

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
CENTRO DE GEOCIÊNCIAS
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM GEOFÍSICA

TESE DE DOUTORADO

**ESTIMATIVA DE PARÂMETROS ELÁSTICOS
DE MEIOS ANISOTRÓPICOS**

ELLEN DE NAZARÉ SOUZA GOMES



BELÉM - PARÁ
2003

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
CENTRO DE GEOCIÊNCIAS
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM GEOFÍSICA

ESTIMATIVA DE PARÂMETROS ELÁSTICOS EM MEIOS ANISOTRÓPICOS

TESE APRESENTADA POR
ELLEN DE NAZARÉ SOUZA GOMES

COMO REQUISITO PARCIAL À OBTENÇÃO DE GRAU DE
DOUTOR EM CIÊNCIAS NA ÁREA DE GEOFÍSICA

Data de Aprovação: 20/ 06/ 2003

Conceito: 8,2 (Bom)

COMITÊ DE TESE:



Dr. João dos Santos Protázio (Orientador)



Dr. João Batista Corrêa da Silva



Dr. João Carlos Ribeiro Cruz



Dr. Ivan de Araújo Simões Filho



Dr. Ivan Pšenèk

BELÉM

2003

T GOMES, Ellen de Nazaré Souza
G633e **Estimativa de parâmetros elásticos em meios
anisotrópicos.** / Ellen de Nazaré Souza Gomes;
orientador, João dos Santos Protázio. Belém: [s.n],
2003.

111p.; il.

Tese (Doutorado em Geofísica) – Curso de Pós-
Graduação em Geofísica, CG, UFPA, 2003.

1.ONDAS SÍSMICAS. 2.ANISOTROPIA.
3.RESERVATÓRIOS FRATURADOS. 4.AVO/AVD.
5.VSP WALKAWAY. I.PROTÁZIO, João dos Santos,
Orient. II.Título.

CDD: 551.22

Ao meu pai (in memoriam) pelo grande exemplo.

A minha mãe meu porto seguro.

Ao meu marido pelo companheirismo.

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer ao curso de Pós-Graduação em Geofísica da Universidade Federal do Pará, por propiciar meios para a realização deste trabalho. Agradeço também ao corpo docente e funcionários do curso.

Ao meu orientador prof. João dos Santos Protázio e meu coorientador Jessé Carvalho Costa, pela oportunidade de poder trabalhar com os mesmos. Além disso, agradeço pela sugestão do tema de tese, pelo incentivo e apoio dispensado.

Ao Campus Avançado de Castanhal da Universidade Federal do Pará por ter me concedido a liberação para que esse trabalho pudesse ser realizado.

Ao prof. Ivan Psencik, por ter me oferecido a oportunidade de trabalhar no Instituto de Geofísica da República Tcheca. Ao consórcio "Seismic waves in complex 3-D structures (SW3D)" e ao consórcio "CTPETRO-FINEP/PETROBRÁS/FADESP/UFGA", pelo suporte financeiro.

Ao prof. João Batista Corrêa da Silva, pelas discussões frutíferas para a realização deste trabalho.

A minha mãe Edna, meu marido Jessé, meus enteados Kauê e Naiara, minhas irmãs e sobrinhos: Andreza, Elliane, Andrey, André Luis e João, por sempre estarem por perto.

Aos meus amigos da Física.

SUMÁRIO

DEDICATÓRIA.....	i
AGRADECIMENTOS.....	ii
LISTA DE SÍMBOLOS.	vi
RESUMO.....	1
ABSTRACT.....	3
1-INTRODUÇÃO.....	5
2 - LINEARIZAÇÃO DOS COEFICIENTES DE REFLEXÃO DE UMA ONDA P E SUAS CONVERTIDAS PARA MEIOS ANISOTRÓPICOS ARBITRÁRIOS.....	9
2.1 - COEFICIENTES DE REFLEXÃO E TRANSMISSÃO DE MEIOS ANISOTRÓPICOS ARBITRÁRIOS.....	9
2.2 - LINEARIZAÇÃO DOS COEFICIENTES DE REFLEXÃO DE UMA ONDA P E DE SUAS CONVERTIDAS.....	12
2.3- EXEMPLOS NUMÉRICOS.....	15
2.3.1 – Modelo I.....	17
2.3.2 –Modelo II.....	21
2.3.3 – Modeo III.....	25
2.3.4 - Modelo IV.....	29
2.3.5 - Análise dos resultados.....	33
3- ANÁLISE DE SENSIBILIDADE DAS FORMAS LINEARES DO COEFICIENTE DE REFLEXÃO DE UMA ONDA INCIDENTE P E SUAS CONVERTIDAS.....	35
3.1 - FÓRMULAS LINEARES.....	35
3.1.1 - Coeficiente de reflexão linearizado da onda P (R_{pp}).....	37
3.1.2 - Coeficiente de reflexão linearizado da onda convertida S (R_{SP}).....	39

3.1.3 - Coeficiente de reflexão linearizado da onda convertida T (R_{TP}).....	42
3.1.4 - Análise de sensibilidade das fórmulas conjuntas de R_{PP}, R_{SP} e R_{TP}.....	44
3.2 – DISCUSÃO DOS RESULTADOS.....	45
4 - ESTIMATIVA DE ANISOTROPIA UTILIZANDO AVO MULTIAZIMUTAL.....	47
4.1 - PROBLEMA DIRETO.....	47
4.2 - O PROBLEMA INVERSO.....	48
4.2.1 - Testes numéricos.....	49
4.3 - ESTIMATIVA DA ORIENTAÇÃO DE FRATURA.....	57
4.3.1 - Testes Numéricos.....	59
4.3.1.1 - Influência da geometria de aquisição na estimativa da orientação do eixo de simetria.....	63
4.3.2 – Análise dos resultados.....	65
5 - ESTIMATIVA DE ANISOTROPIA LOCAL ATRAVÉS DE DADOS DE VSP DAS ONDAS qP.....	68
5.1 – FUNDAMENTOS TEÓRICOS.....	68
5.2 – DESENHO DO EXPERIMÊNTO.....	72
5.2.1 - Análise dos resultados.....	73
5.3 - PROBLEMA INVERSO.....	74
5.3.1 - Testes numéricos.....	75
5.3.1.1- Modelo XI.....	75
5.3.1.2- Modelo XII.....	78
5.3.1.3- Modelo XIII- Dados reais.....	83
5.3.2 - Escolha do vetor normal à frente de onda no meio de referência.....	95
5.3.3-Análise dos resultados.....	97
6- CONCLUSÃO.....	99

REFERÊNCIAS.....	102
ANEXO A.....	106
DETERMINAÇÃO DA MATRIZ $(\tilde{\mathbf{Z}}_R - \tilde{\mathbf{Z}}_T \tilde{\mathbf{N}}_T^{-1} \tilde{\mathbf{N}}_R)$	106
DETERMINAÇÃO PERTURBAÇÕES $\delta \mathbf{n}^P$ e δs_3^P	107
ANEXO B.....	109
MATRIZ FRACAMENTE ANISOTRÓPICA (WA).....	109
A MATRIZ A.....	110

LISTA DE SÍMBOLOS

- qP, qS, qT Ondas que propagam-se em meios fracamente anisotrópicos. Essas ondas estão classificadas de acordo com sua velocidade de propagação (qP é a mais rápida e qT a mais lenta).
- \mathbf{u}^s Vetor de deslocamento.
- \mathbf{n}^s Vetor polarização.
- A^s Amplitude da onda.
- \mathbf{s}^s Vetor de vagarosidade.
- \mathbf{s}^0 Vetor de vagarosidade no meio de referência.
- ω Frequência angular.
- \mathbf{x} Vetor posição espacial.
- σ Sobrescrito que se refere às ondas P, S ou T.
- $\bar{\chi}$ Sobrescrito que se refere ao tipo de onda refletida.
- $\bar{\xi}$ Sobrescrito que se refere ao tipo de onda incidente.
- \mathbf{i} Matriz diagonal formada pelas amplitudes das ondas incidentes.
- \mathbf{r} Matriz cujas colunas são formadas pela amplitude de cada tipo de onda refletida.
- \mathbf{t} Matriz cujas colunas são formadas pela amplitude de cada tipo de onda transmitida.
- K Sobrescrito que se refere a onda incidente ($K = I$), refletida ($K = R$) e transmitida ($K = T$).
- \mathbf{N}_K Matriz formada pela polarização da onda.
- \mathbf{Z}_K Matriz de impedância da onda.
- $\tilde{\mathbf{Z}}_K$ Matriz cujas colunas são formadas pela impedância de cada tipo de onda propagada associada à reflexão ($K = R$) e transmissão ($K = T$). Por simplicidade em todo o texto é apenas chamada de matriz de impedância.
- $\tilde{\mathbf{N}}_K$ Matriz cujas colunas são formadas pela polarização de cada tipo de onda propagada associadas à reflexão ($K = R$) e transmissão ($K = T$). Por simplicidade em todo o texto é apenas chamada de matriz de polarização.
- \mathbf{R} Matriz de reflexão.

- \mathbf{T} Matriz de transmissão.
- $\bar{\Delta R}_{PP}$ Perturbação do coeficiente de reflexão R_{PP} .
- $\bar{\Delta R}_{SP}$ Perturbação do coeficiente de reflexão R_{SP} .
- $\bar{\Delta R}_{TP}$ Perturbação do coeficiente de reflexão R_{TP} .
- $\delta \mathbf{Z}_I$ e $\delta \mathbf{Z}_T$ Perturbações de primeira ordem das matrizes de impedância em relação ao meio de referência.
- $\delta \mathbf{N}_I$ e $\delta \mathbf{N}_T$ Perturbações de primeira ordem das matrizes de polarização respectivamente em relação ao meio de referência.
- $\Delta \mathbf{N}$ Contrastes médios entre as matrizes de polarização.
- $\Delta \mathbf{Z}$ Contrastes médios entre as matrizes de impedância.
- $\tilde{\alpha}$ Sobrescrito que se refere aos meios de incidência ($\tilde{\alpha} = I$) e subjacente ($\tilde{\alpha} = T$).
- φ Ângulo de azimute.
- θ Ângulo de incidência.
- $\tilde{\varphi}$ Ângulo que o eixo de simetria forma com o eixo x_3 .
- $\tilde{\theta}$ Ângulo que o eixo de simetria forma com o eixo x_2 .
- $\hat{\varphi}$ Estimativa do ângulo que o eixo de simetria forma com o eixo x_3 .
- $\hat{\theta}$ Estimativa do ângulo que o eixo de simetria forma com o eixo x_2 .
- \mathcal{S} Ângulo que a polarização da onda cisalhante no meio anisotrópico arbitrário, forma com a polarização da onda cisalhante no meio referência.
- α Velocidade da onda P no meio de referência.
- $\Delta \alpha$ Contraste médio da velocidade da onda P entre o meio subjacente e o meio de referência.
- β Velocidade da onda cisalhante do meio de referência.
- $\Delta \beta$ Contraste médio da velocidade da onda S entre o meio subjacente e o meio de referência.
- ρ Densidade no meio de referência.
- $\Delta \rho$ Contraste médio de densidade.
- κ Razão entre a onda S e a onda P no meio de referência.
- $K(\theta)$ Co-seno do ângulo de reflexão da onda convertida S no meio de referência.

- R_{PP} Coeficiente de reflexão da onda P.
- R_{SP} Coeficiente de reflexão da onda convertida S.
- R_{TP} Coeficiente de reflexão da onda convertida T.
- ϵ , δ e γ Parâmetros de Thomsen.
- c_{ijkl} Componentes do tensor elástico do meio.
- C_{IJ} Notação reduzida do tensor elástico do meio.
- C_{IJ}^0 Notação reduzida do tensor elástico do meio isotrópico de referência.
- δC_{IJ}^{γ} Perturbação de primeira ordem do tensor elástico no meio $\tilde{\alpha}$.
- ΔC_{IJ} Perturbação média dos tensores elásticos.
- A_{IJ} Tensor elástico do meio ponderado pela densidade.
- \hat{A}_{IJ} Estimativa do tensor elástico do meio ponderado pela densidade
- $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \delta_x, \delta_y, \delta_z, \chi_x, \chi_y, \chi_z, \epsilon_{15}, \epsilon_{24}, \epsilon_{26}, \epsilon_{34}$ e ϵ_{35} Parâmetros fracamente anisotrópicos WA.
- B_{mn} Matriz fracamente anisotrópica (matriz WA).
- B_{13}, B_{23} e B_{33} Elementos da matriz WA.
- \mathbf{A} (C_{ij}, ϕ, θ) Matriz de sensibilidade formada pelos coeficientes das linearizações R_{PP} , R_{SP} e R_{TP} .
- \mathbf{V} Matriz cujas colunas são autovetores da matriz de sensibilidade \mathbf{A} .
- \mathbf{S} é a matriz diagonal formada pelos valores singulares de \mathbf{A} .
- \mathbf{S} Matriz de covariância.
- \mathbf{L} Matriz de resolução.
- \mathbf{p} Vetor formado pelos contrastes entre os parâmetros elásticos, combinação de parâmetros elásticos e o contraste de densidade.
- \mathbf{P} Vetor formado pelos parâmetros WA.
- $\tilde{\mathbf{p}}$ Vetor formado pelas estimativas dos parâmetros elásticos.
- \mathbf{Y}^{obs} Vetor das observações.
- $\tilde{\alpha}$ Desvio padrão do ruído nos dados.
- x_1, x_2 e x_3 Eixos coordenados.

- \hat{e}_1, \hat{e}_2 e \hat{e}_3 Vetores unitários nas direções x_1, x_2 e x_3 .
- ξ, ζ e η Projeções do vetor de vagarosidade no meio de referência nas direções x_1, x_2 e x_3 .
- $\Delta\eta, \Delta\xi$ e $\Delta\zeta$ Perturbações de primeira ordem de ξ, ζ e η respectivamente.
- $\tilde{\theta}$ Ângulo de giro que o eixo de simetria de um meio TI faz com o eixo coordenado x_3 .
- $\tilde{\epsilon}$ Ângulo de mergulho que o eixo de simetria de um meio TI faz com o eixo coordenado x_2 .
- $\mathbf{f}^{(1)}, \mathbf{f}^{(2)}$ e $\mathbf{f}^{(3)}$ Vetores unitários perpendiculares entre si.
- ϑ Ângulo que à frente de onda faz com o eixo vertical.
- c Módulo do vetor de vagarosidade.
- Nobs Número de observações.
- Npar Número de parâmetros.
- \mathbf{v} Vetor normal à frente de onda no meio de referência.
- \mathbf{v}' Vetor frente de onda escolhido arbitrariamente.
- \mathbf{v}^0 Vetor normal à frente de onda no meio de referência determinado através do traçamento de raio no meio de referência.
- \mathbf{v}_{perp} Vetor perpendicular ao vetor normal à frente de onda no meio de referência.
- Ψ Ângulo que o vetor \mathbf{v}' forma com o vetor normal à frente de onda no meio de referência.
- ω_i Peso aplicado no i -ésimo dado real.
- \mathbf{W} Matriz diagonal formada pelos ω_i .
- Ξ Coeficiente que mede o grau de anisotropia.
- Θ Ângulo que o vetor de polarização faz com o eixo vertical.

RESUMO

As medidas de amplitude, polarização e vagarosidade contem informações sobre o meio onde a propagação de onda ocorre. Esta tese investiga esses dados com objetivo de estimar as propriedades elásticas deste meio.

Coefficientes de reflexão podem ser estimados das amplitudes dos dados e dependem de forma não linear dos contrastes dos parâmetros elásticos e do contraste de densidade entre os meios separados por uma interface. Quando o contraste de impedância é fraco, as aproximações lineares para a refletividade qP são mais convenientes para inversão da densidade e dos parâmetros elásticos usando as análises de amplitude versus ângulo de incidência (AVO) e amplitude versus a direção do plano de incidência (AVD).

Escrevendo as equações de Zoeppritz de forma separada nos permite escrever uma solução destas equações em termos das matrizes de impedância e polarização. Usando esta solução são determinadas aproximações lineares para a refletividade da onda qP considerando fraco contraste de impedância, fraca anisotropia mas com classe de simetria de arbitrária. As linearizações são avaliadas para diferentes geometrias de aquisição e várias escolhas do meio de referência. Estas aproximações apresentam bom desempenho comparado com o valor exato do coeficiente de reflexão da onda qP e de suas ondas convertidas para incidências de até 30^0 e meios que obedecem à hipótese de fraca anisotropia.

Um conjunto de fraturas orientado é representado efetivamente por um meio transversalmente isotrópico (TI), as aproximações lineares da refletividade da onda qP podem ser usadas para estimar a orientação de fratura. Partindo deste pressuposto este problema consiste em estimar a orientação do eixo de simetria a partir de dados de refletividade de onda qP. Este trabalho mostra que são necessários múltiplos azimutes e múltiplas incidências para se obter uma estimativa estável. Também é mostrado que apenas os coeficientes das ondas qS e qT são sensíveis ao mergulho da fratura.

Foi investigada a estimativa da anisotropia local através de dados de VSP multiazimutal dos vetores de polarização e vagarosidade. Foram usadas medidas da componente vertical do vetor de vagarosidade e o vetor de polarização de ondas qP diretas e refletidas. O esquema de inversão é validado através de exemplos sintéticos considerando diferentes escolhas do vetor normal à frente de onda no meio de referência, meios de referências e geometria de aquisição. Esta análise mostra

que somente um subgrupo dos parâmetros elástico pode ser estimado. Uma importante aplicação desta metodologia é o seu potencial para a determinação de classes de anisotropia. A aplicação desta metodologia aos dados do mar de Java mostra que os modelos isotrópicos e TIV são inadequados para o ajuste desses dados.

ABSTRACT

Amplitude, polarization and the slowness vector measurements carry information about the medium where wave propagation occurs. This thesis investigates these data aiming at the recovery of elastic properties in anisotropic media.

Reflection coefficients can be estimated from amplitude data and depend nonlinearly on elastic and density contrasts across an interface. When the impedance contrast is weak, the linear approximations for the qP reflectivity are more convenient for inversion of density and elastic parameters using analysis of amplitude versus the angle of incidence (AVO) and amplitude versus the direction of the incidence plane (AVD).

Partitioning the linear system defined by Zoeppritz equations allows one to write the solution of these equations in terms of impedance and polarization matrices. Using this solution, linear approximations for the qP reflectivity are derived for weak impedance contrasts and arbitrary symmetry classes of anisotropy. The linear approximations are evaluated for different acquisition geometries and choice of the reference medium. The approximations for the reflection coefficients of the reflected qP and the converted waves are in good agreement with the exact solution for incidence angles up to 30^0 for media that satisfy the weak impedance assumption.

If a single oriented set of fractures is represented by a transversely isotropic effective medium, the linear approximations for qP reflectivity can be used to estimate the fractures orientation. Under these assumptions this problem is reframed as the estimation of the symmetry axis orientation from qP reflectivity data. This work shows the requirement of multiple components and multiple azimuthal data and quantifies the minimum amount of data for stable estimation. Also it is shown that the reflection coefficients of converted waves qS and qT only are sensitive to fractures dip.

The inversion of polarization and slowness from multiazimuthal VSP data are investigated for the estimation of local anisotropy. We use measurements of the vertical component of the slowness vector and the qP polarization data of direct and reflected waves. The inversion algorithm is validated in synthetic data sets for different choices of the wave front normal, reference medium and acquisition geometries. This analysis shows that only a subset of elastic parameters is recovered. An important application of this approach is its potential to determine

the class of anisotropy. The application of this methodology to the Java Sea data set shows that isotropy and transversely isotropic models are inadequate to fit the data.

1-INTRODUÇÃO

Pode-se estimar propriedades características de um meio através da propagação de onda neste meio. Atributos da onda como: amplitude de reflexão, vetor de polarização e vetor de vazarosidade são amplamente estudados.

A estimativa das propriedades físicas do meio em subsuperfície a partir das amplitudes das ondas refletidas é feita através das análises de AVO/AVD. Nestas análises são estudadas as variações das amplitudes em função do afastamento fonte receptor (AVO) e das amplitudes para diferentes direções (AVD).

Os primeiros trabalhos sobre o assunto levaram em consideração apenas meios acústicos ou elásticos isotrópicos (Ostrander, 1984). Novas técnicas de aquisição de dados em 3-C (três componentes) e o comportamento efetivamente anisotrópico de meios fraturados (Schoenberg & Douma, 1988) e finamente estratificados (Postma, 1955) em regime quase estático estimularam a incorporação de anisotropia na análise de AVO/AVD. Modelos interpretativos que admitem anisotropia apresentam expressões analíticas das amplitudes que dependem de forma não linear dos parâmetros elásticos do meio tornando análise destas expressões bastante complexa. Devido a esta dificuldade, formas linearizadas para as amplitudes têm sido amplamente utilizadas.

Várias abordagens têm sido propostas para simplificar a expressão exata do coeficiente de reflexão de uma onda qP. Para meios fracamente anisotrópicos com alto grau de simetria e baixo contraste, os principais trabalhos foram de Thomsen (1986, 1993) e Banik (1987). Uma aproximação foi apresentada por Zillmer et al. (1997) considerando meios fracamente anisotrópicos e contrastes arbitrários. Entretanto, essa forma aproximada é ainda muito complexa. Vavrycuk & Psencik (1998) a particularizaram considerando pequenos contrastes entre as propriedades elásticas do meio obtendo uma fórmula mais simples tanto para o coeficiente de reflexão como para o coeficiente de transmissão de uma onda qP.

Outra forma de se estimar as propriedades físicas do meio é feita a partir da análise dos vetores de polarização e vazarosidade das ondas que se propagam no meio. Horne & Leaney, (2000) utilizando dados de VSP multiazimutal e múltiplas fontes, estimaram os parâmetros elásticos de meios anisotrópicos a partir de inversão da formulação exata dos vetores de polarização e de vazarosidade do meio obtidos através das equações de Zoeppritz. Para meios com anisotropia arbitrária a formulação exata dos vetores de polarização e de vazarosidade tem análise complexa.

Considerando meios fracamente anisotrópicos Zheng & Psencik (2002) apresentam uma formulação linear para os parâmetros de anisotropia fraca (parâmetros WA) do meio, a componente vertical do vetor de vagarosidade e o vetor polarização de ondas do tipo qP. Além disso, eles também apresentam uma primeira análise das estimativas dos parâmetros WA a partir dessa formulação linear.

Na primeira parte deste trabalho as amplitudes de reflexão de ondas que se propagam em meios anisotrópicos são estudadas. Fez-se uma extensão para meios anisotrópicos arbitrários do trabalho de Schoenberg & Protázio (1992), que apresenta uma formulação matricial para o cálculo exato dos coeficientes de reflexão e transmissão considerando meios anisotrópicos com pelo menos um plano especular de simetria. Além disso, a partir desta formulação, em que as equações de Zoeppritz são escritas de forma particionada é obtida uma forma linearizada para os coeficientes de reflexão da onda qP e de suas convertidas. A grande vantagem do método apresentado neste trabalho é a simplificação da obtenção das linearizações. Faz-se também uma avaliação destas aproximações a partir de dados sintéticos mostrando-se que as fórmulas linearizadas produzem resultados muito próximos daqueles obtidos com a formulação exata para incidências de até 30° , que é a faixa usada na prospecção sísmica.

A partir da formulação linear dos coeficientes de reflexão de uma onda qP e suas convertidas a anisotropia do meio é, então, estimada e esse esquema de inversão é analisado. Considerando os pressupostos de fraco contraste, fraca anisotropia, meio de incidência conhecido e ainda supondo que o meio fraturado comporta-se efetivamente como um meio anisotrópico (Hudson, 1982, Schoenberg & Sayers, 1995) neste trabalho, foi estimada a orientação de fratura a partir da refletividade da onda qP. A caracterização de fratura em meios fraturados tem sido objeto de estudos recentes (Rüger & Tsvankin, 1995, 1997 e Perez et al., 1999) em Geofísica, uma vez que muitos reservatórios de hidrocarboneto são encontrados em formações fraturadas e informações sobre a orientação de fratura podem ajudar na otimização da exploração destes reservatórios.

Na segunda parte deste trabalho é estudada a obtenção das propriedades físicas do meio através das análises dos vetores de polarização e vagarosidade para dados de VSP multiazimutal e múltiplas fontes.

A partir da formulação linear apresentada por Zheng & Psencik (2002) são feita as estimativas dos parâmetros WA para experimentos de VSP multiazimutal e múltiplas fontes

utilizando dados de onda qP. A grande vantagem desta formulação é que ela independe da complexidade do meio acima do geofone e da forma do poço. Neste trabalho são apresentados os resultados para modelos sintéticos e para um caso real.

Os objetivos deste trabalho são considerando modelos formados por dois meios: estimar os parâmetros elásticos do meio subjacente e no caso de meios fraturados, estimar a orientação de fratura através das análises de AVO/AVD e estimar a anisotropia local de meios anisotrópicos arbitrários através de dados de VSP multiazimutal e com múltiplas fontes das ondas qP. O trabalho está dividido da seguinte forma.

O primeiro capítulo compreende a introdução deste trabalho.

No segundo capítulo a solução das equações de Zoeppritz é reescrita explicitamente em função de matrizes de impedância e polarização considerando-se meios anisotrópicos arbitrários. Além disso, utilizando-se esta abordagem, é apresentada uma metodologia geral mais simples para se obter as formas linearizadas para os coeficientes de reflexão da onda qP (R_{PP}) e de suas convertidas (R_{SP} e R_{TP}). Exemplos numéricos que testam o domínio de validade dessas linearizações são apresentados.

No terceiro capítulo essas formas lineares são analisadas para pequenas incidências e incidências arbitrárias. Sua sensibilidade à geometria do levantamento e a escolha do meio de referência são testadas.

No quarto capítulo é feita uma análise da estimativa dos parâmetros elásticos dos meios envolvidos no espalhamento a partir da inversão de R_{PP} , R_{SP} e R_{TP} . Em seguida é investigada a estimativa da orientação de fraturas (direção e mergulho) através da estimativa dos parâmetros elásticos de meios fraturados sobre os pressupostos de fraco contraste de impedância, fraca anisotropia, meio de incidência é conhecido e que o meio fraturado se comporta efetivamente com um meio transversalmente isotrópico (TI).

No quinto capítulo é apresentada uma análise do esquema de inversão que estima a anisotropia local de meios anisotrópicos arbitrários em experimentos de VSP multiazimutal com múltiplas fontes a partir da relação linear entre os parâmetros de fraca anisotropia (parâmetros WA) do meio e os vetores de vagarosidade e polarização de ondas do tipo qP. Este esquema independe da estrutura do meio acima do receptor como também não depende da forma do poço. Em seguida é feita uma análise de sensibilidade desta formulação a geometria do levantamento. Depois são apresentadas as estimativas para três modelos sendo, dois deles sintéticos e o terceiro

um modelo de dados reais da região do Mar de Java. Por fim, os resultados das estimativas dos parâmetros WA para esses três modelos e para outros modelos homogêneos ou heterogêneos com diferentes graus de anisotropia.

2- LINEARIZAÇÃO DOS COEFICIENTES DE REFLEXÃO DE UMA ONDA P E SUAS CONVERTIDAS PARA MEIOS ANISOTRÓPICOS ARBITRÁRIOS

A partir da metodologia para a determinação da fórmula exata dos coeficientes de reflexão e transmissão para meios anisotrópicos arbitrários através das matrizes de impedância e polarização são apresentadas linearizações para os coeficientes de reflexão da onda qP e de suas convertidas considerando-se contraste fraco entre as propriedades físicas do meio e fraca anisotropia. Através destas fórmulas linearizadas podem-se estimar as propriedades de meios na subsuperfície como, por exemplo, a orientação do plano de fratura e assim caracterizar a direção de maior permeabilidade.

No final é feita uma avaliação destas aproximações a partir de dados sintéticos mostrando-se que as fórmulas linearizadas produzem resultados muito próximos daqueles obtidos com a formulação exata para incidências de até 30^0 que é a faixa usada na prospecção sísmica.

2.1- COEFICIENTES DE REFLEXÃO E TRANSMISSÃO DE MEIOS ANISOTRÓPICOS ARBITRÁRIOS

Em todo o trabalho as matrizes são representadas por letras maiúsculas e em negrito, os vetores são representados por letras minúsculas e em negrito e são utilizadas a notação indicial e a convenção da soma (Aki & Richards, 1980). Exceções a estas regras serão indicadas explicitamente. Será também utilizada a notação P, S e T para as ondas qP, qS₁ e qS₂, respectivamente. Estas ondas são assim classificadas de acordo com sua velocidade de propagação (Helbig, 1994).

Sejam dois meios anisotrópicos quaisquer separados por uma interface plana $x_3 = 0$ com a incidência ocorrendo no meio superior e a transmissão ocorrendo no meio subjacente. Como estamos considerando que as medidas serão feitas longe da fonte e para intervalos de tempo muito pequenos, uma boa aproximação para o espalhamento é considerar que as ondas incidentes, refletidas e transmitidas são ondas planas (Helbig, 1994) cujo campo de deslocamento é descrito como:

$$\mathbf{u}^\sigma(\mathbf{x}, t) = A^\sigma \mathbf{n}^\sigma \exp \left[i \omega (\mathbf{s}^\sigma \cdot \mathbf{x} - t) \right], \quad (1)$$

sendo \mathbf{u}^s o vetor de deslocamento, \mathbf{n}^s o vetor polarização, A^s a amplitude da onda, \mathbf{s}^s o vetor vagarosidade, ω a frequência e \mathbf{x} o vetor posição espacial (Musgrave, 1970). O sobrescrito σ refere-se ao tipo de onda P, S ou T.

Utilizando a lei de Hooke generalizada e considerando que na interface o campo de deslocamento e a tração são contínuos, os coeficientes de reflexão e transmissão das ondas espalhadas são determinados pelo sistema matricial:

$$\begin{cases} \mathbf{N}_I \mathbf{i} + \mathbf{N}_R \mathbf{r} = \mathbf{N}_T \mathbf{t} \\ \mathbf{Z}_I \mathbf{i} + \mathbf{Z}_R \mathbf{r} = \mathbf{Z}_T \mathbf{t} \end{cases} \quad (2)$$

em que \mathbf{i} corresponde à matriz diagonal formada pelas amplitudes das ondas incidentes, \mathbf{r} corresponde à matriz cujas colunas são formadas pela amplitude de cada tipo de onda refletida e \mathbf{t} corresponde à matriz cujas colunas são formadas pela amplitude de cada tipo de onda transmitida. As matrizes \mathbf{N}_K e \mathbf{Z}_K correspondem às matrizes de polarização e impedância da onda incidente ($K = I$), refletida ($K = R$) e as transmitida ($K = T$) respectivamente. Cada coluna destas matrizes são obtidas de $\mathbf{N}_m^\sigma = n_m^\sigma$, $\mathbf{Z}_m^\sigma = c_{3mj1} s_1^\sigma n_j^\sigma$ em que c_{3jkl} representa as componentes do tensor elástico do meio. Neste trabalho as componentes do tensor elástico serão representadas utilizando a notação de voigt (Helbig, 1994) em que c_{ikjl} é agora representado por C_{IJ} com $I, J = 1, \dots, 6$.

Explicitamente os coeficientes \mathbf{r} e \mathbf{t} exatos são dados por:

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &\equiv \bar{\mathbf{R}} \mathbf{i} = -(\mathbf{Z}_R - \mathbf{Z}_T \mathbf{N}_T^{-1} \mathbf{N}_R)^{-1} (\mathbf{Z}_I - \mathbf{Z}_T \mathbf{N}_T^{-1} \mathbf{N}_I) \mathbf{i}, \\ \mathbf{t} &\equiv \bar{\mathbf{T}} \mathbf{i} = -(\mathbf{Z}_T - \mathbf{Z}_R \mathbf{N}_R^{-1} \mathbf{N}_T)^{-1} (\mathbf{Z}_I - \mathbf{Z}_R \mathbf{N}_R^{-1} \mathbf{N}_I) \mathbf{i}. \end{aligned} \quad (3)$$

As fórmulas (2) e (3) foram apresentadas em Gomes (1999) e generalizam para meios anisotrópicos arbitrários os resultados obtidos por Schoenberg & Protázio (1992) cuja formulação é válida apenas para meios com pelo menos um plano horizontal de simetria especular .

As amplitudes das ondas incidente, refletida e transmitida são representados pelos vetores $\mathbf{i} = \mathbf{i}^\sigma$, $\mathbf{r} = \mathbf{r}^\sigma$ e $\mathbf{t} = \mathbf{t}^\sigma$, respectivamente. Os coeficientes de reflexão e transmissão para qualquer onda incidente são obtidos de (3) em que:

$$\bar{\mathbf{R}} = [\bar{\mathbf{R}}_{\zeta\chi}] = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{R}}_{PP} & \bar{\mathbf{R}}_{PS} & \bar{\mathbf{R}}_{PT} \\ \bar{\mathbf{R}}_{SP} & \bar{\mathbf{R}}_{ST} & \bar{\mathbf{R}}_{ST} \\ \bar{\mathbf{R}}_{TP} & \bar{\mathbf{R}}_{TS} & \bar{\mathbf{R}}_{TT} \end{bmatrix}, \quad (4)$$

$$\bar{\mathbf{T}} = [\bar{\mathbf{T}}_{\zeta\chi}] = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{T}}_{PP} & \bar{\mathbf{T}}_{PS} & \bar{\mathbf{T}}_{PT} \\ \bar{\mathbf{T}}_{SP} & \bar{\mathbf{T}}_{ST} & \bar{\mathbf{T}}_{ST} \\ \bar{\mathbf{T}}_{TP} & \bar{\mathbf{T}}_{TS} & \bar{\mathbf{T}}_{TT} \end{bmatrix}. \quad (5)$$

O subscrito ζ refere-se tipo de onda incidente e o subscrito χ refere-se ao tipo de onda de onda refletida em (4) ou transmitida em (5) ¹.

O coeficiente de reflexão de uma onda P e suas convertidas $\bar{\mathbf{R}}_{PP}$, $\bar{\mathbf{R}}_{SP}$ e $\bar{\mathbf{R}}_{TP}$ são dados pela primeira coluna de (4).

A partição do sistema de equações de Zoeppritz (2) através das matrizes de impedância e polarização permite obter uma solução explícita para as matrizes de reflexão e transmissão o que não é possível com a abordagem usual (Zillmer et al., 1997). As matrizes $\bar{\mathbf{R}}$ e $\bar{\mathbf{T}}$ contém todas as informações sobre as amplitudes envolvidas no espalhamento.

Um dos possíveis problemas nesta formulação é que nas direções onde ocorrem as singularidades² não se podem determinar as matrizes de polarização (representadas por \mathbf{N}). Entretanto, pode-se sempre escolher vetores de polarização linearmente independentes de tal forma que se possam determinar as matrizes de polarização inversíveis e desta forma o sistema (2) terá solução não trivial.

Na formulação exata dos coeficientes de reflexão os parâmetros elásticos dos meios aparecem de forma não linear o que torna a análise das propriedades destes meios a partir de AVO/AVD bastante complexa. Uma alternativa para simplificar a análise é linearizar estes coeficientes.

A seguir é apresentada uma aproximação de primeira ordem para os coeficientes de reflexão de uma onda P e suas convertidas ($\bar{\mathbf{R}}_{PP}$, $\bar{\mathbf{R}}_{SP}$ e $\bar{\mathbf{R}}_{TP}$).

¹ Esta conversão foi escolhida de acordo com a notação matricial.

² Direções em que as velocidades de propagação são iguais.

2.2-LINEARIZAÇÃO DOS COEFICIENTES DE REFLEXÃO DE UMA ONDA P E SUAS CONVERTIDAS.

De acordo com a teoria da perturbação aplicada à (2) as aproximações de primeira ordem dos coeficientes de reflexão e transmissão são dadas pela resolução do sistema

$$\begin{aligned} (\tilde{\mathbf{Z}}_R - \tilde{\mathbf{Z}}_T \tilde{\mathbf{N}}_T^{-1} \tilde{\mathbf{N}}_R) \delta \bar{\mathbf{R}} &= 2 (\Delta \mathbf{Z} - \tilde{\mathbf{Z}}_T \tilde{\mathbf{N}}_T^{-1} \Delta \mathbf{N}) \\ (\tilde{\mathbf{Z}}_T - \tilde{\mathbf{Z}}_R \tilde{\mathbf{N}}_R^{-1} \tilde{\mathbf{N}}_T) \delta \bar{\mathbf{T}} &= -2 (\Delta \mathbf{Z} - \tilde{\mathbf{Z}}_R \tilde{\mathbf{N}}_R^{-1} \Delta \mathbf{N}). \end{aligned} \quad (6)$$

As matrizes $\tilde{\mathbf{Z}}_K$ e $\tilde{\mathbf{N}}_K$, correspondem às matrizes de impedância e de polarização associadas à reflexão ($K = R$) e transmissão ($K = T$) do meio isotrópico de referência. $\Delta \mathbf{N}$ e $\Delta \mathbf{Z}$ são os contrastes médios entre as matrizes de polarização e de impedância dos meios incidente e subjacente dados por $\Delta \mathbf{N} = (\delta \mathbf{N}_T - \delta \mathbf{N}_I) / 2$ e $\Delta \mathbf{Z} = (\delta \mathbf{Z}_T - \delta \mathbf{Z}_I) / 2$, respectivamente e sendo $\delta \mathbf{Z}_I$, $\delta \mathbf{Z}_T$ e $\delta \mathbf{N}_I$, $\delta \mathbf{N}_T$ são as perturbações de primeira ordem das matrizes de impedância e polarização respectivamente em relação ao meio de referência. $\delta \bar{\mathbf{R}}$ e $\delta \bar{\mathbf{T}}$ são perturbações de (4) e (5).

Na determinação da aproximação linear para os coeficientes de reflexão para incidência P, $\delta \bar{\mathbf{R}}_{PP}$, $\delta \bar{\mathbf{R}}_{SP}$ e $\delta \bar{\mathbf{R}}_{TP}$, apenas a primeira coluna da matriz $\Delta \mathbf{Z} - \tilde{\mathbf{Z}}_T \tilde{\mathbf{N}}_T^{-1} \Delta \mathbf{N}$ é utilizada em consequência da regra de Cramer (Hoffman & Ray, 1971).

