

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ  
INSTITUTO DE TECNOLOGIA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

MODELAGEM DE PAR-TRANÇADO PARA COMUNICAÇÕES EM BANDA LARGA

GILVAN SOARES BORGES

TD 08/2016

UFPA / ITEC / PPGEE  
Campus Universitário do Guamá  
Belém-Pará-Brasil  
2016

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ  
INSTITUTO DE TECNOLOGIA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

GILVAN SOARES BORGES

MODELAGEM DE PAR-TRANÇADO PARA COMUNICAÇÕES EM BANDA LARGA

TD 08/2016

UFPA / ITEC / PPGEE  
Campus Universitário do Guamá  
Belém-Pará-Brasil  
2016

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ  
INSTITUTO DE TECNOLOGIA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

GILVAN SOARES BORGES

MODELAGEM DE PAR-TRANÇADO PARA COMUNICAÇÕES EM BANDA LARGA

Tese de doutorado submetida à banca examinadora do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal do Pará como requisito para a obtenção do título de Doutor em Engenharia Elétrica.

UFPA / ITEC / PPGEE  
Campus Universitário do Guamá  
Belém-Pará-Brasil  
2016

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)  
Sistema de Bibliotecas da UFPA

---

Borges, Gilvan Soares, 1983-  
Modelagem de par-trançado para comunicações em banda  
larga / Gilvan Soares Borges. - 2016.

Orientador: João Crisóstomo Weyl Albuquerque  
Costa.

Tese (Doutorado) - Universidade Federal do  
Pará, Instituto de Tecnologia, Programa de  
Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, Belém,  
2016.

1. Cabos de telecomunicação. 2. Sistemas de  
comunicação em banda larga. I. Título.

CDD 23. ed. 621.39

---

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ  
INSTITUTO DE TECNOLOGIA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

MODELAGEM DE PAR-TRANÇADO PARA COMUNICAÇÕES EM BANDA LARGA

AUTOR: GILVAN SOARES BORGES

TESE DE DOUTORADO SUBMETIDA À BANCA EXAMINADORA APROVADA PELO COLEGIADO DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA, SENDO JULGADA ADEQUADA PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE DOUTOR EM ENGENHARIA ELÉTRICA COM ÊNFASE EM TELECOMUNICAÇÕES.

APROVADA EM 07 DE MARÇO DE 2016.

BANCA EXAMINADORA:

---

Prof. Dr. João Crisóstomo Weyl A. Costa  
(ORIENTADOR – UFPA)

---

Prof. Dra. Maria Aparecida Gonçalves Martinez  
(MEMBRO – CEFET/RJ)

---

Prof. Dr. José Ricardo Descardecí  
(MEMBRO – UFTO)

---

Prof. Dr. Licinius Dimitri Sá de Alcantara  
(MEMBRO – UFRA)

---

Prof. Dr. Rodrigo Melo Oliveira  
(MEMBRO – UFPA)

---

Prof. Dr. Marco José de Sousa  
(MEMBRO – UFPA)

VISTO:

---

Prof. Dr. Evaldo Gonçalves Pelaes  
(COORDENADOR PPGEE/UFPA)

UFPA / ITEC / PPGEE  
Campus Universitário do Guamá  
Belém-Pará-Brasil  
2016

*Dedico este trabalho a minha filha, Tarsila de Lima Borges.*

*“Amarás O Senhor teu Deus, de todo o teu coração,  
de toda a tua alma e de todo o entendimento.”*

**Mateus 22:37**

## RESUMO

Em última instância, o propósito de um modelo de linha de transmissão é descrever a dependência com a frequência das propriedades de transmissão da linha. As causas de tal dependência podem ser agrupadas em duas grandes áreas: aquelas relacionadas a variações na geometria e materiais que constituem a linha ao longo de seu comprimento (não uniformidades), e aquelas relacionadas a fenômenos eletromagnéticos como o efeito pelicular e a dispersão dielétrica (presentes mesmo se a linha for uniforme). Nesta tese encontram-se contribuições nessas duas grandes áreas, sendo focadas em um tipo específico de linha de transmissão, o par-trançado. Os modelos de par-trançado encontrados na literatura adotam considerações simplificadoras que nem sempre são realísticas. Por exemplo, eles ignoram que o meio dielétrico é heterogêneo e com perdas, ignoram o efeito das não uniformidades que são inevitáveis a todas as linhas de transmissão, etc. Essas e outras questões são levadas em consideração no desenvolvimento de um novo modelo de par-trançado. Esse modelo é composto por duas componentes, uma determinística que é função das características construtivas do par-trançado, e uma estocástica que é função dos defeitos inerentes a essas características construtivas ao longo do comprimento do par-trançado. Com relação a componente determinística, o diferencial do modelo proposto em relação a outros é considerar de maneira simples e realística: os efeitos relativos à proximidade entre os condutores, a existência dos revestimentos isolantes nesses condutores, as perdas dielétricas nesses revestimentos e o trançado dos pares. Como consequência disso, o modelo proposto apresenta maior exatidão quando comparados a esses modelos. Com relação a componente estocástica, não foram encontrados na literatura modelos similares para comparação. Mesmo assim, mostrou-se que o modelo estocástico proposto apresenta uma boa concordância com a observação experimental.

**Palavras-chave:** Linhas de transmissão, modelos de propagação, não uniformidades, par-trançado, processo estocástico.

# ABSTRACT

Ultimately, the purpose of a model for transmission lines is to describe how the transmission properties of a line are frequency dependent. The sources of such dependency can be grouped in two areas: that one related to longitudinal changes on the line geometry and constituting materials (non-uniformities), and that related to electromagnetic phenomena such as the skin effect and the dielectric dispersion (present even when the line is uniform). The contribution of this thesis is related to the above mentioned areas, focused on a specific type of transmission line, the twisted-pair. The models for twisted pairs found in literature assume simplistic considerations which are not always realistic, e.g., they ignore that the dielectric medium is heterogeneous and with losses, ignore the effect of the non-uniformities that are inevitable to all transmission lines, etc. These and other issues are taken into account during the development of a new twisted-pair model. This model is composed for two components, a deterministic one which is a function of the constructive characteristics of the twisted-pair, and a stochastic one which is a function of the inherent defects in twisted-pair cables. Regarding the deterministic component, it employs a realistic and straightforward approach to describe: the proximity effect of the conductors, the presence of conductors' insulation, the dielectric losses and pair twisting. As a result, the model is more accurate than the models from the literature. Regarding the stochastic component, it was not found in literature similar models for comparison. Nevertheless, it was shown that the proposed stochastic model has good agreement with experimental observation.

**Keywords:** transmission lines, propagation models, non-uniformity, twisted-pair, stochastic process.

## LISTA DE SÍMBOLOS

$\vec{e}, \vec{h}$	Vetores campo elétrico e magnético no domínio do tempo, respectivamente.
$x$	Coordenada espacial na direção longitudinal da linha de transmissão.
$y, z$	Coordenadas espaciais na direção transversal da linha de transmissão.
$t$	Coordenada temporal.
$v$	Tensão no domínio do tempo.
$i$	Corrente no domínio do tempo.
$\int$	Operador integral.
$\oint$	Operador integral de circuito fechado.
$\vec{e}_t, \vec{h}_t$	Componentes do vetor campo elétrico e magnético na seção transversal da linha, respectivamente.
$d\vec{l}$	Vetor de comprimento infinitesimal.
$R, L, G, C$	Resistência, indutância, condutância e capacitância por unidade de comprimento de uma linha de transmissão.
$dx$	Elemento diferencial de comprimento na direção longitudinal da linha de transmissão.
$\partial/\partial x$	Operador derivada parcial de primeira ordem na direção $x$ .
$j$	Unidade imaginária.
$\omega$	Frequência angular.
$Z_s$	Impedância série.
$Y_p$	Admitância paralelo.
$V$	Tensão no domínio da frequência.
$I$	Corrente no domínio da frequência.
$e$	Número de Euler.
$\partial^2/\partial x^2$	Operador derivada parcial de segunda ordem na direção $x$ .

$V^+, V^-$	Amplitude das ondas de tensão propagantes nas direções $+x$ ou $-x$ de uma linha de transmissão uniforme, respectivamente.
$\gamma$	Constante de propagação.
$I^+, I^-$	Amplitude das ondas de corrente propagantes nas direções $+x$ ou $-x$ de uma linha de transmissão uniforme, respectivamente.
$\alpha$	Constante de atenuação.
$\beta$	Constante de fase.
$\sqrt{\quad}$	Operador raiz quadrada.
$Z_0$	Impedância característica.
$\gamma(x)$	Constante de propagação longitudinal.
$Z_0(x)$	Impedância característica longitudinal.
$l$	Comprimento da linha de transmissão.
$Z_l$	Impedância da carga.
$V_g$	Tensão da fonte, no domínio da frequência.
$Z_g$	Impedância da fonte.
$Z(x)$	Impedância na posição $x$ da linha de transmissão.
$\tanh$	Operador tangente hiperbólica.
$\operatorname{atanh}$	Operador tangente hiperbólica inversa.
$Z_{in}$	Impedância na entrada da linha de transmissão.
$\infty$	Infinito.
$Z_{incc}$	Impedância na entrada da linha de transmissão com carga em curto circuito.
$Z_{inca}$	Impedância na entrada da linha de transmissão com carga em circuito aberto.
$\Gamma(x)$	Coeficiente de reflexão na posição $x$ da linha de transmissão.
$\ln$	Operador logaritmo natural.
$\Gamma_{in}$	Coeficiente de reflexão na fonte de alimentação.
$H(x)$	Função de transferência na posição $x$ da linha de transmissão.
$\cosh$	Operador cosseno hiperbólico.
$\sinh$	Operador seno hiperbólico.
$H_{in}$	Função de transferência na entrada da linha de transmissão.
$V_X, I_X$	Fasor de tensão e de corrente na porta $X$ do quadripolo, respectivamente.

$A, B, C, D$	Parâmetros $ABCD$ de um quadripolo.
$[T]$	Matriz de transmissão.
$\det[ \ ]$	Operador determinante.
$N$	Número de termos.
$\Delta x$	Comprimento de um seguimento de linha de transmissão.
$\Pi$	Operador produtivo.
$[T_n]$	Matriz de transmissão do seguimento $n$ de linha de transmissão.
$t_0$	Instante de tempo qualquer.
$h(t)$	Resposta ao impulso de um sistema.
$u(t)$	Função degrau unitário.
$\pi$	Número pi.
$H(\omega)$	Função de transferência.
$U(\omega)$	Transformada de Fourier da função degrau unitário.
$\delta(\omega)$	Impulso unitário.
$\mathcal{P}$	Operador valor principal de Cauchy.
$\mathcal{R}\{ \}$	Operador parte real.
$\mathcal{I}\{ \}$	Operador parte imaginária.
$( \ )^*$	Operador hermitiano.
$L_\infty, C_\infty$	Valores assintóticos para a Indutância e para capacitância em altas frequências, respectivamente.
$\omega_p$	Frequência a partir da qual as perdas por efeito pelicular são dominantes.
$\omega_d$	Frequência a partir da qual as perdas dielétricas são dominantes.
$\sigma$	Condutividade elétrica dos condutores.
$d$	Diâmetro dos condutores.
$\epsilon_r$	Permissividade elétrica relativa do revestimento dielétrico.
$s$	Espessura do revestimento dielétrico.
$\nu$	Taxa de trançado dos pares.
$Z_{pel}$	Componente da impedância série devido ao efeito pelicular.
$\overline{\omega}$	Grandeza proporcional a $j\omega$ .
$\mu_0$	Permeabilidade magnética do vácuo.
$R_0$	Resistência por unidade de comprimento de um condutor cilíndrico sob corrente contínua.
$J_X$	Operador função de Bessel de primeira espécie e ordem $X$ .

$L_0$	Indutância por unidade de comprimento de condutores cilíndricos paralelos e com condutividade infinita.
$r$	Razão entre o diâmetro interno e o diâmetro externo da cobertura dielétrica de um par-trançado.
$Z_{prox}$	Componente da impedância série devido ao efeito de proximidade.
$A_n$	Componente $n$ do somatório relativo à equação do efeito de proximidade.
$T_{mn}, S_m$	Coefficientes do sistema linear de dimensão infinita, relativo ao efeito de proximidade.
$Z_{proxN}$	Aproximação para a impedância de proximidade considerando $N$ termos.
$\operatorname{acosh}$	Operador cosseno hiperbólico inverso.
$\varepsilon_{ref}$	Permissividade elétrica relativa efetiva do meio dielétrico.
$C_0$	Capacitância por unidade de comprimento da linha se o meio dielétrico fosse o vácuo.
$\varepsilon_0$	Permissividade elétrica do vácuo.
$\kappa$	Constante empírica relacionada a um meio dielétrico heterogêneo.
$\varepsilon'_{ref}$	Parte real da permissividade elétrica relativa efetiva.
$\varepsilon''_{ref}$	Parte imaginária da permissividade elétrica relativa efetiva.
$\varepsilon_{ref\infty}$	Valores assintóticos para a permissividade elétrica relativa efetiva em altas frequências.
$\tau$	Tempo de relaxação.
$\vec{p}(t)$	Vetor polarização no domínio do tempo.
$\omega_0$	Frequência natural de oscilação.
$\chi_0$	Suscetibilidade elétrica em baixas frequências.
$\vec{P}(\omega)$	Vetor polarização no domínio da frequência.
$\vec{E}(\omega)$	Vetor campo elétrico no domínio da frequência.
$\varepsilon_{rs}, \varepsilon_{r\infty}$	Valores assintóticos para a permissividade elétrica relativa para baixas e altas frequências, respectivamente.
$\zeta(\tau)$	Função de ponderação da teoria de distribuição contínua de tempos de relaxação.
$a, b$	expoentes reais, no intervalo de zero a um.
$c$	Velocidade da luz no vácuo.
$\Delta L_x$	Acréscimo de indutância devido ao trançado.

$\Delta C_x$	Acréscimo de capacitância devido ao trançado.
$l_{real}$	Comprimento real de um par-trançado.
$\vec{q}(x)$	Função vetorial que representa uma trajetória helicoidal.
$k_l$	Fator de correção multiplicativo devido ao efeito do trançado relativo ao aumento do comprimento.
$Z_{s\parallel}$	Impedância série de um par-trançado sem o efeito do trançado.
$Y_{p\parallel}$	Admitância paralelo de um par-trançado sem o efeito do trançado.
$\eta$	Fator multiplicativo que corrige o erro ao aproximar a impedância devido ao efeito de proximidade considerando apenas um termo.
$\eta_0, \eta_\infty$	Valores assintóticos de $\eta$ para baixas e altas frequências, respectivamente.
$\tau_\eta, b_\eta$	Grandezas adimensionais de ajuste da equação de determina $\eta$ .
$\Sigma$	Operador somatório.
$\tan(\delta)$	Tangente de perdas.
$k_L, k_C$	Fatores de correção devido ao efeito do trançado, relativos respectivamente aos acréscimos na indutância e na capacitância.
$\alpha_{\parallel}$	Constante de atenuação de um par trançado, sem o efeito do trançado.
$\beta_{\parallel}$	Constante de fase de um par trançado, sem o efeito do trançado.
$Z_{0\parallel}$	Impedância característica de um par trançado, sem o efeito do trançado.
$\theta_{ef}$	Constante de transferência efetiva.
$Z_{0_{ef}}$	Impedância característica efetiva.
$f_s$	Fator de simetria.
$Z_{in_l}$	Impedância no terminal de entrada com o terminal de saída conectado a uma impedância de carga $Z_l$ arbitrária.
$\bar{\gamma}, \bar{Z}_0$	Comportamento médio dos parâmetros secundários longitudinais.
$\Delta\gamma(x)$	Varição da constante de propagação longitudinal em relação ao seu comportamento médio.
$\Delta Z_0(x)$	Varição da impedância característica longitudinal em relação ao seu comportamento médio.
$\Delta\theta_{ef}$	Varição da constante de transferência efetiva em relação ao seu valor correspondente da linha uniforme de referência.
$\Delta Z_{0_{ef}}$	Varição da impedância característica efetiva em relação ao seu valor correspondente da linha uniforme de referência.

$\Delta f_s$	Variação do fator de simetria em relação ao seu valor correspondente da linha uniforme de referência.
$Z_{in_0}$	Impedância no terminal de entrada com o terminal de saída conectado a uma impedância de carga $\bar{Z}_0$ .
$\coth$	Operador cotangente hiperbólica.
$\bar{Z}(x)$	Impedância na posição $x$ da linha uniforme de referência.
$\Delta Z(x)$	Variação de impedância na posição $x$ da linha em relação a $\bar{Z}(x)$ .
$\bar{Z}_N$	Impedância normalizada da linha uniforme de referência.
$\operatorname{sech}$	Operador secante hiperbólica.
$\operatorname{csh}$	Operador cossecante hiperbólica.
$\Delta Z_{0MAX}$	Variação máxima da impedância característica longitudinal.
$\lambda$	Comprimento de onda.
$\lambda_{MAX}$	Comprimento de onda $m$ que ocorre algum máximo.
$MAX\{ \}$	Operador máximo.
$\mathcal{W}$	Frequência angular espacial.
$\mathcal{W}_{MAX}$	Frequência angular espacial máxima.
$w$	Largura de uma falta localizada.
$S$	Área.
$\gamma_{ef}$	Constante de propagação efetiva.
$\mathbb{E}[ \ ]$	Operador média estatística.
$\mathbb{V}[ \ ]$	Operador variância estatística.
$\mathbb{R}[ \ ]$	Operador autocorrelação estatística.
$d_c$	Distância de correlação.
$\cot$	Operador cotangente.
$\phi$	Porcentagem da densidade espectral de potência considerada para um sinal.
$[ \ ]^T$	Operador transposto.
$[K]$	Matriz de transformação linear usada para transformar um vetor gaussiano decorrelacionado em um vetor gaussiano correlacionado.
$[\Sigma]$	Matriz de covariância.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 – Distribuição de campos em uma linha de transmissão ideal de dois condutores...6	6
Figura 2.2 – Circuito equivalente de um trecho infinitesimal de uma linha de transmissão de dois condutores.....7	7
Figura 2.3 – Representação esquemática de um sistema de comunicação cujo canal é uma linha de transmissão. .... 11	11
Figura 2.4 – Representação esquemática de um circuito linear como uma caixa preta, evidenciando apenas os fasores de tensão e corrente em seus terminais de entrada e saída. .... 15	15
Figura 2.5 – Propriedade de um circuito simétrico. .... 16	16
Figura 2.6 – Propriedade de um circuito recíproco. .... 17	17
Figura 2.7 – Excitação e resposta de modelos matemáticos: (a) Causal; (b) Não causal..... 19	19
Figura 2.8 – Medições dos parâmetros primários de uma linha de transmissão. ....23	23
Figura 2.9 – Atenuação de uma linha de transmissão em função da frequência. ....24	24
Figura 3.1 – Geometria de um par-traçado.....25	25
Figura 3.2 – Distribuição de corrente em altas frequências na seção transversal de pares-traçados com diferentes distâncias entre os condutores: (a) Condutores afastados; (b) Condutores próximos.....27	27

Figura 3.3 – Impedância série obtida considerando os 10 primeiros termos da série em (3.8), sendo as curvas tracejadas correspondentes aos comportamentos assintóticos para as baixas e altas frequências. ....	29
Figura 3.4 – $C_0$ para diferentes tipos de linhas de transmissão: (a) Placas paralelas; (b) Coaxial; (c) Fios paralelos.....	30
Figura 3.5 – Simulação numérica da distribuição de energia eletrostática na seção transversal de um par-trançado. ....	31
Figura 3.6 – Dispersão dielétrica de um sólido hipotético e a sua correspondente predição através do modelo de Debye: — Dispersão do sólido; -- Modelo de Debye. ....	34
Figura 4.1 – Erro percentual de diferentes modelos de impedância série: — Sem efeito de proximidade; -- Modelo VUB; --- Modelo VT; .... Modelo NASA.....	40
Figura 4.2 – Erro de truncatura da série em (3.8).....	41
Figura 4.3 – Variação com a frequência do fator de correção $\eta$ para um par-trançado típico. ....	42
Figura 4.4 – Erro percentual de diferentes modelos de impedância série: — Modelo UFPA; -- Modelo VUB; .... Modelo VT. ....	43
Figura 4.5 – Configurações utilizadas para as simulações numéricas de $\epsilon_{r_{ef}}$ .....	45
Figura 4.6 – Relação entre a permissividade efetiva e a do isolante, para diferentes valores de $r$ : — Simulações numéricas; -- Modelos tradicionais. ....	45
Figura 4.7 – Desvio em relação as simulações numéricas cometido ao se considerar o meio dielétrico efetivo como equivalente ao do revestimento dielétrico, para diferentes combinações de $\epsilon_r$ e $r$ . ....	46
Figura 4.8 – Dependência do expoente $\kappa$ da equação (4.8) em relação à $r$ : • Amostras obtidas a partir de simulações numéricas; — Curva de ajuste obtida pela equação (4.9). ....	47
Figura 4.9 – Desvio em relação as simulações numéricas cometido ao se considerar o meio dielétrico efetivo como sendo definido pelo modelo em (4.10), para diferentes combinações de $\epsilon_r$ e $r$ .....	47

- Figura 4.10 – Tangente de perdas do polietileno e do PVC: • Amostras medidas; --- Modelo de Debye; -- Modelo de Cole-Cole; ... Modelo de Cole-Davidson; — Modelo de Havrilak-Negami. .... 48
- Figura 4.11 – Tangente de perdas do polipropileno e do teflon: • Amostras medidas; --- Modelo de Debye; -- Modelo de Cole-Cole; ... Modelo de Cole-Davidson; — Modelo de Havrilak-Negami. .... 49
- Figura 4.12 – Atenuação de um par-trançado com condutores típicos e revestimento dielétrico de polietileno ou PVC: — Com perdas dielétricas; -- Sem perdas dielétricas..... 50
- Figura 4.13 – Atenuação de um par-trançado com condutores típicos e revestimento dielétrico de polipropileno ou teflon: — Com perdas dielétricas; -- Sem perdas dielétricas..... 50
- Figura 4.14 – Medições dos parâmetros secundários de dois pares com diferentes taxas de trançado: — par-trançado  $m$ ; -- par-trançado  $n$ . .... 54
- Figura 4.15 – Estimações das razões dos fatores de correção referentes ao efeito do trançado, para dois pares  $m$  e  $n$  com diferentes taxas de trançado: —  $k_{tm}/k_{tn}$ ; ...  $k_{Lm}/k_{Ln}$ ; --  $k_{cm}/k_{cn}$ . .... 54
- Figura 5.1 – Medições da parte resistiva da impedância característica dos quatro pares-trançados de um cabo de rede ethernet categoria 5: — Medições; — Comportamento médio. .... 58
- Figura 5.2 – Perfil de variação da impedância característica longitudinal para uma linha de transmissão periódica. .... 68
- Figura 5.3 – Refletividade em função do comprimento elétrico para uma linha de transmissão periódica com  $N = 10$  e  $\Delta Z_{0_{MAX}}/\bar{Z}_0 = 0,01$ : — Simulação numérica; -- Equação (5.49). .... 69
- Figura 5.4 – Refletividade em função do comprimento elétrico para uma linha de transmissão periódica com  $N = 10$  e  $\Delta Z_{0_{MAX}}/\bar{Z}_0 = 0,1$ : — Simulação numérica; -- Equação (5.49). .... 69
- Figura 5.5 – Extirpação de 5 cm em um cabo paralelo. .... 70

- Figura 5.6 – Função de transferência de um cabo paralelo: — Com extirpação periódica no dielétrico; -- Sem extirpação no dielétrico. .... 71
- Figura 5.5 – Perfil de variação da impedância característica longitudinal para uma linha de transmissão com falta. .... 71
- Figura 5.6 – Refletividade em função da frequência para uma linha de transmissão em que uma pequena região do dielétrico está corroída, de diferentes formas: — Retangular; -- Triangular; --- Parabólica; .... Cossenoidal. .... 73
- Figura 6.1 – Representação de  $\Delta Z_0(x)$  por um processo estocástico. .... 79
- Figura 6.2 – Simulações de  $\Delta Z_0(x)$ : (a)  $\sqrt{\mathbb{V}[\Delta Z_0(x)]} = 0,5 \Omega$  e  $d_c = 1 m$ ; (b)  $\sqrt{\mathbb{V}[\Delta Z_0(x)]} = 0,5 \Omega$  e  $d_c = 0,1 m$ . .... 81
- Figura 6.3 – Simulações da parte resistiva da impedância característica dos quatro pares-trançados de um cabo de rede ethernet hipotético: (a)  $\sqrt{\mathbb{V}[\Delta Z_0(x)]} = 0,5 \Omega$  e  $d_c = 1 m$ ; (b)  $\sqrt{\mathbb{V}[\Delta Z_0(x)]} = 0,5 \Omega$  e  $d_c = 1 m$ . .... 84
- Figura 6.4 – Desvio padrão do processo estocástico que caracteriza  $\Delta Z_{0_{ef}}$  para não uniformidades com diferentes distâncias de correlação: —  $\sqrt{\mathbb{V}[\Delta Z_0(x)]} = 0,5 \Omega$  e  $d_c = 1 m$ ; --  $\sqrt{\mathbb{V}[\Delta Z_0]} = 0,5 \Omega$  e  $d_c = 1 m$ . .... 85
- Figura 7.1 – Constante de propagação: — Simulação numérica; — Modelo VUB; -- Modelo VT; .... Modelo NASA; --- Modelo UFPA. .... 88
- Figura 7.2 – Impedância característica: — Simulação numérica; — Modelo VUB; -- Modelo VT; .... Modelo NASA; --- Modelo UFPA. .... 89
- Figura 7.3 – Medições da parte resistiva da impedância característica de todos os pares-trançados dos cabos TEL 313 e TEL 481: — Medições; — Média estatística. .... 91
- Figura 7.4 – Desvio padrão das medições de impedância característica por tom de frequência: — TEL 481; -- TEL 313; .... Curva de ajuste. .... 91
- Figura 7.5 – Histograma das amostras da parte resistiva das medições de impedância característica, nas frequências de 50 e 100 MHz. .... 92

Figura 7.6 – Simulações da parte resistiva da impedância característica de 46 pares-trançados, equivalentes as dos cabos TEL 313 e TEL 481: — Simulações; — Média estatística. ...93

Figura 7.7 – Coeficiente de variação de Pearson para as medições do cabo TEL 481: — Constante e propagação; -- Impedância característica. ....94

## LISTA DE TABELAS

Tabela 3.1 – Principais modelos de dispersão dielétrica.....	35
Tabela 4.1 – Parâmetros dos modelos de Cole-Cole e Havrila-Negami para alguns polímeros de baixas perdas.....	49
Tabela 5.1 – Função $g(\gamma w)$ para diferentes formatos de faltas locais.....	72
Tabela 7.1 – Características construtivas dos três pares-trançados simulados pelo OptEM....	88
Tabela 7.2 – Desvio médio dos modelos analíticos em relação as simulações numéricas para os pares 1, 2 e 3. ....	89
Tabela 7.3 – Características dos cabos de pares-trançados utilizado nas medições.....	90
Tabela B.1 – Características construtivas de pares-trançados.....	104

# SUMÁRIO

<b>CAPÍTULO 1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>1</b>
1.1	Motivação	1
1.2	Objetivo	3
1.3	Estrutura da Tese	4
<b>CAPÍTULO 2</b>	<b>LINHAS DE TRANSMISSÃO</b>	<b>5</b>
2.1	Introdução	5
2.2	Teoria de Circuitos Distribuídos	7
2.2.1	<i>Linha de Transmissão Uniforme</i>	9
2.2.2	<i>Parâmetros Longitudinais</i>	10
2.2.3	<i>Outras Grandezas Elétricas</i>	11
2.2.3.1	Impedância Generalizada	12
2.2.3.2	Coefficiente de Reflexão Generalizado	13
2.2.3.3	Função de Transferência Generalizada	14
2.3	Quadripolos	15
2.3.1	<i>Parâmetros ABCD</i>	15
2.3.2	<i>Reciprocidade e Simetria</i>	16
2.3.3	<i>Quadripolos e Linhas de Transmissão</i>	17
2.4	Princípio da Causalidade	19
2.4.1	<i>Relações de Hilbert</i>	20
2.4.2	<i>Causalidade e Linhas de Transmissão</i>	21
2.5	Dependência com a Frequência	23
<b>CAPÍTULO 3</b>	<b>O PAR-TRANÇADO</b>	<b>25</b>
3.1	Características Construtivas	25
3.2	Impedância Série	26
3.3	Admitância Paralelo	30

3.3.1	<i>Dispersão Dielétrica</i> .....	32
3.4	O Efeito do Trançado .....	35
3.5	Modelos de Par-Trançado.....	37
3.5.1	<i>Modelo VUB</i> .....	37
3.5.2	<i>Modelo VT</i> .....	38
3.5.3	<i>Modelo NASA</i> .....	38
<b>CAPÍTULO 4 MODELO UFPA .....</b>		<b>39</b>
4.1	Impedância Série .....	39
4.1.1	<i>O Efeito de Proximidade</i> .....	40
4.2	Admitância Paralelo .....	43
4.2.1	<i>Permissividade Elétrica Efetiva</i> .....	44
4.2.2	<i>Perdas Dielétricas</i> .....	48
4.3	O Efeito do Trançado .....	51
4.4	O Modelo Proposto.....	55
4.5	Conclusões.....	56
<b>CAPÍTULO 5 EQUIVALENTE UNIFORME DE UMA LINHA NÃO UNIFORME.....</b>		<b>57</b>
5.1	Parâmetros Efetivos.....	59
5.2	Relação entre Parâmetros Efetivos e Longitudinais .....	61
5.2.1	<i>Não Uniformidades de Pequena Amplitude</i> .....	62
5.2.2	<i>Aproximações de Primeira Ordem</i> .....	63
5.3	Outras Grandezas Elétricas.....	66
5.4	Estudos de Caso.....	67
5.4.1	<i>Linha de Transmissão com Não Uniformidades Periódicas</i> .....	68
5.4.2	<i>Linha de Transmissão com Falta Local</i> .....	71
5.5	Principais Resultados.....	73
5.6	Conclusões.....	75
<b>CAPÍTULO 6 MODELO PARA LINHAS COM NÃO UNIFORMIDADES INTRÍNSECAS .....</b>		<b>76</b>
6.1	Equivalente Uniforme.....	77
6.2	Caracterização Estatística de $\Delta Z_0(x)$ .....	78
6.2.1	<i>Simulação do Processo</i> .....	80
6.3	Caracterização Estatística de $\Delta Z_{0ef}$ .....	81
6.3.1	<i>Simulação do Processo</i> .....	83

6.4	Principais Resultados.....	85
6.5	Conclusões.....	86
<b>CAPÍTULO 7 AVALIAÇÃO DOS MODELOS DE PAR-TRANÇADO.....</b>		<b>87</b>
7.1	Componente Determinística .....	87
7.2	Componente Estocástica.....	90
7.3	Conclusões.....	94
<b>CAPÍTULO 8 CONSIDERAÇÕES FINAIS.....</b>		<b>95</b>
8.1	Trabalhos Futuros .....	96
<b>REFERÊNCIAS.....</b>		<b>97</b>
<b>APÊNDICE A</b>	<b>PUBLICAÇÕES NO PERÍODO .....</b>	<b>102</b>
<b>APÊNDICE B</b>	<b>CARACTERÍSTICAS DE PARES-TRANÇADOS COMERCIAIS.....</b>	<b>104</b>

# CAPÍTULO 1

## INTRODUÇÃO

### 1.1 Motivação

Há pouco tempo, acreditava-se que nos dias de hoje o acesso à banda larga em áreas urbanas pertenceria exclusivamente à fibra óptica. Os usuários estariam conectados aos seus prestadores de serviços através de enlaces fim-a-fim de fibra óptica (cenário de “fibra até a casa”, do inglês *fiber to the home* – FTTH). No entanto, as tecnologias baseadas em cabos de pares-trançados, como linha digital do assinante (do inglês *Digital Subscriber Line* – DSL), ainda dominam o mercado [1], sendo muito provável que isso continue em um futuro próximo. O principal motivo são os custos de adaptação da infraestrutura legada da telefonia fixa que são menores em comparação com os custos de novas implantações de fibra óptica. Na Europa essa diferença pode acarretar em uma economia de mais de 3 milhões de euros, isso para apenas 300 usuários típicos [2]. Enquanto os investimentos necessários forem desproporcionais a real demanda de mercado, FTTH não será a tecnologia dominante. Além do mais, ao longo dos últimos 30 anos as taxas de transmissão em cabos de pares-trançados têm aumentado de pelo menos uma ordem de grandeza a cada década [3]. Isso graças ao desenvolvimento de novas técnicas de transmissão em banda larga, cancelamento de ruído, codificação, entre outras inovações em processamento de sinais [4].

Uma alternativa viável ao FTTH seria implantar fibra óptica até um ponto de distribuição e deixar o par-trançado já existente nos poucos metros restantes em direção ao usuário final (cenário de “fibra no ponto de distribuição”, do inglês *fiber to the distribution point* – FTTdp). Esses metros restantes são justamente onde a implantação da fibra óptica seria mais onerosa. Essa estratégia permite uma transição suave para o cenário FTTH em termos de custos, com possibilidade de taxas de transmissão compatíveis com as alcançadas via fibra. Pensando nisso a União Internacional de Telecomunicações (do inglês *International*

*Telecommunication Union* – ITU) iniciou em 2011 um projeto de pesquisa e padronização de uma nova tecnologia DSL denominada G.fast [5], a primeira a ultrapassar a barreira de 1 Gb/s de taxa de transmissão em um único par-trançado de até 100 m de comprimento, usando uma largura de banda 212 MHz. Atualmente essa tecnologia está em fase de ensaios por várias operadoras de telecomunicações ao redor do mundo, tanto em laboratórios de pesquisa como em campo. Já se encontra em fase de pesquisa uma nova versão dessa tecnologia, o XG.fast, com objetivo de alcançar uma taxa agregada de até 10 Gb/s em dois pares-trançados de até 70 m, usando uma largura de banda de 500 MHz [4].

Para que os limites do par-trançado sejam alcançados é necessário o conhecimento o mais exato possível de suas características de transmissão, o que pode ser obtido através de medições e modelagem. Modelos de par-trançado que operam em frequências de até 30 MHz já existem e foram desenvolvidos para os sistemas DSL convencionais [6-8]. O problema é que esses modelos não se comportam bem em frequência maiores, como as do G.fast [9]. Em altas frequências alguns fatores antes desprezíveis tornam-se significativos e devem ser levados em consideração. Um exemplo são as perdas dielétricas, que são consideradas nulas em todos os modelos de par-trançado para os sistemas DSL convencionais. Outro exemplo são as imperfeições ao longo do cabo. Ainda mais nos sistemas DSL onde a infraestrutura legada de pares-trançados é de baixa qualidade e existente há décadas, sujeitada a variações ambientais, manipulações inadequadas, etc. Além disso, todas as linhas de transmissão inevitavelmente apresentam não uniformidades ao longo de sua estrutura. Ainda que os fabricantes empreguem as melhores práticas na concepção e fabricação dessas linhas, elas sempre apresentarão pequenas perturbações longitudinais randômicas e inerentes à geometria e aos materiais utilizados. Em altas frequências o comprimento de onda do sinal associado se torna comparável às dimensões dessas não uniformidades, de modo que seus efeitos, desconsiderados nos modelos tradicionais, tornam-se significativos. Portanto é importante o entendimento de como essas não uniformidades impactam na transmissão de sinais.

Devido a esses e outros fatores, em grupos de discussão do ITU, muitas empresas demonstraram a necessidade de se desenvolver modelos de referência para pares-trançados que permitam estudos de desempenho mais realistas e projetos de transceptores G.fast [10-12]. Alguns modelos foram propostos na literatura [13][14][9], no entanto todos eles descrevem o comportamento de transmissão de um par-trançado por equações empíricas cujos parâmetros são destituídos de significado físico. Se por um lado esse tipo de modelo é simples, por outro lado é difícil a estimação de seus parâmetros, além impossibilitarem um entendimento mais profundo dos fenômenos físicos subjacentes ao processo de transmissão.

Os poucos modelos cujos parâmetros são as características construtivas<sup>1</sup> do par-trançado são idealizados demais [15][7][8]. Esse tipo de modelo normalmente é obtido através da teoria eletromagnética, sendo mais complexos. Com o intuito de diminuir essa complexidade é comum o uso de considerações simplificadoras, que nem sempre são realísticas. Por exemplo, ignorar a existência de uma cobertura isolante que envolve os condutores, o efeito de trançado, etc.

Além do mais a necessidade de se desenvolver modelos de par-trançado mais realistas, ultrapassa as aplicações em DSL. O par-trançado é extensivamente utilizado em outras áreas, como cabeamento estruturado, automação industrial, *data centers*, em sistemas de controle e segurança de veículos automotivos e aeronaves, etc. Para ter uma ideia, atualmente de 1 % a 5 % do peso de um carro é devido a cabos que conectam diversos sistemas eletrônicos, podendo chegar até 5 km de extensão acumulada [16], sendo que desses cabos muitos são de pares-trançados. O cabeamento é um componente crítico de qualquer veículo moderno. Segundo dados Força Aérea Americana, falhas em cabos são os principais responsáveis por acidentes em aeronaves, aproximadamente 30% deles [17]. Portanto existe muito interesse, tanto da indústria aeronáutica como automotiva, no desenvolvimento de tecnologias que permitam não somente localizar falhas já existentes em cabos, mas também prever falhas em potencial, maximizando assim a funcionalidade e segurança do sistema [18-20][16]. Para isso é imprescindível a existência de modelos que reproduzam com fidelidade o comportamento dos sinais propagantes no cabo, frente os possíveis defeitos em sua estrutura.

## 1.2 Objetivo

Com base no exposto acima, o objetivo deste trabalho é propor um modelo que determine as propriedades de transmissão de um par-trançado em função de suas características construtivas, em uma ampla faixa de frequência, que vai desde o regime de corrente contínua até o início da faixa de micro-ondas. Como diferencial esse modelo deve levar em consideração, de maneira simples e realística: os efeitos relativos à proximidade entre os condutores; a existência dos revestimentos isolantes nesses condutores, as perdas dielétricas nesses revestimentos, o trançado dos pares e as variações randômicas nas características construtivas do par-trançado ao longo de seu comprimento.

---

<sup>1</sup> Características relacionadas à geometria e as propriedades elétricas dos materiais que compõe o par-trançado, por exemplo, diâmetro dos condutores, permissividade elétrica do revestimento isolante, taxa de trançado, etc.

### 1.3 Estrutura da Tese

O restante desta tese está organizado em sete capítulos. No Capítulo 2 encontra-se um resumo da teoria geral sobre linhas de transmissão, servindo como base para a tese como um todo. No Capítulo 3 encontra-se o estado da arte sobre modelos de par-trançado encontrados na literatura. Nos Capítulos 4, 5 e 6 encontram-se efetivamente as contribuições do autor. Especificamente, no Capítulo 4 tenta-se resolver algumas questões ainda em aberto e que foram abordadas no Capítulo 3, resultando em um novo modelo de par-trançado. Nos Capítulos 5 e 6 o objetivo é abordar o efeito das não uniformidades. Sendo que no Capítulo 5 é desenvolvido o formalismo matemático necessário para que no Capítulo 6 se crie um modelo estocástico que considera o efeito de pequenas variações randômicas ao longo de um par-trançado. Esses modelos serão validados no Capítulo 7 através de simulações numéricas e medições. Finalmente, no Capítulo 8 encontram-se as considerações finais do autor.

# CAPÍTULO 2

## LINHAS DE TRANSMISSÃO

Este capítulo objetiva unicamente fornecer subsídios básicos da teoria clássica de linhas de transmissão, assim como de outros assuntos relacionados, para uma melhor compreensão dos capítulos posteriores desta tese. Para uma leitura aprofundada sobre o tema recomendam-se as referências [21-24].

### 2.1 Introdução

Uma linha de transmissão é um dispositivo composto de dois ou mais guias condutores capaz de transportar energia eletromagnética de um ponto a outro de um sistema, de forma eficiente. Para isso é necessário que o fluxo de potência ocorra preferencialmente na direção longitudinal da linha. Ou seja, o modo de propagação dominante em uma linha de transmissão é o *Transverse Electromagnetic* (TEM), em que os componentes longitudinais dos campos elétrico e magnético são nulos.

Sobre condições idealizadas, em que os condutores são perfeitos, paralelos e imersos em um meio dielétrico homogêneo, o único modo de propagação existente é o TEM. Isso para frequências de operação cujos comprimentos de onda associados sejam bem maiores que as dimensões da seção transversal da linha (geralmente abaixo da faixa de micro-ondas), caso contrário coexistirão outros modos de propagação que são evanescentes. Em linhas reais, em que os condutores são bons mas não perfeitos e o meio dielétrico é heterogêneo, existem componentes longitudinais de campo. No entanto esses componentes são de pequena amplitude para qualquer linha cuja transmissão seja eficiente. Assim sendo, os modos de propagação existentes em uma linha de transmissão real podem ser tratados como uma pequena perturbação do modo TEM, também conhecido por modo quase-TEM.

Na Figura 2.1 encontram-se as distribuições de campo de uma linha de transmissão ideal, em que o único modo de propagação existente é o TEM. Como os condutores são perfeitos (campos internos nulos) a propagação ocorre exclusivamente no meio dielétrico em torno destes. Embora haja um fluxo de energia na direção longitudinal da linha, note uma configuração de campo estática em sua seção transversal, onde as únicas fontes de campo elétrico  $\vec{e}$  e magnético  $\vec{h}$  são respectivamente cargas (fonte de fluxo) e correntes (fonte de circulação) nos condutores. Isso é resultado da inexistência de componentes longitudinais desses campos e consequentemente de suas variações temporais, que caso existissem, seriam fontes adicionais de circulação na seção transversal da linha, tanto de  $\vec{e}$  quanto de  $\vec{h}$ .

