UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ CENTRO DE GEOCIÊNCIAS CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM GEOFÍSICA

TESE DE MESTRADO

INVERSÃO GRAVIMÉTRICA ESTÁVEL DO RELEVO DO EMBASAMENTO E DA VARIAÇÃO DA DENSIDADE COM A PROFUNDIDADE EM BACIAS SEDIMENTARES

DENIS CARLOS LIMA COSTA

F. COSTA, Denis Carlos Linea

37i Inversão gravitacirica estável do releva do cinhasamento é da váriação da densidade cos i a profandidade con hacias eschiarentares / Dens Cados I inte Costa: originador dofo Belista Corrên da Silva Hefen (Calo Col Col Corregionador do Corrên (Corrên da Silva Colo Corrên (Corrên (Corrên

 390 ± 30

Urssenação (Mexindo an em Geolísica, CG, DRCA, 2002 (ANÁEISE) - GR, GRAMIMÉTRICA - DRDSS



will the third united against

, 2 INVERSÃO MARIE - 4 BACIAS

> BELÉM - PARÁ 2003

1.00 530.083

T COSTA, Denis Carlos Lima

C837i Inversão gravimétrica estável do relevo do embasamento e da variação da densidade com a profundidade em bacias sedimentares. / Denis Carlos Lima Costa; orientador, João Batista Corrêa da Silva. Belém: [s.n], 2003.

39p.; il.

Dissertação (Mestrado em Geofísica) – Curso de Pós-Graduação em Geofísica, CG, UFPA, 2003. 1.ANÁLISE GRAVIMÉTRICA. 2.INVERSÃO

GRAVIMÉTRICA 3.DENSIDADE VARIÁVEL. 4.BACIAS SEDIMENTARES. I.SILVA, João Batista

Corrêa da, Orient. II. Título.

CDD: 543.083



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ CENTRO DE GEOCIÊNCIAS CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM GEOFÍSICA

INVERSÃO GRAVIMÉTRICA ESTÁVEL DO RELEVO DO EMBASAMENTO E DA VARIAÇÃO DA DENSIDADE COM A PROFUNDIDADE EM BACIAS SEDIMENTARES

TESE APRESENTADA POR

DENIS CARLOS LIMA COSTA

COMO REQUISITO PARCIAL À OBTENÇÃO DE GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS NA ÁREA DE GEOFÍSICA

Data da aprovação: 21/10/2003

Nota: 95% (EXCELENTE)

COMITÊ DE TESE:

Prof. Dr. João Batista Corrêa da Silva (Orientador) ale

Prof. Dra. Valéria Cristina Ferreira Barbosa

Prof. Dr. Walter Eugênio de Medeiros

BELÉM

2003

A meus pais, Carlos e Maria, que me trouxeram à vida e me ensinaram como nela prosseguir. Á minha esposa Jailsa, por seu carinho e companheirismo. E ao meu filho Heictor, para que lhe sirva de exemplo e estímulo. Indo eles pelo caminho, entraram em um certo povoado. E certa mulher, chamada Marta, hospedou-o em sua casa.

Tinha uma irmã, chamada Maria, que sentou-se aos pés do Senhor, e ficou ouvindo seus ensinamentos.

Marta agitava-se de um lado para outro, ocupada em muitos serviços. Então aproximou-se de Jesus e disse:

- Senhor! Não te importas de que eu fique a servir sozinha? Ordena a minha irmã que venha ajudar-me!

Respondeu o Senhor:

- Marta! Marta! Andas inquieta e te preocupas com muita coisa.

"Maria, entretanto, escolheu a melhor parte, e esta não lhe será tirada."

LUCAS, 10; 38-42

AGRADECIMENTOS

Este trabalho beneficiou-se dos comentários formulados pela banca examinadora constituída pelos professores João Batista Corrêa da Silva, Walter Medeiros e Valéria Barbosa . Entretanto, meu débito com o professor João Batista é muito maior, pois foi ele que me iniciou no estudo da geofísica, brindando-me com sua orientação e competência.

Não poderia deixar de agradecer ao professor José Gouvêa Luiz por seu auxílio e sua paciência, assim como a professora Lúcia Maria da Costa e Silva, pois, as suas opiniões e experiências ajudaram a temperar este trabalho.

No departamento de geofísica usufruí da amizade de todos, principalmente de Benildes, e toda sua cordialidade.

Meu débito maior, porém, foi contraído com Wlamir Abreu Texeira de onde desfrutei, além do agudo senso crítico, sua amizade.

Agradeço, por fim, à Universidade federal do Pará pela oportunidade de estudo e à CAPES pelo seu suporte financeiro durante o curso.

SUMÁRIO

		р.			
DEDICATÓRIA EPÍGRAFE AGRADECIMENTOS RESUMO		i ii iii 1			
			ABSTRACT		2
			1	INTRODUÇÃO	3
			2	METODOLOGIA	5
2.1	DETERMINAÇÃO DO RELEVO DO EMBASAMENTO	6			
2.2	DETERMINAÇÃO DA VARIAÇÃO DO CONTRASTE DE				
	DENSIDADE COM A PROFUNDIDADE	8			
3	TESTES COM DADOS SINTÉTICOS	10			
3.1	AMBIENTE I	11			
3.2	AMBIENTE II	14			
3.3	AMBIENTE III	17			
3.2	AMBIENTE IV	20			
3.5	AMBIENTE V	23			
3.6	AMBIENTE VI	26			
4	APLICAÇÃO EM DADOS REAIS	29			
5	CONCLUSÃO	36			
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	38			

RESUMO

O presente método postula uma variação hiperbólica para o contraste de densidade de uma bacia sedimentar em função da profundidade, e tem dois objetivos: (1) delinear o relevo do embasamento de uma bacia, conhecendo-se a anomalia gravimétrica, o contraste de densidade na superfície da bacia e o fator de decaimento do contraste de densidade com a profundidade; (2) estimar, além do relevo, o valor do contraste de densidade na superfície de uma bacia sedimentar e o fator de decaimento do contraste de densidade com a profundidade, sendo fornecida a anomalia gravimétrica e a profundidade do embasamento em alguns pontos da bacia. Nos dois casos o modelo interpretativo é um conjunto de prismas retangulares verticais justapostos, cujas espessuras, que são parâmetros a serem estimados, representam a profundidade da interface de separação entre os sedimentos e o embasamento. As soluções obtidas nos dois problemas acima formulados são estáveis devido à incorporação de informações adicionais sobre a suavidade do relevo estimado, e o conhecimento da profundidade do relevo do embasamento em alguns pontos, fornecido por furos de sondagem.

