



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM GEOFÍSICA

MARCELO TAVARES PAIXAO

**ANÁLISE DO EFEITO DA DISCRETIZAÇÃO
DO MODELO DE VELOCIDADES NAS
MIGRAÇÕES KIRCHHOFF E
KIRCHHOFF-GAUSSIAN-BEAM 2D
PRÉ-EMPILHAMENTO EM PROFUNDIDADE**

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

BELÉM-PARÁ

2014

MARCELO TAVARES PAIXAO

**ANÁLISE DO EFEITO DA DISCRETIZAÇÃO DO
MODELO DE VELOCIDADES NAS MIGRAÇÕES
KIRCHHOFF E KIRCHHOFF-GAUSSIAN-BEAM 2D
PRÉ-EMPILHAMENTO EM PROFUNDIDADE**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Geofísica da Universidade Federal do Pará, em cumprimento às exigências para obtenção do grau de Mestre em Geofísica.

Orientador: João Carlos Ribeiro Cruz

Dados Internacionais de Catalogação de Publicação (CIP)
(Biblioteca do Instituto de Geociências/UFPA)

Paixão, Marcelo Tavares, 1986-

Análise do efeito da discretização do modelo de velocidades nas migrações Kirchhoff e Kirchhoff-Gaussian-Beam 2D pré-empilhamento em profundidade / Marcelo Tavares Paixão. – 2014.

Inclui bibliografias

Orientador: João Carlos Ribeiro Cruz
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Pará, Instituto de Geociências, Programa de Pós-Graduação em Geofísica, Belém, 2014.

1. Prospecção sísmica. 2. Método de reflexão sísmica. 3. Feixes Gaussianos. I. Título.

CDD 22. ed. 622.1592


MARCELO TAVARES PAIXAO

**ANÁLISE DO EFEITO DA DISCRETIZAÇÃO DO
MODELO DE VELOCIDADES NAS MIGRAÇÕES
KIRCHHOFF E KIRCHHOFF-GAUSSIAN-BEAM 2D
PRÉ-EMPILHAMENTO EM PROFUNDIDADE**

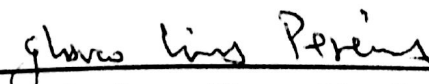
Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Geofísica da Universidade Federal do Pará, em cumprimento às exigências para obtenção do grau de Mestre em Geofísica.

Data de Aprovação: 28/02/2014

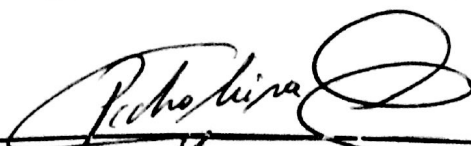
Banca Examinadora:



Professor João Carlos Ribeiro Cruz (Orientador)
Doutor em geofísica
Universidade federal do Pará – UFPA



Professor Glauco Lira Pereira
Doutor em geofísica
Instituto federal do Pará – IFPA



Professor Pedro Andrés Chira Oliva (Membro)
Doutor em geofísica
Universidade federal do Pará – UFPA

Dedico este trabalho à minha família.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus por ter proporcionado saúde, confiança e determinação para finalizar esta dissertação.

Em especial quero agradecer a minha noiva pelo seu apoio, compreensão, amor e carinho. Ao Prof. Dr. João Carlos que me apresentou o tema desta dissertação, bem como pelo apoio, orientação, amizade e por todas as oportunidades oferecidas a minha pessoa para concretização do referido trabalho.

Ao prof. Dr. Glauco Lira e Wildney Vieira pelas valiosas contribuições dispensadas ao longo do desenvolvimento desta dissertação. A secretária Benildes Lopes (CPGf/UFPa), sempre disposta a ajudar nas questões administrativas e pela valorosa amizade. Aos membros da Banca Examinadora por aceitarem gentilmente participar deste processo, pelas críticas construtivas e importantes sugestões.

Aos colegas contemporâneos pelo incentivo e momentos de descontração.

Ao Curso de Pós-Graduação em Geofísica (CPGF/UFPa), pela infra-estrutura e apoio na realização desta pesquisa.

A todos os meus familiares por compreenderem a minha ausência em momentos importantes e torcerem pela conclusão desta etapa acadêmica.

"Sonhos determinam o que você quer. Ação determina o que você conquista."
(Aldo Novak)

RESUMO

O Feixe Gaussiano (FG) é uma solução assintótica da equação da elastodinâmica na vizinhança paraxial de um raio central, a qual se aproxima melhor do campo de ondas do que a aproximação de ordem zero da Teoria do Raio. A regularidade do FG na descrição do campo de ondas, assim como a sua elevada precisão em algumas regiões singulares do meio de propagação, proporciona uma forte alternativa no imageamento sísmicos. Nesta dissertação, apresenta-se um novo procedimento de migração sísmica pré-empilhamento em profundidade com amplitudes verdadeiras, que combina a flexibilidade da migração tipo Kirchhoff e a robustez da migração baseada na utilização de Feixes Gaussianos para a representação do campo de ondas. O algoritmo de migração proposto é constituído por dois processos de empilhamento: o primeiro é o empilhamento de feixes (“beam stack”) aplicado a subconjuntos de dados sísmicos multiplicados por uma função peso definida de modo que o operador de empilhamento tenha a mesma forma da integral de superposição de Feixes Gaussianos; o segundo empilhamento corresponde à migração Kirchhoff tendo como entrada os dados resultantes do primeiro empilhamento. Pelo exposto justifica-se a denominação migração Kirchhoff-Gaussian-Beam (KGB). Afim de comparar os métodos Kirchhoff e KGB com respeito à sensibilidade em relação ao comprimento da discretização, aplicamos no conjunto de dados conhecido como Marmousi 2-D quatro grids de velocidade, ou seja, 60m, 80m 100m e 150m. Como resultado, temos que ambos os métodos apresentam uma imagem muito melhor para o menor intervalo de discretização da malha de velocidade. O espectro de amplitude das seções migradas nos fornece o conteúdo de frequência espacial das seções das imagens obtidas.

Palavras-chave: Geofísica. Imageamento Sísmico. Feixes Gaussianos. Migração.

ABSTRACT

The Gaussian Beam (GB) is an asymptotic solution of the elastodynamic equation in the paraxial vicinity of a central ray, which approaches better the wave field than the standard zero-order ray theory. The GB regularity in the description of the wave field, as well as its high accuracy in some singular regions of the propagation medium, provide a strong alternative to solve seismic modeling and imaging problems. In this dissertation, I present a new procedure for pre-stack depth migration with true-amplitude, combining the flexibility and robustness of Kirchhoff migration type using superposition of Gaussian beams to represent the wave field. The proposed migration algorithm comprises in two stacking process: the first is the beam stack applied to subsets of seismic data multiplied by a weight function defined such that stack operator has the same formulation of the integral of the Gaussian beams superposition; the second is a weighted diffraction stack by means of the Kirchhoff type integral having as input the stacked data. For these reasons it is called Kirchhoff-Gaussian-Beam (KGB) migration. In order to compare the Kirchhoff and KGB methods with respect to the sensibility on relation to the discretization length, we apply them to the well-know 2D Marmousi dataset using four velocity grids, i.e. 60 m, 80 m, 100 m e 150 m. As result we have that both methods present a much better image for smaller discretization interval of the velocity grid. The amplitude spectrum of the migrated sections provide us with the spatial frequency contents of the obtained image sections.

Keywords: Geophysics. Seismic Imaging. Gaussian Beam. Migration.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Conecta-se o ponto x a $x_0 \in \Sigma$ através de uma curva Λ	20
Figura 2 – Um raio central e um raio paraxial passando por uma superfície anterior Σ_A . Definição de coordenada cartesiana local 2-D (z_1 e z_2).	31
Figura 3 – Visualização 2D da Figura 2	31
Figura 4 – Definição dos pontos de S , R , e R' . O ponto S está situado arbitrariamente em Ω , R' está situado perto de S , possivelmente fora do raio central. Ponto R está situado na intersecção do raio com um plano perpendicular, passando por Ω	33
Figura 5 – Definição do sistema de coordenadas cartesiano relacionado com uma interface.	34
Figura 6 – Sistema sísmico em conjunto com o volume de Fresnel. Em cada superfície de interesse do sistema são estabelecidos sistemas de coordenadas cartesianas 2-D locais	38
Figura 7 – Ilustração em 2-D da região chamada interface da zona de Fresnel (b) Ilustração em 2-D da zona de Fresnel projetada	39
Figura 8 – Representação esquemática 2-D do processo de empilhamento das amplitudes utilizando os feixes Gaussianos	44
Figura 9 – Modelo de velocidade do Marmousi.	49
Figura 10 – Seção afastamento mínimo.	50
Figura 11 – Representação da malha em duas dimensões para construção do modelo de velocidade.	50
Figura 12 – Modelo de velocidade redimensionado.	52
Figura 13 – Migração Kirchhoff pré-empilhamento do modelo de velocidade da Figura 12.	53
Figura 14 – Migração KGB pré-empilhamento do modelo de velocidade da Figura 12.	54
Figura 15 – Migração Kirchhoff e KGB pré-empilhamento do modelo de velocidade da Figura 12.	55
Figura 16 – Matriz espectro de amplitude da migração Kirchhoff.	56
Figura 17 – Matriz espectro de amplitude da migração KGB.	57
Figura 18 – Matriz espectro de amplitude da migração Kirchhoff e KGB.	58
Figura 19 – Ilustração de um feixe gaussiano, mostrando as coordenadas centradas no raio, a meia-largura e a amplitude gaussiana.	72

LISTA DE SÍMBOLOS

SÍMBOLOS	DESCRIÇÃO
$\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$	Coordenadas cartesianas
ω	Frequência angular
$\rho = \rho(\mathbf{x})$	Densidade de massa
u_i	Componentes do campo de deslocamento \mathbf{u} ($i = 1, 2, 3$)
τ	Tempo de trânsito
λ	Comprimento de onda
\mathbf{p}	Vetor vagarosidade
p_i	Componentes do vetor vagarosidade \mathbf{p} ($i = 1, 2, 3$)
v	Velocidade de propagação do campo de ondas
A	Amplitude escalar
v_P	Velocidade de propagação da onda P
v_S	Velocidade de propagação da onda S
J	Jacobiano do raio
σ	Variável natural ao longo do raio
s	Comprimento do raio
$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$	Sistema de coordenadas do raio
\mathcal{H}	Hamiltoniano
q_1, q_2 e q_3	Sistema de coordenadas centradas no raio
\vec{e}_1, \vec{e}_2 e \vec{e}_3	Base do sistema de coordenadas centrada no raio
\vec{t}	vetor tangente
\vec{n} e \vec{b}	Vetores, respectivamente, normais e binormais ao raio
Σ^\perp	Plano perpendicular ao raio na posição R do raio
θ	Ângulo entre \vec{e}_1 e \mathbf{b}_1
\mathcal{T}	Torção do raio
K	Raio de curvatura
p_I	Componentes da vagarosidade em coordenadas centradas no raio ($I = 1, 2$)
\mathbf{Q}	Matriz de transformação de coordenadas do raio para coordenadas centradas no raio para coordenadas centradas no raio
\mathbf{P}	Matriz de transformação de coordenadas do raio para coordenadas das componentes de vagarosidade do raio
\vec{t}	vetor tangente
\mathbf{M}	Matriz de derivadas de segunda ordem do tempo de trânsito em relação a coordenadas centradas no raio
$\mathbf{\Pi}(R, S)$	Matriz propagadora de um raio conectado a um ponto inicial S e a um ponto final R
\mathbf{Q}_1 e \mathbf{P}_1	Soluções do sistema dinâmico com condições iniciais de fonte plana
\mathbf{Q}_2 e \mathbf{P}_2	Soluções do sistema dinâmico com condições iniciais de fonte pontual
Σ_A	Superfície anterior
Σ_P	Superfície posterior
z_1 e z_2	Sistema de coordenadas cartesianas locais

SÍMBOLOS	DESCRIÇÃO
A, B, C e D	Submatrizes da matriz propagadora de Bortfeld T
$T(R, S)$	Matriz propagadora de Bortfeld de S em Σ_A a R em Σ_P
\vec{t}	vetor tangente
p_i	Componentes da vagarosidade em coordenadas cartesianas ($i = 1, 2, 3$)
G	Matriz de transformação de coordenadas cartesianas na interface para sistema cartesiano geral
Z	matriz de transformação das coordenadas centradas no raio q_1, q_2 e $q_3 = s$ para coordenadas cartesianas na
k	Módulo do vetor número de ondal
Ω	Ângulo sólido
H	Matriz de transformação de coordenadas centradas para coordenadas cartesianas
$A(x)^{(s)}$	Amplitude, em coordenada cartesiana, do raio de comprimento ss
K	Matriz de curvatura da frente de onda
L_o	Meia-largura inicial do feixe gaussiano
$L_1(s)$ e $L_2(s)$	Feixo maior e eixo menor da meia-largura do feixe gaussiano 3-D
T	Período da onda monofrequente.
H_F	Matriz da primeira zona de Fresnel
H_P	Matriz da zona de Fresnel projetada
$\xi = (\xi_1, \xi_2)^\top$	Vetor-posição sobre a zona de Fresnel projetada
Γ_S e Γ_R	Matrizes de configuração da fonte e do receptor, respectivamente
r_{zp}	Raio da zona de Fresnel projetada
$\tau_R(\xi)$	Tempo de reflexão
$\widehat{W}(\omega)$	Pulso sísmico da fonte no domínio da freqüência
C_t	Perda total das transmissões
R_c	Coefficiente de reflexão de ondas planas no ponto de reflexão
G_s	Fator de espalhamento geométrico complexo normalizado pelo raio de reflexão
$U(\xi, t)$	Campo de onda sísmica
$U_{TA}(t)$	Dados migrados em verdadeira amplitude
R_m	Matriz resolução dos parâmetros
R_0	Raio de curvatura da frente de onda
τ_{gb}	Tempo de trânsito paraxiais de segunda ordem complexo
η	Vetor das coordenadas dos parâmetros de configuração na superfície da Terra
G_S^B	Fator de espalhamento geométrico complexo do feixe gaussiano normalizado

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	15
2	TEORIA DO RAIO	17
2.1	ANÁLISE ASSINTÓTICA DA EQUAÇÃO DE ONDA	18
2.2	EQUAÇÃO CINEMÁTICA DO RAIO	19
2.3	EQUAÇÕES DINÂMICAS DO RAIO	23
2.4	PARAMETRIZAÇÕES MAIS COMUNS	25
2.4.1	Parâmetro Sigma	25
2.4.2	Comprimento de Arco	26
2.4.3	Tempo de Trânsito	27
2.5	EQUAÇÕES DO RAIO 2D	28
2.6	COORDENADAS CENTRADAS NO RAIO	28
2.6.1	Matriz Propagadora Π	29
2.6.2	Matriz Propagadora \mathbf{T}	30
3	APROXIMAÇÕES DO CAMPO DE ONDAS	36
3.1	Integral de Superposição de Feixes Gaussianos	36
3.2	Superposição de Feixes Gaussianos Refletidos e Restritos ao Volume de Fresnel	37
4	MIGRAÇÃO KIRCHHOFF-GAUSSIAN-BEAM (KGB)	40
4.1	MIGRAÇÃO KIRCHHOFF COM VERDADEIRAS AMPLITUDES	40
4.2	MIGRAÇÃO KGB COM VERDADEIRAS AMPLITUDES	42
5	RESULTADOS	49
6	CONCLUSÃO E PERSPECTIVA	59
6.1	CONCLUSÕES	59
6.2	PERSPECTIVAS	60
	REFERÊNCIAS	61
	APÊNDICES	64
	APÊNDICE A Formalismo da condição inicial dos feixes gaussianos em função da zona de Fresnel projetada: Caso 2-D	65
	APÊNDICE B Superposição de feixes Gaussianos para a situação 2-D	66
	APÊNDICE C Análise assintótica da integral de migração KGB	67
	APÊNDICE D APROXIMAÇÕES DO CAMPO DE ONDAS	70
D.1	FEIXES GAUSSIANOS	70
D.1.1	Tempos Paraxiais	70
D.1.2	Aproximação Paraxial do Raio	71

D.1.3	Aproximação Paraxial de Feixes Gaussianos	73
-------	---	----

1 INTRODUÇÃO

Objetivo principal no processamento de dados sísmicos é obter uma imagem representativa da subsuperfície da Terra, onde a migração faz parte do fluxograma desse processo. O conceito de migração consiste em reposicionar os dados gravados em sua posição geológica verdadeira. As migrações podem ser em tempo ou profundidade, as quais podem ser feitas antes ou depois do empilhamento e cada tipo de migração apresenta suas potencialidades e fraquezas.

Dentre os diversos tipos de migração, a migração Kirchhoff se destaca devido sua eficácia em compor imagens de refletores com mergulhos íngremes e permitir migrar dados completos ou apenas parte dele, durante o processo de migração. A teoria do raio de ordem zero, é base para calcular a função Green no operador de imageamento, sendo esta teoria aplicada de forma efetiva em meios suaves. Com isso, as difrações observadas em ambientes com a geologia do meio complexa ou em meios que apresentam fortes variações laterais de velocidades, não podem ser simuladas adequadamente devido a zonas de sombra ou ocorrência de cáusticas.

A migração Kirchhoff em profundidade, requer uma maior necessidade de ferramentas computacionais. O tempo computacional aumenta quando a migração Kirchhoff opera diretamente sobre o conjunto de dados pré-empilhados e com verdadeiras amplitudes para compor a imagem (BIONDI, 2006). Vários trabalhos foram desenvolvidos para obter imagens mais precisas e computacionalmente viáveis, entre os quais se destacam (HILL, 1990; HILL, 2001; ALBERTIN; YINGST; KITSCHENSID, 2004; PROTASOV, 2005; BLEISTEIN, 2009; FERREIRA; CRUZ, 2009; GRAY; BLEISTEIN, 2009; POPOV et al., 2010; COSTA, 2012; PEREIRA, 2013). Em todos esses trabalhos o conceito de Feixes Gaussianos (FG) foram usados para representar o campo de onda. Assim as vantagens de considerar FG como solução da equação da onda sísmica vem sendo abordadas nos trabalhos de Babich e Pankratova (1973), Popov (1982), Červený (1982), Müller (1984), Konopásková (1984), Popov (2002), Žáček (2006) e Saleh (2011).

O operador da migração Kirchhoff (SCHNEIDER, 1978) tem duas ideias básicas no processo de imageamento. A primeira é oriunda do princípio de difração escalar, onde o princípio de Huygens de fontes secundárias é utilizado para explicar o caminho seguido por um raio de energia luminosa ao atravessar uma fenda de difração, localizada sobre um anteparo e observada em um ponto qualquer (GOODMAN, 2005). A segunda ideia, relaciona-se com o trabalho pioneiro de Hagedoorn (1954), cujas superfícies de máxima convexidade foram posteriormente relacionadas à equação da onda escalar, tornando-se familiar na literatura geofísica como migração Kirchhoff (HERTWECK et al., 1973). Matematicamente, a integral de Kirchhoff é derivada do teorema de Green, usado para

resolver aproximadamente a equação da onda em um meio acústico de um campo de ondas sísmica.

A migração sísmica pré-empilhamento em profundidade com verdadeiras amplitudes que combina a flexibilidade da migração tipo Kirchhoff (SCHNEIDER, 1978; BLEISTEIN, 1987; SCHLEICHER; TYGEL; HUBRAL, 1993) e a robustez da migração baseada na utilização de Feixes Gaussianos para a representação do campo de ondas (HILL, 1990; HILL, 2001). O algoritmo de migração proposto é constituído por dois processos de empilhamento: o primeiro é o empilhamento de feixes (“beam stack”) aplicado a subconjuntos de dados sísmicos multiplicados por uma função peso definida de modo que o operador de empilhamento tenha a mesma forma da integral de superposição de Feixes Gaussianos; o segundo empilhamento corresponde à migração Kirchhoff tendo como entrada os dados resultantes do primeiro empilhamento. Pelo exposto justifica-se a denominação migração Kirchhoff-Gaussian-Beam (KGB).

Objetivo principal desse trabalho é estudar os efeitos da discretização do modelo de velocidade nas migrações Kirchhoff e KGB, e comparar os seus espectros de amplitudes.

O presente trabalho está dividido em:

- O Capítulo 2 traz uma breve revisão sobre a Teoria dos Raios que é a base para todos os algoritmos de imageamento sísmico apresentados. Uma abordagem tanto em coordenadas cartesianas quanto coordenadas centradas no raio.
- O capítulo 3 mostra o estudo do campo de onda usando feixes Gaussianos.
- o capítulo 4 descreve a modificação do operador de empilhamento de difrações para a migração Kirchhoff pré-empilhamento com verdadeira amplitude afim de utilizar o formalismo de feixes Gaussianos.
- O capítulo 5 é composto pelos resultados, isto é, análise dos efeitos da discretização no modelo de velocidade quando esses dados são migrados tanto na migração kirchhoff quanto na migração KGB. Além disso, Analisar o espectro de amplitude do dado migrado
- Finalmente, no último capítulo temos as conclusões feitas, levando em consideração a análise dos dados migrados com diferentes dicretizações feitas no modelo de velocidade e observações feitas no espectro de amplitude também no dado migrado.

2 TEORIA DO RAI0

Neste capítulo estudaremos a teoria do raio de ordem zero analisando seus aspectos cinemáticos (cálculo de raios, tempos de trânsito e frentes de onda) e dinâmicos (principalmente amplitude).

Quando o campo de ondas é investigado, pode-se observar que as perturbações no meio, também chamadas de eventos, são propagadas independentemente. Além disso, se o evento tem curta duração, implicando em grande conteúdo de alta frequência, quase como um pulso delta de banda limitada, este comportamento se mantém por toda a propagação. Tais observações dão uma boa informação de como a solução deve ser, pelo menos sob a hipótese de alta-frequência. Se apenas um evento é observado atentamente, deve-se considerar dois aspectos básicos: o cinemático e o dinâmico. A parte cinemática trata das trajetórias dos raios, bem como do tempo de trânsito dos eventos sísmicos. A parte dinâmica, por sua vez, lida com a distribuição espacial da energia propagada, estudando o comportamento da amplitude dos eventos.

O caráter cinemático e dinâmico podem ser combinados em uma função que representa uma solução aproximada da equação da onda. Este procedimento funciona como uma separação de variáveis, em que uma solução tentativa é inserida na equação original, gerando duas novas equações mais simples, para serem resolvidas. No caso da teoria do raio, a função responsável pela parte cinemática é chamada de tempo de trânsito e a função que governa a parte dinâmica é chamada de amplitude. Uma vez que a função combinada é inserida na equação de Helmholtz, após algumas manipulações e hipóteses adicionais, chega-se em duas novas equações diferenciais parciais (EDP). A primeira é conhecida por equação iconal, em que somente o tempo de trânsito aparece como incógnita. A segunda é chamada de equação de transporte e tem tanto o tempo de trânsito quanto a amplitude como incógnitas.

A equação iconal normalmente não é fácil de resolver numericamente, por se tratar de uma equação diferencial parcial de segunda ordem, uma maneira mais eficiente de se obter as soluções da iconal é usar o método das características. As equações características nesse caso são chamadas de equações cinemáticas do raio, as quais são equações diferenciais ordinárias de primeira ordem e que podem ser manipuladas numericamente através de um algoritmo do tipo Runge-Kutta, cuja uma das soluções é o tempo de trânsito. Entretanto, resta computar a amplitude. Usando o tempo de trânsito previamente calculado, converte-se a equação do transporte, que é uma (EDP), em uma (EDO) válida ao longo de cada raio. Para se obter a solução assintótica de ordem zero, combina-se suas partes constitutivas que são o tempo de trânsito e a amplitude.

Existem, basicamente, duas abordagens distintas para a Teoria do Raio, no que diz respeito à amplitude. Sua principal diferença é a escolha das coordenadas para se parametrizar tanto o raio como as quantidades relativas à energia que flui por esse raio. A abordagem (CĚRVENÝ, 2001) usa as chamadas coordenadas centradas no raio, enquanto a abordagem (BLEISTEIN; HANDELSMAN, 1975) usa as coordenadas Cartesianas. Neste trabalho usaremos os dois tipos de sistema de coordenadas, apesar de ambas lidarem com parametrizações diferentes, há como conectar uma abordagem a outra, por meio de uma transformação de variáveis. O problema é que essa mudança não é explícita, dificultando o cálculo do Jacobiano desta transformação e fazendo com que essa conexão não fique estabelecida de maneira trivial.

2.1 ANÁLISE ASSINTÓTICA DA EQUAÇÃO DE ONDA

Em primeiro lugar, como as aproximações assintóticas são realizadas na frequência, é preferível se trabalhar com a equação da onda reduzida, chamada de *equação de Helmholtz*,

$$\left(\Delta + \frac{\omega}{c(\mathbf{x})}\right) \hat{u}(\mathbf{x}, \omega) = 0 \quad (2.1)$$

que é obtida através da transformada de Fourier no tempo aplicada à equação da onda acústica com densidade constante. Aqui $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $c(\mathbf{x})$ é o campo de velocidades, ω é a frequência angular, Δ é o operador laplaciano, definido por

$$\Delta f(x) = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \quad (2.2)$$

Assumimos que a solução do problema de propagação de ondas tem uma expressão assintótica da forma:

$$u(\mathbf{x}, \omega) \approx \sum_{k=0}^{\infty} (-i\omega)^{-k} A_k(\mathbf{x}) e^{-i\omega\tau(\mathbf{x})} \quad (2.3)$$

onde $\tau(\mathbf{x})$ é o tempo de trânsito e A_k são os coeficientes da série relacionados à amplitude. No caso da aproximação de ordem zero, considera-se apenas o primeiro termo da série assintótica, isto é

$$u(\mathbf{x}, \omega) \approx A(\mathbf{x}) e^{-i\omega\tau(\mathbf{x})} \quad (2.4)$$

onde, por economia de notação, $A \equiv A_0$ é simplesmente chamada de amplitude.

Segundo (BLEISTEIN, 1984), quando a solução tentativa (2.3) é inserida na equação de Helmholtz, obtém-se uma série de potências em ω . Igualando os coeficientes desta série a zero, duas equações são obtidas

$$2\nabla A(\mathbf{x}) \nabla \tau(\mathbf{x}) + A(\mathbf{x}) \Delta \tau(\mathbf{x}) = 0 \quad (2.5)$$

$$\|\nabla \tau(x)\|^2 = \frac{1}{c(\mathbf{x})^2} \quad (2.6)$$

chamadas respectivamente de equação de transporte e equação iconal. Aqui, o operador ∇ é o gradiente, definido por

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3} \right) \quad (2.7)$$

e $\|y\|$ é a norma do vetor y definida por

$$\|y\|^2 = y \cdot y = y^T y$$

Pode-se observar que a equação iconal traz informação somente sobre tempos de trânsito τ .

