UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E CIENTÍFICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICAS
DOUTORADO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICAS

ROBERTA MODESTO BRAGA

APRENDIZAGEM EM MODELAGEM MATEMÁTICA PELAS INTERAÇÕES DOS ELEMENTOS DE UM SISTEMA DE ATIVIDADE NA PERSPECTIVA DA TEORIA DA ATIVIDADE DE ENGESTRÖM

BELÉM-PARÁ
2015

ROBERTA MODESTO BRAGA

APRENDIZAGEM EM MODELAGEM MATEMÁTICA PELAS INTERAÇÕES DOS ELEMENTOS DE UM SISTEMA DE ATIVIDADE NA PERSPECTIVA DA TEORIA DA ATIVIDADE DE ENGESTRÖM

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas, do Instituto de Educação Matemática e Científica da Universidade Federal do Pará, como exigência parcial para obtenção do título de Doutora em Educação em Ciências e Matemáticas, área de concentração Educação Matemática.

Orientador:

Prof. Dr. Adilson Oliveira do Espírito Santo

BELÉM – PARÁ
2015

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E CIENTÍFICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICAS

TESE DE DOUTORADO

APRENDIZAGEM EM MODELAGEM MATEMÁTICA PELAS INTERAÇÕES DOS ELEMENTOS DE UM SISTEMA DE ATIVIDADE NA PERSPECTIVA DA TEORIA DA ATIVIDADE DE ENGESTRÖM

Autora: Roberta Modesto Braga
Orientador: Adilson Oliveira do Espírito Santo

Este texto corresponde à redação final da tese defendida por Roberta Modesto Braga sob aprovação da Banca Examinadora.

Data: 23 de outubro de 2015
Banca Examinadora:

____
Adilson Oliveira do Espírito Santo
IEMCI/UFPA – Presidente

____
Lilian Akemi Kato
UEM/PR – Membro Externo

____
Maria Isaura de Albuquerque Chaves
EA/UFPA – Membro Externo

____
Elizabeth Gomes de Souza
IEMCI/UFPA – Membro Interno

____
Tadeu Oliver Gonçalves
IEMCI/UFPA – Membro Interno

Dedico esta produção acadêmica à minha família e a todos os alunos que participaram desta pesquisa.

Aprender requer contradições para alcançar transformações.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por todas as bênçãos.

Aos meus pais Alberto e Graça, pelo apoio consciente e inconsciente, e deles estendo meus agradecimentos a toda minha família pela contribuição, cada um a sua maneira.

A meu esposo Celso, filha Maria Eduarda e filho João Henrique, que com amor infinito me permitem conquistar meus espaços.

Ao meu orientador Prof. Dr. Adilson Oliveira do Espírito Santo pela confiança e reconhecimento potencial.

Aos membros da banca examinadora professoras, Dr.ª Lilian Akemi Kato, Dr.ª Maria Isaura de Albuquerque Chaves, Dr.ª Elizabeth Gomes de Souza e professor Dr. Tadeu Oliver Gonçalves, pela disponibilidade e contribuições.

Aos alunos que participaram do curso de Modelagem Matemática e que permitiram concretizar a coleta de dados para esta pesquisa.

À UFPA, pela oportunidade em cursar o Doutorado.

Aos companheiros de produção acadêmica e de viagem, Paula Ledoux, Edilene Farias e Rhômulo Menezes, pela companhia e apoio.

Aos colegas do Grupo de Estudos em Modelagem Matemática (GEMM), pela parceria e contribuições acadêmicas.

Às amigas da bola, que com tanta graça me divertiram em períodos de turbulência.

À dona Rosiana, que cuidou do meu lar e da minha família na minha ausência.

A todos que de alguma forma me incentivaram para construção de um ideal, cada um a sua maneira.

RESUMO

A presente tese, intitulada “Aprendizagem em Modelagem Matemática pelas interações dos elementos de um sistema de atividade na perspectiva da Teoria da Atividade de Engeström” teve como objetivo compreender repercussões na aprendizagem pelas interações evidenciadas no ambiente de Modelagem Matemática, na perspectiva da Teoria da Atividade de Engeström. Para alcançar este objetivo desenvolvi, no âmbito do Laboratório Experimental de Modelagem Matemática (LEMM), do Campus Universitário de Castanhal (UFPA), atividades de Modelagem com grupos de alunos do curso de Matemática em formação, graduados ou pós-graduandos para obtenção dos dados via observação e entrevista. A partir dos princípios da Teoria da Atividade de Engeström, a Modelagem Matemática desenvolvida pelos alunos foi compreendida como um sistema de atividade que envolve os elementos (sujeito, objeto e comunidade, artefatos mediadores, regras e divisão do trabalho) que se relacionam para atingir um resultado, ou seja, são mediados por interações para alcançar um resultado. A pesquisa mostrou que o trabalho coletivo, a historicidade e a multivocalidade dos sujeitos atuando na superação de contradições para alcançar transformações expansivas repercutem em aprendizagem em Modelagem Matemática, configurada como um sistema de atividade, pelas interações dos elementos do próprio sistema.

Palavras-chave: Modelagem Matemática; Interações; Teoria da Atividade; Engeström.

ABSTRATCT

This thesis entitled "Learning Mathematical Modellling the interactions of the elements of an activity system from the perspective of the Engeström activity theory" aimed at understanding effects on learning by interactions evidenced in Mathematical Modeling environment, from the perspective of Engeström activity theory. To accomplish this, I developed in the Mathematical Modeling Experimental Laboratory (LEMM), at the University Campus of Castanhal (UFPA), modeling activities with groups of Math Course students in graduating, graduate or post graduate students to obtain data through observation and interview. Based on the principles of the Engeström activity theory, Mathematical Modeling developed by the students were understood as an activity system that involves the elements (subject, object and community artifacts mediators, rules and division of labor) that relate to a result, that are mediated by interactions for achieving a result. Research has shown that the collective work, the historicity and multivocality of subjects acting in overcoming contradictions to reach expansive transformations have repercussions on learning in Mathematical Modeling, configured as an activity system, the interactions of the elements of the system itself.

Keywords: Mathematical Modeling; Interactions; Theory of activity; Engeström

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE GRÁFICOS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A presente tese considera ocorrências desde a trajetória da pesquisa até seus resultados a respeito da "Aprendizagem em Modelagem Matemática pelas interações dos elementos de um sistema de atividade, na perspectiva da Teoria da Atividade de Engeström", que foi delineada a partir de minhas inquietações trazidas desde a formação inicial até a formação de pesquisadora.

Apesar da Modelagem Matemática ser entendida como estratégia de ensino e de aprendizagem de conteúdos matemáticos nos vários níveis de ensino, ainda assim nos cursos de Licenciatura em Matemática, na maioria das vezes, os alunos não fazem Modelagem na prática de disciplinas específicas, conteudistas, ou tomam conhecimento desta a partir de discussões da futura prática docente em disciplinas pedagógicas. Acreditando na díade teoria-prática ou prática-teoria, a presente pesquisa define seus sujeitos como alunos do curso de Licenciatura em Matemática. Isto, para fazer Modelagem Matemática e como consequência desse fazer, estes estudantes terão subsídios para discutir sobre suas futuras práticas.

Além disso, muito se tem discutido a respeito dos elementos constituintes do processo de ensino e aprendizagem. As teorias de aprendizagem são essenciais nesse contexto, no sentido de trazer para o ambiente de aprendizagem, por meio da Modelagem, discussões acerca do sujeito e do meio e possíveis interações oriundas desta relação.

O foco deste trabalho está no processo de Modelagem Matemática, nas interações que os elementos (*sujeitos, objeto, artefatos mediadores, regras, divisão do trabalho e comunidade*) estabelecem entre si em um sistema de *atividade* a partir da Teoria da Atividade[1] de Engeström, que compõe o quadro teórico e de análise desta pesquisa. Assim permitindo a compreensão da Modelagem Matemática como um sistema de atividade.

De forma a contemplar o foco da pesquisa, bem como apresentar o problema e o objetivo da pesquisa, estruturei este estudo em seis capítulos: Capítulo 1 – Minha Trajetória com a Modelagem e a Pesquisa; Capítulo 2 – Modelagem Matemática; Capítulo 3 – Teoria da Atividade de Engeström; Capítulo 4 – Metodologia da

---

[1] Os conceitos referentes a Teoria Atividade serão marcados em itálico para diferenciá-los do senso comum, bem como ao fazer uso do termo *atividade*, este corresponde a atividade de Modelagem Matemática na perspectiva da Teoria da Atividade de Engeström.

Pesquisa; Capítulo 5 – Descrição e Análise dos resultados; Capítulo 6 – Discussão e interpretação dos resultados e as considerações.

No primeiro capítulo apresento questões determinantes para a realização da pesquisa, assumidas como encontro com a Modelagem Matemática e a questão de pesquisa, bem como apresento o objetivo da pesquisa e a relevância do estudo.

No segundo capítulo abordo a Modelagem Matemática na Educação Matemática como uma adaptação da Matemática Aplicada no ensino, além dos papéis da Modelagem Matemática na Educação Matemática somados ao papel dos modelos matemáticos. Além disso, estabeleço a experimentação como ação intrínseca da Modelagem Matemática a partir do saber fazer "ação" e o pensar "reflexão", para construir uma perspectiva de Modelagem Matemática que contemple a abordagem da pesquisa.

No terceiro capítulo apresento a Teoria da Atividade como uma evolução de gerações a partir de Vygotsky, de Leontiev até Engeström. Articulo argumentações necessárias para compreender a Modelagem Matemática na perspectiva da Teoria da Atividade de Engeström.

No capítulo quatro apresento a trajetória da pesquisa, bem como a Teoria da Atividade na perspectiva de Engeström como teoria de análise. Isto, além dos argumentos que caracterizam o LEMM como um espaço de aprendizagem, seguido do contexto e da descrição dos participantes, bem como a forma como a Modelagem Matemática foi configurada na perspectiva da teoria da atividade. Também é apresentado como os dados foram coletados e analisados.

No quinto capítulo apresento a descrição e análise de quatro atividades de Modelagem Matemática desenvolvidas por alunos que participaram do curso de Modelagem, entendida como sistema de atividade.

No sexto capítulo discuto e interpreto os resultados identificados na pesquisa, a partir da análise de quatro atividades desenvolvidas pelos alunos no âmbito do curso desenvolvido no LEMM. Na sequência, as considerações pertinentes ao estudo, bem como as contribuições para a área de Educação Matemática e limitações do trabalho.

CAPÍTULO 1. MINHA TRAJETÓRIA COM A MODELAGEM E A PESQUISA

> Não há ensino sem pesquisa e pesquisa sem ensino. Esses que-fazeres se encontram no corpo do outro. Enquanto ensino, continuo buscando, reprocurando. Ensino porque busco, porque indaguei, porque indago e me indago. Pesquiso para constatar, constatando, intervenho, intervindo educo e me educo. Pesquiso para conhecer o que ainda não conheço e comunicar ou anunciar a novidade. (FREIRE, 2002, p.32)

1.1. ENCONTRO COM A MODELAGEM E COM A QUESTÃO DE PESQUISA

Pensar na trajetória da pesquisa que ora apresento, é pensar mesmo que com brevidade, em minha trajetória acadêmica e profissional, pois as interconexões de elementos que foram se amoldando às minhas ideias ao longo desta ainda formação, permitem-me fazer escolhas que como tal, refletem esta pesquisa.

Decerto que a presente pesquisa é resultado de inquietações delineadas ao longo de minha formação acadêmica e profissional. Inquietações que envolvem a forma como conceitos matemáticos são apresentados aos alunos em cursos de Licenciatura Plena em Matemática. Nesse sentido, alguns cenários são fundamentais mencionar.

O cenário primeiro se configura em aulas de Cálculo Diferencial e Integral I e II, na condição de aluna, em 1999, na Universidade do Estado do Pará (UEPA), nas quais predominavam a valorização da definição, exemplificação e exercícios, acompanhados de uma prova ao final de cada conjunto de conteúdo. Essa dinâmica, não abria espaço para questões concernentes à discussão e compreensão do objeto de estudo ali efemeramente apresentado.

A primeira ponderação para este cenário diz respeito ao ambiente de aprendizagem. Vivenciado para pensar/repensar minha postura em um segundo cenário, a prática docente em aulas de Cálculo. Esta iniciada no mesmo ano de conclusão da graduação, na qualidade de professora substituta de Álgebra da Universidade Federal do Pará, Campus Castanhal, em 2003, que iniciou valendo-se apenas da minha experiência como aluna. Não associava no primeiro cenário a não compreensão do meu papel ao final de um curso em Licenciatura, ou seja, não compreendia o significado de uma licenciatura, este era suprimido para dar ênfase apenas à Matemática.

O conflito gerado, em ambos os cenários é convergente, pois as experiências vividas nesses cenários distintos foi mote para pensar o ensino e a aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral para além do paradigma do exercício[2]. Repensar minha postura no segundo cenário, conversar com minha angústia de aluna e com minha motivação docente para dissolver o pensamento condicionado a um único caminho no ensino da Matemática.

A minha prática docente constitui-se então em cenário de investigação, na medida em que interrogações e mais inquietações geram novas tentativas de várias modalidades de ensino. Como consequência da investigação desta prática, busquei na Pós-Graduação *Lato Sensu*, iniciada em 2003, subsídios para investigar dificuldades de compreensão na disciplina Cálculo Diferencial e Integral. O lócus foi o Campus Universitário de Castanhal da UFPA, quando atuava como professora substituta deste. Dentre as dificuldades evidenciadas nas respostas dos alunos pesquisados destaco: a abstração da disciplina, não conexão com a realidade e metodologias inadequadas. (BRAGA, 2007)

As experiências de aluna, professora e essa primeira investigação prática na especialização configuraram-se como diagnóstico e motivo para o terceiro cenário: o Mestrado iniciado em 2007. Foi neste panorama, com a participação em disciplinas que compunham o currículo do programa de Mestrado em Educação Matemática, do Instituto de Educação Matemática e Científica (UFPA), e principalmente a participação na disciplina de Modelagem Matemática, bem como a participação no Grupo de Estudos em Modelagem Matemática (GEMM), que percebi as possibilidades que as tendências em Educação Matemática podem oferecer ao ambiente de ensino e de aprendizagem da Matemática.

Nesse contexto é que a Modelagem Matemática consolidou-se enquanto objeto na investigação da minha prática. A partir de questões oriundas do ensino do Cálculo em sala de aula, na qual interroguei o tratamento do erro no processo de ensino-aprendizagem das Equações Diferencias Ordinárias, como composição para pesquisa de mestrado.

A preocupação com o aprendizado do Cálculo Diferencial e Integral foi peça fundamental nos cenários citados e o entrelaçamento destes cenários foi

[2] Paradigma do exercício diz respeito a uma dinâmica de sala de aula que envolve a tríade definição – exemplificação – exercício, que prioriza a mecânica dos procedimentos.

determinante para a prática com a Modelagem Matemática, por seu poder de articular e inovar o ensino-aprendizagem da Matemática.

Ainda no Mestrado, esta relação descrita ganhou destaque quando investiguei como o ambiente gerado pela Modelagem Matemática favorece o tratamento do erro no processo de ensino e de aprendizagem das Equações Diferenciais Ordinárias. Fato sucedido em situações de exercícios e experimentos analisados com o uso da Modelagem Matemática, em uma turma de Cálculo II, do curso de Licenciatura Plena em Matemática, da Universidade do Estado do Pará, Campus São Miguel do Guamá-PA. (BRAGA, 2009)

Dentre os resultados apontados, evidenciei que a Modelagem Matemática favorece o tratamento do erro matemático dos alunos, convidando-os a construir/reconstruir, indagar/investigar, acertar/errar, interagir/dialogar, motivados por situações em que o estudo do erro é utilizado no ato de modelar/aprender. Percebi ainda que a Modelagem Matemática estimulou a colaboração e interação entre os alunos, professor e objetos investigados. (BRAGA, 2009)

Na ocasião, embora as interações pertinentes ao processo de Modelagem Matemática tenham-me gerado inquietações deixei para tratá-la em momento oportuno por não se caracterizar como objetivo daquela investigação.

A experiência com Modelagem Matemática em aulas de Cálculo e a ideia de interação trouxeram outros questionamentos e indagações para o cenário de investigação, pois situações, conhecimentos e experiências variadas podem cooperar para o aprendizado do indivíduo, quando este interage, com os outros e com o meio. Diante do exposto, agrego motivos para esta pesquisa, que se apresenta como uma continuidade e aprofundamento no que diz respeito ao uso da Modelagem Matemática, na qual a interação entre os elementos envolvidos em um sistema de atividade é fundamental para se atingir um resultado em ambiente de aprendizagem.

Investigações no contexto da Educação Matemática no ensino superior, ou qualquer outro nível, geram reflexões da própria prática, sejam nas disciplinas de Cálculo ou qualquer outra disciplina. Essa relação sempre me acompanhou, desde 2003, quando iniciei a prática com a docência universitária, tanto com disciplinas de conteúdo matemático específico (as Álgebras, os Fundamentos da Matemática Elementar, os Cálculos) como com disciplinas pedagógicas (as metodologias do ensino da matemática e as práticas de ensino).

Tive a oportunidade de experienciar a prática com disciplinas específicas e pedagógicas, tanto na Universidade do Estado do Pará, quanto na Universidade Federal do Pará. Esta última retornei por concurso público na área de Matemática aplicada em 2009. Essa vivência reforçou reflexões sobre a implementação de tendências da Educação Matemática, tratadas em disciplinas pedagógicas para a prática da Educação Básica, bem como para a adaptação ao ensino superior quando da abordagem de determinado conteúdo específico.

Minha experiência universitária advém das Universidades Federal do Pará e Estadual do Pará, ambas multi-campi, associada ao trabalho desenvolvido com a Educação Básica em duas escolas da rede estadual, em Castanhal, Pará, onde lecionei as disciplinas de Física e Matemática. Assim integrando a prática docente e os demais níveis de ensino (fundamental e médio) e modalidade de ensino Educação de Jovens e Adultos.

São fatores que contribuíram para a compreensão dos problemas e dificuldades enfrentados por alunos, relativos a ferramentas matemáticas, em qualquer nível. Além disso, constatei empiricamente que as dificuldades de ensino e de aprendizagem em Matemática independem do nível de ensino, do espaço e do tempo.

Assim, se me encontrei com a Modelagem Matemática pela porta do Ensino Superior, com a experiência na Educação Básica, fui integrando os demais níveis de ensino na perspectiva de incentivar a compreensão da realidade educacional por meio da matemática.

Com o retorno, em 2009, ao Campus Universitário de Castanhal, como professora de Matemática Aplicada, desenhei um projeto de Pesquisa intitulado “Modelagem Matemática e Aplicações de Cálculo Diferencial e Integral”. Este projeto foi aprovado no Campus em 01/08/2011, com as seguintes metas: contribuir para a compreensão conceitual e de aplicabilidade do Cálculo Diferencial e Integral; organizar um grupo de estudo, pesquisa e intervenção no campo da Modelagem Matemática no Campus Universitário de Castanhal; estimular a produção acadêmica dos alunos do curso de Matemática e criar Laboratório Experimental de Modelagem Matemática.

Este último, Laboratório Experimental de Modelagem Matemática - LEMM, se configura um cenário singular para implementação da prática de investigação docente na área de Modelagem Matemática, bem como ambiente de ensino e de aprendizagem que atua na motivação de grupos colaborativos de estudos. Retomando a possibilidade de investigar interações no processo de Modelagem Matemática identificada em BRAGA (2009), essa inquietação configura-se na pesquisa como elemento fundamental.

Valendo-se da Experimentação como ação intrínseca do processo de Modelagem Matemática e ao papel desempenhado pelas interações entre os indivíduos que se relacionam com outros indivíduos e com o meio, apresento como resultado de uma articulação dos cenários apresentados, a seguinte questão de pesquisa: *Como as interações dos elementos - sujeito, objeto, artefatos mediadores, regras, divisão do trabalho, comunidade - de um sistema de atividade favorecem aprendizagem em ambiente de Modelagem Matemática na perspectiva da Teoria da Atividade de Engeström?*

Para responder essa questão imergi no contexto investigado, capturando as falas e ações dos sujeitos quando estes desenvolviam atividade de Modelagem Matemática. Como forma de reconhecer e compreender os elementos constituintes de um sistema de atividade interagiam a partir do trabalho coletivo, da historicidade e da multivocalidade dos sujeitos envolvidos na pesquisa e como estes favoreceram aprendizagem nesse ambiente, entendida como transformações a partir de contradições do sistema.

1.2. OBJETIVO DA PESQUISA

Traçar um objetivo para esta pesquisa não foi de fato uma questão trivial, pois o entrelaçado de outros fatores que circundam uma questão de investigação embaralha-se e se desembaralha com leituras e experiências com Modelagem Matemática no ensino.

Ao me deparar com questões relacionadas ao ensino e aprendizagem em ambiente[3] de Modelagem Matemática, pude perceber que muito já se tem pesquisado sobre os atores do processo: discussões dos alunos no processo (ARAÚJO, 2002), a matemática desenvolvida pelos alunos no processo (BASSANEZI, 2004), os motivos que levam alunos e/ou professores para escolher

[3] São as condições propiciadas aos alunos para a realização de determinadas atividades (SKOVSMOSE, 2000)

um tema de investigação (Hermínio, 2009), o tratamento de erros (BRAGA, 2009), as repercussões na formação de saberes docentes (CHAVES, 2012), entre outros. Além disso, há várias argumentações e obstáculos para o desenvolvimento de atividades de Modelagem Matemática, seja em sala de aula ou em outros espaços de aprendizagem.

Como resultado de muitas pesquisas em Modelagem Matemática, parece existir um consenso entre os pesquisadores da área de que os sujeitos envolvidos no processo adquirem algum conhecimento matemático ou não matemático, dada as características da própria Modelagem. No entanto, me intriga saber como que as relações que medeiam as ações dos sujeitos podem promover tal aquisição de conhecimento, ou seja, relações que favoreçam aprendizagem dos alunos. Encontrei na Teoria da Atividade elementos possíveis de se constituir relações, nesse caso compreendidas como interações dos elementos.

Assim, delimitar o foco da pesquisa, o olhar para o que se pretende perceber resultou em interações, como consequência emergida no próprio ambiente de aprendizagem. Deste modo, o ambiente da pesquisa em harmonia com a questão de pesquisa conduziu-me ao objetivo da pesquisa, a saber: *compreender repercussões na aprendizagem pelas interações evidenciadas no ambiente de Modelagem Matemática na perspectiva da Teoria da Atividade de Engeström.*

1.3 RELEVÂNCIA DO ESTUDO A PARTIR DA LITERATURA

As argumentações em torno das potencialidades do uso da Modelagem Matemática para o ensino de conteúdos matemáticos são crescentes em comunicações científicas e relatos de experiências que tratam da temática em seminários, congressos, simpósios e periódicos da área, em geral traduzidas pelo interesse e motivação que é capaz de favorecer ao estudante. Tal evidência traduz-se no aumento significativo de pesquisas realizadas nesta área. (DOROW, BIEMBENGUT, 2008; BIEMBENGUT, 2009)

Há de se concordar que os argumentos como: motivação, facilitação da aprendizagem, preparação para o uso da matemática nas diferentes áreas, desenvolvimento de habilidades e compreensão do papel sócio-cultural da matemática; e obstáculos como: a falta de apoio das instituições de ensino, dificuldade e resistência do professor de aplicar a Modelagem Matemática, conteúdo curricular previamente estabelecido e desinteresse por parte dos alunos; apontados por Blum (1995) para o uso da Modelagem Matemática ainda são recorrentes em pesquisas recentes.

As interconexões de argumentos favoráveis e possíveis obstáculos que podem ocorrer quando da utilização da Modelagem Matemática apresentados por Blum (1995), são presentes em pesquisas da área. Além disso, a Modelagem vem consolidando-se a pouco mais de três décadas nos diferentes níveis de ensino, modalidades e áreas do conhecimento. Isto, a partir de eventos científicos, como resultado de pesquisas que abordam a Modelagem Matemática em diferentes perspectivas, além de publicações em programas de pós-graduação que reforçam tal consolidação.

A partir das inquietações apresentadas nos cenários de minha formação acadêmica e profissional, busquei em pesquisas de teses de doutorado trabalhos que abordassem algum dos critérios: 1) o conteúdo específico de Cálculo; 2) os sujeitos da investigação são alunos do curso de Licenciatura Plena em Matemática; 3) interações no processo; 4) Experimentação no processo de Modelagem. Tais critérios foram pensados dentro do que buscava pesquisar como forma de verificar na literatura trabalhos que poderiam tratar do assunto.

Como forma de adiantar essa busca utilizei a pesquisa de Silveira (2007) por apresentar um levantamento de teses em Modelagem Matemática, que foram defendidas desde a década de 1990 até o ano de 2005. Das onze teses que tratam da Modelagem na Educação Matemática para este período, interessa-nos mencionar aquelas que por assunto abrangem algum dos quatro critérios já citados.

Apresento, com base no critério 3, considerando a cronologia de Silveira (2007), o trabalho de tese intitulado “Modelagem Matemática: ações e interações no processo de ensino e aprendizagem”. Burak (1992) desenvolveu em sua tese experiência de Modelagem Matemática direcionada para professores que atuavam no ensino básico, bem como para os respectivos alunos deste nível. O título anuncia o *corpus* do relatório, ações e interações. No entanto, os termos não são evidenciados na delimitação do problema e objetivos desta. Identifico, para tanto, alguma evidência na categorização “os efeitos do trabalho em grupo”, como positivo no processo de modelagem matemática.

Barbosa (2001) com o título “Modelagem Matemática: concepções e experiências de futuros professores” atendeu ao critério 2. Tem como foco as relações estabelecidas nas concepções, experiências e Modelagem, no contexto de um programa de formação extracurricular, em Modelagem, com aluno de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” - UNESP (Campus Rio Claro).

Atendendo ao critério 1, a tese intitulada “Cálculo, Tecnologias e Modelagem: as discussões dos alunos” Araújo (2002) tem como sujeitos da pesquisa, alunos do curso de Engenharia Química de uma universidade pública de São Paulo. Neste trabalho ficou evidenciada a valorização das discussões dos alunos no processo de Modelagem Matemática.

Para completar o período restante, 2006 a 2012, utilizei o banco de teses da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), utilizando os mesmos critérios supracitados. Das 14 teses encontradas, destaco a de Fechio (2011) pelo critério 1 e 4, com o título “A Modelagem Matemática e a interdisciplinaridade na introdução do conceito de equação diferencial em cursos de engenharia”, que aliou o foco da pesquisa à Teoria das Situações Didáticas, com alunos do 2º ano de engenharia.

Como o filtro da CAPES leva em consideração as palavras-chave, mesmo não estando associado pela palavra interação e experimentação em Modelagem, considerei pertinente destacar aqui o trabalho de Ferruzi (2011) intitulado “Interações discursivas e aprendizagem em Modelagem Matemática”. Também pelo fato de que a autora objetivou investigar as interações que emergem durante o desenvolvimento de atividades de Modelagem Matemática em sala de aula, tendo desenvolvido sua pesquisa com um grupo de alunos do curso de engenharia ambiental de uma Universidade Tecnológica Federal.

Deste trabalho destaco uma contribuição para esta pesquisa, a assertiva de que “atividades de Modelagem Matemática contribuem com a ocorrência de interações que possuem características que favorecem a aprendizagem dos alunos”. (FERRUZZI, 2011, p. 4)

Essa busca evidenciou que, em geral, os trabalhos de Modelagem Matemática voltados para o ensino e aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral estão no âmbito de curso de áreas aplicadas, e não em cursos de graduação da própria matemática. Esse fato referenda o que várias pesquisas já evidenciaram acerca da necessidade de pesquisas em Modelagem Matemática com alunos do curso de Matemática, que em se tratando de licenciatura, favorecer a estes alunos experiências com Modelagem pode avalizar repercussões positivas em sua prática docente.

Dos cinco trabalhos citados aqui com bastante brevidade, interessa-me incorporar os vários critérios em uma única pesquisa, de tal forma que seja possível evidenciar as interações ocorridas no espaço de aprendizagem Laboratório Experimental de Modelagem Matemática (LEMM). Assim percebendo possíveis desdobramentos das relações que os sujeitos estabelecem dentro de um sistema de atividade com foco na aprendizagem.

Posto isto, levo a considerar tal investigação como relevante contribuição para a área da Educação Matemática e da Modelagem Matemática, especificamente em cursos de Licenciatura em Matemática.

É importante destacar o fato de que no filtro realizado, a partir dos critérios usados nenhuma pesquisa foi encontrada incorporando os quatro critérios supracitados. Daí a originalidade deste estudo, bem como sua contribuição para as áreas de Modelagem Matemática e Educação Matemática.

CAPÍTULO 2. MODELAGEM MATEMÁTICA

2.1. MODELAGEM: DA MATEMÁTICA APLICADA À EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

A Matemática Aplicada, enquanto campo de conhecimento preocupa-se em resolver problemas das mais diversas áreas. É nesse sentido que a Modelagem Matemática manifesta-se enquanto método, que cria modelos matemáticos capazes de representar, diagnosticar, prever e solucionar problemas. No entanto, a Modelagem não é tão recente e, apesar de não sabermos precisar suas raízes, é possível perceber que ao longo da história filósofos e matemáticos elaboraram e determinaram modelos para serem utilizados em situações diversas. Povos como os egípcios, babilônios e gregos foram os que mais modelaram situações da realidade prática, desenvolvendo modelos muito conhecidos até hoje. (MIORIM, 1998)

Como exemplo desses modelos utilizados na contemporaneidade, temos o Teorema de Pitágoras que é utilizado para determinar a inclinação do telhado de uma casa, entre outras aplicações. Outro exemplo é o fato de que

> A ideia de integração teve origem em processos somatórios ligados ao cálculo de certas áreas e certos volumes e comprimentos. A diferenciação, criada bem mais tarde, resultou de problemas sobre tangentes a curvas de questões sobre máximos e mínimos. (EVES, 2004, p. 417)

Assim, a evolução e a consolidação da própria Matemática podem ser compreendidas como processos de criação de modelos e de teorias matemáticas, oriundos da necessidade dos povos em buscar soluções para seus problemas cotidianos.

A Modelagem, nesse sentido, é concebida na Matemática Aplicada como um processo para a obtenção de modelos matemáticos, entendido como “uma estrutura matemática que descreve aproximadamente as características de um fenômeno em questão” (SWETZ, 1992, p.65), bem como a otimização de modelos. Assim, da própria definição de modelo matemático no campo da Matemática Aplicada tem-se um processo focado em um fenômeno oriundo de diversas áreas como a arte, a Física, a Biologia etc. Essa característica foi específica para que professores pesquisadores tomassem “emprestada essa ideia da Matemática Aplicada e colocaram-no no outro tripé chamado de Educação Matemática". (MEYER, CALDEIRA, MALHEIROS, 2011)

O método científico é eixo sobre o qual a modelagem está assentada, onde matemáticos aplicados são conduzidos por observação dos fenômenos com o intuito de gerar um estado de dúvida e problematização. É o ponto de partida para a construção de um modelo matemático que exprima as relações entre as grandezas observadas. Tais características, como gerar um estado de dúvida, problematização de situação da realidade para a construção de modelos, foram incorporadas no processo de ensino e aprendizagem. Podem conduzir na compreensão dos papéis da Modelagem Matemática, bem como os elementos que a consolidaram enquanto tendência em Educação Matemática

Nessa linha, a Modelagem Matemática é introduzida em práticas pedagógicas universitárias por dois professores, Aristides Camargos Barreto (década de 70) e Rodney Carlos Bassanezi (década de 80). O primeiro apresentava "uma situação problema capaz de motivar os estudantes a aprender a teoria matemática; ensinar a teoria, e então retornar à situação problema para matematizá-la (modelar) e respondê-la." (BIEMBENGUT, 2009, p.11). Bassanezi por sua vez, tinha proposta em cursos ministrados para professores levá-los a:

> (...) se inteirarem das atividades de uma região à qual pertenciam, e, a partir desse contato com as questões da realidade, levantar problemas de interesse para serem investigados. O conteúdo matemático era apresentado quando requerido pelos modelos que estavam sendo elaborados. (BIEMBENGUT, 2009, p. 12)

Advindos da Matemática Aplicada, Barreto e Bassanezi constituem-se fundamentais para a abordagem da Modelagem Matemática no âmbito da Educação, pensada a partir dos moldes dos matemáticos aplicados, familiarizados com essa forma de fazer matemática. Para o primeiro como uma forma de refazer modelos clássicos e para o segundo como uma forma de fazer iniciação científica, evidenciando papéis diferenciados na condução e objetivos com a Modelagem Matemática. De um modo geral, essa forma de fazer matemática começou com a prática de que:

> Os problemas e seus estudos é que determinavam que caminhos matemáticos, que conteúdos conhecidos ou por aprender, quais

> técnicas ou procedimentos matemáticos teriam de ser “explorados” – e estudados, pelos alunos: eram, na verdade, instrumentos necessários para se aprender sobre o problema. (MEYER, CALDEIRA e MALHEIROS, 2011, p. 16)

Além disso, esse deslocamento da Matemática Aplicada para Educação Matemática trouxe outras implicações, como decisões sobre que fenômenos abordar, como atender ao currículo posto, como conduzir o processo em sala de aula com os alunos. Variáveis que dizem respeito ao cenário educacional, tendo compreendido agora a Modelagem Matemática não mais pelos matemáticos que se preocupam em resolver problemas e para isso já tem um ferramental matemático, mas por alunos que nem sempre o tem. Nessa vertente Meyer, Cadeira e Malheiros (2011) coompreendem a Modelagem como estratégia pedagógica, onde:

> As ferramentas matemáticas que são preoblematizadas, ensinadas e aprendidas serão aquelas necessárias para estudar e compreender esses problemas colocados, por eles mesmos, de fora da escola (ou não) para dentro do ambiente escolar. (p. 49)

Ao perceber e compreender a aplicação dessas ferramentas matemáticas em problemas, de certo que a Modelagem acaba fazendo o papel de explicar implicitamente e/ou explicitamente “para que serve isso ou aquilo?”, como justificativa do “para que aprender isso ou aquilo?’, justamente por aproximar a matemática escolar a situações variadas e, consequentemente dando à Matemática o papel de utilidade para algo. Essa questão de utilidade para a matemática ainda é muito recorrente entre os alunos em qualquer nível de ensino, incluindo o nível superior:

> (...) é possível que a questão - *para que aprender matemática* - advinda de estudantes e a dificuldade de muitos professores em respondê-la a partir de aplicações nas diversas áreas do conhecimento tenham contribuído para Bassanezi defender a modelagem como estratégia de ensino de matemática. (BIEMBENGUT, 2009, p. 12)

Pela porta das justificativas matemáticas das “coisas” aliada ao fato de desenvolver investigações de temas variados em sala de aula, a Modelagem ganha destaque na Educação Matemática, como forma de motivar os alunos a fazer e aprender matemática com significado.

2.2. OS PAPÉIS DA MODELAGEM MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Uma vez compreendido que a Modelagem Matemática, advinda da Matemática Aplicada, pode ser utilizada na Educação Matemática com finalidades variadas, seja para motivar os alunos, seja para compreender a aplicação da matemática no dia-a-dia, seja para tirar os alunos de uma postura de passividade, é assumido que esta contempla a díade ensino-aprendizagem. Ainda uma vez, compreendido que a Modelagem Matemática favorece o processo de ensino-aprendizagem, tenho que considerar que esse processo, o de Modelagem Matemática, pode assumir papéis diferenciados, dependendo do público, seja na Educação Básica ou no Ensino Superior.

> A modelagem como processo de ensino-aprendizagem pode ser utilizada de maneiras diversas se o ambiente de ensino for diferenciado. Assim, se estamos num ambiente de Iniciação Científica ou cursos de Especialização para professores de matemática, o programa de conteúdos não causa grandes problemas. Entretanto, se o curso for regular com um programa a ser cumprido o processo de modelagem deve ser adaptado, considerando temas dirigidos que tenham modelos com características próprias do conteúdo a ser tratado no curso. (BASSANEZI, 2012, p. 8)

Apesar de tratarmos a Modelagem como processo de ensino-aprendizagem, há de se considerar que o ambiente de ensino pode provocar no processo, posturas diferenciadas, como exemplificadas em Bassanezi (2012). Nesse sentido é que coloco que a Modelagem Matemática na Educação Matemática pode assumir diferentes papéis, que dependem de distintos ambientes educacionais, seja em sala de aula, seja em espaços extracurriculares ou em projetos de modelagem.

Como método científico, a Modelagem na Iniciação Científica pode assumir características da própria Matemática Aplicada, pois ao levar em consideração a palavra método[4] como certo caminho que permite chegar a um fim. Neste caso o caminho da Modelagem Matemática fim no modelo, em uma visão da Matemática Aplicada.

---

[4] Da etimologia matemática metá (reflexão, raciocínio, verdade) + hódos (caminho, direção); méthodes é referente a um certo caminho.

Ao conduzir a ideia de método de acordo com a etimologia, em ambiente de sala de aula, há a concordância entre os pesquisadores da área de que este caminho agora se traduz em uma estratégia de ensino. Em ambos os casos a Modelagem Matemática configura-se como:

> Uma oportunidade para os alunos indagarem situações por meio da Matemática sem procedimentos fixados previamente e com possibilidades diversas de encaminhamentos. Os conceitos e ideias matemáticas exploradas dependem do encaminhamento que só se sabe à medida que os alunos desenvolvem a atividade. (BARBOSA, 2002, p. 5)

Esta é uma atividade compreendida no âmbito da Educação Matemática como um processo assumido de estratégia de ensino, como meio para inserir os alunos em iniciação científica, em projetos etc. Nesse processo o aluno pode aprender bem mais que Matemática e ainda desenvolver uma postura reflexiva frente aos encaminhamentos necessários ao processo.

Biembengut e Zermianov (2011) baseados em Maki e Thompson (1973) e Oke e Bajpai (1982) identificam "que na Modelagem Matemática os procedimentos são essencialmente os mesmos da investigação científica" (p. 290). Colocam ainda que uma investigação científica envolve o reconhecimento da situação problema com vista à sua delimitação. Isto pode ser realizado através de: a familiarização com o assunto a ser modelado a partir de um referencial teórico; a formulação do problema, incluindo aí suas hipóteses; a formulação de um modelo matemático como desenvolvimento do processo; a resolução do problema a partir do modelo para aplicação e interpretação de sua solução; e por último a validação do modelo no sentido de avaliá-lo.

