



VALDELÍRIO DA SILVA E SILVA

**ESTUDO COMPARATIVO DAS TÉCNICAS DE
ELEMENTOS FINITOS E EQUAÇÃO INTEGRAL NA
MODELAGEM ELETROMAGNÉTICA BIDIMENSIONAL**

Dissertação apresentada como requisito parcial
para a obtenção do título de Mestre em Geofísica
no Centro de Geociências,
Universidade Federal do Pará
Orientador: Cícero Roberto Teixeira Régis

BELÉM

2007

VALDELÍRIO DA SILVA E SILVA

ESTUDO COMPARATIVO DAS TÉCNICAS DE
ELEMENTOS FINITOS E EQUAÇÃO INTEGRAL NA
MODELAGEM ELETROMAGNÉTICA BIDIMENSIONAL

Dissertação apresentada como requisito parcial
para a obtenção do título de Mestre em Geofísica
no Centro de Geociências,
Universidade Federal do Pará

Data de Aprovação :

Banca de Dissertação:

Dr. Cícero Roberto Teixeira Régis (Orientador)

Dr. Luiz Rijo

Dr. Antônio Abel Gonzalez Carrasquilla

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação(CIP)

Biblioteca Geól. Rdº Montenegro G. de Montalvão

Silva, Valdelírio da Silva e

S586e Estudo comparativo das técnicas de elementos finitos e equação integral na modelagem eletromagnética bidimensional / Valdelírio da Silva e Silva; orientador, Cícero Roberto Teixeira Régis. - 2007. 63 f.: il.

Dissertação (Mestrado em Geofísica) - Universidade Federal do Pará, Centro de Geociências, Curso de Pós-Graduação em Geofísica, Belém, 2006.

1. Elementos finitos. 2. Modelagem numérica eletromagnética.
3. Equação integral. I. Universidade Federal do Pará II. Régis, Cícero Roberto Teixeira, Orient. III. Título.

CDD 20º ed.: 620.00151535

*Aos meus primeiros grandes mestres:
Maria Izabel e Valdelírio Ferreira, meus pais.*

AGRADECIMENTOS

Ao professor Dr. Cícero Roberto Teixeira Régis pela franca amizade, pelas sugestões, incentivos, ensinamentos e correções durante a orientação desse trabalho

Ao professor Dr. Luiz Rijo pela sugestão ao tema dessa dissertação, por sua irrestrita disponibilidade em eximir minhas dúvidas e pela participação nas correções e sugestões de alterações no texto dessa dissertação.

Aos professores Dr. Marcos Welby Correa Silva e Dr. Antônio Abel Gonzalez Carrasquilla pelas correções e modificações sugeridas para melhor apresentação dessa dissertação.

Aos amigos do mestrado e doutorado do CPGf, Brenda Silvana, Rigler Aragão, Charles Ricardo, Márcio Murilo, Glauco Lira, Frayzer Almeida, Rodrigo Erasmo, Victor Tocantins e Antônio Vinícios pelas ajudas dispensadas e pela convivência agradável. Em especial, a esses dois últimos citados, por suas importantíssimas elucidaciones na confecção do algoritmo de Elementos Finitos ou sobre a utilização de softwares para uma melhor apresentação desse trabalho.

Ao corpo docente e administrativo do CPGf pelo bom suporte instrumental e acadêmico que proporcionaram a realização deste trabalho, em particular a Beníldes Lopes por sempre se dispor a ajudar em questões burocráticas.

A minha esposa Débora Cristina e a minha filha Laís Sansara por compreenderem a necessidade de minha ausência nos muitos momentos nesse tempo dispendido no mestrado.

Ao meu primeiro orientador Dr. Om Prakash Verma (in memoriam), pelos estímulos que senti ao ver seu entusiasmo em fazer ciência e pelo aprendizado decorrente não só de métodos elétricos e eletromagnéticos, mas também ao ouvir seus relatos de experiência.

RESUMO

Os métodos numéricos de Elementos Finitos e Equação Integral são comumente utilizados para investigações eletromagnéticas na Geofísica, e, para essas modelagens é importante saber qual algoritmo é mais rápido num certo modelo geofísico. Neste trabalho são feitas comparações nos resultados de tempo computacional desses dois métodos em modelos bidimensionais com heterogeneidades condutivas num semiespaço resistivo energizados por uma linha infinita de corrente (com 1000Hz de frequência) e situada na superfície paralelamente ao "strike" das heterogeneidades. Após a validação e otimização dos programas analisamos o comportamento dos tempos de processamento nos modelos de corpos retangulares variando-se o tamanho, o número e a inclinação dos corpos. Além disso, investigamos nesses métodos as etapas que demandam maior custo computacional. Em nossos modelos, o método de Elementos Finitos foi mais vantajoso que o de Equação Integral, com exceção na situação de corpos com baixa condutividade ou com geometria inclinada.

Palavras-chave: Modelagem numérica eletromagnética. Elementos finitos. Equação integral.

ABSTRACT

The Finite Element and the Integral Equation numerical methods are commonly used in electromagnetic investigations in Geophysics. In those cases it is important to determine which algorithm is fastest for each geophysical model. In this work we compare computer times for two-dimensional modeling with both methods. The models studied here are formed by conductive rectangular bodies in a resistive half-space, energized by an infinite current line located on the surface and parallel to the strike of the inhomogeneities. The currents in all models operate in a frequency of 1000Hz. After validating and optimizing our codes, we analyze the processing times for several models, varying the number of bodies, their sizes and their tilt. We also investigated which parts of the programs demand the greatest computer times. We found that the Finite Element method performs faster than the Integral Equation method in all models except those with low conductivity bodies or with inclined bodies.

Keywords: Electromagnetic numerical modeling. Finite element. Integral equation.

LISTA DE FIGURAS

2.1	Orientação adotada dos eixos coordenados.	15
2.2	Exemplo de um elemento triangular com sua numeração local de nós e suas respectivas coordenadas	19
2.3	Funções base de um elemento triangular	20
2.4	Exemplo de uma malha geométrica 2D de Elementos Finitos	22
2.5	Ilustração de discretização em Equação Integral para uma heterogenidade . .	25
2.6	Modelo geral para uma heterogenidade vertical	28
2.7	Curvas do modelo Hohmann-Coggon. (a) Amplitude e Fase de H_x/H_z^{inc} de Hohmann e Coggon. (b) Amplitude e Fase de H_z/H_z^{inc} de Hohmann e Coggon. (c) Amplitude de H_x/H_z^{inc} . (d) Amplitude de H_z/H_z^{inc} . (e) Fase de H_x/H_z^{inc} . (f) Fase de H_z/H_z^{inc}	35
2.8	Avaliação da largura das células na discretização de Equação Integral. $\sigma_2/\sigma_1 = 100$. Curvas de amplitude e fase. (a) Amplitude de E_y/E_y^{inc} . (b) Fase de E_y . (c) Amplitude de H_x/H_z^{inc} . (d) Fase de H_x/H_z^{inc} . (e) Amplitude de H_z/H_z^{inc} . (f) Fase de H_z/H_z^{inc}	36
2.9	Curvas de amplitude e fase em contraste $\sigma_2/\sigma_1 = 100$, obtidas após as avaliações dos parâmetros de Elementos Finitos e de Equação Integral sobre o modelo com $D = 700$ m, $P = 45$ m, $C = 150$ m e $L = 25$ m. (a) Amplitude de E_y/E_y^{inc} . (b) Fase de E_y/E_y^{inc} . (c) Amplitude de H_x/H_z^{inc} . (d) Fase de H_x/H_z^{inc} . (e) Amplitude de H_z/H_z^{inc} . (f) Fase de H_z/H_z^{inc}	37
2.10	Curvas de amplitude e fase em contraste $\sigma_2/\sigma_1 = 500$, obtidas após as avaliações dos parâmetros de Elementos Finitos e de Equação Integral sobre o modelo com $D = 700$ m, $P = 45$ m, $C = 150$ m e $L = 25$ m. (a) Amplitude de E_y/E_y^{inc} . (b) Fase de E_y/E_y^{inc} . (c) Amplitude de H_x/H_z^{inc} . (d) Fase de H_x/H_z^{inc} . (e) Amplitude de H_z/H_z^{inc} . (f) Fase de H_z/H_z^{inc}	38
2.11	Curvas de amplitude e fase em contraste $\sigma_2/\sigma_1 = 1000$, obtidas após as avaliações dos parâmetros de Elementos Finitos e de Equação Integral sobre o modelo com $D = 700$ m, $P = 45$ m, $C = 150$ m e $L = 25$ m. (a) Amplitude de E_y/E_y^{inc} . (b) Fase de E_y/E_y^{inc} . (c) Amplitude de H_x/H_z^{inc} . (d) Fase de H_x/H_z^{inc} . (e) Amplitude de H_z/H_z^{inc} . (f) Fase de H_z/H_z^{inc}	39

2.12	Curvas das partes real e imaginária em contraste $\sigma_2/\sigma_1 = 100$, obtidas após as avaliações dos parâmetros de Elementos Finitos e de Equação Integral sobre o modelo com $D = 700$ m, $P = 45$ m, $C = 150$ m e $L = 25$ m. (a) Parte real de E_y/E_y^{inc} . (b) Parte imaginária de E_y/E_y^{inc} . (c) Parte real de H_x/H_z^{inc} . (d) Parte imaginária de H_x/H_z^{inc} . (e) Parte real de H_z/H_z^{inc} . (f) Parte imaginária de H_z/H_z^{inc}	40
2.13	Curvas das partes real e imaginária em contraste $\sigma_2/\sigma_1 = 500$, obtidas após as avaliações dos parâmetros de Elementos Finitos e de Equação Integral sobre o modelo com $D = 700$ m, $P = 45$ m, $C = 150$ m e $L = 25$ m. (a) Parte real de E_y/E_y^{inc} . (b) Parte imaginária de E_y/E_y^{inc} . (c) Parte real de H_x/H_z^{inc} . (d) Parte imaginária de H_x/H_z^{inc} . (e) Parte real de H_z/H_z^{inc} . (f) Parte imaginária de H_z/H_z^{inc}	41
2.14	Curvas das partes real e imaginária em contraste $\sigma_2/\sigma_1 = 1000$, obtidas após as avaliações dos parâmetros de Elementos Finitos e de Equação Integral sobre o modelo com $D = 700$ m, $P = 45$ m, $C = 150$ m e $L = 25$ m. (a) Parte real de E_y/E_y^{inc} . (b) Parte imaginária de E_y/E_y^{inc} . (c) Parte real de H_x/H_z^{inc} . (d) Parte imaginária de H_x/H_z^{inc} . (e) Parte real de H_z/H_z^{inc} . (f) Parte imaginária de H_z/H_z^{inc}	42
3.1	Desempenho computacional de Elementos Finitos mediante o número de elementos da matriz global semibandeada (com semibanda fixa)	44
3.2	Desempenho computacional de Elementos Finitos mediante o número de elementos da matriz global semibandeada (com alteração na semibanda)	45
3.3	Desempenho computacional de Equação Integral mediante o número de células da discretização	46
3.4	Desempenho computacional para vários corpos verticais e três contrastes de condutividade	48
3.5	Desempenho computacional para o corpo variando-se a extensão lateral e três contrastes de condutividade	49
3.6	Desempenho computacional para corpo variando-se o comprimento e três contrastes de condutividade	51
3.7	Modelo com um corpo vertical e um horizontal	52
3.8	Comportamento do tempo de processamento para o modelo formado por um corpo vertical e um horizontal	52
3.9	Ilustração de aproximações de corpos inclinados por células quadradas	53

3.10	Modelo com malha idealizada num corpo inclinado	54
3.11	Exemplo de malha com passos em progressão geométrica num corpo inclinado de 45° com a horizontal	55
3.12	Comportamento dos tempos de processamento para modelos com corpos de 30°,45° e 60° de inclinação	55
3.13	Curvas para o modelo de um corpo inclinado a 30° em relação a superfície. $\sigma_1 = 0,001$ S/m e $\sigma_2 = 1$ S/m. (a) Amplitude de E_y/E_y^{inc} . (b) Fase de E_y/E_y^{inc} . (c) Amplitude de H_x/H_z^{inc} . (d) Fase de H_x/H_z^{inc} . (e) Amplitude de H_z/H_z^{inc} . (f) Fase de H_z/H_z^{inc}	57
3.14	Curvas para o modelo de um corpo inclinado a 45° em relação a superfície. $\sigma_1 = 0,001$ S/m e $\sigma_2 = 1$ S/m. (a) Amplitude de E_y/E_y^{inc} . (b) Fase de E_y/E_y^{inc} . (c) Amplitude de H_x/H_z^{inc} . (d) Fase de H_x/H_z^{inc} . (e) Amplitude de H_z/H_z^{inc} . (f) Fase de H_z/H_z^{inc}	58
3.15	Curvas para o modelo de um corpo inclinado a 60° em relação a superfície. $\sigma_1 = 0,001$ S/m e $\sigma_2 = 1$ S/m. (a) Amplitude de E_y/E_y^{inc} . (b) Fase de E_y/E_y^{inc} . (c) Amplitude de H_x/H_z^{inc} . (d) Fase de H_x/H_z^{inc} . (e) Amplitude de H_z/H_z^{inc} . (f) Fase de H_z/H_z^{inc}	59

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	13
2	METODOLOGIA	15
2.1	CONSIDERAÇÕES INICIAIS	15
2.2	MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS	17
2.3	TÉCNICA DA EQUAÇÃO INTEGRAL	23
2.4	VALIDAÇÃO DOS CÓDIGOS-FONTE	28
2.5	ANÁLISE DE PARÂMETROS	29
2.5.1	Elementos finitos	29
2.5.1.1	Discretizações verticais	30
2.5.1.2	Discretizações horizontais	30
2.5.2	Equação integral	31
2.5.2.1	Largura das células	31
2.5.2.2	Número de observações	32
2.5.2.3	Cálculo das Funções de Green	33
3	RESULTADOS	43
3.1	AVALIAÇÕES DE TEMPO DE PROCESSAMENTO	43
3.1.1	Análise dos tempos em relação à discretização	43
3.1.2	Variação no número de heterogeneidades verticais	46
3.1.3	Variação da extensão lateral	48
3.1.4	Variação do comprimento	50
3.1.5	Uma heterogeneidade vertical e outra horizontal	51
3.1.6	Heterogeneidade inclinada	52
4	CONSIDERAÇÕES FINAIS	60

1 INTRODUÇÃO

Desde a década de 60, do século passado, a modelagem computacional em geofísica é utilizada para fazer interpretações de dados em investigações eletromagnéticas (EM), (COGGON, 1971; HOHMANN, 1971). Nos problemas de difusão EM, baseados na indução eletromagnética, as técnicas de soluções numéricas mais utilizadas são as de Diferenças Finitas, Elementos Finitos e Equação Integral, usadas isoladamente ou mesmo de forma híbrida (FARQUHARSON; DUCKWORTH; OLDENBURG, 2006; LEE; PRIDMORE; MORRISON, 1981). A formulação matemática dessas técnicas aplicadas à geofísica nas investigações EM são amplamente descritas na literatura especializada (COGGON, 1971; HOHMANN, 1971; STOYER; GREENFIELD, 1976). Neste trabalho faremos uma análise comparativa do desempenho computacional entre as técnicas de Elementos Finitos e Equação Integral aplicadas à modelagem geofísica eletromagnética bidimensional. Conhecer as vantagens, limitações e o desempenho computacional dessas técnicas nos serve para tomadas de decisões na escolha de qual é nos conveniente utilizar em problemas mais exigentes computacionalmente. Os tempos de processamento em qualquer uma das técnicas nos modelos avaliados aqui são muito curtos, no entanto, quando aplicados, por exemplo, em um processo de inversão, o programa de modelagem direta é executado milhares de vezes. Assim, saber que técnica demanda o menor custo computacional é de crucial importância para a inversão. Além disso, mesmo que a modelagem trabalhada aqui seja bidimensional, podemos usar os resultados para inferir comportamentos que podemos esperar na modelagem 3D.

Nos modelos apresentados neste trabalho o transmissor que supre energia eletromagnética ao meio geológico é uma linha infinita de corrente dependente da frequência e situada na superfície paralelamente ao "strike" das heterogeneidades. O parâmetro comparativo que adotamos foi essencialmente o tempo de processamento das duas técnicas numéricas.

Para a comparação, calculamos as respostas de um mesmo modelo geofísico com as duas técnicas, otimizando os parâmetros referentes a cada uma para obter o mesmo grau de precisão nas respostas. Os modelos estudados aqui são formados por um semi-espço homogêneo e isotrópico de condutividade finita, que chamamos de meio encaixante, no qual estão presentes heterogeneidades bidimensionais. Sobreposto ao meio encaixante, um semi-espço de condutividade zero representa o ar.

Para um mesmo tipo de heterogeneidade, calculamos as respostas de vários modelos diferentes, variando o número de corpos ou o tamanho destes. Assim, por exemplo, iniciamos

com um modelo simples constituído de um único corpo retangular e comparamos os tempos de processamento. A seguir, calculamos as respostas para um modelo com dois corpos idênticos ao do primeiro modelo, separados horizontalmente. Depois, procedemos da mesma maneira com três corpos, e assim por diante, aumentando a complexidade do modelo em termos do número de corpos. Comparações semelhantes são feitas variando a largura do corpo ou sua extensão vertical e também incluindo corpos horizontais e verticais em um mesmo modelo. O último modelo examinado foi o de um corpo inclinado, para o qual comparamos os tempos de processamento em diferentes inclinações, que demandam diferentes discretizações das duas técnicas numéricas.

O nível de discretização em cada caso depende das condutividades no modelo e da frequência utilizada. Em todos os modelos, utilizamos a frequência de 1000 Hz, a condutividade do meio encaixante $\sigma_1 = 0,001$ S/m e das heterogeneidades tendo $\sigma_2 = 0,1, 0,5$ ou 1 S/m.

Nessas investigações, realizamos o registro dos tempos de processamento necessários a cada etapa dos algoritmos, para identificar as tarefas que demandam os maiores tempos em cada caso.

Nas situações experimentadas, com exceção dos modelos de corpos inclinados e de alguns com heterogeneidade de baixa condutividade ($0,1$ S/m), o método de Elementos Finitos foi mais rápido que o de Equação Integral.

2 METODOLOGIA

2.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Os modelos geofísicos aqui estudados consistem de uma ou mais heterogeneidades bidimensionais inseridas num meio encaixante constituído por um semi-espço homogêneo e isotrópico. Sobreposto a este incluímos outro semi-espço, de condutividade zero, representando o ar. O transmissor T_x , que supre energia eletromagnética ao meio geológico, é uma linha infinita de corrente dependente da frequência $I(\omega)$ situada ao longo do eixo y , na superfície, paralela ao "strike". O meio encaixante apresenta condutividade σ_1 e a heterogeneidade σ_2 . A orientação adotada dos eixos ortogonais é mostrada na Figura 2.1 abaixo.

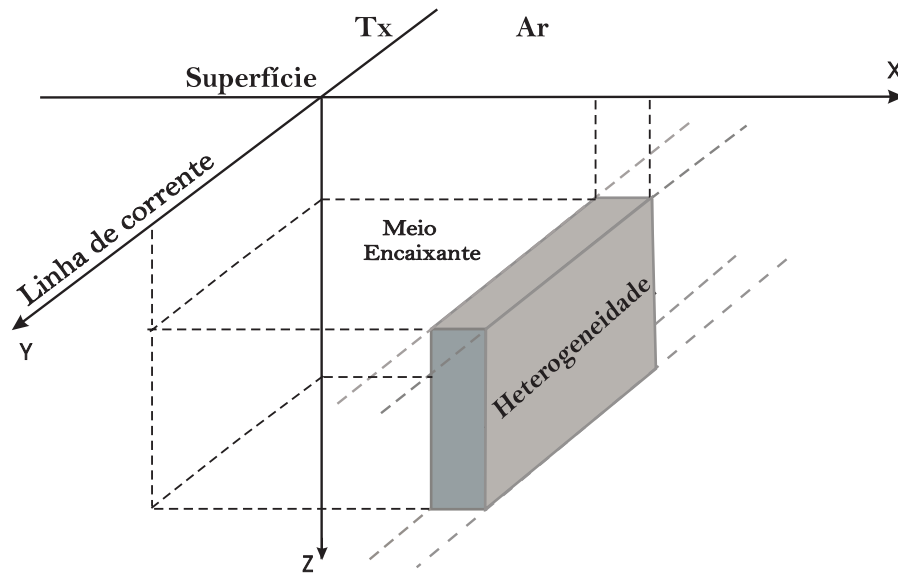


Figura 2.1: Orientação adotada dos eixos coordenados.

Antes de descrevermos o método de Elementos Finitos e a Técnica de Equação Integral, aplicados a modelagem geofísica eletromagnética 2D, devemos saber qual embasamento teórico eles têm em comum e, a partir de que ponto eles se divergem. Os métodos eletromagnéticos geofísicos têm como ponto de partida as equações de Maxwell, que no domínio

da frequência, apresentam-se como:

$$\nabla \cdot \epsilon \vec{E} = 0, \quad (2.1)$$

$$\nabla \times \vec{H} - \eta \vec{E} = \vec{J}_{Tx}, \quad (2.2)$$

$$\nabla \cdot \vec{H} = 0, \quad (2.3)$$

$$\nabla \times \vec{E} + \zeta \vec{H} = \vec{0}, \quad (2.4)$$

em que \vec{J}_{Tx} é a densidade de corrente do transmissor, $\eta = \sigma + i\omega\epsilon$ a admitividade e $\zeta = i\omega\mu$ a impeditividade.

O transmissor T_x supre energia eletromagnética ao meio geológico e o receptor R_x capta as informações sobre o meio na forma de campo elétrico ou magnético. Seguindo Rijo (2002), separamos esses campos em primários e secundários. Chamamos campo primário aquele que seria observado no meio na ausência das heterogeneidades, ou seja, apenas com o modelo 1D, sujeito à mesma fonte T_x . O campo secundário é dado pela diferença entre o campo total no meio 2D e o campo primário.

