



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ  
INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM GEOFÍSICA

**JOSAFAT LOPES CARDOSO FILHO**

**IMPLEMENTAÇÕES ALTERNATIVAS DE TOMOGRAFIA DO  
TEMPO DE TRÂNSITO UTILIZANDO A EQUAÇÃO DA  
ONDA.**

BELÉM  
2014

**JOSAFAT LOPES CARDOSO FILHO**

**IMPLEMENTAÇÕES ALTERNATIVAS DE TOMOGRAFIA DO  
TEMPO DE TRÂNSITO UTILIZANDO A EQUAÇÃO DA  
ONDA.**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Geofísica do Instituto de Geociências da Universidade Federal do Pará - UFPA, em cumprimento às exigências para obtenção do grau de Mestre em Geofísica.

Área de Concentração: Métodos Sísmicos

Orientador: Prof. Dr. Jessé Carvalho Costa

BELÉM  
2014

Dados Internacionais de Catalogação de Publicação (CIP)  
(Biblioteca do Instituto de Geociências/UFPA)

---

Cardoso Filho, Josafat Lopes, 1990-  
Implementações alternativas de tomografia do tempo de  
trânsito utilizando a equação da onda / Josafat Lopes  
Cardoso Filho. – 2014.  
105 f. : il. ; 30 cm

Inclui bibliografias

Orientador: Jessé Carvalho Costa  
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Pará,  
Instituto de Geociências, Programa de Pós-Graduação em  
Geofísica, Belém, 2014.

1. Tomografia sísmica. 2. Equação de onda. I. Título.

CDD 22. ed. 551.22

---

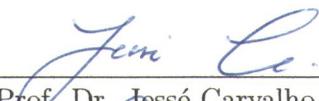
JOSAFAT LOPES CARDOSO FILHO

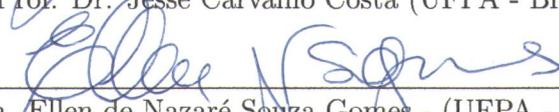
IMPLEMENTAÇÕES ALTERNATIVAS DE TOMOGRAFIA DO TEMPO DE  
TRÂNSITO UTILIZANDO A EQUAÇÃO DA ONDA.

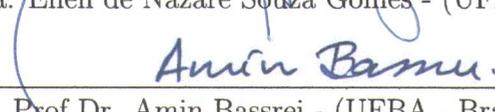
Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Geofísica do Instituto de geociências da Universidade Federal do Pará - UFPA, em cumprimento às exigências para obtenção do grau de Mestre em Geofísica.

Data de aprovação: 23/04/2014

Banca examinadora:

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. Jessé Carvalho Costa (UFPA - Brasil) - Orientador

  
\_\_\_\_\_  
Profa. Dra. Ellen de Nazaré Souza Gomes - (UFPA - Brasil) - Membro

  
\_\_\_\_\_  
Prof Dr. Amin Bassrei - (UFBA - Brasil) - Membro externo

*Dedico este trabalho a minha família.*

## AGRADECIMENTOS

Muitas pessoas contribuíram para que eu pudesse realizar este trabalho. Sou grato a todos que me ajudaram neste período de dois anos de implementação deste projeto. Agradecimentos mais que especiais, são para o meu Professor Jessé Carvalho Costa, que sugeriu o título deste trabalho, me orientou em cada passo, me ajudou a desenvolver o algoritmo e a resolver todas as contas. Mais do que isso, o Professor foi bastante incentivador ao trabalho, acreditou em mim e se mostrou satisfeito com o meu desempenho.

Sou grato também ao grupo de sismica do CPGF da UFPA: os alunos do doutorado Williams Lima, Jonathas Maciel, Carlos Alexandre contribuíram através de discussão sobre o projeto e auxílios para otimizar o algoritmo. Agradeço também, ao Andrei Oliveira, que em um momento crítico me deu suporte na instalação de compiladores.

Agradeço a coordenação do CPGF pelo suporte e estrutura no desenvolvimento do trabalho. Essencialmente a agilidade para resolver os problemas com os computadores o mais breve possível que foi de grande valia para permitir o término desta dissertação.

Agradeço ao CNPQ pelo suporte financeiro durante toda a realização deste trabalho.

Agradeço a banca examinadora por aceitar o convite de avaliação deste trabalho, Prof. Dr. Amin Bassrei da UFBA-Brasil e a Prof. Dr. Ellen de Nazaré Souza Gomes UFPA-Brasil.

Sou grato também, as pessoas que contribuíram indiretamente neste trabalho, pois elas são essenciais na minha vida. A minha família e meus amigos que estão sempre do meu lado me apoiando e me incentivando.

## RESUMO

A tomografia do tempo de trânsito utilizando a equação acústica é uma alternativa robusta para se estimar modelos de velocidade com fortes variações. Aplicações desta metodologia a dados sísmicos inter poços, auxiliam no monitoramento e caracterização de reservatórios. A escolha da função objetivo, estratégias de condicionamento do gradiente e funcionais regularizadores, quando da implementação deste tipo de tomografia, influenciam a robustez, eficiência e qualidade das estimativas do modelo de velocidade. Estes três aspectos da implementação da tomografia através da equação de onda são investigados. Duas propostas de funções objetivo são utilizadas neste trabalho; a primeira é sensível a diferenças de fase entre os pulsos e a outra é proposta para ser menos sensível a fase do pulso fonte. Ambas não necessitam de marcações dos eventos e se mostram muito robustas em experimentos numéricos utilizando modelos com forte variação de velocidade. Uma estratégia de condicionamento do gradiente da função objetivo, adaptada da literatura em processamento de imagens, permitiu acelerar a convergência do algoritmo ao eliminar eventos espúrios causados pela inevitável abertura limitada da geometria de aquisição dos dados, ruídos aleatórios e efeitos causados pelas fontes e receptores. A adição de funcionais regularizadores penalizando o desvio do modelo de velocidade de informação a priori a partir de perfis de poços suavizados, contribui adicionalmente para a estimativa de um modelo de velocidade mais consistente e com maior resolução.

**Palavras-Chave:** Tomografia. Inter poços. Equação acústica. Condicionamento. Regularização.

## ABSTRACT

Wave equation tomography is a robust methodology for velocity analysis when strong velocity variations occurs. This approach has been successfully applied for reservoir monitoring and characterization using crosswell data. The choice of the objective functions, preconditioners and regularizing functionals controls the robustness, efficiency and the quality of the velocity reconstruction. This dissertation investigates each of these design parameters and its consequences for the performance of the wave equation tomography using synthetic crosswell data generated from smoothly and strongly heterogeneous velocity models. Two proposals for the objective functions are used in this work; the first is sensitive to phase differences and the other is proposal to be less sensitive to the source pulse. Both do not require velocity picking performed well in the numerical experiments. A preconditioning strategy adapted from the imaging processing literature produced a noticeable improvement the convergence rate of the algorithm by eliminating artifacts caused by limited aperture, random noise and artifacts produced by sources and receivers. A regularizing functional penalizing deviations from velocity information available near the wells additionally contributes to recover a velocity tomogram with higher resolution and consistent with the synthetic model. Wave equation tomography is a robust methodology for velocity analysis when strong velocity variations occurs.

**Keywords:** Tomography. Crosswell. Wave Equation. Preconditioning. Regularization.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 2.1	Representação esquemática de uma aquisição sísmica interpoços. ....	23
Figura 2.2	Sismograma real obtido em um levantamento interpoços. Família de tiro comum, Friendswood, Texas. A fonte está em 330 ft (100.6 m) e os receptores no intervalo de 10 ft (3.0 m) a 960 ft (292.6 m) espaçados de 10 ft (3.0 m). A distância entre os poços é 600 ft (186.9 m). Um número de eventos podem ser identificados após o trabalho de Chen e Eriksen (1989). D - Onda P direta ou transmitida do poço fonte ao poço receptor; SR - Uma onda P que viaja subindo o poço da fonte reflete na superfície livre e vai para o poço receptor; DR - Reflexão de onda P descendente entre camadas presentes em subsuperfície entre os dois poços; UR - Reflexão de onda P ascendente entre camadas presentes entre os dois poços; T1 - Onda P que viaja a partir do poço fonte para baixo até o poço dos receptores que é convertida em “Tube-Wave” e viaja para cima dentro do poço; T2 - Onda P a partir do poço fonte para o topo do poço receptor convertida em “Tube-Wave”. T3 - Uma onda “Tube-Wave” convertida a partir da reflexão SR na base do poço receptor e transmitida para cima. ....	25
Figura 2.3	Esquema de procedimentos utilizados no primeiro estágio do projeto de tomografia do tempo de trânsito de primeiras chegadas. ....	26
Figura 2.4	Esquema de procedimentos utilizados no segundo estágio do projeto de tomografia do tempo de trânsito de primeiras chegadas. ....	27
Figura 2.5	Modelo de velocidade original com distribuição suave para o primeiro experimento. Os sismogramas obtidos nesse modelo possuem basicamente apenas onda transmitida de um poço ao outro. ....	28
Figura 2.6	Modelo de velocidade original representativo de um campo real para o segundo experimento. Os sismogramas obtidos nesse modelo possuem uma variedade de eventos além da onda transmitida de um poço ao outro. ....	29
Figura 3.1	Relação de dispersão que relaciona a frequência angular e o número de onda. Cada curva plotada possui um valor diferente do parâmetro $\alpha = c\Delta t/\Delta\bar{x}$ . ....	34
Figura 3.2	Velocidade de fase variando com o número de onda. Cada curva plotada possui	

um valor diferente do parâmetro $\alpha = c\Delta t/\Delta\bar{x}$ .	34
Figura 3.3 Pulso Ricker centrado em $t_0 = 200\Delta t$ e frequência pico 120.0 Hz.	37
Figura 3.4 Modelo de velocidade para testar o algoritmo de modelagem direta.	38
Figura 3.5 Instantâneos do campo de onda antes e após a frente de onda alcançar a borda do modelo.	39
Figura 3.6 A equação da onda é resolvida com atenuação dentro da região estendida.	39
Figura 3.7 Instantâneos do campo de onda: (a) Fotografia no instante $t_0 = 0.04s$ e (b) Fotografia no instante $t_0 = 0.06s$ . Ambos mostram que não há reflexão espúria nas bordas do modelo.	41
Figura 3.8 Instantâneos do campo de onda: (a) Fotografia no instante $t_0 = 0.08s$ e (b) Fotografia no instante $t_0 = 0.1s$ . Ambos mostram que não há reflexão espúria nas bordas do modelo.	41
Figura 3.9 Teste de estimativa da diferença do tempo de trânsito quando os pulsos possuem fases iguais.	47
Figura 3.10 Teste de estimativa da diferença do tempo de trânsito quando os pulsos possuem fases diferentes.	48
Figura 5.1 Modelo de velocidade com distribuição gaussiana. O campo de velocidade atinge seu menor valor no centro da gaussiana. Os poços das fontes e dos receptores são desenhados sobre o modelo. O poço A (fontes) e o poço B (receptores).	65
Figura 5.2 Família de tiro comum adquirida sobre o modelo de velocidade da Figura (5.1).	67
Figura 5.3 Modelo de velocidade representativo de uma situação de reservatório real. Mostra também a posição dos poços das fontes e dos receptores.	68
Figura 5.4 Gradiente da função objetivo com respeito ao modelo de velocidade antes da aplicação do filtro de média para remover os efeitos produzidos pelas fontes e receptores. Tais efeitos podem degradar o modelo de velocidade da próxima iteração.	72
Figura 5.5 Gradiente da função objetivo com respeito ao modelo de velocidade após a aplicação do filtro de média.	73
Figura 5.6 Teste do algoritmo de tomografia do tempo de trânsito de primeiras chegadas. Modelo real, inicial e invertido, respectivamente.	73
Figura 5.7 Comportamento da função objetivo para o experimento da Figura (5.6).	74
Figura 5.8 Mapas de resíduos. O resíduo é uma estimativa da diferença do tempo de trânsito	

entre o dado modelado e o dado observado. (Esquerda) Mapa obtido na primeira iteração e (Direita) Mapa obtido na última iteração considerada. ....	75
Figura 5.9 Teste do algoritmo de tomografia. A inversão é realizada utilizando uma frequência predominante de 100 Hz para o pulso fonte. Modelo real, inicial e invertido, respectivamente. ....	75
Figura 5.10 Comportamento d função objetivo para inversão do modelo de velocidade usando a frequência pico do pulso fonte igual a 100 Hz. ....	76
Figura 5.11 Experimento realizado adicionando ruído gaussiano sobre o dado observado. Modelo original, inicial e invertido, respectivamente ....	77
Figura 5.12 Primeira família de fonte comum retirada do dado. A fonte está na profundidade 5.0 m no poço A. O grupo de receptores varia de 5.0 m a 1380.0 m de profundidade no poço B. A frequência do pulso pico do pulso fonte é 300.0 Hz e o dado foi amostrado com $200.0\mu s$ ....	78
Figura 5.13 Primeira família de fonte comum após a remoção dos modos de onda indesejáveis. O algoritmo de tomografia requer como entrada somente a primeira chegada. ....	79
Figura 5.14 Estimativa do modelo de velocidade representativo de um reservatório real. Modelo original, inicial e invertido, respectivamente. ....	80
Figura 5.15 Estimativa do modelo de velocidade com distribuição gaussiana. Modelo original, inicial e invertido, respectivamente. ....	82
Figura 5.16 Gradiente normalizado da função objetivo com abordagem utilizando o envelope do sinal analítico para o modelo representativo de um reservatório real. As camadas são grosseiramente detectadas e pobremente delineadas. As regiões suaves permanecem livres de efeitos espúrios(borrões). ....	83
Figura 5.17 Estimativa do modelo de velocidade simples através da incorporação de informação à priori obtida a partir da interpolação linear de perfis verticais de velocidade. Modelo original, inicial e invertido, respectivamente. O modelo de referência é o mesmo modelo inicial para este experiemnto. ....	86
Figura 5.18 Mapas de resíduos após o condicionamento do modelo inicial. O resíduo é uma estimativa da diferença do tempo de trânsito entre o dado modelado e o dado observado. (Esquerda) Mapa obtido na primeira iteração, (Direita) Mapa obtido na penúltima iteração e (Abaixo) Mapa obtido na última iteração considerada. ....	87

Figura 5.19 Estimativa do modelo de velocidade representativo de um reservatório real com regularização da função objetivo. O termo adicional da função objetivo usa um modelo de referência e pesos para ponderar os resíduos entre os modelos atuais e de referência. O parâmetro de regularização adequado nesse experimento está entre  $10^{-5}$  e  $10^{-4}$ . Modelo original, inicial, de referência e invertido, respectivamente. .... 89

Figura 5.20 Estimativa do modelo de velocidade simples com regularização da função objetivo na abordagem com envelope do sinal analítico. O termo adicional da função objetivo usa um modelo de referência e pesos para ponderar os resíduos entre os modelos atuais e de referência. Os pesos são dados por uma distribuição gaussiana com desvio padrão 20 m e o parâmetro de regularização adequado nesse experimento é da ordem de  $10^{-3}$ . Modelo original, inicial e invertido, respectivamente. .... 91

Figura 5.21 Estimativa do modelo de velocidade complexo com regularização da função objetivo na abordagem com envelope do sinal analítico. O termo adicional da função objetivo usa um modelo de referência e pesos para ponderar os resíduos entre os modelos atuais e de referência. Os pesos são baseados na detecção de bordas do modelo atual e o parâmetro de regularização adequado nesse experimento é da ordem de  $10^{-3}$ . Modelo original, inicial, de referência e invertido, respectivamente. .... 93

## LISTA DE ABREVIATURAS

ABREVIATURA	DESCRIÇÃO
BFGS	Variante do Quasi-Newton. Broyden, Fletcher, Goldfarb, Shanno
DF	Diferenças Finitas
DIW	Do inglês “Dinamic Image Warpping”
FWI	Do inglês “Full Waveform Inversion”
LMT	Método de regularização devido à Levenberg–Marquardt–Tykhonov
LS	Do inglês “Least Square”
ML	Do inglês “Matched Layer”
NLS	Do inglês “Nonlinear Least Square”
PD	Problema Direto
PDI	Processamento Digital de Imagens
PI	Problema Inverso
PML	Do inglês “Perfect Matched Layer”
RB	Do inglês “Radiation Boundarie”
SD	Do inglês “Steepest Descent”
SR1	Do inglês “Symetric-Rank-One”
WT	Do inglês “Wave Traveltime Tomography”

## LISTA DE SÍMBOLOS

SÍMBOLOS GREGOS	DESCRIÇÃO
$\nabla^2$	Operador Laplaciano
$\frac{\partial^2}{\partial t^2}$	Derivada parcial temporal de segunda ordem
$\delta(\bar{\mathbf{x}})$	Função delta de Dirac. Filtra a posição das fontes e receptores
$\omega$	Frequência angular
$\alpha$	Fator de estabilidade
$\pi$	Valor de $\pi$
$\lambda_{min}$	Comprimento de onda mínimo
$\sigma(\bar{\mathbf{x}})$	Fator de amortecimento
$\gamma(x)$	Fator de amortecimento na direção $x$
$\gamma(z)$	Fator de amortecimento na direção $z$
$\Lambda, \Lambda_H$	Variáveis de estado adjunto
$\Gamma(\bar{\mathbf{x}}_r)$	Estimativa da diferença do tempo de trânsito
$\phi(\bar{\mathbf{x}}_r)$	Função correlação entre os traços modelados e observados
$\rho(\bar{\mathbf{x}}_r, t)$	Fase do sinal analítico do traço modelado
$\rho^0(\bar{\mathbf{x}}_r, t)$	Fase do sinal analítico do traço observado
$\tau$	Atraso temporal
$\alpha_k$	Comprimento do passo no algoritmo de otimização
$\mu s$	Intervalo de amostragem temporal em micro-segundos
$\Omega$	Domínio espacial da propagação do campo de onda
$\Delta t$	Incremento temporal
$\Delta x$	Espaçamento horizontal da malha
$\Delta z$	Espaçamento vertical da malha

SÍMBOLOS LATINOS	DESCRIÇÃO
$A(\bar{\mathbf{x}}_r, t)$	Envelope do sinal analítico do traço modelado
$A^0(\bar{\mathbf{x}}_r, t)$	Envelope do sinal analítico do traço observado
$B(\bar{\mathbf{x}}_r, t)$	Envelope ao quadrado do sinal analítico do traço modelado
$B^0(\bar{\mathbf{x}}_r, t)$	Envelope ao quadrado do sinal analítico do traço observado
$B_k$	Matriz que aproxima o Hessiano da função objetivo no método Quasi-Newton
$c(\bar{\mathbf{x}})$	Velocidade de propagação
$f$	Frequência
$f(t)$	Representação da parte temporal do pulso fonte
$H(u, \mathbf{m})$	Representação da função objetivo
$J(\mathbf{m})$	Função objetivo
$i, j, k$	Índices espaciais e temporal
$i$	Unidade imaginária
$L$	Comprimento da borda do modelo de velocidade ou largura da janela de correlação
$\mathbf{m}$	Vetor de parâmetros
$nx, nz$	Números de pontos do modelo na direção horizontal e vertical respectivamente
$nbx, nbz$	Número de pontos da borda do modelo na direção horizontal e vertical respectivamente
$R(t)$	Pulso Ricker
$t$	Tempo
$t^m$	Tempo medido
$t^0$	Tempo observado
$u(\bar{\mathbf{x}}, t)$	Campo de onda modelado
$u(\bar{\mathbf{x}}_r, t)$	Sismograma modelado
$u^0(\bar{\mathbf{x}}_r, t)$	Sismograma observado
$u_H(\bar{\mathbf{x}}_r, t)$	Transformada de Hilbert do sismograma modelado
$u_H^0(\bar{\mathbf{x}}_r, t)$	Transformada de Hilbert do sismograma observado
$y^m$	Vetor de dados medidos
$y^0$	Vetor de dados observados
$\bar{\mathbf{x}}$	Vetor posição
$\bar{\mathbf{x}}_r$	Posição dos receptores
$\bar{\mathbf{x}}_s$	Posição das fontes

# SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>17</b>
<b>2</b>	<b>OBJETIVO E DESCRIÇÃO DO PROJETO</b>	<b>21</b>
<b>3</b>	<b>METODOLOGIA</b>	<b>30</b>
3.1	ASPECTOS DA MODELAGEM	30
3.1.1	Testes	36
3.1.2	Fronteiras Absorventes	38
3.2	FORMULAÇÃO DO PROBLEMA INVERSO	42
3.2.1	Formulação	42
3.2.2	Cálculo de Gradientes	44
3.2.3	Função Objetivo	45
3.2.4	Regularização	50
3.3	Incorporação de informação à priori	51
<b>4</b>	<b>SOLUÇÃO DO PROBLEMA INVERSO</b>	<b>56</b>
4.1	O MÉTODO QUASI-NEWTON	60
<b>5</b>	<b>ANÁLISE DOS RESULTADOS</b>	<b>64</b>
5.1	GEOMETRIA DE LEVANTAMENTO	64
5.2	TESTE 1 - INVERSÃO DO MODELO COM DISTRIBUIÇÃO GAUSSIANA UTILIZANDO A CORRELAÇÃO DIRETA ENTRE OS SISMOGRAMAS MODELADO E OBSERVADO	69
5.3	TESTE 2 - INVERSÃO DO MODELO REPRESENTATIVO DE UM RESERVATÓRIO REAL UTILIZANDO A CORRELAÇÃO DIRETA ENTRE OS SISMOGRAMAS MODELADO E OBSERVADO	76
5.4	TESTE 4 - ABORDAGEM UTILIZANDO O ENVELOPE DO SINAL ANALÍTICO	81

5.5	TESTE 5 - EFEITO DA REGULARIZAÇÃO . . . . .	83
5.5.1	Efeito da regularização no modelo simples com a abordagem convencional . . . . .	84
5.5.2	Efeito da regularização no modelo complexo utilizando a abordagem convencional . . . . .	86
5.5.3	Efeito da regularização no modelo simples utilizando a abordagem com envelope do sinal analítico . . . . .	88
5.5.4	Efeito da regularização no modelo complexo com a abordagem utilizando o envelope do sinal analítico . . . . .	91
6	CONCLUSÕES . . . . .	94
	REFERÊNCIAS . . . . .	96
	APÊNDICE A - GRADIENTE DA FUNÇÃO OBJETIVO: ABORDAGEM CONVENCIONAL . . . . .	100
	APÊNDICE B - CÁLCULO DO GRADIENTE DA FUNÇÃO OBJETIVO UTILIZANDO O ENVELOPE DO SINAL ANALÍTICO. . . . .	102

# 1 INTRODUÇÃO

A tomografia do tempo de trânsito de primeiras chegadas, pode ser utilizada para construir um modelo da subsuperfície em várias escalas, desde escalas usadas em sismica de superfície, até escalas globais para obter a estrutura de velocidade do interior da Terra. Os métodos para estimativa de modelos de velocidades, a partir de dados sísmicos, podem usar diferentes estratégias: há os que ajustam diferenças do tempo de trânsito entre o dado modelado e o dado observado e são chamados de tomografia do tempo de trânsito (DINES; LYTLE, 1979); (PAULSSON B.N.P; LANGAN, 1988); (IVANSSON, 1985); (BUBE et al., 1985); (LINES, 1985); (JUSTICE et al., 1989) e mais recente (TAILLANDIER et al., 2009) são exemplos consagrados de algoritmos utilizando o tempo de trânsito. Há os que se baseiam em diferenças diretas entre o dado modelado e o dado observado para procurar o modelo de velocidade que melhor ajusta os dados observados. FWI (do inglês "Full waveform inversion") é um exemplo dessa abordagem utilizando diferenças entre o dado modelado e o dado observado, (TARANTOLA; VIRIEUX, 1987., 1984.);(JOHNSON; TRACY, 1983).

Todas as referências citadas acima para os algoritmos de inversão do tempo de trânsito, usam o traçamento de raios para calcular tanto o tempo de trânsito como as derivadas de Frechét (Perturbação do tempo de trânsito com respeito a velocidade). Esses algoritmos aproximam o dado no limite de alta frequência e podem falhar sempre que as variações do modelo de velocidade são da ordem do comprimento de onda do pulso fonte. A vantagem deste método de inversão é que a função objetivo a ser minimizada (soma dos quadrados dos resíduos entre o tempo de trânsito calculado e observado) pode ser, *quasi-linear* com respeito a mudança relativa entre o modelo de velocidade assumido e o modelo atual. A solução deste problema através de algoritmos de otimização do tipo gradiente conjugado ou Quasi-Newton, requer como entrada o gradiente da função objetivo com respeito ao modelo de velocidade. Estes algoritmos podem obter rápida convergência para o modelo de velocidade, consistente com os dados, mesmo quando o modelo de velocidade inicial está distante do modelo correto.

A estratégia de quem usa a FWI é não ter problemas com as limitações imposta pela teoria do raio, uma vez que, o dado é modelado resolvendo-se numericamente a equação completa da onda. Essa abordagem, pode ser utilizada para estimar modelos de velocidade com variação arbitrária. O problema com a FWI, é que a função objetivo a ser minimizada

(soma dos quadrados dos resíduos entre o dado calculado e o dado observado) é altamente não linear as mudanças no modelo de velocidade. Segundo [Gauthier e Tarantola \(1986\)](#), a FWI pode falhar para um contraste maior que 10 % entre os modelos.

Tanto os algoritmos utilizando o tempo de trânsito, quanto a FWI, podem ser usados para diferentes propósitos. Inicialmente, foram usados para aplicar correções estáticas no processamento de dados sísmicos de superfície ([ZHU; ANGSTMAN, 1992](#)). Atualmente, são muito utilizados para obter um modelo de velocidade inicial para migração pré empilhamento (([ZHAO; UREN, 1995](#)); ([D'AGOSTO; MICHELENA, 1998](#)); ([DESSA S. K. S. OPERTO; KANEDA, 2004](#)); ([BRENDERS; PRATT, 2007](#)) e, também, aplicados a dados sísmicos inter poços para encontrar o modelo de velocidade da região entre dos poços que melhor ajusta o dado observado ([ZHOU G SHUSTER; HARRIS, 1997](#)).

A eficiência dos algoritmos tomográficos do tempo de trânsito, reside na acurácia da estimativa da diferença do tempo de trânsito. A maneira como se calcula varia na literatura, podendo ser feito resolvendo numericamente a equação iconal por diferenças finitas ([POD-VIN; LECOMTE, 1991](#)) ou ([HOLE; ZELT, 1995](#)), ou então usar métodos alternativos, como construção de frentes de onda ([VINJE et al., 1993](#)). Há ainda os que calculam o tempo de trânsito utilizando a equação da onda, como por exemplo [Luo e Schuster \(1991\)](#).

Neste trabalho, realizamos a estimativa do modelo de velocidade utilizando uma implementação alternativa do método proposto por [Luo e Schuster \(1991\)](#), a tomografia da forma de onda. Esta abordagem, possui característica do método de inversão do tempo de trânsito e FWI. O dado a ser ajustado são diferenças do tempo de trânsito de primeiras chegadas, medidas através da correlação entre a forma de onda observada e a forma de onda modelada por diferenças finitas ([LEEUVEN.; MULDER, 2011](#)). Nossa abordagem, não apresenta as restrições da teoria do raio, contrastes de velocidade arbitrários podem ser modelados, e não requer um ajuste da forma de onda, permitindo o uso de modelos acústicos para ajustar os dados. O gradiente da função objetivo com respeito ao modelo de velocidade, entrada para os métodos de otimização do tipo Quasi-Newton, é calculado pelo método de estados adjuntos ([PLESSIX., 2006](#)).

Recentemente, a exploração de gás não convencional, especialmente, gás de folhelho, têm vislumbrado interesse em alguns países devido o potencial econômico e barateamento do custo energético para o país. Os Estados Unidos, por exemplo, é o maior explorador deste tipo de recurso e, desde a segunda metade dos anos 2000, a exploração de gás não convencional se intensificou no país, chegando a um crescimento na produção de 45% ao ano entre 2005 e 2010 ([LAGE L. D. PROCESSI; GALOPPI, 2013](#)). No Brasil, a exploração desse tipo de

recurso também deve nos próximos anos ser intensificada, começando a partir das bacias terrestres maduras, onde há grande disponibilidade de poços perfurados.

Nesse contexto, da exploração de gás de folhelho, as áreas de produção possuem grande quantidade de poços perfurados e, em geral, pouco profundos. Por isso, técnicas geofísicas de imageamento da região explorada, mais precisamente a área compreendida entre dois poços, são essenciais para delinear as rochas e as estruturas que não podem ser identificadas pela sísmica de superfície. Podemos citar [Harris \(1993\)](#), o relatório final do projeto desenvolvido no campo de McElroy no oeste do Texas, como o trabalho consagrado de estudo de caso para obter um tomograma de velocidade da região entre dois poços e uma imagem de alta resolução. A tecnologia desenvolvida, nos vários artigos submetidos, objetivaram: 1) avaliar a eficiência do uso de fontes de alta frequência, 2) avaliar a capacidade da sísmica inter poços no auxílio a delineação do reservatório e 3) monitorar o fluxo de fluidos dentro do reservatório.

Nessa dissertação, gera-se um tomograma da região compreendida entre dois poços, tendo a motivação, fornecer uma ferramenta geofísica para auxiliar na exploração de gás de folhelho. Para isso, utilizamos e avaliamos duas implementações para o algoritmo de tomografia do tempo de trânsito. Essas duas abordagens, diferem na maneira como se calcula as diferenças do tempo de trânsito. A primeira usa a correlação direta entre os sismogramas calculados e observados e a segunda utiliza a correlação entre os envelopes dos sinais analíticos.

Esta dissertação se divide em cinco capítulos que abordam: a descrição e objetivo do projeto, a metodologia, a descrição do problema de otimização e a análise dos resultados. O Capítulo (2), apresenta todo o fluxo necessário para a realização da tomografia do tempo de trânsito utilizando a equação da onda.

No Capítulo (3), discute-se a resolução do problema direto e do problema inverso. Aborda-se os aspectos da modelagem numérica do campo de onda acústico com o método de diferenças finitas, discutindo a representação do modelo em uma malha retangular, a escolha dos espaçamentos da malha, o incremento temporal para evolução do campo baseando-se no critério de estabilidade, além de abordar algumas dificuldades encontradas na resolução numérica do campo de onda, como por exemplo, o efeito de borda. Depois, apresentamos a formulação do problema inverso, definindo a função objetivo e métodos para sua minimização, o cálculo do gradiente da função objetivo via o método de estados adjuntos e, principalmente, os estimadores de diferenças do tempo de trânsito.

No Capítulo (4), abordamos o método de otimização utilizado para a solução do problema inverso. Discutimos de uma maneira geral o problema de otimização não-linear e, depois, abordamos o método de otimização Quasi-Newton, com sua variante BFGS, que é o método

de otimização utilizado neste trabalho. Nesta dissertação, não foi implementada a rotina computacional de otimização, apenas acoplamos em nosso código de tomografia uma rotina disponível em [Byrd et al. \(2011\)](#), que foi construída de acordo com o trabalho [Byrd et al. \(1995\)](#).

O Capítulo (5), faz uma análise dos resultados obtidos. Descreve os conjuntos de dados adquiridos nos modelos de velocidade originais e o tratamento que deve ser seguido para que o dado esteja adequado ao algoritmo de tomografia. Avalia-se os modelos invertidos e o efeito da inversão quando há a utilização de filtros de suavização para preconditionar o gradiente da função objetivo e as estratégias de regularização do problema inverso, utilizando modelos de referência para introduzir informação à priori. Os experimentos, são feitos utilizando duas abordagens diferentes para a estimativa da diferença do tempo de trânsito entre os dados, a primeira usa a correlação entre os sismogramas originais (abordagem convencional) e a segunda usa o envelope dos sinais analíticos (abordagem alternativa), cujo objetivo é tornar a estimativa da diferença do tempo de trânsito menos sensível as mudanças de fase entre os sismogramas modelado e observado.

Finalmente, o capítulo de conclusão, aborda os tópicos discutidos e cita-se os principais resultados obtidos. Para os leitores que necessitarem implementar a rotina de tomografia, utilizando estas abordagens, deixamos os apêndices (A) e (B) que calculam, via o método de estados adjuntos, o gradiente da função objetivo no caso convencional e no caso utilizando o envelope do sinal analítico.

