



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ**  
**INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM GEOFÍSICA**

**TESE DE DOUTORADO**

**MIGRAÇÃO POR EQUAÇÃO DE ONDA EM MEIOS  
ANISOTRÓPICOS COM CORREÇÃO DE AMPLITUDE**

**DANIELA RÊGO AMAZONAS**

**BELÉM**

**2010**

DANIELA RÊGO AMAZONAS

**MIGRAÇÃO POR EQUAÇÃO DE ONDA EM MEIOS  
ANISOTRÓPICOS COM CORREÇÃO DE AMPLITUDE**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Geofísica do Instituto de Geociências da Universidade Federal do Pará, para a obtenção do título de Doutor em Geofísica.

Área de Concentração: Métodos Sísmicos

Orientador: Jessé Carvalho Costa

Coorientador: Jörg Schleicher

BELÉM

2010

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação(CIP)  
Biblioteca Geólogo Raimundo Montenegro Garcia de Montalvo

---

A489m Amazonas, Daniela Rêgo

Migração por equação de onda em meios anisotrópicos com correção de amplitude / Daniela Rêgo Amazonas; Orientador: Jessé Carvalho Costa; Coorientador: Jörg Schleicher 2010

85 f. : il.

Tese (Doutorado em Geofísica) Programa de Pós-Graduação em Geofísica, Universidade Federal do Pará, Belém, 2010.

1. Geofísica 2. Migração. 3. Equação de Onda. 4. Correção de Amplitude. 5. Anisotropia. I. Universidade Federal do Pará II. Costa, Jessé Carvalho, *orient.* III. Schleicher, Jörg, *coorient.* IV. Título.

---

CDD 20. ed.: 551

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ  
INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM GEOFÍSICA

**MIGRAÇÃO POR EQUAÇÃO DE ONDA EM MEIOS ANISOTRÓPICOS  
COM CORREÇÃO DE AMPLITUDE**

TESE APRESENTADA POR

**DANIELA RÊGO AMAZONAS**

COMO REQUISITO À OBTENÇÃO DE GRAU DE DOUTOR EM CIÊNCIAS NA  
ÁREA DE GEOFÍSICA

Data da aprovação: \_\_\_ / \_\_\_ / \_\_\_\_

**BANCA EXAMINADORA:**

---

Prof. Dr. Jessé Carvalho Costa

---

Prof. Dr. Reynan da Cruz Pestana

---

Prof. Dr. Gervásio P. dos Santos Cavalcante

---

Prof. Dr. Lourenildo Williame Barbosa Leite

---

Profa. Dra. Ellen de Nazaré de Souza Gomes

*Dedico a todas as pessoas que eu amo.*

## AGRADECIMENTOS

Agradeço aos meus pais, Rosinaldo e Nelma, por sempre acreditarem em mim e apoiarem todas as minhas decisões. Agradeço também às minhas irmãs, Diana e Denise, pela dedicação delas à nossa família nos momentos em que eu estava ausente, bem como aos amigos sempre presentes.

Agradeço a todos os que contribuíram para a realização desta tese, em especial ao Prof. Dr. Jessé Costa e ao Prof. Dr. Jörg Schleicher pelas discussões importantíssimas, paciência e dedicação. Agradeço também ao Dr. Rafael Aleixo pela contribuição e incentivo que foram fundamentais.

Agradeço aos membros da Banca Examinadora, Prof. Dr. Reynam Pestana, Prof. Dr. Lourenildo Leite, Prof. Dr. Gervásio Cavalcante e Profa. Dra. Ellen Gomes pelas diversas observações e sugestões que muito contribuíram para melhorar este trabalho.

Agradeço aos financiadores dessa pesquisa, o Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) e a FINEP/Petrobras através da Rede Cooperativa de Pesquisa em Geofísica de Exploração.

## RESUMO

Este trabalho discute dois aspectos da migração em profundidade através da continuação para baixo dos campos de onda: o tratamento de modos evanescentes e a correção da amplitude dos eventos migrados. Estes dois aspectos são discutidos em meios isotrópicos e para uma classe de meios anisotrópicos. Migrações por diferenças finitas (FD) e por diferenças finitas e Fourier (FFD) podem ser instáveis em meios com forte variação lateral de velocidade. Estes métodos utilizam aproximações de Padé reais para representar o operador que descreve a propagação de ondas descendentes. Estas abordagens não são capazes de tratar corretamente os modos evanescentes, o que pode levar à instabilidades numéricas em meios com forte variação lateral de velocidade. Uma solução possível para esse problema é utilizar aproximação de Padé complexa, que consegue melhor representar os modos evanescentes associados às reflexões pós-críticas, e neste trabalho esta aproximação é utilizada para obter algoritmos FD e híbrido FD/FFD estáveis para migração em meios transversalmente isotrópicos com eixo de simetria vertical (VTI)<sup>1</sup>, mesmo na presença de forte variação nas propriedades elásticas do meio. A estabilidade dos algoritmos propostos para meios VTI foi validada através da resposta ao impulso do operador de migração e pela sua aplicação na migração de dados sintéticos, em meios fortemente heterogêneos. Métodos de migração por equação de onda em meios heterogêneos não tratam corretamente a amplitude dos eventos durante a propagação. As equações de onda unidirecionais tradicionais descrevem corretamente apenas a parte cinemática da propagação do campo de onda. Assim, para uma descrição correta das amplitudes deve-se usar as equações de onda unidirecionais de amplitude verdadeira. Em meios verticalmente heterogêneos, as equações de onda unidirecionais de amplitude verdadeira podem ser resolvidas analiticamente. Em meios lateralmente heterogêneos, essas equações não possuem uma solução analítica. Mesmo soluções numéricas tendem a ser instáveis. Para melhorar a compensação de amplitude na migração, em meios com variação lateral de velocidade, é proposto uma aproximação estável para solução da equação de onda unidirecional de amplitude verdadeira. Esta nova aproximação é implementada nas migrações *split-step* e diferenças finitas e Fourier (FFD). O algoritmo *split-step* com correção de amplitude foi estendido para meios VTI. A migração pré e pós-empilhamento de dados sintéticos, em meios isotrópicos e anisotrópicos, confirmam o melhor tratamento das amplitudes e estabilidade dos algoritmos propostos.

Palavras-chave: Migração. Equação de onda. Correção de amplitude. Anisotropia.

---

<sup>1</sup>Do inglês Vertical Transversely Isotropic

## ABSTRACT

Standard real-valued finite-difference (FD) and Fourier finite-difference (FFD) migrations cannot handle evanescent waves correctly, what can lead to numerical instabilities in the presence of strong velocity variations. A possible solution to these problems is the complex Padé approximation, that avoids problems with evanescent waves by a rotation of the branch cut of the complex square root, and we apply it to the acoustic wave equation for vertical transversely isotropic (VTI) media to derive more stable FD and hybrid FD/FFD migrations. Our analysis of the dispersion relation of the new method indicates that they can provide stable migration results with less artifacts, and higher accuracy at steep dips. These conclusions are confirmed by the numerical impulse responses of the migration operator, and by the migration of synthetic data in strongly heterogeneous VTI media. Wave-equation migration in heterogeneous media, using standard one-way wave equations, can only describe correctly the kinematic of the propagation. For a correct description of amplitudes, we must use the so called true-amplitude one-way wave equations. In vertically inhomogeneous media, the resulting true-amplitude one-way wave equations can be solved analytically. In laterally inhomogeneous media, these equations are much harder to solve, and even numerical solutions tend to suffer from instabilities and other artifacts. We present an approach to circumvent these problems by implementing approximate solutions based on the one-dimensional analytic amplitude modifications. We use these approximations to modify split-step and Fourier finite-difference migrations in such a way that they take better care of migration amplitudes. Simple synthetic data examples demonstrate the recovery of true migration amplitudes. Applications to the SEG/EAGE Salt model, and to the Marmousi data, show that the method improves amplitude recovery in the migrated images. We also show that the method for amplitude correction can be applied to migration algorithm for VTI media, and the algorithm was applied to the HESS synthetic data.

Key-words: Migration. Wave equation. Amplitude correction. Anisotropy

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

<p>Figura 3.1 Aproximação FD usando série de Padé complexa para a relação de dispersão da equação da onda unidirecional com <math>\alpha = 5^\circ</math>. Esquerda: Parte real. Direita: Parte imaginária. . . . .</p>	34
<p>Figura 3.2 Aproximação FD usando série de Padé complexa para a relação de dispersão da equação da onda unidirecional com <math>\alpha = 45^\circ</math>. Esquerda: Parte real. Direita: Parte imaginária. . . . .</p>	35
<p>Figura 3.3 Aproximação FD usando série de Padé complexa para a relação de dispersão da equação da onda unidirecional com <math>\alpha = 60^\circ</math>. Esquerda: Parte real. Direita: Parte imaginária. . . . .</p>	35
<p>Figura 3.4 Aproximação FD usando série de Padé complexa para a relação de dispersão da equação da onda unidirecional com <math>\alpha = 75^\circ</math>. Esquerda: Parte real. Direita: Parte imaginária. . . . .</p>	36
<p>Figura 3.5 Aproximação FD usando série de Padé complexa para a relação de dispersão da equação da onda unidirecional com <math>\alpha = 90^\circ</math>. Esquerda: Parte real. Direita: Parte imaginária. . . . .</p>	36
<p>Figura 3.6 Aproximação FFD usando série de Padé complexa para a relação de dispersão da equação da onda unidirecional com <math>\alpha = 5^\circ</math>. Esquerda: Parte real. Direita: Parte imaginária. . . . .</p>	38
<p>Figura 3.7 Aproximação FFD usando série de Padé complexa para a relação de dispersão da equação da onda unidirecional com <math>\alpha = 45^\circ</math>. Esquerda: Parte real. Direita: Parte imaginária. . . . .</p>	39
<p>Figura 3.8 Aproximação FFD usando série de Padé complexa para a relação de dispersão da equação da onda unidirecional com <math>\alpha = 60^\circ</math>. Esquerda: Parte real. Direita: Parte imaginária. . . . .</p>	39
<p>Figura 3.9 Aproximação FFD usando série de Padé complexa para a relação de dispersão da equação da onda unidirecional com <math>\alpha = 75^\circ</math>. Esquerda: Parte real. Direita: Parte imaginária. . . . .</p>	40
<p>Figura 3.10 Aproximação FFD usando série de Padé complexa para a relação de dispersão da equação da onda unidirecional com <math>\alpha = 90^\circ</math>. Esquerda: Parte real. Direita: Parte imaginária. . . . .</p>	40

Figura 3.11	Resposta ao impulso de uma migração FD real ( $\alpha = 0^\circ$ ) em um meio VTI com velocidade constante. Os parâmetros de anisotropia são $v_{p0} = 2800 \text{ m/s}$ , $\epsilon = 0.21$ e $\delta = -0.032$ . . . . .	41
Figura 3.12	Resposta ao impulso de uma migração FD complexa em um meio VTI com $\alpha = 5^\circ$ . Os parâmetros de anisotropia são $v_{p0} = 2800 \text{ m/s}$ , $\epsilon = 0.21$ e $\delta = -0.032$ . . . . .	42
Figura 3.13	Resposta ao impulso de uma migração FD complexa em um meio VTI com $\alpha = 45^\circ$ . Os parâmetros de anisotropia são $v_{p0} = 2800 \text{ m/s}$ , $\epsilon = 0.21$ e $\delta = -0.032$ . . . . .	42
Figura 3.14	Resposta ao impulso de uma migração FD complexa em um meio VTI com $\alpha = 60^\circ$ . Os parâmetros de anisotropia são $v_{p0} = 2800 \text{ m/s}$ , $\epsilon = 0.21$ e $\delta = -0.032$ . . . . .	43
Figura 3.15	Resposta ao impulso de uma migração FD complexa em um meio VTI com $\alpha = 75^\circ$ . Os parâmetros de anisotropia são $v_{p0} = 2800 \text{ m/s}$ , $\epsilon = 0.21$ e $\delta = -0.032$ . . . . .	43
Figura 3.16	Resposta ao impulso de uma migração FD complexa em um meio VTI com $\alpha = 90^\circ$ . Os parâmetros de anisotropia são $v_{p0} = 2800 \text{ m/s}$ , $\epsilon = 0.21$ e $\delta = -0.032$ . . . . .	44
Figura 3.17	Resposta ao impulso obtida pela migração FD/FFD híbrida complexa em um meio VTI com velocidade constante. Os parâmetros de anisotropia são $v_{p0} = 2800 \text{ m/s}$ , $\epsilon = 0.21$ e $\delta = -0.032$ . Foi usado $\alpha = 90^\circ$ para a parte FFD e $\alpha = 60^\circ$ para a parte FD. . . . .	45
Figura 3.18	Modelo sintético cedido pela HESS Corporation. (a) velocidade vertical; (b) $\epsilon$ ; (c) $\delta$ . . . . .	46
Figura 3.19	Seções migradas usando a migração em profundidade FD complexa. Acima: algoritmo anisotrópico. Abaixo: algoritmo isotrópico . . . . .	48
Figura 3.20	Seção migrada usando a migração em profundidade híbrida complexa. . . . .	49
Figura 3.21	Seções migradas usando migração FD complexa com $\alpha = 5^\circ$ . Acima: algoritmo anisotrópico. Abaixo: algoritmo isotrópico. . . . .	50
Figura 4.1	Modelo de velocidade do dado SEG/EAGE . . . . .	54
Figura 4.2	Migração SSPSPI usando 20 velocidades de referência para a interpolação. Acima: resultado sem correção de amplitude. Abaixo: resultado com correção de amplitude . . . . .	55

Figura 4.3	Traços migrados usando migração SSPSPI nas posições verticais: (a) $x = 3901.44$ m, (b) $x = 7863.84$ m e (c) $x = 11545.82$ m obtidas com os algoritmos convencional (vermelho) e com correção de amplitude (azul). . . .	56
Figura 4.4	Migração FFD complexa. Acima: resultado sem correção de amplitude. Abaixo: resultado com correção de amplitude . . . . .	58
Figura 4.5	Traços migrados usando migração FFD complexa nas posições verticais: (a) $x = 3901.44$ m, (b) $x = 7863.84$ m e (c) $x = 11545.82$ m obtidas com os algoritmos convencional (vermelho) e com correção de amplitude (azul). . . .	59
Figura 4.6	Modelo de velocidade do dado Marmousi . . . . .	61
Figura 4.7	Migração FFD complexa. Acima: resultado sem correção de amplitude. Abaixo: resultado com correção de amplitude usando a condição de imagem (4.5) . . . . .	62
Figura 4.8	Traços migrados usando migração FFD complexa nas posições verticais: (a) $x = 3700$ m, (b) $x = 6200$ m e (c) $x = 8000$ m obtidas com os algoritmos convencional (vermelho) e com correção de amplitude (azul). . . . .	63
Figura 4.9	Traços migrados usando migração FFD complexa (azul) nas posições verticais : (a) $x = 3700$ m, (b) $x = 6200$ m e (c) $x = 8000$ m, comparado com a refletividade (vermelho) . . . . .	64
Figura 5.1	Migração SSPSPI usando 10 velocidades de referência para a interpolação. Acima: resultado sem correção de amplitude. Abaixo: resultado com correção de amplitude . . . . .	69
Figura 5.2	Traços migrados usando migração SSPSPI nas posições verticais: (a) $x = 4998,72$ m, (b) $x = 9997,44$ m e (c) $x = 14996,16$ m obtidas com os algoritmos convencional (vermelho) e com correção de amplitude (azul). . . .	70

## LISTA DE ABREVIATURAS

ABREVIATURA	DESCRIÇÃO
AVA	Variação de amplitude com o ângulo
AVO	Variação de amplitude com o afastamento
CMP	Ponto médio comum
FFD	Diferenças finitas e Fourier
FD	Diferenças finitas
SSPSPI	<i>Split-step</i> com deslocamento de fase mais interpolação
VTI	Isotropia transversal com eixo de simetria vertical
TTI	Isotropia transversal com eixo de simetria com orientação arbitrária

## LISTA DE SÍMBOLOS

### SMBOLO    DESCRIÇÃO

$A$	Amplitude
$A_n$	Coefficiente de Padé complexo
$a_n$	Coefficiente de Padé real
$B_n$	Coefficiente de Padé complexo
$b_n$	Coefficiente de Padé real
$C_0$	Coefficiente de Padé complexo
$c$	Velocidade
$c_n$	Velocidade de sobretempo normal
$c_{p0}$	Velocidade vertical da onda P
$c^r$	Velocidade de referência
$i$	$\sqrt{-1}$
$k_x$	Número de onda horizontal
$k_z$	Número de onda vertical
$N$	Número de termos da série de Padé
$p_z$	Vagarosidade vertical
$p_z^r$	Vagarosidade vertical de referência
$q$	Razão entre a velocidade de referência e a velocidade do meio
$q_0$	Razão entre a velocidade de referência e a velocidade vertical da onda P
$q_n$	Razão entre a velocidade de referência e a velocidade de sobretempo normal
$t$	Tempo
$u$	Campo de pressão
$x$	Componente horizontal
$z$	Componente vertical
$\alpha$	Ângulo de rotação da linha de corte do plano complexo
$\Delta$	Variação
$\omega$	Frequência angular
$\tau$	Tempo de trânsito

# SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO . . . . .	16
2	MIGRAÇÃO ATRAVÉS DE CONTINUAÇÃO DO CAMPO DE ONDA . . . . .	20
2.1	MIGRAÇÃO POR EQUAÇÃO DA ONDA EM MEIOS ISOTRÓPICOS .	20
2.1.1	Migração por deslocamento de fase . . . . .	21
2.1.2	Migração <i>split-step</i> . . . . .	22
2.1.3	Migração por diferenças finitas . . . . .	23
2.1.4	Migração por diferenças finitas e Fourier . . . . .	24
2.2	MIGRAÇÃO POR EQUAÇÃO DA ONDA EM MEIOS VTI . . . . .	24
2.2.1	Equação da onda acústica para meios VTI . . . . .	25
2.2.2	Migração por diferenças finitas . . . . .	26
2.2.3	Migração híbrida FD/FFD . . . . .	27
2.3	MIGRAÇÃO COM CORREÇÃO DE AMPLITUDE . . . . .	28
2.3.1	Equações de onda unidirecionais de amplitude verdadeira . . . . .	28
2.3.2	Migração por deslocamento de fase com correção de amplitude .	30
3	MIGRAÇÃO EM MEIOS VTI USANDO APROXIMAÇÃO DE PADÉ COMPLEXA . . . . .	32
3.1	APROXIMAÇÃO FD UTILIZANDO EXPANSÃO EM SÉRIE DE PADÉ COMPLEXA . . . . .	32

		14
<b>3.1.1</b>	<b>Avaliação da Relação de Dispersão . . . . .</b>	<b>33</b>
3.2	APROXIMAÇÃO HÍBRIDA FD/FFD COMPLEXA . . . . .	34
<b>3.2.1</b>	<b>Aproximação FFD complexa simplificada . . . . .</b>	<b>37</b>
<b>3.2.2</b>	<b>Avaliação da Relação de Dispersão . . . . .</b>	<b>37</b>
3.3	EXEMPLOS NUMÉRICOS . . . . .	38
<b>3.3.1</b>	<b>Resposta ao impulso . . . . .</b>	<b>41</b>
<b>3.3.2</b>	<b>Testes em Dados Sintéticos . . . . .</b>	<b>45</b>
<b>4</b>	<b>INCLUSÃO DE VARIAÇÃO LATERAL DE VELOCIDADE NA MIGRAÇÃO COM EQUAÇÃO DA ONDA DE AMPLITUDE VERDADEIRA . . . . .</b>	<b>51</b>
4.1	MIGRAÇÃO <i>SPLIT-STEP</i> E FFD COMPLEXA COM CORREÇÃO DE AMPLITUDE . . . . .	51
4.2	EXPERIMENTOS NUMÉRICOS . . . . .	53
<b>4.2.1</b>	<b>Migração pós-empilhamento . . . . .</b>	<b>53</b>
4.2.1.2	Migração <i>split-step</i> . . . . .	53
4.2.1.4	Migração FFD complexa . . . . .	57
<b>4.2.2</b>	<b>Migração Pré-empilhamento . . . . .</b>	<b>60</b>
<b>5</b>	<b>MIGRAÇÃO COM CORREÇÃO DE AMPLITUDE EM MEIOS VTI . . . . .</b>	<b>65</b>
5.1	EQUAÇÃO DE ONDA UNIDIRECIONAL DE AMPLITUDE VERDADEIRA PARA MEIOS VTI . . . . .	65

5.2	MIGRAÇÃO POR DESLOCAMENTO DE FASE E <i>SPLIT-STEP</i> PARA MEIOS VTI COM CORREÇÃO DE AMPLITUDE . . . . .	66
5.3	RESULTADOS NUMÉRICOS . . . . .	67
6	CONCLUSÕES . . . . .	71
	REFERÊNCIAS . . . . .	74
	APÊNDICE A – APROXIMAÇÃO DE PADÉ COMPLEXA . . . . .	78
	APÊNDICE B – OPERADOR DE MIGRAÇÃO FFD USANDO EXPANSÃO DE PADÉ COMPLEXA PARA MEIOS VTI . . . . .	80
	APÊNDICE C – IMPLEMENTAÇÃO DA APROXIMAÇÃO FFD . . . . .	81
	APÊNDICE D – EQUAÇÕES ICONAL E DE TRANSPORTE PARA MEIOS VTI . . . . .	82
	ANEXO A – PUBLICAÇÕES RELACIONADAS AO TRABALHO . . . . .	85

# 1 INTRODUÇÃO

Migração é a parte do processamento sísmico na qual as reflexões são movidas para suas posições corretas em subsuperfície e as difrações são colapsadas, aumentando a resolução espacial e produzindo uma imagem sísmica da subsuperfície (YILMAZ, 1987). Este trabalho discute dois aspectos da migração em profundidade através da equação de onda unidirecional. Primeiramente, o tratamento de modos evanescentes em meios com forte variação lateral de velocidade. Na sequência é proposta uma nova estratégia para correção da amplitude dos eventos migrados. Estes dois aspectos são discutidos para uma classe de meios anisotrópicos.

Os métodos de migração baseados na equação de onda apresentam resultados melhores do que os métodos de migração baseados na teoria do raio quando o modelo de velocidade da subsuperfície apresenta forte variação lateral (BEVC; BIONDI, 2005). Apesar desta vantagem, estes métodos também possuem limitações. Os métodos de migração baseados na equação de onda apresentam dificuldades para imagear refletores com grandes inclinações (MULDER; PLESSIX, 2004; XU; JIN, 2007). Este problema é claramente mostrado no método de migração por diferenças finitas, também denominado de migração FD, o qual está baseado em aproximações paraxiais ou parabólicas de  $15^\circ$  ou de  $45^\circ$  da equação de onda (CLAERBOUT, 1971). Outras técnicas mais elaboradas, como diferenças finitas e Fourier (FFD) (RISTOW; RÜHL, 1994), imageam maiores ângulos, mas ainda falham para refletores quase verticais.

As migrações FD e FFD tendem a se tornar numericamente instáveis na presença de fortes variações laterais de velocidade (BIONDI, 2002). Estes algoritmos estão baseados em aproximações reais da relação de dispersão da equação de onda unidirecional, as quais não tratam corretamente ondas evanescentes (MILLINAZZO; ZALA; BROOKE, 1997). Para solucionar esta limitação, Biondi (2002) propôs um método de migração por diferenças finitas e Fourier mais interpolação (FFDPI) que se mostrou incondicionalmente estável em meios com forte variação lateral de velocidade.

Millinazzo, Zala e Brooke (1997) propuseram uma aproximação parabólica para a equação de onda baseada em uma extensão complexa da aproximação de Padé, a qual apresenta um melhor tratamento dos modos evanescentes. Esta aproximação consiste em rotacionar a linha de corte do operador raiz quadrada associado às equações unidirecionais. A extensão complexa da aproximação de Padé foi utilizada em geofísica aplicada. Por exemplo, Zhang, Rector e Hoversten (2003) usaram este método na migração por diferenças finitas. Entretanto, a implementação não foi otimizada para grandes ângulos. Zhang et al. (2004) propuseram uma migração FFD baseada na aproximação de Padé complexa para o

propagador da equação de onda.

Amazonas et al. (2007) propuzeram algoritmos de migração FD e FFD usando a aproximação de Padé complexa para meios isotrópicos. Baseando-se na análise da relação de dispersão para o operador de propagação e no imageamento de dados sintéticos, eles demonstraram que este procedimento estabiliza as migrações FD e FFD sem requerer um tratamento especial para as fronteiras do domínio de migração e consegue imagear refletores com grandes inclinações.

A aquisição de dados sísmicos atualmente utiliza grandes afastamentos entre fontes e receptores. Nestas circunstâncias, a hipótese simplificadora de modelos de velocidade isotrópicos não é válida para o processamento dos dados. Por exemplo, para o empilhamento de dados sísmicos de grande afastamento, modelos VTI são mais adequados em muitos casos. Consequentemente, a migração destes dados também requer o uso de modelos de velocidade anisotrópicos (ALKHALIFAH, 1998). Uma dificuldade em se estender os métodos de migração FD e FFD para incluir anisotropia é que a equação de onda acústica só pode ser generalizada para anisotropia elíptica. Este tipo de anisotropia não é adequado para descrever a anisotropia de rochas sedimentares (THOMSEN, 1986). A formulação da migração em meios anisotrópicos utilizando modelos elásticos, embora possível, é computacionalmente dispendiosa (FOWLER; DU; FLETCHER, 2010). Uma alternativa para o custo computacional da aproximação acústica foi proposta por Alkhalifah (2000). Ele deduziu uma equação de onda escalar aproximada para eventos qP a partir da relação de dispersão exata para meios elásticos com isotropia transversal vertical<sup>1</sup>. Baseados em seu trabalho, alguns autores estenderam os métodos de migração FD e FFD para meios VTI (RISTOW, 1999; HAN; WU, 2005; NOLTE, 2005; ZHANG; HUA; CALANDRA, 2005).

Shan (2009) otimizou os métodos de migração FD e FFD para meios VTI aproximando a relação de dispersão da equação de onda acústica por uma função racional e estimando os coeficientes por mínimos quadrados, com isso ele obteve um esquema de diferenças finitas para meios com forte anisotropia. Shan (2007) estendeu essa otimização para o método FD para meios elásticos com isotropia transversal arbitrária (TTI)<sup>2</sup>.

Em meios VTI, assim como em meios isotrópicos, as migrações FD são mais baratas computacionalmente do que a migração FFD, mas têm a qualidade deteriorada pela presença de artefatos gerados pela aproximação acústica, proposta por Alkhalifah (1998) chamados de pseudo-onda S. Para resolver este problema, Fei e Liner (2008) propuseram um algoritmo híbrido de migração FD e FFD em meios VTI.

<sup>1</sup>São meios nos quais as propriedades elásticas possuem um eixo vertical de simetria.

<sup>2</sup>Do inglês Tilted Transversely Isotropic. São meios nos quais as propriedades elásticas possuem um eixo de simetria com orientação arbitrária.

Apenas em meios homogêneo a faturação da equação acústica em duas equações unidirecionais é exata. A análise assintótica de equações de onda unidirecionais em meios heterogêneos, em meios isotrópicos ou VTI, indica que estas equações descrevem corretamente apenas os aspectos cinemáticos da propagação, o tempo de trânsito dos eventos. Os aspectos dinâmicos, a amplitude dos eventos, não obedecem a equação de transporte da equação de onda completa. Todavia, como aplicações envolvendo a amplitude dos eventos migrados estão se tornando cada vez mais importantes para caracterização e monitoramento de reservatórios, o tratamento correto das amplitudes na migração tem se tornado indispensável. Por exemplo, estudos de variação da amplitude dos eventos refletidos com o afastamento entre fonte e receptor (AVO), ou com o ângulo de incidência (AVA), têm sido utilizados para estimar indicadores diretos de hidrocarbonetos.

