



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ  
INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM GEOFÍSICA**

**TESE DE DOUTORADO**

**Inversão da forma de onda orientada ao alvo**

**CARLOS ALEXANDRE NASCIMENTO DA COSTA**

**BELÉM-PARÁ**

**2016**

**CARLOS ALEXANDRE NASCIMENTO DA COSTA**

**Inversão da forma de onda orientada ao alvo**

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Geofísica do Instituto de Geociências da Universidade Federal do Pará, em cumprimento às exigências para obtenção do título de Doutor em Geofísica.

Orientador: Prof. Dr. Jessé Carvalho Costa

Belém-Pará  
2016

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)  
Sistema de Bibliotecas da UFPA

---

Costa, Carlos Alexandre Nascimento da, 1982-  
Inversão da forma de onda orientada ao alvo / Carlos  
Alexandre Nascimento da Costa. - 2016.

Orientadora: Jessé Carvalho Costa.  
Tese (Doutorado) - Universidade Federal do  
Pará, Instituto de Geociências, Programa de  
Pós-Graduação em Geofísica, Belém, 2016.

1. Geofísica. 2. Inversão (Geofísica). 3.  
Ondas sísmicas - Velocidade. I. Título.

CDD 22. ed. 550

---

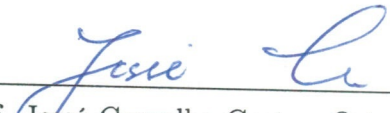
CARLOS ALEXANDRE NASCIMENTO DA COSTA

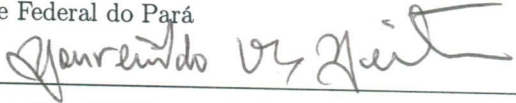
INVERSÃO DA FORMA DE ONDA ORIENTADA AO ALVO

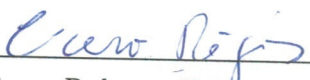
Tese de doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Geofísica do Instituto de Geociências da Universidade Federal do Pará, em cumprimento às exigências para obtenção do título de doutor em Geofísica.

Data de Aprovação: 16 / 09 / 2016


Banca Examinadora:

  
\_\_\_\_\_  
Prof. José Carvalho Costa - Orientador  
Doutor em Geofísica

Universidade Federal do Pará  
  
\_\_\_\_\_  
Prof. Lourenildo Willame Barbosa Leite - Membro  
Doutor em Geofísica

Universidade Federal do Pará  
  
\_\_\_\_\_  
Prof. Cícero Roberto Teixeira Régis - Membro  
Doutor em Geofísica

Universidade Federal do Pará  
  
\_\_\_\_\_  
Prof. Jörg Dietrich Wilhelm Schleicher - Membro  
Doutor em Geofísica

Universidade Estadual de Campinas  
  
\_\_\_\_\_  
Prof. Walter Eugênio de Medeiros - Membro  
Doutor em Geofísica  
Universidade Federal do Rio Grande do Norte

Dedico este trabalho à minha família.

# AGRADECIMENTOS

À minha mãe, Maria Francisca, por sempre se esforçar em me dar o melhor em estudo e pela confiança. Também aos meus irmãos e irmãs por sempre estarem prontos para me ajudar nos momentos difíceis e por entenderem minha “ausência” perante a família.

Um especial agradecimento a todos os integrantes atuais e os que por lá passaram de um dos maiores responsáveis pelo meu sucesso, o Espaço Cultural “Nossa Biblioteca”.

Agradeço ao meu orientador Prof. Dr. Jessé Carvalho Costa por sua orientação e por várias ideias que guiaram meu trabalho.

Agradeço ao Prof. Dr. Eric Verschuur pela oportunidade de desenvolver parte desse trabalho em seu grupo de pesquisa na faculdade de imageamento acústico na universidade de Delft, Holanda. Da mesma maneira, não posso deixar de reconhecer a importância de inúmeras e frutíferas discussões com o Dr. Alok K. Soni, que muito me ajudaram no desenvolvimento desse trabalho.

Aos professores da Banca Examinadora pela participação e por todas as sugestões para melhoria do trabalho.

Agradeço à Isis Tourinho, pelo incentivo durante a realização deste trabalho, pelo carinho e companheirismo.

Aos meus amigos e amigas que fiz na UFPA, pelo carinho, confiança e por me proporcionar momentos de felicidades.

À Sra. Benilde Lopes e Suelen Buzaglo, a minha gratidão.

Agradeço ao CNPq, FAPESP, CAPES, PETROBRAS e INCT-GP pelo apoio financeiro.

## RESUMO

Propomos uma nova metodologia de inversão da forma de onda orientada ao alvo para estimar os parâmetros físicos de uma área alvo em subsuperfície para dados sísmicos adquiridos com aquisição VSP-desviado ou com aquisição com fontes e receptores localizados na superfície. Além disso, investigamos a importância de eventos de múltiplos espalhamentos no conjunto de dados usados como *inputs* para estimar as respostas ao impulso da área alvo em subsuperfície iterativamente através de um esquema de inversão esparso para a mesma geometria de aquisição anteriormente citadas. Essas metodologias são baseadas no ajuste entre os campos de onda ascendente observado e modelado em um específico nível em profundidade próximo da área alvo, onde o campo de onda ascendente modelado é estimado através da representação tipo-convolução para função de Green. A principal característica de nossa metodologia de inversão da forma de onda orientada ao alvo é usar como *inputs* os campos de onda descendente e ascendente para estimar os parâmetros físicos locais sem necessitar que estes campos de onda sejam locais, dessa maneira evitamos adotar qualquer metodologia de redatumação para estimar as respostas ao impulso locais. Mostramos através de exemplos numéricos que podemos relaxar a necessidade de uma densa amostragem de fontes e receptores, característicos de esquemas de redatumação baseados em interferometria, para estimar as respostas ao impulso da área alvo através do esquema de inversão esparso usando como *inputs* os campos de onda com eventos de múltiplos espalhamentos. Estas metodologias são atraentes para dados sísmicos de aquisição VSP-desviado, pois para este tipo de dado não é necessário conhecer a região localizada acima da área alvo para estimar os campos de onda ascendente e descendente usados como *inputs* em ambas as metodologias. No entanto, para dados sísmicos adquiridos com fontes e receptores localizados na superfície, em princípio é necessário conhecer um modelo de velocidade a priori para estimar os campos de onda ascendente e descendente próximo da área alvo. Para ambas as metodologias investigadas, usamos a inversão da forma de onda baseada em migração para estimar os campos de onda ascendente e descendente próximo da área alvo a partir de dados sísmicos adquiridos com fontes e receptores na superfície.

Palavras-chave: Geofísica. Inversão (Geofísica). Ondas sísmicas - Velocidade.

# ABSTRACT

We propose a new target-oriented waveform inversion to estimate the physical parameters from a specific target in the subsurface from observed data from deviated-VSP acquisition or surface seismic data. Furthermore, we investigate a strategy to estimate the impulse responses from a local target in the subsurface from deviated-VSP acquisition or surface seismic data as an iterative sparse inversion approach, where the main feature of this strategy is that all multiple scattering in the data is used to enhance the illumination at target level. In these approaches we fit the upgoing wavefields observed at a specific level near the local target with the upgoing wavefields estimated at same depth level through convolution-type representation for the Green's function. The main feature of the target-oriented waveform inversion is that we just need to know the up- and downgoing wavefields at the depth level above the target area to estimate the physical parameters for the area of interest. We show through numerical tests that the iterative sparse inversion approach does not require dense sources sampling to estimate the impulse responses from a target below a complex overburden, because of all the extra illumination via multiples. The physical parameters above the target area is not necessary to know if we use the data from deviated-VSP geometry of acquisition, but for surface seismic data we need to know a smooth physical parameter above the target area to estimate the up- and downgoing wavefields at depth level nearby the local target. For surface seismic data we used Joint Migration Inversion to estimate the up- and downgoing wavefields at depth level near the target area.

Keywords: Geophysics. Inversion (Geophysics). Seismic waves - speed.



## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 2.1 – Vetor $\mathbf{r}$ no espaço $\mathcal{D}$ . Vetor representado no sistema de coordenadas cartesianas. . . . .	29
Figura 2.2 – Ilustração do domínio finito $\mathcal{D}_b \subset \mathcal{D}$ limitado pela borda $\mathcal{S}_b$ . $\mathcal{D}'$ representa o domínio físico acrescido com a faixa da PML com objetivo de simular uma domínio ilimitado. . . . .	32
Figura 2.3 – Relação de dispersão para o esquema FD. a) Relação de dispersão para o esquema FD de segunda ordem. b) Relação de dispersão para o esquema FD de quarta ordem. . . . .	37
Figura 2.4 – Ilustração da matriz de impedância complexa proveniente da aproximação FD da equação da onda acústica no domínio da frequência-espaço. a) Aproximação de segunda ordem convencional de 5 pontos. b) Aproximação de quarta ordem convencional de 9 pontos. . . . .	39
Figura 2.5 – Resultado da condição PML na modelagem. Nas figuras das linhas superior e inferior, da esquerda para direita, modelo de velocidade com PML, <i>snapshot</i> em 0.45 s de uma fonte no centro do modelo e <i>shotgather</i> de uma fonte no centro do modelo com 201 receptores em 300 m de profundidade, respectivamente. Em cima: PML com 0.01 km de largura. Embaixo: PML com 0.2 km de largura. . . . .	40
Figura 2.6 – <i>Wavelet</i> usada para modelar o campo de pressão. a) Pulso Ricker com frequência pico de 15.0 Hz. b) Espectro de amplitude do pulso Ricker com frequência pico de 15.0 Hz . . . . .	41
Figura 2.7 – <i>Shot gathers</i> modelados com esquema FD. a) <i>Shot gather</i> de referência modelado com esquema FD no tempo. b) <i>Shot gather</i> modelado com nossa implementação do esquema FD de segunda ordem. c) <i>Shot gather</i> modelado com nossa implementação do esquema FD de quarta ordem. . . . .	42
Figura 2.8 – Traços centrais dos <i>shot gathers</i> modelados com esquema FD. a) Traço central do <i>Shot gather</i> de referência. b) Traços centrais dos <i>shot gathers</i> modelados com aproximação FD de segunda (vermelho) e quarta (verde) ordem. c) traços centrais dos <i>shot gathers</i> de referência (azul) e modelado com aproximação FD de quarta ordem (verde). . .	43

Figura 2.9 – Representação tipo-convolução da função de Green entre os estados $A$ e $B$ . a) Configura do estado $A$ , onde a fonte está localizada fora do volume $\mathcal{V}$ . b) Configuração do estado $B$ , onde a região foram do volume $\mathcal{V}$ é homogênea. . . . .	44
Figura 2.10 – Modelo de velocidade usado para gerar os campos de ondas descendente e ascendente ao longo da coordenada lateral e em 1.5 km em profundidade. . . . .	47
Figura 2.11 – Campos de onda observados/modelados em 1.5 km em profundidade, gerado por uma fonte posicionada no centro do modelo e em $z_s = 0.05$ km. a) Campo de onda descendente observado. b) Campo de onda ascentende observado. c) Campo de onda ascendente modelado. d) Traços centrais dos campos de ondas ascendentes observado (azul) e modelado (vermelho). . . . .	48
Figura 2.12 – Campos de onda ascendentes modelados em 1.5 km em profundidade, gerado por uma fonte posicionada na superfície ( $x = 3.0$ km e $z = 0.05$ km), a partir de diferentes números de pontos de incidência do campo de onda descendente. a) Usando 76 pontos. b) Usando 151 pontos. c) Usando 301 pontos. d) Traços centrais dos campos de ondas ascendentes usando 76 (preto), 151 (verde) e 301 (vermelho) pontos de incidência do campo de onda descendente. . . . .	49
Figura 2.13 – Campos de onda modelados com o algoritmo de modelagem FWMod observado na superfície. Na esquerda e no centro em cada linha: dois ciclos FWMod consecutivos. Na direita: diferença entre os ciclos FWMod consecutivos da mesma linha. . . . .	55
Figura 2.14 – Modelo de velocidade usado realizar modelagem com o algoritmo de modelagem FWMod. . . . .	56
Figura 3.1 – a) Modelo de velocidade acústico. b) Três <i>shot gathers</i> de fontes localizadas na superfície ao longo da coordenada lateral, da esquerda para direita, 0.024 km, 4.572 km e 9.144 km, respectivamente. . . . .	65
Figura 3.2 – a) Modelo de velocidade acústico. b) Três <i>shot gathers</i> de fontes localizadas na superfície ao longo da coordenada lateral, da esquerda para direita, 0.02 km, 4.5 km e 8.980 km, respectivamente. . . . .	66
Figura 3.3 – Modelo de velocidade inicial tipo gradiente vertical para inversão com a FWI. . . . .	67

- Figura 3.4 – Resultado da inversão da FWI com inversão sucessivas de frequências, considerando no máximo 25 iterações para cada frequência invertida. a) Inversão de 123 frequências invertidas sucessivamente, de 0.2 Hz a 15.0 Hz, com incremento de 0.12 Hz. b) Inversão de 81 frequências invertidas sucessivamente, de 5.0 a 15.0 Hz, com incremento de 0.12 Hz. c) Inversão de 15 frequências invertidas sucessivamente, de 0.2 a 15.0 Hz, com incremento de 1.0 Hz. . . . . 68
- Figura 3.5 – a) Modelo de velocidade inicial (versão suavizado do modelo verdadeiro). b) Resultado da inversão após a inversão de 84 frequências invertidas sucessivamente, de 5.0 Hz a 15.0 Hz, com incremento de 0.12 Hz e considerando no máximo 25 iterações para cada frequência invertida. c) Resultado da inversão após a inversão de 16 frequências invertidas sucessivamente, de 0.2 a 15.0 Hz, com incremento de 1.0 Hz e considerando no máximo 25 iterações para cada frequência invertida. 70
- Figura 3.6 – Resultado da inversão após a inversão de 81 frequências invertidas sucessivamente, de 5.0 Hz a 15.0 Hz, com incremento de 0.12 Hz e considerando no máximo 25 iterações para cada frequência invertida. a) Usando função objetivo com  $\lambda = 1$ . b) Usando função objetivo com  $\lambda = 2$ . c) Usando função objetivo com  $\lambda = 3$ . . . . . 71
- Figura 3.7 – a) Modelo de velocidade inicial (versão suavizado do modelo verdadeiro). b) Resultado da inversão após a inversão de 31 frequências invertidas sucessivamente, de 5.0 Hz a 21.0 Hz, com incremento de 0.5 Hz e considerando no máximo 25 iterações para cada frequência invertida. . . . . 72
- Figura 3.8 – Região do modelo situada abaixo de 2.6 km em profundidade e localizada entre 4.0 e 8.0 km na coordenada lateral. a) Região do modelo verdadeiro. b) Região do modelo inicial. c) Região do modelo estimado com FWI. d) Região do modelo estimado com a inversão da forma de onda direcionado ao alvo. . . . . 73
- Figura 3.9 – Modelo de velocidade usado para gerar o conjunto de dados sintéticos para o JMI. a) Modelo de velocidade com 20% de perturbação máxima em relação ao modelo de velocidade de referência .b) Modelo de velocidade com 50% de perturbação máxima em relação ao modelo de velocidade de referência. c) Modelo de velocidade com 66% de perturbação máxima em relação ao modelo de velocidade de referência. 77

Figura 3.10 – Refletividade estimada a partir do modelo verdadeiro. a) Refletividade do modelo de velocidade com 20% de perturbação máxima em relação ao modelo de velocidade de referência. b) Refletividade do modelo de velocidade com 50% de perturbação máxima em relação ao modelo de velocidade de referência. c) Refletividade do modelo de velocidade com 66% de perturbação máxima em relação ao modelo de velocidade de referência. . . . .	78
Figura 3.11 – <i>Shot gathers</i> modelados com FWMod e observados na superfície de uma fonte localizada em 1.0 km na coordenada lateral. a) Modelado com modelo de velocidade com 20% de perturbação máxima em relação ao modelo de velocidade de referência. b) Modelado com modelo de velocidade com 50% de perturbação máxima em relação ao modelo de velocidade de referência. c) Modelado com modelo de velocidade com 66% de perturbação máxima em relação ao modelo de velocidade de referência. . . . .	79
Figura 3.12 – Modelo de velocidade estimado com JMI após 45 iterações com uma banda de frequência de 10 a 60 Hz. a) Modelo de velocidade estimado com 20% de perturbação máxima em relação ao modelo de velocidade de referência. b) Modelo de velocidade estimado com 50% de perturbação máxima em relação ao modelo de velocidade de referência. c) Modelo de velocidade estimado com 66% de perturbação máxima em relação ao modelo de velocidade de referência. . . . .	80
Figura 3.13 – Informações de poço, localizado em 1.0 km na coordenada lateral, do resultado da inversão com JMI após 45 iterações com uma banda de frequência de 5 a 60 Hz, para os modelos com 20%, 50% e 60% de perturbação máxima em relação ao meio de referência. a) Poço do modelo de velocidade com 20% de perturbação máxima em relação ao modelo de velocidade de referência. b) Poço do modelo de velocidade com 50% de perturbação máxima em relação ao modelo de velocidade de referência. c) Poço do modelo de velocidade com 66% de perturbação máxima em relação ao modelo de velocidade de referência.	81
Figura 3.14 – Refletividade estimada com JMI após 45 iterações com uma banda de frequência de 10 a 60 Hz. a) Refletividade estimada do modelo de velocidade com 20% de perturbação máxima. b) Refletividade estimada do modelo de velocidade com 50% de perturbação máxima. c) Refletividade estimada do modelo de velocidade com 66% de perturbação máxima. . . . .	82

Figura 3.15 – Informações de poço, localizado em 1.0 km na coordenada lateral, do resultado da refletividade estimada com JMI após 45 iterações com uma banda de frequência de 5 a 60 Hz, para os modelos com 20%, 50% e 60% de perturbação máxima em relação ao meio de referência. a) Poço do modelo de velocidade com 20% de perturbação máxima em relação ao modelo de velocidade de referência. b) Poço do modelo de velocidade com 50% de perturbação máxima em relação ao modelo de velocidade de referência. c) Poço do modelo de velocidade com 66% de perturbação máxima em relação ao modelo de velocidade de referência. . . . .	83
Figura 3.16 – Modelo de velocidade usado para gerar o conjunto de dados sintéticos para o JMI . . . . .	83
Figura 3.17 – a) Refletividade .b) <i>Shot gathers</i> modelados com FWMod e observados na superfície, da esquerda para direita, com fontes localizadas em 0.0 km, 1 km e 2.0 km, respectivamente, na coordenada lateral. . . . .	84
Figura 3.18 – Modelo de velocidade inicial para o JMI estimado através de uma suavização do modelo verdadeiro. . . . .	84
Figura 3.19 – Modelo de refletividade inicial para o JMI do modelo de velocidade inicial estimado através de uma suavização do modelo verdadeiro. . .	85
Figura 3.20 – Modelo de velocidade estimado com JMI após 45 iterações com uma banda de frequência de 5 a 60 Hz. a) Modelo de velocidade estimado usando como modelo de velocidade inicial o modelo de velocidade constante. b) Modelo de velocidade estimado usando como modelo de velocidade inicial o modelo de velocidade suavizado. . . . .	85
Figura 3.21 – Refletividade estimada Com JMI após 45 iterações com uma banda de frequência de 5 a 60 Hz. a) Refletividade estimada usando como modelo de velocidade inicial o modelo de velocidade constante. b) Refletividade estimada usando como modelo de velocidade inicial o modelo de velocidade suavizado. . . . .	86
Figura 3.22 – <i>Shot gathers</i> modelados com FWMod e observados em 0.3 km em profundidade ao longo da coordenada lateral de uma fonte localizada na superfície e em 1.0 km na coordenada lateral. a) Campo de onda descendente. b) Campo de onda ascendente. . . . .	86
Figura 3.23 – <i>Shot gathers</i> estimados com JMI usando como modelo de velocidade inicial o modelo constante e observados em 0.3 km em profundidade ao longo da coordenada lateral de uma fonte localizada na superfície e em 1.0 km na coordenada lateral. a) Campo de onda descendente. b) Campo de onda ascendente. . . . .	87

Figura 3.24 – <i>Shot gathers</i> estimados com JMI usando como modelo de velocidade inicial o modelo suavizado e observados em 0.3 km em profundidade ao longo da coordenada lateral de uma fonte localizada na superfície e em 1.0 km na coordenada lateral. a) Campo de onda descendente. b) Campo de onda ascendente. . . . .	87
Figura 3.25 – Comparação entre os traços localizado em 1.0 km na coordenada lateral, dos campos de ondas descendentes modelados e estimados com JMI com diferentes modelos de velocidade inicial. a) Comparação entre o campos de ondas descendentes exato e o estimado com JMI usando como modelo de velocidade inicial o modelo constante. b) Comparação entre o campos de ondas descendentes exato e o estimado com JMI usando como modelo de velocidade inicial o modelo suave. . . . .	88
Figura 3.26 – Comparação entre os traços localizado em 1.0 km na coordenada lateral, dos campos de ondas ascendentes modelados e estimados com JMI com diferentes modelos de velocidade inicial. a) Comparação entre o campos de ondas ascendentes exato e o estimado com JMI usando como modelo de velocidade inicial o modelo constante. b) Comparação entre o campos de ondas ascendentes exato e o estimado com JMI usando como modelo de velocidade inicial o modelo suave. . . . .	89
Figura 3.27 – Modelo de velocidade usado para gerar o conjunto de dados sintéticos para o JMI. . . . .	89
Figura 3.28 – a) Refletividade .b) <i>Shot gathers</i> modelados com FWMod e observados na superfície, da esquerda para direita, com fontes localizadas em 0.0 km, 1 km e 2.0 km, respectivamente, na coordenada lateral. . . . .	90
Figura 3.29 – a) Modelo de velocidade inicial para o JMI. b) Modelo de velocidade estimado com JMI após 45 iterações com uma banda de frequência de 10 a 60 Hz. . . . .	91
Figura 3.30 – Refletividade estimada com JMI após 45 iterações com uma banda de frequência de 10 a 60 Hz. . . . .	91
Figura 4.1 – Ilustração da aquisição sísmica VSP-desviado, com fonte na superfície, representadas pelas estrelas em vermelho, e receptores em um poço horizontal, representados pela curva em amarelo. . . . .	97
Figura 4.2 – Modelo simples usado para gerar o conjunto de dados sintéticos. a) Modelo de velocidade. b) Modelo de densidade. . . . .	97
Figura 4.3 – Modelo complexo usado para gerar o conjunto de dados sintéticos. a) Modelo de velocidade. b) Modelo de densidade. . . . .	98

Figura 4.4 – Campos de onda dos modelos simples (a) e complexo (b), observados em 0.7 km em profundidade e gerado por uma fonte localizada na superfície em $x = 3.0$ km. a) Da esquerda para direita, campo de onda descendente, campo de onda de ascendente e campo de onda ascendente modelado com fonte e receptores no nível do alvo em profundidade, respectivamente. b) Da esquerda para direita, campo de onda descendente, campo de onda de ascendente e campo de onda ascendente modelado com fonte e receptores no nível do alvo em profundidade, respectivamente. . . . .	99
Figura 4.5 – Respostas ao impulso estimadas após 25 iterações para os modelos simples (a) e complexo (b), de uma fonte virtual posicionada em $x = 3.0$ km, $z_d = 0.7$ km. a) Da esquerda para direita, campo de onda ascendente observado, campo de onda ascendente estimado e resposta ao impulso estimada, respectivamente. b) Da esquerda para direita, campo de onda ascendente observado, campo de onda ascendente estimado e resposta ao impulso estimada, respectivamente. . . . .	100
Figura 4.6 – Respostas ao impulso estimadas após 25 iterações para o modelo simples (a) e complexo (b) de uma fonte virtual posicionada em $x = 3.0$ km, $z_d = 0.7$ km, para três diferentes fatores de decimação. Esquerda: fator 2. Centro: fator 4. Direita: fator 8. . . . .	101
Figura 4.7 – Modelo usado para gerar o conjunto de dados sintéticos. a) Modelo de velocidade. b) Modelo de densidade. . . . .	102
Figura 4.8 – Campos de onda descendente (na esquerda) e ascendente (na direita) observados em 0.8 km em profundidade, gerado por fontes posicionadas na superfície e em três posições diferentes na coordenada lateral. a) Posição $x = 2.0$ km. b) Posição $x = 3.0$ km. c) Posição $x = 4.0$ km. . . . .	103
Figura 4.9 – Respostas ao impulso estimadas após 25 iterações em $z_d = 0.8$ km. a) Da esquerda para direita, resposta ao impulso estimada para uma fonte virtual em $z_d = 0.8$ e $x = 2.0$ km, campos de ondas ascendente estimado e observado, respectivamente, para a fonte na superfície e em $x = 2.0$ km. b) Da esquerda para direita, resposta ao impulso estimada para uma fonte virtual em $z_d = 0.8$ e $x = 3.0$ km, campos de ondas ascendente estimado e observado, respectivamente, para a fonte na superfície e em $x = 3.0$ km. c) Da esquerda para direita, resposta ao impulso estimada para uma fonte virtual em $z_d = 0.8$ e $x = 4.0$ km, campos de ondas ascendente estimado e observado, respectivamente, para a fonte na superfície e em $x = 4.0$ km. . . . .	104

Figura 4.10 – Seção de afastamento nulo na coordenada lateral. a) Campo de onda ascendente observado em $z_d = 0.8$ km em profundidade e gerados por fontes na superfície. b) Respostas ao impulso estimadas em $z_d = 0.8$ km em profundidade. . . . .	105
Figura 4.11 – Respostas ao impulso estimadas após 25 iterações para três fatores de decimação diferentes (2,4,8) de uma fonte virtuais em $x = 3.0$ km na coordenada lateral e $z_d = 0.8$ km em profundidade. Da esquerda para direita, fator 2, fator 4 e fator 8, respectivamente. . . . .	106
Figura 4.12 – Parte central do modelo de velocidade do Marmousi2 usado para gerar o conjunto de dados sintéticos. . . . .	106
Figura 4.13 – Campos de onda descendente observados em 2.550 km em profundidade, gerados por fontes posicionadas na superfície, da esquerda para direita, em $x = 4.0$ km, $x = 6.0$ km e $x = 8.0$ km, respectivamente. . . . .	107
Figura 4.14 – Campos de onda ascendente observados em 2.550 km em profundidade, gerados por fontes posicionadas na superfície, da esquerda para direita, em $x = 4.0$ km, $x = 6.0$ km e $x = 8.0$ km, respectivamente. . . . .	107
Figura 4.15 – Respostas ao impulso estimadas após 25 iterações de uma fonte virtuais em 2.550 km em profundidade. Da esquerda para direita, resposta ao impulso estimada, campo de onda ascendente estimado e campo de onda ascendente observado, respectivamente, para fonte real e virtual localizada em 4.0 km na coordenada lateral. . . . .	108
Figura 4.16 – Respostas ao impulso estimadas após 25 iterações de uma fonte virtuais em 2.550 km em profundidade. Da esquerda para direita, resposta ao impulso estimada, campo de onda ascendente estimado e campo de onda ascendente observado, respectivamente, para fonte real e virtual localizada em 6.0 km na coordenada lateral. . . . .	109
Figura 4.17 – Respostas ao impulso estimadas após 25 iterações de uma fonte virtuais em 2.550 km em profundidade. Da esquerda para direita, resposta ao impulso estimada, campo de onda ascendente estimado e campo de onda ascendente observado, respectivamente, para fonte real e virtual localizada em 8.0 km na coordenada lateral. . . . .	109
Figura 4.18 – Área alvo do modelo de velocidade mostrado na Figura 4.12. . . . .	110
Figura 4.19 – Imagem migrada via RTM da área alvo usando as respostas ao impulso estimadas . . . . .	110
Figura 4.20 – Respostas ao impulso estimadas após 25 iterações para três fatores de decimação diferentes (2,4,8) de uma fonte virtual localizada em $x = 6.0$ km na coordenada lateral e no nível do alvo em profundidade. Da esquerda para direita, fator 2, fator 4 e fator 8, respectivamente. . . . .	111



Figura 4.21 – Imagem migrada com RTM convencional da área alvo usando as respostas ao impulso estimadas com decimação nas fontes. a) Imagem migrada usando as respostas ao impulso estimadas usando um fator 2 para decimar as fontes. b) Imagem migrada usando as respostas ao impulso estimadas usando um fator 4 para decimar as fontes. b) Imagem migrada usando as respostas ao impulso estimadas usando um fator 8 para decimar as fontes. . . . .	112
Figura 4.22 – Ilustração da aquisição sísmica de superfície, onde fontes e receptores estão localizados na superfície. As fontes estão representadas pelas estrelas em vermelhos, e receptores, representados pelos triângulos em vermelhos. . . . .	113
Figura 4.23 – a) Modelo de velocidade simples, usado para gerar o conjunto de dados sintéticos. b) Campos de ondas com fontes e receptores na superfície, modelado com algoritmo de modelagem FWMod (na esquerda) e modelado com algoritmo de modelagem 2D FD (na direita). . . . .	114
Figura 4.24 – a) Modelo de velocidade complexo, usado para gerar o conjunto de dados sintéticos. b) Campos de ondas com fontes e receptores na superfície, modelado com algoritmo de modelagem FWMod (na esquerda) e modelado com algoritmo de modelagem 2D FD (na direita). . . . .	115
Figura 4.25 – Modelo de velocidade simples. a) Modelo de velocidade inicial usado como <i>input</i> para o JMI. b) Modelo de velocidade estimado com o JMI após 65 iterações. . . . .	116
Figura 4.26 – Em cima: modelo de refletividade exata. Embaixo: Imagem migrada com JMI. . . . .	116
Figura 4.27 – Campos de onda descendente (esquerda) e ascendente (direita) estimados em $z_d = 0.7$ km. a) Campos de onda estimado com o JMI a partir do modelo de velocidade inicial usado como <i>input</i> para o JMI. b) Campos de onda modelados com o algoritmo FWMod, usando o modelo de velocidade verdadeiro. . . . .	117
Figura 4.28 – Respostas ao impulso estimadas no nível em profundidade $z_d = 0.7$ km após 25 iterações. Da esquerda para direita, respostas ao impulso estimada, campos de ondas ascendente estimados a partir das respostas e campos de ondas ascendente observados. a) JMI. b) FWMod. c) FD. . . . .	118
Figura 4.29 – Modelo de velocidade complexo. a) Modelo de velocidade inicial usado como <i>input</i> para o JMI. b) Modelo de velocidade estimado com o JMI após 65 iterações. . . . .	119
Figura 4.30 – Em cima: modelo de refletividade exata. Embaixo: Imagem migrada com JMI. . . . .	119

Figura 4.31 – Campos de onda descendente (esquerda) e ascendente (direita) estimados em $z_d = 0.7$ km. a) Campos de onda estimado com o JMI a partir do modelo de velocidade inicial usado como <i>input</i> para o JMI. b) Campos de onda modelados com o algoritmo FWMod, usando o modelo de velocidade verdadeiro. . . . .	120
Figura 4.32 – Respostas ao impulso estimadas no nível em profundidade $z_d = 0.7$ km após 25 iterações. Da esquerda para direita, respostas ao impulso estimada, campos de ondas ascendente estimados a partir das respostas e campos de ondas ascendente observados. a) Para JMI. b) Para FWMod. c) Para FD. . . . .	121
Figura 5.1 – Modelo de velocidade usado para gerar os campos de onda descendente e ascendente ao longo da coordenada lateral e em 1.5 km em profundidade. . . . .	129
Figura 5.2 – Campos de onda descendente e ascendente observados com um arranjo de 601 receptores, com espaçamento de 0.01 km, e em 1.5 km em profundidade, gerado pela mesma fonte localizada em três posições diferentes na coordenada lateral, da esquerda para a direita, localizadas em 0.0 km, 3.0 km e 6.0 km, respectivamente, e 0.05 km em profundidade. a) Campos de ondas descendente. b) Campos de ondas ascendente. . . . .	130
Figura 5.3 – Modelo de velocidade da área alvo. a) Área de interesse do modelo de velocidade verdadeiro. b) Modelo de velocidade inicial para inversão da forma de onda orientada ao alvo. c) Resultado da inversão da forma de onda orientada ao alvo, após a inversão de 26 frequências invertidas sucessivamente, de 5.0 a 30.0 Hz, com incremento de 1.0 Hz, com 25 iterações para cada frequência invertida. d) Resultado da inversão da forma de onda orientada ao alvo, após a inversão de 21 frequências invertidas sucessivamente, de 10.0 a 30.0 Hz, com incremento de 1.0 Hz, com 25 iterações para cada frequência invertida. . . . .	131
Figura 5.4 – Informações de poços do resultado da inversão da forma de onda orientada ao alvo usando bandas de frequências distintas. a) Poço localizado em 0.85 km na coordenada lateral. b) Poço localizado em 2.40 km na coordenada lateral. c) Poço localizado em 3.80 km na coordenada lateral. . . . .	132

Figura 5.5 – Modelo de velocidade da área alvo. a) Modelo de velocidade inicial para inversão da forma de onda orientada ao alvo. b) Resultado da inversão da forma de onda orientada ao alvo, após a inversão de 26 frequências invertidas sucessivamente, de 5.0 a 30.0 Hz, com incremento de 1.0 Hz, com 25 iterações para cada frequência invertida. c) Resultado da inversão da forma de onda orientada ao alvo, após a inversão de 21 frequências invertidas sucessivamente, de 10.0 a 30.0 Hz, com incremento de 1.0 Hz, com 25 iterações para cada frequência invertida. . . . .	132
Figura 5.6 – Respostas ao impulso estimadas da área alvo de três fontes virtuais localizadas, da esquerda para direita, em 1.0 km, 3.0 km e 5.0 km, na coordenada lateral e no nível do alvo em profundidade (1.5 km). a) Resposta ao impulso estimadas com o esquema de inversão esparsa desenvolvido no capítulo anterior. b) Resposta ao impulso estimada via correlação-cruzada. . . . .	133
Figura 5.7 – Resultados da inversão da forma de onda, após a inversão de 26 frequências invertidas sucessivamente, de 5.0 a 30.0 Hz, com incremento de 1.0 Hz, com 25 iterações para cada frequência invertida. a) Resultado da inversão da forma de onda orientada ao alvo. b) Resultado da inversão da forma de onda clássica, usando como <i>input</i> as respostas ao impulso estimadas via esquema de inversão esparsa. b) Resultado da inversão da forma de onda clássica, usando como <i>input</i> as respostas ao impulso estimadas via formalismo de correlação-cruzada.	134
Figura 5.8 – Resultado da inversão da forma de onda orientada ao alvo com decimação, após a inversão de 26 frequências invertidas sucessivamente, de 5.0 a 30.0 Hz, com incremento de 1.0 Hz, considerando no máximo 25 iterações para cada frequência invertida. a) Fator de decimação 2 (301 pontos de observações). b) Fator de decimação 4 (151 pontos de observações). . . . .	134
Figura 5.9 – Campos de onda descendente observados em 2.550 km em profundidade, gerados por fontes posicionadas na superfície, da esquerda para direita, em $x = 4.0$ km, $x = 6.0$ km e $x = 8.0$ km, respectivamente. . . . .	136
Figura 5.10 – Campos de onda ascendente observados em 2.550 km em profundidade, gerados por fontes posicionadas na superfície, da esquerda para direita, em $x = 4.0$ km, $x = 6.0$ km e $x = 8.0$ km, respectivamente. . . . .	136
Figura 5.11 – Modelo de velocidade verdadeiro usado para modelar o conjunto de dado com o algoritmo de modelagem FWMod. . . . .	137

Figura 5.12 – <i>Shot gathers</i> dos campos de onda modelados com algoritmo de modelagem FWMod, gerado pela mesma fonte localizada na superfície e em três posições diferentes na coordenada lateral, da esquerda para a direita, localizadas em 0.0 km, 2.0 km e 4.0 km, respectivamente, e com um arranjo de 201 receptores na superfície ao longo da coordenada lateral com espaçamento de 0.02 km. . . . .	137
Figura 5.13 – a) Modelo de velocidade inicial usada com <i>input</i> para o JMI. b) Imagem migrada com JMI. c) Modelo de velocidade estimado com JMI	138
Figura 5.14 – <i>Shot gathers</i> dos campos de onda descendente estimados em 0.74 km em profundidade e em três posições diferentes na coordenada lateral, da esquerda para a direita, localizadas em 0.0 km, 2.0 km e 4.0 km, respectivamente, para as figuras a) e b). a) <i>Shot gathers</i> estimados com JMI a partir do conjunto de dado gerado e registrado na superfície. b) <i>Shot gathers</i> modelados com FWMod com fontes na superfície e receptores em 0.74 km em profundidade. . . . .	139
Figura 5.15 – <i>Shot gathers</i> dos campos de onda ascendente estimados em 0.74 km em profundidade e em três posições diferentes na coordenada lateral, da esquerda para a direita, localizadas em 0.0 km, 2.0 km e 4.0 km, respectivamente, para as figuras a) e b). a) <i>Shot gathers</i> estimados com JMI a partir do conjunto de dado gerado e registrado na superfície. b) <i>Shot gathers</i> modelados com FWMod com fontes na superfície e receptores em 0.74 km em profundidade. . . . .	140
Figura 5.16 – a) Área de interesse do modelo de velocidade verdadeiro. b) Modelo de velocidade inicial para inversão da forma de onda orientada ao alvo. c) Resultado da inversão usando o conjunto de dado modelo com FWMod após a inversão de 24 frequências invertidas sucessivamente (de 5.0 Hz até 28.0 Hz, com incremento de 1.0 Hz e considerando no máximo 25 iterações para cada frequência). d) Resultado da inversão usando o conjunto de dado estimado com JMI após a inversão de 24 frequências invertidas sucessivamente (de 5.0 Hz até 20.0 Hz, com incremento de 1.0 Hz e considerando no máximo 25 iterações para cada frequência). . . . .	141
Figura 5.17 – Informações de poço do resultado da inversão da forma de onda orientada ao alvo, a partir de dados modelados com FWMod e estimados com JMI. a) Poço localizado em 1.0 km na coordenada lateral. b) Poço localizado em 2.0 km na coordenada lateral. c) Poço localizado em 3.0 km na coordenada lateral. . . . .	142
Figura 5.18 – Modelo de velocidade verdadeiro usado para modelar o conjunto de dado com o algoritmo de modelagem FWMod. . . . .	143

Figura 5.19 – <i>Shot gathers</i> dos campos de onda modelados com algoritmo de modelagem FWMod, gerado pela mesma fonte localizada na superfície e em três posições diferentes na coordenada lateral, da esquerda para a direita, localizadas em 0.0 km, 2.0 km e 4.0 km, respectivamente, e com um arranjo de 201 receptores na superfície ao longo da coordenada lateral com espaçamento de 0.02 km. . . . .	144
Figura 5.20 – a) Modelo de velocidade inicial usada com <i>input</i> para o JMI. b) Imagem migrada com JMI. c) Modelo de velocidade estimado com JMI	145
Figura 5.21 – <i>Shot gathers</i> dos campos de onda descendente estimados em 0.74 km em profundidade e em três posições diferentes na coordenada lateral, da esquerda para a direita, localizadas em 0.0 km, 2.0 km e 4.0 km, respectivamente, para as figuras a) e b). a) <i>Shot gathers</i> estimados com JMI a partir do conjunto de dado gerado e registrado na superfície. b) <i>Shot gathers</i> modelados com FWMod com fontes na superfície e receptores em 0.74 km em profundidade. . . . .	146
Figura 5.22 – <i>Shot gathers</i> dos campos de onda ascendente estimados em 0.74 km em profundidade e em três posições diferentes na coordenada lateral, da esquerda para a direita, localizadas em 0.0 km, 2.0 km e 4.0 km, respectivamente, para as figuras a) e b). a) <i>Shot gathers</i> estimados com JMI a partir do conjunto de dado gerado e registrado na superfície. b) <i>Shot gathers</i> modelados com FWMod com fontes na superfície e receptores em 0.74 km em profundidade. . . . .	147
Figura 5.23 – a) Área de interesse do modelo de velocidade verdadeiro. b) Modelo de velocidade inicial para inversão da forma de onda orientada ao alvo. c) Resultado da inversão usando o conjunto de dado modelo com FWMod após a inversão de 24 frequências invertidas sucessivamente (de 5.0 Hz até 28.0 Hz, com incremento de 1.0 Hz e considerando no máximo 25 iterações para cada frequência). d) Resultado da inversão usando o conjunto de dado estimado com JMI após a inversão de 24 frequências invertidas sucessivamente (de 5.0 Hz até 20.0 Hz, com incremento de 1.0 Hz e considerando no máximo 25 iterações para cada frequência). . . . .	148

# SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>23</b>
1.1	Motivação	23
1.2	Objetivo da tese	24
1.3	Histórico e recentes desenvolvimentos	25
1.4	Estrutura da tese	27
<b>2</b>	<b>MODELAGEM ACÚSTICA NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA</b>	<b>28</b>
2.1	Introdução	28
2.2	Propagação de ondas em meio acústico	28
2.3	Simulando um domínio ilimitado	31
2.4	Solução numérica da equação da onda acústica no domínio da frequência-espaço	33
2.4.1	Erros numéricos da aproximação FD	35
2.4.2	Solução da equação da onda acústica no domínio da frequência-espaço	37
2.5	Validação dos algoritmos de modelagem por FD	39
2.6	Modelagem via representação tipo-convolução para função de Green	43
2.6.1	Exemplos numéricos	47
2.7	Modelagem acústica 2D com FWMod	50
2.7.1	Modelagem como um esquema recursivo	52
<b>3</b>	<b>INVERSÃO DA FORMA DE ONDA</b>	<b>57</b>
3.1	Introdução	57
3.2	Problema de otimização local	57
3.2.1	Método do gradiente	60
3.2.2	Método de Quase-Newton	60
3.3	<b>FWI</b>	<b>61</b>
3.3.1	Exemplos numéricos com a FWI	64
3.3.1.1	Conjuto de dados sintéticos	64
3.3.1.2	Resultados da inversão do modelo Marmousi	66
3.3.1.3	Resultados da inversão do modelo Marmousi2	69
3.4	<b>JMI</b>	<b>71</b>
3.5	Exemplos numéricos com JMI	76
<b>4</b>	<b>ESTIMANDO A RESPOSTA AO IMPULSO EM SUBSUPERFÍCIE</b>	<b>92</b>
4.1	Introdução	92
4.2	Teoria	93

<b>4.3</b>	<b>Exemplos numéricos</b> . . . . .	<b>96</b>
4.3.1	Exemplos com geometria de aquisição VSP-desviado . . . . .	96
4.3.2	Exemplo para aquisição sísmica de superfície . . . . .	110
4.3.2.1	Resultados para o modelo simples . . . . .	113
4.3.2.2	Resultados para o modelo complexo . . . . .	115
<b>4.4</b>	<b>Discussão e conclusão</b> . . . . .	<b>120</b>
<b>5</b>	<b>INVERSÃO DA FORMA DE ONDA ORIENTADA AO ALVO</b> . . . .	<b>123</b>
<b>5.1</b>	<b>Introdução</b> . . . . .	<b>123</b>
<b>5.2</b>	<b>Modelagem</b> . . . . .	<b>125</b>
<b>5.3</b>	<b>Inversão da forma de onda orientada ao alvo</b> . . . . .	<b>126</b>
<b>5.4</b>	<b>Exemplos numéricos</b> . . . . .	<b>128</b>
5.4.1	Exemplos com geometria de aquisição VSP-desviado . . . . .	128
5.4.2	Exemplos para dados sísmicos de superfície . . . . .	135
<b>5.5</b>	<b>Discussão e conclusão</b> . . . . .	<b>145</b>
<b>6</b>	<b>CONCLUSÕES E CONSIDERAÇÕES FINAIS</b> . . . . .	<b>149</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b> . . . . .	<b>151</b>
	 <b>APÊNDICE</b>	 <b>158</b>
	<b>APÊNDICE A – RELAÇÃO DE DISPERSÃO NUMÉRICA 2D</b> . . .	<b>159</b>
A.0.1	Para aproximação FD de segunda ordem . . . . .	159
A.0.2	Para aproximação FD de quarta ordem . . . . .	159

# 1 INTRODUÇÃO

Na ciência física é possível fazer inferências sobre um sistema ou experimento físico indiretamente a partir de um certo conjunto de observações. Isso é possível porque no caso ideal, isto é, livre de qualquer interferência externa ao sistema físico, as observações representam exclusivamente características dos parâmetros físicos do sistema em estudo. Nesta tese nossa investigação é focada em problemas de geofísica de prospecção onde as observações são ondas sísmicas após se propagarem em uma região em subsuperfície. Uma vez que temos essas observações podemos indiretamente inferir através de formulações de problemas inversos quais as características da região por onde elas se propagaram.

## 1.1 Motivação

Atualmente existe um grande esforço em geofísica de prospecção para desenvolver tecnologias de imageamento/inversão capazes de descrever regiões em subsuperfície com geologia complexa com maior precisão e resolução. Em regiões com geologia complexa os fenômenos ondulatórios são complexos e metodologias baseadas em aproximação de alta frequência não são mais apropriadas para descrever esses fenômenos. Devido a esta limitação dos métodos baseados em aproximação de alta frequência e com a evolução das tecnologias computacionais, métodos de imageamento/inversão baseados na equação de onda vem ganhando mais destaque em geofísica de prospecção. Entre essas metodologias encontram-se inversão da forma de onda total (FWI<sup>1</sup>)(LAILLY, 1983; TARANTOLA, 1984; VIRIEUX; OPERTO, 2009) e inversão conjunta da forma de onda baseada em migração (JMI<sup>2</sup>)(BERKHOUT, 2012; BERKHOUT, 2014c).

JMI pode ser entendido como um esquema de inversão da forma de onda do campo de reflexão total que combina o processo de migração e tomografia em um único esquema. Esta metodologia começou a ganhar destaque na literatura em Berkhout (2012), onde ele mostra como combinar a migração do campo de onda total (FWM<sup>3</sup>)(BERKHOUT; VERSCHUUR, 2011; BERKHOUT, 2014b) juntamente com o processo de estimar o modelo de velocidade. Uma característica intrínseca do JMI é a necessidade de estimar os campos de onda ascendente e descendente em todos os níveis em subsuperfície.

FWI é formulada como um método de otimização local baseado no ajuste dos campos de onda total modelados e observados. Em teoria, com a FWI é possível obter os

---

<sup>1</sup> *Full-Waveform inversion.*

<sup>2</sup> *Joint Migration Inversion.*

<sup>3</sup> *Full Wavefield Migration.*



parâmetros físicos da subsuperfície com alta precisão e resolução (PRATT et al., 1996; VIRIEUX; OPERTO, 2009).

Nesta tese nosso interesse é investigar metodologias de inversão da forma de onda baseadas na metodologia da FWI com intuito de estimar parâmetros físicos da subsuperfície com maior precisão e resolução.

## 1.2 Objetivo da tese

Com a FWI é possível estimar os parâmetros físicos em subsuperfície com alta precisão e resolução. No entanto, o sucesso da inversão com essa metodologia depende de alguns fatores:

- \* É uma metodologia de inversão não-linear e para o resultado da inversão não representar uma solução de mínimo local, alguma estratégia para mitigar essa não-linearidade precisa ser adotada (SIRGUE; PRATT, 2004).
- \* Para diminuir a possibilidade da solução estacionar em um mínimo local, a FWI requer um exato modelo de velocidade inicial ou informações de baixa frequência no conjunto de dados observados (SIRGUE; PRATT, 2004; VIRIEUX; OPERTO, 2009; SANTOS et al., 2016), normalmente abaixo de 5 Hz, as quais normalmente não se tem disponível em um levantamento sísmico.
- \* Um eficiente esquema de modelagem, pois o processo de modelagem da FWI requer um considerável esforço computacional (VIRIEUX; OPERTO, 2009), uma vez que a modelagem é baseada na equação de onda e em princípio para cada iteração é necessário realizar uma modelagem para cada fonte usada na aquisição sísmica.
- \* Outro fator importante em FWI é o conhecimento da fonte usada na modelagem, pois para ajustar os dados o conhecimento da fonte é essencial.

Mesmo contornando todas essas questões, normalmente a FWI consegue estimar os parâmetros físicos com maior precisão na parte rasa do modelo (KAMEI; PRATT; TSUJI, 2014), então para problemas de inversão em regiões profundas a precisão e resolução podem não ser as desejadas. Devido a essa limitação da FWI, algumas alternativas de inversão da forma onda foram desenvolvidas. Entre elas destacamos as metodologias *Improved Target-oriented Linear Full Waveform Inversion* (STAAL et al., 2010), *Target-oriented non-linear inversion of time-lapse seismic data* (GISOLF; van den BERG, 2010), *Nonlinear full waveform inversion for high resolution quantitative property estimation* (HAFFINGER; GISOLF; van den BERG, 2012) e *target-oriented time-lapse waveform inversion using virtual survey* (YANGK et al., 2012). Em geral, essas metodologias requerem que o dado usado como *input* seja também local, ou seja, um conjunto de dados apenas com informações da região alvo em subsuperfície.

Nesta tese nosso objetivo principal é desenvolver uma metodologia de inversão da

forma de onda orientada ao alvo baseada na metodologia da FWI sem a necessidade que o dado usado como *input* seja local. Além disso, investigamos a combinação entre nossa metodologia de inversão local com o a metodologia do JMI. Por fim, também investigamos um esquema de redatumação baseado na combinação entre o JMI com um esquema de inversão esparsa para estimar a resposta ao impulso de uma área alvo em subsuperfície que pode ser usado como *input* para nosso esquema de inversão local.

Todas as metodologias abordadas na presente tese são desenvolvidas no domínio da frequência e em duas dimensões (2D).

### 1.3 Histórico e recentes desenvolvimentos

Os primeiros trabalhos que mostraram a viabilidade computacional da inversão da forma de onda do campo total, foram desenvolvidos por Lailly (1983) e Tarantola (1984), onde desenvolveram a metodologia de minimizar a diferença entre o conjunto de dados sísmicos calculados e o conjunto de dados sísmicos observados (dados residuais), através do método dos quadrados mínimos como um método de otimização local. Eles mostraram que era possível calcular o vetor gradiente da função objetivo, através da correlação cruzada entre os campos de ondas incidentes com a retro-propagação dos campos residuais dos dados sísmicos para cada fonte do levantamento sísmico. Esses primeiros trabalhos (LAILLY, 1983; TARANTOLA, 1984), foram realizados no domínio do tempo, então para se obter o vetor gradiente é preciso realizar uma integração em fonte, receptores e tempo. Todas as formas de ondas contidas no conjunto de dados (reflexão, refração, ondas de mergulho, múltiplas de superfície e internas) podem ser consideradas na inversão, levando a inversão da forma de onda do campo total.

As primeiras aplicações da FWI foram com dados sísmicos de reflexão (VIRIEUX; OPERTO, 2009), e essas aplicações mostraram que essa técnica tem algumas limitações. Para realizar FWI usando dados sísmicos que contenham principalmente eventos de reflexão, o processo de otimização local facilmente estaciona em um mínimo local (MULDER; PLESSIX, 2008)(entendemos como mínimo local, representação da subsuperfície que não corresponde ao modelo verdadeiro da mesma), pois é intrínseca da FWI a necessidade de recuperar os menores números de ondas do modelo para que a atualização dos menores comprimentos de ondas do modelo seja feita corretamente, e dados sísmicos de reflexão não são sensíveis para os menores números de ondas do modelo (JANNANE et al., 1989). Por outro lado, com o uso de informações de levantamentos sísmicos de grandes *offset* e dados sísmicos de transmissão (PRATT et al., 1996; PRATT, 1999), FWI mostrou que pode ser uma técnica mais efetiva do que as técnicas normalmente usadas, como por exemplo, mais efetiva que a tomografia de tempo de trânsito das primeiras chegadas (OPERTO et al., 2004), para recuperar as estruturas da subsuperfície.

As aplicações da FWI para dados sísmicos de reflexão, mostraram que é intrínseco dessa técnica a necessidade de se recuperar os menores números de ondas do modelo para que a FWI tenha sucesso em seu processo otimização local. No entanto, para recuperar os maiores comprimentos de ondas do modelo, é necessário ter disponíveis no conjunto de dados sísmicos, informações de baixas frequências (VIRIEUX; OPERTO, 2009; SANTOS et al., 2016), algo que em geral, em dado sísmico real, não temos disponível. Devido a essa limitação, uma das estratégias adotadas foi combinar métodos que estimam modelos iniciais da subsuperfície com FWI, tal como o método de tomografia de tempo de trânsito das primeiras chegadas (OPERTO et al., 2004).

FWI pode ser implementada tanto no domínio do tempo (TARANTOLA, 1984; GAUTHIER; VIRIEUX; TARANTOLA, 1986; CRASE et al., 1990; PICA; DIET; TARANTOLA, 1990; SUN; MCMECHAN, 1992) quanto no domínio da frequência (PRATT, 1999; KAMEI; PRATT; TSUJI, 2013; KAMEI; PRATT, 2013; SIRGUE; PRATT, 2004). As motivações para escolher um domínio, em detrimento de outro, dependem das estratégias adotadas para diminuir a não-linearidade e da viabilidade computacional do problema.

No domínio do tempo, existe uma certa facilidade para escolher as chegadas da forma de onda que serão invertidas, aplicando uma janela temporal no conjunto de dados (VIRIEUX; OPERTO, 2009). Com essa facilidade, é possível excluir do conjunto de dados as informações que aumentam a não-linearidade do problema. Por outro lado, essa seleção das chegadas também pode ser realizada no domínio da frequência, através da aplicação de um fator de amortecimento nos campos de onda, e dependendo do fator de amortecimento, os tipos de chegadas das formas de ondas são selecionadas (KAMEI; PRATT; TSUJI, 2013).

Uma outra estratégia para mitigar a não-linearidade da FWI é realizando uma inversão em multi-escalas como proposta por Bunks et al. (1995), onde se começa das menores para as maiores frequências. Essa estratégia é facilmente implementada no domínio da frequência. Outra facilidade que se tem pela implementação da FWI no domínio da frequência, é a possibilidade da escolha de frequências que vão ser invertidas, pois como mostrado em Sirgue and Pratt (2004), dependendo do *offset* do levantamento sísmico e da profundidade do alvo, poucas frequências podem ser necessárias para obter os parâmetros físicos da subsuperfície.

Para problemas em 2D com múltiplas fontes, FWI no domínio da frequência se torna mais atrativa (VIGH; STARR, 2008), pois como no domínio da frequência é necessário resolver um sistema linear para cada fonte e cada frequência invertida (considerando que os métodos usados para resolver a equação de onda foram o método de diferenças finitas, o de elementos finitos ou outros métodos que gerem um sistema linear). Se o método de solução for método baseado em decomposição LU, basta fazer uma única decomposição para cada frequência e usar essa decomposição para todas as fontes. Essa facilidade deixa

o método bem eficiente do ponto de vista computacional (VIRIEUX; OPERTO, 2009). Por outro lado, para problemas em 3D, o custo computacional da decomposição LU se torna muito elevado (VIGH; STARR, 2008), dessa maneira, para problemas 3D, a FWI no domínio do tempo se torna mais atrativa do ponto de vista computacional.

Nos últimos 30 anos, inúmeros esforços foram realizados para desenvolver metodologias que tornem a FWI efetiva, robusta e eficiente. Duas novas abordagens recentes da FWI são a TFWI (BIONDI; ALMOMIN, 2014) e a AWI (WARNER; GUASCH, 2014) que parecem promissoras pra resolver o problema de mínimos locais em FWI. Porém FWI ainda tem muitos desafios para serem alcançados, como por exemplo, utilizar energia de reflexão para aumentar a resolução do modelo estimado (XU et al., 2012; WANG; SINGH; CALANDRA, 2013; WANG et al., 2013; QIN; FEI; LUO, 2013; BROSSIER; OPERTO; VIRIEUX, 2013), desenvolver metodologias que considerem anisotropia (GUASCH et al., 2010, 2010; JEONG et al., 2011; LIU; ZHANG, 2013; WARNER et al., 2013), entre outros.

## 1.4 Estrutura da tese

Esta tese é composta por 5 capítulos além dessa introdução:

No Capítulo 2 introduzimos os esquemas de modelagens utilizados nesta tese e mostramos alguns exemplos numéricos.

No Capítulo 3 introduzimos a FWI e o JMI e mostramos alguns exemplos numéricos para ressaltar as limitações e o potencial de cada metodologia.

No Capítulo 4 investigamos a metodologia de redatumação combinando o JMI com um esquema de inversão esparsa para estimar as respostas ao impulso de uma área alvo em subsuperfície e mostramos alguns exemplos numéricos.

No Capítulo 5 desenvolvemos nossa metodologia de inversão da forma de onda orientada ao alvo.

No Capítulo 6 apresentamos as conclusões do presente trabalho.

## 2 MODELAGEM ACÚSTICA NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA

### 2.1 Introdução

Na presente tese, nosso interesse é investigar a inversão da forma de onda sísmica na sua versão acústica. Este capítulo é dedicado a introduzir os métodos de modelagem de ondas acústicas usados no restante da tese: modelagem sísmica usando o esquema de diferenças-finitas (FD<sup>1</sup>) (MARFURT, 1984; JO; SHI; SUH, 1996; ARNTSEN; NEBEL; AMUNDSEN, 1998; OPERTO et al., 2007; PAN; ABUBAKAR; HABASHY, 2011; Di Bartolo; DORS; MANSUR, 2012), modelagem via representação tipo-convolução para função de Green (WAPENAAR; van der NEUT, 2010; WAPENAAR et al., 2011) e o esquema de modelagem (sísmica) do campo de onda total (FWMod<sup>2</sup>) (BERKHOUT, 2014a) através de operadores de propagação e espalhamento.

### 2.2 Propagação de ondas em meio acústico

Propagação de ondas acústicas podem ser descritas através de duas formulações matemáticas diferentes mas equivalentes. Uma se dá através de um sistema de equações diferenciais de primeira ordem, equações de movimento e deformação, que relacionam os campos de velocidade da partícula e o de pressão e outra formulação através de uma equação diferencial de segunda ordem em termos do campo de pressão ou do campo de velocidade da partícula. No domínio do tempo-espaço  $(t - \mathcal{D})$  - onde  $t$  representa a variável tempo e  $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^3$  representa o domínio espacial ilimitado no corpo dos reais  $\mathbb{R}$  - as equações de movimento e deformação são dadas, respectivamente por (de Hoop, 1995):

$$\rho(\mathbf{r})\partial_t \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) + \nabla p(\mathbf{r}, t) = \mathbf{f}(\mathbf{r}, t), \quad (2.1)$$

$$\kappa(\mathbf{r})\partial_t p(\mathbf{r}, t) + \nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = q(\mathbf{r}, t), \quad (2.2)$$

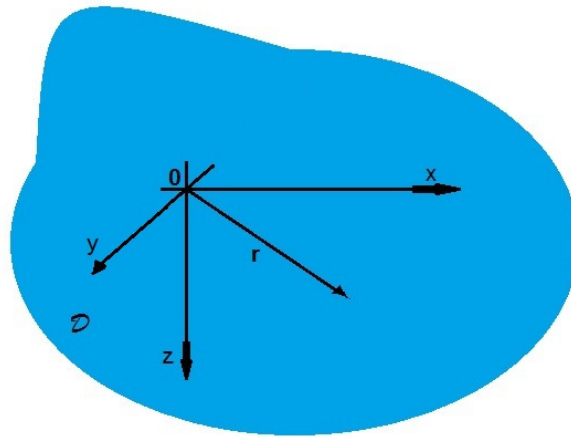
nas quais  $\mathbf{r} = (x, y, z) \in \mathcal{D}$  denota o vetor posição no espaço  $\mathcal{D}$  em coordenadas cartesianas, como ilustrado na Figura 2.1, com  $x, y$  representando as coordenadas laterais ao longo das direções *inline* e *crossline*, respectivamente, e  $z$  denotando a profundidade. Observe que no sistema de coordenadas adotado aqui, definimos, por conveniência, que o sentido positivo de  $z$  é de cima para baixo, como indicado na Figura 2.1. O operador  $\partial_t$  denota o operador

<sup>1</sup> Usamos FD para denotar diferenças-finitas devido sua versão em inglês: *finite-differences*.

<sup>2</sup> Usamos FWMod para denotar modelagem do campo de onda total devido sua versão em inglês: *full wavefield modeling*.

de derivada parcial<sup>3</sup> em relação a variável temporal  $t$  e o operador  $\nabla = (\partial_x, \partial_y, \partial_z)^T$  - onde  $T$  denota transposição do vetor<sup>4</sup> - representa um vetor de derivadas parciais em relação às três coordenadas espaciais. Na Equação (2.1),  $\rho(\mathbf{r})$  representa a densidade do meio,  $\mathbf{f}(\mathbf{r}, t)$ , é a densidade de força externa aplicada,  $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ , representa o campo de velocidade de partícula e  $p(\mathbf{r}, t)$  representa o campo de pressão. Na Equação (2.2),  $\kappa(\mathbf{r})$  representa a compressibilidade do meio,  $q(\mathbf{r}, t)$ , representa uma fonte externa de injeção de volume.

Figura 2.1 – Vetor  $\mathbf{r}$  no espaço  $\mathcal{D}$ . Vetor representado no sistema de coordenadas cartesianas.



Fonte: Autor

As Equações não-homogêneas (2.1) e (2.2) descrevem a propagação das ondas acústicas em um meio heterogêneo caracterizado pelas propriedades  $\rho(\mathbf{r})$  e  $\kappa(\mathbf{r})$ , submetido a distribuição de fontes  $\mathbf{f}(\mathbf{r}, t)$  e  $q(\mathbf{r}, t)$ . Para certos problemas é mais conveniente descrever a propagação das ondas acústicas por meio apenas do campo de pressão e isso pode ser realizado através da eliminação do campo de velocidade das Equações (2.1) e (2.2), o qual resulta na seguinte equação diferencial não-homogênea de segunda ordem:

$$\rho(\mathbf{r})\nabla \cdot \left[ \frac{1}{\rho(\mathbf{r})} \nabla p(\mathbf{r}, t) \right] - \frac{1}{c(\mathbf{r})^2} \partial_t^2 p(\mathbf{r}, t) = -\rho(\mathbf{r})s(\mathbf{r}, t), \quad (2.3)$$

onde  $s(\mathbf{r}, t)$  representa a fonte externa, dada por:

$$s(\mathbf{r}, t) = \partial_t q(\mathbf{r}, t) - \nabla \cdot \left[ \frac{1}{\rho(\mathbf{r})} \mathbf{f}(\mathbf{r}, t) \right] \quad (2.4)$$

e  $c(\mathbf{r})$  representa a velocidade de propagação da onda acústica, dada por:

$$c(\mathbf{r}) = \sqrt{\frac{1}{\kappa(\mathbf{r})\rho(\mathbf{r})}}. \quad (2.5)$$

<sup>3</sup> No decorrer do texto usamos essa notação para os operadores de derivadas parciais, onde de modo genérico temos que  $\partial_\eta = \frac{\partial}{\partial \eta}$  representa o operador de derivada parcial em relação a variável  $\eta$ .

<sup>4</sup> Nesta tese,  $T$  como um sobrescrito sempre representa a transposta de uma matriz ou o transposto de um vetor.

Em muitos problemas de geofísica de prospecção, a densidade do meio de propagação da onda,  $\rho(\mathbf{r})$ , é negligenciada, fazendo aproximação de que  $\nabla\rho(\mathbf{r}) \approx \mathbf{0}$ , e assim, a Equação (2.3) se reduz a seguinte equação:

$$\left[ \nabla^2 - \frac{1}{c(\mathbf{r})^2} \partial_t^2 \right] p(\mathbf{r}, t) = -\rho(\mathbf{r})s(\mathbf{r}, t), \quad (2.6)$$

onde  $\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla$  é conhecido como operador laplaciano e  $s(\mathbf{r}, t)$  é dado por:

$$s(\mathbf{r}, t) = \partial_t q(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{\rho(\mathbf{r})} \nabla \cdot \mathbf{f}(\mathbf{r}, t). \quad (2.7)$$

No que se segue, utilizamos a transformada temporal de Fourier, então definimos aqui qual convenção da transformada de Fourier usamos na presente tese. Não abordamos as propriedades e condições necessárias para existência da transformadas de Fourier, então indicamos referências como Hsu (1973), Butkov (1988) e Leite (2015), para o leitor interessado em tal assunto.

**Transformada temporal de Fourier:** usamos a convenção do par de transformada temporal de Fourier como em Gisolf and Verschuur (2010), definida como se segue:

$$\mathcal{F}[\phi(\mathbf{r}, t)] = \Phi(\mathbf{r}, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(\mathbf{r}, t) e^{-i\omega t} dt, \quad (2.8)$$

para transformada de Fourier direta e

$$\mathcal{F}^{-1}[\Phi(\mathbf{r}, \omega)] = \phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\mathbf{r}, \omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad (2.9)$$

para transformada de Fourier inversa. Aqui  $i = \sqrt{-1}$  é a unidade imaginária<sup>5</sup> e  $\omega = 2\pi f \in \mathbb{R}$  é a frequência angular, com  $f$  sendo a frequência linear.

A partir da definição da transformada de Fourier acima, temos que

$$\mathcal{F}[\nabla^2 p(\mathbf{r}, t)] = \nabla^2 P(\mathbf{r}, \omega), \quad (2.10)$$

$$\mathcal{F}[\partial_t^2 p(\mathbf{r}, t)] = -\omega^2 P(\mathbf{r}, \omega) \quad (2.11)$$

e

$$\mathcal{F}[s(\mathbf{r}, t)] = S(\mathbf{r}, \omega) = -i\omega Q(\mathbf{r}, \omega) - \frac{1}{\rho(\mathbf{r})} \nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}, \omega), \quad (2.12)$$

onde  $Q(\mathbf{r}, \omega)$  e  $\mathbf{F}(\mathbf{r}, \omega)$  denotam as transformadas de Fourier de  $q(\mathbf{r}, t)$  e  $\mathbf{f}(\mathbf{r}, t)$ , respectivamente.

Para obtermos a equação da onda acústica no domínio da frequência-espaco, aplicamos a transformada de Fourier, como definida acima, nas Equações (2.6) e (2.7) e utilizamos as Equações (2.10), (2.11) e (2.12), resultando na seguinte equação:

$$\left[ \nabla^2 + \frac{\omega^2}{c(\mathbf{r})^2} \right] P(\mathbf{r}, \omega) = -\rho(\mathbf{r})S(\mathbf{r}, \omega). \quad (2.13)$$

<sup>5</sup> Nesta tese,  $i$  nas equações sempre representa a unidade imaginária.

A equação acima, definida no domínio frequência-espço ( $\omega - \mathcal{D}$ ), é conhecida na literatura como Equação de Helmholtz (DEVANEY, 2012).

O termo de fonte, Equação (2.7), é formado por duas partes, taxa de injeção de volume e densidade de força, mas neste trabalho consideramos a densidade de força nula.

Nesta tese, a resposta ao impulso, ou função de Green, no domínio ( $\omega - \mathcal{D}$ ), para uma fonte pontual impulsiva localizada em  $\mathbf{r}_s$ , satisfaz a seguinte equação (DEVANEY, 2012):

$$\left[ \nabla^2 + \frac{\omega^2}{c(\mathbf{r})^2} \right] G(\mathbf{r}, \omega; \mathbf{r}_s) = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_s), \quad (2.14)$$

onde  $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_s)$  representa a delta de Dirac.

### 2.3 Simulando um domínio ilimitado

A equação da onda acústica introduzida anteriormente, tanto no domínio ( $t - \mathcal{D}$ ) quanto no domínio ( $\omega - \mathcal{D}$ ), descreve os fenômenos ondulatórios em um domínio espacial ilimitado. No entanto, para problemas práticos de geofísica de prospecção, o domínio de interesse é uma região finita em subsuperfície. Sendo assim, definimos o domínio finito  $\mathcal{D}_b \subset \mathcal{D}$  limitado pela borda  $\mathcal{S}_b$ , como ilustrado na Figura 2.2.

Considerando agora um domínio finito, reflexões nas bordas podem ocorrer e com exceção da borda que representa a superfície-livre, nas outras bordas essa reflexão é artificial. Para evitar ou diminuir o máximo possível as reflexões artificiais e, se desejável, também as reflexões da superfície-livre, deve-se usar algum tipo de bordas que simule um domínio ilimitado, onde o campo de onda seja nulo.

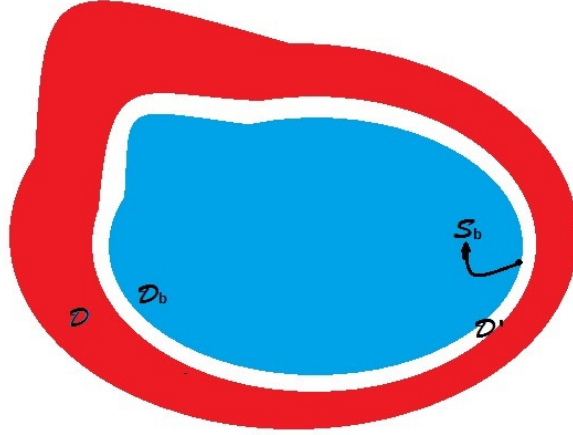
Para toda modelagem realizada com o esquema FD que implementamos, usamos a condição de borda absorvente *perfectly matched layer* (PML), inicialmente introduzida por Bérenger (1994) para absorção de ondas eletromagnéticas. A ideia básica da PML é adicionar nas bordas do domínio físico  $\mathcal{D}_b$ , uma faixa artificial, de tal maneira, que na interface entre o domínio físico e a faixa artificial, não ocorram reflexões e que a energia da onda atenua exponencialmente dentro dessa faixa (COLLINO; TSOGKA, 2001). Na Figura 2.2 ilustramos essa metodologia adicionando nas bordas do domínio  $\mathcal{D}_b$  uma faixa artificial, indicada pelo contorno branco na figura, e denominamos o domínio físico acrescido dessa faixa da PML, domínio  $\mathcal{D}'$ , isto é,  $\mathcal{D}' = \mathcal{D}_b \cup \mathcal{D}_{PML}$ .

Usando a condição PML para evitar reflexões nas bordas do modelo, as coordenadas espaciais são estendidas para adicionar a borda artificial e assim, a equação da onda acústica tem que ser consistente com essa extensão.

