



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM GEOFÍSICA

MARCUS DANILO FERREIRA BORGES DA COSTA

**MODELAGEM DE DADOS MT 2D EM MULTICAMADAS COM
ANISOTROPIA ARBITRÁRIA**

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

BELEM-PARÁ
2011

MARCUS DANILO FERREIRA BORGES DA COSTA

MODELAGEM DE DADOS MT 2D EM MULTICAMADAS COM
ANISOTROPIA ARBITRÁRIA

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Geofísica da Universidade Federal do Pará – UFPA em cumprimento às exigências para obtenção do grau de Mestre em Geofísica.

Orientador: Cícero Roberto Teixeira Régis

BELEM-PARÁ

2011

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Biblioteca Geólogo Raimundo Montenegro Garcia de Montalvão

- C837m COSTA, MARCUS DANILO FERREIRA BORGES DA
Modelagem de dados MT 2D em multicamadas com anisotropia arbitrária.
/ Marcus Danilo Ferreira Borges da Costa; Orientador: Cícero Roberto Teixeira Régis -
2011.
82 fl.: il.
Dissertação (Mestrado em geofísica) - Universidade Federal do Pará, Instituto de
Geociências, Programa de Pós-Graduação em Geofísica, Belém, 2011.
1. Geofísica aplicada. 2. Métodos eletromagnéticos.
 3. Magnetotelúrico (MT). 4. Modelagem MT 1D. 5. Modelagem MT 2D.
 6. Campo primário e secundário 7. Exploração de petróleo.
 8. Anisotropia arbitrária. 9. Matriz de propagação.
- I. Régis, Cícero Roberto Teixeira, *Orient.* II. Universidade Federal do Pará. III. Título

MARCUS DANILO FERREIRA BORGES DA COSTA

MODELAGEM DE DADOS MT 2D EM MULTICAMADAS COM
ANISOTROPIA ARBITRÁRIA

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Geofísica da Universidade Federal do Pará - UFPA, em cumprimento às exigências para obtenção do grau de Mestre em Geofísica no Instituto de Geociências.

Data de Aprovação: 19/12/2011

Banca de Tese:



Dr. Cícero Roberto Teixeira Régis – UFPA (Orientador)



Dr. Sérgio Luiz Fontes – ON



Dr. Allen Q. Howard Jr – UFPA

Dedico este trabalho aos meus santos e amados pais, Ananias e Madalena, por que nunca, e
jamais, experimentarei um amor humano maior que o deles sobre esta terra.

Dedico, também, aos meus quatro irmãos queridos, Joana, Leleca, Dedé e Marcela, e aos
irmãos postiços, Ivanilda e Tiaguinho. O que posso dizer... O amor que nos une ultrapassa
a “obrigação” do laço sanguíneo.

AGRADECIMENTOS

Obrigado meu Deus, por mais esta etapa vencida, e cada vez mais perto de Ti. À Maria, por sempre estar atenta às necessidades de seus filhos.

Agradeço à todos de minha família pelo carinho e incentivo. Especialmente, agradeço ao senhor Ananias Farias e a dona Maria Madalena, pelo amor e prazer notório com que sempre se consumiram para me fazer feliz. Aos meus irmãos queridos, Joana, Leleca, Dedé e Marcela, nossas diferenças e convivência me ensinam a ser melhor.

Agradeço a toda comunidade do Programa de Pós Graduação em Geofísica – CPGF. À Benildes e à Bela, a todos os alunos da graduação e Pós, com os quais eu pude conviver, e aos professores, que participaram da minha formação. Obrigado pela amizade, conversa, simpatia, seriedade, ajuda, ou pela simples presença, pois tudo coopera para felicidade.

Agradeço, muitíssimo, ao professor Cícero Régis, por ter me orientado neste trabalho desde o início, pelos esclarecimentos, discussões, paciência e vontade de sempre ajudar. Por sua amizade, principalmente, que sei é verdadeira. Sem dúvida, um grande exemplo de ateu, o mais “cristão” que conheço.

Também quero destacar os professores Marcos Welby e Victor Tocantins, os amigos Edelson, Edna, Diego, Valdelírio e Walleson, do Grupo EMMI. Agradeço ao Walleson, a ajuda em discussões na formulação do capítulo 4, revendo algumas contas do mesmo.

Agradeço aos amigos, Marcelo Mesquita, Hilton Farias, Fabrício, Danusa, Gilvana e Carolina Narjara, pelas horas de estudo, descontração, pelos trabalhos feitos juntos e por todos estes anos de convivência. Aos amigos Rizimar, Mateus e Patrícia, bons exemplos de pessoas.

Agradeço aos professores Sérgio Fontes e Allen Howard, pela participação na banca examinadora e por todas as sugestões dadas para o melhoramento deste trabalho. Agradeço as conversas com o professor Howard a respeito da dissertação durante a implementação das correções. Me ajudaram a entender melhor alguns pontos do trabalho.

Agradeço pelo apoio financeiro da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de nível Superior – CAPES.

Quero agradecer a família Ministério Universidade Renovadas – MUR, por me ensinar que Fé e Razão não se excluem, se completam.

RESUMO

Neste trabalho apresentamos a modelagem direta bidimensional do método Magnetotelúrico (MT) com anisotropia arbitrária na condutividade elétrica para modelos de multicamadas estratificadas horizontalmente, separando a resposta do campo resultante em duas partes, primária e secundária. A parte primária refere-se ao campo 1D do modelo na ausência de heterogeneidades; a secundária, à contribuição no campo resultante gerada pela anomalia. Esta modelagem foi feita via técnica numérica dos Elementos Finitos (EF). Apresentamos também a modelagem direta do caso MT 1D para o mesmo modelo e anisotropia arbitrária, porém, com solução analítica pelo método da matriz de propagação; tal resultado é usado como fonte na formulação 2D. No estudo a respeito do comportamento dos campos 1D em profundidade na presença da anisotropia, verificamos nas componentes horizontais que suas curvas dentro de cada camada se assemelham a de um campo na presença de fontes, pois experimentam um aumento na amplitude; além de verificar o surgimento da componente normal E_z do campo, sem que haja uma densidade de corrente nesta direção. Com arbitrariedade na anisotropia queremos dizer que seus eixos principais podem assumir qualquer orientação em relação ao eixo de referência adotado para o problema; tal orientação é descrita sob três rotações consecutivas, chamadas de *strike*, *dip* e *slant*, que simulam inclinações bastante presentes na geologia dos ambientes terrestres. Verificamos que a anisotropia provoca alterações no comportamento das pseudo-seções de resistividades aparentes, interferindo na interpretação correta dos dados.

Palavras chaves: Geofísica aplicada. Métodos eletromagnéticos. Magnetotelúrico (MT). Modelagem MT 1D. Modelagem MT 2D. Campo primário e secundário. Exploração de petróleo. Anisotropia arbitrária. Matriz de propagação.

ABSTRACT

We present in this work the bidimensional Magnetotelluric method modelling with arbitrary anisotropy in the electrical conductivity for horizontally stratified multilayers models, separating the total field into primary and secondary fields. The primary field is the 1D MT field in the absence of heterogeneity. The secondary field is the field generated by the heterogeneity, in other words, it is the difference between the total field and the primary field. The numerical technique of Finite Elements (FE) is used for this 2D Modelling. In addition we include the MT 1D modelling case with arbitrary 3D conductivity anisotropy using the propagation matrix method. This result is used as the source in the bidimensional formulation. When we studied the horizontal fields in layered media; there seems to exist sources in each anisotropic layer, because there is an increase of amplitude in these layers, also we verify the appearance of the normal component E_z of the field, without a current density in this direction. The arbitrary anisotropy allows the principals anisotropic axes to have any orientation in relation to cartesian referencial system choosen for the problem. This orientation is defined by three consecutive rotations, the first being *strike*, the second *dip* and the third *slant*. These rotations simulate common geological environments in the earth. This type of anisotropy changes the pseudo-sections of apparent resistivity, making data interpretation more challenging.

Key words: Applied Geophysics. Electromagnetics Methods. Magnetotelluric (MT). MT 1D modelling. MT 2D Modelling. Primary and secondary fields. Exploration of Petroleum. Arbitrary anisotropy. Propagation matrix.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

2.1	Sistemas cristalinos, constantes cristalográficas e simetria principal de alguns minerais.	15
2.2	As formas geométricas dos cristais seguem o padrão das células unitárias que os compõem.	16
2.3	Deformações geológicas: (a) rocha sedimentar com dobras e (b) falhas associadas com dobras.	17
2.4	Eixos de referência (preto); eixos de anisotropia (vermelho). Esquema representativo da geração de densidade de corrente devido a incidência de um campo elétrico em um meio (a) isotrópico, (b) anisotrópico sem rotação entre os dois eixos e (c) com anisotropia arbitrária.	19
2.5	Elipsóide associado aos tensores de posto dois e dimensão três, simétrico e de digonal dominante (positivo definido).	21
2.6	Representação das rotações entre o sistema (x''', y''', z''') e o (x, y, z) . (a) O ângulo α_s (<i>strike</i>) representa a primeira rotação em torno de z . (b) O ângulo α_d (<i>dip</i>) representa a segunda rotação em torno de y' . (c) O ângulo α_l (<i>slant</i>) representa a terceira rotação em torno de z''	22
3.1	Espectro de frequências do campo MT. Observe que próximo aos valores de $1 Hz$ e $10^3 Hz$ estão as menores amplitudes do campo.	28
4.1	Modelo de multicamadas estratificadas. Este modelo é bastante utilizado nos trabalhos de propagação de ondas eletromagnéticas porque representa bem algumas típicas formações geológicas, como os depósitos sedimentares, que estão, intimamente, ligados aos ambientes de reservatórios de hidrocarbonetos, além de servir como um cenário conveniente para domínios com distribuição de condutividades anômalas (Zhdanov, 2009).	35
4.2	Modelo de Pek e Santos. Constitui-se de quatro camadas, sendo apenas primeira e a segunda anisotrópicas. A última delas é um semi-espaço infinito. O modelo de anisotropia é o horizontal, o mais simples possível que gera o acoplamento entre as componentes horizontais.	48
4.3	Validação dos resultados 1D. Os gráficos mostram a parte real da razão da impedância aparente por seu módulo. (a) Curvas geradas pela formulação apresentada neste trabalho. (b) Curvas exibidas no trabalho de Pek e Santos.	49

4.4	O Modelo 2: trata-se do modelo anterior modificado, retiramos a última camada, e as espessuras foram divididas por 10.	50
4.5	Cada gráfico apresenta quatro curvas do módulo contra a profundidade. P1 refere-se à polarização (i) $H_x = 1 + i0$ e $H_y = 0 + i0$, e P2 à polarização (ii) $H_x = 0 + i0$ e $H_y = 1 + i0$. Cada uma delas gera todas as componentes do campo. As curvas I-1 representam as respostas das componentes considerando a segunda camada do modelo 2 isotrópica, com resistividade igual a $10^2\Omega m$, e I-2, considerando a resistividade igual a $10^4\Omega m$	51
4.6	A sequência de gráficos foi construída sob a polarização (i), com um ângulo <i>strike</i> de 30° e à frequência de $1000Hz$. Na coluna da esquerda, as curvas são referentes a componente H_x . De cima para baixo, temos a curva do módulo, depois da parte real e por último, da parte imaginária, todas contra a profundidade. As curvas em cinza são as isotrópicas de cada caso, a tracejada, referente a segunda camada com $\rho_2 = 10^2\Omega m$, e a cheia, referente a $10^4\Omega m$. Para a coluna da direita, temos a mesma sequência para a componente H_y . Logicamente, pela polarização (i) não temos as curvas em cinza.	53
4.7	Curvas da componente normal do campo elétrico E_z . Ao modelo-2, acrescentamos a rotação α_d , responsável pela geração de σ_{zy} e σ_{zx} . Essa anisotropia é conhecida como cruzada. Em vermelho, temos a curva referente a polarização (i), em azul, referente a polarização (ii), e em verde, temos a soma das duas polarizações.	54
5.1	Modelo de multicamadas estratificadas 2D com anisotropia em todas as camadas, inclusive a heterogeneidade. O sistema de referência está posicionado sobre a primeira interface, no centro do modelo. O eixo- x aponta para a direita do leitor, o y na direção que sai desta página e z , tem o sentido positivo apontando para o interior das camadas. Na direção y consideramos que as dimensões são grandes o suficiente para que sejam tomadas como infinitas na formulação 2D deste problema.	55
5.2	(a) Elemento triangular que compõe a malha dos EF. (b) Representação do comportamento das funções base.	63

6.1	Modelo apresentado no artigo de Li. Trata-se de um corpo aflorante bidimensional, com direção de <i>strike</i> no eixo - y . Uma estrutura de três camadas entre dois semi-espacos infinitos, o ar e sedimentos. A anisotropia é considerada para o corpo e na segunda camada.	68
6.2	As curvas em preto foram retiradas do trabalho de Li (2002), e são identificadas por (a), (b), (c) e (d). Em vermelho, estão as curvas construídas a partir do algoritmo apresentado neste trabalho, e se relacionam às curvas pretas pelas mesmas letras com as quais estas foram identificadas. O sistema de referência adotado por Li considera a direção x como <i>strike</i> , por isso, a componente ρ_{xx} preta corresponde a ρ_{yy} vermelha, por exemplo. Estes gráficos são referentes a uma frequência de 0,3333... Hz.	69
6.3	O modelo-1 é baseado no modelo de Li, com as seguintes mudanças: o corpo está localizado 500m abaixo da primeira interface e sua dimensão x foi aumentada em dois quilômetros. Mantivemos a anisotropia horizontal no corpo e na segunda camada, ou seja, os eixos principais de anisotropia, x e y , são coplanares aos do sistema cartesiano, apenas rotacionados entre si pelo ângulo α_s	70
6.4	Pseudo-seções de resistividade aparente. As figuras (a) e (b) representam o modelo-1 isotrópico, com 30 Ωm para a resistividade do corpo e 100 Ωm para a segunda camada. As figuras (c), (d), (e) e (f) representam o modelo-1 anisotrópico, conforme descrito em Fig 6.3. As barras de cores estão em potência de base 10, assim como os valores das frequências nos eixos verticais. Os eixos horizontais representam a variação lateral x , em (km).	71
6.5	As curvas de sondagens mostram as medidas executadas (a) no ponto central, $x = 0$, (b) à distância referente a borda do corpo, $x = 1500m$, (c) à distância de 5000m do ponto zero da referência e (d) representando o modelo 1D, para o qual a medida é a mesma a qualquer distância lateral percorrida.	73
6.6	Dados MT anisotrópicas de resistividade e fase: (a) e (b) para ρ_{xx} ; (c) e (d) para ρ_{xy} ; (e) e (f) para ρ_{yx} ; (g) e (h) para ρ_{yy}	74
6.7	Dados MT isotrópicas de resistividade e fase: (c) e (d) para ρ_{xy} ; (e) e (f) para ρ_{yx}	75

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	12
2	ANISOTROPIA	15
2.1	CONCEITO E NATUREZA	15
2.2	TRATAMENTO TENSORIAL	18
2.2.1	As componentes do tensor	18
2.2.2	Os eixos principais de anisotropia	20
2.2.3	Matriz rotação	21
3	O MÉTODO MAGNETOTELÚRICO (MT)	25
3.1	O SURGIMENTO E A EVOLUÇÃO	25
3.2	O CAMPO MAGNETOTELÚRICO	27
3.3	PRINCÍPIOS BÁSICOS DO MÉTODO	28
4	MODELAGEM DO MT 1D COM ANISOTROPIA	34
4.1	O TRATAMENTO DAS EQUAÇÕES DE MAXWELL	34
4.2	APLICAÇÃO DO MÉTODO DA MATRIZ DE PROPAGAÇÃO	42
4.3	ANÁLISE DOS CAMPOS EM PROFUNDIDADE	48
5	MODELAGEM DO MT 2D COM ANISOTROPIA	55
5.1	O SISTEMA DIFERENCIAL	55
5.2	Aplicando o método dos Elementos Finitos	60
6	RESULTADOS PARA O MODELO 2D	68
7	CONCLUSÕES	77
	REFERÊNCIAS	78

1 INTRODUÇÃO

O método Magnetotelúrico (MT) baseia-se na aquisição de dados de resistividade aparente, contribuindo para a predição estrutural da subsuperfície e das rochas que a constituem. Sua fonte é o campo Magnetotelúrico formado na magnetosfera terrestre, e trabalha numa faixa de frequência muito baixa ($10^4 - 10^{-5} Hz$), permitindo obter informações da distribuição da resistividade desde grandes profundidades.

Desde a década de 50, quando as bases do método foram desenvolvidas (CAGNIARD, 1953; TIKHONOV, 1950) muitos trabalhos têm contribuído para seu desenvolvimento teórico. Um aspecto importante incorporado aos trabalhos teóricos sobre o MT a partir da década de 60, quanto a natureza das subsuperfícies, é a anisotropia. Uma vez que este fenômeno é verificado em muitos ambientes terrestres (EISEL; HAAK, 1999), o desenvolvimento teórico dos métodos geofísicos não poderia desprezar tais efeitos. Segundo Mareschal et al. (1995), Eisel e Haak (1999), a anisotropia na condutividade elétrica é um fator intimamente ligado aos conjuntos tectônicos e aos aspectos evolucionários das estruturas geológicas da terra. Em Parkhomenko (1967) encontramos detalhes sobre as propriedades das rochas, e vemos que a resistividade é bastante afetada pelos fatores que geram anisotropia. Como o método MT é baseado na medição da resistividade dos solos, estudar os efeitos da anisotropia nestas medidas é essencial para seus fins.

A importância da condutividade anisotrópica na interpretação dos dados magnetotelúricos é a principal motivação para este trabalho. As primeiras formulações do MT tratavam de modelos uni-dimensionais em camadas isotrópicas. Nas primeiras aplicações para modelos com anisotropia os modelos representavam casos muito específicos, e até meados da década de 70 todos os trabalhos tratavam de casos unidimensionais. O' Brien e Morrison (1967), Praus e Petr (1969) estudaram o MT com anisotropia em multicamadas horizontais. Chetaev (1960) e Sinha (1969) verificaram os efeitos da anisotropia inclinada (Dipping), sendo que os planos inclinados eram isotrópicos. O primeiro, para um semiespaço, e o segundo, para uma camada e um semiespaço. Reddy e Rankin (1971) fizeram um caso mais geral que o anterior, e geologicamente, mais realista, considerando multicamadas, cada uma contendo anisotropia inclinada, com o *strike* de anisotropia orientado em um ângulo arbitrário para a direção de medida. Posteriormente, Abramovici (1974) apresenta a modelagem 1D de uma estrutura anisotrópica semelhante a de Reddy e Rankin, com camadas não-homogêneas, usando um formalismo mais geral, mas ainda por meio da técnica da matriz de propagação; Abramovici ainda manteve a restrição de que um dos eixos principais de anisotropia estivesse

preso ao plano horizontal a superfície. Outros trabalhos como o de Mann (1965), Rankin e Reddy (1969) trabalham aspectos interpretativos dos resultados dos dados MT anisotrópico. Abramovici e Shoham (1977) fizeram as primeiras tentativas de inverter os dados MT 1D, eles usaram a técnica de inversão generalizada, Regis e Rijo (1997; 2000 apud PEK; SANTOS, 2001) fizeram a inversão com a mesma técnica mas utilizando vínculos de igualdade aproximada para introdução de informação a priori. Pek e Santos (2001) fizeram a inversão de dados MT 1D baseados na formulação de Abramovici, mas considerando anisotropia arbitrária, tal formulação pode ser vista em Pek e Santos (2001; 2002; 2006), mas também será apresentada no corpo deste trabalho. Com o avanço das técnicas computacionais os modelos bi e tridimensionais tornaram-se possíveis, e as soluções numéricas via técnica dos Elementos Finitos (EF), Diferenças Finitas (DF), Equação Integral (EI) começaram a ganhar força neste cenário; e os modelos MT cada vez mais realistas.

As investigações de modelos anisotrópicos 2D iniciaram com Reddy e Rankin (1975), que apresentaram um algoritmo via EF para um modelo de camadas com anisotropia horizontal. Usando a técnica de DF, Pek e Verner (1997) e Weidelt (1996 apud LI, 2002), modelaram respostas MT de estruturas bi e tridimensionais, respectivamente, com anisotropia arbitrária. Em Li (2002) encontramos a modelagem do MT 2D com anisotropia arbitrária via EF para uma formulação que calcula diretamente o campo total. Ainda calculando diretamente o campo total, Li e Pek (2008), com o uso de malhas não estruturadas, comprovam que a formulação 2D via *Elementos Finitos* é uma ferramenta mais adequada que o método numérico das *Diferenças Finitas* para os problemas de MT em superfícies irregulares.

Este trabalho apresenta uma formulação alternativa para a modelagem direta das respostas MT bidimensionais em multicamadas com anisotropia arbitrária. Nós usamos a técnica da separação do campo total (que é medido pelos receptores), em duas partes: o campo primário e o campo secundário. Tal formulação não é encontrada na literatura, apesar desta técnica ser bem conhecida entre os autores. Considerando, portanto, um modelo de multicamadas que abriga em seu interior um corpo de propriedade física contrastante às propriedades das camadas, o campo gerado pela interação do campo MT com as camadas do modelo sem o corpo, corresponde ao campo primário; já a parte somada vetorialmente ao campo primário devido a interação deste com o corpo, corresponde ao campo secundário. O campo medido nos receptores constitui-se da soma das duas partes. Como a resposta do campo secundário é pequena em relação ao campo primário, obtemos uma precisão maior nos resultados ao explicitar o acréscimo de campo gerado.

O trabalho está dividido da seguinte maneira:

O Capítulo 2 trata sobre a anisotropia. Apresentamos o seu conceito, a origem intrínseca e estrutural, e mostramos como ela é tratada matematicamente como um tensor de posto dois, tridimensional. Veremos também o conceito e aplicação dos eixos principais de anisotropia.

O Capítulo 3 trata do método magnetotelúrico em seu aspecto histórico, de desenvolvimento teórico e como importante ferramenta na indústria de exploração de minérios e, principalmente, de hidrocarbonetos. E por último, será feita uma discussão de seus principais fundamentos teóricos.

No Capítulo 4 mostraremos a formulação analítica da modelagem 1D do campo MT para multicamadas com anisotropia, via método de matriz de propagação; e estudaremos esses campos em profundidade.

No Capítulo 5, via técnica numérica dos Elementos Finitos, faremos a modelagem 2D dos campos em ambientes anisotrópicos.

No Capítulo 6, na discussão dos resultados, analisaremos alguns modelos bidimensionais, com e sem anisotropia para fazer a identificação das alterações da resposta anisotrópica em relação a isotrópica.

2 ANISOTROPIA

O objetivo deste capítulo é dar uma noção geral sobre anisotropia, desde o seu conceito ao tratamento matemático para as aplicações em problemas. Iniciaremos falando de anisotropia de uma maneira geral, e depois daremos enfoque à condutividade elétrica anisotrópica.

2.1 CONCEITO E NATUREZA

Se a medida de uma propriedade física e/ou química de um material variar sob o movimento de rotação da medida, dizemos que este material é anisotrópico em relação a tal propriedade. Portanto, o mesmo material pode ser considerado anisotrópico em relação a uma propriedade, e isotrópico em relação a outra. O que determina isso, são as direções preferenciais, intrínsecas ou provocadas, decorrentes de sua organização estrutural, que fazem com que eles respondam aos estímulos externos de forma desigual nas diversas direções. Algumas propriedades são bastante afetadas pela organização estrutural e manifestam anisotropia, para outras é praticamente irrelevante. O fenômeno de anisotropia pode ocorrer

Figura 2.1. Sistemas cristalinos, constantes cristalográficas e simetria principal de alguns minerais.

Sistema	Constantes cristalográficas	Simetria principal	Exemplos de minerais
Cúbico (Isométrico)	$a_1 = a_2 = a_3$ $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$	4 eixos ternários	Diamante, granada, espinélio
Tetragonal	$a_1 = a_2 \neq c$ $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$	1 eixo quaternário (eixo c)	Zircão, cassiterita, rutilo
Hexagonal	$a_1 = a_2 = a_3 \neq c$ $\alpha = \beta = \delta = 90^\circ$ e $\gamma = 120^\circ$	1 eixo senário (eixo c)	Quartzo β , berilo
Trigonal	$a_1 = a_2 = a_3 \neq c$ $\alpha = \beta = \delta = 90^\circ$ e $\gamma = 120^\circ$	1 eixo ternário (eixo c)	Quartzo α , turmalina, coríndon
Ortorrômbico	$a \neq b \neq c$ $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$	1 eixo binário (eixo c); pode ter mais 2 eixos binários e até 3 planos	Olivina, ortopiroxênio, topázio
Monoclínico	$a \neq b \neq c$ $\alpha = \gamma = 90^\circ$ e $\beta \neq 90^\circ$	1 eixo binário (eixo b); 1 plano contendo os eixos a e c	Ortoclásio, mica, clinopiroxênio, clinofibólito
Triclínico	$a \neq b \neq c$ $\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq 90^\circ$	um centro de simetria ou sem simetria	Microclínio, plagioclásio

(a, b e c: dimensões da cela unitária; α , β , γ e δ : ângulos entre seus eixos. Nos sistemas hexagonal e trigonal, há quatro eixos, três no mesmo plano.)

tanto pela estrutura interna dos materiais (NEWNHAM, 2005), como pela estruturação ou reestruturação estratigráfica da subsuperfície, decorrentes dos processos naturais de formação das rochas ou de eventos geológicos que deformam o conjunto solo-rochas. O primeiro caso é conhecido como anisotropia intrínseca, e o segundo, como anisotropia estrutural (PARKHOMENKO, 1967; ZHDANOV, 2009).

Figura 2.2. As formas geométricas dos cristais seguem o padrão das células unitárias que os compõem.



A *anisotropia intrínseca* ocorre em materiais de estrutura interna cristalina, ou seja, que têm os átomos, moléculas ou íons organizados num padrão tridimensional bem definido, formando células unitárias (ver Figura 2.1), que se repetem ao longo de todo o material, formando as redes cristalinas, constituindo-lhe uma geometria semelhante a de sua célula unitária, conforme a Figura 2.2. A célula de uma rede cristalina busca sempre a configuração de menor energia, o que ocasiona ligações mais fortes entre os átomos de uma certa direção que de outra. Tais diferenças criam planos de clivagem¹ que dividem os cristais em sete classes: triclínica, trigonal, monoclínica, hexagonal, ortorrômbica, tetragonal e cúbica (FEYNMAN, 2008). A configuração de uma estrutura cristalina contribui efetivamente para as características adquiridas em cada direção e, conseqüentemente, para as respostas das propriedades intrínsecas do material nestas direções. Um cristal cúbico não apresenta anisotropia devido sua estrutura uniforme em todas as direções, os materiais denominados amorfos (sem formas geométricas definidas) também não exibem anisotropia intrínseca. Como exemplo de materiais intrinsecamente anisotrópicos podemos citar o mineral grafita, o metal Cádmio (Cd), Gálio (Ga), o cristal mica (PARKHOMENKO, 1967; NEWNHAM, 2005).

A *anisotropia estrutural* nos ambientes geológicos ocorre quando agregados de minerais isotrópicos, em rochas, exibem uma dependência na direção das medidas, como resultado do processo de formação dos ambientes terrestres. Conforme o processo de formação temos duas classificações, a *microanisotropia* e a *macroanisotropia*.