Tais encaminhamentos assumidos pelos autores acima, diz respeito a procedimentos para a investigação científica. No entanto, estes encaminhamentos podem ser facilmente aproximados dos sugeridos por autores que usam a Modelagem Matemática como estratégia de ensino. Autores como Biembengut e Hein (2002), Barbosa (2004), Bassanezi (2004), Almeida, Silva e Vertuan (2012), entre outros, com foco nos processos de interação entre etapas apresentadas como encaminhamentos para se fazer Modelagem Matemática.

Apesar dos papéis assumidos pela Modelagem na Educação Matemática apresentar singularidades em seu processo, é necessário diferenciá-la enquanto atividade científica de suas aplicações no ensino. Em ambos os casos, o cerne da Modelagem Matemática está no processo de criar modelos matemáticos a partir de hipóteses e aproximações com a realidade investigada, com foco nos processos matemáticos (BEAN, 2001), enquanto que no processo assumido como estratégia de ensino o foco está no aluno e nos seus interesses.

> A finalidade do processo, numa perspectiva científica, é a elaboração/construção de um modelo matemático que descreva e/ou explique uma situação dita “real”, previamente delimitada, o que também evidencia o caráter epistemológico e não apenas matemático do referido processo. (CIFUENTES; NEGRELLI, 2011, p. 123)

Mesmo que o papel da Modelagem Matemática enquanto atividade científica tenha foco nos processos matemáticos, ainda assim esse processo envolve reflexão de uma realidade[5], o que também é observado quando esta tem o papel de estratégia de ensino. Nessa discussão cabe pontuar que não é suficiente distinguir as mudanças ocorridas na forma de compreender a modelagem e consequentemente praticá-la, pois:

> Essas mudanças revelam, em grande parte, os focos de intencionalidade, isto é, se ocorre mera transposição de um método científico, ainda que com pequenas variações, mantendo sua essência de origem, ou se há o reconhecimento para necessidade da construção de um método a partir de um novo contexto, o do ensino e aprendizagem de matemática. (BURAK e KLÜBER, 2011, p. 47)

Tal contexto, o de ensino e aprendizagem, constitui cenário de investigação das variações da Modelagem Matemática nos diferentes níveis de ensino. Nessa perspectiva, a compreensão de Modelagem pelos pesquisadores dá-se pelas experiências vividas e seus resultados alcançados. Pontuo, por exemplo, Barbosa (2001) que compreende a Modelagem Matemática como um ambiente de aprendizagem, onde os alunos são convidados a investigar situações da realidade por meio da matemática. Também Araújo (2002) como uma abordagem na qual problemas não matemáticos da realidade são escolhidos pelos alunos para a busca

---

[5] O texto em questão não entrará no mérito da discussão sobre Realidade. Realidade diz respeito às situações oriundas das experiências dos alunos.

de soluções. Ambos os autores apresentam suas discussões e desenvolvimento de seus trabalhos embasados na Educação Matemática Crítica de Skovsmose (2000).

D'Ambrósio (1986), Biembengut (1999) e Bassanezi (2004) compreendem a Modelagem Matemática como um processo, seja para encarar situações reais que culminam com a solução do problema (p. 11) ou para obtenção de um modelo (p. 20), ou ainda motivar o usuário na procura do entendimento da realidade que o cerca na busca de meios para agir, sobre ela e transformá-la aliando a teoria e a prática (p. 17), respectivamente.

Almeida, Silva e Vertuan (2012); Chaves (2012) compreendem a Modelagem Matemática a partir de atividades que envolvem em sua origem uma situação problemática que abarque cotidianidade ou aspectos externos à Matemática (p. 15), têm como ponto de partida problematizações com referência na realidade (p. 42), respectivamente.

Seja como ambiente de aprendizagem (Barbosa, 2001), seja como método científico ou estratégia de ensino (Bassanezi, 2004; 2012), no formato de projeto (BIEMBENGUT, 2011; MALHEIROS, 2008), de atividades (ALMEIDA, SILVA e VERTUAN, 2012; CHAVES, 2012), o encaminhamento didático é sempre sugerido por etapas, procedimentos, fases, momentos, ações.

De um modo geral, uma Modelagem pode ser conduzida por etapas. Nesse caso optei pelas etapas sugeridas por Bassanezi (2013), pela aproximação com o contexto da pesquisa, a saber: a) *Escolha do tema*, considerada o início de processo de Modelagem, a partir de um levantamento de possíveis situações de estudo, podendo ser uma escolha dos alunos, ou em conjunto com o professor; b) *Coleta de dados*, que contempla a fase de busca de informações sobre o tema escolhido, podendo ser realizada através de entrevistas, pesquisa bibliográfica ou mesmo experiências executadas pelos alunos; c) *Análise de dados e formulação de modelos*, corresponde a etapa de busca por modelos matemáticos que se adéquem às variáveis identificadas na análise dos dados coletados; d) *Validação*, que define a aceitação ou não do modelo matemático encontrado, podendo o processo ser retomado em qualquer etapa caso o modelo encontrado seja rejeitado.

As etapas do processo de Modelagem, em qualquer contexto, funcionam para encaminhar as ações dos sujeitos. Além disso, independente do papel, da concepção, da perspectiva e do nível de ensino que se insere a Modelagem Matemática, entendo que problematizar situações oriundas ou não da realidade, hipotetizar, desenvolver e validar modelos, refletir sobre as tomadas de decisão com base em resultados são ações que permeiam as várias propostas dos autores para o uso da Modelagem Matemática.

2.3. O PAPEL DOS MODELOS MATEMÁTICOS

De modo sucinto, um modelo matemático tem o papel de descrever um fenômeno ou representá-lo, de diagnosticar ou de solucionar um problema, de prever ou de evitar fenômenos etc. Em geral, o papel que esse modelo pode assumir vai depender da área de conhecimento da qual é construído, pensado, bem como das necessidades do modelador.

Diante do papel da Matemática para a sociedade, reconhecidamente devido a suas aplicações nas diversas áreas do conhecimento, aos modelos matemáticos cabe a garantia dessas aplicações. Sobre este último, Barbosa (2001) exemplifica e discute o papel dos modelos na sociedade em termos de uso, de representação, de construção, para que serve etc. Apropria-se dessas discussões para assumir uma postura crítica frente a Educação Matemática, por julgar que “a matemática e os modelos matemáticos integram, interferem, controlam e/ou prescrevem a vida social.” (BARBOSA, 2001, p. 20).

Embora reconheça essa perspectiva sócio-crítica dos modelos, neste texto pretendo abordá-los a partir de seu papel nas tarefas escolares, nas quais assumem papel diferenciado de outras áreas do conhecimento. Barbosa (2009, p.69) descreve, ao classificar os modelos matemáticos como parte “constitutiva do discurso pedagógico das ciências”.

Em seu ensaio teórico Barbosa (2009) discute sobre o papel que os modelos matemáticos podem desempenhar na educação científica. O autor considera, nos propósitos do ensaio, a educação científica como práticas socialmente organizadas com o propósito de ensinar versões das disciplinas que compõem as chamadas ciências naturais. Identificando o modelo matemático na Física como justificativa para a teoria estudada, na Química corresponde à própria definição do conceito estudado, enquanto na Biologia o modelo matemático como estruturante dos fenômenos. Essa abordagem implica, na forma como os modelos matemáticos são concebidos nessas diferentes disciplinas, tendo, no entanto, a matemática como mediadora dos fenômenos que estudam.

Apesar do ensaio estar direcionado às disciplinas específicas das ciências naturais, como Física, Química e Biologia, bem como a compreensão de que os modelos matemáticos assumem papéis diferenciados nas mesmas, deve-se considerar que ao envolver alunos de matemática no contexto da Modelagem Matemática, outras áreas do conhecimento podem se fazer segundo as temáticas escolhidas por eles e daí compreender os diferentes papéis dos modelos matemáticos também é interessante.

A exemplo da forma como os modelos matemáticos são parte integrante das relações estabelecidas da Matemática com outras ciências, Barbosa (2009) argumenta:

> (...) ciências, como Biologia, Geologia, Química, também possuem modelos matemáticos como parte de suas teorias. Por exemplo, segundo Erduran (2001) e Roque e Silva (2008, p. 921), a Química faz vasto uso de fórmulas estruturais, equações e figuras para expressar o entendimento dos cientistas sobre os fenômenos identificados nesta área. Assim, os modelos acabam participando da rede de relações entre conceitos e leis em uma teoria. No caso da Biologia, o estudo de populações, em particular a dinâmica presa-predador, tem os modelos matemáticos como parte substancial de sua teorização (BASSANEZI, 2002) (BARBOSA, 2009, p. 71).

No âmbito da Educação Matemática, não é diferente. Os modelos matemáticos são resultado de um processo de Modelagem Matemática utilizado como forma de extrair características de um objeto ou situação e que apoiado em teorias, hipóteses, realiza-se aproximações que se constituem em estruturas matemáticas, no caso os modelos. Dessa assertiva, os papéis apresentados por Barbosa (2009) ganham destaque no próprio discurso pedagógico da matemática do ponto de vista do aluno das ciências que precisa estudar matemática. Como exemplos para alunos da Física, Química e Biologia, respectivamente:

> No experimento para introdução do princípio da inércia vê-se que o modelo matemático é utilizado para sustentar a introdução de um conceito novo, oferecendo aos alunos uma justificativa. Neste caso, podemos identificar o *modelo matemático como justificativa*.
>
> No equilíbrio químico, um modelo matemático é apresentado como a definição de constante de equilíbrio. Assim, o conceito que os alunos devem dominar é a própria relação matemática. Para situações como esta, podemos ver o *modelo matemático como definição*.

> No caso da curva logística, onde partes do discurso da matemática escolar foram deslocadas para enquadrar um fenômeno localizado na Biologia e extrair conclusões biológicas. Para este caso, podemos conceber o *modelo matemático como estruturante*. (BARBOSA, 2009, p. 80)

No entanto (Barbosa, 2009) sublinha que alunos oriundos do campo da matemática têm dificuldades em fazer essa transferência para situações das ciências, mesmo compreendendo que a matemática descreve os fenômenos da ciência. Este é um fato determinante, pois ao propor o uso da Modelagem Matemática em aulas de matemática, os alunos são convidados a se inteirarem de situações matemáticas ou não. Neste último caso podem estar relacionadas com qualquer área do conhecimento. São duas vias, a das ciências relacionando-se com a matemática e da matemática relacionando-se com as ciências.

Essa última via é de que trata a maioria dos trabalhos sobre investigações de Modelagem em Matemática, para o ensino e aprendizagem da matemática em qualquer nível de escolarização. As discussões permeiam a compreensão do que sejam modelos matemáticos, sejam eles axiomáticos, discretos ou contínuos, sem tanta ênfase ao papel dos modelos matemáticos.

Para Cifuentes e Negrelli (2011) o modelo matemático é uma “teoria que pode estar dada por uma coleção de equações de diversos tipos (...) ou por uma coleção de sentenças que podem ser consideradas conjecturas (axiomas) sobre a realidade em estudo” (p. 131). Bassanezi (2004, p.20) concebe o modelo como “um conjunto de símbolos e relações matemáticas que representam de alguma forma o objeto estudado.”

Este autor destaca ainda o modelo matemático como um resultado do processo de Modelagem Matemática, podendo ser obtido seguindo algumas etapas. São elas: a escolha de um tema, a coleta dos dados (que pode também ser incorporada a inteiração com o tema) através de entrevistas e pesquisas executadas, pesquisa bibliográfica ou através de experiências programadas pelos alunos, a análise dos dados e formulação dos modelos, bem como a sua validação. (BASSANEZI, 2012)

Barbosa (2009) admite modelo matemático como modelo simbólico, a saber: “aqueles que empregam símbolos matemáticos, sejam tabelas, gráficos, equações, inequações etc., ou, em outras palavras, empregam conceitos, notações e/ou procedimentos matemáticos” (p. 70-71). Interessa-me pontuar nesta citação, sob o ponto de vista do discurso matemático, o fato de que associado no papel dos modelos matemáticos, apenas como forma de representar uma realidade, associado ao papel da Modelagem nos diferentes níveis de ensino, a descrição axiomática, discreta, contínua etc., pode admitir na condução das ações do sujeito o foco no processo ou no modelo e suas implicações.

2.4. O SABER FAZER "AÇÃO" E O PENSAR "REFLEXÃO": EXPERIMENTAÇÃO COMO AÇÃO INTRÍNSECA DA MODELAGEM MATEMÁTICA

Colocar alunos diante de temáticas que favoreçam um caráter problemático, de investigação, que seja capaz de estimulá-los ao levantamento de questões, ao planejamento de experimentos simples, visando à coleta de dados e testagem de hipóteses, a observar, a discutir ideias e refletir sobre os passos tomados como decisão de grupo, não se constituem ações triviais, mas ações coordenadas que envolvem o saber fazer, enquanto ação para envolver, sobretudo o pensar, enquanto reflexão. Antes, porém é necessário "abrir um parêntese" para compreensão de experimentação em Modelagem Matemática.

Alfonso-Goldfarb, (org. 2006) aborda a questão de experimentação, experimentos e experiências. No entanto, apesar da obra trazer claramente a evolução de experimentos nas ciências experimentais, por diversos autores os termos *experimentos*, *experiências* e *experimentações* ora se referiam a uma mesma situação e em raros casos poderiam supor diferenças que serão tratadas neste tópico, por entender na diferença, condição necessária para a compreensão do contexto investigado na pesquisa.

Uma aproximação de experimentos, experiências e experimentações é certa. O saber fazer e esta aproximação dialoga com as discussões traçadas neste texto para definir uma perspectiva de Modelagem Matemática para a pesquisa em questão.

Buscando uma definição para os três termos no dicionário Silveira Bueno (1999, p. 393), encontrei:

> Experimento: s.m. Experimentação; ensaio científico para verificação de um fenômeno físico; experiência.
> Experiência: s.f. prática da vida; usos; ensaio; prova; tentativa.
> Experimentação: Ato de experimentar.

Experimentar: v. t. provar; praticar; verificar; executar; sentir, sofrer.

Assim, ao levar em consideração apenas o significado da palavra, os termos são usados com exclusividade apenas para designar atividades experimentais, por não haver um vocábulo diferenciado, então fazer experimento, fazer experimentação e fazer experiência acaba por designar atividade experimental pelos autores do livro supracitado. No entanto, percebo em Alfonso-Goldfarb e Ferraz (2006) uma fina compreensão do que almejo para os termos experimento, experiência e experimentação.

Os autores descrevem os experimentos como algo procedimental e que a partir de observações tira-se conclusões sobre algo, bem como experimentação como ato de fazer experimentos e que experiência envolve o conhecimento que o indivíduo já tem. Do ponto de vista matemático, a experimentação também envolve o ato de realizações com as ferramentas matemáticas, dentre outras.

Dessa maneira, experimentação tanto pode envolver o ato de fazer experimentos próprios das ciências experimentais, quanto pode envolver o ato de experimentar, fazer conjecturas, inferências matemáticas, ou ainda, as duas coisas. Aliado a isso, o conhecimento do indivíduo que faz Modelagem Matemática advindo de outras experimentações, constitui experiência do indivíduo sobre algo e que pode interferir em outras experimentações.

Para além de fazer experimentos nas áreas experimentais, *experimentação* compreende o ato de que o indivíduo pode experimentar relações matemáticas em diferentes situações. Assim como também fazer experimentos simples, além de fazer uso de suas experiências vividas para argumentar sobre uma temática em um ambiente de Modelagem Matemática.

A experimentação pode ocorrer tanto em um contexto que necessite da observação de experimentos, quanto em temáticas nas quais os alunos não necessitam fazer experimentos. Estes farão testagem de relações, analogias, comparações e, portanto, estarão fazendo também experimentação.

Assim, em Modelagem Matemática a busca por dados para o processo pode se dar tanto por fontes bibliográficas, por aplicação de questionários ou por experimentos programados. O sentido da experimentação, nesse caso, não está no experimento propriamente.

Nesse sentido, a experimentação caracteriza-se como uma ação intrínseca, a Modelagem Matemática. É nessa configuração que o espaço de aprendizagem pensado para a coleta de dados/informações está presente nesta pesquisa. Isto, de vez que os alunos envolvidos no processo terão a oportunidade de escolher temáticas de investigação variada, podendo realizar a coleta de dados por meio de pesquisas bibliográficas ou por experimentos programados.

Compreendido experimentação como ação intrínseca, a Modelagem Matemática parte da premissa de que ações articuladas pensadas em um espaço de aprendizagem envolvem professores e alunos. Constituindo-se assim em uma atividade colaborativa, permeada pela interação dos sujeitos com o objeto de estudo. O que envolve o saber fazer e o pensar na execução, na discussão da atividade, na tomada de decisões, bem como no uso de instrumentos necessários para a realização da atividade.

> O saber-fazer Modelagem, na condição de aluno, requer domínio do processo, o que significa saber problematizar e matematizar uma situação real, que está relacionada com uma atitude curiosa e com destreza em aplicar e manipular conceitos, conteúdos e algoritmos matemáticos. (CHAVES, 2012, p. 48)

Considerando que “a utilização da modelagem na educação matemática valoriza o saber fazer” (BASSANEZI, 2012, p. 10), vejo caracterizada a “ação”, aliada ao processo de “reflexão” da realidade, que permite ao indivíduo pensar estabelecer uma relação dialética envolvendo reflexão e ação, denominada por D'Ambrósio (1986) de *aprendizagem* e cujo resultado é um permanente modificador da realidade. Segundo o autor, o indivíduo cria modelos que lhe permitirão elaborar estratégias de ação, ou seja:

> (...) o que queremos com a modelagem é ensinar Matemática de uma maneira que os alunos, a partir das ações para o ensino, também criem mecanismos de reflexão e de ação. (MEYER, CALDEIRA E MALHEIROS, 2011, p. 55)

Considerando a Modelagem Matemática em um espaço de aprendizagem que gera ação e reflexão continuamente, faz-se necessário definir uma perspectiva de Modelagem que dê conta de assumir os elementos envolvidos nesta pesquisa.

2.4.1 UMA PERSPECTIVA DE MODELAGEM MATEMÁTICA

Entendo que diferentes concepções de Modelagem na Educação Matemática é consequência de experiências distintas que interferem sobre as concepções das pessoas sobre a Matemática e sobre a forma como esta deve ser ensinada/partilhada. Ou seja, as experiências vividas pelos indivíduos agregam "material" determinante para perceber a Modelagem na Educação Matemática sob diferentes concepções e perspectivas.

Propor o uso da Modelagem Matemática é uma volta às próprias origens históricas da evolução matemática, do próprio Cálculo e do uso do método científico. Destaco aqui, que a aprendizagem do Cálculo a partir da Modelagem Matemática, implica em um processo que trará um novo olhar, real, concreto, para os conceitos básicos do cálculo, como exemplo o conceito de derivada, associado a taxas de variação.

Muitas contribuições para o avanço do Cálculo Diferencial e Integral são atribuídas a Newton, por seu modo de fazer ciência: "intensa relação entre a matemática e a experimentação." (GIANFALDONI, 2001, p.238). Esta relação imbuída do processo de Modelagem Matemática demonstra "a necessidade da matemática sempre se moldar à experiência" (GIANFALDONI, 2001, p.238).

Isso demonstra um percurso natural de observação do fenômeno, da realidade investigada e a busca por sistemas matemáticos que se aproximem de tal realidade. Assim, as atividades de Modelagem Matemática, nesta pesquisa entendida como atividade não essencialmente laboratorial, simulação em ambientes informatizados ou mesmo experimentos em campo para obtenção de dados, fazem uso da Modelagem Matemática para investigar um tema de interesse dos alunos enquanto sujeito participativo e interativo do meio, onde "as discussões sobre o tema escolhido favorecem a preparação do estudante como elemento participativo da sociedade em que vive." Bassanezi (2004, p.38)

Em geral alunos dos cursos de matemática têm dificuldades com argumentos, pois tradicionalmente as relações matemáticas são quase que impostas aos alunos. No entanto, apenas a argumentação não é suficiente, mas a experiência sim, ou seja, alunos do curso de matemática têm necessidade pela concretude das coisas.

> A mente de quem possui a demonstração a respeito do triângulo eqüilátero nunca aderirá à conclusão sem experiência, nem se importará, mas a negligenciará até que lhe forneça a experiência pela intersecção de dois círculos, de uma das seções dos quais sejam traçadas duas linhas até as extremidades da linha dada. (NASCIMENTO, 2006, p. 53)

Exemplo que torna evidente a importância de trabalhar com a Modelagem Matemática. Isto, porque envolve argumentação continuamente em todas as suas etapas, podendo ser contemplada não apenas nas ciências experimentais, mas compreendida em um contexto maior como o discutido neste texto.

Assim, definir uma perspectiva de Modelagem Matemática a ser utilizada na investigação, leva em consideração discussões a respeito da complexa relação que o indivíduo faz da matemática com a realidade em situações de interação, pois "raramente um problema é individual, geralmente ele afeta um grupo que vive uma realidade similar (...) [ou mesmo] a possibilidade de os alunos "sonharem" [conjuntamente] fora da realidade em que vivem" (HEIN e BIEMBENGUT, 2007, p.36) [grifos meus]

Na construção da perspectiva de modelagem para esta tese, não basta no processo que os alunos encontrem o modelo matemático do contexto investigado na própria matemática ou outras áreas do conhecimento. É necessário que os alunos possam refletir e desenvolver conhecimentos necessários para tomadas de decisão diante do papel da matemática, valorizando as interações advindas do processo.

A Modelagem deve ser datada, dinâmica, dialógica e diversa. Para que nesse processo o aluno seja capaz de conceber um conhecimento datado e que aprenda muito mais do que Matemática em um processo dinâmico sem "fim", retornando a qualquer uma das etapas esquemáticas propostas por vários autores, dialogue com questões do cotidiano ou outras áreas do conhecimento, bem como a forma como diferentes grupos de alunos podem fazer Modelagem Matemática por formular problemas e gerar cálculos e resultados diversos. (MEYER; CADEIRA; MALHEIROS, 2011)

Nesse contexto de Modelagem, saliento a ideia de que os alunos apresentam com relação à cooperação com os outros. A negociação de ideias e a reflexão partilhada são contempladas nas várias perspectivas de se fazer Modelagem Matemática no ambiente educacional. Aliado a isso está o fato de que a Modelagem pode "criar possibilidades interdisciplinares na sala de aula, fato considerado muito importante (ou, até essencial) entre as questões de ensino e aprendizagem, mostrando que, no caso, a Matemática não é uma ciência isolada das outras." (MEYER, CALDEIRA E MALHEIROS, 2011, p. 85)

Um ambiente de ensino e de aprendizagem que favoreça a percepção do aluno acerca da Matemática, não apenas pela Matemática, é bastante coerente com o uso da Modelagem Matemática. Constitui, pois, um ambiente de ensino, de aprendizagem e de iniciação científica que motiva sujeitos pela busca de modelos matemáticos, de problemas oriundos da investigação de temas de interesse, por meio de ações articuladas colaborativamente.

Nesse sentido, assumo a *Modelagem Matemática configurada como um sistema de atividade que contempla um ambiente de experimentação favorável a aprendizagem de sujeitos por meio de interações com o objeto, os artefatos, as regras, a divisão do trabalho e a comunidade do sistema.*

CAPÍTULO 3. TEORIA DA ATIVIDADE DE ENGESTRÖM

Em geral as atividades de ensino apresentam diferentes modos de condução e motivação de alunos em interação com os objetos de conhecimento. Essa diversidade e o fato de que planejar atividades de ensino não resulta necessariamente em aprendizagem, mas sim oportunidades de aprendizagem para que os sujeitos envolvidos aprendam algo, permite-me buscar na Teoria da Atividade condições para analisar a prática. Nesse sentido construiu-se o terceiro capítulo desta tese, apresentando argumentos para a apropriação da teoria da Atividade de Engeström quando da realização de atividade de Modelagem Matemática configuradas em um sistema de atividade.

A subjetividade das informações estão também atreladas ao histórico do pesquisador e dos alunos envolvidos na pesquisa. Nesse sentido, a escolha do referencial é bastante pertinente, por considerar que o objeto compartilhado coletivamente nas *atividades* de Modelagem Matemática observadas, considera a vivência e historicidade dos envolvidos no processo de aprendizagem. No escopo das análise levo em considerações os sujeitos em interação com os outros elementos do sistema de atividade.

3.1 TEORIA DA ATIVIDADE: DE VYGOTSKY, LEONTIEV A ENGESTRÖM

A Teoria da atividade foi difundida desde a década de 1980 e tem suas origens na filosofia clássica de Kant e de Hegel, nas obras de Karl Marx (1818-1883) e de Friedrich Engels (1820-1895) e na psicologia histórico-cultural de Lev Semyonovitch Vygotsky (1896-1934) e de Alexei Nikolaevich Leontiev (1904-1979) (ENGESTRÖM, MIETTINEM e PUNAMAXI, 1999). Levantar compreensões acerca da Teoria da Atividade a partir de Vygotsky e de Leontiev até a expansão pelo psicólogo finlandês Yrjo Engeström por suas diferenças, mas possuindo uma relação dialética, constitui o objetivo deste tópico.

A atividade humana é entendida como unidade básica do desenvolvimento humano, envolve ações externas e internas e:

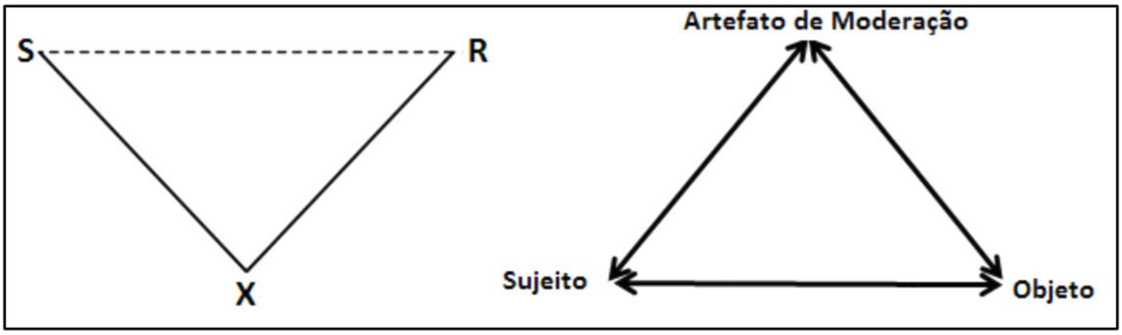
> (...) tem como eixo central as transformações que ocorrem nas interações que se estabelecem entre o ser humano e o ambiente no

> desenvolvimento de atividades mediadas por artefatos, estes entendidos como instrumentos e signos. (SOUTO, 2013, p.45)

Em uma atividade humana, os conceitos de objeto constituem elemento principal e corresponde a natureza da atividade humana e de mediação, pela qual os artefatos passam de produtos da ação do indivíduo sobre o ambiente para mediadores culturais.

Para Vygotsky o individual e o cultural devem ser entendidos como elementos “(...) mutuamente formativos de um sistema único, interativo” (DANIELS, 2003, p. 112) e “a interação do sujeito com o mundo é mediada por uma ferramenta psicológica de natureza semiótica[6]” (DANIELS, 2003, p. 112). Daí a mediação ser considerada um dos pilares das teorias de Vygotsky, que associa a mediação por um signo externo (X) como intermediário na relação entre Estímulo (S) e resposta (R), caracterizados como elementos binários (S→R) de um comportamento elementar. Como reformulação dos elementos binários, Vygotsky permitiu a configuração de um modelo triangular do conceito básico da Teoria da Atividade, a partir da ação de um sujeito mediada por artefatos e destinada para um objeto.

Figura 1: Mediação (X) entre Estímulo (S) e Resposta (R) e sua Reformulação usual.



Fonte: Engeström, 2001.

Essa configuração apresenta a mediação por ferramentas como um dos princípios da Teoria da Atividade e define a forma como os sujeitos interagem com a realidade, o que corresponde à primeira geração da Teoria da Atividade. Tais ferramentas podem ser materiais, com instrumentos como régua, lápis, medidores, ou ferramentas semióticas ou psicológicas como signos e símbolos que cumprem a função de orientar e potencializar os processos mentais. (VYGOSTKY, 1978)

---

[6] Dotada de significado

A linguagem é considerada “a ferramenta psicológica mais poderosa com a qual as pessoas se comunicam, interagem, experimentam e constroem a realidade” (CARVALHO JÚNIOR, 2011, p. 19). Além da linguagem, as representações simbólicas de conceitos também são consideradas ferramentas semióticas ou psicológicas.

Nesse sentido a importância dada por Vygotsky às ferramentas e signos mediadores para compreensão dos processos mentais, constitui um dos temas nucleares de sua teoria. Além disso, ao recorrer ao conceito de Zona de Desenvolvimento Proximal, caracterizada pela distância entre o que o indivíduo realiza sozinho e o que realiza com o outro, atribui importância significativa para o processo de desenvolvimento do indivíduo por meio de interações.

A Teoria da Atividade, no entanto, não teve destaque conceitual nos estudos de Vygotsky, uma vez que precisou eleger uma unidade de estudo para examinar qualquer função mental superior. Assim encontrando no significado da palavra essa unidade conceitual, privilegiando a análise semiótica, cabendo-lhe, portanto, a construção das bases da teoria histórico-cultural de uma psicologia comprometida com os problemas reais de seus concidadãos. (ARAÚJO, 2013)

Coube a Alexei Leontiev colaborar com Vygotsky desde 1924, dando continuidade aos seus estudos sobre sujeito e objeto, assumindo atividade como “o papel tanto de princípio geral quanto de mecanismo concreto de mediação” (ARAÚJO, 2013, p. 29). Nesse sentido Leontiev (1978) propõe uma estrutura para a atividade, entendida como um processo de mediação entre sujeito e objeto, constituído de um conjunto de ações. Este autor considera ainda que a atividade constitui unidade básica de análise e a define como:

> Processos psicologicamente caracterizados por aquilo a que o processo, como um todo, se dirige (seu objeto), coincidindo sempre com o objetivo que estimula o sujeito a executar uma atividade, isto é, o motivo. (LEONTIEV, 1988, p. 68)

Dessa maneira, o conceito de atividade tem sua concepção no processo social orientado para uma meta, em que a atividade é dirigida por um motivo que atenda às necessidades do sujeito, que pode ser de natureza simbólica ou de natureza material. O direcionamento das ações, por sua vez, é resultante de objetivos conscientes[7] que não estão ligados diretamente ao motivo gerador da atividade, mas a concretização dos objetivos de forma articulada.

Leontiev (1978) propõe a estrutura da atividade em três níveis articulados dinamicamente, a saber: o nível da atividade dirigida a um objeto[8], que é o *motivo* desta; processos subordinados por objetivos conscientes é correspondente ao nível das *ações*, que se relacionam ao motivo/objeto não individualmente, mas por meio de sua realização conjunto; as condições humanas e instrumentais de realização das ações estão no nível das *operações*. Nesse sentido a atividade assume dois papéis: o de princípio geral (*atividade ↔ ação ↔ operação)* e o papel de mecanismo concreto de mediação (*objetivo/motivo ↔ objetivo/meta ↔ condições).*

Para o sujeito em uma atividade, a percepção e concretização de objetivos, o domínio de operações relativas a uma ação específica são elementos existenciais e que se relacionam à satisfação de necessidades materiais e intelectuais objetivadas no motivo/objeto da própria atividade.

Apesar de uma atividade estar no âmbito da coletividade, os sujeitos individuais podem atribuir sentidos distintos ao participar de uma atividade, pois nem sempre as situações em que o objeto da atividade está relacionado contemplam as perspectivas individuais dos sujeitos. A exemplo temos o caso de estudantes que em coletividade desenvolvem uma atividade escolar de Modelagem Matemática, cujo objetivo da atividade em coletividade seja buscar compreender os impactos causados pela poluição de um rio. No entanto algum dos alunos pode objetivar com a atividade, desenvolver habilidades com as ferramentas matemáticas requeridas para compreensão da situação em estudo.

Mesmo a *atividade* sendo definida no âmbito da coletividade e alcançando um objetivo compartilhado, ainda assim individualmente as motivações para o mesmo objeto podem ser diferenciadas. Isto é, em contexto de aprendizagem em que a *atividade* mesmo definida na coletividade e tendo como meta a aprendizagem, os sujeitos envolvidos desenvolvem *motivos* e *metas* diferentes.

Tanto para Leontiev, quanto para Vygotsky, a linguagem tem um papel fundamental na constituição da atividade e do próprio sujeito. As ferramentas ao produzirem a divisão de trabalho trazem implicações na estrutura da interação do

---

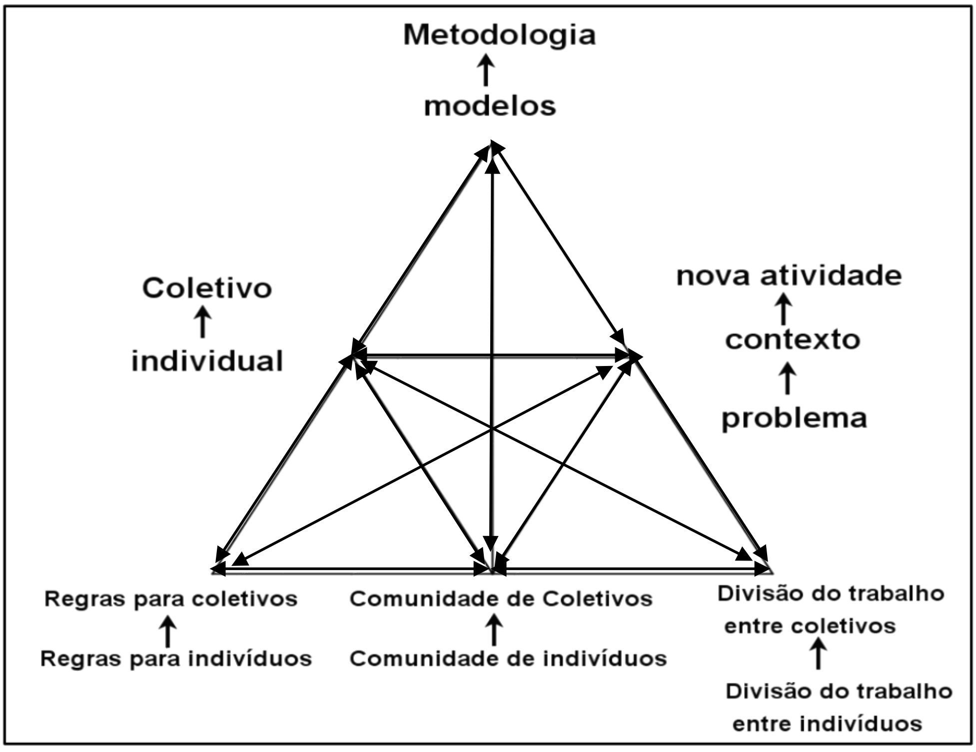
[7] Quando os sujeitos tomam consciência do objeto.
[8] Conteúdo de um pensamento ou ação. (ARAÚJO, 2013, p. 30)

homem com o mundo. Embora Leontiev tenha enfatizado a atividade como uma formação coletiva, “não investigou a atividade como um processo coletivo que pressupõe interação e comunicação entre diferentes participantes” (ARAÚJO, 2013, p. 32). Esses aspectos foram incorporados nos estudos de Engeström.

A *atividade* entendida como um complexo de relações sociais implica considerar as várias mediações compartilhadas pelo coletivo em que a atividade ocorre, bem como pelo individual, confere a atividade de aprendizagem a sua transição e expansão, pois “aatividade de aprendizagem pode ser concebida como movimento expansivo de modelos para a metodologia de criação de modelos.” (ENGESTRÖM, 1987, 0. 134-135)

A Figura 2 representa a estrutura de uma atividade de aprendizagem, considerando o movimento do individual para o coletivo.

Figura 2: Estrutura da atividade de aprendizagem

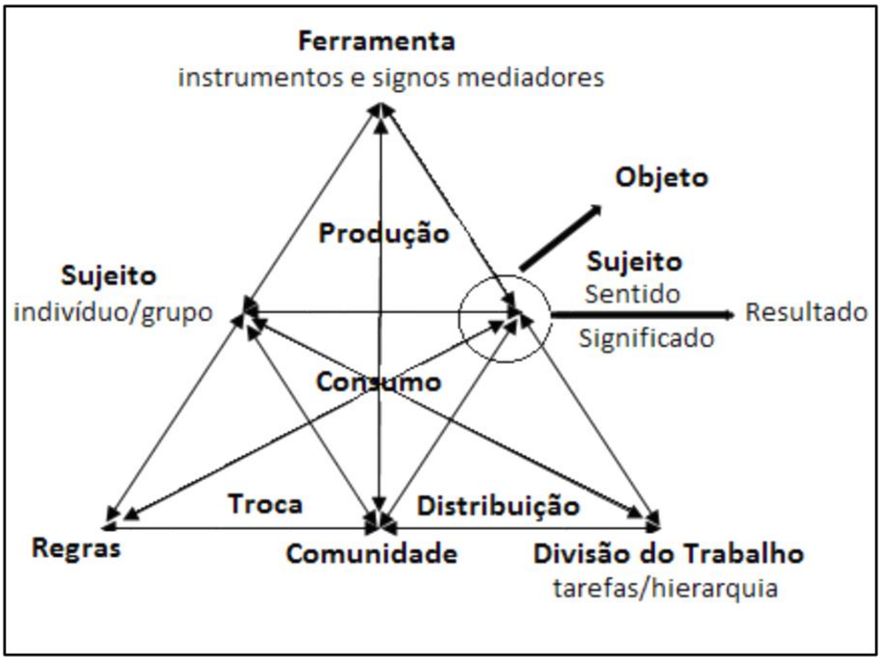


Fonte: Engeström,1987, p. 136.

Apoiado nas teorias de Vygotsky sobre seus estudos de mediação cultural e na diferença entre ação individual e atividade coletiva proposta por Leontiev, Engeström propôs um novo modelo para a atividade humana (Figura 3). Compreendida como atividade de aprendizagem, representa os elementos coletivos em um sistema de atividade incluindo nesta os elementos: comunidade, regras e divisão do trabalho.

Ao incluir os elementos comunidade, regra e divisão do trabalho no sistema, Engeström (1987) favoreceu o trabalho coletivo dentro do sistema com ações compartilhadas. Essa passagem do individual para o coletivo resulta em um movimento expansivo, pois atribui novas relações entre os elementos do sistema.

Figura 3: Estrutura de um sistema[9] de Atividade Humana, incluindo objeto, sujeito, sentido e significado, além dos subsistemas.



Fonte: Engeström, 1993.

