



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM GEOFÍSICA**

JULIELSON MONTEIRO DE SANTANA

**TOMOGRÁFIA ELETROMAGNÉTICA
POÇO-A-POÇO USANDO OS
REGULARIZADORES DE SUAVIDADE
GLOBAL E DE VARIAÇÃO TOTAL**

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

BELÉM-PARÁ

2014

JULIELSON MONTEIRO DE SANTANA

**TOMOGRÁFIA ELETROMAGNÉTICA POÇO-A-POÇO
USANDO OS REGULARIZADORES DE SUAVIDADE
GLOBAL E DE VARIAÇÃO TOTAL**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Geofísica da Universidade Federal do Pará, em cumprimento às exigências para obtenção do grau de Mestre em Geofísica.

Orientador: Victor Cezar Tocantins de Souza

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Biblioteca do Instituto de Geociências/SIBI/UFPA

Santana, Julielson Monteiro de, 1988-

Tomografia eletromagnética poço-a-poço usando os reguladores de suavidade global e de variação total / Julielson Monteiro de Santana. – 2014.

52 f. : il. ; 30 cm

Inclui bibliografias

Orientador: Victor Cezar Tocantins de Souza

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Pará, Instituto de Geociências, Programa de Pós-Graduação em Geofísica, Belém, 2014.

1. Geofísica. 2. Inversão (Geofísica). 3. Tomografia. I. Título.

CDD 22. ed. 550

JULIELSON MONTEIRO DE SANTANA

**TOMOGRAFIA ELETROMAGNÉTICA POÇO-A-POÇO
USANDO OS REGULARIZADORES DE SUAVIDADE
GLOBAL E DE VARIAÇÃO TOTAL**

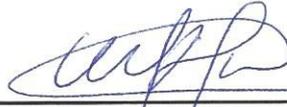
Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Geofísica da Universidade Federal do Pará, em cumprimento às exigências para obtenção do grau de Mestre em Geofísica.

Data de Aprovação: 04/07/2014

Banca Examinadora:



Professor Victor Cezar Tocantins de Souza (Orientador)
Doutor em geofísica
Universidade federal do Pará – UFPA



Professor Marcos Welby Correa Silva (Membro)
Doutor em geofísica
Universidade federal do Pará – UFPA



Professor Paulo Roberto de Carvalho (UFRA)(Membro Externo)
Doutor em geofísica
Universidade federal do Pará – UFPA

Dedico este trabalho à minha família e amigos.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a minha família, principalmente a minha mãe Julia Santana, pela compreensão, incentivo.

Agradeço também ao professor Dr.Victor César , por fornecer o algoritmos do problema direto, por tirar dúvidas , pela orientação e paciência.

Gostaria de agradecer ao Professor Dr.João Batista Corrêa por tirar algumas horas do seu tempo para esclarecimentos sobre inversão e pelo minicurso ministrado e ao professor Dr.Cícero Regis Teixeira pelos esclarecimentos e sugestões bem construtivas ao meu trabalho e aos demais professores do CPGF/UFPA.

Não poderia de deixar de agradecer as secretárias do CPGF Benildes e Lucibela, pelos serviços prestados e pela paciência.

Também não poderia deixar de agradecer aos colegas do PROEM, principalmente o meu amigo Anderson Almeida, que me ajudou bastante neste trabalho no desenvolvimento do algoritmo de inversão e aos Colegas do CPGF pelas distrações, brincadeiras, esclarecimentos e incentivos.

Agradeço também ao CPGf/UFPA e a CNPQ por ter financiado este trabalho.

“Não é possível conceber coisa alguma no mundo, ou mesmo fora do mundo, que sem restrição possa ser considerada boa, a não ser uma só: a boa vontade.”
(Immanuel Kant)

RESUMO

Neste trabalho descreveu-se o problema direto e inverso de tomografia eletromagnética poço a poço. A geometria do modelo possui simetria azimutal, o que simplifica significativamente o processo de modelagem do problema direto e inversão, reduzindo um equação originalmente tensorial 3-D para uma forma escalar bidimensional. No problema direto discutiu-se o método de elementos finitos para a solução numérica da equação de Helmholtz. Já no problema inverso foi empregado três funcionais estabilizadores: Suavidade Global (GS), Variação Total (TV) e Igualdade Absoluta (AI). O primeiro funcional usa uma suavização na norma L_2 , enquanto o segundo usa uma suavização na norma L_1 , que aceita variações abruptas entre os parâmetros adjacentes.

Para o primeiro teste, observa-se que a frequência dentre as usadas em kHz: 0.1, 1, 10 e 100, a que melhor estimou as heterogeneidade foi a de 100 kHz. Esta frequência foi usada nos demais testes e se obteve bons estimativas dos alvos com a mesma.

Com relação aos resultados em geral, nota-se que o uso dos métodos TV e GS, com o uso simultâneo do vínculo AI, teve uma boa estimativa, na grande maioria dos resultados, da geometria e posição das heterogeneidades verdadeiras, tanto para pequenos, quanto para grandes contrastes de condutividades entre os alvos e o meio encaixante. Notou-se também que as imagens recuperadas depende da posição da heterogeneidade em relação a fonte, sua distribuição geométrica, contrastes de condutividades com o meio encaixante e da frequência utilizada.

Palavras-chave: Tomografia eletromagnética poço a poço. Inversão.

ABSTRACT

In this work, we describe the forward and inverse problems of Crosswell electromagnetic tomography. The model geometry has azimuthal symmetry, which significantly simplifies both the forward modeling and the inversion processing, reducing a 3-D tensor equation to a scalar two-dimensional form. In the forward problem we use the finite element method for the numerical solution of the Helmholtz equation. In the inverse problem, we discuss the use of three stabilizing functionals: Global smoothness (GS), Total Variation (TV), and Absolute Equality (AI). The first one uses a smoothing function on L2 norm, while the second uses smoothing on the L1 norm, which accepts abrupt changes between adjacent parameters. Our results show that the use the TV method generated good estimates of the geometry and conductivity of bodies, both for small and for large conductivity contrasts between the targets and the surrounding environment. We also note that the Total Variation regularization showed a better estimate of the parameters, compared to Global Smoothness. In most of the synthetic models used in this work, we obtained a better estimate of the bodies when we used Absolute Equality constraints to the cells at the edges of the inversion grid, in addition to the stabilizing functionals.

Keywords: Crosswell electromagnetic tomography. Inversion.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Representação da tomografia eletromagnética poço-a-poço.	19
Figura 2 – A definição tradicional de inversão	20
Figura 3 – Exemplo da geometria 3-D utilizada na tomografia EM.	21
Figura 4 – Elemento triangular genérico.	22
Figura 5 – Discretização da seção transversal do modelo 3-D utilizada na formulação dos elementos finitos.	23
Figura 6 – Modelo A.	36
Figura 7 – Tomograma ilustrando a inversão do Modelo A, em que foi utilizado o regularizador GS com frequências : a) 0.1kHz e $\mu_{GS} = 10^{-20}$, b) 1kHz e $\mu_{GS} = 10^{-19}$ c) 10kHz e $\mu_{GS} = 10^{-19}$ e d) 100kHz e $\mu_{GS} = 10^{-22}$	37
Figura 8 – Inversão do Modelo A no qual foi utilizado o regularizador TV e frequências : a) 0.1 kHz, $\mu_{TV} = 10^{-21}$ e $\beta = 10^{-1}$, b) 1 kHz, $\mu_{TV} = 10^{-20}$ e $\beta = 10^{-4}$, c) 10 kHz, $\mu_{TV} = 10^{-19}$ e $\beta = 10^{-1}$ e d) 100 kHz, $\mu_{TV} = 10^{-20}$ e $\beta = 10^{-3}$	38
Figura 9 – Tomograma ilustrando a inversão do Modelo A, em que foi utilizado o regularizador GS com o auxílio do vínculo AI e frequências : a) 0.1 kHz e $\mu_{GS} = 10^{-21}$, b) 1 kHz e $\mu_{GS} = 10^{-19}$, c) 10 kHz e $\mu_{GS} = 10^{-19}$ e d) 100 kHz e $\mu_{GS} = 10^{-20}$	39
Figura 10 – Tomograma ilustrando a inversão do Modelo A, onde foi utilizado o regularizador TV com o auxílio do vínculo AI e frequências : a) 0.1 kHz, $\mu_{TV} = 10^{-22}$ e $\beta = 10^{-5}$, b) 1 kHz, $\mu_{TV} = 10^{-20}$ e $\beta = 10^{-4}$, c) 10 kHz, $\mu_{TV} = 10^{-19}$ e $\beta = 10^{-1}$ e d) 100 kHz, $\mu_{TV} = 10^{-20}$ e $\beta = 10^{-3}$	40
Figura 11 – Modelo A1	41
Figura 12 – Tomograma ilustrando a inversão do Modelo A1, no qual foi utilizado o vínculo de GS, onde: a) $\mu_{GS} = 10^{-20}$, b) $\mu_{GS} = 10^{-20}$, c) $\mu_{GS} = 10^{-22}$ e d) $\mu_{GS} = 10^{-23}$	42
Figura 13 – Tomograma ilustrando a inversão do Modelo A1, no qual foi utilizado o vínculo de (TV), onde: a) $\mu_{TV} = 10^{-20}$ e $\beta = 10^{-3}$, b) $\mu_{TV} = 10^{-20}$ e $\beta = 10^{-1}$, c) $\mu_{TV} = 10^{-20}$ e $\beta = 10^{-1}$ e d) $\mu_{TV} = 10^{-21}$ e $\beta = 10^{-1}$	43
Figura 14 – Tomograma ilustrando a inversão do Modelo A1, no qual foi utilizado simultaneamente os vínculos de (GS) e (AI), onde: a) $\mu_{GS} = 10^{-20}$, b) $\mu_{GS} = 10^{-20}$, c) $\mu_{GS} = 10^{-21}$ e d) $\mu_{GS} = 10^{-21}$	44