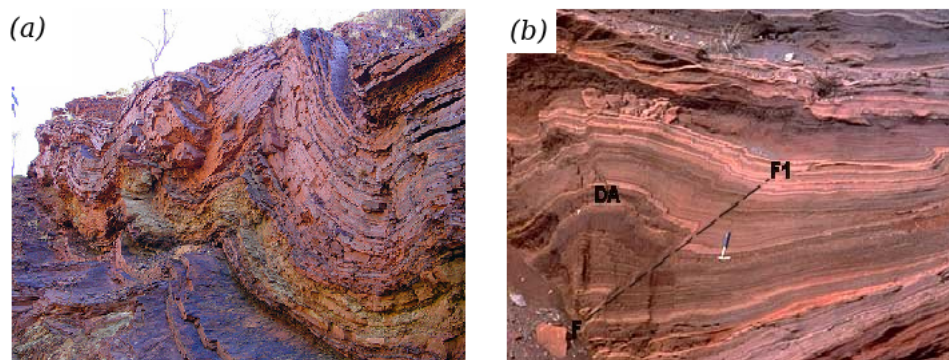
¹Planos através dos cristais por onde é mais fácil quebra-los.

As rochas podem apresentar um arranjo ordenado de seus grãos formadores que estejam de acordo com a forma e eixos cristalográficos, em decorrência de seu processo de formação, ígnea, metamórfica ou sedimentar (PARKHOMENKO, 1967). Esses processos constituem a microanisotropia, que pode ser uma característica primária de uma rocha, ou acontecer durante e depois da dinâmica do metamorfismo. Há algumas rochas em que a microanisotropia se desenvolve da mesma maneira que na macroanisotropia, que será definida no próximo parágrafo, pela alternância de finas camadas com diferentes propriedades petrográficas, como em rochas sedimentares que consistem na alternância de camadas de rochas com alta resistividade e com baixa resistividade (camadas de xistos, de arenitos, assim por diante).

A *macroanisotropia* é caracterizada como um processo de formação geológica, resultado da deposição alternada de camadas litologicamente diferentes, esse processo é denominado *Interbedding*. Um estudo sobre macroanisotropia na condutividade pode ser encontrado em Eisel e Haake (1999).

A deposição alternada de camadas finas de areia e argila pode gerar forte anisotropia, a resistividade transversal é sempre maior que a resistividade ao longo das camadas, e cresce à medida que crescem os contrastes entre as camadas (PARKHOMENKO, 1967).

Figura 2.3. Deformações geológicas: (a) rocha sedimentar com dobras e (b) falhas associadas com dobras.



Fonte: Anisotropia estrutural (2005; 2012)

Em geologia estrutural existem numerosos eventos que deformam as rochas, ocasionando dobramentos e falhas, tais deformações também diferenciam as medidas das propriedades nas direções, gerando macroanisotropia estrutural. Na Figura 2.3 temos a representação de alguns casos de deformação.

Um rico apanhado dos processos formadores da anisotropia pode ser encontrado no livro

*Anisotropy in Geoelectromagnetism*², de Negi e Saraf (1989 apud LOSETH; URSIN, 2007).

2.2 TRATAMENTO TENSORIAL

O fenômeno de anisotropia é descrito por meio de tensores. Para algumas propriedades físicas, por exemplo, a condutividade elétrica, a polarização elétrica e o momento de inércia, quando anisotrópicas, constituem tensores de posto dois, que são representados por matrizes (A_{ij}) . Estas, são tridimensionais $(\sum_{i,j=1}^3 A_{i,j})$, simétricas $(A = A^T)$ e positivo-definidas³ (FEYNMAN, 2008; NEWNHAM, 2005).

Daqui até o fim desta seção todos os desenvolvimentos serão feitos em termos do tensor condutividade elétrica⁴ $(\tilde{\sigma})$, que é o parâmetro físico de interesse do método MT. Contudo, o que será demonstrado para ele poderá ser aplicado a todos os outros tensores de mesma natureza.

2.2.1 As componentes do tensor

Conforme foi dito, a condutividade elétrica na forma tensorial terá a seguinte forma:

$$\tilde{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}, \quad (2.1)$$

e cada uma das nove componentes da equação 2.1 possui um significado⁵ físico, que procuraremos entender partir de agora.

Consideremos a *Lei de Ohm* escrita em termo da condutividade elétrica anisotrópica:

$$\mathbf{J} = \tilde{\sigma}\mathbf{E}. \quad (2.2)$$

O vetor densidade de corrente \mathbf{J} possui dependência linear com o vetor campo elétrico \mathbf{E} através da constante de proporcionalidade $\tilde{\sigma}$. Porém, essa dependência é diferente para cada direção.

Imagine um campo elétrico \mathbf{E}_1 incidindo na direção x e gerando uma densidade de corrente

²NEGI, J. G.; SARAF, P. D. *Anisotropy in Geoelectromagnetism*. New York: Esclvier.

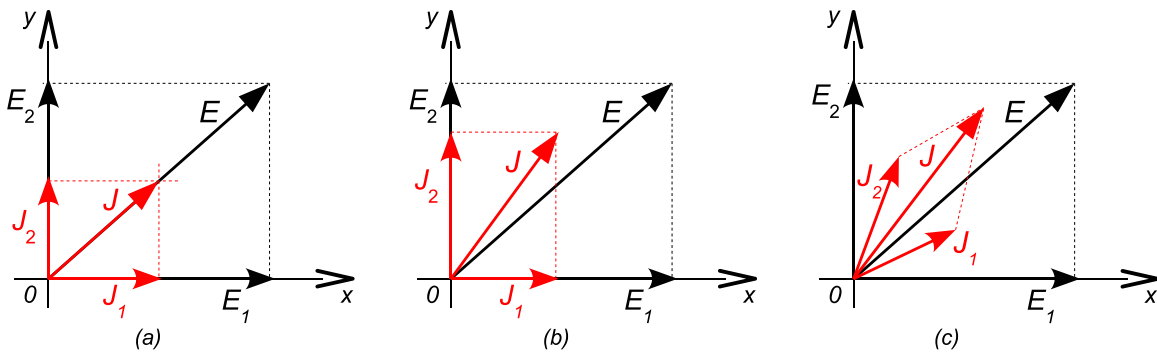
³Dada a matriz simétrica $A_{n,n}$, a sua forma quadrática é uma função real definida para todos os vetores $x_{n,1}$, da seguinte forma: $f(x) = x'Ax = \sum_{i=1}^n a_{ii}x_i^2 + 2\sum_{i=1}^n \sum_{j>i}^n a_{ij}x_ix_j$. Se $f(x) > 0$ então a matriz é dita positiva-definida.

⁴As grandezas anisotrópicas serão identificadas pelo sinal sobre elas: $\tilde{\sigma}$

⁵Ver tensores: Butkov (1988), Feynman (2008).

\mathbf{J}_1 nesta direção; e um outro campo \mathbf{E}_2 , de mesma intensidade, incidindo na direção y , e gerando uma densidade \mathbf{J}_2 na direção y . Se imaginarmos um terceiro campo propagando-se a 45° no plano- xy , este seria a composição de dois campos, um em x e outro em y ; da mesma forma que a densidade gerada por este também seria uma soma vetorial de um \mathbf{J}_1 e \mathbf{J}_2 , conforme vemos na Figura 2.4b. Contudo, esta densidade não obrigatoriamente teria a mesma direção do campo que a gerou. Isto porque podem existir cargas com mais liberdade de se movimentar em uma direção que em outra.

Figura 2.4. Eixos de referência (preto); eixos de anisotropia (vermelho). Esquema representativo da geração de densidade de corrente devido a incidência de um campo elétrico em um meio (a) isotrópico, (b) anisotrópico sem rotação entre os dois eixos e (c) com anisotropia arbitrária.



Fonte: Adaptado de Feynman (2008)

Também pode ocorrer que as componentes x e y de \mathbf{J} não estejam na mesma direção das componentes de \mathbf{E} , ou seja, o material está rotacionado em relação aos eixos de coordenadas escolhido. Nesse caso, a componente \mathbf{E}_1 , na direção x , geraria uma densidade \mathbf{J}_1 com direção x e y , e \mathbf{E}_2 , uma densidade \mathbf{J}_2 também nas duas direções, conforme representado na Figura 2.4c.

No caso geral, em que temos um campo elétrico com as três direções, as componentes da densidade de corrente \mathbf{J} serão dadas por:

$$\begin{aligned}
 J_x &= \sigma_{xx}E_x + \sigma_{xy}E_y + \sigma_{xz}E_z, \\
 J_y &= \sigma_{yx}E_x + \sigma_{yy}E_y + \sigma_{yz}E_z, \\
 J_z &= \sigma_{zx}E_x + \sigma_{zy}E_y + \sigma_{zz}E_z.
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

Do conjunto (2.3) podemos concluir que o comportamento de um meio anisotrópico é comple-

tamente descrito pelas nove quantidades $(\alpha_{xx}, \alpha_{xy}, \alpha_{xz}, \alpha_{yx}, \dots)$. Portanto, temos a seguinte relação:

$$\begin{bmatrix} J_x \\ J_y \\ J_z \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}}_{\sigma_{ij}} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix}, \quad (2.4)$$

Podemos perceber que as nove componentes do tensor descrevem todas as possíveis rotações existentes entre o eixo de referência e o eixo do material anisotrópico.

2.2.2 Os eixos principais de anisotropia

Vimos que a representação mais geral do tensor σ_{ij} é dada por:

$$\tilde{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}. \quad (2.5)$$

No entanto, podemos representar o mesmo tensor em um conjunto de eixos nos quais os valores de fora da diagonal são nulos, restando apenas os valores da diagonal principal:

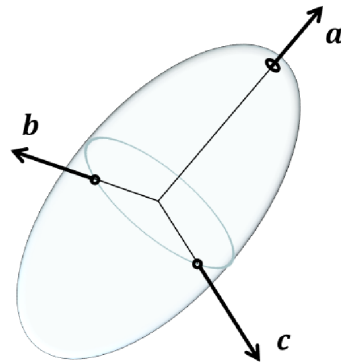
$$\tilde{\sigma}''' = \begin{bmatrix} \sigma_x''' & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_y''' & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z''' \end{bmatrix}. \quad (2.6)$$

Estes novos eixos, sob rotações específicas, recaem no sistema anterior, no qual voltamos a ter a matriz cheia representada pela equação 2.5.

Sempre será possível encontrar os eixos principais de anisotropia para o tensor condutividade graças a simetria da matriz quadrada que o representa (STRANG, 2003). Esse tensor também satisfaz as condições que o classifica como uma matriz positiva-definida, sendo assim, a forma quádrlica associada a ele é um elipsóide (ver Figura 2.5), em que cada dimensão representa um dos eixos principais do tensor (BOLDRINI, 1980). Dentre os eixos, portanto, estarão sempre o maior e o menor valor da condutividade anisotrópica.

O novo sistema, no qual o tensor condutividade é representado em termos de seus valores da diagonal principal, Equação 2.6, corresponde a um conjunto de eixos especiais denominado *eixos principais de anisotropia*. Neles, um campo elétrico aplicado na direção x , por exemplo, gera corrente elétrica unicamente nesta direção. Podemos identificar na Figura 2.4b, portanto,

Figura 2.5. Elipsóide associado aos tensores de posto dois e dimensão três, simétrico e de digonal dominante (positivo definido).



o caso em que os eixos de anisotropia estão alinhados ao sistema de referência, e na Figura 2.4c o caso em que eles estão rotacionados entre si.

Vejamos agora como fazer a correspondência entre o sistema de eixos principais de anisotropia e um outro sistema de referência qualquer.

2.2.3 Matriz rotação

Vamos tomar o sistema de eixos principais de anisotropia representado por (x''', y''', z''') e um outro sistema adotado arbitrariamente, representado por (x, y, z) . A correspondência entre eles nos permitirá passear pelos dois sistemas e solucionar o problema onde for mais conveniente, expressando a solução no sistema em que se desejar.

A teoria da diagonalização de matrizes garante que uma matriz simétrica é sempre diagonalizável, portanto, podemos escrever para o tensor condutividade:

$$\tilde{\sigma} = \mathcal{R}^T \sigma''' \mathcal{R} \quad (2.7)$$

em que \mathcal{R} representa os autovetores relacionados aos autovalores da matriz diagonal, para este caso, σ''' .

A matriz cheia $\tilde{\sigma}$ está representada no sistema (x, y, z) , enquanto a matriz diagonal está representada em (x''', y''', z''') . A correspondência entre elas é dada pela matriz \mathcal{R} , que representa uma transformação ortogonal entre os dois sistemas de eixos (BOLDRINI, 1980).

Podemos entender tal transformação como o resultado de três rotações consecutivas, representadas, respectivamente, pelas matrizes \mathcal{R}_s , \mathcal{R}_d e \mathcal{R}_l . Os índices destas matrizes representam os eixos nos quais acontecem as rotações, conforme o esquema visto na Figura 2.6. Estas rotações são descritas pela teoria dos ângulos de Euler (LEMOS, 2004; NEWNHAN, 2005), que reproduzem qualquer posição rotacionada entre dois sistemas cartesianos distintos. Chamaríamos tais ângulos de *Strike*, *Dip* e *Slant*, conforme visto em Pek e Santos (2002). O produto matricial destas rotações, observando a ordem na qual foram aplicadas (visto que não há comutatividade no produto matricial), dá origem a matriz de rotação resultante mostrada na equação (2.7):

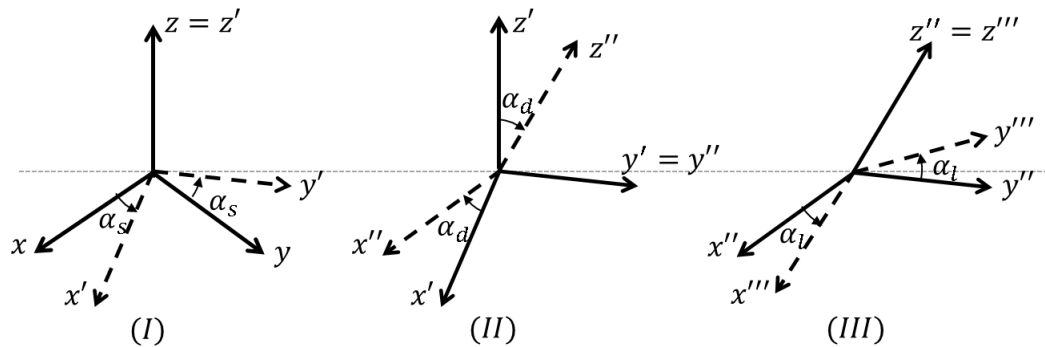
$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_l \mathcal{R}_d \mathcal{R}_s. \quad (2.8)$$

e

$$\mathcal{R}^T = \mathcal{R}_s^T \mathcal{R}_d^T \mathcal{R}_l^T. \quad (2.9)$$

que representa a matriz inversa ou transposta, dada a transformação ortogonal, que faz a operação no sentido oposto de \mathcal{R} .

Figura 2.6. Representação das rotações entre o sistema (x''', y''', z''') e o (x, y, z) . (a) O ângulo α_s (*strike*) representa a primeira rotação em torno de z . (b) O ângulo α_d (*dip*) representa a segunda rotação em torno de y' . (c) O ângulo α_l (*slant*) representa a terceira rotação em torno de z'' .



Vejamos as matrizes que representam cada estágio da rotação total \mathcal{R} e \mathcal{R}^T :

(a) Rotação dos eixos (x, y, z) em torno no eixo z sob o ângulo α_s : $(x, y, z) \xrightarrow{\mathcal{R}_s} (x', y', z')$

A matriz de rotação \mathcal{R}_s escreve-se como:

$$\mathcal{R}_s = \begin{bmatrix} \cos \alpha_s & \text{sen} \alpha_s & 0 \\ -\text{sen} \alpha_s & \cos \alpha_s & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

(b) Rotação dos eixos (x', y', z') em torno no eixo y' sob o ângulo α_d : $(x', y', z') \xrightarrow{\mathcal{R}_d} (x'', y'', z'')$

A matriz de rotação \mathcal{R}_d escreve-se como:

$$\mathcal{R}_d = \begin{bmatrix} \cos \alpha_d & 0 & \text{sen} \alpha_d \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{sen} \alpha_d & 0 & \cos \alpha_d \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

(c) Rotação dos eixos (x'', y'', z'') em torno no eixo z'' sob o ângulo α_l : $(x'', y'', z'') \xrightarrow{\mathcal{R}_l} (x''', y''', z''')$

A matriz de rotação \mathcal{R}_l escreve-se como:

$$\mathcal{R}_l = \begin{bmatrix} \cos \alpha_l & \text{sen} \alpha_l & 0 \\ -\text{sen} \alpha_l & \cos \alpha_l & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

A rotação geral, $(x, y, z) \longrightarrow (x''', y''', z''')$, é o resultado do produto das matrizes dos três estágios, na seguinte ordem, $\mathcal{R} = \mathcal{R}_l \cdot \mathcal{R}_d \cdot \mathcal{R}_s$:

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} \cos \alpha_l \cos \alpha_d \cos \alpha_s - \sin \alpha_l \sin \alpha_s & \cos \alpha_l \cos \alpha_d \sin \alpha_s + \sin \alpha_l \cos \alpha_s & \cos \alpha_l \sin \alpha_d \\ -(\sin \alpha_l \cos \alpha_d \cos \alpha_s + \cos \alpha_l \sin \alpha_s) & -\sin \alpha_l \cos \alpha_d \sin \alpha_s + \cos \alpha_l \cos \alpha_s & -\sin \alpha_l \sin \alpha_d \\ -\sin \alpha_d \cos \alpha_s & -\sin \alpha_d \sin \alpha_s & \cos \alpha_d \end{bmatrix}. \quad (2.13)$$

A matriz rotação geral inversa, $(x''', y''', z''') \longrightarrow (x, y, z)$, é dada por $\mathcal{R}^{-1} = \mathcal{R}^\top$, ou $\mathcal{R}^\top = \mathcal{R}_s^\top \cdot \mathcal{R}_d^\top \cdot \mathcal{R}_l^\top$:

$$\mathcal{R}^\top = \begin{bmatrix} \cos \alpha_s \cos \alpha_d \cos \alpha_l - \sin \alpha_s \sin \alpha_l & -(\cos \alpha_s \cos \alpha_d \sin \alpha_l + \sin \alpha_s \cos \alpha_l) & -\cos \alpha_s \sin \alpha_d \\ \sin \alpha_s \cos \alpha_d \cos \alpha_l + \cos \alpha_s \sin \alpha_l & -\sin \alpha_s \cos \alpha_d \sin \alpha_l + \cos \alpha_s \cos \alpha_l & -\sin \alpha_s \sin \alpha_d \\ \sin \alpha_d \cos \alpha_l & -\sin \alpha_d \sin \alpha_l & \cos \alpha_d \end{bmatrix}. \quad (2.14)$$

Em virtude de sua definição, o domínio dos ângulos de Euler é:

$$0 \leq \alpha_s \leq 2\pi, \quad 0 \leq \alpha_d \leq 2\pi, \quad 0 \leq \alpha_l \leq 2\pi.$$

A relação da equação (2.7) vem diretamente da teoria da diagonalização de matrizes, mas

podemos interpretá-la usando a lei de Ohm. Consideremos que a relação está descrita no sistema principal de anisotropia, identificado como:

$$\mathbf{J}''' = \tilde{\sigma}''' \mathbf{E}''' \quad (2.15)$$

Escrevendo os vetores densidade de corrente $\mathbf{J}''' = \mathcal{R}\mathbf{J}$ e o campo elétrico $\mathbf{E}''' = \mathcal{R}\mathbf{E}$, sendo \mathbf{J} e \mathbf{E} a representação destes vetores no sistema de referência do problema, e substituindo na equação (2.15), temos:

$$\mathcal{R}\mathbf{J} = \tilde{\sigma}''' \mathcal{R}\mathbf{E}. \quad (2.16)$$

Ao aplicarmos o operador \mathcal{R}^T pela esquerda dos termos da equação (2.16), ou também \mathcal{R}^{-1} , uma vez que se trata de uma transformação ortogonal, teremos:

$$\mathbf{J} = \mathcal{R}^T \tilde{\sigma}''' \mathcal{R}\mathbf{E} \quad (2.17)$$

$$\therefore \tilde{\sigma} = \mathcal{R}^T \tilde{\sigma}''' \mathcal{R}. \quad (2.18)$$

Temos que a densidade de corrente \mathbf{J} , da equação (2.17), está representada no sistema de referência do problema, assim como o vetor \mathbf{E} , então, a representação de $\tilde{\sigma}$ no mesmo sistema de referência, é definida conforme a equação (2.18), como já havíamos feito na equação (2.7).

Com estes passos podemos entender as aplicações do tensor condutividade nos capítulos seguintes.

3 O MÉTODO MAGNETOTELÚRICO (MT)

Neste capítulo falaremos sobre o método MT. Contaremos como se deu o seu surgimento e alguns aspectos históricos de sua evolução. Falaremos, também, sobre a fonte natural deste campo e de suas bases teóricas.

3.1 O SURGIMENTO E A EVOLUÇÃO

A determinação da estrutura elétrica da terra usando métodos baseados em campos eletromagnéticos naturais iniciou-se por volta de 1960, baseados em conceitos teóricos originalmente propostos por Andrey N. Tikohnov, em 1950 na União Soviética, Louis Cagniard, em 1953 na França e Tsuneji Rikitake, em 1950 no Japão. Entretanto, o conhecimento a respeito das correntes telúricas datam de muito tempo. No início de 1868, o matemático e astrônomo inglês, Sir George Biddell Airy, fez o primeiro estudo sobre as correntes da terra, relacionando-as às variações magnéticas. Em 1862, nos Alpes, Lamont realizou um dos primeiros experimentos de campo para medir correntes telúricas, e Terada, em 1917 apareceu como o primeiro a medir a dependência do campo magnético na condutividade do solo (ZHDANOV, 2010).

Os irmãos Schlumberger foram os primeiros a sugerir que as correntes telúricas poderiam ser usadas para a exploração de gás e petróleo. Entretanto, as variações significativas e instabilidade no comportamento das correntes telúricas na ionosfera e magnetosfera, pouco compreendidas na época, representavam dificuldade para se desenvolver técnicas de interpretação de dados das correntes magnetotelúricas. Foi então que, individualmente, Tikohnov e Cagniard, propuseram o cancelamento dos efeitos dos processos da ionosfera e magnetosfera pela normalização das componentes do campo elétrico pelas componentes do campo magnético. Nascia o conceito de impedâncias magnetotelúricas, definidas como:

$$Z_{xy} = \frac{E_x}{H_y} \quad \text{e} \quad Z_{yx} = \frac{E_y}{H_x} \quad (3.1)$$

que têm dimensões de volts (V) por ampère (A), ou ohms (Ω).

Antes de Tikohnov e Cagniard, Hirayama em 1934, e Hatakayama em 1938, já conheciam as relações (3.1). Entretanto, o mérito por terem desenvolvido a fundamentação sólida, física e matemática de uma nova técnica de exploração, o método de sondagem *Magnetotelúrico (MT)*, foi dado aos dois primeiros. O desenvolvimento do novo método ganhou bastante destaque nas pesquisas por ser baseado num modelo geoeletrico simples, que fornece resultados

geofisicamente e geologicamente significativos, usando uma simples técnica de interpretação, que possibilita aos geocientistas transformarem as observações de dados de campo em predições das resistividades das formações rochosas.

O método MT possui uma longa história, cheia de grandes descobertas e contratempos. Nos anos 60 e início de 70, tornou-se amplamente usado na exploração de gás e óleo. Originalmente as interpretações de seus dados eram baseadas em modelos simples de camadas da terra, o que facilitava a construção das curvas de resistividade aparente versus o período dos dados observados. As curvas das sondagens MT eram, então, transformadas em seções geoeletricas 1-D, e o modelo geoeletrico total era formado pela composição das várias seções 1D. Entretanto, há sempre uma distância entre as curvas 1D de modelos ideais e as curvas de sondagem 1D dos ambientes reais, o que, com frequência, resultava na criação de falsas seções de profundidade de estruturas geoeletricas, algumas vezes mal-interpretadas como potenciais reservatórios de hidrocarbonetos.

Mark Naumovich Berdichevsky foi o primeiro a perceber a importância de atentar para os efeitos da inhomogeneidade horizontal geoeletrica nos dados MT. Ele introduziu o tensor de medidas no método MT, que rapidamente tornou-se muito usado em todo mundo. A transição dos processamentos de dados baseados no tensor resultou no aumento da quantidade de informações extraídas das observações MT.

O desenvolvimento do efetivo método da modelagem numérica durante os anos 80 e 90, pelo avanço das técnicas computacionais, tornou possível superar as simplistas interpretações de seções 1-D para os mais realistas modelos geoeletricos 2-D e 3-D, o que tem provocado novas oportunidades para as aplicações práticas do método MT na exploração geofísica.

Em busca de resultados cada vez mais precisos, na década de 60 surgiam os primeiros trabalhos envolvendo meios de camadas anisotrópicas e o método MT. Em 1965, Mann, J. E. Jr escreveu sobre a importância da condutividade anisotrópica na interpretação magnetotelúrica (1965, apud O'BRIEN; MORRISON, 1967). As primeiras formulações matemáticas apareceram com O'Brien e Morrison (1967) e Rankin e Reddy (1969), e, inicialmente, tratavam de casos de anisotropia bastante simples, em estruturas 1D. Deste então, muitos trabalhos vêm contribuindo no desenvolvendo do MT anisotrópico, por exemplo, Reddy e Rankin (1971; 1975), Weidelt (1996), Pek e Verner (1997), Pek e Santos (2001; 2002; 2006), Yin (2003; 2006), Li (2002), Li e Pek (2008), e outros. Alguns desses trabalhos, os mais recentes, apresentaram modelagens do MT em estruturas 2D e 3D para o caso mais geral possível de anisotropia, utilizando diferentes técnicas numéricas e malhas adaptativas, e envolvendo problemas mais complexos e realistas como os de batimetria e topografia.

De modo geral, a transformação do método MT em um método geofísico prático, foi realizada com esforço coletivo de muitos pesquisadores, como Berdichevsky (1965 apud ZHDANOV, 2010), Morrison et al. (1968 apud ZHDANOV, 2010), Schmucker (1970 apud ZHDANOV, 2010), Vozoff (1972 apud ZHDANOV, 2010), Weidelt (1975 apud ZHDANOV, 2010), Berdichevsky e Dmitriev (1976; 2002; 2008 apud ZHDANOV, 2010), Vanyan e Butkovskaya (1980 apud ZHDANOV, 2010), Berdichevsky e Zhdanov (1984 apud ZHDANOV, 2010), Egbert e Booker (1986 apud ZHDANOV, 2010), Jiracek et al. (1987 apud ZHDANOV, 2010), Booker e Chave (1989 apud ZHDANOV, 2010), Gough et al. (1989 apud ZHDANOV, 2010), Madden e Mackie (1989 apud ZHDANOV, 2010), Wannamaker et al. (1989 apud ZHDANOV, 2010), Wannamaker (1991 apud ZHDANOV, 2010), Weaver (1994 apud ZHDANOV, 2010).