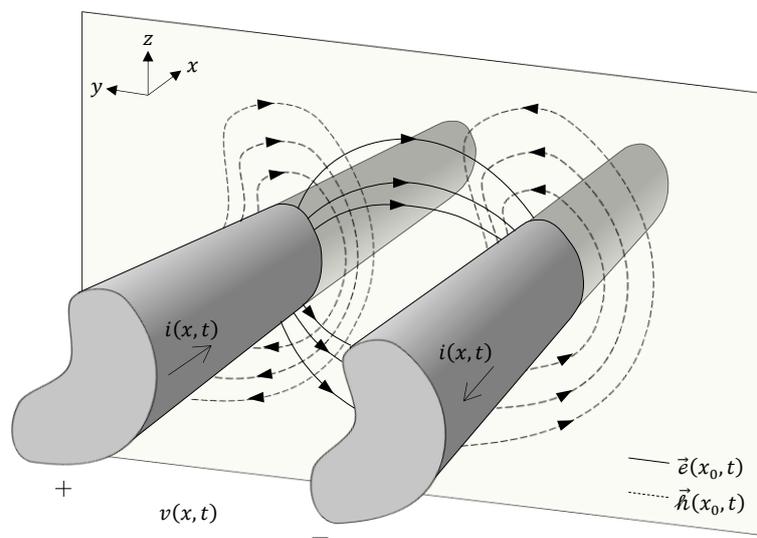


Figura 2.1 – Distribuição de campos em uma linha de transmissão ideal de dois condutores.

Essa correspondência biunívoca dos campos (grandezas vetoriais) com as suas respectivas fontes (grandezas escalares) nas seções transversais da linha implica que para cada onda eletromagnética que percorre a linha estão associadas ondas de tensão  $v(x, t)$  e de corrente  $i(x, t)$ , definidas de forma única através de relações eletrostáticas e magnetostáticas:

$$v(x, t) = - \int_c \vec{e}_t(x, y, z, t) \cdot d\vec{l}, \quad (2.1)$$

$$i(x, t) = \oint_{c'} \vec{h}_t(x, y, z, t) \cdot d\vec{l}. \quad (2.2)$$

Onde o subscrito t refere-se a componentes transversais de campo;  $c$  e  $c'$  são percursos de integração na seção transversal da linha, sendo  $c$  um percurso aberto qualquer que conecta as superfícies dos dois condutores e  $c'$  um percurso fechado qualquer em torno de um deles; e as coordenadas  $(x, y, z, t)$  correspondem a um ponto no espaço-tempo.

As equações (2.1) e (2.2) permitem uma considerável simplificação na análise de linhas de transmissão, pois substitui uma abordagem baseada nas equações vetoriais de Maxwell por uma baseada nas equações escalares de Kirchhoff. Sendo esta última abordagem, tema da próxima seção.

## 2.2 Teoria de Circuitos Distribuídos

Uma vez que as configurações de campo nas seções transversais ao longo de uma linha de transmissão são quase-estáticas, as energias transportadas no campo elétrico e no campo magnético podem ser contabilizadas respectivamente por uma indutância  $L$  e por uma capacitância  $C$  por unidade de comprimento. Já as perdas por aquecimento podem ser contabilizadas respectivamente por uma resistência  $R$  nos condutores e por uma condutância  $G$  de fuga no dielétrico, por unidade de comprimento. No caso geral, em que a geometria e/ou os materiais que compõe a seção transversal da linha são dependentes de sua posição longitudinal, as configurações de campo serão diferentes para diferentes cortes de seção transversal, portanto  $R(x)$ ,  $L(x)$ ,  $G(x)$  e  $C(x)$  também serão dependentes da posição longitudinal  $x$ . Mostrar-se-á nesta subseção que esses parâmetros distribuídos, também conhecidos como parâmetros primários, fornecem uma representação completa de uma linha de transmissão do ponto de vista de propagação de ondas de tensão e de corrente.

Na Figura 2.2 encontra-se o circuito equivalente de um trecho infinitesimal de uma linha de transmissão de dois condutores, com base nos conceitos dos parâmetros distribuídos. Considere que o trecho encontra-se na posição  $x$  da linha e possui um comprimento infinitesimal  $dx$ . A tensão e a corrente no terminal de saída do circuito diferem em relação à entrada pelos acréscimos  $(\partial v(x, t)/\partial x)dx$  e  $(\partial i(x, t)/\partial x)dx$ , respectivamente.

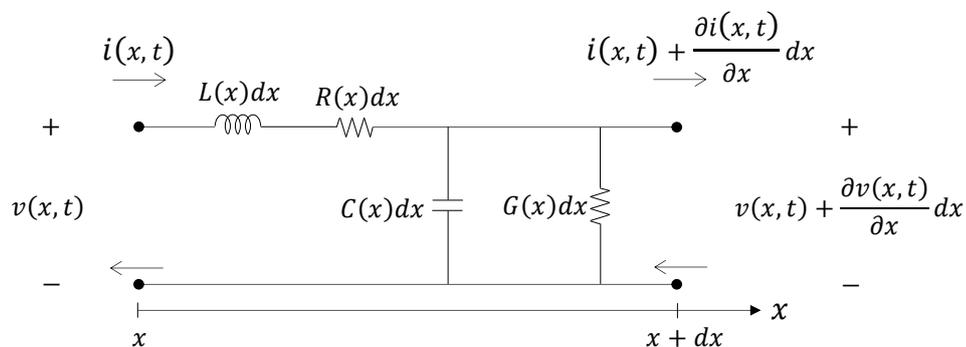


Figura 2.2 – Circuito equivalente de um trecho infinitesimal de uma linha de transmissão de dois condutores.

Pela lei das tensões de Kirchhoff aplicadas a esse circuito, obtém-se

$$v(x, t) - \left( v(x, t) + \frac{\partial v(x, t)}{\partial x} dx \right) = R(x) dx \cdot i(x, t) + L(x) dx \cdot \frac{\partial i(x, t)}{\partial t}$$

$$-\frac{\partial v(x, t)}{\partial x} = R(x) \cdot i(x, t) + L(x) \cdot \frac{\partial i(x, t)}{\partial t}. \quad (2.3)$$

Similarmente, pela lei das correntes de Kirchhoff, obtém-se

$$i(x, t) - \left( i(x, t) + \frac{\partial i(x, t)}{\partial x} dx \right) = G(x) dx \cdot v(x, t) + C(x) dx \cdot \frac{\partial v(x, t)}{\partial t}$$

$$-\frac{\partial i(x, t)}{\partial x} = G(x) \cdot v(x, t) + C(x) \cdot \frac{\partial v(x, t)}{\partial t}. \quad (2.4)$$

As equações diferenciais acopladas (2.3) e (2.4) são comumente referidas por equações do telegrafista, e regem o comportamento das ondas de tensão  $v(x, t)$  e de corrente  $i(x, t)$  que se propagam em uma linha de transmissão. Se apenas o regime permanente senoidal é requerido, então a notação fasorial pode ser utilizada para unir os efeitos da resistência e da indutância em uma impedância série

$$Z_s(x) = R(x) + j\omega L(x) \quad (2.5)$$

e os efeitos da condutância e da capacitância em uma admitância paralelo

$$Y_p(x) = G(x) + j\omega C(x), \quad (2.6)$$

onde  $\omega$  é a frequência angular e  $j$  é a unidade imaginária. Isso simplifica as equações do telegrafista para

$$\frac{\partial V(x)}{\partial x} = -Z_s(x) \cdot I(x) \quad (2.7)$$

e

$$\frac{\partial I(x)}{\partial x} = -Y_p(x) \cdot V(x), \quad (2.8)$$

onde  $V(x)$  e  $I(x)$  são respectivamente a tensão e a corrente sem a dependência temporal  $e^{j\omega t}$ .

Para desacoplar as equações (2.7) e (2.8) basta diferenciá-las em relação à  $x$ , ou seja,

$$\frac{\partial^2 V(x)}{\partial x^2} = -\frac{\partial Z_s(x)}{\partial x} \cdot I(x) - Z_s(x) \frac{\partial I(x)}{\partial x} \quad (2.9)$$

e

$$\frac{\partial^2 I(x)}{\partial x^2} = -\frac{\partial Y_p(x)}{\partial x} \cdot V(x) - Y_p(x) \frac{\partial V(x)}{\partial x}. \quad (2.10)$$

Depois substituir (2.7) e (2.8) em (2.9) e (2.10), o que resulta finalmente nas equações diferenciais que regem separadamente o comportamento das ondas de tensão e de corrente<sup>1</sup>:

---

<sup>1</sup> Rigorosamente falando, neste caso geral em que a linha de transmissão é não uniforme, a tensão e a corrente não podem ser consideradas como ondas uma vez que (2.11) e (2.12) não são equações de onda de d'Alembert.

$$\frac{\partial^2 V(x)}{\partial x^2} = \left( \frac{1}{Z_s(x)} \frac{dZ_s(x)}{dx} \right) \cdot \frac{\partial V(x)}{\partial x} + Z_s(x) Y_p(x) \cdot V(x), \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial^2 I(x)}{\partial x^2} = \left( \frac{1}{Y_p(x)} \frac{dY_p(x)}{dx} \right) \cdot \frac{\partial I(x)}{\partial x} + Z_s(x) Y_p(x) \cdot I(x). \quad (2.12)$$

Infelizmente não é conhecida a solução geral das equações (2.11) e (2.12), a exceção é de alguns casos particulares [25-27]. Na próxima subsecção será analisado o caso particular em que a linha de transmissão é uniforme.

### 2.2.1 Linha de Transmissão Uniforme

Neste caso a geometria e os materiais que constituem a seção transversal da linha são independentes de sua posição longitudinal  $x$ . Assim sendo,  $Z_s$  e  $Y_p$  tornam-se constantes e suas derivadas nulas em relação à  $x$ , de modo que as equações (2.11) e (2.12) simplificam-se para

$$\frac{\partial^2 V(x)}{\partial x^2} = Z_s Y_p \cdot V(x) \quad (2.13)$$

e

$$\frac{\partial^2 I(x)}{\partial x^2} = Z_s Y_p \cdot I(x). \quad (2.14)$$

As equações (2.13) e (2.14) são equações de onda unidimensionais d'Alembert na forma fasorial, cuja solução geral é a soma de duas ondas que se propagam em direções opostas:

$$V(x) = V^+ e^{-\gamma x} + V^- e^{\gamma x} \quad (2.15)$$

e

$$I(x) = I^+ e^{-\gamma x} - I^- e^{\gamma x}. \quad (2.16)$$

Onde  $\gamma = \alpha + j\beta$  é a constante de propagação da linha, dada por

$$\gamma = \sqrt{Z_s Y_p}, \quad (2.17)$$

e caracteriza a maneira como as ondas se propagam ao longo da linha de transmissão, com respeito a atenuação (relacionada a sua parte real  $\alpha$ ) e a dispersão (relacionada a sua parte imaginária  $\beta$ ). Os termos  $V^+$ ,  $I^+$ ,  $V^-$  e  $I^-$  são constantes arbitrárias de amplitude para as ondas propagantes nas direções  $+x$  ou  $-x$ , de acordo com os sobrescritos. Note em (2.16) que a onda de corrente que se propaga na direção  $-x$  é convencionalmente de sinal negativo apenas para explicitar a inversão no seu sentido de propagação.

As ondas de tensão e de corrente em (2.15) e (2.16) são gerais e foram obtidas de forma independente uma da outra como soluções das equações de onda em (2.13) e (2.14),

respectivamente. No entanto, existe uma dependência entre elas determinada pelas equações do telegrafista em (2.7) e (2.8). Uma forma de evidenciar essa dependência é obtendo as ondas de corrente de forma alternativa, por substituição da solução de (2.15) em (2.7), o que resulta em

$$I(x) = \frac{1}{Z_0} (V^+ e^{-\gamma x} - V^- e^{\gamma x}), \quad (2.18)$$

onde

$$Z_0 = \sqrt{\frac{Z_s}{Y_p}} \quad (2.19)$$

é a impedância característica da linha. Por comparação de (2.16) com (2.18) conclui-se que  $Z_0 = V^+/I^+ = V^-/I^-$  é a grandeza que relaciona a onda de tensão que se propaga em uma dada direção com a sua respectiva onda de corrente.

Note em (2.15) e (2.18) que uma vez definida as condições iniciais, pode-se obter a tensão e a corrente em qualquer ponto  $x$  de uma linha de transmissão uniforme conhecendo a sua constante de propagação  $\gamma$  e a sua impedância característica  $Z_0$ , os quais também são chamados de parâmetros secundários da linha. Deste modo, uma linha de transmissão uniforme é completamente caracterizada por seus parâmetros secundários. O mesmo ocorre para os parâmetros  $Z_s$  e  $Y_p$  ou com os parâmetros primários  $R$ ,  $L$ ,  $G$  e  $C$ , uma vez que estes se relacionam de forma biunívoca com os parâmetros secundários pelas equações (2.5), (2.6), (2.17) e (2.19), rescritas na forma compacta abaixo:

$$\gamma = \sqrt{Z_s Y_p} = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)}, \quad (2.20)$$

$$Z_0 = \sqrt{\frac{Z_s}{Y_p}} = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}}. \quad (2.21)$$

### 2.2.2 Parâmetros Longitudinais

As definições dos parâmetros secundários nas equações (2.20) e (2.21) estão atreladas às soluções das equações de onda de linhas de transmissão uniformes, portanto não possui um significado físico válido para o caso geral, o de uma linha de transmissão não uniforme. Apesar disso uma forma de analisar uma linha não uniforme é como uma cascata de segmentos de linhas uniformes de comprimentos infinitesimais. Assim sendo, cada posição  $x$  ao longo da linha tem associado a sua própria constante de propagação  $\gamma(x)$  e impedância característica  $Z_0(x)$ , definidas como parâmetros longitudinais da linha:

$$\gamma(x) = \sqrt{(R(x) + j\omega L(x))(G(x) + j\omega C(x))}, \quad (2.22)$$

$$Z_0(x) = \sqrt{\frac{R(x) + j\omega L(x)}{G(x) + j\omega C(x)}}. \quad (2.23)$$

Note que as definições em (2.20) e (2.21) são casos particulares de (2.22) e (2.23), no entanto, a utilidade de (2.22) e (2.23) é apenas operacional, e serão usadas nos Capítulos 5 e 6.

Com base na representação por parâmetros longitudinais, as equações do telegrafista em (2.7) e (2.8) podem ser reescritas na forma:

$$\frac{\partial V(x)}{\partial x} = -\gamma(x)Z_0(x) \cdot I(x), \quad (2.24)$$

$$\frac{\partial I(x)}{\partial x} = -\frac{\gamma(x)}{Z_0(x)} \cdot V(x). \quad (2.25)$$

### 2.2.3 Outras Grandezas Elétricas

Embora uma linha de transmissão seja completamente caracterizada por seus parâmetros primários ou pelos longitudinais, é útil a definição de outras grandezas elétricas que possam ser utilizadas como figura de mérito em projetos de sistemas de comunicação. Em geral essas grandezas não são dependentes apenas da linha de transmissão em si, mas de todo o sistema, o que inclui o receptor e o transmissor. Nesta subseção serão abordadas algumas dessas grandezas elétricas de interesse prático cujos conceitos serão utilizados no Capítulo 5. Considere como base a Figura 2.3, onde se encontra uma representação esquemática de um sistema de comunicação composto por uma linha de transmissão de comprimento  $l$ , um receptor representado por uma impedância de carga arbitrária  $Z_l$  e um transmissor representado por uma fonte de tensão  $V_g$  com impedância interna  $Z_g$ .

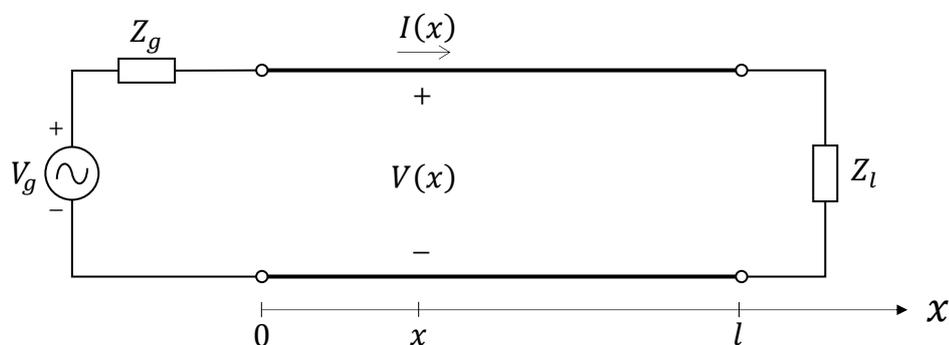


Figura 2.3 – Representação esquemática de um sistema de comunicação cujo canal é uma linha de transmissão.

### 2.2.3.1 Impedância Generalizada

É a grandeza que multiplicada pelo fasor de corrente em um ponto qualquer da linha retorna o fasor de tensão correspondente. Portanto é definida pela razão

$$Z(x) = \frac{V(x)}{I(x)}. \quad (2.26)$$

Note a diferença entre esta definição e a de impedância característica, enquanto a primeira é a impedância vista em um ponto  $x$  da linha e que seria indicada por um instrumento medidor de impedância, a outra é a impedância vista pela onda incidente ou refletida separadamente.

Para encontrar a equação diferencial que rege o comportamento de  $Z(x)$  ao longo de uma linha de transmissão, é necessário multiplicar as equações do telegrafista em (2.24) e (2.25) respectivamente por  $I(x)$  e  $V(x)$ , depois subtrair as equações resultantes uma da outra e dividir tudo por  $I(x)^2$ . O que resulta em

$$\begin{aligned} \frac{\frac{dV(x)}{dx}I(x) - V(x)\frac{dI(x)}{dx}}{I(x)^2} &= -\gamma(x)Z_0(x) + \frac{\gamma(x)}{Z_0(x)}\left(\frac{V(x)}{I(x)}\right)^2 \\ \frac{d}{dx}\left(\frac{V(x)}{I(x)}\right) &= -\gamma(x)Z_0(x) + \frac{\gamma(x)}{Z_0(x)}\left(\frac{V(x)}{I(x)}\right)^2. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Substituindo (2.26) em (2.27) obtêm-se finalmente

$$\frac{dZ(x)}{dx} = -\gamma(x)Z_0(x) + \frac{\gamma(x)}{Z_0(x)}Z(x)^2, \quad Z(l) = Z_l. \quad (2.28)$$

Infelizmente a equação diferencial de Riccati em (2.28) não possui uma solução geral conhecida. No entanto para o caso particular de uma linha de transmissão uniforme, em que  $\gamma(x)$  e  $Z_0(x)$  são independentes de  $x$ , a solução é

$$Z(x) = Z_0 \frac{Z_l + Z_0 \tanh(\gamma \cdot (l - x))}{Z_0 + Z_l \tanh(\gamma \cdot (l - x))}. \quad (2.29)$$

Na prática é mais fácil medir essa impedância no terminal de entrada da linha, assim a equação (2.29) simplifica para

$$Z_{in} = Z(0) = Z_0 \frac{Z_l + Z_0 \tanh(\gamma l)}{Z_0 + Z_l \tanh(\gamma l)}. \quad (2.30)$$

A equação (2.30) pode ser usada para demonstrar outras propriedades dos parâmetros secundários de linhas uniformes. Por exemplo, veja que  $Z_0 = \lim_{l \rightarrow \infty} Z_{in} = \lim_{Z_l \rightarrow Z_0} Z_{in}$ , portanto, a impedância característica pode ser definida como a impedância na entrada de uma linha transmissão uniforme de comprimento infinito, ou como a impedância que conectada ao terminal de saída torna-se igual à do terminal de entrada. A partir de (2.30) verifique também

que se o terminal de saída estiver em curto-circuito ( $Z_l = 0$ ) então a impedância no terminal de entrada pode ser obtida por

$$Z_{in_{cc}} = Z_0 \tanh(\gamma l), \quad (2.31)$$

e se o terminal de saída estiver em aberto ( $Z_l = \infty$ ) então a impedância no terminal de entrada pode ser obtida por

$$Z_{in_{ca}} = \frac{Z_0}{\tanh(\gamma l)}. \quad (2.32)$$

O sistema de equações em (2.31) e (2.32) pode ser resolvido para  $Z_0$  e  $\gamma l$ , ou seja,

$$\gamma l = \operatorname{atanh} \left( \sqrt{\frac{Z_{in_{cc}}}{Z_{in_{ca}}}} \right) \quad (2.33)$$

e

$$Z_0 = \sqrt{Z_{in_{cc}} \cdot Z_{in_{ca}}}. \quad (2.34)$$

Essas propriedades são frequentemente usadas para estimação dos parâmetros secundários de uma linha de transmissão uniforme, por meio de um analisador de impedância.

### 2.2.3.2 Coeficiente de Reflexão Generalizado

É uma grandeza que multiplicada pela onda de tensão na forma fasorial que incide em um ponto qualquer da linha de transmissão resulta na onda refletida correspondente. Pode-se mostrar que é definida pela razão

$$\Gamma(x) = \frac{Z(x) - Z_0(x)}{Z(x) + Z_0(x)}. \quad (2.35)$$

Isolando  $Z(x)$  em (2.35) e substituindo em (2.28) encontra-se a equação diferencial que rege o comportamento de  $\Gamma(x)$  ao longo de uma linha de transmissão, ou seja,

$$\frac{d\Gamma(x)}{dx} - 2\gamma(x)\Gamma(x) + \frac{1}{2} \frac{d[\ln(Z_0(x))]}{dx} (1 - \Gamma(x)^2) = 0, \quad \Gamma(l) = \frac{Z_L - Z_0(l)}{Z_L + Z_0(l)}. \quad (2.36)$$

Infelizmente a equação diferencial de Riccati em (2.36) não possui uma solução geral conhecida<sup>1</sup>. No entanto para o caso particular de uma linha de transmissão uniforme, em que  $\gamma(x)$  e  $Z_0(x)$  são independentes de  $x$ , a solução é

$$\Gamma(x) = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} e^{-2\gamma(l-x)}. \quad (2.37)$$

---

<sup>1</sup> É comum supor que  $\Gamma(x)^2 \ll 1$ , de modo que a não linearidade em (2.36) é desprezada. A solução da equação linear resultante é conhecida como solução de Bolinder [64], sendo muito usada em projetos de transformadores de impedância.

É interessante observar que a definição em (2.35) não abrange o coeficiente de reflexão  $\Gamma_{in}$  no transmissor (fonte de alimentação), sendo necessária a definição extra

$$\Gamma_{in} = \frac{Z_{in} - Z_g}{Z_{in} + Z_g}. \quad (2.38)$$

No caso de uma linha de transmissão uniforme, ao substituir (2.30) em (2.38), obtêm-se

$$\Gamma_{in} = 2 \frac{Z_l + Z_0 \tanh(\gamma l)}{Z_g + Z_l + \left( Z_0 + \frac{Z_g Z_l}{Z_0} \right) \tanh(\gamma l)} - 1. \quad (2.39)$$

Note em (2.39) que se o transmissor e o receptor forem casados com a linha de transmissão ( $Z_l = Z_g = Z_0$ ), não haverá sinal refletido de volta à fonte.

### 2.2.3.3 Função de Transferência Generalizada

É uma grandeza que multiplicada pelo fasor de tensão em um ponto qualquer da linha de transmissão resulta no fasor de tensão no terminal de saída. Portanto é definida pela razão

$$H(x) = \frac{V(l)}{V(x)}. \quad (2.40)$$

A partir de (2.24), (2.26) e (2.40) pode-se mostrar que a equação diferencial que rege o comportamento de  $H(x)$  ao longo de uma linha de transmissão é dada por

$$\frac{dH(x)}{dx} - \frac{\gamma(x)Z_0(x)}{Z(x)}H(x) = 0, \quad H(l) = 1. \quad (2.41)$$

Cuja solução é

$$H(x) = e^{-\int_x^l \left( \frac{\gamma(l')Z_0(l')}{Z(l')} \right) dl'}, \quad (2.42)$$

sendo  $l'$  uma variável auxiliar. No caso particular de uma linha de transmissão uniforme, em que  $\gamma(x)$  e  $Z_0(x)$  são independentes de  $x$ , substituindo (2.29) em (2.42) a solução torna-se

$$H(x) = \frac{Z_l}{Z_l \cosh(\gamma(l-x)) + Z_0 \sinh(\gamma(l-x))}, \quad (2.43)$$

que em relação ao terminal de entrada da linha é dada por

$$H_{in} = \frac{V(l)}{V(0)} = \frac{Z_l}{Z_l \cosh(\gamma l) + Z_0 \sinh(\gamma l)}. \quad (2.44)$$

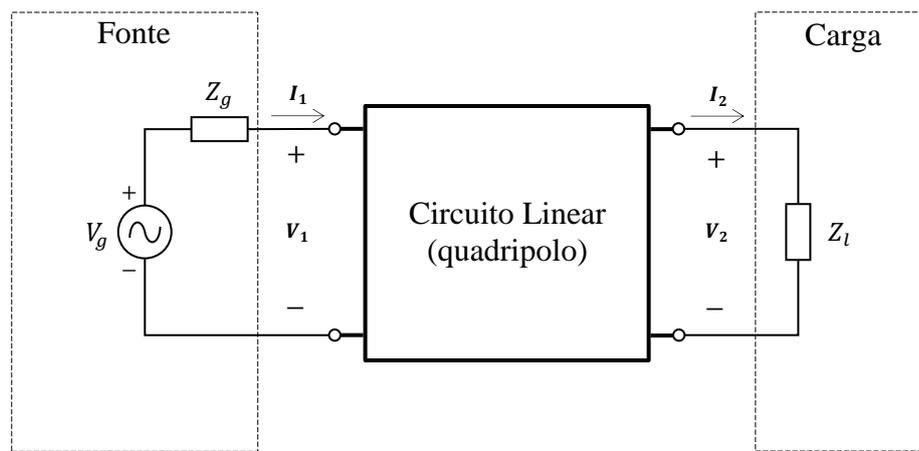
Note em (2.44) que se o receptor for casado com a linha ( $Z_l = Z_0$ ), a função de transferência torna-se uma simples função exponencial, ou seja,

$$H_{in} = e^{-\gamma l}, \quad (2.45)$$

e que pode ser usada para estimação de  $\gamma$  por meio de um analisador de rede.

## 2.3 Quadripolos

Nesta seção a teoria de linhas de transmissão é apresentada através de um formalismo matricial, válido para circuitos lineares passivos. O objetivo é relacionar as tensões e correntes nos terminais de entrada e saída do sistema sem levar em consideração o seu funcionamento interno (Figura 2.4). Isso permite evidenciar de forma simples duas propriedades importantes das linhas de transmissão e que serão utilizadas no Capítulo 5, reciprocidade e simetria.



**Figura 2.4 – Representação esquemática de um circuito linear como uma caixa preta, evidenciando apenas os fasores de tensão e corrente em seus terminais de entrada e saída.**

Existem muitas formas de se estabelecer esse formalismo matricial, através de parâmetros  $Z$ ,  $Y$ ,  $S$ , entre outros que podem facilmente ser relacionados entre si [28]. No entanto, para os propósitos dessa tese é suficiente apresentar um formalismo baseado em parâmetros  $ABCD$ .

### 2.3.1 Parâmetros $ABCD$

Em regime fasorial e sobre condições iniciais nulas as relações entre tensões e correntes entre dois pontos quaisquer de um circuito linear são sempre algébricas. Assim, nos terminais de entrada e saída (Figura 2.4) essas relações podem ser representadas na forma genérica

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix} = [T] \cdot \begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix}, \quad (2.46)$$

onde  $[T]$  é a matriz de transmissão que caracteriza o circuito. Note em (2.46) que se o terminal de saída estiver em aberto,  $A$  pode ser medido pelo ganho reverso de tensão e  $C$  pela

transadmitância. Se o terminal de saída estiver em curto, B pode ser medido pela transimpedância e D pelo ganho reverso de corrente. Ou seja,

$$[T] = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{V_1}{V_2} \Big|_{I_2=0} & \frac{V_1}{I_2} \Big|_{V_2=0} \\ \frac{I_1}{V_2} \Big|_{I_2=0} & \frac{I_1}{I_2} \Big|_{V_2=0} \end{bmatrix}. \quad (2.47)$$

Uma vez conhecido os parâmetros A, B, C e D de um circuito linear, outras grandezas elétricas de interesse prático são facilmente deriváveis. Por exemplo,

$$Z_{in} = \frac{AZ_l + B}{CZ_l + D}, \quad (2.48)$$

$$\Gamma_{in} = \frac{AZ_l + B - CZ_l Z_g - DZ_g}{AZ_l + B + CZ_l Z_g + DZ_g} \quad (2.49)$$

e

$$H_{in} = \frac{Z_l}{AZ_l + B}. \quad (2.50)$$

Embora do ponto de vista da teoria de quadripolos um circuito linear seja caracterizado por quatro parâmetros (neste caso, A, B, C e D), nem sempre estes são independentes. O que confere a certos circuitos propriedades especiais, de acordo com a relação entre seus parâmetros, e que podem ser usadas para simplificar a análise. Na próxima subseção serão abordadas duas dessas propriedades.

### 2.3.2 Reciprocidade e Simetria

Um circuito é considerado simétrico se de posse apenas de medições elétricas obtidas em seus terminais é impossível identificar qual deles foi utilizado como entrada e qual foi utilizado como saída de sinais. Ou seja, a troca de posições entre a fonte e a carga não afeta as suas respectivas tensões e correntes. Veja a Figura 2.5.

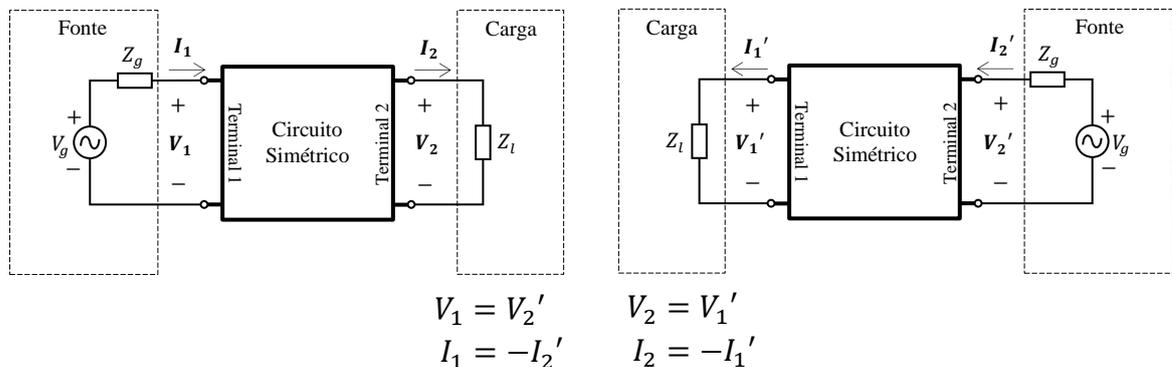


Figura 2.5 – Propriedade de um circuito simétrico.

Matematicamente, para simular a troca entre os terminais de entrada e saída de um circuito linear basta inverter a equação (2.46), ou seja,

$$\begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{AD - BC} \begin{bmatrix} D & B \\ C & A \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_1 \\ -I_1 \end{bmatrix}. \quad (2.51)$$

O sinal negativo nos fasores de corrente em (2.51) é para explicitar que, embora os terminais tenham sido trocados, ainda se usa a mesma convenção de sentido para as correntes. Ao comparar as matrizes de transmissão em (2.46) e (2.51), observe que a propriedade de simetria é estabelecida somente se duas condições forem simultaneamente verdadeiras:

$$AD - BC = \det[T] = 1 \quad (2.52)$$

e

$$\frac{A}{D} = 1. \quad (2.53)$$

Onde  $\det[T]$  é o determinante da matriz de transmissão  $[T]$ .

Se somente a condição (2.52) for verdadeira o circuito é considerado recíproco. Em um circuito recíproco, se a tensão em um terminal produz uma dada corrente no outro terminal, então a mesma tensão se aplicada nesse outro terminal irá produzir a mesma corrente no primeiro. Em outras palavras, a troca de posições entre uma fonte de tensão ideal em um terminal e um amperímetro ideal na outro não altera a sua leitura (Figura 2.6). Note que a reciprocidade é uma condição necessária mais não suficiente para a simetria de um circuito.

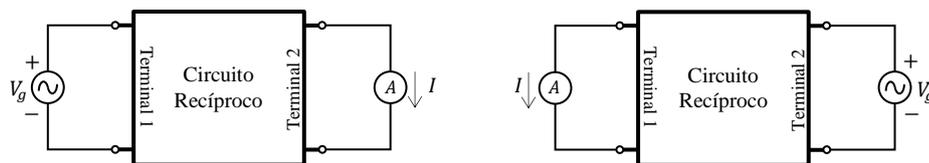


Figura 2.6 – Propriedade de um circuito recíproco.

### 2.3.3 Quadripolos e Linhas de Transmissão

Uma linha de transmissão é um circuito composto apenas por elementos lineares e passivos (Figura 2.2), e como tal, pode ser caracterizada por parâmetros  $ABCD$ . No caso de uma linha de transmissão uniforme, estes parâmetros relacionam-se diretamente com os parâmetros secundários da linha. De acordo com (2.15) e (2.18), a tensão e a corrente no terminal de entrada de uma linha de transmissão uniforme são dados por

$$V(0) = V^+ + V^- \quad (2.54)$$

e

$$I(0) = \frac{1}{Z_0} (V^+ - V^-). \quad (2.55)$$

Resolvendo o sistema de equações em (2.54) e (2.55) para  $V^+$  e  $V^-$  e substituindo o resultado em (2.15) e (2.18) obtêm-se

$$V(x) = \cosh(\gamma x) V(0) - Z_0 \sinh(\gamma x) I(0) \quad (2.56)$$

e

$$I(x) = -\frac{\sinh(\gamma x)}{Z_0} V(0) + \cosh(\gamma x) I(0), \quad (2.57)$$

cuja forma matricial é

$$\begin{bmatrix} V(0) \\ I(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh(\gamma l) & Z_0 \sinh(\gamma l) \\ \frac{\sinh(\gamma l)}{Z_0} & \cosh(\gamma l) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V(l) \\ I(l) \end{bmatrix}. \quad (2.58)$$

Comparando (2.58) com (2.46) conclui-se que

$$A = D = \cosh(\gamma l), \quad (2.59)$$

$$B = Z_0 \sinh(\gamma l) \quad (2.60)$$

e

$$C = \frac{\sinh(\gamma l)}{Z_0}. \quad (2.61)$$

Observe que as equações de (2.59) à (2.61) satisfazem as condições em (2.52) e (2.53). Portanto, uma linha de transmissão uniforme é recíproca e simétrica.

Embora a relação em (2.58) tenha sido derivada das equações do telegrafista, esta não é específica para linhas de transmissão, mas sim para qualquer circuito que seja linear, recíproco e simétrico<sup>1</sup>. Portanto pode-se derivá-la de forma alternativa através das equações mais gerais em (2.46), (2.52) e (2.53), relacionadas justamente às propriedades de linearidade, reciprocidade e simetria.

No caso geral de linhas de transmissão não uniformes, pode-se afirmar que são sempre recíprocas, embora não necessariamente simétricas. Para demonstrar essa afirmação considere aproximar uma linha de transmissão não uniforme de comprimento  $l$  por uma cascata de  $N$  seguimentos de linha de transmissão uniforme com comprimentos  $\Delta x = l/N$ , de modo que quanto menor os seguimentos melhor a aproximação. Cada seguimento  $n$  tem associado uma matriz de transmissão  $[T_n]$  na forma de (2.58). Portanto a matriz de transmissão geral  $[T]$  da linha de transmissão não uniforme é dada pelo produtório

---

<sup>1</sup> Dependendo do circuito,  $\gamma$  e  $l$  podem não ter significados físico isoladamente, mas sim o produto  $\gamma l$ .

$$[T] = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \prod_{n=1}^{l/\Delta x} [T_n] \right). \quad (2.62)$$

Logo

$$\det[T] = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \prod_{n=1}^{l/\Delta x} \det[T_n] \right) \quad (2.63)$$

e como  $\det[T_n] = 1$  (linhas de transmissão uniformes são recíprocas), então,

$$\det[T] = 1. \quad (2.64)$$

O que completa a demonstração. Sendo esse resultado consequência de um teorema mais geral, o da reciprocidade de Lorentz [23].

## 2.4 Princípio da Causalidade

Causalidade, ou relação de causa e efeito, é o vínculo que correlaciona fenômenos diferentes definindo alguns como responsáveis (causa) pelo aparecimento de outros (efeito). Como características básicas dessa relação têm-se: o vínculo de determinação (o efeito depende da causa) e a anterioridade temporal (a causa precede o efeito) [29]. Por exemplo, em um sistema de comunicação o sinal medido no receptor não pode ser obtido antes de ser gerado no transmissor. Embora a experiência cotidiana mostre que esta é uma afirmação óbvia, algo inerente a todos os canais de comunicação, as possibilidades matemáticas não se restringem a realidade física, de modo que não é tão óbvio desenvolver modelos para esses canais que sempre obedeçam a essa ordem natural de acontecimentos. Veja a Figura 2.7.

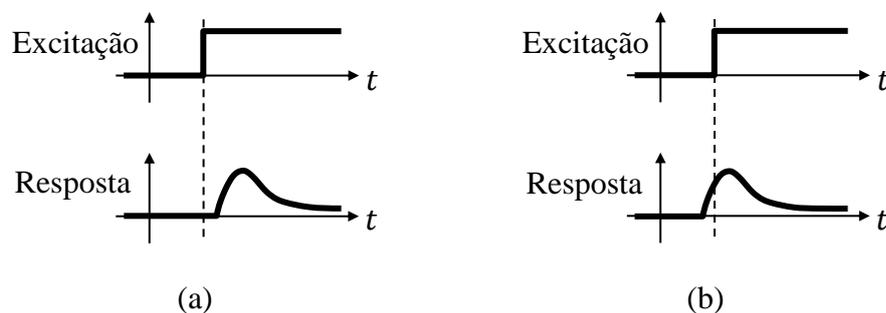


Figura 2.7 – Excitação e resposta de modelos matemáticos: (a) Causal; (b) Não causal.

Uma regra prática para garantir a causalidade de um modelo, sem se preocupar com questões concernentes, é derivá-lo a partir de leis físicas comprovadamente causais. De uma maneira mais geral, para garantir a causalidade é necessário certificar-se de que a saída do modelo em um instante qualquer  $t = t_0$  independa de valores futuros  $t > t_0$ . No caso de um

sistema linear e invariante no tempo, tal restrição é equivalente a dizer que a resposta ao impulso  $h(t)$  do sistema seja nula para tempos negativos, ou seja:

$$h(t) = h(t)u(t), \quad (2.65)$$

onde

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases} \quad (2.66)$$

é a função degrau unitário.

Para modelos definidos no domínio do tempo essa restrição é intuitiva e de fácil verificação, no entanto o mesmo não pode ser dito para modelos no domínio da frequência, como é o caso da maioria dos modelos de linhas de transmissão. Na próxima subseção o objetivo é obter no domínio da frequência uma condição necessária e suficiente para que um sistema linear e invariante no tempo seja causal. Não há uma solução geral para esse problema, de modo que a análise será restrita a sistemas cuja resposta ao impulso corresponda a um sinal de energia finita, ou seja,  $0 < \int_0^{\infty} h(t)^2 dt < \infty$ .

#### 2.4.1 Relações de Hilbert

Inicialmente considere aplicar a transformada de Fourier em ambos os membros da equação (2.65):

$$H(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} H(\omega')U(\omega - \omega')d\omega', \quad (2.67)$$

onde  $H(\omega)$  e  $U(\omega)$  são as transformadas de Fourier de  $h(t)$  e  $u(t)$ , respectivamente, e  $\omega'$  é uma variável auxiliar. A distribuição  $U(\omega)$  é dada por

$$U(\omega) = \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega), \quad (2.68)$$

onde  $\delta(\omega)$  representa o impulso unitário. Substituindo (2.68) em (2.67), obtém-se

$$H(\omega) = \frac{1}{\pi j} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{H(\omega')}{\omega - \omega'} d\omega'. \quad (2.69)$$

A integral em (2.69) é mal definida, pois apresenta singularidades para  $\omega' = \omega$ . Essa dificuldade é contornada ao se considerar o valor principal de Cauchy, representado pelo operador  $\mathcal{P}$ . Como  $H(\omega)$  é uma variável complexa, separando-a em suas partes real  $\mathcal{R}\{H(\omega)\}$  e imaginária  $\mathcal{I}\{H(\omega)\}$  resulta finalmente em

$$\mathcal{R}\{H(\omega)\} = \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathcal{I}\{H(\omega')\}}{\omega - \omega'} d\omega' \quad (2.70)$$

e

$$\mathcal{I}\{H(\omega)\} = \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathcal{R}\{H(\omega')\}}{\omega' - \omega} d\omega', \quad (2.71)$$

conhecidas como relações de causalidade de Hilbert [30].

Além da causalidade, outra restrição imposta a sistemas lineares invariantes no tempo para que estes sejam fisicamente realizáveis é a simetria hermitiana  $H(-\omega) = H^*(\omega)$ , onde o sobescrito \* representa o operador conjugado. Essa nova restrição é necessária para garantir que a resposta no domínio do tempo  $h(t)$  seja puramente real [30]. Note que a simetria hermitiana gera uma dependência entre os valores de  $H(\omega)$  de frequências positivas em relação aos de frequências negativas. Essa dependência pode ser aproveitada para reduzir o intervalo de integração em (2.70) e (2.71) na metade, ou seja,

$$\mathcal{R}\{H(\omega)\} = \frac{2}{\pi} \mathcal{P} \int_0^{\infty} \frac{\omega' \mathcal{I}\{H(\omega')\}}{\omega^2 - \omega'^2} d\omega' \quad (2.72)$$

e

$$\mathcal{I}\{H(\omega)\} = \frac{2\omega}{\pi} \mathcal{P} \int_0^{\infty} \frac{\mathcal{R}\{H(\omega')\}}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega'. \quad (2.73)$$

Note que o requisito de causalidade impõe uma forte dependência entre as partes real e imaginária da função de transferência  $H(\omega)$  de um sistema, de modo que conhecendo uma é possível obter a outra.

É importante salientar que as relações de causalidade demonstradas nessa subseção são válidas apenas se a integral em (2.67) for convergente, e para isso  $H(\omega)$  deve anular-se em altas frequências. Pelo teorema de Parseval [30][31], isso é equivalente a dizer que a resposta ao impulso  $h(t)$  do sistema tem que ser um sinal de energia finita.

