



Universidade Federal do Pará
Instituto de Educação Matemática e Científica
Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas

MÔNICA SUELEN FERREIRA DE MORAES

**UM ESTUDO SOBRE AS IMPLICAÇÕES DOS OBSTÁCULOS
EPISTEMOLÓGICOS DE LIMITE DE FUNÇÃO EM SEU ENSINO E
APRENDIZAGEM**

**BELÉM (PA)
2013**

MÔNICA SUELEN FERREIRA DE MORAES

**UM ESTUDO SOBRE AS IMPLICAÇÕES DOS OBSTÁCULOS
EPISTEMOLÓGICOS DE LIMITE DE FUNÇÃO EM SEU ENSINO E
APRENDIZAGEM**

*Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas do Instituto de Educação Matemática e Científica da Universidade Federal do Pará, como requisito parcial para obtenção do título de **MESTRE EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICAS** – área de concentração **Educação Matemática**, sob orientação da **Prof. Dra. Maria José de Freitas Mendes**.*

**UFPA
BELÉM (PA)
2013**

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)
Biblioteca Central/UFPA, Belém-PA

Moraes, Mônica Suelen Ferreira de, 1989 -

Um estudo sobre as implicações dos obstáculos epistemológicos de limite de função em seu ensino e aprendizagem / Mônica Suelen Ferreira de Moraes. — 2013

Orientadora: Maria José de Freitas Mendes

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Pará, Instituto de Educação Matemática e Científica, Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática, Belém, 2013.

1. Cálculo. 2. Matemática – Estudo e ensino. I. Título.

CDD - 23. ed. 515

Banca Examinadora

Prof. Dra. Maria José de Freitas Mendes (Orientadora)

Prof. Dr. Iran Abreu Mendes (Membro Externo)

Prof. Dr. Miguel Chaquiam (Membro Externo)

Prof. Dr. João Cláudio Brandemberg (Membro Interno)

Prof. Dra. Maria Lúcia Pessoa Chaves Rocha (Suplente)

*Ao meus Pais e seus Companheiros, Sérgio
e Isabel, Cláudia e Daniel, que apesar de
todas as dificuldades conseguiram dar o que
há de mais precioso para um filho: os
princípios familiares.*

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a **Deus**, por me fortalecer e guiar por este caminho de conquista e superação.

Agradeço a minha orientadora **Maria José de Freitas Mendes**, a luz que iluminou meu caminho pela longa estrada do conhecimento. Obrigada pela confiança e dedicação.

Aos meus amados pais e seus companheiros, **Sérgio e Isabel, Cláudia e Daniel**, que me motivaram e auxiliaram nos momentos de dificuldades e desânimo, consentindo assim, essa conquista.

Aos meus **irmãos e parentes** que incentivaram e contribuíram de alguma forma para a realização deste trabalho compartilhando suas experiências e ajudando sempre que solicitados.

Ao meu namorado, **Dailson Costa**, por sua compreensão, seu incentivo incondicional e seu amor que me encorajou nesta conquista.

A **Universidade Federal do Pará (UFPA)** e ao **Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas (PPGECM)** pela oportunidade.

Aos professores **Iran Abreu Mendes, Miguel Chaquiam, João Cláudio Brandemberg e Maria Lúcia Pessoa Chaves Rocha** pelas contribuições dadas e pela extrema competência na avaliação deste trabalho.

Aos **alunos de Cálculo I**, sem os quais este trabalho não seria possível.

Aos **professores do curso de Mestrado**, pelas contribuições e por terem me possibilitado ampliar meus conhecimentos.

RESUMO

As dificuldades em Matemática no ensino superior têm sido muito discutidas em diversos estudos em Educação Matemática. Concernentes ao Cálculo, as pesquisas apontam para o fato de que o ensino e a aprendizagem das noções envolvidas apresentam muitas questões que merecem ser aprofundadas. Assim, temos como questão problema desta pesquisa: quais obstáculos epistemológicos estão presentes no processo de construção do conceito de limite de função real a valores reais? A partir do exposto, nos propomos a identificar os obstáculos epistemológicos (BACHELARD, 1996; BROUSSEAU, 1986) no processo de construção do conceito de limite de função real de uma variável real a partir de obstáculos listados por Cornu (1983), Sierpinska (1985) e Rezende (1994). Para alcançar esse objetivo, utilizamos a observação das aulas da disciplina Cálculo I e questionários para a coleta de dados que nos permitiram analisar se os obstáculos identificados pelos autores supracitados também estão presentes e de que modo aparecem no alunado atual de nossa região. A investigação realizada está focada no contexto das Licenciaturas em Matemática das IES públicas de Belém, mais especificamente, com alunos que estavam cursando a disciplina Cálculo I da Universidade Federal do Pará (UFPA), Universidade do Estado do Pará (UEPA) e Instituto Federal do Pará (IFPA). O referencial teórico utilizado nesta investigação constitui-se de um levantamento histórico do conceito de limite, fundamental para a identificação dos obstáculos concernentes ao desenvolvimento desse conceito; um panorama das pesquisas quanto ao ensino e a aprendizagem de limite, retratando as principais dificuldades e os diferentes modos de minimizá-las; e, uma discussão quanto aos obstáculos epistemológicos identificados por outros autores. Evidenciamos, com isso, que os obstáculos epistemológicos ainda estão presentes entre os discentes. Na tentativa de superá-los oferecemos alguns apontamentos para o ensino de limite de função real a uma variável real, apresentados em linhas temáticas, entrelaçando os pressupostos da história e da didática da matemática.

Palavras-chave: Cálculo I. Limite de função. Obstáculo epistemológico. História da Matemática. Didática da Matemática.

ABSTRACT

The difficulties in mathematics in higher education have been much discussed in several studies in mathematics education. Concerning the calculation, the research points to the fact that the teaching and learning of the concepts involved have many issues that deserve to be deepened. So we have the problem of this research question: what epistemological obstacles are present in the construction of the concept of limit of a real function real values? From the above, we propose to identify the epistemological obstacles (BACHELARD, 1996; BROUSSEAU, 1986) in the construction of the concept of limit real function of a real variable from obstacles listed by Cornu (1983), Sierpiska (1985) and Rezende (1994). To achieve this goal, we use the observation of lessons of discipline Calculus I and questionnaires to collect data that allowed us to analyze the barriers identified by these authors are also present and how they appear in the current student body of our region. The research is focused on the context of the training of mathematics teachers of public HEIs in Bethlehem, more specifically, with students who were attending the course Calculus I, Universidade Federal do Pará (UFPA), Universidade do Estado do Pará (UEPA) and the Instituto Federal do Pará (IFPA). The theoretical framework used in this research consists of a historical survey of the concept of limit is fundamental to the identification of obstacles concerning the development of this concept, an overview of research on the teaching and learning of limit, portraying the main difficulties and the different ways to minimize them, and a discussion about the epistemological obstacles identified by other authors. Evidence, with it, the epistemological obstacles are still present among the students. In an attempt to overcome them offer some pointers for teaching limit real function to a real variable, presented in thematic lines, intertwining the assumptions of history and didactics of mathematics.

Keywords: Calculus I. Limit function. Epistemological obstacle. History of Mathematics. Didactics of Mathematics.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Paradoxo da <i>Dicotomia</i>	22
Figura 2 – Paradoxo de <i>Aquiles e a tartaruga</i>	22
Figura 3 – Paradoxo do <i>Estádio I</i>	23
Figura 4 – Paradoxo do <i>Estádio II</i>	23
Figura 5 – Quadratura do círculo	25
Figura 6 – Cálculo da área sob a parábola	27
Figura 7 – Historiador x Epistemólogo	61
Figura 8 – Obstáculos relativos à noção de limite	73
Figura 9 – Descritor de análise dos obstáculos.....	88

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Obstáculos epistemológicos de limite.....	84
Quadro 2 – Questão1 do questionário	90
Quadro 3 – Questão 2 do questionário	90
Quadro 4 – Questão 3 do questionário	91
Quadro 5 – Questão 4 do questionário	92
Quadro 6 – Questão 5 do questionário	93
Quadro 7 – Resposta da 1ª questão do aluno C_6	95
Quadro 8 – Resposta da 1ª questão do aluno C_7	95
Quadro 9 – Resposta da 1ª questão do aluno B_6	96
Quadro 10 – Resposta da 1ª questão do aluno B_9	96
Quadro 11 – Resposta da 1ª questão do aluno B_{11}	96
Quadro 12 – Resposta da 1ª questão do aluno C_5	96
Quadro 13 – Resposta da 1ª questão do aluno A_9	97
Quadro 14 – Resposta da 1ª questão do aluno B_7	98
Quadro 15 – Resposta da 1ª questão do aluno C_2	98
Quadro 16 – Resposta da 1ª questão do aluno C_9	98
Quadro 17 – Resposta da 1ª questão do aluno A_6	99
Quadro 18 – Resposta da 1ª questão do aluno A_{11}	99
Quadro 19 – Resposta da 2ª questão do aluno A_6	100
Quadro 20 – Resposta da 2ª questão do aluno B_5	100
Quadro 21 – Resposta da 2ª questão do aluno B_7	100
Quadro 22 – Resposta da 2ª questão do aluno C_1	100
Quadro 23 – Resposta da 2ª questão do aluno C_8	100
Quadro 24 – Resposta da 2ª questão do aluno C_7	101
Quadro 25 – Resposta da 2ª questão do aluno A_5	101

Quadro 26 – Resposta da 2ª questão do aluno C_2	102
Quadro 27 – Resposta da 2ª questão do aluno C_4	102
Quadro 28 – Resposta da 2ª questão do aluno C_6	102
Quadro 29 – Resposta dos alunos A_5 , A_9 e A_{11} para o item (a) da 4ª questão.....	104
Quadro 30 – Resposta do aluno B_6 para o item (a) da 4ª questão	105
Quadro 31 – Resposta do aluno C_7 para o item (a) da 4ª questão	105
Quadro 32 – Resposta do aluno C_8 para o item (a) da 4ª questão	105
Quadro 33 – Resposta do aluno A_3 para o item (a) da 4ª questão.....	105
Quadro 34 – Resposta do aluno A_4 para o item (a) da 4ª questão	105
Quadro 35 – Resposta do aluno A_7 para o item (a) da 4ª questão.....	105
Quadro 36 – Resposta do aluno B_7 para o item (a) da 4ª questão	106
Quadro 37 – Resposta do aluno C_2 para o item (a) da 4ª questão	106
Quadro 38 – Resposta do aluno B_4 para o item (a) da 4ª questão	106
Quadro 39 – Resposta do aluno B_8 para o item (a) da 4ª questão.....	106
Quadro 40 – Resposta do aluno B_{11} para o item (a) da 4ª questão.....	106
Quadro 41 – Resposta do aluno B_{12} para o item (a) da 4ª questão.....	106
Quadro 42 – Resposta do aluno C_1 para o item (a) da 4ª questão	106
Quadro 43 – Resposta do aluno C_6 para o item (a) da 4ª questão	107
Quadro 44 – Resposta do aluno C_9 para o item (a) da 4ª questão	107
Quadro 45 – Resposta do aluno A_6 para o item (b) da 4ª questão.....	108
Quadro 46 – Resposta do aluno A_{11} para o item (b) da 4ª questão	108
Quadro 47 – Resposta do aluno A_3 para o item (b) da 4ª questão.....	109
Quadro 48 – Resposta do aluno A_4 para o item (a) da 5ª questão.....	110
Quadro 49 – Resposta do aluno B_2 para o item (a) da 5ª questão.....	110
Quadro 50 – Resposta do aluno B_{10} para o item (a) da 5ª questão.....	110
Quadro 51 – Resposta do aluno C_7 para o item (a) da 5ª questão	110
Quadro 52 – Resposta do aluno A_1 para o item (c) da 5ª questão	111

Quadro 53 – Resposta do aluno A_8 para o item (c) da 5ª questão	111
Quadro 54 – Respostas dos alunos A_3 , A_9 e C_2 para o item (c) da 5ª questão.....	112
Quadro 55 – Respostas dos alunos A_8 e A_9 para o item (d) da 5ª questão	112
Quadro 56 – Respostas dos alunos A_6 , A_8 e C_9 para o item (e) da 5ª questão	113
Quadro 57 – Respostas dos alunos A_9 , A_{10} , A_8 e C_9 para o item (e) da 5ª questão	113
Quadro 58 – Relação dos eixos temáticos com os obstáculos epistemológicos de limite de função.....	119

SIGLAS E ABREVIATURAS

CAPES	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
C. H. I. C	Classificação Hierárquica, Implicativa e Coesitiva
CNPq	Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico
CEFET-MG	Centro Federal de Educação tecnológica de Minas Gerais
FATEC-SP	Faculdade de Tecnologia de São Paulo
GECEM	Grupo de Estudos em Cognição e Educação Matemática
GEDIM	Grupo de Estudos e Pesquisas da Didática da Matemática
GEHEM	Grupo de Estudos e Pesquisa em História e Ensino da Matemática
IA	Inteligência Artificial
IEMCI	Instituto de Educação Científica e Matemática
IES	Instituição de Ensino Superior
IFPA	Instituto Federal do Pará
MTCS	Modelo Teórico dos Campos Semânticos
NAAD	Núcleo de Avaliação, Apoio e Desenvolvimento do Docente
NTE	Novas Tecnologias Educacionais
PPGECM	Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas
PPGECT	Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica
PPP	Projetos Políticos Pedagógicos
PROCAD	Programa Nacional de Cooperação Acadêmica
PUC-PR	Pontifícia Universidade Católica do Paraná
PUC-RS	Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul
SAAW	Sistema de Aprendizado Através da Web

STI	Sistema Tutorial Inteligente
TIC	Tecnologias de Informação e Comunicação
UDESC	Universidade Estadual de Santa Catarina
UEPA	Universidade do Estado do Pará
UFPA	Universidade Federal do Pará
UFSC	Universidade Federal de Santa Catarina

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO.....	16
1. DESENVOLVIMENTO HISTÓRICO DO CONCEITO DE LIMITE DE FUNÇÃO.....	20
2. ALGUMAS PESQUISAS SOBRE O ENSINO E A APRENDIZAGEM DE LIMITE.....	39
3. OBSTÁCULOS EPISTEMOLÓGICOS.....	60
3.1. DE BACHELARD À BROUSSEAU.....	60
3.2. QUADROS TEÓRICOS DE CORNU, SIERPINSKA E REZENDE.....	66
4. PROCEDIMENTOS OPERACIONAIS DA PESQUISA.....	87
4.1. QUANTO À OBSERVAÇÃO.....	89
4.2. QUANTO AO QUESTIONÁRIO.....	90
5. ANÁLISE E DESDOBRAMENTOS DA PESQUISA.....	94
5.1. ANÁLISE DOS QUESTIONÁRIOS.....	94
5.2. UM OLHAR SOBRE AS PESQUISAS EM LIMITE À LUZ DAS OBSERVAÇÕES DAS AULAS DE CÁLCULO.....	114
6. CONSIDERAÇÕES E DESDOBRAMENTOS DA PESQUISA.....	120
REFERÊNCIAS.....	126
APÊNDICE A – QUESTIONÁRIO.....	130

INTRODUÇÃO

A minha formação inicial, Licenciatura em Matemática, ocorreu pela Universidade do Estado do Pará (UEPA). A escolha por ser professora de Matemática aconteceu ainda durante o Ensino Fundamental, pois foi a disciplina que tive mais facilidade de aprendizado, fato que ajudou a determinar minha escolha pela profissão.

No decorrer da graduação fiz parte do grupo de pesquisa intitulado Grupo de Estudos em Cognição e Educação Matemática (GECEM), da UEPA, onde tive a oportunidade de articular e dialogar com professores de diferentes modalidades de ensino e diferentes regiões do estado do Pará. Além disso, a participação no grupo oportunizou discussões de natureza didática que eram novidades para a minha formação inicial.

Durante a formação inicial também tive como experiência a monitoria em disciplinas do ensino superior, Álgebra Linear e Cálculo I, me possibilitando reflexões, ainda que inibidas, sobre o processo de ensino e de aprendizagem. A partir dessa formação docente um pensamento, dentre vários, se tornou mais fecundo: a Matemática pode contribuir à formação do aluno enquanto cidadão, fornecendo meios para progredir no trabalho que futuramente irá desempenhar. Com esse pensamento, se mostrou muito importante o ingresso no curso de mestrado¹ no Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas (PPGECM) do Instituto de Educação Científica e Matemática (IEMCI), da Universidade Federal do Pará (UFPA).

Cursando o mestrado tive a possibilidade de estar presente em diversos grupos de pesquisa que somaram, e muito, para minha formação enquanto professora pesquisadora. Dentre eles temos: (Trans)formação, se dedica à pesquisa qualitativa na área de formação e desenvolvimento profissional de professores de Ciências e Matemática; Grupo de Estudos e Pesquisas da Didática da Matemática (GEDIM), focado nos estudos e pesquisas ligados à didática francesa; Grupo de Estudos e Pesquisa em História e Ensino da Matemática (GEHEM), grupo no qual genuinamente faço parte, criado em meados do meu curso de mestrado. O GEHEM desenvolve pesquisas sobre a história da Matemática, visando algumas perspectivas

¹ Como bolsista do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq).

em pesquisas históricas voltadas ao ensino da Matemática ligadas à evolução de conceitos e à formação de professores.

O mestrado ainda me possibilitou a participação no Programa Nacional de Cooperação Acadêmica (PROCAD)², no qual pude cursar um semestre do meu curso no Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica (PPGECT) na Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC). Essa experiência contribuiu de forma significativa à minha formação enquanto educadora Matemática, pois convivi com professores e pesquisadores de outra região, em outro contexto, estabelecendo diferentes relações teóricas sobre o processo de ensino e de aprendizagem da Matemática.

Ser aluna deste programa me oportunizou o amadurecimento profissional seja nas interlocuções realizadas nos grupos de pesquisa, nas disciplinas e até mesmo nos diversos encontros com profissionais muito bem formados e colegas de pesquisa nos intervalos regados à café; seja, também, no desenvolvimento da pesquisa, na busca do novo (para mim), no movimento constante de saída e retorno à minha zona de conforto.

Frente a esta formação, nos propomos a pesquisar no campo da Educação Matemática, sendo esta uma área de pesquisa educacional, cujo objeto de estudo é a compreensão, interpretação e descrição de fenômenos referentes ao ensino e à aprendizagem da Matemática, nos diversos níveis da escolaridade, quer seja em dimensão teórica ou prática. Pais (2008) assegura que a consolidação dessa área de pesquisa, é relativamente recente, quando comparada com a história milenar da Matemática, o seu desenvolvimento recebeu grande impulso, nas últimas décadas, dando origem a várias teorias, cada qual valorizando determinadas temáticas educacionais do ensino da Matemática.

Pais (2008) ainda informa que entre as várias tendências que compõem a Educação Matemática, no Brasil, temos a Didática da Matemática que se caracteriza pela influência francesa, cujo objeto de estudo é a elaboração de conceitos e teorias que sejam compatíveis com a especificidade educacional do saber escolar matemático, procurando manter vínculos com a formação de conceitos matemáticos, tanto em nível experimental da prática pedagógica, como em nível de pesquisa acadêmica.

² Financiada pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES).

As dificuldades em Matemática no ensino superior têm sido muito discutidas em diversos estudos em Educação Matemática. Concernentes ao Cálculo, várias pesquisas apontam para o fato de que o ensino e a aprendizagem das noções envolvidas apresentam muitas questões que merecem ser aprofundadas.

Sabemos ainda que nos cursos de Matemática do ensino superior há um alto índice de reprovação e desistência da disciplina de Cálculo, a qual está presente no currículo de cursos de graduação, tais como engenharia, física, administração, computação, entre outros (cf. SANTOS, 2005). Sabemos que muitas dessas dificuldades de aprendizagem estão relacionadas com o entendimento da noção de limite. Com isso, direcionamos a temática dessa pesquisa de mestrado para o âmbito do Cálculo, particularmente para limite de função.

Assim, temos como questão problema desta dissertação: quais obstáculos epistemológicos estão presentes no processo de construção do conceito de limite de função real a valores reais? A partir do exposto, nos propomos a identificar os obstáculos epistemológicos no processo de construção do conceito de limite de função real de uma variável real a partir de obstáculos apresentados por Cornu (1983), Sierpinska (1985) e Rezende (1994). Para alcançar esse objetivo, utilizamos a observação das aulas da disciplina Cálculo I e questionários para a coleta de dados que nos permitiram analisar se os obstáculos identificados pelos autores supracitados também estão presentes e de que modo aparecem no alunado atual de nossa região.

Esta investigação está focada no contexto das Licenciaturas em Matemática das IES públicas de Belém, mais especificamente, com alunos que estão cursando a disciplina Cálculo I da Universidade Federal do Pará (UFPA), Universidade do Estado do Pará (UEPA) e Instituto Federal do Pará (IFPA).

Optamos por organizar este trabalho em 6 (seis) capítulos. Os três primeiros capítulos evidenciam o referencial teórico abarcado para realização dessa pesquisa. No primeiro, apresentamos um breve histórico do desenvolvimento do conceito de limite de função, visto que, os obstáculos epistemológicos, por serem constitutivos do conhecimento, provavelmente apresentam vestígios na história. Este capítulo foi essencial para o nosso amadurecimento, enquanto pesquisadora, pois nos possibilitou aprofundamento quanto ao desenvolvimento do conceito de limite no âmbito da história.

No segundo capítulo, trazemos algumas pesquisas da área objetivando oferecer um quadro de abordagem do ensino e da aprendizagem de Cálculo no ensino superior, que dificuldades estão sendo apontadas e que sugestões estão sendo indicadas a fim de minimizá-las. Um panorama dos principais entraves encontrados no ensino de limite se mostra muito relevante, visto que a identificação dos obstáculos epistemológicos, em nossa pesquisa, se realizou a partir dos obstáculos de aprendizagem demonstrados pelos estudantes participantes da investigação.

No capítulo seguinte, referimo-nos às implicações dos obstáculos epistemológicos no ensino e aprendizagem de limite de função, aludindo aos marcos teóricos adotados para esta pesquisa e os obstáculos por eles verificados. Os obstáculos elucidados nesse capítulo foram de grande relevância na análise, pois foi a partir deles que nosso objetivo pôde ser alcançado.

No quarto capítulo, descrevemos os procedimentos operacionais da pesquisa, como optamos por realizá-la e quais instrumentos adotamos para a coleta e análise dos dados que a incorporam.

No quinto capítulo analisamos os dados coletados nos questionários junto aos sujeitos de nossa pesquisa, juntamente com o referencial teórico adotado, cruzando ideias e concepções acerca dos obstáculos epistemológicos do conceito de limite. Trazemos também uma reflexão acerca dos resultados de pesquisa, encontrados em nosso referencial teórico com as observações das aulas de Cálculo realizadas. Com isso, são apresentados os desdobramentos dessa investigação, que constitui-se em sugestões para o ensino de limite a partir da identificação dos obstáculos epistemológicos com o objetivo de superá-los.

Por fim, no último capítulo, fazemos algumas considerações quanto à investigação realizada e apresentamos alguns apontamentos para futuras pesquisas. Dessa forma procuramos trazer contribuições para o campo da Educação Matemática, pelo enfoque na exploração epistemológica das informações históricas do conceito de limite, apontando possibilidades de superação das dificuldades encontradas por professores e alunos no ensino de limite, apoiado em princípios epistemológicos e didático-pedagógicos que envolvem relações entre pressupostos da história e da didática da Matemática na expectativa de propor uma Educação Matemática com base nessas conexões teóricas.

1. DESENVOLVIMENTO HISTÓRICO DO CONCEITO DE LIMITE DE FUNÇÃO

O desenvolvimento do Cálculo seguiu um caminho longo e irregular e, no sentido mais formal, foi moldado a partir do século XVII. No entanto, as questões das quais surgiu haviam sido colocadas mais de dezessete séculos antes do começo de nossa era. Desde sua origem até sua formalização, o seu desenvolvimento se deu advindo das ideias de vários estudiosos e temos como objetivo evidenciar neste breve histórico suas principais contribuições.

O limite é um conceito fundamental do Cálculo, visto que seus principais conceitos, derivada e integral, são definidos em termos do limite. Boyer (1959) observa que tais definições são agora tão claramente tratadas que é fácil esquecer como estes conceitos foram desenvolvidos ao longo da história.

Durante um longo período, a noção de limite permaneceu indefinida. As discussões em torno do infinito, que eram de cunho filosófico, originaram o estabelecimento desta noção, que, inicialmente, era entendida com a intuição geométrica subjetiva e bastante indefinida (BOYER, 1959).

O estudo da Matemática grega mostra como as ideias originais relacionadas ao Cálculo têm início em considerações que envolvem tanto noções de grandezas discretas quanto de grandezas contínuas, servindo ambas para se chegar aos resultados do Cálculo. Boyer (1959) afirma que com a crise dos incomensuráveis, que o início pode ser situado na escola pitagórica, surgiu outra grande polêmica muito fértil entre os filósofos pré-socráticos. O problema da incomensurabilidade entre magnitudes gerou algumas concepções polêmicas acerca da natureza do mundo físico, como a doutrina atomística, defendida por Demócrito (c. 400 a.C.), que propunha a existência do infinitamente pequeno compondo o ser das coisas. De acordo com Baron & Bos (1985, p. 19, v. 1), para os atomistas o universo era composto de átomos e de espaço vazio, sendo este “espaço infinitamente em tamanho e os átomos infinitamente em número”.

Segundo Boyer (1959), os egípcios sabiam encontrar o volume da pirâmide de base quadrada, mas foi dado a Demócrito o mérito de ser o primeiro matemático grego a determinar o volume da pirâmide e do cone pela generalização do volume de pirâmides de base poligonal qualquer. O autor ainda assinala que para “obter o volume do cone, bastava uma inferência natural obtida pelo aumento, repetido

indefinidamente, do número de lados do polígono regular formando a base da pirâmide” (p. 21) [tradução nossa]. Boyer (1959) aponta Demócrito como o primeiro a falar de infinitesimais, e a considerar a possibilidade de trabalhar com o infinitamente pequeno a fim de recompor o todo.

Segundo Baron & Bos (1985), Plutarco (c. 46-120 a.C.) menciona este dilema proposto por Demócrito em relação às seções paralelas de um cone:

Se cortarmos um cone por um plano paralelo à base [bem próximo à base], o que podemos dizer das superfícies que formam as seções? Elas são iguais ou diferentes? Se elas são diferentes, elas tornarão o cone irregular, cheio de dentes, como degraus, e imparidades; mas se elas são iguais, as seções serão iguais, e parece que um cone terá a propriedade do cilindro de ser constituído por círculos iguais e não diferentes: o que é um grande absurdo (HEATH, 1963, p. 119 *apud* BARON & BOS, 1985, p. 20, v. 1).

Boyer (1959) aponta que Demócrito tinha concebido a noção de sólido como sendo composto de seções planas paralelas à base, utilizou lâminas circulares infinitamente finas para calcular o volume de cilindros e cones, antecipando-se assim ao teorema de Cavalieri.

De acordo com Brolezzi (1996), a teoria dos infinitesimais de Demócrito, e seus seguidores, foi combatida por outra escola filosófica pela influência das ideias de Parmênides de Eléia (c. 530 a.C). Esta doutrina chamava a atenção para os paradoxos e contradições existentes na concepção do mundo físico como composto por partículas infinitamente pequenas e indivisíveis. O pesquisador destaca que foi proposto considerar a imutabilidade e unidade essencial do mundo físico.

Conforme Baron & Bos (1985), lidamos em Matemática com dois tipos de atividades: 1) contagem de elementos discretos, separados e indivisíveis; e, 2) medida de quantidades que são contínuas e infinitamente divisíveis. Baron & Bos (1985) colocam ainda que existem dois tipos de quantidades com as quais a Matemática costuma trabalhar e que têm produzido grande parte dos modelos, o espaço e o tempo. Zenão de Eléia (c. 460 a.C.), aluno de Parmênides, utilizou esses dois tipos de quantidades e desenvolveu o seguinte argumento: ou o tempo e o espaço são infinitamente divisíveis, ou existe um menor elemento indivisível de tempo e de espaço. Em dois dos paradoxos, a *Dicotomia* e *Aquiles e a tartaruga*, Zenão argumentou que se o tempo e o espaço são divisíveis, o movimento seria impossível.

De acordo com Eves (2004), no paradoxo da dicotomia Zenão defendia que se um segmento de reta pode ser subdividido indefinidamente, então o movimento é impossível, pois para alcançar seu percurso total, é preciso alcançar o ponto médio que, por sua vez, um quarto do segmento, e assim por diante, como podemos observar na figura 1.

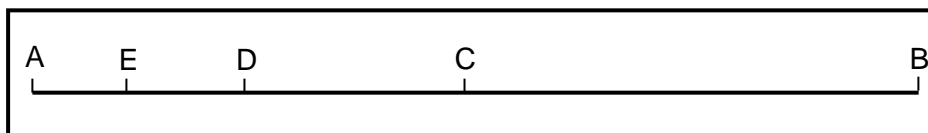


Figura 1: Paradoxo da Dicotomia. Fonte: BARON & BOS, 1985, v.1, p. 23.

No paradoxo de *Aquiles e a tartaruga* o argumento é semelhante:

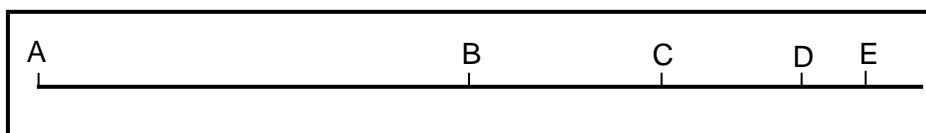


Figura 2: Paradoxo de Aquiles e a tartaruga. Fonte: BARON & BOS, 1985, v.1, p. 23.

Conforme a figura 2, se a tartaruga está em B e Aquiles em A, Aquiles nunca pega a tartaruga, pois quando Aquiles chega no ponto B a tartaruga está em algum ponto C a frente, e quando Aquiles chega em C a tartaruga está em algum ponto D a frente, e assim por diante *ad infinitum*, ou seja, a tartaruga estará sempre a frente (BARON & BOS, 1985).

Assim, de acordo com os pesquisadores, temos o seguinte dilema: ambas as hipóteses levam a conclusões que parecem contrariar o bom-senso, que nos indica que pode haver movimento. Então, alguma coisa deve ser rejeitada: ou o conceito de divisibilidade *ad infinitum* e a existência de indivisíveis em espaço e tempo; ou o conceito de movimento do mundo exterior; ou ainda, o processo de dedução por meio do qual tiramos conclusões.

Nos outros dois paradoxos, a *Flecha* e o *Estádio*, segundo Baron & Bos (1985), Zenão adota a hipótese que o tempo e o espaço não são infinitamente divisíveis, ou seja, existe uma menor unidade indivisível de tempo e de espaço. Brolezzi (1996) coloca a seguinte situação (figura 3): há três grupos de cinco corredores em uma pista de atletismo, considere um estádio onde os corredores são

pontos indivisíveis, estando cinco imóveis e os outros dois grupos estão correndo em sentidos contrários.

		A	B	C	D	E		
F	G	H	I	J	→			
			←	K	L	M	N	O

Figura 3: Paradoxo do Estádio I. Fonte: BROLEZZI, 1996, p. 23.

Considerando a velocidade dos corredores, pode ocorrer a situação que o "ponto-corredor" J irá passar de C para D em um "instante", enquanto o "ponto-corredor" K irá passar de C para B no mesmo instante, conforme mostra a figura 4:

		A	B	C	D	E		
	F	G	H	I	J	→		
		←	K	L	M	N	O	

Figura 4: Paradoxo do Estádio II. Fonte: BROLEZZI, 1996, p. 23.

Entretanto, o corredor K passou por dois "pontos" J e I, encontrando-se agora sob o corredor H. O tempo necessário para passar por dois pontos é dois instantes, portanto, um instante é igual a dois instantes, o que é uma contradição (BROLEZZI, 1996).

No paradoxo da *Flecha*, conforme Baron & Bos (1985), Zenão considera uma flecha e assegura que ela deve estar em certo ponto em um dado instante. Como a flecha não pode estar em dois lugares no mesmo instante, não pode se mover naquele instante. No entanto, se está em repouso naquele instante, então ela também não poderia se mover. Segundo Brolezzi (1996, p. 23), "Zenão fecha, assim, o cerco à perplexidade da noção de movimento e de velocidade, trazendo à tona controvérsias intrínsecas que tendem passar despercebidas".

Conforme Bell (1948) estas foram as principais dificuldades encontradas pelos primeiros que se ocuparam com assuntos relacionados à continuidade e ao infinito. O autor ainda afirma que muitos compartilhavam das ideias de Zenão sobre o fato da soma de números infinitos de quantidades maiores que zero resultar em

um número suficientemente grande, deixando evidente a lacuna e a dificuldade dos gregos em questão de conhecimento sobre infinitésimos.

Como repercussão desses fenômenos, Broletti (1996) afirma que os gregos desenvolveram o que se chamou de “horror ao infinito”, que na Matemática teve consequências muito importantes. Segundo Boyer (1996), a Matemática adquiriu outra configuração após Zenão, influenciando profundamente no desenvolvimento da Matemática grega, influência comparável à descoberta dos incomparáveis na qual o autor acredita que se relacione:

As grandezas não são associadas a números ou pedras, mas a segmentos de reta. Em *Os Elementos* os próprios inteiros são representados por segmentos. O reino dos números continuava a ser discreto, mas o mundo das grandezas contínuas era algo à parte dos números e devia ser tratado por métodos geométricos (BOYER, 1996, p. 52).