## 2 OBJETIVO E DESCRIÇÃO DO PROJETO

Neste trabalho, vamos construir um algoritmo de inversão 2-D, baseado na equação da onda acústica. O objetivo é estimar um modelo de velocidade, ótimo, que reproduza o sinal sísmico observado e que pode posteriormente, ser utilizado por alguma técnica de imageamento. O projeto aplicará a metodologia desenvolvida, em dados sísmicos inter poços (*crosswell seismic data*), na tentativa de estimar o modelo de velocidade da região entre dois poços. O objetivo final, então, é desenvolver uma ferramenta útil para análise de velocidade aplicada a dados sísmicos inter poços.

*Por que utilizar a metodologia em sísmica inter poços?* Esta questão pode ser respondida em duas partes: 1) O desenvolvimento de mecanismos pouco custosos e robustos na determinação do modelo de velocidade, na escala de reservatório, é crítico para tomadas de decisão e monitoramento. Por exemplo, conhecendo a geometria do reservatório a partir do modelo de velocidade estimado, podemos optar pelo desvio do poço ou alocação de um novo poço. 2) Podemos usar, por simplicidade, apenas a informação da onda transmitida de um poço ao outro, ou seja, considerando apenas a primeira chegada. Essa simplificação no processamento, permite que a correlação entre o traço observado e o traço modelado seja uma medida razoável da diferença do tempo de trânsito, permitindo que esse resíduo seja estimado automaticamente. Ainda podemos ressaltar, que a tecnologia da sísmica inter poços, está sendo cada vez mais empregada devido as novas fronteiras exploratórias, sobretudo, o interesse sobre gás de folhelho, “shale gas”. Por isso, estamos revisitando estas metodologias e combinando diferentes características para obter um modelo de velocidade da região inter poços.

Dados sísmicos inter poços, preenchem uma lacuna entre perfis sísmicos de poços e dados sísmicos de superfície. Os perfis sísmicos de poços possuem alta resolução vertical, mas só permitem a estimativa da velocidade nas imediações dos poços e necessitam de informação adicional para constituir relações estruturais e estratigráficas da região inter poços. Sísmica de superfície, por outro lado, permite a boa correlação lateral e identificação, em geral, de estruturas com comprimento de onda muito maior das dimensões estruturais presentes nos reservatórios e, portanto, não permite o delineamento do reservatório, nem identificar sistemas de fraturas de pequena escala. Uma vez que aquisição sísmica inter poços, configura-se com afastamento de poços típico de 100 m a 600 m e possui um sistema de alta qualidade

para gerar fontes controladas não destrutivas, capazes de gerar pulsos com frequência predominante entre 100 Hz e 2000 Hz, obtêm-se dados com larga banda de frequência, e que permitem propagar comprimentos de onda de até 2,5 m, que são escalas das estruturas presentes nos reservatórios. Adicionalmente, a configuração dos levantamentos sísmicos inter poços, permite obter cobertura completa, pois as fontes podem ser posicionadas por toda a extensão do poço em intervalos de profundidade típicos de 0,8 m a 5 m e os sensores são alocados da mesma forma. Sendo assim, obtêm-se alta taxa sinal ruído e um grande volume de dados ([HARRIS, 1993](#)).

Levantamentos sísmicos inter poços, comumente envolvem centenas de fontes combinadas com centenas de receptores, que reproduzem um volume de dados com milhares de traços. As fontes e receptores são acondicionados por toda a extensão dos poços, permitindo cobertura completa. Os dados são registrados com alta taxa de amostragem e permitem recuperar dados com ampla banda de frequência. Por essas características, os algoritmos de tomografia de tempo de trânsito são custosos, e aumentam mais o tempo de computação a medida que o volume de dados aumentam, principalmente, para modelos refinados que envolvem poços com centenas de metros de profundidade. Neste trabalho, por exemplo, chegamos a simular um levantamento sobre um modelo sintético com 1388x348 pontos regularmente espaçados de 1 m com 680 fontes e 680 receptores, regularmente espaçados de 2 m, reproduzindo um volume de dados 462400 traços, onde cada traço foi amostrado com 800 microssegundos.

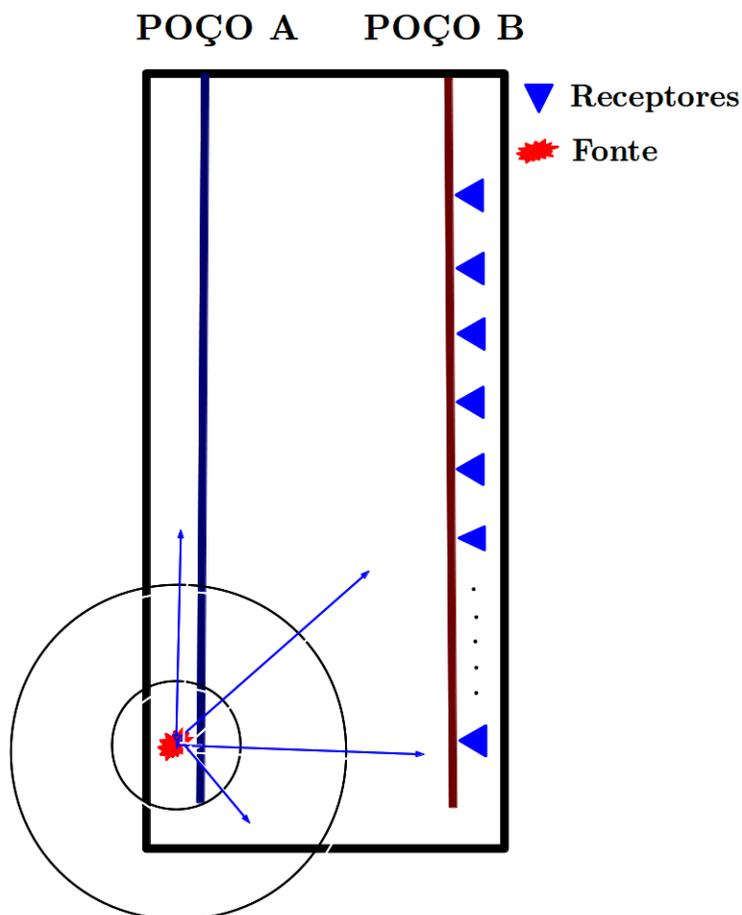
Pelo exposto, fica a observação de que os algoritmos de inversão de dados inter poços, podem conduzir a resultados consistentes do ponto de vista geológico, por essa característica de permitir levantamentos com cobertura completa com uma banda larga de frequência, mas podem sofrer com alto custo computacional devido ao grande volume de dados. Para uma aquisição 2D, tomografia do tempo de trânsito de primeiras chegadas não deve sofrer limitações computacionais, mas para tomografia 3D, métodos que envolvem o cálculo das derivadas de Frechét, por exemplo, são muito custosos computacionalmente ([TAILLANDIER et al., 2009](#)). Portanto, o método alternativo desenvolvido neste trabalho, pode ser utilizado para superar essa limitação e, mesmo que, seja aplicado em dados de natureza 2D, ele pode servir de estrutura para estender a tomografia em três dimensões.

Vamos fornecer, agora, as informações pertinentes a realização deste trabalho, começando pela descrição da natureza e geometria dos levantamentos inter poços e depois descrevendo os estágios que devem ser executados neste projeto e, finalmente, os dois modelo de velocidade sintéticos usados para testar nosso algoritmo.

Os levantamentos sísmicos inter poços, são realizados dispondo de dois poços. Um dos

poços é reservado para acondicionar as fontes sísmicas e outro exclusivo para receber os receptores. A ferramenta que comporta a fonte sísmica em levantamentos reais, é colocada na profundidade máxima requerida dentro do poço e é suspensa até a profundidade mínima com velocidade constante e sendo ativada em intervalos de tempos iguais, permitindo uma amostragem espacial regular da posição da fonte. Os receptores, também, são acondicionados na máxima profundidade requerida e, então, as fontes fazem todo o seu percurso, da profundidade máxima até a profundidade mínima. Depois, o conjunto de receptores é deslocado para cima em uma nova posição e as fontes repetem o procedimento anterior. Essa técnica de aquisição foi nos anos 90 revolucionária nos levantamentos sísmicos inter poços, pois permitia a obtenção de grande volume de dados com alta taxa sinal/ruído e era conhecida como “shot-on-the-fly”. Atualmente, a técnica continua sendo corriqueiramente empregada pela indústria. A Figura (2.1), mostra esquematicamente uma configuração da aquisição sísmica utilizando dois poços, que por si só, já descreve a natureza dos dados obtidos neste trabalho e o propósito de imagear exatamente essa região em subsuperfície.

Figura 2.1: Representação esquemática de uma aquisição sísmica interpoços.



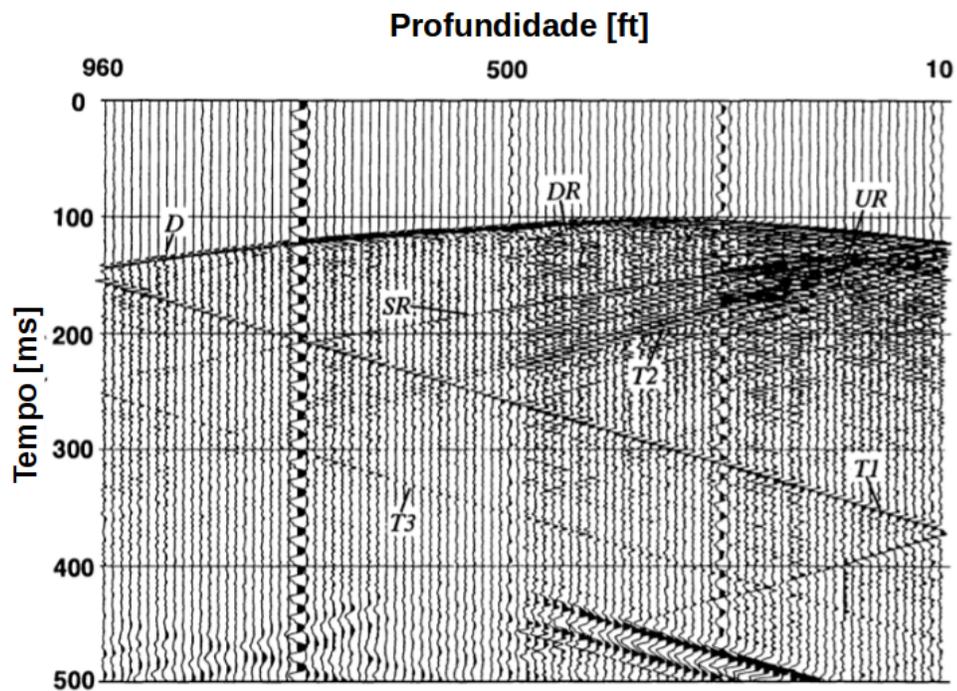
Em levantamentos sísmicos reais, existem uma variedade de eventos que podem ocorrer em meios elásticos; ondas transmitidas P ou S, ondas refletidas/convertidas P-S, S-P, P-P, S-S, ondas que se propagam ao longo da parede do poço das fontes, ondas que reverberam dentro do poço dos receptores (“Tube-Waves”), reflexões múltiplas, etc. Por isso, o sismograma desta natureza recebe tratamento especial em termos de processamento e seleção dos eventos de interesse. Há métodos que usam somente eventos de onda transmitida, como o proposto neste projeto, outros que usam apenas ondas refletidas/convertidas, outros que combinam essas duas metodologias e, em todo caso, existem vantagens e limitações associados em cada procedimento. Para exemplificar a presença desses eventos, obtêm-se do trabalho de [Guoping \(1994\)](#) um sismograma típico desta natureza ilustrado na Figura (2.2).

Essa variedade de eventos torna, também, o trabalho de tomografia uma tarefa difícil de realizar. Uma das maneiras mais simples de realizar a tomografia do tempo de trânsito, é utilizando apenas os eventos de onda transmitida presentes no sismograma e propondo, também, a representação dos dados por modelos acústicos, nesse caso, apenas onda P transmitida são utilizadas para esse propósito. Essa simplificação no processamento do dado, torna o método de fácil implementação, porém sofre com a perda de informação e com a baixa resolução de detalhes por não conter componentes com mais alta frequência, associadas a eventos de reflexão. Por outro lado, especialmente em dados reais, nem sempre é fácil remover os eventos que não são ondas transmitidas de um poço ao outro, pois esses eventos comumente se misturam as ondas refletidas quando os receptores estão próximos de uma interface horizontal e, nesse caso, a qualidade do dado fica comprometida. Além disso, determinados traços não registram, praticamente, nenhum evento de onda transmitida ou a amplitude dos eventos é muito baixa quando comparada com os traços de receptores vizinhos, aumentando a perda de informação.

Nesse trabalho, não será utilizado dados reais, mas desenvolvemos uma ferramenta útil que pode posteriormente ser aplicado à dados reais. O trabalho é dividido em dois estágios; O primeiro estágio é a aquisição de dados e o segundo é a inversão propriamente dita, para estimar o modelo de velocidade entre dois poços.

O primeiro estágio envolve a proposta de um modelo de velocidade original, onde neste modelo será simulada a aquisição de dados. O dado adquirido sobre o modelo original é denominado dado observado ou sismograma observado. O dado bruto não serve para a entrada direta no algoritmo de tomografia do tempo de trânsito de primeiras chegadas por causa da presença de uma variedade de possíveis eventos que podem estar presentes além da onda transmitida. Então, é feita a remoção dos eventos que ocorrem após a primeira chegada e, possivelmente, aplica-se filtros sobre o dado para resolver o problema apenas para um faixa

Figura 2.2: Sismograma real obtido em um levantamento interpoços. Família de tiro comum, Friendswood, Texas. A fonte está em 330 ft (100.6 m) e os receptores no intervalo de 10 ft (3.0 m) a 960 ft (292.6 m) espaçados de 10 ft (3.0 m). A distância entre os poços é 600 ft (186.9 m). Um número de eventos podem ser identificados após o trabalho de [Chen e Eriksen \(1989\)](#). D - Onda P direta ou transmitida do poço fonte ao poço receptor; SR - Uma onda P que viaja subindo o poço da fonte reflete na superfície livre e vai para o poço receptor; DR - Reflexão de onda P descendente entre camadas presentes em subsuperfície entre os dois poços; UR - Reflexão de onda P ascendente entre camadas presentes entre os dois poços; T1 - Onda P que viaja a partir do poço fonte para baixo até o poço dos receptores que é convertida em “Tube-Wave” e viaja para cima dentro do poço; T2 - Onda P a partir do poço fonte para o topo do poço receptor convertida em “Tube-Wave”. T3 - Uma onda “Tube-Wave” convertida a partir da reflexão SR na base do poço receptor e transmitida para cima.

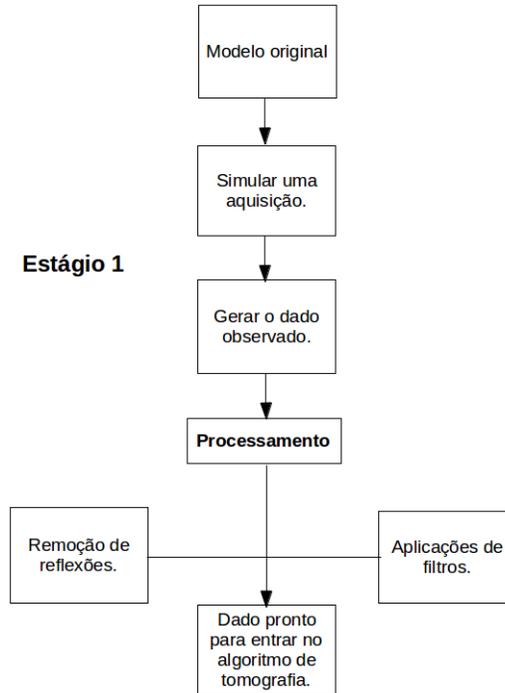


Fonte: Tese de mestrado apresentado por [Guoping \(1994\)](#).

de frequência e, esse dado processado, é a entrada para o algoritmo de tomografia. A Figura (2.3) ilustra os passos básicos que são seguidos no primeiro estágio deste projeto.

O segundo estágio, utiliza como entrada para o algoritmo o dado observado processado e usa-se, também, um modelo de velocidade inicial ou modelo de velocidade teórico onde é feita a propagação do campo de onda acústico teórico ou calculado. Similarmente ao sismograma observado, é criado um sismograma modelado, onde esses dois sismogramas serão correlacionados numa função que permita estimar a diferença do tempo de trânsito entre o traço modelado e o traço observado. Com essa diferença estimada, é possível calcular a função

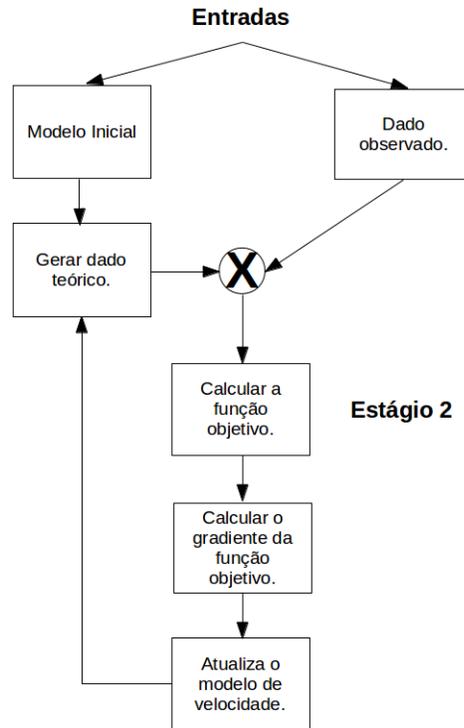
Figura 2.3: Esquema de procedimentos utilizados no primeiro estágio do projeto de tomografia do tempo de trânsito de primeiras chegadas.



objetivo, que é dada pela soma quadrática sobre todos os pares de sismogramas em receptores equivalentes e para todas as fontes do levantamento. Concomitantemente, ao cálculo da função objetivo, calcula-se o gradiente desta função via o método de estados adjuntos, para utilizá-lo como direção de perturbação para encontrar um novo modelo de velocidade. Com esse novo modelo de velocidade, esperamos que ele reduza a função objetivo em relação ao modelo anterior e ajuste melhor os tempos de trânsito calculados e observados que o modelo anterior. Esse ciclo é repetido até que o modelo atualizado reduza significativamente a função objetivo e chegue a um nível de convergência aceitável ou então o algoritmo termina quando nenhum progresso é alcançado. A Figura (2.4), é uma ilustração esquemática do segundo estágio desenvolvido no projeto.

Serão utilizados duas aquisições sísmicas inter poços obtidas para dois modelos de velocidade propostos. O primeiro modelo é uma distribuição suave da velocidade em subsuperfície que simula uma situação de zona de baixa velocidade. O segundo modelo simula uma situação de um campo de produção real contendo sal e lentes finas de arenito, produzindo uma variedade de eventos sísmicos no sismograma observado. Os dois modelos originais são ilustrados nas Figuras (2.5) e (2.6). Sobre estes modelos é construído dois poços, um para acondicionar as fontes e outro para acondicionar os receptores. Essa geometria de levanta-

Figura 2.4: Esquema de procedimentos utilizados no segundo estágio do projeto de tomografia do tempo de trânsito de primeiras chegadas.



tamento, difere ligeiramente do esquema “shot-on-the-fly” descrito anteriormente. Aqui, os receptores são alocados por toda a extensão do poço e permanecem fixos durante toda a aquisição, de maneira tal, que somente as fontes são movidas uma a uma para posição mais rasa até a posição mais profunda atingida na aquisição. Essa geometria da fonte, não faz diferença do ponto de vista computacional, uma vez que não temos as dificuldades que ocorrem dentro do poço nos casos reais. Os poços não são simulados propriamente dito, apenas são dispostas as fontes e os receptores em profundidade como se estivessem acondicionados dentro de poços e, portanto, os nossos sismogramas sintéticos não apresentam “Tube-Waves”.

Detalhes sobre a geometria dos levantamentos, posição dos poços, número de fontes, número de receptores, espaçamento entre fontes, espaçamento entre receptores, taxa de amostragem, frequência entre outros parâmetros são descritos juntamente com os resultados obtidos neste trabalho, uma vez que, a escolha desses parâmetros de aquisição também são usados no algoritmo de tomografia.

Figura 2.5: Modelo de velocidade original com distribuição suave para o primeiro experimento. Os sismogramas obtidos nesse modelo possuem basicamente apenas onda transmitida de um poço ao outro.

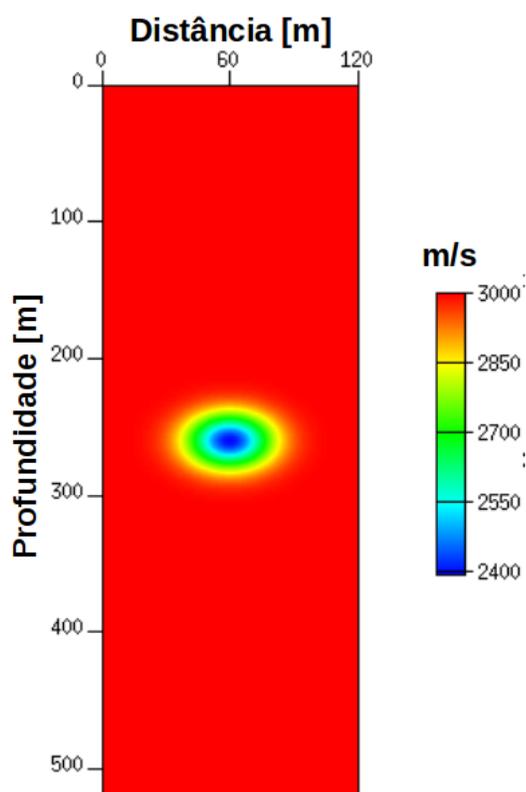
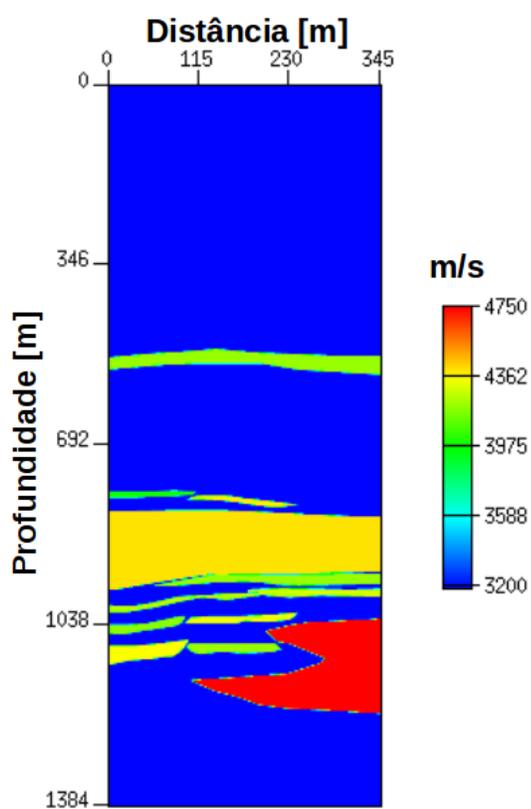


Figura 2.6: Modelo de velocidade original representativo de um campo real para o segundo experimento. Os sismogramas obtidos nesse modelo possuem uma variedade de eventos além da onda transmitida de um poço ao outro.



### 3 METODOLOGIA

Este capítulo aborda a metodologia desenvolvida para realizar a tomografia de tempo de trânsito. Desde os aspectos da modelagem do campo de onda acústico até os passos para resolver o problema inverso.

#### 3.1 ASPECTOS DA MODELAGEM

Para resolver o problema inverso é necessário dispor de métodos para solucionar o problema direto (PD). Isso porque o (PD) é a representação teórica para tentar representar os dados observados. A representação teórica escolhida deve ser de fato compatível com o problema que estamos tentando resolver e, por isso, não podemos exigir do dado mais do que a representação teórica prevê. Este trabalho ajusta diferenças do tempo de trânsito e, essas diferenças, são obtidas após resolver numericamente a equação exata do campo de onda. Por outro lado, nós não é feito um ajuste na forma de onda e, portanto, é suficiente que a representação teórica dos dados seja feita por modelos acústicos. Aqui vamos começar a descrever os aspectos da solução numérica do campo de onda acústico.

A solução numérica do campo de onda é dada pelo método de diferenças finitas (DF). Essa escolha se deve a sua simplicidade, pois é fácil de especificar o modelo em uma malha regular, fácil de programar, emula bem a física e seu custo aumenta razoavelmente com o tamanho do modelo e a frequência desejada. Em (DF), basicamente precisamos discretizar regularmente o modelo acústico de velocidade em uma malha retangular, atribuindo em cada ponto desta malha um valor de velocidade da onda  $P$ ,  $V_p$ , e o campo de onda é amostrado nessa malha, de modo que, as derivadas do campo de onda são aproximadas por diferenças na malha e a precisão dessas medidas depende do ponto de atribuição.

A equação da onda acústica é dada por (3.1)

$$\nabla^2 u(\bar{\mathbf{x}}, t) - \frac{1}{c(\bar{\mathbf{x}})^2} \frac{\partial^2 u(\bar{\mathbf{x}}, t)}{\partial t^2} = f(t) \delta(\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{x}}_s) \quad (3.1)$$

Onde  $u(\bar{\mathbf{x}}, t)$  é o campo de pressão,  $c(\bar{\mathbf{x}})$  é a velocidade,  $\bar{\mathbf{x}}$  é a posição,  $t$  é o tempo e  $f(t)$  é a função fonte injetada na posição  $\bar{\mathbf{x}}_s$ . De um ponto de vista numérico, a equação

da onda é classificada como um problema de condição inicial (condição de Cauchy) (PRESS S. A. TEUKOLSKY; FLANNERY, 2002), onde a função incógnita  $u(\bar{\mathbf{x}}, t)$  é dada por uma evolução no tempo, ou seja, seus valores são determinados sobre toda região em cada instante a partir dos seus valores no tempo anterior. A implementação da solução numérica pelo método (DF) pode ser enunciada em quatro grandes passos simultaneamente analisados; 1) primeiro uma escolha adequada da malha em que o campo será amostrado; 2) escolha da ordem de aproximação para as derivadas parciais; 3) análise de estabilidade e dispersão numérica e 4) implementação das condições de fronteira.

- **Malha**

Nós discretizamos a região de definição da função incógnita e também o comprimento do passo no tempo. Supondo uma região bidimensional, construímos uma malha retangular discretizando as duas direções regularmente.

$$z_i = z_0 + (i - 1) \cdot \Delta z, \quad i = 1, 2, \dots, N_z \quad (3.2)$$

e

$$x_j = x_0 + (j - 1) \cdot \Delta x, \quad j = 1, 2, \dots, N_x \quad (3.3)$$

além de

$$t_k = t_0 + (k - 1) \Delta t, \quad k = 1, 2, \dots, N_t \quad (3.4)$$

Assim, o campo de onda pode ser tomado como

$$u(\bar{\mathbf{x}}, t) = u(x, z, t) = u(i, j, k) = u_{ij}^k \quad (3.5)$$

e o campo de velocidade também é discretizado da mesma maneira

$$c(\bar{\mathbf{x}}) = c(x, z) = c(i, j) = c_{ij} \quad (3.6)$$

- **Ordem do operador de diferenças finitas**

O próximo passo a seguir é escolher a ordem de aproximação para as derivadas espaciais e temporal da equação da onda. Esta escolha é crítica para a solução numérica convergir para a solução real da equação da onda. Vamos escolher dois esquemas para representar

as derivadas espaciais, um esquema de segunda ordem e outro esquema de quarta ordem. Vamos considerar sempre um esquema de segunda ordem para resolver a derivada temporal. Assim para o esquema de segunda ordem temos:

$$\nabla^2 u(\bar{\mathbf{x}}, t) \approx \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{\Delta z} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{\Delta x} \quad (3.7)$$

e para a derivada temporal

$$\frac{\partial u^2(\bar{\mathbf{x}}, t)}{\partial t^2} \approx \frac{u_{i,j}^{k+1} - 2u_{i,j}^k + u_{i,j}^{k-1}}{\Delta t} \quad (3.8)$$

Utilizando essas duas aproximações para computar as derivadas, podemos substituir na equação (3.1) e determinar a evolução do campo de onda no instante  $k + 1$  conhecendo o campo no instante atual  $k$  e no instante prévio  $k - 1$ .

$$u_{i,j}^{k+1} = 2u_{i,j}^k - u_{i,j}^{k-1} + \Delta t^2 c^2 [\mathcal{D}_2[u_{i,j}^k] - f_k \delta_{\xi, \xi_s}] \quad (3.9)$$

onde  $\mathcal{D}_2[u_{i,j}^k]$  significa a aproximação de segunda ordem para o laplaciano dado pela equação (3.7) e  $\delta_{\xi, \xi_s}$  é a delta de kronecker.

Aumentando a ordem do operador de diferenças finitas para um esquema de quarta ordem, obtemos uma equação idêntica dada por

$$u_{i,j}^{k+1} = 2u_{i,j}^k - u_{i,j}^{k-1} + \Delta t^2 c^2 [\mathcal{D}_4[u_{i,j}^k] - f_k \delta_{\xi, \xi_s}] \quad (3.10)$$

onde  $\mathcal{D}_4 u_{i,j}^k$  é dado por

$$\mathcal{D}_4 u_{i,j}^k = \frac{-30u_{i,j}^k + 16(u_{i+1,j}^k + u_{i-1,j}^k) - (u_{i+2,j}^k + u_{i-2,j}^k)}{12\Delta z^2} + \frac{-30u_{i,j}^k + 16(u_{i,j+1}^k + u_{i,j-1}^k) - (u_{i,j+2}^k + u_{i,j-2}^k)}{12\Delta x^2} \quad (3.11)$$

Quanto maior a ordem do operador (DF) melhor é a precisão das derivadas parciais.

- **Estabilidade e dispersão numérica**

A maneira mais simples de verificar a convergência da solução numérica é através do critério de estabilidade fornecido pelas aproximações das derivadas por diferenças finitas. O teorema de Lax diz que: “Um esquema de diferenças finitas consistente para um problema de valor inicial bem posto é convergente se, e somente se, ele é estável.” Por isso, em alternativa a testes de convergência, fazemos uma análise de estabilidade,

para determinar que critérios devem ser satisfeitos para que a solução numérica seja convergente. Esses critérios de estabilidade envolvem a relação entre os parâmetros do esquema (DF), uma relação explícita entre a frequência temporal e o número de onda associado ao tamanho do incremento espacial na malha e o tamanho do passo temporal máximo para o esquema. Para realizar esta análise, considere um meio com velocidade constante  $c(\bar{\mathbf{x}}) = c$  que tem solução na forma  $u_j^n = e^{i(kj\Delta\bar{\mathbf{x}} - \omega n\Delta t)}$ . Substituindo na aproximação por diferenças finitas de segunda ordem obtemos

$$\frac{\partial^2 u_j^n(\bar{\mathbf{x}}, t)}{\partial \Delta\bar{\mathbf{x}}^2} \approx \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta\bar{\mathbf{x}}^2} \quad (3.12)$$

$$\frac{\partial^2 u_j^n(\bar{\mathbf{x}}, t)}{\partial \bar{\mathbf{x}}^2} = e^{-i\omega n\Delta t} \left[ \frac{e^{ik(j+1)\Delta\bar{\mathbf{x}}} - 2e^{ikj\Delta\bar{\mathbf{x}}} + e^{ik(j-1)\Delta\bar{\mathbf{x}}}}{\Delta\bar{\mathbf{x}}^2} \right] \quad (3.13)$$

$$\frac{\partial^2 u_j^n(\bar{\mathbf{x}}, t)}{\partial \bar{\mathbf{x}}^2} = \frac{-4}{\Delta\bar{\mathbf{x}}^2} e^{i(kj\Delta\bar{\mathbf{x}} - \omega n\Delta t)} \sin^2 \frac{k\Delta\bar{\mathbf{x}}}{2} \quad (3.14)$$

Similarmente para a segunda derivada temporal, temos

$$\frac{\partial^2 u_j^n(\bar{\mathbf{x}}, t)}{\partial \Delta t^2} = \frac{-4}{\Delta t^2} e^{i(kj\Delta\bar{\mathbf{x}} - \omega n\Delta t)} \sin^2 \frac{\omega\Delta t}{2} \quad (3.15)$$

Substituindo as equações (3.14) e (3.15) na equação (3.1), obtemos uma relação explícita entre a frequência angular e o número de onda associado com o tamanho do espaçamento da malha.

$$\sin\left(\frac{\omega\Delta t}{2}\right) = \frac{c\Delta t}{\Delta\bar{\mathbf{x}}} \sin\left(\frac{k\Delta\bar{\mathbf{x}}}{2}\right) \quad (3.16)$$

Essa equação que relaciona  $\omega = \omega(k)$  define uma relação de dispersão. Para um meio dispersivo a velocidade de fase é definida como:  $V_{phs} = \omega/k$  e a velocidade de grupo como:  $V_g = \mathbf{d}\omega/\mathbf{d}k$ . Na Figura (3.1) mostramos a relação de dispersão para o esquema de segunda ordem para diferentes valores de  $\alpha = c\Delta t/\Delta\bar{\mathbf{x}}$ . Analisando a equação é necessário que  $\alpha$  seja menor ou igual a unidade, pois os senos retificados variam entre 0 e 1 ou então a relação de dispersão torna-se maior que a componente de Nyquist para o qual  $k\Delta\bar{\mathbf{x}} = \pi$ . Assim

$$\alpha = \frac{c\Delta t}{\Delta\bar{\mathbf{x}}} \leq 1.0 \quad (3.17)$$

Esse é o famoso critério de estabilidade de Courant-Friedrichs-Lewy, muitas vezes cha-

mado simplesmente de condição de Courant. Mostramos na Figura (3.2) a velocidade de fase para valores diferentes do parâmetro  $\alpha$ . Quando  $\alpha = 1.0$  não há dispersão numérica até o limite imposto pela componente espacial de Nyquist, mas quando  $\alpha < 1.0$  dispersão está sempre presente.