#### 2.4.2 Causalidade e Linhas de Transmissão

Se uma fonte de corrente (causa) for conectada na entrada de um trecho infinitesimal de uma linha de transmissão (veja a Figura 2.2), esta corrente percorrerá o trecho com uma velocidade finita, sendo parte de sua energia tanto armazenada quanto dissipada ao longo do percurso; como consequência, ao final do processo observar-se-á uma queda de tensão (efeito)

nas extremidades do trecho. Esta é basicamente a descrição qualitativa da equação do telegrafista em (2.3) onde se observa claramente o princípio da causalidade com todas as suas características: o vínculo de determinação (o efeito depende da causa) e a anterioridade temporal (a causa precede o efeito). Raciocínio análogo é obtido para a equação em (2.4). Portanto, para um trecho infinitesimal de uma linha de transmissão as equações do telegrafista representam sistemas lineares e invariantes no tempo cuja suas funções de transferência,  $Z_s(\omega)dx$  e  $Y_p(\omega)dx$ <sup>1</sup>, obedecem a relações de causalidade.

O problema é que  $Z_s(\omega)$  e  $Y_p(\omega)$  não se anulam em altas frequências, tendendo respectivamente as assíntotas  $j\omega L_\infty$  e  $j\omega C_\infty$ , com  $L_\infty$  e  $C_\infty$  constantes. Isso impossibilita a aplicação direta das relações de causalidade em (2.72) e (2.73). No entanto se de  $Z_s(\omega)$  e  $Y_p(\omega)$  forem subtraídas os seus respectivos comportamentos assintóticos, então as funções de transferência resultantes além de permanecerem causais tornam-se adequadas a serem utilizadas em (2.73) [30]. O que resulta nas seguintes relações de causalidade para uma linha de transmissão:

$$L(\omega) = L_\infty + \frac{2}{\pi} \mathcal{P} \int_0^\infty \frac{R(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega' \quad (2.74)$$

e

$$C(\omega) = C_\infty + \frac{2}{\pi} \mathcal{P} \int_0^\infty \frac{G(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega' . \quad (2.75)$$

Uma consequência imediata das equações (2.74) e (2.75) é que somente em linhas de transmissão ideais ( $R(\omega) = 0$  e  $G(\omega) = 0$ ) a indutância  $L(\omega) = L_\infty$  e a capacitância  $C(\omega) = C_\infty$  são independentes da frequência. Em linha reais, em que tanto os condutores quanto o meio dielétrico são imperfeitos ( $R(\omega) \neq 0$  e  $G(\omega) \neq 0$ ), o próprio processo de perdas implica na variação com a frequência dos quatro parâmetros primários da linha, caso contrário o sistema não será causal. Sendo esta variação tema da próxima seção e praticamente desta tese como um todo.

---

<sup>1</sup> No restante deste capítulo é explicitada apenas dependência dos parâmetros distribuídos em relação à  $\omega$ . A dependência em relação à  $x$  é ocultada da notação por simplicidade.

## 2.5 Dependência com a Frequência

Como mostrado anteriormente os parâmetros primários de linhas de transmissão reais são funções da frequência. Para uma análise qualitativa desse comportamento considere como exemplo a Figura 2.8, onde se encontram medições dos parâmetros primários de um par-trançado típico. Note um acréscimo com a frequência das perdas na linha. Mesmo que isso ocorra tanto nos condutores (através de  $R$ ) quanto no isolante (através de  $G$ ), fisicamente as causas são diferentes. Nos condutores é devido aos fenômenos conhecidos como: efeito pelicular, efeito de proximidade e efeito de borda. Esses fenômenos em conjunto forçam uma redistribuição da densidade de corrente na seção transversal dos condutores com o intuito de anular o fluxo magnético em seu interior (lei de Lenz), isso à medida que a frequência cresce. Essa redistribuição da densidade de corrente diminui a área efetiva dos condutores (veja a Figura 3.2), o que implica no aumento da resistência  $R$  e diminuição da indutância  $L$ . Já no isolante é devido basicamente ao fenômeno de dispersão dielétrica. Dielétricos reais apresentam permissividade elétrica complexa e dependente da frequência, cuja parte imaginária e a parte real são diretamente proporcionais à condutância  $G$  e a capacitância  $C$ , respectivamente. Em geral os isolantes são fabricados para operarem em frequências que precedem a região de máxima perda. Por isso  $G$  não apresenta picos na Figura 2.8, mas sim um comportamento monotonicamente crescente, e  $C$  é praticamente constante.

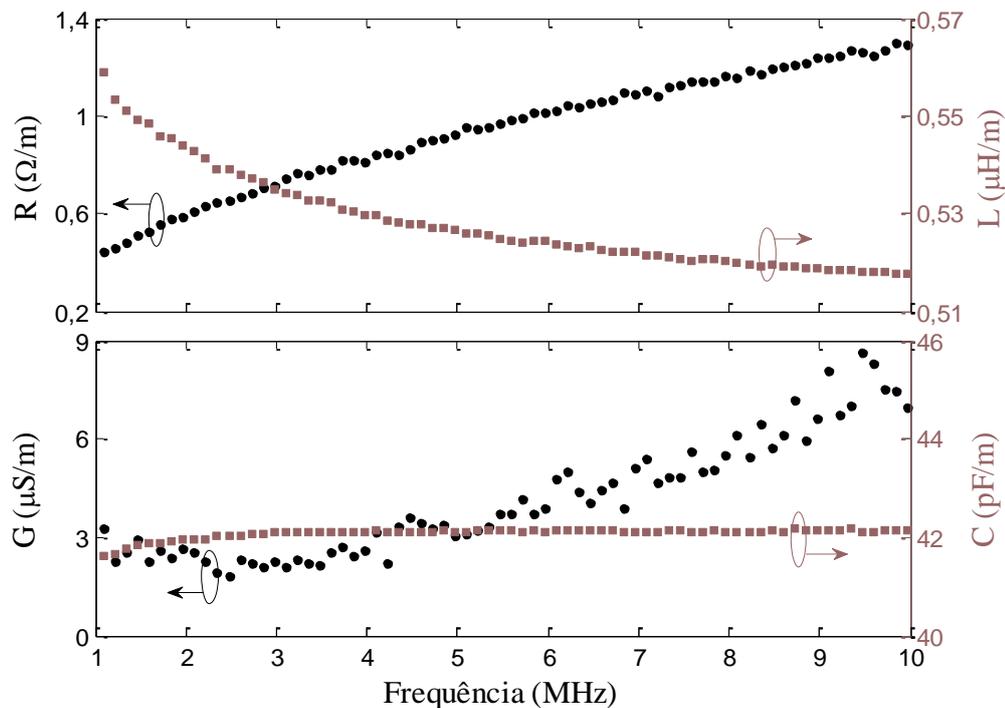


Figura 2.8 – Medições dos parâmetros primários de uma linha de transmissão.

Dependendo da frequência de operação da linha de transmissão, alguns desses fenômenos físicos são dominantes em relação a outros. Isso permite dividir o espectro de frequência em regiões com características distintas. Na região de baixas frequências os fenômenos citados anteriormente são insignificantes, de modo que  $R$ ,  $L$ ,  $G$  e  $C$  são praticamente constantes e iguais aos seus respectivos valores na frequência nula. A partir de certa frequência  $\omega_p$ , o efeito pelicular, de proximidade e de borda torna-se dominantes, de modo que  $R$  e  $L$  tendem a ser diretamente e inversamente proporcional a  $\sqrt{\omega}$ , respectivamente. Nessas duas primeiras regiões o  $G$  é pequeno e pode até ser desprezado, no entanto, devido ao fenômeno de dispersão dielétrica, este cresce a uma taxa maior que  $R$  (veja a Figura 2.8) e a partir de certa frequência  $\omega_d$  passa a dominar o processo de perdas na linha. Na Figura 2.9 encontra-se uma curva genérica de atenuação de uma linha de transmissão em função da frequência. Note as diferenças no comportamento dessa curva em cada uma das três regiões citadas.

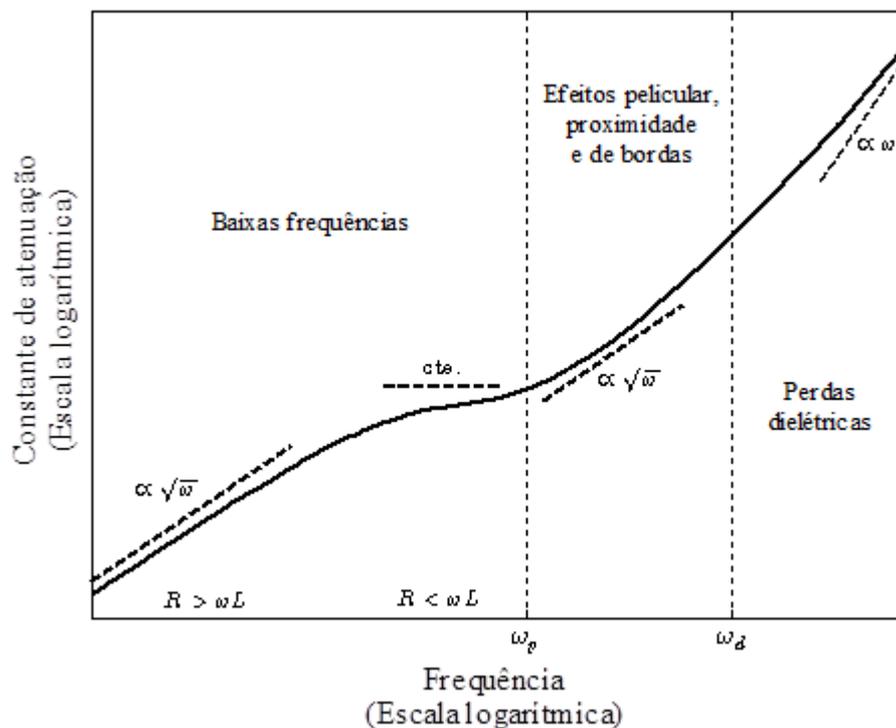


Figura 2.9 – Atenuação de uma linha de transmissão em função da frequência.

Fonte: Baseada na Figura 3.1 de [32].

Um bom modelo deve descrever com precisão a variação com a frequência dos parâmetros distribuídos de uma linha de transmissão em todas as regiões, assim como interpolar de forma natural entre elas obedecendo às relações de causalidade.

# CAPÍTULO 3

## O PAR-TRANÇADO

Enquanto no capítulo anterior foi abordada a teoria geral sobre linhas de transmissão, neste capítulo o enfoque é em um tipo específico de linha, o par-trançado. O objetivo é apresentar a teoria por trás dos principais modelos existentes na literatura, assim como algumas questões ainda em aberto e que serão abordadas como contribuições desta tese nos capítulos posteriores.

### 3.1 Características Construtivas

Um par-trançado é uma linha de transmissão composta de dois fios condutores, paralelos e revertidos por um material isolante, sendo esses fios entrelaçados um ao redor do outro com o objetivo de minimizar as interferências eletromagnéticas. Veja a Figura 3.1.

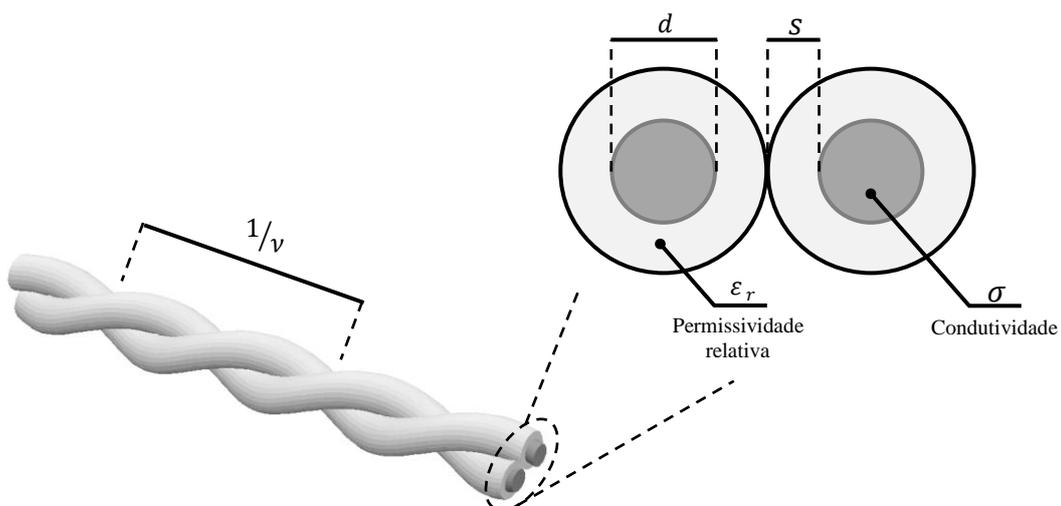


Figura 3.1 – Geometria de um par-trançado.

Em geral todos os materiais que compõem um par-trançado são não magnéticos. Os condutores normalmente são de cobre eletrolítico ( $\sigma = 5,8 \times 10^7 \text{ S/m}$ ), por vezes estanhado

para evitar oxidação, com diâmetros  $d$  que variam de 0,32  $mm$  a 0,9  $mm$  para aplicações de telecomunicações [33]. No revestimento são utilizados polímeros de baixas e moderadas perdas como o polietileno ( $\epsilon_r = 2,3$ ) e o PVC ( $\epsilon_r = 3,0$ ), com espessuras  $s$  que normalmente varia de 30 % a 90 % do diâmetro do condutor (veja o Apêndice B), e definidas de forma a garantir a impedância nominal<sup>1</sup> do cabo. Atualmente o padrão na indústria é a fabricação de cabos de 100  $\Omega$  de impedância nominal, no entanto, ainda encontra-se no mercado cabos de 120  $\Omega$ , 150  $\Omega$  e 300  $\Omega$  para aplicações específicas como redes industriais, áudio analógico e antenas, respectivamente. A taxa de trançado  $\nu$  dos pares varia de algumas dezenas em cabos telefônicos típicos, para uma ou duas centenas em cabos de alta imunidade eletromagnética [34].

### 3.2 Impedância Série

Em baixas frequências a distribuição de corrente na seção transversal dos condutores de um par-trançado é praticamente uniforme. No entanto, à medida que a frequência aumenta a corrente tende a se concentrar na periferia e na região entre os condutores, ocasionando uma distribuição não uniforme de corrente. Na prática isso acarreta no aumento da resistência e na diminuição da indutância interna do par-trançado. Esses fatos são consequências diretas do efeito pelicular e do efeito de proximidade [22][32]. Ambas são manifestações diferentes do mesmo fenômeno: correntes parasitas induzidas nos condutores por fluxos magnéticos variáveis. A diferença é que no efeito pelicular essas correntes parasitas são induzidas pelo fluxo magnético gerado pela corrente que flui no próprio condutor afetado, enquanto que no efeito de proximidade as mesmas são induzidas pelo fluxo magnético gerado pela corrente que flui no condutor vizinho. Para condutores suficientemente afastados um do outro, o efeito pelicular é dominante e faz com que a densidade de corrente decresça no interior dos condutores e aumente em sua superfície externa (Figura 3.2a). Já a distribuição de corrente em condutores próximos é resultado tanto do efeito pelicular quanto do efeito de proximidade (Figura 3.2b). O efeito de proximidade obriga a corrente a fluir próximo à região entre os condutores, ao mesmo tempo em que o efeito pelicular obriga a corrente a fluir próximo à superfície externa dos mesmos. Ambos os efeitos se acentuam com o aumento da frequência.

---

<sup>1</sup> A impedância nominal de uma linha de transmissão é o valor assintótico para altas frequências de sua impedância característica.

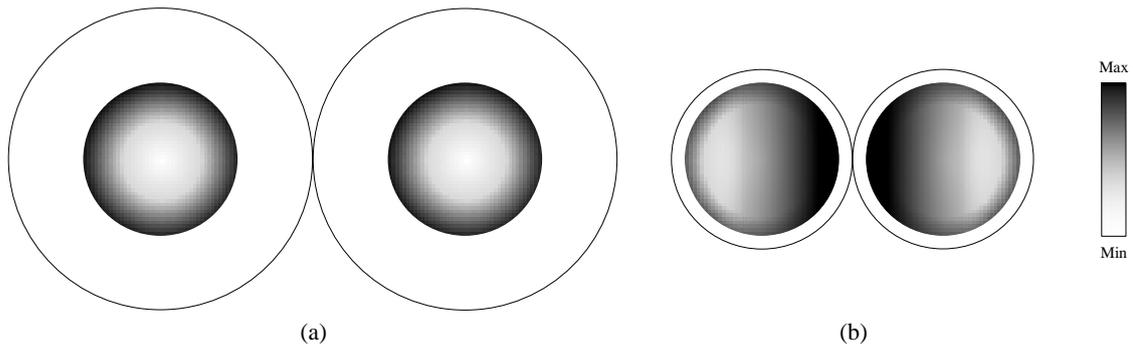


Figura 3.2 – Distribuição de corrente em altas frequências na seção transversal de pares-trançados com diferentes distâncias entre os condutores: (a) Condutores afastados; (b) Condutores próximos.

A formulação matemática para a impedância por unidade de comprimento de um único condutor cilíndrico não magnético, que considera apenas o efeito pelicular, remonta aos trabalhos de Kelvin em 1888, e pode ser expressa pela razão de funções de Bessel de primeira espécie [21][22]

$$Z_{pel} = \frac{\sqrt{-\varpi R_0}}{2} \frac{J_0(\sqrt{-\varpi/R_0})}{J_1(\sqrt{-\varpi/R_0})}, \quad (3.1)$$

onde

$$\varpi = j\omega \frac{\mu_0}{\pi} \quad (3.2)$$

e

$$R_0 = \frac{4}{\pi\sigma d^2} \quad (3.3)$$

é resistência por unidade de comprimento do condutor sob corrente contínua, sendo  $\mu_0$  a permeabilidade magnética do vácuo.

No caso de um par-trançado<sup>1</sup> em que a distância entre os condutores é grande o suficiente, de modo que estes não sofram influência do campo magnético um do outro, a impedância série  $Z_s$  é dada por

$$Z_s = 2Z_{pel} + j\omega L_0 = 2Z_{pel} + \varpi \frac{\pi}{\mu_0} L_0. \quad (3.4)$$

Onde o fator multiplicativo no primeiro termo é para considerar as contribuições de impedância devido ao efeito pelicular nos dois condutores e  $L_0$  seria a indutância por unidade de comprimento desse par-trançado caso os condutores fossem perfeitos, ou seja,

$$L_0 = \frac{\mu_0}{\pi} \ln(2r), \quad (3.5)$$

sendo  $r$  definido por

<sup>1</sup> Nesta seção o efeito do trançado dos pares é negligenciado e os condutores são considerados retilíneos e paralelos a direção de propagação.

$$r = 1 + 2\frac{s}{d}. \quad (3.6)$$

Note que  $r$  é a razão entre o diâmetro externo  $d + 2s$  e o interno  $d$  da cobertura dielétrica, sendo uma grandeza relacionada à proximidade entre os condutores.

No caso em que os condutores são próximos o suficiente, de modo que o efeito de proximidade não possa ser negligenciado, um termo a mais deve ser acrescentado em (3.4):

$$Z_s = 2Z_{pel} + \varpi \frac{\pi}{\mu_0} L_0 + Z_{prox}. \quad (3.7)$$

Esse termo,  $Z_{prox}$ , foi bem modelado por diversos pesquisadores ao longo do século XX [35-38], podendo ser representado pela série infinita [39]

$$Z_{prox} = \varpi \sum_{n=1}^{\infty} A_n, \quad (3.8)$$

onde os termos  $A_n$  teoricamente seriam obtidos pela solução do sistema linear de dimensão infinita

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_{mn} \cdot A_n + S_m \cdot A_m = 1, \quad m = 1, 2, \dots, \infty, \quad (3.9)$$

sendo

$$T_{mn} = \frac{(m+n-1)!}{(m-1)!(n-1)!} \quad (3.10)$$

e

$$S_m = m \frac{J_{m-1}(\sqrt{-\varpi/R_0})}{J_{m+1}(\sqrt{-\varpi/R_0})} (2r)^{2m}. \quad (3.11)$$

Em (3.12) encontra-se o mesmo sistema linear de (3.9), porém em notação matricial e truncado de modo a obter uma aproximação dos  $N$  primeiros termos da série em (3.8).

$$\begin{bmatrix} T_{11} + S_1 & T_{12} & \dots & T_{1N} \\ T_{21} & T_{22} + S_2 & \dots & T_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ T_{N1} & T_{N2} & \dots & T_{NN} + S_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (3.12)$$

Resolvendo o sistema para  $N = 1$  o efeito de proximidade assume a forma simples

$$Z_{prox1} = \frac{\varpi J_2(\xi)}{J_2(\xi) + 4r^2 J_0(\xi)} \quad (3.13)$$

e para  $N = 2$  assume a forma

$$Z_{prox2} = \varpi \frac{32J_1(\xi)J_2(\xi)r^4 + 4J_0(\xi)J_3(\xi)r^2 + 3J_2(\xi)J_3(\xi)}{128J_0(\xi)J_1(\xi)r^6 + 32J_1(\xi)J_2(\xi)r^4 + 24J_0(\xi)J_3(\xi)r^2 + 2J_2(\xi)J_3(\xi)}, \quad (3.14)$$

sendo  $\xi = \sqrt{-\omega/R_0}$ . Nesse sentido o efeito de proximidade exato corresponde ao limite da sequência

$$Z_{prox} = \lim_{N \rightarrow \infty} Z_{proxN} \quad (3.15)$$

Na Figura 3.3 encontra-se a curva de impedância série em função da frequência em escala di-log de um par-trançado típico, composto por condutores de cobre com diâmetro  $d = 0,5 \text{ mm}$  e espessura dielétrica  $s = 0,2 \text{ mm}$ . A impedância foi calculada considerando os dez primeiros termos da série em (3.8). Devido ao efeito pelicular e de proximidade, a resistência desse par-trançado operando em  $1 \text{ GHz}$  é de aproximadamente setenta vezes maior que em regime de corrente contínua.

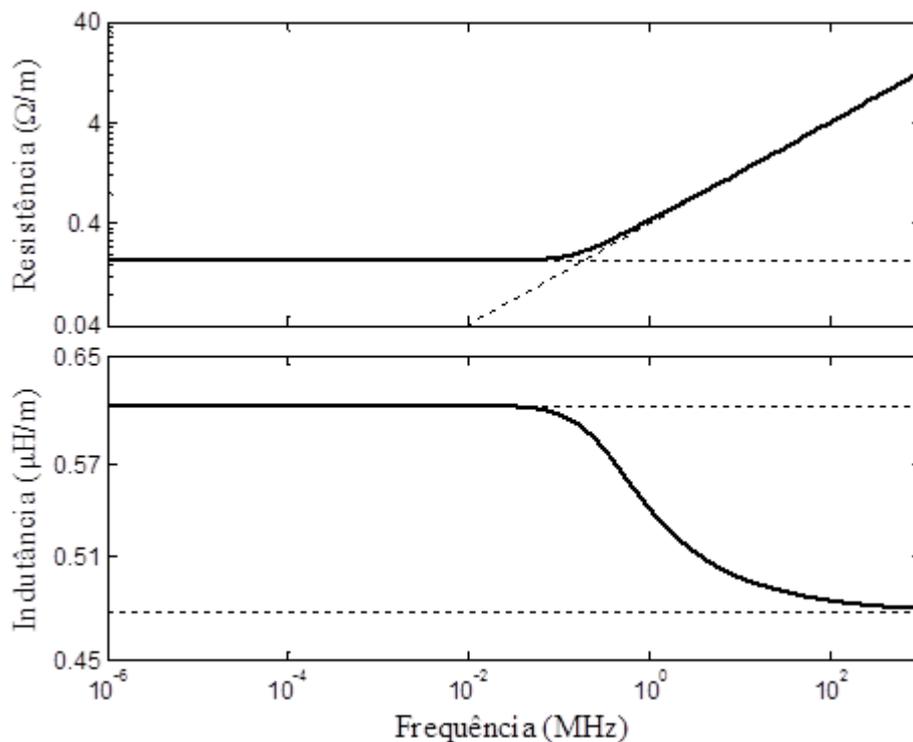


Figura 3.3 – Impedância série obtida considerando os 10 primeiros termos da série em (3.8), sendo as curvas tracejadas correspondentes aos comportamentos assintóticos para as baixas e altas frequências.

Embora o comportamento da impedância série com a frequência seja determinado apenas por dois parâmetros,  $R_0$  e  $r$ , a complexidade das expressões cresce rapidamente com o aumento do número de termos do efeito de proximidade, veja as equações em (3.13) e (3.14). Isso motiva a preferência em engenharia por modelos mais simplistas, mesmo que a precisão seja limitada a casos particulares de interesse. São três as abordagens mais comuns:

- Condutores suficientemente afastados: Essa condição é geralmente adotada em livros didáticos para desconsiderar o efeito de proximidade [21][22]. Nesse caso a impedância série é modelada pela equação (3.4).

- Aproximação assintótica para baixas frequências: Uma forma eficiente de obter este tipo de aproximação é resolver o sistema em (3.12) para poucos termos. Essa abordagem encontra-se no modelo em [7], cuja impedância de proximidade é definida pela equação (3.13), que considera apenas o primeiro termo da série em (3.8).

- Aproximação assintótica para altas frequências: Em altas frequências o efeito pelicular é bastante pronunciado e a corrente concentra-se em uma fina camada em torno das superfícies dos condutores, com uma distribuição não uniforme devido ao efeito de proximidade. Nesse caso uma aproximação para a impedância série pode ser derivada através do conceito de indutância incremental [40], o que resulta em

$$\lim_{|\varpi| \rightarrow \infty} Z_s = \frac{2r}{\sqrt{r^2 - 1}} \cdot \lim_{|\varpi| \rightarrow \infty} Z_{pel} + \varpi \operatorname{acosh}(r). \quad (3.16)$$

Esse tipo de abordagem assintótica encontra-se nos modelos em [8] e [15].

Como mostrado nessa seção existem diferentes abordagens para o cálculo da impedância série de um par-trançado, no entanto não é claro qual delas apresenta o melhor compromisso entre simplicidade e precisão.

### 3.3 Admitância Paralelo

Em uma linha de transmissão ideal, na qual os condutores são perfeitos e o meio dielétrico é homogêneo, a admitância paralela  $Y_p$  é diretamente proporcional à permissividade elétrica relativa  $\varepsilon_{r_{ef}}$  do meio dielétrico, ou seja,

$$Y_p = j\omega C_0 \cdot \varepsilon_{r_{ef}}, \quad (3.17)$$

onde a constante de proporcionalidade  $C_0$  é a capacitância por unidade de comprimento da linha se o meio dielétrico fosse o vácuo. Na Figura 3.4 encontram-se as expressões matemáticas de  $C_0$  para diferentes tipos de linha de transmissão, sendo  $\varepsilon_0$  a permissividade elétrica do vácuo.

(a)  $C_0 = \frac{d\varepsilon_0}{D}$

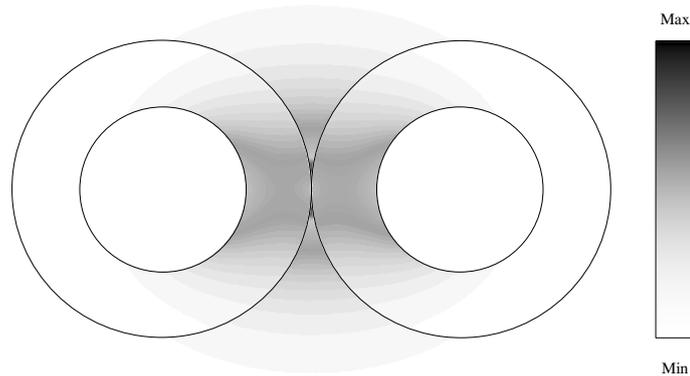
(b)  $C_0 = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln(D/d)}$

(c)  $C_0 = \frac{\pi\varepsilon_0}{\operatorname{acosh}(D/d)}$

Figura 3.4 –  $C_0$  para diferentes tipos de linhas de transmissão: (a) Placas paralelas; (b) Coaxial; (c) Fios paralelos.

Em linhas de transmissão reais, a consideração de condutores perfeitos é uma boa aproximação para análise de  $Y_p$ , uma vez que o campo elétrico transversal é praticamente nulo no interior de bons condutores. As dificuldades encontram-se no meio dielétrico, que em geral é heterogêneo e com perdas.

No caso de um par-trançado, a maior parte da energia armazenada no campo elétrico concentra-se na região preenchida pelo revestimento dielétrico entre os condutores, veja a Figura 3.5.



**Figura 3.5 – Simulação numérica da distribuição de energia eletrostática na seção transversal de um par-trançado.**

Devido a isso a maioria dos modelos existentes [7][8][15] consideram como uma boa aproximação que os condutores são imersos em um meio dielétrico homogêneo equivalente ao do revestimento dielétrico, o que tornaria a equação (3.17) aplicável. Além disso, também é comum considerar que as perdas no revestimento dielétrico são praticamente nulas. Assim sendo a admitância paralela de um par-trançado, desprezando o efeito de trançado, seria equivalente à de fios paralelos na Figura 3.4c, ou seja,

$$Y_p = j\omega C = j\omega \left( \frac{\pi \epsilon_0}{\text{acosh}(r)} \cdot \epsilon_r \right). \quad (3.18)$$

Mesmo que uma parcela considerável da energia armazenada no campo elétrico encontre-se na região de ar, a equação (3.17) ainda é aplicável, basta considerar que o meio dielétrico heterogêneo é equivalente a um meio dielétrico homogêneo com permissividade elétrica relativa efetiva  $\epsilon_{r_{ef}}$  definida por

$$\epsilon_{r_{ef}} = \frac{Y_p}{j\omega C_0} = \left( \frac{\text{acosh}(r)}{j\omega \pi \epsilon_0} \right) Y_p, \quad (3.19)$$

compreendida entre a permissividade do ar e a do revestimento dielétrico ( $1 < \epsilon_{r_{ef}} < \epsilon_r$ ).

Infelizmente não é possível demonstrar uma expressão analítica que determine o valor de  $\epsilon_{r_{ef}}$  em função das características construtivas do par-trançado, de modo que é comum representar  $\epsilon_{r_{ef}}$  por

$$\varepsilon_{ref} = 1 + \kappa(\varepsilon_r - 1). \quad (3.20)$$

Onde  $\kappa$  é uma constante empírica que pode ser obtida experimentalmente, e que deve ser independente de  $\varepsilon_r$  mas de alguma forma dependente das outras características construtivas do par-trançado [41][42].

Se o meio dielétrico além de heterogêneo apresentar perdas, então a permissividade elétrica além de efetiva será complexa:  $\varepsilon_{ref} = \varepsilon'_{ref} - j\varepsilon''_{ref}$ . Portanto, de uma maneira mais geral a admitância paralelo de um par-trançado pode ser expressa por

$$Y_p = G + j\omega C = \frac{j\omega\pi\varepsilon_0}{\text{acosh}(r)} (\varepsilon'_{ref} - j\varepsilon''_{ref}), \quad (3.21)$$

de onde conclui-se que

$$C = \frac{\pi\varepsilon_0}{\text{acosh}(r)} \varepsilon'_{ref} \quad (3.22)$$

e

$$G = \frac{\omega\pi\varepsilon_0}{\text{acosh}(r)} \varepsilon''_{ref}. \quad (3.23)$$

Substituindo (3.22) e (3.23) na relação de causalidade em (2.75) obtém-se a relação de dispersão dielétrica de Kramers-Kronig:

$$\varepsilon'_{ref}(\omega) - \varepsilon_{ref\infty} = +\frac{2}{\pi} \mathcal{P} \int_0^{\infty} \frac{\omega' \varepsilon''_{ref}(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega', \quad (3.24)$$

onde  $\varepsilon_{ref\infty}$  é o limite da permissividade elétrica efetiva para altas frequências. Portanto para um dielétrico com perdas a permissividade além de complexa é função da frequência, o que caracteriza o fenômeno de dispersão dielétrica. Note que a dispersão dielétrica praticamente determina a variação com a frequência da admitância paralela.

### 3.3.1 Dispersão Dielétrica

Quando um campo elétrico oscilante, como o de uma onda eletromagnética, atinge um dielétrico, cria um dipolo oscilante em cada átomo. Para frequências não muito distintas da frequência natural de vibração do átomo (ressonância), este vibra em uníssono com o campo. Caso a frequência do campo seja muito maior que a de ressonância, no momento em que o átomo iniciar o processo de vibração solicitada pelo campo, este já terá mudado. Assim, a polarização do dielétrico tem uma relação complicada com a frequência do campo polarizador, dependendo tanto do valor do campo no presente,  $\vec{e}(t)$ , quando dos valores no passado,  $\vec{e}(t - \tau)$ . Uma vez que a permissividade elétrica sintetiza os efeitos de polarização,

ela também é dependente da frequência, o que caracteriza o fenômeno conhecido por dispersão dielétrica.

Um modelo simples e geral, usado para definir a resposta de polarização  $\vec{p}(t)$  a um campo elétrico  $\vec{e}(t)$ , é obtido pela equação diferencial de um oscilador harmônico [43]:

$$\frac{1}{\omega_0^2} \frac{\partial^2 \vec{p}(t)}{\partial t^2} + \tau \frac{\partial \vec{p}(t)}{\partial t} + \vec{p}(t) = \chi_0 \varepsilon_0 \vec{e}(t), \quad (3.25)$$

onde  $\tau$  é o tempo de relaxação,  $\omega_0$  é a frequência natural de oscilação e  $\chi_0$  é a suscetibilidade elétrica em baixas frequências. Nesta equação, o primeiro termo refere-se aos efeitos de inércia, o segundo as perdas por dissipação, o terceiro as forças restauradoras e o quarto representa a excitação. A solução em regime permanente senoidal é dada por

$$\vec{P}(\omega) = \frac{\chi_0 \varepsilon_0}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j\omega\tau} \vec{E}(\omega), \quad (3.26)$$

onde  $\vec{P}(\omega)$  e  $\vec{E}(\omega)$  são respectivamente os vetores polarização e campo elétrico sem a dependência temporal  $e^{j\omega t}$ .

Alguns casos particulares de (3.25) servem como modelos simplificados, cujo enfoque é em fenômenos mais específicos, como relaxamento, ressonância, resposta plasmônica. Por exemplo, em frequências bem abaixo da ressonância ( $\omega \ll \omega_0$ ), como na faixa de rádio e micro-ondas, os efeitos inerciais podem ser negligenciados em relação às forças restauradoras e de amortecimento, de modo que (3.26) reduz-se ao clássico modelo de relaxação dielétrica de Debye [44]:

$$\vec{P}(\omega) = \frac{\chi_0 \varepsilon_0}{1 + j\omega\tau} \vec{E}(\omega). \quad (3.27)$$

Substituindo (3.27) na relação constitutiva

$$\varepsilon_r(\omega) = \varepsilon_{r\infty} + \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{\vec{P}(\omega)}{\vec{E}(\omega)}, \quad (3.28)$$

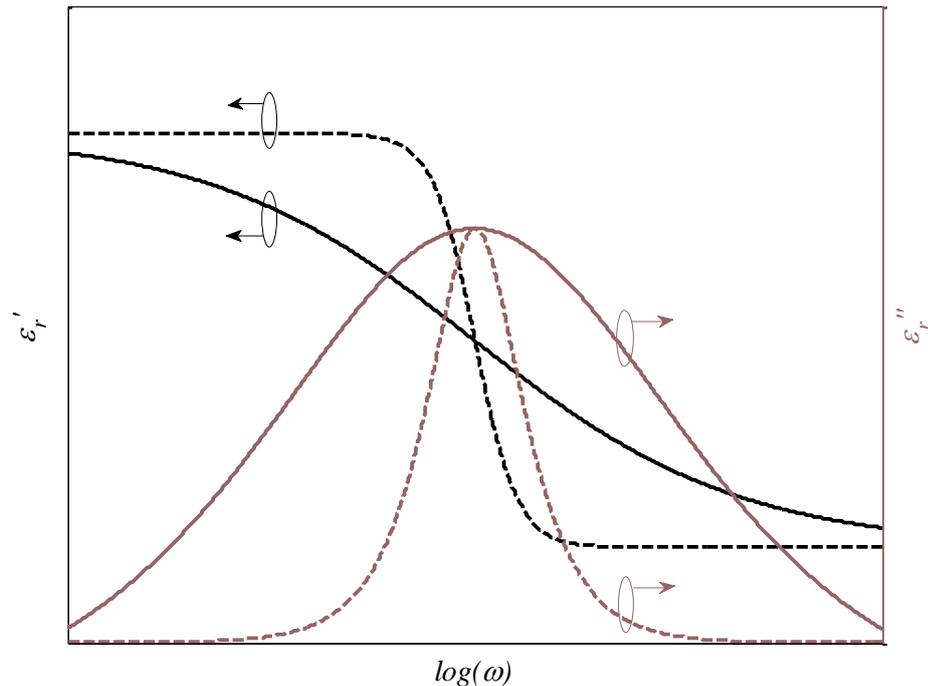
obtêm-se um modelo simples para a permissividade elétrica relativa em função da frequência:

$$\varepsilon_r(\omega) = \varepsilon_{r\infty} + \frac{\varepsilon_{r_s} - \varepsilon_{r\infty}}{1 + j\omega\tau}, \quad (3.29)$$

onde  $\varepsilon_{r_s}$  e  $\varepsilon_{r\infty}$  são os limites de  $\varepsilon_r$  respectivamente para baixas e altas frequências. Note que (3.29) obedece à relação de causalidade em (3.24) uma vez que é baseado em um sistema fisicamente realizável, o de um oscilador harmônico. O modelo de Debye assume que o processo de relaxação dos dipolos é individual, sem interação com outros dipolos e sem inércia, mas inclui perdas por amortecimento. Essas considerações de isolamento, em geral, só são válidas para gases e alguns tipos de líquidos. Apesar de idealizado, a importância do

modelo de Debye está na sua simplicidade, além de conter a essência do processo de relaxação de um ponto de vista físico.

Na prática, os materiais reais apresentam um comportamento que não é compatível com o modelo de Debye, com vários picos largos de absorção que se sobrepõem. Na maioria dos sólidos a região de dispersão se estende por um de um intervalo de frequência muito maior do que o modelo de Debye prediz, veja Figura 3.6. Isso porque mecanismos complexos de polarização não podem ser caracterizados por um único tempo de relaxação [45].



**Figura 3.6 – Dispersão dielétrica de um sólido hipotético e a sua correspondente previsão através do modelo de Debye: — Dispersão do sólido; -- Modelo de Debye.**

Devido a isso várias modificações e extensões da teoria de relaxação dielétrica de Debye foram e ainda têm sido propostas. A principal forma de abordagem interpreta o comportamento de um material real em termos de uma superposição de picos de absorção de Debye, com tempos de relaxação diferentes – o que, para um limite muito grande de picos de absorção, conduz a uma distribuição contínua de tempos de relaxação, conhecida como *Distribution of Relaxation Times* (DRT) [43]. Nesse tipo de abordagem os modelos de dispersão dielétricas são casos particulares da forma genérica

$$\varepsilon_r(\omega) = \varepsilon_{r\infty} + (\varepsilon_{rs} - \varepsilon_{r\infty}) \int_0^{\infty} \frac{\zeta(\tau)}{1 + j\omega\tau} d\tau, \quad (3.30)$$

sendo

$$\int_0^{\infty} \zeta(\tau) d\tau = 1. \quad (3.31)$$

Note que  $\zeta(\tau)$  é uma função distribuição de probabilidade, sendo diferente para cada modelo. No caso do modelo de Debye, corresponde ao impulso unitário  $\delta(\tau)$ . Além de sua generalidade, uma vantagem dessa abordagem é que os modelos resultantes são causais, já que em princípio nada mais são do que uma média ponderada de diferentes processos de relaxação de Debye, que já são causais<sup>1</sup>. Na Tabela 3.1 encontram-se os principais modelos de dispersão dielétrica baseados em DRT [46-48].

Tabela 3.1 – Principais modelos de dispersão dielétrica.

Modelo	$\epsilon_r(\omega)$	Nº de parâmetros	Aplicabilidade
Debye	$\epsilon_{r\infty} + \frac{\epsilon_{rs} - \epsilon_{r\infty}}{1 + j\omega\tau}$	3	Gases e alguns líquidos
Cole-Cole	$\epsilon_{r\infty} + \frac{\epsilon_{rs} - \epsilon_{r\infty}}{1 + (j\omega\tau)^{1-a}}$	4	Alguns líquidos e sólidos
Cole-Davidson	$\epsilon_{r\infty} + \frac{\epsilon_{rs} - \epsilon_{r\infty}}{(1 + j\omega\tau)^b}$	4	Alguns líquidos e sólidos
Havrilak-Negami	$\epsilon_{r\infty} + \frac{\epsilon_{rs} - \epsilon_{r\infty}}{(1 + (j\omega\tau)^{1-a})^b}$	5	Alguns líquidos e sólidos

Onde  $0 \leq a, b \leq 1$ .

Embora existam diversos modelos de dispersão, não é claro qual deles é mais adequado para os polímeros sólidos de baixas perdas usados como revestimento dielétrico em pares-trançados.

### 3.4 O Efeito do Trançado

Nas duas seções anteriores os condutores de um par-trançado foram considerados como retilíneos e paralelos, nesta seção é abordado o efeito do trançado nos cálculos dos parâmetros distribuídos.

Em uma primeira análise nota-se que o trançado quebra a condição de uniformidade da linha de transmissão, uma vez que para cortes de seção transversal em diferentes posições ao longo da linha há diferentes configurações de campo, rotacionadas umas em relação às outras de forma periódica. De acordo com a teoria de Bragg [49], uma não uniformidade periódica acarreta em um filtro de reflexão seletivo, centrado na frequência

$$\omega_{max} = \frac{c\pi}{\sqrt{\epsilon_{ref}}} \cdot \nu, \quad (3.32)$$

<sup>1</sup> A combinação linear de funções de transferência causais é também causal.

onde  $c$  é a velocidade da luz no vácuo. Para valores típicos de taxas de trançado dos pares  $\nu$  (veja a Seção 3.1)  $\omega_{max}$  ocorrerá na faixa de dezenas a centenas de  $GHz$ , longe da região de operação de um par-trançado. Portanto, de um ponto de vista prático, um par-trançado pode ser considerado como uma linha de transmissão uniforme.

