mecânica dos Fluidos Ideais e à Propagação do Som</b>	<b>7</b>
2.1	Teorema do Transporte de Reynolds . . . . .	8
2.2	Equação da Continuidade . . . . .	10
2.3	Conservação do Fluxo de Momento . . . . .	10
2.4	Equação de Bernoulli . . . . .	11
2.5	Conservação do Fluxo Energético em um Fluido Ideal . . . . .	12
2.6	A Propagação de uma Perturbação Linear em Fluidos Ideais . . . . .	14
<b>3</b>	<b>A Métrica Acústica Geral e o Buraco Acústico Canônico</b>	<b>18</b>
3.1	A Métrica Acústica Geral . . . . .	18
3.2	A Métrica do Buraco Acústico Canônico . . . . .	20
3.3	Geodésicas Nulas no Buraco Acústico Canônico . . . . .	22
3.4	Órbitas Nulas no Espaço-Tempo do Buraco Acústico Canônico . . . . .	26
3.5	Frequência Orbital e o Expoente de Lyapunov para as Órbitas Nulas . . . . .	29
<b>4</b>	<b>Os Modos Quasinormais do Buraco Acústico Canônico</b>	<b>30</b>
4.1	Perturbações Lineares no Buraco Acústico Canônico . . . . .	30
4.2	O Método de Expansão Assintótica dos Modos Quasinormais do Buraco Acústico Canônico . . . . .	34
4.2.1	Os Modos Quasinormais . . . . .	34
4.2.2	As Frequências Quasinormais Fundamentais ( $n = 0$ ) . . . . .	36
4.2.3	As Funções de Onda Quasinormais Fundamentais ( $n = 0$ ) . . . . .	40

4.2.4	Os Modos Quasinormais para Valores Arbitrários dos Números de Overtone $n$ . . . . .	43
4.2.5	Frequência Orbital e o Expoente de Lyapunov . . . . .	48
<b>5</b>	<b>Os Pólos Regge para o Buraco Acústico Canônico</b>	<b>50</b>
5.1	Método da Expansão Assintótica aplicado aos Pólos de Regge . . . . .	50
5.2	Resultados Numéricos para os PRs . . . . .	53
<b>6</b>	<b>Conclusão</b>	<b>60</b>

# Capítulo 1

## Introdução

Um dos resultados mais importantes obtidos na Física da segunda metade do século XX é o de que buracos negros devem evaporar. Em 1974, Stephen William Hawking demonstrou, usando elementos de Mecânica Quântica e da Teoria da Relatividade Geral, que buracos negros emitem uma radiação térmica proveniente do seu horizonte de eventos e cuja temperatura é  $hc^3/8\pi kGM$ . Esta radiação térmica ficou sendo conhecida como radiação Hawking [1, 2, 3]. A confirmação experimental de que a radiação Hawking existe ainda não foi obtida. Isto se deve ao fato de que os possíveis buracos negros existentes em nossa galáxia devem emitir esta radiação a temperaturas muito baixas e impossíveis de serem medidas por quaisquer aparatos experimentais existentes atualmente. Uma das alternativas para a busca da confirmação experimental da emissão de radiação por objetos como os buracos negros surgiu no estudo de modelos análogos à gravitação em fluidos ideais. Em 1981, William George Unruh mostrou, no contexto da Mecânica dos Fluidos, que é possível obter um espaço-tempo curvo efetivo experimentado por ondas sonoras que se propagam em um fluido ideal, barotrópico e irrotacional [4]. Neste contexto, é possível simular um espaço-tempo efetivo em um fluido ideal barotrópico e irrotacional no qual se conheça o regime de escoamento, a densidade e como as ondas sonoras se propagam nele. As ondas sonoras se propagam em um fluido ideal analogamente como um campo escalar de Klein-Gordon em um espaço-tempo curvo da Relatividade Geral [5]. Recentemente, os estudos sobre os buracos acústicos se diversificaram bastante e não ficaram restritos à análise do efeito da radiação Hawking [6], podemos citar como exemplos os trabalhos sobre a superradiância



de ondas sonoras em fluidos [7, 8], a criação de fônons em análogos de espaços-tempos de Robertson-Walker em condensados de Bose-Einstein [9] e os modos quasinormais (QNs) e os pólos de Regge (PRs) em buracos acústicos [10, 11, 12, 13, 14]. O entendimento dos modos QNs e dos PRs de buracos negros e buracos acústicos é de grande importância na descrição desses objetos físicos, já que os modos QNs e os PRs “carregam” consigo as informações que caracterizam totalmente os buracos negros e os buracos acústicos, como se fossem as “impressões digitais” desses objetos. Os modos QNs são oscilações naturais do espaço-tempo que se propagam como uma perturbação linear. Como os modos QNs representam as oscilações de um sistema (espaço-tempo) aberto, ou seja, um sistema que perde energia na forma de radiação emitida para o infinito, é impossível representar as oscilações QNs em termos de uma superposição de modos estacionários, já que as oscilações do espaço-tempo são amortecidas. Por essa razão é que os modos QNs são definidos apenas para certo intervalo finito de tempo [15]. Os modos QNs têm sido intensivamente investigados ao longo dos anos para sistemas como buracos negros e estrelas relativísticas. Recentemente, alguns estudos dos modos QNs, também, foram realizados para os buracos acústicos.

No caso dos PRs, por eles satisfazerem a mesma equação diferencial e obedecerem a uma condição de contorno semelhante a dos modos QNs, eles se parecem bastante, matematicamente, com os modos QNs. Porém, diferentemente dos modos QNs, a frequência de oscilação para os PRs é real, enquanto que o momento angular é complexo. Os PRs são um conceito chave no estudo do espalhamento, principalmente aplicado aos buracos negros e, recentemente, aplicado aos buracos acústicos [16]. Assim, para se ter um entendimento mais amplo sobre a física de buracos negros e de buracos acústicos torna-se importante o estudo aprofundado dos modos QNs e dos PRs desses objetos físicos.

Neste trabalho estudamos os modos quasinormais (QNs) e os pólos de Regge (PRs) para um espaço-tempo acústico conhecido como buraco acústico canônico (BAC). O espaço-tempo do BAC é construído considerando-se que o regime de escoamento do fluido seja puramente radial, esfericamente simétrico, barotrópico, convergente e que contenha regiões onde o fluxo radial seja supersônico, gerando assim um horizonte de eventos acústico [5]. No nosso estudo, usamos um método de expansão assintótica [14] para calcularmos, para um número de *overtone*  $n$  arbitrário, as frequências QNs e os momentos angulares para os PRs,

bem como suas respectivas funções de onda [17]. As frequências e as funções de onda QNs são expandidas em termos de potências inversas de  $L = l + \frac{1}{2}$ , onde  $l$  é o momento angular, enquanto que os momentos angulares e funções de onda dos PRs são expandidos em termos do inverso das frequências de oscilação do buraco acústico canônico. Comparamos os nossos resultados com os já existentes na literatura, que usam a aproximação de Wentzel-Kramers-Brillouin (WKB) como método de determinação dos modos QNs e dos PRs dentro do limite da aproximação eikonal ( $l \geq 2$  e  $l \gtrsim n$ ) [10].

Em todo o trabalho fazemos uso do formalismo matemático da Álgebra e da Análise Tensorial. Usamos a notação indicial devida a Albert Einstein, na qual é suprimido o uso do símbolo de somatório de índices repetidos, ficando implícita a soma entre as componentes cujos índices se repetem. Convencionamos o uso dos índices em letras gregas para caracterizar grandezas quadridimensionais e os índices em letras latinas para caracterizar as grandezas tridimensionais espaciais. Convencionamos a assinatura das métricas como sendo  $(- + + +)$ . Além disso, no intuito de facilitar a notação, usaremos as unidades nas quais a velocidade do som é  $c = 1$ .

## Capítulo 2

# Introdução à Mecânica dos Fluidos Ideais e à Propagação do Som

A mecânica dos fluidos ideais estuda o movimento e o comportamento macroscópico de líquidos e gases desprezando quaisquer efeitos devido à viscosidade, às reações químicas e nucleares. Um fluido é tratado como um meio contínuo, o que significa dizer que um elemento de volume é sempre maior do que um volume contendo um grande número de moléculas deste fluido. Podemos descrever o comportamento do fluido, localmente, por meio da análise de como variam com o tempo e a posição, em determinado sistema de coordenadas, variáveis como a pressão, densidade e o campo de velocidades dos seus elementos de volume. Isto pode ser feito por intermédio de duas abordagens: a abordagem Lagrangiana e a abordagem Euleriana. Na abordagem Lagrangiana, o observador monitora o comportamento das variáveis dinâmicas (pressão, densidade e velocidade) de um único elemento de volume do fluido. Nessa abordagem, o elemento de volume do fluido é tratado como uma partícula com massa constante, sendo sempre composto pelas mesmas moléculas do fluido. Na abordagem Euleriana, o observador mantém-se fixo no referencial de fundo do fluido e monitora o comportamento das grandezas dinâmicas por meio de um volume de controle. O volume de controle é uma entidade geométrica, que pode ser fixa ou móvel, e independente do fluido, servindo apenas para caracterizar o comportamento do fluido que passa nessa região em determinado instante [18]. Assim, a massa e as moléculas que compõem o volume de controle podem não ser necessariamente as mesmas. Podemos obter uma equação

que traduz a relação entre essas duas abordagens. Para isso, aplicamos a derivada total em relação ao tempo em uma função  $F(\vec{r}, t)$ , que depende da posição e do tempo e que representa as grandezas físicas características desse fluido, a saber

$$\frac{dF(\vec{r}, t)}{dt} = \frac{\partial F(\vec{r}, t)}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla F(\vec{r}, t). \quad (2.1)$$

Esta expressão é conhecida como derivada material. A derivada total nesta equação representa a descrição Lagrangiana e a derivada parcial representa a descrição Euleriana.

## 2.1 Teorema do Transporte de Reynolds

O teorema do transporte de Reynolds é de fundamental importância na determinação das equações que expressam a dinâmica e as leis de conservação do fluido ideal.

Para mostrarmos o teorema do transporte Reynolds, consideremos, primeiramente, a seguinte derivada total em relação ao tempo da integral no volume  $V$  de uma função tensorial  $F(\vec{r}, t)$ :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_V F(\vec{r}, t) dV &= \int_V \left[ \frac{dF}{dt} dV + F \frac{d}{dt} (dV) \right] \therefore \\ \frac{d}{dt} \int_V F(\vec{r}, t) dV &= \int_V \left[ \left( \frac{\partial F(\vec{r}, t)}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla F(\vec{r}, t) \right) dV + F \frac{d}{dt} (dV) \right], \end{aligned} \quad (2.2)$$

onde  $V$  é definido como um volume descrito pela abordagem lagrangiana.

Pela abordagem lagrangiana, a porção ocupada pelo elemento de volume  $dV$  do fluido é tratado como sendo uma partícula com propriedades intrínsecas associadas e, dependendo do regime de escoamento do fluido, seu volume pode variar com o tempo. É por essa razão que atuamos a derivada total em relação ao tempo no elemento  $dV$  dentro da integral. Determinamos a seguir como se obtém a expressão para  $\frac{d}{dt} (dV)$ .

Seja um elemento de volume  $dV$  do fluido, representado por um cubo, no qual seu centro desloca-se com velocidade  $\vec{v} = v_x(x, y, z) \hat{i} + v_y(x, y, z) \hat{j} + v_z(x, y, z) \hat{k}$ . As faces do cubo cujos versores apontam na direção do movimento movem-se com as seguintes velocidades:  $v_x(x + \frac{dx}{2}, y, z)$ ,  $v_y(x, y + \frac{dy}{2}, z)$  e  $v_z(x, y, z + \frac{dz}{2})$ . As faces do cubo cujos versores apontam

na direção oposta ao movimento movem-se com as seguintes velocidades:  $v_x(x - \frac{dx}{2}, y, z)$ ,  $v_y(x, y - \frac{dy}{2}, z)$  e  $v_z(x, y, z - \frac{dz}{2})$ . A variação total do elemento de volume do fluido pode ser decomposta como variações independentes em relação às coordenadas  $(x, y, z)$ , a saber,

$$d(dV) = d(dv)_x + d(dv)_y + d(dv)_z, \quad (2.3)$$

onde

$$d(dv)_x = v_x(x + dx)dtdydz - v_x(x)dtdydz,$$

$$d(dv)_y = v_y(y + dy)dtdxdz - v_y(y)dtdxdz,$$

$$d(dv)_z = v_z(z + dz)dtdydx - v_z(z)dtdydx. \quad (2.4)$$

Como o cubo com volume  $dV$  é considerado bem pequeno (infinitesimal), podemos considerar que  $v_x(x + dx) = v_x(x) + \frac{\partial v_x}{\partial x} dx$ ,  $v_y(y + dy) = v_y(y) + \frac{\partial v_y}{\partial y} dy$  e  $v_z(z + dz) = v_z(z) + \frac{\partial v_z}{\partial z} dz$ . Assim, encontramos:

$$\frac{d}{dt}dV = \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) dV \therefore$$

$$\frac{d}{dt}dV = (\nabla \cdot \vec{v}) dV. \quad (2.5)$$

Esta expressão é conhecida como fórmula da expansão de Euler [19]. Substituindo (2.5) em (2.2), encontramos

$$\frac{d}{dt} \int_V F(\vec{r}, t) dV = \int_V \left[ \frac{\partial F(\vec{r}, t)}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{v}F(\vec{r}, t)) \right] dV. \quad (2.6)$$

Este é conhecido como o teorema do transporte de Reynolds. A partir desse teorema podemos obter as equações da continuidade e a equação de Euler.

É interessante notar que, assim como a expressão (2.1), o teorema do transporte de Reynolds tem o papel de realizar uma perfeita “tradução” entre as abordagens lagrangiana e a euleriana: o lado esquerdo representa a abordagem lagrangiana e o lado direito representa a abordagem euleriana.

## 2.2 Equação da Continuidade

Consideremos que a função  $F(\vec{r}, t)$  represente a densidade volumétrica de massa do fluido, isto é

$$F(\vec{r}, t) = \rho(\vec{r}, t). \quad (2.7)$$

Então a equação (2.6) assume a seguinte forma

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho(\vec{r}, t) dV = \int_V \left[ \frac{\partial \rho(\vec{r}, t)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho(\vec{r}, t) \vec{v}) \right] dV. \quad (2.8)$$

A massa total contida no volume  $V$  é dada por

$$M = \int_V \rho dV. \quad (2.9)$$

Na ausência de fontes e sorvedouros de matéria, a massa total do fluido deve permanecer a mesma

$$\frac{dM}{dt} = 0. \quad (2.10)$$

Assim,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0. \quad (2.11)$$

Esta expressão é conhecida como equação da continuidade e é a lei de conservação de massa em um fluido sem a presença de fontes e nem de sorvedouros de matéria.

## 2.3 Conservação do Fluxo de Momento

Agora consideremos que a função  $F(\vec{r}, t)$  represente as componentes cartesianas da densidade de momento de um elemento de volume do fluido, a saber

$$F(\vec{r}, t) = \rho v_i. \quad (2.12)$$

Substituindo (2.12) na expressão (2.6), encontramos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_V \rho v_i dV &= \int_V \left[ \frac{\partial \rho v_i}{\partial t} + \partial_j (\rho v_i v_j) \right] dV \therefore \\ \frac{d}{dt} \int_V \rho v_i dV &= \int_V \left[ \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho v_i \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \partial_j (\rho v_j) \right) + \rho v_j \partial_j v_i \right] dV. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Usando a equação da continuidade, a equação (2.13) fica

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho v_i dV = \int_V \left[ \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho v_j \partial_j v_i \right] dV. \quad (2.14)$$

As forças que atuam no elemento de volume do fluido podem ser divididas em duas categorias, a saber: as forças volumétricas e as forças superficiais. Neste trabalho consideramos que a única força superficial que atua no elemento de fluido é devida à pressão exercida por elementos de volume vizinhos e que a única força volumétrica que atua no elemento de volume é devida à presença de um campo gravitacional externo devido a um potencial. Assim, a força resultante em um elemento de volume do fluido é [20]

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho v_i dV = - \int_V \rho \partial_i \phi dV - \int_S P \delta_{ij} dS_j, \quad (2.15)$$

onde  $\phi$  é o potencial gravitacional externo e  $P$  é a pressão no interior do fluido. Igualando as expressões (2.14) e (2.15), encontramos a seguinte expressão

$$\int_V \left[ \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho v_j \partial_j v_i \right] dV = - \int_V \rho \partial_i \phi dV - \int_S P \delta_{ij} dS_j. \quad (2.16)$$

Usando o Teorema de Gauss em

$$\int_S P \delta_{ij} dS_j = \int_V \partial_i P dV, \quad (2.17)$$

chegamos à seguinte expressão:

$$\int_V \left[ \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho v_j \partial_j v_i + \rho \partial_i \phi + \partial_i P \right] dV = 0, \quad (2.18)$$

que pode ser reescrita como

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} + \nabla \phi + \frac{\nabla P}{\rho} = 0, \quad (2.19)$$

sendo conhecida como equação de Euler. Esta equação é também chamada de 2ª Lei de Newton para os fluidos ideais, pois é a equação que expressa a dinâmica dos fluidos.

