SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE DUCAÇÃO MATEMÁTICA E CIENTÍFICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICAS

RAQUEL SOARES DO RÊGO FERREIRA

TAREFAS INTERMEDIÁRIAS: UM MODELO EPISTEMOLÓGICO DE REFERÊNCIA PARA O ENSINO DAS FRAÇÕES

BELÉM - PA
2014

RAQUEL SOARES DO RÊGO FERREIRA

TAREFAS INTERMEDIÁRIAS: UM MODELO EPISTEMOLÓGICO DE REFERÊNCIA PARA O ENSINO DAS FRAÇÕES

Texto apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas, Área de concentração em Educação Matemática, do Instituto de Educação Matemática e Científica da Universidade Federal do Pará, como requisito parcial à obtenção do titulo de Mestre em Educação em Ciências e Matemáticas.

Orientador: Prof. Dr. Renato Borges Guerra

BELÉM - PA
2014

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)

Ferreira, Raquel Soares do Rêgo, 1977-
Tarefas intermediárias: um modelo epistemológico de referência para o ensino das frações / Raquel Soares do Rêgo Ferreira. - 2014.

Orientador: Renato Borges Guerra.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Pará, Instituto de Educação Matemática e Científica, Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas, Belém, 2014.

1. Matemática - estudo e ensino. 2. Frações - Estudo e ensino. I. Título.

CDD 22. ed. 510.7

RAQUEL SOARES DO RÊGO FERREIRA

TAREFAS INTERMEDIÁRIAS: UM MODELO EPISTEMOLÓGICO DE REFERÊNCIA PARA O ENSINO DAS FRAÇÕES

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas do Instituto de Educação Matemática e Científica da Universidade Federal do Pará, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Educação em Ciências e Matemáticas – Área de Concentração em Educação Matemática – Linha de Pesquisa em Percepção Matemática, Processos e Raciocínios, Saberes e Valores.

Prof. Dr. Renato Borges Guerra
Orientador – IEMCI/UFPA

Prof. Dr. José Messildo Viana Nunes
Membro interno– IEMCI/UFPA

Prof. Dr. Roberto Carlos Dantas de Andrade
Membro externo – ETRB

DEDICATÓRIA

Dedicar é registrar uma intenção ou sentimento,
é expressar por meio de palavras todo o amor suportado.
É reconhecer que você viveu duas ou mais histórias simultaneamente.
Uma que começa no primeiro capítulo escrito, outra que começou na alma antes de se transformar em páginas.
Dedicar é trazer a existência pessoas que no seu silêncio contribuíram, que viveram e sempre viverão e presenteiam-nos com sua presença e nos dá a oportunidade de poder continuar a jornada,
Uma jornada que pareceu ser infinita, assombrosa, árdua, mas compensadora.
Dedico este trabalho
Aos mentores da minha caminhada
Meus pais Rita e João (in memoriam) que com amor acreditaram e investiram no meu projeto de vida, apesar das dificuldades e adversidades que a vida os pregou
Continuaram sonhando o meu sonho.
Ao meu marido,
Pela paciência e companheirismo
Aos meus filhos,
Que me ensinaram a amar incondicionalmente,
Vê a vida por outro ângulo
E que é possível superar as dificuldades e sobrepujar os obstáculos
Vencer a jornada e ir ao encontro do conhecimento,
E principalmente saber que com fé e esperança tudo é possível ao que crer.
Por tudo que passei,
Por tudo que vivi,
Que este trabalho seja uma inspiração e motivação a ser seguida
Por meus filhos, sobrinhos e minha geração futura.
Que fique registrado que não há vitória sem luta, sem fé!
Para conseguir realizar seu sonho, primeiro sonhe, creia, lute e nunca desista!
Dedico a todas as pessoas que deixaram um pouco de si e levaram um pouco de mim, pois cada uma contribuiu de alguma forma para essa conquista.
Mas há alguém
A que me deu o fôlego da vida, a saúde, a força, a inspiração, é imortal, invisível, mas real, digno de toda honra e toda a g
O meu único Senhor e salvador, a luz da minha
JESUS CRISTO

AGRADECIMENTOS

Ao autor e consumador de minha fé, Jesus Cristo, que esteve sempre presente em minha vida e que me inspirou com fé e sabedoria a escrever este trabalho.

Aos professores do Mestrado em Educação em Ciência e Matemáticas do PPGECM/IEMCI/UFPA.

Ao meu respeitado orientador Renato Guerra por suas horas dedicadas ao meu trabalho, pela paciência, sabedoria e orientações prestadas no decorrer desses dois anos. O meu muito obrigado pelos ensinamentos e partilha de conhecimento que muito contribuíram para meu crescimento pessoal e profissional, mas agradeço principalmente pela amizade demonstrada.

Aos professores Doutores José Messildo e Roberto Carlos Andrade, primeiramente pela amizade e por seguinte por suas valiosas contribuições, recorrências e inferências na banca examinadora, enriquecendo o meu exercício do pensar científico e o trabalho aqui apresentado.

Aos meus colegas do Programa em especial a Aline Miranda que colaboraram com incentivo, companheirismo, apoio e conhecimentos compartilhados.

Ao Grupo GEDIM pelas valiosas discussões.

A todas as pessoas que no anonimato contribuíram para realização deste sonho.

A minha madrinha por me ajudar desde o início da minha caminhada.

Aos meus sogros por suas palavras de motivação e carinho demonstrados.

A minha irmã Eliane serei eternamente grata por me socorrer nos tempos difíceis, obrigada por seu amor.

E principalmente a minha família, minha base, meu tudo.

Conhecer é tarefa de sujeitos, não de objetos. E é como sujeito e somente enquanto sujeito, que o homem pode realmente conhecer.

Paulo Freire

RESUMO

Este trabalho trata da articulação e integração de organizações praxeológicas anunciadas pelas pesquisas a luz da teoria antropológica do didático, em particular, entre as organizações referentes as noções de frações e de operações com frações que vivem em uma dada instituição de ensino. Essa problemática é evidenciada a partir de um Modelo Epistemológico de Referência - MER aqui proposto que permite analisar e reconstruir organizações praxeológicas sobre noções e operações, de adição e subtração, de frações em que revela o papel de praxeológicas intermediárias a partir da epistemologia funcional dos objetos da matemática escolar.

Palavras-chave: Fração. Modelo Epistemológico de Referência. Teoria Antropológica do Didático. Praxeologias. Praxeologia intermediária.

ABSTRACT

This work deals with the articulation and integration of organizations praxeological announced by research the light of anthropological theory of didactic, in particular, between organizations regarding the concepts of fractions and operations with fractions that live in a given institution of education. This problematic is evident from an Epistemological Reference Model - ERM proposed here allows us to analyze and reconstruct praxeological organizations about notions and operations, addition and subtraction of fractions in revealing the role of intermediary praxeological from the functional epistemology of objects of school mathematics.

Keywords: Fraction. Epistemological Model Reference. Anthropological Theory of Didactics. Praxeologias. Praxeology intermediate.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE SIGLAS

EUA	Estados Unidos da América
GEDIM	Grupo de Estudos e Pesquisa em Didática da Matemática
INEP	Instituto Nacional de Estudo e Pesquisa
IDEB	Índice de Desenvolvimento da Educação Básica
ME	Modelo Epistemológico
MER	Modelo Epistemológico de Referência
MMC	Mínimo Múltiplo Comum
OD	Organização Didática
OM	Organização Matemática
OMP	Organização Matemática Pontual
OML	Organização Matemática Local
OMI	Organização Matemática Intermediária
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
PEI	Percurso de Estudo e Investigações
PNLD	Programa de Nacional do Livro Didático
PP	Praxeologia Pontual
PL	Praxeologia Local
PI	Praxeologia Intermediária
TAD	Teoria Antropológica do Didático
UFPA	Universidade Federal do Pará
UNAMA	Universidade da Amazônia

SUMÁRIO

CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Primeiro olhar sobre a pesquisa: Minhas idas e vindas como docente e a questão de pesquisa

Minha trajetória docente iniciou em 1996, ano de ingresso na Universidade da Amazônia – UNAMA. A escolha por ser professora de Matemática aconteceu durante o Ensino Fundamental, mas precisamente na 8ª série (hoje 9º ano), apesar dos altos e baixos que enfrentei durante os primeiros anos do Ensino Fundamental II, tive um professor que me oportunizou a vê a matemática como algo “*vivo e real”* e a partir daquele momento minha vontade era conhecer mais sobre a matemática, tinha satisfação em estudá-la, estreitando a cada dia minha relação com os objetos matemáticos.

Tive a oportunidade de iniciar minha vida docente nas séries iniciais, essa experiência foi impar, me possibilitou viver e conviver com práticas que ainda hoje dão suporte as minhas praxeologias. Nessa trajetória acompanhei a transição das séries e suas devidas organizações matemáticas e deduzi que cada qual tinha seu nível de complexidade, a culminância dessa observação ocorreu quando lecionei no ensino médio e no superior e constatei erros “básicos” tais como: representação da noção de frações e principalmente as operações com frações.

Minha experiência me fez perceber que o problema do estudo das frações poderia estar na “base”, no início, na construção da noção, nas organizações matemáticas, momento em que esse objeto matemático é apresentado e tratado. O ensino preliminar das frações apresenta uma forte influência no papel do professor em sala de aula e que pode deixar escapar o que destaca Pinilla (2007, p.18) sobre a aprendizagem da noção de fração como primeiro estágio da aprendizagem em que “atrás” do termo fração pode estar escondido diferentes situações que dão sentido a essa noção de fração.

Nesse trajeto de dezessete anos desempenhando o papel de professora de Matemática do Ensino Fundamental I e II, Médio e Superior da Rede Pública e Privada, algumas vezes, de forma simultânea, vivi plenamente cada momento do tempo empregado em cada instituição, eu não era mais a mesma pessoa, minhas práticas não eram as mesmas, elas foram moldadas e ganharam novas formas. Meu modo de fazer nunca mais seria o mesmo, desenvolvi o que Chevallard (2005) chama de criatividade didática, que ocorre quando o professor é capaz de desenvolver produções próprias, que não se restringem as estratégias de ensino e conceitos originais. Percebi ainda que as práticas não surgem de maneira instantânea (BOSCH et al 2006 p. 39), essas práticas docentes são provisórias, momentâneas e transitórias, Bosch e Gascón (2001) chamam de praxeologias empíricas, ou seja, uma praxeologia que acontece em uma instituição concreta, em um momento histórico concreto com características e restrições específicas.

Nessa caminhada, inicialmente subestimei o ensino das frações, pois achava o conteúdo “simples”, mas ao longo dos anos, constatei que ensinar frações não era algo tão simples assim, tão perfeito e imutável como eu imaginava.

Em resumo, desde minha saída da universidade em 2000 tenho aprendido na prática as tarefas de ser professora, cada classe uma nova experiência, em algumas me realizando, em outras me frustrando. Percebi por exemplo, que para ensinar não basta ter conhecimento do conteúdo, precisamos de algo a mais, que nos favoreça e nos oriente a como levar o aluno ao encontro dos objetos matemáticos propostos? Julgamos necessário responder esse questionamento e a partir daí surgem outros questionamentos quando levamos em consideração uma dada organização matemática, questionamentos básicos do tipo: Quais as condições que facilitam ou impedem o encontro dos alunos com um dado saber? Em termos de um objeto matemático específico o questionamento passa a ser do tipo: Qual é a infraestrutura didática - matemática necessária sob as restrições dadas que facilitam ou impedem de levar os alunos das séries iniciais ao encontro das frações?

Estes questionamentos, na forma elaborada, é claro, não surgiram do vazio, mas de leituras realizadas no meu curso de mestrado especificamente no GEDIM - Grupo de Estudos de Didática da Matemática, que nos viabiliza discutir trabalhos de diferentes pesquisadores, entre eles, Pinilla (2007) e, principalmente, Chevallard (1999, 2005, 2009) e seus seguidores como Bosch e Gascón (2001, 2009, 2011) quanto aos estudos sobre a Teoria Antropológica do Didático, daqui em diante TAD.

Dentre as obras estudadas cito as da pesquisadora Pinilla (2007) em que apresenta uma perspectiva sobre as frações com densidade, discutindo sua complexidade e suas diversidades. Proporcionando-me analisar e rever minhas práticas e assim discutir a respeito da nossa tarefa de ensinar.

A autora afirma que os professores desconhecem a complexidade conceitual e cognitiva a respeito do ensino das frações, entre elas, que os alunos em determinada faixa etária não possuem a maturidade crítica ou a capacidade cognitiva para construir o conhecimento sobre os números racionais, diferentemente dos textos escolares que “insistem” em apresentar as frações como números racionais.

Esta afirmativa articulada com minhas leituras sobre TAD aponta que os problemas de ensino e aprendizagem de matemática podem ter sua origem na construção dos objetos matemáticos de ensino e, portanto, nas práticas matemáticas-didáticas vividas pelos alunos em sala de aula, e fora dela, tudo como parte de um processo de estudo, nos levou a alguns questionamentos até aqui postos, alguns não assumimos como questionamentos a serem respondidos neste trabalho, não por falta de interesse, como se pode perceber, mas pela envergadura da pesquisa necessária que exigiria enormes esforços de investigação que estão por demais limitados para o desenvolvimento de uma dissertação de mestrado.

Assim, detive-me em uma das questões problemáticas sobre o ensino de frações, mais precisamente, quanto às operações de adição e subtração de frações com a seguinte questão: ***Qual a organização praxeológica (intermediária) que pode favorecer o encontro dos alunos com a adição e subtração de frações e que elimine a desconexão entre as práticas sobre noção de fração e as práticas operatórias com frações*?**

Esse tipo de questionamento tem sido objeto de pesquisa de diferentes pesquisadores e identificado nas leituras de Chevallard (2001a), Bosch, Fonseca e Gascón (2004), Fonseca (2004), Garcia (2005), Sierra (2006), Rodriguez (2005) e Barquero (2009) como a problemática da desconexão dos saberes, pois as desconexões de saberes podem levar a aflorar o fenômeno do monumentalismo no ensino de um dado saber, ou seja, os sistemas de ensino

> Tendem a cair no que Chevallard chama (2001, 2004a, 2004b, 2006a) pedagogia do “monumentalismo”, que preferem o estudo de determinadas construções praxeológicas (os monumentos) como estudo de questões, problemas ou necessidade que se originam ainda no projeto de formação (Bosch e Gascón, 2009, p. 7)

De outro modo, a noção de fração pode se constituir em um monumento que o aluno visita sem saber a que questão ele deve responder, ela é útil no estudo das frações, em particular, para o estudo de operações com frações. Isto elimina qualquer possibilidade de um fazer inteligível com esses objetos matemáticos e consequentemente com a perda de unidade das práticas com prejuízos ao processo de ensino e aprendizagem.

Nossa pesquisa é, portanto, teórico-metodológica, intitulada por *"Tarefas intermediárias:* um modelo epistemológico de referência para o ensino das frações" em que busca enfrentar a problemática do ensino das operações com frações nas séries iniciais, por meio da proposição de um modelo epistemológico de referência (MER) que permita analisar e reconstruir organizações praxeológicas intermediárias para atender os seguintes objetivos:

- Gera l - Integrar as praxeologias sobre as noções de frações e as praxeologias sobre operações com frações que vivem em uma instituição de ensino e;
- Específico - Construir uma organização praxeológica sobre operações com frações que permita operar com frações do mesmo modo que se opera com os números inteiros, ao mesmo tempo em que aponte para as práticas operatórias a serem estudadas no Ensino Fundamental II como números racionais.

Visando alcançar o que propõem esses objetivos, as propostas de encaminhamento são elaboradas a partir de nossas compreensões da TAD que descreve o fazer matemático a partir das praxeologias desenvolvidas nas instituições e que revelam, de certo modo, as relações entre os sujeitos dessas instituições e os objetos matemáticos que nelas vivem (CHEVALLARD, 1999).

Nossa intenção é construir uma compreensão mínima sobre a necessidade de certas práticas matemáticas, ditas praxeologias intermediárias, para justificar e dar sentido as praxeologias pontuais que vivem na escola, em particular, na perspectiva do desenvolvimento praxeológico em complexidade crescente considerando o passado, o presente e o futuro do estudo das frações na instituição de ensino.

Esta pesquisa está dividida em duas partes: a primeira parte propõe-se um Modelo Epistemológico de Referência - MER para explicitar as praxeologias que buscamos e que se constitui como ferramenta capaz de analisar as organizações matemáticas tanto do professor quanto dos livros didáticos além de minorar o problema da desarticulação no ensino da matemática.

O modelo proposto apresenta uma organização praxeológica com nível de complexidade crescente cuja razão é dar unidade as praxeologias supostamente limitadas, tornando possível uma transposição didática que favoreça um encontro amigável dos sujeitos com as práticas com frações. Ressaltamos que esse modelo é visto sempre como provisório e, portanto, não esgota as possibilidades de se obter novas praxeologias a partir do que propomos. O MER aparece como uma ferramenta fundamental para a análise dos processos didáticos e do contrato que os rege. (SIERRA, 2006, p.383, tradução nossa).

Esse modelo comporta diferentes trabalhos, entre eles, Guerra e Silva (2008), Lima (1991) e Euler (1828) que nos inspiraram com elementos matemáticos e didáticos, e se baseou ainda nos pressupostos da Didática da Matemática alguns autores tais como: Sierra (2006), Bahujama (2000), Bosch e Gascón (2001, 2003, 2004, 2010, 2011), Fonseca (2004), García (2005), Rodríguez (2005), Lucas C. (2010), Andrade (2012), Cirade (2006), Chevallard (2001, 2004, 2009), nos dispuseram de instrumentos a nível teórico e prático apresentando algumas discussões com diferentes encaminhamentos didáticos, dentre eles, o fenômeno da desarticulação e isolamento das organizações matemáticas, entre outros.

O cerne da segunda parte da nossa pesquisa foi o uso do modelo construído, como ferramenta de análise do livro didático. O livro analisado foi do 4º e 5º ano - “Asas para voar” dos autores: Maria Helena Souza e Walter Spinelli - utilizados por uma escola pública localizada em Belém/PA que forma alunos do ensino fundamental I e II ao ensino médio.

O critério da escolha dos livros baseou-se em dois pontos: o reconhecimento do IDEB e do ENEM pelo trabalho que a escola tem apresentado, pois sabemos por meio das pesquisas “medem” a qualidade do ensino básico através dos resultados das notas dos alunos e, durante o andamento da pesquisa eu fazia parte do corpo docente da instituição e dessa forma tinha acesso às informações necessárias, inclusive o livro didático, para compor os dados da minha pesquisa.

A análise do livro é realizada pelo contraste entre as praxeologias nele apresentadas e o proposto pelo MER em busca de responder questionamentos derivados da nossa questão de pesquisa e que atendam os objetivos postos, tais como: As praxeologias matemáticas levam o aluno ao encontro das frações de modo que estejam articulados entre si no nível de complexidade crescente? Há praxeologias matemáticas articuladas entre números inteiros e frações? As praxeologias com noção de frações estão correlacionadas com as operações com frações? O livro analisado apresenta alguma articulação e integração que favoreça um fazer mínimo racional de como se faz e de por que se faz as operações com frações pelas técnicas apresentadas?

Nesse caminhar, nosso relatório de pesquisa ficou estruturado da seguinte forma:

No primeiro capítulo situamos nossa pesquisa com uma breve, mas pertinente, apresentação dos elementos teóricos da Teoria Antropológica do Didático (TAD) necessários como: os momentos de estudo, transposição didática, a organização didática e matemática, a praxeologia intermediária, o modelo epistemológico de referência, o fenômeno da desarticulação do ensino, tais conceitos fundamentam nossa investigação.

O segundo capítulo intitulado por “As frações”, trazemos discussões como compreender e ensinar as frações levando em consideração os aspectos matemáticos e didáticos. Apresentamos ainda, as dificuldades mais triviais no estudo das frações e como ela tem sido tratada na escola quando falamos dos números fracionários e dos números racionais e o tratamento e as discussões que são dadas a cada um.

O terceiro capítulo intitulado como “Modelo Epistemológico de Referência: Organizações Matemáticas Intermediárias”. Apresentamos um modelo epistemológico de referência que subsidia a articulação entre os saberes, possibilitando uma relação mais próxima entre os sujeitos e as operações com frações por meio do princípio da contagem. Esse modelo visa também (re) construir uma organização matemática eficaz que possibilite a partir dela se construir outras praxeologias matemáticas intermediarias, ou seja, promover um pensar sobre as necessidades de praxeologias intermediarias como facilitadoras de acesso ao estudo das praxeologias com frações.

No quarto capítulo temos a intenção de analisar e discutir o livro didático do 4º e do 5º ano, revelando suas praxeologias didáticas e as organizações matemáticas trazidas nesse livro. Como assumimos o fenômeno da desarticulação como um problema do ensino e adotamos o modelo epistemológico de referência construído no capítulo três que será nossa base de análise, o subsídio a problemática, pois buscamos compreensões das praxeologias presentes nas análises e a possível construção de uma praxeologia intermediaria para o ensino das frações. Finalizamos com algumas considerações e com propostas abertas a possíveis pesquisas e desdobramentos.

CAPÍTULO I
A TEORIA ANTROPOLÓGICA DO DIDÁTICO E O DESENVOLVIMENTO DE PRAXEOLOGIAS MATEMÁTICAS

Neste capítulo, nossas considerações se propagam por meio do olhar reflexivo na busca de compreensões a partir da Teoria Antropológica do Didático sobre a construção do conhecimento matemático, mais especificamente, sobre um dos artefatos construído pelo homem para esse fim; as organizações matemáticas e didáticas.

Particularmente, em nosso caso, a quase inexistência de relação entre as noções de frações com as operações de adição e subtração entre elas nos leva a hipótese de que a dificuldade de aprendizagem está relacionada com a obscuridade da relação entre noção e operação de frações, fruto decorrente de praxeologias matemáticas pontuais que podem impossibilitar um fazer matemático compreensivo. Nesse caminhar vislumbramos a necessidade do desenvolvimento de praxeologias intermediárias que permitam alcançar um fazer inteligível para quem ensina e para quem aprende.

1.1 NOÇÕES DE PRAXEOLOGIAS

A Teoria Antropológica do Didático (TAD) parte do princípio que o saber matemático se constrói como resposta ao estudo de questões problemáticas, conduzindo a construção ou reconstrução de praxeologias matemáticas.

Chevallard (1999, p.1) destaca que “a TAD situa a atividade matemática, e em consequência a atividade de estudo das matemáticas, no conjunto de atividades humanas e instituições sociais”, ou seja, a abordagem antropológica adota uma perspectiva institucional, envolvendo problemas antropológicos didáticos no quadro geral de práticas e atividades humanas.

Nessa linha, (CHEVALLARD 1997, 1999) a TAD relaciona o didático com o estudo, tomando a palavra “estudo” num sentido muito amplo que engloba as noções de ensino e aprendizagem comumente utilizadas na cultura pedagógica e que refere a todos que compõe uma dada instituição com a finalidade de obter respostas a questões problemáticas.

As noções consideradas pela TAD proporcionam recursos teóricos e metodológicos que possibilitam descrever, analisar e desenvolver organizações didáticas e matemáticas e para isso Chevallard propõe um modelo básico; a noção de p*raxeologia* cujos componentes são: a tarefa (T), que constituem as questões enfrentadas, o jeito de enfrentar essas questões, que identificamos como as técnicas (*t*), o discurso que descreve, explicam ou justifica as técnicas, a tecnologia (ϴ) e a teoria (Θ), esta última mais inclusiva a que justifica a tecnologia

> Simplesmente: agir, viver, tudo se resume a pôr em jogo praxeologias que se modifique ao mesmo tempo, que se difundem (intencionalmente ou não) [...] Como o encanador que remenda a torneira [...] cada um de nós movimentamos nossas praxeologias com os outros, com as instituições a que estamos sujeitos. A vida em todas as áreas (inclusive a matemática, por exemplo) é feito de praxeologias. Até mesmo os grandes projetos que carregam uma sociedade ou civilização criada e disseminada se assemelham com o resultado de um simples e humilde trabalho a “praxeologia do encanamento”. (CHEVALLARD 2007, p. 11, grifos do autor e tradução nossa)

Quando há um questionamento nos parece evidente que se almeja uma reposta que deverá emergir no conflito da vida social de um grupo de pessoas, grupo esse fecundo de relações entre os sujeitos de forma a prover a “troca” de saberes que serão mobilizados e negociados para a construção dessa resposta; uma praxeologia.

Os questionamentos cujas respostas se encontram disponíveis e aceitas pelos grupos podem ser vistas como tarefas rotineiras. Ler um poema em voz alta, cortar as unhas ou encontrar a soma de duas frações, são tipos de tarefa que podem ser rotineiras para os sujeitos do grupo que dá as condições mínimas para resolvê-las, inclusive o jeito de fazer e pensar a tarefa.

As tarefas, ou tipo de tarefas, são artefatos construídos pelo grupo de pessoas, as instituições, para uma dada finalidade concreta nas atividades desenvolvidas na instituição. Chevallard (1999, p. 223) afirma que

> Tarefas, tipo de tarefas, gêneros de tarefas não são dados da natureza, são “artefatos”, “obras”, construções institucionais, cuja reconstrução nessa instituição, por exemplo, em tal classe é um problema completo, é um objeto mesmo da didática, do ensino. (tradução nossa)

Assim, segundo a TAD os homens constroem artefatos, as tarefas com jeitos de fazer e pensar próprios e que o que torna exequível a resolução de uma tarefa particular, uma técnica (*t*), pode alcançar um conjunto de tarefas que podem ser classificadas como do mesmo tipo de tarefa. No entanto, Andrade (2012, p. 21) destaca que

> A noção de tarefa está sempre interligada a um tipo de tarefa, ou seja, essas noções são solidárias. Contudo, devemos ter clareza de que não existem regras para se especificar um tipo de tarefa (T) e suas tarefas (t), o que pressupõe a complexidade existente na diferenciação e estabelecimento do que sejam as tarefas e o tipo de tarefas associados. Também é necessário garantir a existência de pelo menos uma maneira de realizar as tarefas pertencentes a um determinado tipo de tarefas (T). A essa maneira de realizar uma tarefa pertencente a um dado tipo de tarefas (T), dá-se o nome de técnica (ô). Vale salientar que a técnica (ô), que nem sempre é única, é relativa ao tipo de tarefas (T) e não apenas a uma tarefa específica.

Para Chevallard (1999) em uma instituição *I* existe para cada tipo de tarefa T pelo menos uma técnica ou ao menos um pequeno número de técnicas institucionalmente reconhecidas para essa tarefa. Dessas técnicas são excluídas outras técnicas que por ventura existam em outras instituições *I'.* A referida exclusão se dá por uma ilusão de "naturalidade" das técnicas institucionais em *I,* tornando-as naturais e que por isso contrastam com o conjunto de técnicas alternativas possíveis, que até mesmo as confrontam, as têm espontaneamente como artificiais, e (para eles) "contestáveis", "inaceitáveis", etc.

Neste ponto de vista, se observa frequentemente entre professores de uma dada posição escolar, as séries iniciais, por exemplo, verdadeiras paixões institucionais por tarefas/técnicas naturalizadas nas instituições de ensino que não aceitam jamais serem enfrentadas de modos/jeitos explicitamente diferentes.

Nesse pensar observamos que toda ação didática fomentada pelo professor implica na mobilização de tarefas prontas para serem enfrentadas pondo em funcionamento uma técnica, mesmo que esta nem sempre seja clara e anunciada pelo professor.

Mas, as técnicas assumem um papel importante para o enfrentamento de um dado tipo de tarefas, pois em articulações esboçam o jeito de pensar para a construção do saber em jogo. Dai é importante ressaltar que elas devem possuir um tempo de vida "útil" quanto ao seu uso, em que algumas se tornam obsoleta e caem no desuso fazendo emergir a necessidade de serem renovadas e adaptadas em acordo com as necessidades da instituição. De outro modo, as técnicas envelhecem (CHEVALLARD, 1999, p. 227) tornando-se "limitadas", ou restritas, quando em algum momento fracassam na busca de soluções para uma dada tarefa de um dado tipo.

Para Bosch (1994, p. 25)

> As "condições de vida" de uma técnica em uma instituição podem ser variadas, mas em todos os casos deverá responder a uma restrição que tomaremos como universal, é válida para toda instituição e toda técnica utilizada na instituição. Consiste em uma dupla exigência de justificação e inteligibilidade da técnica posta em prática, exigência que gera um discurso (logos) sobre a técnica, para justificar seu trabalho e torná-lo "compreensível". Chamamos a este discurso tecnologia que pode ser demonstrado na instituição que dedica uma parte de sua atividade em construir o marco tecnológico supostamente adequado para justificar e controlar as técnicas institucionais. (tradução nossa)

É preciso dispor de recursos tecnológicos e/ou teóricos que permitam trabalhar o alcance da técnica de modo a aumentar o seu poder de resolução para um dado tipo de tarefas, ou seja, que permita o trabalho justificado da técnica e mais o trabalho sobre a técnica de modo a dar-lhe fôlego e aumentar seu alcance.

As tarefas assumem assim o papel problematizador das técnicas e compõem o trabalho didático-matemático que proporciona um relacionamento mais intenso entre os sujeitos envolvidos no processo de ensino aprendizagem. Processo esse que pode ser pensado de modo mais simples por meio do modelo de praxeologias matemáticas cujos componentes como já dissemos são: a tarefa (T), que constituem as questões, o jeito de fazer essa tarefa, que identificamos como as técnicas (*t*), o jeito de pensar essa técnica, a tecnologia (ϴ), e o discurso que sustenta essa tecnologia, a teoria (Θ).

Com objetivo de sintetizar a discussão apresentada no texto apresentamos o quadro resumo abaixo:

Quadro 1 - Resumo dos elementos que compõem o trabalho matemático

Tarefas	São organizadas como “tipos” de tarefas no sentido de distinguir os problemas, os “exercícios” sobre um mesmo assunto ou problema. As tarefas cumprem um papel específico dentro do processo de estudo, pois ajudam a alcançar um domínio sobre as técnicas (mesmo as mais robustas) para os alunos, o produto resultante é a maneira que deverão ser enfrentadas as tarefas.
Técnicas	As técnicas (t) são os resultados do enfrentamento das tarefas, são formadas por um conjunto de procedimentos que permitem discuti e resolver os referidos problemas que podem ser variados e com níveis diferentes de complexidade, que podem surgir das necessidades rotineiras com algoritmos básicos até ações mais complexas.
Tecnologia	É formada pelos discursos que descrevem, explicam e transformam as técnicas compreensíveis, ou seja, produzem novas técnicas e por fim a quarta e última é a teoria. (ϴ)
Teoria	É o cerne do trabalho matemático, pois comporta todos os elementos matemáticos necessários para argumentar, fundamentar, é o nível mais elevado do saber, pois justificam as atividades em qualquer nível (como exemplo citamos as obras, livros didáticos ou científicos). A teoria é a responsável em justificar as atividades acontece por meio da técnica dando motivação para criar novos modelos epistemológicos sendo de referência (MER) que subsidiará o enfrentamento de novas tarefas e técnicas. (Θ)

Fonte: Próprio autor

O trabalho didático-matemático quando nos referimos ao processo didático age para construção de um saber matemático escolar e os objetos matemáticos de ensino devem, portanto, ter uma razão, uma funcionalidade, nesse processo o qual deverá se desenvolver em dependência uns com os outros, em sincronia, por meio das tarefas (T), técnicas (*t*), tendo em conta a tecnologia (ϴ) e teoria (Θ) que suportam a construção desejada, ou mais precisamente, o modelo epistemológico matemático para o ensino do saber matemático em questão tomado como referência, que daqui em diante passamos a identificar como modelo epistemológico de referência (MER).