Quando a análise de dispersão numérica envolve velocidade variável outros métodos são necessários. A experiência têm mostrado que para a escala de magnitude de contrastes de velocidade encontrados na exploração geofísica os mesmos resultados podem ser utilizados substituindo  $c$  pela velocidade máxima  $c_{max}$  presente na malha de diferenças finitas.

Figura 3.1: Relação de dispersão que relaciona a frequência angular e o número de onda. Cada curva plotada possui um valor diferente do parâmetro  $\alpha = c\Delta t/\Delta \bar{x}$ .

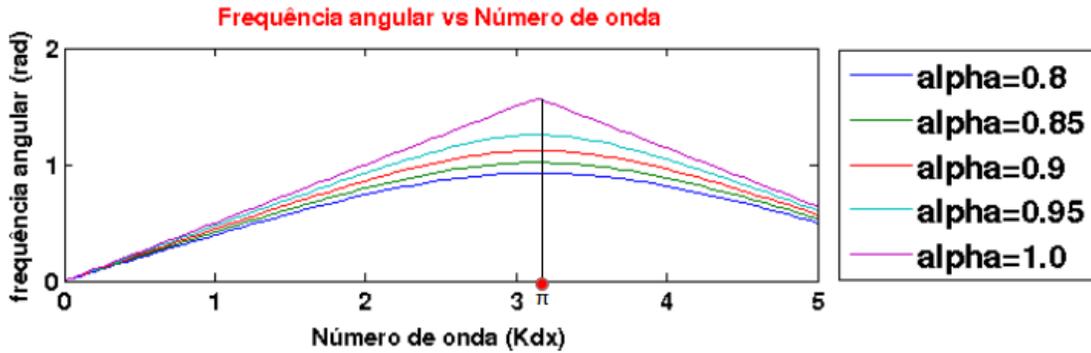
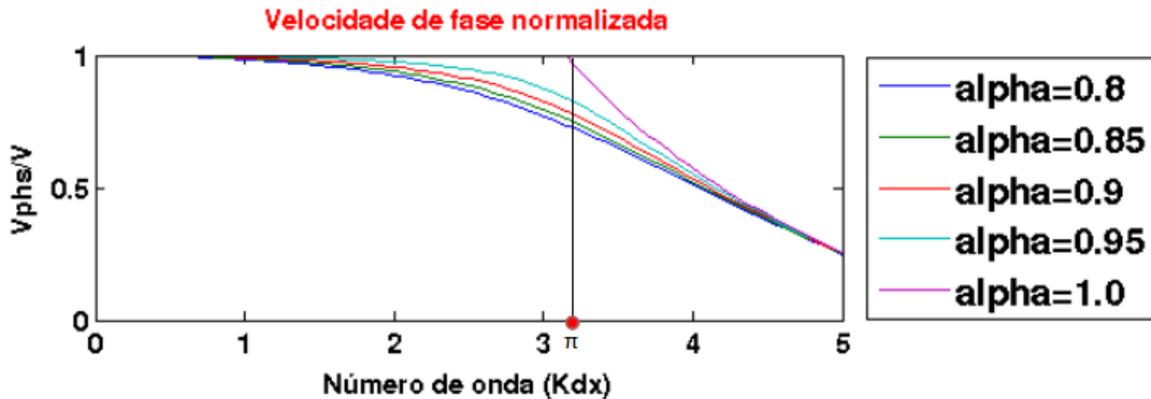


Figura 3.2: Velocidade de fase variando com o número de onda. Cada curva plotada possui um valor diferente do parâmetro  $\alpha = c\Delta t/\Delta \bar{x}$ .



Para esquemas de ordens maiores a mesma análise pode ser realizada. Para o esquema de quarta ordem a estabilidade é garantida para  $\alpha \leq \sqrt{3/8}$  (ALFORD et al., 1974). Assim, realizada a análise de estabilidade e dispersão, para construir o esquema de

diferenças finitas podemos realizar os seguintes passos: 1) Baseado no modelo de velocidade, escolher quantos comprimentos de onda queremos propagar; 2) Encontrar as velocidades máximas e mínimas presentes no modelo e escolher a banda de frequência da fonte; 3) Em posse da frequência máxima esperada, calcula-se o  $\Delta t$  do esquema e finalmente 4) Escolhe-se uma discretização do modelo  $\Delta \bar{x}$  tal que o critério de estabilidade para o esquema seja satisfeito. Embora esses passos tenham sido enunciado nessa ordem, o esquema poderia começar a ser construído da ordem inversa, supondo existir um modelo já discretizado, onde será utilizada a mesma malha do modelo para propagar o campo de onda.

- **Condições de fronteira**

O último passo é determinar as condições numéricas da fronteira da malha onde será discretizado o campo de onda e o modelo de velocidade. Do ponto de vista da teoria de equações diferenciais, a unicidade da solução é alcançada especificadas as condições de contorno. Exemplos são: Condição de contorno de Dirichlet que especifica os valores do campo sobre a fronteira do modelo e a condição de contorno de Neuman que especifica a derivada do campo na fronteira do modelo ([PRESS S. A. TEUKOLSKY; FLANNERY, 2002](#)). Do ponto de vista da implementação numérica a dimensão finita do modelo introduz o chamado efeito de borda, que consiste na reflexão espúria do campo de onda para dentro do modelo ao alcançar a borda da malha. Esse efeito deve ser evitado na implementação, pois ele degrada os possíveis eventos de interesse relacionado às estruturas internas do modelo. Alguns métodos foram propostos na literatura, inicialmente os desenvolvidos por [Clayton e Enquist \(1977\)](#) e [Cerjan et al. \(1985\)](#), que utilizam ambos um modelo aumentado, onde na região estendida a equação da onda é substituída por uma equação da onda "one-way" ou então por uma equação da onda com amortecimento, os métodos RB's (Radiation Boundary - Limite de Radiação) proposto por [Bayliss e Turkel \(1980\)](#). Depois vieram os algoritmos de ML's ( Matched Layers - Camadas Casadas). Um dois algoritmos mais utilizados e mais eficiente é a PML ( Perfectly Matched Layer - Camadas perfeitamente casadas) proposto por [Berenger \(1994\)](#). O termo "perfeitamente" é introduzido porque este método permite que a onda entre nas camadas PML's acopladas a borda da malha sem sofrer reflexões espúrias para qualquer frequência e ângulo de incidência. Para realizar isso, o modelo é aumentado em suas bordas com camadas que absorvem a onda quando esta penetra nas bordas. A espessura da camada PML varia de acordo com o problema. Quanto maior a velocidade presente no modelo maior é a sua espessura.

Nós utilizamos um método alternativo a PML para resolver o problema de reflexões

relacionadas a borda da malha. Este método de fronteira absorvente também utiliza camadas acopladas na borda, que permitem, que a onda ao entrar neste meio, seja atenuada suavemente por uma função exponencial que decai com a distância do meio sem absorção até o ponto dentro da camada com absorção. Permite a penetração da onda no meio de absorção sem reflexão espúria para qualquer frequência e qualquer ângulo de incidência e pode ser facilmente implementada. Os detalhes são descritos na seção de fronteira absorvente.

Uma vez determinado o esquema de diferenças finitas: malha, ordem do operador, critério de estabilidade, condições de fronteira, cada passo pode ser implementado para a construção de um modelador numérico da equação da onda. Vamos apresentar a seguir os resultados obtidos com a construção do algoritmo de modelagem direta.

### 3.1.1 Testes

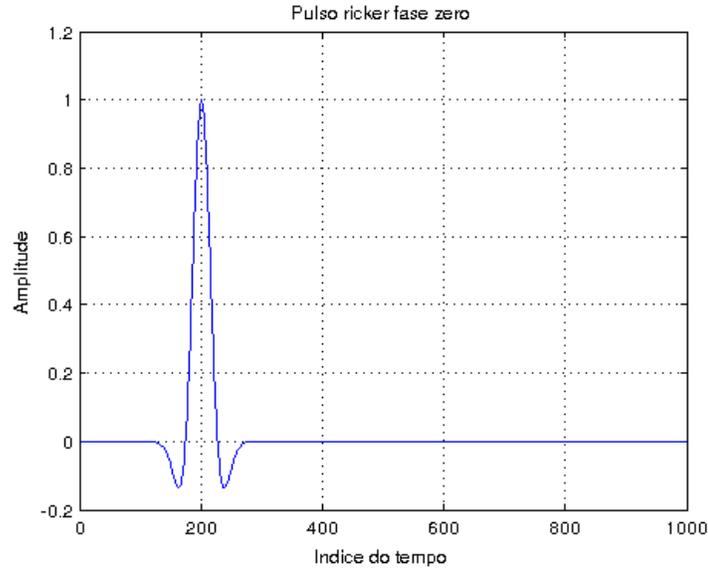
O algoritmo é portátil em princípio para aceitar qualquer modelo de velocidade com qualquer discretização. Sendo assim, dado a distribuição de velocidade, pode-se utilizar a mesma malha do modelo para propagar o campo de onda. Os parâmetros a serem determinados são basicamente a frequência predominante do pulso fonte e o tamanho do passo no tempo  $\Delta t$  que é calculado baseado nas curvas de dispersão para satisfazer o critério de estabilidade. Como vimos no Capítulo 2 que a geometria de nosso levantamento é de dados interpoços, deve-se escolher, também, uma frequência pico da mesma ordem daquelas encontradas na aquisição de dados reais interpoços. Existem vários pulsos testes descritos na literatura para representar fontes sísmicas. Alguns dos mais famosos são o pulso de Ricker, o pulso de Gabor, o pulso de Rayleigh, vibrossesais. Para representar o pulso fonte, neste trabalho, utilizamos o pulso de Ricker, dado por

$$R(t) = \{1 - 2[\pi f(t - t_0)]^2\}e^{-[\pi f(t-t_0)]^2} \quad (3.18)$$

A Figura (3.3) ilustra a forma do pulso Ricker construído com frequência pico de 120.0 Hz.

Vamos usar o modelo de velocidade dado na Figura (3.4) para fazer testes de propagação do campo de onda e este modelo será discretizado em uma malha regular  $\Delta z = \Delta x = 2.5$  m e suas velocidades máxima e mínima serão determinadas  $c_{max}$  e  $c_{min}$ . A partir desses valores e baseado no critério de estabilidade podemos escolher o tamanho do passo temporal  $\Delta t$  do

Figura 3.3: Pulso Ricker centrado em  $t_0 = 200\Delta t$  e frequência pico 120.0 Hz.



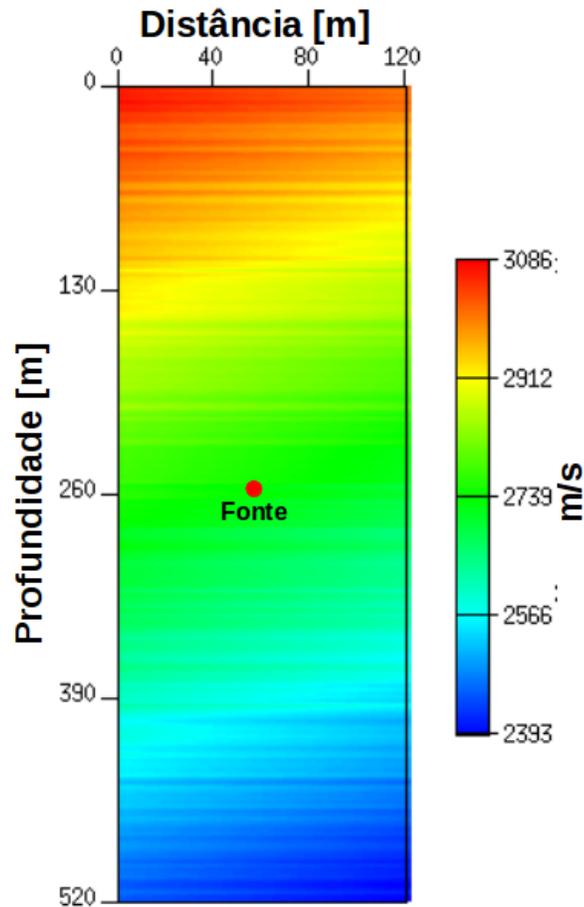
esquema. Os parâmetros do esquema de diferenças finitas assumido para esse levantamento são ilustrados na Tabela (3.1).

Tabela 3.1: Parâmetros de DF para testar o algoritmo de modelagem desenvolvido.

Parâmetros da modelagem numérica da equação da onda por DF		
$\Delta z$	Incremento espacial vertical da malha	2.5 m
$\Delta x$	Incremento espacial horizontal da malha	2.5 m
$\Delta t$	Comprimento do passo temporal do esquema	400 $\mu s$
$f$	Frequência pico do pulso fonte	120.0 Hz
$c_{max}$	Velocidade máxima do modelo	3086 m/s
$c_{min}$	Velocidade mínima do modelo	2393 m/s
$k$	Número de onda	0.05
$\lambda_{min}$	Comprimento de onda mínimo	20.0 m

Para realizar a propagação do campo colocamos a fonte no centro do modelo de velocidade na Figura (3.4) e gravamos duas fotografias em instantes diferentes: uma no instante anterior à frente de onda alcançar a borda do modelo Figura (3.5(a)) e outra no instante posterior Figura (3.5(b)).

Figura 3.4: Modelo de velocidade para testar o algoritmo de modelagem direta.



### 3.1.2 Fronteiras Absorventes

Como pode ser visto na Figura (3.5(b)) a borda da malha introduz uma reflexão de "superfície livre" para dentro do modelo degradando o campo de onda que se propaga em seu interior. Para resolver este problema utilizamos um método baseado em [Cerjan et al. \(1985\)](#). Este método consiste em aumentar a borda do modelo de velocidade e, na região aumentada, resolver a equação da onda com amortecimento em função da distância entre a borda real do modelo e um ponto dentro da região estendida como mostramos na Figura (3.6).

Para realizar essa absorção modificamos a equação da onda fora do domínio de interesse para uma equação que inclui um fator de amortecimento. Assim, na região estendida propomos resolver a equação 3.19

Figura 3.5: Instantâneos do campo de onda antes e após a frente de onda alcançar a borda do modelo.

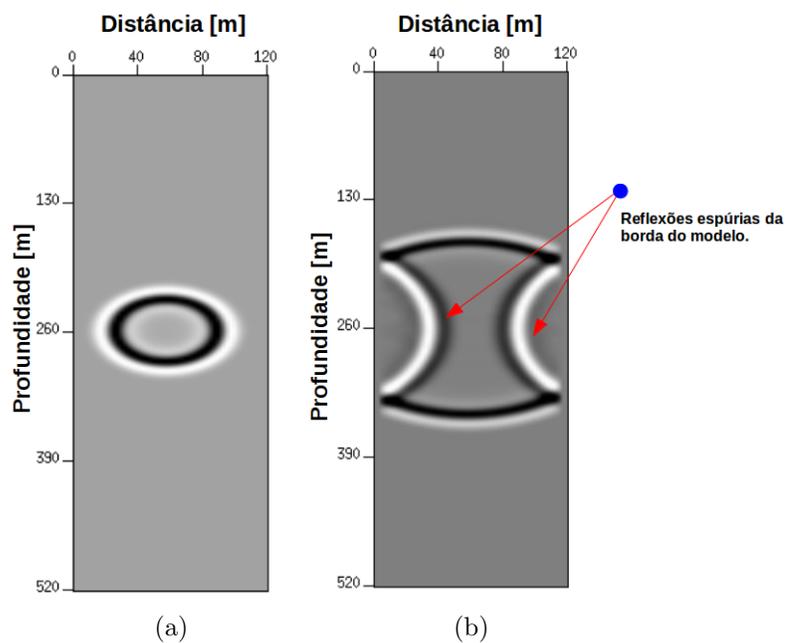
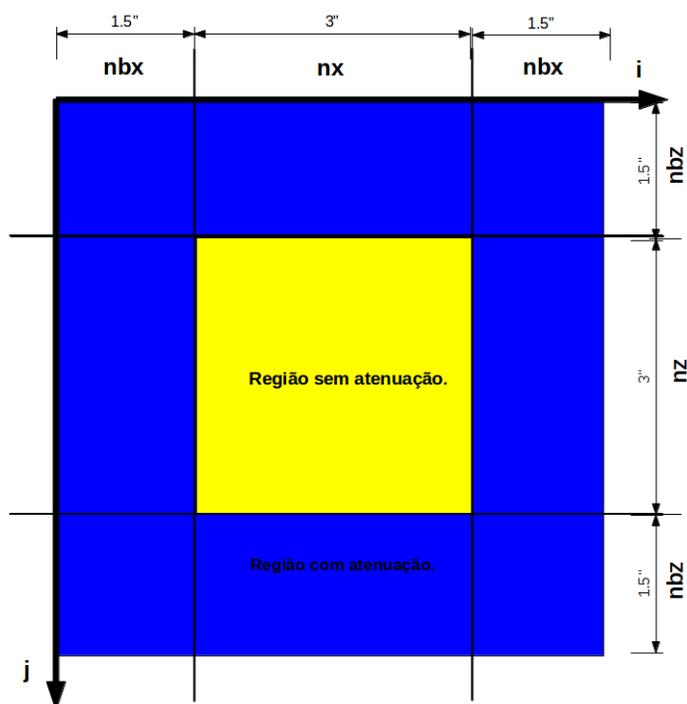


Figura 3.6: A equação da onda é resolvida com atenuação dentro da região estendida.



$$\nabla^2 u(\bar{x}, t) c(\bar{x})^2 = \frac{\partial^2 u(\bar{x}, t)}{\partial t^2} + \sigma(\bar{x}) \frac{\partial u(\bar{x}, t)}{\partial t} \quad (3.19)$$

onde nós admitimos

$$\sigma(\bar{\mathbf{x}}) = \gamma(x)\gamma(z) \quad (3.20)$$

onde as funções  $\gamma(x)$  e  $\gamma(z)$  são definidas como

$$\gamma(x) = \begin{cases} 0 & \text{Dentro da região de interesse.} \\ \pi f_{pico} \Delta t \left(\frac{x}{L}\right)^2 & \text{Fora da região de interesse.} \end{cases} \quad (3.21)$$

e

$$\gamma(z) = \begin{cases} 0 & \text{Dentro da região de interesse.} \\ \pi f_{pico} \Delta t \left(\frac{z}{L}\right)^2 & \text{Fora da região de interesse.} \end{cases} \quad (3.22)$$

Onde  $f_{pico}$  é a frequência pico do pulso fonte,  $L$  é a largura de absorção. Essa maneira de construir a borda de absorção é simples e prática. É robusta pois permite atenuar ondas para qualquer frequência e ângulo de incidência sem que haja reflexão nas bordas, mas sofre com o custo computacional, pois para realizar a modelagem necessita-se aumentar as dimensões do modelo original. No exemplo canônico da Figura (3.6) se  $(nz, nx)$  é a dimensão do modelo original, o modelo aumentado tem dimensão  $(2nbz+nz, 2nbx+nx)$ , dependendo da magnitude das velocidades presentes no modelo o número de pontos  $(nbz)$  e  $(nbx)$  requeridos podem ser grandes e aumentar sobremaneira o tempo de modelagem. Neste trabalho, realizamos apenas essa implementação simples para evitar as reflexões de borda, mas para problemas com velocidades muito altas e modelos originalmente grandes, outros métodos devem ser desenvolvidos, como algum dos métodos citados anteriormente, como por exemplo a PML. As Figuras (3.7) e (3.8) mostram o comportamento do campo de onda após a inclusão do método de fronteiras absorventes no código e podemos perceber que as reflexões espúrias devido às bordas do modelo não estão presentes em qualquer instante na região de interesse.

Agora que dispomos de um modelador do campo de onda acústico, podemos formular o problema de inversão de tempo de trânsito, pois este é o objetivo principal deste trabalho. A próxima seção aborda e descreve o algoritmo desenvolvido.

Figura 3.7: Instantâneos do campo de onda: (a) Fotografia no instante  $t_0 = 0.04s$  e (b) Fotografia no instante  $t_0 = 0.06s$ . Ambos mostram que não há reflexão espúria nas bordas do modelo.

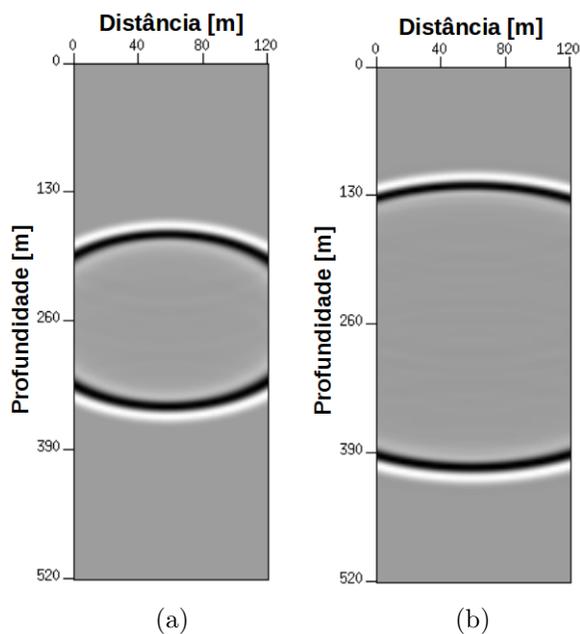
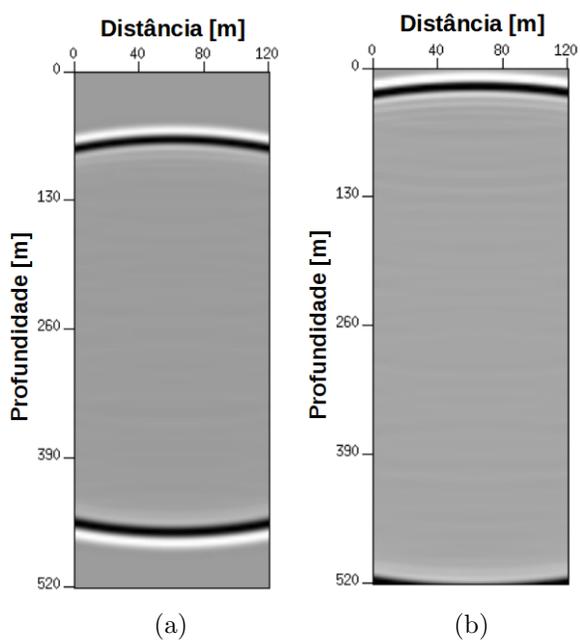


Figura 3.8: Instantâneos do campo de onda: (a) Fotografia no instante  $t_0 = 0.08s$  e (b) Fotografia no instante  $t_0 = 0.1s$ . Ambos mostram que não há reflexão espúria nas bordas do modelo.



## 3.2 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA INVERSO

Agora vamos descrever o problema inverso não-linear, que é obtido quando originamos a função de minimização, soma dos quadrados das diferenças dos tempos de trânsitos calculados com equação da onda e observados, encarado como a solução de um problema de mínimos quadrados não-linear NLS (do inglês “Nonlinear Least-Square”). Tomografia do tempo de trânsito usa tipicamente duas grandes famílias de métodos descritas na literatura: traçamento de raios e equação da onda completa WT (do inglês “Wave travelttime tomography”). Nosso trabalho assemelha-se com WT, onde a função objetivo são diferenças do tempo de trânsito calculados com a equação da onda e não requer um ajuste na forma de onda. Vamos inicialmente introduzir a nomenclatura da teoria usada em problemas NLS formulando o problema de tomografia de tempo de trânsito desenvolvido. Depois vamos discutir alguns aspectos do PI e as funções objetivos que podemos propor para resolver este problema.

Apresentaremos a regularização do PI para torná-lo um problema bem-posto.

### 3.2.1 Formulação

Tomografia do tempo de trânsito no sentido determinístico minimiza uma função “suave”  $J(\mathbf{m})$  que depende de forma não linear dos parâmetros do experimento. Tal função mede a diferença de tempo de trânsito entre o dado calculado com o modelador acústico desenvolvido e o dado observado. O conjunto de parâmetros do experimento  $\mathcal{M} = \{m_1, m_2, m_3, \dots, m_n\}$  devem ser determinados de modo que eles reproduzam o dado observado e  $\mathbf{m}$  é denominado o *vetor de parâmetros* e pertence ao  $\mathcal{R}^n$ .

$$\mathbf{m} = [m_1, m_2, m_3, \dots, m_n], \quad \mathbf{m} \in \mathcal{R}^n \quad (3.23)$$

O dado observado é teoricamente representado por uma lei matemática envolvendo uma ou várias equações que relacionam um conjunto de medidas ao vetor de parâmetros. Cada equação usa informação do vetor de parâmetros para obter uma “componente” do denominado *vetor de estado*

$$\mathbf{u} = [u_1, u_2, u_3, \dots, u_m], \quad \mathbf{u} \in \mathcal{R}^m \quad (3.24)$$

Cada componente do vetor de estado é dado por uma *equação de estado* que pode está

relacionada a uma ou mais componentes do vetor de parâmetros. As medidas utilizadas no problema de minimização podem ser todas as componentes do vetor de estado ou apenas um subconjunto de  $q$  componentes do vetor. Assim, o *vetor de medidas* é dado por

$$y^m = [y_1, y_2, y_3, \dots, y_q], \quad y^* \in \mathcal{R}^q, \quad 1 \leq q \leq m \quad (3.25)$$

O vetor de medidas também é denominado *vetor de dados medidos*. Então, se dispomos de  $q$  medidas observadas, podemos obter o denominado *vetor de dados observados* que pode ser comparado com o vetor de medidas, cujo resultado permita dizer quão próximo o dado medido está do dado observado.

$$y^o = [y_1^o, y_2^o, y_3^o, \dots, y_q^o], \quad y^o \in \mathcal{R}^q \quad (3.26)$$

Em resumo,  $J(\mathbf{m})$  é a função que relaciona um ou mais atributos do vetor de medidas e do vetor de observações, denominada *função objetivo*.  $J(\mathbf{m})$  para o nosso caso deve relacionar o tempo de trânsito de primeiras chegadas medido com o tempo de trânsito observado. Uma proposta para isso é a função

$$J(\mathbf{m}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^q [t_i^o - t_i^m]^2 \quad (3.27)$$

onde  $t^o$  é o tempo de trânsito observado e  $t^m$  é o tempo de trânsito calculado. Esperamos que a minimização da função dado por (3.27) ocorra quando o conjunto de parâmetros  $\mathbf{m}$  é o modelo que representa o dado observado mais acuradamente, isso pode ser enunciado como um problema de otimização não-linear

$$\min_{\mathbf{m}} J(\mathbf{m}) \quad (3.28)$$

Existem várias estratégias propostas na literatura para resolver este problema. Neste trabalho, a estratégia utilizada é do método Quasi-Newton.

Métodos de otimização em geral utilizam o gradiente da função a ser minimizada com respeito as variáveis independentes e, por isso, o cálculo do gradiente de funções objetivo deve ser tomado muito acuradamente para que os métodos de otimização tenham uma chance de encontrar uma solução plausível. Por outro lado, calcular o gradiente da função dada por (3.27) pode ser demasiadamente custoso nas aplicações sísmicas, sobretudo pelo volume de dados disponíveis e pela quantidade de parâmetros do modelo. Por isso, iremos calcular o

gradiente da função objetivo pelo métodos de estados adjuntos, que é um método muito eficiente e pouco custoso, pois necessita apenas resolver um sistema linear adicional para obtê-lo, que é mais vantajoso do que calcular a matriz de sensibilidade, detalhes podem ser encontrados em [Plessix. \(2006\)](#).

### 3.2.2 Cálculo de Gradientes

Seja  $u(\bar{x}, t)$  o campo de onda acústico.  $u(\bar{x}, t)$  é regido pela lei matemática

$$\nabla^2 u(\bar{x}, t) - \frac{1}{c(\bar{x})^2} \frac{\partial^2 u(\bar{x}, t)}{\partial t^2} = f(t) \delta(\bar{x} - \bar{x}_s) \quad (3.29)$$

onde  $u(\bar{x}, t)$  é o vetor de estado e o mapeamento direto pode ser representado por

$$e(u, m) = 0 \quad (3.30)$$

Nós estamos construindo um problema de encontrar o gradiente de funções objetivos. Tais funções são construídas através da diferença entre parâmetros ou atributos sísmicos calculados e modelados. Suponha que  $H(u, m) = J(c)$  seja a função objetivo que queremos minimizar. O problema é resolvido usando o método de minimização com vínculos, então, podemos construir a equação lagrangiana por

$$\mathcal{L}(u, m, \Lambda) = H(u, m) + [e(u, m)]^* \Lambda \quad (3.31)$$

$H(u, m)$  é a função objetivo que depende também do campo de onda calculado, pois este muda para cada modelo,  $e(u, m)$  é chamada equação de vínculo que modela o campo  $u(\bar{x}, t)$  e  $\Lambda(\bar{x}, t)$  é chamado de campo adjunto associado.

Nesta abordagem calcula-se a diferencial total da lagrangiana com respeito aos seus argumentos e impomos as seguintes condições

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} = 0 \quad (3.32)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Lambda} = 0 \quad (3.33)$$

Quando (3.32) e (3.33) são satisfeitas obtemos um dispositivo prático para cálculo do

gradiente da função objetivo seguindo os passos abaixo

$$e(u, m) = 0 \quad (3.34)$$

$$\nabla^2 \Lambda(\bar{\mathbf{x}}, t) - \frac{1}{c(\bar{\mathbf{x}})^2} \frac{\partial^2 \Lambda(\bar{\mathbf{x}}, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial H(u, m)}{\partial u} \quad (3.35)$$

e finalmente

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c} = \frac{2}{c(\bar{\mathbf{x}})} \nabla^2 u(\bar{\mathbf{x}}, t) \Lambda(\bar{\mathbf{x}}, t) \quad (3.36)$$

ou seja, resolvemos o problema direto para determinar o campo de onda acústico, depois utilizamos este campo como entrada para calcular a fonte para o campo adjunto e, após calculados, o gradiente é obtido pela correlação entre o laplaciano do campo modelado e o campo adjunto no mesmo instante  $t$ . Detalhes do cálculo do gradiente para as funções objetivos utilizadas neste trabalho encontram-se nos Apêndices [A](#) e [B](#).

Assim, podemos esquematizar o modelo da próxima iteração como

$$C_{k+1} = C_k - \gamma \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c} \quad (3.37)$$

onde  $\gamma$  é o tamanho do passo. Como podemos observar em cada iteração o modelo de velocidade é perturbado em uma direção de pesquisa que usa o gradiente da função objetivo. Duas modelagens são necessárias podendo ser utilizado o mesmo propagador desenvolvido neste trabalho para fazer ambas. Diferentes funções objetivos podem ser propostas e o algoritmo sofre mudanças apenas na fonte do campo adjunto.