## 2.4 Equação de Bernoulli

Primeiramente, antes de deduzirmos a equação de Bernoulli, vamos definir matematicamente a grandeza chamada de vorticidade:

$$\vec{\omega} \equiv \nabla \times \vec{v}. \quad (2.20)$$

A vorticidade  $\vec{\omega}$  representa a velocidade angular de cada elemento de volume do fluido [21].

Usando a seguinte identidade da Análise Vetorial

$$\vec{v} \times (\nabla \times \vec{v}) = \frac{1}{2} \nabla v^2 - (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}, \quad (2.21)$$

bem como a expressão (2.20) na equação de Euler (2.19), encontramos

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \nabla \left( \frac{v^2}{2} + \phi \right) + \frac{\nabla P}{\rho} - \vec{v} \times \vec{\omega} = 0, \quad (2.22)$$

que é conhecida como equação de Bernoulli. A equação de Bernoulli tem papel análogo à equação de Euler. A diferença básica entre essas duas equações é que a equação de Bernoulli envolve a grandeza vorticidade.

## 2.5 Conservação do Fluxo Energético em um Fluido Ideal

A densidade de energia total de um elemento de volume de um fluido ideal é dada pela seguinte expressão:

$$E = \frac{1}{2} \rho |\vec{v}|^2 + \rho u + \rho \phi, \quad (2.23)$$

onde  $u$  é a densidade de energia interna por unidade de massa e por unidade de partículas,  $\vec{v}$  é velocidade de escoamento do fluido e  $\phi$  é o potencial gravitacional exterior.

No lado direito da equação acima o primeiro termo corresponde à densidade de energia cinética, o segundo termo corresponde à densidade de energia interna e o último refere-se à densidade de energia gravitacional.

Em Termodinâmica, sabe-se que em um sistema no qual o número de partículas se mantém constante, a energia interna por unidade de partículas  $U$  é um parâmetro extensivo, sendo apenas função da sua entropia por unidade de partículas  $S$  e do seu volume por unidade de partículas  $V$ , isto é

$$U = U(S, V). \quad (2.24)$$

A Primeira Lei da Termodinâmica, na representação da energia interna, pode ser escrita como

$$dU = TdS - PdV, \quad (2.25)$$



onde  $T$  é a temperatura e  $V$  é o volume do sistema. Definimos, agora, as seguintes variáveis termodinâmicas:

$$\begin{aligned} u &\equiv \frac{U}{m}, \\ s &\equiv \frac{S}{m}, \\ \rho &\equiv \frac{m}{V}, \end{aligned} \tag{2.26}$$

onde  $u$  e  $s$  são, respectivamente, energia interna e entropia (por unidade de partícula e unidade de massa) e  $m$  e  $\rho$ , são, respectivamente, a massa e a densidade do elemento de volume. Substituindo as definições (2.26) na 1ª Lei da Termodinâmica, dada por (2.25), encontramos a seguinte expressão:

$$du = Tds + \frac{P}{\rho^2}d\rho. \tag{2.27}$$

Agora, reescrevemos a 1ª Lei da Termodinâmica dada em (2.27) na forma da entalpia. Para isso, definimos a entalpia  $h$  (por unidade de partículas e unidade de massa) como sendo a transformada de Legendre da energia interna, a saber:

$$h = u + \frac{P}{\rho}. \tag{2.28}$$

Substituindo (2.28) na expressão (2.27), obtemos a 1ª Lei da Termodinâmica na representação da entalpia:

$$dh = Tds + \frac{1}{\rho}dP. \tag{2.29}$$

Aplicando a derivada parcial em relação ao tempo na densidade de energia total dada por (2.23), encontramos

$$\frac{\partial}{\partial t}E = \frac{1}{2}|v|^2\frac{\partial\rho}{\partial t} + \rho\vec{v} \cdot \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \rho\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial\rho}{\partial t} + \phi\frac{\partial\rho}{\partial t}. \tag{2.30}$$

Substituindo a equação da continuidade, a equação de Euler, a definição de entalpia dada em (2.28) e a 1ª Lei da Termodinâmica na forma da entalpia na expressão (2.30), encontramos

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2}\rho|\vec{v}|^2 + \rho u + \rho\phi \right) + \nabla \cdot \left[ \vec{v} \left( \frac{1}{2}\rho|\vec{v}|^2 + \rho u + \rho\phi \right) + P\vec{v} \right] = \rho T \frac{ds}{dt}. \tag{2.31}$$

Esta expressão nos mostra que, se a entropia for constante para um observador que segue o elemento de volume, o fluxo enérgico do fluido se conserva. Considerando a entropia constante para um observador que segue o elemento de volume, podemos reescrever a expressão (2.31) na seguinte forma

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{v}E) + \nabla \cdot (\vec{v}P) = 0, \quad (2.32)$$

que nos diz que em um fluido ideal a energia total se conserva e que o agente responsável pelas transferências internas de energia é a pressão no interior do fluido [22].

## 2.6 A Propagação de uma Perturbação Linear em Fluidos Ideais

Nas seções anteriores obtivemos a equação da continuidade e a equação de Bernoulli. Estas equações descrevem o comportamento de um fluido ideal. Temos assim um sistema constituído de quatro equações diferenciais e cinco variáveis  $(\rho, P, \vec{v})$  a serem determinadas, desta forma, impossibilitando a resolução do problema. Essa dificuldade é contornada pela análise do comportamento termodinâmico do fluido ideal e, também, impondo-se algumas restrições a suas variáveis dinâmicas. No intuito de preservar a conservação da energia no fluido como um todo, assumimos que sua entropia é constante em todo seu volume. Fluidos com essa característica são chamados de isentrópicos. Desta forma, se considerarmos que a entalpia  $h$  e a pressão no interior do fluido  $P$  não variem com o tempo (Termodinâmica de equilíbrio), a 1ª Lei da Termodinâmica na representação da entalpia, dada por (2.29), assume a seguinte forma:

$$\nabla h = \frac{\nabla P}{\rho}. \quad (2.33)$$

Para que o campo de velocidades seja um campo conservativo e que possa ser obtido exclusivamente por meio de um potencial escalar, é necessário que consideremos o escoamento do fluido ideal como irrotacional. Isto pode ser feito considerando-se que a vorticidade no fluido é nula, isto é:

$$\vec{\omega} = 0. \quad (2.34)$$

Segundo a Análise Vetorial, todo campo vetorial que possui rotacional nulo pode ser definido como o gradiente de um campo escalar. Como em um fluido irrotacional o  $\nabla \times \vec{v} = 0$  [cf. Eq. (2.20)], podemos definir o campo de velocidades por meio da seguinte expressão:

$$\vec{v} = -\nabla\Phi, \quad (2.35)$$

onde  $\Phi$  é o potencial de velocidade de escoamento do fluido.

Com essas considerações, podemos escrever um conjunto completo com três equações diferenciais e três variáveis a serem determinadas, a saber:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\vec{v}) = 0, \quad (2.36)$$

$$-\frac{\partial\Phi}{\partial t} + h + \frac{1}{2}|\nabla\Phi|^2 + \phi = 0, \quad (2.37)$$

$$\rho = \rho(P). \quad (2.38)$$

A dinâmica geral do escoamento de um fluido ideal barotrópico e irrotacional é determinada a partir da solução desse conjunto de três equações diferenciais. Neste trabalho estudaremos especificamente o escoamento de um fluido ideal perturbado pela propagação de uma onda sonora.

A seguir, linearizemos esse conjunto de três equações a fim de escrever uma equação diferencial para a propagação de uma perturbação linear no fluido ideal. Neste caso, descrevemos matematicamente a propagação de uma perturbação linear nas variáveis dinâmicas do fluido da seguinte maneira:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 - \epsilon\nabla\Phi_1, \quad (2.39)$$

$$P = P_0 + \epsilon P_1, \quad (2.40)$$

$$\rho = \rho_0 + \epsilon\rho_1, \quad (2.41)$$

onde as variáveis  $\{\vec{v}_0, P_0, \rho_0\}$  descrevem o fluido no seu estado de equilíbrio e são soluções exatas das equações (2.36), (2.37), (2.38), respectivamente. As variáveis  $\{\nabla\Phi_1, P_1, \rho_1\}$  cor-

respondem à perturbação no fluido devido à propagação da onda sonora e  $\epsilon$  é o parâmetro perturbativo. Note que, com essas considerações particulares, só podemos descrever a dinâmica de escoamento de um fluido perturbado linearmente por ondas sonoras, isto é, ondas cuja principal característica é perturbar linearmente as grandezas do fluido em equilíbrio como a densidade, a pressão e a velocidade de escoamento. A descrição da dinâmica de escoamento de um fluido ideal cujas grandezas não variem de forma linear foge ao escopo desse trabalho.

Substituindo (2.39), (2.40), (2.41) nas equações (2.36), (2.37), encontramos, respectivamente, a equação linearizada da continuidade e a equação linearizada de Bernoulli, a saber:

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} - \nabla \cdot (\rho_0 \nabla \Phi_1) + \nabla \cdot (\rho_1 \vec{v}_0), \quad (2.42)$$

$$P_1 = \rho_0 \left( \frac{\partial \Phi_1}{\partial t} + \vec{v}_0 \cdot \nabla \Phi_1 \right). \quad (2.43)$$

Linearizando a equação de estado (2.38) obtemos:

$$\rho = \rho(P_0) + \left( \frac{d\rho}{dP} \right)_{P=P_0} (P - P_0). \quad (2.44)$$

Considerando que  $\rho(P_0) = \rho_0$  e que  $P - P_0 = \epsilon P_1$ , então temos que:

$$\rho_1 = \frac{1}{c^2} P_1, \quad (2.45)$$

onde  $c$  é uma constante, definida por

$$c = \left( \frac{dP}{d\rho} \right)_{\rho=\rho_0}^{\frac{1}{2}}, \quad (2.46)$$

cujo significado físico será determinado posteriormente.

Ao substituir a expressão dada em (2.43) na equação (2.45) encontramos a seguinte relação:

$$\rho_1 = \frac{1}{c^2} \rho_0 \left( \frac{\partial \Phi_1}{\partial t} + \vec{v}_0 \cdot \nabla \Phi_1 \right). \quad (2.47)$$

Obtemos a equação da propagação do som substituindo (2.47) na equação da continuidade linearizada dada em (2.42):

$$-\frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{1}{c^2} \rho_0 \left( \frac{\partial \Phi_1}{\partial t} + \vec{v}_0 \cdot \nabla \Phi_1 \right) \right] + \nabla \cdot \left[ \rho_0 \nabla \Phi_1 - \frac{1}{c^2} \rho_0 \left( \frac{\partial \Phi_1}{\partial t} + \vec{v}_0 \cdot \nabla \Phi_1 \right) \vec{v}_0 \right] = 0. \quad (2.48)$$

Essa equação diferencial, com condições de contorno apropriadas para o tipo de problema estudado, nos fornece como solução o potencial de velocidades associado à propagação de uma perturbação linear em um fluido ideal barotrópico e irrotacional.

Note que, se considerarmos  $\rho_0 = \text{constante}$  e  $v_0 = 0$  na equação (2.48), ou seja, um fluido incompressível e em repouso, encontramos a seguinte equação diferencial:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial t^2} - \nabla^2 \Phi_1 = 0. \quad (2.49)$$

Esta é a bem conhecida equação da onda em fluidos em repouso [20]. A partir dessa equação, podemos concluir que a constante  $c$  dada na Eq. (2.46) nada mais é do que a velocidade com que a perturbação linear se propaga no fluido ideal, que no nosso caso é a velocidade de propagação do som.

# Capítulo 3

## A Métrica Acústica Geral e o Buraco Acústico Canônico

### 3.1 A Métrica Acústica Geral

Com o auxílio do formalismo matemático usado na Teoria da Relatividade Geral podemos escrever de forma compacta a equação de propagação da onda dada em (2.48). Isto pode ser feito se pensarmos no campo escalar  $\Phi_1$  como sendo um campo clássico definido em um espaço euclidiano quadridimensional coberto pelas coordenadas  $(t, x, y, z)$ . A equação (2.48) pode ser vista como o resultado da aplicação de um operador diferencial em um quadrivetor  $\mathbf{V} = (V_t, \vec{V})$ , a saber:

$$\frac{\partial V_t}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{V} = 0. \quad (3.1)$$

Comparando (3.1) com a equação da onda dada em (2.48), encontramos as seguintes componentes para o quadrivetor  $\mathbf{V}$ :

$$\mathbf{V} = \frac{\rho_0}{c^2} \left( -\frac{\partial \Phi_1}{\partial t} - \vec{v}_0 \cdot \nabla \Phi_1, c^2 \nabla \Phi_1 - \frac{\partial \Phi_1}{\partial t} \vec{v}_0 - (\vec{v}_0 \cdot \nabla \Phi_1) \vec{v}_0 \right). \quad (3.2)$$

No intuito de facilitar a notação, representemos a velocidade de escoamento e a densidade do fluido, respectivamente, por  $\vec{v}$  e  $\rho$ , e o potencial de velocidade que descreve a propagação do som por  $\Phi$ . Assim, a equação (3.1) pode ser reescrita, com o auxílio da notação indicial para objetos matemáticos definidos em um espaço quadridimensional, como sendo

$$\partial_\mu (f^{\mu\nu} \partial_\nu \Phi) = 0, \quad (3.3)$$

onde  $f^{\mu\nu}$  é um tensor de ordem 2, que pode ser representado por uma matriz 4x4, a saber:

$$f^{\mu\nu} = \frac{\rho}{c^2} \begin{bmatrix} -1 & -v_x & -v_y & -v_z \\ -v_x & c^2 - v_x^2 & -v_x v_y & -v_x v_z \\ -v_y & -v_y v_x & c^2 - v_y^2 & -v_y v_z \\ -v_z & -v_z v_x & -v_z v_y & c^2 - v_z^2 \end{bmatrix}. \quad (3.4)$$

Notamos que é possível colocar a equação (3.3) na forma da equação d'Alembertiana do movimento de um campo escalar sem massa e minimamente acoplado a uma geometria Lorentziana em (3+1) dimensões. Para isso, definimos a seguinte densidade tensorial de peso 1 [23]:

$$g^{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} f^{\mu\nu}, \quad (3.5)$$

onde  $g$  é o determinante da inversa de  $g^{\mu\nu}$ , cujo valor é

$$g = -\frac{\rho^4}{c^2}. \quad (3.6)$$

Sendo assim,  $g^{\mu\nu}$  tem a seguinte forma

$$g^{\mu\nu} = \frac{1}{\rho c} \begin{bmatrix} -1 & -v_x & -v_y & -v_z \\ -v_x & c^2 - v_x^2 & -v_x v_y & -v_x v_z \\ -v_y & -v_y v_x & c^2 - v_y^2 & -v_y v_z \\ -v_z & -v_z v_x & -v_z v_y & c^2 - v_z^2 \end{bmatrix}, \quad (3.7)$$

sua inversa  $g_{\mu\nu}$  é

$$g_{\mu\nu} = \frac{\rho}{c} \begin{bmatrix} -(c^2 - v^2) & -v_x & -v_y & -v_z \\ -v_x & 1 & 0 & 0 \\ -v_y & 0 & 1 & 0 \\ -v_z & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

e a equação (3.3) torna-se

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \Phi) = 0. \quad (3.9)$$

Esta equação de campo representa a dinâmica de um campo escalar de Klein-Gordon não massivo que se propaga em um espaço-tempo dotado de uma métrica  $g_{\mu\nu}$ . Desta forma, podemos dizer que a propagação de uma perturbação linear em um fluido ideal barotrópico e irrotacional pode ser descrito fisicamente como sendo a propagação de uma perturbação

linear associada com um campo escalar de Klein-Gordon em uma geometria efetiva. É neste contexto que se dá a analogia entre os espaços-tempos acústicos e os espaços-tempos da Relatividade Geral.

