



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM GEOFÍSICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

LÚCIO ALAN PIRES DA COSTA

**MIGRAÇÃO USANDO EQUAÇÃO DA ONDA UNIDIRECIONAL DE ABERTURA
ARBITRÁRIA**

BELÉM- PARÁ
2007

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM GEOFÍSICA

LÚCIO ALAN PIRES DA COSTA

**MIGRAÇÃO USANDO EQUAÇÃO DA ONDA UNIDIRECIONAL DE ABERTURA
ARBITRÁRIA**

**Dissertação apresentada ao Programa de Pós-
Graduação em Geofísica da Universidade Federal do
Pará, para obtenção do título de Mestre em Geofísica.**

**Área de Concentração:
Métodos Sísmicos**

Orientador: Dr. Jessé Carvalho Costa

BELÉM-PARÁ
2007

LÚCIO ALAN PIRES DA COSTA

**MIGRAÇÃO USANDO EQUAÇÃO UNIDIRECIONAL DE ABERTURA
ARBITRÁRIA**

Dissertação apresentada ao Programa Pós-Graduação em
Geofísica da Universidade Federal do Pará, para obtenção do
título de Mestre em Geofísica.

BANCA EXAMINADORA:



UFPA Prof. Dr. Jesse Carvalho Costa (Orientador)



UFPA Prof. Dr. Marcus Pinto da Costa da Rocha



Prof. Dr. Reynam da Cruz Pestana

BELÉM

2007

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação(CIP)
Biblioteca Geól. Rdº Montenegro G. de Montalvão

Costa, Lúcio Alan Pires da

C837m Migração usando equação da onda unidirecional de
abertura arbitrária / Lúcio Alan Pires da Costa. – 2007
51 f. : il.

Dissertação (Mestrado em Geofísica) – Programa de Pós-
Graduação em Geofísica, Instituto de Geociências,
Universidade Federal do Pará, Belém, 2007.

Orientador: Jessé Carvalho Costa

1. Equações unidirecionais. 2. Relação de dispersão. 3.
Rigidez de um semi-espaço. 4. Elementos finitos. 5. Migração
sísmica. I.Universidade Federal do Pará II. Costa, Jessé
Carvalho, Orient. III. Título.

CDD 20º ed.: 515.353

Dedico este trabalho aos meus pais.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente aos meus pais Maria Lucila e José por todo apoio e colaboração.

Agradeço a todos os amigos que colaboraram de forma direta ou indireta para a execução deste trabalho.

Agradeço ao CNPq por ter fornecido a minha bolsa de estudos.

Agradeço aos meus irmãos por todo apoio e esforço em manter minha ausência imperceptível aos nossos entes mais próximos.

Agradeço também à minha namorada Jacqueline pelo apoio e compreensão durante todo esse tempo em que estive ausente.

Aos membros da banca pelas valiosas sugestões e, particularmente, ao Prof. Reynam Pestana pela revisão criteriosa do texto.

Por fim, agradeço ao meu orientador Professor Jessé Carvalho por toda atenção dispensada durante este trabalho.

RESUMO

Neste trabalho avaliamos uma classe de operadores de continuação de campos de onda, baseados em equações unidirecionais e com aplicação direta à migração sísmica. O método de representação de equações de onda unidirecionais, desenvolvido neste trabalho, é válido para abertura angular arbitrária, baseia-se no conceito de rigidez de um semi-espaço, na transformação Dirichlet-Neumann e em sua discretização por elementos finitos. O método de construção dos operadores de continuação requer a introdução de variáveis auxiliares cujo número cresce em função da maior abertura angular desejada para o operador. Efetuamos a implementação no domínio do espaço e da frequência o que permite sua imediata paralelização. Baseados em experimentos numéricos, que avaliam a relação de dispersão e a resposta ao impulso do operador, propomos prescrições que permitem especificar o número de variáveis auxiliares e o passo de continuação para o operador de migração. A aplicação do algoritmo nos dados do modelo de domo salino da SEG-EAGE demonstra a capacidade do algoritmo em migrar refletores com forte mergulho em meios com forte variação lateral de velocidade.

Palavras Chaves: Equações Unidirecionais. Relação de Dispersão. Rigidez de um Semi-espaço. Elementos Finitos. Migração Sísmica.

ABSTRACT

The arbitrarily wide angle wave equations are applied to post-stack migration. This class of wavefield continuation operators are based on the concept of semi-space stiffness, Dirichlet to Neumann transformations and its discretization using finite elements. The specification of the continuation operator requires auxiliary variables. The number of these variables increase with the maximum angular aperture. The algorithm is implemented in space-frequency domain which allows straightforward parallelization. Based on numerical experiments using the dispersion relation and the impulse response of these operators we prescribe the number of auxiliary variables and downward continuation step. The migration of the zero offset SEG-EAGE data using the wide angle continuation operators shows their effectiveness for imaging steep dips in a complex velocity model.

keywords: One-Way Wave Equation. Dispersion Relation. Stiffness Relation. Finite Elements. Seismic Migration.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

<p>Figura 3.1 Ajuste da relação de dispersão exata (linha sólida) usando a aproximação $AWWE_3$ (linha sólida em negrito) . Os parâmetros otimizados são $\theta_1 = 0.0$, $\theta_2 = 45.0$ e $\theta_3 = 75.0$.</p>	26
<p>Figura 3.2 Ajuste da relação de dispersão exata (linha sólida) usando a aproximação $AWWE_3$ (linha em negrito). Os parâmetros são $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = 0.0$. Observa-se que o ajuste é aceitável para número de onda inferior a 2, indicando que a escolha dos parâmetros depende da abertura angular considerada.</p>	26
<p>Figura 3.3 Ajuste da relação de dispersão exata (linha sólida) utilizando a aproximação $AWWE_4$. O conjunto de parâmetros ótimos utilizado foi $\theta_1 = 0.0$, $\theta_2 = 45.0$, $\theta_3 = 45.5$ e $\theta_4 = 65.5$.</p>	27
<p>Figura 3.4 Ajuste da relação de dispersão exata (linha sólida) usando a aproximação $AWWE_5$ (linha sólida em negrito) com parâmetros otimizados: $\theta_1 = 5.0^\circ$, $\theta_2 = 60.0^\circ$, $\theta_3 = 60.0^\circ$, $\theta_4 = 60.0^\circ$ e $\theta_5 = 25.5^\circ$.</p>	27
<p>Figura 3.5 Ajuste da relação de dispersão exata (linha sólida) usando a aproximação $AWWE_5$ (linha sólida em negrito). Todos os parâmetros θ_i são nulos. Esta escolha produz um ótimo ajuste no intervalo de número de onda de 0 a 2.5.</p>	28
<p>Figura 3.6 Parte real e parte imaginária da aproximação da relação de dispersão pela $AWWE_{10}$ com a escolha de parâmetros otimizados e relação exata.</p>	28
<p>Figura 3.7 Resultado verificado para a Resposta ao Impulso do operador $AWWE_3$ para um meio homogêneo usando a prescrição dos parâmetros ótimos $\theta_1 = 0.0$, $\theta_2 = 45.0$ e $\theta_3 = 75.0$.</p>	29
<p>Figura 3.8 Resposta ao Impulso do operador $AWWE_4$ para um meio homogêneo usando os parâmetros $\theta_1 = 0.0$, $\theta_2 = 45.0$, $\theta_3 = 45.5$ e $\theta_4 = 65.0$.</p>	30
<p>Figura 3.9 Resposta ao Impulso do operador $AWWE_5$ para um meio homogêneo usando os parâmetros $\theta_1 = 5.0$, $\theta_2 = 60.0$, $\theta_3 = 60.0$, $\theta_4 = 60.0$ e $\theta_5 = 25.5$.</p>	30
<p>Figura 3.10 Modelo de velocidade para o modelo Marmousi</p>	31
<p>Figura 3.11 Resposta ao impulso do operador $AWWE_3$ para o modelo Marmousi .</p>	31
<p>Figura 3.12 Resposta ao impulso do operador $AWWE_4$ para o modelo modelo Marmousi</p>	32

Figura 3.13 Resposta ao impulso do operador $AWWE_5$ para o modelo Marmousi .	32
Figura 3.14 Seção de afastamento nulo gerada através do modelo do refletor explosivo com um ponto difrator localizado na posição (0,2000m) no modelo Marmousi.	34
Figura 3.15 Migração da seção de afastamento nulo associada a um ponto difrator no modelo Marmousi com a aproximação $AWWE_3$	34
Figura 3.16 Migração da seção de afastamento nulo associada a um ponto difrator no modelo Marmousi com a aproximação $AWWE_4$	35
Figura 3.17 Migração da seção de afastamento nulo associada a um ponto difrator no modelo Marmousi com a aproximação $AWWE_5$	35
Figura 4.1 Modelo de velocidade da seção sísmica em profundidade do domo salino da SEG-EAGE.	36
Figura 4.2 Modelo do Domo Salino - seção de afastamento nulo.	37
Figura 4.3 Modelo do Domo Salino da SEG-EAG Migrada com o operador Phase Shift Plus Interpolation - PSPI.	37
Figura 4.4 Modelo do Domo Salino da SEG-EAG Migrada com o operador $AWWE_3$.	38
Figura 4.5 Modelo do Domo Salino da SEG-EAG Migrada com o operador $AWWE_5$.	39

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	11
2	EQUAÇÃO DA ONDA UNIDIRECIONAL: ABORDAGEM POR ELEMENTOS FINITOS	13
2.1	PROPAGAÇÃO DA ONDA EM MEIOS ACÚSTICOS	13
2.2	EQUAÇÕES UNIDIRECIONAIS DA ONDA	14
2.3	MAPEAMENTO DE DIRICHLET PARA NEUMANN	15
2.4	REPRESENTAÇÃO DA RIGIDEZ DINÂMICA USANDO EQUAÇÕES UNIDIRECIONAIS	16
2.5	REPRESENTAÇÃO DA RIGIDEZ DINÂMICA USANDO ELEMENTOS FINITOS	16
2.6	CASO 2-D	20
2.7	RELAÇÃO DE DISPERSÃO	21
2.8	OPERADOS PARA MEIOS DE IMPEDÂNCIA CONSTANTE	23
3	EXPERIMENTOS NUMÉRICOS COM A APROXIMAÇÃO AWW	25
3.1	ESCOLHA DOS PARÂMETROS DA APROXIMAÇÃO $AWW E_n$	25
3.2	AVALIAÇÃO DA RESPOSTA AO IMPULSO EM MEIO HOMOGENEO	29
3.3	RESPOSTA AO IMPULSO NO MODELO MARMOUSI	30
3.4	PONTO DIFRATOR NO MODELO MARMOUSI	33
4	APLICAÇÃO AOS DADOS SEG-EAGE	36
4.1	RESULTADO DA MIGRAÇÃO	37
5	CONCLUSÃO	40
	REFERÊNCIAS	41
	APÊNDICE A – Implementação no domínio da frequência	44
	APÊNDICE B – Mudança de índices para o sistema linear	47
	APÊNDICE C – Pseudocódigo	51

1 INTRODUÇÃO

Métodos de migração baseados na equação da onda unidirecional (OWWE) foram introduzidos em geofísica por Claerbout (CLAERBOUT, 1970), (CLAERBOUT, 1985) e (CLAERBOUT; DOHERTY, 1972) como alternativa aos métodos de migração do tipo Kirchhoff (BERKHOUT, 1981). Esta abordagem permite a migração de dados em modelos com forte variação lateral de velocidade. Em geofísica a direção de propagação escolhida é, em geral, a direção vertical e a equação unidirecional é aproximada em meios com variação lateral de velocidade. Entretanto, as aproximações da equação da onda unidirecional apresentam limitação quanto relação à abertura angular relativa à direção de propagação. Como consequência não apresentam bom desempenho na migração de eventos com forte mergulho. Para superar esta limitação, aproximações da equação de onda válidas para grande abertura angular (acima de 45°) foram propostas, ver por exemplo Lindman (1975), Berkhout (1979) e Lee e Suh (1985). Alguns destes operadores apresentam limitação em relação à dispersão numérica e tratamento inadequado de ondas evanescentes. Da combinação da representação da equação da onda unidirecional, usando operadores no domínio da frequência e número de onda com operadores no domínio do espaço e da frequência, surgiram os métodos híbridos e entre eles temos o assim denominado *Fourier finite difference* - FFD (RISTOW; RÜHL, 1994). O método FFD permite aproximações de grande abertura angular, mas se mostrou instável para meios com forte variação lateral. Biondi (2002) propôs uma formulação incondicionalmente estável para o método FFD mas com um alto custo computacional em modelos com forte variação lateral.

Aproximações para equações acústicas unidirecionais, válidas para abertura angular arbitrária (AWWE - *Arbitrarily wide-angle wave equation*), foram propostas recentemente (HEYDARI; GUDDATI, 2005). Esta abordagem utiliza a transformação de Neumann para Dirichlet para aproximar a equação da onda acústica unidirecional e a discretização das equações resultantes usando o método de elementos finitos. Este método requer a introdução de variáveis auxiliares em cada nível de continuação. O número destas variáveis cresce quanto maior a abertura angular desejada para aproximar o operador. Uma aplicação deste método para migração de dados sísmicos no domínio do espaço e do tempo se encontra em Heydari e Guddati (op.cit.). Guddati (2006) mostra que este método pode ser estendido para a equação da onda elástica e para meios anisotrópicos.

Neste trabalho apresentamos o método de Heidari e Guddati (op.cit.) para aproximar a equação de onda unidirecional. A formulação e implementação para a migração foi

feita diferentemente de Guddati, que implementou no domínio do tempo-espço. Neste trabalho escolhemos realizar a implementação no domínio da frequência-espço. Uma vantagem desta abordagem é a imediata paralelização do algoritmo. Estudando a aproximação da AWE para o espectro do operador da equação de onda unidirecional em meios homogêneos, prescrevemos aproximações ótimas em relação à abertura angular e ao número de variáveis auxiliares necessárias para a implementação. Tanto a parte real quanto a parte imaginária do espectro são aproximadas. Os operadores ótimos foram validados avaliando-se a resposta ao impulso do operador em meios homogêneos e heterogêneos. Finalmente, apresentamos a aplicação do algoritmo em dois conjuntos de dados sintéticos. O primeiro consiste dos dados do modelo Marmousi e o segundo de dados do modelo de domo salino da SEG-EAGE.

2 EQUAÇÃO DA ONDA UNIDIRECIONAL: ABORDAGEM POR ELEMENTOS FINITOS

Apresentamos uma revisão das equações unidirecionais em acústica a partir das equações que governam o campo de onda acústico. A seguir apresentamos a metodologia proposta por Guddati (2006) que nos permite obter aproximações para as equações unidirecionais. O mapeamento Neumann-Dirichlet, essencial para se obter as equações unidirecionais, e a discretização desta transformação usando elementos finitos são apresentados em detalhe. Aproximações para as equações unidirecionais com precisão arbitrária são deduzidas para meios acústicos com densidade variável e meios com impedância constante.