Por outro lado, a equação de transporte relaciona os tempos de trânsito τ com as amplitudes A , mostrando como estas quantidades são transportadas, como diz o próprio nome da equação. Em outras palavras, a equação iconal resolve a parte cinemática do problema enquanto a equação de transporte soluciona a parte dinâmica. Assim, o procedimento natural para achar a solução é buscar uma solução da equação iconal em primeiro lugar, substituí-la na equação de transporte, para em seguida achar uma solução para a amplitude.

Neste trabalho, utiliza-se o método das características para se encontrar soluções da equação iconal. As características, ou raios, são curvas que cobrem toda uma região do espaço, de modo que ao longo de cada raio os tempos de trânsito são determinados. Estes raios são calculados através da solução de um sistema de EDO's, chamado equações características ou melhor equações do raio. Dessa forma, para cada raio, estes tempos de trânsito podem ser inseridos na equação de transporte, determinando-se, portanto, a amplitude correspondente a cada tempo de trânsito, ao longo do raio.

Resumindo, para se computar a solução assintótica do problema de propagação de ondas em uma região do espaço, procede-se do seguinte modo: cobre-se densamente tal região com um feixe de raios que são regidos pelas equações características, derivadas da equação iconal; em seguida, ao longo de cada raio, computa-se o tempo de trânsito e determina-se, através da equação de transporte, a amplitude correspondente a cada tempo de trânsito.

2.2 EQUAÇÃO CINEMÁTICA DO RAI0

Antes de apresentarmos as equações cinemáticas do raio iremos fazer uma breve abordagem sobre o método das características que será aplicado na equação (2.6). Este método é usado na resolução de equações diferenciais parciais (EDPs) de primeira ordem. Seu principal objetivo é converter uma EDP em um sistema de equações diferenciais ordinárias EDO's, através da introdução de quantidades auxiliares que não pertencem às quantidades originais do problema.

Mais especificamente, é procurada a solução $\tau(\mathbf{x})$ de um problema de EDP de primeira ordem na sua forma mais geral

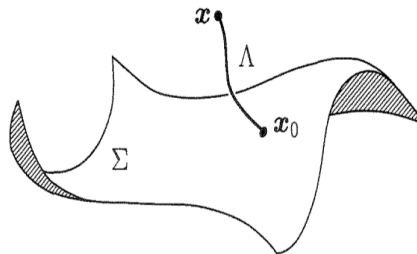
$$\begin{cases} \mathcal{H}(\mathbf{x}, \tau, \mathbf{p}) = 0, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \\ \tau(\mathbf{x}_0) = g(\mathbf{x}_0), \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^3 \end{cases} \quad (2.8)$$

onde $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$ e $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)^T$ é definido como vetor vazarosidade e dado por

$$\mathbf{p} = \nabla\tau(\mathbf{x}) \quad (2.9)$$

e $\Sigma = \Sigma(\gamma_1, \gamma_2)$ é uma superfície onde se conhece a solução (veja Figura 1).

Figura 1 – Conecta-se o ponto x a $x_0 \in \Sigma$ através de uma curva Λ .



Fonte: Portugal (2002)

1. Considera-se que solução $\tau(\mathbf{x})$ de (2.8) exista;
2. Dado um ponto $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, procura-se uma curva Λ que conecte \mathbf{x} a algum ponto $x_0 \in \Sigma$ e sobre a qual a quantidade $\mathcal{H}(\mathbf{x}, \tau, \mathbf{p})$ seja conservada;
3. Uma vez que sabe-se o valor de τ no extremo \mathbf{x}_0 , isto é, $\tau(\mathbf{x}_0) = g(x_0)$, espera-se saber computar $\tau(\mathbf{x})$ para $\mathbf{x} \in \Lambda$

Em outras palavras, uma vez que se assume a existência da solução do problema (2.8), dado um ponto \mathbf{x} no espaço, constrói-se uma curva Λ de \mathbf{x} até $\mathbf{x}_0 \in \Sigma$, de modo que a informação contida em $\mathbf{x}_0 \in \Sigma$ seja transmitida até \mathbf{x} . Considere a descrição paramétrica da curva Λ como sendo

$$\mathbf{x}(l) = (x_1(l), x_2(l), x_3(l))^T \quad (2.10)$$

onde l é um parâmetro monótono crescente qualquer, como por exemplo, o comprimento de arco. Introduzindo a notação acima em (2.8), define-se

$$\widehat{\mathcal{H}} = \mathcal{H}(\mathbf{x}_1(l), \tau(\mathbf{x}(l)), \mathbf{p}(\mathbf{x}(l))) = 0 \quad (2.11)$$

Existem infinitas curvas que passam pelos pontos \mathbf{x} e \mathbf{x}_0 , como por exemplo um arco de circunferência ou uma linha reta. No entanto, o método das características procura uma

curva Λ especial, de modo que a quantidade $\widehat{\mathcal{H}}$ seja conservada ao longo da curva. Impor esta condição equivale a exigir que a derivada de $\widehat{\mathcal{H}}$ com relação a l seja nula, isto é

$$0 = \frac{d\widehat{\mathcal{H}}(l)}{dl} = \sum_{i=1}^3 \left[\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_i} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j} \frac{\partial p_j}{\partial x_i} \right] \frac{dx_i}{dl} \quad (2.12)$$

Neste ponto, assume-se que:

$$\|\mathbf{x}'(l)\|^2 = x_1'(l) + x_2'(l) + x_3'(l) \neq 0 \quad (2.13)$$

onde a operação $(')$ indica a derivada com relação a l . Em outras palavras, assume-se que componentes do vetor $x'(l)$ não se anulam ao mesmo tempo, pois $x_i'(l) = 0$ ao mesmo tempo para $i = 1, 2, 3$, isto implicaria que $\mathbf{x}(l) = \mathbf{x}_0$ para todo l , isto é, a curva Λ se degeneraria em um ponto, o que não é desejado. Portanto, a equação (2.12) é levada a

$$\left[\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_i} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial x_i} \right] = - \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j} \frac{\partial p_j}{\partial x_i} \quad (2.14)$$

onde foi usada a seguinte propriedade

$$\frac{\partial p_j}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial \tau}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \tau}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial p_i}{\partial x_j} \quad (2.15)$$

Por outro lado, computando a derivada com relação a l das quantidades \mathbf{p} e τ , obtém-se

$$\frac{dp_i}{dl} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial p_i}{\partial x_j} \frac{dx_j}{dl}, \text{ para } i = 1, 2, 3 \quad (2.16)$$

$$\frac{d\tau}{dl} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \tau}{\partial x_j} \frac{dx_j}{dl} = p_j \frac{dx_j}{dl} \quad (2.17)$$

Se a curva $\mathbf{x}(l)$ procurada é tal que

$$\frac{dx_j}{dl} = \lambda \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j} \quad (2.18)$$

onde $\lambda = \lambda(\mathbf{x}(l))$ e λ é um número que faz o papel de mudança de parametrização, detalhada na seção (2.4), então combinando a expressão acima com a equação (2.14), obtém-se

$$\lambda \left[\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_i} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial x_i} \right] = - \frac{dx_j}{dl} \frac{\partial p_i}{\partial x_j} = - \frac{dp_i}{dl}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.19)$$

onde foi usada a equação (2.16) na última igualdade. Além disso, combinando a expressão (2.18) com a equação (2.17), obtém-se

$$\frac{d\tau}{dl} = \lambda p_j \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j} \quad (2.20)$$

Reunindo as equações (2.18), (2.19) e (2.20), e usando a notação vetorial, obtém-se as equações características para o problema (2.8)

$$\frac{d\mathbf{x}}{dl} = \lambda \nabla_{\mathbf{p}} \mathcal{H} \quad (2.21)$$

$$\frac{d\mathbf{p}}{dl} = -\lambda \left[\nabla_x \mathcal{H} + \mathbf{p} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \tau} \right] \quad (2.22)$$

$$\frac{d\tau}{dl} = \lambda \mathbf{p} \cdot \nabla_p \mathcal{H} \quad (2.23)$$

onde a operação (\cdot) denota produto escalar entre dois vetores e os gradientes $\nabla_p \mathcal{H}$ e $\nabla_x \mathcal{H}$ são definidos por

$$\nabla_p \mathcal{H} = \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_1}, \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_2}, \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_3} \right) \quad e \quad \nabla_x \mathcal{H} = \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_1}, \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_2}, \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_3} \right)$$

Conforme o método das características, pode-se aplicar as equações (2.21)-(2.22)-(2.23) à equação iconal (2.6), transformada convenientemente para ser um Hamiltoniano,

$$\mathcal{H}(\mathbf{x}, \tau, \mathbf{p}) = \frac{1}{2} \left[\|\mathbf{p}\|^2 - \eta(\mathbf{x}^2) \right] = 0 \quad (2.24)$$

onde $\eta(\mathbf{x}) = \frac{1}{c(\mathbf{x})}$ é chamada de vagarosidade. obtém-se as chamadas *equações cinemáticas do raio*

$$\frac{d\mathbf{x}}{dl} = \lambda \mathbf{p} \quad (2.25)$$

$$\frac{d\mathbf{p}}{dl} = \lambda \eta(\mathbf{x}) \nabla \eta(\mathbf{x}) \quad (2.26)$$

$$\frac{d\tau}{dl} = \lambda \eta(\mathbf{x})^2 \quad (2.27)$$

onde $\mathbf{p} = \nabla \tau$ é chamado de *vetor vagarosidade* e λ é um número que faz o papel de mudança de parametrização, detalhada na (2.4). Aqui l é um parâmetro monotônico qualquer ao longo do raio.

O método das características pode ser entendido como uma transformação das coordenadas cartesianas para coordenadas que são as mais naturais ao problema. Neste sentido, as equações do raio podem ser vistas como a regra operacional que faz a mudança das coordenadas do raio l, γ_1, γ_2 para coordenadas cartesianas x_1, x_2, x_3 . Isto quer dizer que para cada tripla $l_0, \gamma_{10}, \gamma_{20}$, é possível achar uma tripla correspondente x_{10}, x_{20}, x_{30} , por meio da integração do sistema (2.25)-(2.27).

Neste sentido, pode-se entender as coordenadas cartesianas, assim como qualquer quantidade relacionada ao raio, como uma função de l, γ_1 e γ_2 .

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(l, \gamma_1, \gamma_2); \quad \mathbf{p} = \mathbf{p}(l, \gamma_1, \gamma_2); \quad \tau = \tau(l, \gamma_1, \gamma_2) \quad (2.28)$$

Como o método das características pode ser entendido como uma transformação de variáveis, então existe o Jacobiano desta transformação, também chamado por *Jacobiano do raio*, cuja definição é

$$\mathcal{J}(l, \gamma_1, \gamma_2) = \frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(l, \gamma_1, \gamma_2)} = \det \left[\frac{d\mathbf{x}}{dl}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \gamma_1}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \gamma_2} \right] \quad (2.29)$$

Neste caso a curva característica

$$\Lambda(\gamma_1, \gamma_2) = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{x} = \mathbf{x}(l, \gamma_1, \gamma_2), l \geq 0 \} \quad (2.30)$$

onde o par γ_1, γ_2 é fixo e $\mathbf{x}(l, \gamma_1, \gamma_2)$ satisfaz a equação (2.25). Com esta definição, pode-se interpretar cada raio Λ sendo "etiquetado" por um par γ_1, γ_2 .

2.3 EQUAÇÕES DINÂMICAS DO RAI0

Usando os resultados da seção anterior pode-se transformar a equação de transporte (2.5) em uma EDO. Em outras palavras, podemos computar a amplitude A ao longo de cada raio descrito pela equações do raio.

A equação de transporte (2.5) é válida para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$. Em particular, a equação também é válida para o raio $\Lambda \subset \mathbb{R}^3$, definido em (3). observando que $\mathbf{p} = \nabla\tau$, pode reescrever a equação do transporte (2.5) como

$$2\nabla A \cdot \mathbf{p} = -A\Delta\tau \quad (2.31)$$

Multiplicando a equação acima por λA e usando a equação (2.25), chega-se a

$$2A\nabla A \cdot \frac{d\mathbf{x}}{dl} = -\lambda A^2 \Delta\tau \quad (2.32)$$

e observando que o lado esquerdo da equação acima é uma regra da cadeia, obtém-se

$$\frac{d}{dl} \log(A^2) = -\lambda \Delta\tau \quad (2.33)$$

O problema da equação acima é que Δ é um operador espacial, contrariando o objetivo de se chegar a uma equação diferencial que dependa somente de quantidades e operadores definidos ao longo do raio Λ . Para resolver este empecilho, é possível usar a identidade de Smirnov, ver apêndice de (PORTUGAL, 2002), que relaciona o Laplaciano do tempo de trânsito com o Jacobiano do raio da seguinte forma

$$\lambda \Delta\tau = \frac{d}{dl} \left(\frac{\mathcal{J}}{\lambda} \right) \quad (2.34)$$

onde \mathcal{J} é jacobiano da transformação (x_1, x_2, x_3) em (l, γ_1, γ_2) sendo assim, usando a equação (2.34) em (2.33), chega-se

$$\frac{d}{dl} \log(A^2) = \frac{d}{dl} \left(\frac{\lambda}{\mathcal{J}} \right) \quad (2.35)$$

que quando integrado de l_0 a l , dá a fórmula para a amplitude ao longo do raio $\Lambda(\lambda_1, \lambda_2)$

$$A(l) = A(l_0) \sqrt{\frac{\lambda(l)\mathcal{J}(l_0)}{\lambda(l_0)\mathcal{J}(l)}} \quad (2.36)$$

A fórmula (2.36) mostra como encontrar a amplitude no "instante" l no raio partindo da informação sobre a amplitude e outras quantidades no "instante" l_0 no raio. Sendo assim, para computar a amplitude ao longo de todo um raio são necessárias quatro quantidades, a saber: três condições iniciais: $A(l_0)$, $\mathcal{J}(l_0)$ e $\lambda(l_0)$; e o jacobiano $\mathcal{J}(l, \gamma_1, \gamma_2)$. Portanto, para se computar a amplitude ao longo de um raio, é necessário saber computar o Jacobiano da transformação de variáveis \mathcal{J} em todo o raio.

Observando que o jacobiano pode ser reescrito como

$$\mathcal{J}(l, \gamma_1, \gamma_2) = \lambda \det [\mathbf{p}, \mathbf{u}, \bar{\mathbf{u}}] \quad (2.37)$$

onde \mathbf{u} e $\bar{\mathbf{u}}$ são definidos por

$$\mathbf{u} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \gamma_1} \quad \text{e} \quad \bar{\mathbf{u}} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \gamma_2}$$

deve-se procurar equações que regem o comportamento de \mathbf{u} e $\bar{\mathbf{u}}$ ao longo do raio. Para tanto, o procedimento aplicado é desenvolver as derivadas de \mathbf{u} e $\bar{\mathbf{u}}$ com relação a l , usando as próprias equações do raio (2.25) e (2.26).

Derivando \mathbf{u} em relação a l , aplicando a regra da cadeia e usando as equações do raio chega-se a

$$\frac{d\mathbf{u}}{dl} = \lambda \mathbf{v} + (\nabla \lambda \cdot \mathbf{u}) \mathbf{p} \quad (2.38)$$

onde $\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \gamma_1}$. similarmente, para $\bar{\mathbf{u}}$:

$$\frac{d\bar{\mathbf{u}}}{dl} = \lambda \bar{\mathbf{v}} + (\nabla \lambda \cdot \bar{\mathbf{u}}) \mathbf{p} \quad (2.39)$$

onde $\bar{\mathbf{v}} = \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \gamma_2}$. As duas equações acima (2.38) e (2.39), em conjunto com as equações do raio (2.25)-(2.27) seriam suficientes para o cálculo do Jacobiano caso não fossem introduzidas duas novas quantidades \mathbf{v} e $\bar{\mathbf{v}}$. Sendo assim, é necessário o desenvolvimento de mais duas equações para definir a propagação dessas duas quantidades ao longo do raio. Como antes, o procedimento adotado é computar as derivadas de \mathbf{v} e $\bar{\mathbf{v}}$ com relação a l e usar as equações do raio, para se determinar estas novas equações diferenciais.

Derivando \mathbf{v} como relação a l , aplicando a regra da cadeia e usando as equações do raio, chega-se

$$\frac{d\mathbf{v}}{dl} = \frac{\partial}{\partial \gamma_1} \frac{d\mathbf{p}}{dl} = \frac{\partial}{\partial x_i} (\lambda \eta \nabla \eta) \frac{dx_i}{dl} = \left[\frac{\partial}{\partial x_i} (\lambda \eta) \nabla \eta + \lambda \eta \frac{\partial}{\partial x_i} (\nabla \eta) \right] u_i \quad (2.40)$$

que usando notação vetorial fica

$$\frac{d\mathbf{v}}{dl} = \left[\nabla \eta \nabla (\lambda \eta)^T + \lambda \eta \nabla^2 \eta \right] \mathbf{u} \quad (2.41)$$

Similarmente, a equação para $\bar{\mathbf{v}}$ é

$$\frac{d\bar{\mathbf{v}}}{dl} = \left[\nabla\eta\nabla(\lambda\eta)^T + \lambda\eta\nabla^2\eta \right] \bar{\mathbf{u}} \quad (2.42)$$

Finalmente, o conjunto das equações (2.25) e (2.26), (2.38) e (2.39) fornecem o comportamento tanto cinemático quanto dinâmico do raio. Isto é, ao resolver o sistema de EDO's composto pelas equações mencionadas, obtém-se por completo a solução pela teoria dos raios.

2.4 PARAMETRIZAÇÕES MAIS COMUNS

O número λ foi introduzido na derivação das equações características para que se pudesse permitir uma reparametrização do raio $\Lambda(\gamma_1, \gamma_2)$. Assim, para cada escolha de λ existe uma interpretação do parâmetro λ , de modo que as equações dos raios fiquem alteradas coerentemente, de acordo com tal parâmetro.

Para facilitar a parte algébrica das equações que vêm a seguir, uma nova quantidade matricial (6×3) dinâmica, responsável pela parte dinâmica das equações, pode ser introduzida:

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \mathbf{u} & \bar{\mathbf{u}} \\ \mathbf{v} & \bar{\mathbf{v}} \end{bmatrix} \quad (2.43)$$

Além disso, a fim de que as equações resultantes estejam melhor adequadas à implementação numérica, é usada a relação

$$\nabla c = -c^2 \nabla\eta \quad (2.44)$$

onde c é a velocidade e $\eta = 1/c$ é a vagarosidade.

Na literatura, são comuns três escolhas para λ , cada qual mais apropriada para uma finalidade diferente, a saber: $\lambda = 1$, $\lambda = c$ e $\lambda = c^2$. A seguir são apresentados os desdobramentos por tais escolhas.

2.4.1 Parâmetro Sigma

A escolha mais simples é $\lambda = 1$. Nesse caso, o parâmetro $l = \sigma$ não tem significado físico imediato, entretanto, sua escolha é comum para derivações analíticas de fórmulas que dependem da teoria dos raios. As equações do raio são:

$$\frac{d\mathbf{x}}{d\sigma} = \mathbf{p}, \quad (2.45)$$

$$\frac{d\mathbf{p}}{d\sigma} = \eta\nabla\eta = \frac{1}{2}\nabla\eta^2, \quad (2.46)$$

$$\frac{d\tau}{d\sigma} = \eta^2, \quad (2.47)$$

$$\frac{d\mathbf{u}}{d\sigma} = \mathbf{v}, \quad (2.48)$$

$$\frac{d\bar{\mathbf{u}}}{d\sigma} = \bar{\mathbf{v}}, \quad (2.49)$$

$$\frac{d\mathbf{v}}{d\sigma} = \frac{1}{2}\nabla^2[\eta^2]\mathbf{u}, \quad (2.50)$$

$$\frac{d\bar{\mathbf{v}}}{d\sigma} = \frac{1}{2}\nabla^2[\eta^2]\bar{\mathbf{u}}, \quad (2.51)$$

Além disso, o tempo de trânsito é a solução da equação:

$$\frac{d\tau}{d\sigma} = \eta^2 \quad (2.52)$$

e a fórmula para a amplitude é:

$$A(\sigma) = A(\sigma_0) \sqrt{\frac{\mathcal{J}(\sigma_0)}{\mathcal{J}(\sigma)}} \quad (2.53)$$

2.4.2 Comprimento de Arco

A segunda escolha é $\lambda = c(\mathbf{x})$. Neste caso, o parâmetro é o comprimento de arco $l = s$, muito utilizado em geometria diferencial. As equações do raio, neste caso, são:

$$\frac{d\mathbf{x}}{ds} = c\mathbf{p}, \quad (2.54)$$

$$\frac{d\mathbf{p}}{ds} = \nabla\eta, \quad (2.55)$$

$$\frac{d\tau}{ds} = \eta, \quad (2.56)$$

$$\frac{d\mathbf{u}}{ds} = c\mathbf{v} + (\nabla c \cdot \mathbf{u})\mathbf{p}, \quad (2.57)$$

$$\frac{d\bar{\mathbf{u}}}{ds} = c\bar{\mathbf{v}} + (\nabla c \cdot \bar{\mathbf{u}})\mathbf{p}, \quad (2.58)$$

$$\frac{d\mathbf{v}}{ds} = \nabla^2\eta\mathbf{u}, \quad (2.59)$$

$$\frac{d\bar{\mathbf{v}}}{ds} = \nabla^2\eta\bar{\mathbf{u}}, \quad (2.60)$$

$$(2.61)$$

Pós-multiplicando a equação (2.57) e (2.58) por \mathbf{p} , observa-se que:

$$\begin{aligned} \nabla c \cdot \mathbf{u} &= \frac{1}{\eta^2} \left[\mathbf{p} \cdot \frac{d\mathbf{u}}{ds} - c\mathbf{p} \cdot \mathbf{v} \right] \\ &= c \left[\mathbf{p} \cdot \frac{\partial(c\mathbf{p})}{\partial\gamma_1} - c^2\mathbf{p} \cdot \mathbf{v} \right] \\ &= c \left[\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial\gamma_1} (c^2\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}) - c^2\mathbf{p} \cdot \mathbf{v} \right] \end{aligned}$$

$$= -c^3 \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} \quad (2.62)$$

e similarmente, $\nabla c \cdot \bar{\mathbf{u}} = -c^3 \mathbf{p} \bar{\mathbf{v}}$. Portanto, a equação (2.57) e (2.58) podem ser reescrita como:

$$\frac{d\mathbf{u}}{ds} = c[\mathbf{I} - c^2 \mathbf{p}\mathbf{p}^T] \mathbf{v}, \quad e \quad \frac{d\bar{\mathbf{u}}}{ds} = c[\mathbf{I} - c^2 \mathbf{p}\mathbf{p}^T] \bar{\mathbf{v}} \quad (2.63)$$

Além disso, o tempo de trânsito é a solução da equação:

$$\frac{d\tau}{ds} = \eta \quad (2.64)$$

e a fórmula para amplitude é:

$$A(s) = A(s_0) \sqrt{\frac{c(s)\mathcal{J}(s_0)}{c(s_0)\mathcal{J}(s)}}} \quad (2.65)$$

2.4.3 Tempo de Trânsito

A terceira escolha $\lambda = c(x)^2$. Nesse caso, o parâmetro é o tempo de trânsito $l = \tau$, sendo assim, a escolha que determina o tempo de trânsito não é mais necessário. As equações restantes são

$$\frac{d\mathbf{x}}{d\tau} = c^2 \mathbf{p} \quad (2.66)$$

$$\frac{d\mathbf{p}}{d\tau} = c \nabla \eta \quad (2.67)$$

$$\frac{d\mathbf{u}}{d\tau} = c^2 \mathbf{v} + (\nabla c^2 \cdot \mathbf{u}) \mathbf{p} \quad (2.68)$$

$$\frac{d\bar{\mathbf{u}}}{d\tau} = c^2 \bar{\mathbf{v}} + (\nabla c^2 \cdot \bar{\mathbf{u}}) \mathbf{p} \quad (2.69)$$

$$\frac{d\mathbf{v}}{d\tau} = [\nabla \eta \nabla c^T + c \nabla^2 \eta] \mathbf{u} \quad (2.70)$$

$$\frac{d\bar{\mathbf{v}}}{d\tau} = [\nabla \eta \nabla c^T + c \nabla^2 \eta] \bar{\mathbf{u}} \quad (2.71)$$

Usando (2.62), pode-se reescrever as equações (2.68) e (2.69), respectivamente como

$$\frac{d\mathbf{u}}{d\tau} = c^2 [\mathbf{I} - 2c^2 \mathbf{p}\mathbf{p}^T] \mathbf{v}, \quad \frac{d\bar{\mathbf{u}}}{d\tau} = c^2 [\mathbf{I} - 2c^2 \mathbf{p}\mathbf{p}^T] \bar{\mathbf{v}} \quad (2.72)$$

Além disso, usando (2.28), a equação (2.31d) pode ser reescrita como

$$\frac{d\mathbf{v}}{d\tau} = c^2 [-\nabla \eta \nabla \eta^T + \eta \nabla^2 \eta] \mathbf{u}, \quad \frac{d\bar{\mathbf{v}}}{d\tau} = c^2 [-\nabla \eta \nabla \eta^T + \eta \nabla^2 \eta] \bar{\mathbf{u}} \quad (2.73)$$

A fórmula de amplitude é

$$A(\tau) = A(\tau_0) \frac{c(\tau)}{c(\tau_0)} \sqrt{\frac{\mathcal{J}(\tau_0)}{\mathcal{J}(\tau)}} \quad (2.74)$$

2.5 EQUAÇÕES DO RAI0 2D

Quando se considera o meio bidimensional, isto é, quando os parâmetros são definidos em apenas duas direções, pode-se reduzir o esforço de se computar todas as quantidades em três dimensões. O problema bidimensional, do ponto de vista tridimensional, pode ser considerado uma simetria cilíndrica em todas as quantidades estudadas do um problema tridimensional. Por exemplo, uma quantidade bidimensional $a_2 = (x_1, x_3)$ pode ser entendida como uma quantidade tridimensional $a_3 = (x_1, x_2, x_3)$

$$a_2(x_1, x_3) = a_3(x_1, x_2, x_3), \text{ para todo } x_2 \in \mathbb{R}$$

A distribuição de velocidades é dada por

$$c \equiv c(x_1, x_3) \quad (2.75)$$

$$\frac{d\mathbf{x}}{dl} = \lambda \mathbf{p} \quad (2.76)$$

$$\frac{d\mathbf{p}}{dl} = \lambda \eta \nabla \eta \quad (2.77)$$

$$\frac{d\mathbf{u}}{dl} = \lambda \mathbf{v} + (\nabla \lambda \cdot \mathbf{u}) \mathbf{p} \quad (2.78)$$

$$\frac{d\mathbf{v}}{dl} = [\nabla \eta \nabla (\lambda \eta)^T] + \lambda \eta \nabla^2 \eta \mathbf{u} \quad (2.79)$$

onde os vetores \mathbf{x} , \mathbf{p} , \mathbf{u} e \mathbf{v} e os operadores ∇ e ∇^2 são todos bidimensionais.