O elemento de linha associado ao tensor métrico (3.8) é dado pela seguinte relação:

$$ds^2 = \frac{\rho}{c} [-(c^2 - v^2) dt^2 - 2\vec{v} \cdot d\vec{x}dt + |d\vec{x}|^2]. \quad (3.10)$$

A perturbação linear (som) neste espaço-tempo efetivo, no limite de altas frequências, segue uma geodésica tipo-luz (ou tipo-som) assim como a luz em um espaço-tempo curvo da Relatividade Geral. Este é um ponto chave da analogia dos espaços-tempos acústicos: o único ente físico capaz de “enxergar” a geometria curva em um fluido ideal é uma perturbação linear, que no caso é o som. Isto porque, como foi mostrado originalmente da referência [4], não existe distinção alguma em representar a propagação de uma perturbação linear por meio de uma equação de onda para fluidos ideais não relativísticos, barotrópicos e irrotacionais, Eq. (2.48), ou por uma equação de Klein-Gordon sem massa em uma geometria curva, Eq. (3.9), que é uma equação de onda relativística.

## 3.2 A Métrica do Buraco Acústico Canônico

O elemento de linha dado em (3.10) caracteriza a geometria do espaço-tempo que as ondas sonoras experimentam ao se propagarem em um fluido ideal barotrópico e irrotacional com densidade  $\rho$  e velocidade de escoamento  $\vec{v}$ . Assim, um espaço-tempo acústico é completamente determinado pela densidade e pelo campo de velocidades do fluido. Como um exemplo de espaço-tempo acústico esfericamente simétrico e estático podemos citar o buraco acústico canônico (BAC), que é gerado assumindo-se que o fluxo do fluido seja puramente radial e esfericamente simétrico. Considerando estas características e substituindo-as na equação da continuidade, encontramos

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \rho v_r) = 0, \quad (3.11)$$

onde  $v_r$  é a componente radial da velocidade de escoamento e  $\rho$  é a densidade do fluido. Lembremos que por o fluido ser barotrópico, a densidade é apenas função da pressão e por este motivo a densidade do fluido não depende das coordenadas espaciais e nem do tempo.



Desta forma, o campo de velocidades do fluido nesse regime de escoamento é

$$\vec{v} = \frac{k}{r^2} \hat{r}, \quad (3.12)$$

onde  $k$  é uma constante. Assim, em determinado ponto  $r = r_h$  o regime de escoamento do fluido torna-se supersônico e podemos reescrever (3.12) como sendo

$$\vec{v} = -c \frac{r_h^2}{r^2} \hat{r}. \quad (3.13)$$

Sendo assim, o elemento de linha dado em (3.10), escrito em coordenadas polares esféricas, assume a seguinte forma:

$$ds^2 = \frac{\rho}{c} \left[ -c^2 \left( 1 - \frac{r_h^4}{r^4} \right) dt'^2 + 2c \frac{r_h^2}{r^2} dr dt' + dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \right]. \quad (3.14)$$

Reescrevendo esta expressão em termos de uma nova coordenada temporal, dada por

$$dt = dt' - \frac{r_h^2/r^2}{c \left( 1 - \frac{r_h^4}{r^4} \right)} dr, \quad (3.15)$$

considerando  $c = 1$ , encontramos o seguinte elemento de linha:

$$ds^2 = \rho \left( - \left( 1 - \frac{r_h^4}{r^4} \right) dt^2 + \frac{dr^2}{\left( 1 - \frac{r_h^4}{r^4} \right)} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \right). \quad (3.16)$$

Podemos simplificar um pouco mais o elemento de linha (3.16), desprezando a influência do fator conforme  $\sqrt{\rho}$ . Podemos fazer isso sem perda de generalidade, pois o elemento de linha geral dos espaços-tempos acústicos, dado por (3.10), descreve apenas intervalos nulos (associados com a propagação do som) e sabemos que todo espaço-tempo é conformalmente invariante para intervalos nulos do elemento de linha [24]. Desta forma, encontramos o seguinte elemento de linha

$$ds^2 = - \left( 1 - \frac{r_h^4}{r^4} \right) dt^2 + \frac{dr^2}{\left( 1 - \frac{r_h^4}{r^4} \right)} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (3.17)$$

Este espaço-tempo acústico é conhecido na literatura de modelos análogos como buraco acústico canônico [5].

Este espaço-tempo (assim como o espaço-tempo de Schwarzschild) é estático, esfericamente simétrico, possui uma singularidade essencial na origem ( $r = 0$ ) e uma hiperfície nula

(horizonte de eventos) em  $r = r_h$ , que se trata de uma fronteira de aprisionamento das ondas sonoras. Pode-se notar a partir da Eq.(3.13) que em  $r = r_h$  o fluxo do fluido passa a ser supersônico e como todas suas linhas de campo convergem para a origem ( $r = 0$ ) as ondas sonoras não conseguem escapar mediante nenhum processo clássico do interior do buraco acústico ( $r \leq r_h$ ).

### 3.3 Geodésicas Nulas no Buraco Acústico Canônico

Dentro da aproximação da “acústica geométrica”, na qual é necessário que a amplitude e a direção de propagação da onda sonora variem pouco ao longo de tempos e distâncias da ordem do período e do comprimento da onda, respectivamente, podemos tratar a propagação das ondas sonoras como sendo a propagação de “raios de som” no espaço-tempo do BAC. Esta aproximação é válida apenas no limite de altas frequências de oscilação da onda sonora. Desta forma, tratamos os raios de som como sendo geodésicas tipo-luz (ou tipo-som) se propagando no espaço-tempo acústico [20]. Uma família de geodésicas nulas é obtida considerando-se que o elemento de linha em (3.16) seja igual a zero, isto é:

$$ds^2 = 0. \quad (3.18)$$

Podemos simplificar bastante nossa abordagem considerando apenas as geodésicas nulas restritas ao plano equatorial

$$\theta = \frac{\pi}{2}. \quad (3.19)$$

Isto pode ser feito sem perda de generalidade, pois o elemento de linha do espaço-tempo do BAC é esfericamente simétrico.

Definimos a lagrangiana para a propagação dos raios de som como sendo

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2} g_{ab} \dot{x}^a \dot{x}^b = 0 \quad \therefore \\ K &= -\frac{1}{2} \left(1 - \frac{r_h^4}{r^4}\right) \dot{t}^2 + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{r_h^4}{r^4}\right)^{-1} \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 = 0, \end{aligned} \quad (3.20)$$

onde o ponto sobre às coordenadas corresponde à derivada em relação ao parâmetro afim.

Assim como o espaço-tempo de Schwarzschild, o espaço-tempo do BAC admite campos de Killing tipo tempo  $\delta_0^\mu$  e campos de Killing tipo espaço  $\delta_3^\mu$ , cujas projeções sobre geodésicas são constantes de movimento [24], a saber,

$$E = g_{\mu\nu}\delta_0^\mu \dot{x}^\nu \quad \therefore$$

$$E = -\left(1 - \frac{r_h^4}{r^4}\right) \dot{t} \quad (3.21)$$

e

$$\lambda = g_{\mu\nu}\delta_3^\mu \dot{x}^\nu \quad \therefore$$

$$\lambda = r^2 \dot{\varphi}, \quad (3.22)$$

onde  $E$  e  $\lambda$  são definidos, respectivamente, como energia total e momento angular associados com os raios de som. Substituindo (3.21) e (3.22) na equação (3.20), encontramos a seguinte equação diferencial:

$$\frac{1}{2}\dot{r}^2 + \frac{\lambda^2}{2r^2} \left(1 - \frac{r_h^4}{r^4}\right) = \frac{E^2}{2}. \quad (3.23)$$

Esta equação descreve a propagação dos raios de som no espaço-tempo do BAC. O movimento dos raios de som pode ser interpretado como sendo o mesmo de uma partícula clássica com massa unitária, energia total por unidade de massa  $\frac{E^2}{2}$  e momento angular por unidade de massa  $\lambda$ , submetida ao seguinte potencial efetivo:

$$V(r) = \frac{\lambda^2}{2r^2} \left(1 - \frac{r_h^4}{r^4}\right). \quad (3.24)$$

Encontremos agora os extremos do potencial efetivo (3.24) a fim de estudar as órbitas críticas das geodésicas nulas no espaço-tempo do BAC.

Derivemos o potencial efetivo  $V(r)$  em relação a  $r$  e igualemos a zero:

$$\frac{dV}{dr} = 0,$$

$$-\frac{\lambda^2}{r^3} + 3\frac{\lambda^2 r_h^4}{r^7} = 0 \therefore$$

$$r = 3^{\frac{1}{4}} r_h. \quad (3.25)$$

Substituindo o valor  $r = 3^{\frac{1}{4}} r_h$  na segunda derivada em relação a  $r$  do potencial efetivo (3.24) mostramos que

$$\lim_{r \rightarrow 3^{\frac{1}{4}} r_h} \frac{d^2 V}{dr^2} < 0. \quad (3.26)$$

Assim, determinamos o único ponto extremo do potencial efetivo  $V(r)$  como sendo o ponto de máximo  $r = 3^{\frac{1}{4}} r_h$ . No decorrer deste trabalho, vamos nos referir a esse ponto como raio crítico e o denotamos por  $r_c$ .

A seguir, com o intuito de estudar os tipos de órbitas seguidas pelos raios de som no BAC, definimos uma grandeza chamada de parâmetro de impacto, a saber:

$$b = \frac{\lambda}{E}. \quad (3.27)$$

Dependendo do valor do parâmetro de impacto, as geodésicas associadas com a propagação dos raios de som podem seguir os seguintes tipos de movimentos: (i) um movimento que culmina numa absorção completa do som pelo BAC, (ii) um movimento no qual as geodésicas sejam espalhadas pelo BAC e (iii) um movimento tal que as geodésicas terminem por formar uma esfera de som de raio  $r_c$  mantida em um equilíbrio instável - esse tipo de movimento é decorrente do fato do potencial efetivo  $V(r)$  admitir um ponto de máximo em  $r_c$ . Para o terceiro tipo de movimento, o valor do parâmetro de impacto é obtido considerando-se que a órbita dos raios de som seja circular com raio igual ao raio crítico  $r_c$ , ou seja, substituindo-se na Eq. (3.23) que  $\dot{r} = 0$  e que  $r = r_c$ , encontramos

$$b = \frac{3^{\frac{3}{4}}}{\sqrt{2}} r_h. \quad (3.28)$$

No decorrer deste trabalho, vamos nos referir a esse valor por  $b_c$ , sendo o mesmo chamado de parâmetro de impacto crítico.

O potencial efetivo  $V(r)$  (ver Eq. (3.24)) é plotado na Fig. 3.1.

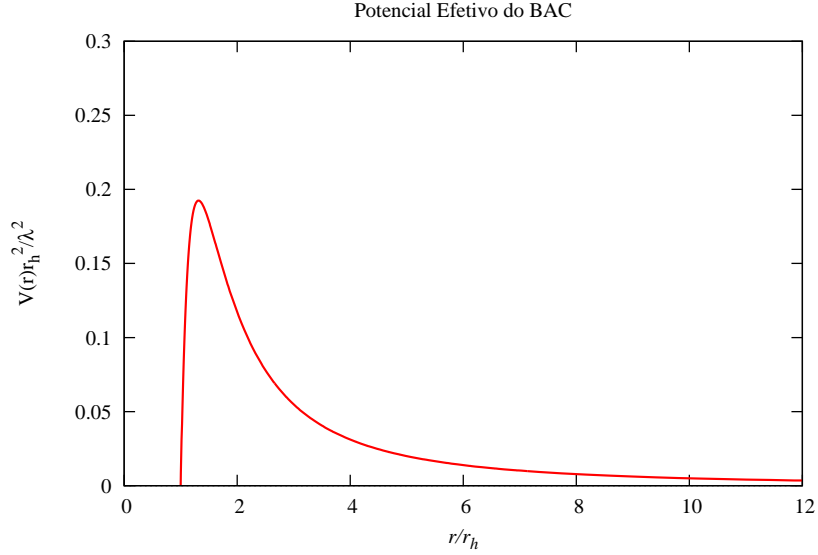


Figura 3.1: Potencial efetivo do BAC como função de  $r$ .

Nesta Figura vemos que existe apenas um ponto de máximo da função e cujo valor é igual a  $r = r_c$ . Já para valores iguais a  $r \rightarrow \infty$  o potencial tende a se anular.

Em seguida, construiremos o diagrama de espaço-tempo em 2D para  $(t, r)$  das geodésicas radiais nulas. Isto é obtido ao considerarmos na Eq. (3.23) que o momento angular  $\lambda$  seja nulo. Assim,

$$\dot{r} = E. \quad (3.29)$$

Dividindo a Eq. (3.21) pela Eq. (3.29), temos

$$\frac{dt}{dr} = \pm \frac{r^4}{r^4 - r_h^4}, \quad (3.30)$$

cuja solução é

$$t = \pm \left[ r - \frac{1}{2}r_h \arctan\left(\frac{r}{r_h}\right) + \frac{1}{4}r_h \ln \left| \frac{r - r_h}{r + r_h} \right| \right] + \text{constante}. \quad (3.31)$$

Os sinais positivo e negativo na expressão (3.31) referem-se, respectivamente, às geodésicas radiais nulas emergentes ao BAC e às geodésicas radiais nulas entrantes ao BAC. A partir

das congruências destas geodésicas plotamos, na Fig. 3.2, o diagrama de espaço-tempo do BAC.

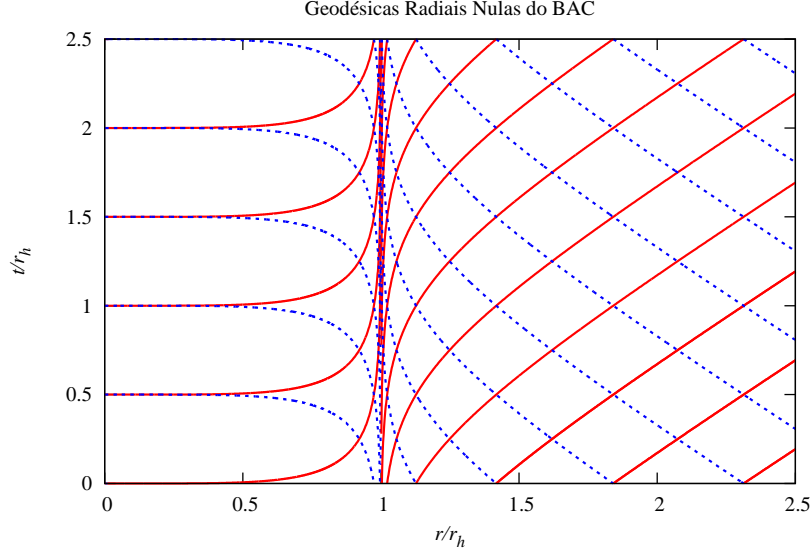


Figura 3.2: Diagrama de espaço-tempo do BAC em 2D para  $(t, r)$ .

Na Fig. 3.2 as linhas contínuas correspondem às geodésicas radiais nulas emergentes ao BAC e as linhas tracejadas correspondem às geodésicas radiais nulas entrantes ao BAC.

