

Brenda Silvana de Souza Barbosa

**Análise de Sensibilidade para
Estereotomografia em Meios Elípticos e
Anelípticos**

Belém – PA

Dezembro / 2005

Brenda Silvana de Souza Barbosa

**Análise de Sensibilidade para
Estereotomografia em Meios Elípticos e
Anelípticos**

COMO REQUISITO PARCIAL À
OBTENÇÃO DE GRAU DE MESTRE
EM CIÊNCIAS NA ÁREA DE GEOFÍSICA

Orientador:

Prof. Dr. Jessé Carvalho Costa

CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM GEOFÍSICA
DEPARTAMENTO DE GEOFÍSICA
CENTRO DE GEOCIÊNCIAS
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ

Belém

2005

Prof. Dr. Jessé Carvalho Costa
Centro de Geociências
Orientador

Prof. Dr. Amin Bassrei
Departamento de Geofísica - UFBA

Prof. Dr. Joerg Schleicher
UNICAMP

Dedico este trabalho a minha avó Maria de Lourdes (in memoriam) pelo grande incentivo e
dedicação.

A minha mãe Alba, ao meu irmão Victor Tadeu e a minha madrinha Maria Amélia pela
ajuda e pelo incentivo ao longo da minha vida.

A minha amiga Glads pelo apoio em todos os momentos.

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, a Deus por tudo que me concedeu ao longo desta caminhada.

Agradeço ao Prof. Dr. Jessé Carvalho pelos conselhos, pela ajuda e pela dedicação. A Prof. Dra. Ellen Gomes pela colaboração neste trabalho, gerando os dados sintéticos no Anray, ao Prof. Dr. Ivan Psencik pela utilização do programa de traçamento de raios Anray.

Agradeço ao amigo de curso Francisco de Assis Neto pela ajuda parte importante deste trabalho.

Agradeço a todos os meus colegas e professores do curso, aos meus amigos e aos meus familiares que contribuíram de forma direta ou indireta para conclusão deste trabalho.

Agradeço a Agência Nacional do Petróleo pelo apoio financeiro durante o curso, sem o qual a conclusão deste trabalho estaria comprometida.

Agradeço a secretária Benildes Lopes por fazer o possível para facilitar nossa vida acadêmica.

”A mente que se abre a uma nova idéia jamais volta ao seu tamanho original.”

(Albert Einstein)

SUMÁRIO

	i
AGRADECIMENTOS	ii
	iii
LISTA DE FIGURAS	vii
RESUMO	1
ABSTRACT	2
1 INTRODUÇÃO	3
2 TEORIA DE PERTURBAÇÃO EM SISTEMAS HAMILTONIANOS	5
2.1 RAIOS EM MEIOS ANISOTRÓPICOS	5
2.2 TRAÇADO DE RAIOS PARAXIAIS	6
2.3 CONDIÇÕES INICIAIS	8
2.3.1 Perturbação na direção da vagarosidade	9
2.3.2 Perturbação na posição do ponto espalhador	9
2.3.3 Perturbação nos parâmetros elásticos	9
2.4 SOLUÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES PARAXIAIS	10
2.5 HAMILTONIANAS PARA ANISOTROPIA ELÍPTICA E ANELÍPTICA	12

3 ESTEREOTOMOGRAFIA EM MEIOS ANISOTRÓPICOS	14
3.1 METODOLOGIA	14
3.2 PROBLEMA DIRETO E INVERSO	15
3.3 ANÁLISE DE RESOLUÇÃO	16
3.3.1 Análise em meio elíptico	22
3.3.2 Análise em meio anelítico	27
3.4 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA INVERSO DE ESTEREOTOMOGRAFIA EM MEIOS ANISOTRÓPICOS	32
4 APLICAÇÃO A DADOS SINTÉTICOS	35
4.1 MODELO 1	36
4.2 MODELO 2	50
4.3 MODELO 3	66
4.4 DISCURSÃO DOS RESULTADOS NUMÉRICOS	80
5 CONCLUSÃO	81
REFERÊNCIAS	83
APÊNDICES	85
APÊNDICE A - PROPAGADORES	86
A.1 Matriz A constante	86
A.2 Sistemas em que $A = \mathbf{A}(\tau)$	88
A.3 Aplicação ao sistema hamiltoniano	89
A.3.1 Sistema hamiltoniano paraxial	89
A.3.2 Cálculo do inverso do propagador	90

A.3.3	Conservação da forma simplética	91
-------	---	----

APÊNDICE B - CÁLCULO DAS DERIVADAS DE FRÉCHET EM MEIOS ANISOTRÓPICOS HOMOGÊNEOS **92**

B.1	Traçamento de raios em meios homogêneos	92
-----	---	----

B.1.1	Cálculo das derivadas de Fréchet em meios elípticos homogêneos	95
-------	--	----

LISTA DE FIGURAS

Figura 3.1	Ilustração dos parâmetros utilizados em eventos de difração.	19
Figura 3.2	Ilustração dos parâmetros utilizados em eventos de transmissão.	19
Figura 3.3	Ilustração da geometria de levantamento de superfície.	21
Figura 3.4	Ilustração da geometria de levantamento VSP do tipo <i>checkshot</i>	21
Figura 3.5	Valores singulares em ordem não crescente considerando apenas o evento de difração e anisotropia elíptico. Fontes e receptores estão na superfície. ...	24
Figura 3.6	Matriz de resolução para o caso elíptico considerando a geometria de um levantamento de superfície. Os três menores valores singulares na Figura (3.5) foram desconsiderados para o cálculo da matriz de resolução.	24
Figura 3.7	Valores singulares em ordem não crescente considerando eventos de difração e transmissão do tipo <i>checkshot</i> , para o caso elíptico. A distância entre a fonte e a cabeça do poço é de 0,25 km.	25
Figura 3.8	Matriz de resolução de um meio elíptico considerando, além do evento de difração, eventos de transmissão para a geometria VSP, com a posição da fonte 0,25 km da cabeça do poço. Os dois menores valores singulares na Figura (3.7) foram desconsiderados para o cálculo da matriz de resolução.	25

- Figura 3.9 Valores singulares para o caso elíptico considerando, além do evento de difração, eventos de transmissão com geometria VSP com a fonte localizada a 3 km da cabeça do poço. 26
- Figura 3.10 Matriz de resolução de um meio elíptico considerando, além do evento de transmissão, eventos de transmissão para geometria VSP com a fonte localizada a 3 km do poço. Os dois menores valores singulares na Figura (3.9) foram desconsiderados para o cálculo da matriz de resolução. 26
- Figura 3.11 Valores singulares considerando um único evento de difração, geometria de aquisição de superfície, para inversão de um modelo anelítico. 28
- Figura 3.12 Matriz de resolução de um meio anelítico considerando um evento de difração, geometria de aquisição de superfície. Os dois menores valores singulares na Figura 3.11 foram desconsiderados para determinar a matriz de resolução. 28
- Figura 3.13 Valores singulares para o caso anelítico considerando, além do evento de difração, eventos de transmissão para geometria de aquisição VSP com a fonte posicionada a 0,25 km da cabeça do poço. 29
- Figura 3.14 Matriz de resolução para o caso anelítico considerando, além do evento de difração, eventos de transmissão para geometria de aquisição VSP com a fonte posicionada a 0,25 km da cabeça do poço. Apenas o menor valor singular da Figura 3.13 foi descartado para determinar a matriz de resolução. 29
- Figura 3.15 Valores singulares para o caso anelítico considerando além do evento de difração, eventos de transmissão com geometria de aquisição VSP com a fonte posicionada a 3,0 km da cabeça do poço. 30

- Figura 3.16 Matriz de resolução de um meio anelítico considerando, além do evento de difração, eventos de transmissão com geometria VSP com a fonte posicionada a 3,0 km do poço. Apenas o menor valor singular da Figura (3.15) foi descartado para determinar a matriz de resolução. 30
- Figura 4.1 Trajetória dos raios no modelo com anisotropia elíptica e heterogêneo vertical utilizado para gerar os dados sintéticos. A velocidade de fundo corresponde a velocidade de fase vertical e os asteriscos marcam a posição dos pontos difratores. 38
- Figura 4.2 Trajetória dos raios no modelo estimado pela estereotomografia para modelos isotrópicos. Apesar da utilização do vínculo de focalização com $\lambda_4 = 0,01$, nenhum dos pontos difratores está focalizado. Os eventos associados ao difrator mais profundo é o que sofre maior desfocalização. 38
- Figura 4.3 Modelo estimado utilizando a estereotomografia elíptica contendo a trajetória de alguns raios de eventos de difração e de transmissão. Observa-se a melhor focalização do difrator mais raso em relação aos resultados da estereotomografia isotrópica da Figura 4.2. O ponto difrator abaixo da profundidade do poço não apresenta boa focalização. 39
- Figura 4.4 Modelo estimado pela estereotomografia anelítica utilizando os dados de eventos de difração e para o primeiro experimento numérico. Os asteriscos indicam a posição dos pontos difratores. O vínculo de focalização foi aplicado com $\lambda_4 = 0,01$. Observa-se, a melhor focalização dos difratores em relação aos resultados da estereotomografia isotrópica da Figura 4.2 e da estereotomografia elíptica, Figura 4.3. 39
- Figura 4.5 Velocidade de fase vertical exata para o modelo elíptico utilizado no primeiro experimento numérico. 40

- Figura 4.6 Velocidade de fase vertical estimada pela estereotomografia isotrópica a partir de dados de levantamento de superfície e de VSP. 41
- Figura 4.7 Erro percentual da estimativa do modelo de velocidade isotrópico comparado a velocidade vertical do modelo exato. O menor erro ocorre na região que apresenta maior cobertura, em torno do poço, nessa região, o erro é de no máximo 6%, no entanto, o erro pode chegar até a ser superior a 8%, nas regiões onde não há cobertura. 41
- Figura 4.8 Velocidade de fase vertical estimada pela estereotomografia elíptica a partir de dados de levantamento de superfície e de VSP. 42
- Figura 4.9 Erro percentual da estimativa do modelo de velocidade vertical considerando a estereotomografia elíptica. Na região de maior cobertura (próxima ao poço), verifica-se que o erro é inferior à 3%. Mas apresenta erro superior à 7% nas regiões onde não há cobertura. 42
- Figura 4.10 Velocidade de fase vertical estimada pela estereotomografia anelítica a partir de dados de levantamento de superfície e de VSP. 43
- Figura 4.11 Erro percentual da estimativa do modelo de velocidade vertical considerando a estereotomografia anelítica. O erro na região próxima ao poço é menor que o erro para estimativa elíptica. 43
- Figura 4.12 Velocidade de fase horizontal exata para o modelo elíptico utilizado no primeiro experimento numérico. 44
- Figura 4.13 Erro percentual da estimativa do modelo de velocidade isotrópico comparado a velocidade horizontal do modelo exato. Em toda a região o erro é maior

quando comparado com a figura anterior apresenta erros da ordem de 8%. 44

Figura 4.14 Velocidade de fase horizontal estimada pela estereotomografia elíptica a partir de dados de levantamento de superfície e de VSP. 45

Figura 4.15 Erro percentual da estimativa do modelo de velocidade horizontal considerando a estereotomografia elíptica. A estimativa da velocidade horizontal apresenta erro inferior à 3% até a uma profundidade de 1,5 km, região bastante amostrada. A medida que a profundidade aumenta o erro também aumenta podendo ser superior à 5% em algumas regiões. 45

Figura 4.16 Velocidade de fase horizontal estimada pela estereotomografia anelítica a partir de dados de levantamento de superfície e de VSP. 46

Figura 4.17 Erro percentual da estimativa do modelo de velocidade horizontal considerando a estereotomografia anelítica. A estimativa da velocidade horizontal feita através da estereotomografia anelítica apresenta resultado melhor que a estimativa feita através da estereotomografia elíptica. 46

Figura 4.18 Velocidade de fase 45° exata para o modelo elíptico utilizado no primeiro experimento numérico. 47

Figura 4.19 Erro percentual da estimativa do modelo de velocidade isotrópico comparado a velocidade de fase a 45° exata. O erro mesmo na região do poço chega a ser superior à 8%. 47

Figura 4.20 Velocidade de fase 45° estimada pela estereotomografia elíptica a partir de dados de levantamento de superfície e de VSP. 48

Figura 4.21 Erro percentual da estimativa do modelo de velocidade de fase que está a

45° considerando a estereotomografia elíptica. A estimativa da velocidade de fase que está a 45° apresenta erro inferior à 3% apenas na região que vai da profundidade de 1,0 km até 1,5 km, as outras regiões o erro é superior à 4%. 48

Figura 4.22 Velocidade de fase 45° estimada pela estereotomografia anelítica a partir de dados de levantamento de superfície e de VSP. 49

Figura 4.23 Erro percentual da estimativa do modelo de velocidade de fase a 45° considerando a estereotomografia anelítica. O erro a partir da profundidade de 1,0 km é superior à 5%. 49

Figura 4.24 Modelo 2D com anisotropia elíptica utilizado para gerar os dados sintéticos para o segundo experimento numérico, com a trajetória dos raios para os eventos de difração e para os eventos de transmissão. A localização dos sete difratores está indicada pelo asterisco. A velocidade de fundo corresponde a velocidade de fase vertical. 53

Figura 4.25 Modelo estimado pela estereotomografia isotrópica utilizando eventos de difração e de transmissão. Os asteriscos indicam a posição dos pontos difratores. O vínculo de focalização foi aplicado com $\lambda_4 = 0,01$. Observa-se que, apesar da adição de eventos de transmissão, a profundidade dos difratores continua sistematicamente sobre-estimada. 53

Figura 4.26 Modelo estimado pela estereotomografia elíptica utilizando os dados de eventos de difração e de transmissão gerados para o segundo experimento numérico. Os asteriscos indicam a posição dos pontos difratores. O vínculo de focalização foi aplicado com $\lambda_4 = 0,01$. Observa-se que a profundidade dos pontos difratores é melhor estimada em relação aos resultados da estereotomografia isotrópica apresentados na Figura 4.25. Os eventos de difração apresentam melhor focalização, em relação aos resultados pressupondo isotropia, exceto pelos dois difratores mais profundos. 54

- Figura 4.27 Modelo estimado pela estereotomografia anelítica utilizando os dados de eventos de difração e transmissão gerados para o segundo experimento numérico. Os asteriscos indicam a posição dos pontos difratores. O vínculo de focalização foi aplicado com $\lambda_4 = 0,01$. Todos os eventos apresentam boa focalização. A localização dos dois pontos difratores mais profundos e mais afastados do poço apresentam maior erro, em relação aos demais. 54
- Figura 4.28 Velocidade de fase vertical exata para o modelo elíptico utilizado no segundo experimento numérico. 55
- Figura 4.29 Velocidade de fase vertical estimada pela estereotomografia isotrópica a partir de dados de levantamento de superfície e de VSP com múltiplo afastamento. 56
- Figura 4.30 Erro percentual da estimativa do modelo de velocidade isotrópico comparado a velocidade vertical do modelo exato. O menor erro ocorre na região que apresenta maior cobertura, em torno do poço (2 km a 4 km na direção x e 0 km a 2,8 km na direção z), nessa região, o erro é de no máximo 10%, no entanto, o erro pode chegar até a ser superior à 35%, nas regiões onde não há cobertura. 56
- Figura 4.31 Velocidade de fase vertical estimada pela estereotomografia elíptica a partir de dados de levantamento de superfície e de VSP com múltiplo afastamento. 57
- Figura 4.32 Erro percentual da estimativa do modelo de velocidade vertical considerando a estereotomografia elíptica. Na região de maior cobertura (próxima ao poço), verifica-se que o erro é inferior à 8%. Mas apresenta erro superior à 10% nas regiões onde não há cobertura. 57
- Figura 4.33 Velocidade de fase vertical estimada pela estereotomografia anelítica a partir

- de dados de levantamento de superfície e de VSP com múltiplo afastamento. 58
- Figura 4.34 Erro percentual da estimativa do modelo de velocidade vertical considerando a estereotomografia anelítica. O erro mesmo na região próxima ao poço é maior que o erro para estimativa elítica. 58
- Figura 4.35 Velocidade de fase horizontal exata para o modelo elítico utilizado no segundo experimento numérico. 59
- Figura 4.36 Erro percentual da estimativa do modelo de velocidade isotrópico comparado a velocidade horizontal do modelo exato. Em toda a região o erro é maior quando comparado com a Figura anterior apresenta erros da ordem de 20%. 59
- Figura 4.37 Velocidade de fase horizontal estimada pela estereotomografia elítica a partir de dados de levantamento de superfície e de VSP com múltiplo afastamento. 60
- Figura 4.38 Erro percentual da estimativa do modelo de velocidade horizontal considerando a estereotomografia elítica. A estimativa da velocidade horizontal apresenta erro inferior a 6% até a uma profundidade de 1,5 km, região bastante amostrada. A medida que a profundidade aumenta o erro também aumenta podendo ser superior a 20% em algumas regiões. 60
- Figura 4.39 Velocidade de fase horizontal estimada pela estereotomografia anelítica a partir de dados de levantamento de superfície e de VSP com múltiplo afastamento. 61
- Figura 4.40 Erro percentual da estimativa do modelo de velocidade horizontal considerando a estereotomografia anelítica. A estimativa da velocidade horizontal feita através da estereotomografia anelítica não apresenta resultado melhor que a estimativa feita através da estereotomografia elítica. 61

- Figura 4.41 Velocidade de fase 45° exata para o modelo elíptico utilizado no segundo experimento numérico. 62
- Figura 4.42 Erro percentual da estimativa do modelo de velocidade isotrópico comparado a velocidade de fase a 45° . O erro na região do poço é menor que 15%, ainda que apresente erro da ordem de 30% nas bordas superiores do modelo. ... 62
- Figura 4.43 Velocidade de fase 45° estimada pela estereotomografia elíptica a partir de dados de levantamento de superfície e de VSP com múltiplo afastamento. 63
- Figura 4.44 Erro percentual da estimativa do modelo de velocidade de fase que está a 45° considerando a estereotomografia elíptica. A estimativa da velocidade de fase que está a 45° apresenta erro de no máximo 12%. 63
- Figura 4.45 Velocidade de fase 45° estimada pela estereotomografia anelítica a partir de dados de levantamento de superfície e de VSP com múltiplo afastamento. 64
- Figura 4.46 Erro percentual da estimativa do modelo de velocidade de fase a 45° considerando a estereotomografia anelítica. 64
- Figura 4.47 Modelo 2D com anisotropia TIV utilizado para gerar os dados sintéticos para o terceiro experimento numérico, com a trajetória dos raios para os eventos de difração e para os eventos de transmissão. A localização dos sete difratores está indicada pelo asterisco. A velocidade de fundo corresponde a velocidade de fase vertical. 68
- Figura 4.48 Modelo estimado pela estereotomografia isotrópica utilizando os dados de eventos de difração e de transmissão gerados para o terceiro experimento numérico. Os asteriscos indicam a posição dos pontos difratores. O vínculo de

focalização foi aplicado com $\lambda_4 = 0,01$. Assim como, os resultados do segundo experimento apresentados na Figura 4.25, a profundidade dos difratores continua sistematicamente sobre-estimada. 68

Figura 4.49 Modelo estimado pela estereotomografia elíptica utilizando os dados de eventos de difração e de transmissão gerados para o terceiro experimento numérico. Os asteriscos indicam a posição dos pontos difratores. O vínculo de focalização foi aplicado com $\lambda_4 = 0,01$. Observa-se que como ocorreu com a inversão elíptica no segundo experimento numérico, Figura 4.26, os eventos de difração apresentam boa focalização, em relação aos resultados, exceto pelos dois difratores mais profundos. 69

Figura 4.50 Modelo estimado pela estereotomografia anelítica utilizando os dados de eventos de difração e transmissão gerados para o terceiro experimento numérico. Os asteriscos indicam a posição dos pontos difratores. O vínculo de focalização foi aplicado com $\lambda_4 = 0,01$. Todos os eventos apresentam boa focalização. Entretanto, a localização dos dois pontos difratores mais profundos e mais afastados do poço apresentam maior erro. 69

Figura 4.51 Velocidade de fase vertical exata para o modelo anelítico utilizado no terceiro experimento numérico. 70

Figura 4.52 Velocidade de fase vertical estimada pela estereotomografia isotrópica a partir de dados de levantamento de superfície e de VSP com múltiplo afastamento. 71

Figura 4.53 Erro percentual da estimativa do modelo de velocidade isotrópico comparado a velocidade vertical do modelo exato. O menor erro ocorre na região que apresenta maior cobertura, em torno do poço, nessa região, o erro é de no máximo 10%, no entanto, o erro pode chegar até a ser superior à 30%, nas regiões onde não há cobertura. 71

- Figura 4.54 Velocidade fase vertical estimada pela estereotomografia elíptica a partir de dados de levantamento de superfície e de VSP com múltiplo afastamento. 72
- Figura 4.55 Erro percentual da estimativa do modelo de velocidade vertical considerando a estereotomografia elíptica. Na região de maior cobertura (próxima ao poço), verifica-se que o erro é inferior à 5%. Mas apresenta erro superior à 15% nas regiões onde não há cobertura. 72
- Figura 4.56 Velocidade fase vertical estimada pela estereotomografia anelíptica a partir de dados de levantamento de superfície e VSP com múltiplo afastamento. 73
- Figura 4.57 Erro percentual da estimativa do modelo de velocidade vertical considerando a estereotomografia anelíptica. O erro na estimativa de velocidade é maior que o erro para estimativa elíptica. 73
- Figura 4.58 Velocidade de fase horizontal exata para o modelo anelítico utilizado no terceiro experimento numérico. 74
- Figura 4.59 Erro percentual da estimativa do modelo de velocidade isotrópico comparado a velocidade horizontal do modelo exato. O erro na região mesmo onde tem o poço é maior 10%. 74
- Figura 4.60 Velocidade de fase horizontal estimada pela estereotomografia elíptica a partir de dados de levantamento de superfície e VSP com múltiplo afastamento. 75
- Figura 4.61 Erro percentual da estimativa do modelo de velocidade horizontal considerando a estereotomografia elíptica. A estimativa da velocidade horizontal apresenta erro inferior à 10%, com exceção das regiões próximas a borda do modelo. 75

- Figura 4.62 Velocidade de fase horizontal estimada pela estereotomografia anelítica a partir de dados de levantamento de superfície e de VSP com múltiplo afastamento. 76
- Figura 4.63 Erro percentual da estimativa do modelo de velocidade horizontal considerando a estereotomografia anelítica. A estimativa da velocidade horizontal feita através da estereotomografia anelítica apresenta resultado melhor que a estimativa feita através da estereotomografia elíptica. 76
- Figura 4.64 Velocidade de fase 45° exata para o modelo anelítico utilizado no terceiro experimento numérico 77
- Figura 4.65 Erro percentual da estimativa do modelo de velocidade isotrópico comparado a velocidade de fase a 45° . O erro na região do poço é menor que 10%, ainda que apresente erro da ordem de 15% nas bordas superiores do modelo. ... 77
- Figura 4.66 Velocidade de fase 45° estimada pela estereotomografia elíptica a partir de dados de levantamento de superfície e de VSP com múltiplo afastamento. 78
- Figura 4.67 Erro percentual da estimativa do modelo de velocidade de fase que está a 45° considerando a estereotomografia elíptica. A estimativa da velocidade de fase que está a 45° apresenta erro maior que 15% somente nas bordas do modelo. 78
- Figura 4.68 Velocidade de fase 45° estimada pela estereotomografia anelítica a partir de dados de levantamento de superfície e de VSP com múltiplo afastamento. 79
- Figura 4.69 Erro percentual da estimativa do modelo de velocidade de fase a 45° considerando a estereotomografia anelítica. O erro é de no máximo 15%. ... 79

RESUMO

O método de estereotomografia é estendido para meios com anisotropia arbitrária e implementado para meios com anisotropia elíptica e anelítica. Os modelos elípticos e anelíticos apresentam somente três parâmetros. Isto faz com que eles sejam menos sensíveis a ambiguidade, causada pela cobertura limitada dos raios em experimentos sísmicos de superfície e VSP, do que modelos transversalmente isotrópicos ou ortorrômbicos. As correspondentes aproximações para superfície de vagarosidade limita a validade desta implementação para eventos qP com anisotropia suave. Experimentos numéricos mostram o potencial e as limitações da estereotomografia para estimar macro modelos de velocidade adequados para o imageamento na presença de anisotropia e a importância dos eventos de transmissão de experimentos VSP de múltiplo afastamento modelo para o sucesso desta abordagem.

ABSTRACT

Stereotomography is extended to general anisotropic models and implemented for elliptical and anelliptical anisotropy. The elliptical and anelliptical models present only three parameters. This makes them less sensitive to the ambiguity due to limited coverage of surface seismic experiments than transversely isotropic or orthorhombic models. The corresponding approximations of the slowness surface restrict the validity of the present approach to qP events and mild anisotropy. Numerical experiments show the potential and the limitations of stereotomography in estimating macro-velocity models suitable for imaging in the presence of anisotropy as well as the importance of transmission events from multiple-offset VSP experiments for the success of the approach.

1 INTRODUÇÃO

A motivação desta pesquisa surgiu a partir da necessidade de se poder inferir sobre estruturas geológicas que compõem a subsuperfície da Terra através da sísmica de reflexão. Este método tem sido utilizado na indústria de prospecção de petróleo, onde imagens que representam as regiões de interesse são construídas, mapeando, portanto, grandes estruturas geológicas, a fim de se localizar, caracterizar e monitorar reservatórios de hidrocarbonetos.

A determinação de um modelo de macro velocidade é essencial para o imageamento de reflexões sísmicas em profundidade. Vários métodos que estimam o macro modelo de velocidade têm sido utilizados, dentre eles o mais tradicional é a análise de velocidade de CMP (veja, por exemplo, Yilmaz,1979) que apresenta, para seu uso, certas restrições quanto ao modelo (BILLETTE; LAMBARÉ, 1998).

Métodos tomográficos também têm sido aplicados para este fim. Destes métodos tem-se a estereotomografia, em que o macro modelo de velocidade é estimado a partir de dados de tempo de trânsito e das componentes da vagarosidade. Em trabalhos recentes, (BILLETTE et al., 2003) a estereotomografia tem sido utilizada para estimar o macro modelo de velocidade em meios isotrópicos heterogêneos com resultados satisfatórios. Para meios anisotrópicos, somente a utilização de eventos de reflexão não é suficiente para recuperar a anisotropia, e segundo Gosselet et al. (2005).

A análise realizada neste trabalho confirma esta afirmação. Neste trabalho, investigo algumas das limitações do método de estereotomografia aplicado a meios anisotrópicos, a utilização de eventos de ondas transmitidas reduzem a ambiguidade. Com objetivo de analisar o efeito da estereotomografia em meios anisotrópicos utilizando ondas qP, uso aproximações elípticas e anelíticas para as superfícies de vagarosidade, uma vez que o número de parâmetros necessários para especificar o modelo de velocidade é menor.

Esta dissertação é composta de três capítulos. No segundo capítulo apresento a fundamentação teórica para a aplicação do método de estereotomografia em meios com anisotropia arbitrária, em seguida, restrinjo à a meios com anisotropia elíptica e anelíptica.

No terceiro capítulo, realizo teórica e numericamente a análise de resolução dos parâmetros na matriz de Fréchet em um meio de referência isotrópico e homogêneo, contendo apenas um único ponto difrator. Esta análise é realizada tanto para eventos de reflexão quanto para eventos utilizando reflexão e transmissão.

No quarto capítulo, com base na análise realizada no capítulo 3, aplico o algoritmo de estereotomografia em modelos, 1D e 2D, usando somente dados de reflexão e combinando dados de reflexão e de transmissão.

Na conclusão discuto os desafios, as limitações e proponho algumas áreas que ainda precisam ser investigadas no método de estereotomografia.

2 TEORIA DE PERTURBAÇÃO EM SISTEMAS HAMILTONIANOS

O traçamento de raios em meios com anisotropia arbitrária é descrito por um sistema de equações diferenciais hamiltoniano (GOLDSTEIN, 1980). Os métodos de reconstrução tomográfica discutidos neste trabalho, estão baseados na teoria do raio e utilizam iterações lineares em torno de um modelo de referência. Esta abordagem para a tomografia está baseada na teoria de perturbações aplicada a sistemas hamiltonianos (GOLDSTEIN, 1980; FARRA; MADARIAGA, 1987). A teoria de perturbação permite calcular as aproximações lineares para as observações quando os parâmetros que especificam o modelo variam em torno do modelo de referência. Esta aproximação linear é denominada derivada de Fréchet e constitui parte essencial de algoritmos de inversão tomográfica. A seguir, obtenho as derivadas de Fréchet pertinentes para a estereotomografia em meios anisotrópicos para um sistema hamiltoniano arbitrário. Posteriormente, especializo esta abordagem para meios com anisotropia elíptica e anelítica.

2.1 RAIOS EM MEIOS ANISOTRÓPICOS

A hamiltoniana que controla o traçamento de raios (CERVENY, 2001), em meios com anisotropia arbitrária, pode ser escrita na forma

$$\mathcal{H}(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = 0. \tag{2.1}$$

Nesta expressão, \mathbf{x} indica o vetor posição e \mathbf{s} indica o vetor vagarosidade. O sistema de equações que governa a trajetória dos raios para esta hamiltoniana é (CERVENY, 2001)

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{x}}{d\tau} &= \nabla_{\mathbf{s}}\mathcal{H}, \\ \frac{d\mathbf{s}}{d\tau} &= -\nabla_{\mathbf{x}}\mathcal{H},\end{aligned}\tag{2.2}$$

em que $\nabla_{\mathbf{x}}$ e $\nabla_{\mathbf{s}}$ representam os gradientes em relação aos vetores de posição, \mathbf{x} , e de vagarosidade, \mathbf{s} , respectivamente, e τ é o tempo de trânsito. O traçamento de raios é realizado a partir da solução do sistema (2.2) especificadas condições iniciais $\mathbf{x}(\tau_0), \mathbf{s}(\tau_0)$ ou de fronteira $\mathbf{x}(\tau_0), \mathbf{x}(\tau_1)$ para cada raio. Em aplicações tomográficas, o sistema (2.2) é solucionado numericamente para cada meio de referência, durante as iterações.

2.2 TRAÇADO DE RAIOS PARAXIAIS

Raios paraxiais são os que se propagam na vizinhança de um raio de referência especificado. Esses raios diferem do raio de referência ou central, devido a perturbações arbitrariamente pequenas na posição, na vagarosidade, e nos parâmetros elásticos do meio. Para aplicações tomográficas é necessário determinar aproximações lineares para trajetória e para o tempo de trânsito de raios paraxiais. A solução deste problema é obtida a partir da teoria da perturbação de primeira ordem de sistemas hamiltonianos (GOLDSTEIN, 1980; FARRA; MADARIAGA, 1987; ARNOLD, 1989).