2.6 COORDENADAS CENTRADAS NO RAI0

Em algumas situações, é mais conveniente trabalhar com sistema de coordenadas centrada no raio SCCR. No sistema SCCR, dado um raio arbitrário Ω , cujo ponto inicial se encontra em S sobre a superfície Σ_0 fixamos algum ponto ao longo de seu comprimento de arco, e.g., em R , e formamos um sistema de coordenadas ortogonal 2-D, cujos componentes são q_1 e q_2 , em um plano perpendicular Σ_\perp ao raio em q_3 . Nesse sistema os pontos S e R possuem coordenadas $S = (0, 0, -s)$ e $R = (0, 0, 0)$. Desta maneira, um ponto R' situado nas vizinhanças do raio e sobre o plano Σ_\perp apresenta como vetor posição:

$$\hat{r}(q_1, q_2, s) = \hat{r}(0, 0, s) + \vec{\mathbf{e}}_1(s)q_1 + \vec{\mathbf{e}}_2(s)q_2 \quad (2.80)$$

onde os vetores-base \mathbf{e}_1 e \mathbf{e}_2 estão situados sobre o plano Σ_\perp . A direção do terceiro vetor-base $\mathbf{e}_3 = \vec{t}$ coincide com o vetor vagarosidade em R . Usando o sistema SCCR, introduzimos o sistema TDR (CĚRVENÝ, 2001)

$$\frac{d\mathbf{Q}}{ds} = v\mathbf{P}, \quad \frac{d\mathbf{P}}{ds} = -\frac{1}{v^2}\mathbf{VQ} \quad (2.81)$$

onde as matrizes \mathbf{Q} , \mathbf{P} , \mathbf{V} são matrizes 2×2 cujas componentes são definidas por

$$\mathbf{Q}_{IJ} = \left. \frac{\partial q_i}{\partial \gamma_J} \right|_{q_1, q_2=0} \quad \mathbf{P}_{IJ} = \left. \frac{\partial P_i}{\partial \gamma_J} \right|_{q_1, q_2=0} \quad \mathbf{V}_{IJ} = \left. \frac{\partial^2 v}{\partial q_1 \partial q_2} \right|_{q_1, q_2=0} \quad (2.82)$$

onde os índices $I, J = 1, 2$. $\mathbf{V} = \mathbf{V}(R)$ é uma matriz cujos componentes representam derivadas segunda cruzadas do campo de velocidade em coordenadas centradas no raio e $v = \mathbf{V}(0, 0, s)$ é a velocidade ao longo do raio. Matematicamente, \mathbf{Q} é a matriz de transformação de coordenadas do raio para coordenadas centradas no raio e \mathbf{P} é uma matriz de transformação de coordenadas do raio para coordenadas de componentes de vagarosidade do raio. Fisicamente, \mathbf{Q} é a matriz de espalhamento geométrico, enquanto \mathbf{P} não apresenta um significado físico óbvio. Desta maneira, definimos uma matriz $\mathbf{M}_{2 \times 2}$ de derivadas segundas do tempo de trânsito em relação a coordenadas centradas no raio como

$$M_{IJ} = \left. \frac{\partial^2 \tau}{\partial q_I \partial q_J} \right|_{q_1, q_2=0} \quad (2.83)$$

Que é equivalente a escrever $\mathbf{M} = \mathbf{P}\mathbf{Q}^{-1}$, avaliada ao longo do raio. Aqui, levamos em consideração o fato de que $p_I^q = \frac{\partial \tau}{\partial q_J}$, ao longo do raio.

O conhecimento das matrizes dinâmicas do sistema (2.81) é de fundamental importância para o cálculo das amplitudes ao longo de um raio. Em termos dessa quantidade, podemos reescrever (2.65) da seguinte maneira:

$$A(\sigma) = A(\sigma) \sqrt{\frac{\det \mathbf{Q}(\sigma_0)}{\det \mathbf{Q}(\sigma)}} \quad (2.84)$$

2.6.1 Matriz Propagadora II

Definindo a matriz coluna W de dimensão 4×1 , tal que $W = (q_1, q_2, p_1^{(p)}, p_2^{(q)})$. O sistema de traçamento de raio pode ser escrito como:

$$\frac{d}{ds} \mathbf{W} = \mathbf{S} \mathbf{W} \quad (2.85)$$

onde, \mathbf{S} é uma matriz 4×4 dado por:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \bar{0} & \mathbf{I} \\ -\frac{1}{v^2} \mathbf{V} & \bar{0} \end{bmatrix} \quad (2.86)$$

As matrizes $\bar{0}_{2 \times 2}$ e $\mathbf{I}_{2 \times 2}$, são respectivamente, nula e identidade

$$\frac{d}{ds} \mathbf{A} = \mathbf{S} \mathbf{A} \quad (2.87)$$

Sendo que cada coluna de \mathbf{A} obedecem (2.85). Se $\mathbf{A} = \mathbf{I}$ para um ponto inicial S do raio, A é também considerada matriz propagadora (em S). Se \mathbf{A} é uma matriz integral

formada por quatro soluções lineares independentes de (2.85), então é chamada de matriz fundamental.

A matriz propagadora 4×4 $\mathbf{\Pi}(R, S)$ centrada no raio conectado a um ponto inicial S e a um ponto final R pode ser expressa por:

$$\mathbf{\Pi}(R, S) = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1(R, S) & \mathbf{Q}_2(R, S) \\ \mathbf{P}_1(R, S) & \mathbf{P}_2(R, S) \end{bmatrix} \quad (2.88)$$

Onde, \mathbf{Q}_1 e \mathbf{P}_1 são matrizes 2×2 soluções do sistema dinâmico (2.81) com condições iniciais de fonte plana. A matriz \mathbf{Q}_2 e \mathbf{P}_2 são soluções do sistema dinâmico (2.81) com condições iniciais de fonte pontual.

$$\mathbf{\Pi}(S, S) = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (2.89)$$

Se S é contínua, a matriz propagadora satisfaz a regra da cadeia (CĚRVENÝ, 2001). Além disso, $\mathbf{\Pi}$ é simplética (HERSTEIN, 1996).

Como $\mathbf{\Pi}$ é solução de 2.85, assim:

$$\mathbf{W}(R) = \mathbf{\Pi}(R, S)\mathbf{W}(S) \quad (2.90)$$

Para qualquer condição inicial dada em S representada por $\mathbf{W}(S)$. Considerando \mathbf{X} uma matriz 4×2 composta por:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q} \\ \mathbf{P} \end{bmatrix} \quad (2.91)$$

Existe uma solução similar. Assim, o traçamento dinâmico de raios (2.81) pode ser expresso como:

$$\frac{d}{ds}\mathbf{X} = \mathbf{S}\mathbf{X} \quad (2.92)$$

E resolvido por:

$$\mathbf{X}(R) = \mathbf{\Pi}(R, S)\mathbf{X}(S) \quad (2.93)$$

2.6.2 Matriz Propagadora \mathbf{T}

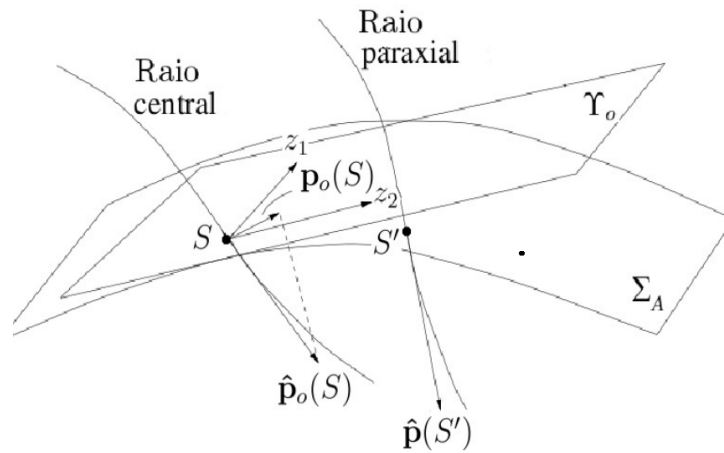
O propagador T desenvolvido no trabalho de Bortfeld (1989) obedece relações similares ao propagador $\mathbf{\Pi}$ descrito na seção (2.6.1). Porém, o propagador \mathbf{T} é definido em relação às superfícies e com formalismo diferente do propagador $\mathbf{\Pi}$, o qual é baseado em uma expansão na frente de onda.

Considerando um raio central que emerge a partir de um ponto S numa superfície Σ_A , conhecida como superfície anterior, e chega a um ponto em R em uma superfície posterior Σ_P . Ambas as superfícies têm sistemas de coordenadas cartesianas locais z_1 e z_2 com as origens fixadas em S e R , respectivamente. A orientação dos sistemas definidas de

modo que a terceira componente coincida com o vetor normal às superfícies em S e R . Os vetores de vagarosidades correspondentes são:

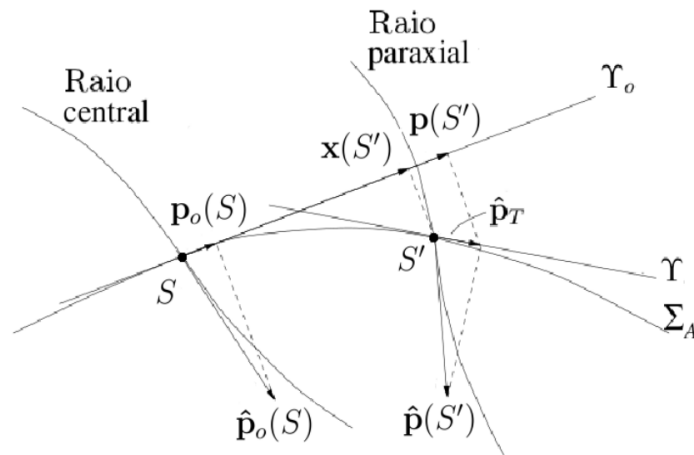
$$\hat{\mathbf{p}}(S) = \frac{\vec{t}}{v(S)} \quad e \quad \mathbf{p}_0(R) = \frac{\vec{t}}{v(R)} \quad (2.94)$$

Figura 2 – Um raio central e um raio paraxial passando por uma superfície anterior Σ_A . Definição de coordenada cartesiana local 2-D (z_1 e z_2).



Fonte: Adaptado de Schleicher et al. (2007)

Figura 3 – Visualização 2D da Figura 2



Fonte: Adaptado de Schleicher et al. (2007)

Um raio paraxial no ponto S' tem coordenadas $\hat{\mathbf{x}}(S) = (x_1, x_2, f(x_1, x_2))^T$ e vagarosidade $\hat{\mathbf{p}}(S') = \frac{\vec{t}(S')}{v(S')}$. Pontos na vizinhança próxima de S' podem ser descritos como $\hat{\mathbf{x}} + d\hat{\mathbf{x}}$ sendo:

$$\hat{\mathbf{x}} = (d\mathbf{x}, \vec{\nabla} f \cdot d\mathbf{x})^T \quad (2.95)$$

No plano Υ_0 os vetores tridimensionais $\hat{\mathbf{x}}(S')$ e $\hat{\mathbf{p}}(S')$ são representados pelos vetores bidimensionais $\mathbf{x}(S')$ e $\mathbf{p}(S')$. A projeção de $\hat{\mathbf{x}}(S')$ no plano Υ_0 é definido em (2.95). Para obter a vazarosidade $\mathbf{p}(S')$, primeiramente $\hat{\mathbf{p}}(S')$ é projetado no plano Υ tangente ao plano anterior, rendendo:

$$\hat{\mathbf{p}}_T = (d\mathbf{p}, \vec{\nabla} f \cdot d\mathbf{p})^\top \quad (2.96)$$

O vetor \mathbf{p} é a projeção do $\hat{\mathbf{p}}_T(S')$ no plano Υ_0 . O procedimento análogo é aplicado na superfície posterior Σ_P .

A relação entre os vetores iniciais $\mathbf{x}(S')$ e $\mathbf{p}(S')$ com os vetores finais $\mathbf{x}(R')$ e $\mathbf{p}(R')$ é expressa pela aproximação de primeira ordem (2.97), que é válida numa vizinhança próxima do raio central.

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(R') &= \mathbf{A}\mathbf{x}(S') + \mathbf{B}(\mathbf{p}(S') - \mathbf{p}_0(S)) \\ \mathbf{p}(R') - \mathbf{p}_0(R) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(S') + \mathbf{D}(\mathbf{p}(S') - \mathbf{p}_0(S)) \end{aligned} \quad (2.97)$$

Onde as matrizes \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} e \mathbf{D} são compostas pelas derivadas:

$$\begin{aligned} A_{IJ} &= \left. \frac{\partial x(R')}{\partial x(S')} \right|_{R,S}, & B_{IJ} &= \left. \frac{\partial x(R')}{\partial p(S')} \right|_{R,S} \\ C_{IJ} &= \left. \frac{\partial p(R')}{\partial x(S')} \right|_{R,S}, & D_{IJ} &= \left. \frac{\partial p(R')}{\partial p(S')} \right|_{R,S} \end{aligned} \quad (2.98)$$

Uma vez que (2.97) tem uma estreita semelhança com (2.88), (2.97) pode ser reescrita usando a Matriz Propagadora de Bortfeld $\mathbf{T}(R, S)$.

$$\begin{bmatrix} x(R') \\ \mathbf{p}(R') - \mathbf{p}_0(R) \end{bmatrix} = \mathbf{T}(R, S) \begin{bmatrix} x(S') \\ \mathbf{p}(S') - \mathbf{p}_0(S) \end{bmatrix} \quad (2.99)$$

$$\mathbf{T}(R, S) = \begin{bmatrix} \mathbf{A}(R, S) & \mathbf{B}(R, S) \\ \mathbf{C}(R, S) & \mathbf{D}(R, S) \end{bmatrix} \quad (2.100)$$

A aproximação de primeira ordem de \mathbf{x} e \mathbf{p} corresponde a uma aproximação de segunda ordem do tempo de trânsito. O diferencial total do tempo de trânsito é dada pela equação (2.101).

$$\begin{aligned} d\tau &= \vec{\nabla}_{R'\tau} \cdot d\hat{\mathbf{x}}(R') + \vec{\nabla}_{S'\tau} \cdot d\hat{\mathbf{x}}(S') \\ &= \mathbf{p}(R') \cdot d\mathbf{p}(R') - \mathbf{p}(S') \cdot d\hat{\mathbf{x}}(S') \\ &= \mathbf{p}_T(R') \cdot d\hat{\mathbf{x}}(R') - \hat{\mathbf{p}}_T(S') \cdot d\hat{\mathbf{x}}(S') \\ &= (\mathbf{p}(R'), \vec{\nabla}_{R'} f \cdot \mathbf{p}(R')) \cdot \left(\vec{\nabla}_{R'} f \cdot \mathbf{x}(R') \right) - \\ &\quad - (\mathbf{p}(S'), \vec{\nabla}_{S'} f \cdot \mathbf{p}(S')) \cdot \left(\vec{\nabla}_{S'} f \cdot \mathbf{x}(S') \right) \\ &\approx \mathbf{p}(R') \cdot d\mathbf{x}(R') - \mathbf{x}(S') \end{aligned} \quad (2.101)$$

A última aproximação visa uma aproximação de segunda ordem de τ , portanto, termos que contenham produtos das derivadas de f são negligenciados. Os sinais foram escolhidos de uma maneira que o tempo de trânsito aumente com a distância na direção de propagação do raio. Agora, $\mathbf{p}(R')$ e $\mathbf{p}(S')$ são expressos em termos das submatrizes de \mathbf{T} .

$$\begin{aligned}\mathbf{p}(S') &= \mathbf{p}_0(S) - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{x}(S') + \mathbf{B}^{-1}\mathbf{x}(R') \\ \mathbf{p}(R') &= \mathbf{p}_0(R) - \mathbf{D}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{x}(R') + [\mathbf{C} - \mathbf{D}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}]\mathbf{x}(R')\end{aligned}\quad (2.102)$$

Assim o tempo de trânsito τ resultante é:

$$\begin{aligned}\tau &= \tau_0 + \mathbf{p}_0(R) \cdot \mathbf{x}(R') - \mathbf{p}_0(S) \cdot \mathbf{x}(S') - \mathbf{x}(S') \cdot \mathbf{B}^{-1}\mathbf{x}(R') \\ &+ \frac{1}{2}\mathbf{x}(S') \cdot \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{x}(S') + \frac{1}{2}\mathbf{x}(R') \cdot \mathbf{D}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{x}(R')\end{aligned}\quad (2.103)$$

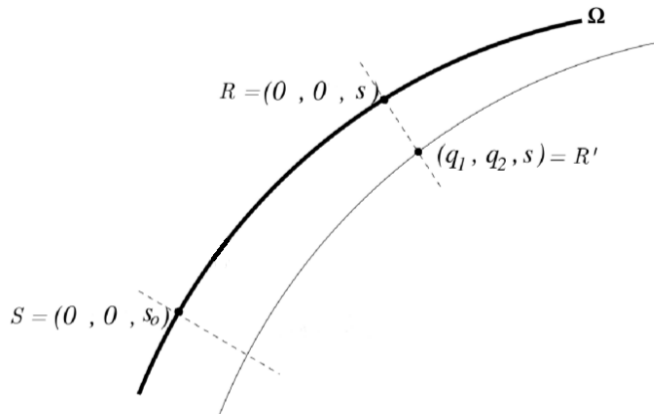
A matriz propagadora \mathbf{T} goza das mesmas características que a matriz $\mathbf{\Pi}$, ou seja, satisfaz a regra da cadeia e simplecticidade. Considerando os tempos paraxiais, em coordenadas cartesianas, válidos apenas em uma vizinhança próxima de um ponto situado no raio (CĚRVENÝ, 2001), como mostra a figura (4):

$$\tau = \tau_0 + p_i^{(x)}(S)x_i(R', S) + \frac{1}{2}H_{ik}M_{kl}H_{jl}x_i(R', S)x_j(R', S)\quad (2.104)$$

onde, $\tau = \tau(R')$, $\tau_0 = \tau(S)$, $p_i^{(x)}$ componentes da vagarosidade em coordenadas cartesianas, $x_i(R', S) = x_i(S)$, $H_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial q_j} = \frac{\partial q_j}{\partial x_i}$ e $q_3 = s$.

As matrizes propagadoras \mathbf{T} e $\mathbf{\Pi}$ podem ser transformadas uma na outra. A relação entre elas podem ser achada aplicando a equação (2.104) na superfície anterior Σ_A e posterior Σ_P , cujo o resultado é a expressão (2.105).

Figura 4 – Definição dos pontos de S , R , e R' . O ponto S está situado arbitrariamente em Ω , R' está situado perto de S , possivelmente fora do raio central. Ponto R está situado na intersecção do raio com um plano perpendicular, passando por Ω .



$$\begin{aligned} \tau &= \tau_0 + \mathbf{p}_0(R') - \mathbf{p}_0(S') \cdot \mathbf{x}(S') \cdot \mathbf{G}(S) \mathbf{Q}_2^{-1} \mathbf{G}^\top(R) \mathbf{x}(R') \\ &\quad - \frac{1}{2} \mathbf{x}(S') \cdot \mathbf{G}(S) \mathbf{F}(S) \mathbf{G}^\top(S) \mathbf{x}(S') + \frac{1}{2} \mathbf{x}(R') \cdot \mathbf{G}(R) \mathbf{F}(R) \mathbf{G}^\top(R) \mathbf{x}(R') \end{aligned} \quad (2.105)$$

Introduzindo a matriz de transformação de coordenadas cartesianas na interface para o sistema cartesiano geral $Z_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial z_j} = \frac{\partial z_j}{\partial x_i}$. Além da matriz \mathbf{Z} , iremos também introduzir a matriz de transformação de coordenadas centradas no raio q_1, q_2 e $q_3 = s$ para coordenadas cartesianas na interface z_1, z_2 e z_3 , ou seja, $\widehat{\mathbf{G}} = \mathbf{Z}^\top \mathbf{H}$ (ČĚRVENÝ, 2001). Os elementos de $\widehat{\mathbf{G}}$ são $G_{kl} = i_k^{(z)} \cdot \vec{e}_l = \frac{\partial z_k}{\partial q_l} = \frac{\partial q_l}{\partial z_k}$ $l = 1, 2, 3$. comparando (2.103) com (2.104), temos:

$$\mathbf{T}(R, S) = \mathbf{X}(R) \mathbf{\Pi}(R, S) \mathbf{G}^\top(S) \mathbf{X}^\top(S) \quad (2.106)$$

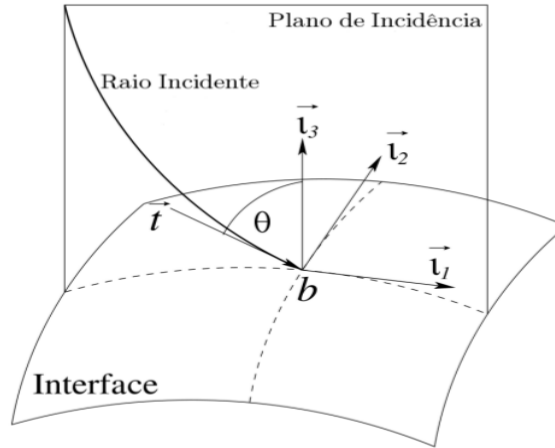
Sendo,

$$\mathbf{G}(R) = \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{G}}^{-1}(R) & \overline{\mathbf{0}} \\ \overline{\mathbf{0}} & \overline{\mathbf{G}}(R) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}(S) = \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{G}}^\top(S) & \overline{\mathbf{0}} \\ \overline{\mathbf{0}} & \overline{\mathbf{G}}^{-1}(S) \end{bmatrix} \quad (2.107)$$

$$\overline{\mathbf{G}} = \begin{bmatrix} \cos(\beta) \cos(\phi) & -\cos(\beta) \sin(\phi) \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix} \quad (2.108)$$

Neste caso, β é o ângulo de incidência entre \vec{i}_3 e \vec{t} . O ângulo ϕ esta disposto entre i_2 e \vec{e}_2 . Veja Figura 5.

Figura 5 – Definição do sistema de coordenadas cartesiano relacionado com uma interface.



Fonte: Pereira (2013)

$$\mathbf{X}(R) = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \overline{\mathbf{0}} \\ \frac{\cos(\beta)(R)}{v(R)} \overline{\mathbf{D}}(R) + \overline{\mathbf{E}}(R) & \mathbf{I} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X}(S) = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \overline{\mathbf{0}} \\ -\frac{\cos(\beta)(R)}{v(R)} \overline{\mathbf{D}}(S) - \overline{\mathbf{E}}(S) & \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (2.109)$$

Cujos os elementos que $\overline{\mathbf{E}}$, são:

$$E_{IJ} = G_{I3} G_{JK} M_{3K} + G_{I3} G_{J3} M_{33} + G_{IK} G_{J3} M_{K3} \quad (2.110)$$

E de $\bar{\mathbf{D}}$:

$$D_{IJ} = Z_{iI} Z_{kJ} \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial x_i \partial x_k} \left[Z_{j3} \left(\frac{\partial \Sigma}{\partial x_j} \right) \right]^{-1} \quad (2.111)$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{G} \mathbf{M} \mathbf{G}^\top + \frac{\cos(\beta)}{v} \mathbf{D} + \mathbf{E} \quad (2.112)$$

Lembrando que Z_{j3} são componentes do vetor normal unitário a interface Σ

3 APROXIMAÇÕES DO CAMPO DE ONDAS

Neste capítulo será abordada a simulação de um campo de ondas, utilizando os fundamentos teóricos dos feixes gaussianos (Apêndice D). Este procedimento é uma aproximação assintótica, tal como o método do raio, produzindo uma aproximação do campo de ondas, mesmo em regiões singulares do modelo de velocidades (CĚRVENÝ, 1983), tais como: regiões cóusticas, regiões críticas, transições de regiões iluminadas para regiões de sombra, etc. O procedimento é baseado na simulação do campo de ondas por um sistema de feixes gaussianos, onde o campo de ondas é gerado por uma fonte em um determinado meio e decomposto em contribuições, correspondendo a raios individuais. Estas contribuições são avaliadas ao longo dos raios pelo método da equação da onda parabólica, fornecendo soluções concentradas na vizinhança dos raios (CĚRVENÝ, 1982; POPOV, 1982). Do ponto de vista físico, as soluções da equação parabólica correspondem aos feixes gaussianos. Desta maneira, o campo de ondas em qualquer ponto do meio é determinado por uma integral de superposição de feixes gaussianos individuais, passando através de uma vizinhança do referido ponto.

3.1 Integral de Superposição de Feixes Gaussianos

Nesta seção será usada a integral de superposição de feixes gaussianos para determinar o campo de ondas $u(R, \omega)$ estimado em determinado ponto de referência R , onde o mesmo se encontra na vizinhança paraxial de um ponto R_γ , localizado ao longo de um raio. É necessária a utilização de uma integral para acumular todas as contribuições de todos os outros raios do campo de ondas contendo seus respectivos pontos de referência R pertencente à vizinhança paraxial quadrática de R_γ , ou seja, uma vizinhança compreendida em torno do raio central na qual a expansão de Taylor até o termo de segunda ordem descreve parâmetros envolvidos no processo com uma determinada precisão. Neste sentido, no domínio da frequência $u(R, \omega)$ é obtido através da seguinte expressão em função das coordenadas do raio (γ_1, γ_2) definidas na superfície inicial como segue (CĚRVENÝ, 2001)

$$u^{(x)}(R, \omega) = \int_{\mathcal{D}} \int \Psi(\gamma_1, \gamma_2) A^{(x)}(R_\gamma) e^{i\omega\tau(R, R_\gamma)} d\gamma_1 d\gamma_2 \quad (3.1)$$

Onde $u^{(x)}(R, \omega)$ representa a componente cartesiana do vetor deslocamento no receptor R , \mathcal{D} denota a região dos parâmetros do raio em questão, $\Psi(\gamma_1, \gamma_2)$ é uma função peso determinada de forma assintótica (BLEISTEIN; COHEN; STOCKWELL, 2000) ou pelo método da diagonalização simultânea (CĚRVENÝ, 2001), $A^{(x)}(R_\gamma) e^{i\omega\tau(R, R_\gamma)}$ representa o campo de ondas (equação (D.2)) com valores de amplitudes complexas oriundo da teoria

do raio de ordem zero e $\tau(R, R_\gamma)$ é o tempo de trânsito paraxial equação (D.1) em R estimado a partir do tempo de trânsito ao longo do raio de referência R_γ .

A representação (3.1) do campo de ondas apresenta algumas vantagens quando comparada à teoria do raio, principalmente a de ordem zero. Em regiões onde predominam zonas de sombra, caústicas e descontinuidades, a superposição de feixes gaussianos descreve um campo regular. No caso das zonas de sombra, o uso de feixes gaussianos prevê um campo regular dentro desta zona a partir de raios que se encontram próximos desta regiões; as cáusticas, por sua vez, são suavizadas, enquanto as descontinuidades se tornam contínuas.