Nessa tessitura, é claro, não há elementos mais importantes que outros, por mais simples que pareçam suas contribuições no processo de ensino e aprendizagem, que Chevallard toma em sentido mais amplo como *processo de estudo*. No entanto, a visibilidade, ou um dado modo de visibilidade, de um dado elemento pode não estar ao alcance para um dado ator do sistema didático, aluno ou professor. Assim, por exemplo, o discurso tecnológico/teórico não é visível em geral nas séries iniciais para os alunos, assim como o MER pode ou não estar presente nas praxeologias dos professores. Este último se constitui, principalmente, em um construto de pesquisadores para descrição e análise dos modelos epistemológicos dominantes nas instituições de ensino.

1.2 AS ORGANIZAÇÕES MATEMÁTICAS DE COMPLEXIDADE CRESCENTE

As praxeologias são compostas por relações entre objetos matemáticos de ensino e suas práticas e dividem-se em Organizações Matemáticas (OM) e Organizações Didáticas (OD). Essa divisão só se dá no contexto teórico, pois estão simultaneamente imbricadas, mesmo que não esteja explicitamente dita, a OM e a OD estão em dialética e não podem ser tratadas isoladamente quando nos referimos ao ensino da matemática, “não se pode separá-las facilmente” (CHEVALLARD et. al. 2001, p. 254).

A noção de praxeologia pode ser apresentada a partir de sua etimologia que vem da origem grega: a práxis e logos.

- ❖ Práxis - o “*saber fazer*”, se destaca por ser uma teoria de atividade prática que cerca e relaciona alguns tipos de tarefas e questões possíveis de se estudar a partir de determinadas técnicas.
- ❖ Logos - o “*saber*”, para Gascón (2010, p. 92) “é o conjunto organizado de conhecimento e de atividade”, entendemos que ele é o responsável em fazer transcorrer o conhecimento e através dele é possível descrever, explicar e justificar as problemáticas apresentadas, ou seja, as técnicas utilizadas, que Chevallard (1999, p. 224) chama de tecnologia, o saber é o discurso fundamentado, que Chevallard (ibidem, p. 225) chama de teoria.

Abordagem teórica da praxeologia matemática se origina da necessidade de vincular o *saber* e o *saber-fazer*, por meio das relações pessoais e institucionais e por intermédio dessas relações há uma movimentação do saber que acontece de forma contínua e involuntária, pois essa relação está instituída no sujeito e nas suas possíveis relações.

Para dispor de instrumentos mais precisos para analisar os processos didáticos institucionais, Chevallard (1999) introduziu uma distinção entre os diferentes tipos de praxeologias de acordo com o grau de complexidade de seus componentes, chamaremos em nosso trabalho de estágios. E classificam-se em:

- ❖ O primeiro estágio são as *praxeologias pontuais*, são motivadas por um único tipo de tarefa (T), as condições são colocadas como restrições, ou seja, existe apenas um tipo de tarefa suportado por uma técnica (*t*) (ao menos) ou por tecnologia e teoria.

- O segundo estágio são as *praxeologias locais* é uma ampliação do primeiro estágio, ou seja, é possível identificar vários pontos praxeológico para um mesmo tipo de tarefa (T), caracterizada pela tecnologia (θ), pois servirão para justificar, explicar e relacionar as técnicas entre si.
- O terceiro estágio são as *praxeologias regionais* é o resultado da agregação e articulação das praxeologias do primeiro e segundo estágio, ou seja, essa praxeologia é formada por várias organizações a cerca de uma teoria.
- O quarto estágio são as *praxeologias globais* é a agregação de várias organizações regionais.

As organizações praxeológicas aparentemente independentes mostram que estão relacionadas entre si, pois o progresso de novas técnicas depende de novos problemas tecnológicos e os mesmos surgem por meio de novas tarefas ou tarefas rotineiras que precisam ser justificadas por teorias.

Podemos assim considerar a OM como uma unidade mínima possível de ser descrita como uma atividade matemática. Chevallard (2009, p.4) afirma que

> A estrutura praxeológica mais simples (que poderia se chamar "atômica", que denominamos em fazer pontual) compõe-se de um tipo de tarefas T, de uma técnica τ, que são os modos de realizar as tarefas t do tipo T, de uma tecnologia θ, que é o discurso que fundamenta (logos) a técnica (tekhne) e que torna τ inteligível como um meio para realizar as tarefas do tipo T, finalmente - finalmente, e não menos importante, de um componente teórico Θ, que rege a tecnologia θ em si mesmo e, portanto, todos os componentes da praxeologia. Uma praxeologia pontual (o "pontual" aqui é o tipo de tarefas T) é denotada por [T / τ / θ / Θ]. Ela comporta uma parte prático-técnica Π = [T / τ] ou práxis denominada "saber-fazer" e uma parte técnológico-teórico Λ = [θ / Θ], ou logos que podemos identificar com o "saber" no sentido usual do termo. (Tradução nossa)

Como resumo, exibimos o quadro abaixo que apresenta a praxeologia pontual:

Quadro 2 – Modelo da praxeologia pontual

Tarefa	Técnica	Tecnologia	Teoria
T	t	θ	Θ
Bloco Prático-técnico		***Bloco Tecnológico-teórico***	
Saber-fazer		*Saber*	
(T, t)		(θ, Θ)	

Fonte: Próprio autor

O modelo claramente não encerra a complexidade existente em uma praxeologia pontual, apenas elege os elementos tomados como cerne das práticas pontuais. Toda atividade que extrapole o caráter pontual como a local, regional e global, passam a ser entendidas como organizações de praxeologias pontuais articuladas e integradas de modo a atender uma intencionalidade didática com os objetos matemáticos de ensino em jogo, inclusive, considerando um padrão de complexidade crescente tendo em conta as variações das técnicas, tecnologias e teorias utilizadas. Chevallard (1999, p. 226 adaptado)

$$[T / \tau / \theta / \Theta] \rightarrow [T_i / \tau_i / \theta / \Theta] \rightarrow [T_{ij} / \tau_{ij} / \theta_j / \Theta] \rightarrow [T_{ijk} / \tau_{ijk} / \theta_{jk} / \Theta_k].$$

Na perspectiva da evolução das tarefas por meio das técnicas Bosch, Gascón (2004, p.10) ressalta que

> A conceituação que a TAD propõe permite dar mais um passo em direção ao que se postulam na vida das instituições de que nunca se estudam problemas isolados. O que importa não é o problema específico colocado a ser resolvido (exceto em caso de vida ou morte), mas o que você faz depois com a solução obtida. Somente os interessados em problemas fecundos são chamados a reproduzir e desenvolver para formar tipos de problemas cada vez mais amplos e complexos, tipos de problemas cujo estudo provocará novas necessidades tecnológicas que, por sua vez permitirá construir e justificar técnicas “novas” capazes de resolver novos tipos de problemas e questões levantadas no nível tecnológico na organização matemática inicial. Esta hipótese antropológica pode ser sintetizada quando se afirma que o processo de estudo de um tipo de problema leva a reconstrução das organizações institucionais ou praxeologias matemáticas de complexidade crescente. (Tradução nossa)

As noções de praxeologias pontuais, locais, regionais e globais sob essa compreensão podem ser interpretadas como partes de uma ampla organização matemática com sérias implicações no currículo, mas isso exige, sem dúvida, uma modelização epistemológica como referência de modo a articular praxeologias pontuais de modo a se obter, se possível, uma organização local e destas uma organização regional.

Sob esses pensar o modelo epistemológico de referência (MER) ganha papel importante para o desenvolvimento de organizações matemáticas de complexidade crescente, auxiliando o professor, o orientador de estudo, como uma ferramenta prática, para desenvolver organizações matemáticas para uma dada posição do ensino de uma dada instituição.

Segundo Sierra (2006) as praxeologias matemáticas não surgem de forma instantânea nem tão poucos ficam prontos de uma única uma vez, na verdade é um trabalho complexo e continuado que pode durar muito tempo, décadas ou até mesmo séculos, pois seu funcionamento é uma dinâmica de relações possíveis que podem inclusive ser modeladas. Surgindo então os aspectos inseparáveis do trabalho matemático, por um lado, o processo de construção matemática, isto é, o processo de estudo, e por outro o resultado desta construção, isto é, a praxeologia matemática. Em efeito, não há organização matemática sem um processo de estudo que suscite, não há nenhum processo de estudo sem organização matemática em construção.

Percebemos então que há uma relação muito forte entre as organizações matemáticas e didáticas e que não é viável separá-las, pois uma está relacionada com o fazer matemática para a escola e a outra com o ensinar matemática a partir do fazer matemático para escola que por sua vez se assenta nas praxeologias que vivem na escola.

1.3 OS MOMENTOS DE ESTUDO E AS PRAXEOLOGIAS DIDÁTICAS

Nas instituições sociais aparecem constantemente questões que requerem uma resposta por parte dos sujeitos: um novo tipo de tarefa, uma mudança nas condições de realizar uma tarefa mais antiga, etc. Quando não obtemos resposta, ou quando não reconhecemos as respostas, ou ainda quando a instituição não tem uma técnica conhecida para fornecer uma resposta, mesma que seja provisória, nos deparamos com uma questão problemática.

O que se busca são respostas não baseada em informações, mas com o foco na elaboração, ainda que incipiente de uma praxeologia pontual, mas que incidirá em uma praxeologia local, por meio da criação ou reconstrução de novas praxeologias como resultado das questões problematizadas constituindo assim um processo de estudo que se baseia em seis momentos, chamados por Chevallard (1999) momentos didáticos.

Entendemos os momentos didáticos como uma fase ou processo em que os alunos devem se submeter de modo que o processo de ensino e aprendizagem se desenvolva e evolua. A própria palavra *momento* já nos sugere pensar em algo temporário, eventual e que não exige uma sequência pré-definida.

Chevallard (1999, p. 242) afirma que

> A noção de momento nos remete ao aspecto da estrutura temporal do processo de estudo. Um momento, o sentido dado a palavra aqui exposta, é principalmente uma dimensão de um espaço multidimensional, um fator de um processo multifatorial. Bem entendido, uma boa gestão de estudo exige que cada um dos momentos de estudo se realize geralmente várias vezes, na forma de multiplicidade de episódios que propõem o tempo. Neste ponto de vista, se incidirá que a ordem posta depois, sobre os diferentes momentos didáticos é de fecho amplamente arbitrário, porque os momentos didáticos são em primeiro lugar uma realidade funcional do estudo, antes de ser uma realidade cronológica. (Tradução nossa)

É importante destacarmos que cada um dos seis momentos de estudo tem uma função específica necessária para se chegar ao final do processo e o importante não é a ordem que se realiza os diferentes momentos do processo de estudo mais a relação que estabelecem entre si.

São seis os momentos de estudo apresentados por Chevallard (1999, p. 243 à 246, tradução nossa com grifos do autor) de uma organização didática:

1. Primeiro momento de estudo - *O momento do primeiro encontro*

É o do primeiro encontro com a organização *O* que está em jogo. Tal encontro pode aparecer de várias maneiras, sendo inevitável não encontrar (ou reencontrar), a menos que seja deixado sobre a superfície da obra *O,* e que consiste em encontrar *O* através de um tipo de tarefa constituída por *O.* O primeiro encontro com um tipo de tarefa pode, por sua vez aparecer em vários momentos, dependendo do momento matemático e didático em que ocorre: se pode redescobrir um tipo de tarefa por uma pessoa que pensava que já conhecia.

Postulamos que este é o primeiro encontro entre os alunos e objeto de estudo a ser ensinado, ou a confluência a uma questão problemática *Q* onde é possível se encontrar uma resposta.

2. Segundo momento e estudo: *O momento da exploração*

É o da exploração de tarefas tipo *Ti* e da elaboração de uma técnica *ti* relativa a este tipo de tarefa. Assinala-se que, contrário a certas visões heroicas de atividades matemáticas, que apresenta como uma série errática de enfrentamentos singulares com dificuldades sempre novas, o que está no coração da atividade matemática é elaboração de técnicas e não a resolução de problemas isolados. A ilusão moderna do aluno herói que vence sem lutar contra todas as dificuldades possíveis, também se opõe a realidade indispensável do aluno-artesão trabalhador que, com seus colegas parte da condição reflexiva do professor, elabora pacientemente suas técnicas matemáticas. Em realidade, o estudo e a resolução de um problema de um tipo determinado que estar sempre em par com a constituição de pelo menos um embrião de técnica, a partir da qual uma técnica mais desenvolvida poderá eventualmente emergir: o estudo de um problema particular, especialmente de um tipo estudado, apareceria assim não como um fim em si mesmo, mas como meio para a constituição de uma técnica de resolução. Esse quadro é, uma dialética: estudar problemas é um meio que permite criar e executar de forma contínua uma técnica relativa aos problemas do mesmo tipo, técnica que será a continuação de meios para resolver de maneira quase rotineira os problemas desse tipo.

Ou seja, pensamos que este momento requer a elaboração de uma técnica relativa ao tipo de tarefa que se propõe e que, para resolvê-la pela primeira vez é necessário buscar uma maneira de realizá-la, explorar uma técnica capaz de resolvê-la, uma vez encontrada pelo aluno, o mesmo deve explicar como funciona por meio de um discurso tecnológico-teórico, surgindo então o terceiro momento.

3. Terceiro momento de estudo: *O momento teórico-tecnológico*

É o da constituição teórico-tecnológico $[\theta, \Theta]$ relativo a ôi. De uma maneira geral, este momento está estreitamente inter-relacionado com os outros momentos. Assim, desde o primeiro encontro com um tipo de tarefa, há geralmente uma suposta relação teórico-tecnológica anteriormente elaborada, comparando com o plantio de sementes em um determinado ambiente, que precisará de uma relação dialética com a emergência da técnica. Por razões de economia didática global, às vezes as estratégias de direção de estudo tradicionais fazem em geral desse terceiro momento a primeira etapa do estudo, etapa que é comum ao estudo de vários tipos de problemas *Ti* todos os que entre os tipos de problemas a estudar, aparecem como relativos ao mesmo meio teórico-tecnológico [θ,Θ]. Os estudos desses tipos de problemas se apresentam tipicamente na forma de uma série de aplicações e blocos tecnológico-teóricos assim posto.

Nesse pensar conjecturamos que este momento se inicia em resolver tarefas por meio de técnicas rotineiras motivando um desenvolvimento progressivo da técnica gerando novas técnicas. Este trabalho deve continuar até que se tenha um conjunto robusto de domínio de técnicas, o que provoca a ampliação das tarefas e do surgimento de outros tipos de tarefas gerando níveis mais elevados das atividades matemáticas isso implica em criatividade de novos objetos matemáticos por parte do orientador de estudo.

4. Quarto momento de estudo: *O momento do trabalho da técnica*

É o trabalho da técnica, que deve melhorar a técnica tornando-a mais eficiente e confiável (o que geralmente requer tecnologia mais elaborada), e aumenta o conhecimento que temos dela: este momento de pôr à prova a técnica que supõe em particular um ou uns corpus de tarefas adequadas tanto qualitativamente como quantitativamente.

Grosso modo podemos resumir que esse momento é a justificação da prática matemática realizada.

5. Quinto momento de estudo: *O momento da institucionalização*

É o momento da institucionalização, que tem por objetivo especificar o que é “exatamente” a organização matemática elaborada, distinguindo claramente, os elementos que tem participado de sua construção, que não foram integrados e, por outra parte, os elementos que entraram de maneira definitiva na organização matemática considerada procurando esclarecer aos alunos quando perguntarem para o professor, sobre esse resultado ou processo, se sabem ou não.

Ou seja, precisar o trabalho matemático que foi abordado.

6. Sexto momento de estudo: *O momento da avaliação*

O sexto é o momento da avaliação, que está ligada ao tempo de institucionalização: a suposição de relações institucionais transcendentes para as pessoas, na verdade, uma base razoável para a avaliação das relações propostas, referindo-se a regra de que o tempo de institucionalização vai "hipostasiada". Na prática, chega um momento em que se deve "fazer um balanço", porque neste momento de reflexividade em que, qualquer que seja o julgamento e o juiz examina os custos do que foi aprendido, verifique agora que, apesar das memórias de infância, não é em absoluto a invenção da Escola, participa de fato a “respiração” mesma de toda atividade humana.

Percebemos que esse é o momento culminante, pois está articulada com a institucionalização, que é quando você tem que determinar o alcance e as limitações de uma determinada técnica, refletindo na aprendizagem e da importância de conservar este conhecimento para aplicações futuras, o que foi aprendido realmente.

É importante notar como o processo de construção de um modelo de praxeologias em termos de momentos está relacionado com a estrutura de praxeologias locais. Pode-se dizer que, na medida em que diferentes momentos do estudo foi o de viver e integrar funcionalmente, então o que vai ser construído será um praxeologia local mais "completa" (FONSECA, 2004, p. 201).

Quadro 3 - Resumo dos momentos didáticos

MOMENTOS DIDÁTICOS DE ENSINO	
Primeiro encontro	É o processo de estudo que surge na primeira tarefa problemática em uma determinada instituição que não sabe resolver e que decide fazer algo para tentar resolvê-la.
Segundo encontro	É o momento da exploração dos tipos de tarefas propostas e da construção de técnicas para resolver os tipos de tarefas apresentadas.
Terceiro encontro	É o momento da construção de um contexto tecnológico-teórico, que explica e justifica as técnicas postas e permite a elaboração de novas técnicas.
Quarto encontro	É o momento do trabalho da técnica, que estimula a evolução das técnicas já existentes e a construção de novas técnicas.
Quinto encontro	É a institucionalização, que tem como propósito delimitar e tornar precisa os elementos que constituem a organização matemática construída.
Sexto encontro	É o da evolução da praxeologia construída quando articulada com a institucionalização.

Fonte: Próprio autor

1.4 UNIDADE MÍNIMA DE ANÁLISE DO PROCESSO DIDÁTICO

O pressuposto teórico e metodológico fundamentado na TAD estabelece que se alcance toda (ou pelo menos o máximo) a complexidade de um problema matemático-didático, de modo que seja necessário analisar a "matemática" que vive em diferentes contextos institucionais.

Como temos discutido anteriormente as praxeologias matemáticas e didáticas surgem da motivação de questionamentos, do aparecimento de um problema didático que sinaliza uma questão problemática, de perguntas do tipo: Como podemos encontrar um denominador comum para frações $\frac{3}{5}$ e $\frac{4}{6}$? Questões como essa, tratam de problemas concretos que dependem de uma teoria didática capaz de proporcionar ferramentas para respondê-la.

Cada problema didático elege uma unidade de análise própria chamada de unidade mínima de análise didática que para Bosch e Gascón (2005, p. 150) é

> Uma construção teórica fundamental, cuja estrutura e dinâmica são descritos pelos termos primitivos da teoria, o que deve se referir a um conjunto de indicadores empíricos. Portanto, a unidade de análise é o lugar central e privilegiado na relação entre teoria e os dados empíricos, que constitui uma das características essenciais para caracterizar a disciplina em questão. Agora, para descrever e interpretar os fatos de ensino deve encaminhá-los para uma sequência de *processo didático*, incluindo, pelo menos, o processo de reconstrução escolar de um OML. Quero dizer, que esta OM é definida como a unidade mínima de análise didática. (Tradução nossa)

Nesse pensar se postula que a unidade de análise dos processos didáticos tenha uma organização didática escolar capaz de construir no mínimo uma OML relativamente completa, e de descrever e interpretar os feitos didáticos de uma determinada OM. Essa reflexão permitirá que a OM seja reconstruída, como resultado final de um processo de alargamento e agregação contínua dos elementos que compõem a OM.

Gascón e Bosch (2004, p.10) afirmam

> Que a TAD é o processo de estudo que concebe um processo de reconstrução de organizações matemáticas (em diante utilizaremos a abreviatura OM) cada vez mais ampla e completa e, por tanto, se considera como um processo fortemente integrado e articulado. (Tradução nossa)

Permeando as discussões até o presente momento em concordância com os postulados da TAD quanto aos possíveis “problemas didáticos” temos a proposta de discutir os problemas no âmbito mais amplo, as praxeologias locais, para isso precisamos criar uma ferramenta que viabilize esse caminho e a proposta é a criação de Modelos Epistemológicos de Referência (MER) “que permitirá fazer a transposição didática das atividades matemáticas de um determinado problema didático e utilizá-lo como sistema de referência sendo imprescindível levar em consideração sua dimensão epistemológica” (GASCÓN, 2009, p. 212).

Gascón (2011) aponta o MER como um sistema de referência capaz de admitir e construir instrumentos que permite a Didática da Matemática romper com a didática clássica e construir seu próprio objeto de estudo, integrando assim o saber matemático. Por que o MER se estrutura mediante uma sucessão crescente de praxeologias matemáticas não permitindo que os problemas didáticos sejam abordados com características de OMP e um de seus propósitos é articular as OM por meio de uma *praxeologia intermediárias*.

Gascón (2001) postula ainda que a praxeologia intermediária como uma organização que pode ser reconstruída artificialmente em uma dada instituição *I* como resultado final de um processo de ampliação e complementações progressivas que partem de uma praxeologia pontual e passa por uma série de praxeologias intermediárias geradas sucessivamente por um determinado desenvolvimento evolutivo das questões problemáticas e dos tipos de tarefas associadas que decidimos que sejam as “razões de ser” de uma tarefa em *I*. O processo de estudo (reconstruções) das tarefas de *I* está, portanto, guiada pela atividade matemática que será disponível para levar ao final de cada uma dessas praxeologias e em particular, pelas restrições específicas que aparecerão em cada uma delas e que vão evoluindo a medida que se avança o processo de ampliação.

Nesse pensar as Organizações Praxeológicas Intermediárias (OMI) aparecem em problemas didáticos matemáticos cristalizados e rígidos e que possuem certas limitações e por uma necessidade de responder tarefas desse tipo, é importante explicitar essas tarefas alargando o modo de fazê-las possibilitando encontrar soluções econômicas e precisas para os questionamentos, que até então “não eram” possíveis de serem respondidas.

A praxeologia intermediária normalmente surge como questionamento do fracasso da aplicação de técnicas durante a prática matemática. Normalmente esse fato acontece quando se retorna a problemática de origem, então se percebe a necessidade de modificar a técnica proposta inicialmente e a necessidade de novos subsídios que favoreçam a construção de outras técnicas.

Sierra (2006) designou a Organização Didática como algo fortemente condicionada a estrutura das OMIs e, em última instância, pela questão matemática inicial *q,* que independe do carácter gerador que aparece no processo onde a referida questão se expõe assim como o bloco prático-técnico de OMP que constitui uma resposta explícita a citada questão inicial.

Propomos uma questão problemática inicial N1, que pretendemos que seja estudada em uma instituição de ensino (para o nível fundamental I). Como podemos representar o algoritmo de uma fração que foi dividida em cinco partes iguais e tem duas partes hachuradas?

$$N1 = [\,T1, t1, \theta, \Theta]$$

A instituição matemática provavelmente fornecerá uma resposta para essa questão, construída baseada em uma praxeologia matemática que responda essa questão que é pontual e de certa forma isolada, que possui uma técnica definida baseada em uma teoria justificada por uma tecnologia.

Se ampliarmos o questionamento para: que fração se pode juntar com a fração $\frac{3}{5}$ de modo que se obtenha uma unidade inteira?

$$N2 = [\,T2, t2, \theta, \Theta]$$

Ou ainda, como podemos somar frações com denominadores diferentes baseada na noção de frações?

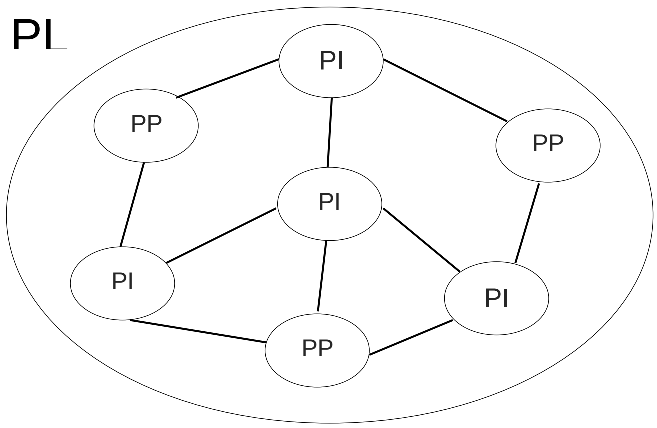
$$N3 = [\,T3, t3, \theta, \Theta]$$

Observe que as questões estão isoladas e se apresentam de forma pontual, logo é necessário criar ou reconstruir as praxeologias adotadas de modo que se obtenha uma nova praxeologia capaz de articular as praxeologias apresentadas e essa praxeologia é a intermediária.

$$N1 = [\,T1, t1, \theta, \Theta] \rightarrow\ N2 = [\,T2, t2, \theta, \Theta] \rightarrow\ N3 = [\,T3, t3, \theta, \Theta]$$

$$Q1 \rightarrow Q2 \rightarrow Q3$$

Quadro 4: Representação das praxeologias



Fonte: Próprio autor

Percebemos que o processo didático de ensino da matemática escolar basicamente se restringe a tarefas pontuais, restritas e isoladas, dessa forma à transposição didática rotineira “não dá conta” de esclarecer todas as problemáticas que aparecem no nível que se encontra (pontual), pois fica restrita e limitada a somente algumas tarefas que se ocupe em compreender as dimensões das questões propostas, ela não tem o alcance necessário que viabilize a integração das tarefas e técnicas apresentadas no currículo escolar, daí se justifica a importância de se postular uma unidade de análise mínima dos processos didáticos.

Outro problema que se manifesta por conta das praxeologias pontuais é o fenômeno da rigidez e atomização do ensino, as instituições tem a tendência a utilizar o método tecnicista ao trabalhar os conteúdos matemáticos, o “tecnicismo” não permite que uma organização matemática tenha um momento tecnológico-teórico que permita ver a que tipo de tarefa matemática é conveniente associar a técnica de integração (FONSECA, 2004, p. 139)

Essa desconexão entre as questões propostas nas instituições tem gerado alguns enganos, ilusões, pois tem transformado o ensino em um conjunto de facécias tornando o ensino superficial e simulado. Mostrando-nos então que a atomização é incompatível com o estudo da OML.

Fonseca (idem, p. 247) afirma que

> Temos posto em evidência as dificuldades para que, em uma etapa educativa, se retomem os conteúdos estudados anteriormente com o objetivo de questioná-los e mostrar suas limitações, e reestruturá-los e integrá-los em organizações cada vez mais amplas e complexas.

> Ditas as dificuldade estão estreitamente relacionadas com o fenômeno da atomização dos conteúdos matemáticos dentro do currículo de cada etapa e dos problemas didáticos derivados da falta de articulação entre as etapas. (Tradução nossa)

Baseados nos pressupostos discutidos sobre a atomização do ensino, não é desejável estar de posse de uma única sequência de tarefas durante o processo de ensino, nem tão pouco que seja imutável, ela deve ser flexível e com intencionalidade de propor questões abertas a novos questionamentos.

1.5 O FENÔMENO DA DESARTICULAÇÃO

Esse fenômeno é um objeto de pesquisa que tem estimulado com afinco a atenção de muitos pesquisadores tais como: Lucas, C. (2010), Andrade (2012), Bosch M. et al (2006), Gascón (2010, 2011), Chevallard (2001, 2009), Fonseca (2004) entre outros, eles têm demonstrado interesse e incentivo a novas pesquisas, acreditam que um dos problemas da construção do saber está diretamente relacionado com a falta de conjecturas entre os objetos de ensino.

Fonseca (idem, p. 191) afirma que

> A má articulação do currículo e matemática atual pode ser interpretada, em primeira instância, como a resposta defensiva do sistema na ausência de técnicas de instrução para retomar as organizações matemáticas estudadas anteriormente para questionar, ampliar e integrar funcionalmente em novas organizações cada vez mais completa e abrangente. (Tradução nossa)

Com a intenção de resolver esse problema, algumas instituições de ensino têm implantado estratégias de incentivo que permita criar condições de acessibilidade ao saber, podemos citar as salas de informática, projetos interdisciplinares, simulados, livros extraclasse, salas de aula modernas com sistemas multimídias e de alta tecnologia, etc., apesar de todo o acesso disponível aos alunos ainda é possível encontrar muitos alunos sem saber de onde vem e para onde vai à matemática que estudam. Chevallard (2005) chama esse fato de fenômeno da monumentalização das organizações matemáticas escolares.

Garcia (2005), García et. al (2006) tem proposto que se descrevem os “processos de modelização” a partir da visão da Teoria Antropológica do Didático (TAD) como processo de reconstrução e articulação de praxeologias de complexidade crescente (pontuais → locais → regionais), os quais são gerados a partir do questionamento da razão de ser das Organizações Matemáticas que desejam reconstruir e articular emergindo as questões cruciais para os indivíduos da instituição que irá se desenvolver no processo de estudo.

Andrade (2012, p. 50) por sua vez trata o fenômeno da desarticulação como um problema gerado por diversos fatores, uma delas é a complexidade que envolve o sistema educativo, sua identificação constitui, sem dúvida, um problema de investigação amplo e complexo que pode ser esclarecido por meio da TAD que através das pesquisas tem disponibilizado ferramentas que adentre ao fenômeno possibilitando construir soluções que possam dirimir a desarticulação observada e seus efeitos sobre o sistema didático.