3.2 O CAMPO MAGNETOTELÚRICO

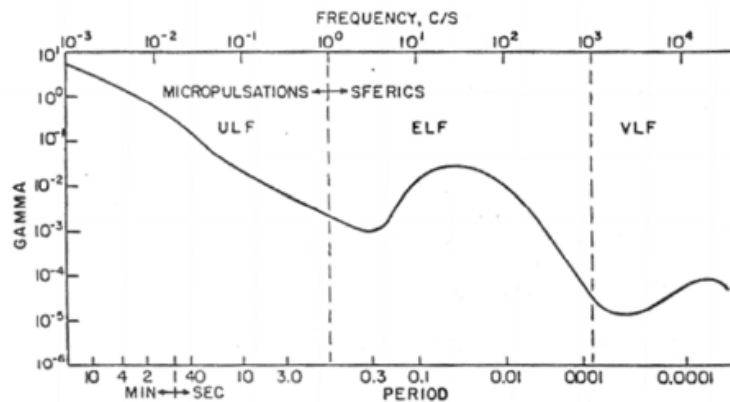
Dentro e ao redor da terra existem campos magnéticos naturais de grande escala e baixa frequência conhecidos como *campos magnetotelúricos*. Acredita-se que eles são oriundos do fluxo de partículas carregadas na ionosfera, pois as flutuações dos campos são passíveis de serem correlacionadas com variações diurnas no campo geomagnético causadas por emissões solares e tempestades elétricas (relâmpagos) que acontecem ao longo de todo o planeta (NABIGHIAN, 1991; et al. KEAREY et al., 2002). As flutuações do campo geomagnético estendem-se a uma faixa de frequência de 10^6 a 10^{-11} Hz, entretanto, o método MT utiliza apenas as frequências na faixa de 10^{-4} a 10^5 Hz por ser de interesse à exploração. Essa faixa é chamada de *broad band*.

O método MT utiliza essa fonte natural para obter informações sobre a distribuição de resistividade na subsuperfície da terra. Sua baixa faixa de frequência permite-lhe alcançar grandes profundidades e fazer investigações da crosta e do manto superior, conforme Hutton et al. (1980, apud KEAREY et al., 2002).

As fontes dos campos eletromagnéticos na faixa de aplicação do método MT se encontram na magnetosfera, definida como a região na qual o campo magnético originado no núcleo externo líquido da Terra encontra-se confinado. A magnetosfera é subdividida em várias estruturas, incluindo a atmosfera e a ionosfera, conforme Rostoker (1979 apud ABREU, 2002). Abaixo de 1 Hz essas variações originam-se na magnetosfera terrestre, devido as radiações solares (ultravioleta, infravermelho, etc.) que interagem com esta, ionizando os gases da atmosfera e dando origem as chamadas pulsações ULF (Ultra Low Frequency). Essas pulsações, também denominadas micro-pulsações, acontecem com maior frequência que

as originadas por relâmpagos, e possuem intensidade maior em períodos de maior atividade solar. Acima de 1 Hz a fonte do campo eletromagnético é originada pelas tempestades elétricas na baixa atmosfera. Estas são conhecidas como *sferics*, que se propagam ao redor do planeta aprisionadas num guia de onda formado entre a ionosfera e a superfície da Terra (NABIGHIAN, 1991). Quando as tempestades elétricas ocorrem distantes¹ do ponto de medida são fontes para os estudos magnetotelúricos, porém, quando ocorrem próximas, geram ruído e tornam-se indesejáveis para o método (ABREU, 2002; PINTO, 2009).

Figura 3.1. Espectro de frequências do campo MT. Observe que próximo aos valores de 1 Hz e 10^3 Hz estão as menores amplitudes do campo.



Fonte: Pinto (2009)

Nas aplicações do MT as frequências em torno de 1 Hz apresentam problema para o método, devido o campo eletromagnético atingir valores mínimos de amplitude. Essas frequências são conhecidas como *MT dead band* (banda morta). Esse fenômeno volta a acontecer para as frequências em torno de 10^3 Hz , e para esta faixa são chamadas de *audio-MT dead band* (ver Figura 3.1).

3.3 PRINCÍPIOS BÁSICOS DO MÉTODO

Devido as fontes do MT estarem localizadas a grandes distâncias do ponto onde são feitas as medidas do campo, podemos, com boa aproximação, considerar que ele atinge a superfície da terra com o comportamento de uma onda plana. Como a velocidade das ondas EM no ar

¹A distância segura para o uso do método MT é em torno de 3 a 5 *skin-depth*, para a qual as ondas incidem na superfície da terra, praticamente, como ondas planas.

é bem maior que na terra, podemos concluir pela *lei de Snell-Descartes*:

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{\sin \theta_2}{\sin \theta_1} \quad (3.2)$$

que o campo se propaga no interior da terra na direção vertical ao plano da superfície. Os índices 1 e 2 representam, respectivamente, o ar e a terra, então, se $|v_1| \gg |v_2| \Rightarrow \theta_2 \simeq 0$ para satisfazer a igualdade de (3.2).

A formulação do método MT, portanto, consiste na resolução das *Equações de Maxwell* para ondas planas, considerando ainda outras condições que iremos conhecendo ao longo deste texto.

Consideremos as equações de maxwell em sua forma diferencial e no domínio das frequências²:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho, \quad (3.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (3.4)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (3.5)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (3.6)$$

As equações representam, respectivamente, a *Lei de Gauss* da eletricidade e do magnetismo, a Lei de *Ampère-Maxwell* e de *Faraday-Lenz*. As letras em negrito são grandezas vetoriais, portanto, \mathbf{D} é o vetor deslocamento elétrico (C/m^2 - Coulomb/metro quadrado), \mathbf{B} é o campo magnético ou densidade de fluxo magnético (T - Tesla), \mathbf{E} é o vetor campo elétrico (V/m - volt/metro), \mathbf{H} é a indução magnética (A/m - Ampère/metro) e \mathbf{J} , a densidade de corrente (A/m^2 - Ampère/metro quadrado).

As três equações seguintes são conhecidas como *Equações constitutivas*:

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad \mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}, \quad (3.7)$$

e permitem o acoplamento das equações (3.3 a 3.6). As duas primeiras relacionam os campos vetoriais \mathbf{E} e \mathbf{B} aos campos vetoriais \mathbf{D} e \mathbf{H} , e a terceira, conhecida como *lei de Ohm*, diz que um campo elétrico incidente num material induzirá neste uma corrente proporcional a sua intensidade. As três equações representam a interação dos campos elétrico e magnético com a matéria, através das grandezas ε , permissividade elétrica (F/m - Fara-

²A escolha de se trabalhar no domínio das frequências simplifica muito a solução do problema.

day/metro), μ , permeabilidade magnética (H/m - Henry/metro) e σ , condutividade elétrica (S/m - Siemens/metro), propriedades físicas intrínsecas do material. No caso geral estas grandezas serão sempre anisotrópicas, ou seja, seus valores mudam conforme a direção em que são medidas, sendo representadas matematicamente por tensores. No entanto, quando o meio é isotrópico, linear³ e homogêneo⁴ essas quantidades deixam de ser tensores e passam a ser constantes escalares. No vácuo assumem os seguintes valores $\varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} F/m$ e $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} H/m$.

A observação de características naturais do campo magnetotélúrico e dos solos, possibilita fazermos considerações essenciais para a formulação do método MT, tais como:

- (i) A ausência de cargas livres ($\rho = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{D} = 0$), uma vez que estas são rapidamente dispersadas no meio;
- (ii) A dependência exponencial do campo com o tempo ($e^{i\omega t}$), devido o tipo de onda que tratamos ser monocromática, podendo este, então, ser representado por séries de Fourier, onde $\omega = 2\pi f$, com f sendo a frequência (BUTKOV, 1988);
- (iii) As constantes de permissividade e permeabilidade dos materiais são consideradas iguais as do vácuo, ε_0 e μ_0 , uma vez que no interior da Terra a constante ε dos materiais varia de 1 a $80\varepsilon_0$ (CASTELLS, 2006), e que $\mu \simeq \mu_0$ para a maioria dos materiais a baixas frequências (REITZ; MILFORD; CHRISTY, 1982);
- (iv) A *condição quase-estática* ($\sigma \gg \omega\varepsilon_0$), ou seja, a corrente de deslocamento ($\partial\mathbf{D}/\partial t = i\omega\varepsilon_0$) é absolutamente desprezível diante da corrente de condução ($\mathbf{J} = \sigma$), equação (3.5), devido a baixa frequência da fonte, a consideração (iii), e a informação de que as condutividades σ no interior da Terra variam de $10^{-6} S/m$ (embasamento cristalino) a $10 S/m$ (água salgada) (PINTO, 2009).

Observando todas estas considerações, aplicando o operador rotacional pela esquerda das equações (3.5) e (3.6) e fazendo uso da identidade vetorial $\nabla \times \nabla \times \mathbf{G} = \nabla\nabla \cdot \mathbf{G} - \nabla^2\mathbf{G}$, chegamos as seguintes equações:

$$\nabla^2\mathbf{E} + k^2\mathbf{E} = 0, \quad (3.8)$$

$$\nabla^2\mathbf{H} + k^2\mathbf{H} = 0, \quad (3.9)$$

em que $k^2 = -i\omega\mu_0\sigma$. Estas são *equações da Difusão* (Butkov, 1988). O campo MT, portanto, sofre difusão na subsuperfície devido a condição quasi-estática a que está submetido.

³São materiais em que a susceptibilidade elétrica χ é constante. Apenas na presença de campos muito intensos ela torna-se função de \mathbf{E} $\chi(E)$ (REITZ; MILFORD; CHRISTY, 1982, pág.92).

⁴São meios onde as propriedades físicas são constantes no tempo e no espaço, ou seja, não mudam pontualmente ao longo da extensão de uma direção de medida (ZHDANOV, 2009).

A solução do campo MT recai em um sistema de seis equações diferenciais parciais (EDP) de segunda ordem, conforme vemos nas equações (3.8) e (3.9). É comum assumir o sistema de eixos no qual a direção positiva de x aponta para o lado direito desta página, a de y aponta para fora dela, e a de z aponta para baixo. No caso mais geral possível, onde as componentes do campo variam em todas as direções, resolver este sistema de EDP's é uma tarefa bastante complexa, mas devido ao tipo de propagação da onda MT, e considerando a variação das propriedades elétricas com a direção na estrutura geológica considerada, algumas simplificações tornam-se possíveis.

Podemos classificar as estruturas geológicas como: (i) unidimensionais, quando as propriedades elétricas variam apenas ao longo de uma direção, geralmente, esta direção é z , mantendo-se constante no plano- xy ; (ii) bidimensionais, quando variam apenas nas duas direções de um plano perpendicular a superfície da terra, sendo a direção em que não há variação chamada de *direção strike*; (iii) tridimensionais, quando as propriedades variam nas três direções.

A presença de anomalias na subsuperfície muda as propriedades físicas em certas direções no interior da terra, isso determina se o problema será considerado 1D, 2D ou 3D. Em casos reais, um ambiente nunca será unidimensional, mas os resultados do MT 1D trazem importantes informações, a priori, sobre o terreno.

A solução de (3.8) e (3.9) para um meio espaço homogêneo tem a forma:

$$\mathbf{G}(\omega, z) = G_0 e^{i\omega t} e^{-i\alpha z} e^{-\alpha z} \quad (3.10)$$

sendo $e^{i\omega t}$ a variação temporal senoidal, $e^{-i\alpha z}$ a variação senoidal em profundidade, e $e^{-\alpha z}$ o decaimento exponencial com a profundidade. Na qual $\alpha = \sqrt{\omega\mu_0\sigma/2}$, G_0 é o valor do campo na superfície.

A profundidade na qual o campo cai $1/e$ do seu valor na superfície (36,79%), chamada de *skin depth*, é dada por:

$$\delta = \frac{1}{\alpha} = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu_0\sigma}},$$

na prática, esse valor é aproximadamente $\delta \approx 0,5\sqrt{\rho/f} km$.

Para um meio uniforme, considerando um campo apenas com as componentes H_y e E_x (modo TM), temos, das equações de Maxwell, a relação:

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = -i\omega\mu_0 H_y$$

Considerando a solução (3.10) temos:

$$\frac{E_x}{H_y} = \frac{-i\omega\mu_0}{i\sqrt{-i\omega\mu_0\sigma}} = (1+i)\sqrt{\frac{\omega\mu_0}{2\sigma}}, \quad (3.11)$$

A razão \mathbf{E}/\mathbf{H} é denominada impedância Z (expressada em Ω no SI). É comum a expressarmos com índices, Z_{xy} , indicando a quais componentes do campo se referem.

Para cada frequência tem-se:

$$\rho_{axy}(\omega) = \frac{1}{\mu_0\omega} \left| \frac{E_x(\omega)}{H_y(\omega)} \right|^2 = \frac{1}{\mu_0\omega} Z_{xy} Z_{xy}^* \quad (3.12)$$

Usamos a notação ρ_{axy} na resistividade para evidenciar a quais componentes do campo, este, faz referência; o sub-índice “a” denota que a resistividade é aparente, pois depende da frequência, sua unidade de medida no SI é o *ohm-m* (Ωm). Quando se trata de um semi-espaço infinito a resistividade aparente é igual à resistividade do meio, basta que se aplique a solução do campo para o semi-espaço na Equação (3.12).

Se ao invés da polarização TM, tivéssemos a polarização TE (E_y e H_x apenas), seguindo os passos anteriores encontraremos as definições de resistividade ρ_{yx} e impedância Z_{yx} :

$$\rho_{ayx}(\omega) = \frac{1}{\mu_0\omega} \left| \frac{E_y(\omega)}{H_x(\omega)} \right|^2 = \frac{1}{\mu_0\omega} Z_{yx} Z_{yx}^* \quad (3.13)$$

$$\frac{E_y}{H_x} = \frac{-i\omega\mu_0}{i\sqrt{-i\omega\mu_0\sigma}} = (1+i)\sqrt{\frac{\omega\mu_0}{2\sigma}}$$

Os parâmetros ρ_{xy} e ρ_{yx} serão iguais apenas nos casos isotrópicos unidimensionais. Nos problemas de estruturas bi e tridimensionais essa igualdade nunca acontece, devido a mudança de propriedade física ao longo das direções. Também, na presença de ambientes anisotrópicos essa igualdade é quebrada.

A impedância elétrica Z , ou *tensor impedância*, definido como a razão entre os campos elétrico e magnético, é completamente definido pela seguinte relação,

$$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{xx} & Z_{xy} \\ Z_{yx} & Z_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_x \\ H_y \end{bmatrix}. \quad (3.14)$$

Quando as componentes dos campos do modo TE e TM são acopladas num problema, os valores Z_{xx} e Z_{yy} de (3.14) não serão nulos (ZHDANOV, 2009).

Em um modelo de camadas unidimensional a solução do campo é função unicamente da profundidade z . Quando o campo eletromagnético atinge a interface entre dois meios ocorrem os fenômenos de reflexão e a transmissão. Matematicamente a solução é representada por

$$\mathbf{E}(z) = (Ae^{ikz} + Be^{-ikz})\hat{\mathbf{n}} \quad (3.15)$$

em que $\hat{\mathbf{n}}$ é o versor de polarização da onda e cada termo representa a parcela de energia descendente e ascendente, respectivamente, com A e B sendo as amplitudes do campo nas camadas. O expoente k é o mesmo definido para as equações (3.8) e (3.9).

Os campos elétrico e magnético devem obedecer às condições de contorno na interface entre as camadas. Das equações do divergente temos:

$$D_{1n} = D_{2n} \quad \text{e} \quad B_{1n} = B_{2n},$$

e das equações com o rotacional,

$$\mathbf{E}_{1t} = \mathbf{E}_{2t} \quad \text{e} \quad \mathbf{H}_{1t} = \mathbf{H}_{2t},$$

em que n indica a direção normal e t a tangente. Outra condição de contorno importante é dada pela continuidade da densidade de corrente normal a superfície,

$$J_{1n} = J_{2n}.$$

Usamos as condições de fronteira para calcular os coeficientes A e B da solução (3.15). Segundo Rijo (1991), nos casos em que $Z_{xx} = Z_{yy} = 0$, a componente Z_{xy} sobre cada interface é determinada pela seguinte relação de recorrência:

$$Z_{xy(j)} = \bar{Z}_{xy(j)} \frac{Z_{xy(j+1)} + \bar{Z}_{xy(j)} \tanh(k_j h_j)}{\bar{Z}_{xy(j)} + Z_{xy(j+1)} \tanh(k_j h_j)}, \quad (3.16)$$

em que na última camada $Z_N = \bar{Z}_N$ (ZHDANOV, 2009). A barra do \bar{Z} indica que se trata da impedância intrínseca do meio. O h_j representa a espessura da camada designada pelo índice j .

A modelagem direta e a interpretação dos resultados do método MT dependem do entendimento de cada detalhe que foi esposto neste capítulo.

4 MODELAGEM DO MT 1D COM ANISOTROPIA

Neste capítulo apresentamos o formalismo para a modelagem direta do MT 1D em meios de multicamadas estratificadas podendo apresentar anisotropia elétrica em todas as camadas. Conforme representado na Figura 4.1, o modelo geoeletrico para esta modelagem consiste de n -camadas horizontais, com espessuras h_1, h_2, \dots, h_{n-1} ; a superfície da terra define o plano- xy do sistema cartesiano de referência, com a direção positiva do eixo- z apontando para o interior das camadas. Consideramos que os meios são lineares, homogêneos e não-magnéticos¹.

O formalismo é analítico baseado no método da Matriz de Propagação (REDDY; RANKIN, 1971; ABRAMOVICI, 1974; PEK; SANTOS, 2002). Nós o apresentaremos para o caso mais geral possível de anisotropia, chamado de arbitrário, no qual nenhum dos eixos principais de anisotropia é coplanar aos planos formados pelos eixos do sistema cartesiano de referência, e daremos ênfase para os campos em profundidade, fazendo um estudo das suas principais características, uma vez que nosso objetivo é usar esta solução como fonte do problema de modelagem direta 2D.

4.1 O TRATAMENTO DAS EQUAÇÕES DE MAXWELL

O modelo de anisotropia assumido é o mais geral possível, constituído por três rotações arbitrárias e consecutivas dos eixos principais de anisotropia em relação aos eixos de referência adotado para o problema, conforme visto no capítulo dois.

Tomemos, portanto, as equações de Maxwell no domínio das frequências, em suas formas diferenciais, já assumindo todos os detalhes que as simplificam² no caso do método MT:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (4.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mathfrak{z}\mathbf{H} \quad (4.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (4.3)$$

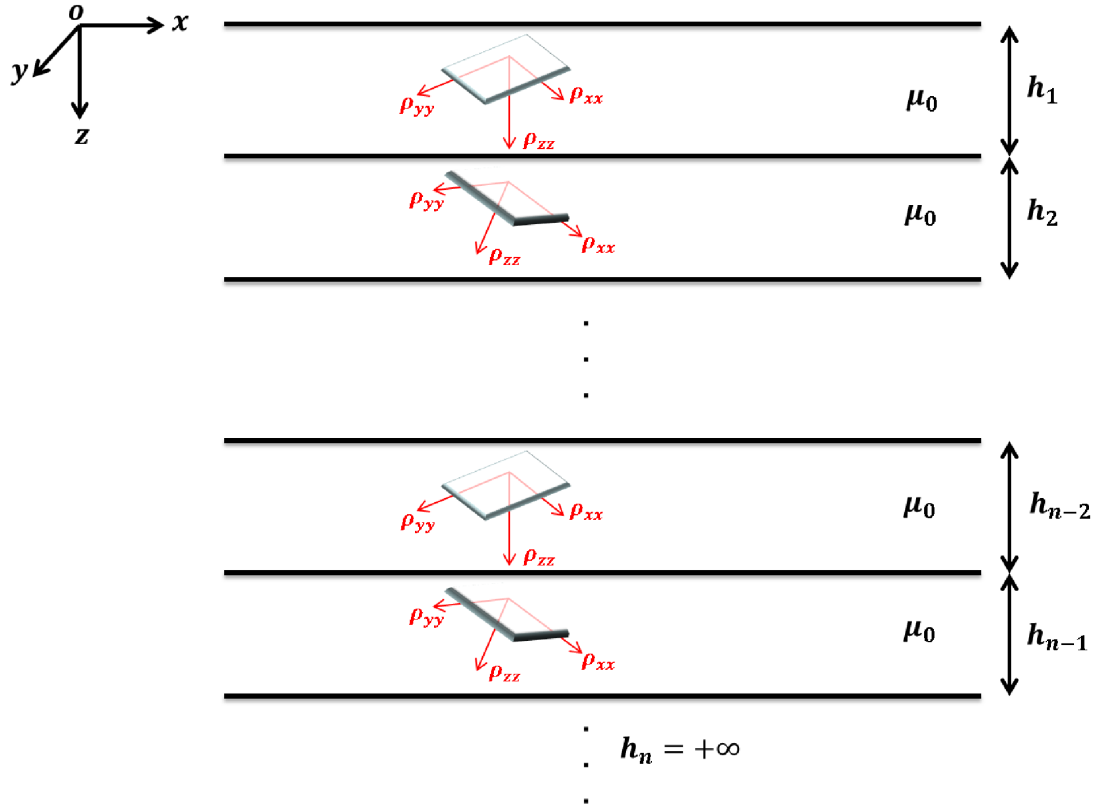
$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0 \quad (4.4)$$

As letras em negrito representam grandezas vetoriais e a constante $\mathfrak{z} = i\omega\mu_0$. Na densidade de corrente $\mathbf{J} = \tilde{\sigma}\mathbf{E}$, equação (4.1), o tensor condutividade elétrica $\tilde{\sigma}$, para o sistema de

¹Dizemos que um material é *não-magnético* quando sua permeabilidade $\mu \simeq \mu_0$ do vácuo. Apenas os materiais ferromagnéticos diferem apreciavelmente deste valor em baixas frequências.

²As simplificações foram discutidas no capítulo anterior, dizem respeito as características do campo Magnetotélico e do solo.

Figura 4.1. Modelo de multicamadas estratificadas. Este modelo é bastante utilizado nos trabalhos de propagação de ondas eletromagnéticas porque representa bem algumas típicas formações geológicas, como os depósitos sedimentares, que estão, intimamente, ligados aos ambientes de reservatórios de hidrocarbonetos, além de servir como um cenário conveniente para domínios com distribuição de condutividades anômalas (Zhdanov, 2009).



referência, é representado como:

$$\tilde{\sigma} = \begin{bmatrix} \tilde{\sigma}_{xx} & \tilde{\sigma}_{xy} & \tilde{\sigma}_{xz} \\ \tilde{\sigma}_{yx} & \tilde{\sigma}_{yy} & \tilde{\sigma}_{yz} \\ \tilde{\sigma}_{zx} & \tilde{\sigma}_{zy} & \tilde{\sigma}_{zz} \end{bmatrix}; \quad (4.5)$$

em que cada componente é dada pela aplicação da relação (2.7).

Na forma indicial tal relação escrita como:

$$\tilde{\sigma} = \sum_{j=1}^3 \mathcal{R}_{ij}^T \sigma_{jj}''' \mathcal{R}_{jk}. \quad (4.6)$$

em que σ'''_{jj} indica a condutividade nos eixos principais de anisotropia, ou seja, uma matriz diagonal. Então, podemos escrever para os termos de (4.5):

$$\tilde{\sigma}_{xx} = \mathcal{R}_{11}^T \sigma'''_{11} \mathcal{R}_{11} + \mathcal{R}_{12}^T \sigma'''_{22} \mathcal{R}_{21} + \mathcal{R}_{13}^T \sigma'''_{33} \mathcal{R}_{31}, \quad (4.7)$$

$$\tilde{\sigma}_{xy} = \mathcal{R}_{11}^T \sigma'''_{11} \mathcal{R}_{12} + \mathcal{R}_{12}^T \sigma'''_{22} \mathcal{R}_{22} + \mathcal{R}_{13}^T \sigma'''_{33} \mathcal{R}_{32}, \quad (4.8)$$

$$\tilde{\sigma}_{yx} = \mathcal{R}_{21}^T \sigma'''_{11} \mathcal{R}_{11} + \mathcal{R}_{22}^T \sigma'''_{22} \mathcal{R}_{21} + \mathcal{R}_{23}^T \sigma'''_{33} \mathcal{R}_{31}, \quad (4.9)$$

$$\tilde{\sigma}_{yy} = \mathcal{R}_{21}^T \sigma'''_{11} \mathcal{R}_{12} + \mathcal{R}_{22}^T \sigma'''_{22} \mathcal{R}_{22} + \mathcal{R}_{23}^T \sigma'''_{33} \mathcal{R}_{32}, \quad (4.10)$$

e assim por diante.

Como \mathcal{R} é uma transformação ortogonal, isso implica que $\mathcal{R}\mathcal{R}^T = \mathcal{R}^T\mathcal{R} = I$, onde I é a matriz identidade. Então, dada a relação

$$\sum_{j=1}^3 \mathcal{R}_{ij}^T \mathcal{R}_{jk} = \delta_{ik}, \quad (4.11)$$

podemos concluir que quando o tensor σ'''_{jj} puder ser escrito como produto de um escalar pela matriz identidade ($\sigma'''_{jj} = aI$) os termos fora da diagonal de (4.5) serão iguais a zero, e o tensor $\tilde{\sigma} = \sigma''' = aI$. E quando os valores da diagonal de σ''' forem diferentes entre si, mas a matriz \mathcal{R} for igual a identidade, obtemos de (4.6) que $\tilde{\sigma} = \sigma'''$.

Devido a onda-plana MT propagar-se verticalmente no interior das camadas em relação ao plano- xy paralelo a superfície da terra, não há variação do campo nas direções x e y , ($\partial/\partial x = \partial/\partial y = 0$). Então, das equações³ (4.1) e (4.2) de maxwell, teremos o seguinte conjunto de equações para solucionar:

$$\frac{\partial E_y}{\partial z} - \mathfrak{z}H_x = 0 \quad (4.12)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} + \mathfrak{z}H_y = 0 \quad (4.13)$$

$$H_z = 0 \quad (4.14)$$

³Considerando o operador rotacional $\nabla \times \mathbf{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \hat{i} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \hat{j} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \hat{k}$ e o tensor condutividade.

$$\frac{\partial H_y}{\partial z} + \sigma_{xx}E_x + \sigma_{xy}E_y + \sigma_{xz}E_z = 0 \quad (4.15)$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} - \sigma_{yx}E_x - \sigma_{yy}E_y - \sigma_{yz}E_z = 0 \quad (4.16)$$

$$\sigma_{zx}E_x + \sigma_{zy}E_y + \sigma_{zz}E_z = 0 \quad (4.17)$$

Como consequência destas características podemos concluir da equação (4.17) que a densidade de corrente J_z é nula ($J_z = 0 = \sigma_{zx}E_x + \sigma_{zy}E_y + \sigma_{zz}E_z$) para qualquer caso de anisotropia no problema MT 1D.

Apesar disso, há o aparecimento da componente E_z como efeito da anisotropia para os casos em que σ_{zx} e/ou σ_{zy} são diferentes de zero. Portanto, ainda da equação (4.17) temos a relação para esta componente:

$$E_z = -\frac{\sigma_{zx}}{\sigma_{zz}}E_x - \frac{\sigma_{zy}}{\sigma_{zz}}E_y \quad (4.18)$$

que é uma combinação linear das componentes tangenciais E_x e E_y . Mas conforme chamamos atenção, uma vez que não ocorre variação nas direções x e y das componentes magnéticas H_x e H_y , não será gerada a componente E_z do campo elétrico, muito menos uma densidade de corrente naquela direção. Portanto, a componente E_z da equação (4.18) é puramente um efeito da anisotropia, e pode ser gerada em uma camada, desaparecendo, imediatamente, na próxima, se esta não apresentar as condições que a gere.

Substituindo a equação (4.18) nas equações (4.15) e (4.16) obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_y}{\partial z} + A_{xx}E_x + A_{xy}E_y &= 0 \\ \frac{\partial H_x}{\partial z} - A_{yx}E_x - A_{yy}E_y &= 0 \end{aligned} \quad (4.19)$$

para o qual, seus coeficientes, definidos por:

$$\begin{aligned} A_{xx} &= \sigma_{xx} - \frac{\sigma_{xz}\sigma_{zx}}{\sigma_{zz}}, & A_{xy} &= \sigma_{xy} - \frac{\sigma_{xz}\sigma_{zy}}{\sigma_{zz}} \\ A_{yx} &= \sigma_{yx} - \frac{\sigma_{yz}\sigma_{zx}}{\sigma_{zz}}, & A_{yy} &= \sigma_{yy} - \frac{\sigma_{yz}\sigma_{zy}}{\sigma_{zz}} \end{aligned} \quad (4.20)$$

constituem a matriz A_{ij} , simétrica e positiva definida, de acordo com a simetria de $\tilde{\sigma}$.