O modelo apresentado por Engeström é uma relação ampliada do triângulo de Vygotsky e das características da ação individual e coletiva propostas por Leontiev. No modelo proposto por Engeström (1993):

> (...) o sujeito refere-se ao indivíduo ou subgrupo cuja maneira de agir é tomada como ponto de vista na análise. O objeto refere-se ao espaço do problema para o qual a atividade está direcionada e que é moldado ou transformado em resultados com a ajuda de ferramentas físicas e simbólicas, externas e internas (instrumentos e signos mediadores). A comunidade compreende indivíduos e/ou subgrupos que compartilham o mesmo objetivo geral. A divisão do

[9] A partir deste sistema, passarei a utilizar a representação sem as setas, apenas por uma questão prática, não perdendo, portanto, o significado do sistema com setas de duplo sentido.

> trabalho refere-se tanto à divisão horizontal de tarefas entre os membros da comunidade quanto à divisão vertical de poder e status. Finalmente as regras referem-se aos regulamentos implícitos e explícitos, normas e convenções que restringem as ações e interações no interior do sistema de atividade. (ENGESTRÖM, 1993, p. 67)

O modelo (Figura 3) de atividade é tido como uma expansão do primeiro modelo de Vygostsky, representado por Engeström como um sistema de atividade, pois aos elementos sociais/coletivos acrescentou os elementos: *comunidade*, a *divisão do trabalho* (Leontiev), as *regras* e as relações entre esses elementos.

Nesse modelo, o *sujeito*, *objeto* e *comunidade*, que são elementos constituintes da estrutura da atividade, mantêm relações mediadas pelas ferramentas, *regras* e *divisão do trabalho*. Isto é, "as ferramentas são mediadoras na relação entre *sujeito* e *objeto*, as *regras* são mediadoras na relação entre o *sujeito* e sua *comunidade* e a *divisão do trabalho* é a mediadora na relação entre a *comunidade* e o *objeto.*" (ARAÚJO, 2013, p. 34)

Além disso, os elementos e mediadores desta segunda geração da Teoria da Atividade originam subsistemas, a saber: a produção, o consumo, a distribuição e a troca. É no subsistema de produção que ocorre "a transformação do objeto em resultado desejado pela comunidade, a partir das ações mediadas por ferramentas e realizadas pelo sujeito." (JONASSEN, 2000 *apud* ARAÚJO, 2013, p. 34-35)

A descrição de como o *sujeito* e *comunidade* interagem com o *objeto* cabe ao subsistema de *consumo*. Ao subsistema de *distribuição* cabe vincular o *objeto* à *comunidade* pela *divisão do trabalho* entre os *sujeitos* de uma *comunidade*. Ao subsistema de troca cabe pela negociação entre *regras* e normas à regulação das atividades do sistema.

Resultante dos estudos de Engeström sobre redes de sistemas de atividade que interagem entre si é que se constitui a terceira geração da Teoria da Atividade. Entretanto, para compreensão desta deve-se considerar os cinco princípios básicos da Teoria da Atividade, que são: 1) *sistema de atividade coletiva*, 2) *multivocalidade*, 3) *historicidade*, 4) *contradição*, 5) *transformação expansiva*. Para Engeström (2001):

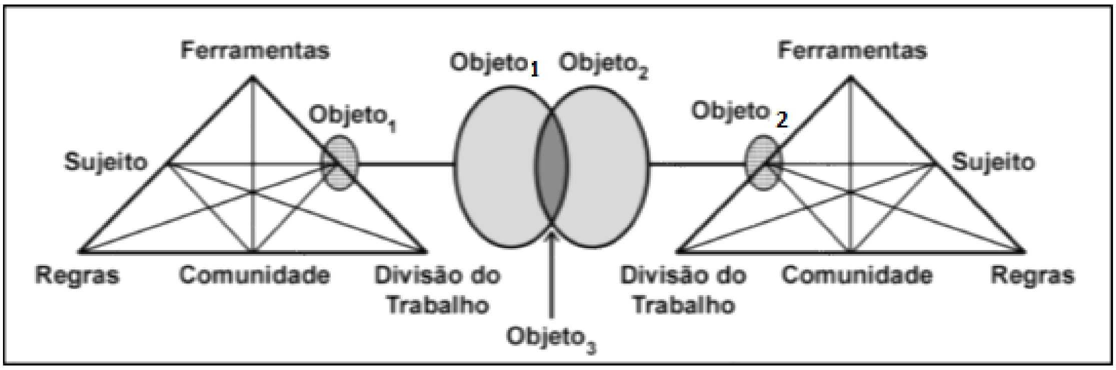
> 1)um sistema da atividade coletiva, mediado por artefato e orientado a um objeto coletivo é visto em suas relações de rede com outros sistemas de atividade. (...) 2) Um sistema de atividade é sempre uma comunidade de múltiplos pontos de vista, tradições e interesses. (...)

> 3) sistemas de atividade tomam forma e se transformam por um longo período de tempo. (...) 4) contradições não são os mesmos que os problemas ou conflitos. Contradições são tensões estruturais historicamente acumuladas dentro e entre os sistemas de atividade. (...) 5) sistemas de atividades percorrem ciclos relativamente longos ciclos de transformações qualitativas. (p.136-137)

O sistema de atividade coletivo constitui unidade de análise fundamental, caracterizada por ser orientada a um *objeto* e mediada por artefatos em uma relação interativa. Os vários pontos de vistas e interesses dentro de um sistema de atividade constituem o princípio da *multivocalidade*, pois os *sujeitos* carregam tradições e opiniões próprias de suas experiências. A *historicidade* é o sistema de atividade historicamente localizado, que passa por transformações contínuas com o tempo. As *contradições* são tensões que proporcionam mudanças e desenvolvimento no sistema de atividade. Já as respostas às contradições proporcionam questionamentos que caminham em direção à reconceitualização do *objeto* e do *motivo* de uma atividade, referem-se à *transformação expansiva*.

Pelos princípios básicos da Teoria da Atividade, toda atividade deve ser analisada e não uma parte apenas. Além disso, as interações em um sistema de atividade são oriundas de necessidades dos *sujeitos* individuais e coletivos como constituintes do sistema. Assim "um modelo mínimo de representação é aquele que dá conta de dois sistemas de atividades em interação com seus padrões de contradição e tensão." (CARVALHO JÚNIOR, 2011, p. 24)

Figura 4: modelo mínimo para a terceira geração da Teoria da Atividade.



Fonte: Engeström, 2001

Na interação de sistemas diferentes, as *contradições* geram mobilização para transformações no sistema de atividade. Com isso, ao analisar um sistema de atividade, Engeström (1987) define quatro níveis de *contradições* internas, que são: primárias, secundárias, terciárias e quaternárias.

> As contradições primárias das atividades dizem respeito a formações sócio-económicas, que vive como o conflito interno entre valor de troca e o valor dentro de cada um dos vértices triângulo da actividade. As contradições secundárias são as que aparecem entre os vértices. A contradições terciárias aparecem quando representantes da cultura (por exemplo, professores) introduzem o objeto e motivo de uma forma culturalmente mais avançada da atividade central na forma dominante daatividade central. As contradições quaternários exigem que levamos em consideraçãoas atividades ”vizinhas” relacionadas com a atividade central (ENGESTRÖM,1987, p. 102-103)

Na prática educativa, essas contradições podem ser evidenciadas, por exemplo, quando ações que compõem uma *atividade* falham por conta de que os sujeitos que a executaram são motivados diferentemente para uma mesma ação; ou quando algo novo é introduzido no sistema; ou quando a cultura predominante interfere no objeto/motivo; ou mesmo quando ocorre a interligação de várias *atividades* com a *atividade* central.

É importante reconhecer as *contradições*, independentemente do nível a qual se encontra, como forma de transformação da prática educativa. Isto, seja pelo valor de troca e de uso dentro de cada elemento da atividade central, seja entre os componentes centrais da atividade, seja entre o *motivo/objeto* ou *objeto/motivo* da atividade central, ou mesmo desta com atividades “vizinhas”.

Ainda sobre as *contradições*, entendidas aqui como uma oportunidade de transformação em um sistema de atividade e não como conflitos ou problemas. Podem também ser entendidas como possibilidade de aprendizagem para os *sujeitos* quando estes tomam consciência da existência das *contradições*, *tensões* que “podem servir de fontes que renovam tentativas de mudar a atividade, ou podem servir de energia para conflitos que seriam discordâncias, choques de opiniões ou falta de aceitação do outro”. (SOUTO, 2013, p. 58)

As *contradições* ganham destaque na Teoria da Atividade por provocar mudanças e transformações em um sistema de atividades e podem aparecer de quatro formas:

> a) no interior do sistema entre seus próprios elementos; b) entre os elementos do sistema de atividade e algo novo; c) entre as possíveis ações que formam o objeto coletivo, principalmente entre algo que é proposto e algo que é padrão dominante; d) entre o sistema de atividade e outros sistemas interligados. (SOUTO, 2013, p. 59)

Esse movimento entre as *contradições* evidenciadas e sua respectiva superação, daí as transformações qualitativas, constitui um processo de *aprendizagem expansiva*. Ou seja, as quatro formas sinalizadas por Souto (2013), traduzem as transformações ocorridas pontualmente sobre algum aspecto do sistema de atividade.

Desse modo, considerando as *contradições* internas, entendidas como tensões, estas podem possibilitar *transformações expansivas* do sistema de atividade, pressupõem olhar para o *sujeito* individual e coletivo em interação com o meio, envolvido com o objeto.

Assim, de Vygotsky e o conceito de mediação, tem-se uma relação mediada por artefatos entre os seres humanos e o mundo em seu sentido mais amplo. De Leontiev e a orientação ao objeto, toda atividade é estabelecida a partir de uma necessidade orientada pelo objeto desta necessidade, que é o motivo individual ou coletivo, até Engeström e o sistema de atividades, baseado no modelo triangular para representar as ações individuais e ou coletivas constituído dos elementos *sujeito, artefatos mediadores, objeto, comunidade, regras, divisão do trabalho* e resultado. Ou seja, de Vygotsky, Leontiev até Engeström, o modelo triangular de atividade incorporou outros elementos para constituição de um sistema de atividade que envolve um sujeito coletivo e culturalmente desenvolvido.

3.2 MODELAGEM MATEMÁTICA NA PERSPECTIVA DA TEORIA DA ATIVIDADE DE ENGESTRÖM

As discussões que envolvem o contexto de sala de aula, seus *artefatos*, os *sujeitos* e as relações por ele estabelecida corresponde a aspectos da Teoria da Atividade. Assim, os conceitos já discutidos até aqui que envolvem a Teoria da Atividade e suas possibilidades no contexto escolar são necessários para compreensão da Modelagem Matemática na perspectiva da Teoria da Atividade.

Atividades de ensino podem ser conduzidas e motivadas de modos diferentes, assim os diferentes planejamentos de atividades de ensino, podem gerar diferentes ambientes de aprendizagem. Neste caso, ambiente de aprendizagem entendido como:

> (...) um lugar previamente organizado para promover oportunidades de aprendizagem e constitui-se de forma única na medida em que é socialmente construído por estudantes e professores a partir das interações estabelecidas entre si e com as demais fontes materiais e simbólicas do ambiente. (MOREIRA, PEDROSA e PONTELO, 2011, p. 4-5)

Pensando no ambiente que se quer promover aprendizagem é que se planeja atividades de ensino intencionalmente, levando em consideração os sentidos atribuídos às ações, ao conteúdo e objetivo. Dessa maneira, o ambiente de aprendizagem não se reduz a um espaço físico, envolve para além deste: sujeitos, cultura e sociedade, assim:

> O caráter socialmente construído de um ambiente de aprendizagem escolar expressa a característica local das experiências vividas por professores e estudantes, dependentes dos papéis a que se atribuem nesse lugar, de suas expectativas e desejos, de como percebem uns aos outros, os materiais e sua organização e os resultados de suas ações, de como ocorre a dinâmica da interação entre aprendizes e entre esses e o professor, de como estudantes e professor se valem dos recursos materiais e simbólicos disponibilizados pelo ambiente para concretizar suas interações. (MOREIRA, PEDROSA e PONTELO, 2011, p. 5)

Ao participar de uma atividade escolar, o aluno realiza ações e interage com os elementos constituintes em um ambiente escolar, em que as necessidades que levam esse aluno a participar de uma atividade escolar estão relacionadas aos elementos: sentido atribuído por ele às ações, ao conteúdo e objetivo.

São esses elementos que geram diferentes ambientes de aprendizagem. Um desses ambientes é o de Modelagem Matemática, que ao buscar solução para uma situação problema advinda de temas de investigação, fazendo uso de modelos matemáticos, promove um ambiente de aprendizagem que como tal envolve alunos e professores no processo.

O modelo matemático é “um sistema conceitual, descritivo e explicativo, que é expresso por meio de uma linguagem ou estrutura matemática.” (ALMEIDA e

VERTUAN, 2014, p.2), e por sua vez, a linguagem matemática pode ser considerada uma ferramenta psicológica ou semiótica (símbolos e signos). Isto, na perspectiva da Teoria da Atividade de Engeström tem-se constituído o modelo matemático como elemento de uma atividade. Além disso, dependendo do contexto, esse modelo pode tanto assumir o papel de ferramenta como de resultado em um "sistema de atividade." (ENGESTRÖM, 2001)

Daí que em um ambiente escolar, a Modelagem Matemática é uma atividade que busca a solução de um problema, não necessariamente matemático, por meio de modelo matemático, como representativo para a solução do problema investigado. É uma atividade que envolve ações externas "manifestadas por movimentos do corpo, são mediadas em geral, por instrumentos e ferramentas" (OLIVEIRA, 2001 apud ALMEIDA e VERTUAN, 2014, p. 2) e ações internas envolvendo instrumentos simbólicos. A Modelagem Matemática configurada como atividade de busca por solução de problemas:

> (...) diz respeito ao conjunto de ações em que se envolvem os modeladores (aqueles que desenvolvem a atividade de modelagem) e não se refere apenas a ações físicas desenvolvidas por um indivíduo, mas também as ações psíquicas conscientemente controladas como a memorização ativa, o comportamento intencional. (ALMEIDA e VERTUAN, 2014, p. 2)

O *motivo/objeto* da atividade é que medeia essas ações coordenadas em todas as relações de um sistema de atividade. Nesse sentido, uma Modelagem Matemática é compreendida como uma *atividade*, na perspectiva da Teoria da Atividade, pois envolve um *sujeito*, *objeto*, *artefatos mediadores*, *regras, divisão do trabalho, comunidade* e mediações possíveis com vistas a um resultado a partir de:

> (...) um conjunto de ações coordenadas e desenvolvidas pelos alunos – experimentação, seleção de variáveis, formulação de hipóteses, simplificações, resolução de problemas e validação do modelo vinculado ao contexto de uma situação não essencialmente matemática. (ALMEIDA e BRITO, 2005, p.489)

CAPÍTULO 4. METODOLOGIA DA PESQUISA

4.1 TRAJETÓRIA DA PESQUISA

Em se tratando de pesquisas no ensino superior é comum a constatação dos fenômenos por vias de pesquisa quantitativa, pela mensuração dos fatos. No entanto, há de se considerar por via de regra, que questões oriundas de processos de ensino e aprendizagem carregam consigo o componente sujeito, que vive, pensa e, como consequência, revelam-se elementos que não se pode mensurar.

Na década de 60 é iniciado o interesse na área de Educação Matemática como campo de pesquisa relacionado ao processo de ensino e aprendizagem ao ensino fundamental. Posteriormente ao ensino médio e à formação de professores e depois o ensino superior, vindo a ganhar força apenas nas décadas de 1980 e 1990, onde a Matemática no ensino superior constitui-se tema de investigação no campo de pesquisa da Educação Matemática (IGLIORI, 2009). Portanto, questões relativas ao sujeito que vivenciam as matemáticas oriundas de cursos superiores começam a ser discutidas no âmbito da pesquisa qualitativa.

Ao introduzir o conceito de interação como elemento determinante no processo de ensino e aprendizagem em ambiente de Modelagem Matemática, encontrei-me em um caminho difícil de mensurar, de quantificar, de medir, de verificar. Aproximando, assim, para o lado qualitativo, sujeito a subjetividades na interpretação e entendimento do fato observado e das relações que os sujeitos estabelecem com outros elementos para atingir a aprendizagem matemática.

Tal evidência caracteriza esse estudo dentro de uma abordagem qualitativa de pesquisa, apresentando no seu cerne, princípios da pesquisa qualitativa, descritas por Creswell (2010), a saber: ambiente natural; o pesquisador como um instrumento fundamental; múltiplas fontes de dados; análise de dados indutiva; significados dos participantes; projeto emergente; lente teórica; interpretativa e relato holístico – complexo.

"No ambiente natural, os pesquisadores têm interações face a face no decorrer do tempo" (CRESWELL, 2010, p. 208), por caracterizar a coleta de dados no ambiente em que os sujeitos vivenciam o problema estudado. Com relação ao princípio do pesquisador como um instrumento fundamental garante que o pesquisador qualitativo, ele próprio estrutura os instrumentos e coleta os dados. Seja isto por documentos, observação ou entrevista com os sujeitos da investigação. Estes últimos caracterizam as múltiplas fontes de dados, isto é, o pesquisador qualitativo não se vale de apenas uma fonte de dados, mas a partir das várias fontes extrai percepções e as organiza a partir de categorias emergentes dos dados.

"Os pesquisadores qualitativos criam seus próprios padrões, categorias, e temas de baixo para cima, organizando os dados em unidades de informação" (CRESWELL, 2010, p. 208-209). Traduzem a análise de dados indutiva, podendo "envolver a colaboração interativa com os participantes." (CRESWELL, 2010, p. 208-209)

O significado que os participantes da pesquisa dão às coisas, permite na pesquisa qualitativa, que o pesquisador mantenha o foco na aprendizagem do significado dos sujeitos e não aos que pesquisadores trazem para a pesquisa ou significados expressos na literatura. Isso garante que a percepção do problema da pesquisa emerge do significado dos sujeitos, em um percurso da experiência vivenciada para teorização destes, os significados. Além disso fica evidente aqui que em uma pesquisa qualitativa o pesquisador não deve ir para campo com categorias pré-definidas.

A questão do projeto emergente, diz respeito à condução da pesquisa, como forma de garantir que o planejamento inicial não seja pré-estabelecido rigidamente. Com relação à lente teórica, o pesquisador com frequência usa "lentes" para olhar os estudos. Bem como tenta desenvolver um quadro complexo da questão investigada, caracterizado aqui como relato holístico. Além disso, a pesquisa qualitativa garante ao pesquisador fazer uma interpretação do que se enxerga, ouve e entende:

> Suas interpretações não podem ser separadas de suas origens, histórias, contextos e entendimentos anteriores. Depois de liberado um relato de pesquisa, os leitores, assim como os participantes, fazem uma interpretação, oferecendo, ainda, outras interpretações do estudo. Com os leitores, os participantes, os pesquisadores realizando interpretações. (CRESWELL, 2010, p. 209)

Tais colocações me permitiram compreender professora-pesquisadora e alunos constituem sujeitos em um sistema de atividade. Sujeitos que vivem no mundo, antes mesmo de atribuir significado às coisas sobre o mundo, envolvendo, portanto interação com essas mesmas coisas do mundo, em espaço e tempo específicos.

A abordagem e características que atribuem a esta pesquisa, qualidade, agregada a outros elementos, tais como a interrogação e objetivo da pesquisa, precisam ser pensados para definição do método de pesquisa a ser adotada. Para tal, alguns aspectos devem ser levados em consideração, como é o caso do indivíduo/sujeito do processo.

É natural do indivíduo que vivencia experiências no mundo ter que lidar explícita ou implicitamente com questões de como fazer algo. O como fazer algo nos expedem a etapas em uma sequência a ser cumprida, com objetivos a serem alcançados. Esse processo remete-me a uma reflexão sobre a forma de conduzir e compreender como lidar com a questão de investigação *Como as interações dos elementos - sujeito, objeto, artefatos mediadores, regras, divisão do trabalho, comunidade - de um sistema de atividade favorecem aprendizagem em ambiente de Modelagem Matemática na perspectiva da Teoria da Atividade de Engeström?".*

> Uma das relevâncias da pesquisa é estimular a reflexão. Buscando produzir conhecimento que ilumine a interrogação da pesquisa, o pesquisador desenvolve uma atividade sistemática de busca de evidências que o ajudem a formular sobre o fenômeno interrogado. (BARBOSA, 2001, p. 75)

Para além da busca por evidências "como aquilo que se vê" Barbosa (2001) em um contexto, e tendo garantido até o momento os elementos que considero necessários para uma pesquisa qualitativa, vejo-me admitindo a Modelagem Matemática enquanto atividade na perspectiva da Teoria da Atividade de Engeström, pressuposto metodológico para desenvolver esta pesquisa.

4.2. O LEMM COMO UM ESPAÇO DE APRENDIZAGEM

O Laboratório Experimental de Modelagem Matemática – LEMM surgiu de um projeto de pesquisa intitulado "Modelagem e Aplicações de Cálculo Diferencial e Integral" que previu no seu bojo esta criação como um ambiente no qual os alunos do curso de Matemática pudessem fazer Modelagem Matemática.

Para composição física do LEMM, pensei em instrumentos que dessem conta de abordar não só questões restritas a matemática, como também questões relacionadas às outras áreas do conhecimento. Dentre esses instrumentos, destaco: a unidade mestra de Física Geral, de Química e de Matemática.

A Unidade Mestra para Física Geral é composta por equipamentos como Plano Inclinado com elevação, dinamômetros, dilatômetro linear, gerador eletrostático de correia, painel de associações de resistores, galvômetros, ohmímetro, calorímetro, mesa de força, dispositivo gerador de ondas estacionárias, painel manométrico, painel hidrostático, balanço magnético, conjunto de Moller, entre vários outros materiais necessários para a implementação desses já citados, tais como: hastes, tubos, conexões, termômetros, transformadores, cronômetros, fontes, tripés, sapatas, seringas, pinças, beckers, esferas, bobinas, bússola entre outros.

A Unidade Mestra de Química, com sensores e software é composta por diversos instrumentos que possibilitam o estudo de propriedades gerais e específicas da matéria, misturas, soluções, processos de separação das misturas, reações químicas, funções químicas, termoquímica, eletroquímica (eletrólise), cinética química, química orgânica, entre outros.

A Unidade Mestra de Matemática, também com sensores e software, é composta por diversos instrumentos que possibilitam o estudo de erros e medidas, trigonometria, áreas, volumes, superfícies de revolução, sólidos de revolução, seções etc. Além das unidades mestras, outros itens, como conjuntos de termodinâmica, conjunto de sólidos geométricos, de materiais de desenho geométrico, bem como equipamentos de medição como decibelímetro, multímetro, paquímetro, dois computadores, quadro interativo, data-show e etc., complementam as ações no LEMM.

Para além da composição física, o LEMM, foi pensado como um espaço onde os alunos pudessem fazer Modelagem Matemática, com vistas à compreensão e aplicabilidade de conceitos matemáticos. Nesse sentido a Modelagem Matemática foi concebida no projeto como uma atividade que permite que os sujeitos interajam, mediados por um conteúdo emergido de temas de investigação. Nesse sentido, o LEMM pode ser concebido como um espaço de aprendizagem caracterizado por um sistema de atividade criado a partir de um ambiente pensado para o desenvolvimento de atividades educativas.

O Laboratório Experimental de Modelagem Matemática difere do ensino tradicional, bem como da dinâmica de sala de aula normal, pois não existe um currículo prévio a ser cumprido. Além disso os alunos participam das atividades por opção, ou seja, os alunos não são "forçados" a agir e nem buscam pontuação em alguma disciplina, estão em busca de conhecimento. Assim, suas ações nas atividades desenvolvidas podem promover a aprendizagem e é nesse sentido que entendo o LEMM, como um espaço de aprendizagem.

Desse modo, o LEMM constitui espaço de aprendizagem por permitir que os sujeitos interajam motivados por um tema de investigação com o objetivo de solucionar coletivamente situações advindas do processo de Modelagem Matemática.

4.3 O CONTEXTO E OS SUJEITOS

O contexto definido para a coleta de dados/informações da pesquisa foi pensado a partir de um projeto de pesquisa intitulado "Modelagem Matemática e Aplicações de Cálculo Diferencial e Integral". Este previa no seu bojo a criação do Laboratório Experimental de Modelagem Matemática – LEMM, projeto que tinha como propósito principal o de contribuir para a compreensão conceitual e de aplicabilidade do Cálculo. Além do LEMM, o projeto previa a oferta de um curso de iniciação científica, por considerar que os alunos possuíam pouca ou nenhuma experiência com pesquisa acadêmica, além de fornecer a estes contato com a escrita acadêmica, produção de relatórios para eventos a partir da sistematização de teorias, observações de experiências.

O curso de iniciação científica ofertado teve como tema "Cálculo e Modelagem Matemática" e foi desenvolvido no próprio LEMM, com os seguintes objetivos: fomentar a iniciação científica a partir de temas de investigação em Modelagem Matemática; contribuir para compreensão conceitual e aplicabilidade do Cálculo e estimular a produção acadêmica do curso de Matemática, do Campus Universitário de Castanhal - CUNCAST.

O LEMM, uma vez caracterizado como um espaço de aprendizagem, contempla elementos que caracterizam o curso de iniciação científica "Cálculo e Modelagem Matemática", como um sistema de atividade segundo Engeström (1987). Isto porque, nesse espaço de aprendizagem os alunos participantes, sejam eles graduandos, graduados ou pós-graduandos, bem como a professora-pesquisadora, assumem objetivos diferenciados a partir de uma prática, no caso o fazer

Modelagem. A partir desta, então, as ações dos sujeitos articulam-se nesse espaço, com vistas a atingir um objeto potencialmente compartilhado, nesse caso, temas de investigação e alunos.

O passo inicial foi estabelecer quem seriam os participantes deste curso e como consequência os sujeitos da pesquisa. A princípio os selecionados seriam alunos em diferentes níveis[10]. No entanto essa condição não foi possível estabelecer previamente, dada a complexidade de escolher esses alunos somados a disponibilidade para participar do curso. Assim, o curso foi oferecido com um único requisito de participação, a disponibilidade dos alunos independente de seus níveis.

O curso com carga horária de 60h foi oferecido em dois horários, manhã (de 22 de abril de 2014 a 19 de agosto de 2014) e tarde (de 23 de abril de 2014 a 19 de agosto de 2014), para atender aos alunos de diferentes horários. Os alunos[11] participantes foram escolhidos por ordem de inscrição, tendo garantido na inscrição a disponibilidade e comprometimento. Resultando em alunos do curso Licenciatura em Matemática, cursando diferentes semestres, graduados e ainda alunos cursando mestrado.

Assim, havia encontrado alunos disponibilizados e em diferentes níveis para o desenvolvimento de conteúdos matemáticos que apareceriam no processo que envolvia Modelagem Matemática e Experimentação. Cenário para que eu na condição de pesquisadora pudesse coletar os dados/informações para esta pesquisa.

Apoiada nas ideias de Lawrence Stenhouse (1926 – 1982), professor-pesquisador que acreditava que “todo educador tinha de assumir seu lado experimentador no cotidiano e transformar a sala de aula em laboratório” (NOVA ESCOLA, 2008, p.119), bem como “todo professor deveria assumir o papel de aprendiz” (NOVA ESCOLA, 2008, p. 120). Nesse sentido vejo-me no contexto de pesquisa como professora-pesquisadora.

Encaminhado essas questões iniciais, todas as experiências de Modelagem Matemática desenvolvidas pelos alunos participantes que se disponibilizaram naturalmente tendo feito ou nunca feito Modelagem em sua vida acadêmica, foram realizadas sob minha orientação. Isto, no espaço de aprendizagem promovido no

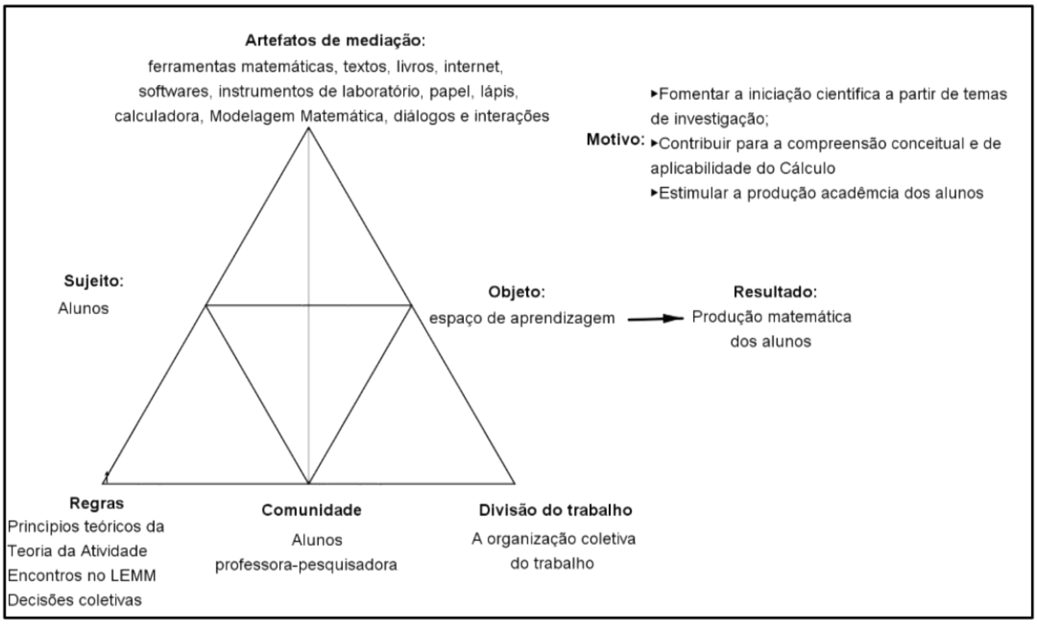
---

[10] Níveis, diz respeito aos semestres já cursados pelos alunos do curso de Licenciatura Plena em Matemática.

[11] Os alunos serão identificados na pesquisa por nomes fictícios, por eles escolhidos

âmbito do LEMM, quando da realização do curso iniciação científica intitulado "Cálculo e Modelagem Matemática", que se configura no sistema de atividade apresentado na Figura 5.

Figura 5: Sistema de atividade do curso de iniciação científica "Cálculo e Modelagem Matemática"



Fonte: Da autora

Na representação triangular da figura 5, baseado em Engeström (1987), os artefatos medeiam a relação dos alunos, entendidos aqui como sujeitos por terem o poder de ação com o objeto espaço de aprendizagem. Bem como essa relação é mediada pela comunidade, incluindo nela meu papel como orientadora na participação do curso e por partilhar do mesmo objeto. Entretanto, no processo de modelagem as minhas intervenções não são no sentido de mudar o sistema de atividades, mas de instigar os sujeitos para reflexão da situação investigada.

Ainda conforme o critério de participação no curso, no caso a disponibilidade para diferentes horários já citados, organizei dois grandes grupos que se envolveriam com Modelagem Matemática. O primeiro foi composto por 10 alunos que se reuniam todas as terças-feiras no horário da manhã (8h às 12h) e o segundo formado por 13 alunos que se reuniam todas as quartas-feiras no horário da tarde (14h às 18h).

A dinâmica proposta para o curso foi a mesma nos dois grandes grupos, que chamarei aqui de GM (Grupo da manhã) e GT (Grupo da tarde), que foram subdivididos em outros pequenos grupos para o desenvolvimento das atividades, de acordo com as decisões tomadas pelos próprios participantes da pesquisa. A esses denominarei GM_1, GM_2 etc., para subdivisões do GM e GT_1, GT_2 etc., para as subdivisões do GT.

Conduzi o curso na condição de professora-pesquisadora, mas também como partícipe da comunidade de um sistema de atividade que interage e que está envolvida nas atividades desenvolvidas no âmbito do Laboratório Experimental de Modelagem Matemática – LEMM. Tendo no contexto investigado olhares diferenciados por ações oriundas das atividades que se diferenciam pela posição que assumem professora e alunos em relação às nuances que envolvem esse processo.

O curso de Iniciação Científica "Cálculo e Modelagem Matemática" foi pensado e planejado em três etapas para ambos os grupos, GM e GT, que contemplaram formações de grupo e temas de investigação em Modelagem Matemática. Na primeira etapa os alunos foram questionados se estavam "ali" (no curso) procurando uma receita pronta para fazer Modelagem Matemática. Pergunta esta que resultou em resposta *sim* automaticamente de todos os participantes (GM e GT). Pensando nesta resposta e diante dela, ofereci-lhes uma receita de bolo de caneca, dessas imediatas encontradas na internet com o objetivo de colocá-los diante de uma situação *a priori* não-matemática.

Essa opção permitiu mostrar aos alunos que o curso não se tratava de aulas convencionais A primeira etapa do curso foi caracterizada por colocar os alunos em uma situação incomum, como a de oferecer uma receita de bolo de caneca para que o fizessem, e que a partir de questionamentos, instigação de busca de fenômenos de uma situação que a princípio seria não matemática pudessem dialogar, hipotetizar, interagir e buscar nas ações individuais e coletivas respostas para o problema que seria elaborado por cada grupo.

Os alunos formaram grupos de três ou quatro alunos, para literalmente fazerem o tal bolo de caneca seguindo a receita. Assim, a primeira etapa está definida pela formação de grupos de alunos ao acaso e a Modelagem Matemática desenvolvida por estes grupos será descrita no capítulo de análise desta pesquisa.

A segunda etapa do curso consistiu em apresentar diversas temáticas que poderiam ser utilizadas para fazer Modelagem Matemática e a partir do interesse dos alunos pelos temas propostos, os grupos seriam formados. Assim, a segunda etapa configurou-se pela formação de grupos de alunos pelo interesse de um tema, de uma lista de temas sugeridos. Na terceira etapa, os grupos já formados na segunda etapa escolheram um tema de seu interesse para fazer Modelagem Matemática, constituindo a etapa escolha de um tema livre pelo grupo de alunos já formado.

A proposição de três etapas para o desenvolvimento do curso fez-se necessário para colocar os alunos gradativamente envolvidos com o processo de Modelagem Matemática. No caso, a 1.ª etapa configurou-se por uma situação não matemática, *a priori*, e o grupo formado para essa Modelagem foi ao acaso, pois se tratava de alunos que não estavam familiarizados.

Na 2ª etapa levei em consideração o fato de que era a primeira experiência de Modelagem para a maioria dos alunos. Então ofereci vários temas para que, pelo interesse individual de cada um por um tema, os grupos pudessem ser formados. Os temas oferecidos eram variados e possibilitavam o uso de instrumentos que o LEMM dispunha. Como uma evolução gradual, então na 3.ª etapa, os grupos já formados pensariam em um tema livre, em consenso, para que pudessem fazer Modelagem Matemática.

4.3.1 MODELAGEM MATEMÁTICA CONFIGURADA COMO UM SISTEMA DE ATIVIDADE

Ações coordenadas são orientadas pelo *motivo/objeto* da atividade que medeia todas as relações de um sistema de atividade. Assim as ações coordenadas articulam-se no espaço de aprendizagem – Laboratório Experimental de Modelagem Matemática –, estimuladas por diferentes objetivos, que dependem dos *sujeitos* envolvidos na pesquisa: alunos de graduação, alunos de pós-graduação e professora-orientadora.

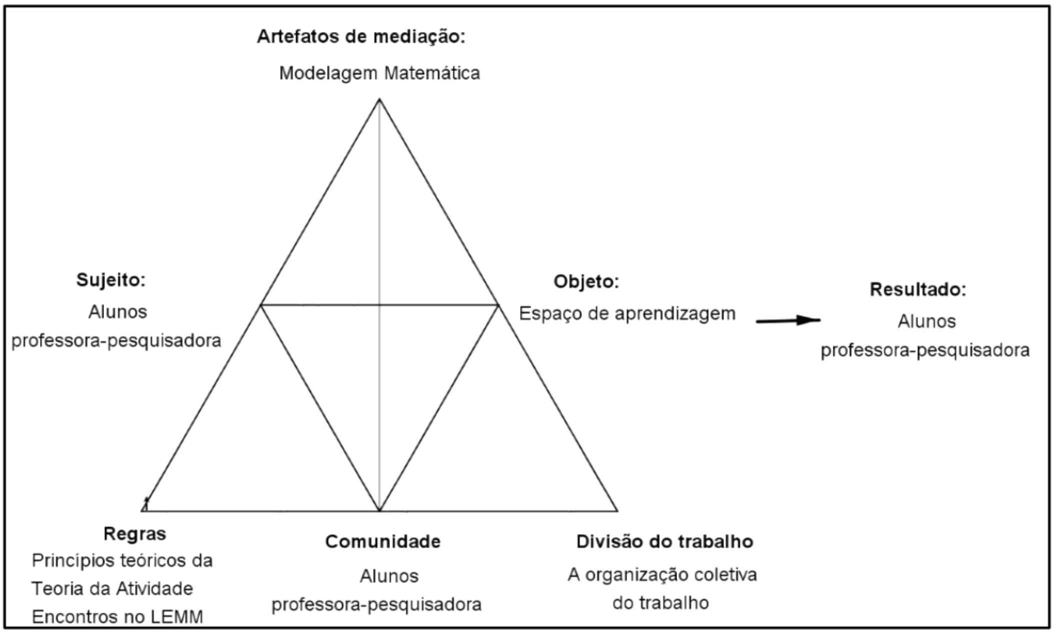
Os alunos da graduação em Licenciatura Plena em Matemática serão futuros professores e têm como objetivos vivenciar na prática experiências com Modelagem Matemática, compartilhar conhecimentos, desenvolver habilidades matemáticas e refletir sobre sua futura prática de sala de aula. Isso se adéqua também ao aluno recém graduado (sondagem 1.º dia).

Os alunos pós-graduandos envolvidos no estudo já são professores de matemática e têm objetivos de refletir a própria prática a partir da vivência com a Modelagem Matemática, investigar os processos de ensino e aprendizagem de conceitos matemáticos por meio da Modelagem.

A professora-pesquisadora, também coordenadora do projeto Laboratório Experimental de Modelagem Matemática, tem suas ações direcionadas pelos objetivos de permitir a interação entre os sujeitos envolvidos com os outros, com os objetos e ferramentas, bem como interação dos conhecimentos individuais, assim como favorecer a discussão com base na argumentação individual e organizar ações dos sujeitos em coletividade.

De posse dos objetivos dos sujeitos envolvidos no estudo, as ações destes no curso de Iniciação Científica (Cálculo e Modelagem Matemática) desenvolvido no Laboratório Experimental de Modelagem Matemática – pode-se esquematizar um esboço de um sistema de atividade, Figura 6.

