

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
CENTRO DE GEOCIÊNCIAS
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM GEOFÍSICA

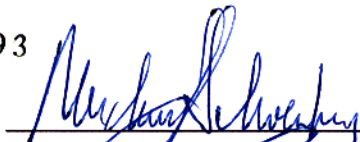
MODELAGEM SÍSMICA E INVERSÃO
NA PRESENÇA DE ANISOTROPIA

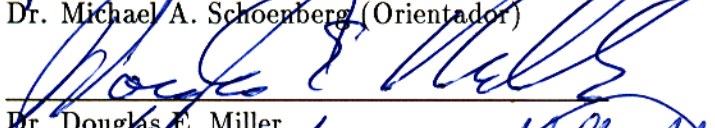
TESE APRESENTADA POR
JESSÉ CARVALHO COSTA

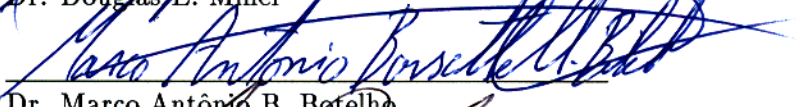
COMO REQUISITO PARCIAL À OBTENÇÃO DE GRAU DE
DOUTOR EM CIÊNCIAS NA ÁREA DE GEOFÍSICA

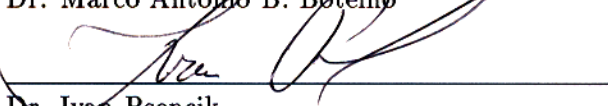
Data de Aprovação : 04/11/1993

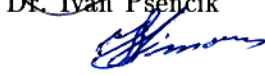
COMITÊ DE TESE:


Dr. Michael A. Schoenberg (Orientador)


Dr. Douglas E. Miller


Dr. Marco Antônio B. Botelho


Dr. Ivan Psencik


Dr. Ivan de A. Simões Filho

BELÉM

1993

COSTA, Jessé Carvalho. Modelagem sísmica e inversão na presença de anisotropia. Belém, Universidade Federal do Pará. Centro de Geociências, 1993. 94p.

Tese (Doutorado em Geofísica - Curso de Pós-Graduação em Geofísica, Centro de Geociências, UFPA, 1993).

1. TOMOGRAFIA. 2. ANISOTROPIA. 3. TRAÇAMENTO DE RAIOS. 4. TEMPO DE TRÂNSITO.
I. Título.

*A minha esposa Silvia e ao meu filho
Kauê, sem os quais todo este esforço
não teria sentido.*

AGRADECIMENTOS

Ao Mike, pela excelente orientação e principalmente pela amizade, paciência e dedicação com um aluno tão difícil.

Ao Protázio, amigo e quase irmão, que já pode dormir após tanto sufoco, pela inestimável ajuda em todas etapas deste trabalho, sem a qual teria sido impossível terminar esta tese.

Ao Doug Miller, que me aturou por dois verões seguidos e com quem aprendi muito.

Ao Ivan Simões, pelas discussões esclarecedoras e sugestões durante a realização deste trabalho.

A Schlumberger Cambridge Research, na pessoa de Phil Christie, pela oportunidade de trabalhar dois verões em Cambridge, onde grande parte desse trabalho foi desenvolvido.

Ao Prof. Carlos Dias, pelo seu incentivo em todas as etapas desse trabalho.

Ao Prof. João Batista e à Prof. Sônia Guerreiro, pelo apoio imprescindível para apresentação deste trabalho.

Ao convênio UFPA/PETROBRÁS/FADESP/CAPES/FINEP/CNPq, pela infraestrutura necessária à realização deste trabalho.

Ao Paulo Buarque pelo apoio, discussões, ajuda com os computadores e a paciência com um usuário tão chato.

Aos membros das bancas de qualificação e de defesa da tese: Drs. João Batista Correa da Silva, Vlatislav Cervený, Phillip Carrion, Klaus Schiel, Ivan Psencik, Doug Miller, Ivan Simões e Marco Botelho, pelas sugestões para realização de um bom trabalho.

Ao corpo docente do Curso de Pós Graduação em Geofísica da Universidade Federal do Pará e da Universidade Federal da Bahia, responsável por minha formação.

Aos funcionários do Projeto e do Curso de Geofísica, pelo apoio e eficiência. Particularmente, ao Andre Luiz de Oliveira pela disponibilidade e dedicação.

A todos os meus colegas de curso pelo estímulo e colaboração.

A Sílvia e ao Kauê, que são meu maior estímulo, por suportarem pacientemente meu nervosismo e minha ausência.

SUMÁRIO

	p.
DEDICATÓRIA	i
AGRADECIMENTOS	ii
RESUMO	1
ABSTRACT	3
1 - INTRODUÇÃO	4
2 - A INDETERMINAÇÃO DE ANISOTROPIA POR ONDAS SH REFLETIDAS	6
2.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS	6
2.2 ONDAS SH EM UM MEIO MONOCLÍNICO	7
2.3 O PROBLEMA DA REFLEXÃO-TRANSMISSÃO PARA ONDAS SH EM UM SEMI-ESPAÇO MONOCLÍNICO	10
2.4 O PROBLEMA DE REFLEXÃO - TRANSMISSÃO DE ONDAS SH ATRAVÉS DE UM SEMI - ESPAÇO MONOCLÍNICO ESTRATIFICADO	12
2.5 SIMULAÇÃO NUMÉRICA	15
2.6 CONSIDERAÇÕES FINAIS	16
3 - TRAÇADO DE RAIOS EM MEIOS ANISOTRÓPICOS	23
3.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS	23
3.2 PRINCÍPIO DE FERMAT E VELOCIDADE DE GRUPO EM MEIOS ANISOTRÓPICOS	24
3.3 TRAÇADO DE RAIOS EM MEIOS ANISOTRÓPICOS ESTRATIFICADOS	27
3.4 TRAÇADO DE RAIOS PELO MÉTODO DE CONTINUAÇÃO	28
3.4.1 Continuação das superfícies de vagarosidade	29
3.4.2 Continuação das interfaces	30
3.4.3 Continuação de fontes e receptores	31
3.4.4 Exemplos numéricos	31

3.5	TRAÇADO DE RAIOS ATRAVÉS DE CAMADAS TIV COM INTERFACES PLANAS	32
3.6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	37
4 -	TOMOGRAFIA EM MEIOS ANISOTRÓPICOS ESTRATIFICADOS	42
4.1	CONSIDERAÇÕES INICIAIS	42
4.2	PERTURBAÇÕES DO TEMPO DE TRÂNSITO	43
4.3	APLICAÇÃO A MEIOS TRANSVERSALMENTE ISOTRÓPICOS	44
4.4	TOMOGRAFIA EM UM MEIO TIV ESTRATIFICADO	48
4.5	ALGORITMO DE INVERSÃO PARA MODELOS ANISOTRÓPICOS	50
4.6	TOMOGRAFIA ISOTRÓPICA	53
4.7	APLICAÇÃO A DADOS SINTÉTICOS	55
4.8	APLICAÇÃO A DADOS REAIS	57
4.9	CONSIDERAÇÕES FINAIS	59
5 -	CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS	80
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	81

RESUMO

A necessidade da adoção de modelos elásticos anisotrópicos, no contexto da sismica de exploração, vem crescendo com o advento de novas técnicas de aquisição de dados como VSP, walkway VSP, tomografia poço a poço e levantamentos sísmicos com grande afastamento. Meios anisotrópicos, no contexto da sismica de exploração, são modelos efetivos para explicar a propagação de ondas através de meios que apresentam padrões de heterogeneidade em escala muito menor que o comprimento de onda das ondas sísmicas. Particularmente, estes modelos são muito úteis para explicar o dado sísmico mais robusto que são as medidas de tempo de trânsito.

Neste trabalho, são investigados aspectos da propagação de ondas, traçado de raios e inversão de tempos de trânsito em meios anisotrópicos. É estudada a propagação de ondas SH em meios anisotrópicos estratificados na situação mais geral onde estas ondas podem ocorrer, ou seja, em meios monoclinicos com um plano vertical de simetria especular. É mostrado que o campo de ondas SH refletido a partir de um semi-espaco estratificado, não apresenta qualquer informação sobre a possível presença de anisotropia em subsuperfície.

São apresentados métodos simples e eficientes para o traçado de raios em 3D através de meios anisotrópicos estratificados, baseados no princípio de Fermat. Estes métodos constituem o primeiro passo para o desenvolvimento de algoritmos de inversão de tempos de trânsito para meios anisotrópicos em 3D, a partir de dados de VSP e walkaway VSP. Esta abordagem é promissora para determinação de modelos de velocidade, que são necessários para migração de dados sísmicos 3D na presença de anisotropia.

É efetuada a análise da inversão tomográfica não linear, para meios estratificados transversalmente isotrópicos com um eixo de simetria vertical (TIV). As limitações dos dados de tempo de trânsito de eventos qP para determinação das constantes elásticas, são estabelecidas e caracterizados os efeitos da falta de cobertura angular completa na inversão tomográfica. Um algoritmo de inversão foi desenvolvido e avaliado em dados sintéticos. A aplicação do algoritmo a dados reais demonstra a consistência de meios TIV. Esta abordagem é útil para casos onde há informação *a priori* sobre a estratificação quase plana das formações e onde os próprios dados do levantamento poço a poço apresentam um alto grau de simetria especular em relação a um plano vertical. Também pode ser útil em interpretações preliminares, onde a estimativa de um meio estratificado, serve como modelo de fundo para se efetuar análises

mais detalhadas, por exemplo, como um modelo de velocidades anisotrópico para migração, ou como um modelo de calibração para análises de AVO.

ABSTRACT

The assumption of anisotropic elastic models, in the context of exploration seismology, has been increasing since the advent of new acquisition techniques: VSP, walkway VSP, crosshole tomography and large offset seismic surveys. Effective anisotropic elastic models can account for patterns of inhomogeneities at a scale much lower than the wavelength of the propagating seismic energy. Particularly, effective media can account for the most robust seismic data, i.e., traveltime measurements.

This work investigates some aspects of wave propagation, raytracing and traveltime inversion in anisotropic media. The propagation of SH waves in a layered anisotropic medium in the most general case where these waves can occur, i.e., propagation in the mirror symmetry plane of a monoclinic medium, is studied. It is shown that SH reflected field from a stratified half-space is 'blind' to the possible anisotropy below.

Fast ray tracing procedures for stratified anisotropic media in 3D are presented. Such ray tracing codes are a first step towards the development of traveltime inversion algorithms for non-flat anisotropic layers in 3D. Traveltime inversion of VSP and walkway VSP is a promising approach to 3D velocity model building, starting from a well location. These velocity models are necessary for the migration of seismic data in the presence of anisotropy.

The analysis of the nonlinear tomographic inversion, for a vertically inhomogeneous transversally isotropic medium with vertical axis of symmetry (TIV), is presented. The limitations of qP traveltime data are pointed as well as the consequences of the lack of full angular ray coverage for tomographic inversion. An algorithm for tomographic inversion is presented and evaluated in synthetic data sets. Application to real data is presented. This approach is attractive for cases where the formations are known *a priori* to be relatively flat, and where crosswell data itself shows a high degree of left-right symmetry. It also may be of use for preliminary surveys, where the layered estimate can be used as a background model to carry out more detailed analysis, e.g., as an anisotropic velocity model for migration, or as a calibration model for AVO analysis.

1 - INTRODUÇÃO

A interpretação de experimentos sísmicos de superfície, no contexto da sismica de exploração, era feita, até recentemente, pressupondo-se um modelo elástico isotrópico para a subsuperfície. O advento de novas técnicas de aquisição como a perfilagem sísmica vertical (VSP), tomografia poço a poço e levantamentos sísmicos de superfície com grande afastamento tem mostrado que modelos isotrópicos são inconsistentes com os dados em um número crescente de casos (ALFORD, 1986 ; MILLER & CHAPMAN, 1991). Estes resultados têm estimulado a adoção de modelos elásticos anisotrópicos como uma alternativa simples para interpretação sísmica nestas situações. Para avaliar as consequências da adoção de modelos anisotrópicos tem havido um esforço crescente na tentativa de entender as seguintes questões:

- a) Quais os mecanismos físicos responsáveis pela anisotropia na subsuperfície na escala da sismica de exploração ?
- b) Como a anisotropia afeta os diferentes experimentos sísmicos?
- c) O que se pode inferir sobre a anisotropia em subsuperfície a partir dos experimentos sísmicos ? Quais medidas são necessárias para determinar os parâmetros que caracterizam a anisotropia de formações geológicas, no contexto da exploração?

O entendimento dos mecanismos físicos responsáveis pela anisotropia na crosta terrestre se iniciou muito antes das exigências experimentais para adoção de modelos elásticos anisotrópicos na sismica de exploração. POSTMA(1955) sugeriu que meios elásticos com estratificações laminares se comportam como meios transversalmente isotrópicos efetivos no limite quase-estático, isto é, para grandes comprimentos de onda. HUDSON(1981) obteve modelos anisotrópicos efetivos, no limite quase-estático, para meios com fissuras circulares, este trabalho também apresenta fatores de atenuação efetivos associados ao espalhamento produzido pelas fissuras. SCHOENBERG & DOUMA (1988) e SCHOENBERG & MUIR (1989) mostraram como combinar camadas laminares e uma interface deslizante (SCHOENBERG, 1983), um modelo para fraturas, para obter meios anisotrópicos efetivos com diferentes propriedades de simetria (também no limite quasi-estático). Estes modelos têm se mostrado muito úteis para explicar os aspectos cinemáticos da propagação de ondas (tempos de trânsito), na faixa de frequência de levantamentos sísmicos de superfície, VSP e experimentos poço a poço.

Existe atualmente um esforço para ir além da aproximação quase-estática, na tentativa de se caracterizar mais adequadamente os registros sísmicos (DE HOOP et al., 1991). A pesquisa nesta área tem levado a um interesse crescente pelo estudo da propagação de ondas em meios aleatórios. Mesmo considerando-se que esta abordagem é mais ambiciosa, meios anisotrópicos efetivos (nos limites da aproximação quase estática), por outro lado, possuem o grande atrativo de serem modelos simples que explicam o dado sísmico mais robusto, que são as medidas de tempo de trânsito.

Esta tese é composta de três capítulos, relacionados às questões b e c acima. No primeiro capítulo é mostrado que ondas SH refletidas em um meio anisotrópico estratificado subjacente, não possuem qualquer informação sobre a anisotropia, isto é, nenhum experimento na superfície utilizando apenas registros de ondas SH pode detectar a presença de anisotropia. Este resultado também se aplica a interpretação sísmica utilizando modelos acústicos com anisotropia elíptica, quando é considerado somente o tempo de trânsito dos eventos.

No segundo capítulo são apresentados algoritmos simples para o traçado de raios em meios anisotrópicos a partir do princípio de Fermat. Dois algoritmos são apresentados: o primeiro, é uma extensão para meios anisotrópicos do método da continuação, proposto por KELLER & PEROZZI (1983) para o traçado de raios em meios isotrópicos. O algoritmo se aplica ao traçado de raios em 3D através de modelos anisotrópicos estratificados lateralmente heterogêneos; o segundo se aplica ao traçado de raios em meios com estratificação plana. Particularmente, este algoritmo foi implementado para meios transversalmente isotrópicos apresentando eixo vertical de simetria (TIV). O desempenho computacional e a robustez desses algoritmos são adequados a procedimentos de inversão de tempos de trânsito para meios anisotrópicos.

O terceiro capítulo desta tese discute a inversão tomográfica não linear para meios TIV estratificados. A partir da análise das derivadas de Fréchet são identificadas as combinações de parâmetros que podem ser resolvidas a partir de eventos qP e os efeitos da falta de cobertura angular completa para inversão tomográfica. Um algoritmo é proposto e avaliado através de dados sintéticos. É apresentada a aplicação deste algoritmo a dados reais.

2 - A INDETERMINAÇÃO DE ANISOTROPIA POR ONDAS SH REFLETIDAS

2.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Um meio monoclinico, dentro dos limites da elasticidade linear, tem um plano especular de simetria. A propagação neste plano é o caso mais geral de propagação de onda elástica em um meio anisotrópico para o qual, uma deformação puramente cisalhante e normal ao plano de propagação pode ocorrer em todas as as direções. Quando este plano é vertical, estas ondas puramente cisalhantes são ondas SH e para que a sua propagação seja possível, o meio deve ter um plano vertical de simetria especular e a propagação deve se dar neste plano. Esta simetria ocorre quando todas as características texturais são planas e perpendiculares a um plano vertical comum, como se observa num meio anisotrópico homogêneo, equivalente, no limite de grandes comprimentos de onda, a uma massa rochosa com textura (SCHOENBERG & MUIR, 1989). Um exemplo é quando existem várias camadas finas inclinadas, originando isotropia transversal com eixo de simetria não vertical. Ondas SH podem se propagar no plano vertical que contém o eixo de simetria, chamado plano de mergulho. A adição de um ou mais sistemas de fraturas paralelas, com normais no plano de mergulho (ou seja, o sistema de fraturas e a estratificação possuem uma direção de 'strike' comum, perpendicular ao plano de mergulho), não altera a simetria especular do meio em torno do plano de mergulho, desde que as fraturas tenham este plano como um plano de simetria. SCHOENBERG & DOUMA (1988) discutem as possíveis simetrias associadas a sistemas de fraturas. Quaisquer das características, incluindo um dos sistemas de fraturas ou estratificação, podem ser verticais ou horizontais, sem destruir a simetria. Outra característica que pode ser adicionada, sem destruir a simetria especular em torno do plano de mergulho comum, é um sistema de fraturas paralelas verticais no plano de mergulho, desde que a compliância normal das fraturas seja desacoplada da compliância tangencial (SCHOENBERG & DOUMA, 1988).

Atualmente, ondas SH tem sido bastante utilizadas em levantamentos de ondas cisalhantes, uma vez que fontes cisalhantes e receptores, ambos direcionais, estão se tornando mais comuns e a orientação de fontes e receptores, perpendicular a linha sísmica, permite investigar as propriedades cisalhantes da subsuperfície com pequeno acoplamento de ondas compressionais. Entretanto, estes pressupostos são válidos somente quando há pouco mergulho fora do

plano de propagação e quando a anisotropia do meio é tal, que o plano vertical de propagação é um plano de simetria especular. No caso do plano de propagação ser um plano de simetria especular, o campo de ondas resultante consiste somente de ondas SH e é rigorosamente um campo escalar, sendo, presumivelmente, mais fácil de interpretar. NAYFEH (1989) discute a propagação de modos SH em meios anisotrópicos estratificados, mas com cada um dos estratos ortorrômbico e com eixos alinhados com a estratificação. Isto implica que as superfícies de vagariedade SH, que sempre são elípticas, estão alinhadas à estratificação. No caso monoclinico mais geral, aqui considerado, as superfícies de vagariedade SH podem estar inclinadas em relação à estratificação.

Este trabalho investiga o efeito da anisotropia sobre estas ondas escalares SH e que informações sobre a anisotropia pode ser extraída destes efeitos. A análise aqui efetuada, para o ambiente anisotrópico estratificado mais geral onde estas ondas existem, é bastante simples e produz alguns resultados surpreendentes. Na primeira seção, é discutida a teoria da propagação de ondas SH em meios anisotrópicos. Na segunda, é apresentado o problema de reflexão-transmissão em um semi-espaço anisotrópico. Na terceira, esta análise é generalizada para um semi-espaço anisotrópico estratificado. Finalmente, na quarta seção, são apresentados os resultados de dois experimentos numéricos, simulando a propagação através de uma camada monoclinica abaixo de um meio isotrópico. Alguns instantâneos do campo de ondas, que demonstram alguns fenômenos surpreendentes previstos analiticamente, são obtidos.

A principal conclusão é que, quando os receptores estão localizados em um semi-espaço isotrópico sobre um semi-espaço estratificado, o campo de ondas SH refletido não contém informação sobre a anisotropia ou mesmo qualquer informação quantitativa sobre a estratificação. Para se obter informações sobre a anisotropia de uma região, a partir de ondas SH apenas, fontes e/ou receptores devem estar localizados, simultaneamente, acima e abaixo da região em questão.

2.2 ONDAS SH EM UM MEIO MONOCLÍNICO

Seja um meio monoclinico, elástico e homogêneo, tendo o plano $x_1 - x_2$ como seu único plano de simetria especular. O meio é caracterizado por sua densidade ρ e uma matriz de módulos elásticos 6×6 tal que a lei de tensão-deformação, em notação condensada, seguindo

AULD (1973), é

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & c_{15} & 0 \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & 0 & c_{25} & 0 \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & 0 & c_{35} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & c_{46} \\ c_{15} & c_{25} & c_{35} & 0 & c_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{46} & 0 & c_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \epsilon_4 \\ \epsilon_5 \\ \epsilon_6 \end{bmatrix}, \quad (2.1)$$

onde as componentes de deformação, em termos das componentes do deslocamento, são

$$\begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \epsilon_4 \\ \epsilon_5 \\ \epsilon_6 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} u_{1,1} \\ u_{2,2} \\ u_{3,3} \\ u_{3,2} + u_{2,3} \\ u_{1,3} + u_{3,1} \\ u_{2,1} + u_{1,2} \end{bmatrix}.$$

Este meio será designado por M . Observe que esta formulação geral contém muitos casos especiais de maior simetria, ou seja, qualquer meio que contenha pelo menos um plano de simetria. AULD (1973) lista dez sistemas de simetria para um meio elástico linear: triclinico, monoclinico, ortorrômbico, tetragonal com um único eixo de simetria para rotações de 90° (tetragonal fraco), tetragonal com um eixo de simetria para rotações de 90° e um plano de simetria especular perpendicular à este eixo (tetragonal forte), trigonal com um único eixo de simetria para rotações de 120° (trigonal fraco), trigonal com um eixo de simetria para rotações de 120° e um plano de simetria especular perpendicular a este eixo (trigonal forte), hexagonal, cúbico e isotrópico. Meios triclinicos não têm planos de simetria e meios trigonais fracos não possuem planos de simetria especular. Meios tetragonais fracos, meios trigonais fortes e meios ortorrômbicos, são subconjuntos dos conjuntos de meios monoclinicos, enquanto meios tetragonais fortes, meios hexagonais, meios cúbicos e meios isotrópicos são subconjuntos do conjunto de meios ortorrômbicos. Se um meio têm o plano $x_1 - x_3$ como plano de simetria, ele pode ser rotacionado neste plano e ainda reter seu caráter monoclinico, ou seja, ainda ter uma matriz de módulos elásticos na forma (2.1).

Supondo-se a hipótese de deformação perpendicular ao plano de propagação, isto é, que a velocidade da partícula só apresenta componente na direção x_2 , esta pode ser escrita na forma $v(x_1, x_3)$. Isto, juntamente com a estrutura da matriz de módulos elásticos em (2.1), implica que as únicas componentes não nulas do tensor de tensão são, em notação condensada, σ_4 e σ_6 . Tais componentes são dadas por

$$\dot{\sigma}_4 = c_{44}v_{,3} + c_{46}v_{,1}, \quad \dot{\sigma}_6 = c_{46}v_{,3} + c_{66}v_{,1}. \quad (2.2)$$

Segue-se, daí, que as componentes 1 e 3 das equações de movimento são trivialmente satisfeitas e que a segunda componente satisfaz

$$c_{66}v_{,11} + 2c_{46}v_{,13} + c_{44}v_{,33} = \rho \ddot{v} , \quad (2.3)$$

onde a vírgula denota derivação parcial. Como a matriz dos módulos elásticos é positiva definida, as seguintes relações são obedecidas

$$c_{44} > 0 , \quad c_{66} > 0 , \quad c^2 \equiv c_{44}c_{66} - c_{46}^2 > 0 . \quad (2.4)$$

A velocidade associada a uma onda harmônica plana, de amplitude A , é escrita na forma

$$v = A \exp[i\omega(s_1x_1 + s_3x_3 - t)] . \quad (2.5)$$

A substituição desta forma em (2.3), resulta na relação que define a superfície de vagarosidade para ondas SH em um meio monoclinico e que é dada por

$$c_{66}s_1^2 + 2c_{46}s_1s_3 + c_{44}s_3^2 = \rho . \quad (2.6)$$

No espaço real $s_1 - s_3$, esta relação representa uma elipse, devido à condição (2.4).

A Figura 2.1 mostra esta elipse com as coordenadas de intersecção s_1 e s_3 e as posições de suas tangentes horizontais e verticais em termos dos quatro parâmetros c_{44} , c_{46} , c_{66} e ρ . De fundamental importância, é mostrada a coordenada s_1 da tangente vertical à elipse, que nada mais é do que a vagarosidade horizontal crítica para ondas incidentes sobre a interface. É mostrada, também, a inclinação do vetor de vagarosidade para o caso crítico. As dimensões, excentricidade e orientação da elipse de vagarosidade e a superfície de velocidade de grupo ou frente de onda associada, que também é elíptica, são discutidas no Anexo I.

Para identificar ondas que se propagam para cima e para baixo, a relação de vagarosidade (2.6) é resolvida para s_3 , em função da vagarosidade horizontal

$$s_3^\pm = \pm \frac{c}{c_{44}} \sqrt{\frac{\rho}{c_{44}} \frac{c_{44}^2}{c^2} - s_1^2} - \frac{c_{46}}{c_{44}} s_1 . \quad (2.7)$$

Portanto, existem duas ondas planas em qualquer frequência ω e vagarosidade horizontal s_1 , dadas por

$$v = A^+ \exp(i\omega s_3^+ x_3) + A^- \exp(i\omega s_3^- x_3) , \quad (2.8)$$

onde, nesta equação e nas expressões subsequentes, o fator $\exp[i\omega(s_1x_1 - t)]$ é omitido. O sobrescrito $+$ denota ondas que se propagam para baixo, na direção $+x_3$, enquanto o sobrescrito $-$ denota ondas que se propagam para cima, na direção $-x_3$. Para uma elipse de

vagariosidade inclinada, é possível que s_3^+ e s_3^- possuam o mesmo sinal, mas sempre com $s_3^+ > s_3^-$. Quando $s_3^\pm$ são complexos, o sinal mais implica em atenuação na direção $+x_3$ e o sinal menos, atenuação na direção $-x_3$.

A tração que atua no plano horizontal (x_3 constante), tem uma componente σ_4 dada por (2.2). Nas expressões seguintes σ_4 será simplesmente denotada por σ . Assim,

$$-\sigma = A^+(c_{44}s_3^+ + c_{46}s_1) \exp(i\omega s_3^+ x_3) + A^-(c_{44}s_3^- + c_{46}s_1) \exp(i\omega s_3^- x_3) . \quad (2.9)$$

Mas, por (2.7), os fatores $(c_{44}s_3^\pm + c_{46}s_1)$ que aparecem em (2.9), são dados por

$$\pm c \sqrt{\frac{\rho}{c_{44}} \frac{c_{44}^2}{c^2} - s_1^2} = \pm Z_M , \quad (2.10)$$

que representa a impedância de um meio monoclinico quando a vagariosidade horizontal é s_1 . Portanto, (2.9) pode ser reescrita na forma,

$$-\sigma = Z_M [A^+ \exp(i\omega s_3^+ x_3) - A^- \exp(i\omega s_3^- x_3)] . \quad (2.11)$$

A impedância Z_M se anula para valores de vagariosidade horizontal crítica, indicados na Figura 2.1.

2.3 O PROBLEMA DA REFLEXÃO-TRANSMISSÃO PARA ONDAS SH EM UM SEMI-ESPAÇO MONOCLÍNICO

Nesta seção é discutido o problema da reflexão e transmissão de ondas SH, através da interface que separa um semi-espaço elástico, homogêneo e isotrópico I, caracterizado pela densidade ρ_0 e módulo de cisalhamento μ_0 , com velocidade de propagação $\beta = \sqrt{\mu_0/\rho_0}$, de um outro semi-espaço elástico, homogêneo e monoclinico, descrito anteriormente (Figura 2.2(a)). A interface define o plano $x_3 = 0$, com a orientação positiva do eixo x_3 apontando para baixo, no meio monoclinico. Consideremos, agora, uma onda plana SH, unitária, propagando-se no plano $x_1 - x_3$ de um meio isotrópico superior e incidente sobre a interface. Ela produzirá, então, uma única onda refletida SH no meio isotrópico e uma única onda transmitida SH no meio monoclinico, com amplitudes R e T , respectivamente. Isto porque o plano $x_1 - x_3$, por hipótese, define o plano de simetria do meio monoclinico. O fato de que s_1 deve ser a mesma para as três ondas (Lei de Snell), está indicado esquematicamente para dois casos. Na Figura 2.2(b), o vetor vagariosidade da onda transmitida tem componente s_3 positiva e aponta para baixo. Na Figura 2.2(c), ele tem componente vertical negativa e aponta para cima. O vetor vagariosidade da onda transmitida deve ser um ponto sobre a superfície inferior

da elipse de vagarosidade (linha sólida na Figura 2.2(b)), isto é, um vetor cuja velocidade de grupo associada, que é normal à elipse de vagarosidade, aponta para baixo.

No meio isotrópico I, para qualquer ω e s_1 , a componente de velocidade na direção x_2 e a componente de tração associada σ no plano horizontal são

$$\begin{aligned} v &= \exp(i\omega s_{30}x_3) + R \exp(-i\omega s_{30}x_3) , \\ -\sigma &= Z_0[\exp(i\omega s_{30}x_3) - R \exp(-i\omega s_{30}x_3)] , \end{aligned} \quad (2.12)$$

onde a vagarosidade vertical s_{30} e a impedância Z_0 são dadas por

$$s_{30} = \sqrt{1/\beta_0^2 - s_1^2} , \quad Z_0 \equiv \mu_0 s_{30} . \quad (2.13)$$

No meio monoclinico M há somente uma onda SH transmitida, de amplitude T , que se propaga para baixo. De (2.8) e (2.11), v e $-\sigma$ são dados por

$$\begin{aligned} v &= T \exp(i\omega s_3^+ x_3) , \\ -\sigma &= Z_M T \exp(i\omega s_3^+ x_3) , \end{aligned} \quad (2.14)$$

onde s_3^+ é dado por (2.7) e Z_M por (2.10). A continuidade de v e $-\sigma$ em $x_3 = 0$ requer que

$$1 + R = T , \quad Z_0(1 - R) = Z_M T. \quad (2.15)$$

Suas soluções usuais são dadas por

$$R = \frac{Z_0 - Z_M}{Z_0 + Z_M} , \quad T = \frac{2Z_0}{Z_0 + Z_M} \quad (2.16)$$

Como Z_0 e Z_M dependem somente de s_1^2 , R e T são independentes do sinal de s_1 e, portanto, o campo refletido devido a uma fonte puntual em $x_3 = 0$ é simétrico (em torno do plano $x_2 - x_3$), apesar da falta de simetria do meio refletor em torno deste plano. Esta conclusão não é surpreendente e poderia ser deduzida do teorema da reciprocidade, aplicado a campos escalares SH.

Uma conclusão mais geral é que qualquer meio inferior com impedância $Z_L(s_1^2) = Z_M(s_1^2)$ para todo s_1 , com Z_M dado por (2.10), produzirá exatamente os mesmos valores para R e T . Portanto, qualquer outro meio monoclinico com densidade ρ' e módulos de elasticidade relevantes à propagação SH, c'_{44} , c'_{46} e c'_{66} e sujeitos a

$$c'_{44}c'_{66} - c'_{46}{}^2 \equiv c'^2 = c^2 ,$$

$$\rho' c'_{44} = \rho c_{44} \quad , \quad (2.17)$$

produzirá os mesmos R e T , para todo s_1 , para todos os possíveis meios incidentes, isotrópicos ou anisotrópicos e podem ser chamados meios 'equivalentes' ao meio M . Considerando meios elásticos, anisotrópicos, definidos por suas elipses de vagarosidade SH , a família de quatro parâmetros desses meios, contém uma família de dois parâmetros, que é equivalente ao meio M .

Se além do mais, a elipse de vagarosidade no meio superior não for inclinada, ou seja, $c'_{46} = 0$, há uma família de meios ortorrômbicos dependente de três parâmetros. As duas condições (2.17) deixam uma família de um parâmetro de meios, equivalentes ao meio M .

Finalmente, se é especificado que, não somente c'_{46} , mas também $c'_{44} = c'_{66} = \mu'$, resulta, para ondas SH , uma família de dois parâmetros de meios isotrópicos. As duas condições (2.17) determinam um único meio isotrópico equivalente a M . As condições (2.17) para o meio isotrópico equivalente são,

$$\mu' = c \quad , \quad \rho' \mu' = \rho c_{44} \quad (2.18)$$

as quais implicam que $\rho' = \rho c_{44}/c$ e que $1/\beta'$ é igual a vagarosidade horizontal crítica para o meio monoclinico (Figura 2.1). Portanto, nenhum conjunto de experimentos com ondas SH efetuados no plano $x_1 - x_3$ acima da interface pode revelar qualquer informação sobre a anisotropia do meio subjacente!