Note, pelas equações do sistema (4.19), que para os meios anisotrópicos não há separação do problema em modos de polarização transversal elétrico (TE) e magnético (TM).

Devido a simetria da matriz A_{ij} podemos reescrevê-la em termos dos parâmetros A' , A''

e β , fazendo a sua diagonalização (PEK; SANTOS, 2002):

$$\begin{bmatrix} A_{xx} & A_{xy} \\ A_{yx} & A_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A' & 0 \\ 0 & A'' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ -\sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

e os elementos desta matriz passarão a ser representados por:

$$A_{xx} = A' \cos^2 \beta + A'' \sin^2 \beta, \quad (4.22)$$

$$A_{xy} = A_{yx} = (A' - A'') \cos \beta \sin \beta, \quad (4.23)$$

e

$$A_{yy} = A' \sin^2 \beta + A'' \cos^2 \beta. \quad (4.24)$$

Essa escolha traz vantagem à formulação, pois permite compactar algumas expressões, além de facilitar a interpretação das soluções quando tomamos o limite destas de maneira a recuperar os casos de isotropia ou anisotropia vertical (em que a matriz rotação $\mathcal{R} = I$).

Através de simples manipulações algébricas também chegamos às identidades:

$$A' = \frac{A_{xx} \cos^2 \beta - A_{yy} \sin^2 \beta}{\cos^2 \beta - \sin^2 \beta}, \quad (4.25)$$

$$A'' = \frac{A_{xx} \sin^2 \beta - A_{yy} \cos^2 \beta}{\sin^2 \beta - \cos^2 \beta}, \quad (4.26)$$

e

$$\beta = \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{2A_{yx}}{A_{xx} - A_{yy}} \right); \quad (4.27)$$

e veremos, mais à frente, que A' e A'' relacionam-se, através das equações de (4.41), aos coeficientes de propagação da solução do problema. Por sua vez, β , representa um fator de acoplamento entre os dois modos de polarização nos quais dividimos a solução no caso isotrópico.

Aplicando as equações (4.12) e (4.13) nas equações de (4.19) obtemos o seguinte sistema de EDPs, em função de E_x e E_y :

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \mathfrak{z} A_{xx} E_x = \mathfrak{z} A_{xy} E_y, \quad (4.28)$$

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} - \mathfrak{z} A_{yy} E_y = \mathfrak{z} A_{xy} E_x. \quad (4.29)$$

Para a solucioná-lo, por simples substituição chegamos às seguintes equações diferenciais homogêneas de quarta ordem:

$$\frac{\partial^4 E_y}{\partial z^4} - k_a \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} + k_b E_y = 0 \quad (4.30)$$

$$\frac{\partial^4 E_x}{\partial z^4} - k_a \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} + k_b E_x = 0 \quad (4.31)$$

em que $k_a = \mathfrak{z} (A_{yy} + A_{xx})$ e $k_b = \mathfrak{z}^2 (A_{xx}A_{yy} - A_{xy}^2)$.

As equações (4.30) e (4.31), matematicamente, são iguais, portanto, escolhemos um dos dois caminhos para a solução do problema.

Encontrando a solução da componente E_y , através da equação (4.30), e aplicando-a na equação (4.29), para determinar E_x , podemos, através das relações (4.12), (4.13) e (4.18) encontrar as componentes H_x , H_y e E_z .

Segundo a teoria do cálculo diferencial, uma solução particular de (4.30) pode ser escrita como:

$$E_y(z) = e^{\lambda z}; \quad (4.32)$$

sua aplicação na equação diferencial dá origem aos possíveis valores de λ no expoente de $e^{\lambda z}$, $\lambda_1 = +u$, $\lambda_2 = -u$, $\lambda_3 = +v$ e $\lambda_4 = -v$, sendo:

$$u = \left(\frac{k_a + \sqrt{\Delta}}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{e} \quad v = \left(\frac{k_a - \sqrt{\Delta}}{2} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (4.33)$$

em que $\Delta = k_a^2 - 4k_b$. Portanto, a solução geral de (4.30) ser:

$$E_y(z) = Ae^{uz} + Be^{-uz} + Ce^{vz} + De^{-vz}; \quad Re(u) \geq 0, \quad Re(v) \geq 0 \quad (4.34)$$

Os coeficientes A e C representam as amplitudes da parte ascendente do campo e B e D da parte descendente.

Levando em consideração o modelo de camadas representado da Figura 4.1 reescrevemos a solução de E_y da seguinte forma (RIJO, 1991):

$$E_{yj}(z) = A_j e^{u_j(z-z_j)} + B_j e^{-u_j(z-z_j)} + C_j e^{v_j(z-z_j)} + D_j e^{-v_j(z-z_j)}; \quad j = 1, 2, \dots, n-1, \quad (4.35)$$

em que:

$$z_j = \sum_{i=1}^j h_i; \quad j = 1, \dots, n-1 \quad (4.36)$$

sendo n o índice da última camada, o semi-espço infinito. Assim, z_j é calculado até a camada $(n-1)$, e $z_{(n-1)}$ será a soma das espessuras de todas as camadas que antecedem o semi-espço.

Como não há componente de reflexão na última camada, nesta, a solução do campo será escrita como:

$$E_{yn}(z) = B_n e^{-u_n(z-z_{n-1})} + D_n e^{-v_n(z-z_{n-1})}, \quad (4.37)$$

e isso vale para as outras componentes do campo que iremos calcular.

Da componente E_{yj} obtemos a solução geral de E_{xj} , pela aplicação da equação (4.35) em (4.29):

$$E_{xj}(z) = m_j A_j e^{u_j(z-z_j)} + m_j B_j e^{-u_j(z-z_j)} + n_j C_j e^{v_j(z-z_j)} + n_j D_j e^{-v_j(z-z_j)}, \quad (4.38)$$

com $m_j = (u_j^2 - \mathfrak{z}_j A_{yyj}) / (\mathfrak{z}_j A_{xyj})$ e $n_j = (v_j^2 - \mathfrak{z}_j A_{yyj}) / (\mathfrak{z}_j A_{xyj})$.

E conforme indicado anteriormente, das relações (4.12) e (4.13) obtemos as componentes magnéticas H_{xj} e H_{yj} , respectivamente:

$$H_{xj}(z) = p_j (A_j e^{u_j(z-z_j)} - B_j e^{-u_j(z-z_j)}) + q_j (C_j e^{v_j(z-z_j)} - D_j e^{-v_j(z-z_j)}) \quad (4.39)$$

$$H_{yj}(z) = -p_j m_j (A_j e^{u_j(z-z_j)} - B_j e^{-u_j(z-z_j)}) - q_j n_j (C_j e^{v_j(z-z_j)} - D_j e^{-v_j(z-z_j)}) \quad (4.40)$$

com $p_j = u_j / \mathfrak{z}_j$ e $q_j = v_j / \mathfrak{z}_j$.

A componente E_z é apenas a combinação linear das componentes x e y do campo elétrico, conforme vimos em (4.18).

Vamos reescrever os parâmetros das soluções de (4.35), (4.38), (4.39) e (4.40) em função de A' , A'' e β , usando os resultados (4.22), (4.23) e (4.24).

O delta (Δ_j), da definição de u_j e v_j , na equação (4.33) será reescrito do seguinte modo:

$$\Delta_j = \mathfrak{z}_j^2 (A'_j - A''_j)^2,$$

e, portanto, u_j e v_j tornam-se:

$$u_j = \sqrt{\mathfrak{z}_j A'_j} \quad \text{e} \quad v_j = \sqrt{\mathfrak{z}_j A''_j} \quad (4.41)$$

Os parâmetros m_j e n_j , usando os mesmos procedimentos, passarão a ser funções explícitas de β_j :

$$m_j = \frac{\cos \beta_j}{\sin \beta_j} \quad \text{e} \quad n_j = -\frac{\sin \beta_j}{\cos \beta_j}. \quad (4.42)$$

Eles serão definidos em todas as camadas, da primeira à última, exceto em dois casos: (i) quando no sistema de eixos de referência acontecer de $\sigma_{xy} = \sigma_{yx} = 0$, ou (ii) se no sistema de eixos principais de anisotropia $\sigma_x''' = \sigma_y'''$. Nestes casos, atribuímos para β_j o valor zero, mas pela definição de m_j em (4.42), teríamos uma situação de singularidade.

O caso (i) implica em $A_{xy} = A_{yx} = 0$ e $A_{xx} \neq A_{yy}$,

$$\therefore \beta_j = \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{2A_{yxj}}{A_{xxj} - A_{yyj}} \right) \Rightarrow 2\beta_j = n\pi, \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (4.43)$$

Assumimos que o múltiplo n é igual a zero, uma vez que os outros valores implicam na troca de A' por A'' , alterando suas direções sob rotações de 90 graus; e queremos a situação em que o plano- xy do sistema de referência não sofreu nenhuma rotação em torno de seu eixo- z .

O caso (ii), também implica em $A_{xy} = A_{yx} = 0$, mas agora, $A_{xx} = A_{yy}$,

$$\therefore \beta_j = \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{0}{0} \right), \quad (4.44)$$

uma indeterminação. Ou seja, não faz sentido, neste caso, pensar numa representação na forma de (4.21). Ento, temos que:

$$A_{xx} = A_{yy} = \sigma \Rightarrow A' = A'' = \sigma, \quad (4.45)$$

sendo σ uma constante escalar. Logo, as componentes horizontais do campo comportam-se como se estivessem em um meio isotrópico com o valor de condutividade igual ao do plano- xy .

A consequência imediata disso é que u_j e v_j tornam-se iguais, segundo a equação (4.41), e os quatro termos das soluções das componentes do campo são condensados em apenas dois, como, de fato, acontece nos problemas isotrópicos.

Para poder considerar que $\beta_j = 0$ no caso (ii), precisamos fazer a seguinte consideração: $\sigma_x''' \simeq \sigma_y'''$. Nesse limite, A_{xy} tende a zero mais rapidamente que A_{xx} ou A_{yy} , e de acordo com a equação de β_j a igualdade fica garantida.

Para contornar a singularidade de m_j , para efeitos de computação, usamos a aproximação

$\beta \ll 1$ para os dois casos, (i) e (ii).

De posse das soluções das componentes do campo E_y , E_x , E_z , H_y e H_x , passaremos agora a determinação de suas amplitudes A_j , B_j , C_j e D_j , por meio do método da matriz de propagação.

4.2 APLICAÇÃO DO MÉTODO DA MATRIZ DE PROPAGAÇÃO

Vamos tomar as quatro soluções das componentes tangenciais do campo, (4.35), (4.38), (4.39) e (4.40), calculadas na seção anterior:

$$E_{xj}(z) = m_j(A_j e^{u_j(z-z_j)} + B_j e^{-u_j(z-z_j)}) + n_j(C_j e^{v_j(z-z_j)} + D_j e^{-v_j(z-z_j)}) \quad (4.46)$$

$$E_{yj}(z) = A_j e^{u_j(z-z_j)} + B_j e^{-u_j(z-z_j)} + C_j e^{v_j(z-z_j)} + D_j e^{-v_j(z-z_j)} \quad (4.47)$$

$$H_{xj}(z) = p_j(A_j e^{u_j(z-z_j)} - B_j e^{-u_j(z-z_j)}) + q_j(C_j e^{v_j(z-z_j)} - D_j e^{-v_j(z-z_j)}) \quad (4.48)$$

$$H_{yj}(z) = -p_j m_j(A_j e^{u_j(z-z_j)} - B_j e^{-u_j(z-z_j)}) - q_j n_j(C_j e^{v_j(z-z_j)} - D_j e^{-v_j(z-z_j)}). \quad (4.49)$$

Todos os parâmetros que compõem as soluções, exceto as amplitudes A_j , B_j , C_j e D_j , estão bem definidos em termos dos valores de entrada⁴ do problema. Portanto, esse conjunto de quatro equações configura um sistema linear em função de quatro incógnitas. Entretanto, para que possamos encontrar a solução desse sistema precisamos conhecer o valor do campo, que satisfaz cada igualdade, na interface de cada meio. Como não temos essa informação por completo, usaremos a condição de continuidade das componentes tangenciais do campo para relacionar suas soluções em cada camada, com isso, criaremos uma relação de recorrência entre as amplitudes de cada camada. Com essa relação, passamos a depender apenas da informação do campo na primeira interface. Devemos lembrar, também, que na última camada (camada- n) não temos as amplitudes que representam a reflexão do campo, A_n e C_n .

Com essas informações, reescreveremos nosso sistema de equações sob a forma do seguinte produto matricial:

$$\mathbf{F}_{k,(j)} = M_{lk,(j)} \mathbf{G}_{k,(j)}, \quad (4.50)$$

cujas matrizes⁵ são representadas por:

$$\mathbf{F}_j = \begin{bmatrix} E_{xj} & E_{yj} & H_{xj} & H_{yj} \end{bmatrix}^T, \quad (4.51)$$

⁴espessuras, condutividades, os ângulos de inclinação da anisotropia e a frequência

⁵Para tornar a notação mais compacta não exibiremos, a partir daqui, os índices que se referem as matrizes em F_k , G_k e M_{lk} .

$$\mathbf{G}_k = \begin{bmatrix} A_j & B_j & C_j & D_j \end{bmatrix}^T \quad (4.52)$$

e

$$M_j(z) = \begin{bmatrix} m_j e^{u_j(z-z_j)} & m_j e^{-u_j(z-z_j)} & n_j e^{v_j(z-z_j)} & n_j e^{-v_j(z-z_j)} \\ e^{u_j(z-z_j)} & e^{-u_j(z-z_j)} & e^{v_j(z-z_j)} & e^{-v_j(z-z_j)} \\ p_j e^{u_j(z-z_j)} & -p_j e^{-u_j(z-z_j)} & q_j e^{v_j(z-z_j)} & -q_j e^{-v_j(z-z_j)} \\ -p_j m_j e^{u_j(z-z_j)} & p_j m_j e^{-u_j(z-z_j)} & -q_j n_j e^{v_j(z-z_j)} & q_j n_j e^{-v_j(z-z_j)} \end{bmatrix} \quad (4.53)$$

A matriz coluna \mathbf{F}_j é composta pelas componentes do campo E_{xj} , E_{yj} , H_{xj} e H_{yj} , a matriz \mathbf{G}_j , pelas amplitudes A_j , B_j , C_j e D_j e a matriz quadrada M_j pelas exponenciais de propagação, com u_j e v_j , e os parâmetros m_j , n_j , p_j e q_j .

Conforme a definição de z_j , equação (4.36), a matriz M_j escrita sobre as interfaces entre os meios, onde $z = z_j$, torna-se:

$$M_j(z_j) = \begin{bmatrix} m_j & m_j & n_j & n_j \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ p_j & -p_j & q_j & -q_j \\ -p_j m_j & p_j m_j & -q_j n_j & q_j n_j \end{bmatrix}, \quad (4.54)$$

e para as profundidades que atingem a última camada:

$$M_n(z > z_{n-1}) = \begin{bmatrix} 0 & m_n & 0 & n_n \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -p_n & 0 & -q_n \\ 0 & p_n m_n & 0 & q_n n_n \end{bmatrix}. \quad (4.55)$$

Usando a condição de continuidade para as componentes tangentes à superfície nas interfaces entre os meios, as quais estão reunidas na matriz F_j , escrevemos para esta:

$$\mathbf{F}_j|_{z=z_j} = \mathbf{F}_{j+1}|_{z=z_j}; \quad (4.56)$$

e, imediatamente, de acordo com a equação (4.50), obtemos a relação:

$$\mathbf{G}_j = M_j^{-1} M_{j+1} \mathbf{G}_{j+1} \longrightarrow \mathbf{G}_j = X_j \mathbf{G}_{j+1}. \quad (4.57)$$

A equação (4.57) relaciona as amplitudes de duas camadas consecutivas. Usando essa relação

podemos escrever:

$$\mathbf{G}_1 = X_1 \mathbf{G}_2, \quad (4.58)$$

$$\mathbf{G}_2 = X_2 \mathbf{G}_3, \quad (4.59)$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{G}_{n-3} = X_{n-3} \mathbf{G}_{n-2}, \quad (4.60)$$

$$\mathbf{G}_{n-2} = X_{n-2} \mathbf{G}_{n-1}, \quad (4.61)$$

$$\mathbf{G}_{n-1} = X_{n-1} \mathbf{G}_n. \quad (4.62)$$

Se substituirmos a equação (4.62) em (4.61), e depois, aplicarmos esse resultado em (4.60), procedendo dessa forma até a equação (4.58), chegaremos a seguinte relação:

$$\mathbf{G}_1 = X_1 X_2 \cdots X_{n-3} X_{n-2} X_{n-1} \mathbf{G}_n, \quad (4.63)$$

onde expressamos a matriz das amplitudes da primeira camada \mathbf{G}_1 em função de \mathbf{G}_n . É fácil notar, com o resultado (4.63), que não só a matriz \mathbf{G}_1 , mas qualquer uma das matrizes \mathbf{G}_j podem ser expressadas em função de \mathbf{G}_n . Com isso, escrevemos a seguinte relação de recorrência:

$$\mathbf{G}_j = R_j \mathbf{G}_n, \quad j = 1, 2, \dots, n-1. \quad (4.64)$$

para a qual definiremos a matriz R_j como o produtório dos termos X_j :

$$R_j = \prod_{m=j}^{n-1} X_m. \quad (4.65)$$

Nesta seção, temos o objetivo de determinar as componentes da matriz \mathbf{G}_j em cada camada. Pela relação de recorrência (4.64) notamos que, para isso, é suficiente conhecermos o valor das componentes de \mathbf{G}_n , que como já vimos, são apenas B_n e D_n . Isso diminui a dependência do problema de quatro valores em cada camada, à somente os dois valores da última camada.

Para determinar os valores de B_n e D_n , relacionaremos as matrizes \mathbf{G}_n a \mathbf{G}_1 através da

equação (4.64):

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \\ C_1 \\ D_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} & R_{14} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} & R_{24} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} & R_{34} \\ R_{41} & R_{42} & R_{43} & R_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ B_n \\ 0 \\ D_n \end{bmatrix};$$

que nos darão:

$$A_1 = R_{12}B_n + R_{14}D_n, \quad (4.66)$$

$$B_1 = R_{22}B_n + R_{24}D_n, \quad (4.67)$$

$$C_1 = R_{32}B_n + R_{34}D_n, \quad (4.68)$$

$$D_1 = R_{42}B_n + R_{44}D_n. \quad (4.69)$$

A idéia por traz deste passo é que uma vez estando em busca da distribuição de resistividade na subsuperfície, e esta dependendo do cálculo do tensor impedância, que por sua vez, depende da razão do campo elétrico pelo magnético, podemos assumir qualquer valor de polarização inicial para o campo elétrico ou magnético na primeira interface, sendo esta escolha irrelevante aos resultados de resistividade. A razão na impedância anulará o efeito dessa escolha inicial.

O próximo passo é escrever, pelas condições de fronteira, a seguinte relação para H_x e H_y na primeira interface, onde $z = 0$:

$$(i) \quad (H_{x0} = H_{x1})|_{z=0} \quad \text{e} \quad (ii) \quad (H_{y0} = H_{y1})|_{z=0}.$$

Substituindo suas respectivas equações (4.48) e (4.49), e usando os resultados (4.66 - 4.69), teremos para (i):

$$H_{x0} = p_1 A_1 e^{-u_1 h_1} - p_1 B_1 e^{u_1 h_1} + q_1 C_1 e^{-v_1 h_1} - q_1 D_1 e^{v_1 h_1}$$

ou

$$\begin{aligned} H_{x0} = & \underbrace{[p_1 (R_{12}e^{-u_1 h_1} - R_{22}e^{u_1 h_1}) + q_1 (R_{32}e^{-v_1 h_1} - R_{42}e^{v_1 h_1})]}_{P_{11}} B_n + \\ & + \underbrace{[p_1 (R_{14}e^{-u_1 h_1} - R_{24}e^{u_1 h_1}) + q_1 (R_{34}e^{-v_1 h_1} - R_{44}e^{v_1 h_1})]}_{P_{12}} D_n \end{aligned}$$

e para (ii):

$$H_{y0} = -p_1 m_1 A_1 e^{-u_1 h_1} + p_1 m_1 B_1 e^{u_1 h_1} - q_1 n_1 C_1 e^{-v_1 h_1} + q_1 n_1 D_1 e^{v_1 h_1}$$

ou

$$H_{y0} = - \underbrace{[p_1 m_1 (R_{12} e^{-u_1 h_1} - R_{22} e^{u_1 h_1}) + q_1 n_1 (R_{32} e^{-v_1 h_1} - R_{42} e^{v_1 h_1})]}_{P_{21}} B_n + \\ - \underbrace{[p_1 m_1 (R_{14} e^{-u_1 h_1} - R_{24} e^{u_1 h_1}) + q_1 n_1 (R_{34} e^{-v_1 h_1} - R_{44} e^{v_1 h_1})]}_{P_{22}} D_n$$

Com as seguintes definições:

$$P_{11} = p_1 (R_{12} e^{-u_1 h_1} - R_{22} e^{u_1 h_1}) + q_1 (R_{32} e^{-v_1 h_1} - R_{42} e^{v_1 h_1}) \quad (4.70)$$

$$P_{12} = p_1 (R_{14} e^{-u_1 h_1} - R_{24} e^{u_1 h_1}) + q_1 (R_{34} e^{-v_1 h_1} - R_{44} e^{v_1 h_1}) \quad (4.71)$$

$$P_{21} = p_1 m_1 (R_{12} e^{-u_1 h_1} - R_{22} e^{u_1 h_1}) + q_1 n_1 (R_{32} e^{-v_1 h_1} - R_{42} e^{v_1 h_1}) \quad (4.72)$$

$$P_{22} = p_1 m_1 (R_{14} e^{-u_1 h_1} - R_{24} e^{u_1 h_1}) + q_1 n_1 (R_{34} e^{-v_1 h_1} - R_{44} e^{v_1 h_1}) \quad (4.73)$$

Por fim, o sistema de quatro variáveis em cada camada, através dos passos seguidos até aqui, foi reduzido a um sistema de apenas duas variáveis, B_n e D_n , escrito em termos da matriz P_{lk} , cujos elementos são dados pelas equações (4.70 - 4.73), e da polarização assumida na primeira interface (ar/terra):

$$H_{x0} = P_{11} B_n + P_{12} D_n \quad (4.74)$$

$$H_{y0} = -P_{21} B_n - P_{22} D_n. \quad (4.75)$$

Resolvendo este sistema para B_n e D_n , obtemos:

$$B_n = - \frac{h_{x0} P_{22} + h_{y0} P_{12}}{(P_{21} P_{12} - P_{11} P_{22})}, \quad (4.76)$$

$$D_n = \frac{h_{x0} P_{21} + h_{y0} P_{11}}{(P_{21} P_{12} - P_{11} P_{22})} \quad (4.77)$$

e usando a relação de recorrência encontramos as amplitudes A_j , B_j , C_j e D_j das outras camadas. Com elas, expressamos o valor dos campos na profundidade desejada, através das equações (4.46 - 4.49).

Vamos assumir duas polarizações para a solução deste problema. A primeira, (a), consiste

em $H_x = 1$ e $H_y = 0$, que relacionamos ao modo TE, por praticidade; a segunda, (b), consiste em $H_x = 0$ e $H_y = 1$, que relacionamos ao modo TM.

Para o caso (a), temos:

$$B_n = -\frac{h_{x0}P_{22}}{(P_{21}P_{12} - P_{11}P_{22})} \quad (4.78)$$

$$D_n = \frac{h_{x0}P_{21}}{(P_{21}P_{12} - P_{11}P_{22})} \quad (4.79)$$

E para o caso (b):

$$B_n = -\frac{h_{y0}P_{12}}{(P_{21}P_{12} - P_{11}P_{22})} \quad (4.80)$$

$$D_n = \frac{h_{y0}P_{11}}{(P_{21}P_{12} - P_{11}P_{22})} \quad (4.81)$$

Para o cálculo das resistividades aparentes, temos:

$$\rho_{xx(j)} = \frac{1}{\omega\mu_j} |Z_{xx(j)}|^2 \quad \text{e} \quad \rho_{xy(j)} = \frac{1}{\omega\mu_j} |Z_{xy(j)}|^2, \quad (4.82)$$

$$\rho_{yx(j)} = \frac{1}{\omega\mu_j} |Z_{yx(j)}|^2 \quad \text{e} \quad \rho_{yy(j)} = \frac{1}{\omega\mu_j} |Z_{yy(j)}|^2. \quad (4.83)$$

Considerando as duas polarizações, (a) e (b), encontramos as componentes horizontais do campo para cada uma delas. E aplicando-as à relação com o tensor impedância Z_{ij} :

$$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{xx} & Z_{xy} \\ Z_{yx} & Z_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_x \\ H_y \end{bmatrix}$$

obtemos o sistema:

$$\begin{aligned} E_x^{(a)} &= Z_{xx}H_x^{(a)} + Z_{xy}H_y^{(a)}, \\ E_y^{(a)} &= Z_{yx}H_y^{(a)} + Z_{yy}H_x^{(a)}, \\ E_x^{(b)} &= Z_{xx}H_x^{(b)} + Z_{xy}H_y^{(b)}, \\ E_y^{(b)} &= Z_{yx}H_y^{(b)} + Z_{yy}H_x^{(b)}. \end{aligned}$$

Assim, chegamos às expressões dos elementos do tensor impedância:

$$Z_{xx} = \frac{E_x^{(a)}H_y^{(b)} - E_x^{(b)}H_y^{(a)}}{H_x^{(a)}H_y^{(b)} - H_x^{(b)}H_y^{(a)}} \quad \text{e} \quad Z_{xy} = \frac{E_x^{(b)}H_x^{(a)} - E_x^{(a)}H_x^{(b)}}{H_x^{(a)}H_y^{(b)} - H_x^{(b)}H_y^{(a)}},$$

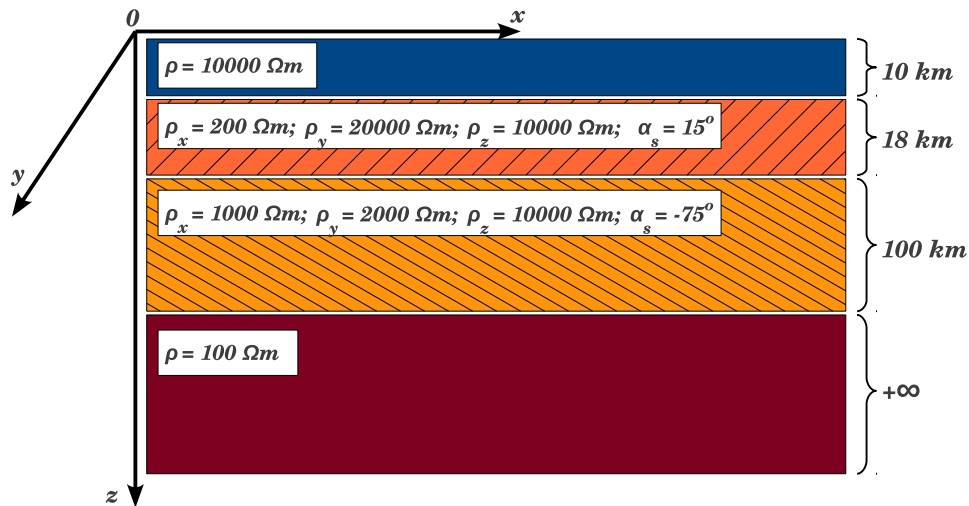
$$Z_{yx} = \frac{E_y^{(b)} H_x^{(a)} - E_y^{(a)} H_x^{(b)}}{H_y^{(b)} H_x^{(a)} - H_x^{(b)} H_y^{(a)}} \quad \text{e} \quad Z_{yy} = \frac{E_y^{(a)} H_y^{(b)} - E_y^{(b)} H_y^{(a)}}{H_y^{(b)} H_x^{(a)} - H_x^{(b)} H_y^{(a)}}$$

A modelagem bidimensional, que é assunto do próximo capítulo, usará este resultado 1D em sua formulação, por isso algumas análises são importantes a respeito do campo em profundidade. É o que faremos nesta próxima seção.