3.2 Superposição de Feixes Gaussianos Refletidos e Restritos ao Volume de Fresnel

Para determinar o domínio \mathcal{D} da integral (3.1), deve-se considerar um raio Ω e dois pontos, S e R , situados no raio. Suponha que o ponto S representa a fonte pontual e ponto R , o receptor. No método do raio, o caminho do raio pode ser interpretado como uma trajetória ao longo da qual a parte de alta frequência da energia da onda sísmica em consideração se propaga a partir da fonte S para o receptor R . A trajetória do raio, no entanto, é apenas uma representação matemática. O campo de ondas em R também é afetada pela estrutura e distribuição de velocidade na vizinhança de Ω .

A região que atinge efetivamente o campo de ondas em R tem sido o objeto de interesse e investigação por um longo tempo. Como resultado de inúmeras experiências, nesta dissertação é proposto que o campo de ondas em R é afetada pela estrutura em alguma vizinhança do raio central que é chamado de volume de Fresnel. O volume de Fresnel, é claro, depende da posição de S e R .

Segundo Schleicher, Tygel e Hubral (2007), as zonas de Fresnel são seções transversais ao volume de Fresnel (tubos de raios), formadas pelo conjunto de pontos de interseções dos raios paraxiais com uma interface durante seu caminho entre a fonte S e receptor R , considerando que a soma dos tempos de trânsito de cada ramo do raio paraxial não deve diferir do tempo de trânsito ao longo do raio central por mais de meio período T da onda monofrequente. Em outras palavras, para uma reflexão com um par fixo fonte-receptor (S, R) .

$$| \tau_1(\bar{M}, S) + \tau_2(\bar{M}, S) - \tau(S, R) | \leq \frac{T}{2} = \frac{1}{2f} \quad (3.2)$$

Utilizando a equação (2.103) (SCHLEICHER; TYGEL; HUBRAL, 2007) deduziram uma fórmula conveniente para o cálculo da zona de Fresnel e da zona de Fresnel projetada

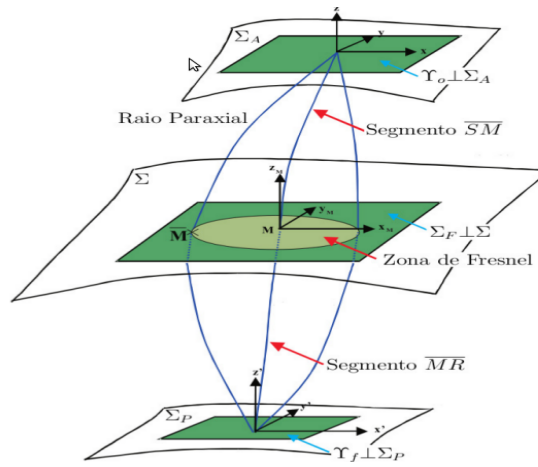
$$| \vec{x}_M^\top \mathbf{H}_F \vec{x}_M | \leq T \quad (3.3)$$

Onde \mathbf{H}_F é chamada de matriz da primeira zona de Fresnel. Em termos das sub-matrizes propagadoras $\mathbf{T} = \mathbf{T}_2\mathbf{T}_1$, onde a matriz \mathbf{T}_1 está relacionada ao ramo do raio de S até \overline{M} e a matriz \mathbf{T}_2 está associada ao ramo do raio de \overline{M} até R , \mathbf{H}_F pode ser expressa como:

$$\mathbf{H}_F = \mathbf{D}_1\mathbf{B}_1^{-1} + \mathbf{B}_2^{-1}\mathbf{A}_2 \quad (3.4)$$

Sendo \mathbf{D}_1 e \mathbf{B}_1 se referem ao segmento \overline{SM} da fonte S ao ponto \overline{M} , \mathbf{B}_2 e \mathbf{A}_2 se referem ao segmento \overline{MR} do ponto \overline{M} ao receptor R (Figura 6).

Figura 6 – Sistema sísmico em conjunto com o volume de Fresnel. Em cada superfície de interesse do sistema são estabelecidos sistemas de coordenadas cartesianas 2-D locais



Fonte: Ferreira (2007)

Geometricamente, para uma reflexão especular, a zona de Fresnel projetada é definida como uma região em um plano Σ_P Figura 7, localizado sobre a superfície de aquisição de dados. A zona de Fresnel projetada (SCHLEICHER; TYGEL; HUBRAL, 2007) é utilizada como critério para a determinação do número de raios paraxiais necessários a integral (3.1) de superposição de feixes gaussianos. A zona de Fresnel pode ser projetada de sua posição em profundidade em direção superfície de aquisição de dados através de

$$|(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}_0)^\top \mathbf{H}_P(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}_0)| \leq T \quad (3.5)$$

Sendo \mathbf{H}_P matriz da zona de Fresnel projetada e $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2)^\top$ um vetor-posição sobre a zona de fresnel projetada

$$\mathbf{H}_P = \boldsymbol{\Lambda}^\top \mathbf{H}_F \boldsymbol{\Lambda} \quad (3.6)$$

Sendo $\boldsymbol{\Lambda} = \mathbf{B}_1^{-1}\boldsymbol{\Gamma}_S + \mathbf{B}_2^{-1}\boldsymbol{\Gamma}_R$. As matrizes $\boldsymbol{\Gamma}_S$ e $\boldsymbol{\Gamma}_R$ são chamadas de matrizes de configuração, que no caso das aplicações da tese será usada a configuração tiro-comum $\boldsymbol{\Gamma}_S = \bar{\mathbf{0}}$ e $\boldsymbol{\Gamma}_R = \mathbf{I}$.

No caso 2-D, a expressão da zona de fresnel projetada é da forma:

$$|(\xi - \xi_0)^2| \leq T \quad (3.7)$$

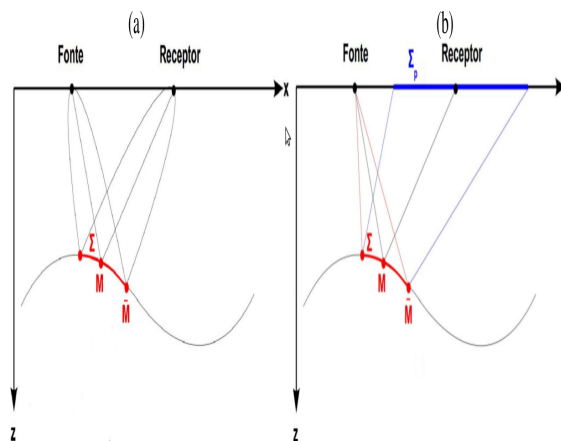
Onde, f é a frequência dominante da onda mono-frequente e H_P é o elemento $H_{P_{i,j}} = 1$ da matriz da zona de fresnel projetada (3.6). Considerando apenas períodos não-negativos e apenas a região de fronteira da zona de Fresnel projetada:

$$|\xi - \xi_0| H_p = T \quad (3.8)$$

Note que $\xi - \xi_0$ é o raio da circunferência que delimita a zona de Fresnel projetada. Assim, denotando $\xi - \xi_0 = r_{zp}$, (CRUZ; PEREIRA; FERREIRA, 2012) concluiu que:

$$r_{zp} = \sqrt{\frac{T}{H_p}} \quad \text{ou} \quad r_{zp} = \sqrt{\frac{1}{f H_p}} \quad (3.9)$$

Figura 7 – Ilustração em 2-D da região chamada interface da zona de Fresnel (b) Ilustração em 2-D da zona de Fresnel projetada



Fonte: Pereira (2013)

4 MIGRAÇÃO KIRCHHOFF-GAUSSIAN-BEAM (KGB)

Este capítulo descreverá a modificação do operador de empilhamento de difrações para a migração Kirchhoff pré-empilhamento com verdadeira amplitude (SCHLEICHER; TYGEL; HUBRAL, 1993), a fim de utilizar o formalismo de feixes gaussianos neste tipo de procedimento de imageamento. O objetivo principal do presente capítulo é mostrar que, com a introdução dos feixes gaussianos no formalismo de migração, é preciso modificar o operador de empilhamento de difrações (SCHLEICHER; TYGEL; HUBRAL, 1993), principalmente na sua interpretação física do problema do imageamento.

4.1 MIGRAÇÃO KIRCHHOFF COM VERDADEIRAS AMPLITUDES

Seja um meio 3-D de coordenadas cartesianas e considerando o modelo de terra como um sistema heterogêneo isotrópico de camadas, separadas por interfaces suaves e curvas, sendo cada camada constituída por uma distribuição arbitrária 3-D de velocidade. Para simplificar, consideramos uma superfície plana como a interface do limite superior do modelo de terra, onde podemos distribuir o conjunto de fontes sísmicas e receptores, utilizando-se o vetor de parâmetros $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2)^\top$ em coordenadas cartesianas 2-D, expresso pelas relações:

$$\mathbf{x}_s = (\xi_1, \xi_2) \quad e \quad \mathbf{x}_g = (\xi_1, \xi_2) \quad (4.1)$$

Por meio da teoria do raio de ordem zero, podemos representar a componente principal da reflexão primária do campo de ondas sísmicas a partir de fontes pontuais $S(\boldsymbol{\xi})$, ou seja, o deslocamento de partículas na direção do raio emergente no receptor $G(\boldsymbol{\xi})$, após uma reflexão no ponto M , em profundidade, com o tempo de reflexão $\tau_R(\boldsymbol{\xi})$, pela seguinte expressão no domínio da frequência (SCHLEICHER; TYGEL; HUBRAL, 1993)

$$U(\boldsymbol{\xi}, \omega) = \widehat{W}(\omega)u(\boldsymbol{\xi})exp[i\omega\tau_R(\boldsymbol{\xi})] \quad (4.2)$$

Sendo o pulso sísmico da fonte no domínio da frequência $\widehat{W}(\omega)$, que no domínio do tempo é o pulso analítico da fonte, ou seja, composto por uma parte real representado pelo pulso da fonte e sua transformada de Hilbert como a parte imaginária, que é reproduzido para todo o experimento sísmico. Além disso, a amplitude sísmica é:

$$u(\boldsymbol{\xi}) = \frac{C_t R_c}{G_s} \quad (4.3)$$

Onde, C_t, R_c, G_s são, respectivamente, a perda total das transmissões, o coeficiente de reflexão de ondas planas no ponto de reflexão e o fator de espalhamento geométrico

complexo normalizado pelo raio de reflexão. No domínio do tempo, o campo de onda sísmica $U(\boldsymbol{\xi}, t)$ e os dados migrados em verdadeira amplitude $U_{TA}(t)$, respectivamente, são:

$$U(\boldsymbol{\xi}, t) = u(\boldsymbol{\xi})W(t - \tau_R(\boldsymbol{\xi})) \quad e \quad U_{TA}(t) = G_s U(\boldsymbol{\xi}, t + \tau_R(\boldsymbol{\xi})) = C_t R_c W(t) \quad (4.4)$$

As fórmulas na equação (4.4) só são válidas na ausência de superfície livre, por outro lado, devemos considerar seu efeito para corrigir a migração dos dados sísmicos (SCHLEICHER; TYGEL; HUBRAL, 2007). O volume de migração consiste de pontos dentro do modelo de velocidade utilizado para a migração em profundidade, distribuídos através de uma malha retangular 3-D. A abertura de migração resulta de um conjunto de pares fonte-receptor especificados pela configuração de medição dentro de uma malha 2-D de pontos no plano $\boldsymbol{\xi}$. A soma dos tempos de trânsito a partir da fonte S e receptor G ao ponto arbitrário M na subsuperfície ($\tau_S(S(\boldsymbol{\xi}), M)$ e $\tau_G(G(\boldsymbol{\xi}), M)$) respectivamente, serve para expressar o empilhamento na superfície de difração, chamada de superfície Huygens:

$$\tau_D(\boldsymbol{\xi}, M) = \tau_S(S(\boldsymbol{\xi}), M) + \tau_G(G(\boldsymbol{\xi}), M) \quad (4.5)$$

A migração convencional Kirchhoff pré-empilhamento na profundidade em verdadeira amplitude, para um ponto fixo M, o tempo de trânsito $\tau_D(\boldsymbol{\xi}, M)$ nos fornece a superfície de Huygens, ao longo do qual o campo de onda sísmica $\hat{U}(\boldsymbol{\xi}, M)$ é somado de forma ponderada, sendo expresso no domínio da frequência pela integral de empilhamento de difrações (SCHLEICHER; TYGEL; HUBRAL, 1993) :

$$\hat{I}(M, \omega) = \frac{-i\omega}{2\pi} \int \int_{\mathcal{A}} d\boldsymbol{\xi} w(M, \boldsymbol{\xi}) U(\boldsymbol{\xi}, \omega) \exp[i\omega\tau_D(\boldsymbol{\xi}, M)] \quad (4.6)$$

Ao usar a teoria do raio de ordem zero na equação (4.2) para representar a componente principal do campo de ondas sísmicas, Schleicher, Tygel e Hubral (2007) obtiveram a função de ponderação adequada $w(M, \boldsymbol{\xi})$ aplicando o método da fase estacionária (BLEIS-TEIN, 1984) na integral de empilhamento de difrações. Dentro da abertura de migração \mathcal{A} todos os vetores de parâmetro $\boldsymbol{\xi}$, especificam as posições fonte-receptor. Para a integral em (4.6), a principal contribuição vem do ponto estacionário $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}^*$, onde tem-se que $\tau_D(\boldsymbol{\xi}^*) = \tau_R(\boldsymbol{\xi}^*)$ e $\nabla\tau_D(\boldsymbol{\xi}^*) = \nabla\tau_R(\boldsymbol{\xi}^*)$ fornecendo o coeficiente de reflexão do ponto em subsuperfície. Nos outros casos, as avaliações assintóticas são contribuições provenientes dos limites de migração do operador, será atenuada por alguma função "taper" na vizinhança da abertura de migração.

Ao considerar um intervalo regular espacial $\Delta\xi$ de fontes e receptores, podemos expressar no domínio do tempo a integral de empilhamento da difração, pela forma discreta homóloga, como:

$$I(M, t = 0) = \frac{-1}{2\pi} (\Delta\xi)^2 \sum_{j=1}^{m+1} \sum_{k=1}^{n+1} w_{jk}(M, \xi_1^j, \xi_2^k) \dot{U}_{jk}[\xi_1^j, \xi_2^k, t + \tau D(M, \xi_1^j, \xi_2^k)] \quad (4.7)$$

O símbolo \dot{U} significa derivada temporal de primeira ordem. A determinação de cada fonte e receptor de coordenadas espaciais na abertura de migração é dada pelas relações:

$$\xi_1^j = \xi_{o1} + (j - 1)\Delta\xi, \quad j = 1, \dots, m + 1 \quad e \quad \xi_2^k = \xi_{o2} + (k - 1)\Delta\xi, \quad k = 1, \dots, n + 1 \quad (4.8)$$

Iniciando do ponto inicial com coordenadas $\xi_o = (\xi_{o1}, \xi_{o2})$. Ao assumir, a priori, um modelo de velocidade conhecido, a função de ponderação é calculada pelo traçamento dinâmico de raios que depende do ponto M na profundidade, para coordenadas pontuais na abertura de migração \mathcal{A} . Os dados de entrada no processo de empilhamento de difração é a extensão complexa (sinal analítico) da derivada temporal de primeira ordem aplicadas às componentes principais computadas de todo dados sísmico 3-D observado.

4.2 MIGRAÇÃO KGB COM VERDADEIRAS AMPLITUDES

Nos anos recentes encontram-se na literatura geofísica muitos estudos acerca da superposição de feixes gaussianos como solução alternativa da equação da onda sísmica (CĚRVENÝ, 1982; POPOV, 1982; CĚRVENÝ, 2001; POPOV, 2002; NOWACK, 2003; PEREIRA; CRUZ; FERREIRA, 2011; CRUZ; PEREIRA; FERREIRA, 2012). A principal vantagem do método de feixes gaussianos, isto é, a regularidade da determinação do campo de ondas mesmo na presença de cáustica ou zonas de sombra, tem também atraído a atenção de muitos pesquisadores que trabalham com imageamento sísmico (HILL, 1990; HILL, 2001; ALBERTIN; YINGST; KITSCHENSID, 2004; PROTASOV, 2005; FERREIRA; CRUZ, 2009; GRAY; BLEISTEIN, 2009; POPOV et al., 2010).

O algoritmo apresentado por Hill (2001), sendo atualmente o trabalho mais referenciado, tem por objetivo obter uma imagem sísmica migrada em profundidade usando a integral de superposição de feixes gaussianos como representação da função de Green. As amplitudes dos dados sísmicos são ponderadas por uma função peso gaussiana, com largura previamente determinada, dentro de um subconjunto de dados selecionado, decomposto por ondas planas a partir do centro do feixe e somados no domínio *slant stack*, sendo a migração feita no domínio da profundidade usando o princípio de imageamento (CLAERBOUT, 1985). O método *slant stack* considera que o registro foi obtido a partir de ondas planas, assim o domínio *slant stack* é a decomposição do sinal em diferentes direções de propagação da onda. Os dados em tal domínio, são tratados no espaço (frequência x vagarosidade horizontal), sendo o processo semelhante a uma migração baseada em ondas planas, mas com amplitudes e tempos de trânsitos complexos. Este algoritmo apesar de ser estruturado para um modelo 3-D, aplica-se apenas no domínio afastamento fonte-receptor constante. Devido ao fato do tratamento dos dados ser feito no domínio da vagarosidade horizontal, há a necessidade de otimizar o intervalo de discretização do parâmetro vagarosidade, pois o mesmo depende das frequências mais baixa e mais alta e

da largura dos feixes gaussianos, tornando o processo bastante sensível a problemas de *alias*.

Seguindo um procedimento de migração similar ao usado por Sun et al. (2000), Ferreira e Cruz (2009) propuseram uma nova abordagem para a migração em profundidade usando a aproximação do campo de ondas pela superposição de feixes gaussianos. Neste novo algoritmo trata-se da migração 3-D em profundidade para arbitrárias configurações de aquisição de dados, com preservação de amplitudes. O algoritmo é constituído por dois empilhamentos em cascata, sendo o primeiro a tratar de um *beam stack* realizado por uma integral de superposição de feixes gaussianos, diferindo esta etapa com a mostrada pelo (HILL, 2001) devido aos dados serem integrados ao longo de curvas hiperbólicas, em vez de linhas retas. O segundo estágio da migração KGB é o empilhamento de difrações tipo Kirchhoff, com as respectivas amplitudes devidamente ponderadas a fim de preservar a informação de amplitude.

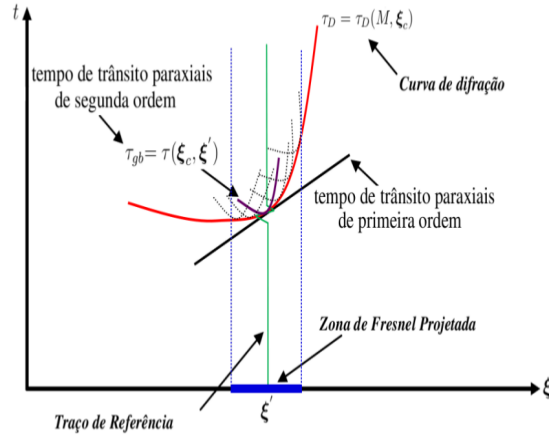
Para a obtenção de ponto na imagem sísmica pela migração tipo KGB, usa-se a mesma estratégia no empilhamento de difração para cada ponto M no volume de migração, ou seja, a soma ponderada ao longo da superfície Huygens na equação (4.6). Na migração Kirchhoff, é necessário o uso do “*two point ray tracing*” para calcular os tempos de trânsito a partir da fonte e do receptor na superfície de aquisição até o ponto M no volume de migração. De maneira análoga à migração Kirchhoff usando feixes proposta por Hill (2001), incluímos na estratégia de migração a soma de um subconjunto de dados de registro sísmico (*beam dataset*), ao longo de uma superfície estimada de tempo de trânsito paraxiais de segunda ordem a partir dos tempos de trânsito da superfície de Huygens (Figura 8). O resultado de cada feixe é acumulado na superfície de Huygens, que depois é usada como entrada na integral de empilhamento da difração. A migração KGB tem a forma de dois processos de empilhamento em cascata:

1. Para um ponto selecionado M no volume de migração \mathcal{V} em relação às coordenadas da fonte e do receptor, na abertura de migração \mathcal{A} para uma configuração de aquisição sísmica, calculamos a função de tempo de trânsito $\tau_D = \tau_D(M, \boldsymbol{\xi})$ da superfície de Huygens;
2. Para um ponto selecionado P da superfície Huygens, usando a integral com a mesma forma de sobreposição de feixes Gaussianos com domínio \mathcal{D} , somamos as amplitudes dos traços sísmicos com a ponderação (chamada de *gaussian beam stack - GBS*) no vetor de parâmetros $\boldsymbol{\xi}' \in \mathcal{D}$, ao longo de uma superfície de tempo de trânsito paraxial de segunda ordem complexo $\tau_{gb} = \tau(\boldsymbol{\xi}_c, \boldsymbol{\xi}')$ (chamado de *beam stack surface*), cuja a parte real é a aproximação de segunda ordem do tempo de trânsito de reflexão e a parte imaginária é o fator gaussiano presente na amplitude observada;
3. Usando a integral tipo Kirchhoff de abertura \mathcal{A} , somamos ao longo da superfície

Huygens $\tau_D(M, \xi_c)$ (chamada de *diffraction stack*) as amplitudes sísmicas obtidas no processamento de *beam stack surface*;

4. finalmente, acumulamos o resultado do empilhamento da difração no ponto M no volume de migração \mathcal{V} .

Figura 8 – Representação esquemática 2-D do processo de empilhamento das amplitudes utilizando os feixes Gaussianos



Fonte: Adaptado de Costa (2012)

A integral de empilhamento de difração (4.6), a integral de empilhamento do feixe com mesmo formulação matemática que a integral de superposição de feixes gaussianos dada pela equação (3.1) delimitada pela zona de Fresnel projetada, com a funções peso Ψ devidamente calculada no traçamento de raios e utilizando as amplitudes fonecidas pelos dados sísmicos, podemos escrever uma maneira conveniente de migração KGB com verdadeiras amplitudes na profundidade (Apêndice C).

$$\begin{aligned} \hat{I}(M, \omega) &= \frac{-i\omega}{2\pi} \int \int_{\mathcal{A}} d\xi_{1c} d\xi_{2c} w_b(M, \xi_c, \omega) \exp[i\omega\tau_D(M, \xi_c)] \\ &= \int \int_{\mathcal{D}} d\xi'_{1c} d\xi'_{2c} (\cos \alpha'_c \cos \alpha'_G)^{-1} [\det \mathbf{H}_p(\xi'_{1c}, \xi'_{2c})]^{1/2} \widehat{W}(\omega) \\ &\quad u(\xi') \exp[-i\omega\tau_{gb}(\xi_c, \xi')] \end{aligned} \quad (4.9)$$

Consideramos que o domínio da integral interna em (4.9) é a vizinhança paraxial do vetor de parâmetro ξ'_c na superfície de aquisição, tais que $\mathcal{D} = \{\xi'; |\xi' - \xi_c| \leq \delta_F\}$, com $\delta_F = \delta_{max}$, ou seja, o extremo da desigualdade:

$$|\delta^\top \mathbf{H}_p \delta| \leq T \quad (4.10)$$

Onde \mathbf{H}_p e T são as matrizes 2×2 da primeira zona Fresnel projetada (SCHLEICHER; TYGEL; HUBRAL, 2007), e o período dominante dos dados sísmicos, respectivamente. Ao

utilizar essas restrições, considera-se na integral de empilhamento dos feixes gaussianos apenas as contribuições das amplitudes de campo de onda que emergem dentro da primeira zona de Fresnel projetada na superfície de aquisição.

A integral de empilhamento de difração na equação (4.9) acumula as contribuições de todos os conjuntos de feixes com vetor de parâmetro $\boldsymbol{\xi}_c$ calculado a partir da integral de empilhamento do feixe. O intervalo discreto $\Delta\boldsymbol{\xi}_c$ entre os centros do feixe deve obedecer aos mesmos critérios utilizados na migração Kirchhoff em profundidade pré-empilhamento, porque cada centro do feixe de coordenadas corresponde a um ponto em uma superfície de Huygens.

Na equação (4.9), o domínio \mathcal{D} é uma grade retangular 2-D dos pontos localizados na superfície de aquisição no intervalo de dados sísmicos registrados. No domínio \mathcal{D} , assumimos todas as amplitudes do conjunto de traços sísmicos, que contribuem para o traço sísmico dos dados de entrada na migração Kirchhoff. Na migração KGB o comprimento do domínio deve obedecer aos seguintes critérios:

- Deve ser limitada pelo intervalo de validade da aproximação paraxial de reflexão do tempo de trânsito;
- Deve corresponder ao comprimento da primeira zona de Fresnel projetada. Assim, controla-se fisicamente o número de traços sísmicos na integral *gaussian beam stack* no processo de migração KGB.

A integral da equação (4.9) pode ser reescrita de uma maneira mais simples:

$$\hat{I}(M, \omega) = \frac{-i\omega}{2\pi} \int \int_{\mathcal{A}} d\boldsymbol{\xi}_c w_b(M, \boldsymbol{\xi}, \omega) \hat{U}(\boldsymbol{\xi}, \omega) \quad (4.11)$$

sendo:

$$\hat{U}(\boldsymbol{\xi}, \omega) = \int \int_{\mathcal{A}} d\boldsymbol{\eta} (\cos \alpha'_S \cos \alpha'_G)^{-1} \sqrt{\det \mathbf{H}_p(\boldsymbol{\xi}')} \widehat{W}(\omega) u(\boldsymbol{\xi}') \exp[i\omega\tau_{dif}(\boldsymbol{\xi}_c, \boldsymbol{\eta}, M)] \quad (4.12)$$

Para definir as coordenadas de integração, usa-se na equação (4.12) a relação de transformação do vetor posição da projeção normal do ponto de reflexão sobre o plano tangente ao refletor na profundidade para as coordenadas da primeira zona de Fresnel projetada. Assim, as coordenadas do vetor de parâmetros $\boldsymbol{\eta}$ na superfície da Terra, está sujeita à igualdade dada por:

$$\boldsymbol{\eta} = \mathbf{H}_p^{-1}(\boldsymbol{\xi}_c) \boldsymbol{\Lambda}^\top \mathbf{x}_r. \quad (4.13)$$

Com a matriz $\Lambda_{2 \times 2}$ referente à geometria de aquisição descrita na equação 3.6.

$$\boldsymbol{\Lambda} = \mathbf{B}^{-1} \boldsymbol{\Gamma}_s + \mathbf{B}_2^{-1} \boldsymbol{\Gamma}_R \quad (4.14)$$

Onde os elementos de valores reais das matrizes 2×2 são derivadas parciais de segunda ordem dos tempos de trânsito a partir da fonte e do receptor para o ponto selecionado na profundidade avaliada no ponto de reflexão.