Figura 15 – Tomograma ilustrando a inversão do Modelo A1, no qual foi utilizado simultaneamente os vínculos de (TV) e (AI), onde: a) $\mu_{TV} = 10^{-20}$ e $\beta = 10^{-3}$, b) $\mu_{TV} = 10^{-20}$ e $\beta = 10^{-1}$, c) $\mu_{TV} = 10^{-20}$ e $\beta = 10^{-1}$ e d) $\mu_{TV} = 10^{-21}$ e $\beta = 10^{-1}$	45
Figura 16 – Modelo B	46
Figura 17 – Tomograma ilustrando a inversão do Modelo B em que foram utilizados os regularizadores: (a) GS com $\mu_{GS} = 10^{-19}$ e (b) TV com $\mu_{TV} = 10^{-18}$ e $\beta = 10^{-2}$	47
Figura 18 – Tomograma ilustrando a inversão do Modelo B em que foram utilizados os regularizadores: (a) GS com $\mu_{GS} = 10^{-19}$ e (b) TV com $\mu_{TV} = 10^{-18}$ e $\beta = 10^{-2}$	47
Figura 19 – Modelo C.	48
Figura 20 – Tomograma ilustrando a inversão do Modelo C em que foram utilizados os regularizadores: a) (GS) com $\mu_{GS} = 10^{-19}$ e b) (TV) com $\mu_{TV} = 10^{-18}$ e $\beta = 10^{-2}$	49
Figura 21 – Tomograma ilustrando a inversão do Modelo C, em que foram utilizados os regularizadores: a) (GS) com (AI), onde $\mu_{GI} = 10^{-19}$ e b) TV com AI, onde $\mu_{TV} = 10^{-18}$, $\beta = 10^{-2}$	49
Figura 22 – Modelo D.	50
Figura 23 – Tomograma ilustrando a Inversão do Modelo D, no qual foram utilizados os regularizadores: a) (GS) com $\mu_{GS} = 10^{-20}$ e b) (TV) com $\mu_{TV} = 10^{-19}$ e $\beta = 10^{-2}$	51
Figura 24 – Tomograma ilustrando a inversão do Modelo D, em que foram utilizados os regularizadores: a) (GS) e (AI) simultaneamente, com $\mu_{SG} = 10^{-21}$ e b) (TV) e (AI) simultaneamente, com $\mu_{TV} = 10^{-19}$, $\beta = 10^{-2}$	51
Figura 25 – Modelo E.	52
Figura 26 – Tomograma ilustrando as imagens recuperadas do Modelo E pelo processo de inversão, onde foram utilizados os regularizados: a) (GS) com $\mu_{GS} = 10^{-22}$ e b) (TV) com $\mu_{TV} = 10^{-22}$ e $\beta = 10^{-5}$	53
Figura 27 – Tomograma ilustrando as imagens recuperadas do Modelo E pelo processo de inversão, onde foram utilizados os regularizados: a) (GS) aliado com o regularizador (AI) com $\mu_{GS} = 10^{-22}$ e b) (TV) aliado com (AI) onde $\mu_{TV} = 10^{-22}$, $\beta = 10^{-3}$	53
Figura 28 – Tomograma representando o Modelo F.	54
Figura 29 – Tomograma ilustrando a inversão do Modelo F, em que foram utilizados os regularizadores: a) (GS) aliado com o vínculo (AI), em que $\mu_{GS} = 10^{-26}$ e $\mu_{AI} = 10$ e b) (TV) aliado com o vínculo (AI), em que $\mu_{TV} = 10^{-23}$, $\beta = 10^{-2}$	55

Figura 30 – Tomograma ilustrando a inversão do Modelo F, em que foram utilizados os regularizadores : a) (GS) aliado com o vínculo (AI), em que $\mu_{GS} = 10^{-24}$ e b) (TV) aliado com o regularizador (IA), em que $\mu_{TV} = 10^{-23}$, $\beta = 10^{-2}$ 55

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	13
2	METODOLOGIA	19
2.1	Problema direto	20
2.2	Problema inverso	24
2.2.1	Problema mal posto	24
2.2.2	Regularização de Tikhonov	27
2.2.3	Gauss-Newton usando estratégia de Marquardt	27
2.2.4	Regularizador de igualdade absoluta	30
2.2.5	Regularizador de suavidade global	30
2.2.6	Regularizador de variação total	32
3	RESULTADOS	34
3.1	Variando a frequência	35
3.2	Variando o contraste de condutividade entre o alvo e o meio encaixante	41
3.3	Variando a geometria para uma frequência fixa	46
4	CONSIDERAÇÕES FINAIS	56
	REFERÊNCIAS	58

1 INTRODUÇÃO

Medidas geofísicas são usadas para estimar parâmetros físicos da distribuição de propriedade física na subsuperfície terrestre ou marinha. Este procedimento busca inferir uma causa a partir de seu efeito, ou seja, resolver um problema dito inverso, em oposição com o estudo do efeito produzido por uma causa conhecida, um problema direto.

Segundo Silva (2006) problemas inversos, independentemente da sua complexidade, são, na sua maioria, mal postos no sentido de Hadamard Hadamard (1902 apud SILVA, 2006), ou seja, são problemas cuja solução ou não existe ou não é única ou não é estável. Isto decorre do fato de um problema inverso demandar, em geral, mais informação do que aquela disponível nas observações. Os problemas mal postos, por sua vez, aparecem com enorme frequência em várias ciências como é o caso da Geologia, da Paleontologia, da Arqueologia e da Criminalística, entre outras. Por exemplo, na Geologia, a partir do estudo da composição das rochas bem como dos vestígios da movimentação das mesmas pode ser desvendado como era a crosta terrestre há até bilhões de anos atrás. Na Paleontologia, o estudo dos fósseis permite contar como a vida começou a se desenvolver há milhões de anos e chegou aos organismos atuais. Na Arqueologia, restos de utensílios e outros materiais são usados para recuperar a história do desenvolvimento da civilização desde o seu começo, há milênios. Finalmente, na Criminalística, indícios e pistas são usados para descobrir a autoria dos crimes do nosso dia-a-dia.

O que estabelece um ponto em comum na definição de problemas mal postos entre essas ciências é a necessidade do uso de informações adicionais disponíveis para transformar um problema mal posto num problema bem-posto.

Como representar a diversidade e a complexidade da informação geológica disponível a priori em termos matemáticos? Essa difícil tarefa com que os geofísicos se depararam explica porque o uso de informações adicionais obtidas a priori para resolver o problema inverso em Geofísica demorou a ser aceito por uma parcela significativa dos geofísicos e implementado de modo matematicamente correto, bem como gerou práticas inadequadas como as citadas em: Silva, Medeiros e Barbosa (2001) e Luiz (1999). Mais detalhes sobre o desenvolvimento da Geofísica dando ênfase a inversão, encontra-se em Silva (2006).

Como uma análise criteriosa dos problemas mal postos foi concluída pela escola soviética, culminando com o desenvolvimento de um método para encontrar soluções aproximadas para problemas mal postos: a chamada regularização de Tikhonov em 1963. É mostrada a seguir o que essa regularização.

A regularização de Tikhonov é um processo de reduzir o subespaço de soluções do problema mal posto, favorecendo soluções que exibem feições desejadas através da

incorporação de informações a priori, quantitativas ou qualitativas, implícitas ou explícitas, chamadas de vínculos. O problema inverso é então formulado matematicamente como a minimização de um funcional estabilizante, que é o responsável pela incorporação da informação a priori, sujeito ao desajuste entre as observações e a resposta calculada para o modelo presumido ser compatível com o erro experimental (SILVA, 2006).

De acordo com Silva (2006) Tikhonov introduziu uma classe de funcionais estabilizantes consistindo da combinação linear de normas 2 de derivadas de ordem arbitrária da função contínua ou do vetor de parâmetros a ser estimado (TIKHONOV; ARSENIN, 1977 apud SILVA, 2006). O caso particular em que a ordem do funcional estabilizante é zero, com coeficiente igual a 1 e os demais coeficientes das normas das derivadas, de ordem igual ou superior a um, são nulos, é conhecido como regularizador de Tikhonov de ordem zero ou, mais comumente, ridge regression e, erroneamente, referido como método de Marquardt Marquardt (1963 apud SILVA, 2006), o que, aliás, tem levado as práticas inadequadas como as descritas em Silva, Medeiros e Barbosa (2001 apud SILVA, 2006). Quando é usada a primeira derivada dos parâmetros do modelo em relação às direções espaciais, tem-se o regularizador de Tikhonov de ordem um, o qual se tornou conhecido como método da Suavidade. Também podem ser usadas derivadas de segunda e terceira ordens que podem melhorar a definição dos corpos anômalos, aumentando, contudo a instabilidade da solução. Neste trabalho será focado aos regularizadores igualdade absoluta, Suavidade e variação total que são abordados a seguir, conforme a sequência.

Um dos tipos de tratamento do problema inverso, por sua vez, consistiu no uso de vínculos, como defendeu Tikhonov, mas que foram compreendidos na época como um procedimento essencialmente matemático para estabilizar o problema mal posto e não como um procedimento que também incorpora informação a priori (HOERL; KENNARD, 1970). Foram dois os tipos de vínculos usados desde a década de 60: (i) o vínculo de desigualdade e (ii) o vínculo de Igualdade aproximada Absoluta ou igualdade absoluta, que impõe, às estimativas de parâmetros, proximidade a valores esperados ou medidos fisicamente.