2.1 PROPAGAÇÃO DA ONDA EM MEIOS ACÚSTICOS

As equações de evolução para o campo acústico na ausência de fontes são

$$\rho(\mathbf{x}) \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = -\nabla p(\mathbf{x}, t) , \quad (2.1)$$

$$\frac{1}{\kappa(\mathbf{x})} \frac{\partial p(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) , \quad (2.2)$$

em que $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ e $p(\mathbf{x}, t)$ representam o campo de velocidade e pressão, respectivamente, na posição de coordenadas $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ e no instante t ; $\rho(\mathbf{x})$ representa a densidade e $\kappa(\mathbf{x})$ o módulo de incompressibilidade. A equação da onda acústica é obtida tomando-se o divergente da equação (2.1) e substituindo na derivada parcial em relação ao tempo da equação (2.2),

$$\frac{1}{\kappa(\mathbf{x})} \frac{\partial^2 p(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} = \nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho(\mathbf{x})} \nabla p(\mathbf{x}, t) \right) .$$

Substituindo a representação do campo acústico no domínio de Fourier,

$$p(\mathbf{x}, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(\mathbf{x}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega ,$$

nas equações (2.1) e (2.2), observando que a densidade e o módulo de compressibilidade são estacionários (não variam com o tempo), obtemos a equação de onda no domínio do espaço e frequência, $X - \omega$. Desta forma temos que:

$$\nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho(\mathbf{x})} \nabla P(\mathbf{x}, \omega) \right) - \frac{(-i\omega)^2}{\kappa(\mathbf{x})} P(\mathbf{x}, \omega) = 0 .$$

Considerando o caso em que as propriedades físicas são funções apenas de $\mathbf{y} \equiv (x_1, x_2)$, podemos reescrever a equação acima na forma

$$\frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{1}{\rho(\mathbf{y})} \frac{\partial P(\mathbf{x}, \omega)}{\partial x_3} \right) + \mathbf{D}P(\mathbf{x}, \omega) = 0 \quad (2.3)$$

em que o operador diferencial \mathbf{D} é dado por:

$$\mathbf{D} \equiv \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{1}{\rho(\mathbf{y})} \frac{\partial}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{1}{\rho(\mathbf{y})} \frac{\partial}{\partial x_2} \right) - \frac{(-i\omega)^2}{\kappa(\mathbf{y})} \right]. \quad (2.4)$$

2.2 EQUAÇÕES UNIDIRECIONAIS DA ONDA

Considerando soluções harmônicas em x_3 para (2.3) da forma:

$$P(\mathbf{x}, \omega) = \Phi(\mathbf{y}, k_3, \omega) e^{ik_3 x_3}$$

obtemos

$$\left[(ik_3)^2 + \rho(\mathbf{y})\mathbf{D} \right] \Phi(\mathbf{y}, k_3, \omega) e^{ik_3 x_3} = 0,$$

que pode ser formalmente fatorada em

$$\left[ik_3 + \sqrt{\rho(\mathbf{y})\mathbf{D}} \right] \left[ik_3 - \sqrt{\rho(\mathbf{y})\mathbf{D}} \right] \Phi(\mathbf{y}, k_3, \omega) e^{ik_3 x_3} = 0.$$

Esta condição nos leva as soluções formais do tipo

$$\left[ik_3 - \sqrt{\rho(\mathbf{y})\mathbf{D}} \right] \Phi(\mathbf{y}, k_3, \omega) e^{ik_3 x_3} = 0$$

e

$$\left[ik_3 + \sqrt{\rho(\mathbf{y})\mathbf{D}} \right] \Phi(\mathbf{y}, k_3, \omega) e^{ik_3 x_3} = 0,$$

tais equações nos permitem escrever equações unidirecionais como:

$$\frac{\partial P(\mathbf{x}, \omega)}{\partial x_3} = \pm i \sqrt{\rho(\mathbf{y})\mathbf{D}} P. \quad (2.5)$$

Estas equações descrevem ondas que se propagam progressivamente ao longo da direção x_3 , ou seja,

$$\frac{\partial P}{\partial x_3} = -\frac{(-i\omega)}{c(\mathbf{y})} \sqrt{1 + \rho(\mathbf{y}) \frac{c^2(\mathbf{y})}{\omega^2} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{1}{\rho(\mathbf{y})} \frac{\partial}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{1}{\rho(\mathbf{y})} \frac{\partial}{\partial x_2} \right) \right]} P, \quad (2.6)$$

e ondas que se propagam retrogradamente,

$$\frac{\partial P}{\partial x_3} = +\frac{(-i\omega)}{c(\mathbf{y})} \sqrt{1 + \rho(\mathbf{y}) \frac{c^2(\mathbf{y})}{\omega^2} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{1}{\rho(\mathbf{y})} \frac{\partial}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{1}{\rho(\mathbf{y})} \frac{\partial}{\partial x_2} \right) \right]} P. \quad (2.7)$$

Nas equações (2.6) e (2.7) estamos utilizando a relação $\kappa(\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{x})c^2(\mathbf{x})$, em que $c(\mathbf{x})$ representa a velocidade de propagação.

Um caso particular importante para aplicação em migração é considerar um meio com impedância constante, ou seja, a relação $\rho(\mathbf{x})c(\mathbf{x}) = Z$ permanece constante independentemente da posição. Neste caso, a equação da onda unidirecional progressiva é

$$\frac{\partial P}{\partial x_3} = -\frac{(-i\omega)}{c(\mathbf{y})} \sqrt{1 + \frac{c(\mathbf{y})}{\omega^2} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left(c(\mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(c(\mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial x_2} \right) \right]} P. \quad (2.8)$$

Esta representação formal de equações de onda unidirecionais requer que se atribua significado ao operador $\sqrt{\mathbf{D}}$. Em meios homogêneos, este operador admite representação exata no domínio de números de onda. Em meios com variação lateral, aproximações da raiz quadrada usando série de Taylor ou aproximações de Padé são utilizadas e fundamentam os algoritmos de migração por diferenças finitas no domínio do espaço e frequência, (X, ω) . Segundo Guddati e Heydari (2005), a utilização do método de elementos finitos apresenta uma nova aproximação para as equações de ondas unidirecionais como discutimos a seguir.

2.3 MAPEAMENTO DE DIRICHLET PARA NEUMANN

No caso acústico o mapeamento Dirichlet para Neumann pode ser representado pela relação (GUDDATI; HEYDARI, 2005)

$$F \equiv -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} \Big|_{x_3=z_0} = KP|_{x_3=z_0}$$

em que K é definido como a rigidez dinâmica da interface z_0 . Considerando um semi-espaço homogêneo podemos determinar a rigidez dinâmica do meio utilizando duas abordagens: equações unidirecionais e elementos finitos. A segunda abordagem é muito mais conveniente para implementação numérica. Adicionalmente, Guddati (2006) mostrou que este método pode ser utilizado para obter uma representação exata do mapeamento de Dirichlet para Neumann em um semi-espaço, para o caso acústico e também para o caso elástico.

2.4 REPRESENTAÇÃO DA RIGIDEZ DINÂMICA USANDO EQUAÇÕES UNIDIRECIONAIS

Utilizando a equação unidirecional (2.5) e a definição de rigidez dinâmica obtém-se

$$KP = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P(\mathbf{x}, \omega)}{\partial x_3} = -\frac{i}{\rho} \sqrt{\rho \mathbf{D}} P = -i \sqrt{\frac{\mathbf{D}}{\rho}} P ,$$

ou, mais explicitamente, usando a expressão

$$\frac{\partial P}{\partial x_3} = -\frac{(-i\omega)}{c} \sqrt{1 + \rho \frac{c^2}{\omega^2} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_2} \right) \right]} P ,$$

e da definição de rigidez dinâmica obtém-se

$$KP = \frac{(-i\omega)}{\rho c} \sqrt{1 + \rho \frac{c^2}{\omega^2} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_2} \right) \right]} P ,$$

2.5 REPRESENTAÇÃO DA RIGIDEZ DINÂMICA USANDO ELEMENTOS FINITOS

A aproximação da equação de onda por elementos finitos pressupõe o semi-espaço representado por camadas homogêneas. Considerando uma camada, $z_0 < x_3 < z_1$, sobre o semi-espaço, o mapeamento de Dirichlet para Neumann em cada interface pode ser representado por

$$F_0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} \Big|_{x_3=z_0} = KP|_{x_3=z_0}$$

e

$$F_1 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} \Big|_{x_3=z_1} = KP|_{x_3=z_1} .$$

Aplicando o método variacional (CAREY; BECKER, 1981) para deduzir a aproximação de elementos finitos para equação de onda (2.3), obtém-se

$$\int_{z_0}^{z_1} \delta P(\mathbf{x}, \omega) \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial P(\mathbf{x}, \omega)}{\partial z} \right) + \mathbf{D}P(\mathbf{x}, \omega) \right] dz = 0 , \quad (2.9)$$

em que $\delta P(\mathbf{x}, \omega)$ representa o resíduo entre a solução de elementos finitos e a solução exata projetado no espaço de funções base. Integrando por partes a equação (2.9) temos

$$\int_{z_0}^{z_1} \left\{ \frac{\partial}{\partial z} \left(\delta P(\mathbf{x}, \omega) \frac{1}{\rho} \frac{\partial P(\mathbf{x}, \omega)}{\partial z} \right) + \left[-\frac{\partial \delta P(\mathbf{x}, \omega)}{\partial z} \frac{1}{\rho} \frac{\partial P(\mathbf{x}, \omega)}{\partial z} + \delta P(\mathbf{x}, \omega) \mathbf{D}P(\mathbf{x}, \omega) \right] \right\} dz = 0 ,$$

e que resulta em

$$\delta P(\mathbf{x}, \omega) \frac{1}{\rho} \frac{\partial P(\mathbf{x}, \omega)}{\partial z} \Big|_{z_0}^{z_1} + \int_{z_0}^{z_1} \left[-\frac{\partial \delta P(\mathbf{x}, \omega)}{\partial z} \frac{1}{\rho} \frac{\partial P(\mathbf{x}, \omega)}{\partial z} + \delta P \mathbf{D} P(\mathbf{x}, \omega) \right] dz = 0 .$$

Portanto,

$$-\delta P(\mathbf{x}, \omega) \frac{1}{\rho} \frac{\partial P(\mathbf{x}, \omega)}{\partial z} \Big|_{z_0}^{z_1} = -\delta P(\mathbf{x}, \omega) \frac{1}{\rho} \frac{\partial P(\mathbf{x}, \omega)}{\partial z} \Big|_{z_1} - \int_{z_0}^{z_1} \left[-\frac{\partial \delta P(\mathbf{x}, \omega)}{\partial z} \frac{1}{\rho} \frac{\partial P(\mathbf{x}, \omega)}{\partial z} + \delta P(\mathbf{x}, \omega) \mathbf{D} P(\mathbf{x}, \omega) \right] dz .$$

Ou,

$$\delta P(\mathbf{x}, \omega) K P(\mathbf{x}, \omega) \Big|_{z_0} = \delta P(\mathbf{x}, \omega) K P(\mathbf{x}, \omega) \Big|_{z_1} - \int_{z_0}^{z_1} \left[-\frac{\partial \delta P(\mathbf{x}, \omega)}{\partial z} \frac{1}{\rho} \frac{\partial P(\mathbf{x}, \omega)}{\partial z} + \delta P(\mathbf{x}, \omega) \mathbf{D} P(\mathbf{x}, \omega) \right] dz . \quad (2.10)$$

Em Guddati (2006), a equação (2.10) é avaliada usando funções base lineares em cada elemento. As integrais são aproximadas por quadratura usando o valor da função no ponto médio do intervalo. Como verifica-se abaixo, esta abordagem leva a recuperação da relação de dispersão exata para equação da onda unidirecional. Considerando funções base lineares na forma

$$\mathbf{N}^T = \left[\frac{z_1 - z}{L_1} \quad \frac{z - z_0}{L_1} \right] ,$$

em que L_1 é a espessura da camada do elemento finito, ou seja, $L_1 = z_1 - z_0$. Então

$$\frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial z} = \left[-\frac{1}{L_1} \quad \frac{1}{L_1} \right] ,$$

e

$$P(x_1, x_2, z, \omega) \approx \mathbf{N}^T \begin{bmatrix} P_0(x_1, x_2, \omega) \\ P_1(x_1, x_2, \omega) \end{bmatrix} ,$$

e da mesma forma

$$\delta P(x_1, x_2, z, \omega) = \mathbf{N}^T \begin{bmatrix} \delta P_0(x_1, x_2, \omega) \\ \delta P_1(x_1, x_2, \omega) \end{bmatrix} .$$

Utilizando estas aproximações, verifica-se que

$$\delta P K P \Big|_{z_0} \approx \delta P K P \Big|_{z_1} + \int_{z_0}^{z_1} \left[\begin{bmatrix} \delta P_0 & \delta P_1 \end{bmatrix} \left(\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial z} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial z} - \mathbf{N} \mathbf{D} \mathbf{N}^T \right) \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \end{bmatrix} \right] dz ,$$

e, portanto, a aproximação por elementos finitos é dada por:

$$\delta P_0 K P_0 = \delta P_1 K P_1 + \begin{bmatrix} \delta P_0 & \delta P_1 \end{bmatrix} \left[\int_{z_0}^{z_1} \left(\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial z} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial z} - \mathbf{N} \mathbf{D} \mathbf{N}^T \right) dz \right] \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \end{bmatrix} .$$

Definindo

$$\mathbf{S}^{(1)} \equiv \left[\int_{z_0}^{z_1} \left(\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial z} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial z} - \mathbf{N} \mathbf{D} \mathbf{N}^T \right) dz \right] ,$$

temos que:

$$\delta P_0 K P_0 = \delta P_1 K P_1 + \begin{bmatrix} \delta P_0 & \delta P_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{11}^{(1)} & S_{12}^{(1)} \\ S_{21}^{(1)} & S_{22}^{(1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \end{bmatrix} .$$

Para que esta relação seja obedecida para δP_0 e δP_1 arbitrários segue que

$$K P_0 = K P_1 + \begin{bmatrix} S_{11}^{(1)} & S_{12}^{(1)} \\ S_{21}^{(1)} & S_{22}^{(1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \end{bmatrix} ,$$

ou seja,

$$\begin{bmatrix} S_{11}^{(1)} - K & S_{12}^{(1)} \\ S_{21}^{(1)} & S_{22}^{(1)} + K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} .$$

Para obter soluções não nulas é necessário que

$$K^2 = S_{11}^{(1)} S_{22}^{(1)} - S_{12}^{(1)} S_{21}^{(1)} . \quad (2.11)$$

A observação fundamental feita por Guddati e Heydari (2005) é que avaliando $\mathbf{S}^{(1)}$ por quadratura, usando o valor da função no ponto médio do intervalo, resulta em que a expressão acima satisfaz exatamente a relação de dispersão para a equação da onda unidirecional. Para verificar este resultado

$$\begin{aligned} \mathbf{S}^{(1)} &\approx \frac{1}{\rho L_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} - \frac{L_1}{4} \begin{bmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{D} \\ \mathbf{D} & \mathbf{D} \end{bmatrix} . \\ \mathbf{S}^{(1)} &\approx \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{\rho L_1} - \frac{L_1 \mathbf{D}}{4} \right) & - \left(\frac{1}{\rho L_1} + \frac{L_1 \mathbf{D}}{4} \right) \\ - \left(\frac{1}{\rho L_1} + \frac{L_1 \mathbf{D}}{4} \right) & \left(\frac{1}{\rho L_1} - \frac{L_1 \mathbf{D}}{4} \right) \end{bmatrix} . \end{aligned}$$