O método foi testado em anomalias gravimétricas sintéticas produzidas pela simulação de bacias sedimentares com relevos suaves. Os resultados mostraram relevos com boa resolução e valores estimados do contraste de densidade na superfície da bacia e do fator de decaimento do contraste de densidade com a profundidade, próximos aos verdadeiros, indicando dessa maneira o potencial do método em interpretações gravimétricas de bacias sedimentares.

O método foi aplicado à anomalia Bouguer da Bacia do Recôncavo, Brasil, delineando um relevo com um valor para a profundidade máxima de cerca de 6 km, semelhante ao estimado em interpretações sísmicas. As estimativas para o contraste de densidade na superfície da Bacia e o fator de decaimento com a profundidade foram -0,30 g/cm³ e 30 km, respectivamente, produzindo uma estimativa para a compactação máxima dos sedimentos da ordem de 4%.

ABSTRACT

The present method assumes a decrease in the density contrast of a sedimentary basin according to a hyperbolic law and has two objectives: (1) to estimate the basement relief of the sedimentary basin assuming that the gravity anomaly, the density contrast at the surface and the decaying factor of the density contrast with depth are known; (2) to estimate the basement relief, the density contrast at the surface and the decaying factor of the density anomaly and the depth to the basement at a few points are known. In both cases the interpretation model is a set of vertical rectangular 2D prisms whose thicknesses are parameters to be estimated and represent the depth to the interface separating sediments and basement. The solutions of both problems are stable because of the incorporation of additional a priori information about the smoothness of the estimated relief and about the depth to the basement at a few locations, presumably provided by boreholes.

The method was tested with synthetic gravity anomalies produced by simulated sedimentary basins presenting smooth relief. The results showed well-resolved estimated relieves. Besides, estimated density contrasts at the surface and the decaying factors of the density contrast with depth close to the true ones were obtained, indicating the potentiality of the proposed method in gravity interpretations of sedimentary basins.

The method was applied to the Bouguer anomaly from Recôncavo Basin, producing an estimated relief with a maximum depth of 6 km, a figure similar to the one obtained from seismic interpretations. The estimates of the surface density contrast and of the decaying factor of the density contrast with depth were -0.30 g/cm³ and 30 km, respectively, producing an estimate of 4% for the maximum sediment compaction.

1 INTRODUÇÃO

As bacias sedimentares representam a principal fonte de concentração de petróleo. O estudo dessas bacias pode revelar a existência de petróleo em acumulações comercialmente exploráveis. Porém, a acumulação do petróleo depende da existência de armadilhas estruturais que o aprisionem e promovam sua concentração. O método gravimétrico tem sido utilizado para a detecção, localização e delineação destas feições estruturais. Inicialmente, valores de densidade constantes para o pacote sedimentar foram presumidos (Bott, 1960; Corbató, 1965), sendo posteriormente substituídos por modelos interpretativos que admitem um aumento da densidade dos sedimentos com a profundidade, e, por conseguinte, uma diminuição do contraste de densidade contraste de densidade decai de forma exponencial. Murthy e Rao (1979) utilizaram a equação da anomalia de um modelo poligonal cujo contraste de densidade varia linearmente com a profundidade. Bhaskara Rao (1986) estabeleceu uma variação quadrática para o contraste de densidade e Sari e Şalk (2002) utilizam um contraste de densidade variando hiperbolicamente com a profundidade, introduzido por Litinsky (1989) para delinear o embasamento de bacias sedimentares.

Os modelos interpretativos que admitem a variação da densidade com a profundidade são, sem dúvida, mais próximos da realidade geológica do que os modelos que admitem densidade constante. No entanto, a diminuição do contraste de densidade com a profundidade pode levar a uma instabilidade adicional a aquela que normalmente ocorre na estimativa do relevo de interfaces separando dois meios homogêneos, necessitando, portanto, uma estabilização adicional das soluções. Nesse caso, a introdução de estabilizadores de suavidade do relevo faz com que a profundidade do relevo estimado da interface seja subestimada.

Este trabalho tem dois objetivos. O primeiro consiste em avaliar sob que circunstâncias a estimativa do relevo da interface de separação sedimento-embasamento se torna instável sob a premissa do contraste de densidade variar com a profundidade segundo uma lei hiperbólica. O segundo objetivo consiste na estimação estável dos parâmetros que descrevem a variação do contraste de densidade com a profundidade, usando tanto a anomalia gravimétrica como informação sobre o relevo do embasamento da bacia.

Ambas as abordagens são ilustradas em dois problemas. No primeiro, o relevo do embasamento da bacia é estimado através de dados gravimétricos, considerando uma variação hiperbólica do contraste de densidade com a profundidade e supondo conhecidos o fator de decaimento do contraste de densidade e o contraste densidade na superfície da bacia. No segundo, determinam-se o fator de decaimento do contraste de densidade e o contraste de densidade com a profundidade e o contraste de densidade na superfície da bacia. No segundo, determinam-se o fator de decaimento do contraste de densidade com a profundidade e o contraste de densidade na superfície da bacia sedimentar a partir da anomalia gravimétrica e do conhecimento da profundidade do relevo do embasamento em pelo menos um ponto.

As soluções obtidas em testes com dados sintéticos produzem excelentes estimativas dos relevos de bacias sedimentares desde que o contraste de densidade próximo à interface seja suficientemente grande e a atenuação do contraste de densidade com a profundidade seja suficientemente pequeno, de modo que o contraste de densidade próximo à interface entre embasamento e sedimento produza uma resposta gravimétrica bem acima do nível do ruído. Adicionalmente, o contraste de densidade na superfície da bacia e o fator de decaimento desse contraste com a profundidade foram estimados de forma estável produzindo valores muito próximos aos verdadeiros.

O método também foi aplicado a um perfil gravimétrico da Bacia do Recôncavo, Brasil, no qual um único ponto do relevo, com profundidade conhecida, foi empregado. Os resultados mostram que o contraste de densidade decai de -0,30 g/cm³ na superfície para -0,21 g/cm³ a uma profundidade de cerca de 6 km, presumivelmente a profundidade máxima dessa bacia.

2 METODOLOGIA

Seja \mathbf{g} um vetor contendo a anomalia gravimétrica (Figura 1a) de um conjunto de N observações produzidas por uma bacia sedimentar (Figura 1b).