A visão do Fonseca (2004, p. 196) a respeito desse fenômeno é a escassez da articulação do atual currículo de matemática no primeiro momento, como resposta defensiva do sistema a respeito da ausência de técnicas didáticas que permitem a retornar as organizações matemáticas previamente estudadas para questioná-las, expandi-las e integrá-las de maneira funcional nas novas organizações cada vez mais completa e abrangente. Na verdade, não sendo possível essa articulação, muitas das organizações matemáticas propostas a serem estudadas em cada um dos níveis de ensino [...] O mínimo de articulação já é imprescindível, o sistema é levado a "reconhecer" as maneiras de fazer que não são problemáticas para a maioria dos estudantes. Estas são as maneiras comuns para combinar as versões rígidas e estereotipadas de certas técnicas matemáticas

Nossa pesquisa apresenta traços da proposta de Sierra (2006) e García et al. (2006) quando tratam do Modelo Epistemológico de Referência e do problema da desarticulação, pois consideram o MER imprescindível na atuação do fenômeno da desarticulação, sua intenção é tornar o saber matemático em saber ensinado (transposição didática), o que difere da nossa pesquisa é que buscamos através do MER minorar as limitações das atividades matemáticas no estudo das frações, e através do modelo MER provocar articulações através da ampliação das praxeologias e construir outras praxeologias matemática, praxeologias intermediárias, que viabilize novas tarefas e que possibilite a construção do saber de uma forma mais econômica permitindo responder as questões propostas e concluir as tarefas matemáticas que não se podiam realizar antes.

O problema da desarticulação do ensino não acontece somente no nível das questões problemáticas que é proposto em cada série estudada, mas sim em toda a estrutura curricular de níveis mais avançados. Chevallard, Bosch e Gascón (1997, p. 120) apresentam uma situação e faz a o seguinte questionamento:

> Os alunos têm-se entre 12 e 16 anos e vivem na Espanha, é muito provável que se tenha que estudar como fazer frações geratrizes de um número decimal periódico, coisa ignorada por grande parte dos alunos franceses que cursam a Educação Secundária Obrigatória. É claro que, enquanto você trabalha com números decimais, eles têm que aprender a lidar com vetores no plano, pois o currículo escolar francês dá mais importância à questão do vetor em geometria nos currículos das diferentes regiões espanholas.
> As disparidades existem não só entre a França e a Espanha. Se você fosse um inglês de sua idade e você pedisse para calcular a soma $\frac{3}{4}+\frac{6}{7}$ o mais provável é que se tenha a solução: $1\frac{17}{28}$ no lugar de $\frac{45}{28}$ será que as frações não são iguais na Inglaterra e na Espanha? O que ocorre é que, na educação secundária inglesa, os alunos tem que estudar com muito mais detalhe como se transformam as frações maiores que a unidade em "frações mistas" $\left(como\ \frac{45}{29}=1+\frac{17}{28}=1\frac{17}{28}\right)$ para poder dar os resultados nesta forma.
> Eles também precisam aprender a manipular essas frações fluentemente para que eles possam somar, subtrair, multiplicar e dividir. Como fariam para calcular $1\frac{17}{28}$ x $2\frac{2}{7}$? (CHEVALLARD, BOSCH E GASCÓN 1997, p. 120, tradução nossa)

Percebemos que o questionamento dos autores gira em torno do modo de fazer a soma das frações, a tarefa é a mesma, porém a técnica é quem define de fato o fazer, ou seja, alguns conteúdos ou tópicos matemáticos são retirados do currículo forçando o professor a saltar etapas, pular técnicas, transpor a OM de maneira que ao invés viabilizar o processo didático de ensino passa a criar barreiras, obstáculos achatando o processo da construção do saber.

Lucas (2010, p. 52, tradução nossa) mostra três aspectos que se pode distinguir o problema da desarticulação do currículo da matemática:

1. A atomização e a rigidez das organizações matemáticas;

2. A transição entre as instituições;

3. A desarticulação do currículo.

No caso da nossa pesquisa postulamos que o fenômeno da desarticulação tem incidência direta para quem ensina e para quem aprende ao construir relações entre as noções e as operações com frações, daí a emergência de se ter um Modelo

Epistemológico de Referência formado por organizações matemáticas intermediarias que proporciona condições de uso para todos que desempenham algum papel no ensino da matemática.

CAPÍTULO II
AS FRAÇÕES

Nosso objetivo neste capítulo é apresentar nosso objeto de investigação. Tarefa nada fácil considerando o especial interesse da Educação Matemática desde seu inicio com o ensino e aprendizagem de frações que se corporifica em incontáveis trabalhos publicados. Aqui, tomamos como referência o trabalho de Pinilla (2007) que cita e comenta um número expressivo de trabalhos sobre esse tema nas últimas décadas anterior ao ano 2000 e, é claro, por conta do nosso interesse teórico em buscar compreende-las, senão em um breve arcabouço geral, pelo menos em parcialidade como faremos em continuação.

2.1 ASPECTOS MATEMÁTICOS - COMPREENDENDO AS FRAÇÕES

As frações mostram suas primeiras evidências, a milhares de anos atrás, e até hoje, do ponto de vista da epistemologia, o termo "frações" não têm um significado convincente causando certa confusão quando tentamos explicá-la. Na tentativa de esclarecer buscamos a terminologia e julgamos ser importante uma explicação etimológica das palavras.

- Fracção: vem do latim "fractiònem" ou “fractio” de "quebrar", dividir, causar rupturas. Não podemos pensar que a ação de quebrar, matematicamente falando, signifique dividir em partes “iguais”.
- O símbolo $\frac{m}{n}$ tem origem incerta, e a história afirma que quem provavelmente começou a usá-lo foi Leonardo Pisano Fibonacci (1170 - 1250). Os números fracionários foram chamados por ele de “rupti” (ruptura) ou mesmo “fracti” (quebra), e o traço entre numerador e denominador (embora estes termos tenham origem incerta na Europa no século XV) era chamado de “ponto flutuante”, ou seja, "Rod" (de "virga" stick).

A fração é uma ferramenta que vêm sendo utilizada desde os primórdios dos tempos e com o passar dos anos vem ganhando diferentes significados e uma variedade de sinônimos enunciados pela sociedade, trivializando o objeto matemático (a ciência), como exemplo, nós podemos citar as transações de mercado (meio quilo de batata, um quilo e meio de cebola), na mídia (um quinto de

São Paulo não suporta mais prédios...), na navegação (faltando um terço de milha), no censo (um sétimo da população é de classe média baixa...), os cálculos científicos (é a milésima parte de...), ou mesmo simplesmente em uma festinha de aniversário (eu posso levar a metade desse bolo).

Se “tudo” ao nosso redor podemos relacionar com as frações então o que é um número racional? Qual a diferença entre a fração e número racional?

Para melhor compreendermos essa diferença recorremos à pesquisa de Pinilla (idem, p.1) que apresenta uma definição sobre os números racionais absolutos que julga matematicamente aceitável, e que é denotado como Q^+. Segundo essa autora, os números racionais absolutos pode ser posto a partir de N, deixando de lado as demonstrações, considerando os pares $(a,b),(c,d)$ do conjunto $N \times (N-\{0\})$, em que a, b, c, d são números naturais, com as únicas restrições $b \neq 0$, $d \neq 0$, e tendo a seguinte relação (indicada por **R**):

$[(a,b)\ \boldsymbol{R}\ (c,d)]$, se e somente se $[a \times d = c \times b]$.

Essa relação pertence a uma categoria especial, a das relações de equivalência, em que se verifique que é:

- Reflexiva: para cada par (a,b) de $N \times (N-\{0\})$, a seguinte afirmação é verdadeira: $(a,b)\ \boldsymbol{R}\ (a,b)$;
- Simétrica: para cada par de pares (a, b), (c, d) do conjunto $N \times (N-\{0\})$, a seguinte afirmação é verdadeira: se $[(a,b)\ \boldsymbol{R}\ (c;\ d)]$ então $[(c,d)\ \boldsymbol{R}\ (a,b)]$;
- Transitiva: para cada conjunto de três pares $(a,b),(c,d),(e,f)$ do conjunto $N \times (N-\{0\})$, a seguinte afirmação é verdadeira: se $\{[(a,b)\ \boldsymbol{R}\ (c,d)]\ e\ [(c,d)\ \boldsymbol{R}\ (e,f)]\}$, então, $[(a,b)\ \boldsymbol{R}\ (e,f)]$.

Desta forma, o conjunto inicial de N x (N-{0}) pode ser subdividido em partes disjuntas chamadas de classes de equivalência através da operação denominada "passagem para o quociente", assim denotada: $\frac{[N \times (N-\{0\})]}{R}$.

O conjunto $\frac{[N \times (N-\{0\})]}{R}$ contém classes infinitas, que são os elementos que a constituem; em cada classe existem infinitos pares de números naturais. Esse conjunto $\frac{[N \times (N-\{0\})]}{R}$ é o conjunto Q^+.

Assim, um número racional absoluto é uma classe que contém infinitos pares de números naturais equivalentes; normalmente se escolhe um representante para cada classe, mas ela pode ser expressa por meio de diferentes formas de escrita.

Por exemplo, quando escrevemos o número racional (3,1) estamos representando a classe pelo elemento (3,1) como representado a seguir.

$$(3,1) = \{\ (3,1), (6,2), (9,3), (12,4), (15,5) \ldots\ldots \}$$

Mas, qualquer par dessa classe representa o mesmo numero racional o que nos permite afirmar que o par (3,1) e o par (15,5) são o mesmo numero racional.

Além disso, é oportuno destacar que do ponto de vista formal matemático a operação de divisão não pode ser definida em $\mathbb{N}$, mas pode ser definida em Q^{+}. Dividir o par (a, b) (com b ≠ 0) pelo par (c, d) (com d ≠ 0), por exemplo, só precisamos multiplicar (a, b) por (d; c) (com a mesma condição necessária c ≠ 0), ou seja, $(a, b) \div (c, d) = (a, b) \times (d, c) = (ad, bc)$. Mas, na escola a divisão de inteiros é tratada como uma operação entre inteiros.

Como se pode notar, os números racionais e os naturais, seguindo o aspecto formal matemático, estão bem distantes da sala de aula, ou seja, esses objetos matemáticos não vivem nas escolas do ensino fundamental.

Weame e Kouba (2000) apresentam uma discussão de dificuldades conceituais na aprendizagem dos números racionais, como destaca um estudo de avaliação do progresso na educação nacional nos EUA. No entanto, a história, a tradição e toda sociedade contemporânea considera, juntamente com os números os decimais, as frações como parte necessária do conhecimento a ser aprendido. As razões são múltiplas, entre elas, o de dar subsídios às práticas sociais como a do sistema monetário de quase todos os países que pressupõe que os cidadãos devem possuir uma habilidade básica para lidar com números racionais absolutos, o sistema de medidas internacional, que desde o final do século XVIII, presente em praticamente todos os postos de trabalho, exige pelo menos compreender o significado intuitivo de 0,5 ou 2,5. Assim, a manipulação dos números racionais é considerada uma habilidade que todos devem desenvolver (Pinilla, 2007, p. 14)

Segundo Pinilla (idem), se fosse possível evitar passar por frações e ir direto para os números racionais absolutos, as coisas poderiam ser bem mais simples, para o ensino pelo menos. Mas, não é possível de modo simples ensinar Q^{+} para o nível fundamental e médio de uma forma matemática que seja formalmente correta, pois nem o objeto do "conhecimento" Q^{+} pode ser simplesmente transferido para o aluno, nem o aluno possui a maturidade crítica ou capacidade cognitiva para a construção de tal conhecimento.

Assim, um ato de transposição didática é claramente necessário a fim de tornar Q^+ acessível aos alunos do ensino básico. Pinilla (idem), afirma ainda que esse caminho parece naturalmente passar por frações, não se tem clareza se esse caminho seja mais eficaz, tendo. A história da Educação Matemática tem contribuído, pois nos permite ter clareza do caminho dessa transposição dentro da seguinte linha de desenvolvimento: frações (ensino fundamental e básico), números decimais (ensino primário e secundário), Q^+ (ensino secundário ou, às vezes, universitário).

No entanto, isto não parece claro no ensino brasileiro. Uma rápida consulta em qualquer manual é possível observar a apresentação dos conjuntos numéricos, em geral, sem sentido algum. Não é considerado que a passagem do "saber" (escolar) para o "saber aprendido" (do aluno) é resultado de um longo e delicado caminho de transposição didática que, como tal, não se reduz a um mero processo de simplificação do saber.

Há uma nova epistemologia em jogo, uma epistemologia “artificial” que pode apresentar diferentes dificuldades da epistemologia do saber matemático considerado formal. As frações apresentam problemas conceituais que não existem em Q^+. “Se considerarmos as frações aparentes ($\frac{m}{n}$ com n divisor de m) ou as frações impróprias ($\frac{m}{n}$ com $m > n$), elas apresentam complicações que causam dificuldades de compreensão dos alunos, enquanto que em Q^+ essas complicações simplesmente não existem”. (PINILLA, 2007, p. 4)

Tais dificuldades, em geral, passam despercebidas, pois segundo Pinilla (idem) as pesquisas mostram que um número de professores não tem conhecimento do fato de que há uma considerável diferença entre uma fração e um número racional absoluto. Poucos conhecem a finalidade de construir Q^+ partindo de pares ordenados de $N \times N^+$. O fato de que um número racional absoluto é uma classe que contém infinitos pares ordenados equivalentes de números naturais é de maneira nenhuma clara para todos.

Tais aspectos destacam as frações como um objeto não integrante do "saber” formal matemático, mas que não deixa de ser parte do “saber escolar", que com suas complexidades próprias representa uma das áreas mais comuns de dificuldades nas escolas em todo mundo.

Não por acaso Groff (1994), entre outros pesquisadores indiquem que as frações devem ser banidas dos primeiros anos de escolaridade, em contraposição a outros pesquisadores que argumentam que a construção informal da ideia de fração deve começar na escola infantil. Pinilla (idem, p. 13) afirma que "*pessoalmente, acredita que a última posição está correta, embora seja claramente importante e necessário proceder com cautela"*.

As frações até aqui apresentadas já colocam em destaque o especial interesse da Educação Matemática desde seu inicio e, como tal, do nosso interesse em buscar compreendê-las.

2.2 O PROCESSO ENSINO E APRENDIZAGEM DAS FRAÇÕES

Na perspectiva do trabalho de Pinilla, as frações não se confundem com os números racionais, pois cada qual possui características próprias e intransferíveis, ambas são possíveis de ser representadas com suas particularidades, apresentando seu nível de dificuldades no processo de ensino e aprendizagem. As dificuldades que mais se fizeram presente nos estudantes do mundo todo, segundo Pinilla (ibidem), se destacam as seguintes:

1- Dificuldade em ordenar frações e números escritos em notação decimal
2. Dificuldades nas operações
3. Dificuldade em reconhecer as frações até mesmo as mais comuns
4. Dificuldade em lidar com o adjetivo "igual"
5. Dificuldade em manusear frações de equivalência
6. Dificuldade em encontrar a forma reduzida de uma fração
7. Dificuldades em lidar com números não-padronizados
8. Dificuldade em passar de uma fração para a unidade que a gerou
9. Dificuldade em lidar de forma independente diagramas, figuras ou modelos.

Apresentamos algumas dificuldades apontadas e discutidas por Pinilla (2007), à luz da Didática da Matemática a partir, principalmente, de D'Amore (1999).

1. Contrato didático

Estudos sobre o contrato didático demonstraram como os alunos têm medo de correr riscos, abdicam da responsabilidade de sua própria aprendizagem e agem apenas em termos do contrato. Com referência às frações isso é bastante evidente.

2. Representações semióticas excessivas.

Abrindo qualquer livro se vê imediatamente o imenso número de representações semióticas disponíveis para expressar frações. Escolher e lidar com esses registros não é automático e aprender como fazê-lo é um processo que deve ser acompanhado e a missão do professor é tornar o aluno corresponsável pelo processo. Os professores muitas vezes subestimam esse aspecto, ignoram as ideias de Duval e passam de um registro para outro, acreditando que o aluno o segue, o acompanha, quando na verdade o aluno apenas repete, no nível de representação semântica, mas não do significado.

3. Imagens e modelos prematuramente formadas

Muitas vezes, uma imagem pode ser transformada muito rapidamente em um modelo mental, quando ainda deviam continuar a ser uma imagem. Tomemos alguns exemplos.

(a) A imagem de um todo dividido em partes iguais, tornando iguais em identidade, congruência, superimpossibilidade, cria uma ideia eficaz e duradoura de fração que tem de ser respeitada em todas as ocasiões e, assim, impede as *noetics* da fração.

(b) A imagem de dividir um todo em partes iguais e tomando algumas delas sugere que essas "algumas" não podem ser "tudo". O modelo é facilmente reforçado, visto que coincide com uma intuição forte, mas, em seguida, impede a passagem para a unidade como $\frac{n}{n}$ que trata das frações impróprias.

(c) O uso de figuras geométricas é visto pelos estudantes para ser específico e significativo, enquanto que para o adulto é aleatório e genérico. O uso contínuo de retângulos, de círculos, leva a uma imagem que, em vez de ser aberta, flexível e modificável, torna-se um modelo persistente e estável. Se as figuras propostas são diferentes (triângulo, trapézio ...) o aluno já não capta as *noetics* da fração porque a situação não faz parte de seu modelo.

4. Concepções parciais ou errôneas.

Existem inúmeros exemplos de equívocos relativos às frações, muitos dos quais se tornam modelos prematuros em vez de imagens provisórias. Exemplos são os relacionados com a ordem entre frações, com base entre os números naturais, a simplificação de frações, a manipulação de equivalências entre as frações, operações entre frações, a escolha de figuras sobre as quais se operam com frações.

5. Obstáculos didáticos, ontogenéticos e epistemológicos.

Muitos elementos das frações podem ser transformados em verdadeiros obstáculos epistemológicos e são facilmente reconhecíveis na história e na prática de ensino, tais como:

(a) A redução de frações tem sido por muito tempo um objeto específico de estudo, como é mostrado pelo fato de que os egípcios durante séculos usaram apenas frações com numeradores unitários.

(b) A passagem de frações para números decimais requereu mais de 4.500 anos.

(c) A manipulação do zero, em frações, tem muitas vezes levado às enormes problemas, até mesmo para matemáticos ilustres.

6. Excesso de situações didáticas e falta de situações a-didáticas.

Situações propostas aos alunos são quase sempre construídas para fins de ensino, as situações didáticas, raramente correspondem a situações a-didáticas. O resultado é de fracasso quase total na aprendizagem de frações e números racionais, e isso é apontado claramente na literatura internacional. Hoje podemos dizer que a construção da aprendizagem significativa também deve passar por situações a-didáticas, mas estas não são a forma mais utilizada nas práticas de ensino.

A discussão sobre o papel de cada uma dessas situações, pelo menos, as mais usuais e rotineiras, das dificuldades citadas pode ser encontrado em Pinilla (2007, p.162). No entanto fica claro que a pertinência de cada concepção citada exige profundas reflexões e, claro, investigações empíricas que possam melhor torná-las compreendidas. No nosso caso, estamos focados em uma situação concreta baseada em uma teoria (TAD) que tem o propósito de economizar o estudo das frações de modo a tornar os seus elementos (noção e operações com frações) articulados entre si. Portanto, faremos alguns recortes do trabalho de Pinilla que venha a completar nossas ideias.

Postulamos que as várias dificuldades até aqui citadas, entendemos que não acontecem necessariamente em simultaneidade e tampouco em sequência, ou ainda, uma como obstáculo à outra, mas pela possibilidade da pertinência das tarefas envolvidas para a construção da noção de frações para um dado público.

Os alunos que são sujeitos do 4º, 5º ano ocupam posições diferentes na escola e, portanto devem manter relações diferentes com as frações, mas em sincronia que permitam as articulações e integrações dessas práticas. Assim, por exemplo, as noções de frações devem estar presentes em cada posição de modo a ser útil para a construção do conceito de fração e este, como campo conceitual, inclui, por exemplo, as representações de frações em consonância com as operações entre frações.

Sob esse pensar, tais causas/dificuldades deveriam ser postas a prova de um modelo epistemológico que contemple os aspectos históricos (e epistemológicos) dos números como fez Brousseau (1981) sobre o ensino dos números decimais quando os apresentou como uma extensão dos números naturais. A este respeito, assim se manifesta Pinilla (ibidem, p.9, tradução nossa): Nesse artigo, o autor define o conjunto *D* de números decimais como uma extensão de *N* que permitem, então, a passagem para os números racionais Q, estudando brevemente sua história e suas características algébricas"

De outro modo, os programas de ensino de frações esta culturalmente posto na escola que, em geral, começam o seu estudo assumindo de forma dominante a noção de fração a partir de uma unidade concreta que pode ser dividida em partes iguais e tomar para si algumas destas partes. Esta é uma ideia intuitiva que é clara e facilmente compreendida, por ser aplicável à vida cotidiana, mas que, segundo Pinilla (idem), é insuficiente para explicações subsequentes e para interpretações diferentes a respeito da noção de fração.

No entanto, achamos que tal noção inicial constitui fase importante do conceito de fração que pode permitir pensar a construção de uma fração como um processo similar aos dos números inteiros, inclusive que permite operar com frações de tal modo como se opera com os números inteiros. As práticas operatórias com os números decimais com vírgulas se apoiam sobre as práticas com os decimais inteiros a partir da redefinição das unidades a ser contadas. Das unidades simples, das dezenas das centenas e etc., para as unidades de décimos, de centésimos, de milésimos e etc.

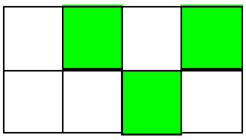
Essa perspectiva epistemológica funcional parece não ser considerada por Pinilla quando envereda em críticas a essa noção inicial de fração a partir da divisão de uma unidade em partes iguais, já que permite a partir da noção de números decimais inteiros dá sentido aos números decimais com vírgulas e daí aos números racionais.

Não podemos ignorar que partir (ou seja, dividir) uma unidade concreta, ou pretensa concreta, em partes iguais pode gerar problemáticas nada simples, mas qualquer divisão mais complexa decorre de casos específicos, senão patológicos, que devem ser evitados, senão eliminados no desenvolvimento das práticas com frações para um dado público.

Para tornar mais claro do que estamos nos referindo, recorremos aos exemplos citados por Pinilla a partir de resultados de pesquisas de outros autores.

Um dos exemplos citados é sobre o aluno quando confrontado com o esquema abaixo facilmente reconheça que estão sombreadas $\frac{3}{8}$ do retângulo, mas que, às vezes, o aluno responde "$\frac{3}{5}$".

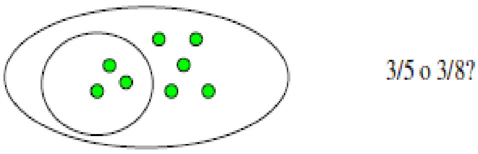
Figura 01 - Parte de um todo



Fonte: Pinilla (2007, p.141)

Esse mesmo fato ocorre frequentemente no caso de fração discreta como a da seguinte forma:

Figura 02 - Representação de fração



Fonte: Pinilla (2007, p.141)

Os padrões nem sempre são perfeitamente explicativo e que, entre eles, alguns são mais difíceis de interpretar do que os outros, (tal como já mostrou D'Amore (1998)).

Em geral, segundo Pinilla (ibidem), as respostas errôneas às perguntas deste tipo são mais frequentes quando os exemplos são de situações discretas, em que o aluno não sabe como decidir qual é a unidade que está em jogo.

Parece-nos claro, como se nota acima, que a problemática esta em definir a unidade. As duas respostas dadas são admissíveis e dependem unicamente em melhor propor a tarefa a ser executada, ou seja, é necessário apontar a unidade.

Outro tipo de situação citada por Pinilla (2007) é como esta

Figura 03 - Representação de fração

Fonte: Pinilla (2007, p.141)

O aluno pode não saber como interpretar a exigência proposta, de que as unidades fracionadas deveriam ser iguais. Em minha opinião, todas as quatro partes que foram mostradas na figura anterior são de $\frac{1}{4}$ do retângulo partido, mas também acho que os professores consideram que são iguais, que aparecem na definição, mas eles não admitem esse fato.

Aqui é importante considerar que a parte que representa $\frac{1}{4}$ do retângulo parece claro para quem tem domínio das práticas com figuras geométricas e estas ainda não estudadas pelo sujeito de 4º, 5º e 6ª ano do ensino fundamental, pois tal situação é reduzida ao seguinte questionamento: Como identificar um triângulo com medida de área igual a medida de área de um retângulo? Podemos afirmar, sem medo de errar, que os alunos dessas posições na escola ainda não enfrentaram tal tarefa e, portanto, a situação acima não pode ser tomada como uma dificuldade.

O saber é construído por meio de tarefas e de técnicas para seus enfrentamentos. As tarefas são os tipos de problemas matemáticos, podemos dizer que é o coração do trabalho e são representados por tipos de tarefas, pois concentram uma variedade de problemas ou exercícios em uma mesma questão problemática e as técnicas é um conjunto de procedimentos que permite abordar e resolver os ditos problemas.

Parece que as organizações matemáticas estudadas não contemplam as tarefas e técnicas necessárias para serem disponibilizadas pelo professor que permitam enfrentar tais situações. Nesse caso, a dificuldade do aluno é decorrente da pobreza do ensino, mais precisamente da ausência de uma epistemologia funcional (praxeologias intermediárias) dos objetos da matemática escolar.

As tarefas e técnicas enfrentadas possuem importante papel nas atividades matemáticas, pois a partir desse par é que se torna possível o enfrentamento de novas tarefas e o desenvolvimento de novas técnicas que podem levar a novas tecnologias e teorias matemáticas. Não há como ser criativo em matemática sem o domínio dos pares tarefas/técnicas e a ausência de alguns deles pode em muito tornar opaca (confuso) a construção de um dado objeto matemático. Isso é fortemente agravado quando o estudo é desprovido de uma epistemologia funcional dos objetos, pois as tarefas/técnicas podem se tornar peças de museu em que os alunos são convidados a visitar sem saber sua utilidade, ou a que questões elas respondem (CHEVALLARD, 2000, p. 2).

O ensino exige que haja uma necessidade de dar sentido e significado quando se operar com frações e, ao mesmo tempo, se quer que tal operação seja entendida como operações com números racionais que, por sua vez, são destituídas de qualquer sentido e significado que não seja das atividades formais da matemática.

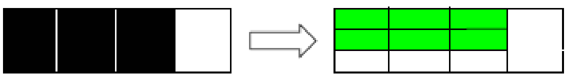
Para Pinilla (ibidem), citando literaturas internacionais, os alunos demonstram grandes dificuldades conceituais na execução de operações entre as frações. A regra $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$ funciona muito bem e não apresenta problemas, mas isso não ocorre para a "adição", pois como a multiplicação pode sugerir, o erro assim se manifesta:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$$

Pinilla (ibidem) afirma que quando a multiplicação de frações é formalmente exigida, se tem melhores resultados do que quando é proposto por um gráfico e que isso vai contra a opinião e crença de muitos professores, inclusive vai de contra a proposta de nossa pesquisa que apresenta exatamente o contrário do que ela fala, apresentaremos um modelo que de forma econômica nos auxiliará no estudo das frações.

Ela afirma ainda que quando se pede para encontrar $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{4}$ pela regra (exposta acima) apresenta bons resultados melhor do que quando o mesmo problema surge de uma forma gráfica: encontrar $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{4}$, que já é sombreada na primeira figura:

Figura 04 - Representação de multiplicação de fração



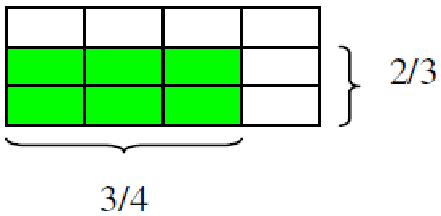
Fonte: Pinilla (2007, p.139)

De outro modo, depois de um tempo, o aluno associa a pergunta: "Encontre o $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{4}$" a operação de multiplicação, que embora não seja bem justificada, é formalmente fácil de executar. O problema é então resolvido apenas semioticamente, sem a necessidade de ter construído realmente o conceito de multiplicação de frações. Todos os outros casos são muito mais complexos.

Vê-se, no entanto, desde os anos 80, que a abordagem cognitiva da fração através da área geralmente funciona melhor do que qualquer outra, muito melhor que o discreto, no entanto geralmente não é melhor do que o formal (ou seja, operando apenas entre frações).

Nos anos 60, Green (1969) propõe solucionar a dificuldade de transformar o problema de "Encontrar $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{4}$" na multiplicação de $\frac{2}{3}$ x $\frac{3}{4}$, de modo que houvesse um gráfico apropriado para explicar essa transformação, como se segue:

Figura 05 - Multiplicação de fração



Fonte: Pinilla (2007, p.139)

A leitura da literatura subsequente parece mostrar que ainda não se chegou a resultados entusiasmantes de aprendizagem.

Voltando a adição (e subtração) entre as frações, a literatura internacional tem extensivamente destacado as dificuldades. Quando alguém propõe adição ou subtração de frações, há algumas décadas atrás, não fornecia aos alunos uma explicação sobre o significado de $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$, mas somente apresentava as regras (STENGER, 1971) que consistia no clássico de encontrar o MMC entre b e d, ou seja, o denominador comum entre as duas frações. Gera problemas, então, quando se fornece a regra geral $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd} = \frac{ad+bc}{bd}$ e pede aos alunos para seguir esta regra sem maiores explicações.

Sem dúvida, houve uma melhora de desempenho formal, mas também houve falha quanto a aprendizagem do significado a ser dado ao que você está fazendo. A pesquisa de Pinilla, que trata do estudo das frações dos últimos 30 anos, conseguiu destacar o fato de que você tem que dar sempre sentido para o que se está fazendo e isso é feito através de vários registros semióticos e com o envolvimento pessoal do aluno na construção do seu próprio conhecimento.

Então, finalmente finaliza sua pesquisa com a divisão de frações. Desde a década de 60 (SLUSER 1963; KRICH, 1964; WILSON, 1968; BIDWELL, 1968) demonstrou-se que esta operação cria muitas dificuldades. Técnicas têm sido estudadas na engenharia didática também muito diferentes, mas os resultados são semelhantes ao que vimos antes: não há panaceias na área da Didática, que é simplesmente, tentar ensinar técnicas. O único resultado realmente apreciável é aquele de responsabilidade do aluno na construção ativa do seu conhecimento, por exemplo, quando utiliza problemas que o envolva , ou que ele mesmo criou.

Na pesquisa perceberam que a maior dificuldade para os alunos no campo das frações, era entender quando, em um problema, deve-se usar a multiplicação ou divisão entre as frações, porque os modelos construídos em torno da divisão e da multiplicação usualmente falando são os que mais funcionam. Desde os anos 70 e 80, a evidência de Hasemann (1979) na Alemanha e nos EUA, e na Grã-Bretanha por Hart (1985), mostram a enormes dificuldades que os alunos têm em gerenciar este conhecimento, nem os resultados das pesquisas subsequentes dos anos 90 e 2000 mostram um progresso considerável com ferramentas da engenharia didática, embora sejam especificamente ocasionais.