Se o meio superior é o único meio isotrópico, tal que $Z_0 = Z_M$, então $R = 0$ e $T = 1$. Isto é verdade quando o meio superior é quaisquer dos meios que têm a mesma impedância que o meio inferior. Nestes meios equivalentes, não há campo refletido e, portanto, nenhuma maneira de se saber, no meio superior, se a interface $x_3 = 0$ entre os dois semi-espacos, pelo menos existe!

2.4 O PROBLEMA DE REFLEXÃO - TRANSMISSÃO DE ONDAS SH ATRAVÉS DE UM SEMI - ESPAÇO MONOCLÍNICO ESTRATIFICADO

Na discussão a seguir, a região $x_3 > 0$ é ocupada por um semi-espaco monoclinico estratificado. A estratificação é composta de n camadas sobre um semi-espaco homogêneo, com a k -ésima camada, do meio M_k , ocupando a região $z_{k-1} < x_3 < z_k$. O semi-espaco homogêneo subjacente ocupa a região $x_3 > z_n$, enquanto que a região $x_3 < z_0 = 0$ é, pressupostamente, ocupada por um semi-espaco homogêneo, isotrópico, no qual ondas planas incidem e são refletidas pelo semi-espaco estratificado subjacente (Figura 2.3).

A k -ésima camada do meio M_k é caracterizada por módulos elásticos c_{ijk} , densidade ρ_k , e espessura $h_k = z_k - z_{k-1}$. A matriz de propagação da k -ésima camada relaciona v e $-\sigma$ na profundidade z_k , com estas mesmas quantidades, à profundidade z_{k-1} (para uma discussão sobre matrizes de propagação, veja o Anexo II) e, a partir de (B4), é dada por

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_k &= \exp(-i\omega \frac{c_{46k}}{c_{44k}} s_1 h_k) \begin{bmatrix} \cos \omega(Z_{M_k}/c_{44k})h_k & (i/Z_{M_k}) \sin \omega(Z_{M_k}/c_{44k})h_k \\ iZ_{M_k} \sin \omega(Z_{M_k}/c_{44k})h_k & \cos \omega(Z_{M_k}/c_{44k})h_k \end{bmatrix} \\ &\equiv \exp(-i\omega \frac{c_{46k}}{c_{44k}} s_1 h_k) \mathbf{Q}'_k, \end{aligned} \quad (2.19)$$

onde $\mathbf{Q}'_k$ é a matriz de propagação do meio isotrópico, equivalente ao meio M_k , de espessura $h' = (c_k/c_{44k})h_k$ (veja a derivação das expressões (B5) e (B6)). Para qualquer camada monoclinica, tal meio isotrópico sempre existe, é único, e pode ser chamado camada isotrópica equivalente à camada monoclinica.

A matriz de propagação permite que a velocidade e tensão a uma dada profundidade de cada camada, seja escrita em termos destas quantidades em outra profundidade, através da multiplicação de todas as matrizes de propagação entre as duas profundidades, com as condições de continuidade das velocidade e tensão através das interfaces, sendo obedecidas automaticamente. Assim, v e $-\sigma$, na base do estrato de camadas a uma profundidade $z_n = H = \sum_{k=1}^n h_k$, em termos de v e $-\sigma$ no topo da estratificação em $z_0 = 0$, pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} v(z_n) \\ -\sigma(z_n) \end{bmatrix} &= \mathbf{Q}_n \begin{bmatrix} v(z_{n-1}) \\ -\sigma(z_{n-1}) \end{bmatrix} = \mathbf{Q}_n \mathbf{Q}_{n-1} \begin{bmatrix} v(z_{n-2}) \\ -\sigma(z_{n-2}) \end{bmatrix} = \mathbf{Q}_n \mathbf{Q}_{n-1} \mathbf{Q}_{n-2} \begin{bmatrix} v(z_{n-3}) \\ -\sigma(z_{n-3}) \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{Q}_n \mathbf{Q}_{n-1} \mathbf{Q}_{n-2} \dots \mathbf{Q}_1 \begin{bmatrix} v(z_0) \\ -\sigma(z_0) \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (2.20)$$

isto é, o propagador para a totalidade das camadas é

$$\mathbf{Q} = \prod_{k=1}^n \mathbf{Q}_k = \exp \left[-i\omega s_1 \sum_{k=1}^n \frac{c_{46k}}{c_{44k}} h_k \right] \prod_{k=1}^n \mathbf{Q}'_k \equiv \exp \left[-i\omega \left\langle \frac{c_{46}}{c_{44}} \right\rangle s_1 H \right] \mathbf{Q}', \quad (2.21)$$

onde $\mathbf{Q}'$ é a matrix de propagação da estratificação de n camadas isotrópicas equivalentes e $\langle \cdot \rangle$ denota $(1/H) \sum_{k=1}^n (\cdot) h_k$, a média ponderada pela espessura. A quantidade c_{46}/c_{44} é conservada no cálculo do meio que é equivalente, no limite de grandes comprimentos de onda, ao conjunto de n camadas monoclinicas, isto é, c_{46}/c_{44} para o meio equivalente é exatamente igual a $\langle c_{46}/c_{44} \rangle$ (SCHOENBERG & MUIR, 1989). As outras quantidades conservadas, relevantes para propagação SH, são $1/c_{44}$, c^2/c_{44} e a densidade. Isto pode ser constatado avaliando-se $\mathbf{Q}'$ e negligenciando termos de ordem igual ou maior que ω^2 , o que resulta em

$$\mathbf{Q}' = \begin{bmatrix} 1 & i\omega \left\langle \frac{1}{c_{44}} \right\rangle \\ i\omega \left(\langle \rho \rangle - \left\langle \frac{c^2}{c_{44}} \right\rangle s_1^2 \right) & 1 \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

As condições em $x_3 \equiv z_0 = 0$ são, a partir de (2.12) em notação matricial, dadas por

$$\begin{bmatrix} v(z_0) \\ -\sigma(z_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ Z_0 & -Z_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ R \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

e as condições na interface $x_3 = H$ são, a partir de (14), dadas por

$$\begin{bmatrix} v(H) \\ -\sigma(H) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ Z_M & -Z_M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \exp i\omega s_3^+ H \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ Z_M \end{bmatrix} T \exp i\omega s_3^+ H \quad (2.24)$$

Combinando estas duas equações utilizando a matriz de propagação Q e (21), obtém-se

$$\begin{bmatrix} 1 \\ Z_M \end{bmatrix} T \exp i\omega s_3^+ H = \exp \left[-i\omega < \frac{c_{46}}{c_{44}} > s_1 H \right] Q' \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ Z_0 & -Z_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ R \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

duas equações em R e T , que resolvidas, produzem

$$R = \frac{\begin{vmatrix} 1 & Q'_{11} + Q'_{12}Z_0 \\ Z_M & Q'_{21} + Q'_{22}Z_0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -Q'_{11} + Q'_{12}Z_0 \\ Z_M & -Q'_{21} + Q'_{22}Z_0 \end{vmatrix}},$$

$$T = \frac{2Z_0}{\begin{vmatrix} 1 & -Q'_{11} + Q'_{12}Z_0 \\ Z_M & -Q'_{21} + Q'_{22}Z_0 \end{vmatrix}} \exp \left[-i\omega (s_3^+ + < \frac{c_{46}}{c_{44}} > s_1) H \right] \quad (2.26)$$

Portanto, o coeficiente de reflexão de um meio monoclinico estratificado é idêntico ao do semi-espaço isotrópico equivalente estratificado, para todas as vagarosidades horizontais e todas as frequências.

O campo total de velocidades no semi-espaço inferior é dado por

$$v = T \exp i\omega (s_1 x_1 + s_3^+ x_3 - t) \quad (2.27)$$

$$= \frac{2Z_0}{\begin{vmatrix} 1 & -Q'_{11} + Q'_{12}Z_0 \\ Z_M & -Q'_{21} + Q'_{22}Z_0 \end{vmatrix}} \exp i\omega [s_1 (x_1 - < \frac{c_{46}}{c_{44}} > H) + s_3^+ (x_3 - H) - t] \quad .$$

Se as n camadas forem substituídas por camadas isotrópicas, o campo de velocidades no meio inferior seria

$$v = \frac{2Z_0}{\begin{vmatrix} 1 & -Q'_{11} + Q'_{12}Z_0 \\ Z_M & -Q'_{21} + Q'_{22}Z_0 \end{vmatrix}} \exp i\omega [s_1 x_1 + s_3^+ (x_3 - H') - t] \quad , \quad (2.28)$$

onde

$$H' = \sum_{n=1}^n h' = \left\langle \frac{c}{c_{44}} \right\rangle H .$$

Assim, a substituição de camadas monoclinicas por camadas isotrópicas equivalentes, causaria o mesmo deslocamento espacial do campo no meio inferior, para todos os números de onda. Portanto, para quaisquer fontes no semi-espço superior, o fato do meio ser monoclinico, produz apenas um deslocamento espacial do campo no semi-espço inferior, em geral, tanto horizontal quanto vertical. O deslocamento espacial no campo transmitido através das camadas monoclinicas, relativo ao campo transmitido através das camadas isotrópicas equivalentes, é

$$\Delta_{horiz} = \left\langle \frac{c_{46}}{c_{44}} \right\rangle H , \Delta_{vert} = H - H' = (1 - \left\langle \frac{c}{c_{44}} \right\rangle) H , \quad (2.29)$$

comparando-se (27) e (28).

2.5 SIMULAÇÃO NUMÉRICA

Duas simulações numéricas de uma fonte linha de ondas SH em um semi-espço foram efetuadas, para ilustrar o efeito, ou falta deste, que a anisotropia tem sobre os campos de onda escalares SH. Nas duas simulações, a camada superior, um semi-espço de um meio isotrópico I, normalizado com $\mu_0 = 1$ e $\rho_0 = 1$ (portanto a velocidade é de uma unidade de comprimento por segundo), contém uma fonte SH situada a distância 0,5 (unidades de comprimento) sobre sua interface com um meio monoclinico subjacente M, de espessura 2,0, cujos parâmetros foram escolhidos de modo que a elipse de vagarosidade tenha excentricidade 0,6 (o que implica que a razão semi-eixo maior / semi-eixo menor vale 2,0), seu eixo maior está inclinado de $-\pi/6$ em relação a vertical e é equivalente ao meio isotrópico normalizado I. Os módulos e a densidade do meio M são,

$$c_{44} = 7/8 , c_{46} = -3\sqrt{3}/8 , c_{66} = 13/8 , \rho = 8/7 \quad (2.30)$$

que produzem $c = 1$. Na primeira simulação, outro semi-espço isotrópico do mesmo meio isotrópico normalizado I, está subjacente a camada monoclinica.

Os cálculos foram efetuados pelo método de Fourier (KOSLOFF & BAYSAL, 1982) e uma assinatura Ricker foi utilizada como fonte, com frequência dominante de 2,5 Hz . A Figura 2.4(a) e (b) mostram instantâneos do campo de velocidades, nos tempos $t = 2,0s$ e $t = 4,5s$ respectivamente. Não há campo refletido em qualquer das interfaces internas, porque estes são meios equivalentes. Se a camada monoclinica fosse substituída por seu meio isotrópico equivalente, todo o meio seria homogêneo, e a frente de onda no meio inferior seria um círculo de raio t , com centro na posição da fonte. O fato da camada intermediária ser o

meio monoclinico equivalente, implica que a frente de onda no semi-espaco isotrópico inferior ainda é um círculo de raio t , cujo centro foi deslocado horizontal e verticalmente, a partir das equações (29), de $-6\sqrt{3}/7$ e $-2/7$, respectivamente, em concordância com o instantâneo da Figura 2.4(b).

A configuração do segundo exemplo numérico difere do primeiro exemplo, apenas por que há uma meio rígido abaixo da camada monoclinica M , tal que o campo de ondas é totalmente refletido na base da camada monoclinica. A Figura 2.5 mostra um instantâneo do campo de velocidades em $t = 6,5s$. Como no teste anterior, não há reflexão na interface entre os meios I e M . A onda que se propaga para baixo, no meio monoclinico, é a mesma que na configuração do primeiro exemplo numérico. A onda refletida do semi-espaco rígido e que é transmitida para o meio isotrópico, é circular, sem deslocamento horizontal (como foi o caso da onda transmitida no exemplo anterior) e tem seu centro, $39/7$ abaixo da fonte. Um cálculo de tempo de trânsito direto (mas algebricamente complicado), mostraria que a curva de 'moveout' do tempo de chegada da onda refletida, como função da distância horizontal fonte-receptor, não muda quando a camada monoclinica, de espessura 2, é substituído pela camada isotrópica de espessura $2 \times 8/7 = 16/7$. O campo total refletido (tempo de trânsito, amplitude e fase) é idêntico, em ambos os casos; nenhum experimento de reflexão efetuado na superfície pode detetar a anisotropia na camada inferior.

2.6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ondas SH em um ambiente estratificado foram examinadas em detalhe para o tipo de anisotropia mais geral em que estas ondas podem ocorrer. Esta anisotropia é monoclinica e ondas SH podem se propagar no plano de simetria especular do meio. Naturalmente que isto inclui formas de anisotropia mais simétricas, tais como ortorrômbica, tetragonal forte ou cúbica (em um dos planos de simetria) e hexagonal (em qualquer plano contendo o eixo de simetria ou no plano normal ao eixo de simetria). O principal resultado é que o coeficiente de reflexão para ondas SH, refletidas de um semi-espaco monoclinico M , especificado por quatro parâmetros, c_{44} , c_{66} , c_{46} e ρ , depende somente de dois parâmetros, $c^2 \equiv c_{44}c_{66} - c_{46}^2$ e ρc_{44} . Todos os meios que têm estes parâmetros iguais, isto é, uma família de dois parâmetros de meios que são equivalentes, em relação à reflexão SH, ao meio M , produzirão o mesmo coeficiente de reflexão para todos os ângulos de incidência. Além disso, dentro desta família de dois parâmetros, existe um único meio isotrópico que é equivalente, em relação à reflexão SH, ao meio M especificado por $\mu' = c$ e $\rho' = \rho c_{44}/c$. Se o meio incidente acima do meio M é este único meio isotrópico, então o coeficiente de reflexão é identicamente zero para todos os ângulos de incidência e a interface entre os dois meios é transparente em relação

a observações feitas somente de um lado da interface. Isto é mostrado nos instantâneos do campo de ondas calculados numericamente, nas Figura 2.4 e Figura 2.5.

Outros resultados foram desenvolvidos concernentes à refletividade SH de um semi-espço monoclnico estratificado arbitrrio. Aqui tambm foi encontrado que para um semi-espço monoclnico estratificado arbitrrio, existe um semi-espço isotrpico estratificado que produz coeficiente de refexão idnticos para todos os ngulos de incidncia e todas as frequncias, demonstrando assim, e conclusivamente, que um campo de ondas SH refletido de um semi-espço estratificado no é sensvel a possvel anisotropia subjacente! Poderia ser concluido que experimentos com ondas SH deveriam ser realizados somente em conjução com experimentos sísmicos que produzam e registrem movimentos no plano de simetria.

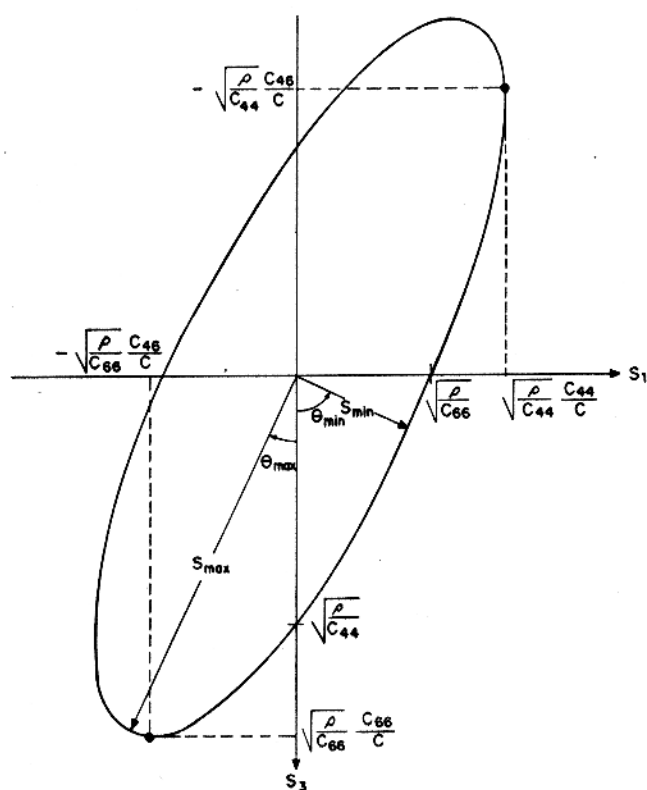
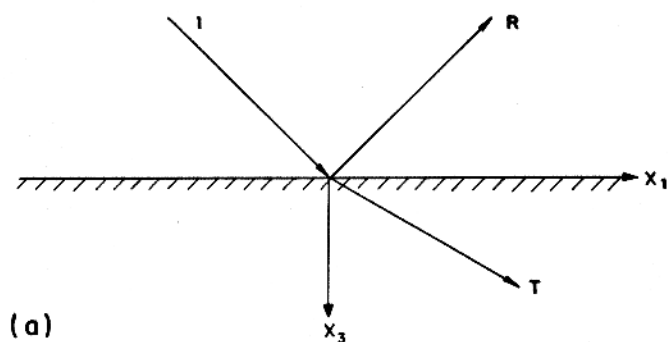
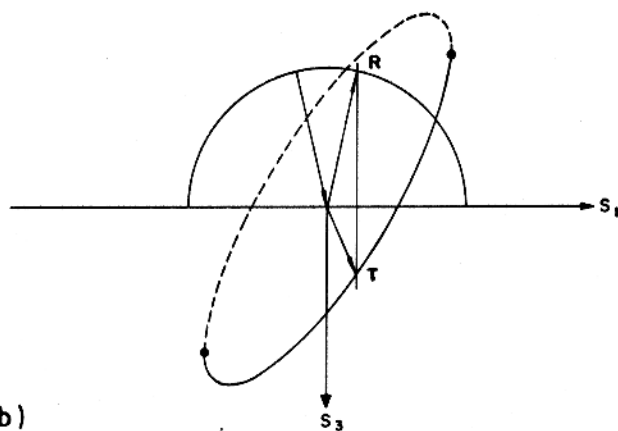


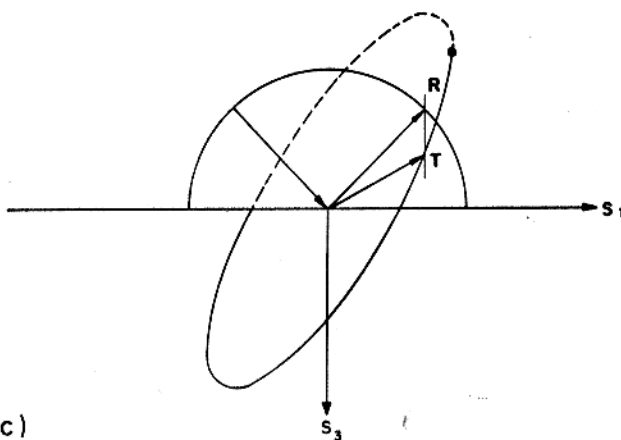
Figura 2.1 - Uma elipse de vagarosidade da onda SH, para um meio monoclínico. Neste exemplo, $c_{66} > c_{44}$ e $c_{46} > 0$. Os valores máximos e mínimos da elipse são dados por (I-8) e os ângulos correspondentes, por (I-10).



(a)



(b)



(c)

Figura 2.2 - As ondas incidente, refletida e transmitida na interface entre um meio isotrópico e outro monoclinico: (a) mostrando os raios, (b) os vetores de vagarosidade, quando a onda transmitida tem o vetor de vagarosidade apontando para baixo, e (c) os vetores de vagarosidade, quando a onda transmitida tem o vetor de vagarosidade apontando para cima. Nos casos (b) e (c), o vetor velocidade de grupo associado é normal à superfície de vagarosidade e aponta para baixo, na onda transmitida.

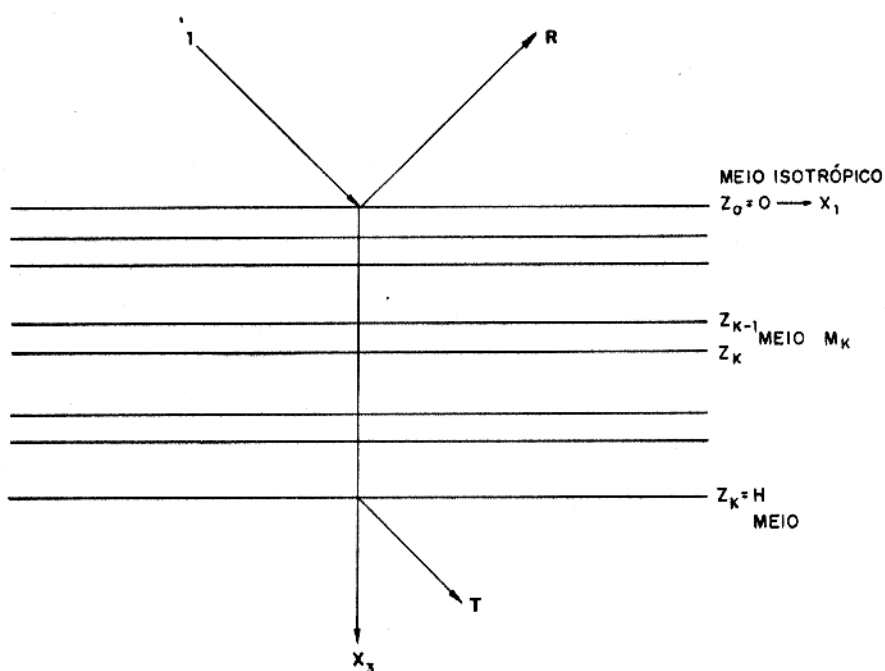


Figura 2.3 - Um semi-espço isotrópico (o meio incidente superior) ocupando a região $x_3 < z_0 = 0$, acima de um semi-espço monoclínico consistindo de n camadas monoclínicas, acima, por sua vez, de um semi-espço inferior homogêneo, monoclínico, ocupando a região $x_3 > z_n = H$.

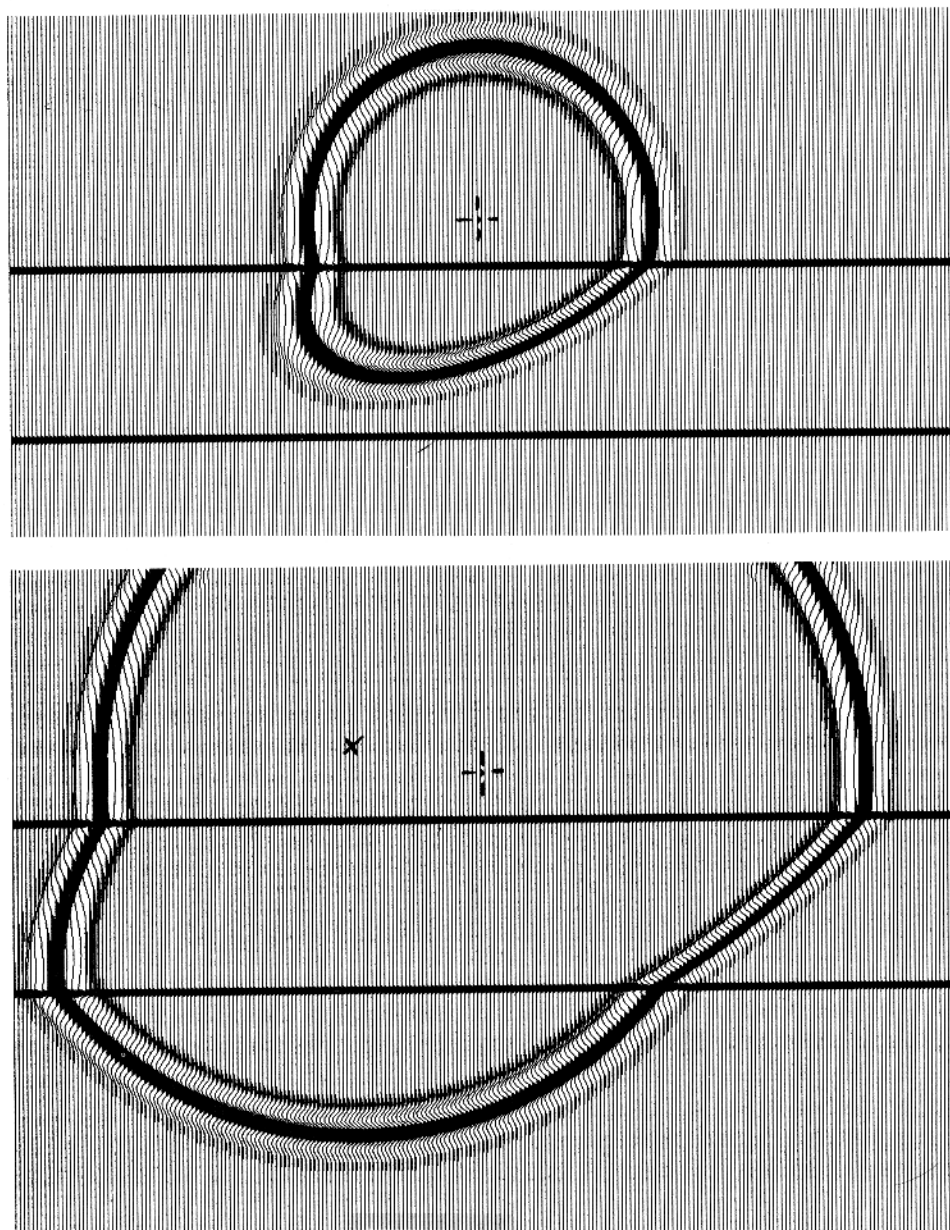


Figura 2.4 - Instantâneos do campo de velocidade devido à simulações por elementos finitos de uma fonte-linha SH, em um meio isotrópico normalizado ($\mu_0 = 1$, $\rho_0 = 1$), situado a uma distância 0,5 (unidades de comprimento) acima de sua interface com um meio anisotrópico subjacente de espessura 2,0. Os parâmetros do meio, dados em (30), foram escolhidos tal que este meio seja equivalente ao isotrópico normalizado. (a) e (b) mostram instantâneos do campo de velocidade em $t = 2,0s$ e $t = 4,5s$ respectivamente, quando existe outro semi-espço de um meio isotrópico normalizado abaixo do meio anisotrópico. Não existe campo de onda refletido nas interfaces internas porque os meios são equivalentes.

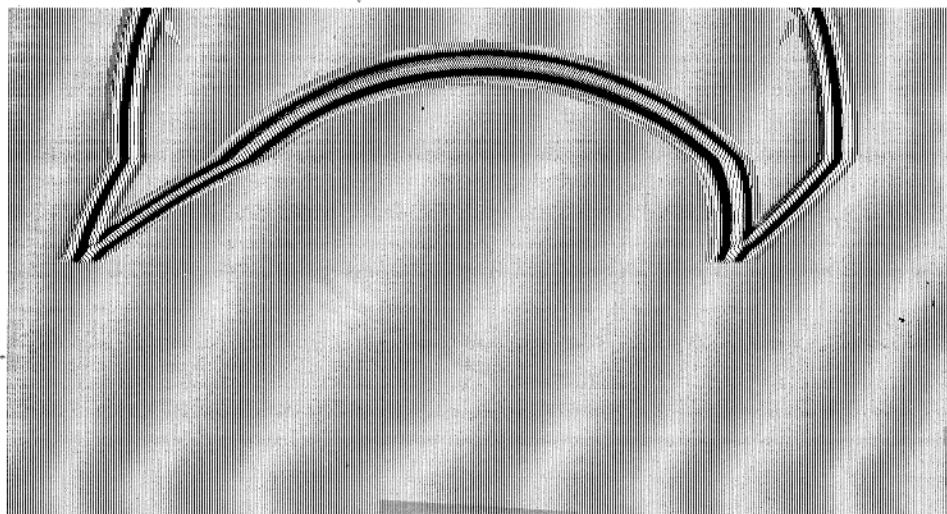


Figura 2.5 - Um instantâneo do campo de velocidade em $t = 6,5s$ para a mesma configuração da Figura 2.4, excepto que o semi-espaço isotrópico abaixo do meio anisotrópico da Figura 2.4 é substituído por um semi-espaço rígido de tal forma que as ondas sejam totalmente refletidas na base da camada monoclinica.

3 - TRAÇADO DE RAIOS EM MEIOS ANISOTRÓPICOS

3.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

O traçado de raios e o cálculo do tempo de trânsito entre dois pontos, no caso, fonte e receptor, é parte essencial de qualquer algoritmo de inversão de tempos de trânsito. Neste capítulo é discutido o cálculo das trajetórias dos raios e dos tempos de trânsito correspondentes para eventos em meios anisotrópicos estratificados. Duas formas de traçado de raios entre dois pontos são apresentadas. A primeira, para meios estratificados com interfaces não planas e a segunda, para meios estratificados com interfaces planas e horizontais. O traçado de raios em meios com interfaces não planas é baseado no princípio de Fermat e é resolvido utilizando-se o método da continuação (KELLER & PEROZZI, 1983). Este método permite determinar a trajetória dos raios em um meio complexo, através de transformações contínuas, partindo-se de configurações mais simples. Já o caso do traçado de raios em meios com interfaces planas é baseado na lei de Snell. A discussão aqui apresentada é aplicada a meios transversalmente isotrópicos mas o algoritmo também pode ser estendido para meios anisotrópicos com outros tipos de simetria.

Neste trabalho, uma sequência de procedimentos de continuação é efetuada. A partir de um raio vertical em um meio isotrópico estratificado com interfaces planas, as superfícies de vagarosidade são deformadas até atingirem as superfícies de vagarosidade anisotrópicas desejadas. O próximo passo transforma as interfaces planas nas superfícies arbitrárias, que definem as interfaces do modelo. Finalmente, fontes e receptores são movidos até atingirem a configuração do experimento sísmico que se deseja simular. Este algoritmo apresenta a mesma performance no cálculo de eventos qP, que implementações semelhantes no traçado de raios em meios isotrópicos (DOCHERTY & BLEISTEIN, 1984). O cálculo das trajetórias em eventos qS1 e qS2 apresenta dificuldades em regiões singulares onde as superfícies de vagarosidade, para estas ondas, se interceptam e, também, em regiões onde as superfícies de vagarosidade não são convexas.

A simplicidade e robustez destes dois procedimentos para traçado de raios entre fonte e receptor são convenientes para solução do problema direto, utilizado em algoritmos de inversão de tempos de trânsito considerando-se modelos anisotrópicos estratificados. O algoritmo para

traçado de raios em meios estratificados com interfaces planas é muito eficiente. Este procedimento é empregado no próximo capítulo como subrotina para cálculo do problema direto, em esquemas de inversão de tempo de trânsito para modelos TIV. Já o algoritmo baseado no método de continuação é particularmente adequado para o cálculo de trajetórias dos raios e dos tempos de trânsito em levantamentos sísmicos de superfície e VSP. Este algoritmo pode, também, ser empregado no cálculo do problema direto, em esquemas de inversão de tempos de trânsito, utilizados para estimar modelos anisotrópicos globais (WHITMORE & LINES, 1986 ; CHIU & STEWART, 1987), convenientes para procedimentos de migração.

3.2 PRINCÍPIO DE FERMAT E VELOCIDADE DE GRUPO EM MEIOS ANISOTRÓPICOS

O princípio de Fermat, para raios em um meio anisotrópico, não dissipativo, pode ser enunciado convenientemente no espaço de fase estendido (ARNOLD, 1989): considerando as trajetórias, no espaço de fase $(\mathbf{x}, \mathbf{s})$, parametrizadas por ℓ e conectando os pontos fixos $\mathbf{x}_s(\ell_0)$ e $\mathbf{x}_r(\ell_1)$, o princípio de Fermat estabelece que a trajetória seguida pelo raio é aquela que torna estacionário o tempo de trânsito

$$\tau(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = \int_{\mathbf{x}_s}^{\mathbf{x}_r} \mathbf{s} \cdot d\mathbf{x} = \int_{\ell_0}^{\ell_1} \mathbf{s} \cdot \mathbf{x}' d\ell, \quad (3.1)$$

ao longo desta trajetória e sujeita à relação de dispersão sobre a vagarosidade $\mathbf{s}$, em cada ponto $\mathbf{x}$,

$$F(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = 0. \quad (3.2)$$

Aqui, o apóstrofo denota a derivada em relação a ℓ .