A linearização foi feita considerando-se os seguintes pressupostos:

- Dois meios fracamente anisotrópicos separados por uma interface plana.
- Fraco contraste de impedância na interface.
- O meio de referência é homogêneo isotrópico.
- A polarização escolhida para as ondas cisalhantes no meio de referência foi na direção das polarizações das componentes S_V e S_H da onda cisalhante. Isso implica que as fórmulas lineares das ondas convertidas aqui apresentadas são válidas apenas quando o meio de incidência possui simetria azimutal, uma vez que suas polarizações devem ser pequenas perturbações em torno das direções de polarização das componentes S_V e S_H da onda cisalhante. Assim apesar de utilizarmos a notação de ondas convertidas S e T para está de acordo com a anotação utilizada para meios anisotrópicos, o que calculamos são as componentes S_V e S_H da onda cisalhante S.

Os pressupostos acima estão de acordo com o tipo de meio que estamos interessados em estudar que são os meios fraturados. Sabemos que estes meios em regime quase estático comportam-se efetivamente como meios anisotrópicos (Hudson, 1982, Schoenberg & Sayers, 1995) e ainda segundo informações petrofísicas sabemos ainda que estes meios apresentam fraca anisotropia de acordo com os parâmetros de Thomsen (Thomsen 1986).

De acordo com os pressupostos acima o esquema de linearização é mostrado na Figura 1 abaixo.

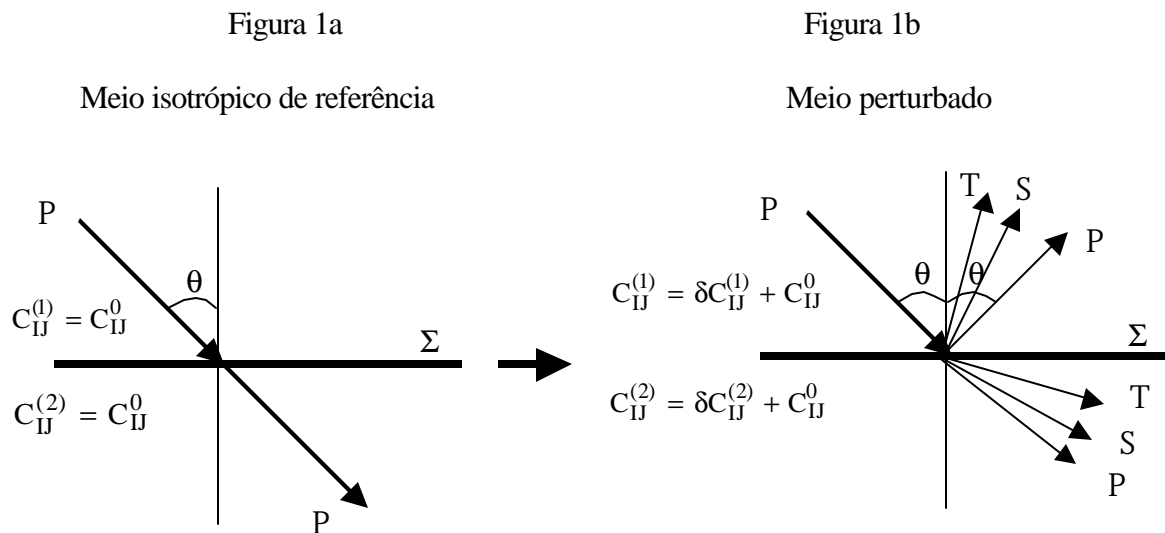


Figura 1 – Esquema de Inversão. Figura 1a - Modelo formado pelo meio de referência isotrópico, cujo tensor elástico é C_{IJ}^0 . Nestes meios a onda P incide em uma superfície Σ e é totalmente transmitida. Figura 1b - Modelo perturbado. Tem-se agora dois meios anisotrópicos: o meio de incidência cujo tensor elástico é $C_{IJ}^{(1)}$ e o meio subjacente cujo tensor elástico é $C_{IJ}^{(2)}$ que são formados pela perturbação de primeira ordem do meio de referência. A onda P propaga-se no meio (1) e incide na superfície Σ . Parte desta onda é refletida através da onda P e da conversão de onda P em onda S e T e a outra parte é transmitida através da onda P e da conversão de onda P em onda S e T. Um dos objetivos deste trabalho é estimar as propriedades do meio subjacente através da informação das ondas refletidas. O ângulo θ é formado entre a onda P e o eixo vertical.

Para azimute zero³ ($\varphi = 0$) as aproximações lineares do coeficiente de reflexão⁴ R_{PP} e de suas convertidas R_{SP} e R_{TP} são dados por:

³ Estamos considerando azimute zero na direção paralela ao eixo x_2 (ver Figura 2). Para azimutes arbitrários ver anexo A.

$$R_{PP} = \frac{1}{2\rho\alpha^2} \left\{ \Delta C_{11} \operatorname{tg}^2\theta \sin^2\theta + 2[\Delta(C_{13} + 2C_{55}) - 4\Delta C_{55}] \sin^2\theta + \Delta C_{33} \cos^2\theta \right\} + \left(1 - \frac{1}{2\cos^2\theta}\right) \frac{\Delta\rho}{\rho}, \quad (7)$$

$$R_{SP} = \frac{1}{2\rho\alpha^2\eta(\theta)} \left\{ 2\Delta C_{11} \sin^3\theta + 2[\Delta(C_{13} + 2C_{55}) - 4\Delta C_{55}] \sin\theta \cos 2\theta - \Delta C_{33} \sin 2\theta \cos\theta + \frac{1}{kK(\theta)} \left\{ 2\Delta C_{15} \sin^2\theta (2k\omega(\theta) - 1) + 2\Delta C_{35} \cos\theta (\cos\theta - 2K(\theta)\omega(\theta)) + 2\Delta C_{55} \sin 2\theta (k^2 \sin^2\theta - K^2(\theta)) \right\} \right\} - \left(\frac{\sin\theta}{K(\theta)} \right) \frac{\Delta\rho}{\rho} \quad (8)$$

e

$$R_{TP} = \frac{1}{\rho\alpha^2 K(\theta)} \left\{ \frac{1}{k} \left[\Delta C_{14} \sin^2\theta + \Delta C_{45} \sin 2\theta + \Delta C_{34} \cos^2\theta \right] - \frac{1}{\eta(\theta)} \left\{ \Delta C_{16} \sin^3\theta + \Delta(C_{14} + 2C_{56}) \cos\theta \sin^2\theta + \Delta(C_{36} + 2C_{45}) \cos^2\theta \sin\theta + \Delta C_{34} \cos^3\theta \right\} \right\}. \quad (9)$$

Em que: θ é o ângulo de incidência, $\kappa = \frac{\beta}{\alpha}$ é a razão entre as velocidades das ondas S e P no meio isotrópico de referência, ρ é a densidade do meio de referência, $\Delta\rho$, é o contraste médio da densidade dos meios separados pela interface, $K(\theta) = \sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2\theta}$ é o co-seno do ângulo de reflexão da onda convertida S, $\omega(\theta) = \kappa \sin^2\theta + K(\theta) \cos\theta$, $\eta(\theta) = K(\theta) + \kappa \cos\theta$, e ΔC_{IJ} é a perturbação média dos parâmetros elásticos que é dada por:

$$\Delta C_{IJ} = (\ddot{a}C_{IJ}^{(2)} - \ddot{a}C_{IJ}^{(1)})/2. \quad (10)$$

Os tensores elásticos nos meios de incidência e subjacente são escritos como:

⁴ Para efeito de simplicidade os coeficientes linearizados serão representados por R_{PP} , R_{SP} e R_{TP} ao invés de $\delta\bar{R}_{PP}$, $\delta\bar{R}_{SP}$ e $\delta\bar{R}_{TP}$.

$$C_{IJ}^{\tilde{\gamma}} = C_{IJ}^0 + \tilde{a}C_{IJ}^{\tilde{\gamma}}, \quad (11)$$

em que o sobrescrito $\tilde{\gamma}$ refere-se ao meio de incidência ($\tilde{\gamma} = (1)$) e subjacente ($\tilde{\gamma} = (2)$) e C_{IJ}^0 é o tensor elástico do meio de referência. Para maiores detalhes sobre determinação das fórmulas linearizadas (7), (8) e (9) ver anexo A. Essas fórmulas para azimute arbitrário são apresentadas no capítulo a seguir. Os resultados acima foram apresentados em Gomes et al. (2001).

A equação (7) difere da forma linearizada de R_{PP} apresentada primeiramente por Vavryuk & Psencik (1998) apenas na metodologia de obtenção. Já as equações (8) e (9) foram originalmente apresentadas em Gomes (1999), onde estas equações foram determinadas como sendo a soma da perturbação isotrópica mais a perturbação anisotrópica para um meio de referência pré-escolhido. Aqui devido à metodologia empregada as perturbações da parte isotrópica já estão incluídas na perturbação anisotrópica e o meio de referência é arbitrário e desta forma as equações apresentam-se de forma mais simples. Além disso, é apresentada uma correção da equação (9) que foi apresentada de forma incompleta em Gomes (1999). Em Jílek (2002) tem-se uma versão diferente para as equações (8) e (9), pois as fórmulas lineares de R_{SP} e R_{TP} são escritas para modelos cujo meio de incidência é anisotrópico arbitrário, o que difere da versão apresentada aqui. Assumimos o pressuposto de que: a polarização escolhida para as ondas cisalhantes no meio de referência foi na direção das polarizações das componentes S_V e S_H da onda cisalhante. Assim (8) e (9) só são válidas para modelos cujo meio de incidência apresenta simetria azimutal. No entanto se conhecemos o ângulo \mathfrak{S} que a polarização da onda cisalhante no meio anisotrópico arbitrário (meio perturbado), forma com a polarização da onda cisalhante no meio referência, as fórmulas lineares de R_{SP} e R_{TP} são obtidas de (8) e (9) projetado na direção de \mathfrak{S} .

2.3 - EXEMPLOS NUMÉRICOS

Nesta seção é apresentada uma análise de sensibilidade das linearizações à violação dos pressupostos de fraco contraste e fraca anisotropia através de quatro modelos.

Os coeficientes de reflexão R_{PP} , R_{SP} e R_{TP} exatos, linearizados e erro absoluto destas linearizações são apresentados através de estereogramas. Em todos os estereogramas os valores dos coeficientes de reflexão e do erro são apresentados para azimutes que variam de 0° até 360° (estes representado no contorno do estereograma) e para incidências variando de 0° até 40° a

partir da normal à interface que separa os planos (estas representadas no estereograma pelos números internos e em itálico). A escala de cores mostra o valor absoluto dos coeficientes.

Nestes modelos as velocidades das ondas P e S no meio isotrópico de referência foram escolhidas como sendo a média entre as velocidades das ondas P e S nos meios de incidência ($\tilde{\alpha} = (1)$) e subjacente ($\tilde{\alpha} = (2)$). Estas velocidades em cada meio por sua vez foram determinadas por:

$$\alpha^{\tilde{\gamma}} = \sqrt{\frac{C_{33}^{\tilde{\gamma}}}{\rho^{\tilde{\gamma}}}} \quad \text{e} \quad \beta^{\tilde{\gamma}} = \sqrt{\frac{C_{55}^{\tilde{\gamma}}}{\rho^{\tilde{\gamma}}}}. \quad (12)$$

Para todos os modelos apresentados o meio de incidência é sempre isotrópico. No entanto as fórmulas linearizadas ainda são válidas para modelos que apresentem pelo menos simetria azimutal. Neste sentido, mesmo não sendo mostrados aqui, alguns modelos foram testados. Estamos considerando que a fórmula linearizada apresenta bom desempenho se seu erro é menor que 10% do valor exato. Em alguns modelos apresentados o meio subjacente anisotrópico originalmente era um TIV ou TIH (meio transversalmente isotrópico com eixo de simetria vertical ou com eixo de simetria horizontal respectivamente, Musgrave, 1970) cujo eixo de simetria sofreu rotação em relação aos eixos cartesianos. A orientação adotada para fazer esta rotação é mostrada na Figura 2.

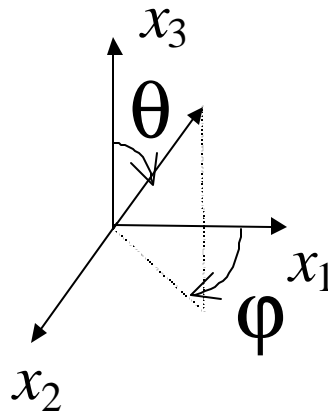


Figura 2 Orientação adotada para fazer as rotações em φ (ângulo azimutal) e θ (ângulo de incidência).

Quando o modelo apresenta plano de simetria estes são mostrados nos estereogramas através de linhas em preto mais grossas. Os resultados obtidos são expostos a seguir.

2.3.1- Modelo I

Este modelo caracteriza-se pela fraca anisotropia ($\delta = 9\%$) de acordo com os parâmetros de anisotropia de Thomsen (Thomsen 1986) e baixos contrastes ($<10\%$) entre os parâmetros elásticos dos meios envolvidos. O meio incidente é isotrópico com densidade $\rho = 2,65 \text{ g/cm}^3$ e as velocidades das ondas P e S dadas por $\alpha = 4,20 \text{ km/s}$ e $\beta = 2,81 \text{ km/s}$, respectivamente. O meio subjacente modela um arenito TIV cuja densidade é $\rho = 2,5 \text{ g/cm}^3$ e tensor elástico, medido em N/m^2 dado por:

$$C_{IJ} = \begin{bmatrix} 59,80 & 16,17 & 14,75 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ & 59,80 & 14,75 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ & & 50,09 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ & & & 19,80 & 0,00 & 0,00 \\ & & & & 19,80 & 0,00 \\ & & & & & 21,82 \end{bmatrix}. \quad (13)$$

Este tensor então foi girado de $\varphi = 60^\circ$ em relação ao eixo x_3 e girado de $\theta = 30^\circ$ em relação ao novo eixo x_2 , tornando-se assim um TI com eixo de simetria inclinado. As matrizes de rotação foram utilizadas conforme a regra da mão direita.

Para a onda P o coeficiente R_{PP} exato, sua forma linearizada e o erro absoluto são mostrados nas Figuras 3a, Figuras 3b, Figuras 3c, respectivamente. Verifica-se que para incidências de até 30° o erro é menor que 10% $(0,004)^5$ do valor exato $(0,05)$. Para incidências de 40° o erro pode chegar em algumas direções a aproximadamente 15% $(0,014)$ do valor exato $(0,09)$. Desta forma conclui-se que a fórmula linearizada apresenta bom desempenho para incidências de até 30° .

Após as duas rotações o meio é agora um TI com eixo de simetria inclinado. No entanto, de acordo com as Figuras 3a e 3b os coeficientes de reflexão exato e linear comportam-se como se o meio fosse ortorrômbico com planos de simetria nas direções azimutais 120° - 300° e 30° - 210° . Disto conclui-se que tanto o coeficiente exato como o linearizado da onda P é insensível ao mergulho do eixo de simetria, logo para modelos cujo eixo de simetria apresenta mergulho não se podem obter informações sobre o mesmo apenas do coeficiente de reflexão R_{PP} (Gomes et al., 1999).

⁵ O valor absoluto do erro em todo este capítulo será sempre apresentado entre parênteses.

Figura 3a

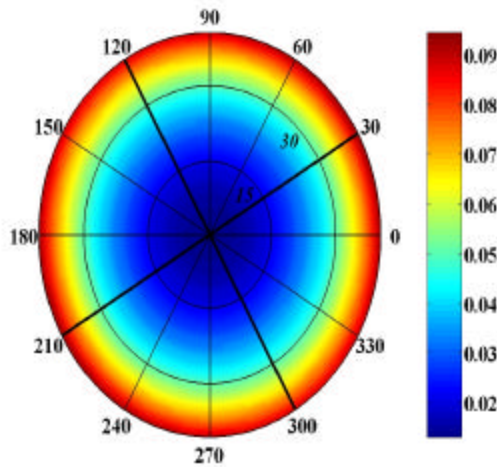


Figura 3b

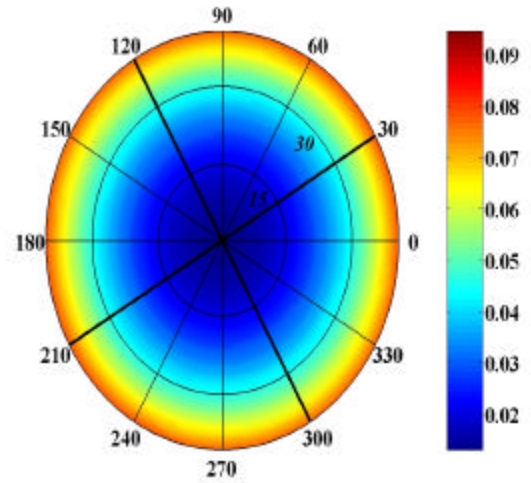


Figura 3c

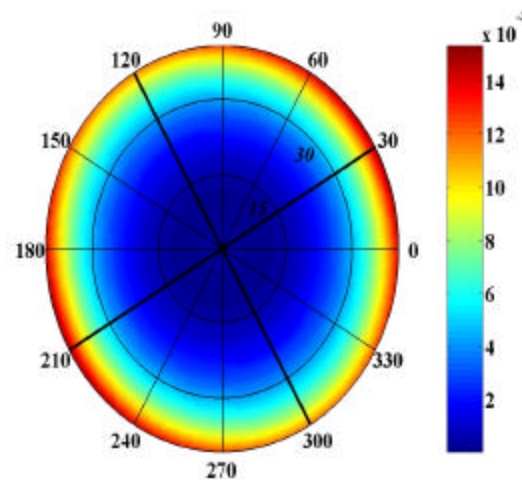


Figura 3 – R_{PP} exato (3a), forma linearizada (3b) e erro absoluto (3c) do modelo sintético I. Este modelo apresenta fraca anisotropia ($\leq 10\%$) e fraco contraste ($\leq 10\%$). As velocidades das ondas P e S no meio isotrópico de referência são de $\alpha = 4,39$ km/s e $\beta = 2,83$ km/s respectivamente e foram escolhidas como sendo a média entre as velocidades das ondas P e S nos meios de incidência e subjacente. O Erro absoluto é inferior a 10% (0,004) para incidências de 30° . Tanto o coeficiente exato quanto o a forma linearizada são insensíveis ao mergulho do eixo de simetria. Planos de simetria nas direções azimutais 120° - 300° e 30° - 210° (linha preta mais grossa).

Para a onda convertida S os coeficientes: exato, linear e o erro absoluto são apresentados nas Figuras 4a, 4b e 4c, respectivamente. Também para esta onda a aproximação linear tem bom desempenho apresentando-se melhor que a forma linearizada de R_{PP} (ver Figura 3c e Figura 4c). Para incidências de até 40° o erro é inferior a 10% (0,004) da observação exata (0,050).

Diferentemente da onda P a convertida S apresenta-se sensível ao mergulho do eixo de simetria. Pode-se perceber pelos estereogramas que o meio é um TI com plano de simetria na direção 120° - 300° .

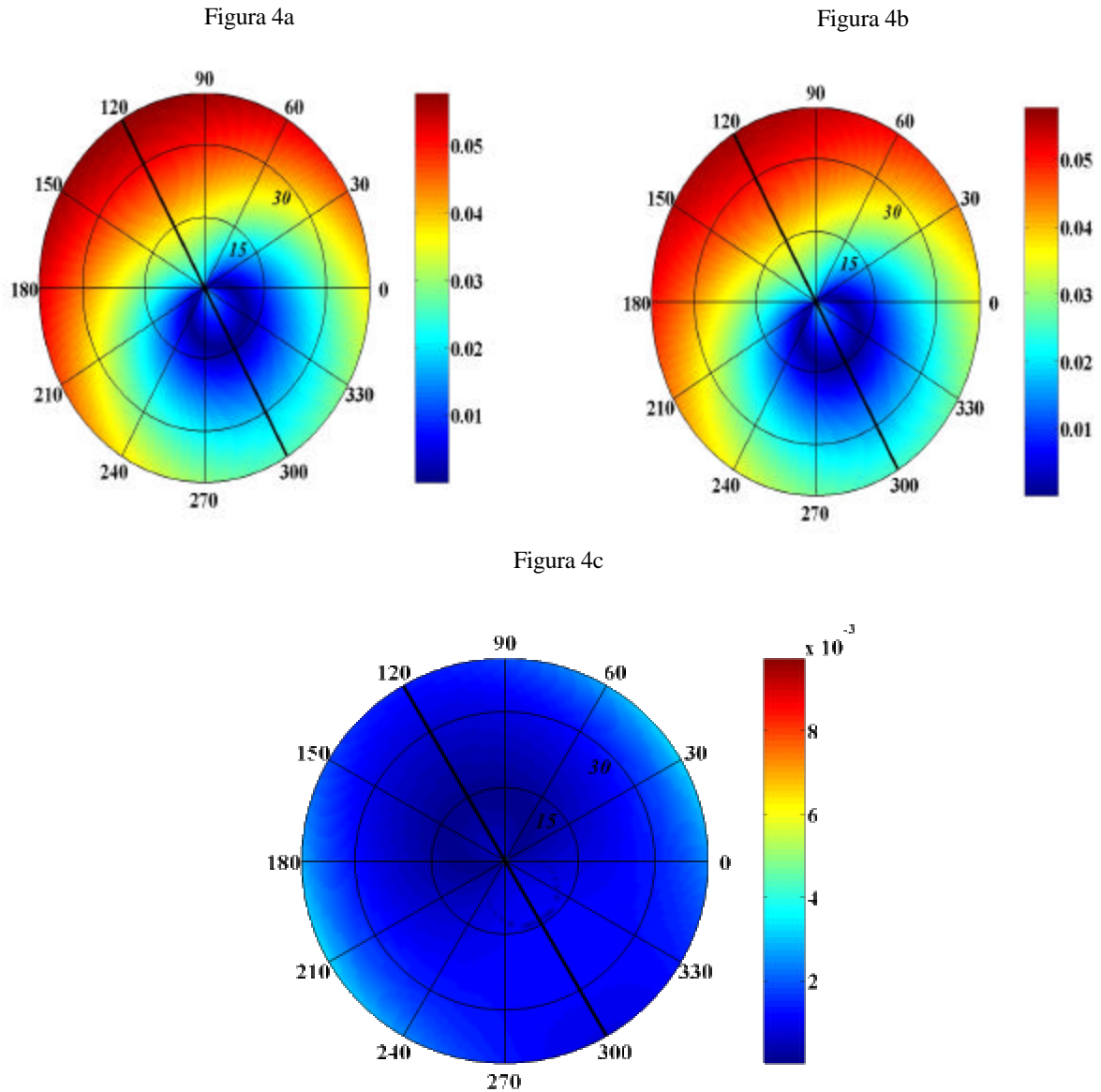


Figura 4 – R_{SP} exato (4a), forma linearizada (4b) e erro absoluto (4c) do modelo sintético I. Este modelo apresenta fraca anisotropia ($\leq 10\%$) e fraco contraste ($\leq 10\%$). As velocidades das ondas P e S no meio isotrópico de referencia são de $\alpha = 4,39$ km/s e $\beta = 2,83$ km/s respectivamente e foram escolhidas como sendo a média entre as velocidades das ondas P e S nos meios de incidência e subjacente. Forma linearizada de R_{SP} apresenta performance melhor que forma linearizada de R_{PP} . O coeficiente da convertida S é sensível ao mergulho do eixo de simetria. Plano de simetria na direção azimutal 120° - 300° (linha preta mais grossa).

Para a onda convertida T, o coeficiente exato, a forma linearizada e o erro absoluto são apresentados nas Figuras 5a, 5b e 5c, respectivamente. De acordo com a Figura 5a (exata) e 5b (forma linearizada) a onda T não apresenta conversão no plano de simetria (direção azimutal 120° - 300°) o que mostra a consistência da fórmula linearizada com a fórmula exata. Da mesma forma que os coeficientes linearizados anteriores a forma linearizada do coeficiente de reflexão da onda T apresenta bom desempenho, mostrando que para incidências de até 30° o erro é em torno de 11% (0,002) do valor exato (0,017). Além disso, verifica-se que este coeficiente apresenta magnitude de uma ordem menor que os outros dois coeficientes.

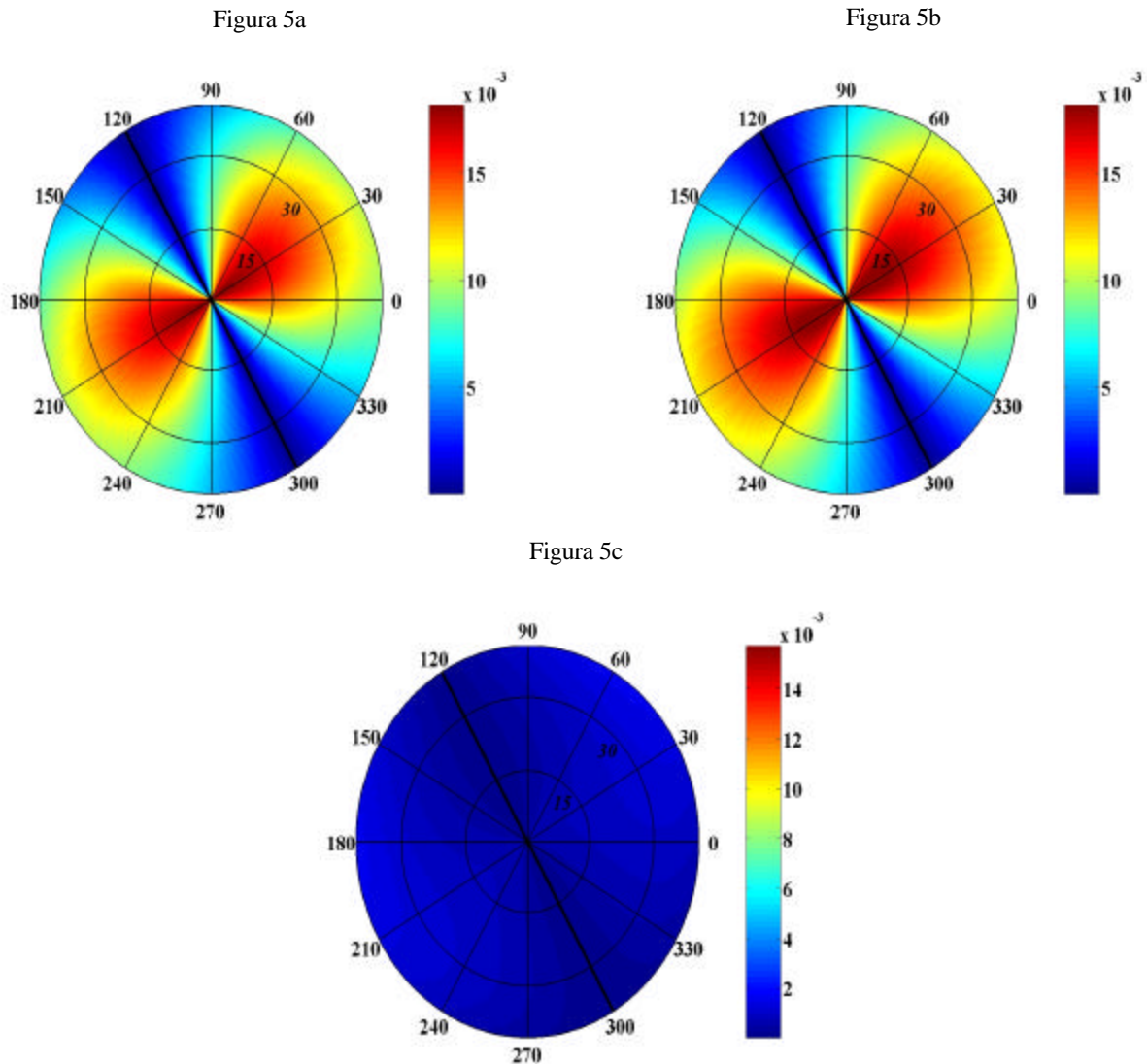


Figura 5 - R_{TP} exato (5a), forma linearizada (5b) e erro absoluto (5c) do modelo sintético I. Este modelo apresenta fraca anisotropia $\leq 10\%$ e fraco contraste $\leq 10\%$. As velocidades das ondas P e S no meio isotrópico de referencia são de $\alpha = 4,39$ km/s e $\beta = 2,83$ km/s respectivamente e foram escolhidas como sendo a média entre as velocidades das ondas P e S nos meios de incidência e subjacente. Forma linearizada apresenta 11% (0,002) de erro para incidências de até 30° . Os coeficientes da convertida T exatos e lineares são sensíveis ao mergulho do eixo de simetria, pois no plano de simetria (direção azimutal 120° - 300°) não conversão de onda P em T.

Da mesma forma que o coeficiente de reflexão da onda convertida S o coeficiente de reflexão da onda convertida T apresenta sensibilidade ao mergulho do eixo de simetria, pois de acordo com as Figuras 5a-5b vê-se apenas um plano de simetria na direção dos azimutes 120^0 - 300^0 , o que sugere que para se obterem informações sobre o mergulho do eixo de simetria é necessário a utilização do coeficiente de reflexão das ondas convertidas S e T.

Para este modelo em que os pressupostos de fraco contraste e fraca anisotropia são respeitados as fórmulas lineares R_{PP} , R_{SP} e R_{TP} apresentam bom desempenho com erro máximo em torno de 10% para incidências de até 30^0 . A forma linearizada de R_{SP} mostra desempenho melhor que R_{PP} e R_{TP} para incidências de até 40^0 .

2.3.2- Modelo II

Este modelo caracteriza-se pela forte anisotropia (22%) e fraco contraste (<10%) entre os parâmetros elásticos. O meio incidente é isotrópico com densidade $\rho = 2,2 \text{ g/cm}^3$ e velocidades das ondas P e S $\alpha = 3,13 \text{ km/s}$ e $\beta = 1,68 \text{ km/s}$, respectivamente. O meio subjacente é um TIV com densidade $\rho = 2,075 \text{ g/cm}^3$. O tensor dos parâmetros elásticos (medido em N/m^2) é dado por:

$$C_{II} = \begin{bmatrix} 31,26 & 13,61 & 3,34 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ & 31,26 & 3,34 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ & & 22,49 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ & & & 6,49 & 0,00 & 0,00 \\ & & & & 6,49 & 0,00 \\ & & & & & 8,82 \end{bmatrix}. \quad (14)$$

Este tensor elástico foi girado de $\varphi = 60^0$ em relação ao eixo x_3 e de $\theta = 30^0$ em relação ao novo eixo x_2 , tornando-se assim um TI com eixo de simetria inclinado.

Comparando a Figura 6a (R_{pp} exato) com a Figura 6b (R_{pp} linearizado) tem-se que em determinadas direções (azimutes 60^0 - 240^0) apesar da incidência ser menor que 30^0 a formulação linearizada apresenta erros (Figura 6c) em torno de 35% (0,007) do valor exato (0,02). Verifica-se que neste modelo, onde o pressuposto de fraca anisotropia é violado, a forma linearizada não apresenta bom desempenho.

Novamente R_{PP} exato e o linearizado são insensíveis ao mergulho do eixo de simetria, da mesma forma que no modelo I.

Figura 6a

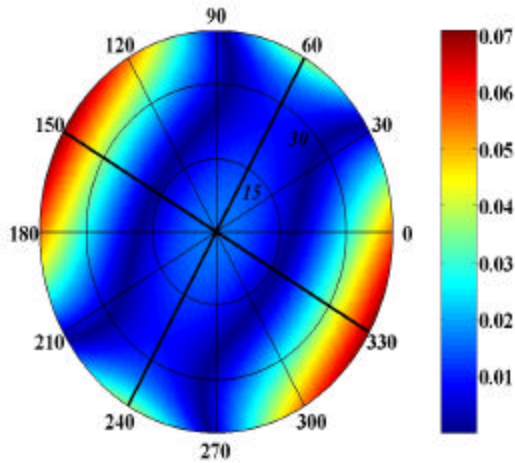


Figura 6b

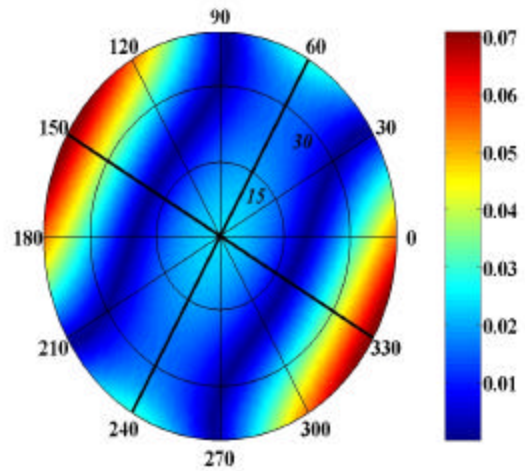


Figura 6c

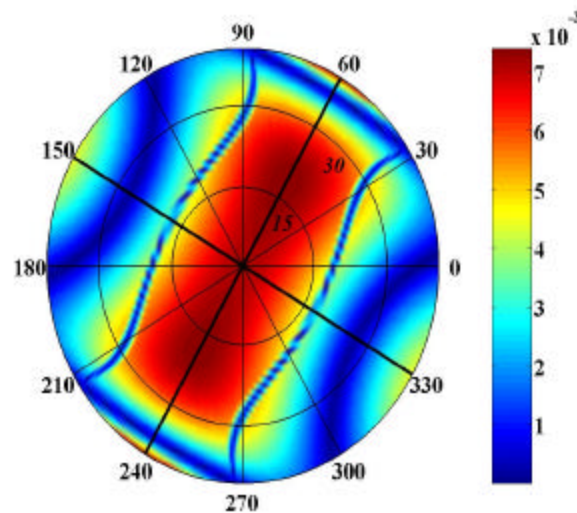


Figura 6 - R_{PP} exato (6a), forma linearizada (6b) e erro absoluto (6c) do modelo sintético II. Este modelo apresenta forte anisotropia (22%) e fraco contraste ($\leq 10\%$). As velocidades das ondas P e S no meio isotrópico de referência são de $\alpha = 3,31$ km/s e $\beta = 1,93$ km/s respectivamente e foram escolhidas como sendo a média entre as velocidades das ondas P e S nos meios de incidência e subjacente. Apesar do meio ser um TI com eixo de simetria inclinado de acordo com os estereogramas os coeficientes de reflexão R_{PP} exato e linear comportam-se como um meio com simetria ortorrômbica. Planos de simetria nas direções azimutais 60° - 240° e 150° - 330° (linhas pretas mais grossas).

No caso da onda convertida S verifica-se que a forma linearizada R_{SP} (Figura 7b) para incidências de até 30° apresenta erros (Figura 7c) em torno de 15% (0,025) do valor exato (0,16) (Figura 7a). Além disso, como no exemplo anterior, novamente verifica-se que o coeficiente da onda convertida é sensível ao mergulho do eixo de simetria. Pode-se ver um único plano de simetria do meio TI na direção azimutal 150° - 330° (Figuras 6a - 6b).

Figura 7a

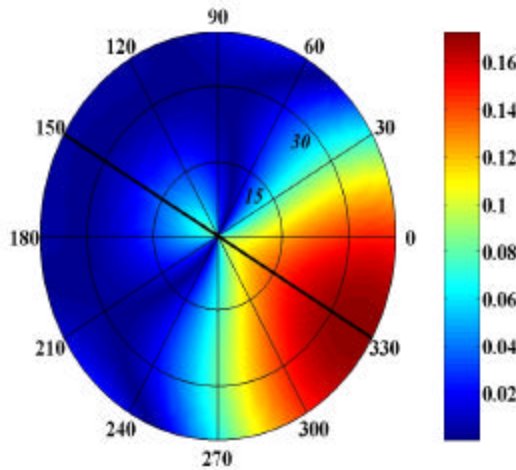


Figura 7b

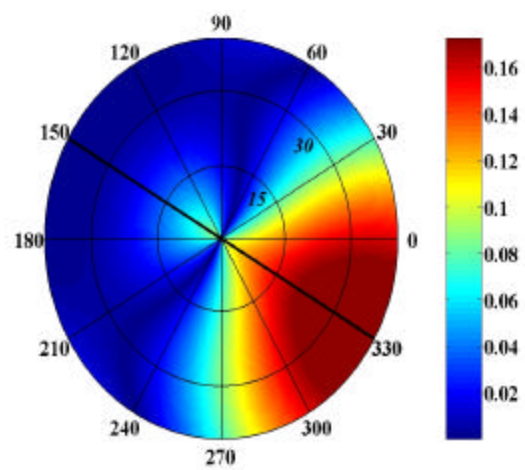


Figura 7c

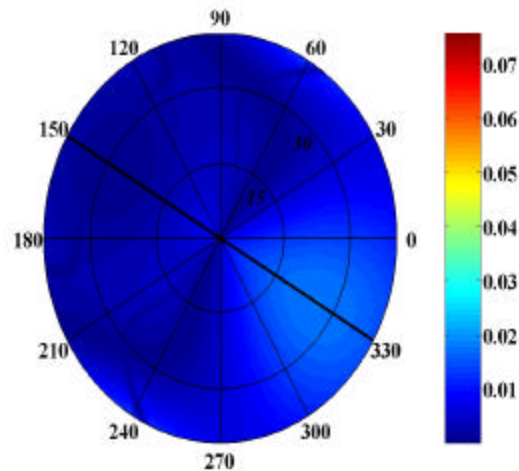


Figura 7- R_{SP} exato (7a), forma linear (7b) e erro absoluto (7c) do modelo sintético II. Este modelo apresenta forte anisotropia (22%) e fraco contraste ($\leq 10\%$). As velocidades das ondas P e S no meio isotrópico de referência são de $\alpha = 3,31$ km/s e $\beta = 1,93$ km/s respectivamente e foram escolhidas como sendo a média entre as velocidades das ondas P e S nos meios de incidência e subjacente. Erro da linearização inferior a 15% (0,025) da observação exata (0,16) para incidências de até 30° . Coeficientes sensíveis ao mergulho do eixo de simetria. Plano de simetria na direção azimutal 150° - 330° .

Para a onda convertida T de acordo com Figura 8a (R_{TP} exato) verifica-se que não há conversão de onda T no plano de simetria. O mesmo é verificado na Figura 8b (forma linearizada de R_{TP}). A linearização apresenta bons resultados para incidências de até 30° . O erro absoluto para essas incidências é em torno de 10% (0,015) (Figura 8c).