Seja $\mathcal{H}'(\mathbf{x}', \mathbf{s}'; \mathbf{p} + \Delta\mathbf{p}) = 0$ a hamiltoniana associada a um meio elástico que difere de um meio de referência com parâmetros elásticos \mathbf{p} , cuja a hamiltoniana $\mathcal{H}(\mathbf{x}, \mathbf{s}; \mathbf{p}) = 0$. No meio com parâmetros elásticos $\mathbf{p} + \Delta\mathbf{p}$, uma trajetória vizinha a um raio de referência, $\mathbf{x}(\tau)$ e $\mathbf{s}(\tau)$, é escrita na forma

$$\begin{aligned}\mathbf{x}'(\tau) &= \mathbf{x}(\tau) + \Delta\mathbf{x}(\tau), \\ \mathbf{s}'(\tau) &= \mathbf{s}(\tau) + \Delta\mathbf{s}(\tau).\end{aligned}$$

As equações de Hamilton para a trajetória do raio no meio de parâmetros elásticos $\mathbf{p} + \Delta\mathbf{p}$ são

$$\frac{d\mathbf{x}'}{d\tau} = \nabla_{\mathbf{s}'}\mathcal{H}' ,$$

$$\frac{d\mathbf{s}'}{d\tau} = -\nabla_{\mathbf{x}'}\mathcal{H}' .$$

Expandindo a hamiltoniana \mathcal{H}' em torno da trajetória no meio de referência, para cada valor de τ , obtêm-se

$$\begin{aligned} \mathcal{H}'(\mathbf{x}', \mathbf{s}'; \mathbf{p} + \Delta\mathbf{p}) &= \mathcal{H}(\mathbf{x}, \mathbf{s}; \mathbf{p}) \\ &+ \nabla_{\mathbf{x}}^T\mathcal{H}\Delta\mathbf{x} + \nabla_{\mathbf{s}}^T\mathcal{H}\Delta\mathbf{s} + \nabla_{\mathbf{p}}^T\mathcal{H}\Delta\mathbf{p} \\ &+ \frac{1}{2} \left[\Delta\mathbf{x}^T\nabla_{\mathbf{x}}\nabla_{\mathbf{x}}^T\mathcal{H}\Delta\mathbf{x} + 2\Delta\mathbf{x}^T\nabla_{\mathbf{x}}\nabla_{\mathbf{s}}^T\mathcal{H}\Delta\mathbf{s} + \Delta\mathbf{s}^T\nabla_{\mathbf{s}}\nabla_{\mathbf{s}}^T\mathcal{H}\Delta\mathbf{s} \right. \\ &+ \left. \Delta\mathbf{x}^T\nabla_{\mathbf{x}}\nabla_{\mathbf{p}}^T\mathcal{H}\Delta\mathbf{p} + \Delta\mathbf{s}^T\nabla_{\mathbf{s}}\nabla_{\mathbf{p}}^T\mathcal{H}\Delta\mathbf{p} \right] + \mathcal{O}(\Delta^3) . \end{aligned}$$

Utilizando a expressão acima e avaliando as equações de Hamilton no meio com parâmetros elásticos $\mathbf{p} + \Delta\mathbf{p}$, obtêm-se

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}'}{d\tau} &= \nabla_{\mathbf{x}}\mathcal{H} + \nabla_{\mathbf{x}}\nabla_{\mathbf{x}}^T\mathcal{H}\Delta\mathbf{x} + \nabla_{\mathbf{x}}\nabla_{\mathbf{s}}^T\mathcal{H}\Delta\mathbf{s} + \nabla_{\mathbf{x}}\nabla_{\mathbf{p}}^T\mathcal{H}\Delta\mathbf{p} + \mathcal{O}(\Delta^2) , \\ \frac{d\mathbf{s}'}{d\tau} &= -\nabla_{\mathbf{s}}\mathcal{H} - \nabla_{\mathbf{s}}\nabla_{\mathbf{x}}^T\mathcal{H}\Delta\mathbf{x} - \nabla_{\mathbf{s}}\nabla_{\mathbf{s}}^T\mathcal{H}\Delta\mathbf{s} + \nabla_{\mathbf{s}}\nabla_{\mathbf{p}}^T\mathcal{H}\Delta\mathbf{p} + \mathcal{O}(\Delta^2) . \end{aligned}$$

Considerando-se apenas os efeitos de primeira ordem, indicados pela notação $\delta\mathbf{x}$, $\delta\mathbf{s}$ e $\delta\mathbf{p}$, obtêm-se o seguinte sistema de equações paraxiais

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \begin{bmatrix} \delta\mathbf{x} \\ \delta\mathbf{s} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \nabla_{\mathbf{s}}\nabla_{\mathbf{x}}^T\mathcal{H} & \nabla_{\mathbf{s}}\nabla_{\mathbf{s}}^T\mathcal{H} \\ -\nabla_{\mathbf{x}}\nabla_{\mathbf{x}}^T\mathcal{H} & -\nabla_{\mathbf{x}}\nabla_{\mathbf{s}}^T\mathcal{H} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta\mathbf{x} \\ \delta\mathbf{s} \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} \nabla_{\mathbf{s}}\nabla_{\mathbf{p}}^T\mathcal{H}\delta\mathbf{p} \\ -\nabla_{\mathbf{x}}(\nabla_{\mathbf{p}}^T\mathcal{H}\delta\mathbf{p}) \end{bmatrix} . \end{aligned} \quad (2.3)$$

Estas equações valem para meios elásticos com anisotropia arbitrária, pois nenhuma forma particular da hamiltoniana foi pressuposta em sua dedução. A solução do sistema de equações (2.2) e (2.3) permite obter aproximações lineares para a estereotomografia em meios anisotrópicos. Na implementação da estereotomografia apresentada nesta dissertação dois tipos de eventos são considerados: eventos de reflexão ou difração e eventos de transmissão. Eventos de reflexão ou difração são indistinguíveis na forma em como são modelados. Cada um destes eventos é modelado pela trajetória de dois segmentos de raio. O primeiro conecta a fonte a um ponto espalhador em subsuperfície e, o segundo, conecta o ponto espalhador ao receptor.

Os dados observados associados a cada evento na estereotomografia são: o tempo de trânsito, τ^{fr} , a posição da fonte, \mathbf{x}^f , e do receptor, \mathbf{x}^r , e as projeções do vetor vagarosidade medidos na fonte e no receptor, s^f e s^r . A linearização do problema, em relação a trajetória dos raios em um meio elástico de referência, consiste em determinar as perturbações nos dados de cada evento causadas por perturbações na posição do ponto espalhador \mathbf{X} , na direção da vagarosidade de cada segmento de raio no ponto espalhador, θ^f e θ^r , no tempo de trânsito de cada segmento de raio, τ^f e τ^r , e nos parâmetros elásticos do meio, \mathbf{p} . A trajetória dos segmentos de raio no meio de referência é obtida pela integração de (2.2) a partir do ponto espalhador, conhecidas as direções do vetor vagarosidade associadas a cada segmento de raio, θ^f e θ^r . As perturbações nos dados, $\delta\mathbf{x}^f$, $\delta\mathbf{x}^r$, δs^f , δs^r e $\delta\tau^{fr}$ são calculadas integrando-se (2.3).

Eventos de transmissão, em geral associados a experimentos de perfilagem sísmica vertical do tipo *checkshot* ou *walkway VSP* são modelados por um único segmento de raio, conectando a fonte ao receptor. Neste caso os dados observados são o tempo de trânsito, τ^{fr} , a posição do receptor, \mathbf{x}^r , e a projeção do vetor vagarosidade no receptor, s^r . Os parâmetros do modelo, para dados de transmissão, são a direção da vagarosidade na posição da fonte, θ^r , o tempo de trânsito, τ^r , e os parâmetros elásticos do meio, \mathbf{p} . A relação linear entre perturbações nos dados e perturbações no parâmetros é calculada integrando-se (2.3).

2.3 CONDIÇÕES INICIAIS

Para se integrar o sistema de equações diferenciais (2.3) é necessário estabelecer condições iniciais para $\delta\mathbf{x}$ e $\delta\mathbf{s}$. O critério para determinar as condições iniciais, em um instante τ_0 , é exigir que as perturbações de primeira ordem da hamiltoniana se anulem neste ponto. Esta condição garante que os raios paraxiais calculados pela integração de (2.3) satisfazem, em primeira ordem, as equações de Hamilton. Para a estereotomografia, é necessário integrar-se o sistema (2.3) para cada condição inicial associada à perturbação de cada parâmetro necessário para a especificação do modelo. A determinação destas condições iniciais pode ser reduzida a três casos.

2.3.1 Perturbação na direção da vagarosidade

Neste caso, $\delta \mathbf{x} = \mathbf{0}$. A condição para que $\delta \mathcal{H} = 0$ para hamiltonianas arbitrárias é

$$\nabla_{\mathbf{s}}^T \mathcal{H} \delta \mathbf{s} = 0 . \quad (2.4)$$

Observando que $\mathbf{s} = s \mathbf{n}$, em que \mathbf{n} é o vetor unitário na direção da vagarosidade, pode-se escrever

$$\delta \mathbf{s} = \left(\frac{ds}{d\theta} \mathbf{n} + s \frac{d\mathbf{n}}{d\theta} \right) \delta \theta .$$

Substituindo na equação (2.4), obtêm-se

$$\delta \mathbf{s} = s \left(\mathbf{I} - \frac{\mathbf{n} \nabla_{\mathbf{s}}^T \mathcal{H}}{\nabla_{\mathbf{s}}^T \mathcal{H} \mathbf{n}} \right) \frac{d\mathbf{n}}{d\theta} \delta \theta . \quad (2.5)$$

2.3.2 Perturbação na posição do ponto espalhador

A condição para que $\delta \mathcal{H} = 0$ para hamiltonianas arbitrárias é

$$\nabla_{\mathbf{x}}^T \mathcal{H} \delta \mathbf{X} + \nabla_{\mathbf{s}}^T \mathcal{H} \delta \mathbf{s} = 0 .$$

Esta equação restringe apenas a perturbação do vetor vagarosidade ao longo do raio, $\nabla_{\mathbf{s}} \mathcal{H}$,

$$\nabla_{\mathbf{s}}^T \mathcal{H} \delta \mathbf{s} = -\nabla_{\mathbf{x}}^T \mathcal{H} \delta \mathbf{X} .$$

Neste caso, toma-se

$$\delta \mathbf{s} = -\nu \frac{\nabla_{\mathbf{x}}^T \mathcal{H} \delta \mathbf{X}}{\|\nabla_{\mathbf{s}} \mathcal{H}\|} , \quad (2.6)$$

em que, ν é o vetor unitário ao longo do raio,

$$\nu \equiv \frac{\nabla_{\mathbf{s}} \mathcal{H}}{\|\nabla_{\mathbf{s}} \mathcal{H}\|} .$$

2.3.3 Perturbação nos parâmetros elásticos

Para que $\delta \mathcal{H} = 0$ para hamiltonianas arbitrárias deve-se exigir que

$$\nabla_{\mathbf{s}}^T \mathcal{H} \delta \mathbf{s} + \nabla_{\mathbf{p}}^T \mathcal{H} \delta \mathbf{p} = 0 .$$

Esta expressão vincula a perturbação da vagarosidade ao longo do raio à dos parâmetros do meio. Neste caso toma-se,

$$\delta \mathbf{s} = -\nu \nabla_{\mathbf{p}}^T \mathcal{H} \delta \mathbf{p} / \|\nabla_{\mathbf{s}} \mathcal{H}\| \quad (2.7)$$

em que, ν é o vetor unitário ao longo do raio.

Com as condições iniciais acima, o sistema de equações diferenciais (2.3) pode ser integrado ao longo de um raio no meio de referência e as derivadas de Fréchet em relação as perturbações no ângulo inicial do raio, na posição inicial e nos parâmetros elásticos do meio podem ser avaliadas numericamente.

2.4 SOLUÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES PARAXIAIS

A solução do sistema de equações (2.3) para cada condição inicial pode ser calculada de maneira eficiente pelo método dos propagadores (AKI; RICHARDS, 1980; CERVENY, 2001). Pressupondo que a trajetória do raio central é conhecida, ou seja, $\mathbf{x}(\tau)$ e $\mathbf{s}(\tau)$, o sistema de equações (2.3) tem a forma

$$\frac{d\mathbf{y}}{d\tau} = \mathbf{A}(\tau)\mathbf{y} + \mathbf{f}(\tau) , \quad (2.8)$$

em que,

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \delta \mathbf{x} \\ \delta \mathbf{s} \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{f} = \begin{bmatrix} \nabla_{\mathbf{s}}(\nabla_{\mathbf{p}}^T \mathcal{H} \delta \mathbf{p}) \\ -\nabla_{\mathbf{x}}(\nabla_{\mathbf{p}}^T \mathcal{H} \delta \mathbf{p}) \end{bmatrix} .$$

Este é um sistema de equações diferenciais ordinárias lineares. O método dos propagadores permite representar a solução de (2.8) no intervalo (τ_0, τ) , submetido a condição inicial $\mathbf{y}(\tau_0) = \mathbf{y}_0$, na forma

$$\mathbf{y}(\tau) = \mathbf{P}(\tau, \tau_0)\mathbf{y}_0 + \int_{\tau_0}^{\tau} \mathbf{P}(\tau, \xi)\mathbf{f}(\xi)d\xi . \quad (2.9)$$

A matriz propagadora $\mathbf{P}(\tau, \tau_0)$ satisfaz (2.8) com a condição inicial

$$\mathbf{P}(\tau_0, \tau_0) = \mathbf{I} , \quad (2.10)$$

em que \mathbf{I} indica a matriz identidade de ordem 4, no caso 2D, e de ordem 6, no caso 3D. Numericamente, $\mathbf{P}(\tau, \tau_0)$ pode ser computado utilizando Runge-Kutta (PRESS et al., 1986). A grande vantagem desta abordagem para a estereotomografia é que a matriz propagadora é calculada independentemente de \mathbf{y}_0 , ou seja, só precisa ser avaliada uma única vez. Uma

expressão mais conveniente para avaliar (2.9) pode ser deduzida observando que a matriz $\mathbf{P}(\tau, \tau_0)$ possui as seguintes propriedades:

1. $\mathbf{P}(\tau, \tau_0) = \mathbf{P}(\tau, \xi)\mathbf{P}(\xi, \tau_0)$,
2. $\mathbf{P}(\tau_0, \tau) = \mathbf{P}^{-1}(\tau, \tau_0)$.

Utilizando estas propriedades obtêm-se:

$$\mathbf{y}(\tau) = \mathbf{P}(\tau, \tau_0) \left[\mathbf{y}_0 + \int_{\tau_0}^{\tau} \mathbf{P}^{-1}(\xi, \tau_0) \mathbf{f}(\xi) d\xi \right] . \quad (2.11)$$

A matriz inversa $\mathbf{P}^{-1}(\xi, \tau_0)$ é computada através da identidade $\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{J}\mathbf{P}^T(\xi, \tau_0)\mathbf{J}^T$ (GOLDSTEIN, 1980; CERVENY, 2001), em que a matriz simplética \mathbf{J} (GOLDSTEIN, 1980; ARNOLD, 1989) é definida por:

$$\mathbf{J} \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} ,$$

e em que, \mathbf{I} é a matriz identidade e $\mathbf{0}$ é a matriz nula, ambas de ordem 2, no caso 2D, ou de ordem 3, para o caso 3D.

A integração de (2.3) pressupõe que os parametrôos elásticos variem suavemente com a posição. É necessário que sejam diferenciáveis até segunda ordem. Adicionalmente o número de parâmetros para especificação do modelo elástico precisa ser finito. Para satisfazer a estas exigências é necessário estabelecer um esquema de interpolação para os parâmetros do modelo $\mathbf{p}(\mathbf{x})$. Nesta implementação utilizamos produto tensorial de B-splines de ordem 3 (BOOR, 1978). Cada parâmetro do modelo $p_m(x_1, x_3)$ é representado por

$$p_m(x_1, x_3) = \sum_{\alpha=1}^{N_1} \sum_{\beta=1}^{N_2} p_m^{\alpha\beta} B_{\alpha}(x_1) B_{\beta}(x_3) , \quad (2.12)$$

em que, as funções $B_{\gamma}(x_j)$ indicam as funções base do interpolador ao longo da coordenada x_j , N_j indica o número de funções base na direção de coordenada x_j e $p_m^{\alpha\beta}$ são os coeficientes da interpolação. Os coeficientes $p_m^{\alpha\beta}$ constituem os parâmetros do meio a serem estimados pelas estereotomografia.

2.5 HAMILTONIANAS PARA ANISOTROPIA ELÍPTICA E ANELÍPTICA

A hamiltoniana associada ao traçamento de raios em meios elásticos anisotrópicos é

$$\mathcal{H}(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = |a_{ijkl}(\mathbf{x})s_j s_l - \delta_{ik}| = 0, \quad (2.13)$$

em que $a_{ijkl}(\mathbf{x})$ são as componentes do tensor de rigidez normalizadas pela densidade (MUSGRAVE, 1970; CHAPMAN; PRATT, 1992). Em sua forma mais geral o tensor a_{ijkl} apresenta 21 componentes independentes e a hamiltoniana (2.13) descreve os raios de ondas qP , qS_1 e qS_2 (MUSGRAVE, 1970; CERVENY, 2001). A determinação de 21 parâmetros elásticos em meios heterogêneos a partir de dados geofísicos, inevitavelmente com cobertura angular limitada, e utilizando apenas ondas qP , é uma impossibilidade (CHAPMAN; PRATT, 1992). Modelos anisotrópicos com simetria azimutal, transversalmente isotrópicos, ou simetria ortorrômbica e anisotropia fraca têm sido propostos para inversão tomográfica em geofísica (CHAPMAN; PRATT, 1992; MENSCH; FARRA, 1999). A hipótese de anisotropia fraca permite fatorar a hamiltoniana (2.13) e determinar superfícies de vagarosidade aproximadas para ondas qP apenas (CHAPMAN; PRATT, 1992). Para meios transversalmente isotrópicos, estes modelos apresentam 5 parâmetros. Se o eixo de simetria coincide com um eixo de coordenadas o número de parâmetros se reduz a 3. Em meios fracamente ortorrômbicos, em 3D, a superfície de vagarosidade aproximada para ondas qP possui 6 parâmetros se os planos de simetria coincidem com os planos de coordenadas (LECOMTE, 1993; MENSCH; FARRA, 1999). Embora a formulação apresentada anteriormente para a estereotomografia seja geral, incluindo ondas qP e qS , neste trabalho discuto apenas a inversão de eventos qP .

Para reduzir o número de parâmetros para inversão em 2D, duas aproximações para a superfície de vagarosidade de ondas qP são utilizadas. A aproximação elíptica (DELLINGER et al., 1993)

$$\mathcal{H}(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = \frac{1}{2} [p_1(\mathbf{x})s_1^2 + p_2(\mathbf{x})s_3^2 + 2p_3(\mathbf{x})s_1s_3 - 1] = 0 \quad (2.14)$$

e a aproximação anelíptica para meios transversalmente isotrópicos com o eixo de simetria Vertical (TIV) (MENSCH; FARRA, 1999; SCHOENBERG; DEHOOP, 2000)

$$\mathcal{H}(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = \frac{1}{2} [p_1(\mathbf{x})s_1^2 + p_2(\mathbf{x})s_3^2 - (p_1(\mathbf{x})p_2(\mathbf{x}) - p_3^2(\mathbf{x}))s_1^2s_3^2 - 1] = 0. \quad (2.15)$$

A aproximação elíptica, mesmo com as limitações discutidas em Dellinger et al.(1993), pode representar segmentos da superfície de vagarosidade de ondas qP com orientação arbitrária. A aproximação anelítica (2.15) é uma ótima aproximação para ondas qP em meios TIV que apresentam anisotropia suave (SCHOENBERG; DEHOOP, 2000). Esta classe inclui uma grande parte dos folhelhos, as rochas sedimentares que apresentam maior grau de anisotropia.

3 ESTEREOTOMOGRAFIA EM MEIOS ANISOTRÓPICOS

3.1 METODOLOGIA

Em sua implementação original, a estereotomografia difere da tomografia de reflexão convencional em relação aos dados empregados para a inversão em dois aspectos. Primeiro, os dados são selecionados de eventos localmente coerentes interpretados como reflexões primárias ou difrações (BILLETTE; LAMBARÉ, 1998). Segundo, as componentes horizontais da vagarosidade dos eventos, selecionadas em famílias de tiro comum e receptor comum, são utilizadas adicionalmente ao tempo de trânsito e a posição de fontes e de receptores. Assim, o espaço dos dados, \mathbf{d} , é composto pelas posições de fontes e de receptores, \mathbf{x}^f e \mathbf{x}^r , tempos de trânsito, T^{fr} , e as projeções do vetor vagarosidade na direção da linha de arranjo dos receptores, indicadas aqui por s_l^f e s_l^r . Para abreviar a notação represento o vetor de dados na forma

$$\mathbf{d} = \left[\left(\mathbf{x}^f, \mathbf{x}^r, s_l^f, s_l^r, T^{fr} \right)_n \right], \quad (3.1)$$

com $n \in \{1, \dots, N\}$ e N é o número de eventos selecionados. A estereotomografia também difere da tomografia de reflexão convencional em relação à parametrização do modelo a ser estimado. Em 2D, o modelo \mathbf{m} a ser estimado pela estereotomografia inclui: os parâmetros associados ao modelo de velocidades \mathbf{p} , constantes elásticas normalizadas pela densidade em meios anisotrópicos; a posição do ponto espalhador, \mathbf{X} , associado ao evento; os ângulos de emergência do vetor vagarosidade, θ^f e θ^r , e os tempos de trânsito, τ^f e τ^r , associados aos segmentos de raio conectando o ponto espalhador a fonte e ao receptor, respectivamente. Em notação compacta,

$$\mathbf{m} = \left\{ \left[\left(\mathbf{X}, \theta^f, \theta^r, \tau^f, \tau^r \right)_n \right], \mathbf{p} \right\}. \quad (3.2)$$

3.2 PROBLEMA DIRETO E INVERSO

A determinação dos dados \mathbf{d} a partir do modelo \mathbf{m} é chamada de problema direto e pode ser representada por

$$\mathbf{F}(\mathbf{m}) = \mathbf{d} , \quad (3.3)$$

em que, \mathbf{F} é um operador não linear. O problema inverso consiste em estimar um modelo \mathbf{m} que ajuste o conjunto de dados observados \mathbf{d}^o .

Para resolver o problema inverso utilizando iterações lineares, um modelo inicial \mathbf{m}_0 de referência deve ser fornecido. Efetuando o traçado de raios neste modelo, então obtêm-se os dados sintéticos (3.1), \mathbf{d}^c . A diferença entre os dados observados, \mathbf{d}^o , e os dados calculados, \mathbf{d}^c , no modelo de referência \mathbf{m}_0 define o desvio no ajuste dos dados

$$\delta\mathbf{d} = \mathbf{d}^o - \mathbf{d}^c . \quad (3.4)$$

Este desvio é modelado pela aproximação linear para (3.3)

$$\delta\mathbf{d} = \mathcal{DF}(\mathbf{m}_0)\delta\mathbf{m} , \quad (3.5)$$

em que \mathcal{DF} , representa a aproximação para o problema direto em torno do modelo de referência \mathbf{m}_0 . O operador $\mathcal{DF}(\mathbf{m}_0)$ é conhecido como derivada de Fréchet (MENKE, 1989). A avaliação desta expressão para hamiltonianas arbitrárias é efetuada no capítulo 2. A solução do sistema linear (3.5) permite obter o novo modelo de referência

$$\mathbf{m}_0^{novo} = \mathbf{m}_0^{atual} + \delta\mathbf{m} .$$

As iterações lineares prosseguem até que a norma do desvio dos dados, $\|\delta\mathbf{d}\|$, seja inferior a um valor tolerância prescrito contanto que o processo convirja. Para garantir convergência, é necessário que o modelo inicial seja escolhido suficientemente similar ao modelo real desconhecido. Esta restrição pode causar problemas na aplicação deste método na prática. Neste trabalho a norma utilizada é a norma L_2 (MENKE, 1989).

3.3 ANÁLISE DE RESOLUÇÃO

A derivada de Fréchet contém toda a informação sobre a incompletude dos dados para a estimativa de $\delta\mathbf{m}$ e, por consequência, para a solução do problema inverso. O sistema linear (3.5) é em geral mal condicionado devido a cobertura limitada de raios através do modelo (NOLET, 1987).

A decomposição em valores singulares (MENKE, 1989) permite fatorar a matriz $\mathcal{D}\mathbf{F}$, de dimensão $N_d \times N_m$, em

$$\mathcal{D}\mathbf{F} = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{V}^T, \quad (3.6)$$

em que, \mathbf{U} e \mathbf{V} são matrizes ortogonais de dimensão N_d e N_m , respectivamente; As colunas de \mathbf{U} são os autovetores de $\mathcal{D}\mathbf{F}\mathcal{D}^T\mathbf{F}$. As colunas de \mathbf{V} são os autovetores do espaço de $\mathcal{D}^T\mathbf{F}\mathcal{D}\mathbf{F}$; a matriz $\mathbf{\Lambda}$, de dimensão $(N_d \times N_m)$, é diagonal, e seus elementos da diagonais são chamados de valores singulares (LAWSON; HANSON, 1974), os quais são não negativos e estão ordenados em ordem decrescente. Os valores singulares são iguais a raiz quadrada dos autovalores de $\mathcal{D}^T\mathbf{F}\mathcal{D}\mathbf{F}$ ou de $\mathcal{D}\mathbf{F}\mathcal{D}^T\mathbf{F}$.

A decomposição em valores singulares permite definir um pseudoinverso (LAWSON; HANSON, 1974) para $\mathcal{D}\mathbf{F}$

$$\mathcal{D}^\dagger\mathbf{F} = \mathbf{V}\mathbf{\Lambda}^\dagger\mathbf{U}^T, \quad (3.7)$$

em que, matriz $\mathbf{\Lambda}^\dagger$ é diagonal e definida por

$$\mathbf{\Lambda}^\dagger = \begin{cases} \frac{1}{\lambda_{ii}} & \text{se } \lambda_{ii} > 0 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Este pseudoinverso permite obter a seguinte estimativa para a solução do sistema linear (3.5)

$$\hat{\mathbf{m}} = \mathcal{D}^\dagger\mathbf{F}\delta\mathbf{d}. \quad (3.8)$$

Para problemas sobredeterminados, $N_d > N_m$, em que o posto de $\mathbf{\Lambda}$ é igual a N_m , a solução (3.8) coincide com a solução de quadrados mínimos para o sistema linear (3.5). Para problemas subdeterminados, $N_d < N_m$, em que, o posto de $\mathbf{\Lambda}$ é igual a N_d a solução (3.8) coincide com a solução para o sistema linear (3.5), em que $\|\delta\mathbf{m}\|_2$ é mínima (LAWSON; HANSON, 1974; MENKE, 1989).

A razão entre o maior valor singular e o menor valor singular de $\mathbf{\Lambda}$ define o número de condição da matriz \mathcal{DF}

$$\rho \equiv \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}} .$$

O número de condição permite estimar o quanto o pseudoinverso (3.9) amplifica o ruído presente em $\delta\mathbf{d}$, em outras palavras mede o mal-condicionamento do sistema linear (LAWSON; HANSON, 1974): quanto maior o número de condição, maior o mal-condicionamento. Para melhorar o condicionamento da solução (3.8), uma solução alternativa é utilizar

$$\mathbf{\Lambda}^+ = \begin{cases} \frac{1}{\lambda_{ii}} & \text{se } \lambda_{ii} \geq \lambda_{corte} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} ,$$

em que λ_{corte} pode ser escolhido prescrevendo-se um número de condição máximo aceitável para $\mathbf{\Lambda}$. O pseudoinverso associado

$$\mathcal{D}^+\mathbf{F} = \mathbf{V}\mathbf{\Lambda}^+\mathbf{U}^T , \quad (3.9)$$

é chamado de inverso generalizado (MENKE, 1989) de \mathcal{DF} , ao qual corresponde a estimativa

$$\hat{\mathbf{m}} = \mathcal{D}^+\mathbf{F}\delta\mathbf{d} . \quad (3.10)$$

Em geral, problemas de tomografia em geofísica são sobredeterminados, mas mal-condicionados. Alguns problemas têm posto incompleto, ou seja, o posto de $\mathbf{\Lambda}$ é menor que N_m . Nestas circunstâncias, é conveniente utilizar o pseudoinverso $\mathcal{D}^+\mathbf{F}$ para reduzir o efeito do ruído, inevitavelmente presente nas observações, na estimativa $\hat{\mathbf{m}}$.

Para avaliar a solução (3.10) pode-se utilizar a matriz de resolução, \mathbf{R} , definida pela relação

$$\hat{\mathbf{m}} = \mathcal{D}^+\mathbf{F}\delta\mathbf{d} = \mathcal{D}^+\mathbf{F}\mathcal{DF}\delta\mathbf{m} \equiv \mathbf{R}\delta\mathbf{m} . \quad (3.11)$$

Considerando que λ_{corte} em (3.9) é o valor singular λ_{rr} , em que $r < N_m$, como

$$\mathbf{R} = \mathbf{V}_r\mathbf{V}_r^T ,$$

em que, \mathbf{V}_r é a partição da matriz \mathbf{V} associada aos valores singulares maiores que λ_{rr} (MENKE, 1989). As linhas da matriz de resolução indicam quais parâmetros do modelo são resolvidos pela estimativa (3.10). Quanto mais próxima matriz de resolução estiver da matriz identidade, melhor é a resolução dos parâmetros e, conseqüentemente, a qualidade da esti-

mativa. Em cada linha, os elementos não nulos fora da diagonal indicam que os parâmetros apresentam dependência linear e, portanto, não podem ser determinados de maneira estável a partir das observações.

Para avaliar o potencial da estereotomografia na reconstrução de modelos anisotrópicos efetuei a decomposição em valores singulares da derivada de Fréchet (3.5) para um modelo simples. O meio de referência é isotrópico e homogêneo, contendo apenas um único ponto difrator. A derivada de Fréchet para este modelo foi construída para meios homogêneos com anisotropia elíptica e anelítica. Os parâmetros a serem estimados obedecem a ordenação: $x_0, z_0, p_1, p_2, p_3, \theta_1^f, \theta_1^r, \tau_1^s, \theta_1^r, \dots, \theta_N^f, \theta_N^r, \tau_N^s, \tau_N^r$; os subscritos nos parâmetros $\theta^f, \theta^r, \tau^r$ e τ^f indicam o evento, difração ou transmissão, a que estão associados, como mostram as Figuras (3.1) e (3.2).

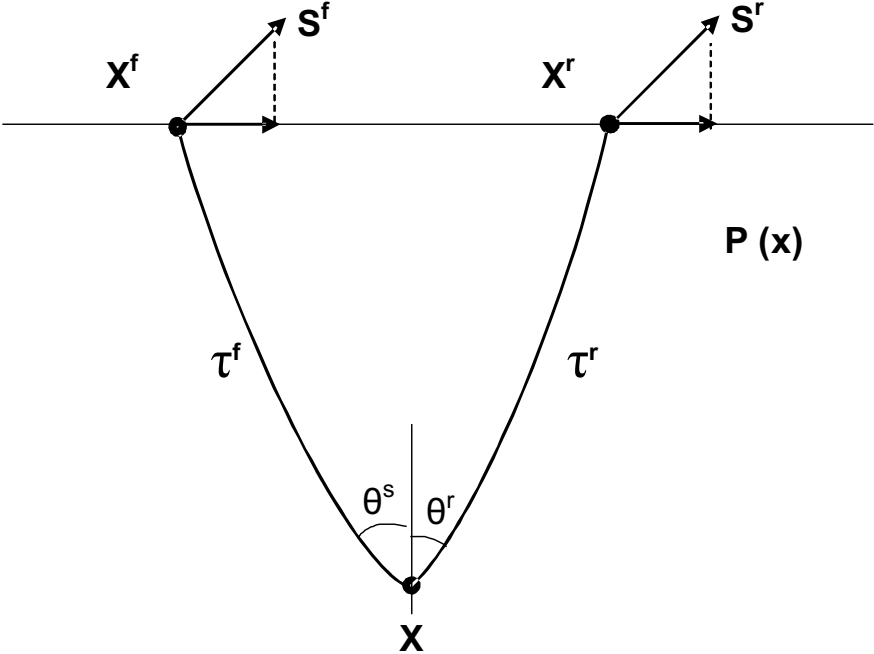


Figura 3.1: Ilustração dos parâmetros utilizados em eventos de difração.

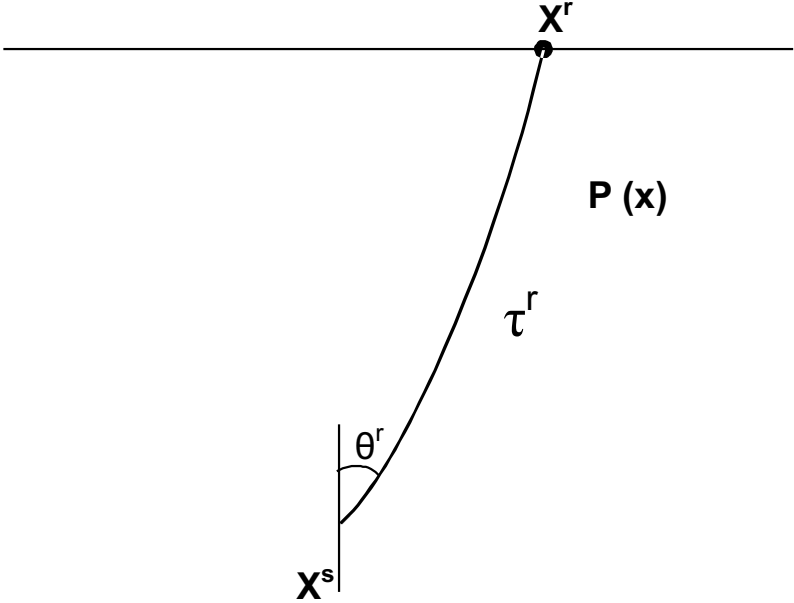


Figura 3.2: Ilustração dos parâmetros utilizados em eventos de transmissão.

Considerarei diferentes geometrias de aquisição, sendo: (a) Levantamentos de superfície com os dados organizados em famílias CMP, ver Figura(3.3). (b) Dados de perfilagem sísmica vertical do tipo *checkshot*, ver Figura(3.4). Dois experimentos foram efetuados para cada modelo de anisotropia. Experimentos com eventos exclusivamente de difração e experimentos que combinam eventos de reflexão, difração e de transmissão. Em cada experimento a derivada de Fréchet foi avaliada em um meio isotrópico com velocidade de 3,0 km/s para ondas P, o ponto difrator no modelo de referência está na coordenada $x_0 = 3,0$ km e $z_0 = 1,5$ km. Os eventos de difração estão organizados em uma família CMP, sobre a posição do ponto difrator. O afastamento entre fonte e receptor varia de 1,0 km a 10 km em incrementos de 1 km no semi-afastamento. O objetivo desta geometria não convencional é assegurar grande cobertura angular para os raios. Nos eventos do tipo *checkshot*, o poço está na vertical passando pelo ponto difrator. A fonte, na superfície, foi posicionada a 0,25 km e a 3,0 km do poço; os cinco receptores estão regularmente espaçados a cada 1 km a partir da superfície. Nestes experimentos a componente vertical da vagarosidade no receptor é ajustada. Enquanto que, no evento de difração, as componentes horizontais da vagarosidade na fonte e no receptor são ajustadas.