Matematicamente falando, uma maneira de incluir a condição PML nas bordas do



Figura 2.2 – Ilustração do domínio finito  $\mathcal{D}_b \subset \mathcal{D}$  limitado pela borda  $\mathcal{S}_b$ .  $\mathcal{D}'$  representa o domínio físico acrescido com a faixa da PML com objetivo de simular um domínio ilimitado.



Fonte: Autor.

domínio físico  $\mathcal{D}_b$ , é através da seguinte transformação de variáveis:

$$\Psi : \mathcal{D}_b \rightarrow \mathcal{D}' : \mathbf{r} \mapsto \tilde{\mathbf{r}} = \Psi(\mathbf{r}), \quad (2.15)$$

onde  $\Psi \in \mathcal{C}^1(\mathcal{D}_b)$ , é bijetora e o determinante do jacobiano da transformação é diferente de zero,  $\det \mathbf{J}_\Psi \neq 0$ , em  $\mathcal{D}_b$  e dada por:

$$\mathbf{J}_\Psi = \begin{bmatrix} \partial_x \tilde{x} & \partial_y \tilde{x} & \partial_z \tilde{x} \\ \partial_x \tilde{y} & \partial_y \tilde{y} & \partial_z \tilde{y} \\ \partial_x \tilde{z} & \partial_y \tilde{z} & \partial_z \tilde{z} \end{bmatrix}. \quad (2.16)$$

Seguindo Collino and Tsogka (2001) usamos a seguinte relação de transformação para as variáveis espaciais  $x, y, z$ :

$$\tilde{\eta}(\eta) = \eta - \frac{i}{\omega} \int_0^\eta d(s) ds. \quad (2.17)$$

Onde  $d(s_j)$  é o fator de amortecimento dado por

$$d(s) = d_0 \left( \frac{s}{\delta} \right)^2, \quad (2.18)$$

que é nulo fora da faixa artificial e positivo dentro dela,  $d_0$  é o amortecimento máximo e  $\delta$  é a largura da faixa artificial. Para esta relação de transformação, Equação (2.17), temos que o jacobiano da transformação, Matriz (2.16), é diagonal e dada por:

$$\mathbf{J}_\Psi = \begin{bmatrix} \zeta_x & 0 & 0 \\ 0 & \zeta_y & 0 \\ 0 & 0 & \zeta_z \end{bmatrix}, \quad (2.19)$$

com  $\zeta_\eta = 1 - \frac{i}{\omega}d(\eta)$ . Portanto, temos a seguinte transformação para os operadores de derivadas parciais:

$$\begin{bmatrix} \partial_{\tilde{x}} \\ \partial_{\tilde{y}} \\ \partial_{\tilde{z}} \end{bmatrix} = \mathbf{J}_\Psi^{-1} \begin{bmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{bmatrix}. \quad (2.20)$$

De onde vem a seguinte relação:

$$\partial_{\tilde{\eta}} = \frac{i\omega}{i\omega + d(\eta)} \partial_\eta. \quad (2.21)$$

Com essa transformação de variável, o operador laplaciano torna-se:

$$\widetilde{\nabla}^2 = \partial_{\tilde{x}}^2 + \partial_{\tilde{y}}^2 + \partial_{\tilde{z}}^2, \quad (2.22)$$

com  $\partial_{\tilde{\eta}}^2$  dado por:

$$\partial_{\tilde{\eta}}^2 = \frac{i\omega}{i\omega + d(\eta)} \partial_\eta \left( \frac{i\omega}{i\omega + d(\eta)} \partial_\eta \right). \quad (2.23)$$

Usando essa transformação de variáveis na equação da onda acústica, ela se torna consistente entre os domínios espaciais  $\mathcal{D}_b$  e  $\mathcal{D}'$ .

## 2.4 Solução numérica da equação da onda acústica no domínio da frequência-espaço

Nesta seção consideramos o caso 2D, onde o meio de interesse está situado no plano  $(x \times z)$  e o vetor  $\mathbf{r}$  que representava a posição no espaço cartesiano, agora irá representar a posição no plano cartesiano  $(x \times z)$ .

Como nosso interesse é resolver a equação da onda acústica considerando um meio de propagação com aproximação de que  $\nabla\rho(\mathbf{r}) \approx \mathbf{0}$ , mas heterogêneo, temos que usar algum método numérico para obter a solução de tal equação. Existem na literatura vários métodos para resolver a equação da onda acústica, tanto no domínio tempo-espaço quanto no domínio frequência-espaço, tal como os métodos de expansão rápida (TESSMER, 2011; CHU; STOFFA, 2012), métodos espectrais (FACCIOLI et al., 1996), métodos de elementos-finitos (MARFURT, 1984), métodos FD (MARFURT, 1984; JO; SHI; SUH, 1996; ARNTSEN; NEBEL; AMUNDSEN, 1998; OPERTO et al., 2007; PAN; ABUBAKAR; HABASHY, 2011), entre outros. O método numérico adotado aqui para resolver numericamente a equação da onda acústica no domínio da frequência-espaço é o método FD central clássico de segunda ou quarta ordem. Implementamos segunda e quarta ordem, pois dependendo da banda de frequência usada, pode ser possível realizar a modelagem usando segunda ordem e isso melhora a eficiência computacional da modelagem.

Para aproximar as derivadas espaciais da Equação (2.23) através dos operadores FD, é necessário discretizar o domínio  $\mathcal{D}'$ , que será denotado por  $\mathcal{D}'^h$ . Discretizando os eixos  $x$  e  $z$  em tamanhos  $h_x$  e  $h_z$ , respectivamente, obtém-se um plano discretizado através dos pontos  $(x, z) = (lh_x, mh_z)$  com  $L_x^{in} \leq l \leq L_x^f$  e  $L_z^{in} \leq m \leq L_z^f$ , onde  $L_\eta^{in}$  e  $L_\eta^f$  são números inteiros que indicam o ponto inicial e final em cada eixo no plano discretizado, respectivamente. Sendo assim, uma função  $g(\mathbf{r})$  que era definida em todos os pontos do domínio  $\mathcal{D}'$ , torna-se uma função  $g(lh_x, mh_z) = g_{l,m}$  definida apenas nos pontos  $l, m$  no domínio discretizado  $\mathcal{D}'^h$ . Agora com o domínio discretizado,  $\mathcal{D}'^h$ , pode-se usar a aproximação dos operadores de diferenças-finitas central, obtido através da expansão em série de Taylor, para aproximar os operadores de derivadas parciais.

Para uma aproximação de segunda ordem, as derivadas parciais, Equação (2.23), são aproximadas da seguinte maneira:

$$[b\partial_x (b\partial_x P)]_{l,m}^\omega = \frac{b_{l,m}^\omega}{(h_x)^2} \left[ b_{l+\frac{1}{2},m}^\omega (P_{l+1,m}^\omega - P_{l,m}^\omega) - b_{l-\frac{1}{2},m}^\omega (P_{l,m}^\omega - P_{l-1,m}^\omega) \right] \quad (2.24)$$

$$[b\partial_z (b\partial_z P)]_{l,m}^\omega = \frac{b_{l,m}^\omega}{(h_z)^2} \left[ b_{l,m+\frac{1}{2}}^\omega (P_{l,m+1}^\omega - P_{l,m}^\omega) - b_{l,m-\frac{1}{2}}^\omega (P_{l,m}^\omega - P_{l,m-1}^\omega) \right] \quad (2.25)$$

com  $b \doteq \frac{i\omega}{i\omega + d(\eta)}$ , seguido por suas aproximações dadas por:

$$b_{l\pm\frac{1}{2},m}^\omega = \frac{1}{2} (b_{l\pm 1,m}^\omega + b_{l,m}^\omega), \quad (2.26)$$

$$b_{l,m\pm\frac{1}{2}}^\omega = \frac{1}{2} (b_{l,m\pm 1}^\omega + b_{l,m}^\omega). \quad (2.27)$$

Com essa aproximação de segunda ordem das derivadas parciais, obtém-se a seguinte versão discretizada da Equação de Helmholtz 2D, Equação (2.13) incluindo a condição PML,:

$$\begin{aligned} & \frac{b_{l,m}^\omega}{(h_x)^2} \left[ b_{l+\frac{1}{2},m}^\omega (P_{l+1,m}^\omega - P_{l,m}^\omega) - b_{l-\frac{1}{2},m}^\omega (P_{l,m}^\omega - P_{l-1,m}^\omega) \right] \\ & \frac{b_{l,m}^\omega}{(h_z)^2} \left[ b_{l,m+\frac{1}{2}}^\omega (P_{l,m+1}^\omega - P_{l,m}^\omega) - b_{l,m-\frac{1}{2}}^\omega (P_{l,m}^\omega - P_{l,m-1}^\omega) \right] + \left( \frac{\omega}{c_{l,m}} \right)^2 \\ & = \rho_{lm} S(\omega) \delta_{l_s} \delta_{m m_s}, \end{aligned} \quad (2.28)$$

onde  $\delta_{ab}$  representa a delta de Kronecker e o subscrito  $s$  em um índice indica uma posição para fonte na malha discretizada.

Para aproximação de quarta ordem, as derivadas parciais são aproximadas da seguinte maneira:

$$[b\partial_x (b\partial_x P)]_{l,m}^\omega = \frac{4b_{l,m}^\omega}{3h_x} \left[ b_{l+\frac{1}{2},m}^\omega \left( \frac{P_{l+1,m}^\omega - P_{l,m}^\omega}{h_x} \right) - b_{l-\frac{1}{2},m,n}^\omega \left( \frac{P_{l,m}^\omega - P_{l-1,m}^\omega}{h_x} \right) \right]$$

$$- \frac{b_{l,m}^\omega}{3(2h_x)} \left[ b_{l+1,m}^\omega \left( \frac{P_{l+2,m}^\omega - P_{l,m}^\omega}{2h_x} \right) - b_{l-1,m}^\omega \left( \frac{P_{l,m}^\omega - P_{l-2,m}^\omega}{2h_x} \right) \right] \quad (2.29)$$

$$\begin{aligned} [b\partial_z (b\partial_z P)]_{l,m}^\omega &= \frac{4b_{l,m}^\omega}{3h_z} \left[ b_{l,m+\frac{1}{2}}^\omega \left( \frac{P_{l,m+1}^\omega - P_{l,m}^\omega}{h_z} \right) - b_{l,m-\frac{1}{2}}^\omega \left( \frac{P_{l,m}^\omega - P_{l,m-1}^\omega}{h_z} \right) \right] \\ &- \frac{b_{l,m}^\omega}{3(2h_z)} \left[ b_{l,m+1}^\omega \left( \frac{P_{l,m+2}^\omega - P_{l,m}^\omega}{2h_z} \right) - b_{l,m-1}^\omega \left( \frac{P_{l,m}^\omega - P_{l,m-2}^\omega}{2h_z} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.30)$$

A versão discretizada da Equação de Helmholtz 2D, Equação (2.13) incluindo a condição PML, para a aproximação de quarta ordem fica da seguinte forma:

$$\begin{aligned} &\frac{4b_{l,m}^\omega}{3h_x} \left[ b_{l+\frac{1}{2},m}^\omega \left( \frac{P_{l+1,m}^\omega - P_{l,m}^\omega}{h_x} \right) - b_{l-\frac{1}{2},m}^\omega \left( \frac{P_{l,m}^\omega - P_{l-1,m}^\omega}{h_x} \right) \right] \\ &- \frac{b_{l,m}^\omega}{3(2h_x)} \left[ b_{l+1,m}^\omega \left( \frac{P_{l+2,m}^\omega - P_{l,m}^\omega}{2h_x} \right) - b_{l-1,m}^\omega \left( \frac{P_{l,m}^\omega - P_{l-2,m}^\omega}{2h_x} \right) \right] \\ &+ \frac{4b_{l,m}^\omega}{3h_z} \left[ b_{l,m+\frac{1}{2}}^\omega \left( \frac{P_{l,m+1}^\omega - P_{l,m}^\omega}{h_z} \right) - b_{l,m-\frac{1}{2}}^\omega \left( \frac{P_{l,m}^\omega - P_{l,m-1}^\omega}{h_z} \right) \right] \\ &- \frac{b_{l,m}^\omega}{3(2h_z)} \left[ b_{l,m+1}^\omega \left( \frac{P_{l,m+2}^\omega - P_{l,m}^\omega}{2h_z} \right) - b_{l,m-1}^\omega \left( \frac{P_{l,m}^\omega - P_{l,m-2}^\omega}{2h_z} \right) \right] + \left( \frac{\omega}{c_{l,m}} \right)^2 \\ &= \rho_{lm} S(\omega) \delta_{ll_s} \delta_{mm_s}. \end{aligned} \quad (2.31)$$

### 2.4.1 Erros numéricos da aproximação FD

Uma vez que a equação de onda é discretizada para ser resolvida numericamente, a solução numérica não será exatamente a mesma solução da versão analítica, pois a versão discretizada é uma aproximação da equação exata. No entanto, pode-se considerar que dentro de certos limites toleráveis, a solução numérica é uma boa solução.

São intrínsecos dos métodos FD, tanto no domínio do tempo-espaço quanto no domínio da frequência-espaço, produzirem erros numéricos, como dispersão e anisotropia numérica (MARFURT, 1984; JO; SHI; SUH, 1996). Sendo assim, no processo de modelagem via esquema FD é necessário avaliar se esses erros numéricos estão dentro de uma faixa de tolerância aceitável, para não comprometer a exatidão da modelagem. Uma forma de avaliar esses erros numéricos é através da velocidade de fase da onda em um meio homogêneo. Para realizar tal análise para o problema acústico 2D, usamos a solução de onda plana (GISOLF; VERSCHUUR, 2010) em meio acústico homogêneo e ilimitado:

$$P(\mathbf{r}, \omega) = P_0 \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}), \quad (2.32)$$

onde  $P_0$  representa a amplitude da onda plana e  $\mathbf{k} = (k_x, k_z)$  é o vetor número de onda no plano, com  $k_x = k \sin(\theta)$  e  $k_z = k \cos(\theta)$ , sendo  $k$  o módulo do vetor número de onda e  $\theta$  é o ângulo entre a direção vertical (eixo  $z$ ) e a direção de propagação da onda.

Usando esta solução de onda plana, Equação (2.32), na versão 2D da equação da onda acústica no domínio da frequência-espço, Equação (2.13), sem fonte, e fazendo aproximação de segunda e quarta ordem, via esquema FD, obtém-se após algumas manipulações algébricas (veja as subseções A.0.1 e A.0.2 do Apêndice A para mais detalhes), as seguintes equações para segunda e quarta ordem, respectivamente:

$$\frac{v_f}{c} = \left(\frac{D}{\pi}\right) \left[ \text{sen}^2\left(\frac{\pi}{D}\text{sen}(\theta)\right) + \text{sen}^2\left(\frac{\pi}{D}\text{cos}(\theta)\right) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2.33)$$

e

$$\begin{aligned} \frac{v_f}{c} = & \left(\frac{D}{\pi}\right) \left(\frac{1}{\sqrt{12}}\right) \left\{ \left[ 16\text{sen}^2\left(\frac{\pi}{D}\text{sen}(\theta)\right) - \text{sen}^2\left(\frac{2\pi}{D}\text{sen}(\theta)\right) \right] \right. \\ & \left. + \left[ 16\text{sen}^2\left(\frac{\pi}{D}\text{cos}(\theta)\right) - \text{sen}^2\left(\frac{2\pi}{D}\text{cos}(\theta)\right) \right] \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad (2.34) \end{aligned}$$

onde  $v_f$  é a velocidade de fase da onda e  $D \doteq \frac{\lambda}{h}$  representa a relação entre o comprimento de onda do modelo de velocidade -  $\lambda$  - e a discretização da malha -  $h$  - usada para representar o modelo de velocidade. O valor de  $D$  indica a precisão da aproximação, onde grandes valores indicam uma melhor aproximação.

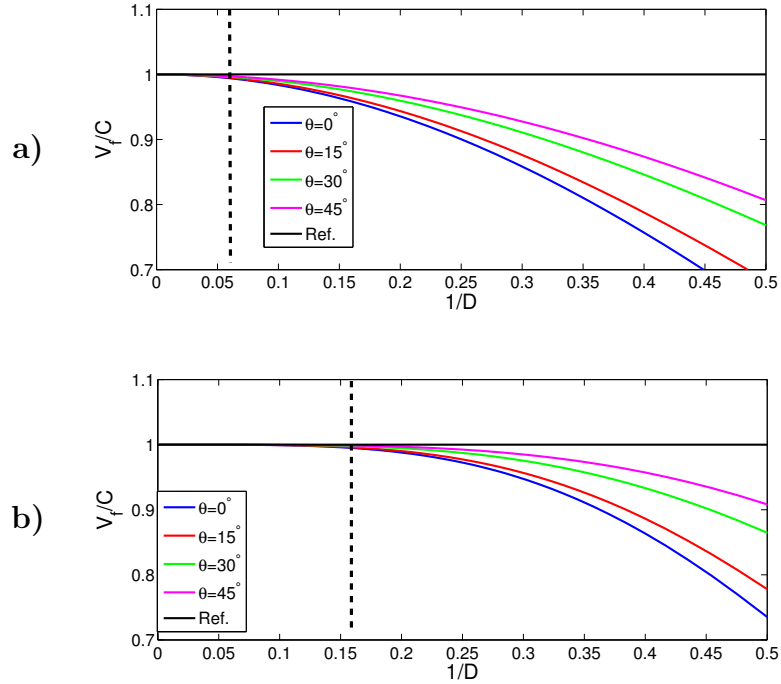
Para o caso analítico, a relação  $\frac{v_f}{c}$  seria exatamente 1, mas para o caso numérico essa condição normalmente não é satisfeita e isto configura-se como erro numérico, conhecido como erro de dispersão numérica (MARFURT, 1984; JO; SHI; SUH, 1996). No entanto, estipula-se um limite superior de erro talque, dentro desse limite, considera-se a solução numérica uma solução aceitável. Em geral, considera-se 1% como limite superior de erro (MARFURT, 1984; JO; SHI; SUH, 1996).

Através das Equações (2.33) e (2.34), pode-se quantificar o erro de dispersão numérica para o esquema FD de segunda e quarta ordem, respectivamente, usada nesta tese. Como já ressaltamos, se não existe erro de dispersão numérica, a relação  $\frac{v_f}{c}$  é igual a 1, sendo assim, qualquer desvio de 1 representa erro de dispersão numérica. Essa relação é mostrada nas Figuras 2.3a e 2.3b, onde são plotadas as curvas de dispersão apenas para 4 ângulos ( $0^\circ, 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ$ ) de propagação da onda plana e a reta horizontal de referência para segunda e quarta ordem, respectivamente. Note que estes 4 ângulos mostram o comportamento das curvas de dispersão entre  $0^\circ$  e  $90^\circ$ , pois para ângulos entre  $60^\circ$  e  $90^\circ$  as curvas de dispersão são as mesmas curvas entre  $30^\circ$  e  $0^\circ$ .

Observa-se nas figuras para as curvas de dispersão, que para cada ângulo de propagação, a partir de um certo valor da relação ( $1/D$ ), as curva de dispersão são diferentes umas das outras, isto representa erro de anisotropia numérica (MARFURT, 1984; JO; SHI; SUH, 1996). Outra informação importante que pode-se observar nesses gráficos, é o fato da dispersão numérica se manifesta mais rápido para o ângulo de  $0^\circ$  (curva azul) e por simetria para o ângulo de  $90^\circ$ . Para estipular o limite superior de erro,

considera-se a curva de dispersão para o ângulo de  $0^\circ$  e para considerar erro abaixo de 1% são necessários 13 (aproximadamente  $1/D = 0.08$ ) e 6 (aproximadamente  $1/D = 0.17$ ) ponto da malha por comprimento de onda do modelo de velocidade, para segunda e quarta ordem, respectivamente, indicado pela linha vertical tracejada nos gráficos.

Figura 2.3 – Relação de dispersão para o esquema FD. a) Relação de dispersão para o esquema FD de segunda ordem. b) Relação de dispersão para o esquema FD de quarta ordem.



Fonte: Autor.

Considerando que o meio de interesse não é homogêneo,  $D$  será relacionado com o menor comprimento de onda do modelo de velocidade:  $\lambda_{min}$ , tal que a discretização da malha para modelagem seguirá a seguinte condição:

$$h_{max} \leq \frac{\lambda_{min}}{D} = \frac{c_{min}}{Df_{max}}, \quad (2.35)$$

pois dado o menor comprimento de onda do modelo de velocidade  $\lambda_{min}$  e  $D$ , para manter a tolerância aceitável de dispersão numérica, a malha tem que ser no máximo igual a  $h_{max}$ .

## 2.4.2 Solução da equação da onda acústica no domínio da frequência-espço

Usando os operadores FD para aproximar a equação da onda acústica do domínio da frequência-espço resultou nas Equações (2.28) e (2.31), para aproximações de segunda e quarta ordem, respectivamente. Note que cada ponto  $(l, m)$  da malha gera uma equação linear, logo para resolver a equação da onda acústica no domínio da frequência-espço na sua

forma discretizada, é necessário resolver simultaneamente  $N = (L_x^f - L_x^{in} + 1) \times (L_z^f - L_z^{in} + 1)$  equações lineares. Essas equações podem ser escritas em uma forma matricial, que gera um sistema linear para cada frequência.

Para obter uma representação matricial para esse problema discretizado é preciso escolher uma ordenação para os pontos da malha para mapear o campo de pressão em um arranjo unidimensional. Nossa escolha segue a seguinte ordenação:

$$n = m + (l - 1)L_z^f, \quad (2.36)$$

onde para cada índice  $l$ , varremos todos os índices em  $m$ . Dessa forma, para cada ponto  $(l, m)$  da malha, temos  $u_n = P_{l,m}$  e  $s_n = \rho_{lm} S(\omega) \delta_{ll_s} \delta_{mm_s}$ , assim obtém-se a seguinte representação matricial:

$$\mathbf{B}(\omega, \mathbf{p})\mathbf{u} = \mathbf{s}, \quad (2.37)$$

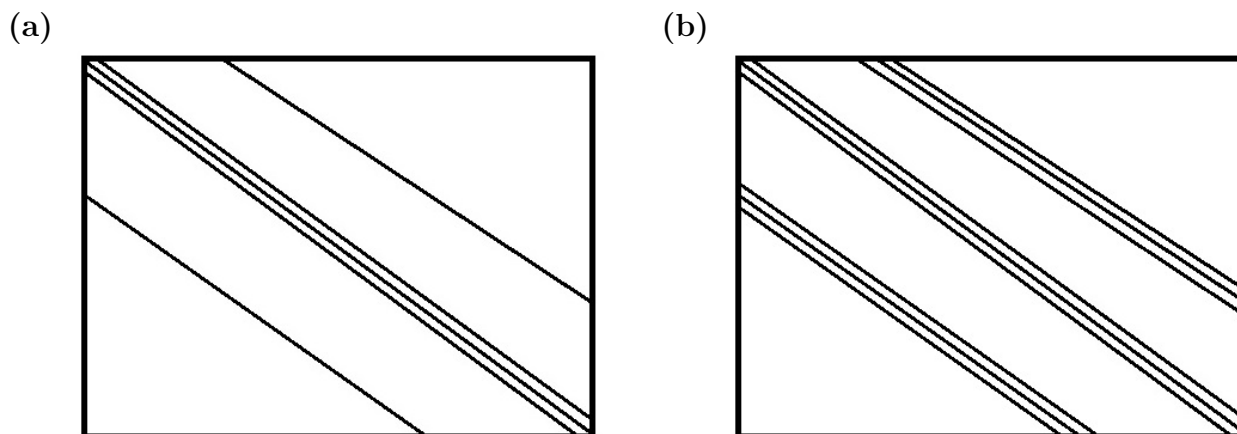
onde  $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^N$  e  $\mathbf{s} \in \mathbb{C}^N$  representam os vetores coluna do campo de pressão e da fonte no corpo dos complexos  $\mathbb{C}$  para cada  $\omega$  e  $\mathbf{B}(\omega, \mathbf{p})$  é a matriz de impedância complexa de ordem  $N$ , onde  $diag[\mathbf{B}(\omega, \mathbf{p})] = \mathbf{b} \in \mathbb{C}^N$ , isto é, a diagonal de  $\mathbf{B}(\omega, \mathbf{p})$ , é um vetor coluna cujas componentes são dados por  $b_n = p_n \omega^2 + D_c$ , onde  $p_n$  representa o mapeamento de  $\left(\frac{1}{c_{l,m}}\right)^2$  na componente  $n$ , com  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^N$ , e  $D_c \in \mathbb{C}^N$  é o termo central da matriz de derivadas.

Para aproximação FD de segunda ordem, é gerado um operador de diferenças-finitas de 5 pontos, então para cada linha da matriz  $\mathbf{B}(\omega, \mathbf{p})$ , existem no máximo 5 elementos diferentes de zero, sendo  $N$  o número de linhas, o número de elementos diferentes de zero é da ordem de  $5N$ , bem menor que o número de elementos total da matriz, que é da ordem de  $N^2$ . A estrutura da matriz para aproximação FD de segunda ordem e usando a ordenação anteriormente indicada, é ilustrada na Figura 2.4a, onde as linhas nas diagonais indicam a ordenação dos elementos diferentes de zero na matriz.

Para aproximação FD de quarta ordem é gerado um operador de diferenças-finitas de 9 pontos, ou seja, para cada linha da matriz  $\mathbf{B}(\omega, \mathbf{p})$ , existem no máximo 9 elementos diferentes de zero, sendo  $N$  o número de linhas. Assim, o número de elementos diferentes de zero é da ordem de  $9N$ . Apesar de ser maior que o número de elementos diferente de zero em relação a aproximação FD de segunda ordem, ainda é bem menor que o número de elementos total da matriz. A estrutura dessa matriz é ilustrada na Figura 2.4b, onde as linhas nas diagonais indicam a ordenação dos elementos diferentes de zero na matriz.

O sistema linear (2.37), pode ser resolvido através de métodos iterativos (ERLANGGA, 2005; PLESSIX, 2007; COSTA et al., 2013), métodos diretos (STEKL; PRATT, 1998) ou métodos que combinam as vantagens dos dois métodos anteriormente citados, conhecidos na literatura como métodos híbridos (SOURBIER et al., 2008). Optamos aqui por não discutir as vantagens e desvantagens de cada método. Indicamos os trabalhos de Virieux and Operto (2009), Erlangga (2005), Sourbier et al. (2008). No entanto, sabe-se

Figura 2.4 – Ilustração da matriz de impedância complexa proveniente da aproximação FD da equação da onda acústica no domínio da frequência-espço. a) Aproximação de segunda ordem convencional de 5 pontos. b) Aproximação de quarta ordem convencional de 9 pontos.



Fonte: Autor.

que para problemas 2D com múltiplas fontes, os métodos diretos são muito eficientes (VIRIEUX; OPERTO, 2009), e como estamos tratando de problemas 2D de múltiplas fontes, optamos por usar o *software multifrontal massively parallel solver* (MUMPS) - disponível para *download* no endereço: <http://mumps.enseeiht.fr/> - projetado para resolver grandes sistemas lineares com estruturas esparsa via método de solução direto.

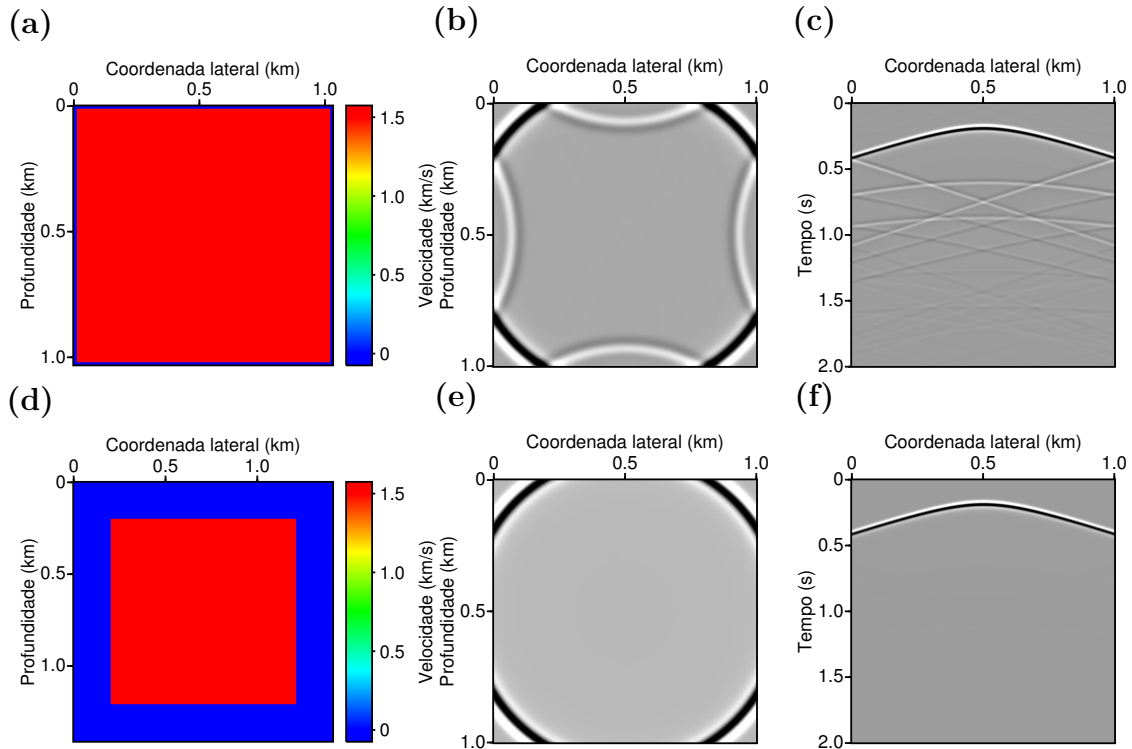
## 2.5 Validação dos algoritmos de modelagem por FD

Nesta seção mostramos alguns exemplos numéricos realizados com os algoritmos de modelagem baseados na aproximação FD no domínio da frequência-espço. Para mostrar os resultados no domínio do tempo-espço, após realizar a modelagem para toda a banda de frequência do espectro da fonte, realizamos uma transformada de Fourier para levar o campo de onda do domínio da frequência-espço para o domínio tempo-espço.

Começamos essa seção mostrando a eficácia da condição PML usada nos algoritmos de modelagem baseado no esquema FD. Para avaliar a eficácia da condição PML na modelagem sísmica, usamos um modelo de velocidade homogêneo com velocidade de propagação da onda 1.5 km/s, com 1.0 km de comprimento na coordenada lateral e 1.0 km em profundidade, com duas espessuras de faixas diferentes para a condição PML, mostradas nas Figuras 2.5a e 2.5d, com faixas da PML com 0.01 km e 0.2 km, respectivamente. O teste foi realizado simulando a propagação da onda a partir de uma fonte de banda limitada localizada no centro do modelo. As Figuras 2.5b e 2.5e, mostram os *snapshots* em 0.45 s para os modelos acrescidos de faixas da PML com 0.01 km e 0.2 km, respectivamente.



Figura 2.5 – Resultado da condição PML na modelagem. Nas figuras das linhas superior e inferior, da esquerda para direita, modelo de velocidade com PML, *snapshot* em 0.45 s de uma fonte no centro do modelo e *shotgather* de uma fonte no centro do modelo com 201 receptores em 300 m de profundidade, respectivamente. Em cima: PML com 0.01 km de largura. Embaixo: PML com 0.2 km de largura.



Fonte: Autor.

Pode-se observar que para o modelo com a faixa da PML de 0.01 km, existem reflexões artificiais com grandes amplitudes voltando das 4 bordas do modelo. Por outro lado, para o modelo com faixa da PML de 0.2 km, essas energias são bastante atenuadas dentro da PML, que praticamente não tem energia sendo refletida nas bordas. As Figuras 2.5c e 2.5f mostram dois *shot gathers* com um arranjo de 201 receptores, igualmente espaçados com 0.05 km ao longo da coordenada lateral e em 0.3 km em profundidade, para os modelos acrescido da faixas da PML com 0.01 km e 0.2 km, respectivamente. Observa-se que o *shot gather* para o modelo com uma faixa da PML de 0.01 km apresenta várias reflexões artificiais geradas nas bordas do modelo, por outro lado o *shot gather* do modelo com a faixa da PML com 0.2 km de largura, praticamente elimina essas reflexões artificiais.

Esses teste numéricos mostram que a condição PML implementada na presente tese é eficaz para reduzir as reflexões artificiais geradas nas bordas do modelo. Porém, é necessário escolher a faixa com uma largura suficiente para evitar tal reflexões.

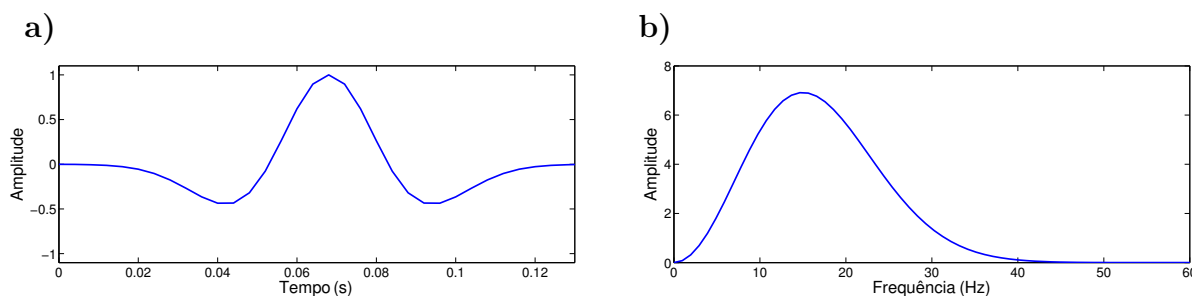
Para validar nosso algoritmo de modelagem sísmica FD no domínio da frequência-espço, usamos um *Software* livre de modelagem FD 2D no domínio do tempo-espço

(THORBECKE; DRAGANOV, 2011)<sup>6</sup> - que usa o esquema FD de quarta ordem no espaço e segunda ordem no tempo para resolver numericamente as Equações (2.1) e (2.2) (para o caso acústico) - para modelar o campo de pressão que usamos como referência na comparação com o campo de pressão modelado com nosso algoritmo de modelagem acústica FD 2D do domínio da frequência-espaço. Diferente de nossa implementação, esse algoritmo de modelagem aplica um *taper* na borda do modelo para evitar reflexões artificiais. Nas modelagens mostradas nessa subseção, realizadas com esse algoritmo de modelagem, usamos 0.2 km de largura para aplicar o *taper*.

Para modelar o campo de pressão de referência e o modelado com nosso algoritmo de modelagem sísmica FD, usamos um modelo de velocidade acústica homogêneo com velocidade de propagação de 3.0 km/s com 1.0 km de comprimento na coordenada lateral e 1.0 km em profundidade, com  $h_x = h_z = 0.005$  km. Esse modelo de velocidade com essa discretização foi escolhida a fim de que a Equação (2.35) seja satisfeita para uma frequência máxima maior que 40 Hz. Usamos como *wavelet*, o pulso Ricker (RICKER, 1943; RICKER, 1944; RICKER, 1953) com 15.0 Hz de frequência pico, mostrado na Figura 2.6a, juntamente com seu espectro de amplitude, mostrado na Figura 2.6b.

Realizamos as modelagens usando apenas uma fonte localizada no centro do modelo ( $x = 0.5$  km  $z = 0.5$  km) e um arranjo com 201 receptores ao longo da coordenada lateral com espaçamento de 0.005 km em 0.3 km em profundidade. Para nosso algoritmo de modelagem usamos uma condição PML com 0.2 km de largura. A Figura 2.7a mostra o *shot gather* de referência e as Figuras 2.7b e 2.7c mostram os *shot gathers* modelados como nosso algoritmo de modelagem sísmica usando uma aproximação FD de segunda e quarta ordem, respectivamente.

Figura 2.6 – *Wavelet* usada para modelar o campo de pressão. a) Pulso Ricker com frequência pico de 15.0 Hz. b) Espectro de amplitude do pulso Ricker com frequência pico de 15.0 Hz

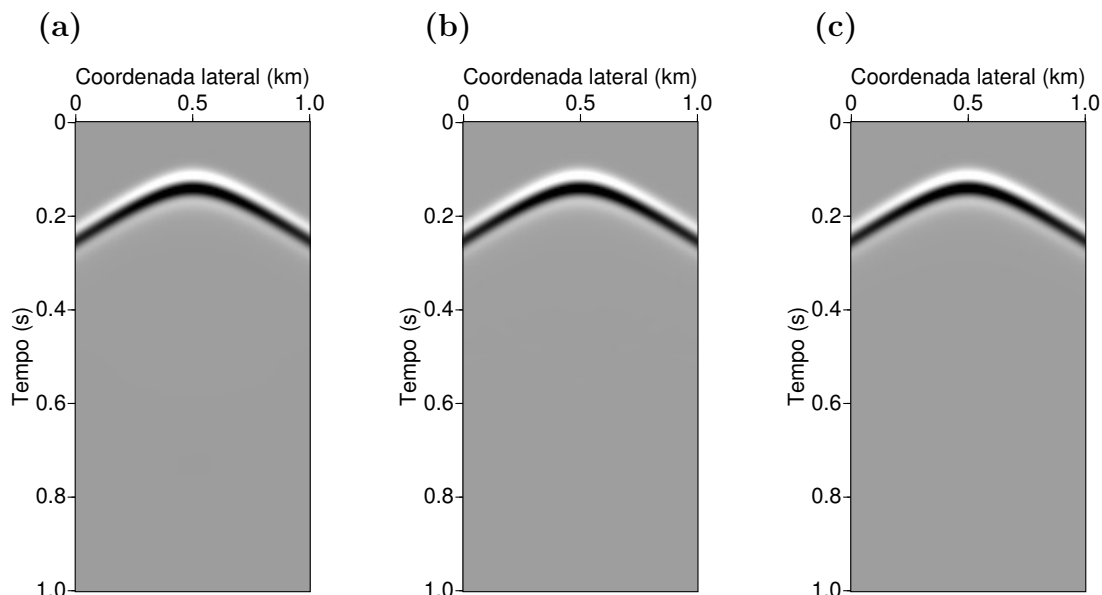


Fonte: Autor.

Do ponto de vista qualitativo, podemos observar que os *shot gathers* mostrados na Figura 2.7 apresentam um bom ajuste entre eles. Para realizarmos uma comparação

<sup>6</sup> disponível no site: <http://janth.home.xs4all.nl/Software/Software.html>.

Figura 2.7 – *Shot gathers* modelados com esquema FD. a) *Shot gather* de referência modelado com esquema FD no tempo. b) *Shot gather* modelado com nossa implementação do esquema FD de segunda ordem. c) *Shot gather* modelado com nossa implementação do esquema FD de quarta ordem.



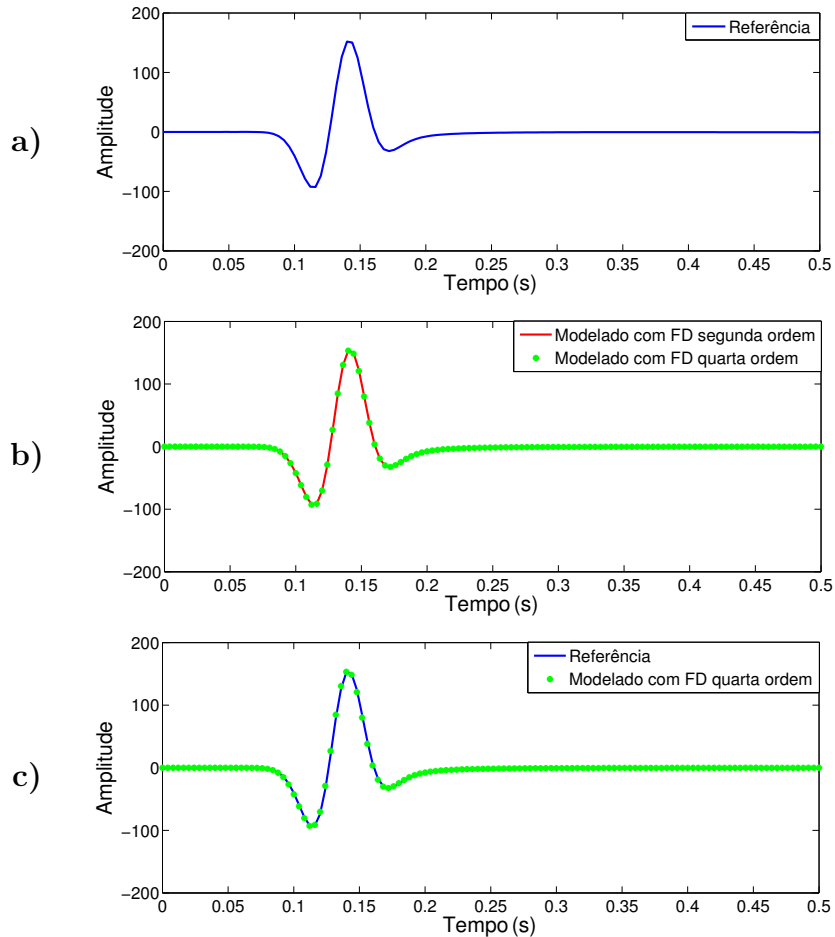
Fonte: Autor.

quantitativa, plotamos na Figura 2.8 os traços centrais dos *shot gathers* mostrados na Figura 2.7.

Na Figura 2.8a, mostramos o traço central do *shot gather* de referência (considerado o campo de onda exato). Na Figura 2.8b, mostramos os traços centrais dos *shot gathers* modelado com o esquema FD de segunda (vermelho) e quarta ordem (verde). Observe na Figura 2.8b, que os campos de ondas modelados com nosso algoritmo de modelagem, com aproximação de segunda e quarta ordem são praticamente iguais, como era esperado, pois para a banda de frequência usada e com essa discretização do modelo, para ambas as aproximações foi possível usar nossa tolerância padrão ( $D = 13$  para aproximação de segunda ordem e  $D = 6$  para aproximação de quarta ordem), que como ilustramos anteriormente reduz bastante os erros numéricos.

Na Figura 2.8c, comparamos os traços centrais dos *shot gathers* de referência (azul) e o modelado com nosso algoritmo de modelagem usando aproximação de quarta ordem (verde). Observe nesta figura, que os campos de ondas de referência e o modelado com nosso algoritmo, apresentam uma boa concordância. Devido a essa concordância, inferimos que nosso algoritmo de modelagem sísmica acústico 2D é válido para realizar tal modelagem, uma vez que o algoritmo de modelagem 2D que usamos para modelar os campos de onda de referência já foram validados e largamente usamos em outros teste numéricos.

Figura 2.8 – Traços centrais dos *shot gathers* modelados com esquema FD. a) Traço central do *Shot gather* de referência. b) Traços centrais dos *shot gathers* modelados com aproximação FD de segunda (vermelho) e quarta (verde) ordem. c) traços centrais dos *shot gathers* de referência (azul) e modelado com aproximação FD de quarta ordem (verde).



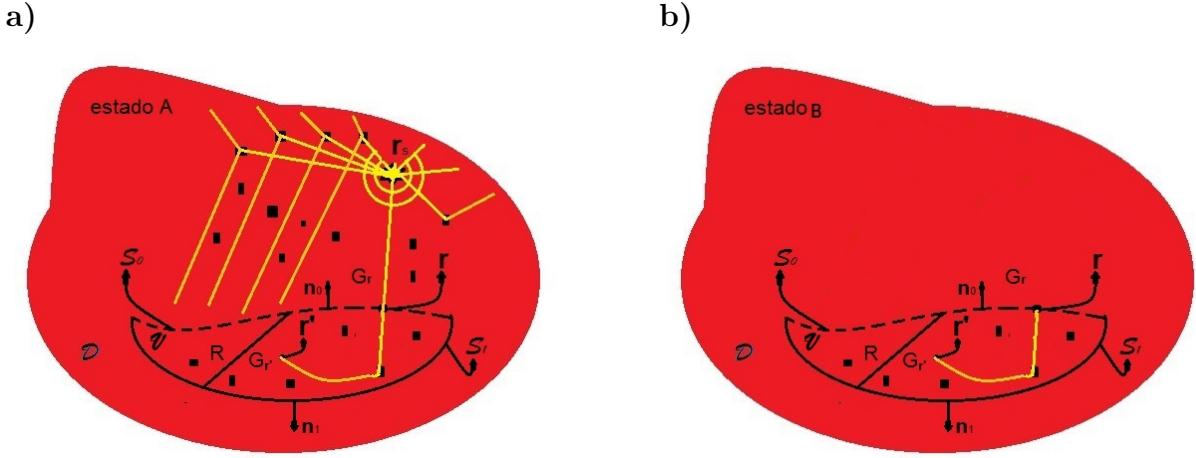
Fonte: Autor.

## 2.6 Modelagem via representação tipo-convolução para função de Green

Iniciamos essa seção definindo um volume  $\mathcal{V}$  ( $\mathcal{V} \subset \mathcal{D}$ ) fechado pela superfície  $\mathcal{S}_{\mathcal{V}}$  com o vetor unitário  $\mathbf{n}$  normal a esta superfície e apontando para fora do volume  $\mathcal{V}$ . Para propósitos que ficarão mais claro no decorrer do texto, separamos a superfície  $\mathcal{S}_{\mathcal{V}}$  em duas partes:  $\mathcal{S}_0$  e  $\mathcal{S}_1$ , ou seja,  $\mathcal{S}_{\mathcal{V}} = \mathcal{S}_0 \cup \mathcal{S}_1$ , com seus respectivos vetores unitários  $\mathbf{n}_0$ , e  $\mathbf{n}_1$ , normal a cada superfície e apontando para fora do volume  $\mathcal{V}$ . Por fim, definimos que  $\mathcal{S}_1$  representa uma meia esfera de raio  $R$ . Essa configuração está ilustrada na Figura 2.9, onde os pontos pretos representam um meio de propagação heterogêneo.

A Figura 2.9a representa a configuração onde as fontes estão localizada fora do

Figura 2.9 – Representação tipo-convolução da função de Green entre os estados  $A$  e  $B$ . a) Configuração do estado  $A$ , onde a fonte está localizada fora do volume  $\mathcal{V}$ . b) Configuração do estado  $B$ , onde a região fora do volume  $\mathcal{V}$  é homogênea.



Fonte: Autor.

volume  $\mathcal{V}$  (também não estão sobre a superfície  $\mathcal{S}_V$ ), representadas pela coordenada  $\mathbf{r}_s$ , chamamos esta configuração de estado  $A$ , onde  $G_{\mathbf{r}} = G(\mathbf{r}, \omega; \mathbf{r}_s)$  representa a função de Green monocromática, gerada em  $\mathbf{r}_s$  e observada em  $\mathbf{r}$ ,  $G_{\mathbf{r}'} = G(\mathbf{r}', \omega; \mathbf{r})$  representa a função de Green monocromática, gerada em  $\mathbf{r}$  e observada em  $\mathbf{r}'$ .

A Figura 2.9b, representa um outro estado, que chamamos de estado  $B$ , tal que a região dentro de volume  $\mathcal{V}$  é exatamente a mesma região do estado  $A$  dentro do volume  $\mathcal{V}$ . Portanto, dentro do volume  $\mathcal{V}$  as funções de Green dos estados  $A$  e  $B$  são iguais. Por outro lado, fora do volume  $\mathcal{V}$ , o meio do estado  $B$  é homogêneo, e assim, as funções de Green fora do volume  $\mathcal{V}$  para os estados  $A$  e  $B$  podem ser diferentes.

No volume  $\mathcal{V}$  e superfície  $\mathcal{S}_V$  a função de Green no domínio da frequência-espço, gerado por uma fonte pontual impulsiva localizada em  $\mathbf{r}_s$  - fora de  $\mathcal{V}$  e por conveniência, posicionada em uma região acima da superfície  $\mathcal{S}_0$ , como indicado na Figura 2.9a - obedece a Equação de Helmholtz, Equação (2.13), sem fonte, como se segue:

$$\left[ \nabla^2 + \frac{\omega^2}{c(\mathbf{r})^2} \right] G(\mathbf{r}, \omega; \mathbf{r}_s) = 0, \quad \mathbf{r} \in \mathcal{V} \cup \mathcal{S}_V. \quad (2.38)$$

Define-se uma função de Green de referência no domínio da frequência-espço em  $\mathcal{V} \cup \mathcal{S}_V$ ,  $\bar{G}(\mathbf{r}, \omega; \mathbf{r}')$ , gerada por uma fonte pontual impulsiva em  $\mathbf{r}' \in \mathcal{V} \cup \mathcal{S}_V$ , que obedece a Equação de Helmholtz para uma fonte pontual impulsiva, Equação (2.14), como se segue:

$$\left[ \nabla^2 + \frac{\omega^2}{c(\mathbf{r})^2} \right] \bar{G}(\mathbf{r}, \omega; \mathbf{r}') = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (2.39)$$

tal que, o meio de propagação da função de Green, externo ao volume  $\mathcal{V}$ , é homogêneo, como ilustrado na Figura 2.9b, além do que esta função de Green obedece o teorema da

reciprocidade, ou seja,  $\overline{G}(\mathbf{r}', \omega; \mathbf{r}) = \overline{G}(\mathbf{r}, \omega; \mathbf{r}')$ .

Multiplicando a Equação (2.38) pela função de Green  $\overline{G}(\mathbf{r}, \omega; \mathbf{r}')$  e a Equação (2.39) pela função de Green  $G(\mathbf{r}, \omega; \mathbf{r}_s)$ , e subtraindo um da outra, obtém-se a seguinte relação:

$$G(\mathbf{r}, \omega; \mathbf{r}_s) \nabla^2 \overline{G}(\mathbf{r}, \omega; \mathbf{r}') - \overline{G}(\mathbf{r}, \omega; \mathbf{r}') \nabla^2 G(\mathbf{r}, \omega; \mathbf{r}_s) = -G(\mathbf{r}, \omega; \mathbf{r}_s) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (2.40)$$

Integrando essa relação no volume  $\mathcal{V}$ , chega-se a seguinte equação:

$$G(\mathbf{r}', \omega; \mathbf{r}_s) = - \int_{\mathcal{V}} \left[ G(\mathbf{r}, \omega; \mathbf{r}_s) \nabla^2 \overline{G}(\mathbf{r}, \omega; \mathbf{r}') - \overline{G}(\mathbf{r}, \omega; \mathbf{r}') \nabla^2 G(\mathbf{r}, \omega; \mathbf{r}_s) \right] d\mathcal{V}. \quad (2.41)$$

Considerando que  $\mathbf{r} \in \mathcal{S}_{\mathcal{V}}$  e usando o seguinte teorema de Green:

$$\begin{aligned} & \int_{\mathcal{V}} \left[ G(\mathbf{r}, \omega; \mathbf{r}_s) \nabla^2 \overline{G}(\mathbf{r}, \omega; \mathbf{r}') - \overline{G}(\mathbf{r}, \omega; \mathbf{r}') \nabla^2 G(\mathbf{r}, \omega; \mathbf{r}_s) \right] d\mathcal{V} \\ &= \oint_{\mathcal{S}_{\mathcal{V}}} \left[ G(\mathbf{r}, \omega; \mathbf{r}_s) \nabla \overline{G}(\mathbf{r}, \omega; \mathbf{r}') - \overline{G}(\mathbf{r}, \omega; \mathbf{r}') \nabla G(\mathbf{r}, \omega; \mathbf{r}_s) \right] \cdot \mathbf{n} d\mathcal{S}_{\mathcal{V}}, \end{aligned} \quad (2.42)$$

junto com a Equação (2.41), resulta na seguinte equação:

$$G(\mathbf{r}', \omega; \mathbf{r}_s) = - \oint_{\mathcal{S}_{\mathcal{V}}} \left[ G(\mathbf{r}, \omega; \mathbf{r}_s) \nabla \overline{G}(\mathbf{r}, \omega; \mathbf{r}') - \overline{G}(\mathbf{r}, \omega; \mathbf{r}') \nabla G(\mathbf{r}, \omega; \mathbf{r}_s) \right] \cdot \mathbf{n} d\mathcal{S}_{\mathcal{V}}. \quad (2.43)$$

Devido a imposição de que a fonte está localizada acima da superfície  $\mathcal{S}_0$  e considerando que  $\mathcal{S}_{\mathcal{V}} = \mathcal{S}_0 \cup \mathcal{S}_1$ , pode-se eliminar a integração sobre  $\mathcal{S}_1$  da equação anterior, para  $R \rightarrow \infty$  (condição de radiação de Sommerfeld). Com essa condição, tem-se a seguinte equação:

$$G(\mathbf{r}', \omega; \mathbf{r}_s) = - \int_{\mathcal{S}_0} \left[ G(\mathbf{r}, \omega; \mathbf{r}_s) \nabla \overline{G}(\mathbf{r}, \omega; \mathbf{r}') - \overline{G}(\mathbf{r}, \omega; \mathbf{r}') \nabla G(\mathbf{r}, \omega; \mathbf{r}_s) \right] \cdot \mathbf{n}_0 d\mathcal{S}_0. \quad (2.44)$$

Considerando que em  $\mathbf{r} \in \mathcal{S}_0$ , a função de Green  $G_{\mathbf{r}}$  é composta pela superposição das funções de Green que estão entrando no volume:  $G_{\mathbf{r}}^+$ , onde  $\nabla G_{\mathbf{r}}^+ \cdot \mathbf{n}_0 < 0$ , e saindo do volume:  $G_{\mathbf{r}}^-$ , onde  $\nabla G_{\mathbf{r}}^- \cdot \mathbf{n}_0 > 0$ , ou seja,  $G_{\mathbf{r}} = G_{\mathbf{r}}^+ + G_{\mathbf{r}}^-$ , podemos reescrever a Equação (2.44) da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} G(\mathbf{r}', \omega; \mathbf{r}_s) &= - \int_{\mathcal{S}_0} \left[ G^+(\mathbf{r}, \omega; \mathbf{r}_s) \nabla \overline{G}(\mathbf{r}, \omega; \mathbf{r}') - \overline{G}(\mathbf{r}, \omega; \mathbf{r}') \nabla G^+(\mathbf{r}, \omega; \mathbf{r}_s) \right] \cdot \mathbf{n}_0 d\mathcal{S}_0 \\ &\quad - \int_{\mathcal{S}_0} \left[ G^-(\mathbf{r}, \omega; \mathbf{r}_s) \nabla \overline{G}(\mathbf{r}, \omega; \mathbf{r}') - \overline{G}(\mathbf{r}, \omega; \mathbf{r}') \nabla G^-(\mathbf{r}, \omega; \mathbf{r}_s) \right] \cdot \mathbf{n}_0 d\mathcal{S}_0. \end{aligned} \quad (2.45)$$

Assumindo que em torno de  $\mathcal{S}_0$  o meio é suficientemente suave, a derivada normal da função de Green pode ser aproximada via regime de alta frequência, obtendo-se as seguintes aproximações em  $\mathcal{S}_0$  (WAPENAAR et al., 2011):

$$\nabla \overline{G}(\mathbf{r}, \omega; \mathbf{r}') \cdot \mathbf{n}_0 = i |\cos \alpha(\mathbf{r}; \mathbf{r}')| \frac{\omega}{c(\mathbf{r})} \overline{G}(\mathbf{r}, \omega; \mathbf{r}'), \quad (2.46)$$

$$\nabla G^+(\mathbf{r}, \omega; \mathbf{r}_s) \cdot \mathbf{n}_0 = -i |\cos \alpha(\mathbf{r}; \mathbf{r}_s)| \frac{\omega}{c(\mathbf{r})} G^+(\mathbf{r}, \omega; \mathbf{r}_s) \quad (2.47)$$

e

$$\nabla G^-(\mathbf{r}, \omega; \mathbf{r}_s) \cdot \mathbf{n}_0 = i |\cos \alpha(\mathbf{r}; \mathbf{r}_s)| \frac{\omega}{c(\mathbf{r})} G^-(\mathbf{r}, \omega; \mathbf{r}_s), \quad (2.48)$$

onde  $c(\mathbf{r})$  é a velocidade de propagação local em  $\mathcal{S}_0$  e  $\alpha(\mathbf{r}; \mathbf{r}_a)$  é o ângulo entre o raio normal a frente de onda gerada em  $\mathbf{r}_a$  e a normal em  $\mathcal{S}_0$ . Usando essas aproximações na Equação (2.45), a primeira e segunda integral tornam-se, respectivamente, em:

$$I_1 = \int_{\mathcal{S}_0} \left[ i \frac{|\omega| \cos \alpha(\mathbf{r}; \mathbf{r}')|}{c(\mathbf{r})} G^+(\mathbf{r}, \omega; \mathbf{r}_s) \overline{G}(\mathbf{r}, \omega; \mathbf{r}') + i \frac{|\omega| \cos \alpha(\mathbf{r}; \mathbf{r}_s)|}{c(\mathbf{r})} \overline{G}(\mathbf{r}, \omega; \mathbf{r}') G^+(\mathbf{r}, \omega; \mathbf{r}_s) \right] d\mathcal{S}_0 \quad (2.49)$$

e

$$I_2 = \int_{\mathcal{S}_0} \left[ i \frac{|\omega| \cos \alpha(\mathbf{r}; \mathbf{r}')|}{c(\mathbf{r})} G^-(\mathbf{r}, \omega; \mathbf{r}_s) \overline{G}(\mathbf{r}, \omega; \mathbf{r}') - i \frac{|\omega| \cos \alpha(\mathbf{r}; \mathbf{r}_s)|}{c(\mathbf{r})} \overline{G}(\mathbf{r}, \omega; \mathbf{r}') G^-(\mathbf{r}, \omega; \mathbf{r}_s) \right] d\mathcal{S}_0 \quad (2.50)$$

A principal contribuição para as integrais acima são nos pontos estacionários em  $\mathcal{S}_0$ . Nestes pontos os valores absolutos dos cossenos de  $\alpha(\mathbf{r}; \mathbf{r}_a)$  para  $\overline{G}(\mathbf{r}, \omega; \mathbf{r}')$  e  $G(\mathbf{r}, \omega; \mathbf{r}_s)$  são iguais, como consequência temos que  $I_2 = 0$  e  $I_1$  torna-se

$$I_1 = \int_{\mathcal{S}_0} 2i \frac{|\omega| \cos \alpha(\mathbf{r}; \mathbf{r}')|}{c(\mathbf{r})} \overline{G}(\mathbf{r}, \omega; \mathbf{r}') G^+(\mathbf{r}, \omega; \mathbf{r}_s) d\mathcal{S}_0, \quad (2.51)$$

ou na forma original

$$I_1 = \int_{\mathcal{S}_0} 2\nabla \overline{G}(\mathbf{r}, \omega; \mathbf{r}') \cdot \mathbf{n}_0 G^+(\mathbf{r}, \omega; \mathbf{r}_s) d\mathcal{S}_0. \quad (2.52)$$

Usando o resultado anterior e considerando que  $\overline{G}(\mathbf{r}, \omega; \mathbf{r}') = \overline{G}(\mathbf{r}', \omega; \mathbf{r})$ , a Equação (2.45), torna-se

$$G(\mathbf{r}', \omega; \mathbf{r}_s) = - \int_{\mathcal{S}_0} 2\nabla \overline{G}(\mathbf{r}', \omega; \mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}_0 G^+(\mathbf{r}, \omega; \mathbf{r}_s) d\mathcal{S}_0. \quad (2.53)$$

Este resultado também pode ser mostrado via operadores pseudo-diferenciais (FISHMAN; MCCOY, 1984; FISHMAN, 1993; WAPENAAR et al., 2011).

Como a multiplicação das funções de Green na Equação (2.53) no domínio da frequência-espaço equivale a uma convolução entre elas no domínio do tempo-espaço, essa relação é conhecida como representação tipo-convolução da função de Green, e é a equação básica para estimar a função de Green via interferometria tipo-convolução (WAPENAAR; van der NEUT, 2010; WAPENAAR et al., 2011).

Por fim, temos que o campo de pressão observado em  $\mathbf{r}'$  devido uma fonte transiente em  $\mathbf{r}_s$ , pode ser representado no domínio da frequência como  $P(\mathbf{r}', \omega; \mathbf{r}_s) = G(\mathbf{r}', \omega; \mathbf{r}_s) S(\omega)$ , onde  $S(\omega)$  representa a transformada de Fourier da *wavelet*. Sendo assim, multiplicando ambos os lados da Equação (2.53) por  $S(\omega)$ , obtemos:

$$P(\mathbf{r}', \omega; \mathbf{r}_s) = - \int_{\mathcal{S}_0} 2\nabla \overline{G}(\mathbf{r}', \omega; \mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}_0 P^+(\mathbf{r}, \omega; \mathbf{r}_s) d\mathcal{S}_0. \quad (2.54)$$

Esta equação é válida para estimar o campo da onda acústica no domínio da frequência-espaço, gerado por uma fonte em  $\mathbf{r}_s$  (localizada fora do volume  $\mathcal{V}$ ) e observado em qualquer ponto  $\mathbf{r}' \in \mathcal{V}$ .

Observe que o termo  $\nabla \overline{G}(\mathbf{r}', \omega; \mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}_0$ , na Equação (2.54), corresponde a uma função de Green de uma fonte dipolo. Usamos  $G_d(\mathbf{r}', \omega; \mathbf{r}) \doteq -2\nabla \overline{G}(\mathbf{r}', \omega; \mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}_0$ , para representar esta função de Green de uma fonte dipolo localizada em  $\mathbf{r} \in \mathcal{S}_0$ . Note que para observações do campo

$P(\mathbf{r}', \omega; \mathbf{r}_s)$  para  $\mathbf{r}'$  logo abaixo de  $\mathcal{S}_0$ , tem-se que  $P(\mathbf{r}', \omega; \mathbf{r}_s) = P^-(\mathbf{r}', \omega; \mathbf{r}_s)$ . Então reescrevemos a Equação (2.54), como se segue:

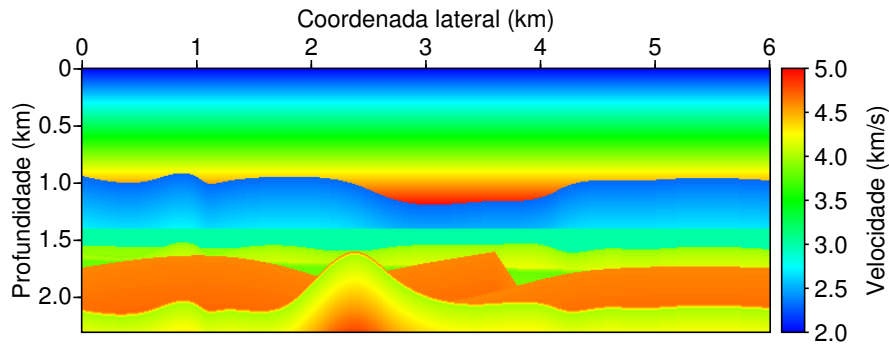
$$P^-(\mathbf{r}', \omega; \mathbf{r}_s) = \int_{\mathcal{S}_0} G_d(\mathbf{r}', \omega; \mathbf{r}) P^+(\mathbf{r}, \omega; \mathbf{r}_s) d\mathcal{S}_0. \quad (2.55)$$

No restante desse trabalho, chamamos o campo de onda  $P^+$ , de campo de onda descendente e o campo de onda  $P^-$ , de campo de onda ascendente.

### 2.6.1 Exemplos numéricos

Para avaliar numericamente a Equação (2.55) para o caso 2D, estimamos o campo de onda ascendente em um nível particular em subsuperfície através desta equação, variando apenas o número de pontos de observações do campo de onda descendente ao longo da coordenada lateral neste nível particular em subsuperfície. Este exemplo numérico foi realizado usando o modelo de velocidade acústico mostrado na Figura 2.10, onde os campos de ondas foram gerados por uma fonte monopolo localizadas no centro da coordenada lateral e na profundidade de 0.05. Os campos de ondas descendente e ascendente foram observados em 601 pontos localizados ao longo da coordenada lateral, com espaçamento de 0.01 km, e em 1.5 km em profundidade.

Figura 2.10 – Modelo de velocidade usado para gerar os campos de ondas descendente e ascendente ao longo da coordenada lateral e em 1.5 km em profundidade.

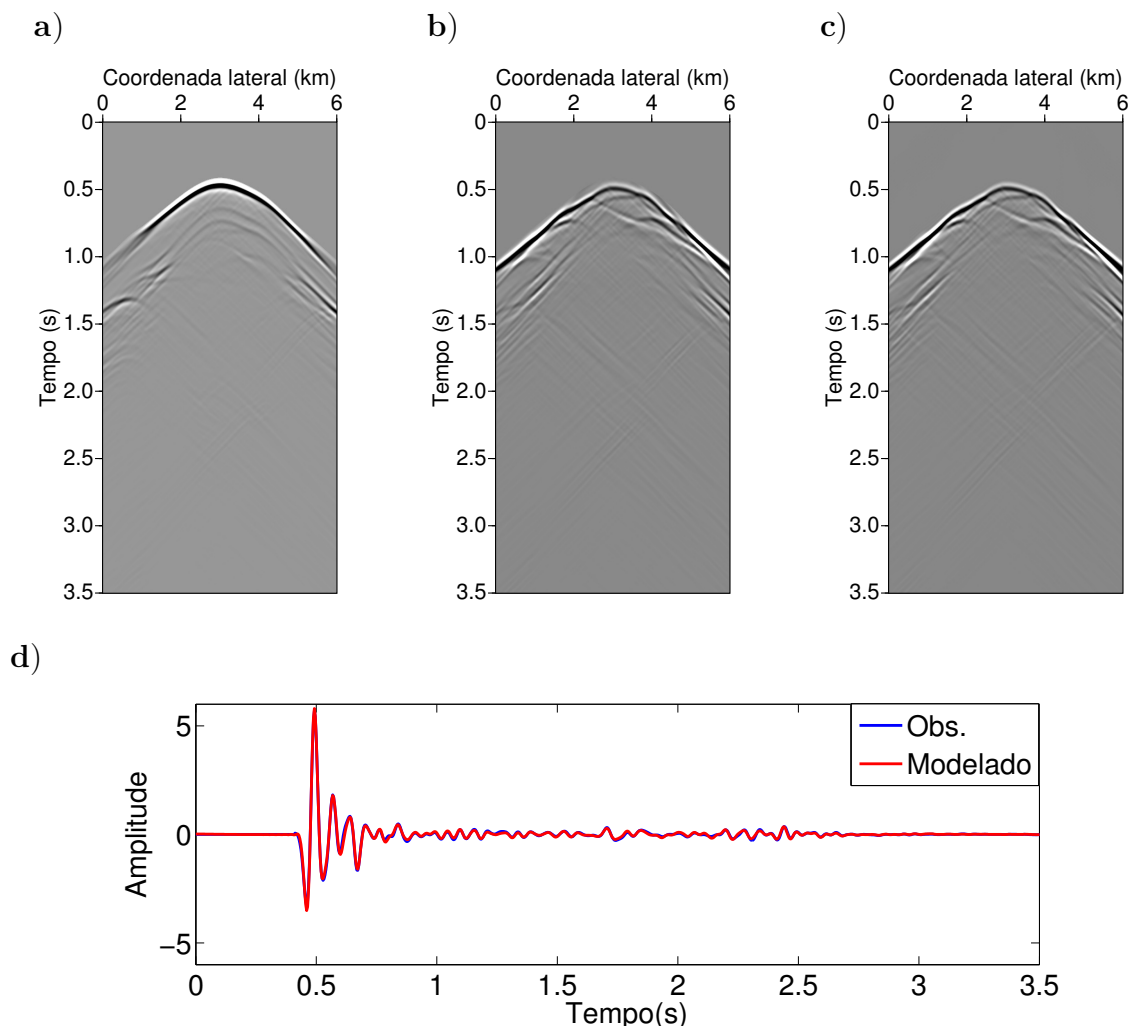


Fonte: Autor.

As Figuras 2.11a e 2.11b mostram os campos de ondas descendente e ascendente, respectivamente, observados em 601 pontos ao longo da coordenada lateral (com espaçamento de 0.01 km) e em 1.5 km em profundidade, gerados por uma fonte localizada em 3.0 km na coordenada lateral e 0.05 em profundidade. Na Figura 2.11c mostramos o campo de onda ascendente modelado usando o campo de onda observado em todos os 601 pontos ao longo da coordenada lateral. Em uma comparação direta entre os campos ascendentes modelado e observado, podemos ver que existe uma boa concordância entre eles. Isso pode ser confirmado de forma mais quantitativa através dos traços centrais (localizado em 3.0 km ao longo da coordenada lateral), mostrado na Figure 2.11d, dos campos de ondas ascendente observado (azul) e modelado (vermelho).