4.3 ANÁLISE DOS CAMPOS EM PROFUNDIDADE

Antes de iniciarmos as análises do campos, validaremos nossos resultados reproduzindo na Figura 4.3 um dos gráficos do modelo apresentado por Pek e Santos (2002), Figura 4.2.

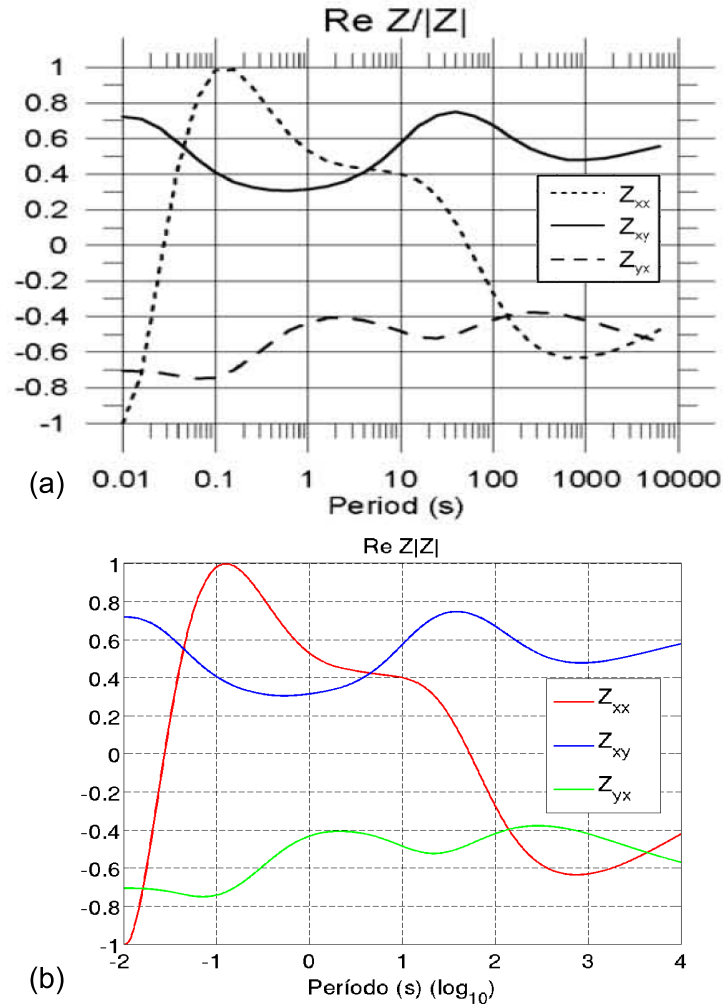
Figura 4.2. Modelo de Pek e Santos. Constitui-se de quatro camadas, sendo apenas primeira e a segunda anisotrópicas. A última delas é um semi-espaco infinito. O modelo de anisotropia é o horizontal, o mais simples possível que gera o acoplamento entre as componentes horizontais.



Fonte: Pek e Santos (2002)

Na Figura 4.3, (a) e (b), exibem curvas referentes as razões das três componentes do tensor impedância, Z_{xx} , Z_{xy} e Z_{yx} , por seus respectivos módulos. Isso, para um modelo de anisotropia horizontal. A presença da componente Z_{xx} ilustra este tipo de anisotropia, pois indica que as componentes horizontais do campo estão acopladas. As extremidades da direita e da esquerda deste gráfico, correspondem a zonas isotrópicas, alcançadas pelos menores e maiores períodos, respectivamente. Portanto, Z_{xx} tende a “um” (adimensional) à esquerda e

Figura 4.3. Validação dos resultados 1D. Os gráficos mostram a parte real da razão da impedância aparente por seu módulo. (a) Curvas geradas pela formulação apresentada neste trabalho. (b) Curvas exibidas no trabalho de Pek e Santos.



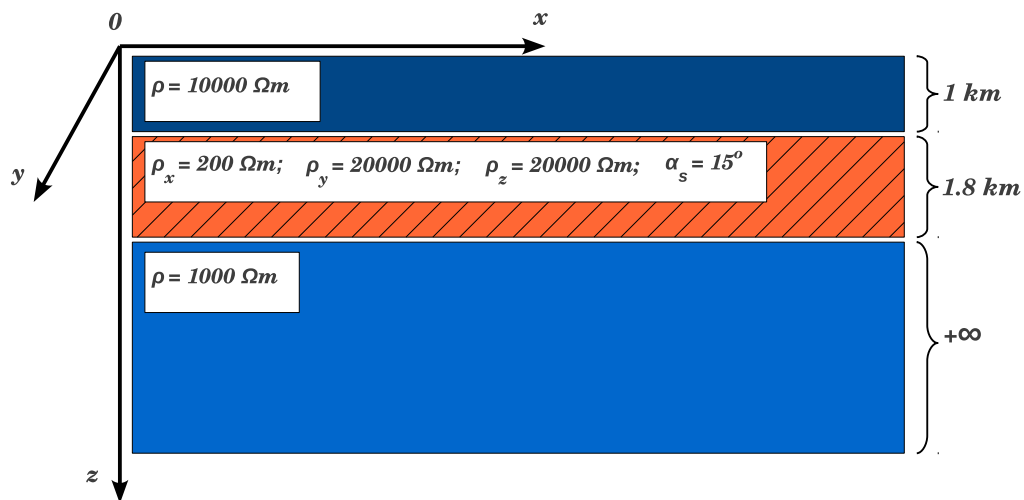
Fonte: Comparação com Pek e Santos (2002)

a “zero” à direita, uma vez que para os menores períodos o efeito das camadas anisotrópicas no gráfico ainda é relevante. Já as componentes Z_{xy} e Z_{yx} tendem a ser simétricas uma a outra nos extremos da direita e esquerda do gráfico, conforme sabemos da teoria.

Vejamos, agora, o que acontece com as componentes horizontais do campo. Consideremos o modelo anisotrópico da Figura 4.4, que chamaremos de modelo-2, para estudar o comportamento do campo em profundidade, a uma frequência de 1000Hz e rotação α_s (*strike*) de 30 graus.

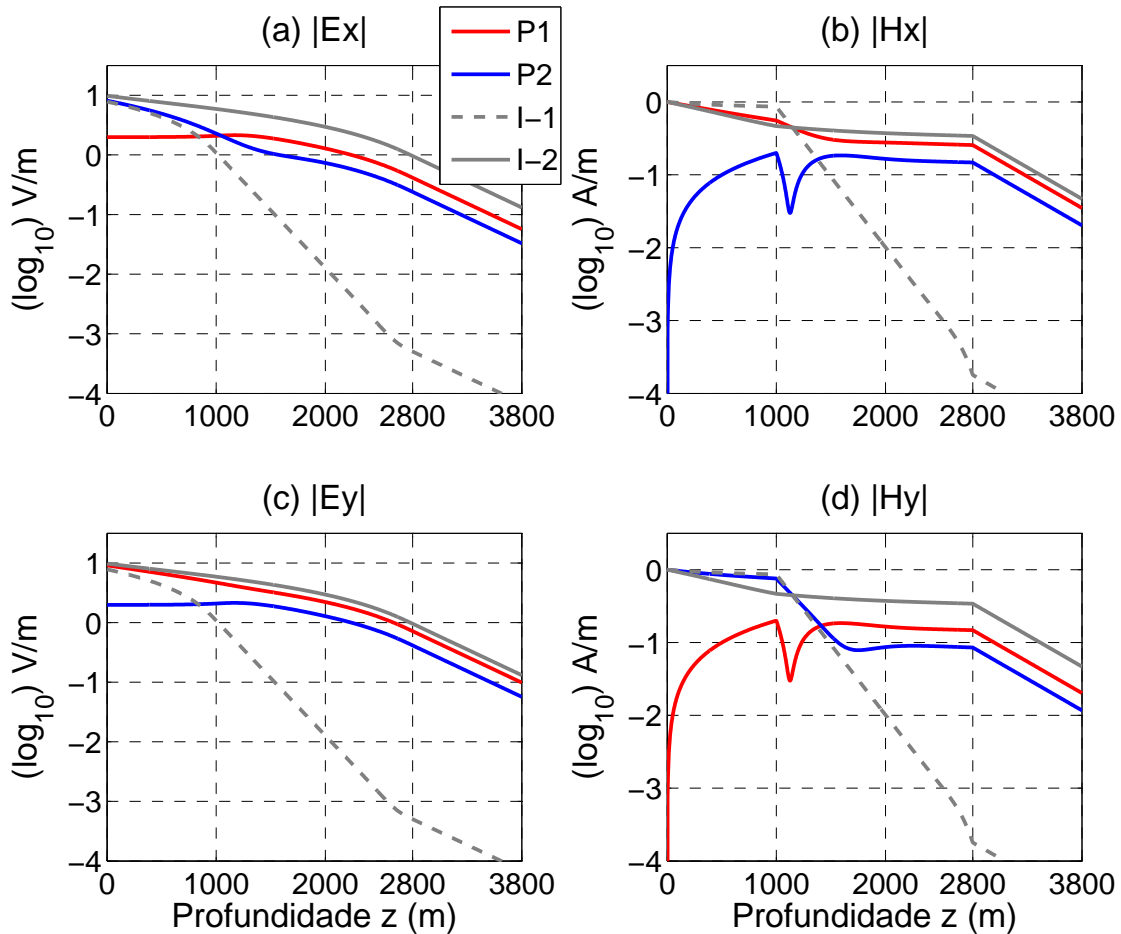
Na Fig 4.5 plotamos os gráficos do módulo das componentes horizontais do campo: E_x , E_y , H_x e H_y . As curvas vermelhas referem-se a polarização (i): $H_x = 1 + i0$ e $H_y = 0 + i0$, referenciada por P1, e as curvas azuis referem-se a polarização (ii): $H_x = 0 + i0$ e $H_y = 1 + i0$, referenciadas por P2. As curvas tracejadas e cheias, I-1 e I-2, respectivamente, representam modelos isotrópicos, cuja segunda camada do modelo-2 recebe o valor de resistividade $10^2 \Omega m$ para I-1 e $10^4 \Omega m$ para I-2.

Figura 4.4. O Modelo 2: trata-se do modelo anterior modificado, retiramos a última camada, e as espessuras foram divididas por 10.



As curvas isotrópicas da Fig 4.5(a)–(d), delimitam a região na qual P1 e P2 variam. A curva I-1, na parte superior dos gráficos, decai mais lentamente que I-2, devido seu maior valor de resistividade. Conforme o ângulo α_s varia, as curvas anisotrópicas P1 e P2 aproximam-se de I-1 ou I-2. Quando não há rotação entre os eixos do sistema de referência e de anisotropia, a dupla E_y e H_x depende, exclusivamente, da componente σ_y da condutividade, para ela, é como se o modelo-2 tivesse a segunda camada isotrópica, com o valor de condutividade σ_y . O mesmo acontece para a dupla E_x e H_y com relação a σ_x . Por outro lado, quando há rotação entre os sistemas, cada dupla passa a depender, simultaneamente, dos dois valores de condutividade, σ_x e σ_y , por isso suas componentes são acopladas. Como consequência, as curvas P1 e P2 exibem traços do comportamento de I-1 e I-2, tendendo mais a uma, ou a outra, conforme a rotação entre os sistemas. Essa situação intermediária garante às curvas anisotrópicas P1 e P2 uma característica peculiar, a oscilação do módulo das componentes horizontais do campo no interior de camadas anisotrópicas. Dependendo da polarização inicial essas oscilações tornam-se mais, ou menos evidentes.

Figura 4.5. Cada gráfico apresenta quatro curvas do módulo contra a profundidade. P1 refere-se à polarização (i) $H_x = 1 + i0$ e $H_y = 0 + i0$, e P2 à polarização (ii) $H_x = 0 + i0$ e $H_y = 1 + i0$. Cada uma delas gera todas as componentes do campo. As curvas I-1 representam as respostas das componentes considerando a segunda camada do modelo 2 isotrópica, com resistividade igual a $10^2 \Omega m$, e I-2, considerando a resistividade igual a $10^4 \Omega m$.



Quando assumimos a polarização (i) ou (ii), temos, inicialmente, apenas uma componente do vetor horizontal magnético \mathbf{H} , essa componente é real, portanto, a direção deste vetor é a mesma de sua componente. Imediatamente, ao penetrar nas camadas, a outra componente do vetor surge, mudando a direção de \mathbf{H} , que será rotacionado à medida que se propaga para o interior das camadas. O mesmo ocorre ao vetor horizontal elétrico, mas neste caso, nenhuma de suas componentes são nulas na primeira interface, e nem reais, como no vetor magnético. Não podemos precisar a direção do vetor complexo \mathbf{E} ou \mathbf{H} , em geral, costuma-se separá-lo em um vetor real e outro imaginário, por exemplo, $\mathbf{H} = \mathbf{H}_r + i\mathbf{H}_i$, onde \mathbf{H}_r

contém as partes reais de H_x e H_y e \mathbf{H}_i , as partes imaginárias. Analisando um e outro, separadamente, é possível verificar o sentido em que apontam, no entanto, para o vetor complexo completo \mathbf{H} , não temos informações sobre sua direção. Como cada componente horizontal é dada por um número complexo, não sabemos qual o sentido que apontam, mas vejamos que características podemos observar nas componentes complexas que caracterizam o comportamento anisotrópico.

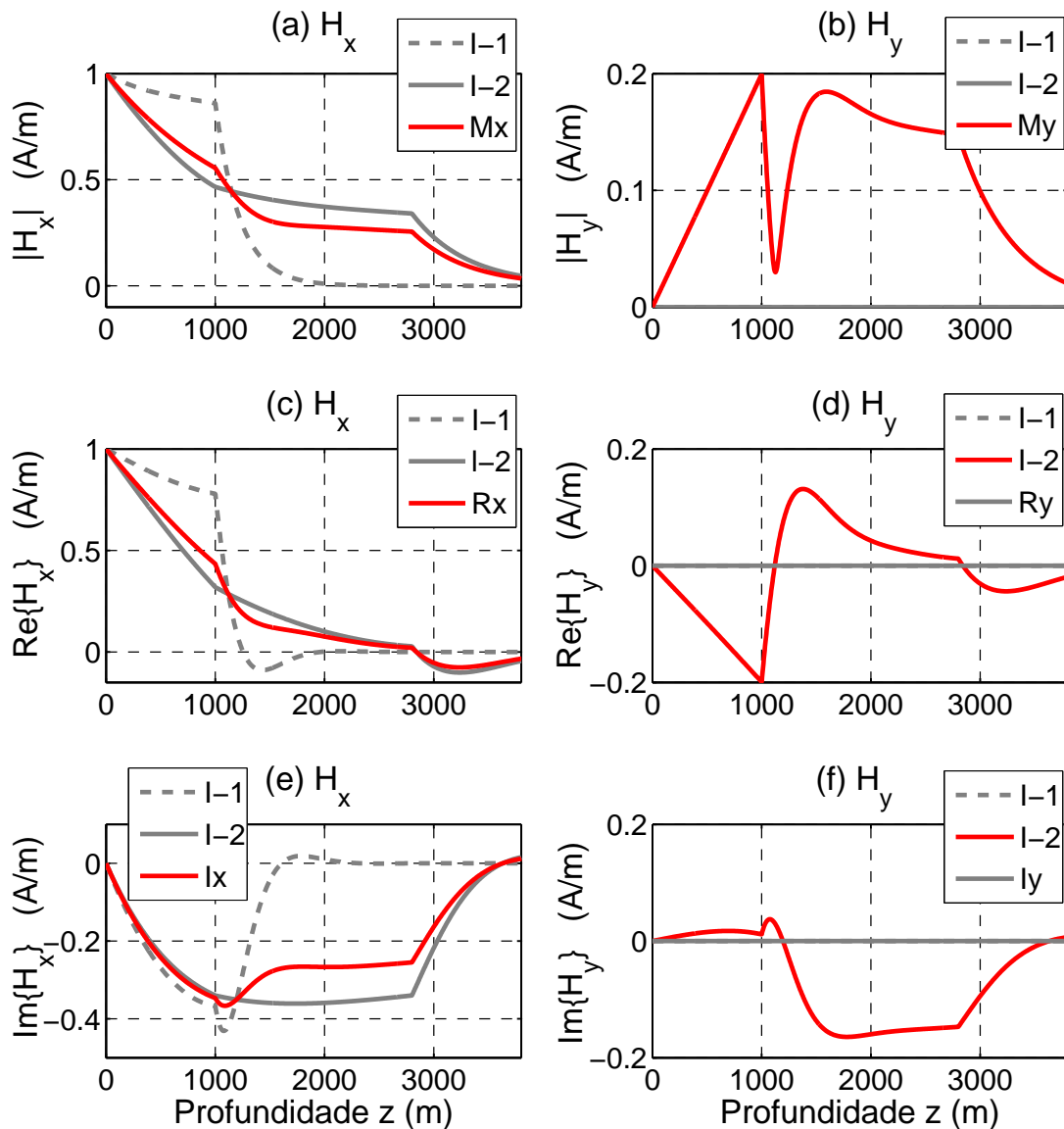
O aparecimento dos “bicos”, observados nas curvas P2 e P1 das Figuras 4.5(b) e 4.5(d), respectivamente, são naturais, uma vez que o módulo do número complexo é a única forma de avaliarmos sua magnitude, e neste procedimento perdemos a informação do sinal das partes real e imaginária. Também observamos que quanto maior a diferença entre as componentes H_x e H_y na escolha da polarização, mais acentuado é o bico que surge. Nas componentes elétricas, como seus valores iniciais dependem da escolha da polarização, estes, em geral, não apresentam os bicos. Mas podemos observar, na camada anisotrópica, que seu módulo decresce, apresentando algumas irregularidades que não são típicas das curvas isotrópicas.

Na Figura 4.6, do lado esquerdo, mostramos três gráficos em sequência vertical referentes a componente H_x , e mais três, à direita, referentes a H_y . Em cada sequência, temos as curvas do módulo, da parte real e da parte imaginária contra a profundidade das referidas componentes. Queremos explorar a relação existente entre tais curvas. A escolha das componentes magnéticas se deu, por exibirem de maneira mais acentuada as mudanças decorrentes da anisotropia.

Nos gráficos da Figura 4.6 referentes a H_y (*b*, *d* e *e*), devido a polarização (*i*), não temos curvas isotrópicas. Porém podemos confirmar o que dissemos, de que quanto maior a disparidade entre os valores escolhidos na polarização, os bicos serão mais acentuados, e até poderão apresentar mais de um bico, no caso da disparidade não contar com nenhum dos valores de H_x e H_y nulos. Na Figura 4.6*d*, vemos que a componente real de H_y obedece a uma função decrescente até atingirem a primeira interface. Se seu valor inicial for maior que zero, no percurso até esta camada, ela cortará o eixo das abscissas. Conforme esse valor inicial se aproxima do valor da outra componente, H_x , o ângulo de inclinação muda, ao ponto de não mais cortar o eixo das abscissas enquanto tende a alcançar a primeira interface. Após atingir essa interface a curva de Fig 4.6*d* passa a se comportar como uma função crescente, o que também, conforme a escolha da polarização pode estar mais, ou menos, evidente.

Por meio destes resultados, vemos que existe um efeito de borda nas interfaces das camadas anisotrópicas, que ocasiona um crescimento no módulo do vetor do campo quando estes a atravessam. Percebemos que tal efeito é mais acentuado para as componentes magnéticas.

Figura 4.6. A seqüência de gráficos foi construída sob a polarização (i), com um ângulo *strike* de 30° e à frequência de $1000Hz$. Na coluna da esquerda, as curvas são referentes a componente H_x . De cima para baixo, temos a curva do módulo, depois da parte real e por último, da parte imaginária, todas contra a profundidade. As curvas em cinza são as isotrópicas de cada caso, a tracejada, referente a segunda camada com $\rho_2 = 10^2 \Omega m$, e a cheia, referente a $10^4 \Omega m$. Para a coluna da direita, temos a mesma seqüência para a componente H_y . Logicamente, pela polarização (i) não temos as curvas em cinza.



Para o modelo-2, que considera apenas a rotação α_s , não é possível ser induzida a componente normal E_z do campo, devido σ_{zy} e σ_{zx} serem nulos, de acordo com a equação 4.18, mostrada abaixo:

$$E_z = -\frac{\sigma_{zx}}{\sigma_{zz}}E_x - \frac{\sigma_{zy}}{\sigma_{zz}}E_y. \quad (4.84)$$

Vamos considerar, portanto, que a camada anisotrópica do modelo, além de uma rotação α_s , tenha também uma inclinação do plano horizontal à superfície sob o eixo z , que será representada pelo ângulo $\alpha_d = 30^\circ$. Isso configura uma anisotropia *Dip*, ou cruzada. Nesse caso, mostramos na Figura 4.7 a descontinuidade desta curva através das camadas, uma vez que, pela equação 4.84, não tendo a segunda rotação, esta será nula.

Figura 4.7. Curvas da componente normal do campo elétrico E_z . Ao modelo-2, acrescentamos a rotação α_d , responsável pela geração de σ_{zy} e σ_{zx} . Essa anisotropia é conhecida como cruzada. Em vermelho, temos a curva referente a polarização (*i*), em azul, referente a polarização (*ii*), e em verde, temos a soma das duas polarizações.



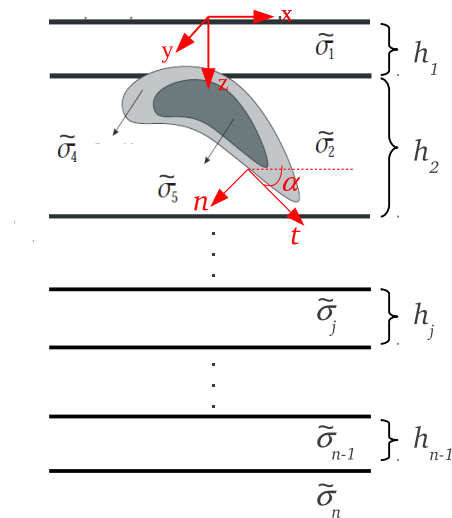
O estudo das componentes do campo 1D em profundidade é importante, pois usamos tais resultados, no interior das camadas, como fonte na formulação da modelagem 2D. Este é o nosso próximo passo.

5 MODELAGEM DO MT 2D COM ANISOTROPIA

O campo MT para modelos geológicos bidimensionais, assim como no caso 1D, apresenta todas as suas componentes acopladas devido a anisotropia. Fazendo-se as devidas substituições entre as equações que regem o problema, derivadas das equações de Maxwell, isolamos as componentes E_y e H_y num sistema duas equações diferenciais, e todas as outras componentes passarão a ser funções destes duas. Este sistema será resolvido através do método numérico dos *Elementos Finitos (EF)*.

5.1 O SISTEMA DIFERENCIAL

Figura 5.1. Modelo de multicamadas estratificadas 2D com anisotropia em todas as camadas, inclusive a heterogeneidade. O sistema de referência está posicionado sobre a primeira interface, no centro do modelo. O eixo- x aponta para a direita do leitor, o y na direção que sai desta página e z , tem o sentido positivo apontando para o interior das camadas. Na direção y consideramos que as dimensões são grandes o suficiente para que sejam tomadas como infinitas na formulação 2D deste problema.



Fonte: Adaptado de Rijo (1991)

Um meio estratificado sem heterogeneidades é comumente chamado de *modelo primário*. Por outro lado, na presença de heterogeneidades, este meio passa a ser chamado de *modelo secundário*. A figura 5.1 mostra a representação de tais modelos. Ao modelo primário, relacionamos um campo que é gerado pela interação do campo MT com suas estratificações, chamado de *campo primário*, tal campo trata-se do mesmo obtido no capítulo anterior (campo

MT 1D). Já no modelo secundário, o campo gerado é resultante da interação do campo MT com as estratificações e heterogeneidades em seu interior, que chamaremos de *campo total*. Matematicamente, é possível subtrairmos o campo primário do campo total, e o campo resultante desta subtração será chamado *campo secundário*.

Com estas definições descreveremos o campo total, do modelo geométrico bidimensional, como a soma de duas contribuições bem definidas, o campo primário e o campo secundário:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^p + \mathbf{E}^s \quad \text{e} \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}^p + \mathbf{H}^s. \quad (5.1)$$

Analogamente, destacamos as propriedades elétricas e magnéticas do modelo primário e suas variações devido as heterogeneidades,

$$\tilde{\sigma} = \tilde{\sigma}^p + \Delta\tilde{\sigma} \quad \text{e} \quad \mathfrak{z} = \mathfrak{z}^p + \Delta\mathfrak{z}. \quad (5.2)$$

O sinal sobre as grandezas representam a natureza anisotrópica nas mesmas.

As equações de Maxwell para o campo do meio primário serão escritas sob a seguinte notação:

$$\nabla \times \mathbf{E}^p + \mathfrak{z}^p \mathbf{H}^p = 0 \quad \text{e} \quad \nabla \times \mathbf{H}^p - \tilde{\sigma}^p \mathbf{E}^p = 0, \quad (5.3)$$

em que $\mathfrak{z}^p = i\omega\mu^p$ e $\tilde{\sigma}^p$ é a condutividade anisotrópica (equação (4.5)).