Figura 8a

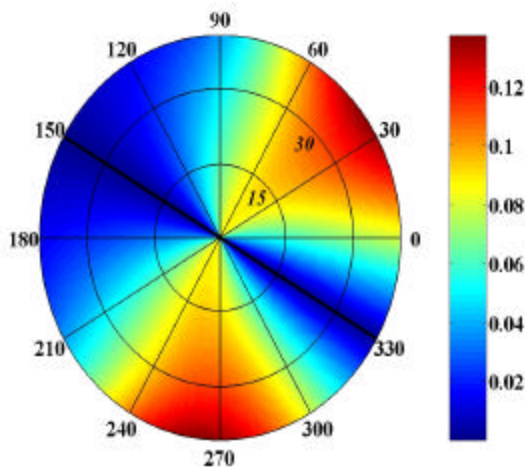


Figura 8b

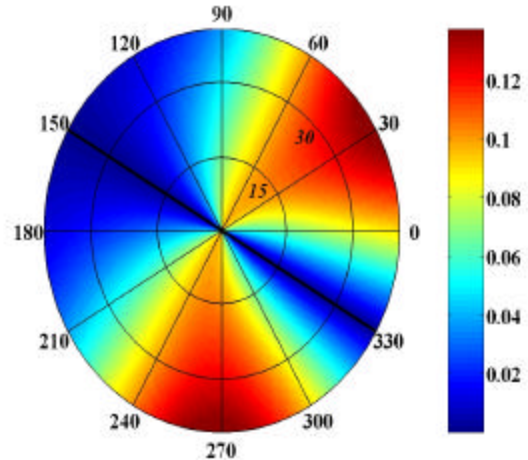


Figura 8c

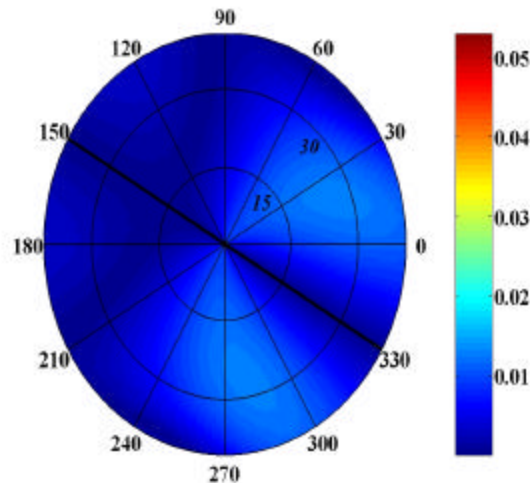


Figura 8 - R_{TP} exato (8a), forma linearizada (8b) e erro absoluto (8c) do modelo sintético II. Este modelo apresenta forte anisotropia (22%) e fraco contraste ($\leq 10\%$). As velocidades das ondas P e S no meio isotrópico de referência são de $\alpha = 3,31$ km/s e $\beta = 1,93$ km/s respectivamente e foram escolhidas como sendo a média entre as velocidades das ondas P e S nos meios de incidência e subjacente. A Forma linearizada apresenta erro da ordem de 10% (0,015) do valor exato (0,12) para incidências de até 30° . Coeficientes sensíveis ao mergulho do eixo de simetria. No plano de simetria (direção azimutal 150° - 330°) não há conversão de onda P em onda T.

De acordo com os resultados acima se verifica que para este modelo, para o qual o pressuposto de fraca anisotropia é violado, as fórmulas linearizadas das duas ondas convertidas S e T ainda apresentam desempenho satisfatório (erro menor que 15% do valor exato para incidências de até 30^0) e a fórmula linearizada de R_{PP} não é mais válida, pois o erro para incidências inferiores a 30^0 é da ordem de 35%.

2.3.3- Modelo III

Este modelo caracteriza-se por fraca anisotropia (8%) e forte contraste ($\approx 30\%$). O meio incidente é isotrópico com densidade de $\rho = 2,0 \text{ g/cm}^3$ e velocidades das ondas P e S são de $\alpha = 2,5 \text{ km/s}$ e $\beta = 1,20 \text{ km/s}$, respectivamente. O meio subjacente é um TIH com densidade $\rho = 2,60 \text{ g/cm}^3$. O tensor elástico medido em N/m^2 é dado por:

$$C_{ij} = \begin{bmatrix} 31,10 & 10,37 & 10,37 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ & 40,43 & 12,69 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ & & 40,43 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ & & & 13,86 & 0,00 & 0,00 \\ & & & & 12,38 & 0,00 \\ & & & & & 12,38 \end{bmatrix}. \quad (15)$$

O eixo de simetria do meio subjacente foi mantido alinhado com o eixo x_1 .

De acordo com a Figura 9a (R_{PP} exato) e a Figura 9b (R_{PP} linearizado), a forma linearizada não apresenta bom desempenho, pois se verifica que para incidências de até 30^0 o erro (Figura 9c) esta em torno de 50% (0,1) da observação exata (0,3). Os planos de simetria são mostrados nas direções dos azimutes 0^0 - 180^0 e 90^0 - 270^0 (linhas em preto mais grossas nos estereogramas).

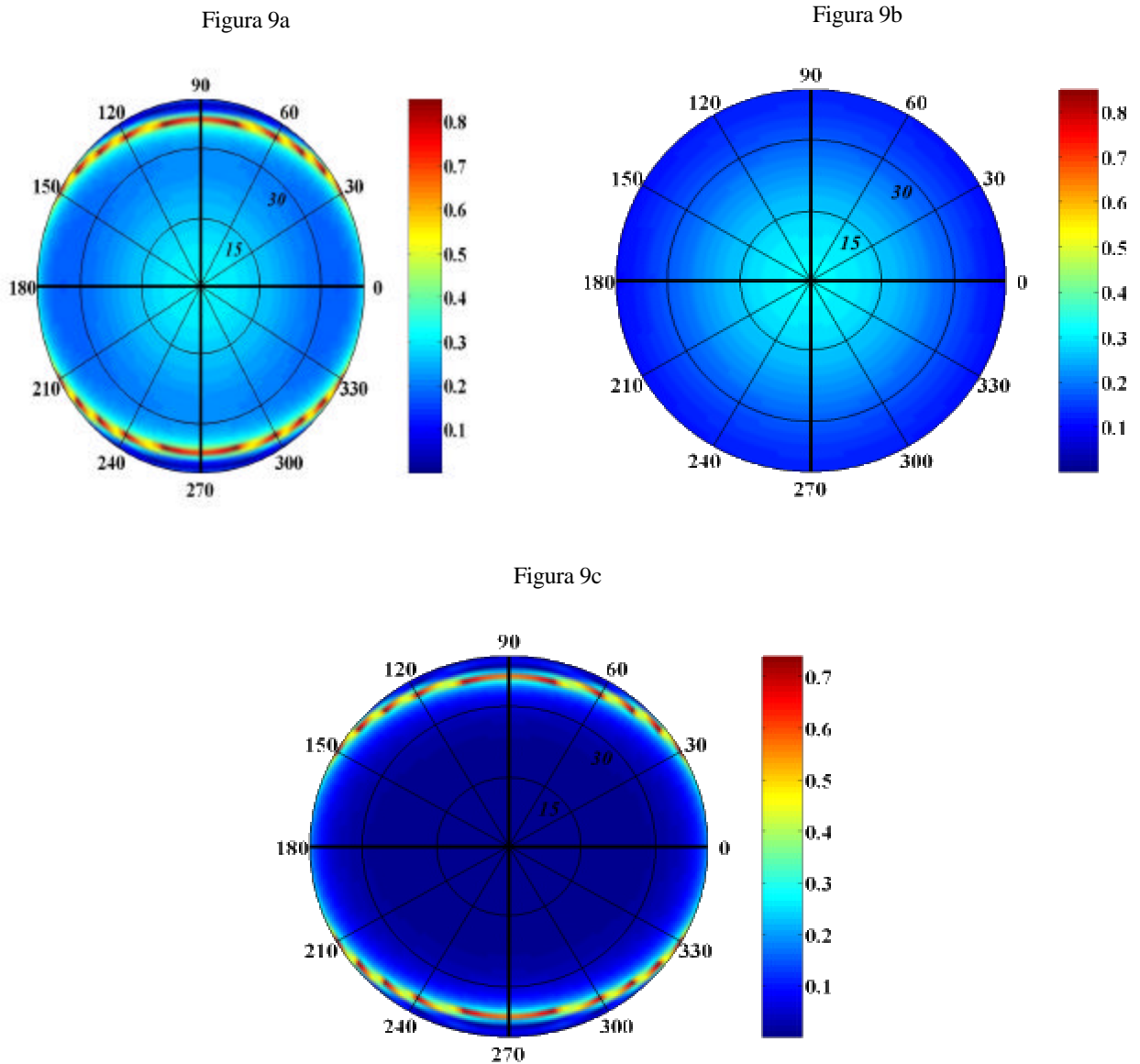


Figura 9- R_{PP} exato (9a), forma linearizada (9b) e erro absoluto (9c) do modelo sintético III. Este modelo apresenta fraca anisotropia (8%) e fraco contraste ($\approx 30\%$). As velocidades das ondas P e S no meio isotrópico de referencia são de $\alpha = 3,39$ km/s e $\beta = 1,79$ km/s respectivamente e foram escolhidas como sendo a média entre as velocidades das ondas P e S nos meios de incidência e subjacente. Forma linearizada apresenta erro em torno de 50% da observação exata para incidências de até 30° .

Para a onda convertida S as Figuras 10a e 10b mostram R_{SP} exato e sua forma linearizada, respectivamente. Este coeficiente mostra-se menos sensível à violação do pressuposto de fraco contraste que a forma linearizada de R_{PP} . Para incidências de até 30° o erro (Figura 10c) em torno de 33% (0,11) do valor exato (0,35).

Figura 10a

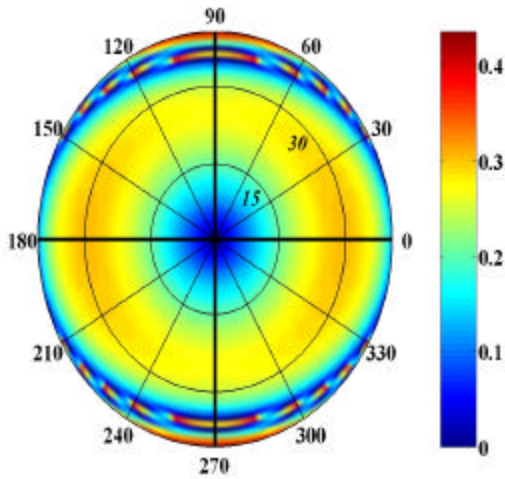


Figura 10b

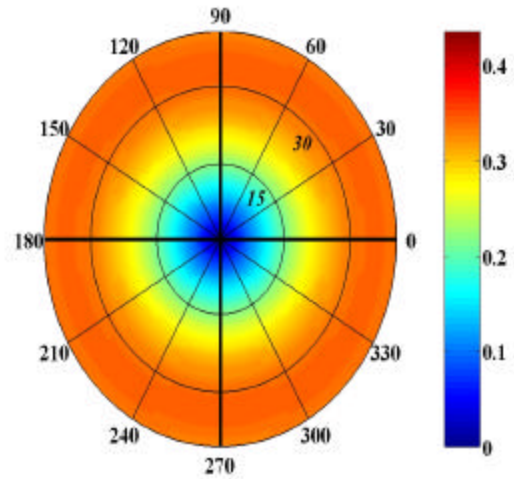


Figura 10c

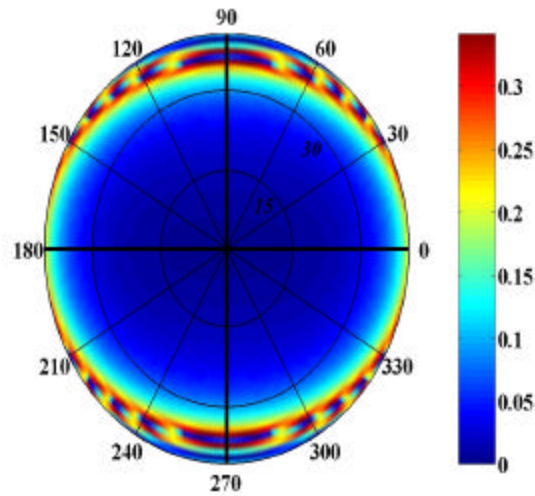


Figura 10- R_{SP} exato (10a), forma linear (10b) e erro absoluto (10c) do modelo sintético III. Este modelo apresenta fraca anisotropia (8%) e forte contraste (30%). As velocidades das ondas P e S no meio isotrópico de referência são de $\alpha = 3,39$ km/s e $\beta = 1,79$ km/s respectivamente e foram escolhidas como sendo a média entre as velocidades das ondas P e S nos meios de incidência e subjacente. Para este modelo a forma linear é menos sensível a violação do pressuposto de fraco contraste que a forma linear de R_{SP} .

Para a onda convertida T o coeficiente de reflexão exato e sua forma linearizada são dados pelas Figuras 11a e 11b, respectivamente. A forma linearizada apresenta para incidências de até 30° em certas direções erros (Figura 11c) da ordem de 100% (0,02).

Figura 11a

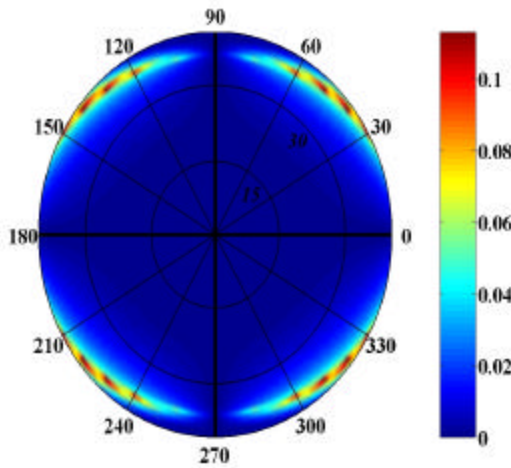


Figura 11b

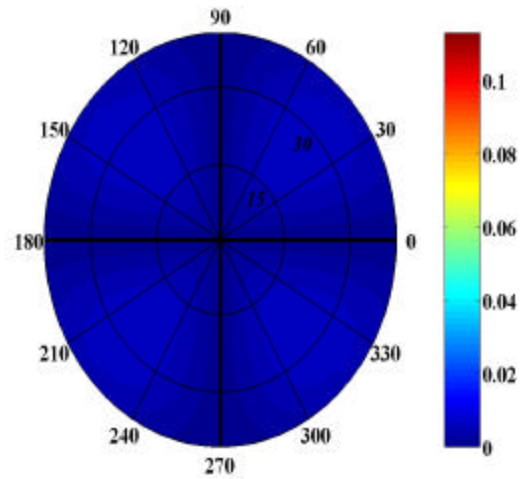


Figura 11c

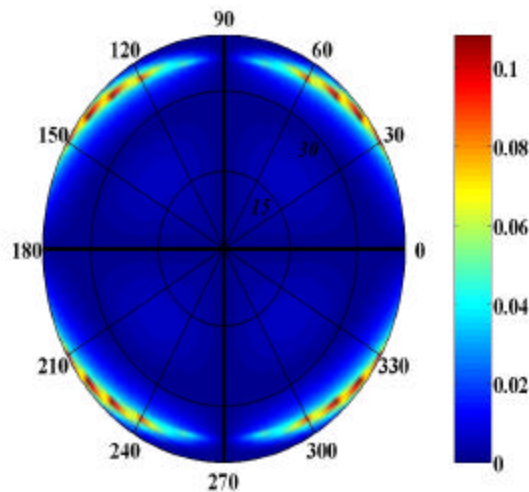


Figura 11 – R_{TP} exato (11a), forma linearizada (11b) e erro absoluto (11c) do modelo sintético III. Este modelo apresenta fraca anisotropia (8%) e forte contraste (30%). As velocidades das ondas P e S no meio isotrópico de referencia são de $\alpha = 3,39$ km/s e $\beta = 1,79$ km/s respectivamente e foram escolhidas como sendo a média entre as velocidades das ondas P e S nos meios de incidência e subjacente. Fórmula linear falha para este modelo. Nos planos de simetria tanto para R_{TP} exato como para forma linearizada e não há conversão da onda T.

Comparando com o modelo anterior conclui-se que as fórmulas linearizadas são mais sensíveis à violação do pressuposto de fraco contraste que à violação de fraca anisotropia. Isto de fato se confirma nos testes feitos em outros modelos cujos resultados são discutidos neste capítulo.

2.3.4- Modelo IV

Este modelo caracteriza-se por apresentar forte contraste ($\approx 35\%$) e forte anisotropia (22%). O meio incidente é um isotrópico cuja densidade é $\rho = 2,60 \text{ g/cm}^3$ e as velocidades das ondas P e S são $\alpha = 6,75 \text{ km/s}$ e $\beta = 3,83 \text{ km/s}$, respectivamente. O meio subjacente é o mesmo utilizado no modelo II, mas girado, em relação ao eixo x_3 de 90° obtendo-se assim um meio TIH cujo eixo de simetria está na direção de x_1 .

Comparando o coeficiente de reflexão exato (Figura 12a) e a forma linearizada (Figura 12b) verifica-se que para incidências de até 30° o erro em certas direções (Figura 12c) é pouco mais de 25% (0,09) do valor exato (0,35) e ainda verifica-se o aumento do erro à medida que a incidência aumenta. Neste modelo, onde os pressupostos da linearização são violados, a forma linearizada R_{PP} não tem validade.

Figura 12a

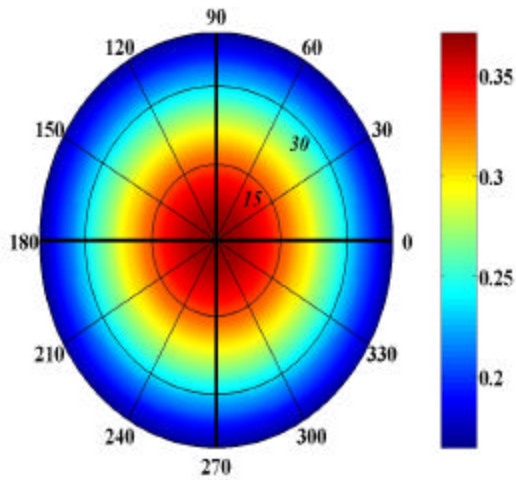


Figura 12b

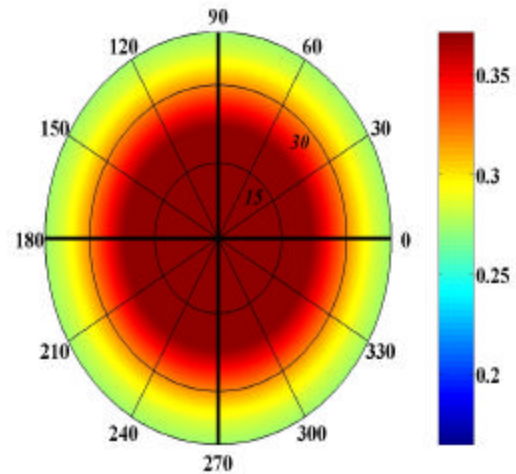


Figura 12c

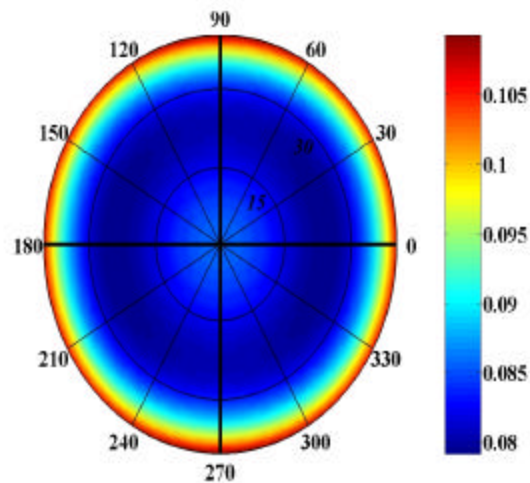


Figura 12- R_{PP} exato (12a), linearizado (12b) e erro absoluto (12c) do modelo sintético IV. Este modelo apresenta forte anisotropia (22%) e forte contraste ($\approx 35\%$). As velocidades das ondas P e S no meio isotrópico de referência são de $\alpha = 5,02$ km/s e $\beta = 2,80$ km/s respectivamente e foram escolhidas como sendo a média entre as velocidades das ondas P e S nos meios de incidência e subjacente. Formula linearizada mostra-se inválida para este modelo que se caracteriza por forte contraste e forte anisotropia. Planos de simetria representados pelas retas pretas mais grossas.

Para a onda convertida S, R_{SP} exato e linearizado são mostrados nas Figuras 13a e 13b, respectivamente. De acordo com o erro (Figura 13c) a forma linearizada apresenta em algumas direções erros um pouco maiores que 15% (0,04) do valor exato (0,35) para incidências de até 30° , uma vez que estamos considerando que a fórmula linearizada apresenta bom desempenho se seu erro é menor que 15% do valor exato, a forma linearizada é portanto, inválida para essas

incidências. No entanto, para incidências subnormais (incidências menores que 15°) (incidências menores que 15°), o erro é de apenas 10% (0,01) do valor exato (0,1).

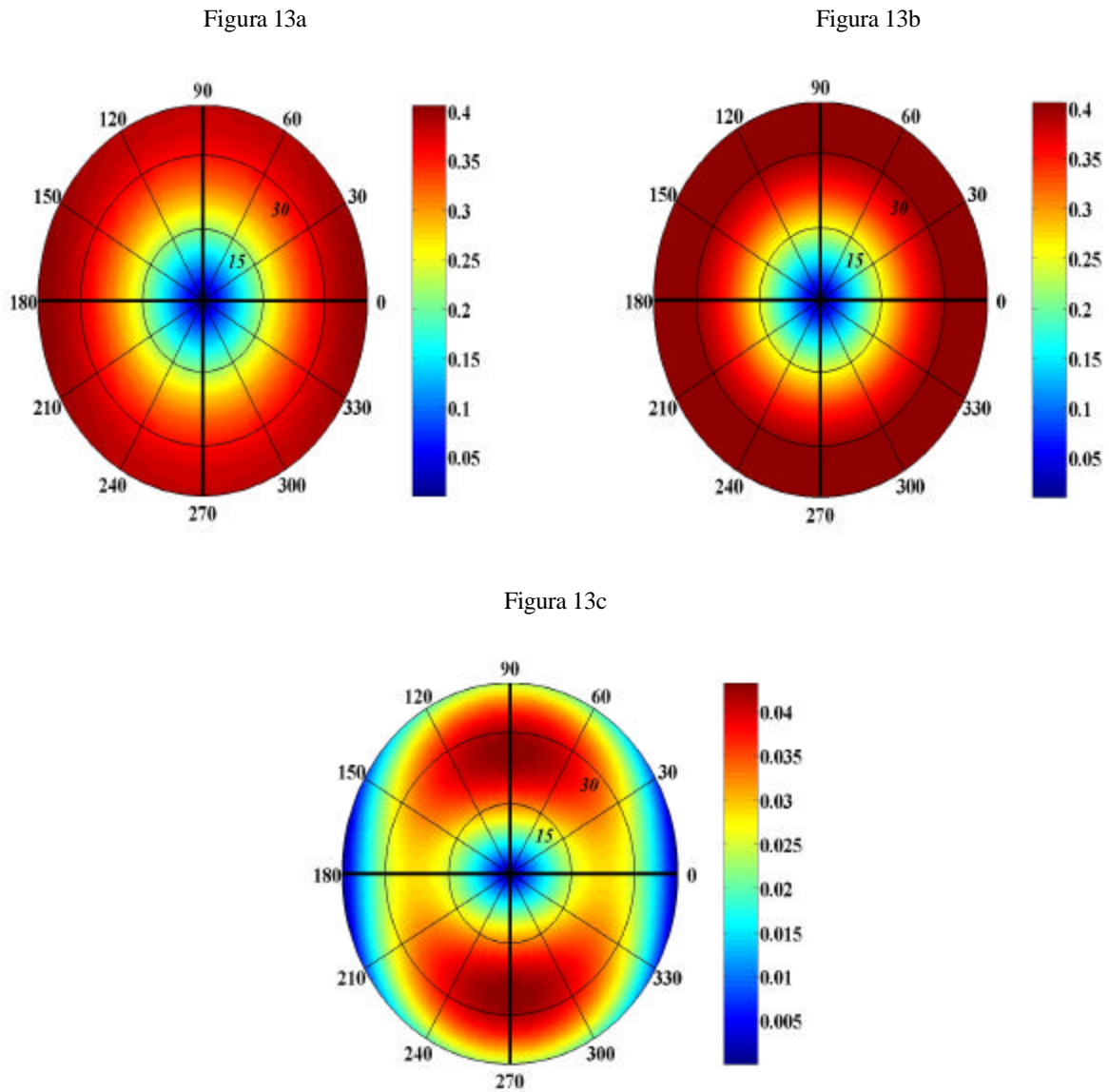


Figura 13 – R_{SP} exato (13a), forma linearizada (13b) e erro absoluto (13c) do modelo sintético IV. Este modelo apresenta forte anisotropia (22%) e forte contraste ($\approx 35\%$). As velocidades das ondas P e S no meio isotrópico de referência são de $\alpha = 5,02$ km/s e $\beta = 2,80$ km/s respectivamente e foram escolhidas como sendo a média entre as velocidades das ondas P e S nos meios de incidência e subjacente. Neste modelo a forma linearizada R_{SP} ainda permanece válida para incidências de até 30° .

Para a onda convertida T o coeficiente de reflexão exato e a forma linearizada são dados pelas Figuras 14a e 14b, respectivamente. Excetuando-se os planos de simetria, onde não há

conversão da onda T, a forma linearizada mostra-se inadequada com erro superior a 100% (0,01) do valor exato (Figura 14c).

Figura 14 a

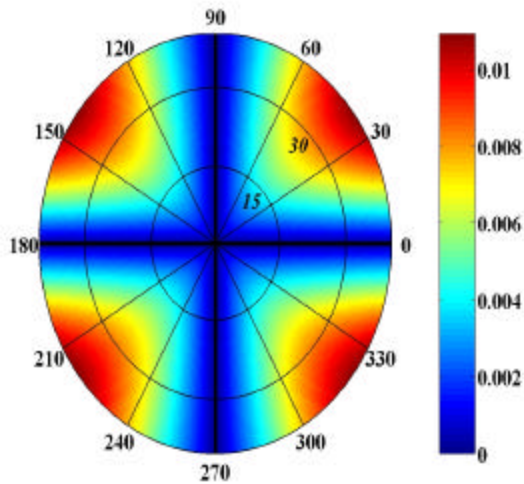


Figura 14 b

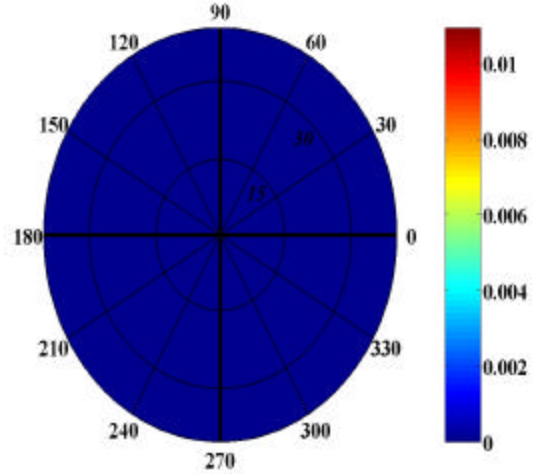


Figura 14c

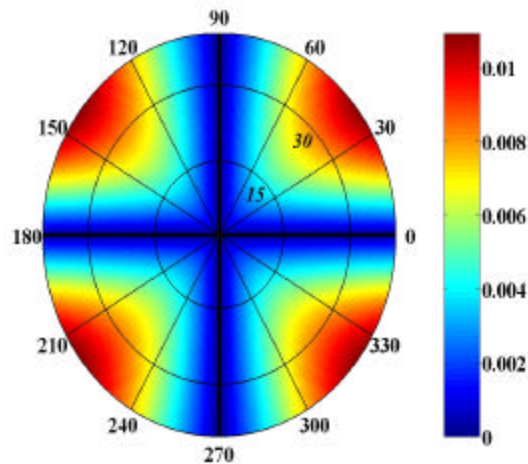


Figura 13 – R_{TP} exato (14a), linearizado(14b) e erro absoluto(14c) do modelo sintético IV. Este modelo apresenta forte anisotropia (22%) e forte contraste ($\approx 35\%$). As velocidades das ondas P e S no meio isotrópico de referência são de $\alpha = 5,02$ km/s e $\beta = 2,80$ km/s respectivamente e foram escolhidas como sendo a média entre as velocidades das ondas P e S nos meios de incidência e subjacente. Forma linearizada mostra-se consistente apenas nos planos de simetria onde não há conversão da onda T.

2.3.5- Análise dos resultados

Além dos quatro modelos aqui apresentados foram feitos testes com outros modelos sintéticos com níveis de anisotropia diferentes e diferentes contrastes dos parâmetros elásticos. Considerando que a linearização apresenta bom desempenho para erros até 10% do valor exato pode-se concluir que: Para modelos, onde o meio de incidência é isotrópico verifica-se que as aproximações lineares dos coeficientes R_{PP} , R_{SP} e R_{TP} apresentam um bom desempenho quando os modelos obedecem aos pressupostos utilizados nas linearizações, ou seja, baixos contrastes e fraca anisotropia e não apresentam bom desempenho quando esses dois pressupostos são violados. As linearizações apresentam melhor desempenho quando a hipótese de fraca anisotropia é violada do que quando a hipótese de fraco contraste é violada.

Também foram feitos testes considerando o meio incidente anisotrópico e verifica-se que quando o meio de incidência tem simetria azimutal, além de obedecer aos pressupostos de fraca anisotropia e fraco contraste, as linearizações, apresentam bom desempenho. Isto se deve ao fato das direções de polarização das ondas convertidas serem pequenas perturbações das direções de polarização ondas S_V e S_H que é um dos pressupostos a ser respeitado pelas linearizações. Estas linearizações R_{PP} , R_{SP} e R_{TP} não têm validade quando esse pressuposto é violado, o que ocorre nos casos em que o meio de referência não apresenta simetria azimutal.

Em modelos TI com eixo de simetria mergulhado foi verificado que os coeficientes R_{PP} exato e a forma linearizada mostram-se insensíveis ao mergulho do eixo de simetria. Devido a este fato conclui-se que tanto na forma exata como na linearização do coeficiente R_{PP} algumas informações sobre os meios não podem ser recuperadas, enquanto que, as formas exatas e linearizadas dos coeficientes R_{SP} e R_{TP} possuem informações sobre todos os parâmetros elásticos do meio.

A metodologia proposta pode ser aplicada mesmo em casos de contraste moderado de impedância e anisotropia dentro dos limites esperados em rochas sedimentares.

Em todos os exemplos excluiu-se a região muito próxima a ângulos críticos onde o comportamento da refletividade é altamente não linear como já havia sido observado em modelos isotrópicos por Castagna (1992).

As aproximações apresentadas neste capítulo foram obtidas a partir dos pressupostos de fraco contraste entre as propriedades elásticas dos meios e anisotropia fraca. Entretanto os limites de validade destas fórmulas não podem ser caracterizados a partir de sua dedução. Uma análise

que estabeleça esses limites é necessária para se determinar a sua utilização na interpretação de AVO/AVD e é apresentada no próximo capítulo.

3 - ANÁLISE DE SENSIBILIDADE DAS FORMAS LINEARES DO COEFICIENTE DE REFLEXÃO DE UMA ONDA INCIDENTE P E SUAS CONVERTIDAS

Neste capítulo foi feita uma análise de sensibilidade das fórmulas lineares dos coeficientes de reflexão de uma onda P e suas convertidas apresentadas no capítulo anterior. Aqui essas linearizações foram estudadas para pequenos ângulos de incidência e ângulos de incidência quaisquer considerando inicialmente cada fórmula em separado e por fim a equação formada pelas três fórmulas linearizadas. O objetivo foi determinar a influência da geometria do levantamento e da escolha do meio de referência na resolução dos parâmetros elásticos ou combinação de parâmetros elásticos que aparecem em R_{PP} , R_{SP} e R_{TP} .

3.1 – FORMULAS LINEARES

As fórmulas lineares apresentadas em (7), (8) e (9) foram reescritas na forma matricial:

$$Y_i^{obs} = A_{ij} p_j, \quad \begin{matrix} i = 1, \dots, Nobs \\ j = 1, \dots, Npar \end{matrix} \quad (16)$$

Em que Y_i^{obs} é a i -ésima componente do vetor formado pelos coeficientes de reflexão observados, p_j é a j -ésima componente do vetor formado pelos contrastes dos parâmetros elásticos, pelos contrastes das combinações de parâmetros elásticos e pelo contrastes da densidade⁶. Este vetor (\mathbf{p}) está organizado como:

$$\begin{aligned} p_1 &= \Delta C_{11} & p_2 &= \Delta (C_{12} + 2C_{66}) & p_3 &= \Delta (C_{13} + 2C_{55}) \\ p_4 &= \Delta C_{22} & p_5 &= \Delta (C_{23} + 2C_{44}) & p_6 &= \Delta C_{33} \\ p_7 &= \Delta C_{44} & p_8 &= \Delta C_{55} & p_9 &= \Delta C_{14} \\ p_{10} &= \Delta C_{15} & p_{11} &= \Delta C_{16} & p_{12} &= \Delta C_{24} \\ p_{13} &= \Delta C_{25} & p_{14} &= \Delta C_{26} & p_{15} &= \Delta C_{34} \\ p_{16} &= \Delta C_{35} & p_{17} &= \Delta C_{36} & p_{18} &= \Delta C_{45} \\ p_{19} &= \Delta C_{46} & p_{20} &= \Delta C_{56} & p_{21} &= \Delta \rho / \rho \end{aligned} \quad , \quad (17)$$

e \mathbf{A} é a matriz formada pelos coeficientes que aparecem junto aos parâmetros elásticos nas equações (7), (8) e (9). Para efeito de simplificação nestas equações lineares reescrevemos os

⁶ A partir de agora ao invés de nos referirmos aos 20 parâmetros elásticos mais os contrastes de densidade apenas como os 21 parâmetros do vetor \mathbf{p} .

contrastes dos parâmetros elásticos ΔC_{IJ} ponderados pelo fator $2\rho\alpha^2$ (ρ a densidade e α^2 o quadrado da velocidade da onda P do meio de referência), isto é:

$$\Delta C_{IJ} = \frac{\delta C_{IJ}^{(2)} - \delta C_{IJ}^{(1)}}{4\rho\alpha^2}. \quad (18)$$

Desta forma a matriz \mathbf{A} agora dependente apenas de dois fatores que são: a geometria de levantamento e a razão entre as velocidades das ondas S e P no meio de referência (fator k). A sensibilidade das estimativas dos parâmetros elásticos a esses dois fatores foi então estudada.

As fórmulas lineares dos coeficientes de reflexão de uma onda P e suas convertidas apresentadas no capítulo anterior ((7), (8) e (9)) são válidas para ângulos de incidência arbitrário. As formulas lineares para pequenos ângulos de incidência ($\theta \leq 20^\circ$) foram determinadas fazendo $\sin^i \theta = 0$ para $i \geq 3$ nestas linearizações.

Primeiramente é feita uma análise de cada fórmula por inspeção. Em seguida é calculada a matriz \mathbf{A} para o fator k determinando tal que a velocidade α da onda P no meio de referência foi escolhida de forma arbitrária e a velocidade β da onda S no meio de referência foi determinada segundo a razão de Poisson e considerando-se várias geometrias de levantamento. Para cada valor de k e cada geometria foi então calculada a matriz de resolução (\mathbf{L}) de \mathbf{A} dada por (Menke, 1984):

$$\mathbf{\ddot{E}} = \mathbf{V}_r \mathbf{V}_r^T, \quad (19)$$

sendo \mathbf{V} a matriz cujas colunas são autovetores de \mathbf{A} . r é o subscrito que se refere ao posto efetivo da matriz \mathbf{A} e \mathbf{V}^T a matriz transposta de \mathbf{V} . O posto efetivo r é determinado pelo número de valores singulares da matriz \mathbf{A} maiores que o valor absoluto 10^{-8} . Desta forma os parâmetros cujas maiores projeções nas colunas da matriz \mathbf{V} associadas aos valores singulares de \mathbf{A} menor que 10^{-8} não podem ser resolvidos. Isso pode ser verificado através da matriz \mathbf{L} , cujo valor na diagonal principal relativa a esses parâmetros é menor que a unidade.

Chamaremos a essa análise e de análise de sensibilidade conservativa para diferenciar da análise de sensibilidade que é feita à medida que os parâmetros são estimados na presença de ruído.

Este tipo de análise tem esse nome porque não se pode dizer que parâmetros serão com certeza resolvidos apenas os que parâmetros não podem ser resolvidos.

Foi então determinado à geometria de levantamento que recupera o maior número de parâmetros elásticos.