As equações para o campo primário são:

$$\nabla \times \vec{H}^p - \eta^p \vec{E}^p = \vec{J}_{Tx}, \quad (2.5)$$

$$\nabla \times \vec{E}^p + \zeta^p \vec{H}^p = \vec{0}, \quad (2.6)$$

onde $\eta^p = \sigma^p + i\omega\epsilon^p$ e $\zeta^p = i\omega\mu^p$; e como os campos eletromagnéticos totais são somatórias dos campos primário e secundário, i.e., $\vec{E} = \vec{E}^p + \vec{E}^s$ e $\vec{H} = \vec{H}^p + \vec{H}^s$, sendo \vec{E}^s e \vec{H}^s contribuições da heterogeneidade, reescrevemos as equações (2.2) e (2.4) da seguinte forma:

$$\nabla \times (\vec{H}^p + \vec{H}^s) - (\eta^p + \Delta\eta)(\vec{E}^p + \vec{E}^s) = \vec{J}_{Tx}, \quad (2.7)$$

$$\nabla \times (\vec{E}^p + \vec{E}^s) + (\zeta^p + \Delta\zeta)(\vec{H}^p + \vec{H}^s) = \vec{0}, \quad (2.8)$$

em que $\eta^p + \Delta\eta = \eta$ e $\zeta^p + \Delta\zeta = \zeta$ descrevem as propriedades físicas eletromagnéticas do modelo primário e suas variações ($\Delta\eta = \Delta\sigma + i\omega\Delta\epsilon$ e $\Delta\zeta = i\omega\Delta\mu$), decorrentes da heterogeneidade. Utilizando (2.5) e (2.6) nas equações (2.7) e (2.8), chegamos às expressões:

$$\nabla \times \vec{H}^s - \eta \vec{E}^s = \Delta\eta \vec{E}^p, \quad (2.9)$$

$$\nabla \times \vec{E}^s + \zeta \vec{H}^s = -\Delta\zeta \vec{H}^p, \quad (2.10)$$

ou

$$\nabla \times \vec{H}^s - \eta^p \vec{E}^s = \Delta\eta \vec{E}, \quad (2.11)$$

$$\nabla \times \vec{E}^s + \zeta^p \vec{H}^s = -\Delta\zeta \vec{H}. \quad (2.12)$$

Esses dois pares de equações caracterizam sistemas em que as incógnitas são as componentes dos campos magnético e elétrico secundários. Nas equações (2.9) e (2.10), os vetores-fonte são dados pelos campos primários acompanhados das variações das propriedades físicas. A partir destas equações é que desenvolvemos o método de elementos finitos. Nas equações (2.11) e (2.12) os vetores-fonte são contribuições dos campos magnético e elétrico totais, acompanhados das variações das propriedades físicas devido à heterogeneidade. É sobre este par de equações que se desenvolve o método de Equação Integral.

Temos, nas equações (2.9 a 2.12), o comportamento geral da teoria eletromagnética em modelos geofísicos tipo heterogeneidade 2D e meio encaixante. Fazemos, no entanto, algumas restrições às propriedades físicas. Consideramos aqui, que os meios são não-magnéticos, isto é, que a permeabilidade magnética é a mesma e igual à permeabilidade no vácuo ($\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\text{H/m}$), logo $\Delta\mu = 0$. Além disso, como a frequência característica da fonte transmissora é baixa ($< 10^5\text{Hz}$), temos $\sigma \gg \omega\epsilon$ que caracteriza o regime quase-estático, logo $\Delta\eta = \Delta\sigma, \eta^p = \sigma^p$ e $\eta = \sigma^p + \Delta\sigma$. Portanto das equações (2.9 a 2.12) obtemos:

$$\nabla \times \vec{H}^s - (\sigma^p + \Delta\sigma)\vec{E}^s = \Delta\sigma\vec{E}^p, \quad (2.13)$$

$$\nabla \times \vec{E}^s + i\omega\mu_0\vec{H}^s = \vec{0}, \quad (2.14)$$

e

$$\nabla \times \vec{H}^s - \sigma^p\vec{E}^s = \Delta\sigma\vec{E}, \quad (2.15)$$

$$\nabla \times \vec{E}^s + i\omega\mu_0\vec{H}^s = \vec{0}. \quad (2.16)$$

2.2 MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS

O método de Elementos Finitos é um método numérico de busca de solução de equações diferenciais que possuem condições de contorno conhecidas e que se baseia no método das projeções. O método das projeções consiste em obter uma solução aproximada da solução da equação diferencial, usando uma combinação linear finita de funções conhecidas, chamadas funções base, que também satisfazem as condições de contorno. Se a solução de um certo problema pertence a algum espaço de funções de dimensão infinita, então a solução aproximada é obtida num espaço de dimensão finita, gerado pelas funções base. A projeção da solução sobre o subespaço de dimensão finita é a solução aproximada. Daí, se $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m$, são as funções base, a solução aproximada u_m é dada por $u_m = \sum_{J=1}^m \alpha_J \cdot \varphi_J$, e o problema então consiste na determinação dos coeficientes α_J . Dentre várias aproximações possíveis, o método que aqui empregamos, foi o de Galerkin (RIJO, 2002). Este método é baseado no conceito

de ortogonalidade de funções, ou seja, dadas duas funções u e v , definidas numa região Ω , dizemos que elas são ortogonais se $\langle u, v \rangle = \int_{\Omega} uv \, d\Omega = 0$. Se estivermos diante do problema $L(u) = b$, em que L é um operador diferencial que determina a equação diferencial, u a função que desejamos encontrar e b a fonte; então uma solução aproximada u_m substituída no problema implicará no aparecimento de uma função resíduo r , ou seja, $L(u_m) = b + r$. Uma melhor aproximação é obtida quando r é ortogonal a u_m , o método de Galerkin consiste então em determinar u_m de forma a preservar a propriedade de ortogonalidade da solução exata, isto é, que a função resíduo seja ortogonal a todas as funções base $\varphi_1, \dots, \varphi_m$, ou seja,

$$\begin{aligned} \langle r, \varphi_I \rangle &= \langle L(u_m) - b, \varphi_I \rangle = 0, & I = 1, \dots, m, \\ \langle L(u_m), \varphi_I \rangle &= \langle b, \varphi_I \rangle, \\ \int_{\Omega} L(u_m) \varphi_I \, d\Omega &= \int_{\Omega} b \varphi_I \, d\Omega, & (2.17) \\ \int_{\Omega} L\left(\sum_{J=1}^m \alpha_J \varphi_J\right) \varphi_I \, d\Omega &= \int_{\Omega} b \varphi_I \, d\Omega, \\ \sum_{J=1}^m \alpha_J \int_{\Omega} L(\varphi_J) \varphi_I \, d\Omega &= \int_{\Omega} b \varphi_I \, d\Omega, \end{aligned}$$

desta última equação obtemos um sistema linear $Gc = F$, com incógnitas $c = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)^t$, em que $F = (f_1, \dots, f_m)^t$, sendo $f_I = \int_{\Omega} b \varphi_I \, d\Omega$, é chamado vetor fonte global, e $G = (g_{IJ})$, com $g_{IJ} = \int_{\Omega} L(\varphi_J) \varphi_I \, d\Omega$, matriz global. A matriz G depende fundamentalmente das funções base $\{\varphi_1, \dots, \varphi_m\}$ que geram o subespaço onde estamos procurando a solução aproximada u_m .

O método cria sub-regiões limitadas do domínio Ω , chamadas de elementos finitos, dentro dos quais as funções base são definidas e busca as combinações das funções base que satisfaçam as condições definidas. Em vez de um problema contínuo, resolve-se um problema discreto cuja solução aproxima a solução da equação diferencial original.

Passemos então ao nosso problema; mas como há simetria na configuração geométrica dos modelos, fazemos algumas simplificações. Considerando que estamos tratando do modo TE , pois a linha é paralela ao "strike" em y , não temos as componentes H_y, E_x, E_z e variações na

direção de y , $\frac{\partial}{\partial y} = 0$; então das equações (2.13) e (2.14) obtemos:

$$\frac{\partial H_x^s}{\partial z} - \frac{\partial H_z^s}{\partial x} - \eta E_y^s = \Delta \sigma E_y^p, \quad (2.18)$$

$$- \frac{\partial E_y^s}{\partial z} + \zeta H_x^s = 0, \quad (2.19)$$

$$\frac{\partial E_y^s}{\partial x} + \zeta H_z^s = 0. \quad (2.20)$$

Isolando H_x^s e H_z^s dessas últimas equações e substituindo na Equação (2.18):

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\zeta} \frac{\partial E_y^s}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\zeta} \frac{\partial E_y^s}{\partial x} \right) - \eta E_y^s = \Delta \sigma E_y^p \quad (2.21)$$

Após ter definido a região Ω domínio da aplicação do operador que define a equação diferencial, dividimos essa região em sub-regiões geométricas planas Ω_e , que determina um elemento e , aqui considerado como triangular (como ilustra a Figura 2.2), de modo que $\Omega = \bigcup_{e=1}^n \Omega_e$ e $\Omega_e \cap \Omega_s = \emptyset$, se $e \neq s$, sendo n o número de elementos. Trabalhamos aqui apenas com elementos triangulares, elementos com outras formas são discutidos em Becker, Carey e Olden (1981). Os nós locais (vértices dos triângulos) são numerados, conforme mostrado na Figura 2.2.

As funções base φ_i tomadas sobre cada elemento são os planos, que representamos na Figura (2.3), $\varphi_i = \frac{1}{2A}(a_i + b_i x + c_i z)$, caracterizadas por $\varphi_i(i) = 1$ e $\varphi_i(j) = 0$, se $i \neq j$, tendo $a_1 = x_2 z_3 - x_3 z_2$, $a_2 = x_3 z_1 - x_1 z_3$, $a_3 = x_1 z_2 - x_2 z_1$, $b_1 = z_2 - z_3$, $b_2 = z_3 - z_1$, $b_3 = z_1 - z_2$, $c_1 = x_3 - x_2$, $c_2 = x_1 - x_3$, $c_3 = x_2 - x_1$, e A a área do elemento e , dada por $A = \frac{1}{2} | a_1 + a_2 + a_3 |$.

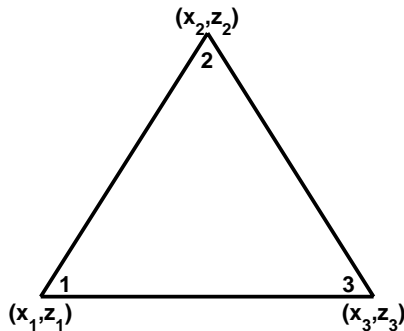


Figura 2.2: Exemplo de um elemento triangular com sua numeração local de nós e suas respectivas coordenadas

Sobre a Equação (2.21) aplicamos o método de Galerkin em cada elemento e ; inicialmente

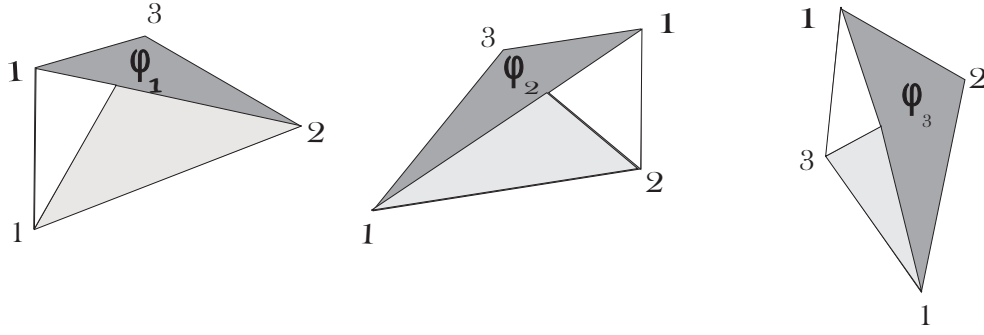


Figura 2.3: Funções base de um elemento triangular

peelo passo indicado em (2.17), para obtermos:

$$\int_{\Omega_e} \varphi_i \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\zeta} \frac{\partial E_y^s}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\zeta} \frac{\partial E_y^s}{\partial z} \right) \right] dx dz - \int_{\Omega_e} \eta \varphi_i E_y^s dx dz = \int_{\Omega_e} \Delta \sigma \varphi_i E_y^p dx dz, \quad (2.22)$$

Sobre a primeira integral, do lado esquerdo da Equação (2.21), utilizando as identidades:

$$\varphi_i \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\zeta} \frac{\partial E_y^s}{\partial z} \right) \right] = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\zeta} \varphi_i \frac{\partial E_y^s}{\partial z} \right) - \frac{1}{\zeta} \frac{\partial \varphi_i}{\partial z} \frac{\partial E_y^s}{\partial z},$$

e

$$\varphi_i \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\zeta} \frac{\partial E_y^s}{\partial x} \right) \right] = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\zeta} \varphi_i \frac{\partial E_y^s}{\partial x} \right) - \frac{1}{\zeta} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \frac{\partial E_y^s}{\partial x},$$

chegamos a:

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{\zeta} \int_{\Omega_e} \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \frac{\partial E_y^s}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial z} \frac{\partial E_y^s}{\partial z} \right) dx dz - \int_{\Omega_e} \eta \varphi_i E_y^s dx dz = \\ & \int_{\Omega_e} \Delta \sigma \varphi_i E_y^p dx dz - \int_{\Omega_e} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\varphi_i \frac{1}{\zeta} \frac{\partial E_y^s}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\varphi_i \frac{1}{\zeta} \frac{\partial E_y^s}{\partial z} \right) \right] dx dz, \end{aligned}$$

e fazendo-se uso das equações (2.19) e (2.20) sobre a última integral, obtemos:

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{\zeta} \int_{\Omega_e} \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \frac{\partial E_y^s}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial z} \frac{\partial E_y^s}{\partial z} \right) dx dz - \int_{\Omega_e} \eta \varphi_i E_y^s dx dz = \\ & \int_{\Omega_e} \Delta \sigma \varphi_i E_y^p dx dz + \int_{\Omega_e} \left[\frac{\partial}{\partial x} (\varphi_i H_z^s) - \frac{\partial}{\partial z} (\varphi_i H_x^s) \right] dx dz. \end{aligned}$$

Sobre esta última integral podemos usar o teorema de Green, para obter:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\zeta} \int_{\Omega_e} \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \frac{\partial E_y^s}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial z} \frac{\partial E_y^s}{\partial z} \right) dx dz + \int_{\Omega_e} \eta \varphi_i E_y^s dx dz = \\ & - \int_{\Omega_e} \Delta \sigma \varphi_i E_y^p dx dz - \oint_{\partial \Omega_e} (\varphi_i \vec{H}^s) \cdot \hat{t} dl, \end{aligned} \quad (2.23)$$

Em cada elemento devemos calcular a integral de linha $\oint_{\partial\Omega_e} (\varphi_i \vec{H}^s) \cdot \hat{t} dl$, mas com o sentido de percurso adotado, em virtude da continuidade da componente tangencial do campo magnético, essas integrais se anularão nos segmentos da fronteira a dois elementos quando é feita a contribuição de todos elementos para solução no domínio Ω , restando apenas as integrais de linha nos segmentos que delimitam as bordas desse domínio. No entanto, como adotamos nessas bordas a condição de Dirichlet homogênea sobre E_y^s , as integrais de linha sobre \vec{H}^s também são nulas. Assim resultante dessas considerações e tomando as combinações $E_y^s = E_1^s \varphi_1 + E_2^s \varphi_2 + E_3^s \varphi_3$ e $E_y^p = E_1^p \varphi_1 + E_2^p \varphi_2 + E_3^p \varphi_3$ e as derivadas necessárias, na Equação (2.23), teremos:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\zeta} \sum_{j=1}^3 E_j^s \int_{\Omega_e} \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial z} \frac{\partial \varphi_j}{\partial z} \right) dx dz + \eta \sum_{j=1}^3 E_j^s \int_{\Omega_e} \varphi_i \varphi_j dx dz = \\ & - \Delta \sigma \sum_{j=1}^3 E_j^p \int_{\Omega_e} \varphi_i \varphi_j dx dz, \end{aligned} \quad (2.24)$$

em que E_j^p são os valores do campo primário E_y^p nos nós locais $j = 1, 2, 3$ do elemento, calculados pela Equação (2.27) dada mais adiante.

Resolvendo as integrais de (2.24), algumas com auxílio da identidade:

$$\int_{\Omega_e} \varphi_1^\alpha \varphi_2^\beta \varphi_3^\gamma dx dz = 2A \frac{\alpha! \beta! \gamma!}{(\alpha + \beta + \gamma + 2)!},$$

obtemos a matriz local e vetor fonte local dados por:

$$G^e = \frac{1}{\zeta} \frac{1}{4A} \begin{pmatrix} b_1^2 + c_1^2 & b_1 b_2 + c_1 c_2 & b_1 b_3 + c_1 c_3 \\ b_1 b_2 + c_1 c_2 & b_2^2 + c_2^2 & b_2 b_3 + c_2 c_3 \\ b_1 b_3 + c_1 c_3 & b_2 b_3 + c_2 c_3 & b_3^2 + c_3^2 \end{pmatrix} + \eta \frac{A}{12} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad (2.25)$$

$$F^e = -\frac{\Delta \sigma A}{12} \begin{pmatrix} 2E_1^p + E_2^p + E_3^p \\ E_1^p + 2E_2^p + E_3^p \\ E_1^p + E_2^p + 2E_3^p \end{pmatrix}. \quad (2.26)$$

Diante de G^e e F^e locais parte-se então para construção da matriz global $G = \sum_{e=1}^n G^e$ e do vetor fonte global $F = \sum_{e=1}^n F^e$, que são descritas detalhadamente pelas notas de aula de Rijo (2002). A matriz global G é simétrica, esparsa e bandada, o que facilita a resolução do sistema $Gc = F$, que aqui é resolvido por eliminação gaussiana. Após a determinação da solução, utilizamos as equações (2.19) e (2.20) para determinar H_x^s e H_z^s

derivando numericamente E_y^s . O campos totais E_y , H_x e H_z são encontrados somando-se os campos secundários às componentes primárias:

$$E_y^p(x, z) = -\frac{\zeta I(\omega)}{\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-u_1(z-z_0)}}{u_0 + u_1} \cos(k_x(x - x_0)) dk_x, \quad (2.27)$$

$$H_x^p(x, z) = \frac{I(\omega)}{\pi} \int_0^\infty \frac{u_1}{u_0 + u_1} e^{-u_1(z-z_0)} \cos(k_x(x - x_0)) dk_x, \quad (2.28)$$

$$H_z^p(x, z) = -\frac{I(\omega)}{\pi} \int_0^\infty \frac{k_x}{u_0 + u_1} e^{u_1(z-z_0)} \text{sen}(k_x(x - x_0)) dk_x, \quad (2.29)$$

expressas pela transformada de Fourier no domínio (k_x, z) , em que $u_0 = \sqrt{k_x^2 - k_0^2}$ e $u_1 = \sqrt{k_x^2 - k_1^2}$ são as constantes de propagação no ar e no semi-espaço inferior, respectivamente; $k_0 = \sqrt{-i\omega\mu_0\sigma_{ar}}$, $k_1 = \sqrt{-i\omega\mu_0\sigma_1}$ são os números de onda e (x_0, z_0) a posição da linha de corrente.

A exemplo de uma discretização, a Figura (2.4) mostra uma seção de malha de um modelo com uma heterogenidade.

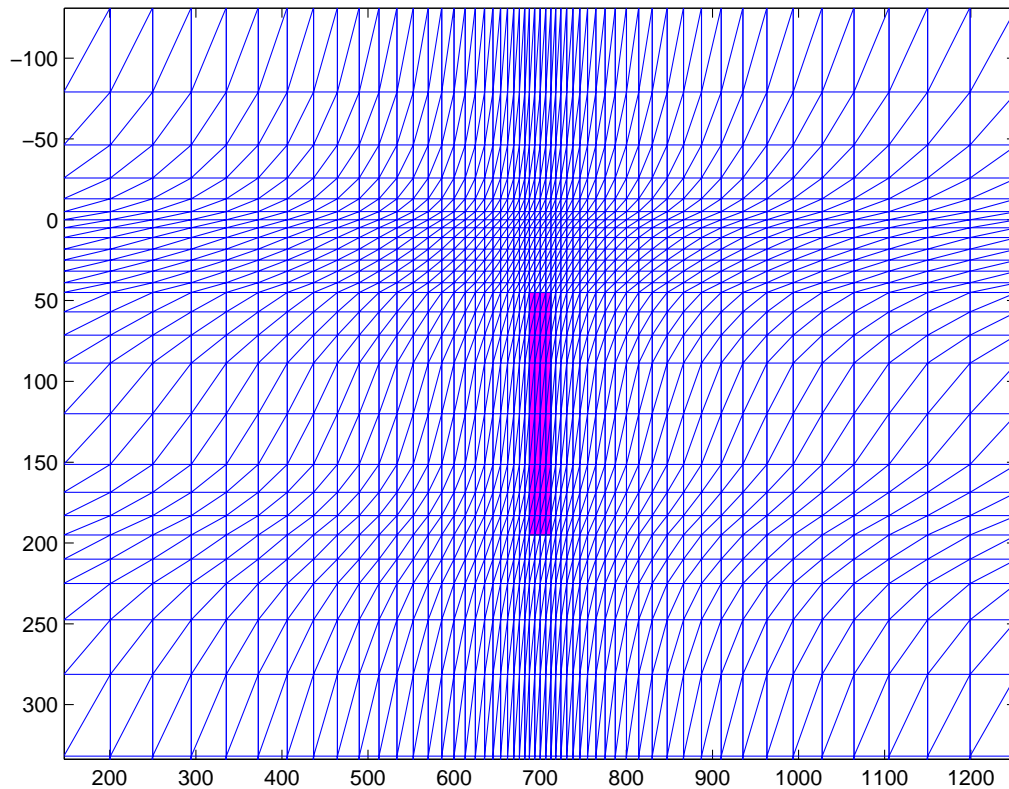


Figura 2.4: Exemplo de uma malha geométrica 2D de Elementos Finitos

2.3 TÉCNICA DA EQUAÇÃO INTEGRAL

Tomemos como ponto de partida as equações (2.15) e (2.16)

$$\begin{aligned}\nabla \times \vec{E}^s + i\omega\mu_0\vec{H}^s &= \vec{0}, \\ \nabla \times \vec{H}^s - \sigma^p\vec{E}^s &= \Delta\sigma\vec{E},\end{aligned}$$

e isolando-se \vec{H}^s da primeira equação, substituindo na segunda, escrevendo $\Delta\sigma\vec{E}$ como densidade de corrente elétrica secundária e lembrando que só existe a componente E_y do campo elétrico; obtemos a equação de Helmholtz não homogênea:

$$\nabla^2 E_y^s - k_1^2 E_y^s = -i\omega\mu_0 J_s. \quad (2.30)$$

Observe que a fonte $-i\omega\mu_0 J_s$ existe somente na heterogeneidade. E sobre a heterogeneidade imaginamos que J_s seja dada por um conjunto de infinitas linhas de correntes, onde cada uma dá uma solução da Equação (2.30), tendo como fonte uma delta de Dirac de duas dimensões centrada num ponto (x', z') , ou seja, partimos para o problema

$$\nabla^2 G(x, z, x', z') - k_1^2 G(x, z, x', z') = \delta(x - x', z - z'), \quad (2.31)$$

em que (x, z) são pontos fora ou dentro da heterogeneidade e $G(x, z, x', z')$ é uma função de Green, que representa a resposta, o campo secundário em qualquer posição (x, z) , devido a uma fonte unitária localizada na heterogeneidade.