### 3.4 Órbitas Nulas no Espaço-Tempo do Buraco Acústico Canônico

Podemos obter a equação orbital para os raios de som no BAC a partir da Eq. (3.23). Dividindo essa equação por  $\dot{\varphi}^2$ , encontramos

$$\frac{1}{2} \frac{\dot{r}^2}{\dot{\varphi}^2} + \frac{\lambda^2}{2r^2 \dot{\varphi}^2} \left( 1 - \frac{r_h^4}{r^4} \right) = \frac{E^2}{2\dot{\varphi}^2}. \quad (3.32)$$

Substituindo a relação  $\frac{\dot{r}}{\dot{\varphi}} = \frac{dr}{d\varphi}$  e a relação dada em (3.22), encontramos a seguinte expressão:

$$\left( \frac{dr}{d\varphi} \right)^2 + r^2 \left( 1 - \frac{r_h^4}{r^4} \right) = \frac{E^2}{\lambda^2} r^4. \quad (3.33)$$

Agora, substituindo a coordenada radial por uma coordenada  $u = \frac{1}{r}$ , apropriada para a descrição de órbitas e usando a definição de parâmetro de impacto  $b = \lambda/E$ , encontramos a

seguinte equação:

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 = \frac{1}{b^2} - u^2 + \frac{1}{u_h^4}u^6, \quad (3.34)$$

onde  $u_h = 1/r_h$ . Esta expressão é conhecida como equação orbital para as geodésicas nulas.

Determinemos agora as raízes da Eq. (3.34). Substituindo  $\frac{du}{d\varphi} = 0$  e  $b = b_c$  (esta situação corresponde às órbitas cujo movimento é circular de raio  $r_c$ ) na Eq. (3.34), obtemos a seguinte equação:

$$\frac{2u_h^6}{3\sqrt{3}} - u_h^4 u^2 + u^6 = 0, \quad (3.35)$$

cujas as seis raízes são:

$$u_1 = \pm 3^{-\frac{1}{4}}u_h,$$

$$u_2 = \pm 3^{-\frac{1}{4}}u_h,$$

$$u_3 = \pm i3^{-\frac{1}{4}}\sqrt{2}u_h. \quad (3.36)$$

Assim, podemos escrever a Eq. (3.34) como sendo

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 = \frac{1}{u_h^4} \left(u - 3^{-\frac{1}{4}}u_h\right)^2 \left(u + 3^{-\frac{1}{4}}u_h\right)^2 \left(u - i3^{-\frac{1}{4}}\sqrt{2}u_h\right) \left(u + i3^{-\frac{1}{4}}\sqrt{2}u_h\right). \quad (3.37)$$

Esta equação vai ser de extrema importância para a definição das funções de onda dos modos QNs e dos PRs.

A partir da equação (3.37), plotamos na Fig. 3.3 os três diferentes tipos de geodésicas nulas no espaço-tempo do BAC

*Geodésicas Nulas no BAC*

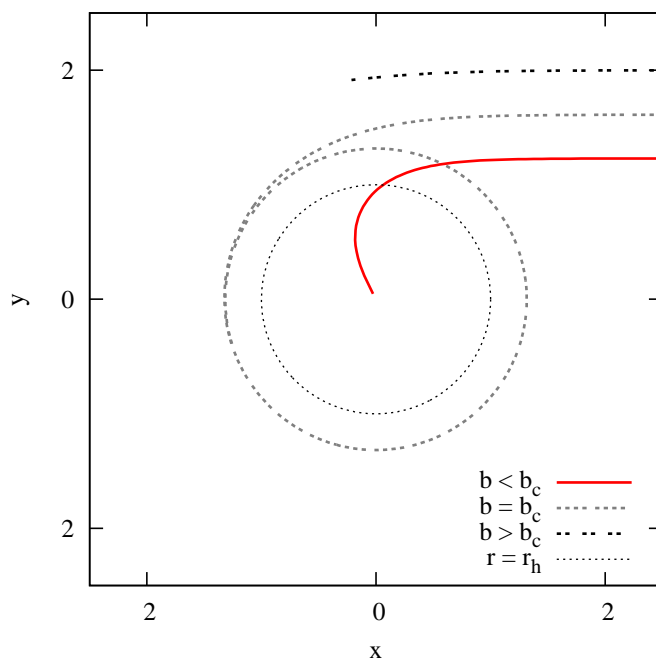


Figura 3.3: Geodésicas nulas no plano equatorial do BAC.

Na Fig. 3.3, plotamos três órbitas que são solução da Eq.(3.37). A linha contínua representa uma geodésica com valor de parâmetro de impacto menor que  $b_c$  e que corresponde às geodésicas absorvidas pelo BAC. A linha tracejada representa uma geodésica com valor de parâmetro de impacto  $b_c$ . O conjunto dessas geodésicas formam uma esfera de som com raio  $r_c$  (obviamente em três dimensões espaciais). A linha pontilhada refere-se a uma geodésica com valor de parâmetro de impacto maior que  $b_c$ . Essas geodésicas acabam por ser espalhadas pelo BAC.



### 3.5 Frequência Orbital e o Expoente de Lyapunov para as Órbitas Nulas

A partir das Eqs. (3.21) e (3.22), calculamos a frequência orbital  $\Omega$  associada ao movimento circular (cujo raio é  $r = r_c$ ) executado pelas geodésicas nulas, a saber [25]:

$$\Omega \equiv \left( \frac{\dot{\phi}}{\dot{t}} \right)_{r=r_c} = \frac{b_c(1 - r_h^4/r_c^4)}{r_c^2} = 1/b_c. \quad (3.38)$$

O expoente de Lyapunov  $\Lambda$  é definido da seguinte maneira:

$$\Lambda \equiv \left( -\frac{b_c^2}{2} \frac{d^2 f}{dr^{*2}} \frac{f}{r^2} \right)_{r=r_c}^{1/2} = 2/b_c. \quad (3.39)$$

O expoente de Lyapunov está geralmente associado com a dinâmica caótica do movimento de geodésicas e quantifica a instabilidade devida a não linearidade das equações que descrevem o movimento orbital [26]. A determinação dessas grandezas associadas com o movimento crítico das geodésicas nulas é importante, pois as mesmas estão intimamente relacionadas com o espectro dos modos QNs e dos PRs.

# Capítulo 4

## Os Modos Quasinormais do Buraco Acústico Canônico

Neste capítulo, encontraremos o espectro para os modos quasinormais (QNs) e suas respectivas funções de onda a partir do método de expansão assintótica [17]

### 4.1 Perturbações Lineares no Buraco Acústico Canônico

Vimos no capítulo anterior que o espaço-tempo do BAC é descrito pelo seguinte elemento de linha

$$ds^2 = -f dt^2 + f^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (4.1)$$

onde

$$f(r) = 1 - r_h^4/r^4, \quad (4.2)$$

sendo que  $r_h$  é o raio do horizonte de eventos, onde a velocidade radial do fluido torna-se igual à velocidade de propagação do som  $c$ . Lembremos que consideramos o valor da velocidade do som como sendo unitário ( $c = 1$ ).

A propagação de uma perturbação linear nos espaços-tempos acústicos é governada pela

equação de Klein-Gordon

$$\nabla_\nu \nabla^\nu \Phi = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \Phi) = 0, \quad (4.3)$$

onde  $-\nabla\Phi$  representa o acréscimo na velocidade devido às perturbações lineares no fluido, a saber,  $\vec{v} = \vec{v}_0 - \epsilon \nabla\Phi$ .

O determinante  $g$  para o espaço-tempo do BAC é

$$g = -r^4 \sin^2 \theta. \quad (4.4)$$

Podemos reescrever a equação que descreve a propagação das perturbações lineares no espaço-tempo do BAC substituindo a métrica associada com o elemento de linha dado em (4.1) na equação de Klein-Gordon (4.3):

$$-r^2 \sin \theta f^{-1} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 f \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = 0. \quad (4.5)$$

Definimos, a seguir, a separação de variáveis para a função  $\Phi$  como sendo

$$\Phi = \sum_{lm} \Phi_{lm}, \quad (4.6)$$

onde

$$\Phi_{lm} = r^{-1} \psi_l(t, r) Y_{lm}(\theta, \varphi), \quad (4.7)$$

e  $Y_{lm}(\theta, \varphi)$  são os harmônicos esféricos.

Escrevemos  $\psi_l(t, r)$  em termos da seguinte decomposição via transformada de Laplace:

$$\psi_l(t, r) = \frac{1}{2\pi} \int_{\kappa-i\infty}^{\kappa+i\infty} e^{-i\omega t} u_{\omega l}(r) d\omega, \quad (4.8)$$

onde  $u_{\omega l}$  são os modos associados com as perturbações lineares no espaço-tempo do BAC. No intuito de facilitar a notação definimos, também, a seguinte função

$$\psi_{\omega l}(t, r) = u_{\omega l}(r) e^{-i\omega t}. \quad (4.9)$$

Substituindo a separação de variáveis (4.7) e a transformada de Laplace (4.8) na equação diferencial parcial (4.5), obtemos a seguinte equação diferencial ordinária para a parte radial

$$\left[ f \frac{d}{dr} \left( f \frac{d}{dr} \right) + \omega^2 - f \left( \frac{4r^4}{r^6} + \frac{(L^2 - \frac{1}{4})}{r^2} \right) \right] u_{\omega l}(r) = 0, \quad (4.10)$$

onde

$$L \equiv l + \frac{1}{2}. \quad (4.11)$$

Definimos a coordenada de tartaruga de Regge-Wheeler  $r^*$ , como sendo

$$\frac{dr^*}{dr} = f^{-1}.$$

Desta forma que

$$r^* = r + \frac{r_h}{4} \ln \left| \frac{r - r_h}{r + r_h} \right| - \frac{r_h}{2} \arctan \left( \frac{r}{r_h} \right) + r_h \frac{\pi}{4}. \quad (4.12)$$

Reescrevemos a Eq. (4.10) em termos da coordenada de tartaruga de Regge-Wheeler definida em (4.12). Assim, obtemos uma equação de onda tipo Schrödinger associada a um potencial de espalhamento  $V_{esp}(r)$ , a saber:

$$\left[ \frac{d^2}{dr^{*2}} + \omega^2 - V_{esp}(r) \right] u_{\omega l}(r) = 0, \quad (4.13)$$

onde

$$V_{esp}(r) = f \left( \frac{4r_h^4}{r^6} + \frac{(L^2 - \frac{1}{4})}{r^2} \right). \quad (4.14)$$

A equação diferencial (4.13) é conhecida como equação de Regge-Wheeler e o potencial de espalhamento (4.14) é conhecido como potencial de Regge-Wheeler.

A seguir plotamos nas Fig. 4.1 e Fig. 4.2 o potencial  $V_{esp}$  em termos de  $r$  e de  $r^*$  para diferentes valores de  $l$ , respectivamente.

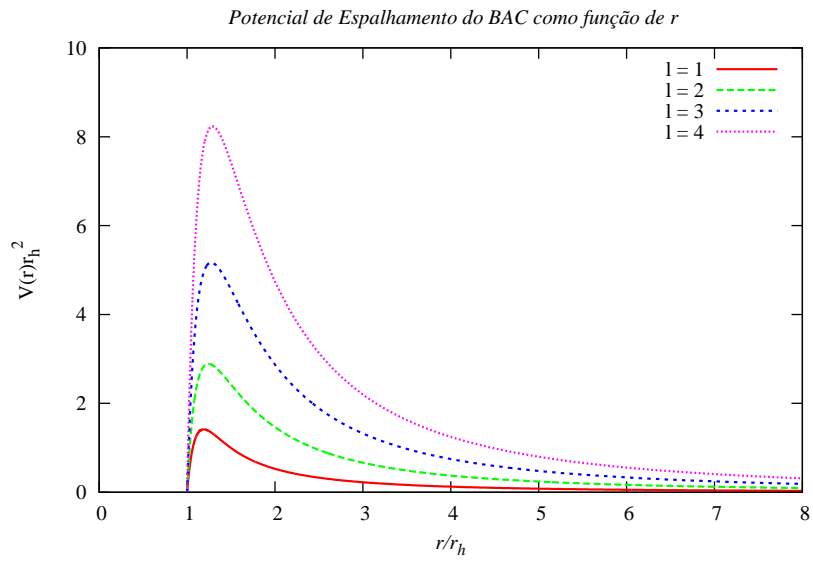


Figura 4.1: Potencial de espalhamento do BAC como função de  $r$ .

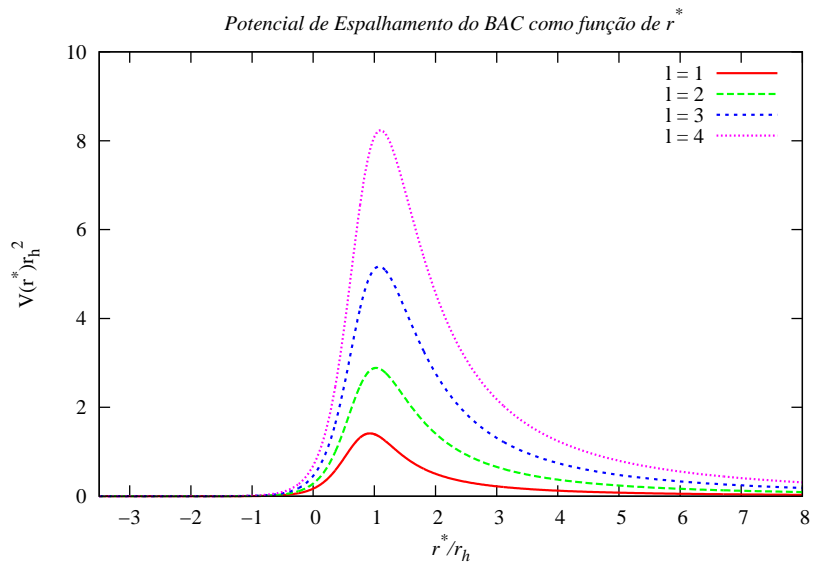


Figura 4.2: Potencial espalhamento do BAC como função de  $r^*$ .

## 4.2 O Método de Expansão Assintótica dos Modos Quasinormais do Buraco Acústico Canônico

### 4.2.1 Os Modos Quasinormais

Começamos o estudo dos modos QNs ressaltando a diferença deste tipo de modo com os modos normais de oscilação. A diferença básica entre os modos normais e os modos QNs está nas condições de contorno obedecidas por cada um deles (os dois modos são soluções da mesma equação diferencial, a Eq. (4.13)). No caso dos modos normais, as condições de contorno são aplicadas de tal maneira que a solução da equação de onda é representada como uma superposição de modos estacionários oscilando com um espectro de frequências reais. Assim, a amplitude dos modos normais não sofre qualquer tipo de amortecimento. Por essa razão é que os modos normais são definidos para um intervalo infinito de tempos [15]. Definimos os modos QNs como sendo os modos de oscilações naturais do espaço-tempo que se propagam como uma perturbação linear. Os modos QNs representam as oscilações de um sistema aberto (espaço-tempo), ou seja, um sistema que perde energia na forma de radiação emitida para o infinito. Desta forma, é impossível representar as oscilações QNs em termos de uma superposição de modos estacionários. Assim, diferentemente dos modos normais, as oscilações associadas com os modos QNs são amortecidas e por essa razão são definidas apenas para certo intervalo finito de tempo. Veremos, mais adiante, que a duração das oscilações QNs é fortemente influenciada pelo número de overtone  $n$ . Na referência [30] encontra-se a cronologia dos principais acontecimentos históricos que levaram ao desenvolvimento do estudo dos modos quasinormais.

A partir da equação de onda (4.13), podemos analisar o comportamento assintótico (nos limites em que  $r^* \rightarrow -\infty$  e em que  $r^* \rightarrow \infty$ ) da função de onda radial  $u_{\omega l}$ , e assim, estabelecer as condições de contorno associados com os modos QNs.