Embora os condutores de um par-trançado sejam paralelos entre si, eles não são paralelos à direção de propagação. Assim sendo surgem componentes longitudinais de campo elétrico e magnético que quebram a condição TEM. Embora esses componentes longitudinais sejam considerados de pequena amplitude quando comparados aos transversais, portanto dentro da condição quase-TEM, isso gera diferenças nas configurações de campo externo em relação ao caso de condutores retilíneos, o que influencia na capacitância e na indutância do par-trançado. A literatura a respeito é escassa. Por exemplo, em [8] o autor modela a indutância de um par trançado através da superposição dos efeitos de uma linha de fios retilíneos e paralelos com anéis circulares de corrente periodicamente espaçados. O que resulta no acréscimo linear de indutância em função da taxa de trançado  $\nu$

$$\Delta L_{\times} = \left( \frac{\mu_0 r d (\ln(8r) - 2)}{2} \right) \cdot \nu. \quad (3.33)$$

No entanto em [8] não é apresentado uma expressão para o correspondente acréscimo de capacitância  $\Delta C_{\times}$  e nem uma validação numérica ou experimental para (3.33). Em [41] e [42] os autores apresentam expressões para o acréscimo de capacitância  $\Delta C_{\times}$  e de indutância  $\Delta L_{\times}$  de um par-trançado, obtidas de forma empírica através de medições. No entanto as expressões em [41] e [42] não levam em consideração o efeito do trançado em si, mas sim o efeito da deformação plástica do revestimento dielétrico e conseqüente aproximação entre os condutores ocasionada por forças de tração durante o processo de trançamento.

Outra consideração importante é a respeito da diferença entre o comprimento real  $l_{real}$  e o longitudinal  $l$  do par-trançado. Isso afeta todos os parâmetros distribuídos uma vez que estes são definidos por unidade de comprimento. Para modelar esse efeito considere representar a trajetória helicoidal de um par-trançado pela função vetorial

$$\vec{q}(x) = \left\langle \frac{rd}{2} \text{sen}(2\pi\nu x), \frac{rd}{2} \text{cos}(2\pi\nu x), x \right\rangle, \quad (3.34)$$

de modo que  $l_{real}$  é obtido pelo comprimento de arco

$$l_{real} = \int_0^l \left| \frac{d\vec{q}(x)}{dx} \right| dx. \quad (3.35)$$

Substituindo (3.34) em (3.35) obtém-se o seguinte fator de correção multiplicativo para os parâmetros distribuídos de um par-trançado:

$$k_l = \frac{l_{real}}{l} = \sqrt{1 + (\pi v r d)^2}. \quad (3.36)$$

Portanto, levando em consideração o efeito do trançado tanto nas configurações de campo como na variação do comprimento da linha de transmissão, os parâmetros secundários de um par-trançado podem ser definidos como

$$\gamma = k_l \sqrt{(Z_{s\parallel} + j\omega\Delta L_{\times})(Y_{p\parallel} + j\omega\Delta C_{\times})} \quad (3.37)$$

e

$$Z_0 = \sqrt{\frac{Z_{s\parallel} + j\omega\Delta L_{\times}}{Y_{p\parallel} + j\omega\Delta C_{\times}}}. \quad (3.38)$$

Onde  $Z_{s\parallel}$  e  $Y_{p\parallel}$  são respectivamente a impedância série e a admitância paralelo sem o efeito do trançado, conforme abordado nas seções 3.2 e 3.3.

### 3.5 Modelos de Par-Trançado

Nesta seção são apresentados os principais modelos de par-trançado encontrados na literatura. Todos são baseados na teoria apresentada nas seções 3.2, 3.3 e 3.4.

#### 3.5.1 Modelo VUB

Desenvolvido pela *Vrije Universiteit Brussel* (VUB) para aplicações no sistema DSL, neste modelo [7] o efeito de proximidade é simplificado por uma aproximação assintótica para baixas frequências, dada por (3.13). Assim sendo, a impedância série é obtida por

$$Z_s(\omega) = \sqrt{-\varpi R_0} \frac{J_0(\sqrt{-\varpi/R_0})}{J_1(\sqrt{-\varpi/R_0})} + \varpi \left( \ln(2r) + \frac{J_2(\sqrt{-\varpi/R_0})}{J_2(\sqrt{-\varpi/R_0}) + 4r^2 J_0(\sqrt{-\varpi/R_0})} \right). \quad (3.39)$$

O meio dielétrico é considerado homogêneo e sem perdas, de modo que a admitância paralelo é dada por (3.18), reescrita por conveniência abaixo:

$$Y_p(\omega) = j\omega \left( \frac{\pi \varepsilon_0}{\text{acosh}(r)} \cdot \varepsilon_r \right). \quad (3.40)$$

Onde  $r$ ,  $\varpi$  e  $R_0$  são dados por (3.6), (3.2) e (3.3). O efeito do trançado é considerado desprezível.

### 3.5.2 Modelo VT

Desenvolvido pelo Instituto Politécnico e Universidade Estadual da Virgínia, ou *Virginia Tech* (VT), para aplicações no sistema DSL, neste modelo [8] a impedância série é obtida a partir da aproximação assintótica para altas frequências dada por (3.16). Além disso, no modelo é considerado que o efeito do trançado ocasiona um acréscimo na indutância dado por (3.33). O que resulta para a impedância série em

$$Z_s(\omega) = \frac{r\sqrt{-\omega R_0}}{\sqrt{r^2 - 1}} \cdot \frac{J_0(\sqrt{-\omega/R_0})}{J_1(\sqrt{-\omega/R_0})} + \omega \left( \operatorname{acosh}(r) + \frac{\pi v r d}{2} (\ln(8r) - 2) \right). \quad (3.41)$$

O meio dielétrico é considerado homogêneo e sem perdas, de modo que a admitância paralelo também é obtida por (3.40).

### 3.5.3 Modelo NASA

Desenvolvido pela *National Aeronautics and Space Administration* (NASA) para previsão de falhas no sistema elétrico de aeronaves, neste modelo [15] a impedância série também é baseada em uma aproximação assintótica para altas frequências e o meio dielétrico também é considerado homogêneo e sem perdas. Uma suposição adicional é que os condutores são suficientemente afastados de modo que o efeito de proximidade seja fraco. Além disso, é levado em consideração o fator de correção do comprimento dado por (3.36), relacionado ao trançado dos pares. O que resulta em

$$Z_s(\omega) = \left[ \frac{(2r)^2 + 1}{(2r)^2 - 1} \sqrt{\omega R_0} + \omega \ln \left( 2r - \frac{1}{2r} \right) \right] \sqrt{1 + (\pi v r d)^2} \quad (3.42)$$

e

$$Y_p(\omega) = j\omega \left( \frac{\pi \varepsilon_0}{\ln \left( 2r - \frac{1}{2r} \right)} \cdot \varepsilon_r \right) \sqrt{1 + (\pi v r d)^2}. \quad (3.43)$$

# CAPÍTULO 4

## MODELO UFPA

Embora existam diferentes modelos de par-trançado, todos eles são baseados em considerações demasiadamente idealizadas, como por exemplo, que o meio dielétrico é homogêneo e sem perdas. Esses modelos também fazem diferentes considerações para diminuir a complexidade das expressões relativa ao efeito de proximidade. Se por um lado essas considerações tornam os modelos mais simples, por outro lado diminuem a sua precisão e aplicabilidade. Neste capítulo essas e outras questões são levadas em conta no desenvolvimento de um novo modelo de par-trançado.

### 4.1 Impedância Série

A principal diferença entre os modelos de impedância série existentes está na forma como é modelado o efeito de proximidade. Cada modelo adota diferentes considerações com o intuito de diminuir a complexidade de suas expressões. Na Figura 4.1 encontram-se as curvas de erro<sup>1</sup> percentual dos modelos aproximados de impedância série apresentados na Seção 3.5<sup>2</sup> em relação à modelagem considerada exata na Seção 3.2<sup>3</sup>. Com o intuito de explicitar o efeito de proximidade, as curvas de erro foram calculadas para um par-trançado em que a espessura do dielétrico corresponde a apenas 10 % do diâmetro do condutor ( $s/d = 0,1$ ). Sendo esse um caso extremo, porém factível. Note que de um modo geral o modelo VT é o que apresenta melhor comportamento, possuindo menor erro na maior parte da faixa de frequência sob análise (de 4 MHz a 1 GHz). Entretanto, na faixa de 0 a 4 MHz o modelo VUB é o mais adequado. Embora esta faixa seja pequena, nela operam serviços

---

<sup>1</sup> Nesta seção os erros de impedância são definidos como à soma do erro resistivo com o indutivo.

<sup>2</sup> A taxa de trançado foi considerada nula.

<sup>3</sup> Foram considerados os dez primeiros termos da série em (3.8) relativa ao efeito de proximidade.

importantes como o de telefonia fixa e boa parte das tecnologias DSL vigentes. Assim sendo, nenhuma das abordagens apresentadas é adequada para modelar o efeito de proximidade em uma ampla faixa de frequência, que vai desde o regime de corrente contínua até o início da faixa de micro-ondas. O que motiva o desenvolvimento de um novo modelo.

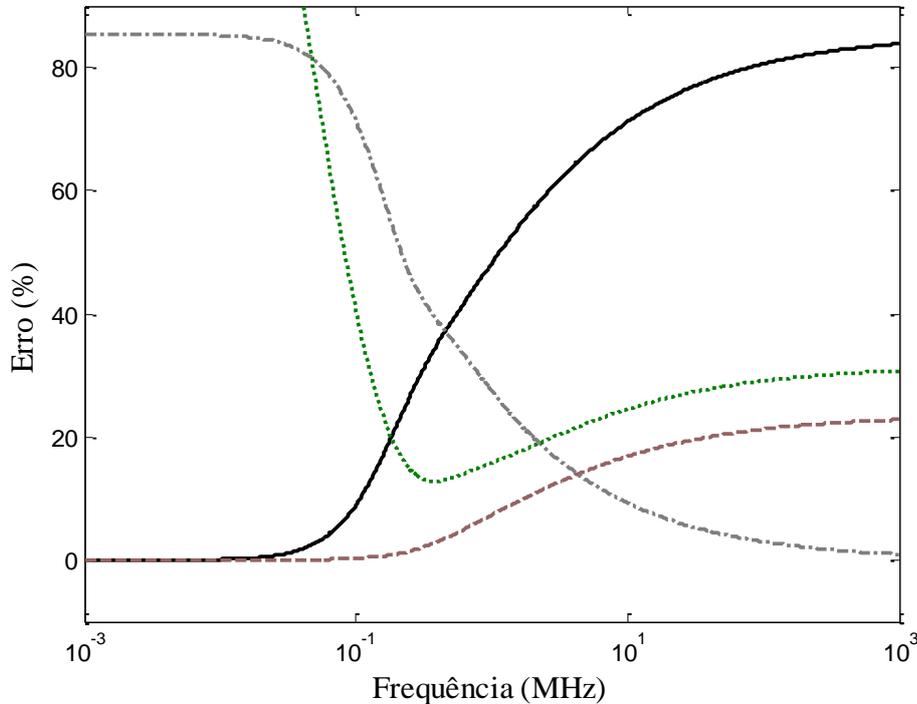


Figura 4.1 – Erro percentual de diferentes modelos de impedância série: — Sem efeito de proximidade; -- Modelo VUB; --- Modelo VT; .... Modelo NASA.

#### 4.1.1 O Efeito de Proximidade

É intuitivo pensar que para obter um modelo com as características requeridas bastaria considerar mais termos da série em (3.8), relativa ao efeito de proximidade. No modelo VUB considera-se apenas o primeiro termo. Embora isso torne o modelo VUB simples também o limita a aplicações de baixas frequências, como mostrado na Figura 4.1. Na Figura 4.2 encontra-se uma estimativa do erro cometido na frequência de 1 GHz ao se truncar a série em (3.8) em um determinado número de termos, isso para o mesmo par-trançado usado nas simulações da Figura 4.1. Note que a convergência da série é alta. Enquanto que com 1 termo (modelo VUB) o erro é em torno de 53 %, com 4 termos o erro torna-se menor que 2 %. Infelizmente da mesma forma que o erro decresce exponencialmente, a complexidade das expressões cresce com o aumento do número de termos, como pode ser visto nas equações (3.13) e (3.14) respectivamente para 1 e 2 termos. Além disso, independente do número de termos considerado, a partir de alguma frequência o modelo VT tornar-se-ia melhor, uma vez que este foi idealizado a partir de uma solução exata para altas frequências. Portanto, é

desejável que um novo modelo de alguma forma interpole o comportamento do modelo VUB em baixas frequências com o comportamento do modelo VT em altas frequências, sem quebrar a causalidade do sistema. Uma interpolação inadequada acarretaria na quebra da causalidade, mesmo os modelos VUB e VT sendo causais.

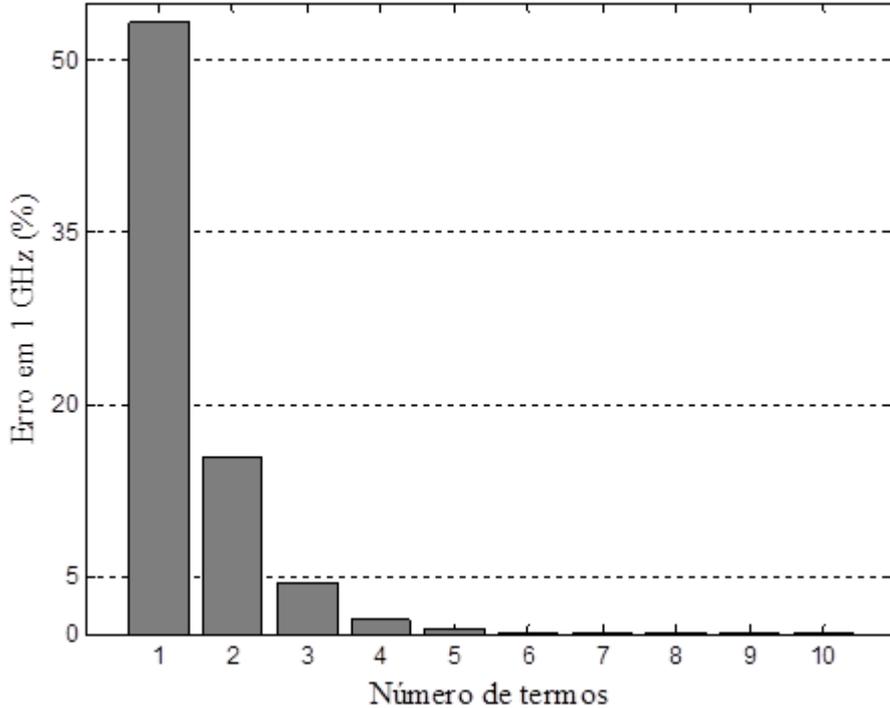


Figura 4.2 – Erro de truncatura da série em (3.8).

Nesta subsecção é desenvolvido um novo modelo para o efeito de proximidade, no qual se considera apenas 1 termo da série em (3.8). O erro cometido ao se desprezar os outros termos da série é corrigido por um fator multiplicativo definido por

$$\eta = \frac{Z_{prox}}{Z_{prox1}}, \quad (4.1)$$

onde  $Z_{prox1}$  corresponde ao efeito de proximidade com apenas 1 termo, dado por (3.13). Portanto,

$$Z_{prox} = \eta \cdot \frac{\varpi J_2(\sqrt{-\varpi/R_0})}{J_2(\sqrt{-\varpi/R_0}) + 4r^2 J_0(\sqrt{-\varpi/R_0})}. \quad (4.2)$$

Note que o fator de correção  $\eta$  é adimensional. Além disso  $\eta$  é uma variável complexa e função da frequência, de modo que para o modelo em (4.2) ser fisicamente realizável,  $\eta$  deve ser hermitiano e causal (veja a Seção 2.4). Na Figura 4.3 encontra-se a simulação das curvas de variação com a frequência do fator de correção  $\eta$  de um par-trançado típico, obtida a partir da definição em (4.1).

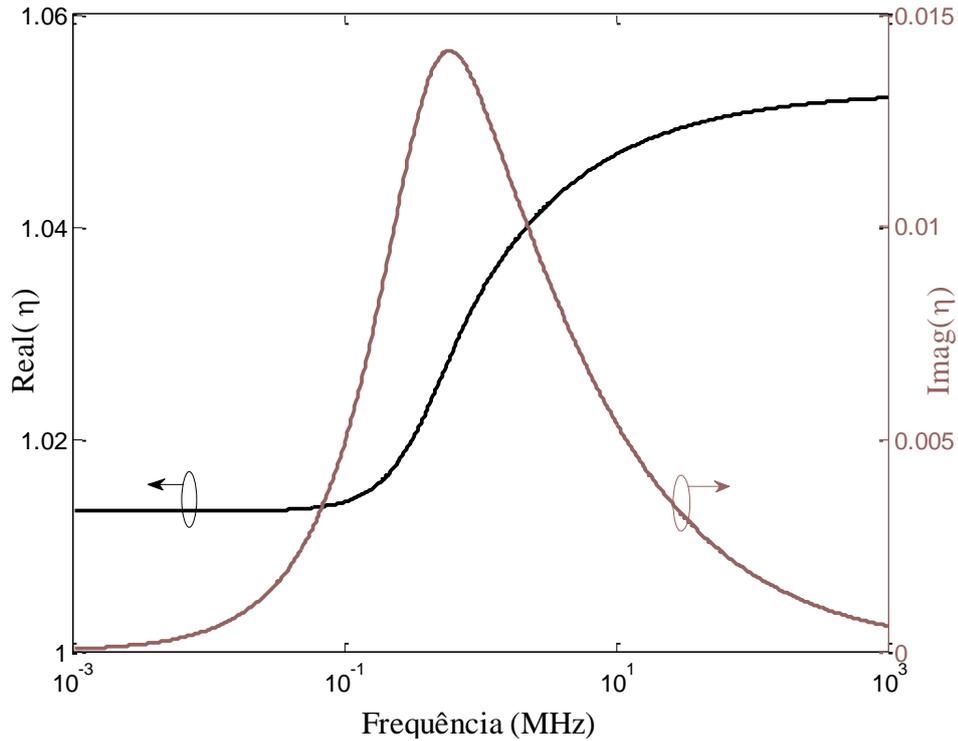


Figura 4.3 – Variação com a frequência do fator de correção  $\eta$  para um par-traçado típico.

Note a similaridade com as curvas de dispersão da Figura 3.6. Isso indica que uma maneira conveniente de modelar  $\eta$  é através de uma combinação de sistemas lineares de primeira ordem, semelhante aos modelos de dispersão na Tabela 3.1. Assim sendo, considere representar  $\eta$  pela forma geral<sup>1</sup>

$$\eta = \eta_{\infty} - \frac{\eta_{\infty} - \eta_0}{\left(1 + \tau_{\eta} \frac{\omega}{R_0}\right)^{b_{\eta}}}, \quad (4.3)$$

que é hermitiana e causal. Onde  $\eta_0$  e  $\eta_{\infty}$  são respectivamente os comportamentos assintóticos de  $\eta$  para baixas e altas frequências, e  $\tau_{\eta}$  e  $b_{\eta}$  são grandezas adimensionais de ajuste. Igualando os primeiros coeficientes da expansão assintótica da definição de  $\eta$  em (4.1)<sup>2</sup> com os coeficientes correspondentes da expansão assintótica do modelo em (4.3), tanto para as baixas quanto para as altas frequências, conclui-se que

$$\eta_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{2^{2n-3}(n+1)n^2} \right) \frac{1}{r^{2n-2}} \cong 1 + \frac{1}{24r^2 - 2}, \quad (4.4)$$

$$\eta_{\infty} = (4r^2 - 1)(\ln(2r) - \text{acosh}(r)), \quad (4.5)$$

$$b_{\eta} = \frac{1}{2} \quad (4.6)$$

e

<sup>1</sup> Essa forma geral de equação é similar a do modelo de dispersão de Cole-Davidson.

<sup>2</sup> As expansões assintóticas da definição em (4.1) foram obtidas a partir das equações de (3.7) a (3.16).

$$\tau_{\eta} = \frac{(\eta_{\infty} - \eta_0)^2}{\left(8r^2(\ln(2r) - \operatorname{acosh}(r)) + (4r^2 - 1)\left(1 - \frac{r}{\sqrt{r^2 - 1}}\right)\right)^2} \cong \frac{1}{9}\left(1 - \frac{1}{r^2}\right). \quad (4.7)$$

Na Figura 4.4 encontra-se a curva de erro percentual do novo modelo. Note que ele interpola bem o comportamento dos modelos VUB e VT, mantendo-se com erro sempre abaixo destes. Neste exemplo, que utiliza o mesmo par-traçado usado nas simulações das Figura 4.1 e Figura 4.2, o erro máximo obtido pelo novo modelo é em torno de 2 %. Como este é um caso extremo, em que os condutores estão muito próximos, em outros casos práticos o erro tende a ser menor ainda.

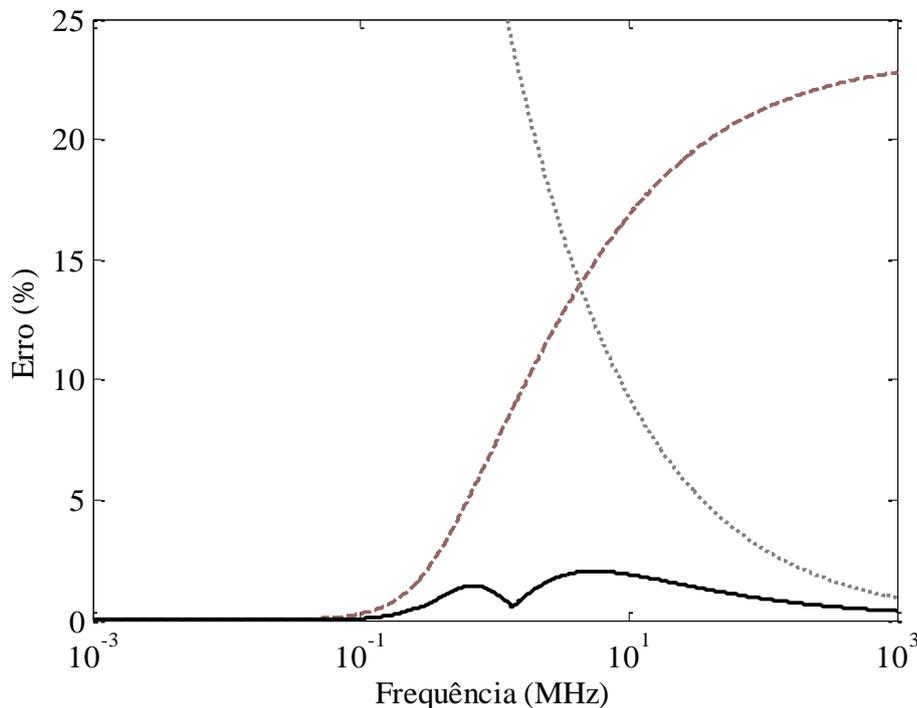


Figura 4.4 – Erro percentual de diferentes modelos de impedância série: — Modelo UFPA; - - Modelo VUB; .... Modelo VT.

## 4.2 Admitância Paralelo

Os modelos de admitância paralelo desenvolvidos para um par-traçado partem dos pressupostos que o meio dielétrico é homogêneo e sem perdas. As validades desses pressupostos serão investigadas respectivamente nas duas subseções seguintes e como consequência um novo modelo será desenvolvido.

#### 4.2.1 Permissividade Elétrica Efetiva

O meio dielétrico de um par-trançado é heterogêneo (veja a Figura 3.1), e como visto na Seção 3.3 é mais adequado representá-lo por uma permissividade elétrica relativa efetiva  $\varepsilon_{r_{ef}}$  definida por (3.19). Nesta subseção o objetivo é modelar  $\varepsilon_{r_{ef}}$  em função das características construtivas do par-trançado.

O primeiro passo é definir as variáveis envolvidas. Dos cinco parâmetros físicos apresentados na Seção 3.1, a condutividade  $\sigma$  pode ser desconsiderada nesta análise, uma vez que para cálculos de admitância paralela é aceitável assumir os condutores como perfeitos. Além disso, a taxa de trançado  $\nu$  também pode ser desconsiderada uma vez que o efeito do trançado será tratado separadamente na Seção 4.3. Das três variáveis restantes, simulações numéricas prévias mostram que  $\varepsilon_{r_{ef}}$  não depende isoladamente do diâmetro  $d$  dos condutores ou da espessura  $s$  do revestimento dielétrico, mas sim da relação  $r = 1 + 2s/d$  definida em (3.6). Portanto,  $\varepsilon_{r_{ef}}$  é dependente apenas da relação  $r$  e da permissividade elétrica relativa  $\varepsilon_r$  do revestimento dielétrico.

O próximo passo é simular numericamente  $\varepsilon_{r_{ef}}$  para diferentes valores de  $r$  e  $\varepsilon_r$ . Para isso foi utilizado o *Maxwell 2D Student Version* [50], um software livre que usa análise de elementos finitos para resolver problemas eletromagnéticos em seções transversais de estruturas. Especificamente, o software foi utilizado para calcular a admitância paralelo de pares-trançados com diferentes valores de  $r$  e  $\varepsilon_r$  e os resultados foram substituídos na definição em (3.19) para estimar os correspondentes  $\varepsilon_{r_{ef}}$ . Em todas as simulações consideraram-se condutores com diâmetro de 0,5 mm. Para as espessuras do revestimento dielétrico considerou-se uma variação de 10 % a 110 % do diâmetro dos condutores, com 21 pontos amostrados uniformemente. Isso corresponde a uma variação para  $r$  de 1,2 a 3,2. Para  $\varepsilon_r$  considerou-se uma variação de 1 a 6, com 11 pontos amostrados uniformemente. Conforme visto na Seção 3.1 as espessuras do revestimento dielétrico de pares-trançados comerciais variam normalmente de 30 % a 90 % do diâmetro dos condutores, portanto dentro da faixa considerada para  $r$ , e os materiais dielétricos típicos usados como isolantes em cabos apresentam permissividades elétricas relativas que variam de 2,1 (teflon) a 3,0 (PVC), portanto dentro da faixa considerada para  $\varepsilon_r$ . Foram realizadas simulações para todas as combinações possíveis desses parâmetros amostrados, com um total de 126 simulações, conforme indicado na Figura 4.5. Os resultados das simulações estão apresentados em escala di-log na Figura 4.6.

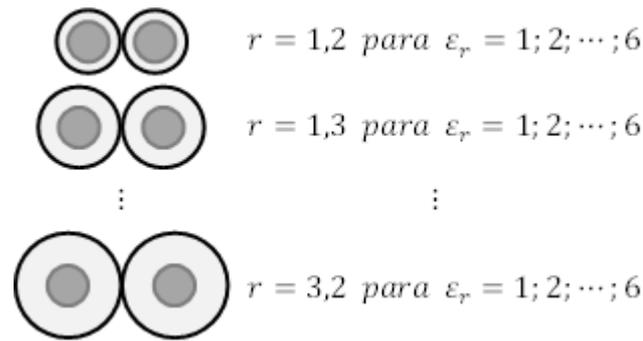


Figura 4.5 – Configurações utilizadas para as simulações numéricas de  $\varepsilon_{r_{ef}}$ .

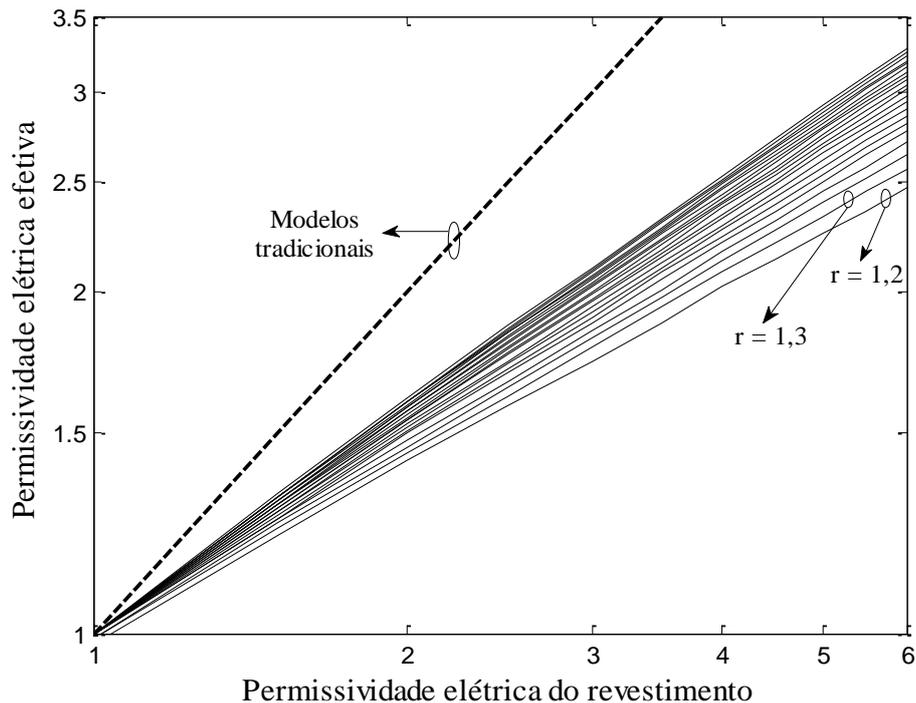


Figura 4.6 – Relação entre a permissividade efetiva e a do isolante, para diferentes valores de  $r$ : — Simulações numéricas; -- Modelos tradicionais.

As curvas cheias na Figura 4.6 foram obtidas pelas simulações numéricas e representam a variação de  $\varepsilon_{r_{ef}}$  em função de  $\varepsilon_r$  para diferentes valores de  $r$  e a curva tracejada é uma curva de referência em que  $\varepsilon_{r_{ef}} = \varepsilon_r$  independentemente de  $r$ , consideração adotada nos modelos tradicionais de par-trançado apresentados na Seção 3.5. Note a discrepância entre os modelos tradicionais e as simulações numéricas. Por exemplo, para um par-trançado típico, com revestimento de polietileno ( $\varepsilon_r = 2,3$ ) cuja espessura é de 40 % do diâmetro do condutor ( $r = 1,8$ ), o desvio em relação às simulações numéricas cometido ao se considerar o meio dielétrico efetivo como equivalente ao do revestimento dielétrico é em torno de 40 %, tendendo a aumentar para pares-trançados com revestimento dielétrico de maior permissividade. Na Figura 4.7 encontram-se os desvios percentuais para as outras combinações de  $\varepsilon_r$  e  $r$  simulados.

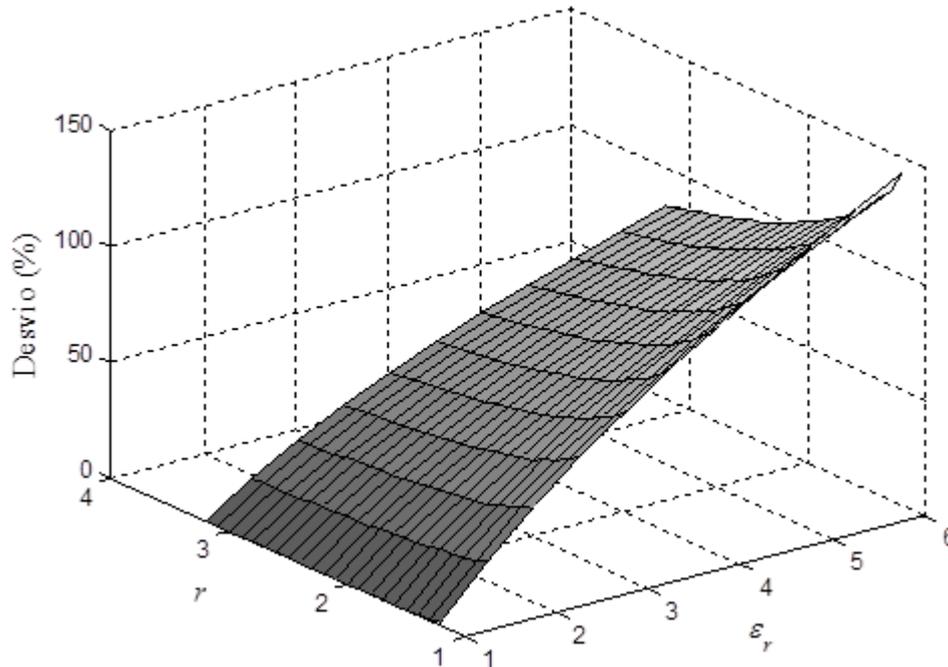


Figura 4.7 – Desvio em relação as simulações numéricas cometido ao se considerar o meio dielétrico efetivo como equivalente ao do revestimento dielétrico, para diferentes combinações de  $\epsilon_r$  e  $r$ .

O comportamento linear em escala di-log das curvas na Figura 4.6 sugere que a permissividade efetiva pode ser modelada de uma maneira mais adequada por uma lei de potência, na forma

$$\epsilon_{r_{ef}} = \epsilon_r^\kappa, \quad (4.8)$$

sendo o expoente  $\kappa$  determinado pelo coeficiente angular das retas aproximadas na Figura 4.6 e, portanto, é dependente de  $r$ . Note que a equação proposta em (4.8) diverge da equação em (3.20), comumente utilizada para representar a permissividade efetiva de meios heterogêneos. Ao utilizar a equação (3.20) assume-se um comportamento linear para  $\epsilon_{r_{ef}}$  em função de  $\epsilon_r$ , em escalas lineares e não logarítmicas. Na Figura 4.8 encontra-se a dependência do expoente  $\kappa$  em relação à  $r$ , onde os 21 pontos amostrados foram obtidos por ajuste da equação (4.8) as 21 curvas apresentadas na Figura 4.6, e a curva cheia que ajusta esses pontos é obtida pela equação proposta

$$\kappa = 1 - \frac{1}{9 \left( r^{1/10} - \frac{19}{24} \right)}. \quad (4.9)$$

Portanto, a permissividade efetiva de um par-trançado pode ser modelada em função de suas características construtivas, por

$$\epsilon_{r_{ef}} = \epsilon_r^{1 - \frac{1}{9 \left( r^{1/10} - \frac{19}{24} \right)}}. \quad (4.10)$$

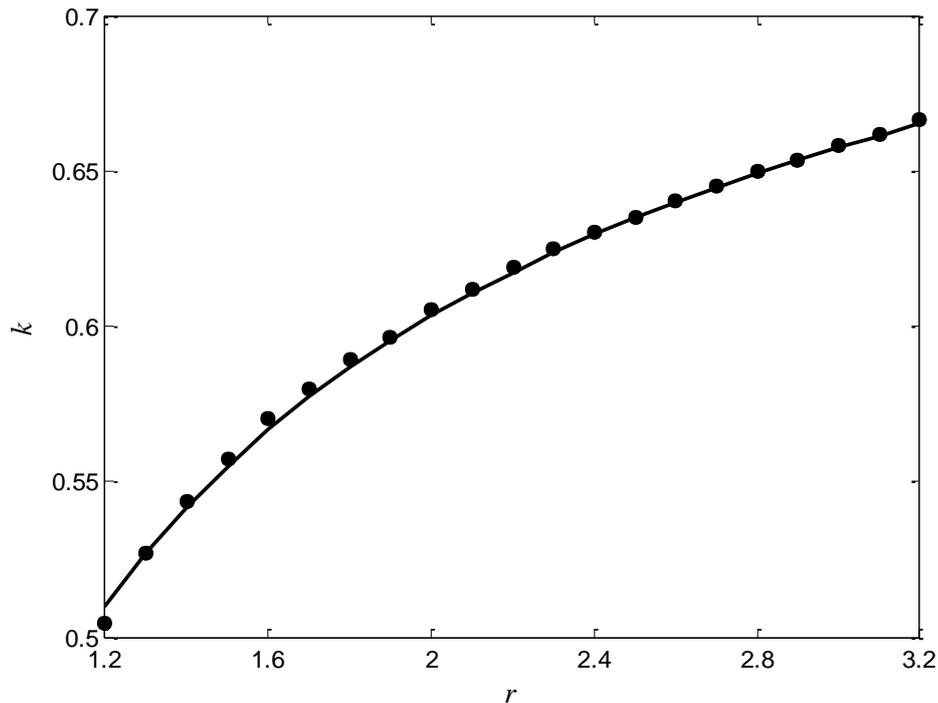


Figura 4.8 – Dependência do expoente  $\kappa$  da equação (4.8) em relação à  $r$ : • Amostras obtidas a partir de simulações numéricas; — Curva de ajuste obtida pela equação (4.9).

Na Figura 4.9 encontram-se os desvios percentuais em relação às simulações numéricas ao se considerar o meio dielétrico efetivo como sendo definido pelo modelo proposto em (4.10). O desvio médio é em torno de 0,6 %. Compare esses valores de desvio com os da Figura 4.7.

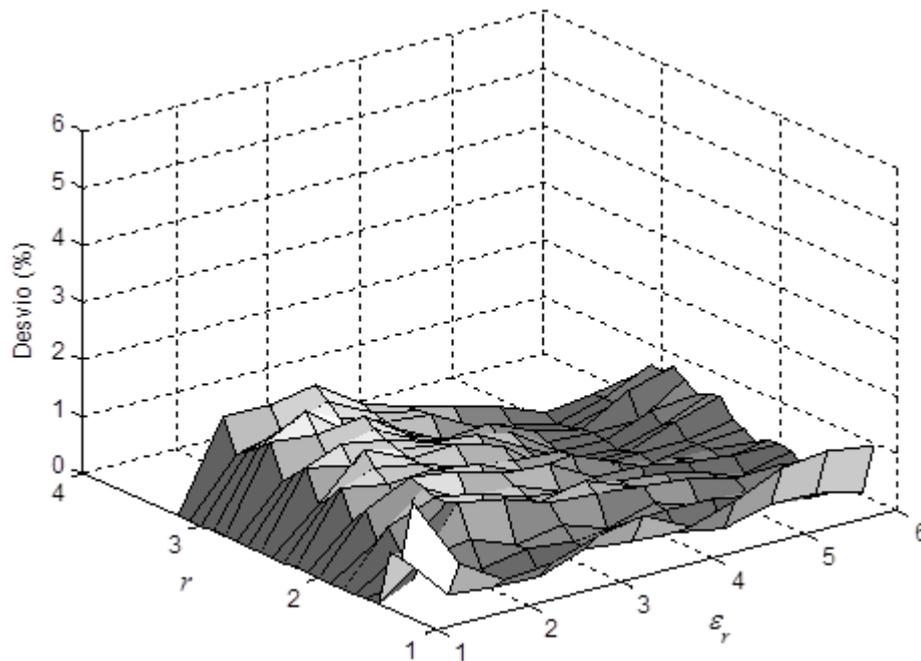


Figura 4.9 – Desvio em relação as simulações numéricas cometido ao se considerar o meio dielétrico efetivo como sendo definido pelo modelo em (4.10), para diferentes combinações de  $\epsilon_r$  e  $r$ .

### 4.2.2 Perdas Dielétricas

Embora a maioria dos materiais usados como revestimento dielétrico em pares-trançados seja considerada de baixas perdas, essas perdas tendem a aumentar com a frequência. Além disso, alguns materiais como o PVC apresentam perdas consideráveis mesmo em baixas frequências. Nesta subseção o objetivo é investigar a necessidade de se considerar perdas dielétricas nos modelos de par-trançado, assim como definir dentre os modelos clássicos de perdas/dispersão apresentados na Tabela 3.1 qual o mais adequado para esse fim.

Nas Figuras 4.10 e 4.11 encontram-se medições de tangente de perdas ( $\tan(\delta) = -\varepsilon''_r/\varepsilon'_r$ ) de alguns dos principais tipos de materiais poliméricos considerados de baixas/moderadas perdas e que são comumente utilizados pela indústria de telecomunicações na fabricação de fios e cabos. Todas as medições foram realizadas em amostras de materiais produzidas para fins comerciais, e estão disponíveis em [51]<sup>1</sup>. Nessas figuras encontram-se também os correspondentes ajustes dos modelos de dispersão apresentados na Tabela 3.1.

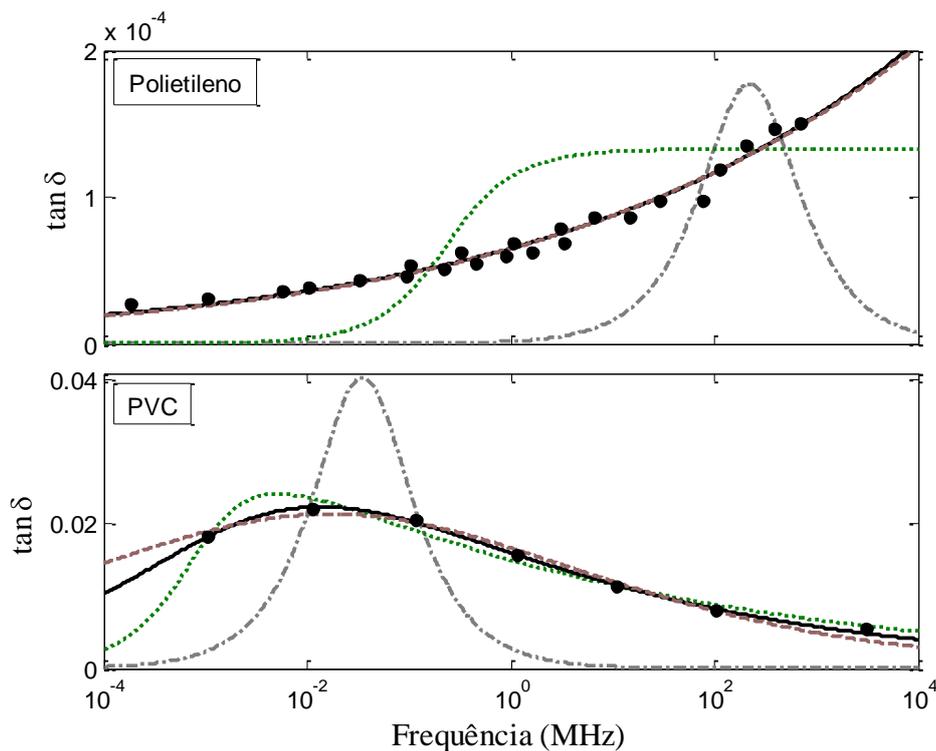


Figura 4.10 – Tangente de perdas do polietileno e do PVC: ● Amostras medidas; --- Modelo de Debye; -.- Modelo de Cole-Cole; .... Modelo de Cole-Davidson; — Modelo de Havriliak-Negami.