Obtida a função de Green solução da Equação (2.31) a solução de (2.30) (Hohmann 1971) é dada por:

$$E_y^s(x, z) = \iint_{S'} J_s(x', z') G(x, z, x', z') dx' dz', \quad (2.32)$$

sendo S' a superfície transversal que delimita a heterogeneidade. Veja que $J_s(x', z') = \Delta\sigma E_y(x', z')$, então:

$$E_y^s(x, z) = \Delta\sigma \iint_{S'} E_y(x', z') G(x, z, x', z') dx' dz', \quad (2.33)$$

em que a função de Green para o campo elétrico devido a linha de corrente é dada por Rijo (2002):

$$G(x, z, x', z') = \frac{-\zeta}{2\pi} \int_0^\infty \left[\frac{u_1 - u_0}{u_1 + u_0} e^{-u_1(z+z')} + e^{-u_1|z-z'|} \right] \frac{\cos(k_x(x-x'))}{u_1} dk_x. \quad (2.34)$$

Note que a função de Green $G(x, z, x', z')$ é singular nos valores de $x = x', z = z'$ e assim é conveniente separá-la em $G = \frac{-\zeta}{2\pi}(G_s + G_{ns})$, com a parte não-singular sendo

$$G_{ns}(x, z, x', z') = \int_0^\infty \frac{u_1 - u_0}{u_1 + u_0} \frac{e^{-u_1(z+z')}}{u_1} \cos(k_x(x - x')) dk_x, \quad (2.35)$$

e

$$G_s(x, z, x', z') = \int_0^\infty \frac{e^{-u_1|z-z'|}}{u_1} \cos(k_x(x - x')) dk_x \quad (2.36)$$

a parte singular, que tem uma expressão analítica (RIJO, 2002) dada por:

$$G_s(x, z, x', z') = K_0 \left[ik_1 \sqrt{(x - x')^2 + (z - z')^2} \right] \quad (2.37)$$

em que K_0 é a função de Bessel modificada de segunda espécie, de ordem zero.

Como $E_y(x, z) - E_y^s(x, z) = E_y^p(x, z)$ tem-se a equação fundamental do método, como sendo:

$$E_y(x, z) - \Delta\sigma \int_{S'} G(x, z, x', z') E_y(x', z') dx' dz' = E_y^p(x, z),$$

ou mais explicitamente por

$$E_y(x, z) - \Delta\sigma \int_{T_x - \frac{L}{2}}^{T_x + \frac{L}{2}} \int_P^{P+C} G(x, z, x', z') E_y(x', z') dx' dz' = E_y^p(x, z), \quad (2.38)$$

que se caracteriza por ser uma equação integral de Fredholm 2D de segunda espécie, singular não homogênea (HOHMANN, 1971). O procedimento numérico, que empregamos aqui, de determinação de uma solução aproximada é descrito em Hohmann (1971), Rijo (2002) ou em Ward e Hohmann (1987) e é basicamente, após fazer uma divisão em $M \times N$ células quadradas da seção transversal da heterogeneidade, substituir as funções kernel da integral, $G(x, z, x', z')$, e fonte $E_y^p(x, z)$ por funções constantes por partes ("step-functions") nas partições do domínio definido sobre S' . Essa interpolação por "step-functions" leva a solução ter também o mesmo tipo de aproximação; e dessa maneira a Equação (2.38) passa ser então interpretada matricialmente, $\mathbf{K}\mathbf{E}_y = \mathbf{E}_y^p$ cujos elementos de \mathbf{K} serão caracterizados mais adiante.

Dividimos a área S' em M por N células quadradas de lado Δ , como ilustra a Figura (2.5). Assumimos que o campo E_y em qualquer lugar da célula é constante e o representamos geometricamente no baricentro da mesma. A discretização de S' em células quadradas permite, quando consideramos que os pontos (x, z) e (x', z') estejam na heterogeneidade, não determinar numericamente a integral de superfície da Equação (2.38) e sim aproximá-la por

uma expressão semi-analítica. Assim é conveniente primeiramente encontrar a solução de (2.38) para pontos dentro do corpo, e posteriormente o campo $E_y(x, z)$ em qualquer região do modelo.

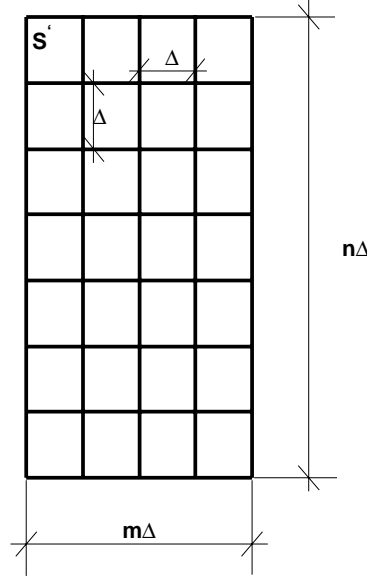


Figura 2.5: Ilustração de discretização em Equação Integral para uma heterogeneidade

Sobre essas considerações, a Equação (2.38) restrita à heterogeneidade é então aproximada por:

$$E_y(x_i, z_j) + \frac{\zeta \Delta \sigma}{2\pi} \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N E_y(x_m, z_n) [G_{ns}(x_i, z_j, x_m, z_n) \Delta^2 + \int_{x_m - \frac{\Delta}{2}}^{x_m + \frac{\Delta}{2}} \int_{z_n - \frac{\Delta}{2}}^{z_n + \frac{\Delta}{2}} G_s(x_i, z_j, x', z') dx' dz'] = E_y^p(x_i, z_j), \quad i = 1, \dots, M \text{ e } j = 1, \dots, N. \quad (2.39)$$

Avaliando dentro de cada célula as identidades (2.35) e (2.36), tem-se que G_{ns} pode ser considerada constante enquanto que G_s por variar em x e z através das pequenas distâncias entre as células (HOHMANN, 1971), não pode receber o mesmo tratamento na integral de superfície de nossa Equação (2.38).

As integrais da Equação (2.39) não serão avaliadas numericamente; fazemos uma aproximação de cada célula quadrada por uma célula circular de mesma área, tomando então $\Delta = a\sqrt{\pi}$, sendo a o raio da célula circular equivalente. Sob essa consideração, as integrais

são avaliadas da seguinte maneira:

$$\int_{x_m - \frac{\Delta}{2}}^{x_m + \frac{\Delta}{2}} \int_{z_n - \frac{\Delta}{2}}^{z_n + \frac{\Delta}{2}} G_s(x_i, z_j, x', z') dx' dz' = i\pi \left[\frac{2a}{k_1} K_1(iak_1) - 1 \right], \quad (2.40)$$

para células singulares, ou seja, $i = m$ e $j = n$, e

$$\int_{x_m - \frac{\Delta}{2}}^{x_m + \frac{\Delta}{2}} \int_{z_n - \frac{\Delta}{2}}^{z_n + \frac{\Delta}{2}} G_s(x_i, z_j, x', z') dx' dz' = \frac{-2ia\pi}{k_1} K_0(ir k_1) I_1(ia k_1), \quad (2.41)$$

para as células não singulares, isto é, para $i \neq m$ ou $j \neq n$; sendo K_1 e I_1 funções de Bessel modificadas de segunda e primeira espécies de ordem 1, respectivamente, e, $r = \sqrt{(x_i - x_m)^2 + (z_j - z_m)^2}$ a distância entre os centros de duas células.

Veja que cada célula é associada com cada uma das demais, então existem $M \times N$ por $M \times N$ cálculos da segunda parcela do lado esquerdo da Equação (2.39), assim se fizermos

$$\lambda = -\frac{\zeta \Delta \sigma}{2\pi}, \quad r = (i-1)N + j \quad \text{e} \quad s = (m-1)N + n,$$

com $r, s = 1, 2, \dots, M \cdot N$, reescreveremos (2.39) simplificadamente por:

$$E_y(r) - \lambda \sum_{s=1}^{M \times N} G(r, s) E_y(s) = E_y^p(r), \quad (2.42)$$

em que

$$G(r, s) = G_{ns}(x_i, z_j, x_m, z_n) \Delta^2 + \int_{x_m - \frac{\Delta}{2}}^{x_m + \frac{\Delta}{2}} \int_{z_n - \frac{\Delta}{2}}^{z_n + \frac{\Delta}{2}} G_s(x_i, z_j, x', z') dx' dz'. \quad (2.43)$$

Ao fazermos uso do delta de Kronecker

$$\delta(r, s) = \begin{cases} 1, & \text{se } r = s \\ 0, & \text{se } r \neq s \end{cases}$$

, modificamos a Equação (2.42) para

$$\sum_{r=1}^{M \times N} \sum_{s=1}^{M \times N} (\delta(r, s) - \lambda G(r, s)) E_y(s) = E_y^p(r), \quad (2.44)$$

que nos dá o sistema linear:

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{E}_y = \mathbf{E}_y^p, \quad (2.45)$$

tendo como

$$K(r, s) = \delta(r, s) - \lambda G(r, s), \quad (2.46)$$

os elementos da matriz \mathbf{K} , que é simétrica e cheia. O método de resolução do sistema (2.45) é feito aqui por eliminação gaussiana.

Encontrada a solução de E_y na heterogeneidade, a determinação de $E_y(x, z)$ em qualquer ponto (x, z) é feita sobre a Equação (2.38) que agora toma a forma:

$$E_y(x, z) = E_y^p(x, z) - \frac{\zeta \Delta \sigma \Delta^2}{2\pi} \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N E_y(x_m, z_n) [G_{ns}(x, z, x_m, z_n) + G_s(x, z, x_m, z_n)], \quad (2.47)$$

em que (x_m, z_n) refere-se a um centro de célula da heterogeneidade, E_y^p é determinado por (2.27), e G_s é computada agora pela Equação (2.37).

Para determinarmos as componentes magnéticas totais H_x e H_z usamos as identidades:

$$H_x = \frac{1}{\zeta} \frac{\partial E_y}{\partial z} \quad \text{e} \quad H_z = -\frac{1}{\zeta} \frac{\partial E_y}{\partial x}$$

, que nos leva a:

$$H_x(x, z) = H_x^p(x, z) + \frac{\Delta \sigma \Delta^2}{2\pi} \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N E_y(x_m, z_n) [G_{ns}^{H_x}(x, z, x_m, z_n) + G_s^{H_x}(x, z, x_m, z_n)], \quad (2.48)$$

$$H_z(x, z) = H_z^p(x, z) - \frac{\Delta \sigma \Delta^2}{2\pi} \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N E_y(x_m, z_n) [G_{ns}^{H_z}(x, z, x_m, z_n) + G_s^{H_z}(x, z, x_m, z_n)], \quad (2.49)$$

em que H_x^p e H_z^p são dados pelas equações (2.28) e (2.29), e

$$G_{ns}^{H_x}(x, z, x_m, z_n) = \int_0^\infty \frac{u_1 - u_0}{u_1 + u_0} e^{-u_1(z+z_n)} \cos(k_x(x - x_m)) dk_x, \quad (2.50)$$

$$G_s^{H_x}(x, z, x_m, z_n) = \frac{ik_1(z - z_n)K_1 \left[ik_1 \sqrt{(x - x_m)^2 + (z - z_n)^2} \right]}{\sqrt{(x - x_m)^2 + (z - z_n)^2}}, \quad (2.51)$$

$$G_{ns}^{H_z}(x, z, x_m, z_n) = \int_0^\infty \frac{u_1 - u_0}{u_1 + u_0} \frac{k_x}{u_1} e^{-u_1(z+z_n)} \text{sen}(k_x(x - x_m)) dk_x, \quad (2.52)$$

$$G_s^{H_z}(x, z, x_m, z_n) = \frac{ik_1(x - x_m)K_1 \left[ik_1 \sqrt{(x - x_m)^2 + (z - z_n)^2} \right]}{\sqrt{(x - x_m)^2 + (z - z_n)^2}}. \quad (2.53)$$

Todas as curvas das componentes totais E_y , H_x e H_z , sejam de amplitude e fase ou partes real e imaginária, são apresentadas aqui normalizadas pelos valores dos campos E_y e H_z da linha infinita no ar, designados pelo índice (inc) e dados pelas fórmulas:

$$E_y^{inc} = \frac{\omega \mu_0 I(\omega)}{\pi}, \quad \text{e}$$

$$H_z^{inc} = \frac{I(\omega)}{2\pi x}.$$

2.4 VALIDAÇÃO DOS CÓDIGOS-FONTE

Para validação dos algoritmos de Elementos Finitos e Equação Integral na modelagem eletromagnética proposta aqui, utilizamos o modelo que serviu para comparação entre os trabalhos de Hohmann (1971) e Coggon (1971) (denominado aqui de modelo Hohmann-Coggon), que aplicaram Equação Integral e Elementos Finitos, respectivamente. O modelo, ilustrado de um modo geral na Figura (2.6), é constituído de um meio homogêneo resistivo, de condutividade $\sigma_1 = 0,001$ S/m, e nele imerso um corpo condutivo retangular, com condutividade de $\sigma_2 = 0,5$ S/m, a uma profundidade $P = 25$ m, largura $L = 15$ m, comprimento $C = 150$ m, localizado a uma distância horizontal $D = 244$ m da linha de corrente, que fica na interface ar-terra localizada na origem dos eixos, trabalhando numa frequência de 1 KHz. A Figura (2.7) mostra as curvas de amplitude e fase de H_x e H_z normalizadas pelo campo H_z da linha infinita no ar, H_z^{inc} . Na primeira linha estão as boas aproximações alcançadas pelos autores; enquanto nas demais linhas, para as mesmas medidas, as aproximações atingidas pelos programas desenvolvidos aqui.

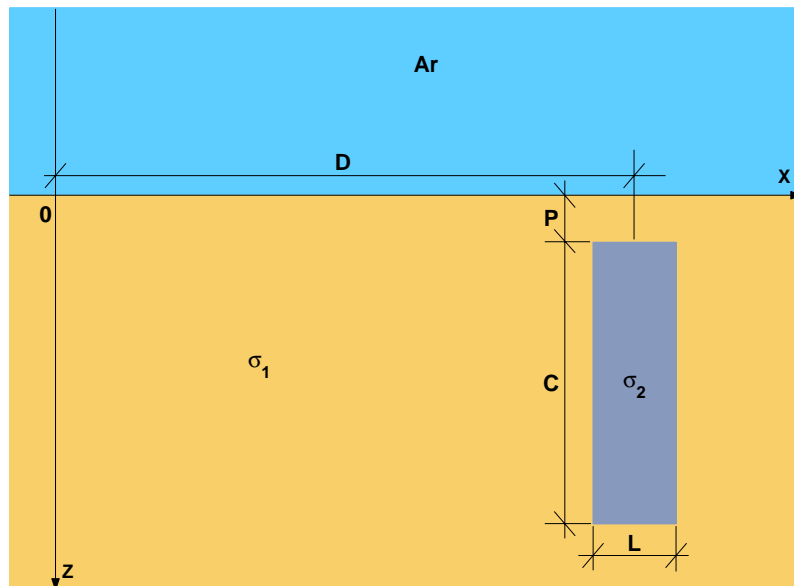


Figura 2.6: Modelo geral para uma heterogeneidade vertical

2.5 ANÁLISE DE PARÂMETROS

Após a validação dos códigos-fonte, partimos para otimização dos mesmos, analisando em cada técnica os parâmetros cuja variação ou mudança na estrutura de como são determinados, pode minimizar o tempo de processamento, sem deixar de ter uma boa precisão. Essas análises são feitas sobre um método quando o outro tem uma configuração de discretização que garanta excelente precisão nos resultados.

2.5.1 Elementos finitos

Fixados a frequência e o contraste de condutividade sobre um modelo geofísico, os parâmetros, em Elementos Finitos, que modificam a precisão são relativos a extensão e discretização da malha. Em nosso caso, modo TE, há necessidade da malha abranger também a região que representa o ar (RIJO, 2002). Já que nele o campo elétrico E_y^s decai mais lentamente que no semi-espaço inferior, para ser satisfeita a condição de Dirichlet homogênea, as bordas no ar são relativamente mais distantes do corpo que aquelas consideradas no meio encaixante. As bordas laterais, por serem consideradas no ar e no meio encaixante, têm distanciamento da heterogeneidade, maior que do limite inferior e menor que o do superior.

Tanto no algoritmo de Elementos Finitos quanto no algoritmo de Equação Integral, os sistemas envolvidos são solucionados aqui via eliminação gaussiana. Em Equação Integral a matriz \mathbf{K} dos coeficientes é quadrada, simétrica e cheia, e sua ordem é dada pelo número de células da discretização da heterogeneidade. Já em Elementos Finitos, a matriz global quadrada é simétrica e esparsa, e sua ordem é o número de nós da malha. No entanto, a simetria e a esparsividade nos permitem considerar para a eliminação gaussiana, apenas as diagonais, a partir da principal, superiormente até a diagonal determinada pelo último elemento não nulo da primeira linha. Este número de diagonais, a semibanda da matriz global, é menor ao considerarmos a numeração dos nós na linha, de x ou z , que possua o menor número de elementos. Nos modelos estudados aqui, o número de elementos é menor na direção z e a semibanda então é determinada pelo número de discretizações em z mais uma unidade (RIJO 2002). Desta maneira a matriz na qual é aplicada a eliminação gaussiana passa a ter ordem (semibanda) \times (número de nós). Sob essas considerações, o acréscimo de um número de discretizações em x não representa um aumento no tempo computacional da resolução do sistema tão significativo quanto o acréscimo do mesmo número de linhas em z . Esse fato então nos serve como uma baliza de otimização na tarefa da busca de uma malha que nos dê boa precisão.

2.5.1.1 Discretizações verticais

Nos intervalos da vizinhança do corpo, assim como aqueles dentro da heterogeneidade, como a variação espacial dos campos ocorre mais rapidamente que em outras regiões e a aproximação por elementos triangulares é linear, é necessário que os elementos sejam pequenos o suficiente para fornecer boa precisão. No entanto, na discretização vertical na heterogeneidade estamos diante de distâncias relativamente grandes, e, assim, nos é conveniente construir intervalos com passos em progressão geométrica, mas com cuidado de não perdermos a precisão na solução. Mesmo que os passos verticais da discretização do corpo sejam dessa forma, eles não aumentam até a borda final. Os intervalos crescem até o ponto médio da extensão do corpo, e a partir daí diminuem na mesma razão. Para essa avaliação, fixamos a largura $L = 25$ m e variamos, além o comprimento da heterogeneidade de $C = 150$ m a $C = 650$ m, o contraste de condutividade em $\sigma_2/\sigma_1 = 0,1/0,001 = 100$ $\sigma_2/\sigma_1 = 0,5/0,001 = 500$ e $\sigma_2/\sigma_1 = 1,0/0,001 = 1000$. Obtivemos curvas com excelentes aproximações ao adotar um passo inicial de 10 m e razão geométrica 1,2.

Superiormente, entre a superfície e o topo do corpo, assim como o que fizemos verticalmente no corpo, a partir do primeiro intervalo, os passos crescem até o ponto médio do topo do corpo e a superfície, e em seguida diminuem na mesma razão. Essa diminuição se faz necessária porque a componente $H_x = \frac{1}{\zeta} \frac{\partial E_y}{\partial z}$ é determinada por derivação numérica em z , e portanto o valor de dz não pode ser grande para não comprometer a precisão dos resultados. Como consideramos aqui que o receptor localiza-se na interface ar-terra, fizemos uma discretização dos dois intervalos mais próximos a ela, com uma linha de nós a 5 m de altura, e outra a 5 m de profundidade, tendo portanto $dz = 10$ m. O passo inicial na proximidade do topo da heterogeneidade foi de 5 m, e a razão geométrica dos intervalos foi de 1,2.

No ar, a partir dos intervalos na proximidade da interface ar-terra, alcançamos bons resultados adotando passos crescendo a uma razão de 1,6, e o limite superior da malha ficando a cerca de $12 \delta_1$ do topo da heterogeneidade.

Para a avaliação da região abaixo da heterogeneidade, usamos uma razão de 1,5 e, modificamos a distância da borda inferior à base do corpo, onde percebemos que a partir de $4 \delta_1$ a precisão é praticamente inalterada.

2.5.1.2 Discretizações horizontais

A discretização horizontal na região externa à heterogeneidade foi separada em quatro porções de malha geométrica. Duas mais próximas ao corpo, situadas ao lado esquerdo e ao

lado direito, são limitadas externamente com a distância de $1,6 \delta_1$ das bordas do corpo. As outras duas são as que ficam mais externas, limitadas pelas duas anteriores e pelas bordas laterais limítrofes de toda malha, tomadas a $8 \delta_1$ do corpo. Esta divisão nos permite impor uma razão de crescimento menor na região próxima ao corpo, onde o campo E_y^s tem as maiores taxas de variação, e uma razão maior para as regiões mais externas, onde o campo decai mais suavemente. Nas regiões mais próximas ao corpo usamos uma razão de 1,1 enquanto nas regiões mais externas aplicamos a razão de 1,6.

Na discretização horizontal do corpo, examinamos corpos com larguras de 15 m, 25 m, 50 m, 75 m, 100 m, 125 m e 150 m, com $\sigma_2/\sigma_1 = 0,1/0,001 = 100$, $\sigma_2/\sigma_1 = 0,5/0,001 = 500$ e $\sigma_2/\sigma_1 = 1,0/0,001 = 1000$ de contrastes de condutividades. Os corpos com $L = 15$ m têm uma precisão satisfatória tomando apenas 3 elementos distribuídos uniformemente no corpo enquanto que corpos com 90 m e 120 m de largura, têm boas aproximações quando tomamos 6 e 8 passos uniformes, respectivamente. Verificamos que a partir da largura de 25 m a precisão dos resultados não é alterada ao considerarmos passos em progressão geométrica. Nestes casos utilizamos o valor de 1,1 como razão e passo inicial de 5 m.