Segundo Broletti (1996), possivelmente o "horror ao infinito" contribuiu para o desenvolvimento da álgebra geométrica, que consistia na resolução de problemas aritméticos ou algébricos lidando diretamente com grandezas contínuas, realizando todas as operações sem necessidade de referência direta a números e suas representações. Portanto, assinala o autor, não é necessário distinguir entre números racionais ou irracionais, nem pensar se dois segmentos são comensuráveis ou incomensuráveis.

Para Baron & Bos (1985), a estrutura axiomática da Matemática grega estabeleceu-se no final do século III a.C. com o advento dos *Elementos* de Euclides de Alexandria (c. 395 a. C.), no qual grande parte deve-se à Eudoxo de Cnido (408-355 a.C.). A ele é atribuído o papel de fundamentar a teoria das proporções, incluindo os incomensuráveis ou irracionais.

Baron & Bos (1985) apontam que toda teoria dos números dos gregos é estruturada em princípios geométricos e todos os conceitos impraticáveis na geometria são rejeitados, sem invocar em momento algum o infinito. Sobre isso, Boyer (1996) afirma que os conceitos de variação e continuidade, do infinito e do infinitesimal deram nascimento ao Cálculo, no entanto, foram suprimidos da Matemática, observando ainda o trabalho de Euclides como um marco a esta exclusão.

Em seu trabalho, Euclides afirma que por meio de uma sequência de transformações geométricas, reduz-se qualquer figura polinomial a um triângulo com

área igual; o triângulo torna-se, então, um paralelogramo, o paralelogramo torna-se um retângulo e, por fim, o retângulo torna-se um quadrado. Então, para toda figura polinomial plana podemos encontrar um quadrado com mesma área (BARON & BOS, 1985).

Conforme os pesquisadores, este problema, a redução de figuras curvas a quadrados equivalentes, foi muito difícil. Hipócrates de Quios (c. 430 a.C.) demonstrou um teorema importante para a quadratura dos círculos: as áreas de círculos estão para si assim como os quadrados de seus diâmetros. No entanto, embora o seu progresso, Hipócrates não conseguiu dar nenhuma contribuição a mais para resolver o problema da quadratura do círculo (figura 5).

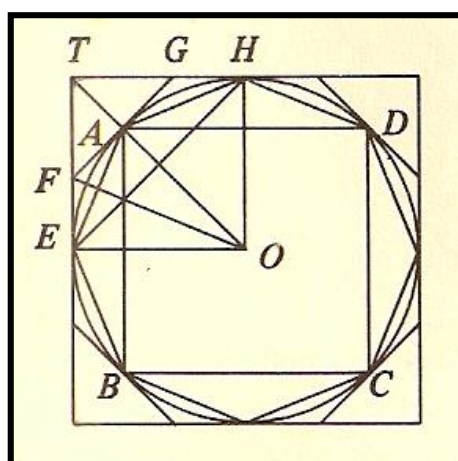


Figura 5: Quadratura do círculo. Fonte: BARON & BOS, 1985, p. 34, v. 1.

Eves (2004) aponta que o sofista Antífon (c. 430 a.C.), bem como Arquimedes (287-212 a.C.), contribuiu para problemas envolvendo a quadratura do círculo, antecipando a ideia de que ao duplicar várias vezes os lados de um polígono chegaria ao ponto em que a área desse polígono teria uma diferença mínima em relação à área do círculo. Esse procedimento foi muito criticado por matemáticos da época, argumentando que se uma grandeza pode ser subdividida indefinidamente esse processo não teria fim, impossibilitando o cálculo dessa área. De acordo com Bell (1948), essa abordagem de Antífon continha o conhecido método de exaustão creditado a Eudoxo.

Segundo Bell (1948), depois que Eudoxo demonstrou esse método de exaustão ficou notável que não havia necessidade de considerar quantidades minúsculas infinitas, pois, para fins matemáticos, cada vez que se dividem

quantidades pequenas, elas se tornam tão pequenas que pouco influenciava no resultado, sendo esse método o embrião para o Método de Descartes (1596-1650).

Silva & Silva (2010) apontam que, os números irracionais, passaram a ser tratados com o mesmo rigor com que se tratavam os números racionais, surgindo a partir daí o que se tornaria a moderna teoria dos números irracionais. Os pesquisadores afirmam também que, com esse método, Eudoxo desfez algumas contradições existentes em alguns dos paradoxos criados por Zenão relacionado à quantidades infinitamente pequenas.

Para Brolezzi (1996, p. 26), “o que há de fantástico nesta definição é que exclui o infinitesimal de todas as demonstrações geométricas dos gregos”. Além disso, de acordo com o autor, permite raciocinar sem ultrapassar a compreensão intuitiva clara, pois “Eudoxo não propõe ir até o infinito para de fato atingir limite, mas apenas afirma que se pode chegar a uma grandeza tão pequena quanto qualquer outra dada”.

Baron & Bos (1985) assinalam que, Arquimedes foi o primeiro a demonstrar isso rigorosamente usando processo de redução ao absurdo. Embora fosse evidente a ideia da demonstração de Arquimedes, o tipo de demonstração usada não era suficiente na Matemática grega sendo, então, necessário usar a demonstração por absurdo duplo, posteriormente, tratada como exaustão por Grégoire de Saint-Vicent (1584–1667). O procedimento tornou-se comum e tais provas continuaram sendo essenciais até o final do século XVII, quando os matemáticos passaram da repetição constante para a prática de passagem direta ao limite.

A transição da Matemática grega para o rigor algébrico se deu a partir da preocupação dos matemáticos da época ao longo dos séculos XV ao século XVII, com uma grande variedade de problemas práticos. Dentre os matemáticos gregos, Arquimedes foi o que mais se destacou na aplicação da Matemática a problemas físicos e em suas demonstrações, no entanto, outros matemáticos apresentaram esforços na construção de demonstrações mais rigorosas (BARON & BOS, 1985).

Conforme Brolezzi (1996), o surgimento do Cálculo no século XVII está em plena conexão com a busca de meios de simplificar os métodos gregos, como o método da exaustão. Para avaliar até que ponto chegaram os gregos, basta verificar que Arquimedes realizou o Cálculo da área sob a parábola (figura 6) antecipando-se, assim, em mais de dezessete séculos aos resultados do Cálculo Integral.

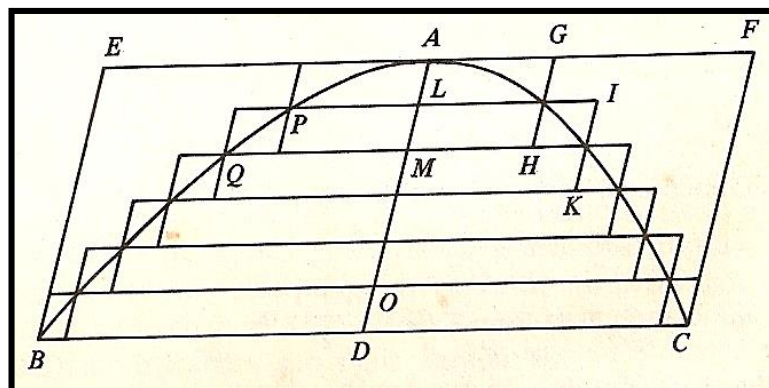


Figura 6: Cálculo da área sob a parábola. Fonte: BARON & BOS, 1985, p. 42, v. 1.

A noção de limite pressupõe a consideração do infinito que esteve sempre excluída da Matemática grega, mesmo em Arquimedes. No entanto, o trabalho de Arquimedes, como afirmam Silva & Silva (2010), foi provavelmente o mais forte incentivo para o desenvolvimento posterior das ideias de limite e de infinito no século XIX. Silva & Silva (2010) afirmam, também, que os trabalhos de Arquimedes constituem a principal fonte de inspiração para a geometria do século XVII que desempenhou um papel importante no desenvolvimento do cálculo infinitesimal.

A diferença entre o método de exaustão e o limite do cálculo diferencial e integral, para Brolezzi (1996), está no fato de os gregos não realizarem essa passagem ao infinito, por não ter a noção de um contínuo aritmético. No entanto, o tipo de argumentação é o mesmo, tanto no caso do atual limite quanto no método de exaustão geométrico.

Bell (1948) observa que Arquimedes inventou o Cálculo Integral, e, em um de seus problemas, antecipou a criação do Cálculo Diferencial. Estes dois cálculos juntos estabelecem o que se denomina de “cálculo infinitesimal”³, considerado como o instrumento mais poderoso que já foi inventado para a exploração Matemática do universo físico.

Segundo Baron & Bos (1985), a Matemática na Europa Medieval era um objeto de discussões filosóficas fortemente influenciadas por Aristóteles (c. 384-322 a.C.). Eles ainda apontam que a discussão era em torno da natureza das quantidades infinitas relacionadas com o mundo físico e matemático. Dentre as discussões, Aristóteles distingue claramente o infinito atual e o potencial:

³ O Cálculo Integral, Diferencial e Infinitesimal juntos compõe o que usualmente se denomina nas Licenciaturas em Matemática no Brasil como a disciplina de Cálculo I ou a disciplina Cálculo Diferencial e Integral.

Ele argumenta que como o mundo é finito nenhuma grandeza física pode, por processos multiplicativos, tornar-se infinita. O processo de divisão, por outro lado, pode ser continuado eternamente e não existe nenhum estágio não ultrapassável. Ele rejeita a noção de um contínuo composto ou de pontos matemáticos ou de qualquer outra espécie de indivisíveis (BARON & BOS, 1985, p. 56, v. 1).

Baron & Bos (1985) explicam que essas foram as discussões entre os filósofos dos séculos XIII e XIV. Neopitagóricos, seguidores da doutrina de Leucipo de Mileto (c. 490-460 a.C.) e Demócrito que negavam a divisibilidade ao infinito, construíram sólidos de planos, planos de retas e retas de pontos. Considerou-se o material contínuo composto de pontos indivisíveis. Surgindo assim alguns paradoxos:

[...] se um ponto não tem dimensão, como é possível que, por multiplicação ou adição de tais pontos, segmentos de retas finitos possam ser obtidos? Se um ponto tem dimensão, como pode ele ser indivisível? (BARON & BOS, 1985, p. 57, v. 1)

Baron & Bos (1985) ainda apontam que surgem também dificuldades com relação à correspondência de pontos sobre círculos concêntricos em qualquer sistema de retas ou curvas produzidas por paralelas ou projeção central. E ainda, se nenhuma reta finita pode constituir-se de um número finito de pontos indivisíveis, então, o número de tais pontos deve ser infinito. Portanto, Baron e Bos (1985) afirmam que a teoria do ponto dá prioridade à ideia de ordens diferentes de infinitos, podendo quantidades infinitas serem consideradas iguais ou não do mesmo modo que as quantidades finitas.

Segundo Boyer (1992), o período do Renascimento para o desenvolvimento da Matemática, se constitui numa interação imbricada das tradições medievais com ideias mais novas e mais antigas. Nesta época, a retomada de interesse pelas obras de Arquimedes levou a simplificação do cálculo integral, sendo para geometria, o conceito de indivisíveis de fundamental importância.

O cálculo integral foi desenvolvido, então, por volta do século XIV, marcado principalmente pelos estudos de Nicole Oresme (c. 1323 – 1382), bispo de Lisieux.

Oresme associava os instantes de tempo dentro do intervalo aos pontos de um segmento de reta horizontal (chamado “linha de longitudes”), e para cada um desses pontos erguia (num plano) um segmento de reta vertical (“latitude”), cujo comprimento representava a velocidade do objeto no tempo correspondente. Ao conectar as extremidades dessas perpendiculares ou

latitudes, obtinha uma representação da variação funcional da velocidade com relação ao tempo – num dos mais antigos exemplos da história da Matemática do que hoje seria chamado “gráfico de uma função” (BOYER, 1992, p.9).

Oresme observou então que a área sob este gráfico representaria a distância percorrida, visto que seria a soma de todos os incrementos das distâncias correspondentes às velocidades instantâneas (BOYER, 1992).

Boyer (1992) ressalta outro aspecto da integral tendo o método de exaustão pouca aceitação no período medieval. De acordo com o autor, eram poucos os que se destacavam no Renascimento quanto à precisão lógica da Antiguidade em Matemática.

No século XVII houve uma retomada de interesse ampla pelas obras de Arquimedes, tendo o conceito de indivisível em geometria um papel salutar. O volume de trabalho produzido na resolução de problemas práticos, neste período foi tão grande que nos limitaremos a tratar apenas de alguns.

De acordo com Baron & Bos (1985), Simon Stevin (1548-1620) analisava a Matemática sempre para fins práticos, e se interessou, assim como Arquimedes, pelo problema da determinação de centros de gravidade, dando assim o primeiro passo radical para modificar a estrutura de demonstração de Arquimedes. Em sua demonstração, embora se mantivesse o método de exaustão, o elemento de redução era aos poucos substituído pela passagem direta ao limite.

Os pesquisadores ressaltam também que Johannes Kepler (1571-1630) e Galileo Galilei (1564-1642) foram os primeiros a abandonar a estrutura de demonstração proposta por Arquimedes, introduzindo assim, o uso dos indivisíveis ou quantidades infinitamente pequenas. Gilles Persone de Roberval (1602-1675) considerou justificável o uso dos indivisíveis, embora alguns matemáticos tenham rejeitado seu uso, escrevendo o *Tratado dos Indivisíveis* baseando sua discussão nos números figurados de Pitágoras.

Um tratado escrito em 1635 por Bonaventura Cavalieri (1598-1647) abordou sobre os indivisíveis ou infinitesimais fixos aplicados com êxito em problemas de mensuração de áreas e volumes (BOYER, 1992). Hoje conhecido como “teorema de Cavalieri”, o pesquisador aponta que esse princípio permite passar de uma estrita correspondência de indivisíveis numa dada razão à conclusão de que todos esses indivisíveis também estavam entre si nessa mesma razão.

Conforme Boyer (1992), Cavalieri aplicou a ideia dos indivisíveis a uma ampla variedade de problemas suscitados por outros matemáticos como Pierre de Fermat (1601–1665), Roberval e Evangelista Torricelli (1608-1647), podendo afirmar assim que o método dos indivisíveis não era propriamente de Cavalieri, pois estava sendo amplamente usado por pensadores matemáticos da época.

Para Boyer (1992), a consequência lógica dessas ideias foi a geometria analítica de Fermat e René Descartes. Descartes publicou *La géométrie* em 1637, somente dois anos depois da publicação da *Geometria indivisibilis*, de Cavalieri, mudando inevitavelmente o curso da análise infinitesimal. Com isso, a geometria pura foi sendo ofuscada; pouco se desenvolveu no século seguinte, no qual a análise infinitesimal entrou num processo de aritmetização que quase resultou numa revolução.

Boyer (1992) ressalta que podemos observar essa mudança de visão na publicação de John Wallis (1616-1703), em 1655, *Arithmetica infinitorum*. Nesse tratado o autor mostra claramente uma aritmetização do Cálculo.

Torricelli destacou-se neste contexto pela aplicação dos métodos de exaustão, dos indivisíveis e a composição de movimento. Além disso, conforme Boyer (1959), ele realizou diversos estudos relacionados aos problemas de quadraturas e tangentes reconhecendo que um era o inverso do outro.

O destaque para Fermat advém das contribuições quanto aos métodos de integração iniciados por Eudoxo dois milênios antes (BOYER, 1992). Também é a ele atribuída à invenção do processo que atualmente chamamos de diferenciação.

Issac Barow (1630-1677) produziu contribuições muito significativas para o desenvolvimento posterior do Cálculo, especial com a criação do método para determinação de tangentes a curvas pelo uso do “triângulo diferencial” denominado também “triângulo de Barrow”. Para Boyer (1992, p. 44), “embora Barrow tenha conseguido achar derivadas (como dizemos hoje), para muitas equações específicas, seu método carecia nitidamente de uma fundamentação lógica”.

Enquanto os matemáticos gregos tinham sido essencialmente estáticos em sua linguagem e conceitos, os matemáticos da “Idade dos Gênios”, conforme as palavras de Boyer (1959, p. 16), procuram nortear-se no sentido de uma análise de variabilidade.

Assim, conforme Brolezzi (1996), a partir da análise infinitesimal, a época se apresenta madura para o que hoje conhecemos como Cálculo. Boyer (1992) acrescenta que nenhuma invenção nova específica era necessária, as técnicas estavam disponíveis, faltando apenas um “senso de universalidade das regras”, necessitavam sim de um algoritmo geral aplicável indistintamente a todas as funções, racional ou irracional, algébrica ou transcendente.

Baron & Bos (1985) observam que a tradição atribuiu a Isaac (1642-1727) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) um papel central na "invenção" do Cálculo, ainda que o Cálculo não tenha começado nem terminado com estes dois homens.

Por volta de 1666, Newton sintetizou um estudo coerente baseado no que ele chamava de “método de fluxões”, no qual as noções de movimento desempenharam um papel central e significativo.

O primeiro livro no qual Newton delineia seu cálculo foi o *De analysi per aequationes numero terminorum infinitas*, publicado em 1711, onde o autor descreve a extensão do uso da palavra “análise”, argumentando que os algoritmos matemáticos que lidam com processos infinitos são tão respeitáveis quanto aqueles que se aplicam à álgebra ordinária, concedendo assim um espaço considerável ao método das “séries infinitas” (BOYER, 1959, p. 19). Baron & Bos (1985) explicam que o método das séries infinitas foi uma ferramenta indispensável para Newton na quadratura das curvas e na retificação dos arcos.

Baron & Bos (1985, p. 39, v. 3) resume as contribuições de Newton da seguinte maneira:

1. Newton formulou regras e procedimentos sistemáticos para cobrir as soluções gerais da maioria dos problemas relativos ao cálculo infinitesimal que eram conhecidos no seu tempo.
2. Embora muitas dessas regras tivessem sido estabelecidas ou introduzidas de uma ou de outra maneira pelos seus predecessores, ele estabeleceu uma estrutura unificada e um quadro dentro do qual todos os problemas podiam ser formulados.
3. O uso das séries infinitas foi uma ferramenta importante ao estender-se à classe das curvas “quadráveis”, isto é, curvas cuja quadratura podia ser determinada [...].
4. Com Newton a ideia de que a diferenciação e a integração eram operações inversas foi firmemente estabelecida considerando a ordenada móvel proporcional ao momento ou a fluxão de uma área [...].

5. A síntese que Newton atingiu foi possibilitada pelo uso do simbolismo algébrico e das técnicas analíticas. Ele estabeleceu muito tarde a notação “padrão” com ponto para representar a diferenciação e, aparentemente, não sentiu grande necessidade de introduzir qualquer notação específica para a integração.

6. Os fundamentos do cálculo foram apresentados por Newton de várias maneiras em épocas diferentes, ele constantemente procurava estabelecer os seus métodos analíticos sobre uma base mais segura.

Boyer (1959) enfatiza que a contribuição de Newton está no reconhecimento de que tudo isso constitui parte de uma nova análise: a aplicação de processos infinitos ao estudo geral de funções de qualquer tipo.

Para Baron & Bos (1985), três ideias fundamentaram a invenção do Cálculo por Leibniz: 1) seu interesse pelo simbolismo e pela notação vinculada à sua ideia de uma linguagem simbólica geral; 2) o reconhecimento de que somar sequências e tomar as suas diferenças são operações inversas e que a determinação de áreas e a de tangentes são operações inversas; e, 3) o uso de um triângulo característico para deduzir transformações gerais de áreas.

Boyer (1959) destaca que o elemento essencial na invenção do cálculo por Leibniz, foi o reconhecimento, em 1676, de que também estava construindo uma análise nova e universal. Em seus primeiros artigos publicados, Leibniz expôs que seu novo método não apresentava impedimentos para funções irracionais ou transcendentais.

O pesquisador explica que:

Da mesma forma como Descartes percebera que sua geometria assinalava uma nova etapa no desenvolvimento da matéria, Newton e Leibniz estavam cientes que suas descobertas tinham forjado uma nova análise, que ia muito além da álgebra ordinária. Ao longo de todo o século XVII, a distinção que Newton e Leibniz enfatizavam fixou-se em frases como “análise superior” e “análise sublime” para distinguir os processos infinitos das regras da álgebra ordinária (BOYER, 1959, p.13) [tradução nossa].

Newton e Leibniz chegaram ao Cálculo através de caminhos diferentes. Não só é diferente a linguagem com que ambos expressaram as ideias fundamentais do Cálculo, mas também em termos de concepção pode-se verificar uma diferença grande entre os seus trabalhos. Brolezzi (1996) explica que tanto Newton quanto Leibniz podem ser considerados como os primeiros a expressar a ideia da

reciprocidade entre a diferencial e a integral, que constitui o *Teorema Fundamental do Cálculo*. Mas as maneiras de ver o Cálculo eram distintas.

A compreensão do significado dessa situação levou cada um deles a desenvolver uma linguagem, uma lógica e um simbolismo para a nova matéria, conforme explica Boyer (1992). No entanto, nenhum dos dois “estavam em condições de apresentar uma fundamentação lógica convincente” (p. 21). Boyer (1992) aponta que Newton chegou mais próximo disso, quando descreveu sua ideia de “primeira e última razões”.

Usando notações modernas, Boyer (1959) parafraseia a formulação de Newton descrevendo y como a razão das quantidades “evanescentes” Δy e Δt . O pesquisador aponta ainda que Newton adverte: “Por razão última das quantidades evanescentes deve-se entender a razão das quantidades, não antes de desaparecerem, nem depois, mas com as quais elas desaparecem” (p. 21) [tradução nossa]. Nesse ponto, Newton chegou muito próximo do conceito de limite, no entanto, não alcançou plenamente esse conceito.

Conforme Brolezzi (1996), fazendo alusão aos fundamentos do novo conhecimento, Newton vacila referindo-se por vezes aos infinitesimais, outras aos limites, e ainda, a uma intuição física básica, sendo esta última abordagem a mais adotada posteriormente. Por outro lado, Leibniz e seus seguidores basearam o desenvolvimento da teoria sobre os diferenciais infinitamente pequenos, de primeira e segunda ordem.

Boyer (1959) mostra que, de modo geral, podemos dizer que Newton baseou seu Cálculo em noções de continuidade, enquanto Leibniz tomou como base a ideia discreta das mônadas. Ambas as maneiras de abordar o problema mostraram-se igualmente úteis, pois, enquanto não estava estabelecida a noção de limites, as ideias de movimento contínuo e de infinitésimos discretos surgiram como tentativas de esquematizar as primeiras impressões sensíveis quanto à variação.

Boyer (1959), isso explica porque o Cálculo, nos estágios iniciais do seu desenvolvimento, estava cercado de conceitos de geometria do movimento, e com explicações de indivisíveis e infinitamente pequenos; pois estas ideias eram sugeridas pela intuição e experiência ingênuas de continuidade.

Ele ainda explica que Newton trabalhava com quantidades variáveis com um significado baseado na noção de movimento contínuo, as considerando a partir do

movimento contínuo de pontos, retas, e planos. Ele não considerava as variáveis como agregados de elementos infinitesimais (BOYER, 1959).

Brolezzi (1996, p. 30) destaca que:

Ao longo de seu trabalho, Newton fez referência aos infinitésimos; mas foi removendo qualquer referência a eles ao longo do seu trabalho, até chegar a considerar que quantidades Matemáticas não deveriam ser constituídas por momentos ou partes muito pequenas, mas sim como descritas pelo movimento contínuo. Newton sentia-se incomodado em interpretar suas proposições em termos de infinitesimais, preferindo usar velocidades, que também chamava de movimentos, mutações ou fluxões de quantidades. Assim, Newton refere-se ao seu Cálculo como o *Método das Fluxões*.

Já Leibniz tem outra maneira de encarar as coisas. Para Leibniz, a visualização do Cálculo se dá de forma estática:

Leibniz considerava as variáveis como percorrendo sequências de valores infinitamente próximos. No seu Cálculo há pouco uso de conceitos de movimento (BARON & BOS, 1985, p.70, v. 3)

Para Baron & Bos (1985, p. 70, v. 3), Leibniz entendia como necessários os infinitésimos, e construía sobre eles analogias, buscando uma visualização do Cálculo através de considerações discretas, através do diferencial. “A diferencial de uma variável y é a diferença (dy) entre dois valores consecutivos de y em uma sequência de números infinitamente próximos”.

Concordamos com Brolezzi (1996) ao afirmar que as concepções de Leibniz, quanto ao discreto, e a de Newton, quanto ao contínuo, recaíram na teoria do Cálculo, que posteriormente define melhor o que eram os números reais e a ideia de limite.

Portanto, vemos que ambas as abordagens de Newton e Leibniz são caminhos a invenção do Cálculo. O cálculo moderno é o mesmo criado por eles somente com linguagem e abordagem conceitual bem distinta de ambos:

No Cálculo moderno a operação de diferenciação associa uma função a uma derivada. Para Leibniz, a diferenciação associava uma diferencial infinitamente pequena a uma variável. Para Newton, tomar fluxões significava associar uma velocidade finita a uma variável. Portanto, a concepção da operação fundamental nos cálculos de Newton e Leibniz era totalmente diferente do conceito de diferenciação que está em uso no Cálculo moderno (BARON & BOS, 1985, p. 73, v. 3).

Posterior à nova análise proposta por Newton e Leibniz e sua difusão, houve muitas críticas quanto aos fundamentos do novo método por serem ainda bastante instáveis. Dentre os críticos, podemos destacar George Berkeley (1685-1753), James Jurin (1684-1750) e Benjamim Robins (1707-1751).

Baron & Bos (1985) apontam que, embora os críticos não concordassem sobre a maioria dos assuntos, duas coisas ficaram claras em suas discussões: que as quantidades infinitamente pequenas não podiam ser aceitas e que as razões últimas de Newton só podiam tornar-se rigorosas sendo introduzidas como limites. Robins deu a seguinte explicação sobre o que entendia por limite:

[...] definimos uma grandeza última como sendo o limite do qual uma grandeza variável pode aproximar-se em qualquer grau de proximidade, embora ela nunca possa tornar-se absolutamente igual a ele (CAJORI, 1919 *apud* BARON & BOS, 1985, p. 27, v. 4).

Concordando com este pensamento, Leonhard Euler (1707-1783) afirmou em seu livro sobre cálculo diferencial que quantidades infinitamente pequenas não existiam, sendo as quantidades menores que qualquer quantidade finita igual a zero (BARON & BOS, 1985.).

Jean Le Rond d'Alembert (1717-1783) defendeu desde 1754 o uso de limites para prover uma base rigorosa para o Cálculo. Baron & Bos (1985, p. 28, v. 4) enfatizam que, para d'Alembert, "o Cálculo opera com os limites das razões de diferenças finitas de quantidades variáveis inter-relacionadas". O matemático explicou o conceito de limite da seguinte forma:

Diz-se que uma grandeza é o limite de outra grandeza quando a segunda pode aproximar-se da primeira tanto quanto se queira, embora a primeira grandeza nunca possa exceder a grandeza da qual ela se aproxima; de modo que a diferença entre tal quantidade e seu limite é absolutamente indeterminável (BARON & BOS, 1985, p. 28, v. 3).

As desvantagens da definição de limite apresentadas por Robins e d'Alembert reside no fato de que em suas concepções as variáveis são concebidas como crescentes ou decrescentes, podendo assim o limite estar situado somente na fronteira do domínio da variável, no entanto sabemos que, se o domínio de uma variável é aberto, topologicamente, há um limite, mas se o domínio é fechado, não há limite, pois a fronteira do domínio pode ser atingida pela variável.

Através de inúmeros trabalhos o Cálculo desenvolveu-se em uma disciplina da Matemática que veio ser chamada de Análise. A transição do cálculo para a análise no século XVIII, não foi somente uma questão de crescimento e divisão em subcampo, como nos apontam Baron & Bos (1985), envolveu também uma transformação fundamental em sua natureza.

O cálculo por volta de 1700 era ainda essencialmente orientado para a geometria. Tratava de problemas sobre curvas, empregava símbolos algébricos, mas as quantidades que se utilizava eram principalmente interpretadas como ordenadas e abscissas de curvas, ou como outros elementos de figuras geométricas. Durante a primeira metade do século diminuiu o interesse pela origem geométrica dos problemas, e os matemáticos passaram a se interessar mais pelos símbolos e fórmulas do que pelas figuras. A análise tornou-se o estudo e manipulação de fórmulas (BARON & BOS, 1985, p. 43, v. 3).

A mudança de interesse de figuras para fórmulas estava ligada ao surgimento do conceito de função, destacando-se a ideia da análise como estudo de funções e fórmulas em geral advinda de Euler.

Embora Leibniz e Newton tenham sido reconhecidos pela invenção da nova análise não foram eles que formalizaram os algoritmos do Cálculo. Somente no século XIX, suas ideias foram formalizadas, e dentre aqueles que contribuíram para essa formalização destacamos Cauchy e Weierstrass.

Conforme Brolezzi (1996), em 1826, Cauchy estabelece a noção de limites elaborando em linguagem Matemática uma estrutura flexível dentro da qual as noções de discreto e contínuo pudessem ser trabalhadas.

As variáveis e seus limites são apresentados por Cauchy da seguinte maneira:

Chamamos quantidade *variável* aquela que consideramos capaz de assumir diversos valores diferentes sucessivamente. Por outro lado chamamos quantidade *constante* aquela que assume um valor fixo e determinado. Quando os valores sucessivamente atribuídos a uma variável aproximam-se indefinidamente de um valor fixo, de modo que eles finalmente difiram deste valor tão pouco quanto quisermos, esse último valor é chamado o *limite* de todos os outros. [...] Indicaremos o limite para o qual converge determinada variável pela abreviação "lim." escrita antes da variável em questão (BARON & BOS, 1985, p. 46, v. 4).

A definição de Cauchy é a mesma de Robins e d'Alembert, embora não exclua a possibilidade da variável alcançar seu limite, no entanto, evitou

desvantagens em seu conceito combinando-o com o conceito de função, através de uma importante interpretação do termo “infinitamente pequeno”, permitindo-se formular uma definição precisa para continuidade (BARON & BOS, 1985).

Segundo Baron & Bos (1985), para Cauchy, uma quantidade infinitamente pequena não é zero, nem é uma quantidade constante menor do que qualquer quantidade finita, mas é uma variável que se aproxima de zero. As ideias de uma quantidade que se tornava cada vez menor estavam na base de todas as explicações sobre infinitésimos, entretanto, Cauchy usou a ideia de forma precisa, tornando-se esta a interpretação padrão dos infinitésimos.

Usando sua interpretação de “infinitamente pequeno”, Cauchy definiu a função derivada como um limite, sem recorrer às diferenciais. Ele também elabora uma interpretação para as diferenciais que o permitia manipulá-las em fórmulas, porém sem considerá-las infinitamente pequenas. Quanto à integração, foi apresentado outro enfoque, considerando-a como soma. Cauchy definiu a integral como um somatório que tende a um limite (BARON & BOS, 1985).

Em resumo, percebemos que o enfoque do Cálculo alcançado até então é o mesmo que o moderno: o conceito fundamental do cálculo diferencial é a derivada definida como limite; o conceito de integral refere-se ao limite do somatório e não o inverso da diferenciação; e, o teorema fundamental do cálculo se tornou um teorema que precisa ser provado, ao invés de ser um corolário da definição de integral.

Com a noção de limite formulada, Weierstrass formaliza o Cálculo, introduzindo a linguagem dos Épsilons (ε) e Deltas (δ). Ele quis estabelecer no Cálculo a teoria de funções sobre o conceito apenas de número, desvinculando-o assim da geometria. Para isto, foi necessário dar uma definição de número irracional que fosse independente da noção de limite.

Boyer (1959) ressalta que Weierstrass foi levado assim a fazer investigações profundas dentro da teoria da aritmética, sem enfatizar a natureza do próprio número inteiro, mas começou com o conceito de número inteiro como um agregado de unidades desfrutando de uma propriedade característica em comum, enquanto um número complexo foi ser pensado da forma de um agregado de unidade de várias espécies, tendo mais de uma propriedade característica.

Ao estabelecer a base do Cálculo mais formal, Weierstrass também criticou a definição de contínuo trazida até então por Cauchy. Weierstrass definiu uma função

contínua $f(x)$ em um determinado intervalo se, para qualquer valor x_0 neste intervalo e para um número positivo arbitrariamente pequeno ε , for possível encontrar um intervalo próximo de x_0 , tal que para todos os valores nesse intervalo, a diferença $f(x) - f(x_0)$ for menor em valor absoluto que ε (BOYER, 1959).

Weierstrass deu a seguinte definição para o limite:

O número L é o limite da função $f(x)$, onde $x = x_0$ se, dado qualquer número arbitrariamente pequeno ε , outro número δ possa ser encontrado tal que para todos os valores de x diferindo de x_0 por menos que δ , o valor de $f(x)$ diferir de L por menos que ε (BOYER, 1959, p. 287) [tradução nossa].

Não há nesta definição nenhuma referência para os infinitesimais, então a definição do cálculo infinitesimal que mesmo hoje em dia é usado, é mostrado como inapropriado. Boyer (1959) enfatiza que embora um número de matemáticos, do tempo de Newton e Leibniz ao tempo de Bolzano (1781- 1848) e Cauchy, procurou evitar o uso de quantidades infinitamente pequenas, o simbolismo livre de equívocos de Weierstrass suprime efetivamente do Cálculo a noção de infinitesimal fixo.

Os autores visitados para a construção desse capítulo, apresentam a história do desenvolvimento do Cálculo, por vezes muito pontual, sem a preocupação do uso das informações para a sala de aula. Para a construção dessa síntese histórica, primamos pelo uso da história pedagogicamente vetorizada para uso nas Licenciaturas em Matemática, que mostra sua importâncias nos capítulos consequentes.

A partir deste estudo realizado, percebemos que a dificuldade em entender e até mesmo aceitar a ideia de limite se fez presente desde suas origens até a atual formalização deste conceito. Percebemos ainda que o conceito de limite caracteriza inúmeras dificuldades de aprendizagem, o que justifica a gama de pesquisas realizadas, relacionadas à aprendizagem desse conceito, como veremos no próximo capítulo.