A solução deste problema variacional (ARNOLD, 1989), definido por (3.1) e (3.2), resulta no sistema Hamiltoniano

$$\mathbf{x}' = \lambda \nabla_{\mathbf{s}} F \quad (3.3)$$

$$\mathbf{s}' = -\lambda \nabla_{\mathbf{x}} F. \quad (3.4)$$

Multiplicando-se escalarmente os membros de (3.3) por $\mathbf{s}$, λ pode ser explicitado como

$$\lambda = \frac{\mathbf{s} \cdot \mathbf{x}'}{\mathbf{s} \cdot \nabla_{\mathbf{s}} F}. \quad (3.5)$$

Tomando ℓ como o tempo de trânsito τ ao longo do raio e denotando por ponto a derivada em relação a τ , $\dot{\mathbf{x}}$ pode, então, ser identificado com a velocidade de grupo $\mathbf{v}$ e, considerando-se

que (3.1) é válida, mesmo para um segmento infinitesimal do raio, obtêm-se a importante relação

$$\mathbf{s} \cdot \mathbf{v} \equiv 1 \quad . \quad (3.6)$$

Com isto, (3.5) se reduz a $\lambda = 1/\mathbf{s} \cdot \nabla_{\mathbf{s}} F$ e as equações (3.3) e (3.4) são reescritas como

$$\mathbf{v} \equiv \dot{\mathbf{x}} = \frac{\nabla_{\mathbf{s}} F}{\mathbf{s} \cdot \nabla_{\mathbf{s}} F} \quad , \quad (3.7)$$

$$\dot{\mathbf{s}} = -\frac{\nabla_{\mathbf{x}} F}{\mathbf{s} \cdot \nabla_{\mathbf{s}} F} \quad . \quad (3.8)$$

A solução do sistema acima nos permite calcular o tempo de trânsito através da integração de (3.1).

Alternativamente, a expressão (3.7), para a velocidade de grupo, pode ser obtida de uma relação de dispersão mais geral, na forma $\mathcal{F}(\mathbf{k}, \omega) = 0$, onde ω é a frequência radial e $\mathbf{k} = \omega \mathbf{s}$, o vetor número de onda. Esta relação é obtida no Anexo III.

A relação de dispersão (3.2) para um meio homogêneo é obtida a partir de uma onda plana,

$$u_i = U e_i \exp[i\omega(s_j x_j - t)] \quad ,$$

em que u_i são as componentes deslocamento da partícula, e_i são as componentes do vetor unitário na direção de polarização, U a amplitude do deslocamento, s_i as componentes vetor vagarosidade e ω a frequência angular. Substituindo esta expressão na equação da onda elástica (MUSGRAVE, 1970),

$$\rho \ddot{u}_i = c_{ijkl} u_{k,lj} \quad ,$$

em que ρ é a densidade do meio e c_{ijkl} são os módulos de rigidez elástica, obtem-se a equação de Christoffel,

$$(a_{ijkl} s_j s_l - \delta_{ik}) e_k = 0 \quad , \quad (3.9)$$

na qual a_{ijkl} são os módulos de rigidez elástica, normalizados pela densidade (de dimensão *velocidade ao quadrado*). Para que estas equações possuam solução não trivial é necessário que seja obedecida a relação de dispersão (MUSGRAVE, 1970)

$$F(\mathbf{s}) = \det|a_{ijkl} s_j s_l - \delta_{ik}| = 0 \quad . \quad (3.10)$$

Para meios suavemente heterogêneos, a teoria assintótica do raio aplicada a meios anisotrópicos (CERVENY, 1972) pressupõe que no limite de altas frequências o campo de ondas distante da fonte se comporta localmente como uma onda plana. Nestas condições, para um meio em que as propriedades físicas ($\rho(\mathbf{x})$ e $c_{ijkl}(\mathbf{x})$) variem suavemente em relação ao

comprimento de onda, a relação de dispersão geral que a vagarosidade deve satisfazer em qualquer ponto x (MUSGRAVE, 1970) é

$$F(x, s) = \det |a_{ijkl}(x) s_j s_l - \delta_{ik}| = 0 \quad (3.11)$$

Em qualquer evento, a equação (3.7) para a velocidade de grupo só depende das derivadas de F em relação às componentes do vetor vagarosidade s_i .

Para um meio transversalmente isotrópico com seu eixo de simetria na direção vertical (TIV) x_3 , a relação de dispersão é fatorável (MUSGRAVE, 1970) na forma,

$$F(s) = F_{qP-qSV} \times F_{SH} = 0.$$

Nesta expressão F_{qP-qSV} controla a propagação de ondas de deformação plana que se propagam no plano $x_1 - x_3$ (sem perda de generalidade por causa da simetria rotacional) e F_{SH} controla a propagação de ondas SH. Utilizando a notação condensada (AULD, 1973), a relação de dispersão (3.11) se reduz à forma

$$F_{qP-qSV} = (a_{11}s_1^2 + a_{55}s_3^2 - 1)(a_{55}s_1^2 + a_{33}s_3^2 - 1) - (a_{13} + a_{55})^2 s_1^2 s_3^2 = 0 \quad (3.12)$$

e

$$F_{SH} = a_{66}s_1^2 + a_{55}s_3^2 - 1 = 0 \quad (3.13)$$

A superfície de vagarosidade para ondas SH é elíptica e portanto a superfície de velocidade de grupo é também elíptica como mostrado no Anexo I. Nestas condições o traçado de raios é imediato e não será discutido aqui. Considerando a partir deste momento apenas ondas qP e qSV, e abandonando o subscrito $qP-qSV$ na relação de dispersão. Aplicando a relação (3.7) e lembrando que o denominador pode ser simplificado pela relação $F = 0$, as componentes da velocidade de grupo são

$$\begin{aligned} v_1 &= s_1 \frac{a_{11}(a_{55}s_1^2 + a_{33}s_3^2 - 1) + a_{55}(a_{11}s_1^2 + a_{55}s_3^2 - 1) - (a_{13} + a_{55})^2 s_3^2}{(a_{11} + a_{55})s_1^2 + (a_{33} + a_{55})s_3^2 - 2}, \\ v_3 &= s_3 \frac{a_{55}(a_{55}s_1^2 + a_{33}s_3^2 - 1) + a_{33}(a_{11}s_1^2 + a_{55}s_3^2 - 1) - (a_{13} + a_{55})^2 s_1^2}{(a_{11} + a_{55})s_1^2 + (a_{33} + a_{55})s_3^2 - 2}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Quando o meio tem relação de dispersão que depende somente do quadrado das componentes do vetor vagarosidade, isto é, $F = F(s_1^2, s_3^2)$, a substituição de $F_{,s_i}$ por $s_i F_{,s_i^2}$ em $\nabla_s F$, que aparecem em (3.7), nos dão expressões gerais para as componentes da velocidade de grupo, na forma

$$v_1 = \frac{s_1 F_{,s_1^2}}{s_1^2 F_{,s_1^2} + s_3^2 F_{,s_3^2}}, \quad v_3 = \frac{s_3 F_{,s_3^2}}{s_1^2 F_{,s_1^2} + s_3^2 F_{,s_3^2}}, \quad (3.15)$$

$$s_1^2 F_{s_1^2} + s_3^2 F_{s_3^2} \equiv \frac{\mathbf{s} \cdot \nabla_{\mathbf{s}} F}{2}$$

Sendo este o caso do meio TI, as componentes de sua velocidade de grupo podem ser obtidas segundo (3.15).

3.3 TRAÇADO DE RAIOS EM MEIOS ANISOTRÓPICOS ESTRATIFICADOS

A trajetória do raio em meio com camadas anisotrópicas homogêneas, através de N interfaces, pode ser determinada pelo princípio de Fermat (3.1), particularizado à camadas homogêneas, através do seguinte problema variacional, no espaço de fase:

Determinar os extremos do funcional

$$t(\mathbf{x}_i, \mathbf{s}_i) = \sum_{i=1}^{N+1} \mathbf{s}_i \cdot (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{i-1}), \quad (3.16)$$

sujeito às relações de dispersão

$$F_i(\mathbf{s}) = |a_{ijkl} s_j s_l - \delta_{ik}| = 0, \quad i = 1, \dots, N+1, \quad (3.17)$$

onde nestas expressões,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_i &= (x_i, y_i, z_i) = \text{interseção do raio com a } i\text{-ésima interface,} \\ \mathbf{s}_i &= (s_x^i, s_y^i, s_z^i) = \text{vetor vagarosidade na } i\text{-ésima camada,} \\ F_i(\mathbf{s}) &= \text{relação de dispersão na } i\text{-ésima camada,} \\ \mathbf{x}_0 &= \text{posição da fonte,} \\ \mathbf{x}_{N+1} &= \text{posição do receptor.} \end{aligned}$$

Considerando meios estratificados para os quais as interfaces são definidas por

$$z_i = z_i(x, y),$$

a solução deste problema é imediata, através do método dos multiplicadores de Lagrange (GILL et al., 1981) e consiste em determinar os extremos do funcional

$$L(x_i, y_i, \mathbf{s}_i, \lambda_i) = \sum_{j=1}^{N+1} \mathbf{s}_j \cdot (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_{j-1}) + \lambda_j F_j(\mathbf{s}_j). \quad (3.18)$$

A solução deste problema produz o seguinte sistema não linear de $5N + 3$ equações e $5N + 3$ incógnitas, $x_i, y_i, s_x^i, s_y^i, s_z^i$,

$$\Phi_1^i = (s_x^{i+1} - s_x^i) + (s_z^{i+1} - s_z^i) z_{i,x} = 0,$$

$$\begin{aligned}
\Phi_2^i &= (s_y^{i+1} - s_y^i) + (s_z^{i+1} - s_z^i)z_{i,y} = 0, \\
\Phi_3^i &= (x_i - x_{i-1})F_{i,s_x^i} - (z_i - z_{i-1})F_{i,s_z^i} = 0, \\
\Phi_4^i &= (y_i - y_{i-1})F_{i,s_x^i} - (z_i - z_{i-1})F_{i,s_y^i} = 0, \\
\Phi_5^i &= F_i(s_x^i, s_y^i, s_z^i) = 0,
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Estas equações expressam as relações geométricas entre raios e vagarosidades através de um meio anisotrópico estratificado. As equações para Φ_1^i e Φ_2^i podem ser escritas como

$$(s_{i+1} - s_i) \times n_{z_i} = 0, \tag{3.20}$$

que nada mais é que a conhecida lei de Snell. Esta equação requer que a variação do vetor de vagarosidade, através de uma interface, seja paralela à normal à interface, n_{z_i} , isto é, a componente tangencial da vagarosidade seja contínua através da interface. As equações para Φ_3^i e Φ_4^i equivalem a

$$(x_i - x_{i-1}) \times \nabla_s F_i = 0. \tag{3.21}$$

Esta equação requer que a direção do raio, em cada estrato, seja normal à superfície de vagarosidade. A última equação para Φ_5^i ,

$$F_i(s_i) = 0, \tag{3.22}$$

define a superfície de vagarosidade em cada camada.

O sistema de equações (3.19), em notação vetorial, é dado por

$$\Phi(u) = 0, \tag{3.23}$$

onde

$$\begin{aligned}
\Phi^T &= (\phi_1^1, \dots, \phi_5^1, \dots, \phi_4^{N+1}, \phi_5^{N+1}), \\
u^T &= (x_1, \dots, x_N, y_1, \dots, y_N, s_x^1, \dots, s_x^{N+1}, s_y^1, \dots, s_y^{N+1}, s_z^1, \dots, s_z^{N+1}).
\end{aligned}$$

A determinação da trajetória do raio e do tempo de trânsito associado, em meios anisotrópicos estratificados e com camadas homogêneas, se reduz, portanto, à solução do sistema (3.23).

3.4 TRAÇADO DE RAIOS PELO MÉTODO DE CONTINUAÇÃO

O traçado de raios através de meios homogêneos, separados por interfaces não planas, requer a solução do sistema (3.19). Este sistema pode ser solucionado iterativamente, através do método de Newton-Raphson (GILL et al., 1981). A cada iteração do problema, o sistema é linearizado e a solução atualizada a partir do algoritmo:

1. determine Δu a partir de

$$\nabla_u \Phi \cdot \Delta u^{(j)} = -\Phi(u^{(j)}) .$$

2. atualize a solução

$$u^{(j+1)} = u^{(j)} + \Delta u^{(j)} .$$

O método de continuação consiste em solucionar a família de sistemas não lineares,

$$\Phi(u, \gamma) = 0 , \quad (3.24)$$

em lugar do sistema (3.19). O parâmetro γ controla a transformação suave do sistema $\Phi(u, 0) = 0$, cuja solução é facilmente determinada, para o sistema $\Phi(u, 1) = \Phi(u) = 0$, cuja solução corresponde exatamente à do problema que se pretende resolver. Este procedimento assegura robustez ao método de Newton-Raphson.

A trajetória do raio entre dois pontos, em um meio 3D anisotrópico, pode ser determinada através de uma aplicação sequencial da técnica de continuação para solução de (3.19). Este procedimento foi proposto, para traçado de raios sísmicos em meios isotrópicos, por KELLER & PEROZZI (1983) e DOCHERTY & BLEISTEIN (1984).

3.4.1 Continuação das superfícies de vagarosidade

Para cada camada, a relação de dispersão é escrita na forma

$$F_i(s) = \gamma F_i^A + (1 - \gamma) F_i^I \quad i = 1, \dots, N . \quad (3.25)$$

Nesta expressão, F_i^A é a relação de dispersão para a i -ésima camada anisotrópica e F_i^I , a relação de dispersão para a camada isotrópica inicial, na mesma camada. Os estratos isotrópicos iniciais, têm velocidades compressoriais $\alpha^2 = \max(a_{11}, a_{22}, a_{33})$ em cada camada, onde a_{IJ} são os módulos elásticos normalizados pela densidade, em notação condensada (AULD, 1973).

A partir de um raio vertical no modelo inicial, isotrópico e com interfaces planas, em que $u(\gamma = 0)$ é calculado trivialmente, o valor inicial para as iterações de Newton-Raphson em um novo $\gamma = \gamma + \Delta\gamma$ é calculado (DOCHERTY & BLEISTEIN, 1984) a partir do algoritmo:

1. Determine $du/d\gamma$ a partir de

$$\frac{d\Phi}{d\gamma} = \nabla_u \Phi \cdot \frac{du}{d\gamma} + \Phi_{,\gamma} = 0 , \quad (3.26)$$

2. Tome como valor inicial para as iterações de Newton-Raphson

$$u^0(\gamma + \Delta\gamma) = u(\gamma) + \frac{du}{d\gamma} \Delta\gamma \quad . \quad (3.27)$$

O algoritmo, então, prossegue na solução do sistema (3.24) através de iterações de Newton-Raphson. Se o método de Newton não convergir após 5 iterações, o valor de $\Delta\gamma$ é dividido por dois, um novo valor inicial é calculado e o algoritmo recomeça. Após a convergência, o valor de $\Delta\gamma$ é dobrado e o algoritmo continua da mesma forma até atingir $\gamma = 1$. Geralmente, é possível passar de $\gamma = 0$ até $\gamma = 1$ em um único passo. Após a convergência em $\gamma = 1$, a trajetória do raio, no espaço de fase, é obtida para a fonte e o receptor na mesma vertical. Nesta situação, cada camada possui as propriedades elásticas do modelo desejado mas as interfaces ainda continuam planas e horizontais.

3.4.2 Continuação das interfaces

A próxima etapa é deformar as interfaces planas e horizontais, até que as interfaces do modelo sejam obtidas, mantendo fonte e receptor na mesma vertical. O processo de continuação é obtido através da relação

$$z_i(x, y) = h_i + \gamma f_i(x, y) \quad . \quad (3.28)$$

Observa-se que, neste caso, as interfaces são planas quando $\gamma = 0$. Quando $\gamma = 1$, as interfaces do modelo são, então, obtidas. Cada interface é definida por um conjunto de pontos sobre uma malha. Interpolação com B-splines é efetuada para avaliação de (3.28) e as derivadas necessárias às iterações de Newton-Raphson.

O algoritmo prossegue como na etapa anterior e os valores iniciais para as iterações de Newton-Raphson, em um novo valor do parâmetro de continuação, são, então, obtidos a partir do sistema linear

$$\frac{d\Phi}{d\gamma} = \nabla_u \Phi \cdot \frac{du}{d\gamma} + \Phi_{,\gamma} = 0 \quad . \quad (3.29)$$

O valor inicial do vetor u para as iterações de Newton-Raphson, com parâmetro de continuação igual $\gamma + \Delta\gamma$, é, então, calculado por

$$u^0 = u + \frac{du}{d\gamma} \Delta\gamma \quad . \quad (3.30)$$

O valor de $u(\gamma = 0)$ será, portanto, a solução da etapa de continuação das superfícies de vagarosidade.

3.4.3 Continuação de fontes e receptores

Após a continuação das interfaces, a trajetória do raio, através do modelo desejado, foi obtida para fonte e receptor na mesma vertical. A próxima etapa consiste em mover fonte e receptor, até atingirem suas posições originais. Para continuação da posição dos receptores, este procedimento é efetuado através da relação

$$\mathbf{x}_{rec} = \gamma \mathbf{x}_1 + (1 - \gamma) \mathbf{x}_0 \quad , \quad (3.31)$$

onde, $\mathbf{x}_{rec} = (x_{rec}, y_{rec}, z_{rec})$, indica a posição do receptor durante o processo de continuação. Nesta expressão, $\gamma = 0$ identifica a posição receptor previamente calculado e $\gamma = 1$, a nova posição do receptor.

O valor inicial para iterações do algoritmo de Newton-Raphson é obtido a partir de

$$\frac{d\Phi}{d\gamma} = \nabla_u \Phi \cdot \frac{du}{d\gamma} + \nabla_{\mathbf{x}_{rec}} \Phi \cdot \frac{d\mathbf{x}_{rec}}{d\gamma} = 0 \quad , \quad (3.32)$$

e

$$\mathbf{u}^0 = \mathbf{u} + \frac{du}{d\gamma} \Delta\gamma \quad , \quad (3.33)$$

onde $\mathbf{u}(\gamma = 0)$ é a solução para a posição do receptor previamente calculada. Procedimento análogo é aplicado para continuação da posição da fonte. As expressões correspondentes ao valor inicial a ser utilizado nas iterações de Newton-Raphson são obtidas, substituindo a posição dos receptores pela posição das fontes nas equações acima.

3.4.4 Exemplos numéricos

Este algoritmo foi utilizado na determinação de trajetória dos raios em modelos de três camadas. Estes modelos diferem nas configurações das interfaces e na orientação dos sistemas de eixos principais do tensor de constantes elásticas. O primeiro modelo possui interfaces planas e horizontais. A Tabela 1 apresenta os valores das constantes elásticas, normalizadas pela densidade, para cada camada. O meio, na primeira camada, é isotrópico; na segunda, é ortorrômbico e nas duas últimas, transversalmente isotrópico. O sistema de referência adotado, coincide com a orientação dos eixos principais do tensor de constantes elásticas. A Figura 3.1, (a) e (b), mostra as trajetórias dos raios através deste modelo para receptores orientados a 45° em relação ao eixo x e em duas perspectivas diferentes. Estas figuras mostram que as trajetórias não são curvas planas, o que caracteriza a ocorrência de anisotropia ortorrômbica no meio.

O segundo modelo foi obtido rotacionando os eixos principais de dois meios: o meio ortorrômbico e o meio TI no semi-espço inferior. Duas rotações foram aplicadas ao meio

ortorrômbico: 45° em torno do eixo z, seguido de 45° em torno da nova orientação do eixo x. A orientação do eixo de simetria do meio TI foi inclinada de 60° em torno do eixo x de referência. A Figura 3.2, (a) e (b), mostra as trajetórias dos raios em duas perspectivas para um evento com múltiplas.

No terceiro modelo, interfaces não planas separam os meios utilizados no modelo anterior. A Figura 3.3, (a) e (b), mostra as trajetórias dos raios em duas perspectivas.

O programa foi implementado em uma estação gráfica IBS RS6000, modelo 560. Os sistemas lineares são resolvidos utilizando a subrotina de decomposição LU com pivoteamento parcial do LINPACK(DONGARRA et al.,1979). Em média, 50 raios foram calculados por segundo. Cerca de 80% do esforço computacional foi dispendido no processo de interpolação e cálculo das derivadas. A convergência foi atingida, em média, em quatro iterações para todos os testes descritos anteriormente e o parâmetro de continuação variou de zero a um em apenas um passo, em praticamente todos os raios.

3.5 TRAÇADO DE RAIOS ATRAVÉS DE CAMADAS TIV COM INTERFACES PLANAS

Para meios anisotrópicos estratificados com interfaces horizontais, o sistema (3.19) requer que a componente horizontal do vetor vagarosidade seja contínua através das interfaces (lei de Snell) . Este resultado simplifica bastante o traçado de raios em meios com interfaces planas e horizontais. Para meios TIV podemos, devido à simetria azimutal, tomar a componente horizontal como sendo a componente s_x . Seja inicialmente uma única camada TIV de espessura h . Para que um raio atravessasse tal camada é necessário que: $s_x < 1/a_{11}$, para eventos qP e $s_x < 1/a_{55}$, para eventos qSV. As condições acima garantem a não ocorrência de eventos pós críticos. Com isto, o tempo de trânsito t e a distância horizontal do raio através da camada podem ser calculados por

$$t = \frac{h}{v_3}, \quad x = h \frac{v_1}{v_3}. \quad (3.34)$$

Portanto, para atravessar muitas camadas com a possibilidade de conversões qP para qSV e qSV para qP com qualquer número de reflexões em qualquer das interfaces, devemos ter as condições: $s_x < \min(1/a_{11i})$, para camadas com eventos qP e $s_x < \min(1/a_{55i})$, para camadas com eventos qSV. O tempo de trânsito total t será a soma cumulativa dos tempos de trânsito e o deslocamento horizontal do raio X , a soma dos deslocamentos horizontais em cada estrato.

Como o tempo de trânsito e deslocamento horizontal do raio são aditivos, t e X não dependem da ordem das camadas através das quais o raio passe e quaisquer camadas que possuam

as mesmas propriedades podem ser colocadas adjacentes, umas às outras. Logo, se o raio considerado passa através de uma camada várias vezes, como em eventos qP, por exemplo, de tal forma que a soma dos valores absolutos das componentes verticais dos segmentos dos raios neste meio seja h_P , então o tempo e o deslocamento horizontal fica inalterado se a camada aparece com uma espessura h_P com o raio atravessando-a apenas uma vez. Analogamente, estas considerações são válidas para camadas com eventos qSV, definindo-se, neste caso, a soma dos valores absolutos das componentes verticais igual a h_S . Assim, para qualquer um evento particular, é possível construir um meio estratificado no qual um dado meio aparece no máximo duas vezes (uma, se não há conversões de modos) sem afetar o tempo de trânsito ou o deslocamento horizontal do raio.

A única possível complicação, para determinar com sucesso a trajetória do raio, é a de uma camada, com evento qSV, possuir triplicação em torno da direção horizontal paralela à estratificação. Isto produziria dois possíveis eventos qSV propagando-se para baixo, levando a uma situação de não unicidade na camada e que teria que ser tratada mais especificamente. A condição para que não ocorra triplicação em torno da direção x_1 é dada por

$$(a_{13} + a_{55})^2 < a_{33}(a_{11} + a_{55}), \quad (3.35)$$

mas que é proibida sob as hipóteses de anisotropia suave (Anexo IV). Estas hipóteses também garantem que $a_{13} + a_{55} > 0$, não possibilitando, portanto, a ocorrência de polarizações anômalas. Esta condição, para vincular melhor a inversão tomográfica em rochas, pode ser mais exigente, ao se considerar $a_{13} > 0$. O Anexo IV discute o significado físico desta condição.

O problema de determinar a trajetória do raio entre dois pontos para meios TIV estratificados com as considerações anteriores, torna-se muito simples para eventos qP, eventos qSV, para qualquer múltipla desejada ou qualquer evento em que ocorra conversão de eventos qP para eventos qSV e vice-versa. O sistema (3.19), resultante do princípio de Fermat, para meios TIV estratificados com interfaces planas horizontais se reduz à forma

$$(x_i - x_{i-1})F_{i,s_3^i} - (z_i - z_{i-1})F_{i,s_1} = 0, \quad (3.36)$$

$$F_i(s_1, s_3^i) = 0. \quad i = 1, \dots, N + 1. \quad (3.37)$$

Determinar a trajetória do raio se reduz, então, a determinar o valor da vagarosidade horizontal admissível s_1 para um evento específico que corresponda ao raio, para um dado afastamento horizontal, X , entre fonte e receptor (offset) e a uma dada profundidade. Admitindo x_3 positivo para baixo, s_3 é tomada sempre positiva no meio desdobrado.

Excetuando-se o caso trivial de raios horizontais ($F_{i,s_3^i} = 0$), as equações acima se reduzem

à forma

$$\Delta(s_1) = \sum_l X - \frac{F_{l,s_1}}{F_{l,s_3}} h_l = \sum_l X - \frac{v_1}{v_3} h_l = 0, \quad (3.38)$$

$$F_l[s_1, s_3(s_1)] = 0,$$

onde o somatório é tomado sobre as camadas generalizadas descritas acima. Nesta expressão $\Delta(s_1)$ é a diferença entre o afastamento desejado (X) e o afastamento de um raio com vagarosidade horizontal s_1 . Para cada camada, a razão das componentes da velocidade de grupo pode ser obtida de (3.14). A vagarosidade vertical é determinada, a partir da vagarosidade horizontal, resolvendo-se a relação de dispersão (3.12) para um meio TIV.

Na ausência de triplicação, $f(s_1)$ é monotonicamente crescente com s_1 , assegurando uma solução única para o problema de determinação da trajetória do raio entre dois pontos no meio. Entretanto, quando há camadas que apresentam triplicação, podem haver múltiplas trajetórias para um receptor em presença de segmentos de raios qSV que estejam nas regiões de triplicação das respectivas superfícies de vagarosidade. Em qualquer evento, as raízes da equação (3.38) podem sempre ser encontradas por iterações tipo Newton-Raphson. Quase sem exceção, quando o raio inclui algum segmento qP, a maior velocidade horizontal será a raiz quadrada do maior valor de a_{11} (poderia ser a_{55} se na camada existisse propagação de eventos qSV, com velocidade de propagação maior que a de todas as outras camadas onde se propaguem ondas qP). Assim sendo, e visando a aplicação deste algoritmo para tomografia anisotrópica, temos que $s_{1max} = 1/\sqrt{a_{11q}}$, onde q denota a camada com valor máximo de a_{11} .

A solução da equação (3.38) através do método de Newton-Raphson segue o algoritmo:

1. calcule um raio com vagarosidade horizontal admissível, $0 < s_1 < s_{max}$.
2. avalie $f(s_1)$; se $|f(s_1)| < tol$, pare; se não, prossiga.
3. calcule $f'(s_1)$ e use Newton-Raphson para atualizar s_1

$$s_{1atual} = s_1 - \frac{f(s_1)}{f'(s_1)}.$$

4. calcule o raio com a vagarosidade atualizada s_{1atual} , agora s_1 .
5. volte ao passo 2.

A derivada total de f em relação a s_1 , necessária no passo 3, pode ser avaliada segundo uma das formas abaixo

$$\begin{aligned}
 f'(s_1) &= \sum_{\ell} \left(\frac{v_1}{v_3} \right)'_{\ell} h_{\ell} = \sum_{\ell} \frac{(F_{\ell, s_3})^2 F_{\ell, s_1 s_1} - 2 F_{\ell, s_3} F_{\ell, s_1} F_{\ell, s_1 s_3} + (F_{\ell, s_1})^2 F_{\ell, s_3 s_3}}{(F_{\ell, s_3})^3} h_{\ell} \\
 &= \sum_{\ell} \frac{F_{\ell, s_1}^2 F_{\ell, s_3} (s_1^2 F_{\ell, s_1}^2 + s_3^2 |_{\ell} F_{\ell, s_3}^2) + 2 s_1^2 s_3 |_{\ell} W_{\ell}}{s_3^3 |_{\ell} (F_{\ell, s_3})^3} h_{\ell}, \quad (3.39)
 \end{aligned}$$

onde

$$W_{\ell} = (F_{\ell, s_3})^2 F_{\ell, s_1 s_1} - 2 F_{\ell, s_3} F_{\ell, s_1} F_{\ell, s_1 s_3} + (F_{\ell, s_1})^2 F_{\ell, s_3 s_3}.$$

Entretanto, este algoritmo falha para raios quase críticos, ou seja, aqueles raios que são próximos da horizontal na camada de menor vagarosidade horizontal quando a espessura desta camada é muito pequena em relação ao afastamento horizontal. Neste caso, o algoritmo procura um valor de s_1 que é muito próximo de s_{1max} . Próximo a este valor, $f'(s_1) \rightarrow \infty$, tornando o algoritmo incapaz de atualizar o valor de s_1 .

Para contornar este problema de convergência, DEPLANTE & MILLER(1986) utilizaram a tangente da direção do raio na camada de maior velocidade como o parâmetro para as iterações de Newton, no traçado de raios em meios isotrópicos. No caso anisotrópico, onde a direção da vagarosidade e a direção da velocidade de grupo são diferentes, é mais conveniente, pelo menos para meios com um plano horizontal de simetria, utilizar a tangente da direção de vagarosidade na camada de menor vagarosidade horizontal, um parametro que chamaremos Y . A mudança de variáveis é feita levando-se em conta que

$$\frac{dY}{ds_1} = \frac{s_1^2 F_{q, s_1}^2 + s_3^2 |_q F_{q, s_3}^2}{s_3^3 |_q F_{q, s_3}^2}. \quad (3.40)$$

Portanto, utilizando (3.39) obtêm-se

$$\begin{aligned}
 \frac{df}{dY} &= \frac{df/ds_1}{dY/ds_1} = \frac{F_{q, s_1}^2}{F_{q, s_3}^2} h_q + \frac{2 s_1^2 s_3^2 |_q W_q}{(s_1^2 F_{q, s_1}^2 + s_3^2 |_q F_{q, s_3}^2) (F_{q, s_3})^2} h_q \\
 &+ \frac{s_3^3 |_q F_{q, s_3}^2}{s_1^2 F_{q, s_1}^2 + s_3^2 |_q F_{q, s_3}^2} \times \sum_{\ell \neq q} \frac{F_{\ell, s_1}^2 F_{\ell, s_3} (s_1^2 F_{\ell, s_1}^2 + s_3^2 |_{\ell} F_{\ell, s_3}^2) + 2 s_1^2 s_3 |_{\ell} W_{\ell}}{s_3^3 |_{\ell} (F_{\ell, s_3})^3} h_{\ell}. \quad (3.41)
 \end{aligned}$$

Utilizando a relação de dispersão para meios TIV (3.12), esta derivada tem limite para grandes valores de Y , e pode ser calculado como

$$\lim_{Y \rightarrow \infty} \frac{df}{dY} = \lim_{\substack{s_3^2 |_q \rightarrow 0 \\ s_1^2 \rightarrow 1/a_{11q}}} \frac{df}{dY} = \lim_{\substack{s_3^2 |_q \rightarrow 0 \\ s_1^2 \rightarrow 1/a_{11q}}} \frac{F_{q, s_1}^2}{F_{q, s_3}^2} h_q = \frac{a_{11}(a_{11} - a_{55})}{a_{55}(a_{11} - a_{55}) + (a_{13} + a_{55})^2} \Big|_q h_q, \quad (3.42)$$

mostrando que a função $f(Y)$ se comporta quase linearmente para grandes valores de Y próximo à vagarosidade horizontal crítica. Assim, a utilização do parâmetro Y regulariza completamente o comportamento das iterações do algoritmo Newton-Raphson.

Usando este novo parâmetro, o algoritmo para resolver (3.38) se modifica para:

1. calcule o raio com vagarosidade admissível $0 < s_1 < s_{1max}$.
2. avalie $f(s_1)$; se $|f(s_1)| < tol$, pare; caso contrário, prossiga.
3. calcule s_{3q} , o valor da vagarosidade horizontal na camada com máximo a_{11} .
4. faça $Y = (s_1/s_3)_q$, calcule $f'(Y)$ a partir de (3.41) e use Newton-Raphson para encontrar

$$Y_{atual} = Y - \frac{f(Y)}{f'(Y)}.$$

5. calcule o valor atualizado de s_1 substituindo s_1/Y_{atual} por s_{3q} na relação de dispersão do q -ésima camada, o que resulta em uma equação do segundo grau para o novo valor se s_1^2

$$F_q(s_1^2, \frac{s_1^2}{Y_{atual}^2}) = 0.$$

6. volte ao passo 2.

Este algoritmo tem se mostrado suficientemente robusto para calcular raios através de meios TIV estratificados com qualquer contraste geofisicamente razoável de a_{11} .

