SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E CIENTÍFICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICAS

ALEX BRUNO CARVALHO DOS SANTOS

INVESTIGANDO EPISTEMOLOGIAS ESPONTÂNEAS DE PROFESSORES DE MATEMÁTCA SOBRE O ENSINO DE EQUAÇÕES DO PRIMEIRO GRAU

BELÉM
2014

ALEX BRUNO CARVALHO DOS SANTOS

INVESTIGANDO EPISTEMOLOGIAS ESPONTÂNEAS DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA SOBRE O ENSINO DE EQUAÇÕES DO PRIMEIRO GRAU

Texto apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas, Área de concentração em Educação Matemática, do Instituto de Educação Matemática e Científica da Universidade Federal do Pará, como requisito parcial para qualificação a fim de obtenção do titulo de Mestre em Educação em Ciências e Matemáticas.

Orientador: Prof. Dr. José Messildo Viana Nunes

BELÉM
2014

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da UFPA

Santos, Alex Bruno Carvalho dos, 1985 -
Investigando epistemologias espontâneas de professores de matemática sobre o ensino de equações do primeiro grau / Alex Bruno Carvalho dos Santos – Belém, 2014. 124f.

Orientador: José Messildo Viana Nunes
Coorientador: Roberto Carlos Dantas de Andrade.

Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemáticas) – Universidade Federal do Pará, Instituto de Educação Matemática e Científica, Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas, Belém, 2014.

1. Matemática – estudo e ensino. 2. Álgebra - estudo e ensino. 3. Professores de matemática. 4. Didática da matemática - equação do Primeiro Grau. 5. Prática de ensino. I. Titulo.

CDD - 22. ed. 510.7

TERMO DE APROVAÇÃO

ALEX BRUNO CARVALHO DOS SANTOS

INVESTIGANDO EPISTEMOLOGIAS ESPONTÂNEAS DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA SOBRE O ENSINO DE EQUAÇÕES DO PRIMEIRO GRAU

Texto aprovado como requisito parcial para defesa a fim de obtenção do grau de Mestre no Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas, Área concentração Educação Matemática, Instituto de Educação matemática e Científica da Universidade Federal do Pará, pela seguinte banca examinadora:

____
Prof. Dr. José Messildo Viana Nunes
Orientador – IEMCI/UFPA

____
Prof. Dr. Roberto Carlos Dantas de Andrade
Co-orientador – ETRB

____
Prof. Dr. Renato Borges Guerra
Membro interno– IEMCI/UFPA

____
Prof. Dr. Miguel Chaquiam
Membro externo – UNAMA/UEPA

Belém, 16 de maio de 2014

Ao Deus eterno, bendito Senhor, que até aqui tem me sustentado, segundo seu propósito e misericórdia.

A Meus pais Miguel e Ester. Sou muito grato a Deus por eu fazer parte de suas vidas, e pela orientação e educação que recebi de vocês. Obrigado por me amarem.

A meus irmãos Alexandra, Aline e Alex Leugim (migueL invertido), amo vocês.

À minha *muito querida* Darleny do Carmo, minha esposa. Fico feliz por compartilhar com você esta conquista. Desejo que este seja um dentre muitos sonhos que realizaremos juntos.

A meus filhos, netos e bisnetos. Antes de vocês terem nascido eu já me importava com vocês. Meu desejo e a minha oração é que meu exemplo os inspire na busca de seus sonhos.

Aos amigos e irmãos que ganhei na SESPA. Não poderia deixar de lembrar de vocês. Considero-os como parte de minha família. Obrigado pelo apoio.

A meus queridos amigos da PGE aos quais aprendi amar e respeitar neste pouco tempo que passamos juntos. Muito obrigado pela ajuda e pela torcida. Guardo-os no meu coração.

A meus companheiros do curso de mestrado da UFPA/PPGECM, em especial: Aline Miranda, Andreson Costa, Dailson Evangelista, George Christ, Guilherme Moura e Raquel Rego; com quem pude compartilhar o privilégio de ingressar em um programa de pós graduação; além do apoio que me deram neste período. “A alma generosa prosperará, e o que regar também será regado”. (BÍBLIA SAGRADA).

A todos os que me perguntaram: “e aí Alex, como vai a dissertação?”

AGRADECIMENTOS

A Deus, por tudo o que tem feito e ainda fará por mim.

Ao Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas pelo acolhimento e oportunidade os quais me permitiram ampliar minha compreensão sobre o ensino de ciências e matemáticas.

Ao professor Dr. José Messildo Viana Nunes por sua orientação, carisma e paciência durante a relação orientador/orientando. Obrigado Mestre.

Ao professor Dr. Roberto Carlos Dantas de Andrade o qual contribuiu significativamente para o aprimoramento desta pesquisa com sua co-orientação.

Ao professor Dr. Renato Borges Guerra pelas suas considerações em minha qualificação e na defesa de dissertação, além disso, sua participação nas reuniões de grupo de pesquisa foram muito valiosas para minha formação como pesquisador.

Ao professor Dr. Miguel Chaquiam por ter aceitado o convite para participar da banca examinadora de qualificação e defesa desta dissertação e, por suas contribuições para o desenvolvimento desta versão.

Ao professor M. Sc. José Carlos de Souza Pereira (doutorando convidado) por sua colaboração no desenvolvimento desta pesquisa.

Aos professores do curso de Especialização em Didática da Matemática por sua paciência e colaboração na coleta de dados que resultaram nesta dissertação. Muito grato.

Ao programa CAPES, pelo apoio financeiro o qual me permitiu a melhor dedicação ao curso de Mestrado.

RESUMO

Neste trabalho, apresentamos os resultados de uma pesquisa realizada com 23 professores de matemática, então alunos da especialização em Didática da Matemática na Universidade Federal do Pará, sobre suas concepções acerca da Álgebra e seu ensino e como introduziam o tema Equações do Primeiro Grau em suas aulas no ensino básico. A principal fundamentação foi a Teoria Antropológica do Didático, a qual possibilitou a análise de modelos relativos ao ensino e aprendizagem de tópicos de Álgebra. Nosso objetivo foi verificar quais características do modelo epistemológico dominante no ensino de Álgebra são reveladas nas concepções dos professores investigados. A questão norteadora de nossa pesquisa foi: Em que medida a constituição de um sistema didático com características de um Percurso de Estudo e Pesquisa interfere na epistemologia espontânea de professores de matemática em formação continuada sobre o ensino de Equações do Primeiro Grau? A coleta de dados para análise ocorreu em 06 sessões nas quais desenvolvemos as seguintes atividades: aplicação de um questionário; socialização de ideias e concepções acerca de Álgebra e seu ensino; estudo epistemológico do objeto Equações do Primeiro Grau; discussão sobre as concepções de Álgebra segundo Usiskin; estudo sobre as características da Álgebra como aritmética generalizada e; exposição das práticas de sala de aula dos sujeitos investigados. Para realizarmos as sessões adotamos como procedimento metodológico o Percurso de Estudo e Pesquisa. Os resultados revelaram, quanto à epistemologia espontânea do professor, o predomínio da perspectiva da Álgebra no sentido de operação com letras e números bem como de generalização de padrões, o que a caracteriza como aritmética generalizada. Neste sentido, a Álgebra é vista como um prolongamento e generalização das práticas aritméticas. No que diz respeito à questão de nossa pesquisa, percebemos que o processo de estudo possibilitou aos sujeitos a conscientização de se levar em conta os aspectos epistemológicos do ensino de Álgebra, no entanto, não vislumbramos mudanças significativas em sua epistemologia espontânea, comparando seus discursos no inicio da pesquisa com a apresentação de sua praxeologia ao final da pesquisa.

Palavras-chave: Álgebra Escolar. Modelo Epistemológico de Referência. Teoria Antropológica do Didático. Equações do Primeiro Grau.

ABSTRACT

In this studied it is presented the results of a research with 23 Mathematics teachers who attended postgraduation in Mathematics Didactics, about how to conceive the algebra and how to introduce the theme of Equations from the First Degree. The objective was to verify which characteristics of the dominant epistemological model on teaching algebra are revealed in the conceptions of the teachers investigated. The key point of the research was: In which measures the establishment of a didactic system with characteristics of a Course of Study and Research interferes in the spontaneous epistemology of Mathematics teachers about teaching the equations of the first degree? The research was realized in 06 sessions in which it wasused a questionnaire with the subjects; recorded the socialization of his ideas about their conceptions of algebra and its teaching. To accomplish the sessions it was adopted as the methodological procedure Course of Study and Research. The results show, as the spontaneous epistemology teacher, the predominant view of algebra in the sense of operation with letters and numbers and generalizing patterns, which characterizes it as generalized arithmetic. In this sense, algebra is seen as an extension and generalization of arithmetic practices. In respect to the question of the research, it was found that the process of study permitted to the subjects consciousness of taking into account the epistemological aspects of teaching algebra, however, it was not seen significant changes in their spontaneous epistemology, after comparing their discourses at the beginning of the research by presenting their research at the end of praxeology.

Key-words: School Algebra. Epistemological Model Reference.Anthropological Theoryof Didactics.Teaching Problem.First-DegreeEquations.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE SIGLAS

C.H.I.C.	Classificação Hierárquica Implicativa e Coesitiva
EP	Equipamento Praxeológico
GEDIM	Grupo de Estudos e Pesquisa em Didática da Matemática
IGA	Indicador de Grau de Algebrização
MER	Modelo Epistemológico de Referencia
OD	Organização Didática
OM	Organização Matemática
PC	Programas Cognitivistas
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
PER	Percurso de Estudo e Pesquisa
SAEB	Sistema de Avaliação da Educação Básica
TAD	Teoria Antropológica do Didático
UEPA	Universidade do Estado do Pará
UFPA	Universidade Federal do Pará

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A Álgebra Escolar ocupa um lugar de destaque no currículo atual do ensino de matemática no Brasil, abrangendo grande parte do ensino básico. As propostas e sugestões dos documentos oficiais, como os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB), e Prova Brasil permitem constatar o destaque dado à Álgebra Escolar e a sua evidência como ferramenta fundamental no ensino básico de matemática.

Segundo Brasil (1998), o estudo da Álgebra compõe um espaço significativo para o aluno desenvolver a capacidade de abstração e generalização. Brasil (2008b) reforça a ênfase dada à Álgebra ao propô-la para o ensino fundamental, juntamente com Números e operações e Funções, como terceiro tema na Matriz de Referência de Matemática, tanto para o 5º ano como para o 9º ano.

A partir do 7º ano do ensino fundamental, o uso das letras para representar operações matemáticas se torna mais frequente e com um nível de complexidade cada vez maior (IMENES, 2009; MORI, 2009), o que evidencia, para maioria dos docentes, o efetivo estudo de noções algébricas. Embora se reconheça a relevância do ensino de Álgebra na escola básica, pesquisas realizadas nas últimas décadas como Booth (1995); Lochhead e Mestre (1995); Pinto (1997) além de Demonty e Vlassis (2002); Ursini et al. (2005); Lopes (2011) e; Reis (2011) têm revelado dificuldades de aprendizagem nesta área do conhecimento.

Ao longo de nossa experiência como aluno do antigo 1º grau, manifestamos dificuldades para estabelecermos relações com conceitos algébricos, como por exemplo: equações polinomiais do primeiro grau com uma variável[1], sistemas de equações lineares, expressões algébricas, etc.

---

[1] Por uma questão de economia, daqui em diante designaremos Equação do Primeiro Grau para nos referirmos à Equação Polinomial do Primeiro Grau com uma Variável. O termo "variável" adotado neste contexto é usado na perspectiva descrita por Usiskin (1995, p. 9) o qual o adota para referir-se à notação algébrica ainda que não se trate de uma expressão de uma função.

À medida que íamos estabelecendo algumas relações com noções de Álgebra, e contando com o auxílio de nossos professores, despertamos interesse para a Matemática, a ponto de enveredarmos na carreira acadêmica no curso de licenciatura em Matemática, do qual somos graduados pela Universidade do Estado do Pará (UEPA). Nesta caminhada nos dedicamos a leituras, cursos, seminários, conferências, que nos ajudaram a ampliar nosso conhecimento acerca de práticas de ensino de Matemática.

Ainda na UEPA, evidenciamos que as complexidades relativas ao ensino de noções de Álgebra não se restringe a um determinado nível de estudo ou faixa etária. No decorrer da disciplina de estágio supervisionado, que cursamos pela referida instituição, tivemos contato com alunos do terceiro ano do ensino médio que apresentavam dificuldades relativas à resolução de expressões algébricas.

O interesse em aperfeiçoar nossos conhecimentos para exercer a docência, e o desejo em realizar investigações específicas no campo da Educação Matemática, nos motivaram a ingressar no Programa de Pós-Graduação Lato Senso em Educação Matemática da UEPA. Neste curso, tivemos contato com pesquisas voltadas para a Educação Matemática e suas respectivas tendências: uso da História da Matemática, Modelagem Matemática, Etnomatemática, uso das tecnologias e informática no ensino da Matemática, Resolução de problemas, etc.

O curso de Especialização em Educação Matemática nos possibilitou um olhar reflexivo para o ensino e aprendizagem de matemática no qual apresentamos como trabalho de monografia uma proposta alternativa para abordar o conceito de áreas de figuras planas, com enfoque para a área do triângulo. A proposta explorou atividades que pudessem ancorar-se em conhecimentos prévios dos alunos relativos ao objeto focado. Assim evidenciamos a necessidade de propostas alternativas de abordagem que articulassem teoria e prática.

A partir desse contato com a pesquisa científica buscamos prosseguir nossos estudos no curso de mestrado em Educação em Ciências e Matemáticas ofertado pela Universidade Federal do Pará (UFPA), no qual fomos aprovados e selecionados como aluno na linha de pesquisa “Percepção

Matemática, Processos e Raciocínio Lógico, Saberes e Valores” sob a vertente do Grupo de Estudos e Pesquisa em Didática da Matemática – GEDIM.

Nesta instituição, apresentamos ao professor Dr. José Messildo o interesse em pesquisar sobre o ensino de Álgebra, em particular, o ensino de Equações do Primeiro Grau. Nosso objetivo foi verificar quais características do modelo epistemológico dominante no ensino de Álgebra são reveladas nas concepções dos professores investigados. A questão norteadora de nossa pesquisa foi: **Em que medida a constituição de um sistema didático com características de um PER interfere na epistemologia espontânea de professores em formação continuada acerca do ensino de equações do primeiro grau?**

Para responder a esta questão, analisamos depoimentos de professores de Matemática da escola básica, integrantes do curso de Especialização em Didática da Matemática, da Universidade Federal do Pará, sobre suas práticas.

No decorrer de nossa pesquisa verificamos também que, mesmo reconhecendo a importância do ensino de Álgebra na escola básica, pesquisas das últimas três décadas como a de Booth (1995); Demonty e Vlassis (2002); e Lopes (2011) ainda apontam para dificuldades de aprendizagem desta área do conhecimento.

Destacamos a importância das pesquisas voltadas para a formação profissional do professor de matemática no que diz respeito às influencias dos modelos epistemológicos predominantes nas instituições escolares sobre a maneira de fazer e de pensar no ensino e aprendizagem de matemática, para reflexão e melhoria de sua prática.

Assim sendo, apresentamos os resultados de uma pesquisa de caráter qualitativo na qual estabelecemos como dispositivo metodológico para coleta de informações: 1) a aplicação de um questionário que nos forneceu indícios de modelos de referência utilizados pelos professores, e 2) o uso de um percurso de investigação com características de um Percurso de Estudo de Pesquisa, denotado pela sigla PER (do francês *Parcours d'Études* et *de Recherches*) o qual teve como base para primeiras discussões os resultados obtidos da aplicação do questionário.

Os resultados obtidos são descritos e analisados nesta dissertação que está dividida em capítulos como segue:

O capitulo 1 apresenta os elementos da Teoria Antropológica do Didático, que irão subsidiar nossa pesquisa. Esta teoria concebe a atividade matemática docente em termos de praxeologias matemáticas e didáticas. Também fazemos considerações acerca de Modelos, com foco para os conceitos de Modelo Epistemológico de Referência (MER) na concepção de Chevallard (1989), Gascón (1994), Bolea Catalán (2003) os quais focalizam o ensino de Álgebra sobre qual tem sido considerado o modelo dominante nesta área.

Destacamos neste capítulo a influência que o modelo dominante incide sobre as concepções do professor nas instituições e sua manifestação quase imperceptível, havendo a necessidade de se adotar um modelo de referência para questionar e analisar tal modelo.

No capitulo 2, mostramos um levantamento bibliográfico de pesquisas das últimas décadas acerca do ensino e aprendizagem de conteúdos algébricos. A análise das obras permitiu verificar que o foco principal destas pesquisas está nos erros frequentes cometidos pelos alunos e suas possiveis causas.

Ao final do capitulo 2 apresentamos o enquadramento das pesquisas segundo as perspectivas dos programas de investigação sobre a problemática docente da Álgebra escolar: perspectiva conceitualista; perspectiva psicolinguística e processualista; perspectiva epistemológica.

No capitulo 3, descrevemos os procedimentos metodológicos adotados na pesquisa, os quais consistiram na aplicação de um questionário e, posteriormente no desdobramento do mesmo em depoimentos dos professores sujeitos da pesquisa para, então constituirmos um percurso de investigação com características de um Percurso de Estudo e Pesquisa como metodologia de pesquisa. Na pesquisa empírica contamos com a participação de 23 professores que cursavam Especialização em Didática da Matemática, a fim de explicitar qual o modelo epistemológico dominante apresentado por este grupo, no ensino de Álgebra.

As atividades desenvolvidas com os sujeitos da pesquisa foram realizadas em 6 sessões, cada sessão sendo programada a partir de questões que surgiam no decorrer das sessões anteriores. Estas atividades possibilitaram analisar as concepções dos professores evidenciadas em suas falas, bem como classificarmos as mesmas segundo perspectivas de aprendizagem: conceitualista; psicolinguistica e processualista; e aritmética generalizada.

No capítulo 4, apresentamos os resultados da pesquisa quanto às epistemologias espontâneas dos sujeitos, com suas respectivas análises baseadas nos pressupostos teóricos da TAD acerca dos modelos de Álgebra presentes nas epistemologias dos professores. Neste capitulo, revelamos as características da Álgebra escolar adotada nas praxeologias dos professores tendo como base fragmentos de suas epistemologias espontâneas manifestadas em seus discursos.

No capitulo 5, traçamos nossas considerações finais nas quais indicamos uma abordagem geral de nosso trabalho, e anunciamos algumas conclusões sobre os resultados obtidos, bem como sugestões para novas pesquisas.

1 O MODELO GLOBAL DA PESQUISA

Neste capítulo apontamos a Teoria Antropológica do Didático (TAD) como fundamento e modelo global de nosso trabalho, bem como descrevemos alguns de seus elementos que irão subsidiar a análise de dados desta pesquisa: os modelos relativos ao ensino de Álgebra, as concepções espontâneas do professor e, as perspectivas sobre o ensino de Álgebra escolar.

1.1 TEORIA ANTROPOLÓGICA DO DIDÁTICO (TAD)

A TAD foi desenvolvida e teorizada por Chevallard para estudar as condições de funcionamento de sistemas didáticos, compreendidos como a relação: sujeito – instituição – saber. Esta teoria contribui para a Didática da Matemática, uma vez que proporcionou uma evolução do conceito de Transposição Didática, além do que, insere a Didática da Matemática no campo da antropologia bem como modela as práticas sociais, em particular, a atividade matemática, em quatro elementos: as noções de (tipo de) **tarefa**, **técnica**, **tecnologia** e **teoria**.

O termo *tarefa* é utilizado por Chevallard, Bosch e Gascón (2001) para expressar uma ação, um procedimento ("o que é para fazer") que o sujeito deve executar para resolver determinada situação proposta. A *técnica* é compreendida como uma "maneira de fazer" ou de "realizar" determinada tarefa. Desta forma, para a execução de qualquer tarefa é necessária a escolha de uma técnica.

Segundo Chevalard[2] (1992 apud Almouloud, 2007), uma técnica, para existir numa instituição, deve ser compreensível, legível e justificada. Neste sentido, ao discurso matemático que justifica e permite entender determinada técnica, Chevallard, Bosch e Gascón (2001, p. 238) denominam *tecnologia*, trata-se de um saber relativo à técnica. Neste caso, as funções da tecnologia são: justificar "racionalmente" a técnica; explicar, fazê-la inteligível, aclarar a técnica, produzir técnicas e expor o motivo pelo qual a técnica é correta. Finalmente, toda tecnologia também precisa de uma justificação, que é denominada *teoria* da técnica.

Os termos tecnologia e teoria remetem-se aos quadros teóricos referentes aos campos matemáticos que fundamentam as propriedades, teoremas, algoritmos utilizados tecnicamente, por exemplo, Campo Algébrico, Geométrico, Numérico dentre outros. Sendo assim, a noção de tarefa supõe um objeto relativamente preciso para o qual se dispõe de alguma técnica com um entorno tecnológico-teórico mais ou menos explícito.

> Na atividade matemática, como em qualquer outra atividade, existem duas partes, que não podem viver uma sem a outra. De um lado estão as tarefas e as técnicas e, de outro, as tecnologias e teorias. A primeira parte é o que podemos chamar de "prática", ou em grego, a práxis. A segunda é composta por elementos que permitem justificar e entender o que é feito, é o âmbito do discurso fundamentado – implícito ou explícito – sobre a prática, que os gregos chamam de logos. (CHEVALLARD; BOSCH; GASCÓN, 2001, p. 251).

Um conjunto de técnicas justificadas por uma tecnologia e apoiada em teorias, forma uma *organização praxeológica* (ou *praxeologia*). Acerca disso, focando a sala de aula, Andrade (2007) descreve praxeologia matemática como uma *organização matemática* que permita aos alunos atuarem com eficácia na resolução de problemas e entenderem o que fazem. "*Em uma maneira simplificada, nós podemos dizer que o que aprendemos e ensinamos em uma instituição educacional são praxeologias matemáticas"*. (ANDRADE, 2007, p. 37).

Desta forma a atividade matemática pode ser interpretada como atividade humana e modelada por meio de praxeologias (ou organizações) associadas a um saber matemático, as quais, segundo Chevallard (1999), são

---

[2] CHEVALARD, Y. Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique. Recherches en Didactique dês Mathématiques. Grenoble: La Pensée Sauvage, v. 12.1, 1992.

de duas espécies: matemáticas e didáticas. As organizações matemáticas[3] (OM) referem-se a uma classe de matemáticas onde se estuda, por exemplo, equações, expressões algébricas, etc., desenvolvidas em uma sala de aula e as organizações didáticas[4] (OD) referem-se ao modo de fazer esse estudo.

As OM e OD que uma pessoa constrói ao longo de sua prática constitui o conjunto de praxeologias que a mesma possui ou está “equipada”, isto é, o conjunto de conhecimentos e competências da pessoa ou seu “equipamento praxeológico” (EP(x)). Este equipamento tende a ser ampliado e modificado ao longo do tempo à medida que sua relação com os objetos é ampliada. Como esta relação é pessoal e subjetiva, cada sujeito possui uma forma peculiar de conhecer um mesmo objeto.

Com relação a este assunto, segundo Bosch e Gascón (2009), a TAD propõem que, nas instituições, ocorre uma hierarquia *de níveis de determinação* (ou codeterminação) entre as organizações matemáticas (OM) escolares e as correspondentes organizações didáticas (OD). Esta hierarquia é estruturada mediante uma sucessão de níveis que determinam as mútuas dependências entre OM e OD:

Civilização ↔ Sociedade ↔ Escola ↔ Pedagogia ↔ Teoria ↔ Área ↔ Setor ↔ Tema ↔ Questão

Seguindo esta lógica, podemos interpretar os currículos de matemática escolar como uma rede de *áreas* que, por sua vez, se configuram em um conjunto de *setores*. Por exemplo, no campo da matemática, dentro da área Álgebra, o professor em sala de aula abordando o setor equações lineares ensina a seus alunos o tema equação do primeiro grau e parte da seguinte questão: como tornar este saber acessível (ou “ensinável”) aos alunos levando em consideração seus aspectos cognitivos, físicos, econômicos e sociais?

Quem elege quais saberes devem ser inseridos na escola é a noosfera, representada pelo Ministério da Educação, conselhos, a comunidade e outras instituições, conforme suas necessidades, por exemplo, atualmente, o setor Estatística no ensino básico, é mais presente do que há alguns anos atrás,

---

[3] Segundo Bosch e Gascón (2001) as Organizações Matemáticas são um conjunto de práticas matemáticas sistemáticas compartilhadas em uma instituição.

[4] De acordo com Bosch e Gascón (2001) as Organizações Didáticas são um conjunto de práticas de ensino e aprendizagem sistemática compartilhada em uma instituição.

bem como a “contextualização” e uso da informática. A escola por sua vez, segundo a TAD, estabelece condições e restrições no nível pedagógico.

A ideia de codeterminação dos níveis se dá porque a relação de um nível com outro não é unívoca, isto é, não é somente o nível hierarquicamente superior que determina o nível menor, mas pode haver uma reciprocidade, por exemplo, o livro didático adotado em uma instituição condiciona o professor em determinadas praticas, porém, é o professor que tem a responsabilidade de escolher o livro, com base em sua experiência, sua relação com o saber matemático, além do modo como os saberes são apresentados no livro.

No que diz respeito às maneiras como os saberes de Álgebra são expostos, apresentamos a seguir algumas perspectivas sobre o ensino de Álgebra escolar e as concepções dos professores (denominadas epistemologias espontâneas). Desta forma, descrevemos na seção seguinte a compreensão de autores sobre qual o modelo epistemológico predominante quanto ao ensino de Álgebra da escola básica.

1.2 MODELOS RELATIVOS AO ENSINO E APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA ESCOLAR

No seio de uma instituição escolar, um mesmo saber pode apresentar mais de uma forma de ser interpretado, dependendo da relação de cada sujeito com este saber no decorrer de sua vida. Ao planejar sua aula, o professor de matemática constrói sua Organização Matemática e Didática com base em um Modelo, isto é, em uma forma de compreender aquele saber. Isto significa assumir uma maneira de pensar e fazer relativo a um dado saber por considerar mais relevante ou conveniente a fim de torná-lo compreensivo para outras pessoas.

Quando há um predomínio na forma de conceber este saber nas instituições escolares, dizemos que se trata de um modelo dominante. Normalmente o professor não reflete sobre a existência de um modelo dominante do saber (decorrentes de práticas naturalizadas nas instituições), não o questiona; neste caso, dizemos que sua reprodução está ocorrendo de maneira implícita. No entanto, quando o professor está ciente de estar adotando um modelo, o questiona e, inclusive, busca compará-lo a outros modelos que sabe existirem, diz-se que seu uso está ocorrendo de maneira explícita.

A esse respeito, segundo Gascón (1994) grande parte das pesquisas em Educação Matemática, focam um domínio específico do saber matemático como: "função", "regra de três", "matrizes", "números fracionários", "álgebra elementar", etc. Mas, na maioria dos casos, o saber matemático é assumido de tal forma que não há lugar para interpretações diferentes. Para o autor, esse é um discurso que se põe como uma situação "normal" no sistema de ensino, onde o saber matemático não é questionado, o que torna pouco evidente e efetiva a distinção entre o saber sábio e o saber ensinado.

O saber sábio impõe-se então como modelo de referência para o saber ensinado e é assumido muitas vezes sem as devidas adaptações para as instituições de ensino. Em decorrência desse fato Gáscon (1994) ressalta três pontos essenciais que as pesquisas em Didática da Matemática devem considerar.

Primeiramente Gascón (1994) considera que existem, em qualquer instituição didática na qual se ensina matemática, modelos implícitos de diferentes domínios do saber matemático a ser ensinado, dos quais emergem, por extensão, modelos implícitos de mesma natureza do saber matemático. Estes diferentes modelos implícitos locais, assim que se instalam são assumidos como modelos globais do saber matemático e geralmente não são questionados. Nesse sentido é possível encontrar,

> por exemplo, no ensino primário e secundário, um modelo implícito de álgebra elementar, determinado em parte pelas diferentes práticas que a instituição considera como pertencentes à álgebra, mas que atuam ao mesmo tempo como condições e restrições sobre estas práticas, permitindo a existência de algumas delas e impedindo a ocorrência de outras (GASCÓN, 1994, p. 43-44, tradução nossa).

O segundo ponto que o autor sugere às pesquisas que se proponham a estudar fenômenos relacionados ao ensino e à aprendizagem em matemática é que estas não assumam o modelo implícito prevalecente na instituição, tal qual ele se apresenta, mas que o considerem como um objeto de estudo, ou seja, como parte dos fatos didáticos que compõem a base “empírica” da pesquisa.

Para fazer isso, o pesquisador precisa de um modelo alternativo que esteja no domínio da atividade matemática ensinada, que possa lhe servir de quadro de referência para interpretar o modelo dominante da instituição que ele investiga.

Para Gascón (1994) qualquer modelo local usado para investigar um domínio particular da matemática ensinada vai tomar o seu lugar em um modelo global da atividade matemática que será, de acordo com o caso, mais ou menos explicitado pelo pesquisador.

> [...] antes de delinear um modelo alternativo como uma ferramenta de análise de fenômenos didáticos, é necessário apresentar um modelo epistemológico global do saber matemático onde se inscreve como um caso particular, o modelo específico proposto. Esta explicitação pode ser útil, pois geralmente o modelo epistemológico global adotado ("estruturalismo", "construtivistas", matemática como "sistema conceitual" ou como "linguagem", etc.) Determina decisivamente a natureza da pesquisa em Educação Matemática [...]. (GASCÓN, 1994, p. 48, tradução nossa).

Em nossa pesquisa adotamos a TAD como modelo epistemológico global uma vez que esta nos permite descrever a atividade de ensino de Matemática como um fenômeno, levando em consideração o campo da antropologia. Um terceiro ponto crucial apontado por Gascón (1994), necessário às pesquisas em Didática da Matemática é que elas devem ser capazes de explicar

> [...] por que um determinado modelo está implícito na instituição de ensino em detrimento de outros modelos possíveis, como este modelo age sobre as estruturas e as funções de diferentes dispositivos didáticos, e como os fenômenos que ocorrem dependem das características deste modelo. Ele deve ser capaz de explicar, por outro lado, como a percepção desses fenômenos pode variar de acordo com diferentes modelos de saber matemático adotados pelo pesquisador (GASCÓN, 1994, p. 44, tradução nossa).