O vínculo de desigualdade permite restringir as estimativas dos parâmetros a valores plausíveis geologicamente, incorporando: (a) informação implícita sobre os tipos de rocha, através da restrição da estimativa da propriedade física a um intervalo aceitável, e (b) informação explícita sobre limites superior e inferior da profundidade ou da extensão do corpo causador da anomalia observada. Um caso particular desta categoria é o vínculo de positividade, muito usado para garantir que as estimativas dos parâmetros (por exemplo, as condutividades) não sejam fisicamente impossíveis. Este vínculo, no entanto, não assegura nem a unicidade e nem a estabilidade da solução estimada. (SILVA, 2006)

Os métodos inversa generalizada (LANCZOS, 1996 apud SILVA, 2006) e ridge regression (HOERL; KENNARD, 1970 apud SILVA, 2006) são casos particulares do vínculo

de igualdade aproximada absoluta (SILVA; MEDEIROS; BARBOSA, 2001 apud SILVA, 2006) e (SILVA; MEDEIROS; BARBOSA, 2000 apud SILVA, 2006). Ambos minimizam a norma euclidiana dos parâmetros, equivalendo ao regularizador de Tikhonov de ordem zero. Uma extensão desses vínculos consiste em minimizar a norma da diferença entre o vetor de parâmetros a ser determinado e um vetor de parâmetros representativos de uma solução de referência. Na ausência de informação sobre uma solução de referência, ela tem sido tomada como a solução nula, recaindo nos casos da inversa generalizada e do ridge regression. Esse vínculo implica, então, que as estimativas dos parâmetros devem ficar tão próximas quanto possível da origem do espaço de parâmetros, ou seja, de valores nulos, o que comumente não tem respaldo de cunho geológico. A despeito disso, a inversa generalizada e, principalmente, o ridge foram os métodos mais usados até a década de 80 (SILVA, 2006).

A suavidade apareceu no início dos anos 60 nos trabalhos de Tikhonov (Tikhonov 1963 e 1977, respectivamente em russo e inglês) bem como de Phillips (1962) e Twomey (1963). Foi, contudo, só entre fins da década de 80 e início da década de 90 que ela começou a ser difundida, quando, com a designação “inversão de Occam”, foi aplicada à inversão não linear de dados magnetotelúricos (CONSTABLE; PARKER; CONSTABLE, 1987) e 2D (deGROOT-HEDLIN; CONSTABLE, 1990) e de dados tomográficos em Baptista (2003). A suavidade é útil para (a) ambientes geológicos em que os contatos geológicos são suaves e os parâmetros a serem estimados são propriedades físicas, como mineralizações com auréolas de minério disseminado circundando concentrações de minérios maciços e (b) ambientes geológicos em que a topografia subsuperficial a ser estimada é suave (os parâmetros a serem estimados são as profundidades), como é o caso de bacias sedimentares intracratônicas, em que o embasamento apresenta a topografia não falhada ou com falhas de pequeno rejeito, e suave (SILVA, 2006).

A Suavidade também aparece em vários trabalhos pioneiros de inversão 3D, entre os quais: Mackie e Madden (1993), que usa o CG (linear conjugate gradients), e Newman e Alumbaugh (2000), que emprega o NLCG. O CG e o NLCG são métodos de gradiente iterativo, mas o NLCG é muito mais eficiente que o CG (SILVA, 2006).

Apesar do surgimento dos novos vínculos e dos vários métodos de inversão incorporando esses vínculos, a suavidade tornou-se o método mais utilizado. A questão, portanto, é: a Suavidade atende à necessidade geológica? ou: os ambientes geológicos de interesse restringem-se essencialmente àqueles em que as propriedades físicas possuem variação suave?

Ainda que a Suavidade tenha sido usada com relativo sucesso na interpretação de dados MT (BERDICHEVSKI; ZHDANOV; KELLER, 1984) e (deGROOT-HEDLIN; CONSTABLE, 1990) e nos dados de tomografia (BAPTISTA, 2003), ela fornece imagens desfocadas da geometria das fontes, que não se ajustam a muitos dos ambientes de

interesse, porque estes não apresentam variação suave de propriedades físicas. Tais imagens denotariam uma redução da demanda das informações desejadas: o intérprete deseja uma imagem nítida, mas para que a solução seja estável, ele aceita uma imagem com qualidade inferior. Aliás, a designação do método foi inspirada na “navalha de Occam” (Occam’s razor), um princípio segundo o qual os modelos não precisam ser desnecessariamente complicados: se há vários modelos aceitáveis, deve ser selecionado o mais simples deles. O uso desse princípio converge com a capacidade limitada dos dados geofísicos de permitir a distinção de detalhes bem como com a teoria de Backus e Gilbert (1968), que resolve o problema mal posto através da redução da demanda das informações desejadas.

Segundo Silva (2006) a suavidade, por outro lado, não exige informação a priori quantitativa sobre a feição, daí ser de uso fácil bem como mais robusta do que todos os demais métodos, inclusive a inversa generalizada e o ridge, para os quais todas as propriedades devem ficar as mais próximas possíveis de zero. Isso explica o seu amplo uso.

Na tentativa de lidar com o contraste abrupto, alguns pesquisadores procuraram introduzir essa informação através da regularização de Tikhonov, enquanto outros sugeriram novas técnicas de regularização e uma delas é denominada Variação Total.

Na regularização pela Variação Total, é usado um funcional de estabilização que usa a norma L1 do gradiente (RUDIN; OSHER; FATEMI, 1992). Este critério exige que a distribuição dos parâmetros do modelo apresente variação abrupta, daí ser aplicável a distribuições descontínuas de propriedade física. Para solucionar a limitação desse funcional não ser diferenciável em zero, foi introduzido um funcional de variação total modificado (ACAR; VOGEL, 1994). O funcional original e o modificado tenderiam a diminuir os saltos na variação dos parâmetros do modelo, suavizando a solução, mas menos do que a suavidade (SILVA, 2006). A aplicação a tomografia aparece em MacLennan, Karaoulis e Revil (2014). Agora vamos fazer uma abordagem do desenvolvimento da tomografia e a sua aplicação à Geofísica.

Tomografia derivada do termo "tomos", partes e "grafen"registro. O conceito de tomografia teve seu início com os estudos de radiografia para realizar diagnósticos na medicina via emissão de raio x (FRENCH; MARCOUX; MATZUK, 1973). Tendo grande êxito na medicina, a tomografia foi utilizada em outras áreas tecnológicas como à Geofísica.

A tomografia aplicada à Geofísica, teve-se grande sucesso na sísmica, onde ela tem sido usada no mapeamento de zonas de absorção da energia acústica (WADE, 1979). Já a tomografia eletromagnética usa o princípio da distorção dos campos eletromagnéticos provocado pela presença de estruturas geológicas eletricamente condutivas e resistivas. (SHAO-HUI, 1979). A análise dessas distorções fornece informações sobre a distribuição da condutividade e resistividade nessas estruturas e, conseqüentemente, informa sobre a sua composição litológica e morfológica (WILT et al., 1995).

Segundo Surguchev et al. (2002) no processo de exploração de petróleo é muito importante o conhecimento do reservatório para o seu futuro gerenciamento. Estes parâmetros litológicos são o tipo de rocha, porosidade, permeabilidade, saturação ou dinâmicos como pressão, fluxo e viscosidade do fluido. Ao decorrer da sua vida produtiva, por várias razões, a dinâmica do fluxo do reservatório pode mudar como consequência da perda de pressão, dificultando o processo de extração do óleo ou a formação do ‘cone’ de gás ou água. Para contorna esse problema, injeção-se água ou gás no reservatório aumenta consideravelmente a pressão, deste forma, estimula o movimento do fluido e melhora o processo de extração do óleo, água ou o gás. Segundo Wilt et al. (1995) os resultados da interpretação dos dados obtidos durante esse processo de monitoração podem fornecer informações significantes sobre os parâmetros dinâmicos do reservatório, ajudando a determinar com alguma precisão a velocidade e a direção do movimento do fluxo no reservatório. O tomografia eletromagnética poderá ajudar nesse monitoramento.

Zhou, Becker e Morrison (1993) estudaram a aplicação do método de imageamento eletromagnético no mapeamento da condutividade no interior da terra usando a solução baseada nas aproximações de Born e de Rytov. Uma fonte constituída por uma linha foi usada como transmissor. As transformadas de Fourier e de Laplace foram usadas para relacionar a função objetivo aos campos eletromagnético, tendo sido usados os conceitos de teoria do raio na análise dos modelos estudados. Para o problema inverso foi utilizado mínimos quadrados. Os mesmos autores concluíram que a qualidade da imagem está diretamente relacionada ao arranjo fonte-receptor e a frequência utilizada. Para o arranjo poço-a-poço a resolução horizontal é menor do que a vertical e que o uso de altas frequências resulta em imagens de boa qualidade.

Alumbaugh e Morrison (1995) analisaram os fatores que determinam a resolução de imagem no método de tomografia eletromagnética usando o “tensor de espalhamento” em uma fonte de dipolo magnético. O uso do tensor de espalhamento torna o problema mais robusto a altas frequências do que a aproximação de Born de primeira ordem, que é menos eficiente segundo o mesmo autores. A metodologia de problema inverso também foi a do mínimos quadrados. Os modelos eram constituídos por heterogeneidades de 0.02 S/m e um meio de 0.01 S/m e as frequências utilizadas foram 1 a 100 kHz.

Souza (2001) fez estudo da resolução do método usando como fonte o dipolo magnético vertical. A resposta do corpo condutivo com relação ao meio homogêneo, foi obtida a partir da solução numérica da equação não homogênea de Helmholtz, usando o método dos elementos finitos. No problema inverso ele utilizou o vínculo de igualdade absoluta, usando o algoritmo de Marquardt. No seu modelo foram usados para a heterogeneidade de 0.02 S/m em um meio encaixante de 0.01 S/m.

Baptista (2003) deu continuidade ao trabalho de Souza (2001), considerando estruturas complexas, contrastes de condutividade mais altas do corpo que varia entre

0.02 S/m a 1 S/m e frequências variando de 0.1 a 1000.0 KHz e heterogeneidade de várias formas. No problema inverso o mesmo utilizou o algoritmo de Marquardt estabilizado utilizando vínculos de igualdade absoluta e Suavidade.

MacLennan, Karaoulis e Revil (2014) desenvolveram um recente trabalho sobre a condutividade complexa de sedimentos siliciclásticos parcialmente saturado onde pode ser razoavelmente previsto através de modelos petrofísicos desenvolvidos, como o modelo POLARIS. Eles utilizaram equação integral para a o problema direto e uma abordagem do gradiente com regularização de Tikhonov com o regularizador de Variação Total para o problema inverso.

Neste trabalho de dissertação é feito a inversão usando os regularizadores de igualdade absoluta, Suavidade e Variação Total, das observações da componente vertical do campo magnético cuja fonte é o dipolo vertical magnético, dando continuidade ao trabalho realizado por Souza (2001) para a obtenção de campos EM espalhados. A configuração usada é a poço a poço, onde um arranjo de receptores localizados em um poço fazem as medidas dos campos EM produzidos por fontes situadas em um outro poço distante, o conjunto dos campos medidos formam os dados que serão usados para conseguir a propriedade física estimada.