2.5.2 Equação integral

Na técnica de Equação Integral a discretização do modelo é feita apenas na(s) heterogeneidade(s), logo um parâmetro de análise de precisão e otimização é a largura das células; entretanto, o número de observações e os cálculos das funções de Green na construção da matriz \mathbf{K} do sistema (2.45) também são fatores que influenciam no tempo de processamento.

2.5.2.1 Largura das células

De acordo com Hohmann (1971), a largura Δ das células usadas na discretização da heterogeneidade é um fator importante de mudanças na precisão dos resultados na técnica de Equação Integral. Em seu artigo foi afirmado que células de lado $\Delta = 0,9 \delta_2$, sendo $\delta_2 = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu_0 \sigma_2}}$ o "skin-depth" sobre a condutividade do corpo, fornecem resultados razoáveis; tendo, a partir de larguras $\Delta = 0,6 \delta_2$, obtido convergência nas curvas, e com $\Delta = 0,5 \delta_2$ garantida excelente precisão.

Para verificar a precisão mediante a largura Δ das células consideramos um modelo da Figura (2.6), com o corpo estando distante horizontalmente $D = 700$ m de T_x , com largura $L = 90$ m, comprimento $C = 180$ m, a uma profundidade $P = 45$ m e condutividades $\sigma_1 = 0,001$ S/m $\sigma_2 = 0,1$ S/m. A Figura (2.8) mostra, para as curvas de amplitude e

fase de E_y/E_y^{inc} , H_x/H_z^{inc} e H_z/H_z^{inc} , que realmente células com $0,9 \delta_2$ de lado já dão boas aproximações, e a partir de $0,6 \delta_2$ de lado, os resultados começam a convergir, tendo com $\Delta = 0,45 \delta_2$ uma excelente aproximação.

A necessidade da diminuição da largura Δ das células com o aumento da condutividade σ_2 da heterogeneidade, a fim de garantir uma boa precisão, pode ser justificada pelo fato de que como $J_s(x', z') = (\sigma_2 - \sigma_1)E_y(x', z')$, temos que quanto maior $\Delta\sigma = \sigma_2 - \sigma_1$, maior é a variação da densidade de corrente na extensão da heterogeneidade, e como sua aproximação é feita representando-a no baricentro (x', z') das células por uma função constante, grandes larguras Δ não nos dão uma boa aproximação matemática.

2.5.2.2 Número de observações

As equações (2.47), (2.48) e (2.49) utilizadas nas determinações das componentes totais E_y , H_x e H_z , respectivamente, dependem das coordenadas (x, z) das observações e (x_m, z_n) dos centros das células da discretização do corpo. Considerando que as observações são feitas na interface ar-terra, em cada par distinto $(x - x_m, z_n)$, ou seja, para cada abscissa do receptor, devemos calcular semi-analiticamente G_s , $G_s^{H_x}$ e $G_s^{H_z}$, das equações (2.37), (2.51) e (2.53), e calcular numericamente¹ G_{ns} , $G_{ns}^{H_x}$ e $G_{ns}^{H_z}$ dados pelas equações (2.35), (2.50) e (2.52).

Fizemos algumas experimentações e constatamos que as determinações dessas funções de Green usadas nos cálculos de E_y , H_x e H_z podem chegar a 90% do tempo de processamento de todo o programa, tendo portanto que o número de observações nas investigações é bastante relevante no custo computacional da técnica de Equação Integral. Nos modelos realizados aqui, investigamos vários valores de intervalos e número de observações. Um intervalo que sempre deu curvas com excelente interpolação foi de 25 m. E com esse intervalo o número de observações que mostrou muito bem o comportamento das anomalias foi de 56 observações.

Se estivermos interessados somente no caso particular de modelagem direta, com as observações simétricas em relação a uma, ou mais heterogeneidades, verticais ou horizontais somente; as equações das funções de Green (2.35), (2.37), (2.50), (2.51), (2.52) e (2.53) nos proporcionam utilizar essa simetria. Por exemplo, ao tomarmos uma célula e um ponto de leitura à esquerda do ponto-médio das observações, teremos que a distância entre eles é a mesma que a considerada na célula simétrica e o ponto de leitura simétrico em relação ao

¹Para o cômputo dessas integrais testamos os filtros lineares seno e cosseno de 19 pontos dados por Rijo e Almeida (2003) e a técnica de quadratura gaussiana. Utilizamos esses filtros por terem sido mais eficientes.

ponto médio. Temos então, respeitando a paridade de funções, a necessidade de calcular essas funções de Green apenas nas medidas à esquerda ou à direita. Com esse procedimento o processamento na determinação de E_y , H_x e H_z cai para aproximadamente metade do tempo.

2.5.2.3 Cálculo das Funções de Green

Um passo importante no processo de otimização no algoritmo da técnica de Equação Integral foi realizado sobre a construção da matriz \mathbf{K} do sistema (2.45). Nela são computadas os elementos $G(r, s)$ da Equação (2.43) constituída pela função de Green não-singular $G_{ns}(x_i, z_j, x_m, z_n)$ da Equação (2.35), e pela integral $\int_{x_m - \frac{\Delta}{2}}^{x_m + \frac{\Delta}{2}} \int_{z_n - \frac{\Delta}{2}}^{z_n + \frac{\Delta}{2}} G_s(x_i, z_j, x', z') dx' dz'$ determinada, conforme a singularidade ou não entre as células, pelas equações (2.40) e (2.41).

Observe que, com exceção da Equação (2.40) que tem valor constante fixada uma discretização, as equações (2.35) e (2.41) são dadas em função de $|x_i - x_m|$ e $|z_j - z_n|$ ou $z_j + z_n$. Logo em dois pares de células (x_i, z_j) , (x_m, z_n) , e (x_a, z_b) , (x_r, z_s) tais que $|x_i - x_m| = |x_a - x_r|$ e $|z_j - z_n| = |z_b - z_s|$ e $z_j + z_n = z_b + z_s$, não é necessário chamar as subrotinas que determinam (2.35) e (2.41) mais de uma vez. Ao se determinar os possíveis valores de $|x_i - x_m|$, $|z_j - z_n|$ e $z_j + z_n$, calculamos separadamente a construção da matriz \mathbf{K} , as equações (2.35) e (2.41). Decorrente desse procedimento a construção da matriz \mathbf{K} tem um tempo de processamento de no máximo 5% do tempo computacional de todo programa. Ocorreu no entanto que este procedimento de otimização não foi vantajoso ao considerar heterogeneidades inclinadas em relação a superfície, pois neste caso as células não têm, em geral, seus baricentros alinhados verticalmente, e assim os valores de $|x_i - x_m|$ não são necessariamente múltiplos de Δ , e conseqüentemente deveríamos inserir um "loop" a mais na determinação de todos valores $|x_i - x_m|$, que ao ser aplicado, mostrou-se mais dispendioso que as determinações feitas na própria construção da matriz \mathbf{K} .

A avaliação da largura Δ das células é importante porque ela está diretamente envolvida no tempo de processamento; quanto menor o comprimento, maior é a discretização da heterogeneidade, e portanto maior a matriz do sistema a ser resolvido pela técnica de Equação Integral. Como Δ é dado em função do "skin-depth" sobre a condutividade do corpo, em corpos de baixa condutividade, δ_2 (considerando a frequência aqui adotada) é relativamente alto, e conseqüentemente uma baixa discretização já determina, consoante a investigação acima, uma largura Δ de boa precisão. Já em corpos, relativamente, de alta condutividade, para se obter a largura confiável das células, necessitamos de uma discretização bem maior. Entre-

tanto, no caso particular de investigação de aproximação geométrica (frequência constante, com variação na separação entre transmissor e receptor) com a fonte trabalhando em baixa frequência, a discretização não precisa ser grande, já que o "skin-depth" da heterogeneidade neste caso não se apresenta muito pequeno.

As figuras (2.9), (2.10) e (2.11) exemplificam as curvas obtidas com a malha resultante da utilização dos valores admitidos por nossas análises e a técnica de Equação Integral, sobre as anomalias de amplitude e fase para os contrastes $\sigma_2/\sigma_1 = 100$ (com $\Delta = 0,49 \delta_2$), $\sigma_2/\sigma_1 = 500$ (com $\Delta = 0,55 \delta_2$) e $\sigma_2/\sigma_1 = 1000$ (com $\Delta = 0,52 \delta_2$) no modelo de configuração geométrica $D = 700$ m, $P = 45$ m, $C = 150$ m e $L = 25$ m.

No caso de alguma curva não apresentar visualmente uma combinação excelente entre os métodos, adotamos o valor do parâmetro em que o erro relativo entre as técnicas fosse de no máximo 2% e que as curvas das partes real e imaginária tivessem aproximações excelentes. Por serem determinadas através de uma divisão, da parte imaginária pela parte real dos campos, as fase são mais suscetíveis às pequenas variações dos valores, e assim, de certa forma, essas curvas mascaram as excelentes aproximações dos resultados entre os dois métodos. Mostramos nas figuras (2.12), (2.13) e (2.14), as curvas das partes real e imaginária obtidas dos mesmos modelos considerados nas três figuras anteriores

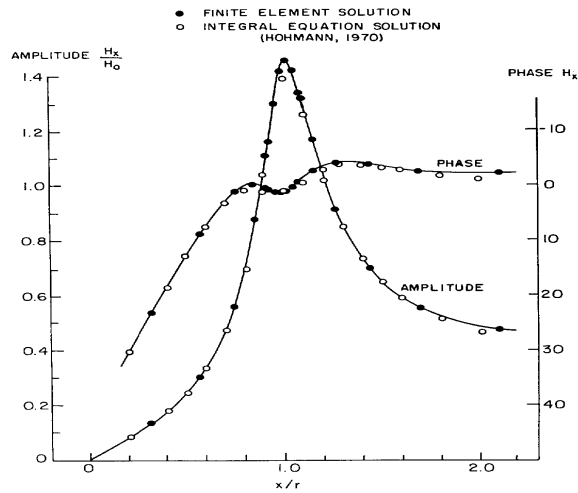
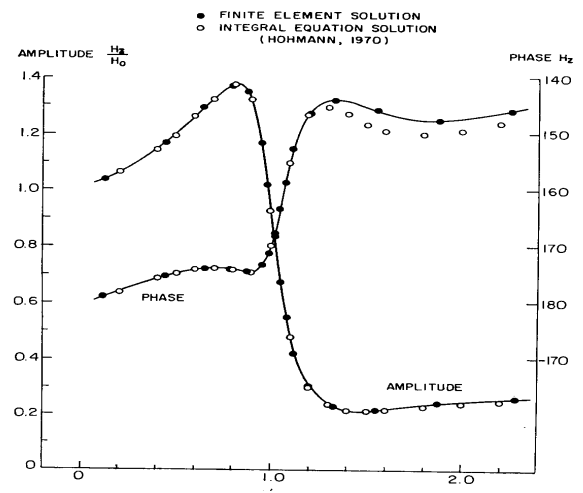
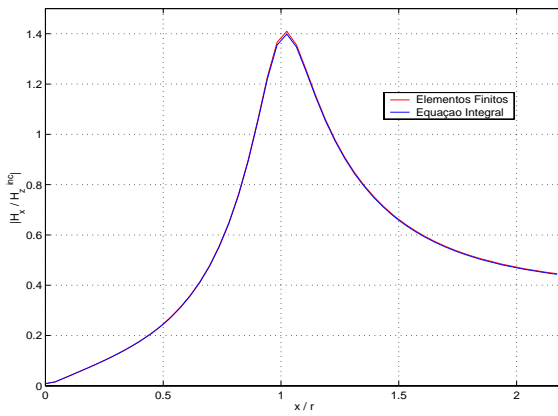
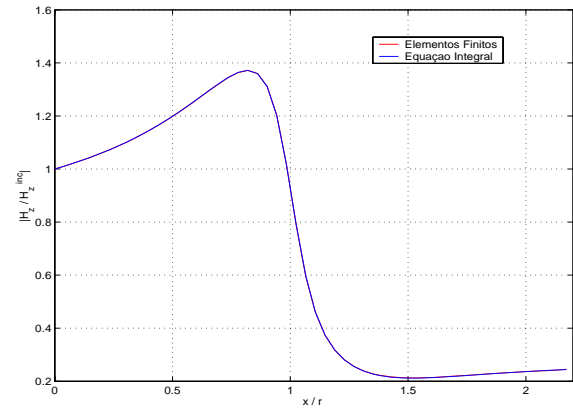
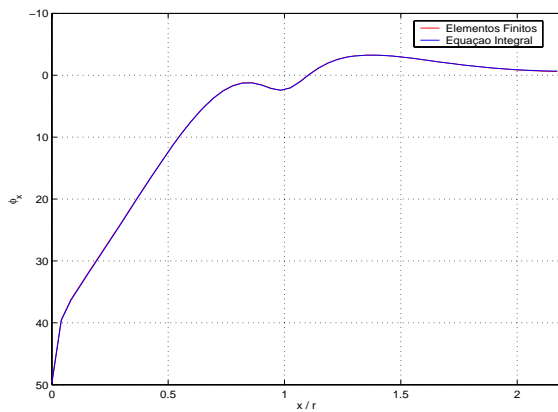
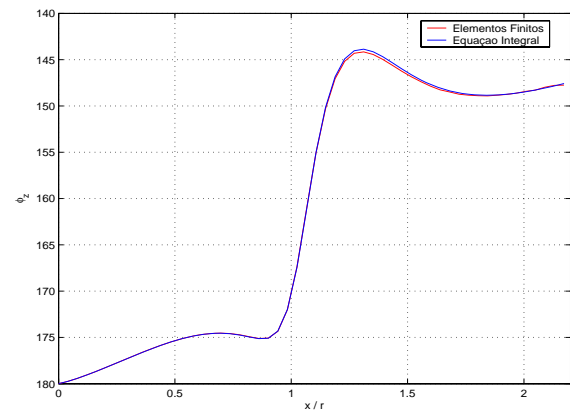
(a) Amplitude e Fase de H_x/H_z^{inc} (b) Amplitude e Fase de H_z/H_z^{inc} (c) $|H_x/H_z^{inc}|$ (d) $|H_z/H_z^{inc}|$ (e) ϕ_x (f) ϕ_z

Figura 2.7: Curvas do modelo Hohmann-Coggon. (a) Amplitude e Fase de H_x/H_z^{inc} de Hohmann e Coggon. (b) Amplitude e Fase de H_z/H_z^{inc} de Hohmann e Coggon. (c) Amplitude de H_x/H_z^{inc} . (d) Amplitude de H_z/H_z^{inc} . (e) Fase de H_x/H_z^{inc} . (f) Fase de H_z/H_z^{inc} .

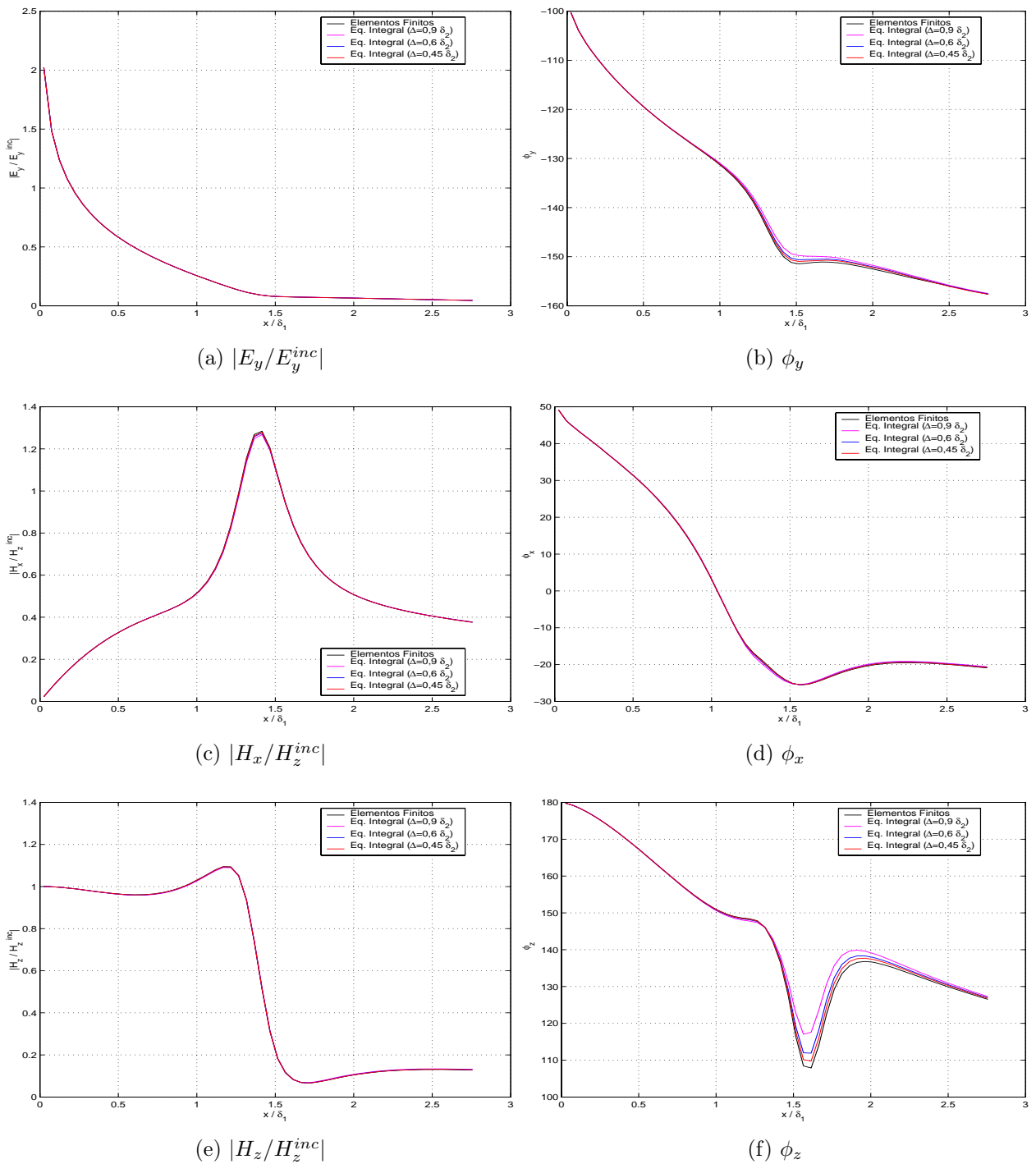


Figura 2.8: Avaliação da largura das células na discretização de Equação Integral. $\sigma_2/\sigma_1 = 100$. Curvas de amplitude e fase. (a) Amplitude de E_y/E_y^{inc} . (b) Fase de E_y . (c) Amplitude de H_x/H_z^{inc} . (d) Fase de H_x/H_z^{inc} . (e) Amplitude de H_z/H_z^{inc} . (f) Fase de H_z/H_z^{inc} .

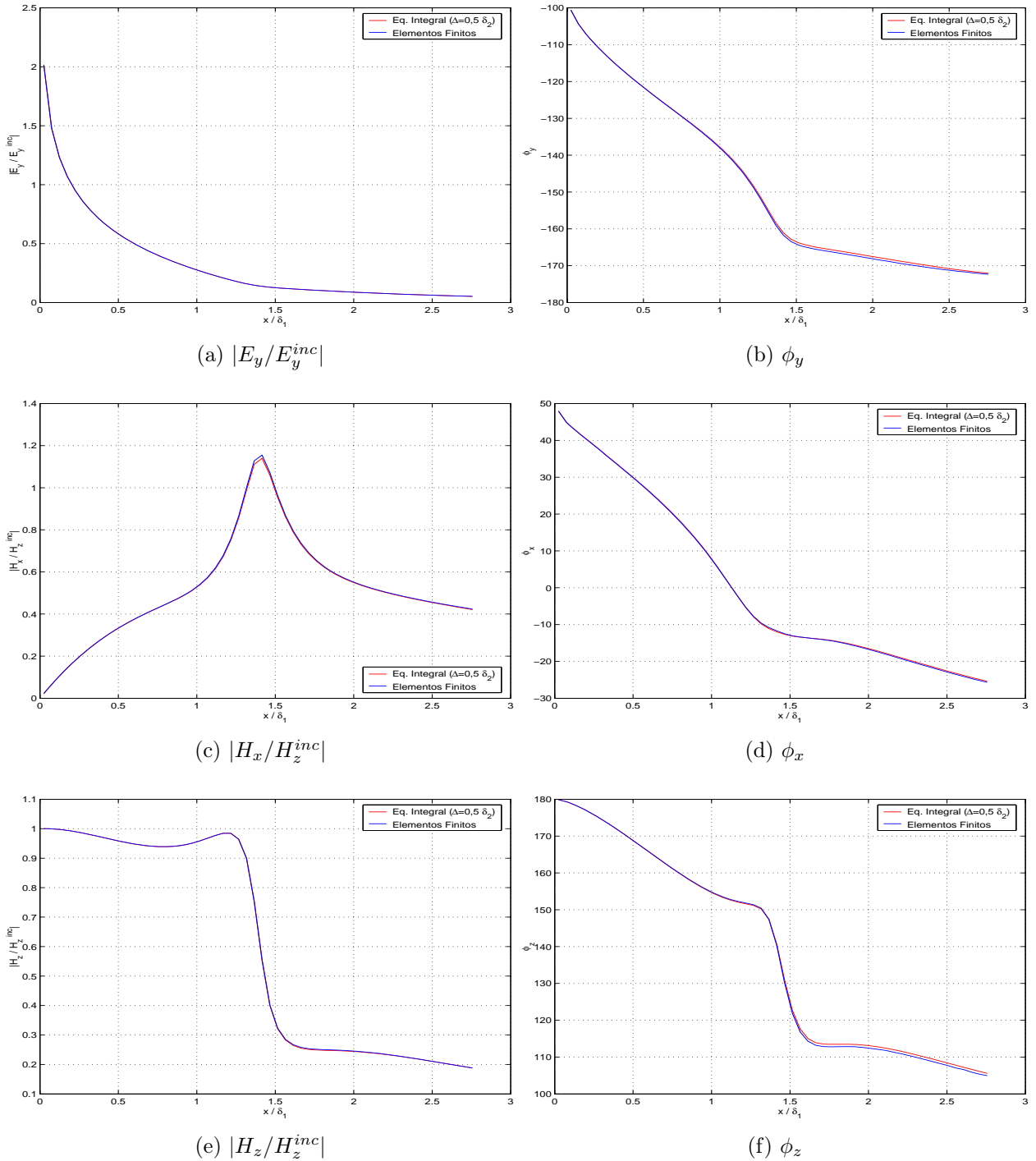


Figura 2.9: Curvas de amplitude e fase em contraste $\sigma_2/\sigma_1 = 100$, obtidas após as avaliações dos parâmetros de Elementos Finitos e de Equação Integral sobre o modelo com $D = 700$ m, $P = 45$ m, $C = 150$ m e $L = 25$ m. (a) Amplitude de E_y/E_y^{inc} . (b) Fase de E_y/E_y^{inc} . (c) Amplitude de H_x/H_z^{inc} . (d) Fase de H_x/H_z^{inc} . (e) Amplitude de H_z/H_z^{inc} . (f) Fase de H_z/H_z^{inc} .