2. ALGUMAS PESQUISAS SOBRE O ENSINO E A APRENDIZAGEM DE LIMITE

Existem muitas pesquisas que tratam das dificuldades do ensino e da aprendizagem do Cálculo, assim como particularmente de limite. Neste capítulo, apresentaremos algumas que abordam o problema em diversas perspectivas e em vários contextos, oferecendo elementos que permitem a análise das dificuldades detectadas bem como propostas para saná-las.

A revisão bibliográfica que nos propomos fazer caracteriza-se por um pequeno panorama de pesquisas relacionadas ao ensino e a aprendizagem de Cálculo, objetivando realizar um levantamento de dissertações, teses e artigos sobre o tema. Para isso, foram analisados 13 (treze) estudos: Cornu (1983), Sierpiska (1985), Rezende (1994), Sad (1998), Zuchi (2005), Domenico (2006), João Neto (2006), Kurata (2007), Barrichello (2008), Celestino (2008), Cavasotto (2008), Pinto (2010) e Vaz (2010). Os três primeiros pesquisadores citados compõem o eixo central do referencial teórico utilizado para análise nessa pesquisa e, portanto, optamos por dissertar sobre os mesmos no capítulo seguinte.

A pesquisa doutoral de Sad (1998) intitulada *Cálculo diferencial e integral: uma abordagem epistemológica de alguns aspectos* tem como foco principal uma análise epistemológica de aspectos de aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral, portanto, objetivou principalmente mostrar que o Modelo Teórico dos Campos Semânticos (MTCS) é adequado ao levantamento dos diferentes modos de produção de significados e de objetos a partir do Cálculo Diferencial e Integral e a um estudo histórico-epistemológico do Cálculo.

Conforme a autora, sua tese está dividida em duas partes: teórica e prática. Na parte de fundamentações teóricas e investigações histórico-epistemológicas foi feita uma revisão da literatura sobre trabalhos que tem interseções com o Cálculo e Epistemologia, seguida de uma abordagem sobre teorias do conhecimento, fundamentando e, ainda, um levantamento sobre pesquisas centradas no MTCS. A parte prática refere-se a pesquisa de campo.

A autora enfatiza que a sua investigação teve como opção uma metodologia qualitativa, envolvendo observação sistemática em salas de aula de Cálculo, entrevista pessoal (com professor e aluno) e entrevista com grupos de alunos.

Sad (1998) resolveu centrar as observações durante as aulas de Cálculo em tudo que diz respeito aos significados produzidos pelos alunos, no qual define como o conjunto de coisas que se pode falar e efetivamente se diz a respeito de um objeto, e, aos produzidos pelos professores quanto ao discurso matemático acadêmico, caracterizando, desse modo, sua pesquisa com um veio epistemológico. Em Cálculo, os objetos elencados pela pesquisadora para observação foram: números reais, infinitos e limite de funções, por permear todo o início da aprendizagem de Cálculo de alunos de diversos cursos do ensino superior.

Com relação à limite, a autora enfatiza que seus significados são produzidos de três modos analisado à luz da MTCS. O primeiro, em um campo semântico visual-geométrico:

[...] usando figuras de pontos sobre uma reta se aproximando de modo dinâmico (ao desenhar e falar) de um valor limite (ponto de acumulação) ou usando gráficos de funções também representadas graficamente; ou ainda, indicando que os gráficos vão para o infinito e crescem ou decrescem indefinidamente. Juntamente podemos ter enunciações e enunciados do tipo: “se aproxima de...”, “cada vez mais próximo de...”, “tende a...”, ou simbologias como: “ $x \rightarrow a$ ”, “ $f(x) \rightarrow b$ ”, onde a e b podem ser valores numéricos, ∞ (infinito), ou outras expressões funcionais (SAD, 1998, p. 134).

O segundo significado produzido para limite se encontra, conforme a autora, no campo semântico do pensamento algébrico, usando de cálculos numéricos cumulativos inclusive com o uso de calculadoras e tabelas de valores.

Segundo Sad (1998), é comum usar o pensamento funcional como simples expressões algébricas:

$y = f(x)$, onde dado um valor para x se obtém um valor para y trabalhando de modo dinâmico o discreto-numérico ao invés do contínuo-real, calculando $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ como se tivesse que calcular $f(x)$ para vários valores de x bem próximos de $x = a$ até descobrir (intuir) para que valor (ou para onde) “tende” $f(x)$ “à medida que x tende para a ” (p. 134).

O terceiro modo de produção de significado é dado pelo campo semântico de algoritmos, identificados a partir da resolução de limites por esquemas já estabelecidos. A autora exemplifica: sabemos que para encontrar $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - a^2}{x - a}$, primeiro dividimos o polinômio de grau maior pelo de grau menor, simplificamos, substituímos

a em x ; ou usamos a Regra de L'Hospital, derivando numerador e denominador até não ter mais a indeterminação $0/0$ ao substituirmos a em x (SAD, 1998).

As análises advindas da investigação revelam que não somente o MCTM é adequado, mas aponta os diferentes modos de produção de significados, objetos e conhecimentos em relação ao Cálculo:

[...] dentre os modos predominantes de produção de significados, objetos e conhecimentos a partir do Cálculo, a caracterização fica por conta de estipulações locais dos seguintes tipos: estipulações locais visuais geométricas, estipulações locais infinitesimais, estipulações locais de limite e estipulações locais algorítmicas. No entanto não há como deixar de dizer que essa caracterização não se esgota como elementos constituintes de um pensamento diferencial e integral inclui, por exemplo, produzir significado para situações que envolvem noções básicas como a de função e outras relacionadas ao pensamento algébrico (SAD, 1998, p. 299-300).

Com isso, Sad (1998) indicou que certas posturas e procedimentos pedagógicos do professor contribuem mais que outras para que ele possa interagir, em nível das produções epistemológicas do aluno, e, em consequência, uma aprendizagem efetiva se realize.

Zuchi (2005) em sua tese – *A abordagem do conceito de limite via sequência didática: do ambiente lápis e papel ao ambiente computacional* – realizou um estudo sobre as dificuldades no processo de ensino e aprendizagem do conceito de limite de uma função e em seguida, propôs alternativas que pudessem minimizá-las. Para isso, integrou a Didática da Matemática e inteligência artificial à luz da teoria das situações didáticas de Brousseau (1986).

Segundo a pesquisadora, seu trabalho parte das premissas de que há um obstáculo no processo de ensino e aprendizagem do conceito de limite e o desenvolvimento de uma nova metodologia pode contribuir de maneira significativa no conteúdo em questão.

Ao introduzir o conceito de limite mediante situações-problema para estudantes dos cursos de engenharia mecânica, engenharia elétrica e licenciatura em física, percebeu que dentre as dificuldades de compreensão apresentadas pelos alunos, destaca-se aquela concernente à relação entre ε e δ^4 . Isso porque os estudantes não conseguem relacionar seu aspecto intuitivo – ponto de vista cinemático – e sua definição formal sob o ponto de vista de aproximação.

⁴ Letras gregas minúsculas ε (épsilon) e δ (delta).

A pesquisadora aponta que normalmente a definição de limite é dada após uma introdução do conceito pelo ponto de vista cinemático, e após vários exemplos resolvidos. A definição é apresentada utilizando o ponto de vista de aproximação sem um amadurecimento da correlação entre ambas.

Zuchi (2005) se utilizou da engenharia didática para a elaboração de sequências didáticas para o ensino de limite inicialmente, no ambiente lápis e papel e após num ambiente informatizado utilizando-se os recursos da Inteligência Artificial (IA)⁵. De acordo com Woolf (2002 *apud* ZUCHI, 2005), o objetivo das pesquisas de IA em educação são: aprendizagem adaptada, individualmente, ao estudante; aumento de *feedback* interativo; identificação de componentes cognitivos da aprendizagem; identificação de estilos de ensino efetivos; aumento de reflexão, síntese e seleção.

Para a autora, o diferencial introduzido na metodologia proposta é a conexão do conceito de limite sob a ótica da aproximação e cinemática que pode ser realizada através dos recursos do Sistema Tutorial Inteligente (STI)⁶ e até mesmo numa sequência didática no ambiente lápis e papel.

As sequências didáticas foram aplicadas em turmas do Centro Tecnológico da Universidade Estadual de Santa Catarina (UDESC). Zuchi (2005) salienta que com os resultados obtidos nas experimentações realizadas foi possível identificar as contribuições de seu trabalho no processo de ensino e aprendizagem do conceito de limite, tais como: explorar os conteúdos como funções e inequações modulares, em situações problemas, os quais serão importantes na formalização do conceito de limite, no qual os alunos não demonstraram nenhuma aversão ao formalismo assim construído; possibilitar aos alunos/usuários do ambiente lápis e papel ter acesso à definição de limite sob as duas óticas intuitiva (cinética) e formal (estática) e, ainda, possibilita ao professor introduzir o conceito de limite através do módulo histórico.

Domenico (2006) em sua dissertação intitulada *Aprendizagem de cálculo diferencial e integral por meio de tecnologias de informação e comunicação* sugeriu o uso das Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC) na aprendizagem de

⁵ Segundo Russel & Norvig (1995), a Inteligência Artificial (IA), busca entender e construir entidades inteligentes, sendo que uma das razões de seu estudo é aprender mais sobre nós mesmos. Schalkoff (1990, *apud* RUSSEL & NORVIG, 1995) define a IA como um campo de estudo que tenta explicar e simular o comportamento inteligente em termos de processos computacionais.

⁶ Um Sistema Tutorial Inteligente (STI) é qualquer sistema de computador que fornece instruções diretas personalizadas ou *feedback* aos alunos, ou seja, sem a intervenção de seres humanos, ao mesmo tempo em que executa uma tarefa (PSOTKA e MUTTER, 1988).

Cálculo, nos cursos de graduação do centro de ciências exatas e tecnologias da Pontifícia Universidade Católica do Paraná (PUC-PR). A justificativa do pesquisador está no fato de que muitos alunos ingressantes nos cursos de graduação possuem uma enorme dificuldade em acompanhar o programa de aprendizagem de Cálculo, considerado básico para esses alunos.

O objetivo geral da pesquisa de Domenico (2006) consistiu em verificar como o uso das TIC podem auxiliar no processo de ensino e de aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral. Para tanto, o pesquisador sugeriu a utilização do objeto de aprendizagem, denominado *X-Linha*, apresentado por módulos compostos pelos conteúdos fundamentais de Cálculo para uma complementação aos assuntos estudados em aulas presenciais dos professores desse programa de aprendizagem.

Domenico (2006) fundamentou teoricamente a pesquisa em reflexões de autores que pesquisaram como o desenvolvimento tecnológico pode contribuir na sociedade atual no processo de ensino e aprendizagem, por meio do uso dos computadores como um elemento diferencial nas atividades escolares. Segundo o pesquisador essa possibilidade na PUC-PR é real pelo ambiente *Eureka*⁷, que possibilita uma interação sempre instantânea entre os alunos e o material produzido, com o uso do Sistema de Aprendizado Através da Web (SAAW)⁸.

Domenico (2006) identificou perfis de alunos de diversos cursos do Centro de Ciências Exatas e Tecnologias, relacionando as possíveis dificuldades encontradas pelos agentes responsáveis no processo, quais sejam os professores e os alunos de Cálculo, procurando relacionar e identificar as forças e fraquezas que a pesquisa se propõe.

Conforme Domenico (2006), o fato de poder ser utilizado em até 20% da carga horária por meio de recursos não presenciais nos cursos superiores, abre a forma de se fazer uso das tecnologias, quando possível e necessário. Para tentar reduzir os índices de reprovação desta disciplina ou desse programa de

⁷ O *Eureka* é um sistema iniciado em 1999 por meio de uma cooperação entre a PUCPR e a Siemens. Com o tempo, o uso do *Eureka* foi disseminado entre os professores, e sua utilização hoje é totalmente abrangente em toda a instituição. Ele possibilita o estudo colaborativo por meio de acesso à Internet, onde está disponibilizado todo o material produzido pelas NTE (Novas Tecnologias Educacionais) da PUC-PR (DOMENICO, 2006, p. 91).

⁸ Os objetos de aprendizagem que estão relacionados com o *X-Linha* são utilizados pelos alunos e professores da PUC-PR, por meio do sistema SAAW, que possui como área de conhecimento software e ambiente cooperativo, sendo desenvolvido pela equipe do setor de NTE, integrado ao NAAD (Núcleo de Avaliação, Apoio e Desenvolvimento do Docente) é o responsável pelo desenvolvimento do projeto.

aprendizagem, o que aumenta o número de desistências de seus respectivos cursos, além de interromper possibilidades de vida profissional a estes estudantes, está se propondo uma solução que acompanha a tendência mundial no uso das TIC na educação.

Domenico (2006) aponta, pelas respostas dos professores nas questões a eles apresentadas, a intenção de um aproveitamento do *X-Linha*. No entanto, pelas respostas de muitos estudantes no questionário a eles apresentados, observou que nem sempre ocorreu uma disposição maior por parte dos docentes em estimular seus alunos a fazerem uso dos materiais inseridos nos módulos do *X-Linha*.

O perfil dos professores pesquisados incluía uma experiência bastante grande em sala de aula e estando acostumados a trabalhar de uma maneira bem tradicional, o que é bastante comum nas aulas de Matemática, ficando a dúvida se o material disponibilizado pelo *X-Linha* irá ocasionar mais trabalho para o professor. O pesquisador percebeu que os professores pesquisados concordam que o material poderá criar mais motivação aos alunos, em uma eventual revisão ou complementação de seus estudos.

Conforme Domenico (2006) muitos alunos desconheciam o material por esta informação não ter sido tão enfatizada pelos professores. Pelas afirmações dos professores, o pesquisador observa que é muito mais difícil estimularem os alunos a buscarem as suas dúvidas nas telas do *X-Linha* sem uma compensação em forma de nota, mesmo que muitos alunos tenham acesso à Internet em suas casas, sem um incentivo de busca e procura, de uma maneira geral, os estudantes não irão pesquisar e tentar responder às suas dúvidas dos conteúdos estudados em Cálculo recorrendo aos módulos do projeto em questão.

Outra conclusão da pesquisa de Domenico (2006) foi que ao analisar as diferentes turmas e períodos pesquisados, os alunos da manhã, os quais em sua maioria não trabalham, possuem acesso à internet em suas residências, o que facilita muito o estudo não presencial, não havendo a necessidade de utilizar os computadores dos laboratórios da própria PUC-PR. Isso já não ocorre com os alunos do turno noturno, pois uma boa parte trabalha o dia todo e não têm tempo para uma eventual pesquisa do *X-Linha*. Além de que os alunos do noturno são de uma poder aquisitivo inferior aos alunos do diurno, o que dificulta ainda mais essa busca, pois muitos desses alunos não possuem acesso à internet em suas

residências. E aqueles alunos que eventualmente podem ter acesso à internet em seus locais de trabalho, não teriam nem tempo, nem possibilidade de estudar os módulos em seus horários de trabalho. Essa é um dos pontos negativos do projeto, mas para os alunos que realmente demonstrarem interesse, a PUC-PR oferece uma grande quantidade de laboratórios para a visitação aos módulos do *X-Linha*.

Temos ainda Silva Neto (2006) que em sua dissertação – *Um estudo sobre o ensino de limite: um tratamento computacional com aplicações* – realizou um trabalho com o objetivo de analisar uma proposta de exploração do conceito de limite para alunos de cursos de licenciatura em Matemática. O pesquisador buscou um tratamento que evidenciasse a importância desse conceito dentro da Matemática e que mostrasse sua aplicação em outras áreas do conhecimento. Utilizando a tecnologia, o pesquisador criou ambientes que pudessem favorecer o ensino e a aprendizagem em sala de aula. Ele utilizou os softwares *Graphmatica*, *Cabri Géomètre* e *Excel* como ferramentas auxiliares na preparação do material didático.

O material preparado foi oferecido pelo pesquisador a alguns professores que lecionam a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I, para que o utilizassem e o avaliassem. O pesquisador fundamentou suas escolhas nas ideias de Vygotsky e Ausubel. De Vygotsky, Silva Neto (2006) utilizou, principalmente, o conceito de mediação, sendo esta “o processo de intervenção de um elemento intermediário numa relação, a relação deixa de ser direta e passa a ser mediada por esse elemento” (OLIVEIRA, 2003, p. 26).

Para Silva Neto (2006), a relação do homem com o mundo não é uma relação direta, e, ao observar a mediação trazida por Vygotsky, ele conclui que, “desta forma, os professores podem adicionar estímulos auxiliares, como por exemplo, a utilização de computadores e exemplos de aplicação, formando, assim, um elo entre o aluno e sua aprendizagem” (p. 36).

Dentre as ideias de Ausubel, Silva Neto (2006) utiliza em sua pesquisa o conceito de aprendizagem significativa, que, conforme o pesquisador ocorre quando o receptor da informação consegue “ancorar” o conhecimento novo no conhecimento velho de forma interativa. O autor relaciona esse conceito com a sua pesquisa, buscando meios de facilitar esse processo. Ele indica que o material instrucional deve procurar integrar qualquer material novo com material anteriormente

apresentado (referências, comparações etc.), inclusive com exercícios que exijam o uso do conhecimento de maneira nova.

Silva Neto (2006) teve como pergunta de pesquisa: buscando elaborar atividades que possam dar significado à aprendizagem da ideia de limite e fazendo uso de software como ferramenta auxiliar, é possível melhorar o envolvimento dos alunos na aprendizagem desse conceito?

No desenvolvimento de seu trabalho, o autor utilizou inicialmente a pesquisa bibliográfica para levantamento de dados históricos do conceito de limite. Na sequência, por meio de questionários, o pesquisador levantou as opiniões de dez professores de Cálculo Diferencial e Integral, que lecionam em 5 (cinco) instituições, sendo 2 (duas) públicas (4 professores) e 3 (três) particulares (6 professores). O objetivo desse procedimento, segundo o pesquisador, foi o de identificar bibliografias e recursos que são utilizados por eles em suas aulas, em particular para o ensino de limite.

Concluída essa etapa, o autor passou a elaborar uma sequência de atividades que pudesse facilitar a compreensão do conceito de limite e ajudar professores na preparação de suas aulas utilizando softwares (já citados) e sua exposição em ambientes informatizados ou em locais que oferecem poucos recursos didáticos.

No segundo semestre de 2005, o pesquisador testou as atividades elaboradas num minicurso em que trabalhou com uma turma de 12 alunos de uma instituição particular de ensino superior e que estavam cursando o 2º semestre de licenciatura em Matemática. Por meio de um diagnóstico preliminar, o pesquisador constatou que não possuíam conhecimento sobre o assunto de limites, sabiam usar computadores, mas apenas dois deles sabiam usar computadores e utilizar também o *Graphmatica*.

Conforme Silva Neto (2006), o minicurso foi realizado em cinco encontros em um laboratório de informática, sendo que cada aluno fez uso individual do computador, não havendo restrição de interação entre os mesmos. No primeiro encontro foi feita uma apresentação do software *Graphmatica* para familiarização de suas funções básicas de operações. Os demais encontros foram destinados efetivamente à aplicação das atividades. Ao término do minicurso, os alunos

responderam a um questionário que tinha como finalidade identificar suas opiniões a respeito da proposta desenvolvida.

Silva Neto (2006) salienta que o material elaborado foi aplicado a uma turma reduzida de alunos, acredita que, numa sala de aula com um número mais expressivo de alunos, o resultado não seria tão discrepante do obtido. Dessa forma, ele pode fazer algumas observações, visando incentivar reflexões pelos professores de Matemática que ministram aula de Cálculo.

Pelas análises feitas sobre o assunto limite, Silva Neto (2006) pôde ressaltar que os professores preferem uma bibliografia voltada ao formalismo da Matemática, sem se preocupar muito com sua aplicação, isto em concordância com as bibliografias adotadas por eles. Por outro lado, pôde ainda constatar, que os alunos destacam as aplicações como um fator primordial para compreensão e aprendizagem do assunto.

Silva Neto (2006) concluiu que houve uma boa aceitação do seu trabalho pelos professores que avaliaram as apresentações dos recursos sugeridos e, pelos comentários feitos, acredita que a pesquisa será de grande proveito para os docentes. Finalmente, o pesquisador reafirma que o uso dos recursos da informática para o ensino e aprendizagem de Cálculo, em especial de limite e a aplicabilidade deste conhecimento em outras áreas afins, é totalmente viável e de grande aceitação, tanto pelo corpo docente como discente, pois facilita o entendimento da matéria pelos alunos e agiliza o trabalho dos professores.

Kurata (2007) em sua dissertação – *O ensino de cálculo para cursos superiores de tecnologia na área ambiental: aspectos motivacionais do aluno* – aponta que na maioria dos cursos de graduação em tecnologia, o ensino de Cálculo, é uma atividade de ensino desenvolvida a partir do primeiro semestre. A predominância da visão mecanicista do ensino básico e as dificuldades de natureza epistemológica, na introdução dos primeiros conceitos abstratos, aliadas à forma tradicional de ensino praticada pela maioria dos docentes, na abordagem do conteúdo de Cálculo, têm como consequências o professor vivenciar total desconforto pela falta de motivação dos alunos para aprender a matéria.

Para Kurata (2007), fragilizam-se, assim, no decorrer do semestre, as possibilidades de um ambiente propício para a aprendizagem e, conseqüentemente, resultam em altos índices de evasão e retenção. Neste contexto, o objetivo principal

de sua pesquisa foi identificar qual a forma de abordagem dos conteúdos da disciplina Cálculo que determina uma maior motivação ao aluno para aprender esta disciplina no curso superior de Tecnologia em Hidráulica e Saneamento Ambiental da Faculdade de Tecnologia de São Paulo (FATEC-SP).

Para isso, o autor direcionou sua pesquisa, adaptando-a a metodologia de pesquisa de Romberg (1992)⁹. Um projeto alternativo de ensino e de aprendizagem de Cálculo que foi criado com base nos princípios da interdisciplinaridade, com a finalidade de ser um instrumental metodológico pertinente para os alunos integrarem teoria-prática e conteúdo-realidade. Kurata (2007) revela que esta abordagem relacionada com as disciplinas específico-profissionalizantes é um fator determinante para a motivação dos alunos em aprender Cálculo e, por conseguinte, contribuir para minimizar os altos índices de evasão e retenção.

O Cálculo é considerado como uma disciplina básica pelo seu caráter integrador para a aquisição e construção do conhecimento científico, conforme o pesquisador, ele introduz os primeiros conceitos abstratos como, por exemplo, a noção de limites. Estes constituem para os alunos uma das primeiras dificuldades na forma de raciocinar para sua compreensão, mesmo levando em conta a sua evolução histórica e as motivações que levaram à gênese do assunto.

Por outro lado, Kurata (2007) salienta que com a predominância da forma tradicional praticada pela maioria dos professores de Cálculo, na abordagem dos conteúdos matemáticos, observamos angústias por parte dos estudantes, por não conseguirem atingir a compreensão da essência do assunto. Esses docentes entendem que o formalismo é desejável e indispensável, para propiciar uma visão ampla, na articulação do conhecimento matemático aplicado à construção de uma cultura multidisciplinar. Entretanto, para o autor, um grande abismo separa o ensino médio e o ensino superior atualmente, principalmente para os egressos do ensino médio público. Dessa forma, Kurata (2007) ressalta que é sensata uma reflexão do docente sobre a preparação, apresentação, abordagem e o desenvolvimento dos conteúdos programáticos.

⁹ É uma metodologia específica para projetos de pesquisa Matemática, em que se propõem dez atividades a serem cumpridas, não necessariamente na ordem proposta: identificar o fenômeno de interesse, criar um modelo preliminar, relacionar ideias próprias com ideias de outros, levantar conjecturas, seleção de estratégias de pesquisa, seleção de procedimentos de pesquisa, ganhar evidências, interpretar as evidências colhidas, relatar resultados, antecipar ações de outros (KURATA, 2007; ROMBERG, 1992).

Kurata (2007) explica que, atualmente, o que se observa no processo de ensino e aprendizagem em Cálculo é a preocupação dos docentes em transmitir os conhecimentos para dar cumprimento aos planos de ensino, sem tempo para pensarem em uma abordagem de ensino voltado para a compreensão. E, por outro lado, os alunos, apesar da carência de uma formação mais sólida para o acompanhamento da matéria, se manifestam, perguntando o porquê de aprenderem Cálculo e, ainda, para quê aprenderem Cálculo na sua modalidade de curso.

Foi nesse contexto que Kurata (2007) situou o seu problema de pesquisa: para sustentar uma unidade de conhecimento matemático, com o objetivo de fundamentar outras teorias em outros campos do conhecimento, quais condições exercem uma maior motivação para o aluno, no processo ensino e aprendizagem do Cálculo para Cursos Superiores de Tecnologia em Ciências Ambientais?

Em geral, segundo Kurata (2007), o aluno matricula-se em Cálculo, sem ter ideia do que trata a disciplina. Somente depois das primeiras aulas ele percebe tratar-se da Matemática do curso superior. É aconselhável, de acordo com o pesquisador que, na primeira aula, o professor faça um breve histórico do Cálculo, a partir de Leonardo da Vinci até a era de Newton, com a descoberta das derivadas, entrelaçando a física e o Cálculo. Dessa forma, os alunos teriam uma iniciação ao Cálculo, com alguns fundamentos que permitiriam entender que ele constitui uma base integradora para a aquisição de novos conhecimentos nas mais variadas áreas. Discordamos do pesquisador ao indiciar Leonardo da Vinci como propulsor para os estudos históricos do Cálculo, por não termos registro de nenhuma contribuição deste para o desenvolvimento deste conhecimento. Não encontramos na pesquisa descrita por Kurata (2007) justificativa quanto a escolha do período histórico considerado ideal para a introdução do Cálculo ao alunado.

Nessa linha de pensamento, Kurata (2007) apresentou a hipótese: As condições que representam uma metodologia de ensino que diversifica a forma de abordagem do conteúdo a ser apresentado e que permite aos alunos relacioná-lo a situações reais a serem vivenciadas no futuro, conduzem para uma maior motivação para a aprendizagem Matemática.

O objetivo geral da pesquisa de Kurata (2007) foi o de identificar as aspirações dos alunos que determinam uma maior motivação para aprender Cálculo em sala de aula, em relação à forma de abordagem das unidades do conteúdo a ser

ministrado pelo docente e com vistas a minimizar os índices de evasão e retenção. Mais especificamente, uma vez identificadas essas aspirações dos alunos, que provocarão uma maior motivação na aprendizagem do Cálculo, quanto à abordagem dos conteúdos, a pesquisa de Kurata (2007) apresenta uma contribuição para o ensino de Cálculo para cursos superiores de graduação em Tecnologia em Ciências Ambientais.

Conforme Kurata (2007) um ensino de Cálculo em que o docente tem a preocupação de trabalhar de forma diferenciada, de acordo com a natureza de cada curso, além de potencializar possibilidades aos alunos para um ambiente motivacional propício para a aprendizagem, permite conduzir a prática educativa de forma integradora.

Para Kurata (2007), a maioria dos atuais alunos ingressantes não está preparada para um ensino de Cálculo estruturado e sistematizado nos moldes tradicionais, com definições, teoremas e propriedades, como na maioria dos livros didáticos de Cálculo Diferencial e Integral. Pretender, dessa forma, uma construção significativa do conhecimento matemático é uma tarefa difícil e desconfortante.

Kurata (2007) salienta que uma abordagem que proporcione recursos, como os textos problematizadores, que possam oferecer aos alunos a vivência de problemas reais na sua modalidade de curso, contribui para estabelecer um clima de relevância e necessidade de aprendizagem do conteúdo matemático visado.

Barrichello (2008) a partir de uma concepção interacionista de ensino e aprendizagem, em sua dissertação fundamentada nas ideias de Vigotski (2007) – *Problemas de cálculo diferencial em um ambiente de interação escrita* – procurou investigar as potencialidades didático pedagógicas de uma dinâmica de interação entre professor e aluno, baseada na escrita e orientada pela resolução de problemas, a qual chamou de Dinâmica RCR. Essa dinâmica pode ser sintetizada pela sequência resolução-comentário-resolução, na qual a cada resolução entregue por um aluno, o professor faz alguns comentários e devolve para que o aluno continue resolvendo.

Esta pesquisa foi de caráter qualitativo e se alinha ao paradigma interpretativo de investigação proposto por Ernest (2003 *apud* BARRICHELO, 2008), uma vez que procurou “explorar toda a riqueza de um caso particular que possa servir como paradigma ou modelo ilustrativo de algo mais geral” (p. 33). O pesquisador utilizou o

conceito de Zona de Desenvolvimento Proximal e a metáfora do Suporte para compreender a relação aluno-professor (sujeito-pesquisador) no contexto de resolução de problemas em Cálculo Diferencial. Vigotski (2007, p. 97) definiu a Zona de Desenvolvimento Proximal como sendo:

[...] a distância entre o nível de desenvolvimento real, que se costuma determinar através da solução independente de problema, e o nível de desenvolvimento potencial, determinado através da solução de problemas sob a orientação de um adulto ou em colaboração com parceiros mais capazes.

Como salienta Cury (2007, p. 61 *apud* BARRICHELLO, 2008):

Ao analisar erros dos alunos [...], notei que, independentemente das teorias que fundamentavam as pesquisas e da forma como as respostas eram apresentadas eu estava analisando o *conteúdo* da produção, ou seja, empregando uma metodologia de análise de dados conhecida como *análise de conteúdo*.

Segundo Barrichello (2008), o que se evidenciou foi que a Dinâmica RCR, por proporcionar um contexto no qual professor e aluno (pesquisador e sujeito) podem interagir de maneira bastante objetiva através da escrita, ampliou as possibilidades de compreensão da natureza dos erros cometidos pelos alunos, quando comparada com os contextos convencionais de interação, como a correção de exercícios em sala de aula, de provas ou de listas de exercícios.

Isso fica evidente para Barrichello (2008) quando observou que a análise do conjunto dos relatórios de múltiplas entradas gerados ao longo de todas as interações forneceu mais informações e permitiu ao mesmo uma análise mais densa sobre as possíveis causas do erro cometido pelo aluno, do que se tivéssemos olhado apenas para algum dos relatórios isoladamente. O pesquisador concorda com Radatz (1979 *apud* Barrichello, 2008) quando o autor colocou as dificuldades e limitações para a identificação das causas de um erro, porém, acreditamos que a Dinâmica RCR ampliou os horizontes para possíveis interpretações acerca dessas causas.

Para Barrichello (2008) o que foi se evidenciando ao longo das interações entre aluno e professor (pesquisador e sujeito) é que, apesar de alguns alunos demonstrarem conhecer a definição de função, relutam em aceitar relações definidas sem expressões algébricas ou alguma outra justificativa declarada para a

associação entre os elementos dos conjuntos. Barrichello (2008) identificou esse tipo de comportamento com aquilo que Schoenfeld (1985) chamou de “concepção empirista ingênua de Matemática”, na qual, o indivíduo não compreendeu a natureza dedutiva e abstrata dos objetos e do fazer matemático.

A pesquisa de Celestino (2008), intitulada *Concepções sobre limite: imbricações entre obstáculos manifestos por alunos do ensino superior*, teve por objetivo investigar as concepções de alunos do ensino superior sobre limite e possíveis imbricações entre obstáculos epistemológicos relacionados a essas concepções.

Para alcançar esse objetivo, Barrichello (2008) desenvolveu seu trabalho com sequências numéricas, abordando aspectos sobre a convergência e monotonicidade¹⁰, relação entre termos como “ter limite” e “ser limitada”. Nisso, o pesquisador elaborou um conjunto de atividades levando em consideração os resultados de pesquisas sobre o limite e os obstáculos epistemológicos identificados nessas pesquisas.

Os sujeitos da pesquisa de Celestino (2008) foram universitários que estudaram limite de uma função de variável real. O grupo era formado por alunos do quinto semestre de engenharia elétrica de uma universidade particular, situada na zona leste de São Paulo. A análise dos dados foi feita pelo pesquisador com auxílio do software Classificação Hierárquica, Implicativa e Coesitiva (C. H. I. C).

A análise realizada por Celestino (2008) permitiu identificar indícios de possíveis imbricações entre alguns obstáculos e semelhanças e dessemelhanças entre sentidos, que os sujeitos da pesquisa atribuíram para expressões utilizadas quando a noção de limite é estudada.

Celestino (2008) investigou e analisou a existência de imbricações entre obstáculos que foram apontados em algumas pesquisas na área de Educação Matemática. Através da revisão de literatura realizada, objetivou analisar quais as concepções que os alunos do ensino superior possuem sobre limite e verificar se existem imbricações e quais seriam entre os obstáculos relacionados ao limite, como

¹⁰ Uma função é dita monótona se ela preserva a relação de ordem no seu domínio. Se ela é crescente então ela permanece crescente no domínio, se ela é não-decrescente então ela permanece não-decrescente no domínio. Teorema da Sequência Monótona: Uma sequência monótona de números reais é convergente se e somente se é limitada. Além disso, (a) se $x = (x_n)$ é uma sequência não-decrescente limita, então $\lim x_n = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$; (b) se $x = (x_n)$ é uma sequência não-crescente limita, então $\lim x_n = \inf\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$.

o aspecto dinâmico, observados por expressões como “aproximar-se indefinidamente” ou “aproximar-se casa vez mais”; o limite atingir ou não determinado valor, como a utilização de “tender a” ao invés de “o limite é”; ainda, obstáculos relacionados à noção de função, a utilização do infinito como um número.

Celestino (2008) notou a associação de convergência com monotonicidade presente nos protocolos dos alunos. Em geral, o limite é visto como um valor do qual os termos de uma sequência “se aproximam cada vez mais” e esta aproximação dever ser obtida com valores crescentes até que estejam bem próximos de certo número, o limite, no entanto, não é atingido ou mesmo ultrapassado pelos termos da sequência. Isto, segundo o pesquisador, descreve a própria noção intuitiva do limite e soma às ideias presentes nos modelos primitivo e dinâmico.