A diferença entre o tempo de trânsito de difração e reflexão é a função do termo exponencial da integral na equação (4.12) é expresso por $\tau_{dif}(\boldsymbol{\xi}_c, \boldsymbol{\eta}, M) = \tau_D(\boldsymbol{\xi}_c, \boldsymbol{\eta}, M) - \tau_{gb}(\boldsymbol{\xi}_c, \boldsymbol{\eta}, M)$. Tendo em vista a análise assintótica da integral na equação (4.12), podemos expandir a função da diferença de tempos de trânsito em série de Taylor de segunda ordem para as condições da fase estacionária, a partir dos parâmetros calculados nos pontos críticos $\boldsymbol{\xi}_c = \boldsymbol{\xi}^*$ e $\boldsymbol{\eta}^* = 0$

$$\tau_{dif}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}; M) = \tau_{dif}(\boldsymbol{\xi}^*, \boldsymbol{\eta}^* = 0; M) + \frac{1}{2}(\boldsymbol{\xi}_c - \boldsymbol{\xi}^*)^\top \mathbf{H}_{\boldsymbol{\xi}_c}(\boldsymbol{\xi}_c - \boldsymbol{\xi}^*) + \frac{1}{2}\boldsymbol{\eta}^\top \mathbf{H}_{\boldsymbol{\eta}}(\boldsymbol{\eta}^* = 0)\boldsymbol{\eta} \quad (4.15)$$

No ponto crítico, $\boldsymbol{\xi}_c = \boldsymbol{\xi}^*$, temos a matriz Hessiana 2×2 com valores complexos:

$$\mathbf{H}_{\boldsymbol{\xi}^*} \equiv \mathbf{M}_{\Delta}(\boldsymbol{\xi}^*) = -[\mathbf{H}_{\boldsymbol{\xi}_c^*} - \mathbf{H}_D(\boldsymbol{\xi}_c^*)] \quad (4.16)$$

Em $\boldsymbol{\eta}^* = 0$ a matriz Hessiana 2×2 com valores reais:

$$\mathbf{H}_{\boldsymbol{\eta}}(\boldsymbol{\eta}^* = 0) \equiv \mathbf{H}_p(\boldsymbol{\xi}' = \boldsymbol{\xi}_c) \quad (4.17)$$

A partir da solução assintótica dada pelo método de diagonalização simultânea aplicado na integral interna do operador *Kirchhoff-Gaussian-Beam* na equação (4.9), reescrevemos o operador *KGB* como:

$$\begin{aligned} \hat{I}(M, \omega) &\approx \frac{\omega}{2\pi} \int \int_{\mathcal{A}} d\boldsymbol{\xi}_c \left[\frac{2\pi}{\omega} \right] w_b(\boldsymbol{\xi}_c, M) (\cos \alpha_s^c \cos \alpha_G^c)^{-1} \widehat{W}(\omega) u(\boldsymbol{\xi}_c) \\ &\times \exp[i\omega\phi(\boldsymbol{\xi}_c, M)] \exp \left[\frac{-i\omega}{2} \left(1 - \frac{\text{sgn}\mathbf{H}_p(\boldsymbol{\xi}_c)}{2} \right) \right] \end{aligned} \quad (4.18)$$

Sendo a função $\text{sgn}(\mathbf{H}_p) = \text{sgn}(\lambda_1) + \text{sgn}(\lambda_2)$, com λ_I , $I = 1, 2$ os autovalores reais não nulos da matriz 2×2 da primeira zona de Fresnel projetada. Calculamos a fase, $\phi(\boldsymbol{\xi}_c, M) = \tau_{dif}(\boldsymbol{\xi}_c^*, M) + \frac{1}{2}(\boldsymbol{\xi}_c - \boldsymbol{\xi}_c^*)^\top \mathbf{M}_{\Delta}(\boldsymbol{\xi}_c^*)(\boldsymbol{\xi}_c - \boldsymbol{\xi}_c^*)$, para a partir de parâmetros do raio estacionário no ponto crítico $\boldsymbol{\xi}_c^*$, considerando $\tau_{dif}(\boldsymbol{\xi}_c^*, M) = \tau_D(\boldsymbol{\xi}_c^*, M) - \tau(\boldsymbol{\xi}_c^*)$ onde $\tau_R(\boldsymbol{\xi}_c^*)$ é o tempo de trânsito de reflexão dentro do feixe.

Assumindo que a matriz Hessiana 2×2 com valores complexos $\mathbf{M}_{\Delta} = \mathbf{M}_{\Delta}(\boldsymbol{\xi}_c^*)$ é simétrica e não singular, i.e., $\det \mathbf{M}_{\Delta} \neq 0$ no ponto crítico $\boldsymbol{\xi}_c$, com a parte imaginária positiva-definida, para alta frequência, o resultado do método da diagonalização simultânea (CĚRVENÝ, 2001) aplicado em equação (4.18) resulta em:

$$\begin{aligned} \hat{I}(M, \omega) &\approx \frac{2\pi}{\omega} W(\omega) w_b(\boldsymbol{\xi}_c^*, M, \omega) [v_s(\boldsymbol{\xi}_c^*) v_g(\boldsymbol{\xi}_c^*) p_{sz}(\boldsymbol{\xi}_c^*) p_{gz}(\boldsymbol{\xi}_c^*)]^{-1} \\ &\times \frac{U_o^\Omega C_t R_c}{G_S^B \sqrt{\det \mathbf{M}_{\Delta}(\boldsymbol{\xi}_c^*)}} \exp \left[i\omega \tau_{dif}(\boldsymbol{\xi}_c^*, M) - \frac{-i\pi}{2} \left(1 - \frac{\text{sgn}\mathbf{H}_p(\boldsymbol{\xi}_c)}{2} \right) \right] \end{aligned} \quad (4.19)$$

Onde os pares (v_s, v_g) e (p_{sz}, p_{gz}) são as velocidades da onda P e os elementos verticais de vetores vagarosidade na fonte e no receptor na posição do ponto crítico, respectivamente.

O fator G_S^B é o espalhamento geométrico complexo do feixe gaussiano normalizado. Para obter da equação (4.19) a estimativa do coeficiente de reflexão, podemos considerar a amplitude inicial unitária, coeficiente de transmissão unitário, a velocidade e densidade constante ao longo da superfície da Terra, que nos levam a definir a função de ponderação para o *KGB*, como:

$$w_b(\boldsymbol{\xi}_c^*, M, \omega) = -\frac{i\omega}{2\pi} [v_s(\boldsymbol{\xi}_c^*)v_g(\boldsymbol{\xi}_c^*)p_{sz}(\boldsymbol{\xi}_c^*)p_{gz}(\boldsymbol{\xi}_c^*)]G_S^B \quad (4.20)$$

$$\times \sqrt{\det \mathbf{M}_\Delta(\boldsymbol{\xi}_c^*)} \exp \left[\frac{i\pi}{2} \left(1 - \frac{\text{sgn} \mathbf{H}_P(\boldsymbol{\xi}_c)}{2} \right) \right]$$

Usando na equação (4.20) as definições do espalhamento geométrico para um feixe gaussiano com condições fonte inicial pontual. Para uma coordenada do feixe central e um ponto arbitrário em profundidade temos a função peso expressa por:

$$w_b(\boldsymbol{\xi}_c, M, \omega) = \frac{i\omega v_s(\boldsymbol{\xi}_c^*)v_g(\boldsymbol{\xi}_c^*)p_{sz}(\boldsymbol{\xi}_c)p_{gz}(\boldsymbol{\xi}_c) |h(\boldsymbol{\xi}_c, M)|}{2\pi |\nabla\tau_S(\boldsymbol{\xi}_c, M) + \nabla\tau_G(\boldsymbol{\xi}_c, M)| A_S(\boldsymbol{\xi}_c, M)A_G(\boldsymbol{\xi}_c, M)} \quad (4.21)$$

$$\times \exp \left[\frac{i\omega}{2} \left(1 - \frac{\text{sgn} \mathbf{H}_P(\boldsymbol{\xi}_c)}{2} \right) \right]$$

onde $h(\boldsymbol{\xi}_c, M)$ é conhecido como determinante de Beylkin. $\nabla\tau_S$ e $\nabla\tau_G$ são os gradientes das funções dos tempos de trânsito reais dos dois ramos do raio que começam na origem e nas posições de receptor, respectivamente, avaliadas em um ponto de profundidade M no volume de migração.

A_S e A_G correspondem as amplitudes complexas normalizadas ao longo dos dois ramos de raios a partir de posições da fonte e do receptor para ponto na profundidade. Sendo as mesmas calculadas pela aproximação paraxial dos feixes gaussianos.

A migração *KGB* matematicamente expressa pela equação (4.9), no domínio do tempo se torna:

$$I(M, t = 0) = \frac{1}{4\pi^2} \int \int_{\mathbf{A}} d\boldsymbol{\xi}_c w_f(\boldsymbol{\xi}_c, M) \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} [\boldsymbol{\xi}_c, t + \tau_D(\boldsymbol{\xi}_c, M)] \quad (4.22)$$

onde $w_f = \frac{2\pi}{i\omega} \omega_b$ e $U(\boldsymbol{\xi}_c, t)$ é a transformada inversa de Fourier do dado empilhado pelos feixes gaussianos na integral interna da equação (4.12) dada por:

$$U(\boldsymbol{\xi}_c, t) = \int_D \int d\boldsymbol{\xi}'_1 d\boldsymbol{\xi}'_2 (\cos \alpha'_S \cos \alpha'_G)^{-1} [-\det \mathbf{H}_P(\boldsymbol{\xi}'_1, \boldsymbol{\xi}'_2)]^{1/2} u(\boldsymbol{\xi}') W(t - T(\boldsymbol{\xi}_c, \boldsymbol{\xi}')) \quad (4.23)$$

Usando a aproximação de que as principais contribuições para a integral interna vêm de amplitudes com coordenadas perto da fonte e do receptor com o vetor de parâmetro $\boldsymbol{\xi}_c$, ou seja, o centro do feixe de coordenadas, implementamos o algoritmo de *KGB* no domínio do tempo com base na equação (4.24) na forma discreta:

$$I(M, t = 0) = \frac{1}{4\pi^2} \nabla \boldsymbol{\xi}_c^2 \sum_{j=1}^{m+1} \sum_{k=1}^{n+1} w_f^{jk}(M, \boldsymbol{\xi}_{1c}^j, \boldsymbol{\xi}_{2c}^k) U_{jk}[\boldsymbol{\xi}_{1c}^j, \boldsymbol{\xi}_{2c}^k, t + \tau_D(\boldsymbol{\xi}_{1c}^j, \boldsymbol{\xi}_{2c}^k)] \quad (4.24)$$

$$U_{jk}(\boldsymbol{\xi}_{1c}^j, \boldsymbol{\xi}_{2c}^k, t) = \sqrt{-\det \mathbf{H}_P^{jk}(M, \boldsymbol{\xi}_{1c}^j, \boldsymbol{\xi}_{2c}^k)} [\cos \alpha_{Sjk}^c(M, \boldsymbol{\xi}_{1c}^j, \boldsymbol{\xi}_{2c}^k) \cos \alpha_{Gjk}^c(M, \boldsymbol{\xi}_{1c}^j, \boldsymbol{\xi}_{2c}^k)]^{-1}$$

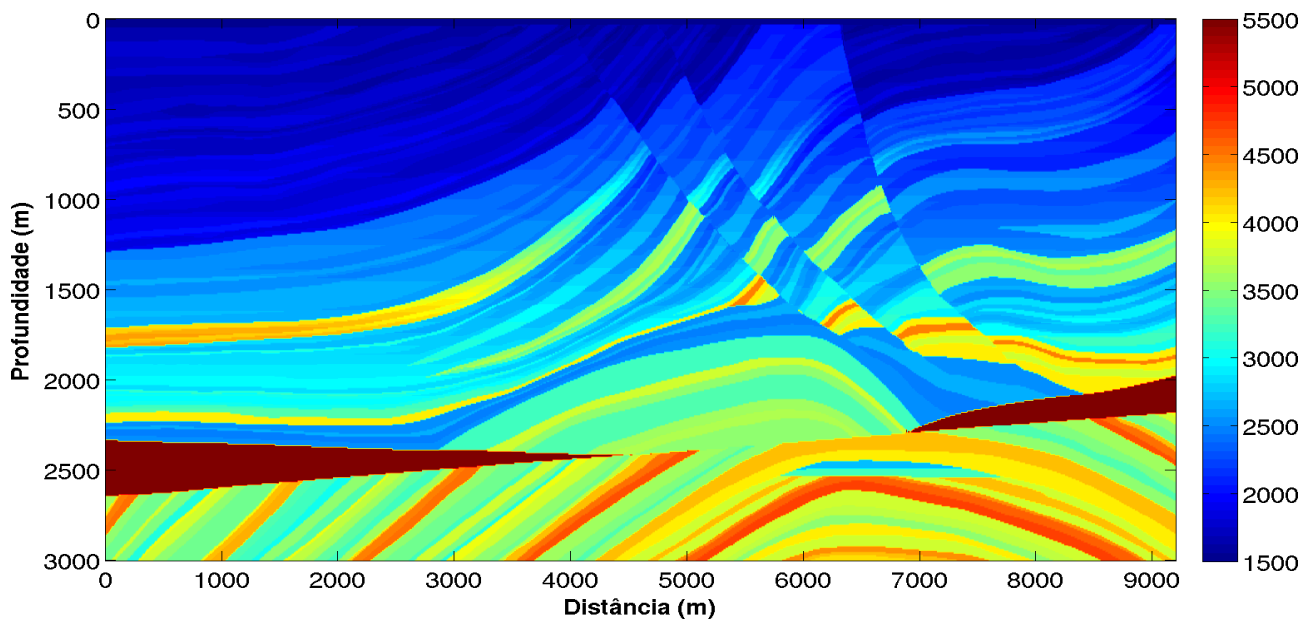
$$\times (\nabla\xi)^2 \sum_{l=-L/2}^{L/2} \sum_{r=-J/2}^{J/2} u(\xi_1^l, \xi_2^r) \ddot{W}_{jkpq}[t - T(\xi_{1c}^j, \xi_{2c}^k; \xi_1^l, \xi_2^r)] \quad (4.25)$$

5 RESULTADOS

O dado utilizado para a realização dos testes nesse trabalho foi o Marmousi, devido a estrutura bastante complexa, trata-se de um dado acústico 2-D, baseado na geologia da bacia de Cuanza, em Angola (VERSTEEG, 1994). A estrutura geológica desse modelo é dominado por falhas lítricas de crescimento, as quais se levantam desde um truncamento de sal até chegar à complicada estrutura de velocidade na parte superior do modelo. A Figura 9 representa o modelo de velocidade de referência do Marmousi sem suavização.

O dado consiste de 240 famílias de tiro comum, com um intervalo entre cada tiro de 25m. Os tiros foram dados a partir de 3 km até 9 km. Cada família de tiro é formada por 96 traços, com intervalo de grupo de 25 m, sendo o afastamento mais próximo de 200 m e afastamento mais distante de 2750 m. Cada traço possui 750 amostras de tempo, com 4 ms de intervalo de amostragem. O tempo total de registro 3 s.

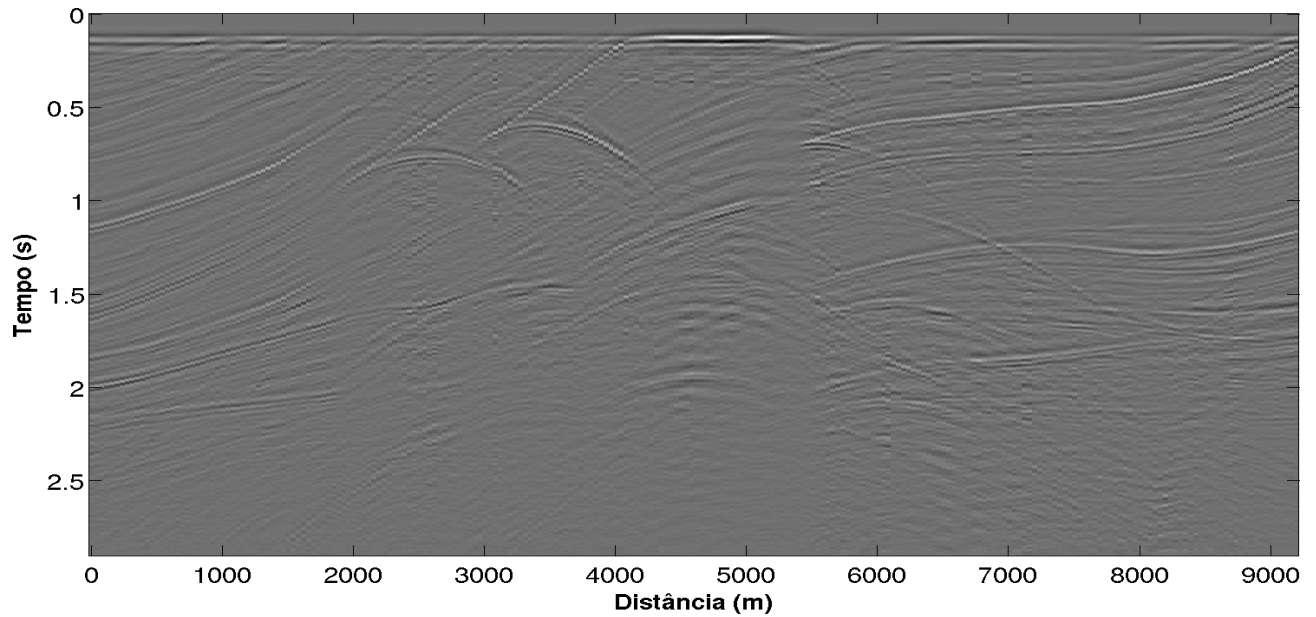
Figura 9 – Modelo de velocidade do Marmousi.



Fonte: Do Autor

A Figura 10 representa a seção offset mínimo 200 do dado do Marmousi que vai ser usado como entrada para as migrações Kirchhoff e KGB. Os modelos de velocidades usados nas migrações, foram reamostrados a partir do modelo da Figura 9.

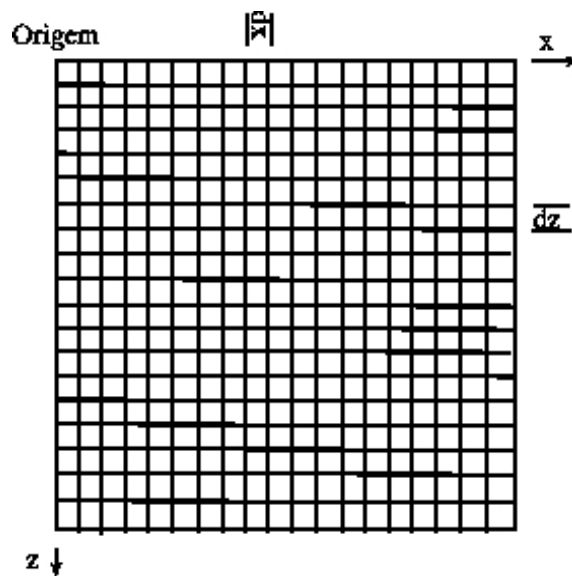
Figura 10 – Seção afastamento mínimo.



Fonte: Do Autor

Os modelos de velocidades são representados por uma matrix $n_z \times n_x$, em uma malha com $\Delta x = \Delta z$ e usa a convenção que $(z = 0, x = 0)$ está no canto superior esquerdo. A Tabela 1 ilustra 4 discretizações e as dimensões das matrizes usadas para representar o modelo de velocidade da Figura 9, sendo que esses modelos foram suavizados para a realização dos testes para obter as migrações Kirchhoff e KBG pré-empilhamento em profundidade.

Figura 11 – Representação da malha em duas dimensões para construção do modelo de velocidade.



Fonte: Do Autor

Tabela 1 – Valores das discretizações da matriz do modelo de velocidade.

discretização	n_x	n_z	Δx	Δz
modelo de referência	2301	751	4	4
60	53	156	60	60
80	40	118	80	80
100	33	95	100	100
150	23	65	150	150

A partir do modelo de velocidade de referência, foram feitas discretizações usando como incremento para cada elemento da matriz os valores de 60, 80, 100 e 150 m . A Figura 12 ilustra os resultados dessas discretizações, observa-se que com o aumento de Δx e Δz a imagem do modelo de velocidade fica desfocada. As seções migradas Kirchhoff pré-empilhamento em profundidade ilustrada na Figura 13, foi gerada a partir dos modelos de velocidades da Figura 12 e do dado em afastamento comum de 200 m mostrada na Figura 10. Es as seções correspondentes das migrações KGB é representada pela Figura 15.

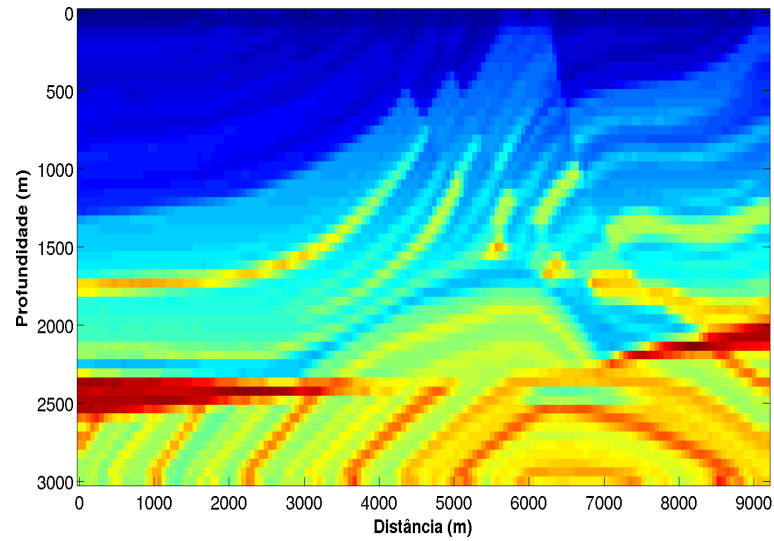
Analisando as Figuras 13 e 15, observa-se que os refletores tem boa continuidade, porém, a diferença fica na nitidez da imagem, pois neste aspecto a Figura 15 apresenta-se mais limpa quando comparada à Figura 13, ou seja, o refletor é realçado, os efeitos de borda são bem acentuados.

Em relação as imagens migradas Kirchhoff da Figura 13, teve uma diminuição significativa na resolução dos refletores na medida que a discretização aumenta. A mesma coisa foi observada na imagens migradas KGB da Figura 15.

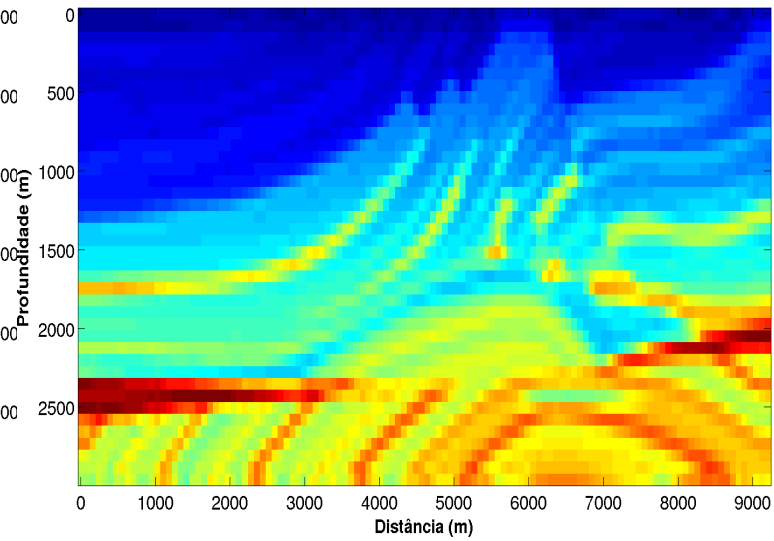
As Figuras 16 e 18 representam as matrizes dos espectros de amplitude das seções das Figuras 13 e 15, respectivamente.

O valor do Espectro de amplitude aumenta, conforme a discretização do modelo velocidade é maior, fica visualmente explicito na Figura 16. De modo análogo ocorre nas migrações KGB, ilustradas na Figura 18.

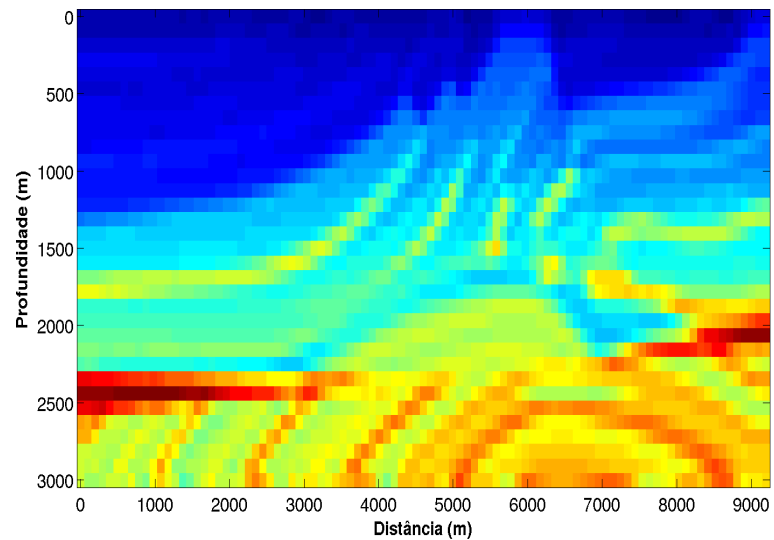
Figura 12 – Modelo de velocidade redimensionado.