Zhang et al. (2003) mostraram como modificar os operadores diferenciais das equações unidirecionais, tal que, usando-se as aproximações da teoria assintótica do raio, as amplitudes sejam as mesmas que aquelas governadas pela equação de onda completa. As equações diferenciais resultantes são chamadas de equações de onda unidirecionais de amplitude verdadeira. Estes autores também mostraram como formular essas equações unidirecionais para migração pré-empilhamento por diferenças finitas para obter amplitudes verdadeiras. Contudo, as técnicas que eles propuseram para a solução da equação unidirecional modificada para meios lateralmente heterogêneos são mal condicionadas numericamente e geram muitos artefatos.

Melo, Schleicher e Novais (2006) apresentaram a migração por deslocamento de fase pós-empilhamento usando as equações unidirecionais de amplitude verdadeira. Eles resolveram essas equações analiticamente, supondo somente variação vertical de velocidade e mostraram que a correção de amplitude pode ser obtida pela aplicação de um fator simples em cada passo de continuação do campo de onda em profundidade.

No capítulo 2, é feita uma revisão sobre migração por equação de onda em meios isotrópicos e com isotropia transversal vertical (VTI), além de uma introdução à migração com correção de amplitude usando equação de onda de amplitude verdadeira.

No Capítulo 3 usa-se aproximação de Padé complexa para obter um algoritmo FD de migração em meios anisotrópicos que trata ondas evanescente. Além disso, é mostrado um algoritmo híbrido FD/FFD usando aproximação de Padé complexa seguindo as ideias de Fei e Liner (2008).

No Capítulo 4 as ideias de Melo et al. (2006) são generalizadas para a migração *split-step* e para a migração por diferenças finitas e Fourier usando aproximação de Padé complexa (FFD complexa) para meios com variação lateral de velocidade.

No Capítulo 5 a migração com amplitude verdadeira é estendida para meios VTI e são apresentados resultados da migração proposta no dado sintético HESS.

## 2 MIGRAÇÃO ATRAVÉS DE CONTINUAÇÃO DO CAMPO DE ONDA

O processo de migração está dividido em dois passos fundamentais: retropropagação dos campos de ondas e aplicação da condição de imagem. A forma como o campo de onda é retropropagado e a aplicação de diferentes condições de imagem definem os diferentes métodos de migração. Um desses métodos é o de migração por equação de onda. Neste capítulo revisaremos alguns métodos de migração aplicados a meios isotrópicos e para uma classe de meios anisotrópicos.

### 2.1 MIGRAÇÃO POR EQUAÇÃO DA ONDA EM MEIOS ISOTRÓPICOS

Os métodos de migração por equação de onda vem ganhando destaque nos últimos anos por sua qualidade na formação de imagens de subsuperfície. A razão para esse destaque é que em meios com forte variação lateral de velocidade, esses métodos geram imagens com uma qualidade superior àquelas obtidas usando métodos baseados na teoria do raio. Além do que, a razão custo/benefício apresentada por esses métodos tem diminuído ao longo dos anos, principalmente, devido aos mais recentes avanços computacionais.

A formulação desses métodos parte das equações de onda unidirecionais, que nada mais são do que uma decomposição da equação de onda completa em duas direções preferenciais, ascendente e descendente. Assim, partindo da equação de onda completa 2D:

$$\frac{\partial^2 u(x, z, t)}{\partial z^2} - \frac{1}{c(x, z)} \frac{\partial^2 u(x, z, t)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u(x, z, t)}{\partial x^2} = 0, \quad (2.1)$$

na qual  $u(x, z, t)$  é o campo de pressão,  $c(x, z)$  é a velocidade do meio,  $t$  é o tempo. Usando a transformada de Fourier:

$$u(x, z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x, z, \omega) \exp(i\omega t) d\omega, \quad (2.2)$$

se obtém

$$\frac{\partial^2 u(x, z, \omega)}{\partial z^2} - \frac{(i\omega)^2}{c(x, z)} u(x, z, \omega) + \frac{\partial^2 u(x, z, \omega)}{\partial x^2} = 0. \quad (2.3)$$

em que  $\omega$  é a frequência temporal. Reorganizando a equação (2.3) tem-se que

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial z^2} - i^2 \left[ \frac{\omega^2}{c(x, z)} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] \right\} u(x, z, \omega) = 0. \quad (2.4)$$

Fatorando a equação acima obtém-se:

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial z} - i \sqrt{\frac{\omega^2}{c(x, z)} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}} \right\} \left\{ \frac{\partial}{\partial z} + i \sqrt{\frac{\omega^2}{c(x, z)} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}} \right\} u(x, z, \omega) = 0 . \quad (2.5)$$

Cada fator entre chaves representa uma propagação do campo de onda em uma direção preferencial. A partir desse resultado as equações da onda unidirecionais são dadas por

$$\frac{\partial u(x, z, \omega)}{\partial z} = \frac{i\omega}{c(x, z)} \sqrt{1 + \frac{c^2(x, z)}{\omega^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2}} u(x, z, \omega) , \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial u(x, z, \omega)}{\partial z} = -\frac{i\omega}{c(x, z)} \sqrt{1 + \frac{c^2(x, z)}{\omega^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2}} u(x, z, \omega) , \quad (2.7)$$

Estas equações descrevem a propagação do campo de onda  $u(x, z, \omega)$  ascendente (sinal positivo) e descendente (sinal negativo).

As equações (2.6) e (2.7) são válidas somente para meios homogêneos, uma vez que em meios heterogêneos a raiz quadrada presente nas equações (2.6) e (2.7) precisa ser aproximada para se efetuar aplicações numéricas (CLAERBOUT, 1985), devido à presença do operador pseudo-diferencial na raiz quadrada dessa equação. A forma como essas aproximações são realizadas é que diferenciam os métodos de migração por equação de onda. A seguir faz-se uma revisão dos métodos de migração baseados na equação da equação de onda unidirecional que serão utilizados nesse trabalho.

### 2.1.1 Migração por deslocamento de fase

A migração por deslocamento de fase (GAZDAG, 1978) é o método mais simples de migração no domínio da frequência. Esse método está baseado na observação de que dados de afastamento nulo são cinematicamente equivalentes àqueles registrados num experimento hipotético denominado de refletor explosivo (LOEWENTHAL et al., 1976). Considerando um meio homogêneo e aplicando a transformada de Fourier na variável espacial  $x$  da equação com propagação ascendente (2.6), tem-se que:

$$\frac{\partial u(k_x, z, \omega)}{\partial z} = ik_z u(k_x, z, \omega) \quad (2.8)$$

em que

$$k_z = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \frac{c^2}{\omega^2} k_x^2} \quad (2.9)$$

e  $k_x$  é o número de onda horizontal. Observe que a notação para o campo de onda nos diferentes domínios é a mesma. Entretanto, as variáveis de dependência do campo de onda serão explícitas ao longo do texto.

Para se obter o campo de onda posicionado no refletor resolve-se a equação (2.6) com metade da velocidade do meio e no resultado faz-se  $t = 0$ , o que é chamado de condição de imagem. Assim, a solução pode ser representada por:

$$u(x, z, t = 0) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k_x} \sum_{\omega} u(k_x, z = 0, \omega) \exp \left\{ i \left[ k_x x + \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \frac{c^2}{\omega^2} k_x^2} z \right] \right\} \Delta k_x \Delta \omega. \quad (2.10)$$

Para aplicar migração por deslocamento de fase em meios verticalmente heterogêneos,  $c = c(z)$ , Gazdag (1980) dividiu o meio em pequenas camadas horizontais tal que em cada camada a velocidade pudesse ser considerada constante. Então, supõe-se, agora, que o eixo  $z$  possa ser dividido em  $N$  camadas, tal que  $I_j = \{ z | z_j < z < z_{j+1}; j = 1, 2, \dots, N \}$ . Então aplica-se a solução da equação (2.9) para cada camada, obtendo

$$u(k_x, z_{j+1}, \omega) = u(k_x, z_j, \omega) \exp \left\{ \frac{i\omega}{c(z_j)} \sqrt{1 - \frac{c^2(z_j)}{\omega^2} k_x^2} \Delta z \right\}, \quad (2.11)$$

em que  $\Delta z = z_{j+1} - z_j$ . Como as camadas, em princípio, podem ser arbitrariamente finas, esse procedimento pode gerar uma aproximação para qualquer precisão desejada.

### 2.1.2 Migração *split-step*

A migração *split-step* foi desenvolvida por Stoffa et al. (1990) para migrar dados sísmicos empilhados em duas e três dimensões. Nesse método de migração uma parte do algoritmo é implementado no domínio da frequência-número de onda e a outra parte no domínio da frequência-espço. Dessa forma o método permite que o meio possua pequenas variações laterais de velocidade em torno de uma velocidade de referência,  $c^r(z)$ , em cada passo em profundidade.

Considerando que a velocidade varia verticalmente e lateralmente, e usando a equação (2.9) no domínio da frequência-espço, se deduz a aproximação *split-step* da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \frac{i\omega}{c(x, z)} \sqrt{1 + \frac{c^2(x, z)}{\omega^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2}} &= \frac{i\omega}{c^r(z)} \sqrt{1 + \frac{c^{r2}(z)}{\omega^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2}} \\ &+ \left[ \frac{i\omega}{c(x, z)} \sqrt{1 + \frac{c^2(x, z)}{\omega^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2}} - \frac{i\omega}{c^r(z)} \sqrt{1 + \frac{c^{r2}(z)}{\omega^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2}} \right]. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Expandindo o termo entre colchetes da equação acima em série de Taylor e considerando apenas termos de ordem zero, tem-se que:

$$\frac{\omega}{c(x, z)} \sqrt{1 + \frac{c^2(x, z)}{\omega^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2}} \approx \frac{\omega}{c^r(z)} \sqrt{1 + \frac{c^{r2}(z)}{\omega^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2}} + \frac{\omega}{c^r(z)} \left( \frac{c^r(z)}{c(x, z)} - 1 \right). \quad (2.13)$$

Substituindo a equação (2.13) na equação (2.8) tem-se

$$\frac{\partial u(x, z, \omega)}{\partial z} \approx \frac{i\omega}{c^r(z)} \left[ \sqrt{1 + \frac{c^{r2}(z)}{\omega^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2}} + \frac{c^r(z)}{c(x, z)} - 1 \right] u(x, z, \omega). \quad (2.14)$$

A equação (2.14) pode ser separada em duas equações, uma que representa a aproximação por deslocamento de fase, que é implementada no domínio da frequência-número de onda, e uma outra que representa a correção para variação lateral de velocidade que é implementada no domínio da frequência-espço. Assim, as soluções para a equação (2.14) podem ser escritas como:

$$u'(k_x, z_{j+1}, \omega) = u(k_x, z_j, \omega) \exp \left\{ \frac{i\omega}{c^r(z_j)} \sqrt{1 - \frac{c^{r2}(z_j)}{\omega^2} k_x^2} \Delta z \right\}; \quad (2.15)$$

$$u(x, z_{j+1}, \omega) = u'(x, z_{j+1}, \omega) \exp \left\{ \frac{i\omega}{c^r(z_j)} \left( \frac{c^r(z_j)}{c(x, z_j)} - 1 \right) \Delta z \right\}. \quad (2.16)$$

A equação (2.15) indica a solução por deslocamento de fase, a equação (2.16) a correção *split-step* e os índices  $j$  e  $j + 1$  representam os níveis em profundidade atual e seguinte, respectivamente. Além disso,  $u'(x, z_{j+1}, w)$  representa a transformada de Fourier inversa de  $u'(k_x, z_{j+1}, w)$  em  $x$ .

### 2.1.3 Migração por diferenças finitas

Diferentemente das migrações por deslocamento de fase e *split-step*, a migração por diferenças finitas, ou simplesmente migração FD, é baseada em aproximações da equação (2.6) (CLAERBOUT, 1985; BAMBERGER et al., 1988). Assim, usando aproximação de Padé real, se tem:

$$\frac{\partial u(x, z, \omega)}{\partial z} = \frac{i\omega}{c(x, z)} \left[ 1 + \sum_{n=1}^N \frac{a_n \frac{c^2(x, z)}{\omega^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2}}{1 + b_n \frac{c^2(x, z)}{\omega^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2}} \right] u(x, z, \omega), \quad (2.17)$$

em que  $N$  é o número de termos da série de Padé,  $a_n$  e  $b_n$  são os coeficientes de Padé reais e são dados por:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{2N+1} \operatorname{sen}^2\left(\frac{n\pi}{2N+1}\right); \\ b_n &= \cos^2\left(\frac{n\pi}{2N+1}\right). \end{aligned} \quad (2.18)$$

A equação (2.17) é resolvida por diferenças finitas. Esse tipo de migração não possui limitações com relação ao modelo de velocidade, mas apresenta limitações em relação à abertura angular de propagação.

#### 2.1.4 Migração por diferenças finitas e Fourier

Proposta por Ristow e Rühl (1994), a migração FFD é dada pela seguinte equação:

$$\frac{\partial u(x, z, \omega)}{\partial z} = \frac{i\omega}{c^r(z)} \left[ \sqrt{1 - \frac{c^{r2}(z)}{\omega^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2}} + (q - 1) + \sum_{n=1}^N \frac{a_n q (1 - q) \frac{c^2(x, z)}{\omega^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2}}{1 + \sigma b_n \frac{c^2(x, z)}{\omega^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2}} \right] u(x, z, \omega), \quad (2.19)$$

em que  $q = c^r(z)/c(x, z)$  e  $\sigma = 1 + q + q^2$ . Esse método de migração, assim como o método FD, não possui limitações com relação às variações do modelo de velocidade, mas apresenta limitações para imagear grandes ângulos. A primeira parcela da soma entre colchetes, também chamada de termo de deslocamento de fase, é implementada no domínio frequência-número de onda. A segunda parcela, também chamada de termo *split-step*, é implementada no domínio da frequência-espço. A última parcela, também chamada de termo de diferenças finitas, também é implementada no domínio frequência-espço.

## 2.2 MIGRAÇÃO POR EQUAÇÃO DA ONDA EM MEIOS VTI

Meios anisotrópicos tem por característica o fato de suas propriedades físicas variarem com a direção, ou seja, anisotropia é variância por rotação. A maioria das rochas são anisotrópicas. Além disso, sabe-se que se um levantamento sísmico é realizado utilizando um pulso, cujo comprimento de onda seja maior do que a espessura de uma sequência de camadas de diferentes meios (isotrópicos ou não), a onda se propaga como se estivesse em um meio homogêneo, mas anisotrópico. Por isso a importância de se estudar migração em meios anisotrópicos.

Todos os métodos apresentados anteriormente são baseados na equação de onda acús-

tica. Entretanto, a equação de onda acústica pode ser generalizada apenas para anisotropia elíptica. A propagação de onda em meios anisotrópicos mais complexos não pode ser descrita de maneira fisicamente consistente por uma equação de onda escalar.

Uma alternativa é analisar a propagação de onda em meios com isotropia transversal vertical (VTI), ou seja, meios nos quais as propriedades elásticas possuem um eixo vertical de simetria. Essa classe de anisotropia é importante pois rochas do tipo folhelho, muito comum em bacias sedimentares, possuem essa característica.

Com o objetivo de facilitar implementações numéricas que levem em consideração meios VTI, Alkhalifah (2000) obteve uma equação da onda acústica para esses meios. Nesta seção mostramos como obter esta equação e um método de migração baseado nela.

### 2.2.1 Equação da onda acústica para meios VTI

Alkhalifah (1998) obteve uma equação simples para a relação de dispersão em meios VTI, considerando que a velocidade da onda S é zero. Esta equação é dada por

$$k_z^2 = \frac{c_n^2}{c_{p0}^2} \left( \frac{\omega^2}{c_n^2} - \frac{\omega^2 k_x^2}{\omega^2 - 2\eta c_n^2 k_x^2} \right), \quad (2.20)$$

em que  $c_{p0}$  é a velocidade vertical da onda P no meio e  $c_n$  é a velocidade de sobretempo normal da onda P, que é dada por

$$c_n = c_{p0} \sqrt{1 + 2\delta}. \quad (2.21)$$

Além disso, o parâmetro de anelipticidade  $\eta$  é dado por

$$\eta = \frac{\epsilon - \delta}{1 + 2\delta}, \quad (2.22)$$

em que  $\epsilon$  e  $\delta$  são os parâmetros de Thomsen (THOMSEN, 1986). Alkhalifah e Tsvankin (1995) demonstraram que a representação em termos de apenas dois parâmetros de anisotropia,  $c_n$  e  $\eta$ , é suficiente para realizar todo o processamento relacionado ao tempo, como por exemplo correção de sobretempo normal<sup>1</sup>, remoção de sobretempo de mergulho<sup>2</sup> e migração no tempo pré e pós-empilhamento.

Multiplicando ambos os lados da equação (2.20) com o campo de onda no domínio de

<sup>1</sup>Deslocamento aplicado ao dado sísmico de modo a anular o efeito da distância fonte-receptor.

<sup>2</sup>Tratamento que complementa a correção de sobretempo normal, no sentido de tornar a correção da distância fonte-receptor independente do mergulho dos refletores.

Fourier,  $u(k_x, k_z, \omega)$ , e aplicando a transformada de Fourier inversa em  $k_z$  tem-se que:

$$\frac{d^2 u(k_x, z, \omega)}{dz^2} = -\frac{c_n^2}{c_{p_0}^2} \left( \frac{\omega^2}{c_n^2} - \frac{\omega^2 k_x^2}{\omega^2 - 2\eta c_n^2 k_x^2} \right) u(k_x, z, \omega). \quad (2.23)$$

Aplicando novamente a transformada de Fourier inversa em  $k_x$  se obtém:

$$c_{p_0}^2 \omega^2 \frac{\partial^2 u(x, z, \omega)}{\partial z^2} + (1 + 2\eta) c_n^2 \omega^2 \frac{\partial^2 u(x, z, \omega)}{\partial x^2} + 2\eta c_n^2 c_{p_0}^2 \frac{\partial^4 u(x, z, \omega)}{\partial x^2 \partial z^2} + \omega^4 u(x, z, \omega) = 0. \quad (2.24)$$

E aplicando agora a transformada de Fourier inversa no tempo se obtém:

$$\frac{\partial^4 u}{\partial t^4} - (1 + 2\eta) c_n^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2} = c_{p_0}^2 \frac{\partial^4 u}{\partial z^2 \partial t^2} - 2\eta c_n^2 c_{p_0}^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial z^2}. \quad (2.25)$$

Introduzindo a notação  $F = \partial^2 u / \partial t^2$  na equação acima, obtém-se a equação de onda acústica em meios VTI dada por:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = (1 + 2\eta) c_n^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + c_{p_0}^2 \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} - 2\eta c_n^2 c_{p_0}^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial z^2}, \quad (2.26)$$

em que  $u$  representa a segunda integral no tempo de  $F$ , ou seja

$$u(x, z, t) = \int_0^t \int_0^{t'} F(x, z, t) dt dt'. \quad (2.27)$$

### 2.2.2 Migração por diferenças finitas

A equação para migração FD em meios VTI é obtida partindo da relação de dispersão da equação da onda unidirecional para meios VTI (equação (2.30)). Uma representação formal para o operador de raiz quadrada da equação (2.30) está baseada na expansão de Padé real (BAMBERGER et al., 1988):

$$\sqrt{1 - X^2} \approx 1 - \sum_{n=1}^N \frac{a_n X^2}{1 - b_n X^2}, \quad (2.28)$$

em que,

$$X^2 = \frac{w^2}{1 - 2\eta w^2}. \quad (2.29)$$

O número de termos  $N$  da expansão deve, em princípio, ser infinito, mas na prática, de dois a quatro termos são suficientes para uma aproximação suficientemente precisa. Os coeficientes  $a_n$  e  $b_n$  são dados pela equação (2.18).

### 2.2.3 Migração híbrida FD/FFD

A equação unidirecional de onda acústica para meios VTI possui dois ramos, antes interpretados como duas soluções (ALKHALIFAH, 2000). Um desses ramos é o resultado desejado representando o campo de onda coincidente com a frente de onda P elástica. O outro ramo é um evento adicional que se propaga com velocidade menor que a velocidade da onda P e não tem uma interpretação física. Devido a essa característica, esse evento adicional é chamado de pseudo-onda S (FEI; LINER, 2008). Alkhalifah (2000) resolveu a equação (2.26) analiticamente e observou que os eventos indesejáveis podem ser eliminados com condições iniciais apropriadas. Contudo, em uma camada anisotrópica, tais condições iniciais são muito difíceis de encontrar, pois teriam que ser dependentes do meio. Alternativamente, os testes de Alkhalifah (2000) indicaram que, colocando a fonte em uma camada isotrópica, a pseudo-onda S tende a decair gradualmente quanto mais longe a fonte estiver da camada anisotrópica.

Fei e Liner (2008) procuraram um algoritmo mais geral, que não incluísse a solução adicional, tal que a fonte pudesse ser colocada arbitrariamente em um meio anisotrópico. Eles demonstraram que o evento pode ser eliminado pela aplicação híbrida das migrações FD e FFD. A solução proposta por eles é começar o processo de migração com poucos passos da propagação FFD e, em seguida, continuar com um algoritmo FD mais eficiente. Para obter os algoritmos FD e FFD eles partiram da equação (2.20), introduziram uma nova variável,  $w$ , e escreveram o operador de propagação unidirecional como

$$k_z = \frac{\omega}{c_{p0}} \sqrt{1 - \frac{w^2}{1 - 2\eta w^2}}, \quad (2.30)$$

no qual

$$w^2 = \frac{k_x^2 c_n^2}{\omega^2}. \quad (2.31)$$

Para  $\eta = 0$ , a equação (2.30) se reduz ao caso de anisotropia elíptica, que difere do caso isotrópico por um fator de escala constante  $c_n/c_{p0}$ . Note que, para  $\eta > 0$ , o denominador é menor que um, o que torna a migração anisotrópica geralmente mais instável do que a migração isotrópica.

Assim, para a migração FD, Fei e Liner (2008) expandiram o operador da equação (2.30) em série de Taylor em torno do ponto  $w = 0$ . Reorganizaram a série infinita para a forma de frações parciais e tomando uma aproximação de até segunda ordem, o que resulta em:

$$k_z = \frac{\omega}{c_{p0}} \left( 1 - \frac{w^2}{r_1 - s_1 w^2} \right) \quad (2.32)$$

em que  $r_1 = 2$  e  $s_1 = 1/2(8\eta + 1)$ .

Para a migração FFD, Fei e Liner (2008) seguiram o método de Ristow e Rühl (1994) e obtiveram a seguinte expressão:

$$k_z = \frac{\omega}{c^r} \sqrt{1 - \frac{c^{r2}}{c_n^2} w^2} + \frac{\omega}{c^r} (q_0 - 1) + \frac{\omega}{c^r} \left[ q_n^2 \left( \frac{w^2}{R_1 - S_1 w^2} \right) - q_0 \left( \frac{w^2}{r_1 - s_1 w^2} \right) \right], \quad (2.33)$$

na qual  $q_0 = c^r/c_{p_0}$ ,  $q_n = c^r/c_n$ ,  $R_1 = 2$  e  $S_1 = 1/2q_n^2$ . Note que colocando  $\eta = 0$ , i.e.,  $g_1 = g_2 = 1$  na equação (2.33), recupera-se a aproximação de Ristow e Rühl (1994) que é válida para meios isotrópicos e elipticamente anisotrópicos.

## 2.3 MIGRAÇÃO COM CORREÇÃO DE AMPLITUDE

Migrações que usam equações de onda unidirecionais em meios heterogêneos não são capazes de tratar corretamente a amplitude do campo de onda. Entretanto, é possível introduzir um termo de correção nessas equações para representar a amplitude das ondas mais precisamente. Nesta seção, faz-se uma revisão das equações de onda unidirecionais de amplitude verdadeira e de um dos métodos de migração por equação de onda que utiliza essas equações.

### 2.3.1 Equações de onda unidirecionais de amplitude verdadeira

Considere a equação de onda dada por

$$\frac{\partial^2 u(k_x, z, \omega)}{\partial z^2} + \omega^2 p_z^2 u(k_x, z, \omega) = 0, \quad (2.34)$$

em que

$$p_z = \frac{k_z}{\omega} = \pm \frac{1}{c(z)} \sqrt{1 - \left( \frac{c(z)k_x}{\omega} \right)^2}. \quad (2.35)$$

Substituindo a solução

$$u(k_x, z, \omega) = A(k_x, z) \exp(-i\omega\tau(k_x, z)), \quad (2.36)$$

na equação (2.34), em que  $A(k_x, z)$  é a amplitude e  $\tau(k_x, z)$  é o tempo de trânsito, chega-se à equação iconal

$$\left( \frac{\partial \tau(k_x, z)}{\partial z} \right)^2 = p_z^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \tau(k_x, z)}{\partial z} = \pm p_z, \quad (2.37)$$

e à equação de transporte

$$2\frac{\partial\tau(k_x, z)}{\partial z}\frac{\partial A(k_x, z)}{\partial z} + \frac{\partial^2\tau(k_x, z)}{\partial z^2}A(k_x, z) = 0. \quad (2.38)$$

Usando a equação iconal, pode-se reescrever a equação de transporte da seguinte forma:

$$\frac{\partial A(k_x, z)}{\partial z} + \frac{1}{2}\frac{\partial\ln(p_z)}{\partial z}A(k_x, z) = 0. \quad (2.39)$$

A equação (2.34) pode ser fatorada da seguinte maneira, considerando velocidade constante ou no limite de altas frequências,

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} + ik_z\right)\left(\frac{\partial}{\partial z} - ik_z\right)u(k_x, z, \omega) = 0, \quad (2.40)$$

em que cada termo entre parênteses representa um operador unidirecional, o primeiro com propagação ascendente e o segundo com propagação descendente. Adotando soluções do tipo

$$u(k_x, z, \omega) = A(k_x, z)\exp(i\omega\tau(k_x, z)), \quad (2.41)$$

obtém-se as seguintes equações iconal e de transporte

$$\frac{\partial\tau(k_x, z)}{\partial z} = \pm p_z, ; \quad (2.42)$$

$$\frac{\partial A(k_x, z)}{\partial z} = 0.. \quad (2.43)$$

Observe que as equações iconais (2.37) e (2.42) são idênticas, o que reflete o fato de que a cinemática das ondas unidirecionais é igual a da onda completa. Contudo, comparando as equações de transporte (2.38) e (2.43), vê-se que elas só são idênticas para meios homogêneos, em que  $\frac{\partial c}{\partial z} = 0$  o que leva a  $\frac{\partial p_z}{\partial z} = 0$ .