É precisamente a presença desses modelos que corrobora com a dificuldade em lidar com sequências constantes, pois, para Celestino (2008) parece que admitir o limite de uma sequência constante como sendo essa constante deva ser fruto de fato aceito e não discutível, pois esta definição seria contrária a algo comumente presente nos protocolos dos sujeitos da pesquisa e assim procedem dois obstáculos: associação de convergência com monotonicidade e movimento e “limite atinge ou não?”, o pesquisador acredita que se devem criar situações didáticas viabilizando essa dupla abordagem de aspectos relacionados à noção de limite.

Por sua vez, Cavasotto (2010) em sua dissertação – *Dificuldades na aprendizagem de cálculo: o que os erros cometidos pelos alunos podem informar* – objetivou apresentar uma pesquisa que utilizou a técnica de análise de erros para a compreensão das dificuldades apresentadas pelos alunos na disciplina de Cálculo Diferencial. Embora reconheça a influência de outros fatores, a preocupação do pesquisador nessa investigação esteve centrada nos conhecimentos matemáticos relativos ao Cálculo. O ponto de partida da pesquisa foi a análise das avaliações realizadas durante o semestre.

Além disso, foi também analisado pelo autor, um material que os alunos poderiam confeccionar para consulta durante as provas e aplicado um questionário junto aos envolvidos com a disciplina (alunos, professores e monitores). Essa pesquisa permitiu ao pesquisador concluir que o maior obstáculo enfrentado pelos educandos nessa disciplina não está nos conteúdos específicos de Cálculo, mas sim nos conhecimentos da Matemática básica dos níveis fundamental e médio.

Cavasotto (2010) salienta que, apesar de sua pesquisa ser restrita a uma única disciplina, verificou que a maior parte das dificuldades vividas pelos alunos os acompanha desde as séries iniciais, em alguns casos, ou desde o ensino médio. Sobre isso o pesquisador sugere temas para outras pesquisas: o encadeamento do ensino de Matemática e a necessidade de seu estudo permanente, tanto como forma de melhorar seu ensino, no lado dos professores, como para estimular os alunos à busca do aprendizado, de uma forma lúdica e constante.

Nas pesquisas em Educação Matemática, segundo Cavasotto (2010), é possível apurar que a análise de erros pode ser vista sob duas perspectivas não estanques: como linha de pesquisa em Educação Matemática e como metodologia de ensino. Cada qual apresenta suas próprias características e uma pode motivar a ocorrência da outra. Em ambas torna-se evidente o quanto podemos aprender (e compreender) a partir dos erros cometidos pelos alunos. No caso específico do Cálculo, ressalta o pesquisador, a análise de erros pode ter um caráter diagnóstico com relação às dificuldades de aprendizagem apresentadas pelos estudantes, em particular aqueles que estão ingressando em um curso superior. Para propor mudanças, conforme Cavasotto (2010) é necessário compreender as origens do problema e parece muito adequado utilizar os métodos da análise de erros para tal finalidade.

Cavasotto (2010) informa que participaram da pesquisa, mesmo que de modo indireto, alunos do curso de engenharia da Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul (PUC-RS), os quais responderam ao questionário e tiveram suas produções analisadas.

Também colaboraram na pesquisa de Cavasotto (2010) professores e monitores envolvidos com a disciplina, trazendo suas percepções e sugestões. Tanto um grupo quanto o outro faz referências às dificuldades que são decorrentes de déficit de aprendizagem nos níveis fundamental e médio. A falta do hábito de estudar regularmente é outro item por eles apontado como um dos causadores dos problemas existentes.

Cavasotto (2010) verificou que muitos alunos dos alunos-monitores, mesmo reclamando do déficit existente em sua educação, verdadeiras lacunas oriundas dos níveis de ensino fundamental e médio, ainda assim não frequentavam as oficinas complementares, mesmo com tempo disponível. Todavia, Cavasotto (2010)

observou que a maior procura pelas monitorias se dá justamente por parte daqueles alunos com menor tempo disponível para isso. Por isso, é sugestão de que os horários disponibilizados para tais encontros observem essa questão e contemplem essa categoria de acadêmicos que trabalham e estudam concomitantemente.

Sobre as oficinas, que o pesquisador teve a oportunidade de acompanhar, ele acredita que seja uma boa iniciativa para tratar das dificuldades que os educandos trazem ao ingressar na universidade. No entanto, o que Cavasotto (2010) observou foram aulas expositivas, muitas parecidas com aquelas que devem ter sido enfrentadas por boa parte dos alunos no ensino fundamental e médio. Portanto, com relação à forma de trabalho das oficinas, o pesquisador sugere metodologias que possibilitem uma participação diferente por parte do educando, que ele passe de uma atitude passiva para uma postura ativa na construção do conhecimento.

Sobre as dificuldades, inicialmente Cavasotto (2010) suspeitou serem basicamente de ensino médio, particularmente no que diz respeito às funções. Entretanto, constatou que muitos dos erros analisados tinham suas origens no ensino fundamental. Embora em uma parcela menor, foram igualmente constatadas, no curso da pesquisa de Cavasotto (2010), dificuldades de interpretação de enunciados bem como de expressão, no momento em que isso era solicitado em justificativas para as respostas apresentadas. Com relação à linguagem o pesquisador constatou que é uma dificuldade que gera erros. Se os alunos não compreendem o que é pedido, aumentam as dificuldades em processar as respostas.

Cavasotto (2010) acredita também que os problemas na confecção do material de consulta para as provas estejam ligados à linguagem. Pois muitos deles são confusos, desorganizados, visualmente poluídos, evidenciando indícios de má organização textual. Outra ocorrência nas três avaliações estudadas pelo pesquisador que provocou inquietações e reflexões nos estudantes participantes da pesquisa foi às questões deixadas em branco.

Em sua dissertação – *Uma proposta para o ensino e aprendizagem de limite de função real* – Pinto (2010) se propôs a investigar abordagens metodológicas que podem contribuir para o entendimento de limite de funções reais, no contexto da sala de aula, no Ensino Médio. Conforme a pesquisadora, esta pesquisa foi desenvolvida em uma escola técnica federal de Minas Gerais, em que os alunos aprendem o

conteúdo introdutório de Cálculo (limites, derivadas e integrais) no 2º ano do Ensino Médio.

A metodologia utilizada foi a engenharia didática, organizando a pesquisa em quatro etapas: análises prévias ou preliminares; análises *a priori*, execução e análise *a posteriori*. A autora destaca que dois referenciais teóricos foram estudados na fase de análise prévia da engenharia didática, objetivando tanto responder à questão principal do trabalho, quanto estruturar as atividades aplicadas em sala de aula: a dialética ferramenta-objeto de Douady e a teoria “escrever para aprender Matemática”. Essas duas teorias se relacionam no traçado das atividades, que privilegiaram a escrita Matemática e o jogo de quadros, principalmente o uso do quadro gráfico.

Pinto (2010) explica que na fase de análise preliminar da engenharia didática investigou a abordagem do tema limite nos livros didáticos direcionados ao Ensino Médio. Após a análise de alguns livros didáticos, a autora verificou que “o assunto limite pouco aparece nesse nível de ensino e, quando isso acontece, é abordado no final do terceiro volume da coleção, desvinculado da teoria sobre funções” (p. 176).

Conforme Pinto (2010), as atividades foram desenvolvidas em duplas pelos alunos para fomentar a comunicação Matemática. As últimas atividades foram executadas com apoio do software Winplot, para auxiliar no esboço gráfico das funções. As respostas apresentadas pelos estudantes, ao longo do desenvolvimento das atividades, evidenciaram uma maior utilização do quadro gráfico e o uso da linguagem natural como suporte para a resolução das questões propostas.

Pinto (2010) ressalta ainda que todas as atividades apresentadas em sua pesquisa foram reunidas em uma proposta didática “Uma Introdução ao Estudo de Limites de Função Real”, que poderá servir de instrumento para o ensino e a aprendizagem desse conteúdo, que a nosso ver representa a maior contribuição em sua tese.

Temos ainda Vaz (2010) que realizou uma pesquisa tendo como objeto de estudo o tratamento dos conceitos básicos do Cálculo Diferencial e Integral: Limite, Derivada e Integral de uma função real. A pesquisadora usou como parâmetros à análise desses conceitos as abordagens numérica, algébrica e geométrica (gráfica) no tratamento didático pelos professores de Cálculo I de disciplinas específicas, de

Cursos de Engenharia do CEFET-MG, e também foram analisados livros-texto de Cálculo.

O objetivo do estudo de Vaz (2010) em sua dissertação – *Os conceitos de limite, derivada e integral em livros didáticos de cálculo e na perspectiva de professores de Matemática e de disciplinas específicas em cursos de engenharia* – foi o de estudar os conceitos de limite, derivada e integral, pelos professores de Matemática e de disciplinas específicas, em cursos de engenharia, e pelos autores de livros texto de Cálculo. A metodologia usada foi baseada em autores que abordam o tratamento conceitual como Duval (2003) com a representação de registros semióticos, Lévy (1993) que trata do desenvolvimento do conhecimento e dos saberes com as tecnologias da inteligência, especificamente da nossa era, denominada era de informática. A pesquisadora buscou também em Pais (2008) parâmetros da didática francesa especificamente do trabalho com conceitos.

Os métodos usados na pesquisa de Vaz (2010) foram divididos em três momentos. No primeiro momento foi feita uma análise documental em Projetos Políticos Pedagógicos (PPP) dos cursos de engenharia pesquisados, (engenharia elétrica, engenharia de produção civil e engenharia de computação) e o plano de ensino de Cálculo I, elaborado pelo Departamento de Física e Matemática do CEFET-MG. Também foram analisados livros-texto de Cálculo I para identificação da abordagem dos conceitos investigados. No segundo momento foi feita a observação de aula de Cálculo I e de disciplinas específicas dos cursos já mencionados. Por último, foram realizadas entrevistas semi-estruturadas com professores das aulas observadas e também com um professor que somente foi entrevistado.

Foi constatado na pesquisa de Vaz (2010) que tanto os autores de livros de Cálculo, como os professores de Matemática e disciplinas específicas dos cursos de engenharia, utilizam o que este mesmo autor denomina de “conversões”, as quais consistem em transformações de representações com mudança de registros. Conforme Vaz (2010) estas “conversões” aconteceram na elaboração conceitual passando-se da abordagem algébrica, para a gráfica, geométrica e numérica, esta última com a tabela de valores.

Ainda segundo Vaz (2010), o outro tipo de transformação de representação semiótica, a de “tratamento”, também foi utilizada ao se calcular o limite pelo levantamento de indeterminação e com a simplificação da expressão algébrica da

função; já na derivada, quando se muda as diversas notações. A interpretação gráfica, como aplicação geométrica, segundo a pesquisadora consiste na exploração do pensamento geométrico da visualização para melhor compreensão do comportamento da função, de suas propriedades e variação no seu domínio da definição, seja uma análise discreta, por pontos isolados ou contínuos em intervalos.

A tabela de dados, com a utilização do pensamento aritmético, para a pesquisadora, pode trazer uma interpretação melhor do limite de uma função quando a variável livre tende a um determinado valor, ou comportamento da função na vizinhança de um ponto, ou na tendência ao infinito com valores das variáveis independentes, ou das variações aproximadas, os infinitésimos.

Conforme Vaz (2010), quanto ao que Pais (2008) traz da aprendizagem conceitual quando distingue o saber, mais relacionado ao aspecto evolutivo das ciências e o conhecimento, uma produção mais perto da aprendizagem, a autora constata que os professores em suas aulas ficaram mais próximos do saber, utilizando uma didática da aula expositiva e do tratamento da informação. Nessa perspectiva, a introdução dos conceitos de limite, derivada e integral com atividades e uso de calculadoras, poderiam levar os estudantes a elaborar tabelas de valores na obtenção dos limites, derivadas ou integrais, auxiliando-os na compreensão desse conceito.

Partindo do pressuposto que o aluno sabe os conceitos de limite, derivada e integral, para Vaz (2010), o professor da disciplina específica supõe que somente a expressão Matemática do saber tecnológico, expresso como um desses conceitos matemáticos traz, pela transposição didática, o entendimento tecnológico. Assim, segundo a autora, uma equação diferencial expressando um conceito não desvela o saber científico nela sistematizado se não houver uma interpretação das condições iniciais e de contorno, da lei de formação e desenvolvimento do fenômeno por ela modelado.

Devemos ressaltar que as pesquisas descritas elucidam as dificuldades concernentes ao Cálculo, particularmente, à compreensão da noção de limite, não somente aquelas relacionadas às técnicas e manipulações algébricas necessárias para resolvê-lo, reforçando mais uma vez a necessidade de desenvolver um trabalho, cujo foco principal fosse o confronto entre as dificuldades na aprendizagem de Cálculo. O panorama apresentado neste capítulo será retomado em nosso

capítulo de análise em diversos aspectos concernentes às estas dificuldades. Quanto às pesquisas que versam sobre os obstáculos epistemológicos, deixamos para evidenciá-las no próximo capítulo, como mencionado anteriormente, por constituir o principal referencial teórico adotado para o delineamento dessa investigação.

3. OBSTÁCULOS EPISTEMOLÓGICOS

A problemática de nossa pesquisa está norteadada pelos obstáculos epistemológicos evidenciados ao longo da história do desenvolvimento do conceito de limite, nas dificuldades de aprendizagem que apresentadas por diversas pesquisas em Educação Matemática, descritas no capítulo anterior, e, principalmente, nos obstáculos epistemológicos de limite relatados nas pesquisas de Cornu (1983), Sierpinska (1985) e Rezende (1994).

Portanto, neste capítulo é essencial evidenciarmos a noção de obstáculo epistemológico introduzida inicialmente por Gaston Bachelard (1996) e tratada na Educação Matemática por Guy Brousseau (1983). E, ainda, apresentamos as pesquisas no qual elencamos como marco teórico dessa pesquisa (CORNU, 1983; SIERPINSKA, 1985; e, REZENDE, 1994) e se configura como de nossa pesquisa deste capítulo em diante.

3.1. DE BACHELARD À BROUSSEAU

Diante dos mecanismos para a aquisição de conhecimentos utilizados tanto para a epistemologia ou história da ciência, ensino e aprendizagem, a noção de obstáculo aparece como fundamental para o problema do conhecimento científico. Bachelard (1996) aponta que o problema do conhecimento científico deve ser colocado em termos de obstáculos, dado que “é no âmago do próprio ato de conhecer que aparecem, por uma espécie de imperativo funcional, lentidões e conflitos” (p. 17).

Para o filósofo, o primeiro obstáculo a ser superado é a *opinião*, pois o espírito científico nos proíbe que tenhamos opinião sobre algo que não compreendemos e/ou não sabemos formular com clareza. Nesse âmbito, devemos formular problemas, pois é o sentido do problema que caracteriza o verdadeiro espírito científico.

Segundo Bachelard (1996), a noção de obstáculo epistemológico pode ser estudada mediante desenvolvimento histórico do pensamento científico e na prática da educação, sendo que é ao aprofundarmos a noção de obstáculo epistemológico

que conferimos pleno valor espiritual à história do pensamento científico. Para o filósofo:

É no eixo experiência razão e no sentido da racionalização que se encontram ao mesmo tempo o risco e o êxito. Só a razão dinamiza a pesquisa, porque é a única que sugere, para além da experiência comum (imediate e sedutora), a experiência científica (indireta e fecunda) (BACHELARD, 1996, p. 22).

Encontramos, portanto, a partir das ideias de Bachelard (1996), a principal diferença entre um epistemólogo e um historiador, como podemos verificar no esquema apresentado pela figura 7 a seguir:



Figura 7: Historiador x Epistemólogo. Fonte: Elaboração nossa.

Diante de um fato mal interpretado, Bachelard (1996) afirma que um historiador procurar conhecer e esclarecer apenas o fato e em que circunstâncias este fato pode vir a ocorrer. O epistemólogo interpreta este fato como um conhecimento mal formulado, transformando-o em um obstáculo ou um contra-pensamento do conhecimento em si. Bachelard (1996) conclui, então, que um epistemólogo deve captar conceitos científicos em sínteses psicológicas efetivas estabelecendo, a respeito de cada noção uma escala de conceitos, ou seja, interligando esses conceitos para enfim viabilizar o seu entendimento.

Alguns dos principais obstáculos epistemológicos, segundo Bachelard (1996), que não só causam a estagnação da construção do pensamento científico, mas também contribuem para o seu retrocesso são: experiência primeira; conhecimento geral; obstáculo verbal; conhecimento unitário e pragmático; obstáculo substancialista; obstáculo animista; obstáculos do conhecimento quantitativo.

O primeiro obstáculo a ser superado na formação do espírito científico, segundo Bachelard (1996) é a experiência primeira, que não constitui uma base

segura, haja vista que é colocada antes e acima da crítica, um elemento necessariamente integrante do espírito científico:

Ao espetáculo dos fenômenos mais interessantes, mais espantosos, o homem vai naturalmente com todos os seus desejos, com todas as suas paixões, com toda a alma. Não é, pois, de admirar que o primeiro conhecimento objetivo seja um primeiro erro (BACHELARD, 1996, p. 68).

A respeito do conhecimento geral como obstáculo para o conhecimento científico, Bachelard (1996) expõe que a ciência do geral é uma suspensão da experiência, um fracasso do empirismo inventivo, podendo o espírito científico se enganar ao estar atraído pelo universal. Sendo assim, para que haja de fato uma abstração científica sadia e dinâmica, deve-se primeiramente analisar cuidadosamente todas as “facilidades” relacionadas a ela.

No obstáculo verbal há uma tendência de se associar uma palavra concreta a uma abstrata. Bachelard (1996) evidencia que o excesso de imagens prejudica a razão, impedindo uma visão nítida e abstrata dos problemas reais. Além disso, afirma que o perigo das metáforas para a formação do espírito científico reside no fato de que nem sempre são passageiras, já que tendem a completar-se no reino das imagens, remetendo mais uma vez que a intuição primeira é um obstáculo para a formação do espírito científico, portanto, devemos tentar diluir, senão apagar, essas imagens ingênuas.

Bachelard (1996) aponta que para o período pré-científico a unidade é algo sempre almejado, sendo às inúmeras atividades naturais manifestações variadas de uma Natureza singular, manifestando assim, o obstáculo do conhecimento unitário e pragmático “não é concebível que a experiência se contradiga, ou seja, compartimentada. O que é verdadeiro para o grande deve ser verdadeiro para o pequeno, e vice-versa” (p. 107).

Evidenciarmos durante o período pré-científico uma tendência a unidade de explicação por uma única característica, co-existindo uma necessidade de generalização extrema de um único conceito. Entretanto, toda essa “confusão” no decorrer desse período não deve ser descartada, haja vista que:

[...] é ao tomar consciência dessa revolução da cidadela erudita que se poderá, de fato, compreender a força de *formação psicológica* do pensamento científico

e que se avaliará a distância do empirismo passivo e registrado ao empirismo ativo e pensado (BACHELARD, 1996, p. 119).

O obstáculo substancialista é caracterizado por suas intuições dispersas e, por vezes, opostas. No decorrer do período pré-científico, percebemos que

[...] por uma tendência quase natural, o espírito pré – científico condensa num objeto todos os conhecimentos em que esse objeto desempenha um papel, sem se preocupar com a hierarquia dos papéis empíricos. Atribui à substância qualidades diversas, tanto a qualidade superficial como a qualidade oculta (BACHELARD, 1996, p. 121).

Nesse sentido, podemos inferir que o substancialismo entrava futuros progressos no pensamento científico, haja vista que permite uma explicação breve e decisiva, conseqüentemente, uma falta na bagagem teórica. Dessa maneira, o espírito científico não se satisfaz (ou não pode se satisfazer) com a mera relação de elementos de um fenômeno com sua respectiva substância, sem uma determinação precisa e detalhada.

Bachelard (1996) aponta ainda que uma das características mais latentes no substancialismo é o excesso de adjetivos para um mesmo substantivo, sendo que

[...] as qualidades estão ligadas à substância por um vínculo tão direto que podem ser justapostas sem grande preocupação com suas relações mútuas. Existe no caso um empirismo tranqüilo que está longe de provocar experiências. Ele se aprimora com pouco, apenas aumentando o número de sinônimos (p. 140).

Podemos inferir, nessa perspectiva, que essa sedução substancialista diverge do progresso do pensamento científico, que ao contrário do substancialismo, consiste em diminuir a quantidade de adjetivos relacionados a um substantivo. Pois, “na ciência, os atributos são pensados de forma hierárquica e não de forma justaposta” (BACHELARD, 1996, p. 140).

O obstáculo animista aparece em determinado momento do desenvolvimento pré-científico, no qual, segundo Bachelard (1996), os fenômenos biológicos explicavam os fenômenos físicos. Ou seja, “acima do mecanismo objetivo, é o mecanismo corporal que serve de instrutor” (p. 201). O exemplo abaixo mostra essa necessidade de colocar o corpo humano como modelo de fenômeno objetivo:

O arame, como se sabe, serve para tons mais agudos dos instrumentos de cordas metálicas. Ora, a forte tensão que ele pode suportar parece indicar

que esse metal é feito de cabelos que podem ser fiados e torcidos como os cânhamos (JADELOT, 1787 *apud* BACHELARD, 1996, p. 202).

Nesse âmbito, percebemos que para o pensamento pré-científico, a imagem animista é mais natural, convincente, sendo latente uma tendência de individualizar os fenômenos e acentuar o caráter individual das substâncias pela vida. “Não é, portanto, para o lado da sadia abstração que se encaminha o espírito pré-científico. Ele busca o concreto, a experiência fortemente individualizada” (BACHELARD, 1996, p. 208).

Bachelard (1996) coloca que um conhecimento objetivo imediato, pelo fato de ser qualitativo, já é falseado, carrega um erro a ser corrigido. Esse conhecimento marca fatalmente o objeto com impressões subjetivas, que precisam ser retiradas; ou seja, conhecimento objetivo precisa ser psicanalisado.

Aponta o filósofo que um conhecimento imediato é, por princípio, subjetivo. Ao considerar a realidade como um bem, ele oferece certezas prematuras que, em vez de ajudar, entram o conhecimento objetivo.

E ainda, a grandeza não é automaticamente objetiva, e basta dar as costas aos objetos usuais para que se admitam as determinações geométricas mais esquisitas, as determinações quantitativas mais fantasiosas. Portanto, o conhecimento quantitativo não resiste, inicialmente, aos perigos do conhecimento qualitativo.

Como o objeto científico sempre é sob certos aspectos um objeto novo, compreende-se logo que as determinações primeiras sejam quase forçosamente indesejáveis. É preciso muito estudo para que um fenômeno novo deixe aparecer a variável adequada.

De fato, uma das exigências primordiais do espírito científico, como descreve Bachelard (1996), é que a precisão de uma medida refira-se constantemente à sensibilidade do método de mensuração e leve em conta as condições de permanência do objeto medido. Sobre essa questão é possível perceber o divórcio entre o pensamento do realista e o pensamento do cientista. O realista mede porque o possui, o cientista “aproxima-se do objeto primitivamente mal definido” e prepara-se para medir, é o seu método de medir, mais do que o objeto de sua mensuração, que o cientista descreve. O objeto medido nada mais é que um grau particular da aproximação do método de mensuração. Bachelard (1996) afirma que o cientista crê no realismo da medida mais do que na realidade do objeto.

Segundo Bittencourt (1998, p. 13), “do ponto de vista pedagógico, a visão epistemológica de Bachelard (1996) implica a análise crítica do processo de aprendizagem, considerando as dificuldades, erros e falhas como parte deste processo”. Segundo a pesquisadora, Bachelard (1996) também alerta o ensino de ciências desconsiderando o processo histórico de construção do conhecimento e a experiência do aluno, possibilitando assim, a utilização da noção de obstáculo epistemológico em didática da ciência.

Conforme Almouloud (2007), uma das preocupações dos pesquisadores em ciências humanas é compreender em que condições as crianças adquirem conhecimentos e o processo que auxilia essa construção. Com relação à aprendizagem dos conceitos matemáticos, a maioria dos pesquisadores em didática da Matemática defende a ideia de que um dos fatores que influenciam essa aprendizagem é o tratamento que o educador dá ao erro do aluno.

Assim, a aquisição de uma noção Matemática perpassa por problemas em que o sujeito seja capaz de resolver usando essa noção, fazendo conexões intra ou interdisciplinares. Dessa forma, o erro tem papel fundamental na aprendizagem.

Para Brousseau (1986), o erro é a expressão de um conjunto de concepções espontâneas que integradas em uma rede coerente de representações cognitivas transforma-se em obstáculo à aquisição de novos conceitos, pois:

O erro não é somente o efeito da ignorância, da incerteza [...], mas o efeito de um conhecimento prévio que era interessante e levava ao sucesso, mas agora se mostra falso, ou simplesmente insuficiente. Os erros desse tipo não são erráticos e imprevisíveis, são obstáculos constituídos (BROUSSEAU, 1976, p. 104) [tradução nossa].

Os erros cometidos por um mesmo sujeito pode ser proveniente da maneira de conhecer, da concepção característica ou ainda produto de um conhecimento antigo, que deu certo *a priori*. Ainda, para Brousseau (1986):

- a) Um obstáculo é um conhecimento, uma concepção, e não uma dificuldade, ou uma falta de conhecimento;
- b) Esse conhecimento produz respostas adequadas em certo contexto frequentemente encontrado;
- c) Mas ele produz respostas falsas, fora desse contexto. Uma resposta correta e universal exige um ponto de vista notavelmente diferente;
- d) Além disso, esse conhecimento resiste às contradições com as quais ele é confrontado e ao estabelecimento de um conhecimento novo. Não basta ter um conhecimento novo para que o precedente desapareça (é o que diferencia o transpor de obstáculos da acomodação de Piaget); é,

- então, indispensável identificá-lo e incorporar a sua rejeição no novo saber;
- e) Depois da tomada de consciência de sua inexatidão, ele continua a manifestar-se de modo intempestivo e obstinado (ALMOULOU, 2007, p. 133).

Para Almouloud (2007), o erro é considerado necessário para: desencadear o processo de aprendizagem; o professor situar as concepções do aluno e compreender os obstáculos subjacentes; e o professor adaptar a situação didática. É então, imprescindível buscar respostas às seguintes questões: Quais obstáculos podemos evitar? Quais obstáculos não devemos evitar? Como superar os obstáculos que não devemos evitar?

Brousseau (1986) distingue origens diversas para os obstáculos identificados na didática da Matemática caracterizando-os em ontogênicos, didáticos e epistemológicos. Os obstáculos de origem ontogenética, conforme o pesquisador, são aqueles que ocorrem por causa de limitações (neurofisiológica entre outras) em algum momento de seu crescimento, assim, não desenvolve conhecimento adequado para os seus meios e objetivos.

Quanto aos obstáculos de origem didática, Brousseau (1986) aponta que são aquelas que dependem de uma escolha ou de uma concepção do sistema de ensino. Neste trabalho iremos evidenciar apenas os obstáculos com características epistemológicas.

Os obstáculos de origem epistemológica são inerentes ao saber e podem ser identificados ao longo da história da Matemática, quando se observa as dificuldades que os matemáticos encontraram, para a compreensão e utilização desses conceitos. Esse tipo de obstáculo é, na realidade, constitutivo do próprio conhecimento e não se pode nem se deve evitá-lo (BROUSSEAU, 1986).

A seguir, evidenciamos pesquisas que apresentaram diversos obstáculos epistemológicos concernentes ao conceito de limite baseados nas noções de obstáculo epistemológico descritas por Bachelard (1996) e Brousseau (1986).

3.2. QUADROS TEÓRICOS DE CORNU, SIERPINSKA E REZENDE

A tese de Cornu (1983) – *Apprentissage de la notion de limite: conceptions et obstacles* – tratou de obstáculos epistemológicos para a aprendizagem do conceito de limite. Para o autor, a noção de limite é fundamental para a análise, e esta é uma

das noções fundamentais da Matemática. Além dos pré-requisitos para o aprendizado, a noção de limite em si contém muitas dificuldades, pois, é um novo tipo de conceito para os alunos, que até então encontravam raciocínios e cálculos prontos e acabados.

Com a noção de limite, aparecem os primeiros processos infinitos. Esta é, ao olhar do autor, uma mudança profunda para o estudante e é para ele o verdadeiro início da aprendizagem a partir da análise.

Com sua pesquisa, Cornu (1983) objetiva compreender quais são as reais dificuldades na aquisição da noção de limite, e ainda, enfatiza que seu objetivo é de natureza didática, isto é, estudar o ensino e aprendizagem do conceito de limite, a fim de melhorá-los. O autor salienta que antes de propor soluções educacionais, necessitamos compreender os fenômenos que ocorrem ao se aprender o conceito de limite. Para isso, Cornu (1983) realizou uma pesquisa com alunos, fazendo testes e entrevistas a fim de discernir as concepções dos alunos sobre o limite e os obstáculos fundamentais para a aprendizagem deste conceito.

Para Cornu (1983), o objeto matemático que constitui a noção de limite não é, nem deve ser, a definição do limite. Uma definição é matematicamente suficiente para restaurar um conceito, mas em termos de conhecimento, não captura todos os aspectos do conceito. Para uma ideia completa do que é o conceito de limite, devem ser examinadas em detalhe as várias maneiras em que o usamos em todas as subáreas da Matemática, considerando o cálculo de limites, as demonstrações da "passagem para o limite", os resultados que podem ser aproximações etc. É a função que determina a noção do objeto matemático.

Para o pesquisador, não podemos falar sobre a noção de limite isoladamente, pois esta noção está intimamente relacionada a outros conceitos, não podendo se desenvolver sem as relações com os mesmos. O "campo conceitual" em que se encontra a noção de limite, tanto na Matemática dos matemáticos quanto na Matemática ensinada, não é fácil de definir. Para o autor, esta noção está naturalmente nos conceitos de derivada e continuidade, sendo a relação entre limite e continuidade evitada.

O estudo histórico mostra o papel fundamental desempenhado pela noção da derivada para o desenvolvimento do conceito de limite. Mas encontramos também, em conexão com a noção de limite, os números reais. Entre as abordagens para a

noção de limite, ilustram-se várias concepções como parte da estrutura dos números reais. A noção de infinito está também estreitamente ligada ao limite (CORNU, 1983).

De acordo com Cornu (1983), provavelmente a primeira oportunidade de praticar um conceito não trivial do infinito está no desenvolvimento matemático de um aluno aprendendo o conceito de limite, assim como também a primeira vez que os resultados não são obtidos após um número finito de cálculos ou passos de raciocínio. Também pode ser visto no campo conceitual do conceito de limite, a noção de série, a noção de infinitamente pequeno e a noção de função.

O conceito que o aluno tem quanto à noção de função vai afetar o entendimento do conceito de limite. O autor exemplifica dizendo que um aluno cujo conceito está essencialmente relacionado com o gráfico, vai lutar para ter uma ideia do limite da função $\sin \frac{1}{x}$ em 0. E ainda, um estudante para o qual uma função é essencialmente uma fórmula algébrica vai enfatizar o aspecto do cálculo de limites.

Embora matematicamente, toda a noção de limite esteja contida na sua definição em (ε, δ) , existe uma lacuna entre o conceito de limite como um conceito, e a definição da noção de limite.

Cornu (1983) evidencia que esta lacuna é devido ao próprio conceito e ao modo que podemos defini-lo. O aspecto "dinâmico" ("tender para" ou "se aproximar de") não é desenvolvido pela definição, que é estática.

O pesquisador afirma que compreender o conceito de limite e compreender a sua definição em (ε, δ) são duas coisas relativamente independentes. Há alunos que tem internalizado da definição o suficiente para lidar com a maioria dos exercícios que irão encontrar durante seus estudos, mas não adquiriu assim o conceito de limites. Por outro lado, há estudantes que compreendem uma série de aspectos fundamentais do conceito de limites (por exemplo, aproximação), e que não entendem a definição em (ε, δ) .

Além disso, conforme Cornu (1983), historicamente, o conceito de limite funcionou de forma eficaz para muitos matemáticos antes que ele fosse definido em sua forma atual. A aquisição do conceito de limite requer uma representação mental de imagens, desenhos, exemplos, ligações que não são os mesmos para a aquisição da definição do limite.

Na atividade de resolver um problema, o conceito e sua definição não funcionam da mesma maneira. De acordo com o pesquisador, na compreensão da definição pode ser mostrado que o limite de uma soma é a soma dos limites, mas não como se deve calcular um limite.

Cada vez mais, são introduzidos métodos de ensino que permitem uma abordagem intuitiva ao conceito de limite, antes da sua definição. Na pesquisa de Cornu (1983), a definição de limite é o objetivo, o fim da sequência, e não o começo. Muitas tentativas são feitas atualmente para propor a inovação educacional da noção de limite. O objetivo da pesquisa em educação é, essencialmente o ensino, pois o autor considera que, “a longo prazo, esta pesquisa deve levar à melhoria da educação Matemática” (p. 24).

Cornu (1983) através de uma revisão histórica do conceito de limite mostra as grandes famílias de problemas ligadas ao conceito de limite. O autor aborda primeiramente os problemas geométricos, frisando os problemas de Cálculo, tais como cálculos de áreas, como também, a reflexão sobre a natureza das quantidades geométricas.

Estes foram problemas de geometria que permitiram aos gregos inventar o método da exaustão, considerando o círculo como o "limite" de polígonos regulares. Conforme o pesquisador, o problema essencial se encontra constantemente na geometria, permanecendo como um meio necessário para entender certos aspectos do conceito de limite.

