UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ

INSTITUTO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E CIENTÍFICA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

PROBLEMAS MATEMÁTICOS DA ANTIGUIDADE COMO ESTRATÉGIA PARA O ENSINO DE MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Marcelo Miranda Serrão

Belém, PA
2014

MARCELO MIRANDA SERRÃO

PROBLEMAS MATEMÁTICOS DA ANTIGUIDADE COMO ESTRATÉGIA PARA O ENSINO DE MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Educação em Ciências e Matemática do Instituto de Educação Matemática e Científica - IEMCI da UFPA, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, sob orientação do Prof. Dr. João Cláudio Brandemberg.

Belém, PA

2014

**Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP) –
Biblioteca do IEMCI, UFPA**

Serrão, Marcelo Miranda.

Problemas matemáticos da antiguidade como estratégia para o ensino de matemática na educação básica / Marcelo Miranda Serrão, orientador Prof. Dr. João Cláudio Brandemberg – 2014.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Pará, Instituto de Educação Matemática e Científica, Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas, Belém, 2014.

1. Matemática – estudo e ensino. 2. Matemática – história. 3. Educação – matemática. I. Brandemberg, João Cláudio, orient. II. Título.

CDD - 22. ed. 510.7

MARCELO MIRANDA SERRÃO

PROBLEMAS MATEMÁTICOS DA ANTIGUIDADE COMO ESTRATÉGIA PARA O ENSINO DE MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Exemplar correspondente a redação da dissertação apresentada para a defesa de dissertação de Marcelo Miranda Serrão submetida a banca examinadora.

Banca examinadora:

____ - Orientador

Membro: Prof. Dr. João Cláudio Brandemberg - UFPA

____

Membro: Prof. Dr. Iran Abreu Mendes - UFRN

____

Membro: Prof ª Dra. Maria José de Freitas Mendes - UFPA

Belém, PA
2014

AGRADECIMENTOS

Ao poderoso Deus pela vida e força na realização deste trabalho.

Ao meu orientador prof. Dr. João Cláudio Brandemberg, pela expressiva confiança, correta orientação e forte amizade.

À minha família pelo apoio emocional, em especial à minha esposa Anneliese Serrão.

A todos os professores, amigos e colegas que com seu apoio e incentivo me ajudaram nesta jornada.

Aos professores Iran Mendes e Maria José de Freitas Mendes pelas contribuições dadas e pela extrema competência na avaliação deste trabalho.

A Universidade Federal do Pará (UFPA) e ao Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas (PPGECM) pela oportunidade.

À CAPES, pela concessão da bolsa de estudos para realização deste trabalho.

Enfim, a todos que colaboraram na realização deste objetivo o meu muito obrigado.

RESUMO

O enfoque desta pesquisa foi investigar a Matemática de três períodos históricos, visando localizar problemas clássicos e suas possíveis formalizações, de modo a podermos compreender seus elementos, compará-los e verificarmos se há recorrências desses problemas em períodos diferentes. A investigação e o estudo das matemáticas, a partir das fontes características desses períodos históricos, a saber: o *Papiro de Rhind* do século XVII a.C., o *Aritmética* de Diofanto do século III e o *Liber Abaci* de Fibonacci do século XII, nos permitiu selecionar problemas de cunho histórico em um processo de integração, visando oferecer aos professores da educação básica, apontamentos e sugestões para a exploração deste tipo de problemas como meio de superação de dificuldades de aprendizagem em sala de aula. Uma vez que a utilização da história da Matemática, promove uma integração da Matemática do passado com a Matemática dos dias atuais e oportuniza uma forma de tratamento dos conteúdos e conhecimentos matemáticos contextualizados.

Palavra Chave: Educação Matemática. Problemas Históricos. História da Matemática. Ensino de Matemática.

ABSTRACT

The focus of this research was to investigate the mathematics of three historical periods, aiming to find classical problems and their possible formalization, so that we can understand its elements, compare them and check if there are recurrences of these problems in different periods. Research and study of mathematics, from the characteristics of these sources historical periods, namely: the *Rhind Papyrus* of the seventeenth century BC, the *Arithmetic* of Diophantus third century *Liber Abaci* Fibonacci and the twelfth century, allowed us to select problems imprint history in an integration process, aiming to provide basic education teachers, notes and suggestions to the exploration of such issues as a means of overcoming learning difficulties in the classroom. Since the use of history of mathematics, mathematics promotes an integration of past with present-day mathematics and gives opportunity to a form of treatment of content and contextualized mathematical knowledge.

Keyword: Mathematics Education. Historical Problems. History of Mathematics. Teaching of Mathematics.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1	As pirâmides de Gizé na cidade do Cairo, Egito. Quéops, Quéfrem e Miquerinos. Antigo Império (3200 a.C. a 2300 a.C.)	33
Figura 2	Representa a colheita do papiro. Estela funerária do túmulo de Nefer e Ka-hay, Egito, séculos 2500-2400 a. C. **Fonte**: Museu do Louvre, Paris.	34
Figura 3	CASSON, Lionel (Org.). O antigo Egito. Rio de Janeiro: Olympio, 1983. **Fonte**: Biblioteca de história universal Life	35
Figura 4	Escrita e números hieroglífica e hierática. Os primeiros símbolos egípcios para os números de 1 a 9 e símbolos egípcios para um grande número. **Fonte**: GILLINGS, R. J. Mathematics in the Time of the Pharaohs; Dover Publication, 1982. p. 5.	36
Figura 5	Escultura representando um escriba egípcio, encontrada em Sacara, no Egito, datada de 2500 a.C. **Fonte:** Museu do Louvre, Paris.	39
Figura 6	Alfabeto Hieroglífico.	40
Figura 7	Pedra de Roseta, de 196 a.C., é uma peça de grande importância para o estudo do Egito antigo. Museu Britânico, Inglaterra.	41
Figura 8	Um recorte do *Papiro Rhind*, 1650 a.C. Museu Britânico, Inglaterra.	42
Figura 9	Recorte envolvendo problemas geométrico no *Papiro de Rhind* (1650 a.C.) **Fonte**: Museu Britânico, Inglaterra.	43
Figura 10	Sistema de Cordas Egípcio. **Fonte**: Toledo (1997, p. 19)	45
Figura 11	Charge com rosto de Dom Pedro II na face da esfinge foi publicada em 1871 pela Revista Ilustrada. **Fonte**: Bakos (2004)	46
Figura 12	Acrópole de Atenas na Grécia.	52
Figura 13	Relevo romano do século II d.C. representando um professor grego e seus alunos. A obra foi encontrada em Neumangen-Dhron, Alemanha. **Fonte**: Museu do Estado de Renânia, Trier, Alemanha.	54
Figura 14	VIETE, **François. L'Algèbre nouvelle de Mr Viète**. Tradução de A. Vasset, 1630. **Fonte**: Gallica Bibliotèque Numérique. Disponível em <http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k108864f>. Acesso em 11 dezembro de 2013.	58

Figura 15	O *Aritmética* de Diofanto de Bachet de Méziriac com comentários de Pierre de Fermat publicada em 1670. **Fonte**: Gallica Bibliotèque Numérique. Disponível em http://www.e-rara.ch/zut/content/pageview/2790613 - Bibliothèque Nationale de France. Acesso em 03 de dezembro de 2013.	60
Figura 16	No alto, anverso de moeda de ouro utilizada na cidade de Gênova, Século XIII. Museu Bottacin, Itália; acima, moeda com detalhe de um escudo de ouro do reinado de Luís XI, 1266. **Fonte**: Biblioteca Nacional da França.	65
Figura 17	Desenho de Pisa do século XVI certamente mostra a cidade no tempo de Leonardo. **Fonte**: Biblioteca Nacional de Florença.	66
Figura 18	Páginas do *Liber Abaci* que mostram o antigo método de contagem à mão. **Fonte**: Biblioteca Ambriosiana, Milão.	72
Figura 19	Páginas do Liber Abaci. **Fonte**: Biblioteca Ambriosiana, Milão.	73
Figura 20	Gravura sobre madeira de Gregor Reisch, *Margarita Philosophica* (Freiburg, 1503). A aritmética ensina ao alegorista e ao abacista, aqui impropriamente representados por Boécio e Pitágoras.	74
Figura 21	Um recorte do *Papiro de Rhind,* (1650 a.C.) Progressão Aritmética. **Fonte**: Museu Britânico, Inglaterra.	78
Figura 22	Problema 40 do *Papiro de Rhind*. **Fonte**: GILLINGS, R. J. Mathematics in the Time of the Pharaohs; Dover Publication, 1982. p. 170.	79
Figura 23	Problemas 64 do *Papiro de Rhind*. **Fonte**: GILLINGS, R. J. Mathematics in the Time of the Pharaohs; Dover Publication, 1982. p. 171.	80
Figura 24	Problemas 40 do *Papiro de Rhind*. **Fonte**: GILLINGS, R. J. Mathematics in the Time of the Pharaohs; Dover Publication, 1982. p. 172-173.	81
Figura 25	Um recorte do *Papiro de Rhind,* (1650 a.C.) Progressão Aritmética. **Fonte**: Museu Britânico, Inglaterra.	82
Figura 26	Problemas 64 do *Papiro de Rhind*. **Fonte**: GILLINGS, R. J. Mathematics in the Time of the Pharaohs; Dover Publication, 1982. p. 175.	83
Figura 27	Problema 79 do *Papiro de Rhind,* (1650 a.C.) Progressões Geométricas. **Fonte**: Museu Britânico, Inglaterra.	84
Figura 28	Recorte do problema 79 do *Papiro de Rhind*. **Fonte**: GILLINGS, R. J. Mathematics in the Time of the Pharaohs; Dover Publication, 1982. p. 14.	85

Figura 29 Os termos dessa sequência são conhecidos como frações dos olhos do deus Hórus. **Fonte**: GILLINGS, R. J. Mathematics in the Time of the Pharaohs; Dover Publication, 1982. p. 211. 86

Figura 30 Problema 7 do Livro III. O *Aritmética* de Diofanto, segundo Bachet de Méziriac com comentários de Pierre de Fermat publicada em 1670 p. 103. **Fonte**: Gallica Bibliotèque Numérique. Disponível em http://www.e-rara.ch/zut/content/pageview/2790791 - Bibliothèque Nationale de France. Acesso em 03 de dezembro de 2013. 89

Figura 31 Problema 7 do Livro III – O *Aritmética* de Diofanto, segundo Bachet de Méziriac com comentários de Pierre de Fermat publicada em 1670 p. 104. **Fonte**: Gallica Bibliotèque Numérique. Disponível em http://www.e-rara.ch/zut/content/pageview/2790792 - Bibliothèque Nationale de France. Acesso em 03 de dezembro de 2013. 91

Figura 32 Problema 7 do Livro III – O *Aritmética* de Diofanto, segundo Bachet de Méziriac com comentários de Pierre de Fermat publicada em 1670 p. 105. **Fonte**: Gallica Bibliotèque Numérique. Disponível em http://www.e-rara.ch/zut/content/pageview/2790793 - Bibliothèque Nationale de France. Acesso em 03 de dezembro de 2013. 92

Figura 33 Problema 7 do Livro III – O *Aritmética* de Diofanto, segundo Bachet de Méziriac com comentários de Pierre de Fermat publicada em 1670 p. 106. **Fonte**: Gallica Bibliotèque Numérique. Disponível em http://www.e-rara.ch/zut/content/pageview/2790794 - Bibliothèque Nationale de France. Acesso em 03 de dezembro de 2013. 93

Figura 34 Problema 7 do Livro III – O Aritmética de Diofando, **Fonte**: HEATH, T. L. Diophantus of Alexandria: A Study in the History of Greek Algebra. Forgotten, 2012. Publicação original 1910. p.158. 94

Figura 35 Problema 1-2 do Livro V – O *Aritmética* de Diofanto, segundo Bachet de Méziriac com comentários de Pierre de Fermat publicada em 1670 p. 212. **Fonte**: Gallica Bibliotèque Numérique. Disponível em http://www.e-rara.ch/zut/content/pageview/2790900 - Bibliothèque Nationale de France. Acesso em 10 de dezembro de 2013. 95

Figura 36 Problema 1-2 do Livro V – O *Aritmética* de Diofanto, segundo Bachet de Méziriac com comentários de Pierre de Fermat publicada em 1670 p. 212. **Fonte**: Gallica Bibliotèque Numérique. Disponível em http://www.e-rara.ch/zut/content/pageview/2790901 - Bibliothèque Nationale de France. Acesso em 10 de dezembro de 2013. 97

Figura 37	Problema 1-2 do Livro V – O *Aritmética* de Diofanto, segundo Bachet de Méziriac com comentários de Pierre de Fermat publicada em 1670 p. 212. **Fonte**: Gallica Bibliotèque Numérique. Disponível em http://www.e-rara.ch/zut/content/pageview/2790902 - Bibliothèque Nationale de France. Acesso em 10 de dezembro de 2013.	98
Figura 38	Problema 1-2 do Livro V – O Aritmética de Diofando, **Fonte**: HEATH, T. L. Diophantus of Alexandria: A Study in the History of Greek Algebra. Forgotten, 2012. Publicação original 1910. p.200.	99
Figura 39	Problema 2 do Livro V – O Aritmética de Diofando, **Fonte**: HEATH, T. L. Diophantus of Alexandria: A Study in the History of Greek Algebra. Forgotten, 2012. Publicação original 1910. p.201.	100
Figura 40	Problema 18 – O *Liber Abaci* de Fibonacci. **Fonte:** SIGLER. L. E. Fibonacci's Liber Abaci: a translation into moderno English of Leonardo Pisano's Book of Calculation. Springer, 2002. p.404.	104
Figura 41	Problema do *Papiro de Rhind* no livro didático. **Fonte:** Apresentada por Fausto Arnaud Sampaio, na Coleção Jornadas – *Matemática*. Editora Saraiva. 2010. p. 116 e p. 117.	105
Figura 42	Decifrando o enigma da idade de Diofanto no livro didático. **Fonte:** Apresentada por Fausto Arnaud Sampaio, na Coleção Jornadas – *Matemática*. Editora Saraiva. 2010. p. 150 e p. 151.	106
Figura 43	Problema dos coelhos de Fibonacci no livro didático. **Fonte:** Apresentada por Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce, David Degenszajn, Roberto Périgo e Nilze de Almeid, na Coleção Conecte – *Matemática: Ciência e aplicações 1*. Editora Saraiva. 2010. p. 267 e p. 268.	107

LISTA DE TABELAS

Tabela 1	Classificação do conteúdo do *Papiro de Rhind*, segundo GILLINGS (1976)	48
Tabela 2	$\frac{n}{10}$, segundo GILLINGS (1972)	49
Tabela 3	$\frac{2}{n}$, segundo GILLINGS (1972)	49
Tabela 4	Confeccionada a partir de HEATH (1910)	61
Tabela 5	Confeccionada a partir de SIGLER (2002)	75
Tabela 6	Quadro comparativo das estratégias de resolução de problemas	108

LISTA DE MAPAS

Mapa 1	Período Pré-dinástico (3200 a. C.) Fonte – DUBY, Georges. *Atlas historique mondial*. Paris: Larousse, 2003. p. 6.	31
Mapa 2	Região da antiga Babilônia. **Fone**: DUBY, Georges. *Atlas historique mondial*. Paris. Larousse, 2003. p. 7 e p. 9.	32
Mapa 3	Grécia Antiga. Atlas Histórico. São Paulo: Encyclopaedia Britannica, 1977. p. 165.	51
Mapa 4	A Expansão Colonial Grega. **Fonte**: HILGERMANN, Werner; KINDER, Herman. Atlas historique. Paris: Perris, 1992. p. 46.	52
Mapa 5	Rotas comerciais do século XIII. **Fonte**: DUBY, Georges. *Atlas historique mondial*. Paris: Larousse, 2003. p. 64-65.	64

SUMÁRIO

Apresentação 15

Capítulo 1: Situando a Problemática e Fundamentação Teórica 17

1.1. Introdução 18

1.2. Delimitação do problema 18

1.3. Usos da história no ensino da matemática 19

1.4. Objetivos e hipóteses 24

1.5. Pressupostos teóricos metodológicos 28

1.6. Procedimentos metodológicos 28

Capítulo 2: Revisita à história da matemática em busca de problemas de cunho histórico 30

2.1. O *Papiro de Rhind*: Uma contribuição da matemática egípcia do tempo dos faraós. 30

2.2. A *Aritmética* de Diofanto: Uma contribuição da matemática grega do século III. 50

2.3. O *Liber Abaci* de Fibonacci: A contribuição da matemática árabe e a dinâmica comercial italiana. 63

Capítulo 3: Apresentação de atividades com problemas de cunho histórico estudados. 76

3.1. Alguns problemas do *Papiro de Rhind.* 77

3.2. Alguns problemas do *Aritmética* de Diofanto. 89

3.3. Alguns problemas do *Liber Abaci* de Fibonacci. 103

3.4. Sobre a apresentação de problemas históricos em livros didáticos 105

3.5. Análise comparativa das estratégias de resolução dos problemas de cunho histórico estudados. 108

Capítulo 4: Relações epistemológicas na construção de conceitos matemáticos a partir da análise das progressões na resolução de problemas clássicos 111

Considerações finais 118

Referências 120

Apresentação

A produção na área de história da Matemática tem crescido substancialmente nos últimos anos, porém, ainda é presente a sensação de que há falta de textos voltados para o ensino de Matemática na Educação Básica. Acreditamos que podemos contribuir de forma significativa, como também fazer um percurso pela história da matemática em algumas civilizações da Antiguidade, convictos de que a história da matemática abre caminhos para uma matemática cristalizada.

Em estudos realizados para conclusão de curso na graduação, em licenciatura plena em Matemática na UFPA, e das pesquisas sobre o teorema de Pitágoras, percebi uma grande motivação para desenvolver um projeto de pesquisa que integrasse a resolução de problemas e história da Matemática. Esse interesse em trabalhar com história da Matemática e ensino de Matemática, vem de minha atividade como professor, das conversas e incentivos recebidos em encontros, em eventos científicos, com especialistas da área que trabalham com esta tendência em educação matemática.

Há uma necessidade de avançar, e nessa pesquisa pretendemos aprimorar nossas práticas pedagógicas em busca de ferramentas que possibilitem desenvolver no aluno posicionamento crítico e independência diante de situações novas e desafiadoras. Além disso, desenvolver nos alunos a capacidade de resolução de problemas, como ponto de partida fundamental da atividade Matemática, são finalidades dos Parâmetros Curriculares Nacionais, que visam construir referências nacionais comuns ao processo educativo para que os alunos possam ter acesso ao conjunto de conhecimentos necessários ao exercício da cidadania.

Sabemos, entretanto, que a axiomatização necessária para obtermos o que atualmente conhecemos na aritmética e na álgebra por meio da resolução de problemas só foi possível a partir da evolução sociocultural ao longo da história da matemática. Todavia, entendemos que, para nossa pesquisa, era necessário demarcarmos três recortes históricos. Assim, iniciamos com o *Papiro de Rhind* (1650 a.C.), em seguida o *Aritmética* de Diofanto (300) e o *Liber Abaci* de Fibonnacci (1240). Daí, em diante, fizemos uma análise descritiva de alguns problemas da Antiguidade para apontar sugestões voltadas ao ensino de Matemática na Educação Básica. A resolução de problemas históricos poderá possibilitar um maior entendimento dos conceitos envolvidos ao despertar no aluno o espírito investigativo a partir de uma análise sociocultural de cada época. No entanto, nosso objetivo foi investigar a matemática desses três períodos históricos para localizar problemas clássicos e suas possíveis formalizações, de modo a podermos compreender porque, e como se esboçavam alguns de seus elementos, em seguida compará-los para sabermos se há repetições desses problemas em diferentes momentos históricos. Neste trabalho pretendemos contribuir para a construção de materiais que auxiliem o professor de Matemática na elaboração de atividades ministradas em sala de aula. Nosso trabalho está organizado em quatro capítulos:

No primeiro capítulo apresentamos, de forma concisa, uma exposição da problemática da pesquisa, nosso referencial teórico, justificativa e relevância da pesquisa, delimitação do problema, sobre o uso da história no ensino da Matemática, objetivos e hipóteses, pressupostos teóricos metodológicos e os procedimentos metodológicos.

No segundo capítulo, fazemos uma leitura histórica da Matemática a partir de três pilares: O *Papiro de Rhind* que representa uma contribuição da Matemática egípcia no tempo dos faraós; O livro *Aritmética* de Diofanto, que é uma contribuição da Matemática grega do século III e o *Liber Abaci* de Fibonnacci: uma contribuição da Matemática árabe e sobre a dinâmica comercial italiana.

No terceiro capítulo, são apresentados os problemas históricos estudados, analisando como os conhecimentos científicos de cada período histórico geraram e fundamentaram as metodologias de ensino. Sempre que necessário, tentaremos traduzir o pensamento dos matemáticos antigos de que tratamos aqui em linguagem simbólica atual, correspondente àquela citada na época em questão, para facilitar o entendimento. Os diversos termos utilizados em várias épocas serão mantidos de acordo com o contexto histórico no qual estavam inseridos. É justamente esta mudança de nomenclatura que estrutura a divisão em capítulos, uma vez que, de nosso ponto de vista, ela traduz também a transformação da concepção epistemológica sobre a resolução desses problemas em cada época.

No quarto capítulo, apresentamos os principais resultados envolvendo problemas clássicos de progressões, articulando-os com a literatura, a partir das relações epistemológicas na construção de conceitos matemáticos.

Para finalizar, fizemos algumas considerações, com o objetivo de apontar caminhos para o desenvolvimento de uma abordagem no processo de ensino e aprendizagem a partir deste estudo. Segundo Medeiros e Medeiros (2004), a simbolização precoce traz sérios danos a formação do pensamento especulativo, da exploração das relações numéricas porventura existentes na situação em causa e da própria intuição matemática a ser necessariamente desenvolvida.

Capítulo 1 - Situando a Problemática e Fundamentação Teórica

1.1. Introdução

Em algumas escolas o ensino da Matemática, consiste tão somente, na manipulação de algoritmos, ou seja, na proposição e resolução de exercícios a partir de passos e regras formais, procedimento este que mecaniza a obtenção de resultados e não contribui para a construção de conhecimentos. Em sala de aula, constata-se o uso exagerado de regras e resoluções por meio de procedimentos padronizados, o que desmotiva tanto os alunos quanto os professores.

Neste contexto, a Matemática, então, passa a ser encarada por grande parte dos alunos como uma disciplina difícil, chata e sem muita conexão com a realidade. Desta forma, não faz-se entender a importância e necessidade dos conhecimentos básicos desta para a resolução das mais variadas situações problemas apresentadas no cotidiano.

Hoje, os alunos aprendem a resolver “problemas” (questões) matemáticos e, de um modo geral, os problemas propostos em sala de aula são exercícios repetitivos para fixar os conteúdos que acabaram de ser apresentados, motivando o uso de procedimentos padronizados para serem utilizados na resolução de problemas semelhantes. Essa atividade não desenvolve no aluno, a capacidade de se transportar do raciocínio utilizado na resolução destes, para o estudo de outros assuntos ou mesmo de problemas relacionados.

A resolução de problemas matemáticos de cunho histórico (clássicos) pode possibilitar aos alunos mobilizarem conhecimentos e desenvolverem a capacidade para gerenciar as informações que estão ao seu alcance dentro e fora da sala de aula. Assim, os alunos terão oportunidade de ampliar seus conhecimentos, acerca de conceitos e procedimentos matemáticos bem como do mundo em geral e desenvolver sua autoconfiança.

Com relação ao uso da história no ensino e suas contribuições, seguimos Miguel e Miorin (2005), Mendes (2009, 2010), Fossa (2001) e Brandemberg (2010), uma vez que nos trabalhos desses autores são considerados aspectos importantes da utilização, assim como de resultados obtidos a partir desta abordagem. A partir das leituras destes autores é que fazemos nossa apresentação dos principais pontos e fundamentação para nossa pesquisa.

Em nossa pesquisa buscamos, investigar e difundir a partir de um estudo da história da matemática, a utilização de problemas matemáticos da Antiguidade como estratégia para o ensino de Matemática na Educação Básica, por meio de ações, elaboração de atividades que possam vir a contribuir para melhoria do ensino de matemática. Discutir possibilidades e analisar o desenvolvimento e os resultados da aplicação desses problemas clássicos a partir do uso da história no ensino de matemática, pode possibilitar uma visão contextualizada em relação a esta disciplina, além de tornar o processo de ensino e aprendizagem da matemática na educação básica algo mais intuitivo, dinâmico, prazeroso e desafiador.

1.2. Delimitação do Problema

A partir da pesquisa, em busca de problemas históricos da Matemática, passamos a delinear de forma significativa alguns artefatos que fizeram e fazem parte da construção do conhecimento matemático e, portanto, podem fazer parte do ensino de Matemática. O nosso estudo destaca três recortes da história da matemática os quais entendemos que a pesquisa deveria ser focalizada.

Iniciamos pelas raízes históricas da Matemática elementar a partir da civilização egípcia. Com destaque o *Papiro de Rhind* (1650 a. C.) escrito pelo escriba Ahmes onde são identificados 87 problemas, dos quais os problemas 40, 64, 79 que estão relacionados com progressões. Nossas fontes iniciais foram os livros: GILLINGS, R. J. **Mathematics in the Time of the Pharaohs**; Dover Publication, 1982 e BUNT, L. N. H.; JONES, P. S.; BEDIENT, J. D. **The historical roots of elementary mathematics**. New York: Dover Publications, 1988.

Em seguida, a obra *Aritmética* de Diofanto de Alexandria, que possui seis livros com uma seleção de 189 problemas de natureza variada onde as demonstrações são apenas ilustrações, em casos particulares concretos. Os problemas de influência árabe totalizam 101. Uma das contribuições mais significativas deste trabalho diz respeito às notações: são introduzidas algumas abreviaturas para designar quantidades e operações, iniciando o que viria a chamar-se "álgebra sincopada". Utilizamos como fontes: **O *Aritmética* de Diofanto de Bachet de Méziriac com comentários de Pierre de Fermat** publicada em 1670. Fonte: Gallica Bibliotèque Numérique. Disponível em http://www.e-rara.ch/zut/content/pageview/2790613 - Bibliothèque Nationale de France. Acesso em 03 de dezembro de 2013 e HEATH, T. L. **Diophantus of Alexandria: A Study in the History of Greek Algebra**. Forgotten, 2012. Publicação original 1910.

E para finalizar, nos deslocamos para o século XII, onde Leonardo Fibonacci (1170 – 1240), também conhecido como Leonardo de Pisa, escreveu o *Liber Abaci*. Ainda que não tenha se tratado de uma obra verdadeiramente original, mas uma compilação de ensinamentos de métodos de resolução árabes, dentre os quais destacamos, problemas envolvendo progressões aritméticas e geométricas e forma como o mesmo havia sido usado desde a Antiguidade. Como fonte destacamos: SIGLER. L. E. **Fibonacci's Liber Abaci: a translation into moderno English of Leonardo Pisano's Book of Calculation**. Springer, 2002.

1.3. Usos da História no Ensino da Matemática

Nos estudos realizados por Fauvel e Maanem (2000) são apontados vários argumentos a favor da integração da história em sala de aula, destacando a existência de cinco principais áreas nas quais o ensino da Matemática possa ser supostamente enriquecido e melhorado com a integração da História da Matemática no processo educacional.

Fauvel e Maanem ressaltam que há uma melhora significativa no aprendizado da matemática e que a história possibilita a visão sobre a natureza do conhecimento matemático e da atividade matemática, contribuindo para elaboração de atividades significativas para o ensino da matemática, promove a visão da matemática como uma atividade humana e cultural.

Além disso, a história aumenta a motivação para a aprendizagem da matemática, humanizando a matemática e mostrando o seu desenvolvimento através dos tempos. A compreensão do desenvolvimento histórico dos conceitos matemáticos permite estabelecer uma valorização das técnicas de resolução, oriundas do conhecimento desenvolvido ao longo da história das sociedades.

A história contribui para que os estudantes busquem no passado soluções matemáticas para o presente fazendo da matemática um conhecimento agradável para os estudantes, ajudando a manter o interesse e a satisfação dos mesmos.

São argumentos como estes, descritos por Fauvel e Maanem (2000) que apontam os diversos caminhos para um uso da história, como uma alternativa (ou possibilidade) para o ensino de matemática no mundo.

No Brasil, uma das mudanças sugeridas nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) na forma de abordar os conteúdos de Matemática, em sala de aula, é a utilização da história da Matemática como recurso pedagógico. Segundo os PCN, este recurso permite que:

> Ao revelar a Matemática como uma criação humana, ao mostrar necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, ao estabelecer comparações entre os conceitos e processos matemáticos do passado e do presente, o professor tem a possibilidade de desenvolver atitudes e valores mais favoráveis do aluno diante do conhecimento matemático. (BRASIL, 1998, p. 45.)

Partindo desse entendimento, um dos argumentos de utilizar a história no ensino de Matemática, trata-se do poder motivador da histórica que promove o despertar do interesse do aluno em estudar o conteúdo matemático que lhe está sendo ensinado.

Esse argumento é sustentável na medida em que proporciona momentos de distanciamento do aspecto formal e rigoroso do conhecimento matemático. D'Ambrosio (1996, p. 31) reforça o elemento motivador da história quando afirma que "torna-se cada vez mais difícil motivar alunos para uma ciência cristalizada. Não é sem razão que a história vem aparecendo como um elemento motivador de grande importância".

A inclusão de textos históricos que abordam temáticas diferenciadas, como por exemplos: a participação da mulher na construção do conhecimento matemático; a vida e obra de matemáticos da história; a origem e significado de termos matemáticos; curiosidades e recreações matemáticas, entre outros, parecem muito relevantes, tendo em vista o despertar do interesse do aluno em estudar a matemática. Essa posição é colocada por Miguel e Miorim (2005) quando esclarecem que vários autores se alinham a esse argumento, considerando que os textos históricos exercem um papel motivador no processo de ensino e aprendizagem da matemática.

O uso da história como impulsionadora do interesse do aluno para estudar Matemática tem sua ligação com o uso episódico defendido por Fossa (2001, p.55) quando aborda que "tem uma tendência de ser menos intensivo, frequentemente limitando o papel da história a uma parte introdutória motivadora". É interessante esclarecer que o uso episódico da história nas aulas de Matemática se confunde com o uso ornamental, uma vez que as informações históricas se apresentam, algumas vezes, desligadas do tema que está sendo abordado em sala de aula, e é feito de forma esporádica.

Em acordo com Fossa (2001), percebemos que em alguns livros didáticos as referências históricas não contribuem para o enriquecimento pedagógico, tendo em vista que se apresentam apenas como ornamentos nos livros, que às vezes, são esquecidas de serem exploradas pelos próprios professores. É importante destacar que o contexto histórico contribui na construção do conhecimento matemático, e que, portanto, deve ser utilizado como fonte de investigação e reconstrução dos conhecimentos historicamente produzidos.

O uso da história da Matemática como um fio condutor para despertar o interesse de quem aprende, pode levar o aluno a reconstituição de alguns problemas vivenciados por outros, em outro período histórico.

Outro argumento de se utilizar a história, em sala de aula, é quando esta é vista como instrumento de compreensão, significação e resolução de problemas, uma vez que promove a busca de elementos esclarecedores das teorias e conceitos matemáticos a serem estudados. Miguel e Miorim (2005, p.46) apontam a necessidade do "(...) levantamento e a discussão dos porquês, isto é, das razões para a aceitação de certos fatos, raciocínios e procedimentos por parte do estudante", ao se utilizar o processo de ensino e aprendizagem da matemática que visa à compreensão e a significação. Jones citado por Miguel e Miorim (2005) acredita que existem três categorias de porquês que deveriam ser ponderados por todos os que se propõem a ensinar matemática: os porquês cronológicos, os porquês lógicos e os porquês pedagógicos. Explica ainda, que os porquês cronológicos dizem respeito às razões de natureza histórica, cultural, casual, convencional, os porquês lógicos seriam aquelas explicações cuja aceitação se baseia na decorrência lógica de proposições previamente aceitas e os porquês pedagógicos seriam aqueles procedimentos operacionais que geralmente utilizamos em aula e que se justificam mais por razões de ordem pedagógica do que histórica ou lógicas.

Mafra e Mendes (2002) esclarecem que a história tem um papel significativo nos processos cognitivos das crianças que estão nas séries iniciais, pois contribui para o desenvolvimento do raciocínio a partir da resolução de problemas e da prática investigativa. Por isso, ao se utilizar problemas históricos para desenvolver conteúdos matemáticos estamos propiciando momentos de reflexões e análise acerca dos pensamentos utilizados pelos estudiosos, naquele período histórico, como também reforçando o elemento motivador que surge na ação cognitiva da busca de solução do problema proposto.

Sobre o uso de problemas históricos no processo de ensino e aprendizagem da Matemática, Miguel e Miorim (2005) propõem que a resolução de um problema constitui por si só uma atividade altamente motivadora e o fato de se utilizar problemas vinculados à história eleva, quase que automaticamente, o seu potencial motivador.

Devemos enfatizar que não é o problema histórico em si que gera a motivação, mas sim, o desafio que ele provoca no aluno e o tipo de relação que ele estabelece entre a sua experiência e o seu interesse em resolvê-lo.

As ideias de Mendes (2001), sobre o uso da história da Matemática em sala de aula, consideram que os aspectos históricos aliados às atividades de ensino e a aprendizagem reforçam um caráter construtivo e favorável à compreensão dos conteúdos matemáticos, fazendo com que os alunos entendam o caráter investigativo presente na origem, organização e disseminação desses conteúdos ao longo do seu percurso histórico.

Merece nossa atenção a explicação feita por Mendes sobre o uso da história da Matemática como recurso de ensino:

> [...] o professor poderá usá-la como fonte de enriquecimento pedagógico e conduzir suas atividades num caminhar crescente, em que o aluno investigue, discuta, sintetize e reconstrua as noções matemáticas anteriormente vistas como definitivas sem que o aspecto histórico tivesse sido usado para despertar o interesse de quem as aprende. (MENDES, 2001, p. 32)

Acreditamos que a história pode ser incorporada no dia-a-dia da sala de aula, na medida em que possibilita a explicação de diversos porquês que os alunos costumeiramente fazem acerca dos conteúdos matemáticos, como também para reforçar a importância do elemento histórico na redescoberta de símbolos e conceitos matemáticos. Por meio do conhecimento histórico, Mendes enfatiza que:

> [...] o aluno é capaz de pensar e compreender as leis matemáticas a partir de certas propriedades e artifícios usados hoje e que foram difíceis de descobrir em períodos anteriores ao que vivemos. Ele deve participar da construção do próprio conhecimento de forma mais ativa e crítica possível, relacionando cada saber construído com as necessidades históricas e sociais nele existentes. (MENDES, 2001, p. 57)

É neste movimento de reelaboração do conhecimento que paramos para refletir sobre os aspectos que contribuíram para sua construção e ao mesmo tempo, podemos perceber quais os obstáculos que os alunos enfrentam ao resolver determinada atividade e buscar alternativas metodológicas para superá-los. Ao se pensar numa atividade histórica devemos considerar os aspectos criativo e imaginativo que deve provocar nos estudantes, para que possibilite a ampliação e reelaboração dos conhecimentos já existente.

O estudo feito por Fossa elucida o uso da história da Matemática como recurso pedagógico, uma vez que,

> [...] caracteriza muito bem as diferentes formas de uso pedagógico da história da matemática no ensino e dá uma certa importância ao ensino desenvolvido através da utilização de atividades, o que tornaria esse ensino verdadeiramente dinâmico, dependendo apenas do tipo de atividade a ser aplicada em sala de aula. (FOSSA, 2001, p. 56)

D'Ambrosio citado por Gutierre (2004, p. 172) "afirma que a história serve para situar a matemática como uma manifestação cultural de todos os povos em todos os tempos, como a linguagem, os costumes, os valores, as crenças e os hábitos, e, como tal, diversificada nas suas origens e na sua evolução". Com isso, podemos perceber que a história nos mostra o conhecimento matemático como consequência de um processo evolutivo.

Fossa (2001) esclarece que quando o professor promove uma abordagem utilizando as informações históricas, procura estabelecer conexões com os aspectos construtivos dos conceitos matemáticos ligados a tais informações. Dessa forma, os fatos históricos poderão ser utilizados como um elemento provocador da construção de conhecimento por parte do aluno.

O enfoque dado por Miguel (1993), na sua tese de doutorado *Três estudos sobre História e Educação matemática,* na apreciação crítica das diferentes funções da história da matemática, nas aulas de matemática, apresenta treze tipos de razões pedagógicas da utilização da história da Matemática como recurso didático. Este trabalho tem contribuído para construção de argumentos favoráveis de uso de fontes históricas na sala de aula de Matemática.

Miguel (1993, p. 32) esclarece que a história pode nos ser mostrada como: "[...] instrumento de compreensão e avaliação (...) de superação e reorientação das formas de ação, isto é, de transformação", tendo em vista que busca entender os problemas do passado com o olhar reflexivo de hoje, ressignificando a forma de pensar e agir em outro momento histórico.

Ensinar nesta perspectiva está baseado na visão construtivista do ensino, que considera os aspectos socioculturais dos alunos, seus conhecimentos prévios, sua forma de aprender, estimulando o aluno a investigar e resolver situações-problema da escola e de sua vida, mediando o processo educativo e criando condições para o aluno aprender.

É importante mencionarmos também que, uma das maneiras de estimular o caráter motivador/gerador de conhecimento no ensino e na aprendizagem da matemática é recorrer às fontes originais, principalmente por duas razões: para aproximar os estudantes da experiências de construção matemática (conhecimento histórico e cotidiano) e para iniciá-los de modo prazeroso no mundo da matemática como ciência (conhecimento escolar científico). Assim a sala de aula transforma-se em um meio dinâmico de investigação/pesquisa (experiência) sobre o conhecimento matemático escolar. Desse modo, a partir dos princípios e dessas conexões teóricas apresentadas é que fizemos a formalização dos objetivos dessa pesquisa como segue:

1.4. Objetivos

1.4.1. Objetivo Geral

Investigar a Matemática de três períodos históricos, visando localizar problemas clássicos e suas possíveis formalizações, de modo a podermos compreender seus elementos, compará-los e verificarmos se há recorrências desses problemas em períodos diferentes.

1.4.2. Objetivos Específicos

→ Investigar fontes características desses períodos históricos e estudar as matemáticas produzidas;

→ Selecionar problemas de cunho histórico que tenham como método um processo de integração dos conteúdos estudados;

→ Oferecer aos professores da educação básica algum apontamentos e sugestões para a exploração de problemas de cunho histórico, como meio de superação de dificuldades de aprendizagem em sala de aula.

1.5. Pressupostos Teóricos Metodológicos

Atualmente no Brasil, como em outros países, a história da matemática parece estar vivendo um momento de sucesso em relação à recomendação de sua presença na prática pedagógica na matemática da escola básica. Embora não possamos afirmar que essa recomendação tenha se traduzido em mudanças na realidade das salas de aula, também não podemos negar que, pelo menos no que diz respeito a propostas, os autores de textos curriculares vêm se esforçando no sentido da inclusão dos aspectos históricos no discurso sobre a educação matemática, pelo menos desde a publicação dos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998) para o Ensino Fundamental pelo Ministério da Educação em 1998.

É com esse novo olhar que procuramos motivar nossos alunos, através do uso de problemas de cunho histórico, descobrir fatos novos e encontrar várias outras maneiras de resolverem o mesmo problema, despertando a curiosidade e o interesse pelos conhecimentos matemáticos e assim, desenvolver a capacidade de solucionar as situações que lhes são propostas, além da possibilidade de conhecer e comparar as diversas estratégias de resolução e as ferramentas matemáticas disponíveis em cada época.

> É possível por meio da resolução de problemas desenvolver no aluno iniciativa, espírito explorador, criatividade, independência e a habilidade de elaborar um raciocínio lógico e fazer uso inteligente e eficaz dos recursos disponíveis, para que ele possa propor boas soluções às questões que surgem em seu dia-a-dia, na escola ou fora dela. (DANTE, 1991, p. 25)

Para resolvermos um problema, não é preciso só compreender o que foi proposto ou aplicar os procedimentos adequados até chegarmos à resposta, mas também, desenvolver ações que permitam provar tais resultados, testando seus efeitos e comparando diferentes caminhos para obter a solução, o que deixa bem claro sobre as concepções de ensino aprendizagem.

> Um problema matemático como uma situação que demanda a realização de uma sequência de ações ou operações para obter um resultado, ou seja, a solução não está disponível de início, mas é possível construí-la (BRASIL, 1998, p. 41).

Como exemplo de um problema de cunho histórico, podemos tomar o problema das duas torres presente no *Liber Abaci* de Fibonnacci (1202) e revisto por Brandemberg e Mendes (2005), em língua portuguesa, comparando a resolução com ferramenta moderna (equações) e a resolução histórica (método da falsa posição).

Existem diferentes tipos de problemas e cada tipo tem uma função no processo de aprendizagem do aluno. Exige lucidez e paciência: um problema se inicia com uma aparente desordem e é necessário observar as regularidades, os padrões que permitirão a construção do caminho até a solução. (POLYA, 1978) e (DANTE, 2001)

Segundo Dante (2001), a proposição de problemas deve estar vinculada aos objetivos didáticos, à realidade escolar e extraescolar do aluno. Trata-se, portanto, de trabalhá-los em sala de aula incentivando os alunos a resolvê-los. Com isso, eles desenvolvem o gosto pela Matemática e os problemas ao desafiarem sua curiosidade, estimulam a pesquisa e motivam a busca por novas estratégias de resolução que possam lhes proporcionar o desenvolvimento de capacidades, que resultem em uma aprendizagem matemática mais significativa e útil. Os parâmetros curriculares nacionais (BRASIL, 1998), enfatizam que:

> “o fato de o aluno ser estimulado a questionar sua própria resposta, a questionar o problema, a transformar um dado problema numa fonte de novos problemas, a formular problemas a partir de determinadas informações, a analisar problemas abertos — que admitem diferentes respostas em função de certas condições — evidencia uma concepção de ensino e aprendizagem não pela mera reprodução de conhecimentos, mas pela via da ação refletida que constrói conhecimentos”. Também desenvolvem o gosto pela matemática. (BRASIL, 1998, p. 45)

Outro fator importante, e que deve estar dentro do leque de nossas preocupações de professor é se o aluno possui ou não pré-requisitos para execução do problema proposto (POLYA, 1978). Assim, devem ser propostas aos estudantes situações que eles possam resolver. O professor deve levar seu aluno a superar os procedimentos padronizados, próprios de uma didática desvinculada de situações reais, é possível consolidar essa nova relação do aluno com o conhecimento adquirido na resolução de problemas. De fato, para Polya, o método principal para aprender Matemática é a resolução de problemas. Procurando organizar o processo de resolução de problemas, Polya o dividiu em 4 fases, conforme o que segue:

1ª Fase: Compreensão do problema

É necessário compreender o problema para que o aluno queira resolvê-lo e perceba o que necessita fazer. Se bem compreendido, tem condições de identificar os dados, a incógnita e a condicionante. Quando houver alguma figura relacionada, deve-se traçá-la e indicar nela os dados.