A complexidade que envolve as dificuldades torna imperioso delimitar nossa pesquisa, e como se pode notar as representações com frações parecem não ajudar, ser isolada, ou dificultar as operações entre frações, deixando claro nosso interesse, em estabelecer conexões entre a noção de fração e as operações entre elas de modo a eliminar algumas das dificuldades apontadas.

Como se pode notar, a escola busca dar sentido e significado a noção de fração, que envolve essa poluição de representações, ao tempo que assume um modelo epistemológico fundamentado no fazer formal matemático. Para atender a escola ao mesmo tempo, que se inicia a regra operatória formal matemática, postulamos que é preciso então lembrar que no ensino fundamental as frações, como os números inteiros, não são números racionais, mas antes de tudo são representações de quantidades físicas que permitem as práticas com essas quantidades.

Não estamos defendendo voltar às origens das atividades humanas com frações, mas deixando claro que isto constitui parte vital da construção conceitual das frações que nos encaminham os números mistos e os números com vírgulas e finalmente nos dão sentido falar em números racionais.

Em nosso pensar, considerando as condições impostas pela escola como suas organizações matemáticas que compõem os programas de ensino, das quais não podemos escapar, parece-nos claro a necessidade de um modelo epistemológico que dê respostas a questões como a indicada por Marcou e Gagatsis (2002) em uma coleção de artigos sobre pesquisas de ensino na Grécia e Chipre, com prefácio de Raymond Duval.

Marcou e Gagatsis (idem, p. 82-95) faz o seguinte questionamento: "Existe uma forma de representação dos conceitos de equivalência e adição entre frações e um modo de tradução das representações em que os alunos tendam a lidar com maior facilidade?". Outras referências à mesma pergunta podem ser encontradas em Marcou e Gagatsis (idem).

O estudo de Marcou e Gagatis (2002) envolveram 104 alunos do quinto ano e mostrou que há pouca flexibilidade na passagem de uma representação para outra e, assim, que há dificuldades de escolher uma representação que facilite a adição e a equivalência entre frações, insistimos que as dificuldades podem também decorrer do modelo epistemológico assumido, mesmo que implicitamente, para o ensino de frações.

Parece-nos claro que frações equivalentes é um saber formal matemático e que está associado ao conceito de números racionais como já foi aqui mencionado e, como tal, trás dificuldades para o ensino e a aprendizagem e não estava necessariamente presente quando se desenvolve as operações com frações, em particular, a adição/subtração.

Nesse caso, podemos então assim questionar: "Existe um modo de representação e de adição/subtração de frações em que os alunos tendam a lidar com maior facilidade?" A resposta exige uma investigação empírica, mas antes a construção de organizações matemáticas para o ensino que permita tal jornada e isso tudo somente faz sentido se dispormos de um modelo epistemológico que sustente essa organização para a finalidade a que se destina; responder ao questionamento ora posto.

Esse modelo epistemológico, é claro, deve contemplar os programas em vigor na escola e, portanto deve se inserir de algum modo no modelo epistemológico mais abrangente então vigente nas salas de aula.

É claro que não dispomos de tempo no curso de mestrado para o desenvolvimento da investigação empírica quando nos referimos as análises em sala de aula e nos propomos aqui pelo menos assinalar o modelo epistemológico de referência que viabilize o caminho que seja capaz de responder os nossos questionamentos e analisar o livro didático referente ao 4º ano, discussões a serem tratadas nos capítulos 3 e 4.

CAPÍTULO III
MODELO EPISTEMOLÓGICO DE REFERÊNCIA E AS ORGANIZAÇÕES MATEMÁTICAS INTERMEDIÁRIAS

Neste capítulo tratamos teoricamente sobre modelos epistemológicos de referência e sob as condições da sociedade, da pedagogia e da escola, às vezes restritivas e não muito claras, propomos um modelo epistemológico do modo anunciado no capítulo anterior, ou seja, que permita operar com frações, em particular a adição, do mesmo modo que se opera com os números inteiros possibilitando o encaminhamento para futuras investigações empíricas que permitam responder os questionamentos postos.

3.1 O MER: DA ANÁLISE AO DESENVOLVIMENTO DE PRAXEOLOGIAS

Durante a pesquisa percebemos que as praxeologias utilizadas no ensino das frações se baseiam em OM trazidas pelo professor (equipamento praxeológico) ou imposta pela instituição. Essas praxeologias tem se desenvolvido à algum tempo tornando-se dominantes no ensino e sua finalidade é garantir o alargamento do conhecimento e a compreensão dos alunos. Para atingir esse propósito esses professores fazem o uso dos artefatos didáticos que “estreitará” a relação dos alunos com os conceitos apresentados.

Nesse pensar partimos com o pressuposto de que a transparência dos modelos epistemológicos dominantes permeiam as atividades docentes na escola, que os tornam inquestionáveis, não admitem que os professores tenham “visão ampliada” de que existem formas diferentes de organizar o processo de estudo de uma dada Organização Matemática (OM) na escola.

Gascón (2001) trata do modelo epistemológico geral dominante como a principal forma de descrever a OM e as respectivas restrições sobre a OD e trata da impossibilidade de oferecer um dispositivo didático no momento do trabalho da técnica que poderia desenvolver-se normalmente com naturalidade por meio deste dispositivo. É claro que ao tentar descrever e analisar OD, encontraremos restrições provenientes em níveis mais especifico que tem sua origem na estrutura de OM considerada na forma modelo epistemológico geral.

O autor aponta ainda a necessidade de modelizar as OMs existentes nas instituições e por meio desse novo modelo será possível descrever, estruturar, entender, relacionar as OMs já existentes e o modelo que ele aponta é o Modelo Epistemológico de Referência (BOSCH; GASCÓN, 2001, p. 20)

Esse modelo permitir evidenciar possíveis condições que facilitam, ou que impedem o acesso ao estudo de uma dada OM, por meio de sua descrição e análise, como nos indica Sierra (2006, p. 48) quando assim se manifesta sobre a funcionalidade do modelo epistemológico de referência:

> O papel e as funções que desempenha o MER na análise didática são mais conhecidos. Algumas investigações anteriores desenvolvidas no âmbito da TAD tem mostrado sua utilidade no que diz respeito ao ensino, gestão e avaliação de determinadas Organizações Didáticas (BOLEA 2003, ESPINOZA 1998, GARCÍA 2005). Podemos afirmar que as ditas investigações, embora de uma forma menos explícita, têm usado o MER para descrever e analisar, pelo menos "em ação", um modelo epistemológico da matemática (específico para um determinado OM) dominante em uma instituição, bem como para analisar e interpretar os fenômenos transpositivos que transformaram a OM transposta, dando origem a um sistema de práticas matemáticas institucionais. (Tradução nossa, grifos do autor)

Ou seja, o MER é um instrumento que auxilia a descrição e análises do modelo epistemológico dominante nas instituições de ensino, além de atender as restrições que o modelo apresenta e que, reflete de alguma forma na relação institucional da OM em questão, pois viabiliza outros meios de se estudar a OM na instituição considerada.

Por outro lado, o MER possibilita julgar o mundo dos saberes e, como tal, é necessário deixar claro que está longe de ser um modelo privilegiado, único e imutável como destaca Gascón apud Chevallard (2011, p. 208) quando aponta que o MER é consolidado a partir de pressupostos da teoria da Transposição Didática que afirma que não existe um sistema de referência único para o ensino.

Sob essa compreensão, os modelos epistemológicos quando construídos visam proporcionar elementos necessários para descrever, interpretar e analisar fragmentos de OMs que se reconstrói e, na medida do possível, o correspondente fragmento (OD) estabelece as condições dessa construção em busca de respostas a carta questão *Q*.

Essas reconstruções tem revelado a necessidade de construir OM intermediarias (OMI) que permitam explicitar e analisar as limitações existentes e identificar as características da OM como uma "resposta" a essas limitações, deixando evidenciar as OMI como a "razão de ser" da OM.

É objetivado nesse pensar tornar dinâmico o processo de estudo de uma dada OM, que vai se construindo a partir de uma questão *Q* até a OM, passando por OMI (OM_1, OM_2, $OM_{3...}$), tantas quantas forem necessárias, esquematicamente representadas por:

$$Q \rightarrow OM_1 \rightarrow OM_2 \rightarrow OM_{3...} \rightarrow OM$$

Em que fique claro as necessidades de estudo dessas OMI para explicitar e analisar as limitações encontradas no estudo.

Assim, reafirmamos, no sentido de compreender as OM como um complexo inteligível de praxeologias, que a construção de um MER não se deve dar de forma espontânea, mas responder a uma questão institucional que constitui as "razões de ser" da organização, matemática ou extramatemática, segundo os diferentes caminhos que os objetos matemáticos percorrem no currículo, de modo a atender as diferentes posições, com suas funcionalidades, que eles ocupam na instituição e, até mesmo, quando necessário, em outras instituições.

De outro modo, o MER, relativo a um dado objeto matemático deve ter em conta as posições que ele pode ocupar de uma dada instituição, segundo uma funcionalidade, em relação com outros objetos matemáticos, e cujas razões de ser, matemáticas ou extramatemáticas, senão no presente, podem se encontrar no passado ou no futuro também em relações com outros objetos de ensino nessa instituição, às vezes em outras posições na instituição ou, até mesmo, em outras diferentes instituições.

Essa compreensão constituiu o MER nas pesquisas em Didática da Matemática: Andrade (2012), Bahujama (2000), Bosch e Gascón (2001, 2003, 2004, 2010, 2011), Chevallard (2001, 2004, 2009), Cirade (2006), Fonseca (2004), García (2005), Lucas C. (2010), Rodríguez (2005), Sierra (2006) são pesquisas que disponibilizam instrumentos em nível teórico e prático que contribuí para evidenciar diferentes fenômenos didáticos, entre eles, o do isolamento das organizações matemáticas.

Esse fenômeno é caracterizado por um conjunto de praxeologias isoladas sem, ou com fracas, conexões umas com as outras, com ausência clara de uma epistemologia funcional dos saberes, ou seja, marcada pela apresentação de objetos matemáticos para o ensino e aprendizagem sem que lhes sejam atribuídos uma razão para seus estudos, como os papeis funcionais dessas OM no percurso do currículo, as relações de seus objetos matemáticos com outros objetos matemáticos ou extramatemáticos, já estudados e a estudar, que caracterizam os seus possíveis caminhos no currículo.

O isolamento na verdade são as praxeologias pontuais, que podem ser vistas claramente nos questionamentos sobre o currículo. São essas praxeologias que contribui para o fenômeno do monumentalismo. Chevallard (2004) trata a atividade matemática (matemática ou extramatemática) como algo ausente dos conteúdos matemáticos oficiais, mais é favorável para alguns ambientes como escolas de engenharia que é possível fazer uma modelagem matemática.

Bosch e Gascón (2009, p. 95, tradução nossa) afirmam que esse fenômeno apresenta os saberes como uma visita a obras ou monumentos de um museu, que devem ser visitados pelos estudantes sem que ninguém saiba muito bem o porquê de terem sido construídos nem para quê servem hoje.

Mas, podemos postular que os possíveis modelos epistemológicos que podem ter sustentado as OM e suas OD correspondentes e dominantes nas escolas, podem ter também dado origem as OMI que ao longo do tempo vieram a desaparecer das salas de aula por redução do tempo didático que levou reformulações do currículo, por exemplo, que eliminaram as possíveis conexões entre essas organizações dominantes.

Sob esse pensar, a reconstruções de Organizações Intermediárias (OMI) são importantes do ponto de vista da eficácia das OM e suas OD correspondentes, para quem ensina e para quem aprende, por tornar o ensino e aprendizagem inteligível das OM, ou seja, por criar condições favoráveis ao desenvolvimento do processo de estudo dessas OM.

É nesse sentido que a construção e reconstrução de OMI se constituem em objeto de interesses, por ser necessária ou pelo menos útil, para a reconstrução de OM sobre um dado objeto, pelo menos durante a construção de uma OM considerada. (BOSCH; GASCÓN, 2001, p. 18, grifo do autor, tradução nossa).

No entanto, é preciso ter em conta que os possíveis modelos epistemológicos que podem ter sustentado as construções das OM presentes na escola não são únicos e imutáveis, nem tampouco estão disponíveis a espera de serem “descobertos”. Eles podem ter mudado, ou reduzido a seus fragmentos, ao longo do tempo em consonância com a história, com seus movimentos, sociais e culturais, que caracteriza a ecologia dos saberes, em que para atender as demandas sociais são criados novos saberes, novas práticas e até mesmo eliminar outras, que se materializam em mudanças nas OM para estudo nas escolas.

Desse modo, não é raro, podermos interpretar uma dada OM relativa a um dado objeto como decorrente da amalgama de diferentes modelos epistemológicos, como assim podemos interpretar a OM dominante que vive nas escolas do ensino fundamental sobre a equação do segundo grau (poderia ser qualquer objeto matemático inclusive as frações que é o nosso objeto de estudo, porém não as colocamos para demonstrar outras questões possíveis de serem discutidas).

Citamos a equação do 2º grau para exemplificar e situar nossa problemática de modo que seja esclarecida a possível existência de OMI durante as aulas de matemática. Quando ministramos o conteúdo de equação do 2º grau normalmente definimos e mostramos os três tipos de equação, quando $b = 0$, $c = 0$ e quando $a, b\ e\ c\ \neq\ 0$ e em seguida classificamos como equação completa e incompleta. Isso nos mostra que as OM da equação do 2º grau é formada por um amálgama de modelos epistemológicos. É exatamente assim que essa OM é trabalhada, de forma isolada e fragmentada, pois não possui um modelo epistemológico claro. O que se vê são fragmentos de modelos inconstantes e cíclicos, pois hora é pensado de um jeito, hora é pensado de outro jeito, ou se pensa simultaneamente nas duas surgindo uma nova OM.

Temos dois modelos quando estudamos e ensinamos a equação do 2º grau: a de que não conseguimos unificar o estudo da equação do 2º, pois são praxeologias pontuais e cada uma assume uma praxeologia, e o professor quando vai ministrar essa aula precisa identificar cada equação para então encontrar uma OM que melhor explique, “não existe” um pensamento, uma OM que articule as três praxeologias para que elas passem a ter uma coerência umas as outras. Ressaltamos que “não criamos” nada no ponto de vista das praxeologias, mas a partir de um modelo epistemológico seremos capazes de organizá-las de tal maneira que elas façam sentido tanto para quem ensina quanto para quem aprende.

Uma segunda situação que trazemos a discussão é a de que o professor com a intenção de fazer com que seus alunos compreendam o que se está ensinando cria artefatos para ensinar, ou seja, se apossam de várias praxeologias, de várias maneiras de pensar, ou ainda vários modelos criando vários modelos que podem se resumir em um único modelo. O que queremos dizer é que existem situações que são expostas praxeologias a mais ou a menos, no caso da equação do 2º grau é a mais e no nosso caso é a menos, ou seja, excesso ou falta de maneiras de pensar podem prejudicar no processo de ensino, é necessário um modelo que garanta a unidade do problema e esse modelo chamamos de MER, pois deverá garantir unidade, a articulação entre os conteúdos a serem ensinados, tornando dessa forma um ensino ensinável e coerente.

Quando falamos de várias praxeologias, que fique bem claro que não estamos tratando de técnicas, pois se fosse o caso a equação do 2º grau completa seria suficientemente “larga” para alcançar todos os outros tipos de equação, o que interessa é como se pensa na equação independente da técnica.

É nesse contexto que reafirmamos a necessidade da construção de um MER para a análise de uma OM que vive em uma instituição de modo a apontar a necessidade de OMI que possam se constituir em condições que facilitem o estudo dessas OM.

Sob esse modo de pensar é que buscamos esboçar um MER que permita construir OMI para o ensino das operações com frações nas séries iniciais que responda a seguinte questão:

> **Q: *Qual a organização praxeológica (intermediária) que pode favorecer o encontro dos alunos com a adição e subtração de frações e elimine a desconexão entre as práticas sobre noção de fração e as práticas operatórias com frações*?**

Tal questão decorre da necessidade de pensar as OM sobre frações para o Ensino Fundamental I como práticas com números inteiros encaminhando no sentido de que não se trata de operações com números racionais, mas com números concretos que referem entes que, de alguma forma, podem ser manipulados com sentido para aquele que opera com os números inteiros, os quais são objetos até então dos sujeitos desta posição na escola fundamental I, e evitar com isso a introdução precoce e enfática de um conjunto de técnicas suportadas por complexas tecnologias da teoria dos números, como a equivalência de frações, com a compreensão minimalista de que frações equivalentes são iguais, ou ainda, o uso do mínimo múltiplo comum (MMC) para redução ao mesmo denominador, a partir do Teorema Fundamental da Aritmética com memorização dos números primos/critérios de divisibilidade, como única técnica pra tal tarefa, sem qualquer relação explicita com a noção inicial de fração parte/todo, até então estudada, que pode prover um dos mais importantes momentos do estudo (Chevallard, 1999), portanto, da atividade matemática, que é o trabalho da técnica

> O quarto momento é do trabalho da técnica, que deve melhorar a técnica tornando-a mais eficaz e mais confiável (o que exige geralmente retocar a tecnologia elaborada até então), e acrescentar a experiência que se tem dela: este momento é posto a prova a técnica envolvida em particular um a um corpus de tarefas adequadas tanto qualitativamente como quantitativamente. (IDEM, 1999, p. 244)

O trabalho da técnica, ou sobre a técnica, se corporifica por meio de praxeologias, com o objeto em jogo, de modo integrado e articulado para constituir um fazer praxeológico de complexidade crescente.

Fonseca (2004) em sua tese que trata do fenômeno da desarticulação da Matemática escolar, em especial na descontinuidade do ensino da matemática do ensino secundário e superior, recorre a esse aspecto quando postula que para ensinar Matemática é necessário ter uma questão preliminar e suficientemente capaz de gerar outras questões, ou seja, questões essas que resultem em atividades matemáticas de complexidade crescente.

É claro que uma infraestrutura matemática para essa empreitada de construção do MER ganha importante papel, mas a isso não se reduz. Há necessidades de uma infraestrutura didática, as que vivem na instituição docente, articuladas com a história e epistemologia da matemática, sob a compreensão dos recursos teóricos disponibilizados pela TAD que conduz o pensar a atividade matemática como provida e provedora de relações do sujeito como o saber em jogo.

É claro que nesse processo a infraestrutura requerida, inclusive as que dizem respeito às compreensões da TAD, não estão previamente determinadas, mas se delineiam no processo de estudo que envolve a construção inteligível e justificada de praxeologias que um modelo epistemológico requer, e que, é claro, permanece aberta a novas adequações e reelaborações o quanto for necessário.

Esse pensar que envolve a construção do MER tem em conta que as respostas de aprendizagem são consequências dos estímulos do que se propõe para essa construção e o principal autor desse processo é o orientador de estudo, no caso o professor. Para Chevallard, Bosch e Gascón (2001, p. 300) “o professor somente pode ajudar o aluno a estudar e, embora sua ajuda seja muitas vezes indispensável – e quase sempre importante – não pode estudar nem, muito menos, aprender por ele", o saber é construído a partir das relações que esse sujeito possui com o objeto, quanto maior for a aproximação construída, maior a relação do sujeito com o objeto, e dessa relação fecunda nasce um novo processo de institucionalização do saber.

É sob esse olhar, de um professor como criador de condições favoráveis para o processo de estudo que leva a aprendizagem, tendo em conta as possíveis relações existentes dos seus alunos com os objetos de ensino, no caso as operações com os inteiros, aliada as compreensões acima expostas, é que buscamos esboçar um MER, como apresentamos a seguir.

3.2 AS OPERAÇÕES COM FRAÇÕES COMO OPERAÇÕES COM NÚMEROS INTEIROS.

Segundo a TAD, todo saber a ser ensinado tem passado e futuro na instituição em que vive e que dá razão ao seu estudo. Pinilla (2007, p. 5), por exemplo, referindo o estudo de frações, ressalta que deve haver um tempo para cada estudo respeitando os níveis de ensino fundamental e médio, pois afirma que não é possível se ensinar "tudo" de frações e que é necessário fazer uma *Transposição Didática* do nível primário para o nível secundário tornando o ensino acessível aos alunos sugerindo a seguinte linha de desenvolvimento: frações no primário e ensino secundário, números decimais no ensino primário e secundário e finalmente os racionais ($\mathbb{Q}$) na escola secundária superior ou universidade.

A pesquisadora ratifica a necessidade de se criar condições para facilitar o ensino e a aprendizagem das frações através do suporte didático que propõe a *Transposição Didática* (CHEVALLARD, 1991) apontando a limitação da relação entre o sujeito (aluno) e o objeto (fração) em determinadas etapas do ensino.

Em nosso entendimento, parece-nos claro, que ela refere a necessidade de organizações intermediarias no estudo de frações, fazendo inclusive a distinção, em sua sugestão, entre frações e números racionais (muito embora os segundos possam ser representados pelos os primeiros) e sugerindo que estes últimos sejam objetos de estudo em níveis mais elevados de ensino.

Essa compreensão de Pinilla parece ser compartilhada por Guerra e Silva (2008) quando fundamentam as operações com frações tomando o princípio da contagem de forma a facilitar o acesso ao estudo dessas operações, inclusive para aqueles não especialistas da matemática como os professores que atuam nas séries iniciais.

Os trabalhos desses autores inspiram um Modelo Epistemológico de Referência (MER) que busca tornar clara a relação entre a noção de fração, no caso a relação parte todo que vive nas séries iniciais, e as operações entre elas, tomando como pressuposto que a "relação entre número e área nos conduz a pensar que se pode operar com frações do mesmo modo que se manipulam com as áreas" (ibidem, p.43).

De outro modo, operar com frações pode ser traduzido em contagem de uma unidade de área, tomada como referência, para a medida de uma dada área. A contagem, aqui discutida é sustentada pela história e pela epistemologia do pensamento matemático, Ifrah (1989, p. 29) afirma que desde as primeiras civilizações, foi sem dúvida, o princípio que durante milênios o homem pré-histórico pode praticar as primeiras aritméticas, antes mesmo de ter consciência de saber o que é um número abstrato.

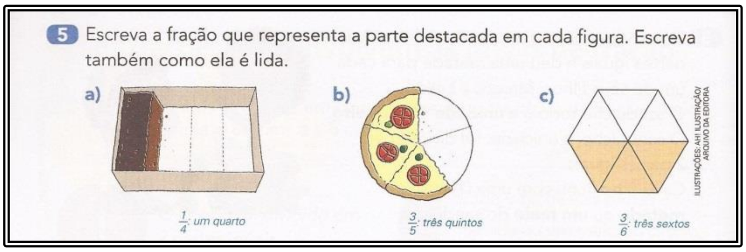
Essa característica esta presente nas práticas dos sujeitos dos anos iniciais do ensino básico, a da não consciência do número abstrato, particularmente, que o número está associado a uma medida resultante de uma contagem. Nesse pensar, Guerra e Silva (Ibidem) o corporifica em uma técnica didática para dar sentido as operações com frações, assumindo que a contagem está imbricada a partir das relações que cada indivíduo possui com os números e que essa relação ao longo do tempo vai se aprimorando e nunca se esgota, a contagem é um procedimento que passa a ser espontâneo, ou seja, "a contagem não é uma aptidão natural" (Ibidem, p.44).

Mas, o uso do principio da contagem para fundamentar as operações entre frações só se torna possível desde que se disponha de uma técnica didática que associe noção de fração parte/todo com as operações entre elas a partir da contagem explicita de uma fração como uma unidade de referência.

Berge e Sessa (2003, p. 173 apud Guerra e Silva 2008), afirmam que entendem as operações a partir de um isomorfismo operatório entre números, no caso as frações, e as quantidades, as partes de um quadrado. Assumindo que se pode operar com os números do mesmo modo que se manipulam com as quantidades em geral. Essa é a proposta de Guerra e Silva e que adotamos como indicações epistemológicas para esboçar o fragmento de modelo epistemológico de referência que desejamos.

As representações de frações mais comuns, apresentadas nos livros textos das séries iniciais, estão associadas a medidas iguais de uma grandeza contínua, como o caso da “pizza” e da “barra de chocolate”. A parte menor é usada para medir outras partes maiores constituídas de um número inteiro de vezes dessa parte menor, deixando claro o processo de contagem.

Figura 06 - Fração pela contagem



Fonte: Souza e Spinelli (2011, p.101)

Esse aspecto do uso naturalizado da contagem, que não demanda a abstração do número, se põe como condição favorável ao estudo das operações com as frações para os que se iniciam nas atividades matemáticas, pelo menos como prática social de quem conta.

Embora essa técnica didática permita a contagem de frações, no caso das partes, apresenta um alcance limitado para operar com duas ou mais frações com denominadores que não são múltiplos um do outro.

Guerra e Silva (2008) resolvem o problema do alcance da técnica a partir do modelo adotado por Lima (1991) para fundamentar as fórmulas para cálculo de áreas do quadrado e do retângulo de lados que tem como medidas números racionais, mas que de forma naturalizada recorre à contagem como se estivesse tratando de números inteiros.

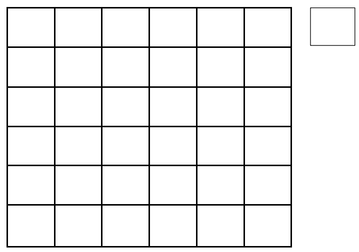
Vejamos como Lima (1991, p. 11-13) discute a unidade de área de uma figura plana utilizando como base de seus conceitos as unidades de medidas.

Toma como convenção a unidade de área um quadrado cujo lado mede uma unidade de comprimento e que chama de quadrado unitário e por definição terá área igual a 1.

Lima (idem) postula que é possível decompor um quadrado Q de lado com medida igual ao número inteiro n, por meio de retas paralelas aos seus lados, em n quadrados unitários e com isso conclui que o quadrado Q deve ter medida de área n^2.

Similarmente, o autor apresenta o lado de um quadrado Q tendo por medida $\frac{1}{n}$, onde n *é* inteiro, logo o quadrado unitário se decompõe, mediante paralelas aos seus lados, em n quadrados justapostos, todos congruentes a $Q.$ Estes n quadrados congruentes a Q compõem um quadrado de área 1, portanto a área de Q deve satisfazer à condição de que o produto entre n^2 e a medida da área de Q é igual a unidade, ou seja, n^2 x (área de $Q)$ = 1 e, portanto, área de $Q = \frac{1}{n^2}$**.**

Figura 07 - Quadrado de lado 6, decomposto em $6^2 = 36$ quadrados unitário



Fonte: Lima (1991, p. 12)

O autor postula que, se o lado de um quadrado Q tem por medida o número racional $\frac{m}{n}$, então é possível decompor cada lado de Q em m segmentos, cada um dos quais tem comprimento $\frac{1}{n}$. Similarmente ao que foi feito anteriormente traça agora retas paralelas aos lados de Q a partir dos pontos de divisão, obtemos uma decomposição de Q em m^2 quadrados, cada um dos quais tem lado $\frac{1}{n}$. Conclui que, a área de cada um desses quadrados menores é $\left(\frac{1}{n}\right)^2$. Admite então que a área de Q deve ser

$$m^2\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{m^2}{n^2}$$

ou seja, área de Q

$$Q = \left(\frac{m}{n}\right)^2$$

O autor conclui que a área de um quadrado Q cujo lado tem para medida um número racional $a = \frac{m}{n}$ é dada pela expressão:

$$\acute{a}rea\ de\ Q = a^2$$

Essa discussão nos faz perceber que há uma implicação evidente entre medir e contar independentemente se é um número natural ou racional. Logo, a construção do MER nos permitir fazer a articulação entre os saberes que possibilitem uma relação mais próxima entre o sujeito e as operações com frações e isso pode ser pensado por meio do princípio da contagem, como uma operação de contagem de partes de áreas com a vantagem de quem opera com números inteiros.

3.3 A FRAÇÃO E A MEDIDA DE ÁREA

Guerra e Silva (2008), como referimos, tratam das operações com frações a partir do princípio da contagem e pressupostos da geometria grega sobre medida de área, mais precisamente, a área do quadrado/retângulo respondendo a seguinte questão: *Como relacionamos o princípio da contagem, a área do retângulo e as operações com frações?* A resposta é encaminhada, nas suas palavras, do modo seguinte:

> Para responder a esta pergunta, evocamos a ideia de área de um retângulo como o produto de dois segmentos, ou seja, “O retângulo compreendido por dois segmentos” feita por Euclides a partir do livro II, segundo Bergé e Sessa (2003, p. 173), e o cálculo de sua área na forma posta por Lima (1991). (GUERRA; SILVA, 2008, p.45)

Com tal pensar, articulam esse entendimento para mostrar que é possível recorrer ao princípio da contagem para tornar as operações entre frações com sentido para aquele que aprende e para quem ensina, tendo em conta que tais operações podem ser vistas como a contagem de uma unidade de referência, unidade essa que compreendemos como um elemento do conjunto de frações que são as bases de todas as outras frações, no seguinte sentido dado por Euler (1828).

> Podemos considerar as frações cujo numerador é a unidade, como base de todas as outras. Tais frações são: $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \frac{1}{10}, \frac{1}{11}, \frac{1}{12}$ e etc.. (EULER,1828, p. 22,Tradução nossa)

Isso significa dizer que todas as outras frações são derivadas a partir das frações com numerador 1 e por isso passam a se constituir, para Guerra e Silva (2008), como as que podem ser eleitas como “unidades”, como assim deixa claro Euler no seguinte extrato.

> Se, por exemplo, considerarmos a fração de $\frac{3}{4}$, é evidente que é três vezes maior do que $\frac{1}{4}$. Agora, a fração $\frac{1}{4}$ significa dizer que, dividimos 1 em 4 partes iguais, este será o valor de uma das partes; É óbvio, então, que por três dessas partes se têm o valor da fração de $\frac{3}{4}$. Da mesma maneira, podemos considerar todas as outras frações, por exemplo, $\frac{7}{12}$; se dividir a unidade em 12 partes iguais, 7 das partes será igual à fração proposta. (EULER, 1828, p. 21, Tradução nossa)

Além disso, é sempre possível encontrar uma fração de base comum a um dado conjunto de frações em que se deseja operar, ou seja, dado um conjunto de frações é sempre possível eleger uma fração base comum a todo o conjunto. Essa compreensão de Euler se ratifica quando interpretamos duas frações a partir da noção de segmentos comensuráveis, como nos faz compreender Guerra e Silva (2008) quando recorrem a Bergé e Sessa (2003, p. 168) para se referir as áreas como representantes de frações do seguinte modo.