Antes de efetuar a decomposição em valores singulares (SVD), a matriz \mathcal{DF} foi normalizada, dividindo cada coluna pela norma da coluna (norma L_2). Após o cálculo da SVD, a matriz de resolução foi determinada eliminando os menores valores singulares. O objetivo é avaliar quais parâmetros do modelo apresentam menor resolução.

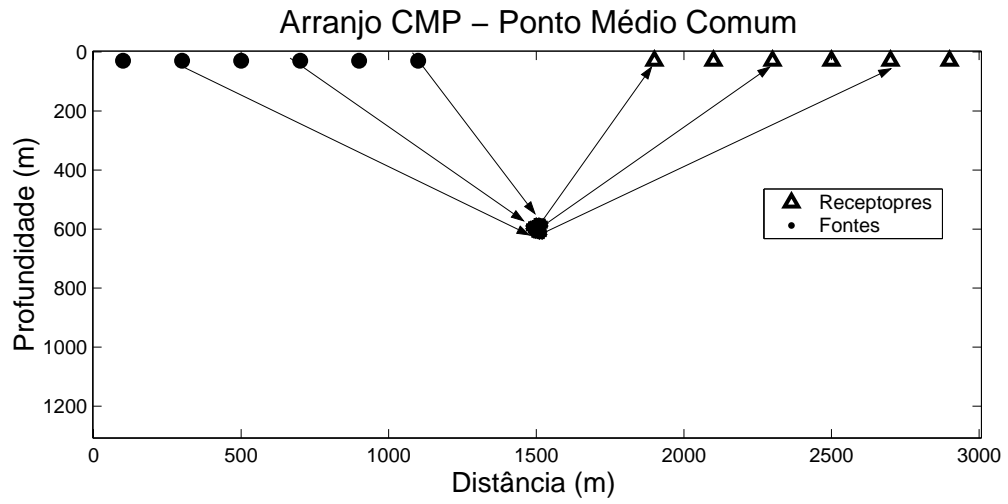


Figura 3.3: Ilustração da geometria de levantamento de superfície.

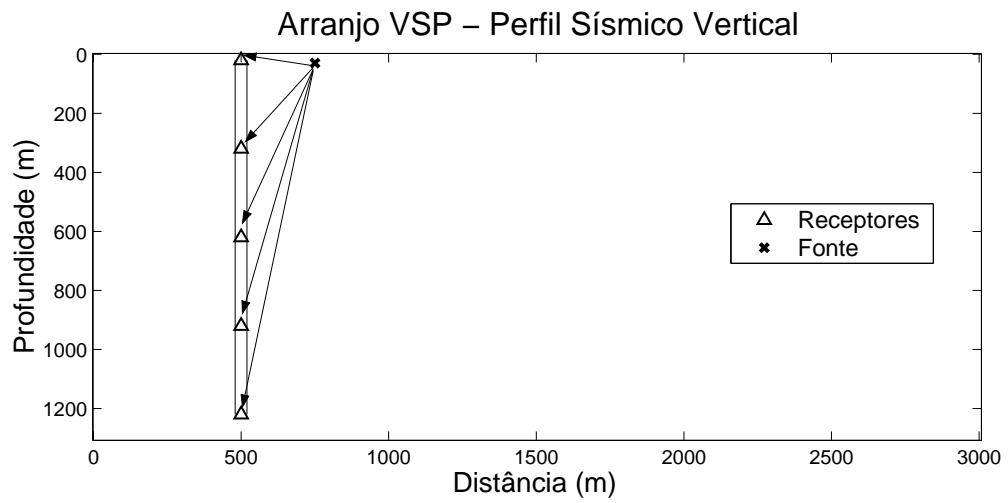


Figura 3.4: Ilustração da geometria de levantamento VSP do tipo *checkshot*.

3.3.1 Análise em meio elíptico

Realizei primeiro a análise da matriz de resolução associada à derivada de Fréchet para o caso elíptico, considerando somente ondas difratadas, com fontes e receptores na superfície. Em seguida, a matriz de resolução foi avaliada, adicionando informações de ondas transmitidas de eventos *checkshot* com a fonte localizada, primeiro, na posição de 0,25 km da cabeça do poço e posteriormente, na posição de 3 km da cabeça do poço. Em cada um dos casos, os resultados estão apresentados em dois gráficos, o primeiro com o logaritmo dos valores singulares e o segundo contendo a matriz de resolução.

As Figuras (3.5) e (3.6) mostram os resultados considerando apenas o evento de difração. Para determinar a matriz de resolução, os três menores valores singulares foram desconsiderados. Observando as linhas da matriz de resolução que mais diferem das linhas da matriz identidade, verifica-se que os parâmetros que apresentam maior ambiguidade são: x_0 e z_0 , que representam a posição do ponto difrator, e p_2 e p_3 na equação (2.14), associados ao quadrado da velocidade de fase vertical e à orientação da elipse de vagarosidade, respectivamente. Este resultado indica que a determinação simultânea da localização do ponto difrator, velocidade de fase vertical e orientação da elipse de vagarosidade é instável.

As Figuras (3.7) e (3.8) apresentam os valores singulares e a matriz de resolução considerando, adicionalmente ao evento de difração eventos de transmissão do tipo *checkshot*. A fonte está localizada a 0,25 km da cabeça do poço. Os dois menores valores singulares foram desconsiderados para determinar a matriz de resolução. Observa-se que os parâmetros com menor resolução, neste caso, são: a coordenada horizontal do ponto difrator, x_0 , e o parâmetro do meio, p_3 , associado à orientação da elipse. Adicionalmente, verifica-se que o mal-condicionamento destes parâmetros está acoplado com a determinação das direções da vagarosidade no ponto difrator e os tempos de trânsito entre o ponto difrator e a fonte e entre o ponto difrator e o receptor. O evento de transmissão melhorou o condicionamento da determinação da velocidade de fase vertical e da profundidade do ponto difrator. Este resultado pode ser atribuído ao pequeno afastamento entre a fonte e o receptor, o que reduz a cobertura angular dos raios associados aos eventos de transmissão e a falta de simetria na distribuição de fontes em torno do poço em experimentos do tipo *checkshot*.

Para aumentar a cobertura angular dos raios no eventos de transmissão, a análise anterior foi repetida considerando a fonte à 3 km da cabeça do poço. Os resultados estão apresentados

nas Figuras (3.9) e (3.10). Os parâmetros com menor resolução, neste caso, são: a posição do ponto difrator, x_0 e z_0 , e os parâmetros do meio, p_2 e p_3 . A maior inclinação dos raios reduziu a informação sobre a vagarosidade vertical levando ao mal-condicionamento na determinação da profundidade do difrator e no quadrado velocidade de fase vertical p_2 . Novamente, o mal-condicionamento na determinação destes parâmetros está acoplado à determinação das direções da vagarosidade no ponto difrator e os tempos de trânsito entre o ponto difrator e a fonte e entre o ponto difrator e o receptor.

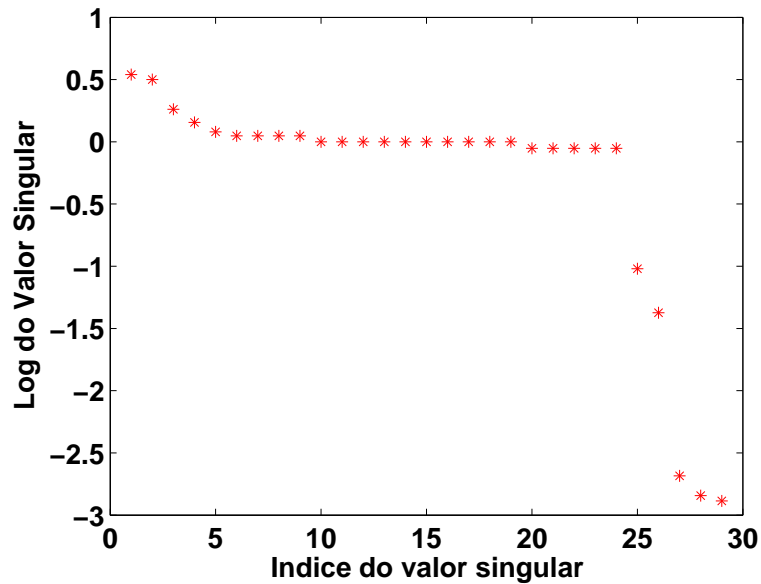


Figura 3.5: Valores singulares em ordem não crescente considerando apenas o evento de difração e anisotropia elíptico. Fontes e receptores estão na superfície.

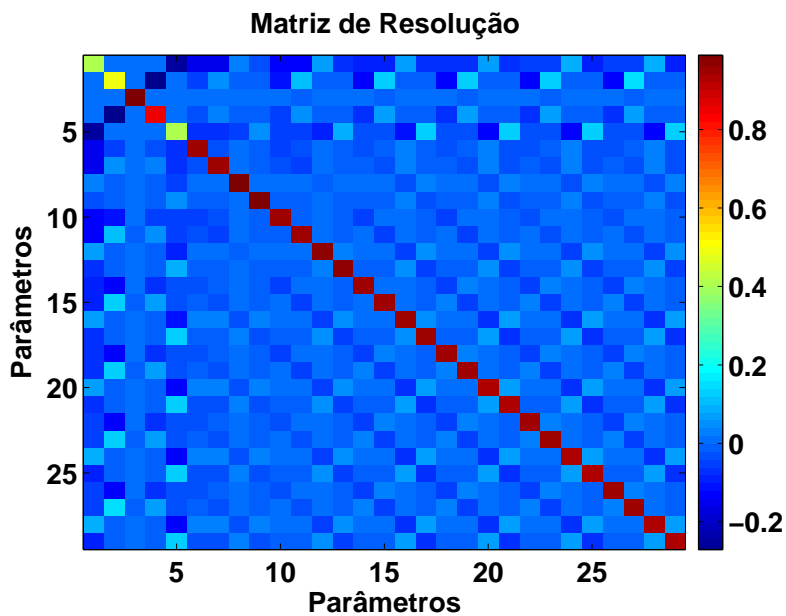


Figura 3.6: Matriz de resolução para o caso elíptico considerando a geometria de um levantamento de superfície. Os três menores valores singulares na Figura (3.5) foram desconsiderados para o cálculo da matriz de resolução.

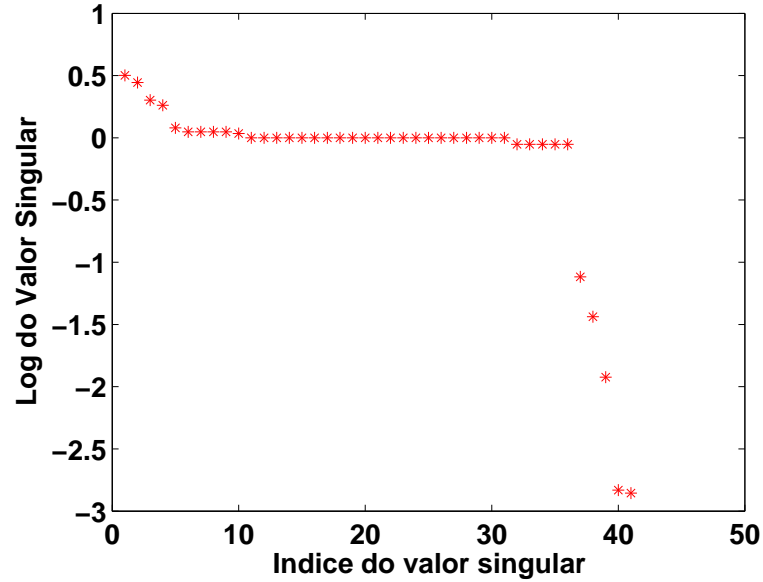


Figura 3.7: Valores singulares em ordem não crescente considerando eventos de difração e transmissão do tipo *checkshot*, para o caso elíptico. A distância entre a fonte e a cabeça do poço é de 0,25 km.

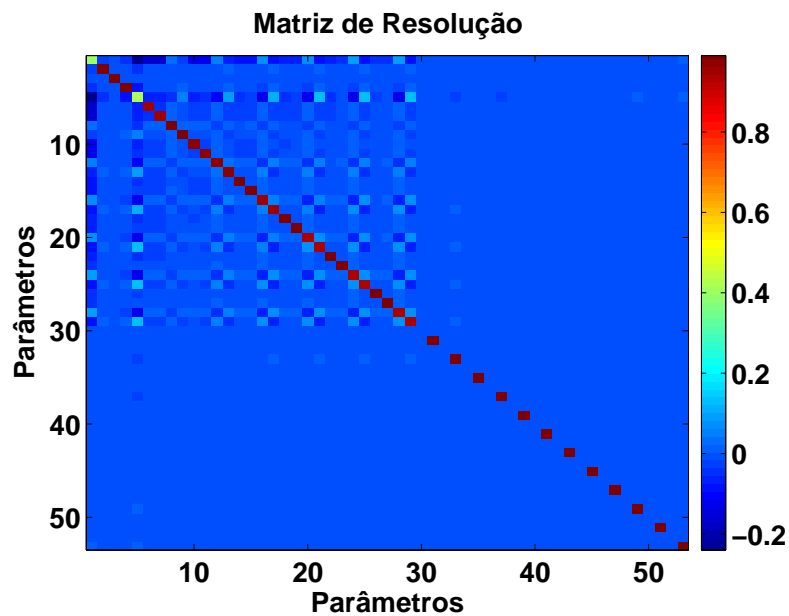


Figura 3.8: Matriz de resolução de um meio elíptico considerando, além do evento de difração, eventos de transmissão para a geometria VSP, com a posição da fonte 0,25 km da cabeça do poço. Os dois menores valores singulares na Figura (3.7) foram desconsiderados para o cálculo da matriz de resolução.

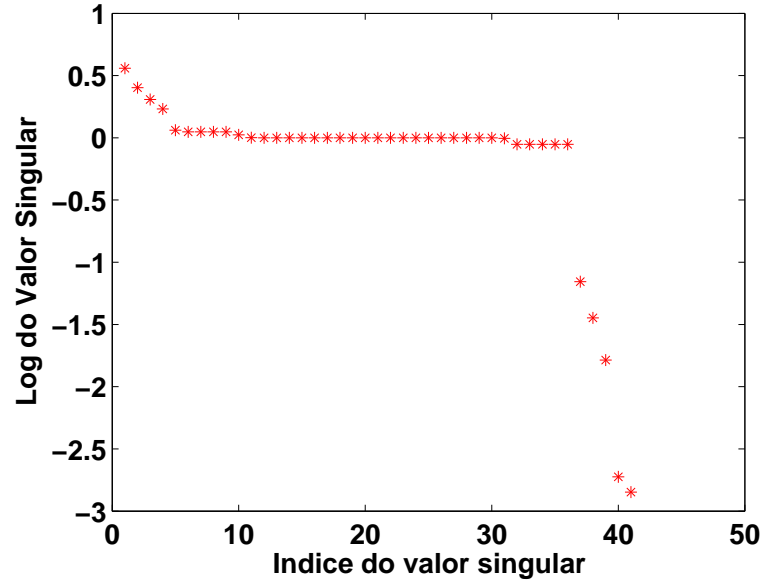


Figura 3.9: Valores singulares para o caso elíptico considerando, além do evento de difração, eventos de transmissão com geometria VSP com a fonte localizada a 3 km da cabeça do poço.

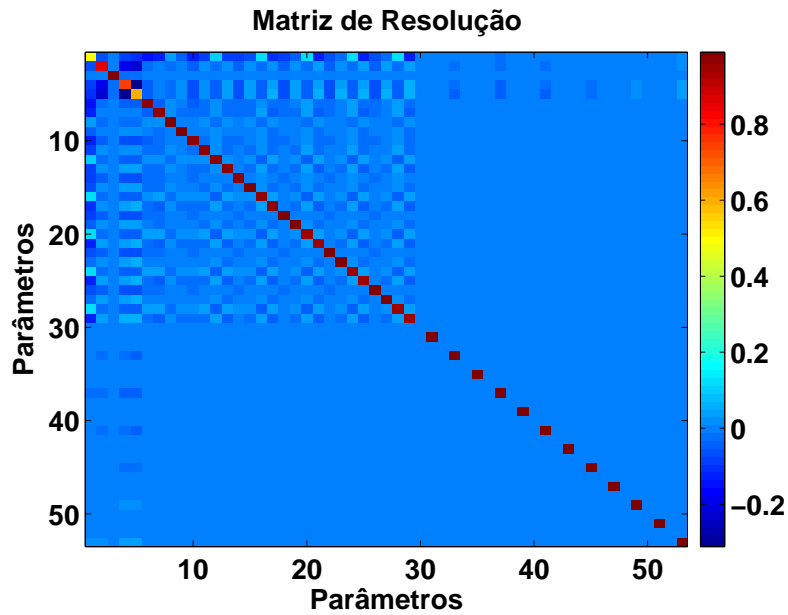


Figura 3.10: Matriz de resolução de um meio elíptico considerando, além do evento de transmissão, eventos de transmissão para geometria VSP com a fonte localizada a 3 km do poço. Os dois menores valores singulares na Figura (3.9) foram desconsiderados para o cálculo da matriz de resolução.

3.3.2 Análise em meio anelítico

Repeti os experimentos numéricos descritos anteriormente para derivada de Fréchet associada a um meio homogêneo com anisotropia anelítica. Novamente o modelo de referência é isotrópico com velocidade para ondas P de 3 km/s. As Figuras (3.11) e (3.12) mostram os resultados considerando apenas o evento de difração. Para determinar a matriz de resolução os dois menores autovalores foram desconsiderados. De acordo com a Figura (3.12), verifica-se que os parâmetros que apresentam maior ambiguidade são: x_0 e z_0 e p_2 . A maior incerteza na determinação destes parâmetros está também associada às incertezas na determinação das direções da vagarosidade no ponto difrator e nos tempos de trânsito entre o ponto difrator e a fonte e entre o ponto difrator e o receptor. Este resultado indica que a determinação simultânea da localização do ponto difrator, e do quadrado da velocidade de fase vertical, p_2 é mal-condicionada.

As matrizes de resolução para os dois experimentos numéricos incluindo eventos de transmissão são muito semelhantes. Para o caso em que a fonte no VSP está a 0,25 km da cabeça do poço, os resultados estão nas Figuras (3.13) e (3.14), contendo os valores singulares e a matriz de resolução, respectivamente. Para o caso em que a fonte no VSP está a 3 km da cabeça do poço, os resultados estão nas Figuras (3.15) e (3.16). Nos dois casos apenas o menor valor singular não foi considerado para determinar a matriz de resolução. De acordo com estas Figuras observa-se que a ambiguidade resulta do acoplamento entre a posição do ponto difrator, x_0 , com as direções da vagarosidade no ponto difrator e os ângulos e os tempos de trânsito entre o ponto difrator e a fonte e entre o ponto difrator e o receptor.

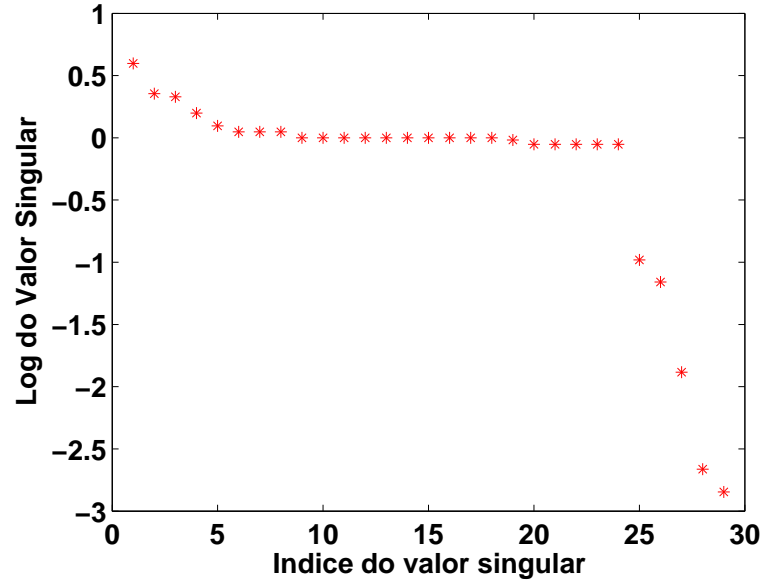


Figura 3.11: Valores singulares considerando um único evento de difração, geometria de aquisição de superfície, para inversão de um modelo anelítico.

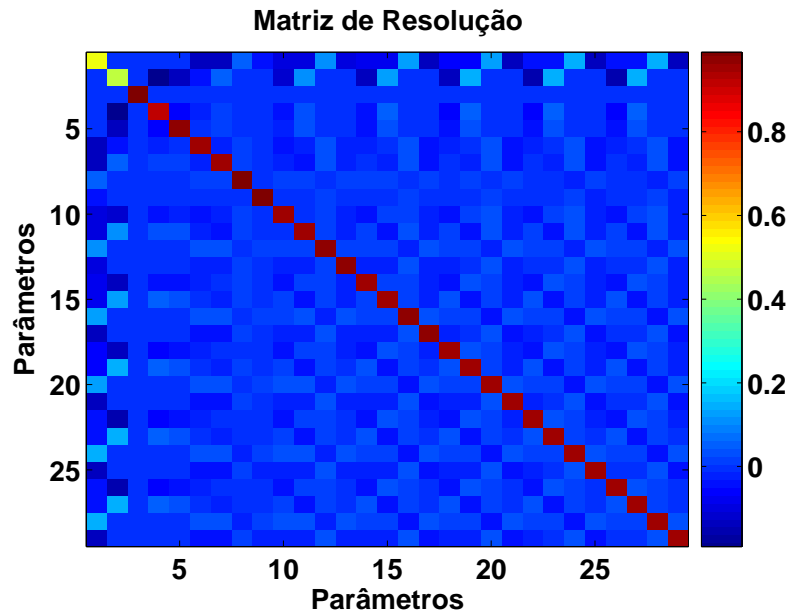


Figura 3.12: Matriz de resolução de um meio anelítico considerando um evento de difração, geometria de aquisição de superfície. Os dois menores valores singulares na Figura 3.11 foram desconsiderados para determinar a matriz de resolução.

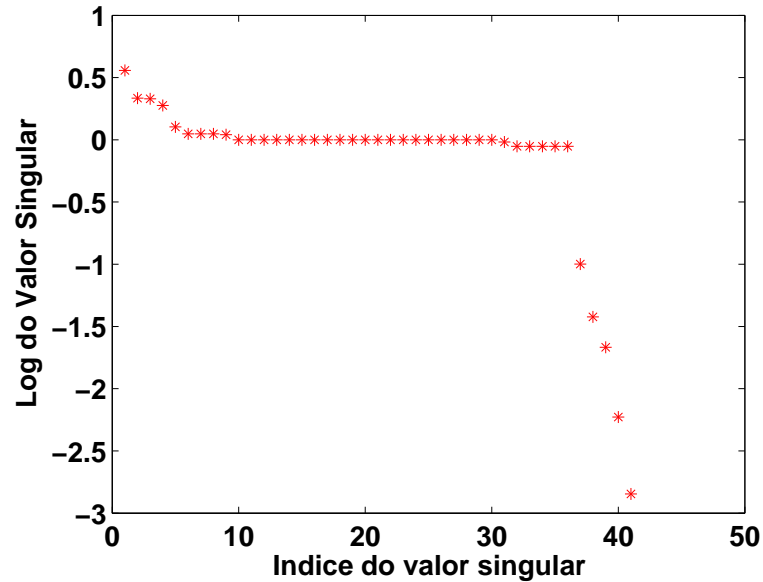


Figura 3.13: Valores singulares para o caso anelítico considerando, além do evento de difração, eventos de transmissão para geometria de aquisição VSP com a fonte posicionada a 0,25 km da cabeça do poço.

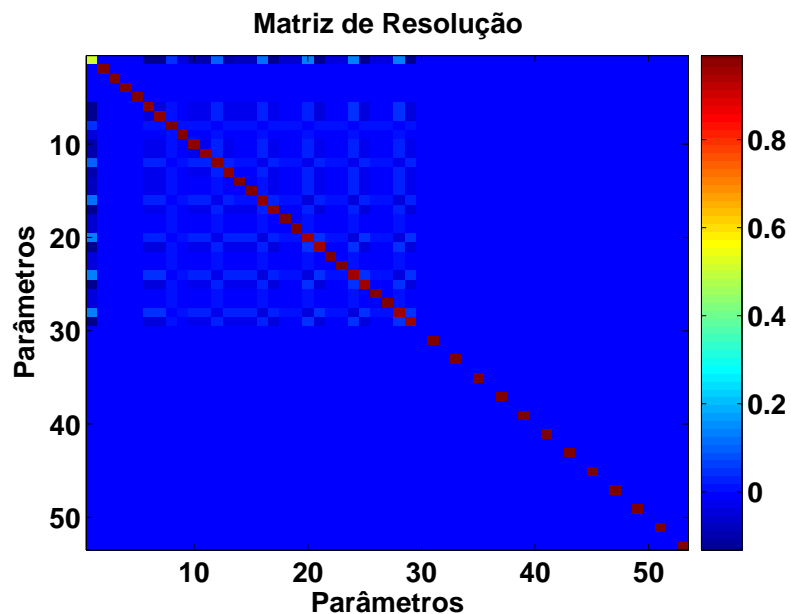


Figura 3.14: Matriz de resolução para o caso anelítico considerando, além do evento de difração, eventos de transmissão para geometria de aquisição VSP com a fonte posicionada a 0,25 km da cabeça do poço. Apenas o menor valor singular da Figura 3.13 foi descartado para determinar a matriz de resolução.

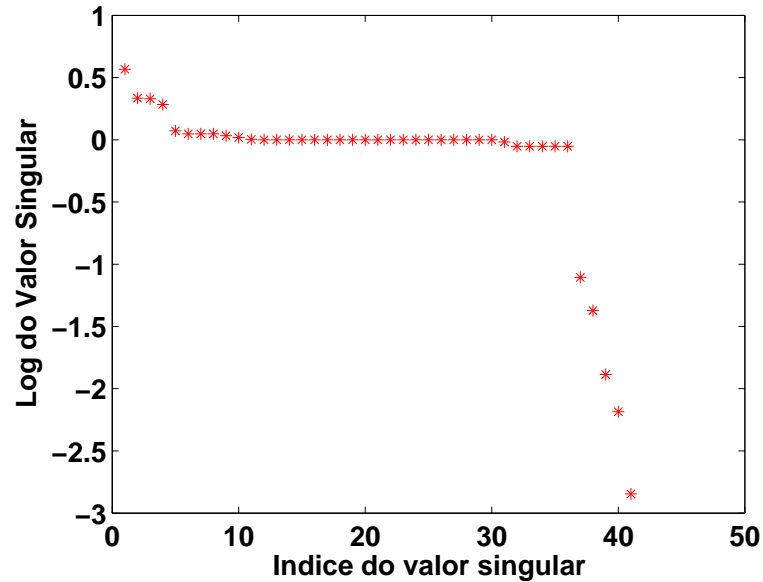


Figura 3.15: Valores singulares para o caso anelítico considerando além do evento de difração, eventos de transmissão com geometria de aquisição VSP com a fonte posicionada a 3,0 km da cabeça do poço.

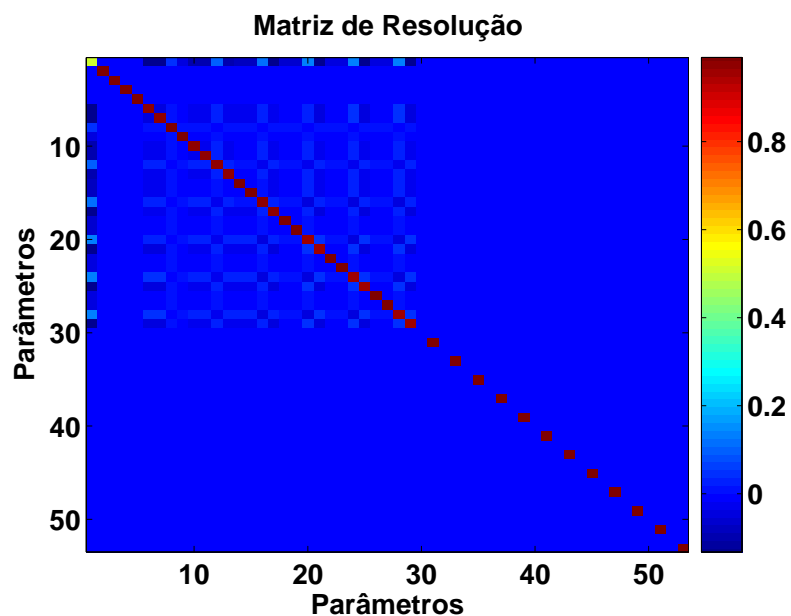


Figura 3.16: Matriz de resolução de um meio anelítico considerando, além do evento de difração, eventos de transmissão com geometria VSP com a fonte posicionada a 3,0 km do poço. Apenas o menor valor singular da Figura (3.15) foi descartado para determinar a matriz de resolução.

Os resultados destes experimentos numéricos, embora limitados à análise do problema linearizado associado à estereotomografia, indicam que:

Não é possível estimar modelos anisotrópicos através de estereotomografia utilizando apenas dados de eventos de reflexão ou difração;

A inclusão de eventos de transmissão de experimentos de VSP melhora o condicionamento da estereotomografia;

A estimativa da orientação da curva de vagarosidade em conjunto com a posição do ponto difrator é mal-condicionada, como indicam os experimentos numéricos para o caso elíptico.

3.4 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA INVERSO DE ESTEREOTOMOGRAFIA EM MEIOS ANISOTRÓPICOS

Devido a incompletude dos dados, condições adicionais incorporando propriedades desejáveis para a solução precisam ser adicionadas (MENKE, 1989) à função objetivo na formulação do problema inverso. Estas restrições são chamadas de regularização. Os resultados da seção anterior sugerem que tipos de informação a priori devem ser adicionadas na formulação da estereotomografia para reduzir a ambiguidade associada exclusivamente à introdução de anisotropia no modelo de vagarosidade do meio. Adicionalmente a estes efeitos, deve-se considerar a ambiguidade associada à presença de heterogeneidade, que depende da parametrização da dependência espacial do modelo de velocidade e da trajetória de raios através do modelo (FARRA; BÉGAT, 1995; BILLETTE; LAMBARÉ, 1998; BILLETTE et al., 2003).

Para reduzir a ambiguidade associada à anisotropia utilizo dois tipos de regularização. O primeiro minimiza a anisotropia do modelo e o segundo maximiza a focalização de pontos espalhadores associados a um mesmo evento de difração ou reflexão. A exigência de que a solução esteja próxima de um modelo isotrópico pode ser especificada, para o caso anelítico (2.15), minimizando a relação

$$\|p_1 - p_2\|_2^2 + \|p_1 - p_3\|_2^2 ,$$

em dada ponto do modelo. Para o caso elíptico (2.14), este vínculo pode ser especificado minimizando

$$\|p_1 - p_2\|_2^2 + \|p_3\|_2^2.$$

Estas relações sempre podem ser representadas na forma de um funcional quadrático

$$\|\mathbf{D}_{iso}\mathbf{p}\|_2^2 \tag{3.12}$$

O vínculo de focalização restringe a variação espacial das estimativas do ponto espalhador associado a um mesmo evento de reflexão ou difração. A posição dos pontos espalhadores associados às trajetória dos raios pertencentes a um mesmo evento de reflexão ou difração é indexada pelo superscrito i , ou seja, o ponto espalhador associado a trajetória do j -ésimo raio, pertencente ao i -ésimo evento é especificado por \mathbf{X}_j^i . Pressupondo que os dados para estes eventos estejam organizados em famílias CMP, todos os pontos espalhadores pertencem

centes a um mesmo evento devem estar próximos. Esta restrição pode ser especificada pela minimização da relação do funcional quadrático

$$\sum_{j=1}^{N_i} \|\mathbf{X}_j^i - \langle \mathbf{X}^i \rangle\|_2^2, \quad (3.13)$$

em que $\langle \mathbf{X}^i \rangle$ é o valor médio de todos os pontos espalhadores atribuídos a um mesmo evento. Este vínculo de focalização permite reduzir a ambiguidade na localização do ponto difrator.

A variabilidade espacial na implementação da estereotomografia é descrita utilizando B-splines (2.12). Devido a cobertura limitada de raios através do modelo, algumas regiões do modelo não podem ser resolvidas pela estereotomografia (FARRA; BÉGAT, 1995). Para reduzir estes efeitos, minimiza-se a heterogeneidade da solução através dos funcionais quadráticos

$$\|\mathbf{D}_1^{(n)} \mathbf{p}\|_2^2, \quad (3.14)$$

e

$$\|\mathbf{D}_3^{(n)} \mathbf{p}\|_2^2, \quad (3.15)$$

O operador $\mathbf{D}_1^{(n)}$ representa a derivada parcial, de ordem 1 ou 2, em relação à coordenada x , e $\mathbf{D}_3^{(n)}$ representa a derivada parcial, também de ordem 1 ou 2, em relação à coordenada z .