Portanto, para que as equações unidirecionais descrevam corretamente a amplitude das ondas ascendentes e descendentes, em termos da teoria do raio de ordem zero, elas precisam ser modificadas (ZHANG; ZHANG; BLEISTEIN, 2003). A forma mais simples para fazer isso é adicionar um novo termo aos operadores unidirecionais. Assim as equações unidirecionais tomam a seguinte forma

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} \pm ik_z + \beta\right)u(k_x, z, \omega) = 0. \quad (2.44)$$

Procurando por soluções da forma (2.41), encontramos as seguintes equações iconal e de

transporte:

$$\frac{\partial \tau(k_x, z)}{\partial z} = \pm p_z; \quad (2.45)$$

$$\frac{\partial A(k_x, z)}{\partial z} + \beta A(k_x, z) = 0. \quad (2.46)$$

Comparando essas equações com as obtidas para a equação de onda completa (equações (2.37) e (2.38)), é simples ver que as equações iconais são iguais, mas para que as equações de transporte sejam iguais,  $\beta$  precisa ter o valor:

$$\beta^\pm = -\frac{1}{2} \frac{1}{p_z^2 c^3} \frac{\partial c}{\partial z} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} \ln(p_z). \quad (2.47)$$

Assim, as equações unidirecionais de amplitude verdadeira são dadas por (ZHANG; ZHANG; BLEISTEIN, 2003):

$$\left( \frac{\partial}{\partial z} \pm i\omega p_z + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} \ln(p_z) \right) u(k_x, z, \omega) = 0. \quad (2.48)$$

### 2.3.2 Migração por deslocamento de fase com correção de amplitude

Melo et al. (2006) mostraram que para introduzir correção de amplitude na migração por deslocamento de fase basta acrescentar um fator no operador de propagação. Para mostrar como esse resultado foi obtido, parte-se da equação de onda com propagação ascendente de amplitude verdadeira

$$\left( \frac{\partial}{\partial z} - i\omega p_z + \frac{1}{2} \frac{d}{dz} \ln(p_z) \right) u(k_x, z, \omega) = 0. \quad (2.49)$$

A equação acima pode ser resolvida por separação de variáveis. Integrando a solução de uma profundidade inicial  $z_0$  até uma profundidade final  $z_f$ , tem-se a expressão para o campo de onda  $u_f$  em um nível  $z_f$  dada por:

$$u_f = u_0 \exp \left\{ i\omega \int_{z_0}^{z_f} p_z dz \right\} \exp \left\{ \int_{z_f}^{z_0} \frac{1}{2} \frac{d}{dz} \ln(p_z) dz \right\}. \quad (2.50)$$

O primeiro termo da equação (2.50) é o termo de correção de fase da migração por deslocamento de fase convencional e o segundo termo exponencial dá a correção de amplitude.

Admitindo que o eixo  $z$  possa ser dividido em  $N$  camadas, tal que  $I_j = z | z_j < z < z_{j+1}$ ;  $j = 1, 2, \dots, N$ , aplica-se a solução da equação (2.50) para cada camada, ou seja,  $z_0 = z_j$  e

$z_f = z_{j+1}$ . Assim, pode-se escrever que

$$u(k_x, z_{j+1}, \omega) = u(k_x, z_j, \omega) \exp \left\{ i\omega \int_{z_j}^{z_{j+1}} p_z dz \right\} \exp \left\{ \int_{z_{j+1}}^{z_j} \frac{1}{2} \frac{d}{dz} \ln(p_z) dz \right\}. \quad (2.51)$$

A segunda integral desta última equação pode ser resolvida analiticamente para produzir

$$u(k_x, z_{j+1}, \omega) = u(k_x, z_j, \omega) \sqrt{\frac{p_{z_j}}{p_{z_{j+1}}}} \exp \left\{ \int_{z_j}^{z_{j+1}} (i\omega p_z) dz \right\}. \quad (2.52)$$

Assim, a expressão com amplitude verdadeira para a migração por deslocamento de fase é (MELO; SCHLEICHER; NOVAIS, 2006)

$$u(k_x, z_{j+1}, \omega) = u(k_x, z_j, \omega) \sqrt{\frac{p_{z_j}}{p_{z_{j+1}}}} \exp\{i\omega \bar{p}_z(\Delta z)\}, \quad (2.53)$$

em que  $\Delta z = z_{j+1} - z_j$ ,  $p_{z_j}$  e  $p_{z_{j+1}}$  são as componentes do vetor vagarosidade vertical no topo e na base da camada atual, enquanto  $\bar{p}_z$  é o valor médio da função  $p_z(z)$  no intervalo  $[z_j, z_{j+1}]$ . Na aplicação desse resultado,  $\bar{p}_z$  deve ser aproximado por um valor baseado nos valores conhecidos de  $p_z$ .

### 3 MIGRAÇÃO EM MEIOS VTI USANDO APROXIMAÇÃO DE PADÉ COMPLEXA

Nesse capítulo é apresentado um algoritmo de migração FD complexo para meios VTI usando a equação da onda acústica para meios VTI (ALKHALIFAH, 2000) e aproximação de Padé complexa (MILLINAZZO; ZALA; BROOKE, 1997). Além disso, usando as ideias de Fei e Liner (2008) também é apresentado um algoritmo de migração híbrido FD/FFD complexo.

#### 3.1 APROXIMAÇÃO FD UTILIZANDO EXPANSÃO EM SÉRIE DE PADÉ COMPLEXA

Nesta seção, deduz-se uma aproximação FD para a relação de dispersão da equação (2.30) fazendo uma expansão em série de Padé complexa com o objetivo de melhorar a estabilidade e tratar melhor as ondas evanescentes, além de conseguir imagear refletores com grandes inclinações.

A equação (2.28) é conhecida por proporcionar uma aproximação aceitável até um certo limite de grandes ângulos de inclinação. O domínio de grandes ângulos pode ser estendido usando mais termos na série. Entretanto, se  $X^2 > 1$  na equação (2.28), o lado esquerdo é um número imaginário, enquanto o lado direito se mantém uma quantidade real. Por essa razão, a aproximação é inválida para certos valores de  $w$ :

$$X^2 > 1 \text{ se } \begin{cases} w^2 < \frac{1}{1+2\eta}, \text{ para } \eta \leq 0 \\ \frac{1}{1+2\eta} < w^2 < \frac{1}{2\eta}, \text{ para } \eta > 0. \end{cases} \quad (3.1)$$

Fisicamente, isto significa que a aproximação (2.28) não pode tratar corretamente os modos evanescentes. Isto causa instabilidades numéricas e é responsável pelo comportamento instável do algoritmo FFD na presença de fortes variações laterais de velocidade (BIONDI, 2002). Observe que para  $\eta$  positivo, a raiz quadrada (equação (2.28)) torna-se real de novo para  $w^2 > 1/2\eta$ . Esses grandes valores de  $w^2$  são responsáveis por um segundo evento que foi observado em soluções numéricas da equação (2.26) (ALKHALIFAH, 2000; FEI; LINER, 2008), algumas vezes chamado de pseudo-onda S.

Assim, para tentar acabar com algumas dessas limitações, a equação (2.30) é ex-

pandida em série de Padé complexa (Apêndice A), obtendo

$$k_z = \frac{\omega}{c_{p0}} \left[ C_0 - \sum_{n=1}^N \frac{A_n X^2}{1 - B_n X^2} \right] \quad (3.2)$$

em que  $X$  está definido na equação (2.29),  $N$  é o número de termos da série de Padé,  $A_n$ ,  $B_n$  e  $C_0$  são os coeficientes de Padé complexos dados por:

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{a_n e^{-i\alpha/2}}{[1 + b_n(e^{-i\alpha} - 1)]^2}; \\ B_n &= \frac{b_n e^{-i\alpha}}{1 + b_n(e^{-i\alpha} - 1)}; \\ C_0 &= e^{-i\alpha/2} \left[ 1 + \sum_{n=1}^N \frac{a_n(e^{-i\alpha} - 1)}{1 + b_n(e^{-i\alpha} - 1)} \right], \end{aligned} \quad (3.3)$$

em que  $\alpha$  é o ângulo de rotação da linha de corte do plano complexo. Esse é o operador 2D de migração em profundidade por diferenças finitas usando aproximação de Padé complexa para meios VTI. Observe que fazendo  $\eta = 0$  na equação (2.29) leva ao operador para meios isotrópicos e anisotrópico elíptico.

### 3.1.1 Avaliação da Relação de Dispersão

Para avaliar a qualidade da aproximação FD usando série de Padé complexa, que a partir de agora será chamada apenas de aproximação FD complexa, as Figuras de 3.1 a 3.5 mostram sua comparação com a relação de dispersão exata e com a aproximação FD real para um meio homogêneo com  $\epsilon = 0.21$  e  $\delta = -0.032$ , i.e.,  $\eta = 0.17$ . Testes com diferentes valores de  $\eta$  mostraram o mesmo comportamento. A aproximação FD foi calculada usando três termos da série de Padé com cinco ângulos de rotação diferentes, a saber:  $\alpha = 5^\circ$ ,  $\alpha = 45^\circ$ ,  $\alpha = 60^\circ$ ,  $\alpha = 75^\circ$  e  $\alpha = 90^\circ$ . As melhoras na aproximação da parte real da relação de dispersão quando  $\alpha$  aumenta é evidente. As melhoras são mais evidentes na parte imaginária, mas ao passo que  $\alpha$  passa a ter valores iguais ou superiores a  $75^\circ$ , uma pequena região da parte imaginária se torna negativa fazendo com que as ondas correspondentes aumentem exponencialmente, o que pode levar à instabilidades durante a migração.

A aproximação FD complexa da parte imaginária possui uma boa aproximação para ângulos de rotação entre  $45^\circ$  e  $60^\circ$ , que também tem uma boa aproximação na parte real. Uma vez que as instabilidades numéricas principais de uma migração FD são causadas pelo tratamento incorreto de ondas evanescentes, é esperado que um ângulo de rotação dentro do intervalo produza uma imagem migrada com menos artefatos. Nota-se, todavia, que mesmo

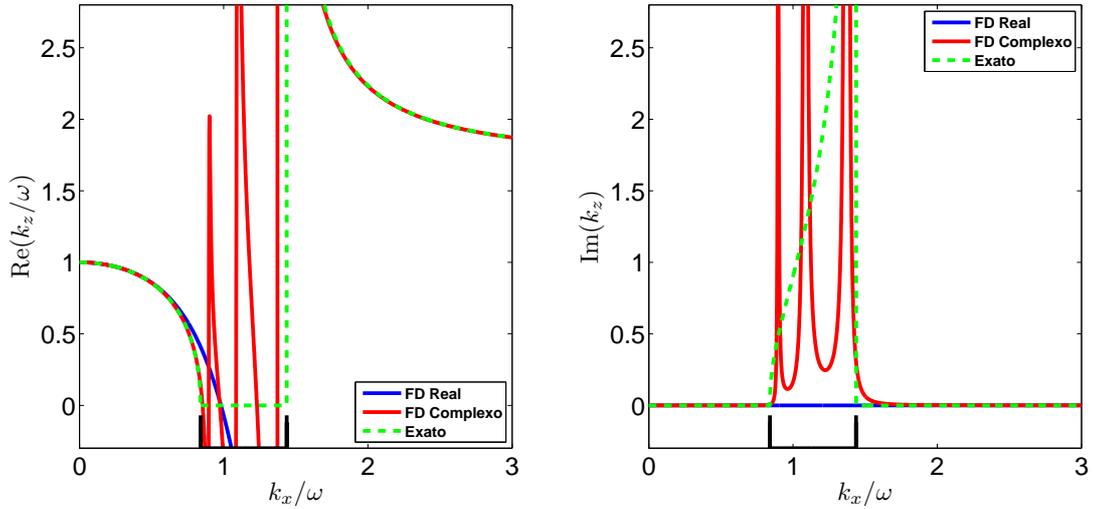


Figura 3.1: Aproximação FD usando série de Padé complexa para a relação de dispersão da equação da onda unidirecional com  $\alpha = 5^\circ$ . Esquerda: Parte real. Direita: Parte imaginária.

uma rotação de um ângulo pequeno melhora o comportamento da aproximação FD (veja a aproximação usando  $\alpha = 5^\circ$  na Figura 3.1). Embora  $\alpha = 5^\circ$  crie fortes flutuações na parte evanescente da parte real de  $k_z$ , ele introduz uma parte imaginária não nula, significando que os modos evanescentes pelo menos serão atenuados. Com relação a isso, é importante notar que os máximos da parte imaginária, representando um forte amortecimento, coincidem com os máximos na parte real que indicam a parte em que a propagação é realizada de maneira incorreta.

### 3.2 APROXIMAÇÃO HÍBRIDA FD/FFD COMPLEXA

As equações unidirecionais para meios VTI possuem dois ramos claramente representadas nas Figuras de 3.1 a 3.5. Eles são representados pelas duas regiões em que a relação de dispersão é real, antes e depois da região evanescente. Os valores reais da relação de dispersão além da região evanescente descrevem ondas que se propagam com baixa velocidade (as chamadas pseudo-ondas S). Como a aproximação FD se aproxima da relação de dispersão exata naquela região, essas ondas são propagadas pela aproximação FD.

Para atenuar o efeito da solução indesejada Fei e Liner (2008) propuseram um algoritmo híbrido FD/FFD. Como a aproximação FD complexa já foi analisada, é natural usar a ideia de Fei e Liner (2008) para propor um algoritmo híbrido FD/FFD complexo. Mas para

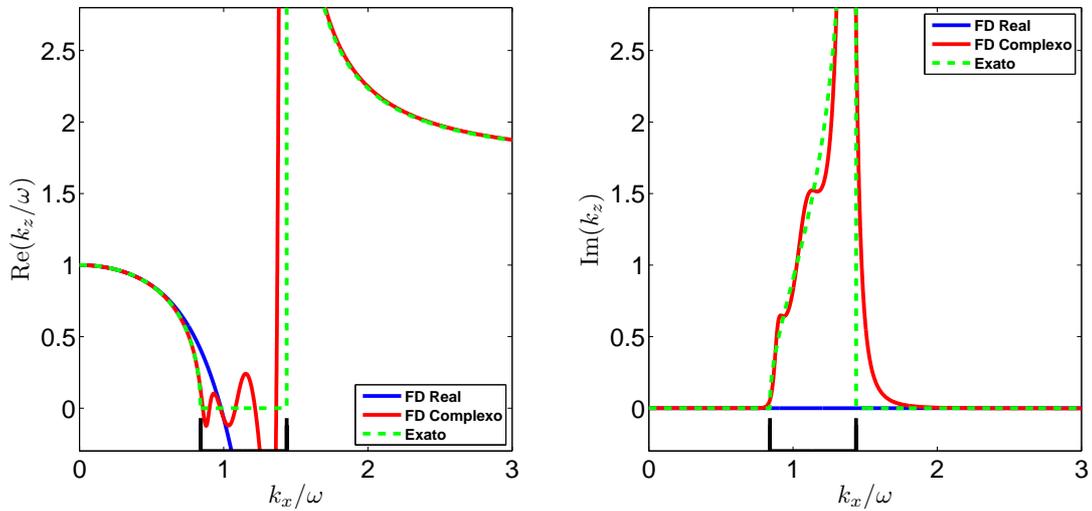


Figura 3.2: Aproximação FD usando série de Padé complexa para a relação de dispersão da equação da onda unidirecional com  $\alpha = 45^\circ$ . Esquerda: Parte real. Direita: Parte imaginária.

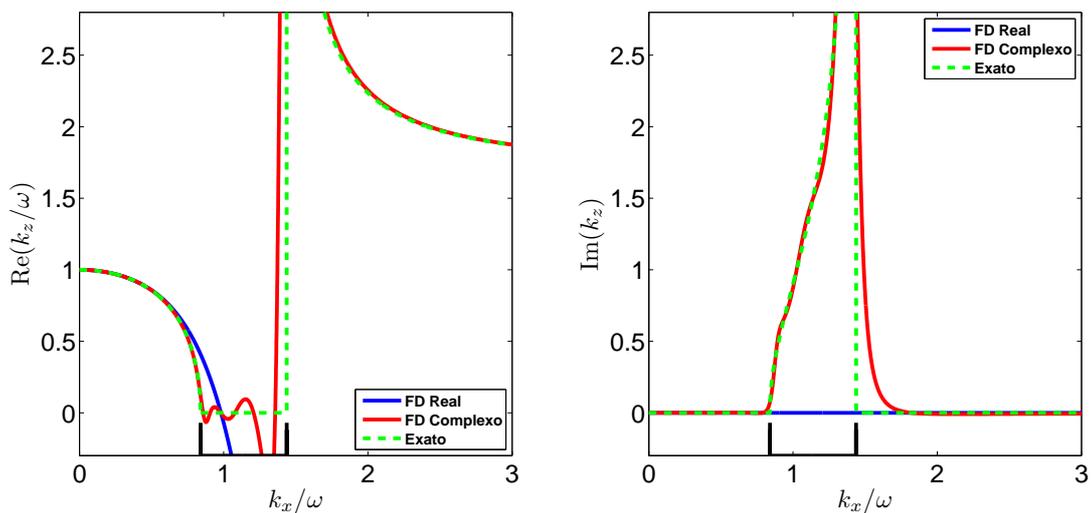


Figura 3.3: Aproximação FD usando série de Padé complexa para a relação de dispersão da equação da onda unidirecional com  $\alpha = 60^\circ$ . Esquerda: Parte real. Direita: Parte imaginária.

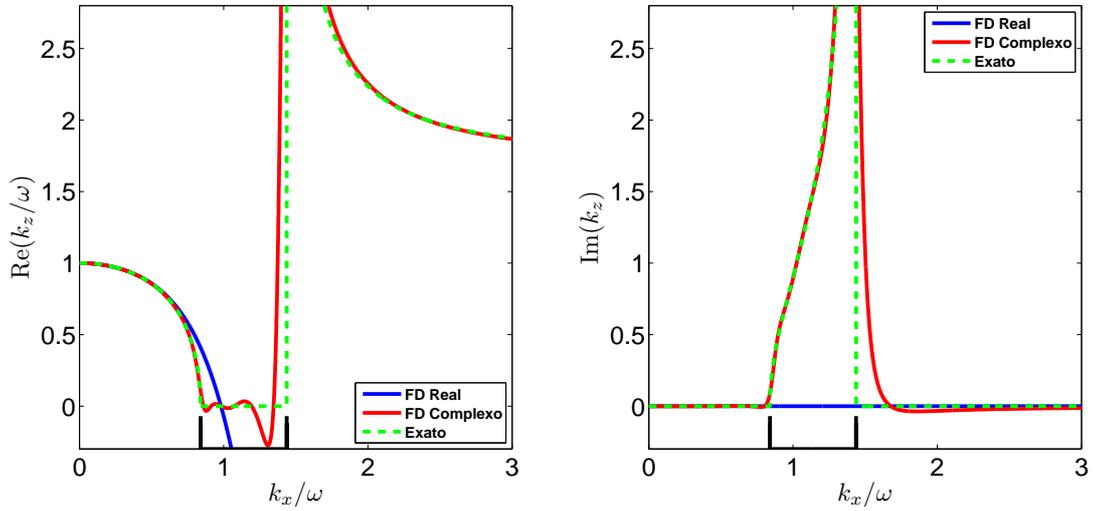


Figura 3.4: Aproximação FD usando série de Padé complexa para a relação de dispersão da equação da onda unidirecional com  $\alpha = 75^\circ$ . Esquerda: Parte real. Direita: Parte imaginária.

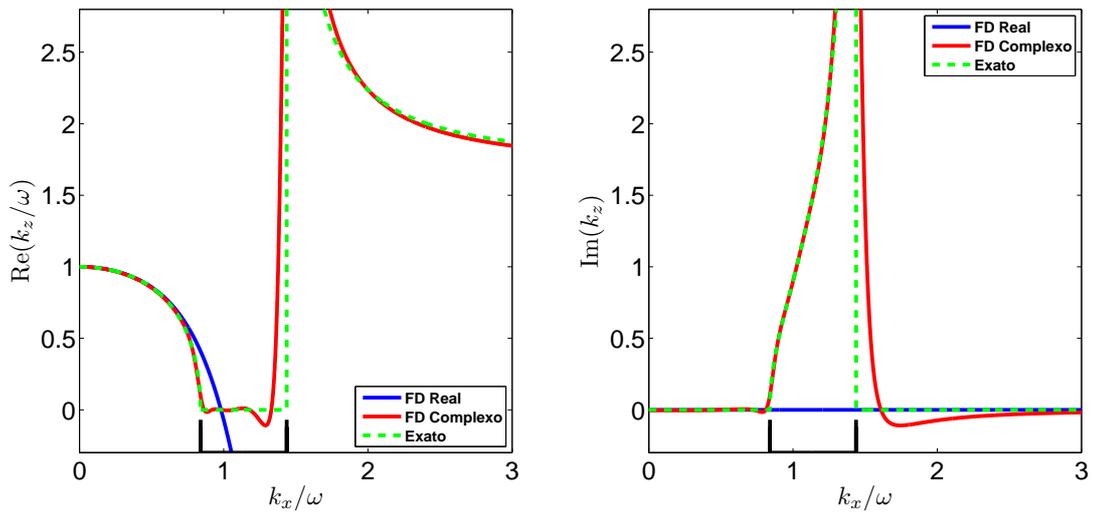


Figura 3.5: Aproximação FD usando série de Padé complexa para a relação de dispersão da equação da onda unidirecional com  $\alpha = 90^\circ$ . Esquerda: Parte real. Direita: Parte imaginária.

isso, é necessário um algoritmo FFD para ser usado no processo híbrido. Todavia, como este algoritmo é usado somente em poucos passos em profundidade, não há a necessidade de se obter uma aproximação FFD muito sofisticada.

### 3.2.1 Aproximação FFD complexa simplificada

Usando a expansão de Padé complexa, obtém-se um operador de migração em profundidade por diferenças finitas e Fourier para meios VTI (ver Apêndice A) que é dado pela equação:

$$k_z = \frac{\omega}{c^r} \left\{ \sqrt{1 - \frac{c^{r2}}{c_n^2} w^2} + C_0(q_0 - 1) - \sum_{n=1}^N A_n w^2 \left( \frac{q_0 - q_n^2}{1 - (\sigma B_n + 2\eta) w^2} \right) \right\}, \quad (3.4)$$

em que  $c^r$  é a velocidade constante do meio isotrópico de referência,  $q_0 = c^r/c_{p0}$ ,  $q_n = c^r/c_n$  e  $\sigma = 1 + c_n^3$ . Uma aproximação FFD complexa mais completa pode ser obtida em analogia à proposta original de Ristow e Rühl (1994), e pode ser encontrada em Zhang et al. (2005). Note que a equação (3.4) tem um termo de deslocamento de fase, um termo *split-step* e um termo de diferenças finitas, como no caso da aproximação FFD real (RISTOW; RÜHL, 1994). No caso particular em que  $c_{p0} = c_n$ , a velocidade de referência  $c^r$  pode ser escolhida menor do que o valor mínimo de  $c_{p0}$  a cada nível em profundidade para evitar que  $pq_0 = q_n^2$ , o que cancela a parte de diferenças finitas da aproximação (3.4) tornando-a isotrópica. Outras soluções para esse problema foram propostas por Fei e Liner (2008) e por Nolte (2008). Nossa implementação do termo de diferenças finitas da equação (3.4) usa um esquema Crank-Nicholson (ver Apêndice C).

### 3.2.2 Avaliação da Relação de Dispersão

Para avaliar a qualidade da aproximação FFD complexa (3.4) as Figuras de 3.6 a 3.10 mostram sua comparação com a relação de dispersão exata e com a aproximação FFD real para um meio homogêneo com  $p_0 = 0.5$ ,  $\epsilon = 0.21$  e  $\delta = -0.032$ . A aproximação FFD foi calculada usando três termos da série de Padé com cinco diferentes ângulos de rotação, a saber,  $\alpha = 5^\circ$ ,  $\alpha = 45^\circ$ ,  $\alpha = 60^\circ$ ,  $\alpha = 75^\circ$ , e  $\alpha = 90^\circ$ . Percebe-se imediatamente que para grandes ângulos de propagação essa aproximação é menos precisa que a fórmula FD. Mesmo assim, um ângulo de rotação não nulo resulta em uma melhora na aproximação da parte real da relação de dispersão. Apesar da aproximação não recuperar a parte imaginária corretamente, ela atenua as ondas evanescentes e estabiliza o processo de migração.

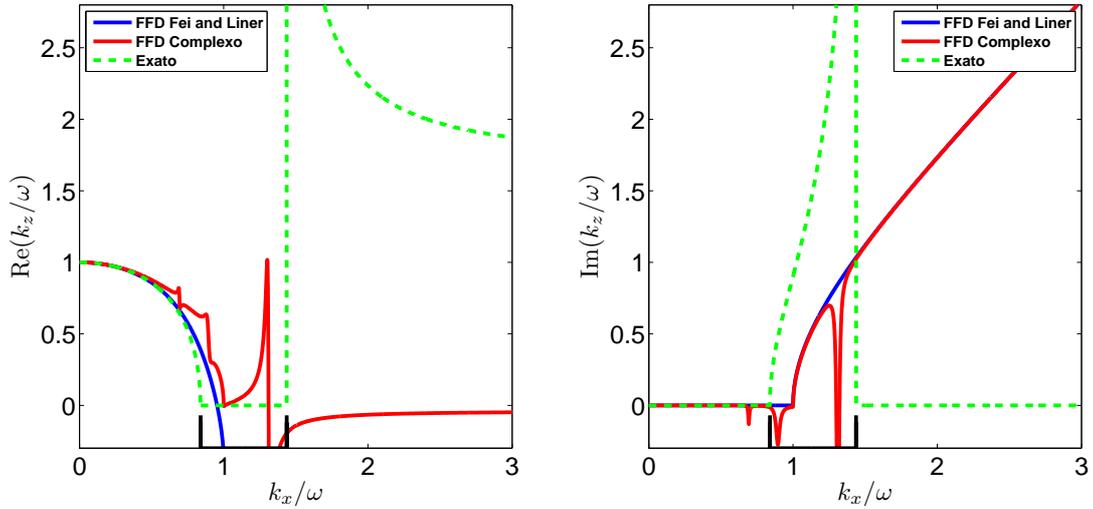


Figura 3.6: Aproximação FFD usando série de Padé complexa para a relação de dispersão da equação da onda unidirecional com  $\alpha = 5^\circ$ . Esquerda: Parte real. Direita: Parte imaginária.

Como a curva se torna ligeiramente mais suave quando  $\alpha$  aumenta, a melhor aproximação FFD da parte imaginária é conseguida para um ângulo de rotação de aproximadamente  $90^\circ$ . Note, contudo, que mesmo um ângulo de rotação de  $45^\circ$  melhora o comportamento da aproximação FFD.

A mais importante característica da aproximação FFD complexa é sua falta de qualidade depois da região evanescente. Como a aproximação não se torna real de novo para grandes valores de  $w$ , essa aproximação simplificada FFD complexa não propaga a pseudo-onda S. Essa é a propriedade que permite que o método híbrido funcione como descrito. O mesmo efeito pode ser obtido com as aproximações FFD completas de Fei e Liner (2008) e Nolte (2008) com uma escolha apropriada do meio de referência.

### 3.3 EXEMPLOS NUMÉRICOS

Nesta seção é investigado o comportamento numérico dos métodos de migração FD e híbrido FD/FFD complexos para meios VTI.