> No livro X, teorema 5, Euclides explicita que se dois segmentos são comensuráveis, ou seja, têm uma medida comum, a razão entre eles é igual à razão que guardam entre si dois números. Aqui, similarmente, admitir ter uma medida comum para duas áreas A e B, segundo Bergé e Sessa (2003, p. 168), é dizer que se nenhum múltiplo inteiro de A cabe exatamente em B, é possível dividir a área A em *n* partes iguais de modo tal que a área $\frac{A}{n}$ caiba exatamente *m* vezes na área B e, neste caso, a medida de B em relação a A é $m\left(\frac{A}{n}\right)$, ou que $\frac{B}{A} = \frac{m}{n}$. Isso evidencia a medida por meio de processo de contagem de unidades comuns de retângulos que representam as frações. (GUERRA; SILVA, 2008, p. 48)

As operações entre frações, portanto, podem ser realizada a partir de diferentes frações de bases comuns que podem ser tomadas como unidades que permitem a contagem, de modo análogo, se assim podemos dizer, quando no cotidiano recorremos as diferentes unidades, mesmo que de forma tão natural não nos demos conta, por exemplo, quando tomamos o quilômetro como unidade para medir a distância entre duas cidades, mas quando nos referirmos à largura de uma porta padrão recorremos a unidade centímetro.

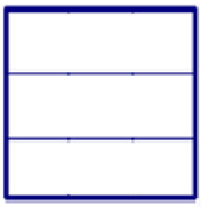
Esse processo naturalizado de medir precisa então ser questionado para problematizar a prática da medida de modo a evidenciar as relações entre unidade e frações, particularmente sobre a escolha arbitrária da unidade para medir de acordo com a conveniência de quem mede ou do que é medido, e assim sistematizá-la para as operações com frações.

Para operacionalizar esse entendimento os autores recorrem ao processo do cálculo da área de uma figura plana a partir do uso de um quadrado "unitário", que, grosso modo, é dada pelo número dessas unidades que "compõe" a figura, em um processo de contagem como mostraremos na figura 10.

Os autores tomam um quadrado com a medida do lado igual a um, dito quadrado unitário, e assumem que podem ser dividida em partes iguais, cada uma das partes identificadas como $\frac{1}{n}$ da unidade de área. Sob esse entendimento a medida do quadrado unitário é determinada pela unidade considerada, ou seja, pela quantidade de partes $\frac{1}{n}$ que contém o quadrado unitário, ilustrada a partir do seguinte exemplo:

Dividindo o quadrado unitário em 3 partes iguais, cada parte mede um terço de unidade de área e é representada esquematicamente pelos retângulos de dimensões 1 e $\frac{1}{3}$.

Figura 08 - Quadrado unitário dividido em 3 partes iguais



Fonte: Próprio autor

A partir da noção parte todo da fração, os autores interpretam que o retângulo de lados 1 e $\frac{1}{3}$ tem área A= $\frac{1}{3}$. Tendo em conta que a área de um retângulo, segundo o pressuposto da geometria grega, já citado pode ser interpretada como produto de dois segmentos, segue que a área $A = 1 \times \frac{1}{3}$ e portanto que $1 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$.

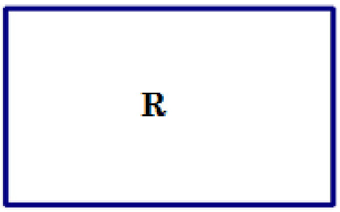
Além disso, o retângulo $\frac{1}{3}$ está contido 3 vezes no quadrado unitário formando assim a unidade, ou seja, $1 = 3\left(\frac{1}{3}\right)$ e portanto que $1 \div \frac{1}{3} = 3$, ou seja, *que 3 é a medida da área do quadrado unitário se a unidade tomada for* $\frac{1}{3}$ *, já que 3 é o número exato de vezes que "unidade"* $\frac{1}{3}$ *está contida no quadrado.*

É fácil observar que as operações com as frações encaminhadas por Guerra e Silva (2008) se desenvolvem por meio da contagem de uma fração a partir da técnica de partição do quadrado unitário em retângulos, cujas medidas dos lados se identificam com as frações em jogo na operação.

Essa interpretação é mostrada quando tomamos como exemplo um quadrado unitário que dividimos em partes de modo a permitir que se opere com as frações $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{5}$. O quadrado tem seus lados adjacentes divididos em partes com medidas congruentes. É cortado na horizontal e na vertical que permite um maior alcance para divisões do quadrado e representações de frações com denominadores diferentes como mostramos a seguir.

O quadrado R abaixo tem inicialmente seu lado horizontal dividido em três partes iguais e obtemos três partes congruentes, retângulos de $\frac{1}{3}$ de área, e dessas partes destacamos duas que totalizam com $2\left(\frac{1}{3}\right)$ de área. Em seguida, é dividido o lado vertical em cinco partes iguais, retângulos com $\frac{1}{5}$ de área. Destacamos três retângulos totalizando $3\left(\frac{1}{5}\right)$ de área. As interseções dos retângulos horizontais e verticais totalizarão 15 novos retângulos *r* com $\frac{1}{15}$ de área

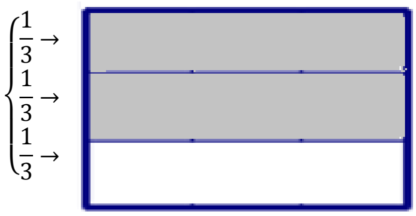
Figura 09 - Quadrado inteiro



Fonte: Próprio autor

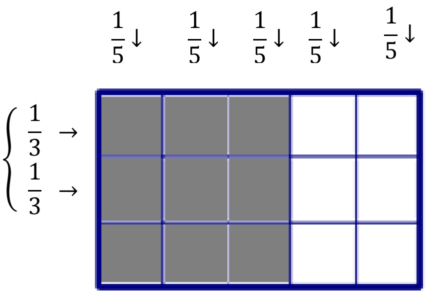
→

Figura 10 - Quadrado dividido em 3 partes iguais



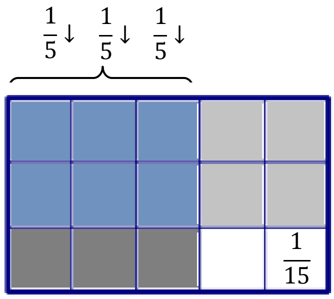
Fonte: Próprio autor

Figura 11 - Quadrado divido em 5 partes iguais



Fonte: Próprio autor

Figura 12 - Fração resultante entre as divisões



Fonte: Próprio autor

Se tomarmos na figura 08 o retângulo com lados adjacentes representados por $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{5}$, identificamos uma área comum contendo exatamente 6 retângulos de área $\frac{1}{15}$, ou seja, $\frac{2}{3} \times \frac{3}{5} = 2\left(\frac{1}{3}\right) \times 3\left(\frac{1}{5}\right) = (2 \times 3)\left(\frac{1}{15}\right) = \frac{6}{15}$ representa o produto entre as frações $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{5}$.

Além disso, as frações $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{5}$, que são lidas como contagem das unidades $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{5}$, por $2\left(\frac{1}{3}\right)$ e $3\left(\frac{1}{5}\right)$, admitem agora uma nova unidade comum igual a $\frac{1}{15}$ e passam a ser portanto $10\left(\frac{1}{15}\right)$ e $9\left(\frac{1}{15}\right)$ respectivamente. Como podemos notar, essas representações admitem operar com as frações contando as áreas comuns a elas, no caso de medida $\frac{1}{15}$. Tornam-se imediatas as operações seguintes

$$\frac{2}{3} + \frac{3}{5} = 10\left(\frac{1}{15}\right) + 9\left(\frac{1}{15}\right) = 19\left(\frac{1}{15}\right) = \frac{19}{15}$$

$$\frac{2}{3} - \frac{3}{5} = 10\left(\frac{1}{15}\right) - 9\left(\frac{1}{15}\right) = \left(\frac{1}{15}\right) = \frac{1}{15}$$

$$\frac{2}{3} \div \frac{3}{5} = 10\left(\frac{1}{15}\right) \div 9\left(\frac{1}{15}\right) = \frac{10\left(\frac{1}{15}\right)}{9\left(\frac{1}{15}\right)} = \frac{10}{9}$$

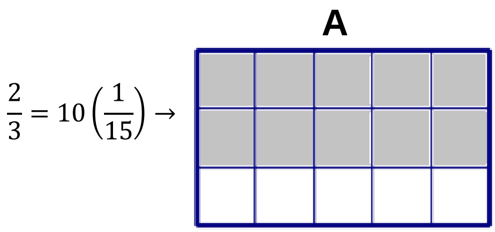
As operações de adição e subtração entre as frações são claramente obtidas pela contagem da "unidade" $\frac{1}{15}$ e dispensam maiores explicações, enquanto a divisão, embora pareça simples enquanto manipulação simbólica por se reduzir a divisão dos inteiros 10 e 9, requer mais esclarecimentos.

É preciso notar que no caso da divisão você esta se perguntando quanto $9\left(\frac{1}{15}\right)$ cabe em $10\left(\frac{1}{15}\right)$? ou seja, estamos medindo $10\left(\frac{1}{15}\right)$ com a nova "unidade" $9\left(\frac{1}{15}\right)$.

Assim, a unidade $\frac{1}{15}$ deixa de ser a unidade de referência e nossa operação se desenvolve em contar as unidades $\frac{1}{15}$ até completar $9\left(\frac{1}{15}\right)$ unidades que constitui uma unidade da nova unidade $9\left(\frac{1}{15}\right)$ e, portanto, cada uma de suas partes $\frac{1}{15}$ constitui $\frac{1}{9}$ dessa nova unidade $9\left(\frac{1}{15}\right)$.

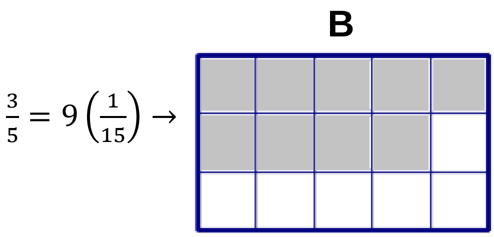
A operação de divisão $\frac{2}{3} \div \frac{3}{5} = 10\left(\frac{1}{15}\right) \div 9\left(\frac{1}{15}\right) = \frac{10\left(\frac{1}{15}\right)}{9\left(\frac{1}{15}\right)} = 1\frac{1}{9}$, ou $\frac{10}{9}$, pode ser interpretada geometricamente, então, como segue:

Figura 13 - Divisão de fração



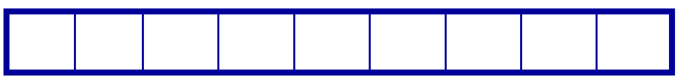
Fonte: Próprio autor

Figura 14 - Divisão de fração



Fonte: Próprio autor

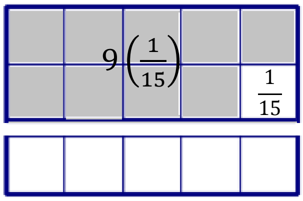
Figura 15 - Fração não colorida



Fonte: Próprio autor

$9\left(\frac{1}{15}\right)$ passa a ser a unidade dividida em 9 partes de $\left(\frac{1}{15}\right)$. Assim, cada parte de $\left(\frac{1}{15}\right)$ se constitui em $\left(\frac{1}{9}\right)$ da nova unidade. Desse modo o que temos que contar toma isso em consideração como segue:

Figura 16 - Unidade dividida em 9 partes iguais



Fonte: Próprio autor

$$\frac{2}{3} = 10\left(\frac{1}{15}\right) = 9\left(\frac{1}{15}\right) + \left(\frac{1}{15}\right)$$

Ou seja, $9\left(\frac{1}{15}\right)$ constitui 1 unidade + $\frac{1}{9}$ =1 + $\frac{1}{9} = \frac{10}{9}$

Essa compreensão é assumida por Guerra e Silva (2008) a partir do teorema 5 de Euclides, já citado, e se constitui na *tecnologia* que sustenta essa *técnica*, ou seja, no caso da divisão isso é traduzido quando é assumido que as frações são medidas de grandezas A e B que admitem uma unidade comum.

Partindo do ponto de vista algorítmico, tomando as frações escritas em relação à unidade comum $\frac{1}{p}$ o resultado da divisão pode ser obtido pela divisão dos numeradores, justificado a seguir:

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = m\left(\frac{1}{p}\right) \div n\left(\frac{1}{p}\right) = \frac{m \div n}{p \div p} = \frac{m \div n}{1} = \frac{m}{n}$$

Consideremos agora a divisão $\left(\frac{1}{2}\right) \div \left(\frac{1}{6}\right)$. Observamos que as frações $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{6}$ têm uma unidade em comum $\frac{1}{12}$, isto é, $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{6}$ contêm um número inteiro de vezes $\frac{1}{12}$, exatamente $\frac{1}{2} = 6\left(\frac{1}{12}\right)$ e $\frac{1}{6} = 2\left(\frac{1}{12}\right)$. Assim,

$$\left(\frac{1}{2}\right) \div \left(\frac{1}{6}\right) = \left[6\left(\frac{1}{12}\right)\right] \div \left[2\left(\frac{1}{12}\right)\right] = \frac{6 \div 2}{12 \div 12} = \frac{3}{1} = 3$$

Parece-nos claro que deixando as frações escritas em uma mesma unidade é possível operar com elas sem grandes dificuldades do ponto de vista algorítmico e com a vantagem de permitir a manipulação de áreas, ou outro objeto que represente a área comum, como recursos didáticos para quem ensina e para quem aprende pelo sentido que pode ser atribuído as operações.

Além disso, Euler (1828, p. 25) afirmar que quando as frações não têm denominadores iguais, nós sempre podemos transformá-las em outras frações que tenham o mesmo denominador. Isso quer dizer que as técnicas operatórias apresentadas podem sempre ser aplicadas com a *técnica* disponibilizada por Guerra e Silva (2008) para encontrar a unidade comum *que consiste na divisão dos lados adjacentes do quadrado.*

Essa *técnica* disponibilizada por Guerra e Silva (idem) para encontrar a unidade comum é sustentada pela *tecnologia* presente em Lima (1991) para mostrar a fórmula para o cálculo de área do retângulo de lados com medidas em números racionais e se articula, segundo nossa compreensão, com os elementos históricos e epistemológicos matemáticos resultando no MER seguinte:

1 - As frações cujo numerador é a unidade é a base de todas as outras. (EULER, 1828, p. 22, tradução nossa), ou seja, toda fração pode ser entendida como um múltiplo (contagem) de uma fração de numerador igual a 1.

2 - As frações sempre tem uma unidade em comum. (EULER, 1828, p. 25), ou seja, dadas duas frações sempre é possível encontrar uma fração de numerador 1 que é comum as duas dadas. Isso quer dizer que as frações dadas podem ser vistas como múltiplas dessa fração de base comum.

3 - A área de um retângulo como o produto de dois segmentos, ou seja, "o retângulo compreendido pelos dois segmentos" feita por Euclides a partir do livro II, segundo Bergé e Sessa (2003, p. 173), e a obtenção da fórmula para o cálculo de área do retângulo com lados de medidas com números racionais na forma posta por Lima (1991). (GUERRA; SILVA, 2008, p. 45)

As frações nesses casos podem ser vistas como medidas de lados dos quadrados/retângulos cuja área é o produto dos lados e, portanto, é o produto das frações. Além disso, o procedimento é determinado pela contagem de unidade comum de áreas determinadas pelas divisões dos lados adjacentes da figura segundo as frações que corresponde a esses lados.

Com a obtenção de uma unidade comum e seguindo a compreensão de Euler (1828) permite pensar as operações de adição e subtração como contagem da unidade comum ao tempo que permite pensar a divisão como contagem de uma unidade definida pela unidade comum as duas frações dadas.

As articulações dessas compreensões permitem, assim, operar com frações demandando de quem ensina e de quem aprende o domínio de práticas de contagem com a vantagem de poder justificar os algoritmos de adição/subtração e multiplicação e divisão de frações dominantes nas escolas de ensino fundamental I e II.

As articulações que apresentamos não se deram de forma caótica ou por acaso, mas segundo intenções didáticas, em nosso caso em acordo com a TAD, que destacamos a seguir:

1 - Da noção de *Transposição Didática*, em que se busca construir os objetos de ensino por meio de praxeologias em complexidade crescente para quem aprende (e ensina). Nesse sentido, os objetos devem percorrer o currículo assumindo diferentes articulações com outros saberes, matemáticos e extramatemáticos, de modo a tornar o saber matemático como um todo coerente e racional, mas que não está (nunca) pronto e acabado.

2 - De que o objeto de estudo se destina a um público de uma instituição que condiciona a construção desse saber de ensino. Nesse caso, é necessário ter em conta as praxeologias que vivem na instituição docente e criar condições que facilitem o acesso ao estudo dessas praxeologias, bem como poder eliminar possíveis dificuldades ao estudo de frações nas diferentes posições que o público pode se encontrar na instituição.

3 - Que o saber é construído com base nas relações que o público, a quem se destina o saber, possui com o objeto de estudo, quanto mais aproximação, maior a relação entre o sujeito e o objeto, e uma fecunda relação levará ao nascimento de um novo processo para a institucionalização desse saber.

Esse é o alvo, tendo em conta que a contagem é um processo social que independe do estudo específico matemático, mas por estar, em geral, instalada no sistema cognitivo das pessoas e evidenciando que operar com frações é análogo a operar com os números inteiros, mais precisamente contar, no sentido de que quem conta, conta alguma coisa. Para Waldegg (1996, p. 13)

> Assim, são as ações que se realizam sobre as quantidades que dão sustentação as operações aritméticas e estes, por sua vez, as que constituem a essência do número; da mesma maneira que as ações de medir, comparar, partir, transformar, etc. são as que dão sentido a quantidade.

A técnica disponibilizada para encontrar a unidade comum por Guerra e Silva (2008) provê esse fazer de contar. Essas técnicas embebidas das articulações históricas e epistemológicas da matemática, quando aliadas as compreensões de

Euler (1828), sobre a fração “base” de outras frações, e recursos teóricos da TAD pensados, não somente para a análise, mas para o desenvolvimento, nos permitiu pensar essa construção do Modelo Epistemológicos de Referência - MER para a análise e o desenvolvimento de praxeologias para o ensino de operações com frações e, em particular, como promotor de um pensar sobre as necessidades de praxeologias intermediárias como facilitadoras de acesso ao estudo das praxeologias com frações que são dominantes nas salas de aula, a medida que permite compreender os algoritmos operatórios com frações que vivem na instituição docente.

Em resumo, o MER pode ser expresso pelas seguintes praxeologias de modo a responder a questão de pesquisa reformulada: *Como poderíamos representar duas frações de denominadores diferentes usando a representação geométrica do quadrado unitário que permita operar com as partes do mesmo modo que se opera com as frações de mesmo denominador?*

TAREFA

T. Calcular a soma de frações de mesmo denominador.

Para enfrentar a tarefa proposta pelo MER, a técnica de representação exige seu uso rotineiro e, portanto, introduzimos o tipo de tarefa seguinte.

TIPO DE TAREFA

TT(1) Representar graficamente a fração usando quadrado o unitário.

TÉCNICAS

$\tau 1$. Dividir um dos lados do quadrado em tantas partes congruentes quanto seja o denominador da fração.

$\tau 2$. Dividir o quadrado unitário em partes congruentes (retângulos) tomando para lado cada parte da divisão do lado do quadrado unitário.

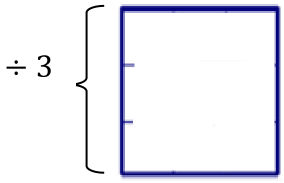
$\tau 3$. Tome tantas partes congruentes do quadrado unitário quanto seja o numerador da fração.

EXEMPLOS

T(1.1) Representar graficamente a fração $\frac{1}{3}$ usando quadrado o unitário.

1º Passo: Dividimos o lado em 3 partes congruentes.

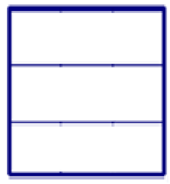
Figura 17: Quadrado unitário



Fonte: Próprio autor

2º Passo: A divisão por 3 gera 3 retângulos

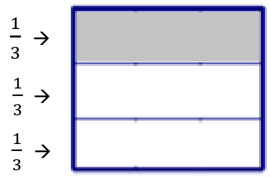
Figura 18: Quadrado unitário dividido



Fonte: Próprio autor

3º Passo: Se toma uma parte do retângulo, ou seja se toma 1 de 3

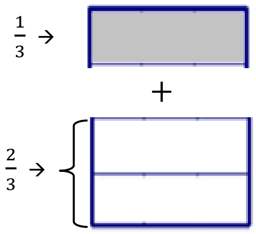
Figura 19: Quadrado unitário dividido horizontalmente



Fonte: Próprio autor

T(1.2). Calcular a soma das frações $\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{3}$.

Figura 20: Soma de frações de mesmo denominador



Fonte: Próprio autor

$$\frac{2}{3} = 1\left(\frac{1}{3}\right) + \ 1\left(\frac{1}{3}\right) = 2 \times \left(\frac{1}{3}\right) = \ 2\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1\left(\frac{1}{3}\right) + \ 2\left(\frac{1}{3}\right) = 3\left(\frac{1}{3}\right) = \ \frac{3}{3} = 1$$

ALCANCE DA TÉCNICA

Proporciona mostrar outras técnicas que sejam capazes de abranger outras questões:

τ(1.1) Calcular a área entre os respectivos lados do quadrado unitário que medem 1 e $\frac{1}{3}$.

$$1 \ \times \ \frac{1}{3} = 1\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$$

τ(1.2) Calcular quantas vezes o retângulo de área $\frac{1}{3}$ cabe no quadrado unitário.

$$1 : \frac{1}{3} = 3 \ \Longrightarrow \ 3 \times \left(\frac{1}{3}\right) = \frac{3}{3} = 1$$

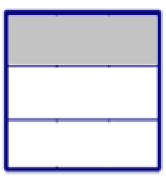
τ(1.3) Calcular a divisão de frações.

$$\frac{2}{3} \ \div \ \frac{1}{3} = 2 \ porque \ 2\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}$$

τ(1.4) Comparar as frações respectivas a cada parte.

Figura 21: Comparação de frações de mesmo denominador

$\frac{1}{3} < \frac{2}{3}$



Fonte: Próprio autor

$\tau(1.5)$ Complementar a unidade.

$$\frac{1}{3} + \ ? = 1$$

PROBLEMATIZANDO A TÉCNICA

TAREFA

T(2). Calcular a soma de duas frações de denominadores diferentes

Como poderíamos representar as frações $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{5}$ usando o quadrado unitário que permita operar com as partes do mesmo modo que se opera com as frações de denominadores diferentes?

A técnica $\tau(1)$ se mostra limitada, pois a problemática está em outro nível de complexidade, portanto, necessitamos criar novas condições de resolução para a referida questão, e sugerimos assim a nova técnica $\tau(2)$.

A técnica $\tau(2)$ é resultante da interpretação entre o que foi posto por Bergé e Sessa (2003, p. 173 apud Guerra e Silva 2008), apoiada no teorema 5 de Euclides quanto as operações serem compreendidas a partir de um isomorfismo operatório entre números, no caso as frações, e as quantidades, as partes de um quadrado, assumindo que se pode operar com os números do mesmo modo que se manipulam com as quantidades em geral, e o a representação de frações apresentada por Lima (1999) quando discute o cálculo de medidas de áreas de figuras planas a partir do quadrado unitário.

Tal como nos referimos em relação a $\tau(1)$, a técnica $\tau(2)$ precisa se tornar rotineira, desse modo e exigido o tipo de tarefa seguinte:

TIPO DE TAREFA

TT(2) Representar graficamente frações de denominadores diferentes usando o quadrado o unitário.

TÉCNICAS

$\tau(2.1)$ Dividir horizontalmente um dos lados do quadrado unitário em tantas partes congruentes (retângulos) quanto seja o denominador da primeira fração.

$\tau(2.2)$ Dividir verticalmente o lado adjacente do quadrado unitário em partes congruentes (retângulos) tanto quanto seja o denominador da segunda fração.

$\tau(2.3)$ Identificar a nova parte congruente obtida pela interseção do $\tau(2.1)$ e $\tau(2.2)$.

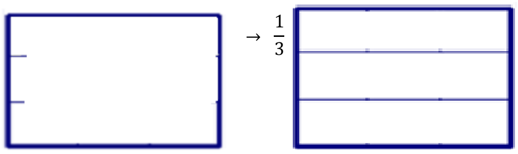
$\tau(2.4)$ Tome tantas partes congruentes das partes obtidas no quadrado unitário quanto seja o numerador das respectivas frações (1º e 2º passos).

EXEMPLOS

T(2.1) Representar graficamente as frações $\frac{2}{3}$,$\frac{3}{5}$ usando quadrado o unitário.

1º Passo: Dividimos inicialmente o lado horizontal do quadrado em três partes iguais e obtemos três retângulos cujas partes são congruentes

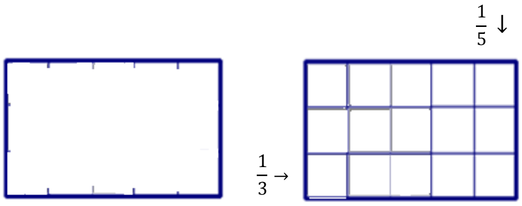
Figura 22: Quadrado unitário dividido horizontalmente em três partes iguais



Fonte: Próprio autor

2º Passo: Em seguida, é dividido o lado vertical em cinco partes congruentes, em retângulos com $\frac{1}{5}$ de área.

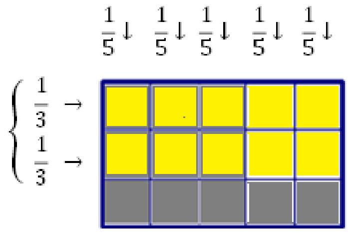
Figura 23: Quadrado unitário dividido verticalmente em cinco partes iguais



Fonte: Próprio autor

3º Passo: Tomemos em seguida às partes referentes à $\frac{2}{3}$,$\frac{3}{5}$ do quadrado unitário.

Figura 24: Partes colorida referentes a divisão em três e cinco partes



Fonte: Próprio autor

A interseção dos retângulos horizontais e verticais totalizou em 15 novos retângulos, cada retângulo representa a fração $\frac{1}{15}$ que é a nova unidade, ou seja, a unidade comum entre as duas frações.

4º passo: Contar os retângulos gerados após a divisão do quadrado unitário referentes às frações $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{5}$.

A fração $\frac{2}{3}$ se refere a 10 partes de $\frac{1}{15}$, ou seja, $10\left(\frac{1}{15}\right)$ e a fração $\frac{3}{5}$ se refere a 9 partes de $\frac{1}{15}$, ou seja $9\left(\frac{1}{15}\right)$.

T(2.2) Calcular a soma das frações $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{5}$.

Como a unidade $\frac{2}{3} = 2\left(\frac{1}{3}\right)$ e $\frac{3}{5} = \ 3\left(\frac{1}{5}\right)$ e a fração resultante entre as divisões é $\frac{1}{15}$ logo $\frac{2}{3} = 2\left(\frac{1}{3}\right) = 10\left(\frac{1}{15}\right)$ e $\frac{3}{5} = 3\left(\frac{1}{5}\right) = 9\left(\frac{1}{15}\right)$ logo $\frac{2}{3} + \frac{3}{5} = 10\left(\frac{1}{15}\right) + \ 9\left(\frac{1}{15}\right) = 19\left(\frac{1}{15}\right)$.

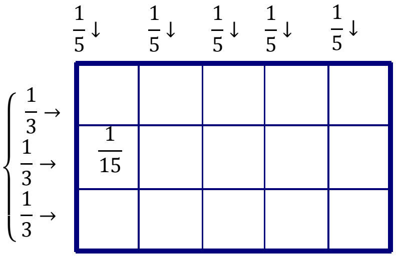
ALCANCE DA TÉCNICA

É fácil que a técnica $\tau 2$ que trata das frações com denominadores diferentes apresenta maior alcance que a técnica τ 1. Essa técnica permite obter uma unidade comum capaz de tornar todas as outras frações sob uma mesma unidade.

Por exemplo, por $\tau 2$ as frações $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{5}$, podem ser lidas como contagem das unidades $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{5}$, ou seja, passam a ter unidade comum igual a $\frac{1}{15}$.

τ(2.1) Calcular a unidade comum resultante da divisão entre as frações $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{5}$.

Figura 25: Unidades comuns referentes a divisão em três e cinco partes



Fonte: Próprio Autor

τ(2.2) Calcular a multiplicação entre as frações $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{5}$.

$$\frac{2}{3} \times \frac{3}{5} = 2\left(\frac{1}{3}\right) \times 3\left(\frac{1}{5}\right) = (2 \times 3)\left(\frac{1}{15}\right) = \frac{6}{15}$$

τ(2.3) Calcular a divisão entre as frações $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{5}$.

$$\frac{2}{3} \div \frac{3}{5} = 10\left(\frac{1}{15}\right) \div 9\left(\frac{1}{15}\right) = \frac{10\left(\frac{1}{15}\right)}{9\left(\frac{1}{15}\right)} = \frac{10}{9}$$

τ(2.4) Calcular a somar entre as frações $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{5}$.

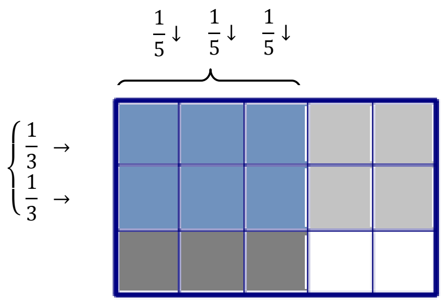
$$\frac{2}{3} + \frac{3}{5} = 10\left(\frac{1}{15}\right) + 9\left(\frac{1}{15}\right) = 19\left(\frac{1}{15}\right) = \frac{19}{15}$$

τ(2.5) Calcular a subtração entre as frações $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{5}$.

$$\frac{2}{3} - \frac{3}{5} = 10\left(\frac{1}{15}\right) - 9\left(\frac{1}{15}\right) = \left(\frac{1}{15}\right) = \frac{1}{15}$$

τ(2.6) Comparar as frações $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{5}$.

Figura 26: Comparação de frações com denominadores diferentes



Fonte: Próprio autor

$\frac{2}{3} = 10\left(\frac{1}{15}\right)$ e $\frac{3}{5} = 9\left(\frac{1}{15}\right)$, portanto, $10\left(\frac{1}{15}\right) > 9\left(\frac{1}{15}\right)$, ou seja, $\frac{2}{3} > \frac{3}{5}$

Em nosso caminhar, buscamos agora mostrar o papel do MER na compreensão das praxeologias presentes nos manuais adotados em uma escola pública e possíveis caminhos que podem ser tomados para a compreensão e construção de uma praxeologia intermediária para o ensino de frações no ensino fundamental I.