### 3.2.3 Função Objetivo

A função objetivo neste trabalho é dada pela função em [\(3.27\)](#). Ela mede a soma dos quadrados dos erros entre o tempo de trânsito calculado e o tempo de trânsito observado. Nós definimos esse erro como sendo a diferença do tempo de trânsito, mais do que isso, essa diferença utiliza apenas os tempos associados à primeira chegada presentes nos sismogramas calculado e observado. A função objetivo dada em [\(3.27\)](#) em princípio é a mesma em todos os experimentos deste trabalho, mas a maneira como se calcula a diferença de tempo de trânsito tem diferentes abordagens. Sendo assim, cada abordagem, modifica o algoritmo apenas no cálculo da fonte adjunta. Na literatura diferentes maneira para estimativas de diferenças do tempo de trânsito são encontradas, por exemplo, [Luo e Schuster \(1991\)](#) propuseram estimar

essa diferença do tempo de trânsito marcando manualmente os máximos da correlação entre os sismogramas calculados com a equação da onda e os sismogramas observados, entretanto as diferenças calculadas quando o espectro da fonte do dado observado e o dado calculado são distintos a medida não é acurada o suficiente e, mesmo que os espectros fossem iguais, outra desvantagem pode ocorrer quando o modelo de velocidade inicial está muito distante do modelo correto introduzindo “cycle-skipping”. [Vinje et al. \(1993\)](#) fizeram estimativa de tempo de trânsito com algoritmo de construção de frentes de onda, [Leeuwen. e Mulder \(2011\)](#) propuseram o cálculo das diferenças do tempo de trânsito por métodos de seleção automática de eventos e, [Ma e Hale \(2012\)](#) propuseram uma abordagem usando o conceito de DIW (do inglês “Dynamic Image warping”) que não sofre com as mudanças de fase entre os pulsos e supera as dificuldades com “cycle skipping”. Nossa metodologia de estimativa é baseado no trabalho de [Leeuwen. e Mulder \(2011\)](#) para calcular automaticamente as diferenças do tempo de trânsito sem necessitar fazer marcação dos eventos de primeiras chegadas. Uma função objetivo alternativa menos sensível a diferenças de fase entre o sismograma modelado e o sismograma observado é proposta como um condicionamento ao conjunto de dados.

A estimativa da diferença do tempo de trânsito principal deste trabalho é dada por uma medida de centralidade estatística, que usa a propriedade da média ponderada para encontrar o instante em que ocorre o máximo da correlação entre os sismogramas modelado e observado. Seja  $u^m(\bar{\mathbf{x}}_r, t)$  o vetor de dados medidos ou mais precisamente o sismograma modelado e  $u^o(\bar{\mathbf{x}}_r, t)$  o vetor de dados observados ou mais precisamente o sismograma observado, onde  $\bar{\mathbf{x}}_r$  é a posição particular de um receptor. Então, propomos a função (3.38) para calcular diferenças do tempo de trânsito de primeiras chegadas entre os sismogramas calculados e observados por

$$\Gamma(\bar{\mathbf{x}}_r) = \frac{\int_{-L}^L \tau d\tau [\phi(\bar{\mathbf{x}}_r)]^2}{\int_{-L}^L d\tau [\phi(\bar{\mathbf{x}}_r)]^2} \quad (3.38)$$

onde  $\phi(\bar{\mathbf{x}}_r)$  é dado por

$$\phi(\bar{\mathbf{x}}_r) = \int_0^T u^m(\bar{\mathbf{x}}_r, t + \tau) u^o(\bar{\mathbf{x}}_r, t) dt \quad (3.39)$$

A equação (3.38) é claramente uma média ponderada, onde os pesos são as amplitudes ao quadrado da correlação. A partir desta equação iremos fazer testes de acurácia usando pulsos Rickers em diferentes cenários. Primeiramente considere as Figuras (3.9) e (3.10) que exibem dois cenários diferentes: um para estimativa da diferença de tempo com pulsos em fase e outro para estimativa da diferença de tempo com pulsos fora de fase, onde cada pulso

Ricker é dado pela Equação (3.18) usando uma frequência pico de 120.0 Hz e amostrando com  $\Delta t = 0.0004s$ . Para analisarmos as medidas nesses dois cenários, podemos investigar a correlação no domínio da frequência. Sabendo que correlação no domínio do tempo entre dois pulsos é a multiplicação entre o espectro de um dos pulsos pelo conjugado do outro pulso no domínio da frequência, concluímos que para o caso de pulsos com fases iguais o argumento da função complexa definida por esta multiplicação é zero. No caso em que as fases dos pulsos são diferentes, o argumento da função complexa é não nulo e a estimativa de tempo de trânsito com a função objetivo não é exata, isto é, a função proposta para estimativa de diferenças do tempo de trânsito é sensível a mudanças de fase entre os sinais. Nos dois casos, a diferença de tempo entre os centros dos pulsos exata é 0.012s. A estimativa usando a Equação (3.38) para o cenário da Figura (3.9) é muito preciso 0.0120001s, só diferindo do valor exato na sétima casa decimal, um erro desprezível. No caso do cenário da Figura (3.10) a função fornece um valor de 0.0119999 que apresenta um erro relativo de aproximadamente 0.0008s equivalentes a duas vezes a taxa de amostragem dos sinais, ou seja, um erro de dois pontos no eixo do tempo.

Figura 3.9: Teste de estimativa da diferença do tempo de trânsito quando os pulsos possuem fases iguais.

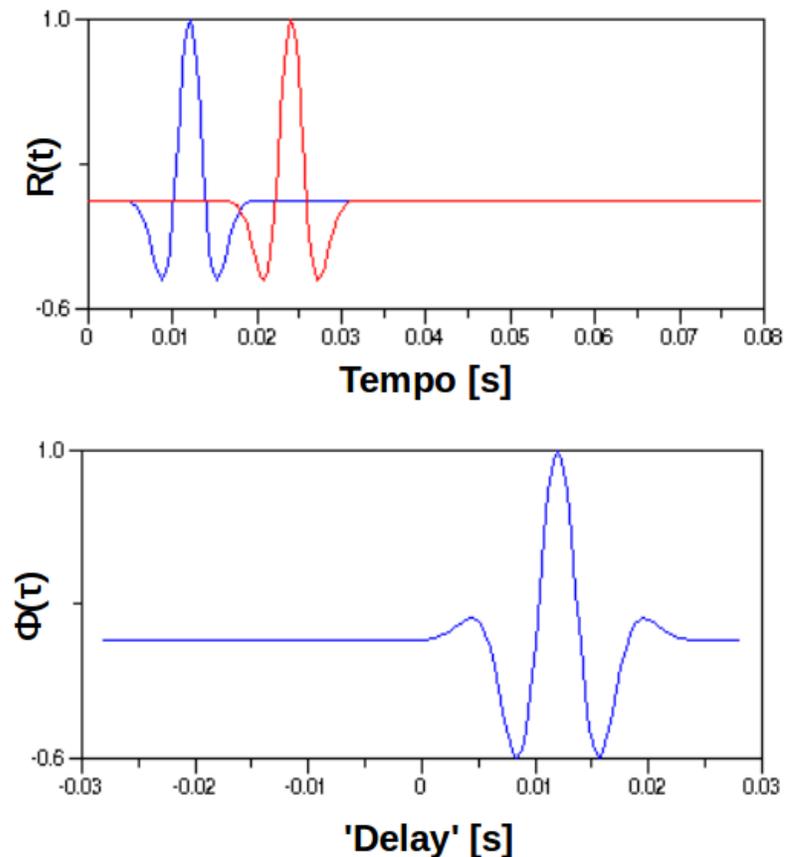
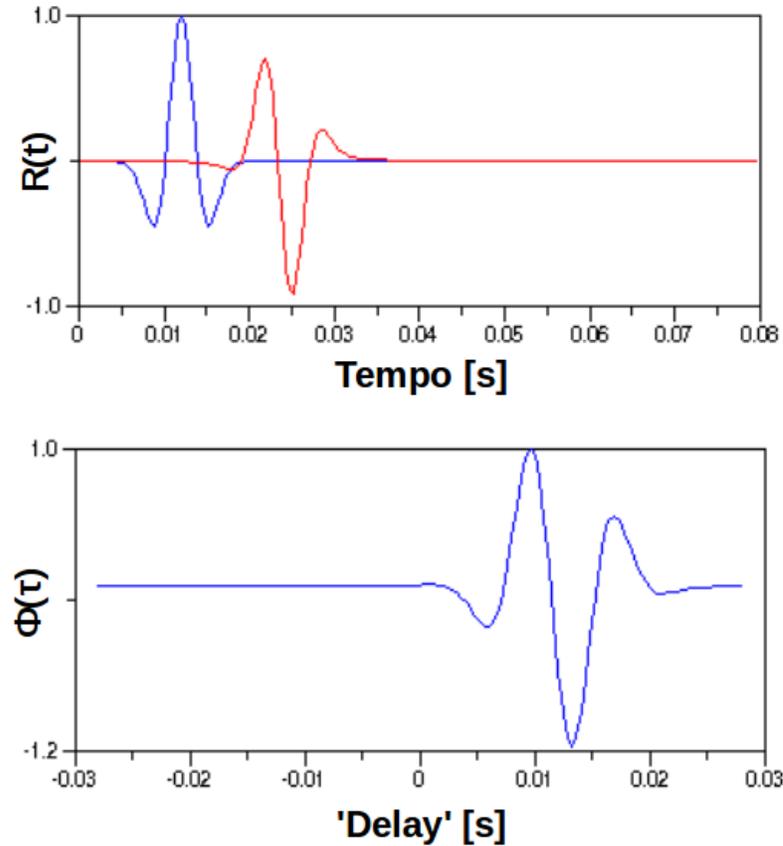


Figura 3.10: Teste de estimativa da diferença do tempo de trânsito quando os pulsos possuem fases diferentes.



Mudança de fase entre os pulsos pode tornar a estimativa menos eficiente e o gradiente da função objetivo estará sujeito a erros de precisão, o que por conseguinte, comprometerá a solução do algoritmo de otimização. Em aplicações, o espectro da fonte do sismograma observado pode ser estimado do próprio dado, mesmo assim, os sismogramas modelado e observado não estariam livres de estarem fora de fase e, portanto, nossa estimativa de diferenças do tempo de trânsito introduz erros no cálculo do gradiente da função objetivo. Para superar esta dificuldade, propõem-se calcular as diferenças do tempo de trânsito a partir do envelope dos traços analíticos dos sismogramas ao invés dos sismogramas propriamente ditos. Um traço genérico, pode ser considerado como a parte real de um sinal complexo, onde a parte imaginária é a transformada de Hilbert do traço original. Assim, o sinal analítico é definido como

$$\tilde{u}(\bar{\mathbf{x}}_r, t) = u(\bar{\mathbf{x}}_r, t) + iu_H(\bar{\mathbf{x}}_r, t) \quad (3.40)$$

onde  $u(\bar{\mathbf{x}}_r, t)$  é a componente em fase e  $u_H(\bar{\mathbf{x}}_r, t)$  é a componente em quadratura do sinal. A

transformada de Hilbert é definida como

$$u_H(\bar{\mathbf{x}}_r, t) = \int \frac{u(\bar{\mathbf{x}}_r, \tau)}{\tau - t} d\tau \quad (3.41)$$

Associados ao sinal analítico definimos as quantidades amplitude instantânea e fase instantânea do sismograma complexo, dados respectivamente pelas fórmulas

$$A(\bar{\mathbf{x}}_r, t) = \sqrt{u(\bar{\mathbf{x}}_r, t)^2 + u_H(\bar{\mathbf{x}}_r, t)^2} \quad (3.42)$$

$$phase(\bar{\mathbf{x}}_r, t) = tg^{-1} \left[ \frac{u_H(\bar{\mathbf{x}}_r, t)}{u(\bar{\mathbf{x}}_r, t)} \right] \quad (3.43)$$

A vantagem de se usar um sinal analítico em vez do traço original, é que a amplitude instantânea, chamada de envelope do sinal analítico, não é sensível a mudanças de fase entre os sismogramas e, portanto, permite através da modificação de (3.38) estimativas do tempo de trânsito entre os sismogramas calculados e observados mais acurada na presença de pulsos fora de fase. Assim a diferença do tempo de trânsito medido será dada por

$$\Gamma(\bar{\mathbf{x}}_r) = \frac{\int_{-L}^L \tau d\tau [\phi(\bar{\mathbf{x}}_r)]^2}{\int_{-L}^L d\tau [\phi(\bar{\mathbf{x}}_r)]^2} \quad (3.44)$$

onde a correlação  $\phi(\bar{\mathbf{x}}_r, \tau)$  é dada por

$$\phi(\bar{\mathbf{x}}_r) = \int_0^T A^m(\bar{\mathbf{x}}_r, t + \tau) A^o(\bar{\mathbf{x}}_r, t) dt \quad (3.45)$$

Quando aplicamos no cenário da Figura (3.10) para pulsos fora de fase conseguimos uma estimativa precisa de 0.0120001 com erro relativo desprezível. Sumarizamos na Tabela (3.2) os resultados dos testes das duas funções objetivos propostas.

Tabela 3.2: Estimativas da diferença do tempo de trânsito com e sem diferença de fase entre os pulsos, com a abordagem utilizando a correlação direta entre os pulsos e a abordagem utilizando o envelope dos pulsos.

<b>Testes de estimativas de diferenças do tempo de trânsito</b>		
Função objetivo	Pulsos em fase	Pulsos fora de fase
Sinal original	$\tau = 0.0120001s$	$\tau = 0.0119999s$
Envelope do sinal analítico	$\tau = 0.0120001s$	$\tau = 0.0120001s$

### 3.2.4 Regularização

O problema NLS para minimizar a função objetivo para encontrar o modelo ótimo que ajusta os tempo de trânsito observados sofre com a não unicidade do problema, ou seja, existe mais de um modelo de parâmetros ( modelo de velocidade) capaz de ajustar os tempos de trânsitos observados. Esse problema em geofísica é resolvido introduzindo informação à priori de diferentes naturezas, no jargão de problemas inversos denomina-se regularização do problema. [Chavent \(2009\)](#) propõem quatro diferentes métodos de regularização, que podem ser usados de acordo com a natureza do problema. Eles são: métodos de parametrização dos parâmetros no conjunto de parâmetros admissíveis, métodos de redução do espaço de parâmetros admissíveis, a regularização LMT (Levenberg–Marquardt–Tykhonov) e a regularização do espaço de estado. No trabalho de [Asnaashari et al. \(2013\)](#) é proposto incorporar diferentes tipos de informação de natureza geofísica-geológica, como por exemplo perfis sônicos de poços, dados estratigráficos e vínculos geológicos que podem tornar o problema inverso bem-posto.

Este trabalho utiliza duas estratégias para reduzir a ambiguidade na inversão. A primeira consiste em um condicionamento do gradiente da função objetivo utilizando processamento de imagens digitais PDI (do inglês “Processing Digital Images”) para a remoção de efeitos espúrios causados pela abertura limitada da aquisição de dados, ruídos aleatórios e os artefatos produzidos pelas fontes e receptores. Construímos uma rotina com um conjunto de filtros digitais que realçam ou removem diferentes características. Filtros passa-baixa, passa-alta, de detecção de bordas, de suavização de bordas ou de suavização de interfaces abruptas que podem ser usados para diferentes propósitos. A segunda estratégia é a regularização com a introdução de informação à priori a cerca da distribuição de velocidade na região inter poços. Essa informação é introduzida com a incorporação de modelos de referência, obtidos com interpolação linear de perfis verticais de velocidade obtidos nos dois poços. Com a adição dessas duas tarefas, é possível tornar o problema mais estável e reduz-se a ambiguidade, por causa da informação à priori.

Suavização do gradiente permite procurar por soluções suaves do modelo de velocidade além de remover eventos espúrios presentes na imagem que não possuem vínculo geológico. O método de suavização utilizado, é uma máscara Gaussiana 2-D aplicada no gradiente, que não preserva as bordas da imagem e suaviza as interfaces abruptas internas da imagem além de remover eventos espúrios da imagem, como por exemplo manchas presentes nas imediações das posições das fontes e dos receptores. Filtros não lineares, também podem ser usados para este propósito, como por exemplo, o filtro de média. Neste trabalho utilizamos esses dois

tipos de filtro: o filtro gaussiano e o de média, ambos para preconditionar o gradiente antes que ele seja incorporado no algoritmo de otimização. Os resultados foram positivamente avaliados.

Em situações reais, em projetos de sísmica inter poços, comumente estão disponíveis perfis verticais de velocidade obtidos dentro dos poços fonte e receptor. Esses perfis, são admitidos como medidas bastante precisas da velocidade vertical nas imediações dos poços. Se, a distância entre os dois poços é pequena, então poderíamos grosseiramente correlacionar esses valores continuamente. Entretanto, mesmo que a distância entre os poços seja pequena, as heterogeneidades do reservatório sempre estão presentes e se nós conseguimos reduzir a ambiguidade da inversão utilizando apenas os perfis de poços, teríamos uma ferramenta bastante útil sem precisar introduzir outros termos de regularização.

### 3.3 Incorporação de informação à priori

Existem muitas propostas sugeridas e consagradas na literatura para a introdução de informação à priori de origem não sísmica para reduzir a ambiguidade na inversão. Como dito anteriormente, [Asnaashari et al. \(2013\)](#) propuseram a incorporação de vários tipos de informação à priori e nesse trabalho mostraram como se usa o modelo de referência obtido a partir de perfis verticais dentro da FWI. [Zhang e Zhang \(2012\)](#) desenvolveram um algoritmo de regularização para tomografia do tempo de trânsito que preserva as interfaces das camadas do modelo e suaviza as áreas fora das camadas.

O modelo de referência usado neste trabalho, baseado na proposta de [Asnaashari et al. \(2013\)](#), é obtido interpolando perfis verticais de velocidade suavizados, obtidos nos dois poços. Esse tipo de informação está comumente presente neste contexto e pode auxiliar a encontrar o modelo verdadeiro. O modelo inicial utilizado para começar a inversão, pode ser o próprio modelo de referência, mas pode também ser fornecido de outra metodologia, como por exemplo, a tomografia de raios. É fundamental que o modelo inicial utilizado na inversão seja um modelo próximo do modelo verdadeiro, isso em geral, não é obtido através do modelo de referência, portanto, o modelo de referência, comumente deve ser diferente do modelo inicial. O modelo inicial, portanto, deve ser um chute razoável para que o algoritmo de inversão tenha uma chance de encontrar o modelo de velocidade verdadeiro. Nesta dissertação utilizamos dois tipos de modelos iniciais: para o caso do modelo simples, utiliza-se o modelo de referência como modelo inicial e, para o caso do modelo complexo, uma vez que não pudemos utilizar um modelo dado pela tomografia de raios, utiliza-se uma versão suave do modelo de velocidade verdadeiro para ser o modelo inicial.

Neste trabalho foram realizados quatro experimentos com diferentes regularizações, baseado nas diferentes abordagens para o cálculo da função objetivo e na natureza do modelo de velocidade. Estes experimentos são:

- Para o caso do cálculo da função objetivo que utiliza diretamente os sismogramas (abordagem convencional), e para o dado obtido sobre o modelo de velocidade simples, utilizamos um condicionamento no modelo de velocidade na iteração atual a partir do modelo de referência através da construção de uma máscara de decisão.
- Para o caso do cálculo da função objetivo utilizando a abordagem convencional e para o modelo complexo introduzimos informação à priori a partir do modelo de referência como propuseram [Asnaashari et al. \(2013\)](#), mas os pesos são calculados baseado na detecção de bordas do modelo atual, para melhorar o delineamento das estruturas e suavização fora delas.
- Para o caso do cálculo do função objetivo utilizando o envelope do sinal analítico e para o modelo simples, é substituído os pesos da regularização anterior por pesos com distribuição gaussiana, onde esse pesos são pequenos nas imediações dos poços, onde a velocidade é admitida ser conhecida, e grandes a medida que se afastam deles por causa da heterogeneidades que podem estar presentes na região entre os poços.
- Para o caso do cálculo da função objetivo utilizando o envelope do sinal analítico e para o modelo complexo, nós utilizamos a mesma metodologia da abordagem convencional na situação de modelo complexo.

Vamos descrever cada estratégia de regularização usada neste trabalho, explicando as ideias que nos motivou a utilizá-las. Primeiramente para o caso da abordagem convencional e para o modelo simples, é feita a construção de máscaras de decisão em cada iteração do algoritmo. A construção se baseia no resíduo entre o modelo de velocidade da iteração atual e o modelo de referência. O modelo de referência é obtido através de marcação de valores de velocidade ao longo dos poços e interpolando esses valores linearmente, simulando uma situação em que temos disponível perfis verticais de velocidade. Quando nós medimos o resíduo entre o modelo de velocidade atual e o modelo de referência, nós podemos verificar em cada iteração onde o resíduo aumenta (gradiente forte) e onde o resíduo praticamente não muda seu valor (gradiente fraco). A medida que o número de iterações aumentam o gradiente torna-se cada vez mais forte onde há diferença brusca entre o modelo atualizado e o modelo de referência e, cada vez mais fraco, onde o resíduo é pequeno. Essa configuração,

se tornar mais expressiva se o modelo atual for realçado, evidenciando nas áreas de pouca variação do gradiente que o modelo atual é aproximadamente o modelo de referência.

Então, aplica-se, neste caso, um condicionamento ao modelo de velocidade da iteração atual, introduzindo informação do modelo de referência. Para fazer isso, é preciso realçar o modelo atual, para depois calcular o resíduo entre o modelo atual e o modelo de referência. Então, calculamos uma máscara de decisão a partir do resíduo, onde o valor da máscara é 1 onde o resíduo é aproximadamente zero e 0 onde o valor do resíduo é grande. Isso quer dizer, que onde o resíduo é grande o modelo de referência está errado e, portanto, nós não podemos introduzir informação do modelo de referência nesse contexto, mas onde o resíduo é pequeno o modelo de referência deve ser aproximadamente o modelo correto e, portanto, devemos introduzir informação do modelo de referência nesse contexto. Por isso que esse condicionamento é dito ser realizado usando máscara de decisão.

O modelo pode ser realçado muito facilmente utilizando filtros de realce de imagens. Primeiramente deve ser escolhida a ordem do operador de realce de acordo com a necessidade de realces fortes ou fracos. Para exemplificar como podemos realçar o resíduo entre o modelo de velocidade atual e o modelo de velocidade de referência  $\Delta \mathbf{m} = (\mathbf{m} - \mathbf{m}_0)$ , podemos supor um realce linear com valores entre 0 e 255 da seguinte maneira:

$$\mathbf{E} = a \Delta \mathbf{m} + b \quad (3.46)$$

onde  $\mathbf{E}$  é a imagem de saída realçada, e as constantes  $a$  e  $b$  são calculadas a partir dos valores máximos e mínimos presentes no modelo  $\mathbf{m}$ . Nesse caso  $a$  é dada por

$$a = \frac{255.0}{\mathbf{m}_{max} - \mathbf{m}_{min}} \quad (3.47)$$

e  $b$  é dada por

$$b = -a\mathbf{m}_{min} \quad (3.48)$$

A máscara de decisão pode ser calculada como:

$$D = \frac{1}{1 + (\nabla^2 \mathbf{E})^2} \quad (3.49)$$

Assim, em cada iteração o procedimento de condicionamento do modelo da iteração atual é feito fazendo o modelo assumir o valor do modelo de referência onde o valor da máscara

é 1 e deixar o seu valor original se o valor da máscara é aproximadamente zero. Após essa operação um filtro de média ou uma convolução com máscara gaussiana pode ser usada para suavizar fortes contrastes que podem ocorrer no resultado final do modelo atual.

Este método se mostrou bastante eficiente no caso do modelo simples utilizando a abordagem convencional e deve ser promissor para modelos de velocidade originalmente suaves, mas é ineficiente para modelos complexos com fortes variações verticais e laterais da velocidade e sujeito a erro quando o modelo de referência está errado. O resultado da aplicação desta estratégia sobre o modelo simples é mostrado no Capítulo (5).

Para o modelo complexo utilizando a abordagem convencional aplica-se uma regularização incorporando informação do modelo de referência, calculando pesos baseados na detecção de bordas sobre o modelo da iteração atual. A função objetivo com regularização é construída da seguinte maneira:

$$J(\mathbf{m}) = \sum_s \sum_r \tau^2(\bar{\mathbf{x}}_r; \bar{\mathbf{x}}_s) + \frac{1}{2} \gamma \|W_r(\mathbf{m} - \mathbf{m}_0)\|_2^2 \quad (3.50)$$

onde  $\mathbf{m}$  é o modelo de velocidade na iteração atual,  $\mathbf{m}_0$  é o modelo de referência obtido pela interpolação linear dos perfis verticais dos dois poços,  $W_r$  é a matriz de pesos que carrega informação das interfaces das camadas presentes no modelo atual,  $\gamma$  é o parâmetro de regularização e  $\frac{1}{2}$  é introduzido para futuras simplificações.

Para determinar os pesos da regularização, queremos que ele seja pequeno em cima das interfaces do modelo e grande nas áreas suaves. Isto pode ser feito aplicando um filtro de detecção de bordas baseado nas derivadas espaciais do modelo. Entretanto, as derivadas podem não ser um bom indicador de bordas se as interfaces são muito suaves, tipicamente como ocorre em tomografia do tempo de trânsito. Por isso, a detecção é realizada sobre um modelo realçado, onde as derivadas se tornariam grandes sobre as interfaces e suficientemente pequenas nas áreas suaves. O realce do modelo pode ser de qualquer ordem, deste que permita a separação ou a segmentação da imagem mais acuradamente utilizando os operadores de derivada. O método de realce anterior pode ser utilizado para exemplificar o procedimento, mas agora, em vez de fazer com o vetor de resíduo, nós fazemos com o modelo de velocidade atual.

Os pesos para o termo de regularização são calculados através da fórmula

$$W_r = \text{diag} \left( \frac{1}{1 + (\nabla^2 \mathbf{E})^2} \right) \quad (3.51)$$

ou seja, os pesos da regularização são inversamente proporcional as derivadas do modelo. A introdução deste termo foi positivamente avaliado durante os nossos testes, sendo fácil de implementar e possui baixo custo computacional. Esse método de regularização se mostrou bastante eficiente para modelos como muitas interfaces e forte variação da velocidade. O Capítulo de resultados apresenta o produto da aplicação desta estratégia sobre o modelo complexo, tanto na abordagem convencional como também na abordagem utilizando o envelope do sinal analítico.

Os pesos da regularização podem ser modificados para conter outras características. Uma maneira diferente que pode ser usada e é extremamente útil para modelo com baixa variação vertical e lateral da velocidade, sem indicação aparente de fortes heterogeneidades, pode ser obtido substituindo  $W_r$  dado pela fórmula acima por uma distribuição gaussiana. Onde os pesos são pequenos nas imediações dos poços e aumentam a medida que se afastam deles, indicando que o modelo de referência está muito próximo do modelo original nas imediações dos poços. Essa estratégia de pesos com distribuição gaussiana foi aplicada na inversão do modelo simples, utilizando a abordagem com o envelope do sinal analítico. O resultado obtido foi positivamente avaliado e é apresentado no Capítulo (5)

## 4 SOLUÇÃO DO PROBLEMA INVERSO

Vimos no capítulo anterior que a solução matemática do problema inverso é resolvido com algum método de otimização não linear para

$$\min_{\mathbf{m}} J(\mathbf{m}), \quad (4.1)$$

onde  $\mathbf{m}$  é modelo de velocidade.

Neste capítulo vamos abordar as características da solução do problema inverso através da otimização e, para isso, vamos discutir alguns fundamentos da teoria de otimização sem vínculo e depois nas seções que seguem vamos abordar respectivamente o método Quasi-Newton não linear e a descrição do algoritmo utilizado nesta dissertação.

Nesse problema devemos encontrar um minimizador global de  $J$ , um ponto onde a função atinge seu valor mínimo. A definição formal é

Um ponto  $\mathbf{m}^*$  é um *minimizador global* se  $J(\mathbf{m}^*) \leq J(\mathbf{m})$  para todo  $\mathbf{m}$ ,

onde  $\mathbf{m}$  pertence ao conjunto de parâmetros admissíveis. Um minimizador global pode ser difícil de encontrar, particularmente porque nosso conhecimento sobre a função objetivo é usualmente somente local. Muitos algoritmos contudo, podem ser capazes de encontrar mínimos locais, que é um ponto onde a função alcança o menor dos valores em uma vizinhança, formalmente, dizemos que

Um ponto  $\mathbf{m}^*$  é um *minimizador local* se existe uma vizinhança  $\mathcal{N}$  de  $\mathbf{m}^*$  tal que

$$J(\mathbf{m}^*) \leq J(\mathbf{m}) \text{ para todo } \mathbf{m} \in \mathcal{N}.$$

Um ponto que satisfaz essa definição é as vezes chamado de *minimizador local fraco*. Essa terminologia serve para distingui-lo de um minimizador local forte ou minimizador local estrito, formalmente definido como,

Um ponto  $\mathbf{m}^*$  é um *minimizador local forte ou estrito* se existe uma vizinhança  $\mathcal{N}$  de  $\mathbf{m}^*$  tal que  $J(\mathbf{m}^*) < J(\mathbf{m})$  para todo  $\mathbf{m} \in \mathcal{N}$  com  $\mathbf{m} \neq \mathbf{m}^*$ .

A partir das definições acima, é possível reconhecer se  $\mathbf{m}^*$  é um mínimo local investigando todos os pontos em sua vizinhança. Se a função objetivo fosse suave, os algoritmos de otimização trabalhariam muito mais eficientemente. Em particular, se a função é duas vezes continuamente diferenciável, podemos avaliar um certo ponto a partir do gradiente de  $\nabla J(\mathbf{m}^*)$  e do Hessiano  $\nabla^2 J(\mathbf{m}^*)$ .

Vamos aqui enunciar os teoremas que servem como ferramentas matemáticas para base de construção dos algoritmos de otimização e deixamos a sua prova para os livros textos de cálculo e, especialmente, ([NOCEDAL; WRIGHT, 1999](#)).

**Teorema 4.1** (Teorema de Taylor) *Suponha que  $J: \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}$  é continuamente diferenciável e que  $p \in \mathcal{R}^n$ . Então temos que*

$$J(\mathbf{m} + p) = J(\mathbf{m}) + \nabla J(\mathbf{m} + tp)^T p, \quad (4.2)$$

para  $t \in (0, 1)$ . Mais do que isso, se  $J$  tem segunda derivada contínua, temos que

$$J(\mathbf{m} + p) = J(\mathbf{m}) + \nabla J(\mathbf{m})^T p + \int_0^1 \nabla^2 J(\mathbf{m} + tp) p dt, \quad (4.3)$$

e que

$$J(\mathbf{m} + p) = J(\mathbf{m}) + \nabla J(\mathbf{m})^T p + \frac{1}{2} p^T \nabla^2 J(\mathbf{m} + tp) p, \quad (4.4)$$

para  $t \in (0, 1)$

**Teorema 4.2** (Condições necessárias de primeira ordem) *Se  $\mathbf{m}^*$  é um minimizador local e  $J$  é continuamente diferenciável em uma vizinhança aberta de  $\mathbf{m}^*$ , então  $\nabla J(\mathbf{m}^*) = 0$ .*

**Teorema 4.3** (Condições necessárias de segunda ordem) *Se  $\mathbf{m}^*$  é um minimizador local e  $\nabla^2 J$  é contínua em uma vizinhança aberta de  $\mathbf{m}^*$ , então  $\nabla J(\mathbf{m}^*) = 0$  e  $\nabla^2 J(\mathbf{m}^*)$  é uma matriz positiva semi definida.*

**Teorema 4.4** (Condições suficientes de segunda ordem) *Suponha que  $\nabla^2 J$  seja contínua em uma vizinhança aberta de  $\mathbf{m}^*$  e que  $\nabla J(\mathbf{m}^*) = 0$  e  $\nabla^2 J(\mathbf{m}^*)$  é positiva semi definida. Então  $\mathbf{m}^*$  é um minimizador local estrito de  $J$ .*

**Teorema 4.5** *Quando  $J$  é convexa, qualquer minimizador local  $\mathbf{m}^*$  é um minimizador global de  $J$ . Se em adição  $J$  é diferenciável, então qualquer ponto estacionário  $\mathbf{m}^*$  é um minimizador global de  $J$ .*

Esses teoremas fornecem os fundamentos para os algoritmos de otimização. Todos os algoritmos em geral pesquisam um minimizador para a função a partir de um ponto inicial. No caso da minimização da função objetivo proposta nesse trabalho significa pesquisar um modelo de velocidade a partir de um modelo de velocidade inicial.

Iniciando a iteração em um modelo inicial  $\mathbf{m}_0$ , os algoritmos geram uma sequência de iterações  $\{\mathbf{m}_k\}_{k=0}^{\infty}$  que terminam ou quando nenhum progresso é produzido ou quando é visto que o ponto solução tem sido aproximado com suficiente acurácia. Para decidir como se mover a partir de uma iteração  $\mathbf{m}_k$  a outra, os diferentes tipos de métodos de otimização usam informação acerca da função objetivo em  $\mathbf{m}_k$  e possivelmente também usam informação de iterações prévias. Os algoritmos em geral forçam que em cada iteração ou completado um determinado número de iterações o valor da função na iteração atual seja menor que o valor da função na iteração anterior. Existem basicamente duas estratégias para se mover a partir do ponto  $\mathbf{m}_k$  a uma nova iteração  $\mathbf{m}_{k+1}$ , elas são: “Line Search” e “Trust Region”. Esse trabalho utiliza a estratégia de “Line search” (LS) que pesquisa em uma dada direção, em geral, dada pelo gradiente da função objetivo, Hessiano ou uma aproximação para ele.