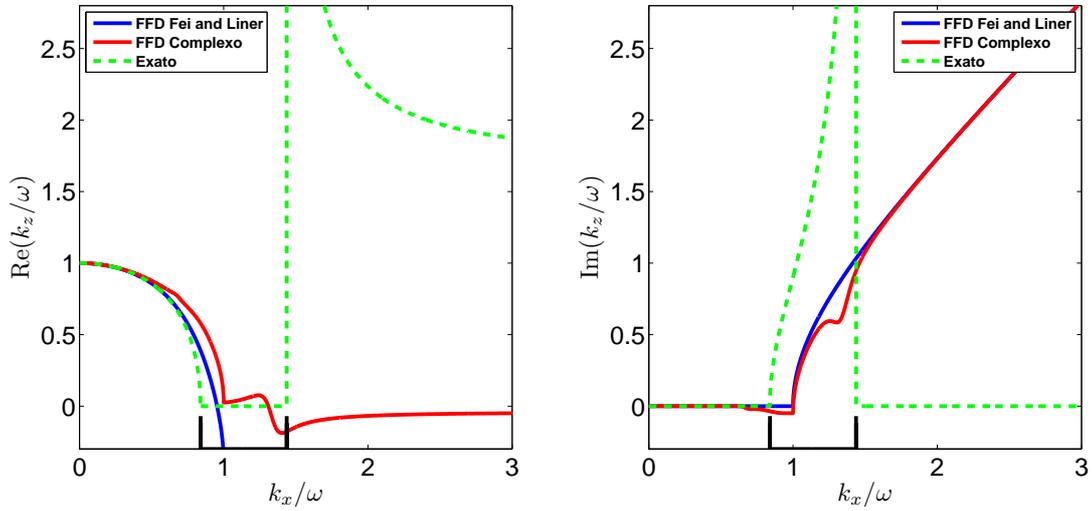


Figura 3.7: Aproximação FFD usando série de Padé complexa para a relação de dispersão da equação da onda unidirecional com  $\alpha = 45^\circ$ . Esquerda: Parte real. Direita: Parte imaginária.

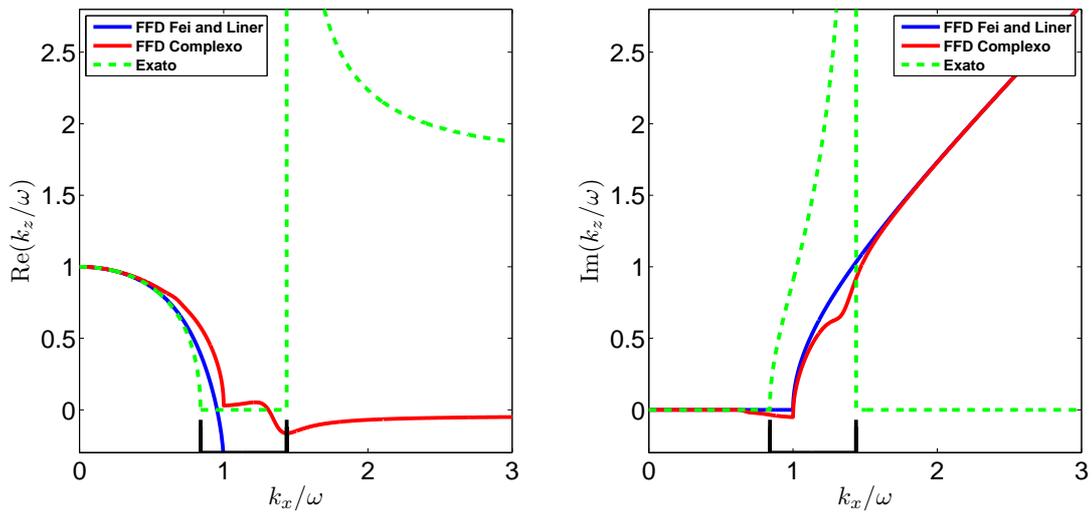


Figura 3.8: Aproximação FFD usando série de Padé complexa para a relação de dispersão da equação da onda unidirecional com  $\alpha = 60^\circ$ . Esquerda: Parte real. Direita: Parte imaginária.

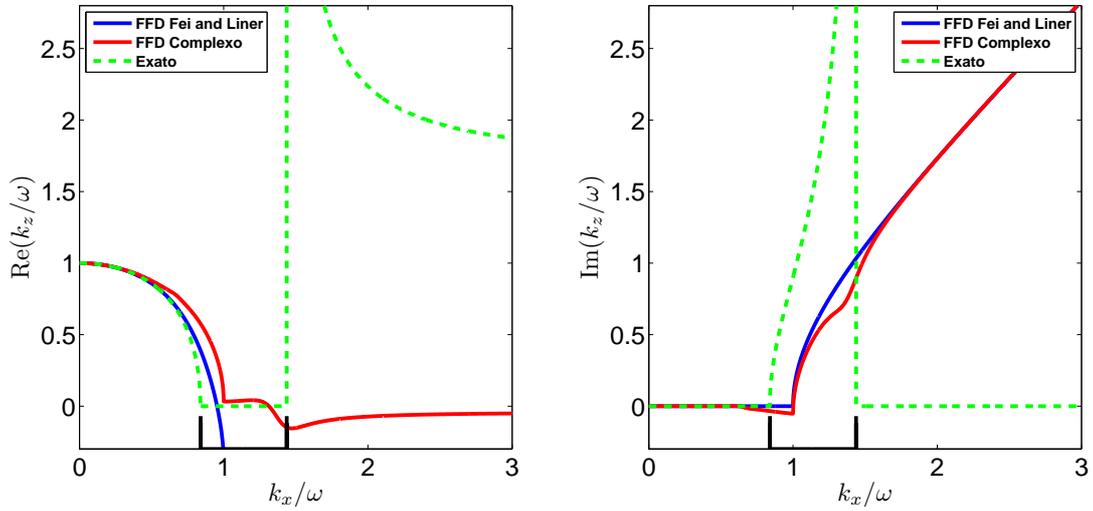


Figura 3.9: Aproximação FFD usando série de Padé complexa para a relação de dispersão da equação da onda unidirecional com  $\alpha = 75^\circ$ . Esquerda: Parte real. Direita: Parte imaginária.

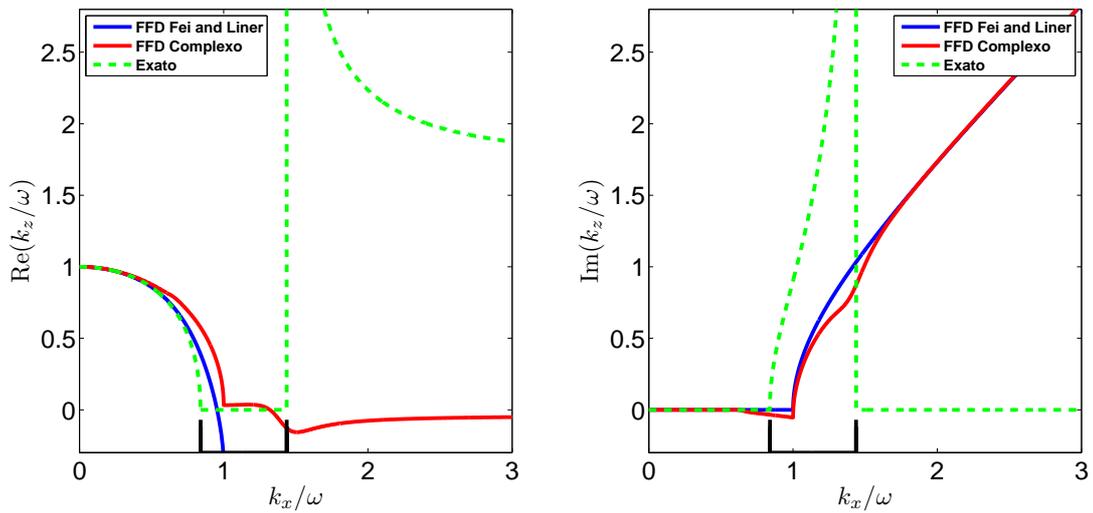


Figura 3.10: Aproximação FFD usando série de Padé complexa para a relação de dispersão da equação da onda unidirecional com  $\alpha = 90^\circ$ . Esquerda: Parte real. Direita: Parte imaginária.

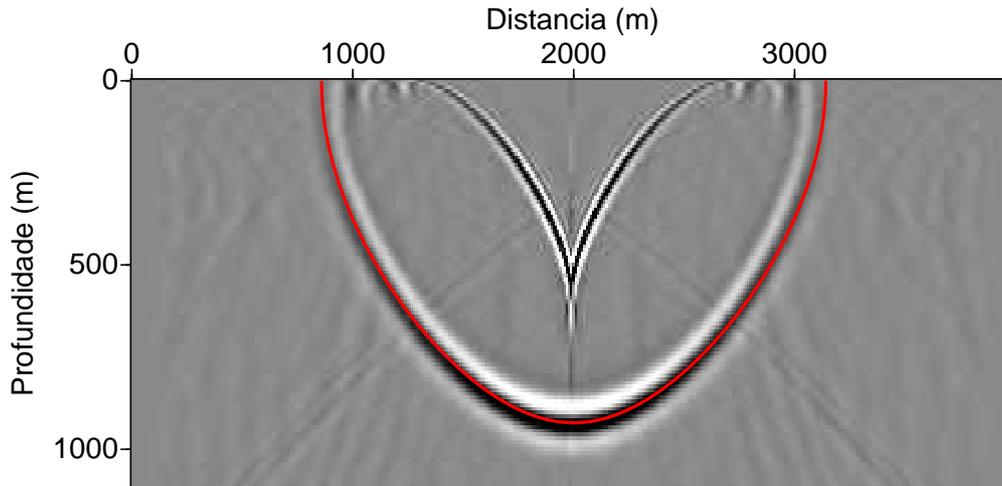


Figura 3.11: Resposta ao impulso de uma migração FD real ( $\alpha = 0^\circ$ ) em um meio VTI com velocidade constante. Os parâmetros de anisotropia são  $v_{p0} = 2800 \text{ m/s}$ ,  $\epsilon = 0.21$  e  $\delta = -0.032$ .

### 3.3.1 Resposta ao impulso

Primeiro, são apresentados os resultados da resposta ao impulso da equação da onda acústica para meios VTI. Como uma referência, a Figura 3.11 mostra a resposta ao impulso em  $t = 0.5 \text{ s}$  de uma migração FD real ( $\alpha = 0^\circ$ ) para um meio VTI homogêneo (velocidade constante e  $\eta$  constante). O pulso fonte utilizado foi o Ricker com frequência máxima de 25 Hz. A migração foi realizada usando três termos da série de Padé. As características mais evidentes na Figura 3.11 são os dois fortes eventos que são os dois ramos da equação da onda acústica para meios VTI, ou seja, a frente de onda qP desejada e a pseudo-onda S indesejada. Adicionalmente, se nota claramente algum ruído resultante de instabilidades, e que aparecem em toda figura, causando eventos não-causais. Os artefatos são maiores onde a influência do tratamento incorreto de ondas evanescentes é mais forte.

As Figuras de 3.12 a 3.16 mostram as respostas ao impulso da migração FD complexa no mesmo meio da Figura 3.11 usando o mesmo pulso fonte, 3 termos da série de Padé complexa e os ângulos de rotação  $\alpha = 5^\circ$ ,  $\alpha = 45^\circ$ ,  $\alpha = 60^\circ$ ,  $\alpha = 75^\circ$  and  $\alpha = 90^\circ$ . Observa-se que a aproximação FD complexa não consegue eliminar a pseudo-onda S, mas ela reduz muito as instabilidades em todas as Figuras de 3.12 a 3.16. Note, em particular, que mesmo usando um ângulo de rotação de  $5^\circ$ , a maioria dos eventos não-causais são eliminados, apesar de sua pobre aproximação da parte evanescente da relação de dispersão.

A diferença mais sutil entre a resposta ao impulso usando aproximação FD real e as respostas ao impulso obtidas usando aproximação FD complexa é que enquanto todas as respostas ao impulso tem energia até para grandes ângulos de propagação, a aproximação FD

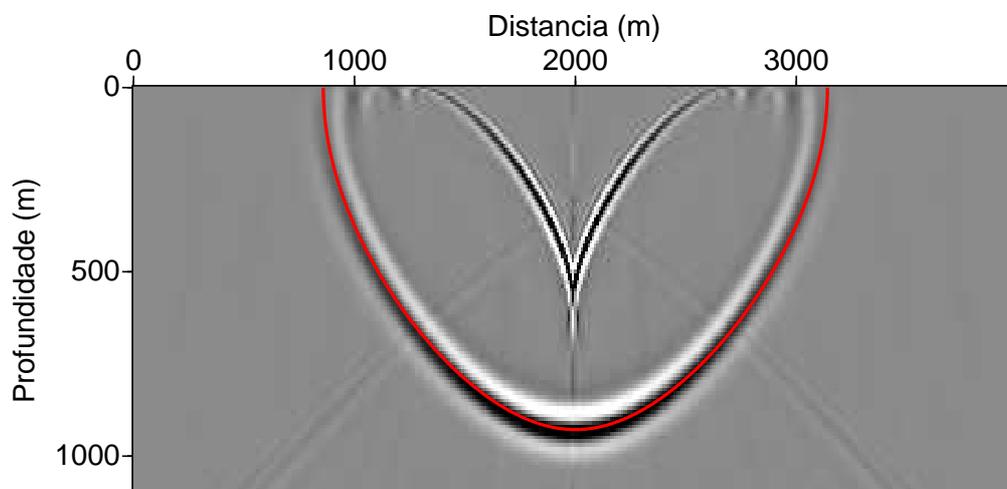


Figura 3.12: Resposta ao impulso de uma migração FD complexa em um meio VTI com  $\alpha = 5^\circ$ . Os parâmetros de anisotropia são  $v_{p0} = 2800 \text{ m/s}$ ,  $\epsilon = 0.21$  e  $\delta = -0.032$ .

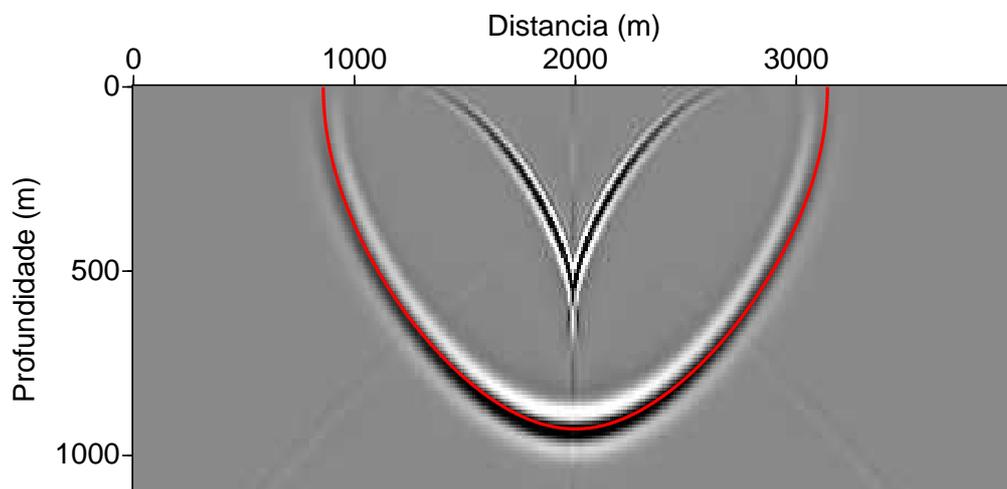


Figura 3.13: Resposta ao impulso de uma migração FD complexa em um meio VTI com  $\alpha = 45^\circ$ . Os parâmetros de anisotropia são  $v_{p0} = 2800 \text{ m/s}$ ,  $\epsilon = 0.21$  e  $\delta = -0.032$ .

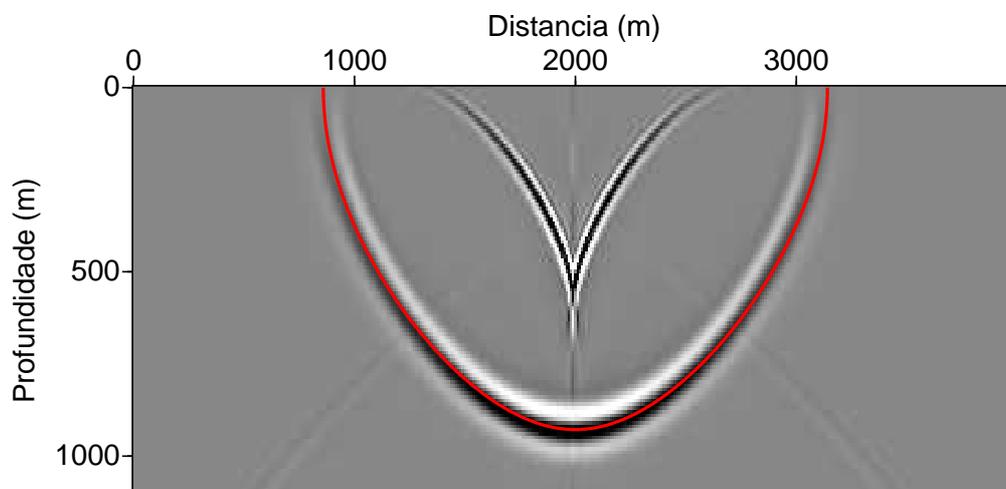


Figura 3.14: Resposta ao impulso de uma migração FD complexa em um meio VTI com  $\alpha = 60^\circ$ . Os parâmetros de anisotropia são  $v_{p0} = 2800 \text{ m/s}$ ,  $\epsilon = 0.21$  e  $\delta = -0.032$ .

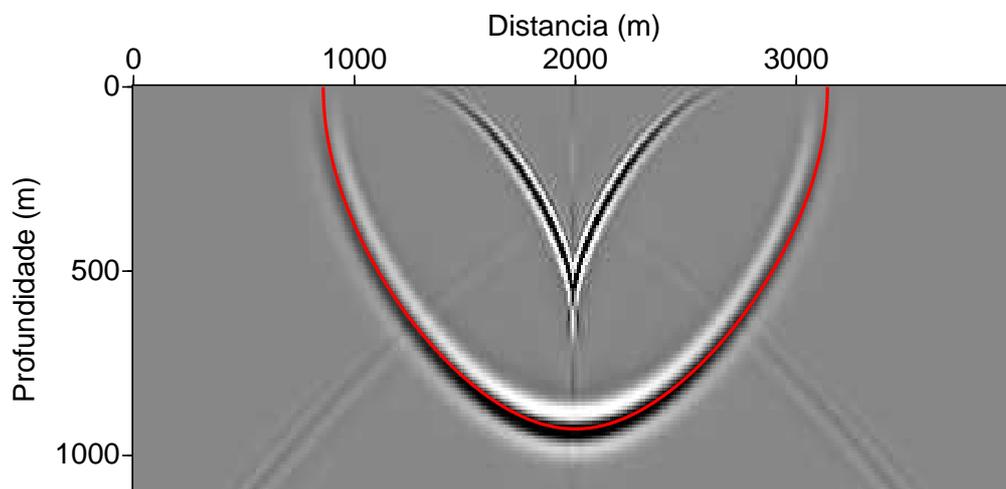


Figura 3.15: Resposta ao impulso de uma migração FD complexa em um meio VTI com  $\alpha = 75^\circ$ . Os parâmetros de anisotropia são  $v_{p0} = 2800 \text{ m/s}$ ,  $\epsilon = 0.21$  e  $\delta = -0.032$ .

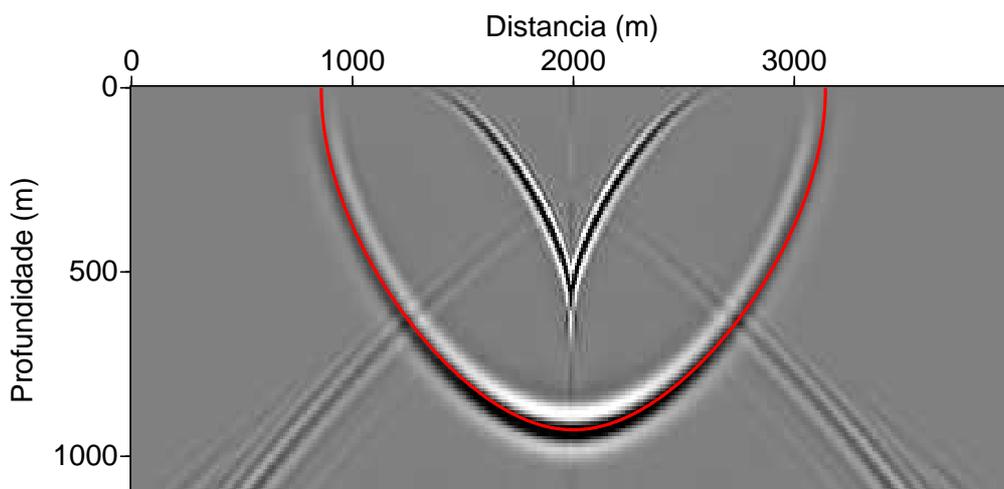


Figura 3.16: Resposta ao impulso de uma migração FD complexa em um meio VTI com  $\alpha = 90^\circ$ . Os parâmetros de anisotropia são  $v_{p0} = 2800 \text{ m/s}$ ,  $\epsilon = 0.21$  e  $\delta = -0.032$ .

real produz uma distorção ligeiramente mais forte da forma do evento desejado para grandes ângulos, causando curvas para dentro no topo. A melhora causada pela representação de Padé complexa é uma consequência da melhor aproximação da relação de dispersão para grandes ângulos.

Comparando as respostas ao impulso obtidas com aproximação FD complexa umas com as outras, observa-se que a imagem com  $\alpha = 60^\circ$  (Figura 3.14) e com  $\alpha = 45^\circ$  (Figura 3.13) são as melhores. No painel que mostra a resposta ao impulso para  $\alpha = 5^\circ$  (Figura 3.12) ainda se observa os artefatos quase horizontais provenientes de ondas evanescentes. As respostas ao impulso para  $\alpha = 45^\circ$  (Figura 3.13) e  $\alpha = 60^\circ$  (Figura 3.14) são igualmente claras. Ao usar grandes ângulos de rotação, artefatos não-causais tornam-se fortes novamente. Isso está de acordo com os estudos da relação de dispersão na seção 3.1.1. Assim um ângulo de rotação escolhido no intervalo de  $45^\circ$  a  $60^\circ$  produz uma boa aproximação para a migração FD complexa.

O algoritmo híbrido é uma combinação dos algoritmos FFD e FD. O algoritmo de migração híbrido FD/FFD complexo usa uma implementação FFD para os cinco primeiros passos em  $z$ , e para os outros passos em profundidade é usado o algoritmo FD. Esse algoritmo é muito vantajoso, uma vez que o custo computacional e precisão são quase os mesmos da migração FD e atenua as pseudo-ondas S. A Figura 3.17 mostra a resposta ao impulso da migração híbrida complexa. Para esse experimento foi usado para a parte FFD  $\alpha = 90^\circ$  e para a parte FD  $\alpha = 60^\circ$ . Essa Figura é muito mais clara do que a FD e imagea grandes mergulhos mais nitidamente, além de mostrar as pseudo-ondas S bem atenuadas. Para gerar

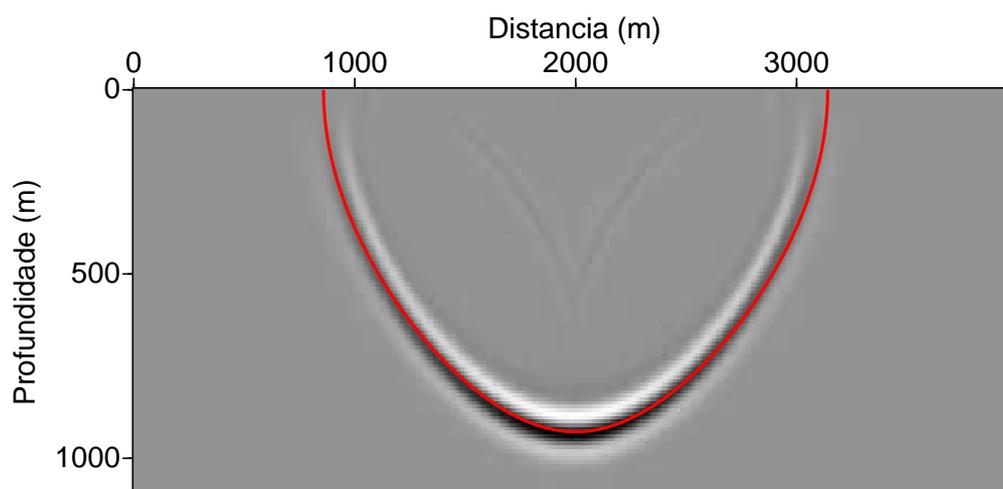


Figura 3.17: Resposta ao impulso obtida pela migração FD/FFD híbrida complexa em um meio VTI com velocidade constante. Os parâmetros de anisotropia são  $v_{p0} = 2800 \text{ m/s}$ ,  $\epsilon = 0.21$  e  $\delta = -0.032$ . Foi usado  $\alpha = 90^\circ$  para a parte FFD e  $\alpha = 60^\circ$  para a parte FD.

a Figura 3.17 usamos para a parte FFD  $\alpha = 90^\circ$  e para a parte FD  $\alpha = 60^\circ$  e 3 termos da série de Padé complexa.

### 3.3.2 Testes em Dados Sintéticos

Os algoritmos de migração foram testados usando aproximação de Padé complexa para meios VTI num conjunto de dados sintéticos cedidos pela HESS Corporation. A Figura 3.18 mostra o modelo de velocidade da onda P vertical e a distribuição dos parâmetros de Thomsen  $\epsilon$  e  $\delta$ . A estrutura em geral deste modelo não é muito complicada, exceto por ter um corpo salino cercado por camadas sedimentares anisotrópicas e uma falha de inclinação acentuada. Dois alvos finos de baixa velocidade podem ser vistos imediatamente à direita o domo salino.