Para representar as equações de Maxwell no meio secundário, ou bidimensional, utilizamos as definições (5.1) e (5.2), em termos das quais teremos:

$$\begin{aligned} \nabla \times (\mathbf{E}^p + \mathbf{E}^s) + (\mathfrak{z}^p + \Delta\mathfrak{z})(\mathbf{H}^p + \mathbf{H}^s) &= 0 \\ \nabla \times (\mathbf{H}^p + \mathbf{H}^s) - (\tilde{\sigma}^p + \Delta\tilde{\sigma})(\mathbf{E}^p + \mathbf{E}^s) &= 0; \end{aligned}$$

e levando em consideração o resultado (5.3), elas resultam em:

$$\nabla \times \mathbf{E}^s + \mathfrak{z} \mathbf{H}^s = -\Delta\mathfrak{z} \mathbf{H}^p, \quad (5.4)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}^s - \tilde{\sigma} \mathbf{E}^s = \Delta\tilde{\sigma} \mathbf{E}^p. \quad (5.5)$$

Vemos que os campos secundários estão em função dos primários, que atuam como fonte para esta formulação nas equações diferenciais parciais não-homogêneas do sistema acima. De acordo com o nosso modelo 2D (figura 5.1), o parâmetro de resistividade não varia na direção y , o contrário, em relação às direções x e z , portanto, as equações (5.4) e (5.5) se

desdobram nas seguintes componentes:

$$-\frac{\partial E_y^s}{\partial z} + \mathfrak{z}H_x^s = -\Delta \mathfrak{z}H_x^p \quad (5.6)$$

$$\frac{\partial E_x^s}{\partial z} - \frac{\partial E_z^s}{\partial x} + \mathfrak{z}H_y^s = -\Delta \mathfrak{z}H_y^p \quad (5.7)$$

$$\frac{\partial E_y^s}{\partial x} + \mathfrak{z}H_z^s = -\Delta \mathfrak{z}H_z^p \quad (5.8)$$

$$\frac{\partial H_y^s}{\partial z} + \sigma_{xx}E_x^s + \sigma_{xy}E_y^s + \sigma_{xz}E_z^s = -\Delta E_x^p \quad (5.9)$$

$$\frac{\partial H_z^s}{\partial x} - \frac{\partial H_x^s}{\partial z} + \sigma_{yx}E_x^s + \sigma_{yy}E_y^s + \sigma_{yz}E_z^s = -\Delta E_y^p \quad (5.10)$$

$$-\frac{\partial H_y^s}{\partial x} + \sigma_{zx}E_x^s + \sigma_{zy}E_y^s + \sigma_{zz}E_z^s = -\Delta E_z^p \quad (5.11)$$

em que:

$$\begin{aligned} \Delta E_x^p &= \Delta \sigma_{xx}E_x^p + \Delta \sigma_{xy}E_y^p + \Delta \sigma_{xz}E_z^p \\ \Delta E_y^p &= \Delta \sigma_{yx}E_x^p + \Delta \sigma_{yy}E_y^p + \Delta \sigma_{yz}E_z^p \\ \Delta E_z^p &= \Delta \sigma_{zx}E_x^p + \Delta \sigma_{zy}E_y^p + \Delta \sigma_{zz}E_z^p \end{aligned} \quad (5.12)$$

Conforme dissemos, com as devidas substituições, o conjunto (5.6 - 5.11) originam o seguinte sistema diferencial para os campos E_y e H_y :

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\sigma_{xx}}{D} \frac{\partial H_y^s}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\sigma_{zz}}{D} \frac{\partial H_y^s}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\sigma_{xz}}{D} \frac{\partial H_y^s}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\sigma_{zx}}{D} \frac{\partial H_y^s}{\partial z} \right) \\ &+ \frac{\partial}{\partial x} (AE_y^s) - \frac{\partial}{\partial z} (BE_y^s) - \mathfrak{z}H_y^s \\ = &-\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\sigma_{zz}}{D} \Delta E_x^p - \frac{\sigma_{xz}}{D} \Delta E_z^p \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\sigma_{xx}}{D} \Delta E_z^p - \frac{\sigma_{zx}}{D} \Delta E_x^p \right) + \Delta \mathfrak{z}H_y^p \end{aligned} \quad (5.13)$$

e

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 E_y^s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y^s}{\partial z^2} + \mathfrak{z}A \frac{\partial H_y^s}{\partial x} - \mathfrak{z}B \frac{\partial H_y^s}{\partial z} - \mathfrak{z}CE_y^s \\ = &\mathfrak{z}B \Delta E_x^p + \mathfrak{z} \Delta E_y^p + \mathfrak{z}A \Delta E_z^p + \Delta \mathfrak{z} \frac{\partial H_x^p}{\partial z} - \Delta \mathfrak{z} \frac{\partial H_z^p}{\partial x} \end{aligned} \quad (5.14)$$

com os coeficientes A , B , C e D dados por:

$$D = (\sigma_{xx}\sigma_{zz} - \sigma_{zx}\sigma_{xz}), \quad A = \frac{(\sigma_{zx}\sigma_{xy} - \sigma_{xx}\sigma_{zy})}{D},$$

$$B = \frac{(\sigma_{zy}\sigma_{xz} - \sigma_{zz}\sigma_{xy})}{D} \quad \text{e} \quad C = (\sigma_{yx}B + \sigma_{yy} + \sigma_{yz}A).$$

As outras componentes do campo são funções de E_y e H_y :

$$E_x^s = - \left\{ \frac{\sigma_{xz}}{D} \frac{\partial H_y^s}{\partial x} + \frac{\sigma_{zz}}{D} \frac{\partial H_y^s}{\partial z} \right\} + BE_y^s + \left[-\frac{\sigma_{zz}}{D} \Delta E_x^p + \frac{\sigma_{xz}}{D} \Delta E_z^p \right], \quad (5.15)$$

$$E_z^s = \left\{ \frac{\sigma_{zx}}{D} \frac{\partial H_y^s}{\partial z} + \frac{\sigma_{xx}}{D} \frac{\partial H_y^s}{\partial x} \right\} + AE_y^s + \left[-\frac{\sigma_{xx}}{D} \Delta E_z^p + \frac{\sigma_{zx}}{D} \Delta E_x^p \right], \quad (5.16)$$

$$H_x^s = \left\{ \frac{1}{\mathfrak{z}} \frac{\partial E_y^s}{\partial z} \right\} - \left[\frac{\Delta \mathfrak{z}}{\mathfrak{z}} H_x^p \right], \quad (5.17)$$

$$H_z^s = - \left\{ \frac{1}{\mathfrak{z}} \frac{\partial E_y^s}{\partial x} \right\} - \left[\frac{\Delta \mathfrak{z}}{\mathfrak{z}} H_z^p \right]. \quad (5.18)$$

Conforme a Figura 5.1, as componentes tangenciais do campo podem ser generalizadas para o modelo 2D:

$$E_t^s = E_x^s \cos \alpha + E_z^s \sin \alpha, \quad (5.19)$$

$$H_t^s = H_x^s \cos \alpha + H_z^s \sin \alpha, \quad (5.20)$$

$\hat{\mathbf{t}} \cdot \hat{\mathbf{i}} = \cos \alpha$ e $\hat{\mathbf{t}} \cdot \hat{\mathbf{k}} = \sin \alpha$. O versor $\hat{\mathbf{t}}$ representa o vetor unitário na direção tangencial ao corpo, o $\hat{\mathbf{i}}$, na direção x e o $\hat{\mathbf{k}}$ na direção z . Porém, não será necessária a composição vetorial das componentes tangenciais fora das bordas do corpo.

É necessário, no entanto, reformular as equações (5.19) e (5.20) em termos dos parâmetros $\hat{\mathbf{n}}$ ($= -\sin \alpha \hat{\mathbf{i}} + \cos \alpha \hat{\mathbf{k}}$), $\tilde{\tau}$, \mathbf{p} , \mathbf{q} e \mathbf{s} , sendo estes, respectivamente, definidos como:

$$\tilde{\tau} = \frac{1}{D} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p} = -AE_y^s \hat{\mathbf{i}} + BE_y^s \hat{\mathbf{k}}, \quad \mathbf{q} = \Delta E_z^p \hat{\mathbf{i}} - \Delta E_x^p \hat{\mathbf{k}}, \quad \text{e} \quad \mathbf{s} = H_z^p \hat{\mathbf{i}} - H_x^p \hat{\mathbf{k}}.$$

$\hat{\mathbf{n}}$ é o versor normal à superfície da heterogeneidade que aponta para fora do corpo. D , A e B são os parâmetros das eqs (5.13) e (5.14).

Substituindo as equações (5.15) e (5.16) em cada uma das equações (5.19) e (5.20), obte-

mos novas relações¹ para as componentes tangenciais do campo (LI, 2000):

$$E_t = \left\{ \tilde{\tau} \frac{\partial H_y}{\partial n} \right\} - \mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{n}} + [\tilde{\tau} \mathbf{q} \cdot \hat{\mathbf{n}}], \quad (5.21)$$

$$H_t = \left\{ \frac{1}{\mathfrak{z}} \frac{\partial E_y}{\partial n} \right\} + \left[\frac{\Delta \mathfrak{z}}{\mathfrak{z}} \mathbf{s} \cdot \hat{\mathbf{n}} \right]. \quad (5.22)$$

Os termos entre chaves das equações (5.15) e (5.16) constituem o primeiro termo da equação (5.21), também entre chaves. Os que não encontram-se envolvidos por nada constituem o segundo termo, e os que estão envolvidos pelos colchetes constituem o terceiro termo da referida equação (5.21). Da mesma forma relacionamos os termos separados das equações (5.17) e (5.18) aos termos da equação (5.22).

Essa representação é importante pois no sistema de equações diferenciais que vamos resolver na próxima seção, com a utilização do método dos elementos finitos (EF), as componentes tangenciais aparecem sob essa forma, podemos identificar, portanto, os termos de integral de linha nas bordas dos elementos do corpo, tendo este uma geometria qualquer. Sem reconhecê-la torna-se bem mais difícil fazer a eliminação destas integrais de linha nas bordas dos elementos da malha de EF, corretamente.

Conforme dissemos no capítulo 2, a maioria dos materiais na subsuperfície da terra possuem a constante magnética $\mu \simeq \mu_0$, então, podemos considerar que $\Delta \mathfrak{z} = 0$ em todo o domínio deste problema. Usando as definições de ΔE_x^p , ΔE_y^p e ΔE_z^p , eqs de (5.12), podemos reescrever as equações do sistema diferencial, formado pelas equações (5.13) e (5.14), como:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\tilde{\tau} \nabla H_y^s - \mathbf{p}) - \mathfrak{z} H_y^s &= -\frac{\partial}{\partial z} (\tilde{D} E_x^p - \bar{B} E_y^p + M E_z^p) \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial x} (N E_x^p + \bar{A} E_y^p - \hat{D} E_z^p), \end{aligned} \quad (5.23)$$

$$\frac{1}{\mathfrak{z}} \nabla^2 E_y^s + A \frac{\partial H_y^s}{\partial x} - B \frac{\partial H_y^s}{\partial z} - C E_y^s = \hat{C} E_x^p + \bar{C} E_y^p + \tilde{C} E_z^p \quad (5.24)$$

em que os coeficientes \tilde{D} , \hat{D} , \bar{A} , \bar{B} , M , N , \tilde{C} , \hat{C} e \bar{C} são dados por:

$$\begin{aligned} \tilde{D} &= \frac{(\sigma_{zz} \Delta \sigma_{xx} - \sigma_{xz} \Delta \sigma_{zx})}{D} \quad \text{e} \quad \hat{D} = \frac{(\sigma_{xx} \Delta \sigma_{zz} - \sigma_{xz} \Delta \sigma_{zx})}{D}, \\ \bar{B} &= \frac{(\sigma_{xz} \Delta \sigma_{zy} - \sigma_{zz} \Delta \sigma_{xy})}{D} \quad \text{e} \quad \bar{A} = \frac{(\sigma_{zx} \Delta \sigma_{xy} - \sigma_{xx} \Delta \sigma_{zy})}{D}, \end{aligned}$$

¹Conforme a seguinte definição: $\frac{\partial B_y}{\partial n} \equiv \nabla B_y \cdot \hat{\mathbf{n}}$.

$$M = \frac{(\sigma_{zz}\Delta\sigma_{xz} - \sigma_{xz}\Delta\sigma_{zz})}{D} \quad \text{e} \quad N = \frac{(\sigma_{zx}\Delta\sigma_{xx} - \sigma_{xx}\Delta\sigma_{zx})}{D},$$

$$\hat{C} = (B\Delta\sigma_{xx} + \Delta\sigma_{yx} + A\Delta\sigma_{zx}),$$

$$\bar{C} = (B\Delta\sigma_{xy} + \Delta\sigma_{yy} + A\Delta\sigma_{zy}),$$

$$\tilde{C} = (B\Delta\sigma_{xz} + \Delta\sigma_{yz} + A\Delta\sigma_{zz}).$$

Note que o termo entre parênteses do lado esquerdo da igualdade de (5.23), assim como o primeiro termo da esquerda de (5.24), estão relacionadas às definições de (5.21) e (5.22).

5.2 Aplicando o método dos Elementos Finitos

Temos que encontrar a solução do sistema diferencial formado pelas equações (5.23) e (5.24), mas ao contrário das equações para o campo primário, este sistema não é de fácil solução. Por isso, usaremos a técnica de aproximação numérica dos elementos finitos para a solução problema, uma poderosa ferramenta de solução de equações diferenciais parciais (EDP). Em essência, ela transforma um problema de contorno de EDP, de difícil solução, em um problema algébrico de variáveis discretas, muito mais simples de ser tratado (Rijo, 1996). No artigo de Li e Pek (2008) vemos que esta técnica numérica é a mais adequada quando tratamos de problemas que envolvem batimetria e topografia.

O primeiro passo para a aplicação do método é definir uma região Ω suficientemente grande em torno das heterogeneidades bidimensionais de interesse no problema, de modo que os valores absolutos das componentes E_y^s e H_y^s sejam muito pequenos na fronteira $\partial\Omega$, desta região. Contudo, não tão grande a ponto de tornar o problema dispendioso computacionalmente. O fato de E_y^s e H_y^s serem praticamente zero na fronteira é conhecido como condições de fronteira de Dirichlet do tipo homogêneas.

O segundo passo é subdividir toda região Ω em pequenas porções Ω_e de formas geométricas simples (triângulos, quadriláteros, etc.), denominados de elementos, e coletivamente chamados de *malha de elementos finitos*.

O terceiro passo é concentrar o problema em cada um desses elementos, expressando E_y^s e H_y^s por combinações de funções bases φ_n , lineares ou quadráticas. Em seguida agrupar a contribuição de cada um desses elementos na forma de uma matriz, chamada de matriz elementar, para formar um sistema linear de equações algébricas denominado de sistema global, que solucionado numericamente, fornece os valores discretos aproximados de E_y^s e H_y^s nos nós da malha.

Para restringir o problema a cada elemento Ω_e aplicaremos o critério de Galerkin (Rijo, 1977) em cada uma das eqs do sistema. Então, a eq (5.23) será multiplicada por uma variação arbitrária do campo magnético, designada por φ_n , e integrada sobre o elemento de área Ω_e :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_e} \varphi_n [\nabla \cdot (\tilde{\tau} \nabla H_y^s - \mathbf{p})] dx dz - \mathfrak{z} \int_{\Omega_e} \varphi_n H_y^s dx dz \\ &= - \int_{\Omega_e} \varphi_n \left[\frac{\partial}{\partial z} (\tilde{D} E_x^p - \bar{B} E_y^p + M E_z^p) \right] dx dz + \\ & - \int_{\Omega_e} \varphi_n \left[\frac{\partial}{\partial x} (N E_x^p + \bar{A} E_y^p - \hat{D} E_z^p) \right] dx dz. \end{aligned} \quad (5.25)$$

Uma etapa crucial em todo o processo é reescrever essa equação ressaltando a contribuição das integrais nas fronteiras $\partial\Omega_e$ de cada elemento. Tecnicamente este processo gera as chamadas condições de fronteiras naturais entre os elementos. Esse passo é importantíssimo porque é através da contribuição das integrais de linha nas fronteiras de cada elemento que eles se juntam entre si para cobrir todo o domínio Ω e assim permitir que se chegue a solução global do sistema.

Para explicitar a contribuição da integrais na fronteira em (5.28), podemos usar a fórmula de Gauss para a divergência do lado esquerdo:

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{u} v d\Omega = \int_{\Gamma} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} v d\Gamma - \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \nabla v d\Omega, \quad (5.26)$$

e a integração por partes para os termos do lado direito, como ilustra a expressão abaixo para um dos termos de (5.28):

$$\int_{\Omega_e} \varphi_n \frac{\partial}{\partial z} (\tilde{D} E_x^p) dx dz = \oint_{\partial\Omega_e} \tilde{D} \varphi_n \frac{\partial E_x^p}{\partial z} dx - \int_{\Omega_e} \tilde{D} \frac{\partial \varphi_n}{\partial z} \frac{\partial E_x^p}{\partial z} dx dz, \quad (5.27)$$

deste modo, a equação (5.28) será reescrita da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_e} \nabla \varphi_n \cdot (\tilde{\tau} \nabla H_y^s - \mathbf{p}) dx dz - \int_{\Gamma_e} \left(\tilde{\tau} \frac{\partial H_y^s}{\partial n} - \mathbf{p} \hat{\mathbf{n}} \right) \varphi_n d\Gamma + \mathfrak{z} \int_{\Omega_e} \varphi_n H_y^s dx dz = \\ & \oint_{\partial\Omega_e} \varphi_n \left(\tilde{D} \frac{\partial E_x^p}{\partial z} - \bar{B} \frac{\partial E_y^p}{\partial z} + M \frac{\partial E_z^p}{\partial z} \right) dx - \int_{\Omega_e} \frac{\partial \varphi_n}{\partial z} \left(\tilde{D} \frac{\partial E_x^p}{\partial z} - \bar{B} \frac{\partial E_y^p}{\partial z} + M \frac{\partial E_z^p}{\partial z} \right) dx dz + \\ & \oint_{\partial\Omega_e} \varphi_n \left(N \frac{\partial E_x^p}{\partial x} + \bar{A} \frac{\partial E_y^p}{\partial x} - \hat{D} \frac{\partial E_z^p}{\partial x} \right) dz - \int_{\Omega_e} \frac{\partial \varphi_n}{\partial x} \left(N \frac{\partial E_x^p}{\partial x} + \bar{A} \frac{\partial E_y^p}{\partial x} - \hat{D} \frac{\partial E_z^p}{\partial x} \right) dx dz. \end{aligned} \quad (5.28)$$

onde Γ_e representa o limite do elemento Ω_e . Nós usamos também a seguinte identidade:

$$\tilde{\tau} \nabla H_y^s \cdot \hat{\mathbf{n}} \varphi_n = \tilde{\tau} \frac{\partial H_y^s}{\partial n} \varphi_n$$

Similarmente, a eq. (5.24) será multiplicada por uma variação arbitrária da componente magnética, denominada φ_n , e integrada sobre a região Ω_e . Em seguida, explicitaremos a contribuição da integrais na fronteira de Ω_e usando a fórmula de Green:

$$\int_{\Omega} \nabla^2 u v d\Omega = \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} v d\Gamma - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v d\Omega, \quad (5.29)$$

e, então, a eq. (5.24) passará a ser reescrita como:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{3} \int_{\Omega_e} \nabla \varphi_n \cdot \nabla E_y^s dxdz - \frac{1}{3} \int_{\Gamma_e} \frac{\partial E_y^s}{\partial n} \varphi_n d\Gamma - \int_{\Omega_e} \varphi_n \left(A \frac{\partial H_y^s}{\partial x} - B \frac{\partial H_y^s}{\partial z} - C E_y^s \right) dxdz = \\ & - \int_{\Omega_e} \varphi_n \left(\hat{C} E_x^p + \bar{C} E_y^p + \tilde{C} E_z^p \right) dxdz \end{aligned} \quad (5.30)$$

Na formulação da eq. (5.28), usamos a relação (5.21) para escrever o integrando de sua integral de linha como $E_t \varphi_n$. Do mesmo modo, na formulação de (5.30), usamos (5.22) para reescrever o integrando da integral de linha como $H_t \varphi_n$.

Devido a continuidade dos campos E_y^s e H_y^s , as integrais de linha se anulam mutuamente nas fronteiras de elementos internos à região Ω , isso, devido nas bordas de cada elemento Ω_e , o curso das integrais de linha entre dois elementos vizinhos sempre encontrarem-se em sentidos opostos; por consequência, tais integrais não precisam ser calculadas. É como se os elementos tivessem sido aglutinados. Do mesmo modo, nos elementos cujas fronteiras coincidem com a fronteira externa $\partial\Omega$, as integrais de linha também não precisam ser calculadas, devido às condições de fronteira de Dirichlet predominarem sobre as condições de fronteiras naturais.

As eqs (5.28) e (5.30), finalmente, serão reescritas, respectivamente, como:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^3 \int_{\Omega_e} (\nabla \varphi_n \cdot (\tilde{\tau} \nabla H_y^s) + 3\varphi_n H_y^s) dxdz - \sum_{n=1}^3 \int_{\Omega_e} \nabla \varphi_n \cdot \mathbf{p} dxdz = - \\ & \sum_{n=1}^3 \int_{\Omega_e} \left[\frac{\partial \varphi_n}{\partial z} \left(\tilde{D} \frac{\partial E_x^p}{\partial z} - \bar{B} \frac{\partial E_y^p}{\partial z} + M \frac{\partial E_z^p}{\partial z} \right) + \frac{\partial \varphi_n}{\partial x} \left(N \frac{\partial E_x^p}{\partial x} + \bar{A} \frac{\partial E_y^p}{\partial x} - \hat{D} \frac{\partial E_z^p}{\partial x} \right) \right] dxdz, \end{aligned} \quad (5.31)$$

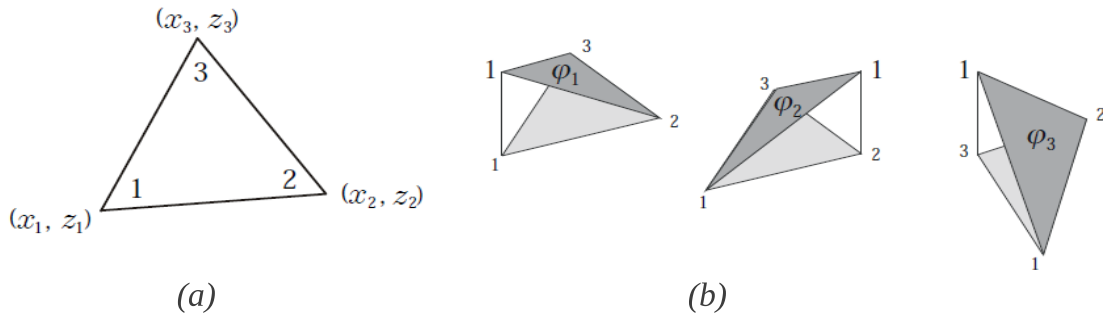
$$\sum_{n=1}^3 \int_{\Omega_e} \left(\frac{1}{3} \nabla \varphi_n \cdot \nabla E_y^s + \varphi_n C E_y^s \right) dx dz - \sum_{n=1}^3 \int_{\Omega_e} \varphi_n \left(A \frac{\partial H_y^s}{\partial x} - B \frac{\partial H_y^s}{\partial z} \right) dx dz = - \sum_{n=1}^3 \int_{\Omega_e} \varphi_n \left(\hat{C} E_x^p + \bar{C} E_y^p + \tilde{C} E_z^p \right) dx dz \quad (5.32)$$

Substituindo as funções E_y^s e H_y^s pelas respectivas combinações lineares de funções bases:

$$E_y^s(x, z) = \sum_{m=1}^3 \varphi_m E_{ym}^s \quad \text{e} \quad H_y^s(x, z) = \sum_{m=1}^3 \varphi_m H_{ym}^s. \quad (5.33)$$

em que E_{ym} e H_{ym} são os campos elétricos e magnéticos nos n -ésimos vértices com as coordenadas (x_m, z_m) , $m = 1, 2, 3$ (Figura 5.2); e φ_m , a função de forma linear, correspondente ao plano formado por estes vértices do elemento triangular (Figura 5.2). As funções bases

Figura 5.2. (a) Elemento triangular que compõe a malha dos EF. (b) Representação do comportamento das funções base.



Fonte: Adaptado de Rijo (1991)

são definidas por:

$$\varphi_m = \frac{1}{2A^e} (a_m + b_m x + c_m z), \quad m = 1, 2, 3, \quad (5.34)$$

em que $A^e = \frac{1}{2}(b_1 c_2 - b_2 c_1)$ representa a área de cada elemento triangular, com

$$\begin{aligned} a_1 &= z_2 - z_3, & b_1 &= x_3 - x_2, & c_1 &= x_2 z_3 - x_3 z_2, \\ a_2 &= z_3 - z_1, & b_2 &= x_1 - x_3, & c_2 &= x_3 z_1 - x_1 z_3, \\ a_3 &= z_1 - z_2, & b_3 &= x_2 - x_1, & c_3 &= x_1 z_2 - x_2 z_1. \end{aligned} \quad (5.35)$$

As funções bases satisfazem à seguinte condição:

$$\begin{aligned}\varphi_1(x_1, z_1) &= 1, & \varphi_1(x_2, z_2) &= 0, & \varphi_1(x_3, z_3) &= 0, \\ \varphi_2(x_1, z_1) &= 0, & \varphi_2(x_2, z_2) &= 1, & \varphi_2(x_3, z_3) &= 0, \\ \varphi_3(x_1, z_1) &= 0, & \varphi_3(x_2, z_2) &= 0, & \varphi_3(x_3, z_3) &= 1.\end{aligned}\tag{5.36}$$

As integrais sobre o elemento de área Ω_e , eqs (5.31) e (5.32), são avaliadas utilizando as eqs (5.33 - 5.36). Vamos reescrevê-las, respectivamente, na forma de produto matricial para cada elemento:

$$\sum_{m=1}^3 K_{n,m}^h H_{ym}^s + K_{n,m}^{ace} E_{ym}^s = -\gamma_n^h\tag{5.37}$$

e

$$\sum_{m=1}^3 K_{n,m}^e E_{ym}^s - K_{n,m}^{ach} H_{ym}^s = -\gamma_n^e\tag{5.38}$$

com $K_{n,m}^{ace}$ e $K_{n,m}^{ach}$ sendo as matrizes de acoplamento das equações do sistema de E_y e H_y :

$$K_{n,m}^{ace} = A \int_{\Omega_e} \frac{\partial \varphi_n}{\partial x} \varphi_m dx dz - B \int_{\Omega_e} \frac{\partial \varphi_n}{\partial z} \varphi_m dx dz\tag{5.39}$$

$$K_{n,m}^{ach} = A \int_{\Omega_e} \varphi_n \frac{\partial \varphi_m}{\partial x} dx dz - B \int_{\Omega_e} \varphi_n \frac{\partial \varphi_m}{\partial z} dx dz.\tag{5.40}$$

As matrizes $K_{n,m}^h$ e $K_{n,m}^e$ são dadas por:

$$K_{n,m}^h = \int_{\Omega_e} \nabla \varphi_n \cdot (\tilde{\tau} \cdot \nabla \varphi_m) dx dz + \mathfrak{z} \int_{\Omega_e} \varphi_n \varphi_m dx dz\tag{5.41}$$

$$K_{n,m}^e = \frac{1}{\mathfrak{z}} \int_{\Omega_e} \nabla \varphi_n \cdot \nabla \varphi_m dx dz + C \int_{\Omega_e} \varphi_n \varphi_m dx dz\tag{5.42}$$

e as matrizes γ_n^h e γ_n^e , que representam a fonte do campo, neste caso os campos primários $(E_{x1}^p, E_{x2}^p, E_{x3}^p, \dots)$ dados em cada vértice do elemento Ω_e , são dadas por:

$$\begin{aligned}\gamma_n^h &= \int_{\Omega_e} \left(\tilde{D} \frac{\partial \varphi_n}{\partial z} + N \frac{\partial \varphi_n}{\partial x} \right) (\varphi_1 E_{x1}^p + \varphi_2 E_{x2}^p + \varphi_3 E_{x3}^p) dx dz + \\ &\int_{\Omega_e} \left(\bar{A} \frac{\partial \varphi_n}{\partial x} - \bar{B} \frac{\partial \varphi_n}{\partial z} \right) (\varphi_1 E_{y1}^p + \varphi_2 E_{y2}^p + \varphi_3 E_{y3}^p) dx dz + \\ &\int_{\Omega_e} \left(M \frac{\partial \varphi_n}{\partial z} - \hat{D} \frac{\partial \varphi_n}{\partial x} \right) (\varphi_1 E_{z1}^p + \varphi_2 E_{z2}^p + \varphi_3 E_{z3}^p) dx dz\end{aligned}\tag{5.43}$$

$$\begin{aligned}
\gamma_n^e &= \hat{C} \int_{\Omega_e} \varphi_n (\varphi_1 E_{x1}^p + \varphi_2 E_{x2}^p + \varphi_3 E_{x3}^p) dx dz \\
&\quad \bar{C} \int_{\Omega_e} \varphi_n (\varphi_1 E_{y1}^p + \varphi_2 E_{y2}^p + \varphi_3 E_{y3}^p) dx dz \\
&\quad \tilde{C} \int_{\Omega_e} \varphi_n (\varphi_1 E_{z1}^p + \varphi_2 E_{z2}^p + \varphi_3 E_{z3}^p) dx dz
\end{aligned} \tag{5.44}$$