Substituindo estes valores na equação (2.11) obtém-se

$$K^2 = \left(\frac{1}{\rho L_1} - \frac{L_1 \mathbf{D}}{4} \right)^2 - \left(\frac{1}{\rho L_1} + \frac{L_1 \mathbf{D}}{4} \right)^2 ,$$

resultando em:

$$K = \pm i \sqrt{\frac{\mathbf{D}}{\rho}} . \quad (2.12)$$

Portanto, desta forma, reproduzindo a relação de dispersão exata para equação unidire-

cional, ou seja,

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \mp i \rho \sqrt{\frac{\mathbf{D}}{\rho}}. \quad (2.13)$$

Este resultado permite reescrever a aproximação de elementos finitos na forma

$$\begin{bmatrix} KP_0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11}^{(1)} & S_{12}^{(1)} \\ S_{21}^{(1)} & S_{22}^{(1)} + K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \end{bmatrix}. \quad (2.14)$$

Neste ponto observa-se que podemos utilizar o mesmo procedimento para KP_1 . Introduzindo uma nova camada, $z_1 < x_3 < z_2$, obtem-se:

$$\begin{bmatrix} KP_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11}^{(2)} & S_{12}^{(2)} \\ S_{21}^{(2)} & S_{22}^{(2)} + K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix}.$$

Substituindo este resultado em (2.14), tem-se que:

$$\begin{bmatrix} KP_0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11}^{(1)} & S_{12}^{(1)} & 0 \\ S_{21}^{(1)} & S_{22}^{(1)} + S_{11}^{(2)} & S_{12}^{(2)} \\ 0 & S_{21}^{(2)} & S_{22}^{(2)} + K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \end{bmatrix}.$$

Aplicando esta prescrição recursivamente, obtém-se a seguinte representação

$$\begin{bmatrix} KP_0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11}^{(1)} & S_{12}^{(1)} & 0 & \dots \\ S_{21}^{(1)} & S_{22}^{(1)} + S_{11}^{(2)} & S_{12}^{(2)} & \ddots \\ 0 & S_{21}^{(2)} & S_{22}^{(2)} + S_{11}^{(3)} & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \\ \vdots \end{bmatrix}. \quad (2.15)$$

Para efetuar qualquer implementação numérica desde resultado, precisa-se truncar a expansão para um certo valor n , produzindo a aproximação

$$\begin{bmatrix} K_n P_0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11}^{(1)} & S_{12}^{(1)} & 0 & \dots \\ S_{21}^{(1)} & S_{22}^{(1)} + S_{11}^{(2)} & S_{12}^{(2)} & \ddots \\ 0 & S_{21}^{(2)} & \ddots & S_{12}^{(n-1)} \\ 0 & 0 & S_{21}^{(n-1)} & S_{22}^{(n-1)} + S_{11}^{(n)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ \vdots \\ P_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Substituindo

$$K_n \approx -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P_0}{\partial x_3} \quad (2.16)$$

na equação acima, deduz-se que:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial P_0}{\partial x_3} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = -\rho \begin{bmatrix} S_{11}^{(1)} & S_{12}^{(1)} & 0 & 0 \\ S_{21}^{(1)} & S_{22}^{(1)} + S_{11}^{(2)} & S_{12}^{(2)} & \ddots \\ 0 & S_{21}^{(2)} & \ddots & S_{12}^{(n-1)} \\ 0 & \ddots & S_{21}^{(n-1)} & S_{22}^{(n-1)} + S_{11}^{(n)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ \vdots \\ P_{n-1} \end{bmatrix}. \quad (2.17)$$

Redefinindo $\mathbf{S}^{(j)}$ para absorver a constante $-\rho$,

$$\mathbf{S}^{(j)} \equiv -\frac{1}{L_j} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{\rho L_j}{4} \begin{bmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{D} \\ \mathbf{D} & \mathbf{D} \end{bmatrix}, \quad (2.18)$$

obtm-se a expressão utilizada para implementação

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial P_0}{\partial x_3} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11}^{(1)} & S_{12}^{(1)} & 0 & 0 \\ S_{21}^{(1)} & S_{22}^{(1)} + S_{11}^{(2)} & S_{12}^{(2)} & \ddots \\ 0 & S_{21}^{(2)} & \ddots & S_{12}^{(n-1)} \\ 0 & 0 & S_{21}^{(n-1)} & S_{22}^{(n-1)} + S_{11}^{(n)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ \vdots \\ P_{n-1} \end{bmatrix}. \quad (2.19)$$

A expressão 2.19 representa a aproximação de ordem n para a equação unidirecional da onda, que indicamos por $AWWE_n$, em que o subscrito n indica a ordem de aproximação. Neste caso, tem-se $n - 1$ de variáveis auxiliares.

2.6 CASO 2-D

O operador \mathbf{D} possui a seguinte forma:

$$\mathbf{D} \equiv \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_1} \right) - \frac{(-i\omega)^2}{\kappa} \right],$$

e $\mathbf{S}^{(j)}$ é dado por:

$$\mathbf{S}^{(j)} \equiv -\frac{1}{L_j} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} - \frac{\rho}{\kappa} (-i\omega)^2 \frac{L_j}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{\rho L_j}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_1} \right).$$

Para meios com densidade constante, tem-se que:

$$\mathbf{S}^{(j)} \equiv -\frac{1}{L_j} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{c^2} (-i\omega)^2 \frac{L_j}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{L_j}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}.$$

O segundo resultado fundamental da abordagem proposta por Guddati (2006) é que

a aproximação dada por (2.19) é exata para números de onda dados por:

$$k_j = \frac{2i}{L_j}. \quad (2.20)$$

Portanto, tomando-se

$$L_j = \frac{2i}{k_j} = \frac{2i}{\frac{\omega}{c} \cos \theta_j} = \frac{2ic_j}{\omega}.$$

em que $c_j = c/\cos \theta_j$ é a velocidade de fase e substituindo L_j em (2.5)

$$\mathbf{S}^{(j)} \equiv -\frac{(-i\omega)}{c} \frac{c}{2c_j} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} - \frac{(-i\omega)}{c} \frac{c_j}{2c} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{c}{(-i\omega)} \frac{c_j}{2c} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}.$$

Definindo as matrizes

$$\mathbf{\Lambda}_j^{(1)} \equiv \frac{1}{2} \frac{c}{c_j} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

e

$$\mathbf{\Lambda}_j^{(2)} \equiv \frac{1}{2} \frac{c_j}{c} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

tem-se que:

$$\mathbf{S}^{(j)} \equiv \frac{(-i\omega)}{c} \left[-(\mathbf{\Lambda}_j^{(1)} + \mathbf{\Lambda}_j^{(2)}) + \left(\frac{c}{(-i\omega)} \right)^2 \mathbf{\Lambda}_j^{(2)} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \right]. \quad (2.21)$$

2.7 RELAÇÃO DE DISPERSÃO

No domínio de Fourier, a equação (2.21) torna-se:

$$\mathbf{S}^{(j)}(k_1) \equiv \frac{(i\omega)}{c} \left[(\mathbf{\Lambda}_j^{(1)} + \mathbf{\Lambda}_j^{(2)}) - \left(\frac{c^2}{(\omega^2)} \right) \mathbf{\Lambda}_j^{(2)} k_1^2 \right].$$

Substituindo-se este resultado na transformada de Fourier da equação (2.19), em relação a x_1 e x_3 , deduz-se que:

$$\begin{bmatrix} ik_3 P_0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11}^{(1)} & S_{12}^{(1)} & 0 & 0 \\ S_{21}^{(1)} & S_{22}^{(1)} + S_{11}^{(2)} & S_{12}^{(2)} & \ddots \\ 0 & S_{21}^{(2)} & \ddots & S_{12}^{(n-1)} \\ 0 & 0 & S_{21}^{(n-1)} & S_{22}^{(n-1)} + S_{11}^{(n)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ \vdots \\ P_{n-1} \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} S_{11}^{(1)} - ik_3 & S_{12}^{(1)} & 0 & 0 \\ S_{21}^{(1)} & S_{22}^{(1)} + S_{11}^{(2)} & S_{12}^{(2)} & \ddots \\ 0 & S_{21}^{(2)} & \ddots & S_{12}^{(n-1)} \\ 0 & 0 & S_{21}^{(n-1)} & S_{22}^{(n-1)} + S_{11}^{(n)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ \vdots \\ P_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} .$$

Portanto, a relação de dispersão, que é definida como sendo a relação entre o número de onda horizontal e o número de onda vertical, é escrita como

$$\det \begin{bmatrix} S_{11}^{(1)} - ik_3 & S_{12}^{(1)} & 0 & 0 \\ S_{21}^{(1)} & S_{22}^{(1)} + S_{11}^{(2)} & S_{12}^{(2)} & \ddots \\ 0 & S_{21}^{(2)} & \ddots & S_{12}^{(n-1)} \\ 0 & 0 & S_{21}^{(n-1)} & S_{22}^{(n-1)} + S_{11}^{(n)} \end{bmatrix} = 0 .$$

Esta expressão pode ser reescrita em termos de números de onda normalizados, com

$$\kappa_1 = \frac{ck_1}{\omega} ,$$

$$\kappa_3 = \frac{ck_3}{\omega} ,$$

e das matrizes

$$\tilde{\mathbf{S}}^{(j)}(k_1) \equiv \left[\left(\mathbf{\Lambda}_j^{(1)} + \mathbf{\Lambda}_j^{(2)} \right) - \mathbf{\Lambda}_j^{(2)} \kappa_1^2 \right] ,$$

na forma

$$\det \begin{bmatrix} \tilde{S}_{11}^{(1)} - \kappa_3 & \tilde{S}_{12}^{(1)} & 0 & 0 \\ \tilde{S}_{21}^{(1)} & \tilde{S}_{22}^{(1)} + \tilde{S}_{11}^{(2)} & \tilde{S}_{12}^{(2)} & \ddots \\ 0 & \tilde{S}_{21}^{(2)} & \ddots & \tilde{S}_{12}^{(n-1)} \\ 0 & 0 & \tilde{S}_{21}^{(n-1)} & \tilde{S}_{22}^{(n-1)} + \tilde{S}_{11}^{(n)} \end{bmatrix} = 0 .$$

Esta expressão pode ser avaliada recursivamente observando que

$$\det \begin{bmatrix} \tilde{S}_{11}^{(1)} - \kappa_3 & \tilde{S}_{12}^{(1)} & 0 & 0 \\ \tilde{S}_{21}^{(1)} & \tilde{S}_{22}^{(1)} + \tilde{S}_{11}^{(2)} & \tilde{S}_{12}^{(2)} & \ddots \\ 0 & \tilde{S}_{21}^{(2)} & \ddots & \tilde{S}_{12}^{(n-1)} \\ 0 & 0 & \tilde{S}_{21}^{(n-1)} & \tilde{S}_{22}^{(n-1)} + \tilde{S}_{11}^{(n)} \end{bmatrix} =$$

$$(\tilde{S}_{11}^{(1)} - \kappa_3) \det \begin{bmatrix} \tilde{S}_{22}^{(1)} + \tilde{S}_{11}^{(2)} & \tilde{S}_{12}^{(2)} & 0 & 0 \\ \tilde{S}_{21}^{(2)} & \tilde{S}_{22}^{(2)} + \tilde{S}_{11}^{(3)} & \tilde{S}_{12}^{(3)} & \ddots \\ 0 & \tilde{S}_{21}^{(3)} & \ddots & \tilde{S}_{12}^{(n-1)} \\ 0 & 0 & \tilde{S}_{21}^{(n-1)} & \tilde{S}_{22}^{(n-1)} + \tilde{S}_{11}^{(n)} \end{bmatrix}$$

$$-\tilde{S}_{12}^{(1)} \tilde{S}_{21}^{(1)} \det \begin{bmatrix} \tilde{S}_{22}^{(2)} + \tilde{S}_{11}^{(3)} & \tilde{S}_{12}^{(3)} & 0 & 0 \\ \tilde{S}_{21}^{(3)} & \tilde{S}_{22}^{(1)} + \tilde{S}_{11}^{(2)} & \tilde{S}_{12}^{(2)} & \ddots \\ 0 & \tilde{S}_{21}^{(2)} & \ddots & \tilde{S}_{12}^{(n-1)} \\ 0 & 0 & \tilde{S}_{21}^{(n-1)} & \tilde{S}_{22}^{(n-1)} + \tilde{S}_{11}^{(n)} \end{bmatrix} = 0 .$$

Definindo

$$D^{(N-1)} \equiv \det \begin{bmatrix} \tilde{S}_{22}^{(1)} + \tilde{S}_{11}^{(2)} & \tilde{S}_{12}^{(2)} & 0 & 0 \\ \tilde{S}_{21}^{(2)} & \tilde{S}_{22}^{(2)} + \tilde{S}_{11}^{(3)} & \tilde{S}_{12}^{(3)} & \ddots \\ 0 & \tilde{S}_{21}^{(3)} & \ddots & \tilde{S}_{12}^{(n-1)} \\ 0 & 0 & \tilde{S}_{21}^{(n-1)} & \tilde{S}_{22}^{(n-1)} + \tilde{S}_{11}^{(n)} \end{bmatrix}$$

e

$$D^{(N-2)} \equiv \det \begin{bmatrix} \tilde{S}_{22}^{(2)} + \tilde{S}_{11}^{(3)} & \tilde{S}_{12}^{(3)} & 0 & 0 \\ \tilde{S}_{21}^{(3)} & \tilde{S}_{22}^{(3)} + \tilde{S}_{11}^{(4)} & \tilde{S}_{12}^{(4)} & \ddots \\ 0 & \tilde{S}_{21}^{(4)} & \ddots & \tilde{S}_{12}^{(n-1)} \\ 0 & 0 & \tilde{S}_{21}^{(n-1)} & \tilde{S}_{22}^{(n-1)} + \tilde{S}_{11}^{(n)} \end{bmatrix} ,$$

pode-se escrever

$$\kappa_3 = \tilde{S}_{11}^{(1)} - \tilde{S}_{12}^{(1)} \tilde{S}_{21}^{(1)} \frac{D^{(N-2)}}{D^{(N-1)}} . \quad (2.22)$$

Para completar a recursão basta observar que o determinante $D^{(N-1)}$ pode ser avaliado recursivamente pela relação

$$D^{(N-k)} = \left(\tilde{S}_{22}^{(k)} + \tilde{S}_{11}^{(k+1)} \right) D^{(N-k-1)} - \tilde{S}_{12}^{(k+1)} \tilde{S}_{21}^{(k+1)} D^{(N-k-2)} ,$$

tomando-se $D^{(-1)} = 1$, $D^{(-2)} = 0$ e $\tilde{\mathbf{S}}^{(k+1)} = \mathbf{0}$, o determinante $D^{(N-1)}$ pode ser avaliado iniciando em $k = N$ e prosseguindo-se decrementando até $k = 1$. A expressão (2.22) para relação de dispersão dada pelo operador $AWWE_n$, será usada no capítulo 2 para fins de comparação com a relação de dispersão exata para equações unidirecionais.