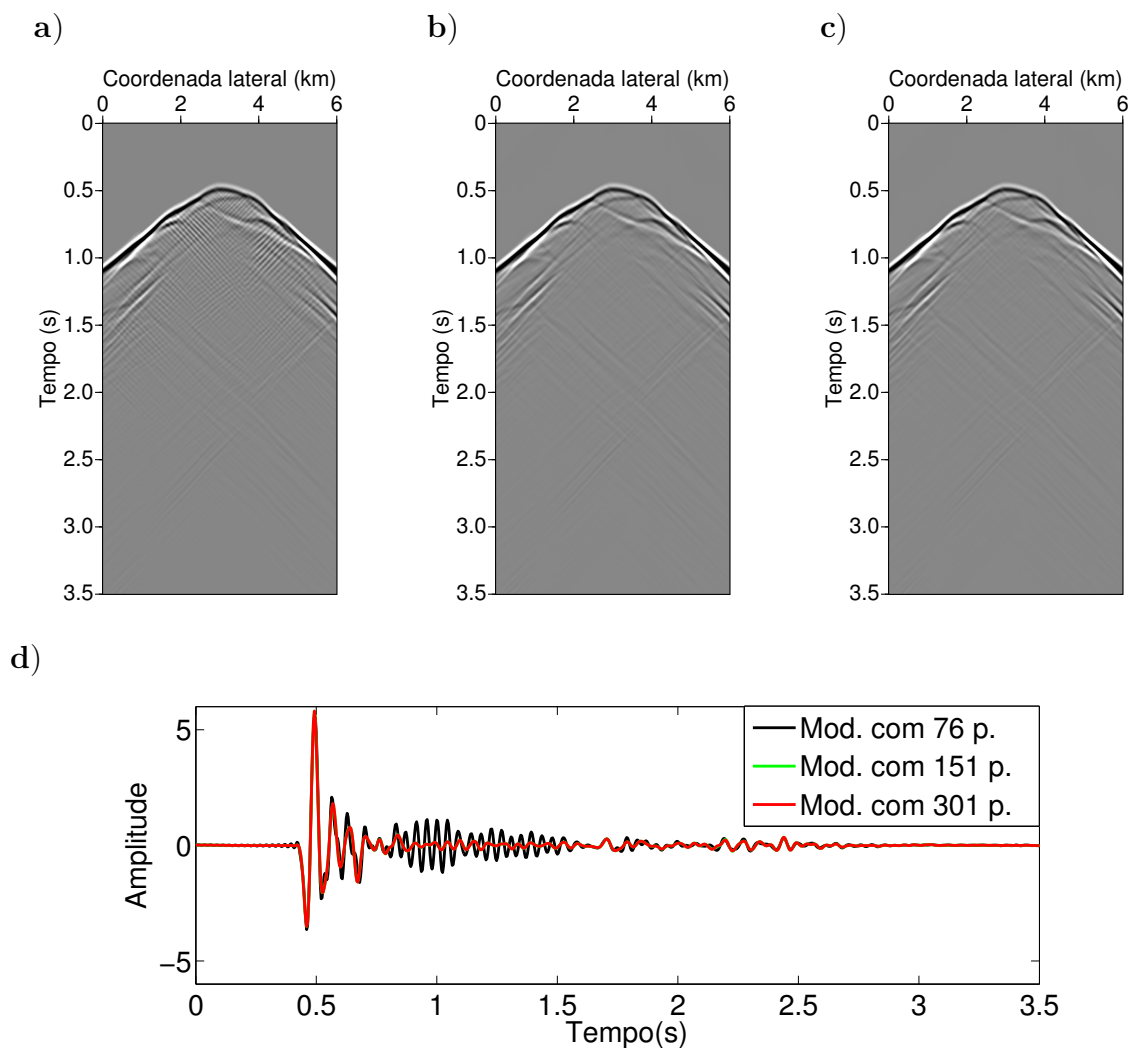
Figura 2.11 – Campos de onda observados/modelados em 1.5 km em profundidade, gerado por uma fonte posicionada no centro do modelo e em  $z_s = 0.05$  km. a) Campo de onda descendente observado. b) Campo de onda ascendente observado. c) Campo de onda ascendente modelado. d) Traços centrais dos campos de ondas ascendentes observado (azul) e modelado (vermelho).



Fonte: Autor.

Para avaliar a dependência da modelagem do campo de onda ascendente através da Equação (2.55) em relação ao número de pontos de incidência do campo de onda descendente, realizamos um teste numérico decimando os pontos de observações do campo de onda descendente observado em 601 pontos ao longo da coordenada lateral. A Figura 2.12 mostra os campos de ondas ascendentes modelados através da Equação (2.55) para os seguintes fatores de decimação: fator de decimação 2 (Figura 2.12a), fator de decimação 4 (Figura 2.12b), fator de decimação 8 (Figura 2.12c) e na Figura 2.12d, mostramos os traços centrais desses campos de ondas ascendentes (localizado em 3.0 km ao longo da coordenada lateral). Pode-se observar que até o fator de decimação 4, os campos de ondas ascendentes estimados são bem similares ao campo de onda ascendente observado (Figura 2.11b), a partir do fator 8 é possível verificar artefatos no campo de onda modelado.

Figura 2.12 – Campos de onda ascendentes modelados em 1.5 km em profundidade, gerado por uma fonte posicionada na superfície ( $x = 3.0$  km e  $z = 0.05$  km), a partir de diferentes números de pontos de incidência do campo de onda descendente. a) Usando 76 pontos. b) Usando 151 pontos. c) Usando 301 pontos. d) Traços centrais dos campos de ondas ascendentes usando 76 (preto), 151 (verde) e 301 (vermelho) pontos de incidência do campo de onda descendente.



Fonte: Autor.

Estes testes numéricos realizados a partir da Equação (2.55), mostram que considerando uma suficiente amostragem do campo de onda descendente, esta equação é uma boa aproximação para estimar o campo de onda ascendente a partir do campo de onda descendente observados em um nível específico em profundidade. Adiantamos aqui que usamos esta equação para realizar a modelagem da metodologia de inversão da forma de onda orientada ao alvo proposto nesta tese (Capítulo 5).

## 2.7 Modelagem acústica 2D com FWMod

Nesta seção introduzimos a versão acústica 2D do algoritmo de modelagem FWMod usando o formalismo matemático na forma discretizada para seguir a literatura. Abordamos este algoritmo de modelagem na presente tese, pois no próximo capítulo iremos introduzir o algoritmo de inversão conjunta JMI, o qual usa o algoritmo de modelagem FWMod para resolver o problema direto.

O algoritmo de modelagem FWMod pode ser entendido a partir da Equação (2.55), uma vez que o FWMod é baseado na extrapolação do campos de ondas ascendentes e descendentes em subsuperfície, a partir dos campos de ondas observados em um determinado nível em profundidade. No entanto, diferente do esquema de modelagem da Equação (2.55), onde é necessário calcular a função de Green (com todos os fenômenos de espalhamento) para extrapolar os campos de ondas de um ponto a outro em subsuperfície, o algoritmo de modelagem FWMod realiza essa extrapolação através dos operadores ângulo-dependentes de espalhamento, junto com os operadores de propagação unidirecionais de continuação dos campos de ondas ascendentes e descendentes para cada ponto da malha considerada na modelagem.

Na seção anterior, definimos os campos de ondas  $P^+$  e  $P^-$  como sendo os campos que estão entrando e saindo do volume  $\mathcal{V}$ , respectivamente. Aqui usaremos essa definição recursivamente para cada nível  $z$  em profundidade, ou seja, em cada nível  $z$  em profundidade, teremos o campo de onda  $P^+$ , que está entrando na região abaixo do nível  $z$ , e o campo de onda  $P^-$ , que está saindo da região abaixo do nível  $z$ .

Usando a notação matricial no domínio da frequência-espço, como em Berkhout (1982), os campos das ondas acústicas descendente e ascendente, em qualquer nível em profundidade, podem ser descritos na forma discretizada pelas seguintes expressões monocromáticas (BERKHOUT, 2014a):

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_j^+(z_m^-; z_0) &= \mathbf{W}^+(z_m^-, z_0) \mathbf{S}_j^+(z_0) \\ &+ \sum_{m'=0}^{m-1} \mathbf{W}^+(z_m^-, z_{m'}^+) \delta \mathbf{S}_j^+(z_{m'}^+; z_0), \end{aligned} \quad (2.56)$$

com  $m = 1, 2, \dots, L_z^f$  e

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_j^-(z_m^+; z_0) &= \mathbf{W}^-(z_m^+, z_{L_z^f}^-) \mathbf{P}_j^-(z_{L_z^f}^-; z_0) \\ &+ \sum_{m'=m+1}^{L_z^f} \mathbf{W}^-(z_m^+, z_{m'}^-) \delta \mathbf{S}_j^-(z_{m'}^-; z_0), \end{aligned} \quad (2.57)$$

com  $m = 0, 1, \dots, L_z^f - 1$ . Nestas equações  $z_m^\pm$  representa o  $m$ -ésimo nível em profundidade em subsuperfície, os sobrescritos  $+$  e  $-$  indicam a fronteira inferior e superior do nível  $z_m$  em profundidade, respectivamente, e  $L_z^f$  indica o número total de níveis  $z_m$  em profundidade, como já foi ressaltado na seção 2.4 do presente capítulo. Os elementos do vetor  $\mathbf{S}_j^\pm(z_0)$  representam a fonte  $j$  no nível em profundidade  $z_0$  (superfície), a matriz  $\mathbf{W}^\pm(z_m^\mp, z_{m'}^\mp)$  representa o operador unidirecional de continuação do campo de onda descendente (com sobrescrito  $+$ ) e ascendente

(com sobrescrito  $-$ ) entre os níveis em profundidades  $z_m$  and  $z_{m'}$ . Nas Equações (2.56) e (2.57), os elementos dos vetores  $\mathbf{P}_j^\pm(z_m^\mp; z_0)$ , isto é,  $P_{lj}^\pm(z_m^\mp; z_0)$ , representam os campos de ondas descendente e ascendente incidentes no ponto da malha  $l$  no nível em profundidade  $z_m$  que foi gerado por uma fonte  $j$  em  $z_0$ . Sendo assim, os vetores  $\mathbf{P}_j^\pm(z_m^\mp; z_0)$  representam os campos de ondas observados ao longo do nível  $z_m^\pm$  gerados por uma fonte em  $z_0$ . Os vetores  $\delta\mathbf{S}_j^\pm(z_m^\pm, z_0)$  representam as fontes secundárias, onde estão incluídos os fenômenos de espalhamento que ocorreram no nível em profundidade  $z_{m'}$ , e são dados pela combinação linear dos campos de ondas descendente e ascendente no nível em profundidade  $z_{m'}$ . Os vetores que representam as fontes secundárias são dados por (BERKHOUT, 2014a):

$$\begin{aligned} \delta\mathbf{S}_j^+(z_m^+; z_0) = & \sum_l^{L_x^f} \mathbf{R}_l^\cap(z_m^+; z_m^+) \mathbf{P}_{lj}^-(z_m^+; z_0) \\ & + \sum_l^{L_x^f} \delta\mathbf{T}_l^+(z_m^+; z_m^-) \mathbf{P}_{lj}^+(z_m^-; z_0) \end{aligned} \quad (2.58)$$

e

$$\begin{aligned} \delta\mathbf{S}_j^-(z_m^-; z_0) = & \sum_l^{L_x^f} \mathbf{R}_l^\cup(z_m^-; z_m^-) \mathbf{P}_{lj}^+(z_m^-; z_0) \\ & + \sum_l^{L_x^f} \delta\mathbf{T}_l^-(z_m^-; z_m^+) \mathbf{P}_{lj}^-(z_m^+; z_0), \end{aligned} \quad (2.59)$$

onde os vetores  $\mathbf{R}_l^\cap(z_m^+; z_m^+)$  e  $\mathbf{R}_l^\cup(z_m^-; z_m^-)$  representam os ângulo-dependentes operadores de espalhamento de reflexão no nível  $z_m^\pm$  para os campos de onda-PP espalhados. O operador  $\mathbf{R}_l^\cap(z_m^+; z_m^+)$  transforma o campo de onda ascendente em descendente e  $\mathbf{R}_l^\cup(z_m^-; z_m^-)$  transforma o campo de onda descendente em ascendente. Os vetores  $\delta\mathbf{T}_l^-(z_m^-; z_m^+)$  e  $\delta\mathbf{T}_l^+(z_m^+; z_m^-)$  representam os ângulo-dependentes operadores de espalhamento de transmissão no nível  $z_m^\pm$  - no sentido que esses operadores levam os campos de ondas de um lado para outro no nível  $z_m$  e para satisfazer a condição de continuidade do campo de onda espalhado no nível  $z_m$ , tem-se que  $\delta\mathbf{T}_l^-(z_m^-; z_m^+) = \mathbf{R}_l^\cap(z_m^+; z_m^+)$  e  $\delta\mathbf{T}_l^+(z_m^+; z_m^-) = \mathbf{R}_l^\cup(z_m^-; z_m^-)$  - para os campos ascendentes e descendentes, respectivamente, dos campos de onda-PP espalhados.

Uma característica desse esquema de modelagem é o fato que todo e qualquer evento de espalhamento está incluído nos operadores ângulo-dependentes de espalhamento, e assim os operadores de propagação são livres de espalhamentos e representam exclusivamente informações de propagação dos campos de ondas. Observe que os operadores de propagação são definidos para cada intervalo  $\Delta z = |z_m - z_{m'}|$ , e podem ser representado por uma expressão recursiva como se segue:

$$\mathbf{W}^-(z_0^+, z_m^-) = \prod_{m=1}^{L_z^f} \mathbf{W}^-(z_{m-1}^+, z_m^-), \quad (2.60)$$

$$\mathbf{W}^+(z_m^-, z_0^+) = \prod_{m=L_z^f}^1 \mathbf{W}^+(z_m^-, z_{m-1}^+). \quad (2.61)$$

Outra observação importante para o caso acústico é a relação entre os operadores  $\mathbf{R}_l^\cap(z_m^+; z_m^+)$  e  $\mathbf{R}_l^\cup(z_m^-; z_m^-)$ . Para o caso acústico temos que  $\mathbf{R}_l^\cap(z_m^+; z_m^+) = -\mathbf{R}_l^\cup(z_m^-; z_m^-)$ , sendo isso verdade e usando as relações  $\delta\mathbf{T}_l^-(z_m^-; z_m^+) = \mathbf{R}_l^\cap(z_m^+; z_m^+)$  e  $\delta\mathbf{T}_l^+(z_m^+; z_m^-) = \mathbf{R}_l^\cup(z_m^-; z_m^-)$ , pode-se reescrever as Equações (2.58) e (2.59) em uma única equação, como se segue:

$$\delta\mathbf{S}_j(z_m; z_0) = \sum_l^{L_x^f} \mathbf{R}_l^\cup(z_m; z_m) \delta\mathbf{P}_{lj}(z_m; z_0) \quad (2.62)$$

onde  $\delta\mathbf{P}_{lj}(z_m; z_0) = \mathbf{P}_{lj}^+(z_m^-; z_0) - \mathbf{P}_{lj}^-(z_m^+; z_0)$ .

### 2.7.1 Modelagem como um esquema recursivo

O algoritmo de modelagem FWMod é baseado nos operadores de propagação e espalhamento, então para realizar modelagem com o esquema de modelagem FWMod, é necessário conhecer esses operadores. Se a velocidade de propagação da onda só varia com a profundidade, ou seja, o modelo de velocidade não varia lateralmente, o campo de onda pode ser extrapolado do nível  $z_m$  para o nível  $z_{m+1}$ , no domínio frequência-número onda, via operador *phase-shift* (GASDAG, 1978), o qual é dado pela seguinte equação em 2D:

$$w^-(z_m^+, z_{m+1}^-) = \exp(-ik_z \Delta z), \quad (2.63)$$

onde  $w^-(z_m^+, z_{m+1}^-)$  representa uma coluna da matriz  $\mathbf{W}^-(z_m^+, z_{m+1}^-)$  no domínio do número de onda  $k_x$ ,  $\Delta z = |z_{m+1}^- - z_m^+|$  e  $k_z$  é dado por

$$k_z = \begin{cases} \sqrt{k^2 - k_x^2}, & \text{se } k_x^2 \leq k^2, \\ -i\sqrt{k_x^2 - k^2}, & \text{se } k_x^2 > k^2, \end{cases} \quad (2.64)$$

onde  $k = \left(\frac{\omega}{c(z)}\right)$ , sendo  $c(z)$  a velocidade de propagação no intervalo  $\Delta z$ . Note que para  $k_x^2 > k^2$  o campo de onda torna-se evanescente.

Para meios com variação lateral de velocidade, a Equação (2.63) não é mais válida, porém na implementação atual usada nesta tese, consideramos que localmente a velocidade é homogênea (suave) na área de extrapolação dos campos de ondas e assim construímos os operadores de propagação de acordo com a Equação (2.63) usando a velocidade local  $c(x_l, z_m)$  e levando em consideração que o transposto conjugado da matriz de propagação dos campos de ondas ascendentes é igual a matriz de propagação dos campos de ondas descendentes.

Além dos operadores de propagação, precisamos conhecer os operadores de espalhamento. Como estamos trabalhando no caso acústico, basta conhecer o operador de espalhamento  $\mathbf{R}_l^\cap(z_m^+; z_m^+)$  ou  $\mathbf{R}_l^\cup(z_m^-; z_m^-)$ , pois  $\mathbf{R}_l^\cap(z_m^+; z_m^+) = -\mathbf{R}_l^\cup(z_m^-; z_m^-)$ , para realizarmos a modelagem via algoritmo de modelagem FWMod, de modo geral, usaremos  $\mathbf{R}_l(z_m; z_m)$  para representar o operador de espalhamento no nível  $z_m$ . Esse operador de espalhamento será construído através da estimativa da refletividade do modelo, a qual será estimada pela seguinte equação:

$$r(x, z) = \frac{c(x, z) - c(x, z - \Delta z)}{c(x, z) + c(x, z - \Delta z)}. \quad (2.65)$$

Note que essa relação é válida para ondas de incidência normal no ponto  $(x, z)$ , dessa forma, na atual implementação não estamos considerando a dependência-angular dos operadores de espalhamento e a matriz  $\mathbf{R}(z_m; z_m)$  é uma matriz diagonal, onde os elementos da diagonal representam os valores de  $r(x_l, z_m)$  no nível  $z_m$  para cada ponto  $l$  da coordenada lateral  $x$  considerado na modelagem. Usando essas características do caso acústico, iremos reescrever as Equações (2.56), (2.57) e (2.62), da seguinte forma para o caso acústico:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_j^+(z_m; z_0) &= \mathbf{W}^+(z_m, z_0)\mathbf{S}_j^+(z_0) \\ &+ \sum_{m'=0}^{m-1} \mathbf{W}^+(z_m, z_{m'})\delta\mathbf{S}_j^+(z_{m'}; z_0), \end{aligned} \quad (2.66)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_j^-(z_m; z_0) &= \mathbf{W}^-(z_m, z_{L_z^f})\mathbf{P}_j^-(z_{L_z^f}; z_0) \\ &+ \sum_{m'=m+1}^{L_z^f} \mathbf{W}^-(z_m, z_{m'})\delta\mathbf{S}_j^-(z_{m'}; z_0), \end{aligned} \quad (2.67)$$

e

$$\delta\mathbf{S}_j(z_m; z_0) = \sum_l^{L_x^f} \mathbf{R}_l(z_m; z_m)\delta\mathbf{P}_{lj}(z_m; z_0). \quad (2.68)$$

A modelagem através das Equações (2.66), (2.67) e (2.68), é realizada de uma maneira recursiva em profundidade em termos de somar um termo de fonte seguido pela extrapolação dos campos de ondas da seguinte maneira:

- a modelagem é iniciada no nível  $z_0$  (normalmente a superfície) com o campo de onda descendente total  $\mathbf{Q}_j^+(z_0, z_0)$ , uma combinação do campo da fonte  $\mathbf{S}_j^+(z_0)$  com do campo de onda ascendente total refletido na superfície  $-\mathbf{P}_j^-(z_0; z_0)$  (para o caso marinho usamos  $-\mathbf{P}_j^-(z_0; z_0)$ , mas de modo geral temos  $\mathbf{R}_l^\Omega(z_0; z_0)\mathbf{P}_j^-(z_0; z_0)$ ), sendo extrapolado para o nível  $z_1$  através do operador  $\mathbf{W}^+(z_1, z_0)$ , para cada nível subsequente ( $m = 2, \dots, L_z^f$ ), a extrapolação é realizada recursivamente até o último nível  $z_{L_z^f}$

$$\mathbf{Q}_j^+(z_{m-1}; z_0) = \mathbf{P}_j^+(z_{m-1}; z_0) + \delta\mathbf{S}_j(z_{m-1}; z_0), \quad (2.69)$$

$$\mathbf{P}_j^+(z_m; z_0) = \mathbf{W}^+(z_m, z_{m-1})\mathbf{Q}_j^+(z_{m-1}; z_0). \quad (2.70)$$

Conhecido o campo de onda descendente em  $z_{L_z^f}$ , pode-se iniciar a extrapolação o campo de onda ascendente, onde em  $z_{L_z^f}$  é dado por  $\mathbf{Q}_j^-(z_{L_z^f}, z_0) = \mathbf{R}_l(z_{L_z^f}; z_{L_z^f})\mathbf{P}_j^+(z_{L_z^f}; z_0)$ , pois consideramos que em  $z_{L_z^f}$  o campo de onda ascendente  $\mathbf{P}_j^-(z_{L_z^f}; z_0) = \mathbf{0}$ . Assim como para o campo de onda descendente, realizamos a extrapolação do campo de onda ascendente recursivamente para todos os níveis subsequente ( $m = 0, 1, 2, \dots, L_z^f - 1$ ) até a superfície  $z_0$

$$\mathbf{Q}_j^-(z_{m+1}; z_0) = \mathbf{P}_j^-(z_{m+1}; z_0) + \delta\mathbf{S}_j(z_{m+1}; z_0), \quad (2.71)$$

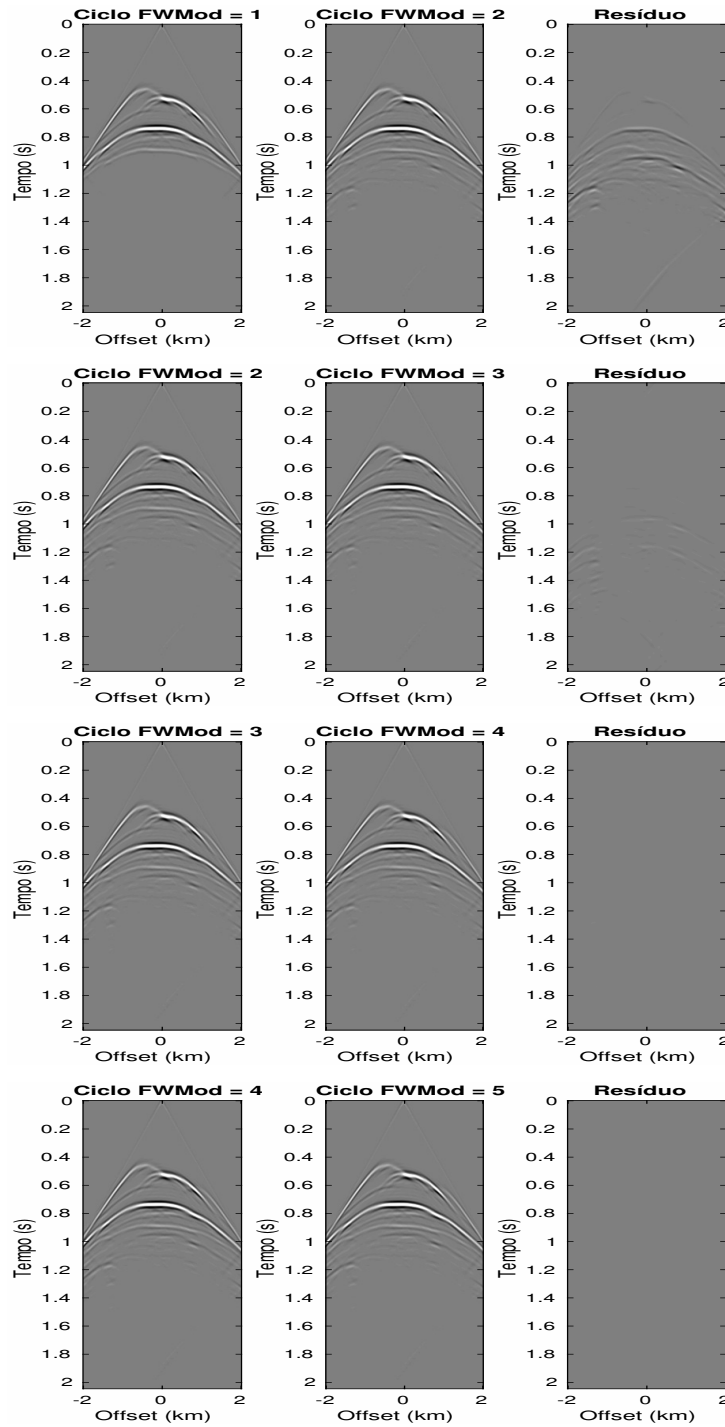
$$\mathbf{P}_j^-(z_m; z_0) = \mathbf{W}^-(z_m, z_{m+1})\mathbf{Q}_j^-(z_{m+1}; z_0). \quad (2.72)$$

Note que  $\mathbf{Q}_j^+(z_{m-1}; z_0)$  representa o campo de onda que está deixando o nível em profundidade  $z_{m-1}$  em direção ao nível em profundidade  $z_m$  e  $\mathbf{Q}_j^-(z_{m+1}; z_0)$  representa o campo de onda que está deixando o nível em profundidade  $z_{m+1}$  em direção ao nível em profundidade  $z_m$ . Chamamos esse processo de continuação do campo de onda descendente seguido pela continuação do campo ascendente de ciclo FWMod. Para cada ciclo FWMod realizado, uma ordem de espalhamento (múltiplas) nas duas direções são adicionados aos campos de ondas. Sendo assim, a ordem de múltiplas nos campos de ondas dependem do número de ciclos FWMod realizado, levando a um controle da ordem de múltiplas nos campos de ondas.

Para ilustrar essa característica do algoritmo de modelagem FWMod, mostramos na Figura 2.13, os resultados de 5 ciclo FWMod usando o modelo de velocidade mostrado na Figura 2.14. Podemos observar nessa figura que as ordens de múltiplas no campo de onda modelado vão crescendo para cada ciclo FWMod.

Para cada ciclo FWMod, os campos de ondas descendentes e ascendentes precisam ser armazenados para todos os níveis em profundidades, para que no próximo ciclo FWMod eles possam ser atualizados. Dessa forma, para cada ciclo FWMod os campos de ondas descendentes e ascendentes são conhecidos para todos os níveis em profundidade. Essa é uma característica interessante do algoritmo FWMod (apesar de exigir um maior esforço computacional), pois com essa característica pode-se estimar os campos de ondas ascendentes e descendentes em qualquer nível em profundidade desejado.

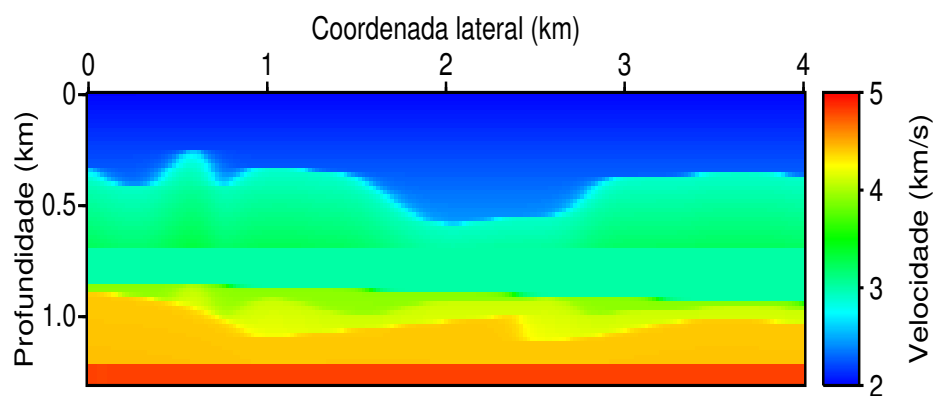
Figura 2.13 – Campos de onda modelados com o algoritmo de modelagem FWMod observado na superfície. Na esquerda e no centro em cada linha: dois ciclos FWMod consecutivos. Na direita: diferença entre os ciclos FWMod consecutivos da mesma linha.



Fonte: Autor.



Figura 2.14 – Modelo de velocidade usado realizar modelagem com o algoritmo de modelagem FWMod.



Fonte: Autor.

## 3 INVERSÃO DA FORMA DE ONDA

### 3.1 Introdução

No capítulo anterior introduzimos os esquemas de modelagem que são usados nesta tese. No presente capítulo introduzimos dois métodos de inversão da forma de onda: inversão da forma de onda através da metodologia da FWI e inversão da forma de onda através da metodologia do JMI, ambas metodologias são abordadas no domínio da frequência e em 2D.

Introduzimos a metodologia da FWI pois nosso esquema de inversão da forma de onda orientada ao alvo é baseada nesta metodologia, podemos dizer que nosso esquema é uma versão local da FWI. A necessidade de abordar o JMI nesta tese, vem do fato de que usamos essa metodologia como uma ferramenta para estimar os campos de ondas ascendentes e descendentes em um nível específico em subsuperfície, que são os *inputs* para nossa metodologia de inversão local, assim como também são *inputs* para estimar as respostas ao impulso de uma região alvo em subsuperfície. Além disso, começamos esse capítulo introduzindo alguns conceitos da teoria de inversão e os métodos de otimização local usados durante a tese.

### 3.2 Problema de otimização local

Na ciência física é possível fazer inferências sobre um sistema ou experimento físico indiretamente a partir de um certo conjunto de observações. Isso é possível porque no caso ideal, isto é, livre de qualquer interferência externa ao sistema físico, as observações representam exclusivamente características dos parâmetros físicos do sistema em estudo. Um importante exemplo sobre essas inferências indiretas sobre um sistema físico, são os experimentos realizado por Rutherford em 1911, que mostraram a inadequação do modelo atômico de Thomson através da análise de partículas alfas espalhadas por átomos (EISBERG, 1979). Nesses experimentos, Rutherford conclui que o modelo atômico de Thomson, apesar de explicar qualitativamente os fenômenos físicos, até então conhecidos dos átomos, não era capaz de explicar quantitativamente as partículas alfas espalhadas pelo átomo em grandes ângulos de deflexão, e a partir dessas observações, Rutherford propôs um modelo atômico, capaz de explicar suas observações, onde a carga positiva do átomo estaria concentrada em uma região muito pequena no centro do mesmo.

Observe que usamos a palavra *modelo* para denotar um conjunto de parâmetros físicos que explique as observações. Durante toda esta tese, seguiremos usando essa nomenclatura de *modelo* para representar um conjunto de parâmetros físicos, que é denotado por  $p$ , tal que explique um certo conjunto de observações, que chamamos simplesmente de *dados* observados, que será denotado por  $d^{(obs)}$  e por fim, chamamos as interferências externas ao sistema físico em estudo de *ruído*.

A partir das leis da física podem-se relacionar as observações com o modelo. Dado um

certo modelo, pode-se calcular um certo conjunto de observações que representam características do modelo, tal operação é denominada de problema direto ou modelagem. Por sua vez, dada as observações, pode-se estimar um certo modelo que explique as características das observações, tal operação é denominada de problema inverso.

Matematicamente, pode-se definir um operador  $\Gamma$  que relacione o modelo  $p$  com o dado  $d$ , tal como se segue:

$$\Gamma(p) = d. \quad (3.1)$$

Onde formalmente  $\Gamma$  é operador direto, pois ele projeta o modelo no espaço dos dados. Formalmente pode-se definir o operador  $\Gamma^{-1}$  como operador inverso, que projeta o dado no espaço dos modelos. O operador  $\Gamma$  pode ser representado de várias formas, como por exemplo por uma equação diferencial, um sistema de equações lineares ou não lineares. O dado, por sua vez, pode ser uma função contínua ou um conjunto discretizado do tempo e espaço. Já o modelo, também pode ser uma função contínua ou discretizada do espaço e/ou tempo.

O problema de estimar um determinado modelo que representa um sistema físico e explique os dados observados, é aplicada em várias áreas do conhecimento. Aqui nosso objetivo é focado em problemas da geofísica de prospecção, mas especificamente em problemas que utilizam ondas sísmicas que se propagam em subsuperfície. Dessa forma, nosso problema será determinar um conjunto finito,  $N$ , de parâmetros físicos, que definem um modelo, que é denotado pelo vetor  $\mathbf{p}$  (para o nosso caso, velocidade de propagação da onda-P), que explique um número finito,  $N_r$ , de observações, que será denotado pelo vetor  $\mathbf{d}^{(obs)}$ . Para este problema de estimar um conjunto finito de parâmetros, nos referimos como problema inverso discreto, mas por simplicidade chamamos aqui apenas como problema inverso, formalmente definido como

$$\Gamma(\mathbf{p}) = \mathbf{d}. \quad (3.2)$$

Em sísmica, essa relação entre o modelo e o dado é uma relação não-linear, porém linearizar o problema é recurso muito usado em sísmica.

Na presente tese, formulamos o problema de inversão como um problema de otimização local, ou seja, a inversão parti de alguma aproximação inicial do modelo procurado, que denotamos como  $\mathbf{p}_0 \in \mathbb{R}^N$ , nesta formulação assumimos que a atualização do modelo procurado pode ser escrito como a soma do modelo inicial  $\mathbf{p}_0$ , com uma perturbação do modelo estimada  $\Delta\mathbf{p} \in \mathbb{R}^N$ , isto é,

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_0 + \Delta\mathbf{p}. \quad (3.3)$$

Esta maneira de abordagem do problema inverso se resume em procurar na vizinhança do modelo inicial um modelo que minimize um funcional que estima o quanto os dados modelados pela equação do problema direto estão próximos dos dados observados, que chamamos de função objetivo. Para a FWI usamos a seguinte definição para função objetivo de norma  $l_2$ :  $\mathcal{L}(\mathbf{p}) = \|\Delta\mathbf{d}(\mathbf{p})\|_2^2 : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ , onde o subscripto representa o tipo de norma, o sobrescrito uma potência e  $\Delta\mathbf{d}(\mathbf{p})$  representa, de modo geral, o erro entre o conjunto de dados modelados e observados.

Considerando que na vizinhança de  $\mathbf{p}_0$  a função objetivo possa ser aproximada por uma função quadrática, então pode-se expandi-la em série de Taylor de segunda ordem como se segue:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\mathbf{p}) &= \mathcal{L}(\mathbf{p}_0 + \Delta\mathbf{p}) \\ &= \mathcal{L}(\mathbf{p}_0) + \sum_{\eta=1}^N \Delta p_{\eta} \partial_{p_{\eta}} \mathcal{L}(\mathbf{p}_0) \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{\zeta=1}^N \Delta p_{\zeta} \sum_{\eta=1}^N \partial_{p_{\zeta}} \partial_{p_{\eta}} \mathcal{L}(\mathbf{p}_0) \Delta p_{\eta} + O(|\Delta\mathbf{p}|^3).\end{aligned}\quad (3.4)$$

A fim de obter a perturbação  $\Delta\mathbf{p}$  a partir da equação anterior, deriva-se esta equação em relação a componente  $p_{\xi}$ , obtendo:

$$\partial_{p_{\xi}} \mathcal{L}(\mathbf{p}) = \partial_{p_{\xi}} \mathcal{L}(\mathbf{p}_0) + \sum_{\eta=1}^N \partial_{p_{\xi}} \partial_{p_{\eta}} \mathcal{L}(\mathbf{p}_0) \Delta p_{\eta}, \quad (3.5)$$

ou na forma matricial

$$\partial_{\mathbf{p}} \mathcal{L}(\mathbf{m}) = \partial_{\mathbf{p}} \mathcal{L}(\mathbf{p}_0) + \mathbf{H} \Delta\mathbf{p}, \quad (3.6)$$

onde  $\mathbf{H}$  é a matriz Hessiana e cujos elementos são definidos como  $H_{\xi\eta} \doteq \partial_{p_{\xi}} \partial_{p_{\eta}} \mathcal{L}(\mathbf{p}_0)$ . Ainda,  $\partial_{\mathbf{p}} \mathcal{L}(\mathbf{m})$  é um vetor coluna dado por:

$$\partial_{\mathbf{p}} \mathcal{L}(\mathbf{p}) = \begin{bmatrix} \partial_{p_1} \mathcal{L}(\mathbf{p}) \\ \partial_{p_2} \mathcal{L}(\mathbf{p}) \\ \vdots \\ \partial_{p_N} \mathcal{L}(\mathbf{p}) \end{bmatrix}. \quad (3.7)$$

Uma condição necessária para localizar o mínimo da função objetivo na vizinhança de  $\mathbf{p}_0$  é que o seu gradiente seja nulo. Impondo essa condição a Equação (3.6), obtém-se a perturbação  $\Delta\mathbf{p}$

$$\Delta\mathbf{p} = -\mathbf{H}^{-1} \partial_{\mathbf{p}} \mathcal{L}(\mathbf{p}_0), \quad (3.8)$$

onde o sobrescrito  $-1$  representa a matriz inversa de  $\mathbf{H}$ .

Sendo a perturbação  $\Delta\mathbf{p}$  dada pela equação anterior, tem-se que a Equação (3.3) será dada por

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_0 - \mathbf{H}^{-1} \partial_{\mathbf{p}} \mathcal{L}(\mathbf{p}_0). \quad (3.9)$$

Como a função objetivo não é perfeitamente quadrática na vizinhança de  $\mathbf{p}_0$ , mais de uma atualização é necessária para encontrar o modelo na vizinhança de  $\mathbf{p}_0$  que minimize a função objetivo, então normalmente esse processo é realizado de forma iterativa até alguma condição de parada ser alcançada. Para representar esse processo iterativo, reescrevemos a equação anterior da seguinte forma:

$$\mathbf{p}^{(n+1)} = \mathbf{p}^{(n)} - (\mathbf{H}^{-1})^{(n)} \partial_{\mathbf{p}} \mathcal{L}^{(n)}, \quad (3.10)$$

onde o sobrescrito  $n$  representa o número da iteração.

A atualização do modelo inicial, da maneira que foi feita na equação acima, é conhecido na literatura como método de otimização de Newton (PRATT; SHIN; HICKS, 1998; NOCEDAL; WRIGHT, 2006). O custo computacional para calcular a inversa da matriz Hessiana presente no método de otimização de Newton é muito alto para problemas de grande porte, como é normalmente o caso de problema de inversão sísmica. No entanto, existem na literatura outros métodos que evitam calcular a matriz Hessiana ou estimam uma aproximação dessa matriz para diminuir o custo computacional, como é o caso dos métodos de otimização local do gradiente (PRATT; SHIN; HICKS, 1998; NOCEDAL; WRIGHT, 2006), que não calcula a matriz Hessiana, e do Quase-Newton (NOCEDAL; WRIGHT, 2006), que estima uma matriz Hessiana aproximada. Na inversão da forma de onda com JMI, usamos o algoritmo de otimização local gradiente, e na inversão da forma de onda com a FWI, usaremos o algoritmo de otimização local Quase-Newton.

### 3.2.1 Método do gradiente

O método do gradiente é o método de otimização local mais fácil de ser implementado e largamente usado em processo de inversão, quando o problema é de larga escala. Neste método, a  $n$ -ésima iteração do modelo é dada por:

$$\Delta \mathbf{p}^{(n)} = -\alpha^{(n)} \partial_{\mathbf{p}} \mathcal{L}^{(n)}, \quad (3.11)$$

onde  $\partial_{\mathbf{p}} \mathcal{L}^{(n)}$  é vetor gradiente na  $n$ -ésima iteração e  $\alpha^{(n)}$  é um escalar que mede o quanto a atualização deve ser dada na direção do vetor gradiente na  $n$ -ésima iteração. Dessa forma, a atualização do modelo usando o método do gradiente é dada por:

$$\mathbf{p}^{(n+1)} = \mathbf{p}^{(n)} - \alpha^{(n)} \partial_{\mathbf{p}} \mathcal{L}^{(n)}. \quad (3.12)$$

Segue da equação anterior, que para realizar uma atualização do modelo (uma iteração) usando o método do gradiente, é necessário apenas calcular o vetor gradiente da iteração atual, e o escalar  $\alpha^{(n)}$ , que pode ser calculado usando algum método de busca que garanta que a função objetivo seja minimizada em cada iteração  $n$  (PRATT; SHIN; HICKS, 1998; VIRIEUX; OPERTO, 2009; HU et al., 2011). Essa simplicidade, torna esse método muito popular para problemas de grande porte, no entanto, em geral ele tem baixa taxa de convergência.

### 3.2.2 Método de Quase-Newton

Diferente do método de Newton, que calcula a matriz Hessiana exata para cada iteração, o método Quase-Newton faz uma aproximação iterativa da matriz Hessiana. Existem na literatura vários métodos para calcular o método Quase-Newton, como por exemplo é o método BFGS (BYRD et al., 1995; NOCEDAL; WRIGHT, 2006; MA; HALE, 2012). A ideia básica do BFGS é iterar a Hessiana na  $(n + 1)$ -ésima iteração usando informação de  $\Delta \mathbf{p}^{(n)}$  e  $\partial_{\mathbf{p}} \mathcal{L}^{(n)}$  da seguinte

maneira:

$$\mathbf{H}^{(n+1)} = \mathbf{H}^n + \frac{\mathbf{y}^{(n)}\mathbf{y}^{(n)T}}{\mathbf{y}^{(n)T}\Delta\mathbf{p}^{(n)}} - \frac{\mathbf{H}^{(n)}\Delta\mathbf{p}^{(n)}(\mathbf{H}^{(n)}\Delta\mathbf{p}^{(n)})^T}{\Delta\mathbf{p}^{(n)T}\mathbf{H}^{(n)}\Delta\mathbf{p}^{(n)}}, \quad (3.13)$$

onde  $\mathbf{y}^{(n)} = \partial_{\mathbf{p}}\mathcal{L}^{(n+1)} - \partial_{\mathbf{p}}\mathcal{L}^{(n)}$ . Este algoritmo é eficiente para estimar uma aproximação da matriz Hessiana completa, porém para problemas práticos ele ainda requer um alto custo computacional. Uma variação desse algoritmo, computacionalmente mais viável, é o L-BFGS (MA; HALE, 2012):

$$\left(\mathbf{H}^{(n)}\right)^{-1} = \left[\mathbf{I} - \frac{\Delta\mathbf{p}^{(n)}\mathbf{y}^{(n)T}}{\mathbf{y}^{(n)T}\Delta\mathbf{p}^{(n)}}\right] \left(\mathbf{H}^{(n-1)}\right)^{-1} \left[\mathbf{I} - \frac{\mathbf{y}^{(n)}\Delta\mathbf{p}^{(n)T}}{\mathbf{y}^{(n)T}\Delta\mathbf{p}^{(n)}}\right] + \frac{\Delta\mathbf{p}^{(n)}\Delta\mathbf{p}^{(n)T}}{\mathbf{y}^{(n)T}\Delta\mathbf{p}^{(n)}}. \quad (3.14)$$

Diferente do BFGS que calcula a matriz Hessiana explicitamente, o L-BFGS calcula a inversa da matriz Hessiana através de um número finito de de  $n$  iterações anteriores de  $\Delta\mathbf{p}^{(n)}$  e  $\partial_{\mathbf{p}}\mathcal{L}^{(n)}$ .

### 3.3 FWI

A função objetivo mais simples usada na FWI é baseada na seguinte equação residual (TARANTOLA, 1984):

$$\Delta d_{l_r,j}(\mathbf{p}) = d_{l_r,j}(\mathbf{p}) - d_{l_r,j}^{(obs)}, \quad (3.15)$$

que mede o ajuste na posição de observação  $l_r$ , para uma fonte  $j$ , entre os dados modelado,  $d_{l_r,j}(\mathbf{p})$ , e observado,  $d_{l_r,j}^{(obs)}$ , para um dado modelo  $\mathbf{p}$ . O corpo ao qual pertence o vetor  $\Delta\mathbf{d}_j$ , onde suas componentes são dadas pela Equação (3.15), depende do seu domínio. Como estamos trabalhando com a FWI no domínio da frequência-espaco, então estamos considerando que  $\Delta\mathbf{d}_j = \mathbf{d}_j(\mathbf{p}) - \mathbf{d}_j^{(obs)} \in \mathbb{C}^{N_r}$ . Reescrevendo a Equação (3.15), de forma a deixar explicita a dependência na frequência angular  $\omega$ , tem-se:

$$\Delta d_{l_r,j}(\omega, \mathbf{p}) = d_{l_r,j}(\omega, \mathbf{p}) - d_{l_r,j}(\omega)^{(obs)}. \quad (3.16)$$

A equação residual anterior leva em consideração no ajuste dos dados, simultaneamente, fase e amplitude. No entanto, a FWI é conhecida por ser um método de inversão altamente não-linear, e adotar estratégias para mitigar essa não-linearidade pode ser crucial para obter resultados de inversão consistentes. Entre essas estratégias, tem-se a inversão desacoplada entre amplitude e fase do conjunto de dados, ou seja, invertendo fase e amplitude em dois estágio distintos, invertendo a fase seguido pela inversão da amplitude (SHIN; MIN, 2006) ou invertendo só a fase (KAMEI; PRATT; TSUJI, 2014). Essa estratégia é baseada no fato de que dado um conjunto de dados, suas informações de fases são mais lineares do que suas informações de amplitudes (SHIN; MIN, 2006). Uma formulação desse tipo de estratégia de inversão é a equação residual proposta por Shin and Min (2006), baseada no ajuste do logaritmo dos dados, dessa forma fica fácil inverte só a amplitude (parte real da equação residual) ou só a fase (parte imaginária da equação residual).

Seguindo Bednar, Shin and Pyun (2007), uma forma de escrever a equação residual baseado na função logaritmo para extrair só informação de fase do conjunto de dados, é dada pela seguinte equação:

$$\Delta d_{l_r,j}(\omega, \mathbf{p}) = \Im \left\{ \ln [d_{l_r,j}(\omega, \mathbf{p})] - \ln [d_{l_r,j}(\omega)^{(obs)}] \right\}. \quad (3.17)$$

Aqui propomos uma nova forma para inverter apenas informação de fase do conjunto de dados através das seguintes equações residuais:

$$\Delta d_{l_r,j}(\omega, \mathbf{p}) = d_{l_r,j}(\omega, \mathbf{p}) e^{-\psi_{l_r,j}} - d_{l_r,j}^{(obs)}(\omega) e^{-\psi_{l_r,j}^{(obs)}} \quad (3.18)$$

ou

$$\Delta d_{l_r,j}(\omega, \mathbf{p}) = d_{l_r,j}(\omega, \mathbf{p}) e^{-\left(\psi_{l_r,j} - \psi_{l_r,j}^{(obs)}\right)} - d_{l_r,j}^{(obs)}(\omega). \quad (3.19)$$

Nesta formulação, o fator exponencial é uma normalização para cada para traço do conjunto de dados, com  $\psi_{l_r,j}$  e  $\psi_{l_r,j}^{(obs)}$  dados, respectivamente, por:

$$\psi_{l_r,j} = \Re \{ \ln [d_{l_r,j}(\omega, \mathbf{p})] \}, \quad (3.20)$$

e

$$\psi_{l_r,j}^{(obs)} = \Re \left\{ \ln [d_{l_r,j}^{(obs)}(\omega)] \right\}, \quad (3.21)$$

onde  $\Re$  denota a parte real da expressão. Para diferenciar as quatro equações residuais (3.16), (3.17), (3.18) e (3.19), usamos o sobrescrito  $\lambda$  nas equações residuais:  $\Delta d_{l_r,j}^{(\lambda)}(\omega, \mathbf{p})$ , de tal forma que  $\lambda = 0$  corresponde a equação residual clássica, Equação (3.16),  $\lambda = 1$  corresponde a equação residual baseada no logaritmo, Equação (3.17),  $\lambda = 2$  corresponde a equação residual dada pela Equação (3.18) e  $\lambda = 3$  corresponde a equação residual dada pela Equação (3.19).

Uma vez definidas as equações residuais, a função objetivo será dada por:

$$\mathcal{L}^{(\lambda)}(\mathbf{p}) = \frac{1}{2} \sum_{\omega}^{\omega_{max}} \sum_j^{N_s} \sum_{l_r}^{N_r} \left[ \Delta d_{l_r,j}^{(\lambda)}(\omega, \mathbf{p}) \Delta d_{l_r,j}^{(\lambda)*}(\omega, \mathbf{p}) \right]. \quad (3.22)$$

No que segue, calculamos o vetor gradiente da função objetivo em relação ao parâmetro  $\mathbf{p}$ , para cada  $\lambda$ :

A componente  $\partial_{p_\xi} \mathcal{L}^{(\lambda)}$  do gradiente da função objetivo para  $\lambda = 0$ , é dado por:

$$\partial_{p_\xi} \mathcal{L}^{(0)} = \sum_{\omega}^{\omega_{max}} \sum_j^{N_s} \sum_{l_r}^{N_r} \Re \left[ \left( \partial_{p_\xi} d_{l_r,j} \right) \Delta d_{l_r,j}^{(0)*} \right]. \quad (3.23)$$

A componente  $\partial_{p_\xi} \mathcal{L}^{(\lambda)}$  do gradiente da função objetivo para  $\lambda = 1$ , é dada por:

$$\partial_{p_\xi} \mathcal{L}^{(1)} = \sum_{\omega}^{\omega_{max}} \sum_j^{N_s} \sum_{l_r}^{N_r} \Im \left[ \left( \partial_{p_\xi} d_{l_r,j} \right) \Delta \bar{d}_{l_r,j}^{(1)} \right], \quad (3.24)$$

com

$$\Delta \bar{d}_{l_r j}^{(1)} = \frac{1}{d_{l_r j}} \Delta d_{l_r j}^{(1)}. \quad (3.25)$$

A componente  $\partial_{p_\xi} \mathcal{L}^{(\lambda)}$  do gradiente da função objetivo para  $\lambda = 2, 3$  é dado por:

$$\partial_{p_\xi} \mathcal{L}^{(\lambda)} = \sum_{\omega}^{\omega_{max}} \sum_j^{N_s} \sum_{N_r}^{L_r} \Re \left\{ \left( \partial_{p_\xi} d_{l_r j} \right) \Delta \bar{d}_{l_r j}^{(\lambda)} \right\}, \quad (3.26)$$

com

$$\Delta \bar{d}_{l_r j}^{(\lambda)} = \frac{i}{d_{l_r j}} \Im \left[ d_{l_r j} e^{-\left( \psi_{l_r j} - \nu \psi_{l_r j}^{(obs)} \right)} \Delta d_{l_r j}^{(\lambda)}(\omega, \mathbf{p})^* \right] \quad (3.27)$$

onde

$$\nu = \begin{cases} 0, & \text{para } \lambda = 2 \\ 1, & \text{para } \lambda = 3 \end{cases}. \quad (3.28)$$

Por simplicidade, omitimos  $\omega$  e  $\mathbf{p}$  das componentes dos gradientes acima.

Pode-se calcular os gradientes das funções objetivos, Equações (3.23), (3.24) e (3.26), facilmente usando a Equação (2.37). Derivando a Equação (2.37) em relação a componente  $p_\xi$ , obtém-se

$$\mathbf{B}(\omega, \mathbf{p}) \partial_{p_\xi} \mathbf{u} = \mathbf{s}^{(\xi)}, \quad (3.29)$$

onde  $\mathbf{s}^{(\xi)}$  representa uma fonte, conhecida na literatura como fonte virtual secundária (VIRIEUX; OPERTO, 2009), devido a componente  $p_\xi$  do parâmetro, dada por:

$$\mathbf{s}^{(l)} = -\partial_{p_\xi} [\mathbf{B}(\omega, \mathbf{p})] \mathbf{u}. \quad (3.30)$$

Note que a Equação (3.29) é similar a Equação (2.37), porém nesse caso a solução do sistema linear é a derivada do campo de onda em relação ao parâmetro físico. Usando a Equação (3.30), pode-se reescrever os gradientes da função objetivo da seguinte forma:

Para  $\lambda = 0$

$$\partial_{p_\xi} \mathcal{L}^{(0)} = - \sum_{\omega}^{\omega_{max}} \sum_j^{N_s} \Re \left[ \mathbf{u}_j^T \partial_{p_\xi} \mathbf{B}^T \mathbf{B}^{-1} \Delta \hat{\mathbf{d}}_j^{(0)*} \right] \quad (3.31)$$

Para  $\lambda = 1$

$$\partial_{p_\xi} \mathcal{L}^{(1)} = - \sum_{\omega}^{\omega_{max}} \sum_j^{N_s} \Im \left[ \mathbf{u}_j^T \partial_{p_\xi} \mathbf{B}^T \mathbf{B}^{-1} \Delta \hat{\mathbf{d}}_j^{(1)} \right] \quad (3.32)$$

Para  $\lambda = 2, 3$

$$\partial_{p_\xi} \mathcal{L}^{(\lambda)} = - \sum_{\omega}^{\omega_{max}} \sum_j^{N_s} \Re \left[ \mathbf{u}_j^T \partial_{p_\xi} \mathbf{B}^T \mathbf{B}^{-1} \Delta \hat{\mathbf{d}}_j^{(\lambda)} \right], \quad (3.33)$$

O símbolo  $\hat{\cdot}$ , indica que o tamanho (dimensão) do vetor residual foi aumentado  $\Delta N = N - N_r$  componentes com zeros para se ajustar com o campo de onda calculado em todo o modelo, ou seja, a dimensão do vetor residual é  $N$ , e consideramos  $(\mathbf{B}^{-1})^T = \mathbf{B}^{-1}$ .



### 3.3.1 Exemplos numéricos com a FWI

Nesta subseção mostramos alguns exemplos numéricos realizados com a FWI para dois conjuntos de dados sísmicos sintéticos diferentes. Com a finalidade de mostrar que a FWI é mais efetiva para estimar os parâmetros físicos na parte rasa do modelo, modelamos um conjunto de dados usando um modelo de velocidade que tem 9.192 km de distância na coordenada lateral e 2.064 km de profundidade e o outro conjunto de dados foi modelado usando um modelo que tem 9.0 km de distância na coordenada lateral e 3.5 km de profundidade.

Para ambos os modelos, os conjuntos de dados foram modelados no domínio frequência-espaco com o algoritmo de modelagem FD 2D de quarta-ordem, introduzido no Capítulo 2, seguido da transformada de Fourier temporal para obter os *shot gathers* no domínio do tempo-espaco. Nesta modelagem considerou-se o modelo de densidade como sendo constante. Foi utilizado uma faixa da PML com 0.1 km de comprimento nas quatro bordas dos modelos, então não estamos considerando a modelagem de superfície-livre. Este algoritmo de modelagem FD, é o mesmo algoritmo de modelagem usado na implementação da FWI, então a menos da transformada de Fourier que levou o conjunto de dados observados do domínio da frequência-espaco para o domínio do tempo-espaco, temos crimes de inversão nos exemplos numéricos mostrados aqui.

Todos os exemplos numéricos da FWI apresentados neste capítulo foram obtidos usando o algoritmo de otimização L-BFGS. Utilizamos informações das 10 últimas iterações para estimar uma aproximação da matriz Hessiana e consideramos como critérios de parada que alguma das três seguintes condições seja atingida:

- I) que a ordem da projeção do vetor gradiente seja menor que  $\sim 10^{-5}$ .
- II) que a ordem da mudança na função objetiva seja menor que  $\sim 10^{-9}$ .
- III) que o número máximo de 25 iterações para cada frequência invertida seja atingida.

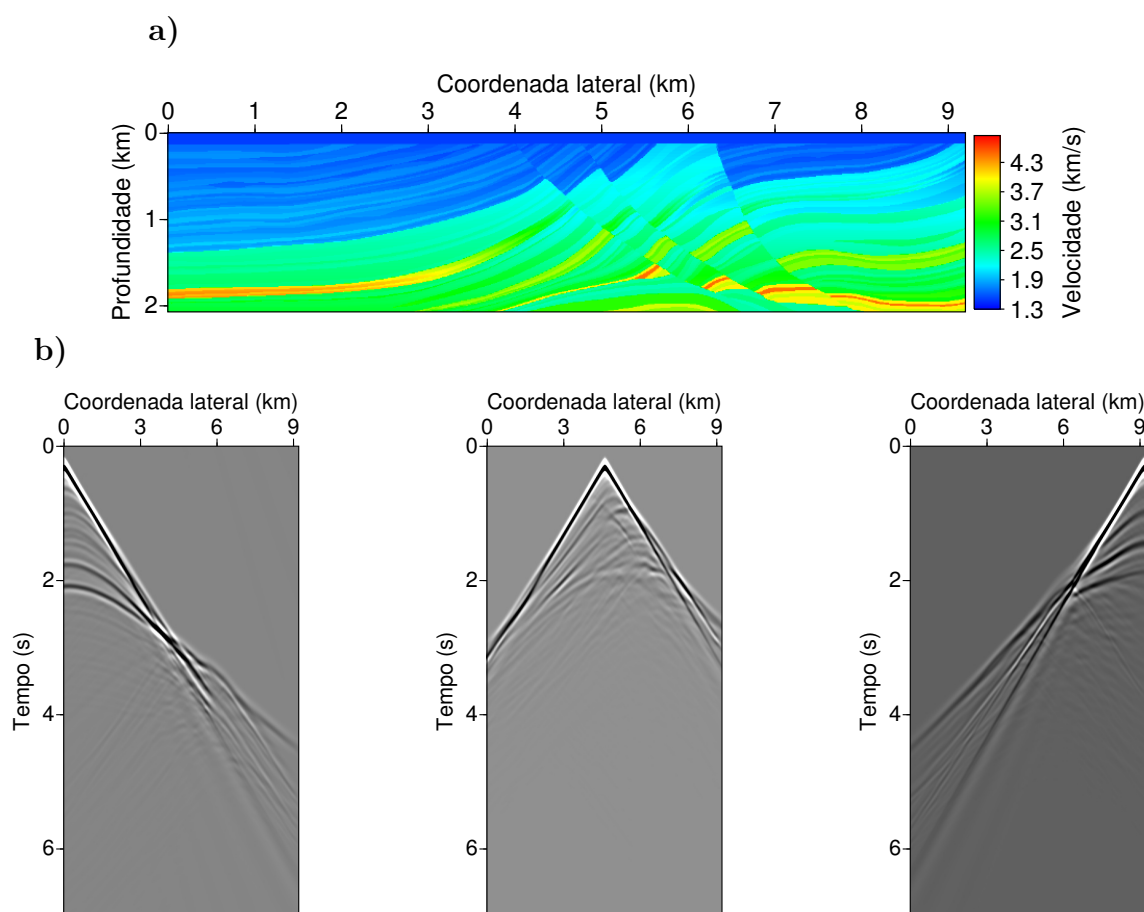
Consideramos no máximo até 25 iterações para cada frequência invertida, porque na média, em torno de 25 iterações com o algoritmo L-BFGS a função objetivo já diminuiu mais que 90%, então consideramos isso um bom critério de parada.

#### 3.3.1.1 Conjunto de dados sintéticos

Os conjuntos de dados usados nos exemplos numéricos como dados observados, foram gerados usando os modelos de velocidades 2D mostrados nas Figuras 3.1a e 3.2a, onde o primeiro modelo com 9.192 km de distância na coordenada lateral e 2.064 km de profundidade, é uma parte do modelo de velocidade Marmousi (VERSTEEG; GRAU, 1990), que por simplicidade, apesar de não ser exatamente o modelo Marmousi com suas dimensões originais, aqui chamamos apenas de modelo Marmousi, e o segundo modelo de velocidade com 9.0 km de distância na coordenada lateral e 3.5 km de profundidade, foi extraído do modelo de velocidade Marmousi2 (MARTIN; WILEY; MARFURT, 2006), que também por simplicidade, aqui chamamos apenas de modelo Marmousi2.

A geometria de aquisição para o modelo Marmousi consiste em um conjunto de 96 fontes com espaçamento uniforme de 0.096 km entre fontes adjacentes, todas na mesma profundidade de 0.024 km, o arranjo de receptores consiste em 384 receptores distribuídos ao longo da coordenada lateral com espaçamento de 0.024 km, todos na mesma profundidade de 0.096 km. Para este modelo usamos como *wavelet* um pulso Ricker com frequência pico de 5.5 Hz. Na Figura 3.1b mostramos três *shot gathers* de fontes localizadas na superfície ao longo da coordenada lateral, da esquerda para direita, 0.024 km, 4.572 km e 9.144 km, respectivamente.

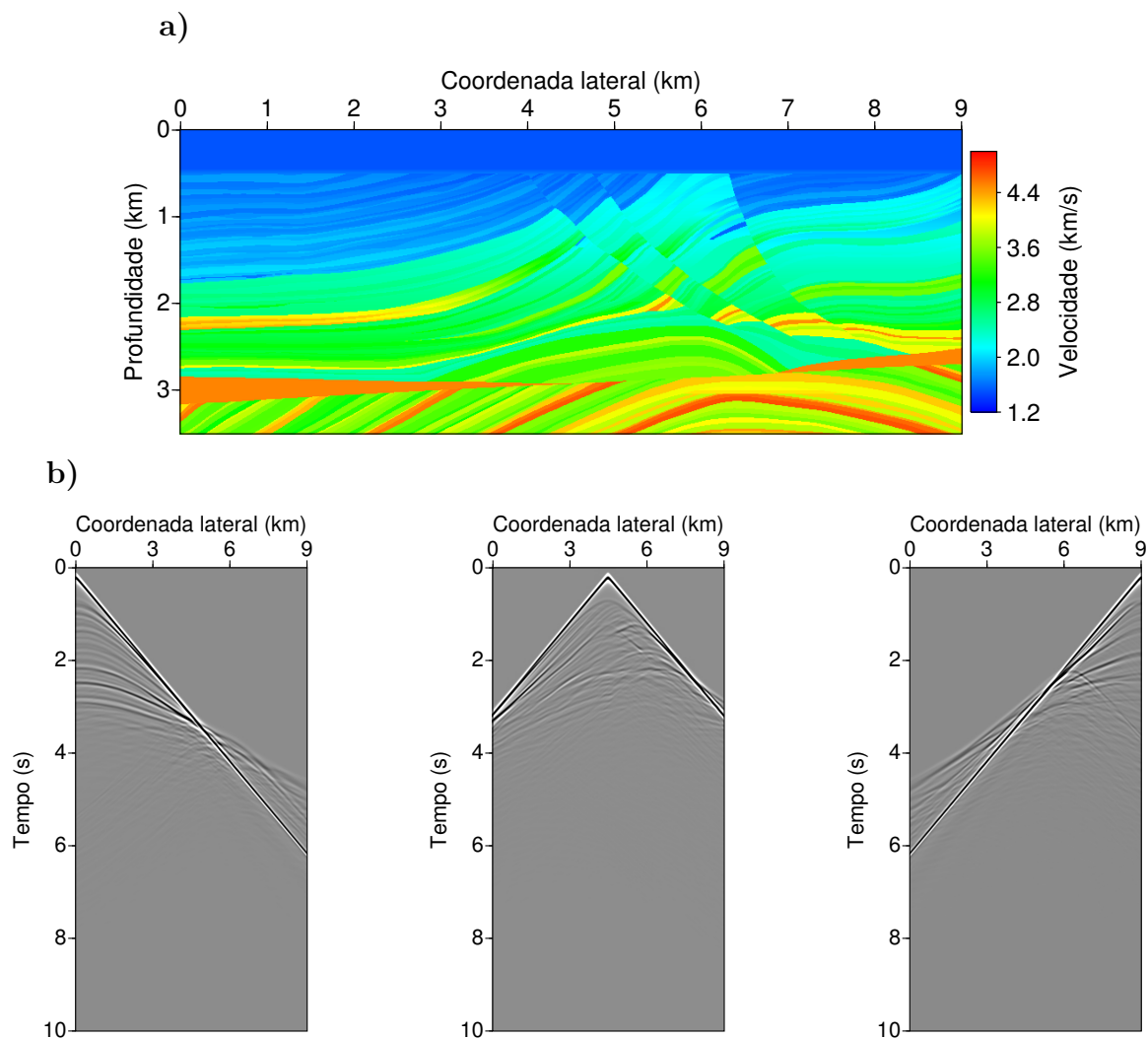
Figura 3.1 – a) Modelo de velocidade acústico. b) Três *shot gathers* de fontes localizadas na superfície ao longo da coordenada lateral, da esquerda para direita, 0.024 km, 4.572 km e 9.144 km, respectivamente.



A geometria de aquisição para o modelo Marmousi2 consiste em um conjunto de 225 fontes com espaçamento uniforme de 0.04 km entre fontes adjacentes, todas na mesma profundidade de 0.04 km, o arranjo de receptores consiste em 451 receptores distribuídos ao longo da coordenada lateral com espaçamento de 0.02 km, todos na mesma profundidade de 0.09 km. Para este modelo usamos como *wavelet* um pulso Ricker com frequência pico de 7.5 Hz (para este modelo, a frequência pico difere da frequência pico da modelagem anterior, pelo fato que aqui queremos obter uma maior resolução para o modelo invertido e assim usamos uma banda de frequência

maior). Na Figura 3.2b mostramos três *shot gathers* de fontes localizadas na superfície e ao longo da coordenada lateral, da esquerda para direita, 0.02 km, 4.5 km e 8.980 km, respectivamente.

Figura 3.2 – a) Modelo de velocidade acústico. b) Três *shot gathers* de fontes localizadas na superfície ao longo da coordenada lateral, da esquerda para direita, 0.02 km, 4.5 km e 8.980 km, respectivamente.



Fonte: Autor.

### 3.3.1.2 Resultados da inversão do modelo Marmousi

No processo de inversão com a metodologia da FWI existem quatro fatores que afetam fortemente o resultado da inversão: I) conhecer a fonte que gerou o conjunto de dados observados, II) estratégia para mitigar a não-linearidade da FWI, III) conteúdo de frequência disponível no conjunto de dados observados e IV) modelo de parâmetros físicos usados como modelo inicial para o problema, uma vez que se utilizem métodos de otimização local. Nesta tese, usamos os seguintes procedimentos:

I) Conhecimento da fonte.

Em todos os exemplos numéricos a fonte é conhecida.

II) Estratégias para mitigar a não-linearidade da FWI.

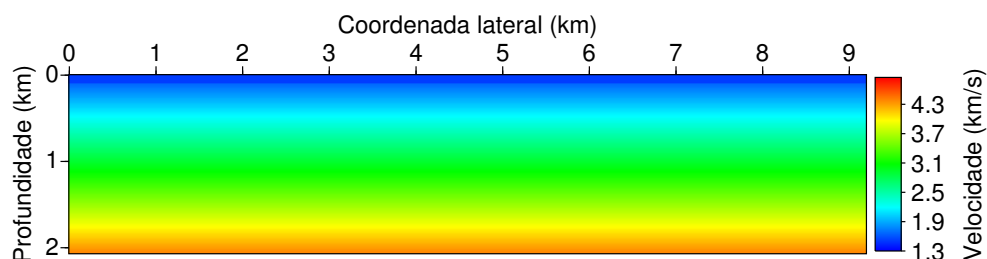
Um das motivações de realizar a inversão com a FWI no domínio da frequência, é para mitigar a não-linearidade da FWI via esquema de inversão multi-escalas (BUNKS et al., 1995), onde a inversão é realizada invertendo uma frequência de cada vez, começando das baixas para as altas frequências disponíveis no conjunto de dados observados, onde o resultado da inversão de uma frequência é usado como modelo inicial para inversão da frequência seguinte.

Considerando que conhecemos a fonte usada para modelar os dados observados e utilizando o esquema de inversão multi-escalas, avaliamos a sensibilidade da inversão com a FWI em relação ao conteúdo de frequência disponível no conjunto de dados observado e em relação ao modelo de velocidade inicial.

III) Conteúdo de frequência do conjunto de dados observados.

Nos exemplos para avaliar a sensibilidade da FWI em relação ao conteúdo de frequência disponível no conjunto de dados observado, usamos apenas a FWI formulada com função objetivo clássica.

Figura 3.3 – Modelo de velocidade inicial tipo gradiente vertical para inversão com a FWI.



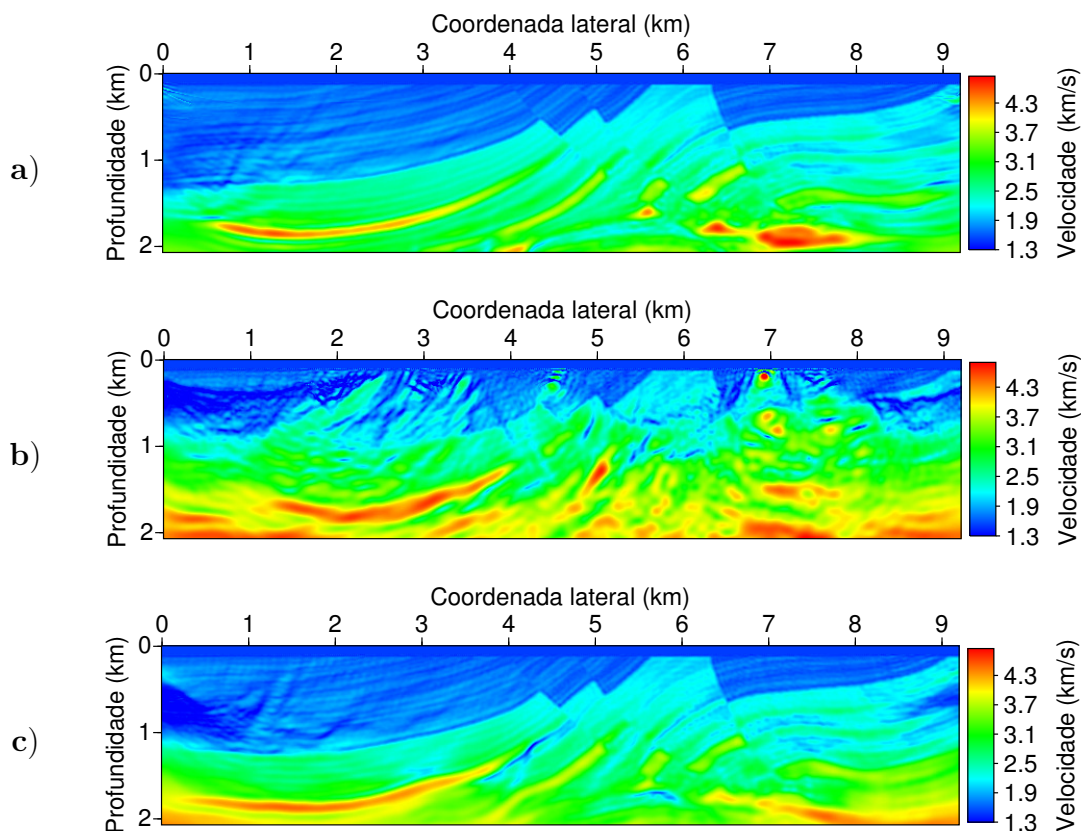
Fonte: Autor.

Usamos como modelo de velocidade inicial um modelo tipo gradiente vertical, mostrado na Figura 3.3. Nas Figuras 3.4a e 3.4b, mostramos o resultado da inversão com a FWI, após a inversão sucessiva de 123 (de 0.2 a 15.0 Hz) e 81 (de 5.0 a 15.0 Hz) frequências, respectivamente, com incremento de 0.12 Hz e considerando no máximo 25 iterações para cada frequência invertida.