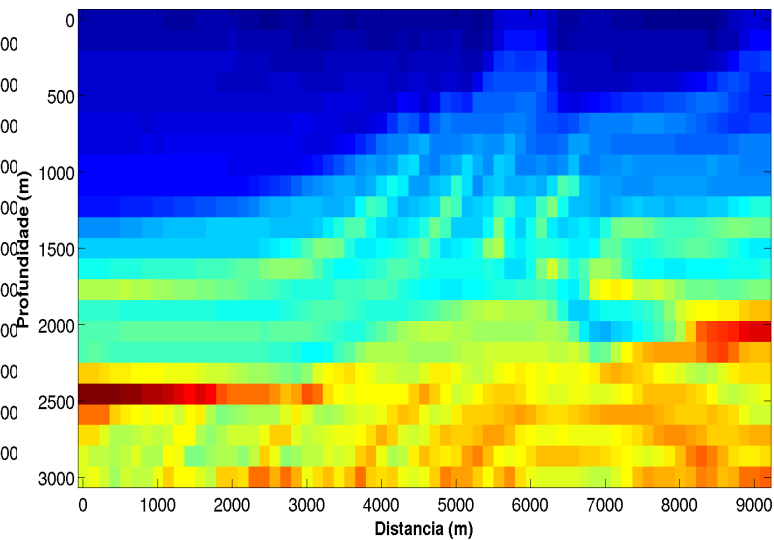
(a) modelo discretizado com $\Delta x = \Delta z = 60m$



(b) modelo discretizado com $\Delta x = \Delta z = 80m$



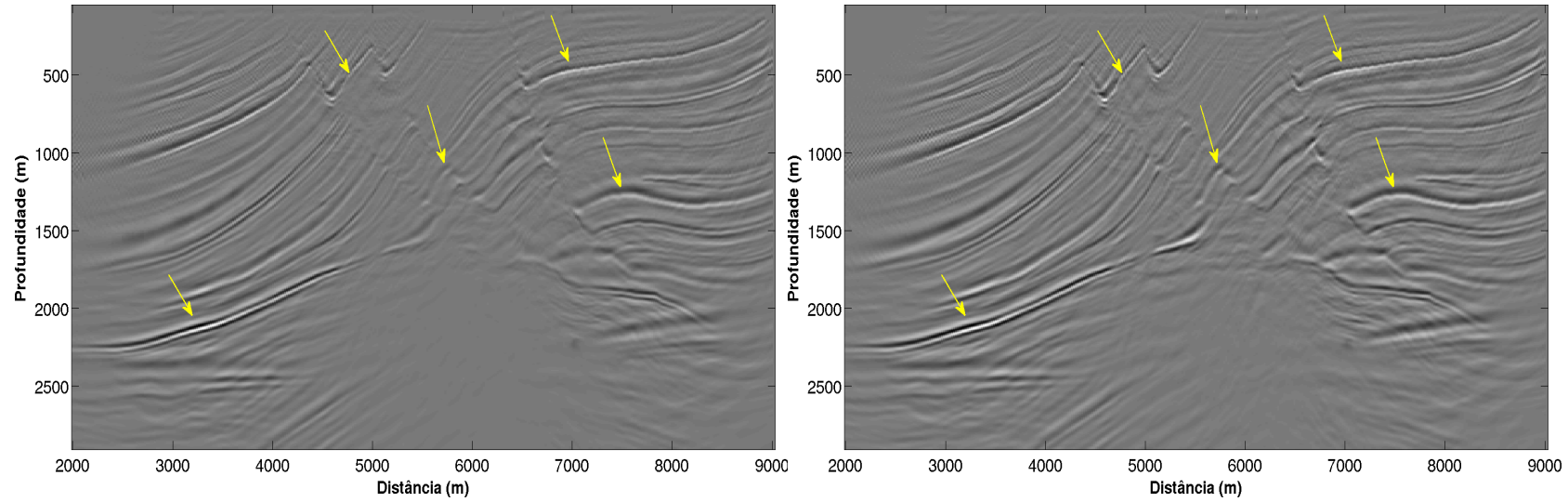
(c) modelo discretizado com $\Delta x = \Delta z = 100m$



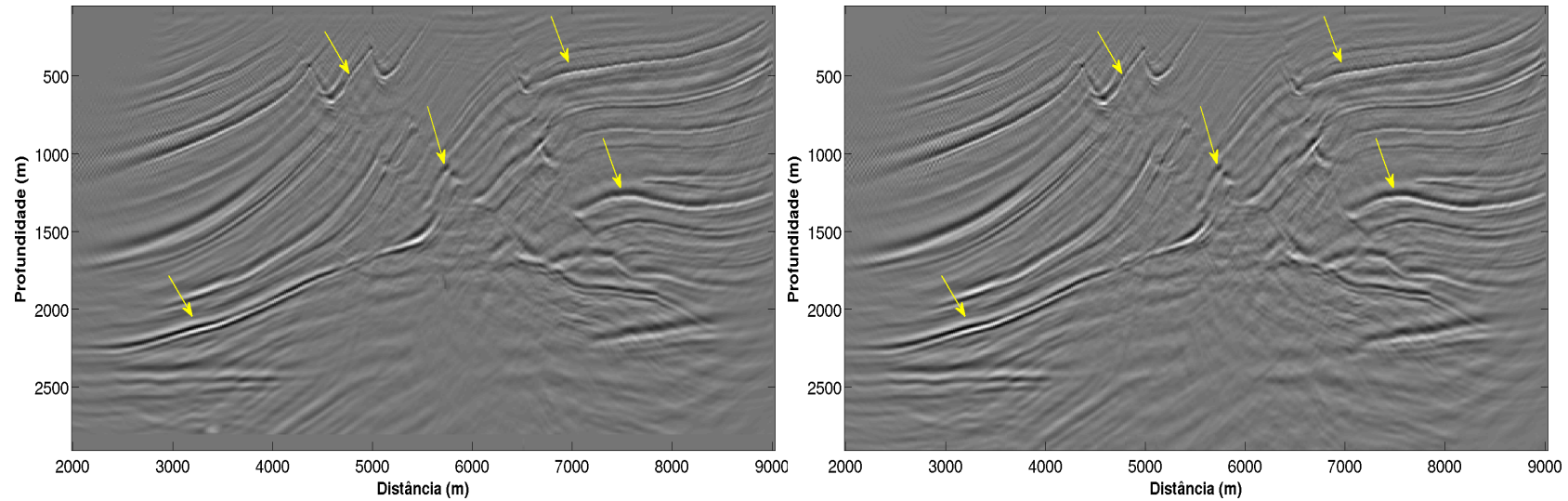
(d) modelo discretizado com $\Delta x = \Delta z = 150m$

Fonte: Do Autor

Figura 13 – Migração Kirchhoff pré-empilhamento do modelo de velocidade da Figura 12.



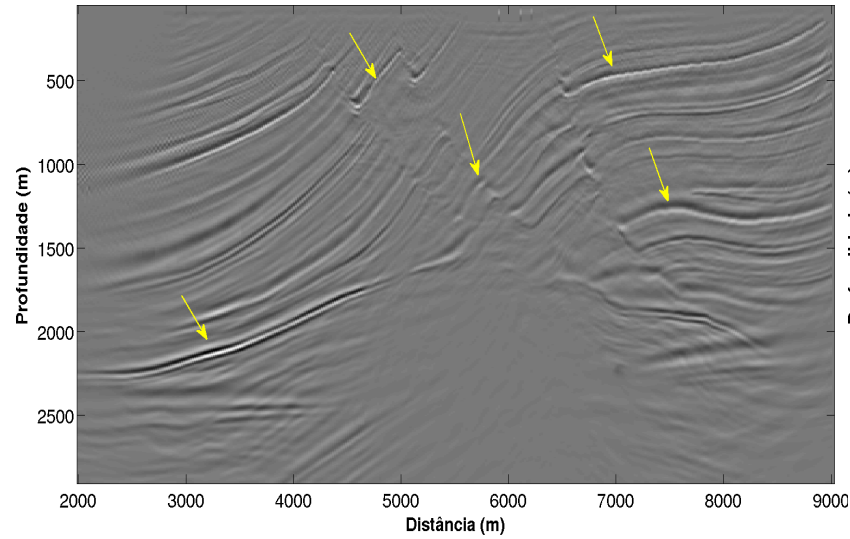
(a) Migração Kirchhoff do modelo de velocidade discretizado de 60 m (b) Migração Kirchhoff do modelo de velocidade discretizado de 80 m



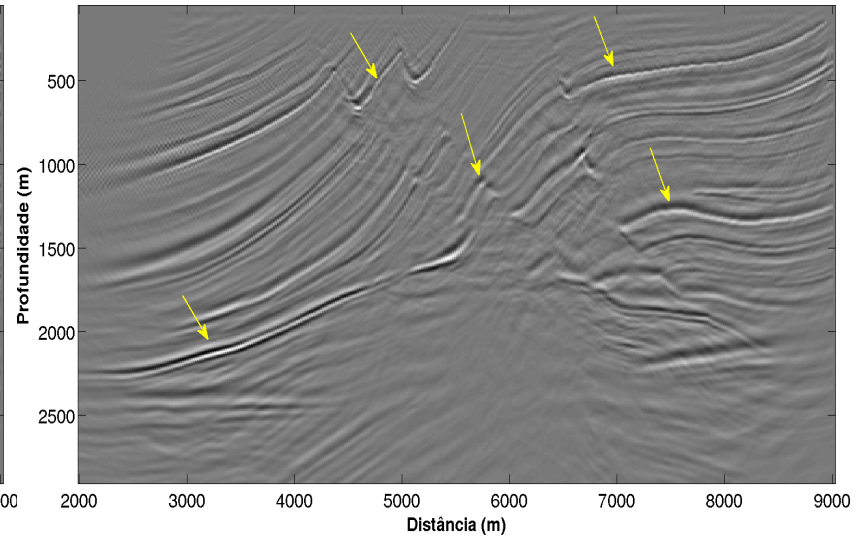
(c) Migração Kirchhoff do modelo de velocidade discretizado de 100 m (d) Migração Kirchhoff do modelo de velocidade discretizado de 150 m

Fonte: Do Autor

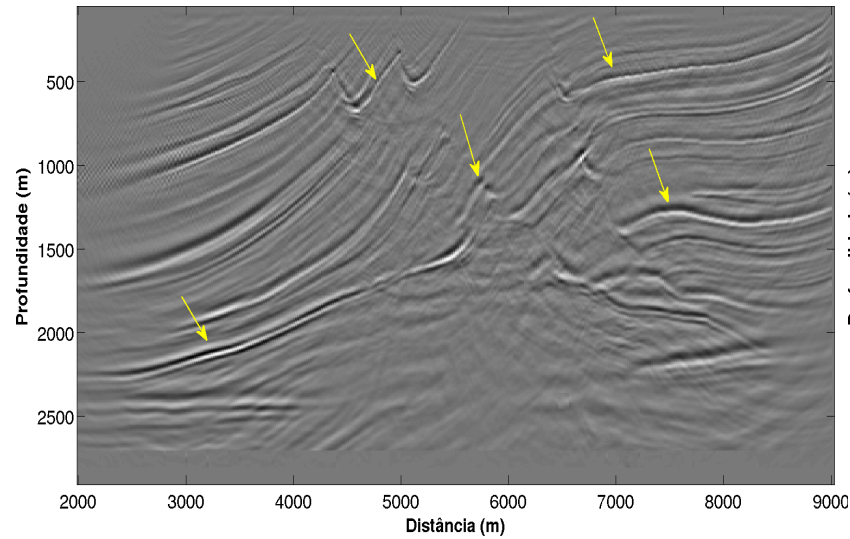
Figura 14 – Migração KGB pré-empilhamento do modelo de velocidade da Figura 12.



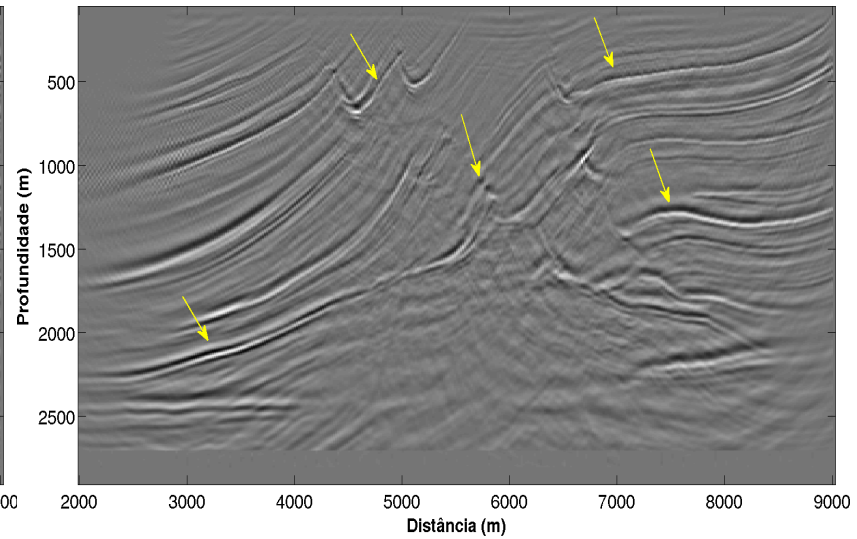
(a) Migração KGB do modelo de velocidade discretizado de 60 m



(b) Migração KGB do modelo de velocidade discretizado de 80 m



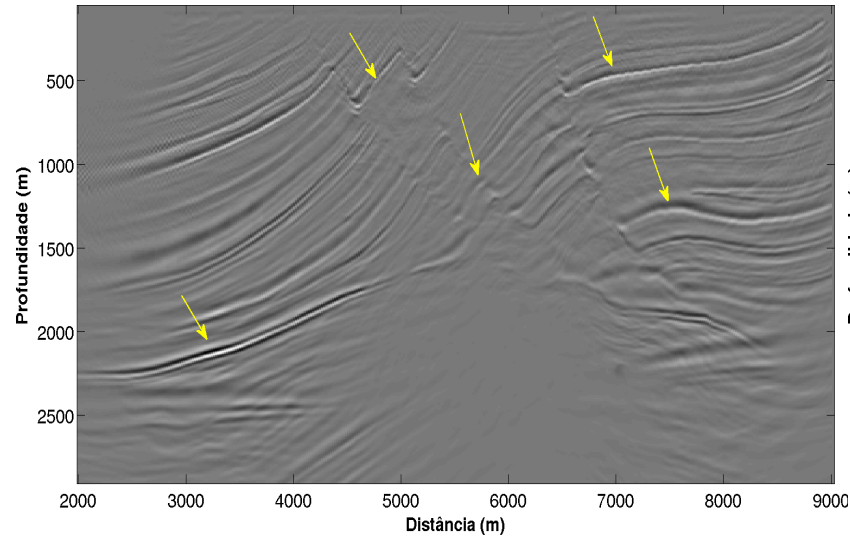
(c) Migração KGB do modelo de velocidade discretizado de 100 m



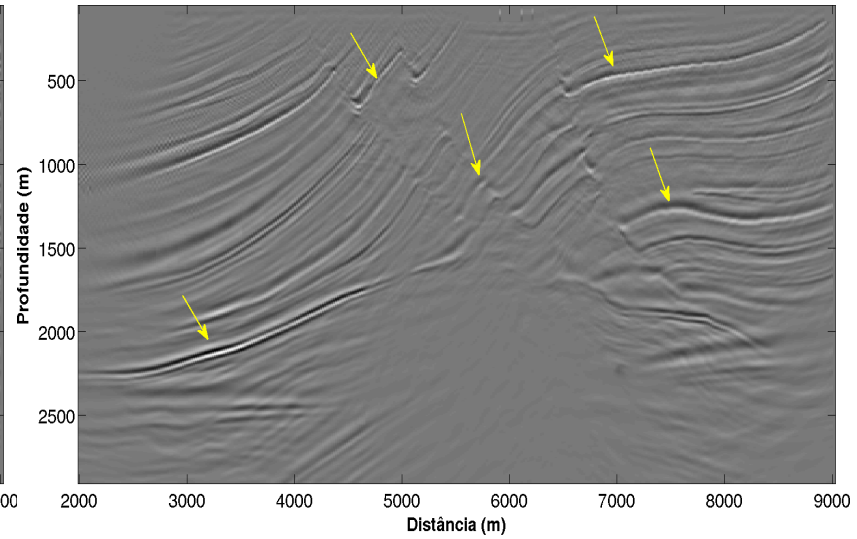
(d) Migração KGB do modelo de velocidade discretizado de 150 m

Fonte: Do Autor

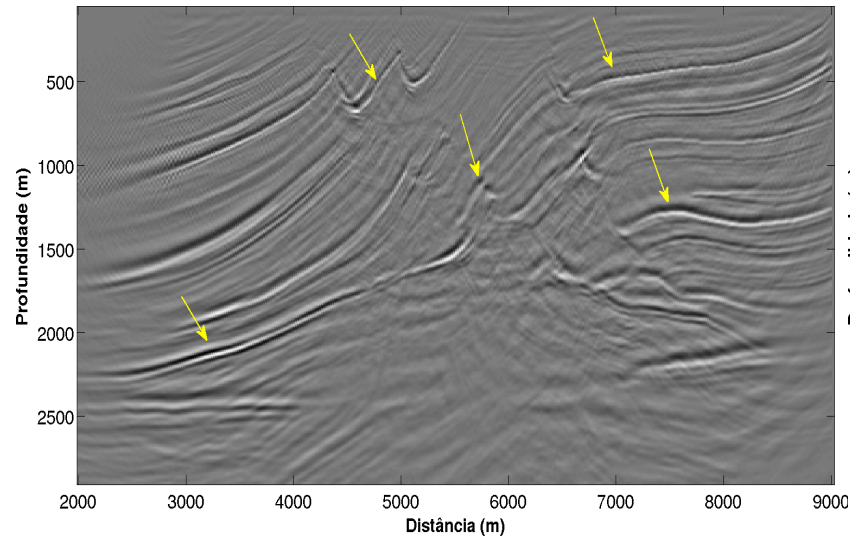
Figura 15 – Migração Kichhoff e KGB pré-empilhameto do modelo de velocidade da Figura 12.



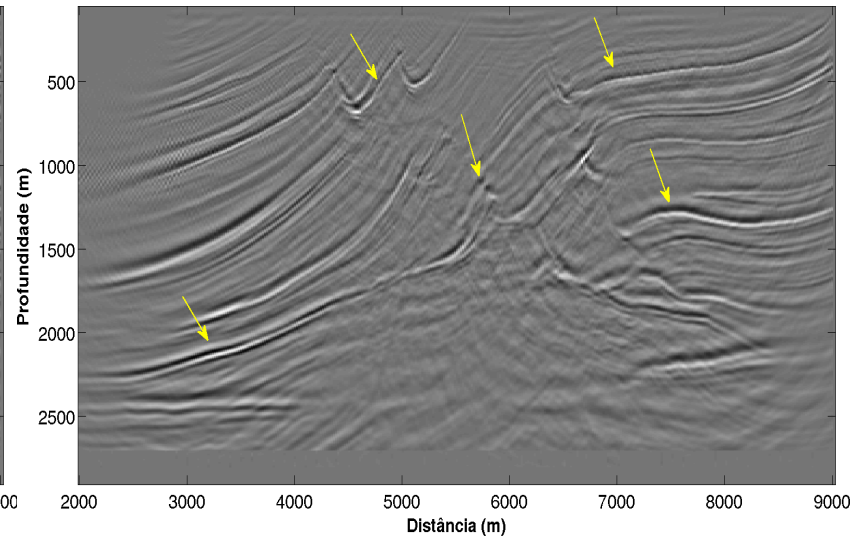
(a) Migração Kirchhoff do modelo de velocidade discretizado de 60 m



(b) Migração KGB do modelo de velocidade discretizado de 60 m



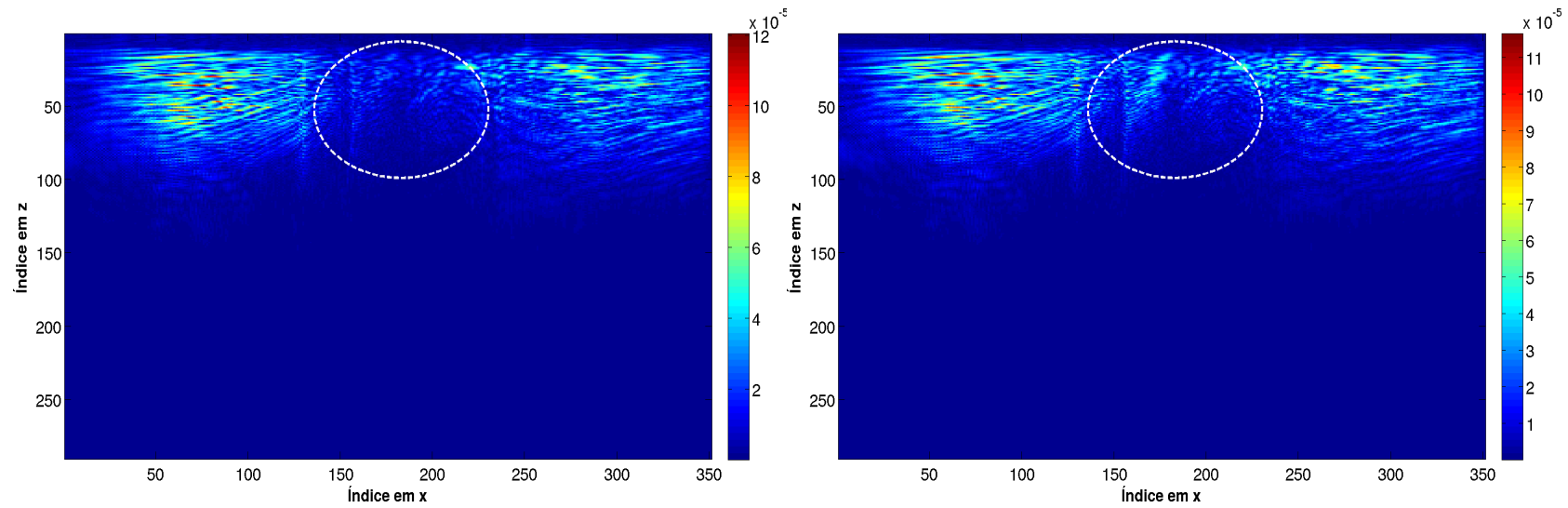
(c) Migração Kirchhoff do modelo de velocidade discretizado de 150 m



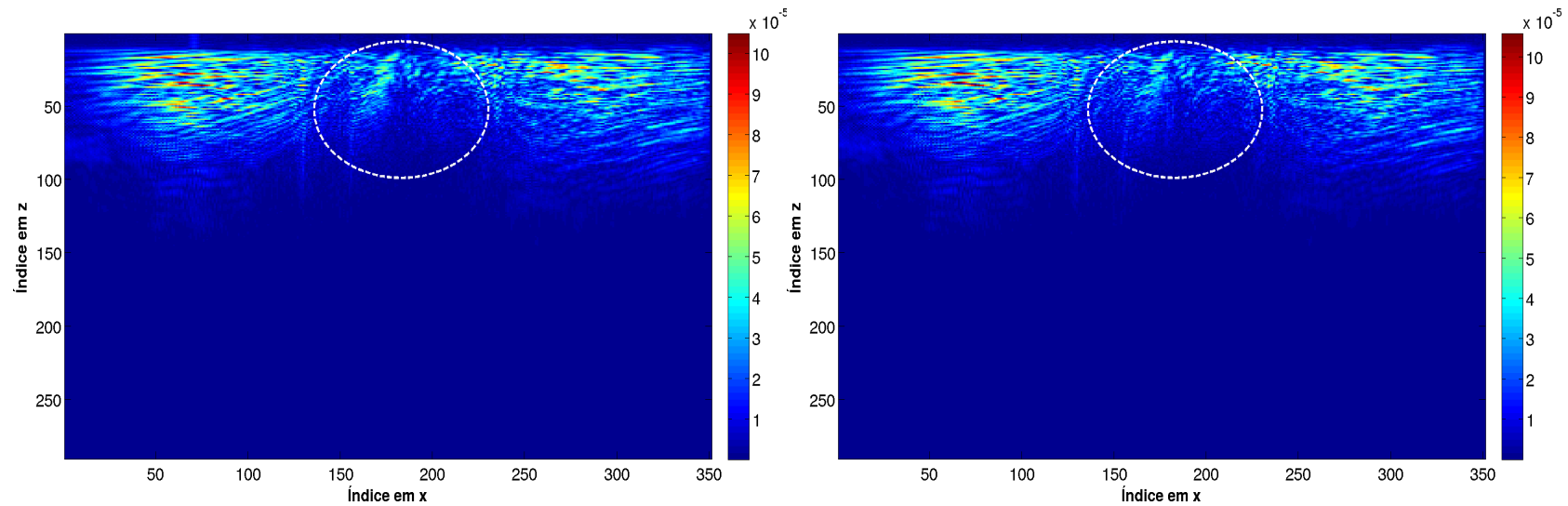
(d) Migração KGB do modelo de velocidade discretizado de 150 m

Fonte: Do Autor

Figura 16 – Matriz espectro de amplitude da migração Kirchhoff.

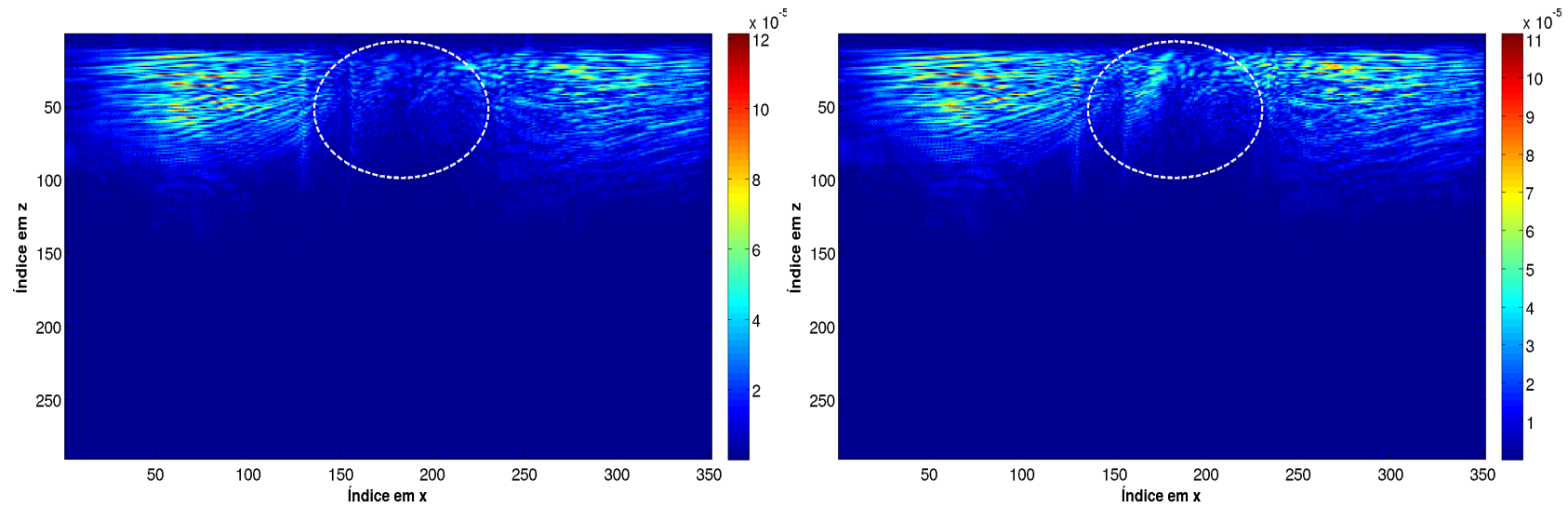


(a) Espectro de amplitude do modelo de velocidade discretizado de 60 m (b) Espectro de amplitude do modelo de velocidade discretizado de 80 m

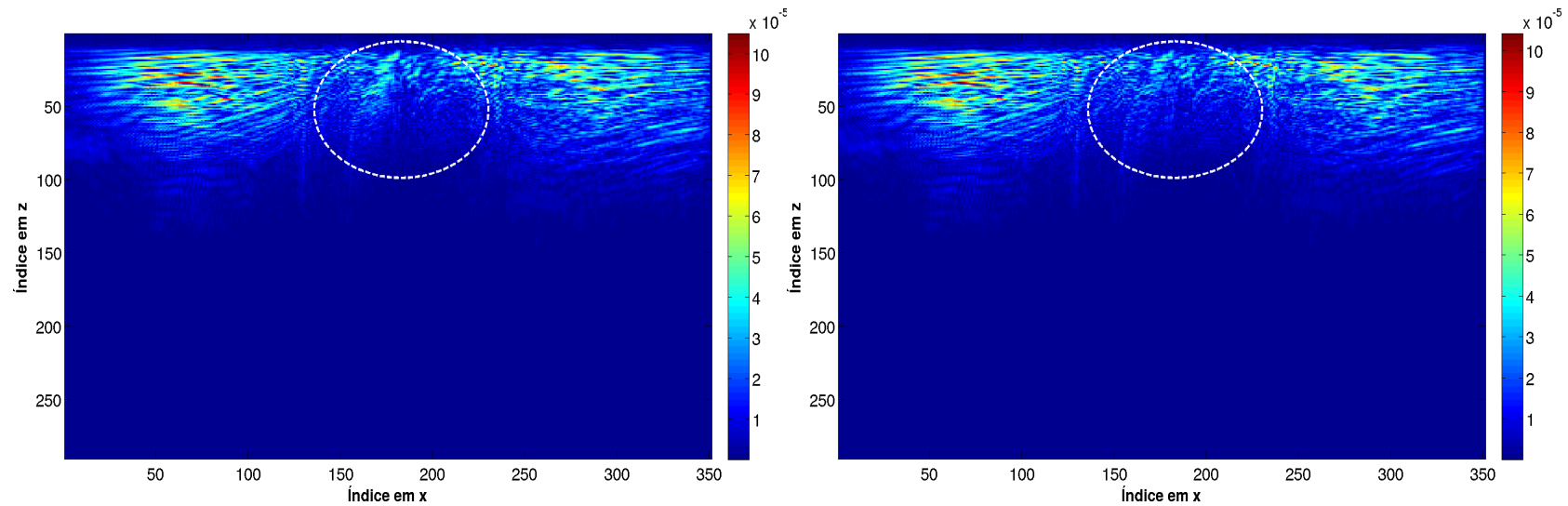


(c) Espectro de amplitude do modelo de velocidade discretizado de 100 m (d) Espectro de amplitude do modelo de velocidade discretizado de 150 m

Figura 17 – Matriz espectro de amplitude da migração KGB.