Nota-se que esta fase está profundamente ligada à afetividade, pois não basta compreender o problema, é preciso querer resolvê-lo, isto é, deve haver interesse, curiosidade e desafio para que o aluno empreenda o trabalho.

2ª Fase: Estabelecimento de um plano

O estabelecimento do plano pode passar pela procura de problemas similares, pois o autor acredita que “As boas ideias são baseadas na experiência passada e em conhecimentos previamente adquiridos” (POLYA, 1978, p. 6). Se isso não levar ao sucesso, o aluno terá de procurar fazer variações do problema, generalizações, particularizações e recurso a analogias. O plano é apenas um roteiro geral.

3ª Fase: Execução do plano

Esta etapa é o momento de efetivamente trabalhar o plano concebido. Se as etapas anteriores foram bem desenvolvidas, esta será possivelmente a etapa mais fácil do processo. Para que o aluno obtenha êxito, deve ser estimulado a realizar cada procedimento com muita atenção, permanecendo atento a cada ação desenvolvida, verificando cada passo. O aluno também deve ser estimulado a mostrar que cada procedimento realizado está correto, permitindo a afirmação de seu aprendizado e a comunicação de sua produção.

4ª Fase: Retrospecto

A revisão é um momento muito especial, pois propicia uma depuração e uma abstração da solução do problema. A depuração tem por finalidade verificar os procedimentos utilizados, procurando simplificá-los ou buscar outras maneiras de resolver o problema de forma mais simples. A abstração tem por objetivo refletir sobre o processo realizado, procurando desvendar a importância do problema e do método empregado para resolvê-lo, para que permita uma transposição do aprendizado adquirido neste trabalho para a resolução de outros problemas.

Sobre a utilização das 4 fases, de acordo com Gazire (1988, p. 56), Polya acreditava que, os professores ao observarem essas fases no trabalho, em sala de aula, com a Resolução de Problemas, favorecem o desenvolvimento de uma atitude mental mais clara e produtiva em seus alunos.

Além disso, para Vallejo (1979) o professor quando começa a trabalhar com resolução de problemas matemáticos deve ter objetivos concretos que favoreçam seus alunos na produção de determinadas transformações, isto é, que estes adquiram certos conhecimentos e capacidades. O ensino, os métodos didáticos empregados, deve estar em função destes objetivos.

É necessário que o aluno participe ativamente do processo de resolução do problema, podendo criar suas próprias estratégias de resolução, suas competências e suas habilidades.

Um conceito matemático se constrói articulado com outros conceitos, por meio de uma série de retificações e generalizações. Assim, pode-se afirmar que o aluno constrói um campo de conceitos que toma sentido num campo de problemas, e não um conceito isolado em resposta a um problema particular.

É importante estimular o aluno a buscar conexões entre os dados e o que é solicitado, estimulando, também, que pensem em situações similares, a fim de que possam estabelecer um plano de resolução, definindo prioridades e, se necessário, investigações complementares para resolver o problema.

Em vários momentos, textos históricos envolvendo a matemática, mostrarão tanto para professores como para os alunos, uma nova maneira de encarar a Matemática, seu ensino e sua aprendizagem. Por meio de testes e de diversos instrumentos pôde-se concluir que efetivamente os alunos demonstram uma grande competência em atividades de resolução de problemas, depois de terem vivido essa experiência com textos que versam a respeito da história da matemática.

Nessa perspectiva buscamos tecer uma rede conectada de ideias que sirva como agente fomentador do ato cognitivo em sala de aula através de procedimentos metodológicos como segue:

1.6. Procedimentos Metodológicos

Para alcançarmos os objetivos propostos realizamos uma pesquisa bibliográfica embasada em uma bibliografia especializada que consta de textos sobre a elaboração e resolução de problemas da história da Matemática, da elaboração de atividades para o ensino de Matemática. Esta pesquisa foi realizada segundo as seguintes fases:

1. Em uma primeira fase fizemos o levantamento bibliográfico necessário para os estudos iniciais. O modelo proposto por nós preserva os princípios defendidos por Miguel e Miorin (2005), Mendes (2009, 2010), Fossa (2001) e Brandemberg (2010), quando propõe sugestões de uso da história no ensino de matemática.

2. Fizemos um levantamento de problemas históricos que podem ser trabalhados na resolução de problemas em sala de aula (atividades). Entretanto, foi necessário a criação de uma demarcação desses problemas de acordo com sua importância no ensino de matemática. Então, destacamos três momentos significativos na história da matemática, são eles: O *Papiro de Rhind* (1650 a.C.), A *Aritmética* de Diofanto (300) e *Liber Abaci* de Fibonacci (1240). O material histórico escrito e discutido nesses três momentos, se tornaram os nossos artefatos de pesquisa apresentado nos próximos capítulos da dissertação.

3. Selecionamos estes problemas (atividades) de acordo com sua importância e o conteúdo a ser estudado, tomando como referência sua elaboração e estratégias de resolução. Esses problemas nos fornecerão subsídios para uma maior compreensão dos conceitos matemáticos estudados e favorecerão uma descrição do desenvolvimento histórico desses conceitos pelas civilizações que nos propomos estudar ao longo da história.

Parece claro que trabalhar a construção dos conceitos envolvidos nos problemas da Antiguidade, a partir de sua evolução, e considerando os aspectos históricos e socioculturais envolvidos, pode minimizar as dificuldades que ocorrem atualmente no ensino desse conceito na educação básica, tornando esse conteúdo mais significativo para os alunos e, com isso, melhorar o aproveitamento no processo ensino-aprendizagem.

No próximo capítulo, fazemos uma descrição sucinta do desenvolvimento histórico-epistemológico desses problemas desde a civilização egípcia, passando pela civilização grega até chegarmos ao período medieval, realizada a partir de fontes históricas originais primárias e secundárias[1].

[1] Fontes secundárias envolvem generalizações, análises, sínteses, interpretações, ou avalliações da informação original. Os termos *Primária* e *secundária* são relativos, e algumas fontes podem ser classificadas como primária ou secundária, dependendo em como ela é utilizada.

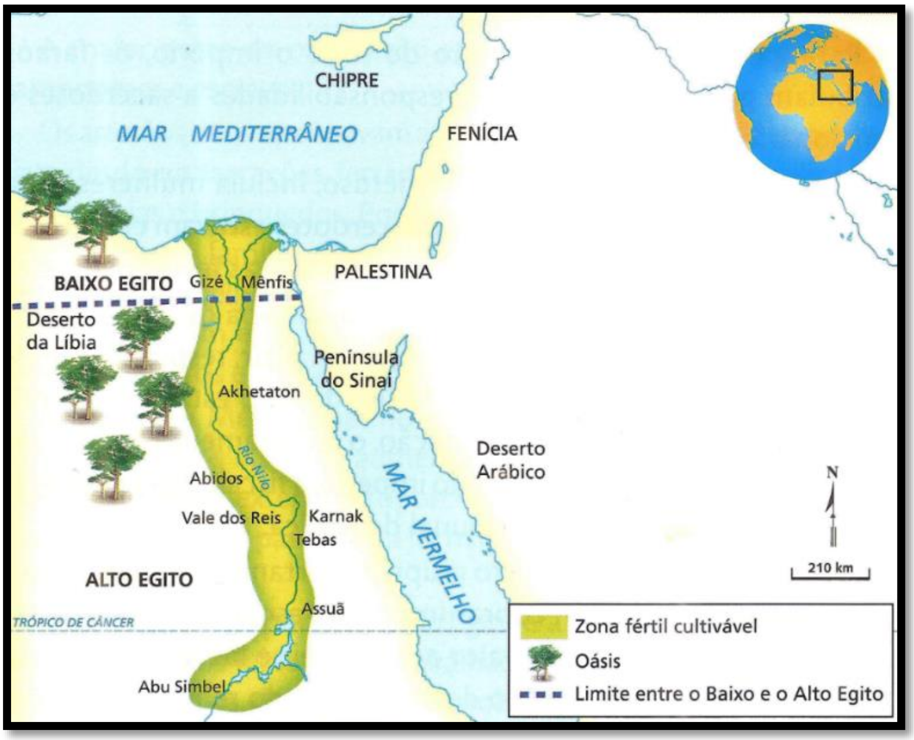
Capítulo 2 - Revisita à história da Matemática em busca de problemas de cunho histórico

Neste capítulo abordamos sucintamente o desenvolvimento histórico-epistemológico da origem de alguns problemas matemáticos, acentuando aspectos importantes desse desenvolvimento, desde o *Papiro de Rhind* (1650 a.C.) que efetivamente é uma contribuição da matemática egípcia do tempo dos faraós, passando pela obra *Aritmética* de Diofanto (300) que é uma contribuição da matemática grega do século III e pelo *Liber Abaci* de Fibonacci (1228) uma contribuição da matemática do período medieval.

2.1. O *Papiro de Rhind*: Uma Contribuição da Matemática Egípcia do Tempo dos Faraós

Nesta seção vamos tratar da Matemática egípcia, especificamente faremos um estudo histórico do tempo dos faraós (1650 a.C.), sobre problemas envolvendo progressões no *Papiro de Rhind*.

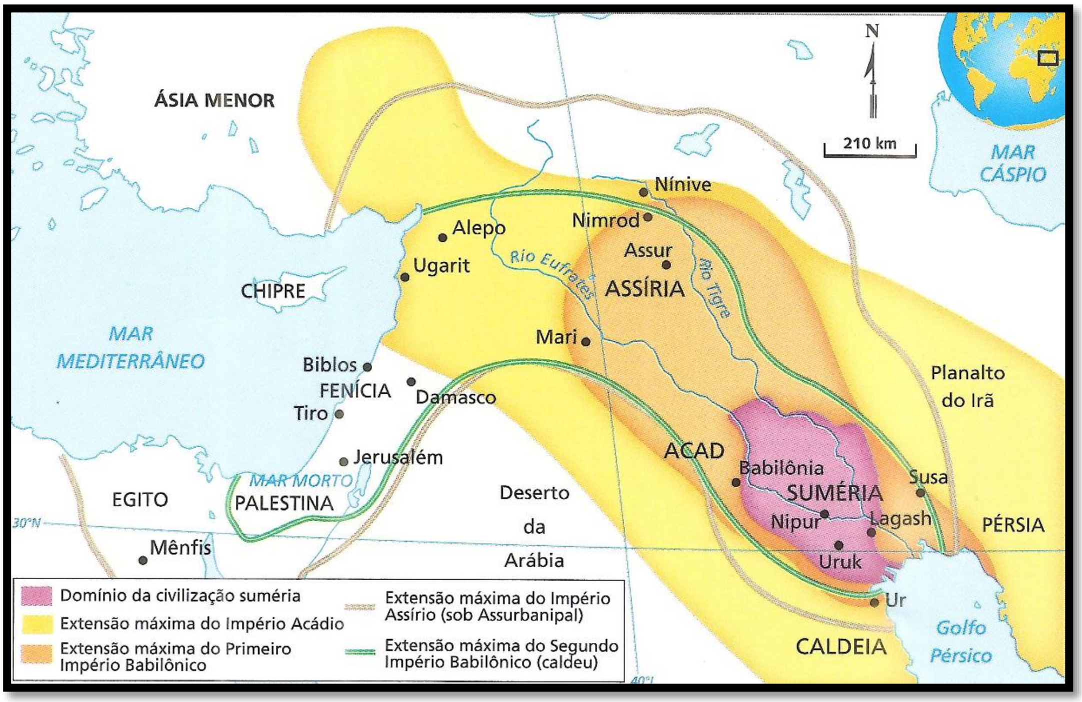
Situado no nordeste da África, em uma região conhecida como Delta do Nilo, o Egito foi uma das maiores civilizações de toda a Idade Antiga.



Mapa 1: Período Pré-dinástico (3200 a.C.) **Fonte:** DUBY, Georges. *Atlas historique mondial*. Paris: Larousse, 2003. p. 6.

Sem dúvida, a existência do rio Nilo foi de suma importância para o desenvolvimento da civilização egípcia, visto que esses povos habitavam uma área desértica e de clima seco. Foi por causa da existência do rio que os egípcios puderam tornar a terra propícia para o desenvolvimento da agricultura.

Durante milhares de anos, vários grupos de pessoas de diversas origens foram se fixando nas proximidades do Nilo, cultivando plantas e domesticando animais. À medida que esses grupos foram crescendo, se aliaram entre si, fundando unidades administrativas independentes (nomos). Os nomos começaram a disputar entre si o controle das terras, até que, após vários conflitos, foram formados dois reinos: o Baixo e o Alto Egito. Aproximadamente no ano de 3200 a.C., o rei do Alto Egito, Menés, conquistou o Baixo Egito, unificando os dois reinos e se tornando, portanto, o primeiro faraó da história do Egito. Essa fase, da junção dos povos em nomos até a unificação dos reinos é chamado de período Pré-Dinástico.



Mapa 2: Região da antiga Babilônia. **Fone**: DUBY, Georges. *Atlas historique mondial*. Paris. Larousse, 2003. p. 7 e p. 9.

O período posterior, em que o Estado egípcio já havia nascido, é denominado de Período Dinástico[2]. Nesta fase, o faraó representava mais do que um simples rei, ele era visto

[2] Processo de sucessão ao trono de reis e soberanos de uma mesma família: dinastia real.

como a encarnação dos próprios deuses, ou seja, o faraó era um semideus, exercendo a função de chefe administrativo, militar, juiz supremo e sumo sacerdote.

No antigo Império (de 3200 a.C. a 2300 a.C.), o Egito conheceu seu apogeu; um resultado disso foi a construção das famosas pirâmides de Gizé que consistem na grande pirâmide de Quéops (Khufu), Quéfrem (Chephren) e Miquerinos (Menkaure).

Figura 1: As pirâmides de Gizé na cidade do Cairo, Egito. Quéops, Quéfrem e Miquerinos. Antigo Império (3200 a.C. a 2300 a.C.)

No Médio Império (de 2100 a.C. a 1750 a.C.), o governo egípcio conseguiu uma grande prosperidade material, resultado de suas trocas com os povos orientais das margens do Mediterrâneo, porém as revoltas internas desgastaram o poder central. No Novo Império (de 1580 a.C. a 525 a.C.), os egípcios adotaram uma política expansionista, assumindo o controle de várias regiões. No entanto, enquanto os faraós e os altos funcionários esbanjavam riqueza, a maioria da população era pobre e obrigada a pagar altos impostos, o que provocou a insatisfação popular e o declínio do poder faraônico.

A estrutura da sociedade egípcia era altamente rígida. No topo estava o faraó, seguido de sacerdotes, nobres e funcionários reais. Nas camadas baixas estavam os artesãos, camponeses e por último, os escravos, em menor número, podiam ser estrangeiros capturados nas guerras, filhos de escravos ou ainda trabalhadores recebidos pelo Estado egípcio como pagamento de tributos por parte das regiões dominadas. A principal atividade econômica era a agricultura: trigo, cevada, algodão, linho, frutas e vinhas. A pesca, a caça e a criação de animais, como bois, cabras e aves, também eram praticadas pelos egípcios. O trabalhos agrícola ocupava cerca de oito meses do ano, correspondendo, no nosso calendário, aos meses de novembro a junho. Nos quatro meses restantes, que correspondiam à época das inundações, os camponeses eram deslocados para a construção e manutenção dos canais de irrigação e para a edificação de grandes obras, como os templos, palácios e as pirâmides. Também houve um desenvolvimento mais discreto do artesanato e do comércio que era feito por meio de trocas.

Figura 2. Representa a colheita do papiro. Estela funerária do túmulo de Nefer e Ka-hay, Egito, séculos 2500-2400 a.C. **Fonte**: Museu do Louvre, Paris.

A coleta realizada no vale do Nilo, a agricultura e a exploração nas minas de ouro, cobre e pedras preciosas forneciam matérias-primas para a atividade artesanal. Nas aldeias produziam-se utensílios mais rústicos para uso diário. Já nas oficinas de templos e palácios produziam-se produtos de luxo para o consumo da elite. Com o papiro, por exemplo, fabricava-se papel, cordas, cestas e esteiras. Os egípcios eram considerados “mestres” na arte de tecer e tinham também uma importante construção naval.

O papiro é um tipo de planta que se desenvolve de forma abundante no Vale do Nilo, sendo utilizado na fabricação de papel, cordas, sandálias, esteiras e velas de barco. O caule fibroso permitia produzir uma superfície plana e flexível própria para a escrita. Primeiro os caules eram cortados em lâminas finas e depois agrupados, formando uma espécie de tecido. O papiro era, em seguida, polido e comprimido.

O comércio interno era bem desenvolvido, mesmo não havendo moedas. A circulação de produtos entre as regiões era intermediada pela administração faraônica. O comércio exterior era feito exclusivamente em grandes expedições organizadas pelo faraó. Os egípcios exportavam vinho, cereais, óleos vegetais, papiro e móveis e importavam pedras preciosas, marfim, perfumes e madeiras. (CASSON, 1983, p. 9.)

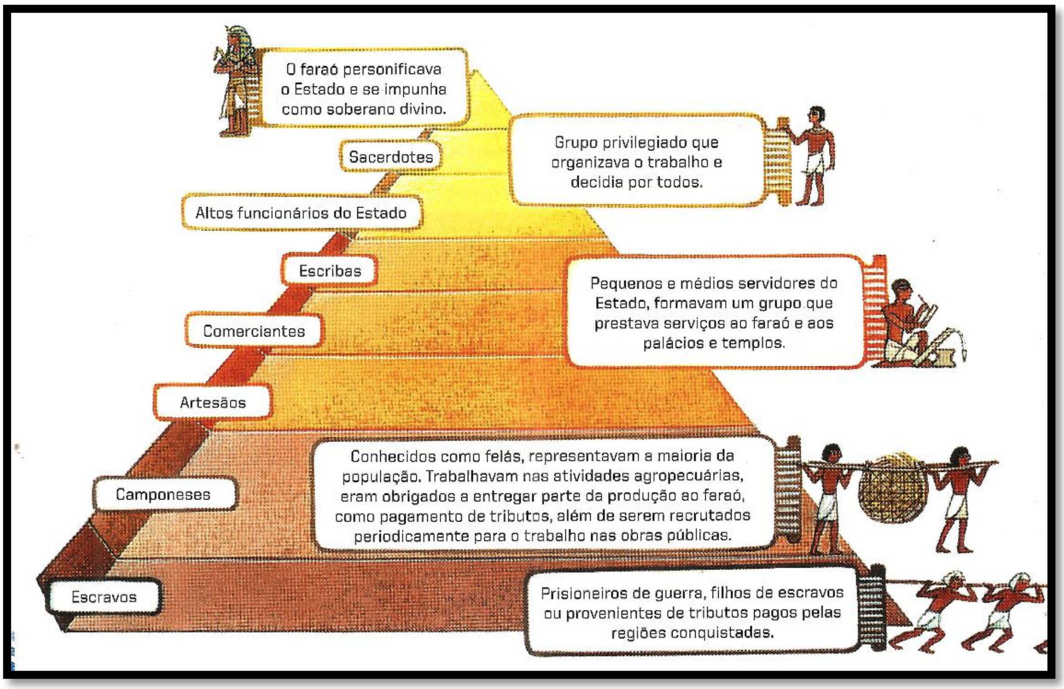


Figura 3. CASSON, Lionel (Org.). O antigo Egito. Rio de Janeiro: Olympio, 1983. **Fonte**: Biblioteca de história universal Life

Os egípcios eram povos politeístas, isto é, acreditavam em vários deuses, representados na maioria das vezes por animais da região. Acreditavam também na vida após a morte, onde o indivíduo seria julgado pelo deus Osíris; caso absolvido, voltaria para o seu corpo. Por esse motivo esses povos desenvolveram a técnica da mumificação: para evitar a decomposição do corpo.

Na época da quarta Dinastia, a matemática se manteve primitiva, tendo continuado assim por muito tempo. O *Papiro de Rhind* é uma espécie de caderno de notas que, ajudando a memória de escribas contabilistas, solucionavam problemas específicos sem se preocupar com qualquer tipo de explicação. Ahmes, o escriba do *Papiro de Rhind*, vivendo na época dos hicsos, disse ter copiado "um escrito da antiguidade", desenvolvido, provavelmente, logo no começo do Antigo Império; a partir daí, entretanto, ninguém teve o impulso para leva-lo diante.

O sistema retratado no papiro é o sistema decimal com sinais diferentes para 1, 10, 100, 1000. Cada símbolo podia ser repetido até nove vezes, exprimindo adição. Num sistema deste tipo a ordem dos símbolos não tem consequências, mas os egípcios usualmente escreviam os símbolos por ordem decrescente, ou da esquerda para a direita ou da direita para a esquerda. Como acontecia em muitos aspectos da vida egípcia, o sistema se baseava em uma repetição exaustiva.

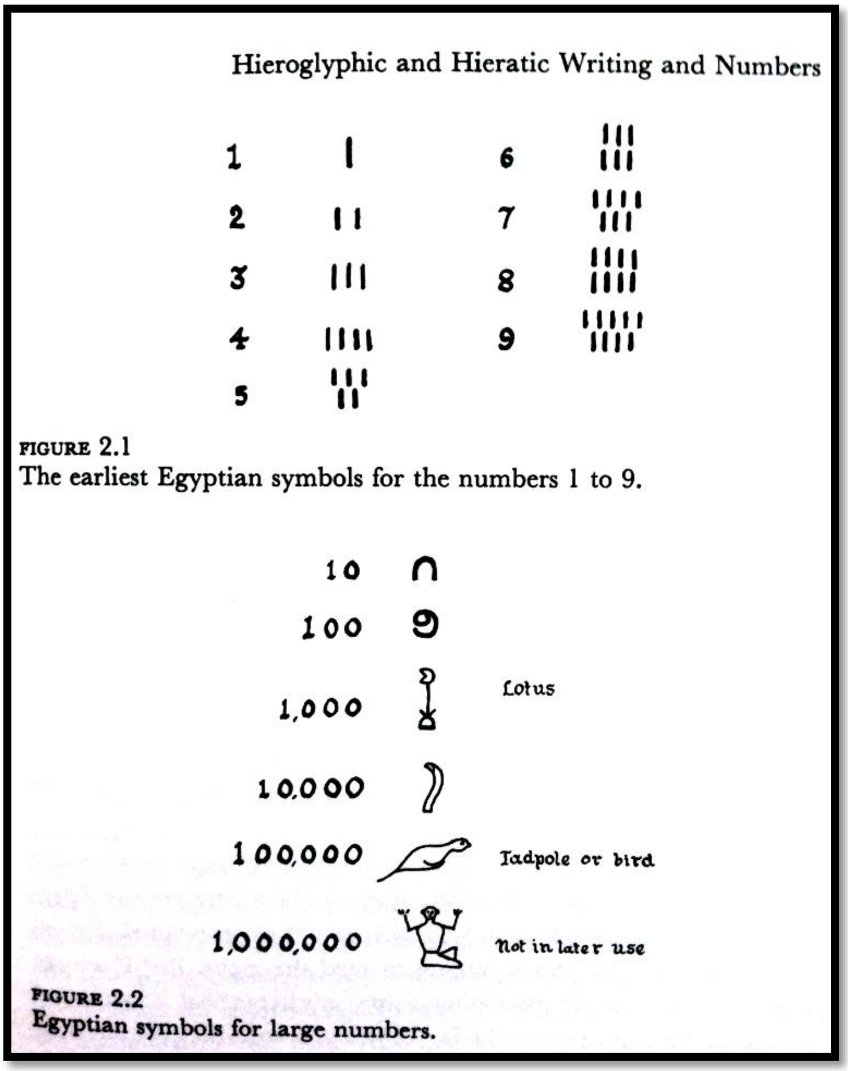


Figura 4. Escrita e números hieroglífica e hierática. Os primeiros símbolos egípcios para os números de 1 a 9 e símbolos egípcios para um grande número. **Fonte**: GILLINGS, R. J. Mathematics in the Time of the Pharaohs; Dover Publication, 1982. p. 5.

O símbolo da unidade é um pequeno traço vertical. O da dezena é um sinal em forma de asa. A centena é representada por uma espiral mais ou menos enrolada. O milhar é figurado por uma flor de lótus acompanhada de seu caule, a dezena de milhar pelo desenho de um dedo levantado, a centena de milhar por um girino e o milhão por um homem ajoelhado levantando os braços na direção do céu. (Ifrah, 1997, p. 341)

Destacamos o fato de os egípcios terem ordenado e agrupado os seus símbolos numéricos. Ao formarem grupos de ordem, os egípcios deram um grande passo na representação simbólica.

Os egípcios usaram apenas frações unitárias, provavelmente porque eles não concebiam a existência de mais do que, digamos, um quinto: o conceito de dois quinto lhes era alheio. Escribas tinham de se lembrar, então, de muitos fatos, ou utilizarem tábuas como o *Papiro de Rhind*. Tocando diretamente o cerne da característica intelectual do povo, tais blocos mentais foram frequentes no conhecimento conceitual da nação. Nesse aspecto, os egípcios foram primitivos, incapazes de abstração e de distanciar suas mentes dos pães ou recipientes de cerveja que estivessem calculando. Deixados por si próprios, eles fizeram os cálculos (ou pelo menos parte deles) dos volumes das pirâmides. Quanto à habilidades para mensurações, os egípcios podiam descobrir com exatidão a área de um círculo mais que os babilônios, que foram, sob todos os aspectos, melhores matemáticos. Deve ser acrescentado ainda que a utilização exclusiva dessas frações unitárias adentrou o mundo grego e o romano; a matemática primitiva de estilo egípcio se reflete frequentemente associado ao seguinte verso infantil inglês: “As I was going to St Ives I met a man with seven wives; Every wife bad seven saks; Every cat bad seven kits; Every cat bad seven kits. Kits, cats, saks, and wives, How many were going to St. Ives?”[3]. Graças à tecnologia do mundo antigo e àquelas que os egípcios possuíram, não havia necessidade de habilidades matemáticas mais elaboradas do que a criadas por eles. Assim, aparece o círculo vicioso da intelectualidade arcaica, da qual o Egito foi a vítima mais ilustre.

Os egípcios deram uma contribuição maior ao conhecimento geral ao inventarem os sistemas de mensuração, o que condizia com o espírito empírico da nação. Eles eram um povo com extrema capacidade observadora: foram os primeiros a reparar que as partes do corpo, no que diz respeito a suas relações mútuas, são uniformes em qualquer indivíduo, independentemente do tamanho de cada um. Foi essa observação de uma regra invariável que os possibilitou representar na pintura e na escultura a forma física com tamanha excelência. Mas isso os levou também, já em tempos pré-dinásticos, a um sistema de mensuração antropométrico. A unidade básica era o tamanho do braço, do cotovelo à ponta do dedão,

[3] Tradução de Eves, 2008, p. 76 “Quando ia a Santo Ivo/ Encontrei um homem com sete mulheres;/ cada mulher tinha sete sacos;/ Cada saco tinha sete gatos;/ cada gato tinha sete gatinhos. / Gatinhos, gatos, sacos e mulheres, / Quantos iam para Santo Ivo?”

chamada de cúbito, dividida ainda em seis palmas (a largura dos quatro dedos, fora o dedão, na altura das articulações centrais). O dedão era tido por $1\ \frac{1}{3}$ dedos, posteriormente padronizado pela polegada. Uma mão, 4 dedos mais o dedão era $5\ \frac{1}{3}$ dedos ou $1\ \frac{1}{3}$ palma. A distância do cotovelo ao pulso era de 4 palmas, denominada no Egito de "dois terços" (de um cúbito); em outros sistema mediterrâneo, era chamado de pé. Quatro cúbito era o equivalente a uma braça, correspondendo à altura de um homem em pé. O cúbito "pequeno" (6 palmas ou 24 dedos) ou comum era acrescido do "cúbito régio", igual a 7 palmas ou 28 dedos ou 21 polegadas. Para distância maiores, havia a "medida do rio", de 20 mil cúbitos (10,5 quilômetros). A medida básica para a terra era o *setjat* 100 cúbitos quadrados, aproximadamente $\frac{2}{3}$ de um acre.

A mesma tendência empírica levou os egípcios a inventarem um calendário, o único realmente efetivo da antiguidade. Como todos os outros povos primitivos, eles começaram com um calendário lunar de 12 meses, somando um total de 354 dias, ou seja, 11 a menos que o ano natural. O nascer da estrela *Sírio*, ou *Sothis*, era utilizado por eles como uma ancoragem para o ano de três estações *akbet* (inundação), *peret* (semeadura) e *shomu* (colheita). O nascimento de tal estrela ocorria no quarto mês da terceira estação, ou, mais precisamente, no último mês do ano. Quando seu surgimento se dava nos últimos 11 dias desse mês, o mês seguinte era tido como adicional, transformando o ano em um "Grande Ano" de 13 meses ou 384 dias; desse modo, o nascimento de *Sothis* era mantido seguramente no seu mês "correto". Após a fundação de Alexandria pelos gregos, que a transformaram no centro científico da Antiguidade, o sistema matemático egípcio foi inteiramente abandonado e em nenhum do seus tratados (nem mesmo nos trabalhos de Cláudio Ptolomeu) se encontra qualquer referência aos métodos egípcios, mas os gregos acharam o calendário solar egípcio de grande utilidade principalmente para a astronomia. Em 45 a.C. Júlio César decidiu reformular o calendário lunar romano, pedindo ajuda ao astrônomo alexandrino Sosígenes. Ele produziu um tipo de calendário solar egípcio que, tendo sofrido correções durante o governo de Augusto, constituiu o famoso calendário juliano, que foi o modelo da Europa católica até as reformas papais do século XVI, e de grande parte do mundo protestante até os anos 1750.

No Egito Antigo, os escribas tinham uma importante função e ocupavam lugar de destaque na sociedade egípcia, pois eram conhecedores da escrita demótica e dos hieróglifos. Eram eles que escreviam sobre a vida dos faraós, registravam a cobrança de impostos e copiavam textos sagrados. Os escribas usavam o papiro para escrever dados e textos ou registravam nas paredes internas das pirâmides.

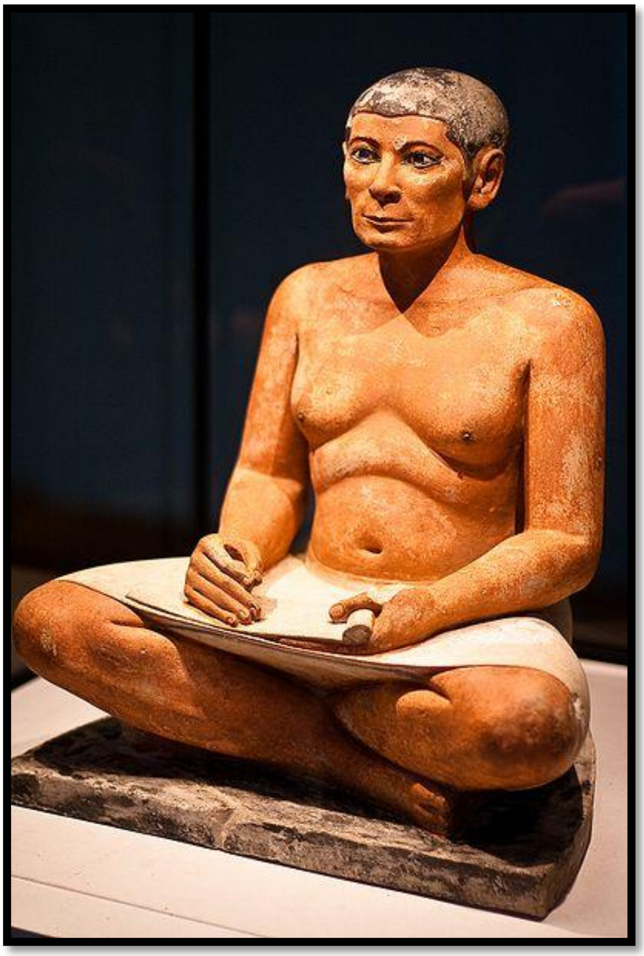


Figura 5. Escultura representando um escriba egípcio, encontrada em Sacara, no Egito, datada de 2500 a.C. **Fonte:** Museu do Louvre, Paris.

Os conhecimentos que temos da matemática egípcia, chegou até nós por meio dos hieróglifos gravados em papiros dos quais o mais importantes são o *Papiro de Rhind* e o *Papiro de Moscou*. Esses conhecimentos matemáticos datam do século XVIII a.C., porém seu conteúdo nos remete a séculos anteriores. O desenvolvimento dos hieróglifos espelha e condensa a história da civilização egípcia. Originalmente importada, a escrita logo foi adaptada pelos egípcios a um sistema que se harmonizava de maneira peculiar às exigências e temperamento da nação. A despeito das influências externas e sem nenhuma mudança fundamental em sua estrutura, essa escrita se manteve até que o Egito deixasse de ser uma entidade cultural. Ninguém a compreendia fora do Egito; mesmo no país, ela era uma ferramenta exclusiva das classes governantes e sacerdotais. Legendando a arte religiosa egípcia e servindo a todos os propósitos práticos, a linguagem hieroglífica esclarecia o que a imagem deixada por si só não conseguia revelar.

Dentro do importante conjunto dos signos hieróglifos egípcios, aqueles que expressam apenas um único som foram reagrupados em um verdadeiro alfabeto, que permitiu ao egípcio escrever todas as palavras e especialmente as palavras estrangeiras.

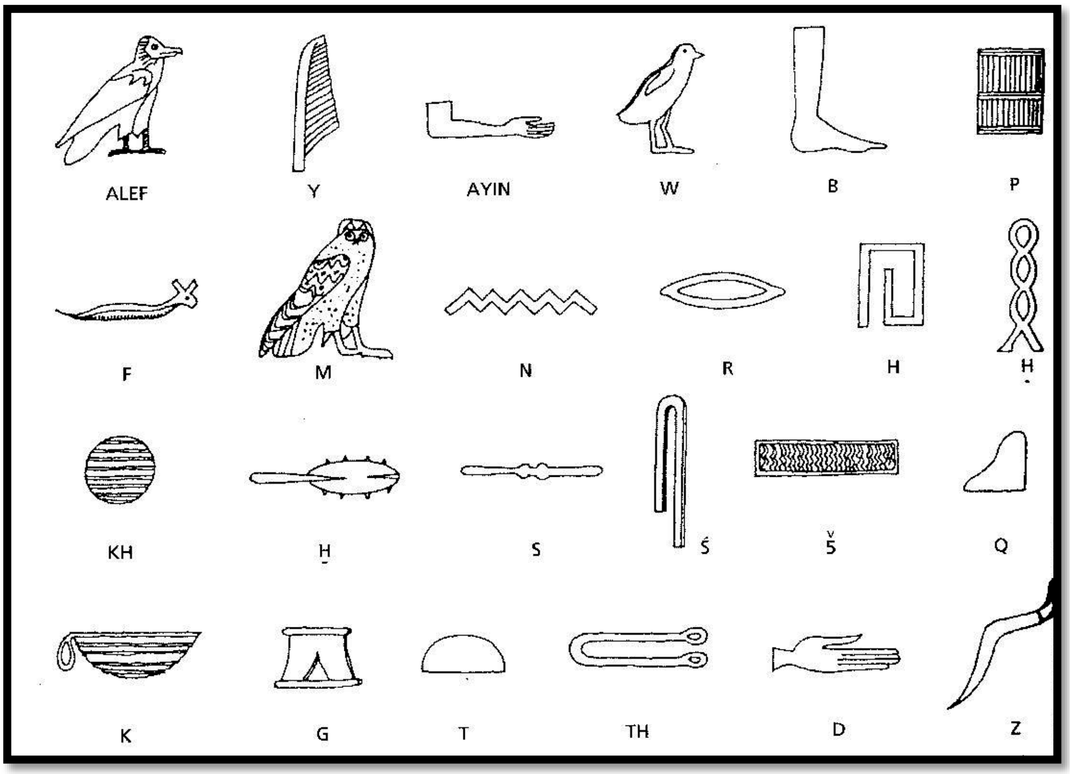


Figura 6: Alfabeto Hieroglífico

O grande mérito dos hieróglifos é a completa beleza visual de seus sinais, que receberam sua formulação clássica basicamente no mesmo momento da Terceira Dinastia em que a escultura e a arquitetura egípcia também estavam estabelecendo seus modelos. Como na escultura de formas humanas e animais, ou melhor, de maneira ainda mais econômica, eles revelam a maravilhosa habilidade dos egípcios para atingir o cerne de uma forma, representando-a através de uma combinação de brevidade e elegância.

Gillings (1982, p. 11-13) observa que o sistema hieroglífico não foi muito usado nos papiros. Geralmente, usava-se o sistema hierático, um escrito cursivo que tinha um símbolo distinto para cada número de 1 a 10 e para cada múltiplo de 10. Esse sistema não permitia a efetuação da soma e da subtração através de uma simples manipulação dos símbolos usados na representação dos números. Dessa forma, especula que se faziam tabelas de somas que os escribas acabariam decorando, mas admite que não se sabe como os escribas confeccionavam essas tabelas.

Revelando Artefatos: O *Papiro de Rhind*

O conhecimento da Matemática egípcia nos chegou apenas após os hieróglifos terem sido decifrados por Champollion, que publicou em 1842 seu *Dictionnaire Egyptien* (Dicionário Egípcio). A Pedra de Roseta, trazendo a inscrição trilíngue que lhe permitiu a decifração dos hieróglifos, foi produzida em 196 a.C. e permaneceu incógnita por muitos séculos.

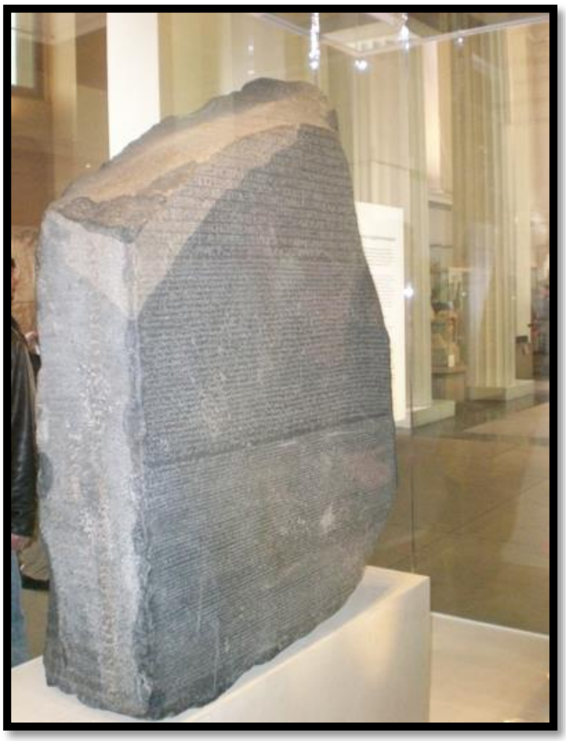


Figura 7: Pedra de Roseta, de 196 a.C., é uma peça de grande importância para o estudo do Egito antigo. **Fonte:** Museu Britânico, Inglaterra.

O mais famoso papiro egípcio sobre Matemática foi encontrado mais de 3000 anos depois, quando em 1858 o egiptólogo e advogado escocês Alexander Henry Rhind (1833 - 1863) visitou o Egito como era de costume entre o europeus da época e por indicação médica, já que sofria de tuberculose e o clima seco seria benéfico para sua saúde precária, tendo participado em escavações arqueológicas em Tebas, uma antiga capital faraônica. Rhind, comprou o papiro em Luxor cidade ao sul do Egito. O papiro foi encontrado nas ruínas de um antigo palácio de Tebas templo mortuário de Ramsés II. Somente em l877, o professor August Adolf Eisenlohr publica a primeira tradução do *Papiro de Rhind* em uma linguagem moderna, em seu livro titulado *Ein Handbuch der Alten matematisches Ägypter* (Um manual matemáticos dos antigos egípcios). Rhind morreu cinco anos após a compra do papiro. Infelizmente naquela época grande parte do papiro é perdida, mas 50 anos mais tarde foram encontrados muitos fragmentos nos armazéns da Sociedade Histórica de Nova York. Atualmente se encontra no museu Britânico de Londres. Inicia com a frase: *"Regra para chegar-se ao conhecimento de todas as coisas obscuras, de todos os segredos que as coisas contêm".*

Figura 8: Um recorte do *Papiro Rhind*, 1650 a.C. **Fonte**: Museu Britânico, Inglaterra.

Segundo Richard J. Gillings (1982), o *Papiro de Rhind* foi escrito por volta de 1850 a.C. e copiado pelo escriba "Ahmes" (A 'h-mosè, na tradução de Chace) uns duzentos anos depois. Essa datação é consoante com a dada por Imhausen (2003), fazendo com que o documento físico seja do período dos hyksos.

O *Papiro de Rhind* com cerca de 5 metros de comprimento, e pouco mais de 30 centímetros de largura, representa hoje uma fonte primária rica de informações sobre a matemática egípcia. Escrito em hierácto (lê da esquerda para direita) com 87 problemas de Aritmética e Geometria e mostra, sem justificação, como resolvê-los. Isso nos dá informações sobre questões básicas de aritmética, frações, cálculos de áreas, volumes, progressões, proporção, regra de três, equações lineares e trigonometria. Um dos problemas resolvidos por Ahmes utiliza um método a que hoje denominamos regra da falsa posição: "Uma quantidade, somada a seus dois terços, mais sua metade e mais sua sétima parte perfaz 33. Qual é ela?". Como a questão envolve terços, metades e sétimos. Ahmes toma 42, que é o múltiplo de 2, 3 e 7, e supõe que ele seja a resposta. Fazendo as contas, obtém 97 e não 33, como deveria. Então a resposta não é 42 e sim 42 multiplicado por $\frac{33}{97}$. As incógnitas dos problemas ou números eram, comumente chamados de "montão".

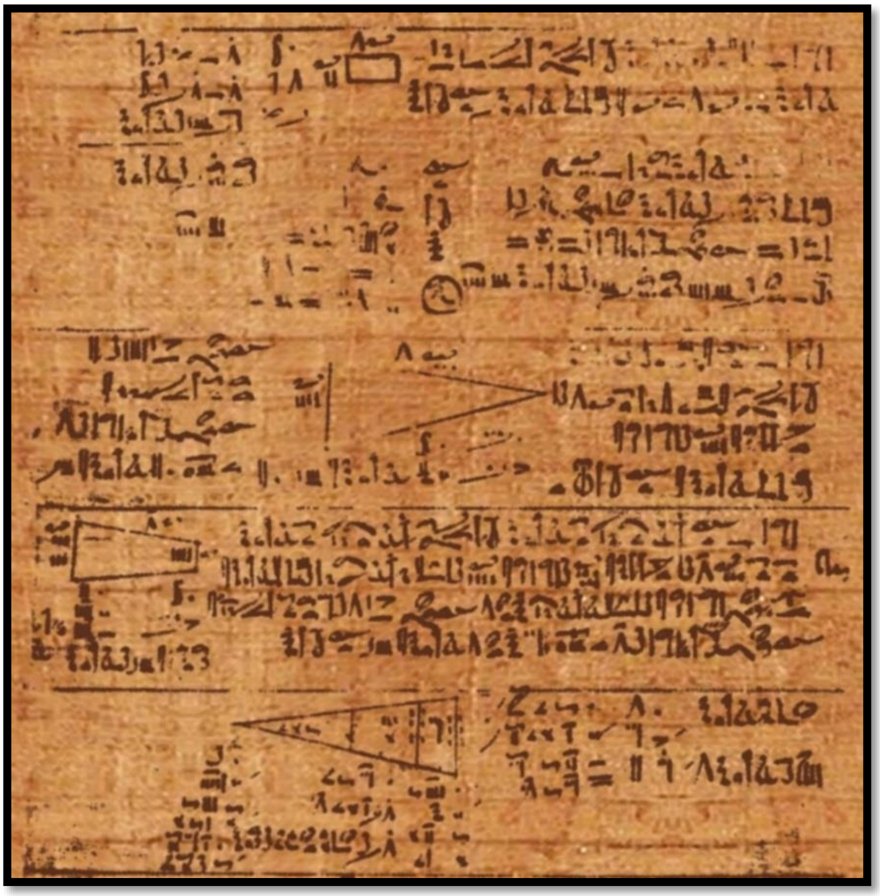


Figura 9: Recorte envolvendo problemas geométrico no *Papiro de Rhind* (1650 a.C.) **Fonte**: Museu Britânico, Inglaterra.