O dado sintético possui 360 tiros e não foi realizado nenhum tratamento para atenuação de múltiplas. Todas as imagens foram construídas usando a condição de imagem de correlação cruzada. A Figura 3.19 mostra as seções migradas usando os algoritmos FD isotrópico e anisotrópico. Foi usado como ângulo de rotação da linha do corte para o algoritmo isotrópico  $90^\circ$  (AMAZONAS et al., 2007). Para o algoritmo anisotrópico escolhemos  $\alpha = 60^\circ$  que segundo os testes anteriores mostrou uma boa aproximação. Existem alguns eventos falsos devido às múltiplas não terem sido eliminadas no dado. Os eventos de reflexão primária aparecem claramente. Como esperado, a migração anisotrópica produz imagens melhores do que a migração isotrópica. Isso fica evidente quando observamos as regiões mais a esquerda

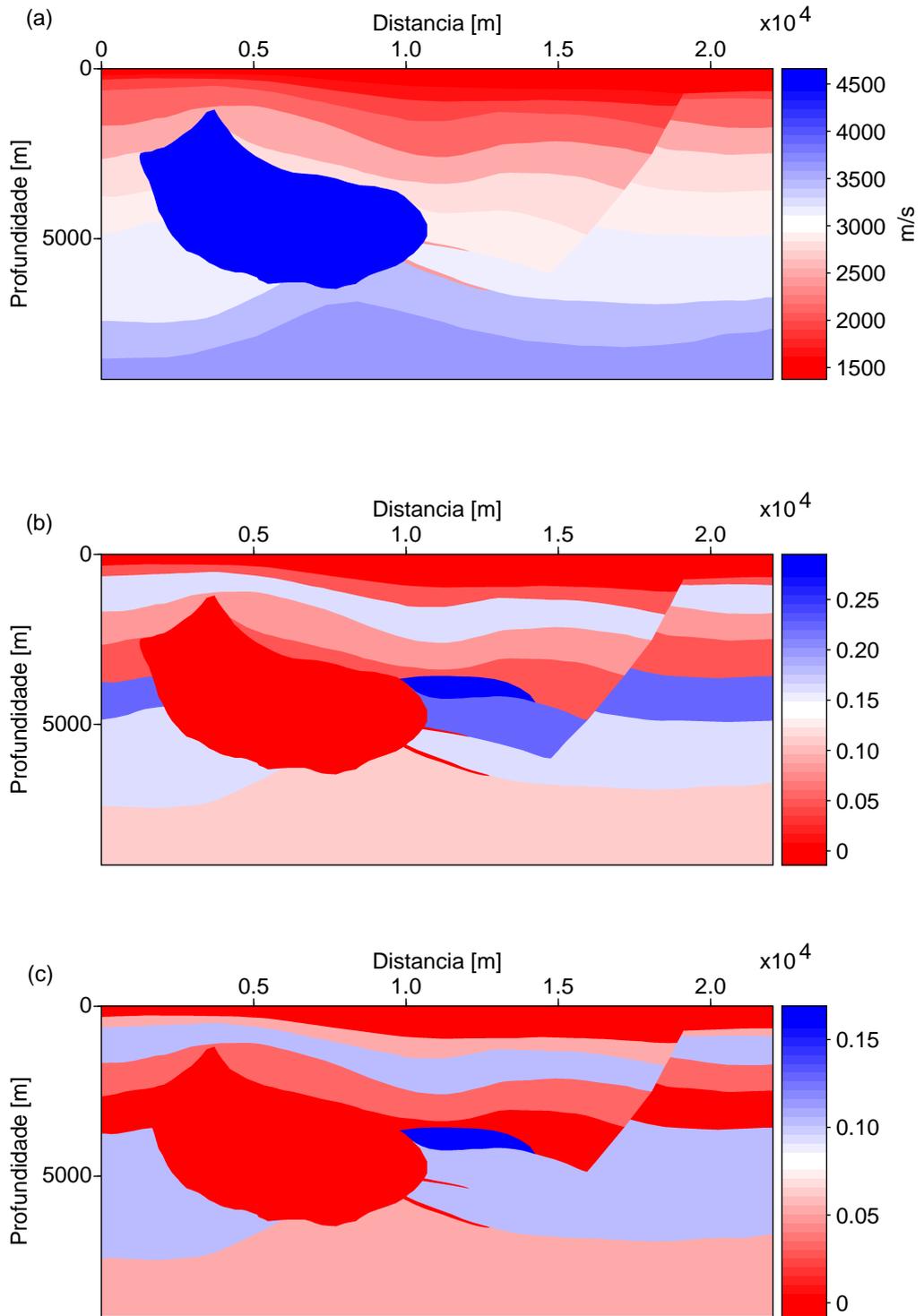


Figura 3.18: Modelo sintético cedido pela HESS Corporation. (a) velocidade vertical; (b)  $\epsilon$ ; (c)  $\delta$ .

do modelo, imediatamente acima do domo salino onde a imagem migrada com o algoritmo anisotrópico obteve uma imagem mais clara dos refletores. Outros pontos da imagem que devem ser destacados são os alvos finos imediatamente à direita do domo salino. Na imagem migrada com o algoritmo isotrópico não há uma continuidade desses eventos até a borda do sal, enquanto que a imagem migrada com o algoritmo anisotrópico essa continuidade é preservada.

A Figura 3.20 mostra a migração em profundidade híbrida complexa. Para essa migração usamos  $\alpha = 60^\circ$  para o algoritmo FD e  $\alpha = 90^\circ$  para o algoritmo FFD. O algoritmo FFD foi aplicado nos primeiros 5 níveis de propagação e o algoritmo FD nos níveis seguintes. As imagens da migração FD complexa e da migração híbrida parecem praticamente idênticas. A razão é que o dado sintético usado para os testes tem a fonte localizada na camada de água que é isotrópica, o que faz com que a pseudo-onda S não seja gerada pelo algoritmo FD, conforme descrito por Alkhalifah (2000).

Para esse modelo com forte variação lateral de velocidade, a migração FD real é instável. Portanto, não é possível comparar o algoritmo FD complexo com o algoritmo FD real. Para mostrar o problema, a Figura 3.21 mostra as seções migradas usando os algoritmos FD isotrópico e anisotrópico com um pequeno ângulo de rotação  $\alpha = 5^\circ$ . A migração anisotrópica (acima) ainda sofre com instabilidades devido ao tratamento incorreto das ondas evanescentes. Já o algoritmo isotrópico é mais estável, mostrando que uma pequena rotação na linha de corte já é suficiente para eliminar completamente a instabilidade.

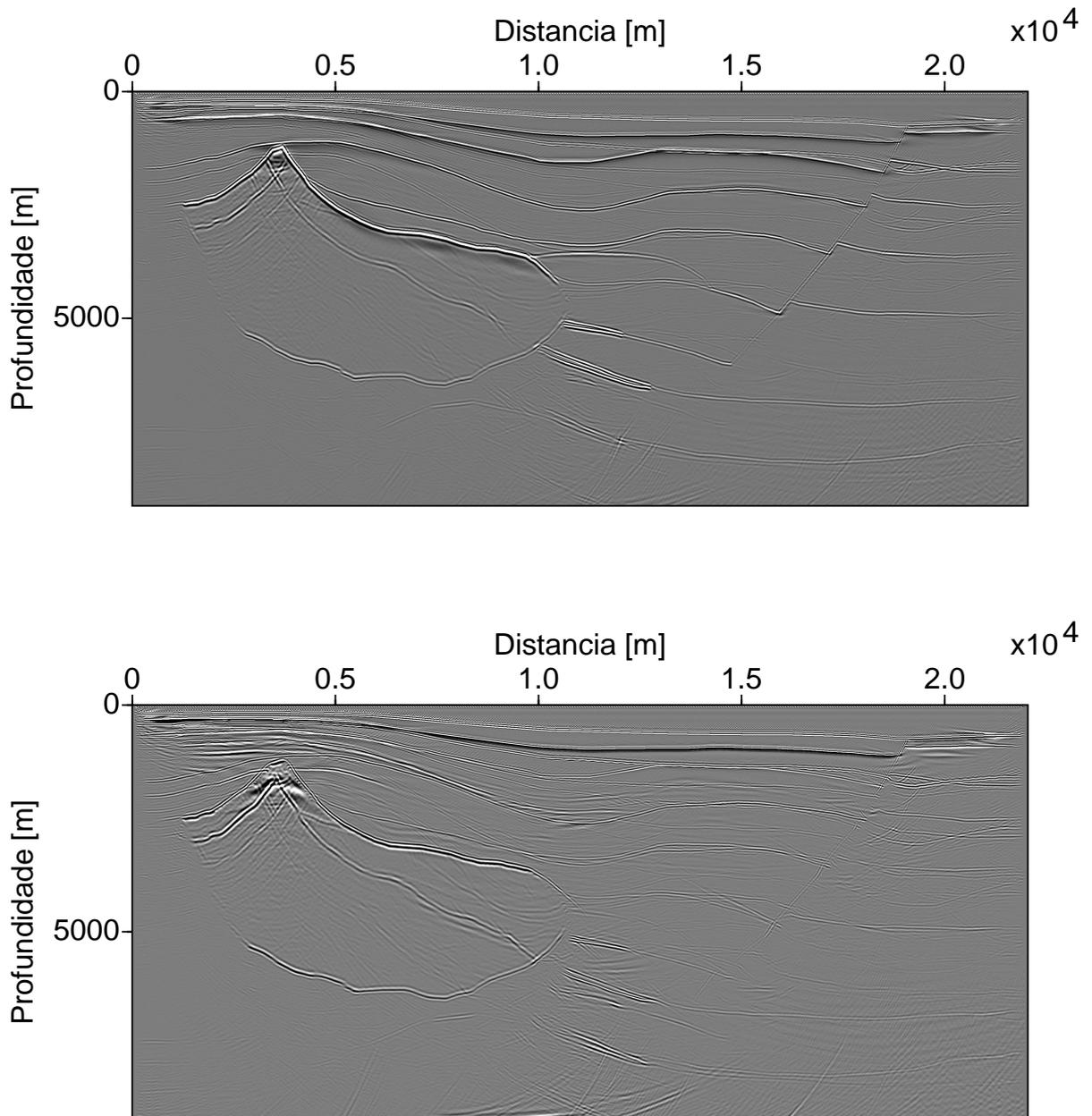


Figura 3.19: Seções migradas usando a migração em profundidade FD complexa. Acima: algoritmo anisotrópico. Abaixo: algoritmo isotrópico

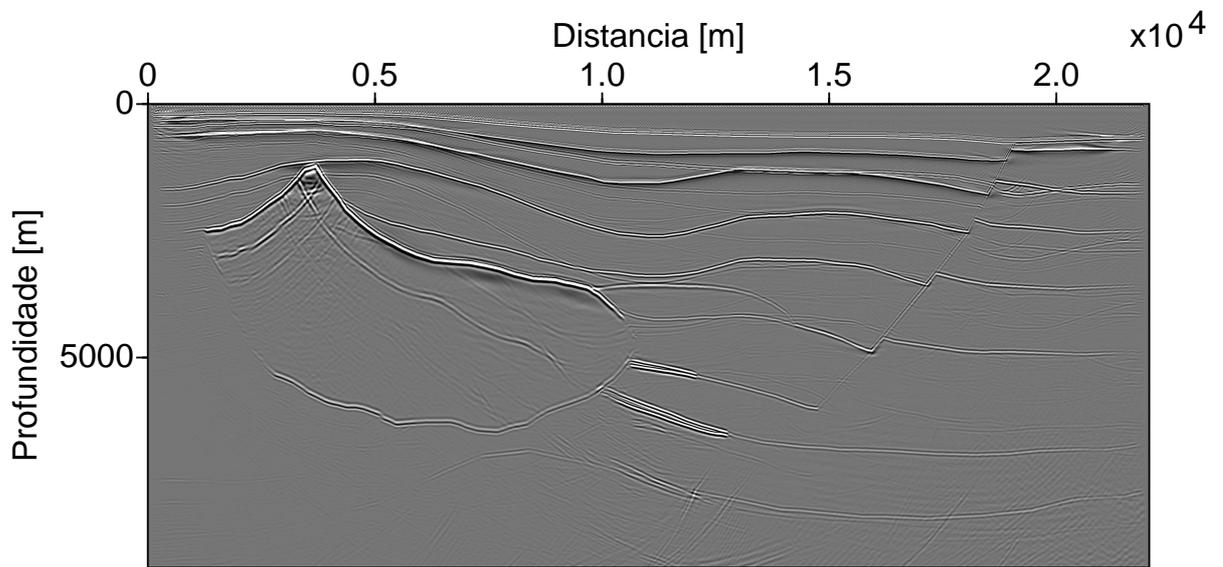


Figura 3.20: Seção migrada usando a migração em profundidade híbrida complexa.

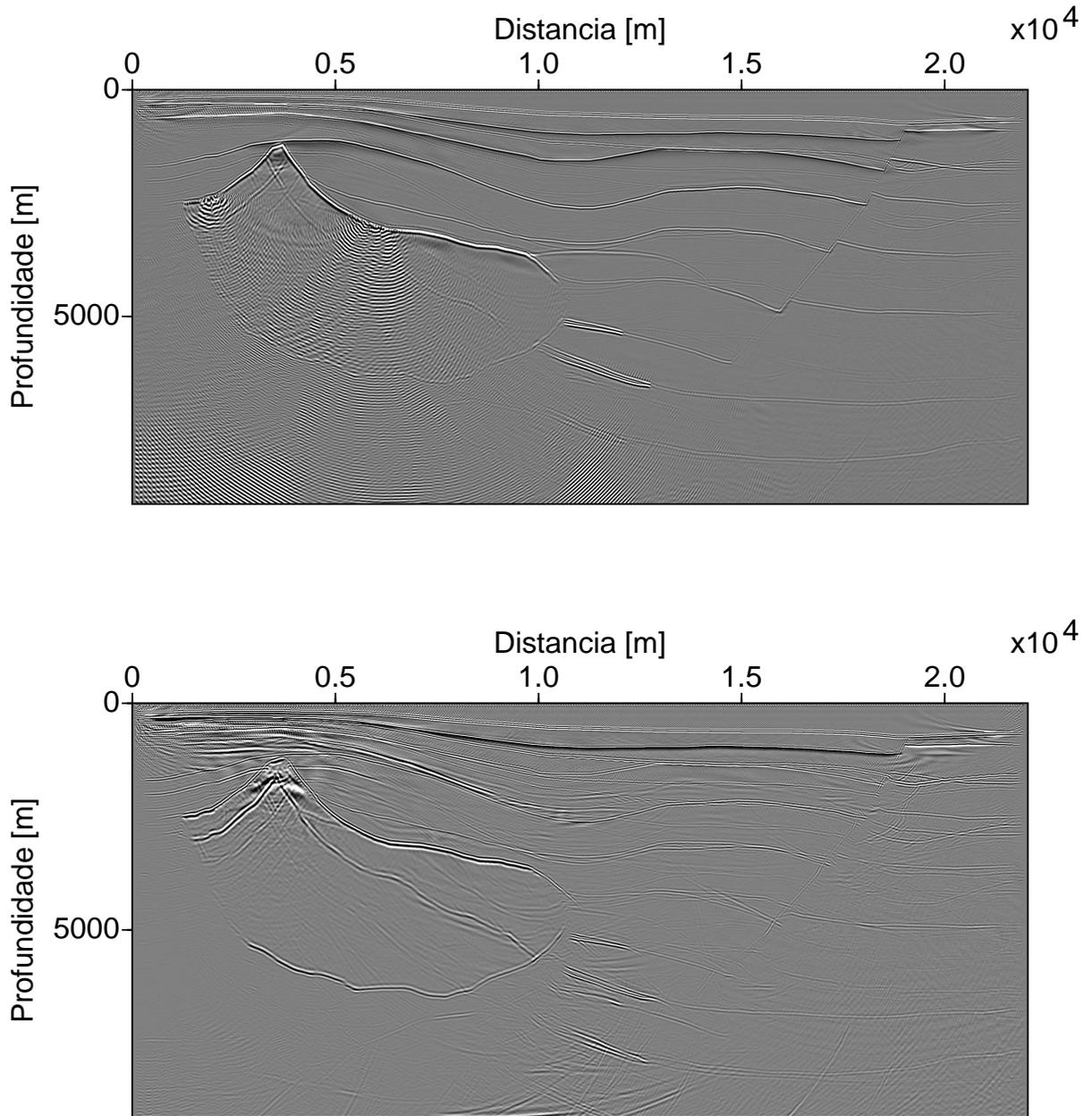


Figura 3.21: Seções migradas usando migração FD complexa com  $\alpha = 5^\circ$ . Acima: algoritmo anisotrópico. Abaixo: algoritmo isotrópico.

## 4 INCLUSÃO DE VARIAÇÃO LATERAL DE VELOCIDADE NA MIGRAÇÃO COM EQUAÇÃO DA ONDA DE AMPLITUDE VERDADEIRA

Neste capítulo é introduzida correção de amplitude na migração *split-step* e na migração FFD complexa. Os resultados das migrações pós-empilhamento e pré-empilhamento são apresentados e discutidos. A correção da amplitude na migração de afastamento nulo depende apenas da correção de amplitude no operador de propagação. Na migração pré-empilhamento a amplitude depende adicionalmente da condição de imagem. Os operadores de correção de amplitude propostos e a condição de imagem para o caso da migração pré-empilhamento são avaliados em dados sintéticos.

### 4.1 MIGRAÇÃO *SPLIT-STEP* E FFD COMPLEXA COM CORREÇÃO DE AMPLITUDE

No Capítulo 2 foi mostrado como a correção de amplitude pode ser implementada analiticamente em operadores de propagação unidirecionais em meios verticalmente heterogêneos. Para estender essa abordagem para meios com variação lateral de velocidade, pressupõe-se que o fator de correção de amplitude  $\left(\sqrt{\frac{p_{z_j}}{p_{z_{j+1}}}}\right)$ , pode ser escrito como um produto de dois fatores. O primeiro fator é constante para cada nível em profundidade e pode ser aplicado no domínio do número de onda e da frequência. O segundo fator aplica uma correção para variações laterais de velocidade e pode ser aplicado junto com o termo de correção de fase *split-step* no domínio do espaço e da frequência.

Para obter esse fator de correção, foi aplicada uma metodologia semelhante àquela usada para obtenção do termo de correção de fase (*split-step*), equação (2.13). Contudo, em vez de usar somas usa-se multiplicações. Esta abordagem corresponde a uma aproximação de ordem zero, no domínio do espaço, para o operador pseudo-diferencial associado ao fator  $p_{z_j}$ . Esse fator de correção  $\sqrt{\frac{p_{z_j}}{p_{z_{j+1}}}}$  pode ser escrito formalmente como

$$\sqrt{\frac{\frac{1}{c_j} \sqrt{1 + \frac{c_j^2}{\omega^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2}}}{\frac{1}{c_{j+1}} \sqrt{1 + \frac{c_{j+1}^2}{\omega^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2}}}} = \sqrt{\frac{\frac{1}{c_j^r} \sqrt{1 + \frac{c_j^{r2}}{\omega^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2}} \left\{ \frac{c_j^r}{c_j} \left[ \sqrt{1 + \frac{c_j^2}{\omega^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2}} / \sqrt{1 + \frac{c_j^{r2}}{\omega^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2}} \right] \right\}}{\frac{1}{c_{j+1}^r} \sqrt{1 + \frac{c_{j+1}^{r2}}{\omega^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2}} \left\{ \frac{c_{j+1}^r}{c_{j+1}} \left[ \sqrt{1 + \frac{c_{j+1}^2}{\omega^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2}} / \sqrt{1 + \frac{c_{j+1}^{r2}}{\omega^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2}} \right] \right\}}}, \quad (4.1)$$

em que  $c_j = c(x, z_j)$  ou  $c_{j+1} = c(x, z_{j+1})$  são as velocidades do meio, e  $c_j^r$  e  $c_{j+1}^r$  são as

velocidades de referência no nível em profundidade  $z_j$  e  $z_{j+1}$ , respectivamente.

Analogamente, a aproximação para o termo de fase da migração *split-step*, equação (2.13), os fatores entre colchetes da equação (4.1) podem ser aproximados expandindo-se as raízes em série de Taylor. Considerando apenas os termos de ordem zero, se obtém:

$$\sqrt{\frac{\frac{1}{c_j} \sqrt{1 + \frac{c_j^2}{\omega^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2}}}{\frac{1}{c_{j+1}} \sqrt{1 + \frac{c_{j+1}^2}{\omega^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2}}}} \approx \sqrt{\frac{\frac{1}{c^r(z_j)} \sqrt{1 + \frac{c^{r^2}(z_j)}{\omega^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{c^r(z_j)}{c(x, z_j)} \right)}}{\frac{1}{c^r(z_{j+1})} \sqrt{1 + \frac{c^{r^2}(z_{j+1})}{\omega^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{c^r(z_{j+1})}{c(x, z_{j+1})} \right)}}}. \quad (4.2)$$

Reorganizando tem-se

$$\sqrt{\frac{\frac{1}{c_j} \sqrt{1 + \frac{c_j^2}{\omega^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2}}}{\frac{1}{c_{j+1}} \sqrt{1 + \frac{c_{j+1}^2}{\omega^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2}}}} \approx \sqrt{\frac{\frac{1}{c^r(z_j)} \sqrt{1 + \frac{c^{r^2}(z_j)}{\omega^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2}}}{\frac{1}{c^r(z_{j+1})} \sqrt{1 + \frac{c^{r^2}(z_{j+1})}{\omega^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2}}}} \sqrt{\frac{c^r(z_j) c(x, z_{j+1})}{c^r(z_{j+1}) c(x, z_j)}}}. \quad (4.3)$$

Esta expressão indica que a correção sugere que uma aproximação para a correção de amplitude pode ser obtida efetuando-se o produto de dois fatores. O primeiro fator corresponde à razão das vagarosidade de referência  $\sqrt{p_{z_j}^r/p_{z_{j+1}}^r}$ , e é implementado no domínio  $\omega - k_x$ . O segundo fator inclui o efeito da variação lateral de velocidade através da razão  $\sqrt{c^r(z_j) c(x, z_{j+1})/c^r(z_{j+1}) c(x, z_j)}$  avaliada no domínio  $\omega - x$ . Em outras palavras, a primeira aproximação para a migração *split-step* com correção de amplitude consiste em usar o fator de correção de amplitude separadamente nas equações (2.15) e (2.16), ou seja:

$$\begin{aligned} u'_{TA}(k_x, z_{j+1}, \omega) &= u_{TA}(k_x, z_j, \omega) \sqrt{\frac{p_{z_j}^r}{p_{z_{j+1}}^r}} \exp \left\{ \frac{i\omega}{c_r(z_j)} \sqrt{1 - \frac{c_r^2(z_j)}{\omega^2} k_x^2} \Delta z \right\}; \\ u_{TA}(x, z_{j+1}, \omega) &= u'_{TA}(x, z_{j+1}, \omega) \sqrt{\frac{c^r(z_j) c(x, z_{j+1})}{c^r(z_{j+1}) c(x, z_j)}} \exp \left\{ \frac{i\omega}{c_r(z_j)} \left( \frac{c_r(z_j)}{c(x, z_j)} - 1 \right) \Delta z \right\}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

A correção de amplitude para a migração FFD complexa é a mesma, ou seja, usa-se somente a correção de amplitude acima nos termos por deslocamento de fase e *split-step*. Essa aproximação para correção de amplitude é consistente com o fator de correção de fase (*split-step*) usado para introduzir a variação lateral de velocidade na migração por deslocamento de fase. Na próxima seção esta abordagem é validada em dados sintéticos para migração pré- e pós-empilhamento.

No caso da migração pós-empilhamento, a correção de amplitude depende apenas do propagador. Para migração pré-empilhamento entretanto, a correção de amplitude depende adicionalmente da condição de imagem. A condição de imagem deve produzir amplitudes proporcionais à refletividade. Recentemente, Schleicher, Costa e Novais (2008) compararam

a qualidade de várias versões de condições de imagem com compensação de iluminação e concluíram que a que melhor preserva a amplitude é a condição de imagem resultante da solução de mínimos quadrados do problema de deconvolução (SHIN; JANG; MIN, 2001; ARIENTI et al., 2002) dada por:

$$R(x, y) = \frac{\sum_{\omega} u_S^*(x, z, \omega) u_R(x, z, \omega)}{\sum_{\omega} u_S^*(x, z, \omega) u_S(x, z, \omega)}, \quad (4.5)$$

em que  $u_S$  indica o campo incidente e  $u_R$  indica o campo de onda continuado para baixo a partir dos receptores.

## 4.2 EXPERIMENTOS NUMÉRICOS

Apresentamos nessa seção os experimentos numéricos envolvendo as migrações por equação de onda *split-step* e FFD complexa com correção de amplitude. Para testar as propriedades numéricas da correção de amplitude para migração, os algoritmos propostos foram aplicados com e sem correção de amplitude aos dados sintéticos SEG/EAGE e Marmousi.

### 4.2.1 Migração pós-empilhamento

O objetivo desta seção é fazer uma avaliação da correção de amplitude proposta aplicada ao operador de migração. Para os testes foi usado o dado sintético SEG/EAGE. O modelo de velocidade do dado é mostrado na Figura 4.1. Esse é um dado com uma estrutura simples, consiste de um domo salino e pontos difratores que estão espalhados por todo o modelo simulando refletores.

#### 4.2.1.2 Migração *split-step*

Para a migração *split-step* foi usado um algoritmo combinado com interpolação do campo de onda propagado, pois o modelo tem um forte contraste de velocidade. Para isso foi usado um conjunto de 20 velocidades de referência escolhidas entre a velocidade mínima e máxima para cada nível em profundidade. Como a migração é pós-empilhamento o custo computacional não é significativo. A Figura 4.2 mostra as seções migradas obtidas pelos algoritmos sem correção de amplitude (acima) e com correção de amplitude (abaixo). As regiões delimitadas pelos quadrados laranja são as regiões onde a correção de amplitude ficou mais evidente.

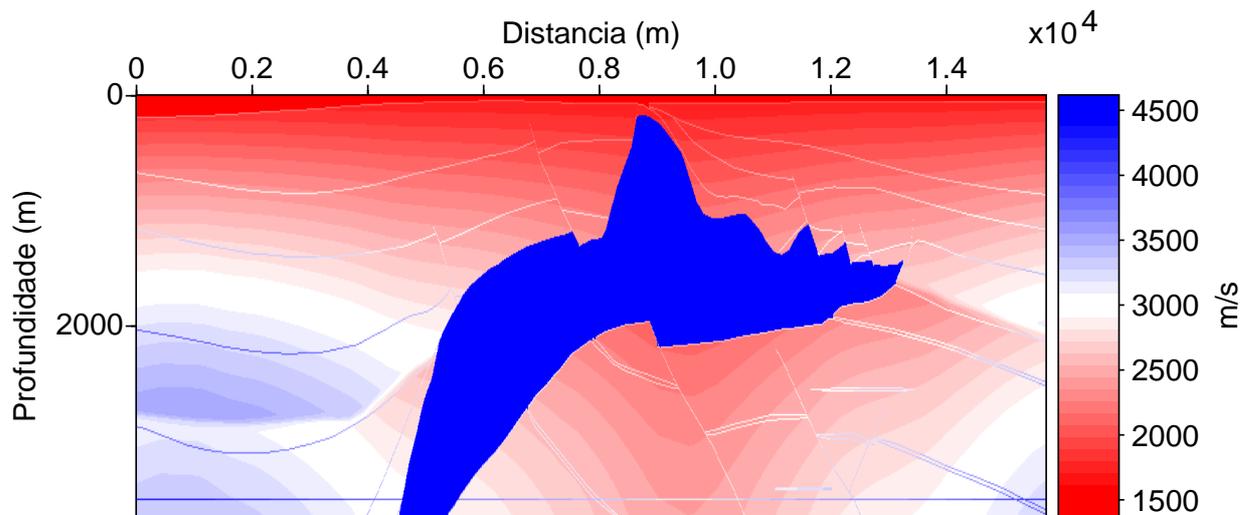


Figura 4.1: Modelo de velocidade do dado SEG/EAGE

Para avaliar os resultados quantitativamente, foram extraídos 3 traços das seções migradas nas posições horizontais  $x = 3901.44$  m (linha azul),  $x = 7863.84$  m (linha verde) e  $x = 11545.82$  m (linha vermelha). Essas três posições na imagem foram escolhidas para representar três diferentes áreas do modelo. A posição mais a esquerda é uma área puramente sedimentar, a posição central marca a parte central do corpo salino e a região mais a direita corta a cunha direita do corpo de sal.

A Figura 4.3 compara esses três traços obtidos com o algoritmo convencional (linha vermelha tracejada) e com o algoritmo com correção de amplitude (linha azul). O aumento da amplitude é claramente visível. Todavia, nota-se que nem todos os refletores aumentam na mesma escala. O ganho relativo dos picos numerados na Figura 4.3 está quantificado na Tabela 4.1. Esses valores corroboram a interpretação de que o principal aumento na amplitude é atingido na borda do domo e nos refletores abaixo deles.