2.8 OPERADOS PARA MEIOS DE IMPEDÂNCIA CONSTANTE

Para implementação dos algoritmos de migração utilizamos a equação unidirecional para meios com impedância constante, neste caso,

$$\mathbf{S}^{(j)} \equiv -\frac{1}{L_j} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{c^2} (-i\omega)^2 \frac{L_j}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{L_j}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{c(x_1)} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(c(x_1) \frac{\partial}{\partial x_1} \right) .$$

Substituindo nesta expressão

$$L_j = \frac{2i}{k_j} = \frac{2i}{\frac{\omega}{c} \cos \theta_j} = \frac{2ic_j}{\omega}.$$

obtém-se

$$\mathbf{S}^{(j)} \equiv \frac{(-i\omega)}{c} \left[-(\mathbf{\Lambda}_j^{(1)} + \mathbf{\Lambda}_j^{(2)}) + \left(\frac{c}{(-i\omega)} \right)^2 \mathbf{\Lambda}_j^{(2)} \frac{1}{c(x_1)} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(c(x_1) \frac{\partial}{\partial x_1} \right) \right].$$

com

$$\mathbf{\Lambda}_j^{(1)} \equiv \frac{1}{2} \frac{c}{c_j} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

e

$$\mathbf{\Lambda}_j^{(2)} \equiv \frac{1}{2} \frac{c_j}{c} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Uma vez que $c_j = c / \cos \theta_j$ é a velocidade de fase, segue que

$$\mathbf{\Lambda}_j^{(1)} \equiv \frac{1}{2} \cos \theta_j \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

e

$$\mathbf{\Lambda}_j^{(2)} \equiv \frac{1}{2} \frac{1}{\cos \theta_j} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Assim os ângulos de fase θ_j são usados como parâmetros de ajuste da relação de dispersão (parâmetros auxiliares). Essencialmente nosso trabalho se propõe a uma nova abordagem da implementação e investigação da AWWE, pois nossa implementação é feita no domínio do espaço e frequência, o qual apresenta maior estabilidade e, além disso, torna imediata a sua paralelização.

Os apêndices A, B e C deste trabalho contêm maiores detalhes sobre a implementação do método AWWE no domínio do espaço e frequência.

3 EXPERIMENTOS NUMÉRICOS COM A APROXIMAÇÃO AWWE

A implementação das aproximações AWWE requer a prescrição do número de pontos (número de variáveis auxiliares e consequentemente o número de parâmetros auxiliares θ_j) e as direções em que o operador AWWE reproduz exatamente a equação da onda unidirecional. Para estimar estes parâmetros, efetuamos uma série de experimentos numéricos com o objetivo de avaliar a aproximação AWWE na aproximação do espectro do operador da equação da onda unidirecional no domínio da frequência e número de onda. Por razões práticas, limitamos a estimativa dos parâmetros da aproximação ao máximo de cinco direções auxiliares, embora mostrando que a utilização de mais direções auxiliares melhora a qualidade do ajuste. Após a estimativa do conjunto de parâmetros ótimos, para operadores com 3, 4 e 5 variáveis auxiliares, avaliamos a resposta impulsiva de cada conjunto em meios homogêneos. A seguir, avaliamos a resposta impulsiva dos operadores em meios não homogêneos e realizamos experimentos de focalização de difrações.

3.1 ESCOLHA DOS PARÂMETROS DA APROXIMAÇÃO $AWWE_n$

A determinação do número de variáveis auxiliares na $AWWE_n$ e do valor dos parâmetros, visando encontrar uma combinação que otimize a aproximação da relação de dispersão exata para equação da onda unidirecional, é o objetivo principal desta seção. Nos experimentos a seguir os gráficos representam o número de onda normalizado, ou seja,

$$\kappa_i \equiv \frac{c k_i}{\omega}, \quad i \in \{1, 3\}$$

em que k_i representam as componentes do número de onda e c é a velocidade de propagação.

Inicialmente, pressupondo duas variáveis auxiliares, encontramos após uma série de experimentos numéricos, uma combinação ótima para os seguintes valores: $\theta_1 = 0.0$, $\theta_2 = 45.0$ e $\theta_3 = 75.0$. A Figura 3.1 mostra o ajuste da relação de dispersão aproximada pelo operador $AWWE_3$ com os parâmetros ótimos versus relação de dispersão exata, considerando tanto a parte real quanto a parte imaginária. O ajuste da parte imaginária é importante para garantir que as ondas evanescentes sejam tratadas corretamente pela aproximação.

Embora a Figura 3.1 nos mostre o melhor ajuste, tomando todos parâmetros iguais a

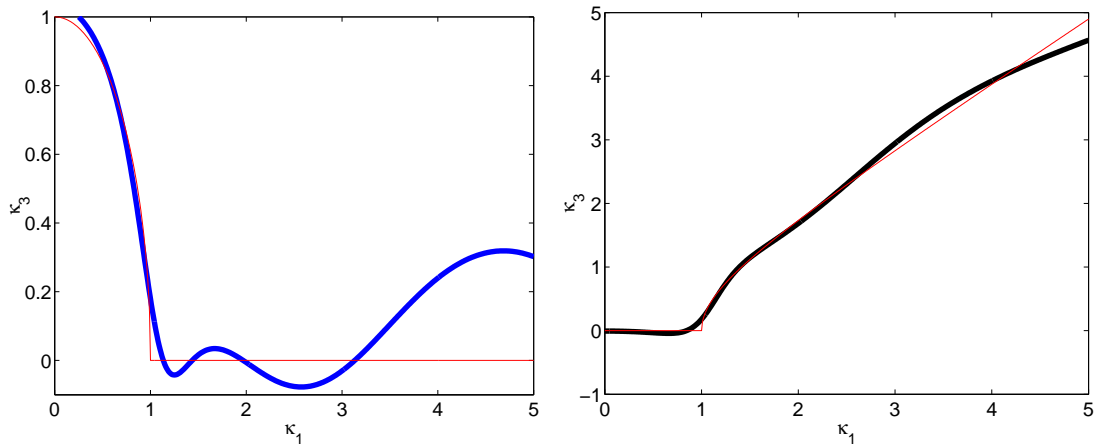


Figura 3.1: Ajuste da relação de dispersão exata (linha sólida) usando a aproximação $AWWE_3$ (linha sólida em negrito). Os parâmetros otimizados são $\theta_1 = 0.0$, $\theta_2 = 45.0$ e $\theta_3 = 75.0$.

zero na aproximação $AWWE_3$ obtém-se um ajuste aceitável no intervalo de número de onda horizontal de 0 a 2, conforme indicado na Figura 3.2. Este fato indica o grau de liberdade em relação a abertura angular para aproximação que se tem ao se prescrever parâmetros ótimos. Uma única medida de ajuste como o resíduo médio quadrático não é suficiente para determinar um conjunto único de parâmetros.

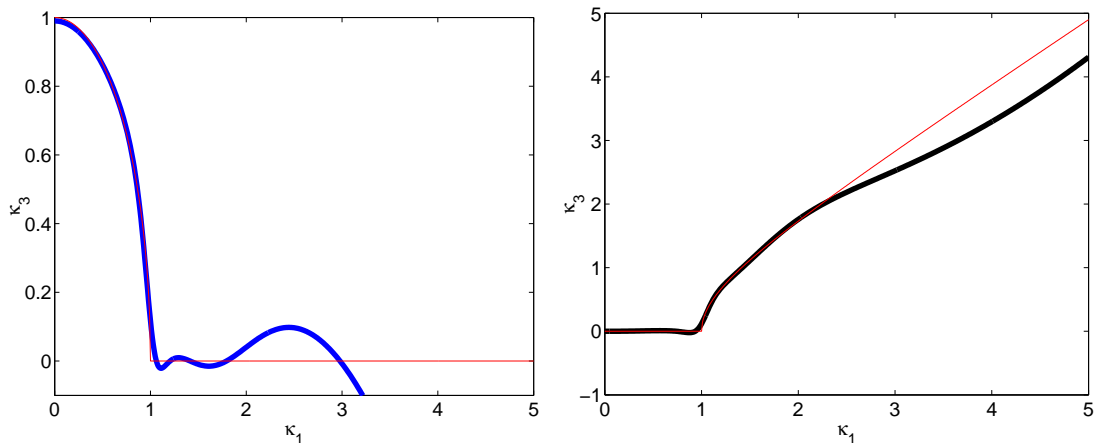


Figura 3.2: Ajuste da relação de dispersão exata (linha sólida) usando a aproximação $AWWE_3$ (linha em negrito). Os parâmetros são $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = 0.0$. Observa-se que o ajuste é aceitável para número de onda inferior a 2, indicando que a escolha dos parâmetros depende da abertura angular considerada.

Aumentando o número de variáveis auxiliares para três temos diferentes ajustes. No entanto, para os seguintes parâmetros $\theta_1 = 0.0$, $\theta_2 = 45.0$, $\theta_3 = 45.5$ e $\theta_4 = 65.5$ obtemos uma ajuste aceitável no intervalo de número de onda horizontal de 0 a 3, conforme indicado na Figura (3.3).

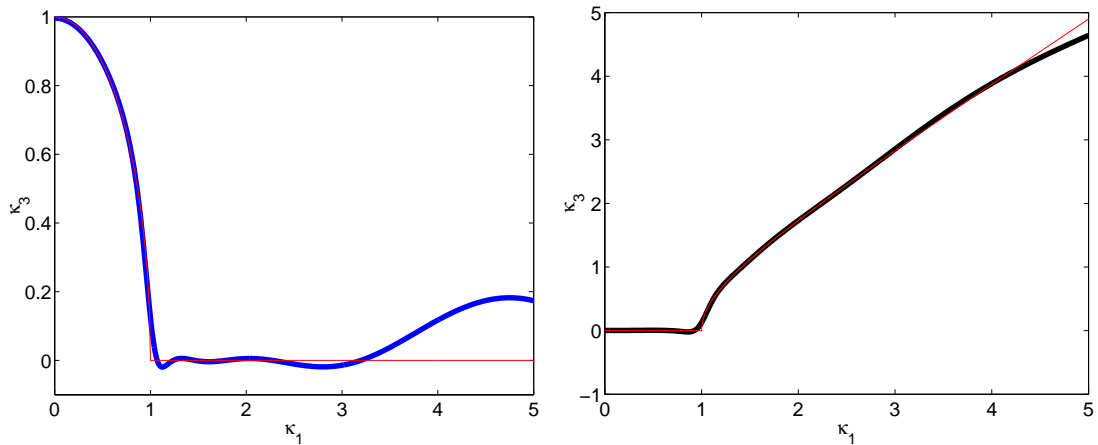


Figura 3.3: Ajuste da relação de dispersão exata (linha sólida) utilizando a aproximação $AWWE_4$. O conjunto de parâmetros ótimos utilizado foi $\theta_1 = 0.0$, $\theta_2 = 45.0$, $\theta_3 = 45.5$ e $\theta_4 = 65.5$.

A aproximação $AWWE_5$ também foi avaliada, mesmo tendo em vista seu maior custo computacional. Neste caso um conjunto de valores ótimos para os parâmetros encontrado foi $\theta_1 = 5.0^\circ$, $\theta_2 = 60.0^\circ$, $\theta_3 = 60.0^\circ$, $\theta_4 = 60.0^\circ$ e $\theta_5 = 25.5^\circ$. A Figura 3.4 mostra que esta escolha de parâmetros ajusta muito bem a relação de dispersão exata no intervalo de número de onda horizontal de 0 a 4.

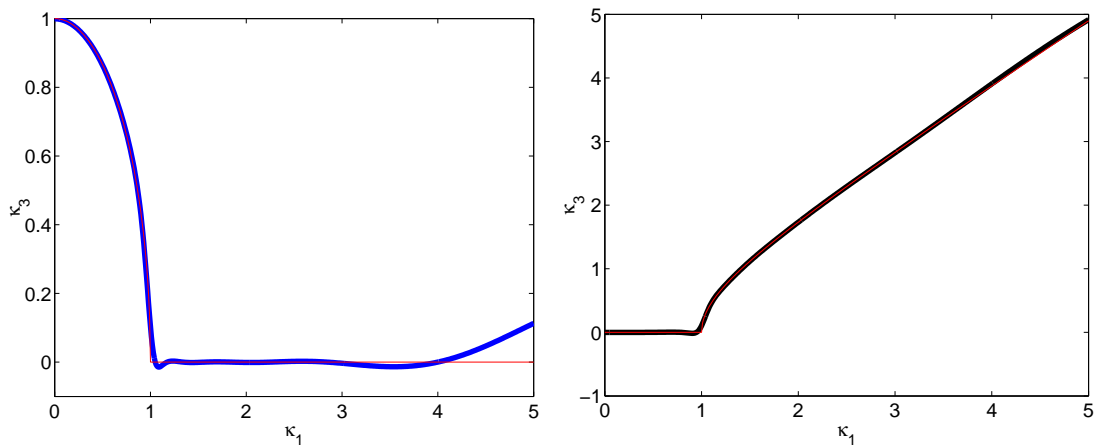


Figura 3.4: Ajuste da relação de dispersão exata (linha sólida) usando a aproximação $AWWE_5$ (linha sólida em negrito) com parâmetros otimizados: $\theta_1 = 5.0^\circ$, $\theta_2 = 60.0^\circ$, $\theta_3 = 60.0^\circ$, $\theta_4 = 60.0^\circ$ e $\theta_5 = 25.5^\circ$.

Para a aproximação $AWWE_5$, escolhendo todos os parâmetros nulos, ainda resulta em um ótimo ajuste para o intervalo de número de onda horizontal de 0 a 2.5, como indicado na Figura 3.5. Mais uma vez este resultado indica que a escolha de parâmetros ótimos depende do intervalo de número de onda que se deseja ajustar.

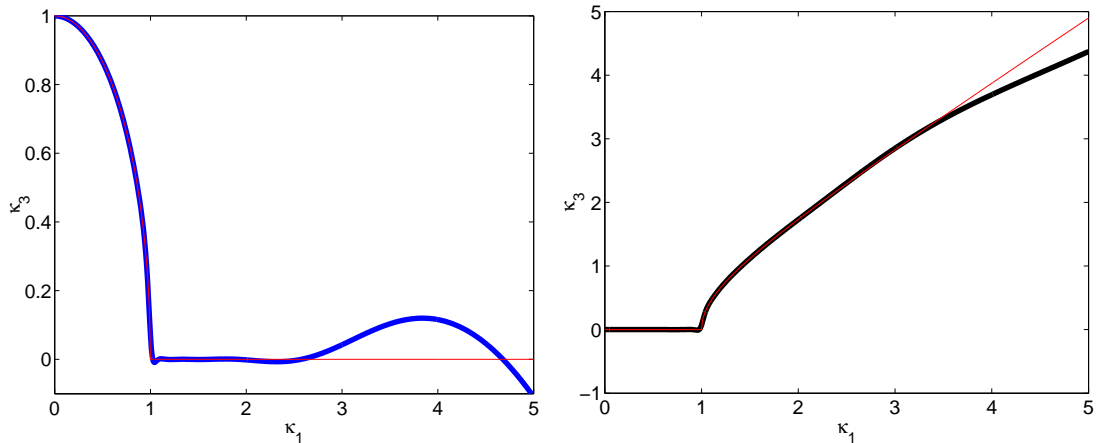


Figura 3.5: Ajuste da relação de dispersão exata (linha sólida) usando a aproximação $AWWE_5$ (linha sólida em negrito). Todos os parâmetros θ_i são nulos. Esta escolha produz um ótimo ajuste no intervalo de número de onda de 0 a 2.5.