Fig.1. Anomalia gravimétrica (a) produzida pela bacia sedimentar (b).

Presume-se que: *i*) a bacia é alongada na direção y perpendicular ao plano da Figura; *ii*) que o relevo do embasamento S (Figura 2) pode ser aproximado por um modelo interpretativo formado por um conjunto de M prismas bidimensionais verticais, justapostos; e *iii*) que a densidade da bacia varia com a profundidade segundo uma lei hiperbólica. O topo de cada prisma

está localizado na superfície e todos os prismas têm a mesma extensão horizontal. Como simplificação, consideramos que os dados gravimétricos foram obtidos sobre um perfil paralelo à direção x, com um espaçamento dx e que os centros dos prismas coincidem com os pontos de observação.



Fig. 2. Conjunto de M prismas verticais justapostos utilizado para a interpretação do relevo do embasamento S de uma bacia sedimentar.

2.1 DETERMINAÇÃO DO RELEVO DO EMBASAMENTO

Deseja-se determinar o relevo da interface de separação entre os sedimentos e o embasamento de uma bacia conhecendo-se a anomalia gravimétrica, o contraste de densidade na superfície e o decaimento do contraste com a profundidade, supondo que o contraste de densidade $\Delta \rho$ entre a bacia sedimentar e a rocha encaixante diminua com a profundidade de acordo com a lei hiperbólica (Litinsky, 1989)

$$\Delta \rho(z) = \frac{\Delta \rho_0 \beta^2}{\left(\beta + z\right)^2} , \qquad (1)$$

em que $\Delta \rho_0$ é o contraste de densidade na superfície e β é um fator de variação do contraste de densidade com a profundidade expresso em unidade de comprimento. As espessuras dos prismas são os parâmetros a serem determinados e estão relacionados à anomalia gravimétrica g_i através da relação não linear

$$g_{i} = \sum_{j=1}^{M} F(p_{j}, \Delta \rho, \beta, r_{i}), i = 1, 2 \dots N,$$
(2)

em que $F(p_j, r_i)$ é uma função não linear que fornece a anomalia, no ponto definido pelo vetorposição r_i , produzida pelo j-ésimo prisma com espessura p_j e contraste de densidade variando de acordo com a equação (1). A expressão para a função $F(p_j, r_i)$ pode ser encontrada em Visweswara-Rao et al. (1994). O termo g_i define o *i*-ésimo elemento do vetor $\mathbf{g} = \mathbf{g}(\mathbf{p}) = [g_1, g_2, \cdots g_N]^T$, que contém a anomalia computada através do modelo interpretativo definido de modo único pelo vetor de parâmetros $\mathbf{p} = [p_1, p_2, \cdots p_M]^T$.

Uma solução estável do problema de estimar **p** a partir do vetor $\mathbf{g}^o = [g_1^o, g_2^o, \cdots g_N^o]^T$, contendo *N* observações da anomalia gravimétrica, pode ser obtida minimizando o funcional

$$\frac{1}{M} \|\mathbf{R}\mathbf{p}\| \tag{3}$$

sujeito a

$$\frac{1}{N} \left\| \mathbf{g}^{\,o} - \mathbf{g}(\mathbf{p}) \right\|^2 = \delta \,, \tag{4}$$

em que **R** é o operador discreto de primeiras derivadas horizontais e δ é o erro médio quadrático esperado para as realizações da variável aleatória que contaminam as observações. A solução desse problema é obtida via multiplicadores de Lagrange, definindo-se a função a ser minimizada incondicionalmente:

$$\tau(\mathbf{p}) = \frac{1}{N} \| \mathbf{g}^{\circ} - \mathbf{g} \| + \mu \frac{1}{M} \| \mathbf{R} \mathbf{p} \| , \qquad (5)$$

em que μ é o inverso do multiplicador de Lagrange. O mínimo $\hat{\mathbf{p}}$ do funcional (5) é obtido através do método de Marquardt, empregando-se a aproximação de Gauss-Newton para a matriz Hessiana em cada iteração (Silva et al., 2001).

A minimização do funcional (3) corresponde ao vínculo de *Suavidade global* (Barbosa et al., 1997), que estabiliza a solução, introduzindo um certo grau de suavidade ao relevo estimado. Assim, tal vínculo é adequado à interpretação de dados gravimétricos procedentes de bacias sedimentares que se desenvolveram sob o regime de esforços tectônicos moderados, predominando o processo de subsidência suave como o caso de bacias intracratônicas.

Para se obter uma solução estável, o seguinte procedimento foi utilizado: i) atribuímos um valor bem pequeno a μ (tal que as soluções sejam instáveis); ii) contaminamos as observações com diversas seqüências de números pseudo-aleatórios, computando, para cada semente, o minimante de (5); iii) aumentamos o valor de μ e repetimos o passo (ii); iv) finalmente, μ é escolhido como o menor valor produzindo soluções próximas entre si segundo critério préestabelecido pelo intérprete. Esta escolha de μ permite obter uma solução estável com a mínima perda de resolução, uma vez que a informação a priori introduzida pelo funcional (3) impõe um aumento de estabilidade às custas da diminuição da resolução.

2.2 DETERMINAÇÃO DA VARIAÇÃO DO CONTRASTE DE DENSIDADE COM A PROFUNDIDADE

O segundo objetivo é a determinação do contraste de densidade na superfície e do decaimento do contraste com a profundidade conhecendo-se a anomalia gravimétrica e as profundidades de alguns pontos do relevo do embasamento da bacia sedimentar.

Mantendo a mesma nomenclatura e definições da seção anterior, suponhamos que a profundidade do embasamento seja conhecida em *L* pontos discretos, definindo o vetor $\mathbf{h}^o = [h_1^o, h_2^o, \dots h_L^o]^{\mathrm{T}}$.