CAPÍTULO IV

O MER E A ANÁLISE DE UMA ORGANIZAÇÃO PRAXEOLÓGICA

Sabemos que as tarefas em uma organização praxeológica definem minimamente a organização didática de uma instituição, tal situação está presente no desenvolvimento do trabalho didático realizado em torno de uma organização matemática, essa organização será discutida dentro da proposta de Chevallard (1999) quando trata dos momentos do estudo ou momentos didáticos.

Como mencionamos no capítulo anterior, nossa intenção ao construir o MER é de nos municiar de um dispositivo didático que nos permita vislumbrar as articulações entre as praxeologias matemáticas de modo a nos revelar com clareza possíveis modelos epistemológicos sobre frações em nossas instituições de ensino.

Por outro lado, Chevallard (1999) afirma que o livro didático determina em grande parte a opção didática do professor com relação ao tipo de conteúdo a desenvolver em sala de aula, e a maneira de como fazê-lo e para o aluno é uma das maiores fontes de aquisição do saber.

Sob esse pressuposto e considerando que, apesar do avanço da tecnologia e da “viabilidade” que ela oferece, ainda nos dias atuais, alguns colegas de profissão ratificam o afirmado por Chevallard quando assumem o livro didático como material de apoio para suas aulas optamos a caminhar para as análises dos livros textos adotados pela escola.

Para tanto, buscamos durante a análise das praxeologias responder questões que emergem do MER considerado como as dos seguintes tipos:

- → As praxeologias matemáticas, em termos de tarefas e técnicas, que levam os alunos ao encontro das frações são articuladas entre si, num fazer de complexidade crescente?
- → No sentido de integrações de praxeologias para um fazer de complexidade crescente há praxeologias matemáticas que articulem os números inteiros com as frações?
- → As praxeologias matemáticas que levam os alunos ao encontro das operações de adição/subtração de frações requerem a noção de fração até então estudada?

- $\rightarrow$ As organizações matemáticas dos livros do ensino fundamental 4º, 5º e 6º ano apresentam articulações e integrações de praxeologias que favoreçam um fazer mínimo racional de como se faz e de por que se faz as operações de frações pelas técnicas apresentadas?

Assim, nossa análise segue o modelo mínimo de praxeologia apresentado por Chevallard (1999), quando trata de tipos de tarefas T e o modo de fazê-las, que são as técnicas τ Uma praxeologia ou organização praxeológica formam nesta ordem um bloco prático-técnico $[T, \tau]$ o saber-fazer, e um bloco tecnológico-teórico $[\theta, \Theta]$, ou seja, um discurso, mesmo que mínimo, sobre como se faz e por que se faz.

As tarefas em uma organização praxeológica definem minimamente a organização didática, ou seja, uma situação que está presente no desenvolvimento do trabalho didático realizado em torno de uma organização matemática. Chevallard (1999) descreve essa organização por meio de momentos do estudo ou momentos didáticos.

- $\rightarrow$ 1º momento: Primeiro encontro com a organização matemática;
- $\rightarrow$ 2º momento: Exploração do tipo de tarefa e elaboração de uma técnica;
- $\rightarrow$ 3º momento: Constituição do ambiente tecnológico-teórico relativo à técnica;
- $\rightarrow$ 4º momento: Trabalho da técnica;
- $\rightarrow$ 5º momento: Institucionalização;
- $\rightarrow$ 6º momento: Avaliação.

Tal modelo, proposto pela TAD, põe em evidência o saber ensinado, que para ser questionado quanto sua pertinência epistemológica, para quem aprende e para quem ensina, necessita de um modelo epistemológico de referência (MER) que permita aos sujeitos da comunidade de estudo uma razão para o que e como se faz quando diante de uma tarefa com um objeto de saber matemático.

Nesse sentido ganham importância em nossa análise o 2º, 3º e 4º momentos didáticos, não quanto o fazer didático em sala de aula, mas quanto às praxeologias que as induzem, pois essas praxeologias devem prover o fazer racional, isto é, inteligível e justificado, necessário em uma organização praxeológica local, alcance mínimo provido por um modelo epistemológico de referência.

Portanto, a partir de uma compreensão assinalada pelo MER que se corporifica em tipos de tarefas que buscam alcançar com êxito os momentos estudos citados passamos as análises a seguir.

4.1 A ORGANIZAÇÃO PRAXEOLÓGICAS NOS MANUAIS DE ENSINO

Nossas análises se restringem a dois livros didáticos de matemática (4º e 5º anos) quanto ao estudo de frações, especificamente as noções e operações com frações. Os livros foram aprovados pelo PLND com vigência no período de 2011 a 2013 sendo utilizados por alunos de faixa etária entre 08 e 09 anos de idade.

Inicialmente apresentamos o sumário da organização matemática que trata das frações.

Quadro 05 - Frações nos livros didáticos

Asas para voar Ed. Ática	**Asas para voar Ed. Ática**
4º ano	**5º ano**
➢ Dividindo em partes iguais; ➢ Partes de um todo; ➢ Partes de uma figura; ➢ Comparando números fracionários; ➢ O tempo e as frações.	➢ Dividindo em partes iguais; ➢ Leitura de frações; ➢ Divisão e multiplicação envolvendo frações; ➢ O tangram e as frações; ➢ Fração equivalente; ➢ Simplificação de frações; ➢ Comparando frações com a unidade; ➢ Colorindo para comparar; ➢ Comparação de frações; ➢ A reta numérica; ➢ Frações com o mesmo denominador; ➢ Composição e adição de frações ➢ Adição e subtração de frações com denominadores diferentes; ➢ Multiplicando fração por um número natural; ➢ Frações de unidades; ➢ Fração de uma fração; ➢ Dividindo fração por um número natural.

Fonte: Próprio autor

Os sumários dos livros do 4º e 5º ano indicam que o encontro com frações no 4º ano deve se dar a partir da noção de parte e todo e mantida no 5º ano seguinte. Nesses manuais é possível perceber que seguem uma sequência mínima com aparentes articulações entre os tópicos, pelo menos em cada manual e não entre eles. Isso é destacado pelos autores do manual do 4º ano como segue:

4.1.1 ORGANIZAÇÃO PRAXEOLÓGICA DO LIVRO DO 4º ANO

Os autores Souza e Spinelli (2010, p. 80) afirmam que

> Ao elaborar o livro, houve também a preocupação em não "isolar" determinado assunto apenas no capítulo dedicado a ele, mas fazer uso de todos os eixos de conhecimento matemático do Ensino Fundamental em interações possíveis.

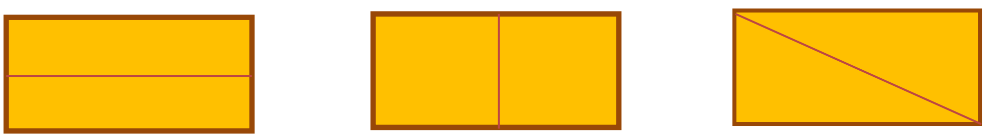
Parece-nos que o preconizado pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) é assumido pelos autores quando introduzem o estudo das frações a partir de situações de contextos que devem levar os alunos ao encontro com as frações, mas sem perder de vistas a posição do objeto fração nesse nível de ensino, em particular no 4º ano, como assim se refere

> No 4º ano as frações são tratadas sob o aspecto "parte-todo" e que ainda é cedo para utilizá-lo como razão entre grandezas. Como representação de quociente, seu uso será apenas de forma implícita. (SOUZA; SPINELLI, 2010, p. 80)

Despistando a confusão conceitual constante nessas recomendações pedagógicas, como "*as frações são tratadas sob o aspecto "parte-todo" e que ainda é cedo para utilizá-lo como razão entre grandezas*", já que a noção referida parte-todo se assenta na comparação entre grandezas e, portanto, é também uma razão entre grandezas, notamos que é afirmado que o quociente, e, portanto a divisão, é tratada implicitamente, muito embora a divisão como ação de dividir "algo" se faça fortemente presente na noção parte-todo de onde segue a noção de fração associadas aos respectivos registros numéricos.

Há preocupação dos autores quanto ao processo de dividir. Isso está claro quando os autores recomendam ao professor que observe como os alunos dividem uma folha de papel retangular em duas partes iguais, imaginadas como um bolo de papel. O resultado esperado é anunciado de forma vaga do seguinte modo: *O "bolo" de papel pode ser cortado em partes iguais, e de várias formas:*

Figura 27 - Representação de fração



Fonte: Souza e Spinelli (2011, p.80)

No entanto, a atenção recomendada dos professores quanto ao processo de divisão não recomenda nenhuma forma, ou formas, que devem ser adotadas por permitir avançar o estudo sobre a noção de frações. Ao contrário, recomenda a divulgação de diferentes formas.

Essa diversidade de formas pode vir a se constituir em obstáculo para tarefas que busquem tratar as frações a partir de modelos contínuos, como citados por Pinilla (2007), por constituir dificuldades aos alunos em identificar partes com formatos diferentes que possuem a mesma medida de área.

As formas sugeridas, e apresentadas acima, são de complexidade significativa para as crianças que ainda não dispõem em seu equipamento praxeológico de infraestrutura didático-matemática que lhes permitam deduzir tal igualdade de tamanho, no caso, retângulo igual quadrado igual triângulo.

Nesse sentido, o TANGRAM, que dispões de diferentes formas que constitui um quadrado é utilizado com frequência pelos manuais escolares para alunos do quinto ano, como ocorre nos manuais dos autores ora analisados. É preciso cautela no uso dessa técnica didática, pois a infraestrutura didático-matemática pode não permitir avançar no estudo de frações pela insuficiência do estudo de praxeologias de geometria, por exemplo, as referentes a semelhança/congruência.

Não há dúvida que a complexidade que envolve o processo de divisão de grandezas contínuas merece cuidado maior. Isso demanda a construção de praxeologias adequadas a cada posição do ensino de fração. Ora podem ser anunciadas, como fazem os autores, mas evitando a diversidade, ora problematizando quando necessário, com a intenção de permitir avançar o estudo.

Esse ponto é nevrálgico em nosso modelo e se manifesta por meio das praxeologias intermediárias que permitem avançar o estudo integrado da noção de fração parte-todo com as operações com frações que constitui parte significativa do conceito de fração. A palavra conceito é usada aqui no sentido de campo conceitual proposto por Vergenaud (1990).

Os autores parecem de algum modo reconhecer os cuidados necessários com a divisão quando recomendam aos professores as necessidades de práticas com grandezas discretas como indispensáveis para iniciar o estudo no manual quando assim se manifestam.

> Antes de começar a trabalhar com as atividades do capítulo é necessário fazer um levantamento, entre as crianças, para verificar se elas conhecem alguns termos, fração, um meio, metade, terça-parte, entre outros - e qual é o significado que dão a eles. O professor pode concretizar as situações que pedem partes de quantidades discretas usando objetos iguais: palitos, peças do material dourado, etc. Só depois de manipular objetos é que as crianças podem iniciar a leitura das informações contidas nos livros. (SOUZA; SPINELLI, 2011, p. 80, M 35)

Essas práticas com modelos discretos não são explicitadas, mas deixadas ao professor suas elaborações, que supomos acontecer a partir de suas observações. No entanto, não há recomendação explícita sobre essas práticas serem problematizadas, ou seja, de que respondam o necessário questionamento: *qual o papel das práticas com os modelos contínuos e discretos no processo de estudo?*

Supomos então que essas recomendações são feitas pelos autores como uma "preparação" dos alunos para o enfrentamento da seguinte tarefa:

Figura 28 – As primeiras noções de frações

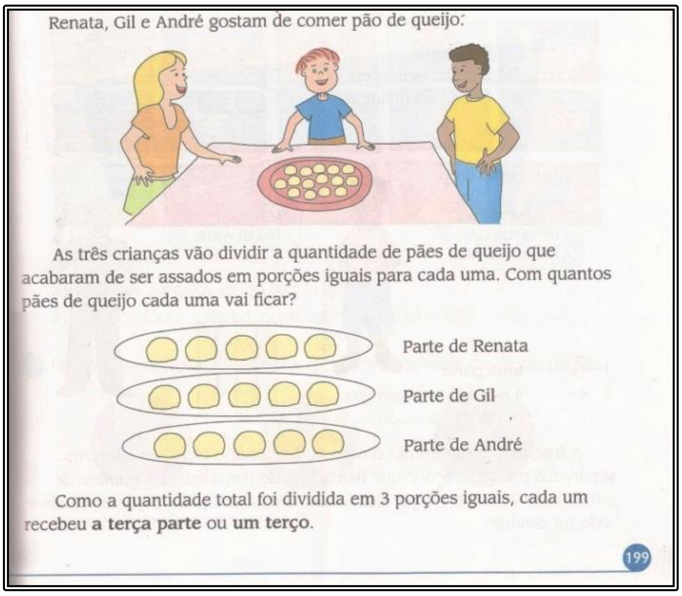
Fonte: Souza e Spinelli (2011, p. 198)

O primeiro encontro dos alunos com as frações, pelo manual, deve acontecer a partir da noção da divisão de um bolo em duas partes iguais, sem problematizar a divisão em partes iguais para os alunos e tampouco para o professor. Acontece em um contexto supostamente concreto como preconizado pelos PCN em que se admite que as crianças precisem de técnica didática com materiais concretos e manipuláveis para tornar a tarefa significativa para eles, uma vez que supostamente se apresenta no mundo objetivo da criança.

Tarefa T1	***Técnica τ_1***
Dividir o bolo em duas partes iguais	*Senso comum de divisão, mas com as formas previstas pelos autores.*

Em continuidade o manual apresenta as frações por meio de um contexto supostamente concreto com grandezas discretas.

Figura 29 – Tarefa que propõe mudança de representações



Fonte**:** Souza e Spinelli (2011, p. 199)

Tarefa T2	***Técnica τ_2***
Dividir a quantidade de pão de queijo em partes iguais para três crianças.	*Divisão em partes a partir da contagem de elementos.*

Lembramos que nossas análises sobre a noção de fração estudada são norteadas pelos seguintes questionamentos:

- As praxeologias matemáticas, em termos de tarefas e técnicas, que levam os alunos ao encontro das frações são articuladas entre si, num fazer de complexidade crescente?
- No sentido de integrações de praxeologias para um fazer de complexidade crescente há praxeologias matemáticas que articulem os números inteiros com as frações?

Esses questionamentos têm como objetivo conduzir os possíveis resultados para nossa questão de pesquisa: ***Qual a praxeologia (intermediária) que pode favorecer o encontro dos alunos com a adição e subtração de frações pela eliminação da desconexão entre as práticas sobre noção de fração e as práticas operatórias com frações?***

E que tais questionamentos, reafirmamos, se dão em busca de um fazer matemático inteligível na sala de aula de modo a favorecer os momentos didáticos que devem ser presente no processo de estudo, tais como:

- O 2º momento - Exploração do tipo de tarefa e elaboração de uma técnica;
- O 3º momento - Constituição do ambiente tecnológico-teórico relativo à técnica; e
- O 4º momento - Trabalho da técnica - está longe de se fazerem presente na organização didática decorrente do estudo em sala de aula dessa organização matemática.

Como podemos observar, as nossas respostas são negativas. Para clarificar nossa compreensão observamos que:

1 - Não há exploração do tipo de tarefa e elaboração de uma técnica, ou seja, uma tarefa como problematizadora das outras. (2º momento).

2 - A tarefa com modelo discreto, cada parte pode ser obtida de modo simples por contagem de pães de queijo, portanto se distingue da anterior por não exigir a divisão em partes iguais de um todo para depois contar as suas partes. Tudo acontece como a divisão de inteiros em partes iguais e como tais, embora representados por uma fração, pode ser um número inteiro como acontece na tarefa apresentada. Cada *terça parte* é igual a *cinco* pães de queijo!

No entanto, não há relação explicita entre número inteiro e fração. Além disso, a contagem não é explicitada como técnica, ou seja, não há a *constituição do ambiente tecnológico-teórico relativo à técnica* (3º momento didático).

3 - Como dissemos acima, a problemática de *dividir uma grandeza contínua em partes iguais, como um segmento ou um polígono, por exemplo,* não deve ser assumida nesta posição de ensino na escola considerando que o universo cognitivo e equipamento praxeológico das crianças não dispõem de relações e práticas com esses objetos matemáticos. Essa é uma restrição ao estudo de frações nessa posição do ensino escolar.

Assim, segundo o pensar que norteia a transposição didática de que o objeto de ensino tem passado e futuro, e daí a necessidade de integrações de tarefas e técnicas entre si, torna-se necessário que o professor disponibilize uma infraestrutura mínima de saberes quanto a divisão em partes iguais aos alunos que permita tais divisões e isto inclui as formas de divisão, como as sugeridas para o bolo, por exemplo, e, importante do ponto de vista didático, que formas devem ser eleitas em função de permitir operar com as partes como preconizado pelo modelo de referência.

Mas esse modo de pensar exige que as tarefas com modelos discretos sejam objetos de estudo anterior, ou seja, as tarefas com modelos contínuos devem surgir como problematização da técnica apresentada para os modelos discretos.

Nesse caminhar, um modelo contínuo deveria ser apresentado e institucionalizado como uma técnica didática que permitisse a discretização necessária para a contagem das partes necessárias e dar sentido as frações, e as operações entre elas, como números que expressam medidas de grandezas (contínuas).

Nesse sentido, o manual esta longe de levar as atividades de medição para obtenção de uma fração como medida de uma grandeza. Independente, dessa compreensão, nos parece óbvio que problematizações de tarefas estão longe do manual e isso é o bastante para afirmar que não há o trabalho da técnica (4º momento).

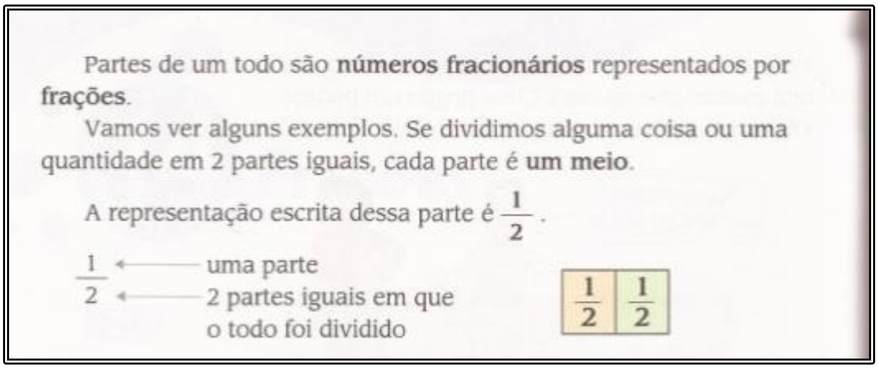
A falta de clareza de quais tarefas com modelos discretos são indispensáveis para iniciar o estudo no manual, e que são deixadas a cargo do professor suas elaborações, evidenciam o *problema praxeológico do professor: "o que de noção parte-todo e como ensiná-la"* sem que lhe seja disponibilizado a ele o papel funcional das respostas a essa problemática na continuidade do estudo das crianças, principalmente quanto as possíveis conexões que essas tarefas devem guardar com as tarefas com modelos contínuos.

É oportuno destacar que os professores, mesmo para aqueles possuidores de uma infraestrutura matemática que possa compreender a problemática da divisão, não dispõem de recursos teóricos que lhes permitam dar conta das tarefas deixadas sob suas responsabilidades, como um problema didático de grande complexidade e que exige esforços significativos, não de um professor em particular e sim da instituição docente.

Segundo nossa interpretação, essa ausência de clareza das tarefas deixadas para o professor e do papel da cada prática, com modelos discretos e contínuos, implica a não clareza de um possível modelo epistemológico existente sobre a noção de frações que o autor intenciona atingir com a organização praxeológica constante no manual.

Observe que nosso entendimento é ratificado pela institucionalização de fração, segundo o manual a partir da noção parte-todo, tendo em conta apenas as duas tarefas, acima apresentadas. Essa institucionalização é apresentada como segue as figuras 30 e 31.

Figura 30 – Primeiras noções de número fracionário a partir da ideia de metade



Partes de um todo são **números fracionários** representados por **frações**.

Vamos ver alguns exemplos. Se dividimos alguma coisa ou uma quantidade em 2 partes iguais, cada parte é **um meio**.

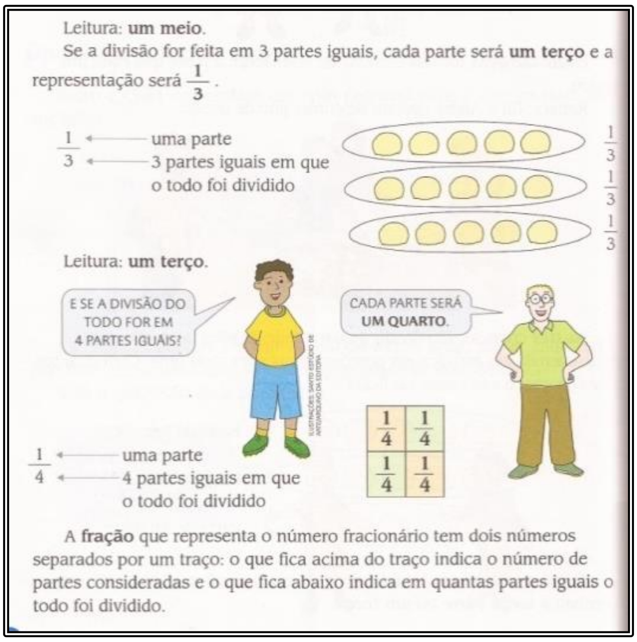
A representação escrita dessa parte é $\frac{1}{2}$.

1 ← uma parte
2 ← 2 partes iguais em que o todo foi dividido

$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Fonte**:** Souza e Spinelli (2011, p. 200)

Figura 31 – Primeiras noções de número fracionário maiores que a metade



Leitura: **um meio**.

Se a divisão for feita em 3 partes iguais, cada parte será **um terço** e a representação será $\frac{1}{3}$.

$\frac{1}{3}$ ← uma parte / 3 partes iguais em que o todo foi dividido

Leitura: **um terço**.

$\frac{1}{4}$ ← uma parte / 4 partes iguais em que o todo foi dividido

A **fração** que representa o número fracionário tem dois números separados por um traço: o que fica acima do traço indica o número de partes consideradas e o que fica abaixo indica em quantas partes iguais o todo foi dividido.

Fonte: Souza e Spinelli (2011, p. 200)

A institucionalização da fração é feita como registro de números fracionários que é descrito como dois números separados por um traço em que o número de cima indica o número de partes consideradas e o que fica abaixo indica em quantas partes iguais o todo foi dividido.

Defendemos que poderíamos pensar inicialmente a fração do modo similar ao que culturalmente se pensa inicialmente os números inteiros; como um número concreto, ou seja, como a medida de uma grandeza.

Para isso, é necessário que a unidade tomada para medir uma dada quantidade de grandeza, que deve ser do mesmo gênero da grandeza, se mostre limitada para medir “exatamente” essa quantidade de grandeza. Isso ocorre, por exemplo, quando um número inteiro de vezes da unidade considerada não compõe “exatamente” a quantidade da grandeza em questão.

Isso requer a divisão da unidade considerada em partes iguais que permitam essa composição da quantidade de grandeza com um número inteiro de vezes dessa nova unidade, ou subunidade.

É sob esse pensa que se assenta a noção parte-todo, na definição de uma unidade, pensada como parte da grandeza considerada, que quando reunidas compõem num número inteiro de vezes uma quantidade da grandeza em jogo.

O processo de medir, que aqui nos referimos, está claro, consiste em contar unidades que possam ser pensadas como partes do que se mede. Num processo de comparação. É sob esse pensar que fração toma o estatuto dos números inteiros como números concretos e não apenas como registro. É a medida de uma grandeza e como tal pode ser representada por diferentes registros, todos em acordo com a unidade de medida considerada.

Na figura 31 da página 95, a *fração base* $\frac{1}{15}$ não é considerada, embora seja do tipo usado como exemplos na definição. A fração $\frac{1}{3}$ aqui é tomado como registro em que o número de cima do traço indica o número de partes iguais tomadas do todo quando dividido em 3 partes iguais. Assim, cada parte tem cinco pães. Está claro, portanto, que a noção de fração tomada pelo manual no caso de grandezas discretas é de operador, contrariando a noção anunciada parte-todo.

No desenvolvimento da noção de fração como número torna-se necessário considerar contextos a partir de problematização das tarefas anteriores, isto é, questionar em quantos modos podem dividir 15 pães de queijos em um número inteiro de partes iguais. Entre esses modos ira surgir partes iguais com cinco pães de queijo, que pode ser representada por $\frac{1}{15}+\frac{1}{15}+\frac{1}{15}+\frac{1}{15}+\frac{1}{15}=5\left(\frac{1}{15}\right)=\frac{5}{15}$ obtida pelo processo de contagem que, embora culturalmente presente na escola, precisa, isso é importante do ponto de vista didático, ser assumido publicamente pelo professor e, é claro, pelos autores dos manuais, como a justificativa da técnica.

A mudança de subunidade tem como consequência a mudança da medida, embora o todo, ou seja, a unidade, não tenha mudado de "tamanho". Isso vai mostrar que a fração $\frac{5}{15}$ pode ser representada pela fração $\frac{1}{3}$ desde que se tome para medida a nova subunidade com cinco pães de queijo.

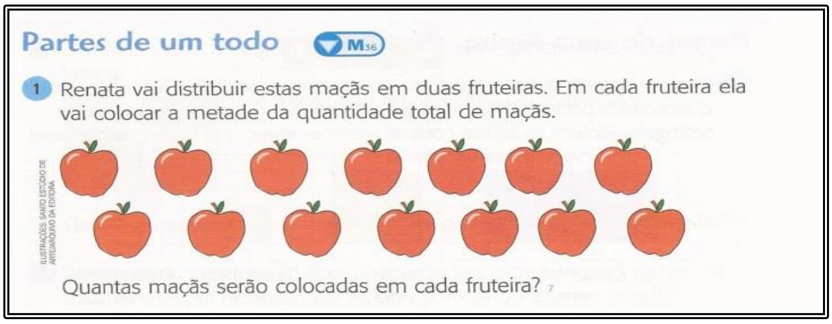
Esse pensar de problematização das tarefas que demandam a construção de técnicas não se da de forma caótica, mas segundo o modelo epistemológico construído para a construção dos objetos matemáticos que se intenciona ensinar.

É claro que a organização didática irá exigir técnicas didáticas que permitam fazer viver as tarefas demandadas pelo MER, aqui no caso, um modo que permita ao aluno, sob as condições a que estão subordinados, quanto à infraestrutura matemática e didática, por exemplo, de proceder à divisão de números inteiros de vezes de partes iguais uma grandeza. É emergente aqui a necessidade das *tarefas* *intermediárias* que tornam possível o processo de estudo como preconizado pelo MER.

Parece, no entanto que o manual é regido pelo fazer cultural da escola, ou seja, por tipos de tarefas que sempre se fizeram presentes no ensino de frações, independentes de um modelo epistemológico. Por ter sido assim, sempre assim, sem ter em conta a história e a epistemologia matemática das frações e, importante do ponto de vista da didática, a tomada de consciência da existência do fenômeno da transposição didática em que os objetos matemáticos de ensino têm uma história que pode ser contada por meio de diferentes epistemologias, ou seja, por meio das praxeologias que vivem e que viveram na matemática escolar.

Seguindo o manual propõe outras atividades. A primeira pode ser pensada pelo aluno como uma tarefa de divisão de inteiros, estudado no capítulo anterior, embora não reporte explicitamente nenhuma relação entre esse tipo de tarefas, pelo menos quanto a dar o sentido $14 \div 2$ como a fração $\frac{14}{2}$, ou seja, que $14 \div 2 = \frac{14}{2} = 7$.

Figura 32 – Exercício 01



Fonte**:** Souza e Spinelli (2011, p. 201)

O objetivo é o uso da definição de número fracionário e a fração como seu registro, com o adicional de associar a palavra “metade” com “um meio”. Daí segue a contagem dos elementos das partes.

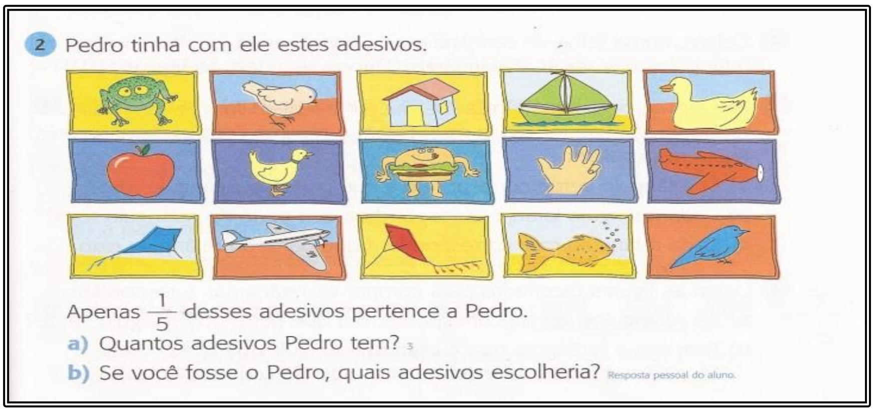
Tarefa 3	***Técnica τ_3***
Dividir a quantidade de maçã em duas fruteiras. Calcular a metade de 14 maçãs.	*1 - Dividir as maçãs em duas partes iguais e contar maçãs de uma das partes* *2 - Algoritmos de divisão de inteiros*

Mas, sete não é um numero fracionário, muito embora possa ser representado por uma fração. Nesse caso, a medida de 7 tendo $\frac{1}{2}$ como fração base é igual a 14, pois 7 tem exatamente 14 vezes a fração base $\frac{1}{2}$, ou seja, $14\left(\frac{1}{2}\right) = 7$. Essa interpretação não se adéqua ao contexto posto que é criado para o uso da definição do manual que tem a fração como registro.

No caso específico, objetiva associar a palavra “metade” com a palavra “um meio” e, portanto ao seu registro $\frac{1}{2}$. Isso remete a noção apresentada de fração com a de operador cuja função é associar o todo a sua metade que se encontra dividindo por 2.