Usando a relação:

$$\int_{\Omega_e} \varphi_1^\alpha \varphi_2^\beta \varphi_3^\theta dx dz = 2A^e \frac{\alpha! \beta! \theta!}{(\alpha + \beta + \theta + 2)!}, \tag{5.45}$$

na qual α , β e θ são valores que variam de 1 a 3, calculamos cada uma das matrizes de (5.37) e (5.38):

(i) As matrizes de acoplamento $K_{n,m}^{ace}$ e $K_{n,m}^{ach}$:

$$\begin{aligned}
K_{n,m}^{ace} &= \frac{1}{6} \begin{bmatrix} (Ab_1 - Bc_1) & (Ab_2 - Bc_2) & (Ab_3 - Bc_3) \\ (Ab_1 - Bc_1) & (Ab_2 - Bc_2) & (Ab_3 - Bc_3) \\ (Ab_1 - Bc_1) & (Ab_2 - Bc_2) & (Ab_3 - Bc_3) \end{bmatrix}, \\
K_{n,m}^{ach} &= \frac{1}{6} \begin{bmatrix} (Ab_1 - Bc_1) & (Ab_1 - Bc_1) & (Ab_1 - Bc_1) \\ (Ab_2 - Bc_2) & (Ab_2 - Bc_2) & (Ab_2 - Bc_2) \\ (Ab_3 - Bc_3) & (Ab_3 - Bc_3) & (Ab_3 - Bc_3) \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{5.46}$$

(ii) As matrizes $K_{n,m}^h$ e $K_{n,m}^e$, com $n = 1, 2, 3$, representado as linhas da matriz:

$$\begin{aligned}
K_{n,m}^h &= \frac{1}{4A^e D} \sum_{m=1}^3 [b_n (\sigma_{xx} b_m + \sigma_{xz} c_m) + c_n (\sigma_{zx} b_m + \sigma_{zz} c_m)] + \\
&\quad + \frac{A^e \mathfrak{J}}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix},
\end{aligned} \tag{5.47}$$

$$K_{n,m}^e = \frac{1}{4A^e \mathfrak{J}} \sum_{m=1}^3 (b_n b_m + c_n c_m) + \frac{A^e C}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}. \tag{5.48}$$

(iii) As matrizes fontes γ_n^h e γ_n^e :

$$\gamma_n^h = \frac{1}{6} \sum_{n=1}^3 \left(\begin{array}{l} (Nb_n + \tilde{D}c_n) (E_{x1}^p + E_{x2}^p + E_{x3}^p) + \\ + (\bar{A}b_n - \bar{B}c_n) (E_{y1}^p + E_{y2}^p + E_{y3}^p) + \\ + (Mc_n - \hat{D}b_n) (E_{z1}^p + E_{z2}^p + E_{z3}^p) \end{array} \right) \quad (5.49)$$

e

$$\gamma_n^e = \frac{A^e}{12} \left(\begin{array}{l} +\hat{C} \begin{bmatrix} 2E_{x1}^p + E_{x2}^p + E_{x3}^p \\ E_{x1}^p + 2E_{x2}^p + E_{x3}^p \\ E_{x1}^p + E_{x2}^p + 2E_{x3}^p \end{bmatrix} \\ +\bar{C} \begin{bmatrix} 2E_{y1}^p + E_{y2}^p + E_{y3}^p \\ E_{y1}^p + 2E_{y2}^p + E_{y3}^p \\ E_{y1}^p + E_{y2}^p + 2E_{y3}^p \end{bmatrix} \\ +\tilde{C} \begin{bmatrix} 2E_{z1}^p + E_{z2}^p + E_{z3}^p \\ E_{z1}^p + 2E_{z2}^p + E_{z3}^p \\ E_{z1}^p + E_{z2}^p + 2E_{z3}^p \end{bmatrix} \end{array} \right) \quad (5.50)$$

Combinando os sistemas de equações (5.37) e (5.38), nós podemos escrever um sistema linear final na forma de matriz como:

$$\begin{bmatrix} K_{n,m}^h & K_{n,m}^{ace} \\ -K_{n,m}^{ach} & K_{n,m}^e \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} H_{ym}^s \\ E_{ym}^s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\gamma_n^h \\ -\gamma_n^e \end{bmatrix}$$

E a matriz de cada elemento Ω_e seguirá a seguinte regra:

$$\begin{bmatrix} K_{1,1}^h & K_{1,1}^{ace} & K_{1,2}^h & K_{1,2}^{ace} & K_{1,3}^h & K_{1,3}^{ace} \\ -K_{1,1}^{ach} & K_{1,1}^e & -K_{1,2}^{ach} & K_{1,2}^e & -K_{1,3}^{ach} & K_{1,3}^e \\ K_{2,1}^h & K_{2,1}^{ace} & K_{2,2}^h & K_{2,2}^{ace} & K_{2,3}^h & K_{2,3}^{ace} \\ -K_{2,1}^{ach} & K_{2,1}^e & -K_{2,2}^{ach} & K_{2,2}^e & -K_{2,3}^{ach} & K_{2,3}^e \\ K_{3,1}^h & K_{3,1}^{ace} & K_{3,2}^h & K_{3,2}^{ace} & K_{3,3}^h & K_{3,3}^{ace} \\ -K_{3,1}^{ach} & K_{3,1}^e & -K_{3,2}^{ach} & K_{3,2}^e & -K_{3,3}^{ach} & K_{3,3}^e \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} H_{y1}^s \\ E_{y1}^s \\ H_{y2}^s \\ E_{y2}^s \\ H_{y3}^s \\ E_{y3}^s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\gamma_1^h \\ -\gamma_1^e \\ -\gamma_2^h \\ -\gamma_2^e \\ -\gamma_3^h \\ -\gamma_3^e \end{bmatrix}$$

A última etapa é formar o sistema Global de equações lineares; incorporar as condições de fronteira homogêneas de Dirichlet; e finalmente, resolver o sistema para obter os valores de E_y^s e H_y^s em todos os nós da malha. Chamamos de *matriz local* a cada uma das matrizes que compõem o produto matricial acima, uma vez que a definimos para cada elemento da malha. Lembrando que a discretização é feita em todo o domínio do problema, e este domínio

é escolhido conforme o critério observado no início desta subseção. A cada nó do elemento atribuímos dois índices, um para cada valor dos campos calculados sobre ele, H_y e E_y . A alocação de cada elemento da matriz local em sua respectiva matriz global é feita através de uma regra estabelecida entre os índices dos nós de cada elemento e os elementos de sua respectiva matriz². A montagem da matriz global garante a influência dos pontos vizinhos no resultado do campo em um determinado ponto, uma vez que vários deles são sobrepostos no processo da alocação.

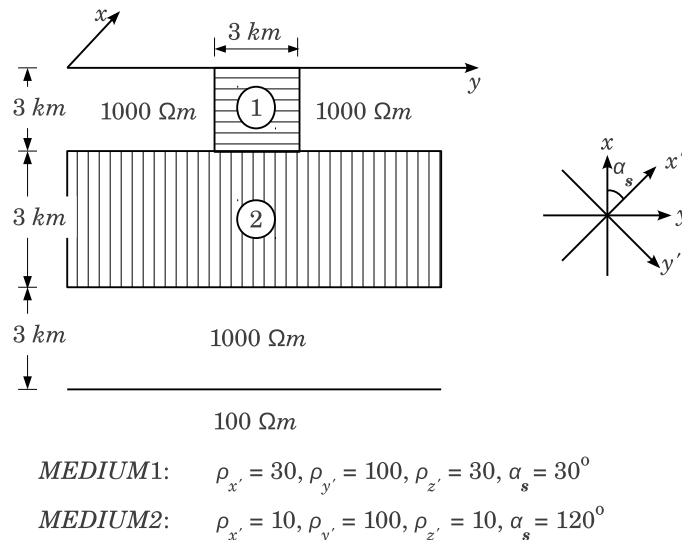
A principal característica do método de elementos finitos é produzir um sistema de equações lineares cuja matriz global, embora de grandes dimensões, é geralmente esparsa, bandeda, simétrica e positiva definida (Hermitiana).

²ver detalhes em Rijo (1977; 1991)

6 RESULTADOS PARA O MODELO 2D

Nosso objetivo é verificar os efeitos que a anisotropia causa nas respostas de distribuição da resistividade aparente. Antes de tudo, validaremos nossos resultados reproduzindo na Figura 6.2 as curvas das quatro componentes do tensor de resistividade aparente apresentadas no artigo de Li (2002), cujo modelo está ilustrado na Figura 6.1.

Figura 6.1. Modelo apresentado no artigo de Li. Trata-se de um corpo aflorante bidimensional, com direção de *strike* no eixo - y . Uma estrutura de três camadas entre dois semi-espços infinitos, o ar e sedimentos. A anisotropia é considerada para o corpo e na segunda camada.



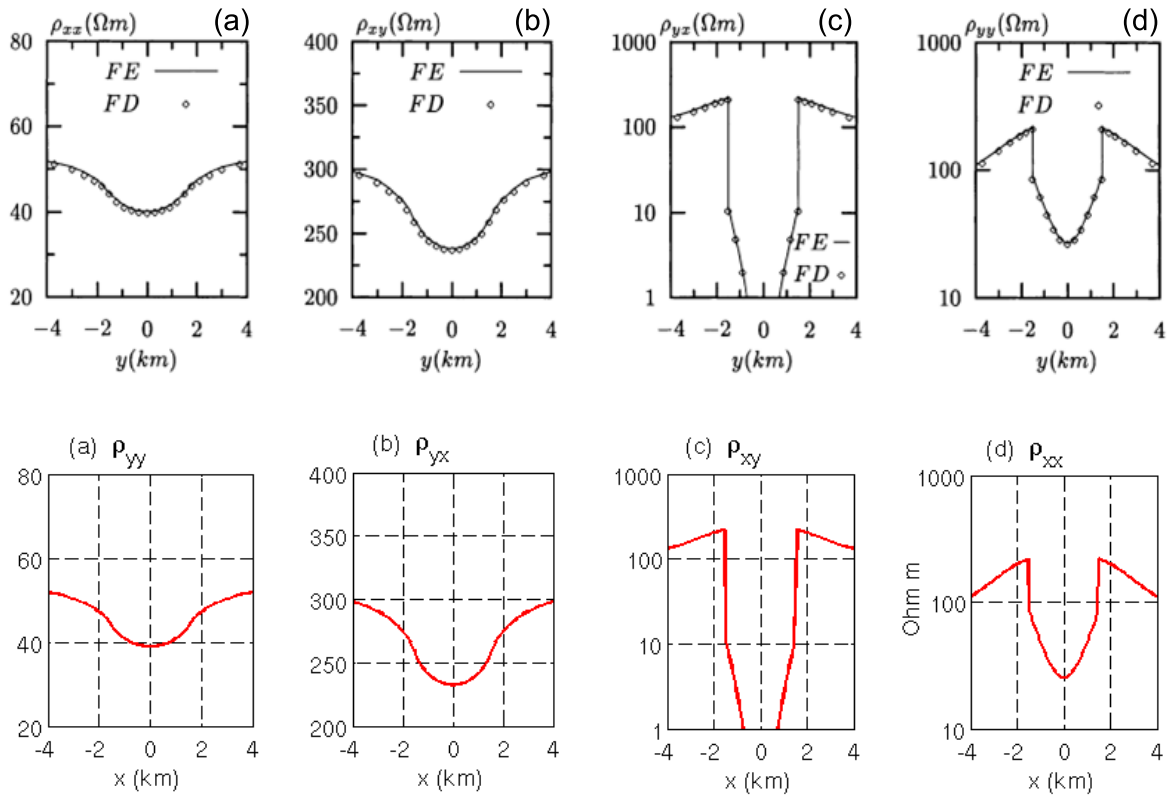
Fonte: Li (2002)

Na Figura 6.2, em cor preta, estão as curvas do artigo de Li, nas quais o autor compara os resultados de sua modelagem 2D, utilizando a técnica numérica dos Elementos Finitos (FE – *Finite Element*), aos resultados da modelagem de Pek e Verner (1997), utilizando Diferenças Finitas (FD – *Finite Difference*). Em vermelho, estão as curvas correspondentes à modelagem deste trabalho, que também utiliza o método FE.

Passemos, agora, a considerar o modelo da Figura 6.3, que chamaremos de modelo - 1, para as discussões dos próximos gráficos desta seção. Em tal modelo, adaptado de Li (2002), o corpo não é aflorante, e sua dimensão na direção- x foi aumentada.

Para iniciar nossas análises, é importante lembrar que nos modelos isotrópicos do MT 2D as componentes ρ_{xx} e ρ_{yy} , do tensor resistividade aparente, são nulas, devido o campo MT

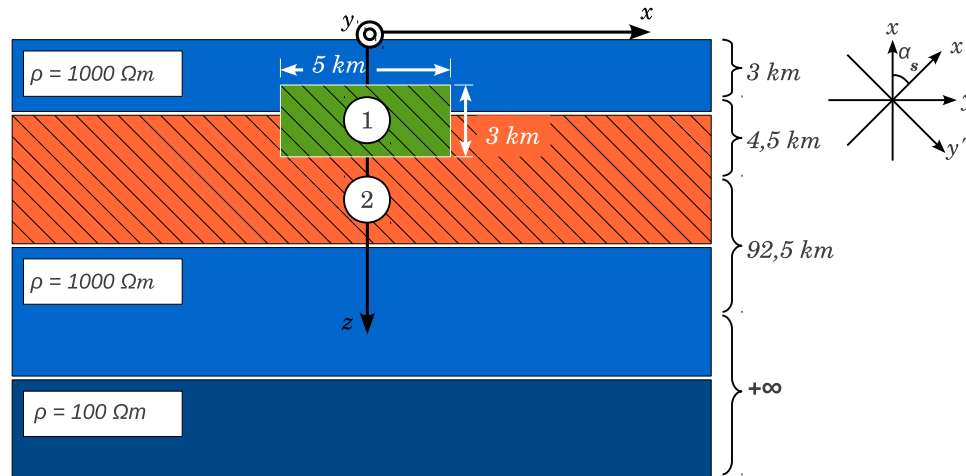
Figura 6.2. As curvas em preto foram retiradas do trabalho de Li (2002), e são identificadas por (a), (b), (c) e (d). Em vermelho, estão as curvas construídas a partir do algoritmo apresentado neste trabalho, e se relacionam às curvas pretas pelas mesmas letras com as quais estas foram identificadas. O sistema de referência adotado por Li considera a direção x como *strike*, por isso, a componente ρ_{xx} preta corresponde a ρ_{yy} vermelha, por exemplo. Estes gráficos são referentes a uma frequência de 0,3333... Hz.



Fonte: Comparação com Li (2002)

se desacoplar em dois modos de polarização, TE e TM . No entanto, quando tais modelos apresentam anisotropia horizontal, todas as componentes do campo encontram-se acopladas, e este passará a exibir ambas as componentes do tensor resistividade aparente, com ρ_{xx} e ρ_{yy} diferentes entre si nas proximidades do corpo. Para casos anisotrópicos 1D, estas componentes do tensor serão sempre simétricas. Então, conforme nos afastamos da heterogeneidade de um modelo bidimensional, a simetria entre as componentes ρ_{xx} e ρ_{yy} tenderá a aparecer, pois nos aproximamos de um caso unidimensional. Vamos observar estas características nos resultados do modelo-1. Vejamos a Figura 6.4, onde apresentamos pseudo-seções de resistividade aparente, por exemplo.

Figura 6.3. O modelo-1 é baseado no modelo de Li, com as seguintes mudanças: o corpo está localizado 500m abaixo da primeira interface e sua dimensão x foi aumentada em dois quilômetros. Mantivemos a anisotropia horizontal no corpo e na segunda camada, ou seja, os eixos principais de anisotropia, x e y , são coplanares aos do sistema cartesiano, apenas rotacionados entre si pelo ângulo α_s .



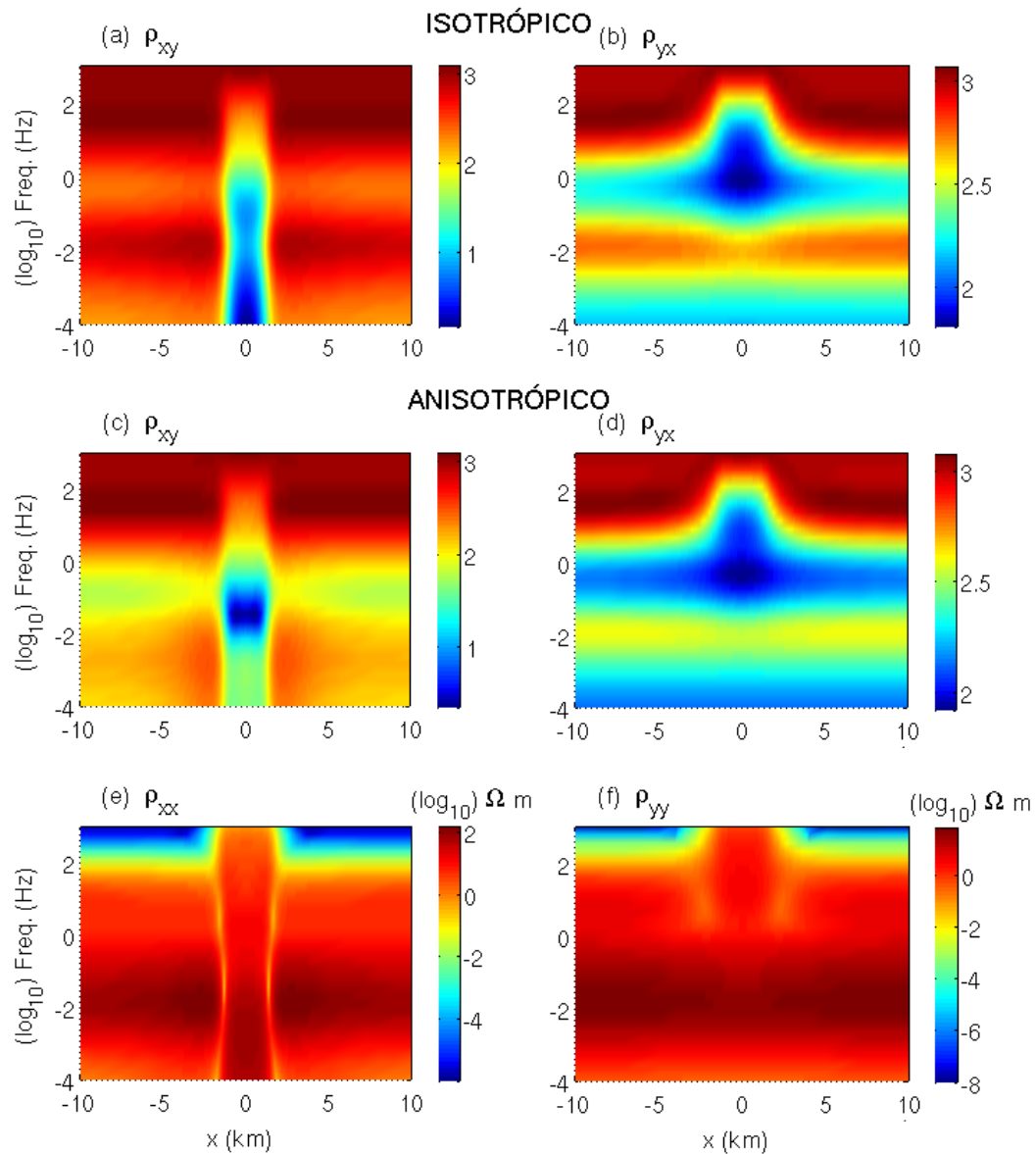
$$\text{MEDIUM1: } \rho_{x'} = 1000, \rho_{y'} = 30, \rho_{z'} = 30, \alpha_s = 30^\circ$$

$$\text{MEDIUM2: } \rho_{x'} = 100, \rho_{y'} = 10, \rho_{z'} = 10, \alpha_s = 120^\circ$$

Em Fig 6.4a e 6.4b, consideramos que o modelo-1 é isotrópico, assumindo as resistividades¹ de 100 e 30 Ωm para a segunda camada e para o corpo, respectivamente. Neste caso, é possível termos a ideia correta sobre a distribuição da resistividade na subsuperfície, note que a sequência de cores das duas seções, (a) e (b), representam corretamente a distribuição definida no modelo-1. Isso possibilita correlacionar profundidade e frequência, observando a que faixa desta última, pertence o valor de resistividade de cada camada, graficamente. Por exemplo, na faixa que vai de 10^{-3} a 10^{-4} Hz temos a resistividade próxima do semi-espaço infinito inferior, 100 Ωm ; para a faixa de 10^{-2} a 10^{-3} Hz , temos o valor aproximado da resistividade da penúltima camada, 1000 Ωm , e assim por diante. Podemos também inferir a localização do corpo no interior das camadas. Vemos em Fig 6.4b que há uma região central, de cor azul, em que o valor de resistividade cai bastante, principalmente quanto mais olhamos para o centro desta região, aí localiza-se o corpo, que como sabemos tem resistividade igual a 30 Ωm , em meio a primeira camada com 1000 e a segunda, com 100. Em Fig 6.4a não é possível definir, verticalmente, a faixa ocupada pelo corpo, devido o efeito de distorção

¹Note que os valores assumidos para o caso isotrópico, 100 e 30 Ωm , correspondem aos valores de ρ_x e ρ_y da segunda camada e do corpo, respectivamente, definidos na Fig 6.3.

Figura 6.4. Pseudo-seções de resistividade aparente. As figuras (a) e (b) representam o modelo-1 isotrópico, com $30 \Omega m$ para a resistividade do corpo e $100 \Omega m$ para a segunda camada. As figuras (c), (d), (e) e (f) representam o modelo-1 anisotrópico, conforme descrito em Fig 6.3. As barras de cores estão em potência de base 10, assim como os valores das frequências nos eixos verticais. Os eixos horizontais representam a variação lateral x , em (km).



estática, que atinge apenas a seção de ρ_{xy} isotrópica, por esta depender da componente E_x do campo, normal a direção *strike* do corpo.

A distorção estática é um efeito galvânico provocado pela ação de um campo elétrico

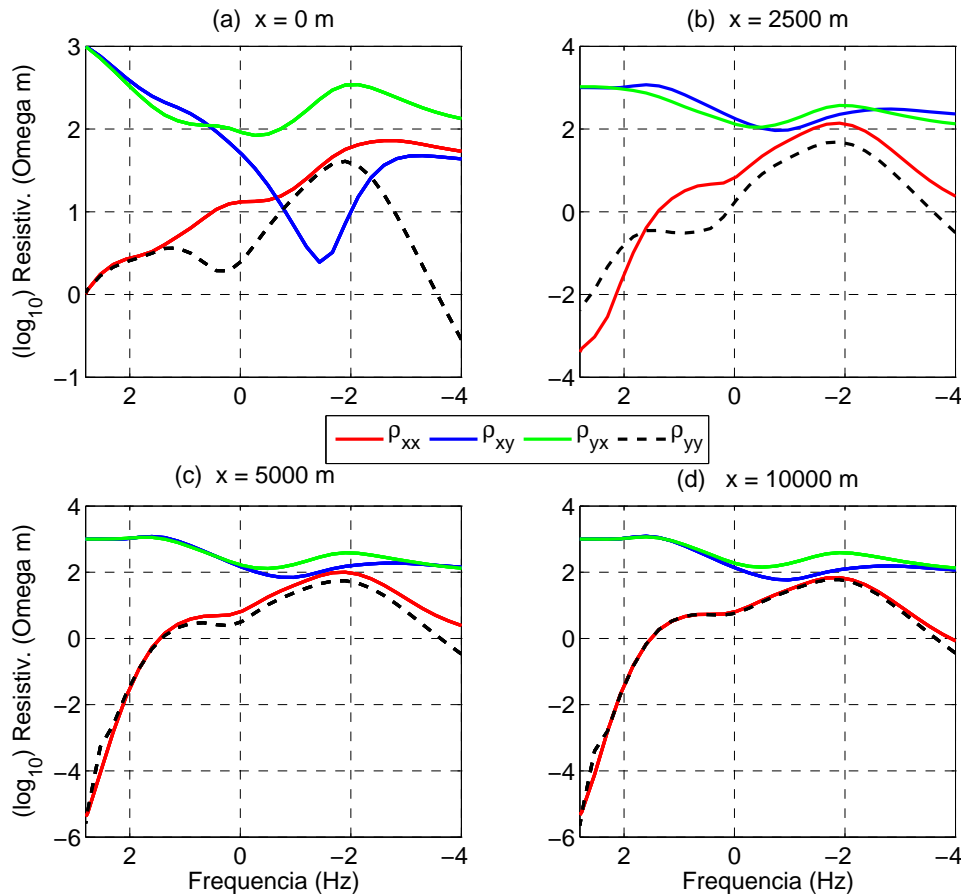
primário que produz cargas onde existem variações de condutividade em limites distintos ou em transições contínuas. A existência de cargas nesta transição gera um campo elétrico galvânico secundário que se adiciona ao campo primário. Este efeito provoca o deslocamento das curvas de resistividades aparentes por um fator indeterminado do valor real. Para um corpo condutivo, a polarização das cargas resulta num campo secundário opondo-se ao campo primário e, para um corpo resistivo, o campo secundário é somado. Tal efeito é fortemente sentido nos métodos que trabalham com frequência baixa, como no método MT (Abreu, 2002). Sabe-se que a fase não é afetada, significativamente, por este efeito estático. Isto está ligado ao fato de que para uma terra 1D, a fase é a derivada logarítmica da resistividade (Larsen, 1977; Jones, 1988; Weidelt, 1972; apud Porsani e Fontes, 2001).

Observemos, agora, as respostas do modelo-1 para o caso anisotrópico. Nas Figuras 6.4c e 6.4d, as pseudo-seções de ρ_{xy} e ρ_{yx} anisotrópicas, em comparação com as das figuras 6.4a e 6.4b do caso isotrópico, respectivamente, trazem uma distribuição de cores que indicam resistividades de menor valor que nos casos isotrópicos, principalmente, a partir da segunda camada. A camada e o corpo anisotrópico, por possuírem resistividades diferentes em cada direção, não são bem representados pelos valores exibidos nestas seções. Na verdade o valor exibido para estas duas regiões sugerem um ente isotrópico de resistividade diferente do real. A terceira camada, que deveria exibir resistividade de $1000 \Omega m$, exibe um valor em torno de $450 \Omega m$. Quanto a localização do corpo, vemos que a região de contraste localizado, em Fig 6.4d, equivale a de Fig 6.4b.

Finalmente, as figuras 6.4e e 6.4f mostram as pseudo-seções de ρ_{xx} e ρ_{yy} , que são próprias dos casos anisotrópicos. Podemos tirar conclusões interessantes a respeito destas pseudo-seções. Na parte superior e inferior de ambas, notamos que predomina a cor azul, em tom mais forte na parte superior que na inferior, essas regiões correspondem à camadas que não exibem anisotropia. No entanto, na parte inferior, mesmo depois de uma espessa camada isotrópica (camada 3), a influência da anisotropia da segunda camada ainda é bastante forte até a faixa de frequência de $10^{-4} Hz$, correspondente ao semi-espaco infinito isotrópico. Não podemos tirar conclusões a respeito do valor de resistividade das camadas por meio das seções de ρ_{xx} e ρ_{yy} , mas vemos, claramente, que elas são bons indicadores da presença, ou não, de anisotropia horizontal, e da extensão de sua influência ao longo das camadas.