A aproximação $AWWE_n$ melhora quando adicionamos mais variáveis auxiliares. Para o caso $AWWE_{10}$, a escolha de todos os seus parâmetros nulos ajusta perfeitamente a relação de dispersão exata no intervalo de número de onda horizontal de 0 a 5, conforme indica a Figura 3.6. Este resultado indica que as aproximações $AWWE_n$ podem aproximar com precisão arbitrária a equação de onda unidirecional. Entretanto, o custo computacional e o armazenamento crescem rapidamente com o número de variáveis auxiliares tornando a implementação do método inviável para grandes valores de n .

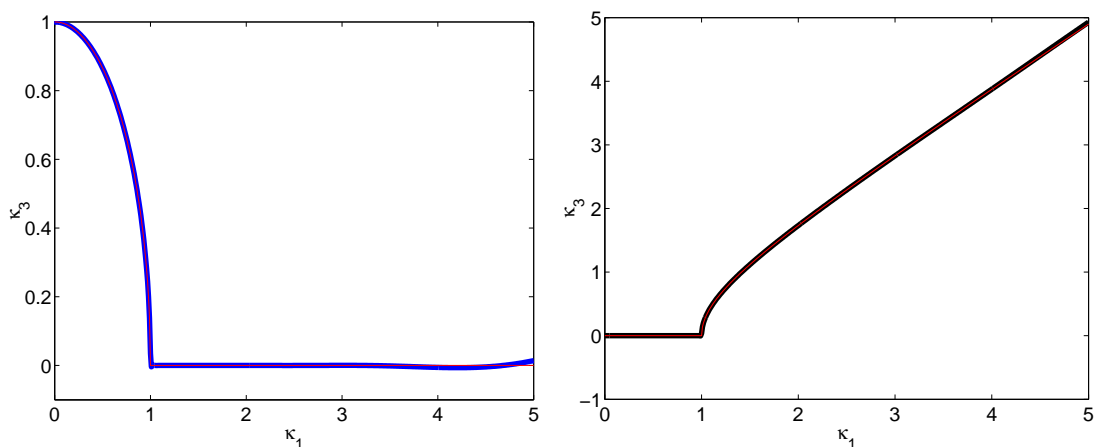


Figura 3.6: Parte real e parte imaginária da aproximação da relação de dispersão pela $AWWE_{10}$ com a escolha de parâmetros otimizados e relação exata.

3.2 AVALIAÇÃO DA RESPOSTA AO IMPULSO EM MEIO HOMO- GÊNIO

A seguir apresentamos a resposta impulsiva dos operadores selecionados a partir dos experimentos numéricos descritos. Para a aproximação $AWWE_3$ utilizamos $\theta_1 = 0.0, \theta_2 = 45.0$ e $\theta_3 = 75.0$. A resposta impulsiva desta aproximação se encontra na Figura 3.7. Podemos observar que a resposta ao impulso se degrada, perdendo sua forma circular, a partir do ângulo de 45° , este comportamento está de acordo com a aproximação da relação de dispersão na Figura 3.1.

Para avaliar a resposta ao impulso da aproximação $AWWE_4$ utilizamos os parâmetros $\theta_1 = 0.0, \theta_2 = 45.0, \theta_3 = 45.5$ e $\theta_4 = 65.0$. A resposta impulsiva associada a estes parâmetros está indicada na Figura 3.8. Este resultado apresenta uma melhora marcante em relação a resposta impulsiva da aproximação $AWWE_3$, como indicam a forma circular da resposta impulsiva e a distribuição uniforme de amplitude ao longo da frente de onda para abertura angular até 60° .

A resposta ao impulso da aproximação $AWWE_5$ foi obtida usando os parâmetros $\theta_1 = 5.0, \theta_2 = 60.0, \theta_3 = 60.0, \theta_4 = 60.0$ e $\theta_5 = 25.5$. A Figura 3.9 mostra a resposta ao impulso desta aproximação. Este resultado é inferior ao obtido com a aproximação $AWWE_4$, a amplitude varia muito em torno da abertura de 45° .

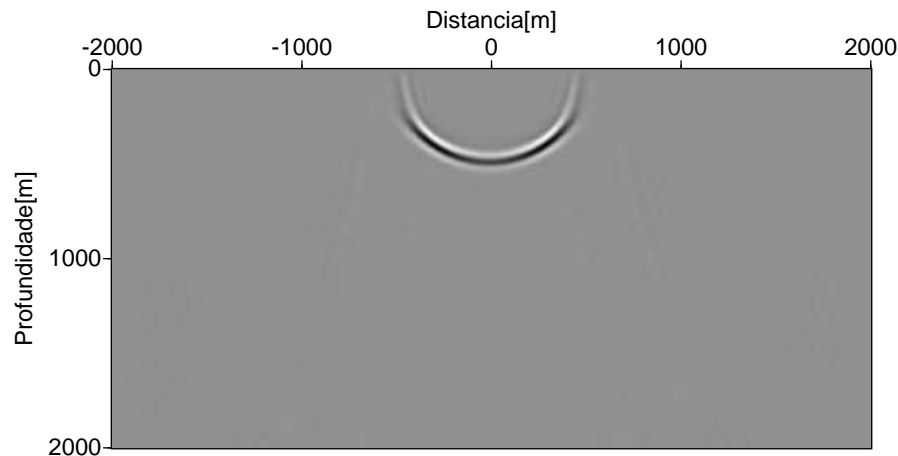


Figura 3.7: Resultado verificado para a Resposta ao Impulso do operador $AWWE_3$ para um meio homogêneo usando a prescrição dos parâmetros ótimos $\theta_1 = 0.0, \theta_2 = 45.0$ e $\theta_3 = 75.0$.

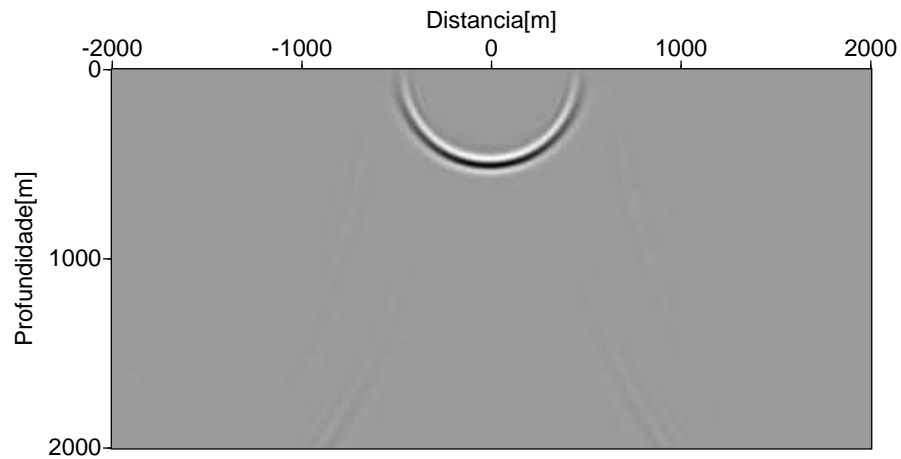


Figura 3.8: Resposta ao Impulso do operador $AWWE_4$ para um meio homogêneo usando os parâmetros $\theta_1 = 0.0, \theta_2 = 45.0, \theta_3 = 45.5$ e $\theta_4 = 65.0$.

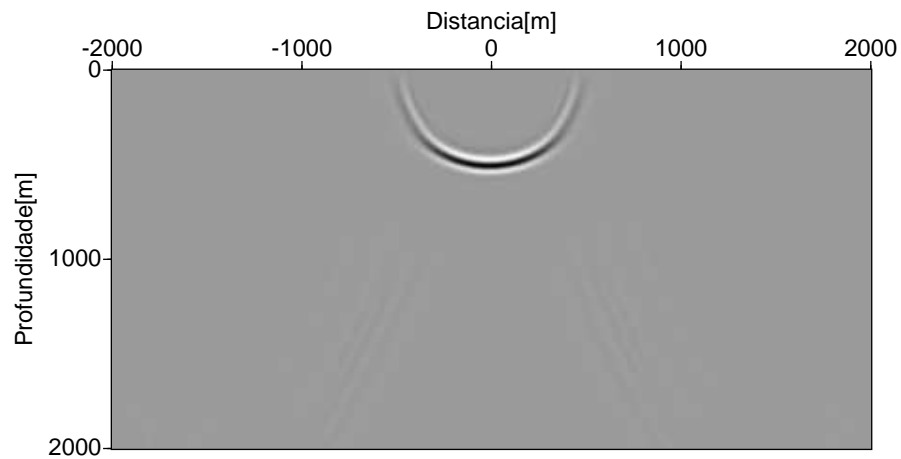


Figura 3.9: Resposta ao Impulso do operador $AWWE_5$ para um meio homogêneo usando os parâmetros $\theta_1 = 5.0, \theta_2 = 60.0, \theta_3 = 60.0, \theta_4 = 60.0$ e $\theta_5 = 25.5$.

3.3 RESPOSTA AO IMPULSO NO MODELO MARMOUSI

Além da precisão do operador de migração $AWWE_n$ será testada sua robustez, visto que ao construir a resposta ao impulso, em um meio mais complexo, como é o caso do modelo Marmousi, cujo modelo de de velocidade é mostrado na Figura 3.10, pode-se verificar o quanto o método é capaz de lidar com meios com forte variação lateral de velocidade.

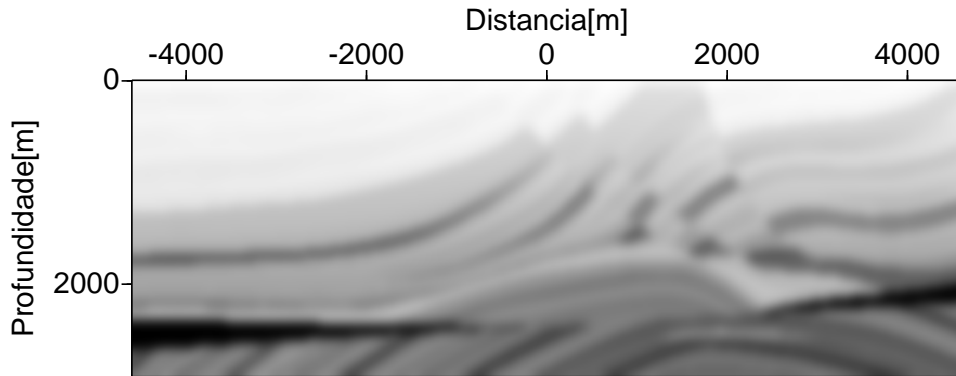


Figura 3.10: Modelo de velocidade para o modelo Marmousi

Neste experimento usaremos a mesma prescrição para a escolha dos parâmetros auxiliares θ_j na aproximação das ordens 3, 4 e 5 do operador AWWE, que foram dadas para avaliação da resposta ao impulso em meios homogêneos. Além disso, daqui em diante quando nos referirmos ao operador $AWWE_3$, deverá ficar implícito que os parâmetros usados serão aqueles encontrados na seção 3.1, que apresentaram o melhor ajuste na comparação entre a relação de dispersão exata e aquela aproximada pelo operador AWWE. O mesmo vale para os operadores AWWE de ordens 4 e 5.

A Figura 3.11 mostra a resposta ao impulso do operador $AWWE_3$. A resposta ao impulso está bem definida, indicando que o operador consegue focalizar a energia em meios complexo, como o modelo Marmousi. Entretanto, há indício de instabilidade na base da Figura. Para reduzir este efeito é necessário reduzir o passo de contuação.

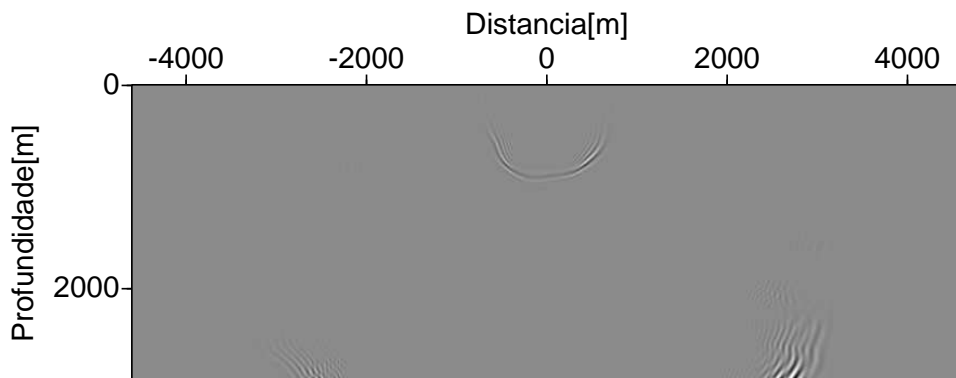


Figura 3.11: Resposta ao impulso do operador $AWWE_3$ para o modelo Marmousi

A Figura 3.12 mostra a resposta ao impulso do operador $AWWE_4$. Nesse caso observamos um espalhamento de energia mais uniforme, não há indício de instabilidade. O operador $AWWE_4$ apresenta melhor desempenho na propagação da resposta impulsiva do que o operador de ordem 3.

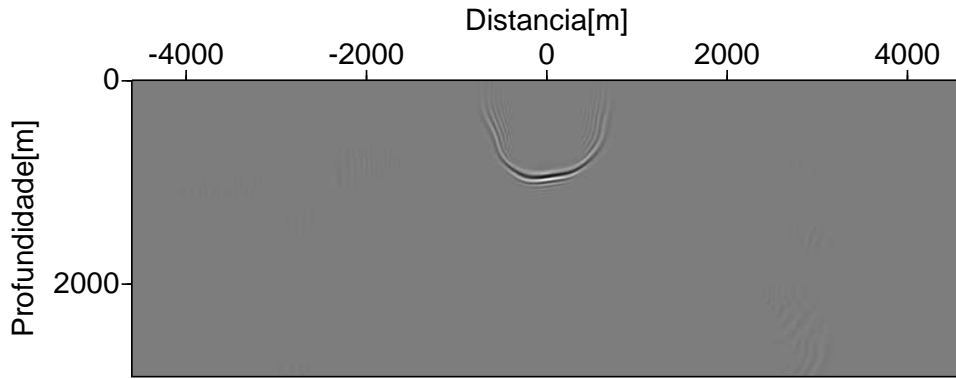


Figura 3.12: Resposta ao impulso do operador $AWWE_4$ para o modelo modelo Marmousi

Para o operador $AWWE_5$ a resposta ao impulso é dada pela Figura 3.13. Dispersão e instabilidade são praticamente inexistentes. Percebe-se uma maior concentração de energia na porção inferior da frente de onda. Esta característica reduz a qualidade da resposta impulsiva deste operador para grande abertura angular quando comparada com o mesmo resultado usando a aproximação de quarta ordem do operador $AWWE$.