Calculados os valores corretos de s_1 , a trajetória do raio pode ser recuperada no meio original, com eventos qP e qSV, para cima e para baixo, quando necessário. Naturalmente, as ondas que se propagam para cima devem assumir valores negativos para s_3 . O ângulo de polarização ϕ (medido a partir da vertical), associado com o raio em qualquer camada, pode ser encontrado a partir das equações de Christoffel para um meio TIV

$$\tan \phi \equiv \frac{e_1}{e_3} = \frac{(a_{13} + a_{55})s_1s_3}{1 - a_{11}s_1^2 - a_{55}s_3^2} = \frac{1 - a_{55}s_1^2 - a_{33}s_3^2}{(a_{13} + a_{55})s_1s_3}. \quad (3.43)$$

Como

1. para anisotropia suave, $a_{55} + a_{13} > 0$.
2. para trajetórias de raios não horizontais, $s_1 \neq 0$.
3. não se admite refrações críticas em qualquer camada, $s_3 \neq 0$,

$(a_{13} + a_{55})s_1s_3 \neq 0$ e, portanto, para qualquer ponto sobre a superfície de vagarosidade de uma camada, $1 - a_{11}s_1^2 - a_{55}s_3^2$ e $1 - a_{55}s_1^2 - a_{33}s_3^2$ são não nulos, o que torna o numerador e denominador de (3.43) não nulos em todas as camadas. Logo, a polarização associada com um raio tem sempre uma direção muito bem definida.

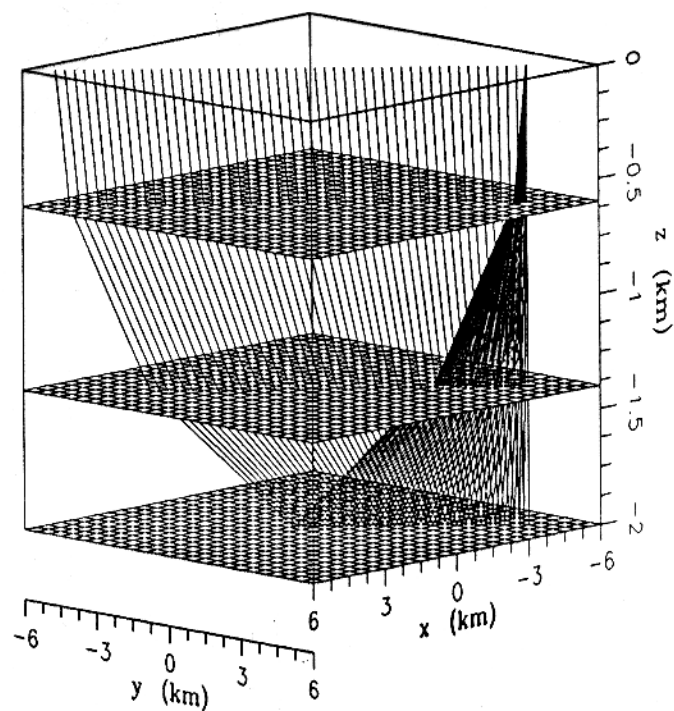
3.6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Um procedimento rápido e robusto para o cálculo das trajetórias dos raios através de meios anisótropicos estratificados e com interfaces planas e horizontais foi apresentado. O algoritmo pode ser utilizado para o cálculo das trajetórias dos raios associado a qualquer combinação de eventos (qP , $qS1$ e $qS2$) em meios com anistropia suave (Anexo IV). O algoritmo foi implementado para meios TIV e é utilizado no procedimento de inversão tomográfica a ser discutido no próximo capítulo.

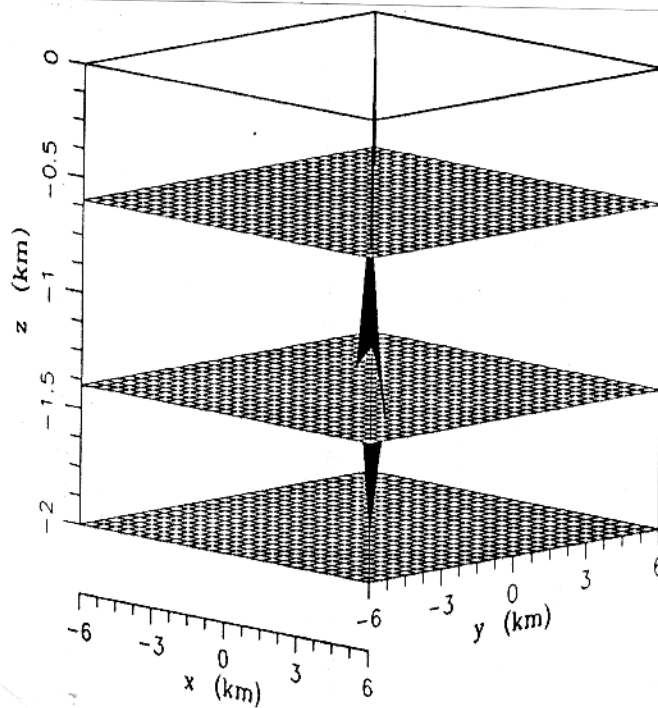
O cálculo da trajetória de raios em meios estratificados, com interfaces não planas foi formulado a partir do princípio de Fermat e aplicado a meios anisotrópicos. A solução do sistema de equações lineares decorrente foi efetuada pelo método de continuação. Este algoritmo é uma extensão dos algoritmos de KELLER & PEROZZI(1983) e DOCHERTY & BLEISTEIN(1984) para traçado de raios em meios isotrópicos. O algoritmo mantém, quando calcula a trajetória de eventos qP , a mesma performance descrita pelos autores acima para o algoritmo correspondente a meios isotrópicos. A determinação da trajetória de eventos $qS1$ e $qS2$ requer trabalho adicional para contornar os problemas de convergência associados a regiões singulares e a não convexidade nas suas superfícies de vagarosidade. A performance do algoritmo permite sua aplicação em procedimentos que requeiram o cálculo de um grande número de trajetórias de raios, tais como algoritmos de inversão de tempos de trânsito. Embora o algoritmo não seja aplicado a modelos anisotrópicos heterogêneos em geral, ele pode ser suficientemente útil em subrotinas de inversão, para estimativas de macromodelos convenientes para as etapas de migração em formações anisotrópicas.

Tabela 3.1 - Constantes Elásticas Normalizadas pela Densidade

Camada	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{22}	a_{23}	a_{33}	a_{44}	a_{55}	a_{66}
1	4.000	1.000	1.000	4.000	1.000	4.000	1.500	1.500	1.500
2	12.005	3.102	1.703	16.807	2.444	7.246	3.062	1.225	2.544
3	21.750	5.932	2.870	21.750	2.870	8.250	3.000	3.000	7.909
4	12.600	3.254	1.361	12.600	1.361	5.400	2.250	2.250	4.673

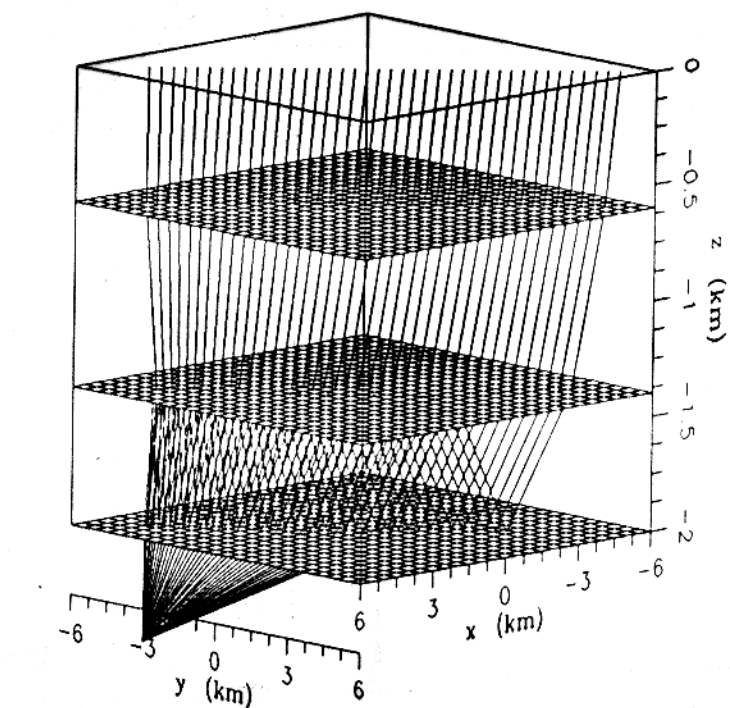


(a)

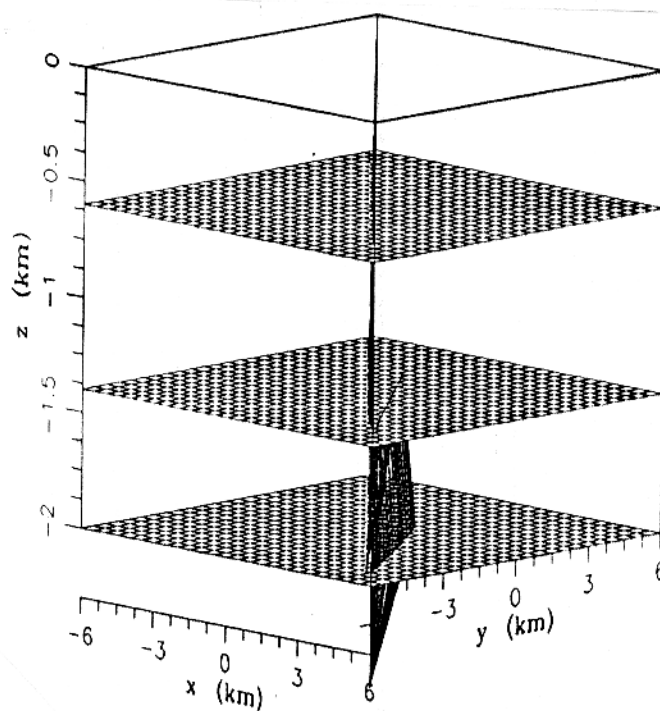


(b)

Figura 3.1 - Trajetórias dos raios em experimento sísmico de superfície, através do modelo 1. As duas diferentes perspectivas, (a) e (b), mostram que os raios não são curvas planas.



(a)



(b)

Figura 3.2 - Trajetórias dos raios em experimento de VSP , através do modelo 2, em duas diferentes perspectivas (a) e (b). Estas figuras mostram que o algoritmo pode calcular múltiplas.

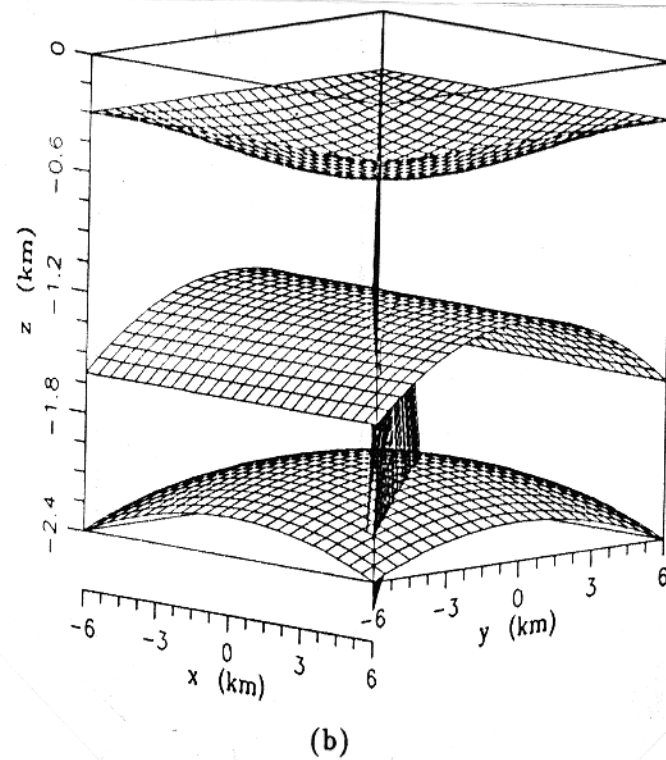
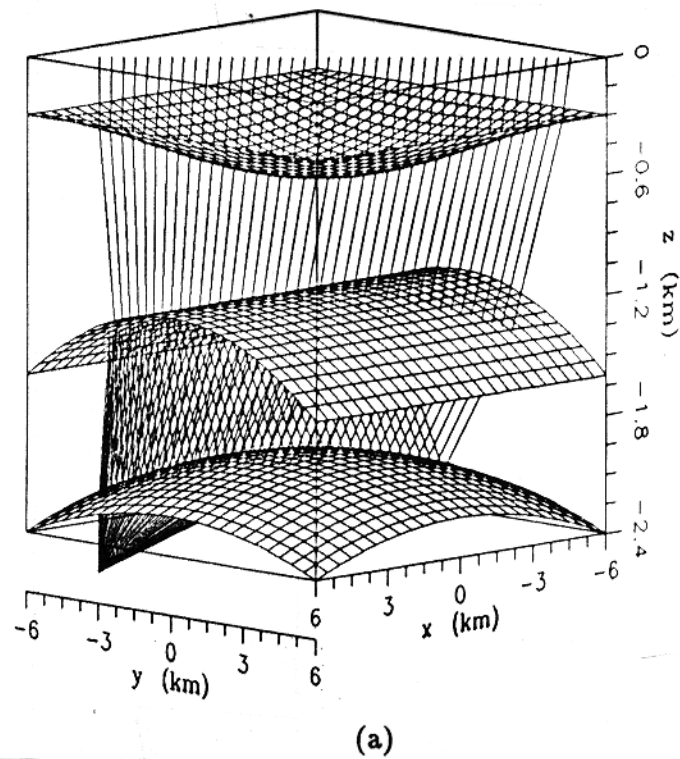


Figura 3.3 - Trajetórias dos raios em experimento de VSP, através do modelo 3, em duas diferentes perspectivas (a) e (b).

4 - TOMOGRAFIA EM MEIOS ANISOTRÓPICOS ESTRATIFICADOS

4.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Com o advento de levantamentos poço a poço e VSP de grande abertura, a pressuposição de isotropia para a subsuperfície é frequentemente violada. O traçado de raios sísmicos e as técnicas tomográficas, baseadas em modelos isotrópicos, produzem resultados pobres, não importando a engenhosidade dos algoritmos. Em bacias sedimentares com estratificação relativamente plana, a maior componente de anisotropia é geralmente isotropia transversal com um eixo vertical de simetria (TIV). Folhelhos, em particular, geralmente exibem forte isotropia transversal e estes meios altamente anisotrópicos são, em algumas situações, encontrados em camadas espessas. A presença de grandes volumes deste material pode degradar os resultados de algoritmos de migração (quando baseados em dados de grande abertura) e confundir completamente toda sorte de interpretação sísmica.

Há várias abordagens que podem ser seguidas, para incluir anisotropia em tomografia, utilizando-se o tempo de trânsito. É possível decompor a região de interesse em um conjunto de elementos finitos e tentar inverter os dados para os parâmetros anisotrópicos de cada elemento, utilizando traçado de raios exatos, através dos elementos. Isto requer que os raios atravessem todos os elementos em muitos ângulos diferentes e programas, para traçamento de raios através do meio discretizado, são, em geral, lentos e complexos. Alternativamente, para meios fracamente anisotrópicos, é possível determinar as trajetórias dos raios no meio isotrópico mais próximo e calcular as perturbações nos tempo de trânsito integrando a vagarosidade anisotrópica sobre as trajetórias de raios no meio isotrópico (CHAPMAN & PRATT, 1992). Ainda neste caso, densa cobertura de raios é necessária. A abordagem seguida neste trabalho é decompor a região em um conjunto de camadas planas e homogêneas, em geral de anisotropia arbitrária. A vantagem é que a cobertura de raios não precisa ser muito densa, o número de parâmetros necessários é menor e o traçamento de raios entre dois pontos é extremamente rápido e robusto. A alternativa é atraente para regiões que são relativamente planas e para levantamentos preliminares, onde a estimativa de um modelo estratificado pode ser utilizada como um modelo de fundo para efetuar análises mais detalhadas, por exemplo, como um modelo anisotrópico para migração ou como um modelo de

calibração para análises de AVO.

4.2 PERTURBAÇÕES DO TEMPO DE TRÂNSITO

Para resolver o problema de inversão não linear de se obter os módulos elásticos normalizados pela densidade, a partir dos dados de tempo de trânsito iterativamente, é necessário calcular as derivadas de Fréchet de (3.1), as quais expressam a relação linear entre variações no tempo de trânsito e as perturbações nos módulos elásticos normalizados pela densidade (CERVENY, 1982; CHAPMAN & PRATT, 1992). Como o tempo de trânsito ao longo de um raio é um extremo, o erro, no tempo, resultante da integração ao longo de uma trajetória próxima do raio, onde a diferença entre as trajetórias é da ordem de um parâmetro ϵ em alguma norma conveniente, é da ordem de ϵ^2 . Portanto, na determinação de perturbações de primeira ordem no tempo de trânsito, relativas às variações nas constantes elásticas normalizadas, a_{ijkl} , até primeira ordem de ϵ , o tempo de trânsito não varia com perturbações da trajetória, mas apenas com as mudanças devido à perturbação na vagarosidade. Assim pode-se escrever,

$$\delta\tau = \int_{\text{raio fixo}}^{\text{raio}} \delta a_{ijkl} s_{,a_{ijkl}} \Big|_{\text{estado inicial}} \cdot \dot{\mathbf{x}} d\mathbf{x} \quad . \quad (4.1)$$

Considerando η_q os N parâmetros materiais independentes, dos quais todos os a_{ijkl} dependem, segue-se que (4.1) pode ser escrita como

$$\delta\tau = \int_{\text{raio fixo}}^{\text{raio}} \sum_{q=1}^N \delta\eta_q s_{,\eta_q} \Big|_{\text{estado inicial}} \cdot \dot{\mathbf{x}} d\tau \quad , \quad (4.2)$$

sendo necessário a determinação de $s_{,\eta_q}$, em todos os pontos ao longo do raio fixo. Para isto, observando que a derivada total da relação de dispersão em relação a qualquer η_q particular (que designaremos simplesmente por η daqui em diante), em um ponto fixo $\mathbf{x}$ (pois o raio é mantido fixo), deve se anular, isto é,

$$\frac{dF}{d\eta} = F_{,\eta} + s_{,\eta} \cdot \nabla_s F = 0 \quad . \quad (4.3)$$

De (3.7), $\nabla_s F = \dot{\mathbf{x}} \cdot \nabla_s F$ e sua substituição em (4.3) produz

$$s_{,\eta} \cdot \dot{\mathbf{x}} = - \frac{F_{,\eta}}{\mathbf{s} \cdot \nabla_s F} \quad (4.4)$$

e a substituição de (4.4) em (4.2) resulta em

$$\delta\tau = - \int_{\text{raio fixo}}^{\text{raio}} \sum_{q=1}^N \delta\eta_q \frac{F_{,\eta_q}}{\mathbf{s} \cdot \nabla_s F} \Big|_{\text{estado inicial}} d\tau \quad . \quad (4.5)$$

Assim, para um raio traçado através de um meio composto de células homogêneas, a derivada do tempo de trânsito em relação a η_{qj} , o q -ésimo parâmetro independente na j -ésima célula, é

$$\tau_{,\eta_{qj}} = \lim_{\delta\eta_{qj} \rightarrow 0} \frac{\delta\tau}{\delta\eta_{qj}} = - \left. \frac{F_{j,\eta_{qj}}}{\mathbf{s} \cdot \nabla_{\mathbf{s}} F_j} \right|_{\mathbf{s}_j} \tau_j, \quad (4.6)$$

onde $\mathbf{s}_j$, F_j e τ_j são, o vetor vagarosidade do raio, a relação de dispersão e o tempo de trânsito, respectivamente, na j -ésima célula. Esta expressão, para a derivada do tempo de trânsito em relação aos parâmetros materiais, é válida também para meios estratificados. Para raios que cruzam uma determinada camada mais de uma vez, cada segmento na camada contribui com um termo desta forma.

A expressão (4.6), quando o modelo é reparametrizado de η_{qj} para ϵ_{pj} , se transforma, de acordo com a regra da cadeia, isto é,

$$\tau_{,\epsilon_{pj}} = \sum_{q=1}^N \tau_{,\eta_{qj}} \eta_{qj,\epsilon_{pj}}, \quad (4.7)$$

onde $[\eta_{qj,\epsilon_{pj}}]$ é a matriz Jacobiana da transformação. Portanto, a reparametrização do modelo requer apenas um produto matricial no cálculo das derivadas de Fréchet. Este resultado permite que o algoritmo de inversão seja codificado de forma independente da parametrização do modelo. Para inverter um conjunto específico de parâmetros, basta, portanto, especificar a matriz $\eta_{qj,\epsilon_{pj}}$. Como veremos a seguir, há várias maneiras de se parametrizar modelos anisotrópicos, daí a conveniência desta observação.

4.3 APLICAÇÃO A MEIOS TRANSVERSALMENTE ISOTRÓPICOS

A partir da expressão (4.6) para as derivadas parciais do tempo de trânsito em relação aos parâmetros materiais, torna-se evidente que as derivadas parciais da relação de dispersão em relação aos parâmetros do meio são fundamentais para as estimativas das perturbação no modelo, a partir dos tempos de trânsito. Portanto, uma parametrização conveniente do modelo, que torne $F_{,\eta_{qj}}$ linearmente independentes, é essencial para assegurar estabilidade ao processo de inversão. A relação de dispersão para ondas de deformação plana, no plano vertical de um meio TIV, só depende de quatro parâmetros materiais. Se somente tempos de trânsito de eventos qP são utilizados para estimativa dos parâmetros, o que em geral acontece quando se utiliza as primeiras chegadas, uma reparametrização conveniente, para fins de inversão, deve isolar parâmetros que influenciem fortemente a vagarosidade qP. Um outro critério é escolher os η_q de tal forma que dois deles sejam não nulos no caso isotrópico mas que assumam valores análogos a certos parâmetros isotrópicos (o quadrado da velocidade da

onda P e o quadrado da velocidade da onda S, por exemplo), com os outros dois parâmetros se anulando se o meio for isotrópico. Baseado nestas considerações e exigindo que os η_q 's sejam combinações lineares de a_{ij} , escolhemos os seguintes parâmetros para analisar as derivadas de Fréchet:

$$\eta_1 \equiv C = \frac{a_{11} + a_{33}}{2}, \quad \eta_2 \equiv c = a_{55}; \quad \eta_3 \equiv D = \frac{a_{11} - a_{33}}{2}, \quad \eta_4 \equiv \Delta = \frac{C - (a_{13} + 2a_{55})}{2}. \quad (4.8)$$

C é a média do quadrado da velocidade da onda qP na direção horizontal e vertical, c é o quadrado da velocidade da onda qSV na direção horizontal e vertical, D é metade da diferença entre o quadrado da velocidade das ondas qP horizontal e vertical, e como tal, está relacionado à "elipticidade" da superfície de vagarosidade da onda qP (se esta superfície fosse uma elipse), enquanto Δ , o único parâmetro envolvendo o enigmático parâmetro a_{13} , é metade da diferença entre C e a combinação de parâmetros $(a_{13} + 2a_{55})$, que controla os valores de vagarosidade para ângulos próximos a 45° . A escolha de D e Δ foi motivada pelo fato destas diferenças se anularem para meios isotrópicos. Em termos destes novos parâmetros, a relação de dispersão (3.12) se torna

$$F = [(C + D)s_1^2 + cs_3^2 - 1][cs_1^2 + (C - D)s_3^2 - 1] - (C - c - 2\Delta)^2 s_1^2 s_3^2 = 0. \quad (4.9)$$

A expressão para $s \cdot \nabla_s F$ que aparece no denominador de (4.5) é

$$s \cdot \nabla_s F = 2[(C + D + c)s_1^2 + (C - D + c)s_3^2 - 2], \quad (4.10)$$

enquanto as derivadas parciais de F que ocorrem em (4.5) são

$$\begin{aligned} F_{,C} &= c(s_1^2 + s_3^2)^2 + 4\Delta s_1^2 s_3^2 - (s_1^2 + s_3^2) \\ &= s_1^2[cs_1^2 + (c + 2\Delta)s_3^2 - 1] + s_3^2[(c + 2\Delta)s_1^2 + cs_3^2 - 1], \\ F_{,c} &= [(C + D)s_1^2 + (C - D)s_3^2](s_1^2 + s_3^2) - 4\Delta s_1^2 s_3^2 - (s_1^2 + s_3^2) \\ &= s_1^2[(C + D)s_1^2 + (C - 2\Delta)s_3^2 - 1] + s_3^2[(C - 2\Delta)s_1^2 + (C - D)s_3^2 - 1], \\ F_{,D} &= [c(s_1^2 + s_3^2) - 1](s_1^2 - s_3^2) - 2Ds_1^2 s_3^2 \\ &= s_1^2[cs_1^2 + (c - D)s_3^2 - 1] - s_3^2[(c + D)s_1^2 + cs_3^2 - 1], \\ F_{,\Delta} &= 4(C - c - 2\Delta)s_1^2 s_3^2. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Estas derivadas parciais podem ser interpretadas a partir das aproximações das relações de dispersão das ondas qP e qSV, obtidas no Anexo V e que em termos dos novos parâmetro são dadas por

$$F_{qP \text{ appx}} = (C + D)s_1^2 + (C - D)s_3^2 - \frac{4\Delta s_1^2 s_3^2}{s_1^2 + s_3^2} - 1 = 0, \quad (4.12)$$

$$F_{qSapx} = c(s_1^2 + s_3^2) + \frac{4\Delta s_1^2 s_3^2}{s_1^2 + s_3^2} - 1 = 0. \quad (4.13)$$

A Figura 4.1 mostra os gráficos das superfícies de vagarosidade exata e aproximada de ondas qP e qS, para um meio "não fracamente" anisotrópico, em que são assumidos valores significativos para $\epsilon_P \equiv D/C$ e para ϵ_A , um parâmetro adimensional que mede o quanto o meio se desvia da anisotropia elíptica (Anexo V).

Comparando (4.13) com a primeira e segunda equações de (4.11) segue que

$$F_{,C} = (s_1^2 + s_3^2)F_{qSapx}, \quad F_{,c} = (s_1^2 + s_3^2)F_{qPapx}. \quad (4.14)$$

Este resultado pode também ser obtido a partir da relação entre F e $F_{qPapx} \times F_{qSapx}$ e que é dada por

$$F = F_{qPapx}(C, D, \Delta) \times F_{qSapx}(c, \Delta) - s_1^2 s_3^2 \left(D + 2\Delta \frac{s_1^2 - s_3^2}{s_1^2 + s_3^2} \right)^2, \quad (4.15)$$

cujas derivadas com relação a C e c resulta em (4.14). A derivada com relação a D é dada por

$$F_{,D} = (s_1^2 - s_3^2)F_{qSapx} - 2s_1^2 s_3^2 \left(D + 2\Delta \frac{s_1^2 - s_3^2}{s_1^2 + s_3^2} \right). \quad (4.16)$$

Portanto,

- desde que $F_{,c}$ é aproximadamente zero para onda qP, δc não pode ser determinado a partir da inversão de tempos de trânsito para eventos qP em um meio fracamente TI;
- analogamente, como $F_{,C}$ é aproximadamente zero para ondas qS, δC não pode ser determinado a partir da inversão de tempos de trânsito para eventos qS ;
- visto que $F_{,D}$ é da ordem de D, Δ , que são, para materiais geológicos, geralmente muito menores que C e c , as vagarosidades de qS dependem apenas fracamente de D enquanto δD é pobremente determinado a partir da inversão de tempos de trânsito de eventos qS.

Uma forma relacionada destes resultados, mas menos geral pois pressupõe anisotropia fraca, foi apresentada por CHAPMAN & PRATT (1992). Neste trabalho é mostrado que a partir de perturbações em torno de módulos elásticos isotrópicos, somente três parâmetros, δa_{11} , δa_{33} e $\delta(a_{13} + 2a_{55})$ podem ser recuperados por inversão de tempos de trânsito de eventos qP.

Estas conclusões têm implicações de como formular o problema inverso em meios TI, quando os dados consistem de tempo de primeira chegada de eventos qP. Duas possíveis abordagens são:

1. pressupor um comportamento fracamente TI e utilizar a relação de dispersão aproximada para ondas qP, $F_{qP_{apx}} = 0$, para remover qualquer dependência com o parâmetro a_{55} (abordagem de MILLER & CHAPMAN (1991)), desde que, para anisotropia fraca - e mesmo, como é usual, com termos de segunda ordem não tão pequenos - este parâmetro não pode ser resolvido pelos dados, não importando a precisão do experimento (pressuposições corretas, tempo de trânsito medido corretamente) e quão completo seja a cobertura angular , ou,
2. admitir um comportamento TI "forte", dentro dos limites de anisotropia suave, e utilizar informação a priori sobre $c \equiv a_{55}$, que poderia vir de perfis de onda cisalhante, de dados de VSP, ou arbitrar um valor razoável, sabendo-se que o resultado da inversão para a_{13} depende destas informações a priori.

Estas observações levam em conta somente as limitações essenciais dos dados de tempo de primeira chegada para eventos qP. Para experimentos poço a poço, é necessário adicionar a estas observações, os efeitos da cobertura angular limitada produzida pelo experimento. Para analisar estes efeitos os seguintes parâmetros são introduzidos:

$$\begin{aligned} v_1^2 &\equiv C + D = a_{11} = s_{qP}^{-2}(90^\circ), \\ v_2^2 &\equiv C - \Delta = \frac{1}{2} \left[\frac{a_{11} + a_{33}}{2} + (a_{13} + 2a_{55}) \right] = s_{qP_{apx}}^{-2}(45^\circ), \end{aligned} \quad (4.17)$$

$$\begin{aligned} v_3^2 &\equiv C - D = a_{33} = s_{qP}^{-2}(0^\circ), \\ v_4^2 &\equiv c = a_{55} = s_{qS}^{-2}(0^\circ). \end{aligned} \quad (4.18)$$

É relevante observar que v_2 é a velocidade de fase em 45° , para a aproximação fraca da vagarosidade qP, como está descrito no anexo V. A Figura 4.2 mostra as derivadas parciais da relação de dispersão exata e da relação de dispersão aproximada, (4.13), para ondas qP em relação a estes quatro parâmetros (4.17), em função da direção do vetor vagarosidade, aplicadas ao meio anisotrópico com curvas de vagarosidade, mostradas na Figura 4.1. Os gráficos da Figura 4.2 mostram a forte dependência angular das derivadas parciais F_{v_1} , F_{v_2} , F_{v_3} e F_{v_4} . A partir destas figuras, observa-se que v_1 pode ser recuperado de raios quase horizontais, v_3 , de raios quase verticais e v_2 , de raios oblíquos em torno de 45° . A derivada em relação a v_4 é muito menor que as outras, de acordo com as considerações feitas anteriormente. Há boa concordância entre as curvas exatas e aproximadas na Figura 4.2, indicando

que a aproximação fraca para a vagarosidade qP de meios TI é bastante satisfatória mesmo neste caso, onde a anisotropia é considerável.

Assim, se o meio é discretizado em células, pelo menos três raios, com direções bem diferentes, devem atravessar cada célula para que se possa determinar os parâmetros que podem ser resolvidos teoricamente. A instabilidade associada à cobertura angular limitada é muito mais difícil de ser evitada sob a hipótese de anisotropia e as consequências para inversão TI são muito mais drásticas que para reconstrução tomográfica de modelos isotrópicos. Para compensar a cobertura angular limitada em tomografia sísmica, é geralmente necessário utilizar informação *a priori* para reduzir a instabilidade do sistema linear associado que se origina da discretização de (4.5). Uma forte pressuposição sobre o meio, que algumas vezes pode ser feita *a priori*, é que o meio é estratificado. A evidência, para isto, pode vir de perfilagem sônica, dados de superfície e da própria natureza do dado. Por exemplo, para experimentos poço a poço entre dois poços verticais, a geometria de aquisição pode ser planejada de tal forma que fontes e receptores ocupem as mesmas profundidades nos dois poços e, neste caso, a cada combinação fonte-receptor $[(x_0, z_0), (x_1, z_1)]$ corresponda uma combinação simétrica $[(x_0, z_1), (x_1, z_0)]$. Se os tempos de trânsito são idênticos para todos os pares simétricos fonte-receptor, então os dados sugerem fortemente que o meio apresenta um plano vertical arbitrário de simetria especular. Este é o caso para meios TIV verticalmente heterogêneos, ou no caso mais geral, para meios estratificados cujas camadas apresentem um plano horizontal de simetria especular. Tais meios incluem meios ortorrômbicos que resultam da introdução de fraturas verticais em um meio TIV.

A hipótese de meio estratificado com camadas TIV, reduz, mas não elimina, os efeitos negativos devido a cobertura angular limitada do experimento.