Do conhecimento de $\mathbf{h}^{o} \in \mathbf{g}^{o}$, queremos estimar $\Delta \rho_{0} \in \beta$. Para tanto, definimos a função

$$\Phi\left(\Delta\rho_{o},\beta\right) = (1-\lambda)\frac{1}{L} \left\| \mathbf{h}^{0} - \hat{\mathbf{p}}_{L} \left(\Delta\rho_{o},\beta\right) \right\|^{2} + \lambda \frac{1}{N} \left\| \mathbf{g}^{0} - \mathbf{g}(\Delta\rho_{o},\beta) \right\|^{2}$$
(6)

em que $\hat{\mathbf{p}}_{L}$ é o vetor L×1 de estimativas das profundidades da interface *S*, obtido através da minimização do funcional (5) e $\lambda \in [0, 1]$, de modo que $\boldsymbol{\Phi}$ é uma combinação convexa dos termos contendo a informação geofísica e a informação a priori sobre o relevo. Caso alguma das *L* posições, onde a profundidade da interface é conhecida, não coincida com alguma das posições dos centros dos prismas do modelo interpretativo, uma interpolação é feita entre as estimativas $\hat{p}_1, \hat{p}_2 \cdots \hat{p}_M$ mais próximas ao ponto onde a profundidade é conhecida. Como a função $\Phi(\Delta \rho_o, \beta)$ depende apenas de dois parâmetros, a estimação desses parâmetros é feita através do mapeamento discreto de $\Phi(\Delta \rho_o, \beta)$ no plano $\Delta \rho_o \times \beta$ para intervalos de $\Delta \rho_o$ e β pré-estabelecidos pelo usuário. Essa abordagem apresenta a vantagem de permitir a obtenção não só de estimativas para $\Delta \rho_o$ e β , como também de uma visualização de possíveis regiões de ambigüidade através da plotagem das curvas de isovalores de Φ .

Caso haja suspeita que os intervalos estabelecidos para $\Delta \rho_o e \beta$ sejam muito grandes, podendo causar mínimos espúrios, o método de Marquardt pode ser usado para encontrar o par $(\Delta \rho_o, \beta)$ que minimiza o funcional (6) adotando-se como aproximações iniciais os valores de $\Delta \rho_o e \beta$ obtidos no mapeamento discreto.

3 TESTES COM DADOS SINTÉTICOS

Nos testes desta seção, as observações estão espaçadas de 1 km na direção x. A largura de todos os prismas que definem o modelo interpretativo é de 1 km. O vínculo de *suavidade* entre as espessuras dos prismas adjacentes foi utilizado em todos os testes (sujeito a produzir um ajuste aceitável das observações). Para μ , escolhemos o menor valor positivo capaz de produzir uma solução estável com a mínima perda de resolução. Uma solução é considerada estável quando diversas estimativas são obtidas (com um dado μ) contaminando as observações com diversas seqüências de números pseudoaleatórios, tal que a norma de Chebychev de todos os vetores obtidos pela diferença entre os possíveis pares de soluções seja menor que um valor W (estabelecido em cada ambiente). Valores de μ maiores que o ótimo subestimam a profundidade do embasamento enquanto valores menores produzem soluções instáveis.

Na busca sistemática da melhor estimativa para o par $\Delta \rho_o$, β , as informações sobre pontos do relevo também foram contaminadas com ruído pseudoaleatório Gaussiano com média nula e desvio padrão especificado em cada ambiente. Para cada teste são presumidos intervalos contendo os valores mínimo e máximo para a variação do contraste de densidade ($\Delta \rho_o$) e para a variação do fator de decaimento (β). Além disso, o plano formado pelas curvas de isovalores de $\Delta \rho_o$, β permite a caracterização de possíveis regiões de ambigüidade para esses parâmetros.

3.1 AMBIENTE I

A Figura 3a mostra a anomalia Bouguer teórica produzida pela bacia sedimentar mostrada na Figura 3b, contaminada com ruído pseudo-aleatório Gaussiano com média nula e desvio padrão de 0,1 mGal. Os valores de $\Delta \rho_o$ e β são, respectivamente, -0,35g/cm³ e 10 km. O modelo interpretativo consiste de 30 prismas distribuídos no intervalo [0 km, 30 km]. O relevo estimado (Figura 3b) (obtido com os valores verdadeiros de $\Delta \rho_o$ e β e μ = 5) está próximo ao relevo verdadeiro, comprovando que o método é eficaz para esse tipo de ambiente.



Fig.3. Ambiente I. Anomalia gravimétrica (a) produzida pela bacia sedimentar (b) mostrada em linha contínua. O relevo estimado com $\mu = 5$ é mostrado pela linha quebrada.

Para a busca sistemática da estimativa do par ($\Delta \rho_o$, β) presumimos um intervalo de [-0,45 g/cm³, -0,25 g/cm³], com espaçamento de 0,05 g/cm³ para a variação do contraste de densidade $\Delta \rho_o$ e um intervalo de [8 km, 12 km], com espaçamento de 1 km para o fator de decaimento β . O desvio padrão da variável pseudo-aleatória Gaussiana, com média nula, que contamina a informação sobre o relevo do embasamento é 0,07 km. Foram utilizados $\mu = 5$, $\lambda = 0,2$, L = 3 e W = 70 m. As posições dos pontos onde o relevo é suposto conhecido são mostradas na Figura 3b. A Figura 4 mostra curvas de isovalores do funcional Φ definido na equação (6) e as estimativas de $\Delta \rho_o$ e β , que além de estáveis, coincidem com os valores verdadeiros de -0,35g/cm³ e 10 km, respectivamente.



Fig.4. Ambiente I. Curvas de isovalores do funcional Φ definido na equação (6). O sombreado realça a região de mínimos. O mínimo absoluto dentro da região escolhida é representado por um ponto preto. Os valores verdadeiros de $\Delta \rho_o \ e \ \beta \ são -0.35 \ g/cm^3 \ e \ 10 \ km$, respectivamente.

O decaimento do contraste de densidade com a profundidade, postulado através da equação (1), é visualizado na Figura 5.



Fig.5. Ambiente I. Decaimento do contraste de densidade com a profundidade para $\Delta \rho_o = -0.35 \text{ g/cm}^3 \text{ e } \beta = 10 \text{ km}.$

3.2 AMBIENTE II

A Figura 6a mostra a anomalia Bouguer teórica produzida pela bacia sedimentar mostrada na Figura 6b, contaminada com ruído pseudo-aleatório Gaussiano com média nula e desvio padrão de 0,1 mGal. Os valores de $\Delta \rho_o$ e β são, respectivamente, -0,45g/cm³ e 4 km. O modelo interpretativo consiste de 30 prismas distribuídos no intervalo [0 km, 30 km]. O relevo estimado (Figura 6b) (usando $\mu = 2$ e os valores verdadeiros de $\Delta \rho_o$ e β) está próximo ao relevo verdadeiro comprovando que o método é eficaz para esse tipo de ambiente.