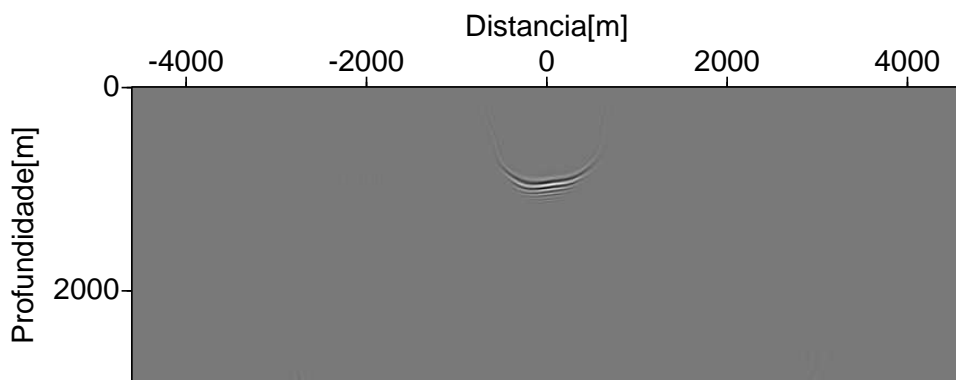


Figura 3.13: Resposta ao impulso do operador $AWWE_5$ para o modelo Marmousi

Das Figuras 3.11, 3.12 e 3.13 observa-se que o operador $AWWE$, em suas ordens 3, 4 e 5, apresentam respostas impulsivas de forma semelhante mas com diferente distribuição

de amplitude na frente de onda. A qualidade da resposta impulsiva destes operadores, no modelo Marmousi, não depende exclusivamente da ordem do operador, também dependem dos coeficientes utilizados para aproximação. Portanto, o projeto de operadores $AWWE$ com resposta impulsiva ótima para uma dada ordem do operador requer mais investigação.

3.4 PONTO DIFRATOR NO MODELO MARMOUSI

O próximo experimento numérico avalia a migração do campo de pressão produzido por um ponto difrator em um meio não homogêneo. O modelo de velocidade é o Marmousi (Figura 3.10). O campo do ponto difrator foi simulado usando diferenças finitas através de uma fonte explosiva localizada no centro do modelo a profundidade de 2000 m. A assinatura da fonte é um pulso Ricker com frequência dominante de 15Hz e tempo inicial de 87ms, e a seguinte grade de discretização $(\Delta x, \Delta z, \Delta t) = 12m \times 12m \times 2ms$. A Figura 3.14 mostra a seção de afastamento nulo calculada.

A migração dos dados sintéticos do ponto difrator foi realizada usando as aproximações de $AWWE_3$, $AWWE_4$ e $AWWE_5$. A Figura 3.15 apresenta o resultado da migração com a aproximação $AWWE_3$. Observamos que a energia é focalizada ao longo de um seguimento próximo a posição do ponto difrator. Na Figura 3.16, que mostra o resultado da migração usando a aproximação $AWWE_4$, observamos uma melhora substancial em relação ao resultado anterior. Toda a energia está corretamente focalizada sobre o ponto difrator. O resultado da migração usando a aproximação $AWWE_5$, está indicado na Figura 3.17. Neste caso, a energia também foi focalizada corretamente na posição do ponto difrator.

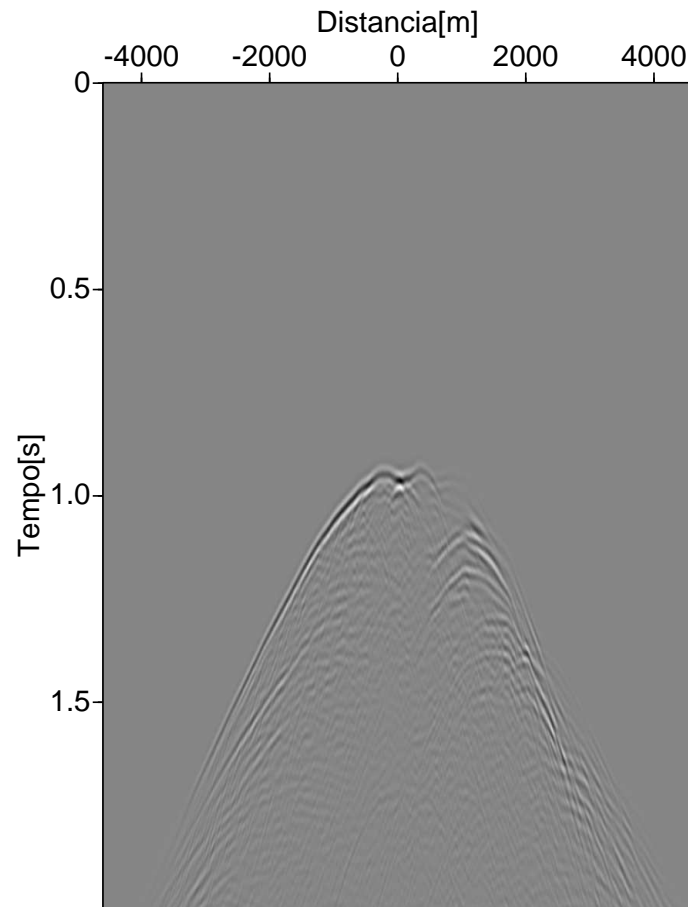


Figura 3.14: Seção de afastamento nulo gerada através do modelo do refletor explosivo com um ponto difrator localizado na posição (0,2000m) no modelo Marmousi.

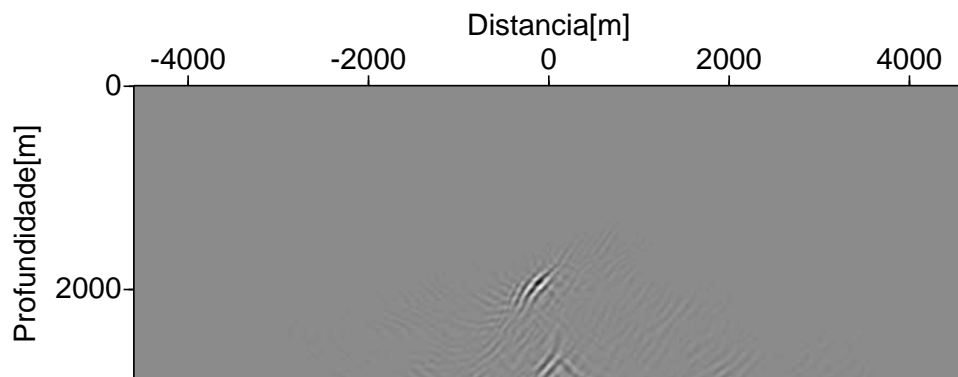


Figura 3.15: Migração da seção de afastamento nulo associada a um ponto difrator no modelo Marmousi com a aproximação $AWW E_3$.

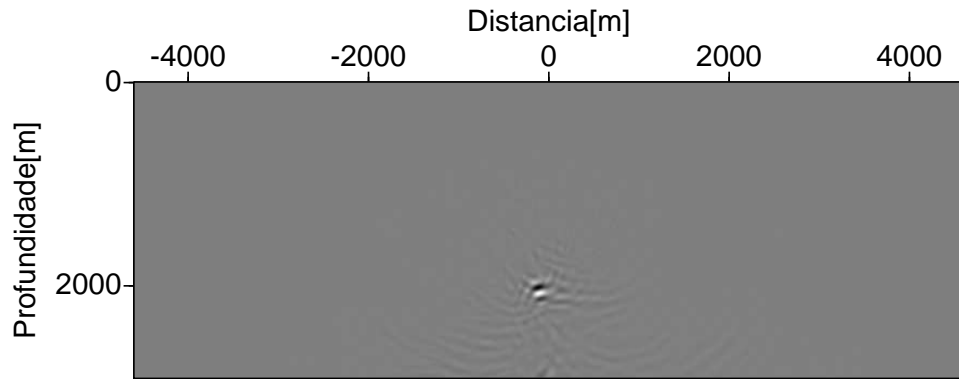


Figura 3.16: Migração da seção de afastamento nulo associada a um ponto difrator no modelo Marmousi com a aproximação $AWW E_4$.

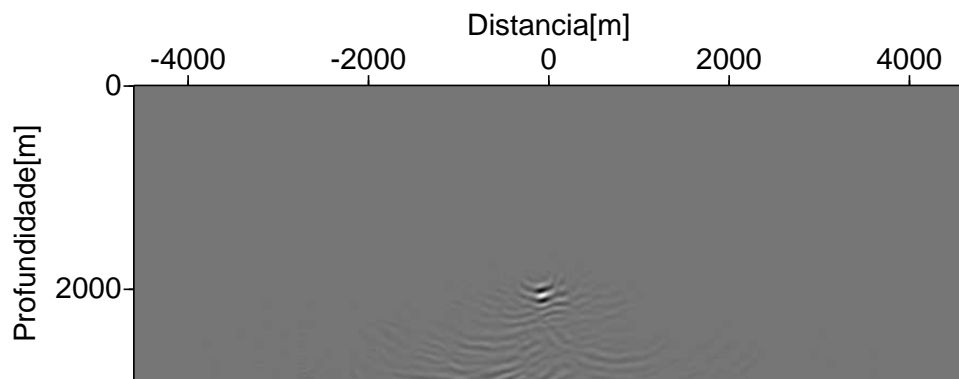


Figura 3.17: Migração da seção de afastamento nulo associada a um ponto difrator no modelo Marmousi com a aproximação $AWW E_5$.

4 APLICAÇÃO AOS DADOS SEG-EAGE

Para avaliar o desempenho da migração usando AWWE, aplicamos o algoritmo desenvolvido aos dados do modelo de domo de sal da SEG-EAGE (AMINZADEH; BRAC, 1997) e comparamos com os resultados da migração PSPI (GAZDAG; SGUAZZERO, 1984) do pacote de processamento sísmico Seismic Un*x (COHEN; STOCKWELL, 2005). O modelo de velocidade está indicado na Figura 4.1. O modelo consiste de um domo salino imerso em sedimentos, representativo de alvos exploratórios do Golfo do México. Aspectos estruturais relevantes para o imageamento incluem irregularidades das bordas do domo, falhas com forte ângulo de megalho e segmentos de refletores abaixo do domo.

A seção de afastamento nulo foi gerado a partir do modelo do refletor explosivo. A assinatura da fonte é um pulso Ricker de fase zero, com frequência dominante de 15Hz e os dados foram amostrados a cada 8 ms. O modelo de velocidade está especificado em uma malha com intervalo de discretização $(\Delta x, \Delta z) = 40 \text{ ft} \times 20 \text{ ft}$. A Figura 4.2 mostra a seção de afastamento nulo. O grande desafio neste experimento é imagear os refletores abaixo do domo de sal. Devido ao forte contraste de velocidade entre o sal e os sedimentos e as irregularidades nas bordas do corpo salino, a iluminação produzida pela energia sísmica abaixo do domo é muito irregular. Um refletor plano foi adicionado a base do modelo para avaliar a qualidade dos métodos de imageamento.

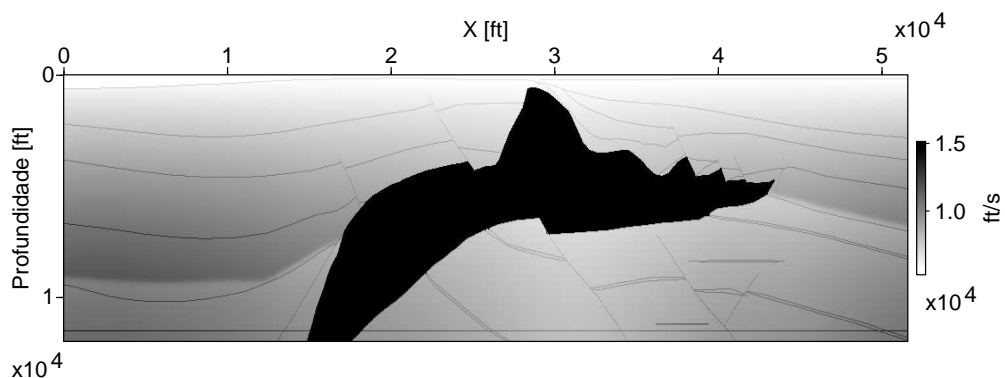


Figura 4.1: Modelo de velocidade da seção sísmica em profundidade do domo salino da SEG-EAGE.

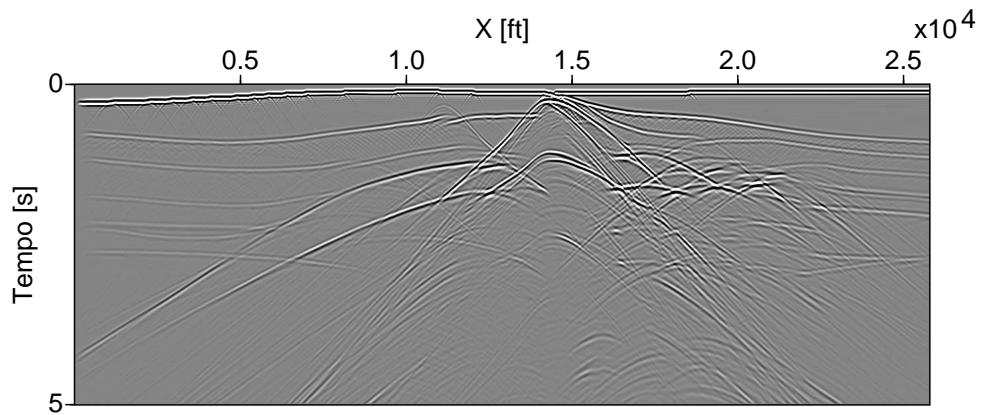


Figura 4.2: Modelo do Domo Salino - seção de afastamento nulo.

4.1 RESULTADO DA MIGRAÇÃO

A Figura 4.3 apresenta os resultado da migração usando o método PSPI. A imagem apresenta boa qualidade acima do domo salino e à esquerda do domo. A região lateral esquerda do domo apresenta distorções à altura da interção com a falha. O refletor plano também apresenta distorções abaixo do domo. Observa-se também eventos não focalizados abaixo do domo.

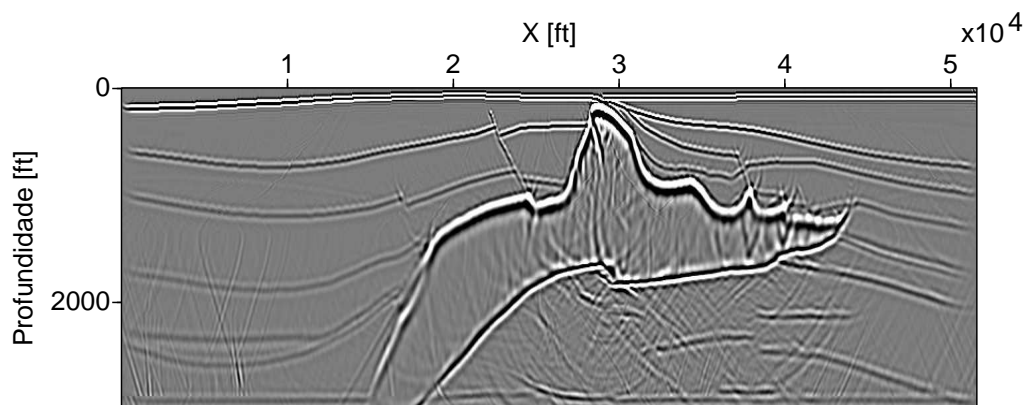


Figura 4.3: Modelo do Domo Salino da SEG-EAG Migrada com o operador Phase Shift Plus Interpolation - PSPI.