Próximo ao horizonte de eventos do BAC ( $r^* \rightarrow -\infty$ ), como estamos tratando com um problema clássico, os modos devem ser puramente entrantes, isto é:

$$u_{\omega l} \propto \exp(-i\omega r^*). \quad (4.15)$$

No infinito espacial do BAC ( $r^* \rightarrow \infty$ ), a função de onda  $u_{\omega l}$ , *à priori*, admite tanto

modos entrantes como modos emergentes, a saber:

$$u_{\omega l} \propto \frac{1}{T_l(\omega)} \exp(-i\omega r^*) + \frac{S_l(\omega)}{T_l(\omega)} \exp(+i\omega r^*). \quad (4.16)$$

Para um conjunto infinito de valores complexos de  $\omega$  e de  $l$ , tanto  $T_l(\omega)$  como  $S_l(\omega)$  são singulares (divergem) e possuem pólos simples, mas, ainda assim, a relação  $S_l(\omega)/T_l(\omega)$  é regular [27, 28]. O espectro complexo de frequências  $\omega$  está associado com os modos QNs. Os pólos simples associados com os valores complexos de  $l$  são conhecidos como pólos de Regge (ver capítulo 4). Já o coeficiente  $S_l(\omega)$  é conhecido como matriz de espalhamento. O coeficiente  $T_l(\omega)$  está associado com o coeficiente de transmissão da onda. Neste capítulo, tratamos exclusivamente dos modos QNs. Assim, o espectro de frequências  $\omega$  é complexo, enquanto que os momentos angulares  $l$  são reais. No capítulo seguinte, estudamos somente as oscilações associadas com os PRs, para os quais, o espectro de frequências  $\omega$  é real e os momentos angulares  $l$  são complexos.

Uma exigência fundamental que caracteriza os modos QNs é que no infinito ( $r \rightarrow \infty$ ) os modos sejam puramente emergentes e no horizonte de eventos ( $r \rightarrow r_h$ ) os modos sejam puramente entrantes. Esta escolha é feita para que não haja quaisquer influências externas ao espaço-tempo. Desta forma, representamos o comportamento assintótico dos modos QNs por meio das seguintes condições de contorno [14, 29]:

$$u_{\omega l n}(r) \propto \begin{cases} e^{-i\omega r^*}, & r^* \rightarrow -\infty, \\ A_{ln}(\omega) e^{i\omega r^*}, & r^* \rightarrow \infty, \end{cases}$$

onde  $A_{ln}(\omega) = \frac{S_{ln}(\omega)}{T_{ln}(\omega)}$ .

Os coeficientes  $T_l(\omega)$ ,  $S_l(\omega)$  e a função de onda  $u_{\omega l}$  recebem o índice  $n$ , conhecido por número de overtone, como uma característica relacionada aos modos QNs. O significado do número de overtone  $n$  será esclarecido no decorrer desta dissertação.

## 4.2.2 As Frequências Quasinormais Fundamentais ( $n = 0$ )

Encontramos os modos QNs do BAC usando a seguinte definição para a função de onda QN:

$$u_{\omega ln}(r) = v_{\omega ln}(r) \exp \left[ i\omega \int^{r^*} \alpha(r) dr^* \right], \quad (4.17)$$

onde  $\alpha$  é definido a partir da fatoração da equação da órbita dada em (3.37), a saber:

$$\alpha(r) \equiv \left( 1 - \frac{r_c^2}{r^2} \right) \left( 1 + \frac{r_c^2}{2r^2} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (4.18)$$

Essa definição é um ponto chave para a aplicação do método de expansão assintótica dos modos QNs [14].

Note-se que o integrando na exponencial da Eq. (4.17) torna-se  $1 + \vartheta(r^{-2})$  para  $r^* \rightarrow \infty$ , e torna-se  $-1 + \vartheta(r - r_h)$  para  $r^* \rightarrow -\infty$ . Desta maneira, a função de onda QN (4.17) satisfaz as condições de contorno dadas em (4.2.1). Essa é uma exigência fundamental para que uma função de onda (no caso (4.17)) seja solução da Eq. (4.10) e represente a propagação dos modos QNs.

Substituindo a definição (4.17) na Eq. (4.10), obtemos uma equação diferencial radial para as funções  $v_{\omega ln}(r)$ , a saber,

$$(fv'_{\omega ln})' + 2i\omega v'_{\omega ln} + \left[ \frac{\omega^2 b_c^2 - L^2 + 1/4}{r^2} + i\omega\alpha' - \frac{f'}{r} \right] v_{\omega ln} = 0, \quad (4.19)$$

onde  $'$  denota diferenciação com respeito a  $r$  e

$$i\alpha'(r) = \frac{ib_c^2}{r^3} \left( 1 - \frac{r_c^2}{r^2} \right) \left( 1 + \frac{r_c^2}{2r^2} \right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (4.20)$$

Determinamos as frequências e as funções de onda QNs  $v_{\omega ln}$  fundamentais ( $n = 0$ ) do BAC usando a seguinte expansão em potências inversas de  $L = l + \frac{1}{2}$ :

$$\omega^{(0)} = \sum_{q=0}^{\infty} L^{1-q} \omega_q^{(0)}, \quad (4.21)$$

$$v_{\omega l0}(r) = \prod_{q=0}^{\infty} \exp [L^{-q} S_q^{(0)}], \quad (4.22)$$

onde o índice (0) sobrescrito refere-se ao overtone fundamental  $n = 0$ . Este método de expansão em série de potências inversas de  $L = l + \frac{1}{2}$  conjuntamente com a utilização da



definição da função de onda QN (4.17) é conhecido como método da expansão assintótica e foi desenvolvido e usado pela primeira vez na referência [14], onde também se encontram as condições de convergência para esse método de expansão assintótica.

Substituindo a Eq. (4.21) e a Eq. (4.22) na Eq. (4.19), podemos separar a equação resultante em termos de coeficientes associados com as potências de  $L$ , a saber:

$$L^2 : \quad b_c^2 \left( \omega_0^{(0)} \right)^2 - 1 = 0, \quad (4.23)$$

$$L^1 : \quad 2i\omega_0^{(0)} b_c^{-1} \alpha(r) \frac{dS_0^{(0)}}{dr} + 2 \frac{1}{r^2} \omega_0^{(0)} \omega_1^{(0)} +$$

$$i\omega_0^{(0)} b_c^{-1} \alpha'(r) = 0, \quad (4.24)$$

$$L^0 : \quad \frac{d}{dr} \left( f \frac{dS_0^{(0)}}{dr} \right) + f \left( \frac{dS_0^{(0)}}{dr} \right)^2 + 2i\alpha b_c^{-1} \left( \omega_0^{(0)} \frac{dS_1^{(0)}}{dr} + \omega_1^{(0)} \frac{dS_0^{(0)}}{dr} \right) +$$

$$\frac{\left( \omega_1^{(0)} \right)^2 + 2\omega_0^{(0)} \omega_2^{(0)} + 1/4}{r^2} + \frac{i}{b_c} \omega_1^{(0)} \alpha'(r) - \frac{f'}{r} = 0, \quad (4.25)$$

etc.

A utilização do método de expansão assintótica reduz a equação diferencial ordinária e não-linear (4.19) em um conjunto infinito de equações algébricas independentes mais simples de serem resolvidas analiticamente e cujas soluções são os coeficientes  $\omega_q^{(0)}$  e as funções radiais  $S_q^{(0)}$ . Assim, a dificuldade do método de expansão assintótica consiste em obter o maior número de termos possíveis das expansões (4.21) e (4.22).

Resolvendo a Eq. (4.23), obtemos o primeiro coeficiente da série (4.21),

$$b_c \omega_0^{(0)} = 1. \quad (4.26)$$

Para obtermos o coeficiente  $\omega_1^{(0)}$  e a função radial  $S_0^{(0)}$ , impomos uma condição de continuidade sobre a derivada  $dS_0^{(0)}/dr$  calculada no ponto da órbita circular de raio  $r_c$  e admitimos que a função  $S_0^{(0)}$  se anula sobre o horizonte de eventos do BAC. Desta maneira, encontramos os seguintes valores:

$$b_c \omega_1^{(0)} = -i, \quad (4.27)$$

e

$$\frac{dS_0^{(0)}}{dr} = \frac{b_c}{r^2\alpha} - \frac{\alpha'}{2\alpha}. \quad (4.28)$$

Por simplicidade, expomos somente a expressão para derivada da função radial  $S_0^{(0)}$ , dada pela Eq. (4.28). Plotamos a função radial  $S_0^{(0)}$  em termos de  $r$  na Fig. 4.3.

Para obtermos os outros coeficientes da expansão da frequência QN  $(\omega_2^{(0)}, \omega_3^{(0)}, \dots)$  e as funções radiais  $S_1^{(0)}, S_2^{(0)}, \dots$ , seguimos um procedimento análogo, i. e., impomos uma condição de continuidade sobre as derivadas  $dS_q^{(0)}/dr$ , para  $q \geq 1$ , calculadas no ponto da órbita circular de raio  $r_c$  e impomos que as funções  $S_q^{(0)}$  se anulam sobre o horizonte de eventos do BAC. Este procedimento pode ser aplicado para qualquer potência de  $L$  a partir da utilização de rotinas computacionais. No presente trabalho, desenvolvemos rotinas em Maple [<http://www.maplesoft.com/index1.aspx>]. Assim, obtemos os seguintes valores para os coeficientes:

$$b_c\omega_2^{(0)} = -\frac{61}{216},$$

$$b_c\omega_3^{(0)} = -\frac{17}{972}i,$$

$$b_c\omega_4^{(0)} = -\frac{532843}{2519424},$$

$$b_c\omega_5^{(0)} = \frac{4802843}{5668704}i,$$

$$b_c\omega_6^{(0)} = \frac{11506101785}{4897760256},$$

etc.

Desta forma, usando a expressão (4.21), podemos escrever a expansão da frequência QN

fundamental ( $n = 0$ ) como sendo

$$\begin{aligned}
b_c \omega^{(0)} = & L - i - \frac{61}{216} L^{-1} - \\
& L^{-2} \frac{17}{972} i - L^{-3} \frac{532843}{2519424} + \\
& L^{-4} \frac{4802843}{5668704} i + L^{-5} \frac{11506101785}{4897760256} + \dots
\end{aligned} \tag{4.29}$$

Nossas estimativas numéricas para as frequências QNs fundamentais ( $n = 0$ ) do BAC são obtidas a partir da equação (4.29) para diferentes valores de momento angular  $l$ . Comparamos nossas estimativas com os resultados para as frequências QNs fundamentais ( $n = 0$ ) do BAC, obtidos via método da aproximação WKB, encontrados na referência [10]. Alguns de nossos resultados para  $l > n$  são exibidos na Tabela 4.1.

Tabela 4.1: Comparação, para o modo fundamental ( $n = 0$ ), entre os resultados obtidos via método da aproximação WKB retirados da referência [10] e nossas estimativas das frequências QN usando o método de expansão assintótica.

$l$	WKB (6ª ordem)	Expansão Assintótica
1	$0.811 - 0.60i$	$1.09 - 0.39i$
2	$1.41 - 0.70i$	$1.49 - 0.61i$
3	$2.12 - 0.62i$	$2.12 - 0.62i$
4	$2.75 - 0.62i$	$2.75 - 0.62i$
5		$3.38 - 0.62i$
6		$4.00 - 0.62i$

Verificamos uma excelente concordância entre os nossos resultados obtidos via expansão assintótica e os resultados obtidos via método da aproximação WKB para valores de momento angular  $l > 2$ . Lembremos que o valor das estimativas das frequências QNs dados na tabela 4.1 são adimensionais. Assim, para recuperarmos a dimensão de frequência é

necessário multiplicar os valores das frequências QNs da tabela 4.1 por  $c/r_h$ . Na referência [14] encontram-se mais informações acerca da exatidão desse método de expansão assintótica.

### 4.2.3 As Funções de Onda Quasinormais Fundamentais ( $n = 0$ )

As funções radiais  $S_q^{(0)}$  são plotadas no gráfico dado pela Fig. 4.3.

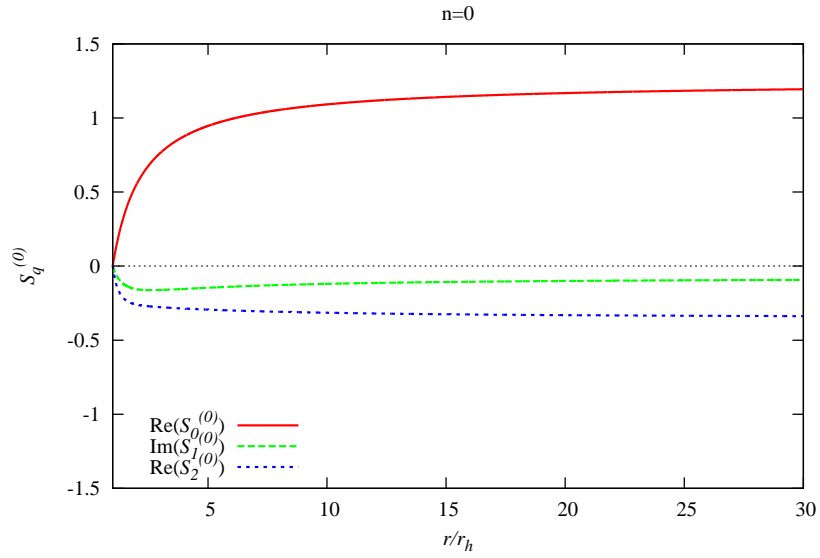


Figura 4.3: Funções radiais  $S_q^{(0)}(r)$  para o BAC.

Como no caso do espaço-tempo de Schwarzschild [14], no espaço-tempo do BAC, as funções  $S_q^{(0)}$  são nulas no horizonte de eventos e tendem a se tornar constantes em  $r \rightarrow \infty$ , sem quaisquer oscilações significativas entre estes dois limites.

A partir da Eq. (4.17), plotamos na Fig. 4.4, as partes real e imaginária da função de onda QN  $u_{\omega ln}$  fundamental ( $n = 0$ ) para o BAC. Podemos ver nos gráficos de  $u_{\omega ln}$  que a função de onda diverge no infinito espacial ( $r \rightarrow \infty$ ) e (mais fracamente) no horizonte de eventos. A divergência exponencial na função de onda  $u_{\omega ln}$  se deve ao fato de o sinal da parte imaginária da frequência QN ser negativo.

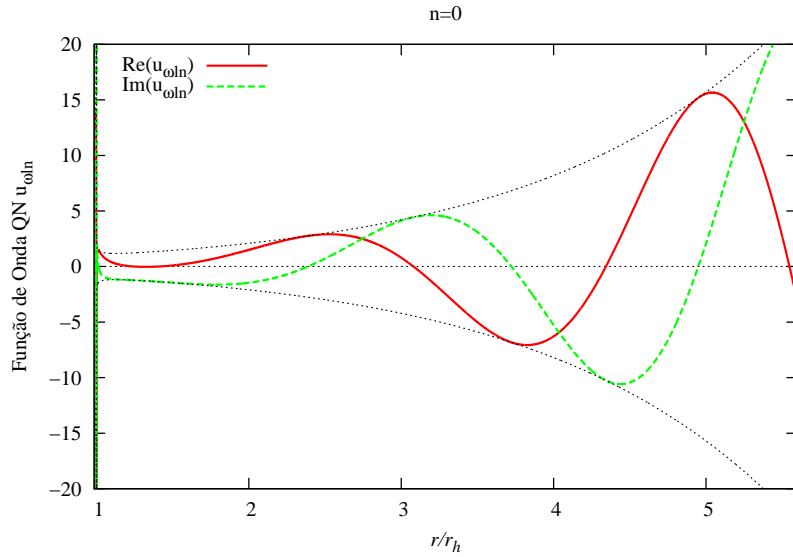


Figura 4.4: Função de onda QN  $u_{\omega ln}$  para o modo fundamental ( $n = 0$ ) e  $l = 4$ , com a expansão da frequência considerada até a ordem  $L^{-1}$ , para o BAC.

A Fig. 4.4 não nos permite ter um “insight” físico acerca do comportamento das oscilações QNs do espaço-tempo do BAC. Analisaremos esse comportamento quando levarmos também em conta a parte temporal da solução. Isto é feito nas Figs 4.5 e 4.6.

As partes real e imaginária da função de onda QN  $\psi_{\omega ln}$  do BAC, para  $n = 0$ , dada pela Eq. (4.9), são plotadas na Fig. 4.5, como função apenas de  $t$ . A parte real de  $\psi_{\omega ln}$  representa as oscilações do espaço-tempo do BAC e a parte imaginária de  $\psi_{\omega ln}$  representa o amortecimento. Pode ser diretamente visto neste gráficos que ocorre o decaimento exponencial tanto para as oscilações do espaço-tempo do BAC (parte real de  $\psi_{\omega ln}$ ) assim como para o amortecimento (parte imaginária de  $\psi_{\omega ln}$ ).