3.1.1 – Coeficiente de reflexão linearizado de uma onda P (R_{PP})

Para pequenos ângulos de incidência (θ) e azimutes (φ) arbitrários, o coeficiente de reflexão da onda P, R_{PP} é dado por:

$$R_{PP} = \frac{1}{2\rho\alpha^2} \left\{ \left[2 \left[\Delta(C_{13} + 2C_{55}) \cos^2 \varphi + \Delta(C_{23} + 2C_{44}) \sin^2 \varphi + \Delta(C_{36} + 2C_{45}) \sin 2\varphi - 4 \left(\Delta C_{55} \cos^2 \varphi + \Delta C_{44} \sin^2 \varphi + \Delta C_{45} \sin 2\varphi \right) \right] \sin^2 \theta + \Delta C_{33} \cos^2 \theta \right] + \left(1 - \frac{1}{2 \cos^2 \theta} \right) \frac{\Delta\rho}{\rho} \right\}; \quad (20)$$

Para incidências (θ) e azimutes (φ) arbitrários o coeficiente R_{PP} linearizado é dado por:

$$R_{PP} = \frac{1}{2\rho\alpha^2} \left\{ \left[\Delta C_{11} \cos^4 \varphi + \Delta C_{22} \sin^4 \varphi + 2 \Delta(C_{12} + 2C_{66}) \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi + 4 \Delta C_{16} \cos^3 \varphi \sin \varphi + 4 \Delta C_{26} \cos \varphi \sin^3 \varphi \right] \operatorname{tg}^2 \theta \sin^2 \theta + 2 \left[\Delta(C_{13} + 2C_{55}) \cos^2 \varphi + \Delta(C_{23} + 2C_{44}) \sin^2 \varphi + \Delta(C_{36} + 2C_{45}) \sin 2\varphi - 4 \left(\Delta C_{55} \cos^2 \varphi + \Delta C_{44} \sin^2 \varphi + \Delta C_{45} \sin 2\varphi \right) \right] \sin^2 \theta + \Delta C_{33} \cos^2 \theta \right] + \left(1 - \frac{1}{2 \cos^2 \theta} \right) \frac{\Delta\rho}{\rho} \right\}; \quad (21)$$

Por inspeção das equações (20) e (21), verifica-se que para pequenos ângulos o parâmetro ΔC_{11} não pode ser recuperado para azimute zero e para azimute arbitrário além de ΔC_{11} os parâmetros resultantes de sua rotação também não podem ser encontrados. Além disso, a fórmula linearizada do coeficiente de reflexão de uma onda P (R_{PP}) para qualquer que seja a incidência não apresenta todos os 20 parâmetros elásticos dos meios envolvidos no espalhamento e temos ainda que considerando azimute arbitrário na fórmula para pequenos ângulos, apenas 8 dos 21 parâmetros de \mathbf{p} aparecem, e na fórmula de incidência arbitrária apenas 13 dos 21 parâmetros de

p são recuperados. Desta forma conclui-se que as fórmulas lineares de R_{PP} não apresentam informação total sobre os meios envolvidos no espalhamento.

Na tabela 1 abaixo é apresentado para cada uma das fórmulas lineares de R_{PP} (equações (20) e (21)) o número máximo de parâmetros que podem ser recuperados para uma geometria de levantamento empregada.

Tabela 1- Parâmetros elásticos que aparecem nas duas fórmulas lineares de R_{PP} . Parâmetros que poderão ser recuperados e a geometria mínima empregada para determinar esses parâmetros.

Fórmula linear	Parâmetros	Parâmetros que poderão ser recuperados	Geometria
R_{PP} ($\theta \leq 20^0$)	$\Delta(C_{13}+2C_{55}), \Delta(C_{23}+2C_{44}), \Delta C_{33}, \Delta C_{44}, \Delta C_{55}, \Delta C_{45}, \Delta C_{36}, \Delta\rho/\rho.$	$\Delta C_{33}, \Delta\rho/\rho.$	Incidência (θ) de até 20^0 com incremento de 1^0 e azimuth (φ) de 0^0 a 360^0 com incremento de 15^0 .
R_{PP} (θ arbitrário)	$\Delta C_{11}, \Delta(C_{12}+2C_{66}), \Delta(C_{13}+2C_{55}), \Delta C_{22}, \Delta(C_{23}+2C_{44}), \Delta C_{55}, \Delta C_{33}, \Delta C_{44}, \Delta C_{16}, \Delta C_{26}, \Delta C_{36}, \Delta C_{45}.$	$\Delta C_{16}, \Delta C_{26}.$	Incidência (θ) de até 30^0 com incremento de 1^0 e azimuth (φ) de 0^0 a 360^0 com incremento de 30^0 .

Apesar da onda P ter maior energia e ser mais facilmente medida, o coeficiente de reflexão R_{PP} linearizado mesmo para ângulos de incidência arbitrária não se pode obter informações sobre todos os parâmetros elásticos dos meios utilizando apenas o coeficiente linearizado R_{PP} . Isto é verificado no modelo I mostrado no capítulo anterior que em um meio TI cujo eixo de simetria apresentava mergulho e, no entanto o coeficiente R_{PP} era insensível a este mergulho (Figura 13b).

3.1.2- Coeficiente de reflexão linearizado da onda convertida S (R_{SP}).

Para pequenos ângulos de incidência (θ) e azimutes arbitrários (φ), o coeficiente de reflexão R_{SP} da onda S é dado por:

$$\begin{aligned}
 R_{SP} = \frac{1}{2\rho \alpha^2 \eta(\theta)} & \left\{ 2 \left[\Delta(C_{13} + 2C_{55}) \cos^2 \varphi + \Delta(C_{23} + 2C_{44}) \sin^2 \varphi + \right. \right. \\
 & \left. \left. 2\Delta(C_{36} + 2C_{45}) \sin 2\varphi - 4 \left(\Delta C_{55} \cos^2 \varphi + \Delta C_{44} \sin^2 \varphi + \Delta C_{45} \sin 2\varphi \right) \right] \right. \\
 & \left. \sin \theta \cos 2\theta - \Delta C_{33} \sin 2\theta \cos \theta + \frac{1}{kK(\theta)} \left\{ 2 \left[\Delta C_{14} \cos^2 \varphi \sin \varphi + \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \Delta C_{15} \cos^3 \varphi + \Delta C_{24} \sin^3 \varphi + \Delta C_{25} \cos \varphi \sin^2 \varphi + \Delta C_{46} \sin 2\varphi \sin \varphi + \right. \right. \\
 & \left. \left. \Delta C_{56} \cos \varphi \sin 2\varphi \right] \sin^2 \theta (2kK(\theta) \cos \theta - 1) + 2 \left[\Delta C_{35} \cos \varphi + \right. \right. \\
 & \left. \left. \Delta C_{34} \sin \varphi \right] \cos \theta (\cos \theta - 2K(\theta) \omega(\theta)) + 2 \left[\Delta C_{55} \cos^2 \varphi + \right. \right. \\
 & \left. \left. \Delta C_{44} \sin^2 \varphi + \Delta C_{45} \sin 2\varphi \right] \sin 2\theta \right\} \left. \right\} - \left(\frac{\sin \theta}{K(\theta)} \right) \frac{\Delta \rho}{\rho}. \tag{22}
 \end{aligned}$$

Para incidências (θ) e azimutes (φ) arbitrários, o coeficiente de reflexão R_{SP} da onda S é dado por:

$$\begin{aligned}
 R_{SP} = \frac{1}{2\rho \alpha^2 \eta(\theta)} & \left\{ 2 \left[\Delta C_{11} \cos^4 \varphi + \Delta C_{22} \sin^4 \varphi + 2\Delta (C_{12} + 2C_{66}) \right. \right. \\
 & \left. \left. \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi + 4\Delta C_{16} \cos^3 \varphi \sin \varphi + 4\Delta C_{26} \cos \varphi \sin^3 \varphi \right] \sin^3 \theta + \right. \\
 & 2 \left[\Delta (C_{13} + 2C_{55}) \cos^2 \varphi + \Delta (C_{23} + 2C_{44}) \sin^2 \varphi + 2\Delta (C_{36} + 2C_{45}) \right. \\
 & \left. \sin 2\varphi - 4 \left(\Delta C_{55} \cos^2 \varphi + \Delta C_{44} \sin^2 \varphi + \Delta C_{45} \sin 2\varphi \right) \right] \sin \theta \cos 2\theta - \\
 & \Delta C_{33} \sin 2\theta \cos \theta + \frac{1}{kK(\theta)} \left\{ 2 \left[\Delta C_{14} \cos^2 \varphi \sin \varphi + \Delta C_{15} \cos^3 \varphi + \Delta C_{24} \right. \right. \\
 & \left. \left. \sin^3 \varphi + \Delta C_{25} \cos \varphi \sin^2 \varphi + \Delta C_{46} \sin 2\varphi \sin \varphi + \Delta C_{56} \cos \varphi \sin 2\varphi \right] \right. \\
 & \left. \sin^2 \theta (2k\omega(\theta) - 1) + 2 \left[\Delta C_{35} \cos \varphi + \Delta C_{34} \sin \varphi \right] \cos \theta (\cos \theta - \right. \\
 & \left. 2K(\theta)\omega(\theta)) + 2 \left[\Delta C_{55} \cos^2 \varphi + \Delta C_{44} \sin^2 \varphi + \Delta C_{45} \sin 2\varphi \right] \sin 2\theta \right. \\
 & \left. \left(k^2 \sin^2 \theta - K^2(\theta) \right) \right\} \left. \right\} - \left(\frac{\sin \theta}{K(\theta)} \right) \frac{\Delta \rho}{\rho}. \quad (23)
 \end{aligned}$$

Da mesma forma que para R_{PP} , por inspeção das equações (20) e (23) verifica-se que para pequenas incidências o parâmetro ΔC_{11} e os parâmetros resultantes de sua rotação não podem ser recuperados de R_{SP} . Além disso ainda em (22), os fatores que multiplicam os parâmetros ΔC_{15} e ΔC_{55} ficam reduzidos⁷ (estes fatores são funções do ângulo de incidência e da razão entre as velocidades das ondas cisalhantes e longitudinal no meio de referência).

Dos 21 parâmetros de \mathbf{p} , a fórmula linearizada de R_{SP} para pequenas incidências apresenta apenas 16 parâmetros. Para incidência arbitrária a forma linearizada de R_{SP} apresenta todos os 21 parâmetros de \mathbf{p} . Isso implica que o coeficiente de reflexão da onda S apresenta toda informação referente aos meios envolvidos no espalhamento.

⁷ Na equação (22) o parâmetro ΔC_{15} está multiplicado pelo fator $\sin^2 \theta (\cos \theta - 2kK(\theta))$ enquanto que, na equação ΔC_{15} está em função de $\sin^2 \theta (2k\omega(\theta) - 1)$. Na equação (22) o parâmetro ΔC_{55} está multiplicado apenas por $\sin 2\theta$, enquanto que, na equação (23) ΔC_{55} está multiplicado por $\sin 2\theta$ e pelo fator $(k^2 \sin^2 \theta - K^2(\theta))$.

A tabela 2 apresenta os parâmetros que aparecem nas duas fórmulas de R_{SP} (equações (22) e (23)), os parâmetros que poderão ser recuperados e a geometria empregada. Apesar desta tabela mostrar para a segunda forma linearizada de R_{SP} (com incidências arbitrárias) incidências de até 90^0 e que parâmetros puderam ser recuperados e de sabe-se que na prospecção sísmica os ângulos de incidência usados são menores⁸ procurou-se determinar a geometria mínima que recuperava o maior número de parâmetros possível.

Tabela 2- Parâmetros elásticos que aparecem nas duas fórmulas lineares de R_{SP} . Parâmetros que poderão ser recuperados e a geometria mínima empregada para determinar esses parâmetros.

Fórmula linear	Parâmetros	Parâmetros que poderão ser recuperados	Geometria
R_{SP} ($\theta \leq 20^0$)	$\Delta(C_{13}+2C_{55}), \Delta(C_{23}+2C_{44}),$ $\Delta C_{33}, \Delta C_{55}, \Delta C_{44}, \Delta C_{14}, \Delta C_{15},$ $\Delta C_{24}, \Delta C_{25}, \Delta C_{34}, \Delta C_{35}, \Delta C_{36},$ $\Delta A_{46}, \Delta A_{56}, \Delta C_{45}, \Delta \rho/\rho.$	$\Delta C_{15}, \Delta C_{24}, \Delta C_{34}, \Delta C_{35},$ $\Delta C_{36}, \Delta C_{45}.$	Incidência (θ) de até 15^0 com incremento de 1^0 e azimuth (ϕ) de 0^0 a 360^0 com incremento de 45^0
R_{SP} (θ arbitrário)	$\Delta C_{11}, \Delta(C_{12}+2C_{66}), \Delta(C_{13}+2C_{55}),$ $\Delta C_{22}, \Delta(C_{23}+2C_{44}), \Delta C_{33},$ $\Delta C_{55}, \Delta C_{44}, \Delta C_{14}, \Delta C_{15}, \Delta C_{16},$ $\Delta C_{24}, \Delta C_{25}, \Delta C_{26}, \Delta C_{34}, \Delta C_{35},$ $\Delta C_{36}, \Delta C_{45}, \Delta C_{46}, \Delta C_{56}; \Delta \rho/\rho.$	$\Delta C_{55}, \Delta C_{44}, \Delta C_{15}, \Delta C_{16},$ $\Delta C_{24}, \Delta C_{26}, \Delta C_{34}, \Delta C_{35},$ $\Delta C_{36}, \Delta C_{45}; \Delta \rho/\rho.$	Incidência (θ) de até 45^0 com incremento de 1^0 e azimuth (ϕ) de 0^0 a 360^0 com incremento de 15^0 .

Apesar da fórmula de R_{SP} apresentar para ângulos de incidência variável todos os parâmetros elásticos foi verificado que não podemos recuperar todos esses parâmetros a partir da inversão apenas desta fórmula linear.

⁸ Para incidência de até 30^0 e azimuth variando de 0^0 até 360^0 com incremento de 15^0 , apenas os parâmetros $\Delta C_{15}, \Delta C_{24}, \Delta C_{34}, \Delta C_{35}$ são totalmente recuperados por esta geometria. Já para incidências de até 45^0 e mesmas medidas azimutais os parâmetros $\Delta C_{15}, \Delta C_{16}, \Delta C_{24}, \Delta C_{26}, \Delta C_{34}, \Delta C_{35}, \Delta C_{36}$ e ΔC_{45} são totalmente recuperados.

3.1.3 - Coeficiente de reflexão linearizado da onda convertida T (R_{TP}).

Para pequenos ângulos de incidência (θ) e azimutes arbitrários (φ), o coeficiente R_{TP} de reflexão da onda convertida T é dado por:

$$\begin{aligned}
 R_{TP} = \frac{1}{\rho \alpha^2 K(\theta)} \left\{ \frac{1}{k} \left\{ \left[\Delta C_{14} \cos^3 \varphi - \Delta C_{25} \sin^3 \varphi + (\Delta C_{24} \sin \varphi - \Delta C_{15} \cos \varphi) \right. \right. \right. \\
 \left. \left. \left. \cos \varphi \sin \varphi + (\Delta C_{46} \cos \varphi - \Delta C_{56} \sin \varphi) \sin 2\varphi \right] \sin^2 \theta + \left[\Delta C_{45} \cos 2\varphi + \right. \right. \\
 \left. \left. \Delta C_{44} \cos \varphi \sin \varphi - \Delta C_{55} \cos \varphi \sin \varphi \right] \sin 2\theta + \left[\Delta C_{34} \cos \varphi - \Delta C_{35} \sin \varphi \right] \right. \\
 \left. \left. \cos^2 \theta \right\} - \frac{1}{\eta(\theta)} \left\{ \left[\Delta C_{14} \cos \varphi (\cos^2 \varphi - 2 \sin^2 \varphi) + 3(\Delta C_{24} \sin \varphi - \Delta C_{15} \cos \varphi) \right. \right. \\
 \left. \left. \sin \varphi \cos \varphi + 2\Delta C_{46} \sin \varphi (2 \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) + \Delta C_{25} \sin \varphi (2 \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) + \right. \right. \\
 \left. \left. 2\Delta C_{56} \cos \varphi (\cos^2 \varphi - 2 \sin^2 \varphi) \right] \cos \theta \sin^2 \theta + \left[\Delta(C_{36} + 2C_{45}) \cos 2\varphi - \right. \right. \\
 \left. \left. \Delta(C_{13} + 2C_{55}) \sin \varphi \cos \varphi + \Delta(C_{23} + 2C_{44}) \sin \varphi \cos \varphi \right] \cos^2 \theta \sin \theta + \right. \\
 \left. \left. \left[\Delta C_{34} \cos \varphi - \Delta C_{35} \sin \varphi \right] \cos^3 \theta \right\} \right\}. \tag{24}
 \end{aligned}$$

Para incidências (θ) e azimutes (φ) arbitrários, o coeficiente R_{TP} da onda T é dado por:

$$\begin{aligned}
R_{TP} = & \frac{1}{\rho \alpha^2 K(\theta)} \left\{ \frac{1}{k} \left[\Delta C_{14} \cos^3 \varphi - \Delta C_{25} \sin^3 \varphi + (\Delta C_{24} \sin \varphi - \Delta C_{15} \cos \varphi) \cos \varphi \sin \varphi + \right. \right. \\
& (\Delta C_{46} \cos \varphi - \Delta C_{56} \sin \varphi) \sin 2\varphi \left. \right] \sin^2 \theta + \left[\Delta C_{45} \cos 2\varphi + \Delta C_{44} \cos \varphi \sin \varphi - \right. \\
& \left. \Delta C_{55} \cos \varphi \sin \varphi \right] \sin 2\theta + \left[\Delta C_{34} \cos \varphi - \Delta C_{35} \sin \varphi \right] \cos^2 \theta \left. \right\} - \\
& \frac{1}{\eta(\theta)} \left\{ \left[\Delta C_{16} \cos^2 \varphi (\cos^2 \varphi - 3 \sin^2 \varphi) + \Delta C_{26} \sin^2 \varphi (3 \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) + \right. \right. \\
& (\Delta C_{22} \sin^2 \varphi - \Delta C_{11} \cos^2 \varphi) \cos \varphi \sin \varphi + \Delta(C_{12} + 2C_{66}) \cos \varphi \sin \varphi \cos 2\varphi \left. \right] \sin^3 \theta + \\
& \left[\Delta C_{14} \cos \varphi (\cos^2 \varphi - 2 \sin^2 \varphi) + 3 (\Delta C_{24} \sin \varphi - \Delta C_{15} \cos \varphi) \sin \varphi \cos \varphi + 2\Delta C_{46} \right. \\
& \left. \sin \varphi (2 \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) + \Delta C_{25} \sin \varphi (2 \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) + 2\Delta C_{56} \cos \varphi \right. \\
& \left. (\cos^2 \varphi - 2 \sin^2 \varphi) \right] \cos \theta \sin^2 \theta + \left[\Delta(C_{36} + 2C_{45}) \cos 2\varphi - \Delta(C_{13} + 2C_{55}) \right. \\
& \left. \sin \varphi \cos \varphi + \Delta(C_{23} + 2C_{44}) \sin \varphi \cos \varphi \right] \cos^2 \theta \sin \theta + \left[\Delta C_{34} \cos \varphi - \right. \\
& \left. \Delta C_{35} \sin \varphi \right] \cos^3 \theta \left. \right\} \left. \right\} \quad (25)
\end{aligned}$$

De acordo com as equações acima é verificado que da mesma forma que R_{PP} e R_{SP} , R_{TP} não apresenta informações sobre a propagação na horizontal da onda P para ângulos de incidência pequena uma vez que o parâmetro ΔC_{11} e os parâmetros resultantes de sua rotação não aparecem na fórmula linearizada para pequenos ângulos de incidência. Além disso, os parâmetros ΔC_{33} e $\Delta \rho/\rho$ não aparecem nas duas fórmulas de R_{TP} . Isto mostra que o coeficiente de reflexão da convertida T não traz informação sobre a velocidade de propagação vertical da onda P e sobre o contraste de densidades dos meios envolvidos no espalhamento. Para pequenas incidências R_{TP} apresenta apenas 14 dos 20 parâmetros elásticos, enquanto que para incidências arbitrárias R_{TP} apresenta apenas 19 dos 21 parâmetros de \mathbf{p} que estão envolvidos no espalhamento.

Na tabela 3 são apresentados os parâmetros que aparecem nas duas fórmulas lineares de R_{TP} (equações (24) e (25)), os parâmetros encontrados em cada uma destas fórmulas, os parâmetros poderão ser recuperados e a geometria empregada.

Tabela 3 Parâmetros elásticos que aparecem nas duas fórmulas lineares de R_{TP} . Parâmetros que poderão ser recuperados e a geometria mínima empregada para determinar esses parâmetros.

Fórmula linear	Parâmetros	Parâmetros que poderão ser recuperados	Geometria
R_{TP} ($\theta \leq 20^0$)	$\Delta(C_{13}+2C_{55}), \Delta(C_{23}+2C_{44}), \Delta C_{55}, \Delta C_{44}, \Delta C_{14}, \Delta C_{15}, \Delta C_{24}, \Delta C_{25}, \Delta C_{34}, \Delta C_{35}, \Delta C_{36}, \Delta C_{45}, \Delta C_{46}, \Delta C_{56}.$	$\Delta C_{34}, \Delta C_{35}, \Delta C_{36}, \Delta C_{45}.$	Incidência (θ) de até 20^0 com incremento de 1^0 e azimute (ϕ) de 0^0 a 360^0 com incremento de 45^0
R_{TP} (θ arbitrário)	$\Delta(C_{12}+2C_{66}), \Delta(C_{13}+2C_{55}), \Delta C_{22}, \Delta C_{11}, \Delta(C_{23}+2C_{44}), \Delta C_{55}, \Delta C_{44}, \Delta C_{14}, \Delta C_{15}, \Delta C_{16}, \Delta C_{24}, \Delta C_{25}, \Delta C_{26}, \Delta C_{34}, \Delta C_{35}, \Delta C_{36}, \Delta C_{45}, \Delta C_{46}, \Delta C_{56}.$	$\Delta C_{14}, \Delta C_{15}, \Delta C_{16}, \Delta C_{24}, \Delta C_{25}, \Delta C_{26}, \Delta C_{34}, \Delta C_{35}, \Delta C_{36}, \Delta C_{45}, \Delta C_{46}, \Delta C_{56}.$	Incidência (θ) de até 45^0 com incremento de 1^0 e azimute (ϕ) de 0^0 a 360^0 com incremento de 45^{09}

De acordo com as Tabelas 2 e 3 verifica-se que os parâmetros $\Delta C_{15}, \Delta C_{16}, \Delta C_{24}, \Delta C_{26}, \Delta C_{34}, \Delta C_{35}, \Delta C_{36}$ e ΔC_{45} que são comuns a R_{SP} e R_{TP} , poderão ser recuperados a partir de R_{TP} com menos medidas azimutais (8 medidas azimutais) do que a partir R_{SP} (24 medidas azimutais). No entanto só poderemos comprovar isso quanto fizermos da estimativa desses parâmetros elásticos a partir das fórmulas linearizadas de R_{SP} e R_{TP} no próximo capítulo.

3.1. 4 - Análise de sensibilidade às fórmulas conjuntas de R_{PP} , R_{SP} e R_{TP} .

É verificado dos resultados anteriores que poucos parâmetros podem ser recuperados dos coeficientes R_{PP} , R_{SP} e R_{TP} em separado devido a isso nesta seção é analisado quantos e quais parâmetros podem ser recuperados da inversão conjunta destes três coeficientes de reflexão.

Para pequenos ângulos de incidência a fórmula conjunta de R_{PP} , R_{SP} e R_{TP} é dada pela junção das equações (20), (22) e (24) da mesma forma que nas seções anteriores o parâmetro ΔC_{11} (azimute zero) e os parâmetros resultantes de sua rotação não podem ser recuperados a

⁹ Para incidências de até 30^0 e azimute variando de 0^0 até 360^0 com incremento de 30^0 os parâmetros $\Delta C_{14}, \Delta C_{15}, \Delta C_{24}, \Delta C_{25}, \Delta C_{34}, \Delta C_{35}, \Delta C_{46}, \Delta C_{56}$ são totalmente recuperados.

partir desta fórmula conjunta para pequenas incidências, além disso, esta fórmula apresenta apenas 15 dos 21 parâmetros de \mathbf{p} .

A formula de R_{PP} , R_{SP} e R_{TP} conjunta para incidência arbitrária, dada pela junção das equações (21), (23) e (25) apresenta todas os 21 parâmetros de \mathbf{p} .

Na tabela4 abaixo são mostradas para as duas fórmulas dos coeficientes de reflexão conjuntos: os parâmetros que aparecem nestas fórmulas, os parâmetros que puderam ser resolvidos e a geometria de levantamento mínima necessária para a determinação destes parâmetros.

Tabela 4 Parâmetros elásticos que aparecem nas duas fórmulas de R_{PP} , R_{SP} e R_{TP} . Parâmetros que poderão ser recuperados e a geometria necessária para determinar esses parâmetros.

Fórmula linear	Parâmetros	Parâmetros que poderão ser recuperados	Geometria
R_{PP}, R_{SP} e R_{TP} ($\theta \leq 30^\circ$)	$\Delta(C_{13}+2C_{55}), \Delta(C_{23}+2C_{44}), \Delta C_{33},$ $\Delta C_{55}, \Delta C_{44}, \Delta C_{14}, \Delta C_{15}, \Delta C_{24},$ $\Delta C_{25}, \Delta C_{34}, \Delta C_{35}, \Delta C_{36}, \Delta C_{45},$ $\Delta C_{46}, \Delta C_{56}$ e $\Delta\rho/\rho$.	Todos os parâmetros	Incidência (θ) até 20° com incremento de 1° e azimute (φ) de 0° a 360° com incremento de 15°
R_{PP}, R_{SP} e R_{TP} (θ Arbitrário)	$\Delta(C_{12}+2C_{66}), \Delta(C_{13}+2C_{55}), \Delta C_{11},$ $\Delta C_{22}, \Delta(C_{23}+2C_{44}), \Delta C_{33}, \Delta C_{55},$ $\Delta C_{44}, \Delta C_{14}, \Delta C_{15}, \Delta C_{16}, \Delta C_{24},$ $\Delta C_{25}, \Delta C_{26}, \Delta C_{34}, \Delta C_{35}, C_{36},$ $\Delta C_{45}, \Delta C_{46}, \Delta C_{56}$ e $\Delta\rho/\rho$.	Todos os parâmetros	Incidência (θ) até 30° com incremento de 1° e azimute (φ) de 0° a 360° com incremento de 45°

De acordo com a tabela acima a fórmula conjunta de R_{PP} , R_{SP} e R_{TP} para incidências arbitrárias todos os 21 parâmetros dos meios envolvidos no espalhamento podem ser recuperadas dentro da faixa de incidências subnormais utilizadas em prospecção sísmica. Dentro da mesma faixa de incidência a fórmula de R_{PP} , R_{SP} e R_{TP} para pequenas incidências recuperam todos seus parâmetros, no entanto nesta formulação não se tem informação sobre a propagação horizontal; da onda P. Na próxima seção todos os resultados obtidos são discutidos.

3.2 –DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

De acordo com a inspeção das fórmulas linearizadas separadas e conjuntas para pequenas incidências e incidências quaisquer e análise de SVD conclui-se que:

- Para pequenos ângulos de incidências ($\leq 20^\circ$) não se pode recuperar informações sobre a propagação horizontal da onda P, além dos parâmetros: ΔC_{11} , $\Delta(C_{12}+2C_{66})$, ΔC_{22} , ΔC_{16} e

ΔC_{26} a partir das fórmulas linearizadas dos coeficientes R_{PP} , R_{SP} e R_{TP} em separado ou conjunto.

- Utilizando-se apenas o coeficiente de reflexão da onda P qualquer que sejam os ângulos de incidências não se pode recuperar todos os parâmetros elásticos dos meios envolvidos no espalhamento.
- Apesar de R_{SP} para incidências arbitrárias apresentar informação sobre todos os parâmetros envolvidos no espalhamento não podemos recuperar todos esses parâmetros a partir da inversão de apenas esta fórmula.
- Não se pode obter informação sobre a velocidade de propagação vertical da onda P e sobre o contraste de densidade dos meios a partir de R_{TP} apenas.
- Apesar das ondas cisalhantes (ondas S e T) apresentarem menor energia estas ondas possuem informação sobre todos os parâmetros elásticos dos meios envolvidos no espalhamento. Assim qualquer estimativa dos parâmetros elásticos dos meios deve levar em consideração esse tipo de onda.
- Não podemos recuperar os parâmetros ΔC_{12} e ΔC_{66} separadamente apenas através da combinação $\Delta C_{12} + 2\Delta C_{66}$.
- A geometria necessária para se recuperar todos os parâmetros elásticos do meio a partir da fórmula e R_{PP} , R_{SP} e R_{TP} conjunta para pequenas incidências é para medidas cujos ângulos de incidência θ variam até 20° com incremento de 1° e ângulos de azimute φ variando de 0° a 360° com incremento de 15° .
- A geometria necessária para se recuperar todos os parâmetros elásticos do meio a partir da fórmula e R_{PP} , R_{SP} e R_{TP} conjunta para incidência arbitrária é formada por incidências θ variando de até 30° com incremento de 1° e ângulos de azimute φ variando de 0° a 360° com incremento de 45° .
- Em todos os casos foi testada também a sensibilidade da resolução dos parâmetros a escolha do fator k (razão entre as velocidades das ondas S e P no meio de referência). A velocidade da onda P foi escolhida de forma arbitrária e a velocidade da onda S foi determinada segundo a relação de Poisson e verificou-se que em todos os testes a resolução dos parâmetros mostra-se insensíveis à escolha do fator k.

4- ESTIMATIVA DE ANISOTROPIA UTILIZANDO AVO MULTIAZIMUTAL

Neste capítulo é feita uma análise da estimativa dos contrastes entre os parâmetros elásticos dos meios envolvidos no espalhamento a partir de inversão das formas linearizadas do coeficiente de reflexão de uma onda P e das ondas convertidas.

De acordo com os resultados do capítulo anterior tem-se uma relação linear entre os coeficientes de reflexão da onda P e suas convertidas e os contrastes entre parâmetros elásticos dois meios envolvidos no espalhamento. Isto sugere que conhecidos os coeficientes de reflexão, as propriedades elásticas dos meios envolvidos no espalhamento podem ser estimadas a partir da inversão das equações (21), (23) e (25). Neste capítulo é feita a análise das estimativas dos contrastes dos parâmetros obtidos a partir da inversão dos coeficientes de reflexão de uma onda P e suas convertidas. É considerado que meios fraturados sob certas condições comportam-se efetivamente como meios anisotrópicos e é feita uma análise da estimativa das orientações de fratura a partir da estimativa dos parâmetros elásticos.

4.1 - PROBLEMA DIRETO

De acordo com os resultados do capítulo 2 tem-se uma relação linear entre os coeficientes de reflexão de uma onda P e suas convertidas e os contrastes entre parâmetros elásticos dos dois meios envolvidos no espalhamento. Supondo conhecidos esses coeficientes de reflexão, as propriedades elásticas desses meios podem ser estimadas.

Os contrastes ΔC_{IJ} e $\Delta\rho$ foram então estimados a partir inversão linear dos coeficientes linearizados R_{PP} , R_{SP} e R_{TP} para incidências e azimutes arbitrários apresentados em (21), (23) e (25). Foram considerados os seguintes pressupostos:

- Os meios envolvidos no espalhamento apresentam fraco contraste e fraca anisotropia.
- O meio de referência é igual ao meio incidente.
- O meio de incidência é conhecido e é isotrópico.

Desta forma o meio subjacente (a ser estimado) é uma fraca perturbação do meio de referência e a perturbação dos parâmetros elásticos é diferente de (11) dada por:

$$C_{IJ}^{\tilde{y}} = \tilde{a}C_{IJ}^{\tilde{y}}, \quad (26)$$

com $\tilde{\gamma} = 1$ e 2 . O contraste médio dos parâmetros é então calculado por:

$$\Delta C_{II} = \left(C_{II}^{(2)} - C_{II}^{(1)} \right) / 2. \quad (27)$$

De acordo com o capítulo 3 os parâmetros elásticos apresentam resolução total a partir da geometria de levantamento de no mínimo oito azimutes com incremento de 30^0 , e ângulos incidentes de até 30^0 com incremento de 1^0 . Este tipo de levantamento é obtido através de experimentos VSP com afastamento (Leaney et al., 1994).

4.2-O PROBLEMA INVERSO

Escrevendo os coeficientes de reflexão na forma matricial (16), estimou-se os valores do vetor \mathbf{p} (ver (17)) que minimiza a função:

$$\phi = \left\| \mathbf{Y}_i^{\text{obs}} - \mathbf{A}_{ij} \tilde{\mathbf{p}}_j \right\|_2, \quad \begin{array}{l} i = 1, \dots, \text{Nobs} \\ j = 1, \dots, \text{Npar} \end{array} \quad (28)$$

em que: $\mathbf{Y}_i^{\text{obs}}$ é o vetor formado pelas observações de R_{PP} , R_{SP} e R_{TP} ; $\tilde{\mathbf{p}}_j$ é o vetor formado pelos valores dos contrastes dos parâmetros elásticos, combinações de parâmetros elásticos e o contraste de densidade obtidos de (17) a ser encontrado de tal forma que minimize a função ϕ e o subscrito 2 refere-se a norma euclidiana.

Os parâmetros foram então estimados segundo o inverso generalizado que é dado por:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{p}}_j &= \left(\mathbf{L}_{jk} \right)^{-1} \mathbf{A}_{ik} \mathbf{Y}_i^{\text{obs}}, \quad \text{com} \\ \mathbf{L}_{jk} &= \mathbf{A}_{ij} \mathbf{A}_{ik} \quad \text{e} \end{aligned} \quad \begin{array}{l} i, l = 1, \dots, \text{Nobs} \\ j, k = 1, \dots, \text{Npar} \end{array} \quad (29)$$

em que $\hat{\mathbf{p}}_j$ é o estimador do inverso generalizado.

Foi verificado em todos os testes que, a matriz de sensibilidade \mathbf{A}_{ij} , que é função da geometria do levantamento e das velocidades das ondas P e S no meio de referência apresenta valores singulares que variam em até quatro ordens e a solução, portanto apresenta instabilidade. Para estabilizar as soluções foi aplicado um fator de corte aos valores singulares de \mathbf{A}_{ij} . Esse fator é dado pela razão entre o maior e o menor valor singular de \mathbf{A}_{ij} . Assim apenas o menor valor singular de \mathbf{A}_{ij} foi retirado da inversão.

Uma análise da estabilidade das estimativas de \mathbf{p} obtidas através da minimização de (28) para diferentes modelos é feita de duas formas. Primeiramente através de simulação numérica; neste caso para cada modelo sintético foram feitas cem inversões com cem diferentes sementes que geram o ruído. E por fim através da determinação da matriz de covariância das estimativas que é dada por:

$$\Sigma_{ij} = \tilde{\delta}^2 \sum_{k=1}^r V_{ik} S_k^{-2} V_{jk}, \quad (30)$$

em que: r é o posto efetivo de \mathbf{A} , $i, j = 1, \dots, N_{\text{par}}$, S_k é o k -ésimo elemento da matriz diagonal formada pelos valores singulares de \mathbf{A} , \mathbf{V} é a matriz dos autovetores de \mathbf{A} e $\tilde{\delta}$ é o desvio padrão do ruído nos dados. Na próxima seção as estimativas de \mathbf{p} são analisadas em diferentes modelos sintéticos.

4.2.1 – Testes numéricos

Em todos os testes apresentados a seguir os parâmetros são estimados a partir da inversão linear dos coeficientes de reflexão R_{PP} , R_{SP} e R_{TP} . O conjunto de dados sintético foi gerado de acordo com as equações de Zoeppritz generalizadas (Gomes, 1999). A variação do azimute de 0° a 360° com incremento de 15° e o ângulo de incidência varia de 0° a 30° com incremento de 1° . O conjunto das cem simulações foi contaminado com diferentes ruídos, cujo desvio padrão varia de 1% a 50% do valor médio das observações. Esse conjunto das cem observações contaminadas com diferentes ruídos foi então invertido utilizando mínimos quadrados. As estimativas dos parâmetros elásticos são mostradas em dois modelos (modelos V e VI) Todos os modelos são formados por dois meios que apresentam fraco contraste, isto é, $\Delta\alpha/\alpha$, $\Delta\beta/\beta$ e $\Delta\rho/\rho$ são todos menores que 10%. O meio de incidência é um isotrópico e o meio subjacente é um anisotrópico e caracteriza-se por apresentar fraca anisotropia (Thomsen, 1986).

No modelo V o meio de incidência é um isotrópico cuja densidade, velocidades das ondas P e S são $\rho = 2,6 \text{ g/cm}^3$, $\alpha = 4,6 \text{ km/s}$ e $\beta = 2,81 \text{ km/s}$. O meio subjacente é um arenito TIV cuja densidade é $\rho = 2,5 \text{ g/cm}^3$ e os parâmetros de Thomsen (Thomsen, 1986) são: $\epsilon = 0,097$, $\delta = 0,091$, $\gamma = 0,051$ (esses parâmetros são adimensionais). Foi tirada a média de todos os ajustes obtidos em cada uma das cem simulações e calculada a raiz média quadrática do erro que é da ordem de 10^{-3} . As Figuras 15a e 15b mostram dos coeficientes de reflexão observados com e sem ruído e o resultado da inversão para ondas P e S, respectivamente para azimute $\phi = 0$. Este resultado da inversão é calculado da média das cem estimativas de \mathbf{p} .

Não é mostrado o resultado da inversão para a onda T, pois como o meio é um TIV e, portanto, apresenta simetria azimutal não temos conversão de onda T.

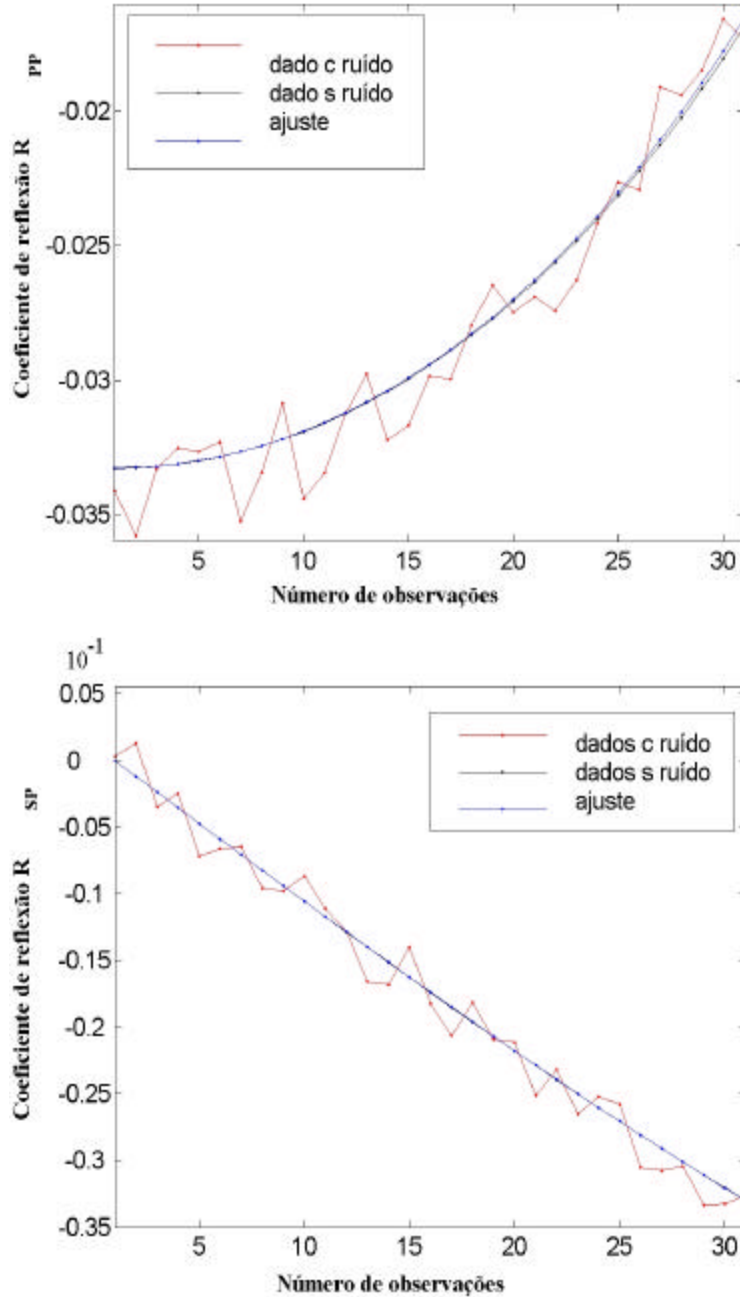


Figura 15 – Coeficiente de reflexão de R_{PP} e o ajuste obtido da média das cem simulações (acima) e coeficiente de reflexão R_{SP} e o ajuste obtido da média das cem simulações (abaixo). Medidas apenas para azimute zero.