A Figura 4.4 apresenta o resultado da migração AWWE usando um operador de terceira ordem. O operador de migração foi especificado usando os ângulos ótimos estimados no Capítulo 3. Observa-se que o domo salino é imageado sem a distorção apresentado pelo

método PSPI. Os refletores abaixo do domo também são migrados com maior nitidez e o refletor plano na base do modelo é recuperado sem a distorção apresentada pelo método PSPI. Outra característica é a redução dos artefatos no interior do domo salino.

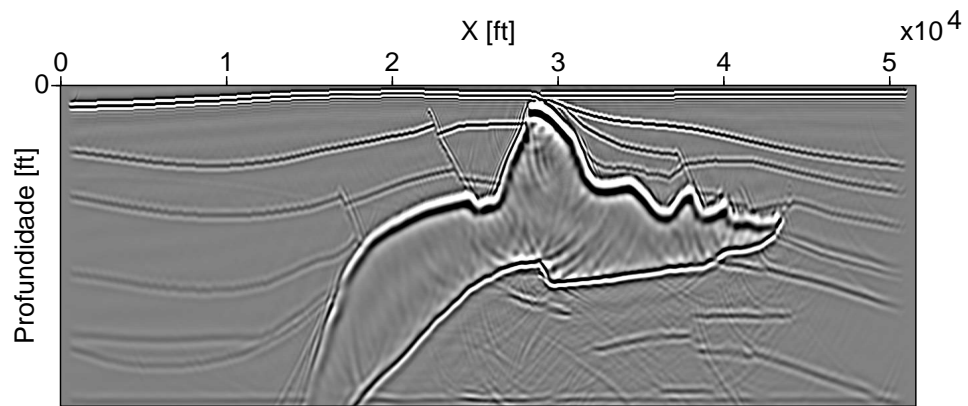


Figura 4.4: Modelo do Domo Salino da SEG-EAG Migrada com o operador $AWWE_3$.

Finalmente na Figura 4.5 temos o resultado da migração AWWE usando operador de quinta ordem. O operador de migração foi especificado usando os ângulos ótimos estimados no Capítulo 3. Observa-se que o domo salino é imageado sem a distorção apresentado pelo método PSPI. Os refletores abaixo do domo também são migrados com maior nitidez e o refletor plano na base do modelo é recuperado sem a distorção apresentada pelo método PSPI. Outra característica é a redução dos artefatos no interior do domo salino. A diferença existente entre os resultados apresentados nas Figuras 4.4 e 4.5 indica que o operador de quinta ordem apresentou uma ligeira melhora na qualidade da imagem, com os refletores abaixo do sal apresentando maior relação sinal ruído.

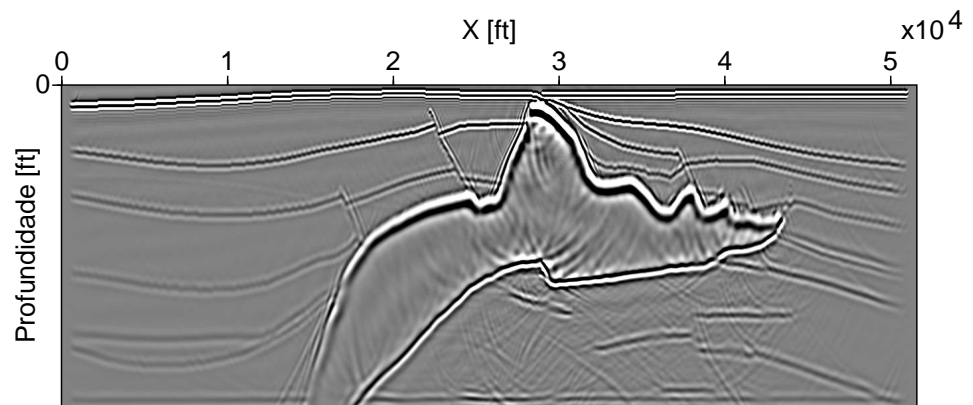


Figura 4.5: Modelo do Domo Salino da SEG-EAG Migrada com o operador $AWWE_5$.

5 CONCLUSÃO

Efetuamos a análise e implementação de operadores de continuação do campo de onda sísmico baseados em equações unidirecionais válidas para abertura angular arbitrária.

Testes numéricos baseados no ajuste da relação de dispersão da equação da onda acústica exata por operadores $AWWE_n$ orientaram a especificação da ordem do operador e à escolha dos parâmetros necessários para defini-los. Apesar dos operadores $AWWE_n$ de alta ordem, acima de quinta ordem, ajustarem muito bem a relação de dispersão exata, seu elevado custo computacional torna proibitiva sua aplicação em grandes volumes de dados. Operadores de ordem 3, 4 e 5 apresentaram resultados satisfatórios, tanto no ajuste da relação de dispersão exata, considerando grande abertura angular, como no imageamento de pontos difratores em modelos com forte variação lateral, como indicaram os experimentos numéricos com o modelo Marmousi.

A migração da seção sísmica de afastamento nulo do modelo do domo de sal da SEG-EAGE utilizou operadores de terceira ordem e quinta ordem. Os resultados indicam que a migração usando estes operadores foi capaz de imagear eventos com forte mergulho, preservar com maior fidelidade a forma do refletor plano, inserido na base do modelo, apresentando resultado equivalente ao obtido pelo método de migração *Phase Shift Plus Interpolation* (COHEN; STOCKWELL, 2005).

Pelos resultados apresentados neste trabalho, o método de migração com operadores $AWWE_n$ pode ser imediatamente estendido para a migração de dados pré-empilhamento e possivelmente em métodos de continuação com preservação de amplitude.

REFERÊNCIAS

- AMINZADEH, F.; BRAC, J. SEG/EAGE 3-D Modeling series. Tulsa, Arizona: Society of Exploration Geophysicists and European Association of Geoscientists and Engineers, 1997.
- BERKHOUT, A. J. Steep dip finite-difference migration. *Geophysics Prospecting*, v. 27, p. 196–213, 1979.
- BERKHOUT, A. J. Wave field extrapolation techniques in seismic migration, a tutorial. *Geophysics*, v. 46, p. 1638–1656, 1981.
- CAREY, G. F.; BECKER, E. B. Finite elements: an introduction. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice Hall, 1981.
- CLAERBOUT, J. F. Coarse grid calculation of waves in inhomogeneous media with applications to delineation of complicated seismic structure. *Geophysics*, v. 35, p. 407–418, 1970.
- CLAERBOUT, J. F. Imaging the earth's interior. Cambridge, MA: Blackwell Scientific Publications, 1985. 412 p.
- CLAERBOUT, J. F.; DOHERTY, S. M. Downward continuation of moveout corrected seismogram. *Geophysics*, v. 37, p. 741–768, 1972.
- COHEN, J. K.; STOCKWELL, J. J. W. CWP/SU: seismic unix release n. 39: an open source software package for seismic research and processing. [S.l.]: Colorado School of Mines, 2005. 140 p.
- GAZDAG, J.; SGUAZZERO, P. Migration of seismic data by phase-shift plus interpolation. *Geophysics*, v. 49, n. 2, p. 124–131, 1984.
- GUDDATI, M. N. Arbitrary wide-angle wave equations for complex media. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, v. 195, p. 65–93, 2006.

GUDDATI, M. N.; HEYDARI, A. H. Migration with arbitrary wide-angle wave equations. *Geophysics*, v. 20, n. 3, p. S61–S70, 2005.

HEYDARI, A. H.; GUDDATI, M. N. Coupled space-domain elastic migration in heterogeneous media. In: *Society of Exploration Geophysicists expanded abstracts*. Houston, Texas: [s.n.], 2005.

LEE, M. W.; SUH, S. Y. Optimization of one-way wave equations. *Geophysics*, v. 50, p.1634–1637, 1985.

LINDMAN, E. L. "free space" boundary conditions for the time-dependent wave equation. *Journal of Computational Physics*, v. 18, p. 77–78, 1975.

RISTOW, D.; UHL, T. Fourier finite-difference migration. *Geophysics*, v. 59, n. 12, p. 1882–1893, 1994.

APÊNDICE

APÊNDICE A – IMPLEMENTAÇÃO NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA

A implementação do algoritmo da $AWW E_n$ será feita no domínio da frequência, devido ao fato de que tais processos apresentam maior estabilidade nesse domínio, como também pode-se paralelizar o mesmo na frequência com maior facilidade do que no domínio do tempo. O paralelismo se torna imediato se for lembrado que, no domínio da frequência, a seção é migrada independentemente para cada frequência. A imagem final é a soma imagens migradas para cada frequência. Portanto, foi desenvolvido um esquema de diferenças finitas usando Crank-Nicholson que é incondicionalmente estável. Primeiramente, tem-se o algoritmo escrito de forma a podermos generalizá-lo em um número qualquer de variáveis auxiliares, dessa forma tem-se que

$$\Lambda_{ij}^1 = \frac{1}{2} [-\cos \theta_j \delta_{i,j+1} + (\cos \theta_{j-1} \delta_{i-1,j-1} + \cos \theta_j \delta_{i,j}) - \cos \theta_{j-1} \delta_{i,j-1}]$$

$$\Lambda_{ij}^2 = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\cos \theta_j} \delta_{i,j+1} + \left(\frac{1}{\cos \theta_{j-1}} \delta_{i-1,j-1} + \frac{1}{\cos \theta_j} \delta_{i,j} \right) + \frac{1}{\cos \theta_{j-1}} \delta_{i,j-1} \right]$$

$$\Lambda_{ij}^1 = \frac{1}{2} \left[-\frac{c}{c_j} \delta_{i,j+1} + \left(\frac{c}{c_{j-1}} \delta_{i-1,j-1} + \frac{c}{c_j} \delta_{i,j} \right) - \frac{c}{c_{j-1}} \delta_{i,j-1} \right]$$

$$\Lambda_{ij}^2 = \frac{1}{2} \left[\frac{c_j}{c} \delta_{i,j+1} + \left(\frac{c_{j-1}}{c} \delta_{i-1,j-1} + \frac{c_j}{c} \delta_{i,j} \right) + \frac{c_{j-1}}{c} \delta_{i,j-1} \right]$$

$$\delta_{i,1} \frac{\partial P_1(\mathbf{x}, \omega)}{\partial z} - \frac{(-i\omega)}{c(\mathbf{x})} (\Lambda_{ij}^1 + \Lambda_{ij}^2) P_j(\mathbf{x}, \omega) + \frac{c(\mathbf{x})}{(-i\omega)} \Lambda_{ij}^2 \frac{\partial^2 P_j(\mathbf{x}, \omega)}{\partial x^2} = 0 \quad (\text{A.1})$$

A discretização da equação acima usando o método de Crank-Nicholson resulta no esquema de diferenças:

$$\begin{aligned} & \delta_{i,1} \left[\frac{P_1(x_I, z_{J+1}) - P_1(x_I, z_J)}{\Delta z} \right] - \\ & \frac{1}{2} (\Lambda_{ij}^1 + \Lambda_{ij}^2) \frac{(-i\omega)}{c(x_I, z_{J+1/2})} [P_j(x_I, z_J) + P_j(x_I, z_{J+1})] + \\ & \Lambda_{ij}^2 \frac{c(x_I, z_{J+1/2})}{2(-i\omega)} \left[\frac{P_j(x_{I+1}, z_J) - 2P_j(x_I, z_J) + P_j(x_{I-1}, z_J)}{\Delta^2 x} \right] + \end{aligned}$$

$$\Lambda_{ij}^2 \frac{c(x_I, z_{J+1/2})}{2(-i\omega)} \left[\frac{P_j(x_{I+1}, z_{J+1}) - 2P_j(x_I, z_{J+1}) + P_j(x_{I-1}, z_{J+1})}{\Delta^2 x} \right] = 0 .$$

Definindo os números

$$\begin{aligned} \mu &\equiv \frac{\Delta z}{2\Delta x} , \\ \alpha_d(x_I, z_{J+1/2}) &\equiv \left\langle \frac{c(x_I, z_{J+1/2})}{(-i\omega)\Delta x} \right\rangle , \\ \alpha_p(x_I, z_{J+1/2}) &\equiv \left\langle \frac{(-i\omega)\Delta x}{c(x_I, z_{J+1/2})} \right\rangle , \\ \tilde{\Lambda}_{ij}^{(1,2)} &\equiv \mu \Lambda_{ij}^{(1,2)} , \end{aligned}$$

e substituindo no esquema de diferenças:

$$\begin{aligned} &\delta_{i,1} [P_1(x_I, z_{J+1}) - P_1(x_I, z_J)] - \\ &(\tilde{\Lambda}_{ij}^1 + \tilde{\Lambda}_{ij}^2) \alpha_p(x_I, z_{J+1/2}) [P_j(x_I, z_J) + P_j(x_I, z_{J+1})] + \\ &\tilde{\Lambda}_{ij}^2 \alpha_d(x_I, z_{J+1/2}) [P_j(x_{I+1}, z_J) - 2P_j(x_I, z_J) + P_j(x_{I-1}, z_J)] + \\ &\tilde{\Lambda}_{ij}^2 \alpha_d(x_I, z_{J+1/2}) [P_j(x_{I+1}, z_{J+1}) - 2P_j(x_I, z_{J+1}) + P_j(x_{I-1}, z_{J+1})] = 0 . \end{aligned}$$

Reagrupando os termos em cada membro em função da profundidade, obtem-se o sistema linear que deve ser solucionado em cada passo de continuação para baixo do campo:

$$\begin{aligned} &\delta_{i,1} P_1(x_I, z_{J+1}) - \\ &\alpha_p(x_I, z_{J+1/2}) (\tilde{\Lambda}_{ij}^1 + \tilde{\Lambda}_{ij}^2) P_j(x_I, z_{J+1}) + \\ \alpha_d(x_I, z_{J+1/2}) \tilde{\Lambda}_{ij}^2 [P_j(x_{I+1}, z_{J+1}) - 2P_j(x_I, z_{J+1}) + P_j(x_{I-1}, z_{J+1})] &= \quad (A.2) \\ &\delta_{i,1} P_1(x_I, z_J) + \\ &\alpha_p(x_I, z_{J+1/2}) (\tilde{\Lambda}_{ij}^1 + \tilde{\Lambda}_{ij}^2) P_j(x_I, z_J) - \\ \alpha_d(x_I, z_{J+1/2}) \tilde{\Lambda}_{ij}^2 [P_j(x_{I+1}, z_J) - 2P_j(x_I, z_J) + P_j(x_{I-1}, z_J)] . \end{aligned}$$

Ou ainda,

$$\begin{aligned} &[\delta_{i,1} \delta_{1,j} - \alpha_p(x_I, z_{J+1/2}) (\tilde{\Lambda}_{ij}^1 + \tilde{\Lambda}_{ij}^2) - 2\alpha_d(x_I, z_{J+1/2}) \tilde{\Lambda}_{ij}^2] P_j(x_I, z_{J+1}) + \\ &\alpha_d(x_I, z_{J+1/2}) \tilde{\Lambda}_{ij}^2 [P_j(x_{I+1}, z_{J+1}) + P_j(x_{I-1}, z_{J+1})] = \\ &[\delta_{i,1} \delta_{1,j} + \alpha_p(x_I, z_J) (\tilde{\Lambda}_{ij}^1 + \tilde{\Lambda}_{ij}^2) + 2\alpha_d(x_I, z_{J+1/2}) \tilde{\Lambda}_{ij}^2] P_j(x_I, z_J) - \\ &\alpha_d(x_I, z_{J+1/2}) \tilde{\Lambda}_{ij}^2 [P_j(x_{I+1}, z_J) + P_j(x_{I-1}, z_J)] \end{aligned}$$