A atividade seguinte, de modo similar, solicita expressar o número dado a partir da fração de uma coleção de adesivos:

Figura 33 – Exercício 02



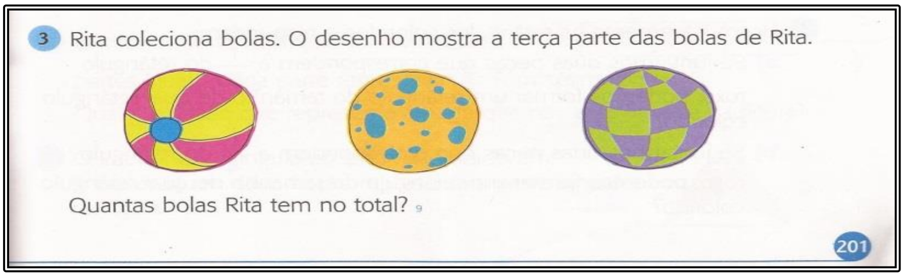
Fonte: Souza e Spinelli (2011, p. 202)

Tarefa 4
Encontrar a quantidade de adesivo que pertence ao Pedro

A tarefa é do tipo estudado no texto e tem a técnica da contagem das partes iguais. Aqui, a justificativa é a definição de fração como registro apresentada no manual. Dado o registro, qual é a parte do todo. Mas subjaz a concepção de operador. O mesmo é seguido na atividade seguinte.

Técnica τ_4
Divisão de inteiros; Contagem; Concepção de operador.

Figura 34 – Exercício 03


3 Rita coleciona bolas. O desenho mostra a terça parte das bolas de Rita.

Quantas bolas Rita tem no total? 9

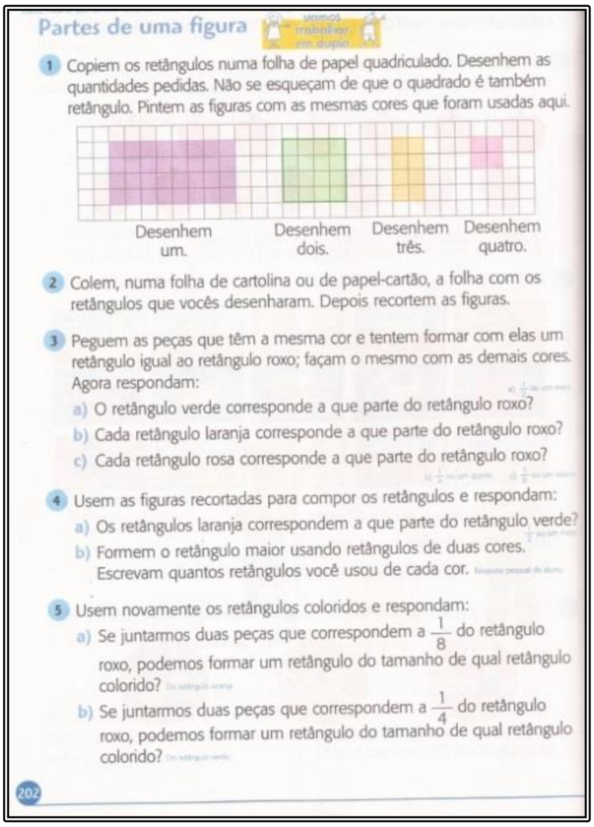
201

Fonte**:** Souza e Spinelli (2011, p. 203)

Tarefa 5
Encontrar a quantidade total de bolas.

O manual na sequência apresenta novas atividades que tem como título “partes de uma figura”. Nesse tópico, a fração como parte-todo parece florescer, mas ainda persiste a definição como registro de uma quantidade e de forma tímida, se assim podemos dizer, parece evidenciar a fração como medida das partes de uma unidade.

Figura 35 - Parte de uma figura como fração



Partes de uma figura

Vamos trabalhar em dupla

1 Copiem os retângulos numa folha de papel quadriculado. Desenhem as quantidades pedidas. Não se esqueçam de que o quadrado é também retângulo. Pintem as figuras com as mesmas cores que foram usadas aqui.

Desenhem um. Desenhem dois. Desenhem três. Desenhem quatro.

2 Colem, numa folha de cartolina ou de papel-cartão, a folha com os retângulos que vocês desenharam. Depois recortem as figuras.

3 Peguem as peças que têm a mesma cor e tentem formar com elas um retângulo igual ao retângulo roxo; façam o mesmo com as demais cores. Agora respondam:

a) O retângulo verde corresponde a que parte do retângulo roxo?

b) Cada retângulo laranja corresponde a que parte do retângulo roxo?

c) Cada retângulo rosa corresponde a que parte do retângulo roxo?

4 Usem as figuras recortadas para compor os retângulos e respondam:

a) Os retângulos laranja correspondem a que parte do retângulo verde?

b) Formem o retângulo maior usando retângulos de duas cores. Escrevam quantos retângulos você usou de cada cor.

5 Usem novamente os retângulos coloridos e respondam:

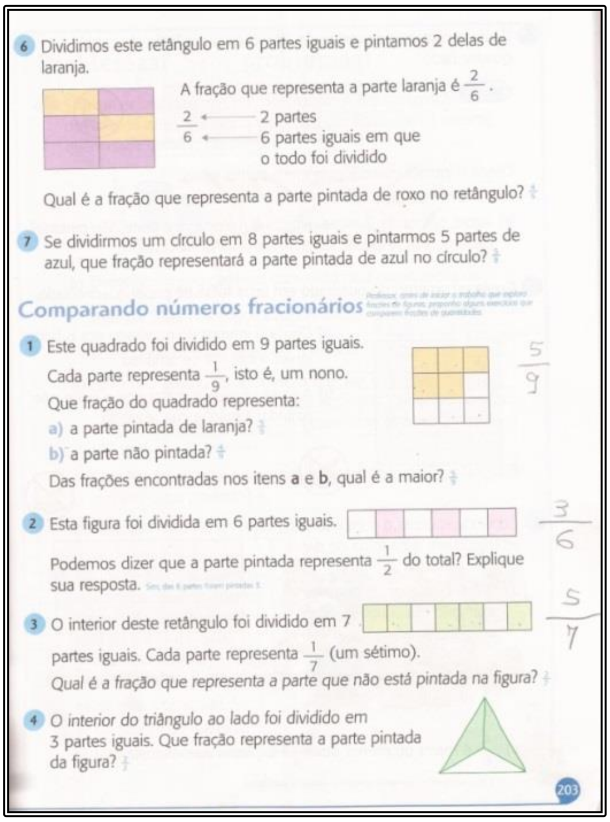
a) Se juntarmos duas peças que correspondem a $\frac{1}{8}$ do retângulo roxo, podemos formar um retângulo do tamanho de qual retângulo colorido?

b) Se juntarmos duas peças que correspondem a $\frac{1}{4}$ do retângulo roxo, podemos formar um retângulo do tamanho de qual retângulo colorido?

202

Fonte: Souza e Spinelli (2011, p. 202)

Figura 36 - Fração como medida de partes



6 Dividimos este retângulo em 6 partes iguais e pintamos 2 delas de laranja.

A fração que representa a parte laranja é $\frac{2}{6}$.

2 ← 2 partes

6 ← 6 partes iguais em que o todo foi dividido

Qual é a fração que representa a parte pintada de roxo no retângulo?

7 Se dividirmos um círculo em 8 partes iguais e pintarmos 5 partes de azul, que fração representará a parte pintada de azul no círculo?

Comparando números fracionários

1 Este quadrado foi dividido em 9 partes iguais.

Cada parte representa $\frac{1}{9}$, isto é, um nono.

Que fração do quadrado representa:

a) a parte pintada de laranja?

b) a parte não pintada?

Das frações encontradas nos itens **a** e **b**, qual é a maior?

$\frac{5}{9}$

2 Esta figura foi dividida em 6 partes iguais.

Podemos dizer que a parte pintada representa $\frac{1}{2}$ do total? Explique sua resposta.

$\frac{3}{6}$

3 O interior deste retângulo foi dividido em 7 partes iguais. Cada parte representa $\frac{1}{7}$ (um sétimo).

Qual é a fração que representa a parte que não está pintada na figura?

$\frac{5}{7}$

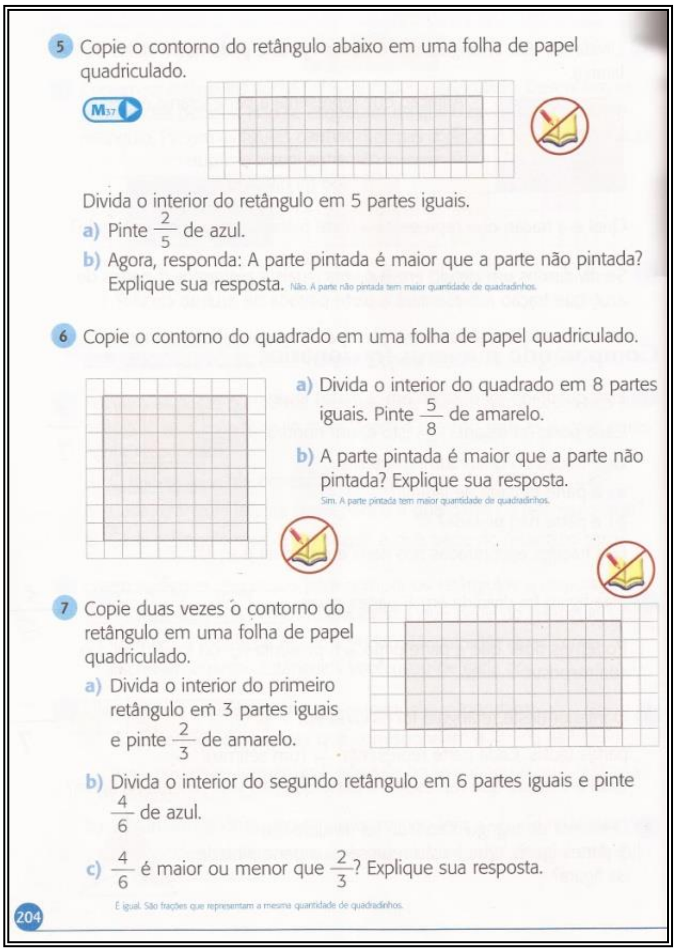
4 O interior do triângulo ao lado foi dividido em 3 partes iguais. Que fração representa a parte pintada da figura?

203

Fonte: Souza e Spinelli (2011, p. 202)

É nesse momento que o estudo do manual apresenta um sistema de tarefas articuladas com um propósito, no caso, comparar frações. É por essa razão que frações ganham o "status" medida, embora sem ser anunciado. Há a necessidade de medir diferentes quantidades de uma grandeza, nesse caso, representada por retângulos em papel quadriculado.

Figura 37 – Comparando números fracionários



5 Copie o contorno do retângulo abaixo em uma folha de papel quadriculado.

Divida o interior do retângulo em 5 partes iguais.

a) Pinte $\frac{2}{5}$ de azul.

b) Agora, responda: A parte pintada é maior que a parte não pintada? Explique sua resposta. Não. A parte não pintada tem maior quantidade de quadradinhos.

6 Copie o contorno do quadrado em uma folha de papel quadriculado.

a) Divida o interior do quadrado em 8 partes iguais. Pinte $\frac{5}{8}$ de amarelo.

b) A parte pintada é maior que a parte não pintada? Explique sua resposta. Sim. A parte pintada tem maior quantidade de quadradinhos.

7 Copie duas vezes o contorno do retângulo em uma folha de papel quadriculado.

a) Divida o interior do primeiro retângulo em 3 partes iguais e pinte $\frac{2}{3}$ de amarelo.

b) Divida o interior do segundo retângulo em 6 partes iguais e pinte $\frac{4}{6}$ de azul.

c) $\frac{4}{6}$ é maior ou menor que $\frac{2}{3}$? Explique sua resposta.

É igual. São frações que representam a mesma quantidade de quadradinhos.

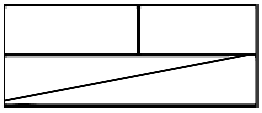
204

Fonte: Souza e Spinelli (2011, p. 204)

Não é possível fazer comparações apenas com os registros e tampouco com representações complexas e de difícil aceitação pelos alunos podemos afirmar observando a figura 36, o exercício 4 da página 100, em que um triângulo é dividido em três triângulos de "tamanhos" iguais. O triângulo em branco na figura não parece igual aos outros dois. Os alunos não possuem infraestrutura didática-matemática para se assegurarem desse fato.

Figuras decompostas em figuras distintas também devem ser evitadas, observemos a figura 38.

Figura 38 – Retângulo dividido em figuras distintas



Fonte: Pinilla (2007, p. 141)

Assegurar, por exemplo, que o “tamanho” de um retângulo é igual ao “tamanho” de um triângulo em uma figura, observamos que o emprego sequencial do operador-metade que corresponde à fração $\frac{1}{2}$, não está ao alcance das crianças do 4º ano.

Observamos que os autores apresentaram como ferramenta o uso do papel quadriculado na figura 37 da página 101 e fornece de modo subjacente uma unidade implícita, o quadradinho, que permite fazer a contagem, e, portanto a medida, e com isso a comparação. O papel quadriculado, ou a decomposição em “quadriculados” de uma figura, e importante do ponto de vista didático, é a técnica didática que torna possível a praxeologia de comparação de fração.

No entanto, embora haja uma sequência de tarefas com propósito em nossa compreensão de comparação, a noção de fração como registro impede que se comparem as frações como números, pois estas não são apresentadas como tais. A fração $\frac{1}{2}$ como operador metade, por exemplo, remete a uma noção qualitativa de dividir algo ao meio que se distingue da noção de fração como medida que é a quantificação dessa metade.

Em resumo, a organização matemática sobre frações em análise demonstra fragilidades conceituais decorrentes da presença em flash, se assim podemos dizer, de diferentes modelos epistemológicos caracterizados pelas noções de frações; fortemente como registro, como operador, como quociente e, embora anunciado e fortemente posto em imagens, confusas, senão complexas as vezes, a noção parte-todo.

Parece que o manual incorpora dificuldades para quem ensina e para quem aprende no estudo por essa poluição de modelos epistemológicos, de diversidade de representações de frações de modo precoce. Talvez por isso não haja a institucionalização de tipos de tarefas e técnicas, mas de um gênero de tarefa, mais precisamente de indicar o registro fração para uma quantidade de grandeza, ora contínua, ora discreta, com naturezas diversas que elevam em complexidade o estudo.

A necessidade de um tipo de tarefa se evidencia nos tópicos de “partes de uma figura” e “comparações de frações”, que são enfrentadas com o uso do papel quadriculado que é recomendado aos professores como indispensável num primeiro contato com quantidades não discretas (p.81, manual do professor), embora já o tenha feito de modo diferente em atividades anteriores. O desenho em papel quadriculado facilita à contagem (a medida não é mencionada) a contagem. Essa forma ingênua e espontânea de ação não permite evidenciar o papel estratégico da medida e do processo de medição no estudo de frações.

Nesse caso, um tratamento implícito de fração como medida é posto revelando a fragilidade das noções até então encaminhadas e, do ponto de vista didático, deixa revelar que um processo de medição, mesmo que já pronto e acabado como o do papel quadriculado, acaba por determinar praxeologias com novas potencialidades para o avanço do estudo.

4.1.2 ORGANIZAÇÃO PRAXEOLÓGICA DO LIVRO DO 5º ANO

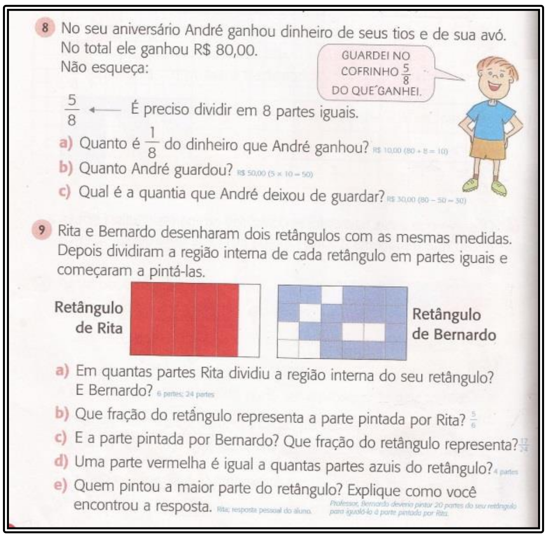
Parece-nos que os autores persistem no processo de dividir para se obter a fração a partir da divisão, ou seja, as tarefas estão associadas às atividades de dividir medir para medir, isto é, de associar uma grandeza a um número, quantificando-a comparativamente a uma escala convencionalmente estabelecida.

Figura 39 – Situação que apresenta as primeiras noções de frações

Fonte: Souza e Spinelli (2011, p. 146)

Os autores usam o modelo contínuo por meio de figuras geométricas e, como já observado no texto para o 4º ano, não há o trabalho de uma técnica explicitamente, como no texto do 5º ano, nem problematizam as tarefas com uso dessa técnica didática. O mesmo ocorre com o uso de outras tarefas com a técnica didática de grandezas discretas, sem nenhuma relação umas com as anteriores.

Figura 40 – Situação que apresenta a grandeza contínua e discreta



8 No seu aniversário André ganhou dinheiro de seus tios e de sua avó. No total ele ganhou R$ 80,00.
Não esqueça:

GUARDEI NO COFRINHO $\frac{5}{8}$ DO QUE GANHEI.

$\frac{5}{8}$ ← É preciso dividir em 8 partes iguais.

a) Quanto é $\frac{1}{8}$ do dinheiro que André ganhou? R$ 10,00 (80 ÷ 8 = 10)
b) Quanto André guardou? R$ 50,00 (5 × 10 = 50)
c) Qual é a quantia que André deixou de guardar? R$ 30,00 (80 − 50 = 30)

9 Rita e Bernardo desenharam dois retângulos com as mesmas medidas. Depois dividiram a região interna de cada retângulo em partes iguais e começaram a pintá-las.

Retângulo de Rita

Retângulo de Bernardo

a) Em quantas partes Rita dividiu a região interna do seu retângulo? E Bernardo? 6 partes; 24 partes
b) Que fração do retângulo representa a parte pintada por Rita? $\frac{5}{6}$
c) E a parte pintada por Bernardo? Que fração do retângulo representa? $\frac{17}{24}$
d) Uma parte vermelha é igual a quantas partes azuis do retângulo? 4 partes
e) Quem pintou a maior parte do retângulo? Explique como você encontrou a resposta. Rita; resposta pessoal do aluno. Professor, Bernardo deveria pintar 20 partes do seu retângulo para igualá-lo à parte pintada por Rita.

Fonte: Souza e Spinelli (2011, p. 146)

Não há o momento exploratório e do trabalho da técnica como preconizado por Chevallard (1999) sobre os momentos didáticos, que permita desenvolver tarefas com grandezas contínuas e problematizando de modo a seguir para tarefas com grandezas discretas, que *permitam discutir o estudo das frações por meio da contagem e por meio das medidas* (BROLEZZI, 1996) de modo articuladas.

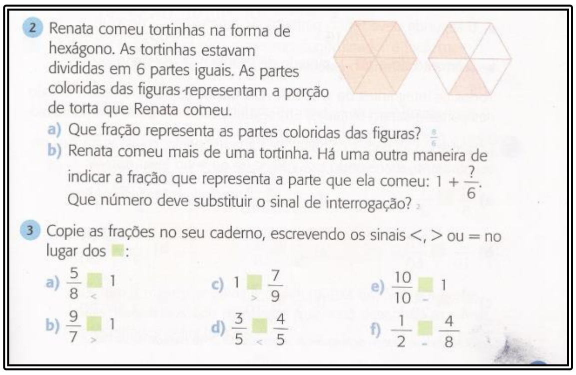
A complexidade do estudo de frações com o uso desses dois modelos parece não está presente quando os autores assim se manifestam:

> Do ponto de vista pedagógico, o trabalho com frações se mostra mais eficiente quando iniciado com a divisão de grandezas contínuas, ou seja, dividindo, por exemplo, um pedaço de papel em 4 partes e tomando uma parte. Esse procedimento possibilita fazer apenas uma associação numérica, assim essa parte estará associada apenas à fração $\frac{1}{4}$. No entanto, se dividirmos uma porção de 12 bolinhas coloridas em 4 partes iguais e tomarmos uma parte, podemos associar a essa parte tanto uma fração $\frac{1}{4}$ quanto o número 3. (SOUZA; SPINELLI, 2010, M-22, p.71)

Pensamos que é habitual essa prática e a organização matemática com uso da grandeza contínua no primeiro encontro didático com as frações e essa afirmação é possível ser vista em situações equivalentes ao que foi dito por Souza e Spinelli em vários outros livros é uma prática rotineira nos anos iniciais.

Em continuidade o manual apresenta comparação de frações por meio de um contexto supostamente concreto e lúdico,

Figura 41 – Comparação de fração



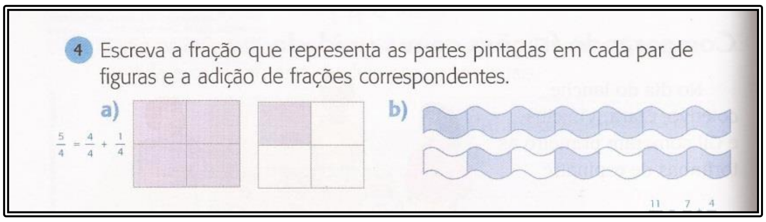
Fonte**:** Souza e Spinelli (2011, p. 146)

As tarefas propostas tem apelo "lúdico" por meio de uma situação "contextualizada" com uso do modelo contínuo, mas que revela o processo de contagem das partes, pintadas e não pintadas, como no uso do modelo discreto. A comparação se dá não pela fração, mas pela comparação dos números inteiros de partes pintadas e não pintadas.

Fica claro o uso da fração base $\frac{1}{6}$ associada a cada parte da figura. Opera-se com as frações como se opera com as quantidades. Essa é a técnica não anunciada que é assumida como um fazer naturalizado sem comentários e problematizações que permitam avançar para a uma técnica de uso algoritmo numérico.

A adição de frações com mesmo denominador é introduzido nessa unidade a partir da comparação de frações, como a apresentada com a figura 4 a seguir.

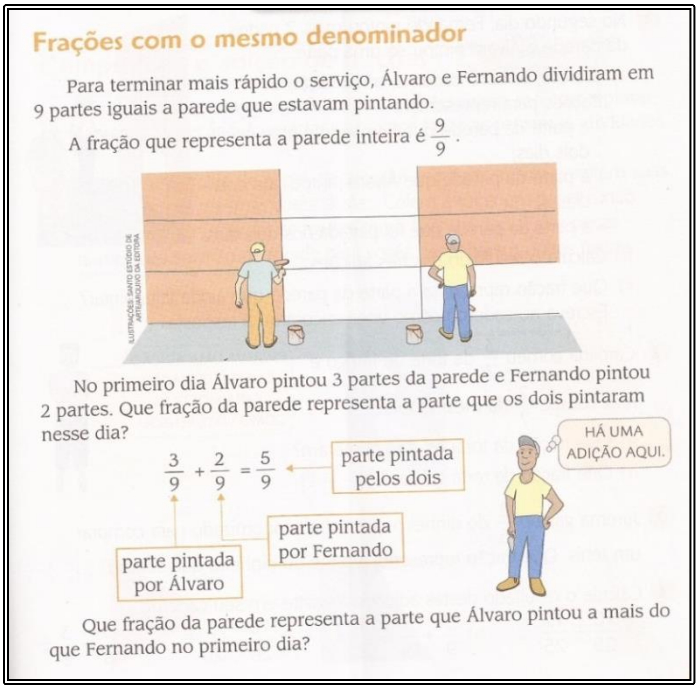
Figura 42 – Comparação de fração



Fonte**:** Souza e Spinelli (2011, p. 146)

O tratamento dado para apresentar adição de frações com mesmo denominador é similar com a comparação de frações.

Figura 43 – Operações de adição e subtração de números fracionários



Fonte: Souza e Spinelli (2011, p. 146)

Tarefa 3	**Técnica τ_3**
Que fração da parede representa a parte que o Álvaro e o Fernando pintaram nesse dia?	*Dividir a parede em 9 partes iguais e somar as partes pintadas.*

Tarefa 4	**Técnica τ_4**
Que fração da parede representa a parte que o Álvaro pintou a mais do que Fernando no primeiro dia?	*Comparação por diferença entre as quantidades de partes pintadas.*

As técnicas não são anunciadas, como já destacamos, mas apenas apresentadas como um fazer naturalizado em que o aluno é capaz de usar em qualquer outra situação.

Fica claro a comparação e a adição de frações como comparação e adição de números inteiros, representados no caso pelos numeradores, sem tarefas problematizadoras que exijam o trabalho da técnica.

Percebemos que a OM para ensinar as operações com frações apresentam as seguintes situações:

1. Tratam da noção de frações como parte-todo;
2. Identificam as partes como frações e operam com estas partes como se operam com as frações (números).;
3. Associam as frações aos números inteiros, no caso os numeradores das frações;
4. Mas não problematizam as tarefas e as situações apresentadas de modo a tornar as tarefas inteligíveis, ou seja, como uma praxeologia com seus componentes básicos (tarefa, técnica, discurso que justifica a técnica);
5. As operações de adição/subtração são rapidamente "formalizadas" com a anunciação de um algoritmo numérico;

Figura 44 – Regra para operar com frações

Para adicionar ou subtrair frações com o mesmo denominador, basta adicionar ou subtrair os numeradores e conservar o denominador da fração.

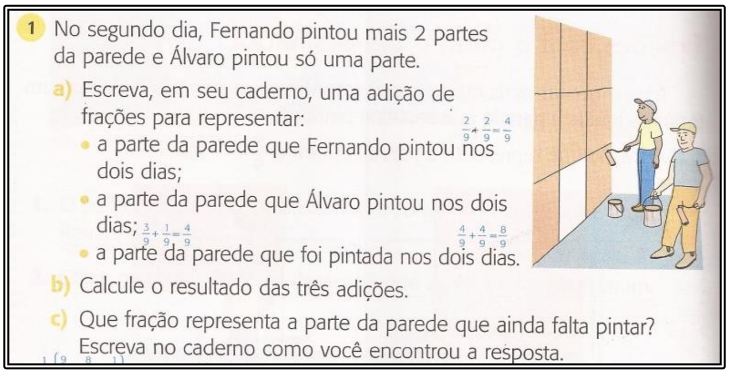
Fonte: Souza e Spinelli (2011, p. 146)

A problemática em operar com frações não se encerra apenas na falta de exploração dos tipos de tarefas, mas no trabalho da técnica, fica obscuro o ambiente tecnológico-teórico relativo a técnica utilizada, pois é anunciado a regra, mas no manual do professor orientam os professores se possível não utilizarem a regra.

> Espera-se que, depois de trabalhar com a composição de figuras, os alunos estejam aptos para operar com números na forma fracionária. Sugere-se, porém, que, logo no início, o professor incentive-os a usar tiras coloridas de papel-cartão para construir as operações. Dessa forma, evita-se o uso de regras. Tanto a adição e subtração de frações com mesmo denominador podem ser consideradas uma tarefa simples. (SOUZA; SPINELLI, 2010, M-34, p.78)

Segundo os autores, as operações de adição e subtração entre frações de mesmo denominador são tarefas não problemáticas que podem ser enfrentadas por uma técnica naturalizada de contagem de partes não anunciada que pode ser deixada ao aluno a responsabilidade de aplicar em outras situações atividades propostas com frações de mesmo denominador, inclusive aplicar a regra.

Figura 45 – Adição com frações de mesmo denominador



1 No segundo dia, Fernando pintou mais 2 partes da parede e Álvaro pintou só uma parte.

a) Escreva, em seu caderno, uma adição de frações para representar: $\frac{2}{9}+\frac{2}{9}=\frac{4}{9}$
- a parte da parede que Fernando pintou nos dois dias;
- a parte da parede que Álvaro pintou nos dois dias; $\frac{3}{9}+\frac{1}{9}=\frac{4}{9}$ $\frac{4}{9}+\frac{4}{9}=\frac{8}{9}$
- a parte da parede que foi pintada nos dois dias.

b) Calcule o resultado das três adições.

c) Que fração representa a parte da parede que ainda falta pintar? Escreva no caderno como você encontrou a resposta.

Fonte: Souza e Spinelli (2011, p. 146)

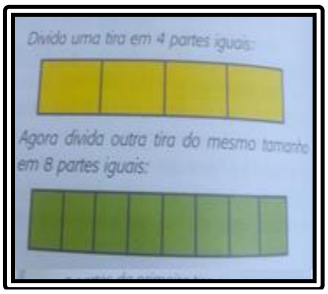
As frações com denominadores diferentes são apresentadas a partir da noção de frações equivalentes. Essa técnica que se apresenta como método de exaustão para encontrar as frações com o mesmo denominador.

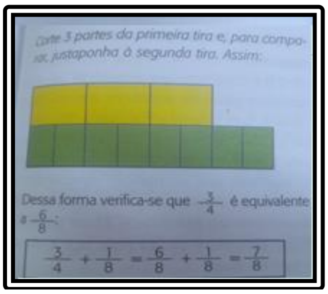
Os autores sugerem tarefas “lúdicas” com modelos contínuos que são “discretizados” convenientemente de modo a mostrar a equivalência entre frações que permita a adição de frações com denominadores diferentes como adição de frações com o mesmo denominador.

> Sugere-se ao professor que, antes de iniciar as atividades do livro, proponha adições simples, com denominadores diferentes, como $\frac{3}{4}+\frac{1}{8}$, divida uma tira em 4 partes iguais e em seguida divida outra tira do mesmo tamanho em 8 partes iguais. Corte 3 partes da primeira tira e, para comparar, justaponha à segunda tira. Assim, verifica-se que $\frac{3}{4}$ é equivalente a $\frac{6}{8}$ então $\frac{3}{4}+\frac{1}{8}=\frac{6}{8}+\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$. O professor poderá repetir os exemplos até achar que os alunos estão prontos para fazer atividades mais elaboradas de adição

A ilustração a seguir é apresentada no manual do professor

Figura 46a e 46b – Adição com frações de denominadores diferentes pelo processo da equivalência

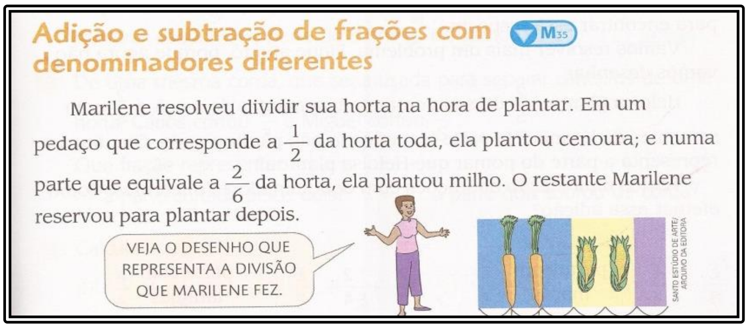




Fonte**:** Souza e Spinelli (2011, p. 146)

Em seguida a proposta do livro para trabalhar com as frações de denominadores diferentes é apenas utilizar a técnica acima exposta. Vejamos como apresentou a operação:

Figura 47a – Introdução da operação de adição de frações com denominadores diferentes

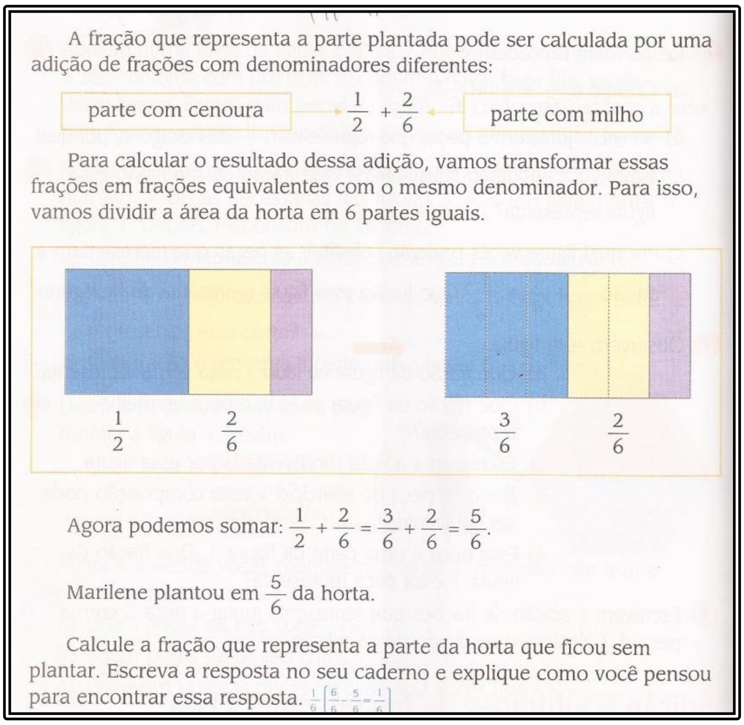


Adição e subtração de frações com denominadores diferentes

Marilene resolveu dividir sua horta na hora de plantar. Em um pedaço que corresponde a $\frac{1}{2}$ da horta toda, ela plantou cenoura; e numa parte que equivale a $\frac{2}{6}$ da horta, ela plantou milho. O restante Marilene reservou para plantar depois.