Sendo a geometria a primeira motivação para a noção de limite, ela provocou também algum desconforto, pois foi muito complexo sair do ponto de vista geométrico e se voltar ao domínio numérico, esta passagem, no entanto, foi indispensável.

O segundo grupo de problemas identificado por Cornu (1983) foi o cálculo das somas de séries. Este problema, segundo o autor, é de origem geométrica, mas rapidamente se tornou um problema em si, o que ajudou a definir técnicas de cálculo para a passagem ao domínio numérico. A própria ideia de que uma soma pode ser finita não é evidente, conforme podemos notar nos paradoxos de Zenão.

Enfim, o terceiro grupo de problemas observado por Cornu (1983) é relacionado ao cálculo das derivadas. Ao contrário do que se costuma praticar no ensino, onde a noção de derivada é uma aplicação do conceito de limite, o desejo de

calcular derivadas, velocidades instantâneas, surgiu, mais especificamente, para ver no que se transforma uma proporção de duas quantidades quando estas duas grandezas são canceladas, pois esta era uma componente crítica no desenvolvimento do conceito de limite. Podemos citar o trabalho de Newton como ilustração de muitos problemas, em sua maioria, ligados à geometria, de máximos e mínimos.

Com isso, o autor identificou obstáculos epistemológicos, obstáculos estes que explicam alguns atrasos, alguns erros, mas sem apresentar um aspecto negativo. Para Cornu (1983), eles foram, muitas vezes, fatores de progresso, levando-se em conta que os esforços para superá-los nos levaram ao desenvolvimento da análise.

O primeiro obstáculo epistemológico identificado foi a transposição numérica. Para o pesquisador, uma das grandes dificuldades da história do conceito de limite era de abstrair do contexto geométrico a cinemática, não para trabalhar a "grandeza", mas sim os números.

Cornu (1983) afirma que o conceito unificado de limite tem sido possível no domínio numérico depois de termos sucesso na tradução dos diferentes problemas numéricos que podem surgir. A interpretação geométrica dos fenômenos tem sido abrandada pela transposição numérica. Para o pesquisador, podemos pensar que o método da exaustão dos gregos é muito próximo à nossa noção de limite, e poderia então ser surpresa a demora de tantos séculos para a noção de limite ser especificada, enquanto os gregos pareciam tão perto. Isto se identificou para o autor como sendo a transposição numérica que constitui a diferença entre esses dois marcos, o obstáculo que foi tão difícil de atravessar.

De acordo com Cornu (1983), Lagrange foi um dos principais "arquitetos" dessa transição numérica, tentando trazer à análise o cálculo algébrico. Lagrange trabalhou nas "séries formais", que são objetos algébricos. Em seguida, ele substituiu os indeterminados por números, e, em seguida, sentiu a necessidade de majorar o resto. Ele então aplica seus resultados à geometria e à mecânica, mas ele não trabalha diretamente as grandezas da geometria ou da mecânica.

O segundo obstáculo elencado pelo pesquisador foi o aspecto metafísico da noção de limite. Cornu (1983) ressalta que a utilização da noção de limite no raciocínio matemático marca uma mudança significativa de nível. Introduzimos

raciocínios, objetos, modos de um novo tipo de pensamento que já não são apenas os cálculos ou deduções lógicas habituais.

O autor afirma também que o infinito não faz parte do campo da Matemática clássica. O infinito e a noção de limite surgiram como sendo mais da metafísica ou filosofia que da Matemática. Isso causou entre os matemáticos extrema relutância entre esses conceitos, relutância essa que levou os gregos a evitar o infinito no raciocínio matemático.

Outro obstáculo epistemológico abordado por Cornu (1983) é a noção de “infinitamente pequeno” ou de “infinitamente grande”. Para o autor, a suposição da existência de quantidades infinitamente pequenos tem sido um grande obstáculo.

Há algumas quantidades não nulas, mas que não são mais "atribuíveis", de quantidades "evanescentes", que acontece - t – neste “instante” a quantidade é nula? Estas questões têm focado a atenção de muitos matemáticos, vimos (especialmente em Newton, que fala de "alma" de quantidades no instante em que elas desaparecem, ou, mais tarde, "a relação final" de duas quantidades) (CORNU, 1983, p.59) [tradução nossa].

O autor afirma que Euler usa o conceito de quantidade infinitamente pequena, que, para ele, é uma quantidade que se torna igual a zero, um número menor do que qualquer dada quantidade é zero. Para Cornu (1983, p. 59), “a quantidade é algo qualquer ou nada. Se for algo que não tenha sido cancelado, se não é nada, ela será cancelada. A suposição de que existe um estado intermediário entre os dois é uma utopia”.

Conforme Cornu (1983), se a presença da noção de infinitamente pequeno dificulta a noção de limite, o infinitesimal também de algum modo tem sido um fator de progresso uma vez que a noção de limite foi desenvolvida em parte na reação contra o infinitamente pequeno.

O quarto obstáculo citado por Cornu (1983) é intitulado “O limite atinge ou não?”. Esta questão foi também uma fonte de obstáculos. O autor afirma que para d'Alembert, se o limite for atingido não faz parte do conceito de limite. Até Cauchy, o limite poderia ser alcançado. Uma sequência constante é para além do conceito de limite. A definição da palavra "limite" que exclui o tamanho variável atinge o limite. O autor aponta que em sua pesquisa esse obstáculo ainda é encontrado entre os estudantes.

Por fim, o autor coloca algumas situações que podem ser caracterizadas como obstáculos. Com relação ao obstáculo anterior, a ideia de que qualquer convergência é monótona e não atinge o limite é um obstáculo. Essa ideia prevalece até Cauchy, e é encontrada em muitos estudantes.

Outro grande obstáculo mencionado pelo autor é a dificuldade em imaginar que a soma infinita pode ser finita. É também um dos obstáculos que o pesquisador encontra entre os estudantes para a noção de infinito. O autor incluiu também o problema de $\frac{0}{0}$, no qual duas quantidades podem tender a zero, enquanto sua relação tende a uma quantidade finita. Os exemplos incluem traços desse obstáculo em Berkeley.

Cornu (1983) enfatiza ainda que apontou obstáculos que lhe pareciam fundamentais, baseando-se na experimentação que fez junto aos estudantes, e faz a seguinte colocação: se os obstáculos encontrados na história ainda são confrontados pelos alunos, o estudo desses obstáculos facilitará a superação dos obstáculos observados no processo de ensino e aprendizagem. Isso não significa que, automaticamente, encontrarão no estudante os mesmos obstáculos identificados historicamente, alguns vão desaparecer, outros aparecerão de outra forma, e novos serão encontrados.

Sierpiska (1985), em seu artigo – *Obstacles Épistémologiques relatifs à la notion de limite* – identifica, a partir do estudo do desenvolvimento histórico do conceito de limites e da análise de um experimento, uma lista de obstáculos relacionados com a noção de limite:

- I. "Horror ao Infinito";
- II. Obstáculos relacionados com a noção de função;
- III. Obstáculos geométricos;
- IV. Obstáculos "lógicos";
- V. Obstáculo do símbolo.

Podemos visualizá-los na figura 8 a seguir:

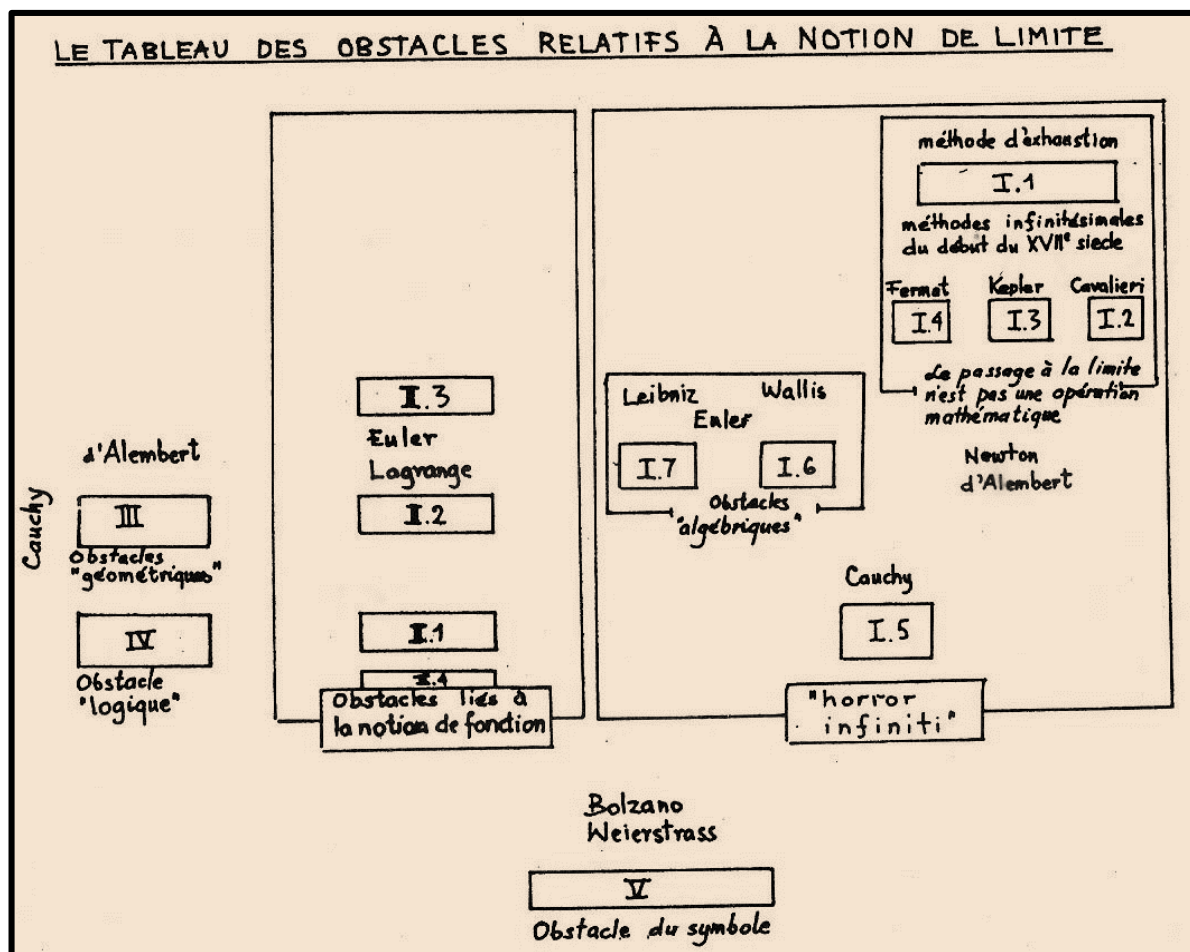


Figura 8: Obstáculos relativos à noção de limite. Fonte: Sierpiska (1985), p. 38, tradução nossa.

Dentro do primeiro grupo de obstáculos epistemológicos denominado de “horror” ao infinito” (I), o subgrupo que a autora considera mais importante é o que aponta para a recusa ao conjunto do infinito (obstáculos I.1, I.2, I.3, I.4). Cantor salienta que:

O horror do infinito é uma forma de miopia que os impede de ver o infinito real, embora em sua forma mais elevada este infinito que criamos é o que nos sustenta, e nas suas formas secundárias, transformadas, se manifestam em tudo nosso e passa a viver em nossas mentes (CANTOR, 1932 *apud* SIERPINSKA, 1985, p.39) [tradução nossa].

Encontramos nesse grupo a recusa do status de operação Matemática à passagem ao limite (I.1). De acordo com a autora, a passagem ao limite é um método de demonstração rigorosa seguindo um esquema que elimina o problema do infinito. Essa crença pode ser estabelecida sem impedir os alunos de cair no extremo oposto: “a aplicação de um regime rigoroso para a liberdade total de escolha de raciocínio que conduz ao resultado, desde que seja verdade”

(SIERPINSKA, 1985, p.39) [tradução nossa]. Vemos manifestações deste obstáculo, por exemplo, no método da exaustão, pois, conforme a autora, nesse método o problema do infinito é eliminado.

Sierpinska (1985) encontra três formas de identificação desse obstáculo (I): raciocínio baseado na indução incompleta (I.2); a passagem ao limite considerando apenas aproximações (I.3); e, com o objetivo de justificar um resultado, não tentamos fazer provas rigorosas, encontramos apenas uma fórmula que descreve a situação e permite uma verificação através de um cálculo simples (I.4).

Sierpinska (1985) enfatiza que a eliminação do infinito é manifestada através de uma indução incompleta no qual basta termos um número finito de casos para tirar uma conclusão geral.

Sierpinska (1985) observa também que há um obstáculo (I.5) na associação da passagem ao limite de um movimento físico, quando no momento de reaproximação "onde nos aproximamos indefinidamente" ou "nos aproximamos mais e mais", enquanto que a noção de limite na teoria formal destina-se a "estática", ela o denomina de obstáculo físico. Sierpinska (1985) enfatiza que a questão de saber se uma grandeza variável atingiu o seu limite ou não, é um sintoma desse obstáculo, sendo esta uma interpretação demasiadamente literal da expressão "dinâmica" usada sobre a noção de limite.

Quanto ao subgrupo dos obstáculos algébricos, Sierpinska (1985) destaca duas situações: a transferência automática dos métodos da álgebra de manipulação de grandezas finitas para grandezas infinitas (I.6); e, a transferência das propriedades dos termos de uma sequência convergente ao seu limite (I.7). A autora enfatiza que essa última situação é um obstáculo que ocorre especialmente no princípio da continuidade de Leibniz.

O obstáculo I.6, conforme Sierpinska (1985), foi observado por Galileu no início do século XVII em conjunto com o paradoxo medieval conhecido onde é comparado o número de pontos nas circunferências dos círculos de raio 1 e 2. Esses problemas surgem apenas

[...] quando tentamos, com nossas mentes finitas, discutir os infinitos, atribuindo-lhes propriedades, aquelas que damos ao finito são limitadas; este fim eu acho que é errado, pois não podemos falar de infinito sendo as

quantidades de um ou menos maior ou igual a outro (GALILEI, 1914¹¹ *apud* SIERPINSKA, 1985, p. 47).

Historicamente, observamos que os obstáculos desse grupo se mantiveram firmes até meados do século XIX, indo do método da exaustão até Cauchy. A definição de Weierstrass foi o resultado do trabalho da aritmetização da Matemática, um programa que estabelece a Matemática exclusivamente no conceito de número. Conforme Sierpinska (1985), em 1876 foi resolvido o problema fundamental da Aritmetização, no qual se estabeleceu um significado ao "número real", enfatizados nos trabalhos de Meray, Cantor, Dedekind e Weierstrass; e ainda, foi formulada uma definição rigorosa do conceito de limite.

Na verdade Weierstrass corrigiu o erro lógico e resolveu o problema de Cauchy sobre a existência do limite de uma sequência convergente depois de admitir o limite como um número (BOYER, 1968, p.606 *apud* SIERPINSKA, 1985, p.40-41) [tradução nossa].

O aparecimento do conceito geral de função foi um ponto decisivo que permitiu no século XIX uma clara articulação da noção de limite livre da intuição geométrica e física. Para a pesquisadora, nas etapas que constituem o rigor da definição de limite aparece cada vez mais clara a noção de função, surgindo assim os obstáculos relacionados com a noção de função (II).

Observemos a definição de Cauchy:

Quando os valores sucessivamente atribuídos à mesma variável se aproximam indefinidamente de um valor fixo, de modo a acabar se aproximando tanto quanto se queira, este valor é chamado o limite de todos os outros (SIERPINSKA, 1985, p. 49) [tradução nossa].

Para Sierpinska (1985), o obstáculo (II.1) observado em estudantes, quanto a este grupo, é próximo ao que se vê na definição de Cauchy, pois aqui se apresenta a restrição de sequências de valores e a concepção que o estudante tem de contínuo parece estar mais próximo da de Leibniz-Cauchy do que de Weierstrass. Ao dirigirmos a atenção exclusivamente no lado relacional da função (II.2) surge o segundo obstáculo relacionado a função.

¹¹ GALILEI, Galileo. **Duas novas ciências**. Tradução de Henry Crew e Alfonso de Salvio. New York: Macmillan, 1914, p.14.

Quando buscamos o limite de uma função em um ponto, é importante saber não o domínio e o contradomínio para saber qual é o valor da função neste ponto, se existe, ou não, mas sim conhecer a topologia desses conjuntos, qual o filtro de vizinhanças do ponto x_0 , qual o filtro de vizinhanças do ponto que presumimos ser o limite, e se a imagem do primeiro, que é uma base do filtro, gera um filtro mais fino do que o segundo. Mas, se a função é dada por uma fórmula como $y = f(x)$, em seguida, a atenção é focada sobre esta, todos os valores de x e y permanecem na vizinhança. É por isso que o cálculo diferencial e integral de Euler e Lagrange, com base nas funções fornecidas por um "simples expressão analítica" só poderia desenvolver-se em um campo muito limitado (SIERPINSKA, 1985, p. 50) [tradução nossa].

Durante muito tempo na história, às concepções de limite aplicavam-se apenas às funções monótonas, isso se caracterizou, para Sierpinska (1985), como sendo outro obstáculo, o de redução de funções monótonas (II.3), pertencente a este grupo assim como também a não distinção da noção de limite da noção de limite inferior ou superior (II.4). Como exemplo deste último, temos a descoberta de que o limite da sequência

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{se 10 não dividir } n \\ 1, & \text{se 10 dividir } n \end{cases}$$

é igual a 1 ou mais 0,9, 0,99, 0,999, 0,9999, ... tem dois limites, 1 e 0.

Quanto aos obstáculos (III) concernentes à concepção geométrica da noção de limite, apresentam-se obstáculos manifestos primeiramente pela ideia geométrica da diferença entre uma grandeza variável e uma grandeza constante, que é o limite (III.1). Sierpinska (1985) aponta que o desenho do círculo como um limite de polígonos inscritos ou circunscritos seria um sintoma deste obstáculo: quanto maior for o número de lados, a maior forma que o polígono pode ter é próximo à forma de círculo.

Além disso, conforme a autora, a ideia de tangente como o limite da variável secante quando se diz que em algum momento a posição da secante difere tão pouco como queremos posicionar a tangente, é essa diferença de concepção que lidamos no método da exaustão. A "diferença" foi mudando de direção com a alteração do item em questão, e para a pesquisadora, esta pode ser uma razão por que foi tão difícil transformar este método em um teorema geral.

Sierpinska (1985) explica que a noção de limite refere-se a funções cujos valores são pontos e não subconjuntos de um espaço topológico. E o termo "diferença" que aparece em diferentes "peles" nas definições de limite deve ser entendida como determinada pela topologia do espaço.

Se atualmente a ideia de limite está intimamente relacionada com a operação de fechamento topológico, a intuição geométrica, em algumas situações, influencia o pensamento do mais próximo ser chamado de "terminal" de um conjunto. Sierpinska (1985) exemplifica dizendo que para Arquimedes, o volume de um sólido é o "terminal" da soma dos volumes dos elementos que se encontram, com a ideia de que o volume não é reduzido em número.

Neste mesmo viés, existem matemáticos que se restringem ao fato de as funções monótonas limitarem o "terminal", em vez de tudo pertencer ao seu fecho (III.2). A origem deste segundo aspecto do obstáculo "geométrico" é a falta de um conceito bem formado de número real. No entanto, a noção de número real não fica clara até que se entenda o conceito de limite que fora determinado somente no século XIX, portanto, não poderia ser utilizado para a definição do número real.

Com relação aos obstáculos lógicos (IV), Sierpinska (1985) alude ao lado lógico da definição da noção de limites correspondendo aos seguintes obstáculos: eliminação de quantificadores ou de sua ordem e o obstáculo em relação ao símbolo da operação de passagem para o limite.

Para Sierpinska (1985), muitas vezes definimos a noção de limite com a ausência de quantificadores, usando a linguagem natural e simbólica. Cauchy não deixou clara a dependência entre a vizinhança do ponto em que se calcula o limite e o da proximidade do ponto que é o limite. Em linguagem natural¹², não nos atentamos à ordem das palavras e às diferenças nas sequências que se seguem.

Outro problema associado com a ordem de quantificadores na definição do limite é a condução da função ao eixo y , enquanto que, ao estudar o limite da função iremos focar em suas inversas. Para Sierpinska (1985, p. 54), esta necessidade de "olhar para o eixo- x do eixo- y " é a fonte desse obstáculo.

Conforme Sierpinska (1985), os quantificadores no conceito de limite não são impostos de forma natural em problemas onde o limite existe e onde ele pode ser deduzido. O papel do quantificador pode mostrar a precisão se tornando mais claro através dos exemplos de não existência do limite.

Quanto ao símbolo da operação de passagem para o limite, Sierpinska (1985) salienta que foi introduzido apenas por Cauchy. Como a passagem ao limite não era considerada, o símbolo não foi necessário. Para Fermat, Newton, Leibniz e muitos

¹² Para a autora, linguagem natural é a linguagem usual, do dia-a-dia (SIERPINSKA, 1985).

outros, as operações de passagem para o limite, fazem parte do cálculo de fluxões, diferenciais, integrais, e nesses casos, era utilizado o sinal de igual ou expressões do discurso matemático usado sobre proporções.

Cauchy foi obrigado a dar um símbolo à operação da passagem ao limite porque admitiu a noção de limite como um conceito básico em relação às noções de continuidade, derivada e integral. Assim, a operação limite foi simbolizada de um modo que enfatiza as semelhanças também com a álgebra, e esconde as diferenças que podem levar a uma perda de sentido. A autora exemplifica o obstáculo do símbolo (V) relatando um caso de sua experiência no qual uma equipe não usa nenhum símbolo específico, enquanto na outra, os alunos usaram um sinal de igual $a_p = 1$ ao invés de $\lim_{x \rightarrow 0} a_p(x) = 1$.

Sobre os obstáculos epistemológicos envolvendo o conceito de limites temos ainda a pesquisa de Rezende (1994) – *Uma análise histórica-epistêmica da operação limite* – que procurou determinar em sua dissertação os obstáculos epistemológicos da operação limite através do resgate histórico da construção do conceito de limite. Para o pesquisador, o conceito de limite não é propriamente uma operação Matemática e o seu significado é sacrificado em prol de métodos heurísticos ou técnicas de demonstração.

Assim, Rezende (1994) desenvolveu uma análise histórico-epistêmica da operação de limite tomando por base Bachelard. Desenvolveu ainda, por meio de uma pesquisa de campo, a noção de obstáculo epistemológico em relação à operação limite no campo pedagógico.

Rezende (1994) aponta que no ensino de Matemática no curso superior destacam-se o fracasso do ensino do Cálculo Diferencial e Integral e a possível dificuldade de compreensão do conceito de números reais, seu processo de construção e suas principais propriedades. No entanto, esclarece que não é esse desconhecimento o principal motivo para o fracasso do ensino de Cálculo, pois Newton, Leibniz e Cauchy não tinham um significado completo para número real e desenvolveram ideias fundamentais do Cálculo Diferencial e Integral.

De acordo com Rezende (1994), os conceitos de infinito, continuidade e número real foram essenciais no período de fundamentação da análise para que se colocasse a operação limite em bases sólidas. Por isso, o pesquisador dividiu a

história da operação limite em quatro fases: a sua origem, a construção metafísica, a transposição metafísica, e o período de fundamentação.

Rezende (1994) coloca que para muitos historiadores possivelmente foi com o método de exaustão que a operação limite teve origem, mesmo sendo este método criado para evitar o conceito de infinito. Assim, a noção de limite para esse tratamento matemático trata-se apenas como um método rigoroso para demonstrar resultados que precisam de um processo de exaustão de figuras inscritas e circunscritas que no limite representam a figura dada sem denotar a ideia de limite.

Ao final do século XVII, os matemáticos começaram a utilizar “a passagem direta ao limite” caracterizando o conceito de limite como operação metafísica. Este aspecto metafísico está associado, entre outros fatores, à influência da filosofia de Aristóteles na Europa Medieval, o qual distingue dois tipos de infinito: atual e potencial. Conforme Rezende (1994) é exatamente a incorporação desse último tipo de infinito que está coligada à noção de limite que vai gerar seu aspecto metafísico.

Os conceitos de movimento não exercem papel preponderante na estrutura formal da Matemática grega, que era uma ciência lógico-dedutiva, e, portanto estática. O conceito de limite estava associado, nesse período, a problemas geométricos, dentro de uma concepção estática da geometria. Inicia-se assim, conforme Rezende (1994), um processo de transição no conhecimento matemático que se desvincula da lógica e se aproxima das ciências naturais. Por isso, o conceito de limite começa a ser interpretado cinematicamente. Assim, essa situação contribuiu para a passagem do limite representado pelo método da exaustão para a concepção de uma operação metafísica.

De acordo com Rezende (1994), Wallis introduziu o símbolo ∞ para representar quantidades infinitamente grandes. Dessa forma, Wallis desenvolve um tipo de infinito dualista: 1) o infinito é utilizado como um símbolo para representar quantidades infinitamente grande; e, 2) o infinito é utilizado como um número sujeito às operações da aritmética. Assim, a noção de limite encontra-se ora como método heurístico, ora como álgebra dos indivisíveis.

Na evolução histórica da operação limite, Rezende (1994) encontrou basicamente quatro obstáculos epistemológicos: 1) a transposição metafísica; 2) a transposição cinética; 3) a transposição numérica; e, 4) a reticência ao infinito. Para cada um dos obstáculos, o pesquisador identifica que o conceito de infinito e o

paradigma sobre o conhecimento matemático são duas fontes que predominam e estão presentes em todos os obstáculos.

A noção de limite introduz no raciocínio matemático um novo modo de pensar. De fato, Rezende (1994) assevera que a noção de limite fundamenta as ideias do Cálculo e da análise, e também oferece a essas o rigor matemático, ao passo que permite o desenvolvimento no pensamento matemático. No entanto, conforme o pesquisador, esta operação foi considerada por muito tempo como um conceito metafísico e filosófico pelos matemáticos. Nesta época, a noção de limite teve de superar alguns obstáculos que são dois elementos metafísicos: os indivisíveis e as quantidades infinitamente pequenas. Para Rezende (1994), a transposição metafísica da operação de limite só ocorreu quando esta se dissociou completamente destes dois conceitos.

Segundo Rezende (1994), os indivisíveis constituíram o elemento básico da Matemática e filosofia pitagórica. Esta menor parte indivisível era então a essência da existência do universo, por meio desse pensamento Pitágoras queria provar a tese de que todas as coisas são números. No entanto, Zenão de Eléa provou que se existisse unidades de tempo e de espaço indivisíveis então o movimento seria impossível, e também provou que se o espaço e o tempo fossem infinitamente divisíveis então o movimento não seria possível. Desta forma a ideia dos indivisíveis se enfraqueceu, com isso a Matemática grega se afastou da concepção metafísica.

Com o método dos indivisíveis, a noção de limite foi desenvolvida ora como um método heurístico, ora como álgebra dos indivisíveis. Rezende (1994) salienta que com o método algébrico e com os métodos de quadraturas e de tangentes de Descartes, os matemáticos da época passaram a não utilizar os indivisíveis no Cálculo. Nisso o pesquisador alude que os indivisíveis sempre foram uma abordagem bastante ingênua da Matemática, o seu uso na Matemática se justificou muito mais pela pseudo-simplicidade de aplicação de seus métodos do que pelas convicções de suas ideias. Nesse sentido, para Rezende (1994), as quantidades infinitamente pequenas tiveram mais êxito entre os matemáticos do que os indivisíveis, e aqueles exerceram maior influência na construção metafísica da operação de limite.

Muitos matemáticos utilizaram e tentaram explicar sobre o infinitamente pequeno, como: Fermat; Newton; Leibniz, entre outros. Rezende (1994) cita que foi

Berkeley, no entanto, o primeiro a questionar sobre a natureza destas quantidades infinitamente pequenas, dando ênfase principalmente à característica metafísica que estas apresentavam. Berkeley admitia que essas quantidades, ora são determinadas e iguais a zero, ora existem, ora deixam de existir. Por isso, este matemático denominou essas quantidades de fantasmas de quantidades desaparecidas.

Contudo, Rezende (1994) informa que só com o desenvolvimento do conceito de função no século XVIII é que as questões de Berkeley sobre as quantidades infinitamente pequenas começam a ser esclarecidas. Para Cauchy uma quantidade torna-se infinitamente pequena quando seu valor numérico tende a zero. Rezende (1994) destaca, para Cauchy, a noção de infinitamente pequena é derivada da noção de limite, mas para os seus antecessores era o elemento metafísico necessário para que o processo limite se realizasse.

Assim, conforme Rezende (1994), com Cauchy o limite se dissocia da ideia, até então metafísica, de quantidades infinitamente pequenas, como também fornece os elementos necessários para que essas quantidades se separem do aspecto metafísico. No entanto, esta mesma noção de limite, encontra-se associado ainda a ideias intuitivas, como: 1) valores sucessivos; 2) aproximar-se indefinidamente; e, 3) diferença tão pequena quanto se queira. Rezende (1994) ressalta que nos termos destacados anteriormente verificamos a presença de ideias de movimento, o que caracteriza a presença dos obstáculos cinéticos na definição de limite de Cauchy.

O segundo tipo de obstáculo epistemológico envolvendo o conceito de limite, para Rezende (1994), é a transposição cinética. A Matemática grega de um modo geral era estática e, por isso, não apresentava nenhum obstáculo cinético. No entanto, a operação limite precisava destes obstáculos para que pudesse passar de um estágio embrionário para outro de sua construção. Esta passagem se efetivou com a aproximação da Matemática com as ciências naturais. Com isso, a Matemática foi usada como uma linguagem para interpretar os fenômenos da natureza, isso foi fundamental para a construção da operação de limite, uma vez que a noção de limite passa do estado de um método hermético e estático para o estado de uma operação ainda que metafísica.

Conforme Rezende (1994), Galileu questionava, por exemplo, que como uma soma infinita poderia ser finita fundamentado no fato de podermos realizar uma tarefa infinita em um tempo finito. Juri e Robins chegam inclusive a discutir se a

variável atinge ou não o seu limite. Para d'Alembert, o caso onde o limite é atingido não faz parte do conceito de limite. E para Cauchy um limite não pode ser atingido e a grandeza permanece constante. Pelo conceito de limite de Cauchy uma grandeza constante não varia e por isso não podemos calcular o seu limite. Rezende (1994) explica que todas essas interpretações cinéticas da operação de limite são fundamentadas na concepção de infinito potencial de Aristóteles.

Rezende (1994) salienta que é quase uma unanimidade entre os alunos que $0,999\dots$ é menor que 1, elaborando argumentação em geral parecidas com a que Galileu desenvolveu em seu paradoxo, sendo assim compreendido que o modelo potencialista de limite é, com efeito, o modelo mais difundido entre os educandos.

O terceiro obstáculo epistemológico envolvendo o conceito de limite, para Rezende (1994), é da transposição numérica. Uma das dificuldades que os matemáticos encontraram foi a de abstrair do contexto geométrico e cinemático os elementos necessários para trabalhar sobre os números. O pesquisador cita que os obstáculos para que a transposição numérica fosse efetivada foram: 1) a interpretação geométrica das grandezas; 2) a interpretação dinâmica do conceito de variável; 3) o aspecto temporal presente na construção das sequências e séries; e, 4) as interpretações metafísicas dos conceitos de continuidade.

No entanto, Rezende (1994) salienta que Dedekind (1831–1916) foi encontrar na geometria o reagente necessário para esta transposição, a partir da interpretação da continuidade da reta que aquele matemático abstraiu o seu conceito básico de corte para a construção dos números reais, e contribuiu desta forma para a superação desse obstáculo. O pesquisador cita que enquanto o método da exaustão foi criado para evitar o conceito de infinito, temos, por outro lado, que a definição de Weierstrass, junto com o conceito de número real forneceu elementos necessários para a formalização e incorporação do conceito de infinito no conhecimento matemático.

Para Rezende (1994) Lagrange (1736–1813) foi certamente um dos principais artesãos desta passagem ao numérico, onde procurou reduzir o Cálculo a objetos algébricos, para depois substituir os indeterminados por número. Weierstrass, com sua teoria estática de variável, e Dedekind, finalmente, com seu conceito de continuidade, finalizam esta passagem.

Rezende (1994) aponta que historicamente, partiu-se da definição formal de limite de Weierstrass e de consequências imediatas destas, para se chegar a construção dos números reais. No entanto, na maioria dos textos de Análise Real partimos de um conceito de número real, postulado pelos seus autores sob a forma de postulado de continuidade de Dedekind-Cantor.

O quarto obstáculo epistemológico envolvendo o conceito de limite, para Rezende (1994), é da reticência ao infinito. Para o pesquisador, esse obstáculo se subdivide basicamente em duas etapas epistemológicas: 1) os matemáticos são reticentes a qualquer concepção de infinito; e, 2) a concepção de infinito potencial de Aristóteles é incorporada a prática da Matemática, ou como uma entidade metafísica ou como um elemento de um procedimento heurístico.

A primeira etapa deste obstáculo epistemológico é uma característica marcante da Matemática grega, no qual esta reticência é muito mais um fator de criação do que propriamente um obstáculo para a noção de limite. Na filosofia grega, segundo Rezende (1994), existem dois tipos de infinito: o infinito potencial e o infinito atual, e é, sobretudo, com a introdução do infinito atual nas teorias Matemáticas que se pode superar este obstáculo epistemológico em sua totalidade.

Conforme Rezende (1994), foi Weierstrass, que com sua teoria estática, fundamentou os conceitos básicos na aritmética e na lógica, e não considerou os argumentos cinemáticos e metafísicos, o que permitiu que Dedekind e Cantor finalizassem este último estágio da construção da operação de limite. Dedekind e Cantor concebem não mais o infinito potencial, mas em seu lugar admitem o infinito atual, estático e realizável.