Gascón (1994) ainda chama a atenção para o fato de não podermos subestimar a importância de construir pelo menos um modelo específico para cada domínio de estudo da matemática. Destaca também a necessidade de se explicitar o modelo epistemológico utilizado ou, pelo menos, torná-lo potencialmente explicitável, uma vez que este determina decisivamente o que entendemos por "ensino e aprendizagem da matemática." A explicitação do modelo segundo o autor pode auxiliar a determinar:

- ✓ Os fenômenos educativos que são "visíveis";
- ✓ A descrição desses fenômenos;
- ✓ A tentativa de explicar esses fenômenos;

✓ Os projetos de engenharia didáticas que podem ser propostas para alterar o processo de ensino e aprendizagem ou para causar vários fenômenos.

No que diz respeito ao modelo epistemológico dominante, Sierra (2006) propõe que, para poder questioná-lo, é necessário, além de estar ciente de sua existência, a criação ou adoção de um Modelo Epistemológico de Referência (MER). Neste sentido, Sierra (2006) propôs um MER para os Sistemas de Numeração e Medida de Grandezas Continuas a fim de questionar o Sistema de Numeração Indo-arábico. De acordo com o autor, a escolha consciente de um Modelo Epistemológico como referência pode ser associada à razão de ser do saber matemático a ensinar, ou seja, à intenção didática do professor.

Sierra (2006) destaca ainda, dentre as vantagens de se assumir um MER, em relação às Organizações Didáticas, as seguintes: descrever e analisar o modelo dominante; interpretar os fenômenos transpositivos; questionar a "epistemologia espontânea do professor[5]" e; orientar o planejamento, gestão, avaliação e análise de um processo de estudo.

No caso de nossa pesquisa, adotaremos o modelo proposto por Bolea Catalán (2003), que será anunciado posteriormente, para analisar e criticar o modelo de ensino de Álgebra predominante nos fragmentos[6] das epistemologias dos sujeitos coletadas em seu discurso.

1.3 CONCEPÇÕES EPISTEMOLÓGICAS DOS PROFESSORES

O estudo da "trajetória" do saber escolar desde o saber sábio até o saber ensinado permite verificar que fatores interferem no processo ensino aprendizagem, por exemplo, no intuito de tomar suas decisões em sala de aula, os professores utilizam conhecimentos, métodos e convicções relativos a

[5] Segundo Sierra (2006), a "epistemologia espontânea" geralmente está relacionada ao modelo dominante na instituição.

[6] O fato de o professor comentar sobre sua prática de sala não é suficiente para precisar a sua epistemologia espontânea, seria necessário presenciá-la, no entanto, o confronto de práticas permitiu coletar alguns traços de suas crenças, principalmente em suas interações.

um saber de maneira explícita ou implícita, desta forma, o modo como cada professor concebe o saber matemático influencia na forma como é feita a abordagem deste saber.

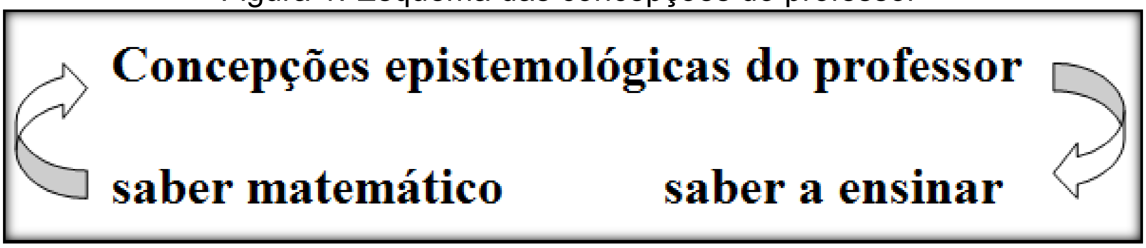
Em sua prática docente o professor precisa tomar decisões que estão sob o seu controle, para isso segundo Brousseau (2006), o mesmo vale-se de sua própria cultura e, sobretudo, uma experiência própria com os objetos de conhecimento.

> Ele tem conhecimento, saberes e crenças sobre o uso e a aprendizagem desses. Estes "conhecimentos" pessoais formam sua epistemologia, na medida em que desempenham um papel equivalente ao da epistemologia para a humanidade. Eles guiam as suas escolhas para o tratamento do conhecimento (BROUSSEAU, 2006, p. 6).

Podemos interpretar, a partir desta citação que o equipamento praxeológico do professor é construído essencialmente de modo empírico para satisfazer suas necessidades didáticas. Assim os docentes utilizam explícita ou implicitamente conhecimentos, métodos e crenças para buscar fontes que lhe dêem subsídios para propor tarefas em sala de aula; gerir ações na classe de acordo com sua compreenção sobre o processo de aprendizado e sobre a maneira como devem organizar o saber pautado nesse entendimento.

O esquema a seguir (Figura 1) foi proposto por D'Amore (2007a) ao destacar a existência de uma epistemologia própria do professor na qual o mesmo apresenta um conjunto de compreensões acerca de um saber (ou saberes) matemático(s).

Figura 1: Esquema das concepções do professor



Fonte: D'Amore (2007a)

O esquema da Figura 1 indica que a epistemologia matemática influencia na epistemologia do professor que, por sua vez, constrói sua maneira própria de compreender o saber matemático. A concepção epistemológica do professor pode ser verificada, por exemplo, em sua prática de sala de aula, na construção do texto de saber, em seu discurso, suas escolhas de recursos para o ensino.

Este equipamento epistemológico é essencialmente construído empiricamente, para atender às condições (restritivas ou não) educacionais. Assim, para possibilitar que os discentes estabeleçam relações com determinados saberes o docente desempenha uma epistemologia prática que é impossível ignorar e eliminar (BROUSSEAU, 2006; D'AMORE, 2007b). Tal epistemologia é denominada por Brousseau (2006) de "epistemologia espontânea dos professores".

Para Brousseau (2006) essa epistemologia evidencia as transformações que a relação didática submete o sujeito ao conhecimento e à própria atividade cognitiva, neste caso, o didático constitui uma verdadeira epistemologia experimental. Brousseau (2006) afirma que essa abordagem pragmática e científica para a epistemologia, pode ser o meio mais adequado para se levar a frente a formação de professores.

Segundo Portugais[7] (1995 apud Delemont, 2006), a epistemologia do professor diz respeito ao repertório de conhecimento explícito ou implícito de natureza epistemológica particular a um professor. Delemont (2006) salienta ainda que o professor, em sua prática, vocabulário, planejamentos, etc; mobiliza conceitos que justificam suas decisões.

Acerca disso, D'Amore et al. (2008), discutem sobre o papel da epistemologia do professor na prática de ensino . De acordo com os autores, há mais de uma epistemologia envolvida na ação didática e nas concepções epistemológicas dos professores. Sendo assim, uma formação epistemológica deve desempenhar um papel fundamental na formação de professores.

D'Amore et al. (2008), ainda descrevem alguns elementos da Didática da Matemática que são relacionados com a epistemologia do professor, e apresentam uma análise do conceito de epistemologia espontânea a fim de mostrar de que maneira os sistemas de convicções influenciam no processo de ensino e aprendizagem. D'Amore et al. (2008), afirmam que o termo obstáculo epistemológico está relacionado à formação da concepção epistemológica do professor e desempenha um papel fundamental na transformação do saber em conhecimento, havendo a necessidade de garantir aos futuros professores de matemática uma preparação adequada tanto histórica quanto epistemológica.

---

[7] PORTUGAIS, J. Didactique des mathématiques et formation dês enseignants, Berne: Peter Lang. 1995.

Mais recentemente, Cariou (2013) aponta trabalhos que reconhecem a existência de uma epistemologia "espontânea" entre professores, de natureza empirista e indutivista. O autor se apóia na história das ciências para mostrar elementos da epistemologia espontânea no professor, pois segundo o mesmo, os trabalhos dos historiadores de cada disciplina científica constituem uma base para as pesquisas em didática desta disciplina.

Para Cariou (2013), as inovações que valem-se da história das ciências podem ser desenvolvidas para promover entre os alunos de graduação a construção de uma imagem de quão perto a ciência está da epistemologia atual, haja vista a similaridade que muitas vezes ocorre entre as concepções dos estudiosos do passado e as dos alunos de graduação atuais.

Carvalho e Gil-Perez (1996) citam Bell e Pearson (1992) os quais têm mostrado que não é possível mudar o que os professores e alunos de graduação na sala de aula pensam sem transformar a sua epistemologia, suas concepções sobre como o conhecimento é construído, suas ideias sobre a ciência. Os mesmos autores apresentam como exemplo quando os professores têm a oportunidade de discutir coletivamente as contradições entre a natureza do ensino de ciências e a própria ciência, eles facilmente tornam-se conscientes da maioria dos riscos. Em outras palavras, o verdadeiro risco parece vir da falta de atenção para o que geralmente é considerado como evidência de senso comum.

Desta forma, conforme abordam Carvalho e Gil-Perez (1996), os professores estão começando a questionar a ideia de que a educação em ciências não exige a formação específica/particular, ou o conhecimento científico adquirido na universidade. Pelo contrário, eles tornam-se conscientes da necessidade de adquirir um corpo de conhecimentos teóricos específicos sobre os processos de ensino e aprendizagem de física.

Johsua[8] (1985 apud Mercier, 2002) apresenta os resultados de uma pesquisa sobre a possibilidade de ensinar um conteúdo cuja epistemologia é dada, a qual envolve o "estudo das condições e restrições do ensino de eletrocinética". A investigação conduziu ao estudo das concepções espontâneas de estudantes e à observação dos efeitos do ensino experimental.

---

[8] JOHSUA, S. **Contribution à la délimitation du contraint et le possible dans l'enseignement de la physique. Essai de didactique expérimentale**. Thèse d'État.1985.

De acordo com Johsua (1985 apud Mercier, 2002), a didática da física observa de fato como o ensino tradicional da disciplina corresponde a uma epistemologia positivista, o que leva a uma abordagem inadequada das atividades experimentais.

Em nossa pesquisa investigamos as epistemologias espontâneas de professores de matemática em relação ao ensino de Equações do Primeiro Grau levando em consideração que, na passagem do saber a ser ensinado para o saber ensinado, o professor vale-se de uma epistemologia própria deste saber que foi adquirida ao longo de sua vida. Desta forma, buscamos verificar sua maneira de compreender o objeto Equações do Primeiro Grau bem como sua maneira de abordar este saber.

Um fator que é importante de ser levado em consideração é a possibilidade de a epistemologia do professor não estar de acordo com a epistemologia matemática, devido a uma compreensão equivocada do saber ou a outro fenômeno. No contexto da TAD, a epistemologia matemática tem relação com o Modelo Epistemológico dos saberes matemáticos.

1.4 MODELO SEGUNDO A PERSPECTIVA DO PROGRAMA COGNITIVO

Na busca de categorizar levantamentos bibliográficos e dados da nossa pesquisa anunciamos as perspectivas do Programa Cognitivo, segundo Bolea Catalán (2003), relativo à Álgebra escolar.

A perspectiva cognitivista (PC) apresenta a aprendizagem da matemática como um processo "*psico-cognitivo, fortemente influenciado por fatores motivacionais, afetivos e sociais"* em que o a problemática principal está nos erros que cometem os alunos no enfrentamento de tarefas matemáticas. (BOLEA CATALÁN, 2003). Segundo Bolea Catalán (2003) as discussões dentro dessa perspectiva têm ampliado os elementos considerados centrais da problemática de sala de aula. Por exemplo, na área da Álgebra escolar a autora destaca que a ampliação foi favorecida pela rivalidade entre as perspectivas puramente conceitualista e a psicolingüística e processualista.

Na perspectiva conceitualista toma-se como "*objeto primário de investigação os processos de construção e aquisição de determinados conceitos matemáticos*" (ibid., p, 20), ou seja, há necessidade da construção de uma rede de conceitos para que haja aprendizagem. Grande parte das investigações dessa linha parte de estudos empíricos dos erros que cometem os alunos na passagem da Aritmética para Álgebra. Os erros são imputados a uma série de dificuldades às quais se defrontam os discentes nessa passagem identificados assim como erros conceituais derivados do ensino e aprendizagem da Aritmética.

Assim,

> [...] a maioria das explicações propostas dentro das perspectivas conceitualistas primitivas pressupõem que o *marco de referência aritmético* pode dar resposta a grande parte dos erros que cometem os estudantes e em geral das dificuldades que apresentam na aprendizagem inicial de álgebra (BOLEA CATALÁN, 2003, p. 22, tradução nossa, grifos da autora).

Vale ressaltar a influência dessa perspectiva na prática do professor configurando um modelo docente que baliza a epistemologia espontânea desse, ainda que o professor não se dê conta disso. À luz da TAD, podemos inferir que as instituições em que os professores são sujeitos conforma o Equipamento Praxeológico desses, que pensam e agem em conformidade a suas sujeições.

Com o avanço nas investigações a respeito do ensino da Álgebra, a perspectiva conceitualista não foi suficiente para explicar, por exemplo, as interpretações que os alunos dão aos símbolos algébricos. Buscaram-se então justificativas sintáticas e semânticas ampliando então as problemáticas inerentes ao ensino da Álgebra. Assim têm-se as perspectivas psicolinguísticas e processualistas as quais consideram a Álgebra como linguagem matemática e deste modo deve fazer parte do currículo escolar. O modelo assim concebido justifica os erros de linguagem algébrica como erros de procedimentos sintáticos.

O foco das investigações no interior das perspectivas psicolinguísticas e processualistas, segundo Bolea Catalán (2003, p.24), gira em torno dos seguintes questionamentos: como construir uma semântica dos símbolos e das operações algébricas que possibilitem os discentes a resolverem algebricamente os problemas em jogo? Qual o papel dos símbolos na apropriação dos saberes algébricos pelos alunos? etc.

Para Boela Catalán (2003, p. 27) “Assumir que as escritas simbólicas em Álgebra formam uma linguagem, conduz a explicitar uma gramática suscetível de produzi-las”. A autora identifica a necessidade de ampliar também essa perspectiva, pois “*o aspecto semântico se situa no nível dos porquês e procede de uma tripla relação entre os aspectos gramaticais (regras), o contexto pragmático (por que fazer) e as matemáticas subjacentes”* (Ibid.).

Uma observação que fazemos sobre essas perspectivas é que nelas não se questiona o modelo da Álgebra escolar dominante nas instituições, assim assumem-se as organizações matemáticas dessa área sem tomá-las como objeto de estudo, pois são transparentes[9], naturalizadas e cristalizadas nas instituições, por exemplo, não há o questionamento de por que a introdução dos conteúdos de Álgebra, geralmente, está ligada à aritmética, ou quais as conseqüências do fato de que determinadas instituições escolares identifiquem a Álgebra escolar como uma “aritmética generalizada”. Neste sentido, a abordagem epistemológica vem ao encontro desta necessidade, de investigar, questionar o modelo epistemológico da Álgebra escolar.

1.5 MODELO EPISTEMOLÓGICO NO ENSINO DE ÁLGEBRA

Segundo Chevallard (1989), Gascón (1994) e Bolea Catalán (2003) o modelo epistemológico dominante na Álgebra escolar, tanto na Espanha como na França, é a *aritmética generalizada*. Nesse sentido as letras indicam sempre incógnitas com valor numérico a serem determinadas, ficando de lado seu papel como variável ou parâmetro, assim como seus possíveis significados não numéricos. Dessa forma, segundo Bolea Catalán (2003) assume-se o cálculo

---

[9] Na Espanha se usa o termo “transparente” para indicar um objeto pouco percebido, quase que “invisível”.

algébrico como uma extensão do cálculo aritmético em que alguns números são representados por letras.

No Brasil, Santos (2005) aponta para indícios da concepção de Álgebra pelo professor de matemática como aritmética generalizada. A pesquisa contou com a participação de 28 professores de matemática do ensino básico e seu objetivo foi investigar as concepções dos sujeitos sobre o ensino de Álgebra, tendo como suporte o uso de um questionário e um software (C.H.I.C.)[10] programado para análise estatística o qual relacionava as respostas dos sujeitos coletadas no questionário. Outro critério de análise foi a comparação dos registros dos sujeitos com as concepções de Álgebra segundo Usiskin (1995) e as abordagens para o ensino de Álgebra segundo Bednarz, Kieran e Lee[11] (1996 apud Santos, 2005).

Santos (2005), concluiu que os sujeitos da pesquisa em sua totalidade consideram que na abordagem para o ensino de Álgebra devem-se trabalhar situações-problemas que denotem a Álgebra como aritmética generalizada. Segundo Santos (2005), esta prática de ensino tende a habituar o aluno a recorrer sempre de casos particulares para depois generalizá-los.

A seguir apresentamos a abordagem de Bolea Catalán (2003) acerca das características da Álgebra escolar como aritmética generalizada.

1.5.1 Características da álgebra escolar como aritmética generalizada

Dentre as características da concepção da Álgebra escolar como aritmética generalizada, Bolea Catalán (2003) assinala quatro itens, são eles: *(a) as razões de ser da Álgebra escolar, (b) os objetos matemáticos aos quais os conceitos de Álgebra escolar são construídos; (c) os elementos mais*

---

[10] Classificação Hierárquica Implicativa e Coesitiva

[11] BEDNARZ, N.; KIERAN, C.; LEE, L. Introduction in: BEDNARZ, N.; KIERAN, C.; LEE, L. **Approaches to Algebra: perspectives for research and Teaching.** Ed. Kluwer Academic: Dordrecht, Holanda, 1996. p. 3 – 12.

significativos das atividades associadas à Álgebra escolar e; (d) as dificuldades mais destacadas na realização das atividades "algébricas".

Em relação às razões de ser da Álgebra escolar, a autora aponta que ocorre uma prolongação e generalização de mão única das práticas aritméticas, isto é, verificam-se noções aritméticas nas atividades algébricas, no entanto a recíproca não é contemplada, por exemplo, ao se definir conceitos algébricos remete-se a conceitos aritméticos (variável, equivalência, adição, expressões). Neste sentido usa-se freqüentemente a linguagem algébrica como uma espécie de prolongação ou generalização da linguagem aritmética.

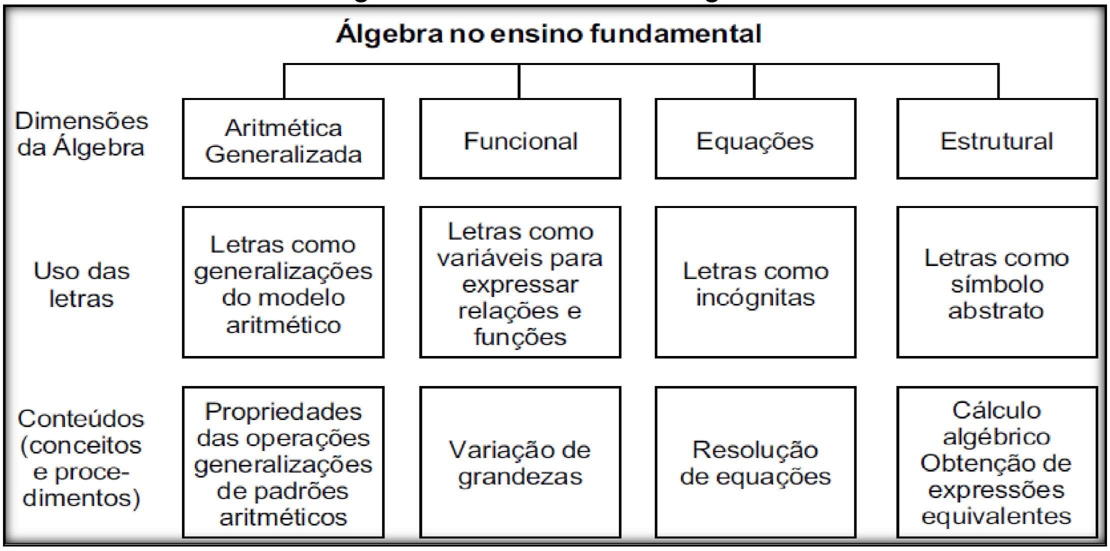
A respeito dos objetos matemáticos com os quais a Álgebra escolar é construída, são introduzidas essencialmente as propriedades aritméticas básicas, adotam-se como conhecimentos prévios as habilidades de cálculos mentais aritmético. Sobre os elementos mais significativos das atividades associadas à Álgebra escolar, Bolea Catalán (2003) destaca a importância de distinguir, na escritura e manipulação de expressões algébricas, entre dados conhecidos e as incógnitas.

Dentre as dificuldades mais percebidas nas atividades algébricas enquanto aritmética generalizada, a autora destaca a manipulação de expressões algébricas com incógnitas, haja vista a dificuldade de atribuir à incógnita um significado preciso. Além disso, como culturalmente, a matemática observada no dia a dia parece ser mais aritmética que algébrica.

Ao deparar-se com atividades algébricas, há uma dificuldade em conceber a mesma em um sentido mais amplo do que somente contas envolvendo números e letras, havendo a impressão de que os conceitos de Álgebra são desprovidos de significado devido à desvinculação dos conceitos de aritmética.

Gascón (1994) ressalta que para entender as limitações da aritmética em relação ao quadro algébrico é necessário dispor de um modelo alternativo de Álgebra elementar que permita formular novos fenômenos e reformular antigos em uma perspectiva mais ampla. Acerca disso, os PCN sugerem que, no ensino de Álgebra, o aluno deve ser capaz de perceber as diferentes dimensões a que a Álgebra escolar e as funções das letras podem ser interpretadas. Desta forma, propõem-se quatro dimensões fundamentais a serem consideradas no ensino de Álgebra: aritmética generalizada, funcionalidade, estudo de equações e estruturalismo algébrico (Figura 2).

Figura 2: Dimensões da Álgebra



Fonte: Brasil (1998, p.116)

Estas dimensões devem ser abordadas de maneira articulada no decorrer do quinto até o nono ano. (BRASIL, 1998). A apresentação dos conceitos algébricos a partir de outras perspectivas, além de aritmética generalizada, permite ao aluno ter uma compreensão mais ampla e significativa de seus conceitos, daí a necessidade de se proporem atividades de ensino que possibilitem a percepção destas outras concepções.

Nessa organização devemos levar em conta os diferentes sentidos que a Álgebra possa assumir, para não incorremos apenas no modelo epistemológico dominante no ensino da Álgebra. Acerca disso, segundo Bolea Catalán (2003) os alunos entre 12 e 16 anos de idade são submetidos a um modelo dominante em Álgebra escolar, onde se assume a Álgebra como aritmética generalizada obscurecendo a funcionalidade dessa área do conhecimento como instrumento de modelização da matemática. Esta afirmativa é reforçada por Garcia (2005)

> Se põe de manifesto que a função principal da *álgebra* não é a de generalizar a aritmética, mas a de modelizar sistemas matemáticos ou extra-matemáticos. Esta função modelizadora não nega a relação fundamental que existem entre a álgebra e a aritmética, ainda que seja o caráter genético e de pré-requisito privilegiado da aritmética a respeito da álgebra. (GARCIA, 2005, p. 130, tradução nossa).

Compreendemos que no ensino de Álgebra a ideia da generalização da aritmética é importante no processo de atribuição de significado para o aluno, porém não devemos nos limitar a apenas esta perspectiva.

A intensão em se assumir um modelo diferente do dominante é alcançar níveis de compreenssão que o dominante não vem correspondendo. Por exemplo, a resolução de problemas por meio da geometria não era suficiente para resolver problemas de equações de grau acima de 4, até que se criou outro modelo. Do mesmo modo, compreender a variável apenas como um número desconhecido possui limitações, além de gerar obstáculos.

Ruiz, Bosch e Gascón (2010), propõem um MER para o ensino de Álgebra no Ensino Secundário Obrigatório na Espanha (10 a 14 anos), a partir do esboço de três etapas para a compreensão da funcionalidade da Álgebra. A primeira etapa do processo de algebrização consiste em desenvolver o conceito de parâmetro. Ao pensar em um número, o aluno deve obedecer a uma série de operações aritméticas obtendo um resultado. Em seguida, é solicitado que o aluno repita o processo com outros números e verifique o que acontece.

> P1: Pense em um número, some a este o dobro de seu consecutivo, ao resultado some 15 e, por último, subtraia o triplo do número pensado inicialmente. Que resultado foi obtido? Repita o processo com outro número diferente. Se obtém sempre o mesmo número? Por quê? (RUIZ; BOSCH; GASCÓN, 2010, p.5, tradução nossa).

Neste caso, ao final da operação o aluno obterá como resultado o número 17 e, ao repetir o processo pensando em outros números, o aluno deverá perceber que, para qualquer número pensado, a resposta sempre será 17. A segunda etapa do processo de algebrização envolve a resolução de expressões algébricas equivalentes.

> P2: Judit pensa em dois números positivos n e m. Ao triplo de n subtrai a diferença entre m e n. Agora soma n a m, soma o triple de m e finalmente soma 2 ao resultado. Se o resultado das duas seqüências de operações coincide que relação existe entre n e m? (RUIZ; BOSCH; GASCÓN, 2010, p. 8).

A segunda etapa visou introduzir o conceito de equações e consistiu em uma ampliação da etapa anterior exigindo o uso de técnicas de cancelamento. Além de ampliar o nível de algebrização, esta etapa completa a primeira.

A terceira etapa é marcada pela elaboração de atividades que conduzam à noção de variável a partir de um problema onde se deve relacionar a área e o perímetro de um triangulo isósceles (função).

P3*: Que relação há entre o perímetro P e a área A de um triângulo isósceles? Em que casos P e A determinam um único triângulo isósceles?*

Segundo os autores a razão de ser do ensino da Álgebra escolar não pode ser reduzida à ampliação da solução aritmética dos problemas mediante o cálculo equacional. Acreditamos serem importantes as reflexões relacionadas a esta temática uma vez que a atividade algébrica sugere constantemente a adoção de um modelo.

Ainda com relação ao MER, Pereira (2012) apresenta os resultados de uma pesquisa autobiográfica que expõe uma análise de suas praxeologias, com foco para os diversos conflitos praxeológicos de sua vivencia como professor na elaboração e aplicação de uma proposta didática para ensinar operações polinomiais na sétima série (oitavo ano) do ensino fundamental.

A análise citada pelo autor envolveu os conceitos de sistema de numeração decimal, operações aritméticas fundamentais, operações polinomiais, tipos de tarefas e técnicas, universo cognitivo e equipamento praxeológico. Para o mesmo autor o elo inicial da conexão entre aritmética e Álgebra está na representação de números naturais na escrita polinomial de potência de base dez e uso desta representação no processo resolutivo das operações aritméticas fundamentais e das operações polinomiais.

Dentre os propósitos da pesquisa estava a construção de Organizações Matemáticas para ensinar as operações com polinômios, com foco para o oitavo ano do Ensino Fundamental. Para isso, Pereira (2012) apresentou um estudo histórico bibliográfico no qual aponta as contribuições dos romanos, mesopotâmios, hindus, gregos, etc.; precursores do sistema de numeração indo-arábico (atual sistema de numeração decimal adotado pelos povos ocidentais).

A questão que norteou a pesquisa de Pereira (2012) foi “quais conexões entre aritmética e Álgebra determinaram as praxeologias desenvolvidas pelo autor e sujeito da pesquisa durante a ampliação didática para ensinar adição, subtração, multiplicação e divisão de polinômios, no oitavo ano do ensino fundamental?

O trabalho de Pereira (2012) teve como base teórica as ideias da TAD as quais possibilitaram o estudo de obras a fim de reestruturar uma proposta didática para o ensino de soma, subtração, multiplicação e divisão de polinômios.

O autor relata que as operações envolvendo polinômios geralmente são realizadas por meio de objetos não ostensivos e, com base em Floriani propôs um método de resolução substituindo-se notação algébrica (x) pelo objeto ostensivo de domínio aritmético (10).

Segundo o Pereira (2012), na perspectiva da Educação Matemática, sua proposta se configura como um modelo epistemológico de referencia para o ensino das operações com polinômios no âmbito das instituições escolares. Além disso, traz esclarecimentos epistemológicos sobre alguns objetos que conduz a prática docente do professor de matemática em sala de aula. Principalmente, no que tange ao processo de ensino e aprendizagem das operações polinomiais de somar, subtrair, multiplicar e dividir.

Segundo Bolea Catalán (2003) para analisar e tratar as questões relacionadas ao ensino e aprendizagem da Á*lgebra escolar*, é necessário elaborar um *modelo da Álgebra escolar* construído a partir da própria didática da matemática e usá-lo como instrumento teórico para descrever e analisar o modelo dominante no ensino de Álgebra bem como os fenômenos didáticos relacionados ao ensino e aprendizagem de Á*lgebra*.

Com base no referencial supracitado, adotamos como MER a proposta de Bolea Catalán (2003), que trata a Álgebra como instrumento de modelização algébrica, a fim de analisar o modelo epistemológico dominante evidenciado nas epistemologias espontâneas dos professores sujeitos de nossa pesquisa acerca do ensino de Equações do Primeiro Grau.

2 ESTUDOS RELATIVOS AO ENSINO DE ÁLGEBRA

O ensino e aprendizagem de conteúdos envolvendo conceitos algébricos tem sido marcado por alguns conflitos: de um lado os alunos muitas vezes deparam-se com um novo objeto do saber, de outro, o professor necessita valer-se de um meio transpositivo adequado para atender o nível de compreensão do aluno.

Segundo Booth[12] (1984 apud Bolea Catalán, 2003) grande parte das pesquisas que têm como objeto de estudo os processos de construção e aquisição de conceitos partem do estudo empírico dos erros que os alunos cometem na passagem da aritmética para a Álgebra, apontando que a possível razão destes erros se dá pela associação equivocada do saber aritmético com o saber algébrico.