Fonte**:** Souza e Spinelli (2011, p. 146)

47b – Introdução da operação de adição de frações com denominadores diferentes



A fração que representa a parte plantada pode ser calculada por uma adição de frações com denominadores diferentes:

parte com cenoura → $\frac{1}{2} + \frac{2}{6}$ ← parte com milho

Para calcular o resultado dessa adição, vamos transformar essas frações em frações equivalentes com o mesmo denominador. Para isso, vamos dividir a área da horta em 6 partes iguais.

Agora podemos somar: $\frac{1}{2} + \frac{2}{6} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$.

Marilene plantou em $\frac{5}{6}$ da horta.

Calcule a fração que representa a parte da horta que ficou sem plantar. Escreva a resposta no seu caderno e explique como você pensou para encontrar essa resposta. $\frac{1}{6}\left(\frac{6}{6} - \frac{5}{6} = \frac{1}{6}\right)$

Fonte: Souza e Spinelli (2011, p. 146)

Em resumo podemos destacar os seguintes aspectos:

1. O trabalho com a noção parte-todo se mantém;
2. Associação com números inteiros é mantida;
3. Apresenta a técnica de operar com as frações de forma naturalizada;
4. A equivalência entre frações não se apresenta por meio de uma problematização da técnica naturalizada usada nas operações com frações de mesmo denominador;
5. A técnica de construção de frações equivalentes se reduz ao ambiente numérico.

Aqui há uma passagem direta ao ambiente numérico, sem problematizações das tarefas/técnicas. Tomamos em hipótese que o uso naturalizado da contagem acaba por embaçar a necessidade de uma técnica que permita gerar o que se deve contar (as partes) sem necessariamente recorrer emergentemente à complexidade da noção de equivalência, noção essa que não pode ser compreendida pela falta da infraestrutura matemática nesse nível de ensino.

Assim, torna-se necessário uma OM intermediaria que permita essa passagem de modo a minimizar as complexidades postas e encaminhe a passagem *de um “ambiente lúdico” para o “ambiente numérico”, em que este aconteça como problematização do primeiro, a partir do trabalho da técnica*.

A nossa problemática então pode ser anunciada em termos de qual OMI permite dar unidade as OM do 4º e 5º tendo em conta as condições nelas impostas como a infraestrutura matemática disponível para essa posição escolar, o uso de modelos contínuos, o processo de contagem e, é claro, as condições de origem pedagógicas recomendadas pelos autores como o uso de materiais manipulativos que deem sentido as operações com frações.

Novos questionamentos são postos e isso requer para sua realização uma técnica didática mais robusta que esteja em sintonia com todas as outras tarefas propostas. É o que propomos com o modelo epistemológico de referência aqui apresentado.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Os aspectos iniciais que nortearam esta pesquisa se baseiam em questionamentos oriundos das minhas práticas no ensino de frações nas séries iniciais do ensino fundamental onde tive a oportunidade de vivenciar e acompanhar as problemáticas e embaraço dos alunos em representar e operar com as frações.

O ensino das frações nos primeiros anos da escola é muito dual, ora é apresentado como fração ora como número racional. Essa dualidade é evidenciada quando apresentamos um estudo que trata da diferença entre as frações e os números racionais (capítulo II) com suas devidas particularidades, restrições e sua influência no processo de ensino-aprendizagem, onde é possível vê claramente algumas dificuldades encontradas durante o processo de estudo das frações e suas possíveis causas, como destaca o estudo de Pinilla (2007), e acrescentaríamos a falta de articulação entre as tarefas e as técnicas propostas como destaca o estudo de Pinilla (2007).

No ensino fundamental, o estudo de frações se inicia no 4º ano e se desenvolve até o 6º ano e apresenta destacada descontinuidade no 5º ano quando o modelo epistemológico inicial, com base lúdica representacional, é repentinamente modificado para o modelo epistemológico aritmético, sem ter em conta que no ensino fundamental os alunos ocupam posições diferentes na escola e suas relações com as frações são diferentes, porém devem ser integradas e articuladas de modo a dar uma razão de ser para o estudo das frações.

A partir desse pensamento e considerando aspectos do trabalho de Pinilla, como o da ausência de recursos teórico, ou mesmo de adaptação cognitiva dos alunos nesse nível de ensino, para o estudo de frações, a pesquisa busca evidenciar a necessidade de organizações praxeológicas intermediárias de modo a eliminar as possíveis falta de sentido nas operações com frações produzidas pela descontinuidade citada.

Nesse sentido, fica claro que não nos interessa a construção de novas organizações matemática para o estudo de fração, mas apenas encaminhar compreensões a partir da proposta de um modelo epistemológico, tomado como referência, que permita evidenciar a descontinuidade existente nas organizações matemáticas e permita também encaminhar possíveis construções de praxeologias intermediárias de modo a prover a unidade, entendida como um fazer inteligível de articulações e integrações de tarefas e técnicas, das organizações praxeológicas com frações que já vivem na escola.

As situações concretas, ou presumidamente concretas, que evidenciem as potenciais técnicas que venham a se constituir em *praxeologias intermediárias* para tornar factíveis as interações, articulações e integrações de tarefas culturalmente presente nas escolas, constituindo a construção de praxeologias matemáticas de crescente complexidade parecer viável e desejável.

A necessidade de preservar, senão algumas, praxeologias que vivem nas escolas e que lá se encontram como praxeologias pontuais sem uma razão clara para ser estudada, a não ser de que eventualmente podem ser necessárias num futuro incerto, e, portanto sem uma funcionalidade explícita, decorre da hipótese de que tais praxeologias foram criadas segundo um modelo epistemológico de matemática escolar que hoje se encontra “mutilado” pelas ações da sociedade, da escola, da pedagogia, e não menos importante, da comunidade produtora de matemática que estão sempre a espreitar e querer impor suas condições normativas as atividades da matemática escolar, como manifestado pelo movimento da matemática moderna.

Parece-nos então que a questão de pesquisa: ***Qual a organização praxeologia (intermediária) que pode favorecer o encontro dos alunos com a adição e subtração de frações e a eliminação da desconexão entre as práticas sobre noção de fração e as práticas operatórias com frações?*** foi respondida levando em consideração o seu passado e futuro no currículo escolar do ensino fundamental.

Assim, apresentamos com base nos pressupostos da TAD um MER - Modelo Epistemológico de Referência, através de praxeologias e OM, que possibilite o estudo das frações por meio do desenvolvimento de tarefas e técnicas integradas, a partir de praxeologias de modo a prover praxeologias locais, ou seja, descrevendo os elementos $[T, t, \tau, \theta]$ que formam as praxeologias e $[T_i, t_i, \tau_i, \theta_i]$ que formam as praxeologias intermediárias capazes de articular e integrar as tarefas e as técnicas entre si.

O modelo epistemológico apresenta uma técnica de divisão em partes iguais, sem necessariamente assegurar essa igualdade, de uma figura quadrangular/retangular como representação de frações que permitem ser operadas como se operam com as frações. O processo de divisão é naturalizado com uso da técnica de medida por régua, dos lados adjacentes do quadrado/retângulo, ou pelo uso de papel quadriculado, que sugerem ao construtor, no caso o aluno, a igualdade.

O objetivo é levar o aluno a encontrar uma representação, no caso geométrico, de um número fracionário, mas essa representação geométrica não é eleita por acaso e sim para atender uma intencionalidade didática; tornar possível o avanço do estudo de frações por meio de um fazer integrado das praxeologias pontuais lhes dando uma racionalidade mínima.

A praxeologia de construir retângulos e dividi-los em partes retangulares iguais é uma das praxeologias intermediárias que torna possível integrar as praxeologias de representação e operações com frações. É claro que não é a única praxeologia com esse potencial, mas mostra a existência de *praxeologias intermediárias* que somente se fazem visíveis a partir do modelo epistemológico de referência (MER) para o ensino de operações de adição e subtração de duas frações.

Durante as análises das organizações praxeológicas dos livros didáticos discutidas no capítulo IV, constatamos visivelmente o fenômeno didático da desarticulação existente entre as tarefas e as técnicas propostas nos livros do 4º e 5º ano. Percebemos a ausência de:

- Modelos epistemológicos, os modelos apresentados normalmente aparecem de maneira implícita e naturalizadas onde existe a presença de elemento tecnológico-teórico *decorativo* e *mínimo* para dar sentido, construir, modificar, interpretar, justificar, relacionar e questionar as técnicas das referidas organizações didáticas das frações;
- Organizações matemáticas capaz de promover tarefas e técnica de longo alcance, as tarefas apresentam certa rigidez, não são problematizadas, como consequência, temos um ensino monumentalista em que não se estudam questões, mas práticas naturalizadas que não tem a necessidade de justificar o porquê que se estuda as frações e suas operações.

Por conta disso apresenta fragilidade quanto ao seu estudo funcional quando pensamos no currículo como uma unidade, pois as praxeologias matemáticas com frações, mais precisamente sobre adição/subtração entre frações, são pontuais do 4° ano ao 6° ano. E assim, a necessidade de intervir com praxeologias intermediárias nas praxeologias do 5° ano de modo a promover essa unidade.

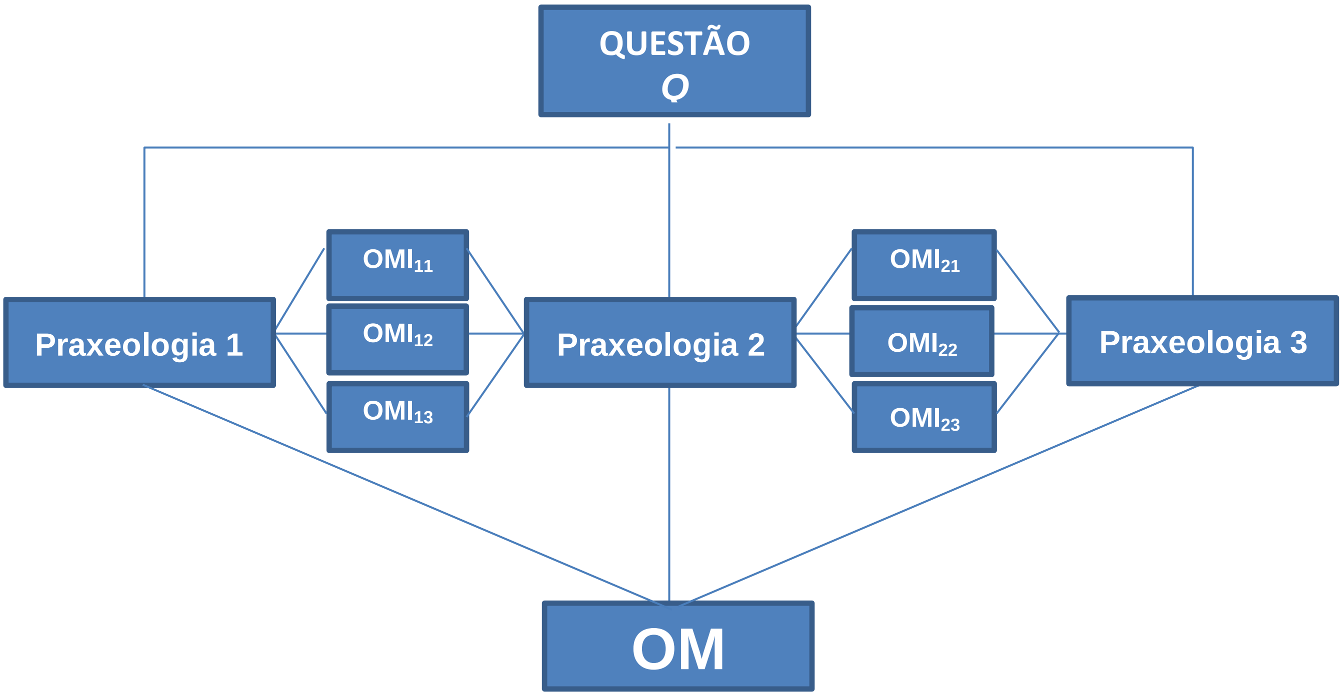
Nesse pensar e baseado nos programas PNLD e PCN quanto aos conteúdos a serem trabalhados no 4º, 5º e 6º ano do ensino fundamental se considera que, no 4º ano o aluno deve reconhecer os números fracionários em diferentes contextos: cotidianos e históricos explorando situações-problema de frações de mesmo denominador em que indicam relação parte/todo e quociente, o trabalho é composto por questões não problematizadas e por representações onde não é possível vê uma técnica anunciada. O 5º ano é a complementação do 4º ano com organizações matemáticas intermediárias que vão se corporificar no 6º ano, pois anunciam problemáticas que envolvem frações com denominadores diferentes. E ainda no 6º ano as organizações matemáticas se fundem com os conteúdos matemáticos desenvolvidos no 4º e o 5º ano.

Representamos esquematicamente o MER por meio das praxeologias e chamamos para a praxeologia do 4º ano de praxeologia 1, para o 5º ano de praxeologia 2 e para o 6º ano de praxeologia 3 onde *Q* é a questão problematizada e OMI11, OMI12, OMI13, OMI21, OMI22, OMI23 ... São as organizações matemáticas capazes de intermediar as praxeologias 1 e 2.

A *OM* é a organização matemática que se almeja, a que contém tarefas e técnicas integradas que apresenta um discurso tecnológico-teórico e que apresente uma incidência efetiva sobre o desenvolvimento da prática matemática. Poderíamos falar que é um amálgama de praxeologias locais integradas e desenvolvidas.

Em resumo, podemos representar o MER pelo seguinte esquema:

Figura 48: Representação do Modelo Epistemológico de referência



Fonte: Próprio autor

É normal que ao longo da pesquisa os problemas tratados evoluíam a medida que as investigações avançam, novos problemas, novas questões, novas respostas surgem produzindo mudanças importantes e inesperadas, é um trabalho de construção e reconstrução de respostas a questão inicial que resulta em novas propostas de pesquisa.

O MER não foi estruturado para ser aplicado em sala de aula, não possui uma infraestrutura didática para ser manuseado por alunos, mas sugerimos como proposta para futuras investigações o alargamento do MER de modo a prover organizações praxeológicas de maior alcance.

Esse pensar se justifica a medida que o modelo epistemológico de referência (MER) nos leva a questionar o saber a ser ensinado, mostrando suas contradições e fragilidades, ao mesmo tempo em que, nos impele a uma destransposição didática desse saber. Essa destransposição consiste em uma nova transposição didática, uma nova organização praxeológica cujo sistema de tarefas seja adequado à infraestrutura didático-matemática disponível aos alunos e com eficácia, pelo menos relativa, no enfretamento das dificuldades do ensino e da aprendizagem de fração.

A resposta a essa problemática, é claro, não é única e por isso exige esforço da instituição docente por meio de *percursos de estudos e de investigações* (PEI) com o propósito de melhor compreender o papel das praxeologias intermediárias na construção de praxeologias matemáticas para o estudo de fração nos diferentes posições do ensino.

REFERÊNCIAS

ANDRADE, R. C. D. **A noção de tarefa fundamental como dispositivo didático para um percurso de formação de professores: o caso da Geometria Analítica**. Tese (Doutorado em Educação em Ciências e Matemáticas) – Instituto de Educação Matemática e Científica, Universidade Federal do Pará, Belém, 2012.

BARQUERO, B. **Ecología de la Modelización Matemática en la enseñanza universitaria de las Matemáticas***.* 2009*.* Tese (Doutorado em out/2009) – Universitat Autónoma de Barcelona, Espanha, 2009.

BERGÉ, A.; SESSA, C. **Completitud y continuidad revisadas através de 23 siglos: aportes a uma investigação didática.** Relime, v.6, n.3, p.163-197, julho de 2003.

BIDWELL J.K. **A comparative study of the learning structures of three algorithms for the division of fractional numbers. Doctoral thesis.** University of Michigan, 1968.

BOLEA, P; BOSCH, M.; GARCÍA, J.; GASCÓN, J.; RUIZ HIGUERAS, L.; SIERRA, T. A. - BAHUJAMA. **Análisis didáctico del artículo "El peso del recipiente. Estudio de los problemas de la medición en CM" en el marco de la teoría antropológica**. Boletín del 10º Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas. 2000. Disponível em http://www.ugr.es/~jgodino/siidm/boletin10.htm Acessado em 10 de janeiro de 2014.

BOLEA, P. **El proceso de algebrización de organizaciones matemáticas escolares,** Tesis doctoral. Monografías del Seminario Matemático "García de Galdeano" nº 29. Departamento de Matemáticas de la Universidad de Zaragoza, 2003.

BOSCH, M. **La dimensión ostensiva en la actividad matemática. El caso de la proporcionalidad** (Tesis doctoral). Universitat Autònoma de Barcelona, 1994.

BOSCH, M.; GASCÓN, J. **Las prácticas docentes del profesor de matemáticas** XIème École d'Été de Didactique des Mathématiques que se celebró em Agosto de 2001

BOSCH, M.; GASCÓN, J. **La praxeología local como unidad de análisis de los procesos didácticos**. Boletín del Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas, 2004. Disponível em: http://www.ugr.es/~jgodino/siidm/welcome.htm . Acessado em 10 de novembro 2013.

BOSCH, M. FONSECA, C. & GASCÓN, J. **Incompletitud de las organizaciones matemáticas locales en las instituciones escolares.** Recherches en Didactique des Mathématiques, 2004. 24 (2-3), 205-250

BOSCH, M.; GASCÓN J. **La praxeología local como unidad de análisis de los procesos didácticos.** En C. De Castro y M. Gómez (Eds), Análisis del currículo actual de matemáticas y posibles alternativas (pp. 135-160). 2005, Madrid: Edebé.

BOSCH, M.; GASCÓN, J. **Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico a la formación del profesorado de matemáticas de secundaria**. En M.J. González, M.T. González & J. Murillo (Eds.), Investigación en Educación Matemática XIII (pp. 89-113). Santander: SEIEM, 2009.

BOSCH, M.; GASCÓN, J. **Fundamentación antropológica de las organizaciones didácticas: de los “talheres de prácticas matemáticas” a los “recorridos de estúdio e investigación”**. IUFM de l’academie de Montpellier, 2010.

BOSCH, M., C. FONSECA y J. GASCÓN. **Incompletitud de las organizaciones matemáticas locales en las instituciones escolares.** Recherches en Didactique des Mathématiques, vol. 24, núms. 2-3, p. 205-250, 2004.

BOSCH, M., GARCIA, J., GASCÓN, J. **La modelización matemática y el problema de la articulación de la matemática escolar**. Una propuesta desde la teoría antropológica de lo didáctico. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (RELIME), México, v. 18, n. 2, p. 37-74, 2006.

BOSCH, M., GASCÓN, J. **Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico a la formación del profesorado de matemáticas de secundaria**. En M.J. González, M.T. González & J. Murillo (Eds.), Investigación en Educación Matemática XIII (pp. 89- 113). SEIEM. 2009.

BROUSSEAU G. **Processus de mathématisation**. La Mathématique à l'Ecole Élémentaire, 428-442, APMEP: Paris. 1972.

BROUSSEAU G. **Address of members of the G.R.D.M**. (France) at the ICME IV, 1981.

BROLEZZI, A. C. **Atensão entre o discreto e o contínuo na hist´roia da matemática e no ensino da matemática.** Tese apresentada a Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo, 1996.

CHEVALLARD, Y. **El análisis de las prácticas docentes em la teoria antropológica de lo didáctico**. Recherches em Didactique des Mathématiques, Vol 19, nº 2, pp. 221-266. Ano 1999.

CHEVALLARD Y. **Enseignement insensé, enseignement raisonné et créativité sociale**. IUFM d’ Aix-Marseille, communication dans le cadre du coloque <<Mathématiques sans fronteires 2000>>.

CHEVALLARD, Y. **Aspectos problemáticos de la formación docente**. XVI Jornadas del Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas, Huesca, 2001. Disponível em http://www.ugr.es/local/jgodino/siidm.htm. Acessado em 12 de dezembro de 2013

CHEVALLARD, Y. **Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathematiques: l’approche anthropologique.** Disponível em: http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Analyse_des_pratiques_enseignantes.pdf . Acessado em 15 outubro 2013

CHEVALLARD, Y. **“Vers une didactique de la codisciplinarité. Notes sur une nouvelle épistémologie scolaire**”. 2004. Disponível em: http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Vers_une_didactique_de_la_codisciplinarite.pdf Acessado em 09 janeiro de 2014.

CHEVALLARD, Y. **La transposición didáctica: del saber sabio al saber enseñado**. Buenos Aires: Aique Grupo Editor, 2005.

CHEVALLARD, Y. **Éducation & Didactique: une mise en tension essentielle**. Education et didactique (à paraître) 2007 - Disponível em: http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/YC_-_Education_didactique_-_02-07.pdf. Acessado em 12 de novembro de 2013.

______. **La notion de PER**: problèmes et avancées. Toulouse, 2009. Disponível em: http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=161. Acesso em: 8 out. 2013.

CHEVALLARD, Y.; BOSCH, M.; GASCÓN, J. **Estudar matemáticas:** o elo perdido entre o ensino e a aprendizagem. Tradução: Daisy Vaz de Moraes. Porto Alegre: Artmed. 2001.

CHEVALLARD, Y.; BOSCH, M.; GASCÓN, J. **Estudiar Matemáticas**: El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje. Barcelona, Editorial Horsori - Primeira edição 1997.

CHEVALLARD, Y. e CIRADE, Avec Gisèle. **Les ressources manquantes comme problème professionnel**. Juin 2010. Disponível em: http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=183. Acessado em 13 de junho de 2013

______. La transposition didactique. Grenoble. La Pensée Sauvage Éditions, 1991.

______. La TAD face au professeur de mathématiques, Toulouse, 29 abr. 2009. Disponível em: < http://yves.chevallard.free.fr/>. Acessado em 26 julho de 2013.

CIRADE, G. **Devenir professeur de mathématiques: entre problèmes de la profession et formation en IUFM. Les mathématiques comme problème professionnel.** Tese (Doutorado em Didática da Matemática) - Université de Provence, 2006. Disponível em: http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00120709. Acessado em 10 agosto de 2013.

CORICA, A. R. y OTERO, M. R. **Análisis de una praxeología matemática universitaria en torno al límite de funciones y la producción de los estudiantes en el momento de la evaluación**. *Relime*[online], vol.12, n.3, pp. 305-331. ISSN 1665-2436, 2009.

D’AMORE B. **Oggetti relazionali e diversi registri rappresentativi: difficoltà cognitive ed ostacoli – Relational objects and different representative**

registers: cognitive difficulties and obstacles. L'educazione matematica. 1, 7-28. [Artiche republished in Spanish: Uno. 15, 1998, 63-76]

D'AMORE B. **Elementi di Didattica della Matematica**. Bologna, Pitagora, 1999.

EULER L. **Elements of álgebra**. Printed for longman, rees, orme, and co. paternoster-row. London, 1828.

FANDIÑO PINILLA, M.I. **Fractions: conceptual and didactic aspects.** Acta Didactica Universitatis Comenianae. Issue 7, p. 81-115, 2007.

FONSECA, C. **Discontinuidades matemáticas y didácticas entre la enseñanza Zecundaria y la enseñanza universitaria**. Tesis doctoral. Vigo: Universidad de Vigo 2004.

GARCÍA, F.J. **La modelización como instrumento de articulación de la matemática escolar. De la proporcionalidad a las relaciones funcionales.** Tesis doctoral. Jaén: Departamento de Didáctica de las Ciencias, Universidad de Jaén. 2005.

GASCÓN, J. **Incidencia del modelo epistemológico de las matemáticas sobre las prácticas docentes**. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 2001: Disponível em: http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=33540202. Acessado em 3 de abril de 2014.

GASCÓN, J. **Algunos problemas de investigación relacionados con la práctica docente del profesor de matemáticas**. XVI Jornadas del SI-IDM, Huesca (España) (2001a). Disponível em http://www.ugr.es/~jgodino/siidm/. Acessado em 20 de janeiro de 2014.

GASCÓN, J. **El Problema de la Educación Matemática y la doble ruptura de la Didática de las Matematicas.** La Gaceta Real Sociedad matemática Española, 5 (3),673-698, 2002.

GASCÓN, J. **Teoria de la educación Matemática. Selección de lecturas**. Educación, Mención: Matemática. Universidade Nacional abierta, (p. 2-9), 2004.

GASCÓN, J. **Del Problem Solving a los Recorridos de Estudio e Investigación**. Crónica del viaje colectivo de una comunidad científica. Revista Iberoamericana de Educación Matemática (UNIÓN), n. 22, p. 9-35, 2010.

GÁSCON, J. **Las três dimensiones fundamentais de um problema didático. El caso del álgebra elemental.** Revista latino Americana de investigación em Matemática Educativa, 203-231, 2011.

GASCÓN, J.; BOSCH, M. **Las prácticas docentes del profesor de matemáticas**. Disponível em: http://www.ugr.es/~jgodino/siidm/almeria/Practicas_docentes.PDF . Acessado em 28 de junho de 2013.

GUERRA, R. B; SILVA, F. H. S. **As Operações com Frações e o Princípio da Contagem.** Bolema, Rio Claro (SP), Ano 21, nº 31, p. 41 a 54, 2008.
GREEN G.A. **A comparison of two approaches, area and finding a part of, and two instructional materials, diagrams and manipulative aids on multiplication of numbers in grade five**. Doctoral thesis. University of Michigan, 1969.

GROFF P. **The future of fractions. International journal of mathematics education in science and technology**, 25, 4, 1994.

HART K. **Le frazioni sono difficili**. In: Chini Artusi L. (ed.) Numeri e operazioni nella scuola di base. Bologna: Zanichelli. 144-166, 1985.

HASEMANN K. **On the difficulties with fractions**. Osnabruck: Università di Osnabruck, 1979.

IFRAH, G. **Os números: a história de uma grande invenção**. Tradução de Stella M. de Freitas Senra. São Paulo: Globo, 1989.

GARCÍA, F. J.; GASCÓN, J.; RUIZ-HIGUERAS, L. & BOSCH, M. **Mathematical modelling as a tool for the connection of school mathematics**. ZDM. The International Journal on Mathematics Education 38, (3), 226-246, 2006.

GASCÓN, J. **Incidência del modelo epistemológico de las matemáticas sobre las práticas docentes.** Revista Latino americana de investigación em Matemática Educativa, páginas 129 – 159, 2000.

KRICH P. **Meaningful vs. mechanical methods**. School science and mathematics, , 64, 697-708, 1964.

LIMA, E.L. **Medida e forma em geometria**. Rio de Janeiro: SBN. (Coleção professor de matemática), 1991.

LICERA, R. M. **La construccion del número real y el problema de la medida de magntudes contínuas em la ensenanza media - Analises epistemológico y didático.** Tesis de Maestria em Didáctica de la Matemática. Universidad Nacional de Río Cuarto Facultad de Ciencias Exactas Físico – Químicas y Naturales Departamento de Matemática, 2007.

LUCAS, C. **Organizaciones matemáticas locales relativamente completas (Memoria de investigación, Diploma de Estudios Avanzados)**. Universidad de Vigo, 2010.

MARCOU A., GAGATSIS A. **Representations and learning of fractions.** In: Rogerson A. (ed.) (2002). The humanistic renaissance in mathematics education. Palermo: Personal publication, p. 250-253, 2002.

RODRIGUEZ, E. **Metacognición, resolución de problemas y enseñanza de las matemáticas: una propuesta integradora desde el enfoque antropológico.** Tesis Doctoral. Madrid: Universidad Complutense de Madrid, 2005.

SIERRA, A. D. **Lo matemático en el diseño y analisis de organizaciones didácticas: los sistemas de numeración y la medida de magnitudes**. Tese apresentada para Universidad Complutense de Madrid - Facultad de Educación, Departamento de Diáctica y Organización Escolar, Madrid 2006.

SOUZA, M. H, SPINELL V. Asas para voar. Editora Ática, 2010

SLUSER T.F. **A comparative study of division of fractions in which an explanation of the reciprocal principle is the experimental factor**. Doctoral thesis, University of Michigan, 1962.

STENGER D.J. **An experimental comparison of two methods of teaching the addition and subtraction of common fractions in grade five. Dissertation abstracts**. 32A. University of Cincinnati, 1971.

VERGNAUD. G. **La théorie des champs conceptuels.** Recherches en Didactique des Mathématiques, 10 (23): 133 - 170, 1990.

WALDEGG, G. **La contribución de Simon Stevin a la construcción del concepto de número**. Educación matemática, 8, (2), 5-17, 1996.

WEAME D., KOUBA V.L. **Rational numbers**. In Silver E., Kenney P.A. (eds.). Results from the 7th mathematics assessment of the national assessment of educational progress. Reston (Va): NCTM. 163-192, 2000.

WILSON J.A. **The effect of teaching the rationale of the reciprocal principle in the division of fractions through programmed instruction**. Dissertations abstracts. 23A. University of Pittsburg, 1967.