Neste trabalho, a função objetivo é

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{m}; \lambda_i) = & \|\mathbf{d} - \mathbf{F}(\mathbf{m})\|_2^2 & + \\ & \lambda_0^2 \|\mathbf{m} - \mathbf{m}_0\|_2^2 & + \\ & \lambda_1^2 \|\mathbf{D}_1^{(n)} \mathbf{p}\|_2^2 + \lambda_2^2 \|\mathbf{D}_3^{(n)} \mathbf{p}\|_2^2 & + \\ & \lambda_3^2 \|\mathbf{D}_{iso} \mathbf{p}\|_2^2 & + \\ & \lambda_4^2 \sum_{i=1}^{N_{eventos}} \sum_{j=1}^{N_i} \|\mathbf{X}_j^i - \langle \mathbf{X}^i \rangle\|_2^2, & \end{aligned} \quad (3.16)$$

em que, os valores de λ_i ponderam a contribuição de cada parcela para a solução. Os parâmetros do modelo a serem estimados pela estereotomografia não são dimensionalmente homogêneos. O valor de λ_i , prescrito pelo usuário no intervalo $0 \leq \lambda_i < 1$, para cada funcional regularizador é multiplicado pelo valor máximo da norma das colunas da matriz da derivada de Fréchet correspondente aos parâmetros com a mesma dimensão, ou seja, comprimento, tempo, quadrado da velocidade e ângulos em radianos.

Após a linearização da função objetivo (3.16) em torno do modelo de referência obtêm-se

o sistema linear a ser resolvido em cada iteração

$$\begin{aligned}
 \mathcal{D}\mathbf{F}(\mathbf{m}_0)\delta\mathbf{m} &= \delta\mathbf{d} , \\
 \lambda_0\delta\mathbf{m} &= \mathbf{0} , \\
 \lambda_1\mathbf{D}_1^{(n)}\delta\mathbf{p} &= -\lambda_1\mathbf{D}_1^{(n)}\mathbf{p}_0 , \\
 \lambda_2\mathbf{D}_3^{(n)}\delta\mathbf{p} &= -\lambda_2\mathbf{D}_3^{(n)}\mathbf{p}_0 , \\
 \lambda_3\mathbf{D}_{iso}\delta\mathbf{p} &= -\lambda_3\mathbf{D}_{iso}\mathbf{p}_0 , \\
 \lambda_4\delta\mathbf{X}^i &= -\lambda_4(\mathbf{X}^i - \langle\mathbf{X}^i\rangle) .
 \end{aligned} \tag{3.17}$$

A solução deste sistema é encontrada através do método LSQR (PAGE; SAUNDERS, 1982). A cada novo valor de $\delta\mathbf{m}$, o modelo é atualizado. Este processo é repetido até que um dos critérios de parada abaixo seja alcançado:

O resíduo do ajuste dos dados atinja uma tolerância prescrita pelo usuário;

O valor de $\|\delta\mathbf{m}\|_2$ seja menor que uma fração prescrita pelo usuário de $\|\mathbf{m}\|_2$;

O número máximo de iterações permitido seja atingido.

4 APLICAÇÃO A DADOS SINTÉTICOS

Neste capítulo apresento os resultados de experimentos numéricos, utilizando dados sintéticos, do algoritmo de estereotomografia descrito no capítulo anterior. Para cada conjunto de dados três resultados são apresentados. Primeiro, invertendo os dados para um modelo de velocidade isotrópico, o segundo considerando o modelo de velocidade elíptico e o terceiro utilizando a aproximação anelíptica para descrever o modelo de velocidade. Como os parâmetros da aproximação elíptica e da aproximação anelíptica são diferentes, utilizo a velocidade de fase na direção horizontal, na direção vertical e a 45° para representar os modelos de velocidade anisotrópicos. Estes três valores para velocidade de fase determinam um único conjunto de parâmetros p_1 , p_2 e p_3 nas equações (2.14) e (2.15).

No modelo direto, os dados de tempos de trânsito e as componentes da vagarosidade foram gerados através do programa de traçamento de raio ANRAY (GAJEWSKI; PSENCIK, 1990). Os três modelos de velocidade utilizados para gerar os dados sintéticos são transversalmente isotrópicos com eixo de simetria na vertical (TIV). As dimensões espaciais dos modelos em (2.12), o número de coeficientes B-splines para cada parâmetro e a localização dos nós, onde cada coeficiente é determinado, deve ser especificado pelo usuário. A especificação destes parâmetros determina a escala de heterogeneidades do modelo de velocidade a ser estimado. Em todos os testes a seguir, cada propriedade física dos modelos a serem estimados está representada por 49 coeficientes, especificados em uma malha regular de dimensão 7×7 . Na inversão, para todos os modelos, os pesos associados a cada funcional regularizador em (3.16) foram $\lambda_0 = 0,01$, $\lambda_1 = 0,01$, $\lambda_2 = 0,01$ e $\lambda_4 = 0,01$, estes valores de λ foram os que melhor estabilizaram a inversão e os modelos iniciais, também foram os mesmos, isotrópico e homogêneo com velocidade de 3,0 km/s. Os resultados serão discutidos a seguir.

4.1 MODELO 1

Neste primeiro experimento numérico, o modelo é fracamente anisotrópico, com anisotropia elíptica, e heterogeneidade vertical. Os parâmetros de Thomsen (THOMSEN, 1986) para este modelos são: $\epsilon = \delta = 0,189$ e $\gamma = 0,175$. O modelo tem dimensões em 6 km x 3 km e apresenta dois difratores localizados nas coordenadas: $D_1 = (4,0 \text{ km}, 1,4 \text{ km})$ e $D_2 = (1,0 \text{ km}, 2,6 \text{ km})$. Os eventos de difração foram registrados para 29 pares de fontes-receptores que estão situados na superfície. Eventos de transmissão para um perfil *checkshot* foram modelados. A cabeça do poço está situado na coordenada (3,0 km , 0,0 km). A fonte está na superfície a uma distância de 0,15 km da cabeça do poço, 200 receptores estão regularmente distribuídos a cada 10 m ao longo do poço a partir de 100 m de profundidade. A trajetória dos raios neste modelo está na Figura 4.1.

O modelo exato é apresentado na Figura 4.1, a velocidade vertical exata é apresentada na Figura 4.5, a velocidade horizontal exata é apresentada na Figura 4.12 e a velocidade com inclinação de 45° exata é apresentada na Figura 4.18.

O resultado da estereotomografia para modelos isotrópicos é apresentado na Figura 4.2, esta apresenta a trajetórias dos raios e a localização dos dois pontos difratores. De acordo com esta Figura, apesar da utilização do vínculo de focalização nenhum dos pontos difratores está focalizado, além disso, o gradiente puramente vertical não foi recuperado pela estereotomografia isotrópica conforme a Figura 4.6. Os erros percentuais quando essa estimativa é comparada com a velocidade vertical, horizontal e à 45° , são apresentados nas Figuras 4.7, 4.13 e 4.19. De acordo com estas Figuras, a estimativa apresenta melhor ajuste a velocidade vertical, no entanto, observa-se ainda que, embora o modelo exato não apresente variação lateral (ver Figura 4.5), o modelo reconstituído apresenta uma forte variação lateral com valor superior à 8% (Figura 4.13).

A Figura 4.3 apresenta o modelo estimado através da estereotomografia para modelos elípticos e a trajetória dos raios através deste modelo. De acordo com esta Figura, observa-se a melhor focalização do difrator mais raso em relação aos resultados da estereotomografia isotrópica da Figura 4.2. O ponto difrator abaixo da profundidade do poço não apresenta boa focalização. Atribuo este resultado a falta de informação sobre a vagarosidade vertical abaixo do poço. A velocidade vertical estimada e o erro percentual são apresentados nas Figuras 4.8 e 4.9, a velocidade horizontal estimada e o erro percentual são apresentados nas

Figuras 4.14 e 4.15 e a velocidade com inclinação de 45^0 estimada e o erro percentual são apresentados nas Figuras 4.20 e 4.21.

De acordo com os resultados apresentados, verifica-se que o modelo recuperado apresenta boa coincidência com o modelo original. Nenhuma variação lateral foi introduzida pela tomografia. Os erros de velocidades vertical e horizontal são bem menores do que na tomografia isotrópica, não excedendo 5% na parte do modelo com cobertura de raios. A velocidade vertical é melhor recuperada ver Figura 4.9, enquanto que, a velocidade a 45^0 apresenta os maiores erros ver Figura 4.21, superior à 8%.

A Figura 4.4 apresenta o modelo estimado através da estereotomografia para modelos anelípticos e a trajetória dos raios através deste modelo. De acordo com esta Figura, observa-se a melhor focalização dos difratores em relação aos resultados da estereotomografia isotrópica (Figura 4.2) e da estereotomografia elíptica 4.3. Estes resultados confirmam o melhor condicionamento da inversão de modelos anelípticos em relação a modelos elípticos com orientação arbitrária indicada pela análise da matriz de resolução da derivada de Fréchet.

A velocidade vertical estimada pela estereotomografia anelíptica e o erro percentual são apresentados nas Figuras 4.10 e 4.11, a velocidade horizontal estimada pela estereotomografia anelíptica e o erro percentual são apresentados nas Figuras 4.16 e 4.17 e a velocidade com inclinação de 45^0 estimada pela estereotomografia anelíptica e o erro percentual são apresentados nas Figuras 4.22 e 4.23, respectivamente.

Segundo os resultados obtidos, têm-se que, apesar do modelo original apresentar anisotropia elíptica, a estereotomografia anelíptica resultou em um modelo de velocidade vertical melhor do que o recuperado com a estereotomografia elíptica. O erro máximo da velocidade vertical é de 3% e 5% da velocidade horizontal. Por outro lado, a recuperação da velocidade à 45^0 foi pior, comparada com a tomografia elíptica.

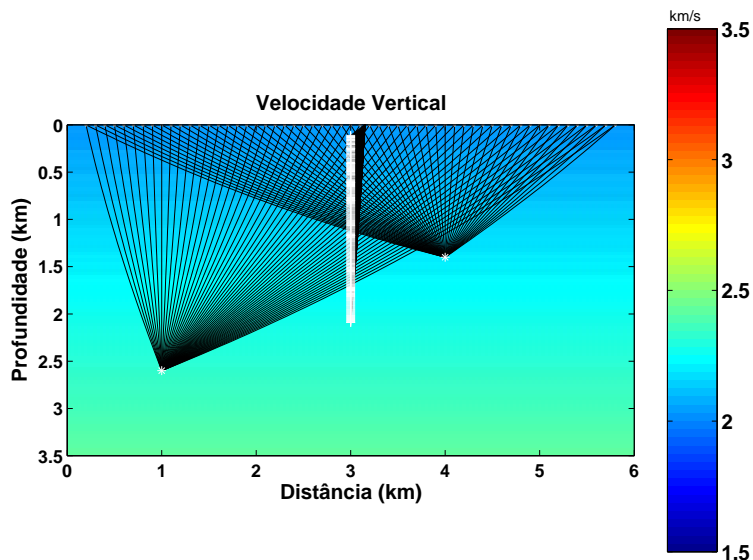


Figura 4.1: Trajetória dos raios no modelo com anisotropia elíptica e heterogêneo vertical utilizado para gerar os dados sintéticos. A velocidade de fundo corresponde a velocidade de fase vertical e os asteriscos marcam a posição dos pontos difratores.

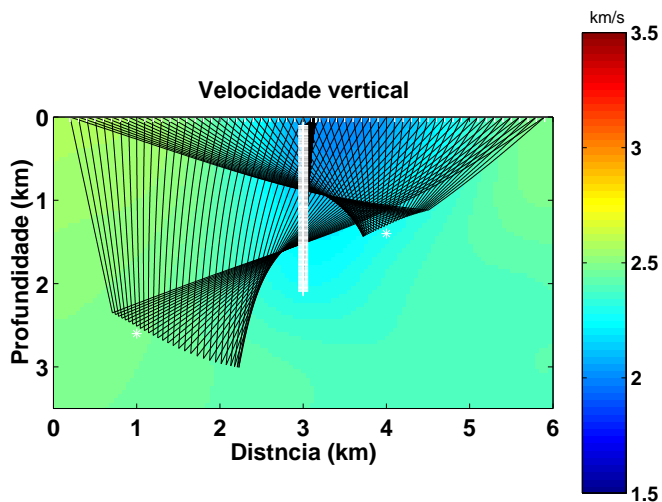


Figura 4.2: Trajetória dos raios no modelo estimado pela estereotomografia para modelos isotrópicos. Apesar da utilização do vínculo de focalização com $\lambda_4 = 0,01$, nenhum dos pontos difratores está focalizado. Os eventos associados ao difrator mais profundo é o que sofre maior desfocalização.

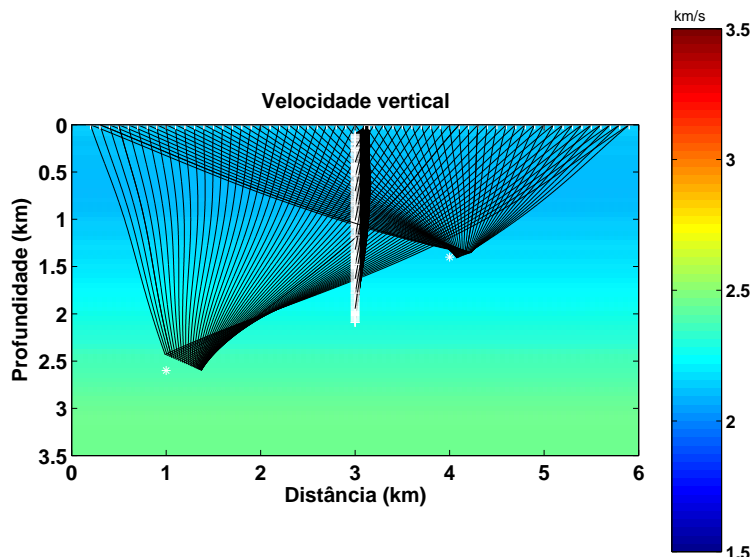


Figura 4.3: Modelo estimado utilizando a estereotomografia elíptica contendo a trajetória de alguns raios de eventos de difração e de transmissão. Observa-se a melhor focalização do difrator mais raso em relação aos resultados da estereotomografia isotrópica da Figura 4.2. O ponto difrator abaixo da profundidade do poço não apresenta boa focalização.

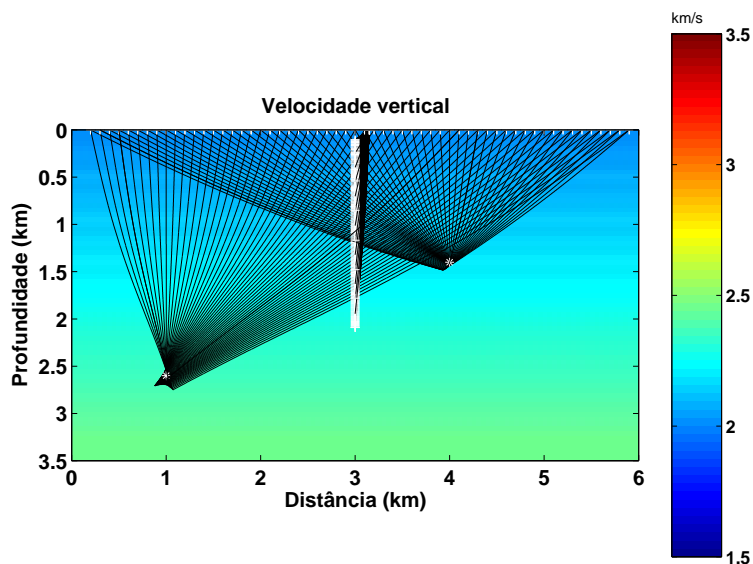


Figura 4.4: Modelo estimado pela estereotomografia anelíptica utilizando os dados de eventos de difração e para o primeiro experimento numérico. Os asteriscos indicam a posição dos pontos difratores. O vínculo de focalização foi aplicado com $\lambda_4 = 0,01$. Observa-se, a melhor focalização dos difratores em relação aos resultados da estereotomografia isotrópica da Figura 4.2 e da estereotomografia elíptica, Figura 4.3.

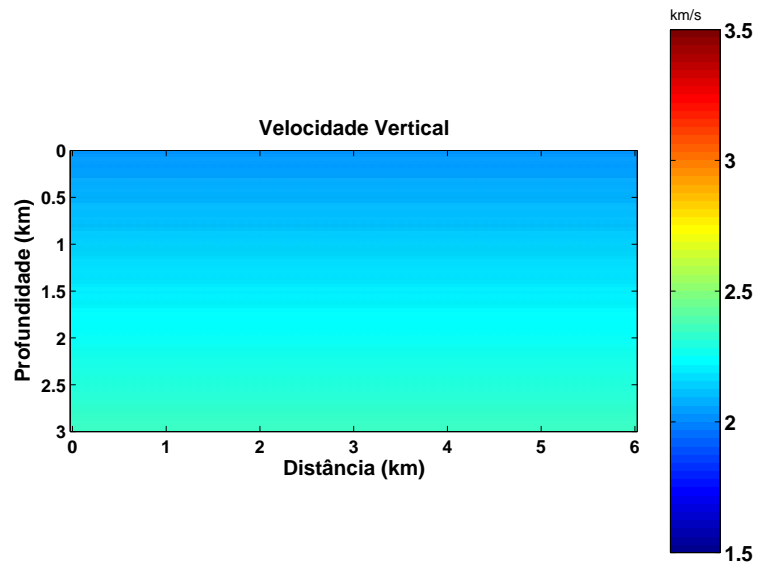


Figura 4.5: Velocidade de fase vertical exata para o modelo elíptico utilizado no primeiro experimento numérico.

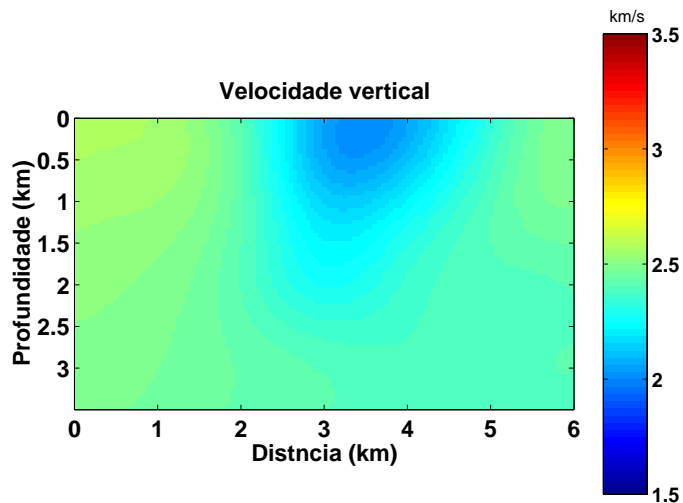


Figura 4.6: Velocidade de fase vertical estimada pela estereotomografia isotrópica a partir de dados de levantamento de superfície e de VSP.

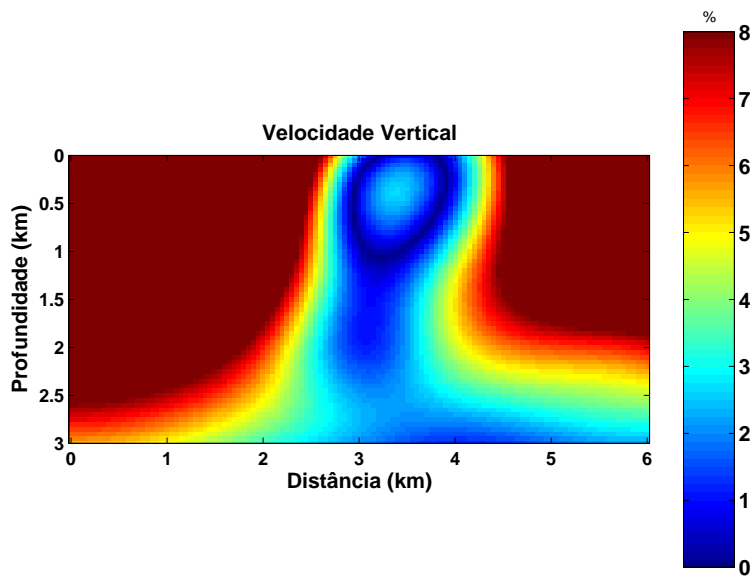


Figura 4.7: Erro percentual da estimativa do modelo de velocidade isotrópico comparado a velocidade vertical do modelo exato. O menor erro ocorre na região que apresenta maior cobertura, em torno do poço, nessa região, o erro é de no máximo 6%, no entanto, o erro pode chegar até a ser superior a 8%, nas regiões onde não há cobertura.

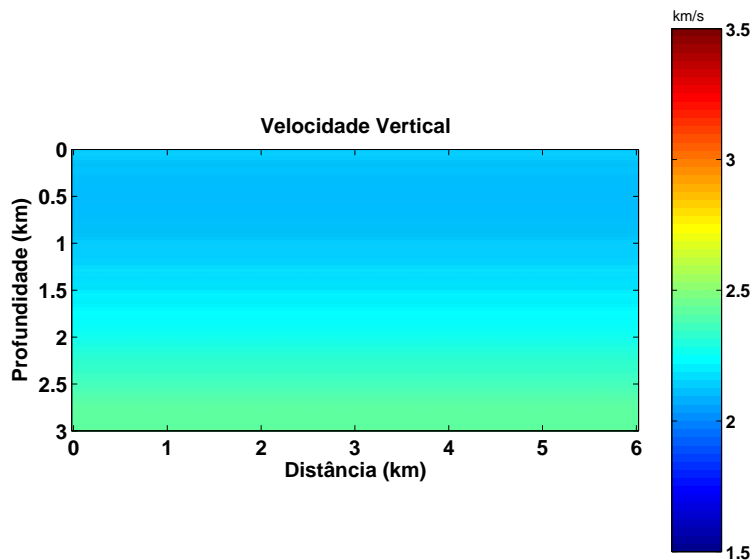


Figura 4.8: Velocidade de fase vertical estimada pela estereotomografia elíptica a partir de dados de levantamento de superfície e de VSP.

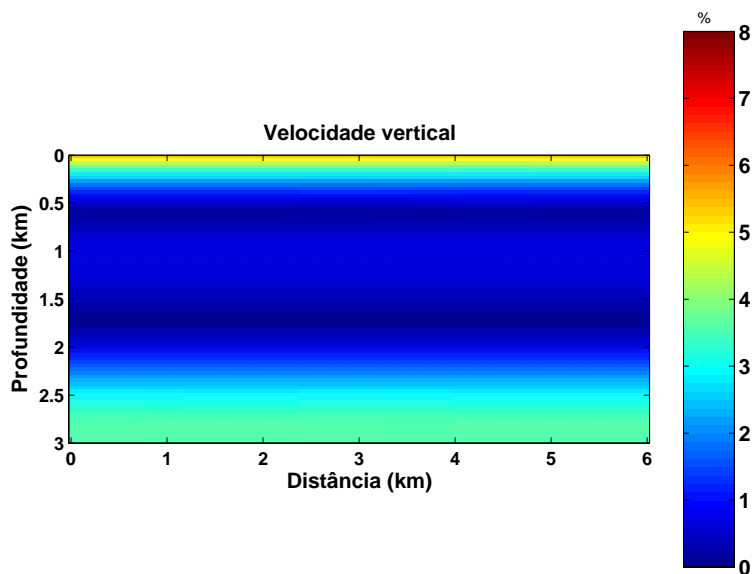


Figura 4.9: Erro percentual da estimativa do modelo de velocidade vertical considerando a estereotomografia elíptica. Na região de maior cobertura (próxima ao poço), verifica-se que o erro é inferior à 3%. Mas apresenta erro superior à 7% nas regiões onde não há cobertura.

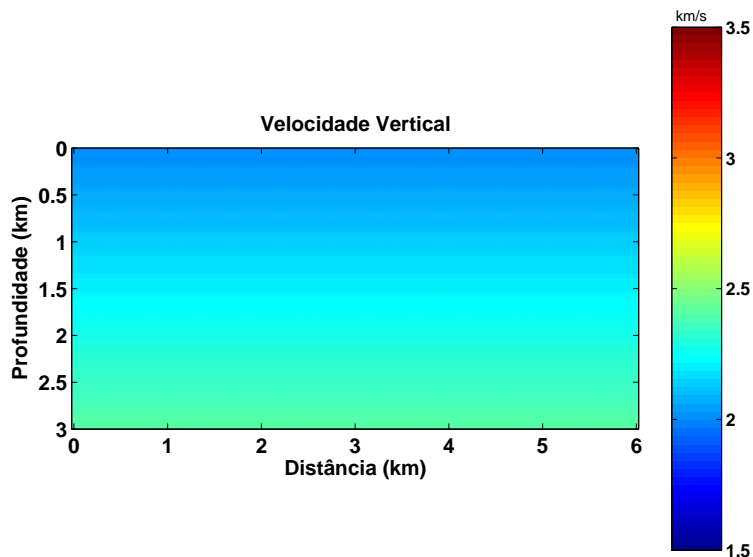


Figura 4.10: Velocidade de fase vertical estimada pela estereotomografia anelítica a partir de dados de levantamento de superfície e de VSP.

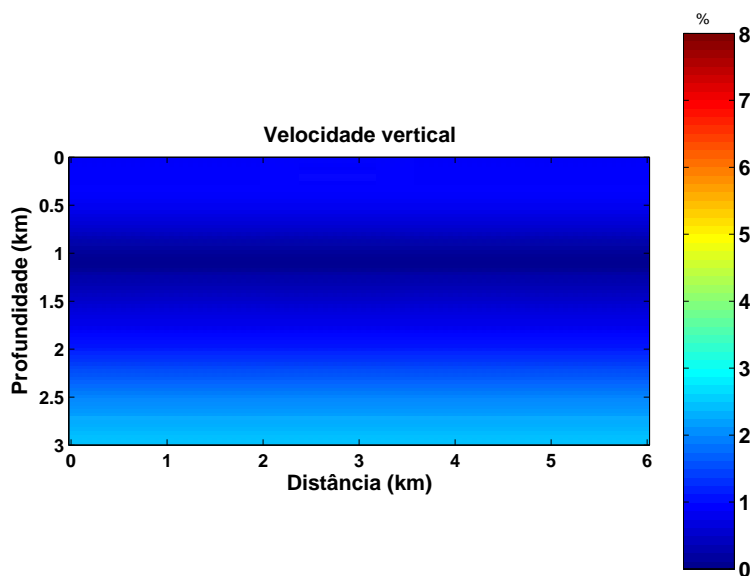


Figura 4.11: Erro percentual da estimativa do modelo de velocidade vertical considerando a estereotomografia anelítica. O erro na região próxima ao poço é menor que o erro para estimativa elíptica.

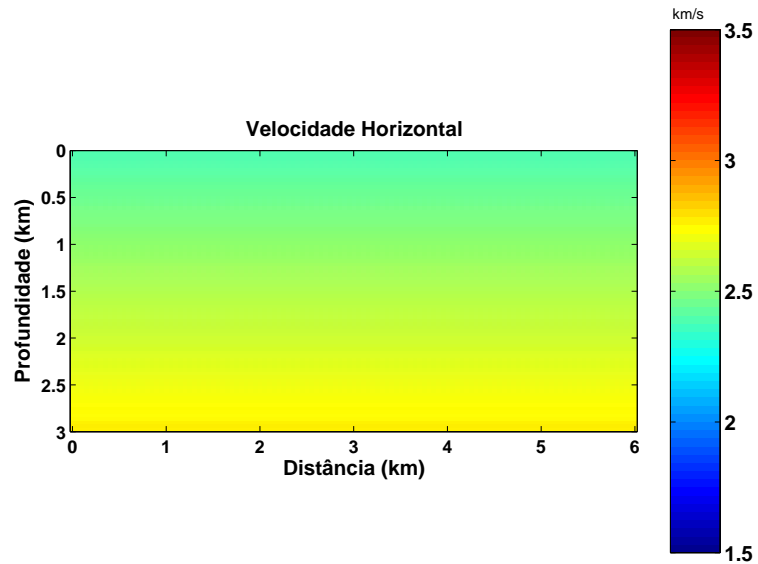


Figura 4.12: Velocidade de fase horizontal exata para o modelo elíptico utilizado no primeiro experimento numérico.

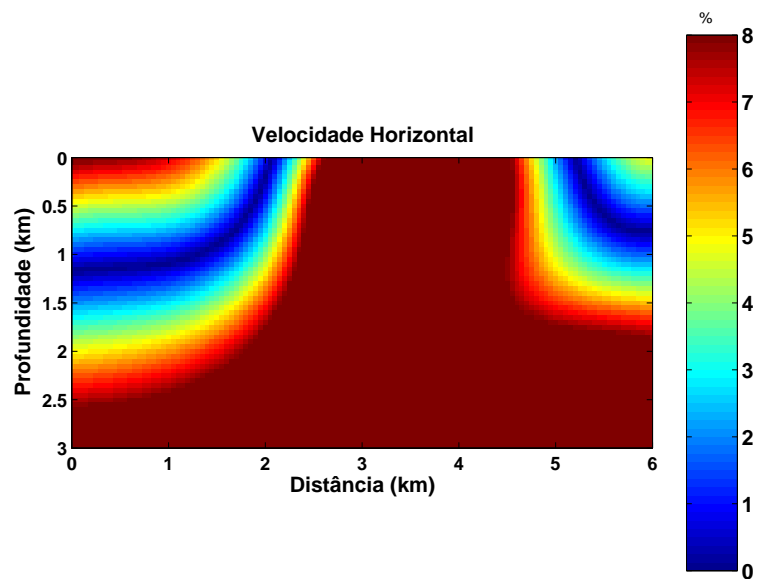


Figura 4.13: Erro percentual da estimativa do modelo de velocidade isotrópico comparado a velocidade horizontal do modelo exato. Em toda a região o erro é maior quando comparado com a figura anterior apresenta erros da ordem de 8%.

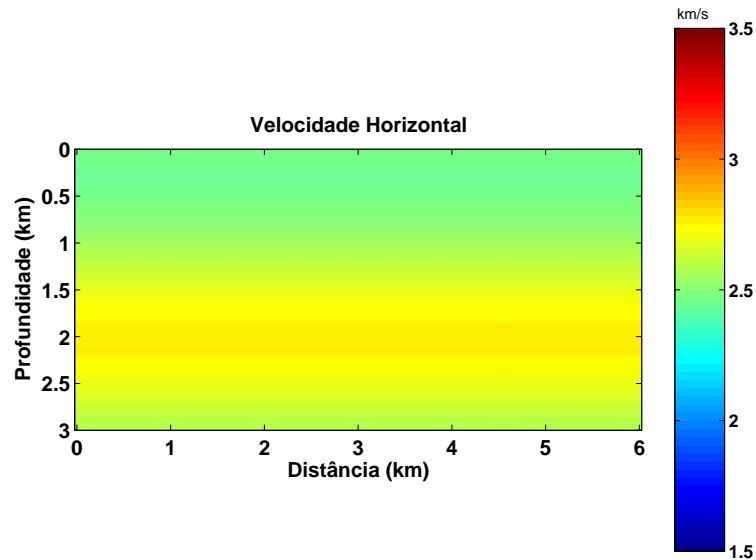


Figura 4.14: Velocidade de fase horizontal estimada pela estereotomografia elíptica a partir de dados de levantamento de superfície e de VSP.

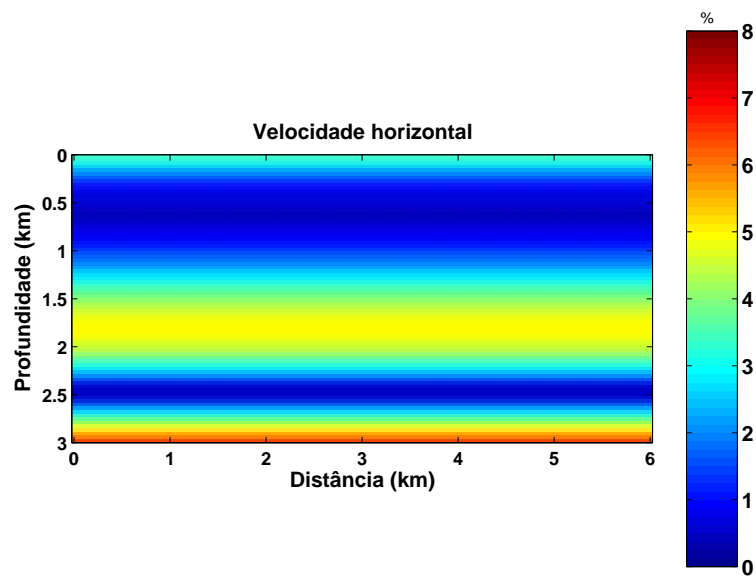


Figura 4.15: Erro percentual da estimativa do modelo de velocidade horizontal considerando a estereotomografia elíptica. A estimativa da velocidade horizontal apresenta erro inferior à 3% até a uma profundidade de 1,5 km, região bastante amostrada. A medida que a profundidade aumenta o erro também aumenta podendo ser superior à 5% em algumas regiões.