A dificuldade de superar esse obstáculo no campo pedagógico é complexa, segundo Rezende (1994), no entanto, o atual curso de Matemática do ensino superior não está estruturado para dar conta deste obstáculo. Em geral, nos cursos de Cálculo os estudantes trabalham apenas com o infinito potencial de Aristóteles, uma espécie de infinito dinâmico e irrealizável. No entanto o pesquisador não acredita que o tema em questão seja pertinente em um curso inicial de Cálculo, visto que os alunos não apresentam o estado de prontidão necessário e nem se encontram pertos da proximal desta questão: infinito potencial e infinito atual.

Diante do exposto, Rezende (1994) acredita que uma vez transposto os dois primeiros obstáculos (a transposição metafísica e a transposição de cinemática), os

outros dois (transposição numérica e reticência ao infinito) poderia ser equacionado, do ponto de vista curricular, com a introdução de um curso como “a construção dos números reais”.

A partir das considerações dadas pelos autores, elaboramos o seguinte quadro sintetizando os obstáculos por eles listados.

Quadro 1 – Obstáculos epistemológicos de limite

Cornu (1983)	Sierpinska (1985)	Rezende (1994)
- Aspecto metafísico da noção de limite; - A noção de “infinitamente pequeno” ou de “infinitamente grande”.	- “Horror ao infinito” (I.1, I.2, I.3, I.4).	- Transposição metafísica.
- “O limite atinge ou não?”.	- “Horror ao infinito” (I.5) – Obstáculo físico. - Obstáculos geométricos;	- Transposição cinética.
- A transposição numérica.	- Obstáculos relativos à noção de função.	- Transposição numérica.
	- “Horror ao infinito” (I.6, I.7) – Obstáculos algébricos.	- Reticência ao infinito.
	Obstáculos lógicos.	
	Obstáculo do símbolo.	

Fonte: Elaboração nossa.

Tomamos como organização temporal os obstáculos evidenciados por Rezende (1994). Os elementos metafísicos básicos da Matemática e filosofia grega, conforme o pesquisador eram os indivisíveis e as quantidades infinitamente pequenas, que também foram evidenciadas no aspecto metafísico da noção de limite descrito por Cornu (1983), assim como as noções de infinitamente pequeno ou de infinitamente grande. Nos obstáculos I.1, I.2, I.3, I.4, agrupados no obstáculo “horror ao infinito” por Sierpinska (1985), observamos que a recusa do status de

operação ao limite estava intimamente ligada aos aspectos metafísicos da noção de limite.

Com a superação dos obstáculos metafísicos de limite, temos o segundo grupo de obstáculos agrupado no quadro 1, trata do aspecto dinâmico muito presente no conceito de limite. Essa característica não se apresentava anteriormente pelo aspecto estático da Matemática grega, entretanto, se deve a aproximação dos conceitos matemáticos com outras áreas do conhecimento. A Matemática passa então a ser utilizada como ferramenta de interpretação de fenômenos, permanecendo, até Cauchy, a questão de saber se uma grandeza variável atingiu o seu limite ou não. Esse dinamismo também está fundamentado no infinito potencial de Aristóteles.

Em seguida, temos os obstáculos relacionados à transposição numérica. Tratam da dificuldade de abstrair da geometria e da cinemática os elementos necessários para se trabalhar com números (CORNU, 1983; REZENDE, 1994). Os obstáculos presentes nesse grupo estavam ligados à interpretação geométrica das grandezas, à interpretação dinâmica do conceito de variável, e, às interpretações metafísicas dos conceitos de continuidade. Imbricado a esses, estão os obstáculos relativos à noção de função, categorizados assim por Sierpinska (1985), que enfatiza a concepção de contínuo, nesse contexto, de Leibniz até Cauchy.

No grupo de reticência ao infinito proposto por Rezende (1994), temos os matemáticos reticentes a concepção de infinito, pela influência da Matemática grega, e o obstáculo do infinito potencial incorporada a prática Matemática, gerado pela falta de um conceito bem formado de números reais. Nesse viés relaciona-se os obstáculos algébricos, propostos por Sierpinska (1985), que trata da transferência de propriedades de manipulação de grandezas finitas à grandezas infinitas.

Nos obstáculos lógicos e do símbolo, contidos na listagem de Sierpinska (1985), não observamos elementos que estabeleçam relação com os demais obstáculos.

Essas foram as possíveis conexões observadas entre os obstáculos epistemológicos de limite evidenciados nos trabalhos de Cornu (1983), Sierpinska (1985) e Rezende (1994), sendo a partir dessas relações elaborados o questionário utilizado em nossa pesquisa e baseia a análise apresentada nos capítulos posteriores.

A seguir, apresentamos os procedimentos operacionais desta pesquisa no qual evidencia o público alvo e os instrumentos de coleta de dados para realização da análise que contará com o auxílio dos obstáculos organizados nessa tabela.

4. PROCEDIMENTOS OPERACIONAIS DA PESQUISA

Nos capítulos anteriores buscamos refletir sobre o referencial teórico adotado para pesquisa e apontamos possíveis obstáculos epistemológicos que podem surgir no decorrer do processo de ensino e de aprendizagem do conceito de limite, podendo estes obstáculos ser constitutivos do conhecimento e relacionados aos vestígios históricos do desenvolvimento do conceito matemático. Segundo Almouloud, (2007) podemos procurá-los por meio de uma análise histórica ou uma análise de dificuldades resistentes entre os alunos. Salientamos que os obstáculos identificados no desenvolvimento histórico do conhecimento científico podem permanecer ou não como dificuldade de aprendizagem de determinado conceito, não podendo ser considerado somente as resistências históricas como único influenciador de tais dificuldades, pois há inúmeros outros fatores que contribuem para o não aprendizado dos conceitos matemáticos.

Torna-se importante salientar que a análise histórica desses obstáculos que tomamos como base nessa pesquisa é aquela da classificação proposta por Cornu (1983), Sierspinka (1985) e Rezende (1994) na qual analisam os entraves na construção da noção de limite. Assim, nesta etapa da pesquisa confrontaremos os obstáculos evidenciados pelos pesquisadores supracitados com os obstáculos de aprendizado para estabelecer o seu caráter epistemológico.

A análise epistemológica é de suma importância, pois a identificação dos obstáculos que ela propicia facilita a distinção entre as dificuldades geralmente encontradas no processo de ensino e de aprendizagem de conceitos matemáticos daquelas que são inerentes ao conhecimento. Entendemos por análise epistemológica aquela que se apóia no desenvolvimento histórico do conceito e que permite identificar diferentes concepções sobre um determinado objeto.

Almouloud (2007) aponta que o estudo dos obstáculos passa, também pela análise de erros resistentes dos alunos. Essa análise apresenta como objetivo a identificação da concepção que corresponde a esses erros, que permite aproximar alguns e distinguir outros.

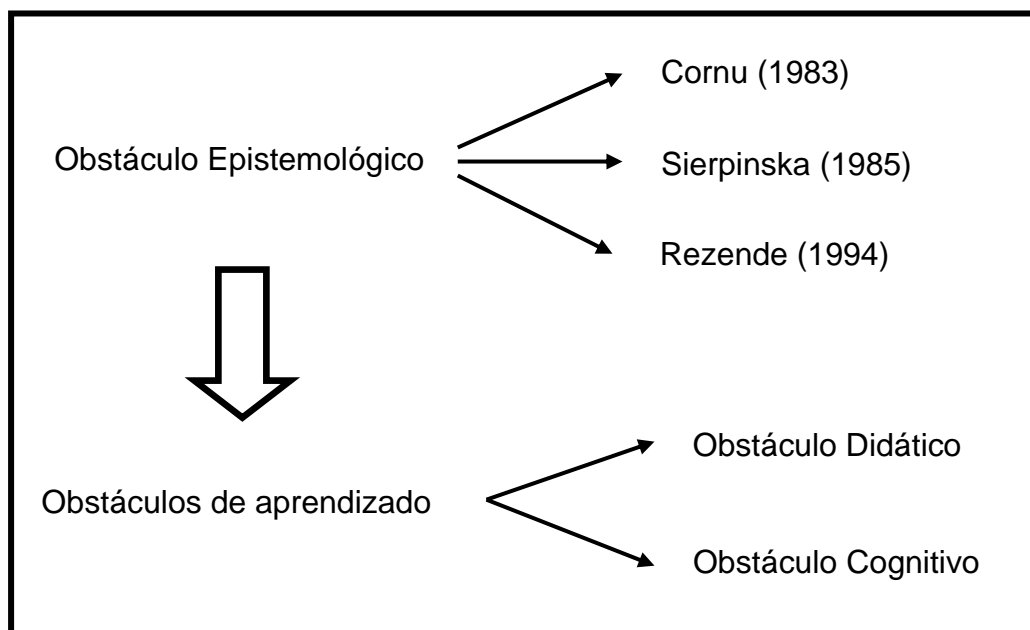


Figura 9: Descritor de análise dos obstáculos. Fonte: Elaboração nossa.

Podemos observar, na figura 9, as relações entre os obstáculos epistemológicos, estudados nas pesquisas de Cornu (1983), Sierpinska (1985) e Rezende (1994), com os obstáculos de aprendizagem, observado nos alunos participantes dessa pesquisa. Inferimos, portanto, que os obstáculos de aprendizagem se subdividem em obstáculos didáticos e obstáculos cognitivos, ressaltando que, nesta pesquisa, fomos em busca do caráter epistemológico das dificuldades de aprendizagem que os alunos apresentaram em relação ao conceito de limite de função real à variáveis reais.

O público alvo desta pesquisa foram alunos de licenciatura em Matemática, que estavam cursando Cálculo I. Sendo 10 (dez) da Universidade Federal do Pará (UFPA), 12 (doze) da Universidade do Estado do Pará (UEPA) e 11 (onze) do Instituto Federal do Pará (IFPA) localizadas na cidade de Belém-PA, totalizando assim, 33 (trinta e três) alunos pesquisados nas IES públicas de Belém. Escolhemos alunos que cursavam Cálculo I por ser, nesta disciplina, estabelecido o primeiro contato com o conceito de limite, no que tange a nossa região.

Para a coleta dos dados foi feita a observação das aulas em duas turmas de Cálculo I, na UFPA e na UEPA, com foco na identificação das dificuldades apresentadas pelos alunos na aprendizagem de limite de função. Também foi aplicado um questionário (cf. apêndice A) aos alunos das turmas de Cálculo I da UFPA, UEPA e IFPA, visando alcançar o objetivo proposto pela pesquisa, identificar os obstáculos epistemológicos no processo de construção do conceito de limite de

função a partir de obstáculos já listados por Cornu (1983), Sierpinska (1985) e Rezende (1994).

4.1. QUANTO À OBSERVAÇÃO

Foram escolhidas para a observação, durante o primeiro semestre de 2012, duas turmas de licenciatura em Matemática (UFPA e UEPA). Acompanhamos todas as aulas envolvendo o contexto de limite. Na observação em classe foram escolhidas as duas turmas levando em consideração os horários distintos e a disponibilidade da observadora, bem como o aceite dos professores das respectivas turmas que permitiram fazer a realização da observação em suas classes.

Particularmente, na UFPA, o professor que ministra a disciplina Cálculo I, paralelamente também ministra Laboratório de Ensino em Cálculo I, disciplina que tem por objetivos, conforme o conteúdo programático¹³ disponibilizado pela instituição: promover a articulação da prática de ensino da disciplina Cálculo I; desenvolver a capacidade de comunicar raciocínios e ideias, oralmente e por escrito, com clareza e progressivo rigor lógico; usar corretamente o vocabulário e a simbologia específicos da Matemática. E ainda, tem por atividades dos alunos, sob orientação do professor, desenvolver atividades de ensino tais como: seminários, palestras, elaboração e realização de projetos acadêmicos. No conteúdo programático, também é enfatizado que essas atividades devem estimular o uso de recursos didáticos tais como o computador, retroprojeter, datashow, entre outros, bem como, o uso de aplicativos matemáticos para a abordagem simbólica e gráfica do Cálculo.

As aulas foram assistidas sem nossas interferências e foram ministradas pelos professores das respectivas turmas. Foi utilizado como recursos apenas notas de aula. Para a realização da observação se utilizou o processo metodológico de observador, de modo a interferir o mínimo possível no contexto da sala de aula, especialmente na conduta de professores e alunos ao apresentarem as ideias e soluções de problemas durante as atividades das aulas de Cálculo, mais precisamente, aulas onde o limite era objeto de estudo. Foi acordado com os

¹³ Disponível em:

http://www.matematica.icen.ufpa.br/images/documentos/ementas_cursos/EN01161.pdf

professores que participaríamos das aulas ministradas pelos mesmos, na qualidade de observadora participante e eventualmente tomaria nota de algumas situações.

4.2. QUANTO AO QUESTIONÁRIO

O questionário foi elaborado a partir das observações realizadas nas duas turmas de Cálculo I (UEPA e UFPA), bem como tomando como base questões contidas nos protocolos de pesquisa de alguns de nossos referenciais teóricos (REZENDE, 1994; CELESTINO, 2008; PINTO, 2010).

Quadro 2 – Questão 1 do questionário.

1. Procure dar uma definição para limite.

Fonte: Elaboração nossa.

A questão 1 tem como objetivo verificar as concepções de limite que os alunos participantes da pesquisa apresentavam. Esperamos com essa questão poder identificar alguns obstáculos elencados pelos pesquisadores já estudados, tais como o obstáculo cinético, trazidos por Rezende (1994), o obstáculo físico (SIERPINSKA, 1985), que tratam do aspecto dinâmico presente no conceito de limite. Outro obstáculo que trata desse aspecto é o “O limite atinge ou não?” evidenciado na pesquisa de Cornu (1983). Também poderá aparecer características do obstáculo do símbolo, discutido por Sierpinska (1985).

Durante a observação das aulas de Cálculo, a dificuldade de compreensão da noção intuitiva de limite estava no uso dos infinitesimais, entretanto, o limite descrito intuitivamente teve uma maior aceitação pelos estudantes, que ao estabelecerem os primeiros contatos com a definição formal, demonstraram grande dificuldade para compreender a relação entre ε e δ .

Quadro 3 – Questão 2 do questionário.

2. Procure dar uma definição para infinito.

Fonte: REZENDE, 1994.

Objetivamos com a questão 2 verificar quais concepções de infinito os estudantes pesquisados têm contato, visto que, o papel do infinito no desenvolvimento do conceito de limite e do Cálculo como um todo foi de grande

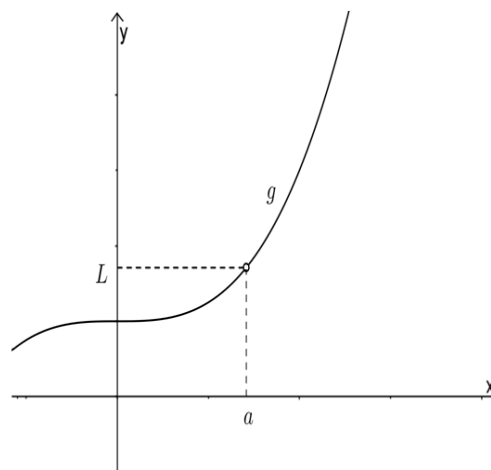
relevância. Esta questão foi adaptada, dentre as questões presentes na pesquisa de Rezende (1994).

Com base nas observações das aulas podemos inferir que uma das grandes dificuldades dos alunos na compreensão do conceito de limite está no conceito de infinito. Em suas falas: “pensar no infinito é muito abstrato”, “quando o limite tende ao infinito é muito difícil calcular”, “não entendo quando a resposta do limite é infinito”, podemos verificar o quanto o infinito se configura como uma real dificuldade no processo de aprendizagem de limite.

Quadro 4 – Questão 3 do questionário.

3. Suponha que uma função $f(x)$, com x tendendo para a , tenha limite L (conforme o gráfico). Assinale a ou as afirmações que melhor descrevem esse fato:

- a) o limite da função é exatamente L .
- b) o limite da função se aproxima de L .
- c) o limite da função tende a L .
- d) os valores das coordenadas da função, quando x tende para a pela esquerda ou pela direita se aproximam, mas não atingem L .



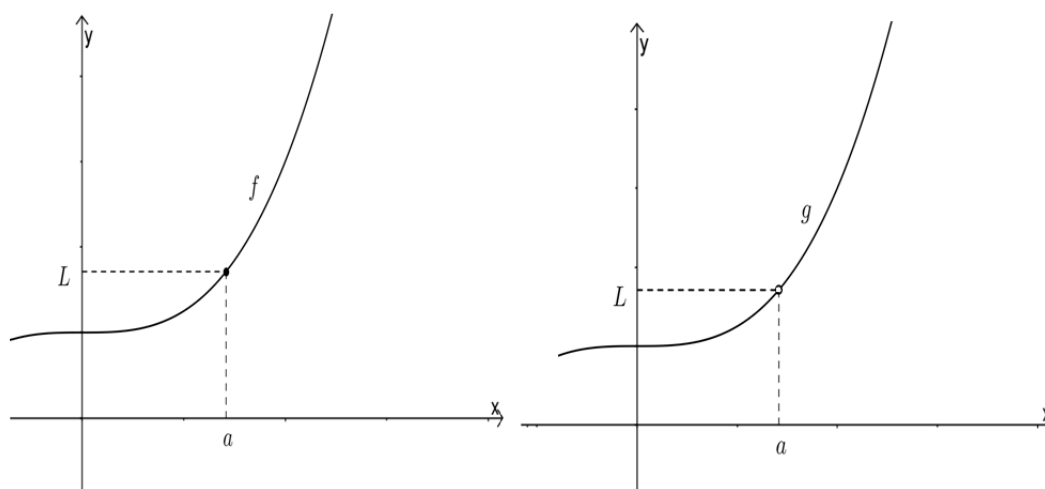
Fonte: CELESTINO, 2008.

A questão 3 foi adaptada de uma das questões do protocolo de pesquisa do Celestino (2008) e tem a finalidade de verificar as concepções dos alunos quanto ao limite da função, quanto à exatidão desse valor. O item (a) é a resposta esperada, pois evidencia o aspecto estático do conceito de limite. Os itens (b) e (c) estão presentes na pesquisa de Cornu (1983), aludindo à concepção de limite que se tinha até Cauchy. No item (d), esperamos analisar o obstáculo denominado por Cornu (1983) por “O limite atinge ou não?”. Os itens (b), (c) e (d) associam o limite com uma ideia dinâmica, esse aspecto também é tratado por Sierpinska (1985) e Rezende (1994) evidenciam em suas pesquisas que a passagem ao limite é associada a uma aproximação, enquanto a definição formal de limite é expressa de maneira estática.

Depois do primeiro contato com a noção intuitiva de limite, uma grande dúvida que permeou entre os alunos era saber se o limite era igual a L ou somente era muito próximo de L . Mesmo depois do conceito de limite formalizado a dúvida ainda se perpetuou entre os estudantes.

Quadro 5 – Questão 4 do questionário.

4. Sejam as funções f e g definidas em um intervalo aberto em torno de um valor a . Analise os gráficos das funções f e g representadas abaixo, respectivamente:



- a) Qual a diferença entre as duas funções representadas graficamente acima?
- b) Explique a partir dos gráficos se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$.

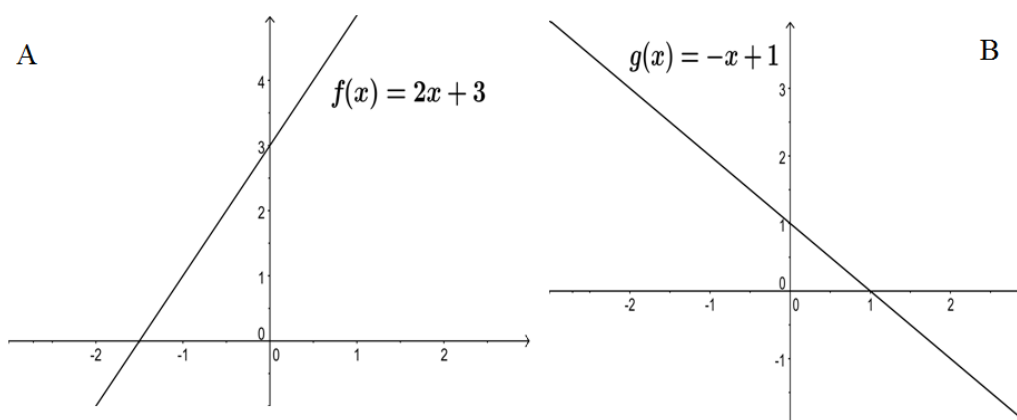
Fonte: PINTO, 2010.

Nesta questão, temos por objetivo observar a definição informal de limite e também a questão da continuidade, apresentando dois gráficos que ilustram o seu conceito, sendo que em uma delas a função não está definida para o valor de x igual a a . Esperamos, para o item a) da questão 4, que o aluno observe a diferença entre os domínios das duas funções, explicitando seu raciocínio em linguagem natural ou pela representação Matemática do domínio.

Percebemos durante a observação em sala de aula, que a diferença entre os gráficos levou muitos alunos a questionar a existência do limite para a função g quando x tende a a . Alguns até estabeleciam: se o gráfico da função tiver um “buraco”, o limite não existe. Para responder corretamente o item b) da questão 4, o aluno deverá ler e, principalmente, compreender o que é suficiente e necessário para a existência de limite de uma função em um ponto.

Quadro 6 – Questões 5 do questionário.

5. Observe os gráficos das funções A: $f(x) = 2x + 3$ e B: $g(x) = -x + 1$ e determine:



- a) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$
- b) $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x)$
- c) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) + \lim_{x \rightarrow \infty} g(x)$
- d) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - \lim_{x \rightarrow \infty} g(x)$
- e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{f(x)}$

Fonte: PINTO, 2010.

O objetivo dessa última questão é verificar o conceito de limite com x tendendo a infinito, por vezes chamados limites no infinito, envolvendo a análise de gráficos de funções polinomiais de primeiro grau. As dificuldades concernentes à ideia de infinito também podem surgir com esta questão.

Por meio do acompanhamento das aulas de Cálculo, percebemos muitos alunos efetuando contas algébricas com o símbolo ∞ , muitas dificuldades de entender uma indeterminação e ainda uma aversão a todos os limites com x tendendo a infinito.

A seguir confrontaremos os obstáculos epistemológicos evidenciados por Cornu (1983), Sierpinska (1985) e Rezende (1994) com os obstáculos de aprendizado identificados pelo instrumento de pesquisa para estabelecer o seu caráter epistemológico, assim como retomamos as pesquisas descritas no segundo capítulo para uma análise conjunta aos dados evocados em nossa pesquisa. A síntese histórica apresentada no primeiro capítulo também alicerça e contribui para a análise e cumprimento dos objetivos a que nos dispomos.

5. ANÁLISE E DESDOBRAMENTOS DA PESQUISA

Neste capítulo, trazemos primeiramente, os dados coletados através do questionário e analisados à luz do referencial teórico adotado para essa investigação, com enfoque no entrelaçamento da história da Matemática com a didática da Matemática. Fazemos, em seguida, uma reflexão a partir dos resultados das pesquisas elucidadas anteriormente com os dados das observações em sala de aula.

Apresentamos ainda, alguns apontamentos para ação docente no ensino de limite função a partir da identificação dos obstáculos epistemológicos com o objetivo de superá-los. As sugestões inferidas revelam as potencialidades de uso dos obstáculos apresentados no desenvolvimento histórico da Matemática como uma perspectiva metodológica de ensino nas aulas de Matemática na formação de professores que ensinam Matemática.

5.1. ANÁLISE DOS QUESTIONÁRIOS

A análise dos dados dar-se-á de questão em questão, conforme a ordem apresentada no questionário, confrontando as respostas dadas pelos alunos com o referencial teórico elencado em nossa pesquisa.

Os alunos participantes da investigação estão identificados por números antecidos por letras maiúsculas que diferenciam sua instituição: *A* para o IFPA, *B* para UEPA e *C* para UFPA (Exemplo: o aluno de número 2 da UEPA será identificado por B_2). As respostas aqui expostas foram transcritas dos questionários aplicados às três turmas das referidas instituições. O uso do negrito em algumas respostas se justifica pela necessidade nossa de destacar termos que elucidem melhor o que queremos analisar.

- **Primeira questão:**

1. Procure dar uma definição para limite.

Pudemos observar com as respostas obtidas na questão que a definição de limite não se apresenta muito clara para os alunos que ao tentar expressá-la, tanto

intuitivamente quanto formalmente, cometem diversos equívocos. Do total de 33 (trinta e três) alunos participantes da pesquisa, 4 (quatro) tentaram definir limite utilizando a definição formal de Weierstreiss, sendo que apenas 2 (dois) definiram corretamente. Conforme constata João Neto (2006) em sua pesquisa, a dificuldade mais frequente para o ensino de limite se encontra justamente em sua definição.

As outras 2 (duas) respostas dadas foram:

Quadro 7 – Resposta da 1ª questão do aluno C_6 .

Dada uma função e um ponto definido na função ou não, temos o limite da função a este ponto, quando temos valores próximos a esse ponto, suas imagens tendem a um número na qual é o limite da função naquele ponto.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0; |x - a| > \delta \Rightarrow |f(x) - L| > \varepsilon$$

Fonte: Questionário de pesquisa.

Quadro 8 – Resposta da 1ª questão do aluno C_7 .

Dado $\varepsilon > 0$, $\exists |\varepsilon - 1|$ tal que $\delta > 0$. ε é um valor mínimo.

Fonte: Questionário de pesquisa.

Podemos observar que há bastante confusão na simbologia utilizada na tentativa de definir limite formalmente, dificuldade esta caracterizada pelo obstáculo do símbolo discutido por Sierpinska (1983), visto que o aluno C_6 , intuitivamente, transmitiu a ideia de limite, ou seja, ele compreende a ideia, mas não conseguiu representá-la. Zuchi (2005), em sua pesquisa, percebeu que dentre as dificuldades de compreensão apresentadas pelos alunos, destaca-se aquela concernente à relação entre ε e δ , justificando seu ponto de vista com o fato dos alunos não conseguirem relacionar seu aspecto intuitivo – ponto de vista cinemático – e sua definição formal sob o ponto de vista de aproximação.

A situação evidenciada no quadro 8 também nos remete à reflexão de Cornu (1983) ao diferenciar a compreensão do conceito de limite da sua definição em (ε, δ) . Segundo o autor, existem alunos que compreendem o conceito, principalmente em termos de aproximação, no entanto, não compreendem a definição, justamente por haver a dicotomia entre os aspectos dinâmicos e estáticos do limite. Portanto, o aluno C_6 parece compreender bem o conceito de limite, mas não sua definição.

Outros obstáculos muito presentes nas respostas dos alunos é o da transposição numérica (CORNU, 1983), transposição cinética (REZENDE, 1994) e o obstáculo físico (SIERPINSKA, 1985), aparecendo em 13 (treze) respostas. Elegemos algumas para evidenciá-los:

Quadro 9 – Resposta da 1ª questão do aluno B_6 .

Limite de uma função contínua num dado ponto x é o valor L , tal que L **se aproxima de** $f(x)$ pela direita do ponto e também pela esquerda do ponto, em que é aproximado.

Fonte: Questionário de pesquisa.

Quadro 10 – Resposta da 1ª questão do aluno B_9 .

O valor $f(x)$ **tende a** um limite. O valor desse limite é quando um ponto x (que tem imagem $f(x)$) **tenta se aproximar** de um ponto γ que se **aproxima infinitamente** de um valor L . Limite é o valor de $f(x)$ quando x tende a γ .

Fonte: Questionário de pesquisa.

Quadro 11 – Resposta da 1ª questão do aluno B_{11} .

O valor exato ou **aproximado** da imagem.

Fonte: Questionário de pesquisa.

Quadro 12 – Resposta da 1ª questão do aluno C_5 .

São valores próximos em torno de um determinado ponto os quais **aproximam-se** de uma mesma imagem.

Fonte: Questionário de pesquisa.

Os termos destacados nas respostas dos alunos, “se aproxima de”, “tende a”, “tenta se aproximar”, “aproxima infinitamente”, “aproximado”, “aproxima-se”, demonstram bem o quanto a ideia de movimento incorporada a noção de limite. Essa ideia teve como origem as tentativas de resolução de problemas práticos de outras áreas de conhecimento que se utilizam dos conceitos matemáticos, prática essa ocorrida muito mais no renascimento, está presente até os dias atuais, por mais que tenhamos esclarecido a natureza estática do limite.

Nas pesquisas de Cornu (1983) e Sierpinska (1985) podemos identificar termos próximos aos utilizados pelos alunos que evidenciam esse aspecto dinâmico desse obstáculo em suas definições de limite. São eles, “tender para”, “se aproximar de”, presentes em Cornu (1983), e, “nos aproximamos indefinidamente”, “nos aproximamos mais e mais”, destacados em Sierpinska (1985). Assim como também

na pesquisa de Celestino (2008) tivemos ocorrência dos termos “aproximar-se indefinidamente” ou “aproximar-se casa vez mais”, e na investigação de Pinto (2010) os termos “aproxima-se de”, “está próximo a” foram recorrentes. Rezende (1994) considerou em sua pesquisa que o termo “aproximar-se indefinidamente” demonstra a presença do obstáculo cinético presente na definição de limite de Cauchy.

Conforme Sad (1998), uma das produções de significados em limite ocorre através do campo semântico visual-geométrico ao usar, por exemplo, figuras de pontos sobre uma reta se aproximando de modo dinâmico de um valor limite, sendo este, um ponto de acumulação. Essa forma de produção de significado, também com aspecto dinâmico, pode ser identificada nas respostas expostas nos quadros 9, 10, 11 e 12. Os termos enfatizados na pesquisa de Sad (1998), “se aproxima de...”, “cada vez mais próximo de...”, “tende a...”, também se assemelham aos termos evidentes nas respostas de nossos sujeitos de pesquisa.

Analisando os termos utilizados pelos alunos B_9 e B_{11} (quadros 10 e 11), temos que consideram a existência do limite somente quando a função é definida em a , ou seja, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$. Essa dificuldade de entender a veracidade da afirmação $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq f(a)$ pode ser entendida como proveniente dos aspectos dinâmicos da noção de limite. Quanto a esse aspecto, Boyer (1959) ressalta que, enquanto os matemáticos gregos tinham sido essencialmente estáticos em sua linguagem e conceitos, os matemáticos da “Idade dos Gênios” procuram nortear-se no sentido de uma análise de variabilidade.

Sierpiska (1985) associa aos obstáculos lógicos problema associado com a ordem de quantificadores na definição do limite: a condução da função ao eixo y , enquanto que, ao estudar o limite da função iremos focar em suas inversas. Essa necessidade de “olhar para o eixo- x do eixo- y ” é evidenciada nos quadros 11 e 12.

Temos ainda o obstáculo geométrico nas respostas de 7 (sete) alunos pesquisados. Sejam algumas respostas colhidas:

Quadro 13 – Resposta da 1ª questão do aluno A_9 .

O limite da função é o **ponto máximo**.

Fonte: Questionário de pesquisa.

Quadro 14 – Resposta da 1ª questão do aluno B_7 .

Limite de função é o **ponto máximo**, como o nome já diz, um limite, **máximo** onde a função pode chegar.

Fonte: Questionário de pesquisa.

Quadro 15 – Resposta da 1ª questão do aluno C_2 .

Limite é fazer o estudo da função em cada um dos seus **pontos**.

Fonte: Questionário de pesquisa.

Quadro 16 – Resposta da 1ª questão do aluno C_9 .

Estudar o comportamento do **gráfico** com relação a um **ponto** pertencente ao domínio.

Fonte: Questionário de pesquisa.

As noções de máximo evidenciada nas respostas dos alunos A_9 e B_7 (quadros 13 e 14) foram também citadas na pesquisa de Cornu (1983) como um conhecimento pré-estabelecido que pode ser um obstáculo epistemológico ao entendimento da definição formal de limite. Esse mesmo obstáculo foi verificado na pesquisa de Pinto (2010), informando que, para muitos alunos, o limite é o valor máximo ou mínimo que um ponto pode ter.

Consideramos aspectos do obstáculo geométrico nas respostas apresentadas (quadros 13, 14, 15 e 16) por todas retratarem a análise de comportamento gráfico de funções, demonstrando o não desprendimento dos alunos da forma intuitiva visual no qual a noção de limite normalmente é apresentada para eles. Esse obstáculo evidencia-se historicamente no conceito de limite por sua origem advir de problemas geométricos, portanto, corroboramos com Cornu (1983) ao afirmar que a geometria permanece como um meio necessário para entender certos aspectos do conceito de limite, isso se deve ao fato do surgimento desse conceito se dá por problemas de origem geométrica.

Ainda podemos observar outros aspectos do obstáculo geométrico pelas respostas evidenciadas nos quadros 17 e 18, apresentadas abaixo:

Quadro 17 – Resposta da 1ª questão do aluno A_6 .

O limite de uma função nos interessa quando queremos conhecer uma função que se aproxima de x e não quando é x , ou seja, o limite de uma função é quando x se aproxima ao máximo de a e não quando $x = a$.

Fonte: Questionário de pesquisa.

Quadro 18 – Resposta da 1ª questão do aluno A_{11} .

Limite é quando ocorre uma aproximação tão grande de um valor x , mas nunca o resultado chega a ser o próprio número x .

Fonte: Questionário de pesquisa.

O estudante A_6 ao relatar que “o limite de uma função é quando x se aproxima ao máximo de a e não quando $x = a$ ” remete a ideia de que o limite nunca é L , mas está bem próximo de L . Essa dificuldade de entender que o limite é o próprio L está associada aos aspectos do obstáculo geométrico tratado por Sierpinska (1985) quanto ao estudo do ponto ao invés da vizinhança, e, ainda, ao obstáculo intitulado por Cornu (1983) como “O limite atinge ou não?” que remete ao mesmo conceito de limite concebido por d’Alembert: se o limite for atingido não faz parte do conceito de limite, e, ainda, com o conceito de Robins, no qual uma grandeza variável pode aproximar-se em qualquer grau de proximidade, embora ela nunca pode tornar-se igual a ele (BARON & BOS, 1985).