Fig.6. Ambiente II. Anomalia gravimétrica (a) produzida pela bacia sedimentar (b) mostrada em linha contínua. O relevo estimado usando $\mu = 2$ é mostrado pela linha quebrada.

Para a busca sistemática da estimativa do par ($\Delta \rho_o$, β) presumimos um intervalo de [-0,55 g/cm³, -0,35 g/cm³], com espaçamento de 0,1 g/cm³ para a variação do contraste de densidade $\Delta \rho_o$ e um intervalo de [3 km, 5 km], com espaçamento de 0,5 km para o fator de decaimento β . O desvio padrão da variável pseudo-aleatória Gaussiana, com média nula, que contamina a informação sobre o relevo do embasamento é 0,08 km. Foram utilizados $\mu = 2$, $\lambda = 0,2$, L = 1 e W = 80 m. A posição do ponto onde o relevo é suposto conhecido é mostrada na Figura 6b. A Figura 7 mostra curvas de isovalores do funcional Φ definido na equação (6) e as estimativas de $\Delta \rho_o$ e β , que além de estáveis, coincidem com os valores verdadeiros de -0,45g/cm³ e 4 km, respectivamente.



Fig.7. Ambiente II. Curvas de isovalores do funcional Φ definido na equação (6). O sombreado realça a região de mínimos. O mínimo absoluto dentro da região escolhida é representado por um ponto preto. Os valores verdadeiros de $\Delta \rho_o e \beta$ são -0,45 g/cm³ e 4 km, respectivamente.

O decaimento do contraste de densidade com a profundidade, postulado através da equação (1), é visualizado na Figura 8.



Fig.8. Ambiente II. Decaimento do contraste de densidade com a profundidade para $\Delta \rho_o = -0,45 \text{ g/cm}^3 \text{ e } \beta = 4 \text{ km}.$

3.3 AMBIENTE III

A Figura 9a mostra a anomalia Bouguer teórica produzida pela bacia sedimentar mostrada na Figura 9b, contaminada com ruído pseudo-aleatório Gaussiano com média nula e desvio padrão de 0,08 mGal. Os valores de $\Delta \rho_o$ e β são, respectivamente, -0,5 g/cm³ e 8 km. O modelo interpretativo consiste de 40 prismas distribuídos no intervalo [0 km, 40 km]. O relevo estimado (Figura 9b) (usando $\mu = 1$ e os valores verdadeiros de $\Delta \rho_o$ e β) está próximo ao relevo verdadeiro comprovando que o método é eficaz para esse tipo de ambiente.



Fig.9. Ambiente III. Anomalia gravimétrica (a) produzida pela bacia sedimentar (b) mostrada em linha contínua. O relevo estimado com $\mu = 1$ é mostrado pela linha quebrada.

Para a busca sistemática da estimativa do par ($\Delta \rho_o$, β) presumimos um intervalo de [-0,6 g/cm³, -0,4 g/cm³], com espaçamento de 0,1 g/cm³ para a variação do contraste de densidade $\Delta \rho_o$ e um intervalo de [7 km, 9 km], com espaçamento de 0,5 km para o fator de decaimento β . O desvio padrão da variável pseudo-aleatória Gaussiana, com média nula, que contamina a informação sobre o relevo do embasamento é 0,05 km. Foram utilizados $\mu = 1$, $\lambda = 0,2$, L = 2 e W = 50 m. As posições dos pontos onde o relevo é suposto conhecido são mostradas na Figura 9b.A Figura 10 mostra curvas de isovalores do funcional Φ definido na equação (6) e as estimativas de $\Delta \rho_o$ e β , que além de estáveis, coincidem com os valores verdadeiros de -0,5g/cm³ e 8 km, respectivamente.



Fig.10. Ambiente III. Curvas de isovalores do funcional Φ definido na equação (6). O sombreado realça a região de mínimos. O mínimo absoluto dentro da região escolhida é representado por um ponto preto. Os valores verdadeiros de $\Delta \rho_o$ e β são -0,5 g/cm³ e 8 km, respectivamente.

O decaimento do contraste de densidade com a profundidade, postulado através da equação (1), é visualizado na Figura 11.



Fig.11. Ambiente III. Decaimento do contraste de densidade com a profundidade para $\Delta \rho_{o} = -0.5 \text{ g/cm}^{3} \text{ e } \beta = 8 \text{ km}.$

3.4 AMBIENTE IV

A Figura 12a mostra a anomalia Bouguer teórica produzida pela bacia sedimentar mostrada na Figura 12b, contaminada com ruído pseudo-aleatório Gaussiano com média nula e desvio padrão de 0,1 mGal. Os valores de $\Delta \rho_o$ e β são, respectivamente, -0,25 g/cm³ e 15 km. O modelo interpretativo consiste de 30 prismas distribuídos no intervalo [0 km, 30 km]. O relevo estimado (Figura 12b) (usando $\mu = 1$ e os valores verdadeiros de $\Delta \rho_o$ e β) está próximo ao relevo verdadeiro comprovando que o método é eficaz para esse tipo de ambiente.



Fig.12. Ambiente IV. Anomalia gravimétrica (a) produzida pela bacia sedimentar (b) mostrada em linha contínua. O relevo estimado com $\mu = 1$ é mostrado pela linha quebrada.

Para a busca sistemática da estimativa do par ($\Delta \rho_o$, β) presumimos um intervalo de [-0,35 g/cm³, -0,15 g/cm³], com espaçamento de 0,05 g/cm³ para a variação do contraste de densidade $\Delta \rho_o$ e um intervalo de [14 km, 16 km], com espaçamento de 0,5 km para o fator de decaimento β . O desvio padrão da variável pseudo-aleatória Gaussiana, com média nula, que contamina a informação sobre o relevo do embasamento é 0,05 km. Foram utilizados $\mu = 1$, $\lambda = 0,5$, L = 2 e W = 50 m. As posições dos pontos onde o relevo é suposto conhecido são mostradas na Figura 12b. A Figura 13 mostra curvas de isovalores do funcional Φ definido na equação (6) e as estimativas de $\Delta \rho_o$ e β , que além de estáveis, coincidem com os valores verdadeiros de -0,25 g/cm³ e 15 km, respectivamente.



Fig.13. Ambiente IV. Curvas de isovalores do funcional Φ definido na equação (6). O sombreado realça a região de mínimos. O mínimo absoluto dentro da região escolhida é representado por um ponto preto. Os valores verdadeiros de $\Delta \rho_o e \beta$ são -0,25 g/cm³ e 15 km, respectivamente.