Na realidade tal método é adequado para questões do tipo $a.x = b$, ou, usando notações mais modernas, temos uma função linear $y = f(x) = a.x$ e desejamos saber para que valor de x ela terá imagem igual $a.b$. A proporção que usamos no exemplo anterior nada mais é que decorrente da semelhança entre triângulos que aparece no gráfico dessa função.

O *Papiro de Rhind* é um documento com clara intenção pedagógica, ou caderno de notações de um aluno, um guia valioso da matemática do antigo Egito, é o melhor texto escrito que revelam conhecimentos matemáticos. No papiro encontramos alguns erros que em alguns casos podem ser devido a ter sido copiados de textos anteriores. Embora a resolução de problemas e métodos de cálculo sejam baseados em tentativa e erro, sem desenvolvimento e frequentemente, extraídas das experiências de escribas, estes representavam uma fonte de informação inestimável.

Na verdade, você pode considerar o *Papiro de Rhind* como um tratado sobre aritmética. Uma espécie de “calculadora manual”. Possui problemas envolvendo progressões, e dá exemplos de problemas algébricos até equações lineares. Nos parace evidente que não encontramos nenhum método para resolver problemas, mas, sozinhos, expressam as soluções.

Você não vê nos problemas apresentados no *Papiro de Rhind* um processo dedutivo, mas apenas mostra um tipo de tabelas ou de prescrições para resolvê-los. Por exemplo, no papiro menciona-se o costume egípcio de expressar todos as frações em uma soma de frações unitárias. Assim, a fração $\frac{2}{47}$ decomposta da seguinte forma $\frac{2}{47} = \frac{1}{30} + \frac{1}{141} + \frac{1}{470}$ (ou seja $\frac{2}{47} = \frac{}{30}\ \frac{}{141}\ \frac{}{470}$).

Deve-se notar que eles não escreveram $\frac{2}{47}$, mas a decomposição. Isso sugere que nós temos o conceito de apenas uma alíquota $\frac{1}{47}$, mas não duas $\frac{2}{47}$. Uma série de frações desta forma, algumas são verdadeiras e outras falsas. Houve, naturalmente, um procedimento geral para fazer essas decomposições mas que, sem dúvida, ter procedido apenas por tentativa e erro. O Papiro contém uma tabela que dá a decomposição de todos as frações da forma $\frac{2}{2n-1}$ onde $1 < n < 49$. Ou seja, todas as frações com denominador impar de $\frac{3}{2}$ a $\frac{2}{97}$.

Segundo Radford (1993), a resolução dos problemas algébricos apresentada pelos egípcios não pode ser considerada um método algébrico, mas sim aritmético. No ponto de vista deste autor, num raciocínio algébrico a ingógnita é tida como conhecida, é represetada por uma letra, palavras ou símbolos e é envolvida em operações como se de um número se tratasse. O procedimento dos egípcios baseva-se em fazer cálculos com números concretos até chegarem ao valor da ingógnita. A ingógnita era apenas o ponto de chegada dos problemas.

As fórmulas neste papiro são apenas aproximações. Ele leva em conta a forma das figuras, reta ou circulo, bem como a duração de linhas que a delimitam. Os números aqui são limitados por linhas, triângulos, trapézios e triângulos equiláteros e isósceles. Uma das fórmulas dadas sobre o triângulo isósceles de lado a e base c é a área dada por $S = \frac{a.c}{2}$. Para um trapézio com lados a, b, c e d temos $S = \frac{a+c}{2} \cdot \frac{B+d}{2}$. Mas esta fórmula é exata quando o trapézio torna-se um retângulo. Para a superfície do círculo é a expressão $S = \left(\frac{8}{9}.d\right).2$, onde d é o diâmetro. Se esta fórmula é expressa como uma função do diâmetro e do raio, temos $S =$

$2.r.\frac{256}{81}$, o que implica no valor para $pi = \frac{256}{81}$, o que dá cerca de 3,1604. A fórmula dada pelos egípcios é empírico e podemos dizer que praticamente tem o mesmo valor que usamos.

Também encontrado no papiro a resolução de outros problemas com base na similaridade de figuras. Sabemos também que as parcelas eram retangulares e que, portanto, tinham a necessidade de desenhar ângulos retos. Para este fim, eles usaram um instrumento especial que consistia em um formato de triângulo retângulo utilizando cordas, o que lhes permitiu construir na perpendicular os lados deste triângulo na proporção três, quatro e cinco. Em um lado, aplicava três nós; imediatamente, eles aplicaram quatro nós no outro lado e no outro lado cinco nós. O especialistas na gestão desta corda com nós foram Harpedonautas, correspondentes aos topógrafos, ou literalmente a extrusoras corda. Os problemas de cálculo da altura de pirâmides aparecem no *Papiro de Rhind*, usando os procedimentos gráficos. Pouco se sabe sobre a educação de Ahmes, porém é evidente que não era um simples escriba.

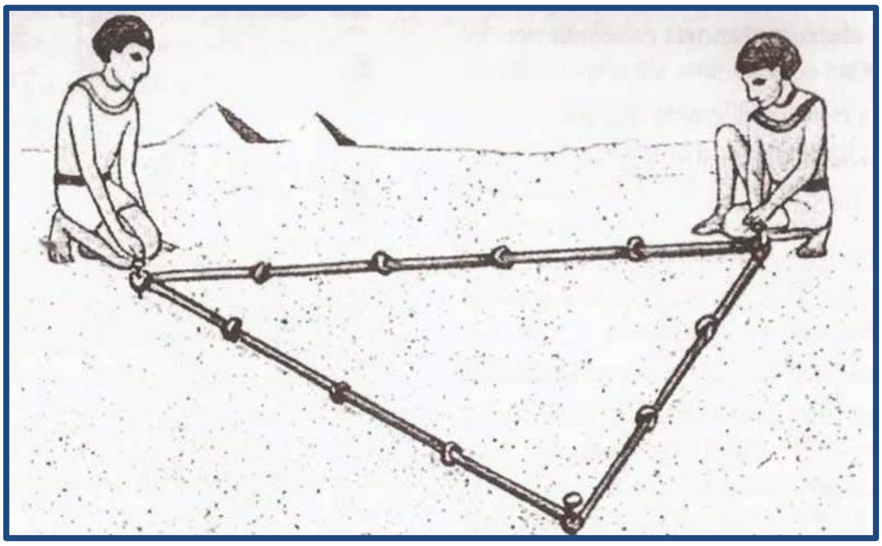


Figura 10: Sistema de Cordas Egípcio. **Fonte**: Toledo (1997, p. 19)

O *Papiro de Rhind* já foi muito estudado e explorado por educadores e historiadores da matemática. Diversos estudos e considerações já foram feitos sobre esse documento, sob vários enfoques. Desde tradução e comentários, como, por exemplo, a de Arnold Buffum Chace (1929), Gay Robins e Charles Shute (1987); passando por descrições mais gerais sobre o conhecimento matemático dos antigos egípcios, tais como em Carl B. Boyer (1996) e Howard Eves (2008); até reflexões mais pontuais sobre conhecimentos específicos que poderiam estar presentes em problemas do papiro, tal como nos estudos de Luca Miatello (2009). Além de Dario Fiorentini, Antonio Miguel e Maria Ângela Miorim (1993) e João Pedro da Ponte (2009)

- entre outros. Esses estudos buscaram não só apresentar a importância dos egípcios nos primórdios do desenvolvimento de conhecimentos matemáticos, mas também traçar um paralelo entre os conhecimentos desse povo e os conhecimentos atuais.

Segundo Silva (2001), o primeiro livro publicado no Brasil de história da matemática foi uma obra sobre o Papiro de Rhind, por Eugênio Raja Gabaglia, em 1899. No período conhecido como Brasil Império (1822-1889), tem início uma manifestação de interesse pelo Antigo Egito. Bakos (2004) considera que nessa época nasceu a chamada Egiptologia brasileira, sendo impulsionada por Dom Pedro I e seu filho Dom Pedro II.

Em 1824 Dom Pedro I adquiriu uma magnífica coleção de objetos egípcios, considerada a maior coleção egípcia da América Latina. Atualmente ela é mantida sob os cuidados do Museu Nacional do Rio de Janeiro. Dom Pedro II, por sua vez, foi um homem ainda mais dedicado às ciências em geral, contudo tinha um apreço especial pelo Antigo Egito realizando duas viagens a este país, em 1871 e 1876. Segundo Bakos (2004), a sua segunda visita ao Egito foi detalhadamente descrita em seu diário pessoal, cujas anotações foram traduzidas do francês para o português e publicadas em 1909 por Affonso Taunay.

A imprensa brasileira da época expressava-se contra as viagens e a constante ausência do Imperador no país e em 1871 surgiu a publicação da caricatura a seguir:

Figura 11: Charge com rosto de Dom Pedro II na face da esfinge foi publicada em 1871 pela Revista Ilustrada. **Fonte**: Bakos (2004).

Não sabemos ao certo em que medida a curiosidade e o interesse nos antigos egípcios posteriormente à volta da família real para Portugal, influenciou o meio intelectual brasileiro da época, mas é nesse contexto que surge a publicação do livro que aqui queremos destacar: *O mais antigo documento mathematico conhecido (papyro Rhind)*, escrito por Eugênio de Barros Raja Gabaglia.

Segundo Silva (2001), partes deste livro já haviam sido publicadas em forma artigos na Revista do Club de Engenharia, em 1897, porém a obra completa só foi lançada em 1899.

Segundo Valente (2004), o professor Raja Gabaglia, desempenhou no Colégio Pedro II, a função de professor de matemática a partir de 1883, e de diretor nos anos de 1913-1914. Além das contribuições a essa instituição onde trabalhou por quase quarenta anos, como a fundação do Annuario do Collegio Pedro II e as traduções dos livros didáticos da coleção francesa F.I.C, sabe-se que Gabaglia teve uma peculiar participação na história da Educação Matemática no Brasil.

No índice do livro de Gabaglia observamos os seguintes capítulos:

1. “Historico”: com subseções intituladas: “O papyro Rhind”, “Publicação e tradução do papyro”, “Autor e data” e ainda “Que especie de trabalho é papyro Rhind”.
2. “O conteúdo do papyro”.
3. “Arithmetica do papyro Rhind”: contém diversas subseções, destacam-se: “Notação dos numeros inteiros”, “Algumas propriedades das fracções”, “Tabelas para obter 2/2n+1”, “Como foram formadas essas tabellas?”, “Progressões arithmetica e geometrica”.
4. “Algebra do papyro Rhind”: contém diversas subseções, destacam-se: “Considerações geraes sobre os problemas do hau”, “Modo notavel de sommar fracções”, “Breve comparação entre Ahmes e Diophantos”, “Signaes algebricos”.
5. “Geometria do papyro Rhind”: contém diversas subseções, destacam-se: “Origem da geometria”, “A stereometria do papyro”, “Area do circulo; modo notavel de obte-la”, “Problemas sobre pyramides; origem da trigonometria”.

Observando superficialmente os títulos dos capítulos, nos parece que o autor realmente empreendeu estudos detalhados sobre o tema, o que pode ter permitido a ele ir além de uma simples exposição do conteúdo do papiro e chegar a tecer seus próprios comentários.

Nas primeiras páginas do texto Gabaglia menciona que seu livro é baseado nos estudos do egiptólogo alemão Eisenlohr: “[...] Em 1877, Einselohr publicou não só o texto egypcio como a sua tradução em alemão, eruditamente anotada” (GABAGLIA, 1899, p. 3). Ou seja, o professor brasileiro tinha em mãos a primeira e única obra (até aquela data), que havia sido publicada sobre o tema.

Voltando ao conteúdo do *Papiro de Rhind*, Gillings (1982) propõe um estudo sobre a matemática egípcia de um modo geral, porém em sua obra encontramos detalhes sobre a numeração hierática, estudos de alguns problemas do *papiro de Rhind* e discussões de alguns detalhes curiosos, como por exemplo, a questão da existência de sinais para as operações de soma e subtração.

O conteúdo do *Papiro Rhind*, segundo Gillings (1982) é classificado como segue:

Problemas	Descrição
1 - 6	Divisão de 1, 2, 6, 7, 8 e 9 pães entre 10 homens
7 - 20	Multiplicação de Frações
21 - 23	Subtração
24 - 29	Procura de números 28 e 29 e equações resolvidas pela regra da falsa posição 24 a 27
30 - 34	Equações lineares mais elaboradas resolvidas através de divisões
35 - 38	Equações lineares mais elaboradas resolvidas através da regra da falsa posição
39 - 40	Progressões Aritméticas
41 - 46	Volumes
47	Tabela de frações de 1 hekat em frações (Olho de Horus)
48 - 55	Áreas de triângulos, retângulos, trapézios e círculos.
56 - 60	Alturas e bases de pirâmides
60 - 61B	Regra para encontrar 2/3 de números ímpares e frações unitárias
62	Peso de metais preciosos
63	Divisões proporcionais
64	Progressões Aritméticas
65	Divisão proporcional de sementes por um grupo de homens
69 - 78	Trocas, proporcionalidade inversa, cálculos de "pesu".
79	Progressões Geométricas
80 - 81	Tabelas de frações olho Horus em termos de grãos hinu.
82 - 84	Problemas, não claros, sobre quantidades de comida de gansos, pássaros e bois.
85	Escritura enigmática. No papiro é invertida..
86 - 87	Memorando de certas contas e incidentes em grande parte perdido.

Tabela 1: Classificação do conteúdo do *Papiro de Rhind*, segundo Gillings (1982).

Antes de propor o primeiro problema Ahmes disponibiliza duas tabelas para verificação do tipo $\frac{n}{10}$ para $n = 1, \ldots, 9$, para facilitar os cálculos destes problemas e daqueles em que as frações são expressas com numerador 2 e denominador ímpar variando entre 5 a 101 como soma de frações unitárias. Essas tabelas são:

Tabela $\frac{n}{10}$	
$\mathbf{\frac{1}{10}}$	$\frac{1}{10}$
$\mathbf{\frac{2}{10}}$	$\frac{1}{5}$
$\mathbf{\frac{3}{10}}$	$\frac{1}{5} + \frac{1}{10}$
$\mathbf{\frac{4}{10}}$	$\frac{1}{3} + \frac{1}{15}$
$\mathbf{\frac{5}{10}}$	$\frac{1}{2}$
$\mathbf{\frac{6}{10}}$	$\frac{1}{2} + \frac{1}{10}$
$\mathbf{\frac{7}{10}}$	$\frac{2}{3} + \frac{1}{30}$
$\mathbf{\frac{8}{10}}$	$\frac{2}{3} + \frac{1}{10} + \frac{1}{30}$
$\mathbf{\frac{9}{10}}$	$\frac{2}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{30}$

Tabela 2: $\frac{n}{10}$, segundo GILLINGS, 1982.

Tabela $\frac{2}{n}$			
5	3, 15	**53**	30, 318, 795
7	4, 28	**55**	30, 330
9	6, 18	**57**	38, 114
11	6, 66	**59**	36, 236, 531
13	8, 52, 104	**61**	40, 244, 488, 610
15	10, 30	**63**	42,126
17	12, 51, 68	**65**	39,195
19	12, 76, 114	**67**	40,335,536
21	14, 42	**69**	46,138
23	12, 276	**71**	40, 568, 710
25	15, 75	**73**	60, 219, 292, 365
27	18, 54	**75**	50, 150
29	24, 58, 174, 232	**77**	44, 308
31	20, 124, 155	**79**	60, 237, 316, 790
33	22, 66	**81**	54, 162
35	30, 42	**83**	60, 332, 415, 498
37	24, 111, 296	**85**	51, 255
39	26, 78	**87**	58,174
41	24, 246, 328	**89**	60, 356, 534, 890
43	42, 86, 129, 301	**91**	70, 130
45	30, 90	**93**	62, 186
47	30, 141, 470	**95**	60, 380, 570
49	28, 196	**97**	56, 679, 776
51	34, 102	**99**	66, 198
		101	101, 202, 303, 606

Tabela 3: $\frac{2}{n}$, segundo GILLINGS, 1982.

As tabelas apresentadas auxiliavam os escribas na decomposição dos números 2/5, 2/6, 2/7, ..., 2/101, em frações unitárias. Verificamos que as frações da forma 2/3k eram representadas pela soma (1/2k) + (1/6k), e as frações da forma 2/5k eram representadas (1/3k) + (1/5k), embora curiosamente, a fração 2/95 seja a única deste tipo decomposta de maneira distinta. Ela aparece decomposta na soma (1/60) + (1/380) + (1/570).

Podemos constatar sua utilização nos problemas envolvendo divisões de pães e rações para animais, entre outros, presentes no papiro.

Exemplo: Dividir 1 pão por 10 homens.

Neste caso, cada homem recebe $\frac{1}{10}$ e como prova fazemos a multiplicação $\frac{1}{10}$ por 10.

Homens	Pães por homens
1	$\frac{1}{10}$
\ 2	$\frac{1}{5}$
4	$\frac{1}{3}+\frac{1}{5}$
\ 8	$\frac{2}{3}+\frac{1}{10}+\frac{1}{30}$
Total de 10 homens	$\mathbf{\frac{2}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{10}+\frac{1}{30}}$

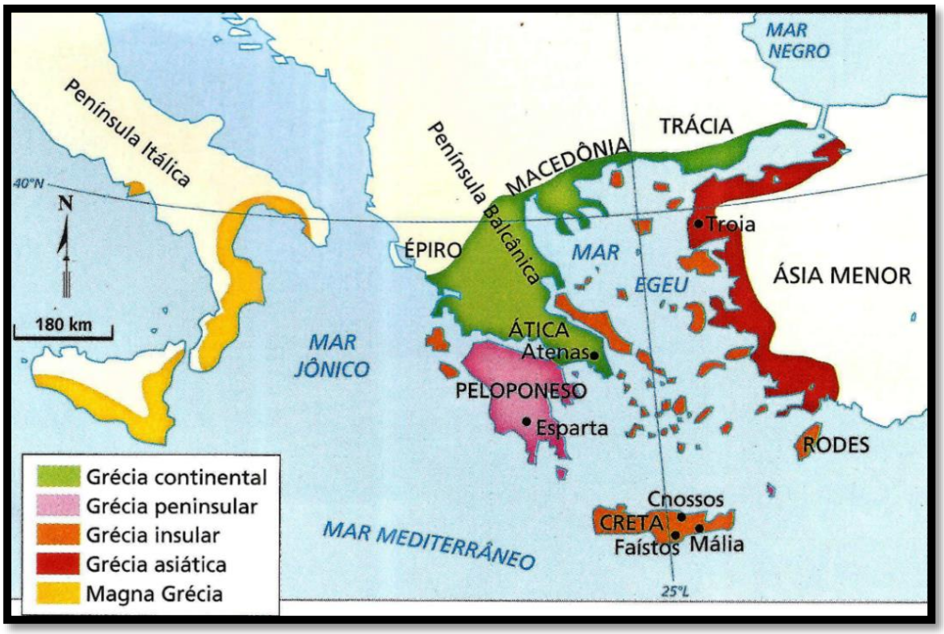
Ao consultar a tabela $\frac{n}{10}$, o escriba identifica as frações decompostas, e então formaliza a resposta correta que neste caso é a soma das frações unitárias para 2 e 8 homens, totalizando 10 homens.

Na sequência fazemos uma leitura histórica da Matemática a partir do Livro *Aritmética* de Diofanto, que é uma contribuição da Matemática grega do século III.

2.2. A *Aritmética* de Diofanto: Uma Contribuição da Matemática Grega do Século III

Nesta seção vamos tratar da Matemática grega, especificamente faremos um estudo histórico a partir da obra *Aritmética* de Diofanto, com destaque nos problemas envolvendo progressões.

No século VIII a.C., as comunidades da Jônia, na costa ocidental da Ásia Menor, estimuladas pela localização geográfica que lhes facilitava o contato com outros povos, desenvolveram o comércio, o artesanato e a navegação. Houve também, entre 800 e 750 a.C., o reaparecimento da escrita, derivada do alfabeto semítico utilizado pelos fenícios, provavelmente porque estes utilizavam a via marítima para o comércio e tinham contatos com os gregos.

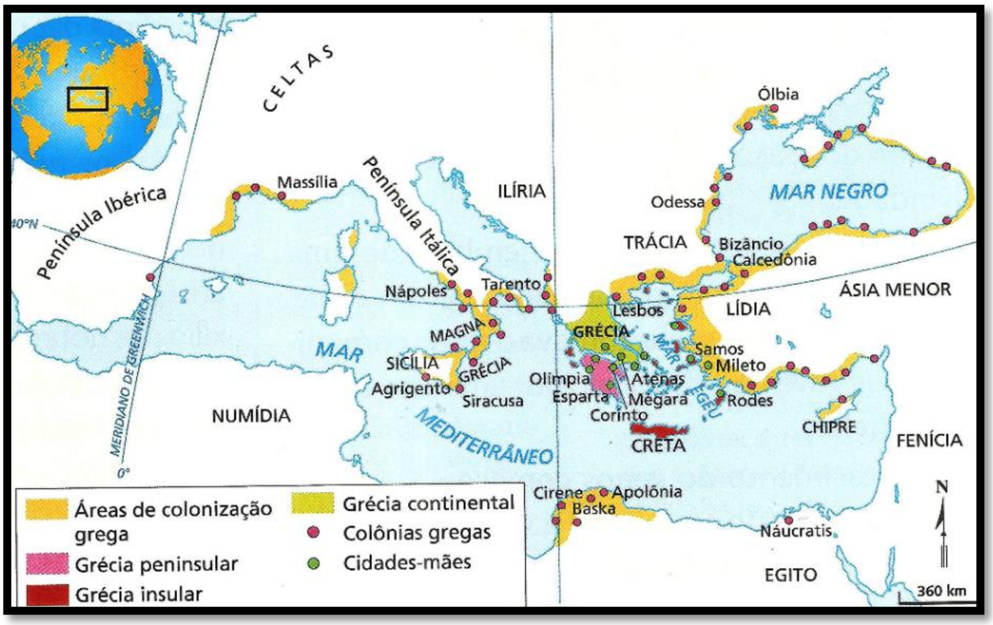


Mapa 3: Grécia Antiga. Atlas Histórico. **Fonte**: Encyclopaedia Britannica, São Paulo, 1977. p. 165.

Foi na Jônia que pela primeira vez ocorreu à fusão de várias aldeias em uma só, dando origem a polis (cidade-estado), num processo denominado sinecismo, que posteriormente se estendeu por outros territórios da Grécia. O território das polis era reduzido e o solo não muito fértil. Em cada uma havia a Acrópole, colina fortificada e centro religioso; a Ágora, local central onde situava os edifícios públicos, o mercado e a praça, onde os cidadãos se reuniam para formar a Eclésia (assembleia política); o porto e o território rural. A população se aglomerava em volta da Acrópole ou se espalhava na área rural, constituindo, entretanto, campo e cidade, uma só unidade.

Figura 12: Acrópole de Atenas na Grécia

As Cidades de Esparta e Atenas representam o tipo clássico de cidades, respectivamente oligárquica e democrática. Em Esparta, o poder permaneceu sempre nas mãos dos cidadãos proprietários de terras os esparcistas. Em Atenas, as lutas políticas levaram a extensão da cidadania a todos os atenienses livres, tornando-os, pois, democratas, apesar da existência de grande número de escravos estrangeiros. A pobreza do solo que não produzia alimento suficiente para população em crescimento, a escravidão por dividas e a concentração cada vez maior das terras nas mãos da aristocracia foram fatores que levaram a um amplo movimento migratório dos gregos durante os séculos VIII a VI a.C., em direção aos mares Negro e Mediterrâneo.



Mapa 4: A Expansão Colonial Grega. **Fonte**: HILGERMANN, Werner; KINDER, Herman. Atlas historique. Paris: Perris, 1992. p. 46.

Segundo Boyer (1996), hoje usamos a frase “matemática grega” como se indicasse um corpo de doutrina homogêneo e bem definido. Tal visão pode ser muito enganadora no entanto, pois significaria que a geometria sofisticada do tipo Arquimedes-Apolônio era a única espécie que os gregos conheciam. Devemos lembrar que a matemática no mundo grego cobriu um intervalo de tempo indo pelo menos de 600 a.C. a 600 d.C. e que viajou da Jônia à ponta da Itália e Atenas, a Alexandria e a outras partes do mundo civilizado.

Em função das transformações econômicas e expansão da riqueza, os gregos foram abandonando às tradições e mitos gentílicos e desenvolveram uma mentalidade individualista, racional e criativa, que já transparece claramente nas obras dos cientistas e filósofos jônios do século VI a.C., como Tales, Anaximandro, Anaxímenes da escola de Mileto. Criaram a lógica e a matemática, afirmando serem os sentidos e a razão os verdadeiros critérios para compreensão das leis que regem o universo.

Sócrates o maior filosofo, nascido em Atenas, foi professor de Platão, responsável pela organização e sistematização do estudo da Filosofia. Platão deixou 28 Diálogos, dos quais vamos encontrar trechos relacionados a Matemática. Em A República, um dos seus famosos diálogos, verifica-se várias passagens nas quais a matemática é mencionada, como, por exemplo, no Livro VII:

> É fácil concordar com isso – observou; - a geometria é, com efeito, o conhecimento do que existe sempre. Em consequência, meu nobre amigo, ela atrai a alma para a verdade e desenvolve nela este espírito filosófico que eleva para as coisas de cima os olhares que inclinamos erradamente para as coisas daqui de baixo. (PLATÃO, 2005)

A educação na Grécia passou por muitas mudanças ao longo do tempo. Até o século VIII a.C., aproximadamente, predominou um ensino voltado para formar nobres guerreiros. Os meninos da aristocracia eram enviados aos palácios, onde eram treinados para a guerra e aprendiam valores como a lealdade, a honra e a coragem.

Com o tempo, a educação começou a priorizar o treinamento esportivo e iniciou-se o ensino das letras e dos cálculos. No século V a.C., havia dois modelos de educação bem diferentes: o de Atenas, centrado na formação integral, ou seja, no desenvolviemento do corpo e do espírito; e o de Esparta, centrado na formação guerreira.

Em Atenas, o ensino não era gratuito nem orbigatório. As famílias é que decidiam como educar os filhos. Por volta dos sete anos, os meninos das famílias mais ricas tinham aulas de gramática, para aprender a ler e a escrever; de música, quando aprendiam a tocar instrumentos como a libra a e flauta; e também aprendiam a recitar poemas. As aulas eram ministradas por um mestre, geralmente um escravo.

Aos quinze anos, os rapazes iam para os ginásios, onde praticavam atividades físicas e tinham aulas de leitura, escrita, cálculo, poesia e música. Também estudavam política e filosofia, para argumentarem com pefeição e se prepararem para atuar na vida pública. O objetivo era formar o cidadão integral.

As meninas geralmente, não aprediam a ler nem a escrever. Elas permaneciam em casa, e suas mães lhes ensinavam prendas domésticas. Os pais casavam suas filhas ainda muito jovens. O principal objetivo do casamento era gerar um filho, preferencialmente do sexo masculino.

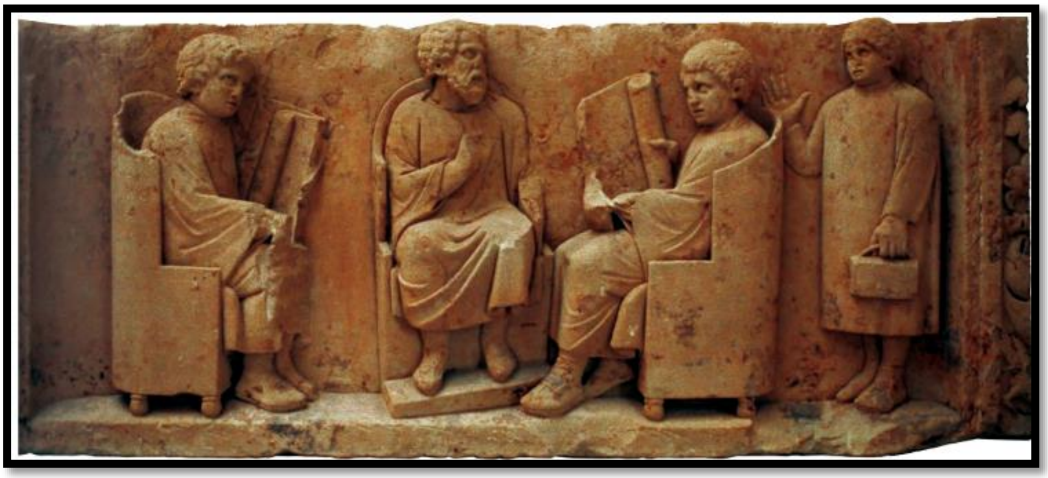


Figura 13: Relevo romano do século II d.C. representando um professor grego e seus alunos. A obra foi encontrada em Neumangen-Dhron, Alemanha. **Fonte**: Museu do Estado de Renânia, Trier, Alemanha.

Para Platão os seres matemáticos são entidades reais, objetivas, totalmente independentes do nosso conhecimento, têm propriedades bem determinadas, algumas conhecidas e muitas desconhecidas. Estes seres não são, naturalmente, objetos físicos ou materiais. Existem fora do espaço e tempo. São imutáveis e eternos - não foram criados, não mudarão, nem desaparecerão.

Aristóteles (384-322 a. C.) foi discípulo de Platão e também mestre de Alexandre, O Grande. Era filósofo e biólogo, mas estava sempre a par das questões matemáticas. Foi-lhe atribuído, um tratado sobre as Retas Indivisíveis, que consistiam em segmentos de reta, para os quais não há uma unidade de medida comum. Ele foi o fundador da Lógica e pode-se dizer que pelas suas alusões a conceitos e teoremas matemáticos, Aristóteles também é considerado um contribuinte para o desenvolvimento da matemática em sua época.

Com Alexandre Magno (336-323), filho de Filipe da Macedónia, a Grécia esforçou-se por espalhar ao longe e ao largo a cultura e a mentalidade humanista dos gregos. As conquistas de Alexandre implantavam, entre os povos conquistados, uma espécie de iluminismo cultural, onde a língua, os costumes e a arte dos gregos ganhavam foros de potência civilizadora.

Após a conquista do Egito, em 332 a.C., lançaram-se as bases duma nova cidade, aberta aos novos ventos da cultura e da arte gregas, livre das peias da teosofia pagã egípcia e independente do culto dos mortos, que tanto subjugava a vida do povo egípcio.

Na verdade, morto Alexandre, o seu poder é repartido pelos seus dois generais maiores: Seleuco, de quem deriva a dinastia dos Selêucidas, ficará com a parte norte do império, com sede em Antioquia; o sul, com predominância do Egito, ficará para Ptolomeu I ou Lago, e dará lugar à dinastia dos Lágides. Todos eles se esmeraram em difundir e impor o helenismo, mas serão os Ptolomeus que, junto ao Mediterrâneo, na parte ocidental do Delta do Nilo e em frente da ilha de Faros, irão construir a nova cidade de Alexandria; ela seria como que a sede irradiadora da força do helenismo e da racionalidade humana, que ele impunha. O homem com sua inteligência seria o propulsor e a medida do progresso, da cultura, da religião e da arte. Desse modo e nesta linha de ideias, o grego comum, língua universalizada – KOINÉ – tornou-se o veículo de comunicação universal em todo o Médio Oriente, numa espécie de diálogo cultural entre povo grego e civilizações orientais.

Com o objetivo de promover o helenismo e toda a sua cultura é que se construiu a célebre Biblioteca de Alexandria. Terá sido em meados do século III a.C. (cerca de 252 a.C.), quando governava o Egito Ptolomeu II, Filadelfo. Ali se reuniria todo o empório do saber: literatura, história, filosofia, religião, arte, matemática, astrologia, medicina. Calímaco (305-240 a.C.) foi o bibliotecário que elaborou o primeiro catálogo, que ocupava 120 rolos de papiro. Estima-se que chegasse a ter entre 400.000 a 1 milhão de papiros.

A cidade de Alexandria tornou-se um grande centro de investigação do conhecimento, o primeiro instituto que registrava o conhecimento das civilizações, a maior cidade que o mundo ocidental havia conhecido, sem dúvida um centro intelectual econômico do mundo Helenístico. Pessoas de todos os países saiam em direção a Alexandria para viver, comercializar e para aprender. Era uma cidade onde os gregos, egípcios, sírios, hebreus, núbios, fenícios, romanos, galos e iberos comercializavam mercadorias e ideias. Para lá, eram regimentados escritores, poetas, artistas e cientistas de todas as partes para enriquecer o seu Museu e sua Biblioteca. Nomes de importantes estudiosos deram suas contribuições: Galeno, Euclides, Apolônio, Aristarco, Hiparco, Tolomeo, Aquimedes, Nicomedes, Herón, Menelao, Pappus, já em seu declínio Teón e Hipátia. Em 604 d.C. a biblioteca de Alexandria foi destruída num incêndio.

Revelando Artefatos: A *Aritmética* de Diofanto

Com a ocupação romana, a matemática grega parou de se desenvolver e, somente no século III de nossa era ganhou novo impulso com o matemático Diofanto de Alexandria que introduziu à álgebra o estilo sincopado, cuja característica principal é o uso de abreviações de palavras para a escrita de equações. Foi o primeiro passo em direção à notação algébrica.

Quase tudo que conhecemos sobre a vida pessoal de Diofanto está contido no seguinte sumário de um epigrama que aparece na Antologia Grega:

> Deus lhe concedeu ser um menino pela sexta parte de sua vida, e somando uma duodécima parte a isto cobriu-lhe as faces de penugem. Ele lhe acendeu a lâmpada nupcial após uma sétima parte, e cinco anos após seu casamento concedeu-lhe um filho. Ai! Infeliz, criança tardia; depois de chegar à metade da vida de seu pai, o destino frio o levou. Depois de se consolar de sua dor durante quatro anos com a ciência dos números ele terminou sua vida. (BOYER, 1996, p. 121)

Se pensarmos em uma solução moderna para equação do primeiro grau com uma incógnita, teríamos a seguinte expressão matemática:

$$\frac{1}{6}x + \frac{1}{12}x + \frac{1}{7}x + 5 + \frac{1}{2}(x-4) + 4 = x$$

Fazendo as contas vamos encontrar o valor para $x = 84$, idade em que Diofanto morreu. Dessa forma podemos concluir que sua infância durou 14 anos, sua barba cresceu aos 21 anos, casou-se aos 33 anos, um filho nasceu após cinco anos e morreu aos 42 anos de idade, quando seu pai tinha 80 anos. Diofanto morreu quatro anos mais tarde. É claro que o epigrama foi escrito, não muito tempo depois de sua morte, por um amigo íntimo e pessoal com conhecimento e gosto pela ciência.

Thomas Health (2012), em sua obra Diofanto de Alexandria: um estudo da história da álgebra grega. Nos revela que Michael Psellos, monge bizantino, escritor, filósofo, político e historiador do século XI, em uma carta comenta, que Diofanto e Anatólio são citados como escritores, sobre o método egípcio de acertos de contas. Diofanto, demonstra o método com precisão, e pelas expressões utilizadas, percebe que Diofanto teria sido mestre de Anatólio, e portanto contemporâneos. Anatólio de Alexandria foi Bispo de Laodicea no ano de 280. Este fato nos permite aventurar que Diofanto viveu em meados de 250 d.C. ou muito depois. Inclusive porque Difanto não é citado por Nicômaco 100 d.C. e por Theon de Esmirna 130 d.C.

Outro fato relevante, está na dedicatória em sua obra Aritmética a Dionísio:

> "Muito me honra Dionísio, saber que queres aprender a resolver problemas numéricos, já assumiu a tarefa de expor a própria natureza e do poder dos números, começando com os fundamentos que estão por trás dessas questões. Isto pode parecer, à primeira vista, muito difícil, uma vez que ainda não é conhecedor. Iniciantes tendem ser facilmente desencorajados. Mas para você será fácil de entender, em função de seu entusiasmo e de minhas explicações, já que o desejo ligado ao ensino leva rapidamente ao conhecimento [...]"

Das obras de Diofanto de Alexandria, *Aritmética* é a mais importante da Antiguidade. Escrita em grego (1670), é um tratado analítico de teoria algébrica dos números e constituída por 13 livros, como nos diz o próprio Diofanto em seu prefácio. Até pouco tempo, desses livros eram conhecidos apenas seis, além de fragmentos do livro dos números poligonais. Em 1972, apareceu um manuscrito árabe, atribuído a Qustâ Ibn Lûqâ, contendo quatro livros, porém nada coincidem com os seis livros gregos. Provavelmente outra versão do Aritimética.

A *Aritmética* de Diofanto é um trabalho completamente diferente dos demais trabalhos gregos da época, assemelhando-se aos trabalhos "algébricos" dos babilônios, mas revelando relativamente a eles, um grande avanço nesta área. Esta obra de seis livros não é uma exposição sistemática de proposições, mas uma seleção de 189 problemas de natureza variada e as demonstrações são apenas ilustrações (verificações, restaurações), em casos particulares concretos e os de influência árabe totalizam 101 problemas. Uma das contribuições mais significativas deste trabalho diz respeito às notações: são introduzidas algumas abreviaturas para designar quantidades e operações, iniciando o que viria a chamar-se "álgebra sincopada".

Segundo Boyer (1996), podem ser reconhecidos três estágios no desenvolvimento histórico da álgebra: 1) o primitivo, ou retórico, em que tudo é completamente escrito em palavras; 2) um estágio intermediário, sincopado, em que são adotadas algumas abreviações; e 3) um estágio simbólico ou final. Tal divisão arbitrária do desenvolvimento da álgebra em três estágios é naturalmente uma simplificação excessiva; mas serve como primeira aproximação ao que aconteceu, e nesse esquema a *Arithmetica* de Diofanto deve ser colocada na segunda categoria.

Os seis livros não possuem uma classificação aparente, salvo o livro VI que trata de triângulos retângulos e o livro IV intitulado Quadrados e Cubos. Os demais, possuem problemas variados, que nos permitem realizar investigações ao longo da história. Matemáticos já apreciaram esta obra como, Viète, Bachet, Fermat, Descartes, Euler, Jacobi, Lagrange, Legendre, Dirichlet, Kummer, Henri Poincaré, André Weil e muitos outros.

François Viète apresentou os Cinco Livros das Zetéticas, nos quais aplica sua arte analítica a 82 problemas que são, em sua maioria, os mesmos estudados por Diofanto na Aritmética.

> A inspiração de Viète foi Diofanto, cujo uso de quantidades desconhecidas na Aritmética ele via como a chave para um método geral de análise que pensava ter sido conhecido pelos matemáticos clássicos e se perdido, mas que poderia ser restaurado. (BOS, 2001, p. 146.).

François Viète (1540-1603), conhecido entre os historiadores da matemática como o pai da álgebra moderna, estudava matemática no seu tempo livre. No entanto, ele é o responsável por uma invenção fundamental, que marcou o início da ciência moderna. Na tentativa de atender aos padrões de exatidão vigentes no final do século XVI, Viète, em uma de suas obras mais conhecidas, Introdução a Arte Analítica (1591), propôs de maneira axiomática o uso de procedimentos algébricos, aliado ao método analítico, para resolver qualquer tipo de problema.

Figura 14. VIETE, **François. L'Algèbre nouvelle de Mr Viète**. Tradução de A. Vasset, 1630. **Fonte**: Disponível em <http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k108864f>. Acesso em 11 dezembro de 2013.

ZETÉTICA PRIMEIRA

Problema 1: Dados a diferença entre dois lados e o agregado dos lados, encontrar os lados.

A diferença dada de dois lados sendo $\boldsymbol{B}$, e o agregado dos lados sendo $\boldsymbol{D}$, encontrar os lados. Sendo $\boldsymbol{A}$ o menor lado, portanto, o maior será $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$, e o agregado dos lados será $\boldsymbol{2A}+\boldsymbol{B}$, como o agregado é dado, a saber $\boldsymbol{D}$; então $\boldsymbol{2A}+\boldsymbol{B}$ é igual a $\boldsymbol{D}$; e pela antítese $\boldsymbol{2A}$ será igual a $\boldsymbol{D}-\boldsymbol{B}$. E todas as quantidades se reduzem à metade, $\boldsymbol{A}$ será igual à metade de $\boldsymbol{D}$ menos a metade de $\boldsymbol{B}$. Além disso, se o lado maior é $\boldsymbol{E}$, o menor será $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}$, e o agregado dos lados $\boldsymbol{2E}-\boldsymbol{B}$, como o agregado é dado, a saber $\boldsymbol{D}$; é porque $\boldsymbol{2E}-\boldsymbol{B}$ sendo igual a $\boldsymbol{D}$. E pela antítese $\boldsymbol{2E}$ igual à $\boldsymbol{D}+\boldsymbol{B}$, e todas as quantidades estando reduzidas à metade, $\boldsymbol{E}$ será igual à metade de $\boldsymbol{D}$ menos a metade de $\boldsymbol{B}$. Portanto, dados a diferença entre dois lados e o agregado dos lados, encontra-se os lados. Pois se subtrairmos a metade da diferença da metade do agregado dos lados, o que resta será igual ao menor lado; E se adicionarmos o total, será igual ao maior lado.