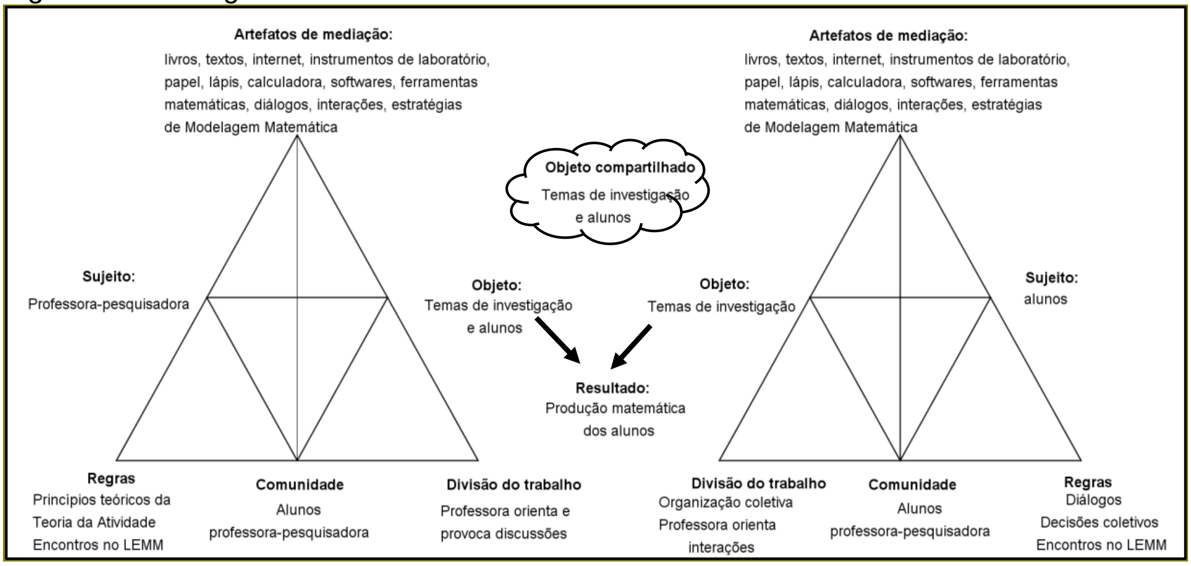
Figura 6: Sistema de atividade do LEMM



Fonte: Da autora.

A Figura 6 representa o sistema geral de atividade do Laboratório Experimental de Modelagem Matemática. A partir da compreensão de atividade pode-se gerar um sistema com pelo menos dois interlocutores, a partir dos sistemas dos sujeitos e professora-pesquisadora, onde o objeto da atividade de Modelagem Matemática na perspectiva da Teoria da Atividade são temas de investigação e alunos.

Figura 7: Modelagem Matemática em um sistema de atividade com dois interlocutores



Fonte: Da autora

O sistema de atividade, com dois interlocutores descrito na figura 7, contempla aos pares de sistemas em que me encontro como professora pesquisadora com cada grupo formado para desenvolver o processo de Modelagem Matemática. Assim o objeto é coletivamente significado para um objeto compartilhado, ou como denominado por Engeström (1999) como potencialmente compartilhado.

4.4. A COLETA DE DADOS/INFORMAÇÕES

Da afirmativa de que “cada pesquisador deve estabelecer os procedimentos de coleta de dados que sejam mais adequados para o seu objeto particular” (GOLDENBERG, 2007, p. 63), preocupei-me com detalhes, excertos que poderiam surgir na ocasião da pesquisa. Além disso, os instrumentos para coletar os dados devem considerar a forma como os sujeitos interagem com os objetos e com os outros nas ações para a solução de uma atividade de Modelagem Matemática. Nesse sentido, busquei nos vários procedimentos e instrumentos de coleta de dados/informações não fragmentar a realidade investigada.

Quanto à forma de se obter dados para compor uma análise qualitativa, pode-se lançar mão de diferentes estratégias, como observação, questionário, entrevista e filmagem, com o objetivo de desenhar com maior proximidade e fidelidade a realidade investigada. “(...) assim, nos registros, as ações, as expressões e os diálogos entre os sujeitos devem ser minuciosamente abrangidos, possibilitando a realização das análises posteriores.” (SANTOS; VENTURIN, 2010, p.5)

Diante da necessidade de mapear ações dos sujeitos em interação com outros elementos de um sistema de atividade, a primeira decisão foi justamente não descartar nenhum dos alunos que se disponibilizou a participar do curso “Cálculo e Modelagem Matemática”. A observação dos encontros em ambos os horários, GM e GT, com os alunos fazendo Modelagem Matemática constitui fonte de dados/informações, que teve duração de um semestre letivo, iniciando em abril de 2014 e finalizando em agosto de 2014, totalizando 60h presenciais.

No primeiro dia de curso, como forma de conhecer individualmente os alunos participantes, apliquei um questionário de sondagem no início do curso, com o objetivo de saber deles suas opiniões sobre Modelagem e suas perspectivas com o curso, além de dados objetivos sobre vida acadêmica.

A coleta de dados se deu pela observação em ambiente natural, com vistas a reconhecer as interações evidenciadas no processo e registrá-las, pois considero a observação a primeira forma de aproximação com o sujeito. Além disso, é possível pela observação verificar o sentimento real de como as coisas acontecem.

Além da observação contínua, os encontros foram áudio e vídeo-gravados, com o objetivo de capturar as ações dos grupos nas três etapas do curso. Ou seja, as ações desenvolvidas no âmbito do Laboratório Experimental de Modelagem Matemática – LEMM foram áudio-gravadas ou vídeo-gravadas, dependendo do quantitativo de grupos formados e de equipamentos disponíveis (gravadores de voz e filmadoras). A gravação em áudio ou em vídeo tem importância significativa na organização e análise dos dados, por ser mais completo, pois permite ser reexaminado seu conteúdo diversas vezes.

Ao final de cada etapa do curso, com foco nos grupos de trabalhos formados, os alunos produziam relatórios do processo de Modelagem Matemática por eles desenvolvido. Bem como apresentavam suas problematizações e decisões no formato de seminário para os outros alunos participantes do curso. Isto, como forma de socializar e iniciar o diálogo entre os grupos, a partir das descrições por eles seguidas e conclusões do processo de Modelagem Matemática, iniciado a partir de um tema de investigação. As três etapas do curso que os alunos geraram relatórios e apresentações de resultados foram:

- ✓ Formação de grupos de alunos ao acaso;

- ✓ Formação de grupos de alunos pelo interesse de um tema, de uma lista sugerida;
- ✓ Escolha de um tema livre pelo grupo de alunos já formado.

Para complementar as informações, foi elaborado um roteiro-guia de entrevista semi-estruturada, gravada em áudio e em seguida transcrita, com o objetivo de capturar nas respostas conscientes dos alunos, confirmações evidenciadas a partir das observações. Assim o acervo de dados coletados e analisados compreende: o que os alunos disseram e fizeram e que foram capturadas nas informações dadas pelos participantes na sondagem inicial, nas observações, no material de áudio e vídeo-gravação das três etapas do curso, nos relatórios e apresentações dos grupos, bem como na transcrição das entrevistas realizadas ao final do curso.

4.5 A ANÁLISE DOS DADOS/INFORMAÇÕES

Ao refletir sobre minha questão de pesquisa *Como as interações dos elementos - sujeito, objeto, artefatos mediadores, regras, divisão do trabalho, comunidade - de um sistema de atividade favorecem aprendizagem em ambiente de Modelagem Matemática, na perspectiva da Teoria da Atividade de Engeström?* busco compreensão das interações dos elementos constituintes de um sistema de atividade e como estas favorecem a aprendizagem dos alunos.

Assim, a compreensão das interações compõe a análise dos dados a partir da Teoria da Atividade, considerando a descrição das ações das atividades realizadas pelos grupos participantes e o significado que os sujeitos atribuem, conscientes na investigação, sobre o objeto de estudo. Ao compreender as interações entre os elementos do sistema de atividade, repercussões das aprendizagens podem ser evidenciadas.

Considerei o planejamento de atividades de Modelagem Matemática, na perspectiva da Teoria da Atividade de Engeström, para alunos conscientes de sua participação no contexto de investigação da pesquisa, a análise dos dados capturados na fase de coleta, teve na própria Teoria da Atividade, base para a estruturação de análise destes. Nesse enfoque, o curso de iniciação científica “Cálculo e Modelagem Matemática” foi constituído como um sistema de atividade segundo Engeström (1987), bem como as várias *atividades* de Modelagem Matemática desenvolvidas no curso, como parte de uma rede de sistemas.

No contexto da Educação Matemática, a Teoria da Atividade faz-se presente desde o momento em que se planeja atividades de ensino para aulas de matemática, onde é oportunizada aprendizagem matemática de modo consciente. Assim, ao desenvolver pesquisas da prática educativa, a Teoria da Atividade é capaz de descrever e analisar tal prática, caracterizadas em ambientes de aprendizagem, levando em consideração o enredamento de seus elementos e as relações que os mesmos estabelecem entre si (LISBOA, 2009).

A possibilidade de ambiente gerado pela Modelagem Matemática é mote para aprendizagem do indivíduo, que se constitui sujeito no mundo construído socialmente. Ao fazer Modelagem Matemática, entendida como um "processo de criação de modelos onde estão definidas as estratégias de ação do indivíduo sobre a realidade, mas especificamente sobre a sua realidade, carregada de interpretações e subjetividades próprias de cada modelador." (BASSANEZI, 2012, p. 10) situa-se a *atividade* no âmbito da coletividade.

Considero que a Teoria da Atividade corresponde a uma estrutura teórica, capaz de analisar os papéis desempenhados pelos elementos e ferramentas que compõem uma *atividade* constituída histórica e culturalmente, bem como suas interações. Assim, a Teoria da Atividade:

> (...) viabiliza a análise das práticas educacionais em um nível mais amplo do que as práticas individuais de professores e alunos, pois aborda essas práticas em sua natureza coletiva, considerando as ferramentas empregadas, as comunidades nas quais o sujeito está inserido, além das regras que medeiam a relação do sujeito com essa comunidade e da divisão do trabalho, que por sua vez medeia a relação entre a comunidade e o objeto da atividade. (CARVALHO JÚNIOR, 2011, p. 28)

Analisar as práticas educacionais pelo sentido atribuído a uma atividade escolar, de como os *sujeitos* motivam-se com ela, as necessidades e *motivo/objeto* da atividade para o sujeito individual ou coletivo, são elementos circundantes da Teoria da Atividade e que pode ser compreendido como instrumento de descrição e análise das práticas educativas.

Para tanto, analisar as interações configuradas a partir dos sistemas de atividades formados não é tarefa trivial Uma vez constituídos os sistemas de atividades, busco as relações e ações que medeiam os elementos da atividade, evidenciando os princípios básicos (sistema de atividade coletivo, multivocalidade, historicidade, contradição, transformação expansiva) da Teoria da Atividade de Engeström, quando da ocorrência destes.

De forma a estruturar o processo de análise dos dados constituídos no LEMM, inicialmente optei por fazer uso de quatro atividades desenvolvidas e na sequência realizei a descrição e análise delas. O que consistiu em descrever as atividades, apresentando a configuração/reconfiguração do sistema e buscando associá-las aos princípios da teoria da atividade de Engeström. Na sequência, realizei a discussão e interpretação dos resultados referente à apropriação geral do que foi evidenciado especificamente em cada sistema de atividade configurado.

CAPÍTULO 5. DESCRIÇÃO, ANÁLISE DOS RESULTADOS

Este capítulo descreve os sistemas de atividades, as análises a partir das relações que medeiam os elementos: *sujeito, objeto comunidade, bem como os artefatos, as regras e a divisão do trabalho*. A compreensão do sistema de atividade configurado se dá pelos princípios básicos da Teoria da Atividade de Engeström, que compõem o quadro teórico desta tese e que pode explicar o fenômeno investigado nesta pesquisa.

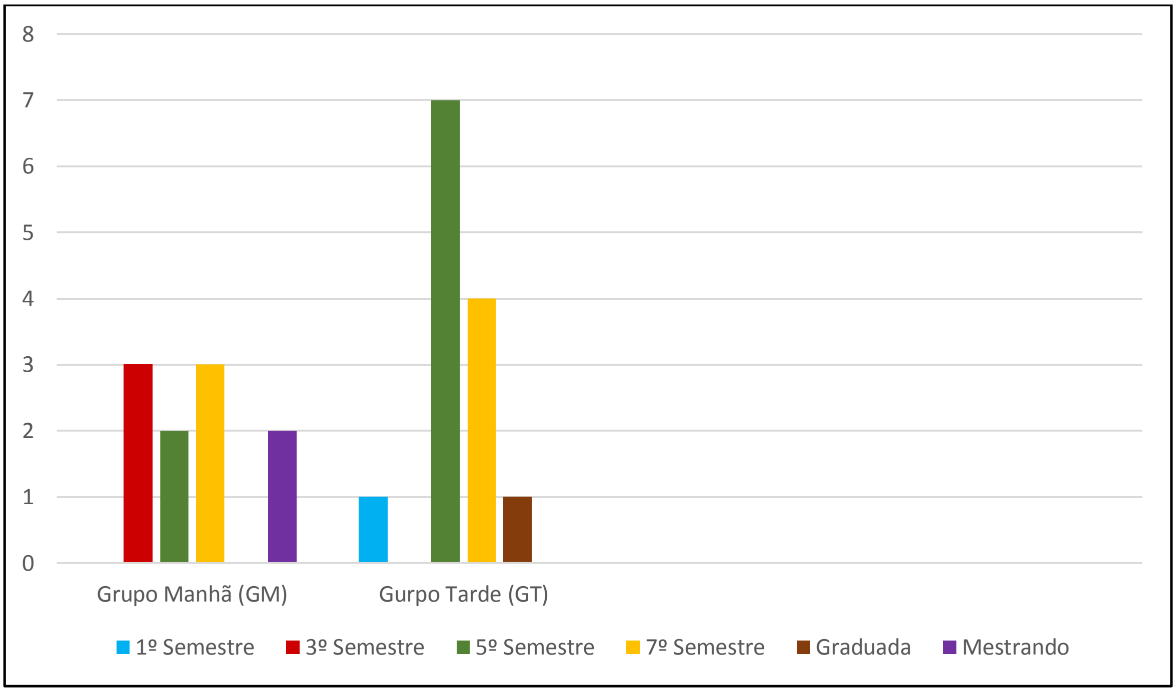
Para tanto, apresento a descrição e análise de quatro atividades de Modelagem Matemática desenvolvidas pelos alunos: Modelagem do bolo de caneca por dois grupos, Solução de água e sal e Crescimento populacional da cidade de Castanhal/PA. Tais atividades foram escolhidas considerando o *motivo* dos alunos para o seu desenvolvimento. Assim, optei por duas *atividades* da primeira etapa do curso onde dois grupos desenvolveram a mesma temática, uma da segunda etapa por conta da justificativa da experiência de um dos alunos e outra da terceira etapa do curso pela justificativa social dos alunos.

5.1 O CURSO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA “CÁLCULO E MODELAGEM MATEMÁTICA” E SUAS ETAPAS

No primeiro dia do curso, fiz inicialmente uma sondagem, com o objetivo de saber sobre a situação acadêmica dos alunos e suas expectativas com o curso, bem como suas compreensões sobre Modelagem Matemática, modelos, experimento e trabalho em grupo. Isto se deu por conta de que a maioria dos alunos estava participando pela primeira vez de um curso de Modelagem Matemática.

Os alunos que constituíram o GM (Grupo da manhã) correspondem a oito alunos do curso de Licenciatura Plena em Matemática, da Faculdade de Matemática, do Campus Universitário de Castanhal, que estavam cursando diferentes semestres e dois alunos cursando mestrado, sendo um deles cursando Mestrado em Educação Matemática e o outro cursando Mestrado Profissional PROFMAT. Enquanto que o GT (Grupo da tarde) envolvia treze alunos do curso de Licenciatura Plena em Matemática, cursando diferentes semestres e uma aluna já graduada. Embora, a princípio não tenha sido possível determinar os participantes pelo critério dos diferentes níveis, naturalmente isso ficou contemplado pelo critério da disponibilidade, Gráfico 1.

Gráfico 1: Situação acadêmica dos alunos participantes, na ocasião do início da pesquisa.



Fonte: Pesquisa, 2014

Os motivos que levaram os alunos a participarem do curso estão relacionados com sua situação acadêmica. Os alunos do 1º e 3º semestres relacionaram suas expectativas com o uso de conhecimentos matemáticos ao cotidiano. Os alunos do 5º e 7º semestre foram levados pelo interesse de compreender o que é Modelagem Matemática, produzir trabalhos científicos (inclusive de TCC). A aluna graduada, com interesse pedagógico, para sua prática docente e os alunos cursando pós-graduação objetivavam vivenciar experiências de Modelagem Matemática (entendida como prática de ensino de Matemática) para utilização em sala de aula. Sendo que um deles também visa a atualização curricular e o ingresso no doutorado.

Na sequência da sondagem, tentei dialogar com os alunos, como forma de aproximar-me deles. Apesar disso, a maioria permanecia em silêncio, sem questionamentos tanto no GM quanto no GT. Aos poucos fui expondo a respeito da Modelagem Matemática e da forma como o curso em questão, seria conduzido. Aos poucos os alunos de ambos os grupos começaram a se envolver em minha exposição dialogada, promovendo uma tímida interação verbal comigo e com os outros participantes.

Daí em diante, perguntei aos alunos: “Todos procuram por receitas. E vocês?”. Com o objetivo de provocá-los no sentido de fazê-los perceber que não encontrariam no curso um sequência metodológica sobre como fazer Modelagem Matemática. Os grupos de alunos do GM e do GT, após compreender a pergunta, foram afirmativos: a maioria buscava “receitas”. Então ofereci a eles uma receita de bolo de caneca e entreguei-lhes materiais como farinha de trigo, chocolate, ovos, óleo, açúcar e fermento, acompanhados do modo de como preparar o bolo, Figura 8.

Figura 8: Receita de bolo de caneca

Receita de Bolo de Caneca Ingredientes Rende: 1 bolo de caneca 1 ovo 3 colheres (sopa) de óleo 4 colheres (sopa) de leite 3 colheres (sopa) de açúcar 3 colheres (sopa) de chocolate em pó ou achocolatado 4 colheres (sopa) de farinha de trigo ½ colher (chá) de fermento em pó	Modo de preparo Em uma caneca, junte o ovo e o óleo. Em seguida, adicione o leite, o açúcar e o chocolate em pó. Mexa bem até incorporar todos os ingredientes. Aos poucos vá adicionando a farinha de trigo, sempre mexendo. Por último acrescente o fermento em pó e misture. Leve ao microondas por 3 minutos. Não se assuste se a massa do bolo crescer e começar a passar da caneca, ela não irá transbordar. Retire do micro-ondas e se desejar sirva com calda de chocolate.

Fonte: desconhecida

Essa iniciativa de entregar uma receita e ingredientes para que os alunos fizessem literalmente um bolo de caneca, foi algo que os surpreendeu e chamou-lhes a atenção para uma situação não matemática, *a priori*. Na sequência, provoquei os alunos para que levantassem questões a respeito dos ingredientes e preparo do bolo, ao mesmo tempo em que pensassem em fenômenos referentes à produção de um bolo, ou relação ao bolo com os seguintes questionamentos: “O que observaram do bolo?”; “Então, qual fenômeno você deve observar?”.

Algumas questões foram levantadas tanto pelos grupos GM quanto pelos GT, como o caso do volume da massa do bolo quando está sendo preparado, a questão da temperatura do bolo dentro do forno. Em coletividade os grupos GM e GT, cada grupo no seu horário, concordaram que tanto para verificar o volume quanto a temperatura no interior do forno não seria possível com os artefatos materiais da qual dispúnhamos. Por esse motivo ambos os grupos optaram por começar as aferições a partir do instante que o bolo de caneca seria retirado do forno.

Algumas sugestões foram dadas na medida em que os alunos envolviam-se com a atividade: – “Conseguir informações sobre a variação do fenômeno”; “O que são taxas de variação do ponto de vista matemático?”. A partir de então os grupos

GM e GT foram subdivididos aleatoriamente, caracterizando esta primeira etapa como *formação de grupos de alunos ao acaso*. Sendo que GM ficou dividido em dois subgrupos $GM_{1,1}$ e $GM_{2,1}$, onde o $GM_{1,1}$ preparou e coletou os dados na copa próximo ao LEMM (sem ar condicionado) e o outro $GM_{2,1}$ preparou o bolo no espaço LEMM (com ar condicionado), assou o bolo e imediatamente retornaram com o bolo para o espaço LEMM para a coleta dos dados.

O grupo GT, ficou subdividido em três subgrupos: $GT_{1,1}$, $GT_{2,1}$ e $GT_{3,1}$ e obedecendo a mesma dinâmica dois deles optaram por ficar no espaço LEMM e um deles na copa. Além dos ingredientes para preparar o bolo, todos os subgrupos do GM e GT usaram termômetros analógicos e às vezes digital, cronômetros, régua, lápis e papel para realizar a coleta de dados referente às variáveis temperatura do bolo, imediatamente após ser retirado do forno com o passar do tempo.

Assim, a primeira etapa do curso, consistiu em colocar os alunos do GM e GT diante de uma situação, a princípio, não matemática aliado ao fato de eles poderem utilizar o espaço de aprendizagem LEMM para suas produções matemáticas.

Na segunda etapa do curso, foi proposto que os alunos, a partir de um leque de temas, iriam se habilitar a desenvolver Modelagem Matemática daquele tema que fosse de seu interesse. Essa etapa ficou denominada *formação de grupos de alunos pelo interesse de um tema*, de uma lista de temas sugeridos. Escolhi os temas que seriam apresentados aos alunos, considerando o fato de que seus desmembramentos estivessem relacionados com o espaço de aprendizagem LEMM, bem como alguns estivessem relacionados com questões atuais da sociedade. Os mesmos temas foram sugeridos no grupo GM e GT: 1) Forrozão de rua na cidade de Castanhal: Muito Barulho?; 2) Solução de Água e Sal; 3) Lançamento de Projétil; 4) Ferrugem; 5) Parte da Ponte da Alça Viária sobre o Rio Moju/PA desaba após balsa bater em pilastra; 6) Rotatividade de forneiros em Cerâmicas da Castanhal e Inhangapi; 7) Oscilador Massa – Mola e 8) Exercício físico: rendimento homens x mulheres.

Como na primeira etapa apresentei uma situação (tema bolo de caneca), na segunda etapa os alunos se viram preocupados em qual tema escolher, o que este tema envolveria de matemática, se teriam como desenvolver qualquer tema do qual escolhessem. Coloquei que de início buscassem um tema que fosse do interesse deles e posteriormente, baseados na busca por informações acerca do tema escolhido, teriam condições de planejar suas ações em coletividade.

Assim, alguns alunos escolheram temas pelo critério do uso de artefatos do LEMM, outros priorizaram uma escolha baseada na atualidade, e outros pela curiosidade, que resultou na seguinte subdivisão para o grupo GM e GT, Tabela 1:

Tabela 1: Subdivisões dos grupos GM e GT na segunda etapa do curso, seus componentes, temas escolhidos e motivo.

Grupo	Componentes	Tema escolhido	Motivo
$GM_{1;2}$[12]	ALEFEBE e MARIA	Oscilador Massa-Mola	Utilizar artefatos do LEMM
$GM_{2;2}$	PLATÃO, JOÃO SILVA e ALLAN	Lançamento de projétil	Utilizar artefatos do LEMM
$GM_{3;2}$	MATEKA e DÉBORA	Parte da Ponte da Alça Viária sobre o Rio Moju/PA desaba após balsa bater em pilastra	Tema da atualidade
$GM_{4;2}$	COPAS, MARCOS e SANDRO	Solução de água e sal	Incerteza[13]
$GT_{1;2}$	(DALILA, MARQUES, CAROL)[14] e RAFAEL	Solução de água e sal	Experiência do aluno Marques
$GT_{2;2}$	FRANCISCO, ROBSON[15] e NETO	Lançamento de projétil	Incerteza
$GT_{3;2}$	AMANDA, RENATA e PAULA	Parte da ponte da alça viária sobre o rio Moju/Pa. desaba após balsa bater em pilastra	Reportagens frequentes em telejornais
$GT_{4;2}$	BETÂNIA e BIA	Exercício físico: rendimento homem x mulher	Curiosidade

Fonte: Da autora

Os *motivos* que levaram os alunos a escolherem um determinado tema, a partir de vários propostos, serão melhor descritos quando das análises de cada grupo, pois os primeiros motivos descritos na tabela 1 foram evidenciados quando da ocasião da escolha do tema.

A escolha de um tema de interesse dos alunos em seus grupos já formados caracterizou a terceira etapa que ficou denominada pela *escolha de um tema livre pelo grupo de alunos já formado*. A escolha do tema livre foi bastante trabalhosa, pois os alunos não tinham um referencial, um ponto de partida e por isso trocavam de temas diversas vezes por motivos variados, que serão tratados por grupos nas

[12] Notação $GM_{1;2}$ significa Grupo da manhã 1 da 2ª etapa do curso
[13] Incerteza significa que na opção da temática não foi possível evidenciar os motivos que levaram os alunos a escolhê-la.
[14] Os alunos Dalila, Marcos e Carol não participaram da primeira etapa do curso
[15] O aluno Robson não participou da primeira etapa do curso.

análises de cada deles. Nesta etapa os grupos GM e GT ficaram subdivididos, conforme Tabela 2.

Tabela 2: Subdivisões dos grupos GM e GT na terceira etapa do curso, seus componentes, temas escolhidos e motivo.

Grupo	**Componentes**	**Tema escolhido**	**Motivo**
$GM_{1;3}$	ALEFEBE e MARIA	Crescimento populacional da cidade de Castanhal	Social
$GM_{2;3}$	PLATÃO, JOÃO SILVA e ALLAN	Frota de veículos no município de Castanhal	Social
$GM_{3;3}$	MATEKA e DÉBORA	Centro de gravidade de idosos do GETI/CUNCAST[16] e percentual de quedas	Incerteza
$GM_{4;3}$	COPAS e SANDRO	Dízimo na cidade de Santa Maria do Pará	Incerteza
$GT_{1;3}$	(DALILA, MARQUES, CAROL) e RAFAEL	Consumo calórico diário	Curiosidade
$GT_{2;3}$	FRANCISCO	O jogo Sudoku	Incerteza
$GT_{3;3}$	AMANDA, RENATA, PAULA, BETÂNIA e BIA	1) Barulho na feira da Ceasa em Castanhal e no jogo do Brasil 2) Teoria das filas nas caixas Lotéricas	Social e curiosidade

Fonte: Da autora

Na sequência, apresento as atividades de Modelagem realizadas pelos grupos supracitados, no período do curso, e suas análises a partir do pressuposto metodológico da Teoria da Atividade.

5.2 O GRUPO $GM_{1;1}$ (1ª etapa) NA MODELAGEM DO BOLO DE CANECA

Os alunos que constituíram o grupo $GM_{1;1}$ foram: Platão (5º Semestre), Marcos (3º Semestre), Maria (7º Semestre), Alefebe (7º Semestre) e João da Silva (5º Semestre). Desses, apenas Alefebe declarou já ter vivenciado experiências de Modelagem Matemática, destacando o fato de que:

[16] GETI/ CUNCAST – Programa Grupo de Educação na Terceira Idade, do Campus Universitário de Castanhal.

> (...) já tinha tido experiência com Modelagem Matemática, mas essa foi a, posso dizer que a experiência mais forte que eu tive com a Modelagem.

Ao ser questionado sobre qual foi a diferença das experiências com Modelagem realizadas no LEMM para as anteriores, o estudante colocou que:

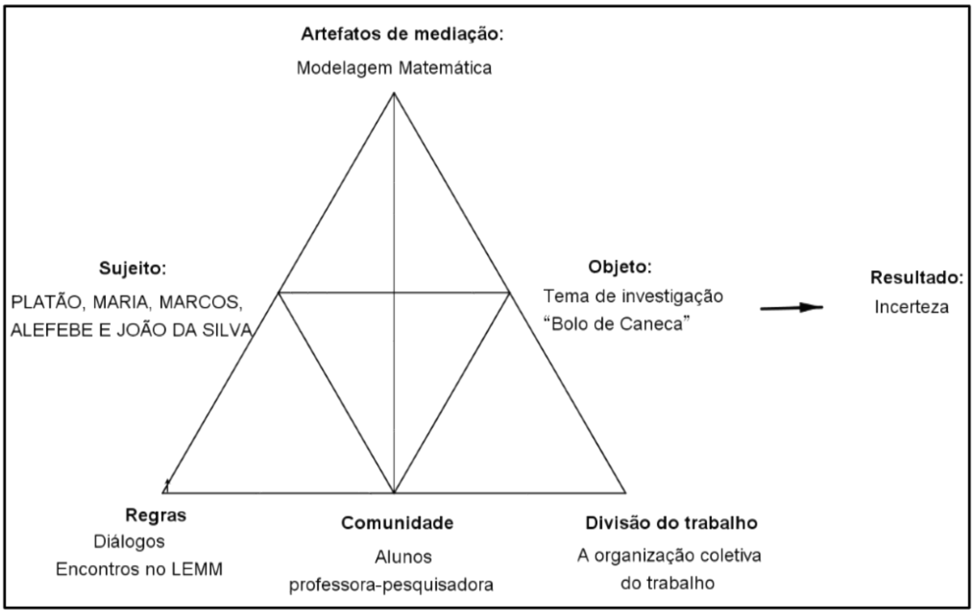
> A diferença é que agora eu pude trabalhar com diversas formas de cálculo, envolvendo até mesmo equações diferenciais, usando diversos tipos de funções em um mesmo problema, enquanto que antes eu tinha uma situação problema que eu usava um mecanismo matemático para resolver através da Modelagem Matemática, mas ficava um pouco restrito.

Todos os alunos tinham interesses comuns com a participação no curso, como por exemplo, relacionar a Matemática com o cotidiano e fazer Modelagem Matemática. Esses motivos parecem direcionar o objeto relacionado à Matemática. O grupo $GM_{1;1}$ realizou a modelagem do bolo de caneca em quatro encontros, em média 4 horas cada um.

No início do processo de Modelagem Matemática, os alunos do $GM_{1;1}$ não tinham noção das ferramentas matemáticas que utilizariam. Além disso, todas as decisões eram tomadas no espaço do LEMM, assim como toda a Modelagem realizada colaborativamente pelos membros do $GM_{1;1}$, pois se o problema proposto for aberto sem qualquer indicação dos procedimentos necessários para sua solução. Cabendo ao grupo deliberar que ações serão executadas e como o objetivo de cada ação se relaciona à solução do problema gerador da atividade.

Considerando a necessidade geradora da atividade intimamente ligada ao seu objeto, os objetivos direcionadores das ações e as condições de sua realização configuram a situação objetal, o contexto de realização da atividade. Considerando o passo-a-passo de uma Modelagem a partir de um tema, da inteiração/coleta de dados, da análise de dados e formulação de modelos até a validação e conclusões, entendidas aqui como etapas do processo de Modelagem Matemática (BASSANEZI, 2012), os alunos inicialmente compreenderam-na como parte do sistema de atividade desempenhando o papel de *artefato*, pois nas suas etapas tinha-se o desenvolvimento das ações, Figura 9.

Figura 9: Primeiro Sistema de Atividade do grupo$GM_{1;1}$.



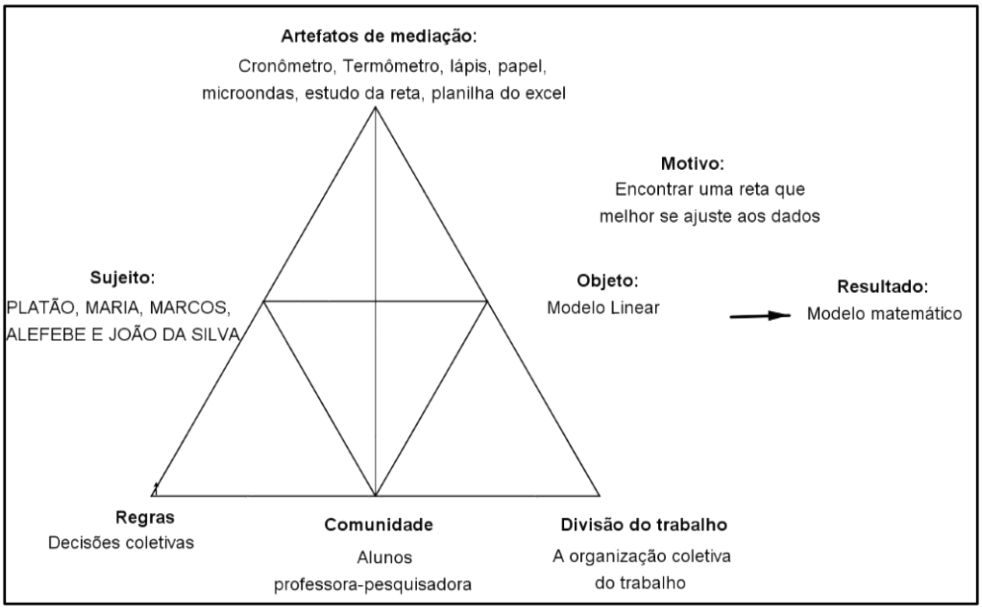
Fonte: Da autora

Os alunos do grupo $GM_{1;1}$, após prepararem o bolo de caneca e colocar no forno microondas para assar, retiraram o bolo passado o tempo necessário de cozimento. Na sequência começaram a conjecturar que os dados pareciam comportar-se como uma reta. Alguns trechos transcritos do diálogo dos alunos são tomados nesse texto:

> (JOÃO DA SILVA) É! Parece uma reta, mas e esse aumento de temperatura no tempo 8? O que vamos fazer com isso?
> (ALEFEBE) Espera aí, vamos esperar mais tempo para ver o que acontece.
> (PLATÃO) Mas, professora, quando vamos parar de coletar os dados?
> (EU) Vocês não pensaram nessa questão?
> (MARIA) Quanto mais dados melhor
> (EU) O que acham de um quantitativo significativo?
> (ALEFEBE) Parece uma reta mesmo
> (PLATÃO) O que fazer para achar essa reta?

Os trechos recortados do diálogo do grupo $GM_{1;1}$ provocaram mudanças no sistema de atividade, na medida em que os alunos "olham" para os dados coletados e visualizam um modelo matemático (a reta) caracterizando a Modelagem Matemática não mais como *artefato* (Figura 9), mas como o sistema da atividade propriamente dito. O trecho sinaliza a busca por um *resultado*, neste caso o modelo matemático como representativo de uma situação problema investigada (Bolo de caneca). Assim, na medida em que o grupo vai se apropriando das variáveis, da Modelagem, o sistema de *atividade* ganha nova configuração, como mostra Figura 10.

Figura 10: Modelagem Matemática como sistema de atividade, $GM_{1,1}$



Fonte: Da autora

A concepção da Modelagem Matemática, inicialmente, como um artefato mediador do sistema de atividade, pode ser justificado pelo fato de que a maioria dos alunos a compreendiam como um instrumento ou ferramenta, ou seja, de que tinham um problema a ser resolvido e a ferramenta necessária para a sua solução seria a Modelagem Matemática. Esta visão foi superada a partir do desenvolvimento dessa *atividade* quando ao longo do processo incorporaram ferramentas que na verdade eram necessárias para desenvolvê-las, e que na verdade a Modelagem Matemática correspondia ao próprio sistema de *atividade* composto pelos elementos: sujeitos que correspondia ao próprio grupo $GM_{1,1}$; e os vários artefatos mediadores que precisaram dispor para a realização da *atividade*; as regras, divisão do trabalho que foram definidas pela comunidade do sistema a partir do objeto/motivo com vistas a alcançar o resultado, no caso, o modelo matemático. No Quadro 1, é possível verificar que após a coleta de dados, os alunos buscaram referências apenas nos pares ordenados.

Quadro 1: Síntese 1ª parte da Modelagem do tema Bolo de Caneca, $GM_{1;1}$.

ESCOLHA DE TEMAS

O tema bolo de caneca foi proposto aos alunos

INTEIRAÇÃO → COLETA DE DADOS

Depois de batermos a massa do bolo de caneca e antes de levarmos ao microondas, medimos a temperatura ambiente (30° C) e a temperatura da massa (26°C).
No momento que foi retirado o bolo do microondas, já se iniciou as anotações do tempo e temperatura citadas na tabela 1.

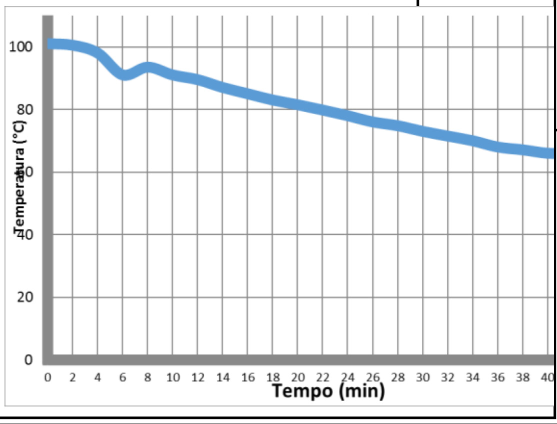
Tabela 1 – Dados coletados

Tempo (min.)	Temp. (°C)
0	101
2	100,5
4	98
6	91
8	93,5
10	91
12	89,5
14	87
16	85
18	83
20	81,5
22	79,8
24	78
26	76
28	74,8
30	73
32	71,5
34	70
36	68
38	67,1
40	66
42	65,8
44	63,5

Aumento de temperatura devido a abertura do microondas.