Um algoritmo LS requer uma direção de pesquisa para ir de uma iteração a outra e por isso devemos ser capazes de escolher adequadamente uma tal direção para que o método tenha uma chance de encontrar um minimizador da função objetivo. A direção de pesquisa mais íngreme  $-\nabla J$  (SD - do inglês “Steepest-descent direction”) é a mais óbvia escolha para a direção de pesquisa para um método LS. Isso porque, entre todas as direções possíveis para se mover a partir de  $\mathbf{m}_k$ , esta é a direção em que  $J$  decresce mais rapidamente. Sua principal vantagem é que requer o cálculo apenas do gradiente da função a ser minimizada, entretanto, pode em muitos problemas ter convergência muito lenta ou nem convergir para a solução do problema. Outro método famoso é o da direção de Newton, onde essa direção é dada pela expansão em série de Taylor até segunda ordem de aproximação para  $J(\mathbf{m}_k + p)$ , que é

$$J(\mathbf{m}_k + p) \approx J_k + p^T \nabla J_k + \frac{1}{2} p^T \nabla^2 J_k p \stackrel{def}{=} N_k(p) \quad (4.5)$$

Assumindo por um momento que  $\nabla^2 J_k$  seja positivo definida, obtêm-se a direção de Newton encontrando o vetor  $p$  que minimiza  $N_k(p)$ . Fazendo a derivada de  $N_k(p)$  igual a zero, obtêm-se a seguinte fórmula explícita:

$$p_k = -\nabla^2 J_k^{-1} \nabla J_k \quad (4.6)$$

Métodos que usam a direção de Newton têm uma rápida taxa de convergência local, geralmente quadrática. Quando uma vizinhança da solução é alcançada, a convergência ocorre em poucas iterações. A principal dificuldade com a direção de Newton é o cálculo do Hessiano  $\nabla^2 J(\mathbf{m})$ . Computação explícita dessa matriz de derivadas de segunda ordem em aplicações sísmicas é proibitivo pelo seu alto custo computacional. Para superar esta limitação, recorre-se a métodos alternativos que usam apenas o cálculo do gradiente da função objetivo e uma aproximação para o Hessiano.

Métodos alternativos, como o Quasi-Newton, que usam somente o gradiente da função objetivo, são bastantes atrativos, pois não requer o cálculo explícito do Hessiano e pode atingir uma taxa super linear de convergência. Em vez disso, eles substituem o Hessiano  $\nabla^2 J_k$  por uma aproximação  $B_k$ , que é atualizada após cada passo. Os dois métodos mais populares para a atualização da aproximação  $B_k$  ao Hessiano: são a fórmula SR1 (do inglês “symmetric-rank-one”) definida por

$$B_{k+1} = B_k + \frac{(y_k - B_k s_k)(y_k - B_k s_k)^T}{(y_k - B_k s_k)^T s_k}, \quad (4.7)$$

e a fórmula BFGS, nomeada após seus inventores, Broyden, Fletcher, Goldfarb, and Shanno, que é definida por

$$B_{k+1} = B_k - \frac{B_k s_k s_k^T B_k}{s_k^T B_k s_k} + \frac{y_k y_k^T}{y_k^T s_k} \quad (4.8)$$

onde

$$s_k = m_{K+1} - \mathbf{m}_k, \quad y_k = \nabla J_{k+1} - \nabla J_k$$

O método BFGS é o método de otimização utilizado neste trabalho para atualizar o modelo de velocidade, ele será discutido em detalhes na próxima seção.

## 4.1 O MÉTODO QUASI-NEWTON

O método Quasi-Newton é um método de LS que usa, assim como SD, somente o gradiente da função objetivo em cada iteração, mas ao contrário do método SD pode obter convergência super linear quando alcança a vizinhança de um mínimo local, que em problemas difíceis, são muito mais eficientes que os métodos SD. A estratégia propõem uma aproximação para o Hessiano da função objetivo, onde em cada passo do algoritmo essa matriz de aproximação é atualizada usando a informação de derivadas de primeira ordem do passo atual e da iteração anterior. Por não necessitar calcular explicitamente as derivadas de segunda ordem do Hessiano, métodos Quasi-Newton, podem em alguns casos, serem mais eficientes que métodos de Newton.

O método Quase-Newton mais popular é o método BFGS e que é usado neste trabalho para atualizar o modelo de velocidade.

Inicialmente, consideramos uma aproximação quadrática para a função objetivo no ponto  $\mathbf{m}_k$

$$N_k(p) = J_k + \nabla J_k^T p + \frac{1}{2} p^T B_k p \quad (4.9)$$

com  $B_k$  sendo uma matriz simétrica e definida positiva que aproxima o Hessiano e que será atualizada a cada passo. Podemos notar que no ponto  $p = 0$  o valor do modelo e seu gradiente coincidem com o valor da função objetivo e seu gradiente. Para encontrar a direção de descida ou a direção para se mover para um novo modelo, encontramos o ótimo  $p$  que minimiza esta equação, calculando a derivada da expressão com respeito a  $p$  e depois igualando a zero

$$p_k = -B_k^{-1} \nabla J_k \quad (4.10)$$

essa é a direção de busca. Logo o novo modelo de velocidade será dado pela seguinte iteração

$$\mathbf{m}_{k+1} = \mathbf{m}_k + \alpha_k p_k \quad (4.11)$$

onde  $\alpha_k$  é o tamanho do passo que obedece a condição de Wolfe. Assim temos uma estratégia de direção de pesquisa desenvolvida, a questão agora é como atualizar a matriz de aproximação  $B_k$  em cada iteração. Esse problema é resolvido propondo usar a informação de curvatura da iteração atual e da iteração anterior. Sendo assim, suponha que tenhamos construído um modelo atualizado  $\mathbf{m}_{k+1}$  e queiramos construir um novo modelo quadrático, então

$$N_{k+1}(p) = J_{k+1} + \nabla J_{k+1}^T p + \frac{1}{2} p^T B_{k+1} p \quad (4.12)$$

O que é proposto na literatura é exigir que o gradiente do novo modelo quadrático coincida com o gradiente da função objetivo nos últimos dois passos  $\mathbf{m}_{k+1}$  e  $\mathbf{m}_k$ . Para iteração atual isso é satisfeito como

$$\nabla N_{k+1}(p) = \nabla J_{k+1} \quad (4.13)$$

restando exigir que

$$\nabla N_{k+1}(-\alpha_k p_k) = \nabla J_{k+1} - \alpha_k B_{k+1} p_k = \nabla J_k \quad (4.14)$$

Agora reorganizando os termos da expressão obtemos

$$B_{k+1} \alpha_k p_k = \nabla J_{k+1} - \nabla J_k \quad (4.15)$$

que pode ser escrito como

$$B_{k+1} s_k = y_k \quad (4.16)$$

chamada equação secante, onde

$$s_k = m_{K+1} - \mathbf{m}_k, \quad y_k = \nabla J_{k+1} - \nabla J_k$$

Ou seja, dado os modelos nas iterações ( $s_k$ ) e os gradientes das funções objetivos nas iterações ( $y_k$ ), a equação secante exige que a matriz simétrica  $B_{k+1}$  mapeie o vetor  $s_k$  em  $y_k$ . Isso só será possível se esses dois vetores satisfazem a condição de curvatura

$$s_k^T y_k > 0 \quad (4.17)$$

o que pode ser concluído facilmente pré multiplicando a equação secante (4.16) por  $s_k^T$ . Quando a função objetivo  $J$  é fortemente convexa, a desigualdade  $s_k^T y_k > 0$  é satisfeita para quaisquer dois pontos  $\mathbf{m}_{k+1}$  e  $\mathbf{m}_k$  do domínio. No entanto esta condição nem sempre valerá para função não convexas e, nesse caso, o problema é resolvido forçando que ela valha impondo restrições à busca linear do comprimento do passo  $\alpha_k$ . Quer dizer, as condições de Wolfe são aceitas se  $s_k^T y_k > 0$ . Para verificar este fato observe

$$\nabla J_{k+1}^T p_k \geq c_2 \nabla J_k^T p_k \quad (4.18)$$

ou seja,

$$\nabla J_{k+1}^T s_k \geq c_2 \nabla J_k^T s_k \quad (4.19)$$

resultando em

$$s_k^T y_k \geq (c_2 - 1) \alpha_k \nabla J_k^T p_k \quad (4.20)$$

como  $p_k$  é uma direção de pesquisa em relação a  $\mathbf{m}_k$ ,  $c_2 < 1$  e  $\alpha_k > 0$ , a condição de curvatura é satisfeita.

Outro problema a ser resolvido durante a solução do algoritmo é determinar  $B_{k+1}$  de forma única e que satisfaça as condições anteriores citadas. Para visualizarmos a solução do algoritmo BFGS, vamos considerar a inversa da aproximação do Hessiano  $H_k = B_k^{-1}$ . Para chegar a fórmula do BFGS, em vez de impor restrições sobre  $B_{k+1}$ , fazemos isso para  $H_{k+1}$  e toda a análise é repetida. Os passos do algoritmo BFGS são citados abaixo considerando disponíveis um chute inicial  $\mathbf{m}_0$ , uma aproximação para a inversa do Hessiano  $H_0$  e um número  $\epsilon > 0$ .

- Passo 1: Faça  $k \leftarrow 0$
- Passo 2: se  $\|\nabla J(\mathbf{m}_k)\| \leq \epsilon$ , pare com  $\mathbf{m}_k$  como solução.
- Passo 3: Calcule uma direção de busca  $p_k = H_{k+1} \nabla J_k$ .
- Passo 4: Faça  $\mathbf{m}_{k+1} \leftarrow \mathbf{m}_k + \alpha_k p_k$ , com  $\alpha_k$  calculado com busca linear satisfazendo a condição de Wolfe.
- Passo 5: Faça  $s_k \leftarrow \mathbf{m}_{k+1} - \mathbf{m}_k$  e  $y_k \leftarrow \nabla J_{k+1} - \nabla J_k$
- Passo 6: Calcule a  $H_{k+1}$  utilizando a atualização

$$H_{k+1} = (I - \rho_k s_k y_k^T) H_k (I - \rho_k y_k s_k^T) + \rho_k s_k s_k^T$$

onde

$$\rho_k = \frac{1}{y_k^T s_k}$$

- Passo 7: Faça  $k \leftarrow k + 1$  e retorne ao passo 2.

Esta é uma base descritiva do algoritmo utilizado. O código fonte está escrito em Fortran e encontra-se disponível em [Byrd et al. \(2011\)](#). Ele foi acoplado ao código de tomografia desenvolvido neste trabalho.

## 5 ANÁLISE DOS RESULTADOS

Neste capítulo exporemos os resultados obtidos com o nosso algoritmo de tomografia de diferenças do tempo de trânsito das primeiras chegadas que foi desenvolvido. Faremos isso utilizando dois modelos testes representativo de uma situação de sísmica inter poços. Uma descrição das geometrias de levantamento usadas nas simulações numéricas para realizar os estágios 1 e 2 que foram tratados no Capítulo (2) serão dadas para adivertir o leitor que nossa metodologia é aplicada especialmente a dados sísmicos inter poços. Os dois modelos testes são respectivamente: Um modelo de velocidade com distribuição Gaussiana de baixa velocidade na região inter poços que simula uma situação grosseira de reservatório de gás e, um modelo de velocidade representativo de um reservatório real contendo lentes finas de arenito combinadas com halocinese. O objetivo dos testes é determinar se o nosso algoritmo de tomografia é capaz de inverter adequadamente esses dois modelos propostos. O primeiro é um caso clássico de anomalias de baixa velocidade e o segundo é um caso clássico quando se quer identificar as lentes de arenito e definir o contorno do sal.

Analisaremos o efeito da função objetivo sobre o método de inversão para verificar qual função é mais robusta ou se não há ganhos significativos em diferentes abordagens. Examinaremos o efeito da regularização aplicada ao gradiente da função objetivo e mostraremos que: máscaras gaussianas para a suavização do gradiente é fundamental para condicioná-lo antes de entrar no algoritmo de otimização Quasi-Newton BFGS.

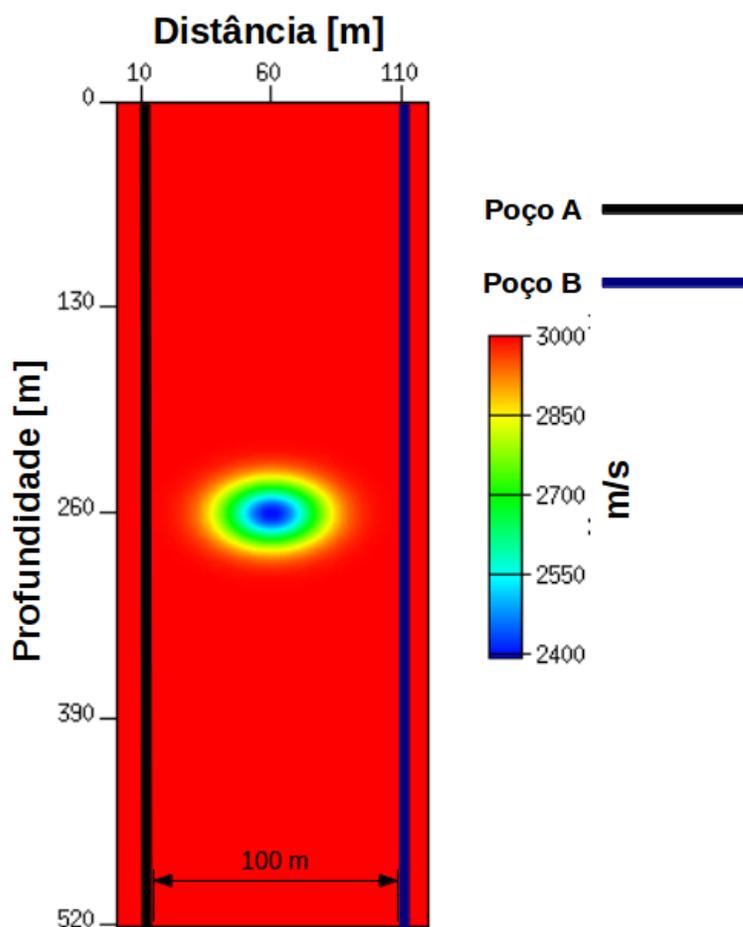
Ressaltamos que a natureza dos nossos testes são bastantes simples e, talvez, sejam pouco significativos de situações reais. Como por exemplo, não simulamos o poço efetivamente sobre os modelos, apenas dispomos as fontes distribuídas em profundidades diferentes. Também não fizemos testes em dados reais, mesmo assim, essa ferramenta desenvolvida de tomografia fornece estrutura para estimar o modelo de velocidade da região entre dois poços que pode ser aplicada futuramente em dados reais ou mesmo a dados sintéticos de natureza 3-D.

### 5.1 GEOMETRIA DE LEVANTAMENTO

Nesta seção, vamos revisar as geometrias de levantamento utilizadas em nossos testes através da ilustração de figuras e visualização dos parâmetros de diferenças finitas em tabelas.

O primeiro teste é realizado sobre um modelo de velocidade com distribuição Gaussiana e, no centro da Gaussiana, o campo de velocidade atinge seu menor valor. As dimensões do modelo são compatíveis com situações reais da distância entre poços e espaçamentos típicos de fontes e receptores no levantamentos inter poços. Neste primeiro experimento a distância entre os dois poços é de 100 m e a profundidade é de 520 m. A dimensão em profundidade é artificial para um caso de simular um reservatório, mas o objetivo real independentemente do tamanho dessa dimensão é obter um tomograma de velocidade com sucesso, pois permite-nos concluir que o método teria potencial de encontrar modelos com anomalias de baixa velocidade que podem estar associadas a reservatórios de gás. Mostramos na Figura (5.1) o modelo de velocidade com o desenho dos poços das fontes e dos receptores. O poço (A) é reservado sempre para acondicionar a posição das fontes e o poço (B) é reservado exclusivamente para acondicionar o conjunto de receptores.

Figura 5.1: Modelo de velocidade com distribuição gaussiana. O campo de velocidade atinge seu menor valor no centro da gaussiana. Os poços das fontes e dos receptores são desenhados sobre o modelo. O poço A (fontes) e o poço B (receptores).



O modelo possui 209 pontos na direção  $z$  e 49 pontos na direção  $x$ . Sendo assim, o espaçamento regular da malha é  $\Delta z = \Delta x = 2.5$  m. As fontes são distribuídas dentro do poço (A) igualmente espaçadas de 10 m com posição inicial na profundidade 10 m e profundidade final igual a 480 m, rendendo um número 48 fontes. Os receptores no poço (B) são acondicionados da mesma maneira que as fontes. Baseado nos valores máximos e mínimos do campo de velocidade e no espaçamento da malha, configuramos a frequência pico do pulso Ricker 120.0 Hz e a taxa de amostragem de diferenças finitas de 100 microssegundos. O dado é amostrado com uma taxa de 400 microssegundos. Sumarizamos na Tabela (5.1) os valores do desenho de levantamento e os parâmetros de diferenças finitas.

Tabela 5.1: Tabela de parâmetros do Teste 1. Essa é a geometria para obtenção do dado observado. A mesma geometria é usada no algoritmo de inversão.

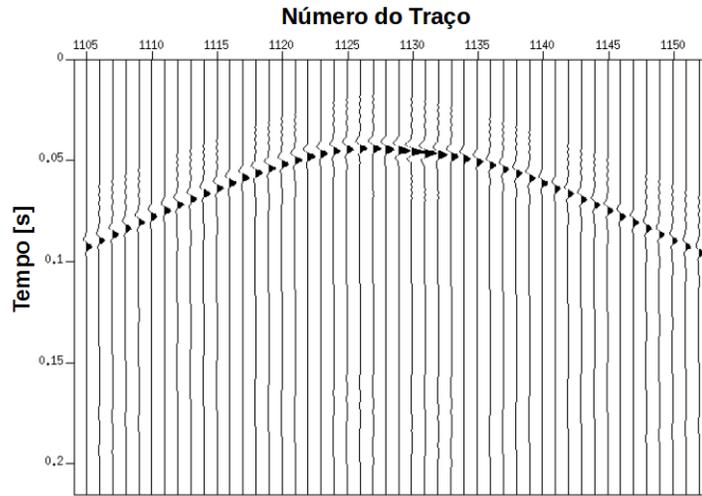
Geometria do levantamento e parâmetros de diferenças finitas	
Incremento entre fontes	10 m
Incremento entre receptores	10 m
Posição Inicial da fonte	10 m
Posição final da fonte	480 m
Posição do primeiro receptor	10 m
Posição do último receptor	480 m
Frequência do pulso fonte	120.0 Hz
Taxa de amostragem do dado	400 $\mu$ s
Taxa de amostragem de DF	10 $\mu$ s
Incremento da malha	2.5 m

O dado é adquirido seguindo a seguinte estratégia de aquisição: 1) Os receptores são instalados no poço (B) e permanecem estáticos durante toda a aquisição. 2) Uma fonte de cada vez é ativada seguindo as posições exibidas na tabela. Cada família de tiro possui 48 traços, totalizando um volume de 2304 traços. Uma família de tiro comum deste dado adquirido para o primeiro teste sobre o modelo da Figura (5.1) é ilustrada na Figura (5.2)

Note que neste experimento não há eventos de reflexão significativos e por isso só há eventos de onda transmitida presentes no sismograma. Essa característica do dado facilita o processo de inversão, uma vez que não é necessário processar o dado removendo eventos que não sejam de onda transmitida.

O segundo levantamento inter poços é feito sobre o segundo modelo de velocidade. Este segundo modelo é uma situação representativa de reservatório real. Podemos perceber que é um modelo que contém altas velocidades e fortes contrastes verticais e laterais de velocidade.

Figura 5.2: Família de tiro comum adquirida sobre o modelo de velocidade da Figura (5.1).

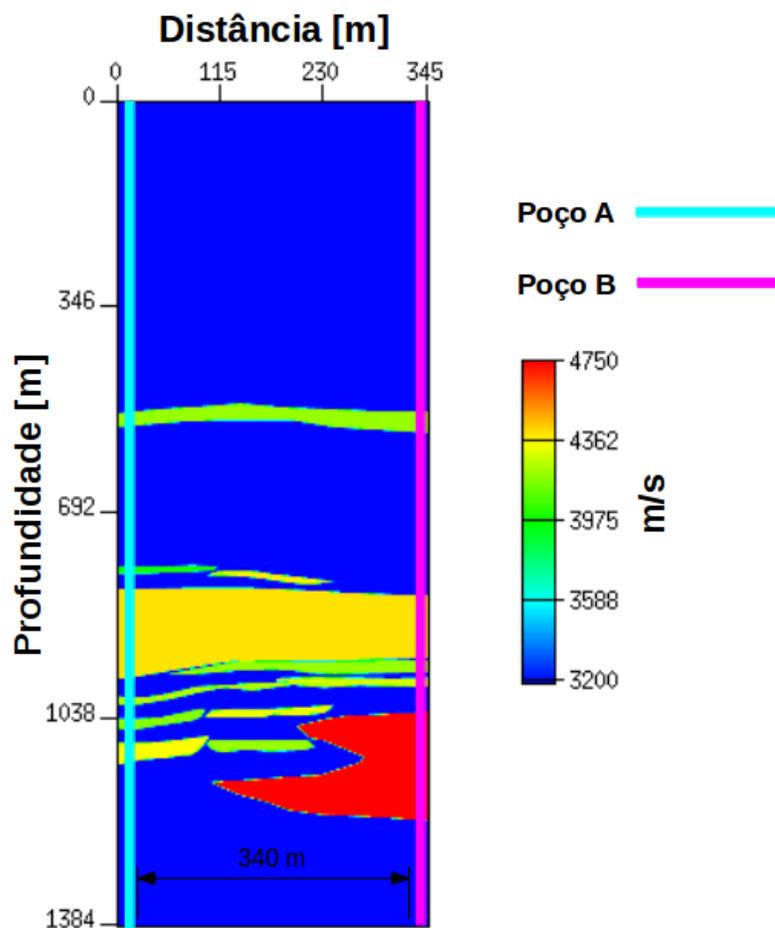


A espessura fina das lentes de arenito é um desafio para as identificar e o contorno do sal é uma das principais feições que um geofísico gostaria de delinear para tomar decisões de produção. Os poços tem profundidade de 1388 m e estão afastados de 348 m. As dimensões discretizadas são de 1388 pontos na direção  $z$  e 348 pontos na direção  $x$ , ou seja, o espaçamento da malha do modelo é  $\Delta z = \Delta x = 1.0$  m. A Figura (5.3) ilustra o modelo de velocidade e a posição dos poços.

Na poço (A), acondicionamos as fontes sísmicas. Elas variam da profundidade 10 m até 1380.0 m, espaçadas de 5 m de profundidade, conduzindo a um total de fontes de 276 fontes. Os receptores são colocados no poço (B) e variam da profundidade 10 m até 1380 m, espaçados de 5 m de profundidade, rendendo um total de 276 receptores. O total de traços adquiridos é de 76176 traços. Nós escolhemos um levantamento de alta frequência para este experimento, para tentar obter o máximo de resolução possível. Dentro do conjunto de aquisição adquiridos durante as experimentações, a frequência de 300.0 Hz para o pulso fonte é a que forneceu resultados mais significativos. O dado gerado foi amostrado temporalmente com  $200\mu s$ . Novamente mostramos a Tabela (5.2) de Geometria de levantamento e parâmetros de aquisição para este segundo conjunto de dados.

Esses são os modelos de velocidade que queremos recuperar a partir do nosso código de tomografia. O primeiro modelo por ser simples, serve para configurar os parâmetros do nosso algoritmo, como por exemplo, o tamanho da janela de correlação mínima, baseado nas diferenças de velocidade. Serve para verificar a influência da diferença de fase entre os sismogramas modelado e observado, serve para testar a inversão utilizando bandas de frequências diferentes e o teste quando o dado possui ruído. Também serve para analisar o

Figura 5.3: Modelo de velocidade representativo de uma situação de reservatório real. Mostra também a posição dos poços das fontes e dos receptores.



tamanho da máscara espacial do filtro de suavização aplicado ao gradiente da função objetivo.

O segundo teste por ser mais complexo é o nosso principal desafio. Nele, tentamos identificar estruturas como as finas lentes de arenito, as camadas finas que se prolongam de um poço ao outro e o contorno do sal.

Nós utilizaremos diferentes abordagens da função objetivo nos dois modelos para tentar responder qual das estratégias é mais robusta na presença de diferenças de fase entre os pulsos.

Tabela 5.2: Tabela de parâmetros do Teste 2. Essa é a geometria para obtenção do dado observado. A mesma geometria é usada no algoritmo de inversão.

Geometria do levantamento e parâmetros de diferenças finitas	
Número de fontes	276
Número de receptores	276
Incremento entre fontes	5 m
Incremento entre receptores	5 m
Posição Inicial da fonte	10 m
Posição final da fonte	1380 m
Posição do primeiro receptor	10 m
Posição do último receptor	1380 m
Frequência do pulso fonte	300.0 Hz
Taxa de amostragem do dado	200 $\mu$ s
Taxa de amostragem de DF	10 $\mu$ s
Incremento da malha	1.0 m

## 5.2 TESTE 1 - INVERSÃO DO MODELO COM DISTRIBUIÇÃO GAUSSIANA UTILIZANDO A CORRELAÇÃO DIRETA ENTRE OS SISMOGRAMAS MODELADO E OBSERVADO

Agora começaremos a discutir os resultados obtidos do nosso algoritmo de inversão para tentar recuperar o modelo de velocidade com distribuição Gaussiana. Nós propomos como modelo inicial para inversão, um modelo de velocidade constante  $v = 3000.0$  m/s e uma janela de correlação de comprimento  $L = n\Delta t$ , onde  $\Delta t$  é a taxa de amostragem dos sismogramas modelado e observado e  $n$  é um número natural, com  $n > 0$ , que defini quantos pontos serão deslocados os sismogramas, para que um sismograma passe completamente sobre o outro. O tamanho da janela de correlação ótima para o experimento é o comprimento mínimo de tempo que permite que quaisquer que sejam os pares de sismogramas modelado e observado, um dos sismogramas passe completamente sobre o outro. Essa escolha pode ser feita de diferentes maneiras quando sabemos o valor exato do modelo original. Entretanto, resolvemos não utilizar essa informação diretamente, pois em aplicações reais nunca é possível saber os valores exatos do campo de velocidade em subsuperfície. Então, utilizamos outros critérios para ajustar o tamanho ótimo da janela de correlação que está estritamente relacionada as diferenças de velocidade entre o modelo teórico e o modelo real.

Para realizar esta análise vamos inicialmente garantir que o nosso modelo teórico está suficientemente próximo cinematicamente do modelo real. Existem duas razões para requerer

um modelo inicial cinematicamente próximo do modelo de subsuperfície; 1) As simulações numéricas por diferenças finitas impõem restrição sobre a banda de frequência utilizada e, portanto, o campo acústico modelado sofre dispersão numérica quando o modelo de velocidade contém magnitudes muito menores daquelas encontradas no modelo real ou maiores, podendo tornar a modelagem inadequada no caso de instabilidade numérica. 2) O campo adjunto depende diretamente da correlação entre os sismogramas e, mesmo que, a janela seja grande o suficiente para permitir modelos distantes, se o campo modelado sofrer com dispersão numérica, o mesmo ocorrerá com o campo adjunto.

Para superar essas limitações seguimos os seguintes passos:

- Passo 1: Dado um modelo de velocidade teórico e os sismogramas observados, faça duas tarefas: 1) Análise do conteúdo de frequência do dado. 2) Simule a propagação do campo de onda acústico no modelo teórico com a banda de frequência do dado e verifique se há dispersão numérica ou instabilidade. Se houver, o modelo teórico dado certamente estará distante cinematicamente do modelo real. Nesse caso pode-se escolher um novo modelo ou então filtrar o dado original e resolver o problema só para uma banda de frequência que aceite a propagação do campo de onda acústico sobre o modelo inicial sem dispersão numérica.
- Passo 2: Chute um tamanho da janela de correlação inicial. Verifique se o campo adjunto sofre dispersão ou instabilidade numérica. Se ocorrer, tendo superado o problema do passo 1, então o tamanho da janela está inadequado.
- Passo 3: Teste o algoritmo com diferentes tamanhos da janela de correlação. Podendo começar com valores maiores nas primeiras iterações e diminuir a medida que o modelo é refinado. Dessa vez pode-se usar a diferença máxima entre o modelo da iteração atual com o da iteração anterior para tomar esta decisão.

Nós queremos manter um levantamento sempre utilizando a mesma banda de frequência do dado observado, portanto o nosso problema é basicamente escolher um bom modelo inicial, isto é, que seja cinematicamente próximo do modelo real. Em aplicações reais quase sempre estão disponíveis tomogramas de velocidade obtidos com traçamento de raios, estes modelos são bons o suficiente para superar estas dificuldades. Sendo assim, o comprimento da janela de correlação é o principal parâmetro para configurar dentro do algoritmo. A Tabela (5.3) ilustra os parâmetros que superam este problema e conduzem a resultados satisfatórios na inversão dos dados. O experimento 1 deste trabalho foi reproduzir a partir dos dados observados o modelo de velocidade dado na Figura (5.1), utilizando como estimativa da diferença do tempo

de trânsito dada pela Fórmula (3.38) baseada na correlação direta entre os sismogramas modelado e observado. Uma regra de monitoramento do código foi permitir um número máximo de iterações, além de colocar vínculos sobre os parâmetros estimados que restringem a um intervalo admissível de velocidades. A velocidade máxima aceita foi de 3500.0 m/s e a velocidade mínima aceita foi de 2200.0 m/s e o número máximo de iterações foram 20.

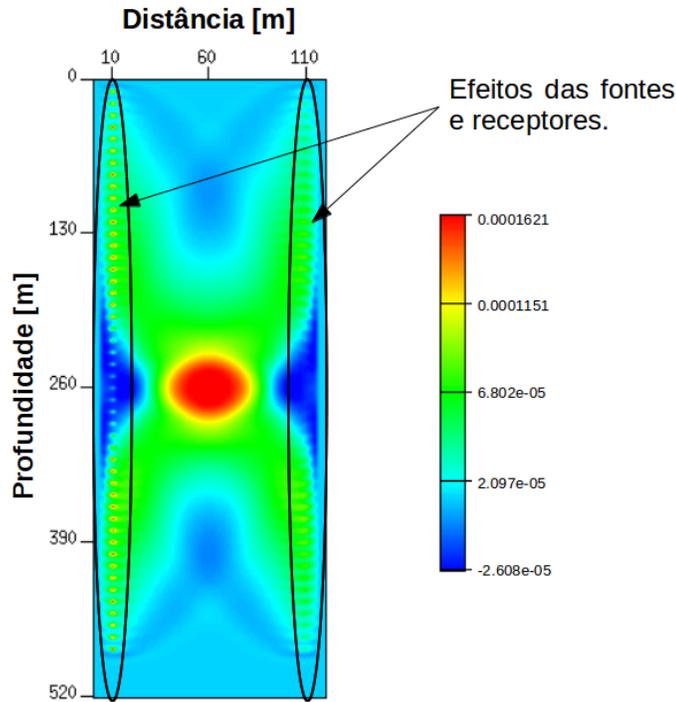
Tabela 5.3: Tabela com valores dos parâmetros de aquisição para o algoritmo de tomografia e velocidades máxima e mínima do modelo inicial.