<sup>1</sup> Para extrair os dados de medições a partir de imagens utilizou-se a ferramenta WebPlotDigitalizer disponível em: <http://arohatgi.info/WebPlotDigitizer/app/>.

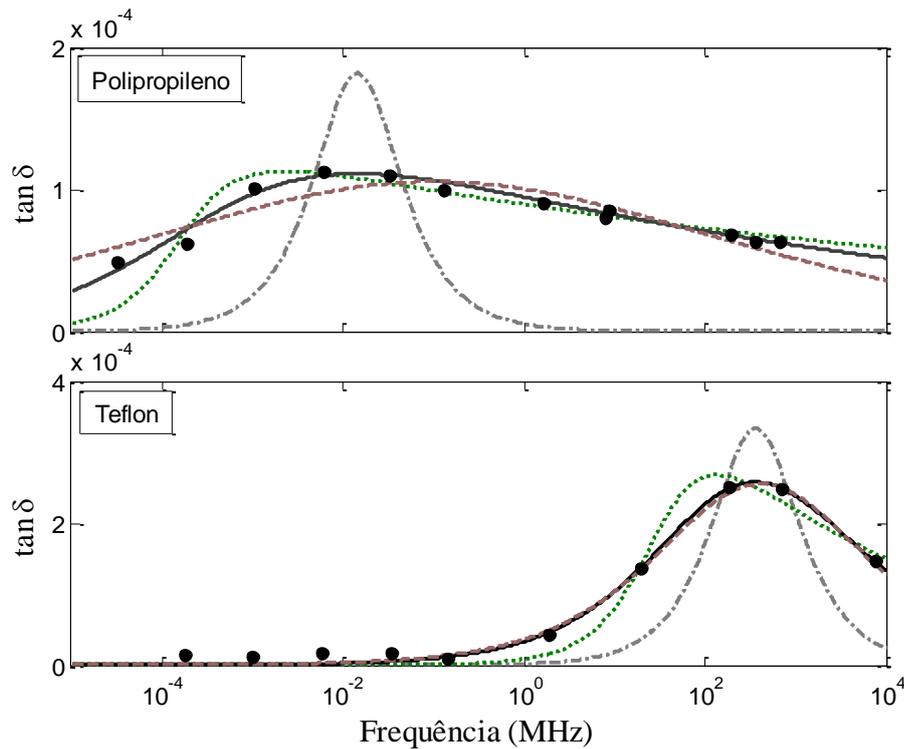


Figura 4.11 – Tangente de perdas do polipropileno e do teflon: • Amostras medidas; --- Modelo de Debye; -- Modelo de Cole-Cole; ... Modelo de Cole-Davidson; — Modelo de Havrilak-Negami.

O modelo de Havrilak-Negami é o que melhor ajusta todas as medições, seguido pelo modelo de Cole-Cole, Cole-Davidson e Debye. Note que no caso das medições relativas ao polietileno e ao teflon, as curvas de ajuste dos modelos de Havrilak-Negami e de Cole-Cole são muito similares. Na Tabela 4.1 encontram-se os parâmetros ajustados para esses dois modelos.

Tabela 4.1 – Parâmetros dos modelos de Cole-Cole e Havrilak-Negami para alguns polímeros de baixas perdas.

Polímero	Modelo	Parâmetros				
		$\epsilon_{r_s}$	$\epsilon_{r_\infty}$	$\tau$ (s)	$a$	$b$
Polietileno	Cole-Cole	2,3	2,234	$6,7 \times 10^{-19}$	0,86	-
	Havrilak-Negami	2,3	2,115	$2,0 \times 10^{-20}$	0,87	0,25
PVC	Cole-Cole	3,0	2,407	$1,4 \times 10^{-5}$	0,75	-
	Havrilak-Negami	3,0	2,466	$1,4 \times 10^{-4}$	0,56	0,37
Polipropileno	Cole-Cole	2,2	2,197	$1,5 \times 10^{-6}$	0,8	-
	Havrilak-Negami	2,2	2,197	$6,0 \times 10^{-4}$	0,53	0,14
Teflon	Cole-Cole	2,1	2,097	$3,8 \times 10^{-10}$	0,48	-
	Havrilak-Negami	2,1	2,097	$7,5 \times 10^{-10}$	0,44	0,73

Nas Figuras 4.12 e 4.13 encontram-se curvas de atenuação de pares-trançados com condutores de cobre de espessura de 0,5 mm, porém com diferentes

revestimentos dielétricos. Para cada revestimento dielétrico foi considerado dois casos: com perdas dielétricas (modelo de Havrila-Negami) e sem perdas dielétricas ( $\epsilon_r = \epsilon_{r_s}$ ).

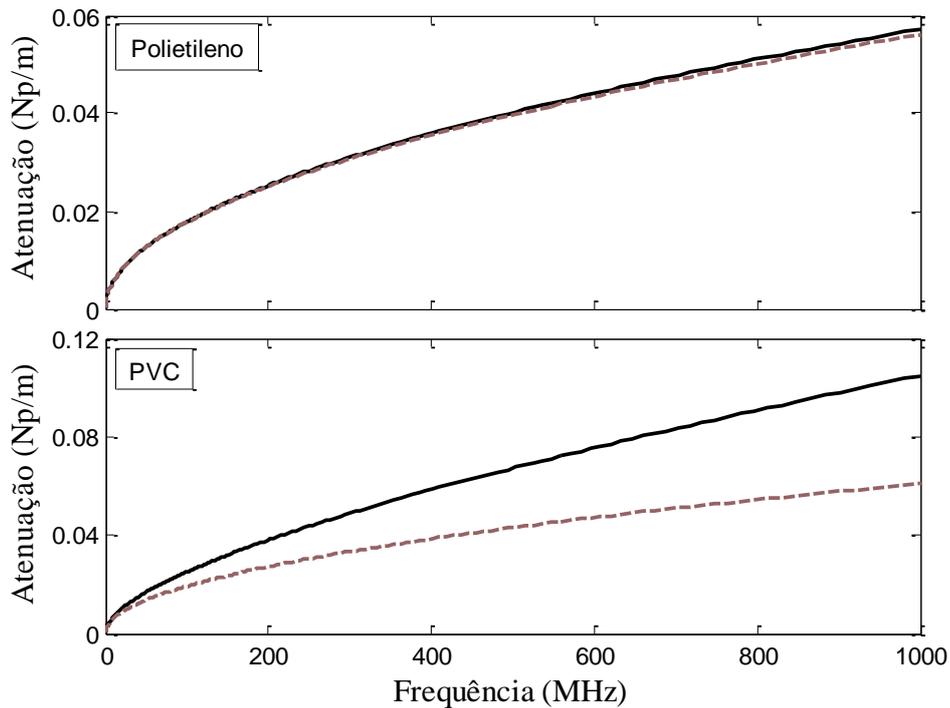


Figura 4.12 – Atenuação de um par-trançado com condutores típicos e revestimento dielétrico de polietileno ou PVC: — Com perdas dielétricas; - - Sem perdas dielétricas.

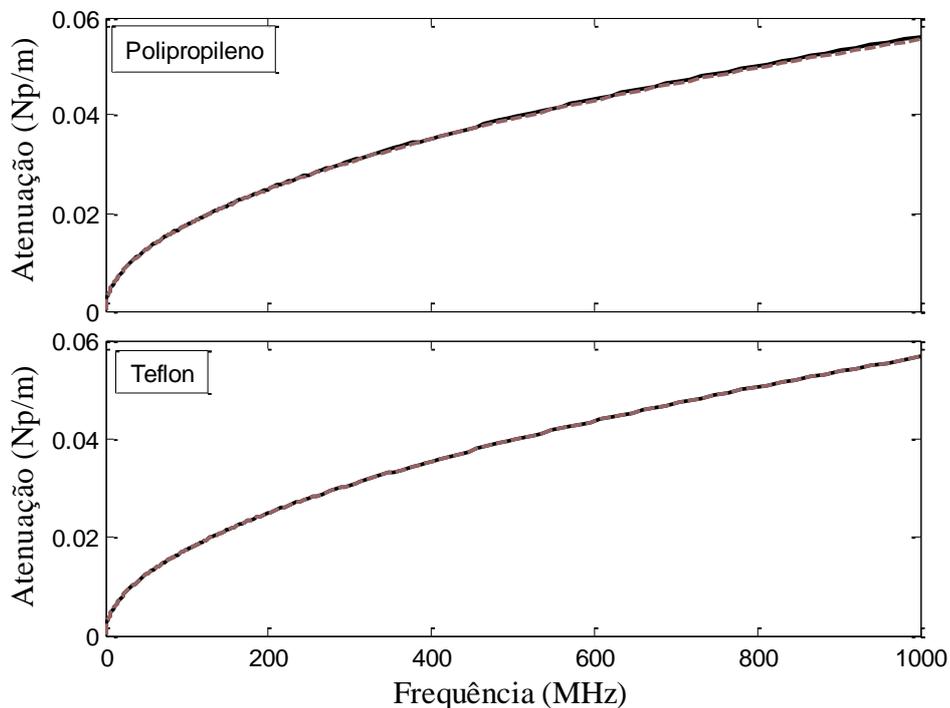


Figura 4.13 – Atenuação de um par-trançado com condutores típicos e revestimento dielétrico de polipropileno ou teflon: — Com perdas dielétricas; - - Sem perdas dielétricas.

Note nessas figuras que com exceção do PVC, as perdas dielétricas relativas aos outros revestimentos dielétricos podem ser desprezadas. Para o Polietileno, polipropileno e teflon, o erro na curva de atenuação do par-trançado, cometido ao se desconsiderar perdas dielétricas, é

de no máximo 2 % na faixa de frequências de 0 a 1 GHz. Já para o PVC esse mesmo erro é em torno de 42 %.

Portanto, para polímeros de perdas moderadas ( $0,01 < \tan \delta < 0,1$ ) o modelo de Havrila-Negami é o mais indicado para representar as perdas e a dispersão dielétrica no par-trançado. Caso contrário, em que o polímero é de baixas perdas ( $\tan \delta < 0,01$ ), estas perdas podem ser desprezadas sem acarretar em erros apreciáveis.

### 4.3 O Efeito do Trançado

Na Seção 3.4 foi mostrado que o trançado ocasiona uma diferença entre o comprimento real  $l_{real}$  e o longitudinal  $l$  de um par-trançado, afetando os seus parâmetros distribuídos como um todo. Essa diferença de comprimento pode ser contabilizada nos modelos de par-trançado por um fator de correção  $k_l$ , definido em (3.36). Além disso, também foi comentado que o trançado ocasiona modificações nas configurações de campo elétrico e magnético do par-trançado em relação às configurações de campo de pares retilíneos correspondentes, e que isso resulta em acréscimos de indutância  $\Delta L_x$  e de capacitância  $\Delta C_x$ . Nesta seção o objetivo é investigar com base em medições de parâmetros secundários de pares-trançados com diferentes taxas de trançado se os acréscimos  $\Delta L_x$  e  $\Delta C_x$  são suficientemente significativos para serem considerados nos modelos de par-trançado, e caso necessário, desenvolver modelos para eles.

Para simplificar a análise considere como base as seguintes aproximações das equações (3.37) e (3.38):

$$\gamma = \alpha + j\beta = k_l \frac{R_{\parallel}}{2} \sqrt{\frac{C_{\parallel} + \Delta C_x}{L_{\parallel} + \Delta L_x}} + j\omega k_l \sqrt{(L_{\parallel} + \Delta L_x)(C_{\parallel} + \Delta C_x)} \quad (4.11)$$

e

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L_{\parallel} + \Delta L_x}{C_{\parallel} + \Delta C_x}}, \quad (4.12)$$

válidas para as altas frequências ( $R \ll \omega L$ ) e para pares-trançados com baixas perdas dielétricas. Sendo  $R_{\parallel}$ ,  $L_{\parallel}$  e  $C_{\parallel}$  a resistência, indutância e capacitância por unidade de comprimento do par caso ele não fosse trançado, respectivamente. Note que essas aproximações, assim como (3.37) e (3.38), definem os parâmetros secundários de um par-

trançado explicitando o efeito do trançado. Para simplificar ainda mais considere também as definições dos fatores de correção

$$k_L = \sqrt{1 + \frac{\Delta L_{\times}}{L_{\parallel}}} \quad (4.13)$$

e

$$k_C = \sqrt{1 + \frac{\Delta C_{\times}}{C_{\parallel}}}, \quad (4.14)$$

relacionados respectivamente ao efeito do trançado na indutância e na capacitância devido a alterações nas configurações de campo. Note em (4.13) e (4.14) que os fatores  $k_L$  e  $k_C$  foram convenientemente definidos de modo que estes sejam unitários caso o efeito do trançado não ocasione nos acréscimos de indutância  $\Delta L_{\times}$  e de capacitância  $\Delta C_{\times}$ , respectivamente. Expressando (4.11) e (4.12) em função de  $k_l$ ,  $k_L$  e  $k_C$  obtêm-se

$$\alpha = k_l \frac{k_C}{k_L} \cdot \alpha_{\parallel}, \quad (4.15)$$

$$\beta = k_l k_L k_C \cdot \beta_{\parallel} \quad (4.16)$$

e

$$Z_0 = \frac{k_L}{k_C} \cdot Z_{0\parallel}, \quad (4.17)$$

onde  $\alpha_{\parallel}$ ,  $\beta_{\parallel}$  e  $Z_{0\parallel}$  correspondem aos parâmetros secundários do par caso ele não fosse trançado. Note que nas equações (4.15), (4.16) e (4.17) separa-se o efeito do trançado de forma simples por três fatores multiplicativos que podem ser analisados de forma independente um dos outros. Caso a estimação de qualquer um desses fatores seja aproximadamente unitária, o seu efeito correspondente pode ser considerado desprezível, portanto não necessita ser modelado. Por exemplo, se  $k_C \cong 1$  significa que o trançado dos pares não acarreta em modificações significativas nas configurações de campo elétrico em relação às configurações de campo elétrico de pares retilíneos correspondentes.

Embora as equações (4.15), (4.16) e (4.17) possam ser usadas para estimar os fatores de correção  $k_l$ ,  $k_L$  e  $k_C$  de um par-trançado, essas estimações dependeriam de medições de  $\alpha_{\parallel}$ ,  $\beta_{\parallel}$  e  $Z_{0\parallel}$  que é de difícil obtenção. Assim sendo, considere dois pares-trançados  $m$  e  $n$  que diferem apenas em suas taxas de trançado. Aplicando as equações (4.15), (4.16) e (4.17) nesses dois pares-trançados e dividindo as equações correspondentes de um pelas do outro, obtêm-se relações independentes de  $\alpha_{\parallel}$ ,  $\beta_{\parallel}$  e  $Z_{0\parallel}$ , ou seja,

$$\frac{k_{lm}}{k_{ln}} \cdot \frac{k_{Ln}}{k_{Lm}} \cdot \frac{k_{Cm}}{k_{Cn}} = \frac{\alpha_m}{\alpha_n}, \quad (4.18)$$

$$\frac{k_{lm}}{k_{ln}} \cdot \frac{k_{Lm}}{k_{Ln}} \cdot \frac{k_{Cm}}{k_{Cn}} = \frac{\beta_m}{\beta_n} \quad (4.19)$$

e

$$\frac{k_{Lm}}{k_{Ln}} \cdot \frac{k_{Cn}}{k_{Cm}} = \frac{Z_{0m}}{Z_{0n}}. \quad (4.20)$$

As equações de (4.18), (4.19) e (4.20) correspondem a um sistema de três equações e três incógnitas cuja solução é

$$\frac{k_{lm}}{k_{ln}} = \frac{Z_{0m}}{Z_{0n}} \cdot \frac{\alpha_m}{\alpha_n}, \quad (4.21)$$

$$\frac{k_{Lm}}{k_{Ln}} = \sqrt{\frac{\alpha_n}{\alpha_m} \cdot \frac{\beta_m}{\beta_n}} \quad (4.22)$$

e

$$\frac{k_{Cm}}{k_{Cn}} = \frac{Z_{0n}}{Z_{0m}} \cdot \sqrt{\frac{\alpha_n}{\alpha_m} \cdot \frac{\beta_m}{\beta_n}}. \quad (4.23)$$

Através das equações (4.21), (4.22) e (4.23) pode-se aferir as relações  $k_{lm}/k_{ln}$ ,  $k_{Lm}/k_{Ln}$  e  $k_{Cm}/k_{Cn}$  em função apenas de medições dos parâmetros secundários dos dois pares-trançados  $m$  e  $n$ . Caso essas medições apresentem diferenças significativas e mesmo assim a estimação de  $k_{Lm}/k_{Ln}$  e/ou  $k_{Cm}/k_{Cn}$  resulte em valores próximos da unidade, isso indicaria respectivamente que  $\Delta L_{\times}$  e/ou  $\Delta C_{\times}$  são insignificantes.

Na Figura 4.14 encontram-se medições<sup>1</sup> dos parâmetros secundários de dois pares-trançados de um cabo de rede ethernet categoria 5. Nesse tipo de cabo todos os pares-trançados possuem as mesmas características construtivas, com exceção de suas taxas de trançado que são ligeiramente diferentes para minimizar a diafonia entre eles. Note que isso ocasiona ligeiras diferenças de nível entre os parâmetros secundários desses pares-trançados. Já na Figura 4.15 encontram-se as estimações das razões  $k_{lm}/k_{ln}$ ,  $k_{Lm}/k_{Ln}$  e  $k_{Cm}/k_{Cn}$  obtidas através das equações (4.21), (4.22) e (4.23) e das medições na Figura 4.14. Note que de um ponto de vista prático apenas a razão  $k_{lm}/k_{ln}$  difere da unidade, tendendo a um valor próximo de 1,04. Portanto, com base nessas medições, o trançado não ocasiona modificações significativas nas configurações de campo elétrico e magnético do par-trançado em relação às configurações de campo de pares retilíneos correspondentes, não sendo necessário modelar os

<sup>1</sup> Essas medições foram cedidas pelo centro de pesquisa Ericsson Lab em Kista, na Suécia.

acréscimos de indutância  $\Delta L_x$  e de capacitância  $\Delta C_x$ . O único efeito apreciável que o trançado ocasiona é relativo ao aumento do comprimento efetivo do par-trançado, já modelado pela equação (3.36), e que afeta apenas a sua constante de propagação e não a impedância característica. No entanto, para uma conclusão mais satisfatória é necessário realizar medições em pares com maiores taxas de trançado e verificar se os resultados continuam os mesmos.

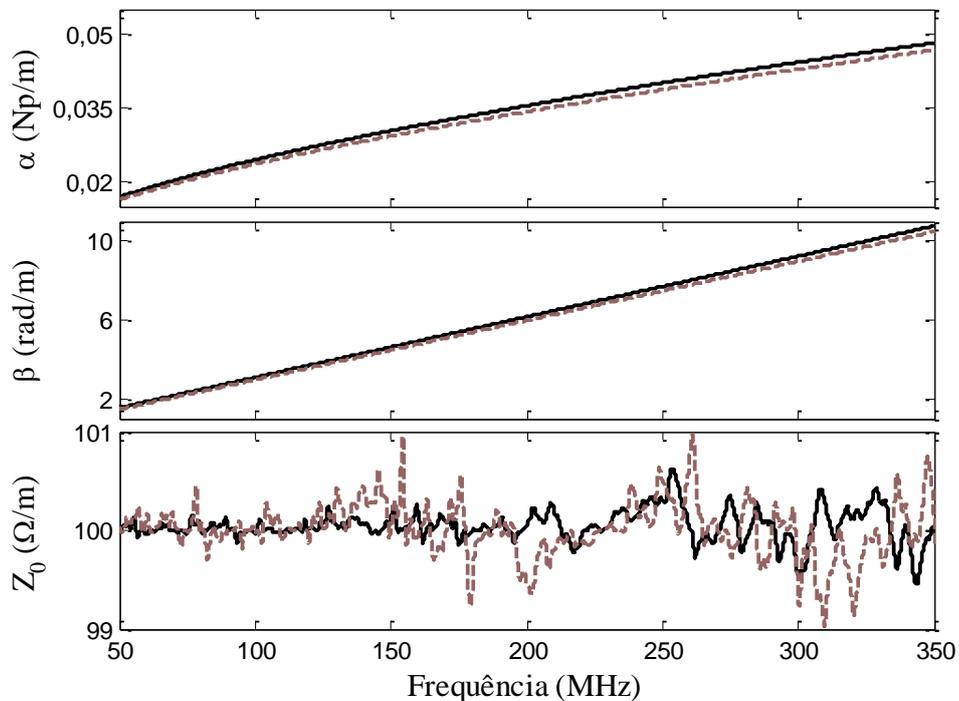


Figura 4.14 – Medições dos parâmetros secundários de dois pares com diferentes taxas de trançado: — par-trançado  $m$ ; - - par-trançado  $n$ .

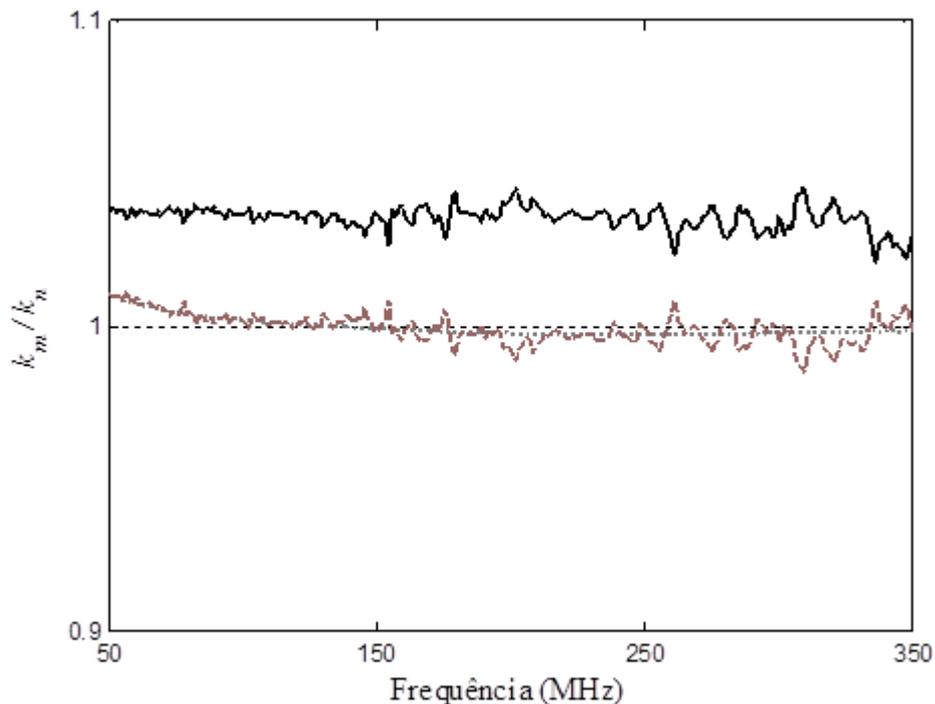


Figura 4.15 – Estimações das razões dos fatores de correção referentes ao efeito do trançado, para dois pares  $m$  e  $n$  com diferentes taxas de trançado: —  $k_{tm}/k_{tn}$ ; .....  $k_{Lm}/k_{Ln}$ ; - -  $k_{cM}/k_{cN}$ .

#### 4.4 O Modelo Proposto

Nesta seção encontra-se uma compilação dos resultados obtidos nas seções anteriores na forma de um modelo geral para os parâmetros secundários de um par-traçado. Segundo este modelo, a constante de propagação  $\gamma$  e a impedância característica  $Z_0$  são obtidas por

$$\gamma(\omega) = \sqrt{Z_{s\parallel} Y_{p\parallel} \cdot (1 + (\pi v r d)^2)} \quad (4.24)$$

e

$$Z_0(\omega) = \sqrt{\frac{Z_{s\parallel}}{Y_{p\parallel}}}. \quad (4.25)$$

Onde  $Z_{s\parallel}$  e  $Y_{p\parallel}$  são respectivamente a impedância série e a admitância paralelo de um par não traçado correspondente, obtidas por

$$Z_{s\parallel} = \sqrt{-\varpi R_0} \frac{J_0(\sqrt{-\varpi/R_0})}{J_1(\sqrt{-\varpi/R_0})} + \varpi \left( \ln(2r) + \frac{\eta}{1 + 4r^2 \frac{J_0(\sqrt{-\varpi/R_0})}{J_2(\sqrt{-\varpi/R_0})}} \right) \quad (4.26)$$

e

$$Y_{p\parallel} = \frac{j\omega\pi\varepsilon_0}{\operatorname{acosh}(r)} \cdot \left( \varepsilon_{r\infty} + \frac{\varepsilon_{r_s} - \varepsilon_{r\infty}}{(1 + (j\omega\tau)^{1-a})^b} \right)^{1 - \frac{1}{9(r^{1/10} - \frac{19}{24})}}. \quad (4.27)$$

Sendo

$$\eta = \eta_\infty - \frac{\eta_\infty - \eta_0}{\sqrt{1 + \frac{1}{9} \left(1 - \frac{1}{r^2}\right) \cdot \frac{\varpi}{R_0}}}, \quad (4.28)$$

com

$$\eta_\infty = (4r^2 - 1)(\ln(2r) - \operatorname{acosh}(r)) \quad (4.29)$$

e

$$\eta_0 = 1 + \frac{1}{24r^2 - 2}; \quad (4.30)$$

e sendo

$$\varpi = j\omega \frac{\mu_0}{\pi}, \quad (4.31)$$

$$R_0 = \frac{4}{\pi\sigma d^2} \quad (4.32)$$

e

$$r = 1 + 2\frac{s}{d}. \quad (4.33)$$

## 4.5 Conclusões

Neste capítulo foi desenvolvido um modelo que determina as propriedades de transmissão de um par-trançado em função de suas características construtivas, válido para uma ampla faixa de frequência, que vai desde o regime de corrente contínua até o início da faixa de micro-ondas. Nesse modelo considera-se, de forma simples e realística, o efeito pelicular e de proximidade, a permissividade efetiva do meio dielétrico que é heterogêneo, as perdas dielétricas e o trançado dos pares. No entanto, não são consideradas as variações nas características construtivas do par-trançado ao longo de seu comprimento, tratando-o essencialmente como uma linha de transmissão uniforme. Sendo essas variações tema dos próximos capítulos.

## CAPÍTULO 5

# EQUIVALENTE UNIFORME DE UMA LINHA NÃO UNIFORME

Na prática não existem linhas de transmissão uniforme. Por melhores que sejam as técnicas de fabricação, os materiais envolvidos na composição da linha não são perfeitamente homogêneos, os condutores não são perfeitamente lisos, existem erros de fabricação, manipulação inadequada, etc. Em aplicações de baixas frequências essas imperfeições, ou não uniformidades, são imperceptíveis aos sinais de propagação e uma análise baseada somente na teoria de linhas de transmissão uniforme é suficiente. No entanto, em altas frequências essas imperfeições tornam-se perceptíveis e ocasionam pequenas e sucessivas reflexões cujos efeitos cumulativos geram distorções de frequência. Por exemplo, na Figura 5.1 encontram-se medições de impedância característica dos quatro pares-trançados de um cabo de rede ethernet categoria 5. Note que embora os quatro pares-trançados possuam as mesmas características construtivas<sup>1</sup>, nas medições evidencia-se quatro comportamentos diferentes entre si. São quatro variações aparentemente randômicas em torno de um comportamento médio em comum. Note também que a componente randômica tende a aumentar com a frequência. Um modelo de par-trançado baseado apenas na teoria de linhas de transmissão uniforme conseguiria apenas reproduzir o comportamento médio dessas medições. Esse é o caso dos modelos apresentados nos Capítulos 3 e 4. Neste capítulo o objetivo é desenvolver o formalismo matemático que permite, entre outras coisas, criar modelos de linha de transmissão que reproduzam os comportamentos randômicos observado nas medições, cujas origens são as não uniformidades da linha.

---

<sup>1</sup> Na verdade os quatro pares-trançados apresentam taxas de trançado ligeiramente diferentes, porém, como mostrado na Seção 4.3, essas diferenças não afetam as suas impedâncias característica.

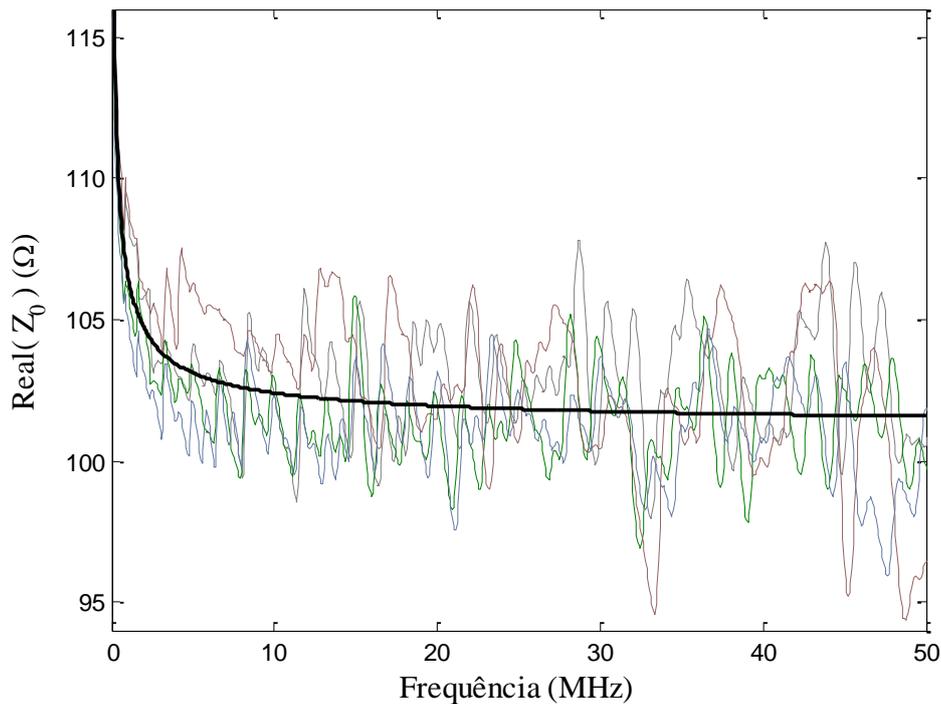


Figura 5.1 – Medições da parte resistiva da impedância característica dos quatro pares-trançados de um cabo de rede ethernet categoria 5: — Medições; — Comportamento médio.

Basicamente o objetivo de um modelo de linha de transmissão é reproduzir o comportamento com a frequência dos parâmetros secundários da linha a partir de suas características construtivas. O problema é que o próprio conceito de parâmetros secundários está atrelado às soluções das equações de onda relativas às linhas de transmissão uniforme (veja a Subseção 2.2.1). Assim sendo, para se criar modelos que levem em consideração os efeitos dessas não uniformidades, antes é necessária uma generalização do conceito de parâmetros secundários. Em outras palavras, é necessário definir parâmetros secundários efetivos que caracterizem completamente uma linha não uniforme, como se ela fosse equivalente a uma linha uniforme. Mostrar-se-á que isso somente é possível para alguns casos particulares de linhas não uniformes<sup>1</sup>, e que essa questão está intimamente relacionada à propriedade de simetria (veja a Subseção 2.3.2). No caso geral, a definição de parâmetros secundários efetivos é insuficiente para caracterizar completamente uma linha de transmissão não uniforme, sendo necessária para isso a definição de um terceiro parâmetro efetivo. Finalmente, com base em teoria de perturbações [52], serão derivadas aproximações de primeira ordem que determinam esses três parâmetros efetivos em função do padrão de não uniformidade na linha de transmissão. Essas aproximações serão utilizadas no Capítulo 6 para criar um modelo de linha de transmissão que reproduz o comportamento randômico observado nas medições da Figura 5.1.

<sup>1</sup> Felizmente isso é possível para o caso correspondente à Figura 5.1.

## 5.1 Parâmetros Efetivos

Nesta seção mostra-se que qualquer linha de transmissão não uniforme pode ser completamente caracterizada por três parâmetros efetivos, definidos aqui por generalizações de propriedades relacionadas a linhas de transmissão uniforme.

Considere inicialmente a representação matricial por parâmetros  $ABCD$  de uma linha de transmissão qualquer de comprimento  $l$ , em regime fasorial:

$$\begin{bmatrix} V(0) \\ I(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V(l) \\ I(l) \end{bmatrix}, \quad (5.1)$$

onde  $V(0)$  e  $V(l)$  são os fasores de voltagem e,  $I(0)$  e  $I(l)$  são os fasores de corrente nos terminais da linha. Para o caso particular em que a linha de transmissão é uniforme, a relação em (5.1) assume a forma de (2.58), reescrita abaixo:

$$\begin{bmatrix} V(0) \\ I(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh(\gamma l) & Z_0 \sinh(\gamma l) \\ \frac{\sinh(\gamma l)}{Z_0} & \cosh(\gamma l) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V(l) \\ I(l) \end{bmatrix}. \quad (5.2)$$

Ao analisar (5.1) isoladamente é sugestivo concluir que são necessários quatro parâmetros independentes para caracterizar uma linha de transmissão. No entanto, observe em (5.2) que no caso de a linha ser uniforme apenas dois parâmetros são independentes –  $\gamma l$  e  $Z_0$ . Isso é consequência direta das propriedades de reciprocidade e simetria, que implicam respectivamente nas relações de dependência (2.52) e (2.53), reescritas abaixo:

$$AD - BC = 1 \quad (5.3)$$

e

$$\frac{A}{D} = 1. \quad (5.4)$$

Além disso, é possível demonstrar que a relação matricial para linhas uniformes em (5.2) pode ser derivada de forma independente das equações do telegrafista, como uma consequência das propriedades de linearidade, reciprocidade e simetria – equações (5.1), (5.3) e (5.4), respectivamente.

No caso de linhas de transmissão não uniforme, embora sejam desconhecidas as soluções gerais das equações do telegrafista, uma relação matricial análoga a (5.2) também pode ser obtida como consequência das propriedades de linearidade e reciprocidade, que continuam válidas para esse tipo de linha (veja a Seção 2.3). Apenas a propriedade de simetria que não permanece obrigatoriamente válida. O fato de haver esta relação de dependência a menos, implica que em vez de dois são necessários três parâmetros independentes para

caracterizar uma linha de transmissão não uniforme. Dois desses parâmetros podem ser definidos pela generalização das propriedades em (2.33) e (2.34) de parâmetros secundários, ou seja,

$$\theta_{ef} = \operatorname{atanh} \left( \sqrt{\frac{Z_{in_{cc}}}{Z_{in_{ca}}}} \right) \quad (5.5)$$

e

$$Z_{0_{ef}} = \sqrt{Z_{in_{cc}} \cdot Z_{in_{ca}}}, \quad (5.6)$$

onde  $Z_{in_{cc}}$  e  $Z_{in_{ca}}$  são as impedâncias no terminal de entrada com o terminal de saída em curto-circuito ( $Z_l = 0$ ) e circuito aberto ( $Z_l = \infty$ ), respectivamente. Como a necessidade de um terceiro parâmetro é consequência da não obrigatoriedade da propriedade de simetria em (5.4), torna-se sugestivo definir um fator de simetria:

$$f_s = \sqrt{\frac{A}{D}}, \quad (5.7)$$

como sendo o terceiro parâmetro. Note que  $f_s$  quantifica o grau de simetria da linha, sendo unitário para linhas simétricas. A partir de (5.7) e (2.48), é possível demonstrar que  $f_s$  também pode ser definido como

$$f_s = \sqrt{\left( \frac{Z_{in_{ca}}}{Z_l} \right) \cdot \left( \frac{Z_{in_{cc}} - Z_{in_l}}{Z_{in_l} - Z_{in_{ca}}} \right)}, \quad (5.8)$$

onde  $Z_{in_l}$  é a impedância no terminal de entrada com o terminal de saída conectado a uma impedância de carga  $Z_l$  arbitrária porém diferente de curto-circuito e circuito aberto. Note que as equações (5.5), (5.6) e (5.8) definem os parâmetros efetivos que caracterizam uma linha de transmissão não uniforme em termos de impedâncias na entrada da linha submetida a cargas diferentes.

Finalmente, a partir de (5.1), (5.3), (5.5), (5.6) e (5.8), obtém-se a matriz de transmissão que relaciona os fasores de voltagem  $V$  e corrente  $I$  nos terminais de uma linha de transmissão não uniforme de comprimento  $l$ , ou seja,

$$\begin{bmatrix} V(0) \\ I(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_s \cosh(\theta_{ef}) & \frac{Z_{0_{ef}} \sinh(\theta_{ef})}{f_s} \\ \frac{f_s \sinh(\theta_{ef})}{Z_{0_{ef}}} & \frac{\cosh(\theta_{ef})}{f_s} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V(l) \\ I(l) \end{bmatrix}. \quad (5.9)$$

Note a similaridade entre as matrizes de transmissão em (5.2) e (5.9). A razão é que a última é

uma extensão da primeira, que leva em consideração a assimetria da linha. Isso se torna mais evidente na forma expandida

$$\begin{bmatrix} V(0) \\ I(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh(\theta_{ef}) & Z_{0_{ef}} \sinh(\theta_{ef}) \\ \frac{\sinh(\theta_{ef})}{Z_{0_{ef}}} & \cosh(\theta_{ef}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_s & 0 \\ 0 & \frac{1}{f_s} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V(l) \\ I(l) \end{bmatrix}, \quad (5.10)$$

onde as propriedades relativas a assimetria da linha são isoladas em sua própria matriz. Note também que somente as linhas de transmissão não uniforme que sejam simétricas podem ser representadas por uma equivalente uniforme, pois neste caso (5.9) ou (5.10) torna-se equivalente a (5.2).

## 5.2 Relação entre Parâmetros Efetivos e Longitudinais

Os parâmetros efetivos  $\theta_{ef}$ ,  $Z_{0_{ef}}$  e  $f_s$  são uma forma conveniente de representar linhas de transmissão não uniforme, além de serem generalizações de conceitos já conhecidos para linhas uniformes, podem ser estimados através de simples medições nos terminais da linha, veja as suas definições em (5.5), (5.6) e (5.8). O problema é que essas definições são genéricas, válidas para qualquer circuito que seja linear e recíproco, portanto não possibilitam extrair informações a respeito do funcionamento interno do sistema. Apenas com essas definições, sem uma conexão com as equações do telegrafista, é impossível obter os parâmetros efetivos a partir do padrão de não uniformidade na linha de transmissão. Sendo esse o objetivo desta seção.

Na Subseção 2.2.2 mostrou-se que para cada posição  $x$  de uma linha de transmissão não uniforme estão associados  $\gamma(x)$  e  $Z_0(x)$ , definidos por (2.22) e (2.23). Esses parâmetros longitudinais, embora destituídos de significados físicos e com utilidade apenas operacional, determinam quantitativamente o padrão de não uniformidade na linha. Assim sendo, o objetivo dessa seção é especificamente relacionar os parâmetros efetivos –  $\theta_{ef}$ ,  $Z_{0_{ef}}$  e  $f_s$  – com os longitudinais –  $\gamma(x)$  e  $Z_0(x)$ .

Note que os parâmetros efetivos em (5.5), (5.6) e (5.8) são definidos em termos de impedâncias no terminal de entrada da linha, e lembre-se que a equação que rege o comportamento da impedância em qualquer posição de uma linha de transmissão não uniforme é a equação de Riccati em (2.28), reescrita abaixo:

$$\frac{dZ(x)}{dx} = -\gamma(x)Z_0(x) + \frac{\gamma(x)}{Z_0(x)}Z(x)^2, \quad Z(l) = Z_l. \quad (5.11)$$

Portanto, esta é a chave para relacionar os parâmetros efetivos com os longitudinais. Basta substituir a solução da equação de Riccati em (5.11) para  $x = 0$  em (5.5), (5.6) e (5.8). Infelizmente não é conhecida a solução geral de (5.11), mas uma solução aproximada pode ser obtida por métodos de perturbações [52], considerando que as não uniformidades na linha são de pequena amplitude. Na Subseção 5.2.1 será formalizado o conceito de não uniformidades de pequena amplitude. Na Subseção 5.2.2 esse conceito será usado para desenvolver aproximações de primeira ordem que finalmente relacionam os parâmetros efetivos com os longitudinais.

### 5.2.1 Não Uniformidades de Pequena Amplitude

De um ponto de vista elétrico, este conceito significa que os parâmetros longitudinais  $\gamma(x)$  e  $Z_0(x)$  possuem variações de pequena amplitude quando comparados aos seus respectivos comportamentos médios.

Começemos pela definição dos comportamentos médios de  $\gamma(x)$  e  $Z_0(x)$  para uma linha de transmissão não uniforme de comprimento  $l$ , ou seja,

$$\bar{\gamma} = \frac{1}{l} \int_0^l \gamma(x) dx \quad (5.12)$$

e

$$\bar{Z}_0 = \frac{1}{l} \int_0^l Z_0(x) dx. \quad (5.13)$$

Agora considere uma linha de transmissão uniforme de referência, com o mesmo comprimento  $l$ , e cuja constante de propagação e impedância característica são os comportamentos médios  $\bar{\gamma}$  e  $\bar{Z}_0$ , respectivamente. Em relação a essa linha uniforme de referência, definem-se as variações longitudinais

$$\Delta\gamma(x) = \gamma(x) - \bar{\gamma} \quad (5.14)$$

e

$$\Delta Z_0(x) = Z_0(x) - \bar{Z}_0. \quad (5.15)$$

Uma linha de transmissão com não uniformidades de pequena amplitude é definida como aquela na qual as seguintes condições são satisfeitas:

$$\Delta\gamma(x) \ll \bar{\gamma} \quad (5.16)$$

e

$$\Delta Z_0(x) \ll \bar{Z}_0. \quad (5.17)$$

### 5.2.2 Aproximações de Primeira Ordem

As condições em (5.16) e (5.17) permitem que tanto as definições dos parâmetros efetivos em (5.5), (5.6) e (5.8) como a equação diferencial de Riccati em (5.11) possam ser linearizadas. Com isso os parâmetros efetivos e os longitudinais podem ser relacionados de forma simples, que é o objetivo dessa subseção.