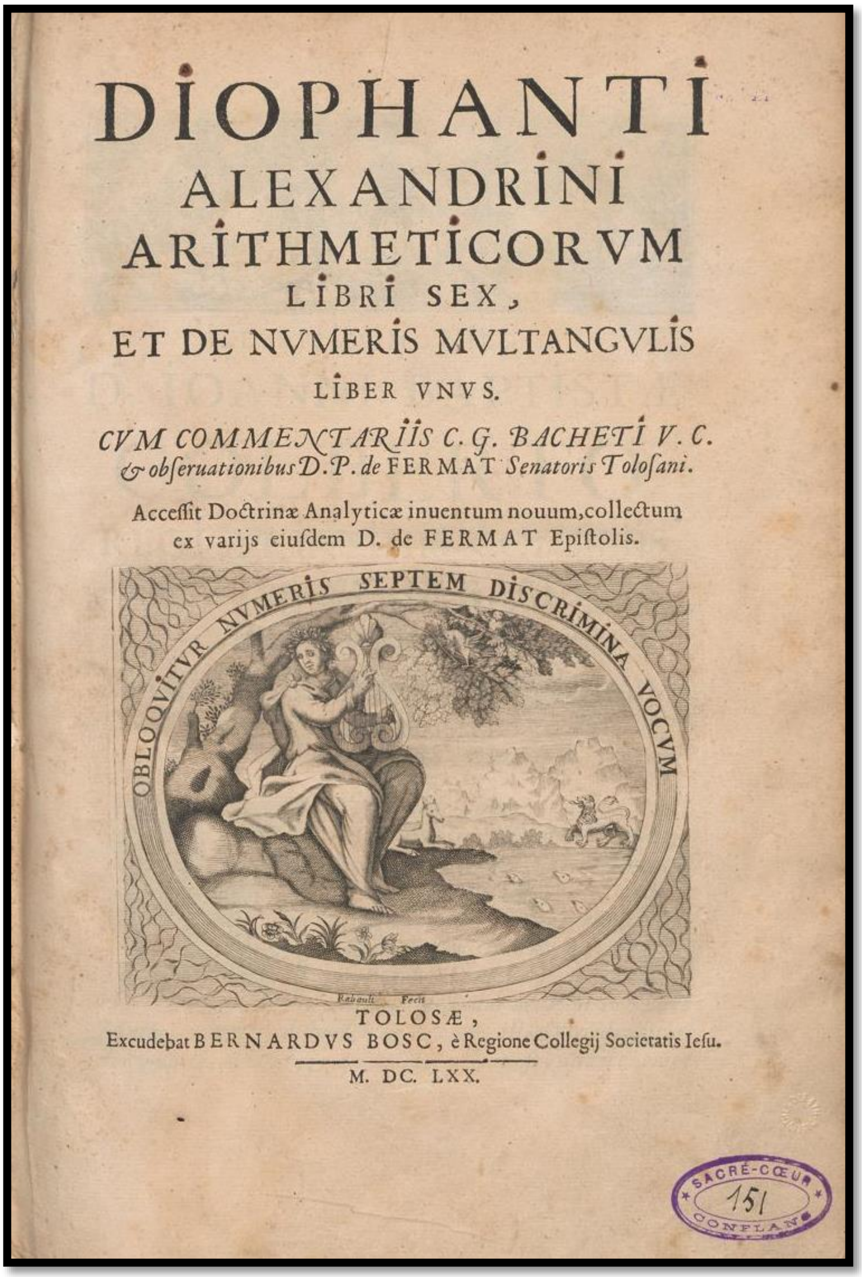
Sendo **B** igual a **40** e **D** igual a **100**, temos **A** igual a **30** e **E** igual a **70**

Solução de Viète: Sejam B a diferença entre os lados procurados e D, a soma deles. Se chamarmos de A o menor lado, então $A + B$ será o maior lado e, portanto, a soma será $2A + B$. Assim, $2A + B = D$. E pela antítese, $2A = D - B$. Donde temos que $A = \frac{D}{2} - \frac{B}{2}$. Por outro lado, se chamarmos de E o maior lado, então o menor lado será $E - B$ e, portanto, $2E - B$ será a soma dos lados. Logo, $2E - B = D$.

E, pela antítese, $2E = D + B$.

E, portanto, $\boldsymbol{E} = \frac{\boldsymbol{D}}{\boldsymbol{2}} + \frac{\boldsymbol{B}}{\boldsymbol{2}}$**.**

Em 1621, Bachet de Méziriac (1581–1638) publica o texto em grego da Aritmética juntamente com uma tradução para o latim e algumas notas suas sobre os problemas e soluções de Diofanto. Uma cópia desta edição que é adquirida por Pierre de Fermat (1601–1665), homem de leis por profissão (foi conselheiro do tribunal superior de Toulouse), matemático por paixão. Fermat irá anotar nas margens da sua cópia da Aritmética resultados sobre números naturais, inspirados sem dúvida no seu estudo e leitura desta obra, mas completamente novos e de uma beleza e profundidade impressionantes, e sem paralelo até então. Fermat limita-se a enunciar, nessas margens e em cartas a outros matemáticos, esses resultados, sendo apenas conhecido um esboço de uma prova sua em Teoria dos Números. Os melhores matemáticos do século XVII, em especial L. Euler (1707–1783), trabalharam arduamente na tentativa de provar os resultados de Fermat.



DIOPHANTI
ALEXANDRINI
ARITHMETICORVM
LIBRI SEX,
ET DE NVMERIS MVLTANGVLIS
LIBER VNVS.
CVM COMMENTARIIS C. G. BACHETI V. C.
& obseruationibus D. P. de FERMAT Senatoris Tolosani.
Accessit Doctrinæ Analyticæ inuentum nouum, collectum
ex varijs eiusdem D. de FERMAT Epistolis.

TOLOSÆ,
Excudebat BERNARDVS BOSC, è Regione Collegij Societatis Iesu.
M. DC. LXX.

Figura 15: O *Aritmética* de Diofanto de Bachet de Méziriac com comentários de Pierre de Fermat publicada em 1670. **Fonte**: Gallica Bibliotèque Numérique. Disponível em http://www.e-rara.ch/zut/content/pageview/2790613 - Bibliothèque Nationale de France. Acesso em 03 de dezembro de 2013.

Algumas versões publicadas do Aritimética: em 1621, Claude Gaspard Bachet de Méziriac, publica uma versão bilíngue grego-latina; em 1893 uma edição crítica por Paul Tannery Diophanti Alexandrini Opera omnia cum graecis commentariis; em 1910, Heath publica a obra Diofanto de Alexandria: um estudo da história da álgebra grega.

Segundo Roque (2012) a contribuição mais conhecida de Diofanto é ter introduzido uma forma de representar o valor desconhecido em um problema, designando-o como arithmos, de onde vem o nome "aritmética". O *Aritmética* contém uma coleção de problemas que integrava a tradição matemática da época, no livro I, ele introduz símbolos, aos quais o autor chama "designações abreviadas", para representar os diversos tipos de quantidade que aparecem nos problemas[4].

Diofanto usou o símbolo análogo à letra grega ζ para representar à incógnita; para o quadrado da incógnita usou Δ^{Y}, à qual chamou dynamis (quadrado); para cubo da incógnita usou K^{Y} e chamou-lhe Kybos; para a potência de expoente quatro usou $\Delta^{Y}\Delta$ e chamou-lhe dynamis-dynamis; para as potências de expoente cinco e seis usou, respectivamente, ΔK^{Y} (dynamis-kybos) e $K^{Y}K$ (kybos-kybos). (HEATH, 1910, p. 129).

Símbolos Diofantinos	Descrição	Notação Moderna	Descrição
Z	Arithmos	x	Incógnita
Δ^{Y}	Dynamis	x^2	Quadrado
K^{Y}	Kybos	x^3	Cubo
$\Delta^{Y}\Delta$	Dynamis-Dynamis	x^4	4ª Potência
ΔK^{Y}	Dynamis-Kybos	x^5	5ª Potência
$K^{Y}K$	Kybos-Kybos	x^6	6ª Potência

Tabela 4: Confeccionada a partir de Heath (1910)

[4] O método de abreviação representava a palavra usada para designar essas quantidades por sua primeira ou última letra de acordo com o alfabeto grego.

Segundo Eves (2008, p. 209), Diofanto tinha abreviações para a incógnita, potência até a de expoente seis, subtração, igualdade e inversos. Nossa palavra “aritmética” provém da palavra grega aritnmetike que se compõe de arithmos (“número”) e techne (“ciência”). Heath assinalou bastante convincentemente que o símbolo usado por Diofanto para a incógnita provavelmente derivava por fusão das duas primeiras letras gregas da palavra *arithmos*, a saber α e ρ. Com o tempo esse símbolo veio a se parecer com o sigma final grego ζ. Embora haja dúvidas sobre isso, o significado das notações para as potências da incógnita “cubo”. Facilmente se explicam os símbolos das potências seguintes parece bastante claro: assim, *dunamis* ($\Delta YNAMI\Sigma$) da incógnita, $\Delta^{Y}\Delta$ (quadrado-quadrado), ΔK^{Y} (quadrado-cubo) e $K^{Y}K$ (cubo-cubo). O símbolo de Diofanto para “menos” assemelha-se a um V invertido com a abissetriz traçada nele. A explicação que se tem dado é que esse símbolo se comporia de $\Lambda\ e\ I$, letras da palavra grega *leipis* ($\Lambda EI\Psi I\Sigma$) que significa “menos”. Todos os termos negativos de uma expressão eram reunidos e antes deles se escrevia o sinal de menos. Indicava-se a adição por justaposição; e o coeficiente da incógnita ou de uma potência qualquer da incógnita era representado por um numeral grego alfabético, logo seguida ao símbolo a que se deveria ligar. E quando houvesse um termo constante, então usava-se $\overset{o}{M}$, uma abrevisção da palavra grega *monades* (ΜΟΝΑΔΕΣ), que significa unidades, seguido do coeficiente numérico apropriado. Assim, $x^3 + 13x^2 + 5x\ e\ x^3 - 5x^2 + 8x - 1$ se escreveriam $K^{Y}\alpha\Delta^{Y}\iota\gamma\zeta\varepsilon$ e $K^{Y}\alpha\zeta\eta ⋔ \Delta^{Y}\overset{o}{M}\alpha$, expressões que, literalmente, podem ser lidas assim: incógnita ao cubo 1, incógnita ao quadrado 13, incógnita 5 e (incógnita ao cubo 1, incógnita 8) menos (incógnita ao quadrado 5, unidades 1). Foi assim que a álgebra retórica se tornou álgebra sincopada.

Os símbolos de Diofanto marcam a passagem da Álgebra retórica, em que as expressões são escritas totalmente em palavras, para a Álgebra sincopada, na qual algumas expressões vêm escritas em palavras e outras são abreviadas (STRUIK, 1989).

Segundo Klein (1968, p. 146), os sinais usados por Diofanto eram meras abreviaturas. Por esta razão, o procedimento praticado por Diofanto, denominou-se de álgebra sincopada que é uma transição da álgebra retórica para a moderna álgebra simbólica.

Muitos dos problemas tratados na Aritmética conduzem a equações do 1º e 2º graus, a uma ou mais incógnitas, determinadas ou não; outros se referem a equações cúbicas, mas para estas Diofanto escolhe adequadamente os dados para que seja fácil obter a solução. Há também nela problemas algébricos que Diofanto resolve por recurso à geometria e problemas sobre triângulos retângulos de lados racionais. Para os problemas propostos, são aceitas somente soluções racionais positivas. São os problemas “sobre” resolução de equações os que mais nos interessam em nossa abordagem. Problemas como “dividir um número dado em dois outros, sabendo sua diferença” e suas estratégias de resolução. Que nos permitam a partir de suas comparações um ensino mais efetivo na resolução de equações do primeiro e segundo grau na educação básica.

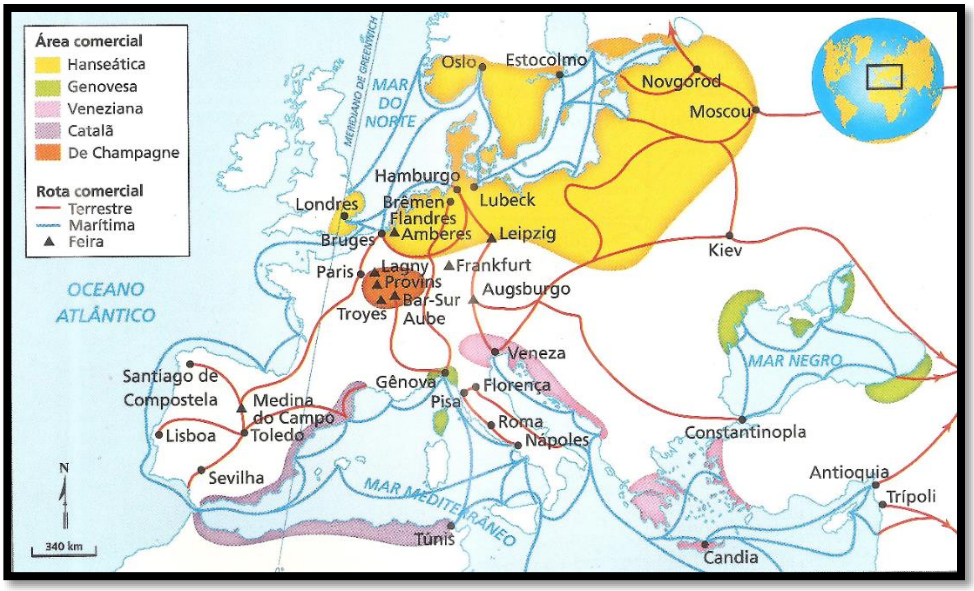
Na sequência fazemos uma leitura histórica da Matemática Medieval e a dinâmica comercial italiana através da obra Liber Abaci de Fibonacci.

2.3. O *Liber Abaci* de Fibonacci: A Contribuição da Matemática Árabe e a Dinâmica Comercial Italiana.

Nesta seção vamos tratar da Matemática do século XII, especificamente faremos um estudo histórico a partir da obra *Liber Abaci* de Fibonacci, com destaque nos problemas envolvendo progressões.

Embora Leonardo tenha nascido em uma família rica e próximo de amigos influentes, só passou a ser conhecido através de sua mais importante obra, o *Liber Abaci* ou livro de cálculo. Sabemos que ele nasceu por volta de 1170 d.C., muito provavelmente, em Pisa, mas em todo caso, foi onde ele passou a maior parte de sua infância. De acordo com o costume de nomear as pessoas, teria sido publicamente conhecido como Leonardo Pisano. Ele foi contemporâneo de Bonanno Pisano (Bonanno de Pisa), o engenheiro que começou a construção da Torre de Pisa. Guilichmus ou Guilielmo (William), o pai de Leonardo, era um comerciante, o que significava que o jovem Leonardo cresceu na companhia dos filhos e filhas de outros comerciantes, uma forte influência em sua infância que viria a ter consequências profundas.

Segundo Eves (2008), esse foi o caminho que levou Leonardo a receber parte de sua educação em Bejaia, norte da África, onde seu pai fora desempenhar uma função alfandegária. As atividades do pai logo despertaram no garoto um interesse pela aritmética que se canalizou, posteriormente, para extensas viagens ao Egito, à Sicília, à Grécia e Síria, onde pode entrar em contato direto com os procedimentos matemáticos orientais e árabes.



Mapa 5: Rotas comerciais do século XIII. **Fonte**: DUBY, Georges. *Atlas historique mondial*. Paris: Larousse, 2003. p. 64-65.

Quando Leonardo nasceu, a Itália era um centro muito importante, e ainda crescendo rapidamente, com seu comércio internacionalizado entre os países localizados a partir do Mar Mediterrâneo. Pisa, juntamente com outras cidades marítimas da Itália, Genova para o norte e Veneza, na costa nordeste, dominou o comércio, e seus navios navegavam constantemente de um porto do Mediterrâneo para o outro. Os comerciantes nessas três cidades foram as figuras-chave na formação do desenvolvimento de um novo mundo, mais cosmopolita. Provas de origens de Pisa remonta a quase dois mil anos a.C. serviu como um porto de trânsito para o comércio grego e fenício em direção a Gália, mais tarde, os romanos também usaram como porta. Em tempos pré-cristãos, o rio Arno, que hoje divide a cidade, abriu-se a uma grande lagoa apenas para o leste, proporcionando um porto natural. Os romanos chamavam-lhe o "Sinus Pisanas", embora eles não tenham sido os primeiros a atracar navios.

Figura 16. No alto, anverso de moeda de ouro utilizada na cidade de Gênova, Século XIII. Museu Bottacin, Itália; acima, moeda com detalhe de um escudo de ouro do reinado de Luís XI, 1266. **Fonte**: Biblioteca Nacional da França.

Na época de Leonardo, no entanto, a lagoa tinha assoreado e Pisa tinha status de porto marítimo principal ao lado de Gênova e Vengelo, que foi sustentado exclusivamente pela perícia e conexões de seus cidadãos, e não sua localização. Na verdade, às vezes, em tempo seco do rio Arno, ficava impraticável a navegação de navios maiores para chegar à cidade.

Outras mudanças também estavam afetando a vida dos Pisanos na época de Leonardo. Durante o século X, como os 500 anos de estagnação cultural conhecido como a Idade das Trevas chegou ao fim, a sociedade europeia começou a se desenvolver e prosperar novamente. Novas técnicas de cultivo foram introduzidas, as populações começaram a se expandir, e o comércio a se desenvolver. Com poucas estradas disponíveis, e a maioria das pessoas com baixa formação, a negociação foi realizada em grande parte por via fluvial e marítima. Como resultado, a maior parte da civilização ocidental foi agrupada em torno das margens do Mediterrâneo.

A partir do século X, Pisa começou a espalhar-se para além das suas antigas muralhas romanas, com torres subindo para o leste e oeste e para o sul através do rio Arno. Na segunda metade do século XII, quando Leonardo estava crescendo, um muro da cidade nova, fortificada estava sendo construído, para proteger a cidade de ataques tanto por muçulmanos, esta foi a época das Cruzadas e de rivais cidades italianas, que muitas vezes atacou o outro como parte de uma luta política em curso entre o Sacro Imperador Romano Frederico II e o papa.

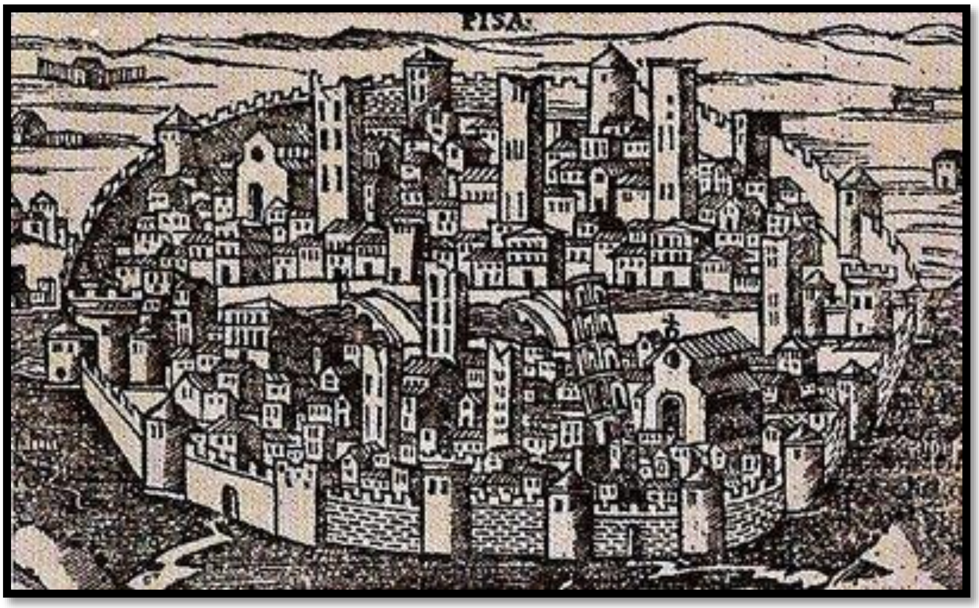


Figura 17. Desenho de Pisa do século XVI certamente mostra a cidade no tempo de Leonardo.
Fonte: Biblioteca Nacional de Florença.

Os visitantes de Pisa de hoje, vão ocasionalmente se deparar com prédios que remontam ao tempo de Leonardo: retangulares torres, construídas de pedra ou tijolo, com três ou mais andares. O andar térreo era muitas vezes uma loja ou um armazém de azeite, vinho, ferramentas e suprimentos, o segundo andar era usado como sala principal, e talvez um quarto. A cozinha era geralmente no andar de cima, para permitir que a fumaça sai-se facilmente. O Pisano comum se gaba de que a cidade teve dez mil dessas torres, foi certamente um grande exagero, mas como uma criança em uma família de comerciantes ricos, Leonardo quase certamente cresceu em tal edifício. O conhecido sobrenome italiano Visconti tem suas origens na história de Pisa desse momento. Em seus primeiros anos, Pisa foi oficialmente parte da Toscana, que foi governada por um marquês que devia sua lealdade ao imperador. O representante do marquês de Pisa foi chamado de vice conde, ou visconde. Com o tempo, as contagens vis começou a manter a posição dentro de sua própria família, mesmo atualmente levando o nome do escritório como seu nome de família: a família Visconti. Durante a infância de Leonardo, torres dos Viscontis domiram o bairro central da cidade, embora outras famílias, mais tarde, cresceram poderosas o suficiente para desafiar a sua posição. (DEVLIN, 2011, p. 29-30).

Leonardo cresceu durante um período de grande mudança. Em Bolonha, a 70 milhas a nordeste de Pisa, a primeira “universidade” foi fundada em 1088, em Salerno, no sul, a primeira escola médica foi formada, atraindo estudantes de vários países diferentes. Estudiosos em Pisa, Florença e Siena estavam ocupados em traduzir para o latim as grandes obras dos gregos: Euclides, Apolônio, Arquimedes, Aristóteles e Galeno. Em particular, o tratado *Almagesto* de astronomia de Ptolomeu, uma das obras gregas mais abrangentes, foi traduzido em Palermo em 1160 e novamente em Toledo em 1175. A comunicação entre as diferentes cidades foi se tornando mais eficiente pela introdução de um serviço postal, um dos primeiros na Europa.

No final do século XI, os estudiosos haviam descoberto em uma biblioteca em Pisa um manuscrito completo e intacto do *Corpusiuris Civilis*, o “Corpo de direito civil”, compilado pelo imperador Justiniano, no século VI. Além de se tornar o foco de muito estudo acadêmico ao longo do século seguinte, no momento em que Leonardo estava crescendo, as regras e princípios estabelecidos no tratado já tinha encontrado o seu caminho para o sistema italiano de governo.

Novas instituições financeiras bancárias, surgiram durante o século XII, crescendo em poucas décadas com empreendedores individuais que viajaram por todo o país para os mercados e feiras comerciais, transportando sacos de moedas de prata, organizados, e invariavelmente ricos. Nos primeiros dias, os financiadores tinham estabelecido suas moedas em bancos, o termo latino-banco deu origem a denominação a essas pessoas de “banqueiros”. Para Leonardo, os bancos ofereceram empréstimos e emissão de cartas de crédito. Grupos de empresários e comerciantes queriam unir forças e seus recursos para formar sociedades de responsabilidade limitada. Os líderes, muitas vezes realizavam suas reuniões importantes sentados ao redor de uma grande mesa de jantar, dando origem ao termo “conselho de administração” moderna.

As negociações eram rápidas entre as nações europeias na costa norte do Mediterrâneo e os países árabes ao sul. Comerciantes europeus vendiam lã, tecido, madeira, ferro e outros metais para os árabes. Na direção oposta, especiarias, medicamentos, pomadas, cosméticos, corantes, agentes de curtimento e outras mercadorias foram enviadas através do Mediterrâneo para a Europa. Muitos desses itens tinham sua origem na Índia e no Ceilão, a sua longa jornada levou-os para o noroeste para a cabeça do persa do Golfo, depois de barco até o Tigre para Bagdá ou Mosul, e de camelo para a Síria ou para os portos do Mar Vermelho do Egito e do Nilo.

Os navios de Pisa, dominavam o comércio no Mediterrâneo, Gênova e Veneza. Enquanto a maioria da Itália naquela época encontrava-se sob o domínio de qualquer Imperador do Sacro Império, o rei da Sicília, ou o papa, estas três grandes cidades marítimas funcionavam em muitos aspectos, como os estados-nação, assim como as cidades do interior de Florença e Milão. Com fortes exércitos e marinhas, não foram só as cidades-estados italianas capazes de afastar ataques de terra e mar, mas também ganhou fortalezas em outros lugares, incluindo alguns importantes portos na costa do Norte da África. Em meados do século XII, Pisa, cuja população, em seguida, eram cerca de dez mil, tinha colônias, privilégios portuários, ou representantes consulares ao redor da borda do Mediterrâneo. Comerciantes negociavam com a grande comunidade muçulmana que se estendia em um crescente da Pérsia (atual Irã), em torno das costas leste e sul do Mediterrâneo, e ao sul da Espanha. (DEVLIN, 2011, p. 32).

Devido à riqueza dos comerciantes trazidos para Pisa, Leonardo também cresceu durante um período de grande desenvolvimento cultural. Em muitas das grandes cidades italianas, pedreiros, escultores e arquitetos estavam construindo grandes monumentos arquitetônicos. Em Pisa, o mais ambicioso projeto foi levado a cabo no canto noroeste da cidade, no que viria a ser a Praça dos Milagres. Lá, um complexo de edifícios pertencentes à diocese estava construída há mais de um século. A construção mais interessante estava apenas iniciada: a torre do sino.

Bonanno Pisano, o engenheiro responsável pela construção da torre do sino, esforçou-se para evitar um colapso completo. A fim de trazer a torre mais perto da vertical, ele fez os andares superiores um pouco mais altos de um lado para compensar a inclinação. Mas o peso adicional da alvenaria extra sobre esse lado simplesmente fez com que o edificação afundasse ainda mais. Quando a torre foi finalmente concluída no século XIV, ainda se inclinou, como faz até hoje.

A infância de Leonardo foi marcada com números. Isso teria sido particularmente evidente ao longo das margens do rio Arno, que vai de leste a oeste, dividindo Pisa em duas. Em cada extremidade da cidade era uma alfândega. A única na parede ocidental, sendo mais próximo do mar, tratava com embarcações que chegavam do exterior. A carga típica de entrada consistia de sacos de grãos de outras partes da Itália, sal da Sardenha, fardos de peles de esquilo da Sicília, borrachos do norte da África, ou arminho da Hungria. Algumas embarcações tinham grandes portas em suas proas, que poderiam ser abertas para permitir que os cavalos de Provence desembarcassem em terra. Importações particularmente valiosos eram algumas, destinado à indústria de Pisa couro, tinturas para os fabricantes de têxteis da Itália e noroeste da Europa, e especiarias do Extremo Oriente. Bens destinados à Florença foram transferidos de navio para a barcaça para a viagem mais distante até o Arno. Quando toda a carga tinha sido tomada em terra, os trabalhadores Pisanos iriam recarregar os navios com mercadorias para exportação: barris de vinho e azeite toscano, fardos de cânhamo e linho, e barras de ferro fundido e prata. (DEVLIN, 2011, p. 33).

Ao lado da alfândega ocidental tinha um estaleiro. A construção naval era uma indústria florescente em Pisa no século XII, e seus artesãos construiram navios e não apenas para os clientes italianos, mas para clientes franceses e norte-Africanos também. Especialmente madeiras derrubadas foram trazidos por barco a partir do planalto arborizado, descarregados por guindastes gigantes, e corte em tábuas. Dois homens operando serra, um de pé no chão acima, outro abaixo no buraco. Eles empurrando e puxando a enorme lâmina vertical, cortando, como outros enfiou longitudinalmente contra a serra. As madeiras foram moldadas usando enxós pesados com lâminas de ferro curvos. Apesar da natureza bruta de suas ferramentas, qualificados foram capazes de modelar madeiras dos navios com notável precisão, de modo a evitar a sobreposição das pranchas, como era comum com a maioria dos outros construtores naquela época. Para fazer com que o navio em condições de navegar, calafates trabalhou seu caminho ao longo de todo o casco, buracos e rachaduras com tom quente de vedação.

À beira da água, pela Piazza San Nicola e outro lado do rio no trimestre Kinsica, curtidores levou couros embarcados no Norte de África, repousou sobre uma seção de um tronco de árvore para remover pêlos e carne. Em seguida, eles embebidos em água fria e fonte de bronzeamento característico cheiro-fricção e vencê-los todos os dias por até seis meses, transformando gradualmente as peles em bruto em couro fino, pronto para ser cortado e costurado em chapéus, cintos, calças, e outras peças de vestuário. Outro produto trazido à Pisa por barcaça no tempo de Leonardo era lã, que estava apenas começando a substituir o couro para a roupa.

Fiação, tecelagem, enchendo (tratar o pano tecido para maior suavidade e elasticidade), e tingimento eram tradicionalmente indústrias do país, assim como a venda de pano de lã, mas durante o século XIII estas indústrias começaram a mudar para a cidade.

Espalhados ao longo das margens dos rios foram dezenas de barracas coloridas e cabanas improvisadas, lugares temporários de negócios erguido pelos comerciantes, turcos, árabes, libaneses estrangeiro, e outros, para mostrar sedas, tapetes, vasos e outros utensílios para a venda.

Subjacente a toda esta atividade nas alfândegas, nos portos, em cada local de trabalho, eram números. Comerciantes mediam os seus produtos e preços negociados; funcionários aduaneiros calculavam os impostos a serem cobrados sobre as importações; escribas e administradores preparavam os manifestos dos navios, registravam os valores em longas colunas com algarismos romanos. Eles registravam com caneta e pergaminho lado a lado usando a escrita e os seus dedos ou um ábaco físico para executar as adições, inseriam os subtotais de cada página em uma página final. Sem registro da própria computação, se alguém questionava a resposta, todo o processo teria que ser repetido.

Quando olhamos para trás com o retrospecto da história, é tentador conjecturar de que as atividades comerciais do jovem Leonardo observadas ao longo das margens do Arno lhe permitiu mais tarde reconhecer os métodos aritméticos poderosos com potencial de revolucionar o comércio mundial. Em qualquer caso, quando Leonardo escreveu *Liber Abaci*, ele claramente fez isso principalmente para os comerciantes, com base no conteúdo e estrutura do livro. Ele se esforçou para explicar os conceitos de uma forma que esses homens altamente práticos conseguissem entender, apresentando muitos exemplos da vida cotidiana comercial. (DEVLIN, 2011, p. 35).

A ascensão do islamismo instigou os povos árabes a invasões e à conquista da Índia, Pérsia, Mesopotâmia, Norte da África e Espanha. Com isso, tiveram acesso às produções científicas dos gregos e hindus que, traduzidas para o árabe, foram preservadas durante a Idade Média. O matemático árabe al-Khwarizmi 825, utilizou o estilo retórico em suas publicações.

Suas obras *"Al-Kitab al-jabr wa'l Muqabalah"* o "Livro da Restauração e da Redução" e *"Kitab al-jami wa'l tafriq bi hisab al hindi"* o "Livro sobre o método hindu de adição e subtração" foram traduzidos para o latim 1200 e, decorrente disso, exerceram grande influência na matemática europeia. A álgebra europeia começou a se desenvolver perante o acesso às traduções para o latim de publicações dos gregos, árabes e hindus, e especialmente pela obra *Liber Abaci* 1202 de Fibonacci (Leonardo Pisano).

Revelando Artefatos: O *Liber Abaci* de Fibonacci

Leonardo de Pisa, mais conhecido por nós como Fibonacci, nasceu aproximadamente no ano 1170 e morreu no ano aproximadamente cerca de 1250. Sua fama repousa principalmente em seu livro *Liber Abaci* (um livro sobre o ábaco ou livro de cálculo - na verdade, seu objetivo era propor uma alternativa para realização de cálculos além do ábaco já bem dissiminado), que ele escreveu em 1202. É um marco na história da Matemática o *Liber Abaci* que versa sobre Aritmética, Álgebra e alguns tópicos de Geometria, com versão revista em 1228. Para seus leitores muito de seu interesse, provavelmente, estava em defesa dos novos algarismos arábicos. As palavras iniciais do *Liber Abaci* são históricas: Estes são os nove algarismos hindus 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1. Com esses nove algarismos, e com o sinal 0, que os árabes chamam de zephirum, pode-se escrever qualquer número. Os nomes para o "zero" em uso na época em que os números hindus-arábicos foram banidos na Europa eram cifra, chifre, tziphra e assim por diante. Esses nomes passaram a significar o sistema numérico completo que incluía o zero. Como o sistema era usado secretamente, o nome também passou a significar um código ou segredo e se transformou na palavra "cifra". O livro contém não apenas as regras para cálculo com os numerais indo-árabes, mas também diversos problemas, que incluem questões, certamente muito úteis aos mercadores, como o cálculo de juros, conversões monetárias, medidas, e outro tipo de problemas que Fibonacci resolve recorrendo a diversos algoritmos e métodos, entre eles o método da falsa posição e a resolução de equações quadráticas.

Além de *Practica geometriae* (1220): Onde descreve seus conhecimentos sobre Geometria e Trigonometria. *Flos* (1225): Neste Manuscrito Fibonacci apresenta as soluções de três problemas que lhe tinham sido colocados por João de Palermo, um membro da corte do Imperador Frederico II e *Liber quadratorum* (1225): É o maior livro que Fibonacci escreveu, no qual aproxima raízes cúbicas, obtendo uma aproximação correta até a nona casa decimal.

Figura 18. Páginas do *Liber Abaci* que mostram o antigo método de contagem à mão. **Fonte**: Biblioteca Ambriosiana, Milão.

A segunda versão revista do *Liber Abaci* foi produzida em 1228 e este documento traduzido com muitos erros por Boncompagni em 1857 é o que tem sobrevivido até hoje e nos dá uma indicação quase completa do conhecimento matemático acumulado no Ocidente desde os gregos. Também pode ser considerada como um manual do comerciante, com o objetivo de demonstrar as vantagens do sistema de numeração indo-arábico em comparação ao sistema Romano, além de não possuir um símbolo para o zero. No entanto, os comerciantes, e até mesmo os escravos criaram barreiras e inicialmente rejeitaram o seu sistema. E, de fato, levou muitas décadas para ser aceito comercialmente. A transição foi muito mais dolorosa e demorada do que, por exemplo, a recente conversão dos britânicos para medidas métricas.

Assim, Fibonacci foi exposto a influências árabes em uma idade precoce e em particular, ele estava familiarizado com as obras do matemático al-Khwarizmi datada de cerca de 825. Nascido cerca de 780 este matemático e astrônomo era na verdade um persa que viveu em Bagdá e escreveu dois livros que são conhecidos por nós. Um deles foi sobre o método posicional hindu-árabe e do título da outra (al-jabr) originou-se a palavra álgebra. Um erro de ortografia de seu nome nos dá o termo algoritmo que agora é uma das palavras mais importantes em ciência da computação.

Quando dizemos que o livro de Fibonacci foi produzido, queremos dizer que ele foi copiado à mão, pois a impressão ainda não tinha sido inventada. No entanto, mesmo após o estabelecimento da impressão no século XV, inacreditavelmente isso só veio acontecer a parti de 1857.

Figura 19. Páginas do Liber Abaci. **Fonte**: Biblioteca Ambriosiana, Milão.

Fibonacci teve vários apelidos que aparecem em seus manuscritos, são os seguintes: Leonardus Pisanus (Leonard o Pisa), Leonardus filius Bonaccii (Leonard Fibonacci), Fibonacci que era o sobrenome da família em italiano e literalmente significa “filho do simplório (Bonaccio)” e Leonardus Bigollus “Bigollo” em dialeto toscano é traduzido aproximadamente como “distraído” ou mesmo “cabeça-dura”, e esse apelido provavelmente surge de seu nome de família (também significava viajante).

No entanto, hoje ele é lembrado, em geral, apenas por meio de seus *números de Fibonacci* que surgem do problema dos coelhos. Isto é lamentável, pois embora a matemática associada com os números de Fibonacci seja generalizada, profundamente, e cheia de misteriosos padrões, ele certamente não efetuou qualquer análise destes números além de estabelecer que cada termo é igual à soma dos dois anteriores e que o processo continua indefinidamente. Os números não foram ainda apresentados por Fibonacci até 1877.

Segundo Fossa (2010), houve muita resistência por parte dos operadores do ábaco a adotar os métodos hindus. Talvez para a maioria das aplicações da aritmética à vida cotidiana, o ábaco supria as necessidades dos europeus da época. De fato, o referido instrumento proporcionava ao homem de baixa cultura e pouco conhecimento uma maneira mecânica de fazer a computação. Era bem eficiente para adição e subtração, embora moroso para a multiplicação e a divisão.

Figura 20: Gravura sobre madeira de Gregor Reisch, *Margarita Philosophica* (FREIBURG, 1503). A aritmética ensina ao alegorista e ao abacista, aqui impropriamente representados por Boécio e Pitágoras.

Na ilustração a Aritmética, personificada por uma mulher segurando um livro aberto em cada mão, está em pé entre dois homens sentados em bancas, fazendo seus cálculos. Um utiliza os métodos algorítmicos, enquanto o outro usa o ábaco horizontal. Segundo a gravura, os alegoristas ganharam a disputa, pois a Aritmética está olhando favoravelmente ao homem usando os novos métodos e, para garantir que a mensagem não seja ignorada, ela está usando um vestido ornamentado com numerais indo-arábicos.

O *Liber Abaci* está dividido em 15 Capítulos como segue:

Capítulo 1	*De cognitione novem figurarum indorum et qualiter cum eis omnis numerus scribatur; et qui numeri, et qualiter retineri debeant in manibus, et de introductionibus abbaci* - Leitura e escrita dos números no sistema indo-arábico.
Capítulo 2	*De multiplicatione integrorum numerorum* - Multiplicação de números inteiros.
Capítulo 3	*De additione ipsorum* - Adição de números inteiros.
Capítulo 4	*De extractione minorum numerum ex maioribus* - Extração do menor número pelo maior (subtração).
Capítulo 5	*De divisione integrarum numerorum per íntegros* - Divisão de números inteiros.
Capítulo 6	*De multiplicatione integrarum numerorum cum ruptis atque ruptorum sine sanis* - Multiplicação de números inteiros por frações.
Capítulo 7	*De additione ac extractione et divisione numerorum integrarum cum ruptis atque partium numerorum in singulis partis reductione* - Adição, subtração e divisão de frações.
Capítulo 8	*De emptione et venditione rerum venalium et similium* - Aquisição e venda de mercadorias e similares.
Capítulo 9	*De baractis rerum venalium et de emptione bolsonalie et quibusdam regulis similibus* - Comércio.
Capítulo 10	*De societatibus factis inter consócios* - Regra das companhias.
Capítulo 11	*De consolamine monetarum atque eorum regulis que ad consolamen pertinent* - Liga de moedas.
Capítulo 12	*De solutionibus multarum positarum questionum quas erraticas appellamus* - A solução de problemas diversos.

Capítulo 13	*De regula elcatayam qualiter per ipsam fere omnes erratices questiones solvantur* - A regra da falsa posição.
Capítulo 14	*De reperiendi radicibus quadratis et cubitis ex multiplicatione et divisione seu extractione earum in se et de tractatu binomiorum et recisorum et eorum radicum* - Raízes quadradas e raízes cúbicas.
Capítulo 15	*De regulis proportionibus geometrie pertinentibus: de questionibus aliebre et amulchabale* - A regra da proporção geométrica e questões de álgebra.

Tabela 5: Confeccionada a partir de Sigler (2002).

O livro divide-se naturalmente em três partes. A primeira trata da Aritmética que envolve os sete primeiros capítulos. Fibonacci inicia o primeiro capítulo introduzindo os numerais indo-árabes, em seguida como se pode ver acima, pelos títulos de cada um deles, Fibonacci trata dos quatro algoritmos elementares tanto para números inteiros como para frações. Em seguida constituem uma segunda parte do livro, sobre a matemática comercial. Avançando, Fibonacci apresenta diversos problemas, o problema mais conhecido é sobre um par de coelhos, que é colocado numa cerca, querendo-se saber quantos coelhos se reproduzem num ano a partir desse par. A solução dá origem à sequência 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55 (Fibonacci omitiu o primeiro termo), na qual cada número, da sequência, é igual à soma dos dois que o precedem. Esta sequência foi denominada de sequência de Fibonacci no século XIX, pelo matemático francês Eduard Lucas, e a partir daí encontraram-se inúmeras relações destes números com a natureza, levando os matemáticos e cientistas a investigá-la.

Após o estudo realizado nestas três fontes, acreditamos ter a profundidade necessária para apresentarmos e discutirmos de forma mais dirigida alguns problemas de cunho histórico e suas implicações para o ensino de Matemática.

No próximo capítulo, fazemos uma exposição dos problemas que selecionamos e que apresentam as propriedades necessárias para prosseguirmos coma nossa pesquisa, visando uma possível elaboração de atividades estruturadas.

Capítulo 3 – Apresentação de problemas de cunho histórico estudados.

Neste capítulo apresentaremos alguns problemas matemáticos selecionados do *Papiro de Rhind* (1650 a.C.) que efetivamente é uma contribuição da matemática egípcia do tempo dos faraós, da obra *Aritmética* de Diofanto (300) que é uma contribuição da matemática grega do século III e do *Liber Abaci* de Fibonacci (1228) uma contribuição da matemática do período medieval.

A elaboração das atividades utilizando problemas históricos da Matemática devem preservar a continuidade na aprendizagem do aluno. Nesse sentido, vamos verificar nestas três fontes histórias se há recorrência de problemas envolvendo progressões. Buscando conduzir a investigação dos problemas matemáticos presentes nas informações históricas, de modo que os alunos reconstruam os aspectos conceituais relevantes dessa matemática, avançando significativamente na organização conceitual do conteúdo previsto pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), onde verificamos a importância da resolução de problemas, quanto às competências e habilidades a serem desenvolvidas em Matemática e um item “investigação e compreensão”, assim destacado:

> Identificar o problema (compreender enunciados, formular questões, etc.); Procurar selecionar e interpretar informações relativas aos problemas; Formular hipóteses e prever resultados; Selecionar estratégias de resolução de problemas; interpretar e criticar resultados numa situação concreta; distinguir e utilizar raciocínios dedutivos e indutivos; fazer e validar conjecturas, experimentando, recorrendo a modelos, esboços, fatos conhecidos, relações e propriedades; discutir ideias e produzir argumentos convincentes. (BRASIL, 1999, p. 259).

O documento oficial enfatiza também a resolução de problemas como uma importante estratégia de ensino, afirmando que:

> Os alunos, confrontados com situações-problema novas, mas compatíveis com os instrumentos que já possuem ou que possam adquirir no processo, aprendem a desenvolver estratégia de enfrentamento, planejando etapas, estabelecendo relações, verificando regularidades, fazendo uso dos próprios erros cometidos para buscar novas alternativas; adquirem espírito de pesquisa, aprendendo a consultar, a experimentar, a organizar dados, a sistematizar resultados, a validar soluções; desenvolvem sua capacidade de raciocínio, adquirem autoconfiança e sentido de responsabilidade; e, finalmente, ampliam sua autonomia e capacidade de comunicação e de argumentação. (BRASIL, 1999, p. 266).

A utilização de situações-problema pode contribuir para a aprendizagem de diversos conteúdos, mas cabe ressaltar que somente aprender a resolver os problemas construindo suas próprias estratégias não é o suficiente para tornar esta aprendizagem eficaz.