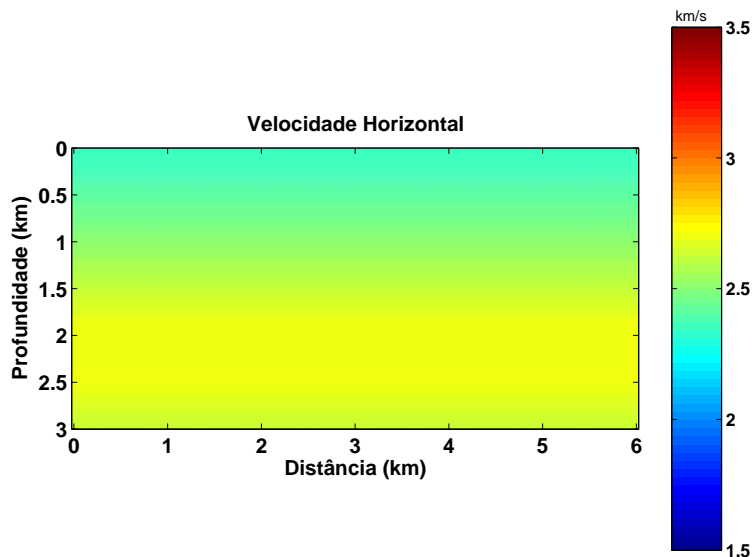


Figura 4.16: Velocidade de fase horizontal estimada pela estereotomografia anelítica a partir de dados de levantamento de superfície e de VSP.

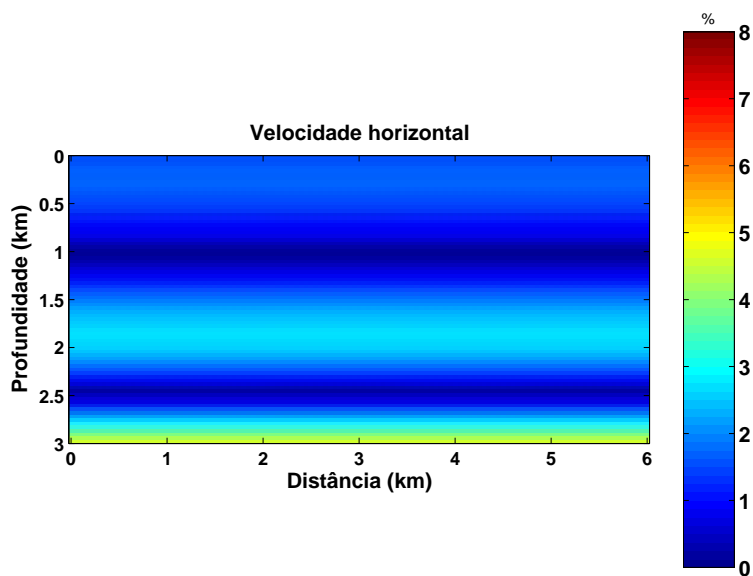


Figura 4.17: Erro percentual da estimativa do modelo de velocidade horizontal considerando a estereotomografia anelítica. A estimativa da velocidade horizontal feita através da estereotomografia anelítica apresenta resultado melhor que a estimativa feita através da estereotomografia elíptica.

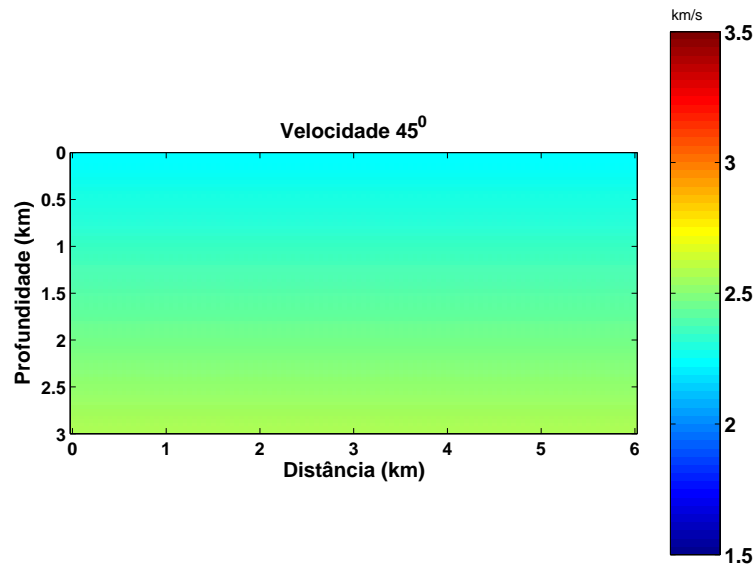


Figura 4.18: Velocidade de fase 45° exata para o modelo elíptico utilizado no primeiro experimento numérico.

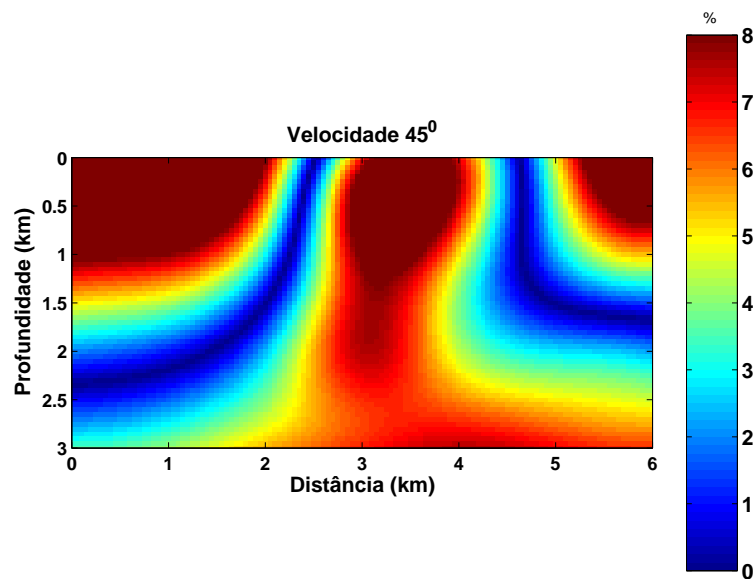


Figura 4.19: Erro percentual da estimativa do modelo de velocidade isotrópico comparado a velocidade de fase a 45° exata. O erro mesmo na região do poço chega a ser superior à 8%.

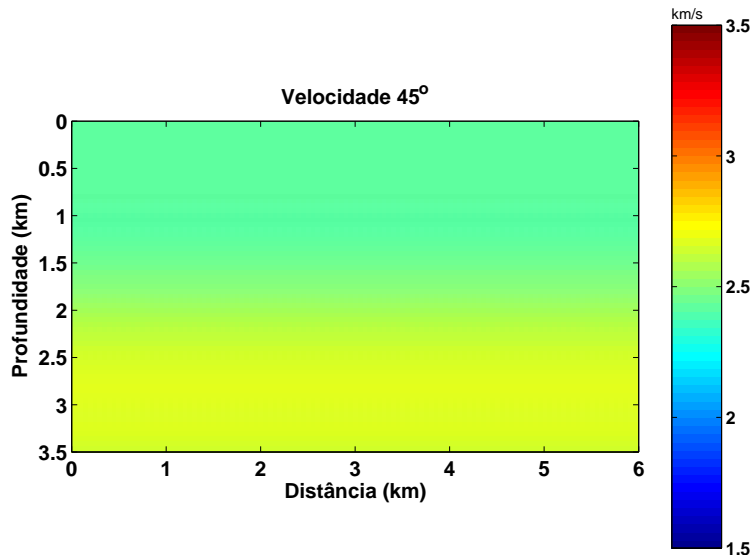


Figura 4.20: Velocidade de fase 45° estimada pela estereotomografia elíptica a partir de dados de levantamento de superfície e de VSP.

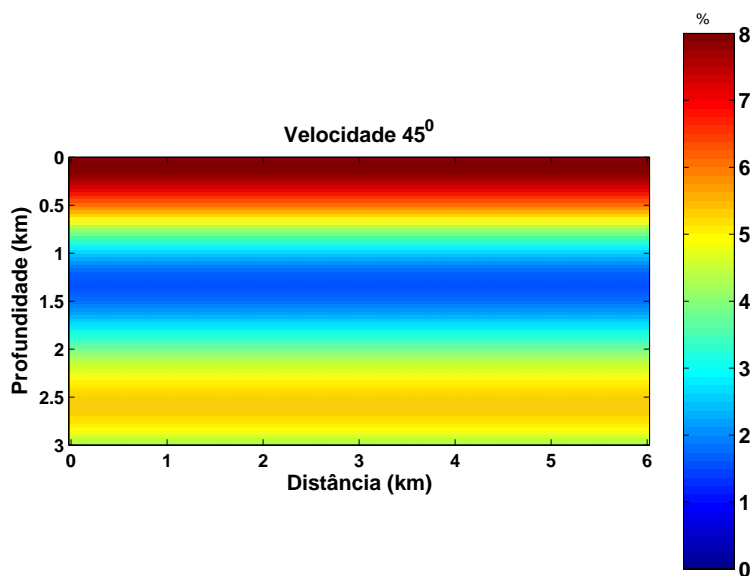


Figura 4.21: Erro percentual da estimativa do modelo de velocidade de fase que está a 45° considerando a estereotomografia elíptica. A estimativa da velocidade de fase que está a 45° apresenta erro inferior à 3% apenas na região que vai da profundidade de 1,0 km até 1,5 km, as outras regiões o erro é superior à 4%.

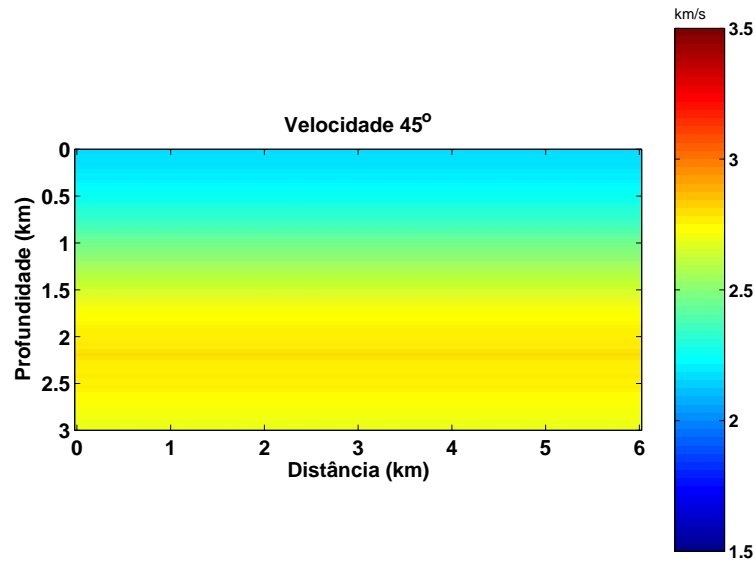


Figura 4.22: Velocidade de fase 45° estimada pela estereotomografia anelítica a partir de dados de levantamento de superfície e de VSP.

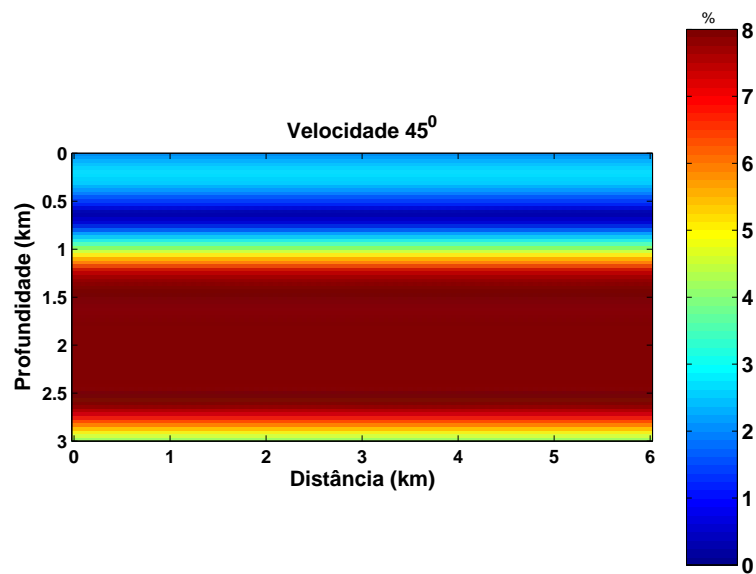


Figura 4.23: Erro percentual da estimativa do modelo de velocidade de fase a 45° considerando a estereotomografia anelítica. O erro a partir da profundidade de 1,0 km é superior à 5%.

4.2 MODELO 2

Este modelo apresenta os mesmos parâmetros de Thomsen do modelo anterior e heterogeneidade nas duas dimensões. O modelo tem dimensões em 6 km x 3 km e possui sete pontos difratores situados nas posições: $D_1 = (0,7 \text{ km}, 2,9 \text{ km})$, $D_2 = (1,2, 1,0)$, $D_3 = (2,2 \text{ km}, 1,7 \text{ km})$, $D_4 = (3,8 \text{ km}, 0,5 \text{ km})$, $D_5 = (4,3 \text{ km}, 1,5 \text{ km})$, $D_6 = (4,8 \text{ km}, 1,0 \text{ km})$ e $D_7 = (5,3 \text{ km}, 2,9 \text{ km})$. Todos eventos de difração foram registrados em pares de fontes-receptores situados na superfície com o mesmo ponto médio, $x_m = 3,0 \text{ km}$.

O modelo exato e o resultado da estereotomografia para modelos isotrópicos são apresentados nas Figuras 4.24 e 4.25, respectivamente. A Figura 4.24 apresenta a trajetórias dos raios e a localização dos pontos difratores, para o modelo exato e a Figura 4.25 apresenta o modelo estimado através da estereotomografia para modelos isotrópicos e a trajetória dos raios através deste modelo. De acordo com a Figura 4.25, observa-se que a profundidade dos difratores está sistematicamente sobre-estimada. Esse fato decorre da velocidade de fase horizontal ser maior que a velocidade de fase vertical no modelo anisotrópico utilizado para gerar os dados, como pode ser comprovado através das Figuras 4.28, 4.35 e 4.41, que mostram as velocidades de fase vertical, horizontal e a 45° , respectivamente. O modelo de velocidade estimado através da inversão isotrópica é apresentado na Figura 4.29, de acordo com esta Figura, verifica-se que a velocidade estimada apresenta pouca variação lateral na região de maior cobertura e vai aumentando nas regiões de menor cobertura, esse resultado se assemelha ao modelo de velocidade de fase vertical exata, que apresenta pouca variação lateral. Os erros percentuais dessa velocidade estimada comparada com os modelos de velocidade exatos são apresentados nas Figuras 4.30, 4.36 e 4.42. De acordo com essas Figuras, verifica-se que a velocidade estimada apresenta melhor ajuste ao modelo de velocidade de fase vertical, quando considera-se apenas a região em torno do poço, onde a cobertura é maior. O pior ajuste ocorre com a velocidade de fase horizontal (erros da ordem de 20%, na região de maior cobertura).

A Figura 4.26 apresenta o modelo estimado através da estereotomografia para modelos elípticos e a trajetória dos raios através deste modelo. De acordo com esta Figura, observa-se que a profundidade dos pontos difratores é melhor estimada em relação aos resultados da estereotomografia isotrópica apresentados na Figura 4.25, ainda que os eventos de difração mais profundos não sejam bem focalizados. Atribuo esse resultado a falta de informação

sobre a vagarosidade vertical nas regiões do modelo afastadas do poço, o que está de acordo com a análise de resolução do capítulo anterior.

A velocidade vertical estimada pela estereotomografia elíptica e o erro percentual são apresentados nas Figuras 4.31 e 4.32. De acordo com essas Figuras verifica-se que na região de maior cobertura, região próxima ao poço onde se tem dados de difração e transmissão, o erro é inferior a 8% e é maior que 10% nas regiões onde não há cobertura.

A velocidade horizontal estimada pela estereotomografia elíptica e o erro percentual são apresentadas nas Figuras 4.37 e 4.38, verifica-se que a estimativa da velocidade horizontal apresenta erro inferior a 6% até a uma profundidade de 1,5 km, região bastante amostrada. À medida que a profundidade aumenta o erro também aumenta podendo ser superior a 20% em algumas regiões. A velocidade de fase com inclinação de 45^0 estimada pela estereotomografia elíptica e o erro percentual, são apresentadas nas Figuras 4.43 e 4.44, respectivamente. De acordo com essas Figuras têm-se uma boa estimativa da velocidade de fase a 45^0 , o erro não é superior a 12%. Pelos resultados acima verifica-se que na inversão através da estereotomografia para modelos elípticos a velocidade de fase vertical é melhor estimada e a velocidade de fase horizontal apresenta os maiores erros.

A Figura 4.27 apresenta o modelo estimado através da estereotomografia para modelos anelípticos e a trajetória dos raios através deste modelo. De acordo com esta Figura, observa-se que a profundidade dos pontos difratores é melhor estimada em relação aos resultados da estereotomografia isotrópica (Figura 4.25). Assim como, no caso elíptico (Figura 4.26), a localização dos dois pontos mais profundos e afastados do poço é a que apresenta maior erro.

A velocidade vertical estimada pela estereotomografia anelíptica e o erro percentual, são apresentadas nas Figuras 4.33 e 4.34, respectivamente. De acordo com estas Figuras verifica-se que o modelo de velocidade vertical estimado é muito próximo do meio homogêneo, a variação de velocidade é de 4 km/s para 5 km/s, enquanto que no modelo exato, a velocidade vertical varia de 3,5 km/s para 5,5 km/s. Tem-se ainda que, o erro mesmo na região próxima ao poço é maior que o erro para estimativa elíptica.

A velocidade horizontal estimada pela estereotomografia anelíptica e o erro percentual são apresentadas nas Figuras 4.39 e 4.40. Ainda que a estimativa apresente variação semelhante ao modelo exato na região mais bem amostrada a estimativa apresenta erro maior comparada com a inversão através da estereotomografia elíptica.

A velocidade com inclinação de 45^0 estimada pela estereotomografia anelítica e o erro percentual, são apresentados nas Figuras 4.45 e 4.46, respectivamente. De acordo com estas Figuras, têm-se a estimativa através da estereotomografia anelítica apresenta erro maior que a tomografia elíptica.

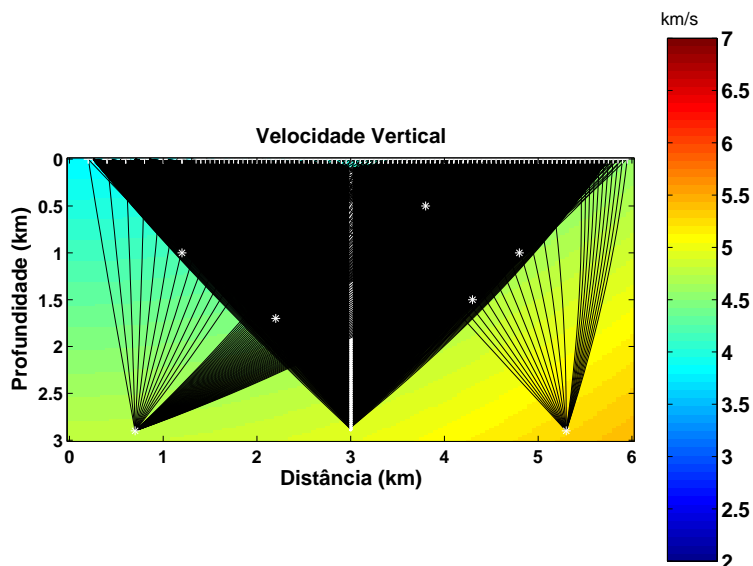


Figura 4.24: Modelo 2D com anisotropia elíptica utilizado para gerar os dados sintéticos para o segundo experimento numérico, com a trajetória dos raios para os eventos de difração e para os eventos de transmissão. A localização dos sete difratores está indicada pelo asterisco. A velocidade de fundo corresponde a velocidade de fase vertical.

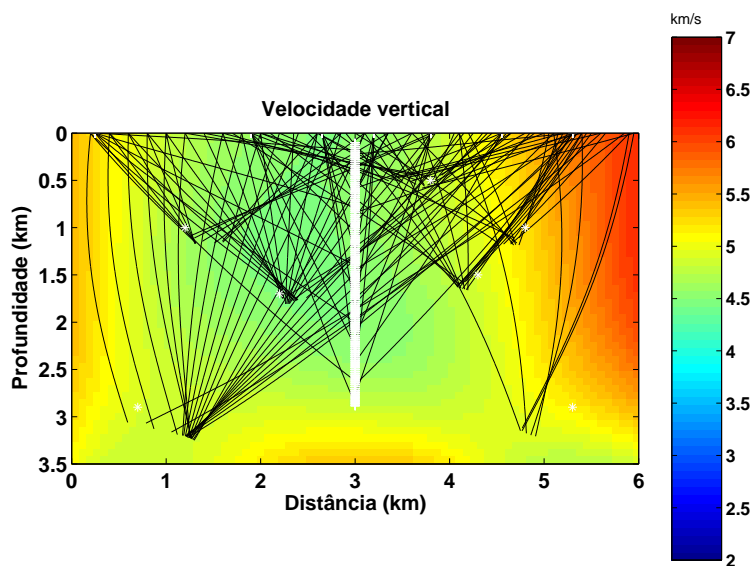


Figura 4.25: Modelo estimado pela estereotomografia isotrópica utilizando eventos de difração e de transmissão. Os asteriscos indicam a posição dos pontos difratores. O vínculo de focalização foi aplicado com $\lambda_4 = 0,01$. Observa-se que, apesar da adição de eventos de transmissão, a profundidade dos difratores continua sistematicamente sobre-estimada.

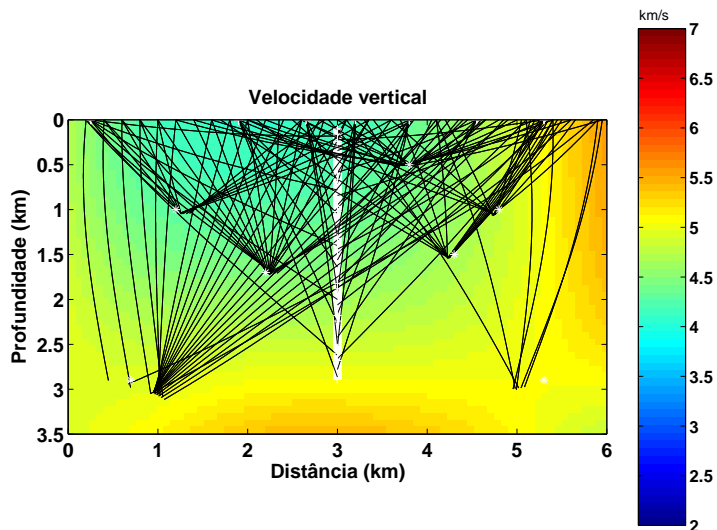


Figura 4.26: Modelo estimado pela estereotomografia elíptica utilizando os dados de eventos de difração e de transmissão gerados para o segundo experimento numérico. Os asteriscos indicam a posição dos pontos difratores. O vínculo de focalização foi aplicado com $\lambda_4 = 0,01$. Observa-se que a profundidade dos pontos difratores é melhor estimada em relação aos resultados da estereotomografia isotrópica apresentados na Figura 4.25. Os eventos de difração apresentam melhor focalização, em relação aos resultados pressupondo isotropia, exceto pelos dois difratores mais profundos.

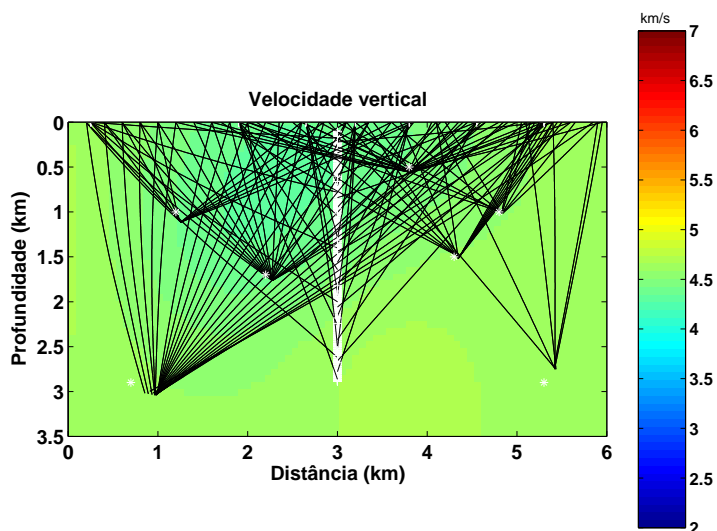


Figura 4.27: Modelo estimado pela estereotomografia anelítica utilizando os dados de eventos de difração e de transmissão gerados para o segundo experimento numérico. Os asteriscos indicam a posição dos pontos difratores. O vínculo de focalização foi aplicado com $\lambda_4 = 0,01$. Todos os eventos apresentam boa focalização. A localização dos dois pontos difratores mais profundos e mais afastados do poço apresentam maior erro, em relação aos demais.

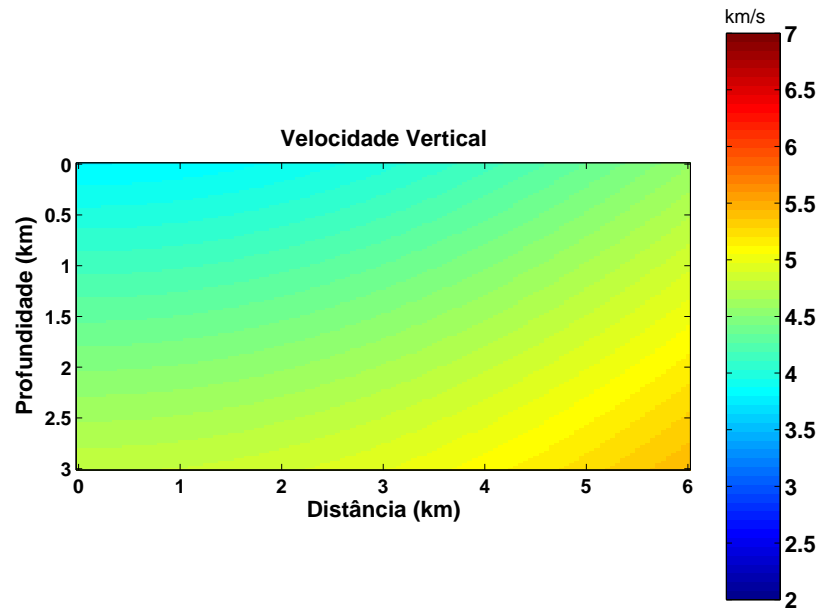


Figura 4.28: Velocidade de fase vertical exata para o modelo elíptico utilizado no segundo experimento numérico.

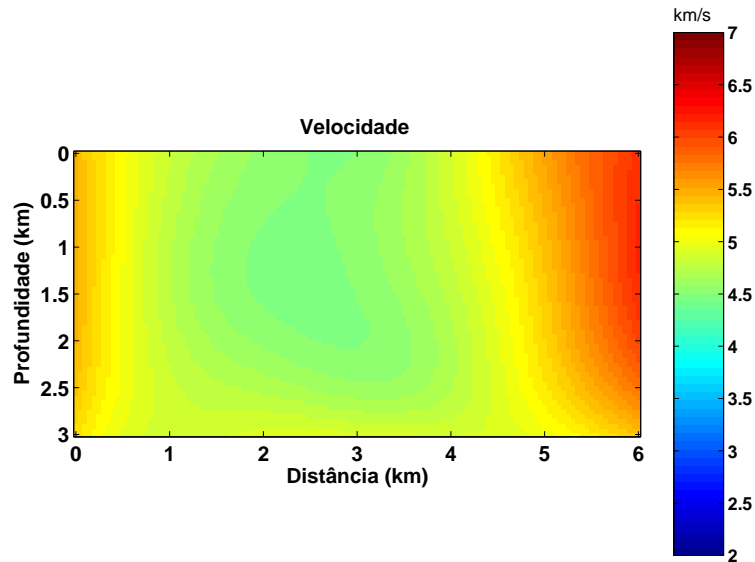


Figura 4.29: Velocidade de fase vertical estimada pela estereotomografia isotrópica a partir de dados de levantamento de superfície e de VSP com múltiplo afastamento.

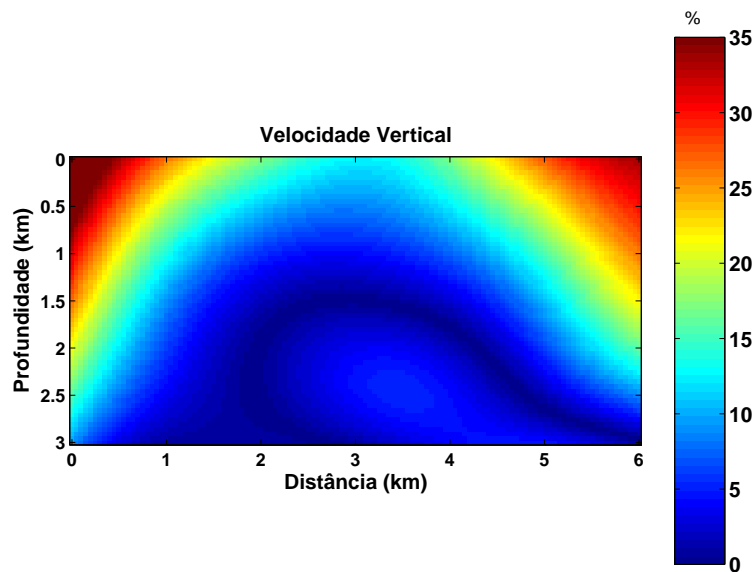


Figura 4.30: Erro percentual da estimativa do modelo de velocidade isotrópico comparado a velocidade vertical do modelo exato. O menor erro ocorre na região que apresenta maior cobertura, em torno do poço (2 km a 4 km na direção x e 0 km a 2,8 km na direção z), nessa região, o erro é de no máximo 10%, no entanto, o erro pode chegar até a ser superior à 35%, nas regiões onde não há cobertura.

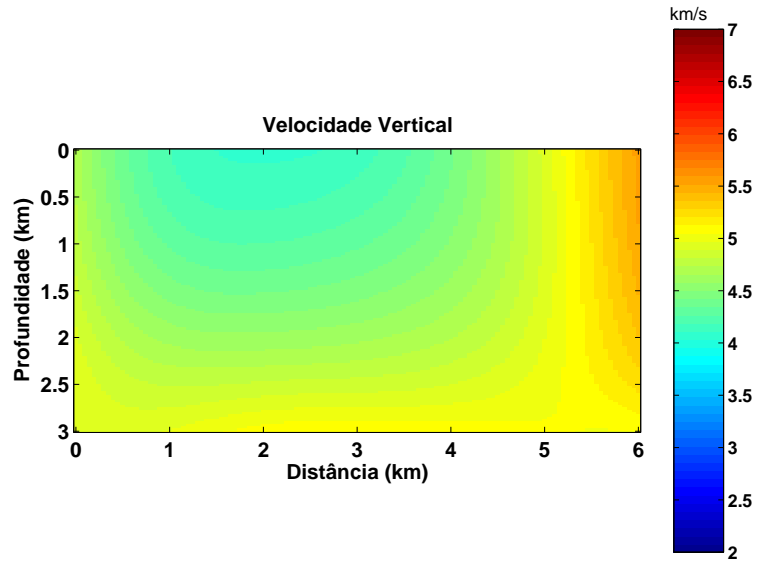


Figura 4.31: Velocidade de fase vertical estimada pela estereotomografia elíptica a partir de dados de levantamento de superfície e de VSP com múltiplo afastamento.

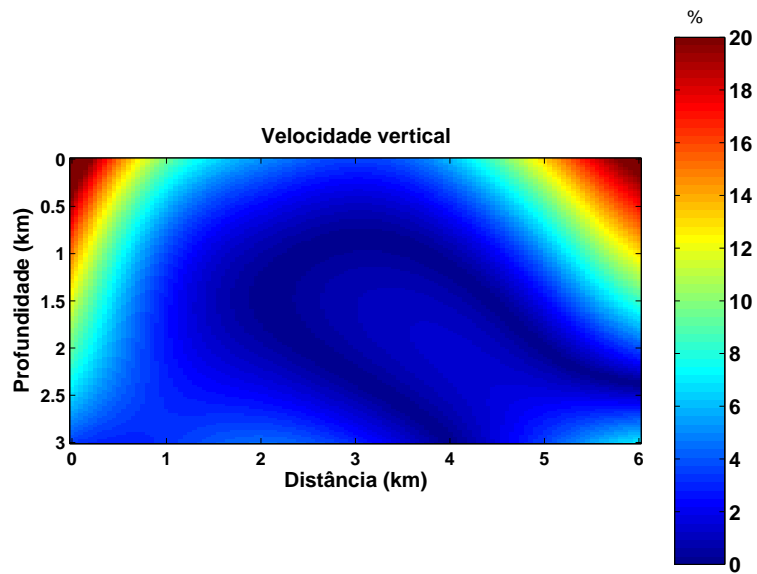


Figura 4.32: Erro percentual da estimativa do modelo de velocidade vertical considerando a estereotomografia elíptica. Na região de maior cobertura (próxima ao poço), verifica-se que o erro é inferior à 8%. Mas apresenta erro superior à 10% nas regiões onde não há cobertura.