- **Segunda questão:**

2. Procure dar uma definição para infinito.

O papel do infinito no desenvolvimento do conceito de limite e do Cálculo como um todo foi de grande relevância, por isso consideramos importante refletir sobre qual ou quais compreensões de limite se apresentam nos estudantes de Cálculo atualmente.

Com a segunda questão, objetivamos verificar quais concepções de infinito os estudantes pesquisados têm contato. Para tanto, selecionamos algumas respostas dos alunos, dentre as 26 (vinte e seis) obtidas, para análise:

Quadro 19 – Resposta da 2ª questão do aluno A_6 .

Infinito não é um número real, o infinito está além dos conceitos, por isso não temos domínio com operações de soma, subtração, multiplicação, divisão quando envolve o infinito.

Filosoficamente o infinito está além da compreensão humana, sendo assim, pode ser abstraído mais não existe no concreto.

Matematicamente é um **valor incomensurável**.

Fonte: Questionário de pesquisa.

Quadro 20 – Resposta da 2ª questão do aluno B_5 .

Infinito em Matemática pode-se dizer que é **algo que não se pode contar, uma quantia extensa, que não tem fim**.

Fonte: Questionário de pesquisa.

Quadro 21 – Resposta da 2ª questão do aluno B_7 .

Infinito seria o que não acaba, **não tem fim**.

Fonte: Questionário de pesquisa.

Quadro 22 – Resposta da 2ª questão do aluno C_1 .

Infinito se define como algum lugar, espaço ou mesmo **número inalcançável**, onde você sabe que sempre vai existir, mas que você não consegue chegar. Em limite, torna-se um número **extremamente grande** ou **extremamente pequeno**.

Fonte: Questionário de pesquisa.

Quadro 23 – Resposta da 2ª questão do aluno C_8 .

Infinito é um **número muito grande ou muito pequeno** e que continua em um crescimento muito rápido ou decréscimo muito rápido, ou seja, em um determinado valor a função cresce muito rápido para um dado número natural ou real.

Fonte: Questionário de pesquisa.

Nas respostas apresentadas pelos alunos é recorrente a definição do infinito como algo incomensurável, extenso, que não tem início e não tem fim. Também temos aqueles que o apontam como um número inalcançável, e ainda, número muito grande ou muito pequeno, um número associado a indeterminação. Podemos perceber a partir dessas respostas a busca de um caráter físico estabelecido entre os alunos na tentativa de definir o infinito. Essas concepções de infinito fazem referência à noção de infinito potencial trazida por Aristóteles que ainda se mostra veementemente presente, caracterizando assim a presença do obstáculo da reticência ao

infinito classificada por Rezende (1994), no qual a concepção de infinito potencial de Aristóteles é incorporada a prática da Matemática.

Observemos o quadro 24:

Quadro 24 – Resposta da 2ª questão do aluno C_7 .

Seja:

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) =$ ocorre uma indeterminação.

Infinito é denotado como uma aproximação do gráfico que vai do $+\infty$ ou $-\infty$.

Fonte: Questionário de pesquisa.

Percebemos que o aluno C_7 considera que o limite da função quando x tende a infinito é indeterminado, ou seja, o estudante não concebe a existência do limite com x tendendo a infinito. Essa dificuldade também pode ser associada ao obstáculo da reticência ao infinito, e ainda, ao obstáculo denominado de “horror ao infinito” trazido por Sierpinska (1985). Ao olhar para história, observamos que os gregos desenvolveram o que se chamou de “horror ao infinito”, em resistência aos paradoxos e contradições existentes na concepção do mundo físico como composto por partículas infinitamente pequenas e indivisíveis (BROLEZZI, 1996). Conforme Baron & Bos (1985), o surgimento do infinito pelas grandezas incomensuráveis proporcionou uma crise que se traduziu por um debate entre duas concepções: a concepção continuísta tomava o número, o espaço e a matéria, como divisível ao infinito; e a concepção atomista admitia a existência de elementos primeiros indivisíveis. A ilustração dessa crise está relacionada aos paradoxos de Zenão.

Nas respostas de 4 (quatro) alunos (quadros 25, 26, 27 e 28), podemos perceber a tentativa de não fazer associações físicas ao infinito, dando a ele um status de símbolo ou simbologia. No entanto, a ideia de infinito não realizável, de indeterminação ainda continua presente.

Quadro 25 – Resposta da 2ª questão do aluno A_5 .

Infinito é uma **simbologia** para representar um valor imensurável.

Fonte: Questionário de pesquisa.

Quadro 26 – Resposta da 2ª questão do aluno C_2 .

Infinito é uma **simbologia** que representa um valor de grande escala.

Fonte: Questionário de pesquisa.

Quadro 27 – Resposta da 2ª questão do aluno C_4 .

Infinito é quando não consegue se determinar um valor, pois ele é muito alto, o “ ∞ ” é um **símbolo** e não um número.

Fonte: Questionário de pesquisa.

Quadro 28 – Resposta da 2ª questão do aluno C_6 .

É uma representação para um número muito grande. Não é um número, apenas um **símbolo**.

Fonte: Questionário de pesquisa.

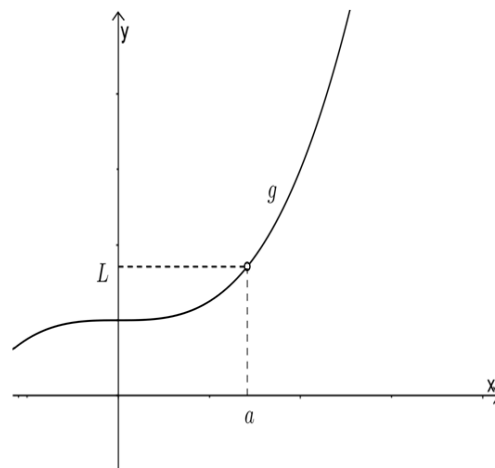
Verificamos que, de modo geral, os alunos ou recorrem à aspectos físicos para descrever o que é o infinito ou à simbologia, surgindo assim uma diversidade de concepções. Conforme Sad (1998), o próprio tratamento com o infinito fornece uma diversidade que podemos observar desde Arquimedes. “O infinito foi um significante na Matemática que teve articulado a vários significados, cuja produção se deu de diferentes modos” (p.14). Essa produção de conhecimento estava atrelada ora ao infinito atual (real), ora como infinito potencial, que é o que se observa nas respostas dos sujeitos da pesquisa.

Temos ainda que o símbolo ∞ (infinito) foi introduzido por Wallis para representar quantidades infinitamente grandes, desenvolvendo assim duas formas de interpretação para o infinito. A primeira, quando ele é utilizado como símbolo para representar quantidades infinitamente grandes, e, a segunda, que permite a utilização do ∞ como um número sujeito às operações aritméticas (REZENDE, 1994). Nas respostas obtidas para essa questão, evidenciamos muito bem a primeira interpretação tomada por Wallis, que, conforme Boyer (1992), em um tratado em 1655 (*Arithmetica infinitorum*), apresenta uma clara aritmetização do Cálculo.

• **Terceira questão:**

3. Suponha que uma função $f(x)$, com x tendendo para a , tenha limite L (conforme o gráfico). Assinale a ou as afirmações que melhor descrevem esse fato:

- a) o limite da função é exatamente L .
- b) o limite da função se aproxima de L .
- c) o limite da função tende a L .
- d) os valores das coordenadas da função, quando x tende para a pela esquerda ou pela direita se aproximam, mas não atingem L .



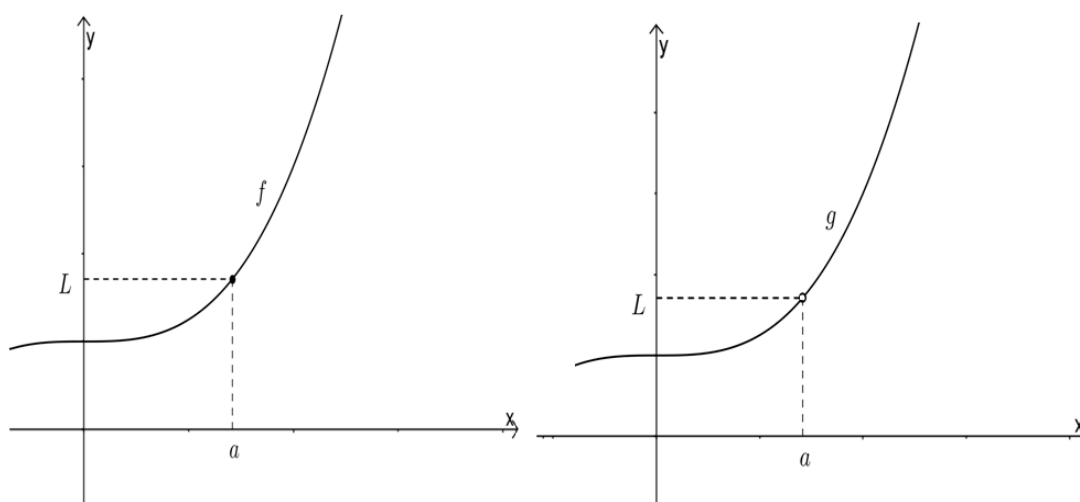
A questão objetivou verificar as concepções dos alunos quanto à exatidão do valor do limite da função. Do total de 33 (trinta e três) alunos participantes da pesquisa, apenas 1 (um) assinalou a alternativa (a), alternativa esperada por evidenciar o aspecto estático presente no conceito de limite desde sua formalização. Dentre as demais marcações nos outros itens temos que o item (b) e o item (c) foram assinalados por 7 (sete) e 8 (oito) alunos, respectivamente, demonstrando que a concepção de limite, em todo seu aspecto dinâmico, que se tinha até Cauchy, ainda predomina na concepção de alguns alunos. Celestino (2008) e Pinto (2010) em suas pesquisas também evidenciam o uso do termo “tender a” ou “o limite tende” ao invés de “o limite é”. O item (d) assinalado por 23 (vinte e três) alunos evidencia o obstáculo colocado por Cornu (1983) denominado de “O limite atinge ou não?”, obstáculo esse semelhante ao de Sierpinska (1985) que associa a passagem ao limite a uma aproximação.

Vale ressaltar que 2 (dois) alunos que optaram, pela alternativa (d) escreveram ao lado do gráfico: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$, ou seja, simbolicamente, eles associam que o limite da função quando x tende a a é igual a L , mas suas interpretações, tanto gráfica quanto simbólica, da situação fá-los deparar no obstáculo cinético, tratado, nessa nomenclatura, por Rezende (1994) (lembrando que Sierpinska (1985) utiliza obstáculo físico, e, Cornu (1983), transposição numérica). De maneira análoga, outro aluno escreveu ao lado do gráfico:

$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$ e $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$, no entanto, também optou por assinalar a alternativa (d), enfatizando que o limite não atinge L , mesmo percebendo que os limites laterais são iguais.

- **Quarta questão:**

4. Sejam as funções f e g definidas em um intervalo aberto em torno de um valor a . Analise os gráficos das funções f e g representadas abaixo, respectivamente:



- Qual a diferença entre as duas funções representadas graficamente acima?
- Explique a partir dos gráficos se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$.

O item (a) desta questão, do total de 33 (trinta e três) estudantes, não foi respondido por 3 (três) alunos. Um aluno afirmou não haver diferença alguma entre as duas funções, restando, assim, 29 (vinte e nove) respostas a serem analisadas. As diferenças entre as funções foram expressas de diversas maneiras. A primeira delas e mais recorrente foi com o uso das palavras “contínuo” e “descontínuo”, estando presente em 16 (dezesesseis) respostas. Vejamos algumas selecionadas:

Quadro 29 – Resposta dos alunos A_5 , A_9 e A_{11} para o item (a) da 4ª questão.

$f(x)$ é **contínua** e $g(x)$ é **descontínua**.

Fonte: Questionário de pesquisa.

Quadro 30 – Resposta do aluno B_6 para o item (a) da 4ª questão.

A função f é **contínua** no ponto a , pois $\lim_{x \rightarrow a} = f(a)$ e a função g é **descontínua** no ponto a .

Fonte: Questionário de pesquisa.

Quadro 31 – Resposta do aluno C_7 para o item (a) da 4ª questão.

A função f é **contínua** e a função g é **descontínua**, pois existe um “buraco” no gráfico.

Fonte: Questionário de pesquisa.

Quadro 32 – Resposta do aluno C_8 para o item (a) da 4ª questão.

Uma está definida em a e a outra não está, ou seja, f é definida em a e g não está, mas ambas são **contínuas**.

Fonte: Questionário de pesquisa.

Observando os quadros 29, 30 e 31 temos diversas maneiras apresentadas pelos alunos de mostrar a diferença entre as duas funções representadas graficamente na questão através da continuidade ou descontinuidade nelas contida, ressaltamos apenas a resposta do aluno C_7 (quadro 31) que justifica a descontinuidade com a presença de um “buraco” no gráfico da função g .

Salientamos também a resposta do aluno C_8 , no quadro 32, pelo fato de tomar as duas funções como contínuas, evidenciando somente a diferença de uma função ser definida em a e a outra não.

Outra palavra utilizada foi “intervalo”, estando presente na resposta de 5 (cinco) alunos:

Quadro 33 – Resposta do aluno A_3 para o item (a) da 4ª questão.

A 1ª função apresenta **intervalo** fechado, e a 2ª, um **intervalo** aberto.

Fonte: Questionário de pesquisa.

Quadro 34 – Resposta do aluno A_4 para o item (a) da 4ª questão.

A diferença está no **intervalo** das funções, pois nas funções estão respectivamente um **intervalo** fechado, e o outro aberto.

Fonte: Questionário de pesquisa.

Quadro 35 – Resposta do aluno A_7 para o item (a) da 4ª questão.

Uma é fechada em L (descontínua) e outra é aberta em L (contínua).

Fonte: Questionário de pesquisa.

Quadro 36 – Resposta do aluno B_7 para o item (a) da 4ª questão.

A primeira o **intervalo** é fechado e a segunda é um **intervalo** aberto.

Fonte: Questionário de pesquisa.

Quadro 37 – Resposta do aluno C_2 para o item (a) da 4ª questão.

$f(x)$ tem todos os seus **intervalos** fechados e $g(x)$ no ponto L a função tem o **intervalo** fechado.

Fonte: Questionário de pesquisa.

Podemos observar pelas respostas colocadas acima que, apesar de cometerem equívocos, em todos os casos a ideia de intervalo aberto e fechado está presente para designar a diferença entre as duas funções. No entanto, não se indica corretamente que tipo de intervalo é aberto ou fechado, omitindo a informação ligada ao domínio.

Outras denominações utilizadas para expressar as diferenças entre as funções f e g foram “domínio”, “imagem”, “ponto” e “limite”.

Quadro 38 – Resposta do aluno B_4 para o item (a) da 4ª questão.

Porque na primeira o **limite** existe e na segunda não.

Fonte: Questionário de pesquisa.

Quadro 39 – Resposta do aluno B_8 para o item (a) da 4ª questão.

f tem **limite** quando $x \rightarrow a$ e g **não tem limite** quando $x \rightarrow a$.

Fonte: Questionário de pesquisa.

Quadro 40 – Resposta do aluno B_{11} para o item (a) da 4ª questão.

No primeiro, a **imagem** de $a = L$, no segundo se aproximando de L .

Fonte: Questionário de pesquisa.

Quadro 41 – Resposta do aluno B_{12} para o item (a) da 4ª questão.

A primeira possui um **ponto** a qual a função passa por ele, no segundo o **ponto** não pertence a função.

Fonte: Questionário de pesquisa.

Quadro 42 – Resposta do aluno C_1 para o item (a) da 4ª questão.

O **limite** de $f(x)$ é exatamente L quando x tender a a . O **limite** de $g(x)$ tende a L mas nunca será L .

Fonte: Questionário de pesquisa.

Quadro 43 – Resposta do aluno C_6 para o item (a) da 4ª questão.

a está no **domínio** de f , mas não no **domínio** de g , porém tendem ao mesmo **limite** L .

Fonte: Questionário de pesquisa.

Quadro 44 – Resposta do aluno C_9 para o item (a) da 4ª questão.

No primeiro gráfico o $P(a, L)$ pertence a função, no segundo o $P(a, L) \notin$.

Fonte: Questionário de pesquisa.

Podemos observar que ao relatar sobre a diferença entre as duas funções, alguns dos alunos utilizam a existência ou não do limite. Os alunos B_4 e B_8 (quadros 38 e 39) desconsideram a existência do limite pela descontinuidade da função no ponto a . O que nos remete a uma situação já discutida anteriormente, no qual um dos critérios para a existência do limite tendendo a um determinado ponto é se a função for definida nesse ponto, o que se configura no obstáculo geométrico, defendido por Sierpiska (1985), por considerar a descontinuidade como um empecilho para análise das vizinhanças do ponto em questão.

Na resposta colocada no quadro 40, temos que o aluno B_{11} considerou que a , para a função g , tem uma imagem aproximada de L , transferindo as noções de limite para as propriedades da função. O fato da função g não ter imagem em a , por não conter esse elemento em seu domínio, não foi verificado por este estudante, implicando assim a existência dos obstáculos relacionados com a noção de função tratado por Sierpiska (1985). De forma geral, em todos os equívocos cometidos ao responder o item (a) dessa questão, o obstáculo da função estava presente.

No quadro 42, podemos observar que o aluno C_1 só considera que o limite é exatamente L quando a função é definida em $f(a)$, quando não, como no caso da função g , “o limite de $g(x)$ tende a L mas nunca será L ”, caracterizando assim o obstáculo descrito por Cornu (1983) no qual questiona aos alunos se “O limite atinge ou não?” que também foi verificado na pesquisa de Celestino (2008).

O item (b) objetiva verificar se o aluno compreende o que é suficiente e necessário para a existência de limite de uma função em um ponto. Nesse item, entre 33 (tinta e três) alunos investigados, 17 (dezesete) não o responderam. Dentre os 16 (dezesesseis) que responderam, temos 5 (cinco) alunos (A_5, A_8, B_5, B_7, C_1) que suscitaram a continuidade da função como justificativa para a existência do

limite que é igual a L quando $f(x)$ tende a a . Outro aluno afirmou que o limite não existe:

Quadro 45 – Resposta do aluno A_6 para o item (b) da 4ª questão.

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$, o limite não existe, pois o limite existe quando x se aproxima de a e não quando x é a .

Fonte: Questionário de pesquisa.

Apesar do equívoco, que acreditamos ser somente por falta de atenção ao fazer x tender a ∞ (infinito), o participante da pesquisa argumenta a não existência do limite pelo fato da imagem de a em $f(x)$ ser L , e que, para ele, não se configura, neste caso, L como o limite de $f(x)$. Ao analisar essa resposta percebemos o quanto é forte o aspecto dinâmico do limite como obstáculo para a compreensão de sua definição.

Quadro 46 – Resposta do aluno A_{11} para o item (b) da 4ª questão.

Apresenta $f(x)$; os limites laterais são o mesmo valor e por último $f(x) = L$.

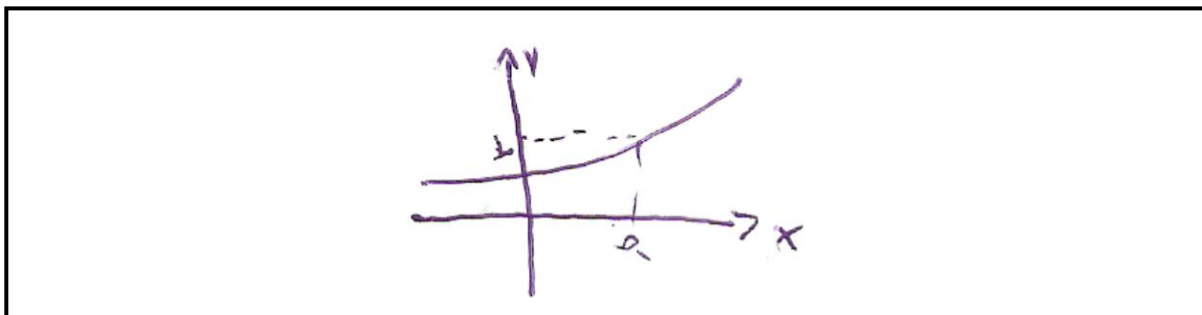
Fonte: Questionário de pesquisa.

O aluno A_{11} (quadro 46), usou o conceito de limites laterais para concluir que como os limites laterais são iguais, então o limite da função $f(x)$ quando x tende para a é L . No entanto, este estudante ao representar o limite da função utilizou $f(x) = L$ ao invés de $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ (assim como o estudante B_7 e C_{10}), caracterizando o obstáculo do símbolo proposto por Sierpinska (1985), no qual o aluno tem dificuldades de utilização do símbolo \lim para representar o limite. Esse mesmo obstáculo apareceu na representação do aluno A_8 : $f(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$.

Apesar do item (b) não perguntar se $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$, alguns alunos (A_8 , B_5 , C_4 , C_8) mencionaram que na função g o limite não seria L , justificando pela descontinuidade. Ainda temos alguns alunos que justificaram o $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ pela noção intuitiva de limite, utilizando novamente termos como “se aproxima”, “tende para”, “aproximando-se”, reiterando ainda mais o aspecto de movimento presente no obstáculo cinético discutido por Rezende (1994).

Outra forma de caracterização de dinamismo pode ser verificada na resposta do aluno A_3 , no qual utilizou uma representação gráfica (quadro 47) para justificar que o limite de $f(x)$ quando x tende a a é igual a L :

Quadro 47 – Resposta do aluno A_3 para o item (b) da 4ª questão.

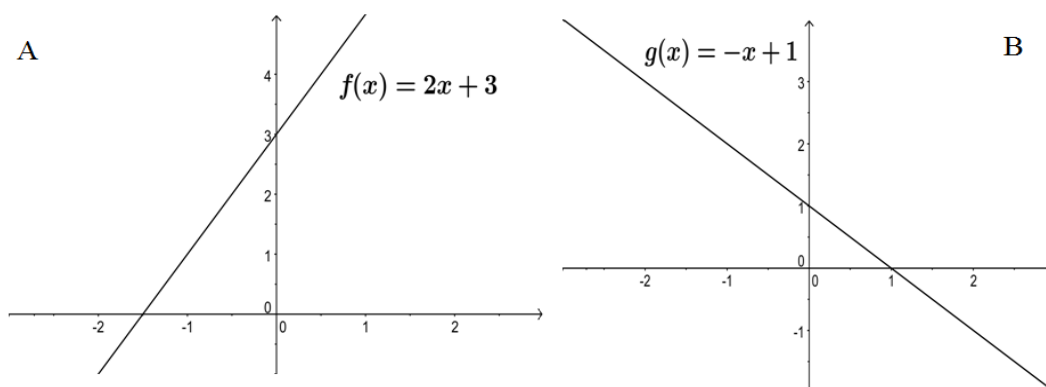


Fonte: Questionário de pesquisa.

A situação está presente nas formas de produções de significado para limite, explicitadas por Sad (1998). Essa situação está descrita no campo semântico visual-geométrico, mais especificamente, quando o aluno expressa o limite usando gráficos de funções representadas graficamente.

• **Quinta questão:**

5. Observe os gráficos das funções A: $f(x) = 2x + 3$ e B: $g(x) = -x + 1$ e determine:



- a) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$
- b) $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x)$
- c) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) + \lim_{x \rightarrow \infty} g(x)$
- d) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - \lim_{x \rightarrow \infty} g(x)$
- e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{f(x)}$

Nesta questão, através da função dada assim como também com a análise gráfica, objetivamos verificar o comportamento dos alunos perante limites com x tendendo para infinito.

No item (a), pedimos que determinassem $\lim_{x \rightarrow \infty} 2x + 3$. Dos 33 (trinta e três) alunos, tivemos 25 (vinte e cinco) acertos, 4 (quatro) não responderam e 4 (quatro) pessoas cometeram alguns equívocos:

Quadro 48 – Resposta do aluno A_4 para o item (a) da 5ª questão.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) &= 2x + 3 \\ f(\infty) &= 2\infty + 3\end{aligned}$$

Fonte: Questionário de pesquisa.

Quadro 49 – Resposta do aluno B_2 para o item (a) da 5ª questão.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} 2x + 3 = \lim_{x \rightarrow \infty} 2x + \lim_{x \rightarrow \infty} 3 = 3$$

Fonte: Questionário de pesquisa.

Quadro 50 – Resposta do aluno B_{10} para o item (a) da 5ª questão.

$$\frac{f(x+h) - f(h)}{h} = \infty$$

Fonte: Questionário de pesquisa.

Quadro 51 – Resposta do aluno C_7 para o item (a) da 5ª questão.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} 2x + 3 = x(2 + 3/x) = 2$$

Fonte: Questionário de pesquisa.

O aluno A_4 (quadro 48) ao fazer a substituição de x por ∞ , esbarrou em uma indeterminação e não deu prosseguimento à resolução da questão. Ou situação que podemos evidenciar com essa resposta é o significado dado ao limite no campo semântico do pensamento algébrico, evidenciado por Sad (1998), através do pensamento funcional como simples expressões algébricas, ou seja, considerando $y = f(x)$, o aluno atribui um valor para x e obtém um valor para y , “trabalhando de modo dinâmico o discreto-numérico ao invés do contínuo-real” (p. 134).

Os alunos B_2 e C_7 (quadros 49 e 51) equivocaram-se nos cálculos dos limites e o aluno B_{10} (quadro 50) utilizou a derivada, que nesse caso, não justifica a resposta correta.

No item (b), solicitamos que calculassem $\lim_{x \rightarrow \infty} -x + 1$. Do total de 33 (trinta e três) estudantes participantes da pesquisa, obtivemos apenas 3 (três) erros, 26 (vinte e seis) acertos e 4 (quatro) não responderam o item. Os erros foram 2 (dois) oriundos de cálculos equivocados (B_2 , C_7), e, o aluno restante, somente indicou ∞ como resposta (B_{10}).

Solicitamos que no item (c) os alunos determinassem: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) + \lim_{x \rightarrow \infty} g(x)$. Considerando 28 (vinte e oito) respostas analisadas, visto que 5 (cinco) alunos não responderam, apenas 8 (oito) sujeitos acertaram esse item, dentre eles, somente 4 (quatro) indicaram ∞ como resposta. Dentre os 20 estudantes pesquisados que cometeram erro, 7 (sete) indicaram uma indeterminação como resposta, ou simbolicamente ($\infty - \infty$) ou com o uso da linguagem natural. Vejamos dois casos:

Quadro 52 – Resposta do aluno A_1 para o item (c) da 5ª questão.

$2x + 3 + (-x + 1)$
$2\infty + 3 + (-\infty + 1)$
$\infty + 3$
INDETERMINAÇÃO

Fonte: Questionário de pesquisa.

Quadro 53 – Resposta do aluno A_8 para o item (c) da 5ª questão.

$\lim_{x \rightarrow \infty} 2x + 3 = \infty + \lim_{x \rightarrow \infty} -x + 1 = -\infty$
$(\infty) + (-\infty) = \nexists$
INDETERMINADO

Fonte: Questionário de pesquisa.

No quadro 52, o aluno A_1 considerou $\infty + 3$ como uma indeterminação, mesmo não sendo. E no quadro 53, temos um caso que ao se chegar em uma indeterminação, concluiu-se que o limite não existe. Essa situação pode estar sendo descrita pelo obstáculo que Sierpinska (1985) cunhou de “horror ao infinito” e ao obstáculo da reticência ao infinito proposto por Rezende (1994). Temos ainda um erro de notação do aluno A_8 , na primeira linha de sua resposta, podendo ser classificado como mais uma dificuldade proveniente do obstáculo do símbolo.

Quadro 54 – Respostas dos alunos A_3 , A_9 e C_2 para o item (c) da 5ª questão.

$2x + 3 + (-x) + 1$	$= +\infty + (-\infty)$	$\lim_{x \rightarrow \infty} 2x + 3 + \lim_{x \rightarrow \infty} -x + 1$
$2\infty + 3 + (-\infty) + 1$	$= +\infty - \infty$	$+\infty + (-\infty) = 0$
$+\infty - \infty$	$= -\infty$	
$-\infty$		

Fonte: Questionário de pesquisa.

No quadro 54, podemos observar exemplos do obstáculo algébrico evidenciado por Sierpinska (1985), no qual os alunos A_3 , A_9 e C_2 fazem a transferência automática dos métodos da álgebra de manipulação de grandezas finitas à grandezas infinitas.

O item (d) desta questão não foi respondido por 5 (cinco) alunos, 15 (quinze) erraram (um deles parou em uma indeterminação: A_7) e 13 (treze) alunos acertaram. Dentre os 13 (treze) acertos, 8 (oito) simplesmente indicaram a resposta sem justificar, não temos como analisá-las.

Quadro 55 – Respostas dos alunos A_8 e A_9 para o item (d) da 5ª questão.

$\lim_{x \rightarrow \infty} 2x + 3 = \infty - \lim_{x \rightarrow \infty} -x + 1 = -\infty$	$= \lim_{x \rightarrow \infty} +\infty - \lim_{x \rightarrow \infty} -\infty$
$(\infty) + (-\infty) = \infty$	$= +\infty - \infty$
	$= +\infty$

Fonte: Questionário de pesquisa.

Como podemos verificar no quadro 55, alguns sujeitos (A_8 , A_9 , B_1 , C_2 e C_9) também demonstraram que os obstáculos algébricos propostos por Sierpinska (1985) ainda estão presentes atualmente, a identificação desse obstáculo se deve pela transferência automática das propriedades de manipulação de quantidades finitas para quantidades infinitas.

No item (e) foi solicitado a determinação de $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{f(x)}$. Dos 33 (trinta e três) estudantes participantes da pesquisa, apenas 4 (quatro) acertaram este item, sendo que 3 (três) alunos utilizaram as propriedades de cálculos de limite para funções racionais e um aluno usou a derivação pra encontrar o limite corretamente. O número de erros foi bem grande, chegando a 20 (vinte). Destes 20 (vinte) alunos, 6 (seis) indicaram a resposta como indeterminação, elencamos algumas:

Quadro 56 – Respostas dos alunos A_6 , A_8 e C_9 para o item (e) da 5ª questão.

$\frac{-\infty + 1}{2x + 3} = \frac{-\infty}{+\infty} ?$	$\frac{\lim_{x \rightarrow \infty} 2x + 3 = \infty}{\lim_{x \rightarrow \infty} -x + 1 = -\infty} = \frac{\infty}{-\infty} = \nexists$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{-\infty}{+\infty}$
INDETERMINAÇÃO	INDETERMINAÇÃO	= INDETERMINAÇÃO

Fonte: Questionário de pesquisa.

Podemos analisar as indeterminações muitas vezes pelo fato do aluno não conceber que uma “operação” entre quantidades infinitas resulte em um número finito, ideia desfeita pelos paradoxos de Zenão. Temos então a caracterização do obstáculo do aspecto metafísico da noção de limite, assim tratado por Cornu (1983), e, transposição metafísica, para Rezende (1994), bem como também a recusa do status de operação descrito por Sierpinska (1985) que encontra-se, dentre os grupos de obstáculos citados pela autora, no “horror ao infinito”.

Uma outra situação é o caso do aluno A_8 , pelo símbolo usado por ele (\nexists), ele associa a indeterminação a inexistência do limite. Dentre as respostas erradas, selecionamos mais algumas:

Quadro 57 – Respostas dos alunos A_9 , A_{10} , A_8 e C_9 para o item (e) da 5ª questão.

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\infty}{\infty} = -\infty$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{-\infty}{+\infty} = -\infty$	$\frac{-\infty}{\infty} = -\infty$	$\frac{-\infty}{+\infty} = +\infty$
----------------------------------------------------------------	-------------------------------------------------------------------------------------	------------------------------------	-------------------------------------

Fonte: Questionário de pesquisa.

Nas respostas transcritas no quadro 57, podemos novamente perceber o obstáculo algébrico de Sierpinska (1985), onde os alunos transferem propriedades algébricas à quantidades infinitas. A nosso ver, esse obstáculo tem origem desde às discussões sobre a distinção entre infinito atual e potencial feita por Aristóteles. Conforme Baron & Bos (1985), essas discussões ocorreram entre filósofos dos séculos XIII e XIV, e houve os que negaram a divisibilidade ao infinito, considerando o material contínuo composto de pontos indivisíveis. Neste contexto, poderia se considerar que nenhuma reta finita pode constituir-se de um número finito de pontos indivisíveis, então o número de tais pontos deve ser infinito. Portanto, concordamos com Baron & Bos (1985) ao afirmarem que a teoria do ponto permite à ideia de ordens diferentes de infinito podendo quantidades infinitas serem consideradas iguais ou não do mesmo modo que as quantidades finitas.

Podemos também relacionar esses os equívocos cometidos com a dificuldade suscitada por Cornu (1983) fazendo uma analogia com o caso $\frac{0}{0}$, no qual duas quantidades podem tender a zero enquanto sua relação tende a uma quantidade finita, em nossa pesquisa, poderíamos denominar o caso $\frac{\infty}{\infty}$, onde duas quantidades podem tender a infinito, enquanto sua relação tende a uma quantidade finita.

A partir da verificação de todos esses obstáculos epistemológicos presentes nos alunos pesquisados dos três cursos de Licenciatura em Matemática, podemos inferir que a explicitação dos obstáculos epistemológicos e atos de entendimento relativos à noção de limite, têm algumas implicações didático-pedagógicas importantes para a construção do conceito de limite de função de uma variável, e essa implicações, nessa pesquisa, se configuram em algumas sugestões para o ensino de limite de função de uma variável que iremos tratar nos tópicos a seguir.