O capítulo 2 inicia abordando o problema direto para tornar mais clara a diferença entre este e o problema inverso bem como o papel da solução do problema direto dentro do processo de inversão. Também este capítulo aborda o problema inverso, detalhando os métodos de inversão igualdade absoluta, suavidade global e variação total, que foram implementados para permitir a comparação de resultados.

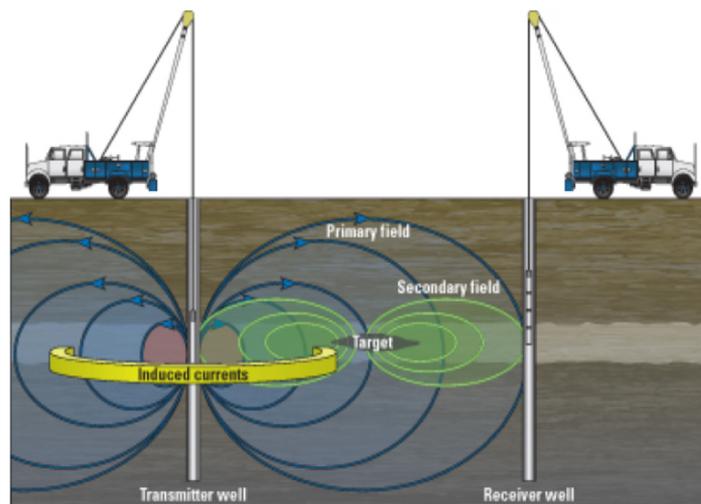
O capítulo 3 mostra resultados obtidos com a inversão feita com os métodos igualdade absoluta, Suavidade e variação total.

Finalmente, o capítulo 4 que enfatiza os resultados promissores dos método de inversão igualdade absoluta, suavidade global e variação total, bem como indicando pesquisas adicionais que devem ser realizadas para sua melhor compreensão, extensão e utilização.

2 METODOLOGIA

O principal aspecto em Geofísica é fazer deduções sobre os parâmetros físicos a partir dos dados obtidos em campo. A modelagem numérica desses dados está associada a equações da Física-matemática pelo chamado problema ou modelagem direta e as deduções dos parâmetros físicos é feita por conjuntos de técnicas matemáticas denominada de modelagem inversa. O problema direto na tomografia eletromagnética é definido pelo conjunto de medidas de campos eletromagnéticos avaliados nos receptores como é mostrado na Figura 1. Esses campos são produzidos por fontes primárias arranjadas em uma determinada configuração e pelos campos secundários produzidos por corpos anômalos espalhadores.

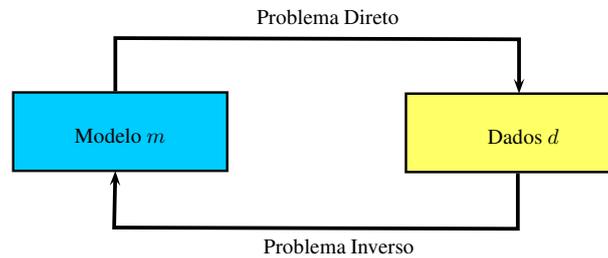
Figura 1 – Representação da tomografia eletromagnética poço-a-poço.



Fonte: Schlumberger (2014b)

No problema inverso, o objetivo é reconstruir o modelo do problema direto a partir de um conjunto de medidas que formam os dados como é mostrado na Figura 2. Neste capítulo, é apresentado a base teórica do problema direto, bem como a base teórica do problema inverso.

Figura 2 – A definição tradicional de inversão .



Fonte: Do autor

2.1 Problema direto

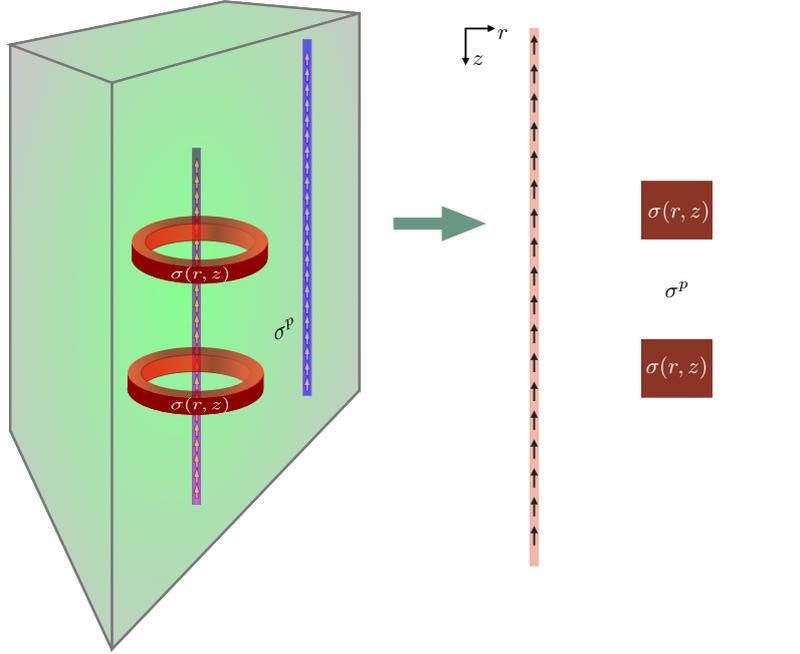
Para mostrar a formulação do problema direto, vamos considerar o seguinte modelo ilustrado na Figura 3. Este modelo é baseado no trabalho de Alumbaugh e Morrison (1995), cuja a geometria consiste de uma estrutura de simetria cilíndrica, caracterizada pela condutividade $\sigma(r, z)$, dentro de uma região homogênea, isotrópica ilimitada com condutividade primária σ^p , ou seja, os alvos de investigação são corpos condutivos, na forma de anéis cilíndricos, concêntricos ao poço contendo às fontes. Um exemplo prático disso é observado no chamado efeito annulus, causado pela invasão do filtrado da lama nos poços de produção de hidrocarbonetos (SCHLUMBERGER, 2014a).

A tomografia eletromagnética geralmente é realizada entre dois poços, separados por uma distância r , um contendo as fontes eletromagnéticas EM e outro contendo os receptores. Neste trabalho as fontes são do tipo dipolo magnético vertical e os receptores são bobinas horizontais, captam as componentes verticais gerado pelos transmissores, pela região toroidal condutiva anômala e pelo meio encaixante.

Este problema não possui solução exata, por isso a alternativa é encontrar uma solução aproximada. No trabalho de Alumbaugh e Morrison (1995) utilizaram o algoritmo com aproximação de Born para se obter uma aproximação de primeira ordem. Neste trabalho, utilizaremos o algoritmo dos elementos finitos para a obter uma solução aproximada mais geral, isto é, sem restrição imposta pelo algoritmo de Born.

A geometria empregada aqui simplifica significativamente o processo de inversão, reduzindo uma equação tensorial 3-D para uma forma escalar 2-D. Desse modo pode-se conseguir uma seção transversal do modelo 3-D.

Figura 3 – Exemplo da geometria 3-D utilizada na tomografia EM.



Fonte: Do autor

Considerando a geometria apresentada na Figura 3. A formulação é geral para qualquer problema que explore a simetria axial e o modo transversal elétrico TE. Considerando a simetria axial do modelo, em que não existem variações na direção azimutal $\frac{\partial}{\partial \theta} = 0$.

Segundo Ward e Hohmann (1988), as equações de Maxwell são escritas da seguinte forma:

$$H_z^p = -\frac{1}{3r} \frac{\partial(rE_\theta^p)}{\partial r}, \quad (2.1)$$

$$H_z^s = -\frac{1}{3r} \frac{\partial(rE_\theta^s)}{\partial r}, \quad (2.2)$$

$$H_r^s = \frac{1}{3r} \frac{\partial(rE_\theta^s)}{\partial z}, \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial H_r^s}{\partial z} - \frac{\partial H_z^s}{\partial r} = \eta E_\theta^s + \Delta \eta E_\theta^p, \quad (2.4)$$

em que $\eta = \sigma$, $\mathfrak{z} = i\omega\mu$, $\Delta\eta = \eta - \eta^p = \sigma - \sigma^p$, onde σ representa a condutividade tanto do meio considerado primário σ^p , que pode ser um espaço ilimitado, ou um semi-espaço ou em um meio estratificado, ou também pode representar condutividades anômalas a este meio primário, $\omega = 2\pi f$ é a frequência angular e f é a frequência em Hertz (Hz).

Substituindo (2.3) e (2.2) em (2.4) temos a equação diferencial para o modo TE axial:

$$\frac{\partial^2 E_\theta^s}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial (r E_\theta^s)}{\partial r} \right] - i\omega\mu\sigma E_\theta^s - i\omega\mu(\sigma - \sigma^p) E_\theta^p = 0, \quad (2.5)$$

A componente primária do campo E_θ^p é gerada por um dipolo magnético num meio homogêneo, e o campo elétrico em um espaço ilimitado pode ser expressado analiticamente (WARD; HOHMANN, 1988) como:

$$E_\theta^p = -\frac{i\omega\mu m_z}{4\pi} \frac{r}{R^3} (1 + ik_p R) e^{-ik_p R}, \quad (2.6)$$

onde m_z é o momento de dipolo magnético $k_p = \sqrt{-i\omega\mu\sigma^p}$ e $R = \sqrt{r^2 + z^2}$. A componente primária do campo H_z possui solução analítica, substituindo (2.6) em (2.1) e fazendo manipulações matemáticas, obtêm-se:

$$H_z^p = \frac{m_z}{4\pi R^5} \left[(3 + 3ik_p R - k_p^2 R^2) z^2 - (1 + ik_p R - k_p^2 R^2) \right] R^2 e^{-ik_p R}, \quad (2.7)$$

O campo secundário E_θ^s feito pela heterogeneidade no meio encaixante é dado por:

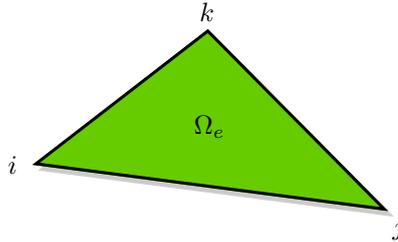
$$E_\theta^s = E_\theta - E_\theta^p, \quad (2.8)$$

A componente secundária E_θ^s é aproximada por um polinômio do tipo:

$$E_\theta^s = E_{\theta i}^s \Psi_i + E_{\theta j}^s \Psi_j + E_{\theta k}^s \Psi_k, \quad (2.9)$$

nos nós i , j e k de um elemento triangular Figura 4 genérico de um domínio

Figura 4 – Elemento triangular genérico.