O decaimento do contraste de densidade com a profundidade, postulado através da equação (1), é visualizado na Figura 14.



Fig.14. Ambiente IV. Decaimento do contraste de densidade com a profundidade para $\Delta \rho_o = -025 \text{ g/cm}^3 \text{ e } \beta = 15 \text{ km}.$

3.5 AMBIENTE V.

A Figura 15a mostra a anomalia Bouguer teórica produzida pela bacia sedimentar mostrada na Figura 15b, contaminada com ruído pseudo-aleatório Gaussiano com média nula e desvio padrão de 0,08 mGal. Os valores de $\Delta \rho_o$ e β são, respectivamente, -0,2 g/cm³ e 2 km. O modelo interpretativo consiste de 25 prismas distribuídos no intervalo [0 km, 25 km]. O relevo estimado, usando $\mu = 10$ e os valores corretos de $\Delta \rho_o$ e β (Figura 15b), subestima a profundidade do relevo verdadeiro. Isto ocorre como conseqüência do alto de grau de compactação, supostamente presumido para esta bacia sedimentar, já que o contraste de densidade neste caso



Fig.15. Ambiente V. Anomalia gravimétrica (a) produzida pela bacia sedimentar (b) mostrada em linha contínua. O relevo estimado com $\mu = 10$ é mostrado pela linha quebrada. O relevo verdadeiro é subestimado devido a um β pequeno, causando muita instabilidade na estimativa da espessura do pacote sedimentar e necessitando, portanto, de um valor muito grande de μ .

diminuirá com a profundidade atingindo valores próximos a zero na parte mais profunda da bacia (Figura 16). Isto acentua a instabilidade da solução geofísica, necessitando, portanto, de valores muito elevados de μ e como conseqüência do uso de valores elevados de μ tem-se uma perda inevitável da resolução . A estimação de $\Delta \rho_o$ e β , no entanto, pode ser efetuada de modo estável. Para a busca sistemática da estimativa do par ($\Delta \rho_o$, β) presumimos um intervalo de [-0,3 g/cm³, -0,1 g/cm³], com espaçamento de 0,08 g/cm³ para a variação do contraste de densidade $\Delta \rho_o$ e um intervalo de [1 km, 3 km], com espaçamento de 1 km para o fator de decaimento β . O desvio padrão da variável pseudo-aleatória Gaussiana, com média nula, que contamina a informação sobre o relevo do embasamento é 0,04 km. Foram utilizados $\mu = 10$, $\lambda = 0,02$, L = 3 e W = 40 m.



Fig.16. Ambiente V. Decaimento do contraste de densidade com a profundidade para $\Delta \rho_o = -0.2 \text{ g/cm}^3 \text{ e } \beta = 2 \text{ km}.$

A Figura 17 mostra curvas de isovalores do funcional Φ definido na equação (6) e as estimativas de $\Delta \rho_o$ e β , que além de estáveis, coincidem com os valores verdadeiros de -0,2 g/cm³ e 2 km, respectivamente, mostrando que é possível a estimação consistente desses valores mesmo em situações de alta compactação dos sedimentos, com o conseqüente pequeno sinal gravimétrico. Contudo, a informação sobre, pelo menos, um ponto do relevo é indispensável para a eficácia do método, pois, sem esta informação a solução que estima $\Delta \rho_o$ e β será sempre instável.



Fig.17. Ambiente V. Curvas de isovalores do funcional Φ dado pela equação (6), estimando o par ($\Delta \rho_o, \beta$) para uma situação de alta compactação dos sedimentos. O sombreado realça a região de mínimos. O mínimo absoluto dentro da região escolhida é representado por um ponto preto. Os valores verdadeiros de $\Delta \rho_o e \beta$ são -0,2 g/cm³ e 2 km, respectivamente.

3.6 AMBIENTE VI

A Figura 18a mostra a anomalia Bouguer teórica produzida pela bacia sedimentar mostrada na Figura 18b, contaminada com ruído pseudo-aleatório Gaussiano com média nula e desvio padrão de 0,1 mGal. Os valores de $\Delta \rho_o$ e β são, respectivamente, -0,35g/cm³ e 10 km. O modelo interpretativo consiste de 30 prismas distribuídos no intervalo [0 km, 30 km]. A Figura 18b mostra a instabilidade da estimativa do relevo em conseqüência da escolha intencional de um μ menor que o valor ótimo. Queremos mostrar que mesmo nesse caso, estimativas estáveis para $\Delta \rho_o$ e β podem ser obtidas.



Fig.18. Ambiente VI. Anomalia gravimétrica (a) produzida pela bacia sedimentar (b) mostrada em linha contínua. O relevo estimado é mostrado pela linha quebrada. O relevo estimado é instável devido ao uso intencional de um μ menor que o valor ótimo.

Para a busca sistemática da estimativa do par ($\Delta \rho_o$, β) presumimos um intervalo de [-0,45 g/cm³, -0,25 g/cm³], com espaçamento de 0,05 g/cm³ para a variação do contraste de densidade $\Delta \rho_o$ e um intervalo de [8 km, 12 km], com espaçamento de 1 km para o fator de decaimento β . O desvio padrão da variável pseudo-aleatória Gaussiana, com média nula, que contamina a informação sobre o relevo do embasamento é 0,07 km. Foram utilizados $\mu = 5$, $\lambda = 0,2, L = 3$ e W = 70 m. As posições dos pontos onde o relevo é suposto conhecido são mostradas na Figura 18b. Nota-se que foi possível a estimação de forma estável de $\Delta \rho_o$ e β , muito embora apenas o contraste de densidade estimado tenha coincidido com o respectivo valor verdadeiro de -0,35 g/cm³. O valor verdadeiro de β é de 10 km ao passo que o valor estimado foi de 11 km (Figura 19).



Fig.19. Ambiente VI. Curvas de isovalores do funcional Φ definido na equação (6), estimando o par $(\Delta \rho_o, \beta)$ para uma situação de instabilidade da estimativa do relevo. O sombreado realça a região de mínimos. O mínimo absoluto dentro da região escolhida é representado por um ponto preto. Os valores verdadeiros de $\Delta \rho_o \ e \ \beta \ são \ -0.35 \ g/cm^3 \ e \ 10 \ km$, respectivamente.