O resultado da inversão usando a banda de frequência de 0.2 e 15.0 Hz, mesmo partindo de um modelo bem distante do modelo verdadeiro (ignorando os efeitos de bordas), mostra a eficácia da FWI para esse modelo com essa banda de frequência, uma vez que várias estruturas do modelo verdadeiro foram recuperadas, como pode-se confirmar através da Figura 3.4a. No entanto, o resultado para a banda de frequência de 5.0 e 15.0 Hz (Figura 3.4b), mostra que a FWI estacionou em um mínimo local que não corresponde ao modelo procurado. Essa diferença nos resultados da FWI partindo do mesmo modelo inicial, mas utilizando bandas de frequências diferentes, mostra que a FWI é muito sensível em relação ao conteúdo de frequência disponíveis

no conjunto de dados observados, no mínimo isto é verdade quando o modelo inicial é bem distante do modelo verdadeiro, que é caso do presente exemplo numérico.

Figura 3.4 – Resultado da inversão da FWI com inversão sucessivas de frequências, considerando no máximo 25 iterações para cada frequência invertida. a) Inversão de 123 frequências invertidas sucessivamente, de 0.2 Hz a 15.0 Hz, com incremento de 0.12 Hz. b) Inversão de 81 frequências invertidas sucessivamente, de 5.0 a 15.0 Hz, com incremento de 0.12 Hz. c) Inversão de 15 frequências invertidas sucessivamente, de 0.2 a 15.0 Hz, com incremento de 1.0 Hz.



Fonte: Autor.

Em geral com a FWI no domínio da frequência, o incremento de frequência em uma determinada banda não necessariamente precisa ser o incremento constante que evita *time-aliasing* no domínio do tempo do traço sísmico, como mostrado por Sirgue and Pratt (2004) para o caso 1D, porém aplicado para o caso 2D com razoáveis resultados. Esse grau de liberdade na escolha das frequências para serem invertidas em uma determinada banda de frequência, representa um grande avanço em FWI no domínio da frequência, uma vez que o custo da modelagem no domínio da frequência é diretamente proporcional ao número de frequências usadas. Na Figura 3.4c mostramos o resultado da inversão com a FWI, obtida da mesma maneira que o resultado mostrado na Figura 3.4a, porém usando apenas 15.0 frequências invertidas sucessivamente com o incremento de 1.0 Hz (a escolha do incremento de 1.0 Hz foi arbitrária). Apesar desse resultado apresentar alguns artefatos, em especial na borda do lado esquerdo, e uma menor resolução do

que o resultado mostrado usando 123 frequências (Figura 3.4a), a inversão indica as principais estruturas presentes no modelo verdadeiro.

#### IV) O modelo inicial para FWI.

Como em geral no conjunto de dados não se têm disponíveis informações de baixas frequências, a convergência da FWI em direção ao mínimo global depende fortemente do modelo inicial utilizado. Para mostrar a importância do modelo inicial na FWI, realizamos os mesmos testes mostrados nas Figuras 3.4b e 3.4c, porém agora partindo do modelo inicial mostrado na Figura 3.5a. Nas Figuras 3.5b e 3.5c mostramos esses resultados para os correspondentes testes mostrados nas Figuras 3.4b e 3.4c, respectivamente.

Diferente do resultado da inversão mostrado na Figura 3.4b, que não convergiu em direção ao modelo verdadeiro, pois considerou-se um modelo bem distante do verdadeiro e alta frequência (alta frequência para o padrão da FWI), o resultado do teste numérico mostrado na Figura 3.5b, partindo da mesma frequência porém usando um modelo inicial mais próximo do modelo verdadeiro, convergiu em direção ao modelo verdadeiro.

Apesar do resultado mostrado na Figura 3.4c ter convergido em direção ao modelo verdadeiro, a resolução foi menor em comparação ao resultado usando 123 frequências invertidas sucessivamente com incremento de 0.12 Hz, porém realizando esse mesmo teste, invertendo sucessivamente apenas 15 frequências com incremento de 1.0 Hz, mas partindo de um modelo inicial mais próximo do modelo verdadeiro, a resolução aumenta, como se pode confirmar na Figura 3.5c. Este resultado mostra que quanto mais o modelo inicial for próximo da solução, menos informação é necessário para inverter.

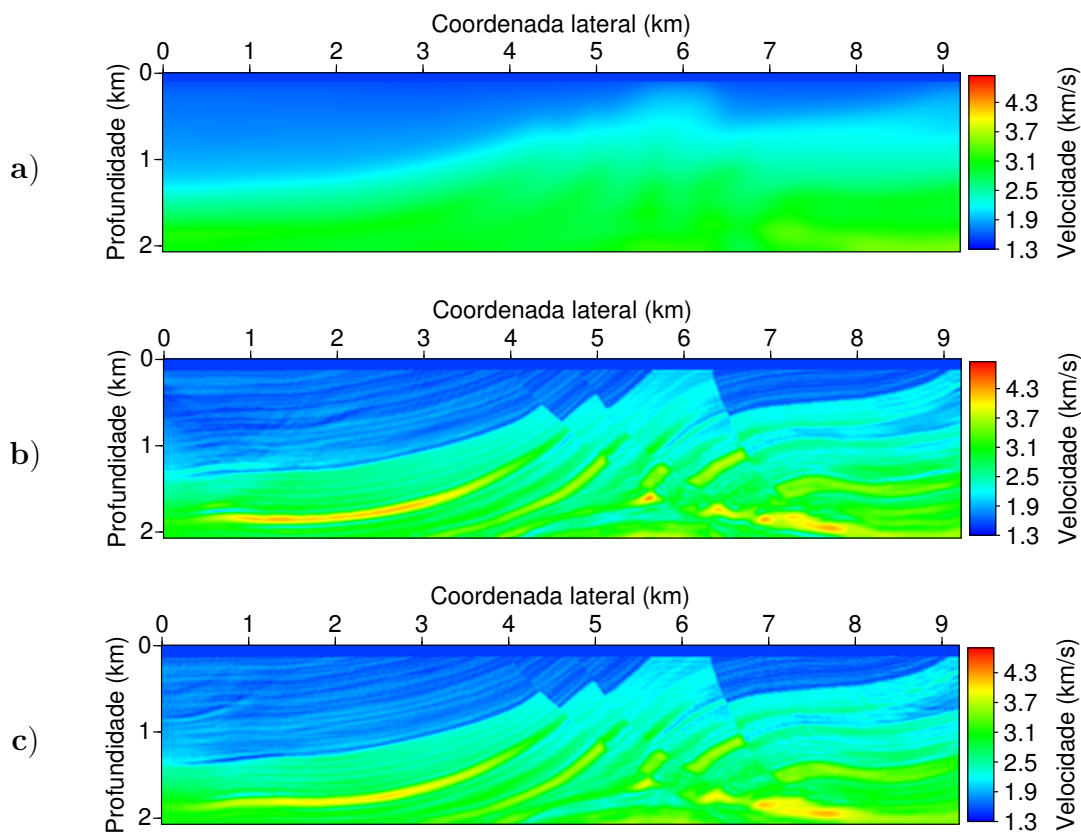
Para finalizar os exemplos numéricos com modelo Marmousi, realizamos o mesmo teste numérico mostrado na Figura 3.5b, porém com a FWI formulada com diferentes funções objetivo. Nas Figuras 3.6a, 3.6b e 3.6c, mostramos estes resultados para as funções objetivo com  $\lambda = 1$ ,  $\lambda = 2$  e  $\lambda = 3$ , respectivamente. Observa-se que os resultados da inversão com a função objetivo com  $\lambda = 1$  e  $\lambda = 2$  são praticamente os mesmos, porém o resultado usando a função objetivo com  $\lambda = 3$  apresenta uma melhor resolução do que as outras duas e mais próxima do resultado da inversão usando a função objetivo clássica.

#### 3.3.1.3 Resultados da inversão do modelo Marmousi2

A motivação de realizar testes numéricos com o modelo Marmousi2 é mostrar que em geral, a metodologia da FWI estima melhor os parâmetros físicos em subsuperfície na parte rasa do modelo.

No presente exemplo, usamos a função objetivo clássica, considerando que a fonte usada para modelar o conjunto de dados é conhecida e o esquema de inversão é multi-escala. O resultado da inversão para este exemplo é mostrado na Figura 3.7b, onde foram invertidas 31 frequências sucessivamente, com incremento de 0.5 Hz e partindo de 5.0 Hz até 21 Hz, considerando no máximo 25 iterações para cada frequência invertida e usando como modelo de velocidade inicial

Figura 3.5 – a) Modelo de velocidade inicial (versão suavizado do modelo verdadeiro). b) Resultado da inversão após a inversão de 84 frequências invertidas sucessivamente, de 5.0 Hz a 15.0 Hz, com incremento de 0.12 Hz e considerando no máximo 25 iterações para cada frequência invertida. c) Resultado da inversão após a inversão de 16 frequências invertidas sucessivamente, de 0.2 a 15.0 Hz, com incremento de 1.0 Hz e considerando no máximo 25 iterações para cada frequência invertida.



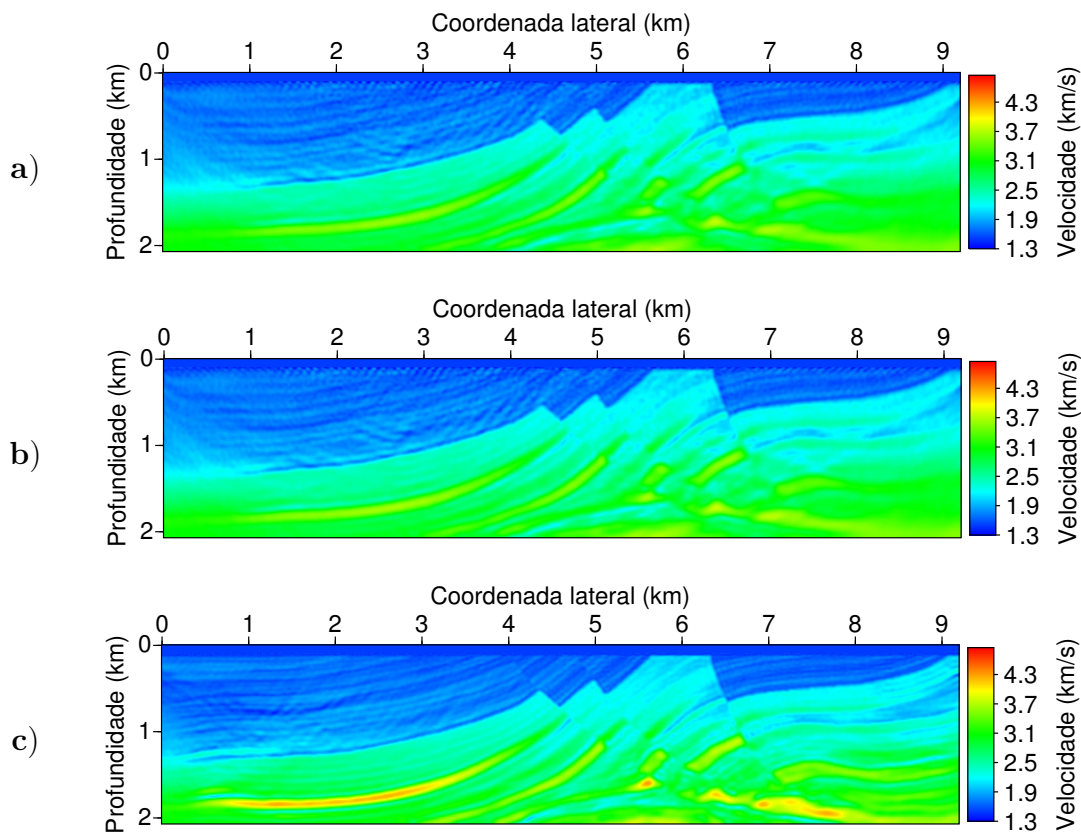
Fonte: Autor.

o modelo mostrado na Figura 3.7a (versão suavizado do modelo verdadeiro).

Pode-se observar no resultado mostrado na Figura 3.7b, que a atualização do modelo foi em direção ao modelo verdadeiro, porém praticamente na parte profunda do modelo não teve atualização, que pode ser melhor confirmado através da Figura 3.8c, que mostra especificamente uma região do modelo estimado, situada abaixo de 2.6 km em profundidade e localizada entre 4.0 e 8.0 km na coordenada lateral. Nas Figuras 3.8a e 3.8b, mostramos essa mesma região do modelo verdadeiro e do modelo inicial, respectivamente, para uma melhor comparação entre o modelo estimado e o inicial.

Apesar de só introduzir nosso esquema de inversão da forma de onda orientada ao ao alvo no Capítulo 5, Na Figura 3.8d mostramos um resultado estimado com nossa metodologia, usando a mesma banda de frequência e mesmo modelo de velocidade inicial, usado para estimar o modelo mostrado na Figura 3.8c, para mostrar que nossa metodologia é mais eficaz que o FWI clássico para estimar os parâmetros físicos em subsuperfície na parte profunda do modelo.

Figura 3.6 – Resultado da inversão após a inversão de 81 frequências invertidas sucessivamente, de 5.0 Hz a 15.0 Hz, com incremento de 0.12 Hz e considerando no máximo 25 iterações para cada frequência invertida. a) Usando função objetivo com  $\lambda = 1$ . b) Usando função objetivo com  $\lambda = 2$ . c) Usando função objetivo com  $\lambda = 3$ .



Fonte: Autor.

Ressaltamos que o conjunto de dados usados como *inputs* na inversão local não foi obtida a partir do conjunto de dados usados na FWI clássica, mas sim modelados diretamente no domínio do tempo-espaco.

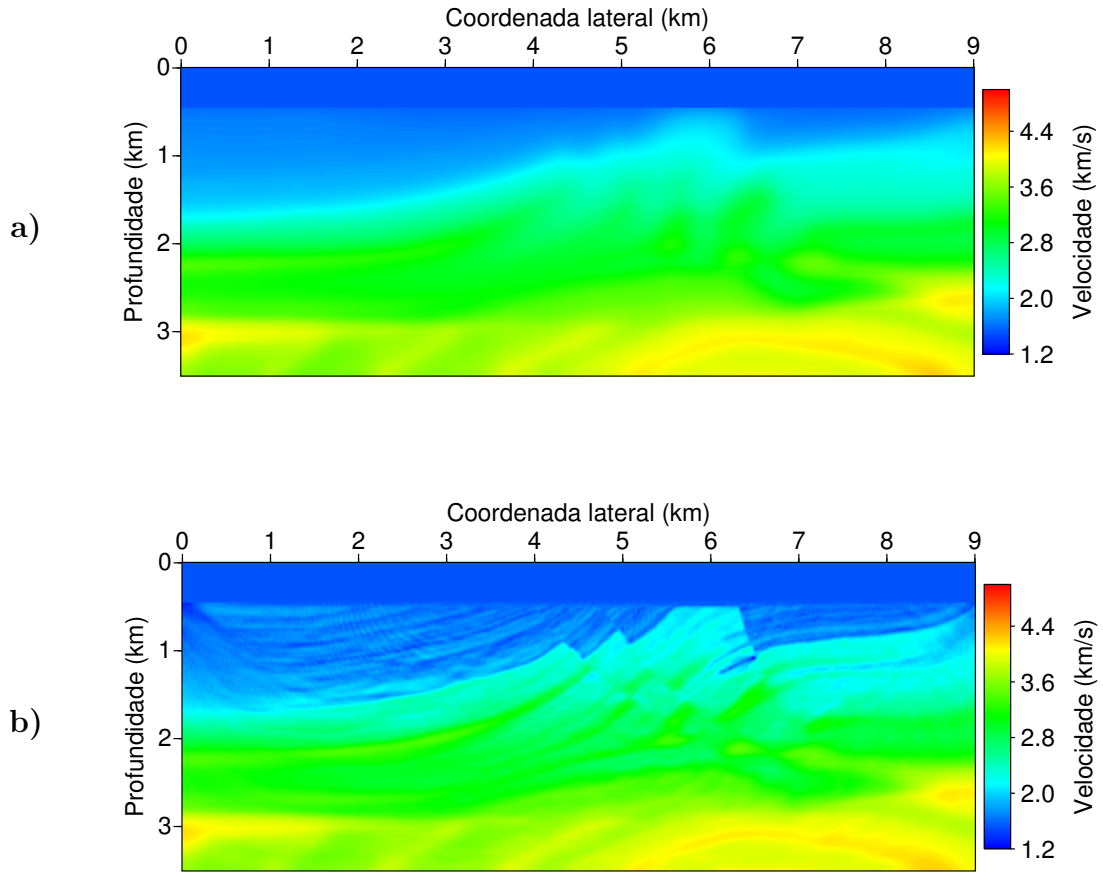
### 3.4 JMI

Nesta seção introduzimos a metodologia de inversão conjunta JMI desenvolvida por Berkhout (2012). Esta metodologia é baseada em estimar simultaneamente os modelos de refletividade e velocidade iterativamente através da minimização do resíduo entre os campos de ondas observados e modelados. Além de estimar o modelo de refletividade e atualizar o modelo de velocidade inicial, para corrigir erros de propagação das ondas, o método estima os campos de ondas descendente e ascendente em todos os níveis  $z_m$  em profundidade.

O algoritmo de modelagem para o JMI é o FWMod, e a equação residual é baseada na diferença entre os campos de ondas ascendentes observados e modelados na posição dos receptores



Figura 3.7 – a) Modelo de velocidade inicial (versão suavizado do modelo verdadeiro). b) Resultado da inversão após a inversão de 31 frequências invertidas sucessivamente, de 5.0 Hz a 21.0 Hz, com incremento de 0.5 Hz e considerando no máximo 25 iterações para cada frequência invertida.



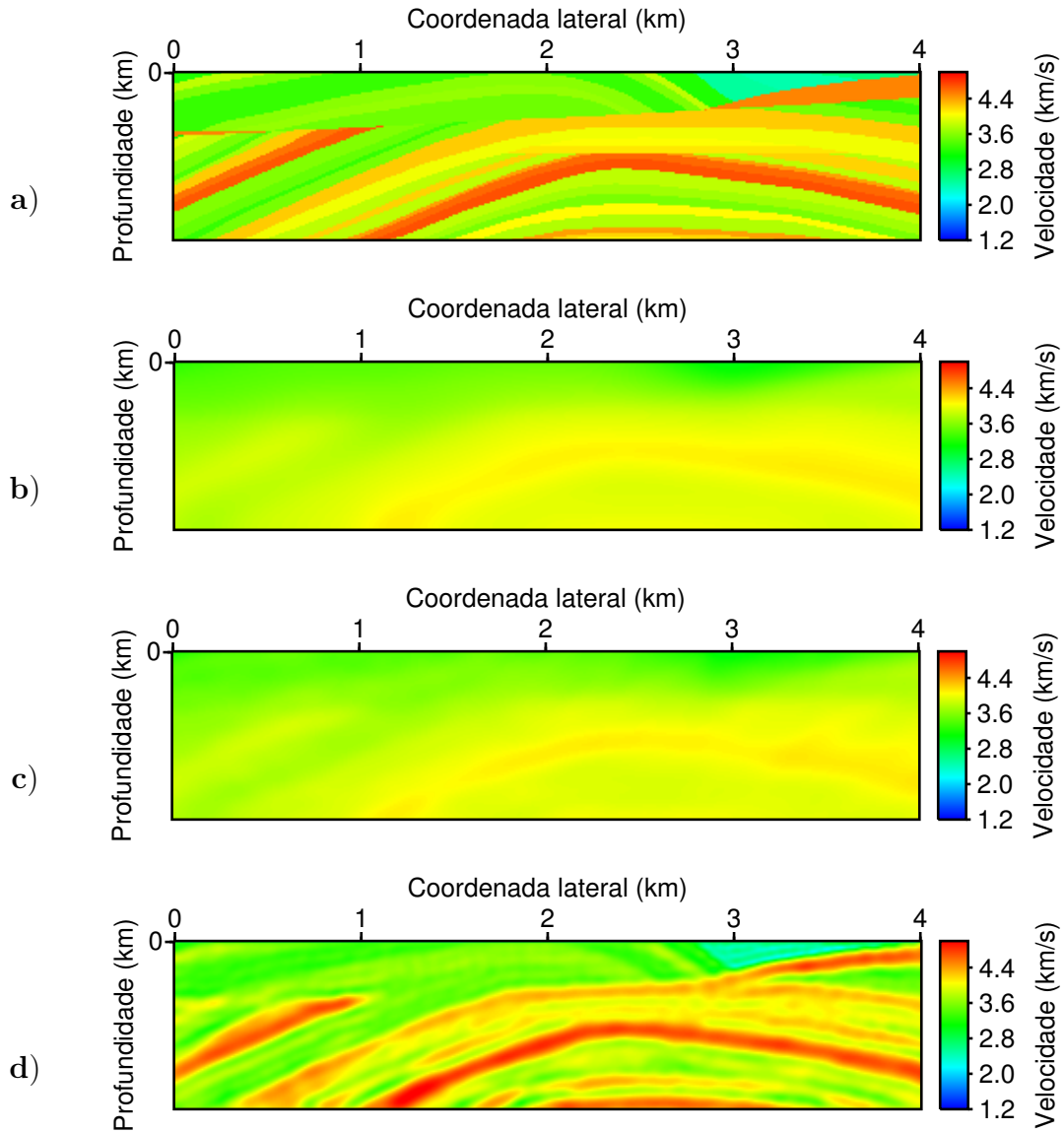
Fonte: Autor.

localizados na superfície. A metodologia do JMI assume que os campos de ondas observados na superfície podem ser descritos pela superposição dos campos de ondas que se propagaram através de um modelo de velocidade de referência com os campos de ondas originários em perturbações nesse modelo de referência.

Na seção dedicada ao algoritmo de modelagem FWMod, Seção 2.7, ressaltamos que todos os efeitos de propagação são descritos exclusivamente pelos operadores de propagação  $\mathbf{W}^{\pm}(z_m, z_{m'})$ , assim como todos os fenômenos de espalhamento são descritos pelo operador de espalhamento  $\mathbf{R}(z_m, z_m)$  (para o caso acústico). Então, considerando que qualquer correção nas fases dos campos de ondas estão relacionados a correção nos operadores de propagação, que dependem exclusivamente da correção do modelo velocidade da onda, assumi-se que esta correção pode ser realizada localmente através da seguinte relação linearizada:

$$w^-(z_m, z_{m'}) = w_0^-(z_m, z_{m'}) + \left. \partial_{\beta} w^-(z_m, z_{m'}) \right|_{\beta=0} \beta, \quad (3.34)$$

Figura 3.8 – Região do modelo situada abaixo de 2.6 km em profundidade e localizada entre 4.0 e 8.0 km na coordenada lateral. a) Região do modelo verdadeiro. b) Região do modelo inicial. c) Região do modelo estimado com FWI. d) Região do modelo estimado com a inversão da forma de onda direcionado ao alvo.



Fonte: Autor.

onde  $\beta$  é o parâmetro de contraste de velocidade, dado por

$$\beta(x, z_m) = 1 - \left[ \frac{c_0(x, z_m)}{c(x, z_m)} \right]^2, \quad (3.35)$$

onde  $c_0(x, z_m)$  representa o modelo de velocidade de referência e  $c(x, z_m)$  representa o modelo de velocidade real.

Considerando que  $w^-$ , seja dado pela Equação (2.63), tem-se que  $\partial_\beta w^-$  é dado por:

$$\left. \partial_\beta w^-(z_m, z_{m'}) \right|_{\beta=0} = \Delta w^-(z_m, z_{m'}) = \frac{ik_0^2 \Delta z}{2k_z} \exp(-ik_z \Delta z), \quad (3.36)$$

onde  $k_0 = \left(\frac{\omega}{c_0}\right)$  e  $k_z = \sqrt{k_0^2(1 - \beta) - k_x^2}$ . Onde domínio da frequência-espaço, esta equação é representada por um vetor como se segue:

$$\Theta_{0j}^-(z_m, z_{m'}) = \mathcal{F}_x^{-1} [\Delta w^-(z_m, z_{m'})], \quad (3.37)$$

onde  $\mathcal{F}_x^{-1}$  representa a transformada espacial em  $x$  inversa de Fourier.

Através das Equações (3.34) e (3.37), a correção do operador de propagação do domínio frequência-espaço é dado por:

$$\Delta \mathbf{W}^-(z_m, z_{m'}) = \Theta_0^-(z_m, z_{m'}) \bar{\beta}(z_{m'}), \quad (3.38)$$

onde  $\bar{\beta}(z_{m'})$  denota uma matriz diagonal onde os elementos da diagonal são os contrastes de velocidade ao longo do nível  $z_{m'}$ .

O efeito da perturbação dos campos de ondas na superfície, devido à perturbação  $\bar{\beta}(z_{m'})$  em qualquer ponto em subsuperfície, pode ser representado pela seguinte equação:

$$\Delta \mathbf{P}_{j(\beta)}^-(z_0, z_0) = \sum_{m=1}^{L_z^f} \Theta_0^-(z_0, z_m) \bar{\beta}(z_m) \mathbf{Q}_j^-(z_m), \quad (3.39)$$

onde

$$\mathbf{Q}_j^-(z_m) = \delta \mathbf{S}_j(z_m) + \sum_{m'=m+1}^{L_z^f} \mathbf{W}_0^-(z_{m'}, z_m) \delta \mathbf{S}_j(z_{m'}). \quad (3.40)$$

Enquanto a perturbação no modelo de velocidade afeta a fase do campo de onda, perturbação no modelo de refletividade afeta a amplitude do campo de onda. Seguindo a mesma metodologia usada para escrever o operador de propagação como a soma de uma parte definida no modelo de referência e outra devido a perturbação do modelo, define-se o operador de refletividade da seguinte maneira:

$$\mathbf{R}(z_m, z_m) = \mathbf{R}_0(z_m, z_m) + \Delta \mathbf{R}(z_m, z_m), \quad (3.41)$$

onde  $\mathbf{R}_0(z_m, z_m)$  representa o operador de espalhamento estimado conhecido na iteração atual,  $\mathbf{R}(z_m, z_m)$  representa o operador de espalhamento que está sendo estimado na iteração atual e  $\Delta \mathbf{R}(z_m, z_m)$  representa a correção do operador de espelhamento entre as iterações.

O efeito da perturbação dos campos de ondas na superfície, devido perturbação  $\Delta \mathbf{R}(z_m, z_m)$  em qualquer ponto em subsuperfície, pode ser representado pela seguinte equação:

$$\Delta \mathbf{P}_{j(\Delta \mathbf{R})}^-(z_0, z_0) = \sum_{m=1}^{L_z^f} \mathbf{W}_0^-(z_0, z_m) \Delta \mathbf{R}(z_m, z_m) \mathbf{P}_j^+(z_m). \quad (3.42)$$

Assumiu-se que os campos de ondas observados na superfície podem ser descritos pelas superposições dos campos de ondas provenientes do modelo de referência com os campos de ondas originários nas perturbações desse modelo de referência. Sendo assim, tem-se que através

da Equação (2.67), usando as Equações (2.68), (3.38) e (3.49), o campo de onda na superfície é dado por:

$$\mathbf{P}_j^-(z_0, z_0) = \sum_{m=1}^{L_z^f} \mathbf{W}^-(z_0, z_m) \mathbf{R}(z_m, z_m) \delta \mathbf{P}_j(z_m), \quad (3.43)$$

onde considerou-se que  $\mathbf{P}_j^-(z_{L_z^f}, z_0) = \mathbf{0}$ .

Uma vez estimado o campo de onda  $\mathbf{P}_j^-(z_0, z_0)$ , a estimativa do parâmetro físico procurados é baseada na minimização iterativa da diferença entre os dados observados,  $\mathbf{P}_j^{(obs)-}(z_0; z_0)$ , e modelados,  $\mathbf{P}_j^-(z_0; z_0)$ , isto é, na minimização do seguinte resíduo:

$$\Delta \mathbf{P}_j(z_0; z_0) = \mathbf{P}_j^{(obs)-}(z_0; z_0) - \mathbf{P}_j^-(z_0; z_0). \quad (3.44)$$

A minimização a equação anterior é realizada através da seguinte função objetivo:

$$J = \sum_{\omega} \|\Delta \mathbf{P}(z_0, z_0)\|_F^2, \quad (3.45)$$

onde  $\omega$  representa a frequência angular e o índice inferior  $F$  indica que esta norma do resíduo é a norma de Frobenius (GOLUB; van LOAN, 1996). Note que a equação residual na Equação (3.45) está na forma matricial.

Este problema de inversão é abordado como um problema de otimização local, sendo assim, é necessário estimar o gradiente da função objetivo, Equação (3.45), em relação ao modelo de velocidade e refletividade.

Calculando o gradiente da função objetivo em relação a refletividade  $\mathbf{R}$ , obtém-se:

$$\nabla_{\mathbf{R}(z_m, z_m)} J = -2 \sum_{\omega} \mathbf{W}^\dagger(z_m, z_0) \Delta \mathbf{P}(z_0, z_0) [\mathbf{P}^+(z_m; z_0) - \mathbf{P}^-(z_m; z_0)]^\dagger, \quad (3.46)$$

onde  $\dagger$  representa o transposto conjugado. Em geral, o campo  $\mathbf{P}^-(z_m; z_0)$  presente no gradiente acima, introduz artefatos de baixas frequências, e para evitar estes artefatos retiramos este campo do gradiente, reduzindo a equação anterior a seguinte equação:

$$\nabla_{\mathbf{R}(z_m, z_m)} J = -2 \sum_{\omega} \mathbf{W}^\dagger(z_m, z_0) \Delta \mathbf{P}(z_0, z_0) \mathbf{P}^+(z_m; z_0)^\dagger. \quad (3.47)$$

Calculando o gradiente da função objetivo em relação ao contraste de velocidade  $\bar{\beta}$ , obtém-se:

$$\nabla_{\bar{\beta}(z_m)} J = -2 \sum_{\omega} \mathbf{G}_0^\dagger(z_m, z_0) \Delta \mathbf{P}(z_0, z_0) [\mathbf{Q}^-(z_m; z_0)]^\dagger. \quad (3.48)$$

Cada gradiente calcula um parâmetro ao longo do nível em profundidade  $z_m$ . Dessa forma, conhecidas as direções para atualizar o modelo de refletividade e o modelo de velocidade na iteração  $n$ , a atualização do modelo de refletividade é dado por:

$$\mathbf{R}^{n+1}(z_m, z_m) = \mathbf{R}^n(z_m, z_m) + \alpha_r^n \nabla_{\mathbf{R}(z_m, z_m)} J^n \quad (3.49)$$

e a atualização do modelo de velocidade é dado por:

$$c_l^{n=1}(z_m) = \frac{c_l^n(z_m)}{\sqrt{1 - \alpha_\beta \left[ \text{diag} \left( \nabla_{\bar{\beta}(z_m)} J^n \right) \right]_l}}, \quad (3.50)$$

onde  $\alpha_r$  e  $\alpha_\beta$  são escolhidos tal que para cada iteração a função objetivo tem que decrescer.

### 3.5 Exemplos numéricos com JMI

Todos os exemplos numéricos do JMI apresentados neste capítulo foram obtidos usando o algoritmo de otimização do método gradiente. Consideramos como critérios de parada que alguma das duas seguintes condições seja atingida:

- I) que a ordem da mudança na função objetiva seja menor que  $\sim 10^{-9}$ .
- II) que o número máximo de 45 iterações para todo o processo seja atingida.

Consideramos no máximo até 45 iterações porque na média, em torno de 45 iterações a função objetivo já diminuiu mais que 90%, então consideramos isso um bom critério de parada.

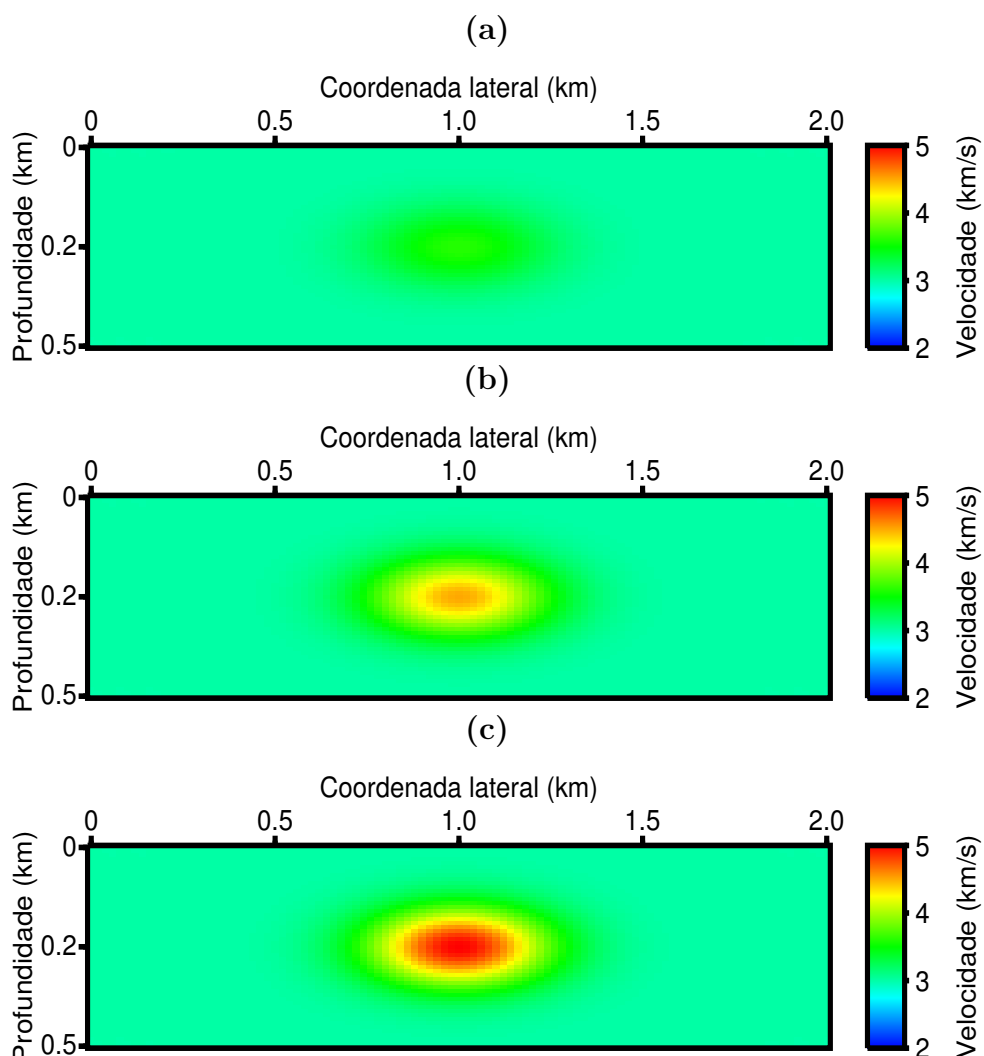
Como primeiro conjunto de exemplos numéricos com JMI, avaliamos o comportamento do algoritmo para três modelos de velocidade simples, mostrados na Figura 3.9, todos com 2.0 km de comprimento na coordenada lateral e 0.5 km em profundidade, os três modelos apresentam uma anomalia no centro do modelo, diferindo entre eles apenas na porcentagem máxima da perturbação da anomalia em relação ao modelo de velocidade de referência. As Figuras 3.9a, 3.9b e 3.9c mostram os modelos com perturbação máxima de 20%, 50% e 66% em relação ao modelo de velocidade de referência, respectivamente.

O conjunto de dados sintéticos foram modelados com o algoritmo de modelagem FWMod - mesmo algoritmo de modelagem usado no JMI, então aqui também estamos cometendo o crime de inversão - usando os três modelo de velocidades mostrado na Figura 3.9, e usando como *wavelet* um pulso Ricker com frequência pico de 25 Hz. Como o processo do JMI é baseado em estimar a refletividade, além de atualizar o modelo de velocidade inicial, usar uma banda de frequência para obter imagens com alta resolução é uma boa estratégia. Por este motivo, usamos aqui a frequência pico do pulso bem mais alta que a frequência pico do pulso usado nos testes da FWI.

A geometria de aquisição é composto com um arranjo com 201 fontes e 201 receptores na superfície ao longo da coordenada lateral, ambos com espaçamento uniforme de 0.02 km. A refletividade para cada modelo foi estimada via Equação (2.65), mostrada na Figura 3.10, onde as Figuras 3.10a, 3.10b e 3.10c mostram as refletividades dos modelos com perturbação máxima de 20%, 50% e 66% em relação ao modelo de velocidade de referência, respectivamente.

Uma vez conhecido o modelo de velocidade e a refletividade do modelo, pode-se realizar a modelagem através do algoritmo de modelagem FWMod. Nas Figuras 3.11a, 3.11b e 3.11c mostramos três *shot gathers* modelados com os modelos com perturbação máxima de 20%, 50% e 60%, em relação ao modelo de velocidade de referência, respectivamente, de uma fonte localizada em 1.0 km na coordenada lateral.

Figura 3.9 – Modelo de velocidade usado para gerar o conjunto de dados sintéticos para o JMI. a) Modelo de velocidade com 20% de perturbação máxima em relação ao modelo de velocidade de referência. b) Modelo de velocidade com 50% de perturbação máxima em relação ao modelo de velocidade de referência. c) Modelo de velocidade com 66% de perturbação máxima em relação ao modelo de velocidade de referência.

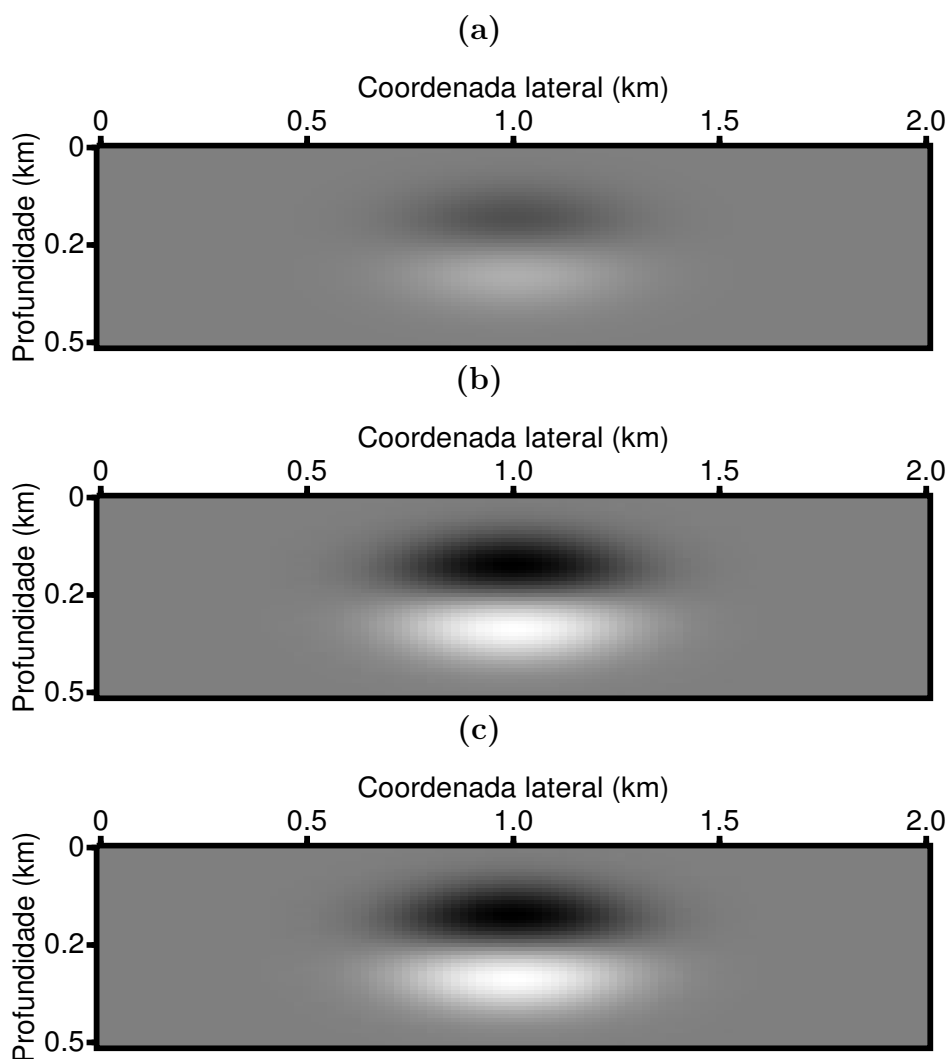


Fonte: Autor.

Usamos como modelo de velocidade inicial para os três exemplos numéricos, um modelo de velocidade constante sendo exatamente o modelo de velocidade de referência (3.0 km/s), e o modelo de refletividade inicial é homogêneo com refletividade igual a zero.

Nas Figuras 3.12a, 3.12b e 3.12c, mostramos os modelos de velocidade estimados com JMI após 45 iterações, com uma banda de frequência de 5.0 a 60.0 Hz, para os modelos com 20%, 50% e 66% de perturbação máxima em relação ao modelo de velocidade de referência, respectivamente. Verifica-se que para todos os modelos com diferentes perturbações, o JMI conseguiu recuperar a anomalia, principalmente a parte superior, como pode ser confirmado através das informações dos poços centrais mostrados na Figura 3.13, que mostra as informações de poços (localizado em 1.0 km na coordenada lateral) para cada um dos modelos estimados com JMI.

Figura 3.10 – Refletividade estimada a partir do modelo verdadeiro. a) Refletividade do modelo de velocidade com 20% de perturbação máxima em relação ao modelo de velocidade de referência. b) Refletividade do modelo de velocidade com 50% de perturbação máxima em relação ao modelo de velocidade de referência. c) Refletividade do modelo de velocidade com 66% de perturbação máxima em relação ao modelo de velocidade de referência.

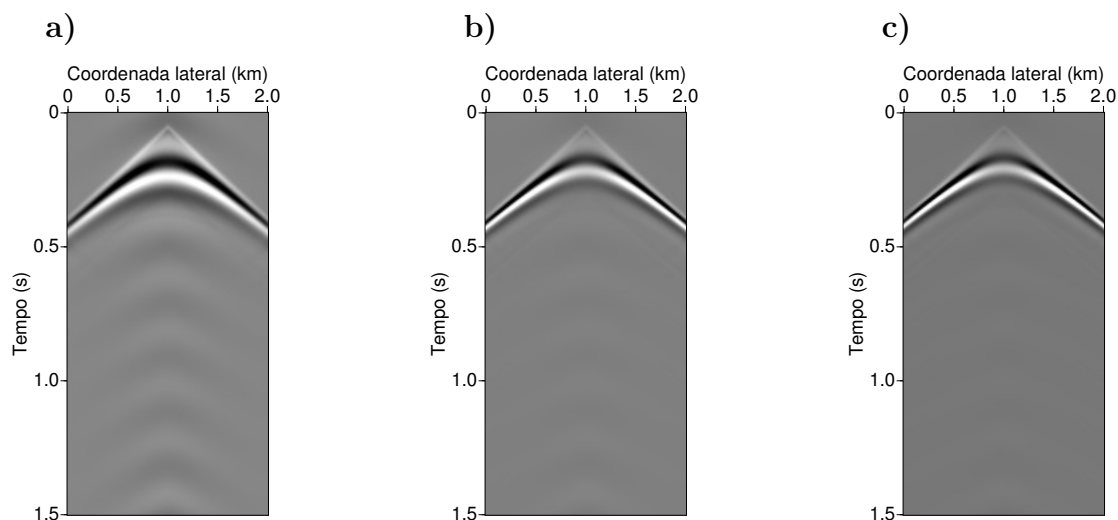


Fonte: Autor.

Nas Figuras 3.14a, 3.12b e 3.12c, mostramos os modelos de refletividades estimados com JMI após 45 iterações, com uma banda de frequência de 5 a 60 Hz, para os modelos com 20%, 50% e 66% de perturbação máxima em relação ao modelo de velocidade de referência, respectivamente. Verifica-se que para todos os modelos com diferentes perturbações, o JMI conseguiu recuperar a refletividade, principalmente a parte superior, como pode ser confirmar através das informações do poços centrais mostrados na Figura 3.15, que mostra as informações de poços (localizado em 1.0 km na coordenada lateral) para cada uma das refletividades estimadas com JMI.

Realizamos um outro exemplo numérico com a mesma fonte e geometria de aquisição dos exemplos anteriores, porém usando o modelo de velocidade mostrado na Figura 3.16, que corresponde ao modelo do exemplo anterior com perturbação máxima de 66% em relação ao

Figura 3.11 – *Shot gathers* modelados com FWMod e observados na superfície de uma fonte localizada em 1.0 km na coordenada lateral. a) Modelado com modelo de velocidade com 20% de perturbação máxima em relação ao modelo de velocidade de referência. b) Modelado com modelo de velocidade com 50% de perturbação máxima em relação ao modelo de velocidade de referência. c) Modelado com modelo de velocidade com 66% de perturbação máxima em relação ao modelo de velocidade de referência.



Fonte: Autor.

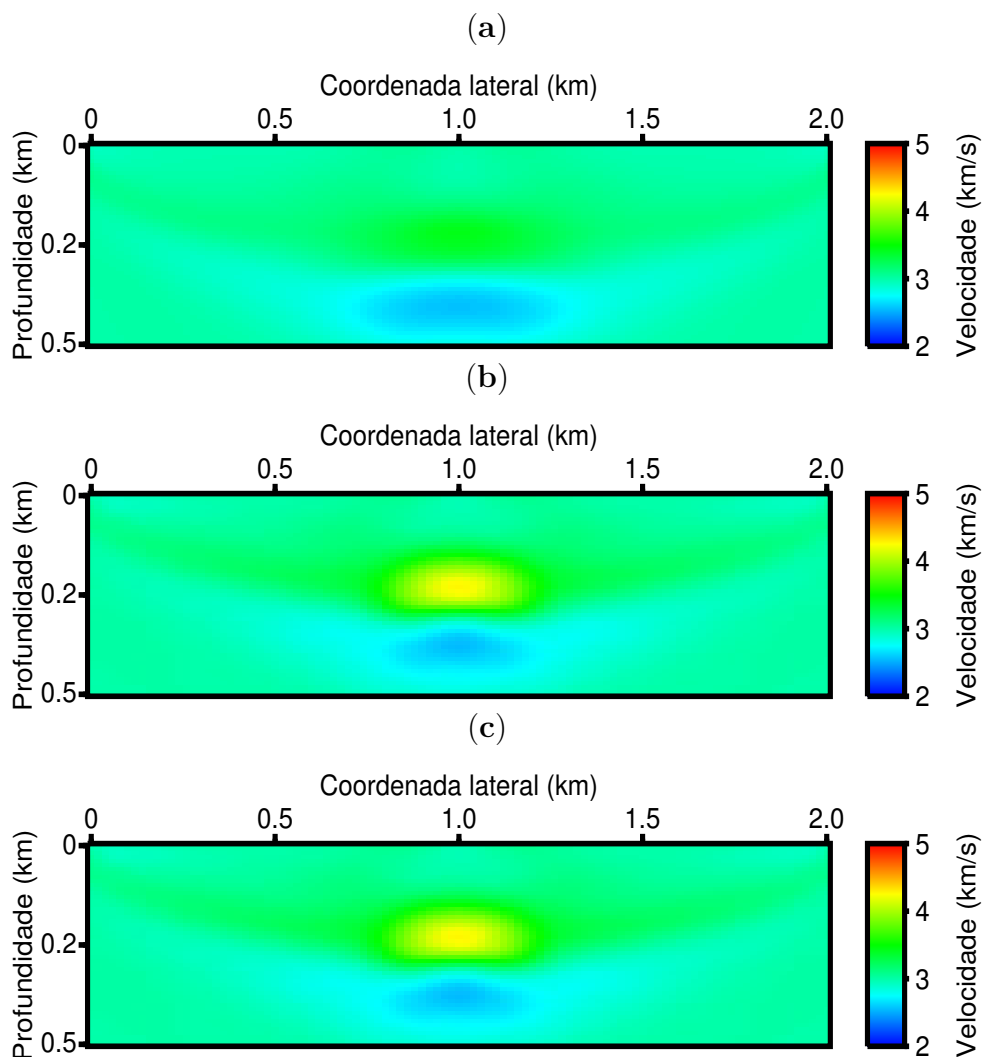
modelo de velocidade de referência, com dois refletores plano horizontais abaixo da anomalia. Assim como nos exemplos anteriores, a modelagem foi realizada com o algoritmo de modelagem FWMod, com a refletividade estimada via Equação (2.65), mostrada na Figura 3.17a. Na Figura 3.17b mostramos três *shot gathers* modelados a partir desse modelo de velocidade, onde da esquerda para direita, *shot gathers* com fontes localizadas em 0.0 km, 1.0 km e 2.0 km, respectivamente, na coordenada lateral.

Para este exemplo, verificamos a sensibilidade do JMI em relação ao modelo de velocidade inicial. Os testes foram realizados usando dois modelos de velocidades inicial distintos. Sendo um modelo de velocidade constante e o outro um modelo obtido através de uma suavização do modelo de velocidade verdadeiro, mostrado na Figura 3.18. O modelo de refletividade inicial para o teste com modelo de velocidade inicial constante é zero, e para o teste com modelo de velocidade inicial suave, é o modelo mostrado na Figura 3.19.

Nas Figuras 3.20a, 3.20b mostramos os modelos de velocidades estimadas com JMI, e nas Figuras 3.21a, 3.21b mostramos as imagens estruturais estimadas com JMI, ambos são estimados com 45 iterações, com uma banda de frequência de 5.0 a 60.0 Hz, usando como modelos de velocidade inicial o modelo constante (para as Figuras 3.20a e 3.21a) e o modelo suavizado (para as Figuras 3.20b e 3.21b). Verifica-se que tanto o modelo de velocidade quanto a imagem estrutural foi melhor recuperada usando como modelo de velocidade inicial o modelo suavizado. Em relação a imagem estrutural do modelo, podemos ver que a imagem foi melhor focalizada na região abaixo da anomalia usando o modelo de velocidade suavizado.



Figura 3.12 – Modelo de velocidade estimado com JMI após 45 iterações com uma banda de frequência de 10 a 60 Hz. a) Modelo de velocidade estimado com 20% de perturbação máxima em relação ao modelo de velocidade de referência. b) Modelo de velocidade estimado com 50% de perturbação máxima em relação ao modelo de velocidade de referência. c) Modelo de velocidade estimado com 66% de perturbação máxima em relação ao modelo de velocidade de referência.

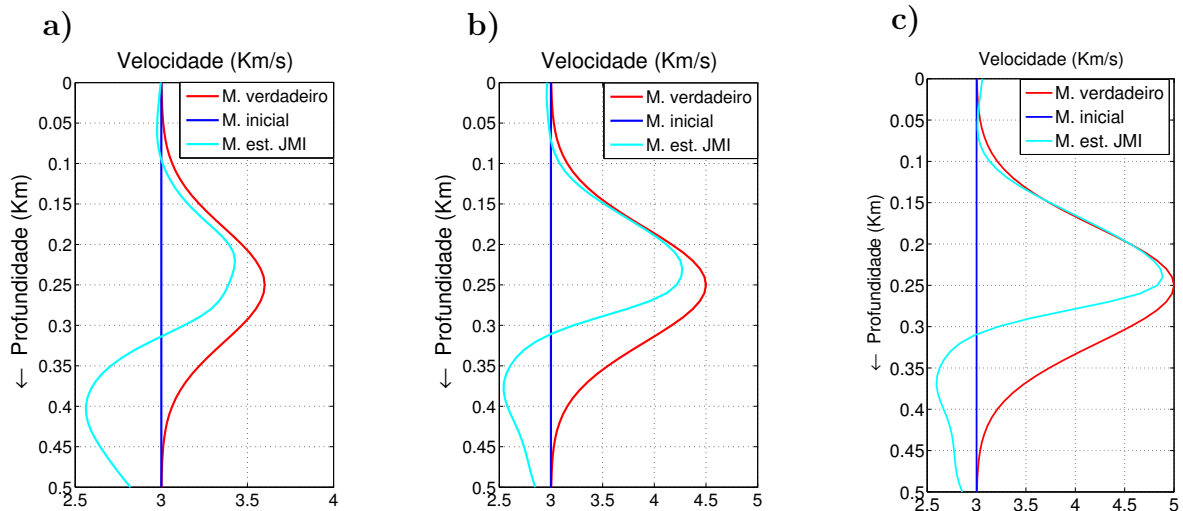


Fonte: Autor.

Um dos objetivos da presente tese é avaliar a possibilidade de usarmos os campos de ondas descendentes e ascendentes estimados através do JMI para estimar a resposta ao impulso local, assim como para estimar os parâmetros físicos em subsuperfície localmente a partir de dados sísmicos gerados e observados na superfície. Então avaliamos os campos de ondas ascendente e descendente estimados com JMI deste último exemplo mostrado.

Na Figura 3.22, mostramos os campos de ondas descendente (esquerda) e ascendente (direita) modelados com FWMod a partir do modelo de velocidade verdadeiro. Na Figura 3.23, mostramos os campos de ondas descendente (esquerda) e ascendente (direita) estimados com JMI no exemplo anterior no teste usando como modelo inicial o modelo de velocidade constante.

Figura 3.13 – Informações de poço, localizado em 1.0 km na coordenada lateral, do resultado da inversão com JMI após 45 iterações com uma banda de frequência de 5 a 60 Hz, para os modelos com 20%, 50% e 60% de perturbação máxima em relação ao meio de referência. a) Poço do modelo de velocidade com 20% de perturbação máxima em relação ao modelo de velocidade de referência. b) Poço do modelo de velocidade com 50% de perturbação máxima em relação ao modelo de velocidade de referência. c) Poço do modelo de velocidade com 66% de perturbação máxima em relação ao modelo de velocidade de referência.



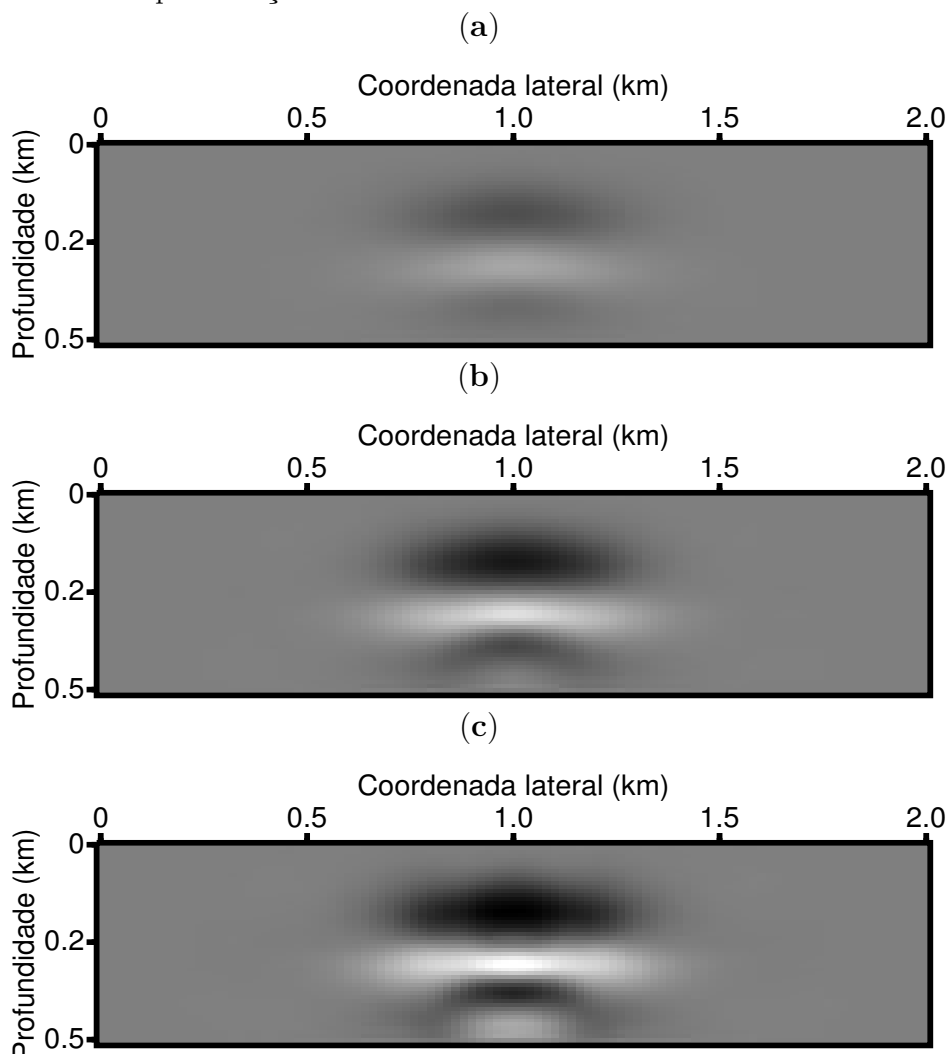
Fonte: Autor.

Na Figura 3.24, mostramos os campos de ondas descendente (esquerda) e ascendente (direita) estimados com JMI no exemplo anterior no teste usando como modelo inicial o modelo de velocidade suave. Todos os *shot gathers* foram observado em 0.3 km em profundidade ao longo da coordenada lateral para uma fonte localizada em 1.0 km na coordenada lateral e na superfície

Qualitativamente podemos verificar na comparação entre os campos de ondas estimados com JMI com os campos de ondas modelados com FWMod (campo de onda exato), que os campos de ondas descendente e ascendente estimado com JMI usando como modelo de velocidade inicial o modelo suave, uma melhor concordância com o campo de onda exato, isto pode ser melhor verificado nas Figuras 3.25 e 3.26, onde mostramos os traços centrais dos *shot gathers* mostrados nas Figuras 3.22, 3.23 e 3.22. Verifica-se que o ajuste entre os campos de onda é melhor para os campos de ondas descendentes do que para os campos de ondas ascendentes. Podemos inferir a partir dessa comparação que quanto mais próximo for o modelo inicial usado no JMI, do modelo de velocidade verdadeiro, mais preciso será a estimativa dos campos de ondas ascendente e descendente em algum nível em profundidade específico em subsuperfície.

Como último exemplo numérico nesta seção, aplicamos o JMI usando o conjunto de dados modelados com FWMod a partir do modelo de velocidade mostrado na Figura 3.27. Este modelo foi cedido pelo grupo de imageamento acústico da universidade de Delft/Holanda. O conjunto de dado foi modelado usando a mesma geometria de aquisição e mesma *wavelet* dos exemplos anteriores.

Figura 3.14 – Refletividade estimada com JMI após 45 iterações com uma banda de frequência de 10 a 60 Hz. a) Refletividade estimada do modelo de velocidade com 20% de perturbação máxima .b) Refletividade estimada do modelo de velocidade com 50% de perturbação máxima. c) Refletividade estimada do modelo de velocidade com 66% de perturbação máxima.



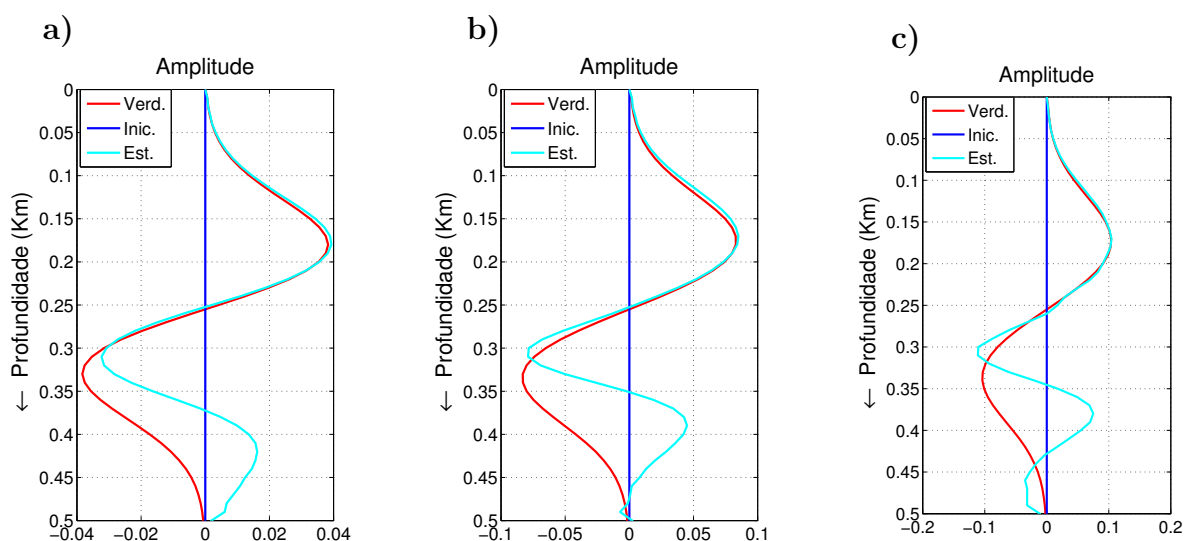
Fonte: Autor.

Na Figura 3.28a mostramos o modelo de refletividade estimado através da Equação (2.65) e na Figura 3.28b mostramos três *shot gathers* modelados a partir desse modelo de velocidade, onde da esquerda para direita, *shot gathers* com fontes localizadas em 0.0 km, 1.0 km e 2.0 km, respectivamente, na coordenada lateral.

Usamos como modelo de velocidade inicial, para este exemplo numérico, um modelo gradiente vertical mostrado na Figura 3.29a e modelo de refletividade inicial também segue esse padrão.

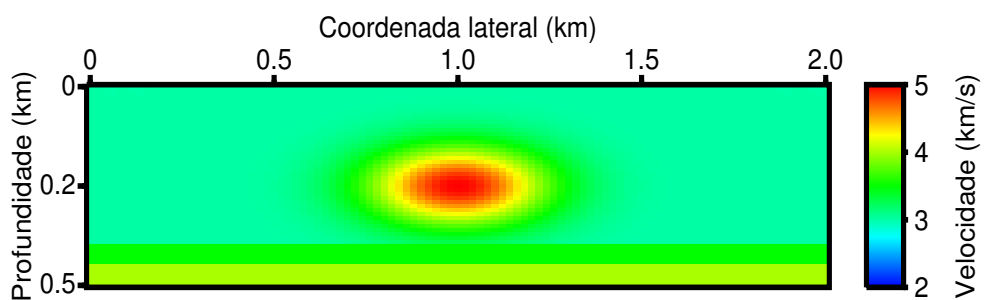
Nas Figuras 3.29b e (3.30), mostramos os modelos de velocidade e refletividade estimados com JMI após 45 iterações, com uma banda de frequência de 5 a 60 Hz. Para esse exemplo numérico os resultados tanto em termo de velocidade quanto em termo de refletividade, exibem uma boa concordância com os modelos exatos.

Figura 3.15 – Informações de poço, localizado em 1.0 km na coordenada lateral, do resultado da refletividade estimada com JMI após 45 iterações com uma banda de frequência de 5 a 60 Hz, para os modelos com 20%, 50% e 60% de perturbação máxima em relação ao meio de referência. a) Poço do modelo de velocidade com 20% de perturbação máxima em relação ao modelo de velocidade de referência. b) Poço do modelo de velocidade com 50% de perturbação máxima em relação ao modelo de velocidade de referência. c) Poço do modelo de velocidade com 66% de perturbação máxima em relação ao modelo de velocidade de referência.



Fonte: Autor.

Figura 3.16 – Modelo de velocidade usado para gerar o conjunto de dados sintéticos para o JMI



Fonte: Autor.

Figura 3.17 – a) Refletividade .b) *Shot gathers* modelados com FWMod e observados na superfície, da esquerda para direita, com fontes localizadas em 0.0 km, 1 km e 2.0 km, respectivamente, na coordenada lateral.

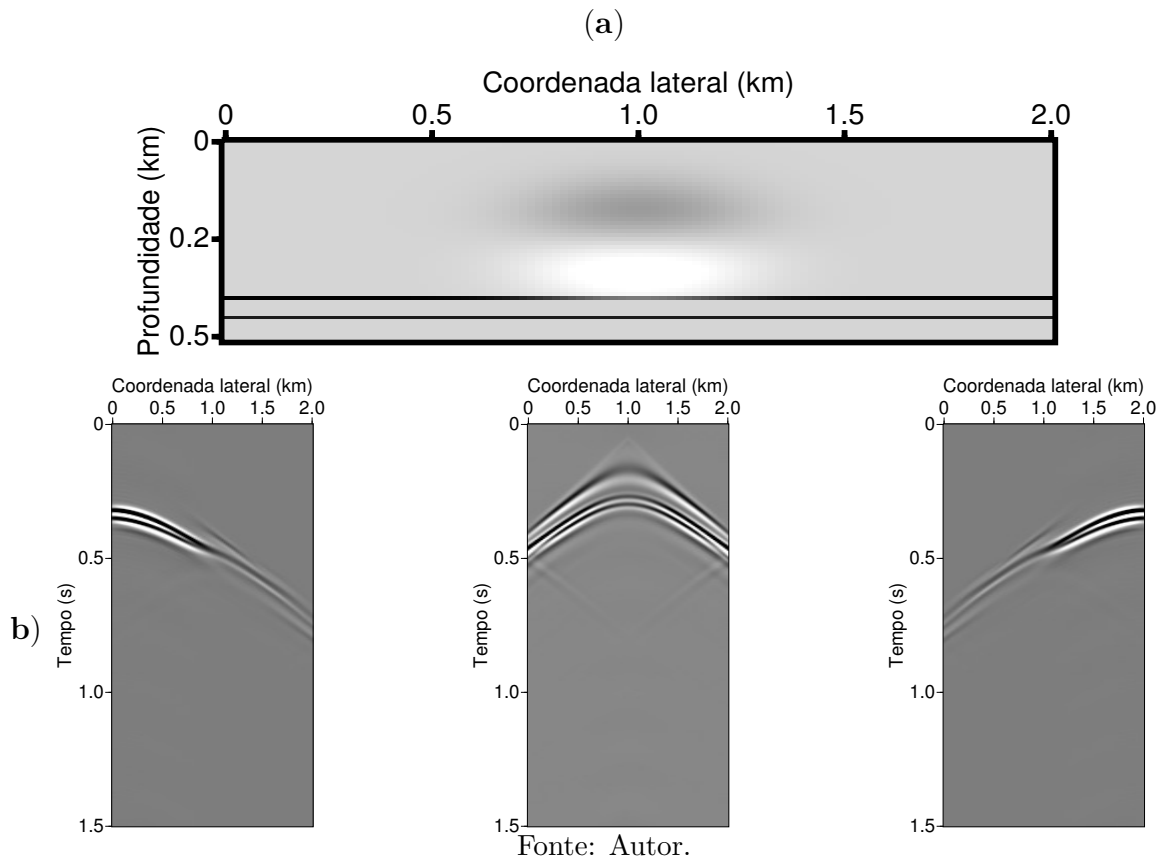


Figura 3.18 – Modelo de velocidade inicial para o JMI estimado através de uma suavização do modelo verdadeiro.

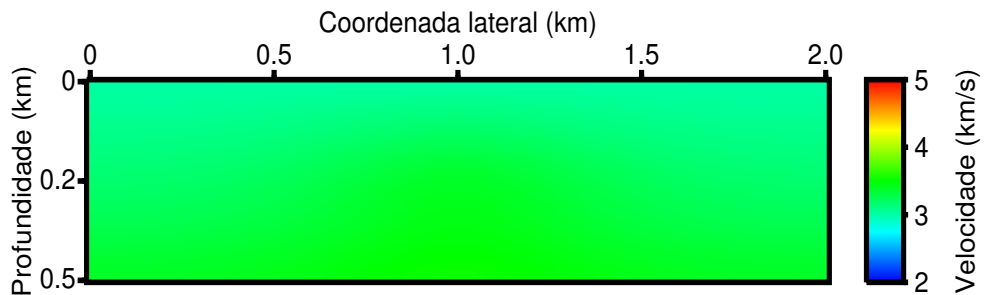
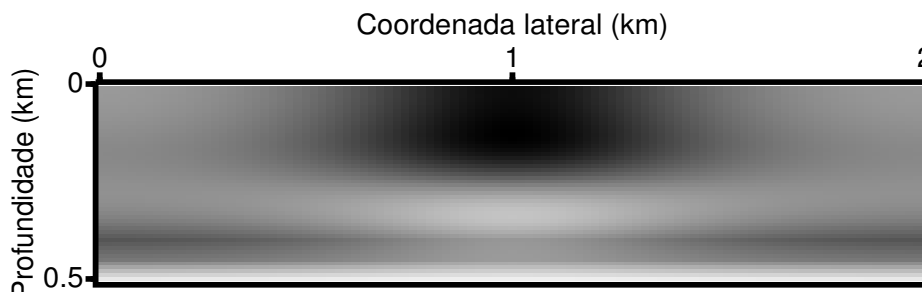
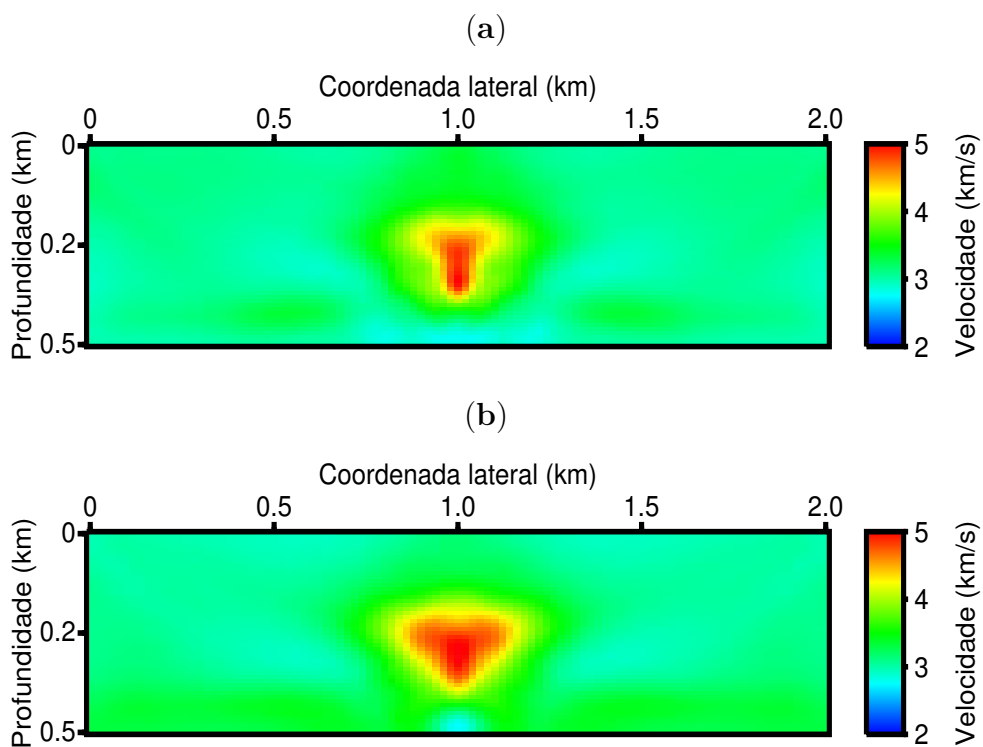


Figura 3.19 – Modelo de refletividade inicial para o JMI do modelo de velocidade inicial estimado através de uma suavização do modelo verdadeiro.