4.4 TOMOGRAFIA EM UM MEIO TIV ESTRATIFICADO

Raios traçados através de um modelo TIV estratificado são aqui considerados. Tal modelo é constituído J camadas homogêneas, cada uma das quais dependendo de $N = 4$ parâmetros independentes. Nesta discussão foram escolhidos v_1^2 , v_2^2 , v_3^2 e v_4^2 , produzindo K tempos de trânsito, τ_k , $k = 1, \dots, K$, um para cada raio. Estes tempos de trânsito devem ser comparados com dados tempos de trânsito observados, τ_{dk} , $k = 1, \dots, K$. A comparação dos tempos de trânsito experimentais com os tempos de trânsito calculados, produz um conjunto de tempos de trânsito residuais, $\delta\tau_k = \tau_{dk} - \tau_k$, que podem ser expressos, aproximadamente, em termos de $4 \times J$ parâmetros, denotados por η_{qj} , $q = 1, \dots, 4$ e $j = 1, \dots, J$. Estes tempos de trânsito residuais são dados, em aproximação de primeira ordem nas perturbações dos parâmetros

elásticos $\delta\eta_{qj}$, por

$$\tau_k = \tau_{dk} - \tau_k(\eta_{qj}) \approx \sum_{j=1}^n \sum_{q=1}^4 \delta\eta_{qj} \tau_{k,\eta_{qj}} \Big|_{\text{raio fixo}} . k = 1, \dots, m \quad , \quad (4.19)$$

Isto corresponde a um conjunto de K equações a $4 \times J$ incógnitas, $\delta\eta_{qj}$.

Para meios estratificados, todos os tipos de eventos, tais como raios refletidos, raios convertidos, múltiplas e múltiplas convertidas, desde que possam ser identificados nos dados, podem ser incluídos na inversão tomográfica. A situação mais geral que pode ocorrer, para um dado evento, é quando uma dada camada, digamos a j -ésima, é atravessada por segmentos de raios qP e segmentos de raios qS. A trajetória do raio, na camada, pode então ser especificada por um segmento efetivo qP, com tempo trânsito $\tau_{k,jP}$ e um segmento efetivo qS, com tempo de trânsito $\tau_{k,jS}$, os dois segmentos efetivos com mesma vagarosidade horizontal, s_1 . Aplicando o resultado geral (4.6), ao caso no qual o k -ésimo raio na j -ésima camada é algumas vezes qP e algumas vezes qS, a expressão para a derivada parcial em (4.19) se torna

$$\tau_{k,\eta_{qj}} = -\frac{F_{j,\eta_{qj}}}{s \cdot \nabla F_j} \Big|_{s_{k,jP}} \tau_{k,jP} - \frac{F_{j,\eta_{qj}}}{s \cdot \nabla F_j} \Big|_{s_{k,jS}} \tau_{k,jS} \quad . \quad (4.20)$$

Quando somente eventos qP são considerados, a situação mais comum, a equação (4.20) se reduz a (4.6), o subscrito P se torna supérfluo e para o k -ésimo raio obtemos

$$\tau_{k,\eta_{qj}} \Big|_{\text{raio fixo}} = -\frac{F_{j,\eta_{qj}}}{s \cdot \nabla F_j} \Big|_{s_{k,j}} \tau_{k,j} \quad . \quad (4.21)$$

Observando que a derivada total de F em relação a um parâmetro material deve ser nula e mantendo-se a vagarosidade horizontal s_1 constante, segue-se que

$$\frac{dF_j}{d\eta_{qj}}(s_1, s_{3j}, \eta_{1j}, \eta_{2j}, \eta_{3j}, \eta_{4j}) = F_{j,s_3} s_{3j,\eta_{qj}} + F_{j,\eta_{qj}} \equiv 0 \quad . \quad (4.22)$$

Substituindo este resultado em (4.20), obtêm-se

$$\tau_{k,\eta_{qj}} \Big|_{\text{raio fixo}} = \frac{F_{j,s_3} s_{3j,\eta_{qj}}}{s \cdot \nabla F_j} \Big|_{s_{k,jP}} \tau_{k,jP} + \frac{F_{j,s_3} s_{3j,\eta_{qj}}}{s \cdot \nabla F_j} \Big|_{s_{k,jS}} \tau_{k,jS} \quad . \quad (4.23)$$

Utilizando (3.7), particularmente a expressão para as três componentes da velocidade de grupo e observando que $v_3|_{k,j} \tau_{k,j}$ é o deslocamento vertical do raio, que, para um meio estratificado, é a espessura da camada, segue-se que a equação (4.23) pode ser escrita na forma

$$\tau_{k,\eta_{qj}} \Big|_{\text{raio fixo}} = s_{3j,\eta_{qj}} \Big|_{s_{k,jP}} h_{k,jP} + s_{3j,\eta_{qj}} \Big|_{s_{k,jS}} h_{k,jS} \quad . \quad (4.24)$$

Novamente, quando somente eventos qP são considerados, o subscrito P torna-se supérfluo e a expressão (4.24) se fica como

$$\tau_{k,\eta_{qj}} \Big|_{\text{raio}}^{\text{fixo}} = s_{3j,\eta_{qj}} \Big|_{s_{k,jP}} h_{k,jP} \quad . \quad (4.25)$$

Estas expressões são mais convenientes que as equações (4.20) e (4.21), quando expressões explícitas para s_3 , como função de s_1 e η_q , são utilizadas no traçamento de raios diretamente. Estas formas podem ser obtidas diretamente, pressupondo-se que s_1 é constante e que s_3 seja explicitado em função de s_1 . Esta derivação se encontra no Anexo VI.

Estas expressões se aplicam para qualquer tipo de camadas anisotrópicas. Se não há um plano de simetria especular horizontal, então é necessário distinguir não apenas ondas qP de ondas qS, mas também ondas que se propagam para cima, de ondas que se propagam para baixo em cada camada. Esta expressão para a derivada do tempo de trânsito em relação aos parâmetros materiais, também se mantém se o raio correspondesse a um vetor vagarosidade horizontal (s_1, s_3) fora do plano que contem o raio, o que poderia acontecer em na inversão tomográfica para um meio estratificado anisotrópico tridimensional, com 21 constantes em cada camada. A inversão poderia ser extendida para o caso de seis ondas possíveis em uma dada camada, isto é, ondas que se propagam para cima e ondas que se propagam para baixo, do tipo qP, qS e qT.

4.5 ALGORITMO DE INVERSÃO PARA MODELOS ANISOTRÓPICOS

O procedimento de inversão parte da aplicação de (4.19) e (4.21) (para ondas qP), utilizando a parametrização $v_1^2, v_2^2, v_3^2, v_4^2$, às camadas finas em que a subsuperfície é discretizada, produzindo, para um dado modelo inicial, o sistema linear

$$\delta\tau_k = \sum_{i=1}^{4J} A_{ki} \delta\eta_i$$

com $i = 4(j-1) + 1, 4(j-1) + 2, 4(j-1) + 3, 4(j-1) + 4$ denotando os quatro parâmetros para j -ésima camada (de um total de J) que governam a propagação de ondas qP-qSv através da camada. Os coeficientes de (4.21) podem ser escritos na forma

$$A_{ki} = - \frac{F_{j,\eta_i}}{s_j \cdot \nabla_s F_j} \Big|_{\text{estado inicial}}^{\tau_{k,j}} \quad , \quad j = 1, \dots, J$$

onde $\tau_{k,j}$ é o tempo de trânsito do k -ésimo raio através da j -ésima camada, como descrito na seção anterior. Este sistema linear, embora seja sobredeterminado, é mal condicionado, como foi discutido anteriormente em relação às derivadas parciais mostradas em (4.11) e devido à

falta de cobertura angular completa, inerente aos experimentos poço a poço. Sistemas lineares mal-condicionados produzem soluções instáveis (MENKE,1984) e desprovidas de significado físico, logo, não aceitáveis. Para se obter soluções estáveis, equações adicionais são necessárias (MENKE,1984). Estas equações geralmente expressam propriedades adicionais desejáveis para solução, mas são ordinariamente pensadas como uma informação a priori.

O algoritmo de inversão utiliza dois conjuntos de equações adicionais, vínculos fracos, como em MILLER & CHAPMAN (1991). O primeiro conjunto, exigindo que os parâmetros não se desviem muito do modelo corrente, a cada iteração, tem a forma

$$\sum_{i=1}^{4J} \Gamma_{li} \delta \eta_i = 0, \quad l = 1, \dots, 4J, \quad \Gamma_{li} = 0, \quad i \neq l,$$

isto é, Γ_{li} é uma matriz diagonal. Os valores da diagonal Γ_{ii} são normalizados em relação ao valor máximo das normas das colunas da matriz $\mathbf{A}$. Um fator de escala ou fator de amortecimento, assumindo valores entre zero e um, é, então, escolhido para cada parâmetro. A escolha particular reflete a confiança no valor inicial do parâmetro. Este vínculo é sempre ativo em v_4^2 , pois dados de tempo de trânsito de eventos qP não são sensíveis a este parâmetro e sobre v_3^2 para compensar a falta de raios em torno da vertical. Na aplicação destes vínculos, em situações práticas, se pressupões um modelo inicial com valores de v_3^2 e v_4^2 inferidos a partir de valores médios de perfis sônicos e um fator de amortecimento igual a um é aplicado a esses parâmetros.

O segundo conjunto de vínculos requer que o modelo seja homogêneo em algumas camadas espessas. Nas aplicações práticas, perfis sônicos e família de dados com fonte e receptor à uma mesma profundidade (CDG) definem as principais descontinuidades na estratificação (MILLER & CHAPMAN, 1991). Estes vínculos tendem a manter os estratos finos adjacentes, com excessão daqueles através das interfaces entre as camadas espessas, com os mesmos parâmetros. Ele tem a forma

$$\sum_{i=1}^{4J-4} \Lambda_{li} [\eta_{i+4} + \delta \eta_{i+4} - (\eta_i + \delta \eta_i)] = 0, \quad \Lambda_{li} = 0, \quad i \neq l,$$

ou seja, a matriz Λ_{li} é diagonal. Alternativamente,

$$\sum_{i=4}^{4J-4} \Lambda_{li} [\delta \eta_{i+4} - \delta \eta_i] = - \sum_{i=4}^{4J-4} \Lambda_{li} [\eta_{i+4} - \eta_i].$$

O conjunto de equações acima pode não ser suficiente para estabilizar o sistema, pois a soma dos coeficientes em cada uma das equações é nula, isto é, a matriz associada a este sistema de equações é singular. Este conjunto de vínculos afeta a inversão de duas maneiras. Eles estendem a informação de células cobertas por raios para células adjacentes que podem não

ser atingidas por raios, em uma determinada faixa angular. Se somente um fino feixe de raios atravessa uma sequência de células de camadas finas, as colunas da matriz A_{ki} , associadas ao parâmetro relevante na direção do feixe, serão linearmente dependentes. Neste caso, estes vínculos requerem que a média aritmética do parâmetro relevante seja invertida para toda sequência de camadas, eliminando portanto a ambiguidade. Os valores dos Λ_{li} também são normalizadas em relação ao valor máximo das normas das colunas de A_{ki} , a escolha particular definindo o grau de confiança na pressuposição a priori de um meio homogêneo estratificado.

Após a introdução dos vínculos, resta o seguinte sistema linear sobredeterminado para ser solucionado:

$$A\delta\eta = \delta t, \quad (4.26)$$

$$\Lambda D\delta\eta = -\Lambda D\eta, \quad (4.27)$$

$$\Gamma\delta\eta = 0, \quad (4.28)$$

onde D é um operador de diferenças. Este sistema é resolvido pelo método dos mínimos quadrados (LAWSON & HANSON, 1974) e sua solução é equivalente ao seguinte problema variacional:

$$\text{Min } \mathcal{L}(\delta\eta) = \|A\delta\eta - \delta t\|^2 + \|\Lambda D(\delta\eta + \eta)\|^2 + \|\Gamma\delta\eta\|^2,$$

cujas soluções são dadas por,

$$\delta\eta = [A^t A + D^t \Lambda^2 D + \Gamma^t \Gamma]^{-1} (A^t \delta t + \Lambda D\eta).$$

Esta expressão é útil para análise do algoritmo, entretanto a aplicação do método dos gradientes conjugados ao sistema de equações (4.26, 4.27, 4.28) é computacionalmente mais eficiente.

Há ainda outros vínculos físicos que devem ser obedecidos por qualquer solução admissível. A exigência de que a energia de deformação seja positivo definida requer, para meios transversalmente isotrópicos, que $a_{13}^2 < (a_{11} - a_{66})a_{33}$ (MUSGRAVE, 1970). Como tempos de trânsito de eventos qP não dependem de a_{66} , é necessária informação a priori sobre a_{66} para se poder aplicar este vínculo. Para meios transversalmente isotrópicos que são meios efetivos, no limite de grandes comprimentos de onda, de estruturas laminares, vale a relação $a_{66} > a_{55}$ (SCHOENBERG & MUIR, 1989). Portanto, se não há informação sobre a_{66} , pode-se pelos menos exigir a desigualdade $a_{13}^2 < (a_{11} - a_{55})a_{33}$ para qualquer solução fisicamente admissível. Na ausência de qualquer informação razoável sobre a_{55} , o vínculo $a_{13}^2 < a_{11}a_{33}$ determina um limite superior que deve ser obedecido para qualquer modelo anisotrópico estável em duas dimensões. Infelizmente, este vínculo é não linear e a solução do sistema linear discutido anteriormente, sujeito a estes vínculos, é computacionalmente mais dispendiosa. Em vista

destas observações, a desigualdade $a_{13}^2 < a_{11}a_{33}$ é testada durante a inversão para evitar soluções não admissíveis fisicamente.

Se o domínio de soluções é restrito pela condição de anisotropia suave, o vínculo $a_{13} + a_{55} > 0$, deve ser imposto à solução para evitar polarização anômala (HELBIG & SCHOENBERG, 1987). Por outro lado, para modelos anisotrópicos que são meios efetivos, no limite de grandes comprimentos de onda, à estruturas isotrópicas laminares, $a_{13} > 0$ (HELBIG & SCHOENBERG, 1987). Fisicamente, esta condição significa que não se tem efeitos de razão de Poisson negativa, quando uma barra do meio alinhada com o eixo é submetida a tensão uniaxial. Este vínculo é adicionados facilmente ao problema exigindo a cada iteração que

$$\delta a_{13} > -a_{13} \quad .$$

O sistema de equações (4.26, 4.27, 4.28) com os vínculos de desigualdade discutidos é resolvido pelo método dos gradientes conjugados sujeitos a vínculos de desigualdade (PSHENICHNY & DANILIN, 1978). As etapas, para resolver o problema de tomografia não linear, são portanto as seguintes:

- a) Entrar com o modelo inicial. Este modelo pode estar baseado em médias de perfis sônicos considerando o meio isotrópico. Entretanto, uma melhor estimativa pode ser obtida, a partir do perfil sônico, determinando-se um meio efetivo transversalmente isotrópico (SCHOENBERG & MUIR, 1989).
- b) Construir o sistema linear para as perturbações dos parâmetros que definem o modelo, traçando-se raios através do modelo corrente e calculando os resíduos de tempo de trânsito em relação aos dados observados.
- c) Resolver o sistema linear sobredeterminado pelo método de mínimos quadrados, através do algoritmo de gradientes conjugados vinculados.
- d) Atualizar os parâmetros. Traçar os raios através do modelo corrente e calcular o erro médio quadrático dos resíduos e_{rms} . Se o e_{rms} não muda em relação a iteração anterior ou o e_{rms} aumentar, pare; se não, volte à etapa 2.

4.6 TOMOGRAFIA ISOTRÓPICA

Um algoritmo para efetuar tomografia isotrópica foi implementado com a finalidade de comparar seus resultados, quando aplicados a dados de tempos de trânsito em meios anisotrópicos, com os resultados da inversão anisotrópica. O problema direto de calcular o

tempo de trânsito através de um meio discretizado em células retangulares é solucionado pelo algoritmo proposto por MOSER(1991). Este algoritmo determina a trajetória de tempo mínimo sobre um grafo. O grafo utilizado é definido por nós igualmente espaçados nas bordas de cada célula. Nesta implementação, há onze nós em cada borda para minimizar os efeitos da discretização.

O problema inverso de reconstruir o campo de vagarosidades, a partir das primeiras chegadas, é solucionado através de iterações lineares (BREGMAN et al.,1989). A partir de um modelo isotrópico homogêneo, os tempos de trânsito são calculados e determinados os resíduos em relação aos dados. As perturbações, no tempo de trânsito, são linearizadas em torno do modelo inicial e as perturbações no campo de vagarosidades são obtidas. O campo de vagarosidades é atualizado e os novos resíduos são determinados. As iterações prosseguem até que o desvio médio quadrático (*rms*) dos resíduos se estabilizem ou fiquem menores que a precisão estimada para as medidas de tempo de trânsito. A cada iteração, o seguinte problema linear é resolvido:

$$\delta\tau_k = \tau_{dk} - \tau_k(s_i) = \sum_{i=1}^N A_{ki} \delta s_i,$$

onde, $\delta\tau_k$, é o resíduo no tempo de trânsito para o campo de vagarosidade corrente, s_i , A_{ki} , é a matriz com o comprimento do raio através da i -ésima célula (de um total de N) para a k -ésima trajetória e δs_i , as perturbações na vagarosidade. Este sistema linear, da mesma forma que o sistema discutido anteriormente com relação a inversão anisotrópica, embora sobredeterminado, é mal-condicionado devido à inevitável falta de cobertura angular associada aos levantamentos poço a poço. Para se minimizar os efeitos da informação incompleta dos dados, outros conjuntos de equações são adicionados ao sistema linear acima.

O primeiro conjunto de equações requer que as perturbações na vagarosidade sejam as mínimas e são dadas por

$$\lambda_1 \mathbf{I} \delta \mathbf{s} = \mathbf{0} \quad .$$

O segundo conjunto requer suavidade na direção horizontal (direção x), ou seja, que o gradiente nesta direção seja mínimo e é dado por

$$\lambda_2 \mathbf{D}_x \delta \mathbf{s} = \mathbf{0} \quad .$$

O último conjunto de restrições fracas requer suavidade na direção vertical (direção z) e é dado por

$$\lambda_3 \mathbf{D}_z \delta \mathbf{s} = \mathbf{0} \quad .$$

Nestas equações $\mathbf{I}$ denota a matriz identidade, $\mathbf{D}_x$, o operador de diferenças na direção x , $\mathbf{D}_z$, o operador de diferenças na direção z e $\delta \mathbf{s}$, o vetor de perturbações da vagarosidade.

Todos os fatores de amortecimento, λ_1 , λ_2 e λ_3 , que ponderam cada conjunto de equações em relação ao sistema tomográfico, são normalizados em relação ao valor máximo das normas das colunas de A_{ki} e variam entre zero e um. O algoritmo dos gradientes conjugados utilizado para solução do sistema de equações lineares, permite a inclusão de vínculos de desigualdades e restrições canalizadas da forma

$$s_{min} \leq s_i \leq s_{max} \quad i = 1, \dots, N.$$

4.7 APLICAÇÃO A DADOS SINTÉTICOS

Conjuntos de dados gerados sinteticamente foram utilizados para se avaliar a comportamento deste algoritmo de inversão para meios anisotrópicos. Estes testes numéricos não têm por objetivo caracterizar, de forma completa, o comportamento do algoritmo, ainda mais considerando-se que o problema é não linear, o que determina que estes resultados só caracterizam propriedades locais, devido ao processo de linearização em cada iteração e que dependem fortemente do modelo inicial (GILL & al., 1981). Entretanto, estes testes sugerem os problemas inerentes à estimativa de parâmetros elásticos em meios anisotrópicos TIV. Finalmente, estes testes mostram que os vínculos utilizados são suficientes para produzirem soluções estáveis.

O modelo utilizado para gerar os dados, Figura 4.3, consiste de 60 camadas homogêneas com 1,5 m de espessura cada. Os tempos de trânsito para as primeiras chegadas qP foram calculados utilizando o programa para traçados de raios em meios TIV, descrito no capítulo 3. Ruído gaussiano com média zero e desvio padrão de 0,2 ms foi adicionado aos dados. A geometria de aquisição é de um experimento poço a poço com distância entre os poços de 100 m e 60 receptores igualmente espaçados de 1,5 m e 60 fontes também igualmente espaçadas de 1,5 m.

Os dados foram inicialmente invertidos para um modelo isotrópico, utilizando o algoritmo de reconstrução tomográfica descrito anteriormente. O modelo inicial é homogêneo com velocidade de 4 km/s. Os valores dos fatores de amortecimento λ_1 , λ_2 e λ_3 utilizados foram 0,1, 0,1 e 0,1, respectivamente. A Figura 4.4, mostra o tomograma resultante após 5 iterações do algoritmo. Os dados foram ajustados com um desvio padrão de 1,2 ms. A Figura 4.5 mostra o mapa com o valor resíduos para cada trajetória identificadas pela posição da fonte e do receptor. O padrão apresentado no mapa de resíduos mostra a inadequação do modelo de ajustar os dados uniformemente para diferentes trajetórias, caracterizando a dependência angular da velocidade de propagação dos eventos, ou seja, a anisotropia do meio.

O teste seguinte foi aplicar o algoritmo de inversão anisotrópica aos dados. O modelo

inicial é isotrópico com velocidades para onda P, coincidentes com os valores corretos de v_3 e velocidades para onda S, igual aos de v_4 , que são mostrados na Figura 4.6. Os fatores de amortecimento aplicados à equação (4.28), para v_1^2 , v_2^2 , v_3^2 e v_4^2 , foram 0,05 , 0,05 , 1,0 e 1,0 respectivamente. Os valores altos para os fatores de amortecimento de v_3^2 e v_4^2 objetivam manter estes parâmetros muito próximos de seus valores iniciais. Esta escolha é necessária para evitar a instabilidade decorrente da falta de raios em torno da vertical e da inerente falta de resolução dos tempos de trânsito, de eventos qP, ao parâmetro v_4 . Os fatores de amortecimento aplicados a equação (4.27), associados a v_1^2 , v_2^2 , v_3^2 e v_4^2 , foram 0,05 , 0,05 , 0,0 e 0,0, respectivamente. Estes baixos valores relaxam a exigência de homogeneidade dos parâmetros dentro das camadas que são definidas pelas descontinuidades do modelo inicial. A Figura 4.6 mostra o resultado, após cinco iterações, da aplicação do algoritmo. Os parâmetros v_1 e v_2 foram corretamente recuperados e v_3 e v_4 mantiveram seus valores iniciais. A Figura 4.7 mostra o mapa dos resíduos após a inversão onde se observa que não há padrões regulares, indicando que dados foram ajustados uniformemente. O desvio padrão dos resíduos após a inversão foi de 0,199 ms e este valor coincide com o desvio padrão do ruído adicionado aos dados.

O teste a seguir mostra os efeitos do modelo inicial nos resultados. Os dados foram invertidos a partir de um meio homogêneo, com velocidade para ondas P igual a 3,12 km/s e velocidade para as ondas S de 1,73 km/s. Os fatores de amortecimento aplicados à equação (4.28), para v_1^2 , v_2^2 , v_3^2 e v_4^2 , foram 0,05, 0,05, 1,0 e 1,0 respectivamente. A equação (4.27) não foi aplicada para se manter a consistência com o modelo inicial. A Figura 4.8 mostra o resultado da inversão após cinco iterações do algoritmo. O parâmetro v_1 foi corretamente invertido enquanto que o parâmetro v_2 não foi estimado corretamente. Os parâmetros v_3 e v_4 mantiveram seus valores iniciais, exceto na camada entre as profundidades de 1015 m a 1030 m, onde o parâmetro v_3 apresenta uma pequena variação. Os dados foram ajustados com um desvio padrão de 0,24 ms. A Figura 4.9 mostra o mapa de resíduos onde se observa que os maiores resíduos estão associados às trajetórias através da camada entre 1015 m a 1030 m. Para se entender estes resultados, foram traçados gráficos das superfícies de vagarosidade qP corretas e das superfícies de vagarosidade qP estimadas, juntamente com o histogramas da direção do vetor vagarosidade dos raios através das camadas finas, nas profundidades 1020 m, 1055m e 1085m, Figura 4.10, Figura 4.11 e Figura 4.12, respectivamente. Estes gráficos mostram que a inversão recupera corretamente a superfície de vagarosidade, dentro dos limites da cobertura angular do raios, através das camadas. Particularmente, a Figura 4.10 mostra que há cobertura angular significativa para raios quase verticais. A falta de ajuste entre as superfícies de vagarosidade para esta faixa angular reflete a inconsistência entre modelo inicial para v_3 e os dados. Esta inconsistência se reflete no nos valores elevados dos

resíduos para trajetórias através da camada entre 1015m e 1030m. Portanto, a inversão destes dados sintéticos mostra que o algoritmo de inversão anisotrópica pode produzir estimativas estáveis dos parâmetros de um meio TIV em um meio estratificado, desde que escolhas convenientes dos fatores de amortecimento sejam feitas para compensar a falta de cobertura angular completa. Os modelos estimados dependem fortemente da informação a priori sobre v_3 , devido a falta de cobertura angular em torno da vertical. Entretanto, a superfície de vagarosidade é corretamente estimada dentro dos limites da cobertura angular produzida pelos raios através do meio.

4.8 APLICAÇÃO A DADOS REAIS

O algoritmo descrito na seção anterior foi aplicado na inversão de dados de levantamento poço a poço realizados no campo de testes da British Petroleum em Devine, Texas. Os dados foram coletados utilizando uma fonte piezoelétrica e hidrofones como receptores com os poços separados de 100m. A aquisição foi feita para 6 posições da fonte e 56 posições dos receptores, igualmente espaçados de 1,5m entre as profundidades de 771m a 853.5m. A frequência pico da fonte era em torno de 800Hz e a chegadas diretas de eventos qP foram obtidas com uma precisão em torno de 0.2ms. A partir do topo, as camadas encontradas na área foram: Austin Chalk (calcário), Eagle Ford shale (um folhelho com o topo a 783m), Buda Limestone (um calcário) a partir de 796m, Del Rio Clay (um folhelho) a partir de 823m e o calcário Georgetown Limestone a partir de 848m (MILLER & CHAPMAN, 1991). Próximo as interfaces folhelho/calcário, foi difícil separar consistentemente um onda direta qP de ondas cônicas (*head waves*) e alguns pares de fontes-receptores foram omitidos da inversão.

Um modelo TIV foi proposto para estes dados por MILLER & CHAPMAN (1991), baseado nas discrepâncias significativas entre os dados de perfis sônicos e dados de famílias CDG. Estes dados também fornecem as profundidades das principais descontinuidades que demarcam os limites das formações. Forte evidência de um modelo estratificado se origina da observação que os tempos de trânsito apresentam um alto grau de simetria direita-esquerda. Dados de tempo de trânsito $T(z_s, z_r)$ para este experimento são indexados pelo par de coordenadas (z_s, z_r) que fornecem a profundidade da fonte e do receptor, respectivamente. Quando tempos de trânsito para pares fonte-receptor, dispostos simetricamente, são comparados (examinado-se $T(z_s, z_r) - T(z_r, z_s)$ para todos os valores de z_s e z_r), as diferenças, mostradas na Figura 4.13, são muito pequenas, com uma diferença máxima de 1,25ms e desvio padrão de 0,26ms. As maiores diferenças são encontradas na região onde z_s está entre 825 e 850m, enquanto z_r está abaixo de 793m (ou vice-versa), que é quando a fonte está

no folhelho superior e o receptor está no folhelho inferior, ou vice-versa. O efeito pode estar relacionado a mudanças no acoplamento com o poço quando fonte e receptor estão nas regiões de folhelhos. Como pares simétricos fonte-receptor têm o mesmo tempo de trânsito para um modelo estratificado, o melhor que se pode esperar como resultado da inversão seria separar as diferenças, produzindo resíduos que fossem metade das diferenças simétricas.

Inicialmente o algoritmo de tomografia isotrópica foi aplicado aos dados de Devine. O meio foi discretizado em 28×25 células de dimensões $3\text{m} \times 4\text{m}$. O modelo inicial é homogêneo com vagarosidade $0,256\text{ ms/m}$, que é o valor médio do perfil sônico. Os dois parâmetros de amortecimento λ_1, λ_2 e λ_3 foram escolhidos iguais a $0,1$. A Figura 4.14 mostra o tomograma, obtido após cinco iterações do algoritmo. Os dados foram ajustados com um desvio padrão dos resíduos de $0,41\text{ms}$. O tomograma não apresenta uma estrutura estratificada, contrariando as informações dos perfis sônicos e das famílias CDG. O mapa de resíduos da inversão, Figura 4.15, mostra que as maiores discrepâncias ocorrem para trajetórias dentro dos folhelhos e através deles. Este padrão de resíduos se assemelha ao obtido para os dados sintéticos e caracteriza a inadequação do modelo para explicar a dependência da velocidade com a direção da trajetória.

A aplicação do algoritmo de inversão anisotrópica aos dados de Devine foi efetuada considerando-se um meio TIV discretizado em 56 estratos finos de $1,5\text{m}$ de espessura. Cinco camadas, definidas a partir dos perfis sônicos e da família CDG, foram consideradas para aplicação dos vínculos fracos, exigindo homogeneidade. O modelo isotrópico inicial foi obtido efetuando-se a média das vagarosidades do perfil sônico em cada estrato fino nos quais o meio foi discretizado. Os vínculos de homogeneidade só foram aplicados aos parâmetros v_1^2 e v_2^2 e o valor escolhido para os parâmetros de amortecimentos foi $0,1$. Os vínculos em relação ao modelo inicial foram aplicados com parâmetros de amortecimento, para v_1^2, v_2^2, v_3^2 e v_4^2 , iguais a $0,1, 0,1, 1,0$ e $1,0$, respectivamente. A Figura 4.16 mostra os perfis obtidos para os parâmetros v_1^2, v_2^2 e v_3^2 após cinco iterações do algoritmo. Os perfis invertidos mostram que a considerada anisotropia ocorre nos folhelhos, Eagle Ford Shale e Del Rio Clay e na formação Austin Chalk. Enquanto que pequena anisotropia ou isotropia ocorre no calcário Buda Lime. O perfil de v_3 coincide com o valor inicial, devido o alto fator de amortecimento aplicado a este parâmetro para compensar a falta de cobertura angular em torno da vertical. Os dados foram ajustados com um desvio padrão de $0,18\text{ms}$ e o mapa de resíduos é mostrado na Figura 4.17. Este mapa mostra que a grande maioria dos dados foi ajustada dentro do limite de precisão das medidas de tempo de trânsito, que é estimado em torno de $0,2\text{ms}$. Os tempos de trânsito através de trajetórias dentro do folhelho Del Rio Clay, foram ajustados e as regiões que apresentam maiores resíduos estão bem correlacionadas com o mapa de diferenças de tempos de trânsito, Figura 4.13. Estas observações indicam que o modelo TIV obtido é

muito mais consistente com os dados que o modelo isotrópico estimado anteriormente.

Outra inversão foi realizada sobre os dados de Devine, desta vez exigindo isotropia no calcário Buda Lime e no calcário Georgetown Lime. O modelo inicial e os parâmetros de amortecimento aplicados são iguais aos utilizados na inversão anisotrópica descrita acima. A Figura 4.18 mostra os perfis obtidos após cinco iterações do algoritmo. O desvio padrão do resíduos foi de 0.21ms e o mapa de resíduos se encontra na Figura 4.19. Os perfis invertidos mostram que a exigência de isotropia para os calcários não altera significativamente a solução estimada pelo algoritmo. O mapa de resíduos apresenta maiores valores que o anterior para trajetórias com fonte ou receptor próximo a interface Buda Lime / Del Rio Clay, para trajetórias com fonte e receptor dentro da formação Buda Lime e para trajetórias através da formação Georgetown Lime.

Os resultados da inversão anisotrópica dos dados do experimento de Devine mostraram que um meio transversalmente isotrópico com eixo de simetria vertical é consistente com os dados dentro dos limites de precisão das medidas de tempo de trânsito. Os modelos estimados dependem da informação a priori imposta sobre a solução. Estas pressuposições a priori são inevitáveis a fim de compensar a falta de cobertura angular do experimento e também as dificuldades na determinação do tempo de trânsito para chegada da onda direta. O resultado das inversões indicam forte anisotropia para os folhelhos Eagle Ford Shale e Del Rio Clay, ocorrência de anisotropia no calcário Austin Chalk e isotropia ou pouca anisotropia para os calcários Buda Lime e Georgetown Lime.