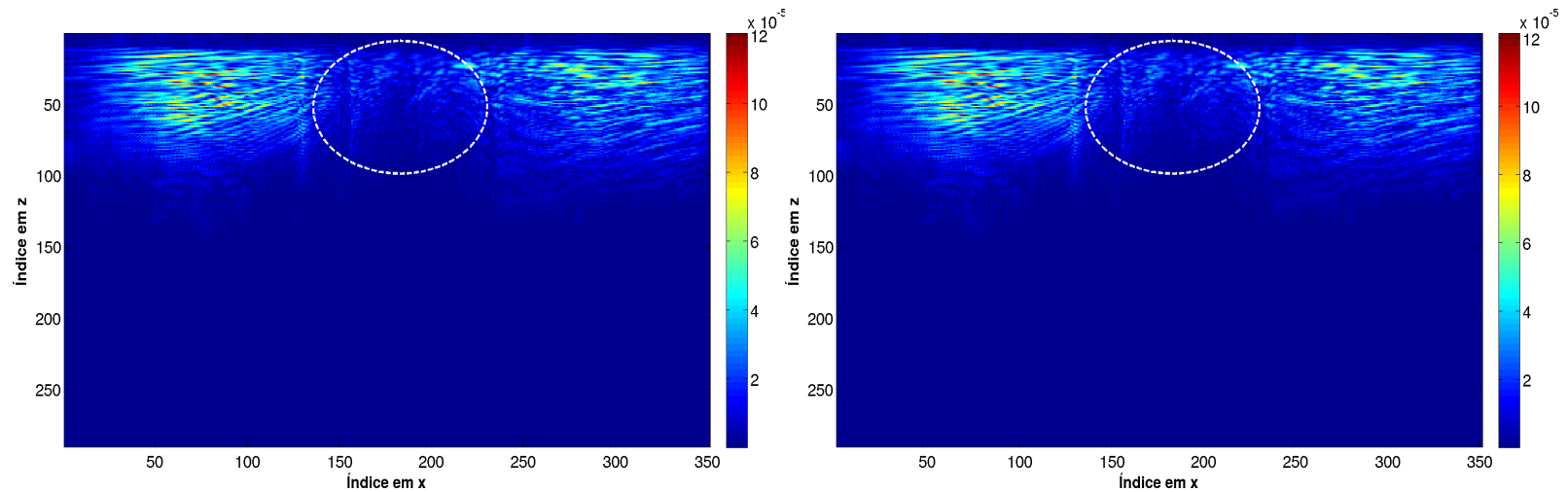


(a) Espectro de amplitude do modelo de velocidade discretizado de 60 m (b) Espectro de amplitude do modelo de velocidade discretizado de 80 m

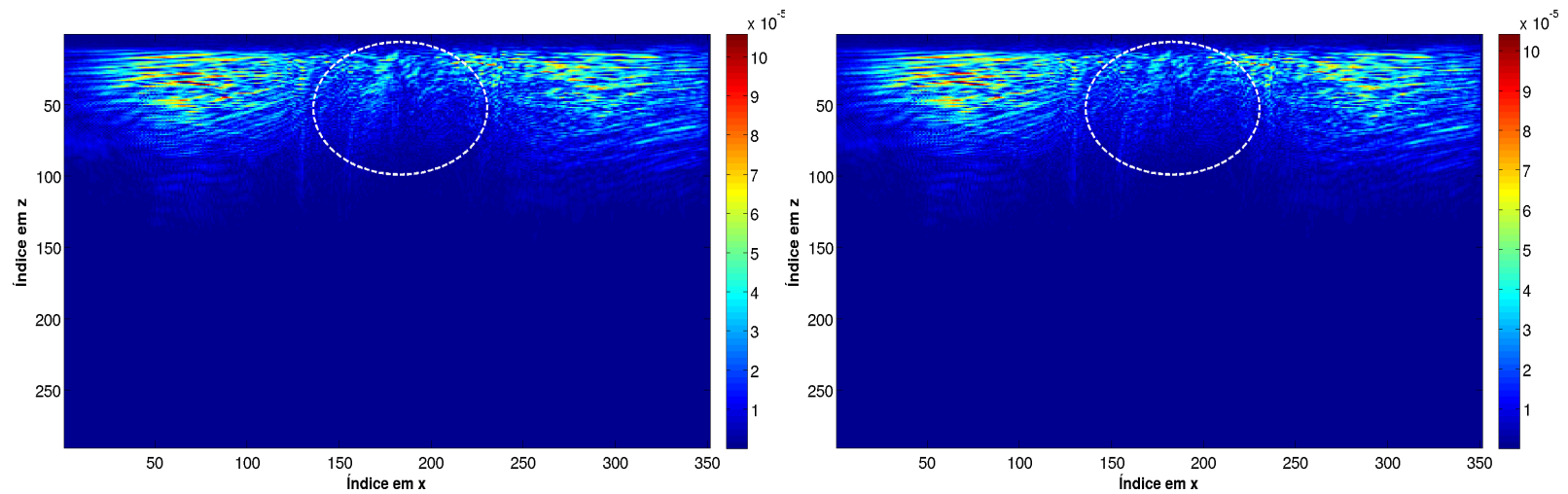


(c) Espectro de amplitude do modelo de velocidade discretizado de 100 m (d) Espectro de amplitude do modelo de velocidade discretizado de 150 m

Figura 18 – Matriz espectro de amplitude da migração Kirchhoff e KGB.



(a) Espectro de amplitude da migração Kirchhoff do modelo de velocidade discretizado de 60 m (b) Espectro de amplitude da migração KGB do modelo de velocidade discretizado de 60 m



(c) Espectro de amplitude da migração Kirchhoff do modelo de velocidade discretizado de 100 m (d) Espectro de amplitude da migração KGB do modelo de velocidade discretizado de 150 m

Fonte: Do Autor

6 CONCLUSÃO E PERSPECTIVA

6.1 CONCLUSÕES

No presente trabalho foi utilizada uma nova alternativa para construções de imagens sísmicas em profundidade, algoritmo desenvolvido por Pereira (2013), a qual é baseada em três teorias principais: aproximação de kirchhoff, feixes gaussianos e verdadeira amplitude. O algoritmo de migração, denominado de Kirchhoff-Gaussian-Beam (KGB), obtido com tais conceitos teóricos foi a implementação da integral de sobreposição de campos paraxiais (feixes gaussianos) em 2-D, onde a mesma é inserida no núcleo do operador integral de migração Kirchhoff convencional 2-D. Além disso, propôs-se usar a zona de fresnel projetada como domínio de integração do feixes gaussianos. Ou seja, para cada ponto em profundidade, a migração 2-D KGB pré-empilhamento consiste em delimitar subconjuntos do dado sísmico na zona de fresnel projetada para ser empilhado através da integral de sobreposição de feixes gaussianos e, em seguida, serem acumulados na superfície de Huygens. Neste trabalho foram feitas dois tipos de migração: Migração Kirchhoff convencional e o método KGB utilizando diferentes tipos de discretização feitas na matriz do modelo(Marmousi 2-D) de velocidade e analisados os efeitos dessas discretizações nestes Dados Migrados, assim como seus espectros de amplitude.

Como maior contribuição nesta dissertação, foi testada uma nova estratégia para a migração em amplitudes preservadas de que utiliza como base a zona de fresnel projetada. Alta precisão é conseguida porque as derivadas de segunda ordem complexas estão incluídas, a fim de reconhecer a curvatura da frente de onda. O algoritmo permite a determinação dos parâmetros da zona de fresnel projetada na superfície de aquisição através da matriz propagadora e da matriz de Bortifeld, reduzindo assim a necessidade de calcular a zona de fresnel na pro- fundidade. O método também fornece uma ferramenta de iluminação do meio em regiões de singularidade para teoria do raio tradicional. Testes em dados com diferentes domínios de aqui- sição confirmam a eficiência e precisão.

Nas Figuras 13 e 15 temos os resultados das migrações em profundidade para o modelo Marmousi usando os algoritmos Kirchhoff e KGB. Estes resultados foram obtidos usando diferentes Δx e Δz no modelo de velocidade. Fazendo uma comparação entre a migração Kirchhoff e KGB para mesma discretização, podemos notar que ambas as imagens migradas apresentam uma boa continuidade dos refletores, diferindo quanto a nitidez da imagem, pois a imagem migrada usando KGB tem menos artefatos quando comparada a imagem migrada usando Kirchhoff. Além disso, podemos observar que aumentando as discretizações no modelo é perceptível uma perda na resolução da imagem

migrada tanto na migração Kirchhoff quanto na KGB.

A partir do espectro obtido da transformada de Fourier 2D sobre os resultados migrados em profundidade, observamos que com o aumento da discretização (Δx , Δz) há um realce das amplitudes referentes aos artefatos, tanto no domínio da profundidade, quanto no domínio do espectro. Nota-se, em cada espectro (com sua respectiva discretização), que as amplitudes são realçadas na sua parte central. Isto nos leva a concluir que os artefatos concentram-se nesta região do espectro.

6.2 PERSPECTIVAS

Como proposta de continuidade e aperfeiçoamento do KGB, deve-se:

- Estudar o tamanho adequado para a largura do feixe com relação ao raio da zona de Fresnel projetada;
- Estudar a influência dos pesos durante o empilhamento realizado no feixe de traços sísmicos;
- Estudar formas alternativas para o cálculo do tamanho da zona de Fresnel projetada;
- Estudar o caso de insuficiência de dados no tempo e espaço para os diferentes métodos de migração;

REFERÊNCIAS

- ALBERTIN, U.; YINGST, D.; KITSCHENSID, P. True-amplitude beam migration. *SEG Technical Program Expanded Abstracts*, v. 74, p. 949–952, 2004. Disponível em: <<http://library.seg.org/doi/abs/10.1190/1.1845323>>.
- BABICH, V. M.; PANKRATOVA, T. F. On discontinuities of green's function of the wave equation with variable coefficient. *In Problems of Mathematical Physics*, v. 06, p. 9–27, 1973.
- BIONDI, B. L. *3D Seismic Imaging*. 1st. ed. Tulsa, USA: SEG, 2006.
- BLEISTEIN, N. *Mathematical methods for wave phenomena*. 1st. ed. New York, USA: Academic Press, 1984.
- BLEISTEIN, N. On the imaging of reflectors in the earth. *Geophysics*, USA, v. 52, p. 931–942, 1987. Disponível em: <<http://library.seg.org/doi/pdf/10.1190/1.1442363>>.
- BLEISTEIN, N. *Mathematics of modeling, migration and inversion with gaussian beams*. Colorado, USA: CWP, 2009.
- BLEISTEIN, N.; COHEN, J. K.; STOCKWELL, J. W. J. *Mathematics of multidimensional seismic imaging, migration, and inversion*. 1st. ed. New York, USA: Spriger-Verlag, 2000.
- BLEISTEIN, N.; HANDELSMAN, R. A. *Asymptotic Expansions of Integrals*. USA: New York, 1975.
- BORTFELD, R. Geometrical ray theory: rays and traveltimes in seismic systems (second-order approximation of the traveltimes). *Geophysics*, USA, v. 54, n. 3, p. 342–349, 1989. Disponível em: <<http://library.seg.org/doi/pdf/10.1190/1.1442659>>.
- CĚRVENÝ, V. Expansion of a plane wave into gaussian beams. *Studia Geoph. et Geod.*, v. 26, p. 120–131, 1982. Disponível em: <<http://sw3d.cz/papers.bin/a82vc2.pdf>>.
- CĚRVENÝ, V. Synthetic body wave seismograms for laterally varying layered structures by the gaussian beam method. *Geophys. J. R. astr. Soc*, v. 72, p. 389–426, 1983.
- CĚRVENÝ, V. *Seismic ray theory*. 1st. ed. USA: Cambridge University Press, 2001.
- CHAPMAN, C. H. On the computation of seismic ray traveltimes and amplitudes. bulletin of the seismological society of america. *Geophysics*, USA, v. 61, n. 3, p. 567–588, 1267-1274 1971.
- CLAERBOUT, J. F. *Fundamentals of geophysical data processing*. 1st. ed. [S.l.]: Blackwell Science Inc, 1985.
- COSTA, M. J. S. *Migração pré-empilhamento Kirchhoff feixes gaussianos 2.5D nos domínios afastamento comum e ângulo-comum*. 114 p. Tese (Doutorado) — Universidade Federal da Pará, 2012.

- CRUZ, J. C. R.; PEREIRA, G. L.; FERREIRA, C. A. Seismic modeling by gaussian beams limited by projected fresnel zone.. *EAGE,SPE EUROPEC 2012*, n. Copenhagen, 2012. Disponível em: <<http://earthdoc.eage.org/publication/download/?publication=59575>>.
- FERREIRA, C. A. S.; CRUZ, J. C. R. A comparison of two true-amplitude gaussian beam migration inversion operators. In: *INTERNATIONAL CONGRESS OF THE BRAZILIAN GEOPHYSICAL SOCIETY*. [s.n.], 2009. Disponível em: <<http://earthdoc.eage.org/publication/download/?publication=45488>>.
- GOODMAN, J. W. *Introduction to Fourier Optics*. 3rd. ed. Stanford, USA: Roberts & Company Publishers, 2005.
- GRAY, S. H.; BLEISTEIN, N. True-amplitude gaussian-beam migration. *Geophysics*, v. 74, 2009. Disponível em: <<http://library.seg.org/doi/pdf/10.1190/1.3052116>>.
- HAGEDOORN, J. G. A process of seismic reflection interpretation. *Geophysical Prospecting*, v. 2, n. 2, p. 85–127, 1954. Disponível em: <<http://earthdoc.eage.org/publication/download-/?publication=35028>>.
- HERSTEIN, I. N. *Abstract Algebra*. 3rd. ed. New York, USA: Wiley-Prentice Hall, 1996.
- HERTWECK, T. et al. Aperture effects in 2.5 kirchhoff migration: a geometrical explanation. *Geophysics*, v. 68, p. 1673–1684, 1973. Disponível em: <<http://library.seg.org/doi/pdf/10.1190/1.1620641>>.
- HILL, N. R. Gaussian beam depth migration. *Geophysics*, v. 55, p. 1416–1428, 1990. Disponível em: <<http://library.seg.org/doi/pdf/10.1190/1.1442788>>.
- HILL, N. R. Prestack gaussian beam depth migration. *Geophysics*, v. 66, p. 1240–1250, 2001. Disponível em: <<http://library.seg.org/doi/pdf/10.1190/1.1487071>>.
- KONOPÁSKOVÁ, J. Numerical modelling of time-harmonic seismic wave field in simple structures by gaussian beam method. part i. *Studia Geoph et Geod*, v. 28, p. 19–35, 1984. Disponível em: <<http://sw3d.cz/papers.bin/a84vc4.pdf>>.
- MÜLLER, G. Efficient calculation of gaussian beam seismograms for two dimensional inhomogeneous media. *Geophysics. J. R. Astr. Soc*, v. 79, p. 153–166, 1984. Disponível em: <<http://gji.oxfordjournals.org/content/79/1/167.full.pdf>>.
- NOWACK, R. L. Calculation of synthetic seismograms with gaussian beams. *Pure and Applied Geophysics*, v. 160, p. 487–507, 2003. Disponível em: <<http://gji.oxfordjournals.org/content/79/1/167.full.pdf>>.
- PEREIRA, G. *Migração 3-D Kirchhoff-Gaussian-Beam (KGB) pré-empilhamento no domínio da profundidade*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal da Pará, 2013.
- PEREIRA, G. L.; CRUZ, J. C. R.; FERREIRA, C. A. S. Modelagem sísmica usando método do raio, kirchhoff e feixes gaussianos. In: *INTERNATIONAL CONGRESS OF THE BRAZILIAN GEOPHYSICAL SOCIETY*. [s.n.], 2011. Disponível em: <<http://earthdoc.eage.org/publication/download/?publication=55255>>.
- POPOV, M. M. A new method of computation of wave fields using gaussian beams. *Wave Motion*, v. 1982, p. 85–95, 1982.

- POPOV, M. M. *Ray theory and Gaussian beam methods for geophysicists*. 1st. ed. Salvador, Brazil: EDUFBA, 2002. Disponível em: <<http://www.cpgg.ufba.br/publicacoes/popov.pdf>>.
- POPOV, M. M. et al. Depth migration by the gaussian beam summation method. *Geophysics*, v. 75, n. 2, p. 81–93, 2010. Disponível em: <<http://library.seg.org/doi/full/10.1190/1.3361651>>.
- PORTUGAL, R. S. Construção de imagens em verdadeira amplitude por dados de reflexão: formulação matemática e construção de algoritmos. Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Campinas, São Paulo, 2002.
- PROTASOV, M. I. True amplitude gaussian beam imaging. In: *Days on diffraction, 2005*. [s.n.], 2005. p. 225–234. Disponível em: <http://www.researchgate.net/publication/4233137_True_amplitude_gaussian_beam_imaging/file/d912f510f8cf21591f.pdf>.
- SALEH, B. *Introduction to Subsurface Imaging*. 1st. ed. New York, USA: Cambridge University Press, 2011.
- SCHLEICHER, J.; TYGEL, M.; HUBRAL, P. 3D true-amplitude finite-offset migration. *Geophysics*, v. 58, p. 1112–1126, 1993.
- SCHLEICHER, J.; TYGEL, M.; HUBRAL, P. *Seismic true-amplitude imaging*. 1st. ed. Tulsa, USA: SEG, 2007.
- SCHNEIDER, W. A. Integral formulation for migration in two and three dimensions. *Geophysics*, v. 43, n. 1, p. 49–76, 1978.
- SUN, Y. et al. 3-d prestack kirchhoff beam migration for depth imaging. *Geophysics*, v. 65, n. 5, p. 1592–1603, 2000.
- VERSTEEG, R. The marmousi experience: Velocity model determination on a synthetic complex data set. *The Leading Edge*, p. 927–936, 1994.
- YILMAZ, O. *Seismic Data Analysis: Processing, Inversion, and Interpretation of Seismic Data*. 2nd. ed. Tulsa, USA: SEG, 2001.
- ŽÁČEK, K. Optimization of the shape of gaussian beams. *Studia geophysica et geodaetica*, v. 50, p. 349–365, 2006. Disponível em: <<http://sw3d.cz/papers.bin/a06kz1.pdf>>.

APÊNDICES

APÊNDICE A – Formalismo da condição inicial dos feixes gaussianos em função da zona de Fresnel projetada: Caso 2-D

Segundo (MÜLLER, 1984) a expressão analítica para a meia largura L de um feixe gaussiano na situação 2 – D é definida pela seguinte expressão matemática:

$$L^2 = \frac{2}{\omega} \frac{(\epsilon_1^2 q_1 + q_2)^2 + \epsilon_2^2 q_1^2}{\epsilon_2^2} \quad (\text{A.1})$$

Como o interesse é obter a propagação do feixe Gaussiano estreita e estável, (CRUZ; PEREIRA; FERREIRA, 2012) encontrou o parâmetro $\epsilon = \epsilon_1 + i\epsilon_2$ do feixe igualando o raio da zona de Fresnel projetada (A.3) com a meia largura (A.1). Assim:

$$L^2 = r_{zp}^2 \quad (\text{A.2})$$

$$\frac{2}{\omega} \frac{(\epsilon_1^2 q_1 + q_2)^2 + \epsilon_2^2 q_1^2}{\epsilon_2^2} = \frac{1}{f H_P} \quad (\text{A.3})$$

$$\frac{2}{2\pi f} (\epsilon_1^2 q_1 + q_2)^2 + \epsilon_2^2 q_1^2 = \frac{1}{f H_P} \epsilon_2 \quad (\text{A.4})$$

$$(\epsilon_1^2 q_1 + q_2)^2 + \epsilon_2^2 q_1^2 = \frac{\pi}{H_P} \epsilon_2 \quad (\text{A.5})$$

Baseado nas discussões (MÜLLER, 1984), para atribuição de valores para ϵ_1 e ϵ_2 , considera-se $\epsilon_1 = 0$ e $\epsilon_2 > 0$. Assim a equação (A.5), torna-se:

$$q_2^2 + \epsilon_2^2 q_1^2 = \frac{\pi}{H_P} \epsilon_2 \quad \text{ou} \quad \epsilon_2^2 q_1 - \frac{\pi}{H_P} \epsilon_2 + q_2^2 = 0 \quad (\text{A.6})$$

Onde a equação (A.6) é do 2º grau. Assim, para obter ϵ_2 a partir de quantidades conhecidas do traçamento de raios basta encontrar as raízes da equação A.6. Denotando $\epsilon_2 = \epsilon_2^{(f)}$:

$$\epsilon_2^{(f)} = \frac{\frac{\pi}{H_P} + \sqrt{\left(\frac{\pi}{H_P}\right)^2 - 4q_1 q_2}}{2q_1} \quad (\text{A.7})$$

APÊNDICE B – Superposição de feixes Gaussianos para a situação 2-D

Segundo Ferreira e Cruz (2009), o operador de superposição de feixes gaussianos de dados 3-D no domínio da frequência é dado por:

$$\psi(\vec{\xi}, \omega) = \frac{i\omega}{2\pi} \int \int_{A_P} d\xi_1^P d\xi_2^P \sqrt{\det \mathbf{H}_P(\vec{\xi}^P)} D_L U(\vec{\xi}^P, \omega) e^{-i\omega T_P(\vec{\xi}^P, \omega)}$$

onde,

$$T_P(\vec{\xi}^P, \vec{\xi}) = \vec{p}^\top (\vec{\xi}^P - \vec{\xi}) + \frac{1}{2} (\vec{\xi}^P - \vec{\xi})^T \mathbf{H}_P (\vec{\xi}^P - \vec{\xi})$$

representa o tempo de trânsito paraxial, calculado em referência ao tempo de trânsito de reflexão $\tau_R(\xi)$ de um raio central que parte de $S(\xi)$ e emerge em $G(\xi)$, A_P a zona de Fresnel projetada (SCHLEICHER et al., 1997; SCHLEICHER; TYGEL; HUBRAL, 2007), caracterizando a abertura que contém o traço de referência $\vec{\xi}$, \vec{p} o vetor vagarosidade horizontal do raio central, T indica uma operação matemática de transposição, $H_P(\vec{\xi}^P)$ a matriz da zona de Fresnel projetada, $D_L(\vec{\xi}^P)$ determina a o fator de decaimento da amplitude do dado sísmico no interior de um feixe centrado na coordenada $\vec{\xi}$, definindo a chamada janela gaussiana, L largura efetiva do feixe (MÜLLER, 1984). Finalmente, $U(\xi^P, \omega)$ representando uma janela do dado sísmico original $U(\xi, \omega)$, contido dentro da abertura da zona de Fresnel projetada.

Tais considerações são estendidas sem perda de generalidade para o operador de superposição de feixes gaussianos de dados 2-D definido a seguir. A representação matemática do operador integral de superposição de feixes gaussianos 2-D no domínio da frequência segundo é dado por:

$$\psi(\xi_1, \omega) = \sqrt{\frac{-i\omega}{2\pi}} \int_{a_1^P}^{a_2^P} d\xi_1^P \sqrt{H_{11}(\xi^P, 0, \xi_1)} D_L(\xi^P, 0, \xi_1) U_2(\xi^P, 0, \omega) e^{-i\omega T_P(\xi^P, 0, \xi_1)}$$

Uma representação matemática para a integral de superposição de feixes gaussianos 2-D no domínio do tempo é dado por:

$$\psi(\xi_1, \omega) = -\frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{-i\omega}{2\pi}} \int_{a_1^P}^{a_2^P} d\xi_1^P \sqrt{H_{11}(\xi^P, 0, \xi_1)} D_L(\xi^P, 0, \xi_1) \partial_{t-}^{\frac{1}{2}} U_2(\xi_P, t - T_P(\xi^P, \xi_1))$$

ressaltando que $H_{11}(\xi^P, 0, \xi_1)$ é o elemento superior esquerdo da matriz zona de Fresnel projetada em condições complexas

APÊNDICE C – Análise assintótica da integral de migração KGB

Usando as coordenadas 3-D cartesianas gerais com vetor posição $x = (x_1, x_2, x_3)$, considerando o plano Σ_P de forma a coincidir com a superfície da aquisição, ou seja, a superfície da terra, onde são distribuídos os pares de fonte S e geofone G com coordenadas cartesianas 2-D locais especificados pelo vetor de parâmetros ξ , expresso por:

$$\mathbf{X}_S = \mathbf{X}_S(\xi) \quad e \quad \mathbf{X}_G = \mathbf{X}_G(\xi) \quad (\text{C.1})$$

Cada coordenada do vetor de parâmetro $\xi = (\xi_1, \xi_2)^T$, com a abertura de migração A da integral externa na equação (4.9), é uma coordenada de um feixe central, isto é, $\xi = \xi_c$, referente a um subconjunto de traços sísmicos selecionados relacionado a um feixe gaussiano. O tempo de trânsito paraxial complexo de um raio paraxial, com percurso iniciando em $\mathbf{X}_S(\xi_b)$ e terminando em $\mathbf{X}_G(\xi_b)$, calculados a partir de parâmetros de um raio central de um feixe específico $\xi = \xi_c$ com pode ser expresso por ((BORTFELD, 1989);(SCHLEICHER; TYGEL; HUBRAL, 2007);(ČERVENÝ, 2001)):

$$\tau(\xi_c, \xi_b) = \tau_{\mathbf{R}}(\xi_c) - \mathbf{p}_{\mathbf{S}}^T(\xi_b - \xi_c) + \mathbf{p}_{\mathbf{G}}^T \Gamma_{\mathbf{G}}(\xi_b - \xi_c) + \frac{1}{2}(\xi_b - \xi_c)^T \mathbf{H}(\xi_c)(\xi_b - \xi_c) \quad (\text{C.2})$$

O parâmetro $\xi_b = (\xi_{b1}, \xi_{b2})$ especifica a posição do traço sísmico com relação subconjunto de traços sísmicos relacionado a um feixe gaussiano com centro em ξ_c (figura 21). Se ele é avaliado a partir dos parâmetros do raio central no ponto estacionário em um ponto crítico $\xi_c = \xi_c^*$, o tempo de trânsito paraxial da equação (C.2) é $\tau(\xi_c^*, \xi_b)$.