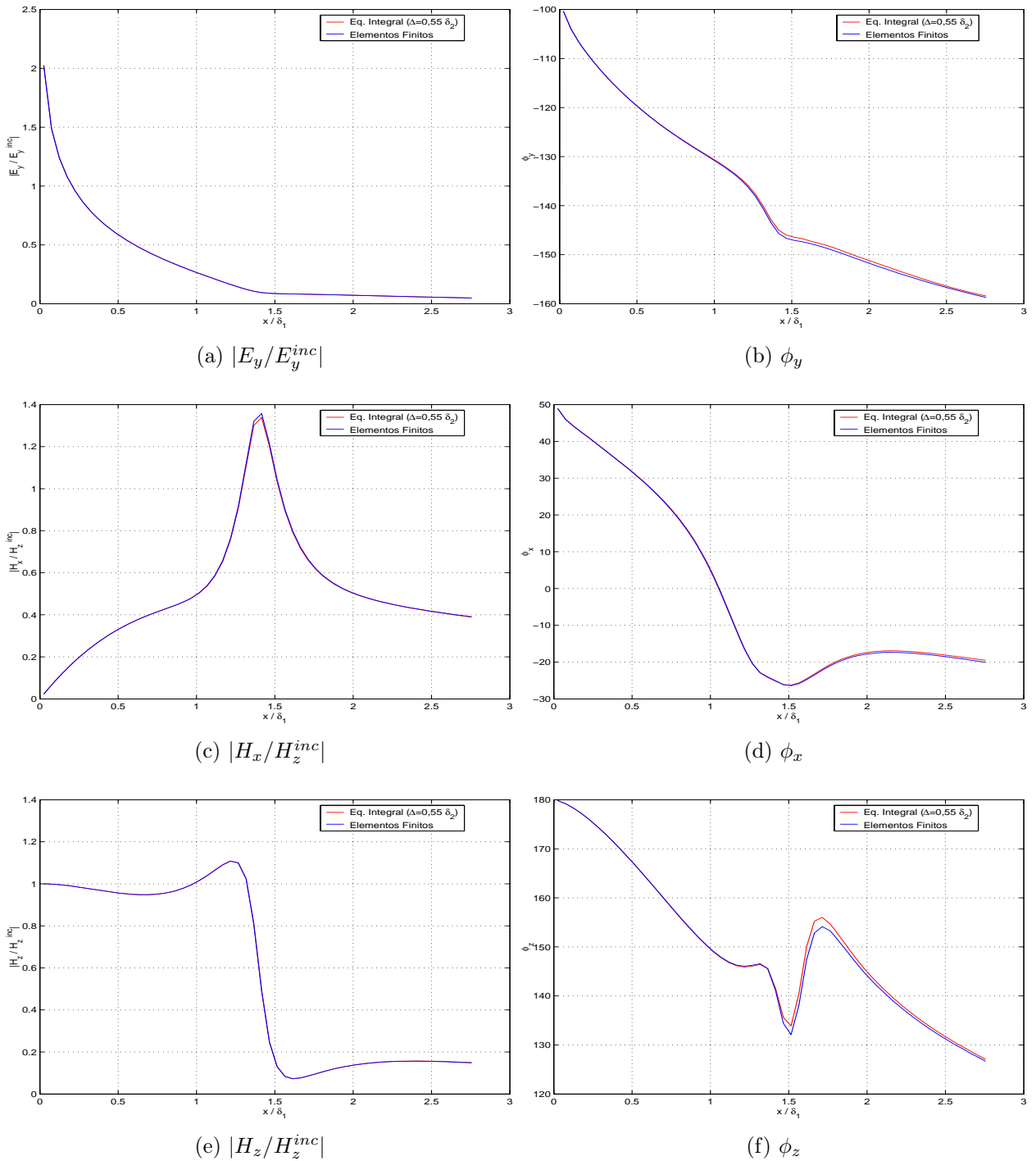


Figura 2.10: Curvas de amplitude e fase em contraste $\sigma_2/\sigma_1 = 500$, obtidas após as avaliações dos parâmetros de Elementos Finitos e de Equação Integral sobre o modelo com $D = 700$ m, $P = 45$ m, $C = 150$ m e $L = 25$ m. (a) Amplitude de E_y/E_y^{inc} . (b) Fase de E_y/E_y^{inc} . (c) Amplitude de H_x/H_z^{inc} . (d) Fase de H_x/H_z^{inc} . (e) Amplitude de H_z/H_z^{inc} . (f) Fase de H_z/H_z^{inc} .

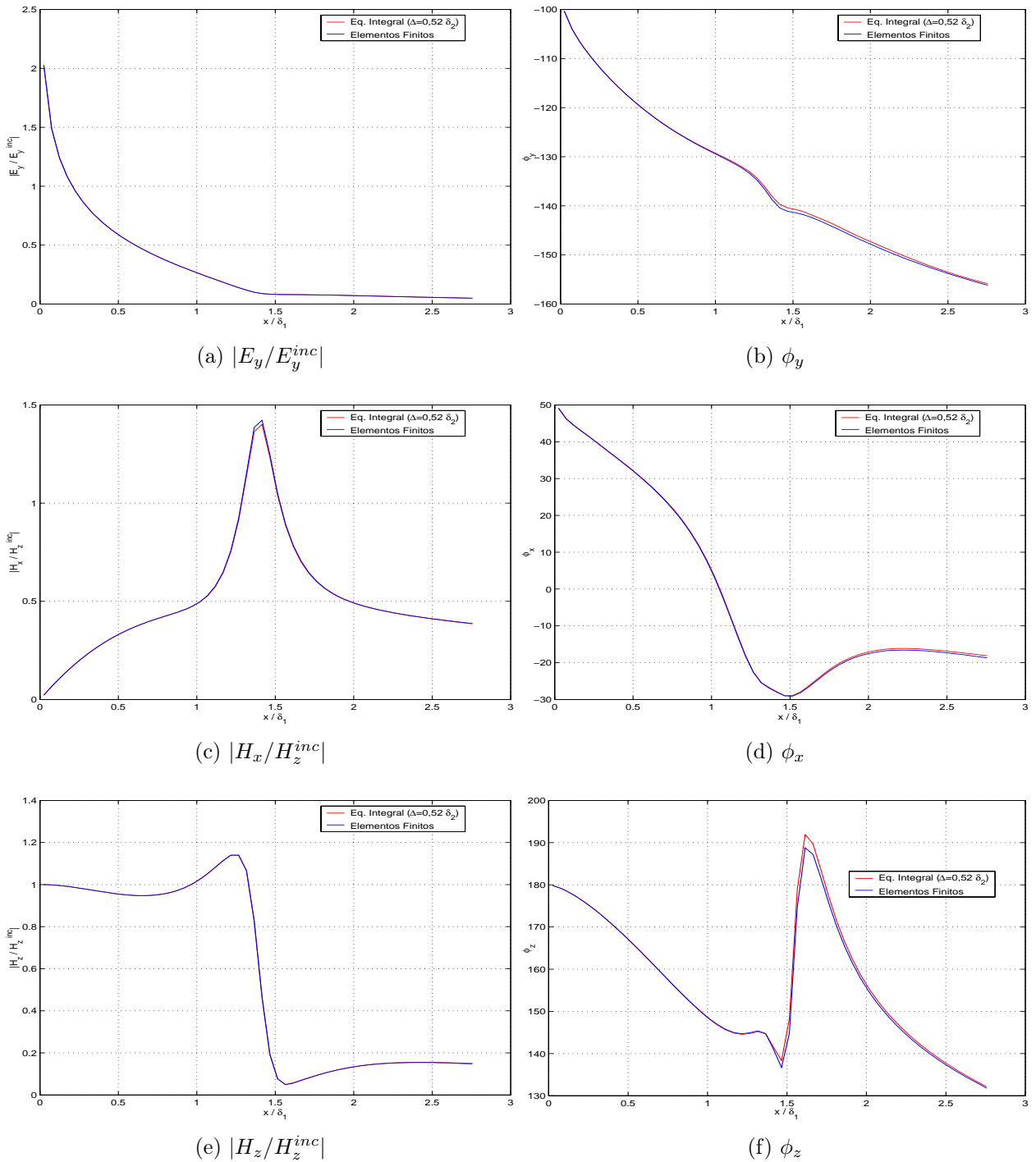


Figura 2.11: Curvas de amplitude e fase em contraste $\sigma_2/\sigma_1 = 1000$, obtidas após as avaliações dos parâmetros de Elementos Finitos e de Equação Integral sobre o modelo com $D = 700\text{m}$, $P = 45\text{ m}$, $C = 150\text{ m}$ e $L = 25\text{ m}$. (a) Amplitude de E_y/E_y^{inc} . (b) Fase de E_y/E_y^{inc} . (c) Amplitude de H_x/H_z^{inc} . (d) Fase de H_x/H_z^{inc} . (e) Amplitude de H_z/H_z^{inc} . (f) Fase de H_z/H_z^{inc} .

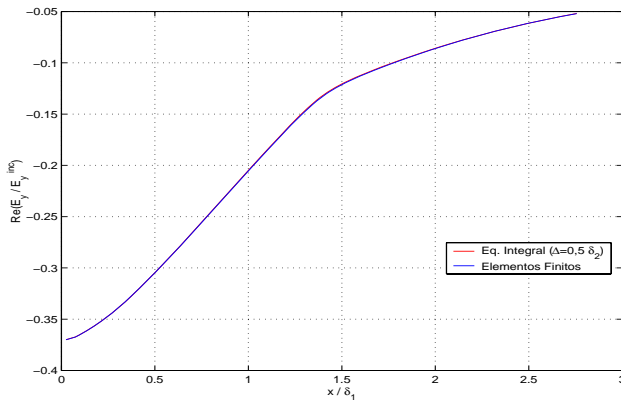
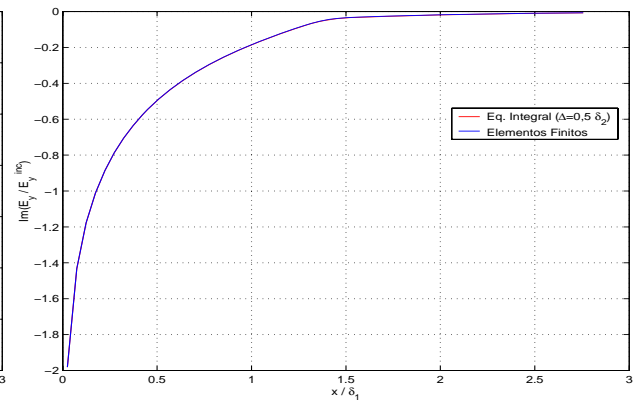
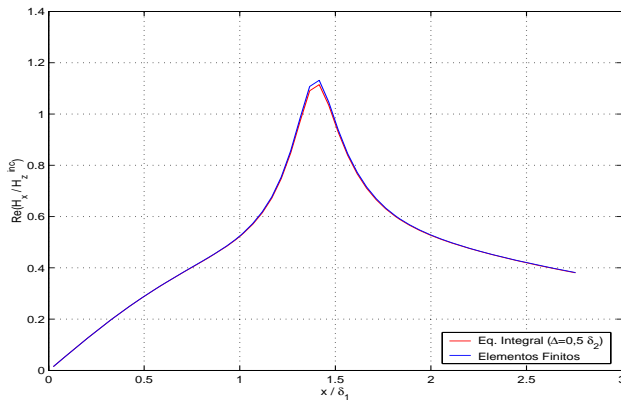
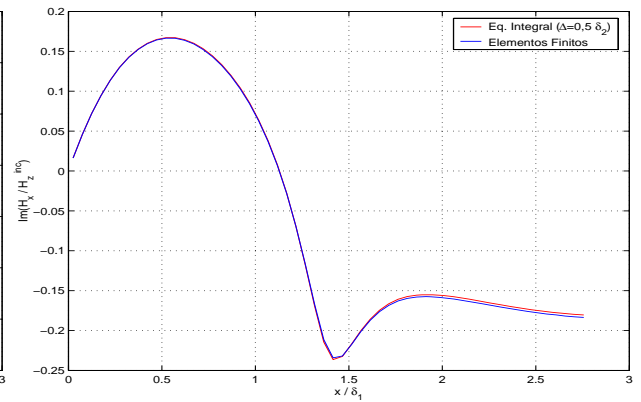
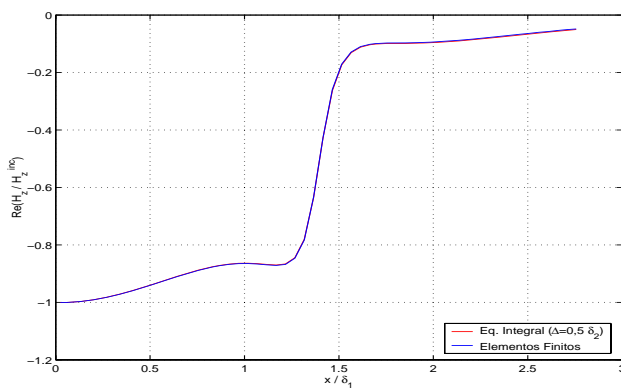
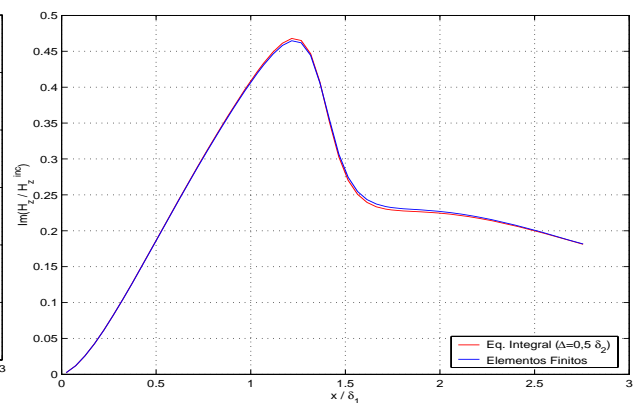
(a) $Re\{E_y/E_y^{inc}\}$ (b) $Im\{E_y/E_y^{inc}\}$ (c) $Re\{H_x/H_z^{inc}\}$ (d) $Im\{H_x/H_z^{inc}\}$ (e) $Re\{H_z/H_z^{inc}\}$ (f) $Im\{H_z/H_z^{inc}\}$

Figura 2.12: Curvas das partes real e imaginária em contraste $\sigma_2/\sigma_1 = 100$, obtidas após as avaliações dos parâmetros de Elementos Finitos e de Equação Integral sobre o modelo com $D = 700$ m, $P = 45$ m, $C = 150$ m e $L = 25$ m. (a) Parte real de E_y/E_y^{inc} . (b) Parte imaginária de E_y/E_y^{inc} . (c) Parte real de H_x/H_z^{inc} . (d) Parte imaginária de H_x/H_z^{inc} . (e) Parte real de H_z/H_z^{inc} . (f) Parte imaginária de H_z/H_z^{inc} .

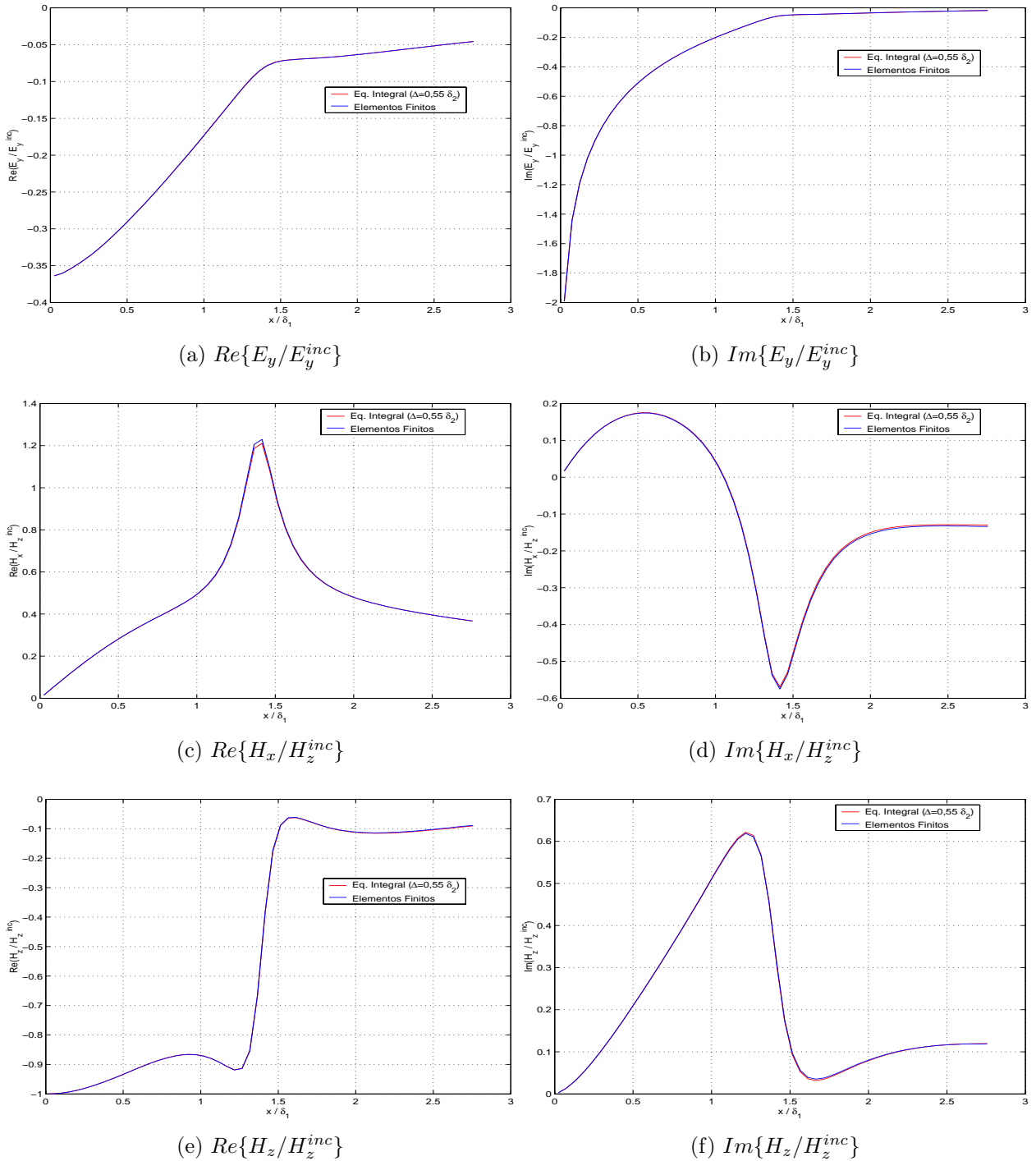


Figura 2.13: Curvas das partes real e imaginária em contraste $\sigma_2/\sigma_1 = 500$, obtidas após as avaliações dos parâmetros de Elementos Finitos e de Equação Integral sobre o modelo com $D = 700$ m, $P = 45$ m, $C = 150$ m e $L = 25$ m. (a) Parte real de E_y/E_y^{inc} . (b) Parte imaginária de E_y/E_y^{inc} . (c) Parte real de H_x/H_z^{inc} . (d) Parte imaginária de H_x/H_z^{inc} . (e) Parte real de H_z/H_z^{inc} . (f) Parte imaginária de H_z/H_z^{inc} .