4.9 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A inversão não linear de parâmetros de modelos TIV, a partir de dados de tempo de trânsito de eventos qP, foi analisada e aplicada aos dados do experimento de Devine. A análise das derivadas de Fréchet indica que somente perturbações sobre C , Δ e D , podem ser determinadas em torno de um meio TI com anisotropia fraca, isto é, D^2 e Δ^2 pequenos. A dependência angular das derivadas de Fréchet mostra a necessidade de ampla cobertura angular em cada subdomínio em que o meio é discretizado a fim de recuperar os parâmetros que podem ser determinados.

A falta de cobertura angular completa, inevitável na tomografia sísmica, e a limitação essencial dos tempos de trânsito de eventos qP para determinar todos os parâmetros de um meio TIV, se traduzem matematicamente em não unicidade e instabilidade da solução do problema inverso, em implementações numéricas. Isto significa mal-condicionamento do sistema linear tomográfico. Para se obter procedimentos estáveis de inversão, informação a

priori deve ser adicionada ao problema. Neste trabalho, à pressuposição de um modelo TIV estratificado foram adicionadas equações, vínculos fracos, que restringem as perturbações em torno de um modelo inicial ou que requeiram homogeneidade em camadas espessas, para os parâmetros v_1^2 , v_2^2 e v_3^2 , que são utilizados no algoritmo de inversão. A aplicação do algoritmo a dados sintéticos mostrou que estas informações são suficientes para produzir soluções estáveis. Observou-se que mais de uma iteração foi necessária para produzir um modelo autoconsistente, isto é, um modelo no qual os tempos de trânsito, obtidos traçando-se raios no modelo atualizado, ajustassem os dados com a precisão requerida. A superfície de vagarosidade em cada célula foi corretamente estimada dentro dos limites da cobertura angular dos raios que atravessam a célula, ou seja os parâmetros invertidos recuperam corretamente a superfície de vagarosidade no intervalo angular coberto pelos raios. Em consequência, a partir de experimentos poço a poço em um meio TIV estratificado, v_1 é muito bem recuperado, pois este parâmetro depende de raios quase horizontais, v_2 pode ser bem estimado exceto para camadas finas com valores de velocidade elevado, pois este parâmetro depende de raios em torno de 45° , enquanto v_3 é pobremente determinado devido a falta de cobertura de raios quase verticais.

A inversão dos dados de Devine mostrou que um meio TIV estratificado é consistente com os dados. Considerável anisotropia está associada com os folhelhos nas inversões efetuadas, enquanto pequena anisotropia ou isotropia foi associada com os calcários.

Os mapas de resíduos se mostraram muito úteis para análise dos resultados da inversão. Padrões nos mapas de resíduos produzem informação da adequação do modelo aos dados. Estes padrões são muito mais informativos que o desvio padrão dos resíduos em inversões anisotrópicas.

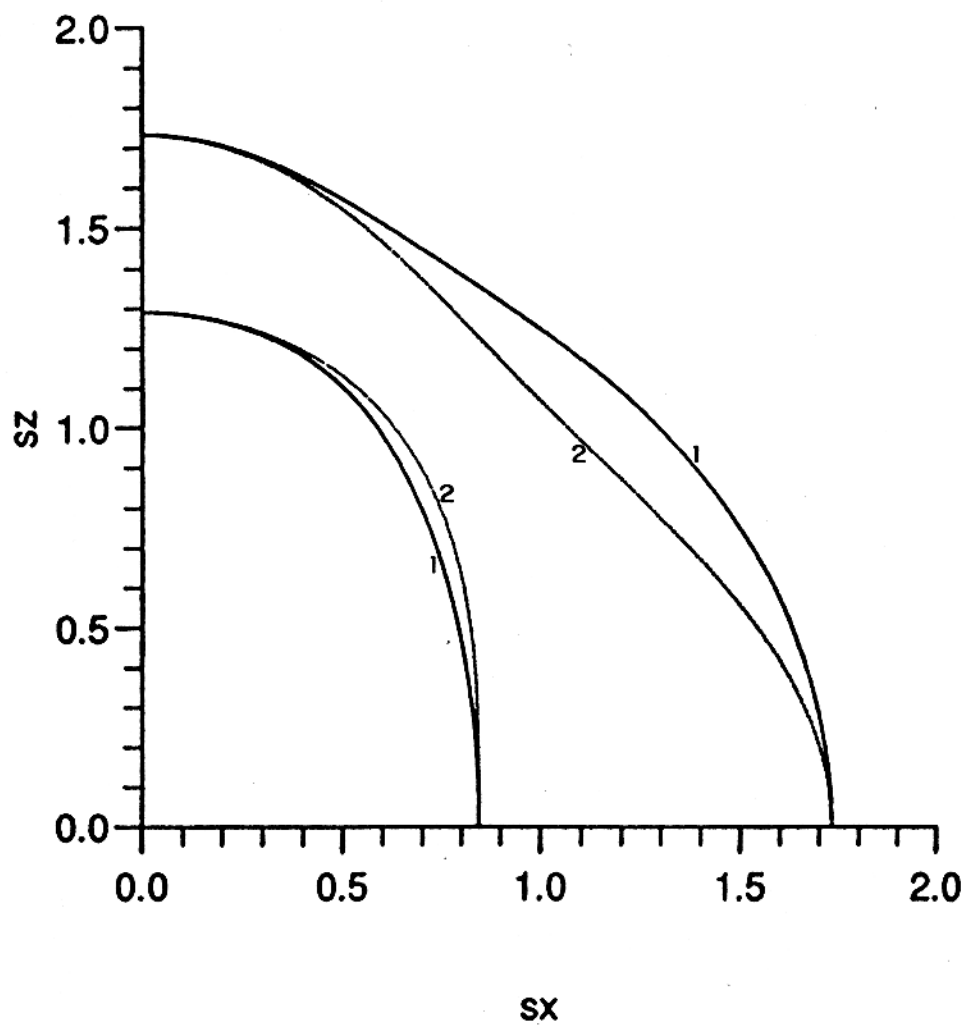


Figura 4.1 - Curva de vagarosidade exata (curva 1) e vagarosidade aproximada (curva 2) para um meio com $C = 1,0$, $\epsilon_p = 0,4$, $\epsilon_A = 0,45$ e $\gamma = c/C = 1/3$.

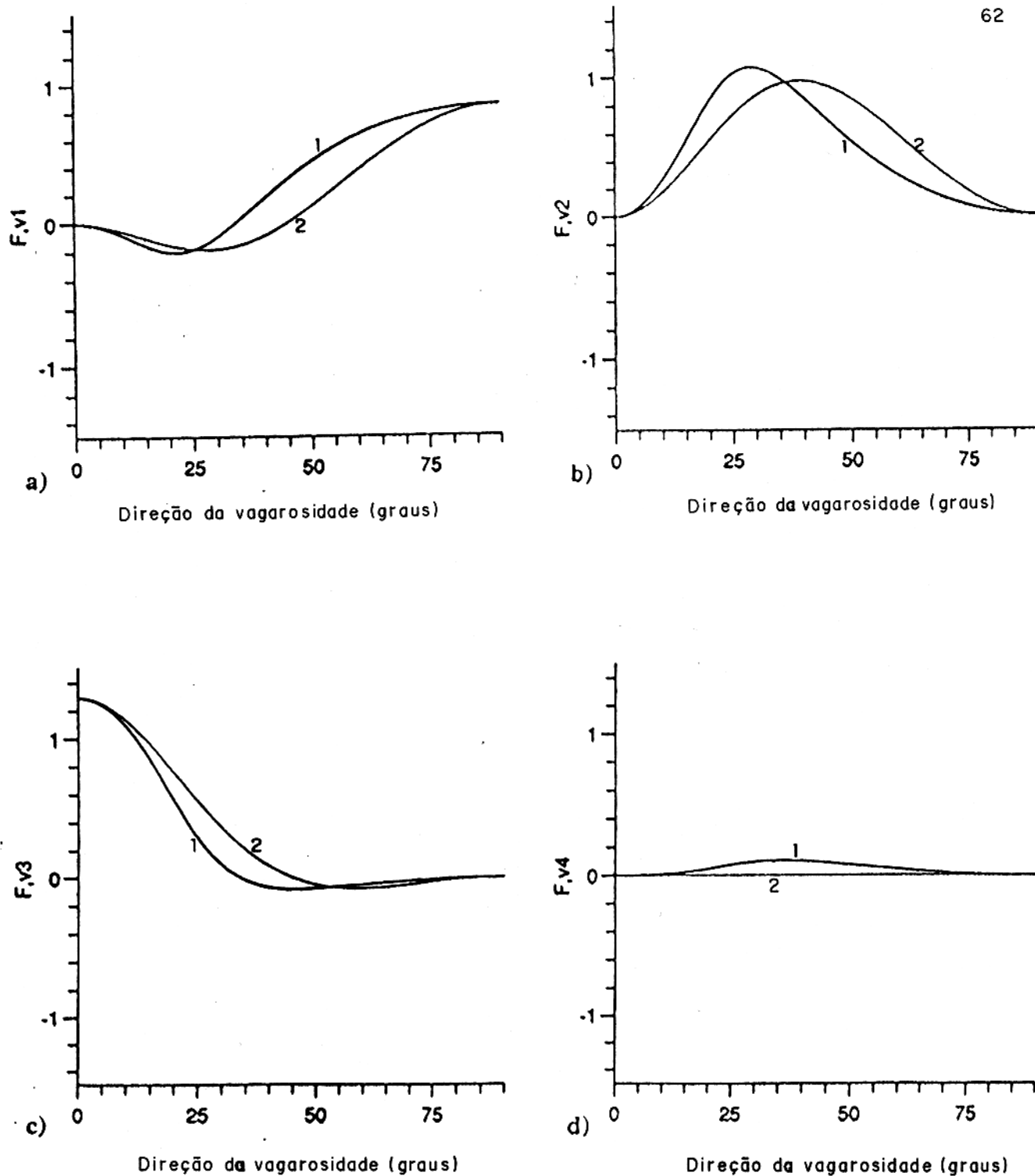


Figura 4.2 - Para um meio TI com os mesmos parâmetros da Figura 3.1, a derivada da relação de dispersão avaliada para ondas qP (curva 1) e as derivadas da relação de dispersão aproximada para ondas qP (curva 2) em relação a (a) parâmetro de velocidade v_1 , (b) parâmetro de velocidade v_2 , (c) parâmetro de velocidade v_3 , (d) parâmetro de velocidade v_4 .

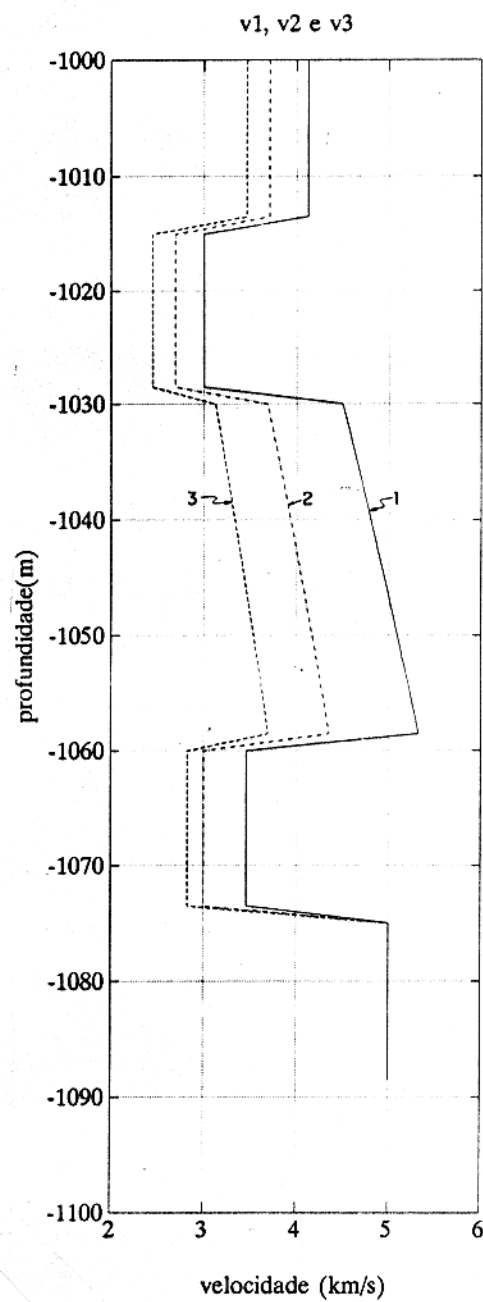


Figura 4.3 - Perfil dos parâmetros de velocidade v_1 (curva 1), v_2 (curva 2) e v_3 (curva 3) do modelo utilizado para gerar os dados sintéticos.

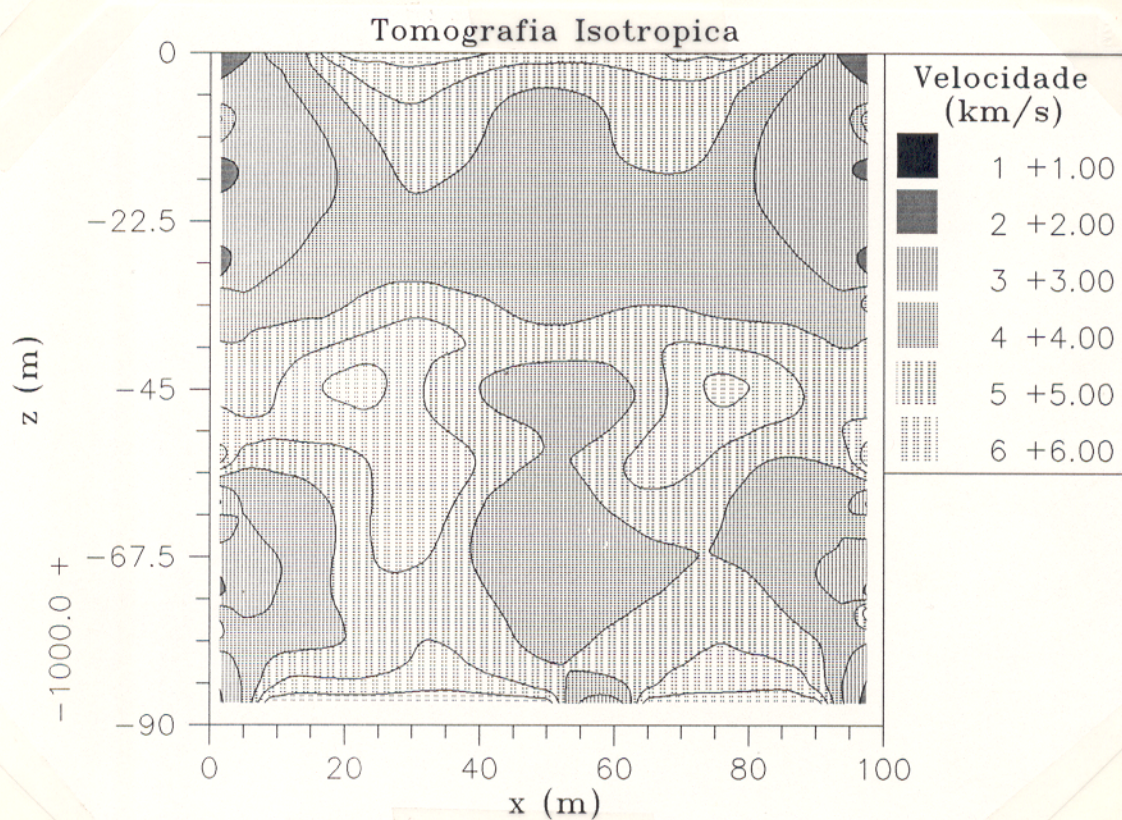


Figura 4.4 - Tomograma resultante da aplicação do algoritmo de tomografia isotrópica aos dados sintéticos, após cinco iterações.

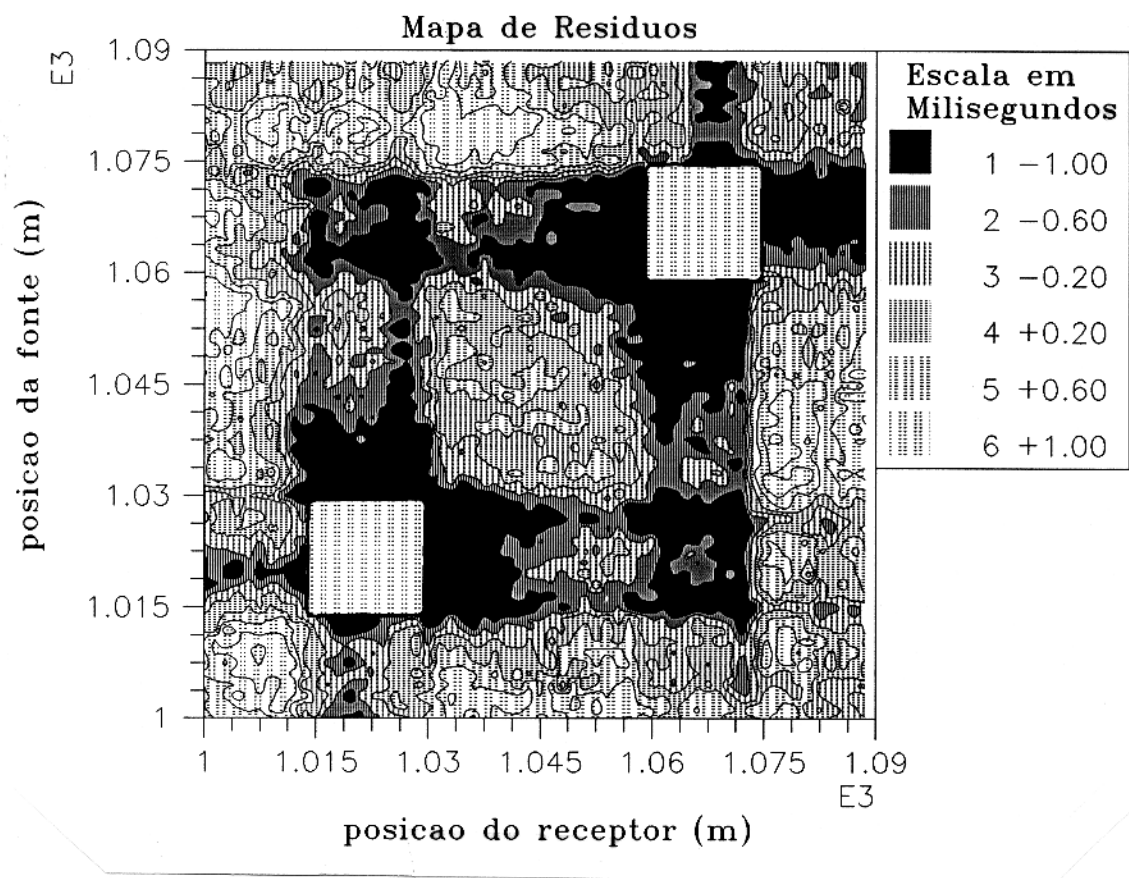


Figura 4.5 - Mapa de resíduos após cinco iterações do algoritmo de tomografia isotrópica aplicado aos dados sintéticos.

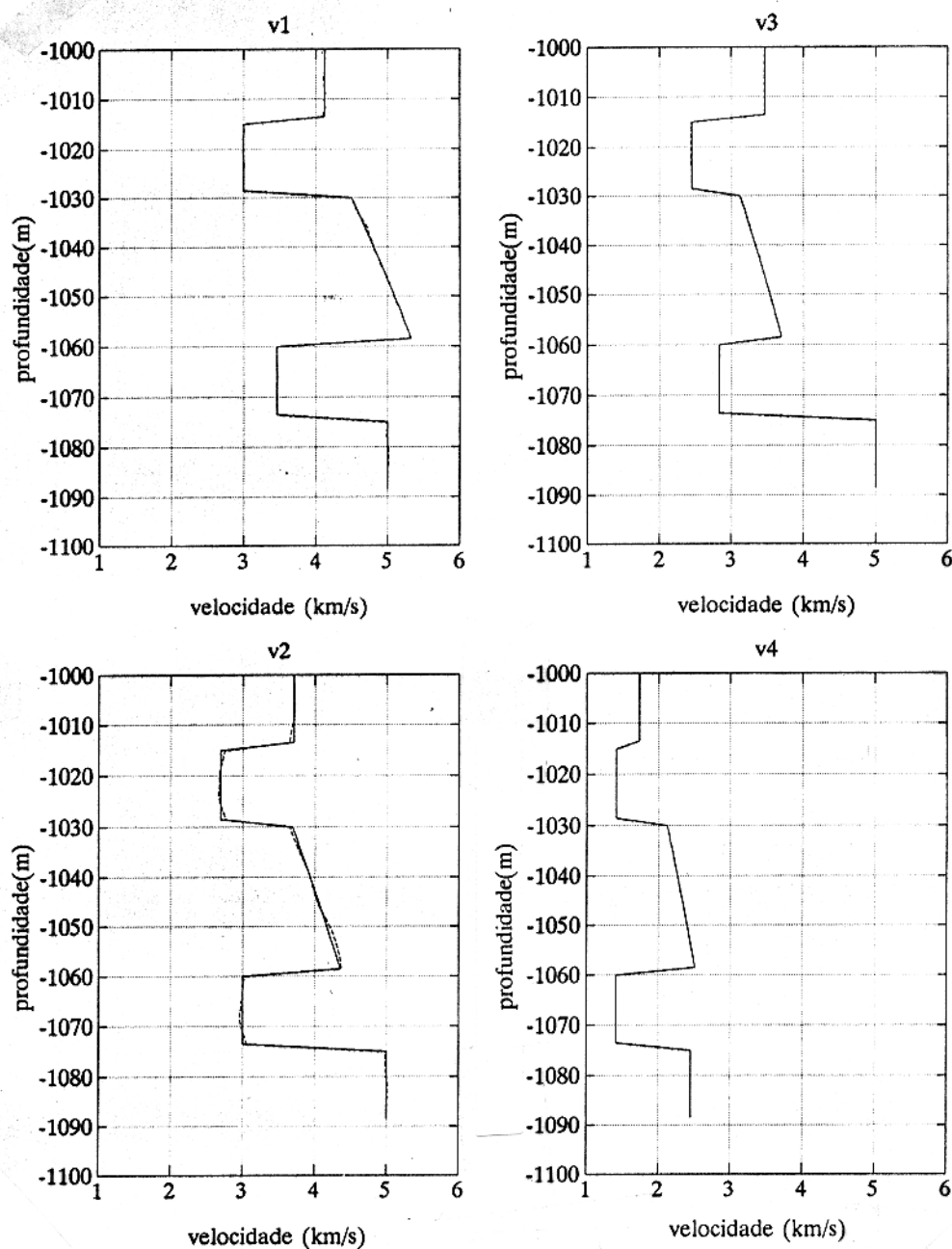


Figura 4.6 - Perfil correto (linha cheia) e perfil estimado (linha tracejada), após cinco iterações do algoritmo de inversão anisotrópica aplicado aos dados sintéticos. O modelo inicial é isotrópico e coincide com os valores corretos de v_3 e v_4 .

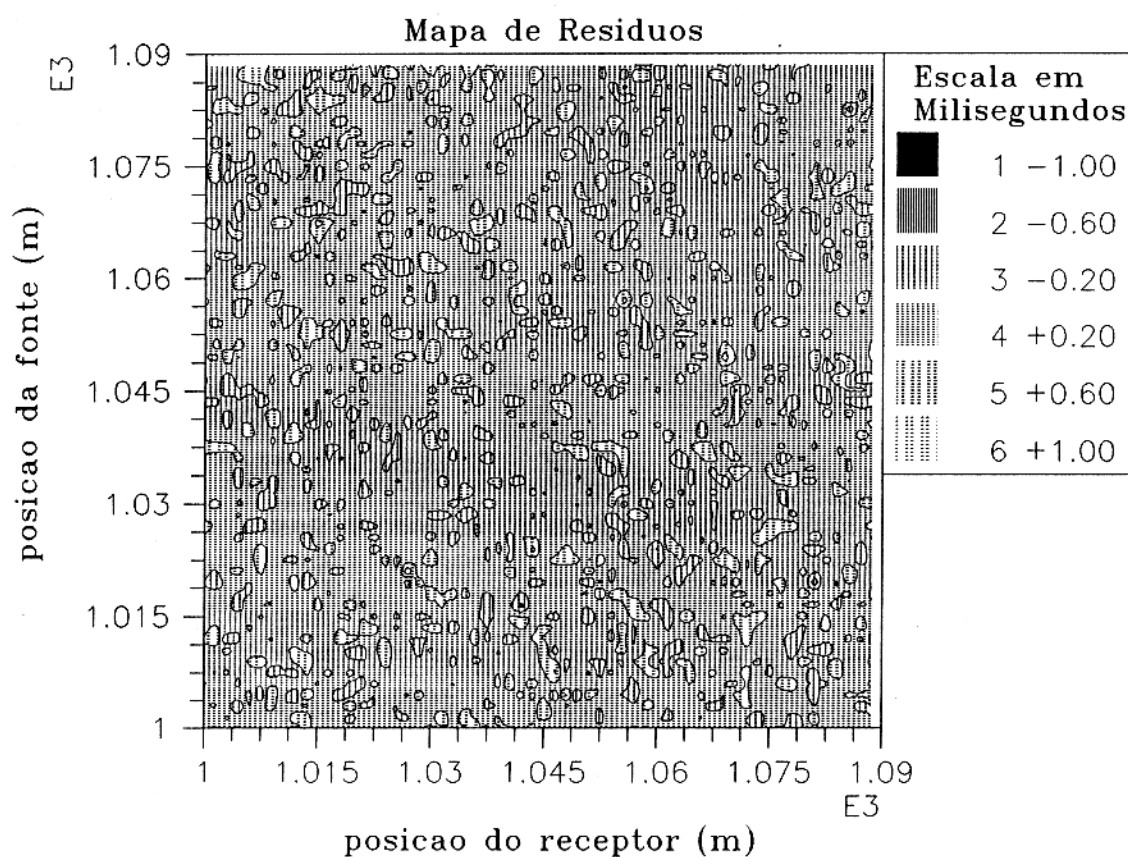


Figura 4.7 - Mapa de resíduos após cinco iterações do algoritmo de inversão anisotrópica aplicado aos sintéticos.

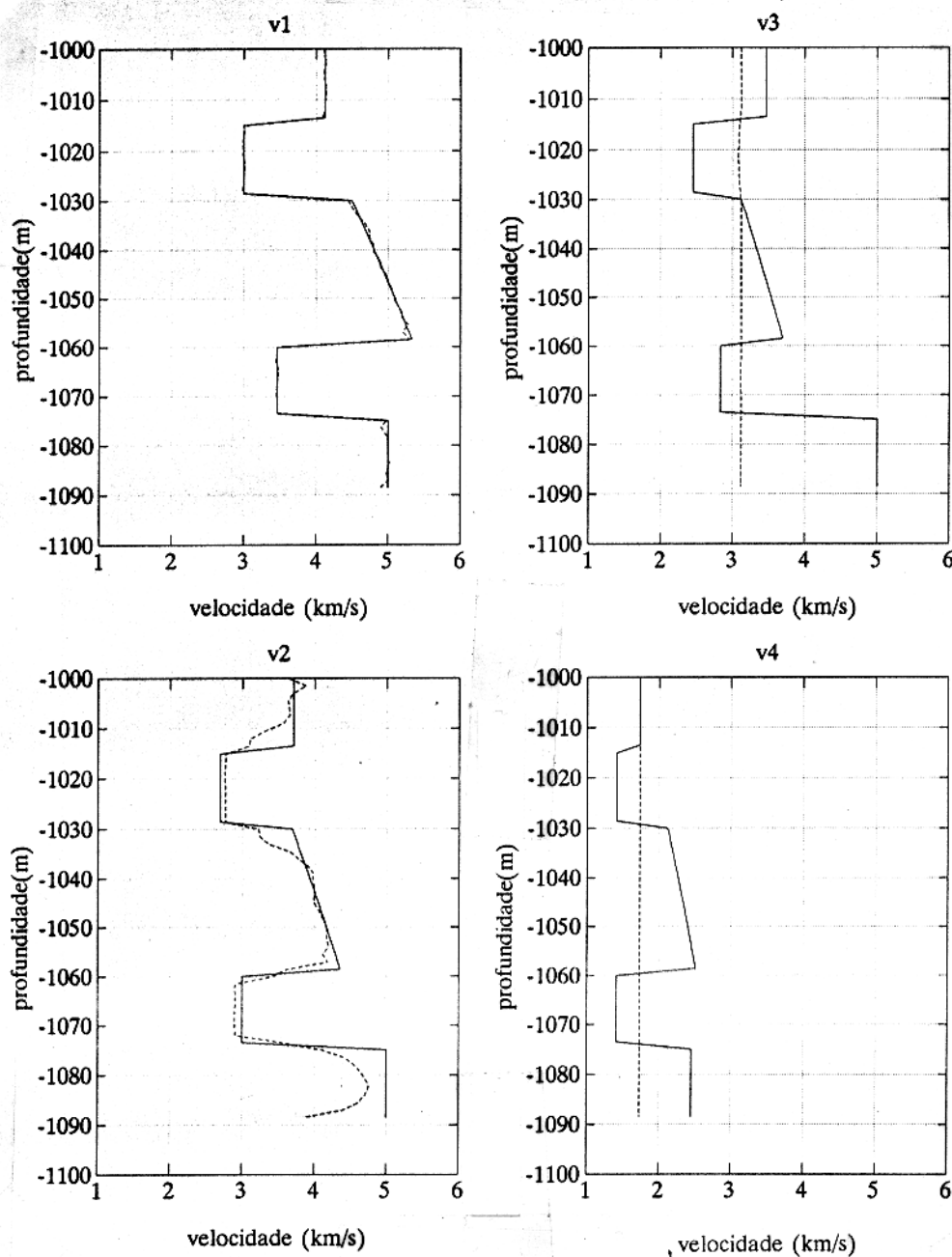


Figura 4.8 - Perfil correto (linha cheia) e perfil estimado (linha tracejada) , após cinco iterações do algoritmo de inversão anisotrópica aplicado aos dados sintéticos. O modelo inicial é homogêneo e está indicado pela linha tracejada no perfil de v_3 e v_4 .

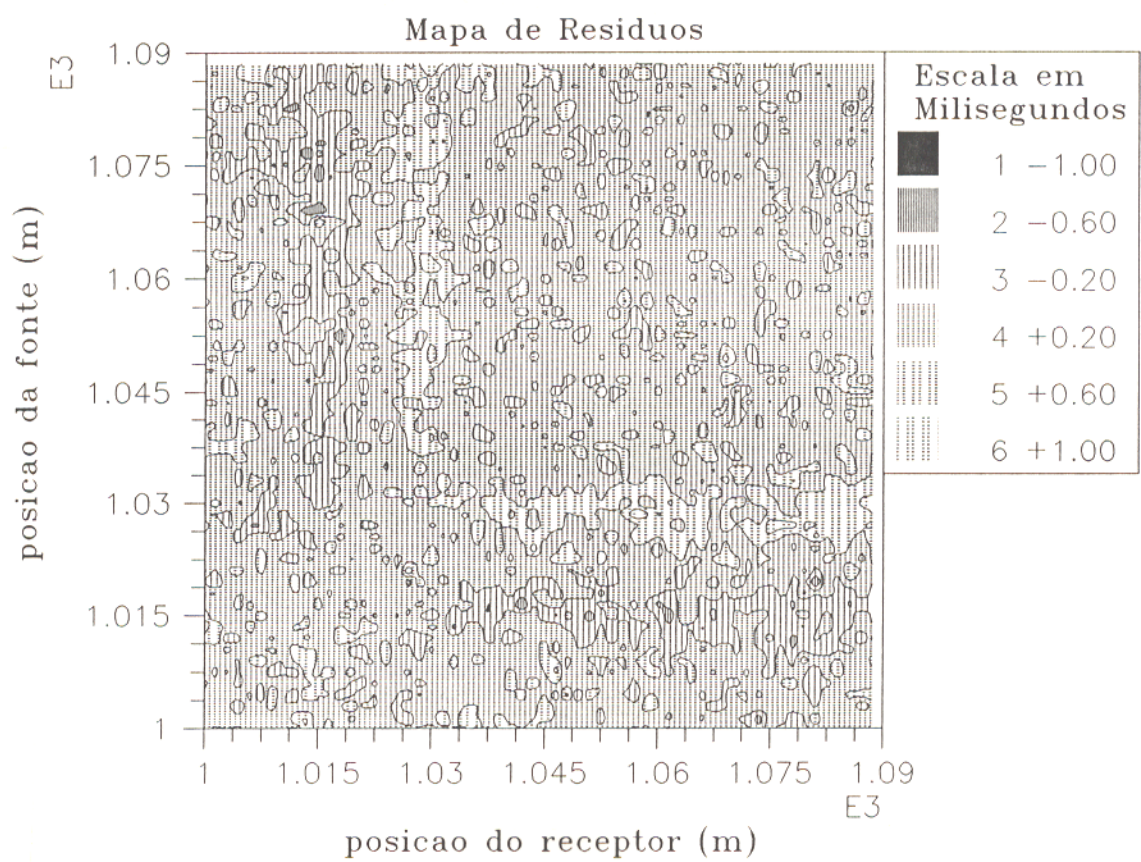


Figura 4.9 - Mapa de resíduos após cinco iterações do algoritmo de inversão anisotrópica aplicado aos sintéticos.