A Tabela 5 mostra a média das estimativas dos parâmetros para as cem simulações e seus desvios padrão. Os dados estão contaminados com um nível de ruído cujo desvio padrão é 10% da média das observações.

Tabela 5- Para o modelo sintético V é mostrado: o valor exato, média amostral (grandeza adimensional) e desvios padrão amostral de \mathbf{p} . O nível de ruído de 10% da média das observações. As velocidades das ondas P e S no meio de referência são respectivamente $\alpha = 4,6$ km/s e $\beta = 2,81$ km/s . Nesta tabela não são mostrados os valores do desvio padrão calculados diretamente da matriz de covariância (30), esses valores são similares aos desvios padrão amostral

	Vetor de Parâmetros (\mathbf{p})	Valor exato	Média amostral	Desvio padrão amostral.
p ₁	ΔC_{11}	2,28E-02	2,25E-02	2,65E-03
p ₂	$\Delta C_{12}+2\Delta C_{66}$	2,28E-02	2,24E-02	2,86E-03
p ₃	$\Delta C_{13}+2\Delta C_{55}$	-3,19E-03	3,76E-03	1,50E-03
p ₄	ΔC_{22}	2,28E-02	2,24E-02	2,65E-03
p ₅	$\Delta C_{23}+2\Delta C_{44}$	-3,19E-03	3,72E-03	1,50E-03
p ₆	ΔC_{33}	-2,35E-02	-2,02E-02	4,11E-04
p ₇	ΔC_{44}	-3,49E-03	-1,80E-03	3,30E-04
p ₈	ΔC_{55}	-3,49E-03	-1,78E-03	3,30E-04
p ₉	ΔC_{14}	0,00	1,18E-04	1,38E-03
p ₁₀	ΔC_{15}	0,00	-4,99E-04	2,28E-03
p ₁₁	ΔC_{16}	0,00	-2,82E-05	1,21E-03
p ₁₂	ΔC_{24}	0,00	-2,08E-05	2,28E-03
p ₁₃	ΔC_{25}	0,00	1,67E-04	1,38E-03
p ₁₄	ΔC_{26}	0,00	-3,61E-05	1,21E-03
p ₁₅	ΔC_{34}	0,00	3,70E-06	4,30E-05
p ₁₆	ΔC_{35}	0,00	9,56E-07	4,30E-05
p ₁₇	ΔC_{36}	0,00	1,46E-04	7,18E-04
p ₁₈	ΔC_{45}	0,00	3,97E-05	2,41E-04
p ₁₉	ΔC_{46}	0,00	1,43E-04	1,39E-03
p ₂₀	ΔC_{56}	0,00	1,30E-04	1,39E-03
p ₂₁	$\Delta\rho/\rho$	-1,961 E-02	-2,62E-02	7,08E-04

De acordo com a tabela acima se verifica que os parâmetros ΔC_{11} , $\Delta C_{12} + 2\Delta C_{66}$, ΔC_{22} , ΔC_{33} , ΔC_{44} , ΔC_{55} e $\Delta\rho/\rho$ apresentam desvio padrão da ordem de 15% de seus valores estimados e, portanto neste modelo as estimativas desses parâmetros são estáveis. As estimativas dos parâmetros $\Delta C_{13} + 2\Delta C_{55}$ e $\Delta C_{23} + 2\Delta C_{44}$ são instáveis. Os demais parâmetros apresentam

estimativa muito pequena e desvio padrão muito grande, isto sugere que esses parâmetros devam ser nulos o que de fato podemos comprovar. Esses resultados se mantêm para níveis de ruído de até 50%.

No modelo VI o meio de incidência isotrópico tem densidade igual à $\rho = 2,65 \text{ g/cm}^3$ e as velocidades das ondas P e S $\alpha = 4,0 \text{ km/s}$ e $\beta = 2,31 \text{ km/s}$, respectivamente. O meio subjacente é um TI com eixo de simetria alinhado com eixo horizontal cujo tensor elástico é dado por (15) já apresentado no capítulo anterior densidade do meio é $\tilde{\rho} = 2,60 \text{ g/cm}^3$. Este tensor foi girado de 60° em relação ao eixo \tilde{x}_3 e girado de 30° em relação ao novo eixo \tilde{x}_2 . A Tabela 6 mostra o resultado das estimativas dos parâmetros elásticos para um nível de ruído cujo desvio padrão é 10% da média das observações. Nesta tabela a estabilidade das estimativas é mostrada de forma diferente da apresentada na Tabela 5 apenas para ilustrar uma outra forma de analisar os parâmetros estimados.

Tabela 6 - Para o modelo sintético VI é mostrado : o valor exato, média amostral e razão percentual entre o desvio padrão amostral e a média amostral de \mathbf{p} . O nível de ruído de 10% da média das observações. As velocidades das ondas P e S no meio de referência são respectivamente $\alpha = 4,00$ km/s e $\beta = 2,31$ km/s . Nesta tabela não são mostrados os valores do desvio padrão calculados diretamente da matriz de covariância (30), esses valores são similares aos desvios padrão amostral

	Vetor de Parâmetros (\mathbf{p})	Valor exato	Média amostral	(Desvio padrão amostral/média amostral)%
p 1	ΔC_{11}	-2,44E-02	-2,52E-02	9,20%
p 2	$\Delta C_{12}+2\Delta C_{44}$	-3,46E-02	-3,46E-02	8,20%
p 3	$\Delta C_{13}+2\Delta C_{55}$	-2,57E-02	-2,10E-02	6,70%
p 4	ΔC_{22}	-4,70E-02	-4,67E-02	5,70%
p 5	$\Delta C_{23}+2\Delta C_{66}$	-3,58E-02	-3,18E-02	4,70%
p 6	ΔC_{33}	-2,83E-02	-2,60E-02	1,60%
p 7	ΔC_{44}	-8,16E-03	-7,17E-03	4,50%
p 8	ΔC_{55}	-5,43E-03	-4,18E-03	6,90%
p 9	ΔC_{14}	4,87E-03	6,10E-03	33,80%
p 10	ΔC_{15}	-6,81E-03	-8,12E-03	40,90%
p 11	ΔC_{16}	1,03E-02	9,63E-03	10,60%
p 12	ΔC_{24}	1,07E-02	1,33E-02	23,30%
p 13	ΔC_{25}	-2,18E-03	-3,37E-03	56,00%
p 14	ΔC_{26}	9,28E-03	8,40E-03	14,30%
p 15	ΔC_{34}	1,17E-02	1,24E-02	0,34%
p 16	ΔC_{35}	-6,73E-03	-7,15E-03	0,56%
p 17	ΔC_{36}	4,04E-03	3,85E-03	18,70%
p 18	ΔC_{45}	2,36E-03	2,48E-03	8,60%
p 19	ΔC_{46}	-1,06E-03	-2,13E-03	88,40%
p 20	ΔC_{56}	2,92E-03	3,89E-03	54,70%
p 21	$\Delta\rho/\rho$	-9,53E-03	-1,60E-02	4,60%

A raiz média quadrática do erro para este modelo foi de 1,486E-03. De acordo com a Tabela 6 para o nível de ruído de 10% os parâmetros ΔC_{11} , $\Delta C_{12}+2\Delta C_{44}$, $\Delta C_{13}+2\Delta C_{55}$, ΔC_{22} , $\Delta C_{23}+2\Delta C_{66}$, ΔC_{33} , ΔC_{44} , ΔC_{55} , ΔC_{16} , ΔC_{26} , ΔC_{34} , ΔC_{35} , ΔC_{45} e $\Delta\rho/\rho$ apresentam estimativas em torno de no máximo 15% e são, portanto estáveis. As Figuras 16, 17 e 18 mostram os valores dos coeficientes R_{PP} , R_{SP} e R_{TP} observados, os coeficientes obtidos a partir da média amostral das cem estimativas de \mathbf{p} e os erros absolutos.

Figura 16a

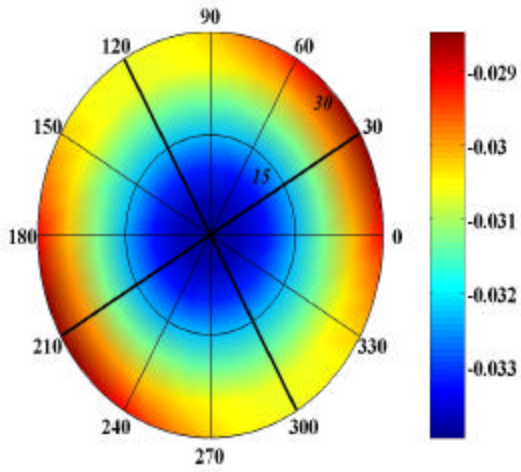


Figura 16 b

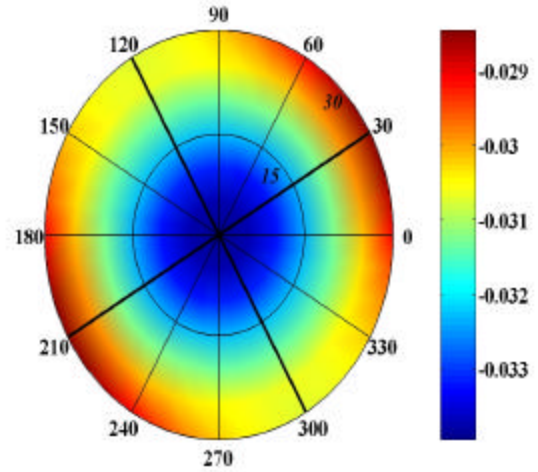


Figura 16 c

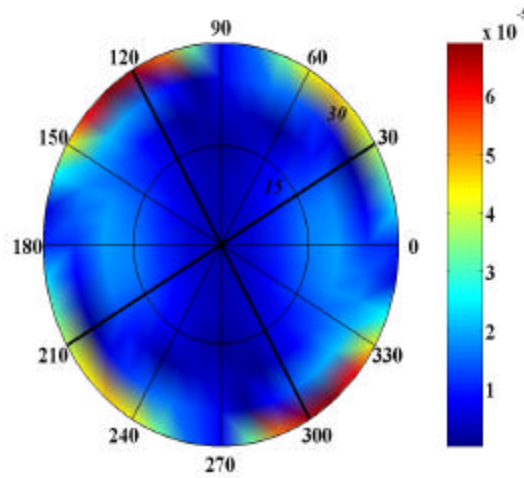


Figura 16 – R_{PP} exato (16a), R_{PP} construído a partir da média amostral das cem estimativas dos parâmetros elásticos (16b) e erro absoluto(16c) do modelo sintético VI. As velocidades das ondas P e S no meio isotrópico de referencia são de $\alpha = 4,00$ km/s e $\beta = 2,31$ km/s respectivamente. Resultado da inversão para um nível de ruído de 10%.

Figura 17a

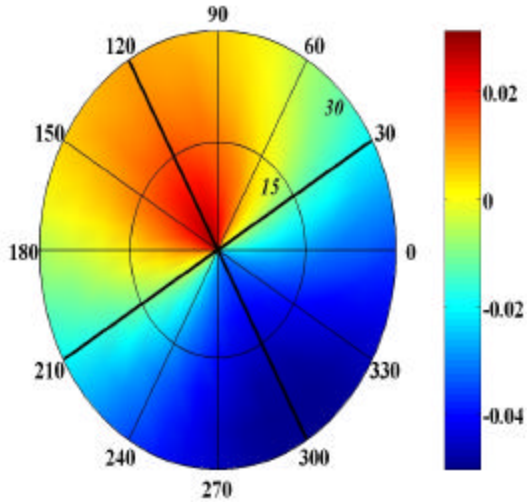


Figura 17b

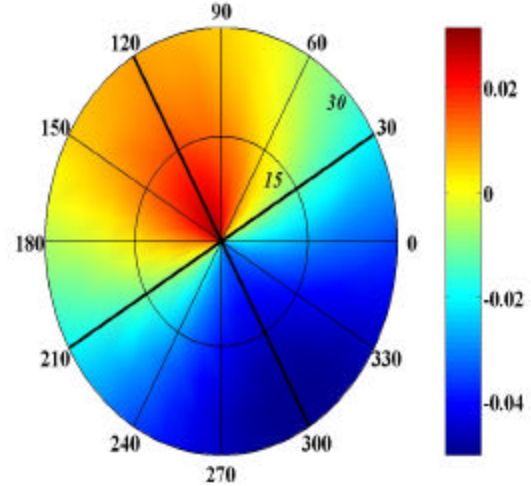


Figura 17c

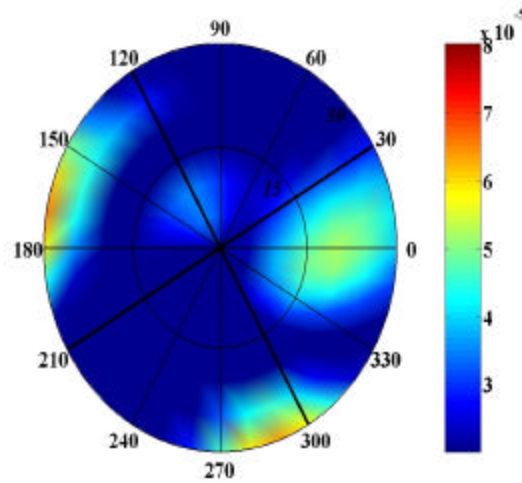


Figura 17 – R_{SP} exato (17a), R_{SP} construído a partir da média amostral das cem estimativas dos parâmetros elásticos (17b) e erro absoluto(17c) do modelo sintético VI. As velocidades das ondas P e S no meio isotrópico de referência são de $\alpha = 4,00$ km/s e $\beta = 2,31$ km/s respectivamente. Resultado da inversão para um nível de ruído de 10%.

Figura 18a

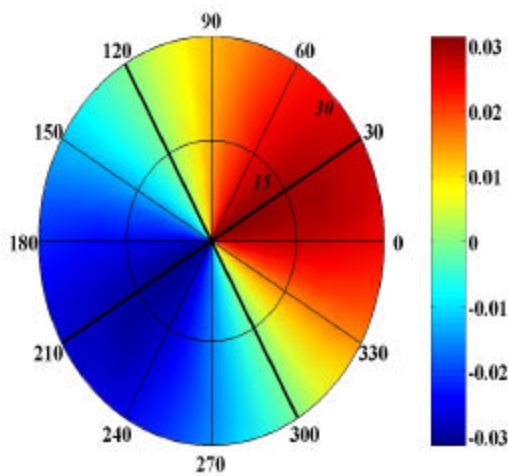


Figura 18b

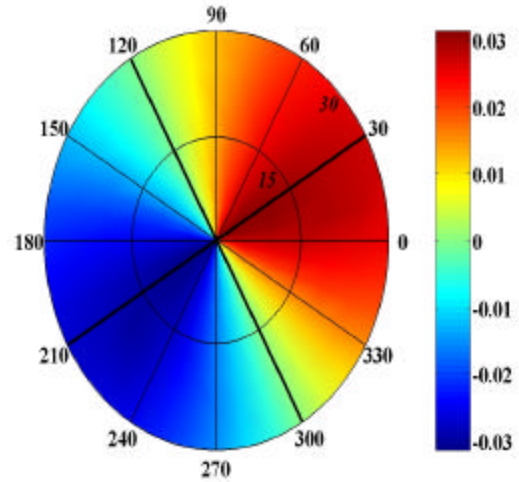


Figura 18c

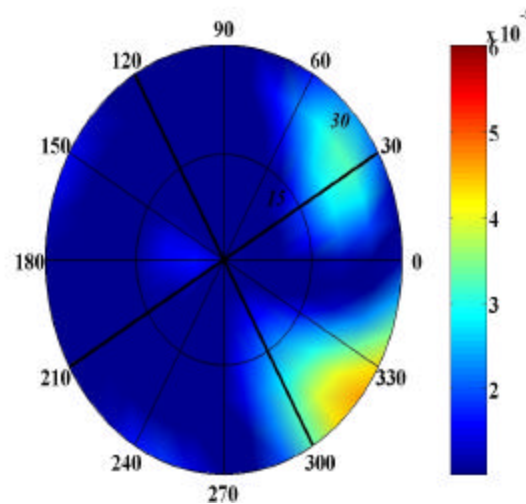


Figura 18 – R_{TP} exato (18a), R_{TP} construído a partir da média amostral das cem estimativas dos parâmetros elásticos (18b) e erro absoluto(18c) do modelo sintético VI. As velocidades das ondas P e S no meio isotrópico de referência são de $\alpha = 4,00$ km/s e $\beta = 2,31$ km/s respectivamente. Resultado da inversão para um nível de ruído de 10%.

De acordo com as Figura 16 a 18 verifica-se que os ajuste obtidos para incidências de até 30^0 o erro é inferior a 1% em todos os casos.

Em todos os estereogramas acima os planos de simetria do meio são representados pelas linhas pretas mais grossas e da mesma forma que no capítulo anterior o coeficiente R_{PP} comporta-

se como se o meio tivesse dois planos de simetria, quando na realidade o meio subjacente estimado é um TI com eixo de simetria inclinado e tem, portanto apenas um plano de simetria que contém o eixo de simetria.

Para se determinar que parâmetros são bem estimados a partir de R_{PP} , R_{SP} e R_{TP} foram feitos testes com outros modelos que obedeciam aos pressupostos da linearização (fraco contraste e fraca anisotropia), modelos onde um ou os dois pressupostos (fraca anisotropia e fraco contraste) falhavam além de diferentes níveis de ruído. A geometria de levantamento foi à mesma utilizada nos modelos apresentados acima, isto é, a variação do azimute de 0^0 a 360^0 com incremento de 15^0 e o ângulo de incidência varia de 0^0 a 30^0 com incremento de 1^0 . Verificou-se que:

- Devido aos pressupostos estabelecidos na obtenção das linearizações, as estimativas dos parâmetros só são válidas para modelos que obedecem aos pressupostos de fraco contraste e fraca anisotropia. Além disso, é necessário que o meio de incidência seja isotrópico ou apresente pelo menos simetria azimutal. Isto se deve ao fato de escolhermos a direção de polarização das ondas cisalhantes no meio de referência igual à direção de polarização das componentes S_V e S_H da onda cisalhante S .
- Para modelos que obedecem aos pressupostos de fraca anisotropia e fraco contraste, verifica-se que: os contrastes dos parâmetros elásticos ΔC_{11} , ΔC_{22} , ΔC_{33} , ΔC_{44} , ΔC_{55} , ΔC_{34} , ΔC_{35} e o contraste de densidade $\Delta \rho / \rho$ apresentam estimativas estáveis para níveis de ruído moderado.

4.3 - ESTIMATIVA DA ORIENTAÇÃO DE FRATURA

Nesta seção é analisado o problema da caracterização de fraturas usando as estimativas dos parâmetros elásticos dos meios envolvidos no espalhamento obtidas da inversão dos coeficientes de reflexão de uma onda P incidente e suas convertidas. Para isso partimos do pressuposto que:

- O meio fraturado comporta-se efetivamente como um meio TI com eixo de simetria perpendicular ao plano de fratura.
- O meio de incidência é isotrópico

Desta forma o problema de determinar a orientação de fraturas consiste em estimar o eixo de simetria deste meio TI a partir dos parâmetros elásticos estimados da inversão de R_{PP} , R_{SP} e R_{TP} .

Se o eixo de simetria não está alinhado com um dos eixos coordenados então o plano de simetria que contém o eixo de simetria forma um ângulo φ com o eixo x_1 . Este ângulo pode ser determinado através da relação:

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2(C_{16} + C_{26})}{(C_{22} - C_{11})}. \quad (31)$$

Infelizmente os ângulos 2φ e $2\varphi + \pi$ (por conseguinte φ e $\varphi + \pi/2$) têm a mesma tangente, no entanto, rotacionando-se os parâmetros estimados pelo valor negativo destes ângulos também estimados sempre podemos alinhar o plano que contém o eixo de simetria com um dos eixos x_1 ou x_2 . Nós podemos sempre escolher a rotação que alinha o plano de simetria que contém o eixo de simetria com o eixo x_1 e então determinar o mergulho $\tilde{\theta}$ pela relação:

$$\operatorname{tg} 2\tilde{\theta} = \frac{2(C_{15} + C_{35})}{(C_{11} - C_{33})}. \quad (32)$$

Sob estes pressupostos o ângulo de mergulho pode ser estimado dos resultados da inversão exceto por uma ambigüidade. Os ângulos $2\tilde{\theta}$ e $2\tilde{\theta} + \pi$ (por conseguinte $\tilde{\theta}$ e $\tilde{\theta} + \pi/2$) tem a mesma tangente. Esta ambigüidade pode ser resolvida rotacionando-se os parâmetros pelo valor negativo de $\tilde{\theta}$ estimado e observando as diferenças $C_{11}-C_{22}$, $C_{33}-C_{22}$ e $C_{33}-C_{11}$. Se a primeira diferença ($C_{11}-C_{22}$) é nula o eixo de simetria esta alinhado ao longo de x_3 e o ângulo de mergulho é o valor estimado $\tilde{\theta} + \pi/2$. Se a diferença $C_{33}-C_{22}$ é zero, o eixo de simetria está alinhado ao longo de x_2 e o ângulo de mergulho é o valor estimado $\tilde{\theta}$. Por fim se a diferença $C_{33}-C_{11}$ é zero, o eixo de simetria está alinhado ao longo de x_1 e o ângulo de mergulho é o valor estimado $\tilde{\theta}$. É sempre possível mostrar esta rotação, pois todos os parâmetros requeridos para a rotação são estimados na inversão.

Se o eixo de simetria coincide com um dos eixos coordenados as equações (31) e (32) falham. Neste caso a orientação pode ser determinada usando-se as seguintes alternativas:

- Se $C_{22}=C_{33}$ e $C_{44}\neq C_{55}$ o eixo está alinhado com x_1 .
- Se $C_{11}=C_{33}$ e $C_{44}\neq C_{55}$ o eixo está alinhado com x_2 .
- Se $C_{11}=C_{22}$ e $C_{44}=C_{55}$ o eixo está alinhado com x_3 .

O próximo passo é investigar a estabilidade deste método.

4.3.1 - Testes Numéricos

Nesta seção são apresentados testes de modelos sintéticos nos quais a orientação de fratura é estimada a partir da estimativa dos parâmetros elásticos. Em todos os testes apresentados a seguir é estimada a orientação do eixo de simetria a partir da inversão linear dos coeficientes de reflexão R_{PP} , R_{SP} e R_{TP} . A orientação do eixo de simetria consiste na direção do eixo de simetria (φ) e mergulho do eixo de simetria ($\tilde{\theta}$)

A geometria do levantamento consiste em azimutes de 0^0 a 360^0 com incremento de 15^0 e incidências de 0^0 a 30^0 com incremento de 1^0 .

A orientação inicial da fratura foi determinada dos resultados da inversão aplicados ao método apresentado no final da seção anterior. Os dados sintéticos foram gerados da mesma forma que na seção anterior. Em todas as tabelas que apresentam os resultados da estimativa da orientação do eixo de simetria mostram a média das cem simulações numéricas.

São mostrados cinco modelos que apresentam fraco contraste (todas as três razões $\Delta\alpha/\alpha$, $\Delta\beta/\beta$ e $\Delta\rho/\rho$ são menores que 10%) e fraca anisotropia (de acordo com Thomsen, 1986). Os quatro primeiros modelos (do modelo VI ao modelo IX) apresentam o mesmo meio de incidência isotrópico cuja densidade, velocidade da onda P e velocidade da onda S são respectivamente $\rho = 2,65 \text{ g/cm}^3$, $\alpha = 4,0 \text{ km/s}$ e $\beta = 2,31 \text{ km/s}$ e mesmo meio subjacente dado pelo tensor (15) que é um TI com eixo de simetria horizontal. O que difere um modelo do outro é que esse eixo de simetria sofreu rotações diferentes em cada modelo. No modelo X o meio de incidência é isotrópico e a densidade e velocidades das ondas P e S são $\rho = 2,5 \text{ g/cm}^3$, $\alpha = 4,476 \text{ km/s}$ e $\beta = 2,841 \text{ km/s}$, respectivamente. O meio subjacente é inicialmente é um arenito TIV cuja densidade é $\rho = 2,5 \text{ g/cm}^3$ e cujos parâmetros de Thomsen (Thomsen, 1986) são $\varepsilon = 0,097$, $\delta = 0,091$ e $\gamma = 0,051$. Este meio foi girado de 60^0 em relação ao eixo x_3 e girado de 30^0 em relação ao novo eixo x_2 .

No primeiro modelo a ser analisado, o modelo VII o meio subjacente TIH não sofre nenhuma rotação. Foi feita a estimativa dos parâmetros elásticos e determinada a orientação do

eixo de simetria de acordo com o método da seção anterior. Verificou-se para níveis de ruído de até 20% de acordo com as estimativas o meio tem eixo de simetria orientado com a horizontal, para níveis de ruído maiores que 20% a estimativa da orientação degenera.

No modelo VIII o eixo de simetria do tensor elástico (15) foi girado de $\tilde{\varphi} = 60^0$ em relação a x_3 . A partir das estimativas dos parâmetros elásticos foi estimada a orientação do eixo de simetria. De acordo com as estimativas dos parâmetros elásticos tem-se um meio cujo eixo de simetria sofreu uma rotação $\tilde{\varphi}$ cujas estimativas estão na Tabela 7 para três níveis de ruído que são 1%, 5% e 10%.

Tabela 7 – Média amostral da estimativa da orientação do eixo de simetria do modelo sintético VIII para três diferentes níveis de ruído. A última coluna da tabela mostra o limite mínimo e máximo da estimativa da direção do eixo de simetria. Esta variação foi construída observando-se nas cem simulações o menor e o maior valor estimado para a direção do eixo de simetria. Neste modelo eixo de simetria foi girado de $\tilde{\varphi} = 60^0$ em relação ao eixo x_3 . As velocidades das ondas P e S no meio isotrópico de referencia são de $\alpha = 4,00$ km/s e $\beta = 2,31$ km/s respectivamente.

Modelo VIII	Média amostral da estimativa da direção do eixo de simetria	Limite mínimo e máximo da estimativa $\hat{\varphi}$
Ruído de 1%	60,00 ⁰	[59,90 ⁰ 60,10 ⁰]
Ruído de 5%	60,08 ⁰	[58,73 ⁰ 61,43 ⁰]
Ruído de 10 %	54,30 ⁰	[50,41 ⁰ 58,19 ⁰]

De acordo com as estimativas da Tabela 7 para níveis de ruído de até 5% o eixo de simetria foi girado de um ângulo estimado de $\hat{\varphi}^{10} = 60^0$ o que corresponde ao valor exato da rotação sofrida pelo eixo de simetria. Além disso, podemos verificar na última coluna da Tabela 7 de acordo com o limite mínimo e máximo e desse ângulo que estas estimativas são estáveis para o nível de ruído de até 5%. Já para níveis de ruído de 10% o valor estimado para o ângulo de giro é menor em 6^0 do valor exato, além disso, apresenta uma faixa de variação de até 10^0 do valor exato. De onde concluímos que para níveis de ruído a partir de 10% a estimativa da orientação do eixo de simetria é instável para este modelo.

Após estimarmos a rotação sofrida pelo eixo de simetria, resta determinar em relação a que eixo coordenado esse eixo de simetria sofreu a rotação. Para isso “desfizemos” a rotação no eixo de simetria aplicando matrizes de rotação com o valor estimado de $\hat{\varphi}$ com o sinal negativo ao

¹⁰ Os valores estimados de $\tilde{\varphi}$ e $\tilde{\theta}$ serão representados durante todo o texto por $\hat{\varphi}$ e $\hat{\theta}$ respectivamente.

tensor elástico também estimado e por fim aplicamos o método apresentado na ultima parte da seção anterior. Para os resultados dos três níveis de ruído concluímos que o modelo estimado era originalmente um meio TI com eixo de simetria alinhado com a horizontal que sofrer rotação de um ângulo cuja estimativa é dada na Tabela 7 em relação ao eixo x_3 .

No modelo IX o eixo de simetria do tensor elástico (15) é mergulhado de $\tilde{\theta} = 40^0$ em relação ao eixo x_2 . De acordo com as estimativas dos parâmetros elásticos verifica-se que o eixo de simetria sofreu mergulho $\hat{\theta}$ cujas estimativas para quatro diferentes níveis de ruído são mostradas na Tabela 8.

Tabela 8- Média amostral da estimativa do mergulho do eixo de simetria do modelo sintético IX para quatro diferentes níveis de ruído. A última coluna da tabela mostra o limite mínimo e máximo da estimativa do mergulho do eixo de simetria. Esta variação foi construída observando-se nas cem simulações o menor e o maior valor estimado para a direção do eixo de simetria. O eixo de simetria do modelo IX foi mergulhado de $\tilde{\theta}=40^0$ em relação ao eixo horizontal x_2 . As velocidades das ondas P e S no meio isotrópico de referencia são de $\alpha = 4,00$ km/s e $\beta = 2,31$ km/s respectivamente.

Modelo IX	Média amostral da estimativa do mergulho do eixo de simetria	Limite mínimo e máximo da estimativa $\hat{\theta}$
Ruído 1%	$38,28^0$	$[38,12^0 \ 38,44^0]$
Ruído 5%	$38,41^0$	$[37,38^0 \ 39,44^0]$
Ruído 10 %	$38,41^0$	$[36,14^0 \ 40,68^0]$
Ruído 20%	$38,57^0$	$[35,70^0 \ 41,44^0]$

Diferentemente da Tabela 7 a Tabela 8 mostra as estimativas da orientação do eixo de simetria até níveis de ruído de 20%, isto se deve ao fato de que no caso do modelo IX as estimativas só começam a degenerar a partir de ruídos cujos desvios padrão são maiores que 20%. Ainda de acordo com a Tabela 8 para ruídos de até 20% verifica-se que a estimativa da orientação do eixo de simetria é de 38^0 enquanto que o valor exato é de 40^0 , tem-se, portanto que esta estimativa difere de apenas 2^0 do valor real. Da última coluna da Tabela 8 tem-se que as estimativas da orientação para os diferentes níveis de ruído são estáveis.

Após estimar a rotação sofrida pelo eixo de simetria foi então determinado em relação a que eixo coordenado esse eixo de simetria sofreu a rotação. Para isso “desfizemos” a rotação no eixo de simetria aplicando matrizes de rotação com a estimativa de $\hat{\theta}$ com o sinal negativo ao tensor elástico estimado e por fim aplicamos o método apresentado na ultima parte da seção anterior. De acordo com os resultados para os quatro níveis de ruído o modelo estimado era originalmente um

meio TI cujo eixo de simetria sofreu uma rotação de um ângulo $\hat{\theta}$ cuja estimativa é dada na Tabela 8 em relação ao eixo x_2 .

Em ambos os modelos VI e X cujo eixo de simetria foi girado de $\tilde{\varphi}=60^0$ em relação ao eixo de simetria x_3 e mergulhado de $\tilde{\theta}=30^0$ em relação ao novo eixo de simetria x_2 . Foi feita a estimativa dos parâmetros elásticos para os dois modelos e verificou-se que nos dois casos o meio estimado é um TI cuja estimativa da orientação do eixo de simetria desses meios são mostradas nas Tabela 9 (modelo VI) e Tabela10 (modelo X).

Tabela 9 – Média amostral da estimativa do mergulho do eixo de simetria do modelo sintético IV para três diferentes níveis de ruído. A terceira e quinta coluna da tabela mostramos limites mínimo e máximo das estimativas da direção e mergulho do eixo de simetria. Esta variação foi construída observando-se nas cem simulações o menor e o maior valor estimado para a direção do eixo de simetria. O eixo de simetria neste modelo foi girado de $\tilde{\varphi} = 60^0$ em relação ao eixo x_3 e mergulhado de $\tilde{\theta} = 30^0$ em relação ao novo eixo horizontal x_2 . As velocidades das ondas P e S no meio isotrópico de referencia são de $\alpha = 4,00$ km/s e $\beta = 2,31$ km/s respectivamente.

Modelo VI	Média amostral da estimativa da direção do eixo de simetria	Limite mínimo e máximo da estimativa $\hat{\varphi}$	Média amostral da estimativa do mergulho do eixo de simetria	Limite mínimo e máximo da estimativa $\hat{\theta}$
Ruído 1%	60,01 ⁰	[59,78 ⁰ 60,24 ⁰]	31,51 ⁰	[31,36 ⁰ 31,66 ⁰]
Ruído 5%	60,18 ⁰	[56,97 ⁰ 61,39 ⁰]	31,56 ⁰	[30,84 ⁰ 32,28 ⁰]
Ruído 10%	59,76 ⁰	[57,52 ⁰ 62,00 ⁰]	31,12 ⁰	[29,51 ⁰ 32,73 ⁰]

Tabela 10 - Média amostral da estimativa do mergulho do eixo de simetria do modelo sintético X para três diferentes níveis de ruído. A terceira e quinta coluna da tabela mostram os limites mínimo e máximo das estimativas da direção e mergulho do eixo de simetria. Esta variação foi construída observando-se nas cem simulações o menor e o maior valor estimado para a direção do eixo de simetria. O eixo de simetria neste modelo foi girado de $\tilde{\varphi} = 60^0$ em relação ao eixo x_3 e mergulhado de $\tilde{\theta} = 30^0$ em relação ao novo eixo horizontal x_2 . As velocidades das ondas P e S no meio isotrópico de referencia são $\alpha = 4,476$ km/s e $\beta = 2,841$ km/s respectivamente.

Modelo X	Média amostral da estimativa da direção do eixo de simetria	Limite mínimo e máximo da estimativa $\hat{\varphi}$	Média amostral da estimativa do mergulho do eixo de simetria	Limite mínimo e máximo da estimativa $\hat{\theta}$
Ruído 1%	60,02 ⁰	[59,52 ⁰ 60,52 ⁰]	29,48 ⁰	[29,34 ⁰ 29,62 ⁰]
Ruído 5%	60,39 ⁰	[57,74 ⁰ 63,01 ⁰]	29,40 ⁰	[30,09 ⁰ 28,71 ⁰]
Ruído 10%	59,44 ⁰	[54,58 ⁰ 64,20 ⁰]	28,64 ⁰	[27,22 ⁰ 30,06 ⁰]

A estimação da orientação do eixo de simetria apresenta bom desempenho, pois, para ambos os modelos são verificados que para níveis de ruído de até 10% a orientação do eixo de simetria estimado difere da orientação exata em menos de 2° . Quanto à estabilidade de acordo com a última coluna das Tabelas 9 e 10 para níveis de ruído de até 10% a variação desses ângulos é inferior a 10% de seu valor estimado sendo, portanto estável.

De acordo com os resultados das inversões os parâmetros C_{15} , C_{16} e C_{26} necessários na determinação da orientação do eixo de simetria (ver (31) e (32)) apresentam estimativas instáveis. No entanto a estimativa da orientação de fratura é estável. Isto se deve primeiramente ao fato de apesar das estimativas de C_{15} , C_{16} e C_{26} apresentam erro percentual grande estes valores estimados são pequenos quando comparado com os valores estimados dos outros parâmetros elásticos que são necessários na estimativa da orientação de fratura (ver (31) e (32)). Vemos ainda que a função arctang apresenta variação muito pequena para grandes ângulos. Para os testes em que os ângulos envolvidos com a orientação de fratura eram iguais ou maiores que 30° , apesar dos parâmetros envolvidos na estimativa apresentarem instabilidade à estimativa do ângulo é estável, enquanto que para ângulos próximos a normal a estimativa dos mesmos apresenta instabilidade.

4.3.1.1 - Influência da geometria de aquisição na estimativa da orientação do eixo de simetria.

A influência da geometria na estimativa da orientação do eixo de simetria foi analisada em vários modelos. Os resultados apresentados são do modelo X apresentado na seção anterior. Os dados foram contaminados com ruído cujo desvio padrão é de 5% da média das observações.

Na Tabela 11 é mostrada a estimativa da orientação do eixo de simetria para dados que foram medidos em azimuth é de 0° a 360° com incremento de 15° e ângulo de incidência máximo de 20° , 25° e 30° com incremento de 1° .