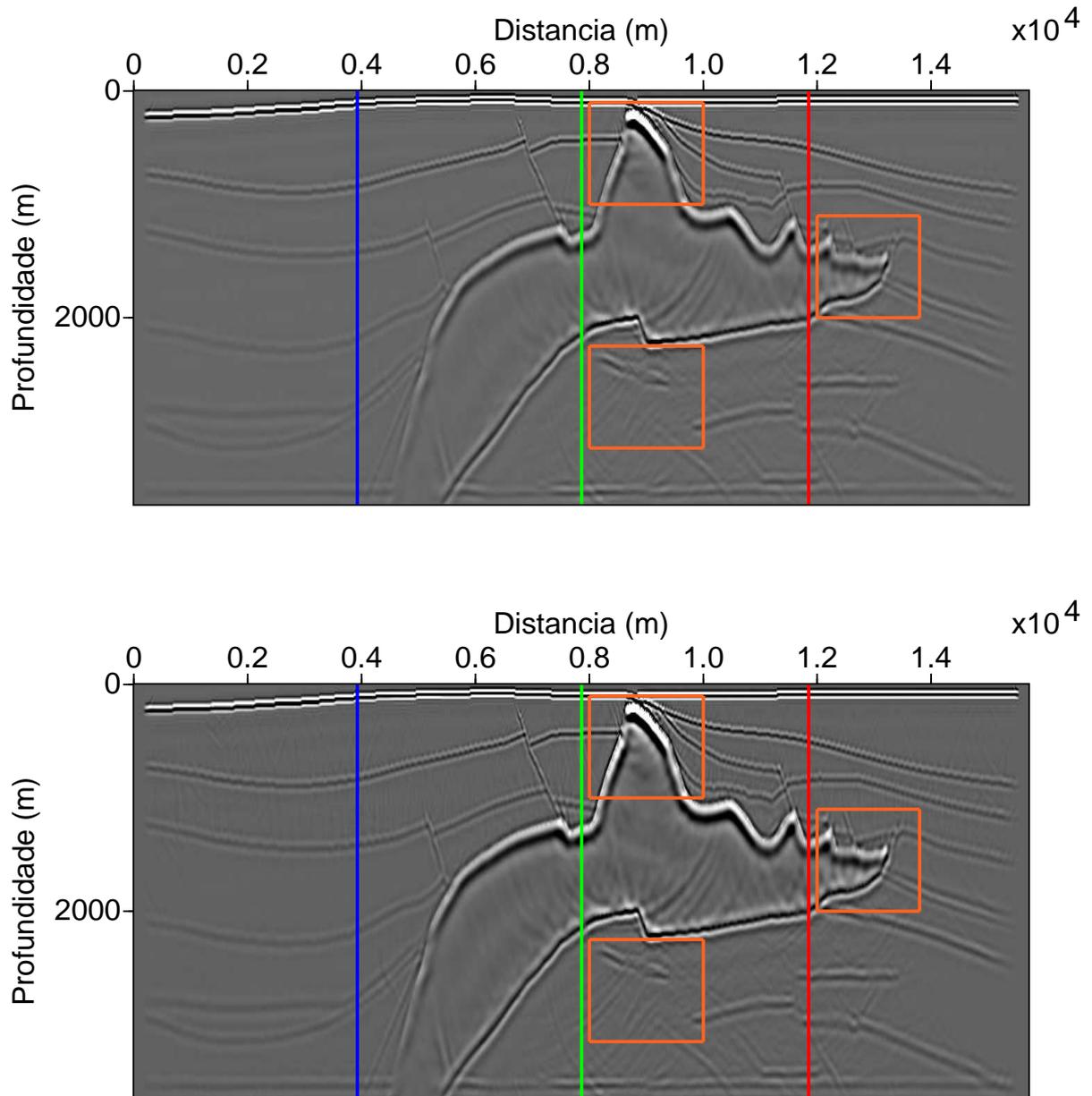


Figura 4.2: Migração SSPSPI usando 20 velocidades de referência para a interpolação. Acima: resultado sem correção de amplitude. Abaixo: resultado com correção de amplitude

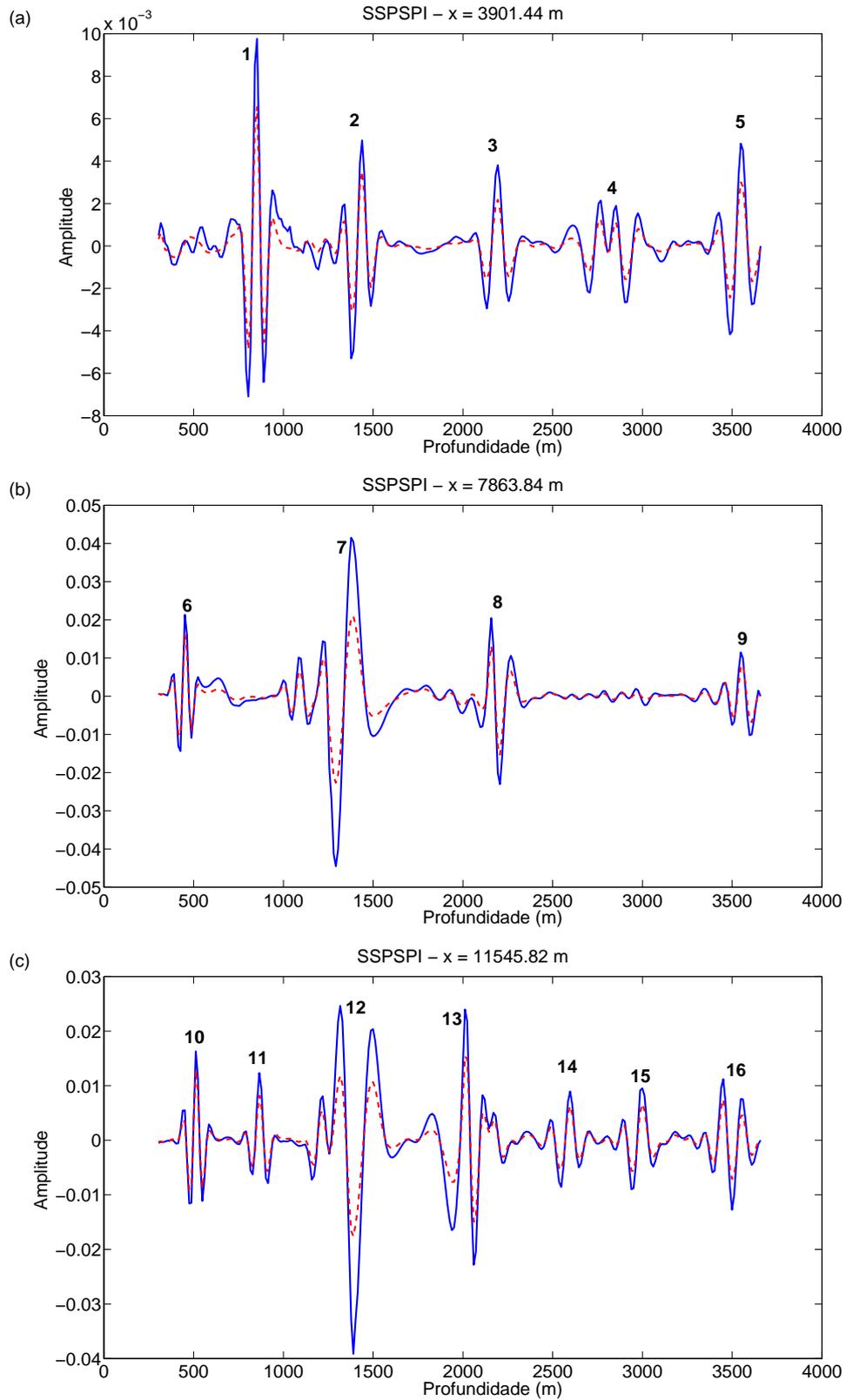


Figura 4.3: Traços migrados usando migração SSPSPI nas posições verticais: (a)  $x = 3901.44$  m, (b)  $x = 7863.84$  m e (c)  $x = 11545.82$  m obtidas com os algoritmos convencional (vermelho) e com correção de amplitude (azul).

Peak	SSPSPI amplitude gain (%)	CPFFD amplitude gain (%)
1	48.97	29.83
2	66.97	34.06
3	74.32	52.99
4	69.92	44.46
5	60.76	45.58
6	31.10	15.59
7	96.45	85.04
8	50.49	34.71
9	50.51	30.60
10	26.19	17.33
11	50.57	42.07
12	122.79	108.10
13	57.59	56.58
14	50.67	44.72
15	59.59	41.31
16	75.23	40.52

Tabela 4.1: Tabela contendo os ganhos de amplitudes relativas das migrações SSPSPI e FFD complexa com correção de amplitude.

#### 4.2.1.4 Migração FFD complexa

A migração FFD complexa usou como velocidade de referência a menor velocidade em cada nível em profundidade. A Figura 4.4 mostra as seções migradas obtidas pelos algoritmos de migração FFD complexo sem e com correção de amplitude do modelo de sal da SEG/EAGE. As imagens geradas pelos algoritmos FFD complexos com e sem correção de amplitude fornecem imagens similares àquelas da migração *split-step*. Novamente as regiões com uma correção mais visível foram destacadas com quadrados laranja. No quadrado abaixo do domo salino destaca-se um refletor inclinado que é visível na imagem com correção de amplitude, mas na imagem sem correção não é possível visualizá-lo. Percebe-se um aumento na amplitude dos refletores, particularmente na borda do sal e nos refletores abaixo dele.

Foram extraídos três traços das seções para uma comparação traço-a-traço nas mesmas posições do exemplo anterior. Esses traços são comparados na Figura 4.5 sendo o traço

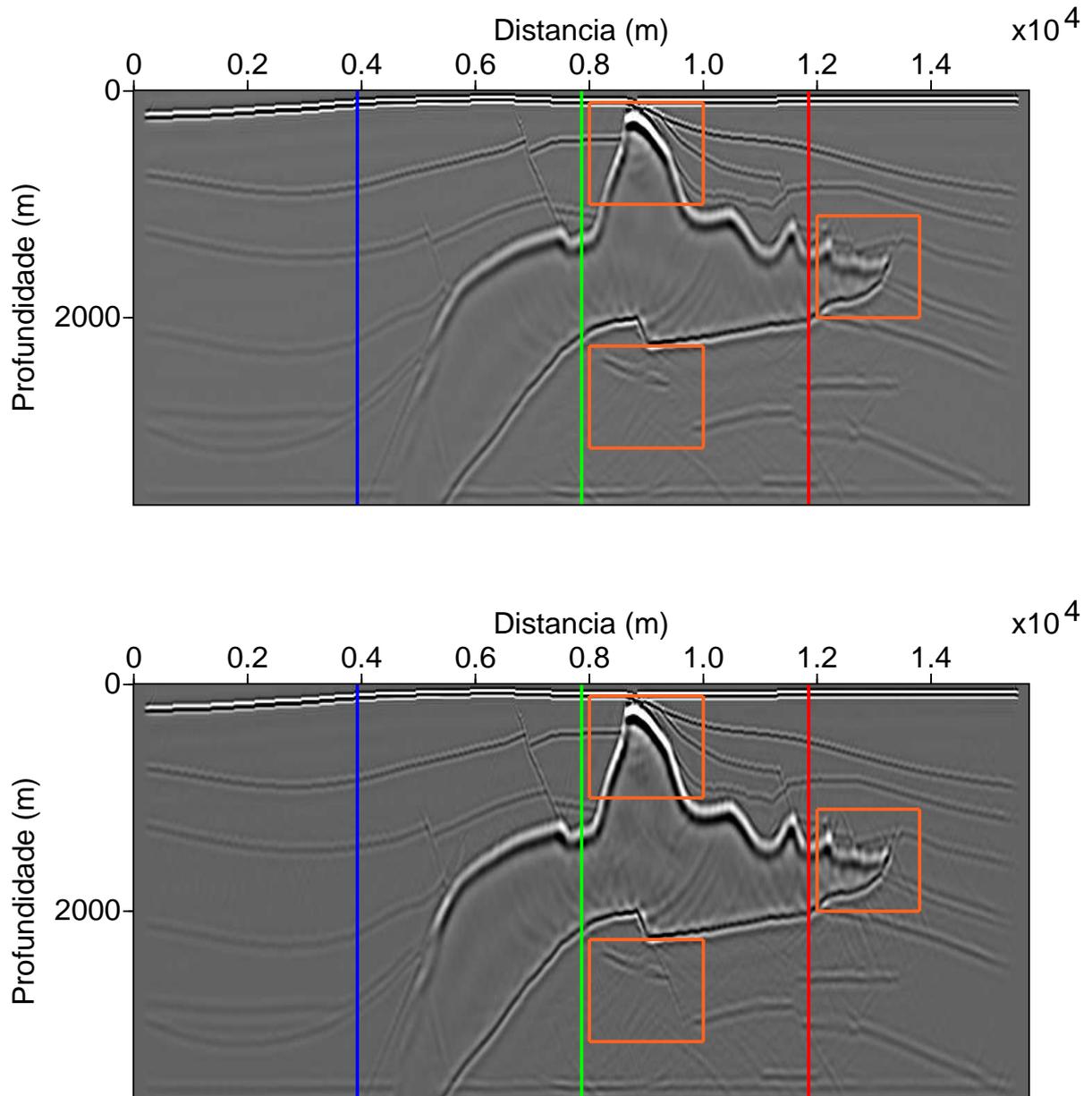


Figura 4.4: Migração FFD complexa. Acima: resultado sem correção de amplitude. Abaixo: resultado com correção de amplitude

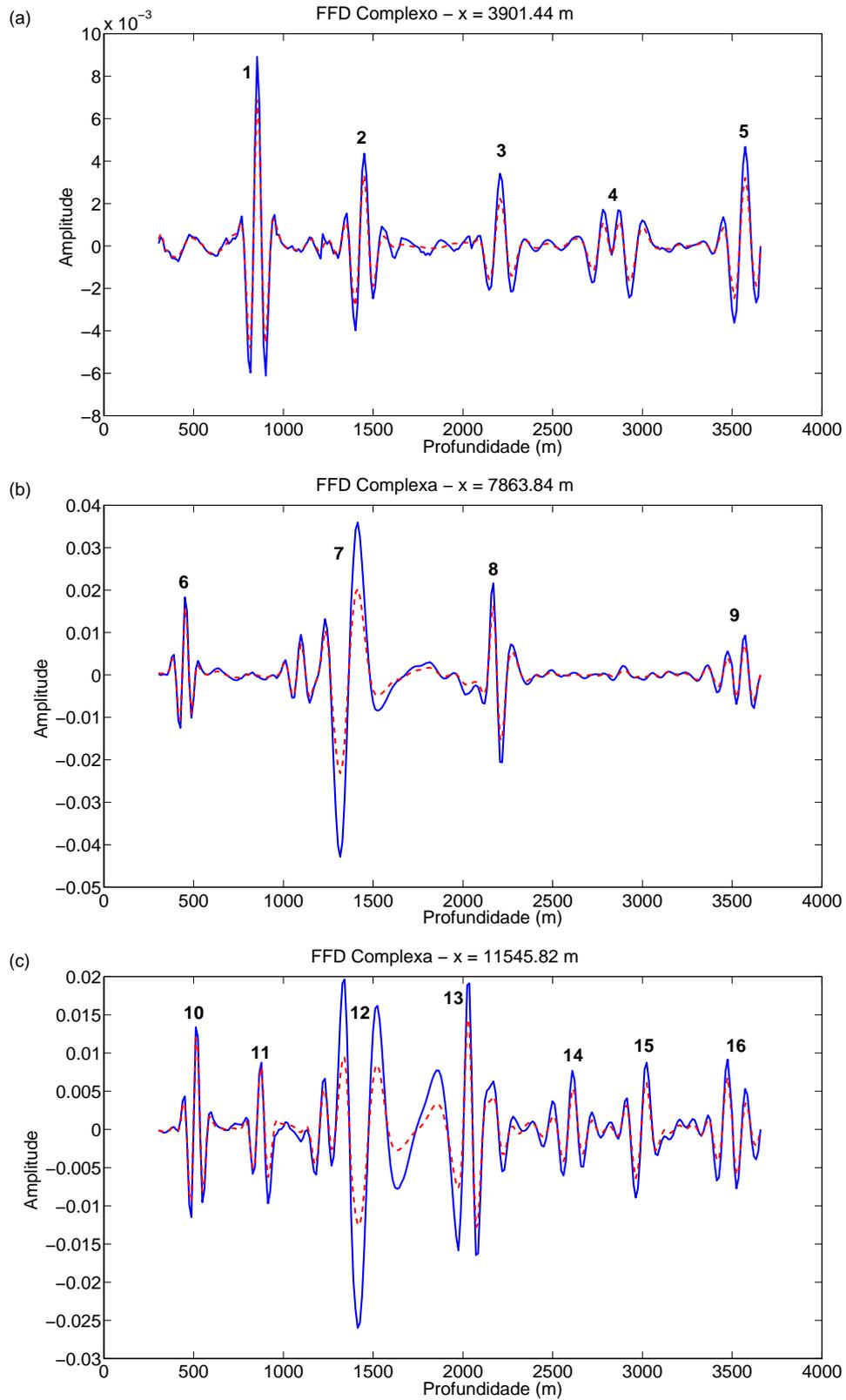


Figura 4.5: Traços migrados usando migração FFD complexa nas posições verticais: (a)  $x = 3901.44$  m, (b)  $x = 7863.84$  m e (c)  $x = 11545.82$  m obtidas com os algoritmos convencional (vermelho) e com correção de amplitude (azul).

vermelho tracejado correspondente à migração convencional e o traço azul correspondente à migração com correção de amplitude. Observa-se um aumento geral na amplitude, contudo não é uniforme. Os ganhos das amplitudes relativas também é apresentado na Tabela 4.1. Nota-se que a distribuição geral de cada refletor que experimenta um aumento maior de amplitude é muito similar ao da migração *split-step*. Contudo, o aumento de amplitude na migração FFD é reduzido em aproximadamente 30 %.

A razão para essa diferença de amplitude é o fato de que a correção de amplitude usando o algoritmo FFD complexo usa a velocidade de referência, que é a menor velocidade do nível em profundidade atual, enquanto o algoritmo *split-step* usa, efetivamente, velocidades de referência muito próximas da velocidade exata. Além disso, devido a interpolação do campo de ondas depois da correção de amplitude, o algoritmo *split-step* incorpora informação sobre variações laterais de velocidade para as amplitudes.

#### 4.2.2 Migração Pré-empilhamento

Adicionalmente aos exemplos de migração pós-empilhamento, o algoritmo de migração FFD complexo com correção de amplitude foi testado na migração pré-empilhamento do dado Marmousi (VERSTEEG, 1994). A Figura 4.6 mostra o modelo de velocidade desse dado sintético. Esse modelo é relativamente complexo para migração devido ao seu forte contraste de velocidade e às falhas com inclinações acentuadas. Além disso, na parte mais profunda do modelo, tanto do lado direito quanto do lado esquerdo duas cunhas de sal estão presentes. O principal alvo do modelo é o reservatório presente na região próxima à cunha de sal do lado direito.

A Figura 4.7 mostra a comparação do resultado da migração obtida utilizando o operador sem correção de amplitude e condição de imagem correlação cruzada com o operador com correção de amplitude e condição de imagem com compensação de amplitude (equação 4.5). É possível notar que a condição de imagem melhora a amplitude dos eventos mais profundos. Além disso, como esperado, fortes contrastes no modelo de velocidade são imageados com amplitudes mais fortes.

Na Figura 4.7 foram selecionados três traços indicados através das linhas azul, verde e vermelha. Esses traços são mostrados na Figura 4.8. Os traços com correção de amplitude são representados pelas linhas azuis e os traços sem correção de amplitude são representados pela linha vermelha tracejada. É notório que para as partes mais rasas o algoritmo sem correção possui amplitudes maiores, enquanto que para as posições mais profundas o contrário acontece. Isso se deve ao fato de que a migração com correção representar melhor os contrastes

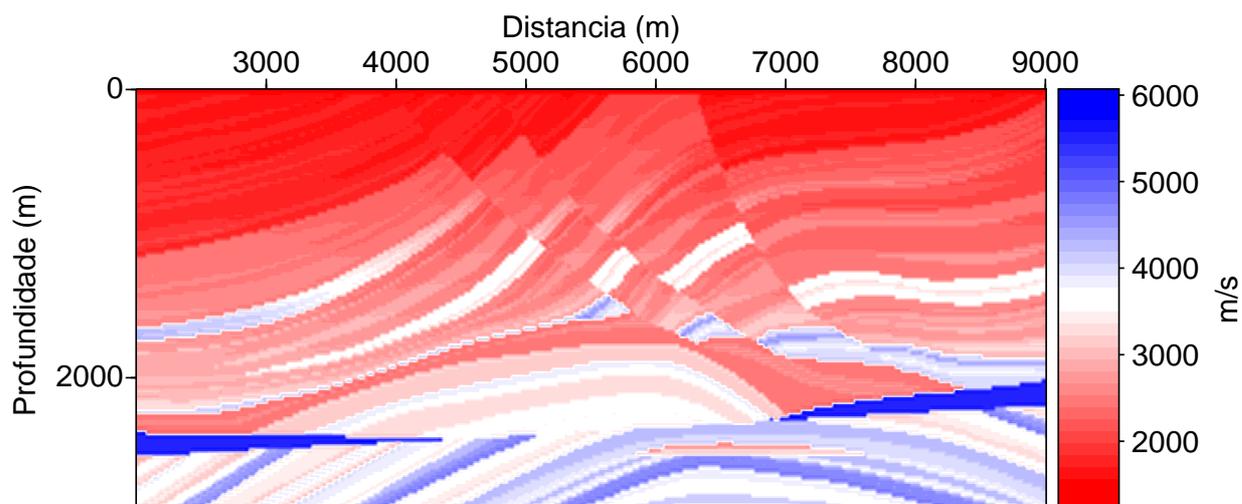


Figura 4.6: Modelo de velocidade do dado Marmousi

de impedância do modelo.

Para uma análise mais quantitativa, a Figura 4.9 compara os resultados dos traços indicados pelas linhas verticais na Figura 4.7 com o perfil de refletividade correspondente no modelo Marmousi. Como não se sabe a intensidade da fonte original usada para o modelamento do dado Marmousi, os traços foram normalizados por um valor constante para colocá-los na mesma escala de amplitude. Observa-se que os traços resultantes da correção de amplitude estão fortemente correlacionados com a refletividade. Este resultado indica que a estratégia de correção de amplitude utilizando o operador (5.14) em conjunto com a condição de imagem (4.5) melhora a compensação de amplitude na migração por equação de onda.

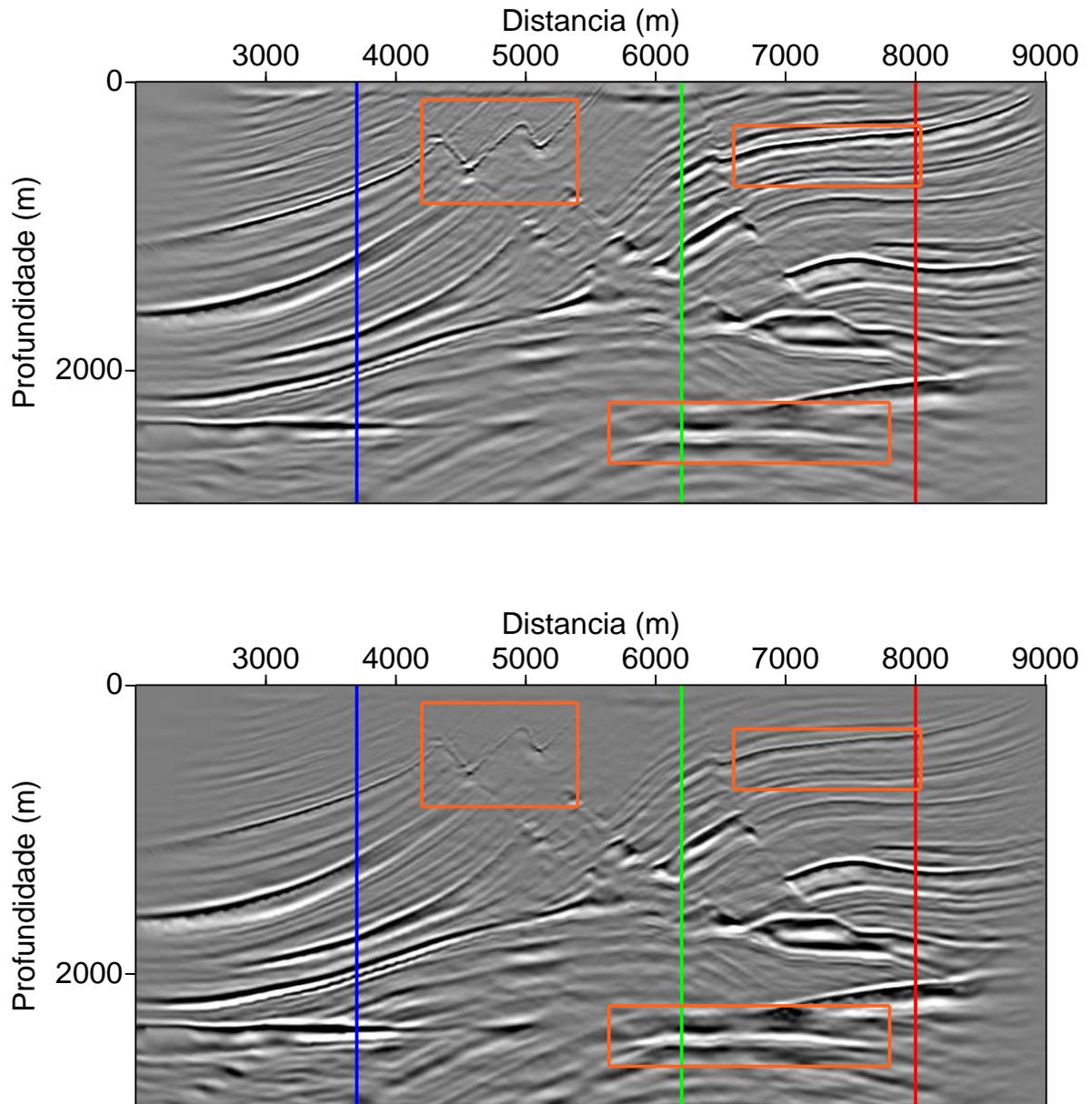


Figura 4.7: Migração FFD complexa. Acima: resultado sem correção de amplitude. Abaixo: resultado com correção de amplitude usando a condição de imagem (4.5)

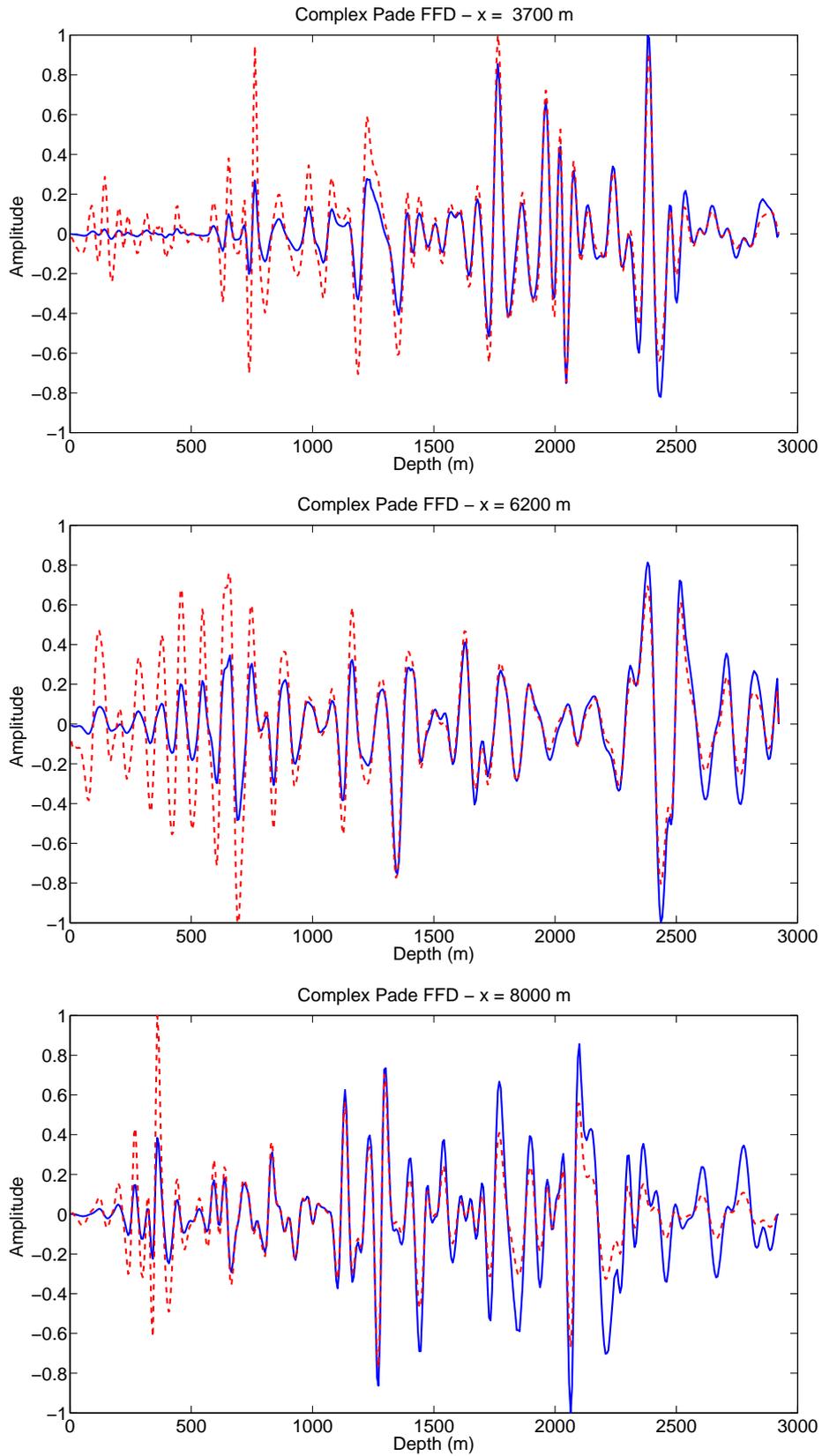


Figura 4.8: Traços migrados usando migração FFD complexa nas posições verticais: (a)  $x = 3700$  m, (b)  $x = 6200$  m e (c)  $x = 8000$  m obtidas com os algoritmos convencional (vermelho) e com correção de amplitude (azul).