Número de fontes	48
Número de Receptores	48
Incremento entre fontes	10 m
Incremento entre receptores	10 m
Posição Inicial da fonte	10 m
Posição final da fonte	480 m
Posição do primeiro receptor	10 m
Posição do último receptor	480 m
Frequência do pulso fonte	120.0 Hz
Taxa de amostragem do dado	800 $\mu$ s
Taxa de amostragem de DF	10 $\mu$ s
Incremento da malha	2.5 m
Modelo inicial	$v_{max} = 3000.0$ m/s e $v_{min} = 3000.0$ m/s
Comprimento da janela de correlação	10 $\Delta t$

Para esse experimento, aplicamos em cada iteração um filtro espacial para remover os efeitos espúrios produzidos pelas fontes e receptores, pois esses eventos não correspondem a realidade geológica. Testamos dois tipos de filtros: o primeiro foi o filtro gaussiano que é aplicado sobre o gradiente da função objetivo antes dele ser incorporado dentro do algoritmo de otimização; o segundo foi um filtro de média que também é aplicado sobre o gradiente antes dele ser incorporado no algoritmo de otimização. Todos os dois filtros aplicados produzem efeitos parecidos de remover as oscilações de alta frequência presentes no gradiente da função objetivo. Enquanto o filtro gaussiano é regido por uma convolução espacial de uma máscara gaussiana com a imagem original, o filtro de média é uma operação não linear que calcula a média dos valores dentro de uma janela da imagem e configura no centro da janela o valor da média da janela. A Figura (5.4) mostra o aspecto do gradiente calculado sem a aplicação de filtros. A Figura (5.5) ilustra o resultado da aplicação do filtro de média sobre o gradiente. A aplicação do filtro é fundamental para preconditionar o gradiente, removendo os efeitos produzidos pelas fontes e receptores. Esses efeitos espúrios, podem degradar o modelo de velocidade quando ele é atualizado. O gradiente filtrado é normalizado, porque estamos

interessados apenas na direção de perturbação fornecida pelo gradiente para o algoritmo de LS (do inglês “Line Search”), e portanto, a normalização evita erros numéricos.

Figura 5.4: Gradiente da função objetivo com respeito ao modelo de velocidade antes da aplicação do filtro de média para remover os efeitos produzidos pelas fontes e receptores. Tais efeitos podem degradar o modelo de velocidade da próxima iteração.



A Figura (5.6) mostra o modelo real, o modelo inicial e o modelo invertido com o nosso algoritmo. A Figura (5.7) mostra o comportamento da função objetivo para este experimento.

Podemos perceber que o modelo invertido ainda apresenta feições espúrias presentes na imagem. Essas feições são borrões na imagem que estão sempre presentes, pois são marcas da correlação entre os campos modelado e adjunto na presença de diferença de fase entre os sismogramas modelado e observado. Os borrões, ao contrário dos efeitos das fontes, são ruídos de pequena oscilação que tem a mesma ordem de oscilação considerada sinal ou estrutura verdadeira do modelo.

A função objetivo, nesse primeiro experimento, mostra uma descida lenta nas primeiras iterações. A partir da sexta iteração a função objetivo tem um decréscimo considerável até atingir cerca de 10 % do seu valor inicial. Após isso, a função não sofre mais decréscimos significativos, então o código é finalizado por não ocorrer nenhum progresso.

Para esse experimento simples, vamos mostrar o comportamento da função objetivo analisando, especificamente os mapas de resíduo da primeira iteração e o da última iteração

Figura 5.5: Gradiente da função objetivo com respeito ao modelo de velocidade após a aplicação do filtro de média.

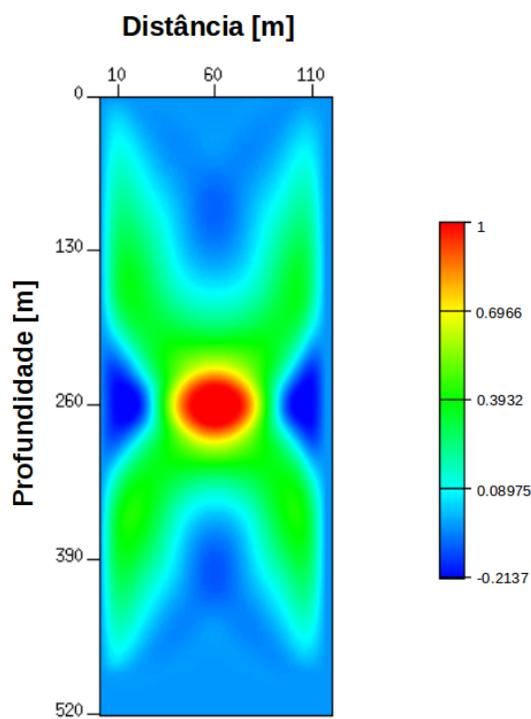
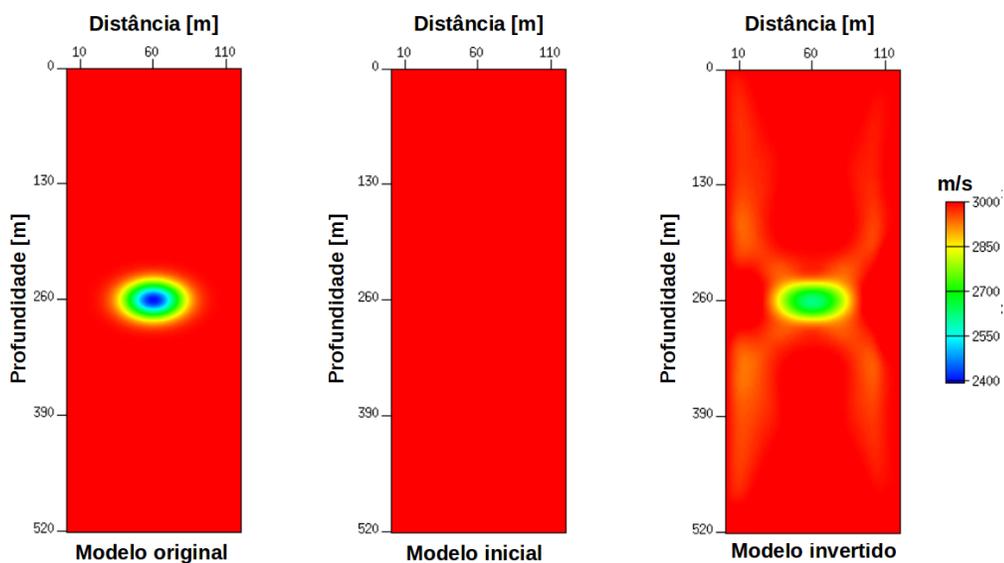
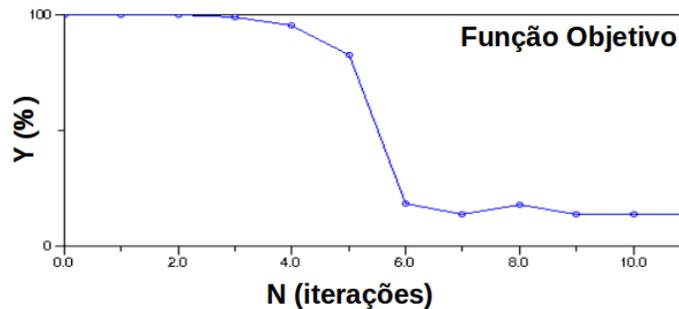


Figura 5.6: Teste do algoritmo de tomografia do tempo de trânsito de primeiras chegadas. Modelo real, inicial e invertido, respectivamente.



considerada, Figura (5.8). O mapa de resíduo é construído com o eixo horizontal as coordenadas dos receptores e o eixo vertical as coordenadas das fontes. Podemos perceber, que não são todos os pares de fontes e receptores que computam diferenças do tempo de

Figura 5.7: Comportamento da função objetivo para o experimento da Figura (5.6).

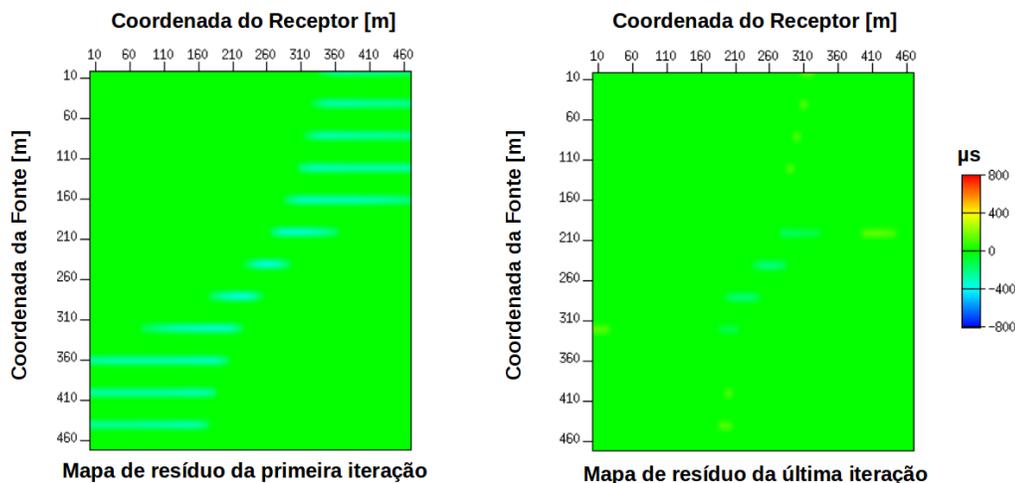


trânsito diferentes de zero no mapa da primeira iteração. Isso porque, em alguns pares de fontes e receptores, o raio que liga as duas coordenadas do modelo, atravessa o modelo com a mesma velocidade, resultando uma diferença do tempo de trânsito nula. No caso, do mapa da primeira iteração, podemos perceber que os resíduos calculados são todos negativos, isso ocorre devido o deslocamento negativo do pulso modelado sobre o pulso observado, uma vez que, os valores de velocidade no modelo inicial são maiores ou iguais aos valores do modelo original. A medida que o número de iterações aumentam, e o modelo de velocidade vai sendo perturbado, valores positivos e negativos para o resíduo são computados, de modo que, na última iteração há tanto valores positivos como negativos para o resíduo, evidenciando que o somatório dos desvios tende cada vez mais a zero e o somatório de todas essas diferenças do tempo de trânsito ao quadrado é exatamente o valor numérico da função objetivo da iteração atual. Podemos notar, também, no mapa da última iteração, que o valor do resíduo deixa de ser nulo, onde inicialmente tinha valor nulo, por causa da perturbação espúria no gradiente, que desajusta os modelos de velocidade. Isso significa, que o modelo de velocidade atualizado se aproxima do modelo original nas áreas consistentes do gradiente, mas desajusta nas áreas em que o gradiente é perturbado indevidamente. Essa informação, serve como base para a primeira estratégia de regularização usada neste trabalho e que será discutida no teste deste experimento com regularização.

Adicionalmente, fizemos mais dois experimentos: 1) repetimos a inversão utilizando uma frequência diferente para o pulso fonte e 2) o caso em que o dado contém ruído. Nessa primeira inversão aplicamos uma frequência de 120.0 Hz para inverter os dados. Esta é a frequência limite para o esquema de diferenças finitas, portanto, só podemos repetir nosso experimento com uma frequência diferente, diminuindo a frequência do pulso fonte. Resolvemos repetir o experimento usando uma frequência de 100 Hz para o pulso fonte. Essa frequência escolhida ainda é compatível com frequências usadas em aquisições sísmicas inter poços reais.

Na Figura (5.9) mostramos o resultado da inversão e podemos perceber que o modelo

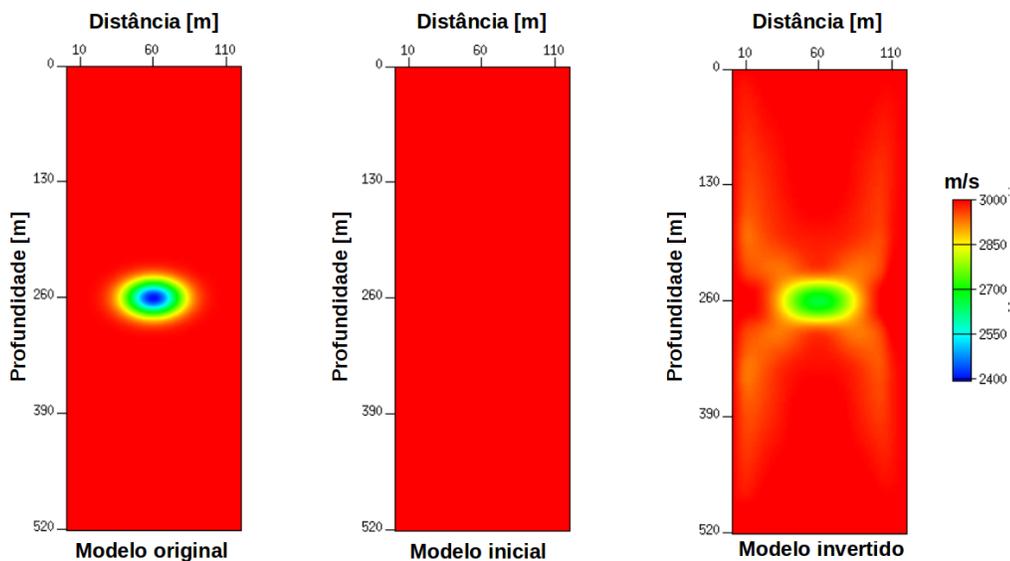
Figura 5.8: Mapas de resíduos. O resíduo é uma estimativa da diferença do tempo de trânsito entre o dado modelado e o dado observado. (Esquerda) Mapa obtido na primeira iteração e (Direita) Mapa obtido na última iteração considerada.



invertido é semelhante ao tomograma do experimento anterior. A velocidade mínima no modelo original é de 2400.0 m/s, enquanto que no modelo invertido é de 2747.0 m/s, uma diferença de mais de 300 m/s.

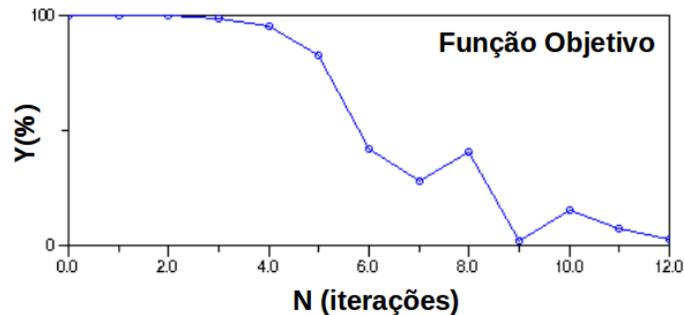
Os dois resultados mostram que o algoritmo de tomografia consegue inverter estruturalmente o modelo de velocidade correto, mas sofre com a determinação exata dos valores de velocidade. Mais do que isso, ambos os resultados mostram que em torno da estrutura a imagem fica borrada, espalhando simetricamente variações espúrias de velocidade.

Figura 5.9: Teste do algoritmo de tomografia. A inversão é realizada utilizando uma frequência predominante de 100 Hz para o pulso fonte. Modelo real, inicial e invertido, respectivamente.



O comportamento da função objetivo nesse experimento é mostrado na Figura (5.10). Onde seu comportamento é semelhante ao caso anterior, tendo decréscimos significativos apenas a partir da sétima iteração. Vale ressaltar, que a função nesse caso não decresce monotonicamente e apresenta uma forte subida em seu valor que representa um modelo atualizado que ajusta pouco as diferenças do tempo de trânsito.

Figura 5.10: Comportamento d função objetivo para inversão do modelo de velocidade usando a frequência pico do pulso fonte igual a 100 Hz.



Testamos também o nosso algoritmo quando o dado possui um certo nível de ruído. Adicionamos ruído gaussiano ao dado observado e repetimos a tarefa usando os parâmetros da Tabela (5.3). Na Figura (5.11) mostramos o resultado deste experimento. Podemos perceber que ainda nesse caso o algoritmo consegue inverter a estrutura do modelo original, mas agora o círculo do modelo original está deformado e a imagem é fortemente afetada por efeitos espúrios de variações de velocidade que não existem no modelo original. A presença de ruído no dado introduz fortes oscilações e, portanto, em casos reais, onde sempre há presença de ruídos no dado, nosso algoritmo deve sofrer com este problema. Além disso, a dificuldade que o método têm de resolver o problema dos valores exatos de velocidade são acentuados, evidenciando que quanto maior o nível de ruído no dado, menos eficiente é o método para resolver o problema cinemático.

### 5.3 TESTE 2 - INVERSÃO DO MODELO REPRESENTATIVO DE UM RESERVATÓRIO REAL UTILIZANDO A CORRELAÇÃO DIRETA ENTRE OS SISMOGRAMAS MODELADO E OBSERVADO

Nesse segundo experimento utilizamos o mesmo algoritmo do experimento anterior para estimar o modelo de velocidade a partir do dado observado obtido no modelo representativo de um reservatório real, dado pela Figura (5.3). Os parâmetros de entrada para o algoritmo são os mesmos parâmetros utilizados na aquisição dos dados observados, fornecidos pela

Figura 5.11: Experimento realizado adicionando ruído gaussiano sobre o dado observado. Modelo original, inicial e invertido, respectivamente

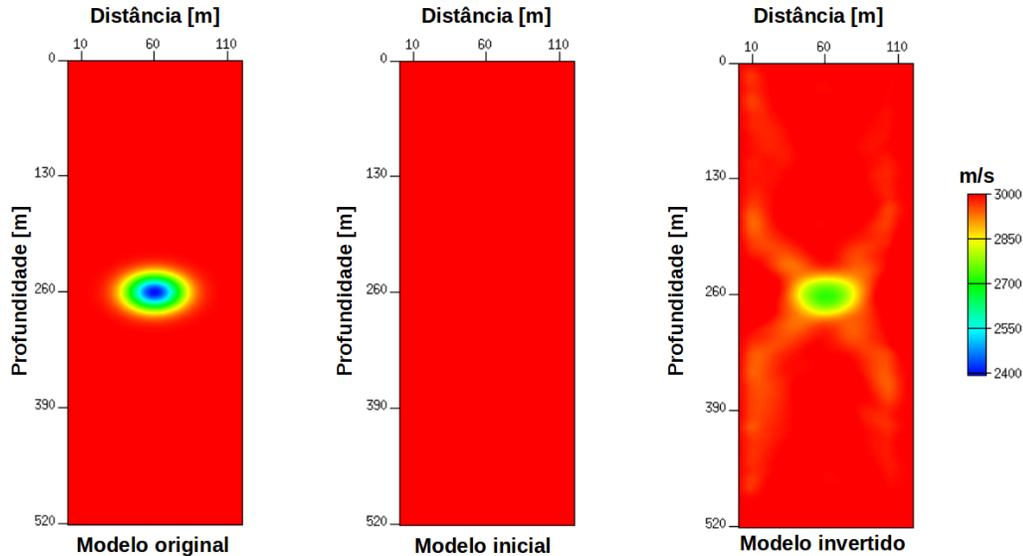


Tabela (5.2).

A dificuldade de inversão nesse modelo para o nosso método é principalmente a presença de fortes reflexões geradas pelas variedades de camadas e estruturas presentes no modelo. Camadas finas de arenitos produzem muitas reflexões múltiplas, o corpo de sal, representado pela cor vermelha, introduz forte variação da velocidade de propagação da onda, produzindo fortes amplitudes nos valores de reflexão presentes nos sismogramas de receptores em sua imediação. Uma vez que, necessitamos fazer o silenciamento dos eventos presentes no sismograma que ocorrem posteriormente a primeira chegada, estamos sujeitos a introduzir erros no dado, uma vez que silenciamento manual pode ser uma tarefa cansativa e subjetiva.

Comumente, o volume de dados sísmicos inter poços possui centenas de tiros com centenas de receptores demandando muito tempo para realizar o silenciamento manual do dado. Mesmo com esse volume de dados, corriqueiramente, o processo é feito tanto no domínio de fonte comum quanto no domínio de receptor comum. Nós chegamos a simular uma aquisição sobre o modelo do reservatório com 690 fontes e 690 receptores, e levamos cerca de uma semana para remover os eventos indesejáveis presentes no dado. Nosso dado original possui 276 fontes e 276 receptores.

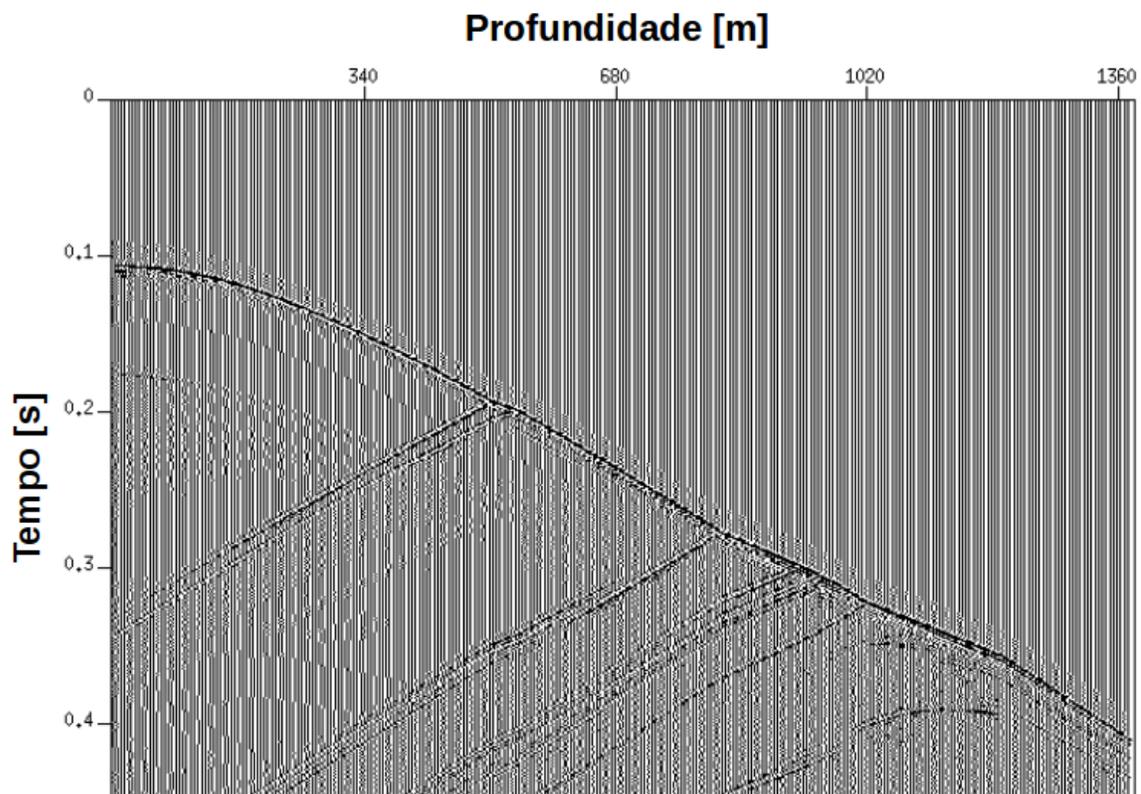
Os dados sísmicos inter poços possuem uma variedade de modos de onda. Esses modos de onda se sobrepõem no sismograma, tornando em muitos casos difícil a discriminação da onda transmitida em detrimento dos demais modos de onda. Quando o receptor se encontra próximo a um refletor, a onda refletida chega praticamente ao mesmo tempo que a onda

transmitida podendo levar a pessoa que está processando o dado a erros na tomada de decisão para separar os dois modos de onda. Nesse trabalho tivemos que fazer silenciamento cirúrgico para tentar não perder a informação da onda transmitida e se desfazer apenas dos modos de onda que ocorrem posteriormente.

Se quisermos superar estas dificuldades, podemos introduzir métodos automáticos ou semi automáticos para realizar a marcação da primeira chegada ao invés de silenciamento manual. Nesse trabalho, contudo, não implementamos nenhum método automático de marcação e utilizamos apenas método manual de marcação da primeira chegada. Consequentemente, erros podem ter sido introduzidos ao dado, aumentando o grau de dificuldade para o nosso algoritmo de tomografia.

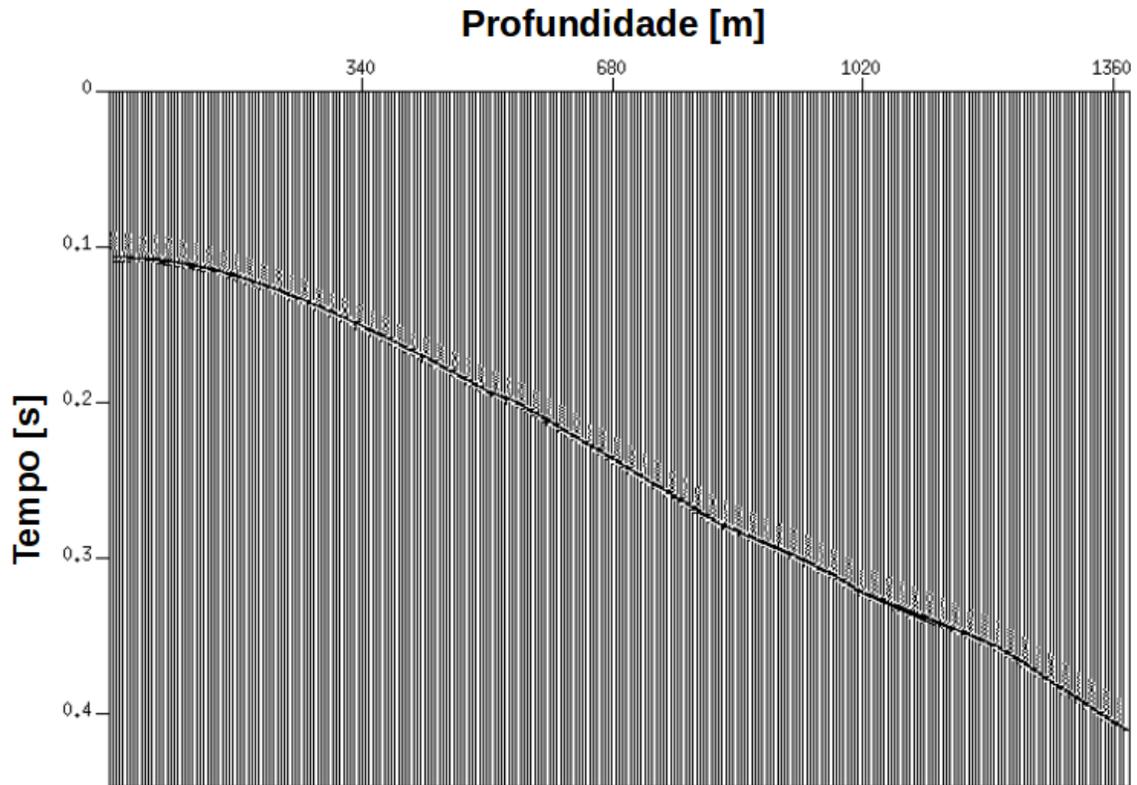
Na Figura (5.12) mostramos uma família de fonte comum representativa do dado observado. Na Figura (5.13) mostramos a mesma família de tiro após a aplicação do silenciamento manual dos modos de onda que ocorrem posteriormente à primeira chegada.

Figura 5.12: Primeira família de fonte comum retirada do dado. A fonte está na profundidade 5.0 m no poço A. O grupo de receptores varia de 5.0 m a 1380.0 m de profundidade no poço B. A frequência do pulso pico do pulso fonte é 300.0 Hz e o dado foi amostrado com  $200.0\mu\text{s}$



Uma vez processado o dado observado podemos utilizá-lo no algoritmo. Escolhemos como

Figura 5.13: Primeira família de fonte comum após a remoção dos modos de onda indesejáveis. O algoritmo de tomografia requer como entrada somente a primeira chegada.



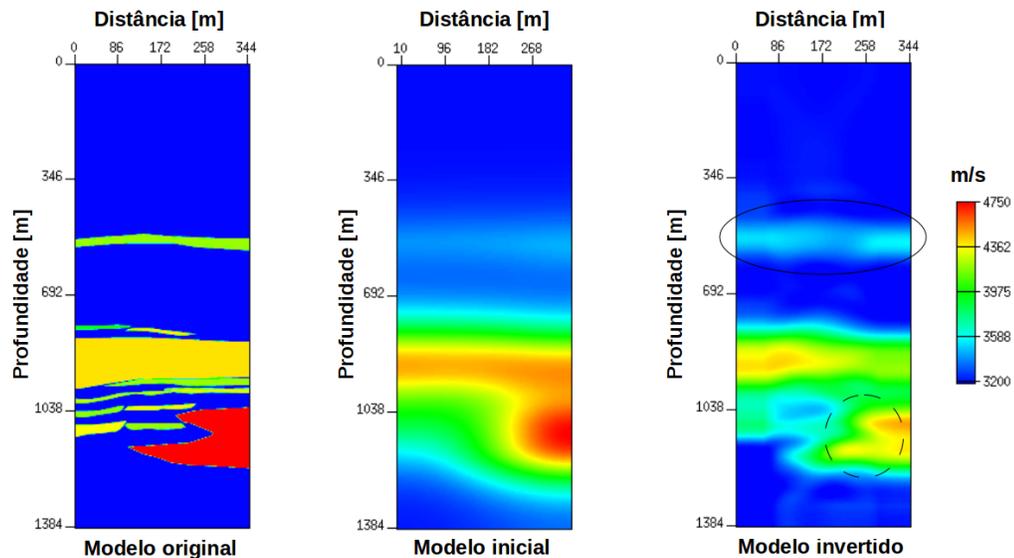
modelo inicial uma versão bem suavizada do modelo original de forma, a não preservar os contornos das estruturas do modelo original. Em cada iteração, aplica-se um filtro gaussiano para remover os efeitos das fontes e receptores presentes no gradiente, funcionando como condicionamento do gradiente antes dele ser incorporado no algoritmo de otimização. Os parâmetros de entrada para o algoritmo são dados na Tabela (5.4) e o resultado é mostrado na Figura (5.14).

Nós identificamos no modelo invertido dois principais ganhos: O primeiro é a identificação da camada fina delineada pelo círculo contínuo na Figura (5.14), sugerindo que esta camada é contínua entre os dois poços, reforçando o conhecimento a cerca do reservatório. O segundo é o delineamento do contorno do sal identificado dentro do círculo tracejado na Figura (5.14). O contorno do sal é melhorado e essa informação pode ser utilizada para tomar decisões de produção no reservatório, permitindo que um engenheiro de poço opte se necessário pelo desvio do poço na direção de maior potencial de acumulação dentro do reservatório. É possível também separar o corpo de sal marcado por alto valor da velocidade de propagação, das rochas encaixantes que tem menor valor, o que não era possível de discriminar analisando o modelo inicial. Entretanto, esse alto contraste de velocidade, dificulta a percepção das finas

Tabela 5.4: Tabela com valores dos parâmetros de aquisição para o algoritmo de tomografia e velocidades máxima e mínima do modelo inicial.

Número de fontes	276
Número de receptores	276
Incremento entre fontes	5.0 m
Incremento entre receptores	5.0 m
Posição Inicial da fonte	5.0 m
Posição final da fonte	1380 m
Posição do primeiro receptor	5.0 m
Posição do último receptor	1380 m
Frequência do pulso fonte	300.0 Hz
Taxa de amostragem do dado	200 $\mu$ s
Taxa de amostragem de DF	10 $\mu$ s
Incremento da malha	1.0 m
Modelo inicial	$v_{max} = 4142.0$ m/s e $v_{min} = 3200.0$ m/s
Comprimento da janela de correlação	20 $\Delta t$

Figura 5.14: Estimativa do modelo de velocidade representativo de um reservatório real. Modelo original, inicial e invertido, respectivamente.



lentes de arenito, não sendo possível identificá-las no modelo invertido. Esse experimento, permite-nos também concluir, que o método consegue recuperar informações estruturais do modelo original, mas tem dificuldades em resolver o problema cinemático. Também notamos que o modelo invertido contém o mesmo padrão borrado da imagem presente no experimento com distribuição gaussiana, especialmente, onde o modelo de velocidade original é constante.

## 5.4 TESTE 4 - ABORDAGEM UTILIZANDO O ENVELOPE DO SINAL ANALÍTICO

Vimos no Capítulo (3) que a estimativa do tempo de trânsito dada pela Fórmula (3.38) é menos precisa na presença de diferença de fase entre os sismogramas modelado e observado. Para superar esta limitação, propomos que ao invés de se utilizar o sismograma propriamente dito na função correlação utilizar o envelope do sinal analítico. Nesse caso, a correlação torna-se insensível a mudanças na fase dos pulsos modelado e observado, tornando a estimativa da diferença do tempo de trânsito mais precisa.