Tabela 11– Média amostral da estimativa do mergulho do eixo de simetria do modelo sintético X para um nível de ruído de 5%. Azimute variando de 0^0 a 360^0 com incremento de 15^0 . A terceira e quinta coluna da tabela mostram os limites mínimo e máximo das estimativas da direção e mergulho do eixo de simetria. Esta variação foi construída observando-se nas cem simulações o menor e o maior valor estimado para a direção do eixo de simetria. O eixo de simetria neste modelo foi girado de $\tilde{\varphi} = 60^0$ em relação ao eixo x_3 e mergulhado de $\tilde{\theta} = 30^0$ em relação ao novo eixo horizontal x_2 . As velocidades das ondas P e S no meio isotrópico de referencia são $\alpha = 4,476$ km/s e $\beta = 2,841$ km/s respectivamente

Incidência Max.	Média amostral da estimativa da direção do eixo de simetria	Limite mínimo e máximo da estimativa $\hat{\varphi}$	Média amostral da estimativa do mergulho do eixo de simetria	Limite mínimo e máximo da estimativa $\hat{\theta}$
20^0	$46,08^0$	$[5,93^0 \quad 86,95^0]$	$23,29^0$	$[8,06^0 \quad 38,52^0]$
25^0	$59,26^0$	$[52,71^0 \quad 65,81^0]$	$30,59^0$	$[28,54^0 \quad 32,64^0]$
30^0	$60,39^0$	$[57,74^0 \quad 63,01^0]$	$29,40^0$	$[29,34^0 \quad 29,62^0]$

De acordo com a tabela acima vemos que para incidências de até 20^0 as estimativas da orientação do eixo de simetria variam muito e a estimativa da direção do eixo de simetria mostra-se mais sensível à abertura do ângulo de incidência. A partir de incidências de 25^0 tem-se que o valor estimado da orientação do eixo de simetria é muito próximo do valor exato sendo essa diferença menor que 1^0 . No entanto a variação pode chegar a aproximadamente 12% que é o caso da estimativa da direção do eixo de simetria. O melhor resultado é obtido para a geometria em que o azimute vai de 0^0 a 360^0 com incremento de 15^0 e incidência máxima de 30^0 com incremento de 1^0 . Neste caso as estimativas da direção e mergulho do eixo de simetria diferem em menos de 1^0 dos valores exatos e apresentam variação de menos de 10% de seus valores estimados.

A seguir a Tabela 12 abaixo mostra as estimativas da orientação do eixo de simetria considerando a mesma abertura angular para a incidência e variação do azimute de 0^0 a 360^0 é com incremento agora de 30^0 .

Tabela 12– Média amostral da estimativa do mergulho do eixo de simetria do modelo sintético X para um nível de ruído de 5%. Azimute variando de 0^0 a 360^0 com incremento de 30^0 . A terceira e quinta coluna da tabela mostram os limites mínimo e máximo das estimativas da direção e mergulho do eixo de simetria. Esta variação foi construída observando-se nas cem simulações o menor e o maior valor estimado para a direção do eixo de simetria. O eixo de simetria neste modelo foi girado de $\tilde{\varphi} = 60^0$ em relação ao eixo x_3 e mergulhado de $\tilde{\theta} = 30^0$ em relação ao novo eixo horizontal x_2 . As velocidades das ondas P e S no meio isotrópico de referencia são $\alpha = 4,476$ km/s e $\beta = 2,841$ km/s respectivamente.

Incidência Max.	Média amostral da estimativa da direção do eixo de simetria	Limite mínimo e máximo da estimativa $\hat{\varphi}$	Média amostral da estimativa do mergulho do eixo de simetria	Limite mínimo e máximo da estimativa $\hat{\theta}$
20^0	$36,98^0$	$[-11,46^0 \quad 87,42^0]$	$19,85^0$	$[0^0 \quad 39,7^0]$
25^0	$57,18^0$	$[38,88^0 \quad 75,48^0]$	$28,50^0$	$[22,8^0 \quad 34,2^0]$
30^0	$59,58^0$	$[51,83^0 \quad 67,32^0]$	$29,49^0$	$[27,57^0 \quad 30,41^0]$

Verifica-se de acordo com a Tabela 12 que para incidência de 20^0 e azimutes com incremento de 30^0 as estimativas da orientação do eixo de simetria são ainda piores que as estimativas obtidas para azimutes com incremento de 15^0 . A partir de incidências de 25^0 as estimativas da orientação de fratura diferem em menos de 3^0 dos valores exatos, no entanto para azimutes com incremento de 30^0 a variação destas estimativas é bem maior que para azimutes com incremento de 15^0 para um nível de ruído moderado.

De acordo com as tabelas acima podemos também concluir que as estimativas da orientação de fratura $\hat{\varphi}$ e $\hat{\theta}$ tornam-se mais estáveis a medida que o número de medidas azimutais aumenta e a medida que o ângulo de incidência máximo aumenta.

Para as três aberturas máximas de incidência 20^0 , 25^0 e 30^0 das Tabelas 11 e 12 acima temos que as estimativas da direção de fratura $\hat{\varphi}$ variam mais que as estimativas do mergulho da fratura $\hat{\theta}$. Portanto a estimativa da direção do eixo de simetria é mais sensível às medidas azimutais que a abertura angular da incidência.

4.3.2 – Análise dos resultados

Após terem sido feitos vários testes com modelos, geometria, diferentes níveis de ruído chegou-se às seguintes conclusões:

- A estimativa da orientação de fraturas em meios TI apresenta alto custo devido à necessidade de dados na configuração Walkaway multiazimutal com dados em 3-D e geofones de três componentes.
- A razão sinal/ruído precisa ser alta para que se possa utilizar dados de reflexão na estimativa da orientação de fratura.
- Não podemos estimar a orientação de fratura a partir dos coeficientes reflexão R_{PP} , R_{SP} e R_{TP} para pequenas incidências (incidência máxima de 20°).
- Não podemos estimar a orientação de fratura a partir da inversão apenas do coeficiente reflexão R_{PP} ou da inversão do coeficiente de reflexão R_{TP} . A estimativa da orientação de fratura a partir da inversão do coeficiente de reflexão é instável R_{SP} .
- A orientação da fratura é mais bem estimada a partir da inversão conjunta de R_{PP} , R_{SP} a partir das fórmulas linearizadas para incidências arbitrárias. Ainda que a orientação de fratura possa ser estimada apenas da inversão conjunta de R_{PP} e R_{SP} estas estimativas são em geral menos estáveis que a estimativa a partir dos três coeficientes.
- O incremento mínimo para o ângulo de azimute para que a determinação da orientação seja estável é de 30° e com incidências de pelo menos 25° .
- As estimativas dos parâmetros elásticos, contraste de densidade e orientação da fratura são mais instáveis para medidas azimutais cujo incremento é grande. Estas estimativas tornam-se estáveis a partir de medidas azimutais com incremento que varia pelo menos de 30° em 30° .
- Apesar da estimativa do contraste dos parâmetros elásticos C_{14} , C_{15} , C_{16} , C_{24} , C_{25} , C_{26} , C_{36} , C_{45} , C_{46} serem instáveis, a estimativa do ângulo de orientação é estável para níveis de ruído moderado (<10%).
- Nas estimativas acima se utilizou o pressuposto de que o meio de referência era conhecido e igual ao meio de incidência, entretanto verifica-se que para a estimativa da orientação e mergulho da fratura basta que apenas a razão entre a velocidade da onda S e a velocidade da onda P no meio de incidência seja conhecido. Testes mostraram que estas estimativas são iguais às obtidas quando se supõe conhecido o meio de referência. Não é, portanto necessário conhecer a densidade do meio de incidência.
- Verificou-se que as fórmulas que determinam a orientação da fratura são mais sensíveis ao ruído que as fórmulas que determinam o mergulho.

- A inversão conjunta dos coeficientes R_{PP} , R_{SP} e R_{TP} apresenta-se mais estável que a inversão conjunta de R_{PP} e R_{SP} . O mergulho da fratura não pode ser determinado apenas da inversão coeficiente R_{PP} , isto de fato já era conhecido uma vez que no capítulo 1 verifica-se que este coeficiente é insensível ao mergulho da fratura. A partir de inversão apenas de R_{SP} verifica-se que a estimativa do ângulo de direção da fratura é instável. Não se consegue estimar a orientação de fratura apenas da inversão do coeficiente R_{TP} .

5- ESTIMATIVA DE ANISOTROPIA LOCAL ATRAVÉS DE DADOS DE VSP DAS ONDAS qP.

Neste capítulo a anisotropia local foi estimada para meios anisotrópicos arbitrários em experimentos de VSP a partir da relação linear entre os parâmetros elásticos do meio, a componente vertical do vetor de vagarosidade e o vetor de polarização de ondas do tipo P.

Inicialmente foi apresentada a formulação teórica desta relação linear. Em seguida foi feita uma análise de sensibilidade desta formulação. A anisotropia local do meio foi então estimada a partir desta relação em modelos sintéticos homogêneos e heterogêneos com anisotropia arbitrária. Uma análise sobre a estimativa de anisotropia usando essa relação linear foi primeiramente apresentada por Zheng & Psencik (2002). Por fim é apresentada a estimativa de anisotropia local em um experimento de dado real.

Em todo este capítulo será usado o sistema de coordenadas cartesianas (x_1, x_2, x_3) com o eixo x_3 positivo na direção que aponta de cima para baixo.

5.1- FUNDAMENTOS TEÓRICOS

Considere três vetores unitários perpendiculares entre si: $\mathbf{f}_i^{(1)}, \mathbf{f}_i^{(2)}$ e $\mathbf{f}_i^{(3)}$, tal que este último é paralelo ao vetor normal a frente da onda P \mathbf{v} . Os vetores $\mathbf{f}_i^{(1)}, \mathbf{f}_i^{(2)}$ podem ser escolhidos de forma arbitrária tal que pertençam ao plano perpendicular a \mathbf{v} . Uma escolha prática é dada por Psencik & Gajewski (1998) como sendo:

$$\begin{aligned}\mathbf{f}^{(1)} &= D^{-1}(v_1 v_3, v_2 v_3, v_3^2 - 1), \\ \mathbf{f}^{(2)} &= D^{-1}(-v_2, v_1, 0), \\ \mathbf{f}^{(3)} &= \mathbf{v},\end{aligned}\tag{33}$$

em que:

$$D = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}.\tag{34}$$

O vetor de vagarosidade no meio de referência (\mathbf{s}^0) é dado por:

$$s_i^0 = \alpha^{-1} v_i,\tag{35}$$

em que α é a velocidade da onda P no meio de referência. Sejam ξ , ζ e η os comprimentos das projeções do vetor de vagarosidade (\mathbf{s}^0) no meio de referência nas direções de x_1 , x_2 e x_3 respectivamente. Estes podem ser escritos como:

$$\xi = \frac{v_1}{\alpha}; \quad \zeta = \frac{v_2}{\alpha}; \quad \eta = \frac{v_3}{\alpha}. \quad (36)$$

Para aproximações de primeira ordem, o vetor vagarosidade de uma onda P que se propaga em um meio perturbado qualquer está relacionado com o vetor vagarosidade no meio de referência (Zheng & Psencik, 2002) por:

$$\mathbf{s} = \mathbf{s}^0 + (\Delta\xi, \Delta\zeta, \Delta\eta) = (\xi + \Delta\xi) \hat{e}_1 + (\zeta + \Delta\zeta) \hat{e}_2 + (\eta + \Delta\eta) \hat{e}_3, \quad (37)$$

em que $\Delta\eta$, $\Delta\xi$ e $\Delta\zeta$ são perturbações de primeira ordem de ξ , ζ e η , respectivamente, \hat{e}_1 , \hat{e}_2 e \hat{e}_3 , são vetores unitários nas direções x_1 , x_2 e x_3 , respectivamente.

Os vetores de vagarosidade \mathbf{s} e polarização \mathbf{n} de uma onda P que se propaga em um meio anisotrópico qualquer estão relacionados linearmente com os parâmetros WA (parâmetros fracamente anisotrópico, ver anexo B) do meio através da equação Zheng & Psencik (2002).

$$\begin{aligned} B_{m3} &= (\alpha^2 - \beta^2) \left[n_i f_i^{(m)} - \alpha \Delta\xi f_1^{(m)} - \alpha \Delta\zeta f_2^{(m)} - \alpha \Delta\eta f_3^{(m)} \right], \\ B_{33} &= \alpha^2 \left(1 - \alpha^2 c^{-2} \right) \end{aligned} \quad (38)$$

em que $m = 1$ ou 2 , α e β são as velocidades das ondas P e S, respectivamente no meio de referência, c^{-2} é o módulo do vetor vagarosidade s_i e n_i é a i ésima componente do vetor de polarização normalizado e as funções B_{m3} e B_{33} são elementos da matriz de fraca anisotropia (matrizes WA) dada por:

$$B_{mn} = a_{ijkl} f_i^{(m)} f_j^{(3)} f_l^{(3)} f_k^{(3)} - c_0^2 \delta_{mn}. \quad (39)$$

Em que: a_{ijkl} são os parâmetros elásticos normalizados pela densidade; c_0 é a velocidade de fase para ondas qP $c_0 = \alpha$;

Essas matrizes WA são funções dos parâmetros fracamente anisotrópicos (parâmetros WA), das velocidades das ondas P e S e do vetor normal à frente de onda no meio de referência (ver anexo B). A relação entre os parâmetros WA e os parâmetros elásticos do meio é também dada

no anexo B. De acordo com a relação acima apenas quinze parâmetros WA descrevem a propagação de onda do tipo P.

Para que a equação (38) possa ser utilizada é necessário ter o conhecimento prévio de todas as componentes do vetor de vagarosidade do vetor de polarização. Para o caso de levantamentos com geofones de três componentes a determinação de todo o vetor de polarização não é o problema. No entanto, em casos mais comuns só se tem conhecimento da componente vertical do vetor de vagarosidade. É necessário fazer algumas suposições sobre o meio para que as outras componentes da vagarosidade sejam determinadas. Neste trabalho estamos interessados em meios mais gerais possível; desta forma as estimativas serão feitas supondo que apenas a componente vertical da vagarosidade é conhecida e as outras componentes são eliminadas das equações (38) e deste modo essas equações se reduzem a

$$D (\alpha^2 - \beta^2)^{-1} B_{13} - \frac{1}{2} \alpha^{-1} \eta B_{33} = D n_i f_j^{(1)} + \alpha \Delta \eta . \quad (40)$$

Para uma discussão mais detalhada sobre como a existência de uma os mais componentes do vetor vagarosidade afeta a equação (38) ver Zheng & Psencik (2002).

Esta equação pode ser escrita na forma matricial:

$$\mathbf{A} \mathbf{P} = \mathbf{Y}^{\text{obs}} \quad (41)$$

Em que: \mathbf{Y}^{obs} é o vetor das observações formado pelo lado direito de (40), \mathbf{A} é a matriz formada pelo lado esquerdo de (40) a menos dos parâmetros WA (ver anexo B) que estão arrumados no vetor \mathbf{P} na forma:

$$\begin{aligned} P_1 &= \varepsilon_x & P_2 &= \varepsilon_y & P_3 &= \varepsilon_z \\ P_4 &= \delta_x & P_5 &= \delta_y & P_6 &= \delta_z \\ P_7 &= \chi_x & P_8 &= \chi_y & P_9 &= \chi_z \\ P_{10} &= \varepsilon_{15} & P_{11} &= \varepsilon_{16} & P_{12} &= \varepsilon_{24} \\ P_{13} &= \varepsilon_{26} & P_{14} &= \varepsilon_{34} & P_{15} &= \varepsilon_{35} \end{aligned} \quad (42)$$

Para se estimar o vetor \mathbf{P} é necessário que toda a matriz \mathbf{A} , que depende das velocidades das ondas P e S e o vetor normal à frente de onda \mathbf{v} no meio de referência, seja conhecida.

O vetor normal à frente de onda P pode ser representado de três formas diferentes de acordo com alguns pressupostos:

- \mathbf{v} determinado geometricamente. Para esta representação do vetor \mathbf{v} , faz-se o pressuposto de que o meio é homogêneo. Para meios heterogêneos faz-se uma aproximação por raio reto. Quanto maior for o grau de heterogeneidade pior será a aproximação.
- \mathbf{v} calculado supondo conhecido o meio de referência. Faz-se o pressuposto de que o meio de referência é conhecido e neste caso é necessário fazer o traçamento de raio no meio de referência. Essa escolha traz custos computacionais
- \mathbf{v} paralelo ao vetor de polarização observado (\mathbf{v}/\mathbf{n}). Faz-se o pressuposto de que o meio é fracamente anisotrópico e então o vetor de polarização no meio a ser estimado é resultante de uma pequena perturbação no vetor \mathbf{v} . Essa escolha será tanto melhor à medida que o meio for fracamente anisotrópico. Neste caso $n_i f_j^{(1)} = 0$ e o primeiro termo a direita de (40) desaparece.

Existem várias maneiras de se determinarem às velocidades das ondas P e S no meio de referência. No decorrer deste capítulo será mostrada uma maneira de se estimar estas velocidades.

A seguir é feita uma análise de sensibilidade da equação (40). Para esta análise a velocidade da onda P no meio de referência foi escolhida arbitrariamente e a velocidade da onda S foi determinada segundo a relação de Poisson. Quanto ao vetor frente de onda \mathbf{v} este foi determinado de forma geométrica¹¹ e especificado por:

$$\mathbf{v} = (\cos\varphi \sin\vartheta, \sin\varphi \sin\vartheta, \cos\vartheta), \quad (43)$$

em que φ é o ângulo azimutal e ϑ o ângulo que a frente de onda faz com o eixo vertical ($0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $0 \leq \vartheta \leq \pi$). Assim, \mathbf{A} é função das velocidades das ondas P e S no meio de referência e da geometria do levantamento (ângulo de azimute e incidência). Foi verificado posteriormente que os resultados obtidos na análise de sensibilidade são independentes da escolha de \mathbf{v} . Quanto à influência da escolha de \mathbf{v} nas estimativas dos parâmetros WA foi feita no decorrer deste capítulo uma análise da sensibilidade das estimativas obtidas a partir de (40) para as três escolhas da frente de onda no meio de referência apresentadas acima.

¹¹ Uma vez que a análise de sensibilidade deve ser independente do meio utilizado e função apenas da geometria do levantamento, optou-se por determinar \mathbf{v} de forma geométrica. Testes mostraram que a sensibilidade independe da escolha feita para \mathbf{v} .

5.2- DESENHO DO EXPERIMENTO

É usada a configuração de VSP mostrada na Figura 19. O poço está situado na superfície e na origem do sistema de coordenadas com o receptor em seu interior situado a uma profundidade de 0,4 km. Consideram-se perfis com 18 fontes (nove em cada lado do poço) espaçadas regularmente por 0,1 km. A primeira fonte está a uma distância de 0,9 km do poço.

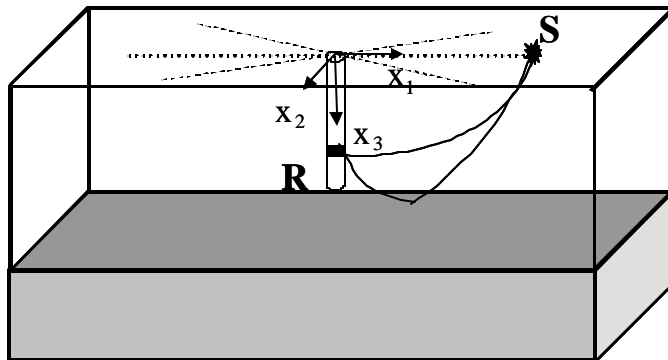


Figura 19 – Desenho do experimento em VSP. Fontes localizadas na superfície no perfil $\phi = 0$ (linha pontilhada), são representadas as ondas diretas e convertidas que partem da fonte (S) para o geofone (R). Geofone situado no interior do poço. O modelo é formado por um meio de incidência anisotrópico arbitrário e o meio subjacente é isotrópico.

A análise de sensibilidade foi feita considerando-se várias geometrias e em cada uma delas foi determinada a matriz de sensibilidade \mathbf{A} e em seguida foi calculada, através de SVD, sua matriz de resolução, que é dada por (Menke, 1984):

$$\mathbf{\ddot{E}} = \mathbf{V}_r \mathbf{V}_r^T, \quad (44)$$

sendo \mathbf{V} a matriz cujas colunas são autovetores de \mathbf{A} e \mathbf{V}^T a matriz transposta de \mathbf{V} . O subscrito r que se refere ao posto efetivo da matriz \mathbf{A} . O posto efetivo r é determinado pelo número de valores singulares da matriz \mathbf{A} maiores que o valor absoluto 10^{-8} . Da mesma forma como no capítulo 3, será feita uma análise de sensibilidade conservativa para determinar que parâmetros poderão ser resolvidos. Os resultados obtidos são discutidos a seguir.

5.2.1- Análise dos resultados

Foram feitos testes com vários perfis e diferentes ângulos entre eles. Verificou-se que:

- Para um único perfil tem-se que apenas cinco parâmetros poderão ser obtidos. São eles ϵ_x , ϵ_z , δ_x , ϵ_{15} e ϵ_{35} se o perfil é paralelo ao eixo x_1 ou ϵ_y , ϵ_z , δ_y , ϵ_{24} e ϵ_{34} se o perfil é paralelo ao eixo x_2 .
- Para dois perfis foram testadas várias combinações entre as direções dos perfis e a melhor combinação é a formada pelas direções $\varphi = 0^0$ e $\varphi = 90^0$. Nestas direções nove parâmetros poderão ser obtidos, são eles: ϵ_x , ϵ_y , ϵ_z , δ_x , δ_y , ϵ_{15} , ϵ_{24} , ϵ_{34} e ϵ_{35} .
- Para três perfis foram testadas várias combinações entre as direções dos perfis e a melhor combinação é a formada pelas direções $\varphi = 0^0$, $\varphi = 45^0$ e $\varphi = 90^0$. Nestas direções dez parâmetros mais uma combinação¹² poderão ser obtidos, são eles: ϵ_x , ϵ_y , ϵ_z , δ_x , δ_y , χ_z , ϵ_{15} , ϵ_{24} , ϵ_{34} e ϵ_{35} .
- Para quatro perfis foram testadas várias combinações entre as direções dos perfis e a melhor combinação foi formada pelas direções $\varphi = 0^0$, $\varphi = 45^0$, $\varphi = 90^0$ e $\varphi = 135^0$. Nestas direções treze parâmetros mais uma combinação¹³ poderão ser obtidos, são eles: ϵ_x , ϵ_y , ϵ_z , δ_x , δ_y , δ_z , χ_x , χ_y , χ_z , ϵ_{15} , ϵ_{24} , ϵ_{34} e ϵ_{35} .
- Para cinco perfis todos os parâmetros que aparecem na equação (42) (15 parâmetros WA) poderão ser obtidos quaisquer que sejam as direções escolhidas desde que estas direções não sejam paralelas.
- Considerando ainda o mesmo experimento com cinco perfis e diminuindo o número de fontes entre o poço. Verificou-se que apenas seis fontes por perfil (três em cada lado do poço) são necessárias.
- Foi testada também resolução dos parâmetros em relação à escolha das velocidades das ondas P e S do meio de referência. Concluiu-se que a resolução dos parâmetros é insensível às velocidades no meio de referência.
- A determinação dos parâmetros que poderão ser resolvidos, através da análise conservativa, independem das três possíveis formas de se escolher \mathbf{v} .

¹² Combinação dos parâmetros ($\chi_x + \chi_y$) é resolvida.

¹³ Combinação dos parâmetros ($\epsilon_{16} + \epsilon_{26}$) é resolvida

De acordo com essa análise sabe-se que parâmetros poderão ser recuperados a partir da geometria do levantamento. No entanto para que um parâmetro possa ser bem estimado é necessário que além da análise de resolução conservativa desses parâmetros uma análise de sua estabilidade, isto é, verificar a partir da inversão da equação (40) como as estimativas dos parâmetros WA se comportam em presença de ruídos nos dados observados.

5.3 – PROBLEMA INVERSO

Uma das formas de se determinar a velocidade da onda P é através da expressão:

$$\alpha = \frac{1}{\text{Nobs}} \sum_{i=1}^{\text{Nobs}} \frac{n_z^{(i)}}{s_z^{(i)}}. \quad (45)$$

A velocidade da onda S é dada por $\beta = \alpha/\sqrt{3}$ de acordo com a razão de Poisson. O subscrito z refere-se a terceira componente de um vetor e Nobs é o número de observações. Desta forma, a velocidade da onda P no meio de referência é dada pela razão entre a terceira componente do vetor de polarização e a terceira componente do vetor de vagarosidade observados ponderada pelo número de observações.

Escrevendo a equação (42) que relaciona os vetores de polarização e de vagarosidade na forma matricial (41), estimou-se os valores do vetor \mathbf{P} (42) que minimiza a função:

$$\phi = \left\| \mathbf{Y}^{\text{obs}} - \mathbf{A}\tilde{\mathbf{P}} \right\|_2, \quad (46)$$

em que: \mathbf{Y}^{obs} é o vetor das observações formado pelo lado direito de (40); \mathbf{A} é a matriz formada pelo lado esquerdo de (40) (ver anexo B); $\tilde{\mathbf{P}}$ são as estimativas dos parâmetros WA a ser encontrados de tal forma que minimize a função ϕ em (46) e o subscrito 2 refere-se a norma euclidiana.

Na inversão não foram usados estabilizadores. A estabilidade das estimativas foi analisada de duas formas. Primeiramente através de simulação numérica; neste caso para cada modelo sintético foram feitas cem inversões com cem diferentes sementes que geram o ruído. Em seguida através da determinação e análise da matriz de covariância (30) das estimativas.

Nos modelos sintéticos são utilizados dados de VSP multiazimutal com múltiplas fontes e foram gerados a partir dos modelos sintéticos com o uso do pacote ANRAY modificado (Gajewski & Psencik, 1990).

A seguir são mostrados os resultados obtidos para três modelos (XI, XII e XIII). Os dois primeiros são modelos sintéticos e o terceiro refere-se a dados reais. No primeiro modelo os dados são medidos em cinco perfis. No segundo e terceiro modelos os dados são medidos em apenas um perfil.

5.3.1 – Testes numéricos

Em todos os modelos a origem do sistema de coordenadas está situada no poço. Este por sua vez está situado na superfície (ver Figura 19).

São utilizados dados de ondas P diretas e refletidas. A estabilidade das estimativas para os modelos XI e XII foram calculadas através de simulação numérica e através da matriz de covariância (30). Na simulação numérica foi gerado um conjunto de cem simulações contaminadas com diferentes ruídos, cujo desvio padrão do ruído variava de 1% a 50% do maior valor de da combinação valor da combinação $Dn_i f_i^{(1)} + \alpha \Delta \eta$ (parte direita de (38)). Cada conjunto de cem simulações que foi contaminado com diferentes níveis de ruído foi então utilizado na inversão de (40) e foi então calculada a média e desvio padrão amostral das estimativas. Para o modelo XIII de dados reais a estabilidade foi calculada apenas com a determinação da matriz de covariância (30) das estimativas.

Quanto a escolha do vetor frente de onda optou-se por determinar \mathbf{n} como sendo paralelo ao vetor de polarização no meio perturbado (Zheng & Psencik, 2002). Desta forma $\eta e_i^{(1)} = 0$ e as escolhas feitas para os valores do meio de referência são apenas baseados nos dados observados.

5.3.1.1- Modelo XI

O primeiro modelo apresenta 9 fontes em cada lado do poço com distribuição regular de 0,1 km em 5 perfis que estão separados por ângulos azimutais de $\varphi = 0^0$, $\varphi = 30^0$, $\varphi = 60^0$, $\varphi = 120^0$ e $\varphi = 150^0$. O geofone está a uma profundidade de 0,4 km em relação à superfície.

O modelo é formado dois meios. O meio incidente é um triclinico cujo tensor elástico normalizado pela densidade A_{IJ} (já na notação reduzida (Helbig, 1994)) na superfície (em m^2/s^2) é dado por:

$$A_{IJ} = \begin{bmatrix} 23,65 & 6,33 & 6,03 & -0,20 & 0,47 & 0,23 \\ & 23,12 & 6,00 & -0,79 & 0,10 & 0,23 \\ & & 20,92 & -0,68 & 0,39 & 0,02 \\ & & & 8,04 & 0,05 & 0,16 \\ & & & & 8,09 & -0,29 \\ & & & & & 8,53 \end{bmatrix} \quad (47)$$

Esse tensor elástico varia com a profundidade. O tensor é calculado segundo a relação:

$$a_{IJ} = A_{IJ} (1+0,25z). \quad (48)$$

O meio subjacente é um isotrópico. Esses meios estão separados por uma interface que está a 2 km da superfície. Pretende-se estimar, a partir da inversão de (40), a anisotropia do meio de incidência.

A velocidade das ondas P e S do meio de referência encontrado segundo (41) são respectivamente $\alpha = 4,7$ km/s e $\beta = 2,77$ km/s. Na Tabela 13 são mostrados para os parâmetros WA os seus valores exatos, os valores estimados, o desvio padrão das estimativas, os parâmetros elásticos exatos e seus valores estimados obtidos a partir das estimativas de WA para um nível de ruído de 10% com ajuste de $1,14 \cdot 10^{-3}$.

Tabela 13 – Modelo sintético XI. Valores exatos e estimados dos parâmetros WA, valores exatos (valores adimensionais) e estimado dos parâmetros elásticos normalizados pela densidade (em m^2/s^2) e seus respectivos desvios padrão amostral para um nível de ruído de 10%. As velocidades das ondas P e S no meio de referência são de $\alpha = 4,7$ km/s e $\beta = 2,77$ km/s respectivamente. Nesta tabela não são mostrados os valores do desvio padrão calculados diretamente da matriz de covariância (30), esses valores são similares aos desvios padrão amostral.

WA	Exato	Estimativa	Desvio padrão.	Param. elas	Exato.	Estimativa.
ϵ_x	7,75E-02	5,92E-02	1,33E-02	A ₁₁	25,54	24,73
ϵ_y	6,46E-02	5,31E-02	1,60E-02	A ₂₂	24,97	24,46
ϵ_z	1,08E-02	7,66E-03	1,01E-03	A ₃₃	22,59	22,45
δ_x	8,50E-02	6,06E-02	1,96E-02	A ₁₃ +2 A ₅₅	23,99	23,45
δ_y	7,82E-02	6,27E-02	2,30E-02	A ₂₃ +2 A ₄₄	23,84	23,50
δ_z	0,14	0,11	2,63E-02	A ₁₂ +2 A ₆₆	25,26	24,59
χ_x	-3,83E-02	-3,55E-02	5,74E-03	A ₁₄ +2 A ₅₆	-0,85	-0,78
χ_y	2,02E-2	1,80E-02	4,83E-03	A ₂₅ +2 A ₄₆	0,45	0,40
χ_z	5,84E-03	4,16E-05	1,06E-02	A ₃₆ +2 A ₄₅	0,13	9,19E-04
ϵ_{15}	2,28E-02	2,11E-02	2,19E-03	A ₁₅	0,50	0,47
ϵ_{16}	1,14E-02	5,81E-03	7,48E-03	A ₁₆	0,25	0,13
ϵ_{24}	-3,83E-02	-3,59E-02	3,74E-03	A ₂₄	-0,85	-0,79
ϵ_{26}	1,11E-02	5,69E-03	7,47E-03	A ₂₆	0,25	0,13
ϵ_{34}	-3,34E-02	-3,03E-02	1,13E-03	A ₃₄	-0,74	-0,67
ϵ_{35}	1,94E-02	1,75E-02	9,29E-04	A ₃₅	0,43	0,39

De acordo com a tabela acima se verifica que os parâmetros ϵ_z , ϵ_{15} , ϵ_{24} , ϵ_{34} e ϵ_{35} são bem estimados para níveis de ruído de 10%, uma vez que seus respectivos desvios padrão são iguais ou inferiores a 10% de seus valores estimados. Os demais parâmetros são instáveis, pois seus apresentam desvio padrão superior a 10% de suas estimativas. Esse resultado se mantém à medida que o nível de ruído aumenta.

Neste modelo tanto os dados da onda direta quanto os dados da onda refletida são contaminados com o mesmo nível de ruído, ou seja, 10% da maior observação igual para os dois tipos de onda. Foram feitos também testes em que os dados de onda refletida eram contaminados com o dobro do ruído dos dados de onda direta. O objetivo foi simular o que acontece em geral em dado real onde as ondas refletidas apresentam maior grau de dificuldade em serem medidas. Verificou-se que os cinco parâmetros (ϵ_z , ϵ_{15} , ϵ_{24} , ϵ_{34} e ϵ_{35}) que antes eram estáveis começam a ficar instáveis para níveis de ruído superiores a 10%. Concluí-se que para este modelo as estimativas dos parâmetros ϵ_z , ϵ_{15} , ϵ_{24} , ϵ_{34} e ϵ_{35} são boas para níveis de ruído moderado.

5.3.1.2- Modelo XII

A configuração utilizada neste modelo é igual à utilizada em Horne e Leaney (2000). Têm-se 228 fontes distribuídas em 2,5 km em ambos os lados do poço em apenas um perfil paralelo ao eixo x_1 . Estas fontes estão espaçadas irregularmente a uma distância média de 0,025km. O receptor está situado a 1,63 km de profundidade.

Este modelo é formado por dois meios da mesma forma que no modelo XI O meio de incidência é um triclinico cujo tensor elástico normalizado pela densidade A_{IJ} na superfície (em m^2/s^2) é dado por:

$$A_{IJ} = \begin{bmatrix} 12,00 & 4,00 & 4,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ & 10,00 & 4,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ & & 8,00 & 0,00 & -0,15 & 0,00 \\ & & & 3,00 & 0,00 & 0,00 \\ & & & & 3,00 & 0,00 \\ & & & & & 5,00 \end{bmatrix}. \quad (49)$$

Este tensor elástico varia com a profundidade e essa variação é dada por:

$$a_{IJ} = A_{IJ} (1+0,1z). \quad (50)$$

O meio subjacente é um isotrópico situado a 2 km da superfície. Como neste modelo tem-se dados em apenas um perfil, fazendo $n_2 = 0$, podemos reescrever (40) na forma:

$$|v_1| (\alpha^2 - \beta^2)^{-1} B_{13} - \frac{1}{2} \alpha^{-1} v_3 B_{33} = |v_1| n_{if}^{(1)} + \alpha \Delta \eta. \quad (51)$$

A partir da inversão de (51) estimamos a anisotropia do meio de incidência próximo ao geofone. Neste modelo a estimativa dos parâmetros WA foi feita um pouco da estimativa que foi feita no modelo XI. Fizemos a inversão considerando três casos distintos como Gomes et al., 2003.

No primeiro caso não fizemos suposição alguma sobre o meio a ser invertido, ou seja, o meio é um anisotrópico arbitrário. Desta forma podemos estimar os valores dos parâmetros ϵ_x , ϵ_z , δ_x , ϵ_{15} e ϵ_{35} . As funções B_{13} e B_{33} modificadas estão no anexo B. Esse experimento foi chamado de ANI.

No segundo caso supomos que o meio a ser invertido é um meio TIV. Assim apenas os parâmetros ε_x , ε_z , δ_x podem ser estimados e novamente as funções B_{13} e B_{33} modificadas estão no anexo B e esse experimento foi chamado de TIV.

Por fim no terceiro caso supomos que o meio a ser invertido é um isotrópico e, portanto apenas o parâmetro ε_z pode ser estimado. Novamente B_{13} e B_{33} modificadas estão no anexo B e esse experimento foi chamado de ISO

As velocidades da onda P e S no meio de referência determinadas segundo a relação (45) foram de $\alpha = 2,99$ km/s e $\beta = 1,76$ km/s, respectivamente.

Na Figura 20 são mostrados o lado direito de (51) obtido a partir dos dados sintéticos contaminado com ruído cujo desvio padrão é da 30% e os resultados das inversões para os casos ANI, TIV e ISO respectivamente.

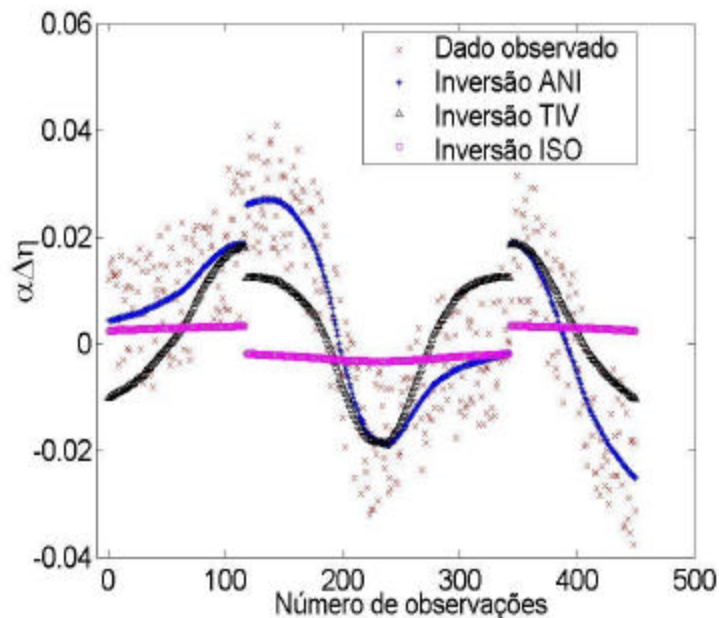


Figura 20- Lado direito da equação (51) obtida a partir dos dados reais no modelo XIII em vermelho. São apresentados também os resultados da inversão para o caso ANI (azul), TIV (preto) e ISO (magenta). As velocidades das ondas P e S no meio de referência são $\alpha = 2,99$ km/s e $\beta = 1766$ km/s, respectivamente.

Os dados apresentam um nível de ruído grande. De acordo com a figura acima podemos apenas concluir que o modelo a ser estimado não é isotrópico. Os resultados para os casos TIV e ANI apresentam-se muito próximos.

Uma outra forma de plotar os resultados é mostrado através da Figura 21, nesta é mostrada a componente vertical da vagarosidade (s/km) versus o ângulo que o vetor polarização forma com o eixo vertical (em graus) como em Horne & Leaney (2000). Na figura os dados sintéticos estão contaminados com 30% de ruído (em vermelho) e o resultado da inversão para o caso ANI (em azul). Verifica-se que a componente vertical do vetor vagarosidade e o ângulo que o vetor de polarização forma com o eixo vertical obedecem a uma direção.