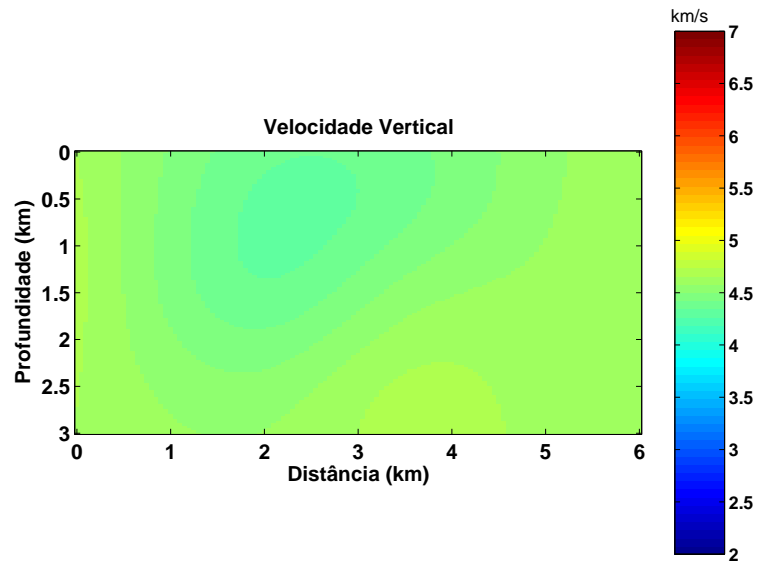


Figura 4.33: Velocidade de fase vertical estimada pela estereotomografia anelítica a partir de dados de levantamento de superfície e de VSP com múltiplo afastamento.

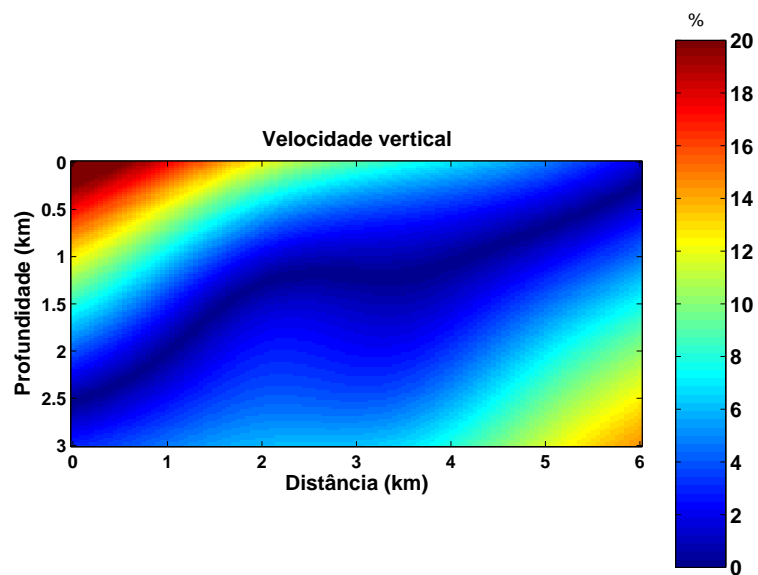


Figura 4.34: Erro percentual da estimativa do modelo de velocidade vertical considerando a estereotomografia anelítica. O erro mesmo na região próxima ao poço é maior que o erro para estimativa elíptica.

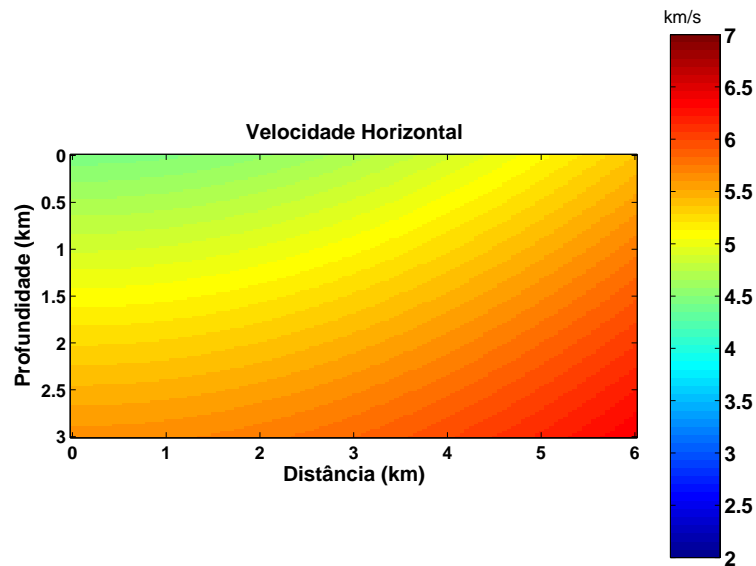


Figura 4.35: Velocidade de fase horizontal exata para o modelo elíptico utilizado no segundo experimento numérico.

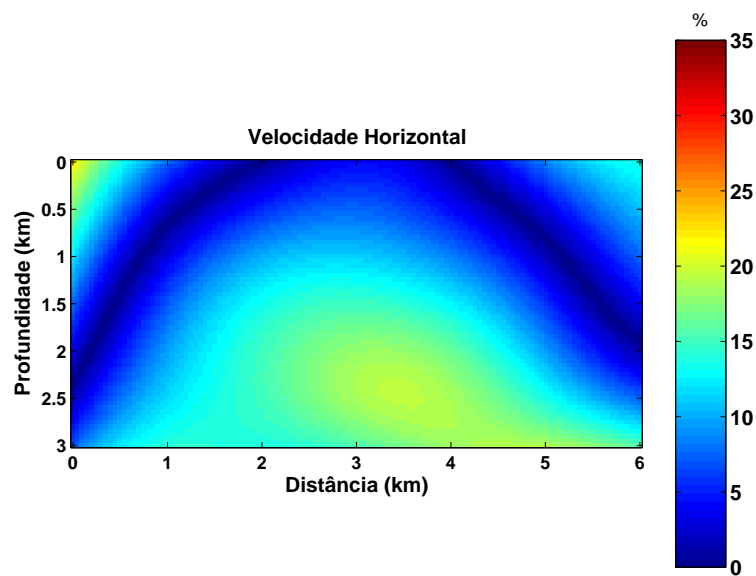


Figura 4.36: Erro percentual da estimativa do modelo de velocidade isotrópico comparado a velocidade horizontal do modelo exato. Em toda a região o erro é maior quando comparado com a Figura anterior apresenta erros da ordem de 20%.

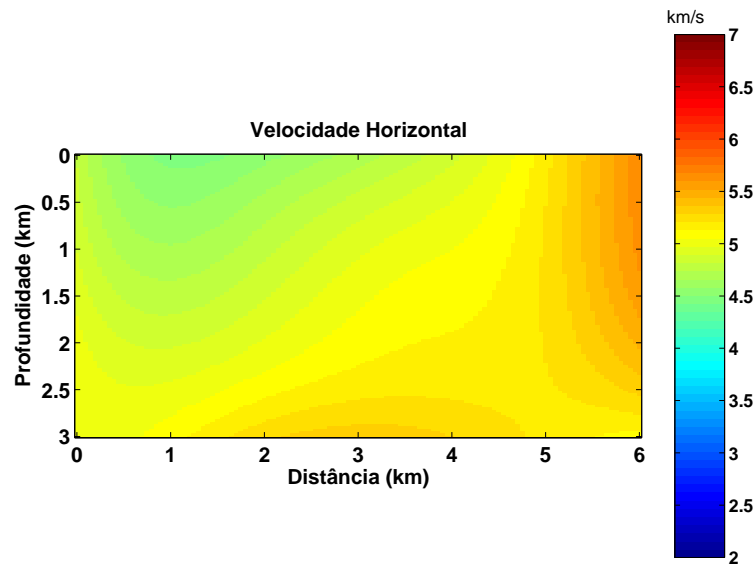


Figura 4.37: Velocidade de fase horizontal estimada pela estereotomografia elíptica a partir de dados de levantamento de superfície e de VSP com múltiplo afastamento.

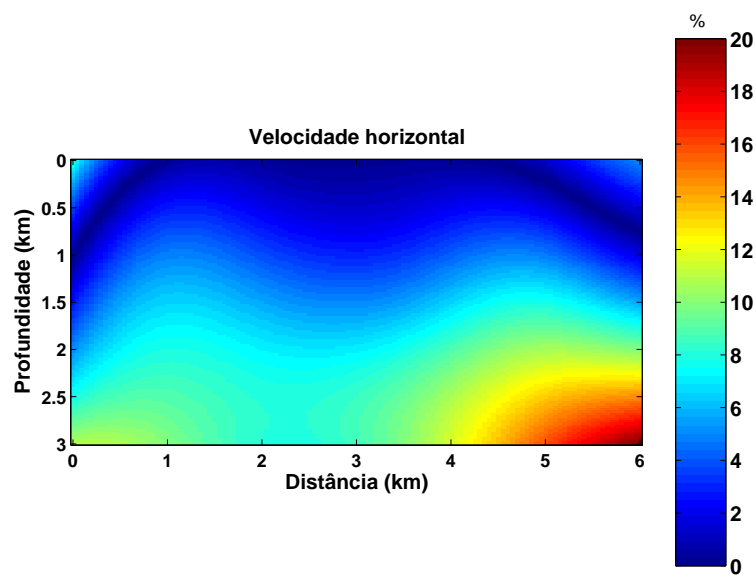


Figura 4.38: Erro percentual da estimativa do modelo de velocidade horizontal considerando a estereotomografia elíptica. A estimativa da velocidade horizontal apresenta erro inferior a 6% até a uma profundidade de 1,5 km, região bastante amostrada. A medida que a profundidade aumenta o erro também aumenta podendo ser superior a 20% em algumas regiões.

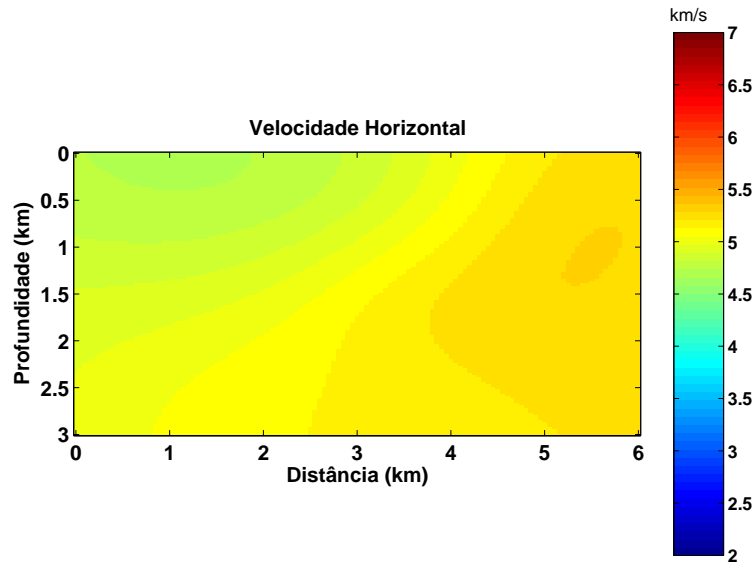


Figura 4.39: Velocidade de fase horizontal estimada pela estereotomografia analítica a partir de dados de levantamento de superfície e de VSP com múltiplo afastamento.

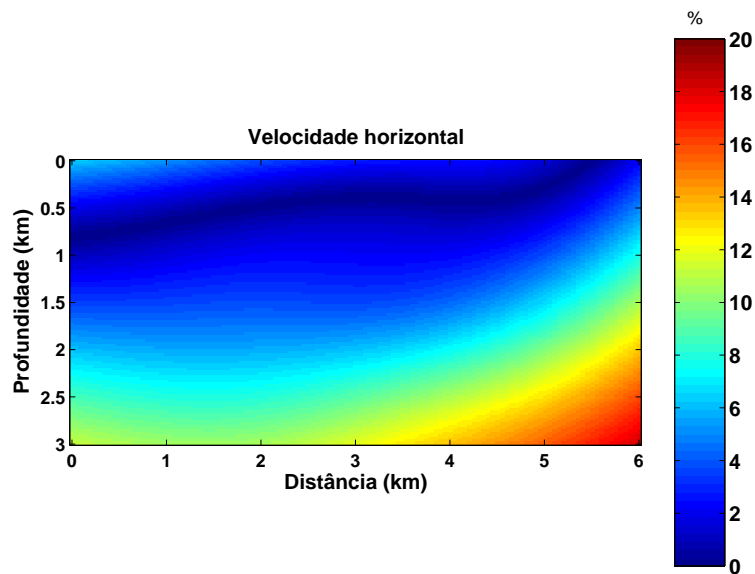


Figura 4.40: Erro percentual da estimativa do modelo de velocidade horizontal considerando a estereotomografia analítica. A estimativa da velocidade horizontal feita através da estereotomografia analítica não apresenta resultado melhor que a estimativa feita através da estereotomografia elíptica.

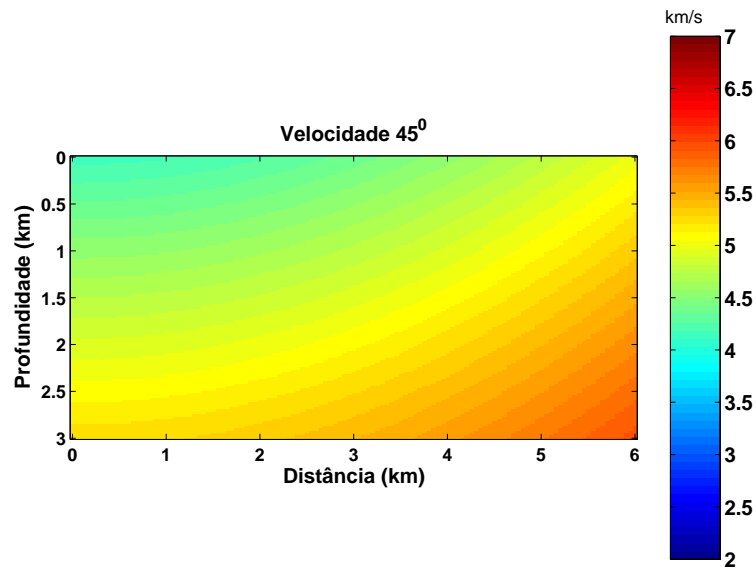


Figura 4.41: Velocidade de fase 45° exata para o modelo elíptico utilizado no segundo experimento numérico.

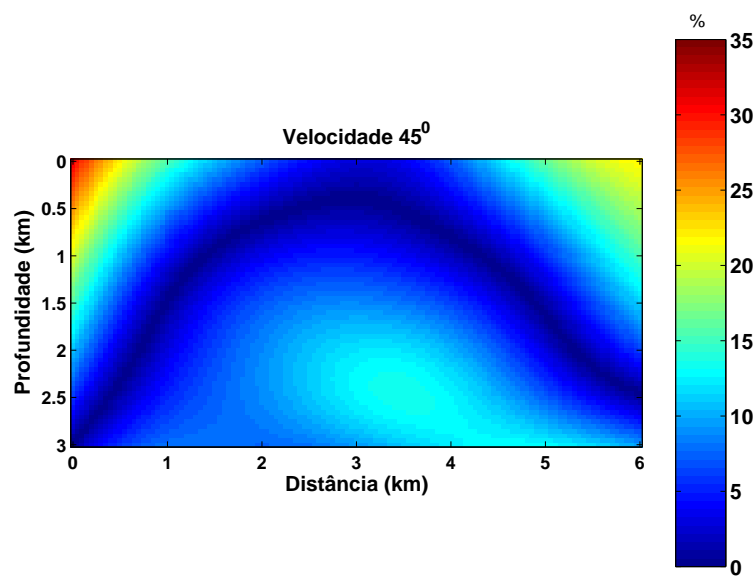


Figura 4.42: Erro percentual da estimativa do modelo de velocidade isotrópico comparado a velocidade de fase a 45° . O erro na região do poço é menor que 15%, ainda que apresente erro da ordem de 30% nas bordas superiores do modelo.

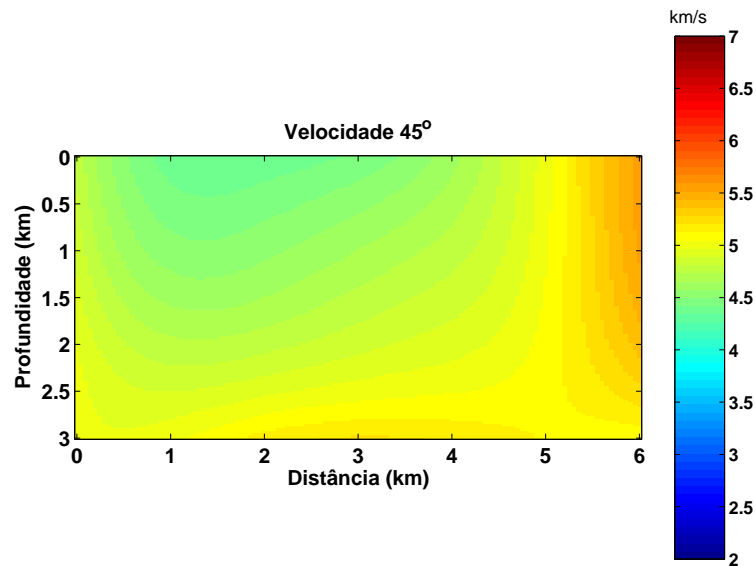


Figura 4.43: Velocidade de fase 45° estimada pela estereotomografia elíptica a partir de dados de levantamento de superfície e de VSP com múltiplo afastamento.

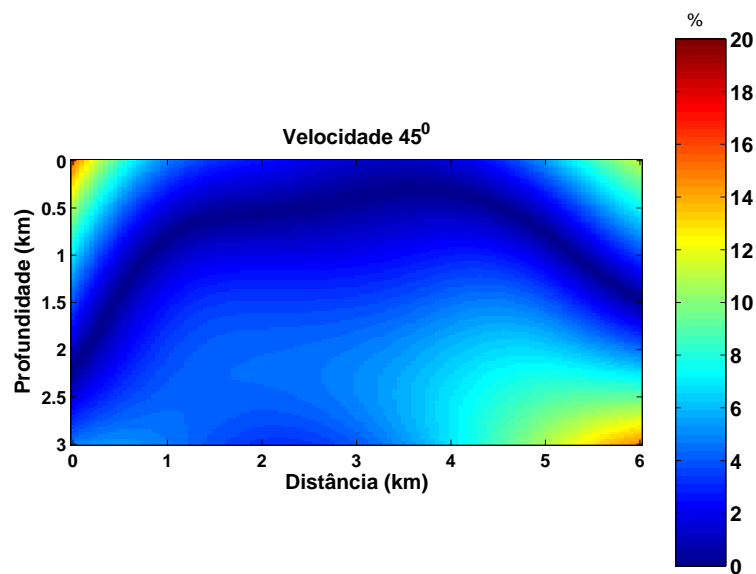


Figura 4.44: Erro percentual da estimativa do modelo de velocidade de fase que está a 45° considerando a estereotomografia elíptica. A estimativa da velocidade de fase que está a 45° apresenta erro de no máximo 12%.

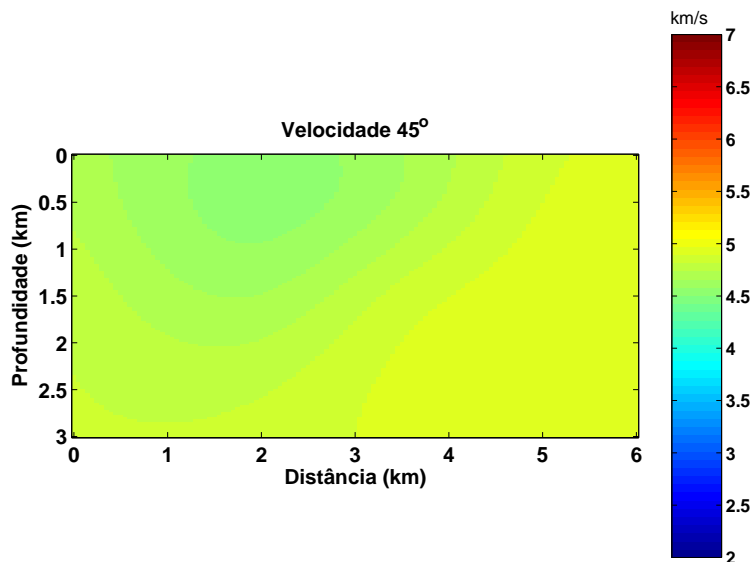


Figura 4.45: Velocidade de fase 45° estimada pela estereotomografia anelítica a partir de dados de levantamento de superfície e de VSP com múltiplo afastamento.

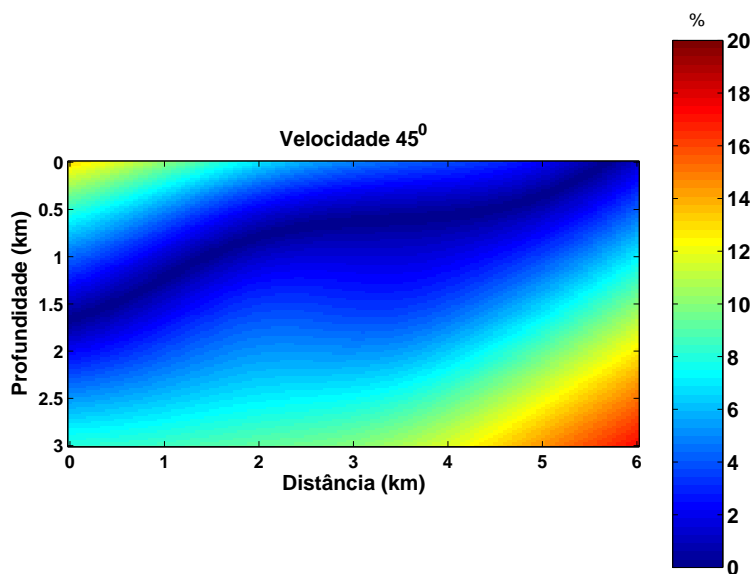


Figura 4.46: Erro percentual da estimativa do modelo de velocidade de fase a 45° considerando a estereotomografia anelítica.

De acordo com os resultados acima verifica-se que a velocidade de fase a 45° é melhor recuperada que a velocidade horizontal. A estimativa da velocidade de fase vertical apresenta os maiores erros. De uma maneira geral, as estimativas das três velocidades apresentam erros maiores nos extremos do modelo, acredita-se que isso deva-se a falta de cobertura nestes pontos, e mais, o modelo é melhor recuperado através da estereotomografia elíptica, ainda

que os pontos difratores não sejam bem focalizados, a velocidade vertical é a velocidade de fase melhor estimada, acredito que isso se deva ao fato de utilizar na inversão dados de transmissão. O resultado das três inversões apresentam maior erro nos extremos do modelo, onde a cobertura é menor e melhor ajuste na região próxima ao poço.

4.3 MODELO 3

No terceiro experimento numérico, o modelo é fracamente anisotrópico, com anisotropia anelítica, heterogeneidade nas duas dimensões e parâmetros de Thomsen: $\epsilon = 0,189$ $\delta = 0,128$ e $\gamma = 0,175$. Há sete pontos difratores situados na mesma posição do segundo experimento. Todos eventos de difração foram registrados em pares de fontes-receptores situados na superfície com o mesmo ponto médio comum, $x_m = 3,0km$. Os eventos de transmissão foram medidos para uma configuração VSP com múltiplo afastamento. A cabeça do poço está situada na coordenada 3,0 km. Em cada lado do poço, têm-se 3 fontes e os receptores estão regularmente distribuídos a cada 10 m ao longo do poço a partir de 100 m de profundidade.

O modelo exato e o resultado da estereotomografia para modelos isotrópicos são apresentados nas Figuras 4.47 e 4.48. A Figura 4.47 apresenta a trajetórias dos raios e a localização dos pontos difratores, para o modelo exato e a Figura 4.48 apresenta o modelo estimado através da estereotomografia para modelos isotrópicos e a trajetória dos raios através deste modelo.

De acordo com a Figura 4.48, apesar da adição de eventos de transmissão a profundidade dos difratores continua sistematicamente sobre-estimada e como mostra a Figura 4.53, o erro percentual da estimativa do modelo de velocidade isotrópico comparado a velocidade vertical do modelo exato é menor na região que apresenta maior cobertura, em torno do poço, nessa região, o erro é de no máximo 10%, no entanto, o erro pode chegar até a ser superior à 30%, nas regiões onde não há cobertura. Segundo a Figura 4.59 que apresenta o erro percentual, verifica-se que o erro é superior à 20% e a Figura 4.65 o erro chega a ser superior à 15%.

A velocidade vertical estimada pela estereotomografia elíptica e o erro percentual são apresentados nas Figuras 4.54 e 4.55. De acordo com essas Figuras na região de maior cobertura (próxima ao poço), verifica-se que o erro é inferior à 5%. Mas apresenta erro superior à 15% nas regiões onde não há cobertura nas bordas do modelo.

A velocidade horizontal estimada pela estereotomografia elíptica e o erro percentual são apresentadas nas Figuras 4.60 e 4.61, esta estimativa da velocidade horizontal apresenta erro inferior à 10% ,com exceção das regiões próximas a borda do modelo.

A velocidade de fase com inclinação de 45^0 pela estereotomografia elíptica e o erro percentual, são apresentadas nas Figuras 4.66 e 4.67, respectivamente. De acordo com essas

Figuras têm-se que a estimativa da velocidade de fase que está a 45^0 graus apresenta erro maior que 15% somente nas bordas do modelo.

A Figura 4.50 apresenta o modelo estimado através da estereotomografia para modelos anelípticos e a trajetória dos raios através deste modelo. De acordo com esta Figura, observa-se que todos os eventos são bem focalizados. Assim como, ocorreu com a inverão anelíptica do modelo 2, a localização dos dois pontos difratores mais profundos e afastados do poço apresentam maior erro.

A velocidade vertical estimada pela estereotomografia anelíptica e o erro percentual, são apresentadas nas Figuras 4.56 e 4.57, respectivamente. De acordo com estas Figuras verifica-se que o erro na estimativa de velocidade é superior a 15% na região que vai de 0,0 km x 2,0 km em x. A velocidade horizontal estimada pela estereotomografia anelíptica e o erro percentual são apresentadas nas Figuras 4.62 e 4.63. De acordo com essas Figuras o erro é da ordem de 10%, chegando a 15% em algumas regiões.

A velocidade com inclinação de 45^0 estimada pela estereotomografia anelíptica e o erro percentual, são apresentados nas Figuras 4.68 e 4.69, respectivamente. De acordo com estas figuras têm-se que o erro é de no máximo 15%.

Os resultados das estimativas das velocidades horizontal e à 45^0 não diferem de forma considerável do resultado para o caso elíptico.

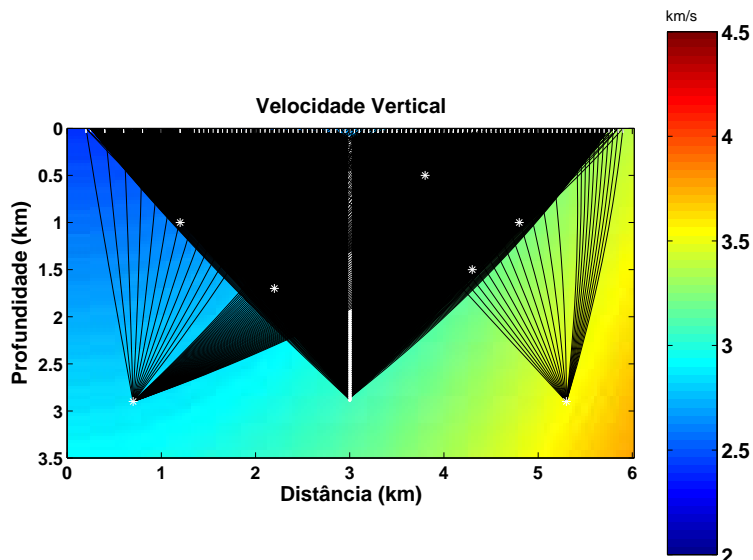


Figura 4.47: Modelo 2D com anisotropia TIV utilizado para gerar os dados sintéticos para o terceiro experimento numérico, com a trajetória dos raios para os eventos de difração e para os eventos de transmissão. A localização dos sete difratores está indicada pelo asterisco. A velocidade de fundo corresponde a velocidade de fase vertical.

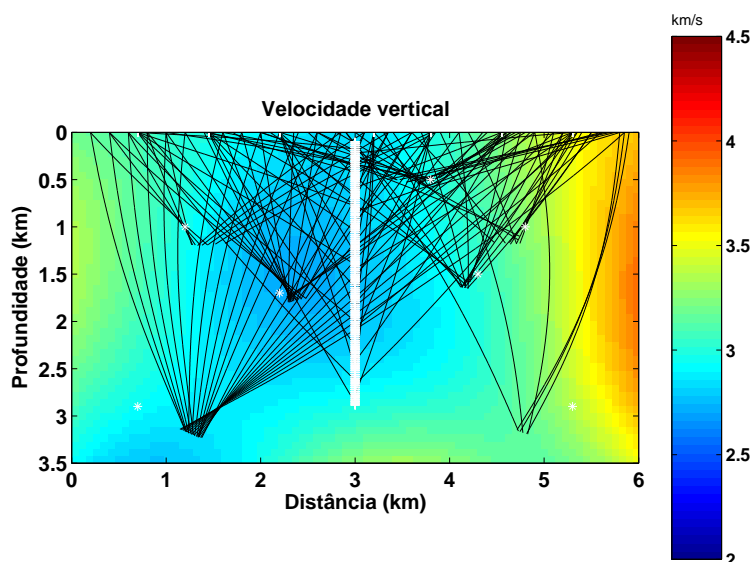


Figura 4.48: Modelo estimado pela estereotomografia isotrópica utilizando os dados de eventos de difração e de transmissão gerados para o terceiro experimento numérico. Os asteriscos indicam a posição dos pontos difratores. O vínculo de focalização foi aplicado com $\lambda_4 = 0,01$. Assim como, os resultados do segundo experimento apresentados na Figura 4.25, a profundidade dos difratores continua sistematicamente sobre-estimada.

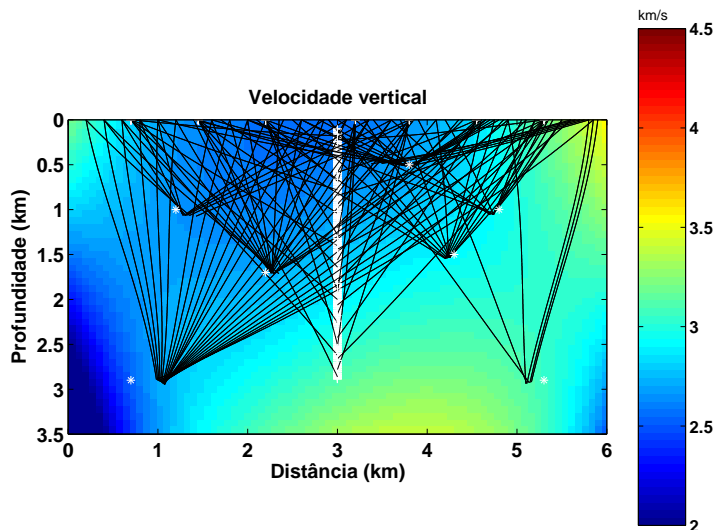


Figura 4.49: Modelo estimado pela estereotomografia elíptica utilizando os dados de eventos de difração e de transmissão gerados para o terceiro experimento numérico. Os asteriscos indicam a posição dos pontos difratores. O vínculo de focalização foi aplicado com $\lambda_4 = 0,01$. Observa-se que como ocorreu com a inversão elíptica no segundo experimento numérico, Figura 4.26, os eventos de difração apresentam boa focalização, em relação aos resultados, exceto pelos dois difratores mais profundos.

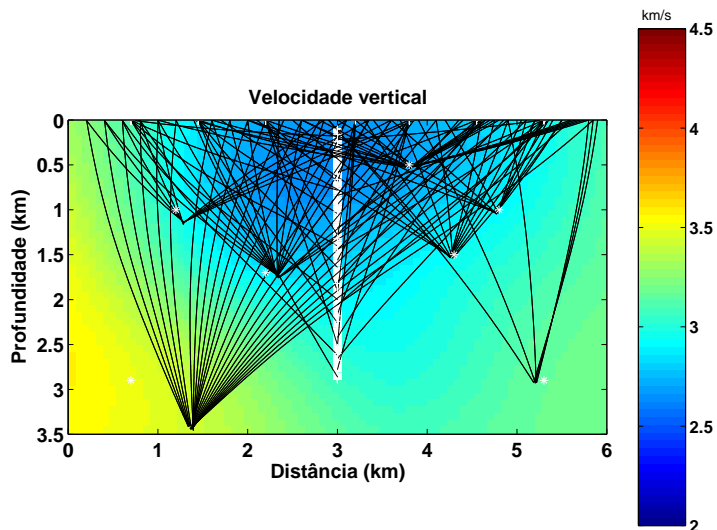


Figura 4.50: Modelo estimado pela estereotomografia anelíptica utilizando os dados de eventos de difração e transmissão gerados para o terceiro experimento numérico. Os asteriscos indicam a posição dos pontos difratores. O vínculo de focalização foi aplicado com $\lambda_4 = 0,01$. Todos os eventos apresentam boa focalização. Entretanto, a localização dos dois pontos difratores mais profundos e mais afastados do poço apresentam maior erro.