Booth (1984 apud Bolea Catalán, 2003) ainda afirma que as pesquisas têm buscado revelar quais são estes erros e que de dificuldades, como consequência de “erros conceituais” oriundos da aprendizagem de aritmética, os alunos enfrentam nesta área. No ensino e aprendizagem de Matemática, problemas de compreensão semelhantes a este, ocorrem frequentemente, devido às diferentes formas como cada indivíduo se relaciona com o saber.

Neste sentido apresentamos resultados de pesquisas no Brasil, Espanha e México sobre as dificuldades no ensino e aprendizagem de Álgebra escolar nas últimas décadas.

[12] BOOTH, L. Algebra: Children’s Strategies and Errors, NFERNelson. 1984.

2.1 PESQUISAS DAS ÚLTIMAS DÉCADAS SOBRE A ÁLGEBRA ESCOLAR

Bodin[13] (1989 apud Almouloud, 2007, p. 100) relata a observação de alunos que tiveram sucesso na resolução da questão: *resolver a equação* $7x - 3 = 13x + 15$; mas os mesmos não conseguiram responder à questão: *o número* 10 *é uma solução da equação* $7x - 3 = 13x + 15$? Esta observação nos remete ao fato de que, em alguns casos, as tarefas relacionadas a conceitos algébricos resumem-se a apenas "determinar o x", neste caso, o que está em jogo para o aluno não é a compreensão do significado da atividade, mas atribuir um valor à letra.

Outro autor que relata dificuldades dos alunos na aprendizagem de Álgebra escolar é Booth (1995). O autor comenta que uma das maneiras de tentar descobrir o que torna a Álgebra "difícil" é identificar os erros que os alunos comumente cometem nessa área e investigar as razões para tais erros. Uma questão que o autor revela ser importante é a associação dos procedimentos algébricos com os aritméticos.

> Em aritmética, o foco da atividade é encontrar determinadas respostas numéricas particulares. Na álgebra, porém, é diferente. Na álgebra o foco é estabelecer procedimentos e relações e expressá-los numa forma simplificada geral. (BOOTH, 1995, p.24).

Essa problemática diz respeito ao foco da atividade algébrica e à natureza das respostas, muitos alunos não percebem essa diferença. Nas operações com aritmética, espera-se obter um número como resultado final, já nas operações com Álgebra, o resultado pode ser um número, uma representação algébrica (variável), a mesma expressão inicial reorganizada, etc. No entanto, devido às proximidades de alguns conceitos e propriedades que possuem a Álgebra e aritmética, é freqüente o caso de erros cometidos na passagem de uma para a outra.

Quanto às notações algébricas, Booth (1995) aponta para dificuldades dos alunos em interpretar adequadamente os símbolos, por exemplo, geralmente em aritmética, os símbolos "+" e "=" são interpretados como

---

[13] BODIN, A. L'évaluation Du savior mathématique. Bulletin de l'APMEP, n. 369, 1989.

indicativos de ações a serem efetuadas, de maneira que "+" significa efetivamente realizar a operação, e "=" significa escrever uma resposta.

Outro aspecto importante da Álgebra revelado por Booth (1995) está na ideia de "variável". Muitos alunos estão acostumados a obterem um único resultado nas operações, devido à influência da aritmética. Esta questão revela a dificuldade do aluno em aceitar a possibilidade de uma expressão admitir mais de uma solução.

Lochhead e Mestre (1995) também discutem o fato de alunos apresentarem dificuldade em resolver problemas algébricos, principalmente no que diz respeito à tradução da linguagem escrita corrente para a linguagem algébrica. Para os autores a fonte dos erros está em concepções erradas concernentes à estrutura e à interpretação de afirmações algébricas e nos processos pelos quais se faz a tradução da linguagem escrita para a linguagem algébrica. (LOCHHEAD; MESTRE, 1995).

Há dois tipos de erros destacados por Lochhead e Mestre (1995), os quais interpretamos e descrevemos da seguinte forma:

1. Os alunos mostram uma forte tendência em associar a ordem das palavras, da esquerda para a direita, por exemplo, na sentença "em uma classe o número de meninos é o triplo do número de meninas", os alunos tendem a adotar a representação $3M_o = M_a$, dado que M_o representa o número de meninos e M_a o número de meninas;
2. Muitos alunos confundem variáveis com rótulos. Por exemplo, os símbolos "A" e "P" muitas vezes são interpretados como rótulos para "alunos" e "professores", em vez de variáveis para representar o "número de alunos" e o "número de professores".

Os autores enfatizam que as dificuldades detectadas não decorreram da inabilidade em compreender a linguagem escrita ou em manipular operações algébricas, mas em relacionar as duas linguagens. Acerca disso, Demonty e Vlassis (2002) assinalam como possível fonte de obstáculos o fato de os alunos serem confrontados com uma "nova linguagem" que comporta certo número de convenções: *que significa aquela letra entre os números? Por que fazer contas com letras se a aula é de Matemática*?

> Ora, para um grande número de principiantes, várias dificuldades se manifestam quanto à compreensão dos conceitos de base e das técnicas de resolução. Certos alunos conseguem aplicar cegamente procedimentos de que não dominam de maneira nenhuma os fundamentos. (DEMONTY; VLASSIS, 2002, p.57).

Este fato pode ser verificado em situações onde os alunos determinam as soluções para os problemas algébricos, executam cálculos, se utilizam de regras operatórias, contudo não compreendem o que estão fazendo. Além disso, segundo Demonty e Vlassis (2002):

> [...] o conjunto destas considerações mostra como a aprendizagem da álgebra é difícil, não só para os alunos que devem alterar algumas das suas representações aritméticas, mas também para os professores que devem encontrar meios de dar a compreender as novas noções e que nem sempre estão informados das concepções dos seus estudantes. Trata-se de encarar os ensinamentos algébricos numa perspectiva mais ampla, que tenha em conta, ao mesmo tempo, os processos de raciocínio dos alunos e os seus conhecimentos espontâneos, e que ofereça uma coerência durante toda a escolaridade obrigatória. Só a este preço podemos levar um maior número de alunos a desenvolver um verdadeiro pensamento matemático. (DEMONTY; VLASSIS, 2002, p.37).

A Álgebra escolar possui uma relação com a aritmética e este fato permite que muitos professores e alunos apresentem a concepção da Álgebra como uma generalização da aritmética, o que, por um lado, gera resultados satisfatórios e, por outro, nem tanto haja vista que a Álgebra possui particularidades em relação à aritmética e vice-versa.

Demonty e Vlassis (2002) ainda apresentam resultados de uma pesquisa na qual apontam os erros cometidos com frequência pelos alunos:

Quadro 1: Erros cometidos por alunos

Soma de termos não semelhantes	**Potencias**	**Distributividade**
$3x + 5 = 8x$	$a + a + a = a^3$	$7\ (\mathrm{x} + 3) = 7\mathrm{x} + 3$
$x + 2 = 2x$	$4p + 5 + 7p = 16p^2$	$2p(w + 6) = 2pw + 6$

Fonte: Demonty; Vlassis (2002)

É possível perceber que estes erros comentados pelos autores decorrem da má compreensão dos conceitos algébricos em virtude de uma associação inadequada de procedimentos aritméticos em expressões algébricas. Acreditamos que este é um dentre os fatores que mais gera dificuldades nesta área. Neste sentido, Demonty e Vlassis (2002) abordam o que chamam de “fosso conceitual” entre os raciocínios aritmético e algébrico. Segundo os autores

> É demasiado frequente que a dimensão desta ruptura seja subestimada, o que leva inúmeros alunos a trabalhar em álgebra conservando um modo de pensar aritmético. Aparecem dificuldades e são cometidos muitos erros, que têm essencialmente por origem uma falta de transição entre a aritmética e a álgebra. (DEMONTY; VLASSIS, 2002, p. 18).

Ursini et al. (2005) comentam que existem várias pesquisas cujos resultados indicam “sérias” dificuldades por parte dos estudantes em compreender o uso adequado das letras nas operações algébricas. Um dos pontos centrais, segundo os autores, está no conceito por trás do símbolo algébrico. Os autores ainda criticam a simples memorização de algoritmos nas operações algébricas sem a devida compreensão do motivo pelo qual se dá o seu uso.

Segundo Ursini et al. (2005), no ensino de Álgebra se trabalha basicamente com os conceitos de incógnita, números gerais e relações funcionais, porém o aluno apresenta dificuldades em distinguir os diferentes usos do símbolo algébrico, sendo este fato um possível causador dos problemas de aprendizagem de Álgebra escolar.

Os autores ainda afirmam que uma das razões para os erros cometidos por alunos em Álgebra é que, ao esforçarem-se em dar sentido às expressões algébricas, os alunos acabam recorrendo a suas experiências aritméticas.

> Diante da equação 3 + a + a + a = 10, a maioria dos alunos não opera a variável com o objetivo de obter uma expressão que lhes permita calcular seu valor. Mas encontramos uma forte tendência em proceder por tentativa e erro, atribuindo às três aparições da mesma letra valores distintos, de tal maneira que a soma do lado esquerdo dê como resultado o número 10. (URSINI et al., 2005, p. 17; tradução nossa).

Neste caso, o aluno interpreta que a cada letra pode-se atribuir um valor diferente desde que permaneça a igualdade. Este erro é comum em alunos iniciantes em Álgebra, os quais podem acreditar que a letra representa qualquer número sempre.

É importante levarmos em consideração a detecção e categorização dos erros recorrentes dos alunos a fim de buscas por propostas alternativas para melhorar a aprendizagem de Álgebra. Segundo Ursini et al. (2005) a identificação destes erros tem possibilitado a pesquisadores e professores encaminhamentos para a prática de sala de aula.

Em nossas leituras percebemos que as pesquisas, dos últimos seis anos têm evidenciado as mesmas dificuldades no que diz respeito à aprendizagem de conteúdos algébricos. Apresentaremos algumas na ordem cronológica.

Souza e Diniz (2008) comentam em sua obra sobre as dificuldades quanto ao ensino e aprendizagem de Álgebra no ensino fundamental maior, tanto no sentido do significado atribuído aos conceitos matemáticos como na forma de abordagem (fragmentada). Muitas vezes não ocorre uma ligação do ensino no 7º ano com o ensino de Álgebra no 8º ano, caracterizando, assim uma abordagem dos conteúdos algébricos de maneira desarticulada.

Nesta obra, Souza e Diniz (2008) apresentam a Álgebra como uma linguagem da matemática e, segundo as mesmas, os conceitos de Álgebra deveriam ser introduzidos a partir da ideia de funcionalidade e relação entre grandezas.

Souza e Diniz (2008) apresentam várias propostas de atividades para o ensino de Álgebra com o objetivo de: possibilitar a promoção de interação entre os alunos; apontar diferentes maneiras de apresentar determinadas ideias; possibilitar um meio alternativo de comunicação por meio de linguagem oral e escrita; auxiliar o aluno no desenvolvimento de sua autonomia por meio do confronto de ideias; possibilitar ao aluno melhor organização de seu pensamento.

Segundo Lucas (2009) dentre as dificuldades mais comuns encontradas em alunos do 2º ano do ensino médio está a distinção entre função e equação. A pesquisa valeu-se de uma lista de questões a fim de averiguar a compreensão dos alunos em relação aos conceitos de função e equação com foco para a raiz de uma função; também expõe resultados que mostram interação na aprendizagem dos dois tópicos.

O trabalho de Lucas (2009) pôde evidenciar que os alunos investigados, embora de um modo geral soubessem resolver problemas envolvendo os conceitos de função e equação, apresentaram dificuldade em distinguir entre tais conceitos devido à forma algébrica similar em que estes objetos se apresentavam. Lucas (2009) denomina este fenômeno de descontinuidade conceitual.

Melo (2010) realizou um estudo de procedimentos utilizados por alunos do 9º ano do ensino fundamental, em uma escola da Rede Municipal de Ensino de Campo Grande/MS, para validação de igualdades entre expressões algébricas por meio de mudanças de quadros. Na pesquisa, solicitou-se que os alunos realizassem cálculo algébrico utilizando os quadros aritmético, algébrico e geométrico. Observou-se que os sujeitos da pesquisa apresentaram dificuldades em atividades que exigiam compreensão de cálculos algébricos, bem como em relação a alguns conceitos de geometria.

Dentre os erros apontados pela autora, destacamos o erro interpretação da letra como número indeterminado e o erro relativo à propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição. Melo (2010) relata ainda que alguns desses erros no final da pesquisa não haviam sido superados.

Lopes (2011) apresenta um diagnóstico de erros cometidos por alunos do 8º ano do Ensino Fundamental na resolução de Equações do Primeiro Grau, partindo do principio que este é um dos conceitos iniciais a partir do qual o aluno é confrontado com a ideia de substituir números por letras.

Para catalogação dos erros dos alunos, Lopes (2011) levou em consideração os seguintes critérios: Erro de interpretação do enunciado; Erro de transposição de termos sem alterar o sinal; Erros aritméticos (as quatro operações fundamentais) durante a simplificação dos membros; Erro ao efetuar operações entre termos independentes e termos em x; Troca do sinal de igualdade por uma operação fundamental. Os resultados de sua pesquisa apontaram para a dificuldade dos alunos, tanto no reconhecimento das Equações do Primeiro Grau quanto na escolha das técnicas de resolução.

Lopes (2011) destaca a importância de o professor, no processo avaliativo processual, escutar os alunos a fim de considerar os seus saberes e poder discernir erros eventuais como oportunidade didática para ser destacada em sala de aula.

Ainda relacionado ao ensino de Álgebra, Reis (2011) desenvolveu uma proposta de ensino aproveitando os erros cometidos pelos alunos quanto ao conceito de função afim utilizando o software GeoGebra. Partindo dos erros diagnosticados o autor criava estratégias de ensino em uma sequencia de atividades. Para Reis (2011) o mapeamento dos erros cometidos pelos alunos pode auxiliar o professor na autocrítica de sua prática de sala de aula e na tentativa de criar novas estratégias de ensino.

Em uma pesquisa contando com a colaboração de três professoras do curso de Especialização em Didática da Matemática promovido pelo grupo de pesquisa GEDIM, aplicamos uma sequência de tarefas para 33 alunos do 5º ano do ensino fundamental a fim de descrever os níveis de atividade algébrica dos alunos (CRUZ et al., 2013).

A proposta buscou partir dos conhecimentos que os alunos já possuíam a fim de familiarizá-los aos conceitos algébricos e tinha como base os trabalhos de Godino et al. (2012) e Aké, Godino e Gonzato (2013), os quais modelam a atividade algébrica em quatro níveis de algebrização. Os critérios utilizados para determinar o grau de algebrização foram, basicamente:

> O nível 0 ou nível de algebrização primário é caracterizado pela ausência de atividade algébrica. Trata-se da realização de tarefas por meio de atividades puramente aritméticas (pré-álgebra). Por exemplo, eu tenho cinco laranjas e como duas, quantas ficaram? (CRUZ et al., 2013, p.6).
>
> O nível 1 pode ser identificado pela generalização de padrões e reconhecimento de um termo indeterminado. Por exemplo, dada a tarefa “realize as somas e compare os resultados
>
> $$15 + 12 \text{ e } 12 + 15$$
>
> Se o aluno obedecer ao comando da questão estará realizando a atividade no nível 0, porém, se, devido a experiências anteriores, o aluno reconhecer que $15 + 12 = 12 + 15$, sem somar, então estará no nível 1. (CRUZ et al., 2013, p.6).
>
> No nível 2, já se associa uma representação com algum contexto, por exemplo, “um quilo de carne custa R$ 11,00. Quantos quilos de carne é possível comprar com R$ 35,00?”. Se o aluno modelar esta situação para determinar um valor desconhecido, então estará no nível 2. (CRUZ et al., 2013, p.7).
>
> O nível 3, é caracterizado pelo formalismo algébrico, neste caso, se opera com símbolos de maneira independente de um contexto, por exemplo, efetuar as raízes da equação $2x^2 + 3x + 7 = 0$. (CRUZ et al., 2013, p.7).

Os resultados indicaram que os sujeitos da pesquisa atingiram até o nível 2 de algebrização, isto é, conseguiam estabelecer uma relação entre o contexto apresentado e a representação algébrica, porém, ao serem deparados com tarefas com símbolos algébricos de maneira independente de um contexto os mesmos não obtiveram êxito. (CRUZ et al., 2013).

No quadro a seguir (Quadro 2), apresentamos a classificação das pesquisas que levantamos, conforme as perspectivas de Álgebra nos programas de investigação.

Quadro 2: Categorização das pesquisas nos programas de investigação

AUTOR	FOCO DA PESQUISA	PROGRAMA	PERSPECTIVA
Bodin (1989 apud Almouloud, 2007, p. 100)	- Compreensão de problemas algébricos	---------	---------
Booth (1995)	- Erros que os alunos comumente cometem em Álgebra;	Cognitivista	Conceitualista
Lochhead e Mestre (1995)	- Tradução da linguagem escrita corrente para a linguagem algébrica.	Cognitivista	Psicolinguística e Processualista
Demonty e Vlassis (2002)	- Obstáculos de aprendizagem no que diz respeito à diferença entre linguagem aritmética e linguagem algébrica; - Erros cometidos em Álgebra decorrentes de uma associação inadequada de procedimentos aritméticos.	Cognitivista Epistemológico	Psicolinguística e Processualista Aritmética Generalizada
Ursini et al. (2005)	- Dificuldades dos alunos quanto ao uso adequado das letras nas operações algébricas. - Erros cometidos em Álgebra decorrentes de experiências	Cognitivista Epistemológico	Psicolinguística e Processualista Aritmética Generalizada

	aritméticas.		
Souza e Diniz (2008)	- Álgebra como linguagem da matemática; - Elaboração de sequencia de atividades para o ensino de conceitos algébricos.	Cognitivista	Psicolinguística e Processualista
Lucas 2009	- Descontinuidade conceitual entre equações e funções	--------	--------
Melo (2010)	- Procedimentos utilizados por alunos para validação de igualdades entre expressões algébricas; - Registros de Representação Semiótica;	----------	----------
Lopes 2011	- Erros cometidos por alunos na resolução de Equações do Primeiro Grau;	Cognitivista	Conceitualista
Reis (2011)	- Mapeamento dos erros cometidos por alunos quanto ao conceito de função Afim; - Elaboração de sequencia de atividades a partir da análise dos erros.	Cognitivista	Conceitualista

Cruz et al. (2013)	- desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos; - aplicação de sequencia de tarefas;	----------	----------

Fonte: Autor

No Quadro 2, é possível observar a categorização das pesquisas das últimas décadas, segundo os programas de investigação. A partir do quadro construído é possível verificar que 3 pesquisas possuem perspectiva conceitualista; 4 pesquisas foram realizadas segundo as perspectivas Psicolinguística e Processualista; 2 possuem perspectiva de caráter epistemológico no sentido de Álgebra como aritmética generalizada e; 4 pesquisas não foram possíveis de categorizar.

As obras que analisamos em nosso levantamento bibliográfico em teses, dissertações, livros e artigos, dos Estados Unidos, Brasil, Espanha, Portugal e México; e as referidas obras têm apontado, quanto ao ensino de Álgebra, para erros frequentes cometidos por alunos nos conteúdos desta área, devido principalmente a uma associação equivocada de conteúdos algébricos com aritméticos.

No que diz respeito aos programas Cognitivistas, entendemos serem de certa relevância as investigações sobre as razões pelas quais os alunos cometem erros na matemática e se os mesmos são recorrentes ou não, bem como sobre as maneiras de interpretar os conceitos matemáticos, haja vista que a análise dos erros em Álgebra e de suas possíveis causas permite a professores e pesquisadores compreenderem melhor os fenômenos que interferem na aprendizagem desta área e proporem meios alternativos para superá-los.

Enfatizamos também a importância de se levar em consideração o aspecto epistemológico do ensino de Matemática a fim de se investigar o modelo epistemológico ao qual dado saber é apresentado, e se o mesmo é satisfatório para o processo de ensino e aprendizagem e; promover discussões que levem em conta a formação do professor de matemática bem como seu desenvolvimento profissional no ensino de Álgebra, em nosso caso, Equações do primeiro grau, tendo em vista um aprimoramento das práticas de sala de aula e a busca de melhorias no desempenho dos alunos em relação ao saber em jogo.

No capítulo 3 apresentamos nossa metodologia de pesquisa a qual consiste em um sistema didático com características de um Percurso de Estudo e Pesquisa. Este percurso foi adotado para analisar fragmentos das epistemologias espontâneas dos sujeitos da pesquisa, encontradas em seus discursos. O sistema didático se justifica pelo fato de ter possibilitado a exposição de opiniões e interpretações dos professores quanto a suas práticas no ensino de conteúdos de Álgebra, particularmente, Equações do Primeiro Grau.

3 PERCURSO DE ESTUDO E PESQUISA COMO METODOLOGIA DE PESQUISA

Neste capítulo descrevemos os aspectos metodológicos: procedimentos e a metodologia propriamente dita; neste sentido, um elemento metodológico foi um percurso de investigação com características de um PER. A apresentação deste capítulo se dá em duas etapas: 1) Caracterização da pesquisa como indícios de um PER; 2) Descrição dos procedimentos metodológicos da pesquisa.

3.1 CARACTERIZAÇÃO DO PER

Como já anunciamos, um dos elementos metodológicos de nossa pesquisa é o PER, o qual pode ser descrito da seguinte forma: dado um sistema didático herbartiano composto por um grupo de sujeitos (***x***), como por exemplo, estudantes, professores, pesquisadores, etc. que se reúne com a finalidade de estudar uma questão de seu interesse (***Q***) no âmbito de uma atividade escolar, sob a orientação de um diretor de estudo (***y***) ou pesquisador principal que coordena o processo de estudo. Desta forma, o sistema herbartiano pode ser representado pela expressão como segue:

$$\boldsymbol{S\,(x, y, Q_o)\ \to R}$$

Existem duas organizações que atendem à noção de "sistema didático": as aulas de matemática e as comunidades de pesquisadores (CHEVALLARD; BOSCH; GASCÓN, 2001). O sistema didático que atuamos como diretor constituiu-se da seguinte maneira: ***x,*** um grupo de professores de Matemática que integra o curso de Especialização em Didática da Matemática, vinculado à Universidade Federal do Pará; ***y,*** o diretor de estudo, sendo maior parte do processo de estudo, o autor desta pesquisa (Y_A) e, em alguns momentos, o professor que o orientou (Y_B). Nosso sistema didático se deu em torno da seguinte questão: Como ensinar equação do primeiro grau na escola básica?

A escolha do grupo se deu pelo fato de os mesmos já possuírem conhecimento das ideias e compreensões da Didática da Matemática, tendo sido aprofundado o conhecimento sobre a TAD na disciplina Fundamentos da Didática da Matemática II. Desta forma o enfoque teórico já era comum ao grupo de professores (o referencial teórico da TAD nos serviu como ferramenta de análise das praxeologias matemáticas, bem como suporte teórico para o desenvolvimento de novas praxeologias).

No decorrer do sistema didático em torno da questão “Como ensinar Equação do Primeiro Grau?” surgiram outras questões, tais como: que quer dizer aritmética generalizada? Qual a diferença entre incógnita e variável? Questões como estas permitiram um desdobramento em outras.

Nestes termos, o sistema proposto apresentou características semelhantes às de um Percurso de Estudo e Pesquisa (PER), pois possuía um grupo (x) de professores, sob a coordenação (y) de um pesquisador e seu orientador em busca de respostas para a questão (Q) “Como ensinar Equação do Primeiro Grau?

Este dispositivo foi proposto por Chevallard (2004, 2009a) no intuito de encontrar uma resposta ***R*** adequada para a questão $\boldsymbol{Q_0}$, denominada questão geratriz, com capacidade de gerar outras questões problemáticas Q_1, Q_2, Q_3 etc., sob as condições e restrições, específicas do saber em jogo, que resultam em um conjunto de respostas que se constituem em uma sucessão de Organizações Matemáticas (OM) articuladas entre si.

No caso de nossa pesquisa, o percurso de investigação que adotamos serviu como dispositivo didático (para os sujeitos), pois gerou discussões e reflexão acerca das práticas dos professores sobre o ensino do tema Equações do Primeiro Grau. Desta forma tivemos um dispositivo de formação de professores de matemática e metodológico (para o pesquisador), uma vez que este percurso nos permitiu investigar as epistemologias espontâneas dos sujeitos da pesquisa;

As praxeologias geradas pelo PER não acontecem (ou não devem acontecer) de forma aleatória, e sim são construídas por meio de estudos e pesquisas sobre a infra-estrutura didático-matemática disponível que revela as possíveis respostas à questão (Q).

Uma característica importante a ser destacada por Chevallard, Bosch e Gascón (2001) é que o sistema didático é uma relação "aberta" tanto para ***y*** como para ***x***, no sentido que ***y*** não poderá prever todas as dificuldades que surgirão no decorrer do processo de estudo, nem tão pouco ***x*** terá de antemão todas as atividades escolhidas por ***y*** para o enfrentamento do problema. No caso de nossa pesquisa, as questões para discussão em cada sessão eram definidas a partir dos resultados das discussões nas sessões anteriores as quais requereram algumas retomadas de discussões.

Para dar respostas a ***Q***, faz-se necessário que o sistema didático colete e organize recursos, a partir de um meio didático *M* (em francês, *milieu*) específico, que ele deve identificar, recolher, aprender a usar a fim de produzir ***R***, o que é indicado como segue (CHEVALLARD, 2009a):

$$[\boldsymbol{S}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{Q_o}) \ \rightarrow \boldsymbol{M}] \rightarrow \boldsymbol{R}$$

Em outras palavras, o sistema didático, na presença do milieu *M*, gera uma resposta *R*. O milieu é entendido como um sistema que nos permite estudar a questão que propomos. O termo "milieu" é usado na TAD com uma conotação bem mais ampla do que o termo que usamos em lingua portuguesa (meio): o milieu pode ser o livro didático, a sala de aula, a escola, o professor, um laboratório de informática, o conjunto de respostas de um grupo, etc.

No caso do PER, Chevallard (2009a) descreve o *milieu* como um conjunto de respostas prontas para ***Q***, validadas por uma instituição; mais as obras construídas na instituição. Em outras palavras o *milieu M* é escrito como:

$$M = \{R_1^{\lozenge}, R_2^{\lozenge}, R_3^{\lozenge}, \dots, R_n^{\lozenge}, O_{n+1}, \dots, O_m\}$$

Chevallard (2009a) afirma que, para elaborar ***R***, deve-se coletar as respostas $\boldsymbol{R^{\lozenge}_1, R^{\lozenge}_2, \dots, R^{\lozenge}_n}$, ditas "rotuladas" pelas instituições – por exemplo, o livro didático, um curso de aperfeiçoamento, a experiência profissional, etc., logo, $\mathbf{R}^{\lozenge}$ pode ser entendido como praxeologias. Já as obras $\boldsymbol{O_{n+1}, \dots, O_m}$ são teorias das montagens experimentais, das praxeologias que achamos úteis para desconstruir as respostas $\boldsymbol{R^{\lozenge}}$, e extrair eventualmente material adicional.

A partir das considerações mencionadas, o sistema didático e o milieu podem ser configurados da seguinte maneira

$$[S(X, Y, Q) \rightarrow \{R_1^{\lozenge}, R_2^{\lozenge}, R_3^{\lozenge}, \dots, R_n^{\lozenge}, O_{n+1}, \dots, O_m\} \rightarrow R$$

No caso de nossa pesquisa a busca das respostas (***R***$^{\Diamond}$) sobre o ensino de Equações do Primeiro Grau se apoiou nas respostas dos professores ao questionário, suas falas sobre como introduzem o tema equações do primeiro grau, suas opiniões quanto ao tema proposto, sua experiência como professores, os livros didáticos, dentre outros elementos para analisarmos fragmentos sua praxeologia espontânea. As obras (*O)* foram artigos, livros, teses, dissertações, documentos oficiais, todos elementos que fundamentaram a pesquisa. A análise dessas respostas e das obras a obtenção de dados para a construção da resposta esperada ***R***, denotada por ***R***$^{\heartsuit}$.

$$[S(x, y, Q) \rightarrow M] \rightarrow R^{\heartsuit}$$

3.2 DESCRIÇÃO DOS PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

A fim de analisarmos fragmentos das epistemologias espontâneas dos sujeitos da pesquisa, encontrados em seus discursos, nos apoiamos na estrutura de um PER, na qual aproveitamos o processo de estudo dos sujeitos, na busca de uma praxeologia que respondesse às questões relacionadas ao ensino de Equação do Primeiro Grau. Desta forma, propusemos organizar um sistema didático tendo em vista a conscientização acerca dos modelos epistemológicos e do modelo dominante no ensino de Álgebra, possibilitar reflexões sobre suas praxeologias, além da coleta de informações por meio de registros escritos e áudio visuais.

Para planejamento e discussões sobre o tema, realizamos encontros aos sábados em períodos de tempo (10: 30h às 12: 00h) cedidos pelos professores do curso de especialização em Didática da Matemática. Nestas reuniões dividimos as atividades em sessões nas quais contamos com a participação total de 23 sujeitos[14], sendo que essa quantidade variou em torno de 12 e 16 professores por sessão.

[14] Usaremos as letras do alfabeto da língua portuguesa (A, B, C, D, E, F,.....) para nos referirmos especificamente a cada sujeito da pesquisa e as letras Y_A e Y_B para designarmos o pesquisador e seu orientador, respectivamente.