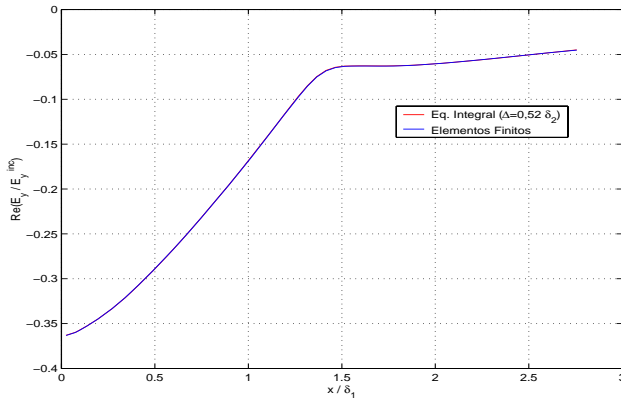
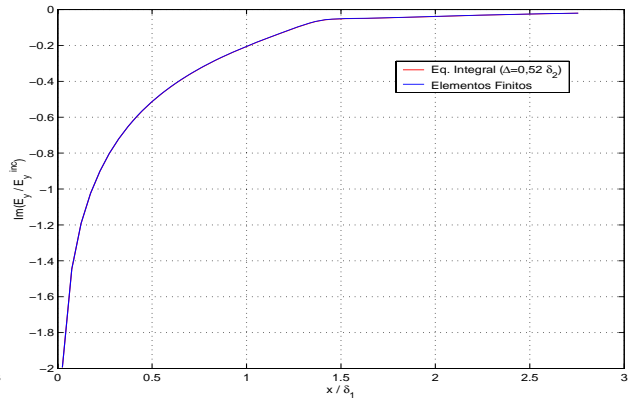
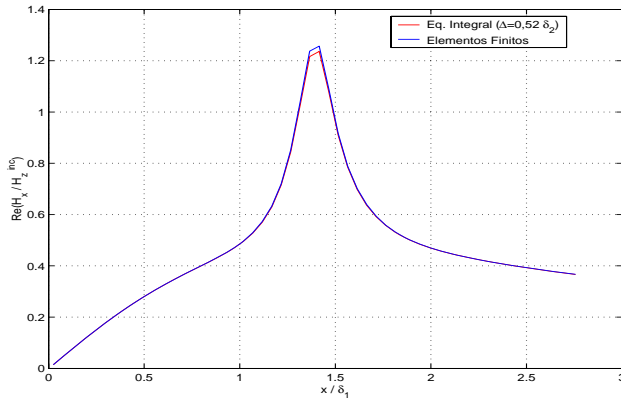
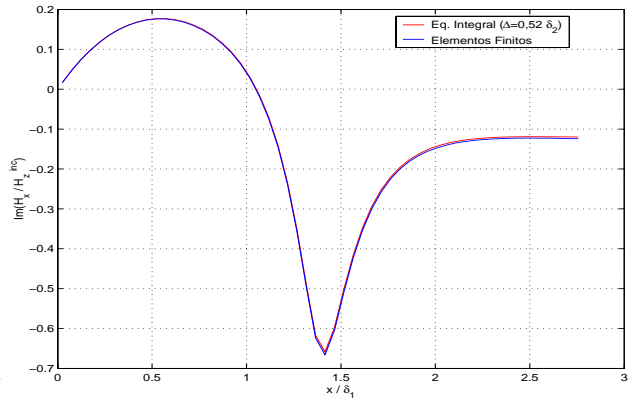
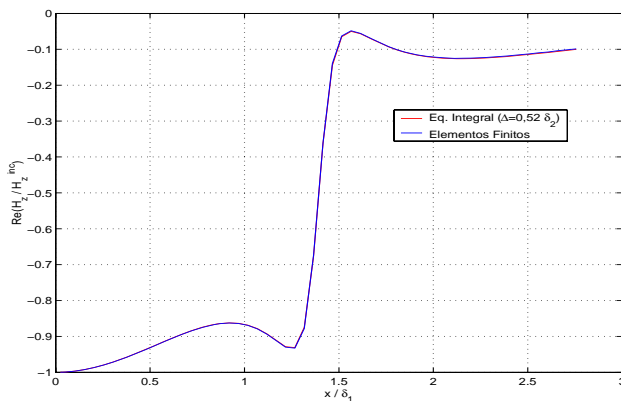
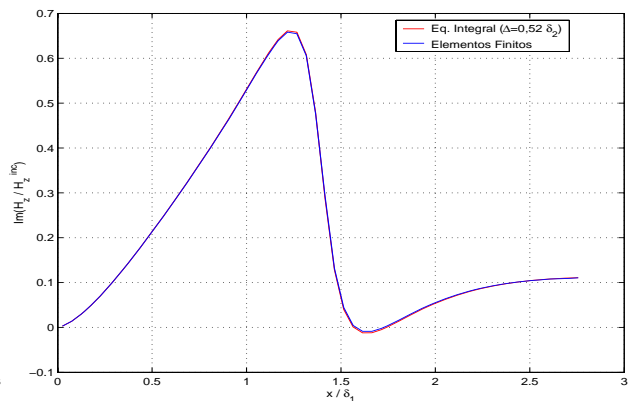
(a) $Re\{E_y/E_y^{inc}\}$ (b) $Im\{E_y/E_y^{inc}\}$ (c) $Re\{H_x/H_z^{inc}\}$ (d) $Im\{H_x/H_z^{inc}\}$ (e) $Re\{H_z/H_z^{inc}\}$ (f) $Im\{H_z/H_z^{inc}\}$

Figura 2.14: Curvas das partes real e imaginária em contraste $\sigma_2/\sigma_1 = 1000$, obtidas após as avaliações dos parâmetros de Elementos Finitos e de Equação Integral sobre o modelo com $D = 700$ m, $P = 45$ m, $C = 150$ m e $L = 25$ m. (a) Parte real de E_y/E_y^{inc} . (b) Parte imaginária de E_y/E_y^{inc} . (c) Parte real de H_x/H_z^{inc} . (d) Parte imaginária de H_x/H_z^{inc} . (e) Parte real de H_z/H_z^{inc} . (f) Parte imaginária de H_z/H_z^{inc} .

3 RESULTADOS

3.1 AVALIAÇÕES DE TEMPO DE PROCESSAMENTO

De posse dos programas otimizados, passamos ao estudo do tempo de processamento nos dois métodos em cada modelo. Fizemos experimentações em modelos com vários corpos verticais, várias extensões laterais, vários comprimentos, com um corpo vertical e outro horizontal e com um corpo inclinado. Nessas investigações percebemos que, em Elementos Finitos, as subrotinas que demandam os maiores tempos em processamento são os de montagem do vetor fonte global e matriz global (na forma semibandeada), e a de determinação da solução E_y^s do sistema construído através o método. Na montagem do vetor fonte e matriz global o tempo gasto varia entre 5% e 20% do tempo total, enquanto que a resolução do sistema ocorre a cerca de 75% a 90% de todo processamento. Na técnica de Equação Integral por outro lado, as subrotinas de solução de E_y na(s) heterogeneidade(s) e a de determinação das componentes E_y , H_x e H_z na interface ar-terra, são as subrotinas que mais demandam tempo computacional. Os cálculos das funções de Green demandam mais tempo que a resolução do sistema. A solução do sistema toma de 5% a 55% do tempo total e os cálculos dos campos fora da(s) heterogeneidade(s) levam de 40% a 90% desse tempo. Avaliamos portanto nas mudanças dos parâmetros mais relevantes a essas subrotinas, as condições em que um método se apresenta mais vantajoso que o outro.

Os programas desenvolvidos aqui foram escritos em FORTRAN e executados num computador pessoal com o processador AMD Sempron(tm) 2600+, 1.60GHz com 512MB de memória RAM. Todas as medidas de tempo de processamento dos programas foram realizadas através da subrotina `cpu_time` do FORTRAN

3.1.1 Análise dos tempos em relação à discretização

Nesta seção investigamos o comportamento do tempo computacional mediante a variação do número de discretizações de cada método. Como temos conhecimento de todas especificações necessárias para os parâmetros de discretização darem resultados com boa precisão, acreditamos que os seguintes resultados não só dão cabedal informativo para a escolha de aplicação de um método, como também instigam a estudos no desenvolvimento de novas metodologias ou aproximações matemáticas que tornem subrotinas de uma certa técnica bem mais eficientes.

Na Figura (3.1) apresentamos o comportamento do método de Elementos Finitos quando o número de elementos da matriz global semibandeada é aumentado. Nesse exemplo o número de elementos é de 44 vezes o número de nós da malha (a semibanda é fixa em 43). Nessa técnica as rotinas que demandam maior tempo computacional são as de construção do vetor fonte global e da matriz global na forma semibandeada (sendo aí feitas as determinações das matrizes e vetores locais); e a do cálculo da componente E_y^s encontrada via eliminação gaussiana sobre a matriz e vetor fonte globais (após a aplicação das condições de Dirichlet homogênea, computada também dentro da subrotina). Essas subrotinas são responsáveis por cerca de 95% de todo o processamento. A determinação de E_y^s chega a se processar em 80% do tempo total nessa consideração da semibanda fixa. Quando a semibanda é aumentada e o número de discretizações em x é fixo (75), a resolução do sistema demanda mais tempo ainda, veja a Figura (3.2), chegando a ser nessa investigação de 90% do tempo computacional do programa.

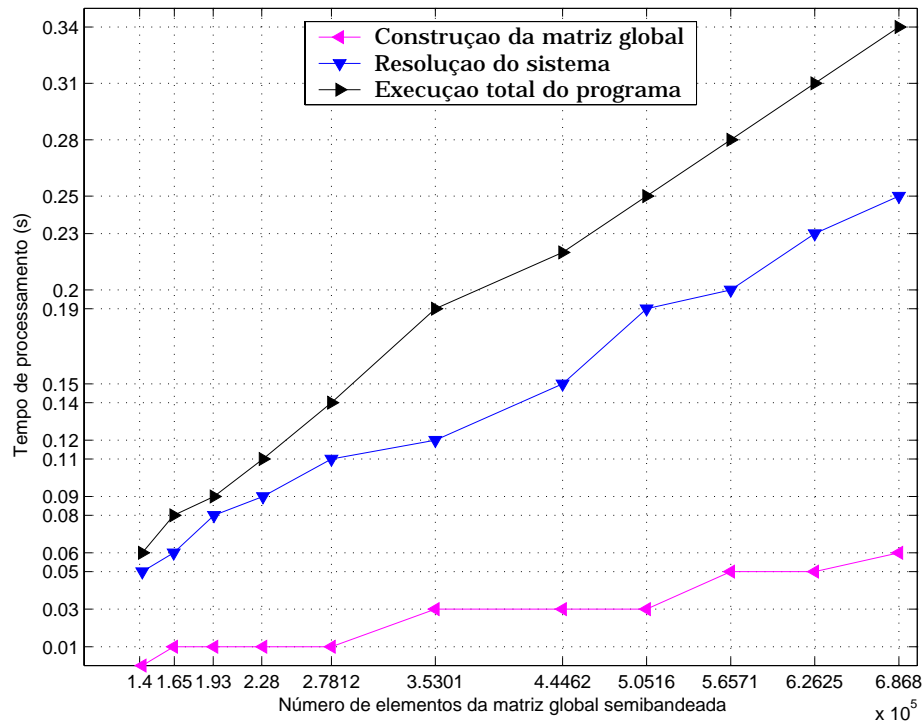


Figura 3.1: Desempenho computacional de Elementos Finitos mediante o número de elementos da matriz global semibandeada (com semibanda fixa)

Os resultados para a Equação Integral são mostrados a Figura (3.3). As determinações dos campos fora do corpo são realizados em três "loops" encaixados; um para as medidas e os outros dois para as coordenadas dos baricentros das células. Assim se simularmos 56

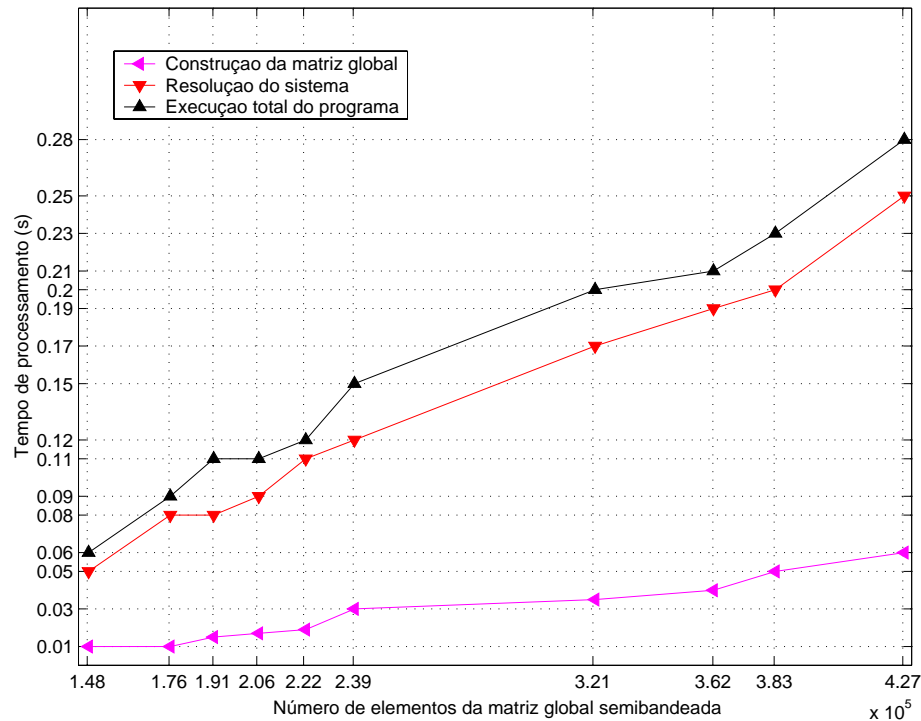


Figura 3.2: Desempenho computacional de Elementos Finitos mediante o número de elementos da matriz global semibandeada (com alteração na semibanda)

observações, $nx = 2$ e $nz = 96$, teremos por exemplo, que chamar 10752 vezes a subrotina que calcula as funções de Green (2.49-2.52), (2.34) e (2.36) que utilizam além das funções de Bessel modificadas, filtros lineares Seno e Cosseno. Por esse motivo é que a determinação dos campos fora da heterogeneidade leva cerca de 40% a 90% do tempo total. Essa porcentagem próxima, de 40%, acontece quando a matriz do sistema que determina E_y dentro da heterogeneidade tem ordem bastante alta (a partir de 540), tornando as subrotinas que a manipulam como as que mais demandam custo computacional. Evidentemente que, se o número necessário de observações é diferente de 56, a demanda de tempo para os cálculos dos campos fora da heterogeneidade também é diferente, e a porcentagem em relação ao tempo total pode ser bem diferente do registrado. Como já dissemos antes, esse número de observações (com intervalos de 25 m entre elas) interpola muito bem as respostas dos campos e abrange uma extensão satisfatória para o comportamento dessas anomalias.

A estrutura da matriz global do sistema gerado pelo método de Elementos Finitos permite que, mesmo que seu número de elementos seja muito superior ao da matriz considerada na técnica de Equação Integral, o número de operações sobre o sistema de Elementos Finitos seja bastante inferior ao aplicado no de Equação Integral. Nos modelos em que a Equação Integral

gasta um tempo menor do que os Elementos Finitos, o número de células na discretização é muito pequeno e assim os cálculos dos campos fora da heterogeneidade e a resolução do sistema da Equação Integral demandam um tempo muito curto.

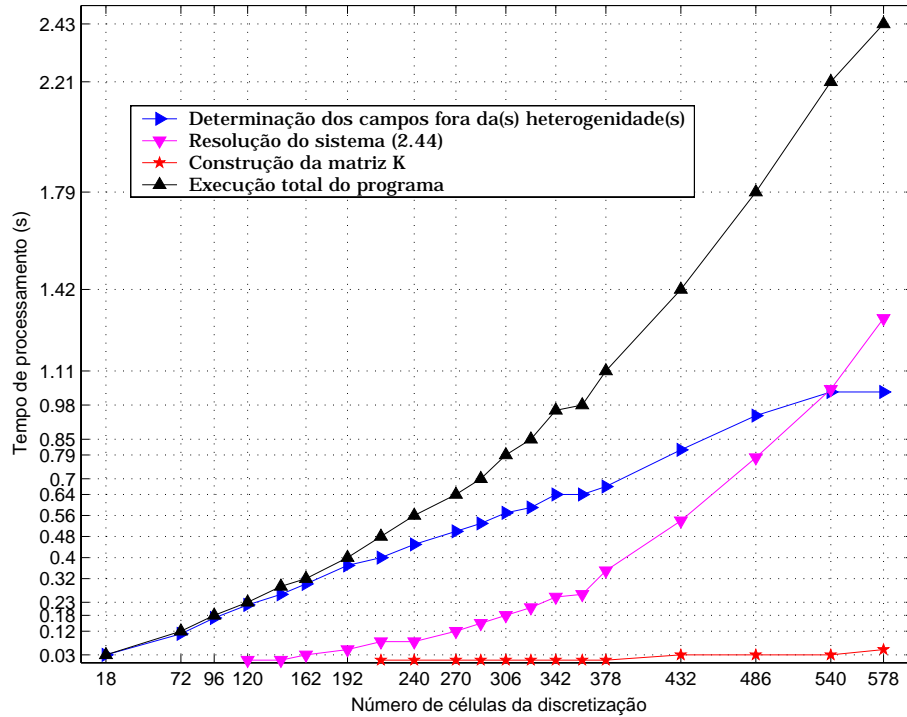


Figura 3.3: Desempenho computacional de Equação Integral mediante o número de células da discretização

3.1.2 Variação no número de heterogeneidades verticais

As primeiras investigações foram realizadas acrescentando-se corpos verticais ao modelo da Figura (2.6), num total máximo de 10. Os corpos têm largura de 25 m, comprimento de 150 m, profundidade de 45 m e separados por 300 m. A heterogeneidade à esquerda está com a abscissa do baricentro a 712,5 m da linha de corrente. Consideramos $\sigma_1 = 0,001$ S/m e σ_2 assumindo os valores 0,10, 0,50 e 1,0 S/m para apenas um corpo.

As discretizações horizontais em Elementos Finitos, tanto nas heterogeneidades quanto entre elas, foram feitas com passos em progressão geométrica de passo inicial 5 m e razão 1,10. Na técnica de Equação Integral, corpos com $\sigma_2 = 0,1$ S/m têm apenas uma célula na horizontal, correspondendo uma largura Δ de $0,49 \delta_2$, enquanto que nos corpos com $\sigma_2 = 0,50$ e $\sigma_2 = 1,0$ S/m foram necessárias 2 e 3 células com larguras $0,55\delta_2$ e $0,52\delta_2$, respectivamente. Como o tempo computacional da técnica de Equação Integral depende do número

de observações e o propósito, nesta investigação, é de avaliar os tempos de processamento decorrente do aumento de discretização nos métodos, modifiquei os passos das observações de modo que sempre tivéssemos 56 observações. A Tabela (3.1) mostra as discretizações, na horizontal (n_x) e na vertical (n_z), realizadas nessa investigação e a Figura (3.4) apresenta os tempos de processamento em relação ao número de heterogeneidades verticais nos dois métodos numéricos.

Tabela 3.1: Tabela das discretizações na investigação de vários corpos verticais.

Número de corpos	Número de discretizações			
	Elementos Finitos $n_x \times n_z$	Equação Integral ($n_x \times n_z$)		
		$\sigma_2 = 1$ S/m	$\sigma_2 = 0,5$ S/m	$\sigma_2 = 0,1$ S/m
1	75×43	3×18	2×12	1×6
2	119×43	$2(3 \times 18)$	$2(2 \times 12)$	$2(1 \times 6)$
3	147×43	$3(3 \times 18)$	$3(2 \times 12)$	$3(1 \times 6)$
4	177×43	$4(3 \times 18)$	$4(2 \times 12)$	$4(1 \times 6)$
5	195×43	$5(3 \times 18)$	$5(2 \times 12)$	$5(1 \times 6)$
6	235×43	$6(3 \times 18)$	$6(2 \times 12)$	$6(1 \times 6)$
7	267×43	$7(3 \times 18)$	$7(2 \times 12)$	$7(1 \times 6)$
8	299×43	$8(3 \times 18)$	$8(2 \times 12)$	$8(1 \times 6)$
9	331×43	$9(3 \times 18)$	$9(2 \times 12)$	$9(1 \times 6)$
10	363×43	$10(3 \times 18)$	$10(2 \times 12)$	$10(1 \times 6)$

Conforme cresce o número de corpos na horizontal, o acréscimo do número de discretizações é mais significativo na Equação Integral, porque acontece um aumento substancial tanto na ordem da matriz \mathbf{K} do sistema de cálculo E_y na heterogeneidade, quanto no cômputo das funções de Green da determinação dos campos na interface ar-terra. Em Elementos Finitos o acréscimo de discretizações horizontais aumenta o número de nós da malha, mas não altera a semibanda da matriz global, não tendo assim custo adicional relativamente grande na resolução do sistema. Como a discretização necessária para os corpos de $\sigma_2 = 0,1$ S/m de condutividade é relativamente baixa, obtemos que, mesmo com dez corpos verticais o método de Equação Integral é mais vantajoso que o de Elementos Finitos.

Os tempos de processamento dependem fundamentalmente do número de discretizações em cada caso. Dependendo do tamanho do corpo, pode ser necessário para apenas um corpo grande um número de discretizações igual ao necessário para vários corpos menores. Precisamos, então, avaliar o que acontece nos casos das variações de largura e de comprimento das heterogeneidades.

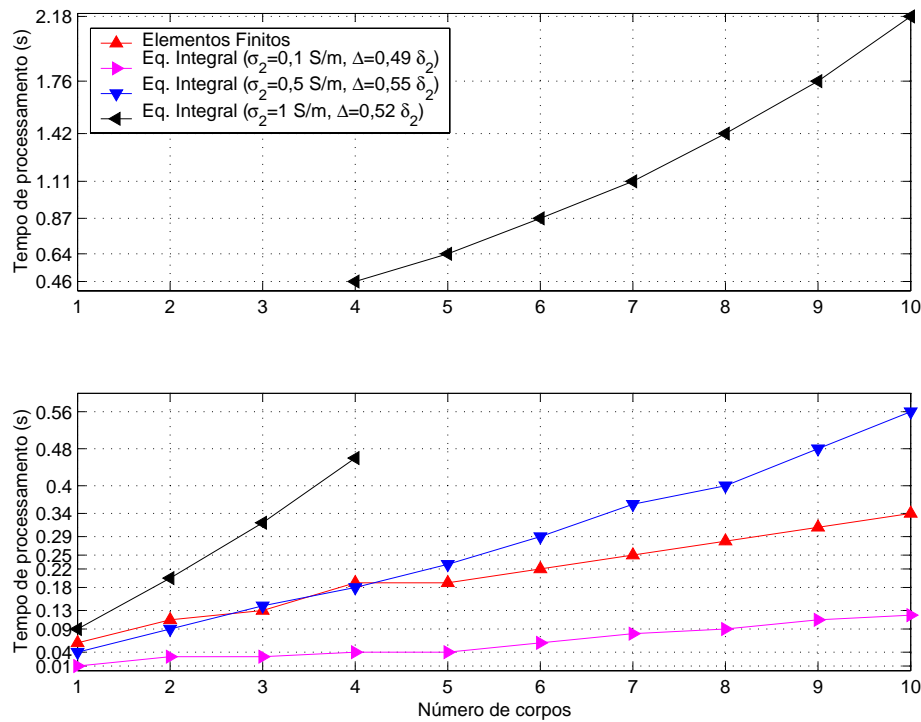


Figura 3.4: Desempenho computacional para vários corpos verticais e três contrastes de condutividade

3.1.3 Variação da extensão lateral

A Figura (3.5) mostra os desempenhos computacionais obtidos variando a extensão lateral de uma heterogeneidade, com condutividades $\sigma_2 = 0,10$, $\sigma_2 = 0,50$ e $\sigma_2 = 1,0$ S/m. Tendo fixado o comprimento $C = 150$ m, a distância à linha infinita $D = 712,5$ m, $P = 45$ m e a condutividade do meio encaixante em $\sigma_1 = 0,001$ S/m, as extensões laterais investigadas foram de 25 m até 300 m, conforme mostrado na Tabela (3.2). O número de células dispostas horizontalmente para cada valor de condutividade em Equação Integral no corpo com 25 m de largura é o mesmo que o realizado na investigação de vários corpos. Nos demais corpos esse número é obtido pela multiplicidade de sua largura em relação ao de 25 m.