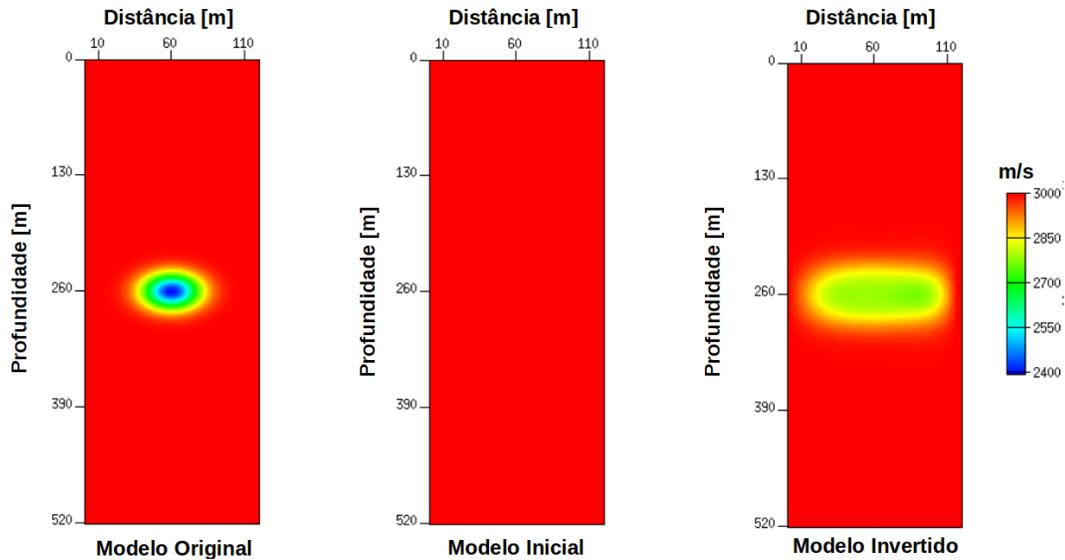
Nós implementamos um algoritmo baseado na função objetivo que utiliza o envelope do sinal analítico. No Apêndice (B) encontra-se o cálculo do gradiente da função objetivo utilizando o método de estados adjuntos para esse caso. A diferença básica entre as duas abordagens são: 1) A abordagem com o envelope do sinal analítico usa 4 modelagens, enquanto a abordagem convencional usa somente duas modelagens, 2) São 2 campos de estado e 2 campos adjuntos na abordagem com envelope, enquanto que a abordagem convencional usa 1 campo de estado e um campo adjunto, 3) a função objetivo na abordagem com envelope requer o cálculo da transformada de Hilbert do dado observado, enquanto a abordagem convencional não requer qualquer transformada.

Com o mesmo conjunto de dados do primeiro experimento e o conjunto de parâmetros utilizados, vamos repetir a inversão utilizando o algoritmo implementado com o envelope do sinal analítico. Como agora a função objetivo requer o envelope do sismograma observado, o dado observado pode ser transformado de modo que cada traço seja substituído pelo seu envelope. O envelope do dado modelado é mais facilmente calculado resolvendo uma modelagem adicional, ou seja, resolve-se uma modelagem com o pulso fonte e depois resolve-se outra modelagem usando a transformada de Hilbert do pulso fonte da modelagem anterior.

O dado observado transformado é então considerado ser um condicionamento ao problema de inversão. O dado nessas condições não é sensível a mudanças de fase entre os sismogramas modelado e observado e mantém a precisão das estimativas das diferenças do tempo de trânsito. Além disso é mais preciso na presença de ruído nos dados do que o sismograma original, permitindo nessas condições que o modelo ótimo seja encontrado mais eficientemente do que na abordagem convencional. Para mostrar isso, conduzimos o teste sobre o dado na presença de ruído com distribuição gaussiana. A Figura (5.15) mostra o resultado obtido na inversão do modelo de velocidade simples para essa abordagem.

Como podemos notar na Figura (5.15) o modelo de velocidade invertido não apresenta os

Figura 5.15: Estimativa do modelo de velocidade com distribuição gaussiana. Modelo original, inicial e invertido, respectivamente.

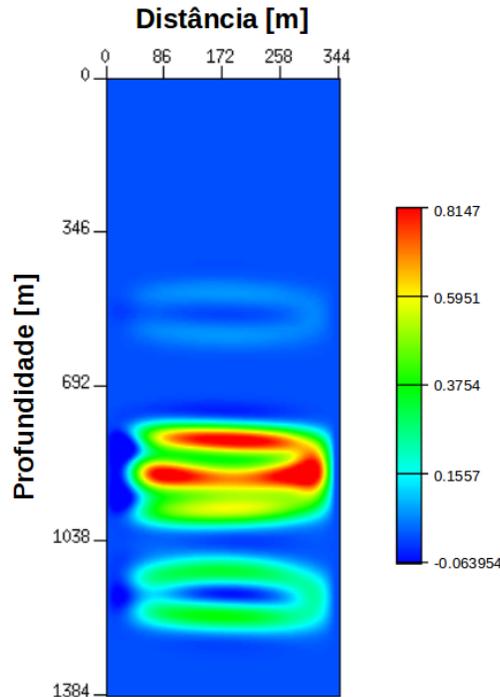


borrões presentes na abordagem convencional, evidenciando que a diferença de fase entre os pulsos é responsável pelos efeitos espúrios presentes no modelo na abordagem convencional. A velocidade na região suave é a mesma do modelo original, sugerindo que a inversão de modelos suaves são bastante eficientes nessa abordagem. Por outro lado, a bordagem também possui dificuldade de baixar a velocidade na mesma faixa de variação do modelo original, sobretudo porque há uma forte perda na resolução lateral. Essa perda na resolução lateral está associada ao condicionamento feito ao dado, pois há perda de amplitude quando o sismograma original é substituído pelo seu envelope.

Também repetimos o experimento usando o envelope do sinal analítico sobre o modelo complexo e usamos o mesmo conjunto de parâmetros dados na Tabela (5.4). Para esse contexto de forte variação lateral e vertical de velocidade, não foi obtido nenhum sucesso na inversão. O gradiente da função objetivo detecta grosseiramente as interfaces do modelo e têm muita dificuldade em delinear os contornos das estruturas. As áreas suaves do modelo, contudo, permanecem livres de efeitos espúrios fortemente presentes na abordagem convencional. Essas características nos permite concluir que modelos de velocidade fortemente acamados e com altos contrastes de velocidade são menos eficientemente invertidos na abordagem utilizando o envelope do sinal analítico e melhor estimado em modelos com pouco contraste de velocidade. A Figura (5.16) ilustra o gradiente da função objetivo para comprovar nossas afirmações. A função objetivo durante o experimento permaneceu praticamente inalterada o seu valor e, portanto, não houve nenhum progresso no algoritmo de otimização. Por isso, nenhum modelo invertido com essa abordagem foi obtido, mesmo com

as modificações do conjunto de parâmetros.

Figura 5.16: Gradiente normalizado da função objetivo com abordagem utilizando o envelope do sinal analítico para o modelo representativo de um reservatório real. As camadas são grosseiramente detectadas e probremente delineadas. As regiões suaves permanecem livres de efeitos espúrios(borrões).



Na próxima seção adicionamos a regularização no algoritmo e testamos seus efeitos utilizando as duas abordagens. No contexto do modelo complexo e utilizando a abordagem com o envelope do sinal analítico a regularização utilizando modelos de referência é fundamental para a obtenção de uma resposta.

## 5.5 TESTE 5 - EFEITO DA REGULARIZAÇÃO

Nesta seção vamos mostrar o efeito da regularização na abordagem utilizando a correlação direta entre os sismogramas observado e modelado e a abordagem utilizando a correlação entre os sinais analíticos. Primeiramente, começaremos com o modelo simples com distribuição gaussiana usando a abordagem convencional, mostrando especificamente uma maneira prática de introdução de informação à priori em modelos de referência suaves que não indicam presença de fortes variações na velocidade na região inter poços. Posteriormente, ainda com a abordagem convencional, sugerimos a incorporação da informação à priori utilizando pesos calculados baseados na detecção de bordas no modelo da iteração atual para o caso

da inversão do modelo de velocidade complexo, representativo de um reservatório real que contém forte variação vertical e lateral da velocidade. Depois analisamos o efeito da regularização utilizando a abordagem alternativa com o envelope. Primeiramente para o modelo simples utilizamos pesos gaussianos para ponderar a informação do modelo de referência e depois para o modelo complexo utilizamos os mesmos pesos baseados na detecção de bordas do experimento com a abordagem convencional.

### 5.5.1 Efeito da regularização no modelo simples com a abordagem convencional

Para construir o modelo de referência utilizado na incorporação de informação à priori utilizamos os perfis verticais obtidos dentro dos poços fonte e receptor e fazemos uma interpolação linear para preencher os valores na região inter poços. No caso de dados sintéticos isso é realizado fazendo-se marcação da velocidade na posição dos poços sobre o modelo de velocidade original.

Para o primeiro experimento o modelo de referência coincide com o modelo de velocidade inicial, isto porque a velocidade vertical ao longo dos dois poços é a mesma e nesse caso a informação que está sendo introduzida é redundante. Entretanto, mesmo sendo redundante essa informação pode ser utilizada de maneira a controlar as iterações e pré-condicionar o modelo de velocidade atual. Se, o modelo de referência é aceito como a velocidade exata nas imediações dos poços e não há indicativos de heterogeneidades na região inter poços, então estruturas verdadeiras do modelo podem ser identificadas pelo alto contraste entre o modelo de referência e o modelo atual. Estruturas espúrias associadas as oscilações suaves do gradiente da função objetivo estão associadas ao baixo contraste entre o modelo de referência e o modelo atual. Essas oscilações são borrões presentes no modelo atualizado herdadas do gradiente da função objetivo e ocorrem no entorno das estruturas e em regiões de variação suave ou nula do modelo atual.

Uma maneira simples de usar o modelo de referência para pré-condicionar o modelo da iteração atual é permitir que o algoritmo só atualize o modelo de velocidade da próxima iteração onde as diferenças entre o modelo da iteração atual e de referência são significativas. Dessa forma, podemos evitar que os efeitos espúrios produzidos pelo gradiente da função objetivo, perturbem inadequadamente o modelo de velocidade, como vimos no gradiente da função objetivo do experimento 1 (Figura(5.4)) e mostramos o que acontece no mapa de resíduos (Figura(5.8)) quando o modelo atual herda do gradiente os seus efeitos espúrios.

Existem dificuldades para se realizar esta tarefa. A primeira delas é determinar o que

são diferenças significativas entre os modelos, ou seja, qual a magnitude da diferença de velocidade entre os dois modelos que é aceitável a atualização. A segunda dificuldade é que a informação do modelo de referência é considerada ser verdadeira por toda a região interpoços exceto se o resíduo entre o modelo de referência e o modelo atual é muito grande e, portanto, modelos de referência errados levam a erros significativos na inversão.

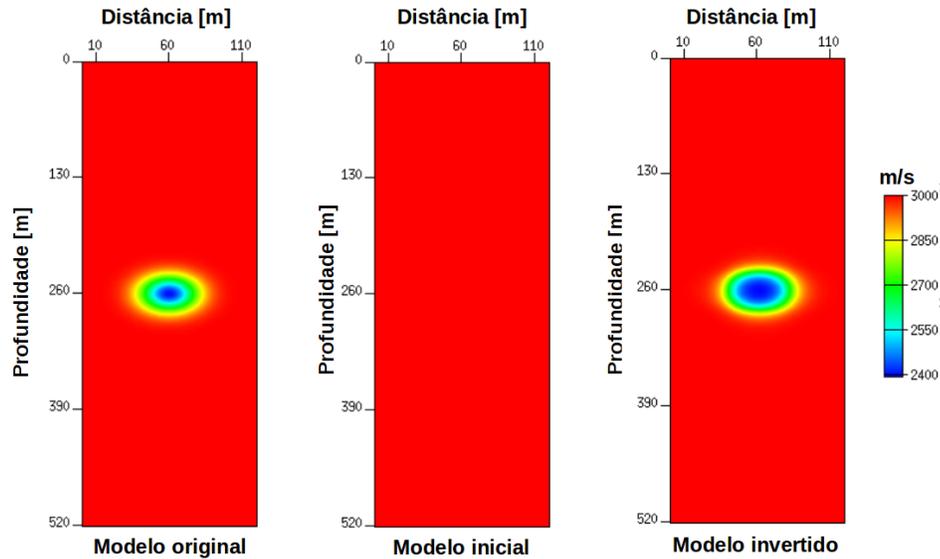
As vantagens são a possibilidade de não incluir diretamente um termo adicional na função objetivo, tornando o método um condicionamento do modelo, em vez de uma regularização propriamente dita. O método só depende do modelo de velocidade da iteração atual e do modelo de referência e não requer a escolha de um parâmetro de regularização, pois o condicionamento é realizado com máscaras de decisão.

As máscaras de decisão são construídas seguindo a estrutura falada na seção de regularização baseada na detecção de bordas do modelo atual. O valor da máscara tende mais rapidamente a zero onde a variação do resíduo entre o modelo da iteração corrente e o modelo de referência é suave e a 1 onde a diferença é significativa. Isso implica que onde o gradiente é próximo de zero (oscilações espúrias) o valor do modelo atual é substituído pelo valor do modelo de referência (não deixa o modelo herdar essas características do gradiente) e onde o gradiente é consideravelmente grande, o modelo atual preserva seu valor (indica que a perturbação do gradiente é consistente). Seguindo essa estrutura podemos reduzir os borrões presentes no modelo invertido e obtemos um modelo que ao mesmo tempo que preserva as bordas das estruturas, mantém a suavidade do modelo invertido.

Com esse método de incorporação de informação à priori para modelos com pouca variação de velocidade obtemos na Figura (5.17) o modelo invertido usando condicionamento do modelo atual em cada nova iteração.

Como podemos notar, o modelo de velocidade invertido é bastante próximo do modelo original, livre de oscilações espúrias de baixa frequência presentes nas inversões anteriores deste mesmo experimento além de construir um modelo mais próximo cinematicamente do modelo original. Esse resultado é obtido porque fora da estrutura o modelo atualizado têm baixa variação da velocidade e, portanto, como seu desvio é pequeno em relação ao modelo de referência, a máscara de decisão configura o valor do modelo atual o mesmo valor do modelo de referência. Quando o seu desvio é grande a máscara de decisão mantém o valor do modelo atual. O mapa de resíduos (Figura (5.18)), nesse caso simples, mostra que essa estratégia não introduz erros de ajuste que ocorriam devido as perturbações espúrias do gradiente, evidenciando, também, que a função objetivo cai mais satisfatoriamente. No mapa da última iteração considerada, as estimativas que inicialmente eram nulas na iteração

Figura 5.17: Estimativa do modelo de velocidade simples através da incorporação de informação à priori obtida a partir da interpolação linear de perfis verticais de velocidade. Modelo original, inicial e invertido, respectivamente. O modelo de referência é o mesmo modelo inicial para este experimento.



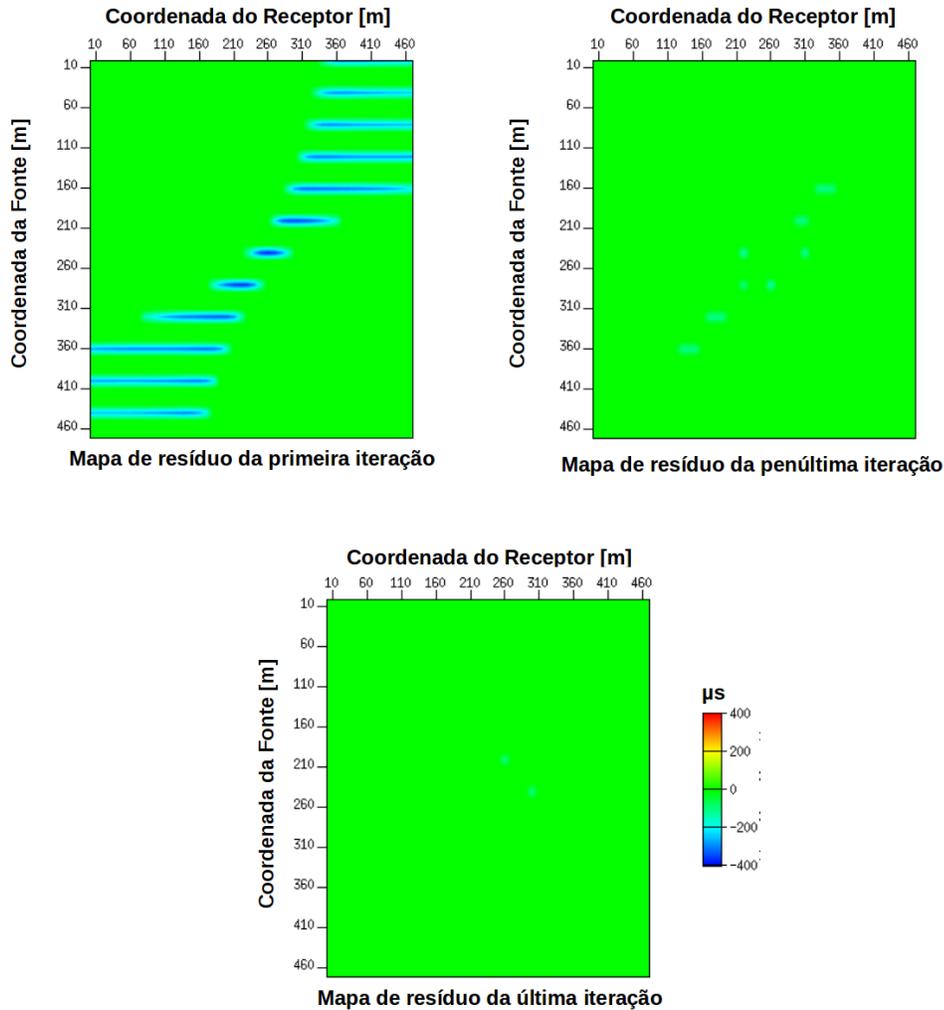
inicial se mantiveram nulas durante toda a inversão, porque o modelo de referência usado para substituir as oscilações indevidas do modelo atual é compatível com o modelo original. Isso significa, também, a maior desvantagem dessa abordagem, porque modelos de referências errados levam a grandes erros de ajuste no mapa de resíduos.

O resultado da inversão, utilizando o modelo de referência correto e nesse contexto de pouca ou nenhuma variação lateral de velocidade, é indiscutivelmente satisfatório, mas para modelos com alto contraste lateral de velocidade, onde o modelo de referência obtido com interpolação, torna-se menos próximo do modelo real em subsuperfície, esta estratégia deve ser evitada.

### 5.5.2 Efeito da regularização no modelo complexo utilizando a abordagem convencional

A regularização aplicada a esse modelo leva em consideração a detecção de bordas do modelo da iteração atual. A função objetivo possui um termo adicional dado pelo resíduo entre o modelo da iteração atual e o modelo de referência (3.50). Os pesos que são utilizados para ponderar este resíduo são calculados de maneira que seu valor é próximo de 1 nas regiões suaves e próximo de zero em cima das interfaces. Para construir esses pesos, o modelo de velocidade da iteração atual é realçado por um operador de realce quadrático. Esse modelo

Figura 5.18: Mapas de resíduos após o condicionamento do modelo inicial. O resíduo é uma estimativa da diferença do tempo de trânsito entre o dado modelado e o dado observado. (Esquerda) Mapa obtido na primeira iteração, (Direita) Mapa obtido na penúltima iteração e (Abaixo) Mapa obtido na última iteração considerada.



realçado é utilizado para o cálculo dos pesos dados pela Fórmula (3.51). A justificativa para o realce é que nessa situação a detecção de bordas utilizando filtros de derivada torna-se mais eficiente. Esses pesos permitem preservar as bordas das camadas e manterem a suavidade do modelo, ajudando na remoção dos efeitos espúrios presentes em regiões de variação suave.

O parâmetro de regularização foi escolhido após a observação da proporção entre o gradiente sem regularização e o gradiente com regularização, de modo que, o parâmetro coloque o gradiente da função objetivo na mesma faixa de variação do gradiente do termo adicional. O valor para este experimento foi adequadamente escolhido entre  $10^{-5}$  e  $10^{-4}$ . O conjunto de parâmetros de entrada para o algoritmo são os mesmo mostrados na Tabela (5.4).

O resultado desse experimento é mostrado na Figura (5.19), onde o modelo de referência é obtido pela interpoção linear entre os perfis verticais de velocidade obtidos nos dois poços.

Como podemos notar a partir da comparação entre as Figuras (5.19) e (5.14) a regularização removeu as oscilações presentes no modelo invertido nas áreas suaves além de tornar o modelo invertido mais próximo cinematicamente do modelo original. A velocidade mínima no modelo invertido com regularização é a mesma do modelo original devido a introdução de informação do modelo de referência. O delineamento do contorno do sal parece ser menos expressivo no experimento com regularização do que o sem regularização, mesmo assim o resultado aponta para as características do contorno do sal. O ganho mais significativo deste experimento é a camada fina próxima a cota 550 m que é praticamente idêntica a mesma camada no modelo original. A importância da detecção de bordas foi fundamental para que essa camada fina fosse melhor individualizada quando comparada com a mesma camada no modelo invertido sem regularização.

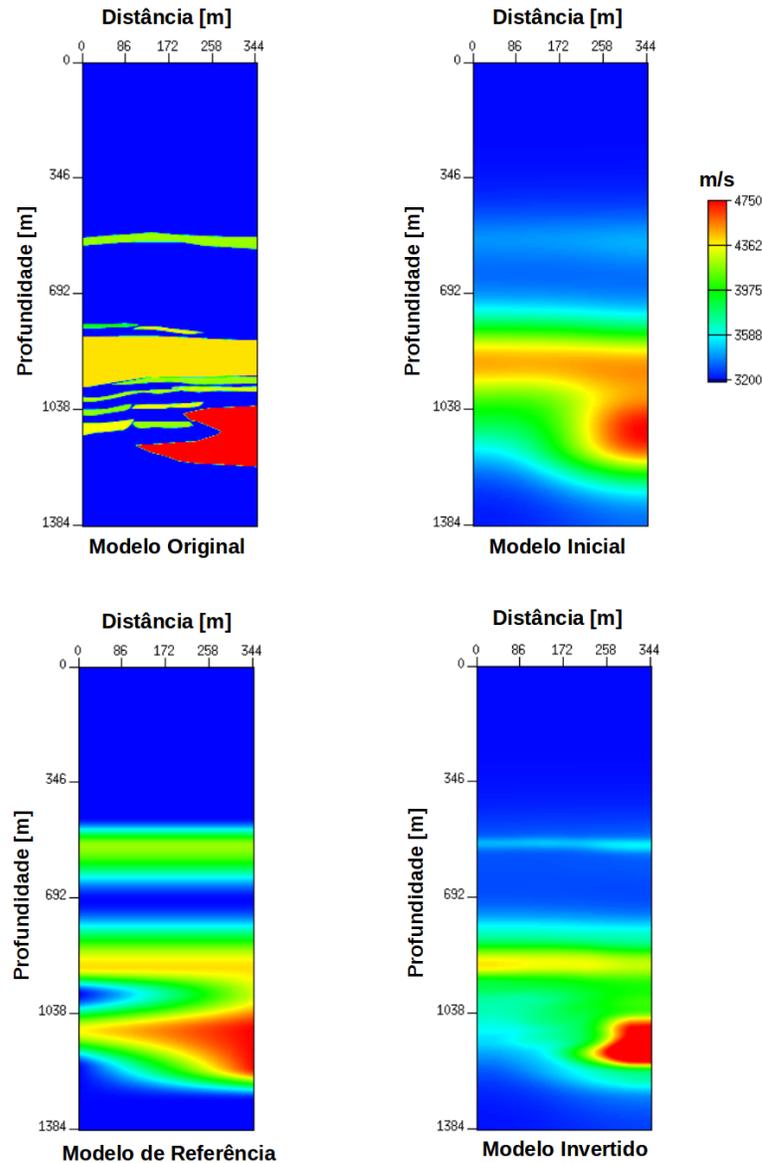
Este resultado mostra que nossa metodologia tem grande potencial para ser usada em situações reais onde a identificação e individualização de camadas finas na região entre os poços é fundamental para a tomada de decisão durante a produção no reservatório. Por exemplo, a estrutura de sal presente no modelo pode ser fundamental para controlar o aprisionamento e acumulação do hidrocarboneto e, portanto, se essa estrutura for pelo menos em parte identificada, como no caso de nossa inversão, podemos desenhar melhores estratégias de produção para a retirada do hidrocarboneto de maneira a otimizar o processo. O mesmo é válido quando identificamos as finas camadas, pois elas podem também servir de rochas associadas a formação de armadilhas para a acumulação, trapeamento ou geração do hidrocarboneto.

As finas lentes de arenito presentes no modelo original não são percebidas no modelo invertido que resolve pobremente o problema em torno da cota 1030 m. Essa dificuldade perceptível também no modelo invertido sem regularização, pode estar associada com o alto contraste de velocidade entre o sal e as lentes de arenito que o cercam, portanto, altos contrastes de velocidade podem tornar difícil a identificação de pequenas estruturas, mesmo utilizando altas frequências.

### **5.5.3 Efeito da regularização no modelo simples utilizando a abordagem com envelope do sinal analítico**

A regularização deste experimento é a mesma do experimento anterior, mas ao invés de usarmos pesos baseados na detecção de bordas, substituímos estes pesos por uma distri-

Figura 5.19: Estimativa do modelo de velocidade representativo de um reservatório real com regularização da função objetivo. O termo adicional da função objetivo usa um modelo de referência e pesos para ponderar os resíduos entre os modelos atuais e de referência. O parâmetro de regularização adequado nesse experimento está entre  $10^{-5}$  e  $10^{-4}$ . Modelo original, inicial, de referência e invertido, respectivamente.



buição gaussiana, onde os pesos são pequenos próximos aos poços e grandes distante deles. Essa escolha é feita porque próximo dos poços a velocidade dada pelos perfis verticais são consideradas suficientemente precisas e, portanto, o modelo de referência deve ser aceito verdadeiro próximo dos poços, mas distante é permitido existir heterogeneidades e o modelo de referência é menos confiável.

Com essa modificação simples resolvemos em parte o problema da resolução lateral dessa abordagem porque o modelo de velocidade só será atualizado onde os pesos são grandes, ou seja, distante dos poços das fontes e dos receptores. Este é um exemplo claro de modelo bastante suave, pois tanto o modelo inicial quanto o modelo de referência são constantes. Por isso devemos esperar um modelo original com pouca ou nenhuma variação de velocidade e, portanto, nesse contexto pesos gaussianos devem ser prioridade em relação a pesos por detecção de bordas.

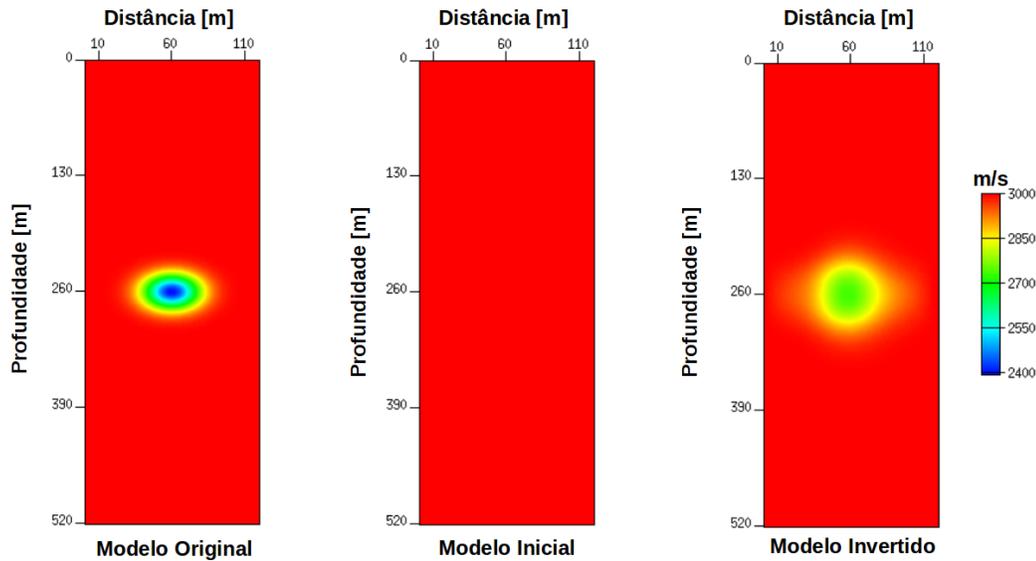
Para realizar este experimento utilizamos o mesmo conjunto de parâmetros da abordagem anterior para esse modelo simples dado na Tabela (5.3) e o parâmetro de regularização é da ordem de  $10^{-3}$ . Em relação a construção dos pesos gaussianos, simplesmente construímos uma função gaussiana na variável horizontal com desvio padrão de 20 m, ou seja, cerca de 20 metros distante do centro do modelo para mais ou menos o modelo de referência é aceito verdadeiro. Quanto maior o desvio padrão, menos confiável é o modelo de referência e quanto menor o desvio padrão, mais confiável é o modelo de referência.

O experimento também utiliza o dado na presença de ruído para reforçar a eficiência dessa abordagem para modelos suaves. A Figura (5.20) mostra o modelo original, o modelo inicial e o modelo invertido obtido. Note que o modelo de referência é o mesmo do modelo inicial.

Como podemos notar a introdução de informação à priori com pesos gaussianos permite recuperar a resolução lateral do modelo de velocidade invertido. Além disso, cinematicamente o modelo invertido está mais próximo do modelo original do que o mesmo modelo invertido sem regularização, além de estar livre de efeitos espúrios por causa do condicionamento feito ao dado. Portanto, a regularização neste experimento é dupla, o envelope do sismograma é um condicionamento sísmico, enquanto que a introdução de informação à priori é um condicionamento não sísmico.

Este experimento revela que possui grande potencial para inverter modelos suaves que não tenham fortes variações verticais e laterais da velocidade, além de serem pouco sensíveis a presença de ruído nos dados. Ele também é menos sensível a erros no modelo de referência, porque o grau de confiabilidade é controlado pelo desvio padrão e não pela máscara de decisão e, portanto, mais eficiente no contexto de modelos suaves.

Figura 5.20: Estimativa do modelo de velocidade simples com regularização da função objetivo na abordagem com envelope do sinal analítico. O termo adicional da função objetivo usa um modelo de referência e pesos para ponderar os resíduos entre os modelos atuais e de referência. Os pesos são dados por uma distribuição gaussiana com desvio padrão 20 m e o parâmetro de regularização adequado nesse experimento é da ordem de  $10^{-3}$ . Modelo original, inicial e invertido, respectivamente.



#### 5.5.4 Efeito da regularização no modelo complexo com a abordagem utilizando o envelope do sinal analítico

A inversão com regularização da função objetivo da abordagem alternativa para o modelo complexo é a mesma regularização da abordagem convencional. Nós introduzimos o termo adicional na função objetivo com o resíduo entre o modelo de velocidade da iteração atual com o modelo de referência ponderado pelos pesos baseados na detecção de bordas. A mesma análise feita no experimento com a abordagem convencional no modelo complexo é usada neste experimento e o mesmo conjunto de parâmetros para o algoritmo de tomografia é usado também aqui (Tabela (5.4)). A diferença é que nesse experimento a ordem do parâmetro de regularização é  $10^{-3}$ .

Essa regularização é fundamental nessa abordagem no contexto de modelo complexo, pois a natureza suave do gradiente da função objetivo, como vimos na Figura (5.16) detecta muito grosseiramente as camadas do modelo, sendo necessário a introdução de informação à priori que leve em consideração a detecção de bordas e a incorporação do modelo de referência.

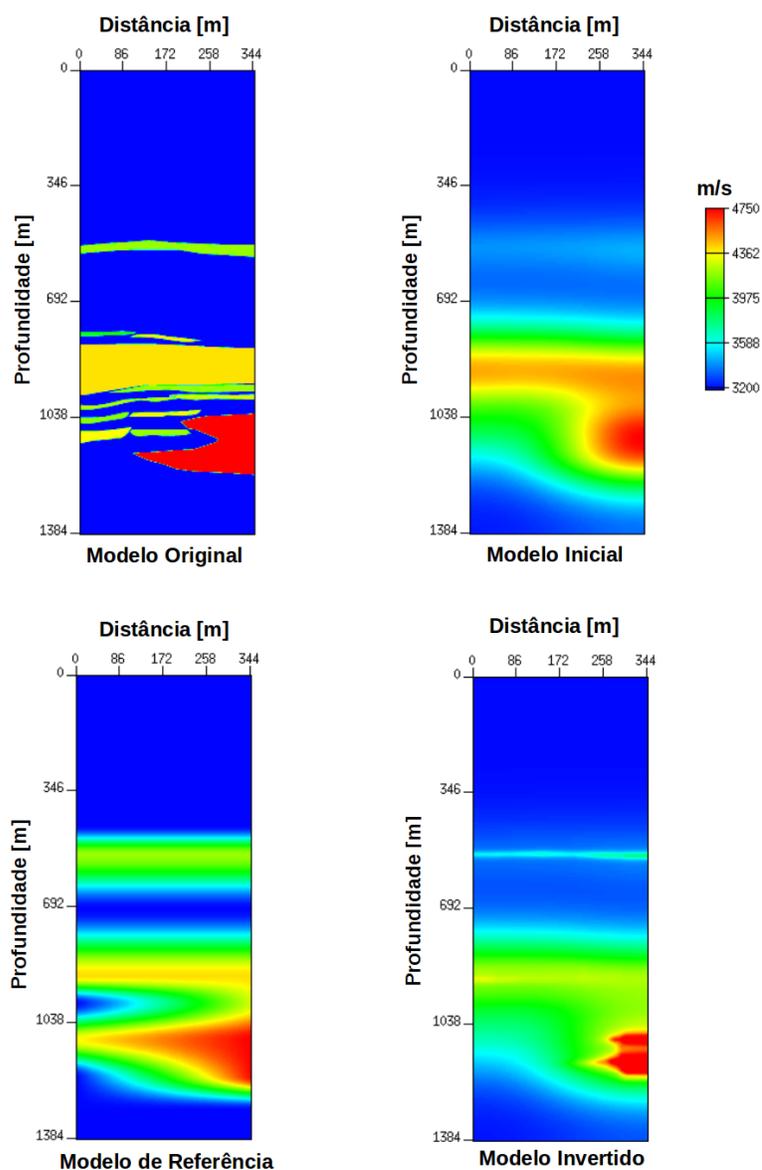
O efeito da regularização nessa metodologia é crítica, pois somente após a regularização é que foi possível estimar um modelo de velocidade, pois o gradiente da função objetivo ganha

uma componente adicional que ajuda a encontrar a direção de pesquisa correta.