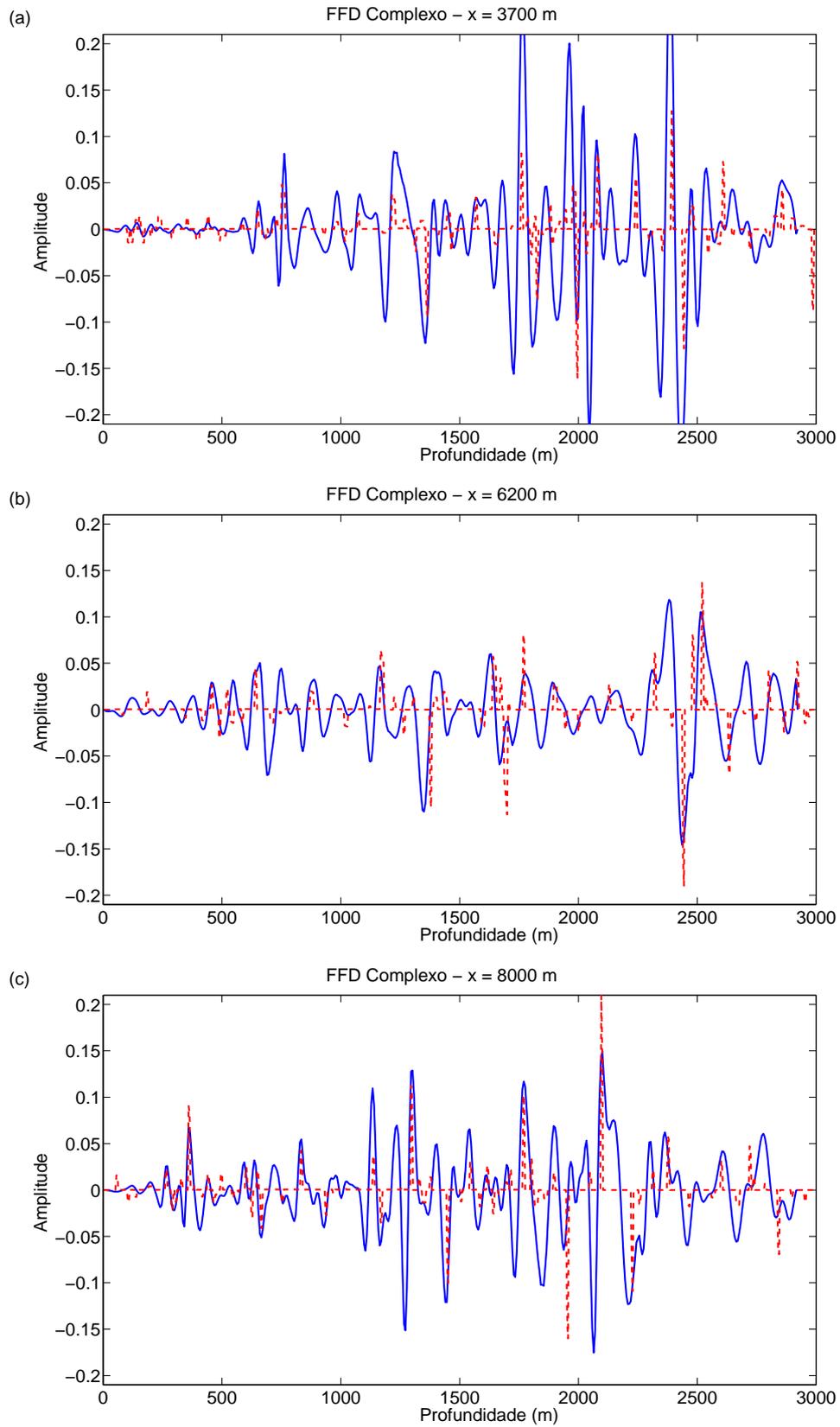


Figura 4.9: Traços migrados usando migração FFD complexa (azul) nas posições verticais : (a)  $x = 3700$  m, (b)  $x = 6200$  m e (c)  $x = 8000$  m, comparado com a refletividade (vermelho)

## 5 MIGRAÇÃO COM CORREÇÃO DE AMPLITUDE EM MEIOS VTI

A correção de amplitude para o propagador em meios isotrópicos, apresentada no Capítulo anterior, pode ser estendida imediatamente para meios VTI, utilizando a equação da onda acústica para meios VTI. Isso é possível pois as equações iconal e de transporte para meios VTI têm as mesmas características das equações iconal e de transporte para meios isotrópicos. Para mostrar isso, foi deduzida a equação unidirecional de amplitude verdadeira para meios VTI e é apresentada a formulação da migração *split-step* para meios VTI com correção de amplitude.

### 5.1 EQUAÇÃO DE ONDA UNIDIRECIONAL DE AMPLITUDE VERDADEIRA PARA MEIOS VTI

Para que seja possível deduzir o termo de correção de amplitude para a migração por equação de onda em meios VTI é necessário obter a equação de onda de amplitude verdadeira para meios VTI. Para isso precisa-se da equação de onda para meios VTI proposta por Alkhalifah (2000), equação (2.23), que pode ser reescrita da forma:

$$\frac{d^2 u(k_x, z, \omega)}{dz^2} + \omega^2 p_z^2 u(k_x, z, \omega) = 0, \quad (5.1)$$

em que

$$p_z^2 = \frac{k_z^2}{\omega^2} = \frac{c_n^2}{c_{p0}^2} \left( \frac{1}{c_n^2} - \frac{k_x^2}{\omega^2 - 2\eta c_n^2 k_x^2} \right). \quad (5.2)$$

As equações iconal e de transporte relacionadas à equação (5.1) são dadas, respectivamente, por:

$$\left( \frac{\partial \tau(k_x, z)}{\partial z} \right)^2 = p_z^2 \quad (5.3)$$

$$\frac{\partial A(k_x, z)}{\partial z} + \frac{1}{2} \frac{1}{p_z} \frac{\partial p_z}{\partial z} A(k_x, z) = 0 \quad (5.4)$$

cujas demonstrações encontram-se no Apêndice D.

Fatorando a equação (5.1), obtém-se as equações unidirecionais para meios VTI, a saber:

$$\frac{\partial u(k_x, z, \omega)}{\partial z} + i\omega p_z u(k_x, z, \omega) = 0 \quad (5.5)$$

$$\frac{\partial u(k_x, z, \omega)}{\partial z} - i\omega p_z u(k_x, z, \omega) = 0, \quad (5.6)$$

cujas equações iconal e de transporte são dadas por:

$$\left( \frac{\partial \tau(k_x, z)}{\partial z} \right) = \mp p_z \quad (5.7)$$

$$\frac{\partial A(k_x, z)}{\partial z} = 0, \quad (5.8)$$

Observa-se que as ondas unidirecionais tem equação iconal igual a equação de onda completa. Entretanto, as equações de transporte são diferentes, assim como acontece no caso isotrópico. Conseqüentemente, seguindo os mesmos passos utilizados para se deduzir as equações unidirecionais de amplitude verdadeira para meios isotrópicos obtém-se as equações unidirecionais com correção de amplitude para meios VTI. Então, como no caso isotrópico, adiciona-se um termo  $\beta$  aos operadores das equações unidirecionais para meios VTI obtendo

$$\frac{\partial u(k_x, z, \omega)}{\partial z} \pm i\omega p_z u(k_x, z, \omega) + \beta u(k_x, z, \omega) = 0. \quad (5.9)$$

Assim as equações iconal e de transporte são dadas por:

$$\frac{\partial \tau(k_x, z)}{\partial z} = \pm p_z, \quad (5.10)$$

$$\frac{\partial A(k_x, z)}{\partial z} + \beta A(k_x, z) = 0. \quad (5.11)$$

Comparando a equação de transporte da onda completa com a equação de transporte da equação unidirecional, conclui-se que  $\beta = \frac{1}{2} \frac{1}{p_z} \frac{\partial p_z}{\partial z}$ . Portanto, as equações da onda unidirecionais de amplitude verdadeira para meios VTI são:

$$\frac{\partial u(k_x, z, \omega)}{\partial z} \pm i\omega p_z u(k_x, z, \omega) + \frac{1}{2} \frac{1}{p_z} \frac{\partial p_z}{\partial z} u(k_x, z, \omega) = 0. \quad (5.12)$$

Esta equação tem a mesma forma que a equação com amplitude verdadeira em meios isotrópicos. Entretanto, diferentemente do caso isotrópico,  $p_z$  deve obedecer a equação (5.2).

## 5.2 MIGRAÇÃO POR DESLOCAMENTO DE FASE E *SPLIT-STEP* PARA MEIOS VTI COM CORREÇÃO DE AMPLITUDE

Seguindo Melo et. al. (2006) é possível resolver as equações (5.12) por separação de variáveis e admitindo que o meio pode ser dividido em  $N$  camadas, chega-se a expressão para

migração por deslocamento de fase com correção de amplitude para meios VTI:

$$u(k_x, z_{j+1}, \omega) = u(k_x, z_j, \omega) \sqrt{\frac{p_{z_j}}{p_{z_{j+1}}}} \exp\{i\omega \bar{p}_z(\Delta z)\}, \quad (5.13)$$

em que  $p_z$  é dado pela equação (5.2) considerando que a velocidade varia apenas com a profundidade.

Para incluir variação lateral de velocidade admite-se que o fator de correção de amplitude pode ser escrito como o produto de dois fatores, como mostrado no capítulo anterior, obtendo assim a expressão para a migração *split-step*, que é dada por:

$$\begin{aligned} u'_{TA}(k_x, z_{j+1}, \omega) &= u_{TA}(k_x, z_j, \omega) \sqrt{\frac{p_{z_j}^r}{p_{z_{j+1}}^r}} \exp\{i\omega p_z \Delta z\}; \\ u_{TA}(x, z_{j+1}, \omega) &= u'_{TA}(x, z_{j+1}, \omega) \sqrt{\frac{c^r(z_j)c(x, z_{j+1})}{c^r(z_{j+1})c(x, z_j)}} \exp\left\{\frac{i\omega}{c_r(z_j)} \left(\frac{c_r(z_j)}{c(x, z_j)} - 1\right) \Delta z\right\}. \end{aligned} \quad (5.14)$$

### 5.3 RESULTADOS NUMÉRICOS

Para validar a teoria apresentada na seção anterior, foi utilizado o dado sintético HESS já apresentado no Capítulo 3. O algoritmo de migração *split-step*, descrito acima, foi implementado para a migração com correção de amplitude.

A maior dificuldade desse experimento foi o alto custo computacional da interpolação do campo de ondas na etapa de deslocamento de fase. Esta dificuldade decorre da dimensão do espaço de parâmetros necessários para especificar o modelo de velocidade. Em meios VTI, além da velocidade vertical são necessários os parâmetros  $\epsilon$  e  $\delta$  em cada nível em profundidade, enquanto que apenas um parâmetro, a velocidade, é necessário em meios isotrópicos. Portanto, em uma implementação do algoritmo com uma amostragem linear em cada parâmetro, o número total de modelos usados para interpolação é igual ao produto do número de amostras no intervalo prescrito pelo usuário para cada parâmetro. Conseqüentemente, há um aumento exponencial do custo deste algoritmo em relação ao seu correspondente isotrópico. Amostras mais esparsas do espaço de parâmetros podem ser investigadas para aumentar a eficiência do algoritmo, entretanto, este problema não será abordado neste trabalho.

Para reduzir o custo computacional neste experimento numérico, utilizamos 10 velocidades verticais da onda P, selecionadas entre os valores máximo e mínimo em cada passo em profundidade, e para os parâmetros  $\epsilon$  e  $\delta$ , foi utilizado apenas os valores máximos e mínimos em cada passo em profundidade.

Para a migração sem correção de amplitude foi usada a condição de imagem correlação cruzada, já para a migração com correção de amplitude foi usada a condição de imagem com compensação de iluminação (SCHLEICHER; TYGEL; HUBRAL, 2007). A justificativa para essa escolha já foi discutida no Capítulo 4. Os algoritmos foram implementados usando paralelismo MPI. Também para reduzir o custo computacional, o fator de correção de amplitude foi aplicado somente na parte *split-step* do algoritmo.

A Figura 5.1 mostra os resultados das migrações. É visível a melhora na amplitude dos eventos migrados, principalmente nas partes mais profundas do modelo. As múltiplas não foram atenuadas no dado utilizado, assim, as reflexões múltiplas também tornaram-se mais evidentes com a correção de amplitude. O resultado do experimento numérico indica que a correção de amplitude produziu amplitudes melhor correlacionadas com os contrastes de propriedades físicas do modelo. Para avaliar quantitativamente os resultados, a Figura 5.2 mostra a comparação entre três traços migrados com e sem correção de amplitude. Esses traços correspondem as posições indicadas pelas linhas verticais na Figura 5.1. Essa comparação confirma nossas afirmativas anteriores sobre a melhor compensação de amplitude obtida pelo algoritmo proposto.

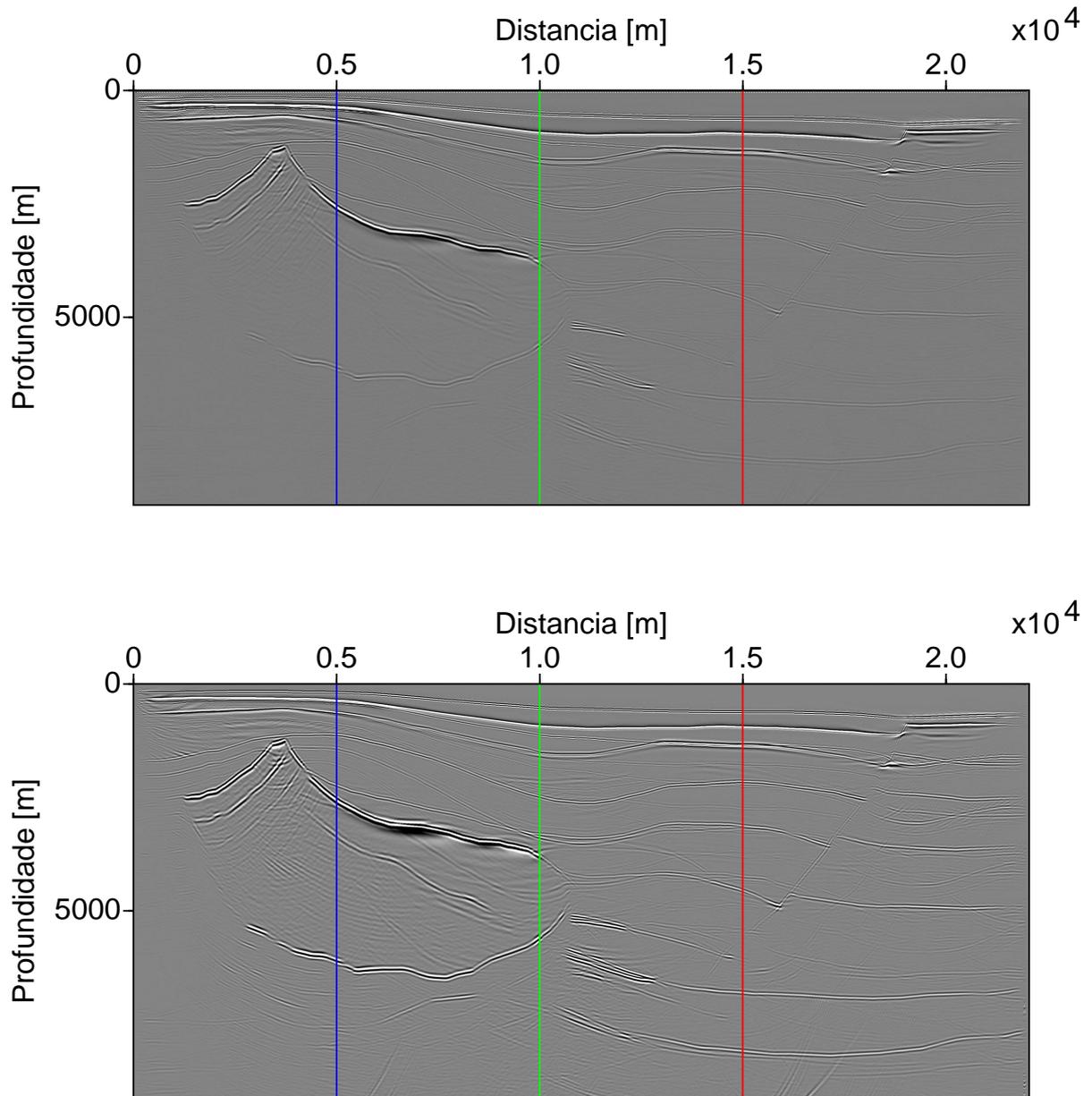


Figura 5.1: Migração SSPSPI usando 10 velocidades de referência para a interpolação. Acima: resultado sem correção de amplitude. Abaixo: resultado com correção de amplitude

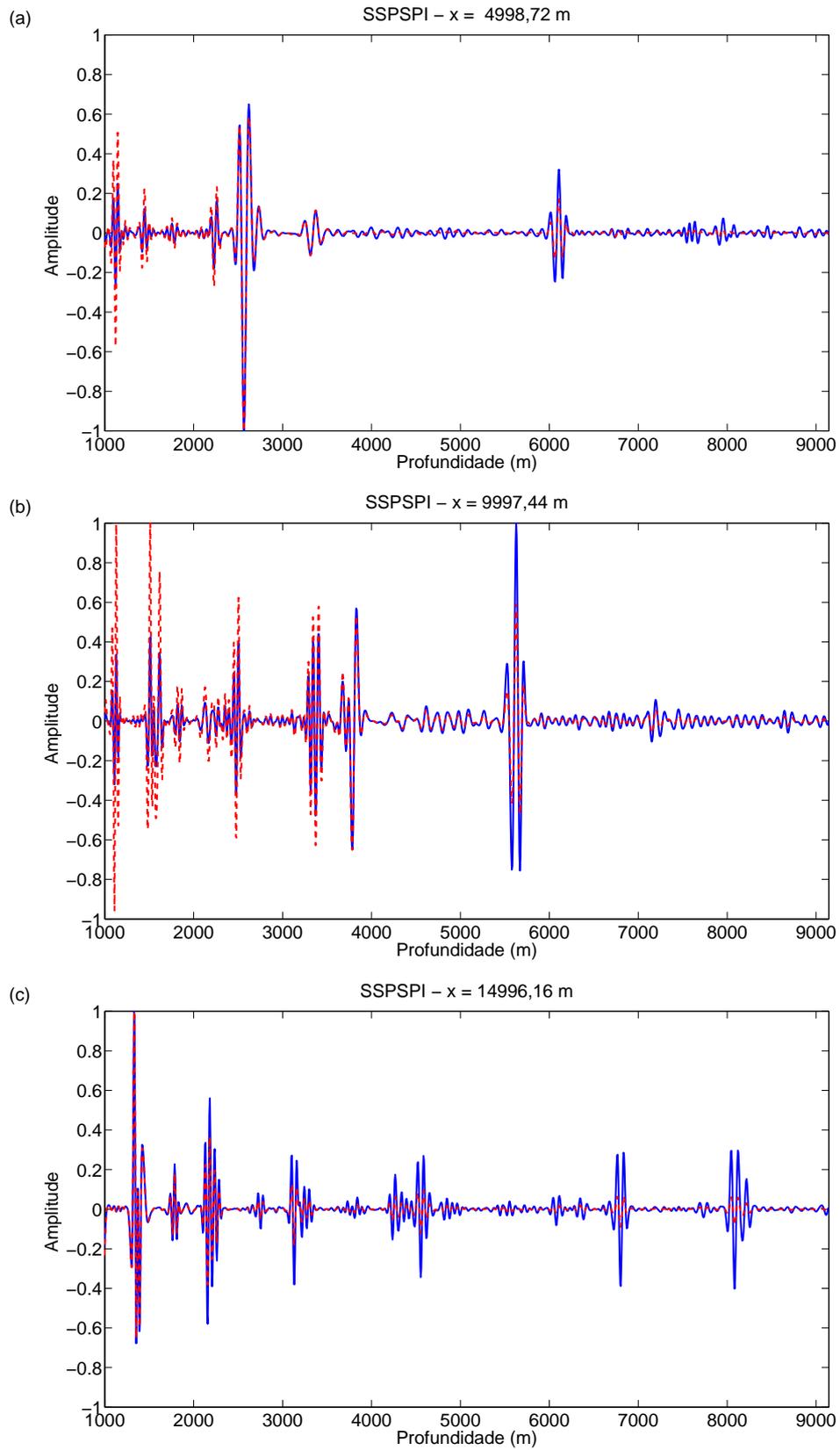


Figura 5.2: Traços migrados usando migração SSPSPI nas posições verticais: (a)  $x = 4998,72$  m, (b)  $x = 9997,44$  m e (c)  $x = 14996,16$  m obtidas com os algoritmos convencional (vermelho) e com correção de amplitude (azul).

## 6 CONCLUSÕES

Este trabalho investigou dois problemas associados à migração através de continuação do campo de onda em meios isotrópicos e em meios VTI. Primeiramente, a estabilização dos algoritmos de migração em meios com forte contraste de velocidade. A seguir, uma estratégia estável para compensação de amplitude em meios lateralmente heterogêneos. Os algoritmos propostos neste trabalho podem ser aplicados a dados de grande afastamento e forte contraste de velocidade. Por exemplo, para detectar alvos exploratórios em ambientes com tectônica salina.

A primeira contribuição desse trabalho são algoritmos estáveis para a migração FD em meios VTI. Estes algoritmos utilizam a aproximação acústica para meios VTI, proposta por Alkhalifah (2000), e a aproximação de Padé complexa de Millinazzo et al. (1997). A aproximação de Padé complexa difere da aproximação de Padé real pela rotação da linha de corte, no plano complexo, do operador de raiz quadrada que descreve ondas unidirecionais no domínio frequência-número de onda. Comparando-se a relação de dispersão aproximada com a relação de dispersão exata em meios VTI homogêneos, pôde-se estimar intervalos para o ângulo de rotação da linha de corte que melhor aproximam a parte real e a parte imaginária da relação de dispersão exata. Este mesmo critério foi aplicado para estimar o número mínimo de termos na expansão de Padé complexa que melhor aproxima grandes ângulos de propagação em relação a vertical. Os resultados da análise em meios homogêneos foram validados pela simulação da resposta ao impulso dos operadores de continuação. O resultado destes experimentos numéricos indicaram que usando três termos e o intervalo  $[45^\circ - 60^\circ]$  para rotação da linha de corte na expansão de Padé complexa produz menos artefatos e maior acurácia na simulação da propagação.

Para reduzir artefatos associados à pseudo-ondas S, inerentes à aproximação acústica para meios VTI, aplicamos a estratégia proposta por Fei e Liner (2008). Estes autores combinaram os métodos de migração FD e FFD, aplicando o algoritmo FFD em alguns poucos níveis próximos a superfície, região contendo fontes e receptores. Inicialmente, derivamos um algoritmo FFD incluindo a aproximação de Padé complexa. A análise da relação de dispersão dos algoritmos FD e FFD permitiu entender melhor porque o algoritmo FFD é mais conveniente para atenuar eventos pseudo-ondas S. Experimentos numéricos utilizando o conjunto de dados sintéticos HESS, em que o modelo de velocidade apresenta forte heterogeneidade e anisotropia VTI confirmaram a estabilidade do algoritmo de migração FD e do algoritmo híbrido FD/FFD propostos neste trabalho.

A segunda contribuição deste trabalho são algoritmos estáveis de migração com com-

penção de amplitude em meios isotrópicos e em meios VTI. Em meios isotrópicos, a correção de amplitude proposta por Melo et al. (2006), para meios lateralmente homogêneos, foi estendida para meios lateralmente heterogêneos. Esta extensão foi efetuada através de algoritmos FFD e *split-step*. Em meios VTI, a equação de transporte tem forma semelhante a equação correspondente para meios isotrópicos. Esta característica permite que a compensação de amplitude para meios VTI seja efetuada de forma semelhante a correção para meios isotrópicos. Este trabalho utilizou o algoritmo *split-step* para implementar a correção de amplitude durante a propagação em meios VTI. Os algoritmos com correção de amplitude foram avaliados em dados sintéticos para migração pós-empilhamento e para migração pré-empilhamento. Na migração pós-empilhamento a correção de amplitude depende exclusivamente da compensação do espalhamento geométrico pelo operador de propagação. Por outro lado, a compensação de amplitude na migração pré-empilhamento depende adicionalmente da condição de imagem. Neste trabalho se utilizou a condição de imagem com compensação de iluminação discutida em Schleicher, Costa e Novais (2008).

Experimentos numéricos com a migração de afastamento nulo, em dados sintéticos do modelo de sal da SEG/EAGE, comprovaram a recuperação de amplitude particularmente na interface entre os sedimentos e o domo salino. Os resultados da migração pré-empilhamento aplicada ao dado sintético Marmousi, gerado com modelo isotrópico, mostraram que a correção de amplitude combinada com uma condição de imagem com compensação de amplitude melhor aproxima os contrastes de impedância do modelo, e isso foi comprovado em uma comparação de três traços migrados com a refletividade nas mesmas posições do modelo.