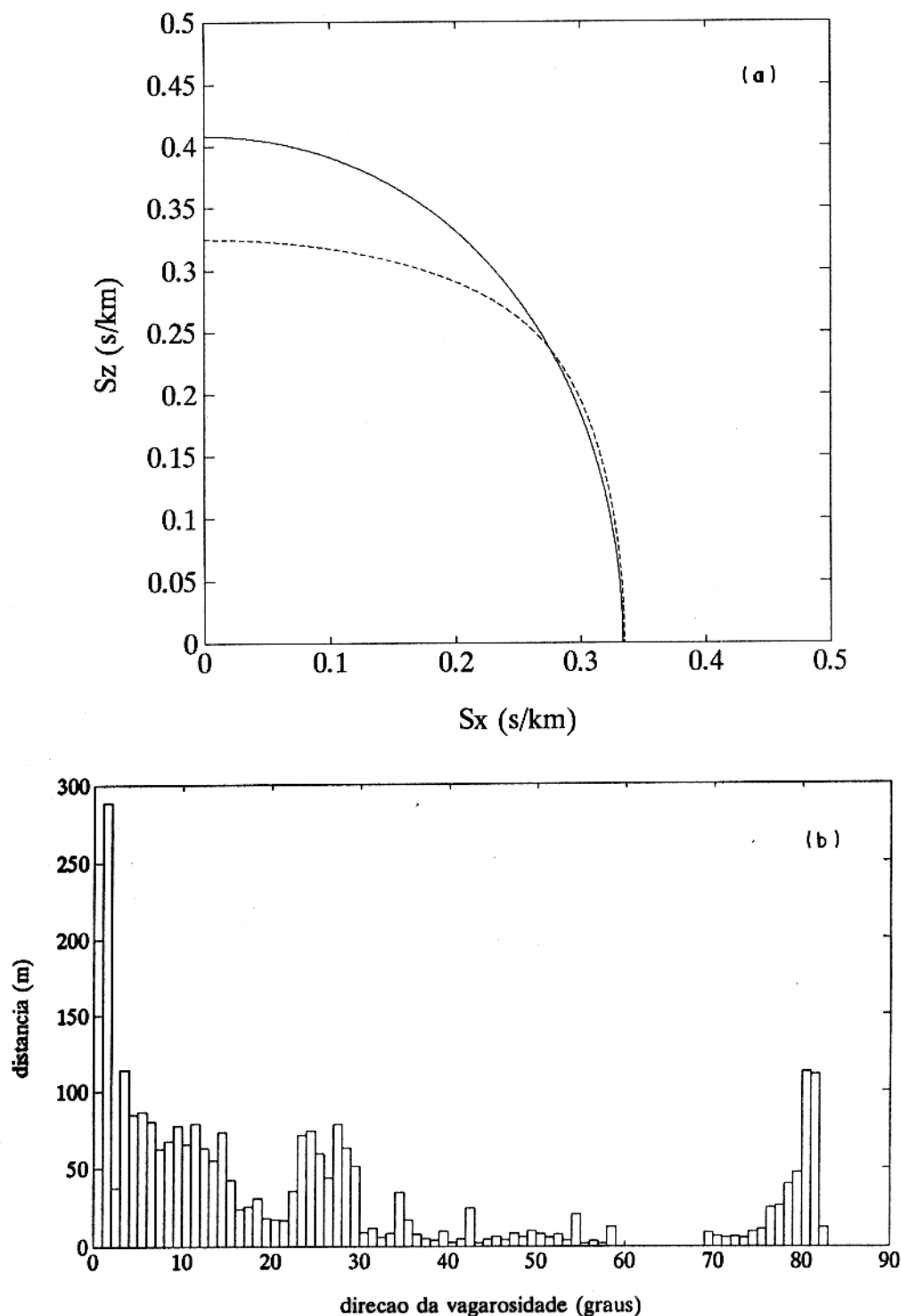


Figura 4.10 - (a) Curva de vagarosidade correta (linha cheia) e curva de vagarosidade estimada (linha tracejada), Figura 3.8, para camada a profundidade de 1020m. (b) Histograma da direção do vetor vagarosidade na mesma camada. A distribuição frequência do vetor vagarosidade é medida pelo comprimento da trajetória do raio através da camada em cada intervalo de direção.

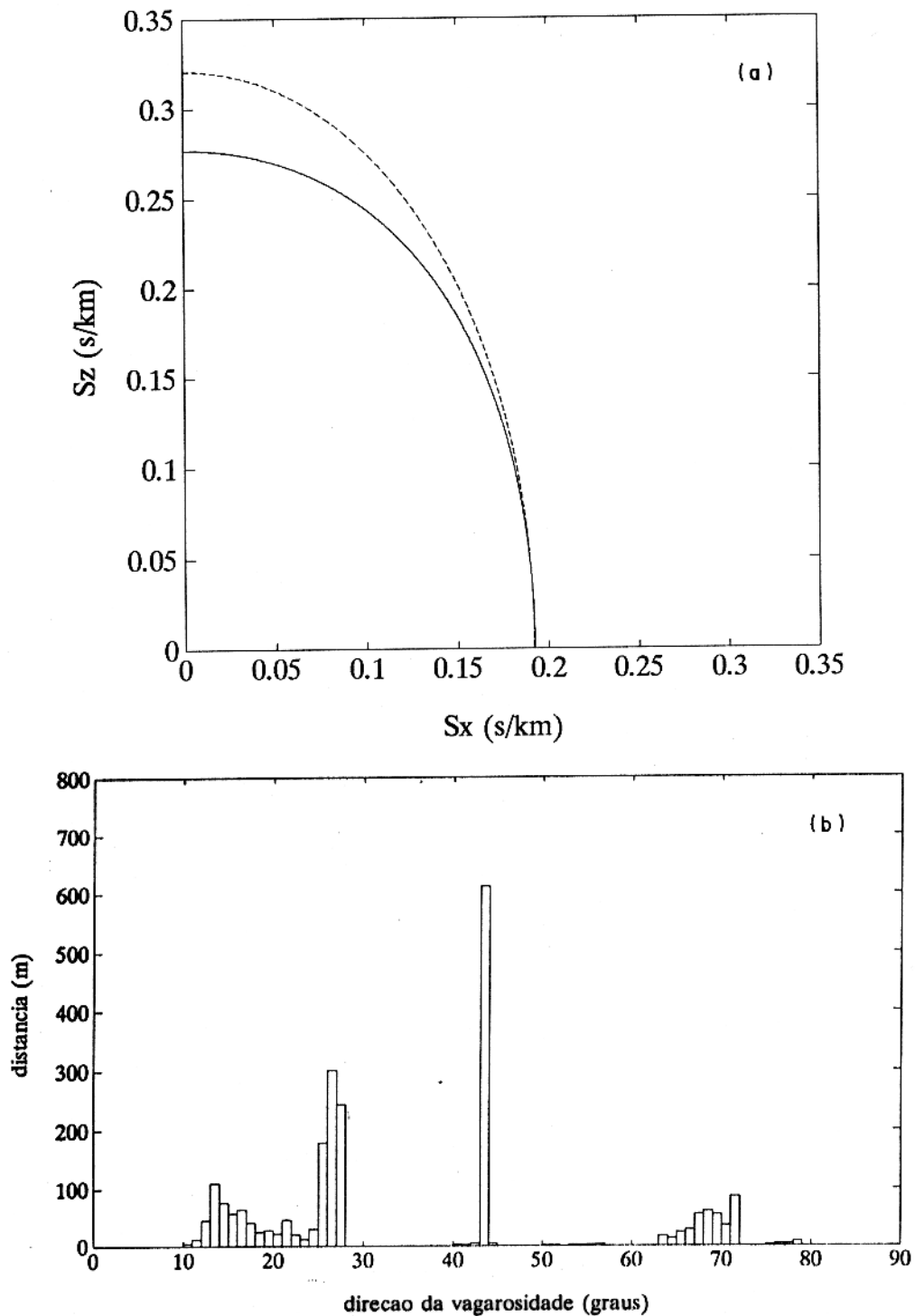


Figura 4.11 - (a) Curva de vagarosidade correta (linha cheia) e curva de vagarosidade estimada (linha tracejada) para camada a profundidade de 1050m. (b) Histograma da direção do vetor vagarosidade na mesma camada. A frequência do vetor vagarosidade é medida pelo comprimento da trajetória do raio através da camada em cada intervalo de direção.

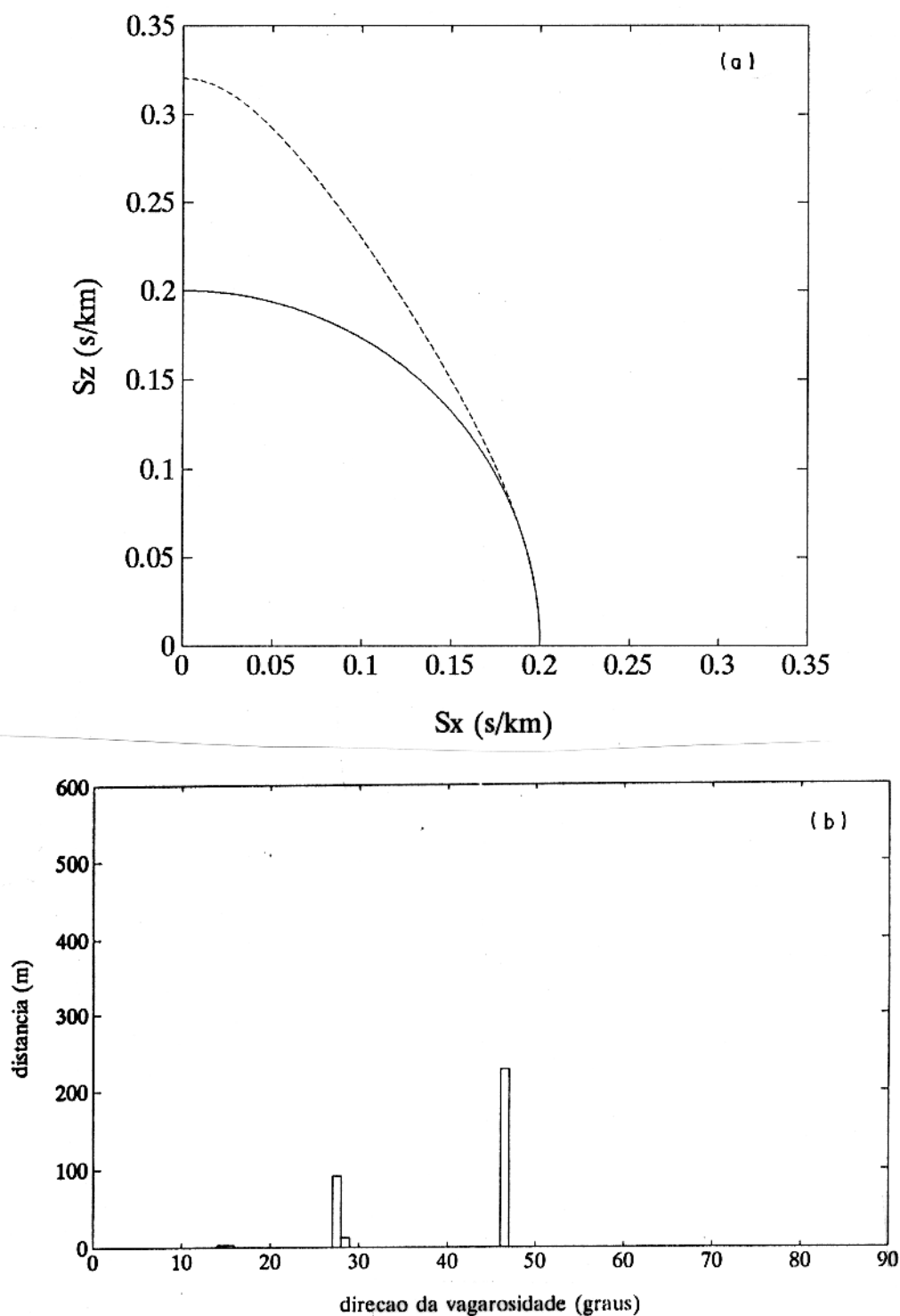


Figura 4.12 - (a) Curva de vagorosidade correta (linha cheia) e curva de vagorosidade estimada (linha tracejada) para camada a profundidade de 1085m. (b) Histograma da direção do vetor vagorosidade na mesma camada. A frequência do vetor vagorosidade é medida pelo comprimento da trajetória do raio através da camada em cada intervalo de direção.

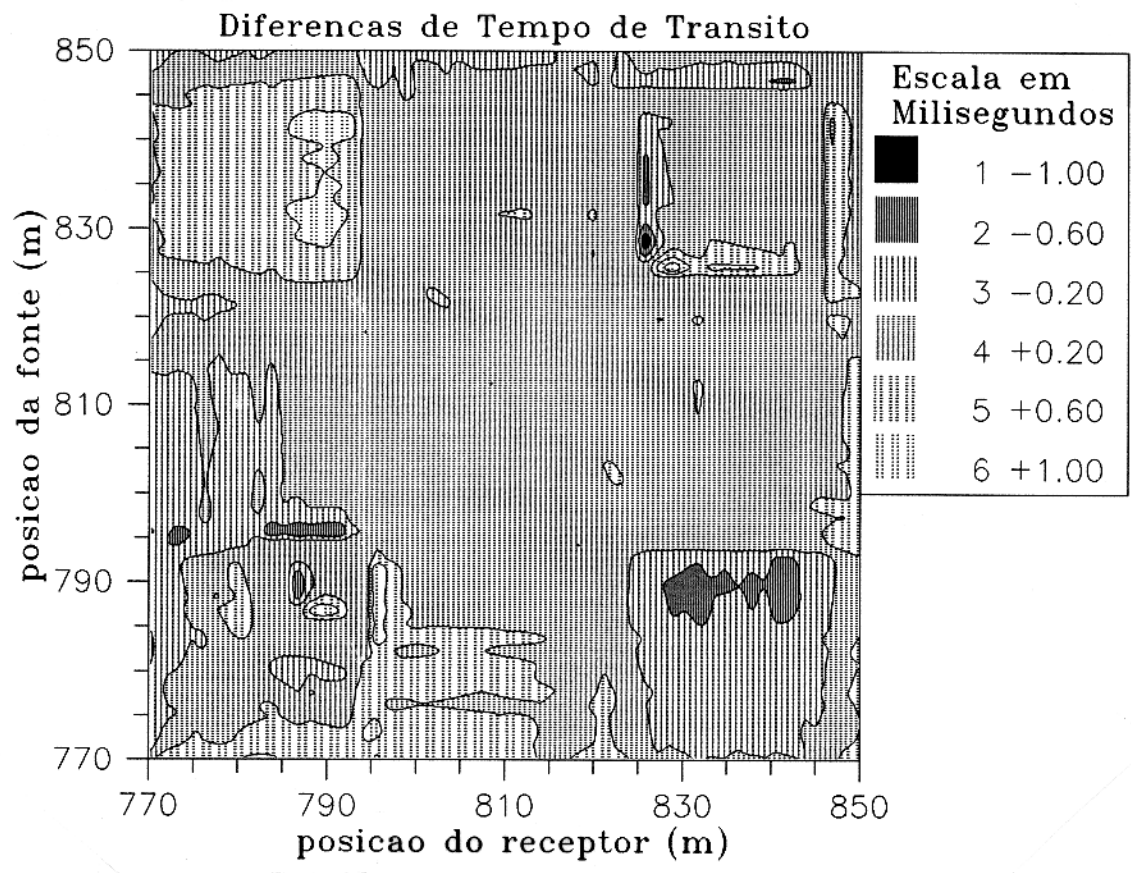


Figura 4.13 - Mapa de diferenças do tempo de trânsito para disposições simétricas de fonte e receptor para os dados de Devine.

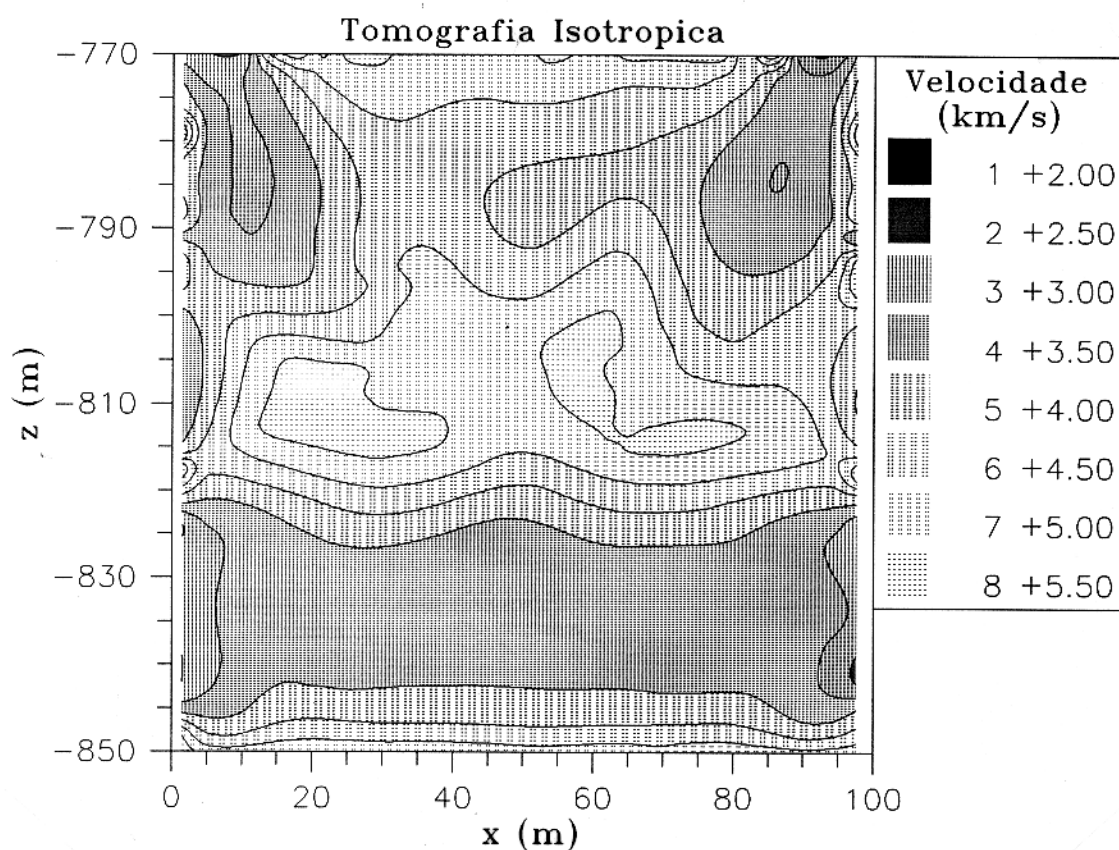


Figura 4.14 - Tomograma resultante da aplicação do algoritmo de tomografia isotrópica aos dados de Devine, após cinco iterações. Note que não se observa a estratificação indicada pelos perfis sônicos e pelos dados da família CDG.

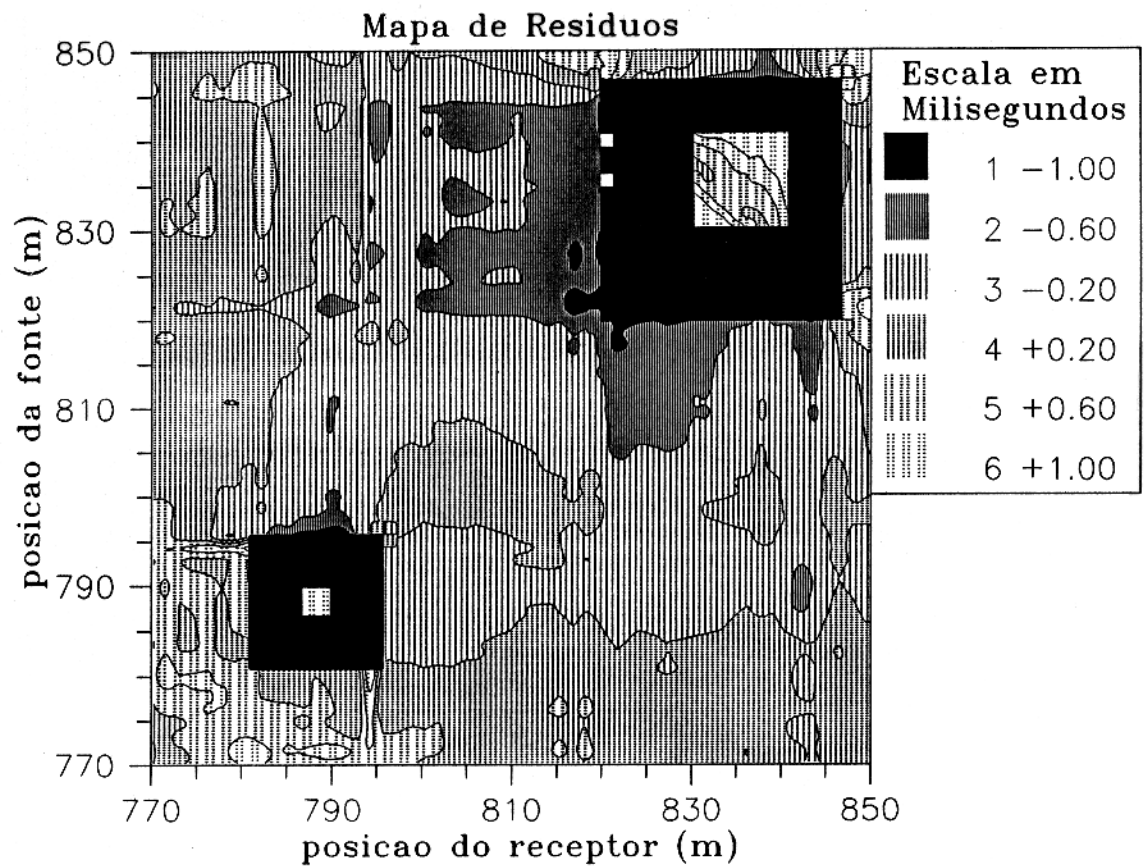


Figura 4.15 - Mapa de resíduos resultante da aplicação tomografia isotrópica aos dados de Devine, após cinco iterações. Os maiores resíduos ocorrem para trajetórias dentro dos folhelhos ou através destes.

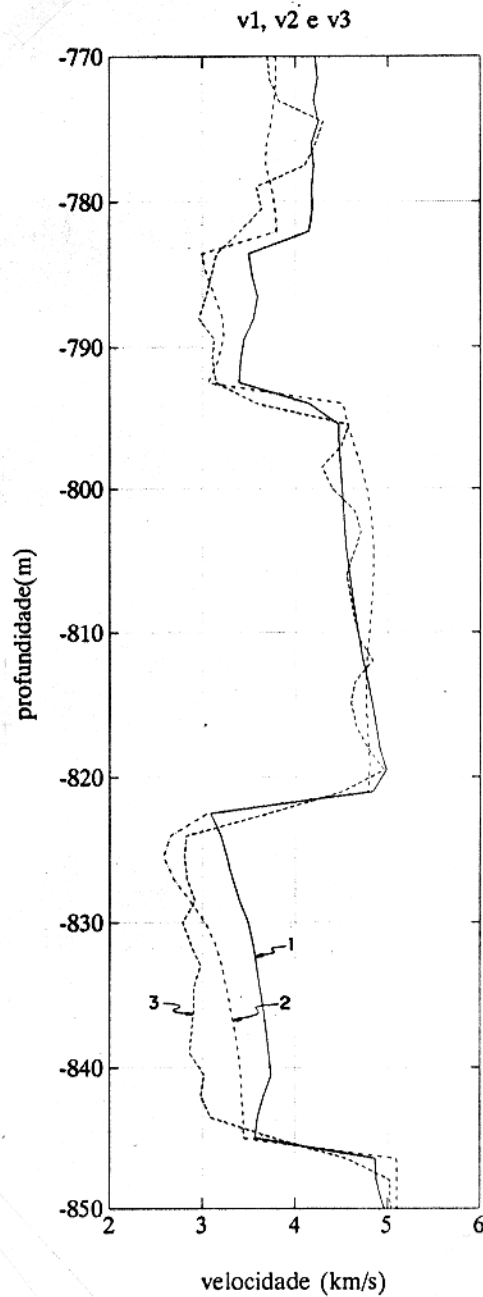


Figura 4.16 - Perfis dos parâmetros de velocidade v_1 (curva 1), v_2 (curva 2) e v_3 (curva 3) resultantes da aplicação do algoritmo de inversão anisotrópica aos dados de Devine, após cinco iterações.

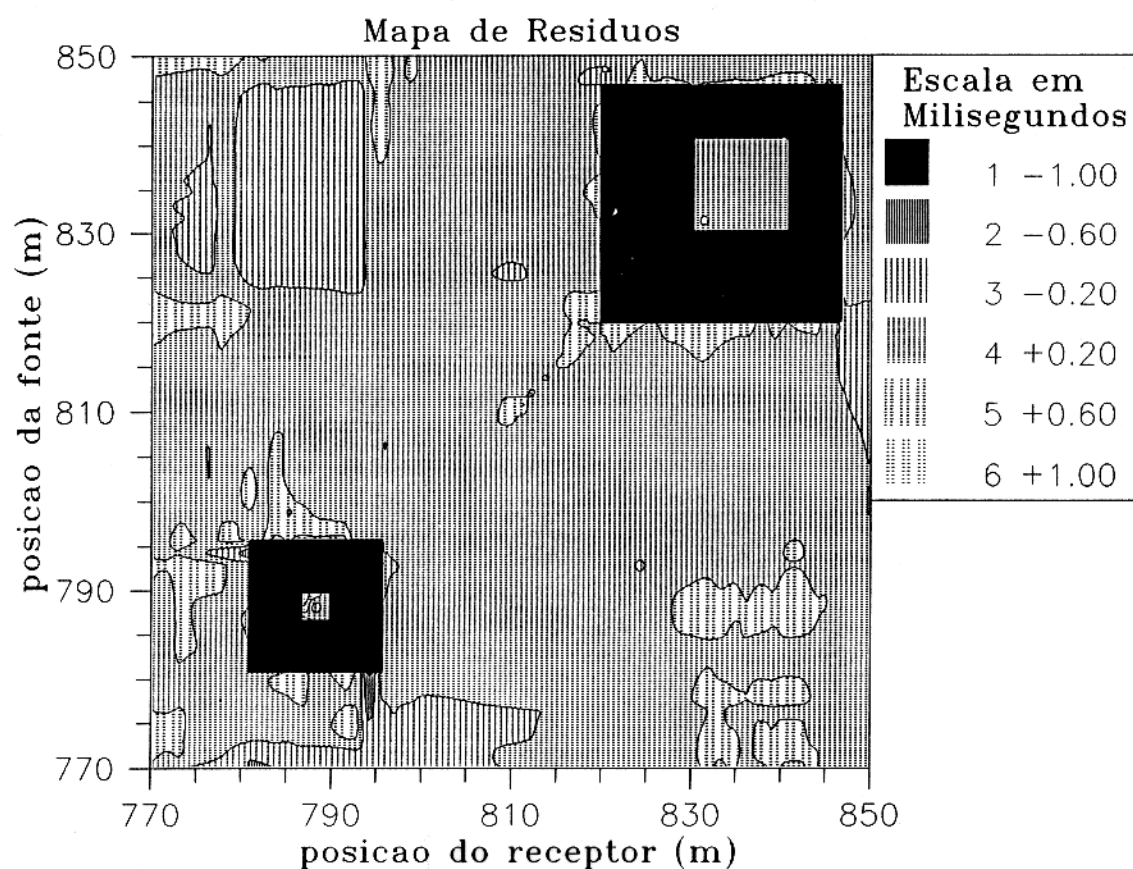


Figura 4.17 - Mapa de resíduos resultante da aplicação do algoritmo de inversão anisotrópica aos dados de Devine. A maior parte dos dados foi ajustada dentro da precisão das medidas (0,2ms) e os maiores resíduos se correlacionam muito bem com o mapa de diferenças de tempo de trânsito para trajetórias simétricas mostrado na Figura 3.17.

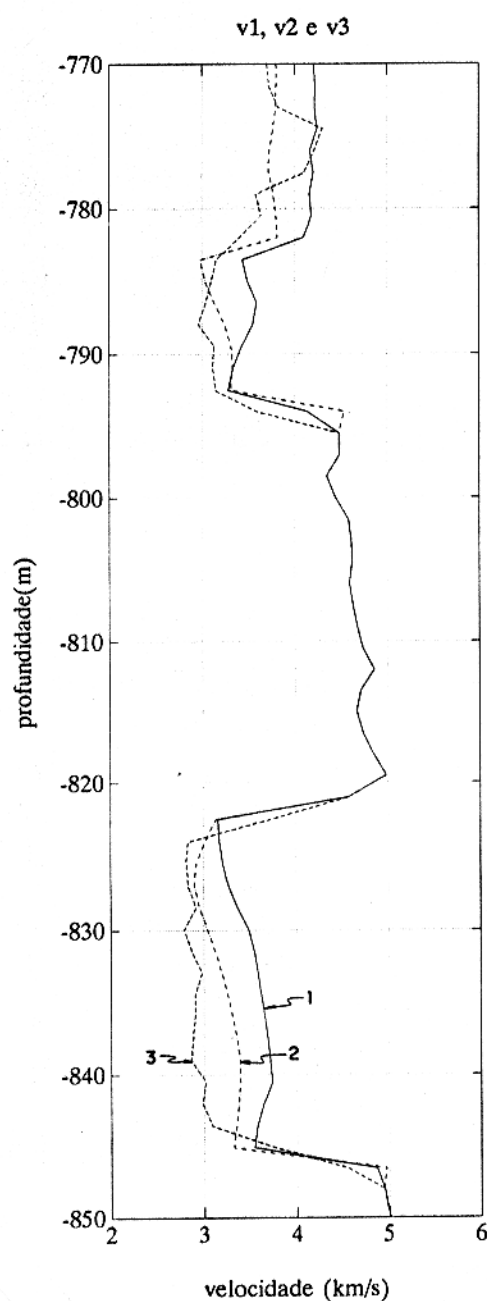


Figura 4.18 - Perfis dos parâmetros de velocidade v_1 (curva 1), v_2 (curva 2) e v_3 (curva 3) resultantes da aplicação do algoritmo de inversão anisotrópica aos dados de Devine, desta vez foi exigida isotropia para os calcários das camadas Buda Lime e Georgetown Lime.

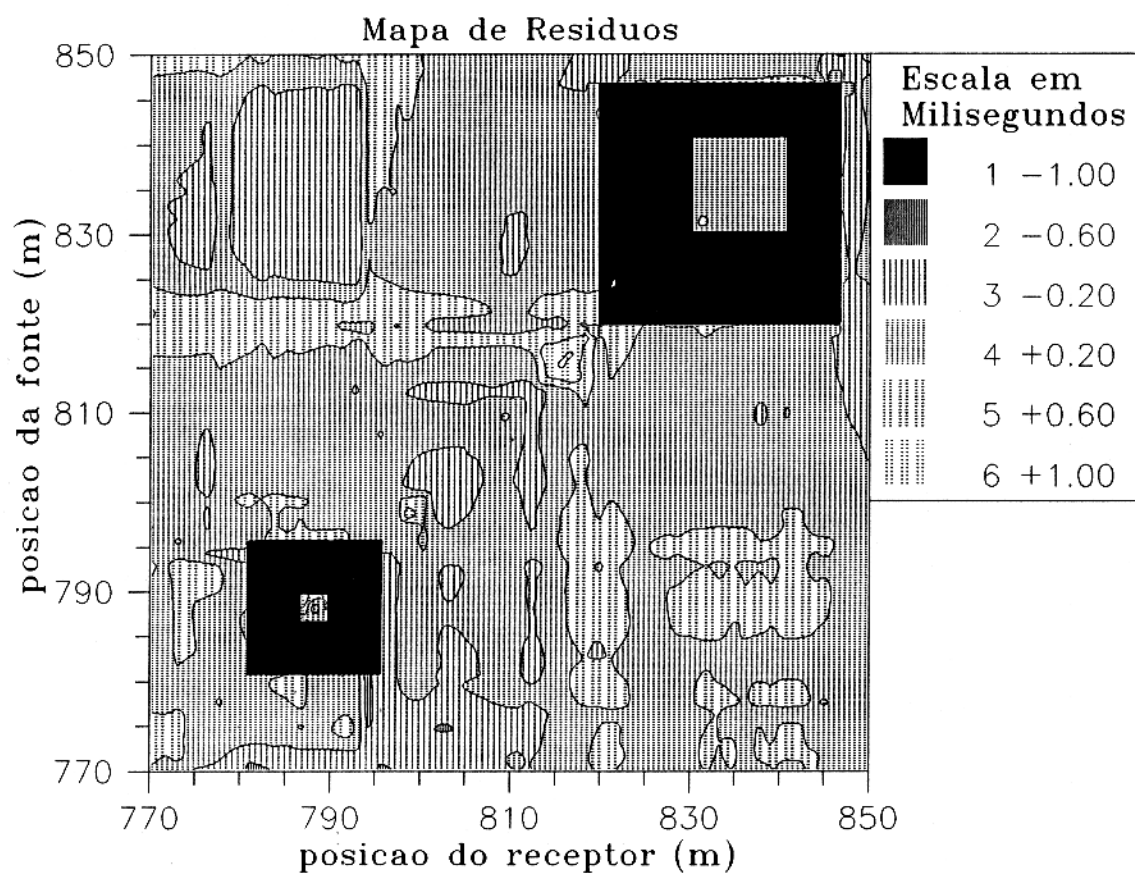


Figura 4.19 - Mapa de resíduos para o modelo estimado da Figura 3.18. Resíduos maiores que os da inversão sem a exigência de isotropia ocorrem para trajetórias dentro dos calcários.