5.2. UM OLHAR SOBRE AS PESQUISAS EM LIMITE À LUZ DAS OBSERVAÇÕES DAS AULAS DE CÁLCULO

Neste item elaboramos uma reflexão quanto aos resultados das pesquisas citadas no capítulo 2 (Algumas pesquisas sobre o ensino e a aprendizagem de limite) que constituem parte do referencial teórico adotado em nossa investigação à luz da análise das observações feitas nas duas turmas de Cálculo I (UFPA e UEPA).

A primeira pesquisa descrita nesse trabalho foi a de Sad (1998). Quanto às suas considerações sobre as propostas didático-pedagógicas destacamos a postura pedagógica do professor ao centralizar suas ações em sala de aula em termos do conteúdo a ser ensinado, sem considerar “onde o aluno está”. Outros autores que trazem à tona essa discussão (DOMENICO, 2006; KURATA, 2007; CAVASOTTO, 2010; VAZ, 2010) também partilham do pensamento de que essa postura que o professor assume fá-lo determinar para o aluno aonde ele deve chegar “como se pudesse simplificar a aprendizagem deles transpondo a linearidade de seus planejamentos de ensino para os modos de operar dos estudantes” (SAD, 1998, p. 303).

Conforme as observações realizadas nas aulas das turmas de Cálculo I (UFPA e UEPA), também para coleta de dados dessa pesquisa, podemos perceber, como implicação dessa postura, o fato do professor intencionalmente não ajudar os

alunos nas questões pertinentes à transposição dos obstáculos epistemológicos. Por exemplo, no que diz respeito ao obstáculos que tratam do carácter dinâmico do conceito de limite, o professor se ausenta de uma discussão mais aprofundada a respeito dessa dicotomia (dinâmico/estática) mesmo sendo indagado pelos alunos, passando da noção intuitiva, com utilização de gráficos e tabelas, para o formalismo com o uso restrito de símbolos.

Conforme Sad (1998):

Para melhorar o entendimento dos estudantes a partir da definição formal de limite é necessária uma instrução “cuidadosa e explícita” que estime os diversos modelos de limite construídos pelos estudantes, bem como os conhecimentos e relacionamentos (como os a priori de gráficos e funções) durante o processo de produção, a fim de tornar possível uma mudança para um modo de produção de significado em relação, por exemplo, a estipulações locais de limite, e assim, não permitindo que o estudante faça do seu modo de produção de significado um obstáculo a outros modos (p. 302).

Sad (1998) assinala que a divisão da turma em grupos de alunos para o desenvolvimento de atividades facilita a comunicação e compartilhamento dos conceitos entre os estudantes. Essa prática permite uma melhor compreensão ao professor sobre o que os alunos estão compreendendo.

Nas observações feitas durante as aulas de Cálculo para nossa pesquisa, percebemos, em termos de organização em sala de aula, o agrupamento de alunos de forma natural, tanto na turma da UFPA, quanto da UEPA. No entanto, não haviam atividades propostas para que os alunos pudessem sentir a necessidade de estar discutindo com o colega de classe temas relacionados ao Cálculo, pois as aulas eram, em sua maioria, expositivas, centradas no professor.

As discussões entre os alunos (no caso da UFPA) ocorriam somente nas aulas da disciplina “Laboratório de Ensino em Cálculo I”, pois quem ministrava as aulas dessa disciplina era os alunos. O professor entendia que o objetivo dessa disciplina era de ensinar os alunos a ensinar, e apostava na prática para que essa aprendizagem se efetivasse. A abordagem adotada pelos alunos, em sua maioria, era a aula expositiva, com o uso apenas do quadro. Nessas aulas ministradas pelos alunos, era muito enfatizada a resolução de exercícios, e esse se configurava no momento de maior diálogo entre os alunos quanto às concepções que cada um apresentava sobre diversos temas, mas em especial, para nossa análise, de limite.

O único fator desfavorável, a nosso ver, era a ausência da mediação que o professor poderia fornecer, enriquecendo a discussão por eles iniciadas, levando-os a caminhos que possibilitasse a minimização das dificuldades encontradas pelos estudantes.

Nesse sentido, concordamos com Sad (1998) ao indicar que devemos estar atentos às mudanças e relações das formas de produção de significados dos alunos. Transpondo para nossa pesquisa, devemos nos atentar aos significados que os alunos atribuem ao conceito de limite, buscando, através “do lugar de onde está” minimizar as dificuldades para que ele tenha possibilidades de transcender à um “novo lugar”. Para Sad (1998), isso é possível através do diálogo com o estudante por via de uma linguagem presente no mesmo campo semântico compreendido pelo aluno. Portanto, para a autora, as metodologias de ensino necessárias a aprendizagem no ensino superior devem privilegiar as atividades em grupo, as diferentes interpretações de textos e o posicionamento do aluno diante da produção de conhecimento.

Ainda nesse mesmo viés, corroboramos com Barrichello (2008) ao tratar das potencialidades didático-pedagógicas de uma dinâmica de interação entre professor e aluno, que no caso de sua pesquisa, foi baseada na escrita e orientada pela resolução de problemas, por acreditarmos que uma interação dessa natureza permita uma melhor compreensão do pensamento matemático dos estudantes. Pinto (2010), também enfatiza a importância da linguagem através da sequência elaborada para o ensino de limite, pois a sequência permite evidenciar uma maior utilização do quadro gráfico e o uso da linguagem natural como suporte ao ensino de limite.

Zuchi (2005) salienta que a maneira como o limite é apresentado em sala se apoia na realidade encontrada nos livros didáticos. Conforme a autora, o professor geralmente utiliza o livro como referência básica na preparação de suas aulas. Esse fato pôde ser constatado nas turmas acompanhadas, para a realização dessa pesquisa, os professores fizeram o cronograma de aula baseados em um livro didático adotado como principal referência em suas aulas de Cálculo, a organização da aula e a forma como os conteúdos foram apresentados aos estudantes se deu exatamente como está no livro.

Complementando a constatação de Zuchi (2005), concordamos com Kurata (2007) ao afirmar que os estudantes, em sua maioria, atualmente, não estão preparados para o ensino de Cálculo estruturado e sistematizado, como a maioria dos livros didáticos apresentam: definições, teoremas e propriedades. Portanto, pretender uma construção significativa do conhecimento matemático dessa forma é uma tarefa difícil e desconfortante. Esse posicionamento também se constata através da pesquisa de Cavasotto (2010) ao fazer a análise de erros de avaliações, percebe que as dificuldades estão, em sua maioria, ligadas aos conhecimentos da educação básica.

Outra dificuldade dos alunos na aprendizagem de limite, verificada por Zuchi (2005) e Cavasotto (2010), está relacionada à linguagem Matemática, sendo esta desenvolvida para facilitar a comunicação do conhecimento matemático entre as pessoas. Através das observações feitas em sala de aula, também verificamos essa dificuldade durante as aulas de Cálculo nas duas turmas, conforme pudemos verificar também na análise dos questionários.

Conforme nossas observações, a relação entre ϵ e δ na definição de limite é de difícil compreensão para os estudantes, principalmente devido a linguagem Matemática utilizada para exprimi-la. Zuchi (2005) constatou mais alguns fatores geradores dessa dificuldade: a falha em conteúdos básicos como funções e inequações, o obstáculo presente na passagem da noção intuitiva, a qual utilizamos o ponto de vista cinemático, diretamente para a definição de limite pelo ponto de vista de aproximação de uma maneira direta e formalizada. A autora constata ainda que o professor, geralmente, usa o ponto de vista cinemático para introduzir o conceito de limite, em seguida formaliza o conceito usando o ponto de vista de aproximação (ϵ, δ), gerando as dificuldades no processo de ensino aprendizagem desse conceito, pois muitos alunos não conseguem visualizar a relação entre ambos e não entendem o porquê de encontrar a relação entre ϵ e δ .

Nas observações realizadas em sala de aula, apesar do constante uso de representação gráfica por parte dos professores que ministraram Cálculo I nas duas turmas, verificamos que os próprios alunos sempre solicitam esse recurso em busca de um melhor entendimento dos conceitos trabalhados, fato também constatado na investigação realizada por Vaz (2010), ressaltando a importância e validade do

tratamento geométrico nos estudos desenvolvidos pelos professores em sala de aula.

Domenico (2006) indica o uso da história da Matemática como fator importante para o ensino de Cálculo. No entanto, o autor enfatiza mais o caráter bibliográfico de matemáticos (Newton e Leibniz) que contribuíram para o desenvolvimento do Cálculo do que o uso das informações históricas para facilitar a compreensão dos conceitos pertinentes ao ensino de Cálculo, assim como também João Neto (2006) usa a história como ilustração na introdução de suas atividades propostas. Esse tipo de abordagem também foi utilizada pelo professor durante as aulas em somente uma das turmas observadas, de forma pontual, foi mencionada a criação do Cálculo por Newton. É aconselhável, conforme Kurata (2007), na primeira aula, apresentar um breve histórico do Cálculo, a partir de Leonardo da Vinci até a era de Newton, com a descoberta das derivadas, entrelaçando a física e o Cálculo. Dessa forma, os alunos teriam uma iniciação ao Cálculo, com alguns fundamentos que permitiriam entender que ele constitui uma base integradora para a aquisição de novos conhecimentos nas mais variadas áreas.

Domenico (2006) infere também que a história da Matemática pode ser um fator motivacional pertinente aos estudos de Cálculo. Quanto aos aspectos motivacionais no ensino de Cálculo, Kurata (2007) concluiu que as condições que representam uma metodologia de ensino que diversifica a forma de abordagem do conteúdo a ser apresentado e que permite aos alunos relacioná-lo a situações reais a serem vivenciadas no futuro, conduzem para uma maior motivação para a aprendizagem Matemática.

Dentre as pesquisas elucidadas no segundo capítulo, destacamos que 6 (seis) apontam o uso de softwares como facilitadores no ensino dos conceitos envolvidos no Cálculo, dentre eles, o conceito de limite (ZUCHI, 2005; DOMENICO (2006); JOÃO NETO (2006); PINTO, 2010; VAZ, 2010). Durante as aulas observadas, somente um dos professores utilizava software em sala de aula, não como ambiente de aprendizagem como em algumas propostas verificadas, mas como um auxílio a visualização do comportamento gráfico das funções trabalhadas.

Partilhamos do posicionamento de Cavasotto (2010) ao afirmar que para propor mudanças é necessário compreender as origens das dificuldades que os alunos apresentam na aprendizagem do conceito de limite, e, para o autor, é

pertinente a utilização os métodos da análise de erros para tal finalidade. Portanto, o pesquisador sugere metodologias que possibilitem uma participação diferente por parte do educando, que ele passe de uma atitude passiva para uma postura ativa na construção do conhecimento.

6. CONSIDERAÇÕES E DESDOBRAMENTOS DA PESQUISA

Nossa pesquisa evidencia um estudo descritivo com enfoque na exploração epistemológica das informações históricas do conceito de limite. Dessa forma, nos propomos identificar os obstáculos epistemológicos no processo de construção do conceito de limite de função de uma variável a partir de obstáculos já listados por Cornu (1983), Sierpinska (1985) e Rezende (1994).

Para tanto, apresentamos um breve levantamento histórico acerca do desenvolvimento do conceito de limite de função para que se evidenciassem as principais dificuldades concernentes a esse conceito. A construção desse capítulo da dissertação foi de fundamental importância para nosso amadurecimento quanto ao conceito elencado por nós como central de nossa pesquisa: limite de função real a uma variável real.

Também apresentamos um panorama de pesquisas que retratam o ensino de Cálculo, bem como de limite de função, evidenciando as principais dificuldades detectadas e as diversas formas propostas para minimizá-las.

Na busca de nosso objetivo, a observação das aulas de Cálculo I e os questionários para a coleta de dados nos permitiram, juntamente com o levantamento histórico do conceito de limite e as pesquisas consultadas, observar que os obstáculos identificados pelos autores supracitados permanecem resistentes no alunado atual das licenciaturas em Matemática das universidades públicas de Belém.

Na tentativa de superá-los, a análise, por meio da articulação conectiva entre os estudos históricos relacionados aos obstáculos epistemológicos situados no desenvolvimento histórico do Cálculo Diferencial e Integral, focados nas ideias de limite, nos permitiu inferir sobre algumas implicações didático-pedagógicas importantes para a construção do conceito de limite de função de uma variável. Fazemos, assim, alguns apontamentos para o ensino de limite de função de uma variável através do entrelaçamento dos pressupostos da história e da didática da Matemática.

Conforme as análises realizadas, verificamos que os obstáculos epistemológicos de limite de função de uma variável ainda estão resistentes em nossos alunos da licenciatura, e, com base nos resultados das pesquisas adotadas

como referencial teórico de nossa investigação e também nas observações das aulas de Cálculo I acompanhadas para coleta de dados de nossa pesquisa, temos que o professor não possibilita nem estimula no aluno um papel de produtor, mas sim, muito mais, de receptor do conhecimento.

Observando os obstáculos evidenciados nessa pesquisa, propomos, paralelamente ao ensino tradicional de limite, que se faça um estudo histórico do desenvolvimento desse conceito. Este estudo, orientado pelo professor, possibilita ao aluno uma visão mais ampla e localizada em termos sócio-histórico-cultural da construção do conceito de limite e dos entraves encontrados em seu desenvolvimento.

Ao utilizarmos o termo “ensino tradicional”, apenas o relacionamos às aulas que os professores ministram com mais frequência conforme consideram pertinentes ao ensino dos conceitos em questão, no caso dos professores observados, se tratavam de aulas meramente expositivas, estruturadas conforme o livro didático, com a diferença de que um dos professores se preocupava com o uso de software como auxiliador na visualização das funções, não deixando, por conta desse aspecto, de ser uma aula expositiva. Concordamos que o uso do software seja pertinente ao ensino de limite tanto como recurso de visualização gráfica quando em ambientes de aprendizagem.

O estudo histórico vetorizado pedagogicamente aqui proposto pode ser realizado pela apresentação inicial de uma síntese da evolução do conceito de limite, para que os estudantes tenham uma visão geral do desenvolvimento desse conceito. Após essa apresentação, deve ser dada a tarefa para os estudantes de uma pesquisa mais minuciosa quanto ao desenvolvimento do conceito de limite. Essa tarefa pode ser dividida entre grupos de alunos, sendo entregues temas. São sugestões: primeiros conceitos que permeiam a noção de limite e do Cálculo, antecipações ao Cálculo, invenção do Cálculo, formalização do conceito de limite. Podendo estes temas serem subdivididos.

Quando os estudantes estabelecerem contato (nas aulas tradicionais) com a definição formal de limite de função, proporíamos o estudo das definições de alguns matemáticos quanto ao conceito de limite com o objetivo de haver uma identificação/aproximação entre os conceitos estudados e os conceitos até então

compreendidos pelos alunos, podendo ser mantidos os mesmo grupos formados anteriormente.

A partir de então, sugerimos uma discussão das dificuldades que os matemáticos tiveram pra se chegar a definição formal de limite, se essas dificuldades são as mesmas que os alunos encontram nas definições construídas por eles, observando os obstáculos que precisavam ser transpostos.

As possíveis dificuldades que podem emergir dos diálogos propostos podem ser associadas aos obstáculos identificados em nossa investigação. Podemos assim estabelecer 5 (cinco) linhas temáticas para discussão em sala de aula, no ensino de limite de função de uma variável, associadas ao quadro 1 (Obstáculos epistemológicos de limite) trazido no capítulo 3:

Quadro 58 – Relação dos eixos temáticos com os obstáculos epistemológicos de limite de função.

	Cornu (1983)	Sierpinska (1985)	Rezende (1994)
(1)	- Aspecto metafísico da noção de limite; - A noção de “infinitamente pequeno” ou de “infinitamente grande”.	- “Horror ao infinito” (I.1, I.2, I.3, I.4). - Obstáculos geométricos;	- Transposição metafísica.
(2)	- “O limite atinge ou não?”.	- “Horror ao infinito” (I.5) – Obstáculo físico.	- Transposição cinética.
(3)	- A transposição numérica.	- Obstáculos relativos à noção de função.	- Transposição numérica.
(4)		- “Horror ao infinito” (I.6. I.7) – Obstáculos algébricos.	- Reticência ao infinito.
(5)		- Obstáculos lógicos. - Obstáculo do símbolo.	

Fonte: Elaboração nossa.

Linha temática (1) – “Horror ao infinito”: Nesta linha, sugerimos a discussão das dificuldades concernentes ao conceito de infinito e das grandezas infinitamente grandes e infinitamente pequenas, associadas ao contexto histórico do surgimento do Cálculo.

- Questões de investigação relacionadas a temática:
 - O que é infinito?
 - Quais os motivos de os gregos não aceitarem a noção de infinito?

Linha temática (2) – Aspecto dinâmico do conceito de limite: Nesta linha, sugerimos a discussão das características de movimento presente na noção intuitiva de limite a partir do contexto histórico do qual se originou, estabelecendo também uma discussão quanto as grandezas atingirem ou não o seu limite. Ressaltamos ainda a importância de se ater no ensino de Cálculo o método geométrico aliado ao método aritmético/algébrico, por cada um proporcionar as interpretações necessárias para a apreensão do conceito de limite.

- Questão de investigação relacionada a temática:
 - A partir da quadratura do círculo, como calcular a vizinhança que mais se aproxima do círculo?
 - Considerando: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$. O limite de $f(x)$ quando x tende a a se aproxima ou é igual a L ?

Linha temática (3) – Transposição numérica: Sugerimos nessa etapa a discussão quanto às dificuldades encontradas historicamente de abstrair do contexto geométrico a cinemática, não para trabalhar a "grandeza", mas sim os números, chegando assim, na definição formal de limite.

- Questões de investigação relacionadas a temática:
 - O que ε significa na definição de limite de função?
 - O que δ significa na definição de limite de função?
 - Qual o significado da relação entre ε e δ na definição formal de limite de função? Por que devemos buscá-la?

Linha temática (4) – “Algebrização do infinito”: nessa etapa, se propõe a discussão quanto as formas de se trabalhar com o infinito e quanto as situações de indeterminações que surgem ao buscarmos o limite de determinadas funções, imbricadas ao contexto histórico.

- Questões de investigação relacionadas a temática:
 - O ∞ é um símbolo ou é um número?
 - O que é uma indeterminação?

Linha temática (5) – O símbolo \lim : nesse eixo temático, sugerimos a discussão quanto à eliminação de quantificadores no desenvolvimento do conceito de limite e a necessidade da criação de um símbolo para a operação de limite.

- Questões de investigação relacionadas a temática:
 - Por que foi necessária a criação do símbolo \lim para a operação de limite?

Devemos ressaltar que não esperamos com as inferências propostas que o professor em sala de aula esgote todos os temas propostos, mas sim, que sejam discutidas a origem das dificuldades enfatizadas pelos próprios estudantes durante as aulas.

Entendemos que os apontamentos dados possibilitam seguir as orientações de Sad (1998) considerado o ensino de limite a partir de “onde o aluno está”, por via do diálogo dos estudantes entre os mesmos e com o professor, permitindo que as compreensões do aluno não se transformem em obstáculos para sua aprendizagem, mas sim, o propulsor para a construção de uma nova compreensão mais sólida mediada pelo professor. As sugestões proferidas também abarcam o aspecto de trabalho em grupo sugeridos pela autora.

Em termos de aprofundamento teórico, é pertinente aos professores que ministram a disciplina Cálculo I compreender a diferença ente o infinito potencial e atual e, até certo ponto, expressar essa diferença dentro dos eixos temáticos propostos para discussão com os estudantes, com o objetivo de minimizar os obstáculos que o uso potencialista do infinito causa no ensino do conceito de limite de função de uma variável.

O estudo no âmbito desse Programa de Pós-graduação em nível de mestrado em Educação Matemática proporcionou a nossa formação quanto professor/pesquisador, incorporar à prática curricular a pesquisa e a produção de conhecimentos acerca da realidade regional, particularmente da Educação Matemática, em alguns de seus diversos ângulos e relações. Ampliamos nosso entendimento sobre o significado de ser pesquisador na área da Educação Matemática. Conhecemos e desenvolvemos pesquisas capazes de fazer avançar os conhecimentos de diversos aspectos que interferem no ensino e aprendizagem da Matemática.

Reconhecendo as limitações do presente trabalho e refletindo sobre as questões aqui discutidas, sugerimos para futuras pesquisas: colocar em prática, com maior fundamentação teórica, os apontamentos oferecidos no último item de nossa análise quanto ao ensino de limite de função de uma variável; estender o estudo de identificação dos obstáculos epistemológicos aos demais conceitos do Cálculo (derivada e integral) assim como suas implicações didático-pedagógicas.

Por fim, gostaríamos de ressaltar que o trabalho de um pesquisador nunca é encerrado. A sua pesquisa é de grande importância para a construção de novos caminhos, devendo um professor/pesquisador sempre estar disposto a adquirir novos conhecimentos.

REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, Saddo Ag. *Fundamentos da didática da matemática*. Curitiba: Editora UFPR, 2007.

BACHELARD, Gascon. *A formação do espírito científico*. Trad. Estela dos Santos Abreu. Rio de Janeiro: Editora Contraponto, 1996.

BARRICHELLO, Leonardo. *Problemas de cálculo diferencial em um ambiente de interação escrita*. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Universidade Estadual Paulista, São Paulo, 2008.

BARON, Margaret E.; BOS, H. J. M. *Curso de história da matemática: origens e desenvolvimento do cálculo*. Vol 1-5. Trad. José Raimundo Braga Coelho. Brasília: Editora Universidade de Brasília, 1985.

BELL, Eric Temple. *Los grandes matemáticos - desde Zenon a Poincare: su vida y sus obras*. Buenos Aires: Losada, 1948.

BITTENCOURT, Jane. Obstáculos epistemológicos e a pesquisa em didática da matemática. *Educação Matemática em Revista*, São Paulo, v. 5, n. 6, p. 13-17, 1998.

BOYER, Carl. B. *The history of calculus and its conceptual development*. New York: Dover publications, 1959.

_____. *Cálculo*. Trad. Hygino H. Domingues. v. 6. São Paulo: Editora Atual, 1992. (Tópicos de história da matemática para uso em sala de aula).

_____. *História da matemática*. 2. ed. Trad. Elza F. Gomide. São Paulo: Editora Edgard Blücher, 1996.

BROLEZZI, Antonio Carlos. *A tensão entre o discreto e o contínuo na história da matemática e no ensino de matemática*. Tese (Doutorado em Educação). Universidade de São Paulo, São Paulo, 1996.

BROUSSEAU, Guy. *Fondements et Méthodes de la Didactique des Mathématiques. Recherches em Didactique des Mathématiques*. Grenoble: La Pensée Sauvage-Éditions, v.7.2, 33-116, 1986.

CAVASOTTO, Marcelo. *Dificuldades na aprendizagem de cálculo: o que os erros cometidos pelos alunos podem informar*. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática). Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2010.

CELESTINO, Marcelo Roberto. *Concepções sobre limite: imbricações entre obstáculos manifestos por alunos do ensino superior*. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2008.

CORNU, Bernard. *Apprentissage de la notion de limite: conceptions et obstacles*. Tese (Doutorado em Matemática). Université Scientifique et Médicale de Grenoble. Grenoble, 1983.

DOMENICO, Luiz Carlos Almeida de. *Aprendizagem de cálculo diferencial e integral por meio de tecnologias de informação e comunicação*. Dissertação (Mestrado em Educação). Pontifícia Universidade Católica do Paraná, Curitiba, 2006.

DUVAL, Raymond. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara (Org.). *Aprendizagem em matemática: registro de representação semiótica*. São Paulo: Papirus, 2003.

EVES, Howard. *Introdução a história da matemática*. Trad. Hygino H. Domingues. Campinas, SP: Editora da UNICAMP, 2004.

KURATA, Katsuyoshi. *O ensino de cálculo para cursos superiores de tecnologia na área ambiental: aspectos motivacionais do aluno*. Dissertação (Mestrado em Tecnologia: Gestão, Desenvolvimento e Formação). Centro Estadual de Educação Tecnológica Paula Souza, São Paulo, 2007.

LÉVY, Pierre. *As tecnologias da inteligência: o futuro do pensamento na era da informática*. Rio de Janeiro: Editora 34, 1993.

OLIVEIRA, M. K. *Vygotsky: Aprendizado e desenvolvimento - um processo sócio-histórico*. São Paulo: Scipione, 2003.

PAIS, Luiz Carlos. *Didática da matemática: uma análise da influência francesa*. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2008, p.99-108.

PINTO, Gisele Teixeira Dias Costa. *Uma proposta para o ensino e aprendizagem de limite de função real*. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática). Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2010.

PSOTKA, Joseph; MUTTER, Sharon A. *Intelligent Tutoring Systems: Lessons Learned*. [S.l.]: Lawrence Erlbaum Associates, 1988.

REZENDE, Wanderley Moura. *Uma análise histórica-epistêmica da operação limite*. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Universidade Santa Úrsula, Rio de Janeiro, 1994.

ROMBERG, T. A. Perspectives on scholarship and research methods. In: Grouws, D. A. *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. Universidade de Michigan: Macmillan, 1992.

RUSSEL, S.J; NORVING, P. *Artificial Intelligence: a modern approach*. Prentice-Hall, Inc. 1995.

SAD, Lígia Arantes. *Cálculo diferencial e integral: uma abordagem epistemológica de alguns aspectos*. Tese (Doutorado em Educação em Matemática). Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 1998.

SANTOS, Milena Gonçalves. *Um estudo sobre a convergência de sequências numéricas com alunos que já tiveram contato com a noção de limite*. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2005.

SCHOENFELD, Alan. *Mathematical Problem Solving*. Academic Press, Londres, 1985.

SIERPINSKA, Anka. *Obstacles Épistémologiques relatifs à la notion de limite. Recherches em Didactique des Mathématiques*. Grenoble: La Pensée Sauvage-Éditions, v.6.1, p.5-67, 1985.

SILVA NETO, João Pereira da. *Um estudo sobre o ensino de limite: um tratamento computacional com aplicações*. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2006.

SILVA; Izaias Nário da; SILVA, Bismark Mota da. Desenvolvimento do cálculo: contribuições de Zenon, Eudoxo e Arquimedes. In: *VI EPBEM – Encontro Paraibano de Educação Matemática*, Monteiro-PB, 2010.

VAZ, Iêda do Carmo. *Os conceitos de limite, derivada e integral em livros didáticos de cálculo e na perspectiva de professores de matemática e de disciplinas específicas em cursos de engenharia*. Dissertação (Mestrado em Educação Tecnológica). Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2010.

VIGOTSKI, L. S. (2007). *A Formação social da mente: o desenvolvimento dos processos psicológicos superiores*. São Paulo: Martins Fontes, 2007.

ZUCHI, Ivanete. *A abordagem do conceito de limite via sequencia didática: do ambiente lápis e papel ao ambiente computacional*. Tese (Doutorado em Engenharia de Produção). UFSC, 2005.

APÊNDICE A – QUESTIONÁRIO



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E CIENTÍFICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICAS –
MESTRADO

Prezado Estudante,

Neste momento estamos realizando um estudo que busca a melhoria do processo de ensino-aprendizagem da Matemática, para tanto necessitamos de sua colaboração respondendo as questões abaixo para o êxito deste trabalho. Desde já agradecemos sua colaboração e garantimos que as informações prestadas serão mantidas em total anonimato.

Muito Obrigada!

Nome: _____ Telefone: _____

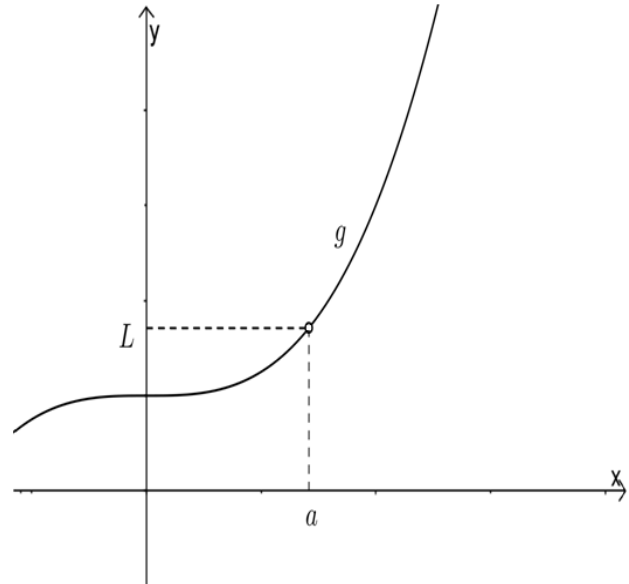
E-mail: _____ Idade: _____

1. Procure dar uma definição para limite de função.

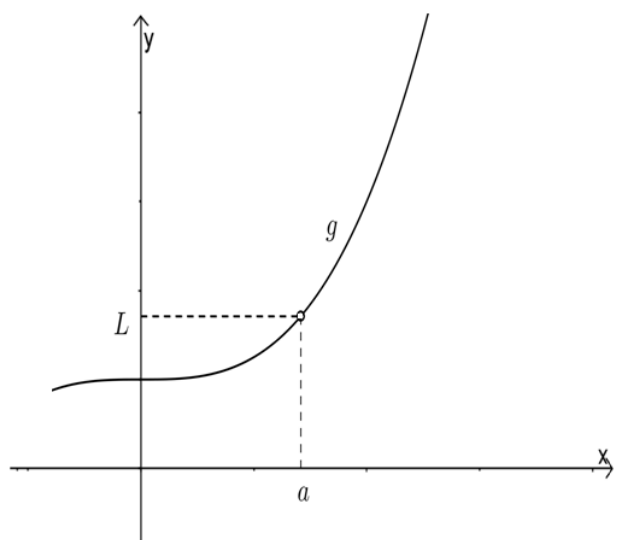
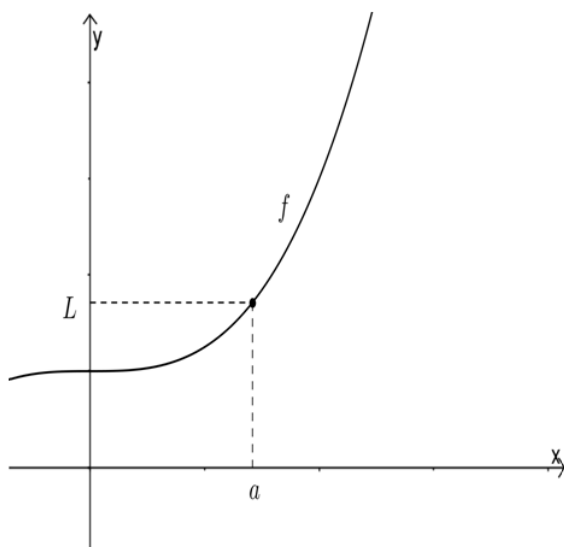
2. Procure dar uma definição para infinito.

3. Suponha que uma função $f(x)$, com x tendendo para a , tenha limite L (conforme o gráfico). Assinale a ou as afirmações que melhor descrevem esse fato:

- a) o limite da função é exatamente L .
- b) o limite da função se aproxima de L .
- c) o limite da função tende a L .
- d) os valores das coordenadas da função, quando x tende para a pela esquerda ou pela direita se aproximam, mas não atingem L .

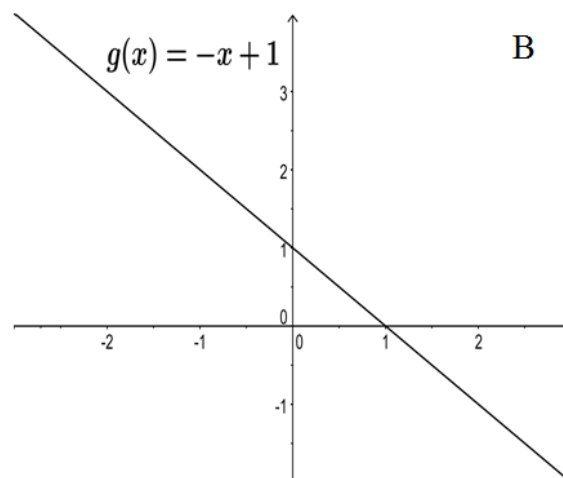
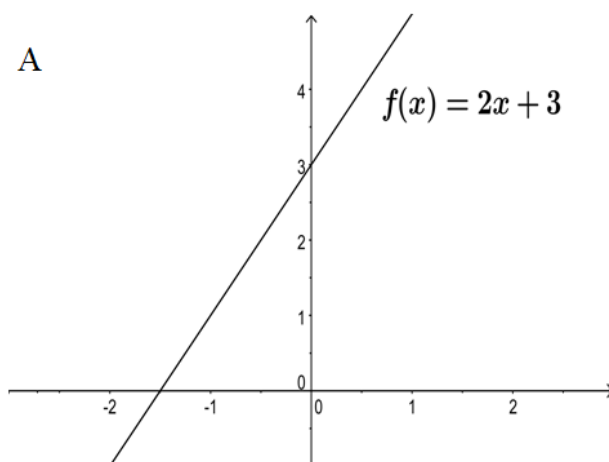


4. Sejam as funções f e g definidas em um intervalo aberto em torno de um valor a . Analise os gráficos das funções f e g representadas abaixo, respectivamente:



- a) Qual a diferença entre as duas funções representadas graficamente acima?
- b) Explique a partir dos gráficos se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$.

5. Observe os gráficos das funções A: $f(x) = 2x + 3$ e B: $g(x) = -x + 1$ e determine:



<p>a) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$</p>	<p>b) $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x)$</p>
<p>c) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) + \lim_{x \rightarrow \infty} g(x)$</p>	<p>d) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - \lim_{x \rightarrow \infty} g(x)$</p>
<p>e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{f(x)} =$</p>	



Universidade Federal do Pará
Instituto de Educação Matemática e Científica
Programa de Pós-Graduação em Educação em
Ciências e Matemáticas