As atividades desenvolvidas com os sujeitos da pesquisa envolveram levantamento bibliográfico acerca do tema Equação do Primeiro Grau; socialização e debates sobre propostas de sequências de ensino elaboradas pelo grupo ou por um de seus membros; debates e análises das formas de intervenção didáticas neste tema. Estas atividades foram divididas em 6 sessões, as quais descrevemos a seguir:

- Sessão 1*: Aplicação de questionário* – Nesta sessão buscamos conhecer o perfil dos sujeitos, tempo de serviço, formação acadêmica, quais recursos adotam para ministrar suas aulas, como introduzem sua aula para abordar o conteúdo equação do primeiro grau.
- Sessão 2: *Depoimento dos sujeitos* – Nesta sessão fizemos três perguntas para cada um dos sujeitos presentes, os quais deveriam apresentar sua concepção acerca de Álgebra; sua concepção em relação ao ensino de Álgebra, e relatar detalhes de como abordam o assunto equação do primeiro grau a fim de obtermos mais elementos para analisar (a partir desta sessão todas as outras com os sujeitos foram gravadas tanto em vídeo como em áudio).
- Sessão 3: *Abordagem Histórica* – Esta sessão foi realizada no intuito de permitir um estudo histórico e epistemológico do objeto matemático equação do primeiro grau, contribuindo assim para a epistemologia do professor sujeito da pesquisa.
- Sessão 4: *Concepção de Álgebra* – Na sessão 4 foi entregue aos sujeitos um texto abordando quatro maneiras de se conceber a Álgebra escolar segundo Usiskin (1995), que são relação entre grandezas, aritmética generalizada, estruturalismo algébrico e estudo de procedimentos para resolver certos tipos de problema. Nesta sessão, o sujeito deveria perceber outras maneiras de conceber a Álgebra escolar além da aritmética generalizada.
- Sessão 5: *Características da Álgebra como aritmética generalizada* – Nesta sessão foi realizado o estudo de um recorte da obra de Bolea Catalán (2003) com os sujeitos os quais puderam verificar alguns aspectos que caracterizam a Álgebra escolar como aritmética generalizada. Os sujeitos puderam relacionar as características apresentadas na obra com sua experiência de sala de aula e compartilhar sua opinião acerca das vantagens e desvantagens da abordagem de Álgebra escolar como aritmética generalizada.
- Sessão 6: *Exposição de praxeologias dos sujeitos* – Nesta sessão foram divididos quatro grupos os quais deveriam estudar e apresentar um seminário sobre uma obra com propostas alternativas para o ensino de conceitos relacionados ao tema equações do primeiro grau, após o seminário, solicitamos a alguns sujeitos que expusessem suas praxeologias simulando uma aula. Desta forma, verificaríamos as possíveis mudanças nas concepções espontâneas dos sujeitos.

Em nossa intervenção buscamos identificar práticas evidenciadas nas falas dos sujeitos investigados sobre a Álgebra e seu ensino, e sobre como abordam o tema equação do primeiro grau; a fim de evidenciarmos o modelo epistemológico implícito em suas epistemologias espontâneas, quanto ao ensino de Álgebra. Para isso, partimos do pressuposto que o modelo dominante é um reflexo da *praxe* dos professores revelada em sua epistemologia espontânea (SIERRA, 2006).

Antes de iniciarmos o PER propriamente dito, buscamos identificar elementos que nos possibilitassem evidenciar a epistemologia espontânea dos professores sujeitos da pesquisa, para isso aplicamos um questionário com base nos estudos de Chevallard (1989), Gascón (1994) e Bolea (2003).

O questionário foi elaborado na perspectiva de desdobramento em momentos de discussão com os professores sujeitos da pesquisa, desta forma o sistema configurou-se em uma infra-estrutura didática para um estudo sobre o ensino de equação do primeiro grau e, ao mesmo tempo como metodologia de pesquisa, uma vez que possibilitou investigar os sujeitos em suas falas.

A partir da segunda sessão após a aplicação do questionário instituímos o PER que tinha por questão geratriz “como ensinar Equação do Primeiro Grau?”. Assim, solicitamos aos sujeitos da pesquisa o aprofundamento nas respostas dadas no questionário que permitisse revelar sua epistemologia espontânea relacionada ao tema em questão. O quadro 3 mostra um panorama de nossas atividades no decorrer desta pesquisa.

Quadro 3: Atividades desenvolvidas com os sujeitos da pesquisa

SESSÃO	ATIVIDADE	QUESTÃO NORTEADORA
01	Aplicação de questionário	Qual o perfil dos sujeitos da pesquisa?
02	Confronto de práticas	Quais as concepções dos professores acerca de Álgebra? e como abordam o tema Equações do Primeiro Grau?
03	Abordagem Histórica	Como se desenvolveu o conhecimento algébrico?
04	Concepções de Álgebra	Como devem ser tratadas em sala de aula as noções de incógnita, variável e parâmetro?
05	Características da Álgebra como aritmética	Quais características identificam a

	generalizada	Álgebra como aritmética generalizada?
06	Estudo de propostas para o ensino de conceitos algébricos e Exposição de praxeologia como produto final da pesquisa.	Quais propostas para o ensino de conceitos algébricos são coerentes para serem adotadas em sala de aula? Quais mudanças foram possíveis observar nas praxeologias do professores após o Percurso de estudo e Pesquisa?

Fonte: autor

A partir do questionário cada sessão seguinte foi gerada com base em novas questões que surgiam no decorrer da sessão anterior devido à necessidade de ampliar as discussões em torno do ensino de equações do primeiro grau, tais como qual a diferença entre incógnita, variável e parâmetro? Que características identificam a Álgebra como aritmética generalizada e quais as suas implicações nas práticas dos professores? No capítulo que segue descreveremos a parte empírica de nossa pesquisa com sua respectiva análise.

4 ANÁLISE DE FRAGMENTOS DAS EPISTEMOLOGIAS ESPONTÂNEAS DOS PROFESSORES

Este capítulo apresenta os dados obtidos a partir da formação de um sistema didático criado com base nos pressupostos de um PER a fim de analisarmos as epistemologias espontâneas de 23 professores. As informações foram coletadas inicialmente a partir da aplicação de um questionário e de uma entrevista acerca do ensino de Equações do Primeiro Grau e, posteriormente, em gravações de diálogos entre os professores. Ao participar das atividades: questionário, entrevista e diálogos; o professor exporia suas ideias e compreensões sobre o ensino de Álgebra, e Equações do Primeiro Grau. A atividade culminou com a apresentação das praxeologias de alguns professores como resultado do PER.

4.1 APLICAÇÃO DO QUESTIONÁRIO

Na primeira sessão, aplicamos o questionário (apêndice 1) a 16 professores que cursavam especialização em Didática da Matemática na UFPA, visando obter informações sobre os mesmos (grau de instrução, séries que atuam, tempo de serviço, et.) e de como são tratadas algumas noções de Álgebra no Ensino Fundamental. O questionário foi elaborado com base nas propostas de Chevallard (1989), Gascón (1994) e Bolea Catalán (2003), que tratam do modelo epistemológico da Álgebra escolar.

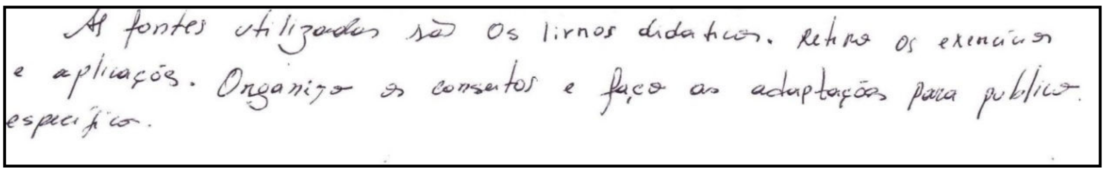
Dos consultados, 14 possuíam graduação em matemática e 2 eram graduados em Ciências com Habilitação em Matemática. Quanto a pós-graduação, 5 professores possuíam formação *latu sensu* e apenas 1, possuía formação *strictu sensu* (mestrado). Com relação à experiência docente, a maior parte (7 consultados) indicou possuir acima de 15 anos de experiência como professor de Matemática. Esses perfis são importantes à medida que nos possibilitaram vislumbrar perspectivas heterogêneas do entendimento sobre ensinar e aprender Álgebra e mais especificamente equações do primeiro grau com uma incógnita.

Constatamos que a maioria dos professores consultados atua no ensino fundamental, sendo que 12 atuam no 7º ano, fato relevante a nossa pesquisa, haja vista, que nosso objeto de estudo (Equações do Primeiro Grau) é previsto para ser abordado no 7º ano do ensino fundamental.

A segunda parte do questionário constituiu-se de quatro questões acerca da prática profissional dos docentes: que recursos adotavam para organizar suas aulas de matemática; como introduziam o tema Equações do Primeiro Grau; quais as dificuldades mais evidentes os professores identificam nos alunos em relação à aprendizagem do tema equações e; como procediam para tentar superar tais dificuldades. A seguir podemos verificar algumas respostas extraídas dos questionários e suas respectivas análises formuladas com base nas propostas de Chevalard (1989) e Bolea Catalán (2003).

Com relação à primeira questão “***Quais as fontes que você consulta para planejar suas aulas? Comente um pouco a respeito dessas fontes: como usa, como escolhe, etc.”***, verificamos que 12 consultados (a maioria dos presentes nesta sessão) informaram que o principal material de apoio adotado é o livro didático, como podemos verificar no registro do sujeito da Figura 3. Os principais critérios apresentados para escolha das fontes foram: conselho de classe e interpretação individual e subjetiva sobre a adequação do material à praxeologia dos sujeitos e ao nível de desempenho dos alunos.

Figura 3: Registro de um dos sujeitos

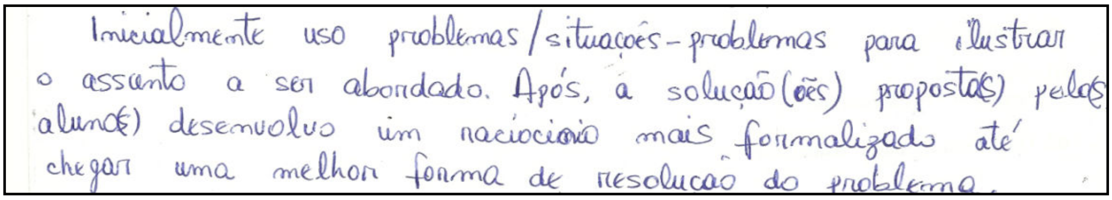

As fontes utilizadas são os livros didaticos. Retiro os exercicios e aplicações. Organizo os conceitos e faço as adaptações para publico especifico.

Fonte: Questionário elaborado pelo autor da pesquisa

Esta informação nos permitiu supor que o livro didático possui considerável poder de influência no modelo epistemológico adotado pelos sujeitos sobre o ensino de Álgebra. Estes também muitas vezes têm a liberdade de escolher, com base em sua epistemologia espontânea, qual livro adotar.

Na sequência, apresentamos a questão: "***A partir dessas fontes como organiza atividades para serem desenvolvidas na sala de aula? Para introduzir, por exemplo, o tema equações do primeiro grau***". Evidenciamos que a maioria (10 consultados) destacou que parte de contextos do cotidiano que gerem situações-problemas para introduzir o conceito de equação do primeiro grau, para depois formalizar (Figura 4).

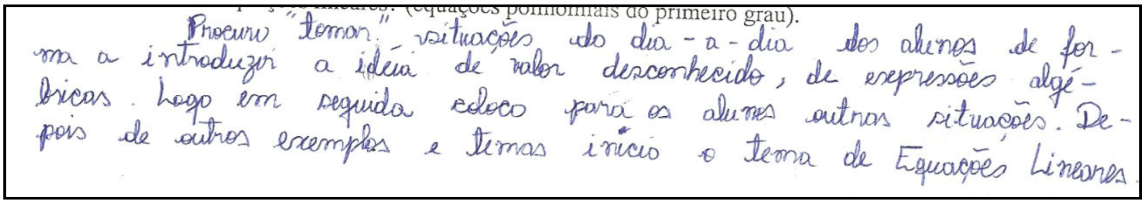
Figura 4: Registro de um dos sujeitos


Inicialmente uso problemas/situações-problemas para ilustrar o assunto a ser abordado. Após, a solução(ões) proposta(s) pelo(s) aluno(s) desenvolvo um raciocínio mais formalizado até chegar uma melhor forma de resolução do problema.

Fonte: Questionário elaborado pelo autor da pesquisa

Percebemos entre as respostas a tentativa de atribuir ao ensino de Álgebra uma relação das Equações do Primeiro Grau com situações do cotidiano do aluno. O sujeito também relata que, após a associação da matemática com o cotidiano, formaliza os conceitos. Vejamos o registro de outro sujeito (Figura 5).

Figura 5: Registro de um dos sujeitos


(equações polinomiais do primeiro grau).

Procuro "tomar" situações do dia-a-dia dos alunos de forma a introduzir a idéia de valor desconhecido, de expressões algébricas. Logo em seguida coloco para os alunos outras situações. Depois de outros exemplos e temas início o tema de Equações Lineares

Fonte: Questionário elaborado pelo autor da pesquisa

O sujeito da Figura 5 também usa situações problemas para introduzir a idéia de número desconhecido, em seguida propõe outras situações do dia a dia para apresentar o tema equações lineares. A ideia de aplicação de situações matemáticas no cotidiano é uma condição defendida nos documentos oficiais como PCN, PROVA BRASIL e SAEB, na intenção se facilitar o processo de abstração ao associar o conteúdo matemático com a realidade do aluno.

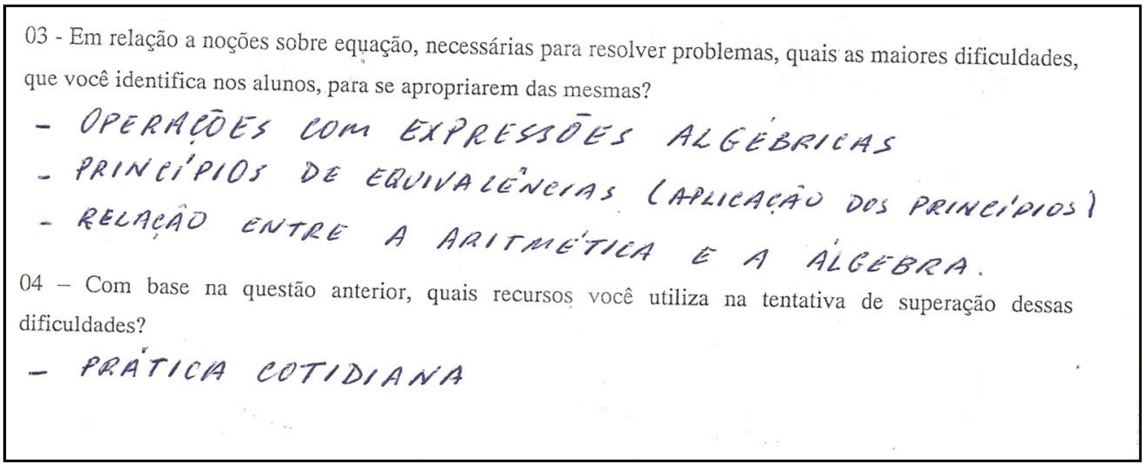
> A Matemática caracteriza-se como uma forma de compreender e atuar no mundo e o conhecimento gerado nessa área do saber como um fruto da construção humana na sua interação constante com o contexto natural, social e cultural. (BRASIL, 1998, p. 24).
>
> Duas forças indissociáveis estão sempre a impulsionar o trabalho em Matemática. De um lado, o permanente apelo das aplicações às mais variadas atividades humanas, das mais simples na vida cotidiana, às

> mais complexas elaborações de outras ciências. De outro lado, a especulação pura, a busca de respostas a questões geradas no próprio edifício da Matemática. (BRASIL, 1998, 24, 25).

Vale destacar conforme apontam os PCN que o uso de contextos, aos quais a Matemática é adotada, não necessita ser relacionado apenas ao cotidiano dos alunos, mas a atividades humanas. Também é fundamental a formalização dos conceitos para melhor compreensão do objeto matemático.

Com relação à questão "***Em relação a noções sobre equação, necessárias para resolver problemas, quais as maiores dificuldades, que você identifica nos alunos, para se apropriarem das mesmas?"***. As respostas não foram unânimes e puderam ser classificadas em torno das dificuldades apresentadas nas figuras a seguir.

Figura 6: Dificuldade na manipulação de expressões algébricas



03 - Em relação a noções sobre equação, necessárias para resolver problemas, quais as maiores dificuldades, que você identifica nos alunos, para se apropriarem das mesmas?

- OPERAÇÕES COM EXPRESSÕES ALGÉBRICAS
- PRINCÍPIOS DE EQUIVALÊNCIAS (APLICAÇÃO DOS PRINCÍPIOS)
- RELAÇÃO ENTRE A ARITMÉTICA E A ÁLGEBRA.

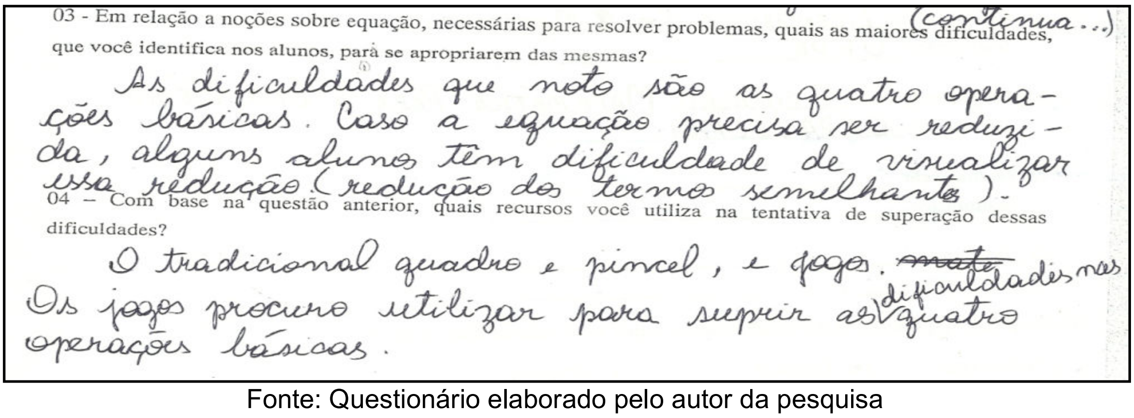
04 – Com base na questão anterior, quais recursos você utiliza na tentativa de superação dessas dificuldades?

- PRÁTICA COTIDIANA

Fonte: Questionário elaborado pelo autor da pesquisa

Dos sujeitos consultados, 2 apontaram para dificuldades quanto à manipulação de expressões algébricas. No caso do registro da Figura 6, o sujeito informa que usa informações do cotidiano do aluno para tentar superar as dificuldades de aprendizagem. Vejamos a Figura 7.

Figura 7: Dificuldade com as operações aritméticas



03 - Em relação a noções sobre equação, necessárias para resolver problemas, quais as maiores dificuldades, que você identifica nos alunos, para se apropriarem das mesmas? (continua...)

As dificuldades que noto são as quatro operações básicas. Caso a equação precisa ser reduzida, alguns alunos têm dificuldade de visualizar essa redução (redução dos termos semelhantes).

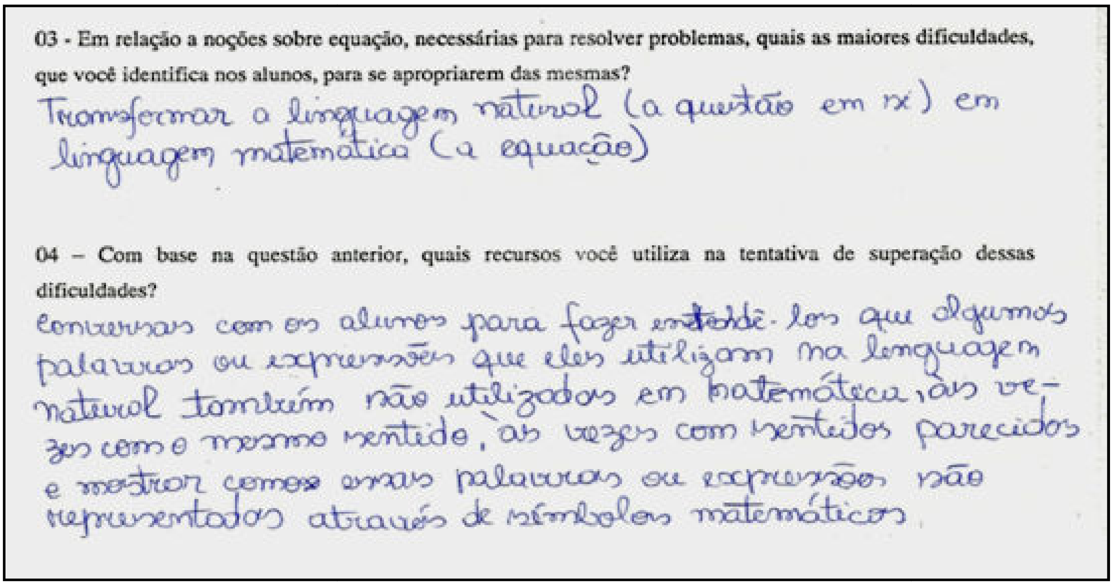
04 – Com base na questão anterior, quais recursos você utiliza na tentativa de superação dessas dificuldades?

O tradicional quadro e pincel, e jogos. ~~mate~~ Os jogos procuro utilizar para suprir as dificuldades nas quatro operações básicas.

Fonte: Questionário elaborado pelo autor da pesquisa

Com relação às dificuldades dos alunos, 6 sujeitos consultados informaram que percebem com freqüência dificuldades na realização de operações aritméticas, neste caso segundo os sujeitos, a falta compreensão de conceitos aritméticos interfere na apropriação de conceitos algébricos. A Figura 8 aponta outra dificuldade bastante citada pelos sujeitos. Vejamos.

Figura 8: Dificuldade em converter linguagem materna em algébrica



03 - Em relação a noções sobre equação, necessárias para resolver problemas, quais as maiores dificuldades, que você identifica nos alunos, para se apropriarem das mesmas?

Transformar a linguagem natural (a questão em si) em linguagem matemática (a equação)

04 – Com base na questão anterior, quais recursos você utiliza na tentativa de superação dessas dificuldades?

Conversas com os alunos para fazer ~~entende~~ entendê-los que algumas palavras ou expressões que eles utilizam na linguagem natural também são utilizados em matemática, às vezes com o mesmo sentido, às vezes com sentidos parecidos e mostrar como essas palavras ou expressões são representados através de símbolos matemáticos.

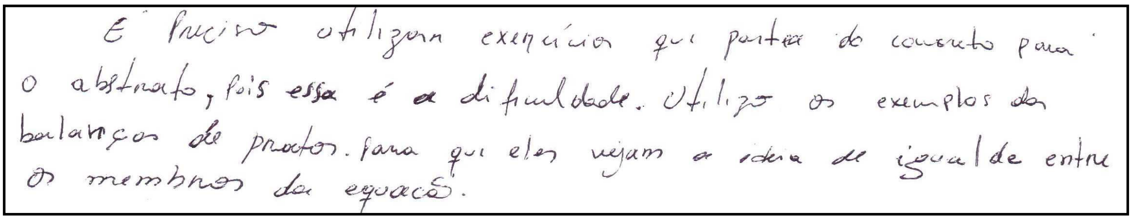
Fonte: Questionário elaborado pelo autor da pesquisa

A dificuldade mais indicada pelos sujeitos foi a relacionada à conversão da linguagem natural em linguagem matemática (7 sujeitos). Neste caso, segundo os sujeitos, os alunos teriam dificuldade em representar matematicamente uma expressão do tipo “o dobro de um número mais 5 é igual e 11”. As respostas que indicaram a problemática sobre a aprendizagem de Álgebra em torno da apropriação da linguagem algébrica estão em conformidade com o que se anuncia nas perspectivas psicolingüísticas e processualistas, haja vista que justificam os problemas conceituais em Álgebra como problemas semânticos e de sintaxe. Ouve dois sujeitos consultados que apontaram para dificuldades dos alunos no que diz respeito à interpretação de textos.

Em resposta à questão “***Com base na questão anterior, quais recursos você utiliza na tentativa de superação dessas dificuldades?***”, dos recursos adotados para tal “superação” os sujeitos anunciaram: situações-problema (7 sujeitos); uso de jogos (3 sujeitos); socialização de ideias por meio de diálogo com os alunos (2 sujeitos); revisão de conceitos prévios (1 sujeito);

uso de laboratório de informática (1 sujeito). A Figura 9 representa um dos “recursos” mais citados nos registros dos sujeitos.

Figura 9: Registro de um dos sujeitos


É preciso utilizar exercícios que partem do concreto para o abstrato, pois essa é a dificuldade. Utilizo os exemplos das balanças de pratos. Para que eles vejam a ideia de igualdade entre os membros da equação.

Fonte: Questionário elaborado pelo autor da pesquisa

Percebemos novamente a tentativa da maioria dos sujeitos em atribuir ao tema Equações do Primeiro Grau significado a partir da aplicação deste saber no cotidiano a fim de sanar ou amenizar as dificuldades dos alunos. A análise das respostas no questionário nos serviu como base para o planejamento e organização da segunda sessão na qual realizamos um momento de discussão com os professores sujeitos da pesquisa no intuito de verificar se o seu discurso estaria coerente com o que registraram no questionário e coletar mais informações para a pesquisa.

4.2 DEPOIMENTOS DOS SUJEITOS DA PESQUISA

Na sessão 2, na qual contamos com a participação de 10 sujeitos, havíamos planejado a realização de entrevistas a fim de obter mais informações acerca de suas epistemologias espontâneas sobre a Álgebra escolar e observar se há coerência entre seus registros escritos e seus depoimentos. Nesta sessão, percebemos que os sujeitos da pesquisa interagiram em alguns momentos acerca de suas práticas, discordando ou completando a fala um do outro. Desta forma, a atividade em alguns momentos se caracterizou como um confronto de práticas.

Desta forma solicitamos aos professores que expusessem, com base em suas leituras e experiências, o que compreendiam por Álgebra e seu ensino; e que dessem exemplos práticos de como introduziam em suas aulas o tema

Equações do Primeiro Grau. Vejamos alguns depoimentos dos sujeitos em relação às suas noções de Álgebra:

***Y_A*: Fale sobre sua compreensão em relação à Álgebra**

Sujeito A: *A gente trabalha com letras e números, no sentido de organizar mais os problemas. A gente observa que, no dia a dia, muitos problemas que podem ser resolvidos por aritmética, se tornam complexos. Quando a gente consegue dar uma questão de Álgebra para esses problemas, eles são resolvidos de maneira mais simples.*

Y_A: *o que você quer dizer com organizar?*

Sujeito A: *[...], quando você está resolvendo um problema por aritmética, você fica mais na questão do pensamento, da abstração; [...]; e quando você trata da Álgebra, toda essa parte mental vai ser desenvolvida através de uma situação matemática: de uma expressão, de uma equação. Você dá uma coisa que era um pouco abstrata, e transforma em concreto; por exemplo, por aritmética você diz:*

[...] 'um quilo de feijão custa dois reais, três quilos custam tanto', por aritmética você faz um cálculo mental e acha a solução: vai ser tanto! Quando você passa para a Álgebra, você pode pegar a regra de três, e vai poder constatar mesmo toda aquela situação daquele problema.

Percebemos na fala do ***sujeito A*,** que o mesmo compreende a Álgebra como um avanço em relação à aritmética. Na compreensão do mesmo o método aritmético de resolução de problemas algébricos é mais difícil de operar e compreender do que o método algébrico, uma vez que, segundo o mesmo, a resolução de problemas por meio da aritmética requer uma abstração maior do que por meio da Álgebra.

Aqui evidenciamos a interpretação do uso da Álgebra como método mais eficaz em relação às ferramentas da aritmética no sentido de uma economia de procedimentos e de raciocínio na resolução de problemas. Desta forma, constatamos a busca de modelação de situações problema por meio da Álgebra. Na sequência o professor é interrogado acerca de sua opinião sobre o ensino de Álgebra e reforça suas crenças relacionadas a esta área.

Y_A: *E a respeito do ensino de Álgebra, qual a sua opinião?*

Sujeito A: *[...]. É um modelo facilitador do processo ensino-aprendizagem para resolução de um problema na matemática. [...], alguns problemas através da aritmética se tornam complexos. Porque é muito abstrato, você fica muito em termo de jogo mental, e você pode se perder na resolução de um problema* *através de aritmética. Quando você aplica a Álgebra, aí as coisas vão aparecer normalmente. Já na aritmética, é uma coisa bem mais na base do pensamento.*

Se você se desligar um pouco dali para tentar averiguar outra situação, para voltar para o problema, é bem capaz que você perca o raciocínio. Então para mim, a Álgebra foi isso, ela vem nesse sentido de dar uma organização para a matemática de forma que as coisas fiquem bem concretas para facilitar as resoluções.

Para o ***sujeito A*** é importante trabalhar com questões diversificadas da Álgebra, pois trata-se de um modelo facilitador da aprendizagem. O uso de conceitos algébricos, segundo o mesmo, possibilita tornar o conceito matemático mais "palpável", mais "concreto" e permite retomar o raciocínio, organizar a técnica de resolução. Já os conceitos aritméticos, segundo o ***sujeito A***, não permitiria isto.

Pudemos constatar no depoimento do ***sujeito A*** que o mesmo apresenta em sua epistemologia espontânea a perspectiva de Álgebra como aritmética generalizada, pois, demonstra preocupação com conceitos aritméticos e entende a Álgebra como um avanço em relação à aritmética. Vejamos a compreensão do ***sujeito B*** acerca da Álgebra.

Sujeito B: *Na minha concepção a Álgebra tem a ver com abstração. Outra palavra que vem na minha cabeça é a indução.*

Y_A: *em que sentido?*

Sujeito B: *No sentido [...] de chegar num processo indutivo. Não num processo aritmético, que seria dedutivo![...] Eu não penso muito em letras, não! Eu penso mais é no processo de indução, que eu poderia fazer para qualquer valor. Aí quando eu digo "para qualquer valor"; eu induzo a aparecer aquele valor.*

É possível verificar no discurso do ***sujeito B*** que o mesmo revela uma associação da Álgebra ao processo de generalização, isto é, percebe-se um padrão de regularidade em uma dada expressão e conclui-se que esta regularidade é válida para todos os elementos de um conjunto dado. Por exemplo, verifica-se que $7 + 5 = 5 + 7 = 12$, testa-se esta operação com outros números, $(3 + 2 = 2 + 3 = 5)$ e, após alguns testes conclui que a comutatividade é valida para a adição de todos os números naturais.