Este comportamento inesperadamente estável para as estimativas de $\Delta \rho_o$ e β pode ser tentativamente explicado do seguinte modo. A Figura 18b mostra que a estimativa do relevo difere do relevo verdadeiro aproximadamente por uma variável aleatória aditiva com média nula. Conseqüentemente, a esperança da estimativa do relevo será o próprio relevo verdadeiro. Por sua vez, as estimativas de $\Delta \rho_o$ e β serão bem definidas porque elas são mais sensíveis à **esperança do relevo estimado** do que ao próprio **relevo estimado** já que a esperança do relevo estimado estará mais próximo do relevo verdadeiro. Em outras palavras, valores de $\Delta \rho_o$ e β diferentes dos valores verdadeiros produzirão estimativas do relevo cujas esperanças diferirão muito do relevo verdadeiro (presumivelmente conhecido em *L* pontos), causando assim um aumento no primeiro termo do lado direito da equação (6).

4 APLICAÇÃO EM DADOS REAIS

O método proposto neste trabalho para determinação dos parâmetros que descrevem a variação do contraste de densidade com a profundidade foi aplicado a um perfil gravimétrico da Bacia do Recôncavo, Brasil. Os sedimentos desta Bacia são compostos por rochas desenvolvidas entre os períodos Jurássico e Terciário, apresentando assim, diferentes idades e graus de compactação. A interface que separa os sedimentos do embasamento atinge uma profundidade máxima de 6 km (Milani e Davison, 1988), indicando que os sedimentos mais antigos estão sujeitos a uma enorme pressão hidrostática condicionando uma compactação diferencial, e, conseqüentemente um aumento da densidade com a profundidade (ou, equivalentemente, um decréscimo do contraste de densidade com a profundidade).

A Figura 20 mostra a anomalia gravimétrica da Bacia do Recôncavo em planta devido somente à topografia do embasamento obtida por Leão et al. (1996) através de uma separação regional-residual.



Fig. 20. Anomalia Bouguer da Bacia do Recôncavo mostrando as localizações: do perfil gravimétrico invertido (AA') e do furo de sondagem (P). Intervalo de contorno: 2 mGal.

A Figura 21, mostra a anomalia Bouguer ao longo do perfil AA' (assinalado na Figura 20).



Fig. 21. Perfil gravimétrico da Bacia do Recôncavo ao longo de AA', cuja localização está assinalada na Figura 20.

Além das 33 observações gravimétricas mostradas na Figura 21, usamos: *i*) a informação proveniente do furo de sondagem que revela a profundidade do relevo do embasamento de 2,88 km, localizado na posição 39,7 km, ao longo do perfil AA' (Figura 22); *ii*) a informação que a profundidade máxima da bacia é cerca de 6 km (Milani e Davison, 1988).



Fig.22. O Furo de sondagem revela a profundidade na Bacia do Recôncavo na posição indicada.

O modelo interpretativo usado consiste em 33 prismas verticais justapostos, com 2,12 km de largura cada um. O topo de cada prisma coincide com a superfície da Bacia. Como há informação de apenas um ponto do relevo, nesse caso L = 1. Na busca do melhor valor para $\Delta \rho_0$ e β , postulou-se que o contraste de densidade, entre os sedimentos e o embasamento varia de forma hiperbólica com a profundidade dos sedimentos. Como nesse caso, não temos informação sobre os valores de $\Delta \rho_o$ e β , estes foram estimados preliminarmente por tentativa-e-erro de modo a produzirem um relevo estimado com profundidade máxima em torno de 6 km e uma profundidade perto de 2.88 km na posição do furo de sondagem. Nesse procedimento, somente para avaliar o grau de estabilidade da solução, a anomalia gravimétrica foi contaminada com ruído pseudoaleatório Gaussiano com média nula e desvio padrão de 0,08 mGal. A seguir, atribuímos um valor para μ e modificamos a semente do gerador de números pseudoaleatórios. Cada solução obtida foi então comparada com as demais. As soluções foram consideradas estáveis quando a norma de Chebychev de todos os vetores obtidos pela diferença entre os possíveis pares de soluções foi menor que 50 m. Por este critério, a estabilidade da solução foi atingida com um valor para o inverso do multiplicador de Lagrange μ igual a 70. Uma vez determinado o valor ótimo de μ , todas as estimativas foram efetuadas, empregando-se os valores observados da anomalia e da profundidade do embasamento sem adição de ruído. As estimativas preliminares para $\Delta \rho_0 e \beta$, assim obtidas, foram, respectivamente -0,30 g/cm³ e 30 km.

Uma vez estimado o valor ótimo de μ , as estimativas de $\Delta \rho_o$ e β foram confirmadas via minimização do funcional (6), estabelecendo intervalos para $\Delta \rho_o$ e β de, respectivamente, [-0,4 g/cm³, -0.2 g/cm³], com espaçamento de 0,1 g/cm³ e [10 km, 50 km] com espaçamento de 5 km e contaminando a informação sobre o ponto do relevo com ruído pseudoaleatório Gaussiano com média nula e desvio padrão de 0,05 km. Para λ , utilizamos 0,05 obtendo como estimativa para $\Delta \rho_o$ e β na minimização do funcional (6) os mesmos valores -0,30 g/cm³ e 30 km, respectivamente (Figura 23), levando a uma estimativa aproximada de 4% para a compactação máxima dos sedimentos. A anomalia ajustada, usando esses valores de $\Delta \rho_o$ e β , para estimar o relevo do embasamento é mostrada na Figura 24a e o relevo estimado, via a minimização do funcional (5), é mostrado na Figura 24b.

A Figura 25 mostra a variação estimada para o contraste de densidade entre os sedimentos e o embasamento ao longo da profundidade. A Figura 26 compara a estimativa do relevo mostrada na Figura 24b com a estimativa produzida a partir da postulação de um contraste de densidade constante estimado em -0,26 g/cm³, e usando μ =30 de modo a satisfazer informações de profundidade do embasamento provindas de furos de sondagem, conforme descrito por Barbosa et al. (1997). Note que o valor de -0,26 g/cm³, coincide aproximadamente com o valor de -0,25 g/cm³, para a estimativa da densidade efetiva (Litinsky, 1989) usando os valores de $\Delta \rho_o$ e β acima estimados. Ambas as estimativas do relevo são bastante semelhantes.



Fig.23. Bacia do Recôncavo. Curvas de isovalores do funcional Φ definido na equação (6). O sombreado realça a região de mínimos. O mínimo absoluto na região escolhida é representado por um ponto preto.