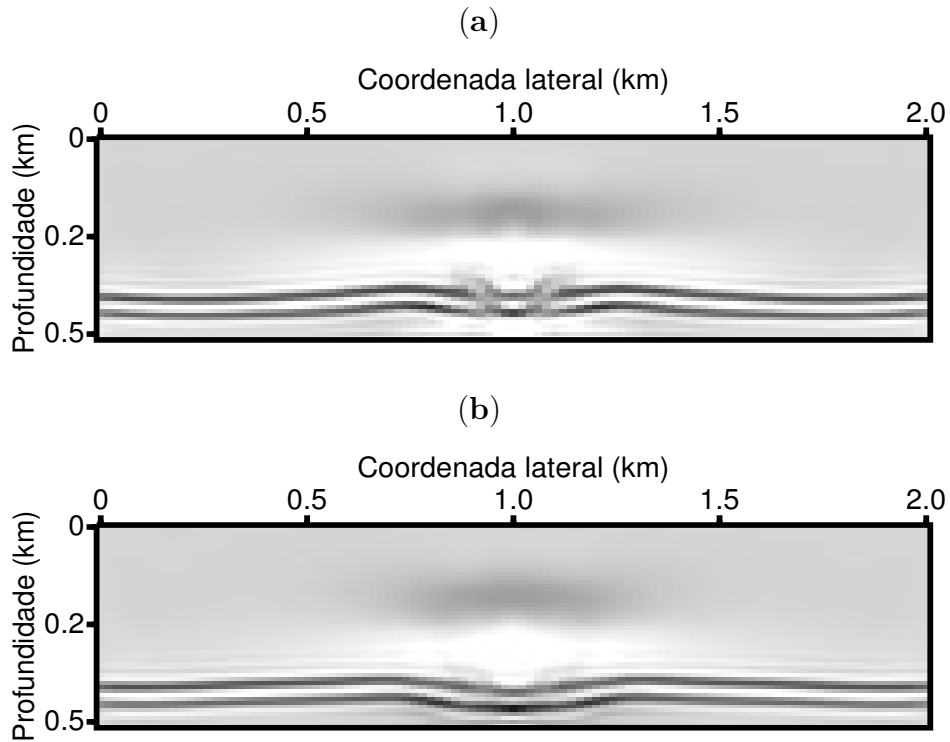
Fonte: Autor.

Figura 3.20 – Modelo de velocidade estimado com JMI após 45 iterações com uma banda de frequência de 5 a 60 Hz. a) Modelo de velocidade estimado usando como modelo de velocidade inicial o modelo de velocidade constante. b) Modelo de velocidade estimado usando como modelo de velocidade inicial o modelo de velocidade suavizado.



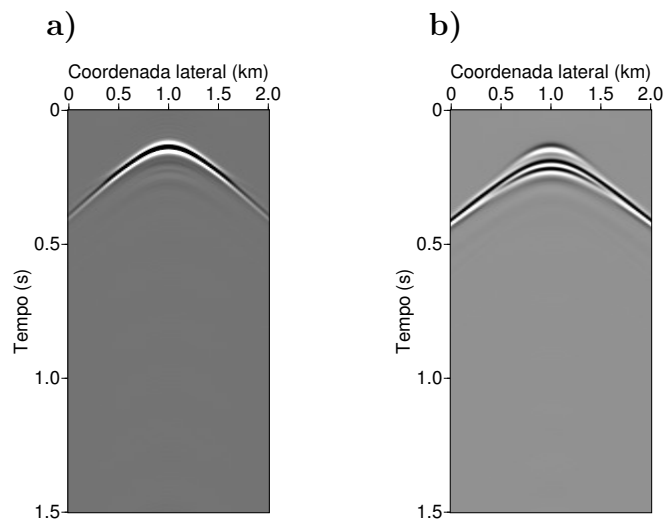
Fonte: Autor.

Figura 3.21 – Refletividade estimada Com JMI após 45 iterações com uma banda de frequência de 5 a 60 Hz. a) Refletividade estimada usando como modelo de velocidade inicial o modelo de velocidade constante. b) Refletividade estimada usando como modelo de velocidade inicial o modelo de velocidade suavizado.



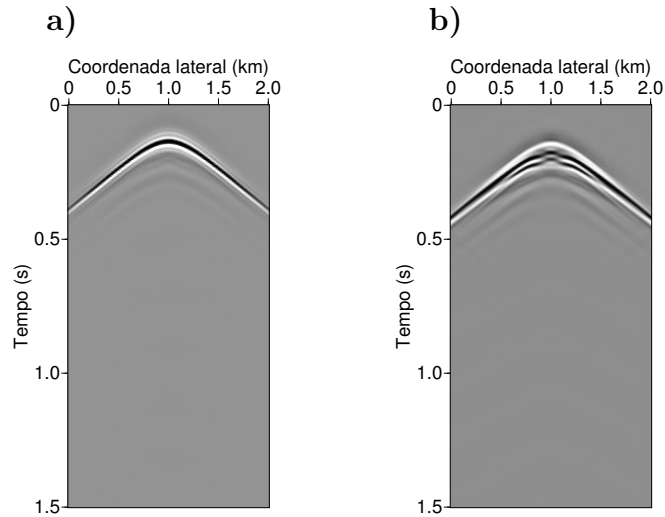
Fonte: Autor.

Figura 3.22 – Shot gathers modelados com FWMod e observados em 0.3 km em profundidade ao longo da coordenada lateral de uma fonte localizada na superfície e em 1.0 km na coordenada lateral. a) Campo de onda descendente. b) Campo de onda ascendente.



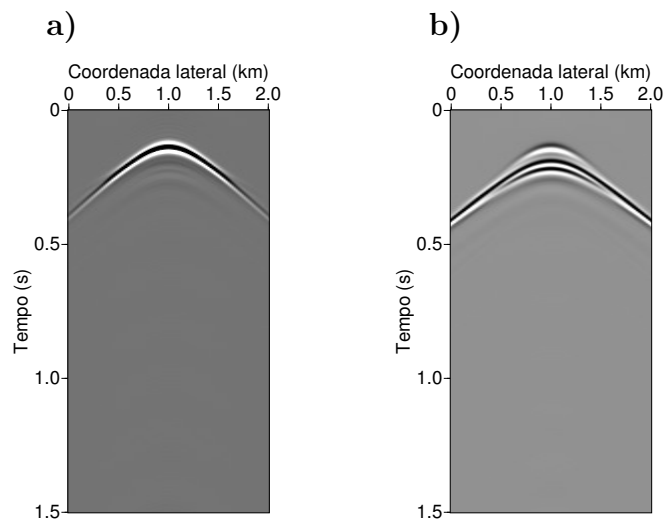
Fonte: Autor.

Figura 3.23 – *Shot gathers* estimados com JMI usando como modelo de velocidade inicial o modelo constante e observados em 0.3 km em profundidade ao longo da coordenada lateral de uma fonte localizada na superfície e em 1.0 km na coordenada lateral. a) Campo de onda descendente. b) Campo de onda ascendente.



Fonte: Autor.

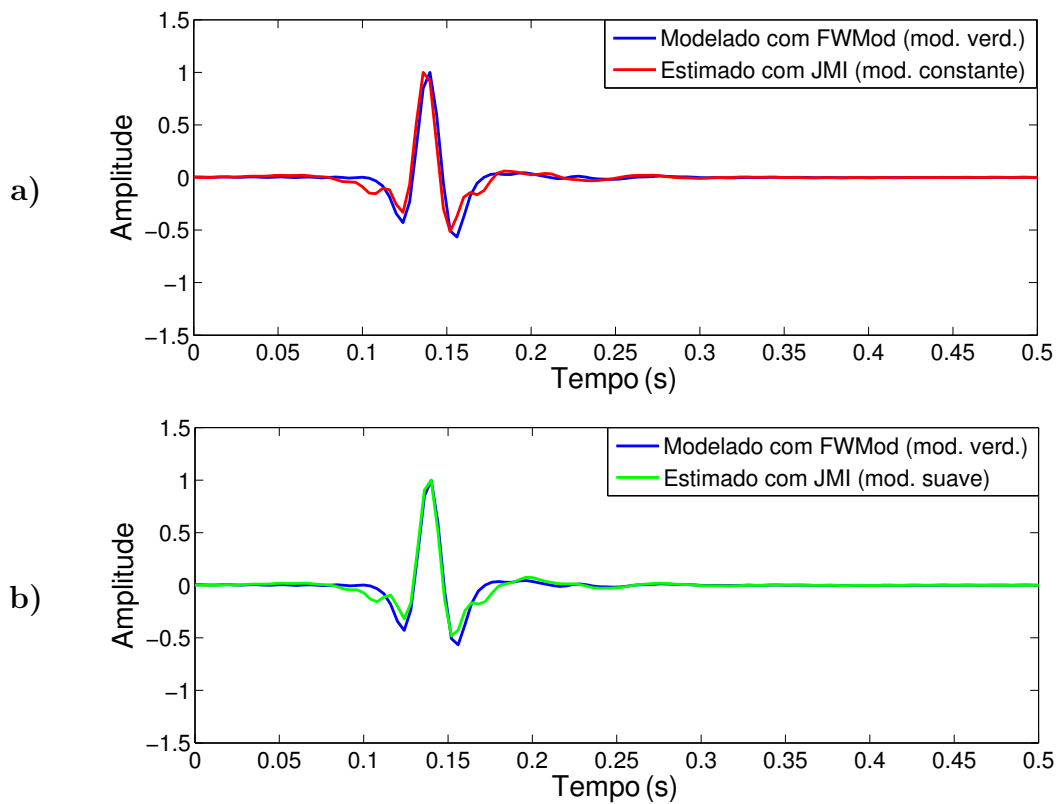
Figura 3.24 – *Shot gathers* estimados com JMI usando como modelo de velocidade inicial o modelo suavizado e observados em 0.3 km em profundidade ao longo da coordenada lateral de uma fonte localizada na superfície e em 1.0 km na coordenada lateral. a) Campo de onda descendente. b) Campo de onda ascendente.



Fonte: Autor.

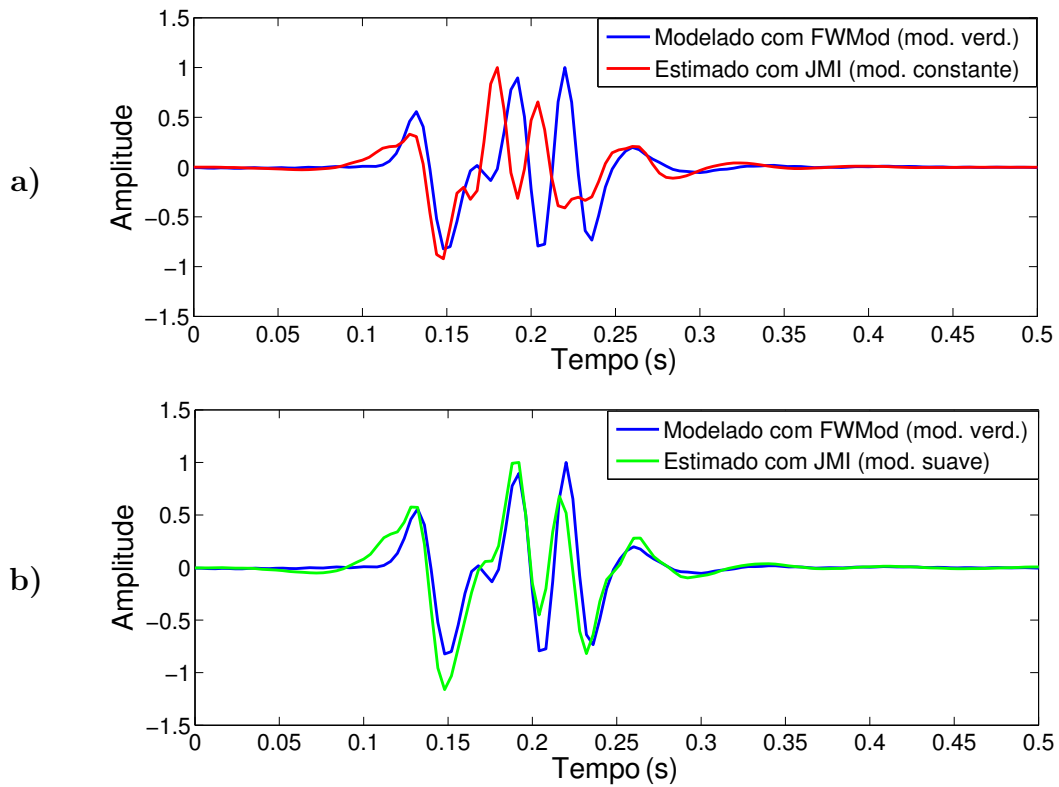


Figura 3.25 – Comparação entre os traços localizado em 1.0 km na coordenada lateral, dos campos de ondas descendentes modelados e estimados com JMI com diferentes modelos de velocidade inicial. a) Comparação entre o campos de ondas descendentes exato e o estimado com JMI usando como modelo de velocidade inicial o modelo constante. b) Comparação entre o campos de ondas descendentes exato e o estimado com JMI usando como modelo de velocidade inicial o modelo suave.



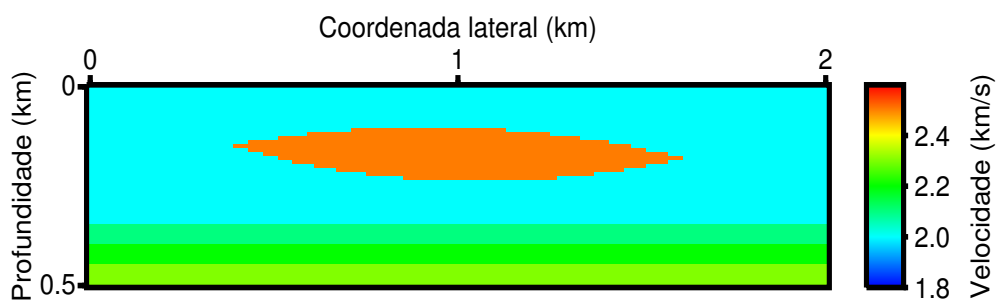
Fonte: Autor.

Figura 3.26 – Comparação entre os traços localizado em 1.0 km na coordenada lateral, dos campos de ondas ascendentes modelados e estimados com JMI com diferentes modelos de velocidade inicial. a) Comparação entre o campos de ondas ascendentes exato e o estimado com JMI usando como modelo de velocidade inicial o modelo constante. b) Comparação entre o campos de ondas ascendentes exato e o estimado com JMI usando como modelo de velocidade inicial o modelo suave.



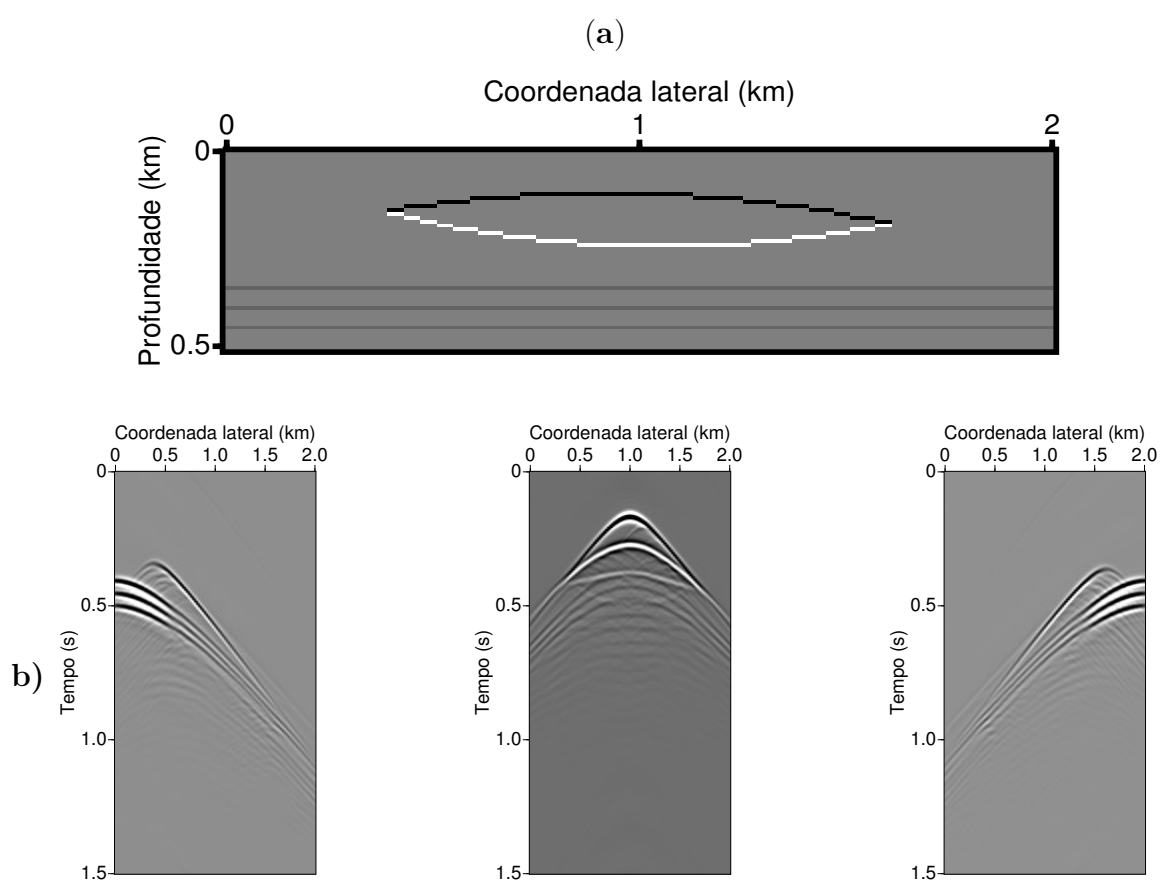
Fonte: Autor.

Figura 3.27 – Modelo de velocidade usado para gerar o conjunto de dados sintéticos para o JMI.



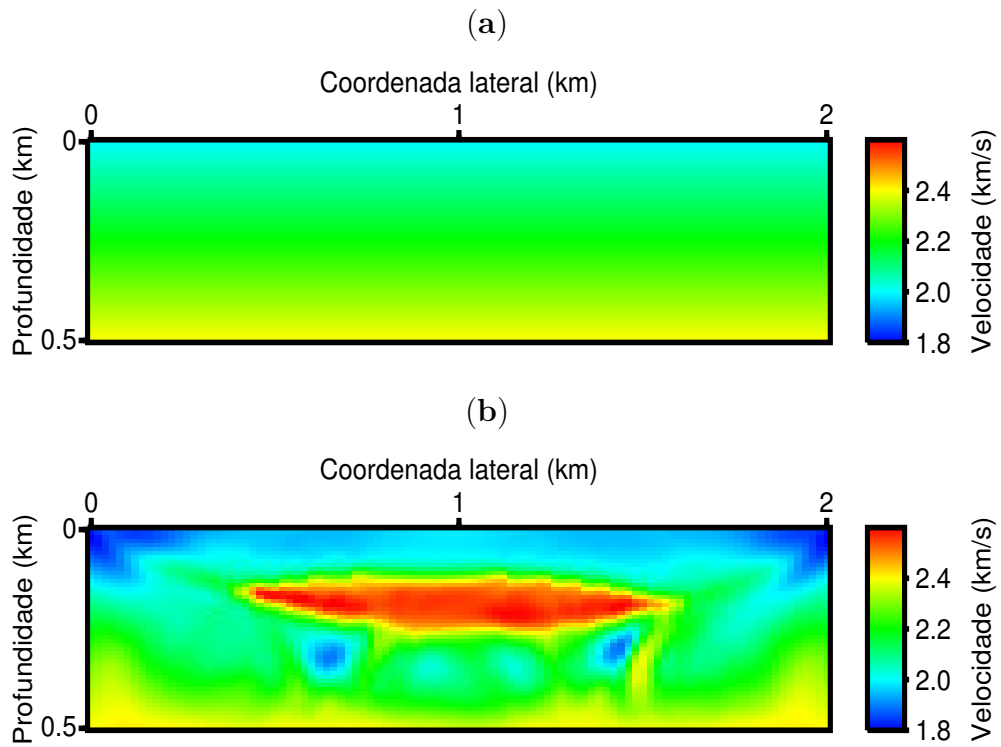
Fonte: Grupo Delphi.

Figura 3.28 – a) Refletividade .b) *Shot gathers* modelados com FWMod e observados na superfície, da esquerda para direita, com fontes localizadas em 0.0 km, 1 km e 2.0 km, respectivamente, na coordenada lateral.



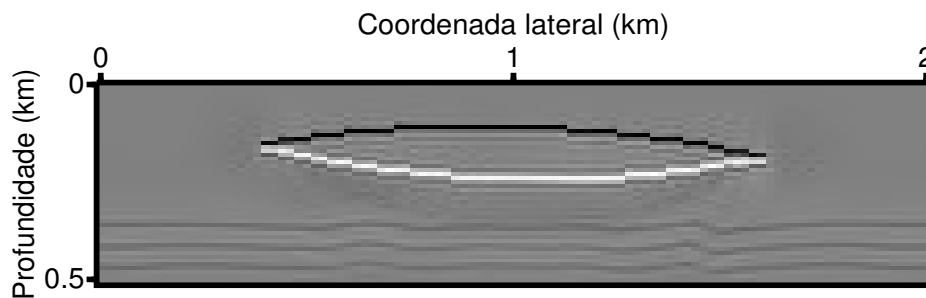
Fonte: Grupo Delphi.

Figura 3.29 – a) Modelo de velocidade inicial para o JMI. b) Modelo de velocidade estimado com JMI após 45 iterações com uma banda de frequência de 10 a 60 Hz.



Fonte: Grupo Delphi.

Figura 3.30 – Refletividade estimada com JMI após 45 iterações com uma banda de frequência de 10 a 60 Hz.



Fonte: Grupo Delphi.

## 4 ESTIMANDO A RESPOSTA AO IMPULSO EM SUB-SUPERFÍCIE

### 4.1 Introdução

Quando se realiza migração sísmica para imagear uma área alvo localizada abaixo de um complexo *overburden* (região superior da subsuperfície com fortes heterogeneidade), os complexos fenômenos de propagação e efeitos de múltiplos espalhamentos que ocorrem dentro do *overburden*, dificultam a interpretação e caracterização da área alvo, como foi mostrado em Thorbecke, Wapenaar and Swinnen (2004). Uma boa estratégia para contornar essas dificuldades, é primeiro tentar eliminar os efeitos do *overburden*, seguido pela migração ou inversão na área alvo via metodologias locais, como a convencional inversão AVO (CASTAGNA; BACKUS, 1993), avançadas metodologias de inversão linear de amplitudes (BULAND; OMRE, 2003; STAAL et al., 2010) e inversão da forma de onda total orientada ao alvo (GISOLF; van den BERG, 2010; HAFFINGER; GISOLF; van den BERG, 2012). Em sísmica de exploração, essas metodologias locais são importantes ferramentas para caracterizar ou monitorar o reservatório. No entanto, em geral, para aplicá-las, o conjunto de dados deve conter apenas informações da área alvo. Este processo para estimar localmente as respostas de uma área alvo em subsuperfície, onde fontes de receptores são projetados, a partir do nível original de aquisição para um novo nível próximo da área alvo, simulando um novo nível de aquisição, é usualmente chamado na literatura de redatumação (WAPENAAR; COX; BERKHOUT, 1992).

Em geral, as metodologias de redatumação podem ser divididas em duas categorias: metodologias *model-driven datuming* e metodologias *data-driven datuming*.

As metodologias *model-driven datuming*, são métodos de extrapolação dos campos de ondas em subsuperfície, baseados em estimar o tempo de trânsito a partir da fonte (ou receptor) para o novo nível em subsuperfície, usando um modelo de velocidade a priori, para aplicar um *shift* no conjunto de dados (BERRYHIL, 1979; BERRYHIL, 1984; BERRYHIL, 1986; Schneider, Jr.; PHILLIP; PAAL, 1995; LIU; XU, 2011). Esses métodos podem exibir alguns artefatos devido a extrapolação dos campos de ondas em subsuperfície e são dependentes do modelo de velocidade a priori, o que limita sua aplicação, uma vez que estimar um modelo de velocidade consistente para estimar o tempo de trânsito, para regiões com complexo *overburden*, é uma tarefa difícil. Uma outra limitação é o fato que em geral esses métodos não comportam os complexos efeitos de propagação, incluindo múltiplos espalhamentos e efeitos de transmissão.

As metodologias *data-driven datuming*, são metodologias baseadas em correlação-cruzada e deconvolução (WAPENAAR; THORBECKE; DRAGANOV, 2004; WAPENAAR, 2004; WAPENAAR; FOKKEMA, 2006; BAKULIN; CALVERT, 2006; VASCONCELOS; SNIEDER, 2008a; VASCONCELOS; SNIEDER, 2008b; BITRI; GRANDJEAN; SAMYN, 2011; SONI; WOUTERSAND; VERSCHUUR, 2012; van der NEUT; HERRMANN, 2013). Esses métodos apenas

usam informações contidas no conjunto de dados para realizar a redatumação, ou seja, são independentes do modelo de velocidade. No entanto, eles são dependentes da geometria de aquisição, como por exemplo, normalmente necessitam de uma densa amostragem de fontes e receptores, fontes monopolos e dipolos, etc. (WAPENAAR; FOKKEMA, 2006). Em princípio, os métodos baseados em deconvolução podem ser efetivos para remover eventos espúrios das respostas ao impulso estimadas, como ressaltado por van der NEUT and Herrmann (2013).

Desenvolvemos uma nova aproximação para estimar as respostas ao impulso de uma área alvo em subsuperfície em dois passos, onde o processo de estimar o modelo de velocidade é incorporado e a necessidade de uma densa amostragem de fontes pode ser relaxada. Além disso, todos os efeitos de múltiplos espalhamentos e efeitos de transmissão são levados em consideração, onde múltiplas podem ajudar a fornecer adicional iluminação na região próximo do alvo. O primeiro passo é estimar os campos de ondas ascendente e descendente no nível do alvo desejado em subsuperfície através do esquema de inversão conjunta JMI, a partir do conjunto de dados observados na superfície. No esquema de inversão conjunta através do JMI, em todos os nível em subsuperfície os campos de ondas ascendente e descendente são estimados (com múltiplas internas e de superfície), junto com o modelo de velocidade e imagem migrada do modelo. O segundo passo é aplicar um esquema de inversão esparso iterativo usando os campos de ondas ascendente e descendente, estimados no nível do alvo, para extrair as respostas ao impulso do alvo. Uma formulação similar a este segundo passo, já foi investigado por Soni, Woutersand and Verschuur (2012) para dado sísmico VSP e van der NEUT and Herrmann (2013) para dado sísmico de superfície. Além do fato de que este é um efetivo método de redatumação, como mostrado em van der NEUT and Herrmann (2013), mostramos que se os campos de ondas usados como *inputs* para o esquema de inversão, apresentam informações de múltiplos espalhamento, devido a um complexo *overburden*, podemos relaxar a necessidade de uma densa amostragem de fontes.

## 4.2 Teoria

Para estimar a resposta ao impulso de uma região alvo em subsuperfície, partimos da Equação (2.55), a qual usando a notação como em Berkhout (1982), assim como usamos no Capítulo 2, resulta na seguinte formulação discretizada:

$$P_{l,r,j}^-(z_d, \omega; z_s) = h_{in} \sum_{l_{in}}^{L_{in}} X_{l,r,l_{in}}(\omega; z_d) P_{l_{in},j}^{(obs)+}(z_d, \omega; z_s), \quad (4.1)$$

onde, como já indicamos anteriormente,  $P_{l,j}^\pm(z_d, \omega; z_s)$ , representam os campos de ondas descendente - (com sobrescrito +) e ascendente (com sobrescrito -) incidentes no ponto da malha  $l$  na profundidade  $z_d$ , que foi gerado por uma fonte  $j$  no nível em profundidade  $z_s$  e  $X_{l,r,l_{in}}(\omega, z_d)$  representa a resposta ao impulso espalhada em uma região localizada abaixo do nível em profundidade  $z_d$  (neste capítulo em vez de usar  $G$ , usamos  $X$  para representar a função de Green, para diferenciar da situação onda a função de Green for conhecida), gerada por uma fonte dipolo localizada no ponto da malha  $l_{in}$  (no presente caso uma fonte virtual) e observado no ponto da

malha  $l_r$  no nível em profundidade  $z_d$ , no domínio da frequência-espaco. Note que  $l_{in} = 1, 2, \dots, L_i$  representa os pontos de incidência do campo de onda descendente considerado para estimar o campo de onda ascendente nos pontos  $l_r = 1, 2, \dots, L_r$ , onde  $L_{in}$  e  $L_r$  representam os limites superiores de pontos da malha considerados, com  $L_r \leq L_{in}$  e  $h_{in}(L_{in} - 1) \leq h_x(L_x^f - 1)$ , onde  $h_{in}$  representa a discretização considerada para o campo de ondas incidente descendente.

Note que na Equação (4.1),  $P_{l_{in}j}^{(obs)+}(z_d, \omega; z_s)$  contém todo tipo de espalhamento do campo de onda acústico (múltiplas de superfície e múltiplas internas) que foram observados no ponto da malha  $l_{in}$ , e esses campos de onda são usados como uma fonte efetiva para obter o campo de onda ascendente  $P_{l_rj}^-(z_d, \omega; z_s)$ . Com essa observação destacada, é interessante ressaltar que quanto maior for o grau de complexidade do *overburden* acima do nível  $z_d$ , esperamos que devido aos múltiplos espalhamentos que podem ocorrer neste *overburden*, melhor será a iluminação na área abaixo desse nível.

Vemos através da Equação (4.1) que o campo de onda ascendente, observado em um nível específico em profundidade, é constituído pela convolução entre as respostas ao impulso da região localizada abaixo desse nível com os campos de ondas descendentes observados neste nível. Então assumindo que os campos de ondas descendente e ascendente são conhecidos em  $z_d$ , uma maneira para estimar a resposta ao impulso em  $z_d$  (contendo apenas informações da região situada abaixo de  $s_d$ ), é estimar a inversa da Equação (4.1) (van GRONESTIJN; VERSCHUUR, 2009; WAPENAAR et al., 2011; SONI; WOUTERSAND; VERSCHUUR, 2012; van der NEUT; HERRMANN, 2013).

O processo de inversão da Equação (4.1) pode ser realizada iterativamente baseado nos métodos dos quadrados mínimos. Este esquema de inversão iterativo, minimiza a diferença entre o campo de onda ascendente observados no nível desejado e o campo de onda ascendente estimado via obtenção das respostas ao impulso no mesmo nível em profundidade, através da Equação (4.1), isto é, minimiza a seguinte equação residual:

$$\Delta \mathbf{P}_j(z_d, \omega) = \mathbf{P}_j^{(obs)-}(z_d, \omega; z_s) - h_{in} \sum_{l_{in}}^{L_{in}} \hat{\mathbf{X}}_{l_{in}}(\omega; z_d) P_{l_{in}j}^{(obs)+}(z_d, \omega; z_s), \quad (4.2)$$

onde  $\hat{\phantom{x}}$  indica que ele é um valor estimado. Note que a equação residual está na forma vetorial, onde os elementos representam o resíduo no nível  $z_d$  ao longo da coordenada lateral.

Usamos a seguinte função objetivo para minimizar a equação residual:

$$J_{ls} = \left( \frac{1}{\sigma_n^2} \right) \sum_{\omega} \|\mathbf{P}^{obs-}(z_d, \omega) - \hat{\mathbf{X}}(\omega; z_d) \mathbf{P}^{obs+}(z_d, \omega)\|_F^2, \quad (4.3)$$

onde o parâmetro  $\sigma_n$  é um peso aplicado ao dado para ponderar a função objetivo, o índice subscripto  $F$  indica que a norma aplicada ao resíduo é a norma de Frobenius (GOLUB; van LOAN, 1996). Note que o resíduo na Equação (4.3) está em notação matricial, indicando que todas as fontes usadas no problema são invertidas simultaneamente.

Em geral este problema inverso deve ser regularizado. Na presente tese, usamos um vínculo que promove esparsidade no domínio do tempo nas respostas ao impulso estimadas. Usamos aqui a palavra esparsidade, nos referindo que as respostas ao impulso no domínio do

tempo, preferencialmente consiste em uma série de grandes *spikes*. Esta esparsidade pode ser obtida com qualquer regularizador de norma não-quadrática que penalize a suavidade típica da norma quadrática (no nosso caso a norma de Frobenius) e favoreça a esparsidade. (WIGGINS, 1978; van GRONESTIJN; VERSCHUUR, 2008; van GRONESTIJN; VERSCHUUR, 2009; van GRONESTIJN; VERSCHUUR, 2010; SONI; STAAL; VERSCHUUR, ; SONI; WOUTERSAND; VERSCHUUR, 2012). Optamos por usar uma norma mista  $l_1 - l_2$  para promover a esparsidade no problema inverso, a qual é dada pela seguinte expressão:

$$J_{reg} = \sum_t \sum_{l_{in}, l'_{in}} \sqrt{1 + \frac{\hat{x}_{l_{in}l'_{in}}^2(z_d)}{\sigma_x^2}}, \quad (4.4)$$

onde  $t$  representa a variável tempo, o parâmetro  $\sigma_x$  é um peso aplicado ao modelo, que controla o ganho de esparsidade desejada nas respostas ao impulso estimadas no domínio do tempo-espaço, quanto menor for maior será o ganho de esparsidade, e  $\hat{x}_{l_{in}l'_{in}}$  denota um elemento da matriz das respostas ao impulso estimadas,  $\hat{\mathbf{X}}$ , no domínio do tempo-espaço.

Além do vínculo de esparsidade aplicado ao nosso problema inverso, uma janela temporal é aplicada sobre a atualização de  $\hat{\mathbf{X}}$ , no domínio tempo-espaço para impor causalidade e selecionar apenas as chegadas desejadas.

Usando o vínculo de esparsidade obtemos a seguinte função objetivo vinculada para o problema inverso:

$$J^{(n)} = J_{ls}^{(n)} + \gamma J_{reg}^{(n)}, \quad (4.5)$$

onde  $\gamma$  é fator de ponderação aplicado ao vínculo no processo de minimização da função objetivo definida pelo usuário (normalmente  $\gamma \approx 10^{-3}$ ), e o índice sobrescrito  $n$ , representa a  $n$ -ésima iteração.

Este é o problema inverso de otimização local onde usamos o gradiente da função objetivo para encontrar o modelo procurando. Sendo assim, calculando o gradiente da função objetivo vinculada, Equação (4.5), resulta na seguinte equação:

$$\nabla J^{(n)} = \nabla_{\hat{\mathbf{X}}} J_{ls}^{(n)} + \gamma \nabla_{\hat{\mathbf{X}}} J_{reg}^{(n)}, \quad (4.6)$$

onde a matriz  $\nabla_{\hat{\mathbf{X}}} J_{ls}^{(n)}$  é dada por:

$$\nabla_{\hat{\mathbf{X}}} J_{ls}^{(n)} = -2 \left( \frac{1}{\sigma_n^2} \right) \sum_{\omega} \left[ \left( \mathbf{P}^{(obs)-}(z_d, \omega) - \hat{\mathbf{X}}^{(n)}(z_d, \omega) \mathbf{P}^{obs+}(z_d, \omega) \right) \left( \mathbf{P}^{(obs)+}(z_d, \omega) \right)^\dagger \right], \quad (4.7)$$

o símbolo sobrescrito  $\dagger$  indica complexo adjunto de  $\mathbf{P}^{(obs)+}$ , isto é, o complexo conjugado da transposta da matriz  $\mathbf{P}^{(obs)+}$ , e onde cada elemento da matriz  $\nabla_{\hat{\mathbf{X}}} J_{reg}^{(n)}$  é dado por:

$$\frac{\partial J_{reg}^{(n)}}{\partial x_{lm}} = \sum_t \frac{\hat{x}_{lm}^{(n)} / \sigma_x^2}{\sqrt{1 + \hat{x}_{lm}^{(n)2} / \sigma_x^2}}. \quad (4.8)$$

Com esta direção de descida, podemos estimar as respostas ao impulso da região desejada como um processo iterativo com sua atualização em cada iteração  $n$  dada por:

$$\hat{\mathbf{X}}^{(n+1)}(z_d) = \hat{\mathbf{X}}^{(n)}(z_d) + \alpha^{(n)} \Delta \hat{\mathbf{X}}^{(n)}(z_d), \quad (4.9)$$



onde  $\hat{\mathbf{X}}^{(n+1)}(z_d)$  indica a atualização das respostas ao impulso estimadas para  $n$ -ésima iteração,  $\Delta\hat{\mathbf{X}}^{(n)}(z_d) \equiv -\nabla J^{(n)}$  é a direção de descida e  $\alpha^{(n)}$  é o tamanho do passo dado na direção de descida, que escala a atualização. Este tamanho do passo deve ser escolhido tal que o valor da função objetivo vinculada, veja Eq.(4.5), decresce para cada iteração, isto é,  $J^{(n+1)} < J^{(n)}$ .

### 4.3 Exemplos numéricos

Nesta seção mostramos alguns exemplos numéricos para testar essa metodologia de redatumação usando dados sísmicos de aquisição VSP-desviado e dados sísmicos de superfície.

Todos os exemplos numéricos apresentados neste capítulo para estimar as respostas ao impulso foram obtidos usando o algoritmo de otimização do método gradiente. Consideramos como critérios de parada que alguma das duas seguintes condições seja atingida:

- I) que a ordem da mudança na função objetiva seja menor que  $\sim 10^{-9}$ .
- II) que o número máximo de 25 iterações para todo o processo seja atingida.

Consideramos no máximo até 25 iterações porque na média, em torno de 25 iterações a função objetivo já diminuiu mais que 90%, então consideramos isso um bom critério de parada.

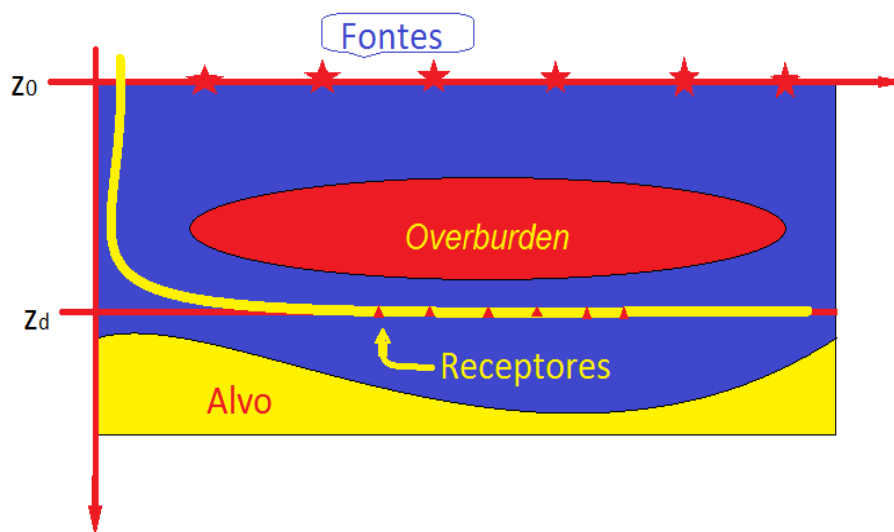
#### 4.3.1 Exemplos com geometria de aquisição VSP-desviado

Para avaliar a robustez do esquema de inversão esparso desenvolvido na seção anterior, primeiramente consideramos a geometria de aquisição VSP-desviado, com o poço horizontal (onde se encontra o arranjo de receptores) localizado logo acima da região alvo, como ilustrado na Figura 4.1. Escolhemos primeiramente avaliar a robustez do esquema de inversão usando essa geometria, pois uma vez que temos os campos de ondas registrados já no nível em profundidade de interesse, gerados pelas fontes na superfície, pode-se realizar a decomposição dos campos de ondas registrado nesse nível, para obter os campos de ondas  $\mathbf{P}_j^{(obs)+}(z_d, \omega; z_s)$  e  $\mathbf{P}_j^{(obs)-}(z_d, \omega; z_s)$ , e assim avaliar essencialmente a robustez do esquema de inversão esparso.

Observe que mesmo que os campos de ondas estejam sendo registrados em uma região localizada abaixo do *overburden*, como ilustrado na Figura 4.1, eles ainda precisam ser redatumados (se o objetivo for obter o campo de onda contendo apenas informações da região abaixo do *overburden*), pois como as fontes estão localizadas na superfície,  $z_s$ , os campos de ondas registrados contém toda e qualquer informação do *overburden* devido a sua propagação e espalhamento pelo mesmo, e o processo de redatumação elimina essas informações decorrentes do *overburden* do conjunto de dados, obtendo assim, informações apenas da região que está localizada abaixo do nível de interesse, ou seja, o processo de redatumação simula a situação como se fontes e receptores estivessem localizados no mesmo nível em profundidade.

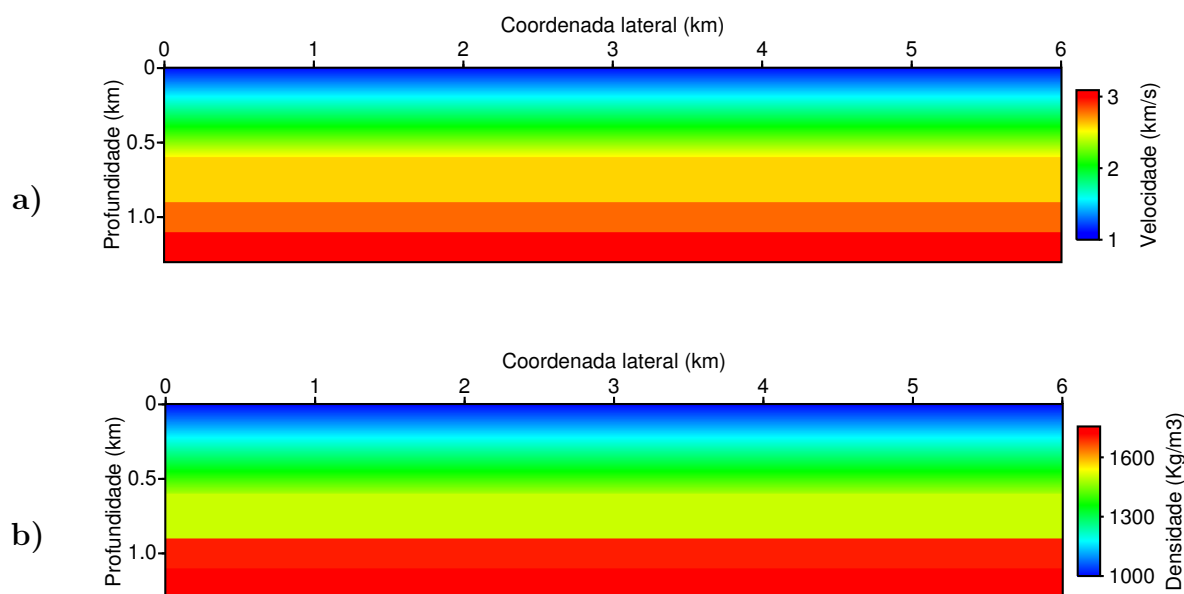
Com o objetivo de mostrar a robustez do esquema de inversão esparso para estimar as respostas ao impulso de uma região de interesse, iremos primeiramente demonstrar essa robustez usando dois conjuntos de dados sintéticos. Ambos os conjuntos de dados foram simulados com

Figura 4.1 – Ilustração da aquisição sísmica VSP-desviado, com fonte na superfície, representadas pelas estrelas em vermelho, e receptores em um poço horizontal, representados pela curva em amarelo.



Fonte: Autor.

Figura 4.2 – Modelo simples usado para gerar o conjunto de dados sintéticos. a) Modelo de velocidade. b) Modelo de densidade.



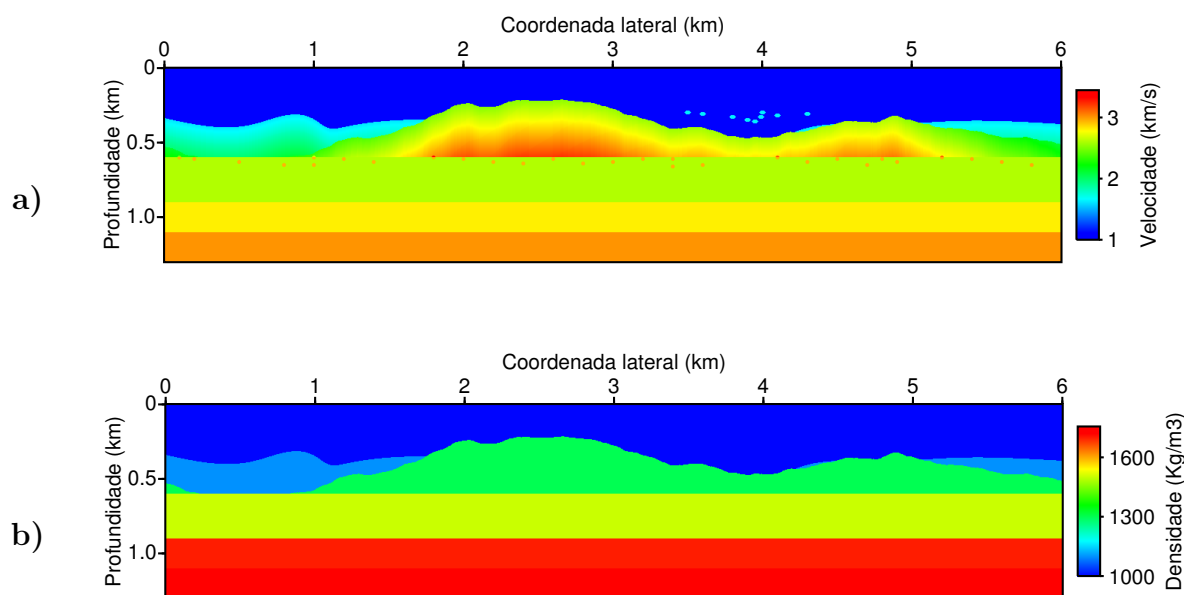
Fonte: Autor.

um algoritmo de modelagem 2D baseado no esquema FD disponível no *Software* livre introduzido no Capítulo 2. Usamos um pulso Ricker como *wavelet* com frequência máxima de 60.0 Hz. Para gerar esses dois conjuntos de dados sintéticos, usamos dois modelos acústicos, ambos com 6.0 km de comprimento na coordenada lateral e 1.3 km de profundidade, diferindo entre eles apenas no *overburden*. Um desses modelo acústico tem um *overburden* simples (gradiente vertical de

velocidade e densidade), mostrado na Figura 4.2. O outro modelo acústico tem um *overburden* com um maior nível de complexidade, mostrado na Figura 4.3. Ambos os modelos contêm a mesma área alvo, contendo dois refletores horizontais. O nível de interesse é a região localizada abaixo de 0.7 km ( $z_d = 0.7$  km) em profundidade, acima desse dois refletores.

Para cada uma das seguintes Figuras 4.4, 4.5 e 4.6, a parte superior se refere ao modelo simples e a parte inferior ao modelo complexo.

Figura 4.3 – Modelo complexo usado para gerar o conjunto de dados sintéticos. a) Modelo de velocidade. b) Modelo de densidade.

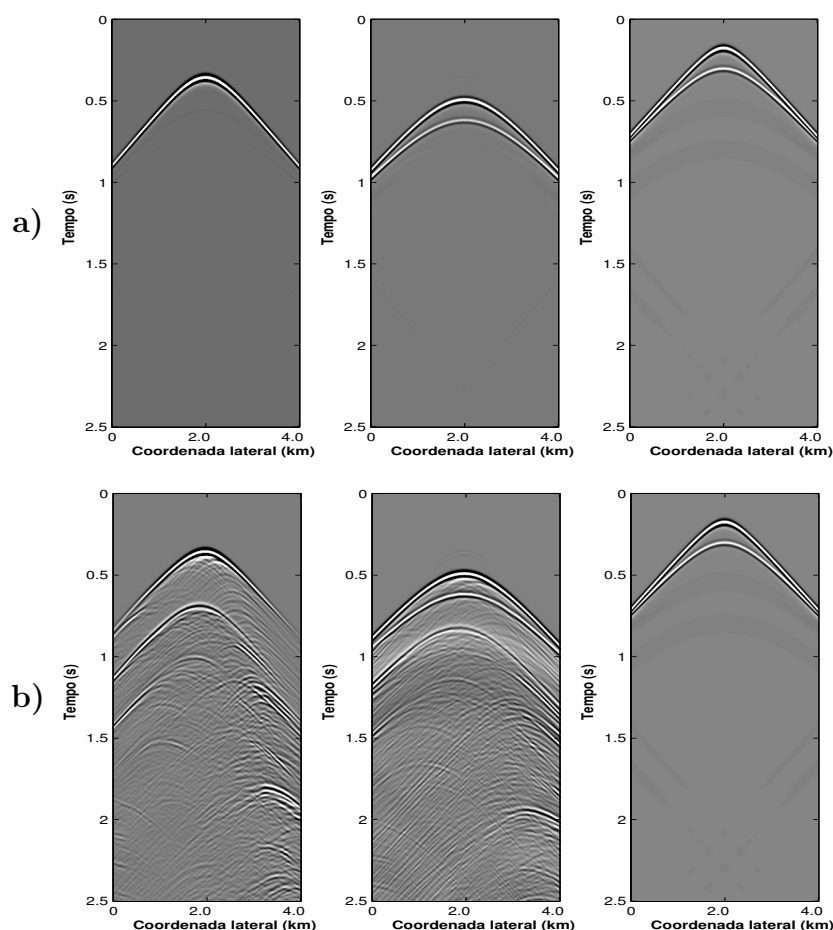


Fonte: Autor.

Os campos de onda ascendente e descendente para ambos os conjuntos de dados, foram estimados através da extração dos campos de pressão e velocidade da partícula no nível  $z_d$ , seguido de uma decomposição acústica dos campos de ondas (SCHALKWIJK, 2001). Para os dois modelos, usamos 201 fontes localizadas na superfície, posicionadas de  $x = 1$  km até  $x = 5$  km, com um espaçamento de 0.02 km, e usamos um arranjo com 201 receptores localizados no nível  $z_d = 0.7$  km (nível do alvo) posicionados de  $x = 1$  km até  $x = 5$  km, com um espaçamento de 0.02 km. A Figura 4.4, mostra os campos de onda descendente e ascendente no nível do alvo, na esquerda e no centro da figura, respectivamente, de uma fonte posicionada na superfície em  $x = 3.0$  km. Na direita da mesma figura, também é mostrado o campo de onda ascendente gerado por uma fonte e observado por receptores posicionados no nível do alvo. Usamos esses campos de onda como respostas ao impulso de referência. Assim, para ambos os modelos usados para gerar os conjuntos de dados, o resultado da inversão esparsa deve exibir esses dois eventos presentes nas respostas ao impulso de referência que foi modelado em  $z_d = 0.7$  km.

Uma vez estimados os campos de onda ascendente e descendente no nível do alvo, pode-se realizar o esquema de inversão esparsa para estimar as respostas ao impulso com informações

Figura 4.4 – Campos de onda dos modelos simples (a) e complexo (b), observados em 0.7 km em profundidade e gerado por uma fonte localizada na superfície em  $x = 3.0$  km. a) Da esquerda para direita, campo de onda descendente, campo de onda de ascendente e campo de onda ascendente modelado com fonte e receptores no nível do alvo em profundidade, respectivamente. b) Da esquerda para direita, campo de onda descendente, campo de onda de ascendente e campo de onda ascendente modelado com fonte e receptores no nível do alvo em profundidade, respectivamente.

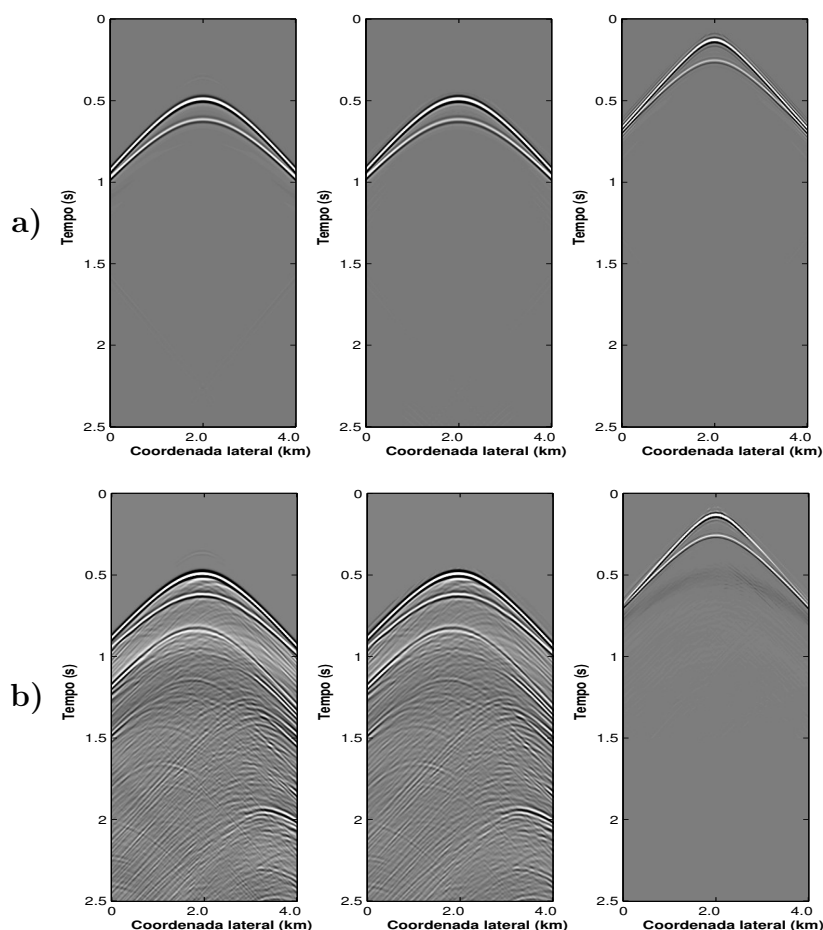


Fonte: Autor.

apenas da região de interesse. Primeiro, usamos todas as 201 fontes localizadas na superfície. A Figure 4.5 mostra as respostas ao impulso estimadas (na direita da figura) para os modelos simples e complexo após 25 iterações do esquema de inversão esparsa, para uma fonte virtual posicionada no nível do alvo e  $x = 3.0$  km na coordenada lateral. Como esperado, observamos os dois eventos de reflexão do alvo com alta resolução e sem artefatos visíveis. Além disso, podemos observar um bom ajuste entre os campos de onda ascendente estimado (no centro da figura) e o observado (na esquerdo da figura). Também notamos que todos os efeitos de AVO devido as reflexões ângulo-dependentes no alvo foram recuperadas. Assim, estas respostas ao impulso estimadas podem ser usadas como *inputs* para um processo local de caracterização de reservatórios.

Também investigamos o esquema de inversão esparsa para estimar as respostas ao impulso

Figura 4.5 – Respostas ao impulso estimadas após 25 iterações para os modelos simples (a) e complexo (b), de uma fonte virtual posicionada em  $x = 3.0$  km,  $z_d = 0.7$  km. a) Da esquerda para direita, campo de onda ascendente observado, campo de onda ascendente estimado e resposta ao impulso estimada, respectivamente. b) Da esquerda para direita, campo de onda ascendente observado, campo de onda ascendente estimado e resposta ao impulso estimada, respectivamente.

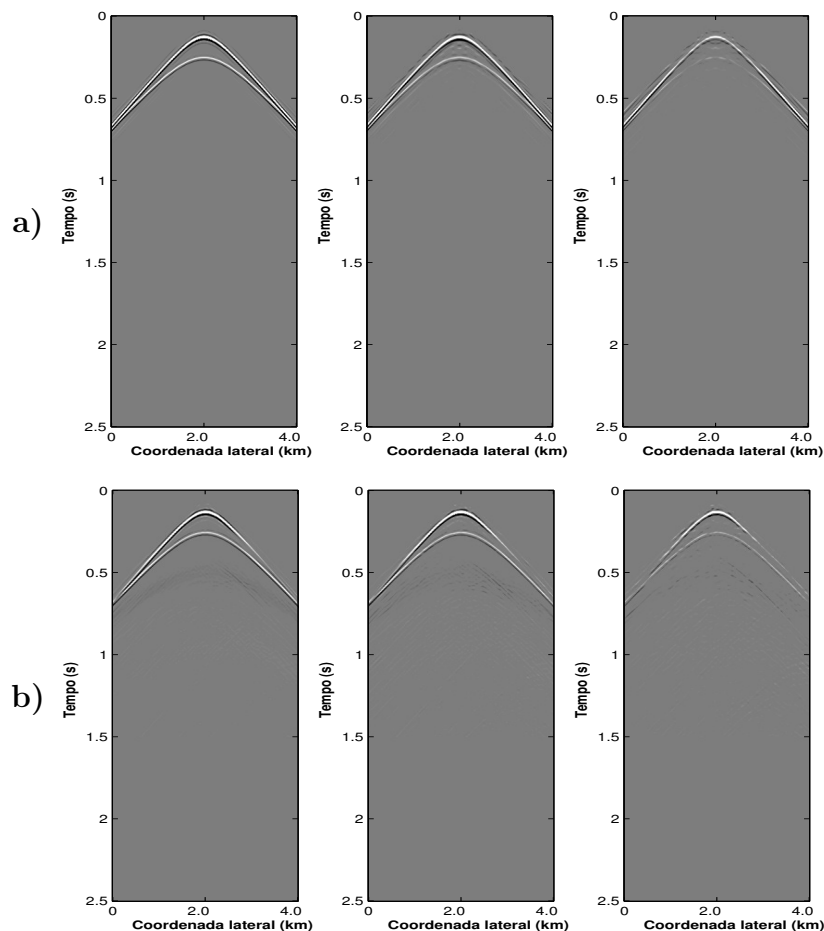


Fonte: Autor.

em relação a dependência da amostragem das fontes. Podemos observar que no modelo que tem um *overburden* com um maior nível de complexidade, mostrado na Figura 4.4, ambos os campos de onda ascendente e descendente exibem um grande número de eventos complexos. Isto fornece uma boa iluminação no nível do alvo, devido a todos os eventos presentes nos campos de onda descendente em comparação aos campos de onda descendente do modelo que tem um *overburden* simples. Assim, esperamos que para estimar as respostas ao impulso a partir dos campos de onda proveniente do modelo que apresenta um *overburden* complexo necessite de uma amostragem de fontes menos densa do que para estimar as respostas ao impulso a partir dos campos de onda provenientes do modelo que apresenta um *overburden* simples. Isto é confirmada nos resultados mostrados na Figura 4.6, a qual mostra os resultados do esquema de inversão esparsa após 25 iterações para três fatores (2,4 e 8) de decimação das fontes para ambos os modelos (com *overburden* simples e complexo). Apesar da resolução diminuir para ambos os

modelos com o aumento do fator de decimação (da esquerda para a direita), notamos que a resolução para o modelo simples diminui mais rapidamente do que para o modelo complexo, principalmente no que refere ao segundo evento.

Figura 4.6 – Respostas ao impulso estimadas após 25 iterações para o modelo simples (a) e complexo (b) de uma fonte virtual posicionada em  $x = 3.0$  km,  $z_d = 0.7$  km, para três diferentes fatores de decimação. Esquerda: fator 2. Centro: fator 4. Direita: fator 8.

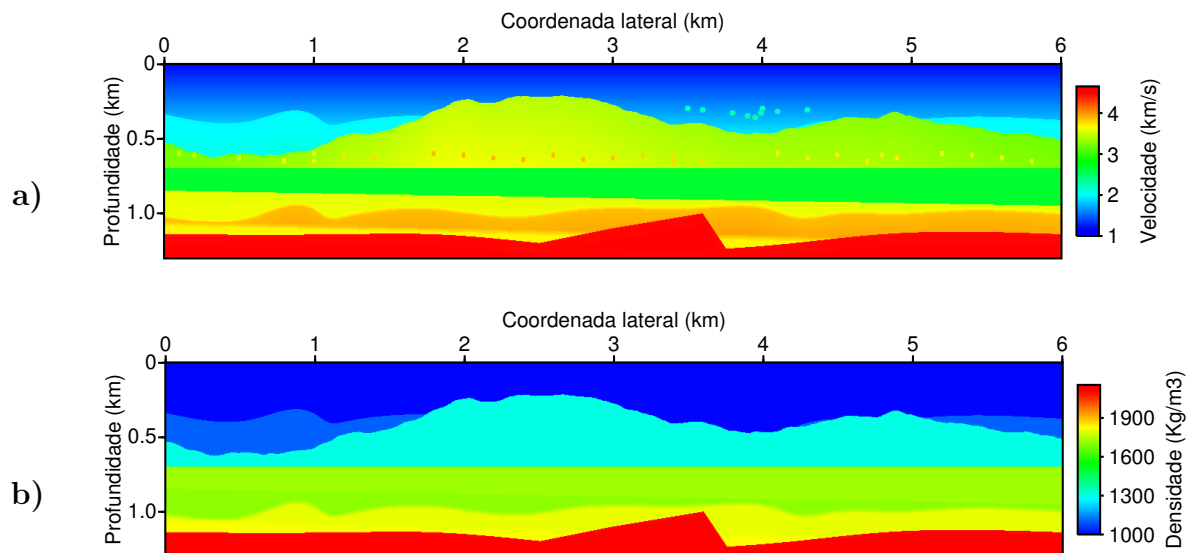


Fonte: Autor.

Nos exemplos numéricos anteriores, consideramos modelos com diferentes *overburden* e mesmo alvo, com a finalidade de investigar a influência do *overburden* sobre o processo de estimar as respostas ao impulso de um alvo localizado abaixo dessa região. No entanto, a região alvo é bem simples do ponto de vista geológico. Nos próximos exemplos dessa subseção, investigamos o esquema de inversão esparsa para estimar a resposta ao impulso de um alvo com maior nível de complexidade do ponto de vista geológico. No que segue, mostramos os resultados realizados usando o modelo de parâmetros acústicos mostrados na Figura 4.7, onde a região alvo não é mais plano horizontal como nos modelos dos resultados anteriores. A modelagem dos campos de onda e a configuração de aquisição é a mesma dos testes numéricos anteriores, com a única diferença que para o presente teste numérico, o nível em profundidade onde foi realizada a aquisição foi

em  $z_d = 0.8$  km, ou seja, agora nosso nível do alvo é em 0.8 km em profundidade.

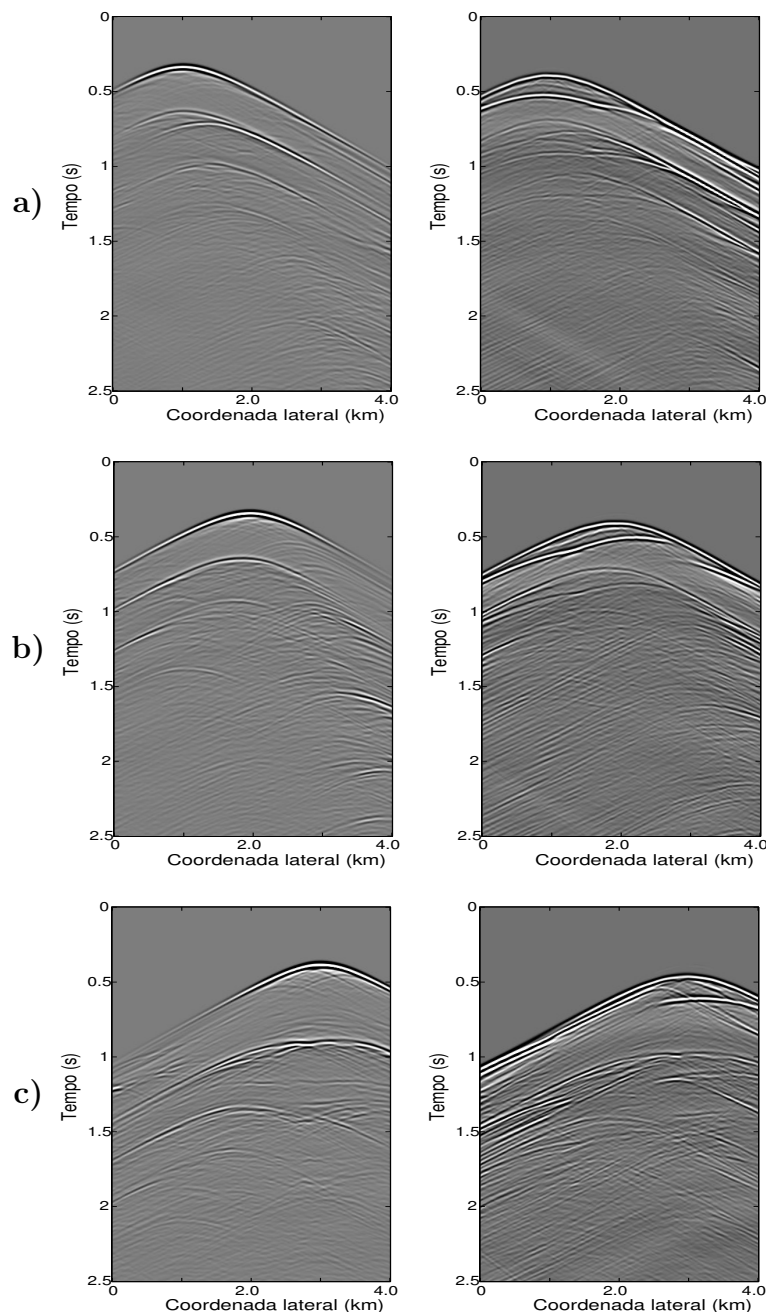
Figura 4.7 – Modelo usado para gerar o conjunto de dados sintéticos. a) Modelo de velocidade. b) Modelo de densidade.



Fonte: Autor.

Na Figura 4.8 mostramos os campos de onda descendente (esquerda) e ascendente (direita) observados em  $z_d = 0.8$  km e gerados por fontes localizadas na superfície e em três posições diferentes na coordenada lateral: a)  $x = 2.0$  km, b)  $x = 3.0$  km e c)  $x = 4.0$  km. Na Figura 4.9, mostramos as respostas ao impulso estimadas (na esquerda) de fontes virtuais em  $z_d = 0.8$  km em profundidade para três diferentes posições na coordenada lateral: a)  $x = 2.0$  km, b)  $x = 3.0$  km e c)  $x = 4.0$  km. Observamos que as respostas ao impulso estimadas exibem os eventos de reflexão com alta resolução gerados pela região alvo. Além disso, observamos um bom ajuste entre os campos de onda ascendente estimado a partir das respostas ao impulso (centro) com os campos de onda ascendente observado (direita), o que indica que o processo de inversão foi eficaz. Uma maneira de avaliar a consistência do resultado do esquema de inversão esparsa para esse teste, é extrair a seção de afastamento nulo na coordenada lateral das respostas ao impulso estimadas, pois esperamos que esta seção seja coerente com as interfaces da região abaixo do nível em profundidade  $z_d = 0.8$  km. Pode-se verificar na Figura 4.10b, que mostra a seção de afastamento nulo na coordenada lateral das respostas ao impulso estimadas, a presença das interfaces da região que está localizada abaixo do nível do alvo, como era esperado. Além disso, na comparação entre a seção de afastamento nulo na coordenada lateral das respostas ao impulso estimadas (Figura 4.10b) com a seção de afastamento nulo na coordenada lateral dos campos de onda ascendente registrado (Figura 4.10a), observamos que a seção das respostas ao impulso representam um *shift* no tempo em relação a seção de afastamento nulo na coordenada lateral dos campos de onda descendente, além de não exibir as informações sobre o *overburden*, como era esperado.

Figura 4.8 – Campos de onda descendente (na esquerda) e ascendente (na direita) observados em 0.8 km em profundidade, gerado por fontes posicionadas na superfície e em três posições diferentes na coordenada lateral. a) Posição  $x = 2.0$  km. b) Posição  $x = 3.0$  km. c) Posição  $x = 4.0$  km.

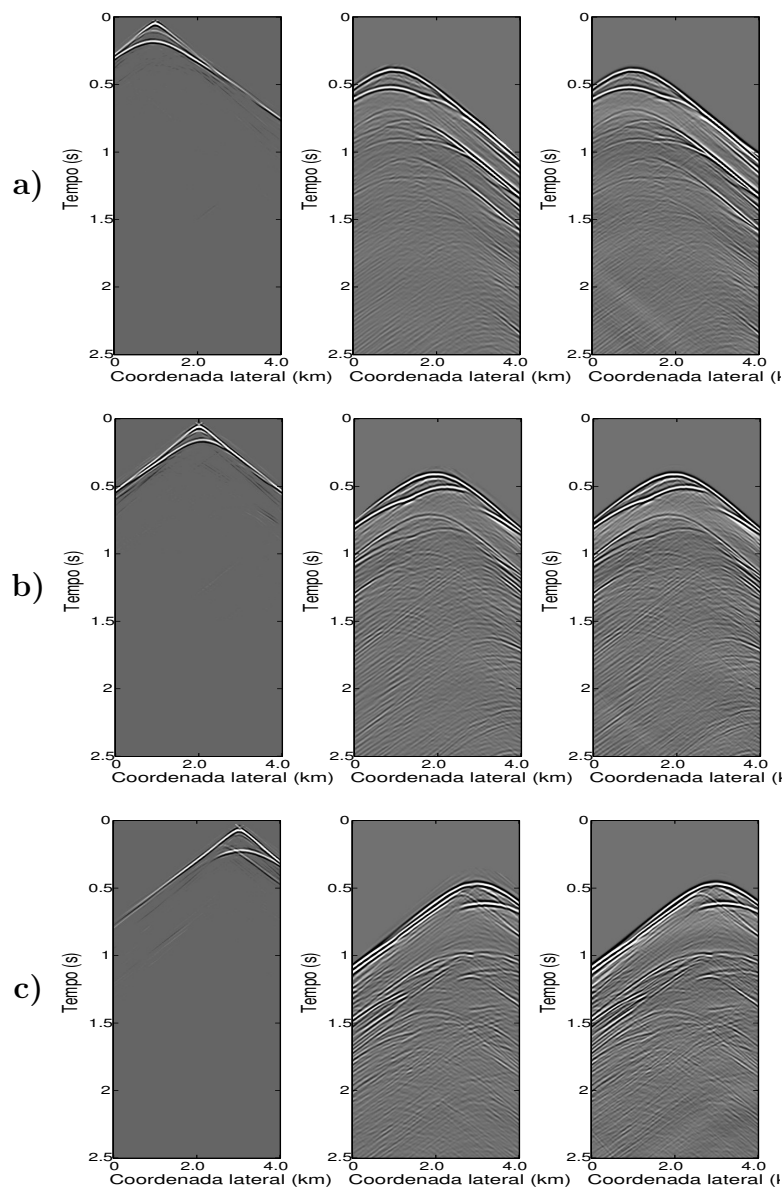


Fonte: Autor.