Sujeito B*: Quanto ao ensino, ela vem para facilitar aquela ideia da dedução aritmética. [...]. Eu costumo dizer assim: ver as passadas! Você consegue* *verificar as passadas de cada raciocínio escrevendo um valor. Se você perder uma passada você perde toda a questão e na Álgebra você consegue dinamizar, otimizar o problema [...]. O teu raciocínio se transforma em valor simbólico.*

Na fala do ***sujeito B*** percebemos como foco principal a ser considerado no ensino de Álgebra as etapas de equivalência numa equação. Neste caso, o registro escrito possibilita esclarecer melhor o motivo para as "trocas" de sinal e outras mudanças em relação à equação original. O ***sujeito B*** apresenta a mesma compreensão do ***sujeito A***, no que diz respeito à facilidade de desenvolver resoluções de problemas por meio da Álgebra, em relação à resolução aritmética. A seguir analisamos o discurso do ***sujeito C***.

Sujeito C*: A Álgebra, em minha opinião, é uma ferramenta. Em determinado momento, para o homem, ficou difícil de fazer conta (abstração de conta) dentro da aritmética. Precisou de outra forma de trabalhar algumas situações. Então, eu vejo a Álgebra como uma linguagem matemática.*

Podemos verificar no discurso do ***sujeito C*** que o mesmo concebe a Álgebra segundo a perspectiva psicolingüística, pois, trata a mesma como uma linguagem matemática. Este discurso indica também a Álgebra como um dispositivo matemático que permite resolver problemas com maior facilidade do que a aritmética, ou seja, a Álgebra é novamente vista como um avanço em relação à aritmética. A seguir apresentamos o depoimento do ***sujeito D***.

Sujeito D: *Na Álgebra você consegue, [...] abstrair; e você vai querer inserir algumas letras. Só que, quando você coloca letras em uma determinada instituição, o que é que você tem que ensinar? Primeiro, para ensinar Álgebra, você tem que ter uma noção básica dos fundamentos nas quatro operações, na aritmética. Se o aluno não sabe aritmética, não sabe trabalhar com as quatro operações. Não adianta você querer ensinar Álgebra pra ele que ele nunca vai aprender.*

O ***sujeito D*** entende que os conceitos algébricos, para serem ensinados, necessitam ser antecedidos de conceitos aritméticos. Esta compreensão pode ser caracterizada como concepção de aritmética generalizada, já que, em sua opinião, para o ensino de conceitos algébricos, é necessário que, antes, tenham sido ensinados conceitos aritméticos. A seguir veremos o depoimento do ***sujeito E***.

***Sujeito E**: Logo o que vem pela nossa cabeça, a primeira coisa é letras e números. [...] Logo que a gente vai ensinar Álgebra, a gente dá logo a ideia do x. Que x é esse? Que ideia do x eu vou levar para o meu aluno? Aí ele chega e pergunta: mas professor o quê que eu faço com esse x? [...], tem colega que já falou que, ás vezes não é tão simples ensinar Álgebra. [...]. Então, eu acredito que para [...] poder usar a Álgebra em seu favor, ele devia passar por alguns processos anteriores até chegar ao conteúdo.*

***Y_A:** O que seriam esses processos anteriores?*

***Sujeito E**: A questão da soma; das operações matemáticas, dos números opostos. Então, tudo isso enriquece a ideia do aluno para que ele consiga chegar ao conteúdo com uma boa noção da Álgebra. Sem esquecer também que ele vai se deparar com isso durante todo o ensino médio.*

Percebemos neste discurso a concepção de Álgebra como um conjunto de operações com letras e números, de acordo com Bolea Catalán (2003) a dificuldade em conceber a atividade algébrica como sendo mais do que somente contas envolvendo números e letras, é uma característica da perspectiva de Álgebra como aritmética generalizada. O ***sujeito E*** destaca uma dúvida conceitual sobre o papel que a letra exerce (variável ou incógnita) no processo de ensino, bem como a complexidade tanto do ensino como da aprendizagem de conceitos algébricos. Este problema também é anunciado em nosso referencial teórico. O diretor Y_A se interessa pela fala processos anteriores e pede para o ***sujeito E*** esclarecer seu raciocínio.

O sujeito reforça a necessidade de que o aluno deve ter uma boa compreensão de conceitos aritméticos para apreender os conceitos algébricos. Vejamos o depoimento do ***sujeito F***.

***Sujeito F**: Operações de letras e números. Trabalhar letras, trabalhar números, trabalhar a abstração [...]. E a minha experiência no ensino da Álgebra é quando eu me deparo com o aluno no ensino médio (eu trabalho com Álgebra só no ensino médio) quando eu for trabalhar o assunto de função. Eu verifico [...] uma dificuldade muito grande, porque eles (os alunos) chegam, a maioria, em todas as minhas aulas de função eu preciso voltar para explicar como funciona uma equação do primeiro grau. Toda aquela noção básica que eles precisam. É preciso estar resgatando isso.*

***Y_A:** Qual é a dificuldade que você percebe neles?*

***Sujeito F**: É justamente trabalhar a equação do primeiro grau e depois desenvolver numa função [...], porque eles chegam ao primeiro ano e parece que nunca viram aquilo, ou, aqueles que viram sentem dificuldade. [...]. Nas turmas onde eu trabalho, no primeiro ano, eu vejo uma dificuldade muito* *grande. No meu caso, temos dificuldade em desenvolver o estudo de função, a princípio, devido a eles não terem conhecimento dessa parte da Álgebra.*

Para o ***sujeito F*** o estudo de Álgebra se resume a operações com letras e números, o mesmo aponta para dificuldades no que diz respeito às lacunas apresentadas na aprendizagem dos conceitos de equação, o que acarreta em dificuldades na aprendizagem de conceitos de função no ensino médio onde espera-se que o nível de maturidade e de abstração deve ser maior em relação ao ensino fundamental. Observamos nesse discurso do professor a preocupação em estabelecer a relação entre equações e funções. A seguir veremos o depoimento do ***sujeito G*** acerca de sua concepção sobre a Álgebra e seu ensino.

Sujeito G: *Em relação à noção de Álgebra [...] generalização e incógnita. São duas palavras que, em minha opinião, dão a ideia da noção de Álgebra.*

Em relação ao ensino, eu particularmente estou com a proposta esse ano, de começar a trabalhar com o meu aluno na introdução: Por que trabalhar com aquele conteúdo? Faz parte de qual campo da matemática?

O **sujeito G** usa interrogações para indicar que pretende respondê-las com os alunos. Este sujeito, em sua prática de sala de aula preocupa-se em sua organização didática em justificar o ensino do objeto matemático atribuindo significado ao mesmo. A seguir, o ***sujeito H*** revela suas crenças sobre a Álgebra e seu ensino.

Sujeito H*: No decorrer desses anos através de leituras, da graduação, eu cheguei a uma conclusão: para quê que serve a Álgebra? Para construção de modelos matemáticos, pra estimar valores desconhecidos. Eu não sei se essa concepção tem a ver com modelagem: modelar um fenômeno da natureza [...]. Eu quero estimar valores desconhecidos, valores daqui a um ano, dois anos.*

$\boldsymbol{Y_A}$: *E a respeito do ensino de Álgebra?*

Sujeito H*: No ensino eu tenho outra concepção, [...] é uma ferramenta que facilita a descoberta de valores desconhecidos. É a frase que, para mim, resume: ferramenta facilitadora para descoberta de valores desconhecidos.*

O ***sujeito H*** compreende a Álgebra como uma ferramenta de ensino, a qual torna mais viável a determinação de cálculos com valores desconhecidos. Para este sujeito uma das funções básicas da Álgebra é modelar situações, fenômenos a fim de estimar valores.

Com base nos depoimentos dos sujeitos destacamos algumas palavras-chave que resumem o ponto de vista dos mesmos em relação à Álgebra e seu ensino: operações com letras e números (4 sujeitos), generalização (3 sujeitos) e linguagem (3 sujeitos). Estes pontos de vista sugerem que a Álgebra escolar é construída a partir de um contexto numérico, para então generalizá-lo, para isto faz-se uso da tradução de expressões numéricas para gerais.

As palavras-chave a seguir podem ser interpretadas como uma das características da Álgebra escolar como aritmética generalizada, no que diz respeito aos conhecimentos prévios a que a Álgebra escolar é construída, conforme anuncia Bolea Catalán (2003): propriedades aritméticas básicas, domínio da linguagem algébrica, calculo aritmético escrito e mental.

A seguir apresentamos os depoimentos dos sujeitos sobre sua organização matemática e didática para introduzir o tema equações do primeiro grau. Nesta etapa da sessão 2 foi obtida com a participação direta do diretor **Y_B,** vejamos.

Y_B: *no sentido específico [...] da equação do primeiro grau? Como você aborda esse assunto de forma introdutória?*

Sujeito A: *Eu sempre digo a meus alunos: [...] quase todos vocês, já resolveram uma equação mentalmente. Na hora que você vai ao açougue, você verifica, por exemplo, que o quilo de carne custa dez reais. Bom! Eu tenho que comprar tantos quilos, quanto é que eu vou pagar? Pronto! Quando você dá essa solução, você acabou de resolver uma equação mentalmente.*

O que é uma equação? É uma sentença matemática aberta. Porque [...] tem valores desconhecidos. [...]. Geralmente, as equações são expressas por igualdade. [...]. Aí eu digo: resolver uma equação é muito simples. É você encontrar o valor da letra que torna a sentença verdadeira. Por exemplo, $x + 2 = 4$. Então, quem é que eu devo colocar no lugar do x para tornar isso aqui verdadeiro? Aí todo mundo consegue resolver isso.

Aí é que a gente entra depois: mas vai ter situações que nem mesmo eu como professor vou saber direto qual o valor de x (ou da letra!) para tornar a sentença verdadeira. Então [...] eu tenho que procurar mecanismos para chegar nesse resultado. E um dos mecanismos mais importantes é estudar os princípios de equivalência das equações. O princípio multiplicativo, o principio aditivo,[...].

O ***sujeito A*** parte de uma situação problema relacionada à noção de função, após a introdução do conceito o mesmo usa exemplos considerados triviais e busca formalizar o conceito de equação.

Sujeito A: *No inicio do estudo das equações, eu procuro dar toda essa noção inicial; [...]; vários exemplos [...] de você ler a sentença matemática e ter como responder como eu disse: x + 2, quem é que eu devo colocar no lugar do x para tornar verdadeiro. Essas assim simples, todos conseguem resolver. Eu digo: se fossem só essas equações, não precisaria ir atrás de mais nada.[...]. Só que, nem todas, a gente vai poder fazer assim. Tem algumas que a gente não consegue. Então a gente vai ter que ir atrás de mecanismos, e os mecanismos começam aqui: estudando os princípios de equivalência. [...]. Eu sempre digo assim: a gente tem que tentar saber por quê nós estamos tentando trabalhar com essa regra. [...], por exemplo, [...], vamos supor, resolver uma equação, eu vou ter que isolar [...], achar o valor da incógnita, isolar a incógnita num dos lados da igualdade.*

Sujeito A *(Explica): Isolar é deixar ela sozinha. Então eu começo a tirar os termos que estão somando ou multiplicando ou dividindo, que estão próximo a ela. Para deixar ela sozinha.*

Então nesse momento, (por exemplo, se tem x + 2) eu quero tirar o dois, eu aplico o principio aditivo. Para o dois sumir dali só tem uma opção. [...]. Se é mais dois, basta subtrair de dois. Agora pelo principio aditivo se eu subtrair de dois desse lado. Eu também tenho que subtrair de dois no outro lado, pra compensar. Então a gente resolve várias equações dessa maneira [...]. Aí a gente entra com a regra de está somando, passa subtraindo. Se tiver multiplicando, passa dividindo. Então é nesse sentido que eu introduzo o estudo das equações.

O ***sujeito A*** parte de situações problemas para depois formalizar o conceito de equação do primeiro grau, definindo-a como sentença aberta. O mesmo anuncia que no decorrer do ensino de matemática haverá problemas matemáticos com grau de dificuldade cada vez maiores os quais exigirão técnicas de resolução mais avançadas em relação à aritmética.

O domínio das operações aritméticas é indicado como pré-requisito para a compreensão satisfatória dos conceitos algébricos, bem como o uso adequado da linguagem matemática no processo de ensino. Este discurso reforça a concepção do ***sujeito A*** da Álgebra como aritmética generalizada, uma vez que entende os conceitos aritméticos como um pré-requisito para a aprendizagem de conceitos algébricos. Vejamos como do ***sujeito B*** disse que introduz o conceito de Equação do Primeiro Grau.

Sujeito B: *Eu gosto de usar a história da matemática. Geralmente, eu apresento contextos históricos. A gente vai buscar inclusive regras da falsa posição [...] para verificar essa evolução e como seria essa regra hoje. [...]. O princípio aditivo e multiplicativo, hoje está otimizando. [...]. A gente começa com uma situação problema e [...] começa a analisar como o aluno vai abstrair isso. [...]. Eu falo assim: você não sabe quem fez. Você chama de quê? Ah! Foi* *alguém. Esse alguém, o que seria? [...], quer buscar a pessoa, mas não sabe. Você diz: alguém, uma pessoa.*

Quando você tem um número e você não sabe, você representa por algum número (referindo-se a uma letra) que geralmente chama-se de x (até por uma questão cultural). Pensa num número! [...] Pensa na metade desse número! Pense no triplo, no quádruplo, no consecutivo dele. [...]. Represente um número par [...], até que eles conseguem colocar a questão de 2n, 2x.

A gente começa a colocar numa forma de equação; a palavra igualdade. [...], a gente vai para os exercícios. Geralmente eu não estou acostumando a fazer aqueles exercícios só: resolva a equação. Geralmente a gente faz uma série de problemas de vários conteúdos diferentes.

O **sujeito B** se apóia na aritmética com auxilio na noção de número consecutivo e número sucessor para depois generalizá-la. Percebemos no discurso do ***sujeito B*** que o mesmo parte de um contexto de situação problema a fim de passar do aritmético para o algébrico por meio da generalização e padrões de regularidade. É possível notar a preocupação do ***sujeito B*** com a noção de número generalizado. Vejamos o depoimento do ***sujeito C*** acerca de sua OM e OD no ensino de equações do primeiro grau.

Sujeito C*: [...] Eu costumava [...] desenhar uma balança com alguns pesos, e alguns pesos fora da balança. [...], mostrando que num determinado momento ali da balança, em certas situações o aluno não vai conseguir fazer, por exemplo, se você fica com um peso de 200 g de um lado; um outro peso de 50 g do outro (da balança) e mais umas petecas [...] deixando ali na noção de equilíbrio [...] na prática, ele não tem como tirar, 50 g de 200[...]. Aí começa a abstração matemática. Começa aqui, (na mente dele, ele consegue fazer isso, mas na pratica não). Essa abstração precisa ser jogada para o papel; precisa ser trabalhada uma técnica, uma maneira de trabalhar isso. E aí eu já começo a relacionar a prática com a teoria; a parte da Álgebra.*

Percebemos que o sujeito tem a preocupação de aproveitar o conhecimento prévio do aluno para introduzir o conceito de equação e, com o auxilio de material concreto propõe situações problema em sala de aula, contextualizando o conceito de equação para depois formalizá-lo. Esta maneira de fazer pareceu bem eficiente desde que usada apenas como elemento introdutório, uma vez que o alcance desta praxeologia não permite o estudo com números negativos.

Esta prática parte de um contexto menos formal para familiarizar o aluno com os conceitos algébricos. Percebemos neste discurso uma preocupação com a economia didática sobre o ensino de equação. O ***sujeito C*** continua seu discurso:

Sujeito C: *Mas essa noção tem que ser trabalhada antes: o aluno já tem que vir com a noção dos números inteiros; um grande problema do ensino da Álgebra é justamente a Aritmética! [...], muitos professores têm o costume de querer trabalhar a Álgebra com o aluno sem saber se ele tem conceitos aritméticos [...].*

Qual é o número que, somado com três dá cinco? Ele consegue, ele tem aquela noção básica: é o 2, mas quando eu digo: qual é o número que somado com 3, dá 2 ? Se ele não tem noção de número inteiro [...], ficou uma pergunta muito difícil para ele responder. [...]. Se ele nunca viu números inteiros, não foi trabalhado na série anterior, [...] não tem condições de responder isso. [...]. Fica humanamente impossível para esse aluno dar uma resposta [...]. O problema está aí! A maioria dos nossos alunos vem sem noção aritmética.

Então, para trabalhar Álgebra, é necessário que você trabalhe primeiro essa noção aritmética! Fale novamente de número oposto; representação geométrica; entenda realmente a questão do número oposto, para poder dar a noção dos princípios multiplicativos e aditivos. Se você vai direto para o principio multiplicativo, mas o aluno não tem noção de número inteiro, ele se perde.

Se você tem alunos com uma boa noção de aritmética, você começa a relacionar a Álgebra com a aritmética, ele vai gostar da Álgebra, o que aconteceu no nosso caso.

A Álgebra, para mim [...] foi uma ferramenta que me ajudou muito a resolver problema, tanto é que, não só eu, eu creio que a maioria aqui, quando vai resolver um problema, quer logo algebrizar: ninguém quer pensar aritmeticamente. Eu vou logo para o x, porque é uma ferramenta muito boa. Quando você domina as técnicas [...], ela te dá soluções rápidas que, através da Aritmética, você teria dificuldade: meio mais x dá dois sétimos! Qual é o número que somado com meio dá dois sétimos? Faz isso aritmeticamente! Na Álgebra sai bem mais rápido. [...]. É a forma como eu começo a trabalhar. O ensino da Álgebra, para mim, começa com o ensino da aritmética, ligando os dois.

Para o ***sujeito C***, um pré-requisito para o ensino de Álgebra é a aritmética, isto é, antes de se ensinar Álgebra é necessário que o aluno tenha aprendido Aritmética. O ***sujeito C*** reforça a idéia de álgebra como ferramenta. A seguir, veremos como o ***sujeito D*** afirma que introduziria o conceito de equações em sua aula. Este discurso gerou uma polêmica entre os participantes da atividade quanto ao contexto de se introduzir Equações do Primeiro Grau. Alguns sujeitos intervieram em sua fala e apresentaram suas opiniões sobre esta maneira de fazer.

Sujeito D*: Eu colocaria um problema [...] do dia a dia, como, por exemplo, numa corrida de taxi [...], você vai pagar aquela taxa de saída no carro [...]. Se por quilômetro você paga dois reais (fica instigando o aluno a ter a sua solução mentalmente).*

Sendo a taxa três reais, se eu andar cinco quilômetros quanto eu devo pagar para o taxista? [...] eu tento facilitar dando uma ideia bem simples. Sempre eu procuro trabalhar com uma igualdade numa equação.

No exemplo de ***sujeito D*** o conceito de equações é apresentado na perspectiva de uma função afim. O contexto apresentado pelo ***sujeito D*** é um anúncio de um problema aritmético[15] como introdução para os conceitos algébricos. Este exemplo gerou uma polêmica quanto ao contexto de se ensinar Equações do Primeiro Grau. Alguns sujeitos intervieram na fala de ***sujeito D*** e apresentaram suas opiniões sobre o exemplo citado. Para alguns, esta ideia não estaria coerente com o contexto de equações, mas outros aceitavam esta proposta como válida. Iremos apresentar o debate gerado em ordem cronológica:

***Sujeito C** (pede a palavra): Essa questão aí, **sujeito D**, eu fico preocupado porque você tem que ter muita noção de quando você vai trabalhar a Álgebra (equação do primeiro grau), quando essa incógnita vira variável. Nessa situação, talvez, do taxi aí, não sei (eu posso estar enganado), mas eu acredito que ela é mais viável para função. Aí, esse x aí, deixou de ser incógnita, eu vejo assim.*

***Sujeito H**: Mas aí, depende da tarefa...*

***Sujeito C** (defende seu argumento): Não! Se é Equação do Primeiro Grau, o x é incógnita e tem um valor determinado. Ele fechou ali naquele valor!*

***Sujeito H**: Não, mas se ele deu o valor da corrida, aí aquela variável vai ser incógnita.*

***Sujeito C:** Ah!, mas aí tem que ter uma preocupação nessa questão, de você fechar para equação; se você deixar aberto ali, vira uma função.*

***Sujeito A:** Eu vejo essa questão de modo mais amplo. Na minha concepção [...], toda equação é uma função. Quando é que você tem uma equação? Quando você vai determinar o zero da função. Qualquer situação, qualquer equação que você monta você vai relacionar grandezas.*

***Sujeito C:** Função: pares; equação: não; x + 2 = 4, você não tem uma função.*

***Sujeito A** (explicando): Tem! Aí é o zero de uma função!*

***Sujeito D:** Na verdade quando você iguala, vai se transformar numa equação.*

---

[15] Segundo Sá (2002) um problema aritmético é aquele cuja resolução operacional, não exige de maneira implícita ou explicita as propriedades aditivas ou multiplicativas da igualdade, por exemplo, o problema “um cinema tem 25 fileiras de 18 cadeiras cada. Não sendo permitido assistir filme em pé, quantas pessoas são necessárias para lotar o cinema três vezes?” de acordo com Sá (2002) é um Problema Aritmético.

Sujeito C: *x + 2 = 4, eu não vejo como uma função.*

Sujeito A: *Qualquer equação que você monte você vai relacionar grandezas. Então você monta uma equação. Agora a diferença que está no ensino da equação é que você não fala na função. Vai falar que para ter x +1 = 0 teve que ter uma função antes. Deve ter uma relação entre grandezas. Aí você chega no x + 1 = 0, por exemplo. Quando você vai encontrar o zero da função.*

Sujeito A*: A Álgebra [...] é uma ferramenta poderosíssima, que você é capaz de perceber se um problema tem solução ou não. Porque, às vezes, por aritmética, você vai passar a vida toda e não consegue dar a solução de algum problema, porque ele nem solução tem! E a Álgebra vem justamente favorecer isso, por exemplo, se você botar o seguinte problema: o dobro de um número somado com três é igual ao seu dobro somado com cinco. Esse problema não tem solução (matemática), mas você consegue verificar isso se você dar uma feição de Álgebra pra ele. Você vai ver que você não consegue resolver, mas, aritmeticamente, você vai pensar muito isso.*

Percebemos nesta discussão o interesse dos sujeitos em um consenso sobre a definição de equação a fim de apresentá-la de maneira uniforme. No caso desta pesquisa, quando o grupo de sujeitos busca compreender o objeto equação, seus elementos e sua definição, então o objeto equação, para este grupo, passa a ser um objeto matemático.

A discussão continua com o ***sujeito A*** defendendo que em qualquer contexto uma equação representa uma relação entre grandezas indicando a ideia de funcionalidade. O ***sujeito C*** refuta esta ideia e defende o cuidado que se deve ter ao introduzir um conceito matemático.

Sujeito C*: Eu respeito, mas eu discordo. Se você for estudar o que aquele x vai ser numa expressão algébrica, ele pode ser incógnita, pode ser só uma relação, uma posição, só representação, nem sempre ele vai ser um número. Dentro da teoria dos conjuntos, por exemplo, as letras não representam números. O x vai representar várias coisas aí.*

Sujeito C*: Então, a questão da Álgebra é muito profunda nessa situação. Tem que tomar cuidado com o que o x é nesse momento. Ele pode representar uma quantidade ou não*

O ***sujeito C*** adverte sobre as possíveis denotações para a letra em uma representação algébrica. A seguir o ***sujeito E*** retoma a questão sobre como introduz o tema Equação do Primeiro Grau.

Sujeito E*: Eu tirava alguns itens como, por exemplo, o dobro de um número. O que é o dobro de um número? É o dois multiplicado por uma letra. Aí que a gente se deparava: que letra é essa? Aí comumente a gente representava essa letra por x. Então o que é o dobro de um número? Duas vezes o x. O que é o triplo de um número? Três vezes o x. Então eu levava essa ideia para o aluno* *dessa maneira formando uma lista dessas etapas até ele criar uma ideia para ele mesmo dessa questão da Álgebra e a partir daí, usando uma situação-problema, possa ser ma ferramenta que possa ajudar na construção das equações.*

O ***sujeito E*** reforça sua concepção de Álgebra no sentido de operações com números e letras. Percebemos também que as tarefas que o mesmo propõe em suas atividades de sala de aula são pontuais, isto é, apóiam-se em um mesmo tipo de tarefas a fim de torná-las rotineiras. Vejamos o depoimento do ***sujeito G***.

Sujeito G: *Quando eu vou trabalhar a questão da equação. Eu questiono meus alunos: Porque faz parte da Álgebra? O que seria a Álgebra? A questão das equações, chegar às equações do primeiro grau, infelizmente um grande problema para quem tem trabalhado esse assunto [...], eu consigo perceber que se o aluno não adquiriu conhecimento das séries anteriores ou até mesmo da própria série, que é a questão do conhecimento sobre números inteiros, trabalhar com aquela noção básica dos números inteiros[...]. Então eu procuro [...], fazer uma retomada dos conteúdos anteriores, tanto que meu aluno consegue entender a questão do principio aditivo, o princípio multiplicativo, até o "método prático", que é essa ideia: está somando, passa subtraindo, está multiplicando, passa dividindo.*

Conforme o depoimento do ***sujeito G***, o mesmo inicia sua aula com perguntas a fim de instigar os alunos bem como avaliar a relação dos mesmos com o tema equação do primeiro grau. O sujeito também aponta os conceitos aritméticos como um pré-requisito para a aprendizagem dos conceitos algébricos e que as principais dificuldades em Álgebra dizem respeito a falta de conceitos aritméticos.

Sujeito H: *Se eu for introduzir a equação, eu sempre introduzo com situações-problema que às vezes, geram mais de uma incógnita, ou variável dependendo da situação. Aí eu dou a ênfase que aquela letra pode assumir qualquer valor, e, cada pessoa que eu pergunte quanto é um quilo de farinha Para um aluno é um valor, para aquele outro é um valor. Então, aquele símbolo que representa o valor, o quilo, eu não estou pensando na letra, pode ser qualquer símbolo, pode assumir qualquer valor que eu queira. Aí que eu introduzo a Álgebra. Serve para estimar valores desconhecidos. Tudo na matemática que a gente desconhece o valor, pode ser atribuído uma letra, uma variável.*

O ***sujeito H*** tem a preocupação de, inicialmente, familiarizar o aluno com a estrutura de uma equação, independente de sua resolução. Notamos que o alcance da técnica do ***sujeito H*** permite uma relação entre equações e funções (tecnologia). Neste caso há um avanço no sentido de partir de um conceito pontual para um conceito mais geral, que é o de variável, ou seja, apresenta uma concepção diferente da de aritmética generalizada.

Professor I: *Eu sempre tento iniciar por uma comparação com o inglês, por exemplo: como eu represento em português uma palavra em inglês? Então eu coloco palavras como eu, você; está aqui! Você tem outra representação. Então quando eu vou trabalhar uma situação-problema, eu tento fazer essa comparação. Uma situação que eu tenha que representar de outra forma. Olha como matemática é mais fácil que inglês! Tu tens que representar toda essa frase, tu podes representar por uma letra.*

Ah! eu gosto de usar o x! Você gosta de usar o y. Então eles vão tendo uma familiaridade com a questão da linguagem. Aí entra a questão do dobro, do triplo: como é que eu represento essa frase? Como é que eu represento isso? Como é que eu represento aquilo? Até a questão das situações, como é que eu represento alguém que está alegre? Ah! Coloca uma carinha de feliz. Então a questão da representação, para mim, é a base da Álgebra.

Professor I*: Aí nas operações [...] a ideia da balança é a ideia que mais eles conseguem visualizar, a questão do colocar, de retirar, de equilibrar a balança, aquela noção de que a igualdade [...]. A mesma coisa vai funcionar nas equações. Por que é do primeiro grau? (eu acho que é uma coisa que a gente quase não comenta em sala); por que ela recebe esse nome "primeiro grau"? Quer dizer: tem o segundo?, tem o terceiro? Então, vai piorar. Aprende logo essa! Porque depois vai piorar! [...]. É necessário que eles saibam por que é esse nome. Então, a linguagem é a base. Se o aluno souber fala a Álgebra, vai facilitar lá na frente, a ele escrever uma equação.*

O professor defende a Álgebra como uma linguagem da matemática e sua maneira de apresentá-la em sala de aula reforça sua concepção ao relacionar a linguagem materna com a linguagem matemática. A seguir apresentamos o quadro 4, o qual ilustra as perspectivas de Álgebra predominantes nos discursos dos professores nas sessões 1 e 2.

Quadro 4: Modelos Globais segundo Bolea Catalán (2003)

Programa Cognitivista (Modelo Psicológico)		Programa Epistemológico (Modelo Epistemológico)
Perspectiva		Perspectiva
Conceitualista	Psicolingüística e Processualista	Aritmética Generalizada
sujeito D sujeito E sujeito F sujeito G	sujeito C sujeito E sujeito I	sujeito A sujeito B sujeito D sujeito G sujeito H

Fonte: autor

Verificamos que o modelo dominante revelado em fragmentos das epistemologias espontâneas dos professores vai ao encontro dos anunciados por Chevallard (1993), Gascón (1994) e Bolea Catalán (2003), no que diz respeito à aritmética generalizada. Em nossos estudos temos percebido o anuncio de modelos alternativos para o ensino de Álgebra na tentativa de fornecer uma economia didática, e tendo em vista o alcance de níveis de complexidade crescente, como as propostas de Ruiz, Bosch e Gascón (2010) e; Pereira (2012).

Na sequência do sistema didático agendamos uma terceira sessão (sessão 3) com o objetivo de obter uma compreensão da epistemologia do objeto Equações do Primeiro Grau.

A sessão 3 também permitiu um aprofundamento da compreensão dos conceitos algébricos, desta forma, nos dispusemos a investigar as principais contribuições para o avanço dos conceitos algébricos ao longo da história e verificar a possibilidade de distinguir alguns conceitos relativos a está área, como a noção de incógnita, a noção de variável, e noção de parâmetro.