Fig. 24. Bacia do Recôncavo. (a) Anomalias observada e ajustada com a utilização dos valores de $\Delta \rho_0 e \beta$ iguais a -0,3 g/cm³ e 30 km, respectivamente, estimados na minimização da equação (6). (b) Relevo estimado pela minimização da equação (5) com $\mu = 70$.



Fig.25. Bacia do Recôncavo. Decaimento do contraste de densidade com a profundidade para $\Delta \rho_o = -0.3 \text{ g/cm}^3 \text{ e } \beta = 30 \text{ km}$



Fig. 26. Relevo do embasamento da Bacia do Recôncavo estimado pela premissa de contraste de densidade constante igual a -0,26 g/cm³ e usando $\mu = 30$ (linha pontilhada) ou decrescendo hiperbolicamente com $\Delta \rho_o = -0,3$ g/cm³ e $\beta = 30$ km e usando $\mu = 70$ (linha cheia).

5 CONCLUSÕES

Apresentamos um método para o delineamento do relevo do embasamento de uma bacia sedimentar, utilizando como modelo interpretativo um conjunto de prismas justapostos e presumindo um contraste de densidade conhecido que diminui hiperbolicamente com a profundidade. O método estima de forma estável o relevo do embasamento de uma bacia, presumindo que este relevo é suave. Alternativamente, partindo do pressuposto que conhecemos a anomalia gravimétrica e a profundidade do embasamento em um ou mais pontos, estimamos de modo estável o contraste de densidade $\Delta \rho_o$ entre os sedimentos e o embasamento na superfície da bacia e a sua razão de decaimento β com a profundidade. Nos testes com dados sintéticos mostramos que o método é eficaz em bacias que apresentam relevos suaves, devido ao tipo de vínculo utilizado como informação estabilizadora. Entretanto, a redução da instabilidade conseguida com o vínculo de Suavidade global somente é conseguida através de alguma perda de resolução. Para que as soluções estabilizadas apresentem mínima perda de resolução, o inverso do multiplicador de Lagrange μ é estimado como o menor valor positivo produzindo soluções estáveis. Como o conhecimento de $\Delta \rho_o$ e β é indispensável para determinação de μ ótimo, esses parâmetros, caso não sejam conhecidos a priori, devem ser estimados primeiramente, antes da estimativa do relevo do embasamento.

Em todos os testes presumimos disponibilidade de informação sobre a profundidade do embasamento em alguns pontos e verificamos que essa informação é imprescindível para uma determinação estável do par ($\Delta \rho_o$, β). A aplicação do método à anomalia Bouguer da Bacia do Recôncavo, Brasil levou a estimativas de $\Delta \rho_o$ e β de -0,30 g/cm³ e 30 km, respectivamente, e a um relevo estimado do embasamento com boa resolução e consistente com a interpretação que presume um contraste de densidade constante e igual ao contraste de densidade efetivo definido por Litinsky (1989). Os valores estimados para $\Delta \rho_o$ e β indicam uma compactação máxima dos sedimentos da ordem de 4%.

O método pode ser modificado para incorporar outro tipo de informação *a priori* como o vínculo de *Suavidade ponderada* (Barbosa et al., 1999), e assim, delinear o relevo do embasamento de uma bacia sedimentar que apresente descontinuidades. O método também pode ser utilizado em escala de detalhe, como por exemplo, na análise de aterros sanitários, fornecendo

uma estimativa do relevo da base do aterro (se ele não for conhecido) ou, se o relevo for conhecido, uma estimativa da variação da densidade com a profundidade, permitindo avaliar a compactação do lixo dentro do aterro.

O método deve ser aplicado em estágios intermediários de prospecção pois fazem-se necessárias informações oriundas de furos de sondagem.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BARBOSA, V. C. F.; SILVA, J. B. C.; MEDEIROS, W. E. 1997. Gravity inversion of basement relief using approximate equality constraints on depth. *Geophysics*, 62: 1745-1757.
- BARBOSA, V. C. F.; SILVA, J. B. C.; MEDEIROS, W. E. 1999. Gravity inversion of a descontinuous relief stabilized by weighted smoothness constraints on depth. *Geophysics*, 64: 1429-1438.
- BHASKARA, Rao, D. 1986. Modelling of sedimentary basins from gravity anomalies with variable density contrast. *Geophys. J.Roy. Astr. Soc.*, 84: 207-121.
- BOTT, M. H. P. 1960. The use of rapid digital computing methods for direct gravity anomalies interpretation of sedimentary basins. *Geophys. Jour. Roy. Astron. Soc.*, 3 (1): 63-67.
- CHAI, Y. & HINZE, W. J. 1988. Gravity inversion of an interface above which the density contrast varies exponentially with depth. *Geophysics*, 53: 837-845.
- CORBATO, C. E. 1965. A lest-squares procedure for gravity interpretation. *Geophysics*, 30: 228-233.
- CORDELL, L. 1973. Gravity analysis using an exponential density-depth function San Jacinto Graben California. *Geophysics*, 38: 684-690.
- LEÃO, J. W. D., MENEZES, P. T. L.; BELTÃO, J. F.; SILVA, J. B. C. 1996. Gravity inversion of basement relief constrained by the knowledge of depth at isolated points. *Geophysics*, 61: 1702-1714.
- LITINSKY, V. A. 1989. Concept of effective density: Key to gravity determinations for sedimentary basins. *Geophysics*, 54: 1474-1482.
- MILANI, E. J, & DAVISON, I. 1988. Basement control and transfer tectonics in the Recôncavo-Tucano-Jatobá rift, Northeast Brazil. *Tectonophysics*, 154: 41-70.
- MURTY, I. V. R., & RAO, D.B. 1979. Gravity anomalies of two dimensional bodies of irregular cross section with density contrast varying with depth. *Geophysics*, 44 (9): 1525-1530.
- SARI, Cokun & ŞALK, Müjgan. 2002. Analysis of gravity anomalies with hyperbolic density contrast: An application to the gravity data of Western Anatolia. *Journal of the Balkan Geophysical Society*, 5 (3): 87-96.
- SILVA, J. B. C.; MEDEIROS, W. E.; BARBOSA, V. C. F. 2001. Pitfalls in nonlinear inversion. *Pure and Appl. Geophys.*, 158: 945-964.

VISWESWARA RAO, C.; CHAKRAVARTHI, V.; RAJU, M. L. 1994. Forward modelling: gravity anomalies of two-dimensional bodies of arbitrary shape with hyperbolic and parabolic density functions. *Comp.&Geosci.*, 20: 873-880.