Como já ressaltamos anteriormente, este esquema de inversão esparsa para estimar as respostas ao impulso de uma área alvo em subsuperfície é mais robusta se o campo de onda descendente, usado para iluminar a área alvo, apresenta informações de múltiplas. Portanto, realizamos para este exemplo que apresenta uma área alvo mais complexa, uma similar decimação das fontes como realizamos para os exemplos anteriores. Pode-se confirma na Figura 4.11, que



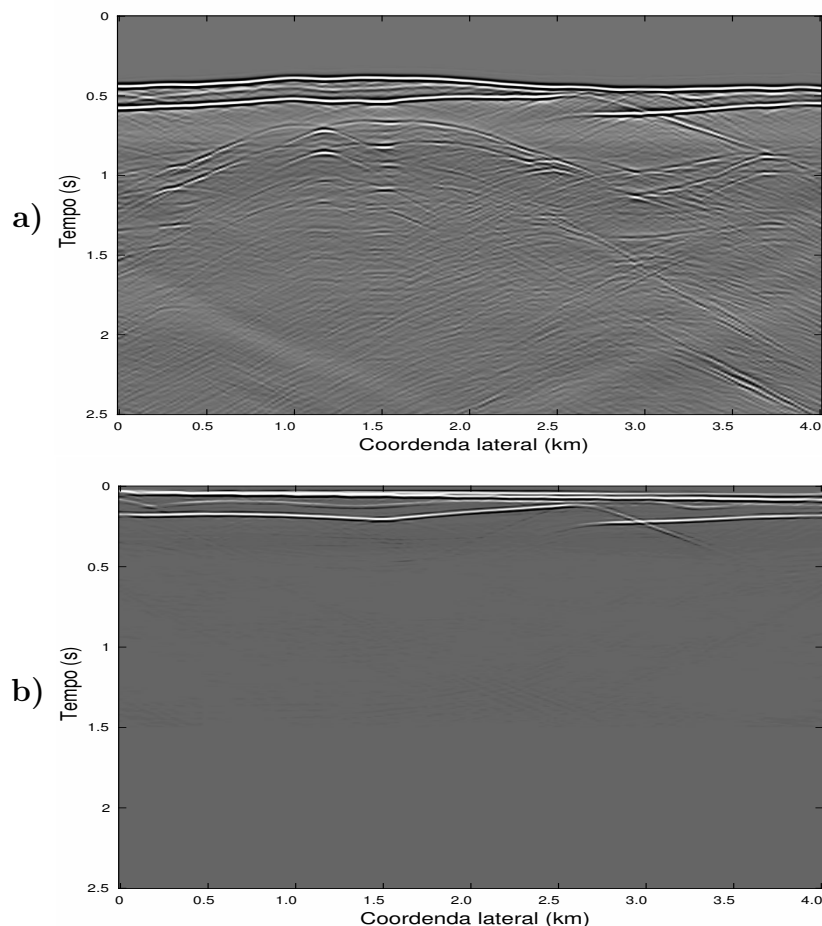
Figura 4.9 – Respostas ao impulso estimadas após 25 iterações em  $z_d = 0.8$  km. a) Da esquerda para direita, resposta ao impulso estimada para uma fonte virtual em  $z_d = 0.8$  e  $x = 2.0$  km, campos de ondas ascendente estimado e observado, respectivamente, para a fonte na superfície e em  $x = 2.0$  km. b) Da esquerda para direita, resposta ao impulso estimada para uma fonte virtual em  $z_d = 0.8$  e  $x = 3.0$  km, campos de ondas ascendente estimado e observado, respectivamente, para a fonte na superfície e em  $x = 3.0$  km. c) Da esquerda para direita, resposta ao impulso estimada para uma fonte virtual em  $z_d = 0.8$  e  $x = 4.0$  km, campos de ondas ascendente estimado e observado, respectivamente, para a fonte na superfície e em  $x = 4.0$  km.



Fonte: Autor.

mostra os resultados do esquema de inversão esparsa após 25 iterações para três fatores de decimação diferentes (2,4,8) para a mesma fonte mostrada na Figura 4.8b, que de fato a robustez do esquema de inversão é mantida para este exemplo que apresenta uma área alvo mais complexa.

Figura 4.10 – Seção de afastamento nulo na coordenada lateral. a) Campo de onda ascendente observado em  $z_d = 0.8$  km em profundidade e gerados por fontes na superfície. b) Respostas ao impulso estimadas em  $z_d = 0.8$  km em profundidade.

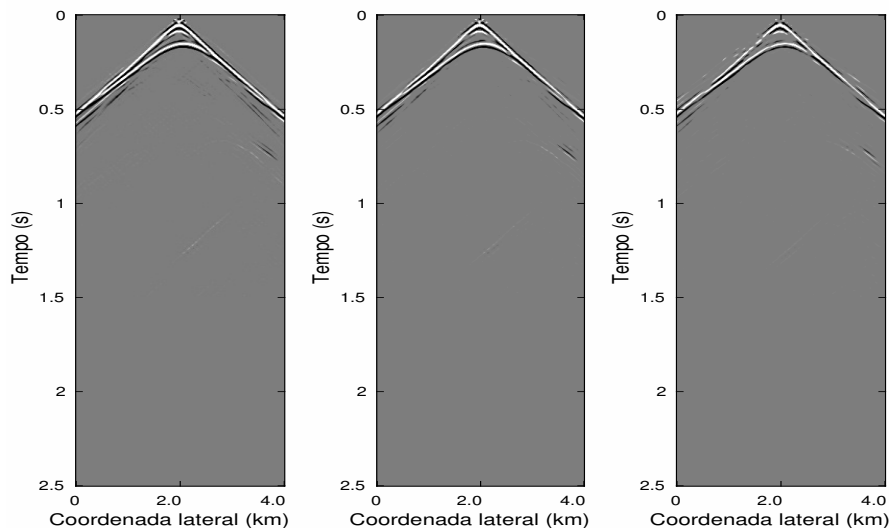


Fonte: Autor.

Para finalizar os testes numéricos usando dados sísmicos registrados com geometria de aquisição VSP-desviado, usamos o esquema de inversão esparsa para estimar as respostas ao impulso a partir de um conjunto de dado modelado usando um modelo de velocidade que foi extraído do modelo Marmousi2 (MARTIN; WILEY; MARFURT, 2006), com 9.0 km de distância na coordenada lateral e 3.5 km em profundidade, mostrado na Figura 4.12. Também neste exemplo, o conjunto de dados observados foram modelados com o algoritmo de modelagem 2D, baseado no esquema de diferenças-finitas, disponível no *Software* livre introduzido na Seção 2.

O nível de interesse em subsuperfície é a região abaixo de 2.6 km ( $z_d = 2.6$  km) em profundidade, e a área alvo é a região situada neste nível, compreendida entre 4.0 e 8.0 km na coordenada lateral, destacado pelo retângulo na Figura 4.12. Foram usadas um total de 151 fontes, igualmente espaçadas, com um espaçamento de 0.04 km, localizadas em 0.05 km em profundidade e distribuídas entre 3.0 km e 9.0 km na coordenada lateral (representada pela linha vermelha na superfície da Figura 4.12). Foram usados um total de 301 receptores, igualmente espaçados, com um espaçamento de 0.02 km, localizados no poço horizontal (ilustrado pela curva

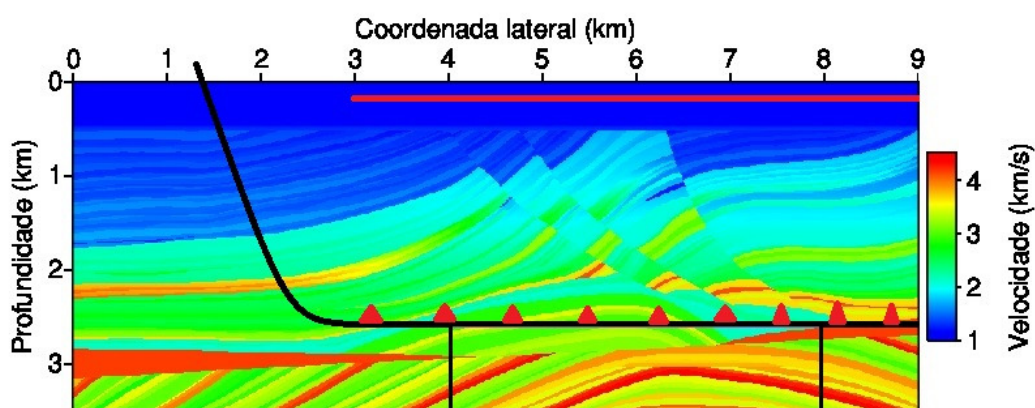
Figura 4.11 – Respostas ao impulso estimadas após 25 iterações para três fatores de decimação diferentes (2,4,8) de uma fonte virtuais em  $x = 3.0$  km na coordenada lateral e  $z_d = 0.8$  km em profundidade. Da esquerda para direita, fator 2, fator 4 e fator 8, respectivamente.



Fonte: Autor.

contínua na Figura 4.12) em 2.550 km em profundidade e distribuídos entre 3.0 km e 9.0 km na coordenada lateral (representados pelos triângulos em vermelho na Figura 4.12). O pulso e a banda de frequência são os mesmos usados nos exemplos numéricos dos testes anteriores.

Figura 4.12 – Parte central do modelo de velocidade do Marmousi2 usado para gerar o conjunto de dados sintéticos.

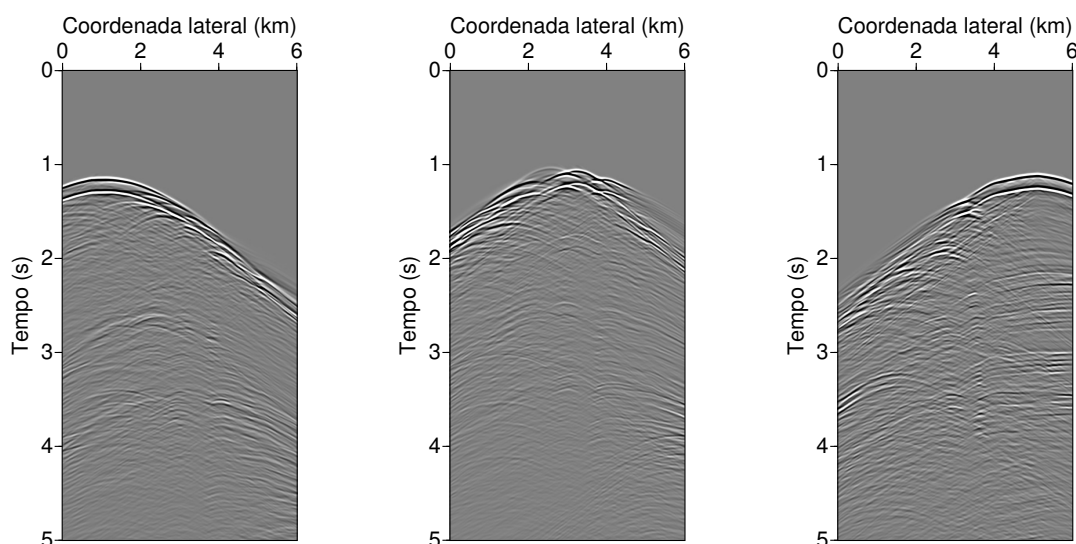


Fonte: Autor.

Assim como nos exemplos anteriores da presente subseção, os campos de onda ascendente e descendente, foram estimados através da extração dos campos de pressão e velocidade da partícula no nível alvo, seguido de uma decomposição acústica dos campos de ondas. As Figuras

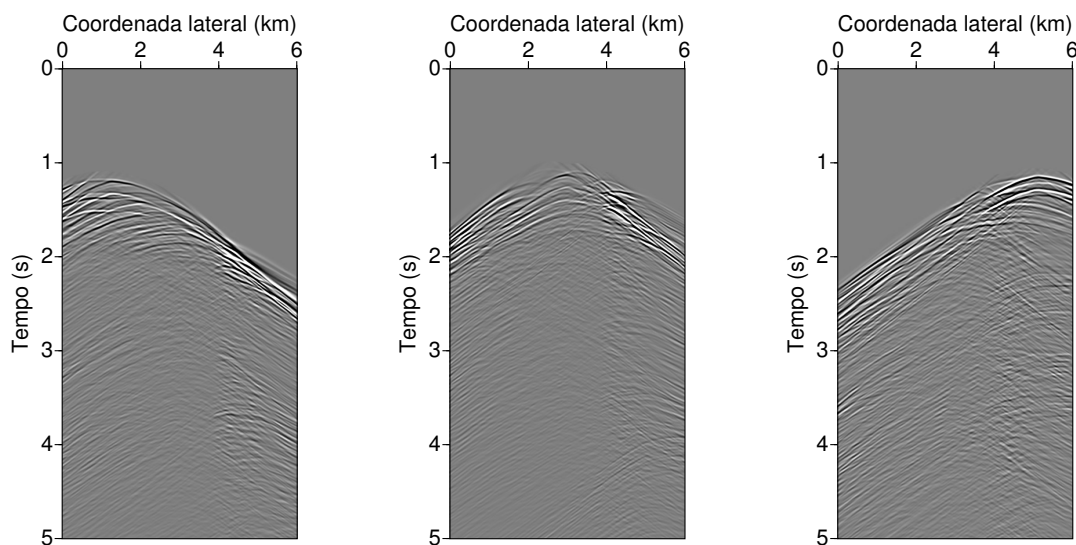
4.13 e 4.14, mostram os campos de onda descendente e ascendente estimados no nível do alvo, respectivamente, de fontes posicionadas na superfície, da esquerda para direita, em  $x = 4.0$  km,  $x = 6.0$  km e  $x = 8.0$  km, respectivamente.

Figura 4.13 – Campos de onda descendente observados em 2.550 km em profundidade, gerados por fontes posicionadas na superfície, da esquerda para direita, em  $x = 4.0$  km,  $x = 6.0$  km e  $x = 8.0$  km, respectivamente.



Fonte: Autor.

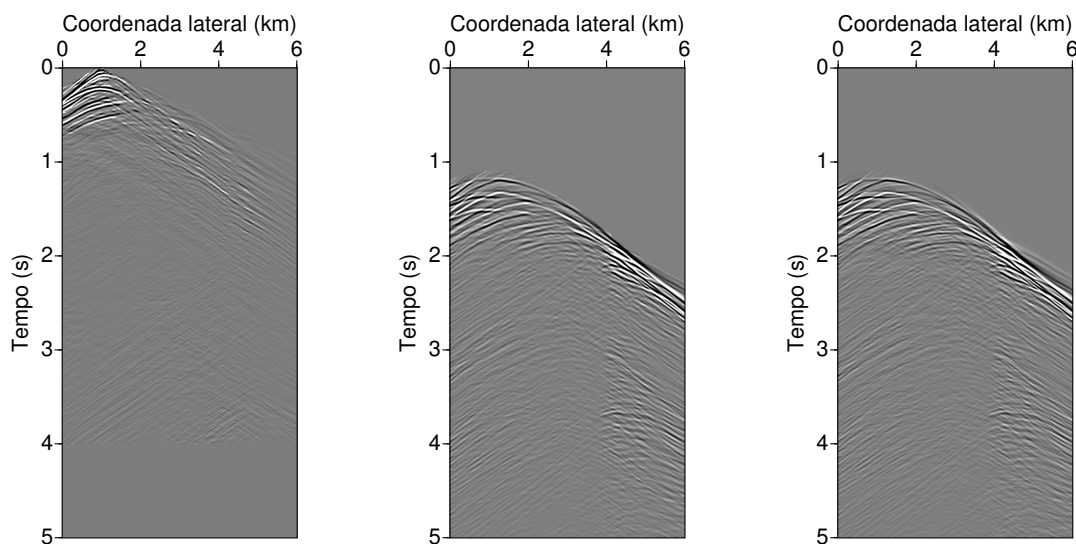
Figura 4.14 – Campos de onda ascendente observados em 2.550 km em profundidade, gerados por fontes posicionadas na superfície, da esquerda para direita, em  $x = 4.0$  km,  $x = 6.0$  km e  $x = 8.0$  km, respectivamente.



Fonte: Autor.

As Figuras 4.15, 4.16 e 4.17 mostram as respostas ao impulso estimadas (esquerda) após 25 iterações do esquema de inversão esparsa, para uma fontes virtual posicionada no nível do alvo, 2.550 km em profundidade, e 4.0 km, 6.0 km e 8.0 km na coordenada lateral, respectivamente, no centro e na direita dessas figuras também são mostrados os campos de onda ascendente estimados e observados. Observa-se que o esquema de inversão esparsa recuperou as respostas ao impulso que exibem alguns eventos de reflexão do alvo com alta resolução. Além disso, podemos observar um bom ajuste entre os campos de onda ascendente estimado (centro) e o observado (direita). Também notamos que os efeitos de AVO devido as reflexões ângulo-dependentes no alvo foram recuperadas.

Figura 4.15 – Respostas ao impulso estimadas após 25 iterações de uma fonte virtuais em 2.550 km em profundidade. Da esquerda para direita, resposta ao impulso estimada, campo de onda ascendente estimado e campo de onda ascendente observado, respectivamente, para fonte real e virtual localizada em 4.0 km na coordenada lateral.



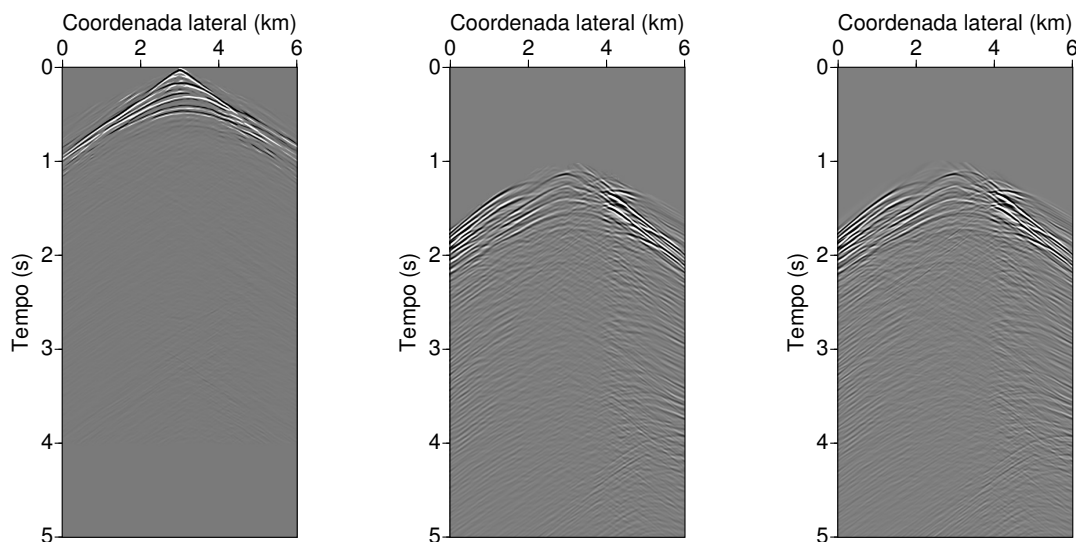
Fonte: Autor.

Uma vez estimadas as respostas ao impulso com informações apenas da área alvo, elas podem ser usadas como *inputs* para imagear ou obter os parâmetros físicos da área alvo. Com esse objetivos, testamos essas respostas ao impulso para imagear, através do método de migração RTM convencional, a área alvo do presente teste numérico, região destacada pelo retângulo na Figura 4.12.

Para realizar a migração RTM convencional, usamos uma banda de frequência entre 10 e 60 Hz e como modelo de velocidade uma versão suavizado do modelo verdadeiro. Na Figura 4.18, mostramos a área alvo para servir de referência.

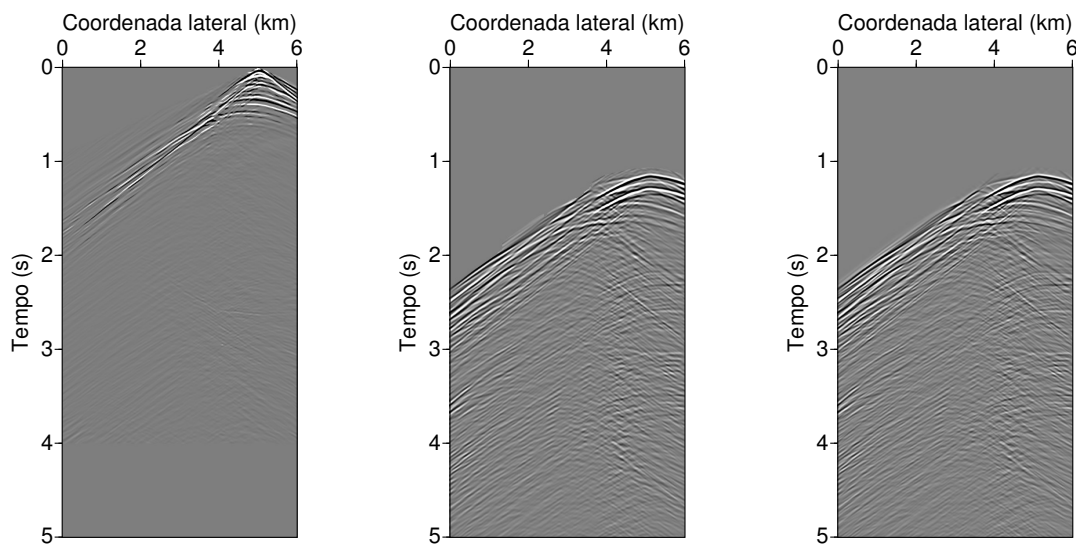
Na Figura 4.19, mostramos a imagem migrada com RTM convencional da área alvo usando as respostas ao impulso estimadas através do esquema de inversão esparsa. Observa-se dessa migração, que os refletores foram recuperados, mostrando assim que as respostas ao impulso

Figura 4.16 – Respostas ao impulso estimadas após 25 iterações de uma fonte virtuais em 2.550 km em profundidade. Da esquerda para direita, resposta ao impulso estimada, campo de onda ascendente estimado e campo de onda ascendente observado, respectivamente, para fonte real e virtual localizada em 6.0 km na coordenada lateral.



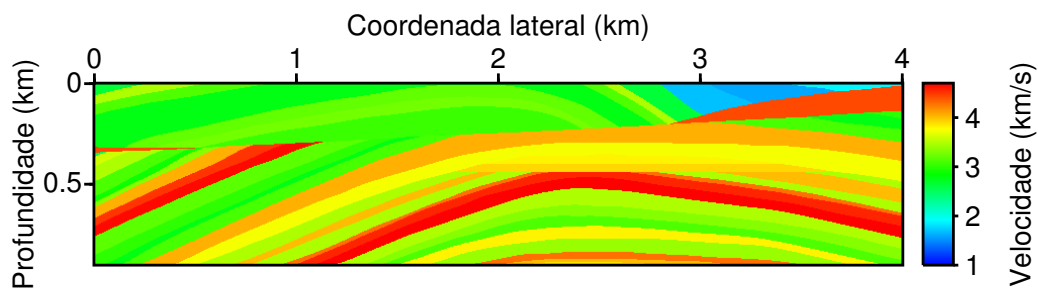
Fonte: Autor.

Figura 4.17 – Respostas ao impulso estimadas após 25 iterações de uma fonte virtuais em 2.550 km em profundidade. Da esquerda para direita, resposta ao impulso estimada, campo de onda ascendente estimado e campo de onda ascendente observado, respectivamente, para fonte real e virtual localizada em 8.0 km na coordenada lateral.



Fonte: Autor.

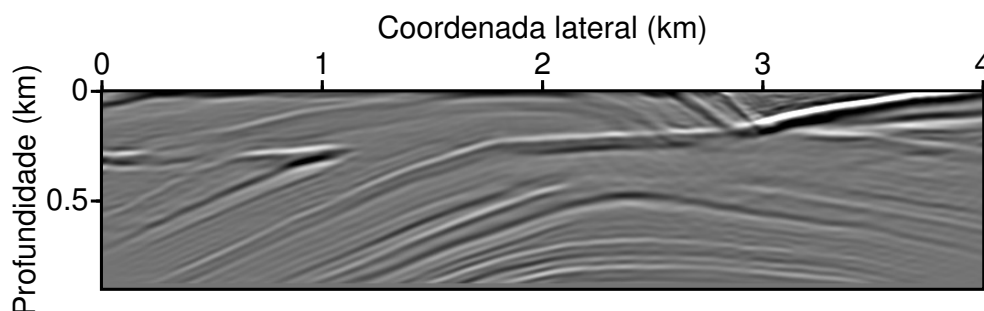
Figura 4.18 – Área alvo do modelo de velocidade mostrado na Figura 4.12.



Fonte: Autor.

estimadas realmente correspondem aos eventos de reflexão gerados na área alvo.

Figura 4.19 – Imagem migrada via RTM da área alvo usando as respostas ao impulso estimadas



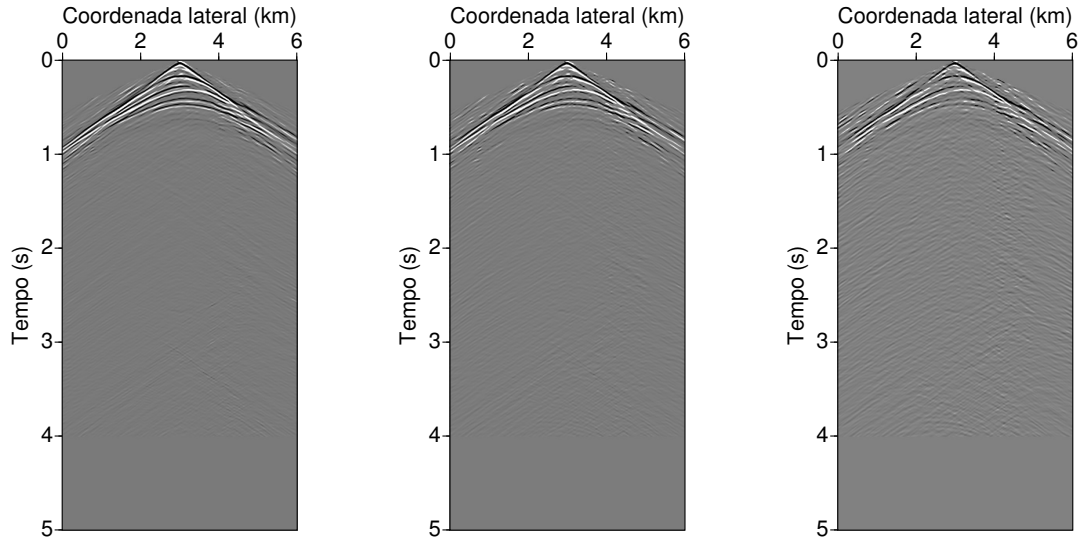
Fonte: Autor.

Assim como para todos os exemplos numéricos que mostramos nesta subseção, também realizamos para este exemplo uma similar decimação das fontes como realizamos para os exemplos anteriores. Pode-se verificar na Figura 4.20, que mostra o resultado do esquema de inversão esparsa após 25 iterações para três fatores de decimação diferentes (2,4,8), para a mesma fonte virtual localizada no nível do alvo e em 6.0 km na coordenada lateral, que de fato as múltiplas presentes nos campos de ondas usados para estimar as respostas ao impulso contribuem para a robustez do esquema de inversão. Também realizamos migração RTM com as respostas ao impulso estimadas com decimação de fontes, como mostramos na Figura 4.21.

### 4.3.2 Exemplo para aquisição sísmica de superfície

Na subseção anterior, mostramos essencialmente apenas a robustez do esquema de inversão esparsa, uma vez que os campos de onda ascendente e descendente foram estimados a partir de uma decomposição dos campos de ondas, mais precisamente o campo de pressão e o campo de velocidade da partícula na direção  $z$ , registrados no nível do alvo, ou seja, os receptores estavam distribuídos no nível do alvo, sendo assim, não foi necessário extrapolar os campos de ondas observados na superfície para um novo nível em subsuperfície próximo da área alvo.

Figura 4.20 – Respostas ao impulso estimadas após 25 iterações para três fatores de decimação diferentes (2,4,8) de uma fonte virtual localizada em  $x = 6.0$  km na coordenada lateral e no nível do alvo em profundidade. Da esquerda para direita, fator 2, fator 4 e fator 8, respectivamente.



Fonte: Autor.

Na presente subseção, avaliamos a metodologia do esquema da inversão esparsa para dados de aquisição sísmica de superfície (com fontes e receptores localizados na superfície), como ilustrado na Figura 4.22. Para esse tipo de aquisição, é necessário extrapolar os campos de ondas da superfície para um nível em subsuperfície próximo da área alvo. Aqui usamos o esquema do JMI para realizar essa extrapolação dos campos de ondas para uma região próximo do alvo em subsuperfície. Uma vez conhecidos os campos de ondas, seguiremos para aplicação do esquema de inversão esparsa para estimar as respostas ao impulso apenas com informações da área alvo.

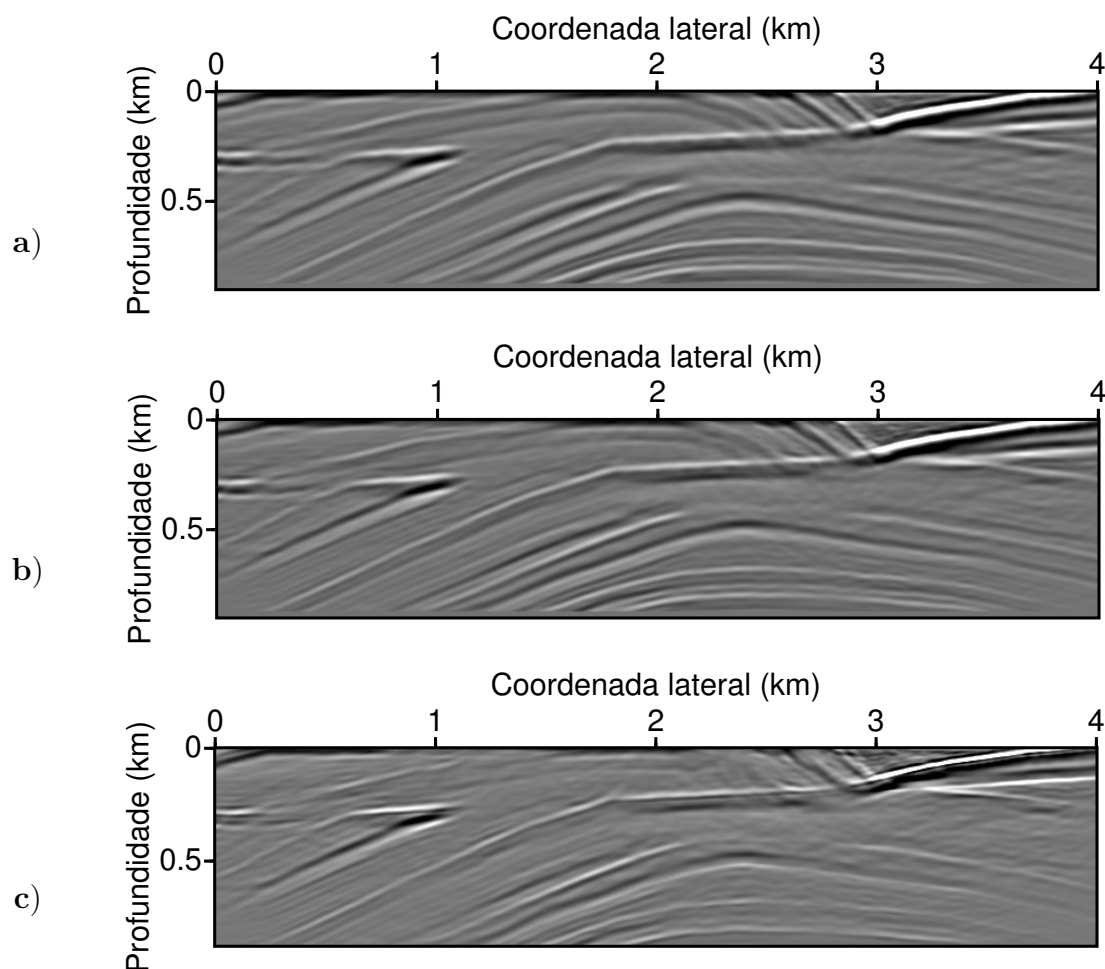
Como ressaltamos na seção dedicada à metodologia do JMI, Seção 3.4, o processo de modelagem do JMI é baseado na equação da onda unidirecional e para cada nível de extrapolação dos campos de onda ascendente e descendente, é necessário salvar estes campos de onda (com múltipla de superfície e múltiplas internas). Sendo assim, uma vez que utilizamos o esquema do JMI, obtém-se como *outputs* além do modelo de velocidade atualizado e imagem migrada, os campos de onda ascendente e descendente em qualquer nível em profundidade  $z_m$  do modelo. Estimados os campos de onda ascendente e descendente em profundidade, próximo de uma região de interesse, pode-se aplicar o esquema de inversão esparsa para estimar as respostas ao impulso do alvo.

Considerando essa característica intrínseca do JMI, de salvar os campos de onda ascendente e descendente em qualquer nível em subsuperfície, desenvolvemos uma estratégia de redatumação dos campos de ondas observados na superfície, para um nível de interesse em subsuperfície, dividida nos seguintes dois passos:

\*) passo 1- estimar os campos de onda ascendente e descendente em um nível específico



Figura 4.21 – Imagem migrada com RTM convencional da área alvo usando as respostas ao impulso estimadas com decimação nas fontes. a) Imagem migrada usando as respostas ao impulso estimadas usando um fator 2 para decimar as fontes. b) Imagem migrada usando as respostas ao impulso estimadas usando um fator 4 para decimar as fontes. c) Imagem migrada usando as respostas ao impulso estimadas usando um fator 8 para decimar as fontes.



Fonte: Autor.

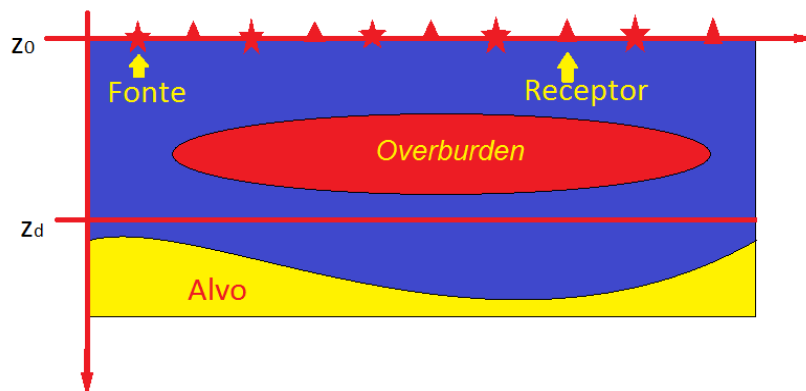
em subsuperfície através do JMI.

\*) passo 2- aplicar o esquema de inversão esparsa para estimar as respostas ao impulso apenas com informações do alvo.

Para realizarmos os testes numéricos dessa estratégia de redatumação, usamos dois modelos acústicos para modelar os dados que usamos como dados observados. Um com um *overburden* simples, Figura 4.23a, e outro com um *overburden* mais complexo, Figura 4.24a, ambos com uma distância de 2.0 km na coordenada lateral e 1.3 km em profundidade.

Para modelar os campos de onda observados, usamos o algoritmo de modelagem FWMod usando como *wavelet* um pulso Ricker com frequência pico de 15 Hz. Na configuração de aquisição, usamos 201 fontes e 201 receptores com espaçamento de 0.02 km, distribuídos na superfície.

Figura 4.22 – Ilustração da aquisição sísmica de superfície, onde fontes e receptores estão localizados na superfície. As fontes estão representadas pelas estrelas em vermelhos, e receptores, representados pelos triângulos em vermelhos.



Fonte: Autor.

Ambas as modelagens são considerando superfície-livre. Nas Figuras 4.23b (na esquerda) e 4.24b (na esquerda) mostramos um *shot gather* dos campos de onda observados na superfície gerados por um fonte na superfície e no centro do modelo, modelados com FWMod usando múltiplas até a quinta-ordem. Nesta mesmas figuras, no lado direito, mostramos o mesmo *shot gather* modelado com algoritmo de modelagem 2D baseado no esquema de diferenças-finitas.

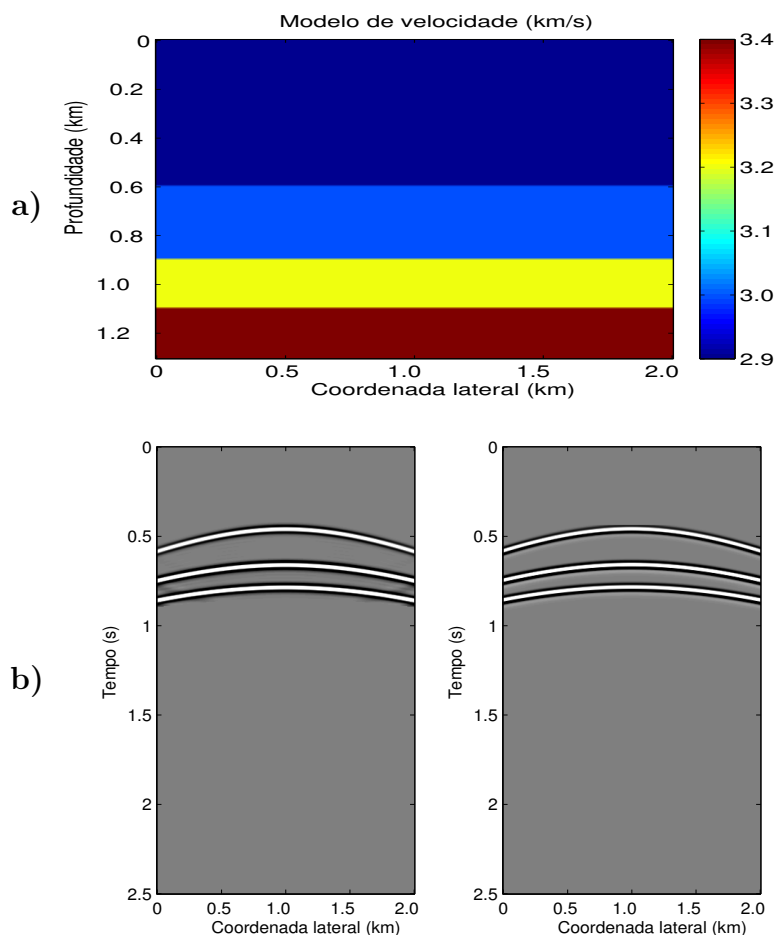
#### 4.3.2.1 Resultados para o modelo simples

Para avaliar o resultado numérico para o modelo simples, usamos como modelo de velocidade inicial para o JMI, o modelo de velocidade mostrado Figura 4.25a. Na Figura 4.25b mostramos o modelo de velocidade estimado com o esquema do JMI após 65 iterações. Nas Figuras 4.26 (em cima) e 4.26 (embaixo) mostramos a imagem migrada e refletividade exata, obtida através da Equação (2.65). Pode-se verificar nesses resultado obtidos com o JMI, para o modelo simples, que o modelo de velocidade estimada foi atualizada na direção do modelo exato e que a imagem migrada recupera os refletores com uma boa resolução.

Uma vez realizado o processo do JMI, obtém-se também como *outputs* os campos de onda ascendente e descendente para cada nível em profundidade  $z_m$ . Dessa maneira, podemos usar estes campos de onda no esquema de inversão esparsa, desenvolvido anteriormente, para estimar as respostas ao impulso de uma região de interesse. Redatumamos os campos de onda observados na superfície para o nível em 0.7 km em profundidade. Usando esse nível em profundidade, como nível do alvo, temos como alvo os dois refletores que estão situados abaixo desse nível. Sendo assim, esperamos que as respostas ao impulso apresentem no mínimo dois eventos de reflexão devidos ao dois refletores do alvo, assim como foi esperado nas respostas ao impulso estimadas para o modelo de velocidade com *overburden* simples e complexo da seção anterior.

Na Figura 4.27a, mostramos os campos de onda descendente (na esquerda) e ascendente (na direita) estimados em 0.7 km em profundidade com o JMI, o qual foi estimado a partir do

Figura 4.23 – a) Modelo de velocidade simples, usado para gerar o conjunto de dados sintéticos. b) Campos de ondas com fontes e receptores na superfície, modelado com algoritmo de modelagem FWMod (na esquerda) e modelado com algoritmo de modelagem 2D FD (na direita).

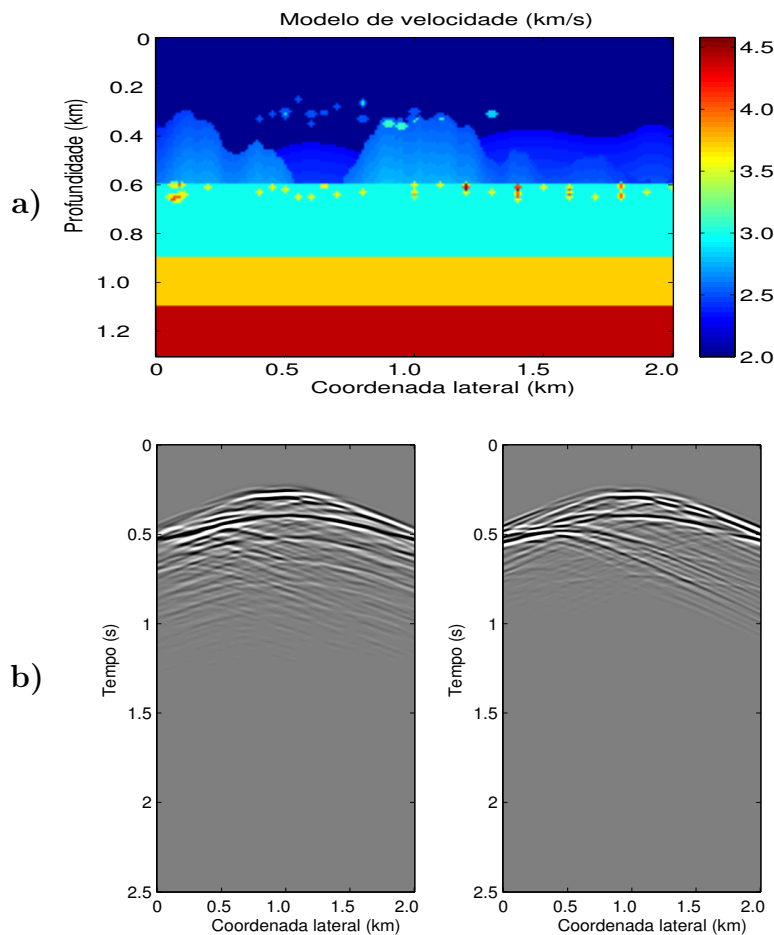


Fonte: Autor.

modelo inicial mostrado na Figura 4.25a. Na Figura 4.27b, mostramos os mesmos campos de onda modelados com o algoritmo de modelagem FWMod, no mesmo nível em profundidade dos campos de onda que foram estimados com JMI, porém agora usando o modelo de velocidade verdadeiro, mostrado na Figura 4.23. Pode-se notar na Figura 4.25, que existe um bom ajuste (no mínimo em termo de fase) entre os campos de onda estimados com JMI e os modelados com FWMod. No entanto, considerando que os campos de onda estimados com JMI foram estimados a partir de um modelo de velocidade diferente do modelo verdadeiro, consideramos que o campo estimado é uma boa aproximação do campo observado.

Na Figura 4.28, mostramos as respostas ao impulso estimadas após 25 iterações a partir dos campos de onda estimados com JMI (Figura 4.28a), a partir dos campos de onda modelados com FWMod (4.28b) e a partir dos campos de onda modelados com o algoritmo FD (4.28c). Observamos que todas as respostas ao impulso estimadas exibem os dois eventos de reflexão esperados e que todos os campos de onda ascendentes estimados, tem um bom ajuste com os

Figura 4.24 – a) Modelo de velocidade complexo, usado para gerar o conjunto de dados sintéticos. b) Campos de ondas com fontes e receptores na superfície, modelado com algoritmo de modelagem FWMod (na esquerda) e modelado com algoritmo de modelagem 2D FD (na direita).



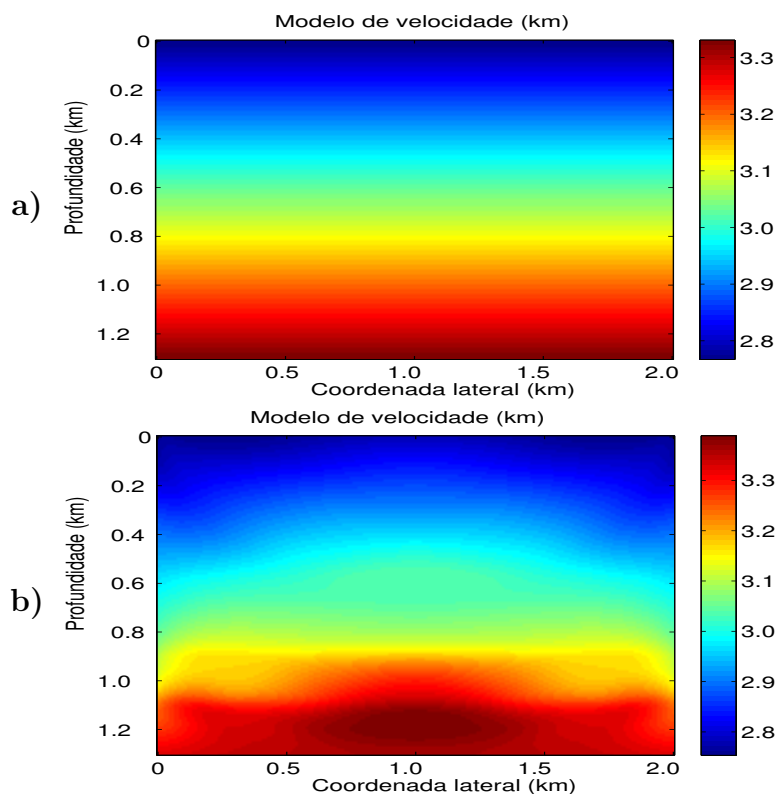
Fonte: Autor.

campos de onda ascendentes observados. Além disso, observamos que existe um bom grau de concordância entre as respostas ao impulso estimadas com os campos de onda calculados com JMI e FWMod. Porém observamos que estas respostas ao impulso apresentam algumas diferenças das resposta ao impulso estimadas com os campos de onda modelados com algoritmo FD. No entanto, essas diferenças são decorrentes do fato que a atual implementação do JMI não está levando em consideração a ângulo-dependência dos operadores de espalhamentos e da limitação do ângulo de abertura dos operados da equação da onda unidirecional, uma vez que o JMI é baseado o algoritmo FWMod.

#### 4.3.2.2 Resultados para o modelo complexo

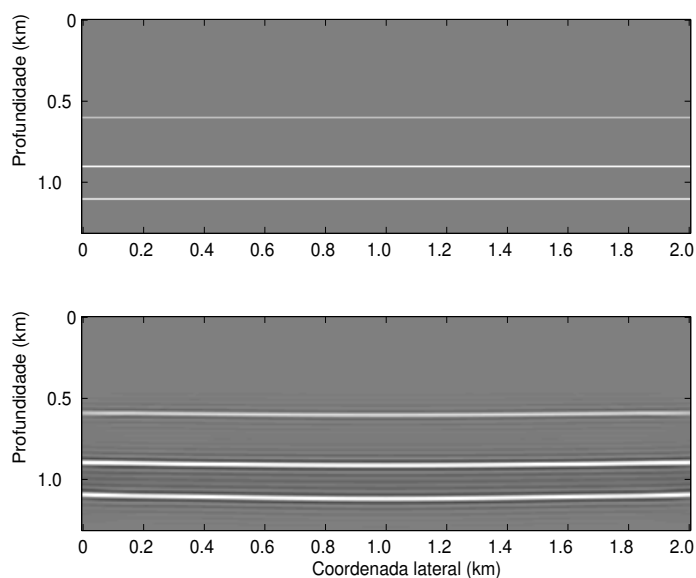
Para o modelo complexo, usamos como modelo de velocidade inicial, o modelo de velocidade mostrado na Figura 4.29a. Na Figura 4.29b mostramos o modelo de velocidade estimado com o JMI após 65 iterações. Na Figura 4.30 mostramos a imagem migrada (embaixo)

Figura 4.25 – Modelo de velocidade simples. a) Modelo de velocidade inicial usado como *input* para o JMI. b) Modelo de velocidade estimado com o JMI após 65 iterações.



Fonte: Autor.

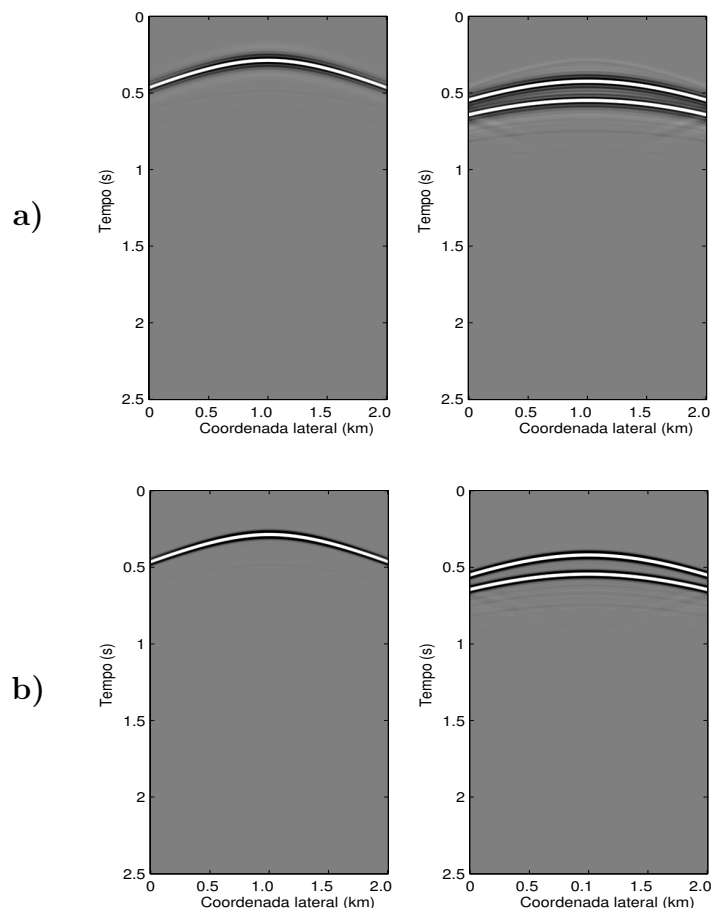
Figura 4.26 – Em cima: modelo de refletividade exata. Em baixo: Imagem migrada com JMI.



Fonte: Autor.

e a refletividade exata (em cima), calculada através da Equação (2.65). Assim como para o modelo simples da seção anterior, vemos que o modelo de velocidade estimado com o JMI foi

Figura 4.27 – Campos de onda descendente (esquerda) e ascendente (direita) estimados em  $z_d = 0.7$  km. a) Campos de onda estimado com o JMI a partir do modelo de velocidade inicial usado como *input* para o JMI. b) Campos de onda modelados com o algoritmo FWMod, usando o modelo de velocidade verdadeiro.



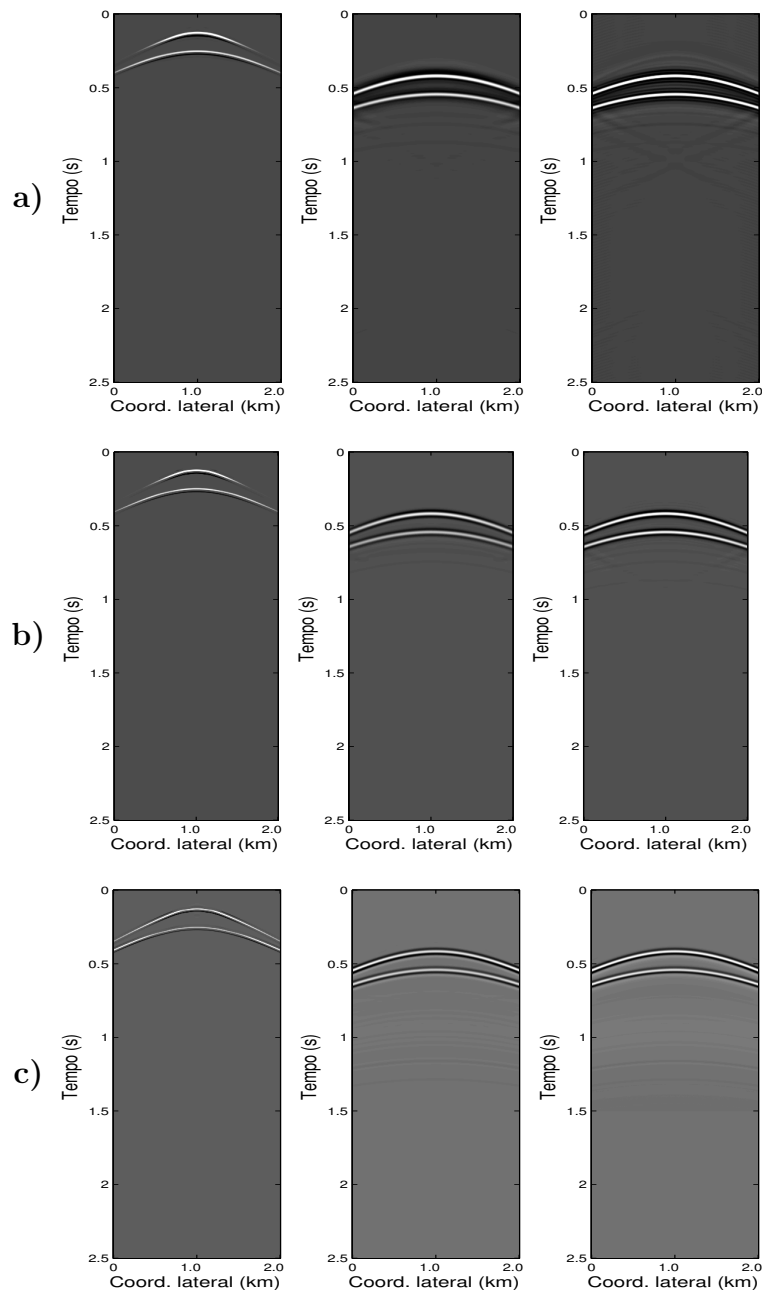
Fonte: Autor.

atualizada na direção do modelo verdadeiro, e a imagem migrada exibe os refletores e alguns pontos de difração presentes no modelo de velocidade verdadeiro.

Assim como para o modelo simples, usamos os campos de onda ascendente e descendente estimados com JMI, para redatumar os campos de ondas observados na superfície, para o nível em 0.7 km em profundidade. Como os modelos diferem apenas no *overburden*, que está acima do nível do alvo, então esperamos que as respostas ao impulso apresentem, no mínimo, dois eventos de reflexão devidos aos dois refletores plano horizontais do alvo.

Na Figura 4.31a, mostramos os campos de onda estimados em 0.7 km em profundidade com o JMI, o qual foi estimado a partir do modelo inicial mostrado na Figura 4.29a. Na Figura 4.31b, mostramos os campos de onda modelados com FWMod, no mesmo nível em profundidade dos campos de onda estimado com JMI, porém agora usando o modelo de velocidade verdadeiro, mostrado na Figura 4.24a. Podemos notar na Figura 4.31, fora alguns artefatos presentes, existe um bom ajuste (no mínimo em termo de fase) entre os campos de onda estimados com JMI com o modelado com FWMod.

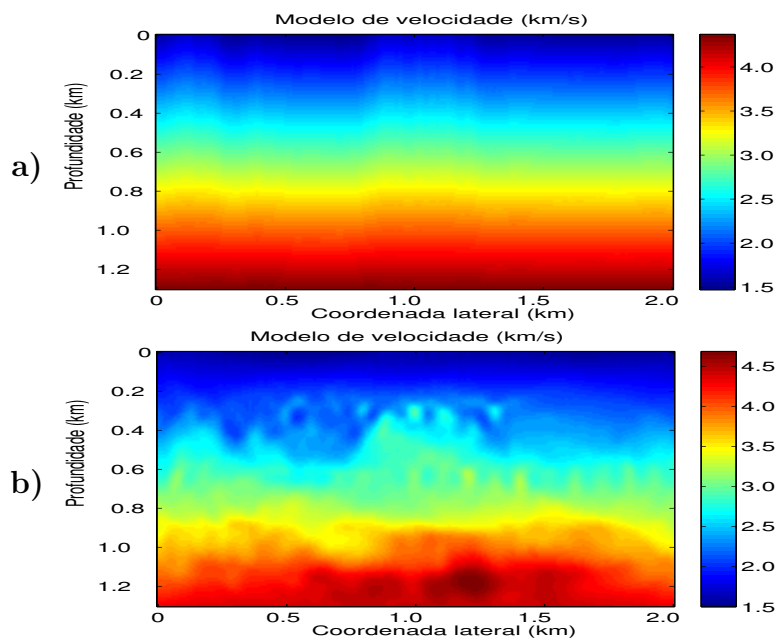
Figura 4.28 – Respostas ao impulso estimadas no nível em profundidade  $z_d = 0.7$  km após 25 iterações. Da esquerda para direita, respostas ao impulso estimada, campos de ondas ascendente estimados a partir das respostas e campos de ondas ascendente observados. a) JMI. b) FWMod. c) FD.



Fonte: Autor.

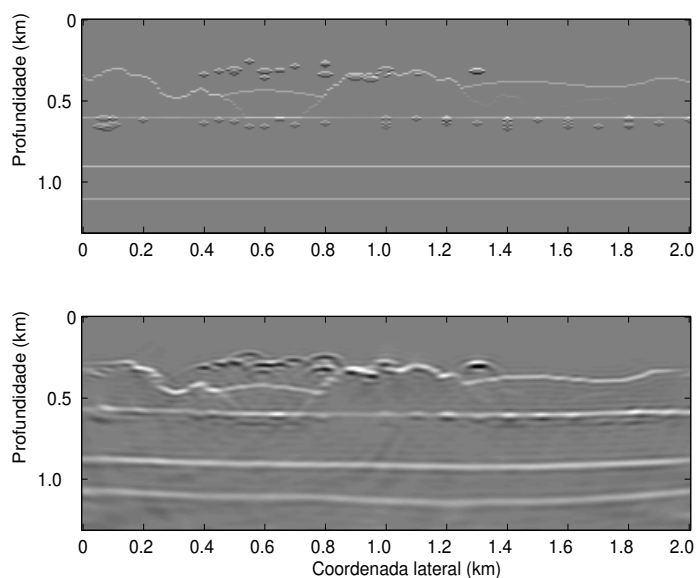
Na Figura 4.32, mostramos as respostas ao impulso estimadas após 25 iterações a partir dos campos de onda estimados com JMI (Figura (4.32a)), a partir dos campos de onda modelado com FWMod (4.32b) e a partir dos campos de ondas modelo com o algoritmo FD (4.32c). Observamos que todas as respostas ao impulso estimadas exibem os dois eventos de reflexão esperados e que todos os campos de onda ascendente estimados, tem um bom ajuste com os campos de onda ascendente observados. Aqui também notamos que existem um bom grau de

Figura 4.29 – Modelo de velocidade complexo. a) Modelo de velocidade inicial usado como *input* para o JMI. b) Modelo de velocidade estimado com o JMI após 65 iterações.



Fonte: Autor.

Figura 4.30 – Em cima: modelo de refletividade exata. Em baixo: Imagem migrada com JMI.

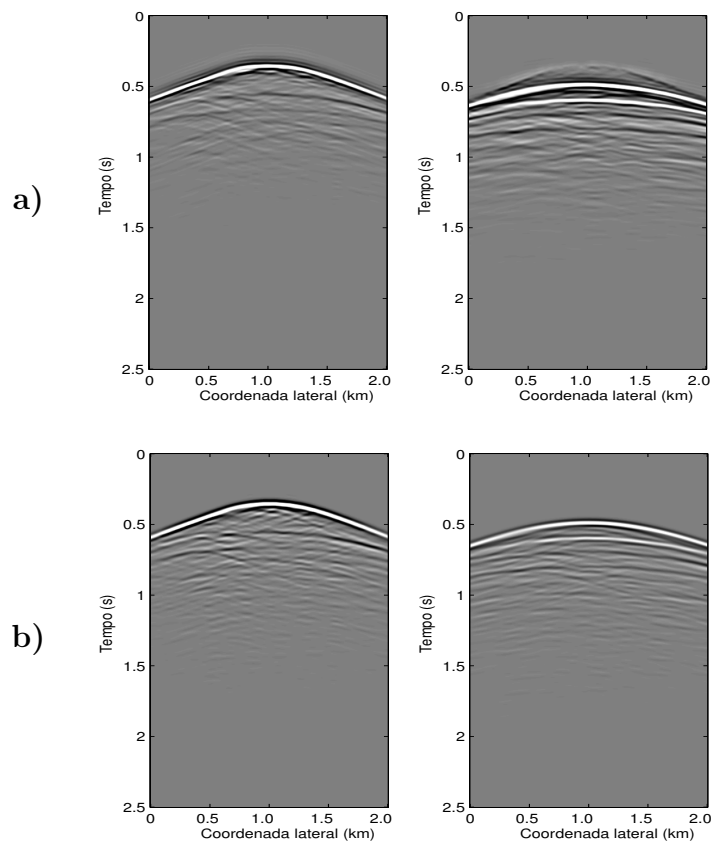


Fonte: Autor.

concordância entre a resposta ao impulso estimada com o campo de onda calculado com JMI e FWMod e algumas diferenças das resposta ao impulso estimadas com os campos de onda modelados com algoritmo FD devidos aos mesmos motivos apontado nos resultados obtidos para o modelo simples anterior.



Figura 4.31 – Campos de onda descendente (esquerda) e ascendente (direita) estimados em  $z_d = 0.7$  km. a) Campos de onda estimado com o JMI a partir do modelo de velocidade inicial usado como *input* para o JMI. b) Campos de onda modelados com o algoritmo FWMod, usando o modelo de velocidade verdadeiro.



Fonte: Autor.

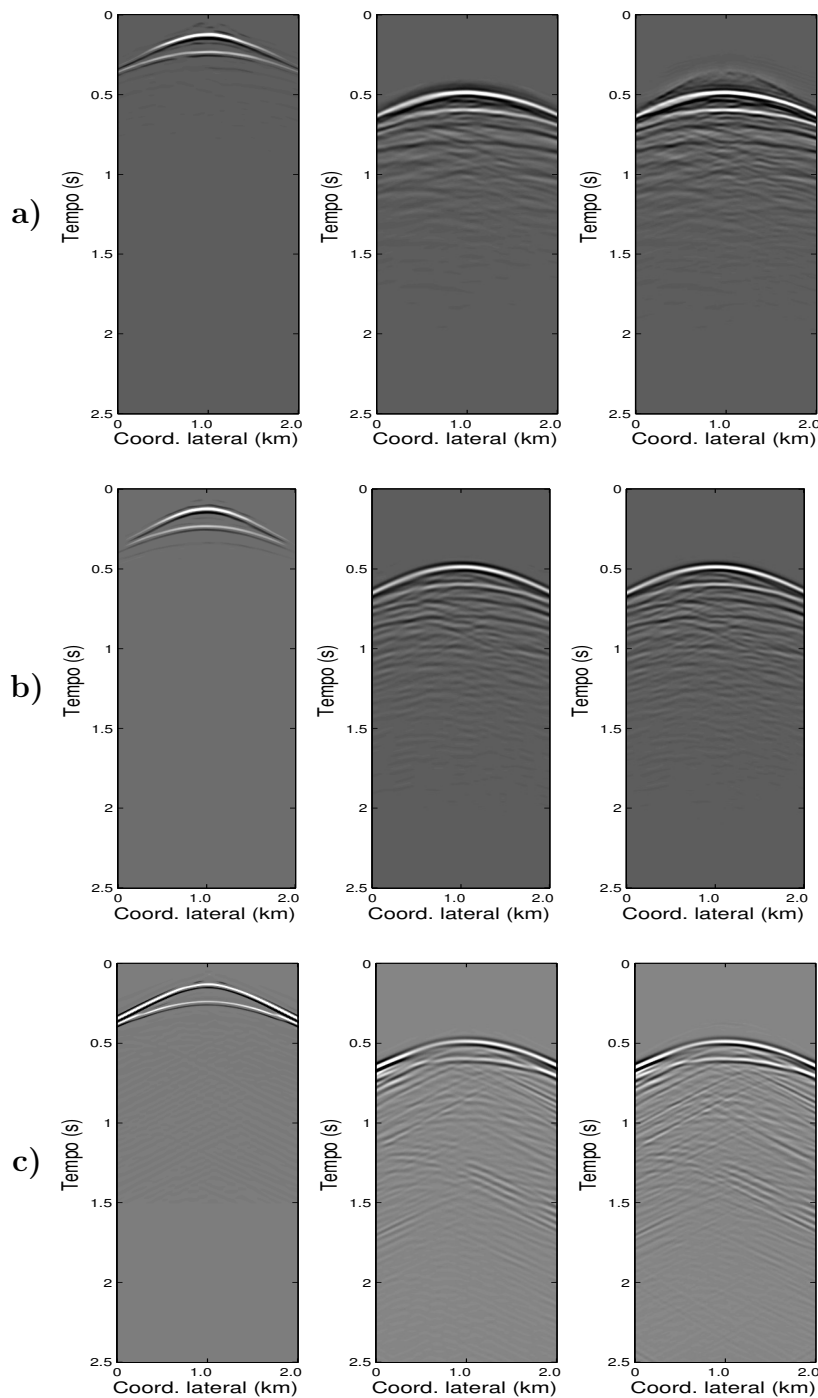
## 4.4 Discussão e conclusão

Neste capítulo discutimos uma estratégia completa para caracterizar uma certa área alvo (reservatório) em subsuperfície usando o esquema de inversão conjunta JMI. Com o objetivo de realizar uma análise mais precisa de uma área alvo em subsuperfície, foi mostrado que com um processo de inversão esparsa e iterativo, a resposta ao impulso dessa área alvo pode ser recuperada. Uma vez que as respostas ao impulso foram estimadas, podem ser usadas como *inputs* para processo de inversão e imageamento local, no próximo capítulo usaremos as respostas obtidas com esse esquema de inversão para estimar os parâmetros físico de um alvo em subsuperfície.

O processo de inversão visa encontrar as respostas ao impulso tal que, quando aplicadas aos campos de onda descendente no nível do alvo, os correspondentes campos de onda ascendente são explicados. Além disso, vínculos adicionais são incluídos para regularizar o problema, como causalidade e esparsidade.

Os resultados mostrados para a geometria de aquisição com fontes na superfície e receptores em um poço horizontal no nível do alvo, mostraram que o esquema de inversão

Figura 4.32 – Respostas ao impulso estimadas no nível em profundidade  $z_d = 0.7$  km após 25 iterações. Da esquerda para direita, respostas ao impulso estimada, campos de ondas ascendente estimados a partir das respostas e campos de ondas ascendente observados. a) Para JMI. b) Para FWMod. c) Para FD.



Fonte: Autor.

funcionou muito bem, indicando que ele é um efetivo esquema para estimar as respostas ao impulso de uma área alvo em subsuperfície a partir dos campos de onda descendente e ascendente.

Nesses primeiros testes com o esquema de inversão esparsa, os resultados mostram

que para o modelo com *overburden* complexo, este esquema é bem robusto para estimar as respostas ao impulso de um alvo localizado abaixo dessa região complexa, pois nesse caso, os campos de onda que estão chegando no nível do alvo fornecem uma boa iluminação dessa área devido aos múltiplos fenômenos de espalhamentos que ocorreram no complexo *overburden* e na superfície. Isto significa que usando todas as múltiplas no processo de inversão, podemos relaxar a necessidade de uma densa amostragem de fontes na superfície e tornando esquema viável para o processo realístico de geometria de aquisição em 3D.

Os resultados mostrados para a geometria de aquisição com fontes e receptores na superfície, mostraram que a estratégia de estimar as respostas ao impulso a partir dos campos de onda descendente e ascendente estimados com o JMI, usando um modelo de velocidade diferente do verdadeiro, modelo de velocidade suave, aparentemente funcionou bem para os modelos utilizados, indicando que durante o processo de inversão com JMI, além de termos como *output* o modelo de velocidade estimado e a imagem migrada, pode-se usar os campos de onda descendente e ascendente, que são naturalmente fornecidos pelo esquema do JMI, no esquema de inversão esparsa para caracterizar um alvo específico em subsuperfície. Além disso, na comparação entre os campos de onda estimados com JMI com os modelados, usando o modelo de velocidade verdadeiro, com o algoritmo de modelagem FWMod, são bem parecidos, mostrando assim que estimar os campos de onda através do JMI usando como modelo de velocidade uma versão suave do modelo verdadeiro, é viável.