4.3 ESTUDO EPISTEMOLÓGICO DE CONCEITOS ALGÉBRICOS

Essa fase da pesquisa ocorreu em duas etapas e visou um estudo de epistemologia do objeto Equações do Primeiro Grau e aprofundar o conhecimento dos sujeitos acerca dos conceitos. Nesta sessão realizamos um estudo em livros de História da Matemática (EVES, 1997; BOYER, 1998; GUELLI, 1997) sobre alguns conceitos algébricos e discutimos sobre as principais contribuições dos matemáticos para o estudo das equações. Desta forma, os sujeitos se dividiram em grupos e estudaram obras com temas diferentes. Nestes estudos foram feitas discussões sobre as contribuições dos egípcios e Mesopotâmios, Diofanto, Viete, os árabes e indus para o estudo das equações, no final foi realizado um panorama da evolução do conceito de Álgebra.

Primeira etapa da sessão 3, Um grupo de estudo apresentou um seminário sobre a Matemática egípcia e mesopotâmica. Ambas as civilizações adotavam a Álgebra retórica cujo método principal era o da regra da falsa posição, uma espécie de procedimento aritmético para resolução de problemas do primeiro grau com o auxilio de métodos da proporcionalidade.

Na regra da falsa posição é atribuído um valor qualquer ao valor desconhecido e, ao se perceber que esse valor não corresponde ao resultado desejado usa-se um método semelhante à proporcionalidade para encontrar um valor numérico que satisfaça esta sentença, por exemplo, o problema 25 do papiro Rhind propõe que uma quantidade somada à sua metade resulta em 16, neste caso, busca-se um valor conveniente para a quantidade, digamos o 8. Ao testar este número percebe-se que o mesmo não satisfaz a sentença proposta, pois $8 + \frac{8}{2} = 12$. Desta forma o número 8 é tido como valor falso. Em seguida, faz-se uso do seguinte procedimento: a resposta falsa (12) está para o valor falso (8) assim como a resposta verdadeira (16) está para o valor verdadeiro (□).

$$\frac{12}{8} = \frac{16}{\square} \rightarrow \square = \frac{32}{3}$$

Os sujeitos buscaram experimentar este método como tipo de tarefa para compreenderem seu funcionamento e discutirem sobre a possibilidade de usá-lo no ensino. Entendemos que o uso da história da matemática possibilita melhorias para o processo de ensino e aprendizagem uma vez que contribui para a ampliação de saberes do professor e permite o resgate da aprendizagem dentro de um contexto.

No caso da regra da falsa posição como meio alternativo de ensino de equações, é importante verificar a viabilidade da adoção desta proposta em sala de aula. Vale ressaltar que o uso de meios auxiliares de ensino não substitui o professor e nem garante sucesso no exercício da docência. Há muitos fatores em jogo como a cultura dos alunos, sua faixa etária, classe social, dentre outros.

Ainda na primeira etapa da sessão 3, outro tema abordado por uma dos grupos foi sobre as contribuições de Diofanto para a notação algébrica no que se refere à representação sincopada, que adotava abreviações e símbolos para representar as operações e expressões algébricas. Esta notação significou um avanço no sentido de economia para a resolução de problemas envolvendo equações, mas ainda podia ser considerada extensa se comparada com a notação mais atual.

Na segunda etapa da sessão 3, os temas de estudo foram a Álgebra geométrica, a participação dos árabes no desenvolvimento e divulgação da Álgebra, a Álgebra proposta por Viéte e, panorâmica da evolução dos conceitos algébricos nas fases retórica, sincopada e simbólica.

Com relação Álgebra geométrica um grupo apresentou um seminário discutindo como relacionar a história da matemática com o ensino de produtos notáveis com o auxilio de recurso multimídia. Neste seminário os sujeitos buscaram mostrar como relacionar os termos algébricos com a ideia de soma de áreas e soma de volumes.

Com relação às contribuições dos árabes e hindus, outro grupo levantou os principais tópicos extraídos de seu estudo. Destacaram a origem os termos algoritmo e algarismo, fazendo referência ao matemático al-Kowharismi; e o termo Álgebra do livro aljabr. Além disso, o grupo enfatizou a contribuição da escrita árabe para a Matemática.

A respeito das contribuições de Viéte para o desenvolvimento de conceitos de Álgebra, um dos grupos destacou como assunto para discussão a tentativa de discernir os conceitos de parâmetro, incógnita e variável em busca de tornar estas noções mais claras para um ensino mais coerente. Este tema despertou o interesse de sujeitos de outros grupos os quais tentaram obter um consenso. A seguir, apresentamos um recorte do debate sobre o significado e distinção entre os termos “incógnita, variável e parâmetro”. Vejamos.

Sujeito A*: com relação ao conceito de parâmetro variável e incógnita: Eu tive um entendimento sobre a leitura do texto numa expressão* $ba^2 + ca + d = 0$*, onde ele diz que b, c e d são os parâmetros. Então eu entendi aqui que os parâmetros vão ser aqueles coeficientes. Não vai nem levar para a parte de incógnita nem de variável. Eu entendi como sendo os coeficientes da equação. Mas o colega falou que parâmetro tem a ver com variável.*

Sujeito J*: inclusive quando você pega a forma padrão de uma equação de uma circunferência que* $ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0$*, ele fala que a, b, c, d, e, e f são os parâmetros da equação. Parâmetro, variável e incógnita, não dá para distinguir, mas quando você pega uma equação do primeiro grau, aquele x perde o sentido de variável. Porque o sentido da palavra variável é que nós podemos atribuir vários valores.*

***Sujeito K**: Há muito tempo atrás eu ensinava que não havia diferença entre parâmetro variável e incógnita. Eram só as etapas que avançavam, na geometria você usa muito parâmetros, na equação de retas, por exemplo. Equação da circunferência, equação das retas, e já na Álgebra na sexta série você utiliza uma incógnita, vai para o ensino médio já aparecem as variáveis então no meu ponto de vista, são objetos distintos, mas não existe uma definição mesmo.*

Evidencia-se no debate sobre a possibilidade de diferenciar os conceitos de incógnita, variável e parâmetro no intuito de apresentar uma abordagem aos conceitos de maneira mais coerente possível com rigor matemático. Acerca disso, Chevallard (1989) também aborda sobre a importância de desenvolver trabalhos com parâmetros, principalmente nas fórmulas para o cálculo de medidas de áreas. A seguir podemos observar o registro da continuação da discussão sobre este tema.

***Sujeito J**: inclusive nas fórmulas as letras são variáveis que de acordo com a situação elas podem assumir um valor.*

***Sujeito D**: eu acho que coincide muito, porque se você for estudar uma função afim. O gráfico gera uma reta. Então se você for variar o valor de x para encontrar o valor de y você vai confrontar esses pontos e formar a reta, mas se você for pegar um ponto nesta função e igualar a função, você não vai ter uma variável, você vai ter uma incógnita, vai obter um valor apenas.*

***Sujeito J**: eu acredito que quando você pega uma função afim e encontra o zero ou a raiz dela você está transformando a função numa equação aí neste caso o x é uma incógnita, mas quando ela está na estrutura da sua função são as variáveis x e y.*

***Sujeito J**: a questão está na funcionalidade dele, qual a característica do parâmetro na equação? De repente fazendo os testes saber como é que a figura vai se comportar no plano cartesiano.*

A análise dos registros dos sujeitos permite verificar que não houve consenso quanto a suas opiniões sobre a diferença entre os conceitos de incógnita, variável ou parâmetro. Esta discussão remete para a importância de o professor ter um maior domínio do saber ao qual ensina, no entanto, entendemos que a questão não necessariamente é significativa para o ensino e aprendizagem de conteúdos de álgebra.

Nesta pesquisa partimos do princípio de Usiskin (1995) de que qualquer notação algébrica é uma variável, mas, de acordo com o contexto, esta variável assume o papel de incógnita, de parâmetro ou de variável. Estas discussões, juntamente com as leituras, despertaram maior interesse em compreender melhor os conceitos algébricos, por esta razão, agendamos outra reunião (sessão 4) para discutirmos sobre algumas concepções de álgebra segundo Usiskin (1995).

4.4 CONCEPÇÕES DE ÁLGEBRA

Na sessão 4, os sujeitos se organizaram em grupos de estudo os quais receberam fragmentos da obra de Usiskin (1995) a qual aborda sobre as concepções de Álgebra: *aritmética generalizada, relação entre grandezas, estrutura algébrica e procedimentos para resolver certos tipos de problemas.* Cada grupo deveria apresentar sua compreensão sobre as ideias de Usiskin (1995) acerca das concepções de Álgebra e relatar sua opinião sobre o assunto. Alguns dos sujeitos discordaram da obra e expuseram suas críticas. Vejamos o discurso do ***sujeito L.***

Sujeito L*: na concepção de variável, a ideia é que a palavra variável vem de variar, variação. Fica bem claro de se entender o significado de variável quando a gente trabalha com a mutação da expressão. Dependendo do valor que aquela letra assume, eu vou ter um determinado resultado. [...].*

Então eu tenho a variável "x", que vai ser variável quando eu olho para o contexto que vai determinar quem são as imagens quando aquele x do domínio assume valores distintos, ou eu vou determinar um único ponto quando eu especifico quem é o zero da função. Aí como é que eu obtenho? A minha variável y vai se tornar zero, ela tem um valor específico zero, e vai ser determinado o valor de x. Então naquele momento que eu gero uma equação, que eu passo a ter aquele valor específico não mais variável: ele é fixo. Nesse momento eu vejo que ele passa a ter um caráter de incógnita.

Neste depoimento percebemos uma resistência do ***sujeito L*** em aceitar e compreender a proposta de Usiskin (1995) com relação à noção de variável devido a um longo período de sujeições institucionais condicionando sua relação com este o objeto de saber. Ao longo de sua formação aprendeu que o termo "variável" está relacionado a relação entre grandezas, "incógnita" a número desconhecido e “parâmetro” a números conhecidos que se agregam às letras.

Sujeito L: *eu vejo que, se a equação é do primeiro grau, aquilo é uma incógnita. Agora, ainda na 6ª série, a gente vai trabalhar com as equações com duas variáveis. Quando eu passo a ter as variáveis, automaticamente eu gerei uma função. Eu vou passar a ter ali infinitos valores que eu vou poder somar e vou ter aquele mesmo resultado. Quer dizer, o resultado vai ser fixo, mas os valores que eu vou determinar essa soma são variáveis. Se a soma é 10, quem podem ser as variáveis x e y? O zero e o dez, mas se eu disser que é nove e um, está certo. Eu vou poder mudar os valores e eles serão chamados de variáveis.*
Sujeito L: *a minha concepção de variável e de incógnita é bem clara. Se eu tenho uma função, eu vou variar, se eu tenho uma equação, eu vou ser específico.*

Neste contexto o ***sujeito L*** comete um equivoco conceitual, pois o fato de uma expressão de igualdade algébrica possuir duas variáveis não é condição suficiente para que a mesma seja função. É necessário que haja relação de dependência entre dois conjuntos.

O estudo das concepções de álgebra permitiu aos sujeitos perceberem outras possíveis abordagens para conceitos algébricos além da abordagem de número generalizado. Estudos como este contribuem para a ampliação dos saberes dos docentes e geram indicativos de meios auxiliares para o ensino de Matemática. Quanto à questão sobre distinguir os conceitos de incógnita, variável e parâmetro, compreendemos que as discussões sobre este assunto não suscitaram resultados significativos. Este tipo de discussão pode despertar o interesse do professor, mas necessariamente despertará do aluno.

A seguir apresentamos os resultados da sessão 5 que teve como foco de abordagem as características de Bolea Catalán (2003).

4.5 ESTUDO DAS CARACTERISTICAS DA ÁLGEBRA COMO ARITMÉTICA GENERALIZADA

Tendo sido apresentados o significado do termo "aritmética generalizada" e as outras possíveis abordagens desta área, propusemos aos sujeitos na sessão 5 o estudo e discussão sobre o predomínio nas instituições escolares da abordagem algébrica como Aritmética Generalizada, caracterizando-a como modelo epistemológico dominante nas instituições escolares. Nosso objetivo com esta sessão foi criticar o modelo de aritmética generalizada apontando alguns de seus aspectos positivos e negativos, verificando possíveis limitações deste modelo.

Desta forma os sujeitos da pesquisa receberam um recorte do capítulo 3 da tese de Bolea Catalán (2003) o qual apresentava as características da Álgebra na perspectiva de aritmética generalizada, as quais indicam para o uso frequente da linguagem algébrica como prolongamento ou generalização da linguagem aritmética; a adoção de habilidades de cálculos mentais aritméticos como conhecimentos prévios e; dificuldades nos alunos na manipulação de expressões algébricas com incógnitas, devido a ausência de termos unicamente numéricos.

Após a leitura sobre o tema o diretor de estudo $\boldsymbol{Y_A}$ comentou sobre a existência do modelo predominante nas instituições escolares e levantou os seguintes questionamentos *"o que caracteriza um modelo como dominante em uma instituição?"* E "*Em suas práticas de sala de aula, você percebe o predomínio da aritmetização da Álgebra escolar?*". Estes questionamentos geraram as discussões as quais foram analisadas. Vejamos os fragmentos de alguns discursos dos sujeitos.

Sujeito C: *em nossa prática de sala de aula, nós damos muita ênfase à aritmética, inclusive hoje, a minha fala é esta: o aluno que não aprende as quatro operações aritméticas possui muita dificuldade.*

Sujeito L: *Eu vejo que a aritmética generalizada realmente é dominante. Porque é ensinada literalmente de forma direta com as variáveis e símbolos sem se preocupar com a construção dessa Álgebra a partir do modelo geométrico. E é um consenso entre os professores da área de matemática seguir o modelo de generalização da aritmética e não tentar fazer diferente.*

No discurso dos ***sujeitos C*** e ***L***, os conceitos algébricos são indicados como um prolongamento dos conceitos aritméticos. Desta forma é a abordagem de sala de aula para os conteúdos de Álgebra encaminham para a aritmética generalizada, raramente, segundo os mesmos, se trabalha segundo uma perspectiva diferente. Esta informação está de acordo com o resultado da pesquisa de Santos (2005), segundo a qual, no Brasil o há um predomínio da abordagem algébrica como aritmética generalizada.

Sujeito H: *Eu acho que o modelo dominante é caracterizado pelas instituições governamentais, no caso, a noosfera define o modelo que será o dominante.*

O ***sujeito H*** apresenta o interesse em descrever o fenômeno a questão em jogo nos moldes da TAD e estabelece uma relação com os níveis de codeterminação na praxeologia do professor de matemática. Neste caso, o nível pedagógico determina o que o professor deve ensinar. No depoimento a seguir, percebemos o depoimento do ***sujeito C*** no qual indica sua compreensão sobre o assunto.

Sujeito C*: Na verdade o professor usa o modelo que considera mais confortável. [...] acaba reproduzindo o modelo que aprende.*

Y_A: *Porque que você acha que é mais confortável ensinar Álgebra a partir da aritmética?*

Sujeito C: *Se eu tivesse que elaborar uma aula de Álgebra partindo da geometria, eu teria dificuldade. Se eu tivesse que elaborar um plano de aula agora para o ensino de Álgebra eu iria partir da aritmética e não da geometria, devido a ensinamentos que eu tive, devido aos conceitos absorvidos e das práticas dos meus mestres.*

Y_A: *Poderia dizer que se trata de um aspecto cultural?*

Sujeito C: *Poderia sim.*

O ***sujeito C*** confirma o que foi apontado no item 1.2 desta dissertação, que o modelo epistemológico dominante se estabelece como meio cultural de ensino e aprendizagem, neste sentido, a epistemologia do professor é conformada a partir de sua experiência como aluno; formação acadêmica; livro didático que adota; instituição em que atua; etc. Esta compreensão é complementada pelo ***sujeito M*** a seguir.

Sujeito M: *A maioria dos professores acaba se baseando no livro didático.*

O ***sujeito M*** reforça os comentários apontando para a influência que o Livro Didático exerce na praxeologia do professor, conformando, assim, sua epistemologia espontânea. Na sequência, o ***diretor*** $\boldsymbol{Y_A}$ busca verificar que limitações os sujeitos da pesquisa percebiam do ensino de conteúdos algébricos segundo a perspectiva de aritmética generalizada.

$\boldsymbol{Y_A}$***:*** *De um modo geral, se parte de conceitos aritméticos para introduzir os conceitos algébricos. Vocês percebem alguma limitação deste modelo em relação ao ensino de matemática?*

Sujeito C: *eu vejo uma limitação neste modelo, por exemplo,* $x^3 + x^2$ *[...] na certa ele vai responder 5x devido á relação com a aritmética.*

O ***sujeito C*** propõe uma possível limitação da abordagem algébrica como aritmética generalizada que diz respeito a dificuldades de aprendizagem originárias de associação inadequada com conceitos aritméticos. Esta indicação de dificuldade é apresentada no capítulo 2 de nossa dissertação na análise das pesquisas das últimas décadas sobre o ensino de Álgebra. A abordagem de dificuldades em álgebra devido a conceitos de aritmética também é apontada nas características de aritmética generalizada na obra de Bolea Catalán (2003). A seguir podemos verificar uma proposta do ***sujeito L*** para tentar superar a possível limitação da perspectiva de Álgebra como aritmética generalizada.

Sujeito L: *Eu trabalho com o meu aluno, quando vou abordar as expressões algébricas, a noção de número quadrado perfeito que representa o produto entre dois fatores iguais, então eu associo esta noção à noção de quadrado (que o aluno já domina). Geometricamente, esse número quadrado perfeito representa a área de um quadrado. É importante criar com o aluno a ideia de o que é quadrado e o que é um cubo. O aluno deve entender que o quadrado tem a ver com superfície e o cubo com volume.*

Sujeito C: *Sim, a solução para a limitação do modelo de aritmética generalizada pode ser a geometria. O problema que eu apresentei é fato entre os alunos. E aí, a geometria poderia solucionar esta limitação.*

$\boldsymbol{Y_A}$***:*** *o que seria um modelo alternativo.*

O ***sujeito L*** afirma que seu método relacionando conceitos algébricos com os geométricos é satisfatório no sentido que supera a limitação apresentada pelo ***sujeito C***. No que diz respeito à limitação apontada pelo ***sujeito C*** percebemos que a abordagem de termos algébricos como unidades de área e de volume contribui para a compreensão de algumas expressões algébricas.

Após as discussões sobre o predomínio nas instituições escolares da noção de Álgebra como aritmética generalizada. Os sujeitos puderam tomar consciência da existência de um modelo epistemológico dominante e fazer críticas ao mesmo evidenciando seus aspectos positivos e negativos. Ressaltamos que a abordagem de aritmética generalizada é legítima e facilita muito o ensino de Álgebra em alguns aspectos, no entanto, esta prática de ensino tende a habituar o aluno a recorrer sempre de casos particulares para depois generalizá-los.

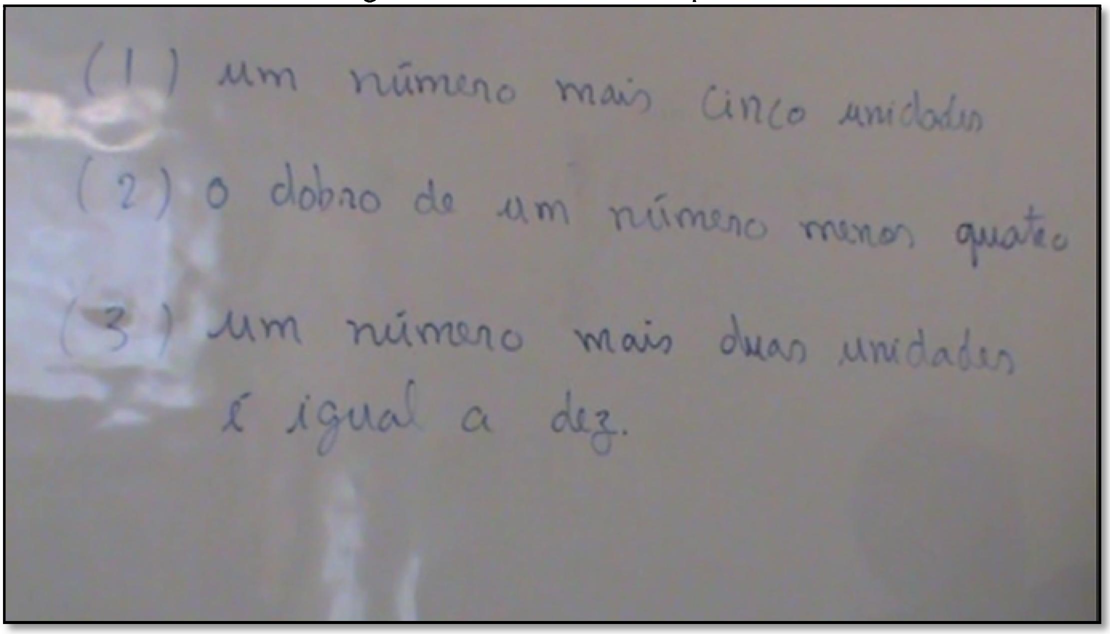
No intuito de verificarmos que mudanças os sujeitos da pesquisa apresentariam em suas praxeologias após a organização do sistema didático em torno da questão “como ensinar equação do Primeiro Grau?” solicitamos aos mesmos que expusessem na sessão 6 como abordariam o tema Equações do Primeiro Grau.

4.6 EXPOSIÇÃO DE PRAXEOLOGIAS DOS SUJEITOS

Neste encontro, os sujeitos foram organizados em grupos para estudar e apresentar obras que cuja abordagem tratava de modelos epistemológicos alternativos de conceitos algébricos. Os sujeitos foram divididos em 4 grupos os quais realizaram um seminário apresentando as ideias principais dos autores das obras relacionadas aos modelos. Após este seminário, solicitamos que um representante de cada grupo expusesse suas praxeologias para verificar se havia alguma mudança quando comparada às informações no questionário e nas gravações de suas falas.

O ***sujeito J*** ministrou uma aula hipotética, na qual apresentou sua Organização Didática partindo da leitura de um texto histórico anunciando os elementos de uma equação, como incógnita e o sinal de igualdade; e a origem e significado da palavra Álgebra. Após a leitura o ***sujeito J***, solicitou aos alunos que comentassem quais palavras do texto lido os mesmos desconheciam em seu vocabulário. Tendo sido feita esta introdução ao conteúdo equação do primeiro grau, o ***sujeito J*** passou uma atividade no quadro magnético (Figura 10):

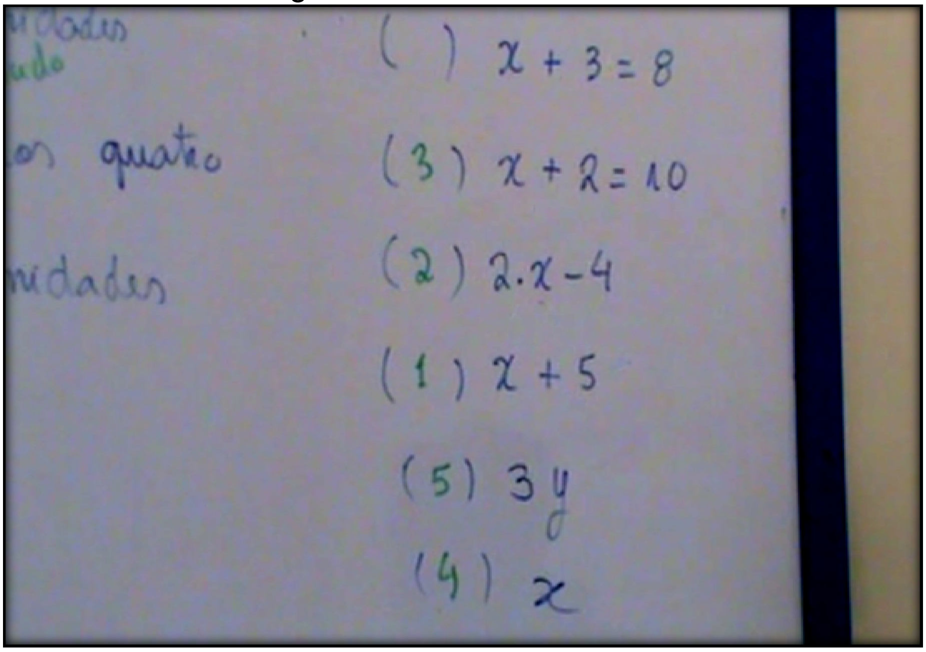
Figura 10: Coluna da Esquerda



Fonte: autor

O ***sujeito J*** propôs uma atividade na qual o aluno é deve relacionar informações da coluna da esquerda (Figura 10), contendo expressões matemáticas escritas em linguagem da língua portuguesa; com a coluna da esquerda (Figura 11) contendo expressões matemáticas de cunho algébrico.

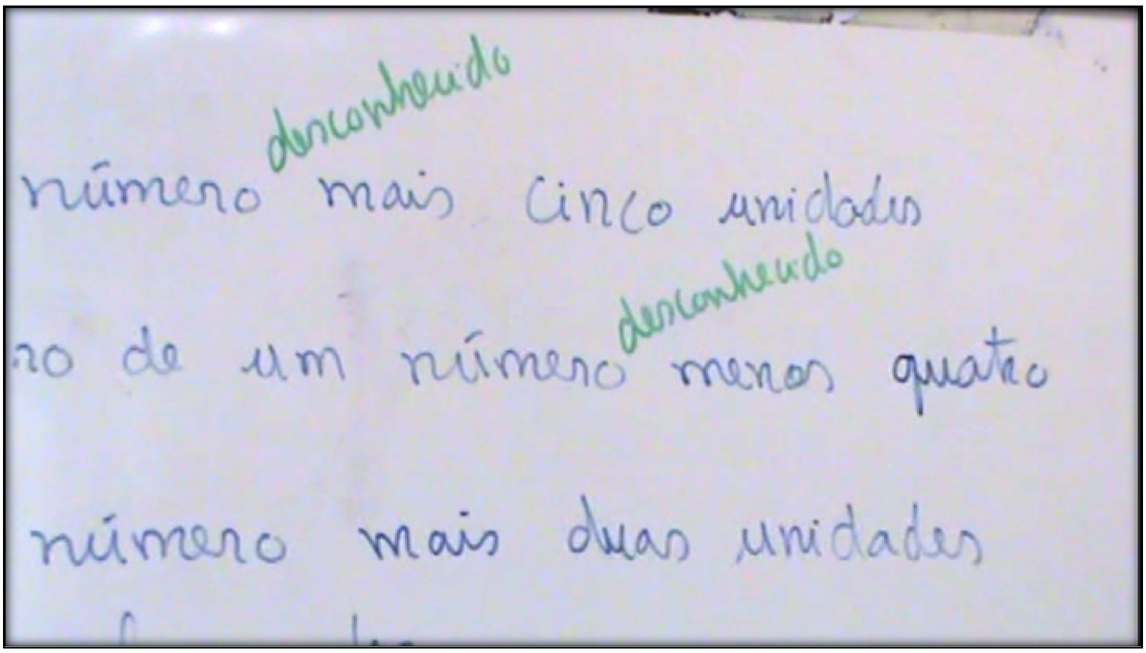
Figura 11: Coluna da Direita



Fonte: autor

Esta exposição aponta para a influência da perspectiva psicolinguista e processualista sobre a concepção do professor. Além disso, a atividade proposta sugere a relação de conceitos algébricos com aritméticos, caracterizando, assim, a razão de ser do objeto matemático Equação do Primeiro Grau. No momento da exposição do ***sujeito J***, alguns colegas contribuíram com sua atividade sugerindo um complemento no comando (Figura 12).

Figura 12: Praxeologia do sujeito J

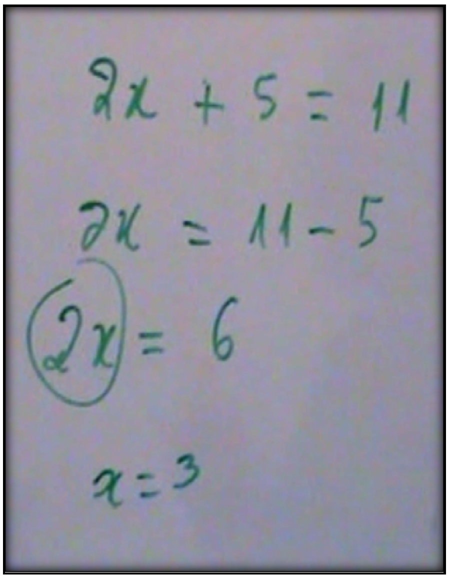


Fonte: autor

Após acatar as sugestões ***sujeito J*** solicitou a participação dos demais sujeitos na atividade e, em seguida, discutiu sobre quando uma expressão é ou não uma equação. O sujeito apontou para a importância de iniciar a abordagem ao conteúdo matemática partindo de uma situação problema, em vez de iniciar com a expressão formal de uma equação.

Após relacionar os elementos da coluna da direita com os elementos da coluna da esquerda, o sujeito pede a participação dos alunos para obter o valor do número desconhecido. No primeiro caso, a solução da equação $x + 3 = 8$ é 5, no segundo caso, a equação $x + 2 = 10$ possui como solução x = 8, já no terceiro caso em diante, não é possível obter solução, pois a expressão não é uma equação. Explica que resolver uma equação é o mesmo que encontrar o valor do número desconhecido. E dá como exemplo a expressão 2x + 5 = 11 (Figura 13).

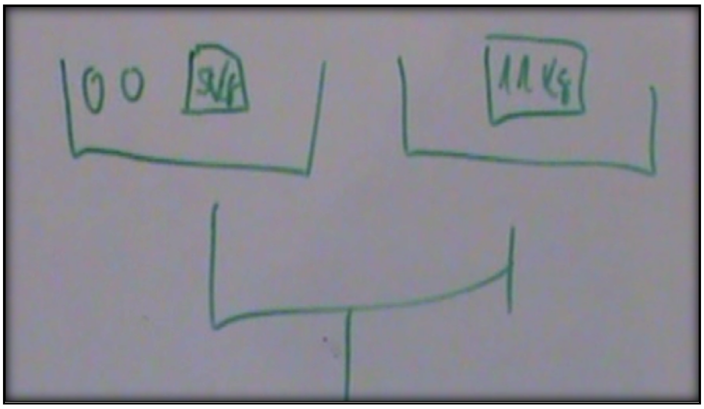
Figura 13: Praxeologia do sujeito J



Fonte: Autor

Aproveitando exemplo da Figura 13, o ***sujeito C*** comenta que usa em sua prática de sala de aula a ideia de equilíbrio da balança de dois pratos (Figura 14) e que esta abordagem tem apresentado sucesso, pois, segundo o ***sujeito C***, os alunos conseguem atribuir corretamente o valor do número desconhecido. Afirma que usando um contexto real para exemplificar, como a balança, auxilia o aluno a compreender melhor participando da aula.