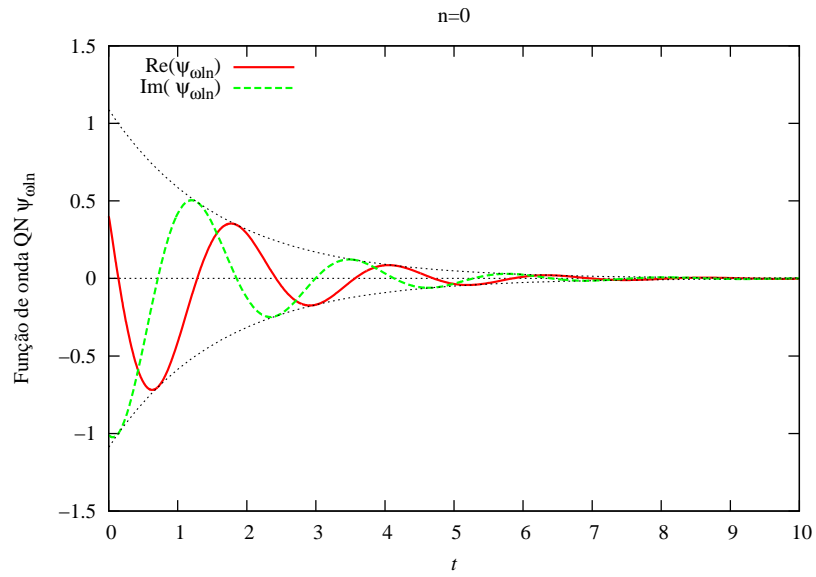


Figura 4.5: Função de onda QN  $\psi_{\omega l n}$  do BAC, para  $n = 0$ ,  $r = 1.09r_h$ , e  $l = 4$ , como função de  $t$ .

No intuito de facilitar a visualização do amortecimento das oscilações QNs, plotamos um gráfico em 3D da parte real da função de onda  $\psi_{\omega l n}$ , para  $n = 0$ , como função de  $t$  e  $r$ , na Fig. 4.6.

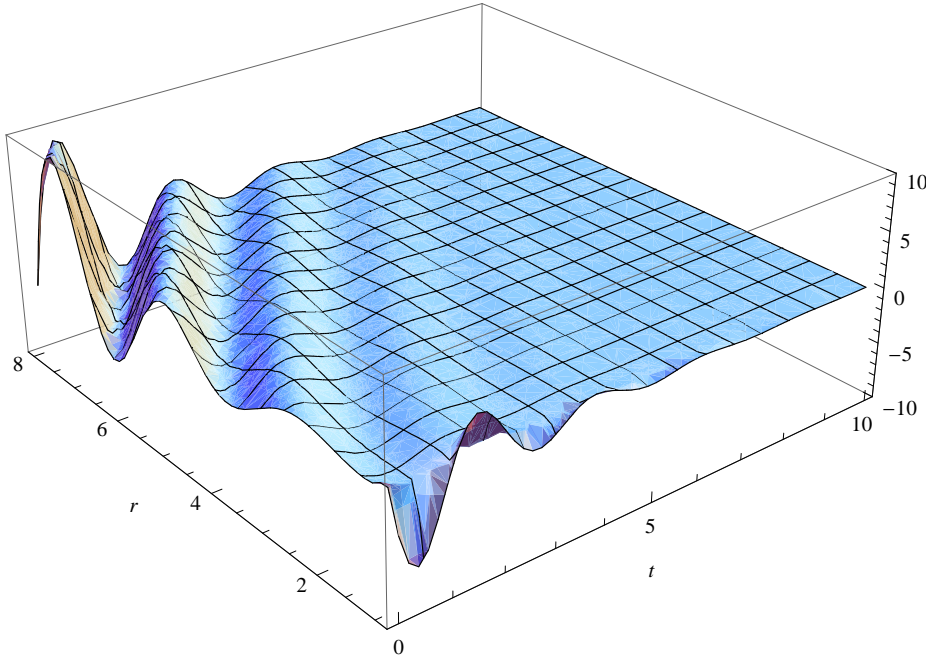


Figura 4.6: Parte real da função de onda QN  $\psi_{\omega ln}$  do BAC, para  $n = 0$ ,  $r_h \omega = 3.0$ , e  $l = 4$ , como função de  $t$  e  $r$ .

A partir da Fig. 4.6 fica claro que os modos QNs emergentes são (aproximadamente) constantes nas direções  $dr = dt$  e que existem modos QNs entrantes (em menor escala) perturbando o horizonte de eventos acústico. É interessante notar que, mesmo nos pontos em que a função de onda QN diverge ( $r = r_h$  e  $r \rightarrow \infty$ ) a amplitude tende a se anular com o passar do tempo.

#### 4.2.4 Os Modos Quasinormais para Valores Arbitrários dos Números de Overtone $n$

As frequências QNs são classificadas de acordo com a magnitude da sua parte imaginária, sendo as mesmas caracterizadas por um inteiro  $n$  conhecido como número de overtone. O modo de overtone fundamental ( $n = 0$ ) é o modo menos amortecido e por isso possui uma duração maior do que os modos de overtone mais elevado ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) [30]. Para generalizarmos a descrição dos modos QNs para números de overtone arbitrários, usemos as

seguintes definições para a frequência QN e para função de onda QN  $v_{\omega ln}(r)$  [14]:

$$\omega^{(n)} = \sum_{q=0}^{\infty} L^{1-q} \omega_q^{(n)}, \quad (4.30)$$

$$v_{\omega ln}(r) = \left[ \chi^n + \sum_i^n \sum_j^{\infty} a_{ij} L^{-j} \chi^{n-i} \right] \times \prod_{q=0}^{\infty} \exp [L^{-q} S_q^{(n)}], \quad (4.31)$$

onde  $\chi \equiv \left(1 - \frac{3^{\frac{1}{4}} r_h}{r}\right)$ .

As condições de convergência desse método de expansão assintótica são abordadas na referência [14].

Obtemos os coeficientes  $\omega_q^{(n)}$  da expansão da frequência QN (ver Eq. (4.30)) e as funções radiais  $S_q^{(n)}$  (ver Eq. (4.31)), para valores arbitrários do número de overtone  $n$ , usando o mesmo procedimento algébrico utilizado para o caso dos modos QNs fundamentais ( $n = 0$ ). Assim, substituindo a definição da função de onda QN (4.31) e da expansão da frequência QN (4.30) na Eq. (4.19), encontramos os seguintes valores para os coeficientes  $\omega_q^{(n)}$  em termos de  $N \equiv n + 1/2$ :

$$b_c \omega_0^{(n)} = 1,$$

$$b_c \omega_1^{(n)} = -2iN,$$

$$b_c \omega_2^{(n)} = -\frac{1}{216} - \frac{10}{9} N^2,$$

$$b_c \omega_3^{(n)} = i \left( \frac{19}{243} N - \frac{110}{243} N^3 \right),$$

$$b_c \omega_4^{(n)} = -\frac{571027}{2519424} + \frac{3911}{26244} N^2 - \frac{2320}{6561} N^4,$$

etc.



Com isso, a expansão da frequência QN, em termos de números de overtone arbitrários, pode ser escrita como sendo

$$\begin{aligned}
b_c \omega^{(n)} = & L - 2iN - \left( \frac{1}{216} + \frac{10}{9} N^2 \right) L^{-1} + \\
& i \left( \frac{19}{243} N - \frac{110}{243} N^3 \right) L^{-2} + \\
& \left( -\frac{571027}{2519424} + \frac{3911}{26244} N^2 - \frac{2320}{6561} N^4 \right) L^{-3} + \dots
\end{aligned} \tag{4.32}$$

Estimativas numéricas das frequências QNs para baixos números de overtone são dadas na Tabela 4.2.

Tabela 4.2: Estimativas das frequências QNs para baixos números de overtone ( $n = 0, 1, 2$ ) usando expansão dada pela Eq. (4.32).

$l$	$n = 0$	$n = 1$	$n = 2$
3	$2.12 - 0.62i$	$1.70 - 1.93i$	
4	$2.75 - 0.62i$	$2.43 - 1.90i$	$1.75 - 3.31i$
5	$3.38 - 0.62i$	$3.12 - 1.89i$	$2.58 - 3.24i$
6	$4.00 - 0.62i$	$3.79 - 1.88i$	$3.34 - 3.20i$

Na referência [14] encontram-se mais informações acerca da exatidão desse método de expansão assintótica.

Na Fig. 4.7 plotamos as partes real e imaginária da função de onda QN  $u_{\omega ln}$  do BAC, para  $n = 1$ , como função de  $r$ .

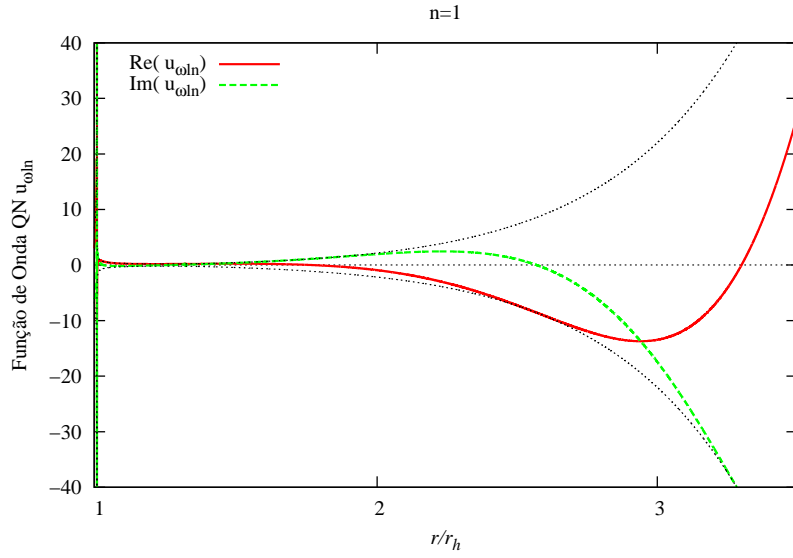


Figura 4.7: Função de onda QN  $u_{\omega ln}$  do BAC, para  $n = 1$ ,  $l = 4$  e como função de  $r$ .

Na Fig. 4.7, notamos que a divergência exponencial da função de onda QN  $u_{\omega ln}$  no infinito espacial ( $r \rightarrow \infty$ ) é mais acentuada no caso do número de overtone  $n = 1$  do que para o caso do modo fundamental  $n = 0$  (visto na Fig. 4.4). Isto se deve ao fato da magnitude da parte imaginária das frequências QNs ser maior para números de overtone mais elevados (ver Tabela 4.2).

As partes real e imaginária da função de onda QN  $\psi_{\omega ln}$  do BAC, para  $n = 1$ , são plotados na Fig. 4.8, como função apenas de  $t$ . Pode ser diretamente visto nestes gráficos que o amortecimento das oscilações do espaço-tempo do BAC é mais intenso para os modos de overtone  $n = 1$  do que para os modos de overtone  $n = 0$  (visto na Fig. 4.5).

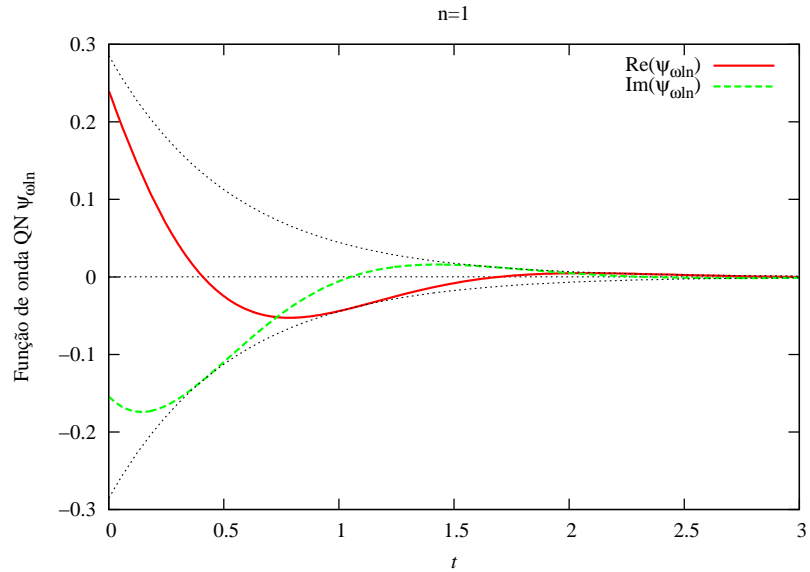


Figura 4.8: Função de onda QN  $\psi_{\omega ln}$  do BAC, para  $n = 1$ ,  $r = 1.09r_h$ , e  $l = 4$ , como função de  $t$ .

A parte real da função de onda QN  $\psi_{\omega ln}$  do BAC, para  $n = 1$ , é plotada na Fig. 4.9, como função de  $t$  e  $r$ .

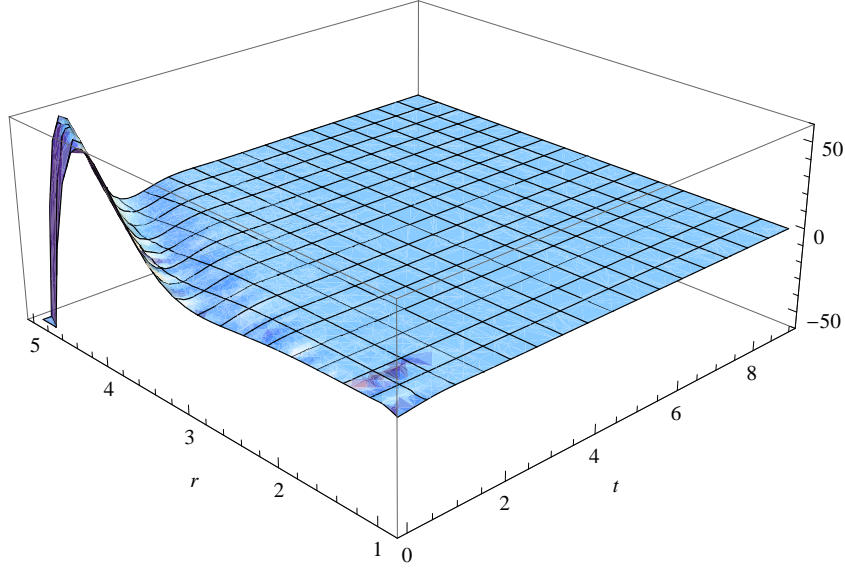


Figura 4.9: Parte real da função de onda QN  $\psi_{\omega ln}$  do BAC, para  $n = 1$  e  $l = 4$ , como função de  $t$  e  $r$ .

A partir do gráfico 3D na Fig. 4.9, vemos um comportamento similar ao do gráfico 3D na Fig. 4.6, só diferindo em relação à taxa com que a amplitude da função de onda é amortecida.

#### 4.2.5 Frequência Orbital e o Expoente de Lyapunov

Nesta seção, encontraremos os valores da frequência orbital e do expoente de Lyapunov via método da expansão assintótica. Como já falamos anteriormente, os modos QNs estão intimamente relacionados com as grandezas associadas com as órbitas nulas críticas. Foi recentemente mostrado [25] que para qualquer espaço-tempo esféricamente simétrico e assintoticamente plano, a frequência orbital  $\Omega$  e o expoente de Lyapunov  $\Lambda$  são, respectivamente, dados por

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \Re(\omega^{(n)}) \equiv \Omega l, \quad (4.33)$$

e

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \Im(\omega^{(n)}) \equiv -N|\Lambda|. \quad (4.34)$$

Assim, considerando apenas os termos dominantes da Eq.(4.32), no limite em que  $l \rightarrow \infty$ , encontramos a seguinte expressão:

$$b_c \omega^{(n)} = l - 2iN. \quad (4.35)$$

Desta forma, comparando a Eq. (4.35) com as definições (4.33) e (4.34), obtemos

$$\Omega = \frac{\sqrt{2}}{3^{\frac{3}{4}} r_h} = 1/b_c, \quad (4.36)$$

e

$$\Lambda = \frac{2\sqrt{2}}{3^{\frac{3}{4}} r_h} = 2/b_c. \quad (4.37)$$

Comparamos nossos resultados com os resultados obtidos na referência [10]. Nossos resultados concordam plenamente tanto com os resultados da referência [10] como com os resultados obtidos a partir das Eqs. (3.38) e (3.39).