Apesar de que aparentemente nosso esquema de redatumação usando o esquema do JMI ter funcionado bem, ressaltamos que a implementação do JMI e do FWMod, usados para estimar os campos de onda ascendente e descendente, que são os *inputs* para o processo de inversão esparsa, não estão levando em consideração a dependência-angular dos operadores de espalhamento, Isso pode ser verificado na comparação entre os campos de onda estimados com esses algoritmos e os campos de onda modelados com o esquema FD, onde observamos que alguns eventos presentes nos campos modelados com o esquema FD não estão presentes nos campos estimados com JMI ou com FWMod. Mas o resultado mostrados aqui, apesar dessa limitação, indicam que nossa aproximação é promissora, e uma vez utilizando uma implementação mais robusta do JMI, nosso esquema de inversão se torna mais viável para estimar as respostas ao impulso de alvo com um grau de complexidade geológica maior.

## 5 INVERSÃO DA FORMA DE ONDA ORIENTADA AO ALVO

### 5.1 Introdução

Em princípio, com a FWI é possível estimar os parâmetros físicos da subsuperfície com alta resolução, especialmente a parte rasa do modelo. Uma atraente formulação da FWI são as metodologias voltadas para estimar parâmetros físicos em subsuperfície de uma área alvo, como por exemplo as metodologias *Improved Target-oriented Linear Full Waveform Inversion* (STAAL et al., 2010), *Target-oriented non-linear inversion of time-lapse seismic data* (GISOLF; van den BERG, 2010), *Nonlinear full waveform inversion for high resolution quantitative property estimation* (HAFFINGER; GISOLF; van den BERG, 2012) e *target-oriented time-lapse waveform inversion using virtual survey* (YANGK et al., 2012). Em geral essas metodologias requerem que o dado usado como *input* seja também local, ou seja, um conjunto de dados apenas com informações da região alvo em subsuperfície.

Existem na literatura muitas metodologias para estimar o conjunto de dados com informações apenas da área alvo a partir de dados sísmicos de reflexão com fontes e receptores localizados na superfície ou a partir de dados sísmicos adquiridos com geometria de aquisição VSP-desviado (MEHTA et al., 2010), onde as fontes são localizados na superfície e os arranjos de receptores são localizados em um poço horizontal em subsuperfície (ou em alguns casos com situação inversa, com fontes no poço horizontal em subsuperfície e os arranjos de receptores na superfície). Entre as mais populares metodologias com esse objetivo encontram-se as metodologias de redatumação baseadas em correlação-cruzada/deconvolução (ou deconvolução multidimensional)(WAPENAAR; THORBECKE; DRAGANOV, 2004; WAPENAAR, 2004; WAPENAAR; FOKKEMA, 2006; BAKULIN; CALVERT, 2006; SCHUSTER; ZHOU, 2006; VASCONCELOS; SNIEDER, 2008a; VASCONCELOS; SNIEDER, 2008b; van der NEUT; BAKULIN, 2009a; BITRI; GRANDJEAN; SAMYN, 2011; SONI; WOUTERSAND; VERSCHUUR, 2012; van der NEUT; HERRMANN, 2013) e a metodologia de redatumação Marchenko (WAPENAAR et al., 2014).

As metodologias de redatumação baseada em correlação ou deconvolução são atrativas especialmente para geometria de aquisição VSP-desviado, pois necessitam que os receptores estejam localizados (ou projetados) nas posições das fonte virtuais. Metodologia baseadas em correlação, além de necessitar de uma densa amostragem de fontes regularmente distribuídas, as respostas ao impulso estimadas apresentam eventos espúrios (van der NEUT; HERRMANN, 2013) e distorções nas amplitudes (van der NEUT; BAKULIN, 2009b), que podem comprometer o esquema de inversão para estimar as propriedades físicas da área alvo a partir dos campos redatumados. Metodologias baseada em deconvolução ou deconvolução multidimensional, apesar de remove alguns eventos espúrios presente nas respostas ao impulso estimadas com correlação-cruzada, a formulação do problema é um problema inverso, que em geral é mal-posto e precisa de regularizador (van der NEUT; HERRMANN, 2013), além de um esforço computacional maior,

uma vez que é um problema de inversão.

A metodologia de redatumação Marchenko é uma atrativa aproximação para realizar redatumação com dados de reflexão, com fontes e receptores localizados na superfície, pois não necessita que os receptores estejam localizados na posição da fonte virtual, porém necessita de um modelo de velocidade inicial para calcular a função de Green entre a superfície e a posição da fonte virtual (a primeira chegada) (WAPENAAR et al., 2014), seguido pelo processo para extrair a resposta ao impulso da área alvo.

Neste capítulo propomos uma nova metodologia para estimar os parâmetros físicos localmente em subsuperfície, que chamamos de inversão da forma de onda orientada ao alvo. Em nossa metodologia o conjunto de dados usado como *inputs* são os campos de onda ascendente e descendente gerados por fontes na superfície (ou em qualquer região acima da área alvo) e estimados no nível em profundidade próximo da região de interesse. Nossa metodologia não requer que o conjunto de dados usado como dados observados sejam dados locais, mas usamos os campos de onda descendente e ascendente na representação tipo-convolução para função de Green, dessa maneira evitamos o processo de redatumação para projetar fontes e receptores no nível do alvo.

Apesar de nossa metodologia não necessitar de dados sísmicos locais para estimar os parâmetros físicos de um alvo em subsuperfície, é necessário estimar os campos de onda descendente e ascendente próximo da área alvo. No entanto, é muito mais viável estimar esses campos de onda, do que realizar todo o processo de redatumação seguido por inversão local. Por exemplo, para dados sísmicos adquiridos com geometria de aquisição VSP-desviado, em vez de redatumar para a posição do poço horizontal em subsuperfície, as fontes localizadas na superfície, estimando assim o conjunto de dados como se fonte e receptores estivessem no nível do alvo, e em seguida usá-los como *inputs* em algum método de inversão local, basta realizar a decomposição dos campos de ondas registrados no poço horizontal, em campos de onda descendente e ascendente. Já para dados sísmicos de reflexão, com fontes e receptores na superfície, em vez de projetarmos tanto fonte quanto receptores no nível do alvo, através por exemplo da metodologia de redatumação Marchenko, precisamos apenas projetar no nível do alvo, a linha de receptores sem a necessidade de estimar as respostas ao impulso locais.

Para aplicações de nossa metodologia de inversão local em dados sísmicos de reflexão, com fontes e receptores localizados na superfície, acreditamos que seja viável estimar os campos de onda ascendente e descendente próximo da área alvo com a metodologia de redatumação Marchenko e JMI. No entanto, no presente momento utilizamos apenas a metodologia do JMI para estimar os campos de onda ascendente e descendente próximo da área alvo. Mostramos dois conjuntos de exemplos numéricos para testar nossa metodologia, um para dados sísmicos adquiridos com geometria de aquisição VSP-desviado e um segundo conjunto de exemplos, com dados sísmicos de reflexão, com fontes e receptores na superfície, onde utilizamos o JMI para estimar os campos de onda ascendente e descendente próximo da área alvo.

## 5.2 Modelagem

Nossa metodologia de inversão da forma de onda orientada ao alvo, é baseada no ajuste entre os campos de onda ascendente modelados e observados em um nível específico em profundidade, localizado próximo da região alvo. Para modelar os campos de onda ascendente usamos a versão 2D da equação baseada na representação da função de Green tipo-convolução, Equação (2.55). Usando a notação como em Berkhout (1982), assim como usamos no Capítulo 2, temos a seguinte formulação discretizada da Equação (2.55):

$$P_{l_r,j}^-(z_d, \omega; z_s) = h_{in} \sum_{l_{in}}^{L_{in}} G_{l_r l_{in}}(z_d, \omega; z_d) P_{l_{in},j}^{(obs)+}(z_d, \omega; z_s), \quad (5.1)$$

onde, como já indicamos anteriormente,  $P_{l_j}^\pm(z_d; z_s)$ , representam os campos de onda descendente - (com sobrescrito +) e ascendente (com sobrescrito -) incidentes no ponto da malha  $l$  na profundidade  $z_d$ , que foi gerado por uma fonte  $j$  no nível em profundidade  $z_s$  e  $G_{l_r l_{in}}(z_d, \omega, z_d)$  representa a resposta ao impulso (função de Green) espalhada em uma região localizada abaixo do nível em profundidade  $z_d$ , gerada por uma fonte dipolo localizada no ponto da malha  $l_{in}$  e observado no ponto da malha  $l_r$  no nível em profundidade  $z_d$ , no domínio da frequência-espço. Note que  $l_{in} = 1, 2, \dots, L_i$  representa os pontos de incidência dos campos de onda descendente considerados para estimar os campos de onda ascendente nos pontos  $l_r = 1, 2, \dots, L_r$ , onde  $L_{in}$  e  $L_r$  representam os limites superiores de pontos da malha considerados, com  $L_r \leq L_{in}$  e  $h_{in}(L_{in} - 1) \leq h_x(L_x^f - 1)$ , onde  $h_{in}$  representa a discretização considerada para os campos de ondas incidente descendente.

Para calcular a função de Green presente na Equação (5.1), usamos a Equação (2.37), onde o termo de fonte é uma fonte dipolo pontual localizada no ponto da malha  $l_{in}$  na coordenada lateral e  $z_d$  em profundidade, como se segue:

$$\mathbf{B}(\omega, \mathbf{p}) \mathbf{G}^{(l_{in})}(\omega, z_d) = \mathbf{f}^{(l_{in})}(z_d). \quad (5.2)$$

Na subseção 2.6.1 mostramos uma série de teste numéricos para testar a Equação (5.1) usando a Equação (5.2) para modelar a função de Green para cada ponto onde os campos de onda descendente foram observado. Observou-se nestes testes que os campos de onda ascendente estimados se ajustam muito bem, tanto em termo de fase quanto em termos de amplitude, com os campos de onda ascendente observados. Teoricamente esse ajuste é verdade para qualquer modelo, no entanto, deve-se levar em consideração que para estimar os campos de onda ascendente próximo da região alvo, a distância na coordenada lateral (para o caso 2D), situada no nível do alvo, dever ser suficientemente extensa para garantir que todos os campos de onda descendente foram observados e o número de pontos usando para observar estes campos de onda devem ser suficientemente denso.

### 5.3 Inversão da forma de onda orientada ao alvo

No capítulo anterior estimamos as respostas ao impulso de uma região específica da subsuperfície através de um esquema de inversão que recupera a resposta ao impulso da Equação (5.1), exclusivamente a partir dos campos de onda ascendente e descendente observados no nível em profundidade logo acima da região de interesse, sem qualquer conhecimento prévio sobre as propriedades físicas do meio de propagação das ondas na área alvo. As respostas ao impulso estimadas dessa maneira, tem exclusivamente informações da região de interesse, isto é, não tem nenhum tipo de informação sobre a região localizada acima (*overburden*) do nível em profundidade onde os campos de onda ascendente e descendente foram observados.

Considerando que a função de Green presente na Equação (5.1) tem exclusivamente informações da região alvo, podemos usar essa característica para estimar as propriedades físicas dessa região diretamente através do processo de estimar as funções de Green que explicam os campos de onda ascendente observados em um nível específico em subsuperfície. Levando isso em consideração, formulamos a inversão da forma de onda para estimar as propriedades físicas de uma região específica em subsuperfície, tal que as funções de Green estimadas a partir dessas propriedades físicas explicam os campos de onda ascendente observados no nível em profundidade logo acima dessa região alvo.

Considerando que os campos de onda ascendente e descendente são conhecidos em um nível em profundidade próximo da região alvo, denominado por  $z_d$ , formulamos nosso esquema de inversão da forma de onda orientado ao alvo, baseado no ajuste - no nível em profundidade do alvo - entre os campos de onda ascendente modelados e observados. Dessa maneira, a equação residual, que mede o ajuste entre os campos de onda ascendente observados e modelado, é dada pela seguinte expressão:

$$\begin{aligned} \Delta P_{l_r j}^{(\nu)}(z_d, \omega, \mathbf{p}; z_s) &= \left[ h_{in} \sum_{l_{in}}^{L_i} G_{l_r l_{in}}(z_d, \omega, \mathbf{p}; z_d) P_{l_{in} j}^{(obs)+}(z_d, \omega; z_s) \right] e^{-\nu \psi_{l_r j}} \\ &- P_{l_r j}^{(obs)-}(z_d, \omega; z_s) e^{-\nu \psi_{l_r j}^{(obs)}}, \end{aligned} \quad (5.3)$$

onde  $\nu$  tem valores 0 ou 1, com 0 para a representação clássica da função objetivo da FWI, onde leva-se em consideração fase e amplitude e 1 para a representação levando em consideração apenas as fase da forma de onda, pois o fator exponencial se torna uma normalização para cada para traço dos campos de onda,  $\psi_{l_r j}$  e  $\psi_{l_r j}^{(obs)}$ , são dados, respectivamente, por:

$$\psi_{l_r j} = \Re \left\{ \ln \left[ h_{in} \sum_{l_{in}}^{L_{in}} G_{l_r l_{in}}(z_d, \omega, \mathbf{p}; z_d) P_{l_{in} j}^{(obs)+}(z_d, \omega; z_s) \right] \right\}, \quad (5.4)$$

$$\psi_{l_r j}^{(obs)} = \Re \left\{ \ln \left[ P_{l_{in} j}^{(obs)-}(z_d, \omega; z_s) \right] \right\}. \quad (5.5)$$

Para encontrar o modelo que conduza o resíduo para zero, minimizamos a seguinte função objetivo vinculada: de norma  $l_2$ :

$$\mathcal{L}^{(\nu)}(\mathbf{p}) = \mathcal{L}_{l_2}^{(\nu)}(\mathbf{p}) + \gamma_{reg} \mathcal{L}_{reg}(\mathbf{p}). \quad (5.6)$$

Onde  $\mathcal{L}_{l_2}^{(\nu)}(\mathbf{p})$  representa o termo da função objetivo sem vínculo de norma  $l_2$ , dada por:

$$\mathcal{L}_{l_2}^{(\nu)}(\mathbf{p}) = \frac{1}{2} \sum_{\omega}^{\omega_{max}} \sum_j^{N_s} \sum_{l_r}^{L_r} \left[ \Delta P_{l_r j}^{(\nu)}(z_d, \omega, \mathbf{p}; z_s) \Delta P_{l_r j}^{(\nu)*}(z_d, \omega, \mathbf{p}; z_s) \right], \quad (5.7)$$

com  $\Delta P_{l_r j}^{(\nu)*}(z_d, \omega, \mathbf{p}; z_s)$  denotando o complexo conjugado do resíduo,  $\mathcal{L}_{reg}(\mathbf{p})$  representa o termo de regularização, aqui usamos o regularizador de Tikhonov, dado por:

$$\mathcal{L}_{reg}(\mathbf{p}) = \int_{\mathcal{D}_b} |\nabla p(\mathbf{r})|^2 d\mathbf{r} \quad (5.8)$$

e  $\gamma_{reg}$  é o fator de ponderação do regularizador.

Nesse problema usaremos o método de otimização local L-BFGS para encontrar o modelo de parâmetro que minimize da função objetivo. Então é necessário calcular o vetor gradiente da função objetivo em questão. calculando o vetor gradiente da função objetivo vinculada, Equação (5.6), a componente  $\xi$  do vetor gradiente é dado por:

$$\partial_{p_\xi} \mathcal{L}^{(\nu)}(\mathbf{p}) = \partial_{p_\xi} \mathcal{L}_{l_2}^{(\nu)}(\mathbf{p}) + \beta_{reg} \partial_{p_\xi} \mathcal{L}_{reg}(\mathbf{p}), \quad (5.9)$$

onde  $\partial_{p_\xi} \mathcal{L}_{l_2}^{(\nu)}(\mathbf{p})$  é dado por:

$$\begin{aligned} \partial_{p_\xi} \mathcal{L}_{l_2}^{(\nu)}(\mathbf{p}) &= \sum_{\omega}^{\omega_{max}} \sum_j^{N_s} \sum_{l_r}^{L_r} \Re \left\{ h_{in} \sum_{l_{in}}^{L_{in}} \partial_{p_\xi} G_{l_r l_{in}}(z_d, \omega, \mathbf{p}; z_d) P_{l_{in} j}^{(obs)+}(z_d, \omega; z_s) \right. \\ &\times \left. \left[ \Delta R_{l_r j}^{(\nu)1*} - \Delta R_{l_r j}^{(\nu)2} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (5.10)$$

com

$$\Delta R_{l_r j}^{(\nu)1} = \Delta P_{l_r j}^{(\nu)}(z_d, \omega, \mathbf{p}; z_s) e^{-\nu \psi_{l_r j}} \quad (5.11)$$

e

$$\Delta R_{l_r j}^{(\nu)2} = \nu \frac{\Re \left\{ \left[ h_{in} \sum_{l_{in}}^{L_{in}} G_{l_r l_{in}}(z_d, \omega, \mathbf{p}; z_d) P_{l_{in} j}^{(obs)+}(z_d, \omega; z_s) \right] e^{-\nu \psi_{l_r j}} \Delta P_{l_r j}^{(\nu)}(z_d, \omega, \mathbf{p}; z_s)^* \right\}}{h_{in} \sum_{l_{in}}^{L_{in}} G_{l_r l_{in}}(z_d, \omega, \mathbf{p}; z_d) P_{l_{in} j}^{(obs)+}(z_d, \omega; z_s)}. \quad (5.12)$$

Na seção anterior destacamos que função de Green presente na Equação (5.3) é modelada através da Equação (5.2). Pode-se calcular a derivada da função de Green em relação ao parâmetro físico presente na Equação (5.10) tomando a derivada da Equação (5.2) em relação ao parâmetro físico em questão, obtendo como resultado a seguinte equação:

$$\partial_{p_\xi} \mathbf{G}_{l_{in}}(\omega, \mathbf{p}; z_d) = -\mathbf{B}(\omega, \mathbf{p})^{-1} \left[ \partial_{p_\xi} \mathbf{B}(\omega, \mathbf{p}) \mathbf{G}^{(l_{in})}(\omega, \mathbf{p}; z_d) \right]. \quad (5.13)$$

Inserindo a Equação (5.13) na Equação (5.10), obtém-se a seguinte equação para componente  $\xi$  do gradiente da função objetivo sem vínculo:

$$\begin{aligned} \partial_{p_\xi} \mathcal{L}_{l_2}^{(\nu)}(\mathbf{p}) &= - \sum_{\omega}^{\omega_{max}} \sum_j^{N_s} \Re \left\{ \left[ h_{in} \sum_{l_{in}}^{L_{in}} \mathbf{G}^{(l_{in})}(\omega, \mathbf{p}; z_d)^T P_{l_{in} j}^{(obs)+}(z_d, \omega; z_s) \right] \right. \\ &\times \left. \partial_{p_{x_i}} \mathbf{B}(\omega, \mathbf{p})^T \mathbf{B}(\omega, \mathbf{p})^{-1} \left( \Delta \hat{\mathbf{R}}_j^{1*} - \Delta \hat{\mathbf{R}}_j^2 \right) \right\}, \end{aligned} \quad (5.14)$$

onde  $\hat{\cdot}$  indica que os resíduos foram aumentados para se ajustar a função de Green que agora é calculada em todo o modelo e consideramos que  $(\mathbf{B}^{-1})^T = \mathbf{B}^{-1}$  (a menos das condições de bordas).



## 5.4 Exemplos numéricos

Nossa metodologia de inversão da forma de onda orientada ao alvo foi avaliada numericamente através de dois conjuntos de exemplos numéricos acústicos. No primeiro conjunto consideramos uma geometria de aquisição VSP-desviado, com o poço horizontal (onde se encontra o arranjo de receptores) localizado logo acima da região alvo. O segundo conjunto de exemplos foram realizados usando um conjunto de dados sísmicos de superfície, com fontes e receptores localizados na superfície, usando o JMI para estimar os campos de ondas descendente e ascendente no nível do alvo em profundidade para serem usados como dados observados em nossa metodologia.

Ressaltamos, que assim como nos testes numéricos realizados nos capítulos anteriores da presente tese, a implementação atual do algoritmos de modelagens FWMod e de inversão conjunta JMI, usados nos testes numéricos apresentados aqui, não levam em consideração a dependência angular dos operadores de espalhamento.

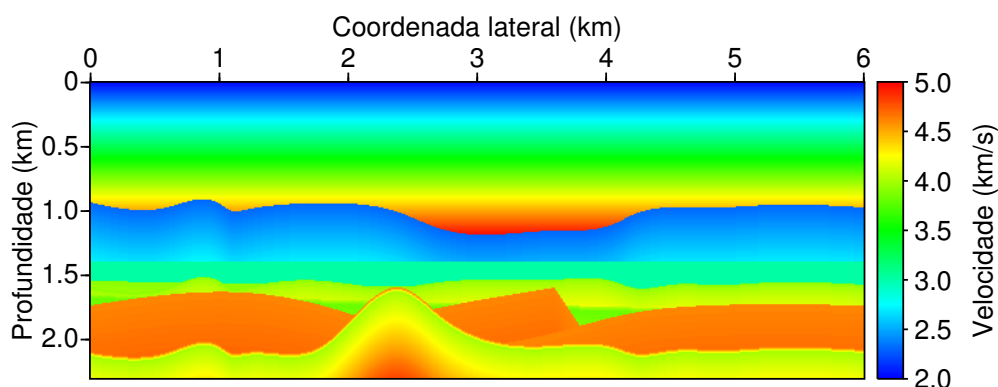
### 5.4.1 Exemplos com geometria de aquisição VSP-desviado

Para os exemplos numéricos mostrados nesta subseção, usamos  $\nu = 1$ , ou seja, estamos normalizando cada traço dos campos de onda usados como *inputs* em nosso esquema de inversão, salvo quando dito o contrário, e  $\gamma_{reg} = 0$ , ou seja, sem regularizador, salvo quando dito o contrário.

Começamos os testes numéricos realizados no primeiro conjunto de exemplos, usando o modelo acústico mostrado na Figura 5.1, que tem 6.0 km de comprimento na coordenada lateral e 2.3 km em profundidade, para modelar o conjunto de dados sísmicos com aquisição VSP-desviado. A área de interesse para esse exemplo é a região localizada abaixo de 1.5 km em profundidade, mostrada na Figura 5.3a. O conjunto de dados (campos de onda ascendente e descendente), usado como dados observados, foram estimados através de uma decomposição acústica dos campos de onda em campos de onda descendente e ascendente, usando o campo de pressão e a componente vertical do campo da velocidade da partícula registrados em 1.5 km em profundidade e modelados com o auxílio do algoritmo *Finite-difference modeling experiments for seismic interferometry* (THORBECKE; DRAGANOV, 2011) (*Software* livre introduzido no Capítulo 2). A fonte usada foi uma fonte monopolo compressional, usando como *wavelet* o pulso Ricker com 13.0 Hz de frequência pico. Foram usadas um total de 151 fontes localizadas ao longo da coordenada lateral com espaçamento de 0.04 km e em 0.05 km em profundidade e um arranjo com 601 de receptores, com espaçamento de 0.01 km, localizados em 1.5 km em profundidade.

A Figura 5.2 mostra três *shot gathers* dos campos de onda observados com um arranjo de 601 receptores localizados no poço horizontal em 1.5 km em profundidade, gerados pela mesma fonte localizada em três posições diferentes na coordenada lateral, da esquerda para direita, em 0.0 km, 3.0 km e 6.0 km, respectivamente. Nas Figuras 5.2a e 5.2b são mostrados os *shot gathers* dos campos de onda descendente e ascendente, respectivamente.

Figura 5.1 – Modelo de velocidade usado para gerar os campos de onda descendente e ascendente ao longo da coordenada lateral e em 1.5 km em profundidade.

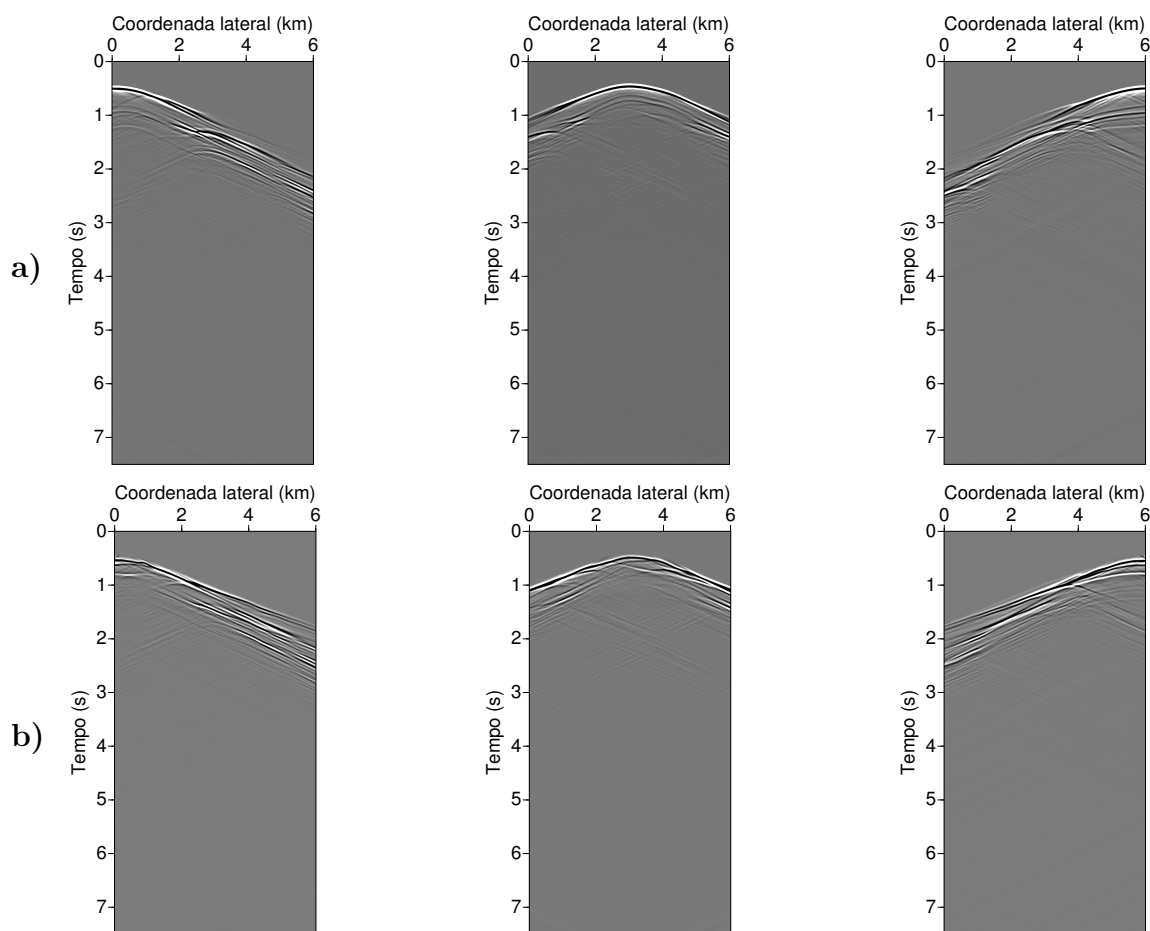


Fonte: Autor.

Como primeiro teste numérico, realizamos a inversão da forma de onda orientada ao alvo para duas bandas de frequências distintas, uma de 5 a 30 Hz, e outra de 10 a 30 Hz, e partindo do mesmo modelo de velocidade inicial, mostrado na Figura 5.3b, para ambas as bandas de frequências. A Figura 5.3c mostra o resultado da inversão local após a inversão de 26 frequências invertidas sucessivamente, de 5 a 30 Hz, com incremento de 1 Hz, considerando no máximo 25 iterações para cada frequência invertida. Observa-se que o resultado da inversão apresenta uma boa estimativa do modelo de velocidade, comparado com o modelo de velocidade verdadeiro, Figura 5.3a, e apesar de que a resolução na região do sal diminua em relação ao restante do modelo invertido, podemos dizer que o modelo estimado apresenta uma boa resolução. A Figura 5.3d mostra o resultado da inversão após a inversão de 21 frequências invertidas sucessivamente, de 10 a 30 Hz, com incremento de 1 Hz, considerando no máximo 25 iterações para cada frequência invertida. O resultado da inversão partindo de 10 Hz, apesar de preservar as estruturas do modelo, apresenta menor precisão para estimar a parte profunda do modelo em relação ao modelo invertido partindo de 5 Hz. Isso pode ser confirmado de forma quantitativa nas informações de poço mostradas na Figura 5.4, que mostra as informações de três poços localizados em 0.85 km (Figura 5.4a), 2.40 km (Figura 5.4b) e 3.80 km (Figura 5.4c) na coordenada lateral. Apesar de apresentar essa diferença na parte profunda do modelo estimado, entre os resultados das inversões partindo de 5 Hz e 10 Hz, de modo geral observamos que os resultados das inversões apresentam uma boa resolução, demonstrando assim a eficácia da inversão da forma de onda orientada ao alvo para a geometria de aquisição VSP-desviado.

A fim de avaliar a sensibilidade de nossa metodologia em relação ao modelo inicial, realizamos a inversão usando as mesmas bandas de frequências utilizadas no teste anterior, no entanto, partindo de um modelo de velocidade inicial mais próximo do modelo verdadeiro, mostrado na Figura 5.5a. As Figuras 5.5b e 5.5c mostram os resultados da inversão para as bandas de frequências de 5 a 30 Hz e 10 a 30 Hz, respectivamente. Assim como no teste anterior, podemos observar que os modelos estimados para ambas as bandas de frequências apresentam uma resolução melhor do que a resolução do teste anterior, como era esperado, uma vez que partimos de um modelo de velocidade mais próximo do verdadeiro.

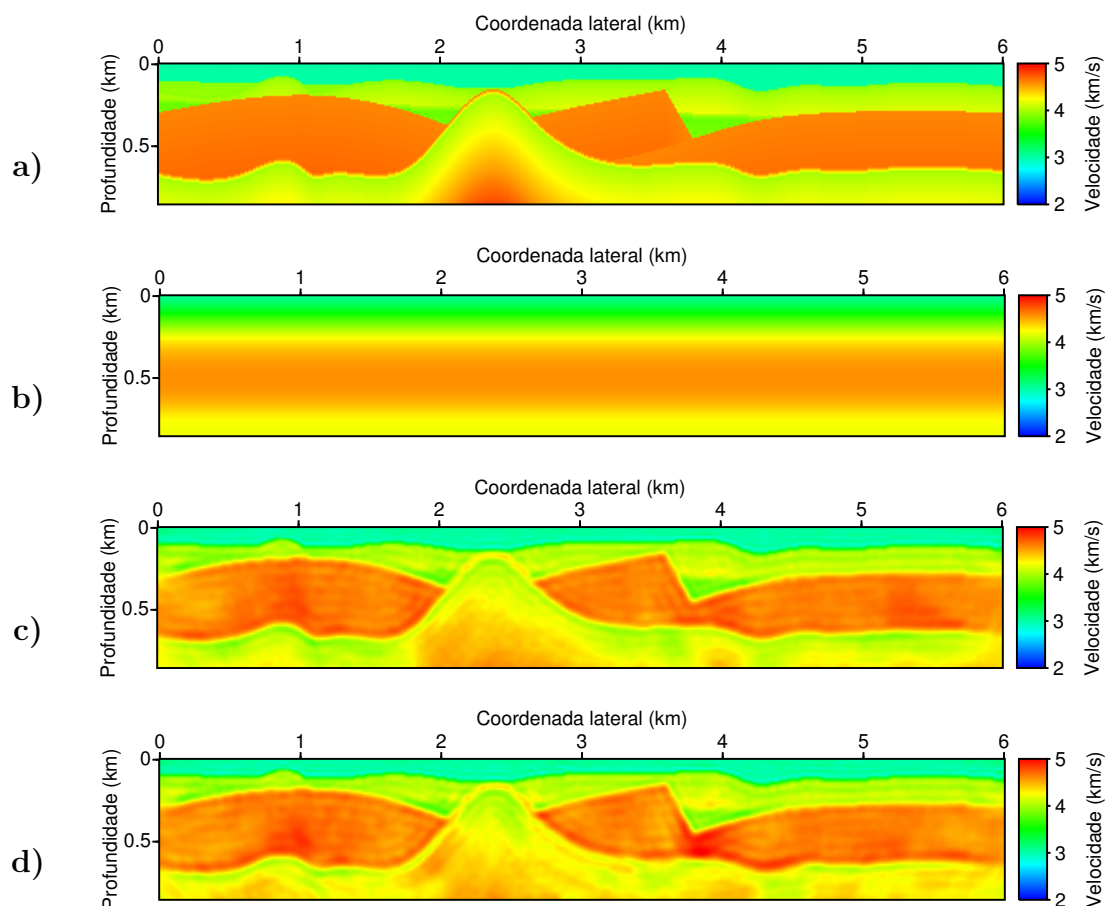
Figura 5.2 – Campos de onda descendente e ascendente observados com um arranjo de 601 receptores, com espaçamento de 0.01 km, e em 1.5 km em profundidade, gerado pela mesma fonte localizada em três posições diferentes na coordenada lateral, da esquerda para a direita, localizadas em 0.0 km, 3.0 km e 6.0 km, respectivamente, e 0.05 km em profundidade. a) Campos de ondas descendente. b) Campos de ondas ascendente.



Fonte: Autor.

Uma das motivações para desenvolvermos essa metodologia de inversão da forma de onda orientada ao alvo através do ajuste dos campos de ondas ascendente, era evitar o processo de estimar um conjunto de dado local (conjunto de dado apenas com informações da região de interesse) para usar como *input* para em método de inversão local. Sendo assim comparamos o resultado de nossa metodologia com a inversão da forma de onda clássica, usando como dados observados as resposta ao impulso estimadas com o esquema de inversão esparsa desenvolvido no capítulo anterior, mostrada na Figura 5.6a, e as respostas ao impulso estimadas via formalismo de correlação-cruzada (MEHTA et al., 2007), mostrada na Figura 5.6b. Note que os *inputs* para estimar as resposta ao impulso da área alvo, para ambos os formalismos, são os *inputs* usados diretamente em nossa metodologia da inversão orientada ao alvo, isto é, os campos de ondas descendente e ascendente.

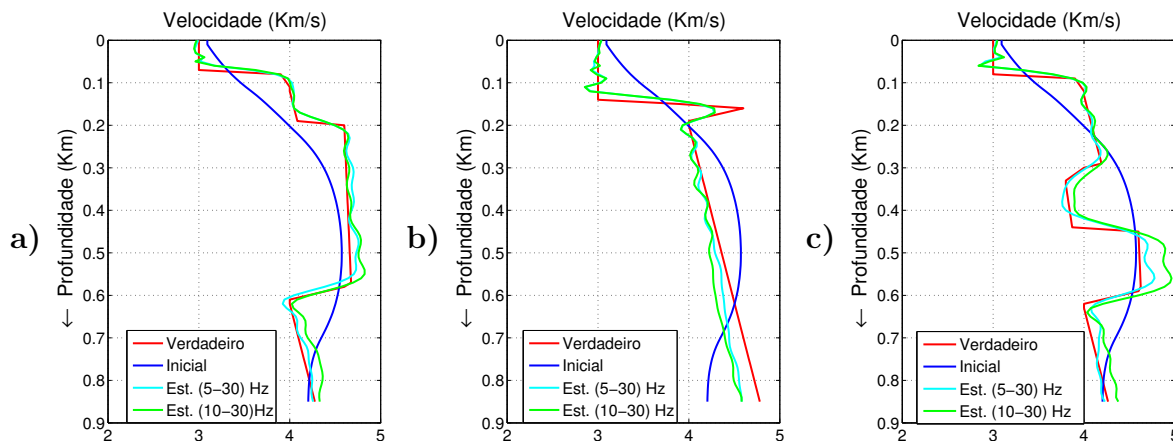
Figura 5.3 – Modelo de velocidade da área alvo. a) Área de interesse do modelo de velocidade verdadeiro. b) Modelo de velocidade inicial para inversão da forma de onda orientada ao alvo. c) Resultado da inversão da forma de onda orientada ao alvo, após a inversão de 26 frequências invertidas sucessivamente, de 5.0 a 30.0 Hz, com incremento de 1.0 Hz, com 25 iterações para cada frequência invertida. d) Resultado da inversão da forma de onda orientada ao alvo, após a inversão de 21 frequências invertidas sucessivamente, de 10.0 a 30.0 Hz, com incremento de 1.0 Hz, com 25 iterações para cada frequência invertida.



Fonte: Autor.

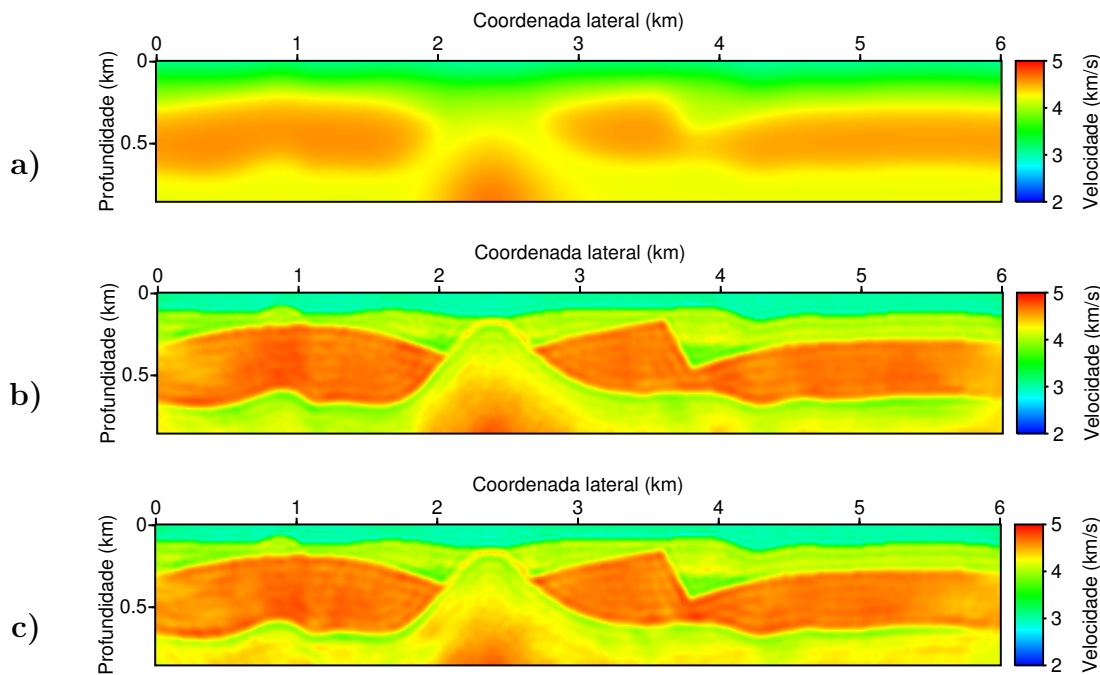
Para realizar a inversão da forma de onda clássica usando como *inputs* as respostas ao impulso estimadas, usamos a mesma banda de frequência (de 5 a 30 Hz), mesmo número de iterações (no máximo 25 iterações para cada frequência invertidas sucessivamente) e mesmo modelo de velocidade inicial usados para obter o resultado da inversão da forma de onda orientada ao alvo mostrada na Figura 5.5b. No entanto, usamos um regularizador de norma  $l_2$  com  $\gamma_{reg} = 0.005$  para estabilizar a inversão usando as respostas ao impulso estimadas localmente. Os resultados são mostrados nas Figuras 5.7b e 5.7c, usando como *inputs* as resposta ao impulso estimadas com o esquema de inversão esparsa e via formalismo de correlação-cruzada, respectivamente.

Figura 5.4 – Informações de poços do resultado da inversão da forma de onda orientada ao alvo usando bandas de frequências distintas. a) Poço localizado em 0.85 km na coordenada lateral. b) Poço localizado em 2.40 km na coordenada lateral. c) Poço localizado em 3.80 km na coordenada lateral.



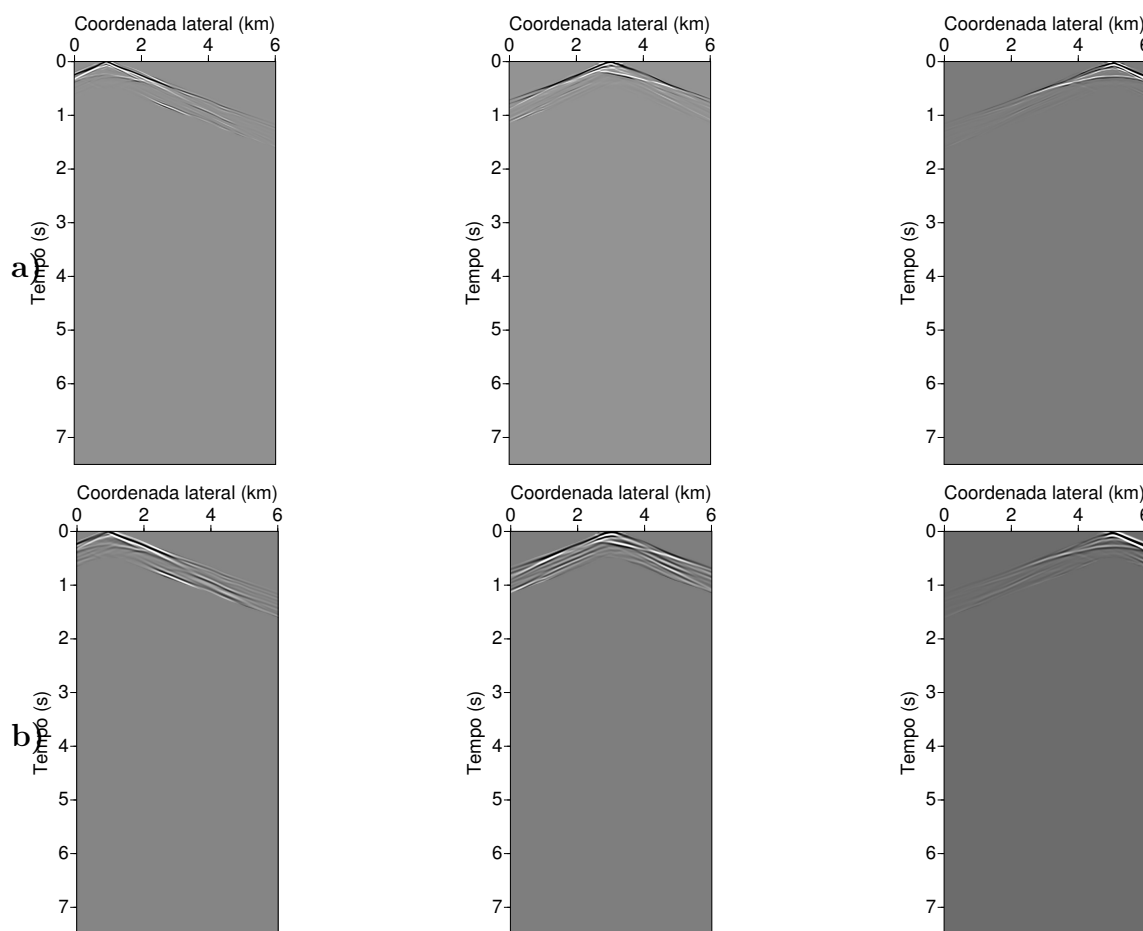
Fonte: Autor.

Figura 5.5 – Modelo de velocidade da área alvo. a) Modelo de velocidade inicial para inversão da forma de onda orientada ao alvo. b) Resultado da inversão da forma de onda orientada ao alvo, após a inversão de 26 frequências invertidas sucessivamente, de 5.0 a 30.0 Hz, com incremento de 1.0 Hz, com 25 iterações para cada frequência invertida. c) Resultado da inversão da forma de onda orientada ao alvo, após a inversão de 21 frequências invertidas sucessivamente, de 10.0 a 30.0 Hz, com incremento de 1.0 Hz, com 25 iterações para cada frequência invertida.



Fonte: Autor.

Figura 5.6 – Respostas ao impulso estimadas da área alvo de três fontes virtuais localizadas, da esquerda para direita, em 1.0 km, 3.0 km e 5.0 km, na coordenada lateral e no nível do alvo em profundidade (1.5 km). a) Resposta ao impulso estimadas com o esquema de inversão esparsa desenvolvido no capítulo anterior. b) Resposta ao impulso estimada via correlação-cruzada.

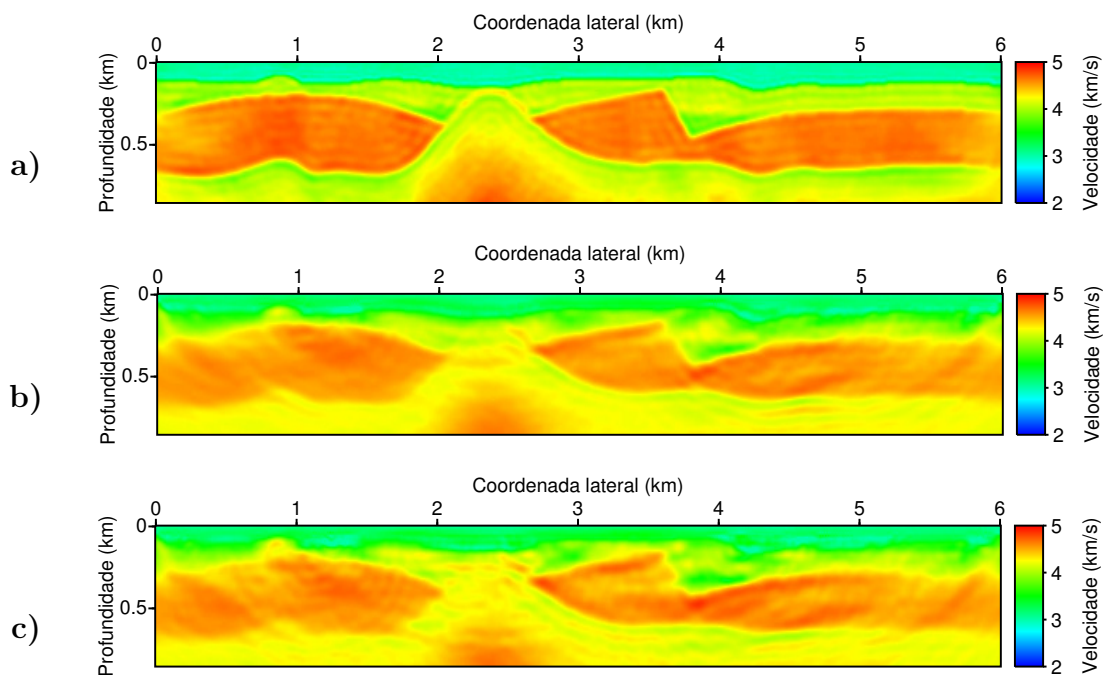


Fonte: Autor.

Podemos observar desses resultados, que apesar do resultado da inversão da forma de onda clássica usando como *inputs* as respostas ao impulsos estimadas como o esquema de inversão desenvolvido no capítulo anterior apresentar uma melhor resolução em relação ao resultado da inversão da forma de onda clássica usando como *inputs* as respostas ao impulsos estimadas via formalismo de correlação-cruzada, o resultado de nossa metodologia de inversão da forma de onda orientada ao alvo, mostrado na Figuras 5.7a, apresenta uma resolução superior a ambas as inversões clássicas.

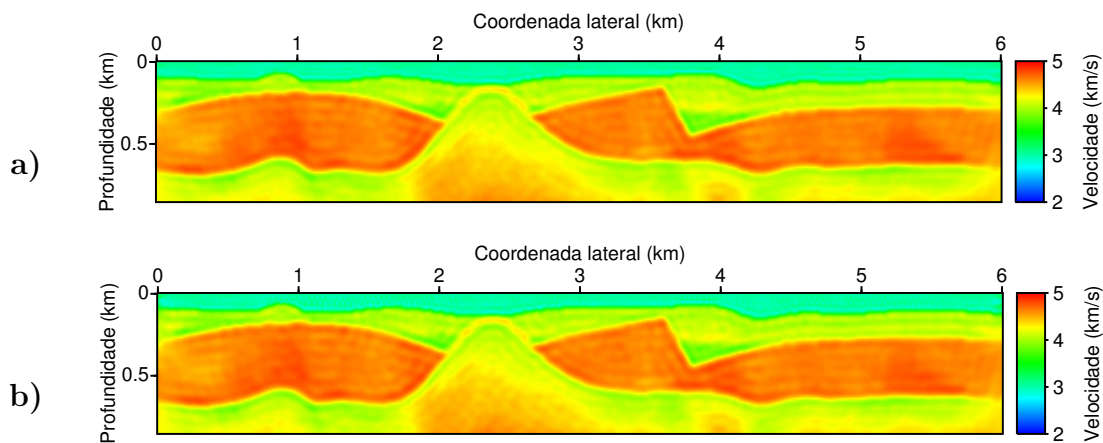
Com objetivo de avaliar a influência da densidade de amostragem do número de pontos de observações dos campos de onda descendente utilizados para estimar os campos de onda ascendente no resultado da inversão da forma de onda orientada ao alvo, realizamos um conjunto de inversões com diferentes fatores de decimação para o conjunto de dado usado nos testes anteriores com a banda de frequência de 5 a 30 Hz, juntamente com o modelo de velocidade inicial mostrado na Figura 5.3b.

Figura 5.7 – Resultados da inversão da forma de onda, após a inversão de 26 frequências invertidas sucessivamente, de 5.0 a 30.0 Hz, com incremento de 1.0 Hz, com 25 iterações para cada frequência invertida. a) Resultado da inversão da forma de onda orientada ao alvo. b) Resultado da inversão da forma de onda clássica, usando como *input* as respostas ao impulso estimadas via esquema de inversão esparsa. b) Resultado da inversão da forma de onda clássica, usando como *input* as respostas ao impulso estimadas via formalismo de correlação-cruzada.



Fonte: Autor.

Figura 5.8 – Resultado da inversão da forma de onda orientada ao alvo com decimação, após a inversão de 26 frequências invertidas sucessivamente, de 5.0 a 30.0 Hz, com incremento de 1.0 Hz, considerando no máximo 25 iterações para cada frequência invertida. a) Fator de decimação 2 (301 pontos de observações). b) Fator de decimação 4 (151 pontos de observações).



Fonte: Autor.

A Figura 5.8 mostra o resultado da inversão da forma de onda orientado ao alvo para 2 fatores de decimação, de cima para baixo, fator 2 e fator 4, respectivamente, após a inversão de 26 frequências invertidas sucessivamente, de 5.0 a 30.0 Hz, com incremento de 1.0 Hz, considerando no máximo 25 iterações para cada frequência invertida. Observamos que o resultado da inversão praticamente não é alterado com a decimação,

Outra motivação para desenvolvermos nossa metodologia é a possibilidade de obtermos os parâmetros físicos localmente com maior resolução que a inversão da forma de onda clássica, especialmente na parte profunda do modelo. Para mostrar que nossa metodologia é mais eficiente do que a inversão da forma de onda clássica para estimar os parâmetros na parte profunda do modelo, usamos o conjunto de dados modelado a partir do modelo de velocidade extraído do modelo Marmousi2, mostrado na Figura 4.12, com 9.0 km de distância na coordenada lateral e 3.5 km em profundidade. O conjunto de dados observados foram modelados com algoritmo de modelagem 2D, baseado no esquema de diferenças-finitas, disponível no *Software* livre introduzido na Seção 2.

O nível de interesse em subsuperfície, é considerado em 2.6 km ( $z_d = 2.6$  km) em profundidade, e a área alvo é a região situada neste nível, compreendida entre 4.0 e 8.0 km na coordenada lateral, destacado pelo retângulo na Figura 4.12. Foram usadas um total de 151 fontes, igualmente espaçadas, com um espaçamento de 0.04 km, localizadas em 0.05 km em profundidade e distribuídas entre 3.0 km e 9.0 km na coordenada lateral (representada pela linha vermelha na superfície da Figura 4.12). Foram usados um total de 301 receptores, igualmente espaçados, com um espaçamento de 0.02 km, localizados no poço horizontal (ilustrado pela curva contínua na Figura 4.12) em 2.550 km em profundidade e distribuídos entre 3.0 km e 9.0 km na coordenada lateral. (representados pelos triângulos em vermelho na Figura 4.12) Para essa modelagem, usamos um pulso Ricker como *wavelet* com 7.5 Hz de frequência pico.

Os campos de onda ascendente e descendente, foram estimados através da extração dos campos de pressão e velocidade da partícula no nível alvo, seguido de uma decomposição acústica dos campos de ondas. As Figuras 5.9 e 5.10, mostram os campos de onda descendente e ascendente estimados no nível do alvo, respectivamente, de fontes posicionadas na superfície, da esquerda para direita, em  $x = 4.0$  km,  $x = 6.0$  km e  $x = 8.0$  km, respectivamente.

Como modelo inicial para este exemplo, usamos a corresponde região da área alvo extraída do modelo de velocidade inicial usado na FWI clássica na subseção 3.3.1.3, mostrado na Figura 3.8b. O resultado a inversão é mostrado na Figura 3.8d, onde foram invertidas 31 frequências sucessivamente, com incremento de 0.5 Hz e partindo de 5.0 Hz até 21 Hz, considerando no máximo 25 iterações para cada frequência invertida.

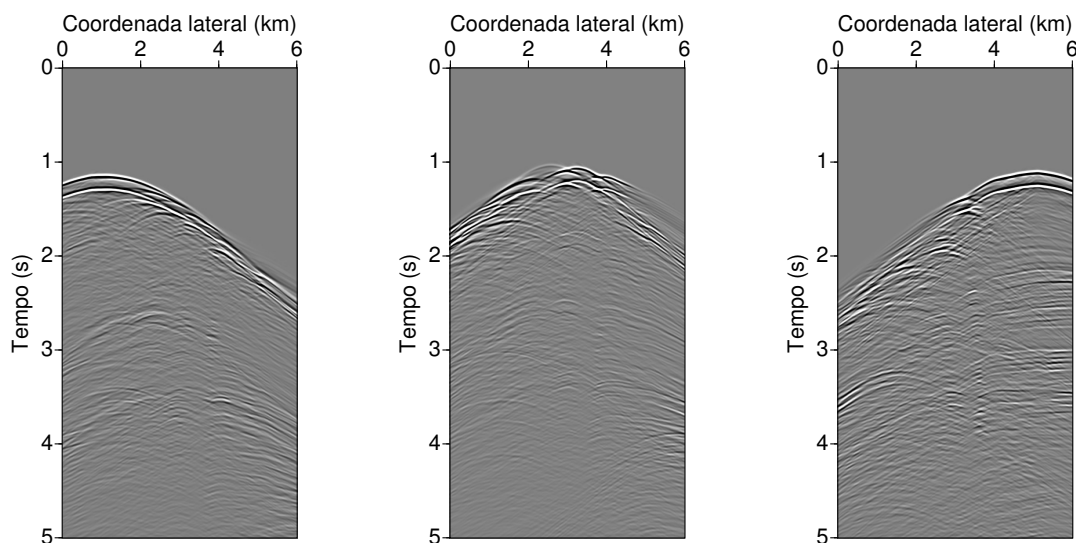
#### 5.4.2 Exemplos para dados sísmicos de superfície

Para os exemplos numéricos mostrados nesta subseção usamos  $\nu = 1$  e o regularizador de norma  $l_2$  com  $\gamma_{reg} = 0.005$  para estabilizar a inversão.

Iniciamos o segundo conjunto de exemplos numéricos usando o modelo acústico mostrado

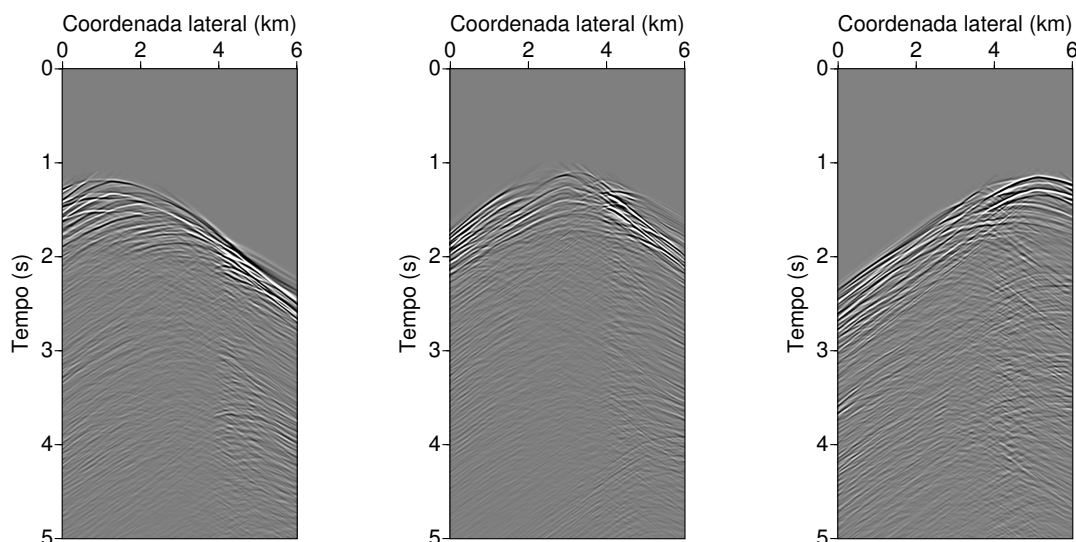


Figura 5.9 – Campos de onda descendente observados em 2.550 km em profundidade, gerados por fontes posicionadas na superfície, da esquerda para direita, em  $x = 4.0$  km,  $x = 6.0$  km e  $x = 8.0$  km, respectivamente.



Fonte: Autor.

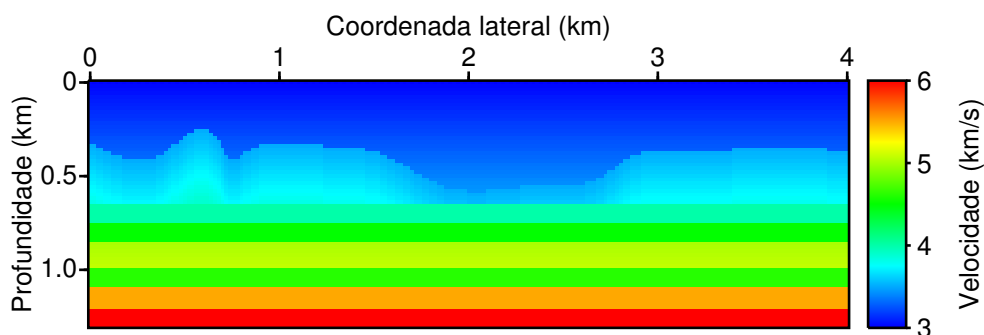
Figura 5.10 – Campos de onda ascendente observados em 2.550 km em profundidade, gerados por fontes posicionadas na superfície, da esquerda para direita, em  $x = 4.0$  km,  $x = 6.0$  km e  $x = 8.0$  km, respectivamente.



Fonte: Autor.

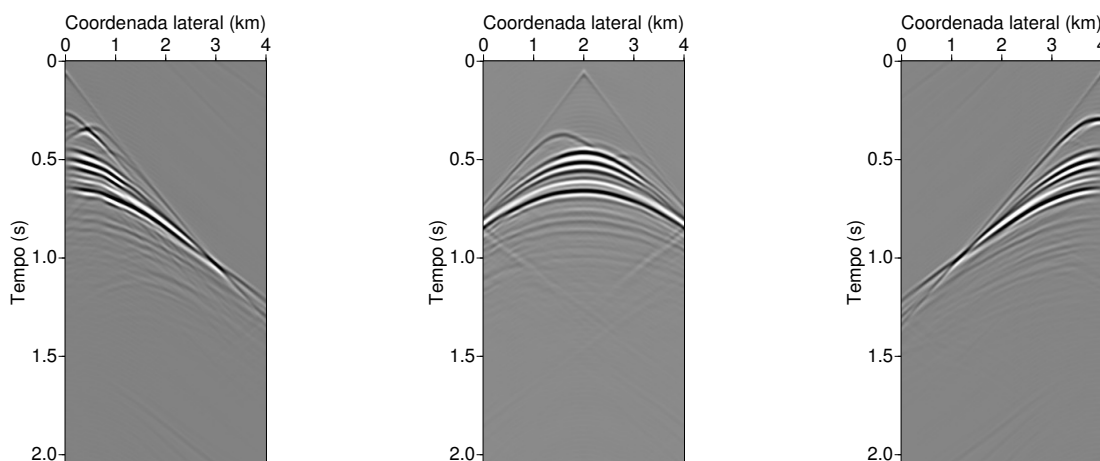
na Figura 5.11, que tem 4.0 km de comprimento na coordenada lateral e 1.3 km em profundidade, para modelar o conjunto de dados sísmicos com fontes e receptores localizados na superfície. Para esse modelo a área de interesse é a região localizada abaixo de 0.74 km em profundidade, mostrado na Figura 5.23a. O conjunto de dados para este segundo exemplo, usado como dados

Figura 5.11 – Modelo de velocidade verdadeiro usado para modelar o conjunto de dado com o algoritmo de modelagem FWMod.



Fonte: Autor.

Figura 5.12 – *Shot gathers* dos campos de onda modelados com algoritmo de modelagem FWMod, gerado pela mesma fonte localizada na superfície e em três posições diferentes na coordenada lateral, da esquerda para a direita, localizadas em 0.0 km, 2.0 km e 4.0 km, respectivamente, e com um arranjo de 201 receptores na superfície ao longo da coordenada lateral com espaçamento de 0.02 km.



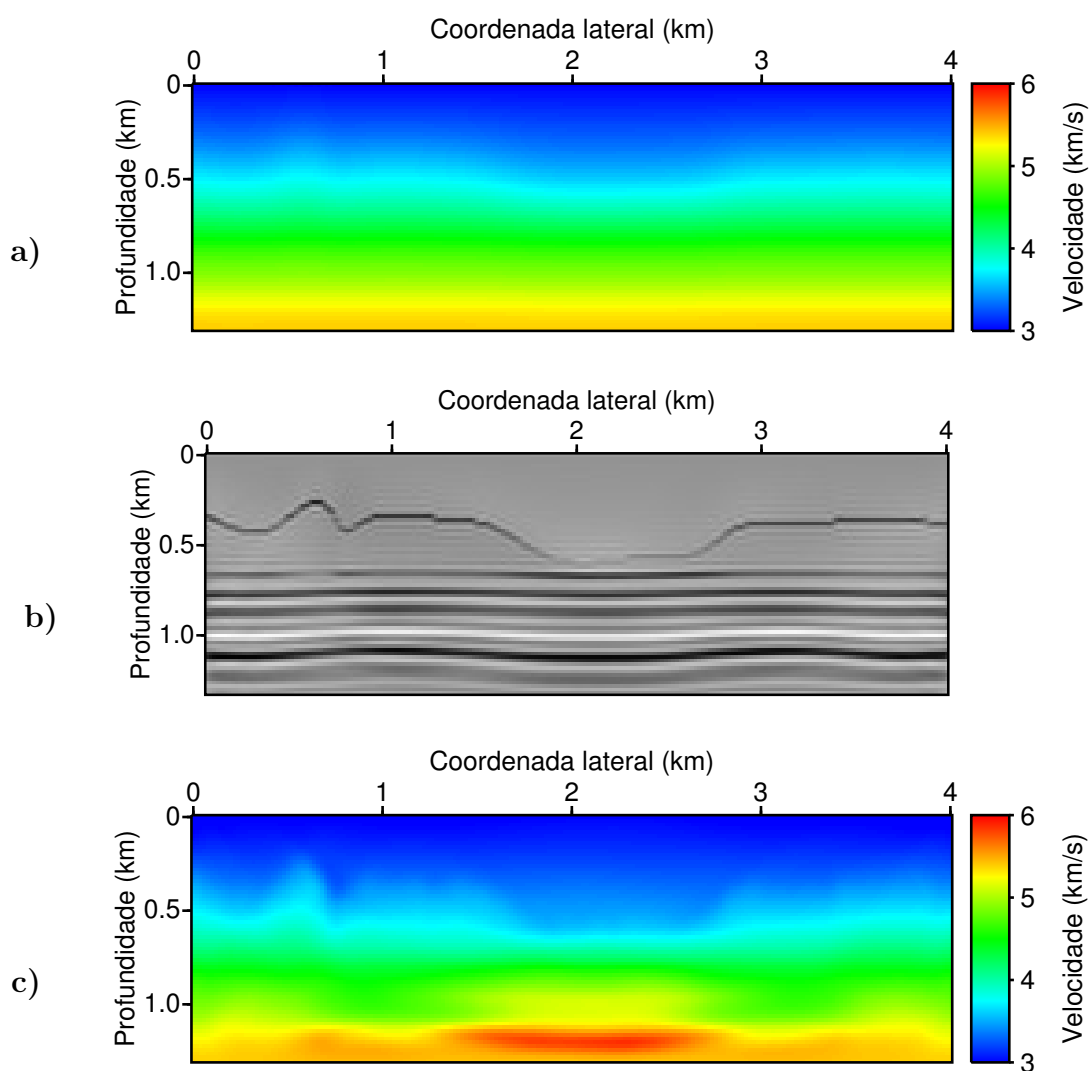
Fonte: Autor.

observados, foram modelados com o algoritmo de modelagem FWMod com um total de 201 fontes - fonte monopolo compressional e usando como *wavelet* o pulso Ricker com 20.0 Hz de frequência pico - e um arranjo com 201 receptores, ambos localizados ao longo da coordenada lateral com espaçamento de 0.02 km e na superfície.

A Figura 5.12 mostra três *shot gathers* dos campos de onda modelados com algoritmo de modelagem FWMod gerado pela mesma fonte localizada na superfície e em três posições diferentes na coordenada lateral, da esquerda para a direita, localizadas em 0.0 km, 2.0 km e 4.0 km, respectivamente, e com um arranjo com 201 receptores na superfície ao longo da coordenada lateral, com espaçamento de 0.02 km.

O objetivo neste segundo conjunto de exemplos numéricos é mostrar a aplicação da

Figura 5.13 – a) Modelo de velocidade inicial usada com *input* para o JMI. b) Imagem migrada com JMI. c) Modelo de velocidade estimado com JMI

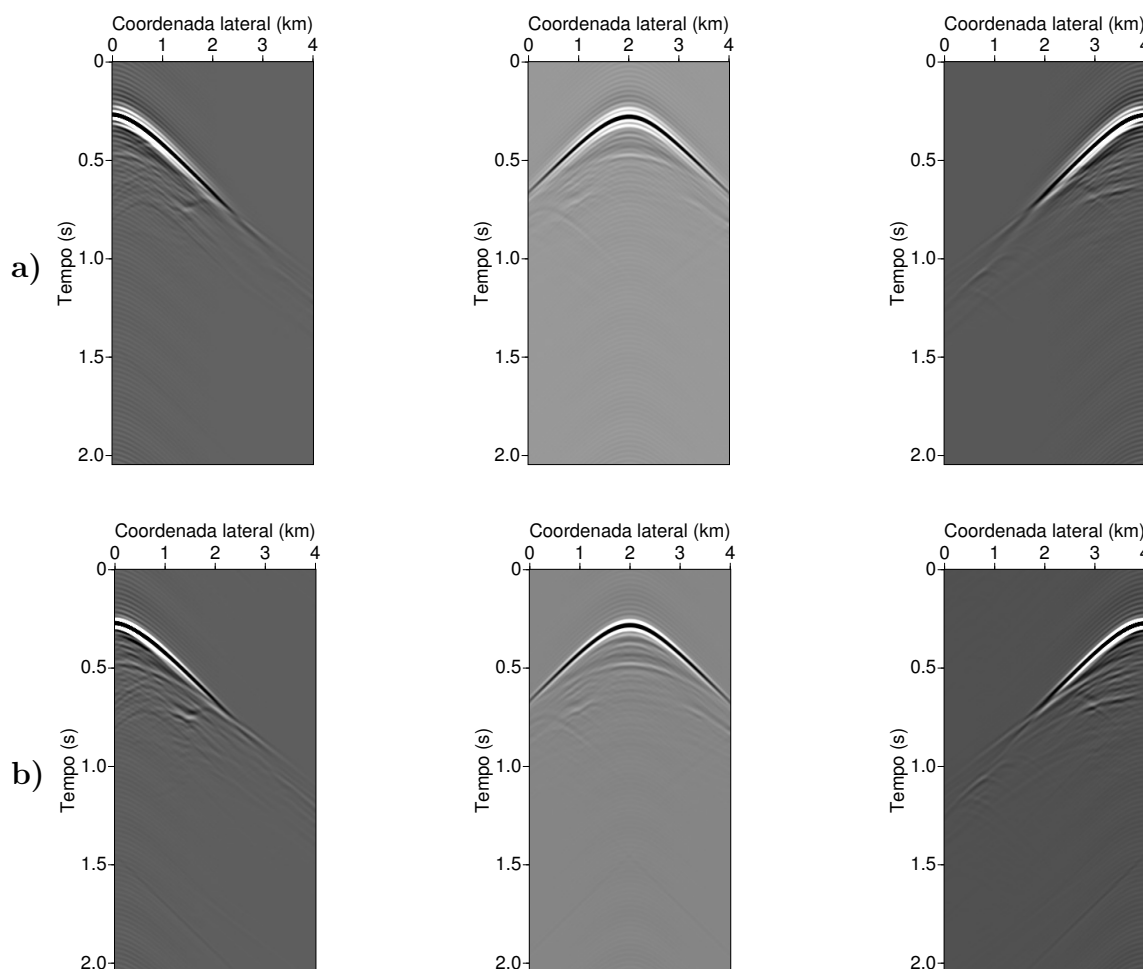


Fonte: Autor.

inversão da forma de onda orientado ao alvo a partir de dados sísmicos de reflexão com fontes e receptores localizados na superfície. Com esse objetivo, dividimos estes exemplos numéricos em dois passos. O primeiro passo é dedica a estimar os campos de onda ascendente e descendente no nível do alvo (0.74 km em profundidade) a partir de dados sísmicos de reflexão, gerados e registrados na superfície. Para realizar esse primeiro passo utilizamos o algoritmo de inversão conjunta JMI, pois uma das características desse algoritmo é estimar os campos de onda ascendente e descendente para cada nível em profundidade para obter a imagem migrada e atualizar o modelo de velocidade inicial. O segundo passo é dedicado a estimar o modelo de velocidade da área alvo com a inversão da forma de onda orientada ao alvo usando como dados observados os campos de onda ascendente e descendente estimado com o JMI.