Figura 14: Representação de uma balança de dois pratos

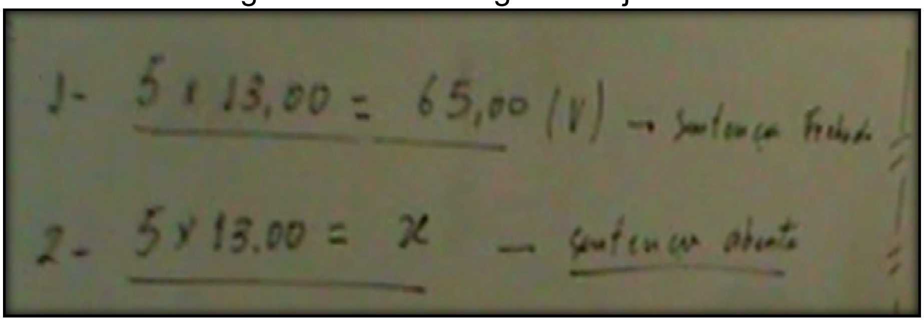


Fonte: Autor

Na figura 14, o ***sujeito C*** associa a ideia de equação com o equilíbrio de massas, onde, de um lado da balança, há um peso de 11kg e de outro, um peso de 5kg mais dois pesos com mesma massa mas de medidas desconhecidas. Desta forma, o aluno deve estabelecer a relação entre as medidas mentalmente. A seguir é apresentada a praxeologia do ***sujeito A***.

O ***sujeito A*** iniciou sua aula partindo de uma situação problema na qual é dado o preço do quilo de carne e é solicitado que se determine quantos reais serão gastos se forem comprados 5 kg de carne (Figura 15).

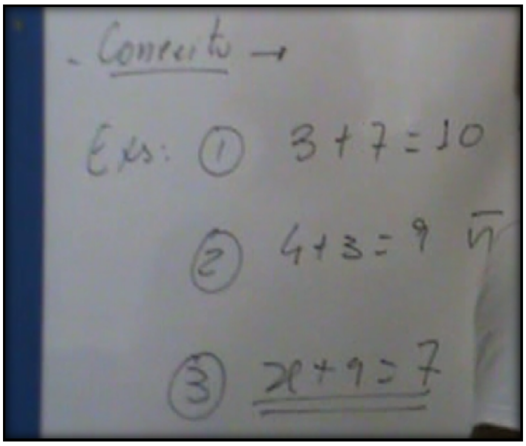
Figura 15: Praxeologia do sujeito A



Fonte: Autor

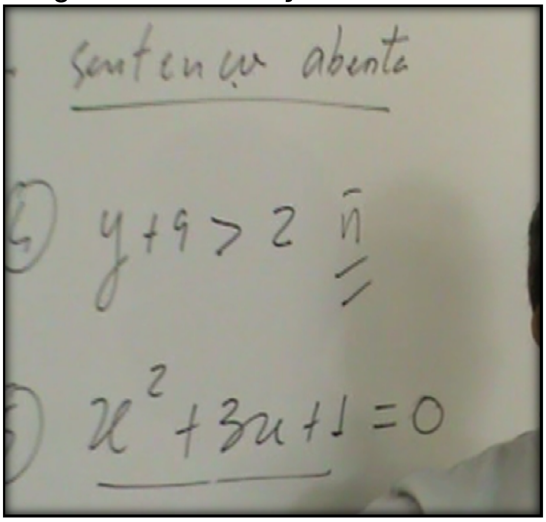
Após a análise e resolução de questão contextualizada, o ***sujeito A*** comunica que quando se resolve uma questão deste tipo, está-se resolvendo uma equação. Em seguida, apresentou algumas expressões algébricas a fim de explicar a diferença entre sentença aberta e sentença fechada (Figura 16 e Figura 17). Com base na discussão sobre sentença aberta ou fechada, definiu uma equação como uma sentença matemática aberta expressa por uma igualdade.

Figura 16: Exemplos de Sentenças Matemáticas



Fonte: autor

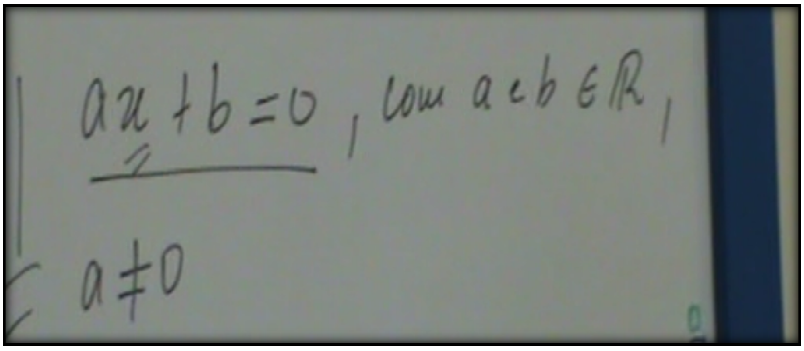
Figura 17: Sentenças Matemáticas



Fonte: Autor

O ***sujeito A*** aproveitou o contexto apresentado na Figura 17 para discutir qual das sentenças representa uma equação. Percebemos nesta praxeologia a preocupação em levar em conta o formalismo matemático. Após esta discussão, o ***sujeito A*** focou na equação do Primeiro Grau (Figura 18)

Figura 18: Praxeologia do sujeito A



Fonte: Autor

Na Figura 18 é apresentada a definição de equação do Primeiro Grau como toda expressão na forma ***ax + b = 0***, **a** e **b** Reais e **a** diferente de zero.

O ***sujeito B***, relatou que sua praxeologia é a mesma que já havia comentado em outras sessões, usa exercícios clássicos da história da matemática com base nos papiros Ahmes e Rind, em seguida solicita ao aluno para pensa em um número qualquer e pede para simbolizar “um número qualquer” estabelecendo a relação da linguagem materna com a linguagem matemática. Na sequência o ***sujeito B*** propõe tarefas baseadas na tarefa anterior: represente o dobro de um número, represente o triplo de um número mais 4, e assim por diante, até formalizar a idéia de equação.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho, apresentamos os resultados de uma pesquisa com 23 professores de matemática em formação continuada tendo em vista a análise de suas concepções sobre o ensino de Equações do Primeiro Grau. O referencial teórico que adotamos foi a Teoria Antropológica do Didático (TAD), levando em consideração o modelo de algebrização proposto por Bolea Catalán (2003). Neste referencial, buscamos descrever a atividade humana em organizações praxeológicas e a atividade matemática em praxeologias matemáticas. Também destacamos a relação de níveis de determinação ou codeterminação com o processo de ensino de matemática.

Acerca do modelo epistemológico da Álgebra escolar, pesquisas no campo da TAD têm revelado a existência de modelos relativos ao ensino de álgebra nas instituições escolares e que, na passagem do saber a ser ensinado para o saber ensinado, o professor vale-se de uma epistemologia própria deste saber a qual foi adquirida ao longo de sua vida e que pode ser verificada em sua praxeologia em sala de aula, na construção do seu texto de saber, em seu discurso, suas escolhas de recursos para o ensino.

Quanto ao ensino de conteúdos de Álgebra na escola básica, leituras realizadas em obras do México, Espanha, França e Brasil, indicam o predomínio nas instituições escolares do modelo epistemológico na perspectiva de *aritmética generalizada*, esta informação nos direcionou a investigar os sujeitos da pesquisa quanto a sua maneira de compreender e abordar o objeto Equações do Primeiro Grau a fim de coletarmos fragmentos de suas concepções espontâneas e obter indícios de aritmetização da Álgebra em suas praxeologias.

Para identificar e caracterizar o encaminhamento de obras voltadas para o ensino de Álgebra realizamos um levantamento bibliográfico em teses, dissertações, livros e artigos, dos Estados Unidos, Brasil, Espanha, Portugal e México; as quais foram categorizadas segundo as perspectivas relativas ao ensino de Álgebra: Conceitualista; Psicolinguística e Processualista; aritmética generalizada. As referidas obras têm apontado para erros frequentes cometidos por alunos nos conteúdos de Álgebra, devido principalmente a uma associação equivocada de conteúdos algébricos com aritméticos.

O estudo destas obras permitiu constatar a relevância de investigações sobre as razões pelas quais os alunos cometem erros em Álgebra haja vista que a análise destes erros e de suas possíveis causas permite a melhor compreensão dos fenômenos que interferem na aprendizagem e a elaboração de propostas alternativas para superá-los.

A questão norteadora de nossa pesquisa foi: **Em que medida a constituição de um sistema didático com características de um PER interfere na epistemologia espontânea de professores em formação continuada acerca do ensino de equações do primeiro grau?**

Para respondermos à questão da pesquisa, adotamos como aspecto metodológico um processo de estudo denominado sistema didático herbatiano com características de um Percurso de Estudo e Pesquisa (PER), e com foco para a questão: como ensinar Equações do Primeiro Grau? Este percurso teve dupla funcionalidade: primeiramente a de um dispositivo didático, uma vez que permitiu aos sujeitos socialização de suas praxeologias e; sugestões para o aprimoramento das práticas; em segundo lugar a de dispositivo metodológico, pois as atividades possibilitaram a coleta de dados para analisar fragmentos das epistemologias espontâneas dos professores sujeitos da pesquisa encontrados em seus discursos.

Dentre os resultados obtidos no percurso adotado destacamos: a principal fonte de consulta para a Organização Matemática e Didática dos professores é o livro didático; com base na fonte indicada, o professor parte de situações do dia a dia que gerem problemas matemáticos, a fim de introduzir o tema equações do primeiro grau. Estas informações nos permitem observar um processo de assujeitamento, nos níveis de codeterminação, ao nível pedagógico, haja vista que o livro didático influencia na prática do professor em sua OD e OM; além disso, a contextualização é uma indicação de documentos oficiais como Brasil (1998), Brasil (2008a) e Brasil (2008b).

Quanto ao modelo epistemológico da Álgebra escolar presente nas epistemologias espontâneas dos sujeitos, verificamos, a partir da gravação de depoimentos dos mesmos, o predomínio da perspectiva da Álgebra no sentido de operação com letras e números e generalização de padrões, o que a caracteriza como **aritmética generalizada**, confirmando os pressupostos de Chevallard (1993), Gascón (1994), Bolea Catalán (2003) e Santos (2005). Neste sentido, a Álgebra é vista como um prolongamento e generalização das práticas aritméticas, seguindo a vertente histórica[16] e cultural, a qual considera que a Álgebra surgiu como uma formalização da aritmética.

A análise dos dados obtidos nos permitiu contemplar o objetivo de nossa pesquisa o qual foi **verificar quais características do modelo epistemológico dominante no ensino de Álgebra são reveladas nas concepções dos professores investigados**. Desta forma, com base no modelo de algebrização de Bolea Catalán (2003), dentre as características que revelam o modelo dominante nas epistemologias dos professores, pudemos constatar o seguinte:

1. Quanto às *razões de ser da Álgebra escolar*, a maioria dos sujeitos concebe a Álgebra como um processo de generalização de padrões e como um avanço em relação à aritmética, desta forma, os procedimentos algébricos são interpretados como mais eficazes que os aritméticos. Esta concepção anuncia a noção de prolongação e generalização de mão única das práticas aritméticas.
2. A respeito dos *objetos matemáticos a que a Álgebra escolar é construída*, de modo geral, compreende-se que os conceitos algébricos, para serem ensinados, necessitam ser antecedidos por conceitos aritméticos, isto é, a aritmética seria um pré-requisito para a aprendizagem de Álgebra.
3. Em relação as *dificuldades mais percebidas nas atividades algébricas*, nossa pesquisa revelou nos registros escritos dos sujeitos no questionário dificuldades na manipulação de expressões algébricas; interpretação de textos; operações aritméticas; conversão da linguagem natural em linguagem matemática. Não houve um consenso nas opiniões dos sujeitos, no entanto há a indicação da dificuldade no que diz respeito à manipulação de expressões algébricas com incógnitas, haja vista a dificuldade de atribuir à incógnita um significado preciso.

As três situações apresentadas nas concepções espontâneas dos sujeitos da pesquisa são indicadas por Bolea Catalán (2003) como

---

16 Historicamente as expressões algébricas surgiram da necessidade de representar e manipular com números desconhecidos (BOYER, 1996).

características da Álgebra escolar na perspectiva de aritmética generalizada, o que a revelou como modelo predominante neste grupo.

No que diz respeito à questão de nossa pesquisa, sobre “em que medida a constituição do sistema didático interfere na epistemologia espontânea dos sujeitos acerca do ensino de Equações do Primeiro Grau”, percebemos que o processo de estudo possibilitou aos sujeitos a conscientização de se levar em conta os aspectos epistemológicos do ensino de Álgebra, no entanto, ao compararmos seus discursos do inicio da pesquisa com a apresentação de sua praxeologia ao final da pesquisa, não vislumbramos mudanças significativas.

Desta forma, podemos concluir que o processo de estudo, apesar de ter possibilitado aos sujeitos reflexões sobre suas práticas e modificações em seus equipamentos praxeológicos, pouco interferiu na epistemologia espontânea dos mesmos. Outra constatação de nossa pesquisa foi que os sujeitos não mostraram indicios de um consenso quanto à uma praxeologia mais adequada para o ensino de Equação do Primeiro Grau.

A partir da análise dos fragmentos das epistemologias espontâneas dos sujeitos concluimos que o professores têm ideias e comportamentos relacionados ao ensino de Álgebra, e particularmente de Equações do Primeiro Grau, que se baseiam em um longo processo de sujeições institucionais. Esta epistemologia própria do professor foi sendo adquirida desde os tempos que ele próprio era aluno e pode configurar-se como um obstáculo para a constituição de modelos alternativos, principalmente quando o modelo dominante não é criticado.

Quanto às sujeições às instituições, sua influência levam o sujeito a assumir práticas “enraizadas” nas instituições e, assim, a buscarem organizações didáticas sem questionar o que é matemático, salvo poucos sujeitos. No entanto, o Percurso de Estudo que adotamos, contribui para desenvolvimento de atitudes críticas em relação às ideias que vigoram no modelo dominante do ensino de Álgebra.

Esta pesquisa possibilitou um olhar reflexivo para a formação de professores, uma vez que permitiu reflexão sobre as práticas em sala de aula em busca do caminho mais adequado para a introdução (tratamento) do tema Equação do Primeiro Grau no ensino básico e; análise de propostas alternativas para equipar a praxeologia do professor.

Enfatizamos também, além de fatores cognitivos, a importância de se levar em consideração o aspecto epistemológico da Álgebra escolar a fim de se investigar o modelo epistemológico deste saber, se o mesmo é satisfatório para o processo de ensino e aprendizagem e; promover discussões que levem em conta a formação do professor de matemática tendo em vista um aprimoramento de suas práticas de sala de aula e a busca de melhorias no desempenho dos alunos em relação ao saber em jogo, em nosso caso, equações do primeiro grau.

Deixamos como encaminhamento para futuras pesquisas a necessidade de se investigar quais influências o livro didático exerce na epistemologia espontânea do professor de matemática, haja vista que o livro didático é uma das principais referências adotadas para a construção de organizações matemáticas e didáticas.

REFERÊNCIAS

AKÉ, L. P., GODINO, J. D. e GONZATO, M. **Contenidos y actividades algebraicas em Educación Primaria.** UNIÓN. Revista Iberoamericana de Educación Matemática. Número 33. Março de 2013, p. 39 -52.

ALMOULOUD, A. S. **Fundamentos da didática da matemática**. Curitiba: Ed. UFPR, 2007.

ANDRADE, R. C. D. **Geometria Analítica Plana:** praxeologias matemáticas no ensino médio. 2007. 121 p. Dissertação (Mestrado em Educação em Científicas e Matemáticas) – Núcleo Pedagógico de Apoio ao Desenvolvimento Científico, Universidade Federal do Pará, Belém, 2007.

BOLEA CATALÁN, P.C. **El proceso de algebrización de organizaciones matemáticas escolares.** Monografía del Seminario Matemático García de Galdeano, 29. Departamento de Matemáticas. Universidad de Zaragoza, 2003.

BOOTH, L. R. **Dificuldades das crianças que se iniciam em álgebra** (Artigo). *In:* COXFORD, Arthur F. & SHULTE, Albert P. **As idéias da álgebra**. *The National Council os Teachers of Mathematics*. Tradução: Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, p. 23 - 37. 1995.

BOSCH, M; GASCÓN, J. **Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico a la formación del profesorado de matemáticas de Secundaria.** En González, M.J., González,M.T. y Murillo, J. (Eds.) *Investigación en Educación Matemática XIII.* (pp. 89-113), 2009.

BOYER, C B. **História da matemática**. Tradução de Elza F. Gomide. 2.ed.. São Paulo: Blucher, 1996, p.12-159.

BRASIL. Secretaria da Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** matemática/ Ensino de quinta a oitava série. Brasília: MEC/SEF, 1998.

_______. Ministério da Educação. **Sistema de Avaliação do Ensino Básico**: SAEB: ensino médio - matrizes de referência, tópicos e descritores. PDE: Plano de Desenvolvimento da Educação Brasília: MEC, SEB; Inep, 2008a.127 p.

_______. Ministério da Educação. **Prova Brasil**: ensino fundamental - matrizes de referência, tópicos e descritores. PDE: Plano de Desenvolvimento da Educação: Brasília: MEC, SEB; Inep, 2008b. 200 p.

BROUSSEAU G. **Epistemologia E Formazione Degli Insegnanti**. In BROUSSEAU GUY, Ingegneria Didattica ed Epistemologia della Matematica, p. 51-56. Pitagora Editrice, Bologne, 2006.

CARIOU, Jean-Yves, **Histoire des démarches en sciences et épistémologie scolaire**, *RDST* [En ligne], 3 | 2011, mis en ligne le 15 octobre 2013, consulté le 05 décembre 2013. URL : http://rdst.revues.org/386.

CARVALHO, a. M. P. de, GIL-PEREZ, D. **Formation des maitres en physique:** analyses et propositions. Chapitre, 1996.

CHEVALLARD Y**. Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiquës au Collège**, Deuxième partie, La notion de modélisation., *Petit x,* n° 1943-75, 1989.

______. **La transposition didactique.** Grenoble. La Pensée Sauvage Éditions, 1991.

_______. **El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico**. Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol 19, nº 2, pp. 221-266, 1999. Traducción de Ricardo Barroso Campos. Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Sevilla. Con la colaboración de Teresa Fernández García, Catedrática de Francés, IES Martinéz Montañes, Sevilla. Disponível em: <http://josedesktop. uacm.edu.mx/nolineal/libros/campomedio/El_analisis_de_las_practicas_docentes_en_la_teoria_antropologica_de_los_didactico.pdf>. Acesso em: 18 abr. 2012.

________. **La TAD face au professeur de mathématiques**. 2009a. Disponível em: <http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=162>. Acesso em: 24 abr. 2012.

_______. **La notion de PER**: problèmes et avancées. Toulouse, 2009b. Disponível em: <http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_ article=161>. Acesso em: 8 out. 2012.

________., Y. **Vers une didactique de la codisciplinarité**. Notes sur une nouvelle épistémologie scolaire. Journées De Didactique Comparée. Lyon. 2004

CHEVALLARD, Y; BOSCH, M; GASCÓN, J. **Estudar matemáticas:** o elo perdido entre o ensino e a aprendizagem. Tradução: Daisy Vaz de Moraes. Porto Alegre: Artmed, 2001.

COXFORD, A. F. e SHULTE, A. P. **As ideias da álgebra**. São Paulo: Atual, 1995.

CRUZ, M. S. F. et al. **Desenvolvimento do Pensamento Algébrico: uma proposta para o ensino fundamental menor**. Encontro Paraense de Educação Matemática, 3., 2013, Belém: Sociedade Paraense de Educação Matemática (SBEM-PA), 2013.

D'AMORE, B. **Elementos de Didática da Matemática**. Tradução de Maria Cristina Bonomi. São Paulo: Livraria da Física, 2007a.

D'AMORE, B. **Epistemologia, Didática da Matemática e Práticas de Ensino**. *Tradução:* Giovanni Giuseppe Nicosia e Jeanine Soares. *Bolema. Boletim de Educação Matemática*. Vol. 20, n° 28, 1179-205, 2007b.

D'AMORE B. et al. **Le rôle de l'épistémologie de l'enseignant dans lês pratiques d'enseignement.** Atti su DVD del Colloque International (con referee): "Les didactiques et leurs rapports à l'enseignement et à la formation. Quel statut épistémologique de leurs modèles et de leurs résultats?". 18, 19, 20 settembre 2008. Bordeaux (Francia), Università Bordeaux 4.

DELEMONT, Magali. – **L'épistémologie des enseignants** : quel impact sur les procédures des élèves en mathématiques ? - Neuchâtel : Institut de recherche et de documentation pédagogique (IRDP), 2006. 60 p.

DEMONTY, I; VLASSIS, J. **A Álgebra ensinada por situações-problemas**. Lisboa: Horizontes Pedagógicos. Instituto Piaget, 2002.

GARCIA, F. J. **La modelización como instrumento de articulación de la matemática escolar**. De la proporcionalidad a las relaciones funcionales. 2005. Tese (Doutorado) - Departamento de Didáctica de las Ciencias, Universidad de Jaén, 2005.

GASCÓN . J. **Un nouveau modèle de l'algèbre élémentaire comme alternative à l'algèbre généralisé**, *Petit x,* n. 37, 43-63, 1994.

__________. **Incidencia del modelo epistemológico de las matemáticas sobre las prácticas docentes**. RELIME. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, México, v. 4, n. 2, p. 129,159, 2001.

__________. **Las tres dimensiónes fundamentales de un problema didátictico**. El caso del álgebra elementar, RELIME. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,* ISSN 1665-2436, Vol. 14, n. 2, p.203-231, 2011.

GODINO, J. D. et al*.* **Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar**. Implicaciones para la formación de maestros. (Aceita na Revista Enseñanza de las Ciencias em dezembro de 2012). Disponível em <http://www.ugr.es/~jgodino/eos/niveles_algebrizacion.pdf>. Acesso em 04 maio 2013.

IMENES, L. M. **Matemática para todos**. Imenes & Lellis. Obra em 4 v. para alunos de 6° ao 9° ano. São Paulo: Moderna, 1ª ed. 2009.

LOCHHEAD, J, MESTRE, J. P. **Das palavras à álgebra**: corrigindo concepções erradas. (Artigo). *In:* COXFORD, Arthur F. & SHULTE, Albert P. **As idéias da álgebra**. *The National Council os Teachers of Mathematics*. Tradução: Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1995. p.144-153.

LOPES, A. C. M. **Equação do 1° grau: um diagnóstico dos erros cometidos pelos alunos e perspectivas para o ensino de matemática**. In: Seminário de cognição e educação matemática. 2011. Disponível em <http://dc428.4shared.com/doc/jgA93ao_/preview.html >. Acesso em 12 nov 2012.

LUCAS, A. B. **Equações e funções**: descontinuidades conceituais. 2009. 130 p. Dissertação (Mestrado em educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo. 2009.

MELO, A. da F. E**studo de procedimentos de validação de igualdades de expressões algébricas por meio de mudanças de quadros**. 2010. 159 p. Dissertação (Mestrado em educação Matemática). Universidade Federal de Mato Grosso do Sul. Campo Grande. 2010.

MERCIER, A. **La transposition des objets d'enseignement et la definition de l'espace didactique, en mathématiques.** Revue Française de Pédagogie, n° 141, octobre-novembre-décembre 2002, 135-171.

MORI,I. **Matemática**: idéias e desafios. Iracema & Dulce. Obra em 4 v. para alunos de 6° ao 9°ano. São Paulo: Saraiva, 15ª ed. 2009.

PEREIRA, J. C. de S. **Análise praxeológica de conexões entre aritmética e álgebra no contexto do desenvolvimento profissional do professor de matemática.** 122 p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Científica). Universidade Federal do Pará. Belém. 2012.

PINTO, R. A. **Erros e dificuldades no ensino da álgebra**: o tratamento dado por professoras da 7ª série em aula. 1997. 110 p. Dissertação (Mestrado em Educação). Universidade de Campinas. Campinas, 1997.

REIS, A. M. **Uma proposta dinâmica para o ensino de função afim a partir de erros dos alunos no primeiro ano do ensino médio**. 2011. 171 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo. 2011.

RUIZ, A., et al. **La formación matemático-didáctica del profesorado de secundaria,** In anais do III International Conferenceon the Anthropological Theoryof the Didactic. Catalunya, Spain. p. 399 - 413, 2010.

RUIZ, N., Bosch, M., Gascón, J. **La algebrización de los programas de cálculo aritmético y la introducción del álgebra en secundaria**. En M.M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo, & T.A. Sierra, (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 545-556). Lleida: SEIEM. 2010.

SÁ, P. F. de. **Os problemas envolvendo as quatro operações e a unidade do pensamento linear**. 2002. 203 p. Tese (Doutorado em Educação). Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Natal. 2002.

SANTOS, L. M. **Concepções do professor de matemática sobre o ensino de álgebra**. 2005. 121 p. Dissertação (Mestrado em Educação matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo PUC SP. São Paulo, 2005.

SIERRA, T. **Lo Matemático en el diseño y análisis de Organizaciones Didácticas**. Los Sistemas de Numeración y la Medida de Magnitudes Continuas (Tesis Doctoral). Universidad Complutense de Madrid. 2006.

SIERRA, T. Á.; BOSCH, M; GASCÓN, J. **La formación matemático-didáctica del maestro de Educación Infantil:** el caso de cómo enseñar a contar, Em prensa Revista de Educación, 357. Aceite em 15-12-2009. Disponível em: <www.revistaeducacion.mec.es/doi/357.>. Acesso em 10/05/2012.

SILVA, R. **O conhecimento matemático-didático do professor do multisseriado**: análise praxeológica. 2013. Tese (Doutorado em Ciências e Matemática). Universidade Federal do Pará. Belém. 2013.

SOUZA, E. R. de, DINIZ, M. I. S. V. **Álgebra:** das variáveis às equações e funções. 1 ed. São Paulo: CAEM/IME-SP, 2008. 111p. Matemática Ensino Fundamental, 5.

USISKIN, Z. **Concepções sobre a álgebra da escola média e utilizações das variáveis** (Artigo). *In:* COXFORD, Arthur F. & SHULTE, Albert P.. **As idéias da álgebra**. *The National Council os Teachers of Mathematics*. Tradução: Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, p. 9 - 22. 1995.

URSINI, S. et al. **Enseñanza del Álgebra Elemental:** una propuesta alternativa. México: Trillas, S.A., 2005.

APENDICES

APENDICE 1

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E CIENTÍFICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

Prezado (a) professor (a),

Este trabalho de pesquisa visa realizar um levantamento acerca de como são tratadas algumas noções de álgebra no Ensino Fundamental. Em virtude disso, solicitamos que você preencha o questionário abaixo. Garantimos o seu anonimato e agradecemos a sua indispensável colaboração.

<u>Dados pessoais:</u>

01 - Sexo:
( ) Feminino ( ) Masculino

02- Qual a sua formação acadêmica?

a) Graduação em:____________________________________
Instituição: ___________________________________

b) Especialização em:_________________________________
Instituição: ___________________________________

c) Mestrado em: _____________________________________
Instituição: ___________________________________

d) Doutorado: _______________________________________
Instituição: ___________________________________

03- Qual (is) o(s) tipo(s) de instituição (ões) em que você leciona Matemática?

( ) Conveniada ( ) Estadual ( ) Federal
( ) Privada ( ) Municipal ( ) Outro. Qual? ________________________

04- Há quanto tempo você leciona Matemática?

( ) 0 a 5 anos ( ) 6 a 10 anos ( ) 11 a 15 anos ( ) Acima de 15 anos

05 – Qual(is) ano(s) de ensino você leciona matemática?

( ) 6º ano do ensino fundamental
( ) 7º ano do ensino fundamental
( ) 8º ano do ensino fundamental
( ) 9º ano do ensino fundamental
( ) 1º ano do ensino médio
( ) 2º ano do ensino médio
( ) 3º ano do ensino médio

Questões sobre o ensino e aprendizagem de álgebra:

01 - Quais as fontes que você consulta para planejar suas aulas? Especifique. Comente um pouco a respeito dessas fontes: como usa, como escolhe etc.

02 - A partir dessas fontes como organiza atividades para serem desenvolvidas na sala de aula para introduzir o tema equações lineares? (equações polinomiais do primeiro grau).

03 - Em relação a noções sobre equação, necessárias para resolver problemas, quais as maiores dificuldades, que você identifica nos alunos, para se apropriarem das mesmas?

04 – Com base na questão anterior, quais recursos você utiliza na tentativa de superação dessas dificuldades?

APENDICE 2

Questões sobre o ensino e aprendizagem de álgebra:

01 - Quais as fontes que você consulta para planejar suas aulas? Especifique.

Comente um pouco a respeito dessas fontes: como usa, como escolhe etc.

- LIVROS ESPECÍFICOS DE MATEMÁTICA → DEBATER A PARTE TEÓRICA EXERCÍCIOS
- APOSTILAS DE CURSINHOS → EXERCÍCIOS DE ALTO NIVEL

02 - A partir dessas fontes como organiza atividades para serem desenvolvidas na sala de aula para introduzir o tema equações lineares? (equações polinomiais do primeiro grau).

- EXPLICA TODA A TEORIA COM AS DEMONSTRAÇÕES NECESSÁRIAS E XEMPLOS

- EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

03 - Em relação a noções sobre equação, necessárias para resolver problemas, quais as maiores dificuldades, que você identifica nos alunos, para se apropriarem das mesmas?