Métodos particulares de resolução de problemas possuem uma longa história, e podem contribuir de forma significativa para alcançarmos nossos objetivos no ensino de matemática a partir do uso de problemas que utilizam progressões, encontrados no *Papiro de Rhind*, no *Aritmética* de Diofanto e no *Liber Abaci* de Fibonacci. Com o objetivo de compreender o processo de organização de progressões, construído historicamente em diversos contextos socioculturais e identificar conexões entre o uso desse conhecimento matemático e sua axiomatização ao longo da história, bem como explorar e interpretar aspectos algébricos no contexto atual da comunidade na qual o aluno está inserido.

3.1. Alguns problemas do *Papiro de Rhind*

O *papiro de Rhind* é uma fonte primária rica sobre a matemática egípcia antiga, deixando evidências de que sabiam trabalhar com progressões. O domínio da tecnologia do papiro, planta típica encontrada às margens do Rio Nilo, possibilitou o registro de informações e o conhecimento que temos hoje da matemática egípcia.

> Trata-se de uma fonte rica sobre a Matemática egípcia antiga, que contém alguns problemas a respeito de progressões aritméticas e geométricas. Ahmes apresenta o seguinte problema envolvendo uma progressão aritmética: “Divida 100 pães entre cinco pessoas; um sétimo do que recebem as três primeiras é o que recebem as duas últimas. Qual é a diferença?” (CAJORI, 2007, p.40).

Problema 40 do Papiro de Rhind: “Divida 100 pães entre 5 homens de modo que as partes recebidas estejam em Progressão Aritmética e que um sétimo da soma das três partes maiores seja igual à soma das duas menores”.

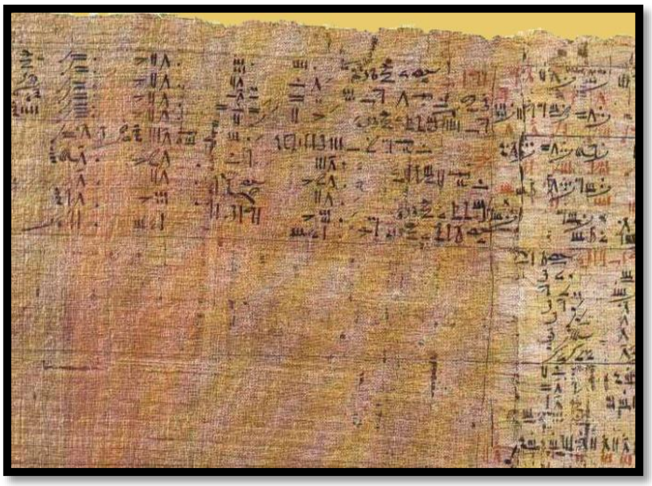


Figura 21. Um recorte do *Papiro de Rhind,* (1650 a.C.) Progressão Aritmética. **Fonte**: Museu Britânico, Inglaterra.

ARITHMETIC PROGRESSIONS: PROBLEM 40 OF THE RHIND MATHEMATICAL PAPYRUS

In Problem 40 of the RMP, the scribe speaks of an arithmetic progression (A.P.) of 5 terms, in which the sum of the three largest terms is seven times the sum of the two smallest terms. In modern algebra it is usual, though not essential, to think of an A.P. as starting with the smallest term and ending with the largest. The Egyptians reversed this order. For the present discussion we will adopt the modern convention for convenience, and we look first at the very simplest A.P. of all, namely,

$$1, \quad 2, \quad 3, \quad 4, \quad 5.$$

We observe that $3 + 4 + 5 = 12$, which is 4 times $(1 + 2)$. If we look for other series that have similar properties, we can find

$$1, \quad 4, \quad 7, \quad 10, \quad 13,$$

in which $7 + 10 + 13 = 30$, which is 6 times $(1 + 4)$, and

$$1, \quad 14, \quad 27, \quad 40, \quad 53,$$

where $27 + 40 + 53 = 120$, which is 8 times $(1 + 14)$. These are easily found by simple mental arithmetic, but if one were to look for series other than the 4 times, 6 times, and 8 times, say 3 times or 7 times, as the scribe has in RMP 40, then it is a little more difficult, though not so much more, requiring easy fractions such as

$$1, \quad 1\ \bar{2}, \quad 2, \quad 2\ \bar{2}, \quad 3,$$

in which, $2 \quad 2\ \bar{2} \quad 3 = 7\ \bar{2}$, which is 3 times $(1 + 1\ \bar{2})$, and the

Figura 22. Problema 40 do *Papiro de Rhind*. **Fonte**: GILLINGS, R. J. Mathematics in the Time of the Pharaohs; Dover Publication, 1982. p. 170.

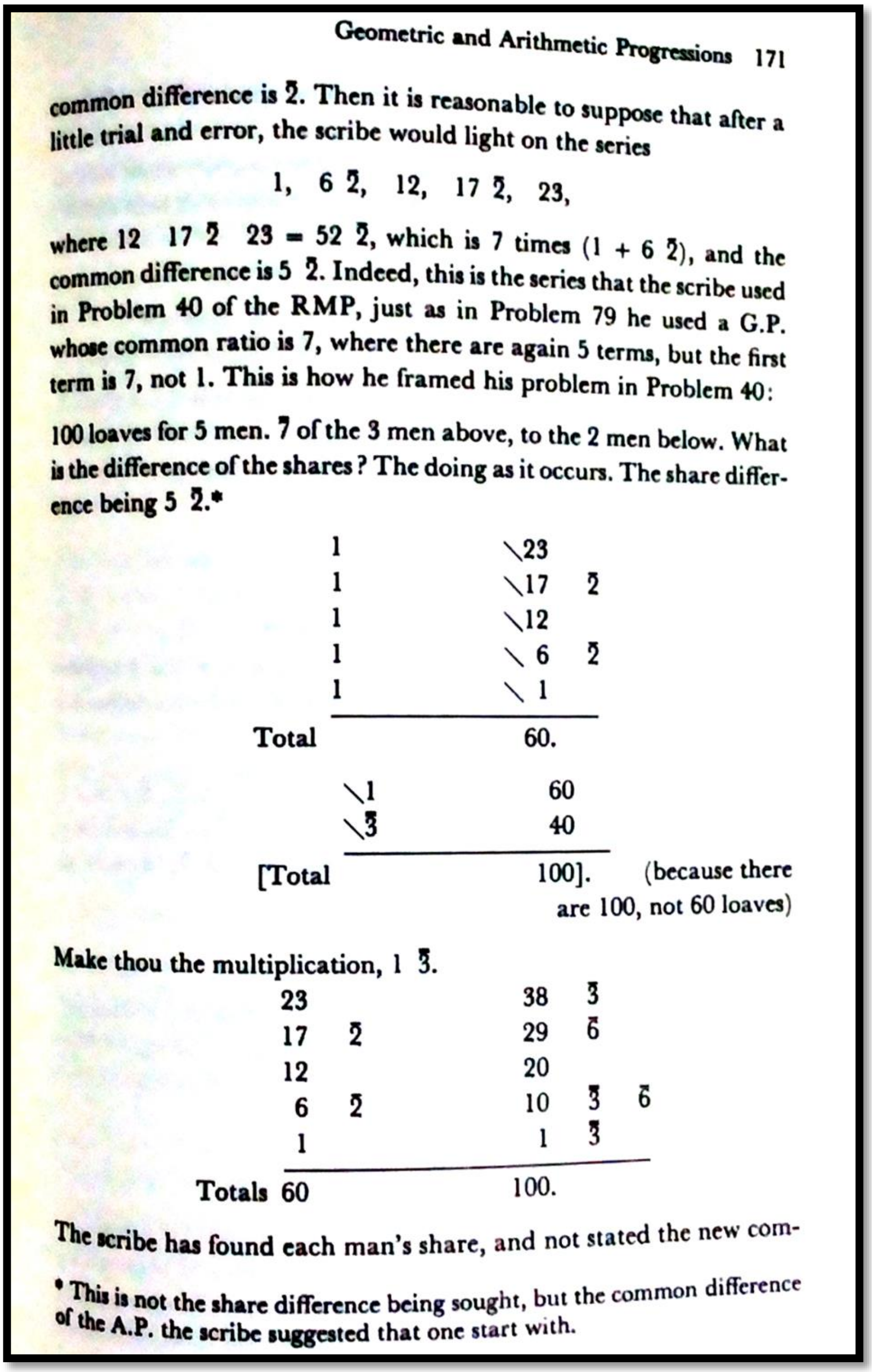
Na resolução o escriba assume uma diferença comum de $5 + \frac{1}{2}$, sabendo que esse valor cumpria as condições do problema (a soma dos três maiores termos é sete vezes a soma dos três menores), resultando na sequência: $23, 17 + \frac{1}{2}, 12\ , 6\ + \frac{1}{2}, 1$

Acredita-se que ele chegou a esse resultado por meio de tentativas e erro. No entanto, ao somar os termos da sequência, encontrou 60 ao invés de 100 pães.

Com isso, para chegar à resposta desejada, o escriba multiplica todos os cinco termos da sequência anteriormente encontrada por $1 + \frac{2}{3}$, resultando em:

$$38\ + \frac{1}{3}, 29\ + \frac{1}{6}, 20, 10\ + \frac{2}{3} + \frac{1}{6}, 1 + \frac{2}{3}$$

Portanto, somando os termos dessa sequência, obtém-se 100. No entanto, o problema pede a diferença das partes encontradas, nesse caso, basta multiplicar $5 + \frac{1}{2}$ por $1 + \frac{2}{3}$, resultando em $9 \ + \frac{1}{6}$.



Geometric and Arithmetic Progressions 171

common difference is $\bar{2}$. Then it is reasonable to suppose that after a little trial and error, the scribe would light on the series

1, 6 $\bar{2}$, 12, 17 $\bar{2}$, 23,

where 12 17 $\bar{2}$ 23 = 52 $\bar{2}$, which is 7 times (1 + 6 $\bar{2}$), and the common difference is 5 $\bar{2}$. Indeed, this is the series that the scribe used in Problem 40 of the RMP, just as in Problem 79 he used a G.P. whose common ratio is 7, where there are again 5 terms, but the first term is 7, not 1. This is how he framed his problem in Problem 40:

100 loaves for 5 men. $\bar{7}$ of the 3 men above, to the 2 men below. What is the difference of the shares? The doing as it occurs. The share difference being 5 $\bar{2}$.*

	1	\23
	1	\17 $\bar{2}$
	1	\12
	1	\ 6 $\bar{2}$
	1	\ 1
Total		60.
	\1	60
	\ $\bar{\bar{3}}$	40
[Total		100]. (because there are 100, not 60 loaves)

Make thou the multiplication, 1 $\bar{\bar{3}}$.

	23	38 $\bar{3}$
	17 $\bar{2}$	29 $\bar{6}$
	12	20
	6 $\bar{2}$	10 $\bar{\bar{3}}$ $\bar{6}$
	1	1 $\bar{\bar{3}}$
Totals	60	100.

The scribe has found each man's share, and not stated the new com-

* This is not the share difference being sought, but the common difference of the A.P. the scribe suggested that one start with.

Figura 23. Problemas 40 do *Papiro de Rhind*. **Fonte**: GILLINGS, R. J. Mathematics in the Time of the Pharaohs; Dover Publication, 1982. p. 171.

mon difference. But this is very easily found by subtraction: 1 $\bar{\bar{3}}$ from 10 $\bar{\bar{3}}$ $\bar{6}$ is 9 $\bar{6}$.

One would have expected a proof here, following the usual scribal procedure, that the 3 men above did receive 7 times the 2 men below; thus,

$$38\ \bar{\bar{3}} \quad 29\ \bar{6} \quad 20 \text{ is } 87\ \bar{2} \text{ (men above)},$$

and

$$10\ \bar{\bar{3}}\ \bar{6} \quad 1\ \bar{\bar{3}} \text{ is } 12\ \bar{2} \text{ (men below)}.$$

Then,

	\1	\12 $\bar{2}$
	\2	\25
	\4	\50
Totals	7	87 $\bar{2}$.

But this proof is not given in the papyrus.

We restate the problem in less archaic language.

Divide 100 loaves among 5 men, so that the shares of the 3 highest are together 7 times the shares of the 2 lowest. What is the difference of their shares?

There was no need to specify that the shares are in A.P., for that is inherent in the phrase, "difference of their shares." In his solution, the scribe at once assumed a common difference of 5 $\bar{2}$, because he knew that the A.P.

$$23, \quad 17\ \bar{2}, \quad 12, \quad 6\ \bar{2}, \quad 1$$

exactly fulfills the conditions of the problem, except for the 100 loaves. So then he added up the 5 terms giving 60, which, he noted, will become 100 if multiplied by 1 $\bar{\bar{3}}$. Therefore he said, "multiply each of the five terms by 1 $\bar{\bar{3}}$," giving

$$38\ \bar{\bar{3}}, \quad 29\ \bar{6}, \quad 20, \quad 10\ \bar{\bar{3}}\ \bar{6}, \quad 1\ \bar{\bar{3}},$$

which, as a check, he showed to add up to 100. This is his answer.

The problem asked for the difference of the shares, and presumably the scribe supposed that whoever wishes to know will subtract any two adjacent terms and find it to be 9 $\bar{6}$. But he was more interested

in how the 100 loaves were divided among the five men, and clearly this is what he really meant to ask in the problem. For otherwise, if it were *only* the common difference he sought, then he could have found this at once by multiplying the original 5 $\bar{2}$ by 1 $\bar{\bar{3}}$, giving 9 $\bar{6}$, without bothering to multiply out the five terms of the series by 1 $\bar{\bar{3}}$.

Figura 24. Problemas 40 do *Papiro de Rhind*. **Fonte**: GILLINGS, R. J. Mathematics in the Time of the Pharaohs; Dover Publication, 1982. p. 172-173.

Problema 64 do Papiro de Rhind: “Divida 10 hekat de cereal por 10 homens de modo que a diferença comum seja $\frac{1}{8}$ de um hekat de cereal”.

Texto adaptado: “10 medidas de milho são distribuídas a 10 homens, formando uma sequência de medidas de tal modo que cada pessoa, a partir da segunda, receba $\frac{1}{8}$ a menos que homem precedente. Determine essas medidas”.

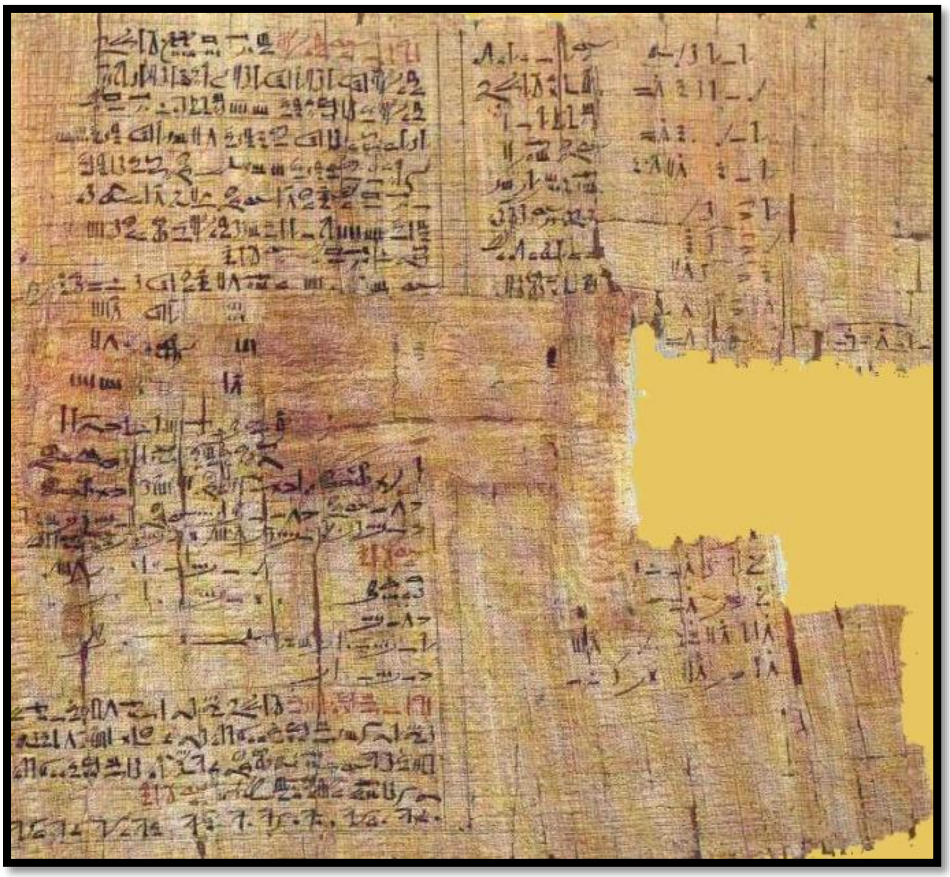


Figura 25. Um recorte do *Papiro de Rhind,* (1650 a.C.) Progressão Aritmética. **Fonte**: Museu Britânico, Inglaterra.

Resolução do escriba: Segundo Gillings (1982, p.173), o escriba primeiro calcula a porção média $\frac{10}{10}$ obtemos 1 (os egípcios chamavam primeiro o valor médio). Portanto, o número total de diferenças é $10 - 1 = 9$. Calcula-se metade da diferença comum; obtém-se $\overline{16}$. Multiplicando 9 por $\overline{16}$ encontramos o valor $\overline{2}\,\overline{16}$. Adicionando este resultado ao valor médio obtemos a parcela maior: $1\ \overline{2}\,\overline{16}$. Subtraindo a diferença comum, $\overline{8}$, nove vezes calculamos a parcela menor: $\frac{}{4}\frac{}{8}\frac{}{16}$. Portanto as parcelas serão $\frac{}{4}\frac{}{8}\frac{}{16}$, $\frac{}{2}\frac{}{16}$, $\frac{}{2}\frac{}{8}\frac{}{16}$, $\frac{}{2}\frac{}{4}\frac{}{16}$, $\frac{}{2}\frac{}{4}\frac{}{8}\frac{}{16}$, $1\frac{}{16}$, $1\frac{}{8}\frac{}{16}$, $1\frac{}{4}\frac{}{16}$, $1\ \frac{}{4}\frac{}{8}\frac{}{16}$ e $1\frac{}{2}\frac{}{16}$, que totalizam 10. Segundo Gillings (1982, p.175) podemos visualizar uma possível forma retórica para a fórmula da soma de uma progressão aritmética.

Geometric and Arithmetic Progressions 175

The number of differences is one less than the number of terms, = $(n - 1)$.
Find half of the common difference, = $d/2$.
Multiply this $(n - 1)$ by $d/2$ and you get $(n - 1) \times d/2$.

Then either,	or,
Add this to the average value,	*Subtract* this from the average value,
$\frac{S}{n} + (n-1)\frac{d}{2}$	$\frac{S}{n} - (n-1)\frac{d}{2}$.
This is the *highest term l*.	This is the *lowest term a*.
Then, $\frac{S}{n} + (n-1)\frac{d}{2} = l$,	Then, $\frac{S}{n} - (n-1)\frac{d}{2} = a$,
or, $\frac{S}{n} = l - (n-1)\frac{d}{2}$	or, $\frac{S}{n} = a + (n-1)\frac{d}{2}$
$= \frac{1}{2}[2l - (n-1)d]$;	$= \frac{1}{2}[2a + (n-1)d]$;
hence, $S = \frac{n}{2}[2l - (n-1)d]$.	hence, $S = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$.

How naturally these formulas were deduced! Logically and simply from the scribe's directions! All we have done is to adapt a few elementary algebraic transformations, and we find we have not one, but *two* formulas for the sum of n terms of an A.P. The first is perhaps the less familiar. Indeed, of the 23 algebra texts on my own study shelves, only one* includes it; but they all have the second in exactly the same form as here.

The conclusion is inescapable: hidden in a hieratic script of the Middle Kingdom, expressed in words, without the assistance of any form of algebraic notation at all, is the equivalent of a perfectly well-known modern formula for the sum to n terms of an arithmetic progression. In view of this, it is difficult to accept the recent pronouncement of Professor Morris Kline:

The mathematics of the Egyptians (and Babylonians) is the scrawling of children just learning how to write, as opposed to great literature.†
Scrawling indeed!

* W. E. Paterson, *School Algebra*, Clarendon Press, Oxford, 3rd ed. (1916), p. 385.
† *Mathematics, a Cultural Approach*, p. 14.

Figura 26. Problemas 64 do *Papiro de Rhind*. **Fonte**: GILLINGS, R. J. Mathematics in the Time of the Pharaohs; Dover Publication, 1982. p. 175.

Problema 79 do Papiro de Rhind: Nos trabalhos de Gay Robins e Charles Shute (1987), o problema é de um tipo muito diferente. Pode ser considerado como um precursor dos bem conhecidos viveiros de captura “Como eu estava indo para St. Ives, encontrei um homem com sete esposas, Cada mulher tinha sete ...” etc. A versão egípcia é posta como segue:

Figura 27. Problema 79 do *Papiro de Rhind,* (1650 a.C.) Progressões Geométricas. **Fonte**: Museu Britânico, Inglaterra.

Problema 79 do *Papiro de Rhind*: Um homem tinha sete casas, cada casa tinha sete gatos, para cada gato havia sete ratos, para cada rato havia sete espigas de trigo, e cada espiga tinha sete medidas de grão. Quantas coisas ele possuía? Casas, gatos, ratos espigas e medidas de grão?

7	casas
49	gatos
343	camundongos
2401	[espigas de] espelta [erroneamente escrito 2301]
16807	*hekat* [de grãos]
Total 19607	

Os números formam cinco termos de uma progressão geométrica divergente, da qual o primeiro termo, 7, é o mesmo que a razão comum. Pretende-se mostrar que em cada uma das sete casas há 7 gatos, cada gato captura 7 ratos, cada rato comeria sete espigas de milho, cada espiga de milho, caso fosse semeada, produziria 7 *hekat* de grãos.

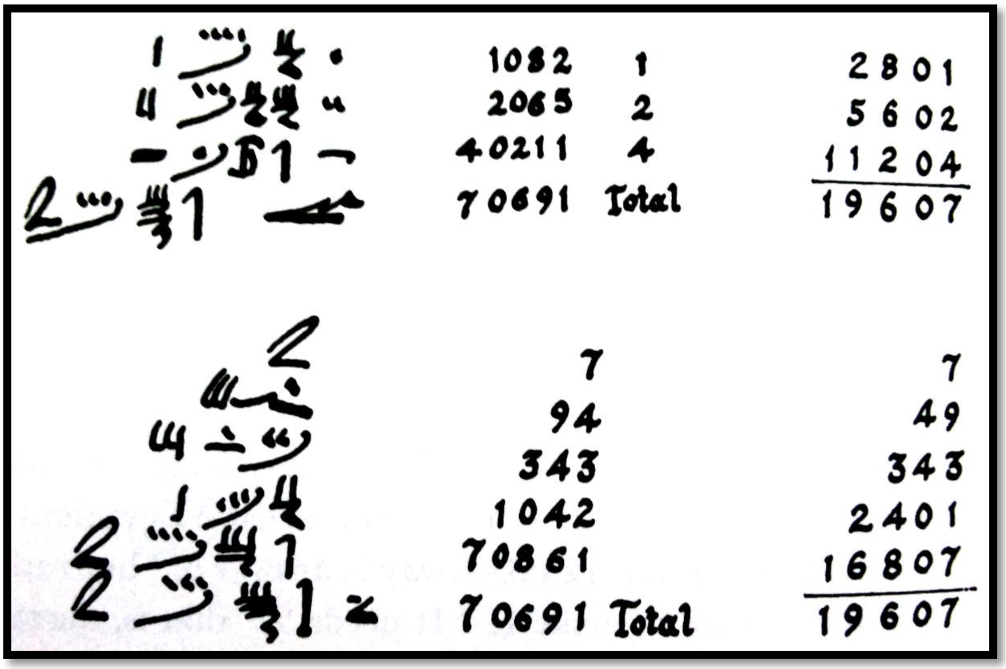


Figura 28. Recorte do problema 79 do *Papiro de Rhind*. **Fonte**: GILLINGS, R. J. Mathematics in the Time of the Pharaohs; Dover Publication, 1982. p. 14.

O interesse matemático do problema reside na revelação de que os egípcios entendiam como somar os termos de uma progressão deste tipo. O exercício é fornecido, a seguir, em uma coluna em separado:

1	2801
\ 2	5602
\ 4	11204
Total	19607

Pode-se imediatamente reconhecer como uma soma em que o número 2801 é multiplicado por 7 para se obter 19607, que foi o total obtido antes adicionando-se os números das casas, gatos, ratos, etc. O significado de 2801 torna-se evidente quando a série original é resumida termo a termo:

$7 = 7$
$7\ x\ 77\ (1+7)$ = 56
$7\ x\ 7\ x\ 77\ (1+56)$ = 399
$7\ x\ 7\ x\ 7\ x\ 77\ (1+399)$ = 2800
$7\ x\ 7\ x\ 7\ x\ 7\ x\ 77\ (1+2800)$ = 19607

Notar-se-á que em cada fase a soma é obtida acrescentando-se a soma anterior por um e multiplicando-se pela razão comum. A soma da série de quatro termos foi 2800. Acrescentada por 1, isso se torna 2801. Multiplicando 2801 por 7 dá a soma de cinco termos, e foi isso o que o escriba fez."

É presumível que o escriba estava tratando de um problema bem conhecido, em que uma das sete casas havia sete gatos, cada um deles come sete ratos, cada um dos quais havia comido sete espigas, cada uma delas teria produzido sete medidas de grão. O problema evidentemente não pedia uma resposta prática, que seria o número de medidas de grãos poupadas, mas a não-prática soma dos números de casas, gatos, ratos, espigas e medidas de grão.

Gillings (1982) relata não ter visto em nenhum outro papiro matemático da antiguidade egípcia problemas que envolvem uma quantidade desconhecida, àqueles do tipo "pense em número". No enunciado e nem na resolução dos problemas nº 28 e 29, aparecem informações que nos levem a acreditar que os cálculos se destinavam a fins práticos. Pelo contrário, os problemas parecem ser um tipo de recreação atual: "pense em número, faça tais operações, me diga o resultado que eu direi em qual número pensou." As contas de ambos os problemas (nº 28 e 29), apresentadas pelo escriba, demonstram sua habilidade na manipulação de frações unitárias, os cálculos justificam como uma espécie de prova, o motivo pelo qual ele "adivinha" o número pensado.

De todos os problemas do papiro de Rhind, talvez o de nº 79 seja o mais particular, e por isso também o mais famoso dos problemas. Nele são apresentados dois cálculos cuja soma é o número 19607. Fazendo a leitura da direita para a esquerda, a primeira anotação nos mostra a multiplicação de 7 por 2801, e a segunda uma soma de potências de 7. Do texto de Robins e Shute (1987) podemos concluir que fazer a multiplicação é o mesmo que efetuar a soma, a questão intrigante é a escolha do número 2801. Mas isso pode ser explicado por outros elementos do papiro de Rhind, estes indicam ser os egípcios entendidos de cálculos e que somam progressões, ou seja, faziam o mesmo que a nossa atual mostrado na fórmula $S_n = r(1 + a_1 + \cdots + a_{n-1})$.

Segundo Bunt, Jones e Bedient (1988, p.39), o problema 79 do papiro de Rhind é um segundo exemplo de problema envolvendo uma progressão geométrica conhecido na matemática egípcia. Lê-se: “a soma da progressão geométrica de cinco termos, sendo que o primeiro termo é 7 e a razão 7.” O problema é resolvido de duas maneiras no papiro de Rhind:

1ª Solução – Multiplicação		
7	X	2.801
\ 1		2.801
\ 2		5.602
\ 4		11.204
Total		**19.607**

2ª Solução - Adição	
house	7
Cats	49
mice	343
spelt	2.401
hekat	16.807
Total	**19.607**

A primeira coluna sugere que os egípcios tinham o equivalente a uma relação recursiva para a soma de uma progressão geométrica, em que o primeiro termo e a razão são iguais. Se r representa o primeiro termo, bem como a razão, então S_n representa a soma dos n termos de uma progressão geométrica, temos:

$$\begin{aligned} S_n &= r + r^2 + r^3 + \cdots + r^{n-1} + r^n \\ &= r(1 + r + r^2 + \cdots + r^{n-2} + r^{n-1}) \\ &= r\big(1 + (r + r^2 + \cdots + r^{n-1})\big) \\ &= r(1 + S_n - 1) \\ &= r(S_{n-1} + 1) \end{aligned}$$

Agora vamos atribuir os valores 1, 2, ..., 5 para os n termos:

$$\begin{array}{lllll} S_1 & = 7(S_0 + 1) & = 7\,(0 + 1) & & = \mathbf{7} \\ S_2 & = 7(S_1 + 1) & = 7\,(7 + 1) = 7\,.\,8 & & = \mathbf{56} \\ S_3 & = 7(S_2 + 1) & = 7\,(56 + 1) = 7.57 & & = \mathbf{399} \\ S_4 & = 7(S_3 + 1) & = 7\,(399 + 1) = 7.400 & & = \mathbf{2800} \\ S_5 & = 7(S_4 + 1) & = 7\,(2800 + 1) = 7.2801 & & = \mathbf{19607} \end{array}$$

Na primeira coluna percebe-se que o escriba usou um método semelhante e deu apenas o último passo do cálculo o de multiplicar 7 x 2801. A primeira coluna no papiro sugere que o escritor usou um método semelhante e deu apenas o último passo do cálculo. Este último passo é o cálculo de 7 x 2801. A segunda coluna apenas dá a simples soma de todos os termos. As palavras “casas”, “gatos”, e assim por diante, nunca foram totalmente explicadas. Uma teoria é a de que eles eram apenas nomes para os poderes de 7. A questão é que esse problema é uma espécia de quebra-cabeça, semelhante a várias histórias familiares e rimas. Talvez a ideia era que se houvesse sete casas, cada uma com sete gatos, cada um dos quais matou sete ratos, cada um dos quais teria comido sete espigas, cada uma delas teria produzido sete hekat de grãos, então se pergutava, quanto de grão foi salvo? Um problema semelhante é encontrado no *Liber Abaci* (1202).

É claro que por volta dos anos 1600 a.C. a notação hierática usada pelo escriba não é a mesma adotada no livro, o que os autores apresentam é uma mera interpretação dos problemas, lançando um olhar moderno aos problemas e resoluções apresentadas no papiro, como é o caso de expressões do tipo: equação do 1º grau, soma de progressão geométrica, fração unitária, etc.

Por vezes nos referimos ao trabalho de Ahmes como uma cópia, essa informação é dada pelo próprio escriba quando escreve a introdução do papiro, segundo Robins e Shute (1987) Ahmes dá o título para o trabalho (em tinta vermelha, como uma forma de destaque): “*Métodos corretos de raciocínio, para aprender o significado das coisas e saber tudo o que é, obscuridades... e todos os segredos*”, em seguida dá seu nome, a data e menciona que está copiando de escritos ainda mais antigos.

Muitos dos cálculos no *Papiro de Rhind* são evidentemente exercícios para jovens estudantes. Embora uma grande parte deles seja de natureza prática, em algumas ocasiões o escriba parece ter tido em mente enigmas ou recreações matemáticas.

No *Papiro de Rhind* também aparece uma progressão geométrica muito interessante formada pelas frações $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}$ do *hekat*[5]. Essas frações foram chamadas de frações Hórus-oculares, e usadas exclusivamente em problemas envolvendo grãos. Hórus era filho de Osíris, que foi traiçoeiramente assassinado por seu irmão Seth. Em vingança, Hórus mata seu tio, mas na luta perdeu um olho, as partes mais tarde foram restauradas pelo deus Thoth. Isis era mãe de Hórus e esposa e irmã de Osíris. (GILLINGS, 1982, p. 210)

[5] Unidade comum do volume usada para medir quantidade de grãos.

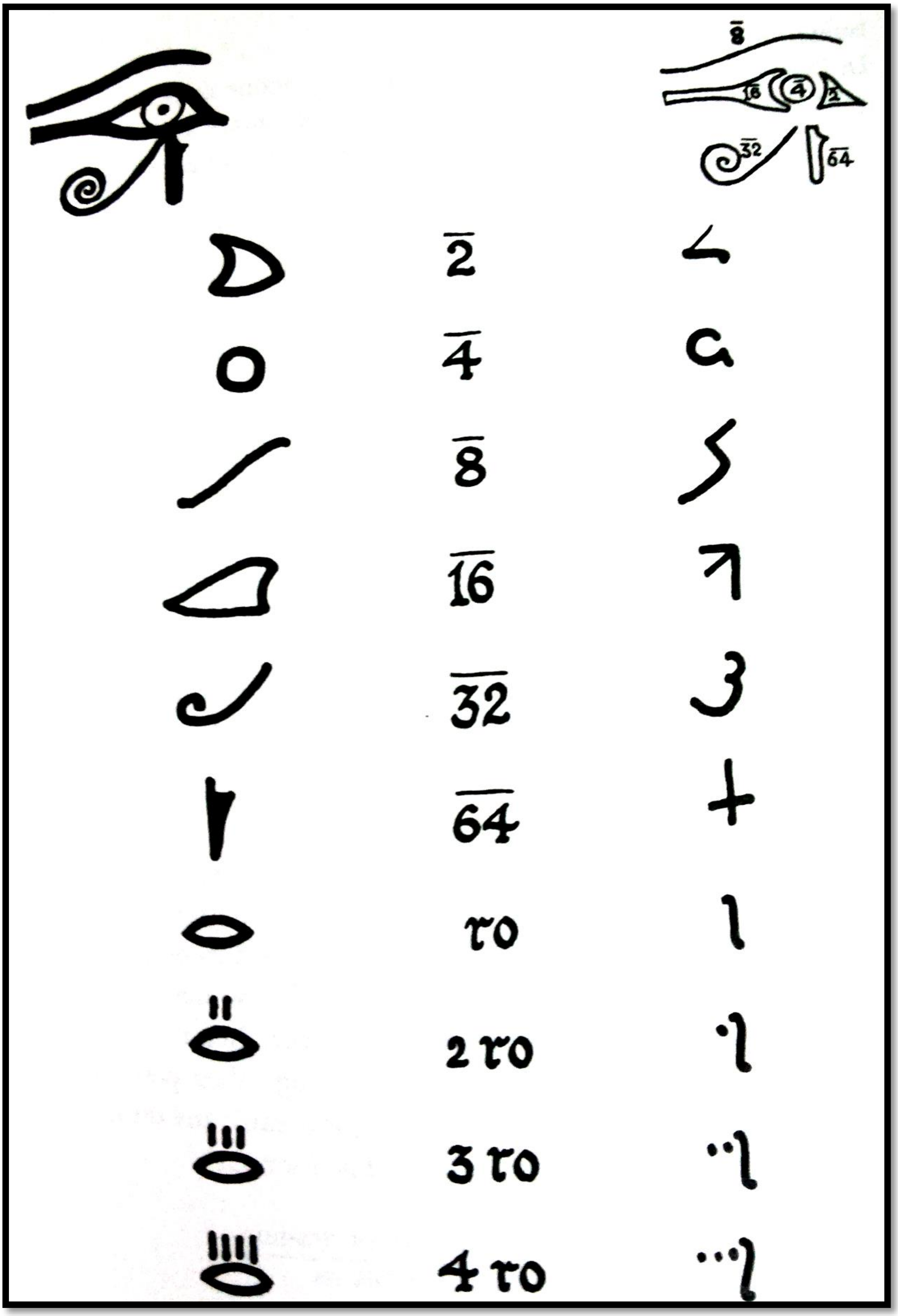


Figura 29: Os termos dessa sequência são conhecidos como frações dos olhos do deus Hórus. **Fonte**: GILLINGS, R. J. Mathematics in the Time of the Pharaohs; Dover Publication, 1982. p. 211.

3.2. Alguns problemas do *Aritmética* de Diofanto

Apresentaremos os problemas I-27 e I-28 do Livro I da *Aritmética* de Diofanto, são os primeiros que se reduzem a equações do 2º grau completas e na apresentação de sua resolução, Diofanto utiliza um artificio que permite transformá-las em equações do 2º grau incompletas, cuja resolução é imediata. O artifício consiste em designar uma certa quantidade desconhecida por *arithmo*. Em seguida, as várias incógnitas do problema são escritas em função dessa nova incógnita e, são feitas substituições entre as várias equações, de modo a reduzir tudo a uma só equação, com uma só incógnita (o *arthmo*) nunca com grau superior ao segundo.

Note-se que a escolha do *arithmo* não era arbitrária. Ao invés, era feita de forma que, no final, se obtivesse uma equação nas condições acima referidas. Após calcular o valor do aritmo era fácil determinar as várias soluções do problema.

> O procedimento de Diofanto é totalmente diferente, do ponto de vista conceitual, dos procedimentos pelos egípcios, e da geometria. Com efeito, aqui, uma incógnita (designada por aritmo, que quer dizer número) é posta em evidência nos cálculos. Esta incógnita não é como nos processos aritméticos, o ponto de chegada dos cálculos, ela não é mais, como acontece no caso da geometria, um ponto de referência estático no desenvolvimento do problema, mas sim uma quantidade que é operada como se fosse um número conhecido. (RADFORD, 1993)

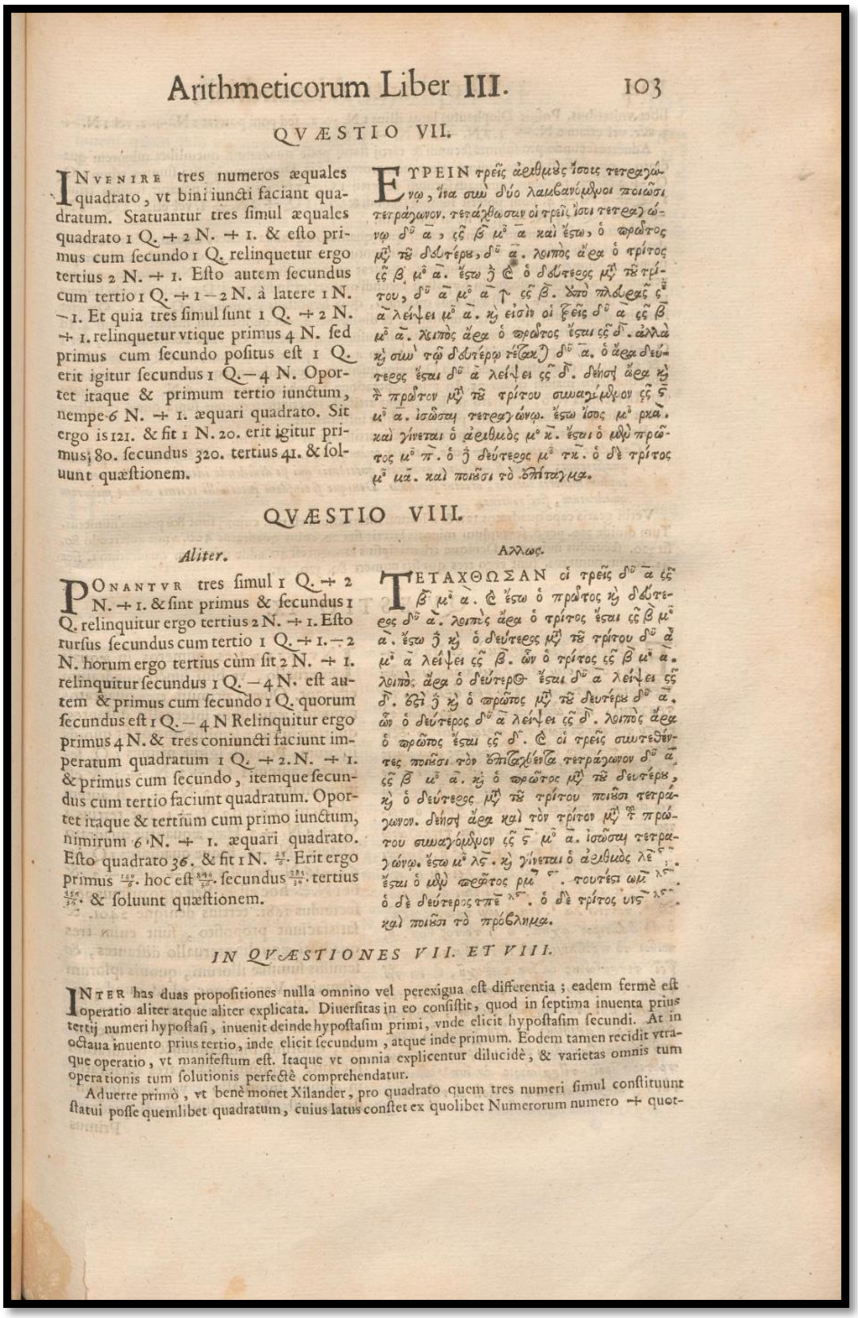
Nos parece que Diofanto sugere que se pode acompanhar o processo de descoberta do resultado. Isso é bem visível na resolução dos problemas que apresentaremos abaixo:

As sequências numéricas estão relacionadas aos processos de contagem e ao desenvolvimento dos sistemas de numeração. Por esse motivo, encontramos problemas envolvendo diversos tipos de padrões e sequências em importantes documentos de civilizações antigas. Dos problemas que encontram-se em Aritmética, pode-se dizer que todos eles são atraentes e alguns instigantes, e deve-se ter em mente que para Diofanto, número significa número racional positivo.

Vamos iniciar apresentando o problema 7 do livro III: “Encontre três números em Progressão Aritmética, sabendo-se que a soma de dois quaisquer deles é um quadrado”. Segundo Diofanto, a resposta é 120 ½, 840 ½, 1560 ½.

PROGRESSÃO ARTIMÉTICA

Problema 7 do Livro III – O *Aritmética* de Diofanto, segundo Bachet de Méziriac com comentários de Pierre de Fermat publicada em 1670 p. 103, "*Encontrar três números em Progressão Aritmética, sabendo-se que a soma de dois quaisquer deles é um quadrado*".



Arithmeticorum Liber III. 103

QVÆSTIO VII.

INVENIRE tres numeros æquales quadrato, vt bini iuncti faciant quadratum. Statuantur tres simul æquales quadrato 1 Q. + 2 N. + 1. & esto primus cum secundo 1 Q. relinquetur ergo tertius 2 N. + 1. Esto autem secundus cum tertio 1 Q. + 1 − 2 N. à latere 1 N. − 1. Et quia tres simul sunt 1 Q. + 2 N. + 1. relinquetur vtique primus 4 N. sed primus cum secundo positus est 1 Q. erit igitur secundus 1 Q. − 4 N. Oportet itaque & primum tertio iunctum, nempe 6 N. + 1. æquari quadrato. Sit ergo is 121. & fit 1 N. 20. erit igitur primus; 80. secundus 320. tertius 41. & soluunt quæstionem.

QVÆSTIO VIII.

Aliter.