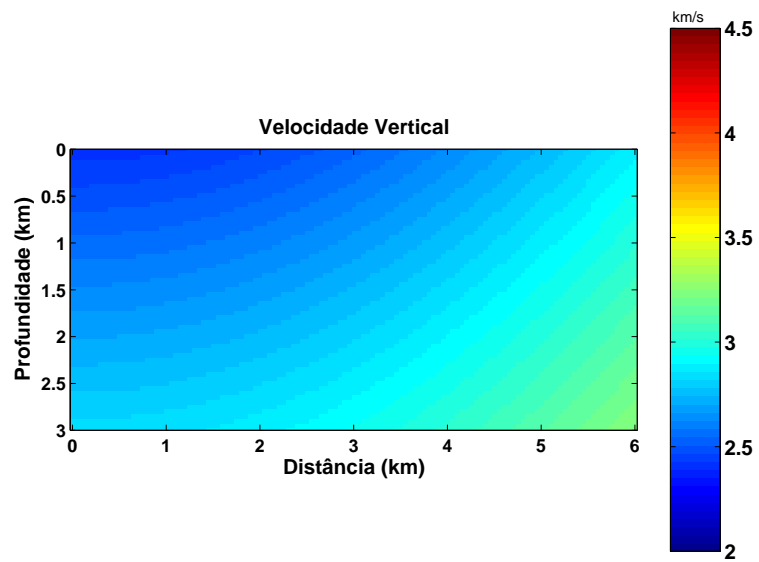


Figura 4.51: Velocidade de fase vertical exata para o modelo anelítico utilizado no terceiro experimento numérico.

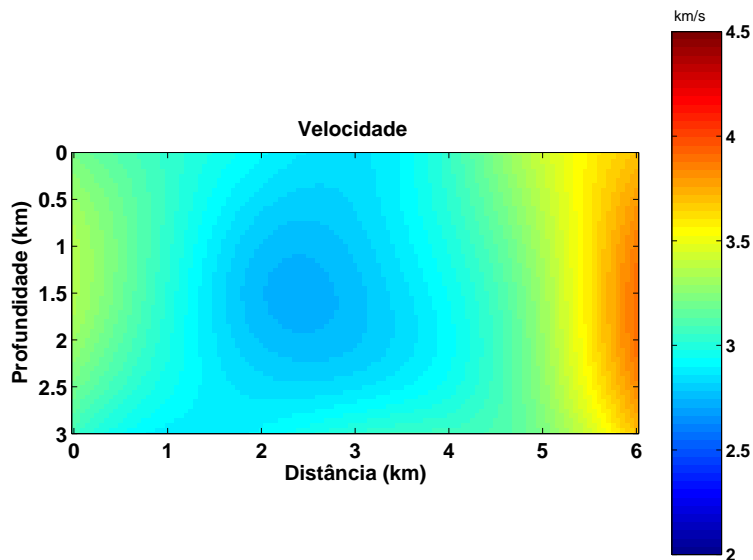


Figura 4.52: Velocidade de fase vertical estimada pela estereotomografia isotrópica a partir de dados de levantamento de superfície e de VSP com múltiplo afastamento.

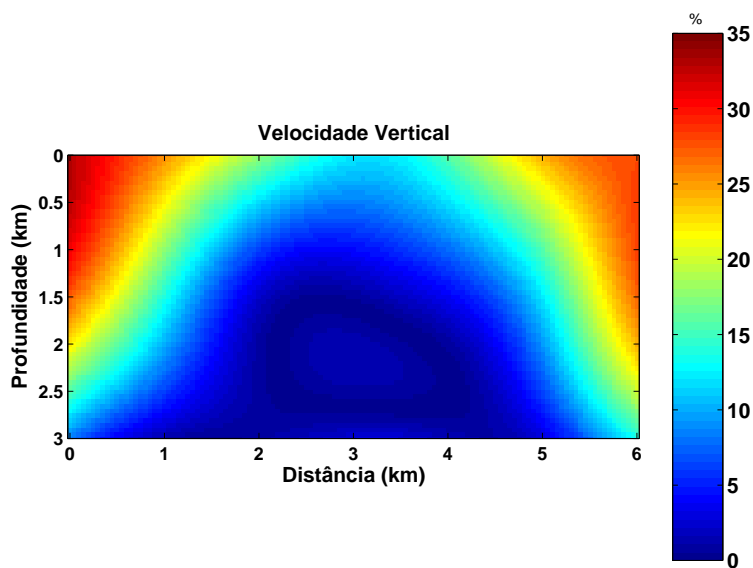


Figura 4.53: Erro percentual da estimativa do modelo de velocidade isotrópico comparado a velocidade vertical do modelo exato. O menor erro ocorre na região que apresenta maior cobertura, em torno do poço, nessa região, o erro é de no máximo 10%, no entanto, o erro pode chegar até a ser superior à 30%, nas regiões onde não há cobertura.

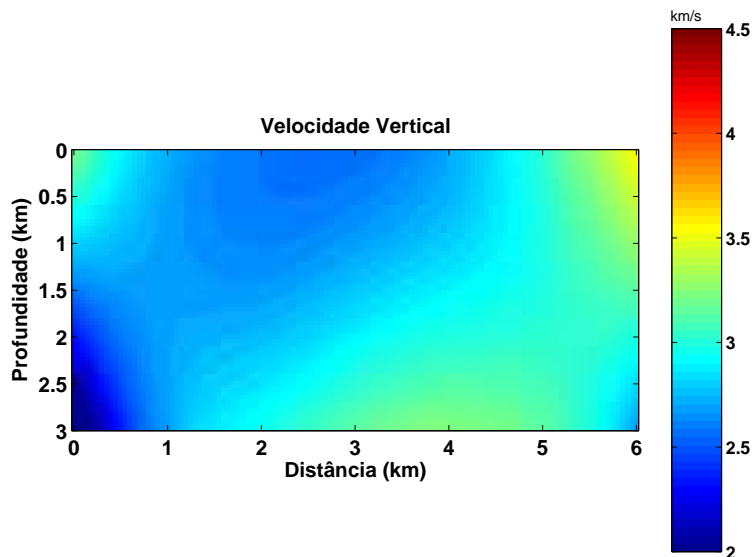


Figura 4.54: Velocidade fase vertical estimada pela estereotomografia elíptica a partir de dados de levantamento de superfície e de VSP com múltiplo afastamento.

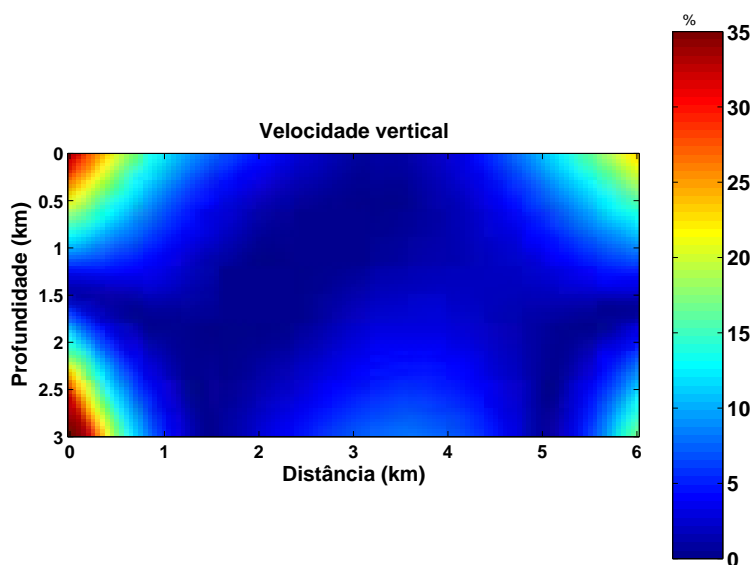


Figura 4.55: Erro percentual da estimativa do modelo de velocidade vertical considerando a estereotomografia elíptica. Na região de maior cobertura (próxima ao poço), verifica-se que o erro é inferior à 5%. Mas apresenta erro superior à 15% nas regiões onde não há cobertura.

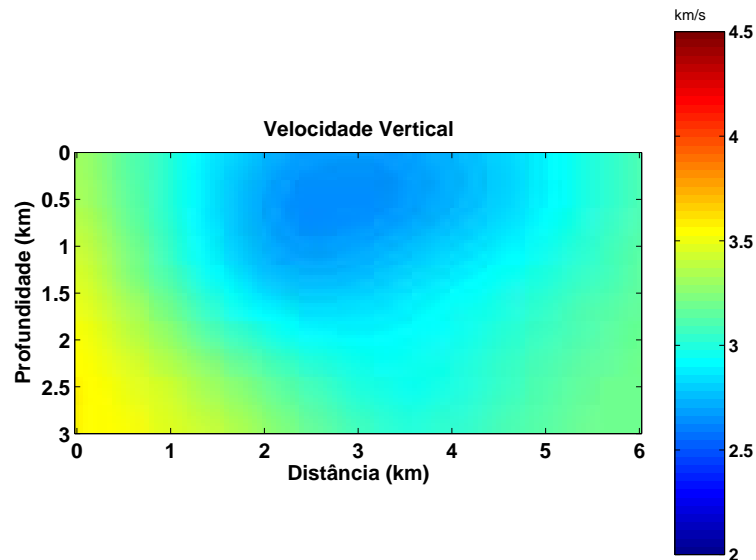


Figura 4.56: Velocidade fase vertical estimada pela estereotomografia anelítica a partir de dados de levantamento de superfície e VSP com múltiplo afastamento.

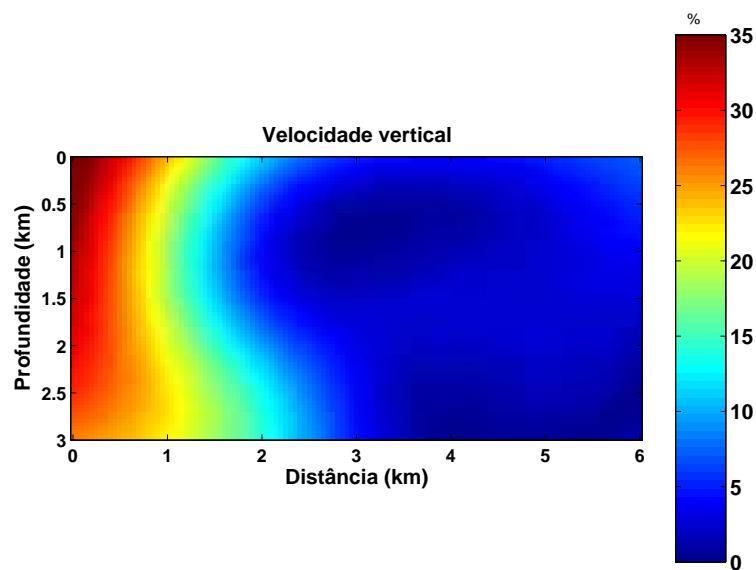


Figura 4.57: Erro percentual da estimativa do modelo de velocidade vertical considerando a estereotomografia anelítica. O erro na estimativa de velocidade é maior que o erro para estimativa elíptica.

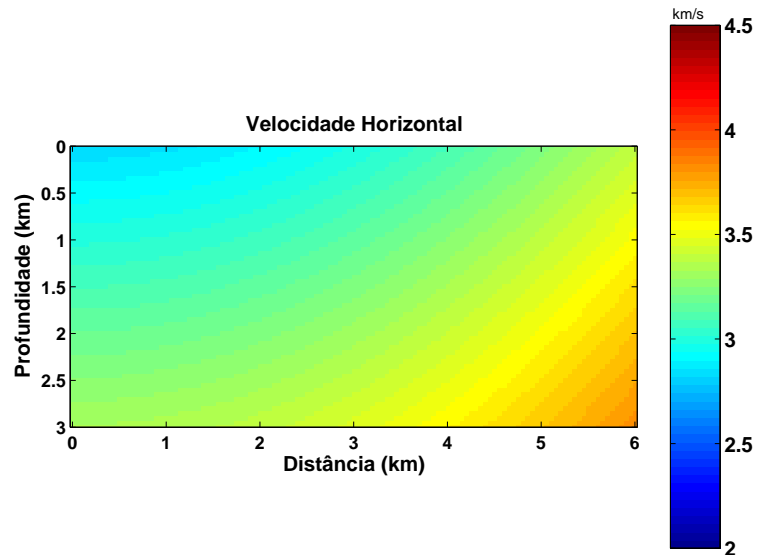


Figura 4.58: Velocidade de fase horizontal exata para o modelo anelítico utilizado no terceiro experimento numérico.

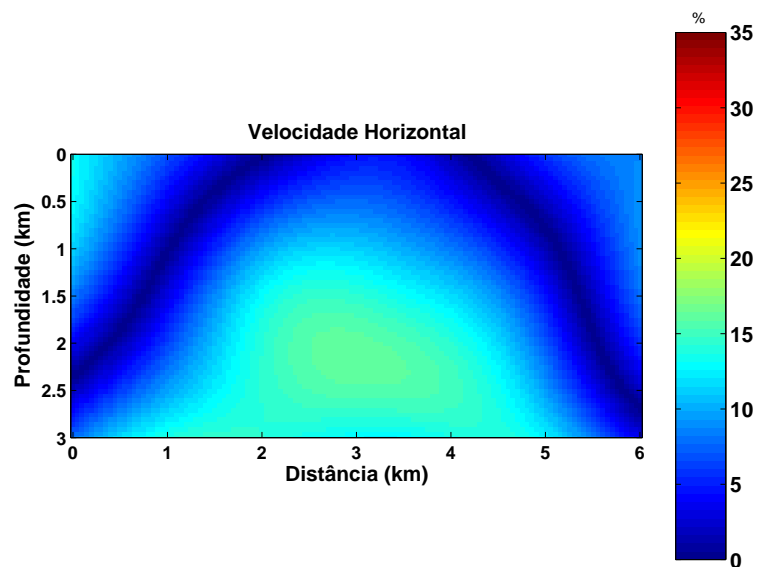


Figura 4.59: Erro percentual da estimativa do modelo de velocidade isotrópico comparado a velocidade horizontal do modelo exato. O erro na região mesmo onde tem o poço é maior 10%.

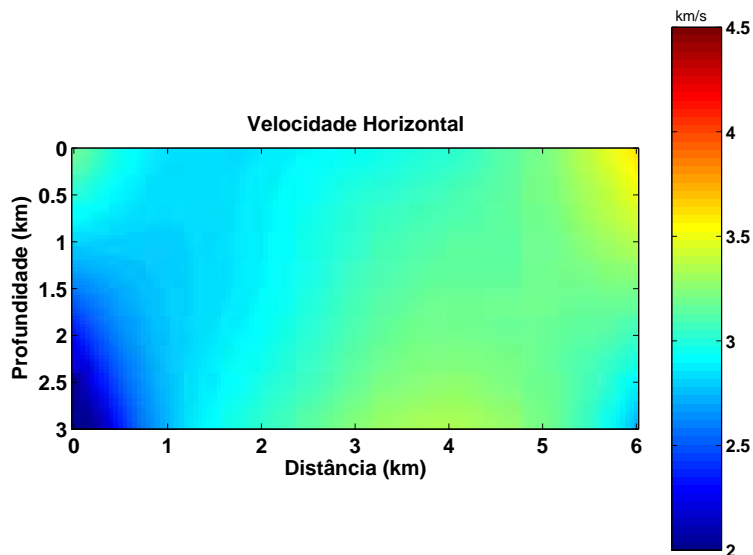


Figura 4.60: Velocidade de fase horizontal estimada pela estereotomografia elíptica a partir de dados de levantamento de superfície e VSP com múltiplo afastamento.

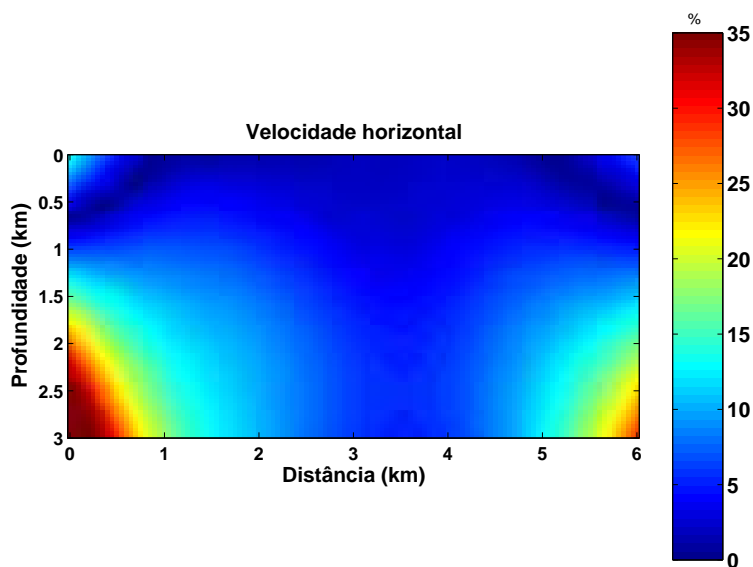


Figura 4.61: Erro percentual da estimativa do modelo de velocidade horizontal considerando a estereotomografia elíptica. A estimativa da velocidade horizontal apresenta erro inferior à 10%, com exceção das regiões próximas a borda do modelo.

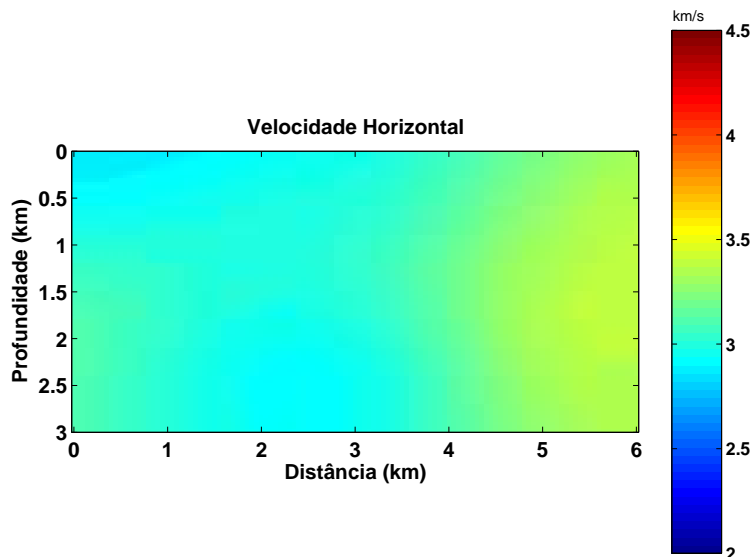


Figura 4.62: Velocidade de fase horizontal estimada pela estereotomografia anelítica a partir de dados de levantamento de superfície e de VSP com múltiplo afastamento.

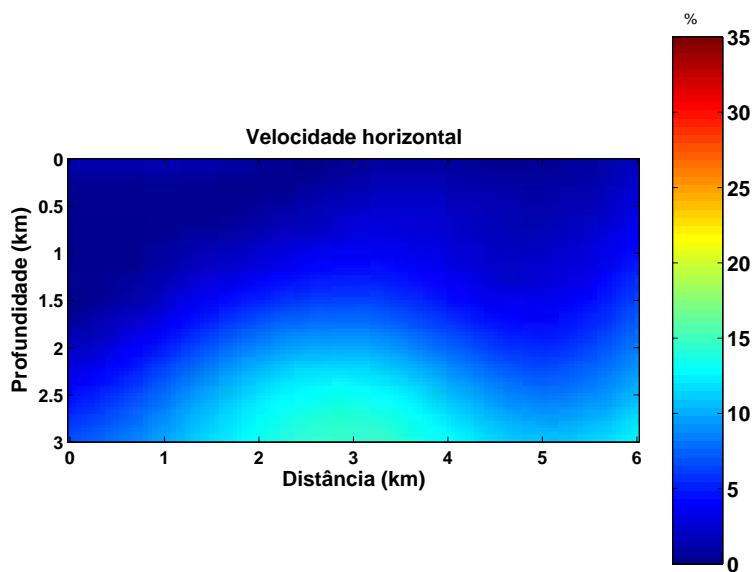


Figura 4.63: Erro percentual da estimativa do modelo de velocidade horizontal considerando a estereotomografia anelítica. A estimativa da velocidade horizontal feita através da estereotomografia anelítica apresenta resultado melhor que a estimativa feita através da estereotomografia elítica.

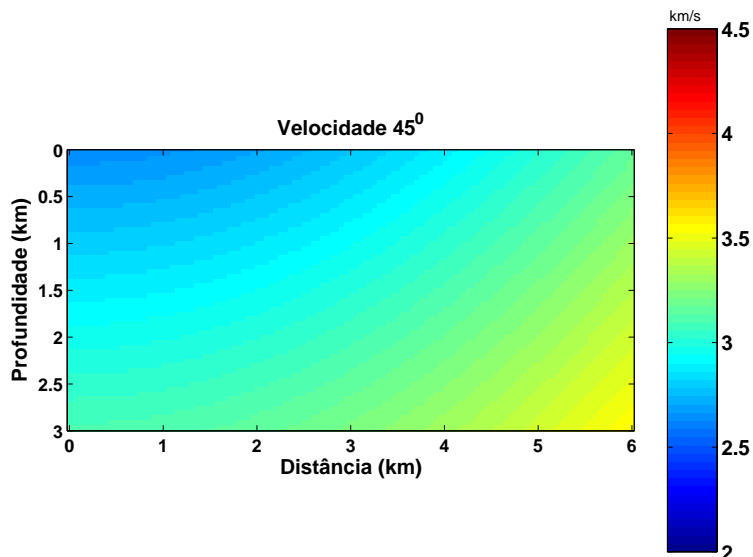


Figura 4.64: Velocidade de fase 45° exata para o modelo anelítico utilizado no terceiro experimento numérico

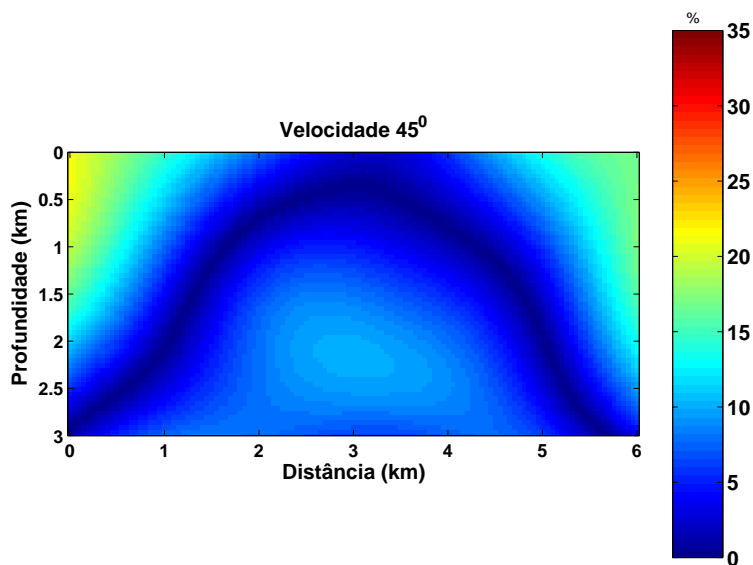


Figura 4.65: Erro percentual da estimativa do modelo de velocidade isotrópico comparado a velocidade de fase a 45° . O erro na região do poço é menor que 10%, ainda que apresente erro da ordem de 15% nas bordas superiores do modelo.

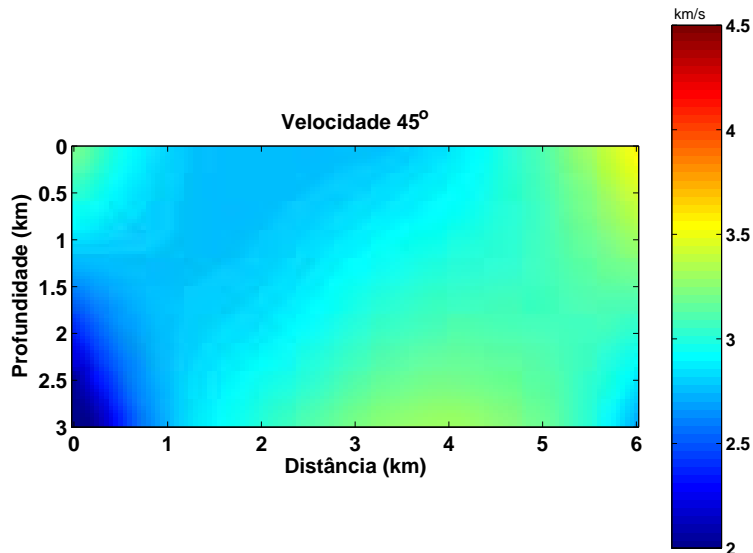


Figura 4.66: Velocidade de fase 45° estimada pela estereotomografia elíptica a partir de dados de levantamento de superfície e de VSP com múltiplo afastamento.

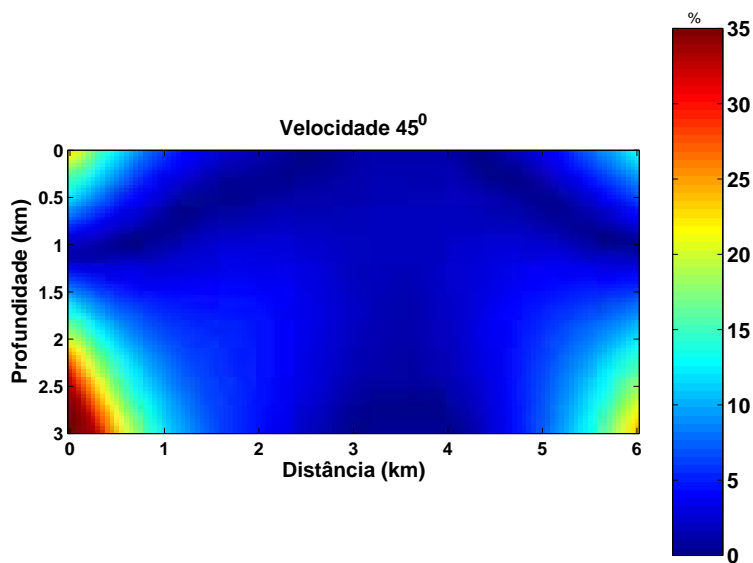


Figura 4.67: Erro percentual da estimativa do modelo de velocidade de fase que está a 45° considerando a estereotomografia elíptica. A estimativa da velocidade de fase que está a 45° apresenta erro maior que 15% somente nas bordas do modelo.

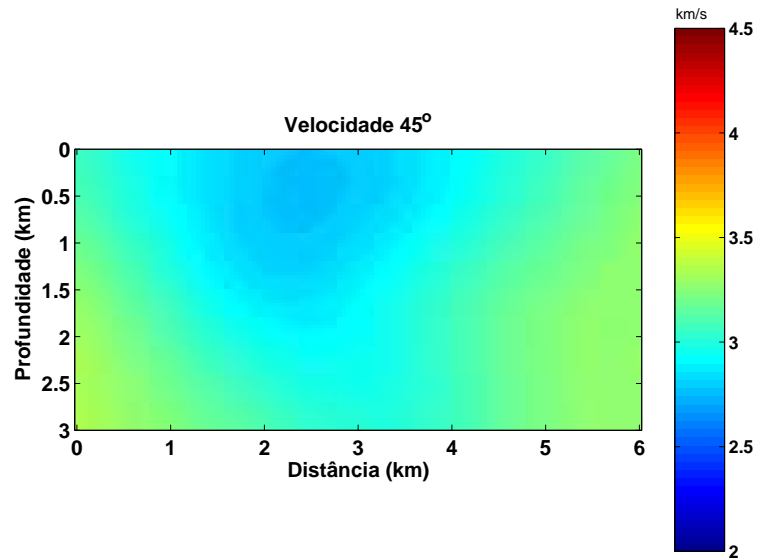


Figura 4.68: Velocidade de fase 45° estimada pela estereotomografia anelítica a partir de dados de levantamento de superfície e de VSP com múltiplo afastamento.

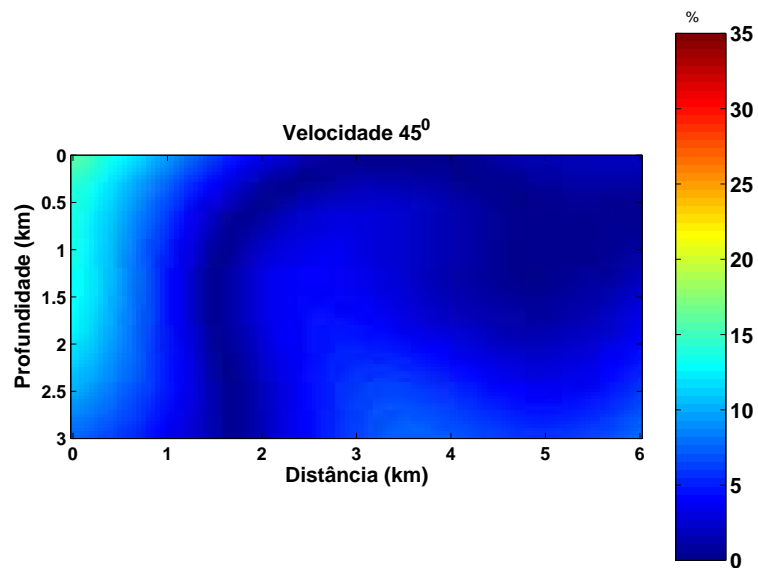


Figura 4.69: Erro percentual da estimativa do modelo de velocidade de fase a 45° considerando a estereotomografia anelítica. O erro é de no máximo 15%.

4.4 DISCURSÃO DOS RESULTADOS NUMÉRICOS

De acordo com os resultados apresentados acima, verifica-se que a estereotomografia, utilizando modelos anisotrópicos, melhora a focalização e a localização dos eventos em relação a estereotomografia utilizando modelos isotrópicos. A estereotomografia isotrópica deteriora a focalização e a localização dos eventos mesmo na presença de anisotropia moderada.

No segundo e no terceiro experimento, o padrão de heterogeneidade recuperado pela estereotomografia anisotrópica apresenta alguma semelhança com o modelo exato apenas na faixa angular coberta pelos raios de eventos de transmissão. Apesar deste resultado depender fortemente da escolha dos vínculos de regularização e do modelo inicial, ele também aponta para a importância da inclusão de eventos de transmissão para melhorar o condicionamento da inversão.

5 CONCLUSÃO

Nesta tese, estendi a estereotomografia para meios anisotrópicos arbitrários e implementei para duas aproximações da curva de vagarosidade de ondas qP , em 2D. A primeira, a aproximação elíptica, aproxima a curva de vagarosidade qP por uma elipse de orientação arbitrária. A segunda, a aproximação anelítica, descreve a vagarosidade qP por uma curva do quarto grau com orientação fixa em relação aos eixos coordenados.

A análise da matriz de resolução associada às derivadas de Fréchet, em meios homogêneos, para cada aproximação, permitiu caracterizar quais parâmetros do modelo não podem ser estimados pela estereotomografia, para diferentes geometrias de aquisição. Esta análise indicou a necessidade de eventos de transmissão para se estimar modelos anisotrópicos e contribuiu para formular um conjunto de restrições para regularizar o problema inverso.

Os algoritmos de estereotomografia para modelos anisotrópicos foram avaliados em dados sintéticos gerados em modelos heterogêneos em 1D e 2D. Estes experimentos numéricos indicaram que, na presença de anisotropia moderada, a estereotomografia utilizando modelos isotrópicos apresenta erros sistemáticos na localização dos eventos. Os resultados da estereotomografia utilizando modelos anisotrópicos melhorou a focalização e a localização dos eventos em relação à estereotomografia utilizando modelos isotrópicos, quando eventos de transmissão de VSP foram adicionados aos dados. Em 2D, os modelos de velocidade estimados pelas estereotomografia só apresentaram alguma semelhança com o modelo utilizado para gerar os dados na região onde há cobertura de raios de eventos de transmissão.

A estimativa de modelos anisotrópicos adequados para migração em profundidade, utilizando exclusivamente a estereotomografia, só pode ser cogitada combinando dados de levantamentos de superfície e dados de VSP com múltiplo afastamento. A integração destes conjuntos de dados na indústria, atualmente, se justifica em estudos de detalhe para caracterização de reservatórios e monitoramento da produção. Sempre que estas demandas justifi-

carem a aquisição dos dados, a formulação da estereotomografia apresentada neste trabalho pode ser utilizada para análise de velocidade na presença de anisotropia. Finalmente, a utilização de eventos associados a ondas convertidas e de medidas de polarização de ondas qP e qS , se dados multicomponentes estiverem disponíveis, pode ser imediatamente integrada à formulação da estereotomografia e contribuir para reduzir a ambiguidade das estimativas.