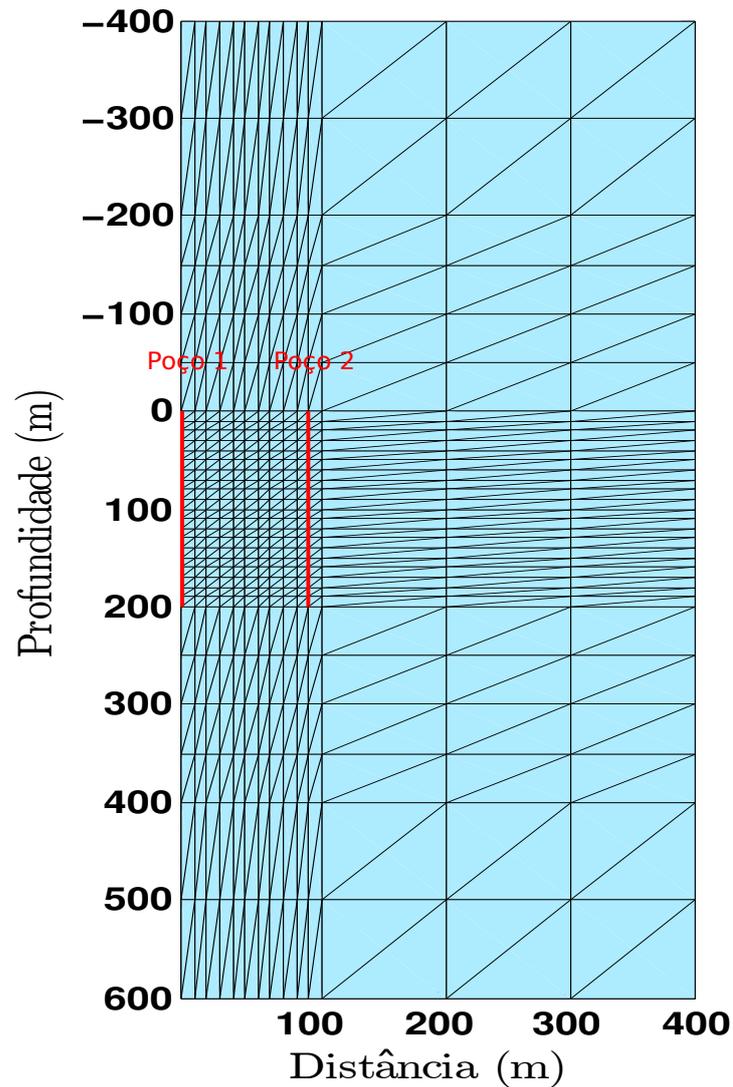
Fonte: Souza (2001)

Para calcular os campos elétricos secundários produzidos pelas heterogeneidades, a formulação pelo métodos dos elementos finitos pode ser construída aplicando um princípio variacional ou o método de Galerkin na equação diferencial (2.5) onde a solução desta equação é mostrada com mais detalhes em Souza (2001).

O método dos elementos finitos é uma técnica numérica usada na construção de soluções aproximadas para problemas de valores de contorno. A técnica envolve a

divisão do domínio da solução em números finitos de subdomínios simples, os elementos finitos. A discretização deste domínio é feita dividindo uma seção transversal do modelo tridimensional em células retangulares sobre o qual a condutividade é constante, sendo que para cada célula existem dois elementos finitos triangulares com a mesma condutividade, Um exemplo da discretização é mostrado na Figura 5.

Figura 5 – Discretização da seção transversal do modelo 3-D utilizada na formulação dos elementos finitos.



Fonte: Do autor

O campo desconhecido sobre cada nó da malha de discretização é aproximado por um polinômio linear em relação as coordenadas r e z , do tipo $\varphi_m = \frac{1}{2A}(a_m + b_m r + c_m z)$ onde o índice m representa o nó no elemento triangular.

É importante ressaltar que a malha dos elementos finitos é maior que a região

limitada entre os poços, uma vez que é necessário garantir as condições de Dirichlet para o campo secundário nas fronteiras distantes desta região. As condições de Dirichlet foram aplicadas nas fronteiras superior, inferior e a direita do poço dos receptores (poço 2), e a condição de Newman foi assumida na fronteira onde está localizado o poço dos transmissores (poço 1) (SOUZA, 2001).

Aplicando o método de Galerkin na equação (2.5), obtém-se a equação matricial dos elementos finitos na forma:

$$\mathbf{K}\varphi = \mathbf{v}, \quad (2.10)$$

onde \mathbf{K} é uma matriz de rigidez global, bandada, esparsa e simétrica, representando a geometria do modelo e as propriedades elétricas, φ é um vetor dos valores nodais dos campos secundários desconhecidos e \mathbf{v} é um vetor fonte obtido da última parte da equação (2.5).

A solução de (2.10) foi efetuada usando o método de eliminação Gaussiana, para os valores nodais desconhecidos, a componente vertical do campo magnético é obtida pelas diferenciação numérica da relação (2.2). Mais detalhes sobre este método de Galerkin e sobre elementos finitos está também na referencia do trabalho de Rijo (2004).

2.2 Problema inverso

O problema inverso busca inferir uma causa a partir do seu efeito. Em geofísica, isso equivale a usar medidas obtidas no campo para estimar uma distribuição de propriedades físicas do meio não conhecido que será investigado.

2.2.1 Problema mal posto

Problemas inversos são em regra problemas matematicamente mal postos. Um problema é mal posto no sentido de Hadamard (HADAMARD, 1902) quando sua solução não satisfaz a pelo menos uma das condições: existência, unicidade e estabilidade. A solução não existe quando as observações não pertencem à imagem do subespaço de parâmetros que define o modelo interpretativo. Neste caso não é possível encontrar um conjunto de parâmetros cujos efeitos coincidam exatamente com as observações. Isto na prática ocorre se existir ruído nas observações ou se o modelo interpretativo for muito simples.

Ainda que exista solução exata, ela pode não ser única. Um exemplo clássico em se tratando dos métodos eletromagnéticos da não unicidade é dado pela impossibilidade da separação dos parâmetros condutividade σ e espessura t de um modelo unidimensional, conseqüentemente, um corpo fino condutivo e um corpo espesso levemente condutivo bem

como uma infinita transição de modelos definidos entre estes dois extremos podem produzir os mesmos dados desde que sua condutância (produto $\sigma \times t$) seja mantida constante.

Matematicamente, a não unicidade decorre do fato da função $f(r, z, freq, \mathbf{P})$ não ser bijetora. No caso do problema linear, a não unicidade ocorre se e somente se existir um espaço nulo no espaço de parâmetros associado à função $f(r, z, freq, \mathbf{P})$ tal que todos os elementos \mathbf{P}_0 desse subespaço sejam soluções não triviais da equação homogênea $\mathbf{G}\mathbf{P}_0 = 0$, em que a matriz \mathbf{G} é definida pelo seu elemento g_{ij} , dado por

$$g_{ij} = \left. \frac{\partial f(u, \mathbf{P})}{\partial P_i} \right|_{u=u_i} \quad (2.11)$$

onde $u = [r, z, freq]$ e $u_i = [r_i, z_i, freq_i]$. Neste caso, a existência de um espaço nulo (3.2) está relacionada à deficiência de posto da matriz \mathbf{G} . A não unicidade denota que existe uma menor quantidade de informação contida nos dados em relação à quantidade de informação que se quer obter através de um processo de inversão. A matriz de sensibilidade num problema não linear depende de valores assinalados aos parâmetros e é usada no procedimento numérico iterativo para obter uma solução e na análise da escolha dos melhores frequências e posições do poço de medida.

Finalmente, a instabilidade da solução na presença de perturbações diminutas dos dados decorre do operador inverso \mathbf{G}^{-1} ser descontínuo e, por conseguinte, extremamente sensível à presença de ruído nos dados (SILVA, 2006).

Em Geofísica, a existência de uma solução é garantida procurando-se a solução que permita o melhor ajuste no sentido dos mínimos quadrados (ou segundo outro critério de distância normada) entre os dados medidos \mathbf{y}^o e os dados teóricos obtidos pela relação $f(\mathbf{P})$, ou seja, procurando-se \mathbf{P} que minimize a norma 2 do resíduo entre os dados medidos e os calculados.