Fonte: Relatório entregue pelo $GM_{1;1}$

ANÁLISE DE DADOS E FORMULAÇAO DE MODELOS



Uma reta parece se aproximar dos pontos. (Maria)

E esse t= 8min, que a temperatura ao invés de diminuir está aumentando, vamos considerar que foi um descuido na hora da coleta. (João Silva)
(transcrição de gravação em áudio das discussões do $GM_{1;1}$)

Mas, qual seria a equação dessa reta?**y = m.x + b. A** primeira ideia foi utilizar a geometria analítica, que através de dois pontos aleatórios, temos:A(14;87), B(16;85) ;$(y_2 - y_1) = m(x_2 - x_1)$ →m = -1 (coeficiente angular). T(0) = 101 °C (coeficiente linear). Portanto, teríamos: **y = -1x + 101**
O problema é que foi usado apenas dois pontos, e o restante?
podemos encontrar a reta y = m.x + b que "melhor se ajusta" aos pontos coletados através do **Método dos Mínimos Quadrados.**

n	x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	$\sum x_i . y_i$
1	0	101	0	10201	0
2	2	100,5	4	10100,25	201
3	4	98	16	9604	392
4	6	91	36	8281	546
5	8	93,5	64	8742,25	748
6	10	91	100	8281	910
7	12	89,5	144	8010,25	1074
8	14	87	196	7569	1218
9	16	85	256	7225	1360
10	18	83	324	6889	1494
11	20	81,5	400	6642,25	1630
12	22	79,8	484	6368,04	1755,6
13	24	78	576	6084	1872
14	26	76	676	5776	1976
15	28	74,8	784	5595,04	2094,4
16	30	73	900	5329	2190
17	32	71,5	1024	5112,25	2288
18	34	70	1156	4900	2380
19	36	68	1296	4624	2448
20	38	67,1	1444	4502,41	2549,8
21	40	66	1600	4356	2640
22	42	65,8	1764	4329,64	2763,6
23	44	63,5	1936	4032,25	2794
Soma	**506**	**1854,5**	**15180**	**152553,6**	**37324,4**

$\left(\sum xi\right)^2 = 256036$

$\sum xi . \sum yi = 93837$

- Coeficiente ang

$$m = \frac{n.\sum xi.yi - \sum xi.\sum}{n.\sum xi^2 - (\sum xi)^2}$$

- Coeficiente line

$$b = \frac{\sum xi^2.\sum yi - \sum xi.\sum xi}{n.\sum xi^2 - (\sum xi)^2}$$

Substituindo na equação da reta:
y = - 0,8583x + 99,5141
Daí, encontramos as temperaturas pela função linear e calculamos a diferença aos dados reais:

Variação da diferença de T:

$$|-2,7 - 3,3| = 6$$

(retirado do relatório entregue pelo $GM_{1;1}$)

Mas, tem uma lei, que é de resfriamento que acho que se encaixa nessa situação (Alefebe)
(transcrição de gravação em áudio das discussões do $GM_{1;1}$)

Fonte: Relatório entregue pelo $GM_{1;1}$

Fonte: Da autora

Nesse nível de atividade, o grupo caminhava coletivamente na busca por uma reta que representasse os dados coletados, bem como em comum acordo desprezaram o incidente com t = 8 min. Além disso, as ações do grupo eram conduzidas por uma motivação matemática, pelo fato de que buscavam nas relações matemáticas argumentação para a construção de um modelo matemático que desse conta de representar os dados tabelas, não necessariamente o fenômeno.

O quadro 1 representa uma síntese da primeira parte da Modelagem Matemática desenvolvida pelos alunos do $GM_{1;1}$. A cada novo encontro novas buscas por informações alteravam o encaminhamento das ações dos sujeitos. Apesar dos alunos estarem convencidos de que uma função $y = ax + b$ satisfazia a situação investigada, outro elemento surgiu no processo: a possibilidade de comparação. Quando ALEFEBE coloca que existe uma lei que se encaixa na situação investigada e então o argumento matemático incorpora o argumento do fenômeno com vistas ao mesmo resultado, o modelo matemático. Essa condução do processo segue considerando que:

> (PLATÃO) Então vamos fazer e depois a gente compara.
> (ALEFEBE) Tem como calcular os desvios, então dá para comparar

O *objeto* do sistema da atividade sofreu outra mudança, onde deste ponto as discussões giraram em torno da Lei do Resfriamento de Newton, com a argumentação de que estavam relacionando as variáveis temperatura e tempo do esfriamento de um bolo. Os alunos pareciam que apesar de tomarem suas decisões no âmbito do grupo $GM_{1;1}$ buscavam nas minhas palavras uma concordância com o que estavam fazendo. Por esse motivo minhas interferências no processo não eram de dar sugestões e encaminhamento, mas de instigá-los a buscar argumentações para as suas tomadas de decisão, por compreender que qualquer resposta direta minha poderia alterar a configuração do sistema de atividade.

Quando os alunos optaram por investigar a Lei do Resfriamento de Newton para a situação problema, o sistema de atividade se reconfigura com alteração do *objeto* (Resfriamento de Newton) gerando o mesmo *resultado* (modelo matemático), onde o *motivo* corresponde em compreender e aplicar a Lei do Resfriamento de Newton na situação investigada. Além disso, o desenvolvimento desse sistema pode ser descrito no quadro 2, com o desenvolvimento do modelo exponencial, bem como o comparativo com o modelo linear e as argumentações necessárias para a escolha do modelo que melhor se adéqua para a situação investigada.

Quadro 2: Síntese 2ª parte da Modelagem do tema bolo de caneca, $GM_{1;1}$.

ANÁLISE DE DADOS E FORMULAÇAO DE MODELOS

A Lei de Resfriamento de Newton estabelece que a diferença entre a temperatura de um corpo e a do ambiente que o contém, decresce com uma taxa de variação proporcional a essa própria diferença.

$$\frac{dT}{dt} \propto (T - T_A)$$

Para igualar, precisa-se de um k

Fonte: Relatório entregue pelo $GM_{1;1}$

$$\frac{dT}{dt} = k.(T-30)$$

$$\frac{dT}{T-30} = k.dt \rightarrow \int \frac{1}{T-30}dT = \int kdt$$

$ln|T-30| = kt + c_1,\ como\ T > 30:$

$$\ln T - 30 = kt + c_1 \rightarrow e^{kt+c_1} = T - 30$$

$$e^{kt}.e^{c_1} = T - 30,\ e^{c_1} = c_2$$

$$T = 30 + c_2.e^{kt} \qquad (1)$$

$PVI: T(0) = 10$

$$101 = 30 + c_2.e^{k.0} \rightarrow c_2 = 71$$

Substituindo em (1):

$$\mathbf{T = 30 + 71.e^{kt}}$$

Para encontrar o k:

$$e^{kt} = \frac{T-30}{71}$$

$$\ln e^{kt} = \ln\frac{T-30}{71} \rightarrow kt = \ln\frac{T-30}{71}$$

$$k = \frac{\ln\frac{T-30}{71}}{t}$$

Usando essa fórmula no Excel, para cada ponto, encontramos vários k's. Como teríamos que fazer os cálculo para cada k e analisá-los, seria muito trabalhoso. Então, decidimos por um k = -0,01583 médio. (Alefebe e Platão)
(transcrição de gravação em áudio das discussões do GM1)

VALIDAÇÃO E CONCLUSÕES

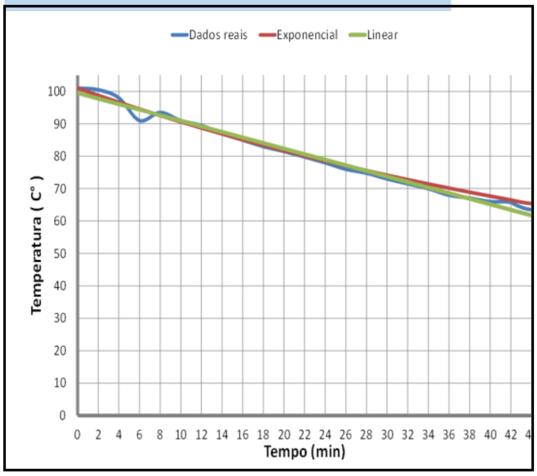


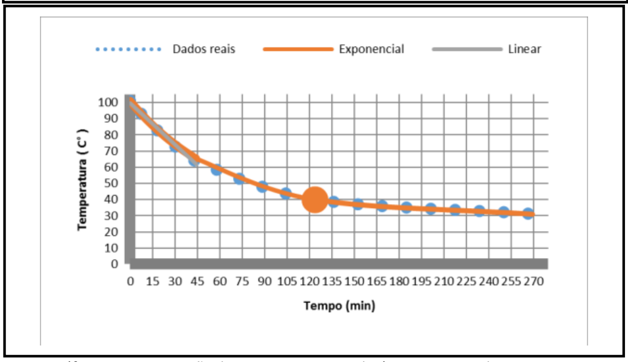
Gráfico 1: Comparativo dos modelos no Excel; Fonte: Relatório entregue pelo $GM_{1:1}$

Sabendo que a função exponencial é mais adequada que a linear usando o k médio, após quanto tempo, aproximadamente, o bolo estará a uma temperatura de 40 °C, adequado para ser consumido?

$$T = 30 + 71.e^{kt} \rightarrow e^{kt} = \frac{40-30}{71} \rightarrow \ln e^{kt} = \ln\frac{10}{71} \rightarrow k.t = -1{,}96 \rightarrow t = \frac{-1{,}96}{k}$$

Usando o k médio, temos:

$$t = \frac{-1{,}96}{-0{,}01583} \rightarrow t \cong 124\ min$$



Fonte: Gráfico 2: Representação de T no t=124min; Relatório entregue pelo $GM_{1;1}$

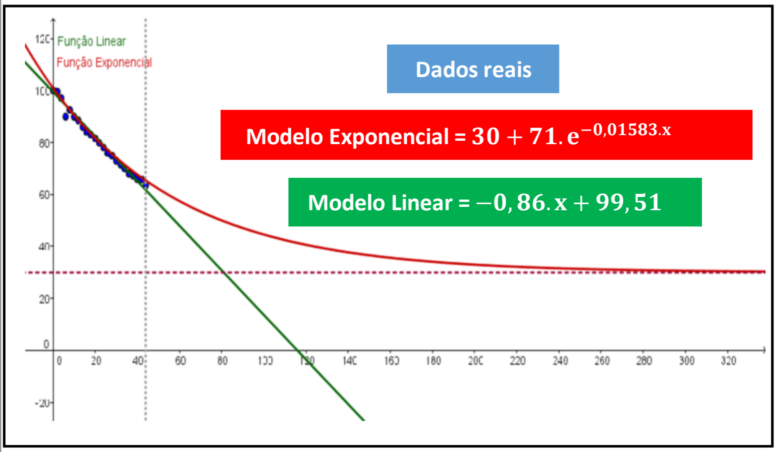


Gráfico 3: Comparativo dos modelos no Geogebra; Fonte: Relatório entregue pelo $GM_{1;1}$

Portanto, usando o k médio, a função exponencial é melhor que a linear, devido:

- a menor variação da diferença de temperatura;
- a representação gráfica se aproximar da realidade, pois a temperatura do bolo não poderia estar

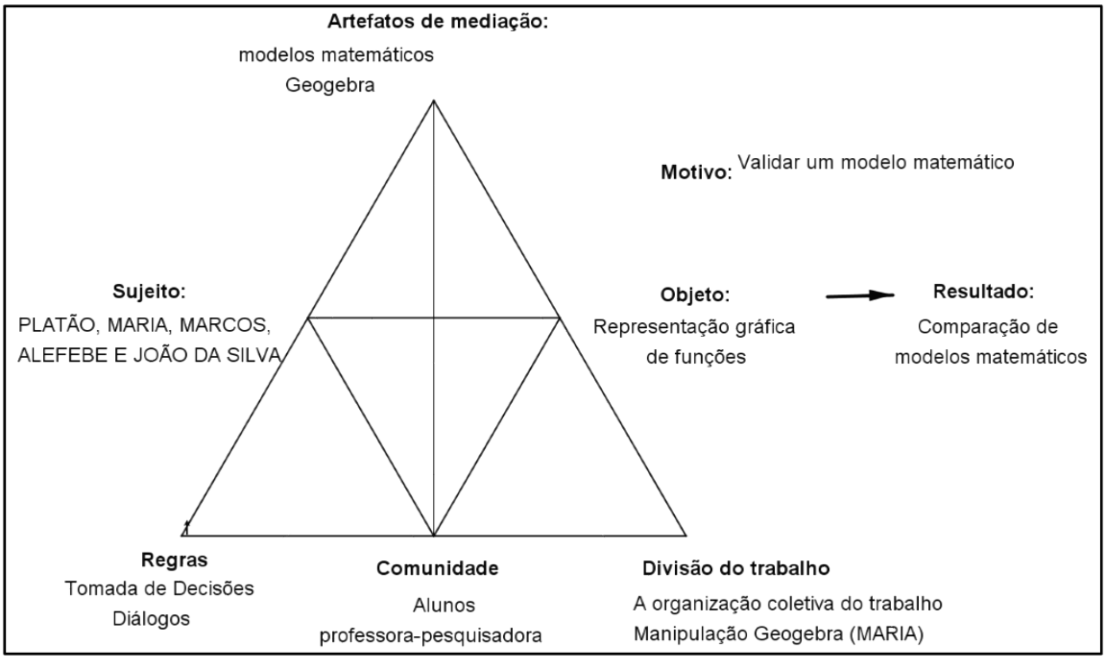
Fonte: Relatório entregue pelo $GM_{1;1}$

Fonte: Da autora

É possível verificar que do quadro 1 para o quadro 2 o sistema de atividade é reconfigurado com foco no objetivo. Quando encontraram o modelo linear e o modelo exponencial (como resultado da Lei do Resfriamento de Newton) buscavam na representação gráfica associada aos desvios produzidos por cada modelo em relação aos dados reais, argumentação matemática para consolidar suas conclusões e escolha do modelo adequado. No entanto, para eles a ferramenta Excel não permitia a construção do gráfico a partir da função e isso se configurou em *tensão* (*contradição* interna) para o grupo $GM_{1;1}$.

Nessa ocasião, a aluna MARIA ganha destaque na *divisão do trabalho* do sistema de atividade, no motivo oriundo desta *tensão*, Figura 11.

Figura 11: Sistema de atividade oriundo de uma tensão, $GM_{1,1}$



Fonte: Da autora

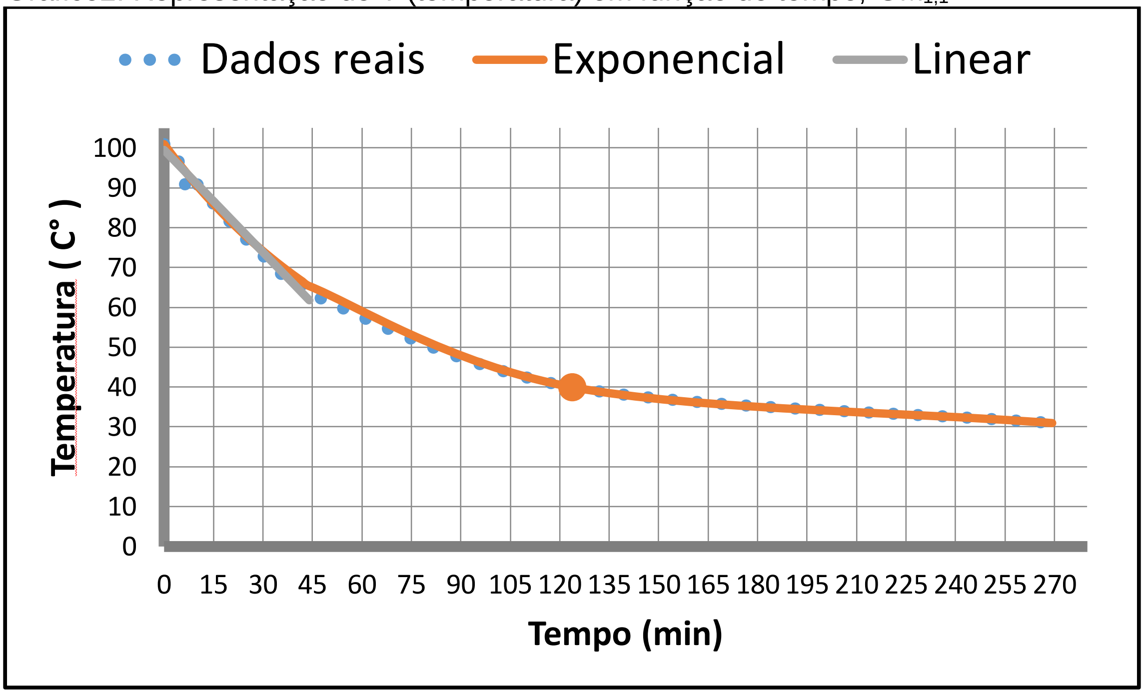
A mudança de *artefato* foi resultante de uma *contradição* dos elementos centrais do sistema de atividade. Essa *contradição* provocou mudanças e desenvolvimento da *atividade*, pois:

> (...) quando um sistema de atividade adota um novo elemento do exterior (por exemplo, uma nova tecnologia, ou um novo objeto) pode levar ao agravamento de uma contradição secundária onde alguns elementos velhos (por exemplo, as regras ou divisão do trabalho) colidem com o novo. (ENGESTRÖM, 2001, p.137)

Ou seja, a *contradição* gerou conflitos, mas também permitiu uma mudança na *atividade* a partir da negociação dos alunos. Nesse caso, a opção pelo Geogebra em detrimento do Excel, para comparação entre os modelos encontrados pelo grupo, está baseada no excerto: “a linha do gráfico fica forçada no Excel” (ALEFEBE, transcrição seminário de socialização). A argumentação dos alunos ficou compreendida no coletivo. Nesse trecho evidencio que a negociação de significado entre os alunos do grupo configurou-se como uma interação que determinou a continuidade do processo e a busca por outro *artefato mediador* que fosse capaz de atender suas expectativas.

Quando questionados sobre o que entendiam por forçado nesse contexto, ALEFEBE responde que “é por que não há uma suavidade, harmonia no gráfico, parece quebrado”, referindo-se ao Gráfico 2, do Quadro 2.

Gráfico2: Representação de T (temperatura) em função do tempo, $GM_{1,1}$



Fonte: Relatório do grupo $GM_{1;1}$

O diálogo que segue evidencia as discussões em torno do termo “forçado”, utilizado pelos alunos do $GM_{1;1}$, na tentativa de compreender a tomada de decisão dos alunos a partir do estabelecimento de significado para o termo.

> (Pesquisadora) E o que vocês fizeram para construir esse gráfico?
> (ALEFEBE) Fomos calculando alguns pontos a partir do modelo exponencial encontrado para gerar uma linha até alcançarmos a temperatura 30ºC.
> (Pesquisadora) Na verdade, quem forçou então, foi o Excel ou foi vocês?

> (Todos) Risos
> (Pesquisadora) O que levou vocês a saírem do Excel e buscarem o Geogebra?
> (ALEFEBE) Queríamos uma representação da função exponencial que havíamos encontrado.

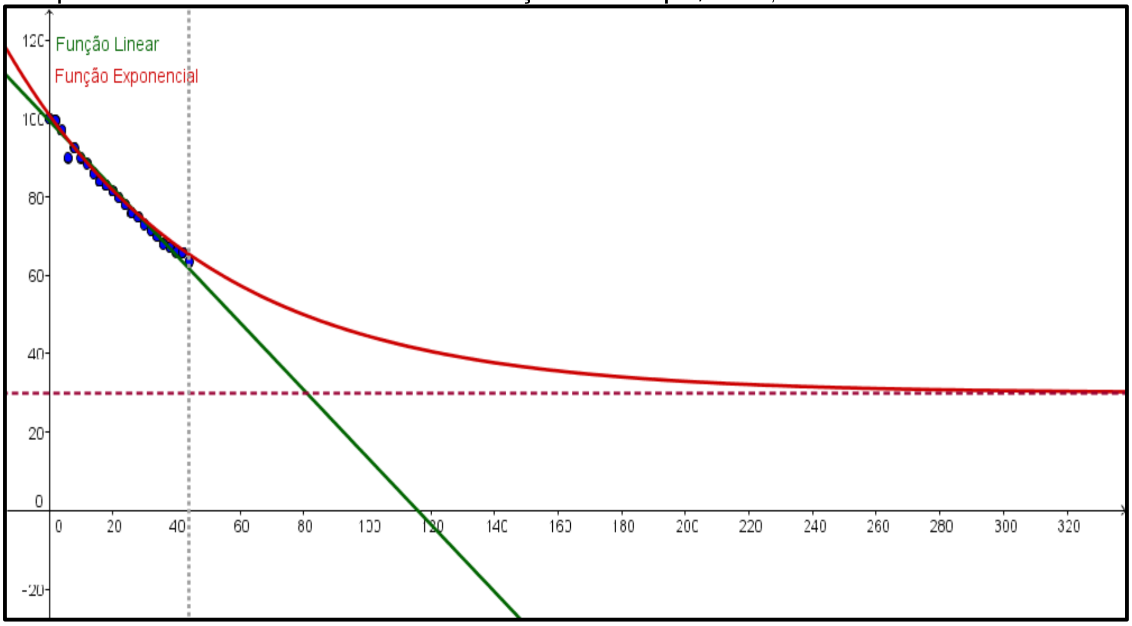
Os excertos demonstram que a negociação de significados auxiliou na tomada de decisão para os encaminhamentos do desenvolvimento da *atividade*. Ao optar por uma linguagem não matemática, mas que justifica uma passagem matemática, os alunos estabeleceram uma interação entre o objeto matemático e suas realidades configuradas aqui como a forma com que compreendem as coisas que de alguma forma o termo “forçado” fazia parte da realidade do grupo e por isso representava a contento a situação matemática que estavam vivenciando. A negociação do significado pelos alunos foi possível, pois:

> (...) através da linguagem é possível visualizar a construção dos significados por parte dos alunos, uma vez que relações de proximidade podem ser estabelecidas com maior facilidade através de um veículo tão presente e relevante no processo de comunicação entre as pessoas, e, em particular, no universo dos estudantes. (BARUFI, 1999, p. 45)

A linguagem associada à imagem resultante do gráfico 2 (Quadro 2) produzido pelos alunos no Excel, fortaleceu o estabelecimento de uma linguagem que fosse compreensiva para os alunos e que atendessem naquele momento a negociação de significado. Nesse caso a negociação estabelecida levou “à produção do conhecimento contextualizado, pessoal de cada aluno, individualmente considerado, e do conhecimento coletivo compartilhado.” (BARUFI, 1999, p, 46)

Retomando a Figura 11, esse novo sistema de *atividade* não descarta os sistemas anteriores. É possível perceber que cada sistema de atividade foi construído a partir do *objeto/motivo* que foi sofrendo alterações ao longo do processo de Modelagem Matemática. Nesse caso, posso afirmar que a Modelagem Matemática enquanto sistema de atividade sofre modificações como resultado de interações dos *sujeitos* com os *artefatos mediadores* e os *objetos/motivos* intermediários, bem como na organização do trabalho. Na figura 11, o destaque está no *artefato mediador* que permitiu aos alunos a compreensão das variáveis temperatura e tempo para além dos dados coletados. Isto é, como os modelos matemáticos encontrados se comportam para um tempo muito grande, Gráfico 3.

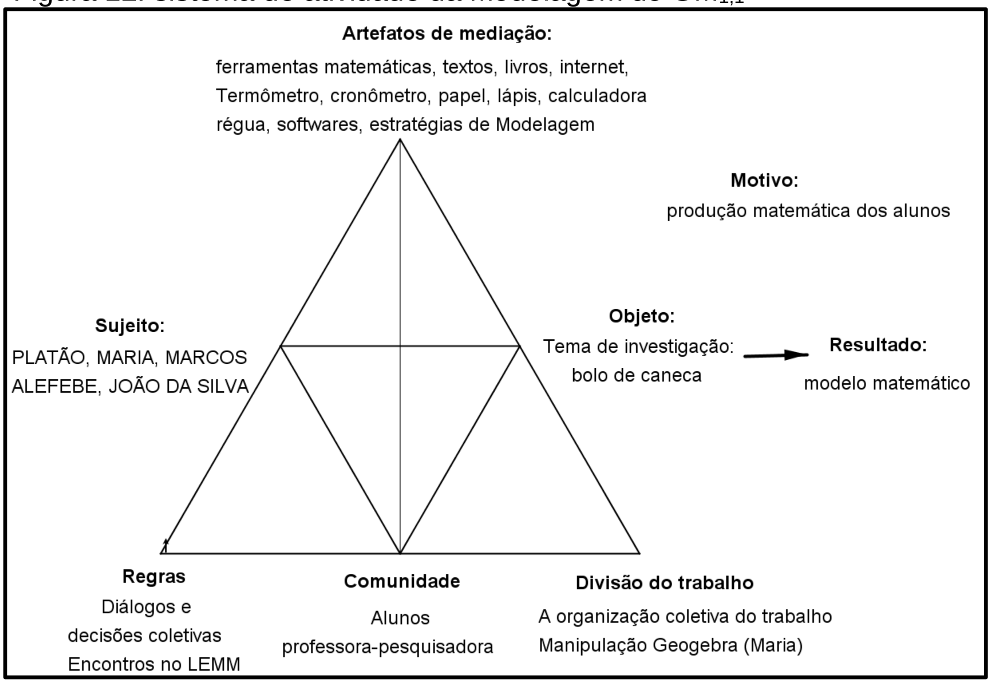
Gráfico 3: Comparativo dos modelos linear e exponencial com os dados reais da temperatura do bolo de caneca em relação ao tempo, $GM_{1,1}$



Fonte: Relatório $GM_{1,1}$

É possível construir, considerando as alterações do sistema de atividade, no todo da *atividade* de Modelagem Matemática, uma configuração de sistema que contempla o todo da situação investigada pelo grupo $GM_{1;1}$, Figura 12.

Figura 12: sistema de atividade da Modelagem do $GM_{1,1}$



Fonte: Da autora

5.3 O GRUPO $GM_{2;1}$(1ª etapa) NA MODELAGEM DO BOLO DE CANECA

Os alunos que constituíram o grupo $GM_{2;1}$ foram: Allan (5º Semestre), Copas (Mestrando PROFMAT), Sandro (Mestrando Educação em Ciências e Matemáticas) e Mateka (3º Semestre). Todos os integrantes deste grupo estavam vivenciando na prática uma experiência de Modelagem Matemática pela primeira vez, com exceção do aluno Sandro que declarou já ter praticado Modelagem tanto na condição de aluno, quanto na condição de professor.

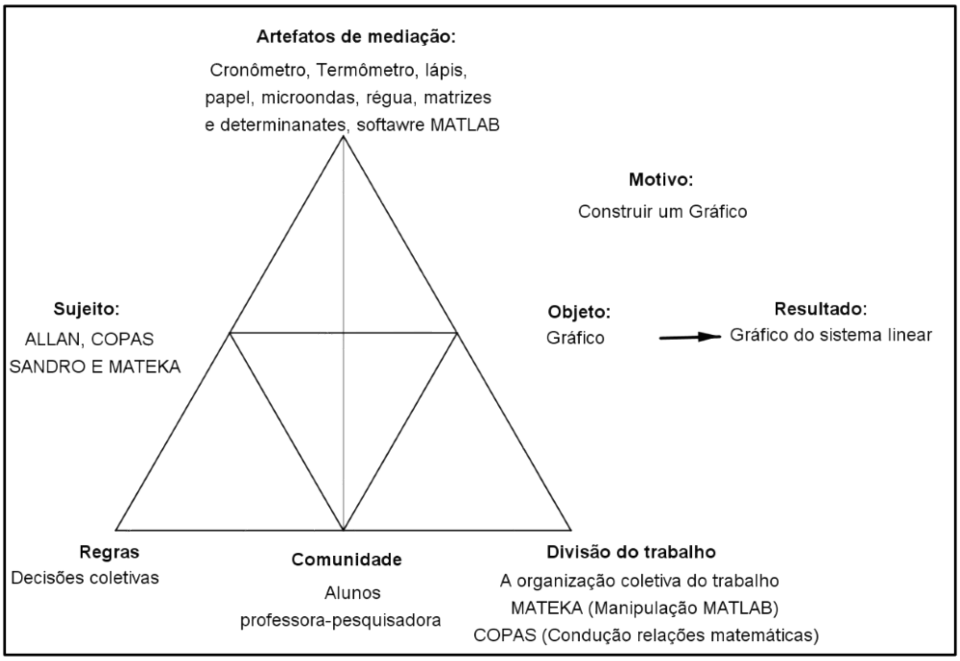
Os interesses deste grupo estavam relacionados com suas situações acadêmicas, ou seja, os alunos do 3º e 5º semestres tinham interesse em conhecer Modelagem Matemática. Em contrapartida os outros dois alunos (Copas e Sandro), por já serem professores objetivavam adquirir experiência teórica e prática.

Assim como o grupo $GM_{1;1}$, o grupo $GM_{2;1}$ também teve quatro encontros, na média de 4 horas cada, para desenvolver o processo de Modelagem com o tema Bolo de Caneca. A condução de ações coordenadas pelos grupos foi aleatória, ou seja, foram buscando relações que pudessem ser aplicadas à temática sem um objetivo/motivo claro inicialmente. Mas considerando a Modelagem compreendida como artefato de mediação, esta também foi assumida no sistema de atividade do grupo $GM_{2;1}$ com o mesmo passa-a-passo do grupo $GM_{1;1}$ e por isso a Figura 9, pode ser incorporada como a representação do sistema de atividade do grupo $GM_{2;1}$, alterando-se apenas os sujeitos que medeiam os elementos da atividade.

O preparo do bolo do grupo $GM_{2;1}$, ocorreu no LEMM (com ar condicionado) e levado para assar no micro-ondas da copa (sem ar condicionado). Após retirado do microondas, imediatamente os alunos mediram a temperatura inicial do bolo e retornaram para o espaço do LEMM. Daí em diante passaram a coletar os dados da temperatura do bolo, bem como a temperatura da caneca que continha o bolo a cada um minuto. No entanto, o grupo optou por trabalhar apenas as variáveis Temperatura do bolo e tempo, em detrimento da temperatura da caneca com o passar do tempo, pois entendiam que descobrir a temperatura da caneca não resultaria em resultados significativos para o grupo.

A preocupação do grupo $GM_{2;1}$ ficou direcionada, após escolher as variáveis com as quais trabalhariam, para a busca por um gráfico que representasse a temperatura do bolo decorrido o tempo com intervalos de um minuto. Dessa decisão, foi possível configurar o primeiro sistema de atividade do grupo $GM_{2;1}$, Figura 13.

Figura 13: Primeiro sistema de atividade do grupo $GM_{2,1}$;



Fonte: Da autora

Nessa configuração, os alunos Mateka e Copas ganham destaque na *divisão do trabalho* da *atividade*, pois o primeiro filtrava suas ações mediadas pelo *artefato* MATLAB, motivado pelo fato de que em paralelo com o curso de Modelagem, estava desenvolvendo um curso de MATLAB, o segundo aluno por apresentar repertório com relação aos conceitos de Matrizes e Determinantes. Desta configuração é possível verificar as ações dos *sujeitos* mediadas *pelos artefatos*, sintetizadas no Quadro 3.

Os alunos do grupo $GM_{1,2}$, se debruçaram sobre a possibilidade de gerar um modelo baseado no sistema de inequações, pois ao dispor dos pares ordenados correspondentes as variáveis estudadas no fenômeno, temperatura do bolo e tempo, perceberam visualmente que poderiam encontrar várias equações da reta a cada dois pontos e com isso montariam o sistema de inequações. Não se questionaram sobre a possibilidade de encontrar uma única equação da reta que se aproximasse dos pontos coletados. Assim, associaram a ânsia de fazer o uso do software MATLAB para representar um sistema de inequações com a prática de encontrar equação da reta dado dois pontos, para cada intervalo.

Quadro 3: Síntese 1ª parte da Modelagem do tema Bolo de Caneca, $GM_{2;1}$.

ESCOLHA DO TEMA

O TEMA BOLO DE CANECA FOI PROPOSTO AOS ALUNOS

INTEIRAÇÃO → COLETA DE

Foi coletada a temperatura inicial da mistura de ingredientes que compôs o bolo, T de 27º C;
A temperatura inicial do ambiente do nosso ponto de partida foi de 26 º C;
Realizado as medições da volume do bolo., obtemos 4,3 cm³ antes de ir para o micro-ondas;
Realização da medição do recipiente, a Caneca 8.5 cm³;
Após o cozer do bolo, os integrantes da equipe, perceberam que a temperatura atingida foi de 95º C do bolo de chocolate
Enquanto a variação térmica sentida pelos mesmos na

Temperatura do ambiente X bolo
Quando o bolo atingiu uma temperatura de 95°C, as variações térmicas ocorridas dentro do bolo como o passar do tempo a cada Um minuto decorrido foram de :
T1- 95° C ;T2- 97° C ; T3- 96° C ; T4- 93°C ; T5- 91° C ; T6- 89°C ; T7- 87° C; T8- 85° C ; T9- 83° C ; T10-81°C ; T11- 79° C ; T12- 77°C ; T13- 76° C ;

Fonte: Relatório entregue pelo $GM_{2:1}$

ANÁLISE DE DADOS E FORMULAÇAO DE MODELOS

Inicialmente partimos do pressuposto que para criar relações algébricas para melhor representar esta equação, isso foi feito a partir de ferramentas matemáticas usando propriedades das Matrizes e Determinantes e formando um sistema linear feito manualmente com as cinco relações encontradas através dos resultados Matriciais .

$$\begin{cases} f(x) = 97 - x se\ 0 \leq x \leq 2 \\ Q(x) = \ 3x + 99\ se\ 2 \leq x \leq 3 \\ g(x) = 99 - 2x se\ 3 \leq x \leq 11 \\ r(x) = 87 - x se\ 10 \leq x \leq 11 \\ h(x) = 100 - 2x se\ 12 \leq x \leq 14 \end{cases}$$

já encontrado um sistema linear com as cinco relações, tínhamos que encontrar um gráfico . Usamos a ferramenta Matlab para plotar este

Fonte: Relatório entregue pelo $GM_{2;1}$

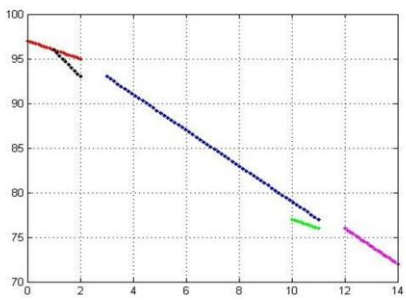


Gráfico 1: Sistema linear plotado com intervalo incorreto Gráfico 2: Sistema linear plotado com intervalo correto

Esse modelo não atendeu as expectativas do grupo (transcrição Seminário do $GM_{2;1}$)

Fonte: Da autora

Nesse trecho os alunos não tinham uma explicação coerente para o uso de um sistema de equações, apenas foram desenvolvendo aleatoriamente a partir de uma primeira que resolveram colocar em prática.

Desse ponto, a configuração do sistema de atividade sofreu novas alterações com os novos *artefatos*: a Lei do Resfriamento de Newton, mediados pela ação do aluno Copas e Linhas de Tendência no Excel, mediados pela ação de Sandro. No entanto, em ambos os casos os alunos buscavam uma representação para o equilíbrio térmico entre a temperatura do bolo e a do meio ambiente (ver Quadro 4), ou seja, tomam consciência do *objeto* da atividade.

Quadro 4: Síntese da 2ª parte da Modelagem do tema bolo de caneca, $GM_{2;1}$.

ANÁLISE DE DADOS E FORMULAÇAO DE MODELOS

Depois de um "monte" de contas de integrais e de diferenciação serviu para entender o funcionamento da lei de resfriamento ou aquecimento de Newton:

$$\frac{dT}{dt} \propto (t - tm*)\ ;\ \frac{dT}{dt} = k(t - 26)$$

*sendo temperatura do meio (Tm = 26°C) constante. Encontramos ln(t-26)=kT. (**K** tem valor mínimo a partir da tomada de decisão de duas temperaturas arbitrária pegadas aleatoriamente).

Fonte: Relatório entregue pelo $GM_{2;1}$

VALIDAÇÃO E CONCLUSÕES

o grupo reavaliou os modelos e observou que havia várias lacunas que não foram respondidas e satisfeitas suas propriedades fundamentais , como no caso de trabalhar com uma parcela dos dados levantados (T1 á T14) desprezando todo o resto do rol da pesquisa, e ocasionando erros gravíssimos no parâmetro linear assim como foi detectado problemas de discrepância no modelo exponencial em razão da omissão de dados, aqui o da constante C, o que prejudicou o valor de K e interferindo no modelo.

Fonte: Relatório entregue pelo $GM_{2;1}$.

ANÁLISE DE DADOS E FORMULAÇAO DE MODELOS

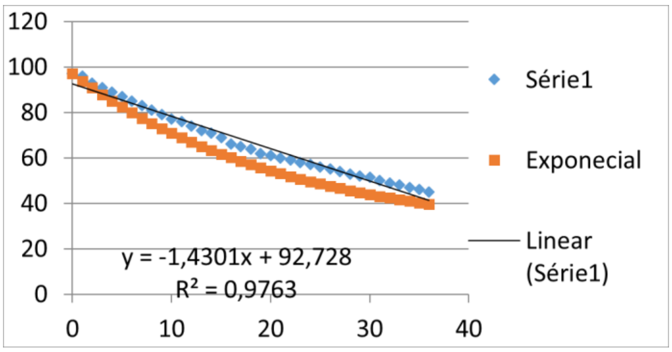


Gráfico 3: Linha de Tendência do Excel; Fonte: Relatório entregue pelo $GM_{2;1}$.

Comparando os modelos linear e exponencial gerados pelo Excel, percebemos que o que apresenta um desvio menor é o modelo linear naquele. Contudo esse modelo não garante o equilíbrio térmico com meio ambiente. Portanto, o modelo exponencial é o que mais se aproxima do equilíbrio térmico só precisando de um ajuste para diminuir o desvio. O grupo entendeu que em uma pesquisa qualquer tomada de decisão arbitraria ou na "marra" e a generalização ou omissão de dados, compromete todo um processo de pesquisa que necessita de atenção.