Na Equação Integral o aumento da extensão lateral do corpo, fixada sua condutividade, implica no aumento linear do número de células. Conseqüentemente o tempo de processamento no cálculo dos campos fora da heterogeneidade cresce a mesma razão. Como na eliminação gaussiana o número de operações realizadas não varia linearmente com o número de equações, o tempo computacional na resolução do sistema de determinação de E_y no corpo não cresce linearmente. No entanto vemos graficamente que o tempo total cresce próximo a mesma razão de crescimento das células, e isso aqui acontece porque os números de células

Tabela 3.2: Tabela das discretizações na investigação de várias extensões laterais para um só corpo

Largura do corpo	Número de discretizações			
	Elementos Finitos $n_x \times n_z$	Equação Integral ($n_x \times n_z$)		
		$\sigma_2 = 1 \text{ S/m}$	$\sigma_2 = 0,5 \text{ S/m}$	$\sigma_2 = 0,1 \text{ S/m}$
25 m	75×43	3×18	2×12	1×6
50 m	75×43	6×18	4×12	2×6
75 m	79×43	9×18	6×12	3×6
100 m	81×43	12×18	8×12	4×6
125 m	83×43	15×18	10×12	5×6
150 m	87×43	19×19	13×13	6×6
200 m	88×43	24×18	16×12	8×6
250 m	89×43	30×18	20×12	10×6
300 m	90×43	34×17	24×12	12×6

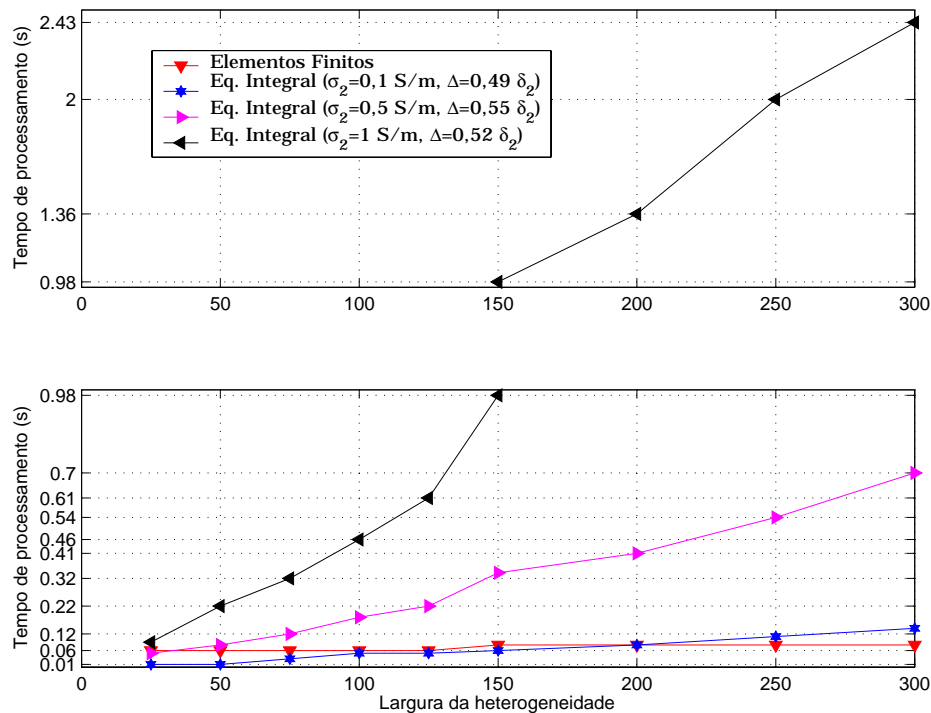


Figura 3.5: Desempenho computacional para o corpo variando-se a extensão lateral e três contrastes de condutividade

nessa investigação estão na extensão de discretização em que as determinações dos campos fora do corpo são mais significativas em tempo computacional. Com Elementos Finitos os passos dentro da heterogeneidade, aqui todos simulados com valor inicial de 5 m e razão 1, 1,

crecem e decaem em progressão geométrica, de tal maneira que o aumento da largura do corpo não acrescenta uma quantidade correspondente de elementos à malha. Assim o crescimento nas discretizações na malha modifica pouco a ordem da matriz global, que aliás não tem sua semibanda alterada. Por esses fatos o custo computacional com Elementos Finitos é, neste caso, equivalente ou menor do que aquele com Equação Integral.

3.1.4 Variação do comprimento

A Figura (3.6) mostra o crescimento no tempo de processamento mediante o aumento do comprimento da heterogeneidade. Investigamos com comprimentos variando de 150 m a 650 m, conforme mostrado na Tabela (3.3). A largura é de 25 m, $D = 712,5$ m, $P = 45$ m, e a condutividade do meio encaixante de $\sigma_1 = 0,001$ S/m. Na malha de Elementos Finitos, a heterogeneidade é discretizada na vertical por passos de razão geométrica 1,2 e passo inicial de 10 m. O aumento no número de elementos na vertical não acontece na mesma proporção do aumento do comprimento do corpo. Na técnica de Equação Integral, analogamente à investigação da variação da largura, o número de células cresce à mesma razão dos comprimentos, e o número máximo de células pertence a faixa em que a determinação da componente E_y no corpo tem pequena demanda de tempo computacional de todo o programa. Assim, o comportamento de tempo de processamento é linear e, como a discretização no corpo com $\sigma_2 = 0,1$ S/m e $C = 150$ m é muito baixa, o tempo gasto em todos os outros comprimentos também é muito baixo, chegando a ser sempre inferior ao de Elementos Finitos.

Tabela 3.3: Tabela das discretizações na investigação de vários comprimentos para um único corpo

Comprimento do corpo	Número de discretizações			
	Elementos Finitos nx × nz	Equação Integral (nx × nz)		
		$\sigma_2 = 1$ S/m	$\sigma_2 = 0,5$ S/m	$\sigma_2 = 0,1$ S/m
150 m	75 × 43	3 × 18	2 × 12	1 × 6
250 m	75 × 47	3 × 30	2 × 20	1 × 10
350 m	75 × 49	3 × 42	2 × 28	1 × 14
450 m	75 × 51	3 × 54	2 × 36	1 × 18
550 m	75 × 53	3 × 66	2 × 44	1 × 22
650 m	75 × 55	3 × 78	2 × 52	1 × 26

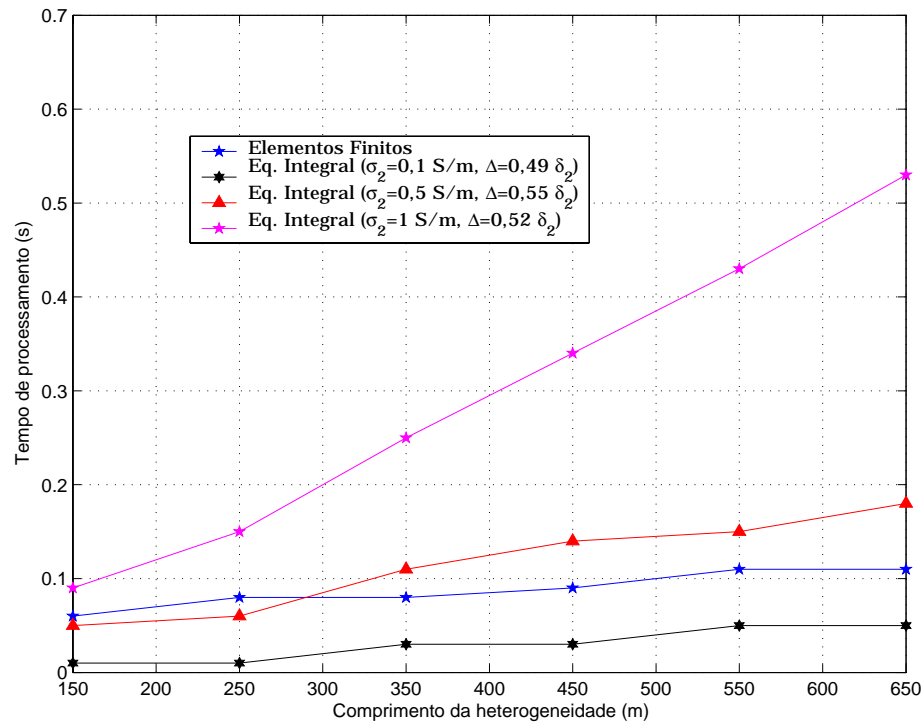


Figura 3.6: Desempenho computacional para corpo variando-se o comprimento e três contrastes de condutividade

3.1.5 Uma heterogeneidade vertical e outra horizontal

Para o modelo formado por um corpo vertical e outro horizontal, a malha de Elementos Finitos foi discretizada na horizontal, em ambos corpos, com passos de razão geométrica com passo inicial de 5 m e razão 1,1. A partir do limite inferior do corpo horizontal os passos na vertical crescem com razão de 1,2 sobre o inicial de 10 m. A Figura (3.7) apresenta a configuração da malha na consideração desses corpos. Novamente as condutividades investigadas das heterogeneidades foram $\sigma_2 = 0,1$, $\sigma_2 = 0,5$ e $\sigma_2 = 1$ S/m, permanecendo com $\sigma_1 = 0,001$, $D = 712,5$ m (abscissa do baricentro do corpo vertical), $P = 45$ m, $C = 150$ m, $L = 25$ m. A distância entre os dois corpos foi de 200 m.

A Figura (3.8) mostra os tempos de processamento para o modelo de um corpo vertical e outro horizontal. Os tempos resultantes na Equação Integral foram evidentemente os mesmos que aqueles com dois corpos verticais. Para $\sigma_2 = 0,1$ S/m um tempo de $t = 0,03125$ segundos, para $\sigma_2 = 0,5$ S/m, $t = 0,0935$ s, e para $\sigma_2 = 1$ S/m um tempo de $t = 0,20312$ segundos. No método de Elementos Finitos, mesmo com a necessidade de aumentar além das discretizações horizontais, as discretizações verticais na região da largura do corpo horizontal, o tempo computacional teve um leve aumento, $t = 0,125$ segundos, chegando ser então melhor que

Equação Integral com $\sigma_2 = 1$ S/m, equivalente com $\sigma_2 = 0,5$ S/m e inferior quando $\sigma_2 = 0,1$ S/m.

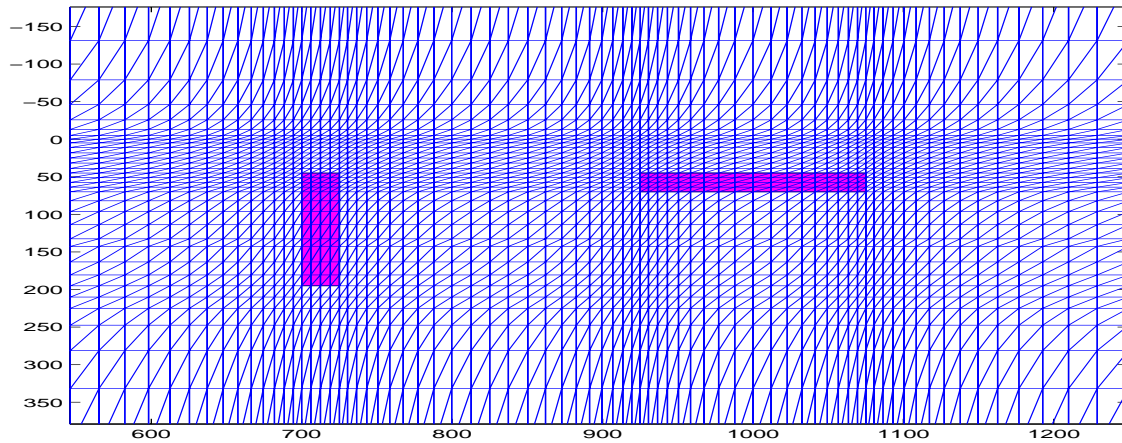


Figura 3.7: Modelo com um corpo vertical e um horizontal

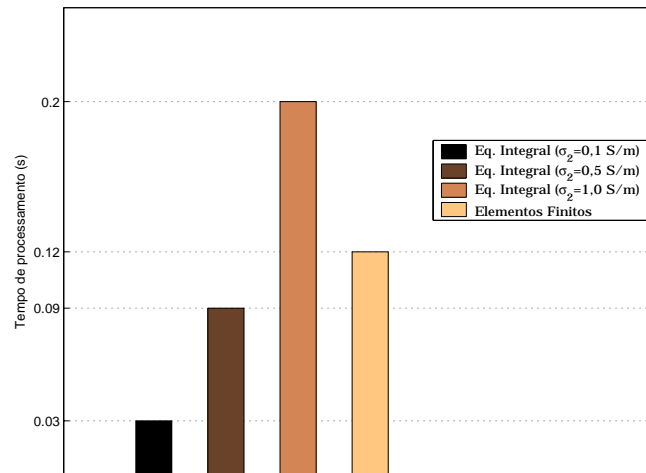


Figura 3.8: Comportamento do tempo de processamento para o modelo formado por um corpo vertical e um horizontal

3.1.6 Heterogeneidade inclinada

Na modelagem de uma heterogeneidade como sendo um corpo inclinado, as células quadradas em Equação Integral nunca preenchem o paralelogramo que representa o corpo. A Figura (3.9) ilustra a dificuldade em aproximações para esse tipo de geometria. Aqui, além de nos preocuparmos com as larguras das células com relação a condutividade do corpo, devemos adequá-las razoavelmente à geometria do mesmo. Para isso, tomamos como posicionamento das que ficam mais externas um arranjo tal como mostra a Figura (3.9), no qual

a área externa à borda do corpo, que é parte de uma célula, é igual à área dentro do corpo, que não é abrangida por nenhuma célula. A partir daí, comparando com o resultado de Elementos Finitos com uma malha bastante discretizada no corpo inclinado, experimentamos várias larguras de células para encontrar a que apresenta uma boa apresentação no menor tempo possível.

Usamos os resultados de Elementos Finitos para dar confiabilidade à técnica de Equação Integral na procura da largura de suas células. Para isso, discretizamos uniformemente a região que compreende o corpo, de modo que sempre existisse nós nos limites dos mesmo em qualquer linha que o intersectava. Isto era conseguido fazendo-se com que os passos uniformes verticais tivessem medida igual a do passo horizontal vezes a tangente do ângulo de inclinação. A Figura (3.10) ilustra essa configuração para um modelo com um corpo a 45° de inclinação com a horizontal.

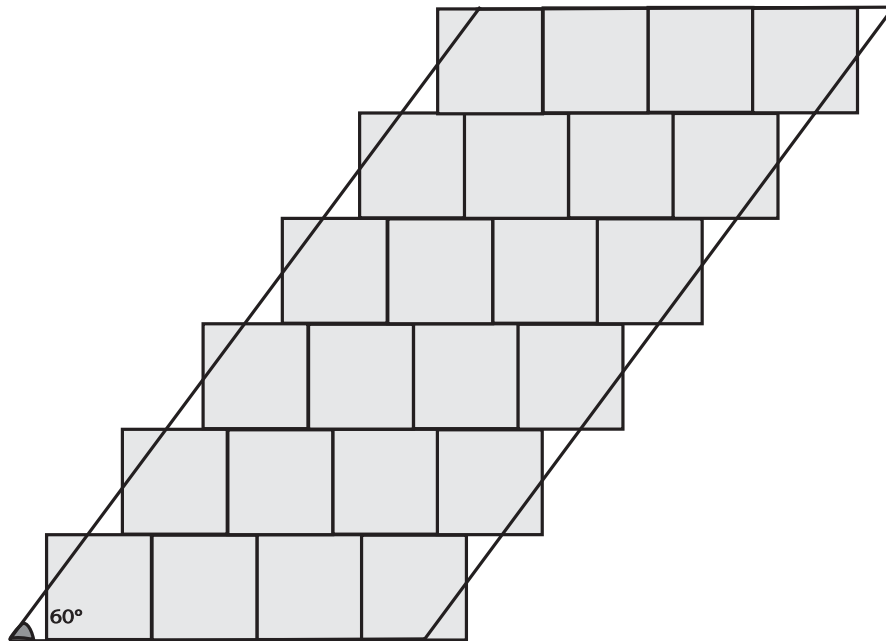


Figura 3.9: Ilustração de aproximações de corpos inclinados por células quadradas

A largura das células de discretização na Equação Integral que resultaram em boas aproximações foram encontradas ao considerarmos $\Delta = 0,4 \delta_2$. Este valor foi satisfatório para as inclinações de 30° , 45° e 60° . Essas experimentações foram realizadas em corpos com espessura no topo de 25 m e altura de 150 m. A profundidade em que se encontra o corpo inclinado é $P = 45$ m e a abscissa do baricentro do corpo está a 700 m à direita da linha de corrente.

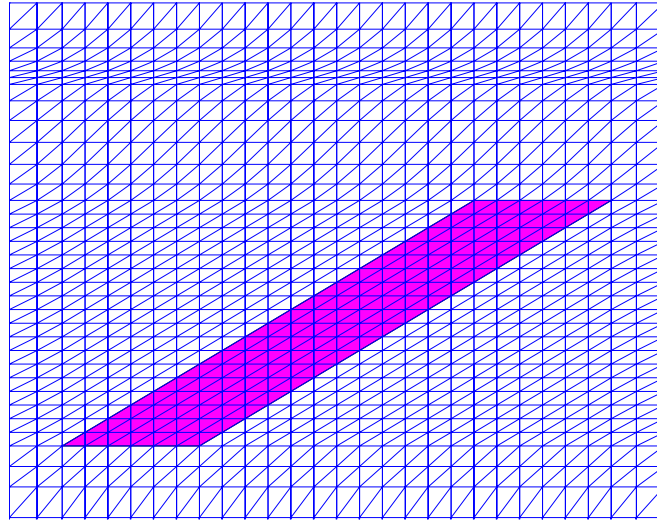


Figura 3.10: Modelo com malha idealizada num corpo inclinado

Em Elementos Finitos as discretizações horizontais e verticais que abrangem a heterogeneidade não podem ser aqui as mesmas consideradas nos corpos horizontais ou verticais. Existe aqui, assim como na Equação Integral, a dificuldade geométrica de um conjunto de elementos representar fielmente o corpo inclinado, a não ser sob a consideração que fizemos na busca da largura Δ das células de Equação Integral. Este último tipo de malha, porém, demanda do programa um alto tempo de processamento. A fim de encontrar uma malha que nos permita um menor tempo computacional com uma precisão satisfatória, testamos vários passos iniciais para diversas razões de progressão geométrica, tanto horizontalmente como verticalmente. Os bons resultados nas inclinações de 30, 45 e 60 graus foram obtidos quando adotamos passos iniciais de apenas 2,5 m de comprimento e com razão de valor 1,1. Essas investigações foram realizadas sobre o mesmo modelo considerado na busca da largura Δ de Equação Integral. Mostramos na Figura (3.11) um exemplo da malha obtida na investigação para um corpo de 45° de inclinação e na Figura (3.12) os tempos obtidos para corpos de 30°, 45° e 60° de inclinação com a horizontal. Comparativamente ao que tínhamos nos modelos anteriores, a discretização na malha de Elementos Finitos no corpo inclinado é bem maior. Nas heterogeneidades com 30°, 45° e 60° os tempos de processamento em Elementos Finitos foram de 0,28125 s, 0,26562 s e 0,25 s respectivamente, enquanto que em Equação Integral todas essas inclinações foram realizadas em, 0,0468 s na condutividade $\sigma_2 = 0,1$ S/m, em 0,14 s sob a condutividade $\sigma_2 = 0,5$ S/m, e em 0,28 s no corpo com $\sigma_2 = 1$ S/m. Assim apenas em $\sigma_2 = 1$ S/m há equivalência nos tempos entre os dois métodos, e nas demais a técnica de Equação Integral é muito mais vantajosa.

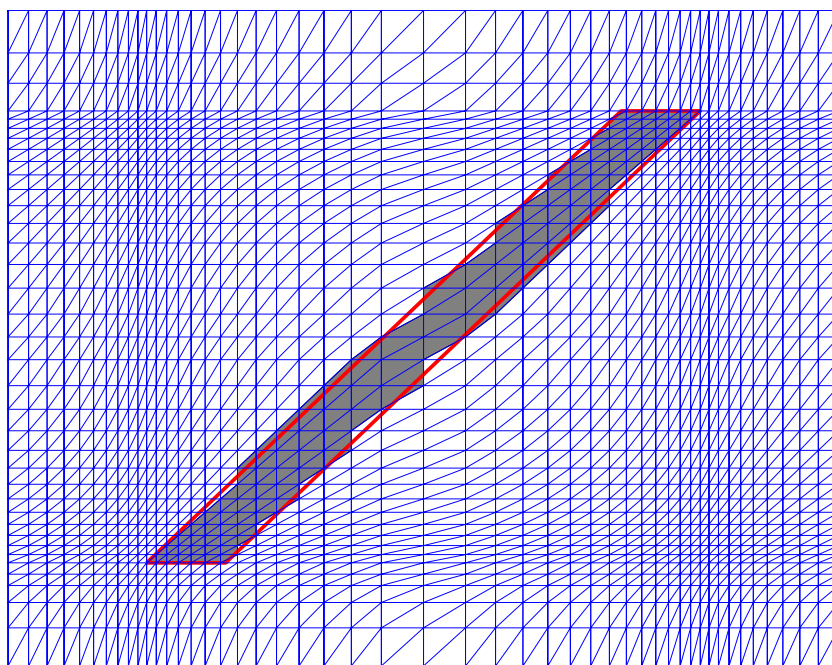


Figura 3.11: Exemplo de malha com passos em progressão geométrica num corpo inclinado de 45° com a horizontal

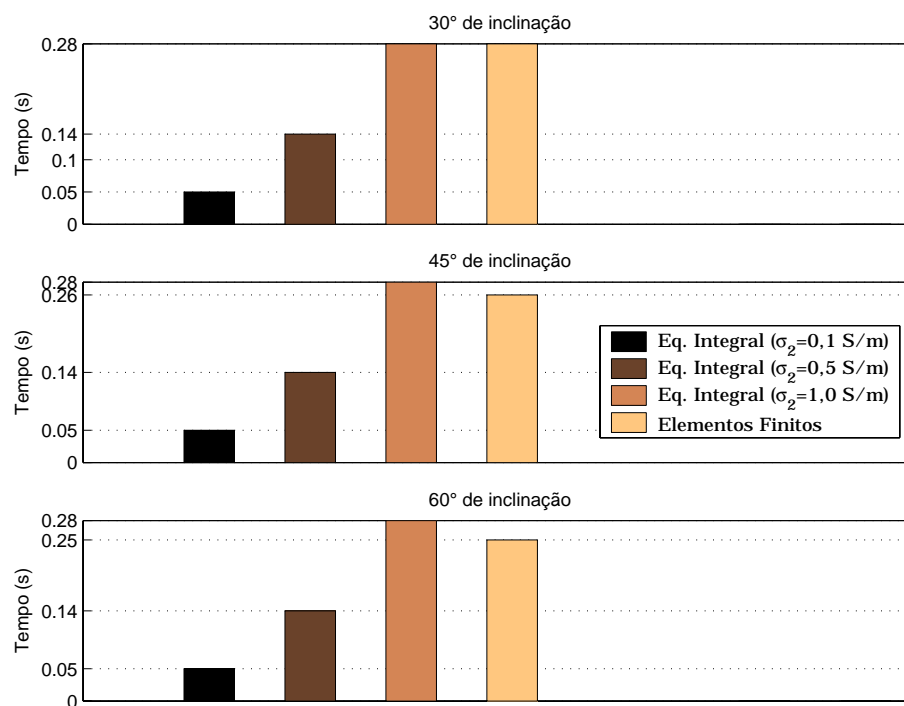


Figura 3.12: Comportamento dos tempos de processamento para modelos com corpos de 30° , 45° e 60° de inclinação

O corpo inclinado considerado em cada método é bem diferente um do outro, ou seja, as discretizações realizadas em cada método para um corpo com uma certa inclinação não configuram a mesma geometria. Mas observando as figuras (3.13), (3.14) e (3.15) vemos que as curvas obtidas nos dois métodos numéricos são virtualmente idênticas. Essas aproximações são excelentes somente porque o método eletromagnético que aqui aplicamos é de baixa resolução; a frequência utilizada é relativamente baixa e não 'enxergamos' as diferenças nas geometrias da heterogeneidade inclinada aproximada por cada método.