Para meios com impedância constante é necessário discretizar

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(c \frac{\partial P}{\partial x_1} \right) \approx \frac{1}{c_i} \frac{1}{\Delta x} \left(c_{i+1/2} \frac{P(i+1, j) - P(i, j)}{\Delta x} - c_{i-1/2} \frac{P(i, j) - P(i-1, j)}{\Delta x} \right),$$

que resulta no operador de diferenças

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(c \frac{\partial P}{\partial x_1} \right) \approx \frac{1}{\Delta^2 x} \left[\frac{c_{i+1/2}}{c_i} P(i+1, z) - \left(\frac{c_{i+1/2}}{c_i} + \frac{c_{i-1/2}}{c_i} \right) P(i, z) + \frac{c_{i-1/2}}{c_i} P(i-1, z) \right].$$

A equação (A.1) pode ser separada em duas equações. A primeira, incluindo um deslocamento de fase e a segunda o termo de difração, conforme sugerido por Clearbout (1970) para equação de 45 graus. Neste caso, tem-se

$$\frac{1}{2} \delta_{ij} \frac{\partial P_j(\mathbf{x}, \omega)}{\partial z} - \frac{(-i\omega)}{c(\mathbf{x})} (\Lambda_{ij}^1 + \Lambda_{ij}^2) P_j(\mathbf{x}, \omega) = 0. \quad (\text{A.3})$$

Esta equação admite solução analítica

$$P_i(z + \Delta z) = P_i(z) \exp \left[\frac{(-i\omega) 2\Delta z}{c} (\Lambda_{ij}^1 + \Lambda_{ij}^2) \right].$$

A segunda, contendo o termo de difração:

$$\left(\delta_{i1} \delta_{1j} - \frac{1}{2} \delta_{ij} \right) \frac{\partial P_j(\mathbf{x}, \omega)}{\partial z} + \frac{c(\mathbf{x})}{(-i\omega)} \Lambda_{ij}^2 \frac{\partial^2 P_j(\mathbf{x}, \omega)}{\partial x^2} = 0. \quad (\text{A.4})$$

Uma futura possibilidade é investigar a resposta ao impulso de cada um destes termos e explorar a combinação de cada um deles em algoritmos de Fourier Finite-Difference Migration.

APÊNDICE B – MUDANÇA DE ÍNDICES PARA O SISTEMA LINEAR

Para realizar a implementação, cada variável de campo $P_j(x_I, z_J)$ deve ser mapeada em um único vetor e a equação (A.3) mapeada em um sistema linear.

Observando que em cada ponto do domínio há n variáveis de campo $P_j(x_I, z_J)$, vamos utilizar o seguinte endereçamento

$$P_j(x_I, z_J) = P_{\kappa(j, I)}(z_J) ,$$

em que

$$\kappa(j, I) = n(I - 1) + j .$$

Com este endereçamento valem as relações

$$\kappa(j, I + 1) = nI + j = n(I - 1) + j + n ,$$

$$\kappa(j, I - 1) = n(I - 2) + j = n(I - 1) + j - n .$$

Assim a equação (A.3) pode ser escrita na forma

$$\begin{aligned} & \left[\delta_{i,1} \delta_{1,j} - \alpha_p(x_I, z_{J+1/2}) \left(\tilde{\Lambda}_{ij}^1 + \tilde{\Lambda}_{ij}^2 \right) - 2\alpha_d(x_I, z_{J+1/2}) \tilde{\Lambda}_{ij}^2 \right] P_{n(I-1)+j}(z_{J+1}) + \\ & \quad \alpha_d(x_I, z_{J+1/2}) \tilde{\Lambda}_{ij}^2 \left[P_{n(I-1)+j+n}(z_{J+1}) + P_{n(I-1)+j-n}(z_{J+1}) \right] = \\ & \left[\delta_{i,1} \delta_{1,j} + \alpha_p(x_I, z_{J+1/2}) \left(\tilde{\Lambda}_{ij}^1 + \tilde{\Lambda}_{ij}^2 \right) + 2\alpha_d(x_I, z_{J+1/2}) \tilde{\Lambda}_{ij}^2 \right] P_{n(I-1)+j}(z_J) - \\ & \quad \alpha_d(x_I, z_{J+1/2}) \tilde{\Lambda}_{ij}^2 \left[P_{n(I-1)+j+n}(z_J) + P_{n(I-1)+j-n}(z_J) \right] . \end{aligned}$$

Explicitando o sistema de equações acima para um esquema com duas variáveis auxiliares

$$\begin{aligned} & \left[1 - \alpha_p(x_I, z_{J+1/2}) \left(\tilde{\Lambda}_{11}^1 + \tilde{\Lambda}_{11}^2 \right) - 2\alpha_p(x_I, z_{J+1/2}) \tilde{\Lambda}_{11}^2 \right] P_{n(I-1)+1}(z_{J+1}) - \\ & \quad \left[\alpha_p(x_I, z_{J+1/2}) \left(\tilde{\Lambda}_{12}^1 + \tilde{\Lambda}_{12}^2 \right) + 2\alpha_d(x_I, z_{J+1/2}) \tilde{\Lambda}_{12}^2 \right] P_{n(I-1)+2}(z_{J+1}) - \\ & \quad \left[\alpha_p(x_I, z_{J+1/2}) \left(\tilde{\Lambda}_{13}^1 + \tilde{\Lambda}_{13}^2 \right) + 2\alpha_d(x_I, z_{J+1/2}) \tilde{\Lambda}_{13}^2 \right] P_{n(I-1)+3}(z_{J+1}) + \\ & \quad \alpha_d(x_I, z_{J+1/2}) \tilde{\Lambda}_{11}^2 \left[P_{n(I-1)+1+n}(z_{J+1}) + P_{n(I-1)+1-n}(z_{J+1}) \right] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \alpha_d(x_I, z_{J+1/2}) \tilde{\Lambda}_{12}^2 \left[P_{n(I-1)+2+n}(z_{J+1}) + P_{n(I-1)+2-n}(z_{J+1}) \right] + \\
& \alpha_d(x_I, z_{J+1/2}) \tilde{\Lambda}_{13}^2 \left[P_{n(I-1)+3+n}(z_{J+1}) + P_{n(I-1)+3-n}(z_{J+1}) \right] = \\
& \left[1 + \alpha_p(x_I, z_{J+1/2}) \left(\tilde{\Lambda}_{11}^1 + \tilde{\Lambda}_{11}^2 \right) + 2\alpha_d(x_I, z_{J+1/2}) \tilde{\Lambda}_{11}^2 \right] P_{n(I-1)+1}(z_J) + \\
& \left[\alpha_p(x_I, z_{J+1/2}) \left(\tilde{\Lambda}_{12}^1 + \tilde{\Lambda}_{12}^2 \right) + 2\alpha_d(x_I, z_{J+1/2}) \tilde{\Lambda}_{12}^2 \right] P_{n(I-1)+2}(z_J) + \\
& \left[\alpha_p(x_I, z_{J+1/2}) \left(\tilde{\Lambda}_{13}^1 + \tilde{\Lambda}_{13}^2 \right) + 2\alpha_d(x_I, z_{J+1/2}) \tilde{\Lambda}_{13}^2 \right] P_{n(I-1)+3}(z_J) - \\
& \alpha_d(x_I, z_{J+1/2}) \tilde{\Lambda}_{11}^2 \left[P_{n(I-1)+1+n}(z_J) + P_{n(I-1)+1-n}(z_J) \right] - \\
& \alpha_d(x_I, z_{J+1/2}) \tilde{\Lambda}_{12}^2 \left[P_{n(I-1)+2+n}(z_J) + P_{n(I-1)+2-n}(z_J) \right] - \\
& \alpha_d(x_I, z_{J+1/2}) \tilde{\Lambda}_{13}^2 \left[P_{n(I-1)+3+n}(z_J) + P_{n(I-1)+3-n}(z_J) \right].
\end{aligned}$$

Para a segunda equação:

$$\begin{aligned}
& - \left[\alpha_p(x_I, z_{J+1/2}) \left(\tilde{\Lambda}_{21}^1 + \tilde{\Lambda}_{21}^2 \right) + 2\alpha_d(x_I, z_{J+1/2}) \tilde{\Lambda}_{21}^2 \right] P_{n(I-1)+1}(z_{J+1}) - \\
& \left[\alpha_p(x_I, z_{J+1/2}) \left(\tilde{\Lambda}_{22}^1 + \tilde{\Lambda}_{22}^2 \right) + 2\alpha_d(x_I, z_{J+1/2}) \tilde{\Lambda}_{22}^2 \right] P_{n(I-1)+2}(z_{J+1}) - \\
& \left[\alpha_p(x_I, z_{J+1/2}) \left(\tilde{\Lambda}_{23}^1 + \tilde{\Lambda}_{23}^2 \right) + 2\alpha_d(x_I, z_{J+1/2}) \tilde{\Lambda}_{23}^2 \right] P_{n(I-1)+3}(z_{J+1}) + \\
& \alpha_d(x_I, z_{J+1/2}) \tilde{\Lambda}_{21}^2 \left[P_{n(I-1)+1+n}(z_{J+1}) + P_{n(I-1)+1-n}(z_{J+1}) \right] + \\
& \alpha_d(x_I, z_{J+1/2}) \tilde{\Lambda}_{22}^2 \left[P_{n(I-1)+2+n}(z_{J+1}) + P_{n(I-1)+2-n}(z_{J+1}) \right] + \\
& \alpha_d(x_I, z_{J+1/2}) \tilde{\Lambda}_{23}^2 \left[P_{n(I-1)+3+n}(z_{J+1}) + P_{n(I-1)+3-n}(z_{J+1}) \right] = \\
& \left[\alpha_p(x_I, z_{J+1/2}) \left(\tilde{\Lambda}_{21}^1 + \tilde{\Lambda}_{21}^2 \right) + 2\alpha_d(x_I, z_{J+1/2}) \tilde{\Lambda}_{21}^2 \right] P_{n(I-1)+1}(z_J) + \\
& \left[\alpha_p(x_I, z_{J+1/2}) \left(\tilde{\Lambda}_{22}^1 + \tilde{\Lambda}_{22}^2 \right) + 2\alpha_d(x_I, z_{J+1/2}) \tilde{\Lambda}_{22}^2 \right] P_{n(I-1)+2}(z_J) + \\
& \left[\alpha_p(x_I, z_{J+1/2}) \left(\tilde{\Lambda}_{23}^1 + \tilde{\Lambda}_{23}^2 \right) + 2\alpha_d(x_I, z_{J+1/2}) \tilde{\Lambda}_{23}^2 \right] P_{n(I-1)+3}(z_J) - \\
& \alpha_d(x_I, z_{J+1/2}) \tilde{\Lambda}_{21}^2 \left[P_{n(I-1)+1+n}(z_J) + P_{n(I-1)+1-n}(z_J) \right] - \\
& \alpha_d(x_I, z_{J+1/2}) \tilde{\Lambda}_{22}^2 \left[P_{n(I-1)+2+n}(z_J) + P_{n(I-1)+2-n}(z_J) \right] - \\
& \alpha_d(x_I, z_{J+1/2}) \tilde{\Lambda}_{23}^2 \left[P_{n(I-1)+3+n}(z_J) + P_{n(I-1)+3-n}(z_J) \right].
\end{aligned}$$

Finalmente a terceira equação:

$$\begin{aligned}
& - \left[\alpha_p(x_I, z_{J+1/2}) \left(\tilde{\Lambda}_{31}^1 + \tilde{\Lambda}_{31}^2 \right) + 2\alpha_d(x_I, z_{J+1/2}) \tilde{\Lambda}_{31}^2 \right] P_{n(I-1)+1}(z_{J+1}) - \\
& \left[\alpha_p(x_I, z_{J+1/2}) \left(\tilde{\Lambda}_{32}^1 + \tilde{\Lambda}_{32}^2 \right) + 2\alpha_d(x_I, z_{J+1/2}) \tilde{\Lambda}_{32}^2 \right] P_{n(I-1)+2}(z_{J+1}) - \\
& \left[\alpha_p(x_I, z_{J+1/2}) \left(\tilde{\Lambda}_{33}^1 + \tilde{\Lambda}_{33}^2 \right) + 2\alpha_d(x_I, z_{J+1/2}) \tilde{\Lambda}_{33}^2 \right] P_{n(I-1)+3}(z_{J+1}) + \\
& \alpha_d(x_I, z_{J+1/2}) \tilde{\Lambda}_{31}^2 \left[P_{n(I-1)+1+n}(z_{J+1}) + P_{n(I-1)+1-n}(z_{J+1}) \right] + \\
& \alpha_d(x_I, z_{J+1/2}) \tilde{\Lambda}_{32}^2 \left[P_{n(I-1)+2+n}(z_{J+1}) + P_{n(I-1)+2-n}(z_{J+1}) \right] + \\
& \alpha_d(x_I, z_{J+1/2}) \tilde{\Lambda}_{33}^2 \left[P_{n(I-1)+3+n}(z_{J+1}) + P_{n(I-1)+3-n}(z_{J+1}) \right] = \\
& \left[\alpha_d(x_I, z_{J+1/2}) \left(\tilde{\Lambda}_{31}^1 + \tilde{\Lambda}_{31}^2 \right) + 2\alpha_d(x_I, z_{J+1/2}) \tilde{\Lambda}_{31}^2 \right] P_{n(I-1)+1}(z_J) + \\
& \left[\alpha_d(x_I, z_{J+1/2}) \left(\tilde{\Lambda}_{32}^1 + \tilde{\Lambda}_{32}^2 \right) + 2\alpha_d(x_I, z_{J+1/2}) \tilde{\Lambda}_{32}^2 \right] P_{n(I-1)+2}(z_J) +
\end{aligned}$$

compor a imagem e P_i as variáveis auxiliares. Para um esquema com mais variáveis auxiliares a generalização é imediata.

APÊNDICE C – PSEUDOCÓDIGO

O pseudo código para a implementação é

Input:

numero de cmp's nx
 numero de amostras por traço nt
 seção CMP $\mathbf{D}(1:nt, 1:nx)$
 modelo de velocidade $\mathbf{V}(1:nx, 1:nz)$

Inicialização :

calcular $\tilde{\Lambda}^1$ e $\tilde{\Lambda}^2$
 calcular a *FFT* da seção $\tilde{\mathbf{D}}(1:nfft, 1:nx) = FFT(\mathbf{D})$
 Atribuir a matriz imagem o valor zero $\mathcal{I}(1:nx, 1:nz) = 0$

Loop em ω {

inicializar $\mathbf{P}(1:n_{nx}:n) = \tilde{\mathbf{D}}(\omega, 1:nx)$

Loop em z {

calcular do vetor complexo $\alpha(1:nx)$
 especificar o sistema linear para continuar de z para $z + \Delta z$
 solucionar o sistema linear
 Empilhar a imagem $\mathcal{I}(1:nx, z) = \mathcal{I}(1:nx, z) + \mathbf{P}(1:n_{nx}:n)$

}

}