É intuitivo que uma linha de transmissão com não uniformidades de pequena amplitude apresente um comportamento elétrico próximo ao comportamento elétrico de sua correspondente linha uniforme de referência, definida na Subseção 5.2.1. Assim sendo, os valores de seus parâmetros efetivos variam em pequenas quantidades em torno dos valores correspondentes da linha uniforme de referência, ou seja,

$$\theta_{ef} = \bar{\gamma}l + \Delta\theta_{ef}, \quad (5.18)$$

$$Z_{0ef} = \bar{Z}_0 + \Delta Z_{0ef} \quad (5.19)$$

e

$$f_s = 1 + \Delta f_s. \quad (5.20)$$

Para uma aproximação de primeira ordem, as variações efetivas  $\Delta\theta_{ef}$ ,  $\Delta Z_{0ef}$  e  $\Delta f_s$  podem ser representadas pelos diferenciais totais de (5.5), (5.6) e (5.8), respectivamente, tendo a seguinte forma:

$$\begin{aligned} \Delta \aleph_{ef} = & \frac{\partial \aleph_{ef}(Z_{in_{cc}}, Z_{in_{ca}}, Z_{in_l})}{\partial Z_{in_{cc}}} \Big|_{p_0} \cdot \Delta Z_{in_{cc}} + \frac{\partial \aleph_{ef}(Z_{in_{cc}}, Z_{in_{ca}}, Z_{in_l})}{\partial Z_{in_{ca}}} \Big|_{p_0} \cdot \Delta Z_{in_{ca}} \\ & + \frac{\partial \aleph_{ef}(Z_{in_{cc}}, Z_{in_{ca}}, Z_{in_l})}{\partial Z_{in_l}} \Big|_{p_0} \cdot \Delta Z_{in_l}, \end{aligned} \quad (5.21)$$

onde  $\aleph_{ef}$  representa qualquer um dos parâmetros  $\theta_{ef}$ ,  $Z_{0ef}$  ou  $f_s$ . Para que as aproximações sejam válidas, os diferenciais totais devem ser obtidos em torno do ponto

$$p_0 = \left( \bar{Z}_0 \tanh(\bar{\gamma}l), \bar{Z}_0 \coth(\bar{\gamma}l), \bar{Z}_0 \frac{Z_l + \bar{Z}_0 \tanh(\bar{\gamma}l)}{\bar{Z}_0 + Z_l \tanh(\bar{\gamma}l)} \right). \quad (5.22)$$

As três coordenadas de  $p_0$  correspondem às impedâncias  $\bar{Z}_{in_{cc}}$ ,  $\bar{Z}_{in_{ca}}$  e  $\bar{Z}_{in_l}$  na entrada da linha não uniforme de referência, obtidas respectivamente por (2.31), (2.32) e (2.30). Como  $Z_l$  em (5.22) pode ser uma carga arbitrária, é conveniente assumir  $Z_l = \bar{Z}_0$  pois a terceira coordenada de  $p_0$  simplifica para  $\bar{Z}_0$ . De agora em diante quando  $Z_l = \bar{Z}_0$  será usada a notação  $Z_{in_0}$  em vez de  $Z_{in_l}$ . Aplicando (5.21) em (5.18), (5.19) e (5.20) obtêm-se as seguintes aproximações lineares para as equações (5.5), (5.6) e (5.8), que definem os parâmetros efetivos:

$$\theta_{ef} = \bar{\gamma}l + \frac{1}{2\bar{Z}_0} (\cosh^2(\bar{\gamma}l) \cdot \Delta Z_{in_{cc}} - \sinh^2(\bar{\gamma}l) \cdot \Delta Z_{in_{ca}}), \quad (5.23)$$

$$Z_{0_{ef}} = \bar{Z}_0 + \frac{1}{2} (\coth(\bar{\gamma}l) \cdot \Delta Z_{in_{cc}} + \tanh(\bar{\gamma}l) \cdot \Delta Z_{in_{ca}}) \quad (5.24)$$

e

$$f_s = 1 + \frac{1}{2\bar{Z}_0} \left( e^{2\bar{\gamma}l} \cdot \Delta Z_{in_0} - \frac{1}{1 - \tanh(\bar{\gamma}l)} \cdot \Delta Z_{in_{cc}} - \frac{\tanh^2(\bar{\gamma}l)}{1 - \tanh(\bar{\gamma}l)} \cdot \Delta Z_{in_{ca}} \right), \quad (5.25)$$

onde  $\Delta Z_{in_{cc}} = (Z_{in_{cc}} - \bar{Z}_{in_{cc}})$ ,  $\Delta Z_{in_{ca}} = (Z_{in_{ca}} - \bar{Z}_{in_{ca}})$  e  $\Delta Z_{in_0} = (Z_{in_0} - \bar{Z}_{in_0})$  são as variações de impedância na entrada da linha para uma carga em curto, aberto e  $\bar{Z}_0$ , respectivamente, relativas a linha uniforme de referência.

Embora as equações (5.23), (5.24) e (5.25) simplifiquem as definições dos parâmetros efetivos, o ponto chave para relacioná-los com os longitudinais é resolver a equação de Riccati em (5.11). Para não uniformidades de pequena amplitude, é conveniente apresentar a solução de (5.11) na forma

$$Z(x) = \bar{Z}(x) + \Delta Z(x), \quad (5.26)$$

sendo  $\bar{Z}(x)$  a solução de (5.11) para a linha uniforme de referência (veja a equação (2.29)), ou seja,

$$\bar{Z}(x) = \bar{Z}_0 \frac{Z_l + \bar{Z}_0 \tanh(\bar{\gamma} \cdot (l - x))}{\bar{Z}_0 + Z_l \tanh(\bar{\gamma} \cdot (l - x))}. \quad (5.27)$$

Para uma aproximação de primeira ordem da variação de impedância  $\Delta Z(x)$ , considere o diferencial total em ambos os membros de (5.11) em torno do ponto  $p_0 = (\bar{Z}(x), \bar{Z}_0, \bar{\gamma})$ , ou seja,

$$\frac{d\Delta Z(x)}{dx} = \frac{\partial g}{\partial \bar{Z}}|_{p_0} \cdot \Delta Z(x) + \frac{\partial g}{\partial \bar{Z}_0}|_{p_0} \cdot \Delta Z_0(x) + \frac{\partial g}{\partial \bar{\gamma}}|_{p_0} \cdot \Delta \gamma(x), \quad (5.28)$$

com  $g(Z, Z_0, \gamma) = -\gamma(x)Z_0(x) + \frac{\gamma(x)}{Z_0(x)}Z(x)^2$ . Isso resulta na equação diferencial linear

$$\frac{d\Delta Z(x)}{dx} - 2\bar{Z}_N(x, Z_l)\bar{\gamma} = (1 + \bar{Z}_N(x, Z_l)^2)\bar{\gamma} \cdot \Delta Z_0(x) + (1 - \bar{Z}_N(x, Z_l)^2)\bar{Z}_0 \cdot \Delta \gamma(x), \quad \Delta Z_l = 0; \quad (5.29)$$

onde

$$\bar{Z}_N(x, Z_l) = \frac{\bar{Z}(x)}{\bar{Z}_0} = \frac{Z_l + \bar{Z}_0 \tanh(\bar{\gamma} \cdot (l - x))}{\bar{Z}_0 + Z_l \tanh(\bar{\gamma} \cdot (l - x))} \quad (5.30)$$

é a impedância normalizada da linha uniforme de referência. A solução de (5.29) é

$$\Delta Z(x) = \left( \bar{\gamma} \int_x^l \Delta Z_0(x') \frac{1 + \bar{Z}_N(x', Z_l)^2}{e^{2\bar{\gamma} \int_0^{x'} \bar{Z}_N(x'', Z_l) dx''}} dx' + \bar{Z}_0 \int_x^l \Delta \gamma(x') \frac{1 - \bar{Z}_N(x', Z_l)^2}{e^{2\bar{\gamma} \int_0^{x'} \bar{Z}_N(x'', Z_l) dx''}} dx' \right) e^{2\bar{\gamma} \int_0^x \bar{Z}_N(x', Z_l) dx'} , \quad (5.31)$$

onde  $x'$  e  $x''$  são variáveis auxiliares. Então, uma solução aproximada da equação de Riccati em (5.11) é finalmente obtida substituindo (5.31) e (5.27) em (5.26).

Quanto aos parâmetros efetivos em (5.23), (5.24) e (5.25), deve-se notar que as variações de impedância de interesse são aquelas observadas na entrada da linha, ou seja,  $\Delta Z_{in} = \Delta Z(0)$  em (5.31). Isso resulta em

$$\Delta Z_{in} = \bar{\gamma} \int_0^l \Delta Z_0(x) \frac{1 + \bar{Z}_N(x, Z_l)^2}{e^{2\bar{\gamma} \int_0^x \bar{Z}_N(x', Z_l) dx'}} dx + \bar{Z}_0 \int_0^l \Delta \gamma(x) \frac{1 - \bar{Z}_N(x, Z_l)^2}{e^{2\bar{\gamma} \int_0^x \bar{Z}_N(x', Z_l) dx'}} dx . \quad (5.32)$$

Mas especificamente, as variações de impedância de interesse são  $\Delta Z_{in_{cc}}$ ,  $\Delta Z_{in_{ca}}$  e  $\Delta Z_{in_0}$ , ou seja, com a carga  $Z_l$  em curto, aberto e  $\bar{Z}_0$ , respectivamente. Como  $\bar{Z}_N(x, Z_l)$  em (5.30) para essas cargas é igual a  $\tanh(\bar{\gamma} \cdot (l - x))$ ,  $\coth(\bar{\gamma} \cdot (l - x))$  e 1, respectivamente, então, substituindo isso em (5.32) obtêm-se

$$\Delta Z_{in_{cc}} = \frac{\bar{\gamma} \int_0^l \Delta Z_0(x) \cosh(2\bar{\gamma} \cdot (l - x)) dx + \bar{Z}_0 \int_0^l \Delta \gamma(x) dx}{\cosh^2(\bar{\gamma}l)} , \quad (5.33)$$

$$\Delta Z_{in_{ca}} = \frac{\bar{\gamma} \int_0^l \Delta Z_0(x) \cosh(2\bar{\gamma} \cdot (l - x)) dx - \bar{Z}_0 \int_0^l \Delta \gamma(x) dx}{\sinh^2(\bar{\gamma}l)} \quad (5.34)$$

e

$$\Delta Z_{in_0} = 2\bar{\gamma} \int_0^l \Delta Z_0(x) e^{-2\bar{\gamma}x} dx . \quad (5.35)$$

Note que  $\int_0^l \Delta \gamma(x) dx = 0$ , sendo isso uma consequência da própria definição de  $\Delta \gamma(x)$  em (5.14), cuja média é nula. O que simplifica (5.33) e (5.34) para

$$\Delta Z_{in_{cc}} = \bar{\gamma} \operatorname{sech}^2(\bar{\gamma}l) \int_0^l \Delta Z_0(x) \cosh(2\bar{\gamma} \cdot (l - x)) dx \quad (5.36)$$

e

$$\Delta Z_{in_{ca}} = \bar{\gamma} \operatorname{csh}^2(\bar{\gamma}l) \int_0^l \Delta Z_0(x) \cosh(2\bar{\gamma} \cdot (l - x)) dx . \quad (5.37)$$

Finalmente ao substituir (5.35), (5.36) e (5.37) nas aproximações lineares em (5.23), (5.24) e (5.25), que definem dos parâmetros efetivos, e do resultado substituir (5.15), que define  $\Delta Z_0(x)$ , obtêm-se

$$\theta_{ef} = \bar{\gamma}l \quad (5.38)$$

$$Z_{0_{ef}} = \frac{2\bar{\gamma}}{\sinh(2\bar{\gamma}l)} \int_0^l Z_0(x) \cosh(2\bar{\gamma} \cdot (l-x)) dx \quad (5.39)$$

e

$$f_s = 1 + \frac{\bar{\gamma}}{\bar{Z}_0(1 + e^{-2\bar{\gamma}l})} \int_0^l Z_0(x) (e^{-2\bar{\gamma}x} - e^{-2\bar{\gamma} \cdot (l-x)}) dx. \quad (5.40)$$

As equações (5.38), (5.39) e (5.40) constituem aproximações de primeira ordem que relaciona os parâmetros efetivos –  $\theta_{ef}$ ,  $Z_{0_{ef}}$  e  $f_s$  – com os longitudinais –  $\gamma(x)$  e  $Z_0(x)$  – para uma linha de transmissão com não uniformidades de pequena amplitude.

Note em (5.38), (5.39) e (5.40) que, para aproximações de primeira ordem, as propriedades da linha não são afetadas diretamente pela constante de propagação longitudinal  $\gamma(x)$ , mas apenas pelo seu comportamento médio  $\bar{\gamma}$ . Além disso, em uma linha de transmissão com simetria topológica – ou seja,  $Z_0(x) = Z_0(l-x)$  –, o resultado da integral em (5.40) torna-se nulo, o que implica também em simetria elétrica – ou seja,  $f_s = 1$ . Este fato demonstra que a descrição de  $f_s$  em (5.40) é consistente com o conceito geral de simetria.

### 5.3 Outras Grandezas Elétricas

Uma vez conhecido os parâmetros efetivos de uma linha de transmissão não uniforme, pode-se derivar de (5.9) qualquer grandeza elétrica passível de medição em seus terminais. Por exemplo, a impedância de entrada  $Z_{in}$  o coeficiente de reflexão  $\Gamma_{in}$  e a função de transferência  $H_{in}$  podem ser expressos por

$$Z_{in} = \frac{V(0)}{I(0)} = Z_{0_{ef}} \frac{Z_l f_s^2 + Z_{0_{ef}} \tanh(\theta_{ef})}{Z_{0_{ef}} + Z_l f_s^2 \tanh(\theta_{ef})}, \quad (5.41)$$

$$\Gamma_{in} = \frac{Z_{in} - Z_g}{Z_{in} + Z_g} = 2 \frac{Z_l f_s^2 + Z_{0_{ef}} \tanh(\theta_{ef})}{Z_g + Z_l f_s^2 + \left( Z_{0_{ef}} + \frac{Z_g Z_l f_s^2}{Z_{0_{ef}}} \right) \tanh(\theta_{ef})} - 1 \quad (5.42)$$

e

$$H_{in} = \frac{V(l)}{V(0)} = \frac{Z_l f_s}{Z_l f_s^2 \cosh(\theta_{ef}) + Z_{0_{ef}} \sinh(\theta_{ef})}. \quad (5.43)$$

Lembre-se que  $Z_g$  e  $Z_l$  são as impedâncias da fonte e da carga, respectivamente. Note a similaridade das equações em (5.41), (5.42) e (5.43) com as equações correspondentes para linhas de transmissão uniforme em (2.30), (2.39) e (2.44), respectivamente.

No caso de a linha de transmissão possuir não uniformidades de pequena amplitude, é possível relacionar essas grandezas elétricas diretamente com os parâmetros longitudinais da linha. Por exemplo, substituindo (5.38), (5.39) e (5.40) em (5.41), (5.42) e (5.43), e assumindo que ambos os terminais da linha são casados com o seu comportamento médio, ou seja,  $Z_g = Z_l = \bar{Z}_0$ , obtêm-se

$$Z_{in} = \bar{Z}_0 + 2\bar{\gamma} \int_0^l (Z_0(x) - \bar{Z}_0) e^{-2\bar{\gamma}x} dx, \quad (5.44)$$

$$\Gamma_{in} = \frac{\bar{\gamma}}{\bar{Z}_0} \int_0^l (Z_0(x) - \bar{Z}_0) e^{-2\bar{\gamma}x} dx \quad (5.45)$$

e

$$H_{in} = \left( 1 - \frac{\bar{\gamma}}{\bar{Z}_0} \int_0^l (Z_0(x) - \bar{Z}_0) e^{-2\bar{\gamma}x} dx \right) e^{-\bar{\gamma}l}. \quad (5.46)$$

Onde foram descartados termos de segunda ordem em diante.

## 5.4 Estudos de Caso

Nesta seção serão apresentados dois estudos de caso, cujo objetivo é abordar de uma forma prática questões como validação, limitações e aplicabilidade da teoria apresentada nas seções anteriores. Serão analisados dois tipos de não uniformidades comumente encontradas em linhas de transmissão reais [53]. A primeira corresponde a não uniformidades periódicas, que geralmente são ocasionadas por erros no processo de fabricação. A segunda corresponde à faltas localizadas, que geralmente são ocasionadas por manipulação inadequada da linha de transmissão durante o processo de implantação. Os efeitos desses dois tipos de não uniformidades foram simulados numericamente pelo método das matrizes de transferência (MMT) [54], e os resultados obtidos para o coeficiente de reflexão da linha foram comparados com as previsões obtidas pela teoria apresentada neste capítulo.

### 5.4.1 Linha de Transmissão com Não Uniformidades Periódicas

Considere uma linha de transmissão não uniforme sem perdas, de comprimento  $l$  e com terminais conectados a impedância  $\bar{Z}_0$ . Seus parâmetros longitudinais são descritos por

$$\gamma(x) = 0 + j\beta(x) \quad (5.47)$$

e

$$Z_0(x) = \bar{Z}_0 + \Delta Z_{0MAX} \sin\left(\frac{2N\pi}{l}x\right), \quad (5.48)$$

Com  $\beta(x)$  sendo uma constante de fase qualquer e  $N$  o número de períodos, como ilustrado na Figura 5.2.

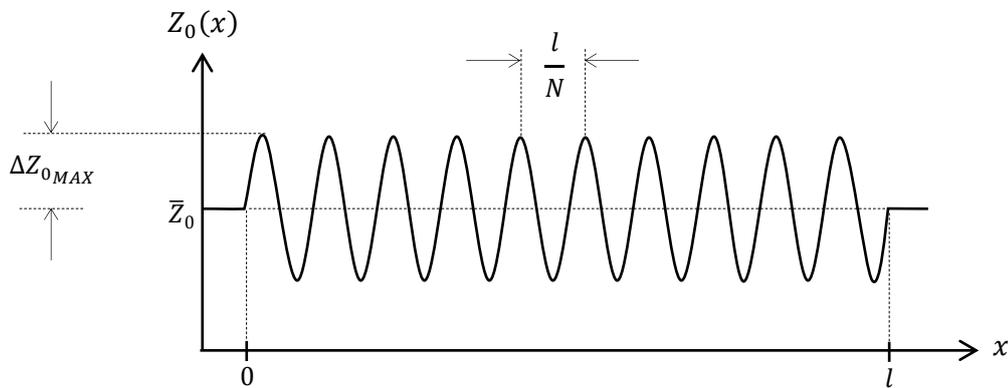


Figura 5.2 – Perfil de variação da impedância característica longitudinal para uma linha de transmissão periódica.

De acordo com a teoria apresentada nas seções anteriores, ao substituir (5.47) e (5.48) em (5.45), obtém-se uma aproximação de primeira ordem para a refletividade  $|\Gamma_{in}|^2$  da linha:

$$|\Gamma_{in}|^2 = \left( \frac{\Delta Z_{0MAX}}{\bar{Z}_0} \frac{(N\pi)(\bar{\beta}l)}{(N\pi)^2 - (\bar{\beta}l)^2} \sin(\bar{\beta}l) \right)^2, \quad (5.49)$$

com  $\bar{\beta}l = \int_0^l \beta(x) dx$ .

Como exemplo, considere uma linha periódica de 1 m comprimento, com período de variação  $l/N$  igual a 10 cm (ou seja,  $N = 10$ ),  $\bar{Z}_0 = 100 \Omega$  e  $\Delta Z_{0MAX}/\bar{Z}_0 = 0,01$ . Considere também que  $\beta = 2\pi/\lambda$  não é uma função de  $x$ , com  $\lambda$  sendo o comprimento de onda. Na Figura 5.3 encontra-se a refletividade dessa linha como uma função do comprimento elétrico  $l/\lambda$ , obtida a partir de simulação numérica e da equação (5.49). Note que a equação (5.49) prevê com exatidão o comportamento ressonante observado na simulação numérica. O máximo de (5.49) ocorre em  $\lambda_{MAX} = 2l/N$ , que corresponde exatamente à condição de Bragg para máxima reflexão.

Uma simulação adicional foi realizada e o resultado encontra-se na Figura 5.4. Desta vez a variação máxima foi definida como 10 % do comportamento médio (ou seja,

$\Delta Z_{0_{MAX}}/\bar{Z}_0 = 0,1$ ). Note que a curva de refletividade obtida a partir de equação (5.49), embora continue prevendo o comportamento ressonante da linha, visivelmente viola o princípio de conservação de energia. Em geral, aproximações de primeira ordem não obedecem a esse princípio, sendo necessárias aproximações de segunda ordem para isso [52][55].

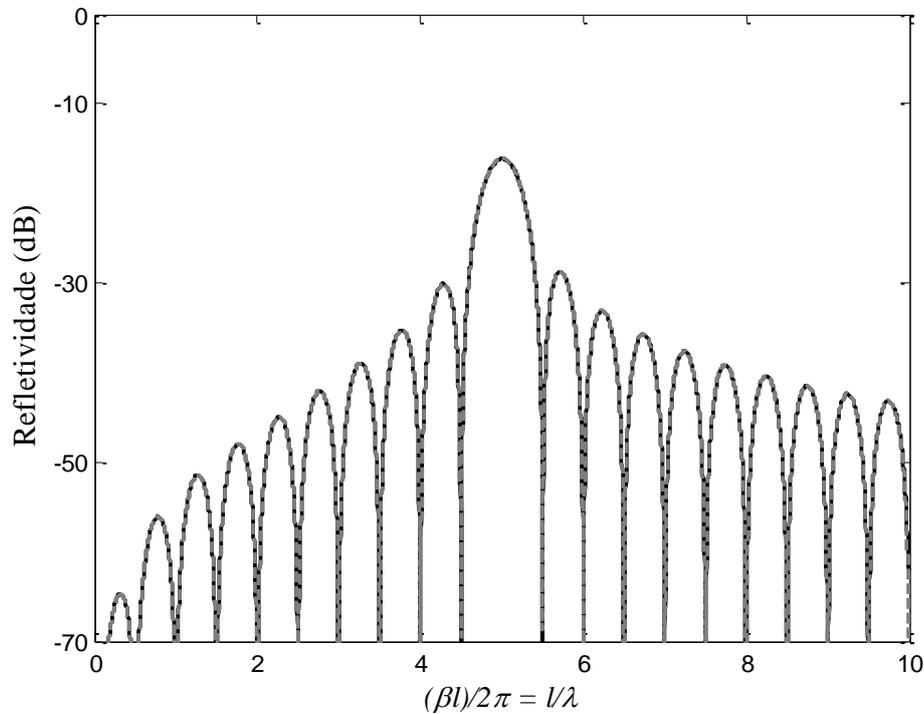


Figura 5.3 – Refletividade em função do comprimento elétrico para uma linha de transmissão periódica com  $N = 10$  e  $\Delta Z_{0_{MAX}}/\bar{Z}_0 = 0,01$ : — Simulação numérica; -- Equação (5.49).

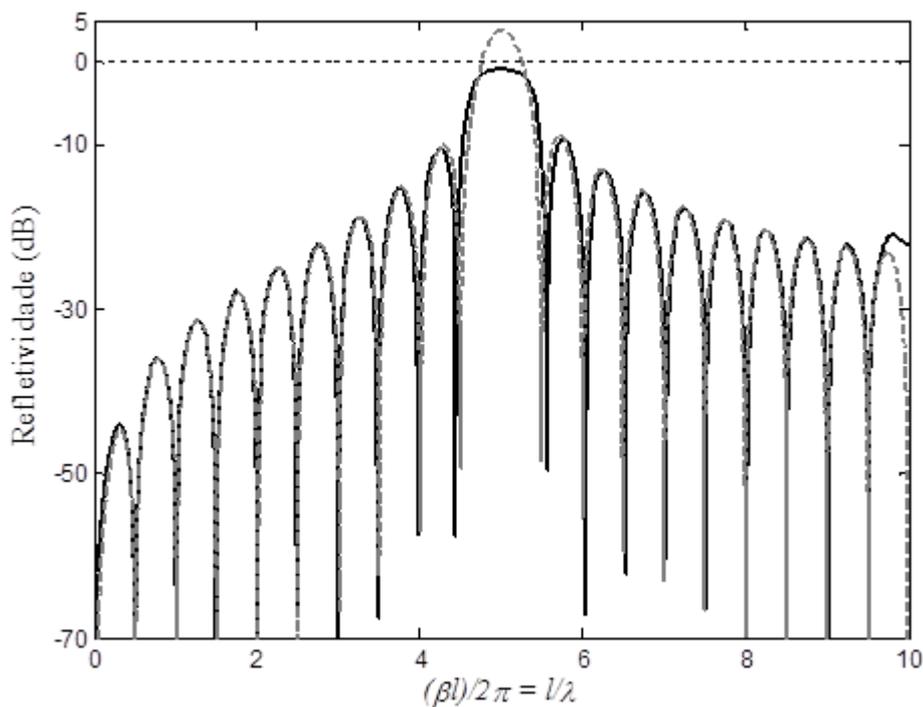


Figura 5.4 – Refletividade em função do comprimento elétrico para uma linha de transmissão periódica com  $N = 10$  e  $\Delta Z_{0_{MAX}}/\bar{Z}_0 = 0,1$ : — Simulação numérica; -- Equação (5.49).

O máximo em (5.49) é dado por

$$MAX\{|\Gamma_{in}|^2\} = \left(\frac{N\pi}{2}\right)^2 \left(\frac{\Delta Z_{0MAX}}{\bar{Z}_0}\right)^2, \quad (5.50)$$

que não se limita ao intervalo  $[0; 1]$ , ou  $[-\infty; 0]$  em  $dB$ . Note em (5.50) que para assegurar que  $|\Gamma_{in}|^2$  se limite a esse intervalo é necessário que

$$\frac{\Delta Z_{0MAX}}{\bar{Z}_0} \leq \frac{2}{N\pi} = \frac{4}{\mathcal{W} \cdot l}, \quad (5.51)$$

onde  $\mathcal{W} = 2N\pi/l$  é a frequência angular espacial. Embora (5.51) tenha sido derivada para variações senoidais de  $Z_0(x)$ , pode ser aplicada para uma variação qualquer, desde que se utilize a componente espectral de  $Z_0(x)$  de maior frequência espacial  $\mathcal{W}_{MAX}$ , ou seja,

$$\frac{\Delta Z_{0MAX}}{\bar{Z}_0} \leq \frac{4}{\mathcal{W}_{MAX} \cdot l}. \quad (5.52)$$

A análise da inequação em (5.52) traz informações importantes a respeito do limite de validade para as aproximações de primeira ordem desenvolvidas na Seção 5.2. Note a partir de (5.52) que a exatidão das aproximações de primeira ordem aumenta quanto mais suaves são as variações de impedância (ou seja, quanto menor  $\mathcal{W}_{MAX}$ ) ou quanto menor o comprimento  $l$  da linha de transmissão. O que não é uma informação óbvia, uma vez que as aproximações realizadas na Seção 5.2 são justificadas apenas para variações de  $\gamma(x)$  e  $Z_0(x)$  de pequena amplitude (veja a Subseção 5.2.1) e não para variações suaves. No entanto, de alguma forma a amplitude e a suavidade das não uniformidades estão intimamente relacionadas.

Finalmente, apenas como comprovação experimental, considere o cabo paralelo da Figura 5.5, de 10  $m$  de comprimento e cujo revestimento dielétrico ( $\epsilon_{r_{ef}} \cong 2,12$ ) foi extirpado de 5  $cm$  em intervalos regulares de 95  $cm$ . Por possuir uma não uniformidade periódica, de acordo com a teoria de Bragg, a transmissão nesse cabo deve apresentar um mínimo (máxima reflexão) na frequência de aproximadamente 108  $MHz$ .

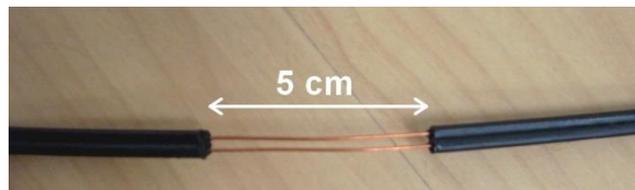


Figura 5.5 – Extirpação de 5  $cm$  em um cabo paralelo.

Na Figura 5.6 encontram-se medições da função de transferência  $H_{in}$  desse cabo, com e sem as extirpações no revestimento dielétrico, o que está de acordo com a teoria de Bragg e com o máximo de reflexão previsto pela equação (5.49).

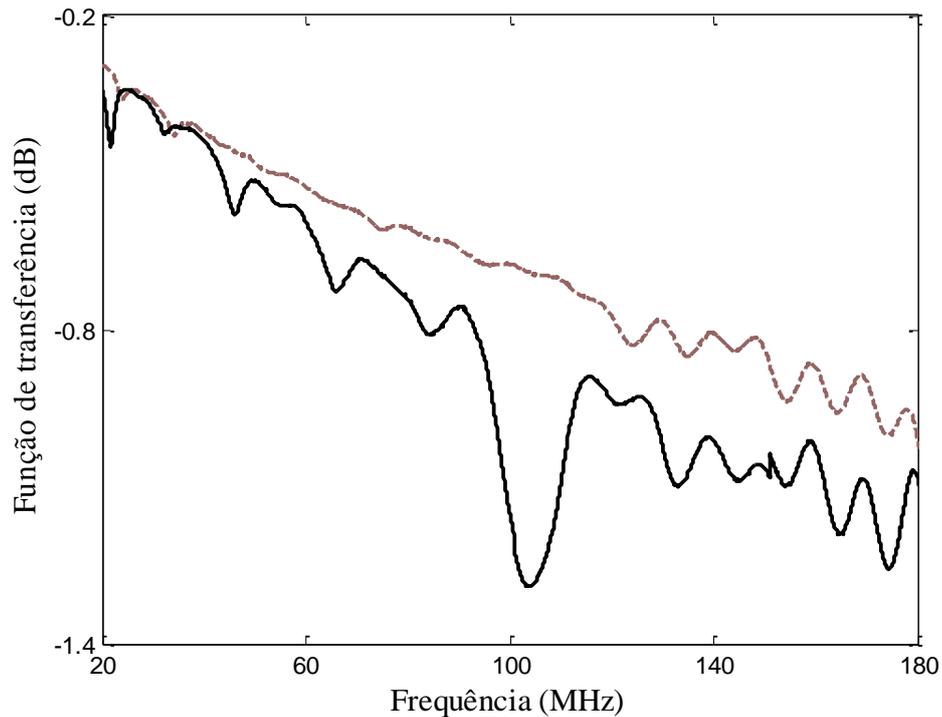


Figura 5.6 – Função de transferência de um cabo paralelo: — Com extirpação periódica no dielétrico; - - Sem extirpação no dielétrico.

#### 5.4.2 Linha de Transmissão com Falta Local

Considere uma linha de transmissão com um pequeno defeito ou falta de largura  $w$  localizada na posição  $x_0$ . Seus parâmetros longitudinais são descritos por:

$$\gamma(x) = \begin{cases} \gamma + \Delta\gamma(x), & |x - x_0| \leq w/2 \\ \gamma, & \text{Fora} \end{cases} \quad (5.53)$$

e

$$Z_0(x) = \begin{cases} Z_0 + \Delta Z_0(x), & |x - x_0| \leq w/2, \\ Z_0, & \text{Fora} \end{cases} \quad (5.54)$$

conforme mostra-se na Figura 5.7.

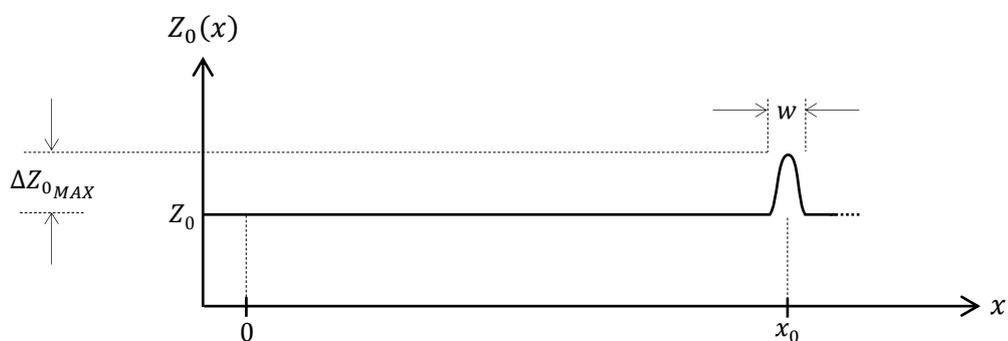


Figura 5.7 – Perfil de variação da impedância característica longitudinal para uma linha de transmissão com falta.

Considere também que a falta tem caráter local – ou seja,  $w \ll x_0$  –, de modo que ela não influencie nos valores médios dos parâmetros longitudinais da linha – ou seja,  $\bar{\gamma} \cong \gamma$  e  $\bar{Z}_0 \cong Z_0$ . Isso permite que a equação (5.42) seja utilizada para obter uma aproximação de primeira ordem do coeficiente de reflexão da linha, ou seja,

$$\Gamma_{in} = \frac{\gamma}{Z_0} \int_{x_0 - \frac{w}{2}}^{x_0 + \frac{w}{2}} \Delta Z_0(x) e^{-2\gamma x} dx. \quad (5.55)$$

A solução de (5.55) é da forma

$$\Gamma_{in} = g(\gamma w) \cdot \frac{\Delta Z_{0MAX}}{Z_0} e^{-2\gamma x_0}, \quad (5.56)$$

onde  $g(\gamma w)$  é uma função que depende de  $\Delta Z_0(x)$ , veja a Tabela 5.1.

**Tabela 5.1 – Função  $g(\gamma w)$  para diferentes formatos de faltas locais.**

Formato	$\Delta Z_0(x)/\Delta Z_{0MAX}$	$g(\gamma w)$
	1	$\sinh(\gamma w)$
	$1 - \frac{2}{w} x - x_0 $	$2 \frac{\sinh^2\left(\frac{\gamma w}{2}\right)}{\gamma w}$
	$1 - \frac{4}{w^2}(x - x_0)^2$	$2 \frac{(\gamma w) \cosh(\gamma w) - \sinh(\gamma w)}{(\gamma w)^2}$
	$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos\left(\frac{2\pi}{w}(x - x_0)\right)$	$\frac{\pi^2 \sinh^2(\gamma w)}{2 \pi^2 + (\gamma w)^2}$

Se a largura  $w$  além de ser muito menor que  $x_0$  também for muito menor que o comprimento de onda sob análise, então a função exponencial na integral em (5.55) pode ser considerada como constante, de modo que

$$\Gamma_{in} = \frac{\gamma}{Z_0} e^{-2\gamma x_0} \int_{x_0 - \frac{w}{2}}^{x_0 + \frac{w}{2}} \Delta Z_0(x) dx. \quad (5.57)$$

Note que a integral em (5.57) representa à área  $S$  do pulso  $\Delta Z_0(x)$ , portanto,

$$\Gamma_{in} = S \cdot \frac{\gamma}{Z_0} e^{-2\gamma x_0}. \quad (5.58)$$

Ou seja, em baixas frequências as reflexões são independentes do formato da falta, dependem apenas de sua área  $S$  e de sua posição  $x_0$ .

Como exemplo, na Figura 5.6 encontram-se quatro simulações numéricas da refletividade  $|\Gamma_{in}|^2$  de um par-trançado de 10 m de comprimento, correspondentes a quatro diferentes corrosões em uma pequena região de sua cobertura dielétrica, considerada de

polietileno. Embora essas corrosões possuam diferentes formatos (os mesmos da Tabela 5.1), com larguras que variam de 10 *cm* a 20 *cm*, todas possuem a mesma área *S* e estão localizadas no centro do par-trançado.

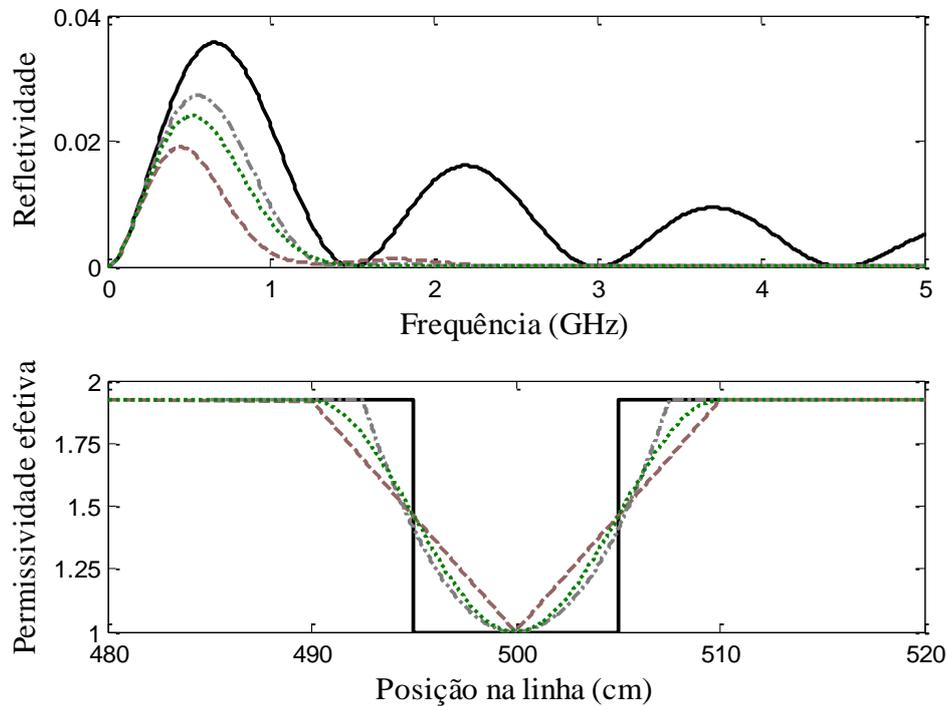


Figura 5.8 – Refletividade em função da frequência para uma linha de transmissão em que uma pequena região do dielétrico está corroída, de diferentes formas: — Retangular; - - Triangular; ... Parabólica; - · - Cossenoidal.

Note pelo gráfico de permissividade elétrica na Figura 5.6 que as corrosões são de tal intensidade que os condutores de cobre ficam expostos ao ar na posição  $x_0 = 5$  m. Isso é o suficiente para que essas corrosões não sejam consideradas de pequena amplitude. Nesse caso as aproximações de primeira ordem em (5.55) e (5.58) não são quantitativamente válidas. Mesmo assim, através da equação (5.58), consegue-se prever qualitativamente que em baixas frequências todas as curvas de refletividade apresentam o mesmo comportamento (até uns 300 *MHz*), independente do formato da corrosão.

## 5.5 Principais Resultados

A relação entre os fasores de voltagem  $V$  e corrente  $I$  nos terminais de uma linha de transmissão não uniforme de comprimento  $l$  é dada por

$$\begin{bmatrix} V(0) \\ I(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_s \cosh(\theta_{ef}) & \frac{Z_{0ef} \sinh(\theta_{ef})}{f_s} \\ \frac{f_s \sinh(\theta_{ef})}{Z_{0ef}} & \frac{\cosh(\theta_{ef})}{f_s} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V(l) \\ I(l) \end{bmatrix}, \quad (5.59)$$

onde os parâmetros efetivos  $\theta_{ef}$ ,  $Z_{0ef}$  e  $f_s$  podem ser estimados por três medições de impedância no terminal de entrada da linha, correspondentes a três cargas diferentes no terminal de saída, ou seja,

$$\theta_{ef} = \tanh^{-1} \left( \sqrt{\frac{Z_{in_{cc}}}{Z_{in_{ca}}}} \right), \quad (5.60)$$

$$Z_{0ef} = \sqrt{Z_{in_{cc}} \cdot Z_{in_{ca}}} \quad (5.61)$$

e

$$f_s = \sqrt{\left( \frac{Z_{in_{ca}}}{Z_l} \right) \cdot \left( \frac{Z_{in_{cc}} - Z_{in_l}}{Z_{in_l} - Z_{in_{ca}}} \right)}. \quad (5.62)$$

Esses parâmetros caracterizam completamente a linha.

Caso as não uniformidades da linha sejam de pequena amplitude (veja as condições em (5.16) e (5.17)), então os parâmetros efetivos –  $\theta_{ef}$ ,  $Z_{0ef}$  e  $f_s$  – podem ser relacionados com os longitudinais –  $\gamma(x)$  e  $Z_0(x)$  – pelas aproximações de primeira ordem:

$$\theta_{ef} = \bar{\gamma}l, \quad (5.63)$$

$$Z_{0ef} = \frac{2\bar{\gamma}}{\sinh(2\bar{\gamma}l)} \int_0^l Z_0(x) \cosh(2\bar{\gamma} \cdot (l-x)) dx \quad (5.64)$$

e

$$f_s = 1 + \frac{\bar{\gamma}}{\bar{Z}_0(1 + e^{-2\bar{\gamma}l})} \int_0^l Z_0(x) (e^{-2\bar{\gamma}x} - e^{-2\bar{\gamma} \cdot (l-x)}) dx ; \quad (5.65)$$

onde

$$\bar{\gamma} = \frac{1}{l} \int_0^l \gamma(x) dx \quad (5.66)$$

e

$$\bar{Z}_0 = \frac{1}{l} \int_0^l Z_0(x) dx \quad (5.67)$$

correspondem aos comportamentos médios de  $\gamma(x)$  e  $Z_0(x)$ .

## 5.6 Conclusões

Neste capítulo mostrou-se que qualquer linha de transmissão não uniforme pode ser completamente caracterizada por três parâmetros efetivos –  $\theta_{ef}$ ,  $Z_{0_{ef}}$  e  $f_s$ . Sendo que os dois primeiros são generalizações dos conceitos de parâmetros secundários para linhas de transmissão uniforme e o terceiro está relacionado à propriedade de simetria. Além disso, mostrou-se como obter esses três parâmetros efetivos conhecendo-se o padrão de não uniformidades da linha de transmissão – equações (5.63), (5.64) e (5.65) –, desde que essas não uniformidades sejam de pequena amplitude. Essas equações, assim como os próprios conceitos de parâmetros efetivos, possibilitam acrescentar diretamente aos modelos de linha de transmissão uniforme os efeitos de alguns tipos de não uniformidades. Isso será feito no Capítulo 6 para um tipo específico de não uniformidade, que é intrínseco a todas as linhas de transmissão.