Problemas de dados tomográficos é um problema mal posto, significa que ele não possui solução única ou estável, ou seja, existe inúmeras soluções diferentes que conseguem reproduzir as observações com uma mesmo nível de aproximação. Para resolver a questão da não unicidade e a instabilidade, somamos ao funcional que representa os dados observados um outro funcional estabilizante para introduzir informação a priori. Para minimizar o funcional não linear resultante da soma dos dois primeiros, empregamos o método de Marquardt, que procura uma solução aproximada iterativamente. Representamos o vetor \mathbf{y}^o contendo o campo magnético observado no receptor como uma função da posição r e z e dos parâmetros \mathbf{P} que formam o chamado modelo interpretativo, onde consideramos como sendo aquela no qual gera os dados observados. Se tivermos N observações:

$$\mathbf{y}_i^o = f(r, z_i, freq, \mathbf{P}), \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (2.12)$$

onde z_i denota as posições dos receptores. Neste trabalho, as observações será a parte real e imaginária da componente vertical do campo magnético. Os parâmetros de cada

modelo são definidos pela condutividade dos elementos da malha localizados na região de imageamento. O problema de minimização do funcional estabilizante ϕ^v , que contém a informação a priori e honra a informação geofísica ϕ^o , pode ser resolvido através do método dos multiplicadores de Lagrange, que permite transformar esse problema no de minimização do funcional não vinculado τ , denominado funcional suavizante (função objetivo), dado por:

$$\tau(\mathbf{P}) = \phi^o(\mathbf{P}) + \mu\phi^v(\mathbf{P}), \quad (2.13)$$

$\phi^o(\mathbf{P})$ representa o ajuste entre os dados observados e os calculados. O problema de inversão geofísica pode então ser formulado como a minimização do funcional $\phi^v(\mathbf{P})$, presumido de antemão ser não linear, contínuo e com derivadas contínuas de primeiras e segundas ordens em relação à \mathbf{P} . Assim, a formulação matemática do problema inverso usando apenas os dados geofísicos é:

$$\mathbf{min} \quad \phi^o(\mathbf{P}) = \frac{1}{N} \|\mathbf{y}^o - f(\mathbf{P})\| = \delta, \quad (2.14)$$

sendo $\|\cdot\|$ a norma Euclidiana e δ o erro médio quadrático das realizações da variável aleatória que contamina as observações. O problema de encontrar $\hat{\mathbf{P}}$, uma estimativa de p que minimize o funcional $\phi^o(\mathbf{P})$, é mal posto, pois sua solução, na presença de ruído, não é única e nem estável e $\phi^v(\mathbf{P})$ é o funcional usado para introduzir informações a priori que ajudam a estabilizar o processo de inversão. $\mu > 0$ é o parâmetro de regularização, cujo papel é controlar a influência da informação introduzida a priori. Valores pequenos de μ não permitem a estabilização da solução, enquanto valores muito grandes tornam a solução tendenciosa e impedem um ajuste aceitável. Para evitar a tendenciosidade, μ deve ser tomado como o menor valor capaz de produzir solução estável. Acima disto, a estabilização vai significar, para alguns estabilizadores, a degradação desnecessária da resolução dos dados, o que é indesejável (SILVA, 2006 apud SILVA; MEDEIROS; BARBOSA, 2001). Se o intérprete, contudo, possui elevada confiança na informação que está sendo introduzida a priori por meio do funcional estabilizante, μ deve ser tomado como o maior valor que ainda permite um ajuste aceitável às observações (SILVA; BARBOSA, 2006). A estabilidade da solução é verificada por meio da contaminação dos dados com diferentes sequências de realizações de ruído e verificação se as estimativas são consistentes dentro de um intervalo de precisão aceitável.

2.2.2 Regularização de Tikhonov

A regularização introduzida por Tikhonov permitiu que se obtivessem para problemas mal postos, lineares ou não lineares, soluções estáveis através do uso de informação a priori quantitativa ou qualitativa sobre a solução procurada. O problema bem-posto de inversão geofísica é formulado como a minimização de um funcional estabilizante ϕ^v , sujeito ao ajuste, entre os dados observados e os dados calculados através do modelo interpretativo, estar dentro de uma precisão ditada pelo nível de ruído:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \phi^v(\mathbf{P}) = \|W^{\frac{1}{2}}\mathbf{P}\|^n \\ = \mathbf{P}^T \mathbf{W} \mathbf{P}, \\ \text{sujeito a } \phi^o(\mathbf{P}) = \frac{1}{N} \|\mathbf{y}^o - f(\mathbf{P})\|^2 = \delta, \end{array} \right. \quad (2.15)$$

em que \mathbf{W} é uma matriz definida positiva que contém a informação a priori, chamada matriz de pesos, e o sobrescrito T denota transposição e n denomina a ordem da norma euclidiana.

2.2.3 Gauss-Newton usando estratégia de Marquardt

A solução do problema não linear é encontrada de forma iterativa pelo método Gauss-Newton usando a estratégia de Marquardt (MARQUARDT, 1963), para usar o método de Gauss-Newton é necessário fazer uma expansão de τ em série de Taylor no entorno da aproximação $\mathbf{P} = \mathbf{P}_k$ até os termos de segunda ordem, a ser chamada de $\hat{\tau}$:

$$\begin{aligned} \hat{\tau} = & \phi^o(\mathbf{P})|_{\mathbf{P}=\mathbf{P}_k} + \Delta p [\nabla_{\mathbf{P}}(\phi^o(\mathbf{P}))]^T|_{\mathbf{P}=\mathbf{P}_k} + \frac{1}{2} \Delta \mathbf{P}^T \nabla_{\mathbf{P}} \nabla_{\mathbf{P}}^T (\phi^o(\mathbf{P}))|_{\mathbf{P}=\mathbf{P}_k} \Delta \mathbf{P} + \\ & \mu \left[\phi^v(\mathbf{P})|_{\mathbf{P}=\mathbf{P}_k} + \Delta \mathbf{P} [\nabla_{\mathbf{P}}(\phi^v(\mathbf{P}))]^T|_{\mathbf{P}=\mathbf{P}_k} + \frac{1}{2} \Delta \mathbf{P}^T \nabla_{\mathbf{P}} \nabla_{\mathbf{P}}^T (\phi^v(\mathbf{P}))|_{\mathbf{P}=\mathbf{P}_k} \Delta \mathbf{P} \right], \end{aligned} \quad (2.16)$$

onde $\Delta \mathbf{P} = (\mathbf{P} - \mathbf{P}_k)$. Tomando-se o gradiente em relação a \mathbf{P} de ambos os lados da equação 2.16 e igualando-se o resultado ao vetor nulo, é possível obter uma estimativa iterativa do vetor de parâmetros necessário para atingir o mínimo de $\hat{\tau}$, ou seja,

$$\begin{aligned} \Delta \hat{\mathbf{P}}_k = & - \left[\nabla_{\mathbf{P}} \nabla_{\mathbf{P}}^T \{\phi^o(\mathbf{P})\}|_{\mathbf{P}=\mathbf{P}_k} + \mu \nabla_{\mathbf{P}} \nabla_{\mathbf{P}}^T \{\phi^v(\mathbf{P})\}|_{\mathbf{P}=\mathbf{P}_k} \right]^{-1} \cdot \\ & \left[\nabla_{\mathbf{P}} \{\phi^o(\mathbf{P})\}|_{\mathbf{P}=\mathbf{P}_k} + \mu \nabla_{\mathbf{P}} \{\phi^v(\mathbf{P})\}|_{\mathbf{P}=\mathbf{P}_k} \right], \end{aligned}$$

onde podemos escrever a estimativa da seguinte forma:

$$\hat{\mathbf{P}}_{k+1} = \hat{\mathbf{P}}_k + \Delta \hat{\mathbf{P}}_k. \quad (2.17)$$

O passo é adicionado ao valor \mathbf{P}_k e o resultado \mathbf{P}_{k+1} é substituído no lugar de \mathbf{P}_k na iteração seguinte. Comumente, esse processo é repetido até que os valores obtidos para \mathbf{P}_{k+1} sejam aproximadamente iguais aos valores obtidos na iteração anterior para \mathbf{P}_k , ou seja, até ser atingido ou se estar muito próximo do mínimo de τ . O critério de parada das iterações não deve levar em consideração apenas que o resíduo entre os dados medidos e os calculados seja igual ou menor do que o nível de ruído, mas também que a incorporação de informação a priori tenha sido feita, ou seja, que a estimativa minimize a combinação do funcional geofísico com o funcional de estabilização (SILVA; MEDEIROS; BARBOSA, 2001).

Escreveremos o gradiente $\nabla_{\mathbf{P}}\tau$ e a Hessiana $\nabla_{\mathbf{P}}\left(\nabla_{\mathbf{P}}^T\tau\right)$ como as somas dos gradientes \mathbf{g} e Hessianas \mathbf{H} dos funcionais das observações ϕ^o e dos vínculos Φ^v :

$$\begin{aligned}\mathbf{g}_k^o &= \nabla_{\mathbf{P}}\phi^o|_{\mathbf{P}=\mathbf{P}_k}, & \mathbf{H}_k^o &= \nabla_{\mathbf{P}}\left[\nabla_{\mathbf{P}}^T\phi^o\right]|_{\mathbf{P}=\mathbf{P}_k}, \\ \mathbf{g}_k^v &= \nabla_{\mathbf{P}}\Phi^v|_{\mathbf{P}=\mathbf{P}_k}, & \mathbf{H}_k^v &= \nabla_{\mathbf{P}}\left[\nabla_{\mathbf{P}}^T\Phi^v\right]|_{\mathbf{P}=\mathbf{P}_k}.\end{aligned}$$

Podemos reescrever a equação 2.16 para o valor estimado do funcional τ da seguinte maneira :

$$\hat{\tau}(\mathbf{P}) = \tau(\mathbf{P})|_{\mathbf{P}=\mathbf{P}_k} + \Delta\mathbf{P}^T(\mathbf{g}_k^o + \mu\mathbf{g}_k^v) + \frac{1}{2}(\mathbf{H}_k^o + \mu\mathbf{H}_k^v)\Delta\mathbf{P}, \quad (2.18)$$

A matriz de derivadas segundas (Hessiana) do funcional estabilizante Φ^v é conhecida analiticamente ($2\mathbf{W}$ se \mathbf{W} for independente de \mathbf{P}). O mesmo não ocorre com a Hessiana do funcional geofísico, sendo necessária sua avaliação numérica, o que envolve o cálculo de segundas derivadas, o que é extremamente dispendioso computacionalmente. Por isso, usa-se a aproximação de Gauss-Newton $\nabla_{\mathbf{P}}\left[\nabla_{\mathbf{P}}^T\phi^o\right]|_{\mathbf{P}=\mathbf{P}_k} \approx 2\mathbf{G}_k\mathbf{G}_k$, que vêm da substituição de $f(\mathbf{P})$ pela sua expansão de primeira ordem $f(\mathbf{P}_k) + \mathbf{G}_k(\mathbf{P} - \mathbf{P}_k)$, onde $(\mathbf{G}_k)^T = \nabla_{\mathbf{P}}[f(\mathbf{P})]|_{\mathbf{P}=\mathbf{P}_k}$ (BARD, 1974). A matriz \mathbf{G}_k é matriz de sensibilidade (Jacobiana), que consiste das derivadas parciais do funcional ajustante f em relação aos parâmetros, avaliada em um conjunto particular de valores \mathbf{P}_k para os parâmetros.