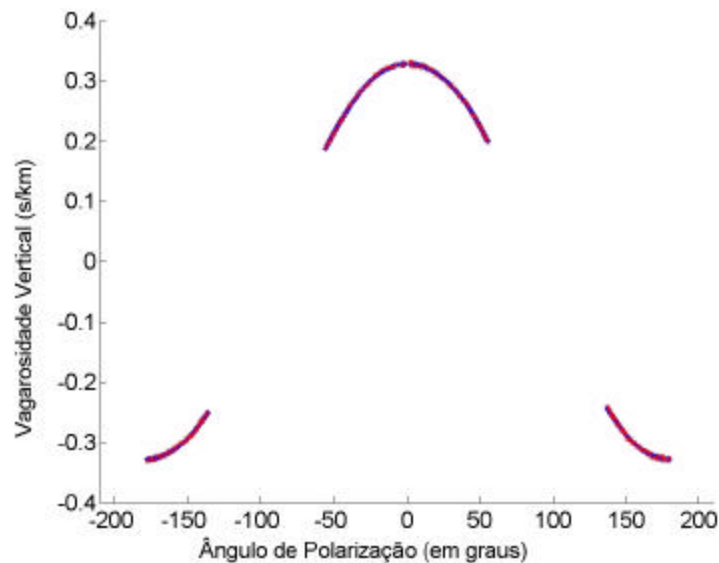


Figura 21- Dados sintéticos do modelo XII contaminados com ruído de 30% em vermelho e resultado da inversão para o caso ANI em azul. Não foram medidos dados de $[50^{\circ} \ 140^{\circ}]$ e $[-140^{\circ} \ -50^{\circ}]$. As velocidades das ondas P e S no meio de referência são $\alpha = 2,99$ km/s e $\beta = 1,76$ km/s respectivamente.

Foram plotados ainda na Figura 21 os resultados da inversão para os casos TIV e ISO, no entanto não é fácil notar diferenças dos ajustes para os três casos a partir dessa figura e não se pode concluir nada sobre qual o melhor experimento. Na Figura 22 estamos plotando a razão entre as componentes verticais da vagarosidade e polarização multiplicados pela velocidade da onda P no meio de referência versus o ângulo que o vetor polarização forma com o eixo vertical (em graus) como em Zheng & Psencik (2002). Os dados sintéticos são mostrados em vermelho, o resultados da inversão para o caso ANI está em azul, para o caso TIV em preto e para o caso ISO está em magenta. Através dessa forma de plotagem pode-se perceber que o ajuste encontrado para o caso ANI está mais próximo dos dados observados que para os casos TIV e ISO, pode-se concluir que o meio estimado não é TIV e nem ISO, mais não podemos determinar que meio tem-se como no experimento de dados reais (Gomes et al., 2003).

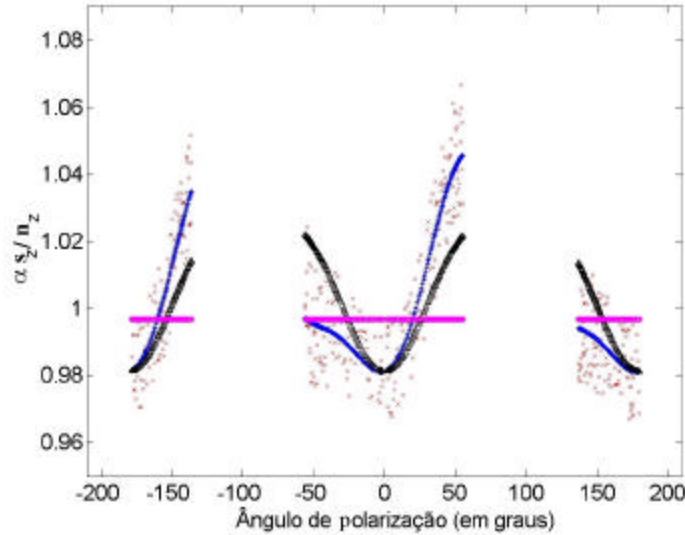


Figura 22- Dados sintéticos do modelo XII contaminados com ruído de 30% (vermelho), ajuste obtido para o caso ANI (azul), ajuste obtido para o caso TIV (preto), ajuste obtido para o caso ISO (magenta). Melhor resultado para o caso ANI. As velocidades das ondas P e S no meio de referência são $\alpha = 2,99$ km/s e $\beta = 1,76$ km/s respectivamente.

Os ajuste na figura acima são calculados para as estimativas dos parâmetros WA mostrados na Tabela 14 abaixo para os três casos ANI, TIV e ISO considerando um nível de ruído de 30%. Nesta tabela também são mostrados os valores exatos dos parâmetros WA, os desvio padrão das estimativas, os valores exatos dos parâmetros elásticos e na última coluna da tabela tem-se uma faixa onde se pode encontrar a variação das estimativas dos parâmetros elásticos. A seguir é mostrado como essa faixa foi construída para a estimativa do parâmetro elástico A_{11} .

Seja $\hat{\epsilon}_x$ o valor estimado do parâmetro ϵ_x e δ_{ϵ_x} seu desvio padrão. Temos que a estimativa deste parâmetro varia de:

$$\hat{\epsilon}_{x \text{ MIN}} = \hat{\epsilon}_x - \delta_{\epsilon_x} \text{ e } \hat{\epsilon}_{x \text{ MAX}} = \hat{\epsilon}_x + \delta_{\epsilon_x}. \quad (52)$$

De acordo com a relação apresentada em (75) temos que o parâmetro elástico A_{11} , que está relacionado com ϵ_x por:

$$\hat{A}_{11} = \alpha^2 [2\hat{\epsilon}_x + 1]. \quad (53)$$

A variação das estimativas de A_{11} é construída por:

$$\hat{A}_{11 \text{ MIN}} = \alpha^2 [2\hat{\epsilon}_{x \text{ MIN}} + 1] \text{ e } \hat{A}_{11 \text{ MAX}} = \alpha^2 [2\hat{\epsilon}_{x \text{ MAX}} + 1] \quad (54)$$

Desta forma a faixa de variação da estimativa de A_{11} é dada por $[\hat{A}_{11\text{MIN}} \hat{A}_{11\text{MAX}}]$. O valor central deste intervalo é \hat{A}_{11} .

Os intervalos de variação dos outros parâmetros elásticos segue essa mesma construção observando sempre a relação entre o parâmetro WA e o parâmetro elástico dada em (75).

Tabela 14 – Modelo sintético XII. Valores exatos e estimados dos parâmetros WA (grandezas adimensionais), os parâmetros elásticos normalizados pela densidade (em m^2/s^2), desvio padrão amostral das estimativas de WA e intervalo de variação dos parâmetros elásticos. Nível de ruído de 30%. Nesta tabela não são mostrados os valores do desvio padrão calculados diretamente da matriz de covariância (30), esses valores são similares aos desvios padrão amostral.

	WA	Exato	Estimativa	Desvio. padrão.	Param elas.	Exato	Varição
ANI	ϵ_x	0,28	0,17	9,48E-03	A_{11}	13,96	[11,86 12,20]
	ϵ_z	2,02E-02	1,90E-02	8,44E-04	A_{33}	9,3	[9,26 9,29]
	δ_x	0,30	0,22	1,62E-02	$A_{13+2} A_{55}$	11,63	[10,74 11,03]
	ϵ_{15}	0,00	1,71E-03	4,87E-03	A_{15}	0,00	[-0,03 0,06]
	ϵ_{35}	-1,95E-02	-1,63E-02	1,23E-03	A_{35}	-0,17	[-0,16 -0,13]
TIV	ϵ_x	0,28	0,17	9,47E-03	A_{11}	13,96	[11,78 12,12]
	ϵ_z	2,02E-02	1,87E-02	8,44E-04	A_{33}	9,3	[9,26 9,29]
	δ_x	0,30	0,21	1,62E-02	$A_{13+2} A_{55}$	11,63	[10,67 10,96]
ISO	ϵ_z	2,02E-02	3,30E-03	4,59E-04	A_{33}	9,3	[8,99 9,00]

No caso ANI as estimativas dos parâmetros ϵ_z e ϵ_{35} são estáveis, pois apresentam desvio padrão é menor que 10% do valor estimado para um nível de ruído de 30%. O parâmetro ϵ_{15} apresenta estimativa menor que seu desvio padrão, sugerindo assim que esse parâmetro seja nulo o que de fato é comprovado pelo seu valor exato. Já os parâmetros ϵ_x e δ_x são estáveis para este modelo (desvio padrão menor que 10%). Logo concluímos que para o caso ANI os parâmetros ϵ_x , ϵ_z , δ_x e ϵ_{35} são estáveis, mas ϵ_x e δ_x são mal estimados e ϵ_{15} é nulo.

No caso TIV, da mesma forma que para o caso ANI o parâmetro ϵ_z é estável, pois seu desvio padrão é menor que 10% do valor estimado para um nível de ruído de 30%. Apesar das estimativas dos parâmetros ϵ_x e δ_x serem estáveis para este modelo, essas estimativas não apresentam boa resolução. Logo concluímos que no para o caso TIV, ϵ_x e δ_x são mal estimados.

No experimento ISO o desvio padrão de ϵ_z em relação a sua estimativa é um pouco maior (em trono de 13% do valor estimado para o nível de ruído de 30%) que os desvios padrão desse mesmo parâmetro em relação as suas estimativas nos dois casos anteriores (ANI e TIV), mais ainda assim o parâmetro é estável, mas mal estimado.

Apesar dos três casos ANI, TIV e ISO apresentarem ajustes muito próximos ($8,38 \cdot 10^{-3}$, $1,31 \cdot 10^{-2}$ e $1,68 \cdot 10^{-2}$, respectivamente) de acordo com os resultados da Tabela 14 e da Figura 22 o meio de incidência a ser estimado não parece ser um TIV ou isotrópico uma vez que apesar do parâmetro ε_{15} ter estimativa nula, o parâmetro ε_{35} é bem estimado e sua estimativa é não nula.

Foi aplicado o F-teste (Beck & Arnold, 1976) considerando os modelos: ANI versus TIV e ANI versus ISO. O F-teste é baseado na redução relativa da soma dos quadrados dos resíduos quando todos os parâmetros \mathbf{P} são estimados, comparados com a soma dos quadrado dos resíduos quando apenas um subgrupo $\mathbf{P}_1 \subset \mathbf{P}$ (\mathbf{P}_1 é formado com apenas $q-p$ parâmetros e p é o número total de parâmetros) de parâmetros é estimado (Chamaremos a essa redução relativa de F).

Uma vez que F tem distribuição $F_{1-\alpha}(q, n-p)$ (teorema 6.2.4, Beck, e Arnold, 1976) em que: α é o nível de confiança, n número de observações, $n-p$ grau de liberdade, a hipótese de que apenas o subconjunto de parâmetros $\mathbf{P}_1 \subset \mathbf{P}$ explica os dados é testada para um nível de confiança α pela comparação de F com o valor crítico $F_{1-\alpha}(q, n-p)$. Se esse valor crítico é excedido então F é grande e o modelo com o subgrupo de parâmetros \mathbf{P}_1 não explica os dados observados e isso implica que todos os parâmetros p do grupo \mathbf{P} são necessários para explicar os dados observados.

Verifica-se pelos resultados que o modelo ANI é o único que explica os dados. No entanto, não devemos esquecer que esse é um teste relativo que mostra dentre dois modelos (um mais complexo que o outro) apenas que modelo explica os dados em relação ao outro modelo. Foi então realizado o “goodness-of-fit” (Mood et al., 1974) que determina um resultado absoluto sobre qual (ou quais) modelo(s) explicam os dados. O resultado encontrado foi de que apenas o modelo ANI explica os dados.

Não podemos, no entanto estimar completamente o meio. Isto se deve ao fato de só temos dados medidos em um perfil e, portanto só se podem estimar três parâmetros ε_z , ε_{15} e ε_{35} do meio para se conhecer mais sobre este modelo precisamos de dados em mais que um perfil.

5.3.1.3- Modelo XIII – Dados reais.

Neste modelo os parâmetros WA foram estimados a partir a partir da inversão da equação (37) em um experimento de VSP walkaway de dados reais que foram coletados na região de Mar de Java, localizado na Indonésia, Extremo Oriente.

Esses dados consistem nas componentes verticais dos vetores de vazarosidade s_z e polarização η_z de ondas diretas qP e refletidas qP e qS. Detalhes sobre a obtenção destes dados

são encontrados em Leaney (1990), Esmersoy (1990) e Horne & Leaney (2000). Neste trabalho só utilizamos os dados de onda qP para estimar a anisotropia local.

A descrição da geologia local é apresentada em Leaney (1994). O poço está situado na origem do sistema de coordenadas. Foram utilizadas 228 fontes distribuídas em 2,5 km em ambos os lados do poço que estão espaçadas irregularmente a uma distância média de 0,025 km. O receptor está situado a 1,63 km de profundidade no interior do poço. Neste trabalho são utilizados dados de ondas diretas e refletidas do tipo qP.

Como apenas as componentes verticais do vetor vagarosidade e polarização são conhecidas podem-se fazer várias hipóteses sobre as componentes restantes desses dois vetores. Neste trabalho estamos presumindo que os vetores de vagarosidade e polarização possuem orientação arbitrária espaço.

Escolhemos o vetor normal à frente de onda no meio de referência como sendo o vetor unitário paralelo a projeção do vetor de polarização no plano (x_1-x_3) . No entanto o vetor de polarização tem orientação arbitrária no espaço.

Se considerássemos o pressuposto de que o vetor de vagarosidade está confinado ao plano (x_1-x_3) isso teria a implicação de que duas de suas componentes do vetor de vagarosidade $s_2 = 0$ e s_3 seriam conhecidos. Tal situação é descrita por duas equações em (20) em Zheng & Psencik, (2002). Para o caso de experimento de VSP walkaway, uma destas equações se reduz a equação (40) e a outra equação gera $\epsilon_{16} = \epsilon_{34} = \chi_x = \chi_z = 0$. Desta forma o resultado da inversão considerando orientação arbitrária para o vetor vagarosidade e para o vetor polarização pode facilmente ser transformada para o caso em que esses dois vetores estão confinados no plano (x_1-x_3) .

Na Figura 23 os dados reais estão representados em vermelho e são plotados da mesma forma que em Horne & Leaney (2000).

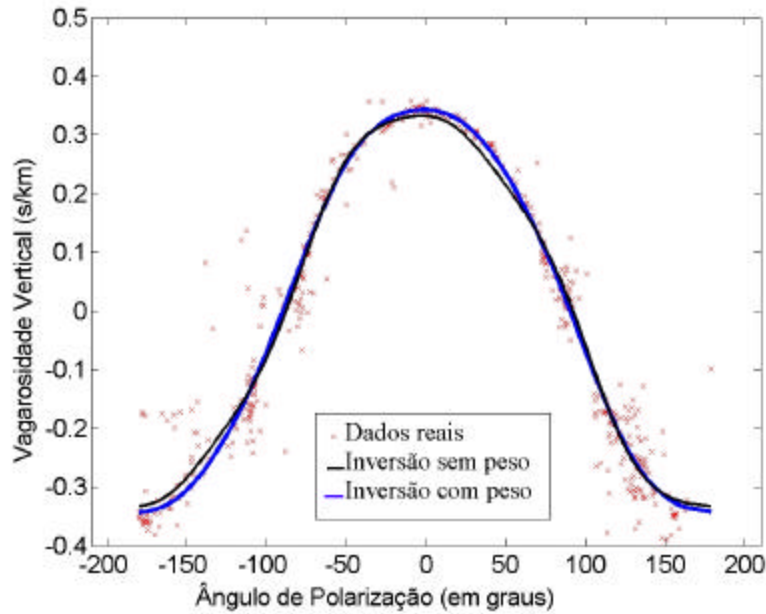


Figura 23 – Dados reais; modelo XII. Apenas dados de onda qP são plotados. Os dados reais são plotados em vermelho. O resultado da inversão sem peso é plotado em preto e o resultado da inversão com peso está plotado em azul. As ondas diretas estão localizadas na faixa $[-90^0 : 90^0]$ e as ondas refletidas são encontradas nas faixas $[-200^0 : -90^0]$ e $[90^0 : 200^0]$.

A Figura 23 parece similar à Figura 21 que mostra os dados observados para o modelo XII. A diferença reside no fato de que no modelo XII não são observados dados nas faixas que vão de -140^0 a -50^0 e 50^0 a 140^0 , isto se deve ao fato do modelo XII ter um grau de heterogeneidade menor que o modelo XIII e, além disso, os dados do modelo XIII apresentam muitos dados em errático. A similaridade entre as Figuras 21 e 23 sugere que a componente vertical da vagarosidade versus ângulo de polarização devem obedecer a uma direção natural.

Uma vez que este modelo de dados reais apresenta muitos dados erráticos, a inversão foi feita considerando-se pesos diferentes para os dados observados.

Partindo do pressuposto de que a componente vertical do vetor de vagarosidade varia suavemente com o ângulo de polarização, procurou-se o polinômio que melhor ajustou esses dados. O polinômio procurado é dado por:

$$(s_z^{\text{Pol}})_i = a_1 + a_2(\Theta)_i + \dots + a_3(\Theta^2)_i + a_{\text{npol}+1}(\Theta^{\text{npol}})_i \quad (55)$$

em que $(s_z^{\text{Pol}})_i$ é o i -ésimo valor da componente vertical do vetor vagarosidade calculado segundo a relação polinomial (55), $(\Theta)_i$ é a i -ésimo ângulo que o vetor de polarização formam com o eixo

vertical e os a_j são os coeficientes do polinômio procurado. O subscrito j depende do grau do polinômio.

O polinômio encontrado foi um polinômio do quarto grau e o peso de cada dado real foi então calculado com uma função do resíduo do ajuste deste polinômio calculado segundo a relação:

$$\omega_i = \exp \left\{ - \frac{\left| (s_z^{\text{obs}})_i - (s_z^{\text{pol}})_i \right|}{2 \sigma^2} \right\}, \quad (56)$$

em que $(s_z^{\text{obs}})_i$ é a i -ésima componente vertical do vetor vagarosidade observado que está relacionado com o i -ésimo ângulo de polarização e σ é a mediana dos resíduos.

Calculado os pesos dos dados observados, foram então estimados os valores dos parâmetros WA que minimizavam a função:

$$\phi^2 = \left\| \mathbf{W} \left(\mathbf{Y}_i^{\text{obs}} - \mathbf{A} \tilde{\mathbf{P}} \right) \right\|_2 \quad (57)$$

em que o N é o número de dados, o símbolo \mathbf{Y}^{obs} é o lado direito da equação (40), $\tilde{\mathbf{P}}$ é vetor formado pelos valores estimados dos parâmetros WA e \mathbf{W} é a matriz diagonal formada pelos pesos dos dados observados (ω_i) obtido de (56).

Da mesma forma que para o modelo XII a estimativa dos parâmetros foi feita considerando os três casos ANI, TIV e ISO. A matriz a ser invertida nos três casos é dada por:

$$\mathbf{W} = \mathbf{A}^T \mathbf{W} \mathbf{A}, \quad (58)$$

em que, \mathbf{A} é a matriz determinada no anexo B. A inversão foi feita sem ser aplicado nenhum estabilizador.

Para efeito de comparação foram feitos os três casos ANI, TIV e ISO para a inversão sem ponderação dos dados e com ponderação dos dados.

De acordo com a relação (45) os valores das velocidades das ondas P e S no meio de referência foram $\alpha = 2,5$ km/s e $\beta = 1,47$ km/s, respectivamente.

A Tabela 15 mostra as estimativas para os três casos considerando a inversão sem peso. São apresentados as estimativas dos parâmetros WA, seu desvio padrão e o intervalo de variação dos parâmetros elásticos determinado da mesma forma que no modelo XII.

Tabela 15 – Estimativa dos parâmetros WA, seus desvios padrão, calculados a partir de (30) e intervalo de variação dos parâmetros elásticos normalizados pela densidade. Este intervalo de variação é calculado da mesma forma que no modelo XII. A inversão foi feita sem peso e as velocidades das ondas P e S no meio de referência são $\alpha = 2,5$ km/s e $\beta = 1,47$ km/s, respectivamente.

	WA	Valor estimado	Desvio padrão	Param elas	Varição
ANI	ϵ_x	0,4	0,18	A_{11}	[8,99 13,52]
	ϵ_z	0,17	1,78E-02	A_{33}	[8,13 8,57]
	δ_x	0,54	0,27	$A_{13+2} A_{55}$	[7,96 11,23]
	ϵ_{15}	-0,025	9,41E-03	A_{15}	[-0,21 -0,09]
	ϵ_{35}	0,057	1,32E-02	A_{35}	[0,27 0,44]
TIV	ϵ_x	0,54	0,182	A_{11}	[10,74 15,29]
	ϵ_z	0,18	1,8E-02	A_{33}	[8,22 8,67]
	δ_x	0,72	0,264	$A_{13+2} A_{55}$	[9,06 12,36]
ISO	ϵ_z	0,12	1,09E-02	A_{33}	[7,62 7,89]

Os ajustes encontrados para os experimentos ANI, TIV e ISO foram de 3, 08, 3,15 e 3, 24, respectivamente.

Nós podemos ver que os valores dos parâmetros elásticos A_{11} e A_{33} diferem em mais que 25% do valor de $6,25 \text{ km}^2/\text{s}^2$ que é o quadrado da velocidade (no meio de referência). A fórmula na qual o esquema de inversão está baseado considera que se tem melhor resultado quando a diferença entre as velocidades das ondas P no meio anisotrópico perturbado e o meio de referência é mínima. Isto não é o que está acontecendo segundo a Tabela 15. Testes com dados sintéticos sem ruído tem mostrado que a melhor estimativa dos parâmetros procurados e o ajuste mínimo calculado de (46) são obtidos para um meio de referência cuja diferença entre as velocidades das ondas P neste meio de referência e o meio procurado é mínima. Testes similares com dados sintéticos contaminados com ruído têm mostrado, entretanto que, a melhor estimativa dos parâmetros procurada é encontrada para um meio de referência cuja distância para o meio procurado é mínima, mas o ajuste agora pode não ser o melhor.

Na inversão estamos fixando as velocidades das ondas P e S no meio de referência e procuramos o melhor valor dos parâmetros WA que minimizam (57). Assim nós decidimos substituir a velocidade $\alpha = 2,5$ km/s por um valor cujo quadrado está mais próximo do valor estimado para A_{33} no experimento ANI. Nós então escolhemos o valor de α como sendo 2,83 km/s e usamos esse valor para todas a inversões feitas.

Na Figura 24 são mostrados o lado direito de (51) obtido a partir dos dados observados contaminado com ruído cujo desvio padrão é da 30% e os resultados das inversões para os casos ANI, TIV e ISO respectivamente.

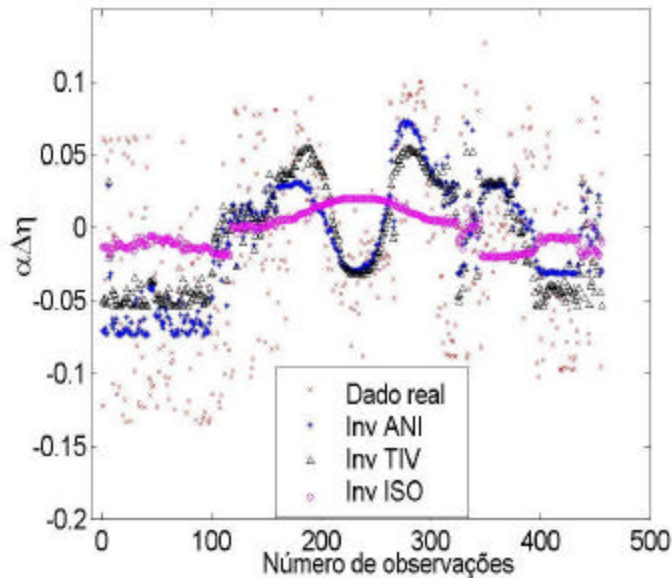


Figura 24- Lado direito da equação (51) obtida a partir dos dados reais no modelo XIII em vermelho. São apresentados também os resultados da inversão para o caso ANI (azul), TIV (preto) e ISO (magenta). As velocidades das ondas P e S no meio de referencia são $\alpha = 2,83$ km/s e $\beta = 1,66$ km/s, respectivamente.

Verifica-se de acordo com a Figura 24 grandes dispersões nas observações reais de 1 a 117 e 346 a 456 que correspondem às observações de onda refletida. Sabe-se de Home & Leaney (2000) que os dados de onda refletida apresentam erros de processamento maiores que os dados de onda direta. São mostrados ainda nessa Figura 24 os resultados da inversão para os casos ANI, TIV e ISO. Para as observações de onda refletida os resultados da inversão para os três casos não são bons, enquanto que, para as observações de onda direta verifica-se dos resultados da inversão que o meio não é isotrópico. No entanto nada podemos afirmar quanto os casos ANI e TIV.

Os resultados da Tabela 16 foram assim obtidos com a nova velocidade da onda P no meio de referência $\alpha = 2,83$ km/s para a inversão sem ponderação.

Tabela 16 – Modelo XIII de dados reais. Estimativa dos parâmetros WA, seus desvios padrão, calculados a partir de (30) e intervalo de variação dos parâmetros elásticos normalizados pela densidade, calculados de acordo com as estimativas de WA. A inversão foi feita sem peso e as velocidades das ondas P e S no meio de referência são $\alpha = 2,83$ km/s e $\beta = 1,66$ km/s, respectivamente.

	WA	Valor estimado	Desvio padrão	Param elas	Varição
ANI	ϵ_x	0,32	0,20	A_{11}	[9,89 16,48]
	ϵ_z	5,88E-02	2,01E-02	A_{33}	[8,63 9,27]
	δ_x	0,34	0,30	$A_{13+2} A_{55}$	[8,39 13,15]
	ϵ_{15}	2,82E-02	1,07E-02	A_{15}	[-0,31 -0,14]
	ϵ_{35}	6,41E-02	1,50E-02	A_{35}	[0,39 0,63]
TIV	ϵ_x	0,48	0,21	A_{11}	[12,43 19,05]
	ϵ_z	6,71E-02	2,04E-02	A_{33}	[8,76 9,41]
	δ_x	0,55	0,30	$A_{13+2} A_{55}$	[9,99 14,79]
ISO	ϵ_z	4,52E-03	1,24E-02	A_{33}	[7,88 8,28]

De acordo com a estimativa do parâmetro ϵ_z pode-se ver que a velocidade do meio de referência é agora próxima à velocidade vertical do meio estimado e os ajustes encontrados foram de 3,5, 3,6 e 3,7 para os casos ANI, TIV e ISO respectivamente. Esses ajustes são um pouco maiores que os ajustes encontrados quando a velocidade do meio de referência era 2,5 km/s.

Nas Tabelas 15 e 16 são mostrados os desvios padrão das estimativas. No entanto para a determinação deste desvio padrão é necessário o conhecimento do desvio padrão do ruído nos dados observados. Não temos essa informação uma vez que temos dados reais. Podemos ter uma estimativa do desvio padrão desse ruído se considerarmos os seguintes pressupostos:

- O erro é aditivo.
- Tem média nula.
- A variância dos erros é constante.
- Os erros são não correlacionados.
- Não existe erro na variável independente.
- \mathbf{P} é um vetor de parâmetros constantes e não há informação a priori .

Desta forma, o valor aproximado do desvio padrão do erro nos dados é (Beck & Arnold, 1976):

$$\hat{\delta}^2 = \frac{\|\mathbf{W}(\mathbf{Y}^{\text{obs}} - \mathbf{A}\tilde{\mathbf{P}})\|_2}{\text{Nobs}} \quad (59)$$

Da Tabela 16 pode-se ver que os parâmetros ϵ_z (em ambos os experimentos ANI e TIV), ϵ_{15} e ϵ_{35} apresentam os menores desvios padrão esses resultados estão de acordo com os testes sintéticos apresentados em Zheng & Psencik, 2002. Além disso, quando comparamos com o desvio padrão do ruído nos dados concluímos que estes três parâmetros são estáveis.

Foi calculada a anisotropia para os valores estimados dos parâmetros elásticos através da relação:

$$\Xi = 100 \frac{(A_{11} - A_{33})}{(A_{11} + A_{33})}. \quad (60)$$

Aplicando as estimativas da Tabela 16 a (60) tem-se que a anisotropia é de 19% para o experimento ANI e 27% para o experimento TIV. Estes valores devem ser tomados com precaução uma vez que o parâmetro A_{11} apresenta grande variação (ver tabela 16). É também verificado na Tabela 16 que os parâmetros ϵ_{15} e ϵ_{35} no experimento ANI são não nulos o que parece indicar que o meio estimado não é um TIV. As componentes verticais do vetor vagarosidade calculados dos parâmetros WA estimados para o experimento ANI na Tabela 16 como função do ângulo de polarização são mostrados na Figura 22 pela linha preta.

Na Tabela 17 abaixo nós mostramos os resultados da inversão com ponderação baseado na equação (57).

Tabela 17 – Modelo XIII de dados reais. Estimativa dos parâmetros WA, seus desvios padrão, calculados a partir de (30) e intervalo de variação dos parâmetros elásticos normalizados pela densidade, calculados de acordo com as estimativas de WA. A inversão feita com peso e as velocidades das ondas P e S no meio de referência são $\alpha = 2,83$ km/s e $\beta = 1.66$ km/s, respectivamente.

	WA	Valor estimado	Desvio padrão	Param Elas	Varição
ANI	ϵ_x	0,37	8,16E-02	A_{11}	[12,56 15,17]
	ϵ_z	2,92E-02	7,86E-03	A_{33}	[8,35 8,60]
	δ_x	0,40	0,12	$A_{13+2} A_{55}$	[10,27 12,17]
	ϵ_{15}	-2,84E-03	4,33E-03	A_{15}	[-0,06 0,01]
	ϵ_{35}	2,79E-02	5,92E-03	A_{35}	[0,17 0,27]
TIV	ϵ_x	0,42	8,26E-02	A_{11}	[13,4 16,04]
	ϵ_z	3,12E-02	8,00E-03	A_{33}	[8,39 8,65]
	δ_x	0,47	0,12	$A_{13+2} A_{55}$	[10,81 12,73]
ISO	ϵ_z	-2,01E-02	5,25E-03	A_{33}	[7,60 7,77]

Ao se aplicar ponderação na inversão o efeito dos pontos erráticos são reduzidos e os ajustes ponderados agora para os experimentos AIN, TIV e ISO são respectivamente 1,14, 1,17 e 1,31. O ajuste desta forma é reduzido em mais de três vezes em comparação com os ajustes

obtidos nesses mesmos três experimentos na inversão sem ponderação. Nos devemos ter em mente, entretanto que ao usarmos ponderação nos dados e fazermos a inversão estamos modificamos os dados observados pressupondo que a componente vertical da vagarosidade e o ângulo de polarização estão relacionados da forma mostrada nas Figuras 21 e 24.

A ponderação leva à redução do desvio padrão das estimativas. Isso também leva a baixos valores estimados para os parâmetros ε_z e ε_{15} (5,88E-02 e 6,41E-02, respectivamente para inversão sem ponderação e 2,92E-02 e 2,79E-02, respectivamente para inversão com ponderação). Conseqüentemente, a anisotropia no experimento ANI cresce em cerca de 24% enquanto que no experimento TIV a anisotropia cresce aproximadamente de 26%. Novamente esses índices devem ser considerados com cautela. Nós podemos ver que o parâmetro ε_{15} no experimento ANI é agora efetivamente nulo. Tem-se que seu desvio padrão é pequeno, mas ainda maior que a estimativa. Vale lembrar que isso acontece também no caso do modelo XII, em que os dados são sintéticos e o desvio padrão de ε_{15} é pequeno, mas ainda maior que a estimativa e o valor exato desse parâmetro é zero. Verifica-se, entretanto que o parâmetro ε_{35} é não nulo tanto para a inversão com ponderação quanto para inversão sem ponderação de onde concluímos que provavelmente o meio estimado não é um TIV. A componente vertical do vetor de vagarosidade, calculado para os valores estimados na Tabela 17 (caso ANI) é plotado versus o ângulo que o vetor de polarização faz com o eixo vertical na Figura 23 em azul.

Da mesma forma que no modelo anterior foi aplicado o critério do F-teste entre os modelos TIV (modelo mais simples) e ANI (modelo mais complexo), mas neste modelo foi considerando o *resíduo ponderado* (ver equação (57)) dessas duas inversões.

A condição necessária para utilização do critério do F-teste é que os resíduos das inversões entre dois modelos a serem testados, apresentem distribuição qui-quadrado, o que ocorre também no caso de resíduos ponderados (Beck, e Arnold, 1976). Assim apesar de estarmos trabalhando com resíduo ponderado o critério do F-teste ainda pode ser aplicado.

Os valores encontrados para a soma do quadrado dos resíduos ponderados foram 1, 14 e 1,17 para os experimentos ANI, TIV respectivamente. A velocidade de referência foi 2,83km/s para todos os experimentos.

Neste caso o F-teste discrimina entre um modelo com cinco parâmetros (caso ANI, mais complexo) em relação a um modelo com três parâmetros (caso TIV mais simples).

Verificou-se que houve uma grande redução relativa da soma dos quadrados dos resíduos ponderados quando todos os cinco parâmetros são estimados em relação à soma dos quadrados dos resíduos ponderados quando apenas três parâmetros são estimados, quando comparada ao valor crítico $F_{1-\alpha}(q, n-p)$ ¹⁴ para um grau de confiança de 95% (Beck, e Arnold, 1976), e, portanto os dados observados são explicados pelo modelo que possui cinco parâmetros (ANI).

O resultado do F-teste é verificado através da Figura 25. Nesta figura é mostrada uma comparação entre os dados observados e os dados calculados a partir das estimativas dos parâmetros WA para os três casos ANI, TIV e ISO de uma forma diferente da mostrada na Figura 23. O eixo vertical mostra a razão $\alpha n_z/s_z$ isto é aproximadamente a razão entre as componentes verticais do vetor de onda e do vetor de polarização. O eixo horizontal mede novamente o ângulo de polarização em graus. Os dados observados estão em vermelho. O resultado da inversão para o experimento ANI está em azul, o resultado da inversão para o experimento TIV em preto e o resultado da inversão para o experimento ISO em magenta. A razão $\alpha n_z/s_z$ foi calculada de (37) para os correspondentes valores estimados de WA com a velocidade de referencia 2,83 km/s e inversão ponderada (ver tabela 17). Apenas os dados observados cujo peso w_i é superior a 0,5 são mostrados nesta figura. Desta forma dados em outliers não são plotados e a figura está mais de acordo com a inversão ponderada na inversão é mínima.

¹⁴ $p = 5$, é o número total de parâmetros, $n = 456$, é o número de observações e $q = 2$, é o número de parâmetros que são desprezados do modelo ANI para o modelo TIV.

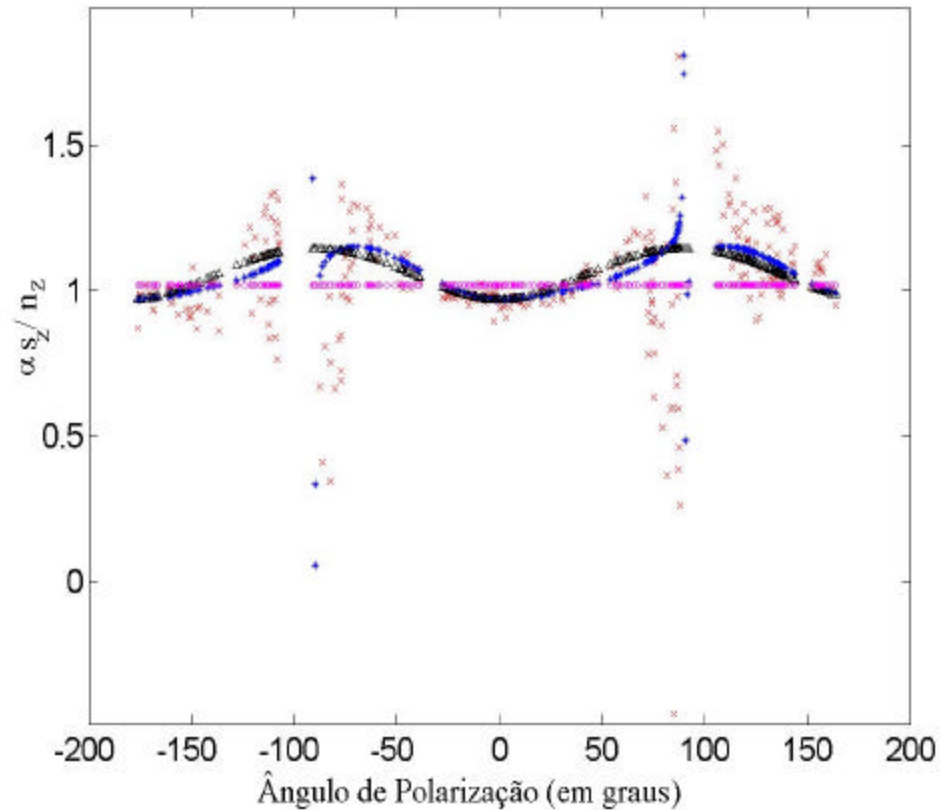


Figura 25 – Modelo XIII de dados reais. Razão entre as componentes verticais do vetor de polarização e o vetor de vagarosidade multiplicados pela velocidade da onda P no meio de referência $\alpha = 2,83\text{km/s}$, versus o ângulo de polarização. Dados reais em vermelho e resultados da inversão para o caso ANI (azul), TIV (preto) e ISO (magenta).

Muito dos dados que corresponde a ondas diretas têm ângulos de polarização no intervalo de -90^0 a 90^0 . Os dados correspondentes às ondas refletidas estão geralmente fora deste intervalo. Vemos grande espalhamento dos dados observados correspondendo às ondas up (associadas em geral com as ondas refletidas) indicando assim que os erros de escolha dos dados relacionados com as ondas up são altos, ver Horne & Leaney, 2000. Nós podemos ver claramente que os resultados da inversão com o pressuposto de que o meio é um isotrópico não ajusta todos os dados observados.

Nos resultados da inversão supondo o meio um TIV os dados são bem ajustados para o intervalo dos ângulos de polarização de -70° a 70° . Além disso, o resultado da inversão para este experimento (TIV) tem uma característica senoidal e sempre com valores finitos para a razão entre as componentes verticais do vetor de vagarosidade e o a componente vertical do vetor normalizado de polarização. Isto é uma consequência do fato de que para um meio TIV a razão α_{n_z/s_z} varia simetricamente com relação ao eixo de simetria (ângulo de polarização de 0°). Para 90° ambas as componentes verticais são iguais a zero. Esta simetria é violada não somente para meios anisotrópicos com baixas simetrias, mas também para meios TI cujo eixo de simetria esteja inclinado. Da Figura 25 acima verifica-se que os dados reais apresentam um comportamento próximo aos ângulos -90° e 90° que é acompanhado apenas pelo resultado da inversão para o caso ANI, enquanto que o resultado da inversão TIV apresenta simetria nestes ângulos. Desta forma concluímos que o caso ANI apresenta-se melhor que o caso TIV. O caso ISO não é discutido porque é facilmente verificado que este modelo não explica os dados observados.