Embora as equações (5.63), (5.64) e (5.65) sejam aproximações de primeira ordem, através delas pode-se prever qualitativamente propriedades gerais de linhas de transmissão não uniforme, independente da amplitude das não uniformidades. Um exemplo é o comportamento ressonante observado em linhas de transmissão periódicas. Além disso, note que essas equações estão na forma de equações integrais de Fredholm do primeiro tipo, sobre a qual existe uma extensa literatura relacionada à solução de problemas inversos [56-58]. Portanto, essas equações podem ser utilizadas para estimar o padrão de não uniformidade em uma linha de transmissão, dado o conhecimento de seus parâmetros efetivos. Sendo que esses parâmetros efetivos são facilmente obtidos por medições de impedância nos terminais da linha – equações (5.60), (5.61) e (5.62).

# CAPÍTULO 6

## MODELO PARA LINHAS COM NÃO UNIFORMIDADES INTRÍNSECAS

As não uniformidades indesejáveis de uma linha de transmissão podem ser classificadas em três categorias, de acordo com a maneira como foram originadas:

- Manipulação inadequada: Geralmente ocorrem durante o processo de implantação da linha. Como característica, esse tipo de não uniformidade apresenta variações locais e abruptas de impedância, que podem até impossibilitar a transmissão. São detectadas por testes de reflectometria no domínio do tempo.
- Erros de fabricação: Como em fábricas os processos são repetitivos, esse tipo de não uniformidade é caracterizado por variações periódicas de impedância ao longo da linha. Embora as reflexões geradas por essas variações sejam pequenas se analisadas isoladamente, quando em fase (ressonância de Bragg) se superpõe construtivamente gerando um pico significativo de refletividade.
- Intrínsecas: São ocasionadas por irregularidades estruturais nas características construtivas da linha de transmissão, por exemplo, bolhas no dielétrico, rugosidade na superfície dos condutores, micro fissuras, etc. De um ponto de vista elétrico correspondem a pequenas variações randômicas de impedância, porém de forma regular<sup>1</sup> ao longo da linha. Causam contínuas e sucessivas reflexões que não se agregam em fase, mas distorcem na frequência os sinais propagantes na linha.

Das três categorias de não uniformidades, o maior interesse nesta tese são as intrínsecas, justamente por serem inerentes a todas as linhas de transmissão. Por melhores que sejam as técnicas de fabricação, esse tipo de não uniformidade permanecerá sempre visível em alguma escala de observação. Além disso, os efeitos dos dois primeiros tipos de não uniformidades

---

<sup>1</sup> O termo “regular” é equivalente ao termo “estacionário”, usado para variações randômicas no tempo.

foram abordados mesmo que minimamente nos estudos de caso apresentados na Seção 5.4. Portanto, o objetivo deste capítulo é analisar os efeitos das não uniformidades intrínsecas.

No Capítulo 5 foi desenvolvido o formalismo matemático que possibilita analisar certos tipos de linhas de transmissão não uniforme como se fossem equivalentes a linhas uniforme. Isso permite que os efeitos das não uniformidades possam ser incorporados aos modelos de linha uniforme, como os apresentados nos Capítulos 3 e 4. Isso será feito para as não uniformidades intrínsecas. Ao final deste capítulo será possível compreender e reproduzir o comportamento randômico observado nas medições da Figura 5.1.

## 6.1 Equivalente Uniforme

São duas as características fundamentais das não uniformidades intrínsecas de uma linha de transmissão:

- 1) São de pequena amplitude;
- 2) Variam de forma randômica, porém com regularidade ao longo da linha.

A primeira característica permite que toda a análise desenvolvida na Seção 5.2 possa ser utilizada para linhas com esse tipo de não uniformidades. A segunda característica tornam essas linhas essencialmente simétricas. Assim sendo, substituindo  $f_s = 1$  e (5.63) em (5.59), então a matriz de transmissão que relaciona as tensões  $V$  e correntes  $I$  nos terminais de uma linha de transmissão com não uniformidades intrínsecas reduz-se de para

$$\begin{bmatrix} V(0) \\ I(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh(\gamma_{ef}l) & Z_{0ef} \sinh(\gamma_{ef}l) \\ \frac{\sinh(\gamma_{ef}l)}{Z_{0ef}} & \cosh(\gamma_{ef}l) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V(l) \\ I(l) \end{bmatrix}, \quad (6.1)$$

onde

$$\gamma_{ef} = \bar{\gamma}. \quad (6.2)$$

Note que para o fator de simetria  $f_s$  ser unitário em (5.65), é necessário que a identidade

$$\int_0^l Z_0(x) e^{-2\bar{\gamma}x} dx = \int_0^l Z_0(x) e^{-2\bar{\gamma}(l-x)} dx \quad (6.3)$$

seja verdadeira. Logo, usando (6.3) em (5.64),  $Z_{0ef}$  reduz-se para

$$Z_{0ef} = \frac{2\bar{\gamma}}{1 + e^{-2\bar{\gamma}l}} \int_0^l Z_0(x) e^{-2\bar{\gamma}x} dx. \quad (6.4)$$

Além disso, a segunda característica das não uniformidades intrínsecas implica também que dois trechos quaisquer da linha devem possuir uma impedância característica efetiva com as mesmas propriedades, ou seja,

$$Z_{0_{ef}} = \frac{2\bar{\gamma}}{1 + e^{-2\bar{\gamma}l}} \int_0^l Z_0(x) e^{-2\bar{\gamma}x} dx = \frac{2\bar{\gamma}}{1 + e^{-2\bar{\gamma}(x_2-x_1)}} \int_{x_1}^{x_2} Z_0(x) e^{-2\bar{\gamma}x} dx, \quad (6.5)$$

onde  $x_1$  e  $x_2$  são posições na linha que delimitam um trecho. Considere que  $x_1 = 0$  e  $x_2 = \infty$ , apenas como um artifício matemático para simplificar a análise e evidenciar que, neste caso,  $Z_{0_{ef}}$  é independente do comprimento  $l$  da linha. Assim sendo,

$$Z_{0_{ef}} = 2\bar{\gamma} \int_0^{\infty} Z_0(x) e^{-2\bar{\gamma}x} dx. \quad (6.6)$$

Finalmente ao substituir (5.15) em (6.6), obtém-se

$$Z_{0_{ef}} = \bar{Z}_0 + \Delta Z_{0_{ef}}, \quad (6.7)$$

onde

$$\Delta Z_{0_{ef}} = 2\bar{\gamma} \int_0^{\infty} \Delta Z_0(x) e^{-2\bar{\gamma}x} dx. \quad (6.8)$$

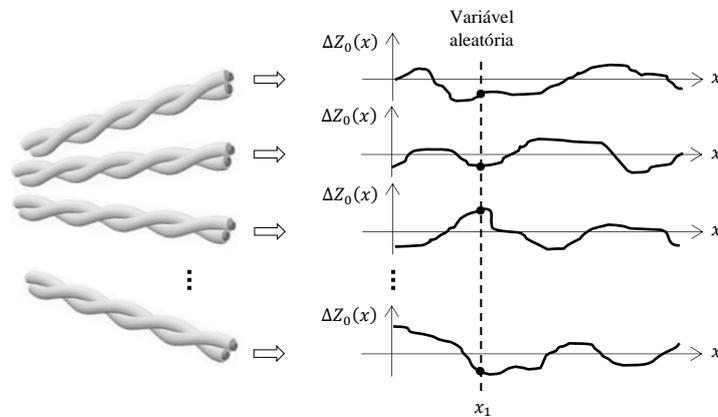
Em um comparativo da equação (6.7) com as medições da Figura 5.1,  $Z_{0_{ef}}$  corresponde às medições propriamente ditas,  $\bar{Z}_0$  ao comportamento médio dessas medições (curva em negrito) e  $\Delta Z_{0_{ef}}$  às variações randômicas em torno desse comportamento médio.

Portanto, uma linha de transmissão com não uniformidades intrínsecas é equivalente a uma linha de transmissão uniforme, cuja constante de propagação é dada por (6.2) e a impedância característica é dada por (6.7). Nessas equações, os termos de comportamento médios  $\bar{\gamma}$  e  $\bar{Z}_0$  podem ser determinados pelos modelos de linha de transmissão uniforme, como os apresentados nos Capítulos 3 e 4. Já o termo  $\Delta Z_{0_{ef}}$  pode ser determinado por meio da equação (6.8), conhecendo-se as propriedades estatísticas de  $\Delta Z_0(x)$ . Sendo esse o objetivo das próximas seções.

## 6.2 Caracterização Estatística de $\Delta Z_0(x)$

Embora existam inúmeras linhas de transmissão de um mesmo tipo, com as mesmas características construtivas e oriundas do mesmo processo de fabricação, inevitavelmente cada uma possui um padrão de variação  $\Delta Z_0(x)$  que as torna únicas. Em uma primeira

análise, poderia se pensar que isso diminui a utilidade prática da equação (6.8). No entanto, esses padrões de variações, ainda que randômicos e diferentes uns dos outros, compartilham as mesmas propriedades estatísticas. Isso indica que  $\Delta Z_0(x)$  pode ser caracterizado por um processo estocástico<sup>1</sup>, como ilustrado na Figura 6.1.



**Figura 6.1 – Representação de  $\Delta Z_0(x)$  por um processo estocástico.**

O conhecimento do processo estocástico que melhor descreve as variações de  $\Delta Z_0(x)$  é de difícil obtenção por verificação experimental direta. No entanto, algumas premissas podem ser estabelecidas de forma indireta, que de certa forma determinam esse processo estocástico. Por exemplo, devido à regularidade das variações aleatórias de  $\Delta Z_0(x)$  ao longo de uma linha de transmissão, é factível considerar o processo como ergódico [59]. Além disso,  $\Delta Z_0(x)$  é considerado como resultado da combinação de um grande número de pequenas fontes descorrelacionadas. Portanto, tendo em conta o teorema do limite central em estatística [59], a distribuição de probabilidade de cada variável aleatória associada a cada posição longitudinal  $x$  (veja a Figura 6.1) deve ser aproximadamente Gaussiana. Uma suposição adicional é que essas variáveis aleatórias relacionam-se de forma Markoviana [59] ao longo da linha. Embora esta última suposição seja motivada apenas por simplicidade matemática, já que a relação markoviana é uma das maneiras mais simples de se estabelecer dependência entre variáveis aleatórias adjacentes, ainda assim ela é bastante abrangente.

O único processo estocástico não trivial que pode ser ergódico, gaussiano e markoviano ao mesmo tempo é o processo de Ornstein–Uhlenbeck [60]. Nesse processo a média  $E[\Delta Z_0(x)]$  e a variância  $V[\Delta Z_0(x)]$  estatísticas são constantes para qualquer posição  $x$  na linha, e a autocorrelação  $R[\Delta Z_0(x)](x_1, x_2)$  associada a duas posições  $x_1$  e  $x_2$  quaisquer decai exponencialmente com a distância entre elas. Além disso, como a média espacial de

<sup>1</sup> Note que para esse processo estocástico, a variável determinística é o espaço e não o tempo.

$\Delta Z_0(x)$  é nula por definição (veja a equação (5.15)), então, pelo processo ser ergódico, a média estatística também é nula. Portanto,

$$\mathbb{E}[\Delta Z_0(x)] = 0 \quad (6.9)$$

e

$$\mathbb{R}[\Delta Z_0(x)](x_1, x_2) = \mathbb{V}[\Delta Z_0(x)] \cdot e^{-\frac{|x_2 - x_1|}{d_c}}. \quad (6.10)$$

Note que esse processo estocástico é função de apenas dois parâmetros: a variância  $\mathbb{V}[\Delta Z_0(x)]$  e a distância de correlação  $d_c$ ; relacionados respectivamente à amplitude e a rapidez das variações de  $\Delta Z_0(x)$  ao longo da linha.

### 6.2.1 Simulação do Processo

Uma vez caracterizado  $\Delta Z_0(x)$  como processo estocástico de Ornstein–Uhlenbeck, é instrutivo mostrar uma forma simples de simulá-lo computacionalmente a partir de um vetor  $[g_1, g_2, g_3, \dots, g_N]$  de  $N$  amostras de variáveis aleatórias gaussianas, independentes entre si, com médias nulas e variâncias unitárias. Vetor esse associado às posições  $[x_1, x_2, x_3, \dots, x_N]$  na linha, ordenadas de forma crescente. O fato de o processo ser markoviano permite que suas amostras possam ser obtidas de forma recursiva [61]. Sendo a primeira obtida por

$$\Delta Z_0(x_1) = \sqrt{\mathbb{V}[\Delta Z_0(x)]} \cdot g_1, \quad (6.11)$$

e as outras por

$$\Delta Z_0(x_{i+1}) = \sqrt{\mathbb{V}[\Delta Z_0(x)]} \cdot \left( f_i \cdot \Delta Z_0(x_i) + \sqrt{1 - f_i^2} \cdot g_{i+1} \right), \quad (6.12)$$

onde

$$f_i = e^{-\frac{(x_{i+1} - x_i)}{d_c}}. \quad (6.13)$$

Certo cuidado deve ser tomado a respeito do período de amostragem do processo, que deve obedecer ao teorema de Nyquist–Shannon [31]. Pode-se demonstrar que se

$$x_{i+1} - x_i < \pi \cot\left(\frac{\phi\pi}{200}\right) \cdot d_c, \quad (6.14)$$

então o teorema é obedecido. Neste caso a largura de banda do sinal é considerada como abrangendo pelo menos  $\phi$  % da potência total do sinal. Por exemplo, se o período de amostragem for equivalente a  $d_c/4$ , a largura de banda considerada para o sinal abrange aproximadamente 95 % de sua potência total.

Como exemplo, na Figura 6.2 encontram-se duas simulações de  $\Delta Z_0(x)$  ao longo de 10 m de linha de transmissão, com mesmas variâncias  $\mathbb{V}[\Delta Z_0(x)]$  mas diferentes distâncias de correlação  $d_c$ . Sendo essas simulações obtidas através das equações de (6.11) a (6.13).

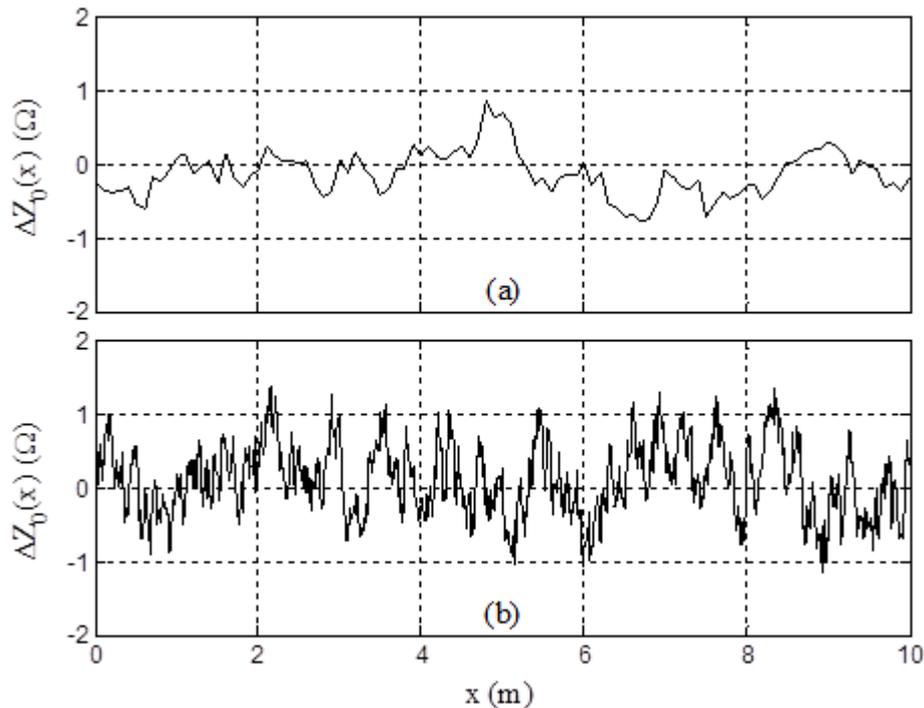


Figura 6.2 – Simulações de  $\Delta Z_0(x)$ : (a)  $\sqrt{\mathbb{V}[\Delta Z_0(x)]} = 0,5 \Omega$  e  $d_c = 1 \text{ m}$ ; (b)  $\sqrt{\mathbb{V}[\Delta Z_0(x)]} = 0,5 \Omega$  e  $d_c = 0,1 \text{ m}$ .

Note que quanto menor a distância de correlação, o sinal torna-se mais próximo de um ruído branco (amostras descorrelacionadas). Note também que as curvas não são diferenciáveis, sendo isso uma característica de processos markovianos.

### 6.3 Caracterização Estatística de $\Delta Z_{0_{ef}}$

Uma propriedade importante dos processos gaussianos é que a saída de um sistema linear cuja entrada é um processo gaussiano, também é gaussiano [31]. Como  $\Delta Z_{0_{ef}}$  se relaciona com  $\Delta Z_0(x)$  através da transformação linear em (6.8), e como  $\Delta Z_0(x)$  é um processo gaussiano, então  $\Delta Z_{0_{ef}}$  também é gaussiano. Outra propriedade importante de um processo gaussiano é que ele é completamente especificado quando conhecida as suas funções média e autocorrelação estatística [31]. Portanto, esta seção se resume em encontrar a média e a autocorrelação do processo estocástico gaussiano que caracteriza  $\Delta Z_{0_{ef}}$ <sup>1</sup>.

<sup>1</sup> Note pela equação (6.8) que, embora não seja explícito na notação, o processo estocástico que caracteriza  $\Delta Z_{0_{ef}}$  é ambientado na frequência  $\omega$ .

A média estatística de  $\Delta Z_{0_{ef}}$  pode ser obtida aplicando o operador média  $\mathbb{E}[\cdot]$  em ambos os membros da equação (6.8), ou seja,

$$\mathbb{E}[\Delta Z_{0_{ef}}] = 2\bar{\gamma} \int_0^{\infty} \mathbb{E}[\Delta Z_0(x)] e^{-2\bar{\gamma}x} dx. \quad (6.15)$$

Como  $\mathbb{E}[\Delta Z_0(x)]$  é constante para  $x$ , então ele pode sair da integral em (6.15). O que resulta em

$$\mathbb{E}[\Delta Z_{0_{ef}}] = \mathbb{E}[\Delta Z_0(x)]. \quad (6.16)$$

Por definição a autocorrelação de duas variáveis aleatórias, correspondentes às frequências  $\omega_1$  e  $\omega_2$ , é dada por

$$\mathbb{R}[\Delta Z_{0_{ef}}](\omega_1, \omega_2) = \mathbb{E}[\Delta Z_{0_{ef}}(\omega_1) \cdot \Delta Z_{0_{ef}}^*(\omega_2)], \quad (6.17)$$

onde o sobescrito \* representa o operador conjugado. Substituindo (6.8) em (6.17), obtém-se

$$\begin{aligned} \mathbb{R}[\Delta Z_{0_{ef}}](\omega_1, \omega_2) = \\ \mathbb{E} \left[ \left( 2\bar{\gamma}(\omega_1) \int_0^{\infty} \Delta Z_0(x_1) e^{-2\bar{\gamma}(\omega_1)x_1} dx_1 \right) \cdot \left( 2\bar{\gamma}(\omega_2) \int_0^{\infty} \Delta Z_0(x_2) e^{-2\bar{\gamma}(\omega_2)x_2} dx_2 \right)^* \right], \end{aligned} \quad (6.18)$$

que é equivalente a

$$\begin{aligned} \mathbb{R}[\Delta Z_{0_{ef}}](\omega_1, \omega_2) = \\ 4\bar{\gamma}(\omega_1)\bar{\gamma}^*(\omega_2) \int_0^{\infty} e^{-2\bar{\gamma}^*(\omega_2)x_2} \int_0^{\infty} \mathbb{R}[\Delta Z_0(x)](x_1, x_2) \cdot e^{-2\bar{\gamma}(\omega_1)x_1} dx_1 dx_2. \end{aligned} \quad (6.19)$$

Note que as equações (6.16) e (6.19) relacionam as médias e autocorrelações dos processos estocásticos de  $\Delta Z_0(x)$  e  $\Delta Z_{0_{ef}}$ . Portanto, substituindo (6.9) em (6.16) e (6.10) em (6.19) e resolvendo as integrais resultantes, obtêm-se finalmente

$$\mathbb{E}[\Delta Z_{0_{ef}}] = 0 \quad (6.20)$$

e

$$\begin{aligned} \mathbb{R}[\Delta Z_{0_{ef}}](\omega_1, \omega_2) = \\ 4 \frac{\bar{\gamma}(\omega_1)\bar{\gamma}^*(\omega_2)}{\bar{\gamma}(\omega_1) + \bar{\gamma}^*(\omega_2)} \frac{d_c [1 + d_c (\bar{\gamma}(\omega_1) + \bar{\gamma}^*(\omega_2))]}{(1 + 2d_c \bar{\gamma}(\omega_1))(1 + 2d_c \bar{\gamma}^*(\omega_2))} \cdot \mathbb{V}[\Delta Z_0(x)], \end{aligned} \quad (6.21)$$

que especificam completamente o processo estocástico gaussiano que caracteriza  $\Delta Z_{0_{ef}}$ .

Para obter a variância  $\mathbb{V}[\Delta Z_{0_{ef}}]$  basta considerar  $\omega_1 = \omega_2 = \omega$  em (6.21), ou seja,

$$\mathbb{V}[\Delta Z_{0_{ef}}](\omega) = 2d_c \frac{1 + 2d_c \text{Real}\{\bar{\gamma}(\omega)\}}{\text{Real}\{\bar{\gamma}(\omega)\}} \left| \frac{\bar{\gamma}(\omega)}{1 + 2d_c \bar{\gamma}(\omega)} \right|^2 \cdot \mathbb{V}[\Delta Z_0(x)]. \quad (6.22)$$

Note que esse processo estocástico não é estacionário, uma vez que a variância é função da frequência. Em baixas frequências a variância é praticamente nula, mas tende a crescer monotonicamente alcançando um máximo na frequência cujo comprimento de onda associado  $\lambda_{MAX}$  é aproximadamente sete vezes maior que a distância de correlação  $d_c$ . Sendo mais específico, a variância é máxima quando

$$\frac{d_c}{\lambda_{MAX}} \cong \frac{\sqrt{3}}{4\pi}. \quad (6.23)$$

Em frequências maiores que a da máxima, a variância diminui monotonicamente tendendo a assíntota  $\mathbb{V}[\Delta Z_0(x)]$ . Veja na Figura 6.4 as curvas de  $\sqrt{\mathbb{V}[\Delta Z_{0_{ef}}]}$  em função da frequência, obtidas diretamente da equação (6.22).

Finalmente note que esse processo estocástico é função de apenas três parâmetros: a variância  $\mathbb{V}[\Delta Z_0(x)]$ , a distância de correlação  $d_c$  e o comportamento médio da constante de propagação  $\bar{\gamma}$ . Sendo os dois primeiros de difícil controle, pois são característicos das próprias não uniformidades  $\Delta Z_0(x)$  ao longo da linha de transmissão (veja a Seção 6.2). Porém o terceiro é função dos parâmetros construtivos da linha, portanto pode ser convenientemente definido em fase de projeto de forma a minimizar a variância  $\mathbb{V}[\Delta Z_{0_{ef}}](\omega)$  na faixa de frequência de interesse (veja a equação (6.22)).

### 6.3.1 Simulação do Processo

Uma vez definido o processo estocástico que caracteriza  $\Delta Z_{0_{ef}}$ , é instrutivo mostrar uma forma de simulá-lo computacionalmente a partir de um vetor  $[g_1, g_2, g_3, \dots, g_N]$  de  $N$  amostras de variáveis aleatórias gaussianas, independentes entre si, com médias nulas e variâncias unitárias. Vetor esse associado às frequências  $[\omega_0, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N]$ , ordenadas de forma crescente. Infelizmente como o processo não é markoviano nem estacionário, não existe uma forma recursiva para simulá-lo, similar a apresentada na Subseção 6.2.1. No entanto como o processo é gaussiano, ele pode ser simulado pela transformação linear [31]

$$\left[ \Delta Z_{0_{ef}}(\omega_1), \Delta Z_{0_{ef}}(\omega_2), \dots, \Delta Z_{0_{ef}}(\omega_N) \right]^T = [K] \cdot [g_1, g_2, \dots, g_N]^T, \quad (6.24)$$

onde  $T$  representa o operador transposto e  $[K]$  uma matriz de transformação de ordem  $N \times N$  que satisfaz a relação

$$[K] \cdot [K]^T = [\Sigma], \quad (6.25)$$

sendo  $[\Sigma]$  a matriz de covariância

$$[\Sigma] = \begin{bmatrix} \mathbb{V} [\Delta Z_{0_{ef}}] (\omega_1) & \mathbb{R} [\Delta Z_{0_{ef}}] (\omega_1, \omega_2) & \dots & \mathbb{R} [\Delta Z_{0_{ef}}] (\omega_1, \omega_N) \\ \mathbb{R} [\Delta Z_{0_{ef}}] (\omega_2, \omega_1) & \mathbb{V} [\Delta Z_{0_{ef}}] (\omega_2) & \dots & \mathbb{R} [\Delta Z_{0_{ef}}] (\omega_2, \omega_N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbb{R} [\Delta Z_{0_{ef}}] (\omega_N, \omega_1) & \mathbb{R} [\Delta Z_{0_{ef}}] (\omega_N, \omega_2) & \dots & \mathbb{V} [\Delta Z_{0_{ef}}] (\omega_N) \end{bmatrix} \quad (6.26)$$

cujos elementos podem ser obtidos diretamente da equação (6.21). Para obter uma matriz  $[K]$  que satisfaça a relação em (6.25), pode-se usar as propriedades de álgebra linear. Como  $[\Sigma]$  é uma matriz simétrica, ela é diagonalizável na forma  $[E] \cdot [\Lambda] \cdot [E]^T$ , que pode ser convenientemente rearranjada na forma  $([E][\Lambda]^{1/2}) \cdot ([E][\Lambda]^{1/2})^T$ , onde  $[\Lambda]^{1/2}$  é uma matriz diagonal cujos elementos não nulos são a raiz quadrada dos autovalores de  $[\Sigma]$  e  $[E]$  é uma matriz cujas colunas são os autovetores ortonormais de  $[\Sigma]$ . Assim sendo,  $[K] = [E][\Lambda]^{1/2}$ .

Como exemplo, na Figura 6.3 encontram-se simulações da parte resistiva da impedância característica efetiva  $Z_{0_{ef}}$  dos quatro pares-trançados de um cabo de rede ethernet hipotético. Cujas variações randômicas  $\Delta Z_{0_{ef}}$  em torno de seu comportamento médio  $\bar{Z}_0$  foram simuladas pelas equações de (6.24) a (6.26), como se fossem oriundas dos mesmos tipos de não uniformidades  $\Delta Z_0(x)$  simuladas na Figura 6.2.

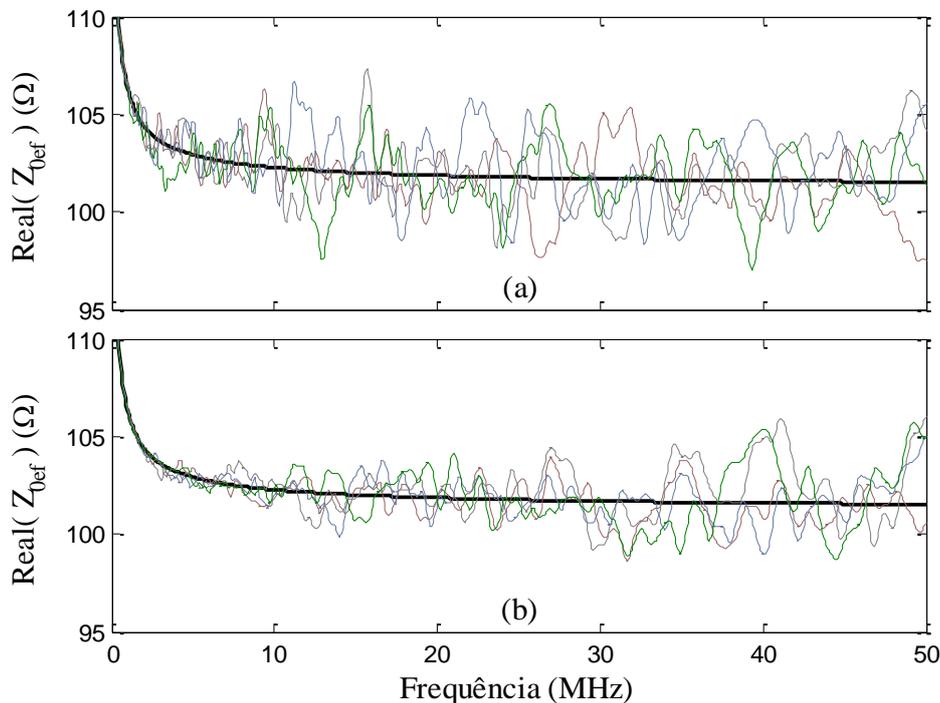


Figura 6.3 – Simulações da parte resistiva da impedância característica dos quatro pares-trançados de um cabo de rede ethernet hipotético: (a)  $\sqrt{\mathbb{V}[\Delta Z_0(x)]} = 0,5 \Omega$  e  $d_c = 1 \text{ m}$ ; (b)  $\sqrt{\mathbb{V}[\Delta Z_0(x)]} = 0,5 \Omega$  e  $d_c = 0,1 \text{ m}$ .

Compare essas variações randômicas com as da Figura 5.1, note um padrão similar de variação entre as curvas simuladas e medidas. Além disso, note na Figura 6.2 que até 50 MHz as amplitudes das variações são maiores para a linha com não uniformidades de menor

distância de correlação. No entanto, a situação se inverte para frequências maiores que 50 MHz. Isso pode ser visto na Figura 6.4, onde se encontram as curvas de desvio padrão  $\sqrt{\mathbb{V}[\Delta Z_{0_{ef}}]}$  dos mesmos processos estocásticos simulados na Figura 6.3, porém em uma faixa de frequência seis vezes maior. Essas curvas foram obtidas diretamente da equação (6.22).

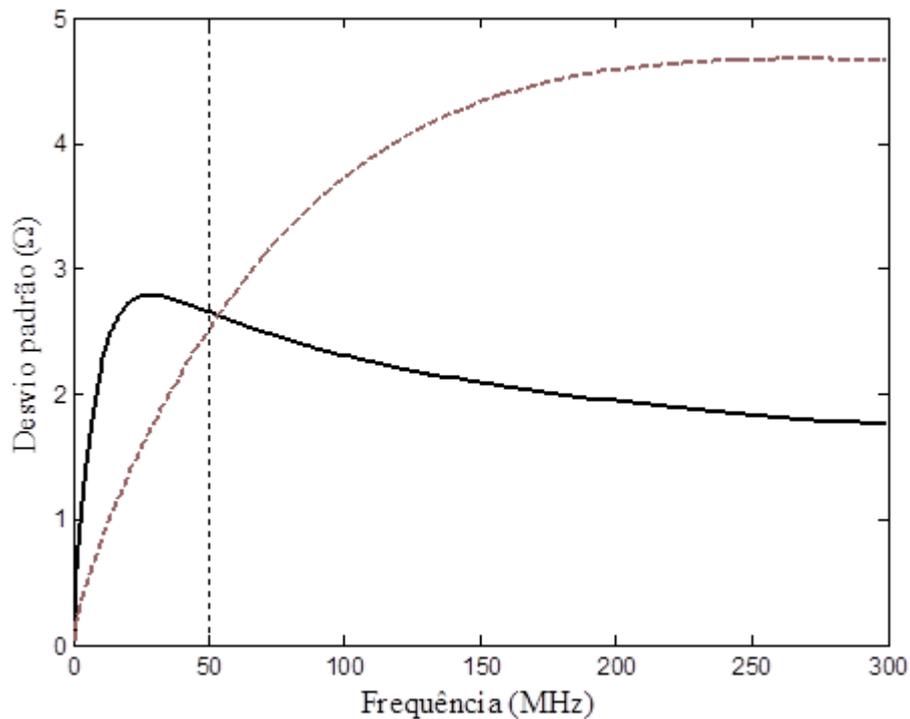


Figura 6.4 – Desvio padrão do processo estocástico que caracteriza  $\Delta Z_{0_{ef}}$  para não uniformidades com diferentes distâncias de correlação: —  $\sqrt{\mathbb{V}[\Delta Z_0(x)]} = 0,5 \Omega$  e  $d_c = 1 m$ ; - -  $\sqrt{\mathbb{V}[\Delta Z_0(x)]} = 0,5 \Omega$  e  $d_c = 0,1 m$ .

## 6.4 Principais Resultados

Uma linha de transmissão de comprimento  $l$  com não uniformidades intrínsecas é equivalente a uma linha de transmissão uniforme de mesmo comprimento, cuja relação entre as tensões  $V$  e correntes  $I$  em seus terminais é dada por

$$\begin{bmatrix} V(0) \\ I(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh(\gamma_{ef} l) & Z_{0_{ef}} \sinh(\gamma_{ef} l) \\ \frac{\sinh(\gamma_{ef} l)}{Z_{0_{ef}}} & \cosh(\gamma_{ef} l) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V(l) \\ I(l) \end{bmatrix}, \quad (6.27)$$

onde  $\gamma_{ef}$  e  $Z_{0_{ef}}$  são os seus parâmetros secundários efetivos, obtidos por

$$\gamma_{ef} = \bar{\gamma} \quad (6.28)$$

e

$$Z_{0_{ef}} = \bar{Z}_0 + \Delta Z_{0_{ef}}. \quad (6.29)$$

Nestas equações, os termos de comportamento médios  $\bar{\gamma}$  e  $\bar{Z}_0$  correspondem aos parâmetros secundários da linha de transmissão sem as não uniformidades, portanto são funções das características construtivas da linha e podem ser determinados por modelos de linha de transmissão uniforme, como os apresentados nos Capítulos 3 e 4. Já o termo  $\Delta Z_{0_{ef}}$  é função das não uniformidades intrínsecas na linha e pode ser representado por um processo estocástico gaussiano de média zero e autocorrelação

$$\mathbb{R}[\Delta Z_{0_{ef}}](\omega_1, \omega_2) = 4 \frac{\bar{\gamma}(\omega_1)\bar{\gamma}^*(\omega_2)}{\bar{\gamma}(\omega_1) + \bar{\gamma}^*(\omega_2)} \frac{d_c[1 + d_c(\bar{\gamma}(\omega_1) + \bar{\gamma}^*(\omega_2))]}{(1 + 2d_c\bar{\gamma}(\omega_1))(1 + 2d_c\bar{\gamma}^*(\omega_2))} \cdot \mathbb{V}[\Delta Z_0(x)], \quad (6.30)$$

sendo os parâmetros  $\mathbb{V}[\Delta Z_0(x)]$  e  $d_c$  relacionados respectivamente à amplitude e à rapidez das variações das não uniformidades ao longo da linha.

## 6.5 Conclusões

Neste capítulo foi desenvolvido um modelo para os parâmetros secundários de uma linha de transmissão que considera o efeito de pequenas variações randômicas nas características construtivas da linha ao longo de seu comprimento. Neste modelo a constante de propagação da linha não é afetada por essas variações randômicas, mas sim a impedância característica, representada por um processo estocástico gaussiano e não estacionário caracterizado por apenas dois parâmetros reais. A variância desse processo estocástico é uma função da frequência, sendo máxima na frequência cujo comprimento de onda associado é aproximadamente sete vezes maior que a distância de correlação dessas variações randômicas ao longo da linha.

# CAPÍTULO 7

## AVALIAÇÃO DOS MODELOS DE PAR- TRANÇADO

Neste capítulo o objetivo é avaliar, tanto por simulações numéricas quanto por medições, o modelo de par-trançado desenvolvido nos Capítulos 4 e 6. A avaliação será dividida em duas partes. Na Seção 7.1 avaliar-se-á a componente determinística desse modelo, que foi desenvolvida no Capítulo 4. Já na Seção 7.2 avaliar-se-á a componente estocástica, desenvolvida no Capítulo 6. Na Seção 7.3 encontram-se as conclusões gerais dessa avaliação.

### 7.1 Componente Determinística

Nesta seção o modelo determinístico proposto no Capítulo 4 será comparado com os modelos da literatura apresentados na Seção 3.5. A base de comparação será simulações numéricas obtidas pelo OptEM Cable Designer [62], um software comercial utilizado por fabricantes de cabos para projetos e simulações de desempenho de cabos metálicos.

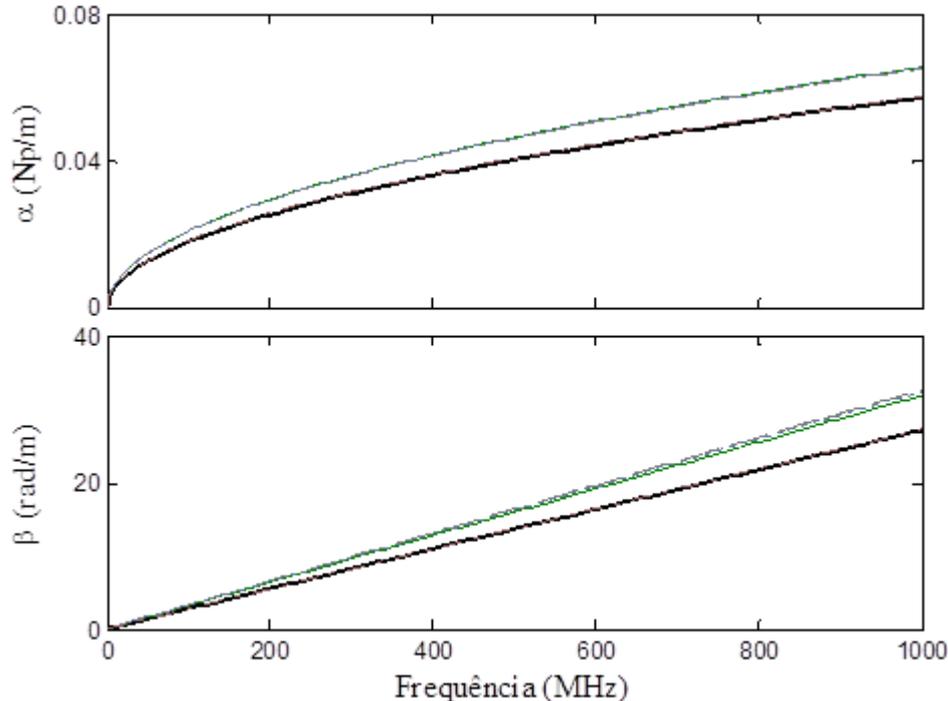
Na Tabela 7.1 encontram-se as características construtivas de três pares-trançados que foram simulados pelo OptEM. Os condutores desses pares foram definidos como sendo de cobre com diâmetros de  $0,5\text{ mm}$ . Para o par-trançado 2, a espessura  $s$  do revestimento isolante foi definida como sendo 40 % do diâmetro dos condutores, relação considerada típica (veja o Apêndice B). Já os pares-trançados 1 e 3 são casos extremos, com espessuras  $s$  definidas respectivamente como sendo 10 % (condutores próximos) e 110 % (condutores distantes) do diâmetro dos condutores. Os materiais dielétricos definidos para o revestimento isolante são respectivamente os polímeros de baixas perdas: polipropileno, polietileno e

teflon, comumente usados na fabricação de cabos. Não foram consideradas perdas dielétricas, uma vez que o OptEM não disponibiliza as curvas de dispersão para esses materiais. As taxas de trançados definidas abrangem uma faixa correspondente a cabos de baixa imunidade eletromagnética (categoria 3) à cabos de alta imunidade (categoria 7).

**Tabela 7.1 – Características construtivas dos três pares-trançados simulados pelo OptEM.**

Características construtivas		Pares-trançados		
		1	2	3
Trançado	$\nu$ (tranças/m)	40	70	100
	$s$ (mm)	0,05	0,2	0,55
Isolantes	$\epsilon_r$	2,1	2,3	2,2
	$d$ (mm)	0,5		
Condutores	$\sigma$ (S/m)	$5,8 \times 10^7$		

Apenas para comparação visual, nas Figuras 7.1 e 7.2 encontram-se as curvas de parâmetros secundários do par-trançado 2, obtidas por simulações numéricas a partir do OptEM e pelos diferentes modelos analíticos. Já na Tabela 7.2 encontram-se os desvios percentuais médios, na faixa de frequência de 0 à 1 GHz, desses modelos analíticos em relação às simulações numéricas para os três pares-trançados.