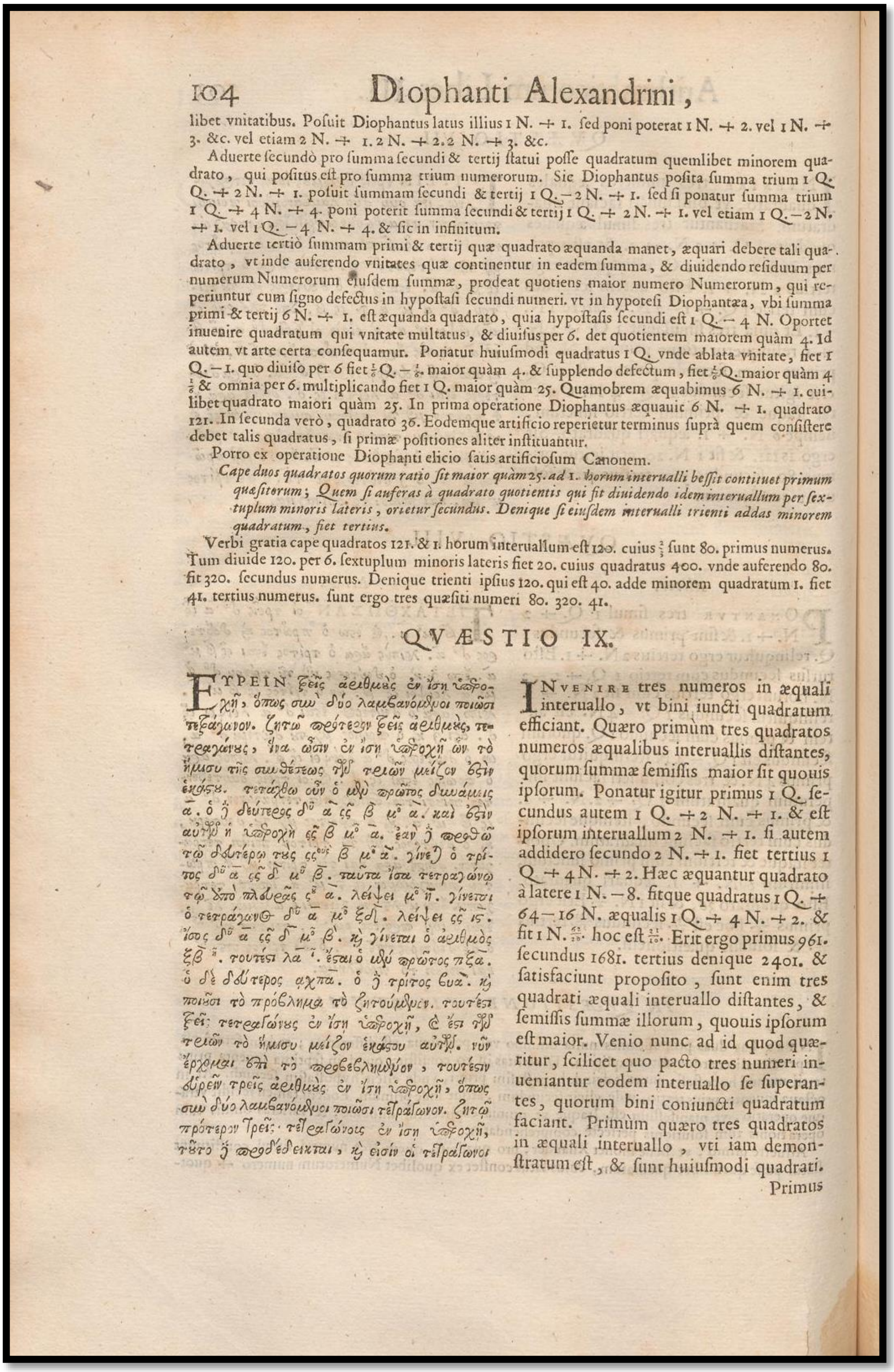
PONANTVR tres simul 1 Q. + 2 N. + 1. & sint primus & secundus 1 Q. relinquitur ergo tertius 2 N. + 1. Esto rursus secundus cum tertio 1 Q. + 1. − 2 N. horum ergo tertius cùm sit 2 N. + 1. relinquitur secundus 1 Q. − 4 N. est autem & primus cum secundo 1 Q. quorum secundus est 1 Q. − 4 N Relinquitur ergo primus 4 N. & tres coniuncti faciunt imperatum quadratum 1 Q. + 2. N. + 1. & primus cum secundo, itemque secundus cum tertio faciunt quadratum. Oportet itaque & tertium cum primo iunctum, nimirum 6 N. + 1. æquari quadrato. Esto quadrato 36. & fit 1 N. $\frac{35}{6}$. Erit ergo primus $\frac{140}{6}$. hoc est $\frac{840}{36}$. secundus $\frac{385}{36}$. tertius $\frac{456}{36}$. & soluunt quæstionem.

IN QVÆSTIONES VII. ET VIII.

INTER has duas propositiones nulla omnino vel perexigua est differentia; eadem fermè est operatio aliter atque aliter explicata. Diuersitas in eo consistit, quod in septima inuenta prius tertij numeri hypostasi, inuenit deinde hypostasim primi, vnde elicit hypostasim secundi. At in octaua inuento prius tertio, inde elicit secundum, atque inde primum. Eodem tamen recidit vtraque operatio, vt manifestum est. Itaque vt omnia explicentur dilucidè, & varietas omnis tum operationis tum solutionis perfectè comprehendatur.

Aduerte primò, vt benè monet Xilander, pro quadrato quem tres numeri simul constituunt statui posse quemlibet quadratum, cuius latus constet ex quolibet Numerorum numero + quot-

Figura 30. Problema 7 do Livro III. O *Aritmética* de Diofanto, segundo Bachet de Méziriac com comentários de Pierre de Fermat publicada em 1670 p. 103. **Fonte**: Gallica Bibliotèque Numérique. Disponível em http://www.e-rara.ch/zut/content/pageview/2790791 - Bibliothèque Nationale de France. Acesso em 03 de dezembro de 2013.



104 Diophanti Alexandrini,

libet vnitatibus. Posuit Diophantus latus illius 1 N. + 1. sed poni poterat 1 N. + 2. vel 1 N. + 3. &c. vel etiam 2 N. + 1. 2 N. + 2. 2 N. + 3. &c.

Aduerte secundò pro summa secundi & tertij statui posse quadratum quemlibet minorem quadrato, qui positus est pro summa trium numerorum. Sic Diophantus posita summa trium 1 Q. Q. + 2 N. + 1. posuit summam secundi & tertij 1 Q. − 2 N. + 1. sed si ponatur summa trium 1 Q. + 4 N. + 4. poni poterit summa secundi & tertij 1 Q. + 2 N. + 1. vel etiam 1 Q. − 2 N. + 1. vel 1 Q. − 4 N. + 4. & sic in infinitum.

Aduerte tertiò summam primi & tertij quæ quadrato æquanda manet, æquari debere tali quadrato, vt inde auferendo vnitates quæ continentur in eadem summa, & diuidendo residuum per numerum Numerorum eiusdem summæ, prodeat quotiens maior numero Numerorum, qui reperiuntur cum signo defectus in hypostasi secundi numeri. vt in hypotesi Diophantæa, vbi summa primi & tertij 6 N. + 1. est æquanda quadrato, quia hypostasis secundi est 1 Q. − 4 N. Oportet inuenire quadratum qui vnitate multatus, & diuisus per 6. det quotientem maiorem quàm 4. Id autem vt arte certa consequamur. Ponatur huiusmodi quadratus 1 Q. vnde ablata vnitate, fiet 1 Q. − 1. quo diuiso per 6 fiet $\frac{1}{6}$ Q. − $\frac{1}{6}$. maior quàm 4. & supplendo defectum, fiet $\frac{1}{6}$ Q. maior quàm 4 $\frac{1}{6}$ & omnia per 6. multiplicando fiet 1 Q. maior quàm 25. Quamobrem æquabimus 6 N. + 1. cuilibet quadrato maiori quàm 25. In prima operatione Diophantus æquauit 6 N. + 1. quadrato 121. In secunda verò, quadrato 36. Eodemque artificio reperietur terminus suprà quem consistere debet talis quadratus, si primæ positiones aliter instituantur.

Porro ex operatione Diophanti elicio satis artificiosum Canonem.

Cape duos quadratos quorum ratio sit maior quàm 25. ad 1. horum interualli bessit contituet primum quæsitorum; Quem si auferas à quadrato quotientis qui fit diuidendo idem interuallum per sextuplum minoris lateris, orietur secundus. Denique si eiusdem interualli trienti addas minorem quadratum, fiet tertius.

Verbi gratia cape quadratos 121. & 1. horum interuallum est 120. cuius $\frac{2}{3}$ sunt 80. primus numerus. Tum diuide 120. per 6. sextuplum minoris lateris fiet 20. cuius quadratus 400. vnde auferendo 80. fit 320. secundus numerus. Denique trienti ipsius 120. qui est 40. adde minorem quadratum 1. fiet 41. tertius numerus. sunt ergo tres quæsiti numeri 80. 320. 41.

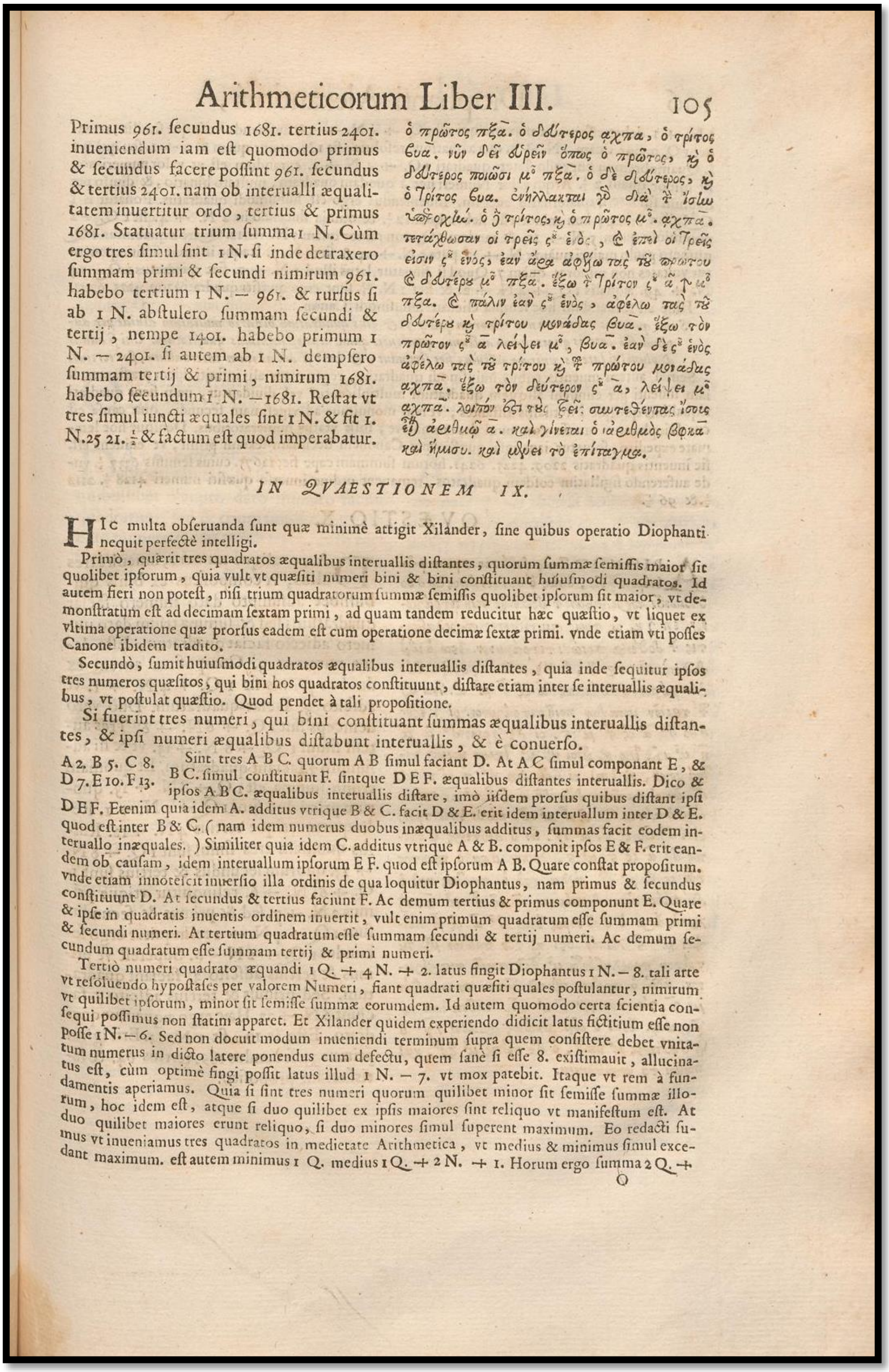
QVÆSTIO IX.

ΕΥΡΕΙΝ τρεῖς ἀριθμοὺς ἐν ἴσῃ ὑπεροχῇ, ὅπως σὺν δύο λαμβανόμενοι ποιῶσι τετράγωνον. ζητῶ πρότερον τρεῖς ἀριθμοὺς τετραγώνους, ἵνα ὦσιν ἐν ἴσῃ ὑπεροχῇ ὧν τὸ ἥμισυ τῆς συνθέσεως τῶν τριῶν μεῖζον ἐστὶν ἑκάστου. τετάχθω οὖν ὁ μὲν πρῶτος δυνάμεως α. ὁ δὲ δεύτερος Δυ α ςς β μο α. καὶ ἐστὶν αὐτῶν ἡ ὑπεροχὴ ςς β μο α. ἐὰν δὲ προσθῶ τῷ δευτέρῳ τοὺς ςςοὺς β μο α. γίνεται ὁ τρίτος Δυ α ςς δ μο β. ταῦτα ἴσα τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ πλευρᾶς ς α. λείψει μο η. γίνεται ὁ τετράγωνος Δυ α μο ξδ. λείψει ςς ις. ἴσος Δυ α ςς δ μο β. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς ξβ κ. τουτέστι λα ι. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος ϡξα. ὁ δὲ δεύτερος ͵αχπα. ὁ δὲ τρίτος ͵βυα. καὶ ποιοῦσι τὸ πρόβλημα τὸ ζητούμενον. τουτέστι τρεῖς τετραγώνους ἐν ἴσῃ ὑπεροχῇ, καὶ ἔστι τῶν τριῶν τὸ ἥμισυ μεῖζον ἑκάστου αὐτῶν. νῦν ἔρχομαι ἐπὶ τὸ προβεβλημένον, τουτέστιν εὑρεῖν τρεῖς ἀριθμοὺς ἐν ἴσῃ ὑπεροχῇ, ὅπως σὺν δύο λαμβανόμενοι ποιῶσι τετράγωνον. ζητῶ πρότερον τρεῖς τετραγώνους ἐν ἴσῃ ὑπεροχῇ, τοῦτο δὲ προδέδεικται, καὶ εἰσὶν οἱ τετράγωνοι

INVENIRE tres numeros in æquali interuallo, vt bini iuncti quadratum efficiant. Quæro primùm tres quadratos numeros æqualibus interuallis distantes, quorum summæ semissis maior sit quouis ipsorum. Ponatur igitur primus 1 Q. secundus autem 1 Q. + 2 N. + 1. & est ipsorum interuallum 2 N. + 1. si autem addidero secundo 2 N. + 1. fiet tertius 1 Q + 4 N. + 2. Hæc æquantur quadrato à latere 1 N. − 8. fitque quadratus 1 Q. + 64 − 16 N. æqualis 1 Q. + 4 N. + 2. & fit 1 N. $\frac{62}{20}$. hoc est $\frac{31}{10}$. Erit ergo primus 961. secundus 1681. tertius denique 2401. & satisfaciunt proposito, sunt enim tres quadrati æquali interuallo distantes, & semissis summæ illorum, quouis ipsorum est maior. Venio nunc ad id quod quæritur, scilicet quo pacto tres numeri inueniantur eodem interuallo se superantes, quorum bini coniuncti quadratum faciant. Primùm quæro tres quadratos in æquali interuallo, vti iam demonstratum est, & sunt huiusmodi quadrati.

Primus

Figura 31. Problema 7 do Livro III – O *Aritmética* de Diofanto, segundo Bachet de Méziriac com comentários de Pierre de Fermat publicada em 1670 p. 104. **Fonte**: Gallica Bibliotèque Numérique. Disponível em http://www.e-rara.ch/zut/content/pageview/2790792 - Bibliothèque Nationale de France. Acesso em 03 de dezembro de 2013.



Arithmeticorum Liber III. 105

Primus 961. ſecundus 1681. tertius 2401. inueniendum iam eſt quomodo primus & ſecundus facere poſſint 961. ſecundus & tertius 2401. nam ob interualli æqualitatem inuertitur ordo, tertius & primus 1681. Statuatur trium ſumma 1 N. Cùm ergo tres ſimul ſint 1 N. ſi inde detraxero ſummam primi & ſecundi nimirum 961. habebo tertium 1 N. – 961. & rurſus ſi ab 1 N. abſtulero ſummam ſecundi & tertij, nempe 1401. habebo primum 1 N. – 2401. ſi autem ab 1 N. dempſero ſummam tertij & primi, nimirum 1681. habebo ſecundum 1 N. – 1681. Reſtat vt tres ſimul iuncti æquales ſint 1 N. & fit 1. N. 25 21. $\frac{1}{2}$ & factum eſt quod imperabatur.

ὁ πρῶτος ϡξα. ὁ δεύτερος ͵αχπα, ὁ τρίτος ͵βυα. νῦν δεῖ εὑρεῖν ὅπως ὁ πρῶτος, καὶ ὁ δεύτερος ποιῶσι μο ϡξα. ὁ δὲ δεύτερος, καὶ ὁ τρίτος ͵βυα. ἐνήλλακται γὰρ διὰ τὴν ἴσην ὑπεροχήν. ὁ δὲ τρίτος, καὶ ὁ πρῶτος μο ͵αχπα. τετάχθωσαν οἱ τρεῖς ς ἑνός, καὶ ἐπεὶ οἱ τρεῖς εἰσιν ς ἑνός, ἐὰν ἄρα ἀφέλω τὰς τοῦ πρώτου καὶ δευτέρου μο ϡξα. ἕξω τὸν τρίτον ς α ⋔ μο ϡξα. καὶ πάλιν ἐὰν ς ἑνός, ἀφέλω τὰς τοῦ δευτέρου καὶ τρίτου μονάδας ͵βυα. ἕξω τὸν πρῶτον ς α λείψει μο, ͵βυα. ἐὰν δὲ ς ἑνὸς ἀφέλω τὰς τοῦ τρίτου καὶ τοῦ πρώτου μονάδας ͵αχπα. ἕξω τὸν δεύτερον ς α, λείψει μο ͵αχπα. λοιπόν ἐστι τοὺς τρεῖς συντεθέντας ἴσους εἶναι ἀριθμῷ α. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς ͵βφκα καὶ ἥμισυ. καὶ μένει τὸ ἐπίταγμα.

IN QVAESTIONEM IX.

HIc multa obſeruanda ſunt quæ minimè attigit Xilander, ſine quibus operatio Diophanti nequit perfectè intelligi.

Primò, quærit tres quadratos æqualibus interuallis diſtantes, quorum ſummæ ſemiſſis maior ſit quolibet ipſorum, quia vult vt quæſiti numeri bini & bini conſtituant huiuſmodi quadratos. Id autem fieri non poteſt, niſi trium quadratorum ſummæ ſemiſſis quolibet ipſorum ſit maior, vt demonſtratum eſt ad decimam ſextam primi, ad quam tandem reducitur hæc quæſtio, vt liquet ex vltima operatione quæ prorſus eadem eſt cum operatione decimæ ſextæ primi. vnde etiam vti poſſes Canone ibidem tradito.

Secundò, ſumit huiuſmodi quadratos æqualibus interuallis diſtantes, quia inde ſequitur ipſos tres numeros quæſitos, qui bini hos quadratos conſtituunt, diſtare etiam inter ſe interuallis æqualibus, vt poſtulat quæſtio. Quod pendet à tali propoſitione.

Si fuerint tres numeri, qui bini conſtituant ſummas æqualibus interuallis diſtantes, & ipſi numeri æqualibus diſtabunt interuallis, & è conuerſo.

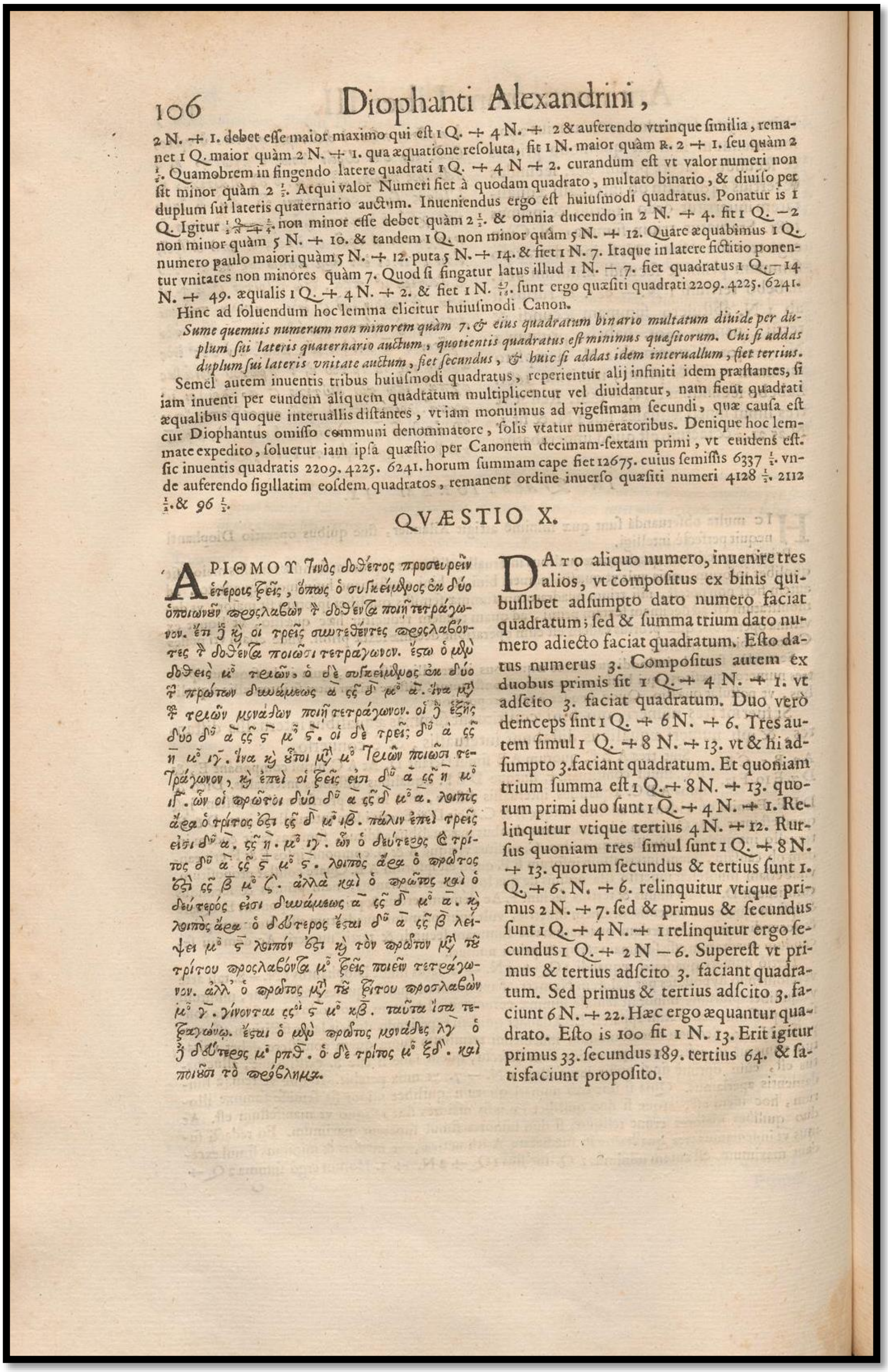
A 2. B 5. C 8.
D 7. E 10. F 13.

Sint tres A B C. quorum A B ſimul faciant D. At A C ſimul componant E, & B C. ſimul conſtituant F. ſintque D E F. æqualibus diſtantes interuallis. Dico & ipſos A B C. æqualibus interuallis diſtare, imò iiſdem prorſus quibus diſtant ipſi D E F. Etenim quia idem A. additus vtrique B & C. facit D & E. erit idem interuallum inter D & E. quod eſt inter B & C. (nam idem numerus duobus inæqualibus additus, ſummas facit eodem interuallo inæquales.) Similiter quia idem C. additus vtrique A & B. componit ipſos E & F. erit eandem ob cauſam, idem interuallum ipſorum E F. quod eſt ipſorum A B. Quare conſtat propoſitum. vnde etiam innoteſcit inuerſio illa ordinis de qua loquitur Diophantus, nam primus & ſecundus conſtituunt D. At ſecundus & tertius faciunt F. Ac demum tertius & primus componunt E. Quare & ipſe in quadratis inuentis ordinem inuertit, vult enim primum quadratum eſſe ſummam primi & ſecundi numeri. At tertium quadratum eſſe ſummam ſecundi & tertij numeri. Ac demum ſecundum quadratum eſſe ſummam tertij & primi numeri.

Tertiò numeri quadrato æquandi 1 Q. + 4 N. + 2. latus fingit Diophantus 1 N. – 8. tali arte vt reſoluendo hypoſtaſes per valorem Numeri, fiant quadrati quæſiti quales poſtulantur, nimirum vt quilibet ipſorum, minor ſit ſemiſſe ſummæ eorumdem. Id autem quomodo certa ſcientia conſequi poſſimus non ſtatim apparet. Et Xilander quidem experiendo didicit latus fictitium eſſe non poſſe 1 N. – 6. Sed non docuit modum inueniendi terminum ſupra quem conſiſtere debet vnitatum numerus in dicto latere ponendus cum defectu, quem ſanè ſi eſſe 8. exiſtimauit, allucinatus eſt, cùm optimè fingi poſſit latus illud 1 N. – 7. vt mox patebit. Itaque vt rem à fundamentis aperiamus. Quia ſi ſint tres numeri quorum quilibet minor ſit ſemiſſe ſummæ illorum, hoc idem eſt, atque ſi duo quilibet ex ipſis maiores ſint reliquo vt manifeſtum eſt. At duo quilibet maiores erunt reliquo, ſi duo minores ſimul ſuperent maximum. Eo redacti ſumus vt inueniamus tres quadratos in medietate Arithmetica, vt medius & minimus ſimul excedant maximum. eſt autem minimus 1 Q. medius 1 Q. + 2 N. + 1. Horum ergo ſumma 2 Q. +

O

Figura 32. Problema 7 do Livro III – O *Aritmética* de Diofanto, segundo Bachet de Méziriac com comentários de Pierre de Fermat publicada em 1670 p. 105. **Fonte**: Gallica Bibliotèque Numérique. Disponível em http://www.e-rara.ch/zut/content/pageview/2790793 - Bibliothèque Nationale de France. Acesso em 03 de dezembro de 2013.



106 Diophanti Alexandrini,

2 N. + 1. debet esse maior maximo qui est 1 Q. + 4 N. + 2 & auferendo vtrinque similia, remanet 1 Q. maior quàm 2 N. + 1. qua æquatione resoluta, fit 1 N. maior quàm R. 2 + 1. seu quàm 2 $\frac{1}{2}$. Quamobrem in fingendo latere quadrati 1 Q. + 4 N + 2. curandum est vt valor numeri non sit minor quàm 2 $\frac{1}{2}$. Atqui valor Numeri fiet à quodam quadrato, multato binario, & diuiso per duplum sui lateris quaternario auctum. Inueniendus ergo est huiusmodi quadratus. Ponatur is 1 Q. Igitur $\frac{1\,Q. - 2}{2\,N. + 4}$ non minor esse debet quàm 2 $\frac{1}{2}$. & omnia ducendo in 2 N. + 4. fit 1 Q. − 2 non minor quàm 5 N. + 10. & tandem 1 Q. non minor quàm 5 N. + 12. Quare æquabimus 1 Q. numero paulo maiori quàm 5 N. + 12. puta 5 N. + 14. & fiet 1 N. 7. Itaque in latere fictitio ponentur vnitates non minores quàm 7. Quod si fingatur latus illud 1 N. − 7. fiet quadratus 1 Q. − 14 N. + 49. æqualis 1 Q. + 4 N. + 2. & fiet 1 N. $\frac{47}{18}$. sunt ergo quæsiti quadrati 2209. 4225. 6241.

Hinc ad soluendum hoc lemma elicitur huiusmodi Canon.

Sume quemuis numerum non minorem quàm 7. & eius quadratum binario multatum diuide per duplum sui lateris quaternario auctum, quotientis quadratus est minimus quæsitorum. Cui si addas duplum sui lateris vnitate auctum, fiet secundus, & huic si addas idem interuallum, fiet tertius.

Semel autem inuentis tribus huiusmodi quadratus, reperientur alij infiniti idem præstantes, si iam inuenti per eundem aliquem quadratum multiplicentur vel diuidantur, nam fient quadrati æqualibus quoque interuallis distantes, vt iam monuimus ad vigesimam secundi, quæ causa est cur Diophantus omisso communi denominatore, solis vtatur numeratoribus. Denique hoc lemmate expedito, soluetur iam ipsa quæstio per Canonem decimam-sextam primi, vt euidens est. sic inuentis quadratis 2209. 4225. 6241. horum summam cape fiet 12675. cuius semissis 6337 $\frac{1}{2}$. vnde auferendo sigillatim eosdem quadratos, remanent ordine inuerso quæsiti numeri 4128 $\frac{1}{2}$. 2112 $\frac{1}{2}$. & 96 $\frac{1}{2}$.

QVÆSTIO X.

ΑΡΙΘΜΟΥ τινὸς δοθέντος προσευρεῖν ἑτέρους τρεῖς, ὅπως ὁ συγκείμενος ἐκ δύο ὁποιωνοῦν προσλαβὼν τὸν δοθέντα ποιῇ τετράγωνον. ἔτι δὲ καὶ οἱ τρεῖς συντεθέντες προσλαβόντες τὸν δοθέντα ποιῶσι τετράγωνον. ἔστω ὁ μὲν δοθεὶς μο τριῶν. ὁ δὲ συγκείμενος ἐκ δύο τῶν πρώτων δυνάμεως α ςς δ μο α. ἵνα μετὰ τῶν τριῶν μονάδων ποιῇ τετράγωνον. οἱ δὲ ἑξῆς δύο δυ α ςς ϛ μο ϛ. οἱ δὲ τρεῖς δυ α ςς η μο ιγ. ἵνα καὶ οὗτοι μετὰ μο τριῶν ποιῶσι τετράγωνον, καὶ ἐπεὶ οἱ τρεῖς εἰσι δυ α ςς η μο ιγ. ὧν οἱ πρῶτοι δύο δυ α ςς δ μο α. λοιπὸς ἄρα ὁ τρίτος ἐστὶ ςς δ μο ιβ. πάλιν ἐπεὶ τρεῖς εἰσι δυ α. ςς η. μο ιγ. ὧν ὁ δεύτερος καὶ τρίτος δυ α ςς ϛ μο ϛ. λοιπὸς ἄρα ὁ πρῶτος ἐστὶ ςς β μο ζ. ἀλλὰ καὶ ὁ πρῶτος καὶ ὁ δεύτερός εἰσι δυνάμεως α ςς δ μο α. καὶ λοιπὸς ἄρα ὁ δεύτερος ἔσται δυ α ςς β λείψει μο ϛ λοιπόν ἐστι καὶ τὸν πρῶτον μετὰ τοῦ τρίτου προσλαβόντα μο τρεῖς ποιεῖν τετράγωνον. ἀλλ᾽ ὁ πρῶτος μετὰ τοῦ τρίτου προσλαβὼν μο γ. γίνονται ςςοι ϛ μο κβ. ταῦτα ἴσα τετραγώνῳ. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος μονάδες λγ ὁ δὲ δεύτερος μο ρπθ. ὁ δὲ τρίτος μο ξδ. καὶ ποιοῦσι τὸ πρόβλημα.

DATO aliquo numero, inuenire tres alios, vt compositus ex binis quibuslibet adsumpto dato numero faciat quadratum; sed & summa trium dato numero adiecto faciat quadratum. Esto datus numerus 3. Compositus autem ex duobus primis sit 1 Q. + 4 N. + 1. vt adscito 3. faciat quadratum. Duo verò deinceps sint 1 Q. + 6 N. + 6. Tres autem simul 1 Q. + 8 N. + 13. vt & hi adsumpto 3. faciant quadratum. Et quoniam trium summa est 1 Q. + 8 N. + 13. quorum primi duo sunt 1 Q. + 4 N. + 1. Relinquitur vtique tertius 4 N. + 12. Rursus quoniam tres simul sunt 1 Q. + 8 N. + 13. quorum secundus & tertius sunt 1. Q. + 6. N. + 6. relinquitur vtique primus 2 N. + 7. sed & primus & secundus sunt 1 Q. + 4 N. + 1 relinquitur ergo secundus 1 Q. + 2 N − 6. Superest vt primus & tertius adscito 3. faciant quadratum. Sed primus & tertius adscito 3. faciunt 6 N. + 22. Hæc ergo æquantur quadrato. Esto is 100 fit 1 N. 13. Erit igitur primus 33. secundus 189. tertius 64. & satisfaciunt proposito.

Figura 33. Problema 7 do Livro III – O *Aritmética* de Diofanto, segundo Bachet de Méziriac com comentários de Pierre de Fermat publicada em 1670 p. 106. **Fonte**: Gallica Bibliotèque Numérique. Disponível em http://www.e-rara.ch/zut/content/pageview/2790794 - Bibliothèque Nationale de France. Acesso em 03 de dezembro de 2013.

Problema 7 do Livro III – O Aritmética de Diofando, segundo Healt: **Diophantus of Alexandria: A Study in the History of Greek Algebra**. “*Encontrar três números em Progressão Aritmética, sabendo-se que a soma de dois quaisquer deles é um quadrado*”.

6. To find three numbers such that their sum is a square and the sum of any pair is a square.

Let the sum of all three be $x^2 + 2x + 1$, sum of first and second x^2, and therefore the third $2x + 1$; let sum of second and third be $(x - 1)^2$.

Therefore the first $= 4x$, and the second $= x^2 - 4x$.

But first + third = square,

that is, $6x + 1$ = square = 121, say.

Therefore $x = 20$, and

the numbers are 80, 320, 41.

[An alternative solution, obviously interpolated, is practically identical with the above except that it takes the square 36 as the value of $6x + 1$, so that $x = \frac{35}{6}$, and the numbers are $\frac{140}{6} = \frac{840}{36}, \frac{385}{36}, \frac{456}{36}$.]

7. To find three numbers in A.P. such that the sum of any pair gives a square.

First find three square numbers in A.P. and such that half their sum is greater than any one of them. Let x^2, $(x + 1)^2$ be the first and second of these; therefore the third is $x^2 + 4x + 2 = (x - 8)^2$, say.

Therefore $x = \frac{62}{20}$ or $\frac{31}{10}$;

and we may take as the numbers 961, 1681, 2401.

We have now to find three numbers such that the sums of pairs are the numbers just found.

The sum of the three $= \frac{5043}{2} = 2521\frac{1}{2}$, and

the three numbers are $120\frac{1}{2}$, $840\frac{1}{2}$, $1560\frac{1}{2}$.

8. Given one number, to find three others such that the sum of any pair of them added to the given number gives a square, and also the sum of the three added to the given number gives a square.

Given number 3.

Suppose first required number + second $= x^2 + 4x + 1$,

second + third $= x^2 + 6x + 6$,

sum of all three $= x^2 + 8x + 13$.

Therefore third $= 4x + 12$, second $= x^2 + 2x - 6$, first $= 2x + 7$.

Also first + third + 3 = a square,

that is, $6x + 22$ = square = 100, suppose.

Hence $x = 13$, and

the numbers are 33, 189, 64.

Figura 34. Problema 7 do Livro III – O Aritmética de Diofando, **Fonte**: HEATH, T. L. Diophantus of Alexandria: A Study in the History of Greek Algebra. Forgotten, 2012. Publicação original 1910. p.158.

Problema 7 do Livro III – Na versão castelhana do *Aritmética* de Diofanto, com introdução, notas e apêndices de Manuel Benito Muñoz, Emílio Fernandez Moral e Mercedes Sánchez Benito (2007, p. 151), o problema de nº. 7 do Livro III "*Encontrar três números em Progressão Aritmética, sabendo-se que a soma de dois quaisquer deles é um quadrado*". Ou seja, encontrar $x > y > z$, de tal forma que $x - y = y - z, x + y = \blacksquare, x + z = \blacksquare, y + z = \blacksquare$.

Solução original: Vamos encontrar primeiro três quadrados em progressão aritmética, tais que a sua semissoma seja maior que cada um deles. Seja o primeiro quadrado igual β^2 e o segundo $(\beta + 1)^2$. Então o terceiro será: $(\beta + 1)^2 + 2\beta + 1 = \beta^2 + 4\beta + 2 \equiv (\beta - 8)^2$, de onde resulta que $\beta = \frac{31}{10}$, logo os quadrados são 961, 1681 e 2401.

Retornando para o início o problema vamos encontrar $x > y > z$, tais que:

$$x + y = 2401, \qquad x + z = 1681, \qquad y + z = 961$$

Admitimos então, $x + y + z = \alpha$, logo $z = \alpha - 2401, y = \alpha - 1681, x = \alpha - 961$. Então, $\alpha = 3\alpha - 5083$, temos, $\alpha = 2521\frac{1}{2}$, logo os números são $z = 120\frac{1}{2}, y = 840\frac{1}{2}, x = 1560\frac{1}{2}$.

Nota. Bachet detalha a resolução de Diofanto, em particular acerca da identificação de $\beta^2 + 4\beta + 2 \equiv (\beta - m)^2$ para os quadrados auxiliares, onde Diofanto toma m = 8, com o seguinte comentário: "Como $\beta^2 > 2\beta + 1$, então $\beta > 1 + \sqrt{2}$, isso basta para que $\beta \geq \frac{5}{2}$. Mas o resultado da identificação $\beta = \frac{m^2-2}{2n+4}$, assim, $m^2 \geq 5m + 12$, logo $m \geq 7$. Se $m = 7$, então $\beta = \frac{47}{18}$, logo os quadrados auxiliares são: 2209, 4225 e 6241. A semissoma dos quadrados é $6337\frac{1}{2}$, e a solução do problema é $\boldsymbol{x = 4128\frac{1}{2}}$, $\boldsymbol{y = 2112\frac{1}{2}}$, $\boldsymbol{z = 96\frac{1}{2}}$**.**"

Além disso, observa Bachet as condições de homogeneidade sobre os quadrados auxiliares, "que permite uma vez encontrado, multiplicar ou dividir qualquer quadrado. Por isso, Diofanto omitiu os denominadores e só usou os numeradores".

PROGRESSÃO GEOMÉTRICA

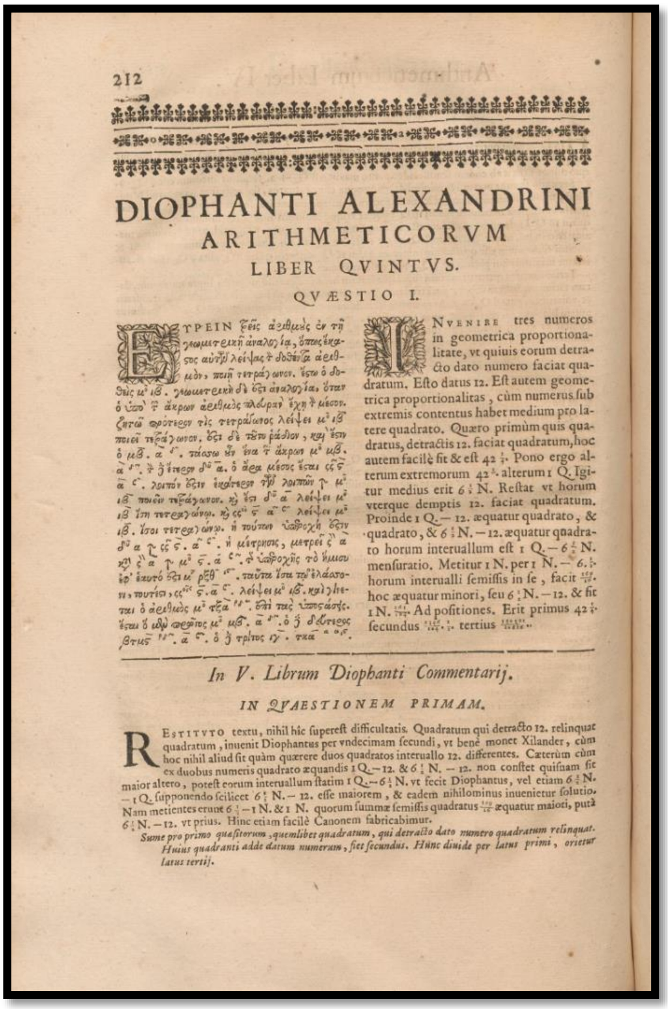
Problema 1-2 do Livro V – O *Aritmética* de Diofanto, segundo Bachet de Méziriac com comentários de Pierre de Fermat publicada em 1670 p. 212.

Enunciado 1: *Encontrar três números em progressão geométrica, subtraindo de cada um deles um número quadrado. Determinar x, y e z, tal que:*

$$xz = y^2, \qquad x - a = \blacksquare, \qquad y - a = \blacksquare, \qquad z - a = \blacksquare$$

Enunciado 2: *Encontrar três números em progressão geométrica, adicionando a cada um deles um determinado número quadrado. Determinar x, y e z, tal que:*

$$xz = y^2, \qquad x + a = \blacksquare, \qquad y + a = \blacksquare, \qquad z + a = \blacksquare$$


212

DIOPHANTI ALEXANDRINI
ARITHMETICORVM
LIBER QVINTVS.

QVÆSTIO I.