A Hessiana de $\phi^o(\mathbf{P})$ pode ser quasi-singular, produzindo, neste caso, passos $\Delta\mathbf{P}_k$ instáveis e fazendo com que o método de Newton não convirja. Para converter a aproximação da Hessiana em uma matriz definida positiva e garantir, desse maneira, que a cada iteração a função-objeto diminua, Marquardt adicionou a matriz identidade \mathbf{I} , multiplicada por $\lambda \geq 0$, à soma das Hessianas normalizadas (BARD, 1974). A aproximação do vetor de parâmetros na k -ésima+1 iteração passa a ser escrita da seguinte maneira:

$$\hat{\mathbf{P}}_{k+1} = \hat{\mathbf{P}}_k - \left[\mathbf{G}_k^T\mathbf{G}_k + \mu\mathbf{W} + \lambda\mathbf{I}\right]^{-1} \left[\mathbf{G}_k^T\left(\mathbf{y}^o - f(\hat{\mathbf{P}}_k)\right) + \mu\mathbf{W}\mathbf{P}_k\right]. \quad (2.19)$$

O termo λ , conhecido como parâmetro de Marquardt, é ajustado automaticamente durante o processo iterativo estabelecido por Marquardt. Geralmente, ele é grande nas primeiras

iterações, produzindo passos pequenos, uma vez que a grande distância entre a aproximação corrente e a solução que minimiza o funcional τ aumenta a chance deste funcional apresentar localmente regiões de curvatura quase nula. Similarmente, λ é pequeno nas iterações finais, porque, situando-se \mathbf{p}_k nas proximidades do mínimo, a Hessiana de $\hat{\tau}$ torna-se definida positiva. Em cada iteração, um determinado valor de λ é utilizado para se obter um novo vetor de parâmetros usando a equação 2.19. Se esse vetor produzir uma função-objeto menor que a função-objeto inicial da iteração, esta é finalizada. Caso contrário, o parâmetro λ é multiplicado por 10 e um novo vetor calculado e repetido o procedimento anterior até a função-objeto ser menor do que a função-objeto inicial. Repeti-se esse processo até satisfazer o critério de convergência definido em termos da função $\hat{\tau}$ de um parâmetro de controle (ϵ), que deve ser muito pequeno. Desse modo, foram incorporados dois critérios de parada:

- Diferença relativa da função objetivo:

$$conv = \left| \frac{\hat{\tau}_k - \hat{\tau}_{k+1}}{\hat{\tau}_k} \right| < tol. \quad (2.20)$$

- Desajuste dos dados:

$$conv < \phi^o \leq tol, \quad (2.21)$$

sendo tol a tolerância pré-estabelecida para o desajuste dos dados. O critério 2.21 evita a parada do processamento caso seja satisfeito o critério 2.20 e o ajuste dos dados ainda possa ser melhorado, ou seja, evita que a incorporação da informação a priori, sobre a qual sempre existem incertezas, prepondere sobre a informação geofísica que é representada pelas medidas de campo. Foi considerado em todos os resultados deste trabalho, que serão abordados no próximo capítulo, o valor da tol de 10^{-6} .

A modificação introduzida por Marquardt (MARQUARDT, 1963) estabiliza o passo do método de Newton e não a solução do problema inverso, que é estabilizada pelo parâmetro de regularização. Este, ao contrário do parâmetro de Marquardt, deve permanecer constante ao longo das iterações de todo o processo de inversão, a fim de não produzir soluções instáveis e sem sentido físico-geológico (SILVA; MEDEIROS; BARBOSA, 2001).

Em seguida, vamos particularizar as equações 2.15 e 2.19 para os funcionais estabilizadores de igualdade absoluta (AI), suavidade global (GS) e o de variação total (TV).

2.2.4 Regularizador de igualdade absoluta

Para o vínculo de igualdade absoluta faremos a seguinte formulação:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{min} \quad \phi^{AI}(\mathbf{P}) = \|\mathbf{AP} - \gamma\|^2, \\ \text{sujeito a} \quad \phi^o(\mathbf{P}) = \frac{1}{N} \|\mathbf{y}^o - f(\mathbf{P})\|^2 = \delta, \end{array} \right. \quad (2.22)$$

onde γ são os valores aos quias vincularemos os parâmetros e \mathbf{A} é uma Matriz cujas linhas são formadas por zeros exceto na posição dos parâmetros vinculados conforme o exemplo abaixo, em que os parâmetros $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3, \mathbf{P}_{200}$ são iguais a 0.01 S/m:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 1 \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 \dots & 1 \end{bmatrix},$$

e

$$\gamma = \begin{bmatrix} 0.01 \\ 0.01 \\ 0.01 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0.01 \end{bmatrix}.$$

Escreveremos a equação 2.19, para o vínculo de Igualdade Absoluta na iteração $k + 1$ como:

$$\hat{\mathbf{P}}_{k+1}^{(AI)} = \hat{\mathbf{P}}_k - \left[\mathbf{G}_k^T \mathbf{G}_k + \mu_{AI} \mathbf{A}^T \mathbf{A} + \lambda \mathbf{I} \right]^{-1} \left[\mathbf{G}_k^T \left[\mathbf{y}^o - f(\hat{\mathbf{P}}_k) \right] - \mu_{AI} \mathbf{A}^T (\mathbf{A} \hat{\mathbf{P}}_k - \gamma) \right]. \quad (2.23)$$

2.2.5 Regularizador de suavidade global

Na suavidade global, a diferença entre os valores das estimativas de parâmetros adjacentes espacialmente devem ser muito próximos. Essa informação é incorporada

como uma diferença finita entre parâmetros equiespaçados, aproximando as derivadas de primeira ordem através de uma matriz \mathbf{S} . Fazendo-se $\mathbf{S} = \mathbf{W}^{\frac{1}{2}}$, a equação 2.15 torna-se:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \phi^{GS}(\mathbf{P}) = \|\mathbf{SP}\|^2 = \mathbf{S}^T \mathbf{p}^T \mathbf{SP}, \\ \text{sujeito a } \phi^o(\mathbf{P}) = \frac{1}{N} \|\mathbf{y}^0 - f(\mathbf{P})\|^2 = \delta. \end{array} \right. \quad (2.24)$$

Para o vínculo de suavidade global, a equação 2.19 pode, então, ser escrita para a k -ésima+1 iteração como:

$$\hat{\mathbf{P}}_{k+1}^{GS} = \hat{\mathbf{P}}_k - [\mathbf{G}_k^T \mathbf{G}_k + \mu_{GS} \mathbf{S}^T \mathbf{S} + \lambda \mathbf{I}]^{-1} [\mathbf{G}_k^T [\mathbf{y}^o - f(\hat{\mathbf{P}}_k)] + \mu_{GS} \mathbf{S}^T \mathbf{SP}_k]. \quad (2.25)$$

Para modelos interpretativos 2D, o operador discreto de primeira derivada precisa ser aplicado tanto na direção horizontal quanto na vertical. Para o modelo da Tabela 1 de nove parâmetros, o operador aplicado na direção horizontal atua nos parâmetros $\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_2$, $\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_3$, $\mathbf{P}_4 - \mathbf{P}_5$, $\mathbf{P}_5 - \mathbf{P}_6$, $\mathbf{P}_7 - \mathbf{P}_8$ e $\mathbf{P}_8 - \mathbf{P}_9$ de modo que a minimização de $\|\mathbf{SP}\|_2$ da equação 2.24 de modo $\mathbf{P}_1 \approx \mathbf{P}_2$, $\mathbf{P}_2 \approx \mathbf{P}_3$, $\mathbf{P}_3 \approx \mathbf{P}_4$, $\mathbf{P}_4 \approx \mathbf{P}_5$, $\mathbf{P}_5 \approx \mathbf{P}_6$, $\mathbf{P}_7 \approx \mathbf{P}_8$, $\mathbf{P}_8 \approx \mathbf{P}_9$, ou seja, 6 relações de proximidade na direção horizontal entre os 9 parâmetros, que aparecem reunidas na submatriz (6x9) acima da linha divisória da matriz \mathbf{S} de 2.26. O mesmo operador aplicado na direção vertical, por sua vez, atua analogamente nos parâmetros $\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_4$, $\mathbf{P}_4 - \mathbf{P}_7$, $\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_5$, $\mathbf{P}_5 - \mathbf{P}_8$, $\mathbf{P}_3 - \mathbf{P}_6$ e $\mathbf{P}_6 - \mathbf{P}_9$ permitindo escrever 6 relações de proximidade na direção vertical entre os 9 parâmetros, reunidas na submatriz (6x9) abaixo da linha divisória da matriz \mathbf{S} de 2.26:

Tabela 1 – Modelo 2D com 9 parâmetros

$\downarrow \mathbf{P}_1 \rightarrow$	$\downarrow \mathbf{P}_2 \rightarrow$	$\downarrow \mathbf{P}_3$
$\downarrow \mathbf{P}_4 \rightarrow$	$\downarrow \mathbf{P}_5 \rightarrow$	$\downarrow \mathbf{P}_6$
$\mathbf{P}_7 \rightarrow$	$\mathbf{P}_8 \rightarrow$	\mathbf{P}_9

Fonte: do autor

$$S = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (2.26)$$

2.2.6 Regularizador de variação total

Para o regularizador de variação total ϕ^{TV} :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{min} \quad \phi^{TV}(\mathbf{P}) = \|\mathbf{S}\mathbf{P}\|^1, \\ \mathbf{sujeito\ a} \quad \phi^o(\mathbf{P}) = \frac{1}{N} \|\mathbf{y}^0 - f(\mathbf{P})\|^2 = \delta. \end{array} \right. \quad (2.27)$$