Novamente presumindo que o ruído nos dados é Gaussiano foi estudada a região de confiança (Beck & Arnold, 1976) dos parâmetros estimados WA da Tabela 17. De acordo com as regiões de confiança estimados podemos ver uma forte correlação entre os parâmetros ϵ_z e δ_x e uma correlação menor desses dois parâmetros e o parâmetro ϵ_z .

A inversão de Horne & Leaney, (2000) considerando o pressuposto de que o meio é um TIV estimou para os parâmetros A_{11} , A_{33} e $A_{13}+2A_{55}$ os valores $11,35 \text{ km}^2 / \text{s}^2$, $8,56 \text{ km}^2 / \text{s}^2$, $8,02 \text{ km}^2 / \text{s}^2$, respectivamente. Os resultados acima não estão muito próximos dos valores estimados apresentados nas Tabelas 16 e 17. O parâmetro estável A_{33} compara melhor. Para os parâmetros A_{11} , e $A_{13}+2A_{55}$ as diferenças são maiores. Isto leva também a diferenças da anisotropia estimada. Para os valores de Horne & Leaney, (2000) a anisotropia é de 14%. A anisotropia do meio nas Tabelas 16 e 17 é consideravelmente grande. Quando fazemos as comparações acima devemos ter em mente que há vários fatores que são responsáveis por essas diferenças. Um destes fatores já mencionado é que os parâmetros A_{11} e $A_{13}+2A_{55}$ apresentarem grande grau de incerteza (eles são instáveis em nossa inversão). É também importante lembrar que em contraste com Horne & Leaney, (2000) nós não usamos dados de onda qS na inversão (isso afeta o termo $A_{13}+2A_{55}$). Eles encontraram a componente vertical do vetor de vagarosidade correspondente ao vetor de polarização observado e compararam com a componente vertical do vetor vagarosidade observado. Eles não usam os vínculos para o vetor vagarosidade usados por nós que estimamos

os parâmetros WA a partir da aproximação linear da relação entre estes parâmetros e os vetores de polarização e da vagarosidade.

O tratamento dos pontos erráticos nos dados observados é outro fator que difere em ambos os trabalhos e ainda em contraste com Horne & Leaney, (2000), nós usamos fórmulas aproximadas para a inversão.

5.3.2 – Escolha do vetor normal à frente de onda no meio de referência.

De acordo com os resultados para cada uma das três possíveis escolhas do vetor frente de onda, é verificado que os parâmetros que são bem estimados não apresentam diferenças significativas (a seguir é discutido o significado de “diferenças significativas”) para cada uma das escolhas do vetor frente de onda, mesmo para meios com heterogeneidade considerável (meios em que o tensor elástico da superfície difere de 50% do tensor elástico da base). Assim foi estudada a máxima inclinação de um vetor frente de onda arbitrário em relação ao vetor normal à frente de onda no meio de referência tal que as estimativas dos parâmetros elásticos ainda fossem aceitáveis quando comparadas com as estimativas dos parâmetros elásticos estimados utilizando-se o vetor frente de onda P calculado no meio de referência.

Seja \mathbf{v}' um vetor frente de onda escolhido arbitrariamente e que forma um ângulo Ψ com o vetor normal a frente de onda no meio de referência \mathbf{v}^0 que foi determinado através de traçamento de raio supondo o meio de referência conhecido. Esse vetor é determinado por:

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v}^0 + \mathbf{v}_{\text{perp}}, \quad (61)$$

em que \mathbf{v}_{perp} é o vetor perpendicular ao vetor normal ao vetor frente de onda no meio de referência e foi escolhido como:

$$\mathbf{v}_{\text{perp}} = \tan \Psi \left(\frac{\mathbf{v}_1^0 \mathbf{v}_3^0}{\sqrt{(\mathbf{v}_1^0)^2 + (\mathbf{v}_2^0)^2}}, \frac{\mathbf{v}_2^0 \mathbf{v}_3^0}{\sqrt{(\mathbf{v}_1^0)^2 + (\mathbf{v}_2^0)^2}}, \sqrt{(\mathbf{v}_1^0)^2 + (\mathbf{v}_2^0)^2} \right) \quad (62)$$

O vetor \mathbf{v}_{perp} foi variado dentro da circunferência de raio unitário conforme mostrado na mostrado na Figura 26 abaixo.

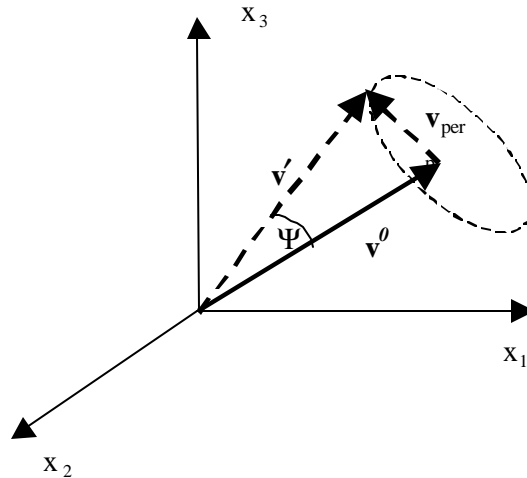


Figura 26 – Geometria do cone de validade do vetor frente de onda. O maior valor do ângulo Ψ formado entre um vetor frente de onda escolhido arbitrariamente \mathbf{v}' e o vetor normal a frente de onda no meio de referência \mathbf{v}^0 foi investigado.

Em seguida variou-se o ângulo Ψ e para cada valor de Ψ o vetor \mathbf{v}_{perp} variou dentro da circunferência de raio unitário. Para cada valor de Ψ e \mathbf{v}_{perp} foi determinado um novo vetor \mathbf{v}' de acordo com (61) e foram feitas as estimativas dos parâmetros WA e foi tirada a média das estimativas obtidas para cada Ψ fixo e \mathbf{v}_{perp} variando ao longo da circunferência.

A comparação foi feita apenas para os parâmetros que eram bem estimados ou seja, p_3 , p_{10} , p_{12} , p_{14} e p_{15} (ver (42)). Consideramos que a diferença entre essas duas estimativas aceitável é quando apresentam um valor menor que 10% do valor estimado de WA obtido através da escolha do vetor frente de onda direto do meio de referência.

Foram feitas análises das estimativas dos parâmetros WA em diferentes modelos sintéticos homogêneos, heterogêneos e com diferentes níveis de anisotropia e de ruído. Verificou-se que:

O tamanho do cone de validade (valor máximo de Ψ .) depende só da anisotropia do meio, ou seja, quanto menor a anisotropia maior o valor de Ψ portanto, o cone de validade é maior. Quanto maior a anisotropia menor valor de Ψ . Para meio com fraca anisotropia ($\leq 10\%$, segundo parâmetros de Thomsen, Thomsen, 1986) o maior valor de Ψ é em média 10° . Foi encontrado para meios com anisotropia em torno de 21% o valor de apenas 1° para Ψ . Desta forma podemos

concluir que para meios com fraca anisotropia as estimativas são insensíveis a diferentes escolhas do vetor normal à frente de onda no meio de referência.

5.3.3-Análise dos resultados

Foram feitos testes com outros modelos sintéticos considerando os seguintes fatores:

- Modelos com diferentes anisotropias.
- Diferentes níveis de ruído
- Quanto ao número de perfis, foram considerados dois casos: dados em apenas um perfil e dados em cinco perfis.
- Foram feitas estimativas com o vetor normal à frente de onda calculado das três maneiras citadas na seção sobre análise de sensibilidade.
- Foram considerados três tipos de dados. Dados com apenas ondas diretas qP, dados com apenas ondas refletidas qP e dados com ambos os tipos.

Os resultados obtidos foram:

Considerando dados de onda direta e onda refletida tem-se que para modelos com fraca anisotropia (Thonsem, 1986), em torno de $\leq 10\%$ homogêneos ou heterogêneos e dados medidos em cinco perfis apenas os parâmetros ϵ_z , ϵ_{15} , ϵ_{24} , ϵ_{34} e ϵ_{35} são bem estimados para níveis de ruído moderado (até 20%). Para modelos com fraca anisotropia mais dados medidos em apenas um perfil só os parâmetros ϵ_z , ϵ_{15} , e ϵ_{35} são bem estimados para o mesmo nível de ruído (até 20%). Esses resultados são válidos independentemente do grau de complexidade entre fonte e geofone. Considerando-se apenas dados de onda direta ou apenas dados de onda refletida não alteram os resultados obtidos na inversão conjunta de dados de onda direta e onda refletida. Verificou-se que na inversão conjunta há estabilidade maior nos parâmetros bem estimados. A forma de se escolher o vetor \mathbf{n} não afeta os resultados acima mencionados. Em todos os modelos com fraca anisotropia foram calculados os ângulos entre o vetor \mathbf{v} no meio de referência e o vetor \mathbf{v} calculado geometricamente e paralelo ao vetor de polarização. Verificou-se que em média esses ângulos não eram maiores que 5° . Para meios com anisotropia moderada e forte ($\geq 20\%$) as estimativas obtidas a partir de (40) perdem a validade.

De acordo com os resultados obtidos para as estimativas dos parâmetros WA obtidas da equação (40) para cada uma das três possíveis escolhas do vetor frente de onda é verificado que

as estimativas dos parâmetros estáveis não apresentam diferenças para cada uma das escolhas do vetor frente de onda, mesmo para meios com alto grau de heterogeneidade.

6-CONCLUSÃO

Neste trabalho os parâmetros elásticos de um meio anisotrópico arbitrário são estimados através dos três atributos da onda: coeficiente de reflexão, vetor de polarização e tempo de trânsito.

Inicialmente foi apresentada uma metodologia para a determinação da fórmula exata dos coeficientes de reflexão e transmissão em meios anisotrópicos arbitrários através das matrizes de impedância e polarização. Esta metodologia possui vantagens computacionais uma vez que todas as características do espalhamento podem ser obtidas a partir de operações com matrizes de terceira ordem.

A partir desta formulação obteve-se uma aproximação para os coeficientes de reflexão de uma onda P e de suas convertidas (R_{PP} , R_{SP} e R_{TP}) considerando-se contraste fraco entre as propriedades físicas do meio e fraca anisotropia. Na linearização do coeficiente R_{PP} verificou-se que algumas informações sobre os meios não podem ser recuperadas, enquanto que as linearizações dos coeficientes R_{SP} e R_{TP} possuem informações sobre todos os parâmetros elásticos do meio.

Em seguida, foi feita uma análise da sensibilidade das linearizações R_{PP} , R_{SP} e R_{TP} a geometria do levantamento. É verificado que, para pequenas incidências ($\theta \leq 20^0$) não podemos ter informação sobre a velocidade de propagação da onda P na horizontal. É ainda verificado que para se obter em informações sobre todos os parâmetros elásticos é necessária a inversão conjunta empregando as três fórmulas linearizadas.

Assim, as formas linearizadas combinadas são importantes na caracterização e redução de ambigüidades para o problema de inversão destes coeficientes de reflexão. Além disso, estas linearizações possuem a vantagem de permitir uma análise mais simples de como os parâmetros ou combinação de parâmetros que caracterizam os meios influenciam nestes coeficientes. A metodologia proposta pode ser aplicada mesmo em casos de contraste moderado de impedância e anisotropia dentro dos limites esperados em rochas sedimentares. Verificou-se ainda que um maior contraste entre os meios deteriora mais as aproximações que a presença de maior anisotropia.

A partir destas fórmulas linearizadas pode-se estimar as propriedades de meios na subsuperfície como a orientação do plano de fratura e assim caracterizar a direção de maior permeabilidade.

Posteriormente foi apresentada uma análise da estimativa dos parâmetros elásticos a partir da inversão de R_{PP} , R_{SP} e R_{TP} e é verificado que dos 20 parâmetros elásticos mais o contraste de densidade, apenas sete parâmetros elásticos (ΔC_{11} , ΔC_{22} , ΔC_{33} , ΔC_{44} , ΔC_{55} , ΔC_{34} , ΔC_{35}) mais o contraste de densidade ($\Delta\rho/\rho$) são bem estimados. Em seguida foi apresentado um método que estima a orientação de fraturas da análise de AVO multiazimutal. Ainda que a suposição de que fraturas comportem-se efetivamente com um meio TI seja restritivo, sua validade pode ser verificada a partir da simetria do tensor elástico determinado dos parâmetros invertidos. Para um meio fracamente anisotrópico e com fraco contraste de impedância, a estimativa da orientação de fratura é única, exceto para uma rotação de 90^0 no ângulo de mergulho e é estável para níveis de ruído moderado.

Quanto à obtenção de informações sobre um meio anisotrópico arbitrário através do vetor de polarização e do tempo de trânsito foi feita uma análise do esquema de inversão que determina localmente os parâmetros fracamente anisotrópicos (parâmetros WA) de um meio anisotrópico a partir da relação linear entre esses parâmetros e os vetores de polarização e vazarosidade de dados de onda qP em experimentos de VSP multiazimutal e com múltiplas fontes. Esse esquema não depende da homogeneidade do meio acima do receptor como também não depende da forma do poço. Um estudo detalhado da sensibilidade e estabilidade do esquema indica que somente alguns parâmetros do meio podem ser estimados. Isto depende do número e orientação dos perfis usados, do número de fontes ao longo desses perfis e do tipo de onda usada na inversão. A análise também mostra que não é possível distinguir qual tipo de anisotropia o meio possui. No entanto, se tivermos dois ou mais modelos que tentam explicar o meio a ser estimado podemos determinar através de F-teste qual dentre os três modelo explica os dados observados. São mostrados os resultados para o caso da região do Mar de Java e estes estão de acordo com os resultados obtidos em dados sintéticos. Por fim, é feito um estudo dos efeitos da escolha do meio de referência e do vetor unitário normal à frente de onda e são mostrados que os resultados são poucos sensíveis a essa escolha para um meio fracamente anisotrópico.

De acordo com os resultados apresentados neste trabalho os próximos passos para se estimarem as propriedades físicas de meios anisotrópicos arbitrários dos atributos de ondas que propagam nestes meios são:

A estimativa dos parâmetros elásticos do meio e a orientação de fratura através da inversão da formulação exata dos coeficiente de reflexão R_{PP} e suas convertidas R_{SP} e R_{TP} para uma onda

P incidente calculados partir da generalização das equações de Zoeppritz apresentadas em (2). A vantagem da utilização da formulação exata deve-se a se poder utilizar modelos em que os pressupostos de fraco contraste e fraca anisotropia não precisam mais ser respeitados, o que deve aumentar o domínio de validade das estimativas.

A utilização de dados de vagarosidade e polarização das ondas qS em experimentos de VSP multiazimutal e com múltiplas fontes na estimativa dos parâmetros WA. Em seguida estimar estes parâmetros WA através da inversão conjunta de dados da onda qP e qS. E por fim, estimar a anisotropia através da inversão conjunta destes dois métodos apresentados nesta tese.

REFERÊNCIAS

- AKI, K. & RICHARDS, P.G, 1980, *Quantitative Seismology: Theory and methods*. San Francisco, W. H. Freeman and Co.
- BANIK, N. C. 1987. An effective anisotropy parameter in transversely isotropic media: *Geophysics*, 52: 1654-1664.
- BECK, J. & ARNOLD, K. J. 1976. *Parameter Estimation*. New York. John Wiley & Sons.
- CASTAGNA, J. P. 1992. Offset-dependent reflectivity-Theory and practice of AVO analysis. In: CASTAGNA, J.P. & BACKUS. M. M. (ed) *AVO Analysis- Tutorial and Review*. Soc. Expl. Geophys. p. 3-36.
- ESMERSOY, C. 1990. Inversion of P and SV waves from multicomponent offset vertical seismic profiles: *Geophysics*, 55: 39-50.
- GAJEWSKI, D. AND PSENCIK, I. 1990. Vertical seismic profiles synthetics by dynamic ray tracing in laterally varying layered anisotropic structures: *J. Geophys. Res.*, 95: 11, 301-11, 315.
- GOMES, E. N. S. 1999. *Reflectivity of P waves in anisotropic media*. Belém. Dept de Matemática da Universidade Federal Pará, Brasil. (Dissertação de mestrado).
- GOMES, E. N. S.; PROTÁZIO, J.S. ; COSTA, J.C. ; SIMÕES-FILHO, I.A. 1999. Ambiguity in AVO/AVA analysis for anisotropic media. In: INTERNATIONAL CONGRESS OF THE BRAZILIAN GEOPHYSICAL SOCIETY, Rio de Janeiro. *Abstrato expandido. CD-ROM*.
- GOMES, E. N. S.; PROTÁZIO, J. S. ; COSTA, J. C. ; SIMÕES-FILHO. I. A. 2001. Linearização dos coeficientes de reflexão de ondas qP em meios anisotrópicos. *Brazilian Journal of Geophysics*, 19: 48-60.
- GOMES, E. N. S.; ZHENG, X.; PSENCIK, I.; HORNE, S.; LEANEY, S. 2003. Local determination of weak anisotropy parameters from a walkaway VSP qP-wave data in the Mar de Java region. *Studia geoph.et geod.* submetido.
- HELBIG, K. 1994. *Foundations of Anisotropy for Exploration Seismics*. Oxford. Pregamon. (Handbook of Geophysical Exploration, 22).
- HOFFMAN, K. & RAY, K. 1971. *Álgebra Linear*. Polígono.
- HORNE, S.A. & LEANEY, W.S. 2000. Polarization and slowness component inversion for TI anisotropy. *Geophysical Prospecting*, 48: 779-788.

- HUDSON, J. A. 1982. Wave speeds and attenuation of elastic waves in material containing cracks. *Geophys. J. R. astr Soc.*, 64: 133-150.
- JÍLEK, P. 2002. Converted PS-wave reflection coefficients in weakly anisotropic media: *Pure and Applied Geophysics*, 7-8: 1527-1562.
- LEANNEY, W.S. 1990. Parametric wavefield decomposition and applications. In: ANN. INTERNAT. MTG., SOC.EXPL.GEOPHYS, Tulsa. *Abstrado expandido*, 1097-1100.
- LEANNEY, W.S. 1994. Anisotropy and AVO from walkaways. In: ANN. INTERNAT. MTG., SOC.EXPL.GEOPHYS. *Abstrado expandido*. 105-109.
- MENKE, W. 1984. *Geophysical data analysis: Discrete inverse theory*. New York. Academic Press.
- MOOD, A. M.; GRAYBILL, F. A.; BOES, D. C. 1974. *Introduction to the theory of statistics*. London, McGraw-Hill.
- MUSGRAVE, M. J. P. 1970. *Crystal Acoustics*. San Francisco, Holden-Day Inc.
- OSTRANDER, W. J. 1984. Plane-wave reflection coefficients for gas sand at non-normal angles of incidence. *Geophysics*, 49:1637-1648.
- PEREZ, M. A.; GIBSON, R. L.; TOKSOZ, N. 1999. Detection of fracture orientation using azimuthal variation of P-wave AVO responses. *Geophysics*, 64: 1253-1265.
- POSTMA, G. W. 1955. Wave propagation in stratified medium: *Geophysics* 20: 780-806.
- PSENCIK, I. & GAJEWSKI, D. 1998. Polarization, phase velocity and NMO velocity of qP waves in arbitrary weakly anisotropic media. *Geophysics*, 63: 1754-1766.
- RÜGER, A. & TSVANKIN, I. 1995. Azimuthal variation of AVO response for fractured reservoir. In: ANN. INTERNAT. MTG. SOC. Of EXPL. GEOPHYS. *Abstrado expandido*, 1103-1106.
- RÜGER, A. & TSVANKIN, I. 1997. Using AVO for fracture detection: Analytic basis and practical solutions: *The Lead Edge*, 10: 1429-1434.
- SCHOENBERG, M. & DOUMA, J. 1988. Elastic wave propagation in media with parallel fractures and aligned cracks. *Geophys Prosp. Eur. Assn. Geosci. Eng.*, 36: 571-590.
- SCHOENBERG, M. & PROTÁZIO, J.S. 1992. Zoeppritz Rationalized and Generalized to Anisotropy: *Jornal of Seismic Exploration*, 1:125-144.
- SCHOENBERG, M. & SAYERS, C. M. 1995. Seismic Anisotropy of Fractures: *Geophysics, Soc. of Expl. Geophys.*, 60: 204-211.

- THOMSEN, L. 1986. Weak elastic anisotropy: *Geophysics, Soc. of Expl. Geophys.*, 51: 1954-1966.
- THOMSEN, L. 1993. Weak elastic anisotropic reflection: In BACKUS, M. M. (Eds). *Offset-dependent reflectivity-Theory and practice AVO analysis*: Soc. Exp. Geophys. P.103-111.
- VAVRYCUK, V. & PSENCIK, V. 1998. PP-Wave reflection coefficients in weakly anisotropic elastic media: *Geophysics*, 63: 2129-2141.
- ZHENG, X. & PSENCIK, I. 2002. Local determination of weak anisotropy parameters from qP-wave slowness and particle motion measurements. *Pure and Applied Geophysics*, 159: 1881-1905.
- ZILLMER, M.; GAJEWSKI, D.; KASHTAN, B. M. 1997. Reflection coefficients for weak anisotropic, *Geophys. J. Internat*, 129: 389-398.

ANEXOS

ANEXO A

A linearização dos coeficientes de reflexão de uma onda incidente P foi feita no plano de azimute zero ($\varphi = 0$) e posteriormente estendidas para azimutes arbitrários através de rotação em torno do eixo vertical x_3 (ver Figura 2). Para tornar mais claro as fórmulas apresentadas nesta seção optamos por indicar o tipo de onda na forma de sobrescrito.

Considerando a equação (6) é necessário determinar a matriz $(\mathbf{Z}_R - \mathbf{Z}_T \mathbf{N}_T^{-1} \mathbf{N}_R)$ no meio isotrópico de referência e a primeira coluna da matriz de perturbação $(\Delta \mathbf{Z} - \mathbf{Z}_T \mathbf{N}_T^{-1} \Delta \mathbf{N})$. A avaliação desta última expressão requer a determinação da perturbação da polarização \mathbf{d}^P e a determinação da perturbação da terceira componente da vagarosidade δs_3^P da onda P em cada um dos meios.

DETERMINAÇÃO DA MATRIZ $(\mathbf{Z}_R - \mathbf{Z}_T \mathbf{N}_T^{-1} \mathbf{N}_R)$

A densidade do e as velocidades do meio isotrópico de referência são dadas por:

$$\rho = \frac{(\rho^{(1)} + \rho^{(2)})}{2}, \quad \alpha = \frac{(\alpha^{(1)} + \alpha^{(2)})}{2} \text{ e } \beta = \frac{(\beta^{(1)} + \beta^{(2)})}{2}. \quad (63)$$

em que $\rho^{(\tilde{\gamma})}$, $\alpha^{(\tilde{\gamma})}$ e $\beta^{(\tilde{\gamma})}$ a densidade e as velocidades das ondas P e S, respectivamente do meio incidente ($\tilde{\alpha} = 1$) e subjacente ($\tilde{\alpha} = 2$). $\tilde{\mathbf{N}}_m^\sigma = \tilde{n}_m^\sigma$, $\tilde{\mathbf{Z}}_m^\sigma = \tilde{c}_{3mj}^\sigma \tilde{s}_i^\sigma \tilde{n}_j^\sigma$ são as matrizes de polarização e impedância para o meio isotrópico de referência e σ refere-se ao tipo de onda (P, S ou T).

A matriz de polarização associada à transmissão no meio de referência isotrópico foi escolhida na forma:

$$\mathbf{N}_T = \begin{bmatrix} \sin\theta & 0 & K(\theta) \\ 0 & -1 & 0 \\ \cos\theta & 0 & -\kappa\sin\theta \end{bmatrix}, \quad (64)$$

em que escolhemos para polarização da onda T no meio de referência a direção perpendicular ao plano sagital (Helbig, 1994) (onda S_H) e a polarização da onda S é perpendicular à direção de incidência da onda P no plano sagital (onda S_V). Esta escolha é arbitrária e pode não ser a mais conveniente quando o meio de incidência é anisotrópico e não apresenta simetria azimutal. Como o meio de referência é isotrópico e portanto possui plano de simetria especular, a matriz de polarização das ondas refletidas neste meio é obtida através da reflexão de (64) em relação a interface $x_3 = 0$.

Com estas escolhas obtêm-se:

$$\left(\tilde{\mathbf{Z}}_R - \tilde{\mathbf{Z}}_T \mathbf{N}_T^{-1} \mathbf{N}_R\right)^{-1} = \frac{1}{2\rho\kappa K(\theta)\cos\theta} \begin{bmatrix} -\kappa K(\theta)\sin\theta & 0 & \kappa K(\theta)\cos\theta \\ 0 & \cos\theta & 0 \\ -K(\theta)\cos\theta & 0 & \kappa\sin\theta\cos\theta \end{bmatrix}. \quad (65)$$

DETERMINAÇÃO PERTURBAÇÕES $\delta\mathbf{n}^P$ E δs_3^P .

As perturbações da direção de polarização $\delta\mathbf{n}^P$ e da componente vertical da vazarosidade da onda P incidente δs_3^P em cada meio são obtidas a partir da equação de Christoffel ,

$$\Gamma_{kl} n_l^P = \rho n_k^P. \quad (66)$$

A perturbação de primeira ordem da matriz de Christoffel é dada por:

$$\Gamma_{kl} \delta n_l^P + \delta \Gamma_{kl} n_l^P = \rho \delta n_k^P + \delta \rho n_k^P, \quad (67)$$

em que $\delta \Gamma_{kl}$ é a matriz de Christoffel perturbada e $\delta \rho$ é a perturbação da densidade.

A perturbação δs_3^P é obtida efetuando o produto interno de (67) com o vetor de polarização n_k^P o que resulta na relação

$$n_k^P \delta \Gamma_{kj} n_j^P = \delta \rho. \quad (68)$$

A perturbação $\delta \Gamma_{kl}$ é dada pela expressão

$$\delta\Gamma_{kl} = \delta c_{kmjl} s_m s_j + c_{kmjl} \delta s_m s_j + c_{kmjl} s_m \delta s_j, \quad (69)$$

em que δc_{kmjl} são as perturbações do meio em relação ao meio de referência. Utilizando (68) e (69) podemos obter imediatamente δs_3^P .

O cálculo de $\delta \mathbf{n}^P$ é obtido através do sistema formado pelo produto interno de (68) com os vetores de polarização n_k^S e n_k^T , respectivamente e da condição de normalização \mathbf{n}^P , conforme mostrado abaixo :

$$\begin{cases} n_k^S (\Gamma_{kl} - \rho \delta_{kl}) \delta n_l^P = n_k^S \delta \Gamma_{kl} n_l^P + n_k^S \delta \rho n_l^P \\ n_k^T (\Gamma_{kl} - \rho \delta_{kl}) \delta n_l^P = n_k^T \delta \Gamma_{kl} n_l^P + n_k^T \delta \rho n_l^P, \\ n_k^P \delta n_k^P = 0 \end{cases} \quad (70)$$

em que δ_{ij} é o delta de Kronecker. Da solução do sistema linear acima se tem a perturbação da polarização para uma onda incidente P.

A seguir, conhecidos δs_3^P e $\delta \mathbf{n}^P$ a primeira coluna da matriz de impedância perturbada é avaliada em cada meio através da expressão

$$\begin{aligned} \delta Z_k^P = & \frac{\delta C_{3kjl}}{\alpha} n_l^P n_j^P + (\lambda + \mu) \delta s_3^P n_3^P \delta_{k3} + \frac{\lambda}{\alpha} (n_j^P \delta n_j^P + n_3^P \delta n_3^P) \delta_{k3} \\ & + \frac{\mu}{\alpha} (n_j^P \delta n_j^P + n_3^P \delta n_3^P) + \mu \delta s_3^P n_k^P \end{aligned} \quad (71)$$

Em que: λ e μ são os parâmetros de Lamé.

Finalmente os coeficientes linearizados \bar{R}_{PP} , \bar{R}_{SP} e \bar{R}_{TP} são então obtidos da primeira equação do sistema (6).

No caso de um azimute arbitrário φ em relação ao eixo x_1 , os parâmetros elásticos são obtidos a partir da rotação em torno do eixo vertical (Helbig, 1994) das equações (7), (8) e (9).

ANEXO B

MATRIZ FRACAMENTE ANISOTRÓPICA (WA)

Os elementos B_{13} , B_{23} e B_{33} de uma matriz fracamente anisotrópica de um meio anisotrópico com simetria arbitrária é dado por (ver Psencik & Gajewski, 1998):

$$\begin{aligned}
 B_{13} = \alpha^2 D^{-1} [& 2\varepsilon_z v_3^5 + v_3^4 (\varepsilon_{34} v_2 + \varepsilon_{35} v_1) + v_3^3 (\delta_x v_1^2 + \delta_y v_2^2 + 2\chi_z v_1 v_2 - \\
 & 2\varepsilon_z) + v_3^2 [(4\chi_x - 3\varepsilon_{34}) v_1^2 v_2 + (4\chi_y - 3\varepsilon_{35}) v_1 v_2^2 + (4\varepsilon_{15} - 3\varepsilon_{35}) v_1^3 + \\
 & (4\varepsilon_{24} - 3\varepsilon_{34}) v_2^3] + v_3 [(2\delta_z - \delta_x - \delta_y) v_1^2 v_2^2 + 2(2\varepsilon_{16} - \chi_z) v_1^3 v_2 + \\
 & 2(2\varepsilon_{26} - \chi_z) v_1 v_2^3 + (2\varepsilon_x - \delta_x) v_1^4 + (2\varepsilon_y - \delta_y) v_2^4] - \chi_x v_1^2 v_2 - \\
 & \chi_y v_1 v_2^2 - \varepsilon_{15} v_1^3 - \varepsilon_{24} v_2^3]
 \end{aligned} \tag{72}$$

$$\begin{aligned}
 B_{23} = \alpha^2 D^{-1} [& v_3^3 (\varepsilon_{34} v_1 - \varepsilon_{35} v_2) + v_3^2 [(\delta_x - \delta_y) v_1 v_2 + \chi_z v_1^2 - \chi_z v_2^2] + \\
 & v_3 [(2\chi_y - 3\varepsilon_{15}) v_1^2 v_2 - (2\chi_x - 3\varepsilon_{24}) v_1 v_2^2 + \chi_x v_1^3 - \chi_y v_2^3] + (\delta_z - \\
 & 2\varepsilon_x) v_1^3 v_2 + (2\varepsilon_y - \delta_z) v_1 v_2^3 + 3(\varepsilon_{26} - \varepsilon_{16}) v_1^2 v_2^2 + \varepsilon_{16} v_1^4 - \varepsilon_{26} v_2^4]
 \end{aligned} \tag{73}$$

e

$$\begin{aligned}
 B_{33} = 2\alpha^2 [& \varepsilon_z v_3^4 + 2v_3^3 (\varepsilon_{34} v_2 + \varepsilon_{35} v_1) + v_3^2 (\delta_x v_1^2 + \delta_y v_2^2 + 2\chi_z v_1 v_2) + \\
 & 2v_3 (\chi_x v_1^2 v_2 + \chi_y v_1 v_2^2 + \varepsilon_{15} v_1^3 + \varepsilon_{24} v_2^3) + \varepsilon_x v_1^4 + \delta_z v_1^2 v_2^2 + \varepsilon_y v_2^4 + \\
 & 2\varepsilon_{16} v_1^3 v_2 + 2\varepsilon_{26} v_1 v_2^3]
 \end{aligned} \tag{74}$$

Em que \mathbf{v} é o tensor unitário normal a frente de onda P no meio de referência, D é dado em (34), α é a velocidade da onda P no meio de referência e os parâmetros WA que estão relacionados com os parâmetros elásticos do meio ponderados pela densidade através de:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{A_{11} - \alpha^2}{2\alpha^2}, & \varepsilon_y &= \frac{A_{22} - \alpha^2}{2\alpha^2}, & \varepsilon_z &= \frac{A_{33} - \alpha^2}{2\alpha^2}, \\
\delta_x &= \frac{A_{13} + 2A_{55} - \alpha^2}{\alpha^2}, & \delta_y &= \frac{A_{23} + 2A_{44} - \alpha^2}{\alpha^2}, & \delta_z &= \frac{A_{12} + 2A_{66} - \alpha^2}{\alpha^2}, \\
\chi_x &= \frac{A_{14} + 2A_{56}}{\alpha^2}, & \chi_y &= \frac{A_{25} + 2A_{46}}{\alpha^2}, & \chi_z &= \frac{A_{36} + 2A_{45}}{\alpha^2}, \\
\varepsilon_{15} &= \frac{A_{15}}{\alpha^2}, \quad \varepsilon_{16} = \frac{A_{16}}{\alpha^2}, \quad \varepsilon_{24} = \frac{A_{24}}{\alpha^2}, \quad \varepsilon_{26} = \frac{A_{26}}{\alpha^2}, \quad \varepsilon_{34} = \frac{A_{34}}{\alpha^2} \quad \text{e} \quad \varepsilon_{35} = \frac{A_{35}}{\alpha^2}.
\end{aligned} \tag{75}$$

Considerando apenas um perfil e fazendo $v_2 = 0$ os elementos B_{13} e B_{33} da matriz fracamente anisotrópica (matriz WA) B_{MN} que aparece em (40) segue a formulação apresentada por Farra & Psencik (2003) para um meio anisotrópico arbitrário.

$$\begin{aligned}
B_{13} &= \alpha^2 \left| v_1 \right|^{-1} \left[\varepsilon_{35} v_1 v_3^4 + (\delta_x - \varepsilon_x - \varepsilon_z) v_1^2 v_3^3 + (4\varepsilon_{15} - 3\varepsilon_{35}) v_1^3 v_3^2 + \right. \\
& \left. (\varepsilon_x + \varepsilon_z - \delta_x) v_1^4 v_3 + (\varepsilon_x - \varepsilon_z) v_1^2 v_3 + \varepsilon_{15} v_1^3 \right], \\
& \text{e} \\
B_{33} &= 2\alpha^2 \left[2\varepsilon_{35} v_1 v_3^3 + v_3^2 \left\{ (\delta_x - \varepsilon_x - \varepsilon_z) v_1^2 + \varepsilon_z \right\} v_3^2 + 2\varepsilon_{35} v_1^3 v_3 + \varepsilon_x v_1^2 \right].
\end{aligned} \tag{76}$$

Considerando que o meio é um TIV temos que $\varepsilon_{15} = \varepsilon_{35} = 0$ e a matriz WA é então dada por:

$$\begin{aligned}
B_{13} &= \alpha^2 \left| v_1 \right|^{-1} \left[(\delta_x - \varepsilon_x - \varepsilon_z) v_1^2 v_3^3 + (\varepsilon_x + \varepsilon_z - \delta_x) v_1^4 v_3 + (\varepsilon_x - \varepsilon_z) v_1^2 v_3 \right] \\
& \text{e} \\
B_{33} &= 2\alpha^2 \left[v_3^2 \left\{ (\delta_x - \varepsilon_x - \varepsilon_z) v_1^2 + \varepsilon_z \right\} v_3^2 + \varepsilon_x v_1^2 \right].
\end{aligned} \tag{77}$$

Considerando que o meio é um ISO temos que $\varepsilon_x = \varepsilon_z = \frac{1}{2}\delta_x = 0$ e a matriz WA é então dada por:

$$B_{13} = 0 \quad \text{e} \quad B_{33} = 2\alpha^2 \varepsilon_z. \tag{78}$$

A MATRIZ **A**

Na forma matricial (41) **A** que é a matriz formada pelo lado esquerdo de (40) a menos dos parâmetros WA é uma matriz que cujo número de linhas é igual ao número de observações e o número de colunas é igual ao número de parâmetros.

Para a *i*-ésima observação os elementos de **A** são:

$$\begin{aligned}
 A_{i1} &= \alpha v_1^4 \left[2\alpha (\alpha^2 - \beta^2) v_3 - 1 \right], & A_{i2} &= \alpha v_2^4 \left[2\alpha (\alpha^2 - \beta^2) v_3 - 1 \right], \\
 A_{i3} &= -\alpha v_3^3 \left[2\alpha (\alpha^2 - \beta^2) D^2 + v_3 \right], & A_{i4} &= \alpha v_1^2 v_3 \left[\alpha (\alpha^2 - \beta^2) (2v_3^2 - 1) - v_3 \right], \\
 A_{i5} &= \alpha v_2^2 v_3 \left[\alpha (\alpha^2 - \beta^2) (2v_3^2 - 1) - v_3 \right], & A_{i6} &= \alpha v_1^2 v_2^2 \left[2\alpha (\alpha^2 - \beta^2) v_3 - 1 \right], \\
 A_{i7} &= \alpha v_1^2 v_2 \left[\alpha (\alpha^2 - \beta^2) (4v_3^2 - 1) - 2v_3 \right], & A_{i8} &= \alpha v_2^2 v_1 \left[\alpha (\alpha^2 - \beta^2) (4v_3^2 - 1) - 2v_3 \right], \\
 A_{i9} &= 2\alpha v_1 v_2 v_3 \left[\alpha (\alpha^2 - \beta^2) (2v_3^2 - 1) - v_3 \right], & A_{i10} &= \alpha v_1^3 \left[\alpha (\alpha^2 - \beta^2) (4v_3^2 - 1) - 2v_3 \right], \\
 A_{i11} &= 2\alpha v_1^3 v_2 \left[2\alpha (\alpha^2 - \beta^2) v_3 - 1 \right], & A_{i12} &= \alpha v_2^3 \left[\alpha (\alpha^2 - \beta^2) (4v_3^2 - 1) - 2v_3 \right], \\
 A_{i13} &= 2\alpha v_2^3 v_1 \left[2\alpha (\alpha^2 - \beta^2) v_3 - 1 \right], & A_{i14} &= \alpha v_3^2 v_2 \left[\alpha (\alpha^2 - \beta^2) (4v_3^2 - 3) - 2 \right], \\
 A_{i15} &= \alpha v_3^2 v_1 \left[\alpha (\alpha^2 - \beta^2) (4v_3^2 - 3) - 2 \right].
 \end{aligned}$$

As colunas de **A** estão ordenadas de acordo com (42).