As Figuras 5.13b e 5.13c mostram a imagem migrada e o modelo de velocidade estimado, respectivamente, ambos com o algoritmo de inversão conjunta JMI usando como modelo inicial o

Figura 5.14 – *Shot gathers* dos campos de onda descendente estimados em 0.74 km em profundidade e em três posições diferentes na coordenada lateral, da esquerda para a direita, localizadas em 0.0 km, 2.0 km e 4.0 km, respectivamente, para as figuras a) e b). a) *Shot gathers* estimados com JMI a partir do conjunto de dados gerado e registrado na superfície. b) *Shot gathers* modelados com FWMod com fontes na superfície e receptores em 0.74 km em profundidade.

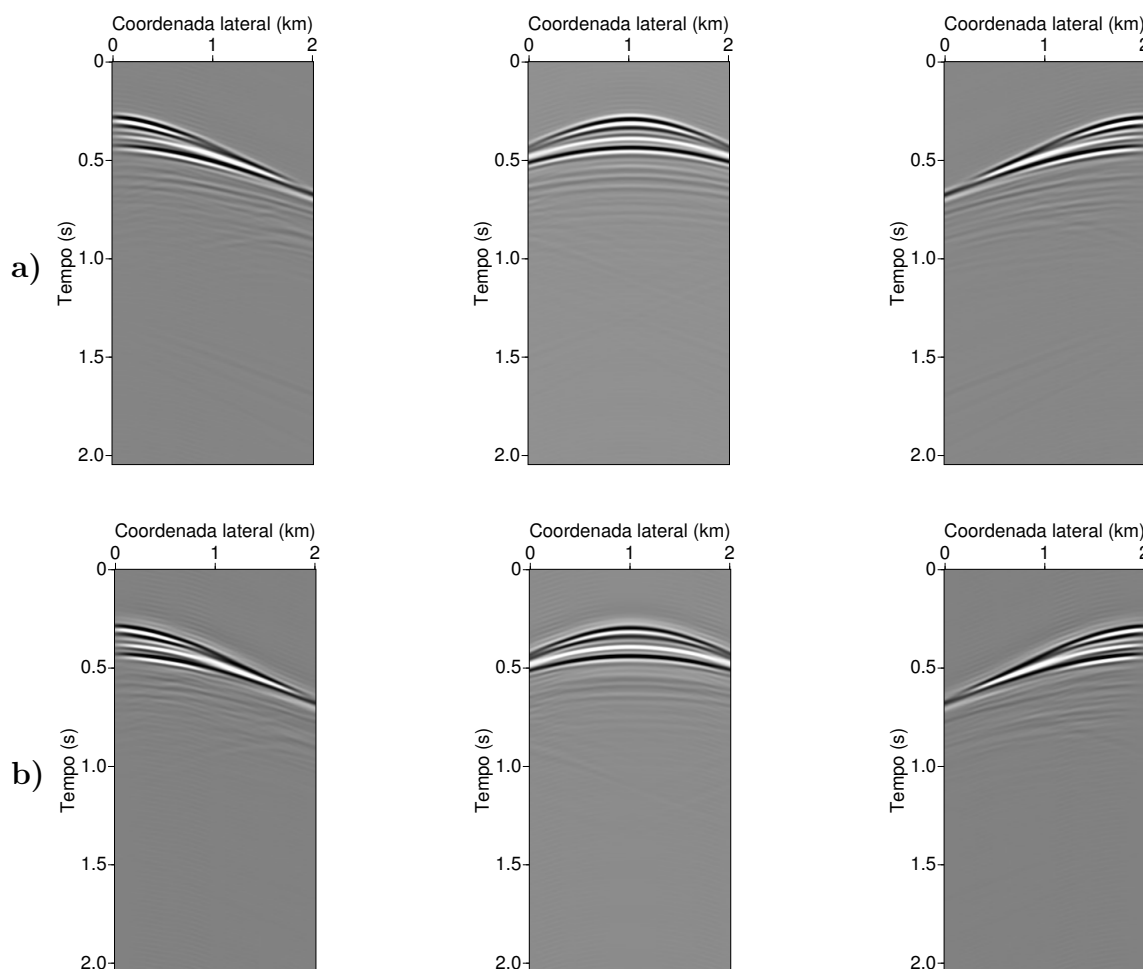


Fonte: Autor.

modelo de velocidade mostrado na Figura 5.13a. Estes *outputs* do JMI foram estimados com uma banda de frequência de 5 a 40 Hz e um total de 45 iterações. Do ponto de vista estrutural pode-se reconhecer que imagem migrada corresponde as estruturas do modelo, mas o valor do modelo de velocidade estimado foi bastante suave, de tal forma que não se pode reconhecer as diferenças de impedâncias do modelo facilmente, principalmente na parte profunda do mesmo. Além de uma imagem estrutural e de um modelo de velocidade estimado, o JMI tem como *output* os campos de onda ascendente e descendente estimados em todos os níveis em profundidade.

A Figura 5.14a mostra três *shot gathers* (com fontes localizadas em três posições diferentes na coordenada lateral, da esquerda para a direita, localizadas em 0.0 km, 2.0 km e 4.0 km, respectivamente) dos campos de onda descendente estimados através do JMI em 201 pontos ao longo da coordenada lateral com espaçamento de 0.02 km e em 0.74 km em profundidade.

Figura 5.15 – *Shot gathers* dos campos de onda ascendente estimados em 0.74 km em profundidade e em três posições diferentes na coordenada lateral, da esquerda para a direita, localizadas em 0.0 km, 2.0 km e 4.0 km, respectivamente, para as figuras a) e b). a) *Shot gathers* estimados com JMI a partir do conjunto de dado gerado e registrado na superfície. b) *Shot gathers* modelados com FWMod com fontes na superfície e receptores em 0.74 km em profundidade.

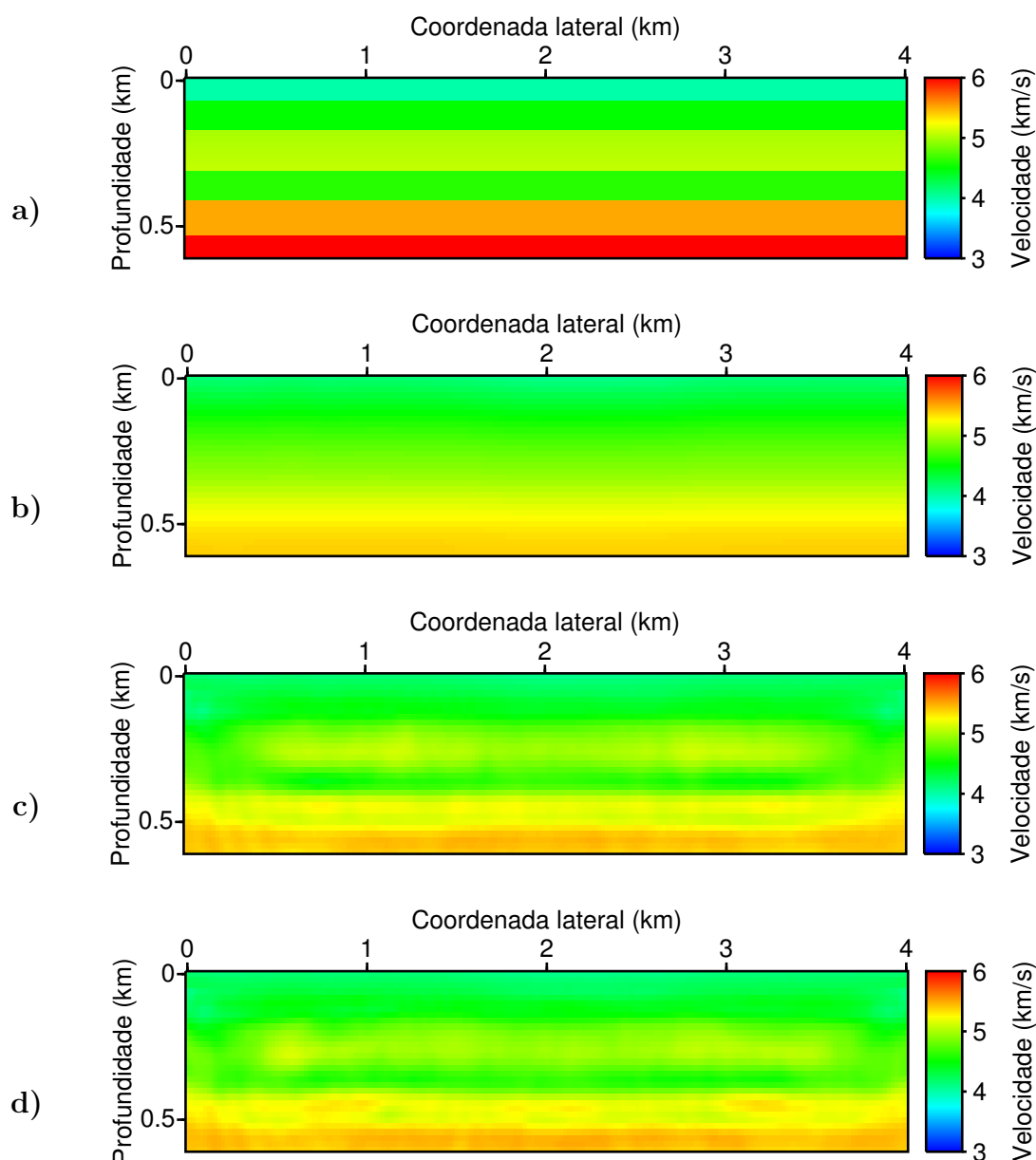


Fonte: Autor.

A Figura 5.14b mostra os mesmos os três *shot gathers*, porém modelados com o algoritmos de modelagem FWMod usando o modelo de velocidade verdadeiro que são utilizados como campos de onda de referências para os campos estimados com um modelo de velocidade diferente do modelo verdadeiro através do JMI.

A Figura 5.15a mostra três *shot gathers* (com fontes localizadas em três posições diferentes na coordenada lateral, da esquerda para a direita, localizadas em 0.0 km, 2.0 km e 4.0 km, respectivamente) dos campos de onda ascendente estimados através do JMI em 101 pontos ao longo da coordenada lateral com espaçamento de 0.02 km, isto é, com um *offset* máximo de 2.0 km, e em 0.74 km em profundidade. A Figura 5.15b mostra os mesmos os três *shot gathers*, porém modelados com o algoritmos de modelagem FWMod usando o modelo de velocidade verdadeiro, que assim como para os campos descendente, serão utilizados como campos de onda

Figura 5.16 – a) Área de interesse do modelo de velocidade verdadeiro. b) Modelo de velocidade inicial para inversão da forma de onda orientada ao alvo. c) Resultado da inversão usando o conjunto de dado modelo com FWMod após a inversão de 24 frequências invertidas sucessivamente (de 5.0 Hz até 28.0 Hz, com incremento de 1.0 Hz e considerando no máximo 25 iterações para cada frequência). d) Resultado da inversão usando o conjunto de dado estimado com JMI após a inversão de 24 frequências invertidas sucessivamente (de 5.0 Hz até 20.0 Hz, com incremento de 1.0 Hz e considerando no máximo 25 iterações para cada frequência).

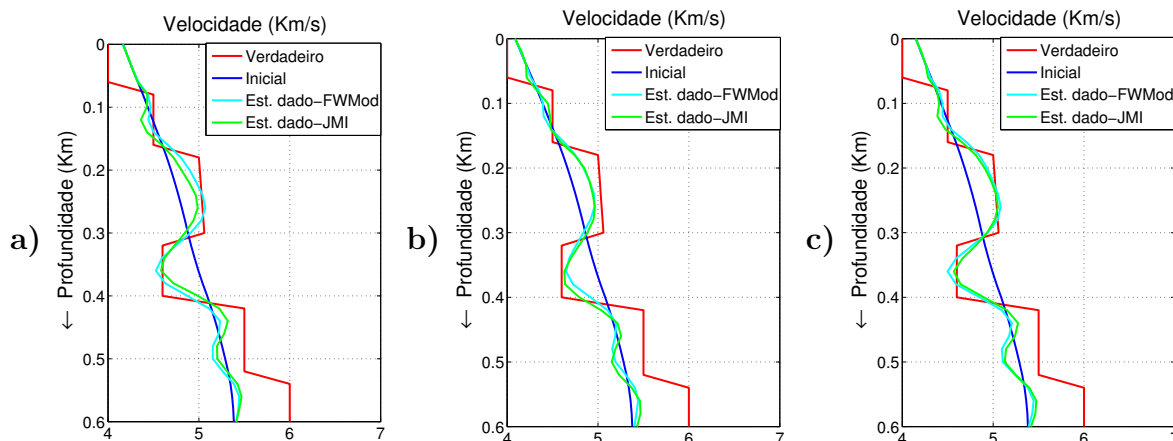


Fonte: Autor.

de referências para os campos estimados com um modelo de velocidade diferente do modelo verdadeiro através do JMI.

Uma vez que os campos de onda ascendente e descendente foram estimados no nível do alvo em profundidade (0.74 km em profundidade), podemos usá-los como dados observados para

Figura 5.17 – Informações de poço do resultado da inversão da forma de onda orientada ao alvo, a partir de dados modelados com FWMod e estimados com JMI. a) Poço localizado em 1.0 km na coordenada lateral. b) Poço localizado em 2.0 km na coordenada lateral. c) Poço localizado em 3.0 km na coordenada lateral.



Fonte: Autor.

o esquema de inversão da forma de onda orientada ao alvo.

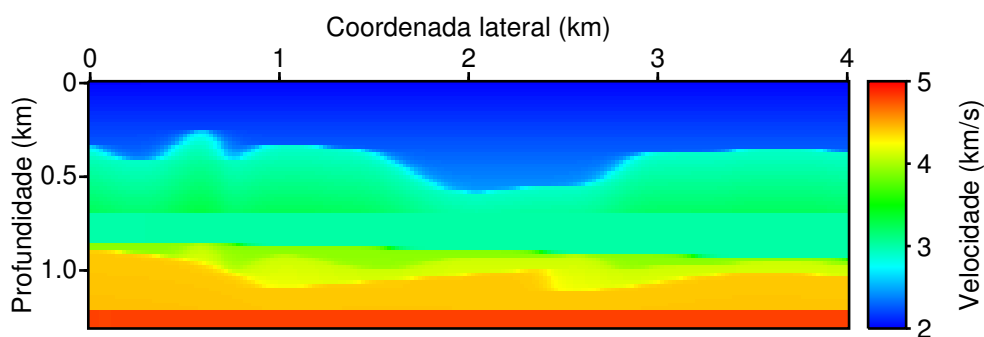
Antes de realizar a inversão usando os campos de onda estimados com JMI no nível do alvo em profundidade, realizamos a inversão, através de nossa metodologia usando como dados observados os campos de onda descendente e ascendente modelados no nível do alvo em profundidade com o algoritmo de modelagem FWMod, Figuras 5.14b e 5.15b, usando o modelo de velocidade verdadeiro, Figura 5.11. O resultado dessa inversão é mostrado na Figura 5.16c. Este modelo foi estimado após a inversão de 24 frequências invertidas sucessivamente, de 5.0 a 28.0 Hz, com incremento de 1.0 Hz, considerando no máximo 25 iterações para cada frequência invertida e usando como modelo inicial o modelo de velocidade mostrado na Figura 5.16b. Pode-se observar, apesar de não ser um resultado com alta resolução, algumas estruturas presentes no modelo de velocidade verdadeiro, mostrando assim que a atualização do modelo inicial foi na direção do modelo verdadeiro, isto pode ser melhor verificado, nas informações de poços plotadas na Figura 5.17, que mostra os poços localizados em 1.0 km, 2.0 km e 3.0 km ao longo da coordenada lateral, da esquerda para direita, respectivamente. Ressaltamos mais uma vez, que na atual implementação do algoritmo de modelagem FWMod e de inversão JMI, não estão sendo levados em consideração a dependência angular dos operadores de espalhamentos, e isso pode levar a inconsistência no nosso processo de inversão através do esquema de inversão da forma de onda orientada ao alvo, pois em nossa modelagem para calcular o resíduo, usamos a equação da onda 2D completa. Acreditamos que isso seja a causa da baixa resolução do resultado da inversão da forma de onda orientada ao alvo mostrado na Figura 5.16.

Considerando que o conjunto de dados usado para estimar o modelo de velocidade estimado mostrado na Figura 5.16c foi modelado com o algoritmo de modelagem FWMod usando o modelo de velocidade verdadeiro, esperamos que o modelo de velocidade estimado usando como *inputs* o conjunto de dados estimado com JMI (usando um modelo de velocidade suave,

mostrado na Figura 5.13a) e o mesmo modelo de velocidade inicial, seja na melhor das hipóteses exatamente o mesmo resultado estimado usando o conjunto de dados modelados com FWMod. Esse resultado é mostrado na Figura 5.16d, onde também foram invertidas 24 frequências invertidas sucessivamente de 5.0 a 28.0 Hz com incremento de 1.0 Hz, considerando no máximo 25 iterações para cada frequência invertida. Como esperado, o resultado da inversão usando como dados observados o conjunto de dados estimados com JMI no nível do alvo tem uma leve diferente em relação ao resultado usando como dados observados o conjunto de dados modelado com FWMod. Isto também pode ser melhor verificado nas informações de poços plotadas na Figura 5.17.

O resultado da inversão anterior, apesar da baixa resolução, mostra que o esquema de inversão da forma de onda orientada ao alvo juntamente com JMI é promissora e esperamos estimar modelos com maior resolução uma vez que temos uma implementação do JMI mais robusta. Por outro lado, a região de interesse neste exemplo não é tão complexa do ponto de vista geológico. Levando isso em consideração, realizamos o mesmo teste, porém usando um modelo de velocidade, mostrado na Figura 5.18, que tem 4.0 km de comprimento na coordenada lateral e 1.3 km em profundidade com a área de interesse localizada abaixo de 0.74 km em profundidade, onde a região de interesse apresenta um nível de complexidade maior.

Figura 5.18 – Modelo de velocidade verdadeiro usado para modelar o conjunto de dado com o algoritmo de modelagem FWMod.



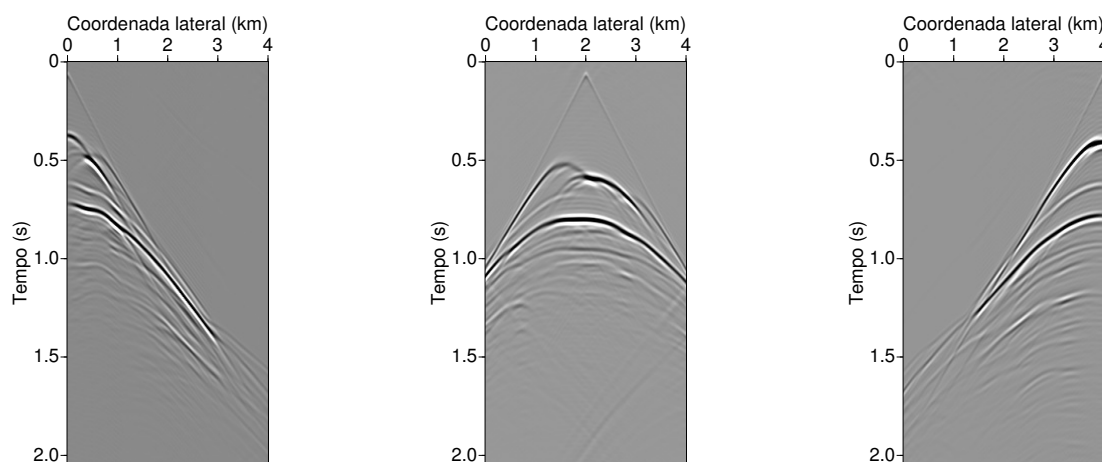
Fonte: Autor.

Assim como no teste anterior o conjunto de dados foi modelado com o algoritmo de modelagem FWMod, com um total de 201 fontes - fonte monopolo compressional e usando como *wavelet* o pulso Ricker com 20.0 Hz de frequência pico - e um arranjo com 201 receptores, ambos localizados ao longo da coordenada lateral com espaçamento de 0.02 km e na superfície, mostrados na Figura 5.19.

As Figuras 5.20b e 5.20c mostram a imagem migrada e o modelo de velocidade estimado, respectivamente, ambos com o algoritmo de inversão conjunta JMI usando como modelo inicial o modelo de velocidade mostrado na Figura 5.20a. Estes *outputs* do JMI foram estimados com uma banda de frequência de 5 a 40 Hz e um total de 45 iterações. Do ponto de vista estrutural a imagem migrada conseguiu imagear a parte rasa do modelo, já o modelo de velocidade estimado teve pouca atualização, de tal forma que não se pode reconhecer as diferenças de impedâncias do



Figura 5.19 – *Shot gathers* dos campos de onda modelados com algoritmo de modelagem FWMod, gerado pela mesma fonte localizada na superfície e em três posições diferentes na coordenada lateral, da esquerda para a direita, localizadas em 0.0 km, 2.0 km e 4.0 km, respectivamente, e com um arranjo de 201 receptores na superfície ao longo da coordenada lateral com espaçamento de 0.02 km.



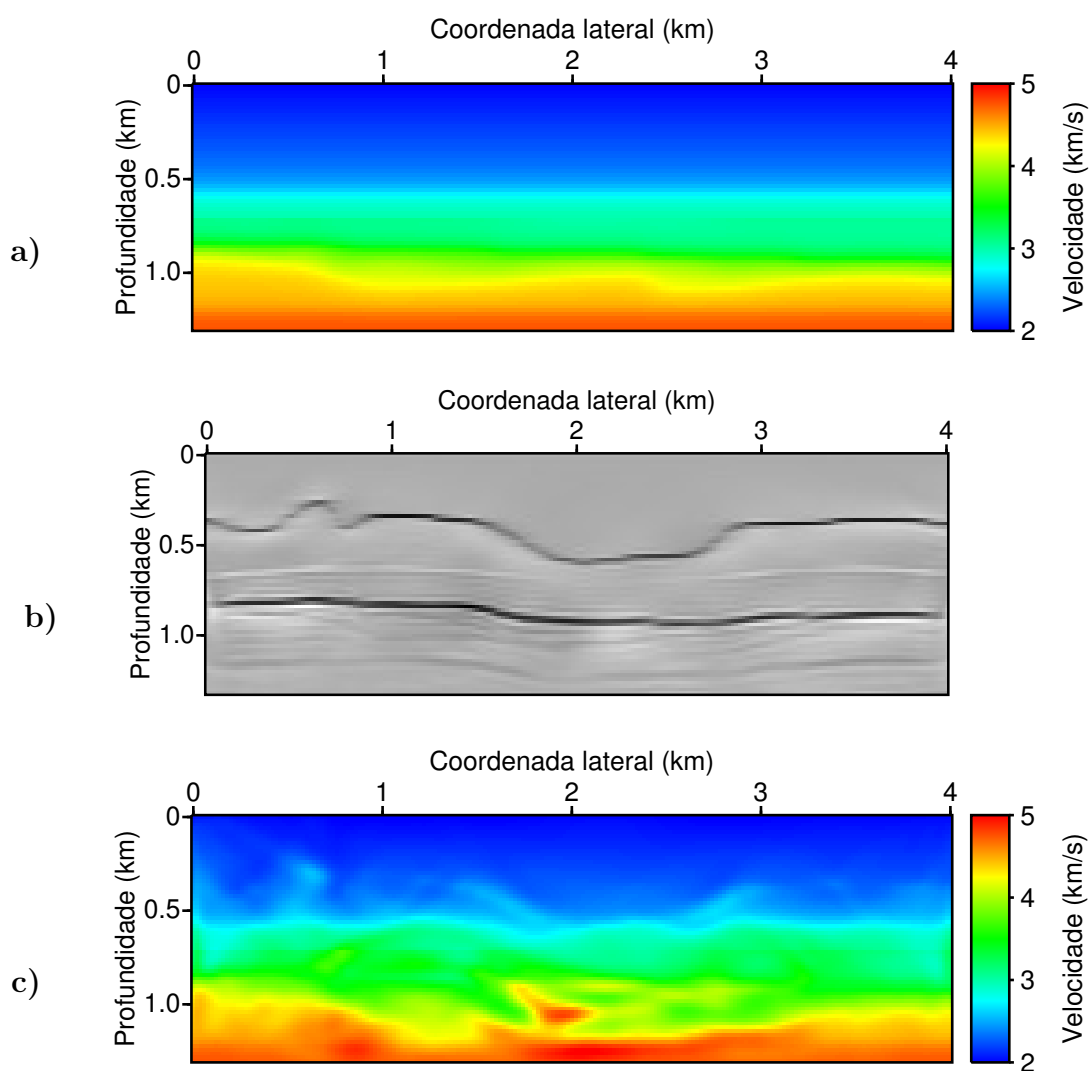
Fonte: Autor.

modelo facilmente, principalmente na parte profunda do mesmo.

Os campos de onda descendente e ascendente estimados através do JMI em 201 pontos ao longo da coordenada lateral com espaçamento de 0.02 km e em 0.74 km em profundidade, para este último teste são mostrados nas Figuras 5.21a e 5.22a, respectivamente, para três *shot gathers* (com fontes localizadas em três posições diferentes na coordenada lateral, da esquerda para a direita, localizadas em 0.0 km, 2.0 km e 4.0 km, respectivamente). Nas Figura 5.21b e 5.22b mostramos os mesmos os três correspondentes *shot gathers*, porém modelados com o algoritmos de modelagem FWMod usando o modelo de velocidade verdadeiro, assim como realizamos no exemplo anterior, que são utilizados como campos de onda de referências para os campos estimados com um modelo de velocidade diferente do modelo verdadeiro através do JMI.

Assim como no teste do modelo anterior, para o atual modelo, além da inversão da forma de onda orientada ao alvo usando como *inputs* os campos de onda estimados com JMI no nível do alvo em profundidade, mostrado na Figura 5.23d, também invertemos os dados modelados com FWMod, mostrado na Figura 5.23c. Ambos os resultados foram estimados após a inversão de 24 frequências invertidas sucessivamente, de 5.0 a 28.0 Hz, com incremento de 1.0 Hz, considerando no máximo 25 iterações para cada frequência invertida, e usando como modelo inicial o modelo de velocidade mostrado na Figura 5.23b. Pode-se observar, apesar de não ser um resultado com alta resolução, como esperado, que a atualização do modelo inicial foi na direção do modelo verdadeiro, mostrando novamente que apesar da baixa resolução, o esquema de inversão da forma de onda orientada ao alvo juntamente com JMI é promissora.

Figura 5.20 – a) Modelo de velocidade inicial usada com *input* para o JMI. b) Imagem migrada com JMI. c) Modelo de velocidade estimado com JMI



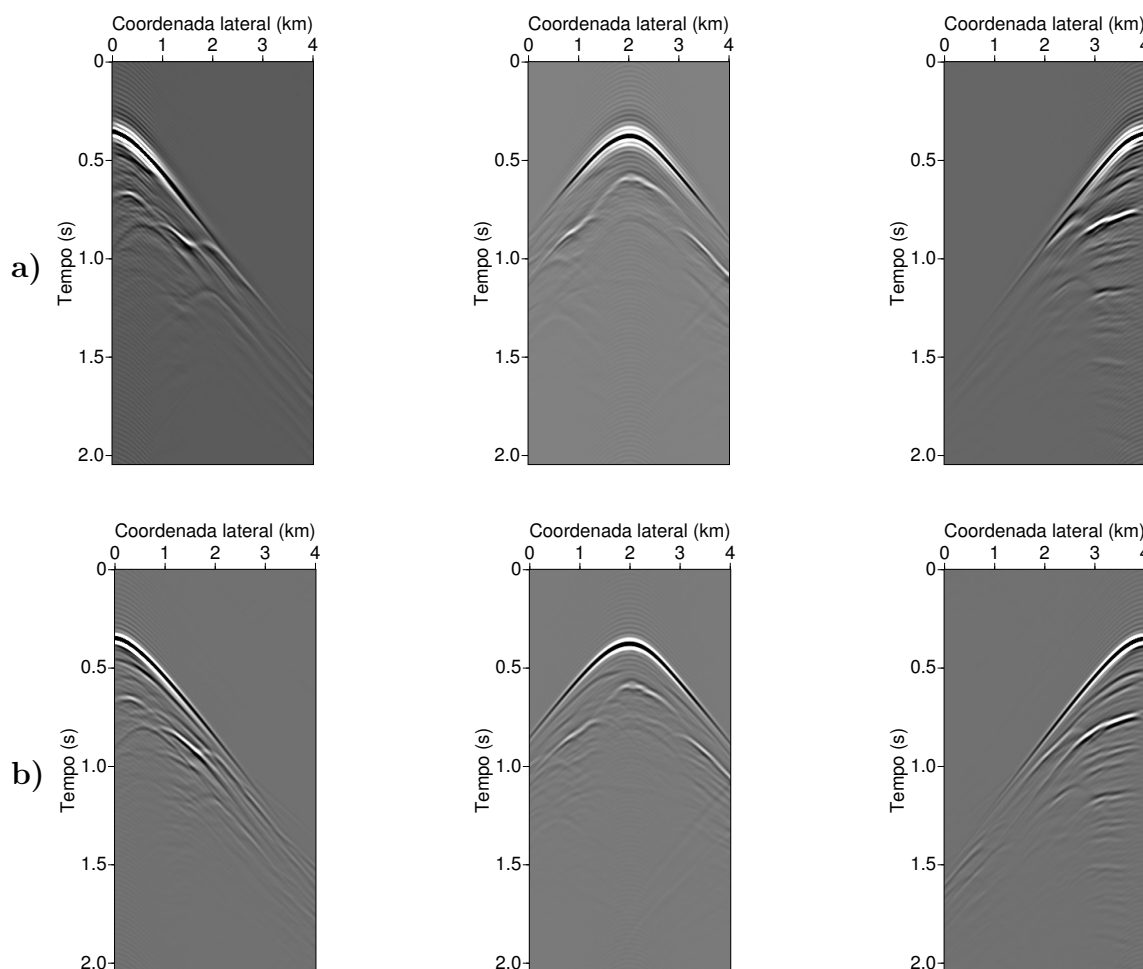
Fonte: Autor.

## 5.5 Discussão e conclusão

Neste capítulo discutimos uma nova metodologia para inversão da forma de onda orientada ao alvo baseada no ajuste entre os campos de onda ascendente observados e os campos de onda ascendente modelados através da equação baseada na representação tipo-convolução para função de Green. Diferente das metodologias de inversão da forma de onda orientada ao alvo que necessitam que o conjunto de dados seja local, ou seja, com informações apenas da área alvo, nossa esquema de inversão contorna essa necessidade usando como *inputs* os campos de onda ascendente e descendente observados próximo da área alvo com ondas espalhadas em todo o modelo.

Mostramos através dos testes numéricos, que nosso esquema de inversão da forma de onda orientada ao alvo funciona muito bem, especialmente para dados sísmicos registrados com

Figura 5.21 – *Shot gathers* dos campos de onda descendente estimados em 0.74 km em profundidade e em três posições diferentes na coordenada lateral, da esquerda para a direita, localizadas em 0.0 km, 2.0 km e 4.0 km, respectivamente, para as figuras a) e b). a) *Shot gathers* estimados com JMI a partir do conjunto de dado gerado e registrado na superfície. b) *Shot gathers* modelados com FWMod com fontes na superfície e receptores em 0.74 km em profundidade.

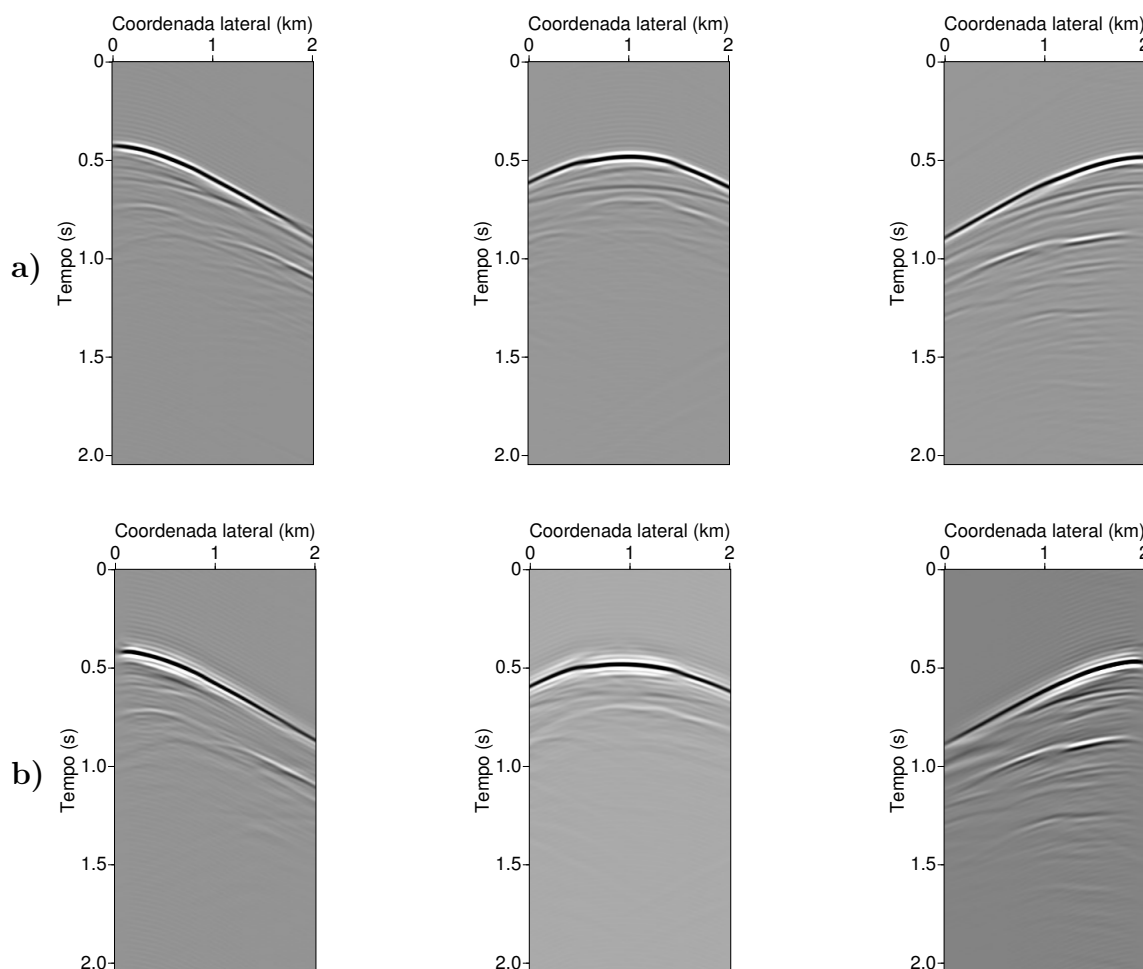


Fonte: Autor.

geometria de aquisição VSP-desviado. Por outro lado, para a aplicação para dados sísmicos de superfície usando o JMI para estimar os campos de onda ascendente e descendente próximo da área alvo mostrou resultados com baixa resolução. A causa dessa baixa resolução provavelmente é devido a limitação da implementação atual do JMI, a qual não está levando em consideração a dependência angular dos operadores de espalhamento. No entanto, mesmo com essa limitação, os resultados com JMI indicam que nossa esquema de inversão é promissor com JMI. Na comparação entre nossa metodologia com a inversão da forma de onda clássica usando como *inputs* as respostas ao impulso local, nosso esquema da inversão se mostrou superior.

Nosso esquema da inversão também tem limitações, uma vez que os *inputs* são os campos de onda ascendente e descendente, é necessário realizar uma decomposição dos campos de ondas, uma vez registrados próximo da área alvo, e para realizar tal decomposição, em geral necessitamos

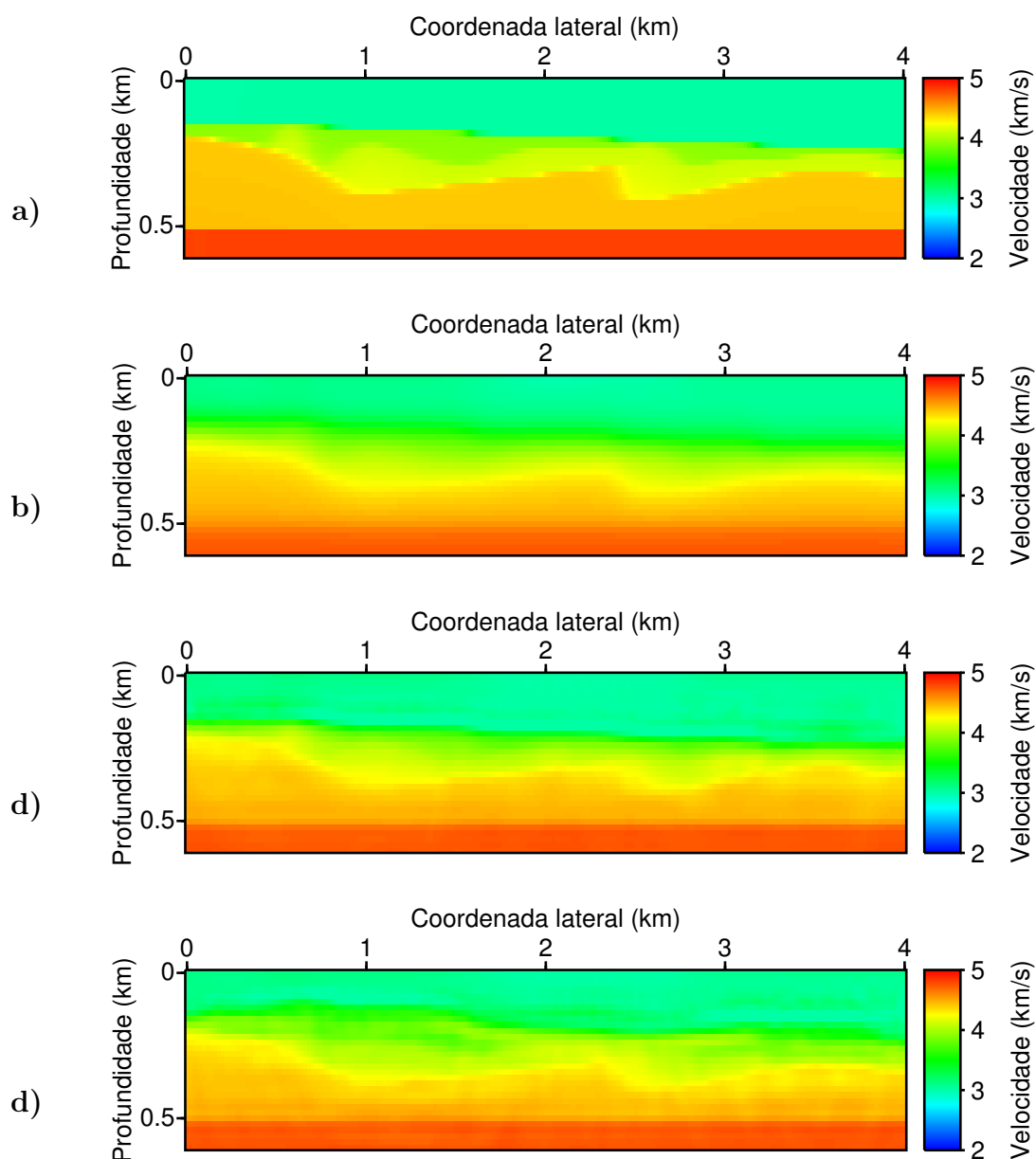
Figura 5.22 – *Shot gathers* dos campos de onda ascendente estimados em 0.74 km em profundidade e em três posições diferentes na coordenada lateral, da esquerda para a direita, localizadas em 0.0 km, 2.0 km e 4.0 km, respectivamente, para as figuras a) e b). a) *Shot gathers* estimados com JMI a partir do conjunto de dado gerado e registrado na superfície. b) *Shot gathers* modelados com FWMod com fontes na superfície e receptores em 0.74 km em profundidade.



Fonte: Autor.

dos campo de pressão e o campo de velocidade da partícula, levando a necessidade de receptores que possam registra ambos os campos. No entanto, essa também é uma limitação de métodos de redatuação que usa os campos de onda ascendente e descendente. Destacamos também, que em nosso esquema de inversão é necessários calcular a função de Green para cada iteração em todos os pontos onde os campos de ondas descendente foram observados, levando a um maior esforço computacional. No estando, levando em consideração que nossa aplicação é local, em geral o domínio para calcular a função de Green é pequeno, diminuindo dessa maneira o esforço computacional.

Figura 5.23 – a) Área de interesse do modelo de velocidade verdadeiro. b) Modelo de velocidade inicial para inversão da forma de onda orientada ao alvo. c) Resultado da inversão usando o conjunto de dado modelo com FWMod após a inversão de 24 frequências invertidas sucessivamente (de 5.0 Hz até 28.0 Hz, com incremento de 1.0 Hz e considerando no máximo 25 iterações para cada frequência). d) Resultado da inversão usando o conjunto de dado estimado com JMI após a inversão de 24 frequências invertidas sucessivamente (de 5.0 Hz até 20.0 Hz, com incremento de 1.0 Hz e considerando no máximo 25 iterações para cada frequência).



Fonte: Autor.

## 6 CONCLUSÕES E CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta tese além de discutir uma estratégia de redatumação combinando o JMI com um esquema da inversão esparsa para estimar as respostas ao impulso de uma área alvo, que uma vez estimadas podem ser usadas como *inputs* para processo de inversão e imageamento local, discuti um esquema de inversão da forma de onda orientada ao alvo que não necessita que o conjunto de dados usando como *inputs* seja local.

Os exemplo numéricos realizados com o esquema de inversão esparsa, especialmente para geometria de aquisição VSP-desviado, mostraram que este esquema de inversão funcionou muito bem, indicando que ele é um efetivo esquema para estimar as respostas ao impulso de uma área alvo em subsuperfície a partir dos campos de onda descendente e ascendente. Além disso, mostramos que este esquema é bem robusto para estimar as respostas ao impulso de um alvo localizado abaixo de uma região complexa, pois nesse caso, os campos de onda que estão chegando no nível do alvo fornecem uma boa iluminação dessa área devido aos múltiplos fenômenos de espalhamentos que ocorreram no complexo *overburden* e na superfície. Isto significa que usando todas as múltiplas no processo de inversão, podemos relaxar a necessidade de uma densa amostragem de fontes na superfície e tornando o esquema viável para o processo realístico de geometria de aquisição em 3D.

Nossa metodologia para inversão da forma de onda orientada ao alvo baseada no ajuste entre os campos de onda ascendente foi eficaz, especialmente para dados sísmicos registrados com geometria de aquisição VSP-desviado. A principal característica de nossa metodologia é contornar a necessidade de usar como *inputs* dados locais, o que pode prejudicar o processo de inversão local. Mostramos que nossa metodologia é mais robusta do que o esquema de estimar os dados locais e usá-los como *inputs* na FWI clássica, além disso mostramos também que esta metodologia é mais eficiente para estimar os parâmetros físicos em regiões profundas do modelo do que a FWI clássica.

Na combinação do JMI tanto para o esquema de inversão esparsa, quanto para o esquema de inversão da forma de onda orientada ao alvo, os resultados não foram precisos e com baixa resolução, no entanto indicam que essa combinação é promissora uma vez que temos um JMI mais robusto.

As metodologias discutidas aqui também tem limitações, uma vez que os *inputs* são os campos de onda ascendente e descendente, é necessário realizar uma decomposição dos campos de ondas, uma vez registrados próximo da área alvo, e para realizar tal decomposição, em geral necessitamos dos campo de pressão e o campo de velocidade da partícula, levando a necessidade de receptores que possam registra ambos os campos.

Outro ponto importante no esquema de inversão da forma de onda orientada ao alvo é a necessidade de modelar a função de Green para cada iteração em todos os pontos onde os campos de onda descendente foram observados, levando a um maior esforço computacional do que a FWI

clássica. No estando, levando em consideração que nossa aplicação é local, em geral o domínio para calcular a função de Green é pequeno, diminuindo dessa maneira o esforço computacional.

Especialmente para o esquema de inversão da forma de onda orientada ao alvo, mas também para o esquema de inversão esparsa, a possibilidade de usar a metodologia de redatumação Marchenko para estimas os campos de onda ascendente e descendente próximo da área alvo é promissora, pois uma vez que se tem um modelo de velocidade inicial para a FWI, pode-se usar este modelo para o Marchenko no processo de extrapolação dos campos de onda em subsuperfície a partir da superfície.

## REFERÊNCIAS

- ARNTSEN, B.; NEBEL, A. G.; AMUNDSEN, L. Visco-acoustic finite-difference modeling in the frequency domain. *Journal of Seismic Exploration*, n. 7, p. 45–64, 1998.
- BAKULIN, A.; CALVERT, R. The virtual source method: Theory and case study. *Geophysics*, v. 71, n. 4, p. SI139–SI150, 2006.
- BEDNAR, J. B.; SHIN, C.; PYUN, S. Comparison of waveform inversion, part 2: phase approach. *Geophysical Prospecting*, v. 55, n. 4, p. 465–475, 2007.
- BÉRENGER, J. A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves. *J. Comput. Phys.*, p. 185–200, 1994.
- BERKHOUT, A. J. *Seismic migration, imaging of acoustic energy by wave field extrapolation, Part A: theoretical aspects*. [S.l.]: Elsevier, 1982.
- BERKHOUT, A. J. Combining full wavefield migration and full waveform inversion, a glance into the future of seismic imaging. *Geophysics*, v. 77, n. 2, p. S43–S50, 2012.
- BERKHOUT, A. J. Review paper: An outlook on the future seismic imaging, part I: forward and reverse modelling. *Geophysical Prospecting*, v. 62, n. 5, p. 911–930, 2014.
- BERKHOUT, A. J. Review paper: An outlook on the future seismic imaging, part II: Full-wavefield migration. *Geophysical Prospecting*, v. 62, n. 5, p. 931–949, 2014.
- BERKHOUT, A. J. Review paper: An outlook on the future seismic imaging, part III: Joint Migration Inversion. *Geophysical Prospecting*, v. 62, n. 5, p. 950–971, 2014.
- BERKHOUT, A. J.; VERSCHUUR, D. J. Full wavefield migration, utilizing surface and internal multiples scattering. In: SEG. San Antonio: Society of Exploration Geophysicists, Expanded abstracts, 2011. p. 3212–3216.
- BERRYHIL, J. R. Wave-equation datuming. *Geophysics*, v. 44, n. 8, p. 1329–1344, 1979.
- BERRYHIL, R. J. Wave-equation datuming before stack. *Geophysics*, v. 49, n. 11, p. 2064–2066, 1984.
- BERRYHIL, R. J. Submarine canyons: Velocity replacement by wave-equation datuming before stack. *Geophysics*, v. 51, n. 8, p. 1572–1579, 1986.
- BIONDI, B.; ALMOMIN, A. Simultaneous inversion of full data bandwidth by tomographic full-waveform inversion. *Geophysics*, v. 79, n. 3, p. WA129–WA140, 2014.
- BITRI, A.; GRANDJEAN, G.; SAMYN, K. Surface wave interferometry by crosscorrelation and deconvolution. *First Break*, v. 29, p. 83–86, 2011.
- BROSSIER, R.; OPERTO, S.; VIRIEUX, J. Toward data-domain waveform inversion of reflected waves. In: SEG. Houston: Society of Exploration Geophysicists, Expanded abstracts, 2013. p. 892–897.
- BULAND, A.; OMRE, H. Bayesian linearized avo inversion. *Geophysics*, v. 68, n. 1, p. 185–198, 2003.



- BUNKS, C. et al. Multiscale seismic waveform inversion. *Geophysics*, v. 60, n. 5, p. 1457–1473, 1995.
- BUTKOV, E. *Física Matemática*. [S.l.]: Guanabara Koogan S.A., 1988.
- BYRD, R. et al. A limited memory algorithm for bound constrained optimization. *SIAM Journal on Scientific Computing*, v. 16, n. 5, p. 1190–1208, 1995.
- CASTAGNA, J. P.; BACKUS, M. M. AVO analysis-tutorial and review, in Castagna, J. P. and Back us, M. M., eds, Offset-dependent reflectivity - Theory and practice of AVO ana lysis. *SEG*, p. 3–37, 1993.
- CHU, C.; STOFFA, P. Efficient 3d frequency response modeling with spectral accuracy by the rapid expansion method. *Geophysics*, v. 77, n. 4, p. T117–T123, 2012.
- COLLINO, F.; TSOGKA, C. Application of the perfectly matched absorbing layer model to the linear elastodynamic problem in anisotropic heterogeneous media. *Geophysics*, v. 66, n. 1, p. 294–307, 2001.
- COSTA, C. A. N. et al. Iterative methods for 3d implicit finite-difference migration using the complex padé approximation. *J. Geophys. Eng*, v. 10, 2013.
- CRASE, E. et al. Robust elastic nonlinear waveform inversion: Application to real data. *Geophysics*, v. 55, n. 5, p. 527–538, 1990.
- de Hoop, A. T. *Handbook of Radiation and Scattering of Waves*. [S.l.]: Academic Press, 1995.
- DEVANEY, A. J. *Mathematical foundations of imaging, tomography and wavefield inversion*. [S.l.]: Cambridge university press, 2012.
- Di Bartolo, L.; DORS, C.; MANSUR, W. J. A new family of finite-difference schemes to solve the heterogeneous acoustic wave equation. *Geophysics*, v. 77, n. 5, p. T187–T199, 2012.
- EISBERG, R. M. *Fundamentos da Física Moderna*. [S.l.: s.n.], 1979.
- ERLANGGA, Y. A. *A robust and efficient iterative method for the numerical solution of the Helmholtz equation*. Tese (Doutorado) — Delft University of Technology, 2005.
- FACCIOLI, E. et al. Spectral-domain decomposition methods for the solution of acoustic and elastic wave equations. *Geophysics*, v. 61, n. 4, p. 1160–1174, 1996.
- FISHMAN, L. One-way propagation methods in direct and inverse scalar propagation modeling. *Raio Sci.*, n. 28, p. 865–876, 1993.
- FISHMAN, L.; MCCOY, J. J. Derivation and application of extended parabolic wave theories. i. the factorized helmholtz equation. *Journal of Mathematical Physics*, v. 25, n. 2, p. 285–296, 1984.
- GASDAG, J. Wave equation migration with the phase-shift method. *Geophysics*, v. 43, n. 7, p. 1342–1351, 1978.
- GAUTHIER, O.; VIRIEUX, J.; TARANTOLA, A. Two-dimensional nonlinear inversion of seismic waveforms: Numerical results. *Geophysics*, v. 51, n. 7, p. 1387–1403, 1986.
- GISOLF, A.; van den BERG, P. M. Target-oriented non-linear inversion of time-lapse seismic data. In: SEG. Denver: Society of Exploration Geophysicists, Expanded abstracts, 2010. p. 2860–2864.

- GISOLF, D.; VERSCHUUR, E. *The Principles of Quantitative Acoustical Imaging*. [S.l.]: EAGE, 2010.
- GOLUB, G. H.; van LOAN, C. F. *Matrix Computations*. [S.l.]: The Johns Hopkins University Press, 1996.
- GUASCH, L. et al. 3d elastic wavefield tomography in the time domain. In: SEG. Denver: Society of Exploration Geophysicists, Expanded abstracts, 2010. p. 4390–4394.
- HAFFINGER, P.; GISOLF, D.; van den BERG, P. Nonlinear full waveform inversion for high resolution quantitative property estimation. In: SEG. Las Vegas: Society of Exploration Geophysicists, Expanded abstracts, 2012. p. 1–5.
- HSU, H. P. *Análise de Fourier*. [S.l.]: Livros Técnicos e Científicos Editora Ltda, 1973.
- HU, W. et al. Preconditioned non-linear conjugado gradient method for frequency domain full-waveform seismic inversion. *Geophysical Prospecting*, v. 59, p. 477–491, 2011.
- JANNANE, M. et al. Wavelengths of earth structures that can be resolved from seismic reflection data. *Geophysics*, v. 54, n. 7, p. 906–910, 1989.
- JEONG, W. et al. 2d frequency-domain elastic full waveform inversion using finite-element method for vti media. In: SEG. San Antonio: Society of Exploration Geophysicists, Expanded abstracts, 2011. p. 2654–2658.
- JO, C.; SHI, C.; SUH, J. H. An optimal 9-point, finite-difference, frequency-space, 2-d scalar wave extrapolator. *Geophysics*, v. 61, n. 2, p. 529–537, 1996.
- KAMEI, R.; PRATT, R. G. Inversion strategies for visco-acoustic waveform inversion. *Geophysical Journal International*, v. 194, p. 859–884, 2013.
- KAMEI, R.; PRATT, R. G.; TSUJI, T. On acoustic waveform tomography of wide-angle obs data-strategies for pre-conditioning and inversion. *Geophysical Journal International*, v. 194, p. 1250–1280, 2013.
- KAMEI, R.; PRATT, R. G.; TSUJI, T. Misfit in laplace-fourier domain waveform inversion, with application to wide-angle ocean bottom seismograph data. *Geophysical Prospecting*, p. 1–21, 2014.
- LAILLY, P. The seismic inversion problem as a sequence of before stack migrations. *Conference on Inverse Scattering, Theory and Application, Society for Industrial and Applied Mathematics, Expanded Abstracts*, p. 206–220, 1983.
- LEITE, L. W. B. *Conceitos da análise espectral de sinais em geofísica*. [S.l.]: INCT, 2015.
- LIU, W.; XU, F. Wave-equation global datuming. In: SEG. San Antonio: Society of Exploration Geophysicists, Expanded abstracts, 2011. p. 3414–3418.
- LIU, Z.; ZHANG, J. Elastic full waveform inversion for near surface imaging in cmp domain. In: SEG. Houston: Society of Exploration Geophysicists, Expanded abstracts, 2013. p. 1904–2658.
- MA, Y.; HALE, D. Quasi-newton full-waveform inversion with a projected hessian matrix. *Geophysics*, v. 77, n. 5, p. R207–R216, 2012.
- MARFURT, K. J. Accuracy of finite-difference and finite-element modeling of the scalar and elastic wave equations. *Geophysics*, v. 49, n. 5, p. 533–549, 1984.

- MARTIN, G. S.; WILEY, R.; MARFURT, K. J. Marmousi2: An elastic upgrade for marmousi. *TLE*, v. 25, n. 2, p. 156–166, 2006.
- MEHTA, K. et al. Improving the virtual source method by wavefield separation. *Geophysics*, v. 72, n. 4, p. V79–V86, 2007.
- MEHTA, K. et al. Virtual source method applied to crosswell and horizontal well geometries. *TLE*, v. 72, n. 4, p. 712–723, 2010.
- MULDER, W. A.; PLESSIX, R. E. Exploring some issues in acoustic full waveform inversion. *Geophysical Prospecting*, v. 56, p. 827–841, 2008.
- NOCEDAL, J.; WRIGHT, S. J. *Numerical optimization*. 2. ed.. ed. New York, NY: Springer, 2006. (Springer series in operations research and financial engineering).
- OPERTO, S. et al. Quantitative imaging of complex structures from dense wide-aperture seismic data by multiscale traveltime and waveform inversion: A case study. *Geophysical Prospecting*, v. 52, p. 625–651, 2004.
- OPERTO, S. et al. 3d finite-difference frequency-domain modeling of viscoacoustic wave propagation using a massively parallel direct solver: A feasibility study. *Geophysics*, v. 72, n. 5, p. SM195–SM211, 2007.
- PAN, G.; ABUBAKAR, A.; HABASHY, T. M. An acoustic fourth-order frequency-domain finite-difference modeling using an automatic perfectly matched layer setup. In: SEG. San Antonio: Society of Exploration Geophysicists, Expanded abstracts, 2011. p. 3042–3047.
- PICA, A.; DIET, J. P.; TARANTOLA, A. Nonlinear inversion of seismic reflection data in a laterally invariant medium. *Geophysics*, v. 55, n. 3, p. 284–292, 1990.
- PLESSIX, R. E. A helmholtz iterative solver for 3d seismic-imaging problems. *Geophysics*, v. 72, n. 5, p. SM185–SM194, 2007.
- PRATT, R. G. Seismic waveform inversion in frequency domain, part i: Theory and verification in a physical scale model. *Geophysics*, v. 64, n. 3, p. 888–901, 1999.
- PRATT, R. G.; SHIN, C.; HICKS, G. Gauss-newton and full newton methods in frequency-space seismic waveform inversion. *Geophys. J. Int.*, v. 133, p. 341–362, 1998.
- PRATT, R. G. et al. Two-dimensional velocity model from wide-angle seismic data by wavefield inversion. *Geophysical Journal International*, v. 12, p. 323–340, 1996.
- QIN, F.; FEI, T. W.; LUO, Y. Velocity model building from waveform tomography of band limited reflection seismic data. In: SEG. Houston: Society of Exploration Geophysicists, Expanded abstracts, 2013. p. 866–870.
- RICKER, N. Further developments in the wavelet theory of seismogram structure. *Bulletin of the Seismological Society of America*, v. 33, n. 3, p. 197–228, 1943.
- RICKER, N. Wavelet functions and their polynomials. *Geophysics*, v. 9, n. 3, p. 314–323, 1944.
- RICKER, N. The form and laws of propagation of seismic wavelets. *Geophysics*, v. 18, n. 1, p. 10–40, 1953.
- SANTOS, H. B. et al. Robust time-domain migration velocity analysis for initial-model building in a full waveform tomography workflow. In: SEG. Dallas: Society of Exploration Geophysicists, Expanded abstracts, 2016. p. 5307–5312.

- SCHALKWIJK, K. M. N. *Decompositionn of multicomponent ocean-bottom data into P- and S-waves*. Tese (Doutorado) — Delft University of Technology, 2001.
- Schneider, Jr., W. A.; PHILLIP, L. D.; PAAL, E. F. Wave-equation velocity replacement of the low-velocity layer for overthrust-belt data. *Geophysics*, v. 60, n. 2, p. 573–579, 1995.
- SCHUSTER, G. T.; ZHOU, M. A theoretical overview of model-based and correlation-based redatuming methods. *Geophysics*, v. 71, n. 4, p. SI103–SI110, 2006.
- SHIN, C.; MIN, D. J. Waveform inversion using a logarithmic wavefield. *Geophysics*, v. 71, n. 3, p. R31–R42, 2006.
- SIRGUE, L.; PRATT, R. G. Efficient waveform inversion and imaging: A strategy for selecting temporal frequencies. *Geophysics*, v. 69, n. 1, p. 231–248, 2004.
- SONI, A. K.; STAAL, X. A.; VERSCHUUR, D. J. VSP imaging using all multiples: Full wavefield migration approach. In: SEG. Las Vegas: Society of Exploration Geophysicists, Expanded abstracts. p. 1–6.
- SONI, A. K.; WOUTERSAND, W.; VERSCHUUR, D. J. Target oriented vsp imaging - a sparse-inversion approach. In: EAGE. Copenhagen: Expanded abstracts, 2012.
- SOURBIER, F. et al. Frequency-domain full-waveform modeling using a hybrid direct-iterative solver based on a parallel domain decomposition method: A tool for 3d fullwaveform inversion? In: SEG. Las Vegas: Society of Exploration Geophysicists, Expanded abstracts, 2008. p. 2147–2151.
- STAAL, X. R. et al. Improved target-oriented linear full waveform inversion. In: EAGE. Barcelona: Expanded abstracts, 2010.
- STEKL, L.; PRATT, R. G. Accurate viscoelastic modeling by frequency-domain finite differences using rotated operators. *Geophysics*, v. 63, n. 5, p. 1779–1794, 1998.
- SUN, R.; MCMECHAN, G. A. 2d full-waveform inversion for wide-aperture, elastic, seismic data. *Geophysical Journal International*, v. 111, p. 1–10, 1992.
- TARANTOLA, A. Inversion of seismic-reflection data in the acoustic approximation. *Geophysics*, v. 49, n. 8, p. 1259–1266, 1984.
- TESSMER, E. Using the rapid expansion method for accurate time-stepping in modeling and reverse-time migration. *Geophysics*, v. 76, n. 4, p. S177–S185, 2011.
- THORBECKE, J.; DRAGANOV, D. Finite-difference modeling experiments for seismic interferometry. *Geophysics*, v. 76, n. 6, p. H1–H18, 2011.
- THORBECKE, J. W.; WAPENAAR, K.; SWINNEN, G. Design of one-way wavefield extrapolation operators, using smooth functions in wlsq optimization. *Geophysics*, v. 69, n. 4, p. 1037–1045, 2004.
- van der NEUT, J.; BAKULIN, A. Estimating and correcting the amplitude radiation pattern of a virtual source. *Geophysics*, v. 74, n. 2, p. SI27–SI36, 2009.
- van der NEUT, J.; BAKULIN, A. Estimating and correcting the amplitude radiation pattern of a virtual source. *Geophysics*, v. 74, n. 2, p. SI27–SI36, 2009.
- van der NEUT, J.; HERRMANN, F. J. J. Interferometric redatuming by sparse inversion. *Geophysical Journal International*, v. 192, p. 666–670, 2013.

- van GRONESTIJN, G. J. A.; VERSCHUUR, D. J. Towards a new approach for primary estimation. In: SEG. Las Vegas: Soc. Expl. Geophys., Expanded abstracts, 2008. p. 2487–2491.
- van GRONESTIJN, G. J. A.; VERSCHUUR, D. J. Estimating primaries by sparse inversion and application to near-offset data reconstruction. *Geophysics*, v. 74, n. 3, p. A23–A28, 2009.
- van GRONESTIJN, G. J. A.; VERSCHUUR, D. J. Estimating primaries by sparse inversion from passive seismic data. *Geophysics*, v. 75, n. 4, p. SA61–SA69, 2010.
- VASCONCELOS, I.; SNIEDER, R. Interferometry by deconvolution, part 1 theory for acoustic waves and numerical examples. *Geophysics*, v. 73, n. 3, p. S115–S128, 2008.
- VASCONCELOS, I.; SNIEDER, R. Interferometry by deconvolution: Part 2 theory for elastic waves and application to drill-bit seismic imaging. *Geophysics*, v. 73, n. 3, p. S129–S141, 2008.
- VERSTEEG, R.; GRAU, G. Practical aspects of seismic data inversion, the marmousi experience. In: EAGE. [S.l.]: Expanded abstracts, 1990.
- VIGH, D.; STARR, E. W. Comparisons for waveform inversion, time domain or frequency domain ? In: SEG. Las Vegas: Society of Exploration Geophysicists, Expanded abstracts, 2008. p. 1890–1894.
- VIRIEUX, J.; OPERTO, S. An overview of full-waveform inversion in exploration geophysics. *Geophysics*, v. 74, n. 6, p. WCC1–WCC26, 2009.
- WANG, H.; SINGH, S. C.; CALANDRA, H. An integrated inversion of seismic refraction and reflection data using combined wave-equation tomography and full waveform inversion. In: SEG. Houston: Society of Exploration Geophysicists, Expanded abstracts, 2013. p. 898–902.
- WANG, S. et al. Reflection-based full waveform inversion in frequency domain. In: SEG. Houston: Society of Exploration Geophysicists, Expanded abstracts, 2013. p. 877–881.
- WAPENAAR, K. Retrieving the elastodynamic greene's function of an arbitrary inhomogeneous media by cross correlation. *Physical Review Letters*, v. 93, n. 254301, 2004.
- WAPENAAR, K.; COX, H. L. H.; BERKHOUT, A. J. Elastic redatuming of multicomponent seismic data. *Geophysical Prospecting*, v. 40, p. 465–482, 1992.
- WAPENAAR, K.; FOKKEMA, J. Green's function representations for seismic interferometry. *Geophysics*, v. 71, n. 4, p. SI33–SI46, 2006.
- WAPENAAR, K.; THORBECKE, J.; DRAGANOV, D. Relations between reflection and transmission responses of three-dimensional inhomogeneous media. *Geophysical Journal International*, v. 156, p. 179–194, 2004.
- WAPENAAR, K. et al. Marchenko imaging. *Geophysics*, v. 79, n. 3, p. WA39–WA57, 2014.
- WAPENAAR, K.; van der NEUT, J. A representation for green's function retrieval by multidimensional deconvolution. *Acoustical Society of America*, v. 6, n. 128, p. EL366–EL371, 2010.
- WAPENAAR, K. et al. Seismic interferometry by crosscorrelation and by multidimensional deconvolution: a systematic comparison. *Geophysical Journal International*, n. 185, p. 1335–1364, 2011.
- WARNER, M.; GUASCH, L. Adaptive waveform inversion: Theory. In: SEG. Denver: Society of Exploration Geophysicists, Expanded abstracts, 2014. p. 1089–1092.

WARNER, M. et al. Anisotropic 3d full-waveform inversion. *Geophysics*, v. 78, n. 2, p. R59–R80, 2013.

WIGGINS, R. A. Minimum entropy deconvolution. *Geoexploration*, v. 16, p. 21–35, 1978.

XU, S. et al. Full waveform inversion for reflected seismic data. *74<sup>nd</sup> EAGE Conference & Exhibition, Expanded Abstracts, Barcelona, Spain*, p. W024, 2012.

YANGK, D. et al. Target-oriented time-lapse waveform inversion using virtual survey. In: SEG. Las vegas: Society of Exploration Geophysicists, Expanded abstracts, 2012. p. 1–5.

## APÊNDICE

## APÊNDICE A – Relação de dispersão numérica 2D

### A.0.1 Para aproximação FD de segunda ordem

Aproximando a segunda derivada espacial da solução de onda plana em um meio acústico homogêneo e infinito, Equação (2.32), via aproximação FD de segunda ordem, usada nesta tese, resulta na seguinte aproximação:

$$\partial_{\eta}^2 P_{l,m}^{\omega} = -\frac{P_{l,m}^{\omega}}{h^2} \left[ 4\text{sen}^2 \left( \frac{hk_{\eta}}{2} \right) \right], \quad (\text{A.1})$$

com  $\eta = x, z$  e  $h_x = h_z = h$ .

Substituindo a Equação (A.1), na versão 2D da equação da onda acústica no domínio  $(\omega - \mathcal{D})$ , Equação (2.13), sem fonte, resulta na seguinte equação:

$$-\frac{P_{l,m}^{\omega}}{h^2} \left\{ \left[ 4\text{sen}^2 \left( \frac{hk_x}{2} \right) \right] + \left[ 4\text{sen}^2 \left( \frac{hk_z}{2} \right) \right] \right\} + \left( \frac{\omega}{c} \right)^2 P_{l,m}^{\omega} = 0, \quad (\text{A.2})$$

Considerando que  $k_x = k\text{sen}\theta$ ,  $k_z = k\text{cos}\theta$  e  $\frac{\omega}{v_f} = \frac{2\pi}{\lambda}$ , onde  $v_f$  é a velocidade de fase da onda e  $\lambda$  representa o comprimento de onda da onda, pode-se fazer a seguinte simplificação da equação anterior:

$$\frac{v_f}{c} = \left( \frac{\lambda}{h} \right) \left( \frac{1}{\pi} \right) \left[ \text{sen}^2 \left( \frac{hk\text{sen}\theta}{2} \right) + \text{sen}^2 \left( \frac{hk\text{cos}\theta}{2} \right) \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (\text{A.3})$$

e considerando que  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ , resulta em

$$\frac{v_f}{c} = \left( \frac{G}{\pi} \right) \left[ \text{sen}^2 \left( \frac{\pi}{G} \text{sen}\theta \right) + \text{sen}^2 \left( \frac{\pi}{G} \text{cos}\theta \right) \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (\text{A.4})$$

onde  $G \doteq \frac{\lambda}{h}$ .

### A.0.2 Para aproximação FD de quarta ordem

Aproximando a segunda derivada espacial da solução de onda plana em um meio acústico homogêneo e infinito, Equação (2.32), via aproximação FD de quarta ordem, usada nesta tese, resulta na seguinte aproximação:

$$\partial_{\eta}^2 P_{l,m}^{\omega} = \frac{P_{l,m}^{\omega}}{12h^2} \left[ 4\text{sen}^2 (hk_{\eta}) - 64\text{sen}^2 \left( \frac{hk_{\eta}}{2} \right) \right], \quad (\text{A.5})$$

com  $\eta = x, z$  e  $h_x = h_z = h$ .

Substituindo a Equação (A.5), na versão 2D da equação da onda acústica no domínio  $(\omega - \mathcal{D})$ , Equação (2.13), sem fonte, resulta na seguinte equação:

$$-\frac{P_{l,m}^{\omega}}{12h^2} \left\{ \left[ 4\text{sen}^2 (hk_x) - 64\text{sen}^2 \left( \frac{hk_x}{2} \right) \right] \right.$$



$$+ \left[ 4\text{sen}^2(hk_z) - 64\text{sen}^2\left(\frac{hk_z}{2}\right) \right] \left\{ \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 P_{l,m}^\omega = 0, \right. \quad (\text{A.6})$$

Considerando que  $k_x = k\text{sen}\theta$ ,  $k_z = k\text{cos}\theta$  e  $\frac{\omega}{v_f} = \frac{2\pi}{\lambda}$ , onde  $v_f$  é a velocidade de fase da onda e  $\lambda$  representa o comprimento de onda da onda, pode-se fazer a seguinte simplificação da equação anterior:

$$\begin{aligned} \frac{v_f}{c} &= \left(\frac{\lambda}{h}\right) \left(\frac{1}{\pi\sqrt{12}}\right) \left\{ \left[ 16\text{sen}^2\left(\frac{hk\text{sen}\theta}{2}\right) - \text{sen}^2(hk\text{sen}\theta) \right] \right. \\ &+ \left. \left[ 16\text{sen}^2\left(\frac{hk\text{cos}\theta}{2}\right) - \text{sen}^2(hk\text{cos}\theta) \right] \right\}^{\frac{1}{2}}, \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

e considerando que  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ , resulta em

$$\begin{aligned} \frac{v_f}{c} &= \left(\frac{G}{\pi}\right) \left(\frac{1}{\sqrt{12}}\right) \left\{ \left[ 16\text{sen}^2\left(\frac{\pi}{G}\text{sen}\theta\right) - \text{sen}^2\left(\frac{2\pi}{G}\text{sen}\theta\right) \right] \right. \\ &+ \left. \left[ 16\text{sen}^2\left(\frac{\pi}{G}\text{cos}\theta\right) - \text{sen}^2\left(\frac{2\pi}{G}\text{cos}\theta\right) \right] \right\}^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$