**Figura 7.1 – Constante de propagação: — Simulação numérica; — Modelo VUB; --- Modelo VT; ..... Modelo NASA; -.-.- Modelo UFPA.**

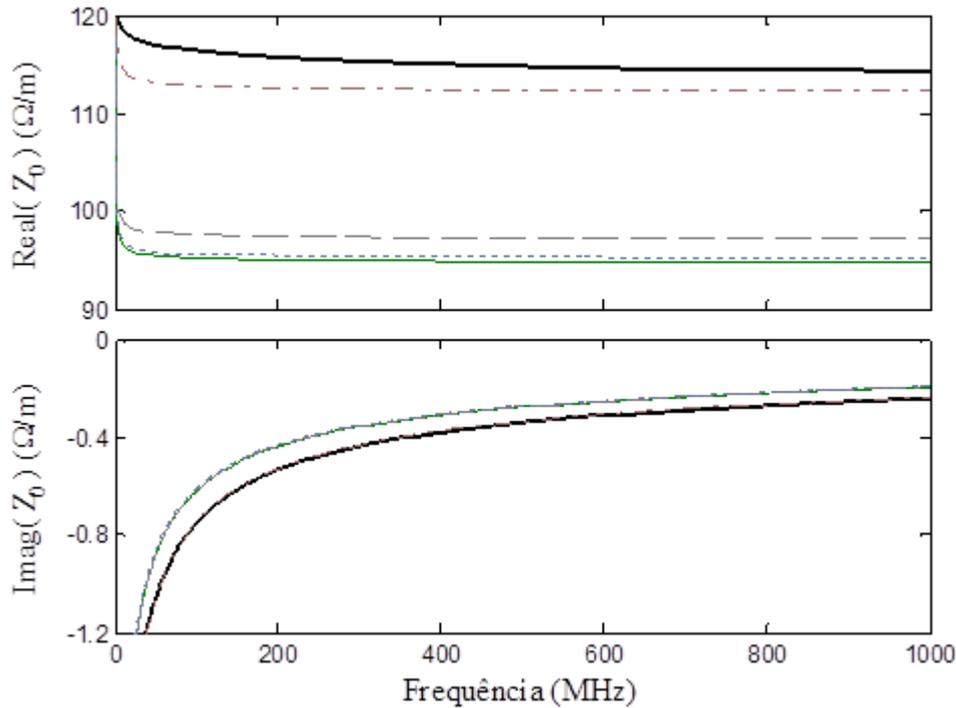


Figura 7.2 – Impedância característica: — Simulação numérica; — Modelo VUB; -- Modelo VT; .... Modelo NASA; -.-.- Modelo UFPA.

Tabela 7.2 – Desvio médio dos modelos analíticos em relação as simulações numéricas para os pares 1, 2 e 3.

Par-trançado	Parâmetros secundários	Desvio (%)			
		VUB	VT	NASA	UFPA
1	$\alpha$	4,4	29,1	7,4	7,4
	$\beta$	24,1	21,3	20,3	1,3
	$Real\{Z_0\}$	19,6	21,4	14,5	6,5
	$Imag\{Z_0\}$	32,4	16,4	34,2	1,0
2	$\alpha$	14,5	14,1	14,3	0,6
	$\beta$	17,9	20,9	20,0	1,1
	$Real\{Z_0\}$	16,8	14,7	16,5	1,4
	$Imag\{Z_0\}$	19,2	19,5	20,5	2,2
3	$\alpha$	4,3	11,3	6,3	6,0
	$\beta$	7,5	16,3	20,3	5,4
	$Real\{Z_0\}$	8,1	0,6	8,1	4,9
	$Imag\{Z_0\}$	18,2	24,1	18,9	6,5

Note que de um modo geral o modelo proposto é o que melhor se ajusta às simulações numéricas, apresentando os menores desvios. Isso é devido principalmente à modelagem da permissividade efetiva. Enquanto que nos modelos da literatura a permissividade do meio dielétrico é considerada como sendo equivalente aos da Tabela 7.1, no modelo proposto essa permissividade é obtida de acordo com a equação (4.10), o que neste caso resulta nos valores

efetivos 1,46, 1,63 e 1,69, respectivamente. No caso do par-trançado 1, em que os condutores são muito próximos, o efeito de proximidade é mais acentuado em relação aos outros pares, portanto os erros de modelagem relativos a esse efeito também tornam-se mais acentuados, contribuindo significativamente para o erro total dos modelos. Além disso, a equação (4.10) para a permissividade efetiva possui menor exatidão para condutores muito próximos (veja a Figura 4.8). Esses fatores implicam em erros maiores do modelo proposto para o par-trançado 1 em relação ao 2 que é um par típico. Similarmente, o modelo proposto apresenta erros maiores para o par-trançado 3 em relação ao 2. Porém nesse caso provavelmente isso é devido ao efeito do trançado, cuja taxa é maior no par-trançado 3 em relação aos outros pares.

## 7.2 Componente Estocástica

No Capítulo 6 foi desenvolvido um modelo que descreve as variações randômicas em torno do comportamento médio da impedância característica de um par-trançado real. Essas variações randômicas foram caracterizadas por um processo estocástico gaussiano não estacionário e de média nula. Também se supôs que esse tipo de variação é insignificante na constante de propagação, ocorrendo apenas na impedância característica. Nessa seção a validade dessas suposições será avaliada com base em análise estatística de medições de todos os pares-trançados de dois cabos telefônicos, o TEL 313 com 30 pares e o TEL 481 com 16 pares. Outros detalhes relevantes sobre esses dois cabos encontram-se na Tabela 7.3. A campanha de medições foi realizada no Laboratório de Inovação em Telecomunicações (LABIT) da Universidade Federal do Pará (UFPA).

**Tabela 7.3 – Características dos cabos de pares-trançados utilizado nas medições.**

<b>Características</b>	<b>TEL 313 0005/030</b>	<b>TEL 481 02/016</b>
Número de pares	30	16
Condutor (diâmetro)	Cobre (0,5 <i>mm</i> )	Cobre (0,4 <i>mm</i> )
Isolante	Polietileno	Polietileno
Impedância nominal	120 $\Omega$	120 $\Omega$
Comprimento	200 <i>m</i>	61 <i>m</i>
Fabricante	Ericsson AB	Ericsson AB

Na Figura 7.3 encontram-se as partes resistivas das medições de impedância característica de cada um dos 46 pares-trançados de ambos os cabos.

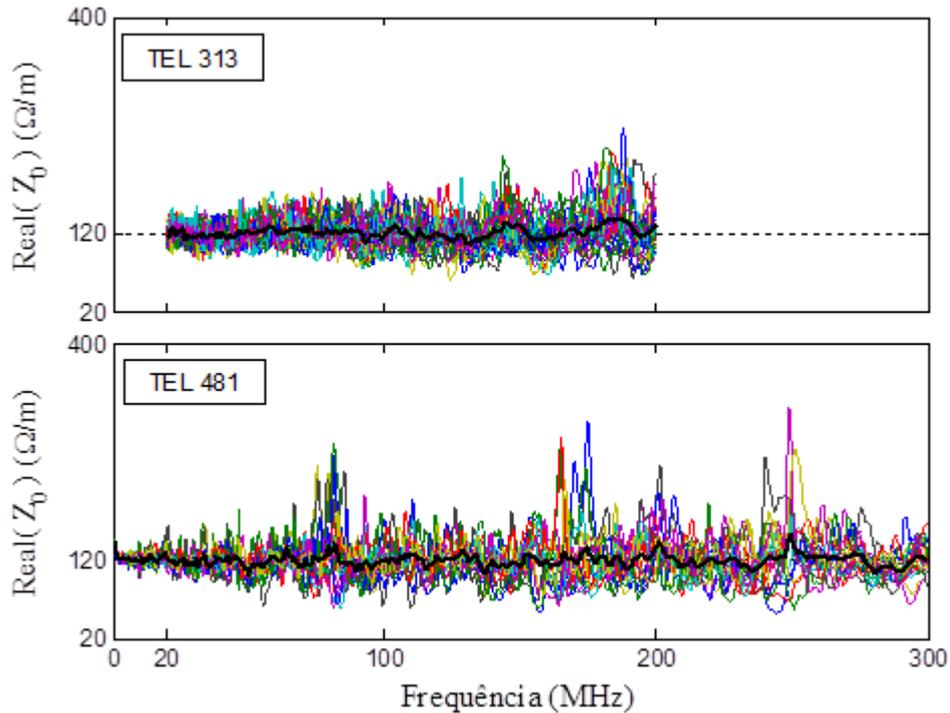


Figura 7.3 – Medições da parte resistiva da impedância característica de todos os pares-trançados dos cabos TEL 313 e TEL 481: — Medições; — Média estatística.

Note que a média estatística dessas medições tende a impedância nominal, que é de  $120 \Omega$  para ambos os cabos. O que está de acordo com o modelo estocástico proposto, cuja média estatística das variações em torno da impedância nominal é nula. Outra previsão do modelo proposto é sobre a não estacionariedade dessas variações. Isso se torna evidente na Figura 7.4, onde se observa que o desvio padrão dessas medições varia com a frequência.

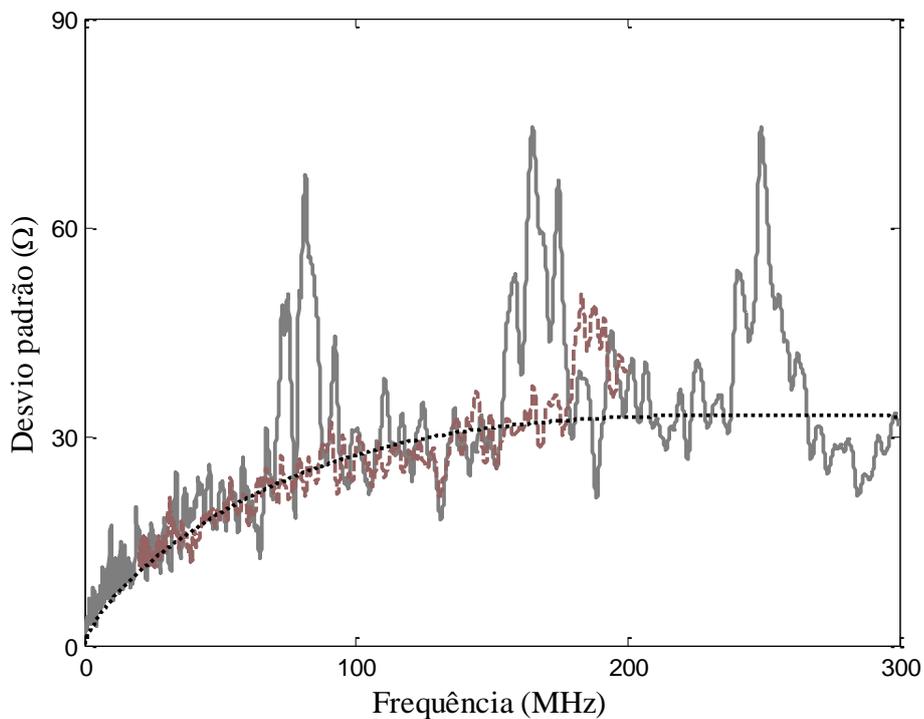
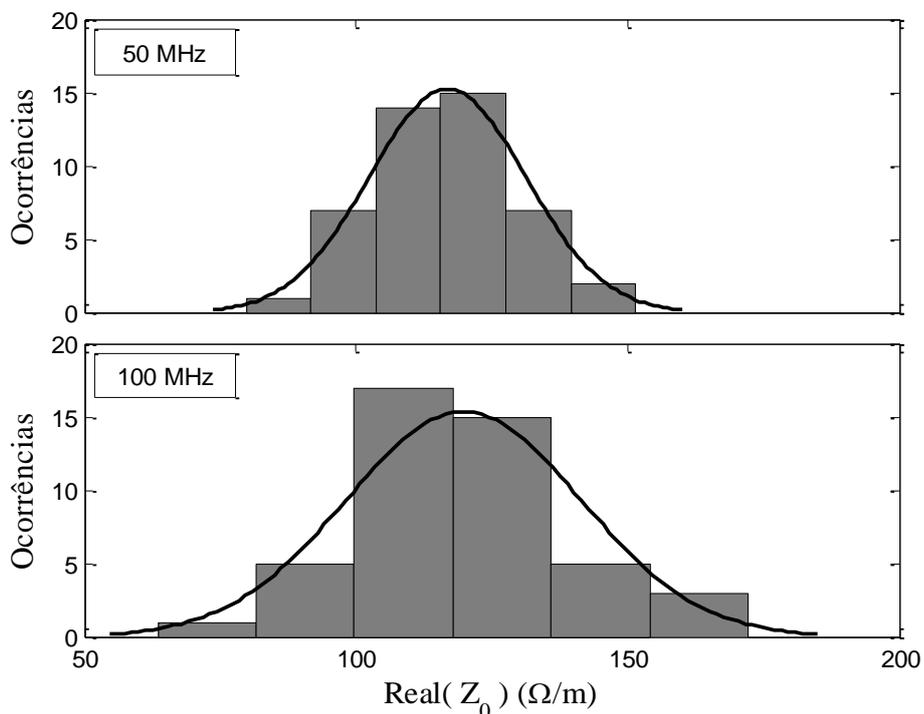


Figura 7.4 – Desvio padrão das medições de impedância característica por tom de frequência: — TEL 481; - - TEL 313; .... Curva de ajuste.

Nessa figura, a curva pontilhada foi obtida pelo ajuste do desvio padrão referente ao cabo TEL 481 à raiz quadrada da equação de variância em (6.22). Através desse ajuste foi possível estimar o desvio padrão e a distância de correlação das imperfeições ao longo do cabo, obtendo-se respectivamente  $\sqrt{\mathbb{V}[\Delta Z_0(x)]} = 3,7 \Omega$  e  $d_c = 10 \text{ cm}$ . Embora seja difícil a verificação experimental direta desses valores estimados, o desvio padrão obtido para essas imperfeições é considerado factível para as tolerâncias de fabricação, sendo de aproximadamente 3 % do valor nominal de  $120 \Omega$ . É interessante observar que imperfeições de 3 % ao longo do cabo ocasionam variações nas medições de quase 30 % – veja a Figura 7.4. Note também, nas Figuras 7.3 e 7.4, que os cabos TEL 313 e TEL 481 apresentam o mesmo comportamento com a frequência para a média e o desvio padrão<sup>1</sup> de suas medições, respectivamente. Provavelmente isso ocorre porque embora esses cabos sejam diferentes, na Tabela 7.3 verifica-se que são oriundos de um mesmo fabricante e utilizam os mesmos materiais, etc., ou seja, foram sujeitos as mesmas fontes de imperfeições. Outra suposição do modelo é que a distribuição de probabilidade das amostras de impedância característica por tom de frequência é gaussiana. Na Figura 7.5 encontram-se histogramas dessas amostras nas frequências de 50 e 100 MHz.



**Figura 7.5 – Histograma das amostras da parte resistiva das medições de impedância característica, nas frequências de 50 e 100 MHz.**

<sup>1</sup> Na verdade existem três ressonâncias nas curvas referentes ao cabo TEL 481 (nas frequências de 80, 165 e 250 MHz) e que não existem nas curvas referentes ao cabo TEL 313. Provavelmente são oriundas de outros tipos de não uniformidade que não são intrínsecas ao cabo, portanto não serão levadas em consideração.

Para gerar esses histogramas foram consideradas todas as 46 amostras de ambos os cabos<sup>1</sup>. Note que a distribuição gaussiana parece ser uma suposição aceitável, o que está de acordo com o modelo proposto.

Finalmente, como exemplo, na Figura 7.6 encontram-se 30 simulações do modelo estocástico proposto, correspondentes ao cabo TEL 313, e 16 simulações correspondentes ao cabo TEL 481. Note que o número de simulações escolhido para cada cabo é equivalente aos seus respectivos número de pares-trançados, veja a Tabela 7.3. Para as simulações do cabo TEL 481 foram considerados  $\sqrt{\mathbb{V}[\Delta Z_0(x)]} = 3,7 \Omega$  e  $d_c = 10 \text{ cm}$ , os mesmos valores que haviam sido ajustados anteriormente. Já para o cabo TEL 313 foram considerados  $\sqrt{\mathbb{V}[\Delta Z_0(x)]} = 3,2 \Omega$  e  $d_c = 10 \text{ cm}$ , valores obtidos por ajuste de forma similar ao realizado para o cabo TEL 313. Note a similaridade das simulações na Figura 7.6 com as medições na Figura 7.3, o que também demonstra a eficácia do modelo proposto.

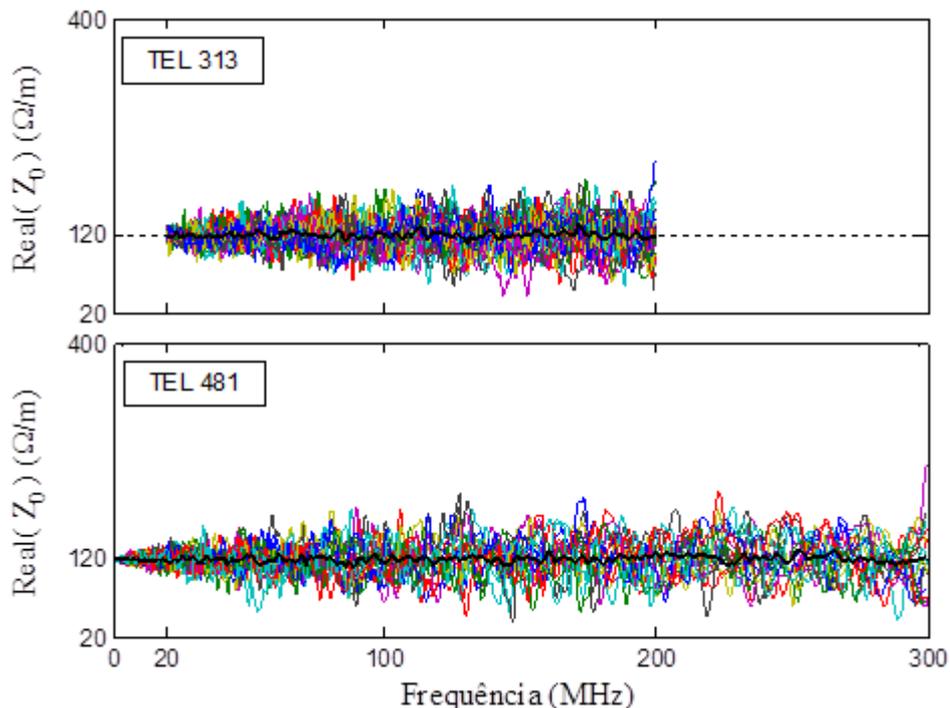


Figura 7.6 – Simulações da parte resistiva da impedância característica de 46 pares-trançados, equivalentes as dos cabos TEL 313 e TEL 481: — Simulações; — Média estatística.

Com relação a constante de propagação, no modelo proposto supõe-se que ela não apresenta variações randômicas significativas em torno de seu comportamento médio. Isso pode ser constatado na Figura 7.7, onde se observa coeficiente de variação de Pearson por tom de frequência para as medições da constante de propagação e da impedância característica, referentes ao cabo TEL 481. O coeficiente de variação basicamente expressa o desvio padrão

<sup>1</sup> As amostras de cada cabo isoladamente são insuficientes para gerar um histograma representativo. Além disso, supõe-se que esses cabos foram sujeitos as mesmas fontes de imperfeições, portanto é aceitável considerar todas as 46 amostras para o histograma.

como uma porcentagem da média, quanto menor o seu valor menor é a variabilidade dos dados. Note que para a constante de propagação esse coeficiente é na ordem de 100 vezes menor que para a impedância característica. Portanto a constante de propagação apresenta pouca variabilidade em relação ao seu comportamento médio, o que está de acordo com o modelo proposto.

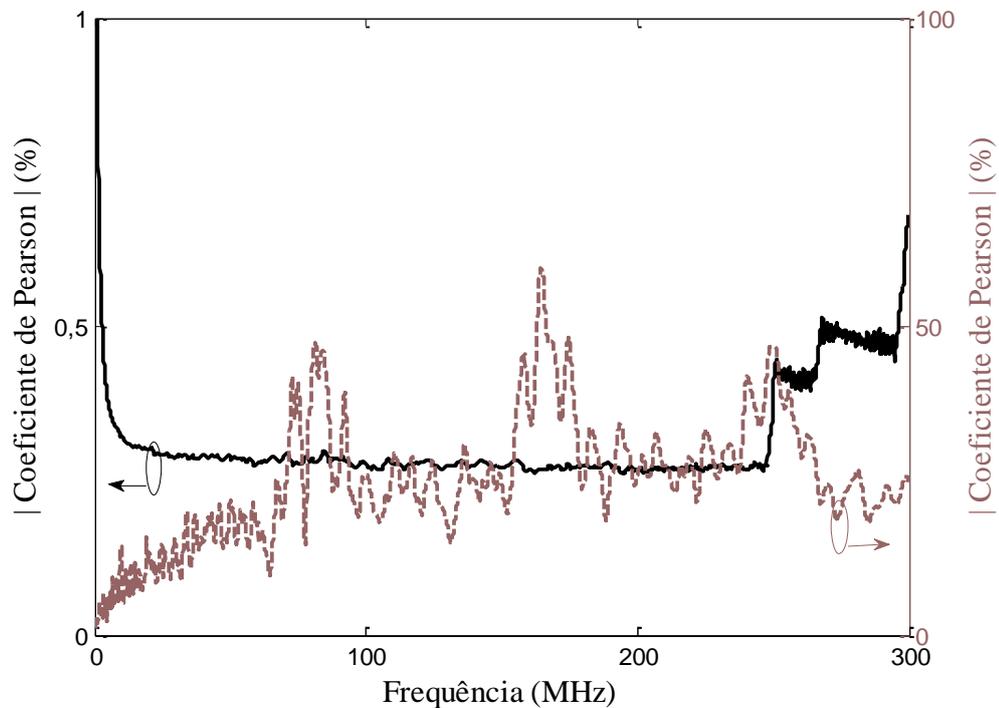


Figura 7.7 – Coeficiente de variação de Pearson para as medições do cabo TEL 481: — Constante e propagação; -- Impedância característica.

### 7.3 Conclusões

Neste capítulo foi avaliado o modelo de par-trançado desenvolvido nesta tese. Através de simulações numéricas mostrou-se que a componente determinística desse modelo apresenta erros menores que modelos similares encontrados na literatura. Além disso, através de uma análise estatística de diversas medições de um mesmo tipo de par-trançado mostrou-se que a componente estocástica desse modelo proposto é compatível com as observações experimentais.

## CAPÍTULO 8

### CONSIDERAÇÕES FINAIS

De um modo geral nesta tese desenvolveu-se um modelo que determina as propriedades de transmissão de um par-trançado, em uma ampla faixa de frequência. Esse modelo é composto por duas componentes, uma determinística que é função das características construtivas do par-trançado, e uma estocástica que é função dos defeitos inerentes a essas características construtivas ao longo do comprimento do par-trançado. Com relação a componente determinística, o diferencial do modelo proposto é levar em consideração de maneira mais realística e simples um conjunto de fenômenos que ou são desprezados ou excessivamente simplificados por outros modelos similares encontrados na literatura. Como consequência disso, o modelo proposto apresenta maior exatidão quando comparados a esses modelos. Com relação a componente estocástica, não foram encontradas na literatura modelos similares para comparação, mesmo assim mostrou-se que o modelo estocástico proposto apresenta uma boa concordância com a observação experimental. Uma peculiaridade relacionada a esse modelo estocástico é que ele não foi desenvolvido de forma empírica, com base em análise estatística de medições de parâmetros secundários de um grande número de pares-trançados, e sim com base em um pequeno número de premissas intuídas de forma indireta e que são relativas aos defeitos nas características construtivas ao longo do comprimento do par-trançado. Além disso, essas premissas, a teoria e outras considerações utilizadas para desenvolver o modelo estocástico não se limitam ao par-trançado, portanto, em tese esse modelo é válido para todas as linhas de transmissão.

Outra contribuição do autor foi mostrar que qualquer linha de transmissão não uniforme pode ser completamente caracterizada por três parâmetros efetivos, definidos por generalizações de propriedades relacionadas a linhas de transmissão uniforme. Além disso, através de métodos de perturbações, derivaram-se equações que relacionam esses parâmetros efetivos com o padrão de não uniformidades ao longo da linha de transmissão. Essas equações

são aproximações de primeira ordem e estão na forma de simples integrais de Fredholm do primeiro tipo. Foram essas equações e a definição desses parâmetros efetivos que possibilitaram o desenvolvimento do modelo estocástico descrito anteriormente. No entanto elas também podem ser úteis para outras aplicações, relacionadas à análise e projeto de linhas de transmissão não uniforme, como exemplo veja os estudos de caso na Seção 5.4.

## 8.1 Trabalhos Futuros

O modelo de par-trançado desenvolvido nesta tese é um modelo canônico, em que o par estaria isolado de outras influências externas. Na prática um par-trançado geralmente está incluso em um cabo com diversos outros pares que de certa forma influenciam em suas características de transmissão. Esse acoplamento entre pares-trançados é função de diversos fatores, como a distância entre eles, as suas taxas de trançado, as não uniformidades ao longo de seu comprimento, etc. Portanto, uma extensão natural desta tese seria desenvolver modelos para multipares-trançados.

Outra questão é a respeito da quebra do princípio de conservação de energia das aproximações de primeira ordem desenvolvidas no Capítulo 5, que de certa forma também impacta no modelo estocástico desenvolvido no Capítulo 6, uma vez que este modelo foi derivado dessas aproximações. Já é conhecido que aproximações de primeira ordem quebram esse princípio, pois o próprio conceito de energia está atrelado a termos de segunda ordem (energia  $\propto V^2, I^2$ ). Portanto, outra possível extensão desta tese é relacionar os parâmetros efetivos com o padrão de não uniformidade de linhas de transmissão através de aproximações de segunda ordem. Isso implicaria em uma correção no modelo estocástico já desenvolvido, de modo que este possa ser utilizado também para contabilizar perdas. Por exemplo, esse modelo poderia ser usado para contabilizar o acréscimo nas perdas em uma microstrip devido à rugosidade na superfície de contato entre as placas condutoras e o substrato. Atualmente para isso são usados modelos empíricos, como o de Hammerstad [63].

## REFERÊNCIAS

- [1] BROADBAND COMMISSION FOR DIGITAL DEVELOPMENT. **The State of Broadband 2015**. ITU e UNESCO. [S.l.], p. 100. 2015.
- [2] ÖDLING, P.; ET AL. The fourth generation broadband concept. **Communications Magazine, IEEE**, v. 47, n. 1, p. 62-69, 2009.
- [3] VAN DEN BRINK, R. F. **Enabling 4GBB via the last copper drop of a hybrid FttH deployment**. [S.l.]. 2011.
- [4] MAES, J.; NUZMAN, C. J. The Past, Present, and Future of Copper Access. **Bell Labs Technical Journal**, v. 20, p. 1-10, 2015.
- [5] TIMMERS, M.; ET AL. G.fast: Evolving the copper access network. **Communications Magazine, IEEE**, v. 51, n. 8, p. 74-79, 2013.
- [6] VAN DEN BRINK, R. F. **Cable reference models for simulating metallic access networks**. ETSI/STC TM6 contribution 970p02r3. [S.l.]. 1998.
- [7] BOETS, P.; BIESSEN, L. V. **Metallic 2-Wire Parametric Line Models - A Survey**. XVIII IMEKO World Congress. Rio de Janeiro: [s.n.]. September 2006. p. 17-22.
- [8] YOHO, J. **Physically-Based Realizable Modeling and Network Synthesis of Subscriber Loops Utilized in DSL Technology**. Virginia Polytechnic Institute. Virginia, EUA. 2001.
- [9] TNO. **G.fast: Wideband modeling of twisted pair cables as two-ports**. ITU-T contribution, temporary document 11GS3-028. [S.l.]. 2011.
- [10] TNO. **G.fast: The need for wideband reference models of loop segments with in twisted-pair cable topologies**. ITU-T contribution, temporary document 11BM-020. [S.l.]. 2011.
- [11] ALCATEL-LUCENT. **G.fast: Observations On Channel Characteristics Measurements**. ITU-T contribution, temporary document 11BM-048. [S.l.]. 2011.

- [12] COPPERGATE. **G.fast: G.hn performance preliminary predictions**. ITU-T contribution, temporary document 11BM-071. [S.l.]. 2011.
- [13] LAFATA, P. Accurate low complexity modeling of twisted pairs suitable for G.fast frequencies. **International Journal of Communication Systems**, 2015.
- [14] ACATAUASSU, D.; ET AL. Simple and Causal Copper Cable Model Suitable for G.fast Frequencies. **Communications, IEEE Transactions on**, v. 62, n. 11, p. 4040-4051, 2014.
- [15] SCHUET, S. R.; TIMUÇIN, D. A.; WHEELER, K. R. **Shielded-twisted-pair Cable Model for Chafe Fault Detection Via Time-domain Reflectometry**. National Aeronautics and Space Administration. Ames Research Center Moffett Field, California. 2012.
- [16] BEN HASSEN, W. **Étude de stratégies de diagnostic embarqué des réseaux filaires complexes**. Institut National Polytechnique de Toulouse. [S.l.]. 2014.
- [17] SLENSKI, G. **Aircraft Wiring System Integrity Initiatives**. Air Force Research Laboratory, AFRL/MLSA WPAFB, OH 45433. [S.l.]. 2000.
- [18] SCHUET, S.; TIMUCIN, D.; WHEELER, K. Physics-Based Precursor Wiring Diagnostics for Shielded-Twisted-Pair Cable. **Instrumentation and Measurement, IEEE Transactions on**, v. 64, n. 2, p. 378-391, 2015.
- [19] WHEELER, K. R. **Aging aircraft wiring fault detection survey**. NASA Ames Research Center. [S.l.]. 2007.
- [20] EL SAHMARANY, L. **Méthodes d'amélioration pour le diagnostic de câble par réflectométrie**. Université Blaise Pascal-Clermont-Ferrand II. [S.l.]. 2013.
- [21] PAUL, C. R. **Analysis of Multiconductor Transmission Lines**. 2<sup>a</sup>. ed. [S.l.]: Wiley-IEEE Press, 2007.
- [22] JOHNSON, W. C. **Transmission lines and networks**. [S.l.]: McGraw-Hill Electrical and Electronical Engineering Series, v. 1, 1963.
- [23] COLLIN, R. E. **Foundations for microwave engineering**. 2<sup>a</sup>. ed. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2007.
- [24] PIPES, L. A. Steady-State Analysis of Multiconductor Transmission Lines. **Journal of Applied Physics**, v. 12, n. 11, p. 782-799, 1941.
- [25] BURROWS, C. The Exponential Transmission Line\*. **Bell System Technical Journal**,

- v. 17, n. 4, p. 555-573, 1938.
- [26] RUSTOGI, O. P. Linearly Tapered Transmission Line and Its Application in Microwaves (Correspondence). **Microwave Theory and Techniques, IEEE Transactions on**, v. 17, n. 3, p. 166-168, 1969.
- [27] CURTINS, H.; SHAH, A. V. Step Response of Lossless Nonuniform Transmission Lines with Power-Law Characteristic Impedance Function (Short Paper). **Microwave Theory and Techniques, IEEE Transactions on**, v. 33, n. 11, p. 1210-1212, 1985.
- [28] FRICKEY, D. A. Conversions between S, Z, Y, H, ABCD, and T parameters which are valid for complex source and load impedances. **IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques**, v. 42, n. 2, 1994.
- [29] KARIMI, K. A Brief Introduction to Temporality and Causality. **arXiv preprint arXiv:1007.2449**, 2010.
- [30] PAPOULIS, A. **The Fourier integral and its applications**. [S.l.]: McGraw-Hill, 1962.
- [31] PIMENTEL, C. J. L. **Comunicação Digital**. [S.l.]: Brasport, 2007.
- [32] JOHNSON, H. W.; GRAHAM, M. **High-speed signal propagation: advanced black magic**. [S.l.]: Prentice Hall Professional, 2003.
- [33] ITU-T. **Test procedures for digital subscriber line (DSL) transceivers - Recommendation G.996.1**. International Telecommunication Union - ITU. [S.l.]. 2001.
- [34] LAGO, A.; ET AL. Geometric analysis and manufacturing considerations for optimizing the characteristics of a twisted pair. **Electronics Packaging Manufacturing, IEEE Transactions on**, v. 32, n. 1, p. 22-31, 2009.
- [35] MIE, G. **Elektrische Wellen an zwei parallelen Drähten**. Annalen der Physik. [S.l.]: [s.n.]. 1900. p. 201-249.
- [36] CARSON, J. R. Wave propagation over parallel wires: The proximity effect. **Philosophical Magazine**, v. 41, n. 244, p. 607-633, 1921.
- [37] BUTTERWORTH, S. Eddy-current losses in cylindrical conductors, with special applications to the alternating current resistances of short coils. **Philosophical Transactions of the Royal Society of London**, p. 57-100, 1922.
- [38] ARNOLD, A. H. M. The alternating-current resistance of parallel conductors of circular

- cross-section. **Electrical Engineers, Journal of the Institution of**, v. 77, n. 463, p. 49-58, 1935.
- [39] BELEVITCH, V. Theory of the proximity effect in multiwire cables—Part I. **Philips Res. Rep.**, v. 32, n. 1, p. 16-43, 1977.
- [40] WHEELER, H. Formulas for the skin effect. **Proceedings of the IRE**, v. 30, n. 9, p. 412-424, 1942.
- [41] LAGO, A.; ET AL. Electrical Design Automation of a Twisted Pair to Optimize the Manufacturing Process. **Components, Packaging and Manufacturing Technology, IEEE Transactions on**, v. 1, n. 8, p. 1269-1281, 2011.
- [42] LEFFERSON, P. Twisted magnet wire transmission line. **IEEE Transactions on Parts Hybrids and Packaging**, v. 7, n. 4, p. 148-154, 1971.
- [43] BAKER-JARVIS, J.; KIM, S. The interaction of radio-frequency fields with dielectric materials at macroscopic to mesoscopic scales. **Journal of Research of the National Institute of Standards and Technology**, v. 117, p. 1-60, 2012.
- [44] DEBYE, P. J. W. Polar molecules. **Chemical Catalog Company, Incorporated**, v. 48, n. 43, p. 1036–1037, 1929.
- [45] JONSCHER, A. K. **Dielectric Relaxation in Solids**. [S.l.]: Chelsea Dielectrics Press Limited, 1983.
- [46] COLE, K. S.; COLE, R. H. Dispersion and absorption in dielectrics I. Alternating current characteristics. **The Journal of Chemical Physics**, v. 9, n. 4, p. 341-351, 1941.
- [47] DAVIDSON, D. W.; COLE, R. H. Dielectric relaxation in glycerol, propylene glycol, and n-propanol. **The Journal of Chemical Physics**, v. 19, n. 12, p. 1484-1490, 1951.
- [48] HAVRILIAK, S.; NEGAMI, S. A complex plane representation of dielectric and mechanical relaxation processes in some polymers. **Polymer**, v. 8, p. 161-210.
- [49] YEH, P.; YARIV, A.; HONG, C.-S. Electromagnetic propagation in periodic stratified media. I. General theory. **Journal of the Optical Society of America**, v. 67, n. 4, p. 423-438, 1977.
- [50] ANSOFT CORP. **Maxwell 2D- Electromagnetic Field Simulation Student Version**. [S.l.]: [s.n.], 2002.

- [51] BUR, A. J. Dielectric properties of polymers at microwave frequencies: a review. **Polymer**, v. 26, n. 7, p. 963-977, 1985.
- [52] BUTKOV, E. **Física matemática**. [S.l.]: Livros Técnicos e Científicos, 1988.
- [53] BORGES, G. S. **Effect of periodic cable nonuniformities on transmission measurements**. Instrumentation and Measurement Technology Conference (I2MTC). [S.l.]: [s.n.]. 2015. p. 315-319.
- [54] BORGES, G.; ET AL. Simulator of Nonuniformities in Twisted-pair Cables. **Journal of Microwaves, Optoelectronics and Electromagnetic Applications (JMoe)**, v. 13, p. 29-38, 2014.
- [55] TSANG, L.; GU, X.; BRAUNISCH, H. Effects of random rough surface on absorption by conductors at microwave frequencies. **Microwave and Wireless Components Letters**, v. 16, n. 4, p. 221-223, 2006.
- [56] GROETSCH, C. W. **The theory of Tikhonov regularization for Fredholm equations of the first kind**. [S.l.]: [s.n.], 1984.
- [57] ENGL, H. W.; GROETSCH, C. W. ( . ). **Inverse and ill-posed problems**. [S.l.]: Elsevier, 2014.
- [58] TIKHONOV, A. N.; ET AL. **Numerical methods for the solution of ill-posed problems**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, v. 328, 2013.
- [59] PAPOULIS, ; PILLAI, S. U. **Probability, Random Variables and Stochastic Processes**. 4<sup>a</sup>. ed. [S.l.]: McGraw-Hill, 2002.
- [60] DOOB, J. L. **The Brownian movement and stochastic equations**. Annals of Mathematics. [S.l.]: [s.n.]. 1942. p. 351-369.
- [61] DESERNO, M. **How to generate exponentially correlated Gaussian random numbers**. [S.l.]: [s.n.]. 2002. p. 1-2.
- [62] OPTEM ENGINEERING INC. Disponível em: <<http://www.optem.com/cable-designer.php>>. Acesso em: 2016.
- [63] HAMMERSTAD, E.; JENSEN, O. **Accurate models for microstrip computer-aided design**. IEEE MTT-S International Microwave Symposium Digest. [S.l.]: [s.n.]. 1980. p. 407-409.
- [64] BOLINDER, E. F. Fourier transforms and tapered transmission lines. **Proceedings of the Institute of Radio Engineers**, v. 44, n. 4, p. 557-557, 1956.

# APÊNDICE A

## PUBLICAÇÕES NO PERÍODO

1. BORGES, G. S. **Effect of periodic cable nonuniformities on transmission measurements.** Instrumentation and Measurement Technology Conference (I2MTC). [S.l.]: [s.n.]. 2015. p. 315-319.
2. PINHEIRO, M. R.; BORGES, G. S.; ET AL. **Empirical Model for LTE Outdoor Planning Using a Hybrid Approach: Measuring and the Genetic Algorithm Technique.** International Conference on Digital Information Processing, Data Mining, and Wireless Communications (DIPDMWC). [S.l.]: [s.n.]. 2015. p. 85-92
3. BORGES, G. S.; ET AL. Simulator of Nonuniformities in Twisted-pair Cables. **Journal of Microwaves, Optoelectronics and Electromagnetic Applications (JMoe)**, v. 13, p. 29-38, 2014.
4. CUNHA, J. R. A.; ALCÂNTARA, P.; BRÍGIDA, A. S.; BORGES, G. S.; COSTA, J. W. New approach to the strain analysis of bragg grating sensors. **Photonic Sensors (Online)**, v. 3, p. 74-80, 2013.
5. FARIAS, F. S.; BORGES, G. S.; ET AL. **Noise estimation in DSL systems using linear regression.** International Conference on Advanced Technologies for Communications (ATC). [S.l.]: [s.n.]. 2013. p. 291-294.
6. FARIAS, F. S.; BORGES, G. S.; ET AL. **Real-time noise identification in DSL systems using computational intelligence algorithms.** International Conference on Advanced Technologies for Communications (ATC). [S.l.]: [s.n.]. 2013. p. 252-255.
7. FARIAS, F. S.; MORITSUKA, N. S.; BORGES, G. S.; ET AL. **Noise estimation proposal for real time DSL systems using linear regression and fuzzy systems.** IEEE International Instrumentation and Measurement Technology Conference

(I2MTC). [S.l.]: [s.n.]. 2012. p. 759-762.

8. FARIAS, F. S.; BORGES, G. S.; ET AL. **Método de Identificação de Ruído em Redes DSL usando Rede Neural Artificial.** XXX Simpósio Brasileiro de Telecomunicações (SBrT). [S.l.]: [s.n.]. 2012.

## APÊNDICE B

### CARACTERÍSTICAS DE PARES-TRANÇADOS COMERCIAIS

Na Tabela B.1 encontra-se uma compilação das características construtivas de 37 pares-trançados disponíveis comercialmente, obtidas de seus respectivos *datasheet* no site do fabricante. Os condutores são todos de cobre e não foram encontradas informações a respeito das taxas de trançado.

**Tabela B.1 – Características construtivas de pares-trançados.**

<b>Fabricante</b>	<b>Tipo</b>	<b>Isolante</b>	<b><i>d</i> (mm)</b>	<b><i>s</i> (mm)</b>	<b><i>s/d</i></b>
Belden	Áudio	PP	0,64	0,31	0,49
Belden	Áudio	PP	0,64	0,23	0,36
Belden	Áudio	PP	0,51	0,25	0,49
RS	Industrial	PE	1,15	0,50	0,43
RS	Industrial	PP	0,76	0,25	0,32
RS	Industrial	PE	0,96	0,41	0,43
Alpha Wire	Industrial	PVC	0,61	0,25	0,42
Alpha Wire	Industrial	PP	0,76	0,25	0,33
Alpha Wire	Industrial	PVC	1,19	0,41	0,34
Manhattan Wire Products	Instrumentação	PVC	0,81	0,38	0,47
Belden	Categoria 3	HDPE	0,51	0,25	0,48
Structured Cable Products Inc.	Categoria 3	HDPE	0,51	0,20	0,40
SCP	Categoria 3	PVC	0,51	0,17	0,33
Berktek	Categoria 3	PVC	0,51	0,19	0,37
Nexans	Categoria 3	PE	0,51	0,22	0,43
Vertical Cable	Categoria 5e	PE	0,51	0,21	0,40

Phoenix Contact	Categoria 5e	PE	0,40	0,30	0,73
Furukawa	Categoria 5e	PE	0,51	0,19	0,38
Amphenol	Categoria 5e	LDPE	0,51	0,24	0,48
Belkin	Categoria 5e	PVC	0,51	0,20	0,39
Megatron	Categoria 5e	PE	0,51	0,19	0,38
Velocity	Categoria 5e	HDPE	0,50	0,25	0,50
Furukawa	Categoria 6	HDPE	0,57	0,21	0,37
Furukawa	Categoria 6a	HDPE	0,57	0,26	0,46
Amphenol	Categoria 6	PE	0,40	0,30	0,73
Hellermann Tyton	Categoria 6	PE	0,59	0,23	0,39
Teleflex	Categoria 6	HDPE	0,51	0,18	0,36
Schrack Technik	Categoria 6	PE	0,57	0,19	0,34
Hscom	Categoria 6	PE	0,57	0,22	0,39
RiT Technologies	Categoria 7	PO	0,58	0,43	0,73
Schrack Technik	Categoria 7	FPE	0,58	0,44	0,75
Furukawa	Categoria 7	PE	0,57	0,41	0,72
Belden	Categoria 7	PE	0,57	0,44	0,76
Draka	Categoria 7	PE	0,59	0,51	0,86
Belden	Categoria 7	PE	0,57	0,44	0,76
Datwyler Cables	Categoria 7	PE	0,57	0,41	0,72
Structured Cable Products Inc.	Categoria 7	PE	0,58	0,41	0,71

Nota: *d* – Diâmetro dos condutores; *s* – Espessura do isolante; PE – Polietileno; LDPE – Polietileno de baixa densidade; HDPE – Polietileno de alta densidade; FPE – Polietileno espumado; PO – Poliolefina; PP – Polipropileno.