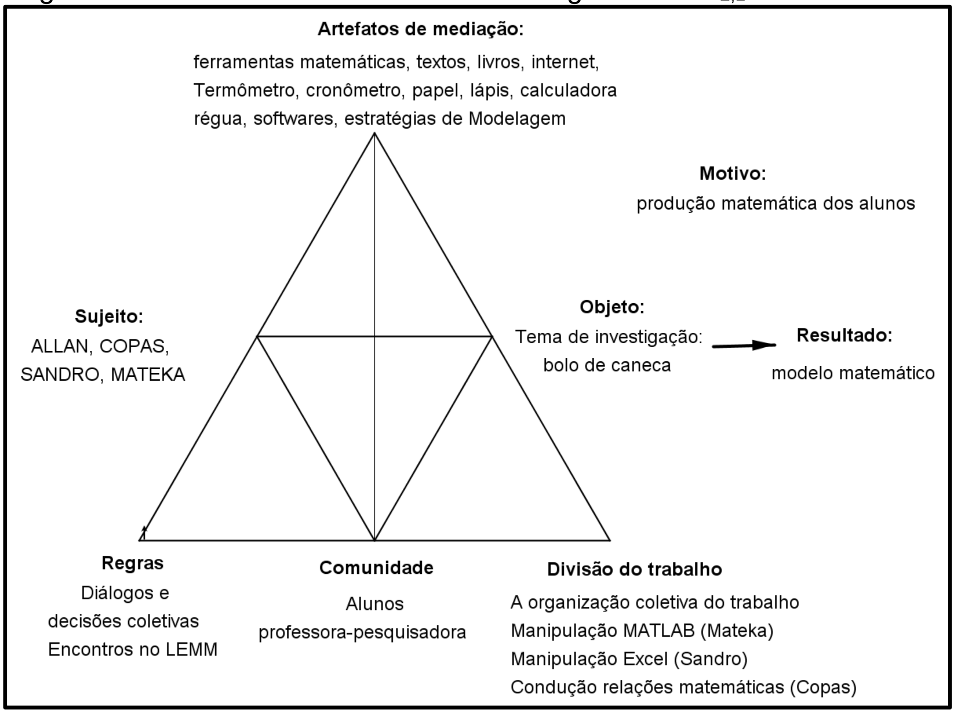
Retirado do Relatório entregue pelo $GM_{2;1}$

Fonte: Da autora

As ações mediadas pelos novos *artefatos* são conduzidas com foco no resultado, modelo matemático. Assim, Figura 14, contempla toda a *atividade* desenvolvida pelo grupo $GM_{2,1}$, estabelecendo os elementos que a compõem em um sistema de atividade geral. Nesse caso, a compreensão do grupo de que poderiam testar não apenas um modelo, mas outros que pudessem se aproximar dos dados coletados provocou reflexão sobre os artefatos disponíveis e aquele que realmente daria conta de responder as inquietações dos alunos.

Daí que, tal reflexão, provocou mudança no artefato mediador, pois além de reconhecerem que podiam encontrar uma reta que se aproximasse dos dados coletados, os mesmos optaram pelo Excel em detrimento do MATLAB, não só pela mudança do modelo matemático, mas também por que os mesmos não tinham tanta habilidade com o software MATLAB, além disso na coletividade a compreensão do modelo foi melhor adaptada pela justificativa das linhas de tendência do Excel. Essa mudança gerou reorganização no elemento divisão do trabalho, Figura 14.

Figura 14: sistema de atividade da Modelagem do $GM_{2;1}$



Fonte: Da autora

O fato do elemento *divisão do trabalho* destacar o papel dos alunos que tinham maior habilidade com os artefatos identificados, não significa dizer que os demais alunos ficaram alheios ao processo, mas se permitiram compartilhar saberes por apresentarem habilidades diferenciadas. Assim o trabalho desenvolvido permitiu uma “construção individual e, ao mesmo tempo, coletiva e compartilhada do conhecimento” (BARUFI, 1999, p. 43); (ENGESTRÖM, 1978).

5.4. O GRUPO $GT_{1;2}$ (2ª etapa) NA MODELAGEM DA SOLUÇÃO DE ÁGUA E SAL

Os alunos que constituíram o grupo $GT_{1;2}$ para desenvolver a temática “Solução de água e sal” foram: Marques (7º Semestre), Rafael (1º Semestre), Carol (5º Semestre) e Dalila (7º Semestre). Desses alunos, apenas o aluno Rafael participou da primeira etapa do curso de Modelagem Matemática, daí o questionamento aos outros se este fato poderia tê-los prejudicado. No entanto, tanto

Marques, como Carol e Dalila, declararam que este fato apenas o fizeram esforçar-se mais para que acompanhassem o processo. Outro ponto interessante é o fato de que apenas Marques declarou “ter uma prévia de Modelagem”, mesmo que equivocada já que associou Modelagem Matemática a formas geométricas apenas.

Nesses termos, o grupo $GT_{1;2}$ iniciou o processo de Modelagem Matemática imbuídos por uma motivação pessoal do aluno Marques que convenceu os outros componentes a optarem pelo tema “Solução de água e sal”. A justificativa do aluno Marques estava no fato de já ter trabalhado Cálculo IV, com equações diferenciais ordinárias e trabalhado com problemas que envolviam soluções e por esse motivo disse “saber mais ou menos qual era o ramo de pesquisa” (discussão de grupo).

A escolha do tema para o grupo $GT_{1;2}$ gerou certo conforto pelo fato do aluno Marques ter apresentado segurança de que tinha facilidade em trabalhar com problemas de soluções. No entanto, enquanto as ideias do aluno Marques giravam em torno de problemas de soluções, ou outros integrantes pensavam em fazer a separação da água do sal para tornar a água saudável, perceberam que apenas separar a água do sal não garantiria a qualidade da água para o consumo, o que fez com que optassem por estudar a vazão de uma solução de água e sal.

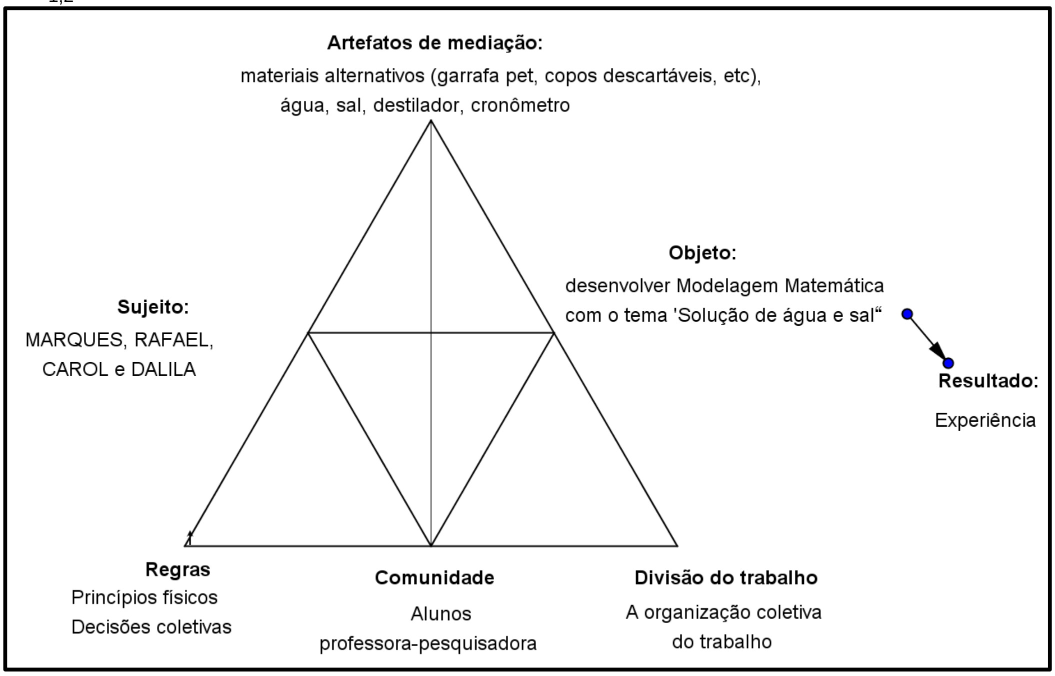
Além disso, a segurança do aluno Marques esvaiu-se quando das primeiras decisões do grupo em relação à manipulação concreta da solução de água e sal, de como fariam isso, como realizariam a dessalinização da água, qual a quantidade de água e sal envolvida no processo de separação dos mesmos e o tempo gasto para realização desta separação dentre outros questionamentos.

Nessa primeira fase de tomada de decisão ficou evidenciado o “abismo” entre resolver um problema apresentado nos livros-texto com os dados todos postos e o aluno ter que elaborar um problema e pensar nas hipóteses a serem testadas. Ou seja, o aluno Marques tinha habilidade em resolver os problemas prontos e não em elaborar problemas a partir de uma situação prática.

O grupo $GT_{1;2}$, realizou a Modelagem Matemática do tema “Solução de água e sal” no período de três semanas, intercaladas com encontros no LEMM, uma vez por semana com acompanhamento da professora, às quartas-feiras, pela tarde e outros que julgaram necessário.

A partir da escolha do tema e das questões que nortearam as primeiras decisões do grupo, tais como: Como seria feito a dessalinização da água? Qual seria a quantidade de água e sal envolvida no processo da separação e o tempo gasto para realizar a separação?. Das ações planejadas colaborativamente entre os integrantes do grupo $GT_{1;2}$ foi possível caracterizar a Modelagem Matemática como um sistema de atividade. Ver Figura 15.

Figura 15: Modelagem Matemática como primeiro sistema de atividade do grupo $GT_{1;2}$



Fonte: Da autora

Os elementos centrais do triângulo de Engeström, da Figura 15, evidenciam o princípio da *historicidade*, a julgar pelos conhecimentos que os alunos tinham sobre problemas com soluções, como exemplo a certeza de que os princípios físicos enquanto regras e os *artefatos* pensados a princípio eram fundamentais para exemplificar uma situação prática com solução de água e sal. Ou seja, é importante frisar que um sistema de atividade não é estático, mas transforma-se ao longo do tempo, o que o aproxima da Modelagem Matemática.

A partir desse primeiro sistema de atividade configurado, Figura 15, foi possível perceber que o discurso matemático dos alunos presente é do uso dos princípios físicos para extrair relações matemáticas. Isto é, o uso do modelo matemático como definição, por exemplo, de concentração, vazão para equacionar a variação de sal na solução.

Ao fazer uso do modelo matemático como definição, a aluna Dalila, percebe que os princípios químicos também devem ser considerados na experiência. Nesse caso, os princípios químicos passaram a fazer parte das regras do sistema de atividade.

A organização coletiva do trabalho definida no elemento *divisão do trabalho*, apesar de se apresentar naturalmente nas discussões dos alunos desse grupo, na prática do processo foi possível perceber que os participantes moldam a *atividade* a partir do princípio da *multivocalidade*. Pois "a divisão do trabalho em uma atividade cria posições diferentes para os participantes, pois estes possuem suas próprias histórias" (ENGESTRÖM, 2001, p. 136). Ou seja, os alunos do grupo $GT_{1,2}$ estavam em níveis diferentes. Por exemplo Marques e Dalila tinham experiência com equações diferenciais e Rafael estava iniciando o curso de Cálculo I.

Essa diferença de nível criou posições diferentes dentro do trabalho colaborativo e refletiu na *divisão do trabalho*. Então a princípio o aluno Rafael compreendia o contexto da investigação que só foi possível de ser equacionada pelo conhecimento que Dalila e Marques tinham das relações matemáticas necessárias para o desenvolvimento do processo.

Diante das histórias de cada aluno somadas em um trabalho colaborativo, o grupo $GT_{1,2}$ conseguiu resolver coletivamente como que realizariam a coleta de dados, quais princípios utilizariam para analisar os dados e formular o problema de investigação, dada a especificidade da temática que escolheram. Além disso, as vozes dos alunos Dalila e Marques foram determinantes para a formulação do modelo, dado que já tinham familiaridade com o equacionamento de problemas que envolviam soluções.

Essa linha de raciocínio está sintetizada no Quadro5, onde os alunos a partir da programação de um experimento de vazão com mistura de água e sal, tomaram nota das variáveis escolhidas para o estudo da solução de água e sal. Desse ponto, optaram por trabalhar com o equacionamento das relações matemáticas que envolviam concentração de solução na vazão de entrada e saída da solução, por meio de equações diferenciais, por já ser um repertório que um dos integrantes declarava ter habilidade.

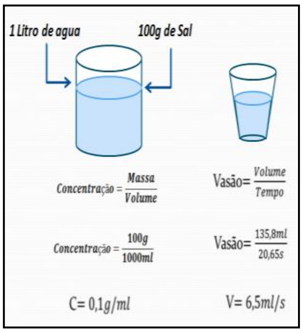
Quadro 5: Síntese 1ª parte da Modelagem Matemática do tema Solução de água e sal, $GT_{1;2}$.

ESCOLHA DE TEMAS

O tema "Solução de água e sal" foi escolhido pelos alunos

INTEIRAÇÃO → COLETA DE DADOS

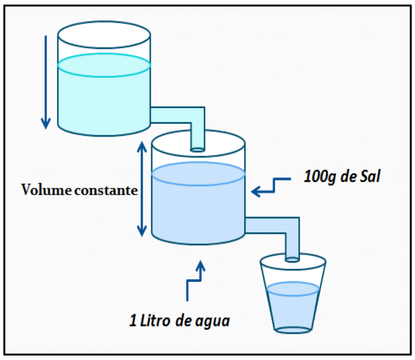
Como seria feito a dessalinização da água? Qual seria a quantidade de água e sal envolvida no processo da separação dos mesmos e o tempo gasto para realizar a separação? (Discussão do grupo GT_1)



ORDEM	TEMPO PARA ENCHER UM COPO EM (segundos)	QUANTIDADE DE SOLUÇÃO EM CADA COPO EM (ml)
1º	20,77	136
2º	19,30	132
3º	21,44	135
4º	19,79	36
5º	21,82	140
6º	20,94	136
SOMA	**124,06**	**815**
MEDIA	**20,68**	**135,83**

Fonte: LEMM, 2014

ANÁLISE DE DADOS E FORMULAÇAO DE MODELOS



Equacionando as relações matemáticas estabelecidas, definimos a equação, que define a diferença a diferença entre a vazão e concentração de entrada com a vazão e concentração de saída, onde vazão é a razão do volume pelo tempo.

$$\frac{ds}{dt} = Vazão\ entrada. Concentração\ entrada - Vazão\ saída. Concentração\ saída$$

E portanto

$\frac{ds}{dt} = 6{,}5.0 - 6{,}5.\frac{S}{1000}$; $\frac{ds}{dt} = -\frac{6{,}5.S}{1000}$; $\frac{ds}{dt} = -0{,}0065.S$; $\frac{ds}{dt} + 0{,}0065.S = 0$(2)

Aplicando o fator integrante na equação lineal (2), temos:

$$u(t) = e^{\int 0{,}0065dt} \quad ; \quad e^{0{,}0065 \int dt} = e^{0{,}0065t}$$

Onde: $\frac{ds}{dt}.e^{0{,}0065t} + 0{,}0065.S.e^{0{,}0065t} = 0$; $\int d\,(S.e^{0{,}0065t}) = 0$; $S.e^{0{,}0065t} = C$; $S = \frac{C}{e^{0{,}0065t}}$ (3)

Tomando t = 0 onde S = 100g e substituindo em (3), temos então: $100 = \frac{C}{e^{0{,}0065.0}}$; daí C = 100.

Temos então como modelo matemático (4) para a situação investigada:

$$S = \frac{100}{e^{0{,}0065t}} \qquad (4)$$

Fonte: Relatório entregue pelo $GT_{1;2}$

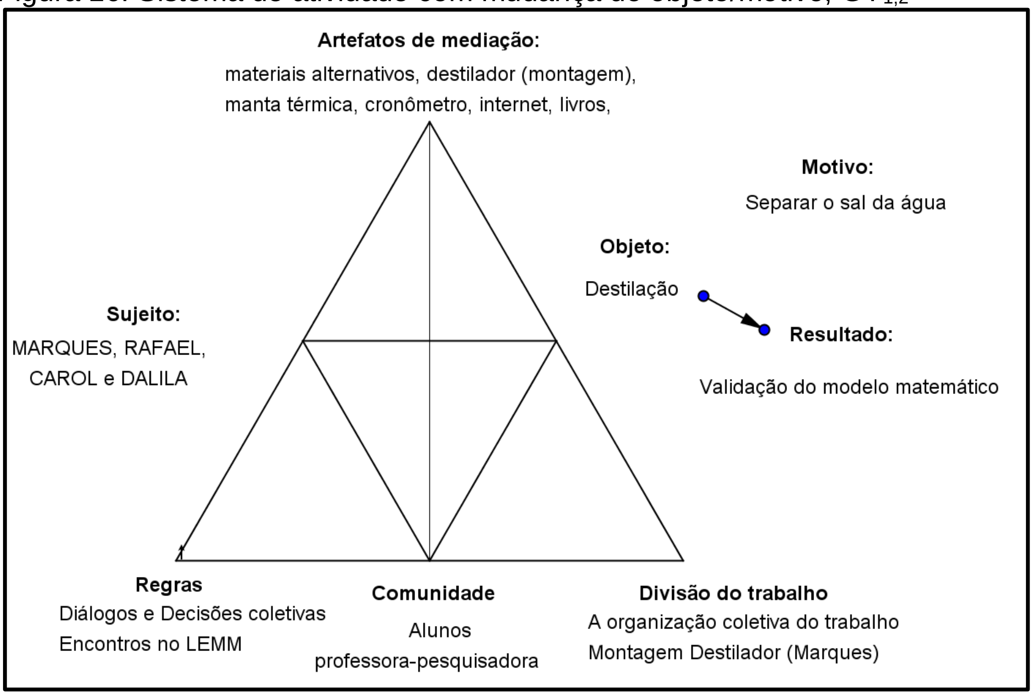
Fonte: Da autora

A partir do equacionamento fazendo uso dos dados que o grupo $GT_{1,2}$ obteve e da apropriação que fizeram da Modelagem, que a assumiram como "um processo dinâmico utilizado para a obtenção e validação de modelos matemáticos" (BASSANEZI, 2004, p.24) aproximados de uma realidade" (Relatório $GT_{1,2}$) os alunos assumiram o objetivo de encontrar "um modelo capaz de descrever a vazão do sal diluído em um volume constante de água" (Relatório $GT_{1,2}$). Reconheceram que do Quadro 5, haviam encontrado esse modelo, mas tinham dúvida, conforme diálogo:

> (RAFAEL) Como teremos certeza?
> (MARQUES) É isso mesmo.
> (DALILA) Não temos certeza.
> (CAROL) Então temos que separar o sal da água. Se soubermos quanto de sal tem em cada copinho desse que foi coletado.
> (RAFAEL) Podemos comparar. Como fazer isso?

O diálogo entre os alunos aponta conflitos com o modelo matemático que haviam encontrado com a busca pela certeza do aluno Rafael, criando novamente uma *contradição* no sistema da atividade. Porém, nesse caso temos uma *contradição* terciária, pois reside no *objeto/motivo*, ou seja, a preocupação dos alunos está no processo de destilação, pois o *motivo* agora é separar a água do sal para ter meios de comparação entre os dados empíricos e o modelo matemático encontrado, Figura 16.

Figura 16: Sistema de atividade com mudança do objeto/motivo, $GT_{1;2}$



Fonte: Da autora

A *contradição* terciária evidenciada nesse momento em que os alunos precisam definir parâmetros para a validação do modelo matemático encontrado, é reforçado por Engeström (1978) não como algo negativo, mas como conflitos que geram *transformações expansivas* (quinto princípio) no processo. Nesse sentido, quando o *objeto* e o *motivo* são reconceituados, permitem um alcance amplo do modo como os sujeitos veem as etapas da Modelagem Matemática. Isto é, o trabalho colaborativo e as *contradições* que ocorrem em um sistema de atividade podem proporcionar *transformações expansivas*, assim "os sistemas de atividade atravessam longos períodos de transformações qualitativas" (ENGESTRÖM, 1999b, p.4)

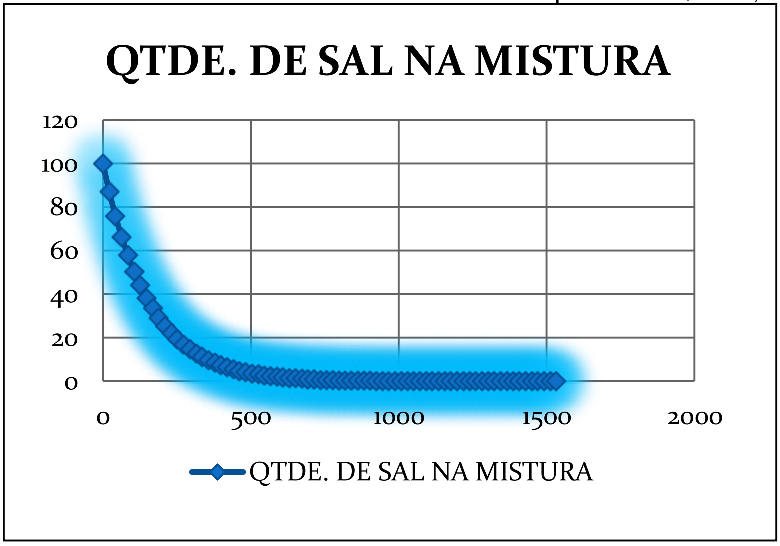
Assim, a mudança de *objeto/motivo* enquanto *contradição* pôde ser superada no coletivo, com vistas a atingir um *resultado*, que nesse caso se tratava da validação do modelo matemático. Os alunos, ao realizarem a mudança de *objeto/motivo* para destilação, para além da aprendizagem matemática, desenvolveram ações necessárias à apropriação de conhecimento de outras áreas. Como consequência aprenderam sobre o processo de destilação para obter respostas que corroborassem com a validação matemática do modelo que ora haviam produzido. Assim, os alunos colocaram que

> Para isso, foi destilado 136 ml de água com sal que foi obtida nos primeiros 20,77 segundos do experimento e após este processo verificou-se que restaram de sal 19,3 gramas. Colocando o mesmo intervalo de tempo no modelo desenvolvido pelo grupo, obtivemos uma quantidade de sal de 12,62 gramas. Com uma margem de erro de 6,68 gramas de sal. (Relatório $GT_{1,2}$), Figura 17 e Gráfico 4.

Figura 17: Esquema Destilação, $GT_{1,2}$

Fonte: Relatório $GT_{1,2}$

Gráfico 4: Linha de erro entre modelo e experimento, $GT_{1;2}$



Fonte: Relatório $GT_{1,2}$

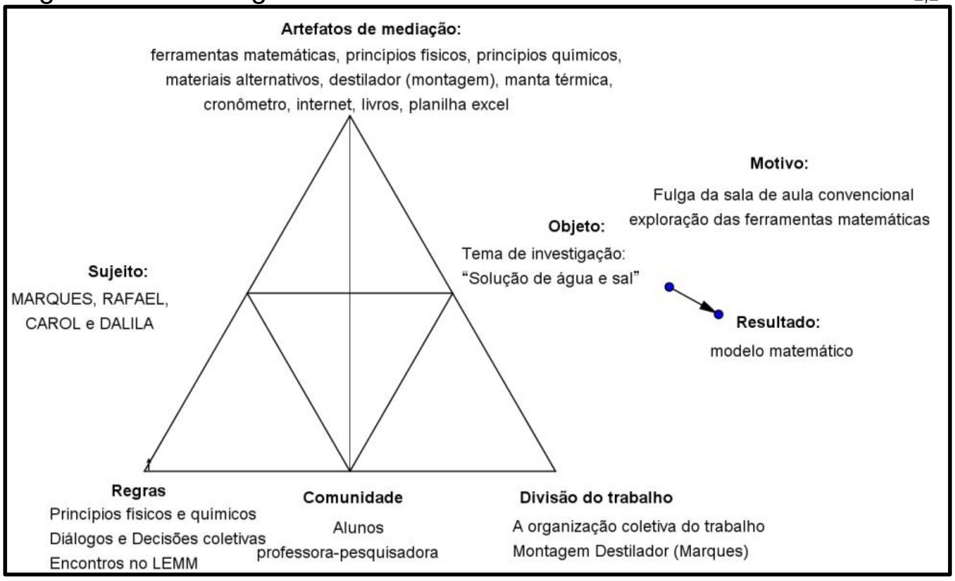
Esse processo de destilação foi realizado com outros copos com a solução que foi obtida da primeira sequência cronometrada pelo grupo $GT_{1,2}$. No entanto, como o processo de destilação era muito demorado, aliado a algumas considerações que os alunos fizeram em relação a possíveis falhas durante o experimento, destacaram, por exemplo, “densidade do sal em relação à água (que não esteve em constante mistura), a balança, a quantidade de água que ainda sobrava do decantador quando este ficava em repouso” (Relatório $GT_{1,2}$) e consideraram que “o modelo matemático desenvolvido pelo grupo é coerente para justificar o experimento” (Seminário $GT_{1,2}$).

O grupo $GT_{1,2}$ discute sobre os resultados encontrados, dos dados empíricos em relação ao modelo matemático para a variação de sal e colaborativamente tomam a decisão por reconhecer o modelo matemático obtido como aproximado da experiência por eles realizada. Para isso consideraram:

> (...) que se pode construir um modelo para a variação de sal com o passar do tempo e que alguns resultados da quantidade de sal destilado da água, apesar de se aproximar dos valores na prática, obteve-se uma margem de erro que pode ser levado em consideração o tempo, as condições no laboratório, a mistura não ter sido totalmente homogênea entre a água e sal” (Relatório $GT_{1,2}$).

Fica evidente que o *resultado* demonstrado no sistema de atividade, Figura 18, foi alcançado, dado que as peculiaridades abordadas pelos alunos foram resolvidas coletivamente, como afirmam em relatório “que a ajuda de todos os participantes foi de grande importância para a conclusão deste trabalho”.

Figura 18: Modelagem Matemática como sistema de atividade do $GT_{1;2}$



Fonte: Da autora

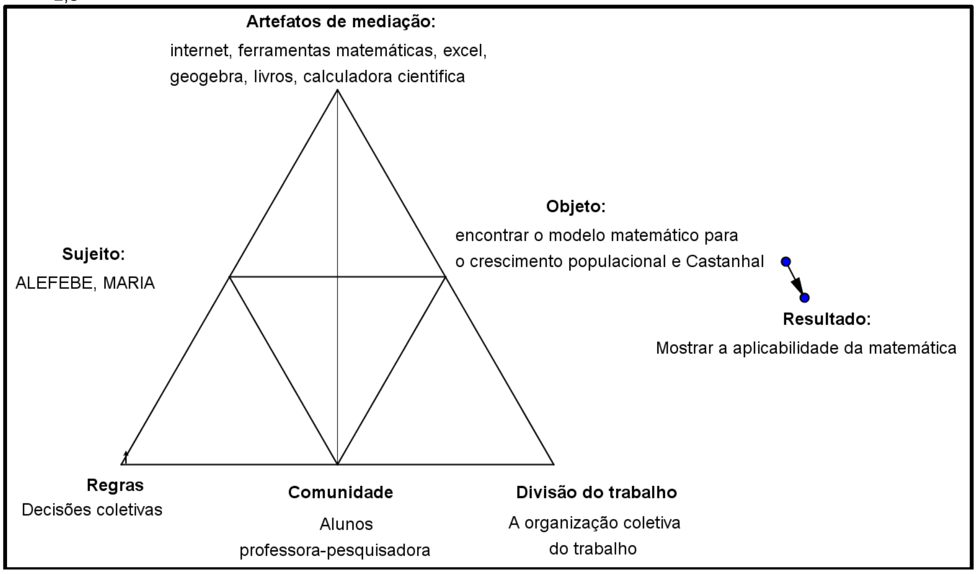
5.5. O GRUPO $GM_{1;3}$ (3ª etapa) NA MODELAGEM DO CRESCIMENTO POPULACIONAL DA CIDADE DE CASTANHAL

Os alunos que constituíram o grupo $GM_{1,3}$ para desenvolver a temática “Crescimento Populacional da Cidade de Castanhal” foram: Alefebe (7º Semestre) e Maria (7º Semestre). O trabalho foi realizado em dupla, pelo interesse comum dos dois alunos, no entanto continuarei denominando de grupo. Nessa etapa os alunos ficaram livres para escolher qualquer tema de interesse e neste caso justificaram a escolha pela temática baseados em questões sociais, pois hipoteticamente acreditavam que a população do município de Castanhal vem crescendo consideravelmente nos últimos anos.

O grupo $GM_{1;3}$, realizou a Modelagem Matemática do tema “Crescimento populacional da cidade de Castanhal” no período de três semanas, intercaladas com encontros no LEMM, uma vez por semana com acompanhamento da professora às terças-feiras, pela manhã e outros encontros que julgaram necessário.

Uma vez definido o tema de investigação, a dupla partiu para coleta de dados, que julgavam de fácil acesso apenas com o uso da internet. Além disso, apresentavam segurança sobre o que deveriam fazer e que ferramentas matemáticas utilizar. A partir da segurança do grupo $GM_{1;3}$ foi possível traçar o sistema de atividade, ver Figura 19.

Figura 19: Modelagem Matemática como sistema de atividade do grupo $GM_{1;3}$



Fonte: Da autora

O sistema de atividade, Figura 19, configurado para o grupo $GM_{1,3}$ tinha como *objeto* encontrar o modelo matemático para o crescimento populacional de Castanhal. Isto, com vistas a atingir um resultado, no caso o de mostrar a aplicabilidade da matemática. Essa clareza que os alunos Alefebe e Maria tinham estava associada ao fato de que o discurso matemático deles estava apoiado em um modelo matemático como estruturante do fenômeno investigado (BARBOSA, 2009), pois ao definir a temática queriam de imediato reconhecer o modelo que representasse a situação investigada. Por esse motivo, o grupo $GM_{1,3}$ teve dificuldade para definir um tema de investigação.

Ao serem questionados sobre o porquê tiveram dificuldade na escolha do tema para a 3ª etapa do curso, colocaram que na primeira etapa o tema foi dado, na segunda alguns temas foram sugeridos e na segunda etapa optaram por um que desse a possibilidade de uso do LEMM. Quando foi sugerido que poderiam escolher um tema livre, a preocupação foi direcionada para o modelo matemático. O diálogo (fase discussão) que segue mostra como os alunos Alefebe e Maria fizeram uma inversão, pois ao invés de discutirem um tema, passaram a pensar em modelos matemáticos e quais situações se encaixariam no mesmo.

> (ALFEBE) Professora! Dê uma sugestão de temas para nós, pois estamos sem ideia;
> (PROFESSORA) Como assim? Vocês não conseguiram pensar em nenhum tema?
> (MARIA) É por que tem temas que não sabemos onde vai chegar;
> (PROFESSORA) Mas essa é a proposta. Esqueçam o modelo e pensem num tema de interesse de vocês, algo que teriam curiosidade em pesquisar;
> (ALEFEBE) Podia ser algo relacionado à sociedade?
> (MARIA) Algo daqui da cidade mesmo.
> (ALEFEBE) Podíamos testar os modelos de crescimento populacional?

Essa inversão da Modelagem realizada pelos alunos corresponde a tomada de decisão dos mesmos de não partir de um tema de investigação, mas sim partir do modelo matemático existente para a busca de um tema que resultasse em tal modelo. Essa atitude dos alunos não inviabilizou o processo de Modelagem Matemática, pois os mesmos passaram por todas as etapas do processo, apenas favoreceu uma quebra de paradigma.

De uma indecisão sobre o que pesquisar, a escolha se deu pela opção de modelos matemáticos que refletissem uma questão social. O assunto social ficou evidenciado no objetivo do trabalho do grupo $GM_{1,3}$. Essa proposta foi acolhida, mesmo que os alunos tenham “fixado” a princípio um modelo matemático estruturante para embasar a decisão pela escolha do tema. Isso a princípio parecia ser uma facilidade para eles e que não teriam tantos contratempos ao fazer Modelagem. Entretanto, com o desenvolvimento do processo perceberam que trabalhar com dados reais muda o cenário de investigação. Das decisões coletivas, o Quadro 6 mostra a escolha do tema e o início da formulação dos modelos trabalhados pelo grupo $GM_{1,3}$.

O Quadro 6, mostra em síntese a justificativa consensual dos alunos Alefebe e Maria para o uso da Modelagem Matemática no estudo de populações, bem como a formulação de modelos matemáticos a partir de uma tabela de dados referente a população de Castanhal dos anos, 1991, 1996, 2000, 2007, 2010, baseado no IBGE. Daí testaram o modelo linear e o modelo de Malthus para o crescimento populacional de Castanhal sempre realizando o cálculo do coeficiente de determinação (0 a 1) como parâmetro para validar o modelo.

Quadro 6: Síntese 1ª parte da Modelagem Matemática do Crescimento populacional da cidade de Castanhal, $GM_{1;3}$.

ESCOLHA DE TEMAS

Tema: Crescimento populacional da cidade de Castanhal

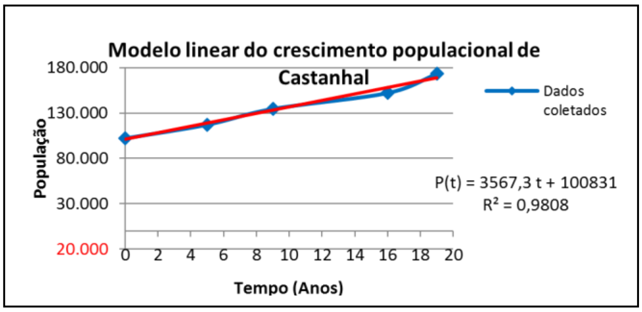
INTEIRAÇÃO → COLETA DE DADOS

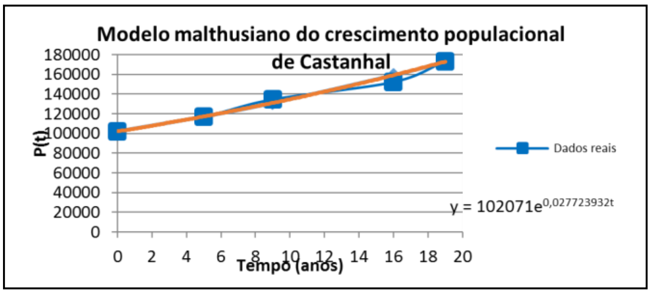
O estudo das populações por meio da utilização da modelagem matemática é um recurso muito importante para a sociedade, principalmente para os governantes, que se utilizam destas, como parâmetros na tomada de decisões, no que se referem à aplicação dos recursos financeiros públicos, necessários para o atendimento das populações.

Ano	População
1991	102.071
1996	117.110
2000	134.496
2007	152.126
2010	173.149

Fonte: IBGE. Censo Demográfico 1991, Contagem Populacional 1996, Censo Demográfico 2000, Contagem Populacional 2007 e Censo Demográfico 2010

ANÁLISE DE DADOS E FORMULAÇAO DE MODELOS





Para modelo malthusiano. Da equação geral: $P(t) = P_0 . e^{k.t}$. Tem-se $P_0 = 102071$, mas precisa-se de k. Segue abaixo o cálculo de k, que ao final foi usado o *"k médio"*

Ano	x_i	População (y_i)	k
1991	0	102071	
1996	5	117110	0,027489003
2000	9	134496	0,030651757
2007	16	152126	0,02494003
2010	19	173149	0,027814939
			$k_{médio}$= 0,027723932

Fonte: Relatório entregue pelo $GM_{1;3}$

Fonte: Da autora

No entanto, na apresentação do seminário dos resultados da Modelagem realizada pelo grupo $GM_{1,3}$ a aluna Dalila (integrante de outro grupo) questionou o fato de o modelo linear ter ficado bem próximo de 1 e não ter sido considerado ideal.

> (ALEFEBE) Às vezes o coeficiente de determinação é ideal matematicamente, mas há que se considerar o fenômeno;
> (DALILA) Como assim?
> (ALEFEBE) Se fôssemos levar em consideração os dados isolados, poderíamos fazer uma escolha matemática, mas nesse caso precisamos além disso avaliar o modelo considerando o fenômeno.

Ao aplicar o modelo de Malthus $\left(\frac{dP}{dt} = k.P\right)$, precisaram encontrar o k médio para determinar o coeficiente exponencial. Opção que já haviam realizado na modelagem da 1ª etapa do curso e que não apresentava nenhuma contradição nos resultados. Tanto o modelo linear quanto o modelo de Malthus foram realizados para comparação com os dados reais, como forma de verificar o menor desvio entre os mesmos.

Dessa assertiva, de que deveriam usar também o modelo logístico, pois estavam fazendo uso de referências que garantiam o teste desses três modelos estruturantes (o linear, o de Malthus e o logístico), não levaram em consideração, questões de migração e outros fenômenos sazonais. Apresentaram o modelo logístico como uma crítica ao modelo de Malthus, com a justificativa de que há de se considerar um ponto de inflexão como um ponto que altera o comportamento da linha/função. Daí para encontrar o modelo logístico fizeram uma sucessão de três ajustes lineares, usando para isso a planilha do Excel, ver Quadro 7.

Quadro 7: Sucessão de três ajustes lineares para o modelo logístico, grupo $GM_{1,3}$.

Ajustes Lineares para o MODELO LOGÍSTICO

Anos	t_i	P_i	P_{i+1}
1991	0	102071	117110
1996	5	117110	134496
2000	9	134496	152126
2007	16	152126	173149
2010	19	173149	**195980**

P_i	P_{i+1}	λ_i
102071	117110	0,147339
117110	134496	0,148459
134496	152126	0,131082
152126	173149	0,138195
173149	195980	0,131857

Fonte: Relatório entregue pelo $GM_{1;3}$

1) Solicitando uma linha de tendência linear usando a 2ª e 3ª colunas, obtém-se P_{i+1} = 1,1085P_i + 4044,3. E substituindo $P_i = 173149$ na equação, encontrou-se o valor P_{i+1} =195980.