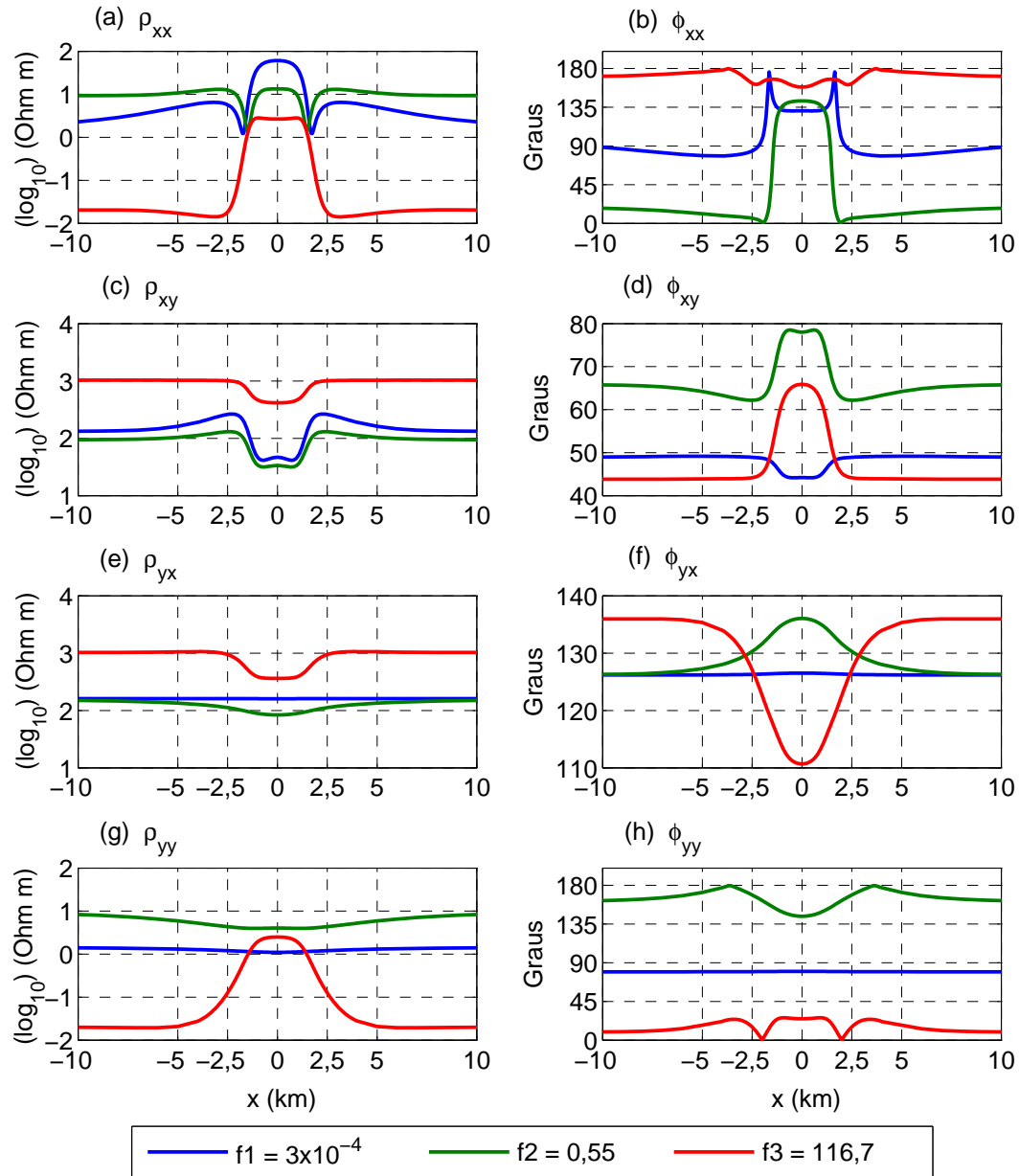
Na Figura 6.5 apresentamos quatro gráficos de sondagem para o modelo-1. Cada um contém quatro curvas, que representam as componentes da resistividade aparente do modelo. Para as curvas de Fig 6.5a, as medidas foram feitas em $x = 0$, ou seja, num ponto sobre a superfície que divide o corpo em duas partes iguais, verticalmente. Respectivamente, em

Figura 6.5. As curvas de sondagens mostram as medidas executadas (a) no ponto central, $x = 0$, (b) à distância referente a borda do corpo, $x = 1500m$, (c) à distância de $5000m$ do ponto zero da referência e (d) representando o modelo 1D, para o qual a medida é a mesma a qualquer distância lateral percorrida.



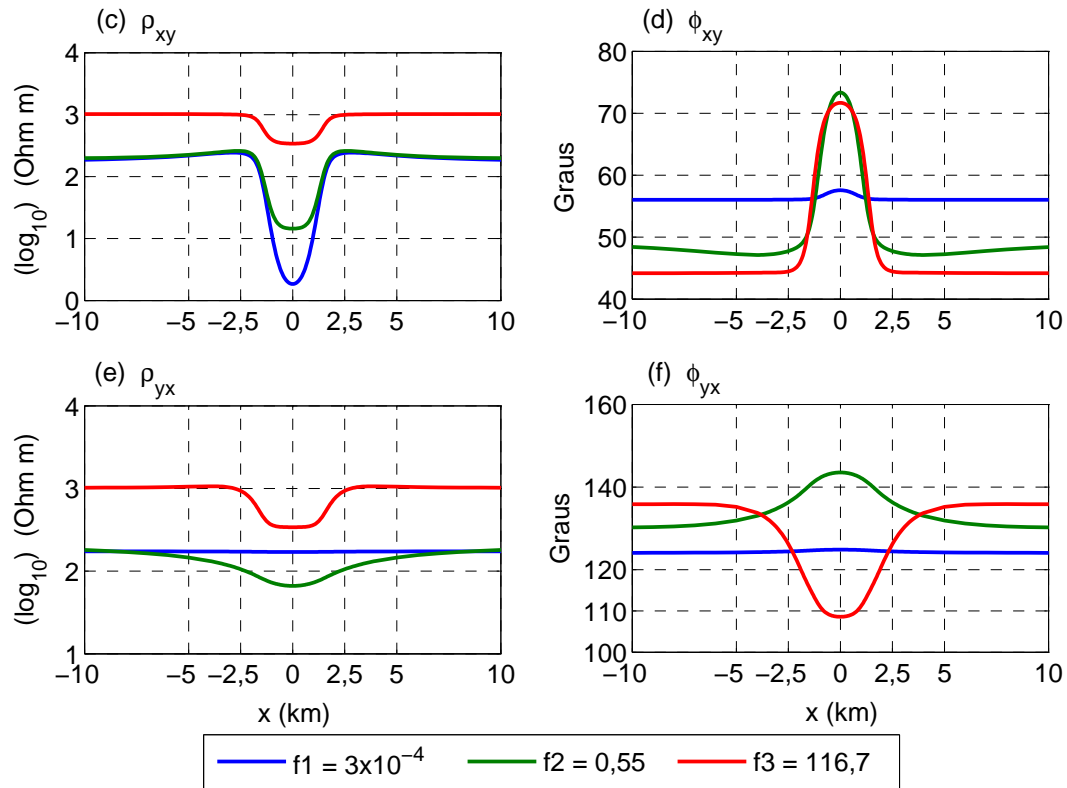
relação a primeira medida, os gráficos das Figs 6.5b, c e d tiveram suas medidas em $2500m$, $5000m$ e $10000m$. Vejamos, nestes gráficos, a tendência destas curvas conforme se afastam do corpo. Para as frequências mais altas (1), que atingem a primeira camada, e para as mais baixas (2), que atingem o semi-espaço infinito inferior, ambos de natureza isotrópica, notamos que, em todos os gráficos da Figura 6.5, as curvas de ρ_{xy} (azul) e ρ_{yx} (verde) tendem a $1000 \Omega m$ para (1) e a $100 \Omega m$ para (2), conforme o modelo-1, sendo que quanto mais se afastam do corpo, a convergência para o caso (2) se torna bem melhor. Nas trajetórias das curvas de ρ_{xx} (vermelha) e ρ_{yy} (preta) observamos que uma tende a outra, e ambas a zero, para o caso (1), enquanto que para (2), também tendem a mesma trajetória, e esta, tende ao valor $1 \Omega m$, devido a influência da camada anisotrópica que ainda é bastante forte até

Figura 6.6. Dados MT anisotrópicas de resistividade e fase: (a) e (b) para ρ_{xx} ; (c) e (d) para ρ_{xy} ; (e) e (f) para ρ_{yx} ; (g) e (h) para ρ_{yy} .



a região atingida por (2). Quanto mais nos afastamos do corpo melhor observamos este comportamento. Para as frequências intermediárias (3) que alcançam a profundidade da segunda e terceira camada, ρ_{xy} e ρ_{yx} acentuam mais a diferença entre suas curvas; já ρ_{xx} e ρ_{yy} passam a exibir tal diferença, uma vez que sem a presença do corpo suas curvas devem ser iguais. Na região alcançada por (3), quanto mais o local de medida for distante de $x = 0$,

Figura 6.7. Dados MT isotrópicas de resistividade e fase: (c) e (d) para ρ_{xy} ; (e) e (f) para ρ_{yx} .



menos acentuada será a diferença entre ρ_{xy} e ρ_{yx} , e mais se aproximarão as curvas de ρ_{xx} e ρ_{yy} . Dentro da região de distorção estática, que identificamos na Figura 6.4, as curvas apresentam um defasagem grande uma das outras, como podemos observar em Fig 6.5a e 6.5b.

Na figura 6.6 mostramos algumas curvas de sondagens anisotrópicas do modelo-1, para três valores diferentes de frequência, (f1) para frequências baixas, (f2) para as médias, e (f3), para as mais altas. Nesta figura, cada dupla de gráficos na horizontal, da esquerda para a direita, corresponde, respectivamente, a resistividade aparente e a fase, relativas a uma das componentes do tensor impedância. Da mesma maneira fizemos na Figura 6.7, mas considerando o modelo-1 isotrópico, para os mesmos valores considerados em Fig 6.4a e Fig 6.4b.

Conforme vemos nas pseudo-seções da Figura 6.4, o valor atribuído para a frequência (f1) atinge uma profundidade referente ao semi-espaco infinito inferior, desse modo, esperamos que as curvas de resistividade e fase, varridas lateralmente, para esse valor, varie pouco em relação aos outros dois valores de frequência, (f2) e (f3). No entanto, notamos que tanto

as curvas anisotrópicas ρ_{xx} (Fig 6.6a) e ρ_{xy} (Fig 6.6c), quanto a isotrópica ρ_{xy} (Fig 6.7c), apresentam uma variação considerável decorrente da zona de distorção estática. As curvas anisotrópicas, porém, aparecem com um decaimento bem menor que a isotrópica. As fases correspondentes a estas componentes de resistividade aparente, não são muito afetadas pela distorção estática. Em Fig 6.7d, ϕ_{xy} isotrópico, vemos que a curva (f1), na região abaixo do corpo, sofre uma variação de pouco mais de 1 grau, o que parece não estar de acordo com a variação observada no gráfico da resistividade correspondente (Fig 6.7c), pois este mostra uma variação grande na região do corpo. Para as mesmas componentes, mas no caso anisotrópico (Fig 6.6c e 6.6d) podemos observar o mesmo comportamento, assim como para ρ_{xx} e ϕ_{xx} anisotrópicos (Fig 6.6a e Fig 6.6b). O mesmo não se pode dizer sobre as componentes ρ_{yx} e ρ_{yy} e as respectivas fases, ϕ_{yx} e ϕ_{yy} , dos gráficos iso e anisotrópicos.

Podemos perceber que a anisotropia pode causar interpretações erradas sobre a estrutura da subsuperfície de um terreno, como quanto aos valores de resistividades das camadas. E que alguns comportamentos nos dados observados nos gráficos e seções podem dar indício de sua presença no terreno, como as tendências dos valores das seções das componentes ρ_{xx} e ρ_{yy} , e a singularidade observada a uma certa faixa de frequência.

7 CONCLUSÕES

A modelagem direta do MT com anisotropia, em estruturas uni e bidimensionais, evoluiu bastante desde que o método foi proposta na década de 50 por Cagnard e Tikhonov. Muitas metodologias analíticas foram apresentadas para a formulação do caso 1D, assim como vários métodos numéricos foram utilizados na solução do problema 2D. Em 2008, Yuguo Li e Pek mostraram que o método numérico dos Elementos Finitos é mais viável que o método das Diferenças finitas para tratar de modelos mais realistas envolvendo batimetria e topografia.

Motivados por isso apresentamos uma modelagem alternativa para o problema do MT 2D com anisotropia arbitrária usando o método dos Elementos Finitos. Separando o campo medido pelo receptor em duas partes, primária e secundária. A análise dos resultados dos modelos apresentados neste trabalho mostram que esta formulação é eficiente para modelar os dados MT.

A formulação do problema em termos do campo secundário traz vantagens para a modelagem, em termos da precisão dos resultados. A resposta do campo primário é obtida analiticamente para cada ponto que corresponde a um nó da malha de elementos finitos. Como o campo primário tem intensidade bem maior do que o secundário, esta formulação proporciona maior precisão numérica na solução final do que aquelas que calculam diretamente o campo total em cada ponto. Além disso, a condição de fronteira homogênea para o campo secundário é implementada de maneira extremamente simples.

A modelagem apresentada aqui permitiu uma análise dos dados MT em situações totalmente gerais, nas quais os efeitos da anisotropia, seja nas camadas, seja nas heterogeneidades, podem ser observados e estudados em detalhe quaisquer que sejam suas motivações geológicas.

Os próximos passos nesta pesquisa serão no sentido de aplicar a metodologia a modelos de bacias sedimentares conhecidas e a levantamentos marinhos. Em seguida, os efeitos da anisotropia sobre a inversão de dados MT poderão ser analisados. A mesma metodologia poderá ser aplicada para o cálculo da resposta em modelos tridimensionais.

REFERÊNCIAS

ABRAMOVICI, F. The forward magnetotelluric problem for an inhomogeneous and anisotropic structure. *Geophysics*, v. 39, n. 1, p. 56-68. 1974.

ABRAMOVICI, F.; SHOHAM, Y. Inversion of anisotropic magnetotelluric data *Geophys. J. R. astr. Soc.*, v. 50, p. 55-74. 1977.

ABREU, P. M. *Estudos geofísicos (Magnetotelúrico e Eletromagnético Transiente) da porção leste da Bacia do Parnaíba: Contribuição ao conhecimento Hidrogeológico*. 2002. 130 f. Dissertação (Mestrado em Geofísica) – Pós Graduação em Geofísica, Observatório Nacional, Rio de Janeiro - RJ, 2002.

BERDICHEVSKY, M. N. Electrical prospecting with a telluric current method. *Quarterly of the Colorado School of Mines*, v. 60, n. 1, p. 1-216. 1965. (apud ZHDANOV, 2010)

BERDICHEVSKY, M. N.; DMITRIEV, V. I. Basic principles of interpretation of magnetotelluric sounding curves. In: A. Adam ed. *Geoelectric and Geothermal studies*. Akademiai Kiado, p. 165-221. (apud ZHDANOV, 2010)

—. Magnetotelluric in the context of theory of ill-posed problems. *SEG*. 2002. (apud ZHDANOV, 2010)

—. Model and methods of magnetotellurics. In: *Springer-Verlag*, 2008. Berlin, 2008. (apud ZHDANOV, 2010)

BERDICHEVSKY, M. N.; ZHDANOV, M. S. Advanced theory of deep geomagnetic sounding. *Elsevier Scientific Publ. Co., Inc.* 1984. (apud ZHDANOV, 2010)

BOOKER, J. R.; CHAVE, A. D. Introduction to the special section on the EMSLAB — Juan and Fuca experiment. *Journal of Geophysical Research*. v. 94, n. B10, p 14093 - 14098. 1989. doi: 10.1029/JB094iB10p14093. (apud ZHDANOV, 2010)

BOLDRINI, J. L.; COSTA, S. I. R.; FIGUEIREDO, V. L.; WETZLER, H. G. *Álgebra Linear*. 3ª Ed. São Paulo: Editora Harbra Ltda, 1980.

BUTKOV, E. *Física Matemática*. Rio de Janeiro-RJ: LTC-Livros técnicos e Científicos Editora S.A., 1988.

CAGNIARD, L. Basic theory of the magnetotelluric method of geophysical prospecting. *Geophysics*, v. 18, p. 605 - 635. 1953.

CASTELLS, A. M. *A Magnetotelluric Investigation of Geoelectrical Dimensionality and Study of the Central Betic Crustal Structure*. 2006. 325 f. PhD Thesis (Doctora en Física) – Departament de Geodinàmica i Geofísica, Universitat de Barcelona, Barcelona, 2006.

- CHETAEV D. N. The determination of the anisotropy coefficient and the angle of inclination of a homogeneous anisotropic medium by measuring the impedance of the natural electromagnetic field. *Bull. Acad. Sci. USSR Geophys. Ser.*, n. 4, p. 407-408. 1960.
- EGBERT, G. D.; BOOKER, J. R. Robust estimation of geomagnetic transfer functions. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*. v. 87, p. 173 - 194. 1986. (apud ZHDANOV 2010)
- EISEL, M.; HAAK, V. Macro-anisotropy of the electrical conductivity of the crust: a magnetotelluric study of the German continental deep drilling site (KTB). *Geophysics Journal international*, v. 136, p. 109 - 122. 1999.
- FEYNMAN, R. P.; LEIGHTON, R. B.; SANDS, M. *Lições de Física*. São Paulo: Bookman Companhia Editora Ltda, 2008.
- GOUGH, D. I.; MCKIRDY, D. M.; WOODS, D. V.; GEIGER, H. Conductive structures and tectonics beneath the EMSLAB land array. *Journal of Geophysical Research*. v. 94, n. B10, p. 14099 - 14110. 1989. doi: 10.1029/JB094iB10p14099. (apud ZHDANOV 2010)
- JIRACEK, G. R.; RODI, W. L.; VANYAN, L. L. Implications of magnetotelluric modeling on the deep crustal environment in the Rio Grande rift *Physics of the Earth and Planetary Interiors*. v. 45, n. 2, p. 179 - 192. 1987. doi: 10.1016/0031-9201(87)90052-5. (apud ZHDANOV 2010)
- KEAREY, P.; BROOKS, M.; HILL, I. *Geofísica de Exploração*. São Paulo - SP: Oficina de Textos, 2009.
- LEMOS, N. A. *Mecânica Analítica*. 2ª Ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2007.
- LI, Y. A finite-element algorithm for electromagnetic induction in 2D anisotropic conductivity structures. *Geophys. J. Int.*, v. 148, p. 389 - 401. 2002.
- LI, Y.; PEK, J. Adaptive finite element modelling of 2D MT fields in general anisotropic media. *Geophys. J. Int.*, v. 175, p. 942 - 954. 2008.
- LOSETH, L. O.; URSIN, B. Electromagnetic fields in planarly layered anisotropic media. *Geophys. J. Int.*, v. 170, p. 44 - 80. 2007.
- MADDEN, T. M.; MACKIE, R. L. Three-dimensional magnetotelluric modelling and inversion. *Proceedings of the IEEE*, v. 77, no 2, p. 318 - 332. 1989. doi: 10.1109/5.18628. (apud ZHDANOV 2010)
- MANN, J. E.; Jr. The importance of the anisotropic conductivity in magnetotelluric interpretation. *Journal of Geophysical Research*, v. 70, no 12, p2940-2942. 1965.
- MARESCHAL, M.; KELLETT, R.L.; KURTZ, R.D.; LUDDEN, J.N., BAILEY, R. C. Archean cratonic roots, mantle shear zones, and deep electrical anisotropy. *Nature* v. 375, p. 134 - 137. 1995.

- MORRISON, H. F.; WOMBWELL, E.; WARD, S. H. Analysis of earth impedances using magnetotelluric fields . *journal of Geophysics Research* v. 73, p. 2769 - 2778. 1968. doi: 10.1029/JB073i008p02769. (apud ZHDANOV, 2010)
- NABIGHIAN, M. N. Electromagnetic methods in applied geophysics. In: VOZOFF, K. *The magnetotelluric method*. USA: Society of exploration Geophysics, 1991.
- NEUNHAM, R. E. *Properties of Materials Anisotropy, Symmetry, Structure*. New York: Oxford University Press Inc., 2005.
- O'BRIEN, D. P.; MORRISON, H. F. Electromagnetic Fields in an n-layer Anisotropic half-space. *Geophysics*, v. 32, n. 4, p. 668 - 677. 1967.
- PARKHOMENKO, E. I. *Electrical Properties of Rocks*. New York: Plenum Press, 1967.
- PEK, J.; SANTOS, F. A. M. Magnetotelluric impedances and parametric sensitivities for 1-D anisotropic layered media, *Computer & Geosciences*, v.28, p. 939 - 950. 2002.
- PEK, J.; SANTOS, F. A. M. Magnetotelluric inversion for anisotropic conductivities. In: ELEKTROMAGNETISCHE TIEFENFORSCHUNG, 2001, Burg Ludwigstein. *Kolloquium...* Burg Ludwigstein: [s.n.], 2001. p. 1.10 - 5.10.
- PEK, J.; SANTOS, F. A. M. Magnetotelluric inversion for anisotropic conductivities in layered media. *Physics of the Earth and Planetary Interiors* v. 158, p. 139 - 158. 2006.
- PEK, J.; VERNER, T. Finite-difference modelling of Magnetotelluric fields in 2D anisotropic media. *Geophys. J. Int.*, v. 128, p. 505 - 521. 1997.
- PINTO, V. R. *O Método Magnetotelúrico Marinho (MMT) na Exploração de Hidrocarbonetos*. 2009. 87 f. Dissertação (Mestrado em Geofísica) – Programa de Pós-Graduação em Geofísica, Observatório Nacional, Rio de Janeiro - RJ, 2009.
- PORSANI, J. L.; FONTES, S. L. O método magnetotelúrico aplicado à bacia do São Francisco, Minas Gerais. *Brazilian Journal of Geophysics*, v. 19, n. 2, p 145-154. 2001.
- PRAUS, O.; PETR, V. Magnetotelluric calculations for the interaction of polarized fields with anisotropic layered media. *Canadian Journal of Earth Science*. v. 6, p. 759-769. 1969.
- RANKIN, D.; REDDY, I. K. A magnetotelluric study of resistivity anisotropy. *Geophysics*, v.34, n. 3, p.438 - 449. 1969.
- REDDY, I. K.; RANKIN, D. Magnetotelluric effect of dipping anisotropies, *Geophysical Prospecting*, v. 19, p. 84 - 97. 1971.
- REDDY, I. K.; RANKIN, D. Magnetotelluric response of laterally inhomogeneous and anisotropic media. *Geophysics*, v. 40, n. 6, p. 1035 - 1045. 1975.
- REGIS, C. R. T. *Inversão Vinculada de dados de EMAP e MT - 1D anisotrópico*. 2000. 98 f. Tese (Doutorado em Geofísica) – Curso de Pós-Graduação em Geofísica, Universidade Federal do Pará, Belém-PA, 2000.

REGIS, C. R. T.; RIJO, L. 1-D inversion of anisotropic magnetotelluric data. In: IC Soc. Bras. Geof. Ed., 50th 1997, Brazil. *Extended Abstracts book*, Brazil: [s.n.], 1997. v. II, 673 - 674.

REGIS, C. R. T.; RIJO, L. Approximate equality constraints in the inversion of anisotropic MT data. In: WORKSHOP ON ELECTROMAGNETIC INDUCTION IN THE EARTH, 15th 2000, Cabo Frio, Brazil. *Abstracts book*, Cabo Frio: [s.n.], 2000. p. 47.

REITZ, J. R.; MILFORD, F. J.; CHRISTY, R. W. *Fundamentos da Teoria Eletromagnética*. Rio de Janeiro: Elsevier Editora Ltda, 1982.

RIJO, L. *Teoria dos métodos elétricos e eletromagnéticos I e II*. Belém-PA, 1991. (Notas de aulas do curso)

RIJO, L. *Respostas Eletromagnéticas de dimensões $2\frac{1}{2}$ e $3\frac{1}{2}$* . 1996. 75 f. Dissertação apresentada ao concurso de professor titular do Departamento de Geofísica do Centro de Geociências da UFPA, Belém-PA, 1996.

ANISOTROPIA estrutural. a) 2005. Disponível em: <http://www.flickr.com/photos/yewenyi/436239731>, b) Disponível em: http://domingos.home.sapo.pt/form_mont_3.html. Acessados em: 26/02/2012.

SCHMUCKER, U. Anomalies of geomagnetic variations in the southwestern United States. University of California Press. 1970. (apud ZHDANOV, 2010)

SINHA, A. K. The magnetotelluric effect in an inhomogeneous and anisotropic earth. *Geop exploration*, v. 7, p. 9 - 28. 1969.

STRANG, G. *Introduction to linear algebra*. 3rd Ed. Estados Unidos: Wellesley-Cambridge Press, 2003.

TEIXEIRA, W.; TAIOLI, F.; FAIRCHILD, T.; TOLEDO, C. *Decifrando a terra*. 3^a reimpressão. São Paulo - SP: Companhia Editora Nacional, 2008.

TIKHONOV, A.N. On determining electrical characteristics of deep layers of the earth's crust. *Doklady*, v. 73, n. 2, p. 295 - 297. 1950.

VANYAN, L. L.; BUTKOVSKAYA, A. I. Magnetotelluric sounding of layered media (in Russian). *Nedra*. 1980. (apud ZHDANOV, 2010)

VOZOFF, K. The magnetotelluric method in the exploration of sedimentary basins. *Geophysics*, v. 37, p. 98 - 141. 1972. doi:10.1190/1.1440255. (apud ZHDANOV, 2010)

WANNAMAKER, P. E. Advanced in three-dimensional magnetotelluric modeling using integral equations. *Geophysics*, v. 56, p. 1716 - 1728. 1991. (apud ZHDANOV, 2010)

WANNAMAKER, P. E.; BOOKER, J. R.; JONES, A. G. CHAVE, A. D.; FILLOUX, J. H.; WAFF, H. S.; LAW, L. K. Resistivity cross section through the Juan de Fuca subduction system and its tectonic implications. *Journal of Geophysics Research*, v. 94, n. B10, p. 14127 - 14144. 1989. doi: 10.1029/JB094iB10p14127. (apud ZHDANOV, 2010)

- WEAVER, J. T. Mathematical methods for geoelectromagnetic induction. *Research Studies Press*, 1994. (apud ZHDANOV, 2010)
- WEIDELT, P. Electromagnetic induction in three-dimensional structures. *Journal of Geophysics*, v. 41, n. 1, p. 85 - 109. 1975. (apud ZHDANOV, 2010)
- WEIDELT, P. Elektromagnetische Induktion in dreidimensional anisotropen Leitern, In: BAHR, K.; JUNGE, A. (Eds). *Protokoll kolloquium elektromagnetische tiefenforschung*. Burg Ludwigstein: DGG, 1996. p. 60-73. (apud LI, 2002)
- YIN, C. MMT forward modeling for a layered earth with arbitrary anisotropy. *Geophysics*, v. 71, n. 3, p. G115 - G128. 2006.
- ZHDANOV, M. S. Electromagnetic geophysics: Notes from the past and the road ahead, *Geophysics*, v. 75, n. 5, p. 75A49 - 75A46. 2010.
- ZHDANOV, M. S. *Geophysical electromagnetic theory and methods*. 1^a Ed. Amsterdam: Elsevier B. V., 2009.