# Capítulo 5

## Os Pólos Regge para o Buraco Acústico Canônico

### 5.1 Método da Expansão Assintótica aplicado aos Pólos de Regge

Neste capítulo, encontraremos o espectro para os pólos de Regge (PRs) e suas respectivas funções de onda a partir do mesmo método de expansão assintótica utilizado na obtenção dos modos QNs [17]. Os PRs são modos naturais de oscilação do espaço-tempo que obedecem a condições de contorno semelhantes as dos modos QNs (ver Eq. (4.2.1)), só que com frequência real e momento angular complexo  $L_\omega^{(n)} = l_\omega^{(n)} + 1/2$ . Mais precisamente, eles são pólos da matriz de espalhamento  $S_{lm}(\omega)$  (ver Eq. (4.2.1)) situados no primeiro quadrante do plano complexo do momento angular [28]. Os PRs são um conceito chave na física de altas energias, onde são utilizados na descrição das características da difração. No contexto da física de buracos negros, sabe-se que a amplitude de espalhamento para uma onda monocromática plana se propagando em direção a um buraco negro pode ser decomposta em termos de uma integral e uma soma sobre todos os PRs. A parte relacionada com a integral corresponde a seção de choque de espalhamento clássica e os PRs correspondem a oscilações regulares causadas pela interferência de partes das frentes de onda viajando em direções opostas nas proximidades do buraco negro [14, 31]. A utilização do momento angular complexo simplifica

bastante os cálculos relacionados com o espalhamento de ondas em buracos negros e análogos. Além disso, como foi mostrado na referência [31], a descrição do espalhamento de ondas por meio dos PRs conduz a uma interpretação bem clara dos processos envolvidos. Pode-se ver uma abordagem histórica mais profunda na referência [16].

Vimos no capítulo anterior, que para um dado valor real do momento angular  $l$ , existe um conjunto infinito de modos QNs com frequência complexa  $\omega^{(n)}$ , definidos a partir da consi-

deração de que não existe modos entrantes provenientes do infinito,  $A_{ln}(\omega) = 0$  ( veja, e. g., a Eq. (4.2.1)). Reciprocamente, para um dado valor real da frequência  $\omega$ , existe um conjunto infinito de PRs com momento angular complexo  $L_{\omega}^{(n)} = l_{\omega}^{(n)} + 1/2$ , também definidos a partir da mesma consideração de que  $A_{ln}(\omega) = 0$  [14].

De maneira análoga à determinação dos modos QNs do BAC para números de overtone arbitrários, que foi feita na subseção 4.2.4, obtemos o espectro dos PRs, assim como suas respectivas funções de onda, para números de overtone arbitrários. Desta forma, definimos a expansão dos PRs, para valores arbitrários do número de overtone  $n$ , em termos de séries de potências inversas da frequência de oscilação  $\omega$ , a saber:

$$L_{\omega}^{(n)} = \sum_{q=0}^{\infty} \omega^{1-q} l_q^{(n)}, \quad (5.1)$$

e a função de onda generalizada para números arbitrários de overtone  $n$ , dada por

$$v_{\omega ln}(r) = \left[ \chi^n + \sum_i^n \sum_j^{\infty} a_{ij} \omega^{-j} \chi^{n-i} \right] \times \prod_{q=0}^{\infty} \exp [\omega^{-q} T_q^{(n)}]. \quad (5.2)$$

O número de overtone  $n$  aqui desempenha um papel equivalente ao caso dos modos QNs.

Lembremos que o método matemático usado para obtenção dos PRs é equivalente ao método usado para obtenção os modos QNs. Por isso alguns processos algébricos já realizados no capítulo anterior serão omitidos neste capítulo.

Substituindo tanto a Eq. (5.1) como Eq. (5.2) na expressão (4.19), obtemos os seguintes

valores para os coeficientes da expansão dos PRs:

$$l_0^{(n)} = \frac{1}{2}3^{\frac{3}{4}}\sqrt{2},$$

$$l_1^{(n)} = 2iN,$$

$$l_2^{(n)} = \frac{1}{648}3^{\frac{1}{4}}\sqrt{2} + \frac{10}{27}3^{\frac{1}{4}}\sqrt{2}N^2,$$

$$l_3^{(n)} = \frac{85}{4374}\sqrt{3}N + \frac{860}{2187}\sqrt{3}N^3,$$

$$l_4^{(n)} = \frac{570973}{34012224}3^{\frac{3}{4}}\sqrt{2} - \frac{12875}{354294}3^{\frac{3}{4}}\sqrt{2}N^2 - \frac{46120}{177147}3^{\frac{3}{4}}\sqrt{2}N^4,$$

etc.

Portanto, a expansão dos PRs, para números de overtone arbitrários, pode ser escrita como

$$\begin{aligned} b_c L_\omega^{(n)} &= \omega \frac{1}{2}3^{\frac{3}{2}} + \sqrt{2}iN3^{\frac{3}{4}} + \\ &\omega^{-1} \left( \frac{1}{216} + \frac{10}{9}N^2 \right) + \\ &\omega^{-2} \left( \frac{85}{1458} \frac{3^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{2}}N + \frac{860}{729} \frac{3^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{2}}N^3 \right) + \\ &\omega^{-3} \left( \frac{570973}{11337408} - \frac{12875}{118098}N^2 - \right. \\ &\left. \frac{46120}{59049}N^4 \right) + \dots \end{aligned} \tag{5.3}$$

Os termos dominantes da equação (5.3) estão em pleno acordo com os termos dominantes da equação (35) da referência [16] para o caso do BAC.



## 5.2 Resultados Numéricos para os PRs

A partir da equação (5.3), fazemos algumas estimativas numéricas dos PRs para baixos números de overtone  $n$ , elencadas na Tabela 5.1.

Tabela 5.1: Estimativas dos PRs para baixos números de overtone ( $n = 0, 1, 2$ ) usando a expansão em série dada pela Eq. (5.3).

$\omega$	$n = 0$	$n = 1$	$n = 2$
2	$3.31 + 0.97i$	$3.44 + 2.41i$	$1.20 + 2.32i$
3	$4.89 + 0.99i$	$5.19 + 2.74i$	$5.03 + 3.81i$
4	$6.49 + 0.99i$	$6.77 + 2.85i$	$7.00 + 4.33i$
5	$8.09 + 0.99i$	$8.33 + 2.91i$	$8.65 + 4.57i$
6	$9.70 + 1.00i$	$9.91 + 2.93i$	$10.23 + 4.70i$

A partir da Eq. (5.3), plotamos as partes real e imaginária dos PRs do BAC para os overtones  $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ , nas Fig. 5.1 e Fig. 5.2, respectivamente. Consideramos a expansão dos PRs até a ordem de  $\omega^{-3}$ .

Vemos, a partir dos gráficos das Figs. 5.1 e 5.2, que no limite de altas frequências, a parte real dos PRs tende a se comportar como uma função linear e que a parte imaginária dos PRs se torna constante.

Vale a pena salientar, que por causa do método de expansão assintótica ser baseado na aproximação eikonal ( $l \gtrsim n$ ), a Eq. (5.3) se torna imprecisa para pequenos valores da frequência ( $\omega \lesssim 1$ ), sendo esta imprecisão mais proeminente quanto maiores forem os valores do número de overtone  $n$ .

Nas Figs. 5.3 e 5.4 plotamos, respectivamente, as trajetórias de Regge no plano complexo do momento angular  $L_\omega^{(n)}$  para o número de overtone fundamental  $n = 0$  e para os números de overtone  $n = 1, 2, 3, 4, 5$ .

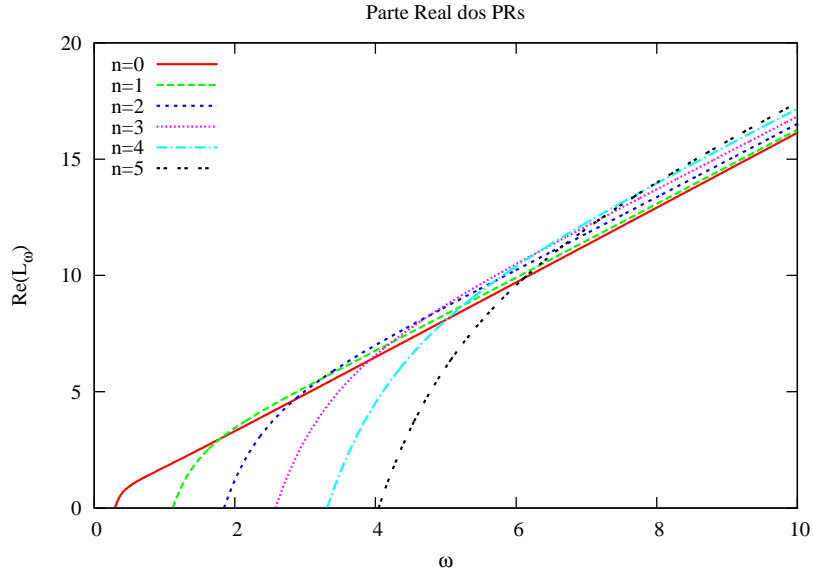


Figura 5.1: Parte real dos PRs do BAC para diferentes valores de  $n$ .

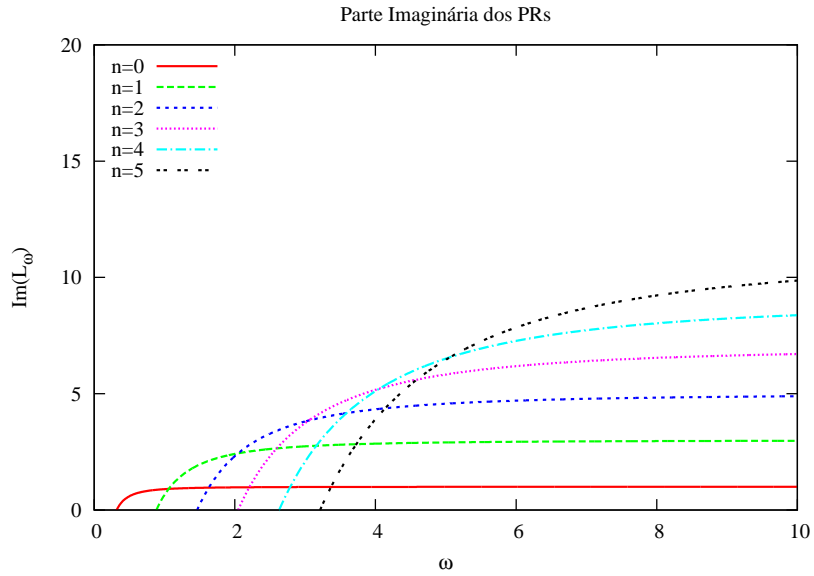


Figura 5.2: Parte imaginária dos PRs do BAC para diferentes valores de  $n$ .

As curvas no plano complexo do momento angular  $L_\omega^{(n)}$  vistas nas Figs. 5.3 e 5.4 são conhecidas como trajetórias de Regge e nos permitem interpretar os PRs em termos de raios difratados ou “ondas de superfície” [27]. A parte real de  $L_\omega^{(n)}$  está relacionada com a relação de dispersão para as ondas de superfície, enquanto que a parte imaginária corresponde ao

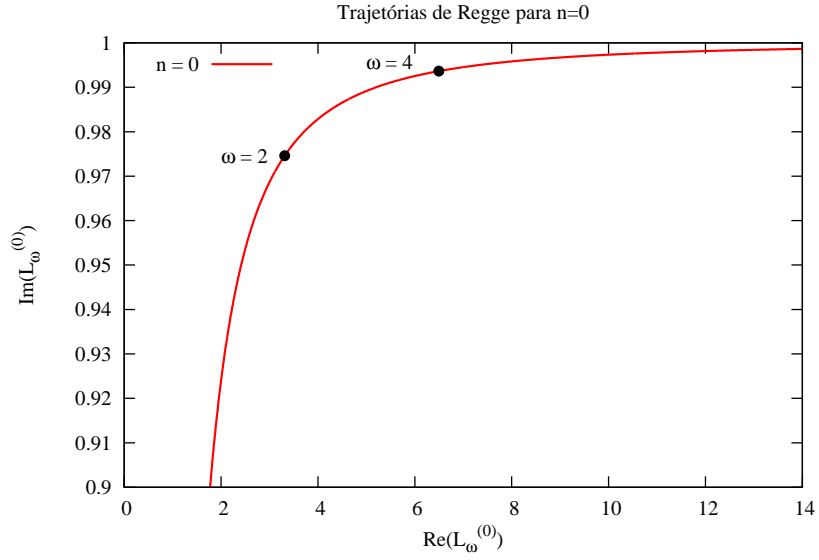


Figura 5.3: Trajetórias de Regge do BAC para  $n = 0$ , mostradas no intervalo de frequência  $0.8 < \omega < 16$ .

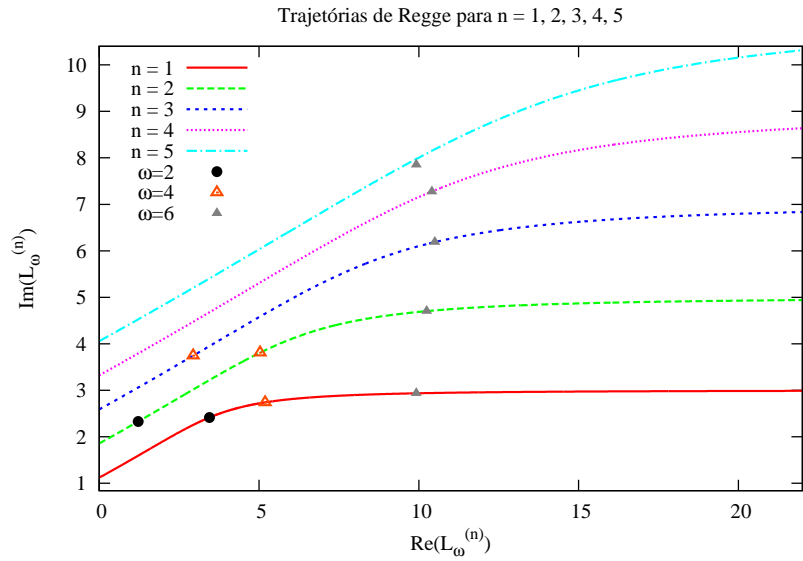


Figura 5.4: Trajetórias de Regge do BAC para  $n = 1, 2, 3, 4, 5$ , mostradas no intervalo de frequência  $0.8 < \omega < 16$ .

amortecimento.

Na Fig. 5.5 plotamos as funções radiais  $T_q^{(0)}(r)$ , definidas na Eq. (5.2). Analogamente

às funções radiais QNs  $S_q^{(0)}$ , os funções radiais dos PRs  $T_q^{(0)}$  partem do zero no horizonte de eventos e se tornam constantes no infinito espacial ( $r \rightarrow \infty$ ).

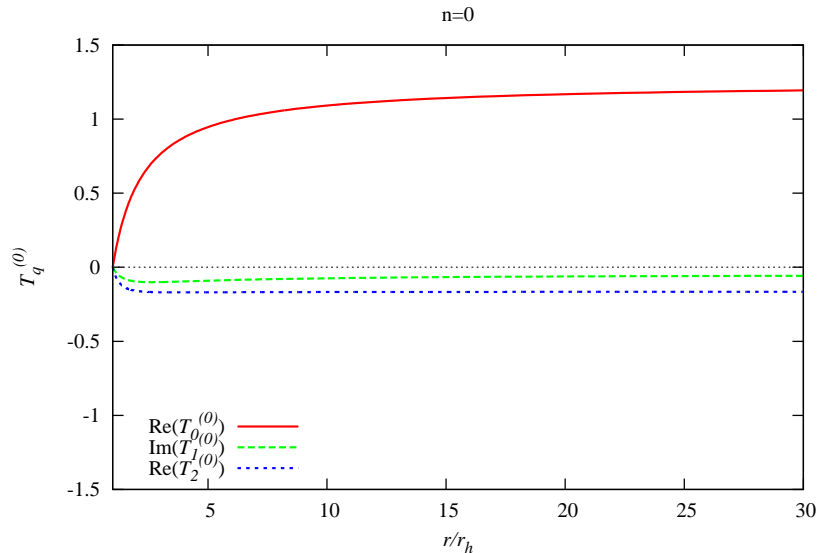


Figura 5.5: Funções radiais  $T_q^{(0)}(r)$  para o BAC.