Sendo λ taxa de crescimento relativo, tem-se:
2) Solicitando uma linha de tendência linear entre $P_{i+1} e\ \lambda_i$ no Excel, obteve:
λ_i = -0,0000002.P_{i+1} + 0,1710672

$$a = -0{,}0000002\ e\ b = 0{,}1710672 \rightarrow y^* = -\frac{0{,}1710672}{(-0{,}0000002)}$$

$$y^* = 855336$$

$z = ln\frac{(y_i/y^*)}{(1-\frac{y_i}{y^*})}$, resulta em $z = \lambda x - ln\beta$
3) Solicitando pelo Excel um ajuste linear entre $x_i\ e\ z_i$, obtém-se:
z = 0,0316.x - 1,9934
Portanto: λ=0,0316 e $ln\beta = 1{,}9934 \rightarrow \beta = 7{,}340448909$

x_i	z_i
0	-2
5	-1,84
9	-1,68
16	-1,53
19	-1,37

Fonte: Da autora

Como ao longo do trabalho foi necessário desenvolver diversos ajustes lineares, e para isso fizeram uso do Excel, questionei aos alunos se a ferramenta Excel ajudou. Isto por que na primeira atividade, em que Alefebe e Maria desenvolveram em conjunto com outros alunos, eles fizeram ajuste linear manualmente. Daí justificaram que "Como precisamos fazer ajustes lineares sucessivos, e na primeira atividade desconhecíamos a ferramenta. Agora fizemos uso de muitas casas decimais para se aproximar bastante do modelo." (MARIA, fase discussão)

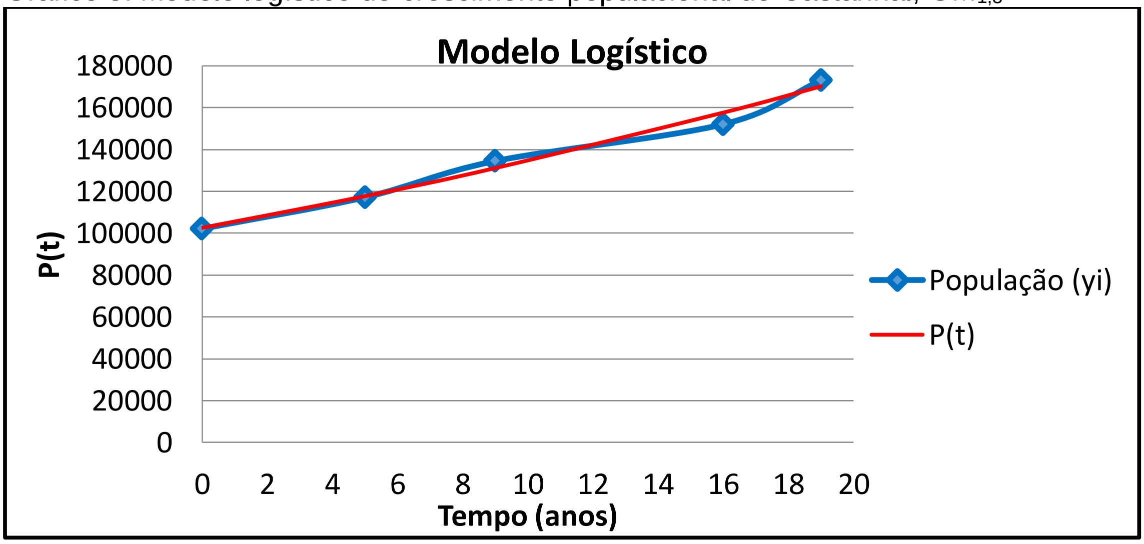
De uma atividade para outra fica evidente a apropriação do artefato Excel pelos alunos Alefebe e Maria, como forma de minimizar os desvios no modelo matemático, bem como para evitar cálculos laboriosos no caso da execução manual do método dos mínimos quadrados.

Assim, após encontrarem os parâmetros para o modelo logístico, apresentaram a seguinte equação logística

$$P(t) = \frac{855336}{7{,}340448909.e^{-0{,}0316.t}+1} \quad (1)$$

Acompanhada da representação gráfica, comparada aos dados reais.

Gráfico 5: Modelo logístico do crescimento populacional de Castanhal, $GM_{1,3}$



Fonte: Relatório $GM_{1,3}$.

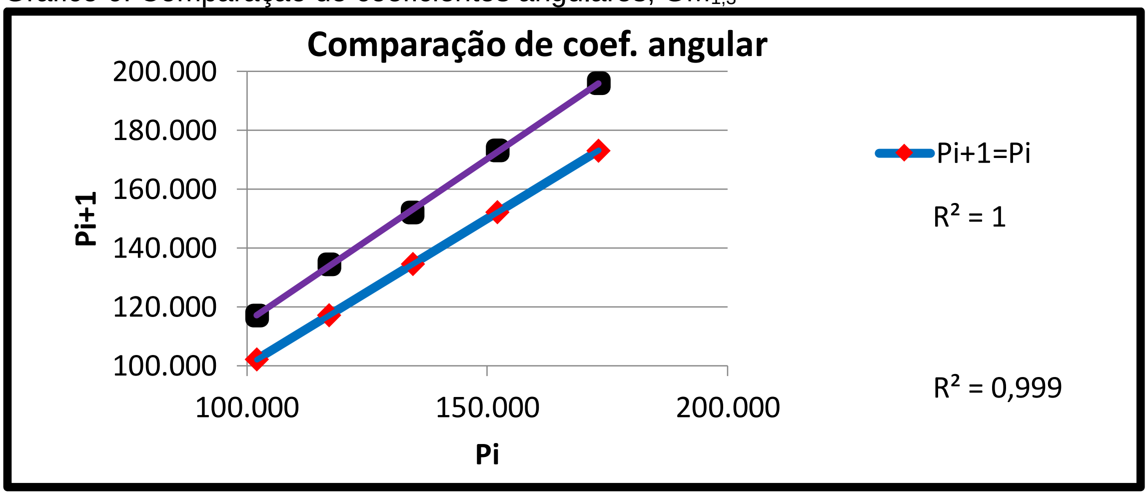
Na fase de discussão dos resultados os alunos frisaram que:

> O cálculo de P^* (população de equilíbrio), neste caso, não pôde ser realizado pelo método de Ford-Walford, pois a reta ajustada $P_{i+1} = 1{,}1085P_i + 4044{,}3$ tem coeficiente angular maior que o coeficiente angular da bissetriz $P_{i+1} = P_i$, resultando em: $P^* = P_{i+1} = P_i = -37274{,}65$ (Relatório $GM_{1,3}$)

O percurso para essa decisão não foi tão trivial, pois dentre as dificuldades encontradas a concepção de modelo, que inicialmente teria o modelo matemático como estruturante, e da assertiva de que compreendido o problema biológico e selecionado as variáveis seria facilmente encontrado nos livros de Modelagem Matemática.

No entanto, essa situação desconstruiu suas concepções acerca de modelo matemático, pois apesar de muitos modelos já estarem postos na literatura, nem sempre se adéquam ao contexto investigado. Foi o que aconteceu quando descobriram que não poderiam utilizar o método de Ford-Walford pela comparação dos coeficientes angulares. Ver Gráfico 6.

Gráfico 6: Comparação de coeficientes angulares, $GM_{1,3}$



Fonte: Relatório $GM_{1,3}$.

Na literatura utilizada por $GM_{1,3}$ o método de Ford-Walford era eficiente para os dados exemplificados. Porém, diante dos resultados a partir dos dados reais com os quais os alunos estavam trabalhando, inviabilizou o uso do método, que ao fazê-lo, como em todas as literaturas que haviam consultado, o método de Ford-Walford era sempre coerente com os contextos citados, o que não aconteceu com o contexto que estavam trabalhando, no caso a população de Castanhal.

Esse fato causou *contradição* no sistema da atividade, pois os alunos queriam muito que o método fosse o adequado e como matematicamente não estavam encontrando outra saída, pensaram inclusive em desistir e trabalhar com outro tema. Nesse caso, os alunos conheciam o modelo estruturante para uma situação de crescimento populacional na literatura, mas não visualizavam como o desenvolveriam sem o uso do método de Ford-Walford.

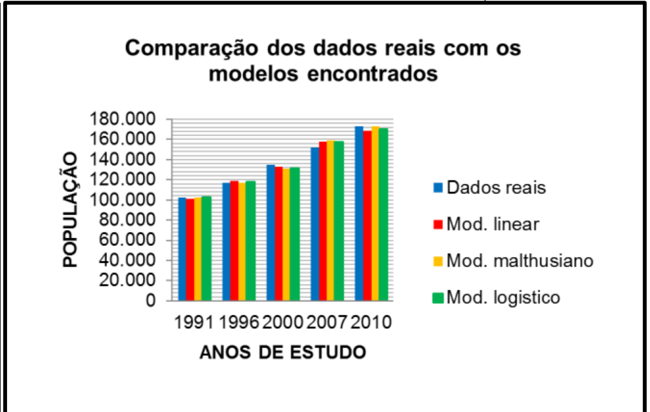
Essa *contradição* evoluiu para uma aprendizagem expansiva, na medida em que os alunos foram convencendo-se de que poderia ter outra solução, mas que para isso deveriam aprofundar-se no contexto investigado e em outras literaturas que pudessem ajudá-los nessa empreitada. De muita pesquisa e discussão e com outros encontros, chegaram em um ponto comum pela expressão teórica da curva logística (BASSANEZI, 2012), de que o parâmetro $\beta,$ também, poderia ser estimado da seguinte forma: $b = \frac{P^*}{P_0} - 1 = \frac{855336}{102071} - 1 = 7{,}379814051.$

De posse dos modelos, fizeram a comparação dos dados reais com o modelo linear, de Malthus e logístico. Figura 20.

Figura 20: Comparação dos dados reais com os modelos encontrados, $GM_{1,3}$.

Anos	Linear	Malthusian	Logístico
1991	1.240	0	482
1996	1.558	138	581
2000	1.559	3.498	3.379
2007	5.782	6.929	5.472
2010	4.539	299	2.998
Soma	**14.678**	**10.864**	**12.911**
Média	**2.936**	**2.173**	**2.582**

Tabela da diferença entre os dados reais e os modelos obtidos nos anos de estudo



Fonte: Relatório $GM_{1,3}$

Uma vez realizado o processo para determinar os modelos lineares, de Malthus e Logístico a partir dos dados encontrados, os alunos questionaram se esses dados seriam suficientes para validar o modelo. Além disso, não estavam convencidos dos procedimentos que haviam realizado. Nesse aspecto houve um avanço do individual para o coletivo, pois na apresentação as ideias dos sujeitos conversavam entre si, fato que não aconteceu nas duas etapas anteriores do curso.

Daí voltaram à etapa da Modelagem Matemática “coleta de dados” para buscar mais fontes de dados. Nesse caso encontraram estimativas do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística – IBGE e consideraram que poderiam contribuir com a validação dos modelos por eles encontrado. Nesse sentido, os alunos não se sentiram confiantes com os resultados até então encontrados, gerando um conflito favorável para superação de *tensões*, pois apesar de terem chegado em três modelos matemáticos, não estavam satisfeitos, convencidos, com a validação, dada a quantidade de dados localizados em sites oficiais.

De posse, das estimativas oficiais fizeram uso dos modelos linear, malthusiano e logístico, já encontrados para testagem a partir dos cômputos. Tabela 3.

Tabela 3: Comparação dos resultados a partir da estimativa da população de Castanhal.

Anos	Linear	Malthusiano	Logístico
1991	1.240	0	482
1992	1.000	458	41
1993	360	436	69
1994	365	245	254
1995	1.161	103	581
1996	1.558	138	581
1997	1.038	653	262
1998	1.389	481	159
1999	1.735	218	14
2000	1.559	3.498	3.379
2001	1.913	3.736	3.753
2002	1.247	2.851	3.029
2003	846	2.125	2.494
2004	4.462	5.306	5.895
2005	4.038	4.335	5.177
2006	4.122	3.756	4.887
2007	5.782	6.929	5.472
2008	2.365	4.417	2.591
2009	3.545	6.627	4.388
2010	4.539	299	2.998
2011	3.939	1.593	1.616
2012	3.242	3.719	56
2013	4.605	3.924	475
Soma	**56.051**	**55.844**	**48.652**
Média	**2.437**	**2.428**	**2.115**

Fonte: Relatório G $M_{1,3}$.

Além da tensão provocada na validação dos dados, a *contradição* no elemento *artefato* também foi evidenciada, pois a aluna Maria já tinha certa habilidade com o programa Geogebra, mas não conseguia projetar graficamente os dados da tabela 3. Isso ficou evidenciado na sua falas: “Não conseguimos gerar o gráfico no geogebra, pois os dados eram muito altos e dificultava a visualização.” (MARIA, seminário)

Como as *contradições* nos elementos centrais da atividade podem suscitar vozes a partir do princípio da *multivocalidade*, foi possível identificar papéis diferenciados para a leitura do contexto que os alunos estavam investigando. Então, as perspectivas de cada aluno influenciaram no tratamento da informação e posterior mudança de artefato no sistema. Nesse caso, a aluna Maria tinha habilidades com o Geogebra e o aluno Alefebe habilidades com o Excel Essas habilidades constituem resultados de suas histórias, garantindo repertório necessário para a superação da *contradição* secundária.

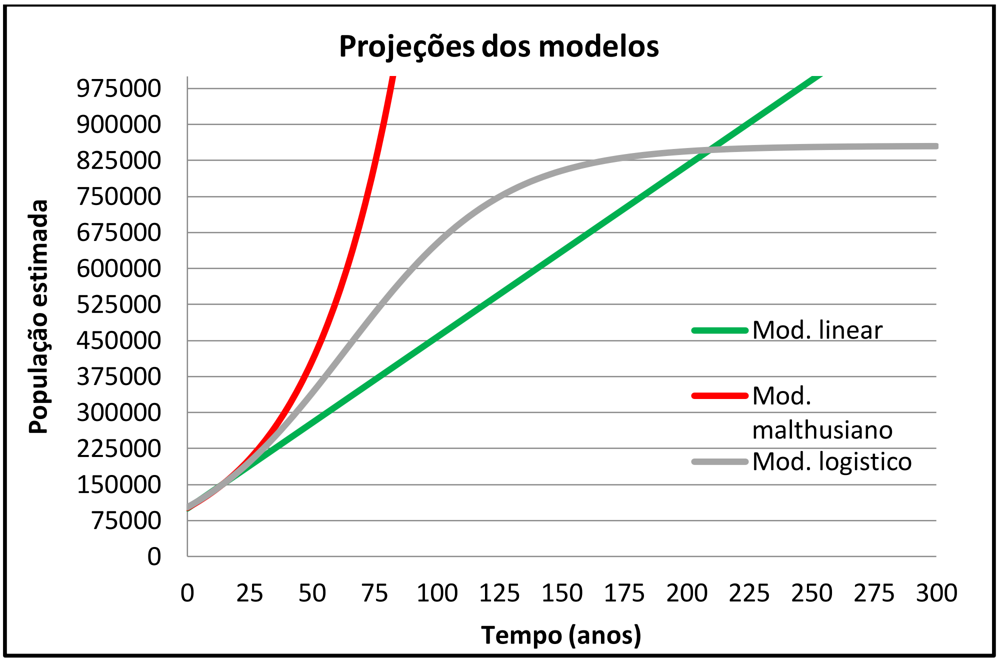
No entanto, os alunos foram questionados na socialização sobre a troca dos artefatos, ou seja, sobre uso do Excel em detrimento do Geogebra, uma vez que o Geogebra permite a inclusão dos modelos e gera a representação gráfica destes, enquanto que o Excel gera uma representação pela linha de tendência de uma tabela de dados.

A substituição dos artefatos ficou compreendida pela limitação do grupo $GM_{1,3}$ em explorar as ferramentas do Geogebra e como ao fazer várias substituições de t (tempo) nos modelos encontrados os mesmos teriam uma tabela de pares ordenados que gerariam uma linha de tendência representativa dos modelos e essa escolha favorecia o entendimento e permitia fazer projeções. (Seminário, $GM_{1,3}$)

Ao realizar uma comparação com dados reais, os alunos observaram que o modelo malthusiano foi o que melhor se ajustou aos dados reais. “No entanto, ao compararmos com os dados das estimativas do IBGE, percebemos que o modelo logístico foi o que mais se adequou” (Relatório $GM_{1,3}$). Frisaram ainda que uma quantidade maior de dados proporcionaria melhores ajustes dos modelos.

Uma vez superada a *contradição*, fizeram uso do Excel para visualização gráfica da projeção dos modelos e possível tomada de decisão. Gráfico 7. Essa comparação foi uma necessidade dos alunos em visualizar os modelos a longo prazo, o que não conseguiram fazer com o uso do artefato Geogebra. Ou seja, as mudanças dentro de um sistema de atividade podem reforçar ou alterar as regras do sistema pelo diálogo entre os sujeitos e comunidade, além disso, a forma como os sujeitos compreendem o fenômeno, as relações matemáticas e os próprios artefatos mediadores são essenciais para os avanços no processo e consequente tomada de decisão.

Gráfico 7: Comparação gráfica dos modelos: linear, de Malthus e logístico, $GM_{1,3}$



Fonte: Relatório $GM_{1,3}$

A princípio, o motivo que levou os alunos do grupo $GM_{1,3}$ foi a motivação social. Isso fica evidenciado também nas conclusões dos alunos quando colocam:

> Através de estudos como este, há a possibilidade de um melhor planejamento político-social para atender a demanda da população nas questões dos serviços básicos, favorecendo, também, a tomada de decisões econômicas das empresas, por exemplo, de suas instalações. (Seminário $GM_{1,3}$)

Nesse aspecto, não houve, portanto, mudança no *motivo/objeto*, pois os alunos deixaram claro ao longo do processo tanto o *motivo* que os levou a desenvolver tal temática, como buscavam um modelo matemático que desse conta de representar tal contexto investigado.

CAPÍTULO 6. DISCUSSÃO E INTERPRETAÇÃO DOS RESULTADOS

Para discutir e interpretar os resultados dessa pesquisa fiz uso dos princípios da teoria da atividade de Engeström, compreendidos a partir das interações dos elementos de um sistema de atividade em que a Modelagem Matemática configurou-se. Nesse sentido, os princípios: *Sistema de atividade coletivo; Multivocalidade; Historicidade; Contradição; Transformação Expansiva*; constituem referência teórica que contribuiu para elucidar os dados da pesquisa.

O movimento dos sistemas de atividades dos quatro grupos analisados e seus respectivos interlocutores são enredados, bem como as relações entre si. Estas apresentam compreensões sobre de que maneira ocorreram os movimentos e desencadearam *transformações expansivas* no sistema de atividade, ocorrendo como consequência a aprendizagem. Nesse sentido, o movimento dos sistemas de atividades a partir de seus interlocutores são tomados na discussão pela característica da Modelagem Matemática de favorecer a socialização dos resultados.

O primeiro princípio, *Sistema de atividade coletivo* está garantido na inclusão dos elementos comunidade, regras e divisão do trabalho em um sistema de atividade. Engeström (1999) representa os elementos sociais, coletivos do sistema. Tal inclusão permite que o sistema de atividade seja sempre uma atividade coletiva, uma prática social, orientada ao objeto e mediada por artefatos em uma relação interativa.

O segundo princípio, a *Multivocalidade*, garante que os diferentes sujeitos que compõem um sistema de atividade, carregam consigo diferentes posições devido ao histórico de cada um, suas tradições, pontos de vista e interesses. Daí uma comunidade marcada por múltiplos artefatos, regras e convenções.

Sistemas de atividade transformam-se ao longo do tempo, assumindo determinada forma, a partir da compreensão dos problemas e conflitos que só podem ser resolvidos em função dessa história. Fator que corresponde ao terceiro princípio, a *Historicidade.*

As *contradições*, quarto princípio, no âmbito da teoria da atividade são vistas como fontes de mudanças e desenvolvimento. Não sendo consideradas, portanto, problemas e conflitos. Há de se considerar a necessidade de contradições em um sistema de atividade para que ocorra avanços. A partir destas, o quinto princípio a *Transformação Expansiva*, corresponde à reconceitualização do objeto e motivo no sistema de atividade. É resultado da superação de contradições e envolve um horizonte mais amplo de que os anteriores.

Tais princípios da Teoria da Atividade de Engeström (1987) foram identificados no capítulo de descrição e análise das atividades de Modelagem Matemática. A Teoria da Atividade permitiu a compreensão da atividade como unidade de análise, com uma estrutura complexa, dinâmica e constituída por um sistema de relações sociais. Tais unidades selecionadas são discutidas neste capítulo sob esta ótica, dos princípios básicos de Engeström, a partir dos interlocutores dos sistemas de atividades gerados.

6.1 SISTEMA DE ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA COM DOIS OU TRÊS INTERLOCUTORES

Ao adotar Engeström (1987) utilizando a Teoria da Atividade em sua terceira geração, em que o engajamento da professora-pesquisadora e alunos na atividade de ensino e aprendizagem é tomado como unidade mínima de análise, permitiu perceber os interlocutores de forma distinta.

Sobre os interlocutores constituídos a partir das atividades de Modelagem Matemática da primeira etapa do curso, resultou no constructo com três sistemas interlocutores ($GM_{1;1}$, $GM_{2;1}$ e Professora-pesquisadora). Nessa formação tem-se uma mesma ação que pode ser realizada de diferentes formas. As condições de realização de uma ação, a forma como ela é realizada concretiza-se em *operações*. Isso é possível evidenciar no desenvolvimento da Modelagem desenvolvida pelos dois grupos $GM_{1;1}$ e $GM_{2;1}$ com a mesma temática: bolo de caneca.

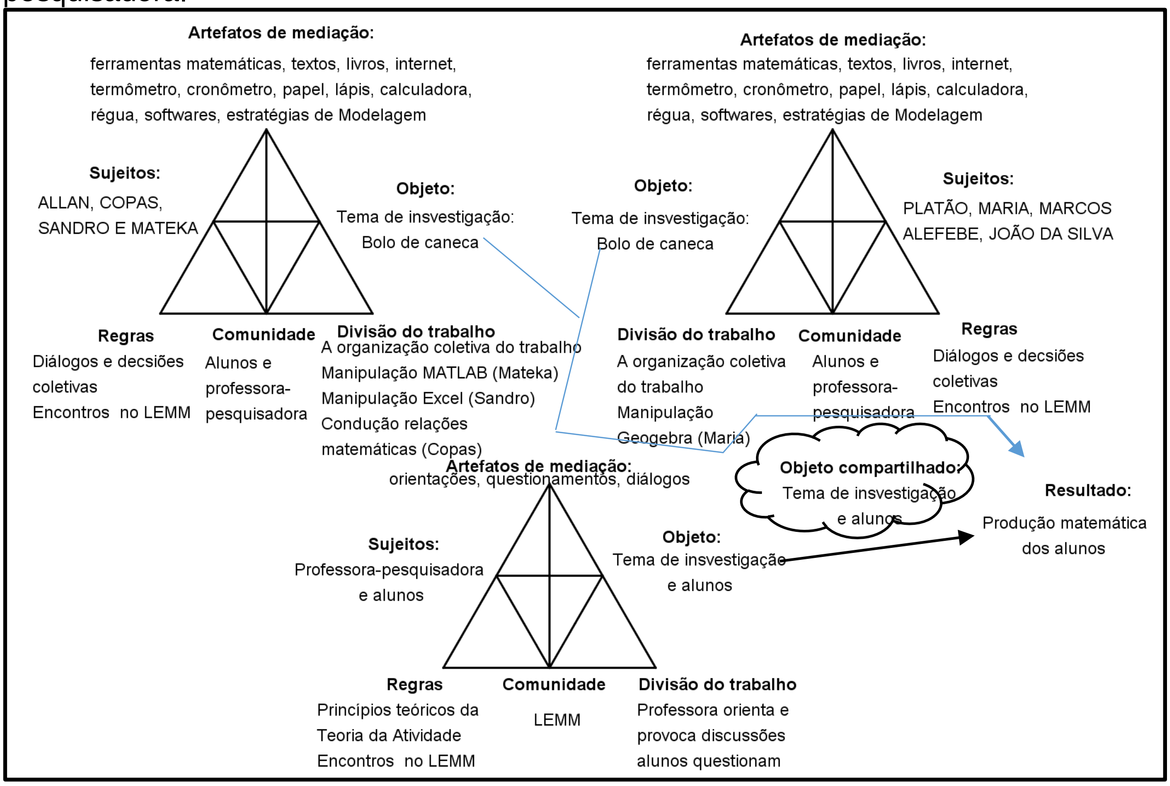
Cada grupo iniciou o processo utilizando argumentos diferentes, $GM_{1;1}$ começou utilizando dados arbitrários para escrever uma função linear e o grupo $GM_{2;1}$ começou utilizando metade dos dados e utilizando o método matricial para escreveu um sistema linear.

Os grupos ao fazerem uso da lei do Resfriamento de Newton, fizeram opções diferentes para a determinação da constante de proporcionalidade *k*. O grupo $GM_{1;1}$ utilizou a média de todos os *k*s para determiná-lo e o $GM_{2;1}$ utilizou um *k* escolhido arbitrariamente. Assim, as ações dos sujeitos mediaram o desenvolvimento de suas atividades de Modelagem como a organização do trabalho coletivo. Além disso, os argumentos matemáticos para a escolha do modelo adequado apresentam-se sob dois pontos de vista. O $GM_{1;1}$ optou por um modelo que levasse em consideração as relações matemáticas associadas ao fenômeno investigado. Já o grupo $GM_{2;1}$ optou por uma argumentação estritamente matemática, ao fazer a opção por um modelo linear.

As diferentes interações entre os indivíduos e entre os elementos do sistema de atividade possibilitaram o crescimento coletivo. Isto é, “(...) a transposição do individual para o coletivo, e vice-versa, possibilita o estabelecimento de relações de mútua responsabilidade, extremamente favoráveis para o trabalho de sala de aula” (BARUFI, 1999, p. 38), estendido aqui para o contexto de um espaço de aprendizagem denominado LEMM.

O sistema de atividade com três interlocutores, foi possível pela mediação das *regras de decisão* coletiva dos grupos $GM_{1;1}$ e $GM_{2;1}$. Ao final de cada Modelagem os grupos apresentariam seus resultados e conclusões no formato de seminário. Esse formato permitiu que cada sistema individual pudesse interagir com os outros de modo a compartilhar do mesmo *objeto* e *resultado*. Figura 21.

Figura 21: Sistema de atividade com três interlocutores $GM_{1,1}$, $GM_{2,1}$ (1ª etapa) e Professora-pesquisadora.

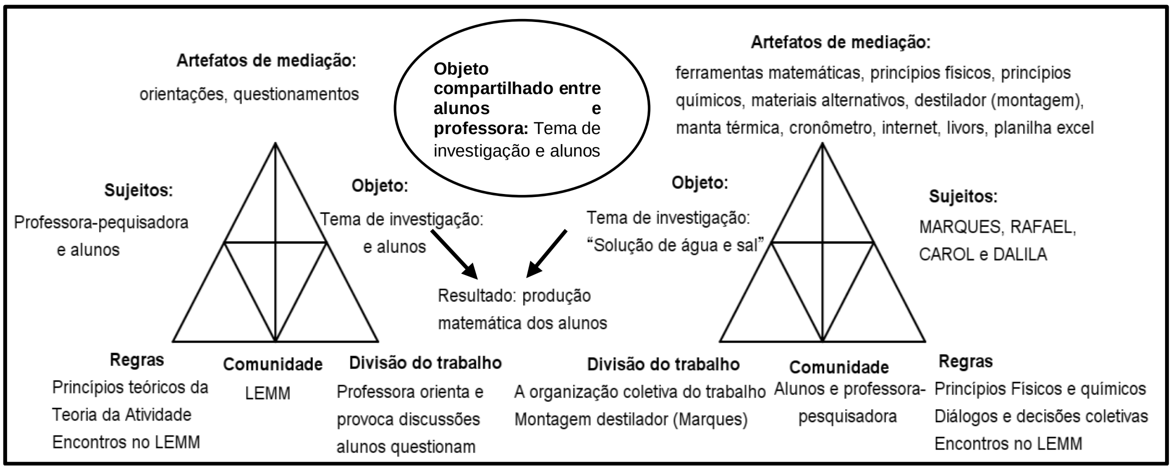


Fonte: Da autora

Essa representação triangular, Figura 21, compreende uma rede de três sistemas interlocutores que descreve uma característica da Modelagem Matemática que foi adotada pelos dois grupos, que é a socialização dos resultados. Além disso, cada sistema se compôs a partir do mesmo *objeto*, em sua configuração final. Nesse sentido a interação entre os vários sistemas partiu de um *objeto* potencialmente compartilhado, que levou em consideração a *multivocalidade* no constructo de cada sistema, bem como no constructo do sistema interlocutor, como resultado de encaminhamentos diferenciados para uma mesma ação.

Com relação aos interlocutores $GT_{1;2}$ (2ª etapa) e Professora-pesquisadora da 2ª etapa do curso, apresentam o *objeto* da atividade dos alunos Marques, Rafael, Carol e Dalila do grupo $GT_{1,2}$ identificado no início do processo de Modelagem Matemática como sendo o tema de investigação "Solução de água e sal". Esse *objeto* sofreu modificação no desenvolvimento da atividade, pois os alunos do $GT_{1;2}$ se depararam com o problema da destilação da água do sal, sendo este problema compreendido como novo *objeto/motivo* da atividade. Após a superação e alcance desse novo *objeto*, retornaram para o objeto de origem como sendo o próprio tema de investigação, Figura 22.

Figura 22: Sistema de atividade com dois interlocutores $GT_{1,2}$ (2ª etapa) e Professora-pesquisadora



Fonte: Da autora

Essa mudança no *objeto* da atividade partiu da necessidade dos sujeitos em avançar no processo, aliado a mudança de *artefato*s e de *regras*. Isso foi possível porque à medida que os alunos participam dos sistemas de atividade, podem transformar o *objeto*. Para acompanhar esse movimento do sistema foi necessário observar a *multivocalidade* e as *contradições* situadas no *objeto/motivo* do constructo do sistema.

Assim, a *divisão do trabalho* no sistema de atividade ficou caracterizada pela *multivocalidade* dos sujeitos, criando posições diferentes no desenvolvimento da *atividade*. Somado a isso, as mudanças do *objeto/motivo* da *atividade* caracterizou-se como uma *contradição*, que foi superada e transformada pelas *regras* de decisões coletivas. O resultado da atividade do grupo $GT_{1,2}$, identificado como modelo do matemático, foi reconhecidamente compartilhado nos interlocutores como uma produção matemática.

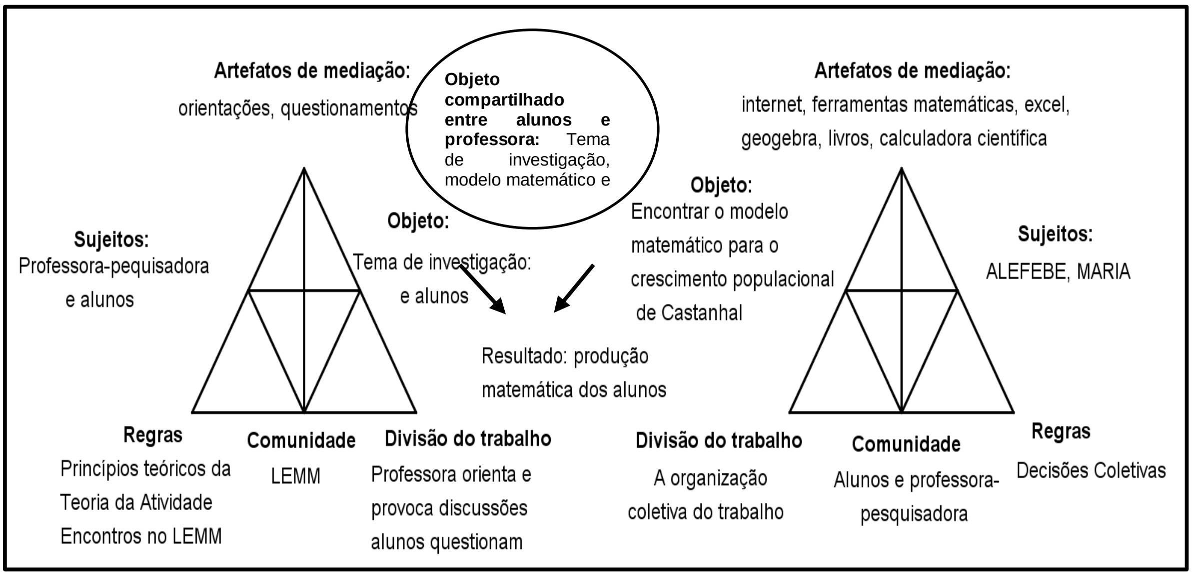
Somado aos sujeitos do primeiro sistema interlocutor estão os outros alunos que não desenvolveram a Modelagem Matemática do tema “Solução de água e sal”. Porém, participaram da socialização do $GT_{1,2}$, assumindo portanto o papel de questionadores do processo como forma de compreender e somar vozes e interesses.

O processo de negociação realizado a partir das *regras*, foi contínuo e incluiu interesses dos alunos, tendo como produto do sistema a transformação na forma de produção matemática. Tais evidências podem ser compartilhadas com a fala do aluno Marques, quando diz que:

> O que influenciou no esclarecimento foi o próprio trabalho em grupo, porque como a gente era de turmas diferentes, tinha alguns alunos mais avançados e outros que ainda estavam começando, e onde apareciam dúvidas uma integrante que participava e que estava num nível superior ao nosso ajudava o que estava começando, e essa interação de pontos de vista diferentes, perspectivas e experiências, veio fazer com que a gente com o auxílio da professora respondesse as perguntas e as questões que surgiam ao longo das experiências. (Entrevista)

Ou seja, as várias vozes ecoadas a partir da *historicidade* de cada indivíduo sujeito proporcionaram *contradições* no trabalho coletivo, impulsionando assim *transformações expansivas* no sistema. Essa evidência tanto pode ser incorporada pelos interlocutores do sistema representado na figura 22, quanto nos interlocutores dos sistemas $GM_{1,3}$ (3ª etapa) e Professora-pesquisadora. Figura 23.

Figura 23: Sistema de atividade com dois interlocutores $GM_{1,3}$ (3ª etapa) e Professora-pesquisadora



Fonte: Da autora

Nesse caso o *objeto* da atividade dos estudantes, conforme representado na figura 23, consistiu em encontrar o modelo matemático para o crescimento populacional de Castanhal. Os alunos Alefebe e Maria orientaram-se pelos livros que tratavam de modelos de crescimento populacional, uma vez que fizeram suas escolhas tentando encontrar um tema que se enquadrasse em um modelo estruturante desse tipo de fenômeno. Mas não apenas os livros, pois outros *artefatos* foram necessários para o desenvolvimento dessa Modelagem. Os alunos também fazem parte do *objeto* da atividade da professora-pesquisadora. O objeto potencialmente compartilhado inclui o objeto do grupo $GM_{1,3}$ com o objeto da atividade que inclui a professora-pesquisadora e outros alunos como sujeitos, nesse caso o tema de investigação e os próprios alunos.

O motivo da *atividade* de aprendizagem a ser realizada pelos alunos Alefebe e Maria, ora como *sujeitos* de sua própria atividade, ora como *objeto* da atividade da professora-pequisadora, bem como os outros alunos, também *objetos*, que compunham a etapa de socialização da Modelagem Matemática, pode ser entendido como apropriação de conhecimentos socializados e historicamente construídos.

Todas as práticas são oriundas de desenvolvimento histórico sob certas condições e processos que se reformulam através de interações entre os elementos de um sistema de atividade. Seja pela *divisão do trabalho*, entendida como organização do trabalho, seja pela mudança de *artefatos mediadores*, enfim. Isso significa que os movimentos dos sistemas de atividades dependem das *contradições* vivenciadas no mesmo.

As *contradições* evidenciadas nos métodos para formulação dos modelos, aliadas à *contradição* pela escolha do artefato tecnológico (Geogebra para Excel) para representação do modelo, permitiram uma *transformação expansiva* da aprendizagem dos alunos.

Assim, os alunos Alefebe e Maria, além de confrontar seus resultados matemáticos, como resultado dos vários métodos para determinar os três tipos de modelo (linear, malthusiano e logístico), puderam compartilhar conhecimentos tecnológicos.

6.2 EVIDÊNCIAS DOS PRINCÍPIOS DA TEORIA DA ATIVIDADEA PARTIR DAS FALAS E AÇÕES DOS SUJEITOS NO DESENVOLVIMENTO DAS ATIVIDADES

Confrontar o que a professora-pesquisadora percebe e compreende a partir da seleção de excertos de observações, áudio ou vídeo-gravações associados aos relatórios dos grupos de trabalho com que os alunos falam e percebem, pontua as possíveis interseções de sujeitos em posições diferentes no processo de Modelagem Matemática. Aqui entendida como um sistema de atividade em que os elementos *sujeito, objeto, artefatos mediadores, regras, divisão do trabalho e comunidade* interagem com foco na aprendizagem, que corresponde às transformações expansivas do sistema.

As questões referentes à motivação para a realização de atividades de Modelagem Matemática, bem como para escolha de temas, percepções sobre a aprendizagem, sobre o trabalho colaborativo e sobre as atividades desenvolvidas no âmbito do LEMM, apresentam subsídios pontuais para compreender o movimento dos sistemas de atividades configurados e os princípios básicos da Teoria da Atividade de Engeström (1987) quando da realização de *atividades*.

Em relação à motivação dos alunos em desenvolver atividades de Modelagem Matemática, estes responderam em entrevista suas pretensões ou conclusões sobre o curso desenvolvido:

> "Colocar em prática o cálculo que a gente aprende em sala de aula"

> "Complementar minha formação"
> "Queria fazer um curso que envolvesse aplicação e tivesse significação, pois nas aulas eu não sabia para que calcular limite, derivada, integral e no curso ao modelar eu conseguia vê-los em situações do cotidiano"
> "Pensei que Modelagem Matemática nem era possível no cálculo"
> "As atividades favorecem a aprendizagem"
> "A Modelagem ajuda o aluno a se interessar e se envolver"
> "Aprendemos para além da teoria da sala de aula"

Tais colocações evidenciam uma comparação entre a dinâmica de Modelagem Matemática com a dinâmica da sala de aula tradicional. Também buscam motivação matemática nas aplicações, bem como interesse e envolvimento com foco na aprendizagem. É possível perceber, nas entrelinhas, que os alunos buscam experiências e visões diferenciadas das quais estão acostumados e que possam complementar seus repertórios enquanto indivíduos sociais e culturais.

Além disso, as motivações dos alunos estão evidenciadas nas suas ações, de quando os mesmos optaram por dialogar com o grupo de trabalho em outros horários e locais que não o combinado anteriormente como forma de acelerar nas discussões, bem como na disposição dos mesmos em buscar fontes outras para além do espaço de aprendizagem incialmente elegido, seja pela busca de referenciais bibliográficos ou de pesquisa de campo.

Com relação à motivação dos alunos para escolha[17] dos temas, eles optaram por:

> "Temas que chamaram a atenção e consensual do grupo"
> "Como que de uma receita de bolo eu vou fazer uma Modelagem, foi intrigante e os outros temas interessantes"
> "Temas da realidade, pois para fazer Modelagem a gente precisa de outros conhecimentos que não só a matemática"
> "Queríamos temas para utilizar alguma coisa do LEMM"
> "Temas que tivessem uma relação social"

As respostas dos alunos aglutinaram-se na escolha de temas por interesse, por fazer parte da realidade, que pudessem fazer uso de *artefatos* disponibilizados no LEMM, além de questões sociais. Na primeira etapa do curso, apesar do tema não ter sido escolhido pelos alunos, o consideraram como um tema intrigante e que despertou o interesse. Ao serem convidados a escolher os temas para o

[17] A escolha de temas foi viabilizada na 2ª e 3ª etapas do curso

desenvolvimento das demais atividades na 2ª e 3ª etapa do curso, estes além de manter uma satisfação pessoal nas suas escolhas, também justificaram suas respostas a partir de uma justificativa coletiva, o que concebe a Modelagem Matemática como uma atividade colaborativa que pode ser efetivada desde a etapa da escolha do tema.