O algoritmo de migração pré-empilhamento com compensação de amplitude foi aplicado ao dado sintético HESS, gerado com um modelo de velocidade VTI. A maior dificuldade desse experimento foi seu alto custo computacional devido a etapa de interpolação do campo de ondas incorporada ao algoritmo. Esta dificuldade decorre da dimensão do espaço de parâmetros necessários para especificar o modelo de velocidade. Além da velocidade vertical são necessários os parâmetros  $\epsilon$  e  $\delta$  em cada nível em profundidade, enquanto que apenas um parâmetro, a velocidade, é necessário em meios isotrópicos. Consequentemente, a etapa de interpolação do algoritmo requer um número igual ao produto do número de valores amostrados no intervalo de cada parâmetro, ou seja, há um aumento exponencial do custo deste algoritmo em relação ao seu correspondente isotrópico. O resultado da aplicação deste algoritmo no dado HESS indicam amplitudes que melhor refletem o contraste de impedância do modelo de velocidade que a migração com o mesmo algoritmo sem a compensação de amplitude.

Os algoritmos propostos neste trabalho podem ser estendidos de duas formas. Em primeiro lugar, para a implementação da migração em meios TTI 2D. Para isso é necessário

determinar os coeficientes da expansão de Padé para o operador de propagação unidirecional em meios TTI (SHAN, 2007). Em segundo lugar, os algoritmos podem ser estendidos imediatamente para meios 3D. Caso a técnica de *splitting* seja aplicada para implementar os algoritmos FD e FFD em 3D, deve-se tratar corretamente a anisotropia numérica introduzida por esta metodologia (LI, 1991). A extensão dos algoritmos *split-step* para meios VTI em 3D requer que se investigue estratégias mais eficientes de interpolação.

## REFERÊNCIAS

- ALKHALIFAH, T. Acoustic approximations for processing in transversely isotropic media. *Geophysics*, SEG, v. 63, n. 2, p. 623–631, 1998.
- ALKHALIFAH, T. An acoustic wave equation for anisotropic media. *Geophysics*, SEG, v. 65, n. 4, p. 1239–1250, 2000.
- ALKHALIFAH, T.; TSVANKIN, I. Velocity analysis for transversely isotropic media. *Geophysics*, v. 60, n. 5, p. 1550–1566, 1995.
- AMAZONAS, D. et al. Wide-angle FD and FFD migration using complex Padé approximations. *Geophysics*, SEG, v. 72, n. 6, p. S215–S220, 2007.
- ARIENTI, M. T. et al. Amplitude-preserving monte carlo 3d prestack migration. *64th EAGE Conference and Exhibition, Expanded Abstracts*, p. B09:14, 2002.
- BAMBERGER, A. et al. Higher order paraxial wave equation approximations in heterogeneous media. *J. Appl. Math.*, v. 48, p. 129–154, 1988.
- BEVC, D.; BIONDI, B. Which depth imaging method should you use? A road map through the maze of possibilities. *The Leading Edge*, v. 24, n. 6, p. 602–606, 2005. Disponível em: <http://link.aip.org/link/?LEEDFF/24/602/1>.
- BIONDI, B. Stable wide-angle Fourier finite-difference downward extrapolation of 3-D wavefields. *Geophysics*, v. 67, n. 3, p. 872–882, 2002.
- CLAERBOUT, J. F. Toward a unified theory of reflector mapping. *Geophysics*, v. 36, n. 3, p. 467–481, 1971.
- CLAERBOUT, J. F. *Imaging the earth's interior*. [S.l.]: Blackwell Scientific Publications, 1985.
- FEI, T. W.; LINER, C. L. Hybrid Fourier finite-difference 3D depth migration for anisotropic media. *Geophysics*, SEG, v. 73, n. 2, p. S27–S34, 2008.
- FOWLER, P. J.; DU, X.; FLETCHER, R. P. Coupled equations for reverse time migration in transversely isotropic media. *Geophysics*, SEG, v. 75, n. 1, p. S11S22, 2010.
- GAZDAG, J. Wave equation migration with the phase-shift method. *Geophysics*, v. 43, n. 07, p. 1342–1351, 1978.
- HAN, Q.; WU, R.-S. A one-way dual-domain propagator for scalar qP-waves in VTI media. *Geophysics*, SEG, v. 70, n. 2, p. D9–D17, 2005.

- LI, Z. Compensating finite-difference errors in 3-d migration and modeling. *Geophysics*, SEG, v. 56, n. 10, p. 1650–1660, 1991. Disponível em: <<http://link.aip.org/link/?GPY/56/1650/1>>.
- LOEWENTHAL, D. et al. The wave equation applied to migration. *Geophysical Prospecting*, v. 24, p. 380–399, 1976.
- MELO, G.; SCHLEICHER, J.; NOVAIS, A. Poststack true amplitude wave-equation migration. *WIT Report*, p. 145–158, 2006.
- MILLINAZZO, F. A.; ZALA, C. A.; BROOKE, G. H. Square-root approximations for parabolic equation algorithms. *J. Acoust. Soc. Am.*, v. 101, n. 2, p. 760–766, 1997.
- MULDER, W. A.; PLESSIX, R.-E. A comparison between one-way and two-way wave-equation migration. *Geophysics*, v. 69, n. 6, p. 1491–1504, 2004. Disponível em: <<http://link.aip.org/link/?GPYSA7/69/1491/1>>.
- NOLTE, B. Converted-wave migration for VTI media using Fourier finite-difference depth extrapolation. *EAGE, Expanded Abstracts*, p. P001, 2005.
- NOLTE, B. Fourier finite-difference depth extrapolation for VTI media. *EAGE, Expanded Abstracts*, p. P285, 2008.
- RISTOW, D. Migrations in transversely isotropic media using implicit finite-difference operators. *Journal of Seismic Exploration*, v. 8, n. 1, p. 39–55, 1999.
- RISTOW, D.; RÜHL, T. Fourier finite-difference migration. *Geophysics*, v. 59, n. 12, p. 1882–1893, 1994.
- SCHLEICHER, J.; COSTA, J.; NOVAIS, A. A comparison of imaging conditions for wave-equation shot-profile migration. *Geophysics*, v. 73, n. 6, p. S219S227, 2008.
- SCHLEICHER, J.; TYGEL, M.; HUBRAL, P. *Seismic True-Amplitude Imaging*. [S.l.]: Society of Exploration Geophysicists, 2007.
- SHAN, G. Optimized implicit finite-difference migration for tti media. *SEG Technical Program Expanded Abstracts*, SEG, v. 26, n. 1, p. 2290–2294, 2007. Disponível em: <<http://link.aip.org/link/?SGA/26/2290/1>>.
- SHAN, G. Optimized implicit finite-difference and fourier finite-difference migration for vti media. *Geophysics*, SEG, v. 74, n. 6, p. WCA189–WCA197, 2009.
- SHIN, C.; JANG, S.; MIN, D. J. Improved amplitude preservation for prestack depth migration by inverse scattering theory. *Geophysical Prospecting*, v. 49, n. 5, p. 592606, 2001.

- STOFFA, P. L. et al. Split-step Fourier migration. *Geophysics*, v. 55, n. 4, p. 410–421, 1990.
- THOMSEN, L. Weak elastic anisotropy. *Geophysics*, v. 51, n. 10, p. 1954–1966, 1986.
- VERSTEEG, R. The marmousi experience: Velocity model determination on a synthetic complex data set. *The Leading Edge*, v. 13, p. 927936, 1994.
- XU, S.; JIN, S. An orthogonal one-return wave-equation migration. *SEG Technical Program Expanded Abstracts*, SEG, v. 26, n. 1, p. 2325–2329, 2007. Disponível em: <<http://link.aip.org/link/?SGA/26/2325/1>>.
- YILMAZ, O. *Seismic Data Analysis*. [S.l.]: Society of Exploration Geophysicists, 1987.
- ZHANG, L.; HUA, B.; CALANDRA, H. 3D Fourier finite difference anisotropic depth migration. *SEG Technical Program Expanded Abstracts*, SEG, v. 24, n. 1, p. 1914–1917, 2005.
- ZHANG, L.; RECTOR, J. W.; HOVERSTEN, G. M. Split-step complex Padé migration. *Journal of Seismic Exploration*, v. 12, p. 229–236, 2003.
- ZHANG, L. et al. Split-step complex Padé-Fourier depth migration. *SEG Int'l Exposition and 74th Annual Meeting*, 2004.
- ZHANG, Y.; ZHANG, G.; BLEISTEIN, N. True amplitude wave equation migration arising from true amplitude one-way wave equations. *Inverse Problems*, v. 19, p. 1113–1138, 2003.

## APÊNDICES

## APÊNDICE A – APROXIMAÇÃO DE PADÉ COMPLEXA

Aproximações racionais da forma

$$R_N(Z) = 1 + \sum_{n=1}^N \frac{a_n Z}{1 + b_n Z}, \quad (\text{A.1})$$

para  $\sqrt{1+Z} \approx R_N(Z)$  são de interesse para algoritmos de equações parabólicas desde que forneçam uma boa estimativa para ser usada em equações como a equação (2.6) e permitam implementações numéricas eficientes. Os coeficientes de valores reais  $a_n$  e  $b_n$  são dados por

$$a_n = \frac{2}{2N+1} \sin^2\left(\frac{n\pi}{2N+1}\right)$$

e

$$b_n = \cos^2\left(\frac{n\pi}{2N+1}\right)$$

e correspondem as aproximações de Padé da raiz quadrada  $\sqrt{1+Z}$  com linha de corte ao longo da linha real negativa de  $Z = -1$ . Consirando a rotação da linha de corte no plano complexo a representação para a raiz quadrada  $\sqrt{1+Z}$  tem a forma

$$S_\alpha(Z) = e^{i\alpha/2} \sqrt{(1+Z)e^{-i\alpha}} = e^{i\alpha/2} \sqrt{1 + [(1+Z)e^{-i\alpha} - 1]}. \quad (\text{A.2})$$

Usando a equação (A.1) para aproximar a raiz quadrada na equação (A.2) temos

$$\begin{aligned} R_{\alpha,N}(Z) &= e^{i\alpha/2} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^N \frac{a_n [(1+Z)e^{-i\alpha} - 1]}{1 + b_n [(1+Z)e^{-i\alpha} - 1]} \right\} \\ R_{\alpha,N}(Z) &= e^{i\alpha/2} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^N \frac{a_n(e^{-i\alpha} - 1) + a_n e^{-i\alpha} Z}{1 + b_n(e^{-i\alpha} - 1) + b_n e^{-i\alpha} Z} \right\} \\ R_{\alpha,N}(Z) &= e^{i\alpha/2} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^N \frac{a_n(e^{-i\alpha} - 1) + a_n e^{-i\alpha} Z}{[1 + b_n(e^{-i\alpha} - 1)] \left[1 + \frac{b_n e^{-i\alpha} Z}{1 + b_n(e^{-i\alpha} - 1)}\right]} \right\}. \end{aligned}$$

Definindo

$$B_n \equiv \frac{b_n e^{-i\alpha}}{1 + b_n(e^{-i\alpha} - 1)} \quad (\text{A.3})$$

tem-se:

$$R_{\alpha,N}(Z) = e^{i\alpha/2} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^N \frac{a_n(e^{-i\alpha} - 1) + a_n e^{-i\alpha} Z}{[1 + b_n(e^{-i\alpha} - 1)] [1 + B_n Z]} \right\}$$

$$\begin{aligned}
R_{\alpha,N}(Z) &= e^{i\alpha/2} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^N \frac{a_n(e^{-i\alpha} - 1)}{[1 + b_n(e^{-i\alpha} - 1)][1 + B_n Z]} + \sum_{n=1}^N \frac{a_n e^{-i\alpha} Z}{[1 + b_n(e^{-i\alpha} - 1)][1 + B_n Z]} \right\} \\
R_{\alpha,N}(Z) &= e^{i\alpha/2} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^N \frac{a_n(e^{-i\alpha} - 1)}{[1 + b_n(e^{-i\alpha} - 1)]} + \sum_{n=1}^N \frac{a_n(e^{-i\alpha} - 1)}{[1 + b_n(e^{-i\alpha} - 1)][1 + B_n Z]} \right. \\
&\quad \left. - \sum_{n=1}^N \frac{a_n(e^{-i\alpha} - 1)}{[1 + b_n(e^{-i\alpha} - 1)]} + \sum_{n=1}^N \frac{a_n e^{-i\alpha} Z}{[1 + b_n(e^{-i\alpha} - 1)][1 + B_n Z]} \right\}
\end{aligned}$$

Definindo

$$C_0 = e^{i\alpha/2} \left[ 1 + \sum_{n=1}^N \frac{a_n(e^{-i\alpha} - 1)}{[1 + b_n(e^{-i\alpha} - 1)]} \right] \quad (\text{A.4})$$

tem-se:

$$\begin{aligned}
R_{\alpha,N}(Z) &= C_0 + e^{i\alpha/2} \left\{ - \sum_{n=1}^N \frac{a_n B_n (e^{-i\alpha} - 1) Z}{[1 + b_n(e^{-i\alpha} - 1)][1 + B_n Z]} + \sum_{n=1}^N \frac{a_n e^{-i\alpha} Z}{[1 + b_n(e^{-i\alpha} - 1)][1 + B_n Z]} \right\} \\
R_{\alpha,N}(Z) &= C_0 + e^{i\alpha/2} \sum_{n=1}^N \left\{ -a_n B_n (e^{-i\alpha} - 1) + a_n e^{-i\alpha} \right\} \frac{Z}{[1 + b_n(e^{-i\alpha} - 1)][1 + B_n Z]}
\end{aligned}$$

substituindo o valor de  $B_n$  na expressão entre chaves

$$\begin{aligned}
R_{\alpha,N}(Z) &= C_0 + e^{i\alpha/2} \sum_{n=1}^N \left\{ \frac{a_n e^{-i\alpha}}{1 + b_n(e^{-i\alpha} - 1)} \right\} \frac{Z}{[1 + b_n(e^{-i\alpha} - 1)][1 + B_n Z]} \\
R_{\alpha,N}(Z) &= C_0 + \sum_{n=1}^N \left\{ \frac{a_n e^{-i\alpha/2}}{[1 + b_n(e^{-i\alpha} - 1)]^2} \right\} \frac{Z}{[1 + B_n Z]}
\end{aligned}$$

Definindo

$$A_n \equiv \frac{a_n e^{-i\alpha/2}}{[1 + b_n(e^{-i\alpha} - 1)]^2} \quad (\text{A.5})$$

pode-se escrever

$$R_{\alpha,N}(Z) = C_0 + \sum_{n=1}^N \frac{A_n Z}{1 + B_n Z} \quad (\text{A.6})$$

Essa aproximação é chamada de aproximação de Padé complexa e foi proposta por Millinazzo, Zala e Brooke (1997).

## APÊNDICE B – OPERADOR DE MIGRAÇÃO FFD USANDO EXPANSÃO DE PADÉ COMPLEXA PARA MEIOS VTI

Neste apêndice, obté-se o operador 2D de migração FFD usando expansão de Padé complexa para meios VTI. Sendo assim, partindo da equação (2.30), é possível escrever

$$k_z = \frac{\omega}{c^r} \sqrt{1 - \frac{c^{r2}}{c_n^2} w^2} + \frac{\omega}{c^r} \left[ \frac{c^r}{c_{p0}} \sqrt{1 - \frac{w^2}{1 - 2\eta w^2}} - \sqrt{1 - \frac{c^{r2}}{c_n^2} w^2} \right], \quad (\text{B.1})$$

em que  $c^r$  é a velocidade constante do meio isotrópico de referência,  $c_{p0}$  é a velocidade vertical da onda P e  $c_n$  é a velocidade NMO dada pela equação (2.21). Introduzindo as notações  $q_0 = c^r/c_{p0}$  e  $q_n = c^r/c_n$ , a equação acima pode ser reescrita na forma:

$$k_z = \frac{\omega}{c^r} \sqrt{1 - \frac{c^{r2}}{c_n^2} w^2} + \frac{\omega}{c^r} \left[ q_0 \sqrt{1 - \frac{w^2}{1 - 2\eta w^2}} - \sqrt{1 - q_n^2 w^2} \right].$$

Usando a série de Padé complexa para aproximar as raízes quadradas que estão entre colchetes, tem-se:

$$k_z \approx \frac{\omega}{c^r} \left\{ \sqrt{1 - \frac{c^{r2}}{c_n^2} w^2} + q_0 \left[ C_0 - \sum_{n=1}^N \frac{A_n X^2}{1 - B_n X^2} \right] - \left[ C_0 - \sum_{n=1}^N \frac{A_n q_n^2 w^2}{1 - B_n q_n^2 w^2} \right] \right\},$$

em que  $X^2 = \frac{w^2}{1 - 2\eta w^2}$ . Reorganizando os termos, tem-se que:

$$k_z \approx \frac{\omega}{c^r} \left\{ \sqrt{1 - \frac{c^{r2}}{c_n^2} w^2} + C_0(q_0 - 1) - \sum_{n=1}^N \left( \frac{A_n q_0 X^2}{1 - B_n X^2} - \frac{A_n q_n^2 w^2}{1 - B_n q_n^2 w^2} \right) \right\} \quad (\text{B.2})$$

$$\approx \frac{\omega}{c^r} \left\{ \sqrt{1 - \frac{c^{r2}}{c_n^2} w^2} + C_0(q_0 - 1) - \sum_{n=1}^N A_n w^2 \left( \frac{q_0}{1 - (B_n + 2\eta) w^2} - \frac{q_n^2}{1 - B_n q_n^2 w^2} \right) \right\} \quad (\text{B.3})$$

$$\approx \frac{\omega}{c^r} \left\{ \sqrt{1 - \frac{c^{r2}}{c_n^2} w^2} + C_0(q_0 - 1) - \sum_{n=1}^N A_n w^2 \left( \frac{q_0(1 - B_n q_n^2 w^2) - q_n^2[1 - (B_n + 2\eta)w^2]}{[1 - (B_n + 2\eta)w^2](1 - B_n q_n^2 w^2)} \right) \right\} \quad (\text{B.4})$$

Negligenciando termos de quarta ordem, se obtém:

$$k_z = \frac{\omega}{c^r} \left\{ \sqrt{1 - \frac{c^{r2}}{c_n^2} w^2} + C_0(q_0 - 1) - \sum_{n=1}^N A_n w^2 \left( \frac{q_0 - q_n^2}{1 - (\sigma B_n + 2\eta) w^2} \right) \right\}, \quad (\text{B.5})$$

onde  $\sigma = 1 + q_n^2$ . Comparando com a série de Taylor temos que  $\sigma = 1 + q_n + q_n^2$  (RISTOW; RÜHL, 1994). Porém, resultados numéricos mostraram que obtemos aproximações melhores se usarmos  $\sigma = 1 + q_n^3$ .

## APÊNDICE C – IMPLEMENTAÇÃO DA APROXIMAÇÃO FFD

Partindo da equação (3.4), pode-se escrever a equação de continuação que é dada por:

$$\frac{\partial u(x, z, \omega)}{\partial z} \approx \frac{i\omega}{c^r} \left\{ \sqrt{1 - \frac{c^{r2}}{c_n^2} w^2} + C_0(q_0 - 1) - \sum_{n=1}^N A_n w^2 \left( \frac{q_0 - q_n^2}{1 - (\sigma B_n + 2\eta) w^2} \right) \right\} u(x, z, \omega). \quad (\text{C.1})$$

Usando a técnica de separação na equação acima podemos dividi-la em

$$\frac{\partial u(x, z, \omega)}{\partial z} \approx \frac{i\omega}{c^r} \left\{ \sqrt{1 - \frac{c^{r2}}{c_n^2} w^2} \right\} u(x, z, \omega) \quad (\text{C.2})$$

$$\frac{\partial u(x, z, \omega)}{\partial z} \approx \frac{i\omega}{c^r} C_0(q_0 - 1) u(x, z, \omega) \quad (\text{C.3})$$

$$\frac{\partial u(x, z, \omega)}{\partial z} \approx -\frac{i\omega}{c^r} \left[ \sum_{n=1}^N A_n w^2 \left( \frac{q_0 - q_n^2}{1 - (\sigma B_n + 2\eta) w^2} \right) \right] u(x, z, \omega). \quad (\text{C.4})$$

As duas primeiras equações tem soluções analíticas, respectivamente, dadas por:

$$u'(k_x, z_{j+1}, \omega) = u(k_x, z_j, \omega) \exp \left\{ \frac{i\omega}{c^r(z_j)} \sqrt{1 - \frac{c^{r2}(z_j)}{\omega^2} k_x^2 \Delta z} \right\}; \quad (\text{C.5})$$

$$u(x, z_{j+1}, \omega) = u'(x, z_{j+1}, \omega) \exp \left\{ C_0 \frac{i\omega}{c^r(z_j)} \left( \frac{c^r(z_j)}{c(x, z_j)} - 1 \right) \Delta z \right\}. \quad (\text{C.6})$$

Para implementar a terceira equação escolheu-se o método Crank-Nicholson, assim, para  $N=1$ , tem-se

$$\frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\Delta z} = -\frac{i\omega}{c^r} \left( \frac{A_n w^2 (q_0 - q_n^2)}{1 - (\sigma B_n + 2\eta) w^2} \right) \frac{u_i^{j+1} + u_i^j}{2} \quad (\text{C.7})$$

Mas, no domínio  $(\omega - x)$ ,  $w^2 = \frac{c_n^2}{\omega^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ . Aproximando esse operador diferencial, nós temos

$$w^2 = \frac{c_n^2}{\omega^2} \frac{D_x^2}{\Delta x^2}, \quad (\text{C.8})$$

em que  $D_x^2$  é o operador numérico de segunda ordem para a segunda derivada. Reorganizando a equação (C.7), temos

$$\left\{ \frac{\omega^2 \Delta x^2}{c_n^2} - \left[ (\sigma B_n + 2\eta) + \frac{i\omega \Delta z}{2c^r} A_n (q_0 - q_n^2) \right] D_x^2 \right\} u_i^{j+1} = \quad (\text{C.9})$$

$$\left\{ \frac{\omega^2 \Delta x^2}{c_n^2} - \left[ (\sigma B_n + 2\eta) - \frac{i\omega \Delta z}{2c^r} A_n (q_0 - q_n^2) \right] D_x^2 \right\} u_i^j \quad (\text{C.10})$$

## APÊNDICE D – EQUAÇÕES ICONAL E DE TRANSPORTE PARA MEIOS VTI

Para obter as equações iconal e de transporte para meios VTI parte-se da equação de onda para meios VTI no domínio  $\omega - k_x$  (equação 2.23) dada por:

$$\frac{d^2 F(k_x, z, \omega)}{dz^2} = -\frac{c_n^2}{c_{p0}^2} \left( \frac{\omega^2}{c_n^2} - \frac{\omega^2 k_x^2}{\omega^2 - 2\eta c_n^2 k_x^2} \right) F(k_x, z, \omega).$$

A equação acima pode ser reescrita da forma

$$\frac{d^2 F(k_x, z, \omega)}{dz^2} - (i\omega)^2 p_z^2 F(k_x, z, \omega) = 0 \quad (D.1)$$

em que

$$p_z^2 = \frac{k_z^2}{\omega^2} = \frac{c_n^2}{c_{p0}^2} \left( \frac{1}{c_n^2} - \frac{k_x^2}{\omega^2 - 2\eta c_n^2 k_x^2} \right). \quad (D.2)$$

Então, propõe-se a seguinte solução para a equação (D.1):

$$F(k_x, z, \omega) = A(k_x, z) \exp[-i\omega\tau(k_x, z)], \quad (D.3)$$

onde  $A(k_x, z)$  é a amplitude do campo de onda e  $\tau(k_x, z)$  é o tempo de trânsito. Calculando a segunda derivada da equação (D.3) e substituindo o resultado na equação (D.1), tem-se que:

$$\left[ \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} - i\omega 2 \frac{\partial A}{\partial z} \frac{\partial \tau}{\partial z} - i\omega A \frac{\partial^2 \tau}{\partial z^2} + (i\omega)^2 A \left( \frac{\partial \tau}{\partial z} \right)^2 \right] = (i\omega)^2 p_z^2 A. \quad (D.4)$$

Organizando a equação acima em função das potências de  $\omega$ , tem-se que:

$$(i\omega^2) \left[ A \left( \frac{\partial \tau}{\partial z} \right)^2 - p_z^2 A \right] - (i\omega) \left[ 2 \frac{\partial A}{\partial z} \frac{\partial \tau}{\partial z} + A \frac{\partial^2 \tau}{\partial z^2} \right] + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} = 0. \quad (D.5)$$

Para que a equação (D.3) seja solução da equação (D.1) é necessário que a equação acima seja igual a zero para todas as altas frequências, isso implica que os coeficientes das potências de  $\omega$  devem ser iguais a zero, independentemente (SCHLEICHER; TYGEL; HUBRAL, 2007). Assim, a partir das potências de  $\omega^2$  obté-se a equação iconal dada por

$$\left( \frac{\partial \tau}{\partial z} \right)^2 = p_z^2, \quad (D.6)$$

e de  $\omega^1$  obté-se a equação de transporte dada por

$$2\frac{\partial A}{\partial z}\frac{\partial \tau}{\partial z} + A\frac{\partial^2 \tau}{\partial z^2} = 0. \quad (\text{D.7})$$

Substituindo a equação (D.6) na equação (D.7) pode-se reescrever a equação de transporte da seguinte forma:

$$\frac{\partial A}{\partial z} + \frac{1}{2} \frac{1}{p_z} \frac{\partial p_z}{\partial z} A = 0 \quad (\text{D.8})$$

Se as equações iconal e de transporte para meios VTI forem comparadas com as respectivas equações em meios isotrópicos vê-se que elas possuem a mesma estrutura. Essa característica é muito importante no cálculo do fator de correção de amplitude em meios VTI.

## **ANEXOS**

## ANEXO A – PUBLICAÇÕES RELACIONADAS AO TRABALHO

### RESUMOS EXPANDIDOS PUBLICADOS EM ANAIS DE CONGRESSOS

- AMAZONAS, D. ; MELO, G. ; ALEIXO, R. ; SCHLEICHER, J. ; NOVAIS, A. ; COSTA, J. . Including lateral velocity variations into true-amplitude wave-equation migration. In: 71st EAGE Conference & Exhibition incorporating SPE EUROPEC, Amsterdam. *Expanded Abstracts*, 2009.
- AMAZONAS, D. ; ALEIXO, R. ; SCHLEICHER, J. ; COSTA, J. . Anisotropic complex-Padé hybrid finite-difference depth migration. In: 71st EAGE Conference & Exhibition incorporating SPE EUROPEC, Amsterdam. *Expanded Abstracts*, 2009.

### TRABALHOS ACEITOS PARA PUBLICAÇÃO

- AMAZONAS, D. ; ALEIXO, R. ; SCHLEICHER, J. ; COSTA, J. . Anisotropic complex-Padé hybrid finite-difference depth migration. *Geophysics*, 2010.

### TRABALHOS SUBMETIDOS PARA REVISÃO

- AMAZONAS, D. ; MELO, G. ; ALEIXO, R. ; SCHLEICHER, J. ; NOVAIS, A. ; COSTA, J. . Including lateral velocity variations into true-amplitude wave-equation migration. *Geophysics*.