[illegible]

INVENIRE tres numeros in geometrica proportionalitate, vt quiuis eorum detracto dato numero faciat quadratum. Esto datus 12. Est autem geometrica proportionalitas, cùm numerus sub extremis contentus habet medium pro latere quadrato. Quæro primùm quis quadratus, detractis 12. faciat quadratum, hoc autem facilè fit & est 42 ¼. Pono ergo alterum extremorum 42 ¼. alterum 1 Q. Igitur medius erit 6 ½ N. Restat vt horum vterque demptis 12. faciat quadratum. Proinde 1 Q. – 12. æquatur quadrato, & quadrato, & 6 ½ N. – 12. æquatur quadrato horum interuallum est 1 Q. – 6 ½ N. mensuratio. Metitur 1 N. per 1 N. – 6 ½. horum interualli semissis in se, facit 169/16. hoc æquatur minori, seu 6 ½ N. – 12. & fit 1 N. [illegible] Ad positiones. Erit primus 42 ¼. secundus [illegible] tertius [illegible]

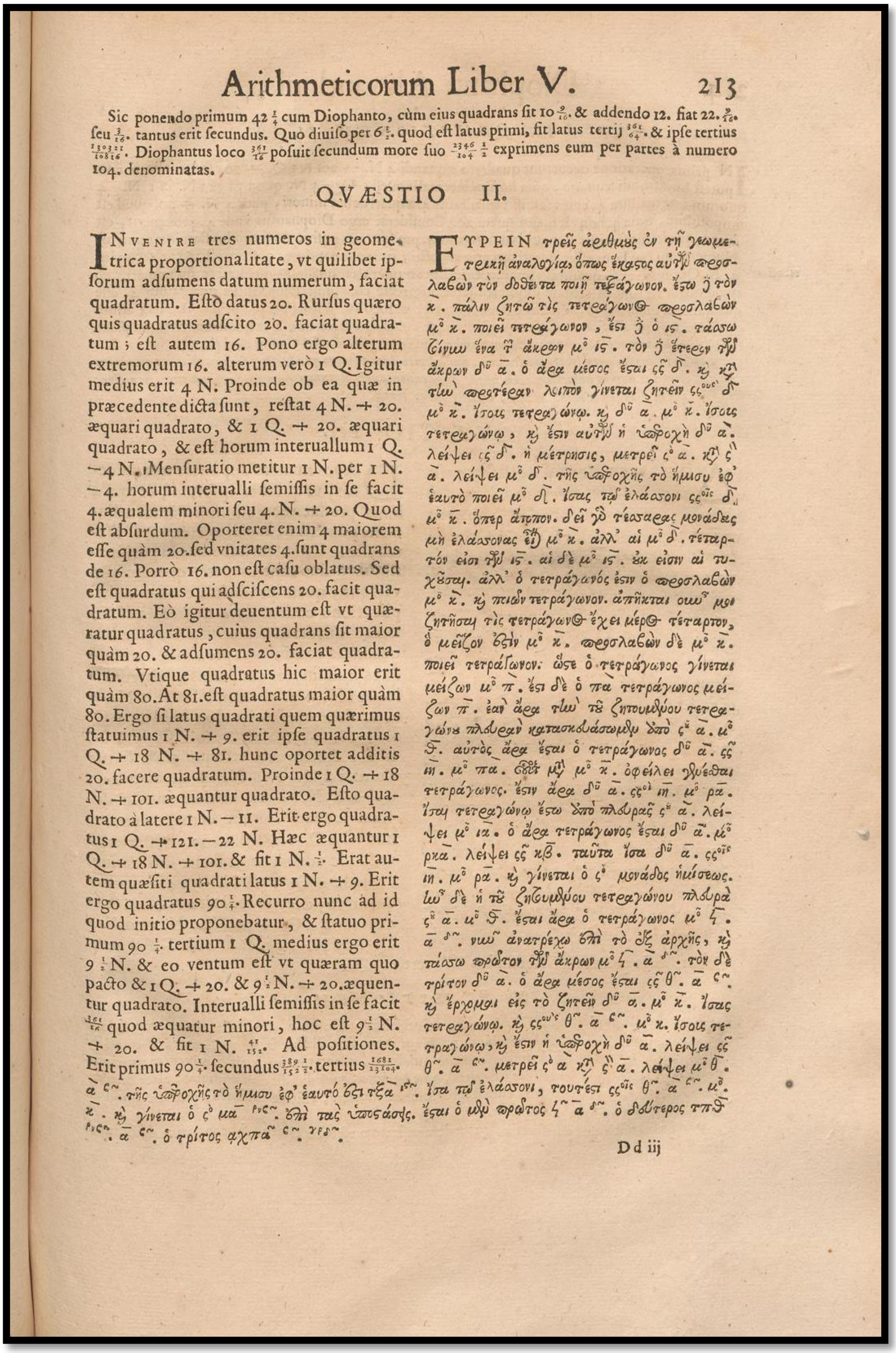
In V. Librum Diophanti Commentarij.

IN QVAESTIONEM PRIMAM.

RESTITVTO textu, nihil hic superest difficultatis. Quadratum qui detracto 12. relinquat quadratum, inuenit Diophantus per vndecimam secundi, vt benè monet Xilander, cùm hoc nihil aliud sit quàm quærere duos quadratos interuallo 12. differentes. Cæterùm cùm ex duobus numeris quadrato æquandis 1 Q. – 12. & 6 ½ N. – 12. non constet quisnam sit maior altero, potest eorum interuallum statim 1 Q. – 6 ½ N. vt fecit Diophantus, vel etiam 6 ½ N. – 1 Q. supponendo scilicet 6 ½ N. – 12. esse maiorem, & eadem nihilominus inuenietur solutio. Nam metientes erunt 6 ½ – 1 N. & 1 N. quorum summæ semissis quadratus 169/16 æquatur maiori, putà 6 ½ N. – 12. vt prius. Hinc etiam facilè Canonem fabricabimur.

Sume pro primo quæsitorum, quemlibet quadratum, qui detracto dato numero quadratum relinquat. Huius quadranti adde datum numerum, fiet secundus. Hunc diuide per latus primi, orietur latus tertij.

Figura 35. Problema 1-2 do Livro V – O *Aritmética* de Diofanto, segundo Bachet de Méziriac com comentários de Pierre de Fermat publicada em 1670 p. 212. **Fonte**: Gallica Bibliotèque Numérique. Disponível em http://www.e-rara.ch/zut/content/pageview/2790900 - Bibliothèque Nationale de France. Acesso em 10 de dezembro de 2013.



Arithmeticorum Liber V. 213

Sic ponendo primum 42 $\frac{1}{4}$ cum Diophanto, cùm eius quadrans sit 10 $\frac{9}{16}$. & addendo 12. fiat 22. $\frac{9}{16}$. seu $\frac{3}{16}$. tantus erit secundus. Quo diuiso per 6 $\frac{1}{2}$. quod est latus primi, fit latus tertij $\frac{361}{64}$. & ipse tertius $\frac{130321}{10816}$. Diophantus loco $\frac{361}{16}$ posuit secundum more suo $\frac{2346}{104}$ $\frac{1}{2}$ exprimens eum per partes à numero 104. denominatas.

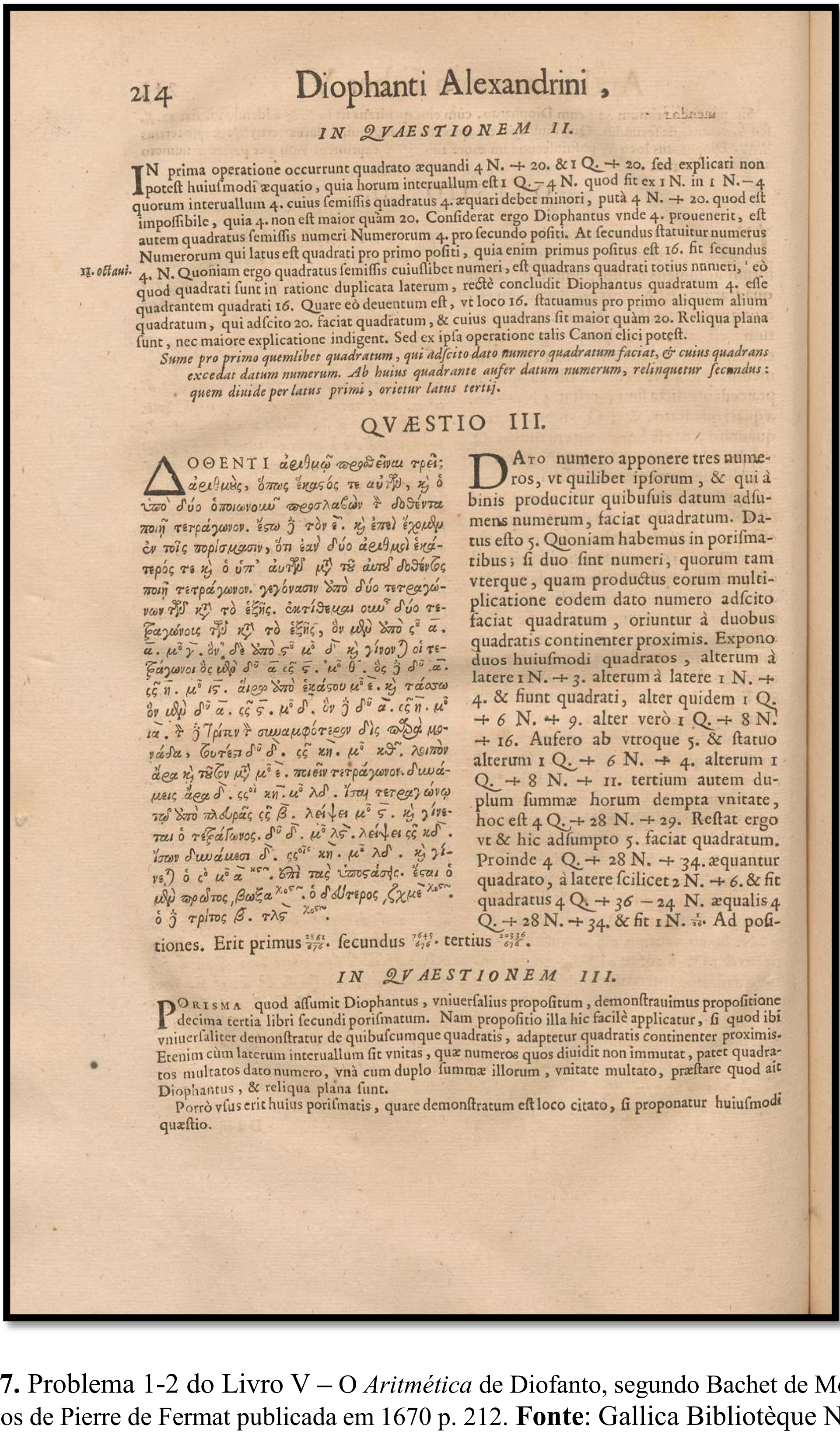
QVÆSTIO II.

INVENIRE tres numeros in geometrica proportionalitate, vt quilibet ipsorum adsumens datum numerum, faciat quadratum. Esto datus 20. Rursus quæro quis quadratus adscito 20. faciat quadratum; est autem 16. Pono ergo alterum extremorum 16. alterum verò 1 Q. Igitur medius erit 4 N. Proinde ob ea quæ in præcedente dicta sunt, restat 4 N. + 20. æquari quadrato, & 1 Q. + 20. æquari quadrato, & est horum interuallum 1 Q. − 4 N. Mensuratio metitur 1 N. per 1 N. − 4. horum interualli semissis in se facit 4. æqualem minori seu 4. N. + 20. Quod est absurdum. Oporteret enim 4 maiorem esse quàm 20. sed vnitates 4. sunt quadrans de 16. Porrò 16. non est casu oblatus. Sed est quadratus qui adsciscens 20. facit quadratum. Eò igitur deuentum est vt quæratur quadratus, cuius quadrans sit maior quàm 20. & adsumens 20. faciat quadratum. Vtique quadratus hic maior erit quàm 80. At 81. est quadratus maior quàm 80. Ergo si latus quadrati quem quærimus statuimus 1 N. + 9. erit ipse quadratus 1 Q. + 18 N. + 81. hunc oportet additis 20. facere quadratum. Proinde 1 Q. + 18 N. + 101. æquantur quadrato. Esto quadrato à latere 1 N. − 11. Erit ergo quadratus 1 Q. + 121. − 22 N. Hæc æquantur 1 Q. + 18 N. + 101. & fit 1 N. $\frac{1}{2}$. Erat autem quæsiti quadrati latus 1 N. + 9. Erit ergo quadratus 90 $\frac{1}{4}$. Recurro nunc ad id quod initio proponebatur, & statuo primum 90 $\frac{1}{4}$. tertium 1 Q. medius ergo erit 9 $\frac{1}{2}$ N. & eo ventum est vt quæram quo pacto & 1 Q. + 20. & 9 $\frac{1}{2}$ N. + 20. æquentur quadrato. Interualli semissis in se facit $\frac{361}{16}$ quod æquatur minori, hoc est 9 $\frac{1}{2}$ N. + 20. & fit 1 N. $\frac{41}{152}$. Ad positiones. Erit primus 90 $\frac{1}{4}$. secundus $\frac{389}{152}$ $\frac{1}{2}$. tertius $\frac{1681}{23104}$.

ΕΥΡΕΙΝ τρεῖς ἀριθμοὺς ἐν τῇ γεωμετρικῇ ἀναλογίᾳ, ὅπως ἕκαστος αὐτῶν προσλαβὼν τὸν δοθέντα ποιῇ τετράγωνον. ἔστω δὴ τὸν ...

Dd iij

Figura 36. Problema 1-2 do Livro V – O *Aritmética* de Diofanto, segundo Bachet de Méziriac com comentários de Pierre de Fermat publicada em 1670 p. 212. **Fonte**: Gallica Bibliotèque Numérique. Disponível em http://www.e-rara.ch/zut/content/pageview/2790901 - Bibliothèque Nationale de France. Acesso em 10 de dezembro de 2013.



214 Diophanti Alexandrini,

IN QVAESTIONEM II.

IN prima operatione occurrunt quadrato æquandi 4 N. + 20. & 1 Q. + 20. ſed explicari non poteſt huiuſmodi æquatio, quia horum interuallum eſt 1 Q. − 4 N. quod fit ex 1 N. in 1 N. − 4 quorum interuallum 4. cuius ſemiſſis quadratus 4. æquari debet minori, putà 4 N. + 20. quod eſt impoſſibile, quia 4. non eſt maior quàm 20. Conſiderat ergo Diophantus vnde 4. prouenerit, eſt autem quadratus ſemiſſis numeri Numerorum 4. pro ſecundo poſiti. At ſecundus ſtatuitur numerus Numerorum qui latus eſt quadrati pro primo poſiti, quia enim primus poſitus eſt 16. fit ſecundus
11. octaui. 4. N. Quoniam ergo quadratus ſemiſſis cuiuſlibet numeri, eſt quadrans quadrati totius numeri, eò quod quadrati ſunt in ratione duplicata laterum, rectè concludit Diophantus quadratum 4. eſſe quadrantem quadrati 16. Quare eò deuentum eſt, vt loco 16. ſtatuamus pro primo aliquem alium quadratum, qui adſcito 20. faciat quadratum, & cuius quadrans ſit maior quàm 20. Reliqua plana ſunt, nec maiore explicatione indigent. Sed ex ipſa operatione talis Canon elici poteſt.

Sume pro primo quemlibet quadratum, qui adſcito dato numero quadratum faciat, & cuius quadrans excedat datum numerum. Ab huius quadrante aufer datum numerum, relinquetur ſecundus: quem diuide per latus primi, orietur latus tertij.

QVÆSTIO III.

ΔΟΘΕΝΤΙ ἀριθμῷ προσευρεῖν τρεῖς ἀριθμούς, ὅπως ἕκαστός τε αὐτῶν, καὶ ὁ ὑπὸ δύο ὁποιωνοῦν προσλαβὼν τὸν δοθέντα ποιῇ τετράγωνον. ἔστω δὴ τὸν ε. καὶ ἐπεὶ ἔχομεν ἐν τοῖς πορίσμασιν, ὅτι ἐὰν δύο ἀριθμοὶ ἑκάτερός τε καὶ ὁ ὑπ' αὐτῶν μετὰ τοῦ αὐτοῦ δοθέντος ποιῇ τετράγωνον, γεγόνασιν ἀπὸ δύο τετραγώνων τῶν κατὰ τὸ ἑξῆς. ἐκτίθεμαι οὖν δύο τετραγώνους τῶν κατὰ τὸ ἑξῆς, ὃν μὲν ἀπὸ ςοῦ α. μο γ. ὃν δὲ ἀπὸ ςοῦ α μο δ. καὶ γίνονται οἱ τετράγωνοι ὃς μὲν δυ α ςς ς. μο θ. ὃς δὲ δυ α. ςς η. μο ις. αἴρω ἀπὸ ἑκάστου μο ε. καὶ τάσσω ὃν μὲν δυ α. ςς ς. μο δ. ὃν δὲ δυ α. ςς η. μο ια. τὸν δὲ τρίτον τὸν συναμφοτέρων δὶς παρὰ μονάδα, τουτέστι δυ δ. ςς κη. μο κθ. λοιπὸν ἄρα καὶ τοῦτον μετὰ μο ε. ποιεῖν τετράγωνον. δυνάμεις ἄρα δ. ςςοὶ κη. μο λδ. ἴσαι τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ πλευρᾶς ςς β. λείψει μο ς. καὶ γίνεται ὁ τετράγωνος δυ δ. μο λς. λείψει ςς κδ. ἴσων δυνάμεσι δ. ςςοῖς κη. μο λδ. καὶ γίνεται ὁ ςος μο α κςων. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος ,βωξα χοςων. ὁ δὲ δεύτερος ,ζχμε χοςων. ὁ δὲ τρίτος β. τλς χοςων.

DATO numero apponere tres numeros, vt quilibet ipſorum, & qui à binis producitur quibuſuis datum adſumens numerum, faciat quadratum. Datus eſto 5. Quoniam habemus in poriſmatibus; ſi duo ſint numeri, quorum tam vterque, quam productus eorum multiplicatione eodem dato numero adſcito faciat quadratum, oriuntur à duobus quadratis continenter proximis. Expono duos huiuſmodi quadratos, alterum à latere 1 N. + 3. alterum à latere 1 N. + 4. & fiunt quadrati, alter quidem 1 Q. + 6 N. + 9. alter verò 1 Q. + 8 N. + 16. Aufero ab vtroque 5. & ſtatuo alterum 1 Q. + 6 N. + 4. alterum 1 Q. + 8 N. + 11. tertium autem duplum ſummæ horum dempta vnitate, hoc eſt 4 Q. + 28 N. + 29. Reſtat ergo vt & hic adſumpto 5. faciat quadratum. Proinde 4 Q. + 28 N. + 34. æquantur quadrato, à latere ſcilicet 2 N. + 6. & fit quadratus 4 Q. + 36 − 24 N. æqualis 4 Q. + 28 N. + 34. & fit 1 N. $\frac{1}{26}$. Ad poſitiones. Erit primus $\frac{2861}{676}$. ſecundus $\frac{7645}{676}$. tertius $\frac{20336}{676}$.

IN QVAESTIONEM III.

PORISMA quod aſſumit Diophantus, vniuerſalius propoſitum, demonſtrauimus propoſitione decima tertia libri ſecundi poriſmatum. Nam propoſitio illa hic facilè applicatur, ſi quod ibi vniuerſaliter demonſtratur de quibuſcumque quadratis, adaptetur quadratis continenter proximis. Etenim cùm laterum interuallum ſit vnitas, quæ numeros quos diuidit non immutat, patet quadratos multatos dato numero, vnà cum duplo ſummæ illorum, vnitate multato, præſtare quod ait Diophantus, & reliqua plana ſunt.

Porrò vſus erit huius poriſmatis, quare demonſtratum eſt loco citato, ſi proponatur huiuſmodi quæſtio.

Figura 37. Problema 1-2 do Livro V – O *Aritmética* de Diofanto, segundo Bachet de Méziriac com comentários de Pierre de Fermat publicada em 1670 p. 212. **Fonte**: Gallica Bibliotèque Numérique. Disponível em http://www.e-rara.ch/zut/content/pageview/2790902 - Bibliothèque Nationale de France. Acesso em 10 de dezembro de 2013.

Problema 1-2 do Livro V – O Aritmética de Diofando, segundo Healt: **Diophantus of Alexandria: A Study in the History of Greek Algebra**. "*Encontrar três números em progressão geométrica, adicionando a cada um deles um determinado número quadrado*".

BOOK V

1. To find three numbers in geometrical progression such that each of them *minus* a given number gives a square.

Given number 12.

Find a *square* which exceeds 12 by a square. "This is easy [II. 10]; $42\frac{1}{4}$ is such a number."

Let the first number be $42\frac{1}{4}$, the third x^2; therefore the middle number $= 6\frac{1}{2}x$.

Therefore $\left.\begin{array}{c} x^2 - 12 \\ 6\frac{1}{2}x - 12 \end{array}\right\}$ are both squares;

their difference $= x^2 - 6\frac{1}{2}x = x(x - 6\frac{1}{2})$; half the difference of the factors multiplied into itself $= \frac{169}{16}$; therefore, putting $6\frac{1}{2}x - 12 = \frac{169}{16}$, we have $x = \frac{361}{104}$,

and $\left(42\frac{1}{4}, \frac{2346\frac{1}{2}}{104}, \frac{130321}{10816}\right)$ is a solution.

2. To find three numbers in geometrical progression such that each of them when added to a given number gives a square.

Given number 20.

Take a square which when added to 20 gives a square, say 16.

Put for one of the extremes 16, and for the other x^2, so that the middle term $= 4x$.

Therefore $\left.\begin{array}{c} x^2 + 20 \\ 4x + 20 \end{array}\right\}$ are both squares.

Their difference is $x^2 - 4x = x(x - 4)$, and the usual method gives $4x + 20 = 4$, *which is absurd*, because the 4 ought to be some number greater than 20.

But the $4 = \frac{1}{4}(16)$, while the 16 is a square which when added to 20 makes a square; therefore, to replace 16, we must find some square greater than 4 . 20 and such that when increased by 20 it makes a square.

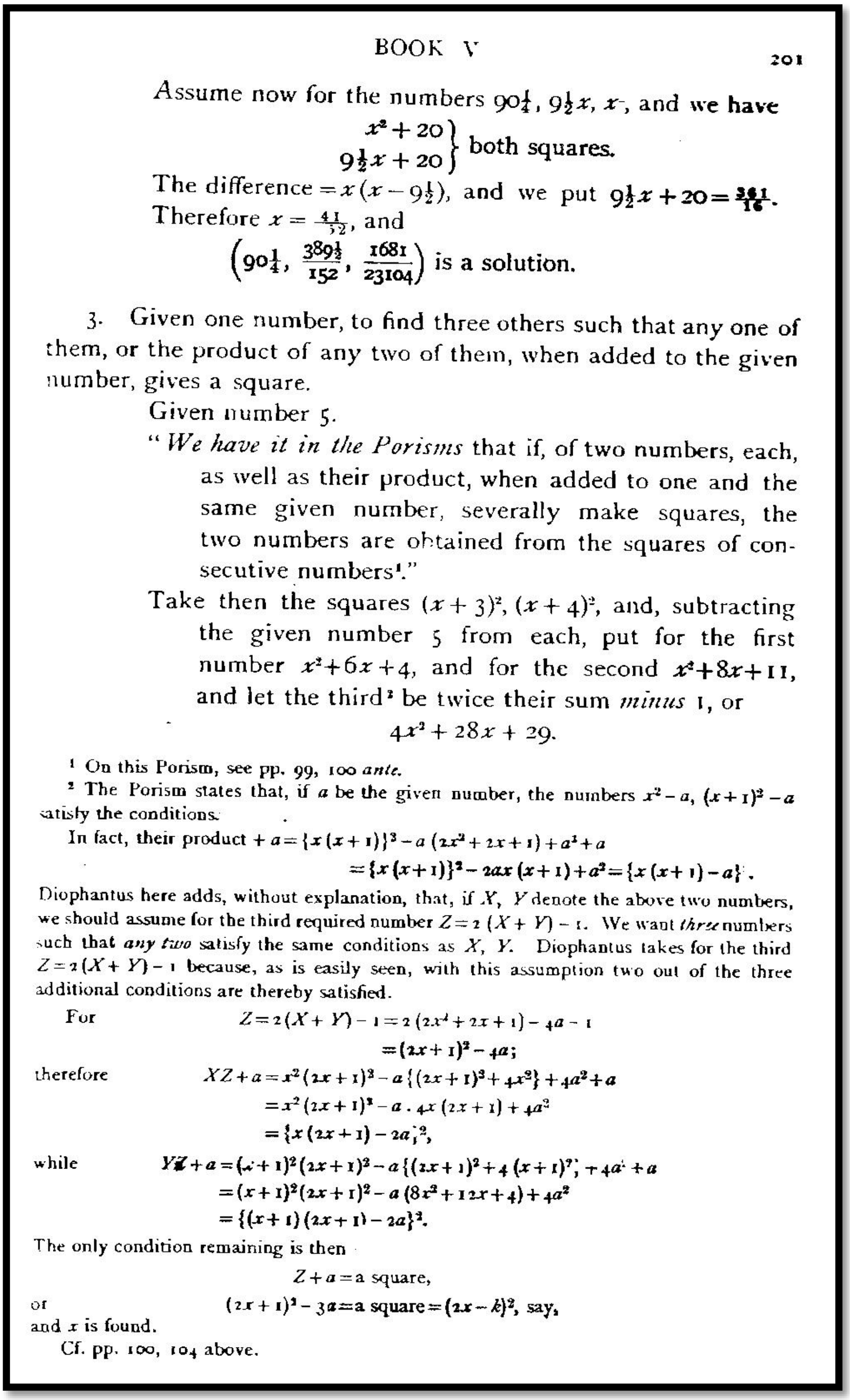
Now $81 > 80$; therefore, putting $(m + 9)^2$ for the required square, we have

$$(m + 9)^2 + 20 = \text{square} = (m - 11)^2, \text{ say};$$

therefore $m = \frac{1}{2}$, and the square $= (9\frac{1}{2})^2 = 90\frac{1}{4}$.

Figura 38. Problema 1-2 do Livro V – O Aritmética de Diofando, **Fonte**: HEATH, T. L. Diophantus of Alexandria: A Study in the History of Greek Algebra. Forgotten, 2012. Publicação original 1910. p.200.

Problema 2 do Livro V – O Aritmética de Diofando, segundo Healt: **Diophantus of Alexandria: A Study in the History of Greek Algebra**.



BOOK V 201

Assume now for the numbers $90\frac{1}{4}$, $9\frac{1}{2}x$, x^2, and we have

$$\left.\begin{array}{r} x^2+20 \\ 9\frac{1}{2}x+20 \end{array}\right\} \text{both squares.}$$

The difference $= x(x - 9\frac{1}{2})$, and we put $9\frac{1}{2}x + 20 = \frac{361}{16}$.

Therefore $x = \frac{41}{152}$, and

$$\left(90\frac{1}{4},\ \frac{389\frac{1}{2}}{152},\ \frac{1681}{23104}\right) \text{ is a solution.}$$

3. Given one number, to find three others such that any one of them, or the product of any two of them, when added to the given number, gives a square.

Given number 5.

"*We have it in the Porisms* that if, of two numbers, each, as well as their product, when added to one and the same given number, severally make squares, the two numbers are obtained from the squares of consecutive numbers[1]."

Take then the squares $(x+3)^2$, $(x+4)^2$, and, subtracting the given number 5 from each, put for the first number x^2+6x+4, and for the second $x^2+8x+11$, and let the third[2] be twice their sum *minus* 1, or

$$4x^2 + 28x + 29.$$

[1] On this Porism, see pp. 99, 100 *ante*.

[2] The Porism states that, if a be the given number, the numbers $x^2 - a$, $(x+1)^2 - a$ satisfy the conditions.

In fact, their product $+ a = \{x(x+1)\}^2 - a(2x^2+2x+1) + a^2 + a$

$$= \{x(x+1)\}^2 - 2ax(x+1) + a^2 = \{x(x+1) - a\}^2.$$

Diophantus here adds, without explanation, that, if X, Y denote the above two numbers, we should assume for the third required number $Z = 2(X+Y) - 1$. We want *three* numbers such that *any two* satisfy the same conditions as X, Y. Diophantus takes for the third $Z = 2(X+Y) - 1$ because, as is easily seen, with this assumption two out of the three additional conditions are thereby satisfied.

For $\quad Z = 2(X+Y) - 1 = 2(2x^2+2x+1) - 4a - 1$

$$= (2x+1)^2 - 4a;$$

therefore $\quad XZ + a = x^2(2x+1)^2 - a\{(2x+1)^2 + 4x^2\} + 4a^2 + a$

$$= x^2(2x+1)^2 - a \cdot 4x(2x+1) + 4a^2$$

$$= \{x(2x+1) - 2a\}^2,$$

while $\quad YZ + a = (x+1)^2(2x+1)^2 - a\{(2x+1)^2 + 4(x+1)^2\} + 4a^2 + a$

$$= (x+1)^2(2x+1)^2 - a(8x^2+12x+4) + 4a^2$$

$$= \{(x+1)(2x+1) - 2a\}^2.$$

The only condition remaining is then

$$Z + a = \text{a square},$$

or $\quad (2x+1)^2 - 3a = \text{a square} = (2x-k)^2$, say,

and x is found.

Cf. pp. 100, 104 above.

Figura 39. Problema 2 do Livro V – O Aritmética de Diofando, **Fonte**: HEATH, T. L. Diophantus of Alexandria: A Study in the History of Greek Algebra. Forgotten, 2012. Publicação original 1910. p.201.

Problema 1-2 do Livro V – Na versão castelhana do *Aritmética* de Diofanto, com introdução, notas e apêndices de Manuel Benito Muñoz, Emílio Fernandez Moral e Mercedes Sánchez Benito (2007, p. 9-11)

Enunciado 1: *Encontrar três números em progressão geométrica, subtraindo de cada um deles um número quadrado. Determinar x, y e z, tal que:*

$$xz = y^2, \quad x - a = \blacksquare, \quad y - a = \blacksquare, \quad z - a = \blacksquare$$

Solução original: Seja $a = 12$ o número dado. Vamos procurar um quadrado que aumentado de 12 unidade, forme um quadrado. Por exemplo, $\frac{169}{4}$. Então os dois números extremos são $x = \frac{169}{4}$ $e\ z = \alpha^2$; o médio será $y = \frac{13}{2}\alpha$, logo: será completada o dobro da equação

$$\alpha^2 - 12 = u^2, \quad \frac{13}{2}\alpha - 12 = v^2$$

A diferença dos quadrados é $u^2 - v^2 = \alpha^2 - \frac{13}{2}\alpha = \left(\alpha - \frac{13}{2}\right)$; Por outro lado, $u^2 - v^2 = (u+v)(u-v)$; identificando α como um fator $u + v\ e\ \alpha - \frac{13}{2}$; logo:

$\alpha = \frac{361}{104}$, a solução do problema é: $x = \frac{169}{4}, y = \frac{4693}{208}, z = \frac{130321}{10816}$

Enunciado 2: *Encontrar três números em progressão geométrica, adicionando a cada um deles um determinado número quadrado. Encontrar x, y e z, tal que*:

$$xz = y^2, \quad x + a = \blacksquare, \quad y + a = \blacksquare, \quad z + a = \blacksquare$$

Solução original: Seja $a = 20$ o número dado. Vamos procurar um quadrado que aumentado de 20 unidade, forme um quadrado. Por exemplo, 16. Então os dois números extremos são 16 e α^2; o médio será $y = 4\alpha$, logo:

$$\alpha^2 + 20 = \blacksquare, 4\alpha + 20 = \blacksquare$$

A diferença dos quadrados é $\alpha^2 - 4\alpha = \alpha(\alpha - 4)$; A semidiferença desses dois fatores é 4, que é o quadrado menor $4\alpha + 20 = 4$; uma equação, que é um absurdo para $\alpha < 0$, porque 4 é menor que 20.

Revendo o que já temos feito, podemos verificar que 4 unidades representam a quarta parte 16, que foi à praça, escolhido no início, que aumentou em 20 unidades formam um quadrado. Teremos que procurar outra praça que aumentou em 20 unidades que formam um quadrado, mas a quarta parte é maior que 20; a praça será superior a 80 anos.

Considerando por exemplo que $81 = 9^2 > 80$, pegamos para o quadrado que buscamos $(\beta + 9)^2$; precisa satisfazer a seguinte condição:

$$(\beta + 9)^2 + 20 = \beta^2 + 18\beta + 101 = \blacksquare$$

A identificação do $\blacksquare \equiv (\beta - 11)^2$ resulta $40\beta = 20$ *e* $\beta = \frac{1}{2}$. O quadrado $\left(9\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{361}{4}$ de acordo com as condições necessárias.

$$\alpha^2 + 20 = \blacksquare, \qquad \frac{19}{2}\alpha + 20 = \blacksquare$$

A diferença dos quadrado é $\alpha^2 - \frac{19}{2}\alpha = \alpha\left(\alpha - \frac{19}{2}\right)$; o quadrado da semidiferença destes dois fatores $\frac{361}{16}$, que identificado com o método dos mínimos quadrados, $\frac{19}{2}\alpha + 20$, $\alpha = \frac{41}{152}$. A solução do seguinte problema é: $x = \frac{361}{4}, y = \frac{41}{16}, z = \frac{1681}{23104}$.[6]

[6] Para qualquer a, tomar $x = d^2$, de modo que $d^2 + a = \blacksquare > 4a$ para alcançar o objetivo.

3.3. Alguns Problemas do *Liber Abaci* de Fibonacci

Problema 18 – O *Liber Abaci* de Fibonacci, segundo Sigler, no capítulo 12 titulado “a solução de problemas diversos” apresenta o problema mais famoso de Fibonacci: “*Quantos pares de coelhos são criados por um par em um ano*”.

404 II. Liber Abaci

asserted that the division was correct as each had one bezant, for each loaf, but this is false because the three ate all five loaves. Whence each took $\frac{2}{3}1$ loaves; the soldier ate $\frac{1}{3}1$ loaves, that is $\frac{4}{3}$, from the loaves which the three had. Of the loaves truly the other ate only so much as $\frac{1}{3}$ of one loaf. Therefore the first man took 4 bezants and the other 1 bezant [24].

On the Finding of Perfect Numbers. [25]

A number is perfect when the sum of its integral factors is the same number; as 6 which has factor $\frac{1}{6}\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{2}$ of 6, and no other integral factors. And taking $\frac{1}{2}$ and $\frac{1}{3}$ and $\frac{1}{6}$ of 6, namely 3 and 2 and 1, undoubtedly their sum is 6, and the 6 is found thus: you double 1; there will be 2, and you double the 2; there will be 4 from which you take 1; there remains 3 which is a prime number, that is it has only the factor 1; you multiply it by half of the abovewritten 4, and thus you will have 6. Whence if you will wish to find another perfect number, then you will double again 4; there will be 8 from which you take 1; there will remain 7 which is a prime number; you will multiply it by half of the 8, namely by 4; there will be 28 which is a perfect number because it is equal to the sum of its factors. The factors are indeed $\frac{1}{28}\ \frac{1}{14}\ \frac{1}{7}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{2}$ of 28. Again doubled 8 makes 16, from which is subtracted 1; there remains 15 which is not a prime number; you will double again 16; there will be 32 from which you take 1; there will remain 31 which is a prime number; you will multiply it by the 16, and you will have another perfect number, namely 496, and always doing thus you will be able to find perfect numbers without end.

How Many Pairs of Rabbits Are Created by One Pair in One Year. [26]

beginning	1
first	2
second	3
third	5
fourth	8
fifth	13
sixth	21
seventh	34
eighth	55
ninth	89
tenth	144
eleventh	233
end	377

A certain man had one pair of rabbits together in a certain enclosed place, and one wishes to know how many are created from the pair in one year when it is the nature of them in a single month to bear another pair, and in the second month those born to bear also. Because the abovewritten pair in the first month bore, you will double it; there will be two pairs in one month. One of these, namely the first, bears in the second month, and thus there are in the second month 3 pairs; of these in one month two are pregnant, and in the third month 2 pairs of rabbits are born, and thus there are 5 pairs in the month; in this month 3 pairs are pregnant, and in the fourth month there are 8 pairs, of which 5 pairs bear another 5 pairs; these are added to the 8 pairs making 13 pairs in the fifth month; these 5 pairs that are born in this month do not mate in this month, but another 8 pairs are pregnant, and thus there are in the sixth month 21 pairs; [p284] to these are added the 13 pairs that are born in the seventh month; there will be 34 pairs in this month; to this are added the 21 pairs that are born in the eighth month; there will be 55 pairs in this month; to these are added the 34 pairs that are born in the ninth month; there will be 89 pairs in this month; to these are added again the 55 pairs that are born in the tenth month; there will be 144 pairs in this month; to these are added again the 89 pairs that are born in the eleventh month; there will be 233 pairs in this month.

Figura 40. Problema 18 – O *Liber Abaci* de Fibonacci. **Fonte:** SIGLER. L. E. Fibonacci’s Liber Abaci: a translation into moderno English of Leonardo Pisano’s Book of Calculation. Springer, 2002. p.404.

Problema 18 – O *Liber Abaci* de Fibonacci, segundo Sigler, no capítulo 12 titulado “a solução de problemas diversos” (T.N.) apresenta o problema mais famoso de Fibonacci: *Quantos pares de coelhos são criados por um par num ano*. Um certo homem tem um par de coelhos numa determinado local cercado, e quer saber quantos são criados por esse par num ano, quando é natural que eles gerem num mês outro par, e no segundo mês, os que nasceram, geram também.

O par inicial descrito acima, no primeiro mês dobra, haverá dois pares em um mês. Um deles, ou seja, o primeiro, no segundo mês e, assim, há no segundo mês 3 pares, dos quais dois em um mês está grávida, e no terceiro mês 2 pares de coelhos nascem, e, portanto, há 5 pares do mês; neste mês 3 pares está grávida, e no quarto mês há 8 pares, dos quais 5 pares carregam mais 5 pares, que são adicionados aos 8 pares fazendo 13 pares no quinto mês, estes 5 pares que nascem neste mês não acasalam neste mês, mas outras 8 pares está grávida, e, portanto, há, no sexto mês 21 pares; para estes há que acrescentar os 13 pares que nasceram no sétimo mês; haverá 34 pares neste mês, para isso se acrescentam os 21 pares que nascem no oitavo mês, haverá 55 pares neste mês, para estes há que acrescentar os 34 pares que nascem no nono mês; haverá ser 89 pares neste mês, para estes são adicionados novamente os 55 pares que nascem no décimo mês, haverá 144 pares neste mês, para estes são adicionados novamente os 89 pares que nascem no décimo primeiro mês, perfazendo 233 pares.

a partir de	**1**
primeiros	**2**
segundo	**3**
terceiro	**5**
quarto	**8**
quinto	**13**
sexto	**21**
sétimo	**34**
oitavo	**55**
nono	**89**
décimo	**144**
décimo primeiro	**233**
décimo segundo	**377**

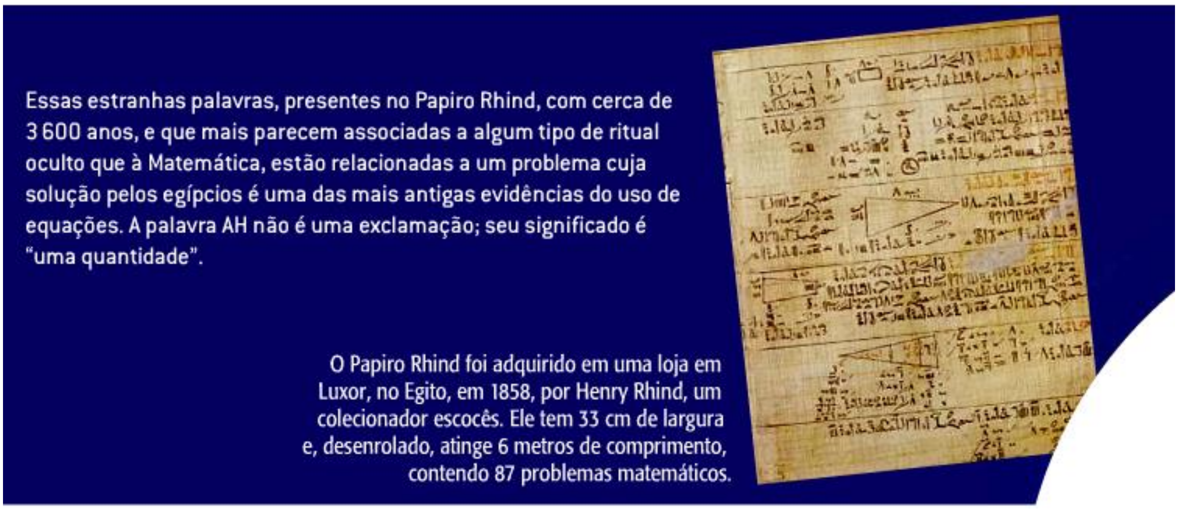
Para estes são ainda adicionados os 144 pares que nascem no mês anterior, haverá 377 pares, e isso muitas pares são produzidos a partir do par escrito acima no lugar indicado no final de um ano.

Você pode realmente ver na margem como operamos, ou seja, que nós adicionamos o primeiro número para o segundo, ou seja, o 1 a 2, e o segundo para o terceiro, e o terceiro para o quarto, e do quarto para o quinto, e, assim, um após o outro, até que acrescentou o décimo para o décimo primeiro, ou seja, o 144 ao 233, e tivemos a soma acima escrito de coelhos, ou seja, 377, e assim você pode encontrá-lo em ordem para um número infindável de meses.

3.4. Sobre a apresentação de problemas históricos em livros didáticos

A seguir apresentamos alguns problemas históricos selecionados em livros didáticos utilizados no ensino de matemática na educação básica.

No livro didático do 7º ano do ensino fundamental, Sampaio (2010) ao introduzir equações e inequações do 1º grau, apresenta um exemplo de um problema encontrado *Papiro de Rhind* .



TROCANDO IDEIAS

1. Observe diferentes modos de representar uma mesma expressão matemática. Esta foi expressa por John Muller (1436-1476):

   2 census depentis 5 rebus et 3 aequatur 2

   E esta é a expressão atual:

   $$12x^2 - 5x + 3 = 2$$

   Qual dos dois modos de escrever a expressão lhe parece mais prático? Por quê?

2. O papiro Rhind traz a frase "AH, seu inteiro, seu sétimo, fazem 19", que pode ser descrita como: "encontre um número que, adicionado à sua sétima parte, seja igual a 19". Atribua alguns valores inteiros para o número desconhecido e determine um intervalo de dois números consecutivos entre os quais a resposta se situa.

Figura 41: Problema do *Papiro de Rhind* no livro didático. **Fonte:** Apresentada por Fausto Arnaud Sampaio, na Coleção Jornadas – *Matemática*. Editora Saraiva. 2010. p. 116 e p. 117.

No livro didático do 7º ano do ensino fundamental, Sampaio (2010) ao abordar o tema equações e inequações do 1º grau, descreve o problema encontrado na lápide de Diofanto.

Decifrando o enigma da idade de Diofanto

Vamos considerar como *x* a idade com que Diofanto faleceu e transcrever estas expressões para a linguagem matemática:

$$x = \frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} + 4$$

$$x = \frac{[14x + 7x + 12x + 420 + 42x + 336]}{84}$$

$$84x = 75x + 756$$

$$9x = 756$$

$$x = 84$$

Os estudos de Diofanto basearam-se no uso de símbolos para facilitar a escrita e os cálculos matemáticos. Os símbolos criados por ele fizeram com que as expressões, até então escritas totalmente com palavras, pudessem ser representadas por abreviações. A álgebra começa a ser entendida como o estudo da resolução de equações.