A Figura (5.21) ilustra o resultado obtido nesse experimento. Como podemos observar o resultado é positivo quando comparado ao fato de que a mesma inversão sem regularização não consegue se quer uma estimativa do modelo de velocidade. A fina camada na cota em torno de 550 metros é bem identificada e individualizada, mantendo a suavidade do modelo nas áreas de baixa variação da velocidade. O corpo salino é individualizado e seu contorno é delineado, permitindo uma melhor compreensão da estrutura. As finas lentes de arenito no entorno da cota 1030 m presentes no modelo original não são visualizadas no modelo invertido não tendo qualquer evidência das suas existências.

A regularização usando essa estratégia, portanto, mostra que têm grande potencial para ser usada em modelos com áreas de alto contraste de velocidade e também áreas com pouca variação da velocidade. As interfaces são melhores identificadas e as zonas suaves do modelo não apresentam os efeitos espúrios que comumente estão presentes na inversão sem regularização, além de proporcionar um melhor ajuste cinemático entre o modelo original e o modelo invertido.

Figura 5.21: Estimativa do modelo de velocidade complexo com regularização da função objetivo na abordagem com envelope do sinal analítico. O termo adicional da função objetivo usa um modelo de referência e pesos para ponderar os resíduos entre os modelos atuais e de referência. Os pesos são baseados na detecção de bordas do modelo atual e o parâmetro de regularização adequado nesse experimento é da ordem de  $10^{-3}$ . Modelo original, inicial, de referência e invertido, respectivamente.



## 6 CONCLUSÕES

Duas alternativas de implementação da tomografia com a equação de onda foram propostas e avaliadas através de experimentos numéricos em dados gerados sinteticamente. Cada algoritmo estudado, difere na função utilizada para medir o resíduo entre o sinal modelado e o sinal observado e nas estratégias de condicionamento do gradiente da função objetivo e na forma do funcional regularizador. Os experimentos foram conduzidos sem a regularização da função objetivo e, depois, introduzindo informação *à priori*.

Os teste sem regularização apontaram que os algoritmos possuem potencial para inverter tanto modelos suaves com baixa variação da velocidade, quanto modelos complexos com forte variação na velocidade. No caso da abordagem convencional, ela sofre com muitos efeitos espúrios presentes no modelo invertido, principalmente relacionadas a sensibilidade as diferenças de fase entre os sismogramas.

No caso da abordagem utilizando o envelope do sinal analítico, estes efeitos espúrios são minimizados porque a estimativa do tempo de trânsito não é sensível a diferença de fase entre os pulsos. Quando esse algoritmo é aplicado no contexto de modelos suaves, a perda de amplitude devido ao condicionamento do dado, gera perda de resolução lateral e, no caso de modelos com forte contraste lateral de velocidade, essa abordagem mostrou-se completamente descartável sem o uso de regularização.

Os testes conduzidos com regularização também mostraram potencial para inverter tanto modelos suaves com baixa variação da velocidade quanto modelos com forte variação lateral da velocidade. Para o caso da implementação convencional, a introdução de informação *à priori* foi essencial para remover os efeitos espúrios presentes nas áreas suaves dos modelos de velocidade, além de delinear mais precisamente os contornos das estruturas. No caso da implementação alternativa, a introdução de informação *à priori* utilizando pesos gaussianos é fundamental para recuperar a resolução lateral e a utilização de pesos baseados na detecção de bordas permite o reconhecimento das estruturas e camadas do modelo.

Os algoritmos desenvolvidos, neste trabalho, ainda necessitam da realização de mais testes, sobretudo, na possibilidade de formulação de uma regularização mais unificadora que sirva em qualquer contexto ou na maioria das situações que podem ocorrer. Podemos testar termos de regularização baseado na variação total, ou introduzindo um termo de norma L1

entre o modelo atual e o modelo de referência. Outras abordagens para a estimativa da diferença do tempo de trânsito, também podem ser pensadas na busca de um algoritmo que funcione bem em qualquer situação de dado ou modelo de velocidade.

Nossa motivação, foi a utilização dessas metodologias para gerar um tomograma de velocidade da região interpoços que podem ajudar na exploração de gás de folhelho. Essa dissertação, portanto, fornece metodologias alternativas para a tomografia do tempo de trânsito utilizando a equação da onda para este propósito. Sua aplicação numa situação de aquisição inter poços, permite obter melhor resolução do reservatório e identificar estruturas não percebidas pela sísmica de superfície. As heterogeneidades do modelo não permitem, na maioria das vezes, que a correlação de perfis verticais de velocidade ou mesmo estratigráfica seja feita com segurança, mesmo quando a distância entre os poços são pequenas. Por isso, tomografia inter poços fornece informação do campo de velocidade na região inter poços mais fiel a realidade geológica do que a simples correlação de perfis verticais, auxiliando na delimitação das estruturas e identificação de zonas de baixa velocidade.

## REFERÊNCIAS

- ALFORD, R. M.; KELLY, K. R.; BOORE, D. M. Accuracy of finite-difference modeling of the acoustic wave equations. *Geophysics*, Tulsa, Ocla, v. 39, n. 6, p. 834–842, December 1974.
- ASNAASHARI, A. et al. Regularized seismic full waveform inversion with prior model information. *Society of Exploration Geophysics*, Grenoble, France, v. 78, n. 2, p. R25–R36, March–April 2013.
- BAYLISS, A.; TURKEL, E. Radiation boundary conditions for wave-like equations. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, v. 33, n. 6, p. 707–725, November 1980.
- BERENGER, J. P. A perfectly matched layer for absorption of electromagnetic waves. *Journal of computational physics*, v. 114, p. 185–200, July 1994.
- BRENDERS, A. J.; PRATT, R. G. Efficient waveform tomography for lithospheric imaging: Implications for realistic, two-dimensional acquisition geometries and low-frequency data. *Geophysical Journal International*, v. 168, p. 152–170, 2007.
- BUBE, T. et al. Tomographic determination of velocity and depth in laterally varying media. *Geophysics*, n. 50, p. 903–923, 1985.
- BYRD, R. H.; LU, P.; NOCEDAL, J. A limited memory algorithm for bound constrained optimization. *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, v. 16, n. 5, p. 1190–1208, 1995.
- BYRD, R. H. et al. *Software for Large-scale Bound-constrained Optimization*. 2011. última modificação em: 02/08/2011. Disponível em: <<http://www.ece.northwestern.edu/~nocedal/lbfgsb.html>>.
- CERJAN, C. et al. A nonreflecting boundary condition for discret acoustic and elastic wave equations. *Society of Exploration Geophysics*, University of Houston, Houston, v. 50, n. 4, p. 705–708, April 1985.
- CHAVENT, G. *Nonlinear Least Squares for Inverse Problems*. France: Université Paris-Dauphine, 2009.
- CHEN, S. T.; ERIKSEN, E. A. Experimental studies of downhole seismic sources. *59th. Ann. Internal. Mtg., Soc. Expl. Geophys*, p. 62–64, 1989.
- CLAYTON, R.; ENQUIST, B. Absorbing boundary conditions for acoustic and elastic wave equations. *Bull., Seis. Soc. Am.*, v. 67, p. 1529–1540, 1977.

- D'AGOSTO, M. S. D. C.; MICHELENA, R. J. Tomography + pre-stack depth migration of p-s converted waves. *SEG: Expanded Abstracts*, 1998.
- DESSA S. K. S. OPERTO, A. N. G. P. K. U. J. X.; KANEDA, Y. Deep seismic imaging of the eastern nankai trough, japan, from multifold ocean bottom seismometer data by combined travelttime tomography and prestack depth migration. *Journal of Geophysical Research*, v. 109, p. B02111, 2004.
- DINES, K.; LYTLE, R. Computadorized geophysical tomography. *IEEE*, n. 67, p. 1065–1072, 1979.
- GAUTHIER, J. V. O.; TARANTOLA, A. Two-dimensional nonlinear inversion of seismic waveforms: numerical results. *Geophysics*, v. 51, p. 1387–1403, 1986.
- GUOPING, L. *Crosswell Seismic Processing: Automatic Velocity Analysis, Filtering, and Reflection Imaging*. Dissertação (Mestrado) — The University of Calgary, 1994.
- HARRIS, J. M. High resolution crosswell imaging of a west texas carbonate reservoir: Mcelroy field: Final report. *SPT*, La Habra, CA, v. 3, n. 4, April 1993.
- HOLE, J.; ZELT, B. 3-d finite-difference reflection traveltimes. *Geophysical Journal International*, v. 121, p. 427–434, 1995.
- IVANSSON, S. A study of methods for tomographic velocity estimation in the presence of low-velocity zones. *Geophysics*, n. 50, p. 969–988, 1985.
- JOHNSON, S.; TRACY, M. L. Inverse scattering solutions by a sine basis, multiple source, moment method. *Ultrasonic Imaging*, n. 5, p. 361–375, 1983.
- JUSTICE, J. et al. Acoustic tomography for enhancing oil recovery. *The Leading Edge*, n. 8, p. 12–19, 1989.
- LAGE L. D. PROCESSI, L. D. W. d. S. P. B. d. D. E. L.; GALOPPI, P. P. S. Gás não convencional: experiência americana e perspectivas para o mercado brasileiro. *BNDES*, v. 37, p. 33–88, Março 2013.
- LEEuwEN., T. V.; MULDER, W. A. A correlation-based misfit criterion for wave-equation travelttime tomography. *Geophysical Journal International*, v. 185, p. 845–870, Jan 2011.
- LINES, L. Inversion of geophysical data. *Soc. Expl. Geophys*, n. 9, 1985.
- LUO, Y.; SCHUSTER, G. T. Wavefield travelttime tomography. *Geophysics*, v. 56, n. 5, p. 645–653, MAY 1991.
- MA, Y.; HALE, D. *Full waveform inversion with dynamic image warping*. [S.l.], 2012.
- NOCEDAL, J.; WRIGHT, S. J. *Numerical Optimization*. New York: Northwestern University, 1999.

- PAULSSON B.N.P; LANGAN, R. Cross-well seismology: A new production tool:paper ipa 88-22.06, in 17th annual convention proceedings. *Indonesia Petroleum Association*, v. 1, p. 375–386, June 1988.
- PLESSIX., R. A review of the adjoint-state method for computing the gradient of a functional with geophysical applications. *Geophysical Journal International*, v. 167, p. 495–503, Jan 2006.
- PODVIN, P.; LECOMTE, I. Finite difference computation of traveltimes in very contrasted velocity model: A massively parallel approach and its associated tools. *Geophysical Journal International*, v. 105, p. 271–284, 1991.
- PRESS S. A. TEUKOLSKY, W. T. V. W. H.; FLANNERY, B. P. *Numerical Recipes in fortran 77: The art of scientific computing*. New York, NY 10011-4211, USA: University of Cambridge, 2002.
- TAILLANDIER, C. et al. First-arrival traveltime tomography based on the adjoint-state method. *Society of Exploration Geophysics*, Massy, France, v. 74, n. 6, p. WCB57–WCB66, November-December 2009.
- TARANTOLA, A.; VIRIEUX, L. Inverse problem theory. *Geophysics*, n. 49, p. 1933–1942, 1987., 1984.
- VINJE, V.; IVERSEN, E.; GJOYSTDAL, H. Traveltime and amplitude estimation using wavefront construction. *Geophysics*, v. 58, n. 8, p. 1157–1166, August 1993.
- ZHANG, X.; ZHANG, J. Edge preserving for seismic traveltime tomography. *Society of Exploration Geophysics*, University of Science and Technology of China (USTC), 2012.
- ZHAO, P. H. P.; UREN, N. Two step inversion (tomography and pre-stack migration) for high resolution seismic imaging in crosshole or vsp surveys. *Geophysics*, v. 26, p. 336–339, 1995.
- ZHOU G SHUSTER, S. H. C.; HARRIS, J. Elastic wave equation traveltime and waveform inversion of crosswell data. *Geophysics*, v. 62, n. 3, p. 853–868, May 1997.
- ZHU, D. P. X. X.; ANGSTMAN, B. G. Tomostatics: Turning-ray tomography + static corrections. *Geophysics: The Leanding Edge of Exploration*, p. 15–23, December 1992.

## APÊNDICE

## APÊNDICE A – GRADIENTE DA FUNÇÃO OBJETIVO: ABORDAGEM CONVENCIONAL

Definições:

A correlação entre o traço modelado e o traço observado:

$$\phi(\bar{\mathbf{x}}, \xi) = \int_0^T u(\bar{\mathbf{x}}, t + \xi) u^0(\bar{\mathbf{x}}, t) dt \quad (\text{A.1})$$

A estimativa da diferença do tempo de trânsito baseada na correlação dos traços é:

$$\tau(\bar{\mathbf{x}}_r; \bar{\mathbf{x}}_s) = \frac{\int_{-L}^L \xi \phi^2(\bar{\mathbf{x}}, \xi) d\xi}{\int_{-L}^L \phi^2(\bar{\mathbf{x}}, \xi) d\xi} \quad (\text{A.2})$$

A função objetivo é dada por:

$$J(c) = \frac{1}{4} \sum_s \sum_g \tau^2(\bar{\mathbf{x}}_r; \bar{\mathbf{x}}_s) \quad (\text{A.3})$$

O campo de onda modelado é a variável de estado e satisfaz a equação de vínculo. Formamos a lagrangeana via:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4} \sum_s \sum_g \tau^2(\bar{\mathbf{x}}_r; \bar{\mathbf{x}}_s) + \sum_s \int_{\Omega} d\bar{\mathbf{x}} \int_0^T dt \Lambda(\bar{\mathbf{x}}, t) \left[ \nabla^2 u(\bar{\mathbf{x}}, t) - \frac{1}{c} \frac{\partial^2 u(\bar{\mathbf{x}}, t)}{\partial t^2} - f(t) \delta(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{x}}_s) \right] \quad (\text{A.4})$$

A variação total da lagrangeana é dada por

$$\delta \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} \delta u + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Lambda} \delta \Lambda + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c} \delta c \quad (\text{A.5})$$

Calculando cada derivada, temos:

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{L} = \frac{1}{4} \sum_s \sum_g \frac{\partial}{\partial u} & \left\{ \frac{\int_{-L}^L \xi d\xi \left[ \int_0^T u(\bar{\mathbf{x}}, t + \xi) u^0(\bar{\mathbf{x}}, t) dt \right]^2}{\int_{-L}^L d\xi \left[ \int_0^T u(\bar{\mathbf{x}}, t + \xi) u^0(\bar{\mathbf{x}}, t) dt \right]^2} \right\}^2 \delta u \\
& + \sum_s \int_{\Omega} d\bar{\mathbf{x}} \int_0^T dt \Lambda(\bar{\mathbf{x}}, t) \left[ \nabla^2 \delta u - \frac{1}{c} \frac{\partial^2 \delta u}{\partial t^2} \right] \\
& - 2 \sum_s \int_{\Omega} d\bar{\mathbf{x}} \int_0^T dt \frac{\nabla^2 u(\bar{\mathbf{x}}, t)}{c(\bar{\mathbf{x}})} \Lambda(\bar{\mathbf{x}}, t)
\end{aligned} \tag{A.6}$$

Calculando explicitamente a derivada parcial em relação a  $u$ , temos:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial u} \left\{ \frac{\int_{-L}^L \xi d\xi \left[ \int_0^T u(\bar{\mathbf{x}}, t + \xi) u^0(\bar{\mathbf{x}}, t) dt \right]^2}{\int_{-L}^L d\xi \left[ \int_0^T u(\bar{\mathbf{x}}, t + \xi) u^0(\bar{\mathbf{x}}, t) dt \right]^2} \right\}^2 \delta u = \\
& \frac{2\tau(\bar{\mathbf{x}}_r; \bar{\mathbf{x}}_s)}{\left[ \int_{-L}^L \phi^2(\xi) d\xi \right]} \left\{ 2 \int_{-L}^L \xi \phi(\xi) d\xi \int_{-L}^L \phi^2(\xi) d\xi \int_0^T u^0(\bar{\mathbf{x}}, t) dt - \right. \\
& \left. 2 \int_{-L}^L \phi(\xi) d\xi \int_{-L}^L \xi \phi^2(\xi) d\xi \int_0^T u^0(\bar{\mathbf{x}}, t) dt \right\} \delta u \\
& = 4\tau(\bar{\mathbf{x}}_r; \bar{\mathbf{x}}_s) \int_0^T u^0(\bar{\mathbf{x}}, t) dt \left\{ \frac{\int_{-L}^L \xi \phi(\xi) d\xi}{\int_{-L}^L \phi^2(\xi) d\xi} - \frac{\int_{-L}^L \phi(\xi) d\xi \tau(\bar{\mathbf{x}}_r; \bar{\mathbf{x}}_s)}{\int_{-L}^L \phi^2(\xi) d\xi} \right\} \delta u
\end{aligned} \tag{A.7}$$

Agora nós devemos impor que a derivada parcial da lagrangeana com respeito a variável de estado seja zero, obtemos

$$\begin{aligned}
& \sum_s \int_{\Omega} d\bar{\mathbf{x}} \int_0^T dt \Lambda(\bar{\mathbf{x}}, t) \left[ \nabla^2 - \frac{1}{c(\bar{\mathbf{x}})} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \delta u = \\
& - \sum_s \int_{\Omega} d\bar{\mathbf{x}} \int_0^T dt \sum_g \tau(\bar{\mathbf{x}}; \bar{\mathbf{x}}_s) u^0(\bar{\mathbf{x}}, t) \left\{ \frac{\int_{-L}^L (\xi - \tau(\bar{\mathbf{x}}; \bar{\mathbf{x}}_s)) \phi(\xi) d\xi}{\int_{-L}^L \phi^2(\xi) d\xi} \right\} \delta(\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{x}}_r) \delta u
\end{aligned} \tag{A.8}$$

Assim, obtemos a equação de estados adjuntos pela equação

$$\nabla^2 \Lambda(\bar{\mathbf{x}}, t) - \frac{1}{c(\bar{\mathbf{x}})} \frac{\partial^2 \Lambda(\bar{\mathbf{x}}, t)}{\partial t^2} = - \sum_g \tau(\bar{\mathbf{x}}; \bar{\mathbf{x}}_s) u^0(\bar{\mathbf{x}}, t) \left\{ \frac{\int_{-L}^L (\xi - \tau(\bar{\mathbf{x}}; \bar{\mathbf{x}}_s)) \phi(\xi) d\xi}{\int_{-L}^L \phi^2(\xi) d\xi} \right\} \delta(\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{x}}_r) \tag{A.9}$$

## APÊNDICE B – CÁLCULO DO GRADIENTE DA FUNÇÃO OBJETIVO UTILIZANDO O ENVELOPE DO SINAL ANALÍTICO.

Nesta abordagem nós começamos construindo os sinais analíticos modelado e observado dados por

$$\tilde{u}(\bar{\mathbf{x}}_r, t) = u(\bar{\mathbf{x}}_r, t) + iu_H(\bar{\mathbf{x}}_r, t) \quad (\text{B.1})$$

onde  $u_H(\bar{\mathbf{x}}_r, t)$  é a transformada de Hilbert de  $u(\bar{\mathbf{x}}_r, t)$ . Da mesma forma para o dado observado, temos

$$\tilde{u}^0(\bar{\mathbf{x}}_r, t) = u^0(\bar{\mathbf{x}}_r, t) + iu_H^0(\bar{\mathbf{x}}_r, t) \quad (\text{B.2})$$

onde  $u_H^0(\bar{\mathbf{x}}_r, t)$  é a transformada de Hilbert de  $u^0(\bar{\mathbf{x}}_r, t)$ .

Nós definimos o quadrado do envelope do sinal analítico modelado como

$$A^2(\bar{\mathbf{x}}_r, t) = u^2(\bar{\mathbf{x}}_r, t) + u_H^2(\bar{\mathbf{x}}_r, t) \quad (\text{B.3})$$

O quadrado do envelope observado é dado por

$$A_0^2(\bar{\mathbf{x}}_r, t) = u^0(\bar{\mathbf{x}}_r, t)^2 + u_H^0(\bar{\mathbf{x}}_r, t)^2 \quad (\text{B.4})$$

Nós definimos a correlação dos envelopes dada por

$$\phi(\xi) = \int_0^T A^2(\bar{\mathbf{x}}, t) A_0^2(\bar{\mathbf{x}}, t + \xi) dt \quad (\text{B.5})$$

Então, a estimativa da diferença do tempo de trânsito entre o traço modelado e o traço observado, baseada na integral de correlação é dada por:

$$\tau(\bar{\mathbf{x}}_r; \bar{\mathbf{x}}_s) = \frac{\int_{-L}^L \xi \phi(\xi) d\xi}{\int_{-L}^L \phi(\xi) d\xi} \quad (\text{B.6})$$

Nesse caso, afunção é definida como

$$J(c) = \frac{1}{4} \sum_s \sum_r \tau^2(\bar{\mathbf{x}}_r; \bar{\mathbf{x}}_s) \quad (\text{B.7})$$

Nesta abordagem temos duas equações de vínculo, dadas por

$$\nabla^2 u(\bar{\mathbf{x}}, t) - \frac{1}{c(\bar{\mathbf{x}})^2} \frac{\partial^2 u(\bar{\mathbf{x}}, t)}{\partial t^2} - f(t) \delta(\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{x}}_s) = 0 \quad (\text{B.8})$$

e

$$\nabla^2 u_H(\bar{\mathbf{x}}, t) - \frac{1}{c(\bar{\mathbf{x}})^2} \frac{\partial^2 u_H(\bar{\mathbf{x}}, t)}{\partial t^2} - f_H(t) \delta(\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{x}}_s) = 0 \quad (\text{B.9})$$

Onde  $f_H(t)$  é a transformada de Hilbert de  $f(t)$ . e o campo  $u(\bar{\mathbf{x}}, t)$  é dito componente em fase, enquanto que o campo  $u_H(\bar{\mathbf{x}}, t)$  é dito componente em quadratura. O cálculo do gradiente segue a mesma estrutura da abordagem convencional. A lagrangeana é dada por:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(u, u_H, \Lambda, \Lambda_H, c) = & \frac{1}{4} \sum_s \sum_r \tau^2(\bar{\mathbf{x}}_r; \bar{\mathbf{x}}_s) + \\ & \sum_s \int_{\Omega} d\bar{\mathbf{x}} \int_0^T dt \Lambda(\bar{\mathbf{x}}, t) \left[ \nabla^2 u(\bar{\mathbf{x}}, t) - \frac{1}{c(\bar{\mathbf{x}})^2} \frac{\partial^2 u(\bar{\mathbf{x}}, t)}{\partial t^2} - f(t) \delta(\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{x}}_s) \right] \\ & + \sum_s \int_{\Omega} d\bar{\mathbf{x}} \int_0^T dt \Lambda_H(\bar{\mathbf{x}}, t) \left[ \nabla^2 u_H(\bar{\mathbf{x}}, t) - \frac{1}{c(\bar{\mathbf{x}})^2} \frac{\partial^2 u_H(\bar{\mathbf{x}}, t)}{\partial t^2} - f_H(t) \delta(\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{x}}_s) \right] \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

Agora a diferencial total da lagrangeana é dada por

$$\delta \mathcal{L} = \frac{\partial J}{\partial u} \delta u + \frac{\partial J}{\partial u_H} \delta u_H + \frac{\partial J}{\partial \Lambda} \delta \Lambda + \frac{\partial J}{\partial \Lambda_H} \delta \Lambda_H + \frac{\partial J}{\partial c} \delta c \quad (\text{B.11})$$

Calculado as derivadas explicitamente

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{L} = & \frac{1}{4} \sum_s \sum_r \frac{\partial}{\partial u} \left\{ \frac{\int_{-L}^L \xi \phi(\xi) d\xi}{\int_{-L}^L \phi(\xi) d\xi} \right\}^2 \delta u \\
& + \sum_s \int_{\Omega} d\bar{\mathbf{x}} \int_0^T dt \Lambda(\bar{\mathbf{x}}, t) \left[ \nabla^2 \delta u(\bar{\mathbf{x}}, t) - \frac{1}{c(\bar{\mathbf{x}})^2} \frac{\partial^2 \delta u(\bar{\mathbf{x}}, t)}{\partial t^2} \right] \\
& + \frac{1}{4} \sum_s \sum_r \frac{\partial}{\partial u_H} \left\{ \frac{\int_{-L}^L \xi \phi(\xi) d\xi}{\int_{-L}^L \phi(\xi) d\xi} \right\}^2 \delta u_H \\
& + \sum_s \int_{\Omega} d\bar{\mathbf{x}} \int_0^T dt \Lambda_H(\bar{\mathbf{x}}, t) \left[ \nabla^2 \delta u_H(\bar{\mathbf{x}}, t) - \frac{1}{c(\bar{\mathbf{x}})^2} \frac{\partial^2 \delta u_H(\bar{\mathbf{x}}, t)}{\partial t^2} \right] \\
& + \sum_s \int_{\Omega} d\bar{\mathbf{x}} \int_0^T dt \frac{\partial}{\partial c} \left\{ \left[ \nabla^2 u(\bar{\mathbf{x}}, t) - \frac{1}{c(\bar{\mathbf{x}})^2} \frac{\partial^2 u(\bar{\mathbf{x}}, t)}{\partial t^2} - f(t) \delta(\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{x}}_s) \right] \Lambda(\bar{\mathbf{x}}, t) \right. \\
& \left. + \left[ \nabla^2 u_H(\bar{\mathbf{x}}, t) - \frac{1}{c(\bar{\mathbf{x}})^2} \frac{\partial^2 u_H(\bar{\mathbf{x}}, t)}{\partial t^2} - f_H(t) \delta(\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{x}}_s) \right] \Lambda_H(\bar{\mathbf{x}}, t) \right\} \delta c
\end{aligned} \tag{B.12}$$

Resolvendo primeiramente a derivada parcial em  $u(\bar{\mathbf{x}}, t)$  temos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial u} \left\{ \frac{\int_{-L}^L \xi \int_0^T A^2(\bar{\mathbf{x}}_r, t) A_0^2(\bar{\mathbf{x}}_r, t + \xi) dt d\xi}{\int_{-L}^L d\xi \int_0^T A^2(\bar{\mathbf{x}}_r, t) A_0^2(\bar{\mathbf{x}}_r, t + \xi) dt} \right\}^2 &= 2 \frac{\tau(\bar{\mathbf{x}}_r; \bar{\mathbf{x}}_s)}{\left[ \int_{-L}^L d\xi \int_0^T A^2(\bar{\mathbf{x}}_r, t) A_0^2(\bar{\mathbf{x}}_r, t + \xi) dt \right]^2} \\
\left\{ 2 \int_{-L}^L \xi \int_0^T A_0^2(\bar{\mathbf{x}}_r, t + \xi) dt d\xi \int_0^T u(\bar{\mathbf{x}}, t) dt \int_{-L}^L d\xi \int_0^T A^2(\bar{\mathbf{x}}_r, t) A_0^2(\bar{\mathbf{x}}_r, t + \xi) dt - \right. \\
\left. 2 \int_{-L}^L d\xi \int_0^T A_0^2(\bar{\mathbf{x}}_r, t + \xi) dt \int_0^T u(\bar{\mathbf{x}}, t) dt \int_{-L}^L \xi \int_0^T A^2(\bar{\mathbf{x}}_r, t) A_0^2(\bar{\mathbf{x}}_r, t + \xi) dt d\xi \right\} & \tag{B.13}
\end{aligned}$$

Então a derivada parcial  $\frac{\partial J}{\partial u}$  pode ser escrita como

$$\begin{aligned}
\frac{\partial J}{\partial u} = \sum_s \sum_r \frac{\tau(\bar{\mathbf{x}}_r; \bar{\mathbf{x}}_s)}{\left[ \int_{-L}^L \phi(\xi) d\xi \right]^2} \left\{ \int_0^T u(\bar{\mathbf{x}}_r, t) dt \left[ \int_{-L}^L \xi A_0^2(\bar{\mathbf{x}}_r, t + \xi) d\xi \int_{-L}^L \phi(\xi) d\xi - \right. \right. \\
\left. \left. \int_{-L}^L A_0^2(\bar{\mathbf{x}}_r, t + \xi) d\xi \int_{-L}^L \xi \phi(\xi) d\xi \right] \right\} & \tag{B.14}
\end{aligned}$$

Que pode ser reescrita como

$$\frac{\partial J}{\partial u} = \sum_s \sum_r \tau(\bar{\mathbf{x}}_r; \bar{\mathbf{x}}_s) \left\{ \int_0^T u(\bar{\mathbf{x}}_r, t) dt \left[ \frac{\int_{-L}^L (\xi - \tau(\bar{\mathbf{x}}_r; \bar{\mathbf{x}}_s)) A_0^2(\bar{\mathbf{x}}_r, t + \xi) d\xi}{\int_{-L}^L \phi(\xi) d\xi} \right] \right\} \quad (\text{B.15})$$

Similarmente para a derivada parcial  $\frac{\partial J}{\partial u_H}$

$$\frac{\partial J}{\partial u_H} = \sum_s \sum_r \tau(\bar{\mathbf{x}}_r; \bar{\mathbf{x}}_s) \left\{ \int_0^T u_H(\bar{\mathbf{x}}_r, t) dt \left[ \frac{\int_{-L}^L (\xi - \tau(\bar{\mathbf{x}}_r; \bar{\mathbf{x}}_s)) A_0^2(\bar{\mathbf{x}}_r, t + \xi) d\xi}{\int_{-L}^L \phi(\xi) d\xi} \right] \right\} \quad (\text{B.16})$$

Agora impondo as condições  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} = 0$  e  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_H} = 0$ , temos os dois campos adjuntos associados.

$$\nabla^2 \Lambda(\bar{\mathbf{x}}, t) - \frac{1}{c(\bar{\mathbf{x}})^2} \frac{\partial^2 \Lambda(\bar{\mathbf{x}}, t)}{\partial t^2} = - \sum_r \tau(\bar{\mathbf{x}}; \bar{\mathbf{x}}_s) u(\bar{\mathbf{x}}, t) \frac{\int_{-L}^L (\xi - \tau(\bar{\mathbf{x}}; \bar{\mathbf{x}}_s)) A_0^2(\bar{\mathbf{x}}, t + \xi) d\xi}{\int_{-L}^L \phi(\xi) d\xi} \delta(\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{x}}_r) \quad (\text{B.17})$$

$$\nabla^2 \Lambda_H(\bar{\mathbf{x}}, t) - \frac{1}{c(\bar{\mathbf{x}})^2} \frac{\partial^2 \Lambda_H(\bar{\mathbf{x}}, t)}{\partial t^2} = - \sum_r \tau(\bar{\mathbf{x}}; \bar{\mathbf{x}}_s) u_H(\bar{\mathbf{x}}, t) \frac{\int_{-L}^L (\xi - \tau(\bar{\mathbf{x}}; \bar{\mathbf{x}}_s)) A_0^2(\bar{\mathbf{x}}, t + \xi) d\xi}{\int_{-L}^L \phi(\xi) d\xi} \delta(\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{x}}_r) \quad (\text{B.18})$$

Então o gradiente é calculado via

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c} = -2 \sum_r \int_{\Omega} \int_0^T dt \frac{\nabla^2 u}{c(\bar{\mathbf{x}})} \Lambda(\bar{\mathbf{x}}, t) + \frac{\nabla^2 u_H}{c(\bar{\mathbf{x}})} \Lambda_H(\bar{\mathbf{x}}, t) \quad (\text{B.19})$$