5 - CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

As contribuições e potencialidades deste trabalho para exploração sísmica são as seguintes:

- a) Foram estabelecidas as limitações do emprego de ondas SH para caracterização da anisotropia de um subespaço estratificado, na situação mais geral em que estas ondas podem ocorrer. Uma implicação prática deste resultado é que modelos acústicos elipticamente anisotrópicos são invisíveis a partir da superfície, quando apenas tempo de trânsito são considerados. Este resultado desestimula a adoção destes modelos que parecem, a primeira vista, uma forma simples e atraente para se incorporar anisotropia à interpretação sísmica.
- b) Foi apresentado um procedimento simples e robusto para o traçado de raios em 3D através de meios anisotrópicos com estratificação não plana. Este é o primeiro passo para o desenvolvimento de um algoritmo de inversão de tempos de trânsito para modelos anisotrópicos 3D a partir de dados de VSP e walkway VSP. Esta abordagem é promissora para a construção de modelos de velocidade 3D, em meios com estratificação não plana, a partir de um poço. A determinação de modelos de velocidades 3D é essencial para procedimentos de migração de dados de levantamentos sísmicos na presença de anisotropia.
- c) Foi efetuada a análise da inversão tomográfica para meios TIV estratificados. As limitações dos dados de tempo de trânsito de eventos qP e qS para resolução dos parâmetros anisotrópicos foi caracterizada e investigados os limites da hipótese de anisotropia fraca. Também foram caracterizados os efeitos da falta de cobertura angular completa para inversão tomográfica em presença de anisotropia. Um algoritmo de inversão foi proposto e avaliado em dados sintéticos e aplicado a dados reais, servindo para mostrar a consistência de modelos TIV. O algoritmo de inversão de tempos de trânsito para meios TIV estratificados também pode ser aplicado para dados de VSP e walkway VSP produzindo uma primeira estimativa dos parâmetros de velocidade, para as camadas acima dos receptores.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ALFORD, R.M. 1986. Shear wave data in the presence of azimuthal anisotropy. **Expanded Abstracts, SEG**, 56: 476-479.
- ARNOLD, V.A. 1989. **Mathematical Methods of Classical Mechanics**. New York, Springer-Verlag. 508p. (Graduate Texts in Mathematics, 60).
- AULD, B.A. 1973. **Acoustic waves in solids**. vol I. New York, Wiley & Sons. 423p.
- BREGMAN, N.D.; BAILEY, R.C.; CHAPMAN, C.H. 1989. Crosshole seismic tomography. **Geophysics**, 54: 200-215.
- CERVENY, V. 1972. Seismic rays and rays intensities in inhomogeneous anisotropic media. **Geophys. J. Roy. Astr. Soc.**, 29: 1-13
- CERVENY, V. 1982. Direct and inverse kinematic problems for inhomogeneous anisotropic media - linearization approach. **Contr. Geophys. Inst. Slov. Acad. Sci.**, 13: 127 - 133.
- CHAPMAN, C.H & PRATT, R.G. 1992. Traveltime tomography in anisotropic media-I. Theory. **Geophys. J. Int.**, 109:1-19.
- CHIU, S.K.L. & STEWART, R.R. 1987. Tomographic determination of three-dimensional seismic velocity structure using well logs, vertical seismic profiles, and surface seismic data. **Geophysics**, 52:1085-1098.
- DE HOOP, M.V.; BURRIDGE, R.; CHANG, H.W. 1991. Wave propagation with tunneling in a highly discontinuous layered media. **Wave Motion**, 13:307-327.
- DEPLANTE, C. & MILLER, D. 1986. Traveltime inversion using analytical raytracing in 1-D models with statics and application to GRT migration. Scientific Report. Ridgefield, Schlumberger Doll Research.
- DOCHERTY, P. & BLEISTEIN, N. 1984. A fast ray tracing routine for laterally inhomogeneous media. **Expanded Abstracts, SEG**, 54: 788-790.
- DONGARRA, J.J.; MOLIER, C.B.; BUNCH, J.R.; STEWART, G.W. 1979. **LINPACK user's guide**. Philadelphia, SIAM Press. 182p.

- GILL, P.E.; MURRAY, W.; WRIGHT, M.H. 1981. **Practical Optimization**. New York, Academic Press. 387p.
- HELBIG, K. & SCHOENBERG, M. 1987. Anomalous polarization of elastic waves in transversely isotropic media. **J. Acoust. Soc. Am.**, 81:1235-1245.
- HUDSON, J.A. 1981. Wave speeds and attenuation of elastic waves in material containing cracks. **Geophys. J. Roy. Astr. Soc.**, 64:133-150
- KELLER, H.B. & PEROZZI, D.J. 1983. Fast seismic ray tracing. **SIAM J. Appl. Math.**, 43: 981-992.
- KOSLOFF, D. & BAYSAL, E. 1982. Forward modeling by Fourier method. **Geophysics**, 47: 1402 - 1412.
- LAWSON, C.L. & HANSON, R.J. 1974. **Solving least-squares problems**. New Jersey, Prentice-Hall. 338p.
- MENKE, W. 1984. **Geophysical data analysis: discrete inverse theory**. New York, Academic Press. 260p.
- MILLER, D. & CHAPMAN, C.H. 1991. Incontrovertible evidence of anisotropy in crosswell data. **Expanded Abstracts, SEG**, 61: 825-828.
- MOSER, T.J. 1991. Shortest path calculation of seismic rays. **Geophysics**, 56: 59-67.
- MUSGRAVE, M.J.P. 1970. **Crystal acoustics**. London, Holden-Day. 288p.
- NAYFEH, A.H. 1989. The propagation of horizontally polarized shear waves in multilayered anisotropic media. **Journal of Acoustical Society of America**, 86:2007 - 2012.
- POSTMA, G.W. 1955. Wave propagation in a stratified medium. **Geophysics**, 20:780-806.
- PRATT, R.G. & CHAPMAN, C.H. 1992. Traveltime tomography in anisotropic media-II. Application. **Geophys. J. Int.**, 109:20-27
- PSHENICHNY, B.N. & DANILIN, Yu. M. 1978. **Numerical methods in extremal problems**. Moscow, MIR Publishers. 273p.
- SCHOENBERG, M. 1983. Reflection of elastic waves from periodically stratified media with interfaces. **Geophysical Prospecting**, 31:265-292.
- SCHOENBERG, M. 1984. Wave propagation in alternating solid and fluid layers. **Wave Motion**, 6:303 - 320.

- SCHOENBERG, M. & DOUMA, J. 1988. Elastic wave propagation in media with parallel fractures and aligned cracks. **Geophysical Prospecting**, 36:571 - 590.
- SCHOENBERG, M. & MUIR, F. 1989. A calculus for finely layered anisotropic media. **Geophysics**, 54:581 - 589.
- WHITMORE, N.D. & LINES, L.R. 1986. Vertical seismic profiling depth migration of a salt dome flank. **Geophysics**, 51(5):1087-1109.

ANEXO I - AS ELIPSES DE VAGAROSIDADE E ELIPSES DE FRENTE DE ONDA

A forma mais geral de uma elipse de vagarosidade, para ondas SH em meios anisotrópicos, é mostrada em (6) e reproduzido aqui como

$$F(s) \equiv c_{66}s_1^2 + 2c_{46}s_1s_3 + c_{44}s_3^2 - \rho = 0 \quad . \quad (I.1)$$

Como o tensor das constantes elásticas é positivo definido, temos

$$c_{44} > 0, \quad c_{66} > 0, \quad c^2 \equiv c_{44}c_{66} - c_{46}^2 > 0, \quad (I.2)$$

o que assegura que esta forma quadrática é uma elipse. Além do mais, se C é a média de c_{44} e c_{66}

$$C \equiv (c_{44} + c_{66})/2 \quad (I.3)$$

e definindo os parâmetros adimensionais a e b como

$$a \equiv (c_{66} - c_{44})/2C, \quad b \equiv c_{46}/C, \quad (I.4)$$

de (I.1),

$$c^2 = (1 - a^2 - b^2)C^2 > 0, \quad (I.5)$$

ou

$$a^2 + b^2 < 1. \quad (I.6)$$

A forma e orientação da elipse são governadas por a e b .

Em coordenadas polares, com s , a magnitude do vetor de vagarosidade, e θ , o ângulo medido a partir do eixo- s_3 (+ em direção do eixo- s_1 positivo), a equação da elipse (I.1) é dada por

$$s^2 = \frac{\rho}{C} [1 - a \cos 2\theta - b \sin 2\theta]^{-1} \quad . \quad (I.7)$$

O semi-eixo maior e o semi-eixo menor, $s_{\max}$ e $s_{\min}$ são dados por

$$s_{\max}^2 = \frac{\rho}{C} [1 \mp \sqrt{a^2 + b^2}]^{-1} \quad . \quad (I.8)$$

A excentricidade e é dada por

$$e \equiv \frac{s_{\max}^2 - s_{\min}^2}{s_{\max}^2 + s_{\min}^2} = \sqrt{a^2 + b^2} \quad , \quad (I.9)$$

e os ângulos dos eixos maior e menor com o eixo- s_3 são dados por

$$\tan 2\theta_{\max}^{\min} = -b/a \quad . \quad (I.10)$$

A elipse se torna uma circunferência e o meio é isotrópico para ondas SH, somente quando a e b se anulam. A elipse é inclinada se, e somente se, $b \neq 0$. Existem quatro casos de elipses inclinadas: (a) $a \geq 0$ e $b > 0$; (b) $a < 0$ e $b > 0$; (c) $a \geq 0$ e $b < 0$ e (d) $a < 0$ e $b < 0$. O caso (a) é mostrado na Figura 2.1 e para este caso

$-\pi/4 \leq \theta_{\max} < 0$. Para o caso (b), $-\pi/2 < \theta_{\max} < -\pi/4$. Quando c_{46} ou b é negativo, $\theta_{\max}$ é positivo. Para o caso (c), $0 \leq \theta_{\max} \leq \pi/4$, e para (d) $\pi/4 < \theta_{\max} < \pi/2$. A mudança de sinal de a e b , apenas gira a elipse de $\pi/2$, intercambiando o eixo maior com o eixo menor.

A superfície de velocidade de grupo ou frente de onda, que é a recíproca polar da superfície de vagariedade, é também elíptica. É importante observar que a superfície de todos os vetores velocidade de fase em que $\mathbf{v}_p = \mathbf{s}/s^2$, não é uma elipse e, essencialmente, não possui significado geométrico ou físico. A velocidade de grupo $\mathbf{v}_g$ em um meio anisotrópico está associada à vagariedade, pela relação (SCHOENBERG, 1984)

$$\mathbf{v}_g = \frac{\nabla_{\mathbf{s}} F}{\mathbf{s} \cdot \nabla_{\mathbf{s}} F} \Big|_{F=0} \quad , \quad (I.11)$$

onde $F(\mathbf{s}) = 0$ é a superfície de vagariedade dada por (I.1). Assim

$$\nabla_{\mathbf{s}} F = 2[(c_{66}s_1 + c_{46}s_3)\mathbf{e}_1 + (c_{46}s_1 + c_{44}s_3)\mathbf{e}_3] \quad (I.12)$$

$$\mathbf{s} \cdot \nabla_{\mathbf{s}} F = 2(c_{66}s_1^2 + 2c_{46}s_1s_3 + c_{44}s_3^2) \Big|_{F=0} \quad ,$$

onde $\mathbf{e}_i$ são vetores unitários e, portanto

$$v_{g1} = (c_{66}s_1 + c_{46}s_3)/\rho \quad , \quad v_{g3} = (c_{46}s_1 + c_{44}s_3)/\rho \quad . \quad (I.13)$$

Resolvendo s_1 e s_3 em termos de v_{g1} e v_{g3} e substituindo em (I.1), é obtida a equação para a superfície de velocidade de grupo, dada por

$$c_{44}v_{g1}^2 - 2c_{46}v_{g1}v_{g3} + c_{66}v_{g3}^2 - c^2/\rho = 0 \quad , \quad (I.14)$$

que é, naturalmente, elíptica. Os parâmetros adimensionais, correspondentes à esta elipse, são

$$a_g = (c_{44} - c_{66})/2C = -a \quad , \quad b_g = -c_{46}/C = -b \quad . \quad (I.15)$$

Assim, a excentricidade é a mesma que da elipse de vagariedade, e as orientações dos semi-eixos maior e menor são as mesmas dos semi-eixos menor e maior da elipse de vagariedade, respectivamente, isto é, a elipse de frente de onda está inclinada de $\pi/2$ em relação a elipse

de vagarosidade. Evidentemente, o semi-eixo maior da elipse de velocidade de grupo deve ser o inverso do semi-eixo menor da elipse de vagarosidade, e vice-versa. Para verificar isto, basta observar que, em coordenadas polares, v_g , a magnitude do vetor velocidade de grupo, e ϕ , o ângulo medido a partir do eixo v_{g3} (+ em direção do eixo v_{g1} positivo), a equação desta elipse de frente de onda, em termos de a e b , é dada por

$$v_g^2 = \frac{C(1 - a^2 - b^2)}{\rho} [1 + a \cos 2\phi - b \sin 2\phi]^{-1}. \quad (\text{I.16})$$

O termo $[1 + a \cos 2\phi - b \sin 2\phi]^{-1}$ assume valores máximo e mínimo para $[1 \mp e]^{-1}$, de forma que os semi-eixos maior e menor, $v_{g_{\max}}$ e $v_{g_{\min}}$, são dados por

$$v_{g_{\max}}^2 = \frac{C(1 - a^2 - b^2)}{\rho} [1 \mp e]^{-1} = \frac{C}{\rho} [1 \mp e] \equiv 1/s_{\min}^2 \quad (\text{I.17})$$

e estes valores ocorrem em $\phi_{\max} = \theta_{\min}$ e $\phi_{\min} = \theta_{\max}$, como era de se esperar, pois $a_g = -a$ e $b_g = -b$.

ANEXO II - A MATRIZ DE PROPAGAÇÃO SH ATRAVÉS DE UMA CAMADA MONOCLÍNICA

Seja uma camada monoclinica de espessura h , tendo o plano $x_1 - x_3$ como seu plano de simetria especular e com interfaces paralelas ao plano $x_1 - x_2$. A matriz de propagação através de uma camada, relaciona a velocidade e tração sobre uma interface da camada, em cada frequência ω e vazarosidade horizontal s_1 , aos valores daquelas quantidades na outra interface. É fácil obter uma expressão para a matriz de propagação quando as soluções gerais para a equação de onda são conhecidas, como é o caso da propagação de ondas SH. Como existe apenas uma componente de velocidade v e uma componente de tração (sobre uma superfície com x_3 constante) σ_4 , denominada aqui de σ , a matriz de propagação é uma matriz de ordem 2.

A solução geral para a camada monoclinica, consiste de uma onda propagando-se para baixo, com número de onda s_3^+ e amplitude A^+ e uma onda propagando-se para cima, com número de onda vertical s_3^- e amplitude A^- . s_3^+ e s_3^- são dados por (7). Definindo o vetor de velocidade-tração y e um vetor de amplitude a por

$$y(x_3) \equiv \begin{bmatrix} v(x_3) \\ -\sigma(x_3) \end{bmatrix}, \quad a = \begin{bmatrix} A^+ \\ A^- \end{bmatrix}, \quad (\text{II.1})$$

(8) e (11) podem ser escritas, em forma matricial, como

$$y = \mathbf{B}\mathbf{D}(x_3)\mathbf{a},$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ Z_M & -Z_M \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}(x_3) = \begin{bmatrix} \exp i\omega s_3^+ x_3 & 0 \\ 0 & \exp i\omega s_3^- x_3 \end{bmatrix}, \quad (\text{II.2})$$

onde a impedância Z_M , que é função de s_3^2 , é dada por (10). Portanto, através da camada de espessura h , cujo topo está localizado em x_3 , obtêm-se

$$\begin{aligned} y(x_3 + h) &= \mathbf{B}\mathbf{D}(x_3 + h)\mathbf{a} = \mathbf{B}\mathbf{D}(x_3 + h)[\mathbf{D}(x_3)]^{-1}\mathbf{B}^{-1}y(x_3) \\ &= \mathbf{B}\mathbf{D}(h)\mathbf{B}^{-1}y(x_3) \equiv \mathbf{Q}(h)y(x_3), \end{aligned} \quad (\text{II.3})$$

e a matriz de propagação $\mathbf{Q}(h)$ é dada, explicitamente, por

$$\mathbf{Q} = \exp(-i\omega \frac{c_{46}}{c_{44}} s_1 h) \begin{bmatrix} \cos \omega(Z_M/c_{44})h & (i/Z_M) \sin \omega(Z_M/c_{44})h \\ (iZ_M) \sin \omega(Z_M/c_{44})h & \cos \omega(Z_M/c_{44})h \end{bmatrix}. \quad (\text{II.4})$$

O determinante de $Q(h)$ é $\exp -2i\omega(c_{46}/c_{44})s_1h$, cujo valor absoluto é unitário. Em meios anisotrópicos em geral, a condição de que o determinante seja unitário, não se mantém quando o plano horizontal não é um plano de simetria especular, isto é, quando não há simetria entre ondas que se propagam para baixo e ondas que se propagam para cima. O fator de fase constante para todas as componentes de $Q(h)$, contém a razão adimensional c_{46}/c_{44} , que é exatamente a inclinação do vetor vagarosidade para vagarosidade horizontal crítica do meio monoclinico (veja Figura 2.1).

É interessante comparar a matriz de propagação da camada monoclinica, com aquela da camada isotrópica equivalente especificada por ρ' e μ' dada pelas equações (18), que exigem que a impedância do meio isotrópico seja igual aquela do meio monoclinico, para todo s_1 . Considerando que o meio isotrópico tenha espessura h' , sua matriz de propagação Q' é dada por

$$Q' = \begin{bmatrix} \cos \omega(Z_M/\mu')h' & (i/Z_M) \sin \omega(Z_M/\mu')h' \\ (iZ_M) \sin \omega(Z_M/\mu')h' & \cos \omega(Z_M/\mu')h' \end{bmatrix} \quad (II.5)$$

Para que os argumentos dos senos e cosenos em Q' sejam idênticos aos da camada monoclinica e, observando que $\mu' = c$, é necessário que

$$h' = \frac{c}{c_{44}}h \quad (II.6)$$

Então, Q' é o mesmo que Q , exceto pelo fator de fase, $\exp -i\omega(c_{46}/c_{44})s_1h$, que é comum a todas as componentes de Q . Como os coeficientes de reflexão sempre dependem das razões entre componentes, o coeficiente de reflexão para uma camada monoclinica (ou muitas camadas monoclinicas sobre um semi-espaco) é igual ao de uma camada isotrópica equivalente (ou muitas camadas isotrópicas equivalentes) sobre o mesmo ou o semi-espaco equivalente subjacente. Os coeficientes de transmissão terão termos de deslocamento de fase adicionais que não podem ser eliminados.

ANEXO III - VELOCIDADE DE GRUPO A PARTIR DA RELAÇÃO de DISPERSÃO $\mathcal{F}(\mathbf{k}, \omega) = 0$

Considere uma relação de dispersão geral em um ponto do meio ou guia de onda na forma $\mathcal{F}(\mathbf{k}, \omega) = 0$, onde $\mathbf{k}$ é o vetor número de onda, ω é a frequência radial e o vetor vagarosidade $\mathbf{s} \equiv \mathbf{k}/\omega$. O vetor velocidade de grupo é definido como $\mathbf{v} \equiv \nabla_{\mathbf{k}}\omega$. A derivada total de $\mathcal{F}$ com relação a $\mathbf{k}$ deve se anular, resultando que

$$\frac{d\mathcal{F}}{d\mathbf{k}} = \nabla_{\mathbf{k}}\mathcal{F} + \mathcal{F}_{,\omega} \nabla_{\mathbf{k}}\omega = 0, \quad (\text{III.1})$$

que, quando resolvida para $\mathbf{v} = \nabla_{\mathbf{k}}\omega$, nos dá a fórmula usual para a velocidade de grupo, definida por

$$\mathbf{v} = -\frac{\nabla_{\mathbf{k}}\mathcal{F}}{\mathcal{F}_{,\omega}}. \quad (\text{III.2})$$

Para mudar a variável $\mathbf{k}$ para a variável $\mathbf{s}$, nós podemos escrever

$$\mathcal{F}(\mathbf{k}, \omega) = \mathcal{F}(\omega\mathbf{s}, \omega) \equiv F(\mathbf{s}, \omega) = 0. \quad (\text{III.3})$$

Portanto,

$$\mathbf{v} = -\frac{\nabla_{\mathbf{k}}\mathcal{F}}{\mathcal{F}_{,\omega}} = -\frac{\nabla_{\mathbf{k}}\mathbf{s} \cdot \nabla_{\mathbf{s}}F}{\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \omega} \cdot \nabla_{\mathbf{s}}F + \frac{\partial F}{\partial \omega}}, \quad (\text{III.4})$$

onde $\mathbf{I}$ denota o tensor identidade, $\nabla_{\mathbf{k}}\mathbf{s} = \mathbf{I}/\omega$, $\partial \mathbf{s} / \partial \omega = -\mathbf{k}/\omega^2 = -\mathbf{s}/\omega$. Substituindo estas expressões em (III.4), obtemos uma expressão para a velocidade de grupo em termos do vetor de vagarosidade e da frequência

$$\mathbf{v} = -\frac{\frac{1}{\omega} \nabla_{\mathbf{s}}F}{-\frac{\mathbf{s}}{\omega} \cdot \nabla_{\mathbf{s}}F + \frac{\partial F}{\partial \omega}} = \frac{\nabla_{\mathbf{s}}F}{\mathbf{s} \cdot \nabla_{\mathbf{s}}F - \omega \frac{\partial F}{\partial \omega}}. \quad (\text{III.5})$$

Se $\mathcal{F}(\mathbf{k}, \omega) \equiv F(\mathbf{k}/\omega) = F(\mathbf{s})$, então $\partial F / \partial \omega = 0$ e (III.5) $\mathbf{v}$ se torna idêntica à (3.7).

ANEXO IV - CONDIÇÕES PARA ANISOTROPIA SUAVE

As condições de anisotropia suave não significam, essencialmente, valores pequenos para certos parâmetros anisotrópicos, mas são propriedades físicas do meio anisotrópico que geralmente são consideradas, na sismica de exploração, como universalmente satisfeitas por todas as estruturas geológicas. Quando a anisotropia puder ser assumida como transversalmente isotrópica, com um eixo vertical (na direção x_3) de simetria, estas condições são que:

1. A onda compressional mais lenta ao longo de um eixo de coordenadas é mais rápida que a onda cisalhante ao longo dos eixos, ou seja,

$$\min[a_{11}, a_{33}] > a_{55} , \quad (\text{IV.1})$$

2. Não existe polarização anômala em qualquer plano coordenado (HELBIG and SCHOENBERG, 1987), ou seja,

$$a_{13} + a_{55} > 0 . \quad (\text{IV.2})$$

Para rochas, esta condição pode ser feita mais restritiva, exigindo-se que $a_{13} > 0$, que é equivalente à que a razão de Poisson, no plano x_1, x_3 , com cargas nas direções x_3 ou x_1 seja positivo, e

3. Não existe triplicação para a onda qS, em torno dos eixos de coordenadas, o que fornece limites superiores para a_{13} , ou seja, para não haver triplicação em torno do eixo horizontal x_1 :

$$(a_{13} + a_{55})^2 < a_{33}(a_{11} - a_{55}) , \quad (\text{IV.3})$$

e, para não haver triplicação em torno do eixo vertical x_3 :

$$(a_{13} + a_{55})^2 < a_{11}(a_{33} - a_{55}) . \quad (\text{IV.4})$$

Nós poderíamos ter exigido que não houvesse triplicação em torno de uma direção oblíqua, produzindo, em muitos casos, um maior limite inferior para a_{13} , que a condição $a_{13} > 0$ do item 2.

Isto não foi feito porque folhelhos quase sempre apresentam evidência de possuírem pequena triplicação em torno de uma direção oblíqua.

Todas estas observações juntas nos determinam uma região de aceitabilidade para a_{13} :

$$0 < a_{13} < \sqrt{a_{11}a_{33} - a_{55} \max[a_{11}, a_{33}]} - a_{55} . \quad (\text{IV.5})$$

ANEXO V - CURVAS DE VAGAROSIDADE APROXIMADAS

A relação de dispersão exata (4.9) pode ser resolvida para as curvas de vagarosidade qP e qS, em coordenadas polares, fazendo $s_1 = s \sin \theta$, $s_3 = s \cos \theta$. Com isto, obtêm-se

$$(s^{-2})^2 - (C - D \cos 2\theta + c)s^{-2} + c(C - D \cos 2\theta) + [(C - c)\Delta - \Delta^2 - D^2/4] \sin^2 2\theta = 0, \quad (V.1)$$

uma equação quadrática em s^2 (onde s é o módulo do vetor de vagarosidade), cujos coeficientes são funções de θ , o ângulo de fase. Observa-se que a condição $\Delta = 0$ não nos dá uma relação exatamente fatorável (com uma curva qP elíptica e uma curva qS circular). Para isto, é necessário que

$$E^2 \equiv (a_{11} - a_{55})(a_{33} - a_{55}) - (a_{13} + a_{55})^2 = 4(C - c)\Delta - 4\Delta^2 - D^2, \quad (V.2)$$

seja zero, ver HELBIG & SCHOENBERG (1987). As soluções de (V.1) nos dão as curvas de vagarosidade de qP and qS

$$s_{qP/qS}^{-2} = \frac{C - D \cos 2\theta + c}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{C - D \cos 2\theta - c}{2}\right)^2 - \frac{E^2}{4} \sin^2 2\theta}. \quad (V.3)$$

Expandindo estas soluções em potências dos parâmetros anisotrópicos D e Δ , e negligenciando os termos $\mathcal{O}[D^2/(C - c), \Delta^2/(C - c), D\Delta/(C - c)]$, obtêm-se expressões simples para as vagarosidades de fase,

$$s_{qP_{app}}^{-2} \approx C - D \cos 2\theta - \Delta \sin^2 2\theta, \quad s_{qS_{app}}^{-2} \approx c + \Delta \sin^2 2\theta. \quad (V.4)$$

Reescrevendo (V.4) em coordenadas rectangulares, s_1, s_3 , são, então, obtidas as aproximações das curvas de vagarosidade qP e qS definidas em (4.13).

Os valores aproximados para estas curvas em ângulos que são múltiplos de 15° são:

$\theta =$	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
$s_P^{-2} =$	$C - D$	$C - \frac{\sqrt{3}D}{2} - \frac{\Delta}{4}$	$C - \frac{D}{2} - \frac{3\Delta}{4}$	$C - \Delta$	$C + \frac{D}{2} - \frac{3\Delta}{4}$	$C + \frac{\sqrt{3}D}{2} - \frac{\Delta}{4}$	$C + D$
$s_S^{-2} =$	c	$c + \frac{\Delta}{4}$	$c + \frac{3\Delta}{4}$	$c + \Delta$	$c + \frac{3\Delta}{4}$	$c + \frac{\Delta}{4}$	c

O parâmetro de anelipticidade, ϵ_A (uma versão adimensional de E^2 , (V.2), normalizado tal que $\max \epsilon_A \equiv 1$) se torna, nos limites da aproximação fraca, proporcional à Δ :

$$\epsilon_A \equiv \frac{E^2}{(a_{11} - a_{55})(a_{33} - a_{55})} = \frac{4(C - c)\Delta - 4\Delta^2 - D^2}{(C - c)^2 - D^2} \approx \frac{4\Delta}{C - c}, \quad (\text{V.5})$$

ANEXO VI - DERIVADA DO TEMPO DE TRÂNSITO EM UM MEIO ESTRATIFICADO EM RELAÇÃO A UM PARÂMETRO ELÁSTICO

Em um meio com camadas homogêneas, o raio é composto de segmentos de retas e é determinado pelos pontos de interseção da trajetória do raio com as interfaces, ou equivalentemente, pelos ângulos dos raios ou as razões v_{1i}/v_{3i} nas várias camadas. Desta forma, no cálculo das derivadas parciais em relação ao q -ésimo parâmetro elástico da j -ésima camada, η_{qj} , do tempo de trânsito associado à um raio particular, mantendo a trajetória do raio fixa, é equivalente a manter constantes as razões v_{1i}/v_{3i} .

Notando que dx , o deslocamento infinitesimal ao longo do raio na integral do tempo de trânsito (3.1), é $(v/v)d\ell$, onde v é o módulo da velocidade de grupo e ℓ é o comprimento de arco em cada ponto do raio, e lembrando que $s \cdot v = 1$, o tempo de trânsito τ pode ser escrito como

$$\tau(x, s) = \int_{x_s}^{x_r} s \cdot dx = \int_{x_s}^{x_r} \frac{d\ell}{v}. \quad (\text{VI.1})$$

Considerando que cada camada é atravessada por apenas um tipo de raio, para simplificar a notação. A trajetória do raio pode então ser especificada pelos deslocamentos verticais e horizontais dos segmentos dos raios nas J camadas, $x_{1i}, h_i, i = 1 \dots, J$ onde $\sum_{i=1}^J x_{1i} = X$ é a distância de afastamento horizontal total coberta pelo raio. O tempo de trânsito é dado por

$$\tau = \sum_{i=1}^n \frac{\sqrt{x_{1i}^2 + h_i^2}}{v_i} \equiv \sum_{i=1}^n (s_{1i}x_{1i} + s_{3i}h_i) = s_1X + \sum_{i=1}^n s_{3i}h_i. \quad (\text{VI.2})$$

Na i -ésima camada, s_{3i} é uma função de s_1 e de todos os parâmetros elásticos daquela camada. Logo, nós podemos escrever $s_{3i}(s_1, \eta_{qi}, q = 1, \dots, N)$. Note-se que $N = 4$ para uma camada TIV. Diferenciando o tempo de trânsito τ em relação a η_{qj} , o q -ésimo parâmetro na j -ésima camada (neste anexo não escreveremos os subíndices q e j , deixando claro que ele estão subentendidos), mantendo-se a trajetória do raio fixa, obtêm-se

$$\tau_{,\eta} |_{\text{raio fixo}} = s_{1,\eta} X + \sum_{i=1}^n s_{3i,s_1} s_{1,\eta} h_i + s_{3j,\eta} h_j = s_{1,\eta} \left(X + \sum_{i=1}^n s_{3i,s_1} h_i \right) + s_{3j,\eta} h_j. \quad (\text{VI.3})$$

Entretanto, em cada meio, vale a relação de dispersão $F(s_1, s_3) \equiv 0$. Consequentemente, a derivada total de F em relação a s_1 também se anula, isto é, $F_{,s_1} + F_{,s_3} s_{3,s_1} \equiv 0$, e, portanto,

$s_{3,s_1} = -\frac{F_{,s_1}}{F_{,s_3}}$, e de (3.7), $s_{3,s_1} = -\frac{v_1}{v_3}$. Assim os coeficientes de $s_{1,\eta}$ em (VI.3),

$$X + \sum_{i=1}^n s_{3_i,s_1} h_i = X - \sum_{i=1}^n \frac{v_{1i}}{v_{3i}} h_i = X - \sum_{i=1}^n x_{1i} = 0, \quad (\text{VI.4})$$

e a expressão (VI.3) para a derivada total do tempo de trânsito em relação aos parâmetros elásticos se reduz a,

$$\tau_\eta|_{\text{raio fixo}} = s_{3_j,\eta}|_{s_1 \text{ fixo}} h_j. \quad (\text{VI.5})$$