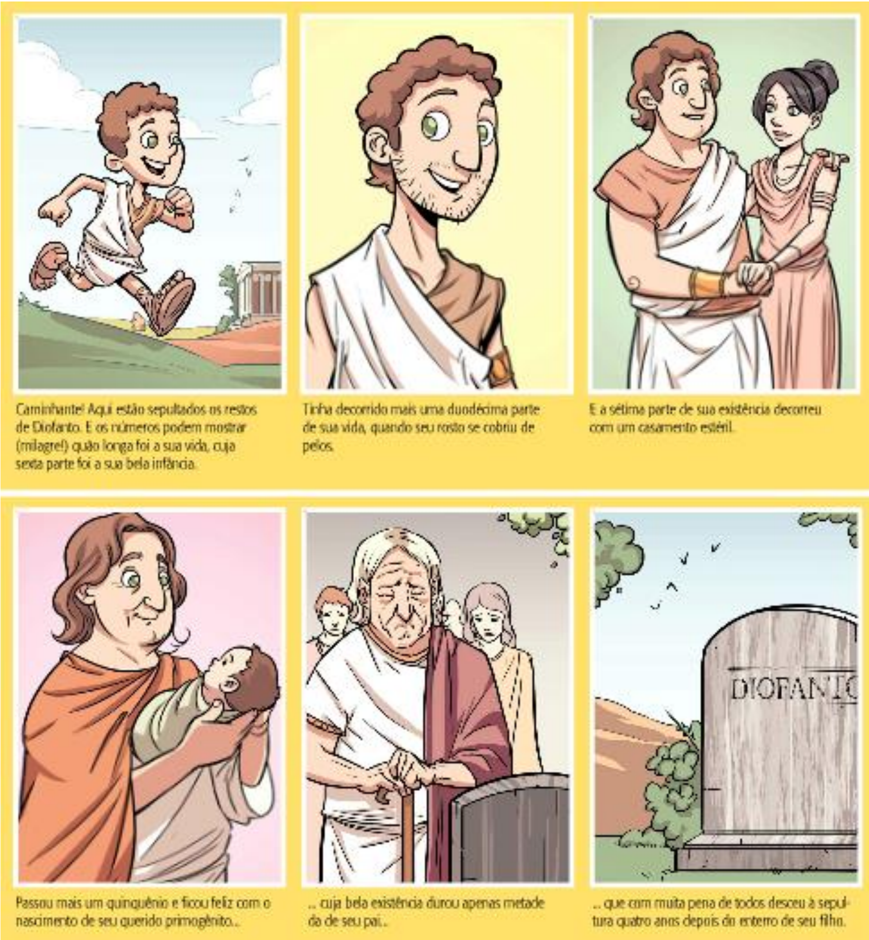


Figura 42: Decifrando o enigma da idade de Diofanto no livro didático. **Fonte:** Apresentada por Fausto Arnaud Sampaio, na Coleção Jornadas – *Matemática*. Editora Saraiva. 2010. p. 150 e p. 151.

O problema dos coelhos no apresentado no livro didático. Representação moderna da sequência de Fibonacci:

Um pouco de História

A SEQUÊNCIA DE FIBONACCI

Uma sequência muito conhecida na Matemática é a sequência de Fibonacci, nome pelo qual ficou conhecido o italiano Leonardo de Pisa (1175-1250). Em 1202, Fibonacci apresentou em seu livro *Liber Abaci* o problema que o consagrou.

Fibonacci considerou, no período de um ano, um cenário hipotético para a reprodução de coelhos. Veja:

- No início, há apenas um casal que acabou de nascer.
- Os casais atingem a maturidade sexual e se reproduzem ao final de um mês.
- Um mês é o período de gestação dos coelhos.
- Todos os meses, cada casal maduro dá à luz um novo casal.
- Os coelhos nunca morrem.

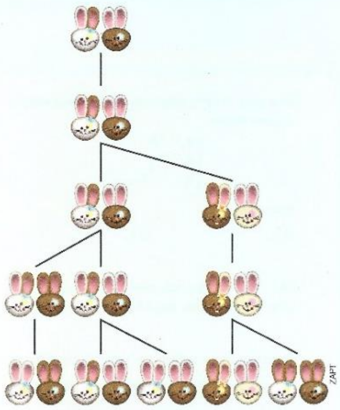
Retrato de Leonardo Fibonacci.

Acompanhe, a seguir, a quantidade de pares de coelhos, ao final de cada mês:

- Início: um único casal.
- Ao final de um mês, o casal acasala. Continuamos com um par.
- Ao final de dois meses, a fêmea dá à luz um novo par. Agora são dois pares.
- Ao final de três meses, o primeiro casal dá à luz outro par, e o segundo casal acasala. São 3 pares.
- Ao final de quatro meses, o primeiro casal dá à luz outro par; o segundo casal dá à luz pela primeira vez e o 3º par acasala. São 5 pares.

⋮

- e assim por diante...



A sequência de pares de coelhos existentes, ao final de cada mês, evolui segundo os termos da sequência:

(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ...)

| 267 |

Note que, a partir do terceiro, cada termo dessa sequência é igual à soma dos dois termos anteriores. Assim, essa sequência pode ser definida pela lei de recorrência:

$$\begin{cases} f_1 = 1 \\ f_2 = 1 \\ f_n = f_{n-1} + f_{n-2},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 3 \end{cases}$$

Mais de quinhentos anos mais tarde, o escocês Robert Simson provou a seguinte propriedade dessa sequência: à medida que consideramos cada vez mais termos, o quociente entre um termo qualquer e o termo antecedente aproxima-se de 1,61803398..., que é o número de ouro, introduzido no capítulo 2.

Vejamos alguns exemplos:

$$\frac{f_{10}}{f_9} = \frac{55}{34} \cong 1{,}6176; \quad \frac{f_{13}}{f_{12}} = \frac{233}{144} \cong 1{,}61805; \quad \frac{f_{20}}{f_{19}} = \frac{6765}{4181} \cong 1{,}6180$$

Outros estudos mostram uma ligação entre os números de Fibonacci e a natureza, como a quantidade de arranjo das folhas de algumas plantas em torno do caule, a organização das sementes na coroa de um girassol etc.

Para saber mais sobre esse assunto, você pode pesquisar em:

- Há dois vídeos disponíveis no *site youtube* (www.youtube.com):
  Sequência de Fibonacci e Número de ouro
  Who is God? (com tradução) A sequência de Fibonacci
- www.edu.fc.ul.pt/icm/icm2002/numeros

Figura 43. Problema dos coelhos de Fibonacci no livro didático. **Fonte:** Apresentada por Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce, David Degenszajn, Roberto Périgo e Nilze de Almeid, na Coleção Conecte – *Matemática: Ciência e aplicações 1*. Editora Saraiva. 2010. p. 267 e p. 268.

3.5. Análise comparativa das estratégias de resolução dos problemas de cunho histórico estudados.

Na sequência de nosso estudo, fazemos uma abordagem interpretativa, analisando de acordo com uma seleção prévia os problemas de cunho histórico, e tendo por base as estratégias de resolução de problemas; buscando um formato para estabelecer nossa análise sobre a importância da utilização de problemas de cunho histórico em sala de aula. Assim, criamos um quadro descritor para nossas relações de análise.

Artefato	Problema	Tipo	Estratégias de Resolução	Descrição e comparação
Papiro de Rhind	**Problema 79**: Um homem tinha sete casas, cada casa tinha sete gatos, para cada gato havia sete ratos, para cada gato havia sete espigas de trigo, e cada espiga tinha sete medidas de grão. Quantas coisas ele possuía? Casas, gatos, ratos espigas e medidas de grão?	PG	Resolução apresentada nos textos originais	Verificação da velocidade e/ou facilidade de resolução comparando os tipos apresentados
Aritmética de Diofanto	**Problema 1 do Livro V** – Encontrar três números em progressão geométrica, subtraindo de cada um deles um número quadrado. Determinar x, y e z, tal que: $xz = y^2$, $x - a = \blacksquare$, $y - a = \blacksquare$, $z - a = \blacksquare$	PG	Resolução apresentada nos textos originais	Verificação da velocidade e/ou facilidade de resolução comparando os tipos apresentados

Liber Abaci de Fibonacci	Quantos pares de coelhos são criados por um par em um ano?	Um tipo de PG	Resolução apresentada nos textos originais	Verificação da velocidade e/ou facilidade de resolução comparando os tipos apresentados

Tabela 6: Quadro comparativo das estratégias de resolução de problemas.

Nesta pesquisa comparamos os problemas acima e constatamos que representam problemas envolvendo o que denominamos progressões em diferentes períodos. As estratégias de resolução desses problemas, no caso, problemas do papiro de Rhind, fazem recurso a raciocínios aritméticos, em que se busca determinar os valores das incógnitas a partir de valores estipulados. Encontramos, em nosso estudo, problemas semelhantes porém com estratégias de resolução mobilizando o pensamento algébrico, no caso de problemas do aritmética de Diofanto, seu ponto de partida são as relações estabelecidas entre as incógnitas, já Fibonacci, no Liber Abaci, apesar da evolução da álgebra, ainda se utiliza muito do estilo sincopado.

Nos três problemas selecionados em diferentes períodos históricos, nos parece evidente que as estratégias de resolução desses problemas se complementam, dessa forma, isso parece reforçar o peso que o trabalho com a aritmética nas séries iniciais de escolaridade tem na formação do pensamento matemático dos alunos. As estratégias apresentadas na resolução desses problemas clássicos, deve propiciar ao estudante envolvimento com situações novas e enfrentamento de desafios na busca de solução que não é evidente, imediata. Logo, a inserção desta estratégia torna-se essencial e importante para promover a participação dos alunos nas aulas de matemática e além disso permite-lhes o desenvolvimento de seu pensamento lógico-matemático. Essa proposta de ensino propõe tratar a matemática não como mera transposição de conteúdo e pura mecanização de fórmula, mas como uma disciplina dinâmica e viável de criatividade e explicitação de diferentes estratégias de solução.

Problemas dessa natureza aparecem e são trabalhados em textos didáticos, o problema dos coelhos de Fibonacci no livro didático. **Fonte:** Apresentada por Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce, David Degenszajn, Roberto Périgo e Nilze de Almeid, na Coleção Conecte – *Matemática: Ciência e aplicações 1*. Editora Saraiva. 2010. p. 267 e p. 268. Conforme descrito nas páginas 105 e 106, onde são colocados como atividades, mas não consideram os aspectos históricos, a menos da citação dos nomes de Fibonacci e Diofanto.

A nossa intenção ao utilizar os dados e características históricas, visa uma maior interação e uma possível comparação das estratégias de resolução histórica e atual, sempre buscando dar mais significado aos conteúdos (conceitos) estudados (envolvidos).

O estudo nos permite analisar as estratégias usadas nos problemas, comparando-as e registando algumas diferenças. As estratégias usadas são diversificadas inserindo-se nas categorias de estratégias informais. Além disso, a sua análise evidencia o tipo de trabalho que se pode desenvolver na sala de aula a partir de condições que propiciem que os alunos progridam do uso de estratégias informais, pouco estruturadas para estratégias mais estruturadas e eficientes. Pelo contrário, a análise das estratégias informais denota uma prevalência do uso do algoritmo tradicional e evidencia uma continuidade em termos da progressão das estratégias nos três problemas.

A potencialidade do trabalho com a Resolução de Problemas Matemáticos da Antiguidade como estratégia para o ensino de matemática na educação básica, enquanto meio são ferramentas preponderantes e de exclusividade para se envolver com problematização e raciocínio lógico. Até este momento, podemos perceber que o conhecimento da história do desenvolvimento da matemática nos possibilita maior compreensão quando percebemos que a aritmética nos conduz a uma simbologia algébrica como linguagem que facilita a expressão do pensamento matemático. A partir de uma abordagem histórica, passando pelos possíveis estágios de evolução da matemática podemos contribuir para a construção do pensamento algébrico em direção à formalização da linguagem simbólica e, diante disso, amenizar dificuldades relativas à abstração. À medida que a linguagem algébrica se torna familiar ao aluno, ele pode compreender a função da generalização para a solução de situações problema. As informações e os problemas históricos permitem reflexões que auxiliam, tanto na formação do professor quanto na dos alunos e ainda podem contribuir para a reelaboração de conceitos matemáticos.

No próximo capítulo, discutiremos os principais resultados, articulando-os com a literatura, e em seguida as considerações finais com os contributos da investigação e com uma breve reflexão pessoal sobre o percurso realizado.

Capítulo 4 - Relações Epistemológicas na Construção de Conceitos Matemáticos a partir da análise das progressões na resolução de problemas clássicos.

Os três capítulos anteriores fizemos um trabalho de reconstrução histórica, selecionamos alguns problemas relacionando aspectos recorrentes destes períodos, sua apresentação em alguns livros didáticos, visando obter apontamentos que nos permitam sugerir estratégias para o ensino de Matemática na educação básica. Para nosso objetivo analisamos problemas cuja recorrência é a apresentação de progressões utilizando algumas novas referências especializadas.

Nos trabalhos de Lagarto (2010), Chace (1929), Miatello (2009) e Robins e Shute (1987) sobre os problemas envolvendo progressões aritméticas constatamos algumas diferenças. A primeira diferença está relacionada à quantidade de problemas no *Papiro de Rhind.* Por exemplo a tabela usada por Lagarto (2010) traz 84 problemas e a tabela de Miatello (2009), 87. Confrontando essas tabelas com aquela apresentada por Chace (1929) e em Robins e Shute (1987) constatamos que apenas Lagarto (2008) descreve o Papiro de Rhind com 84 problemas. Comparando os problemas do Papiro de Rhind, tal como constam na tradução feita por Chace (1929), com as tabelas de Lagarto e Miatello, constatamos que as diferenças têm início no problema 40.

Nesse problema pede-se uma divisão de 100 pães por 5 homens, de modo que cada homem receba 5½ pães a mais que o anterior. Chace (1929, p. 45) considera esse problema como um problema de progressão aritmética e Lagarto (2008, p. 1) parece concordar a esse respeito. Todavia, Miatello (2009, p. 284) não parece estar de acordo visto que argumenta que os antigos egípcios não desenvolveram o conhecimento matemático sobre progressões aritméticas.

Miatello (2009) parece se preocupar com as operações realizadas com frações unitárias e com o tratamento dado ao método de falsa posição. Para Miatello (2009, p. 277), o algoritmo utilizado para resolver problemas é somente parcialmente ilustrado no texto do papiro. Segundo ele, no último século prevaleceram interpretações que sugeriam uma determinação de séries por tentativa e erro. Assim, ele procura reconstruir a parte que faltava desse procedimento computacional como uma aplicação do algoritmo por meio do método de “falsa posição”.

Desse modo, Miatello (2009) salienta que, apesar de o conhecimento matemático sobre progressões aritméticas poder ser usado no problema 40 do Papiro de Rhind, esse problema não era resolvido pelos antigos egípcios dessa forma, observando que esse problema aparece acidentalmente e não propositalmente.

Tendemos assim a concordar com as considerações de Miatello, visto que as referência encontradas em Boyer (1996) e Eves (2008) não se referem especificamente aos conhecimentos sobre progressões aritméticas ou progressões geométricas naquela época.

Do mesmo modo, encontramos a mesma discordância no que diz respeito ao problema 64. Nesse particular, Lagarto (2010, p. 1) e Chace (1929, p. 102) classificam-no como um problema que trabalha com progressões aritméticas. Miatello (2009), por sua vez, o classifica como um problema de divisão de pães.

Como já mencionado por ocasião do problema 40, Miatello (2009, p. 284) mostra que os antigos egípcios parecem não ter desenvolvido o conhecimento sobre progressões. Desse modo, o problema pode aparentemente ser de progressão aritmética, mas era resolvido pelo método de falsa posição.

Outro ponto de divergência parece centrar-se nos problemas 85, 86 e 87. Para Chace (1929, p. 62), esses problemas seriam uma "miscelânea". Por sua vez, Lagarto (2010) não se refere a esses problemas em sua tabela e Miatello (2009) parece não considerá-los como registros matemáticos. Assim, talvez, por não serem considerados problemas matemáticos, eles não constem na listagem de Lagarto (2010).

Segundo Gillings (1982, p. 232-234) uma demonstração não precisa de uma formulação abstrata para ser válida. Basta investigar um caso particular, se a investigação deixa transparecer que qualquer outro caso particular poderia receber o mesmo tratamento.

Sabemos que na matemática egípcia, porém, não há demonstrações. As "provas", as quais Gillings (1982) aponta, são apenas cálculos numéricos para mostrar que o valor encontrado realmente satisfaz as condições do problema. Mesmo quando o escriba está exibindo um método que ele alega ser válido para todo problema de certo tipo, seu estilo algorítmico impede que isto seja considerado uma demonstração. Fossa (2010, p. 489)

Em sua gênese histórica, as progressões aritméticas e geométricas possuem procedimento interativo de resolução de problemas bastante antigo. Suas origens remontam ao antigo Egito e aos primórdios da civilização chinesa, tendo sido largamente utilizado, desde então, por matemáticos de várias civilizações.

É muito difícil traçar a origem exata de problemas envolvendo progressões. Tanto os autores quanto as datas de importantes documentos da História Antiga da Matemática são de atribuições bastante imprecisas. Certo é que tanto no antigo Egito quanto na China, as progressões já eram conhecidas, ainda que com denominações diversas e com distintas convicções quanto à sua validade e generalidade. Como já afirmamos antes, um dos documentos mais antigos que faz referência às progressões é o *Papiro de Rhind*, compilado pelo escriba Ahmes por volta de 1650 a.C. Esse texto, entretanto, é um relato de conhecimentos bem mais antigos e não da exata autoria de Ahmes. Fica, portanto, difícil precisar os verdadeiros autores das ideias ali expostas, assim como a época dos seus surgimentos. Por outro lado, sendo as progressões, historicamente, um tipo de procedimento originalmente retórico, como de resto a própria Matemática egípcia, alguns têm relutado em aceitá-lo como parte integrante da Álgebra, vendo-o, apenas, como método de Aritmética aplicada. Essa postura, entretanto, carrega também um viés ideológico eurocentrista defasado no tempo. Ela consiste em tomar como Álgebra apenas aqueles raciocínios expressos de uma forma completamente simbólica. Uma postura radicalmente oposta e bem mais aberta, do ponto de vista antropológico e cultural, é a de aceitar-se a história da Álgebra como dividida em três períodos: o retórico, o sincopado e o simbólico. A questão da aceitação ou não de raciocínios expressos de forma retórica como sendo uma Álgebra é marcadamente ideológica.

Como assinala Joseph (1991) a transformação da Álgebra retórica para a simbólica, que marca um dos mais importantes avanços na Matemática, requereu duas importantes condições. A primeira foi o desenvolvimento de um sistema numérico posicional que permitiu escrever os números de forma concisa, trazendo, com isso, o desenvolvimento eficiente das operações. A segunda foi o aparecimento das práticas comerciais e administrativas que auxiliaram na adoção, não apenas de um sistema numérico, mas também de símbolos para representar os operadores.

Entretanto, se apesar de não possuir um caráter simbólico, podemos pensar na existência de uma Álgebra egípcia, há ainda uma outra questão a ser devidamente considerada, ligada à consciência da justificativa e da generalidade dos raciocínios utilizados. Analisando as soluções de problemas, contidos nos papiros, envolvendo quantidades desconhecidas, observamos que elas eram, em princípio, comparáveis com as nossas equações lineares. Contudo, os processos ali descritos são puramente aritméticos, não tendo se constituído, nas mentes dos egípcios, em um assunto distinto, em uma verdadeira solução de equações. Os problemas eram enunciados verbalmente, com indicações vagas para a obtenção das soluções e sem explicações do porque os métodos eram usados ou do porque eles funcionavam (KLINE, 1990, p. 39).

O problemas envolvendo sequência, na forma utilizada pelos antigos egípcios, ou seja, contido de forma não explícita no cálculo de "aha", não chega, portanto, a se constituir exatamente em uma Álgebra. Isso se dá não pela simples falta de símbolos em seus raciocínios, mas pelo fato dos egípcios não terem estado em alerta para a justificativa e a generalidade do método adotado. Caso tivesse havido essa consciência acerca da justificativa e da generalidade do método, poderiam ter sido os egípcios, efetivamente, os primeiros usuários de uma Álgebra retórica. Entretanto, a ausência dessa consciência no cálculo de "aha" para problemas tidos hoje como relativos às equações lineares, coloca os antigos egípcios apenas como legítimos precursores da Álgebra retórica. A versão egípcia no uso de problemas de progressões, implícito no cálculo de "aha", tem uma validade geral para a solução de equações lineares, mas isso não parece ter sido percebido pelos escribas, pois, tal método nem sempre era usado. O simbolismo aparece, usualmente, como a única linha demarcatória existente na história da Álgebra, mas o estado de alerta quanto à justificativa e à generalidade dos processos matemáticos utilizados é tão importante quanto a forma adotada para representar a matematização dos problemas. Desta forma, faltou aos egípcios um sistema metódico geral para resolver equações lineares com uma incógnita, no mesmo sentido que lhes faltou, também, um sistema alfabético escrito. Apesar de possuírem um sistema de escrita rudimentar (primitivo), este incluía todos os ingredientes para que um método de representação alfabética bem sucedido pudesse vir a ser desenvolvido.

Da mesma forma, suas coleções de técnicas matemáticas particulares incluíam procedimentos que em sua essência, não percebida, eram gerais, para resolver equações lineares em uma incógnita. Embora tais procedimentos fossem efetivamente gerais, eles realmente nunca tiveram consciência de tal fato. Em nenhum dos casos, portanto, nem na escrita nem na Matemática, eles reconheceram que os seus sistemas incluíam, além de técnicas especiais ou supérfluas, uma generalidade latente (RESNIKOFF & WELLS, 1984). A proto-Álgebra egípcia, se assim podemos conceituar parte de sua Matemática, foi também indubitavelmente retardada pelos seus métodos de lidar com as frações.

Segundo Kline (1990), os cálculos extensos e complicados com frações, foram, assim, igualmente, uma das razões pelas quais os antigos egípcios nunca desenvolveram uma Aritmética ou uma Álgebra em um nível avançado.

Segundo Medeiros e Medeiros (2004), em uma sequência de grande salto cronológico, as progressões podem ser encontradas nos trabalhos do matemático grego Diofanto de Alexandria, por volta do ano 250, já envolvido em procedimentos algébricos sincopados, mesclando a retórica com algumas simbolizações. Entretanto, mais importante do que o pré-simbolismo adotado é o fato de encontrarmos presente em Diofanto, como de resto na Matemática grega em geral, a ideia da necessidade da justificativa e da generalização.

Ainda entre os gregos, encontramos, também, outras referências as progressões em alguns problemas contidos na influente "Antologia Grega", elaborada por Metrodorus, por volta do ano 500. Na sequência histórica, vamos encontrar progressões exposto nos trabalhos de notáveis matemáticos árabes como Al-Khowarizm (810) e Abu Kamil (850), assim como entre matemáticos hindus, como o grande Bhaskaracharya (1114-1185), sucessor do não menos famoso Bramagupta (BOYER, 1989).

A Matemática hindu tem uma história bastante antiga, comparável à egípcia e à chinesa. Entretanto, o contato com a atitude grega diante da Matemática, na era Alexandrina, inaugura uma nova fase do pensamento matemático hindu.

> Por volta do ano 300, logo após a época de Diofanto, vamos encontrar na Índia um livro intitulado "Vaychali Ganit", de autoria de Sarvesh Srivasta, no qual cálculos matemáticos básicos já aparecem em notação decimal. Nele encontramos, também, referências às frações e progressões aplicado a questões envolvendo compras e vendas. (MEDEIROS E MEDEIROS, 2004, p. 33)

Na primeira metade do século VII, Bhaskara I (600 – 680) já introduzia vários elementos simbólicos na construção de uma Álgebra capaz de lidar com grande número de problemas relacionados não apenas com equações lineares, mas, também, com algumas equações quadráticas e cúbicas. Os séculos VII e VIII marcam o início da Matemática árabe. Por volta do ano 810, Al-Khowarizm escreve importantes trabalhos matemáticos sobre Aritmética, Álgebra, Geografia e Astronomia. Sua Álgebra, em particular, mesmo sendo essencialmente retórica, constitui um marco decisivo na história da Matemática. A própria palavra Álgebra deriva do nome do seu texto Hisab al-jabr wál-muqabala, que significa, literalmente, cálculos por completamento e balanceamento (ou restauração). O seu próprio nome é a fonte de origem da palavra algoritmo. As novas técnicas são utilizadas por Al-Khowarizm comparativamente com a utilização do método da falsa posição, então denominado de elchatayn, em problemas lineares. Problemas concretos, que poderiam ser tidos como envolvendo equações lineares, haviam sido resolvidos, até então, por falsa posição, sem clareza, entretanto, da formulação de uma equação.

A partir de Al-Khowarizm, esses problemas passam a ser efetivamente expressos e resolvidos, ainda que de forma retórica, em termos da ideia de equações lineares. Entretanto, é conveniente notarmos que a denominação de “equação” só viria a ser adotada muito posteriormente. É importante assinalarmos que Al-Khowarizm propiciou um enorme avanço à Álgebra, principalmente com a introdução valorosa das técnicas de “complemento” e de “restauração”. No tocante, porém, à utilização do simbolismo, o seu trabalho situa-se a um passo atrás dos trabalhos de matemáticos anteriores hindus e mesmo de Diofanto. Segundo Roque (2012), este é um caso típico que ilustra a “não-linearidade” do desenvolvimento da Matemática.

Por volta do ano 900, Abu-Kamil, legítimo sucessor de Al-Khowarizm, escreve o “Livro sobre a Álgebra”, no qual estuda aplicações deste campo da Matemática a problemas geométricos. Foi através desse livro que o Ocidente veio, muito tempo depois, a tomar conhecimento inicial da Álgebra e em especial das progressões. Com efeito, Leonardo de Pisa, introdutor principal da Álgebra na Europa, viria a basear sua obra sobre o referido livro de Abu-Kamil.

Antes que a Álgebra chegasse à Europa, podemos observar os avanços da mesma entre os matemáticos hindus. Bhaskara II, também conhecido como Bhaskaracharya (1114 – 1185) ou Bhaskara, o professor sucessor de Bramagupta como astrônomo em Ujuin, escreveu sobre Aritmética, Álgebra e Trigonometria esférica. Sua Álgebra é sincopada, não apenas retórica. Ela é quase simbólica, devido ao uso de algum simbolismo assinalando um avanço sobre as obras de Bramagupta e dos matemáticos árabes. Para Roque (2012), a versão árabe da Álgebra é que viria a ser transmitida inicialmente ao Ocidente, fazendo com que a história da Matemática apresente assim avanços e retrocessos em seu curso, naquilo que por vezes é denominado de um percurso dialético, não- linear.

Na Álgebra, contida no seu livro intitulado Lilavati, o grande Bhaskara utiliza progressões junto com as novas técnicas introduzidas pelos árabes (BALL, 1960). Sua utilização, entretanto, já é de uma natureza crescentemente simbolizada. A Álgebra só chegaria à Europa após a morte de Bhaskara II, já no ano de 1202, através do célebre livro de Leonardo Fibonacci (1170 – 1240), também conhecido como Leonardo de Pisa, o *Liber Abaci*, ou Livro dos Cálculos. Traduzido, algumas vezes, de forma equivocada, como o Livro do Ábaco, é comum que se seja tentado a pensar tratar-se tal obra de um compêndio de regras de utilização do “ábaco”, antigo instrumento oriental utilizado também nos cálculos.

A mensagem, porém, do texto de Leonardo de Pisa é realmente a missão de introduzir o sistema decimal, os algarismos arábicos e as novas técnicas da Álgebra entre os comerciantes da Europa. O impacto deste importante livro no pensamento matemático europeu foi tremendo, ainda que não tenha ele se tratado de uma obra verdadeiramente original, mas da compilação de ensinamento dos árabes, dentre eles, o uso de problemas envolvendo sequência. A apresentação da Álgebra no Liber Abaci é, contudo, ainda nitidamente retórica. Ela não incorpora, neste sentido, os enormes avanços conferidos na segunda metade do século anterior por Bhaskara.

Em acordo com Medeiros e Medeiros (2004), deve-se, a Fibonacci uma contribuição semântica no simbolismo algébrico: a introdução, em latim, da corruptela da expressão árabe “el chatayn” de onde se originam os termos correspondentes nas várias línguas ocidentais da palavra “equação” (não da ideia de equação, que é bem anterior). Esta palavra, no entanto, que muito depois viria a ser incorporada até os dias atuais na Matemática, passou uns 250 anos até tornar-se de uso generalizado entre os matemáticos.

Verificamos que no campo semântico, a história da Matemática apresenta seus avanços e retrocessos (RESNIKOFF & WELLS, 1984). Assim, o uso de problemas envolvendo sequências, com o passar do tempo, recebeu várias denominações diferentes, até estabelecer-se, efetivamente, a partir do século XV como “Progressão Aritmética e Progressão Geométrica”. Os Elementos (primeira edição 1482) de Euclides apresenta 465 proposições distribuídas em treze livros, e é no livro VIII que encontramos as Progressões Aritméticas e Progressões Geométricas relacionadas, de forma que, se temos uma proporção contínua a : b = b : c = c : d, então a, b, c, d formam uma Progressão Geométrica.

Sabemos que os conceitos matemáticos surgiram de problemas práticos decorrentes da vida cotidiana ou de questões teóricas que envolveram as mentes de inúmeros matemáticos ao longo da história. Nas narrativas históricas da Matemática encontram-se também aspectos referentes a comportamentos, e atitudes inerentes à condição humana. Conhecer as manifestações que tratam dos processos criativos deve permitir ao aluno um envolvimento na construção histórica do conhecimento Matemático, superando a visão de uma matemática como um produto pronto e acabado.

Considerações finais

A história da matemática como metodologia de ensino leva para a sala de aula questões relativas às necessidades humanas que deram origem a conceitos matemáticos e às produções teóricas consequentes das abstrações e generalizações obtidas. O grande desafio para os professores de matemática que procuram fazer uso da história da matemática em sala de aula consiste na transformação das informações históricas obtidas por meio de pesquisas bibliográficas em atividades de ensino que propiciem aos alunos um encontro histórico com o conhecimento matemático e na elaboração de abordagens pedagógicas que favoreçam a reconstrução e assimilação dos conceitos envolvidos nestes conteúdos. O conhecimento da história da matemática é essencial para todo professor desta área, pois mesmo que as informações históricas não tenham aplicação direta em sala de aula, a compreensão do desenvolvimento histórico dos conceitos pode influenciar positivamente as práticas pedagógicas.

A história da matemática na formação do professor pode contribuir na percepção "da natureza da matemática, dos processos de abstração, de generalização e de demonstração, das dimensões estética e ético-política da atividade matemática". Contudo, a grande maioria dos professores que atuam nas escolas não teve em sua formação disciplinas referentes à história da matemática, cabendo a eles a busca destes conhecimentos por intermédio de cursos de formação continuada, pesquisas bibliográficas, etc., Não se conhece completamente uma ciência, a menos que saiba a sua história.

O recurso à história da matemática sozinho não soluciona todos os problemas da Educação Matemática, mas, observa-se que as atividades inspiradas na história motivam os alunos à aprendizagem, humanizam a matemática, conduzem a investigações e contribuem para a compreensão dos conteúdos matemáticos a partir da re-criação ou da re-descoberta de conceitos.

Uma abordagem histórica da construção de conceitos matemáticos pode propiciar uma visão da produção matemática, e revela que a matemática é um produto da cultura humana, mutável com o tempo. O conhecimento da história do desenvolvimento algébrico possibilita a percepção da simbologia algébrica como uma linguagem que facilita a expressão do pensamento matemático. Atividades que contemplem os estágios de evolução podem contribuir para a construção do pensamento algébrico em direção à formalização da linguagem simbólica e, diante disso, amenizar dificuldades relativas à abstração.

À medida que a linguagem algébrica se torna familiar ao aluno, ele pode compreender a função da generalização para a solução de situações problema. As investigações desenvolvidas demonstraram que o recurso à história da matemática na prática pedagógica vai além de um elemento motivador, pois as informações e os problemas históricos permitem reflexões que auxiliam, tanto na formação do professor quanto na dos alunos e ainda podem contribuir para a reelaboração de conceitos matemáticos, neste caso específico, os conceitos algébricos.

Referências

BRUTER, J. P. **Compreender as matemáticas**. As dez lições fundamentais. Lisboa: Instituto Piaget, 2000 (Coleção Ciência e Técnica).

BALL, R. W. **A short account of the history of mathematics**. 2. ed. New York: Dover Publications, 1960.

BAKOS, M. **Como o Egito chegou ao Brasil**. In: **______**. Egiptomania: o Egito no Brasil. São Paulo: Paris Editorial, 2004. p. 15 – 27.

BRANDEMBERG, J. C. & MENDES, I. A. **Problemas históricos e ensino de Matemática** – III EPAEM, Belém, 2005.

BRANDEMBERG, J. C. **Uma análise histórico epistemológica do conceito de grupo**. São Paulo: Livraria da Física, 2010.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Secretaria de Educação Fundamental, Brasília: MEC/SEF, 1998.

BRASIL. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio**. Secretaria de Educação Média e Tecnológica, Brasília: MEC/SEMT, 1999.

BARONI, R. L. S; TEIXEIRA, M. V.; NOBRE, S. R. **A Investigação Científica em História da Matemática e suas Relações com o Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática**. In: BICUDO, M. A. V.; BORBA, M. C. (Orgs.) **Educação Matemática: pesquisa em movimento.** 3. Ed. São Paulo: Cortez, 2009. P. 164-185.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. 2ª Ed. São paulo: Edgard Blücher, 1996

BOYER, C. B. & MERZBACH, U. C. **A history of mathematics**. 2. ed. New York: John Wiley & Sons, 1989.

BOS, H.J.M. **Redefining Geometrical Exactness: Descartes' Transformation of the Early Modern Concept of Construction**. New York: Springer-Verlag, 2001.

BRITO, A. J.; MIORIM, M. A. **A história na formação de professores de matemática: reflexões sobre uma experiência**. Anais do III Seminário Nacional de História da Matemática, 1999.

BRITO, A. J.; MIGUEL, A. **A História da Matemática na Formação do Professor de Matemática.** Cadernos CEDES – História e Educação Matemática. Campinas: Papirus, n.40, 1996, p.74-61.

BUNT, L.; JONES, P.; BEDIENT, J. **The historical roots of elementary mathematics**. 2. ed. New York: Dover Publications, 1988.

CAJORI, F. **Uma história da matemática**. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda., 2007.

CHACE, A. B. **The Rhind Mathematical Papyrus. Reston: The National Council of Teachers of Mathematics**, 1929.

DANTE, L. R**. Didática da resolução de problemas de matemática**. 2. ed. São Paulo: Ática, 1991.

D'AMBROSIO, U. **Educação Matemática: da teoria à prática**. Campinas, SP: Papirus, 1996.

D'AMBROSIO. U. **Educação Matemática: da teoria à prática**. 23ª ed. Campinas, São Paulo: Papirus, 2012.

D'AMBROSIO. U. **Diálogo com um educador**. Revista História da Matemática para professores, Natal (RN), Ano 1, n.0, Mar. 2013.

DEVLIN. K. **The Man of Numbers: Fibonacci's arithmetic revolution**. New York, Walker & Company, 2011.

DUBY, Georges. **Atlas historique mondial**. Paris: Larousse, 2003.

EVES, H. **Introdução à História da matemática**. Tradução Hygino H. Domingues. Campinas, São Paulo: Editora da UNICAMP, 2008.

FAUVEL, J. MAANEN, J. V. **History in mathematics education**. The ICMI Study, Holanda: Kluwer Academic Publishers, 2000.

FISCHBEIN, Efrain. **Intuition in science and mathematics**. An Educational Approach. Holanda: Kluwer Academics Publichers, 1987.

FIORENTINI, D.; MIORIM, M. A. & MIGUEL, A. **Contribuição para um Repensar a Educação Algébrica Elementar**. Revista: Pro-posições. Campinas: Cortez, n.1, V. 4, 1993, p.78-91.

FOSSA, J. A. **Ensaios sobre a Educação Matemática.** Belém: EDUEPA, 2001. 181p. (Série Educação; n.2)

FOSSA, J. A. **Os primórdios da teoria dos números**. Natal: EDUFRN, 2010. [Volume 1 do Arquivo para a história da teoria dos números e da lógica.]

GABAGLIA, E. de B.R. **O mais antigo documento mathematico conhecido (papyro Rhind)**. Rio de Janeiro: Imprensa Americana, 1899.

GAZIRE, Eliane Scheid. **Perspectivas da resolução de problemas em educação matemática**. 1988. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Rio Claro, 1988.

IEZZI, G., DOLCE, O. DEGENSZAIN, D. PÉRIGO, R. ALMEID, N. na **Coleção Conecte – Matemática: Ciência e aplicações 1**. Editora Saraiva. 2010.

Ifrah, G. **História universal dos algarismos (tomo 1)**. Rio de Janeiro: Editora Nova Fronteira. 1997.

GILLINGS, R. J. **Mathematics in the Time of the Pharaohs**; Dover Publication, 1982.

GUTIERRE, L. S. **História da Matemática e suas potencialidades pedagógicas**. In: FOSSA, J. A. (org.). **Presenças Matemáticas.** Natal, RN: EDUFRN, Editora da UFRN, 2004. 260p.

HEATH, T. L. **Diophantus of Alexandria: A Study in the History of Greek Algebra**. Forgotten, 2012. Publicação original 1910.

JOSEPH, G. **The crest of the peacock: non-European roots of mathematics**, I. B. London: Tauris & Co Ltd. Publishers, 1991.

KLINE, M. **Mathematical thought from ancient to modern times**. 2. ed. Oxford: Oxford University Press, 1990. v. 1.

LAGARTO, M. J. **Disponível em: www.malhatlantica.pt/mathis/Egipto/Rhind/Rhind.htm**, acessado em 20/02/2010.

LINS, R. C.; GIMENEZ, J. **Perpectiva em Aritmética e Álgebra para o século XXI**. 3ª Ed. São Paulo: Papirus, 1997.

LORENZATO. S. **Para aprender matemática**. Campinas, SP: Autores Associados. 2006.

LUMPKIN, B. From **Egypt to Benjamin Banneker: African Origins of False Position Solutions**. Vita Mathematica, Toronto, ON, 1992.

KLEIN, J. **Greek Mathematical Thought and the Origin of Algebra**. Trad, por Eva Brann. New York: Dover, 1968

MALATO, M. L. **A academia de Platão e a matriz das academias modernas**. Notandum, 19, p.5-16. Universidade do Porto, 2009.

MAFRA, J. R. e S. MENDES, I. A. **História no Ensino da Matemática Escolar: o que pensam os professores**. In: CUNHA, E. R; SÁ, P. F. de (Orgs). **Ensino e formação docente: propostas, reflexões e práticas**. Belém: [s.n.], 2002. 150p.

MEDEIROS, A. e MEDEIROS, C. F. **O método da falsa posição na história e na educação matemática**. Ciência & Educação Vol. 10 N.3, pp-545-557, 2004.

MENDES, I. A. **Modelagem matemática como suporte metodológico em cursos de formação de professores**. Monografia (Especialização em Ensino de Ciências e Matemática). Universidade Federal do Pará. Belém, 1995.

MENDES, I. A. **O Uso da história no Ensino da Matemática: reflexões teóricas e experiências**. Belém, 2001.

MENDES, I. A. **Ensino da Matemática por atividades: Uma aliança entre o construtivismo e a história da matemática**. Lisboa: Associação de Professores de Matemática - APM, 2001 (Colecção Teses).

MENDES, I. A. **Antropologia dos números. Significado social, histórico e cultural**. Rio claro: SBHMat, 2003. (Preprint). (Coleção História da Matemática para Professores).

MENDES, I. A. **A investigação histórica como agente da cognição matemática na sala de aula**. In: MENDES, I. A.; FOSSA, J. A.; VALDÉS, J. E. N. **A história como um agente de cognição na Educação Matemática**. Porto Alegre: Ed. Sulina, 2006.

MENDES, I. A. (a). **Matemática e investigação em sala de aula: tecendo redes cognitivas na aprendizagem**. 2. ed. revista e ampliada. São Paulo: Ed. Livraria da Física, 2009 (Coleção Contextos da Ciência).

MENDES, I. A. (b). **Investigação histórica no ensino da Matemática**. Rio de Janeiro: Ed. Ciência Moderna, 2009.

MENDES, I. A. **A Investigação Histórica na Formação de Professores de Matemática**. X ENEM, Salvador - BA, 2010.

MIATELLO, L. (2009). **The difference 5 ½ in a problem of rations from the Rhind mathematical papyrus**. ScienceDirect. Historia Mathematica. Disponível em www.sciencedirect.com acessado em 20/06/2009.

MIGUEL, A.; MENDES, I. A. **Mobilizing histories in mathematics teacher education: memories, social practices, and discursive games**. ZDM Mathematics Education (2010) 42: 381–392. Springer Berlin/Heidelberg, 2010.

MIGUEL, A. **Três estudos sobre História e Educação Matemática.** 1993. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade de Campinas, 1993.

MIGUEL, A.; MIORIM, M. A. **História na Educação Matemática: propostas e desafios**. Belo Horizonte, MG: Autêntica, 2005.

MIGUEL et al. **História da matemática em atividades didáticas**. 2ª ed. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

MUÑOZ, B.; MORAL, E. F.; BENITO, M. S.; **Versão castelhana do *Aritmética* de Diofanto**. 2007.

PLATÃO. **República**. Tradução por J. Guinsburg. São Paulo: Difusão Européia do Livro, 2005.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas**. Rio de Janeiro: Interciência, 1978.

PONTE, J. P. da. (2009). **Números e álgebra no currículo escolar**. Grupo de Investigação DIF-Didáctica e Formação. Centro de Investigação em Educação. Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa. Disponível em: http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/DA/DA-TEXTOS/Ponte(Caminha).rtf acessado em 17/06/2009.

RADFORD, L. - **'L'émergence et le développement conceptuel de F algèbre" in Actes de la première université d'été européenne**. Montpellier: IREM de Montpellier, 1993

RESNIKOFF, H. L. & WELLS JR, R. O. **Mathematics in civilization**. 2. ed. New York: Dover Publications, 1984.

SIGLER. L. E. **Fibonacci's Liber Abaci: a translation into moderno English of Leonardo Pisano's Book of Calculation**. Springer, 2002.

SMITH, D. E. **History of mathematics**. New York: Dover Publications, 1958.

STRUIK, D. J. **História Concisa das Matemáticas**. Gradiva. Lisboa: 1989.

ROBINS, G. & SHUTE, C. **The Rhind Mathematical Papyrus**, an ancient Egyptian text. Nova York: Dover Publications, 1987. p. 59.

ROQUE, T. **História da Matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas**. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

SAMPAIO, F. A. **Coleção Jornadas –** ***Matemática***. Editora Saraiva. 2010.

SILVEIRA, J. F. P. da**. Resolução de problemas**. Publicado em 14.01.2001. Disponível em: http://www.mat.ufrgs.br/~portosil/resu1.html. Acessado em: 14 fev 2010.

SILVA, C. M. S. **A história da matemática e os cursos de formação de professores**. In: CURY, H. N. Formação de professores de matemática: uma visão multifacetada. Porto Alegre: EDIPUCRS, 2001. p. 129 - 165.

VALLEJO, P. M. **Manual de avaliação escolar**. Coimbra: Almedina, 1979.

VALENTE, W. R. **Euclides Roxo e o movimento internacional de modernização da matemática escolar**. In: **______**. Euclides Roxo e a modernização do ensino de matemática no Brasil. Brasília: Editora Universidade de Brasília, 2004. p. 45 – 83.

TOLEDO, M. **Didática de matemática:** como dois e dois: a construção da Matemática. São Paulo: FTD, 1997.