- OPERAÇÕES COM EXPRESSÕES ALGÉBRICAS
- PRINCÍPIOS DE EQUIVALÊNCIAS (APLICAÇÃO DOS PRINCÍPIOS)
- RELAÇÃO ENTRE A ARITMÉTICA E A ÁLGEBRA.

04 – Com base na questão anterior, quais recursos você utiliza na tentativa de superação dessas dificuldades?

- PRÁTICA COTIDIANA

APENDICE 3

01 - Quais as fontes que você consulta para planejar suas aulas? Especifique.

Comente um pouco a respeito dessas fontes: como usa, como escolhe etc.

As fontes utilizadas são os livros didáticos. Retiro os exercícios e aplicações. Organizo os conceitos e faço as adaptações para público específico.

02 - A partir dessas fontes como organiza atividades para serem desenvolvidas na sala de aula para introduzir o tema equações lineares? (equações polinomiais do primeiro grau).

As fontes são utilizadas como apoio. As introduções dos assuntos são feitas com uma situação problema, que pode ser do livro didático, ou adaptado para a turma.

03 - Em relação a noções sobre equação, necessárias para resolver problemas, quais as maiores dificuldades, que você identifica nos alunos, para se apropriarem das mesmas?

A representação matemática das questões, representação semiótica, pois ~~que~~ os alunos tem dificuldades nas interpretações, muitas vezes eles precisam decorar os tipos de exercícios para poder resolver estas questões.

04 – Com base na questão anterior, quais recursos você utiliza na tentativa de superação dessas dificuldades?

É preciso utilizar exercícios que partem do concreto para o abstrato, pois essa é a dificuldade. Utilizo os exemplos das balanças de pratos. Para que eles vejam a ideia de igualdade entre os membros da equação.

APENDICE 4

Comente um pouco a respeito dessas fontes: como usa, como escolhe etc.

Livros, amigos, internet

02 - A partir dessas fontes como organiza atividades para serem desenvolvidas na sala de aula para introduzir o tema equações lineares? (equações polinomiais do primeiro grau).

Dou frases e solicito que eles respondam e represen-tem aritméticamente as situações - propostas e depois inicio a representação simbólica usando letras ou outros símbolos.

03 - Em relação a noções sobre equação, necessárias para resolver problemas, quais as maiores dificuldades, que você identifica nos alunos, para se apropriarem das mesmas?

Linguagem matemática

04 – Com base na questão anterior, quais recursos você utiliza na tentativa de superação dessas dificuldades?

Vários exemplos: cito alguns e solicito que os estudantes criem outros.

APENDICE 5

... planejar suas aulas? Especifique.

Comente um pouco a respeito dessas fontes: como usa, como escolhe etc.

Livros, vídeos. Seleciono alguns livros didáticos que venham abordam de forma "prática", às vezes "lúdica" os temas, assuntos que serão trabalhados naquela série. Procuro utilizar livros com uma boa quantidade de situações - problemas. Além disso, utilizo vídeos explicativos ou de caráter informativo para diversificar as aulas.

02 - A partir dessas fontes como organiza atividades para serem desenvolvidas na sala de aula para introduzir o tema equações lineares? (equações polinomiais do primeiro grau).

Procuro "tomar" situações do dia-a-dia dos alunos de forma a introduzir a idéia de valor desconhecido, de expressões algébricas. Logo em seguida coloco para os alunos outras situações. Depois de outros exemplos e temas inicio o tema de Equações Lineares.

03 - Em relação a noções sobre equação, necessárias para resolver problemas, quais as maiores dificuldades, que você identifica nos alunos, para se apropriarem das mesmas?

Inicialmente alguns têm dificuldades na obtenção de expressões algébricas, alguns sentem esta mesma dificuldade durante o processo de resolução, seja pelos princípios aditivo e multiplicativo ou pelo método prático. A troca de incógnita às vezes implica em dificuldades.

04 – Com base na questão anterior, quais recursos você utiliza na tentativa de superação dessas dificuldades?

Ainda me prendo nas duas maneiras acima mas este ano quero diversificar procurando outros recursos que venham a me auxiliar na superação dessas dificuldades.

APENDICE 6

Comente um pouco a respeito dessas fontes: como usa, como escolhe etc.

LIVROS DIDÁTICOS NO GERAL, POIS PROCURO ANALISAR CADA AUTOR A RESPEITO DO ENSINO DA ÁLGEBRA.

02 - A partir dessas fontes como organiza atividades para serem desenvolvidas na sala de aula para introduzir o tema equações lineares? (equações polinomiais do primeiro grau).

ESTABELECENDO DENTRO PPP, A INTERDISCIPLINARIDADE PARA O AVANÇO DO ASSUNTO NO COTIDIANO.

03 - Em relação a noções sobre equação, necessárias para resolver problemas, quais as maiores dificuldades, que você identifica nos alunos, para se apropriarem das mesmas?

PARA O ENSINO FUNDAMENTAL A MUDANÇA DE SINAL.
PARA O " MÉDIO, QUANDO EXISTEM AS FRAÇÕES.

04 – Com base na questão anterior, quais recursos você utiliza na tentativa de superação dessas dificuldades?

MOSTRO ALGUMAS SITUAÇÕES-PROBLEMAS EM AULAS PRÁTICAS, COLOCANDO A EDUCAÇÃO MATEMÁTICA PARA FUNCIONAL (MODELAGEM, ETNOMATEMÁTICA, ETC.)

APENDICE 7

Comente um pouco a respeito dessas fontes: como usa, como escolhe etc.

Vários livros didáticos { usado de forma diversificada.
Escolha através do grupo de professores

02 - A partir dessas fontes como organiza atividades para serem desenvolvidas na sala de aula para introduzir o tema equações lineares? (equações polinomiais do primeiro grau).

. através de situações do cotidiano, ou seja, algo que o aluno traga de situações extra-escola.

03 - Em relação a noções sobre equação, necessárias para resolver problemas, quais as maiores dificuldades, que você identifica nos alunos, para se apropriarem das mesmas?

O tipo de questões contextualizadas, que o aluno não sabe interpretar os problemas, ou seja, a leitura matemática e também nas operações (+, -, x e :).

04 – Com base na questão anterior, quais recursos você utiliza na tentativa de superação dessas dificuldades?

Socializar em grupos alguns alunos com maiores habilidades no desenvolver das questões, através de laboratórios (informática), jogos, etc...

APENDICE 8

Comente um pouco a respeito dessas fontes: como usa, como escolhe etc.

Os livros didáticos, especificamente o livro do autor Dante.

A escolha se dá a partir de exemplares de diversos autores. na própria escolha junto com o colega da disciplina

02 - A partir dessas fontes como organiza atividades para serem desenvolvidas na sala de aula para introduzir o tema equações lineares? (equações polinomiais do primeiro grau).

Inicialmente, consultando o colega da disciplina Organizando um plano de aula específico e transparente para uma melhor compreensão do aluno.

03 - Em relação a noções sobre equação, necessárias para resolver problemas, quais as maiores dificuldades, que você identifica nos alunos, para se apropriarem das mesmas?

O uso da linguagem matemática, a idéia do "x" como variável ou incógnita.

04 – Com base na questão anterior, quais recursos você utiliza na tentativa de superação dessas dificuldades?

Uso de apostilas, exercícios diversos.

APENDICE 9

Comente um pouco a respeito dessas fontes: como usa, como escolhe etc.

R- Livros didáticos fornecidos pelo MEC. Faço uma consulta ao Topico a ser ensinado e relaciono com meu conhecimento adquirido.

02 - A partir dessas fontes como organiza atividades para serem desenvolvidas na sala de aula para introduzir o tema equações lineares? (equações polinomiais do primeiro grau).

Produção de Problemas para que o aluno leia e reproduza na linguagem algébrica

03 - Em relação a noções sobre equação, necessárias para resolver problemas, quais as maiores dificuldades, que você identifica nos alunos, para se apropriarem das mesmas?

Muitas vezes o problema não está no método de resolução e sim nas operações com números Inteiros

04 – Com base na questão anterior, quais recursos você utiliza na tentativa de superação dessas dificuldades?

Uma aula de Revisão sobre operações com números Inteiros

APENDICE 10

Comente um pouco a respeito dessas fontes: como usa, como escolhe etc.

Em primeiro lugar o livro didático, pois, este é fornecido pela Escola. Em segundo lugar, alguns livros que usei quando estudante e por fim a internet, onde encontro diversas formas de abordagem para o assunto que ministrarei.

02 - A partir dessas fontes como organiza atividades para serem desenvolvidas na sala de aula para introduzir o tema equações lineares? (equações polinomiais do primeiro grau).

Inicialmente uso problemas/situações-problemas para ilustrar o assunto a ser abordado. Após, a solução(ões) proposta(s) pelo(s) aluno(s) desenvolvo um raciocínio mais formalizado até chegar uma melhor forma de resolução do problema.

03 - Em relação a noções sobre equação, necessárias para resolver problemas, quais as maiores dificuldades, que você identifica nos alunos, para se apropriarem das mesmas?

Primeiramente, o trabalho com o conjunto dos números inteiros.

O uso da lei do cancelamento em equações.

A noção de valor desconhecido/incógnita

04 – Com base na questão anterior, quais recursos você utiliza na tentativa de superação dessas dificuldades?

O uso de situações problemas e exercícios

APENDICE 11

Quais as fontes que você consulta para planejar suas aulas? Especifique.

Comente um pouco a respeito dessas fontes: como usa, como escolhe etc.

O Livro didático ainda é minha principal fonte, principalmente porque na escola onde trabalho é cobrado o uso desse material em sala. A escolha é feita pelos professores do fundamental (todos). Além do livro "de sala" costumo buscar outros exemplos em outros livros prova Brasil, etc...

02 - A partir dessas fontes como organiza atividades para serem desenvolvidas na sala de aula para introduzir o tema equações lineares? (equações polinomiais do primeiro grau).

Primeiro faço uma 'pesquisa' p/ saber como eles "estão" usando as operações fundamentais, operações inversas, e a partir de então no lugar do □ como eles 'chamam', introduzia o que é desconhecido representado através das incógnitas.

03 - Em relação a noções sobre equação, necessárias para resolver problemas, quais as maiores dificuldades, que você identifica nos alunos, para se apropriarem das mesmas?

A interpretação do texto. a transposição em relação da linguagem natural para a linguagem aritmética algébrica. existe muitas dificuldades nas representações.

04 – Com base na questão anterior, quais recursos você utiliza na tentativa de superação dessas dificuldades?

Jogo com cartões em duas cores onde uma cor representa o positivo e o outro o negativo, ou até mesmo no quadro um outra "brincadeira" do tipo. temos que eliminar e ficar só com a "letra" (uma letra positiva) usando as operações inversas e igualar nos dois membros, etc

APENDICE 12

Questões sobre o ensino e aprendizagem de álgebra:

01 - Quais as fontes que você consulta para planejar suas aulas? Especifique.

Comente um pouco a respeito dessas fontes: como usa, como escolhe etc.

LIVROS DIDÁTICOS, CONTEÚDOS ANTERIORES (PRÉ-REQUISITOS) CONSULTADOS NA INTERNET.

CONTEÚDOS AFINS COM A AULA A SER DADA. EXERCÍCIOS, CONTEXTUALIZAÇÕES, ENFIM, ASSUNTOS QUE TEM HAVER COM A AULA.

02 - A partir dessas fontes como organiza atividades para serem desenvolvidas na sala de aula para introduzir o tema equações lineares? (equações polinomiais do primeiro grau).

~~UM~~ FAÇO UMA INTRODUÇÃO COM ASSUNTOS AFINS, ~~COM~~ COM O OBJETIVO DE CONTEXTUALIZAR O ASSUNTO.

03 - Em relação a noções sobre equação, necessárias para resolver problemas, quais as maiores dificuldades, que você identifica nos alunos, para se apropriarem das mesmas?

(~~A PASSAGEM~~) O ISOLAMENTO DO "x" (VARIÁVEL). QUANDO OS ALUNOS PASSAM PARA O OUTRO LADO O NÚMERO COM A OPERAÇÃO INVERSA.

04 – Com base na questão anterior, quais recursos você utiliza na tentativa de superação dessas dificuldades?

Explico A RESOLUÇÃO ATRAVÉS DA PROPRIEDADE DE CANCELAMENTO. APÓS, PASSO EXERCÍCIOS P/ QUE ELES RESOLVAM DA MESMA FORMA.

APENDICE 13

Comente um pouco a respeito dessas fontes: como usa, como escolhe etc.

Livros didáticos e técnicos. Os livros técnicos, a escolha se dá através de indicação dos colegas de profissão e professores da universidade, e os livros didáticos, se dá através ~~da uso~~ do uso da escola e indicação dos colegas.

02 - A partir dessas fontes como organiza atividades para serem desenvolvidas na sala de aula para introduzir o tema equações lineares? (equações polinomiais do primeiro grau).

Procuro mostra ao aluno, primeiramente, uma situação - problema e a partir dessa situação apresentá-los a equação do 1º ~~gra~~ grau. As atividades desenvolvidas em sala de aula são questões, sejam (continua...)

03 - Em relação a noções sobre equação, necessárias para resolver problemas, quais as maiores dificuldades, que você identifica nos alunos, para se apropriarem das mesmas?

As dificuldades que noto são as quatro operações básicas. Caso a equação precisa ser reduzida, alguns alunos têm dificuldade de visualizar essa redução (redução dos termos semelhantes).

04 – Com base na questão anterior, quais recursos você utiliza na tentativa de superação dessas dificuldades?

O tradicional quadro e pincel, e jogos. ~~mate~~ Os jogos procuro utilizar para suprir as dificuldades nas quatro operações básicas.

02. Continuação

as ~~triviais~~ diretas (para se encontrar a raiz da equação) até ~~as situa~~ as resoluções de problemas. E as atividades são desenvolvidas em grupo para que haja uma socialização entre eles e individuais.

APENDICE 14

Questões sobre o ensino e aprendizagem de álgebra:

01 - Quais as fontes que você consulta para planejar suas aulas? Especifique. Comente um pouco a respeito dessas fontes: como usa, como escolhe etc.

escolho de acordo que eu perceba que o meu aluno consiga entender o conteúdo abordado, de preferência com bastante exemplos do cotidiano.

Apoio meu trabalho nos livros didáticos em sites de pesquisa e agora, depois dos conhecimentos adiquiridos nas discussões e teorias durante as aulas da especialização, procuro buscar artigos em que forem desenvolvidos conteúdos que eu vou abordar.

02 - A partir dessas fontes como organiza atividades para serem desenvolvidas na sala de aula para introduzir o tema equações lineares? (equações polinomiais do primeiro grau).

Como informado na questão anterior, procuro trabalhar com questões do cotidiano tentando fazer com que o aluno construa a equação de forma não formal para após essa construção mostrar a eles a definição.

03 - Em relação a noções sobre equação, necessárias para resolver problemas, quais as maiores dificuldades, que você identifica nos alunos, para se apropriarem das mesmas?

Transformar a linguagem natural (a questão em si) em linguagem matemática (a equação)

04 – Com base na questão anterior, quais recursos você utiliza na tentativa de superação dessas dificuldades?

Conversar com os alunos para fazer entendê-los que algumas palavras ou expressões que eles utilizam na linguagem natural também são utilizadas em Matemática, às vezes com o mesmo sentido, às vezes com sentidos parecidos e mostrar como essas palavras ou expressões são representadas através de símbolos matemáticos.

APENDICE 15

01 - Quais as fontes que você consulta para planejar suas aulas? Especifique.

Comente um pouco a respeito dessas fontes: como usa, como escolhe etc.

O livro didático e atualmente (mais recentemente) a coleção da SBM, a internet, dentre outros.

02 - A partir dessas fontes como organiza atividades para serem desenvolvidas na sala de aula para introduzir o tema equações lineares? (equações polinomiais do primeiro grau).

Para introduzir, por exemplo, função do 1º grau inicio com uma pré-atividade fomentando uma ~~breve~~ discussão sobre como, em nosso dia-a-dia, está repleto de exemplos. A partir dessa situação os próprios alunos, geralmente, relatam alguns exemplos (situações) que envolvem funções. Com isso, inicio, a partir de um desses exemplos, a construção de tabelas e gráficos.

03 - Em relação a noções sobre equação, necessárias para resolver problemas, quais as maiores dificuldades, que você identifica nos alunos, para se apropriarem das mesmas?

- A abstração número-variável, número-incógnita,...
- A compreensão dos alunos sobre o valor a incógnita (o que ela representa) ao final da resolução de uma equação.

04 – Com base na questão anterior, quais recursos você utiliza na tentativa de superação dessas dificuldades?

- Relação com o cotidiano;
- Solicitação da construção de tabelas e gráficos;
- Justificativas a partir das propriedades para resolução de equações;
- Dentre outras.

ANEXO

O PROCESSO DE ALGEBRIZAÇÃO DE ORGANIZAÇÕES MATEMÁTICAS ESCOLARES

Pilar Bolea Catalán
Tese de Doutorado, Universidade de Zaragoza, 2002. p. 32-34 e p. 63-72.
(Tradução nossa)

RECORTE DA TESE

CAPITULO II

O PROBLEMA DIDÁTICO DA *ÁLGEBRA ESCOLAR* NO PROGRAMA EPISTEMOLÓGICO

1. NECESIDADE DE UM MODELO DA *ÁLGEBRA ESCOLAR*

A instituição escolar tende a identificar a *álgebra escolar* com o que se considera uma "*aritmética generalizada*". E dado que os enfoques que se situam no Programa Cognitivo centram seu *objeto primário de investigação* nos *processos cognitivos dos sujeitos*, não se questionam suficientemente o *marco de referência aritmético na* qual a *álgebra escolar* está habitualmente encerrada.

A importância desta limitação reside no fato de que impede tomar como *objeto primário de estudo* as questões que fazem referência à *organização matemática da álgebra escolar.* Por exemplo, em um marco estritamente cognitivo, não se consideram prioritárias questões do tipo:

- *Por que a introdução da álgebra escolar sempre está ligada à aritmética?*
- *Que consequências tem o fato de que determinadas instituições escolares identifiquem a álgebra escolar como uma "aritmética generalizada"?*
- *Como se relaciona este fenômeno com o fenômeno, aparentemente inverso, da "algebrização da aritmética escolar" que conduz a introduzir no ensino das matemáticas no Ensino Primário, formalismos próprios do trabalho algébrico desnecessários para o trabalho aritmético que se realiza?*
- *Qual a relação entre a linguagem funcional e a linguagem algébrica? Por que as fórmulas que aparecem no trabalho algébrico do Ensino Secundário não se retomam no momento de introduzir o estudo de funções?*
- *Como se relaciona este fato com a "atomização" do corpus da álgebra ensinada e sua desvinculação tanto do tema da proporcionalidade e medida de magnitudes como do das funções?*

- *Por que, na álgebra escolar, a aparição dos parâmetros fica restringida a certos âmbitos muito concretos como a resolução de sistemas de equações lineares no final do Ensino Secundário?*

Para poder tratar estas questões é necessário um *modelo da álgebra elementar* elaborado a partir da própria didática que sirva, em particular, como ponto de referência para descrever e analisar a forma de interpretar a álgebra no Ensino Secundário.

Kaput (1996), num estudo sobre a reforma da álgebra escolar, estabelece em primeiro lugar a necessidade de una linha de investigação que sustente essa reforma, e na que uma das questões prévias seja “que classe de álgebra tenho que ensinar?”.

Em resumo, o Programa Epistemológico postula que, para poder analisar e tratar as questões relacionadas com o ensino e aprendizagem da *álgebra escolar*, é necessário elaborar em primeiro lugar um *modelo da álgebra escolar* construído a partir da própria didática das matemáticas. Este modelo será um dos instrumentos teóricos para descrever e analisar o modelo dominante no Ensino Secundário, assim como todos os fenômenos didáticos que possam surgir do processo de estudo da *álgebra escolar.*

CAPÍTULO III

¿QUÉ ES EL *ÁLGEBRA ESCOLAR*?

Situando nosso estudo na Teoria Antropológica do Didático (TAD), a primeira questão a respeito da *álgebra escolar* será perguntar-nos precisamente que é a *álgebra escolar* ou, melhor, como podemos interpretar a *álgebra escolar* com nossas ferramentas teóricas.

Para isso devemos conhecer previamente o que a instituição escolar entende por *“álgebra escolar”*, quer dizer, o que denominamos: “O modelo epistemológico dominante na instituição escolar”. Este modelo formará parte da tecnologia didática dominante, ou seja, permitirá descrever e explicar a prática docente do professor de matemáticas na aula.

Para a didática das matemáticas, não é suficiente descrever e caracterizar o modelo da *álgebra escolar* dominante na instituição docente. É necessário tomá-lo como objeto de estudo, como um fato empírico a explicar e, para isso, é necessário elaborar previamente um modelo da *“álgebra”* próprio da didática e utilizá-lo como *modelo epistemológico de referência* para reformular a noção de *“estudar álgebra”* em uma instituição dada e para construir os fenômenos didáticos relativos ao que denominaremos *“processo de algebrização”,* fenômenos que evidentemente não aparecem de forma espontânea.

1. UM MODELO DOMINANTE: A *ÁLGEBRA ESCOLAR* COMO *ARITMÉTICA GENERALIZADA*

Uma das primeiras dificuldades que encontramos para descrever o modelo epistemológico da *álgebra escolar* dominante nas instituições escolares consiste em que este não aparece de forma explícita nos documentos oficiais, senão que, na cultura escolar, pode, inclusive, existir uma grande diferença entre o que o professor “diz que tem que fazer na aula”, a proposta que podemos chamar *discursiva*, e o que realmente “se faz na aula”, a proposta *efetiva*, a propósito da *álgebra escolar* (Brousseau, 1981). Ou seja, o modelo que mostra explicitamente a própria instituição não serve para dar conta do que se faz efetivamente nela.

1.1. A passagem da aritmética para a álgebra

Segundo Gascón (1993), o modelo implícito dominante no ensino Secundário identifica a *álgebra elementar* como uma espécie de *aritmética generalizada*. Digamos que esta forma de interpretar a *álgebra escolar* cumpre dois tipos de determinações ou restrições: a primeira é uma exigência interna da instituição escolar no *nível pedagógico*, em que “para que um tema possa ser ensinado e seja didaticamente viável, é necessário que possa aparecer em um sub-domínio suficientemente vasto” (Chevallard, 1986, p. 20). A segunda é uma restrição que provém de uma determinada interpretação da gênese histórica da álgebra, pois “são muitos os autores que consideram que a álgebra representou, em um primeiro momento, a formalização da aritmética e posteriormente a formalização da geometria” (Puig Adam 1956, p. 8).

O termo “*aritmética generalizada”* é utilizado por muitos autores com significados diferentes, tanto no âmbito da investigação como no da cultura escolar. Em primeiro lugar detalharemos o que entendemos por *aritmética* *generalizada* em nossa perspectiva teórica. Este modelo, segundo Gascón (1993), identifica a *álgebra escolar* com o "simbolismo algébrico" frente a uma suposta "linguagem aritmética", de forma que esse "simbolismo algébrico" — linguagem algébrica— se supõe que a amplia e generaliza.

Nesta interpreta*ção* da *álgebra escolar* como *aritmética generalizada,* as características principais do *conjunto de práticas* ou aditividades que se identificam como "algébricas" vem a ser, por um lado, uma prolongação e generalização unilateral das práticas aritméticas, e por outro, uma contraposi*ção* ou confronta*ção* com uma parte delas.

Entre as atividades consideradas como prolongação da aritmética podemos mencionar, entre outras, as práticas que precedem de:

- Generalizar parte de suas técnicas de resolução.
- Identificar a álgebra como a linguagem algébrica e, a linguagem algébrica como generalização da linguagem aritmética.
- Definir noções de álgebra a partir da aritmética (equa*ção*, variável, etc.).

As atividades que diferenciam *o aritmético* d*o algébrico* (entendido como generalização da linguagem aritmética), que indicam certa contraposição entre *o aritmético* e *o algébrico* se refletem em outras práticas matemáticas. Por exemplo, Gascón (1993) assinala entre outras as seguintes:

(i) A resolução **de problemas:**
A resolu*ção* de problemas "por aritmética" implica a resolu*ção* sucessiva de uma cadeia finita de problemas simples, onde cada resultado numérico é calculável e interpretável e termos do enunciado e formulado mediante uma expressão simples da linguagem natural. Em contrapartida, os "problemas algébricos" não respondem a este tipo de esquema, não admitem uma decomposi*ção* deste tipo, cada etapa intermediaria consiste na produ*ção* de uma igualdade, de uma rela*ção* algébrica, que representa um "enunciado matemático", e que é obtida por uma transforma*ção*, ou por uma opera*ção* legítima entre uma ou varias igualdades, ou pela aplica*ção* de um teorema.

(ii) Os resultados obtidos:
O resultado de uma *prática aritmética* normalmente é uma medida concreta, ou seja, um número acompanhado de uma unidade, enquanto que o de uma *prática algébrica* pode ser uma rela*ção* entre duas grandezas, o que se opõe às expectativas dos alunos, já que para isso uma resposta bem formada deve ser forçosamente um número.

(iii) Os objetos com os que se trabalha:
Enquanto que em *aritmética* se trabalha com "números concretos", em *álgebra* se manipulam símbolos, que devem ser interpretados de diversas formas em fun*ção* do contexto em que apareçam:

— incógnitas nas equações e sistemas
— números generalizados nas identidades
— variáveis o parâmetros nas fórmulas e funções…

(iv) Significado dos **signos e dos símbolos:**
Na *atividade aritmética* se usam “signos” ou “símbolos” que tem referentes muito concretos e um sentido muito preciso.
Enquanto que na *atividade algébrica* o significado dos signos está modificado de maneira essencial. Por exemplo, no contexto aritmético os signos +, =, –, x, etc., indicam ações, enquanto que na “linguagem algébrica”, isto é, na *aritmética generalizada*, também podem indicar relações, isto é, possuem certa *dualidade* que dificulta sua utiliza*ção* e sua interpreta*ção*.

Entre os fenômenos que não podem explicar-se quando se assume o modelo da *álgebra elementar* como *aritmética generalizada* podemos citar em primeiro lugar o fenômeno da *“aritmetização da álgebra”,* que mostra que não só a aritmética ensinada não tem sido absorvida pela álgebra ensinada, como também que a aritmética tem subsistido como saber ensinado graças a que tem tomado prestados instrumentos de trabalho tipicamente algébricos. Chevallard (1989) tem mostrado que a álgebra ensinada não é propriamente falando uma aritmética generalizada, dado que não contém estritamente a aritmética ensinada. Por um lado, a resolu*ção* algébrica de certos problemas aritméticos supõe o uso de uns instrumentos que não formam parte da álgebra tal e como agora é ensinada. E por outro, a *álgebra* ensin*ada* tem uma temática própria que não é una generaliza*ção* da aritmética. Em resumo, podemos afirmar que a *álgebra* ensin*ada* nem contém estritamente a aritmética ensinada nem consiste em uma generaliza*ção* da mesma.

1.2. Características da *álgebra escolar* como *aritmética generalizada*

Para descrever de forma precisa as principais características da interpretação da *álgebra escolar* com o modelo da *aritmética generalizada* devemos ter em conta quatro âmbitos ou aspectos das afetividades relacionadas com a *álgebra escolar*, com o *algébrico*:

(a) A construção ou emergência da álgebra, ou seja, as razões de ser da álgebra escolar.
(b) Os conhecimentos prévios em que se baseia a construção, isto é, os objetos sobre os que se constrói a álgebra escolar.
(c) Os elementos mais significativos das atividades associadas à álgebra escolar.

(d) As dificuldades mais destacadas na *realiza*ção *das atividades "algébricas".*

De cada um destes aspectos formularemos os principais indicadores mediante a abreviatura **AG** *(aritmética generalizada)* e um sub-índice, que servirá de referência para o estudo exploratório que posteriormente apresentaremos.

*(a) A constru*ção *ou emergência da álgebra.*

AG1: A *álgebra escolar* se constrói num contexto numérico, a modo de generalização dos cálculos com números e de tradução de expressões numérico-verbais.
AG2: As expressões algébricas nascem da necessidade de representar e manipular números desconhecidos.
AG3: A *álgebra escolar* se apresenta muito vinculada à aritmética e bastante isolada do resto das organizações matemáticas presentes no currículo do ensino secundário.

*(b) Os conhecimentos prévios em que se baseia a constru*ção *da álgebra escolar.*

AG4: Um conhecimento prévio essencial para introduzir a *álgebra* o constitui as propriedades aritméticas básicas e o domino da linguagem aritmética.
AG5: Outro conhecimento prévio necessário são as habilidades do cálculo aritmético escrito e mental.
AG6: Para poder passar das técnicas aritméticas para as técnicas algébricas, o domínio do cálculo aritmético não deve limitar-se à execução das técnicas, senão que deve abarcar também a capacidade de descrevê-las e "objetivá-las".

(c) Os elementos mais significativos das atividades associadas à álgebra escolar.

AG7: Na escritura e manipulação de expressões algébricas, é muito importante distinguir entre os dados conhecidos e as incógnitas.
AG8: Una equação é una igualdade entre expressões algébricas que se cumpre para alguns valores concretos das incógnitas.
AG9: As tarefas mais importantes na *álgebra escolar* são:
— a tradução da linguagem natural para a linguagem algébrica
— o cálculo algébrico
— a resolução de equações.
AG10: Na resolução de problemas verbais mediante equações, estas se constroem como tradução do texto do enunciado, com a ajuda eventual de esquemas figurativos.

(d) As dificuldades más destacadas na realização das atividades “algébricas”.

AG11: Uma das principais dificuldades da *álgebra escolar* está na manipulação de expressões algébricas com incógnitas, devido a dificuldade em atribuir-lhes um significado preciso.
AG12: Outra das principais dificuldades da *álgebra escolar* está na necessidade de assinalar aos símbolos que representam as operações (+, -, *, /) um significado diferente (e nem sempre único) do que tinham na linguagem aritmética.
AG13: As dificuldades conceituais e manipulativas da *álgebra escolar* são superiores às que aparecem na aritmética e na geometria, principalmente por seu nível de abstração.