REFERÊNCIAS

- AKI, K.; RICHARDS, P. *Quantitative Seismology: Theory and Methods*. [S.l.]: Freeman, W. H. and Company, 1980.
- ARNOLD, V. I. *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. [S.l.]: Springer-Verlag, 1989. (Graduate Texts in Mathematics, v. 60).
- BILLETTE, F. et al. Practical aspects and applications of 2d stereotomography. *Geophysics*, v. 68, n. 3, p. 1008–1021, 2003.
- BILLETTE, F.; LAMBARÉ, G. Velocity macro-model estimation from seismic reflection data by stereotomography. *Geophys. J. Int.*, v. 135, p. 671–690, 1998.
- BOOR, C. de. *A Pratical Guide to Splines*. [S.l.]: Springer-Verlag, 1978. (Applied Mathematical Sciences, v. 27).
- CERVENY, V. *Seismic Ray Theory*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2001.
- CHAPMAN, C.; PRATT, R. G. Traveltime tomography in anisotropic media-i. theory. *Geophys. J. Int.*, v. 109, p. 1–19, 1992.
- DELLINGER, J.; MUIR, F.; KARRENBACH, M. Anelliptic approximations for ti media. *J. Seis. Expl.*, v. 2, p. 23–40, 1993.
- FARRA, V.; BÉGAT, S. L. Sensitivity of qp-wave traveltimes and polarization vectors to heterogeneity, anisotropy and interface. *Geophys. J. Int.*, v. 121, p. 371–384, 1995.
- FARRA, V.; MADARIAGA, R. Seismic waveform modeling in heterogeneous media by ray perturbation theory. *J. Geophys. Res.*, v. 92, p. 2697–2712, 1987.
- GAJEWSKI, D.; PSENCIK, I. Vertical seismic profile synthetics by dynamic ray tracing in laterally varying layered anisotropic structures. *J. Geophys. Res.*, v. 67, n. 1, p. 300–306, 1990.
- GOLDSTEIN, H. *Classical Mechanics*. 2nd. ed. [S.l.]: Addison Wesley series in physics, 1980.
- GOSSELET, A.; BÉGAT, S. L.; PETERSEN, S. Joint slope tomography of borehole transmitted and surface seismic data. *75th*, v. 24, 2005.
- LAWSON, C. L.; HANSON, R. J. *Solving Least Squares Problems*. [S.l.]: Prentice-Hall, Inc., 1974.

- LECOMTE, I. Finite difference calculation of first arrival traveltimes in anisotropic media. *Geophys. J. Int.*, v. 113, p. 318–342, 1993.
- MENKE, W. *Geophysical Data Analysis: Discrete Inverse Theory*. 2nd. ed. [S.l.]: Academic Press, 1989. (International Geophysics, v. 45).
- MENSCH, T.; FARRA, V. Computation of qp-wave rays, traveltimes and slowness vectors in orthorhombic media. *Geophys. J. Int.*, v. 138, p. 244–256, 1999.
- MUSGRAVE, M. J. P. *Crystal Acoustics*. [S.l.]: Holden-day, 1970.
- NOLET, G. (Ed.). *Seismic Tomography*. [S.l.]: Reidel, Dordrecht, the Netherlands, 1987.
- PAGE, C. C.; SAUNDERS, M. A. Lsq: Sparse linear equations and least squares problems. *ACM Transactions on Mathematical Software*, v. 8, n. 2, p. 195–209, 1982.
- PRESS, W. et al. *Numerical Recipes in FORTRAN 77: The Art of Scientific Computing*. [S.l.]: Cambridge University Press, 1986.
- SCHOENBERG, M.; DEHOOP, M. V. Approximate dispersion relations for qp-qsv-waves in transversely isotropic media. *Geophysics*, v. 65, n. 3, p. 919–933, 2000.
- THOMSEN, L. Weak elastic anisotropy. *Geophysics*, v. 51, n. 10, p. 1954–1966, 1986.

APÊNDICES

APÊNDICE A – PROPAGADORES

A.1 Matriz \mathbf{A} constante

Considere o sistema de equações diferenciais lineares da forma

$$\frac{d\mathbf{y}}{d\tau} = \mathbf{A}\mathbf{y} . \quad (\text{A.1})$$

Uma aproximação linear para a solução de (A.1) é

$$\mathbf{y}(\tau + \Delta\tau) = \mathbf{y}(\tau) + \Delta\tau\mathbf{A}\mathbf{y}(\tau) + \mathcal{O}(\Delta\tau^2)$$

ou ainda,

$$\mathbf{y}(\tau + \Delta\tau) = (\mathbf{I} + \Delta\tau\mathbf{A})\mathbf{y}(\tau) + \mathcal{O}(\Delta\tau^2) .$$

Em um intervalo finito, $\tau - \tau_0$, a aproximação para a solução de (A.1) pode ser representada na forma

$$\mathbf{y}(\tau) = \left[\prod_{i=1}^N (\mathbf{I} + \Delta\tau\mathbf{A}) \right] \mathbf{y}(\tau_0) + \mathcal{O}((\Delta\tau)^2) ,$$

em que $\Delta\tau = (\tau - \tau_0)/N$. Esta equação pode ainda ser escrita na forma

$$\mathbf{y}(\tau) = \left[\left(\mathbf{I} + \frac{(\tau - \tau_0)}{N}\mathbf{A} \right) \right]^N \mathbf{y}(\tau_0) + \mathcal{O}((\Delta\tau)^2) .$$

Tomando o limite quando $N \rightarrow \infty$, obtém-se

$$\mathbf{y}(\tau) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\left(\mathbf{I} + \frac{(\tau - \tau_0)}{N}\mathbf{A} \right) \right]^N \mathbf{y}(\tau_0) = e^{\mathbf{A}(\tau - \tau_0)}\mathbf{y}(\tau_0) . \quad (\text{A.2})$$

A matriz

$$\mathbf{P}(\tau, \tau_0) = e^{\mathbf{A}(\tau - \tau_0)} \quad (\text{A.3})$$

é denominada de propagador e satisfaz

$$\frac{d\mathbf{P}}{d\tau} = \mathbf{A}\mathbf{P} , \quad (\text{A.4})$$

com condição inicial $\mathbf{P}(\tau_0, \tau_0) = \mathbf{I}$. Portanto, a solução da equação homogênea pode ser representada na forma

$$\mathbf{y}(\tau) = \mathbf{P}(\tau, \tau_0) \mathbf{y}(\tau_0) . \quad (\text{A.5})$$

Algumas propriedades de $\mathbf{P}(\tau, \tau_0)$ que decorrem da sua definição

$$1. \mathbf{P}(\tau, \tau_0) = \mathbf{P}(\tau, \xi) \mathbf{P}(\xi, \tau_0)$$

$$2. \mathbf{P}(\tau_0, \tau) = \mathbf{P}^{-1}(\tau, \tau_0) = e^{-\mathbf{A}(\tau-\tau_0)}$$

Uma vez calculado o propagador, a solução para a equação não homogênea

$$\frac{d\mathbf{y}}{d\tau} = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{f} \quad (\text{A.6})$$

pode ser representada na forma

$$\mathbf{y}(\tau) = \mathbf{P}(\tau, \tau_0)\mathbf{y}_0 + \int_{\tau_0}^{\tau} \mathbf{P}(\tau, \xi)\mathbf{f}(\xi)d\xi . \quad (\text{A.7})$$

Verifica-se a identidade

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{y}(\tau)}{d\tau} &= \frac{d\mathbf{P}(\tau, \tau_0)}{d\tau}\mathbf{y}_0 + \frac{d}{d\tau} \int_{\tau_0}^{\tau} \mathbf{P}(\tau, \xi)\mathbf{f}(\xi)d\xi \\ &= \mathbf{A}(\tau)\mathbf{P}(\tau, \tau_0)\mathbf{y}_0 + \mathbf{P}(\tau, \tau)\mathbf{f}(\tau) + \int_{\tau_0}^{\tau} \frac{d\mathbf{P}(\tau, \xi)}{d\tau}\mathbf{f}(\xi)d\xi \\ &= \mathbf{A}(\tau)\mathbf{P}(\tau, \tau_0)\mathbf{y}_0 + \mathbf{P}(\tau, \tau)\mathbf{f}(\tau) + \mathbf{A}(\tau) \int_{\tau_0}^{\tau} \mathbf{P}(\tau, \xi)\mathbf{f}(\xi)d\xi \\ &= \mathbf{A}(\tau) \left[\mathbf{P}(\tau, \tau_0)\mathbf{y}_0 + \int_{\tau_0}^{\tau} \mathbf{P}(\tau, \xi)\mathbf{f}(\xi)d\xi \right] + \mathbf{f}(\tau) \\ \frac{d\mathbf{y}(\tau)}{d\tau} &= \mathbf{A}\mathbf{y}(\tau) + \mathbf{f}(\tau) . \end{aligned}$$

Aqui utilizou-se a regra de Leibniz para derivação e a observação que $\mathbf{P}(\tau, \tau) = \mathbf{I}$. Para implementação é mais conveniente reescrever (A.1) observando que

$$\mathbf{y}(\tau) = \mathbf{P}(\tau, \tau_0)\mathbf{y}_0 + \mathbf{P}(\tau, \tau_0) \int_{\tau_0}^{\tau} \mathbf{P}(\tau_0, \xi)\mathbf{f}(\xi)d\xi .$$

Finalmente, pela a propriedade 2 de propagadores, obtém-se

$$\mathbf{y}(\tau) = \mathbf{P}(\tau, \tau_0) \left[\mathbf{y}_0 + \int_{\tau_0}^{\tau} \mathbf{P}^{-1}(\xi, \tau_0) \mathbf{f}(\xi) d\xi \right] . \quad (\text{A.8})$$

A.2 Sistemas em que $\mathbf{A}=\mathbf{A}(\tau)$

Para a equação

$$\frac{d\mathbf{y}}{d\tau} = \mathbf{A}(\tau)\mathbf{y} + \mathbf{f} , \quad (\text{A.9})$$

em que a matriz $\mathbf{A}(\tau)$ não é constante, a definição do propagador

$$\frac{d\mathbf{P}}{d\tau} = \mathbf{A}(\tau)\mathbf{P} , \quad (\text{A.10})$$

com condição inicial $\mathbf{P}(\tau_0, \tau_0) = \mathbf{I}$ se mantém. Neste caso uma representação para o propagador $\mathbf{P}(\tau, \tau_0)$ pode ser construída particionando o intervalo (τ, τ_0) em N intervalos de medida $\Delta\tau = (\tau - \tau_0)/N$. Para o i -ésimo intervalo uma aproximação linear para o propagador é

$$\mathbf{y}(\tau_i + \Delta\tau) = (\mathbf{I} + \Delta\tau\mathbf{A}(\tau_i))\mathbf{y}(\tau) + \mathcal{O}(\Delta\tau^2) \quad i \in \{0, 1, \dots, N\} .$$

O operador $(\mathbf{I} + \Delta\tau\mathbf{A}(\tau_i))$ é chamado de gerador de transformações infinitesimais.

A aproximação para o propagador em um intervalo (τ, τ_0) , pode ser construída a partir de transformações infinitesimais na forma

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(\tau) &= \left[\prod_{i=0}^{N-1} (\mathbf{I} + \Delta\tau\mathbf{A}(\tau_i)) \right] \mathbf{y}(\tau_0) + \mathcal{O}((\Delta\tau)^2) , \\ \mathbf{y}(\tau) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \left[\prod_{i=0}^{N-1} \left(\mathbf{I} + \frac{\tau - \tau_0}{N} \mathbf{A}(\tau_i) \right) \right] \right\} \mathbf{y}(\tau_0) , \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

ou alternativamente,

$$\mathbf{y}(\tau) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \left[\prod_{i=0}^{N-1} e^{\mathbf{A}(\tau_i) \frac{(\tau - \tau_0)}{N}} \right] \right\} \mathbf{y}(\tau_0) . \quad (\text{A.12})$$

Estas representações para o propagador permitem imaginar o propagador para (A.10) como uma sucessão de propagadores para o caso homogêneo, portanto as propriedades do propagador deduzidas para o caso homogêneo se mantém para o propagador de (A.9).

A.3 Aplicação ao sistema hamiltoniano

Um sistema de equações diferenciais ordinárias hamiltoniano obedece

$$\frac{d\mathbf{w}}{d\tau} = \mathbf{J}\nabla_{\mathbf{w}}\mathcal{H} + \mathbf{f} . \quad (\text{A.13})$$

em que

$$\mathbf{w} \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{s} \end{bmatrix}$$

e $\mathcal{H}(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = 0$. Aqui \mathbf{x} é a posição e \mathbf{s} o vetor vagarosidade em \mathbf{x} . A matriz \mathbf{J} de ordem $2n$ é definida em termos da matriz identidade de ordem n por

$$\mathbf{J} \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} .$$

Ela possui as seguintes propriedades

$$1. \mathbf{J}^T \mathbf{J} = \mathbf{J} \mathbf{J}^T = \mathbf{I}$$

$$2. \mathbf{J}^{-1} = \mathbf{J}^T$$

$$3. \mathbf{J} \mathbf{J} = -\mathbf{I}$$

$$4. |\mathbf{J}| = +1$$

A.3.1 Sistema hamiltoniano paraxial

O sistema paraxial determina o comportamento de perturbações do sistema hamiltoniano em torno de uma trajetória de referência $\mathbf{w}(\tau)$

$$\frac{d(\mathbf{w} + \Delta\mathbf{w})}{d\tau} = \mathbf{J}\nabla_{\mathbf{w}} \left(\mathcal{H} + \nabla_{\mathbf{w}}^T \mathcal{H} \Delta\mathbf{w} \right) + \mathcal{O} \left((\Delta\tau)^2 \right) .$$

Considerando-se apenas aos termos de primeira ordem e substituindo $\Delta\mathbf{w}$ por $\delta\mathbf{w}$ obtém-se o sistema de equações paraxiais (CERVENY, 2001)

$$\frac{d\delta\mathbf{w}}{d\tau} = \mathbf{J}\nabla_{\mathbf{w}} \nabla_{\mathbf{w}}^T \mathcal{H} \delta\mathbf{w} , \quad (\text{A.14})$$

que tem a forma

$$\frac{d\mathbf{y}}{d\tau} = \mathbf{A}(\tau) \mathbf{y} ,$$

em que

$$\mathbf{A}(\tau) \equiv \mathbf{J} \nabla_{\mathbf{w}} \nabla_{\mathbf{w}}^T \mathcal{H} ,$$

e $y = \delta \mathbf{w}$. As seguintes propriedades da matriz hessiana $\nabla_{\mathbf{w}} \nabla_{\mathbf{w}}^T \mathcal{H}$ e da matrix \mathbf{A} são importantes para determinação da matriz inversa $\mathbf{P}^{-1}(\tau, \tau_0)$:

1.

$$\left(\nabla_{\mathbf{w}} \nabla_{\mathbf{w}}^T \mathcal{H} \right)^T = \nabla_{\mathbf{w}} \nabla_{\mathbf{w}}^T \mathcal{H} ;$$

2.

$$\mathbf{J} \mathbf{A} = -\nabla_{\mathbf{w}} \nabla_{\mathbf{w}}^T \mathcal{H} ;$$

3.

$$\mathbf{A}^T \mathbf{J}^T = -\nabla_{\mathbf{w}} \nabla_{\mathbf{w}}^T \mathcal{H} = \mathbf{J} \mathbf{A} ;$$

4. pós-multiplicando a expressão acima por $\mathbf{J}^T \mathbf{J} = \mathbf{I}$

$$-\mathbf{A}^T \mathbf{J} = -\nabla_{\mathbf{w}} \nabla_{\mathbf{w}}^T \mathcal{H} = \mathbf{J} \mathbf{A} ;$$

5.

$$\mathbf{J}^T \mathbf{A}^T \mathbf{J} = \mathbf{J} \mathbf{A}^T \mathbf{J}^T = -\mathbf{J} \nabla_{\mathbf{w}} \nabla_{\mathbf{w}}^T \mathcal{H} = -\mathbf{A} .$$

A.3.2 Cálculo do inverso do propagador

Para translações infinitesimais

$$\mathbf{P}(\tau + \delta\tau, \tau) = \mathbf{I} + \delta\tau \mathbf{A}(\tau)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^{-1}(\tau + \delta\tau, \tau) &= \mathbf{I} - \delta\tau \mathbf{A}(\tau) \\ &= \mathbf{I} + \delta\tau \mathbf{J} \mathbf{A}^T(\tau) \mathbf{J}^T \\ &= \mathbf{J} \left[\mathbf{I} + \delta\tau \mathbf{A}^T(\tau) \right] \mathbf{J}^T \\ \mathbf{P}^{-1}(\tau + \delta\tau, \tau) &= \mathbf{J} \mathbf{P}^T(\tau + \delta\tau, \tau) \mathbf{J}^T . \end{aligned}$$

Devido a representação do operador (A.11) verifica-se que esta relação vale para qualquer propagador em um intervalo (τ, τ_0) , portanto

$$\mathbf{P}^{-1}(\tau, \tau_0) = \mathbf{J}\mathbf{P}^T(\tau, \tau_0)\mathbf{J}^T . \quad (\text{A.15})$$

Alternativamente pode-se utilizar a representação

$$\mathbf{P}(\tau + \delta\tau, \tau) = e^{\mathbf{A}(\tau)\delta\tau} .$$

Da mesma forma

$$\mathbf{P}(\tau, \tau + \delta\tau) = e^{-\mathbf{A}(\tau)\delta\tau} = e^{\mathbf{J}\mathbf{A}^T(\tau)\mathbf{J}^T\delta\tau} = \mathbf{J}e^{\mathbf{A}^T(\tau)\delta\tau}\mathbf{J}^T = \mathbf{J}\mathbf{P}^T(\tau + \delta\tau, \tau)\mathbf{J}^T .$$

A propriedade (A.15) é utilizada na avaliação da integral em (A.8).

A.3.3 Conservação da forma simplética

Considere que \mathbf{y}_1 e \mathbf{y}_2 sejam soluções do sistema hamiltoniano paraxial, com condições iniciais diferentes obviamente. Considere a forma simplética definida por

$$\phi(\tau) = \mathbf{y}_1^T(\tau) \mathbf{J} \mathbf{y}_2(\tau) . \quad (\text{A.16})$$

Avaliando a variação de $\phi(\tau)$ ao longo do raio obtêm-se

$$\begin{aligned} \frac{d\phi}{d\tau} &= \frac{\mathbf{y}_1^T}{d\tau} \mathbf{J} \mathbf{y}_2 + \mathbf{y}_1^T \mathbf{J} \frac{d\mathbf{y}_2}{d\tau} \\ &= \mathbf{y}_1^T \mathbf{A}^T \mathbf{J} \mathbf{y}_2 + \mathbf{y}_1^T \mathbf{J} \mathbf{A} \mathbf{y}_2 \\ &= -\mathbf{y}_1^T \mathbf{J} \mathbf{A} \mathbf{y}_2 + \mathbf{y}_1^T \mathbf{J} \mathbf{A} \mathbf{y}_2 \\ \frac{d\phi}{d\tau} &= 0 . \end{aligned}$$

APÊNDICE B – CÁLCULO DAS DERIVADAS DE FRÉCHET EM MEIOS ANISOTRÓPICOS HOMOGÊNEOS

Para determinar os limites da estereotomografia em meios anisotrópicos utilizo a decomposição em valores singulares, para determinar a resolução do método para reconstrução de um meio elíptico homogêneo e de um meio anelítico homogêneo a partir do espalhamento em um único ponto difrator. Considero que fontes e receptores podem estar distribuídos sobre a superfície e ao longo de poços. A componente da vagarosidade medida está em uma direção arbitrária \mathbf{n} .

Nos experimentos numéricos a componente horizontal da vagarosidade é medida para fontes e receptores na superfície e a componente vertical da vagarosidade é tomada quando fontes e receptores estão ao longo de poços verticais. O meio tem parâmetros p_1 , p_2 e p_3 . Para calcular a vagarosidade precisamos realizar o traçamento de raios entre dois pontos.

B.1 Traçamento de raios em meios homogêneos

O meio onde quero traçar os raios é homogêneo. Portanto, a trajetória do raio é conhecida e igual ao segmento de reta entre dois pontos. Então, precisa-se calcular o vetor vagarosidade, e para isto, utilizo o princípio de Fermat, em que a trajetória seguida pelo raio é aquela que torna estacionário o tempo de trânsito.

$$\tau = \mathbf{s}\Delta\mathbf{x} \tag{B.1}$$

Porém, o meio também é anisotrópico então a aplicação do princípio de Fermat se reduz a um problema de otimização com vínculos, ou seja, a condição de estacionaridade fica sujeita a

$$\mathcal{H}(\mathbf{s}) = 0,$$

e portanto, utilizo o método dos multiplicadores de Lagrange para solução

$$\mathcal{L} = \mathbf{s}\Delta\mathbf{x} - \lambda\mathcal{H}$$

então,

$$\nabla_{\mathbf{s}}\mathcal{L} = \mathbf{0}$$

$$\Delta\mathbf{x} - \lambda\nabla_{\mathbf{s}}\mathcal{H} = \mathbf{0}$$

têm-se que,

$$\Delta\mathbf{x} \parallel \nabla_{\mathbf{s}}\mathcal{H}$$

que implica dizer que,

$$\Delta\mathbf{x} \times \nabla_{\mathbf{s}}\mathcal{H} = \mathbf{0}$$

Por fim, utilizo o método de Newton-Raphson (PRESS et al., 1986) e calculo:

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{s_3}{s_1}\right)$$

A partir do ângulo θ obtêm-se as componentes do vetor vagarosidade e finalmente a velocidade de grupo na direção do raio que é determinada por

$$v_i = \frac{\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial s_i}}{\left(s_k \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial s_k}\right)}.$$

então

$$\frac{\partial v_i}{\partial s_j} = \frac{\left(\frac{\partial^2\mathcal{H}}{\partial s_i \partial s_j}\right)}{\left(s_k \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial s_k}\right)} - v_i \frac{\left(\frac{s_k \partial^2\mathcal{H}}{\partial s_i \partial s_j}\right)}{\left(s_k \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial s_k}\right)} - v_i v_j.$$

A partir destas quantidades, os dados para a estereotomografia em um meio homogêneo com um único ponto difrator, podem ser escritos na forma

$$T = \tau^f + \tau^r,$$

$$\begin{aligned}
x_i^f &= X_i + \tau^s v_i^f, \\
s_n^f &= \mathbf{s}_i^f n_i^f, \\
x_i^r &= X_i + \tau^r v_i^r, \\
s_n^r &= \mathbf{s}_i^r n_i^r.
\end{aligned}$$

A parametrização do modelo na estereotomografia requer, para cada segmento de raio conectando o ponto espalhador à fonte ou ao receptor, as seguintes derivadas de Fréchet:

- Derivadas em relação ao ângulo de emergência do raio no ponto espalhador, θ ;
- Derivadas em relação a posição do ponto espalhador, \mathbf{X} ;
- Derivadas em relação aos parâmetros elásticos, $p_m^{\alpha\beta}$;
- Derivadas em relação aos tempos de trânsito, τ^f e τ^r , associados aos segmentos de raio conectando o ponto espalhador a fonte e ao receptor.

Desse modo têm-se:

\mathbf{x}_i^f :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial x_i^f}{\partial \theta^f} &= \tau^f \frac{\partial v_i^f}{\partial \theta^f} = \tau^f \frac{\partial v_i^f}{\partial s_j^f} \left(\frac{\partial s_j^f}{\partial \theta^f} \right), \\
\frac{\partial x_i^f}{\partial p_\alpha} &= \tau^f \frac{\partial v_i^f}{\partial s_j^f} \left(\frac{\partial s_j^f}{\partial p_\alpha} \right).
\end{aligned}$$

$\mathbf{s}_i^f \cdot \mathbf{n}_i^f$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial s_i^f}{\partial \theta^f} &= n_i^f \left(\frac{\partial s_i^f}{\partial \theta^f} \right) = - \left(\frac{1}{v_i^f} \frac{\partial v_i^f}{\partial \theta^f} \right) s_i^f - \frac{1}{v_i^f} \frac{\partial n_i^f}{\partial \theta^f}, \\
\frac{\partial s_i^f}{\partial p_\alpha} &= n_i^f \left(\frac{\partial s_i^f}{\partial p_\alpha} \right) = - \left(\frac{1}{v_i^f} \frac{\partial v_i^f}{\partial p_\alpha} \right) s_i^f.
\end{aligned}$$

\mathbf{x}_i^r :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial x_i^r}{\partial \theta^r} &= \tau^r \frac{\partial v_i^r}{\partial \theta^r} = \tau^r \frac{\partial v_i^r}{\partial s_j^r} \left(\frac{\partial s_j^r}{\partial \theta^r} \right), \\
\frac{\partial x_i^r}{\partial p_\alpha} &= \tau^r \frac{\partial v_i^r}{\partial s_j^r} \left(\frac{\partial s_j^r}{\partial p_\alpha} \right).
\end{aligned}$$

$\mathbf{s}_i^r \cdot \mathbf{n}_i^r :$

$$\begin{aligned}\frac{\partial s_i^r}{\partial \theta^r} &= n_i^r \left(\frac{\partial s_i^r}{\partial \theta^r} \right) = - \left(\frac{1}{v_i^r} \frac{\partial v_i^r}{\partial \theta^r} \right) s_i^r - \frac{1}{v_i^r} \frac{\partial n_i^r}{\partial \theta^r}, \\ \frac{\partial s_i^r}{\partial p_\alpha} &= n_i^r \left(\frac{\partial s_i^r}{\partial p_\alpha} \right) = - \left(\frac{1}{v_i^r} \frac{\partial s_i^r}{\partial p_\alpha} \right) s_i^r.\end{aligned}$$

$T :$

$$\begin{aligned}\frac{\partial T}{\partial \tau^f} &= 1, \\ \frac{\partial T}{\partial \tau^r} &= 1.\end{aligned}$$

B.1.1 Cálculo das derivadas de Fréchet em meios elípticos homogêneos

Agora calculo analiticamente as derivadas de Fréchet para meios elípticos, com relação ao meio anelítico este cálculo é realizado de forma numérica. O formalismo apresentado anteriormente é repedito, com uma única diferença é que precisa-se especificar a hamiltoniana que representa o meio elíptico, que como visto no Capítulo 3 é a seguinte:

$$\mathcal{H}(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = \frac{1}{2} \left[p_1(\mathbf{x}) s_1^2 + p_2(\mathbf{x}) s_3^2 + 2 p_3(\mathbf{x}) s_1 s_3 - 1 \right] = 0 \quad (\text{B.2})$$

Com isto, pode-se calcular a direção da vagarosidade associada ao raios conectando dois pontos, \mathbf{x}^0 e \mathbf{x}^1 , que é determinada pela expressão

$$\tan \theta = \frac{p_2(x_1^1 - x_1^0) - p_3(x_3^1 - x_3^0)}{p_1(x_3^1 - x_3^0) - p_3(x_1^1 - x_1^0)}.$$

A partir do ângulo θ obtêm-se as componentes do vetor vagarosidade

$$\begin{aligned}s_1(\theta) &= \frac{\text{sen} \theta}{\sqrt{p_1 \text{sen}^2 \theta + p_2 \cos^2 \theta + 2 p_3 \text{sen} \theta \cos \theta}}, \\ s_3(\theta) &= \frac{\cos \theta}{\sqrt{p_1 \text{sen}^2 \theta + p_2 \cos^2 \theta + 2 p_3 \text{sen} \theta \cos \theta}}.\end{aligned}$$

Finalmente a velocidade de grupo na direção do raio é determinada

$$\begin{aligned}v_1(s_1, s_3) &= p_1 s_1 + p_3 s_3, \\ v_3(s_1, s_3) &= p_3 s_1 + p_2 s_3.\end{aligned}$$

A partir destas quantidades, os dados para a estereotomografia em um meio elíptico homogêneo com um único ponto difrator, $\mathbf{X} = (X_1, X_3)$, podem ser escritos na forma

$$\begin{aligned}
T &= \tau^f + \tau^r, \\
x_1^f &= X_1 + \tau^s v_1^f, \\
x_3^f &= X_3 + \tau^s v_3^f, \\
s_n^f &= \mathbf{s}^f \cdot \mathbf{n}^f = \frac{n_1^f \text{sen} \theta^f + n_3^f \cos \theta^f}{\sqrt{p_1 \text{sen}^2 \theta^f + p_2 \cos^2 \theta^f + 2p_3 \text{sen} \theta^f \cos \theta^f}}, \\
x_1^r &= X_1 + \tau^r v_1^r, \\
x_3^r &= X_3 + \tau^r v_3^r, \\
s_n^r &= \mathbf{s}^r \cdot \mathbf{n}^r = \frac{n_1^r \text{sen} \theta^r + n_3^r \cos \theta^r}{\sqrt{p_1 \text{sen}^2 \theta^r + p_2 \cos^2 \theta^r + 2p_3 \text{sen} \theta^r \cos \theta^r}}.
\end{aligned}$$

As derivadas de Fréchet correspondentes são:

τ :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \tau}{\partial \tau^f} &= 1, \\
\frac{\partial \tau}{\partial \tau^r} &= 1.
\end{aligned}$$

\mathbf{x}^f :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial x_1^f}{\partial X_1} &= 1, \\
\frac{\partial x_1^f}{\partial \theta^f} &= \tau^f (s^f)^2 (p_1 v_3^f - p_3 v_1^f), \\
\frac{\partial x_1^f}{\partial \tau^f} &= v_1^f, \\
\frac{\partial x_1^f}{\partial p_1} &= \frac{1}{2} \tau_s s_1^f (1 + v_3^f s_3^f), \\
\frac{\partial x_1^f}{\partial p_2} &= -\frac{1}{2} \tau_s (s_3^f)^2 v_1^f, \\
\frac{\partial x_1^f}{\partial p_3} &= \tau^f s_3^f (1 - v_1^f s_1^f).
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial x_3^f}{\partial X_3} = 1,$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial x_3^f}{\partial \theta^f} &= -\tau^f (s^f)^2 (p_2 v_1^f - p_3 v_3^f) , \\
\frac{\partial x_3^f}{\partial \tau^f} &= v_3^f , \\
\frac{\partial x_3^f}{\partial p_1} &= -\frac{1}{2} \tau_s (s_1^f)^2 v_3^f , \\
\frac{\partial x_3^f}{\partial p_2} &= \frac{1}{2} \tau_s s_3^f (1 + v_1^f s_1^f) , \\
\frac{\partial x_3^f}{\partial p_3} &= \tau^f s_1^f (1 - v_3^f s_3^f) .
\end{aligned}$$

$\mathbf{s}^f \cdot \mathbf{n}^f$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial s_n^f}{\partial \theta^f} &= (s^f)^2 (n_1^f v_3^f - n_3^f v_1^f) , \\
\frac{\partial s_n^f}{\partial p_1} &= -\frac{1}{2} (s_1^f)^2 (n_1^f s_1^f + n_3^f s_3^f) , \\
\frac{\partial s_n^f}{\partial p_2} &= -\frac{1}{2} (s_3^f)^2 (n_1^f s_1^f + n_3^f s_3^f) , \\
\frac{\partial s_n^f}{\partial p_3} &= -s_1^f s_3^f (n_1^f s_1^f + n_3^f s_3^f) .
\end{aligned}$$

\mathbf{x}^r :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial x_1^r}{\partial X_1} &= 1 , \\
\frac{\partial x_1^r}{\partial \theta^r} &= \tau^r (s^r)^2 (p_1 v_3^r - p_3 v_1^r) , \\
\frac{\partial x_1^r}{\partial \tau^r} &= v_1^r , \\
\frac{\partial x_1^r}{\partial p_1} &= \frac{1}{2} \tau_s s_1^r (1 + v_3^r s_3^r) , \\
\frac{\partial x_1^r}{\partial p_2} &= -\frac{1}{2} \tau_s (s_3^r)^2 v_1^r , \\
\frac{\partial x_1^r}{\partial p_3} &= \tau^r s_3^r (1 - v_1^r s_1^r) .
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial x_3^r}{\partial X_3} &= 1 , \\
\frac{\partial x_3^r}{\partial \theta^r} &= -\tau^r (s^r)^2 (p_2 v_1^r - p_3 v_3^r) ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial x_3^r}{\partial \tau^r} &= v_3^r, \\
\frac{\partial x_3^r}{\partial p_1} &= -\frac{1}{2} \tau_s (s_1^r)^2 v_3^r, \\
\frac{\partial x_3^r}{\partial p_2} &= \frac{1}{2} \tau_s s_3^r (1 + v_1^r s_1^r), \\
\frac{\partial x_3^r}{\partial p_3} &= \tau^r s_1^r (1 - v_3^r s_3^r).
\end{aligned}$$

$\mathbf{s}^r \cdot \mathbf{n}^r$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial s_n^r}{\partial \theta^r} &= (s^r)^2 (n_1^r v_3^r - n_3^r v_1^r), \\
\frac{\partial s_n^r}{\partial p_1} &= -\frac{1}{2} (s_1^r)^2 (n_1^r s_1^r + n_3^r s_3^r), \\
\frac{\partial s_n^r}{\partial p_2} &= -\frac{1}{2} (s_3^r)^2 (n_1^r s_1^r + n_3^r s_3^r), \\
\frac{\partial s_n^r}{\partial p_3} &= -s_1^r s_3^r (n_1^r s_1^r + n_3^r s_3^r).
\end{aligned}$$

Para a análise SVD estas expressões foram avaliadas para construir a matriz tomográfica em um meio de referência isotrópico.