Alternativamente, pode-se expressar o tempo de trânsito $\tau(\xi_c, \xi_b)$ pela soma de dois tempos de trânsitos $\tau_S(\mathbf{x}_R, \mathbf{x}_S)$ (tempo da fonte em \mathbf{x}_S até um ponto do refletor em \mathbf{x}_R) e $\tau_G(\mathbf{x}_R, \mathbf{x}_G)$ (tempo de um ponto do refletor em \mathbf{x}_R até o geofone em \mathbf{x}_G). Se o tempo de trânsito total $\tau_D(\mathbf{x}_S, \mathbf{x}_G, \mathbf{x}_R) = \tau_S(\mathbf{x}_S, \mathbf{x}_R) + \tau_G(\mathbf{x}_G, \mathbf{x}_R)$ corresponder a um raio paraxial refletido que obedece a lei de snell, que depende das coordenadas da fonte, do geofone e do ponto de reflexão, então o tempo de trânsito paraxial expresso pelo raio estacionário central a um feixe é dado por:

$$\begin{aligned} \tau_D(\xi_c, \boldsymbol{\eta}; M = R) &= \tau(\xi_c^*, R^*) - \mathbf{p}_{\mathbf{S}}^T(\xi_c^*) \Gamma_{\mathbf{S}}(\xi_c - \xi_c^*) + \mathbf{p}_{\mathbf{G}}^T(\xi_c^*) \Gamma_{\mathbf{G}}^T(\xi_c - \xi_c^*) \\ &\quad - (\xi_c - \xi_c^*) \mathbf{H}_P(\boldsymbol{\eta}^*) \boldsymbol{\eta} \\ &\quad + \frac{1}{2}(\xi_c - \xi_c^*)^T \mathbf{H}_D(\xi_c^*)(\xi_c - \xi_c^*) + \frac{1}{2} \boldsymbol{\eta}^T \mathbf{H}_P(\boldsymbol{\eta}^*) \boldsymbol{\eta} \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

onde $\tau(\xi_c^*, R^*) = \tau(\xi_c^*)$ é o tempo de trânsito refletido no raio estacionário do centro de um feixe. O vetor de parâmetros na superfície da terra $\boldsymbol{\eta} = (\xi_b - \xi_c)$ obedece a relação expressa na equação (4.13). Se o raio não é de reflexão, o tempo de trânsito da equação

(C.3) correspondente a um raio arbitrário e as coordenadas da fonte, do geofone e do ponto em profundidade não são dependentes entre si.

Se o vetor de parâmetros $\xi_c = \xi_c^*$ e $M = R$ na equação (C.3), então $\eta = (\xi_b - \xi_c^*)$ e o tempo de difração paraxial é:

$$\tau_D = (\xi_c, \eta, M = R) = \tau(\xi_c^*, R^*) + \frac{1}{2}\eta^T \mathbf{H}_P \eta^* \eta \quad (\text{C.4})$$

A superfície da empilhamento de difração, chamada de superfície de Huygens, no processo de migração Kirchhoff calculada para um ponto arbitrário M em profundidade é, então, a seguinte função tempo de trânsito:

$$\begin{aligned} \tau_D(\xi_c, \eta = 0; M = R) &= \tau(\xi_c^*, M) - \mathbf{p}_S^T(\xi_c^*) \Gamma_S(\xi_c - \xi_c^*) + \mathbf{p}_G^T(\xi_c^*) \Gamma_G(\xi_c - \xi_c^*) \\ &+ \frac{1}{2}(\xi_c - \xi_c^*)^T \mathbf{H}_D(\xi_c^*)(\xi_c - \xi_c^*) \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

Ao inserir na equação (4.9) tempos de trânsito de complexos, $\tau(\xi_c, \xi_b) = \Re\{\tau(\xi_c, \xi_b)\} + i\Im\{\tau(\xi_c, \xi_b)\}$ da equação (C.2), a superfície de Huygens da equação (C.5) e considerando que a maior contribuição da integral venha da região do feixe próxima de um raio central com parâmetro ξ_c , pode-se expressar as verdadeiras amplitudes da migração KGB em profundidade como:

$$\begin{aligned} \hat{I}(M, \omega) &= \frac{-i\omega}{2\pi} \widehat{W}(\omega) \int \int_{\mathcal{A}} d\xi_{1c} d\xi_{2c} w_b(M, \xi_c, \omega) \exp[i\omega\tau_D(\xi_c, \eta = 0, M)] \\ &(\cos \alpha'_s \cos \alpha'_G)^{-1} [-\det \mathbf{H}_P(\xi'_{c1}, \xi'_{c2})]^{1/2} u_0^B(\xi_c) \int \int_{\mathcal{D}} d\xi'_{1c} d\xi'_{2c} \exp[-i\omega\tau_{gb}(\xi_c, \xi_b)] \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

Com a ajuda do tempo de trânsito expressos na equações (C.2) e (C.5):

$$\tau_{dif} = (\xi_c, \eta, M) = \tau_D(\xi_c, \eta; M = R) - \tau(\xi_c, \xi_b) \quad (\text{C.7})$$

Usando as condições de fase estacionária, encontra-se dois resultados importantes;

1. Para $\partial\tau_{dif}/\partial\xi_c = 0$ no ponto crítico $\xi_c = \xi_c^*$, encontra-se a identidade $\nabla_{\xi} \tau_R(\xi_c^*, \xi_b = \xi_c^*) \equiv \nabla_{\xi} \tau_D(\xi_c = \xi_c^*, \eta = 0, M = R^*)$, ou seja, o gradiente da parte imaginária da função tempo de trânsito de reflexão é negligenciando, que para η significa a condição de tangência entre as superfícies de Huygens e de reflexão no ponto crítico.
2. Para $\partial\tau_{dif}/\partial\eta = 0$ no ponto crítico η^* , o gradiente da parte imaginária da função tempo de trânsito de reflexão é negligenciando, encontrando $\nabla_{\eta} \tau_R(\xi_c^*, \xi_b) \equiv \nabla_{\eta} \tau_D(\xi_c, \eta^*, M = R^*)$. Assim, $\mathbf{p} + \eta^* \mathbf{H}_P(\eta^*) = 0$, com $\mathbf{p}^T = -(\xi_c - \xi_c^*) \mathbf{H}_P(\eta^*)$ da equação (C.3) resulta em $\eta^* = (-\mathbf{p}^T \mathbf{H}_P^{-1}(\eta^*))^T$, que significa as coordenadas da fase estacionária $\eta^* = (\xi_c - \xi_c^*)$.

Considerando as condições da fase estacionária obtidas acima, o tempo de trânsito τ_{dif} da equação (C.8) pode ser expandida em série de Taylor:

$$\tau_{dif}(\xi_c, \eta, M) = \tau_{dif}(\xi_c^*, \eta = 0, M) + \frac{1}{2}(\xi_c - \xi_c^*)^T \mathbf{H}_{\xi}(\xi_c^*)(\xi_c - \xi_c^*) + \frac{1}{2}\eta^T \mathbf{H}_{\eta}(\eta = 0)\eta \quad (\text{C.8})$$

no ponto crítico $\boldsymbol{\xi}_c = \boldsymbol{\xi}_c^*$, tem-se a matriz 2×2 Hessiana complexa:

$$\mathbf{H}_\xi(\boldsymbol{\xi}_c^*) = \mathbf{M}_\Delta(\boldsymbol{\xi}_c^*) = \mathbf{H}_\xi(\boldsymbol{\xi}_c^*) - \mathbf{H}_D(\boldsymbol{\xi}_c^*) = \mathbf{H}_P(\boldsymbol{\xi}_c^*) + i\mathbf{H}_I(\boldsymbol{\xi}_c^*) \quad (\text{C.9})$$

Em $\boldsymbol{\eta}$, a parte real da matriz 2×2 Hessiana complexa é:

$$\mathbf{H}_\eta(\boldsymbol{\eta} = 0) \equiv \mathbf{H}_P(\boldsymbol{\xi}_b = \boldsymbol{\xi}_c^*) \quad (\text{C.10})$$

Usando a equação (C.7), com a ajuda das equações (C.9), (C.10) e (C.11), a equação (C.6) pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} \hat{I}(M, \omega) = & \frac{-i\omega}{2\pi} \widehat{W}(\omega) \int \int_{\mathcal{A}} d\xi_c w_b(M, \boldsymbol{\xi}_c, \omega) [-\det \mathbf{H}_P(\xi'_{c1}, \xi'_{c2})]^{1/2} (\cos \alpha'_s \cos \alpha'_G)^{-1} \\ & u_0^B(\boldsymbol{\xi}_c) \exp[i\omega \phi(\boldsymbol{\xi}_c, M)] \int \int_D d\boldsymbol{\eta} \exp \left[i\omega \frac{1}{2} \boldsymbol{\eta}^T \mathbf{H}_\eta(\boldsymbol{\eta} = 0) \boldsymbol{\eta} \right] \end{aligned}$$

Onde a função fase da integral externa na equação (C.11) é:

$$\phi(\boldsymbol{\xi}_c, M) = \tau_{dif}(\boldsymbol{\xi}_c, M) + \frac{1}{2} (\boldsymbol{\xi}_c - \boldsymbol{\xi}_c^*)^T \mathbf{M}_\Delta(\boldsymbol{\xi}_c^*) (\boldsymbol{\xi}_c - \boldsymbol{\xi}_c^*) \quad (\text{C.11})$$

Com a identidade da equação (C.11), obtém-se:

$$\begin{aligned} \hat{I}(M, \omega) \approx & \frac{\omega}{2\pi} \widehat{W}(\omega) \int \int_{\mathcal{A}} d\xi_c w_b(\boldsymbol{\xi}_c, M) (\cos \alpha_s^c \cos \alpha_G^c)^{-1} \\ & \times u_0^B(\boldsymbol{\xi}_c) \exp[i\omega \phi(\boldsymbol{\xi}_c, M)] \exp \left[\frac{i\pi}{2} (1 - \text{Sgn} \mathbf{H}_P(c)/2) \right] \end{aligned}$$

No ponto estacionário $\boldsymbol{\xi}_c^*$, a integral na equação (C.12) possui uma solução aproximada assintótica dada por:

$$\begin{aligned} \hat{I}(M, \omega) \approx & \frac{2\pi}{\omega} w_b(\boldsymbol{\xi}_c^*, M, \omega) [v_s(\boldsymbol{\xi}_c) v_g \boldsymbol{\xi}_c p_{sz}(\boldsymbol{\xi}_c^*) p_{gz}(\boldsymbol{\xi}_c^*)]^{-1} \\ & \times \frac{U_0^\Omega C_t R_c}{G_S^B \sqrt{\det \mathbf{M}_\Delta(\boldsymbol{\xi}_c^*)}} \exp \left[\omega \tau_{dif}(\boldsymbol{\xi}_c, M) - \frac{i\pi}{2} (1 - \text{Sgn} \mathbf{H}_P(\boldsymbol{\xi}_c)/2) \right] \end{aligned}$$

APÊNDICE D – APROXIMAÇÕES DO CAMPO DE ONDAS

Neste apêndice, será descritas uma solução aproximadas da equação da onda utilizadas para contornar algumas lacunas existentes na teoria do raio de ordem zero. Os feixes gaussianos que combinam as vantagens da teoria do raio e a técnica de aproximações paraxiais na vizinhança de um raio, de modo a fornecer um método válido em cáusticas e em modelos heterogêneos complexos. Estes método possui baixo custo computacional e de simples implementação, quando comparado à modelagem sísmica usando diferença finita cujo tempo de processamento é bastante elevado em meios mais realistas e complexos.

D.1 FEIXES GAUSSIANOS

O método do raio é amplamente usado para calcular os campos de ondas de diferentes natureza física para aproximações em altas frequências, devido a sua relativa simplicidade em suas fórmulas. Mas, a teoria do raio falha em regiões onde o campo de raios tem comportamento não-regulares, isto é, quando o ponto de observação se localiza sobre em uma superfície de cáustica, onde a amplitude é infinita, ou quando o ponto de observação se localiza em uma zona de sombra, onde o traçado de raio não pode ser realizado. Para superar essas dificuldades algumas modificações no método do raio foram usadas, tal como a obtenção do operador WKBJ/Maslov cuja sua descrição pode ser visto em Chapman (1971), onde o resultado do algoritimo depende da posição do ponto de observação, requerendo um estudo da característica geométrica do raios não-regulares. Babich e Pankratova (1973) propuseram uma ideia de descrever o campo de ondas em altas frequências através de uma integral de superposição de todos os raios como uma solução aproximada em um tubo de raios na vizinhança de um raio central, chamado de superposição de feixes gaussianos. Seguido por outros autores, Popov (1982), Červený (1982), Müller (1984) e Bleistein (2009).

D.1.1 Tempos Paraxiais

A integral de feixes gaussianos que será descrita a seguir, equivale a uma superposição de aproximação paraxial de tempos complexos, ponderada por uma função exponencial com a forma de uma gaussiana centrada em um ponto do raio. Os tempos de trânsitos utilizados para o cálculo das amplitudes dos feixes, são estimados a partir das derivadas espaciais de primeira (vagarosidade \mathbf{p}) e segunda (matriz \mathbf{M}) ordem. Isto é referido como uma aproximação paraxial dos tempos de trânsito na vizinhanca de um raio central. Para calcular \mathbf{p} , o sistema de equações lineares,isto é, as equações cinemáticas do raio

apresentada na seção (2.4.3) deve ser integrado. Para determinar \mathbf{M} , é necessário resolver o sistema (2.81), com a finalidade de encontrar as matrizes \mathbf{P} e \mathbf{Q} . A vagarosidade \mathbf{p} é simplesmente o gradiente espacial dos tempos de trânsito e o espalhamento geométrico está relacionado com a matriz \mathbf{Q} . Quando um receptor não está próximo de uma cáustica, as quantidades determinadas no sistema de traçamento dinâmico do raio podem ser usadas para determinar a solução, que consiste no espalhamento geométrico, tempo de trânsito e dos coeficientes de reflexão/transmissão. O tempo paraxialmente estimado a partir das matrizes \mathbf{P} e \mathbf{Q} pode ser usada tanto para evitar o *two-point ray tracing* pela extrapolação do tempo de trânsito próximo a um raio ou para resolver de forma iterativa o problema de *two-point ray tracing*. O tempo de trânsito em uma vizinhança de s pode ser calculada pela equação (2.104), que na forma matricial pode ser escrita como (CĚRVENÝ, 2001) :

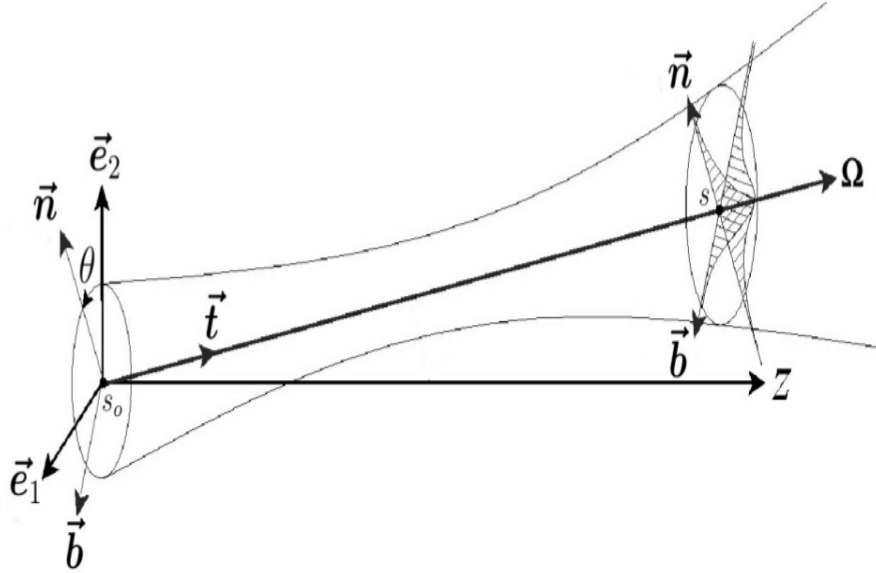
$$\tau(\mathbf{x}) = \tau(\mathbf{x}_0) + \Delta\mathbf{x}^\top \mathbf{p} + \frac{1}{2} \Delta\mathbf{x}^\top \mathbf{H}^\top \mathbf{M} \mathbf{H} \Delta\mathbf{x} \quad (\text{D.1})$$

Lembrando que \mathbf{H} a matriz de transformação de coordenadas centradas no raio para coordenadas cartesianas (as colunas de \mathbf{H} são os vetores base no final do raio), $\mathbf{M} = \mathbf{P}\mathbf{Q}^{-1}$, \mathbf{P} e \mathbf{Q} são soluções do sistema (2.81). Além disso, $\Delta\mathbf{x}$ é definido como $\Delta\mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$, com \mathbf{x}_0 as coordenadas cartesianas do ponto S e \mathbf{x} as coordenadas cartesianas do ponto R' (Figura 4).

D.1.2 Aproximação Paraxial do Raio

Os feixes gaussianos são definidos pela adição de uma pequena parte imaginária da matriz M equação (2.83), que resulta em um decaimento exponencial de um feixe a partir do raio central. A amplitude de cada feixe é proporcional a parte real de $\exp(i\omega\tau)$, onde τ é considerado um número complexo em (D.1), através da inclusão de \mathbf{M} complexo. Na vizinhança de cáusticas, a soma de feixes permanece regular, onde o espalhamento geométrico desaparece e a teoria do raio se tornar singular. Na verdade, a diferença entre a teoria do raio e de feixes gaussianos depende apenas dos valores iniciais de \mathbf{P} e \mathbf{Q} .

Figura 19 – Ilustração de um feixe gaussiano, mostrando as coordenadas centradas no raio, a meia-largura e a amplitude gaussiana.



Fonte: Pereira (2013)

Aqui serão relatados, resumidamente, os resultados apresentados por Červený (2001) e para descrever uma solução paraxial. A equação de onda em coordenadas cartesianas tem uma solução paraxial na forma (ČERVENÝ, 2001)

$$u_{par}(x_1, x_2, x_3) = A^{(x)} \exp[-i\omega\tau(\mathbf{x})] \quad (\text{D.2})$$

Onde, o tempo $\tau(x)$ possui apenas parte real, devendo ser calculado pela equação (D.1). O termo $A^{(x)}(s)$ é a amplitude em coordenadas cartesianas e pode ser calculado por equação (2.84):

$$A^x(s) = A^\omega(s)\mathcal{L} \quad (\text{D.3})$$

onde

$$A^\Omega(s) = \sqrt{\frac{\rho(s_0)v(s_0)}{\rho(s)v(s)}} H_{ik}(s) R_{kj}^c A_j^q(s_0) \quad e \quad \mathcal{L} = \sqrt{\frac{\det(Q(s_0))}{\det(Q(s))}}$$

O fator $\mathbf{H}_{ik}(s)$ denota as componentes cartesianas $e_{ki}(s)$ de polarização do vetor \mathbf{e}_k em s . Se o ponto s está situado na estrutura da interface, \mathbf{H}_{ik} pode ser substituído pelo coeficiente de conversão descrito por Červený (2001). $A_j^q(s_0)$ representa a amplitude inicial, em coordenadas centradas no raio, calculada no raio central da onda elementar em s_0 . Por fim, R_{kj}^c é o coeficiente de reflexão/transmissão (R/T) normalizado, cuja suas componentes são dadas em função do ângulo incidente θ_0 ângulo refletido θ e do coeficiente

R de reflexão/transmissão (YILMAZ, 2001) para onda P:

$$\mathcal{R}_{kj}^{(c)} = R \sqrt{\frac{\rho(s_0)v(s_0) \cos(\theta_0)}{\rho(s)v(s) \cos(\theta)}}$$

D.1.3 Aproximação Paraxial de Feixes Gaussianos

A aproximação paraxial de feixes gaussianos da componente principal do campo de onda sísmica PP (onda P incidente que continua a ser P depois de refletida) na vizinhança de um raio central de direção dada pelo vetor \vec{t} , a partir de uma fonte pontual tridimensional em um meio, é representada pela equação em coordenadas centradas no raio por (POPOV, 2002),

$$\mathbf{u}_{gb}(q_1, q_2, s) = A(s) \exp[-i\omega(\tau(s) - \tau(s) - \frac{1}{2} \Delta \mathbf{q}^\top \mathbf{M}(s) \Delta \mathbf{q})] \vec{t} \quad (\text{D.4})$$

onde, $\Delta \mathbf{q}^\top = (\mathbf{q} - \mathbf{q}_0)^\top = (q_1 - q_1^0, q_2 - q_2^0)$ deve ter parte real $\Re\{\mathbf{M}(s)\}$ e parte imaginária $\Im\{\mathbf{M}(s)\}$ e satisfazer três condições ao longo do raio:

1. $\det(\mathbf{Q}(s)) \neq 0$;
2. $\mathbf{M}(s) = \mathbf{M}^\top(s)$;
3. $\Im\{\mathbf{M}(s)\}$ é positiva definida.

Para calcular $\mathbf{M}(s)$, Červený (2001) faz uso da matriz propagadora (2.46):

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P}(s) \\ \mathbf{Q}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1(s, s_0) & \mathbf{Q}_2(s, s_0) \\ \mathbf{P}_1(s, s_0) & \mathbf{P}_2(s, s_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}(s_0) \\ \mathbf{Q}(s_0) \end{bmatrix} \quad (\text{D.5})$$

assim,

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}(s) &= \mathbf{Q}_1(s, s_0)\mathbf{Q}(s_0) + \mathbf{Q}_2(s, s_0)\mathbf{Q}(s_0) \\ &= [\mathbf{Q}_1(s, s_0) + \mathbf{Q}_2(s, s_0)\mathbf{Q}(s_0)\mathbf{Q}_1^{-1}(s_0)]\mathbf{Q}(s_0) \\ &= [\mathbf{Q}_1(s, s_0) + \mathbf{Q}_2(s, s_0)\mathbf{M}(s_0)]\mathbf{Q}(s_0) \end{aligned} \quad (\text{D.6})$$

analogamente,

$$\mathbf{P}(s) = [\mathbf{P}_1(s, s_0) + \mathbf{P}_2(s, s_0)\mathbf{M}(s_0)]\mathbf{Q}(s_0) \quad (\text{D.7})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(s) &= \mathbf{M}(s)\mathbf{Q}^{-1}(s) \\ &= [\mathbf{P}_1(s, s_0) + \mathbf{P}_2(s, s_0)\mathbf{M}(s_0)]\mathbf{Q}(s_0)\mathbf{Q}(s_0)^{-1}[\mathbf{Q}_1(s, s_0) + \mathbf{Q}_2(s, s_0)\mathbf{M}(s_0)]^{-1} \\ &= [\mathbf{P}_1(s, s_0) + \mathbf{P}_2(s, s_0)\mathbf{M}(s_0)][\mathbf{Q}_1(s, s_0) + \mathbf{Q}_2(s, s_0)\mathbf{M}(s_0)]^{-1} \end{aligned} \quad (\text{D.8})$$

Para encontrar $A^{(x)}(s)$, deve-se calcular a razão:

$$\left(\frac{\det \mathbf{Q}(s_0)}{\det \mathbf{Q}(s)} \right)^{1/2} = \sqrt{\det[\mathbf{Q}_1(s, s_0) + \mathbf{Q}_2(s, s_0)\mathbf{M}(s_0)]} \quad (\text{D.9})$$

A matriz $\mathbf{M}_{2 \times 2}(s_0)$ é composta pelas derivadas de segunda ordem do tempo de trânsito em relação às coordenadas centrada no raio q_I em s_0 . Ela está relacionada com a matriz de curvatura da frente de onda $\mathbf{K}_{2 \times 2}(s_0)$ pela relação $\Re\{\mathbf{M}(s_0)\} = v^{-1}\mathbf{k}(s_0)$, onde $v = v(s_0)$.

Para determinar as equações (D.9) e (D.8), ao longo de todo raio, é preciso saber $M(s_0)$ que satisfaça as condições iniciais:

1. $\det(\mathbf{Q}(s)) \neq 0$ e $\det \mathbf{Q} \neq \infty$;
2. $\mathbf{M}(s) = \mathbf{M}^\top(s)$;
3. $\Im\{\mathbf{M}(s)\}$ é positiva definida.

Popov (1982) fez um estudo detalhado, em 2-D, sobre a escolha de $\mathbf{Q}(s_0)$ e $\mathbf{P}(s_0)$. Bleistein (2009) estendeu as condições iniciais de Popov (1982) para o caso 3-D, obtendo:

$$\mathbf{Q}(s_0) = \frac{\omega L_0}{v_0} \mathbf{I} \quad e \quad \mathbf{P}(s_0) = \frac{i}{v_0} \mathbf{I} \quad (\text{D.10})$$

Onde, ω é a frequência angular dominante, L_0 a meia-largura inicial do feixe gaussiano e v_0 é a velocidade inicial.

A matriz $\Im\{\mathbf{M}(s)\}$ descreve as propriedades geométricas da frente de onda. Seus autovalores $\lambda_{\Re\{\mathbf{M}(s)\}}^{(1)} = \lambda_1(s)$ e $\lambda_{\Re\{\mathbf{M}(s)\}}^{(2)} = \lambda_2(s)$ são sempre reais. As quantidades $\mathbf{K}_1(s) = v\lambda_1(s)$ e $\mathbf{K}_2(s) = v\lambda_2(s)$ representam as curvaturas da frente de onda. $\Im\{\mathbf{M}(s)\}$ controla o perfil da amplitude gaussiana nas seções perpendiculares ao raio. Devido a $\Im\{\mathbf{M}(s)\}$ ser positiva-definida e simétrica, os autovalores $\lambda_{\Im\{\mathbf{M}(s)\}}^{(1)} = \widehat{\lambda}_1(s)$ e $\lambda_{\Im\{\mathbf{M}(s)\}}^{(2)} = \widehat{\lambda}_2(s)$ são sempre reais.