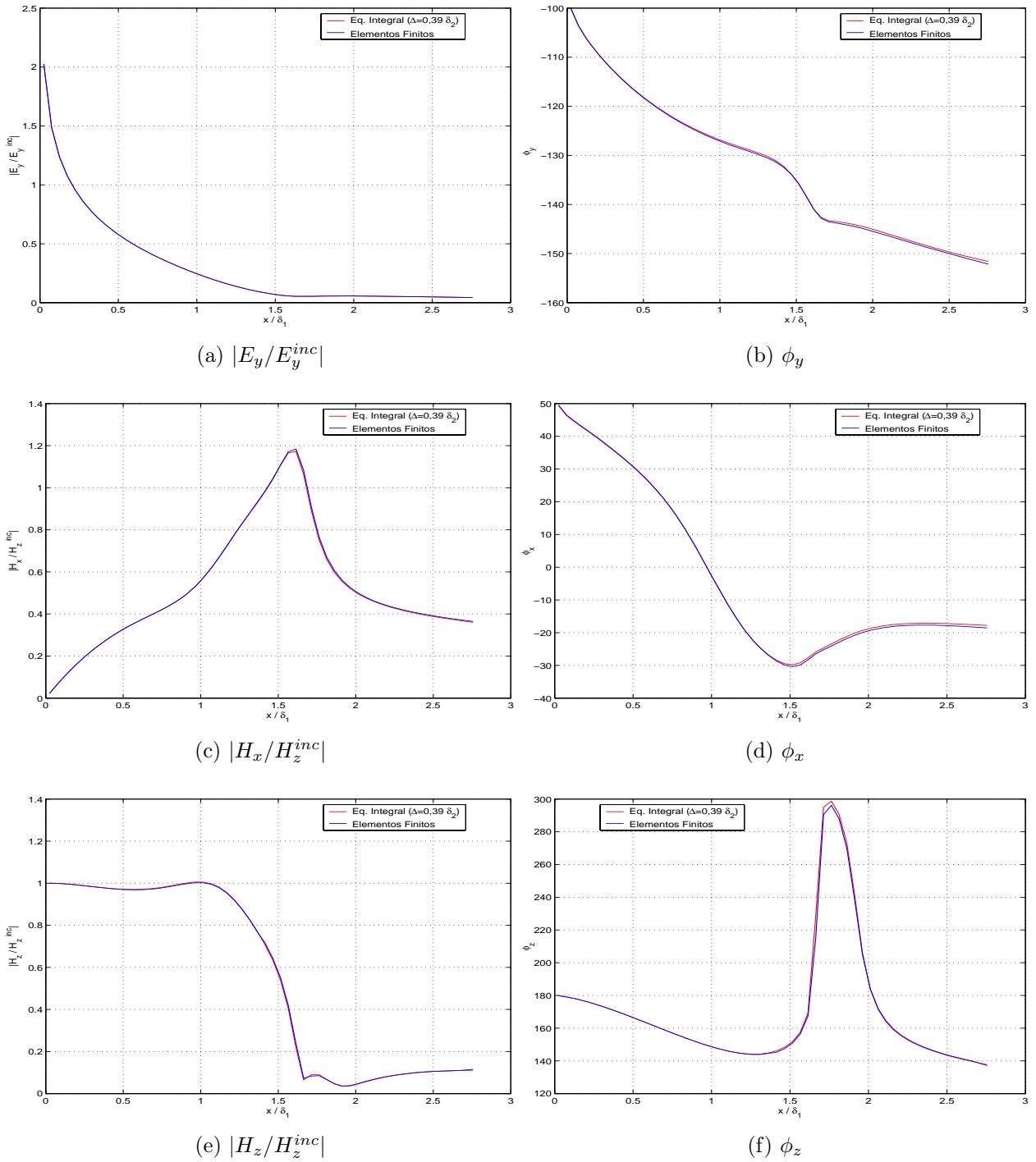


Figura 3.13: Curvas para o modelo de um corpo inclinado a 30° em relação a superfície. $\sigma_1 = 0,001$ S/m e $\sigma_2 = 1$ S/m. (a) Amplitude de E_y/E_y^{inc} . (b) Fase de E_y/E_y^{inc} . (c) Amplitude de H_x/H_z^{inc} . (d) Fase de H_x/H_z^{inc} . (e) Amplitude de H_z/H_z^{inc} . (f) Fase de H_z/H_z^{inc} .

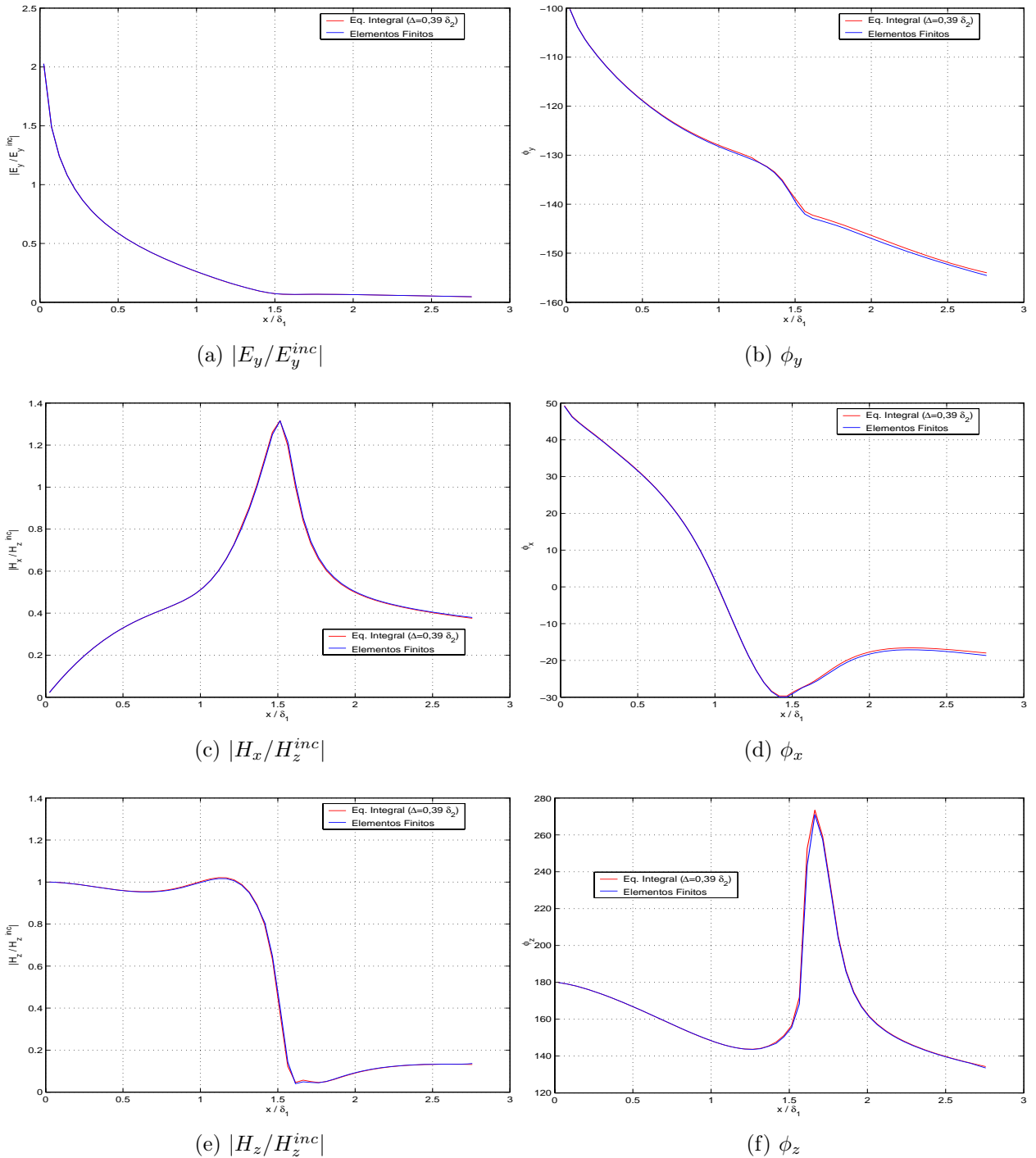


Figura 3.14: Curvas para o modelo de um corpo inclinado a 45° em relação a superfície. $\sigma_1 = 0,001$ S/m e $\sigma_2 = 1$ S/m. (a) Amplitude de E_y/E_y^{inc} . (b) Fase de E_y/E_y^{inc} . (c) Amplitude de H_x/H_z^{inc} . (d) Fase de H_x/H_z^{inc} . (e) Amplitude de H_z/H_z^{inc} . (f) Fase de H_z/H_z^{inc} .

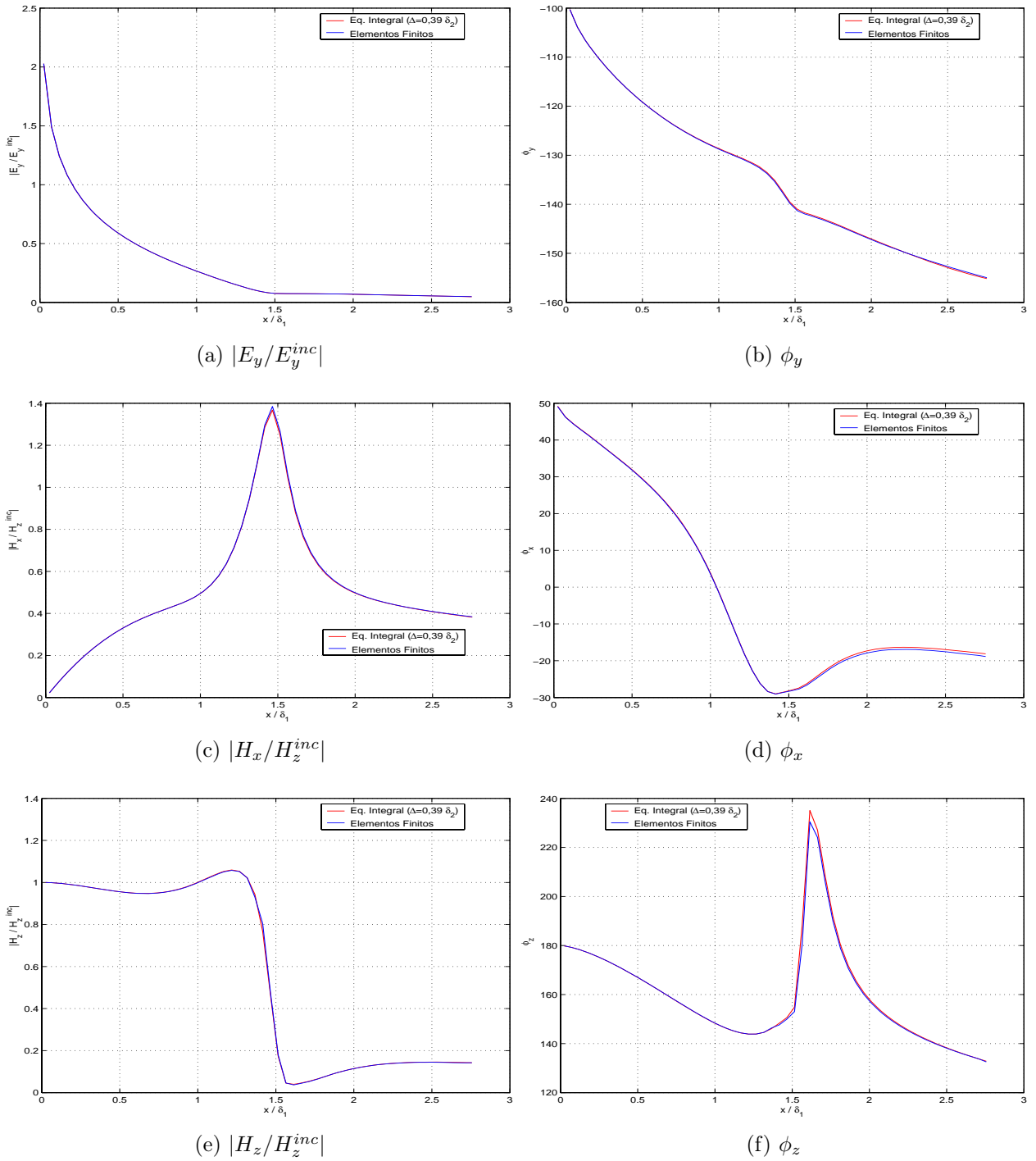


Figura 3.15: Curvas para o modelo de um corpo inclinado a 60° em relação a superfície. $\sigma_1 = 0,001$ S/m e $\sigma_2 = 1$ S/m. (a) Amplitude de E_y/E_y^{inc} . (b) Fase de E_y/E_y^{inc} . (c) Amplitude de H_x/H_x^{inc} . (d) Fase de H_x/H_x^{inc} . (e) Amplitude de H_z/H_z^{inc} . (f) Fase de H_z/H_z^{inc} .

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho mostra o comportamento dos tempos de processamento nos métodos de Elementos Finitos e Equação Integral em modelos com heterogeneidades condutivas num semiespaço resistivo energizados por uma linha infinita de corrente. Na maioria dos modelos estudados aqui, ao considerar condutividades de corpos maiores que $0,5 \text{ S/m}$, a técnica de Elementos Finitos mostrou-se mais rápida. Esta técnica foi apenas desvantajosa na modelagem de corpos inclinados com $\sigma_2 < 1,0 \text{ S/m}$ ou em heterogeneidades de baixas condutividades (menor do que ou igual a $0,1 \text{ S/m}$) e extensão lateral inferior a 200 m (para uma extensão vertical de 150 m) porque precisa-se, neste caso, de poucas células na discretização.

Também avaliamos em cada programa o custo computacional das subrotinas que demandam mais tempo. Os sistemas lineares envolvidos nos dois métodos tem características bem distintas. Apesar de em Elementos Finitos o número de equações e incógnitas ser bem maior que o apresentado em Equação Integral, a matriz dos coeficientes do sistema é bandeada, simétrica e esparsa, e isso possibilita encontrar a solução com número de equações da semi-banda mais uma unidade, reduzindo bastante o tempo gasto nessa etapa de processamento.

Diferentemente de Elementos Finitos, o cálculo dos campos na técnica de Equação Integral tem dependência explícita do número de observações, o que é um fator importante a ser considerado em uma tomada de decisão diante de modelos com características trabalhadas aqui. Devido a linearidade no tempo de processamento na determinação dos campos fora da heterogeneidade, podemos prever quanto tempo é demandado nessa etapa quando estivermos com um número diferente de medidas empregadas aqui.

Muitos dos modelos mais complexos podem ser investigados pelos dois métodos. Por exemplo, em um modelo com um semiespaço inferior de camadas horizontais homogêneas, o método de Elementos Finitos tem alterações nos campos primários e na determinação do vetor fonte, sendo nesse caso necessário computar corretamente a variação de condutividades $\Delta\sigma$ para os elementos dentro das heterogeneidades. Na Equação Integral, além dos campos primários, as funções de Green são também diferentes. As células quadradas das heterogeneidades devem ser tomadas de modo que nenhuma pertença simultaneamente a duas camadas. Na construção da matriz na busca do campo E_y dentro dos corpos, cada célula é acoplada a outra célula por uma função de Green. No caso das células pertencerem a mesma camada, aquela função de Green possui duas componentes, uma é a resposta de um espaço infinito com a mesma condutividade da camada, denominada componente primária e a outra, deno-

minada secundária, que é a diferença entre a função de Green e a componente primária, que inclui a resposta das reflexões nas interfaces (HOHMANN, 1975). As componentes primárias são expressas analiticamente em função da condutividade e da distância entre as células. Já as secundárias são dadas através dos coeficientes de reflexão nas camadas e de filtros lineares. Desse modo, na Equação Integral, as etapas que diferem a modelagem feita aqui da considerada com o meio de camadas horizontais são essencialmente aos cálculos dos coeficientes de reflexão e de quantidade de filtros lineares, que depende do número de camadas. Assim as alterações nas Equações Integrais são, sob o aspecto de tempo computacional, mais significativas que as de Elementos Finitos, fazendo com que, dependendo do número de camadas, este método seja mais vantajoso em todos modelos estudados aqui.

Caso a linha infinita de corrente na superfície esteja oblíqua ao strike das heterogeneidades, além do modo transversal elétrico (TE) de propagação dos campos, acontece (assim como em algumas fontes pontuais) também o modo transversal magnético (TM) (com esses modos temos a modelagem 2.5D, onde é necessário primeiro encontrar a solução num domínio da transformada de Fourier e depois usar a transformada inversa). Neste caso, na construção do programa de Elementos Finitos consideramos mais uma componente de campo nos vértices dos elementos da malha (computamos dois nós em um ponto). A matriz global tem então ordem o dobro da matriz na situação de apenas um modo de propagação, e, assim, uma mudança significativa ocorre no tempo de processamento na modelagem com os modos TE e TM. Na Equação Integral o cômputo dos dois métodos de propagação eletromagnética significa considerar um sistema de duas equações de Helmholtz ou seja, duas equações de Fredholm sob a contabilização de funções de Green como sendo tensores. Além disso, no modelo de camadas horizontais geralmente as funções de Green têm a componente secundária (devida a propagação refletida) expressas por mais de um filtro linear; assim certamente o tempo computacional para essa modelagem é bem superior ao que é trabalhado aqui.

Para a consideração da modelagem bidimensional com aclive ou declives na superfície ou em alguma camada, é necessário, seja nos Elementos Finitos ou na Equação Integral considerar que a camada não horizontal seja uma heterogeneidade. E isso na Equação Integral requer um aumento significativo de memória e de tempo de processamento (ZHDANOV; LEE; YOSHIKA, 2006). Já nos Elementos Finitos o tempo acrescido para essa modelagem é relativamente pequeno, pois as alterações são feitas nas discretizações dessa nova heterogeneidade e nas condições de fronteira nas bordas da malha.

As discretizações aqui nos Elementos Finitos foram realizadas em malha retangular. Nesse caso existem regiões da malha que desnecessariamente tem elementos pequenos. Uma mo-

delagem nesse método pode ser mais rápida ao se considerar malhas adaptativas, onde os elementos menores são configurados apenas nas zonas de maior variação dos campos.

REFERÊNCIAS

- BECKER, E. B.; CAREY, G. F.; ODEN, J. T. **Finite elements: an introduction**. New Jersey: Prentice-Hall, 1981.
- COGGON, J. H. Electromagnetic and electrical modelling by the finite element method. **Geophysics**, n. 36; p. 132-155, 1971.
- FARQUHARSON, C. G.; DUCKWORTH, K.; OLDENBURG, D. W. Comparison of integral equation and physical scale modeling of the electromagnetic responses of models with large conductivity contrasts. **Geophysics**, n. 71; p. 169-177, 2006.
- HOHMANN, G. W. Electromagnetic scattering by conductors in the earth a line of current. **Geophysics**, n. 36; p. 101-131, 1971.
- HOHMANN, G. W. Three-dimensional induced polarization and electromagnetic modeling **Geophysics**, n. 40; p. 309-324, 1975.
- LEE, K. H.; PRIDMORE, D.F.; MORRISON, H. F. A hybrid three-dimensional electromagnetic modeling scheme **Geophysics**, n. 46; p. 796-805, 1981.
- RIJO, L. **Notas de aula do Curso de Pós-Graduação em Geofísica da UFPA**. 2002. Disponível em: <[url:http://www.rijo.pro.br](http://www.rijo.pro.br)>. Acesso em: 12 jan. 2006.
- RIJO, L.; ALMEIDA F. L. New optimized digital filters for sine, co-sine, J_0 and J_1 Hankel transforms. In: INTERNATIONAL CONGRESS OF THE BRAZILIAN GEOPHYSICAL SOCIETY, 8th, 2003, Rio de Janeiro. Disponível em: <[url:http://www.rijo.pro.br](http://www.rijo.pro.br)>. Acesso em: 20 jul. 2006.
- STOYER, C. H.; GREENFIELD, R. J. Numerical solutions of the response of a two-dimensional earth to an oscillating magnetic dipole source. **Geophysics**, n. 41; p. 519-530, 1976.
- WARD, S. H.; HOHMANN, G. W. Electromagnetic theory for geophysical applications. In: NABIGHIAN, M.N. **Electromagnetic methods in applied geophysics:theory**. Tulsa:SEG,1987. v.1. (Investigations in Geophysics, 3).
- ZHDANOV, M. S.; LEE, S. K.; YOSHIKA, K. Integral equations method for 3-D modeling of electromagnetic fields in complex structures with inhomogeneous background conductivity. **Geophysics**, n. 71; p. 333-345, 2006.