Quanto à questão da aprendizagem, os alunos não citaram conteúdo específico de Matemática ou de outra área do conhecimento, mas compreenderam a aprendizagem em um sentido amplo de tudo que foi desenvolvido, em relação à busca pela aprendizagem:

> "Meu curso foi de 4 anos e esse curso de 60h valeu pelos 4 anos, pois a forma como o curso foi conduzido favoreceu a aprendizagem"
> "Em sala de aula a gente não tem ideia de como utilizar os conteúdos matemáticos e com a Modelagem eles vão acontecendo"
> "Foi inevitável a aprendizagem, tanto com nossa pesquisa quanto com a dos outros grupos"
> "Fazer com que o aluno investigue"
> "As atividades favorecem a aprendizagem"
> "Aprendi que determinados fenômenos podem ser explicados através da Modelagem Matemática"
> "Antes não tinha ideia de como matematizar um problema qualquer, mas as atividades de Modelagem Matemática e da forma como o processo foi conduzido favoreceu isso"

No entanto, indiretamente ao pontuarem algumas dificuldades no processo é possível evidenciar conteúdos matemáticos favorecidos, como o caso do aluno Rafael, ao dizer:

> Tive dificuldade com integral, porque ainda não tinha trabalhado, mas mesmo assim consegui compreender e desenvolver com o grupo, pois minha equipe teve paciência para que eu acompanhasse o processo. (Entrevista)

Esse mesmo aluno, ao buscar compreensão de um conteúdo que ainda não fazia parte de seu repertório, tanto evidencia motivação para o desenvolvimento da *atividade*, quanto reforça sua postura não pacífica no processo.

Outro ponto relevante sobre a aprendizagem dos alunos diz respeito ao fato de que os alunos a atribuem não só nas situações fechadas aos seus próprios grupos colaborativos, mas também as *atividades* desenvolvidas por outros grupos, como sendo possível de adquirir conhecimento pela socialização dos mesmos.

Sobre o trabalho colaborativo, as falas dos alunos ancoram-no à aprendizagem com algo positivo e significativo para troca de experiências. Assim, evidências dos princípios da *atividade coletiva, historicidade, multivocalidade* se fazem presentes nas falas dos alunos:

> “O aluno é incentivado e as diferenças de nível só favorecem a aprendizagem, porque foi compartilhado saberes e experiências”
> “A interação e a troca de conhecimentos que cada aluno tinha, de ferramenta que poderia utilizar só foi possível por que estávamos cursando semestres diferentes, cada um tinha uma visão”
> “O debate em grupo, um ajudava, outro ajudava e aí íamos conseguindo desenvolver a atividade. Diferente da sala de aula tradicional, temos mais interação, fazemos pesquisa, buscamos nossos meios”
> “O trabalho em grupo foi tirar proveito da ideia de cada um”
> “Um tem uma experiência, outro tem uma ideia e aí íamos avançando”
> “A divisão do trabalho ocorria naturalmente por que tínhamos habilidades diferentes e isso favoreceu a aprendizagem”

O papel da interação entre os elementos do sistema de atividade fica evidenciado na fala e nas ações dos alunos, bem como as tradições, interesses e repertórios construídos social e culturalmente quando, por exemplo, a *divisão do trabalho* ter ocorrido de forma natural dadas as habilidades diferenciadas destes. Além disso, a troca de conhecimento para o avanço da *atividade* reforça a *multivocalidade* no constructo do sistema, ou seja, existia uma negociação de *regras* pela apropriação e compartilhamento de ideias e pontos de vista diferentes.

Sobre as atividades de Modelagem Matemática, a forma como os alunos reconheceram a aprendizagem em Modelagem Matemática pelas interações que ocorreram entre os vários elementos de um sistema de atividade só reforça a análise conduzida nesta pesquisa pela ótica dos princípios básicos da Teoria da Atividade. Pois ocorreu um entrelaçamento teórico e empírico dos movimentos dos sistemas de atividade. Como pode ser evidenciado nas falas dos alunos destacando algo marcante ao desenvolverem as *atividades*:

> “A interação e a troca de conhecimentos matemáticos”
> “Começar a pensar Modelagem Matemática em situações rotineiras, por exemplo, ao esperar o ônibus na parada querer estudar o fluxo de carros”
> “Um ambiente que até então não tínhamos vivenciado, foi uma oportunidade única de fazer matemática, pois é diferente da sala de aula que fazíamos exercícios por repetição. Aqui tínhamos que

> buscar as informações, os dados, nos sentíamos curiosos em buscar informações para aquele fenômeno e aqui gerava dúvida, queríamos entender e na sala de aula tradicional o professor chegava e apresentava o conteúdo"
> "Fazer, refazer, tentar empiricamente, vamos testar, quando a gente erra percebe que tem alguma coisa para fazer"
> "Trabalhar em grupo, ter interação com os outros, com o meio social e com os vários conhecimentos matemáticos"
> "Na sala de aula está tudo posto e na Modelagem Matemática é algo mais palpável, concreto. Isso beneficiou a aprendizagem, foi mais estimulante e aprendi a ouvir mais no trabalho em grupo"

Para além do que os alunos falaram, estas corroboram com suas ações no espaço de aprendizagem LEMM e é estendido a qualquer outro ambiente, como o caso da postura do aluno que ao esperar o ônibus, processa possibilidades de encaminhamentos de *atividades* de Modelagem Matemática, além da aceitação pelo fazer, refazer, testar, errar, constituem ações dos alunos sobre o fazer Modelagem Matemática.

A confirmação da Modelagem Matemática enquanto sistema de atividade coletivo pôde ser constatada pela defesa dos alunos do trabalho em grupo como sendo favorável e propício para o trabalho coletivo. Também para a troca de experiências, ou seja a *historicidade e multivocalidade* presentes nas tomadas de decisão dos *sujeitos* constituintes da *atividade*, bem como a superação de *contradições*. Quando os alunos situam a dúvida sobre algum aspecto do processo e a superação pela interação destes, das suas escolhas de *artefatos* e negociação de *regras* subsidiaram *transformações expansivas* e na própria fala e nas ações dos alunos, favoreceram aprendizagem.

Outras questões de lugar comum na Modelagem foram tratadas pelos alunos, tais como pontos positivos e negativos do trabalho desenvolvido. Isto, além de possíveis contribuições de atividade de Modelagem Matemática na dinâmica desenvolvida por e para alunos do curso de Licenciatura em Matemática em formação. Dentre os resultados apontados, destaco como pontos positivos: o trabalho em grupo, espaço disponível para aprender, interações, ambiente para fazer e aprender matemática, em aulas tradicionais é só teoria e a Modelagem Matemática é na prática, trabalhar vários tópicos de matemática.

Como desvantagem, apenas um aluno apontou a questão do tempo ao sugerir que o curso deveria ser oferecido em um ano. Outra aluna sobre alguns instrumentos que não estavam disponíveis para a realização da Modelagem Matemática, mas que foi superado no contexto de investigação. Outro aluno considerou desvantagem a preguiça, talvez isso se deva ao fato de que em dinâmicas mais tradicionais o aluno está habituado a um contexto que não o exija ativamente no processo de construção do próprio conhecimento. Nesse último caso, o autoconhecimento do aluno acerca de suas limitações e fragilidades também é uma forma de aprendizagem.

Das possíveis contribuições do uso da Modelagem Matemática é unânime o reconhecimento dos alunos em utilizá-la em suas práticas futuras como forma de incentivar seus vindouros alunos a se envolverem com a Matemática de forma mais acessível, aplicada a problemas do dia-a-dia. Ou seja, os alunos também aprenderam acerca de Modelagem Matemática, na perspectiva de professor.

Como retomada da questão da aprendizagem, entendida aqui com transformações expansivas, foi possível pelas contradições no sistema de atividade, seja pela mudança de um objeto matemático ou não, um artefato mediador, enfim, seja pela mudança de um dos elementos do sistema.

Assim, os alunos não só aprenderam conceitos matemáticos relacionados com o Cálculo Diferencial e Integral, como o caso de equações diferenciais, método dos mínimos quadrados, método de Ford-Walford, compreensão das diferentes formas de representação de modelos, comparação gráfica dentre outros, como também aprenderam sobre outros conhecimentos não necessariamente matemáticos, como o caso da destilação, programação e desenvolvimento de experiências, uso de softwares, entre outros.

CONSIDERAÇÕES

No momento em que iniciei minha caminhada em direção a uma formação doutoral, muitas foram as reflexões iniciais sobre os motivos, fossem eles individuais ou coletivos, que me levaram a tal escolha. Aliado a essas reflexões deparei-me no início do curso de doutorado com o termo “motivação intrínseca” que “(...) refere-se à escolha e realização de determinadas atividades por sua própria causa, por esta ser interessante, atraente ou, de alguma forma, geradora de satisfação.” (GUIMARÃES, 2001, p 37-38)

A motivação intrínseca foi inserida no contexto da formação doutoral como fundamental para o exercício da função aliada ao fato de que “precisamos nos dar conta de que o que pesquisamos sobre o nosso campo de interesse também se aplica a nós mesmos, dado que estamos imersos no mesmo meio.” (SILVA, PEIXOTO e SILVA; Nota de aula, 2012)

Ao trabalhar em um contexto de Modelagem Matemática me afeta duplamente, primeiro porque me interessa e segundo porque alcança os alunos nesse ambiente. Alcança os alunos, no sentido de que eles sentem-se afetados, motivados em desenvolver *atividades* de Modelagem Matemática.

Essas características supracitadas foram fundamentais para desenvolver esta pesquisa que ora se encerra. Sempre há novos elementos e variáveis que podem gerar novas problemáticas e outras pesquisas. Assim, na tentativa de encerrar esse texto, retomo a problemática de pesquisa: *Como as interações dos elementos - sujeito, objeto, artefatos mediadores, regras, divisão do trabalho, comunidade - de um sistema de atividade favorecem aprendizagem em ambiente de Modelagem Matemática, na perspectiva da Teoria da Atividade de Engeström?*

Com a intenção de responder à pergunta da pesquisa, desenvolvi no âmbito do Laboratório Experimental de Modelagem Matemática – LEMM/UFPA/Castanhal, *atividades* de Modelagem Matemática com grupos de alunos da Universidade Federal do Pará, dos mais diferentes níveis, que cursavam desde o 1º semestre de graduação em Matemática até alunos cursando mestrado. Foi oferecido um curso de iniciação científica “Cálculo e Modelagem Matemática”, que para atender a demanda, dois grandes grupos (GM e GT) se formaram e no período de um semestre realizaram *atividades* nas terças-feiras pela manhã e nas quartas-feiras à tarde, respectivamente. Todos os encontros foram áudio e/ou vídeo-gravados para posterior análise.

O curso oferecido foi desenvolvido em três etapas. Sendo que na primeira etapa todos os alunos desenvolveram a Modelagem de um mesmo tema: o bolo de caneca. Na segunda etapa alguns temas foram sugeridos para que os grupos se formassem por interesse de temas e na terceira etapa a escolha do tema foi livre. Inicialmente essa proposta foi pensada para que os alunos fossem ganhando confiança e autonomia para a escolha livre de um tema de investigação.

Sobre a participação dos sujeitos é importante observar que o fato das atividades de Modelagem Matemática desenvolvidas no âmbito do Laboratório Experimental de Modelagem Matemática – LEMM, não resultaria em pontuação para alguma disciplina, não constituiu obstáculo para o desenvolvimento e envolvimento dos alunos. A suspeita inicial de que os alunos poderiam não participar de forma efetiva nas atividades foi superada pela demonstração de comprometimento e vontade de aprender. Nesse sentido, foi possível observar na construção dos dados para a presente pesquisa, a participação de alunos comprometidos com sua formação independente de pontuação em alguma disciplina.

Com foco na questão de pesquisa, o trabalho foi delineado de forma a garantir subsídios que dessem conta de respondê-la e, consequentemente os capítulos foram constituídos e discutidos com o intuito de alcançar o objetivo da pesquisa. Primeiramente no primeiro capítulo, denominei-o de encontros com: a Modelagem Matemática, com a própria questão e objetivo da pesquisa, como com a relevância deste estudo. Este capítulo trouxe questionamentos para a pesquisa e situou na *historicidade* da própria autora, nesse caso a professora-pesquisadora, motivos para desenvolver a pesquisa e para optar pela área de investigação.

No segundo capítulo, tratei da Modelagem Matemática, desde a sua apropriação da Matemática Aplicada para a Educação Matemática, assim como o seu papel e o papel dos modelos matemáticos. Das análises é possível inferir que os alunos após a prática de Modelagem na primeira e segunda etapa do curso, ao se depararem com a escolha livre de tema na terceira etapa, passaram a fazer uso do papel dos modelos matemáticos para fazer essa escolha. Isto é, ocorreu uma inversão de etapas, primeiro escolhiam o modelo para depois pensar em uma dada situação na qual o modelo pudesse ser “encaixado”, seja ele como justificativa, como definição ou como estruturante.

Essa evidência pôde ser justificada pelo repertório acumulado pelos alunos, das experiências de Modelagem Matemática desenvolvidas nas duas primeiras etapas. De todo modo, esse fato não prejudicou o processo de Modelagem, pois cada contexto investigado apresentou suas peculiaridades. Desta forma, seguir o que está posto na literatura não atendeu às expectativas dos alunos, tendo estes que traçar seus próprios caminhos para desenvolver o processo de Modelagem. Nesse sentido, posso dizer que a inversão da escolha do tema pelo modelo conhecido pode ser considerada um conflito ou tensão, caracterizando uma *contradição* no sistema. Essa *contradição* foi superada pelo diálogo e relações matemáticas necessárias para tomada de decisão negociadas pelos alunos.

No terceiro capítulo, tratei da Teoria da Atividade, apresentando as gerações desde Vygotsky, Leontiev até Engeström. Este último, constituiu referencial teórico que deu condições para que os dados fosses analisados. A identificação dos elementos *sujeito, objeto, artefatos mediadores, regras, divisão do trabalho e comunidade* da terceira geração da Teoria da Atividade de Engeström permitiu configurar a Modelagem Matemática como um sistema de atividade.

No capítulo 4, referente à metodologia da pesquisa, apresentei a trajetória da pesquisa, em que os sujeitos, o contexto, a coleta e análise dos dados permitiram que fossem tratados dentro de uma abordagem qualitativa e fazendo uso dos cinco princípios básicos da Teoria da Atividade de Engeström foi possível compreender os resultados.

Todas as *atividades* de Modelagem Matemática foram desenvolvidas no LEMM, entendido como espaço de aprendizagem e constituíram material robusto para que fossem analisadas todas as *atividades*. Por isso optei por descrever, analisar e discutir sobre os resultados oriundos de quatro atividades de Modelagem Matemática, configuradas como um sistema de atividade, sendo duas atividades da 1ª etapa do curso, que gerou três interlocutores, uma atividade da 2ª etapa e uma da 3ª etapa, que geraram dois interlocutores cada uma.

Na primeira etapa do curso os dois grupos ($GM_{1,1}$ e $GM_{2,1}$) analisados inicialmente compreenderam a Modelagem Matemática como *artefato* dentro do sistema de atividade, ou seja, admitiram-na como um instrumento para resolver um problema. No entanto, o desenvolvimento da atividade mostrou que o sistema se reconfigurou, caracterizando a Modelagem Matemática como o próprio sistema de atividade. Isso se deve ao fato de que a maioria dos alunos estava desenvolvendo atividades de Modelagem Matemática pela primeira vez.

Apesar de Engeström (1987) ilustrar sua teoria na atividade médica, foi possível fazer uma analogia com as interações entre os elementos de um sistema constituído em um ambiente de ensino e aprendizagem. Isso quer dizer que se medicamentos são ferramentas de um médico, então orientações são ferramentas de uma professora-pesquisadora e livros e softwares, por exemplo, são ferramentas dos alunos.

Assim, sob a ótica da Teoria da Atividade de Engeström, foi possível configurar a Modelagem Matemática enquanto sistema de atividade e observar as interações ocorridas entre os elementos deste sistema: *sujeito, objeto, artefatos mediadores, regras, divisão do trabalho e comunidade*. Com isso, levando os alunos a uma produção matemática a partir do trabalho colaborativo e aprendizagem por *transformações expansivas*.

Nesse contexto, de investigar as interações dos elementos de um sistema de atividade, entendidas como as relações estabelecidas entre os próprios elementos, apresento algumas reflexões emergidas da investigação.

Sinalizo, com base nos resultados, que as interações ocorridas entre os elementos constituintes de um sistema de atividade, por meio da *multivocalidade* pode repercutir em negociação de *regras* e significados e como resultado encaminhamentos para a *atividade* de aprendizagem. Além disso, o trabalho colaborativo promove essa *multivocalidade*, por considerar as várias vozes e interesses dos *sujeitos* quando realizam o processo de Modelagem Matemática.

Dessas várias vozes que ecoam, as experiências de cada *sujeito* a partir da sua *historicidade* ecoam no processo de construção do conhecimento coletivo e, consequentemente geram *contradições* no sistema de atividade. Neste caso promovem *transformações expansivas*.

Negociamos, alunos e professora-pesquisadora, não só a transformação de um sistema, mas também atribuímos valor comum ao objeto. O processo de negociação do conhecimento considerou não só a natureza das “coisas”, mas a forma de conhecê-las, a partir de ações coordenadas com outras ações que proporcionaram novas conexões, que sustentaram o sistema de atividade, seja pela alteração do *objeto/motivo*, seja pela mudança de um *artefato* ou de uma nova *regra*.

Assim, a contribuição para a área da Educação Matemática está na medida em que a pesquisa conseguiu mostrar as interações dos elementos de um sistema de atividade. Isto, na qual a Modelagem Matemática constitui-se no próprio sistema e como essas interações geram *transformações expansivas*, ou seja, gerou aprendizagem. Mais para além dessa configuração, os interlocutores entre sistemas demonstraram que as *contradições*, que são conflitos entre os elementos, correspondem às necessidades que o sujeito coletivo precisa reconhecer, identificar e substituir para que o processo de Modelagem Matemática desenvolva-se. Essas transformações no sistema reforçam a contribuição dessa pesquisa.

Esta pesquisa constitui um dos passos que precisam ser dados para pensar a Modelagem Matemática como forma de fazer matemática nos espaços escolares, em busca de uma aprendizagem matemática. No entanto, esse passo não se esgota na publicação dessa pesquisa, mas permite que a atividade seja transformada a cada nova modificação de seus elementos.

Nesse escopo, considero que a característica desta pesquisa em desenvolver atividades de Modelagem Matemática na forma de curso optativo, em que os conteúdos matemáticos são livres, ou seja, fora de uma disciplina específica, que segue uma matriz curricular e que são oferecidas para turmas numerosas, de modo geral, implementações como esta podem ser superadas em novas pesquisas.

Com este trabalho pude evidenciar a complexidade que envolve a atuação de alunos e professora-pesquisadora em um processo de ensino e aprendizagem de forma ativa, participativa, colaborativa e autônoma. Isto porque os *objetos* são diferentes, mas interdependentes e podem ser potencialmente compartilhados nesse processo.

Pondero ainda, que analisar uma prática educativa segundo o referencial esboçado neste texto implica identificar o seu *objeto* e como ele se relaciona com os *sujeitos* envolvidos, por meio das diferentes interações dos elementos no processo. Assim como as necessidades dos *sujeitos* envolvidos, sua relação com o *motivo/objeto* da *atividade* e com os níveis de engajamento observados. A prática da Modelagem Matemática, compreendida como *atividade*, estrutura-se com base nos elementos do sistema com vistas a atingir um resultado.

Assim, acredito que questões como a dinâmica dos sistemas de atividades foram reguladas por essas *regras e divisão do trabalho* definidas em coletividade. Além de evidenciar as interações dos elementos – *sujeito, objeto, artefatos* *mediadores, regras, divisão do trabalho, comunidade* – do sistema, ou seja, de como eles se relacionam, bem como as *contradições* explicando e ou emperrando a dinâmica do sistema, foram algumas das respostas evidenciadas nesta pesquisa.

Desse modo, considero que o *trabalho coletivo*, a *historicidade* e a *multivocalidade* dos *sujeitos* atuando na superação de *contradições* para alcançar *transformações expansivas* repercutem em aprendizagem em Modelagem Matemática, configurada como um sistema de atividade, pelas interações dos elementos do próprio sistema.

A pesquisa mostrou que os alunos envolveram-se coletivamente com os objetos de estudo de cada *atividade* e por meio das contradições no sistema, que precisaram ser superadas para evolução do processo, evoluíram para transformações expansivas, como consequência a aprendizagem dos alunos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALFONSO-GOLDFARB, Ana Maria; BELTRAN, Maria Helena Roxo (org.). O saber fazer e seus muitos saberes: experimentos, experiências e experimentações. São Paulo: Editora Livraria da Física; EDUC; Fapesp, 2006.

ALMEIDA, Lourdes Maria Werle de; BRITO, Dirceu dos Santos. Atividade de modelagem matemática: que sentido os alunos podem lhe atribuir. **Ciência e Educação**. V. 11, n. 3, p. 482-498, 2005.

ALMEIDA, L. M. W; ARAÚJO, J. de L.; BISOGNIN, E. **Práticas de modelagem matemática na educação matemática**. Londrina: Eduel, 2011.

ALMEIDA, Lourdes Maria Werle de; FERRUZI, Elaine Cristina. A comunicação em atividades de modelagem matemática: uma relação com a teoria da atividade. In CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. 13, 2011, Recife. **Anais.**

ALMEIDA, Lourdes Maria Werle de; SILVA, Karina Pessoa da; VERTUAN, Rodolfo Eduardo. **Modelagem matemática na educação básica**. São Paulo: Contexto, 2012.

ALMEIDA, Lourdes Maria Werle de; PALHARINI, Bárbara Nivalda. Os “mundos da matemática” em atividades de modelagem matemática. **In:** BOLEMA, Boletim de Educação Matemática, v. 26, nº 43, 2012.

ALMEIDA, Lourdes Werle de; SILVA, Karina Pessôa da Silva. **Modelagem Matemática em Foco**. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna, 2014.

ALMEIDA, Lourdes Maria Werle de; VERTUAN, Rodolfo Eduardo. Modelagem Matemática na Educação Matemática. In: ALMEIDA, L. W. de; SILVA, K. P. da S. **Modelagem Matemática em Foco**. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2014.

ARAÚJO, José Paulo de. O robô ed é meu amigo: apropriação da tecnologia à luz da teoria da atividade. 2013.190f. Tese (Doutorado) - Universidade Federal do Rio de Janeiro. Programa Interdisciplinar de Pós-Graduação em Linguística Aplicada, Rio de Janeiro.

ARAÚJO, Jussara de Loiola. **Cálculo, tecnologias modelagem matemática***:* as discussões dos alunos*.* 2002. 253f Tese (Doutorado em Educação Matemática). Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro.

BARBOSA, J. C. **Modelagem matemática: contribuições e experiências de futuros professores.** 2001. p. 253f. Tese (Doutorado). Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro/SP.

BARBOSA, Jonei Cerqueira. Modelagem matemática e os futuros professores. **In:** REUNIÃO ANUAL DA ANPED, 25, 2002, Caxambu. **Anais...** Caxambu: ANPED, 2002.

BARBOSA, Jonei Cerqueira. As relações dos professores com a modelagem matemática. **In:** VIII Encontro Nacional de Educação Matemática - ENEM. Recife/PE. **Anais...** 2004.

BARBOSA, Jonei Cerqueira e outros (Org.). **Modelagem matemática na educação matemática brasileira: pesquisas e práticas educacionais.** Recife: SBEM, 2007.

BARBOSA, Jonei Cerqueira. *Modelagem e modelos matemáticos na Educação científica*. ALEXANDRIA Revista de Educação em ciência e Tecnologia, v.2, n.2, p. 69-85, 2009.

BARBOSA, Alyne Patrícia da Silva; DUTRA, Andréa Katiane Bruch; BRASIL, Eliana Amoedo de Souza. **Normas técnicas para trabalhos acadêmicos**. 4ª ed. Canoas: Ed. ULBRA, 2013.

BARUFI, Maria Cristina Bonomi. **A construção/negociação de significados no curso universitário inicial de Cálculo Diferencial e Integral**. Tese (Doutorado em Educação). 1999. 195f.Universidade de São Paulo, São Paulo.

BASSANEZI, Rodney Carlos.**Ensino-aprendizagem com modelagem matemática**. São Paulo: Contexto, 2004.

BASSANEZI, Rodney Carlos.**Temas e modelos**. 1ª ed. Campinas: Edição do autor UFABC, 2012.

BEAN, D. O que é Modelagem matemática? **In:** Educação Matemática em Revista. São Paulo, v. 8, n. 9-10, p. 49-57, 2001.

BIEMBENGUT, Maria Salett. **Modelagem matemática & implicações no ensino aprendizagem de matemática**. – Blumenau: Ed. Da Furb, 1999.

BIEMBENGUT, Maria Salett; HEIN, Nelson. **Modelagem matemática no ensino**. São Paulo: Contexto, 2002.

BIEMBENGUT, M. S. 30 Anos de modelagem matemática na educação Brasileira: das propostas primeiras às propostas atuais. **In:** ALEXANDRIA Revista de Educação em Ciência e Tecnologia, v.2, n.2, p.7-32, jul. 2009.

BIEMBENGUT, Maria Salett; ZERMIANV, Vilmar José. Perspectivas da modelagem matemática nas feiras de matemática. In: ALMEIDA, L. M. W; ARAÚJO, J. de L.; BISOGNIN, E. **Práticas de modelagem matemática na educação matemática**. Londrina: Eduel, 2011.

BISOGNIN, Eleni; BISOGNIN, Vanilde. Construção de modelos discretos para o ensino de matemática. In: ALMEIDA, L. M. W; ARAÚJO, J. de L.; BISOGNIN, E.

Práticas de modelagem matemática na educação matemática. Londrina: Eduel, 2011.

BLUM, W. Applications and Modelling in mathematics teaching and mathematics education – some important aspects of practice and of research. In: SLOYER, C. et al (Ed.) **Advances and perspectives in the teaching of Mathematical modelling and Applications.** Yorklyn, DE: Water Street Mathematics, 1995. p. 1-20.

BRAGA, Roberta Modesto. **Dificuldades de compreensão na disciplina Cálculo Diferencial e Integral**. 2007. Monografia. Universidade do Estado do Pará, Belém/PA.

BRAGA, Roberta Modesto. **Modelagem matemática e tratamento do erro no processo de ensino-aprendizagem das equações diferenciais ordinárias.** 2009. 180 f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemáticas). Universidade Federal do Pará, Belém/PA.

BRANDT, Célia Finck; BURAK, Dionísio; KLÜBER, Tiago Emanuel (org.). **Modelagem matemática:** uma perspectiva para a educação básica. Ponta Grossa: Editora UEPG, 2010.

BORBA, M. C.; MENEGHETTI, R. C. G.; HERMINI, H. A. **Modelagem, calculadora gráfica e interdisciplinaridade na sala de aula de um curso de ciências biológicas.** Revista de Educação Matemática da SBEM – SP, v.5, n.3, p. 63-70, 1997.

BUENO, Silveira**. Dicionário Silveira Bueno**. São Paulo: Didática Paulista, 1999.

BURAK, D. **Modelagem matemática: ações e interações no processo ensino-aprendizagem.** 1992. p. 460f. Tese (Doutorado em Psicologia Educacional. Faculdade de Educação) – UNICAMP, Campinas.

BURAK, D. ; KLÜBER, T. E. . Modelagem Matemática sob um olhar de Educação Matemática e suas implicações para a construção do conhecimento matemático em sala de aula. **In:** XI Encontro Paranaense de Educação Matemática, 2011, Apucarana. Anais XI EPREM - Encontro Paranaense de Educação Matemática, 2011. v. 1. p. 1-8.

CARVALHO JÚNIOR, Paulo de. **Podcast no ensino de alemão como língua estrangeira:** um estudo do impacto de uma nova tecnologia. Dissertação (Mestrado). 2011. 175 f. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro.

CHAVES, Maria Isaura de Albuquerque. **Percepções de professores sobre repercussões de suas experiências com modelagem matemática**. Tese (Doutorado em Educação em Ciências e Matemáticas). 2012. 132f. Universidade Federal do Pará, Belém, PA.

CIFUENTES, José Carlos; NEGRELLI, Leônia Gabardo. O processo de matemática e discretização de modelos contínuos como recursos de criação didática. In: ALMEIDA, L. M. W; ARAÚJO, J. de L.; BISOGNIN, E. **Práticas de modelagem matemática na educação matemática**. Londrina: Eduel, 2011.

CRESWELL, John W. **Projeto de pesquisa: métodos qualitativo, quantitativo e misto.** Trad. Magda Lopes.3 ed. Porto /Alegre: Artmed, 2010

DANIELS, Harry. Abordagens atuais da teoria sociocultural e da teoria da atividade. **In:** DANIELS, Harry. **Vygotsky e a pedagogia**. São Paulo: Loyola, 2003, p. 93-125.

DAVIS, Cláudia e OLIVEIRA, Zilma de. Psicologia na Educação. 2ª d. São Paulo: Cortez, 1994.

D'AMBRÓSIO, U. **Da realidade à ação: reflexões sobre educação e matemática**. 2. ed. Campinas: UNICAMP; São Paulo: Summus, 1986.

DOROW, Kelli Cristina; BIEMBENGUT, Maria Salett. Mapeamento das pesquisas sobre modelagem matemática no ensino brasileiro: análise das dissertações e teses desenvolvidas no Brasil. **In:** Dynamis: Revista Tecno-Científica. Blumenau, n. 14, v. 1, jan/mar, 2008, p. 54-61.

ENGESTRÖM, Yrjö. **Learning by expanding:** an activity-theoretical approach to developmental research. Helsinki, Orienta-Konsultit, 1987.

ENGESTRÖM, Yrjö. Developmental studies of work as a testbench of activity theory.The case of primary care medical practice. In: CHAIKLIN, Seth; LAVE, Jean (Ed.) **Understanding practice:** perspectives on activity and contexto. Cambridge: Cambridge University Press, 1993, p 53-72.

ENGESTRÖM, Y.; MIETTINEN, R.; PUNAMÃKI, R-L. Innovative learning in work teams: analyzing cycles of knowledge creation in practice, in: ENGESTRÖM, Y et al (Ed.) **Perspectives on activity theory.** Cambridge: Cambridge University Press. 1999, p. 377-406.

ENGESTRÖM, Y. Activity theory and individual and social transformation. In: ENGESTRÖM, Y; MIETTINEN, R; PUNAMÄK, R-L (eds). **Perspectives on activity theory**. Cambridge University Press, 1999.

ENGESTRÖM, Yrjö. Expansive learning at work: toward na activity theoretical reconceptualization. **Journal of Education and Work**. V. 14, n. 1, 2001. p. 133-156.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática.** Tradução Hygino H. Domingues. Campinas, SP: Editora UNICAMP, 2004.

FECCHIO, Roberto. **A modelagem matemática e a interdisciplinaridade na introdução de equações diferencial em cursos de engenharia**. 2011. p. 209f. Tese (Doutorado em Educação Matemática). PUC/SP, 2011.

FERRUZI, Elaine Cristina**. Interações discursivas e aprendizagem em Modelagem Matemática**. 2011. 230f. Tese (Doutorado em ensino de Ciências e Matemática. Universidade Estadual de Londrina. Londrina, PR.

FOSSA, John A. **Ensaios sobre a educação matemática**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2011.

FREIRE, Paulo. **Pedagogia da autonomia:** saberes necessários á prática educativa. Rio de Janeiro/RJ: Paz e Terra S/A, 2002.

FROTA, Maria Clara Rezende e NASSER, Lilian. **Educação matemática no ensino superior:** pesquisas e debates. Recife: SBEM, 2009.

GOLDENBERG, M. **A arte de pesquisar**: como fazer pesquisa qualitativa em Ciências Sociais. 10ª Edição – Rio de Janeiro: Record, 2007.

GIANFALDONI, Mônica Helena Tieppo Alves. O universo é infinito e seu movimento é mecânico e universal: Isaac Newton (1642-1727). In: ANDERY, Maria Amália e outros(org.). **Para compreender a ciência: uma perspectiva histórica.** 10ªed. Rio de Janeiro: Espaço e Tempo; São Paulo: EDUC, 2001. p. 237-253.

GUIMARÃES, Sueli Édi Rufini. Motivação intrínseca, extrínseca e o uso de recompensas em sala de aula. In: BORUCHOVITH, Evely & BZUNECK, José Aloyseo. **A motivação do aluno: contribuições da psicologia contemporânea**. Petrópolis/RJ: Editora Vozes, 2001.

HEIN, Nelson; BIEMBENGUT, M. Salett. Sobre a modelagem matemática do saber e seus limites. In: BARBOSA, J. C.; CALDEIRA, A. D. e ARAÚJO, J. L. (orgs.). **Modelagem matemática na educação matemática brasileira: pesquisas e práticas educacionais.** Recife: SBEM, 2007. p. 33-47.

HERMINIO, Maria Helena Garcia Barbosa. O processo de escolha dos temas dos projetos de modelagem matemática. 2009. 139 f. Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, 2009.

IGLIORI, Sonia Barbosa Camargo. Considerações sobre o ensino do cálculo e um estudo sobre os números reais. **In:** FROTA, Maria Clara Rezende e NASSER, Lilian**. Educação matemática no ensino superior:** pesquisas e debates. Recife: SBEM, 2009.

LEONTIEV, A. **O desenvolvimento do psiquismo**. Livros Horizonte, Lisboa, 1978.

LEONTIEV, A. Uma contribuição à teoria do psique. In: VIGOTSKY, L.S., LURIA, A.R., LEONTIEV, A.N. **Linguagem, desenvolvimento e aprendizagem.** São Paulo, Ícone, 1988.

LEONTIEV, A. N. Activity, conscious ness and personality.Parcialmente disponível em: http://www.marxists.org/archive/leontiev/works/1978/index/html. último acesso: 17Nov2014.

LISBOA, D. P. **Análise de prática educativa configurada por uma metodologia de projetos**: diálogo entre a teoria de atividade e a teoria ator rede. 2009. Dissertação (Mestrado em Educação Tecnológica) – Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2009.

MALHEIROS, Ana Paula Dos Santos. **Educação Matemática online: a elaboração de projetos de Modelagem.** 2008. 187 f. Tese (Doutorado) - Curso de Educação Matemática, Unesp, Rio Claro, 2008.

MEYER, J. F da C de A; CALDEIRA, A. D; MALHEIROS, A. P dos S. **Modelagem em Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2011.

MIORIM, M. A. **Introdução à história da educação Matemática.** – São Paulo: Atual, 1998.

MOREIRA, Adelson; PEDROSA, José Geraldo; PONTELO, Ivan. O conceito de atividade e suas possibilidades na interpretação de práticas educativas. **In:** Revista Ensaio, Belo Horizonte, v. 13, n. 3, p. 13-29, set.-dez. 2011.

NASCIMENTO, Carlos Arthur R. do. Rogério Bacon a ciência experimental. In: GOLDFARB, Ana Maria Afonso (org.). **O saber fazer e seus muitos saberes: experimentos, experiências e experimentações.** São Paulo: Editora Livraria da Física; EDUC; Fapesp, 2006. p. 43-63.

OLIVEIRA, Marta Kohl de. **Vygotsky:** Aprendizado e desenvolvimento: um processo sócio-histórico. São Paulo: Scipione, 1997.

PONTELO, I; MOREIRA, A. F.A teoria da atividade como referencial de análise de práticas educativas. **In:** Seminário Nacional de Educação Profissional e Tecnológica, 1, 2008, Belo Horizonte. **Anais..**.Belo Horizonte: Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais, 2008. Disponível em: http://www.senept.cefet-mg.br. Acesso em: 17 Nov 2014.

REGO, Tereza Cristina. Vygotsky: uma perspectiva histórico-cultural da educação. 23 ed. Petrópolis, RJ: Vozes, 2002.

SAD, L.A. **Cálculo diferencial e integral:** uma abordagem epistemológica de alguns aspectos. 371f. Tese (Doutorado) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 1998.

SANT'ANA, Mailaine de Fraga. Modelagem de experimento e ensino de cálculo. In: BARBOSA, J. C.; CALDEIRA, A. D. e ARAÚJO, J. L. (orgs.). **Modelagem matemática na educação matemática brasileira: pesquisas e práticas educacionais.** Recife: SBEM, 2007. p. 149-160.

SANTOS, A. G. **Representações Sociais do Ambiente por Professores e Estudantes em Diferentes Contextos Educacionais**. /Orientadora: Maria de Fátima Vilhena da Silva – NPADC/UFPA - Belém, 2010. (Dissertação de Mestrado).

SANTOS, Marli Regina; VENTURIN, Jamur André. Pesquisa fenomenológica em educação matemática: apresentação de procedimentos e discussões de alguns aspectos. In. **Anais** Seminário Internacional de Pesquisa e Estudos Qualitativos – IV SIPEQ, 2010.

SILVA, Francisco Hermes Santos; PEIXOTO, Licurgo; SILVA, Maria de Fátima Vilhena da. **Bases epistemológicas da pesquisa em Educação em Ciências e Matemática**. 05mar.2012. Notas de aula.

SILVEIRA, Everaldo. **Modelagem matemática em educação no Brasil:** entendendo o universo de teses e dissertações. 2007. 208f. Tese (Doutorado em Educação) – Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2007.

SKOVSMOSE, O. Cenários para investigação. **Bolema**. Rio Claro, v. 13, n.14, p. 66-91, 2000.

SOUTO, Daise Lago Pereira. **Transformações expansivas em um curso de Educação Matemática a distância online**. 2013. 281f. Tese (Doutorado) – Universidade Estadual Paulista (UNESP) Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, São Paulo.

SOUZA JR, A. J. **Trabalho coletivo na universidade: trajetória de um grupo no processo de ensinar e aprender cálculo diferencial e integral**. 323f. Tese (Doutorado) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, 2000.

SWETS, F. Quando e como podemos usar Modelação? **In:** Lisboa: Educação e Matemática, n. 23, 3º trimestre, 1992.

TEODORO, A & VASCONCELOS, M. L. **Ensinar e Aprender no Ensino Superior, por uma epistemologia da curiosidade na formação universitária.** São Paulo: Cortez, 2003.

VOS, Pauline. What is "authentic" in the teaching and learning of mathematical modelling?.In G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo Ferri & G. Stillman (Eds.), **Trends in teaching and learning of mathematical modelling**. New York: Springer, 2011.

VYGOTSKY, L. S. Mind in society: **The development of higher psychological processes.** Cambridge, MA: Harvard University, 1978.

VYGOTSKY, L.S. **A formação social da mente**. 4e. São Paulo: Martins Fontes, 1991.