As partes real e imaginária da função de onda dos PRs  $u_{\omega ln}$  do BAC, para  $n = 0$ , são plotadas na Fig. 5.6, como função de  $r$ . Diferentemente do caso dos modos QNs (ver Fig. 4.4), a função de onda dos PRs  $u_{\omega ln}$  não diverge no horizonte de eventos  $r_h$  e nem no infinito espacial ( $r \rightarrow \infty$ ). Isto se deve ao fato da frequência de oscilação dos PRs ser real. Além disso, a amplitude dessa função de onda  $u_{\omega ln}$  decai exponencialmente nas proximidades do horizonte de eventos. Como era de esperar, este comportamento está condizente com os resultados previstos para o caso de Schwazschild [14, 31].

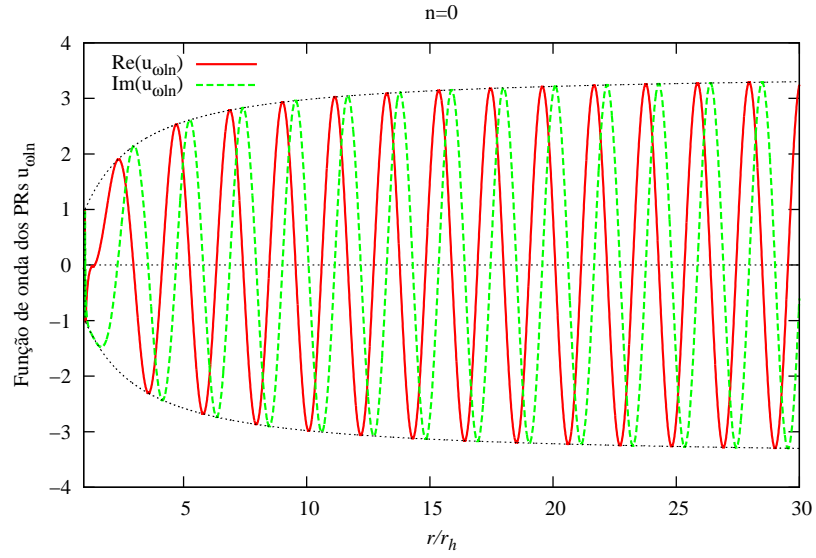


Figura 5.6: Função de onda dos PRs  $u$  do BAC, para  $n = 0$ ,  $r_h\omega = 3.0$ , como função de  $r$ .

Na Fig. 5.7 plotamos as partes real e imaginária da função de onda dos PRs  $\psi_{\omega ln}$  do BAC, para  $n = 0$ , como função apenas de  $t$ .

Como que era de se esperar, a amplitude de oscilação da função de onda  $\psi_{\omega ln}$  é constante em relação o tempo, isto porque estamos trabalhando com um sistema cuja frequência é puramente real.

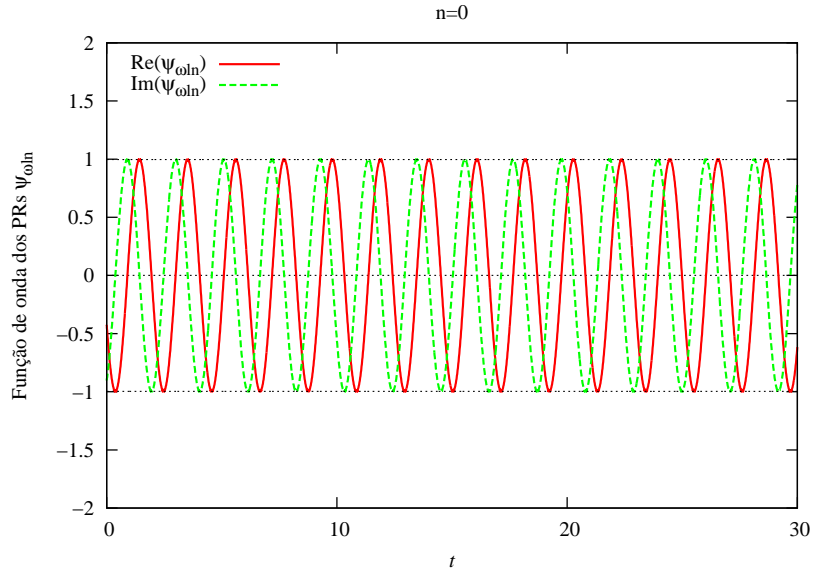


Figura 5.7: Função de onda dos PRs  $\psi_{\omega ln}$  do BAC, para  $n = 0$ ,  $r_h\omega = 3.0$ ,  $r = 1.09r_h$ , como função de  $t$ .

Para visualizar o comportamento da parte real da função de onda dos PRs  $\psi_{\omega ln}$  na Fig. 5.8, para  $n = 0$ , como função de  $t$  e  $r$ .

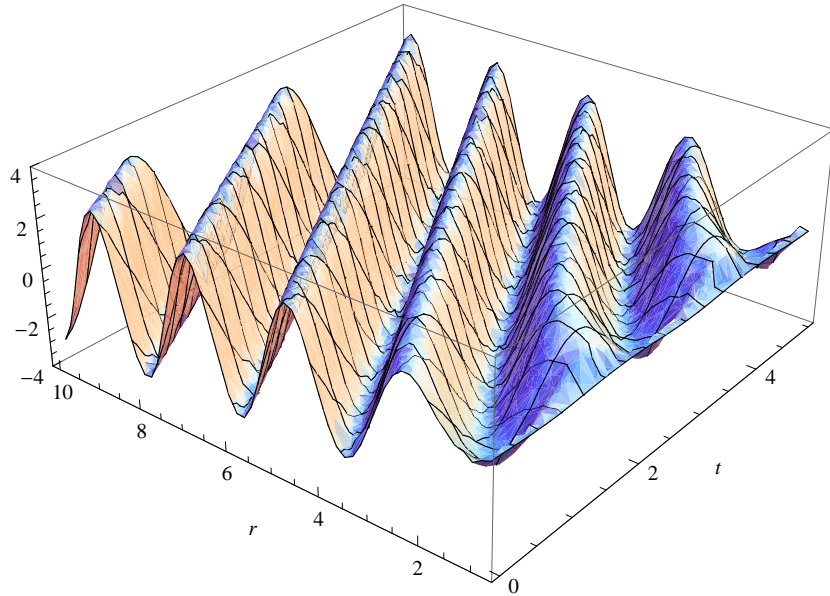


Figura 5.8: Parte real da função de onda dos PRs  $\psi_{\omega ln}$  do BAC, para  $n = 0$ ,  $r_h\omega = 3.0$ , como função de  $t$  e  $r$ .

Na Fig. 5.8, vemos que a amplitude de oscilação dos PRs emergentes em  $r \gg 1$  não sofre qualquer variação, e que a amplitude dos PRs entrantes decai exponencialmente nas proximidades do horizonte de eventos, deixando bem evidente a influência mais preponderante do potencial de espalhamento nas proximidades do horizonte de eventos do BAC.

# Capítulo 6

## Conclusão

Neste trabalho, aplicamos um método de expansão assintótica para encontrar os modos quasinormais e os pólos de Regge do buraco acústico canônico [17]. O método de expansão descrito na referência [14] tem a vantagem de revelar a conexão entre as propriedades das órbitas circulares nulas do BAC e o espectro de frequências QNs no limite em que  $l > 2$  e  $l \gtrsim n$  (aproximação eikonal). Usamos esse método para obter as frequências QNs como uma série de potências inversas de  $L = l + 1/2$  (veja Eq. (4.29) e Eq. (4.32)). Nossas séries apresentam estimativas mais precisas no regime em que  $l \gg n$  e menos precisas para o regime em que  $l \lesssim n$ , sendo que as mesmas têm um intervalo de validade similar ao dos resultados do método WKB [10]. Verificamos que é mais trabalhoso, do ponto de vista computacional, obter termos de ordem mais elevada na expansão da frequência QN (ver Eqs. (4.29) e Eq. (4.32)) para o BAC do que para o buraco negro de Schwarzschild. Isto ocorre por causa da dificuldade de obtenção da expansão da frequência QN nas proximidades de  $r = r_c$ , devido a potência de  $r^{-4}$  na função radial (4.2) do BAC. Geralmente os métodos de obtenção dos modos QNs e dos PRs se tornam bastante trabalhosos quando as funções radiais  $f(r)$  estão associadas a grandes potências inversas de  $r$ . Também devemos salientar que uma das vantagens do método de expansão assintótica é que ele nos conduz diretamente ao espectro dos PRs [cf. Eq. (5.3)] pelo mesmo processo matemático utilizado na obtenção dos modos QNs, o que simplifica bastante a abordagem matemática do problema. A obtenção das funções de onda, tanto para o caso dos modos QNs, como para os PRs por meio de simples aproximações, que são bem precisas no limite em que  $l \geq 2$  e  $l \gtrsim n$ , é a vantagem chave



deste método de aproximação assintótica sobre os outros métodos conhecidos na literatura. Tanto as Figs. 4.6 e 4.9 como a Fig. 5.8, nos fornece uma visualização bem clara acerca do comportamento oscilatório dos modos QNs e dos PRs, respectivamente.

Esperamos que nossas estimativas das frequências QNs e dos momentos angulares dos PRs, apresentados nessa dissertação, motivem algum experimento para determinar o valor dessas grandezas no BAC. Contudo, não devemos subestimar os desafios experimentais deste empreendimento. O BAC é formado por um fluxo convergente e esfericamente simétrico que se torna supersônico no horizonte de eventos. Tipicamente, no ponto de transição entre o escoamento sub- e supersônico, o fluxo do fluido torna-se instável e, como consequência, disso ocorre a produção de ondas de choque. Isto está relacionado ao fato de que, no regime de fluxo supersônico, um fluxo acelerado diverge mais do que converge. Vários autores propuseram a utilização do “bocal de laval” (Laval nozzle) para encontrar uma transição estável entre os regimes sub- and supersônico. Algumas possíveis configurações são consideradas em [13, 33, 34, 35]. Obviamente, o espectro QN depende da configuração do escoamento, mas esperamos que o método usado nesta dissertação possa ser adaptado sem problemas aos casos relevantes.

O espectro dos PRs, calculados nesta dissertação, podem também ser de interesse experimental. Por exemplo, a largura angular do padrão de difração associado ao efeito glória [36] que surge a partir da dispersão de uma onda monocromática [37] está relacionado com o espectro dos PRs [27, 31] (apesar de ter sido mostrado em [37] que o efeito glória é muito mais fraco para um BAC do que para um buraco negro Schwarzschild de tamanho correspondente). Por fim, esperamos que o método usado aqui também possa ser aplicado a outros modelos análogos de interesse experimental no futuro.

# Referências Bibliográficas

- [1] S. Hawking, *The Quantum Mechanics of Black Holes*, Sci. Am. **236**, 34 (1977).
- [2] J. Bardeen, B. Carter e S. Hawking, Commun. math. Phys. **31**, 161-170 (1973).
- [3] S. Hawking, Nature **248**, 30 (1974).
- [4] W. Unruh, Phys. Rev. Letters **46**, 1351 (1981).
- [5] M. Visser, Class. Quantum Grav. **15**, 1767 (1998).
- [6] Carlos Barceló, Stefano Liberati e Matt Visser, Living Rev. Relativity **8**, 12 (2005).
- [7] S. Basak e P. Majumdar, Class. Quantum Gravity **20**, 3907 (2003).
- [8] S. Basak e P. Majumdar, Class. Quantum Gravity **20**, 2929 (2003).
- [9] L. Garay, J. Anglin, J. Cirac e P. Zoller, Phys. Rev. A **63**, 023611 (2000).
- [10] E. Berti, V. Cardoso e J. P. S. Lemos, Phys. Rev. D **70**, 124006 (2004) [arXiv:gr-qc/0408099].
- [11] P. Xi e X.-Z. Li, IJMPD **16**, 1211 (2007) [arXiv:0709.3714].
- [12] V. Cardoso, J. P. S. Lemos e S. Yoshida, Phys. Rev. D **70**, 124032 (2004).
- [13] E. Abdalla, R.A. Konoplya e A. Zhidenko, Class. Quantum Grav **24**, 5901 (2007) [arXiv:0706.2489].
- [14] S. R. Dolan e A. C. Ottewill, Class. Quantum Gravity **26**, 225003 (2009) [arXiv:0908.0329].

- [15] Vitor Cardoso, *Quasinormal Modes and Gravitational Radiation in Black Holes Spacetimes*, Tese de Doutorado, Universidade Técnica de Lisboa, 2003.
- [16] Y. Décanini, A. Folacci e B. Raffaelli, Phys. Rev. D (2010) [arXiv:1002.0121].
- [17] S. R. Dolan, L. A. Oliveira e L. C. B. Crispino, *Quasinormal modes and Regge Poles of the Canonical Acoustic Hole*, Submetido para a publicação na *Physical Review D*.
- [18] B. Munson, D. Young e T. Okiishi, *Fundamentos da Mecânica dos Fluidos*, Editora Edgard Blücher LTDA, São Paulo, 1997.
- [19] J. Bassalo, *Introdução à Mecânica dos Meios Contínuos*, Editora da UFPA, Belém-Pará, 1973.
- [20] I. Zolnerkevic, *Acústica de Fluidos Ideais Análoga à Gravitação*, Dissertação de Mestrado, IFT-UNESP, 2004.
- [21] M. Cattani, *Elementos de Mecânica dos Fluidos*, 2ª edição, Editora Edgard Blücher LTDA, São Paulo, 2005.
- [22] L. Landau e E. Lifshitz, *Fluid mechanics*, Pergamon Press, New York, 1987.
- [23] R. D’Inverno, *Introducing Einstein’s Relativity*, Clarendon Press, Oxford, 1992.
- [24] R. Wald, *General Relativity*, The University of Chicago Press, Chicago, 1984.
- [25] V. Cardoso, A. S. Miranda, E. Berti, H. Witek e V. T. Zanchin, Phys. Rev. D **79**, 064016 (2009) [arXiv:0812.1806].
- [26] N. J. Cornish e J. J. Levin, Class. Quantum Gravity **20**, 1649 (2003) [arXiv:gr-qc/0304056].
- [27] Y. Décanini, A. Folacci e B. Jensen, Phys. Rev. D **67** (2003) 124017 [arXiv:gr-qc/0212093].
- [28] Y. Décanini e A. Folacci, Phys. Rev. D **81**, 024031 (2010) [arXiv:0906.2601].
- [29] K. D. Kokkotas e B. G. Schmidt, Living Rev. Relativity **2**, 2 (1999).

- [30] E. Berti, V. Cardoso e A. O. Starinets, *Class. Quantum Gravity* **26**, 163001 (2009) [arXiv:0905.2975].
- [31] N. Andersson, *Class. Quantum Gravity* **11**, 3003 (1994).
- [32] E. W. Leaver, *Proc. R. Soc. A* **402**, 285 (1985).
- [33] S. Okuzumi e M. Sakagami, *Phys. Rev. D* **76**, 084027 (2007) [arXiv:gr-qc/0703070].
- [34] H. Furuhashi, Y. Nambu e H. Saida, *Class. Quantum Gravity* **23** (2006) 5417.
- [35] V. Cardoso, *Acoustic black holes*, (2005) [arXiv:physics/0503042].
- [36] T. -Z. Zhang e C. DeWitt-Morette, *Phys. Rev. Lett.* **52** 2313 (1984).
- [37] S. R. Dolan, E. S. Oliveira, e L. C. B. Crispino, *Phys. Rev. D* **79**, 064014 (2009) [arXiv:0904.0010].