O funcional ϕ^{TV} de variação total (VT) de (2.27) é rescrita como :

$$\phi^{TV} = \sum_{l=1}^L |\mathbf{P}_i - \mathbf{P}_j|, \quad (2.28)$$

onde \mathbf{P}_i e \mathbf{P}_j são o l -ésimo par de parâmetros espacialmente adjacentes e L é o número de total de pares de parâmetros adjacentes ao longo das direções r e z . Entretanto, essa função não é diferenciável quando a diferença entre os parâmetros é igual a zero. Para evitar esse comportamento, a função foi modificada por Acar e Vogel (1994), aproximando as diferenças por:

$$|\mathbf{P}_i - \mathbf{P}_j| \cong [(\mathbf{P}_i - \mathbf{P}_j)^2 + \beta]^{\frac{1}{2}}, \quad (2.29)$$

em que β é um escalar pequeno e positivo. Para o vínculo de variação total, a equação 2.19 pode, então, ser escrita para a k -ésima+1 iteração como (MARTINS, 2009) :

$$\hat{\mathbf{P}}_{k+1}^{TV} = \hat{\mathbf{P}}_k - [\mathbf{G}_k^T \mathbf{G}_k + \mu_{VT} \mathbf{S}^T \mathbf{Q} \mathbf{S} + \lambda \mathbf{I}]^{-1} [\mathbf{G}_k^T [\mathbf{y}^o - f(\hat{\mathbf{P}}_k)] - \mu_{TV} \mathbf{S}^T \mathbf{q}], \quad (2.30)$$

onde a matriz \mathbf{S} é expressa em 2.26 e \mathbf{q} é o vetor com a dimensão (l), igual a quantidade de pares de parâmetros que se quer vincular, avaliado em $\mathbf{P} = \mathbf{P}_k$, cujo l -ésimo elemento é

dado por:

$$\mathbf{q} \equiv \mathbf{q}_l \equiv \frac{\mathbf{P}_i - \mathbf{P}_j}{\left[(\mathbf{P}_i - \mathbf{P}_j)^2 + \beta \right]^{\frac{1}{2}}} \Big|_{\mathbf{P}=\mathbf{P}_k}, \quad (2.31)$$

e \mathbf{Q} é a matriz diagonal, avaliada em $\mathbf{P} = \hat{\mathbf{P}}(k)$, cujo l -ésimo elemento da diagonal é dado por:

$$Q \equiv Q_{ll} \equiv \frac{\beta}{\left[(\mathbf{P}_i - \mathbf{P}_j)^2 + \beta \right]^{\frac{3}{2}}} \Big|_{\mathbf{P}=\mathbf{P}_k}, \quad (2.32)$$

O método não irá penalizar variações bruscas porque, na norma $L1$, a medida de desajuste entre os pares de parâmetros adjacentes, dará o mesmo valor se a variação dos parâmetros for suave ou se a variação for brusca, o que não é o caso se o mesmo desajuste é medido na norma $L2$, pois em uma distribuição suave a medida do desajuste é menor, sendo assim favorecida pela minimização desta norma. Mais detalhes sobre essa discussão em (LIMA et al., 2011).

3 RESULTADOS

Este capítulo apresenta a inversão de dados sintético de modelos geo-elétricos, que exploram a resolução da técnica proposta. Os algoritmos do problema direto e de inversão são baseados nas equações abordadas no Capítulo ???. Sendo que os dados sintéticos foram contaminados com ruído de distribuição uniforme com pseudo números aleatórios criados pela função intrínseca do Fortran 90 `random_number` em um vetor normalizado onde o máximo valor é 1 e o mínimo é -1 atribuído em 1% e 5% do valor da observação.

Imagens recuperadas em tomografia eletromagnéticas são determinadas principalmente pela configurações dos poços das fontes e dos receptores, assim como, da geometria dos parâmetros de inversão. Duas configurações para o par fonte-receptor foram usadas na análise dos modelos propostos. Na primeira configuração, ambos os poços das fontes e dos receptores possuem 200 m de extensão em profundidade e estão separados um do outro a uma distância de 100 m. No poço das fontes empregou-se 21 dipolos magnéticos verticais, enquanto que no poço dos receptores 21 medidas foram feitas. A distância entre as fontes e entre os receptores em cada poço são constantes no valor de 10 metros. Isto resulta em 441 combinações diferentes do sistema transmissor-receptor e totaliza $2 \times 21 \times 21 = 882$ observações, pois foi considerada as partes reais e imaginárias dos campos magnéticos verticais. Uma segunda configuração também foi realizada, agora com 30 fontes e 30 receptores em poços separado a uma distância de 140 m. Nesta configuração o sistema transmissor-receptor resultou em 900 combinações diferentes, totalizando $2 \times 30 \times 30 = 1800$ observações.

Na primeira parte das análises deste capítulo, será considerada a área de imageamento compreendida entre os intervalos $0 \text{ m} < r < 100 \text{ m}$ e $0 \text{ m} < z < 200 \text{ m}$ (região entre os poço da Figura 5) constituída por 800 parâmetros (elementos retangulares da malha, compreende dois elementos finitos triangulares). Isto permite reduzir o tempo computacional, durante a solução da equações do problema inverso, na qual seria muito grande caso fosse considerado todos os elementos da malha. Na segunda parte analisada vamos considerar a área de imageamento um pouco maior compreendida entre os intervalos $0 \text{ m} < r < 140 \text{ m}$ e $0 \text{ m} < z < 200 \text{ m}$. A justificativa desta alteração será apresentada mais adiantes no modelos estudados.

Devido a instabilidade do problema inverso, iremos adicionar informação a priori, constituída pelos vínculos de Igualdade Absoluta (AI), suavidade global (GS) e variação total (TV), para estabilizar a solução. Quando o vínculo de igualdade absoluta é usado, a condutividade do meio encaixante é atribuída aos elementos situados na borda do lado esquerdo (poço que contém o transmissor) e nas outras três bordas da área de imageamento: a de acima ($z = 0$), a de baixo ($z = 100$) e a do lado direito (poço que

contém os receptores). Durante o processo de inversão, o valor dessa condutividade não será mudada. Na prática, este vínculo é implementado devido os dados obtidos nos poços serem prontamente disponíveis. A utilização do vínculo de (AI), possui multiplicador de Lagrange fixo de valor $\mu_{AI} = 10$, já o vínculo de suavidade global é representado pelos operados da derivada de primeira ordem, que pressupõe a igualdade entre os parâmetros adjacentes, do mesmo modo acontece com o vínculo de variação total.

Além dos vínculos de igualdade absoluta, suavidade global e variação total é usado um outro tipo de informação a priori, relacionado ao modelo interpretativo escolhido. Desse modo, a condutividade elétrica do meio encaixante é atribuída a um semiespaço homogêneo e este é utilizado como sendo o modelo inicial para a solução do problema inverso vinculado, sendo, o primeiro tipo de informação a priori.

Para uma representação mais adequada das imagens anômalas, utilizamos ao decorrer de todo o processo de inversão o modelo inicial constituído pelo semiespaço homogêneo com condutividade elétrica igual ao meio encaixante $0.01 S/m$. O uso da condutividade elétrica do meio encaixante ser semelhante ao modelo inicial é coerente, já que esta pode ser conhecida exatamente por meio de medidas efetuadas no poço. Esta metodologia ajuda bastante a resolução das imagem recuperadas, como será visto a seções seguintes.

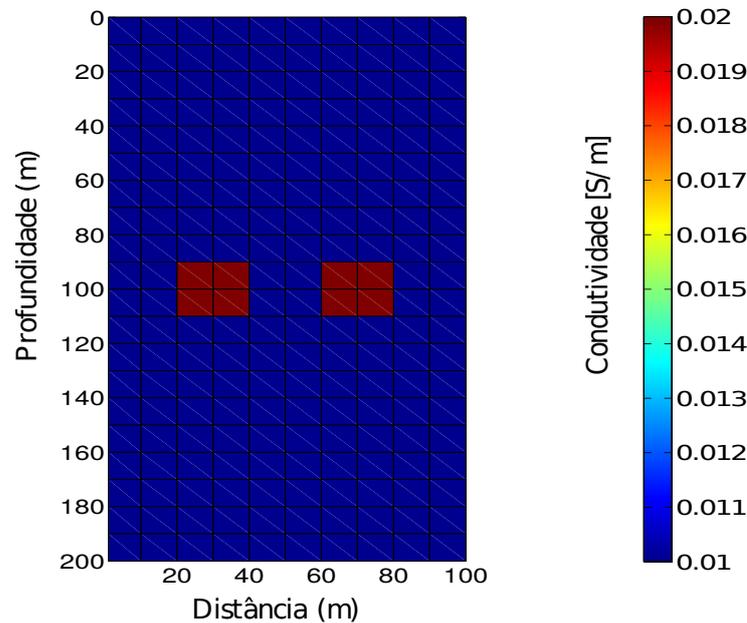
3.1 Variando a frequência

Nesta seção foi analisado a influência da frequência nas imagens recuperadas através de modelos usados na literatura especializada (ALUMBAUGH; MORRISON, 1995). Foram aplicados vínculos de igualdade absoluta, de suavidade e de variação total com os resultados analisados a seguir.

A Figura 6 ilustra um modelo constituído de dois anéis toroidais separados na horizontal por $20 m$, com seção retangular de $20 \times 20 m^2$ e condutividades de $0.02 S/m$. Este modelo foi apresentado no trabalho de Alumbaugh e Morrison (1995) e será denominado de Modelo A, ele explora a resolução horizontal, uma vez que os corpos anômalos estão dispostos nesta direção (modelos que exploram a resolução vertical são apresentados nos trabalhos de Alumbaugh e Morrison (1995) e Souza (2001), e geralmente a resolução horizontal é bem mais exigente do que a vertical).

Os dados obtidos para o Modelo A usaram 4 frequências: 0.1, 1, 10 e 100 kHz a 1 % de ruído. Os tomogramas gerados com 0.01 kHz em : Figura 7 a), onde foi usado o vínculo de suavidade global, a Figura 8 a), no qual foi usado o vínculo de variação total, a Figura 9 a), no qual foi utilizado simultaneamente os vínculos de suavidade global e igualdade absoluta e a Figura 10 a), no qual foi utilizado simultaneamente os vínculos

Figura 6 – Modelo A.



Fonte: Do autor

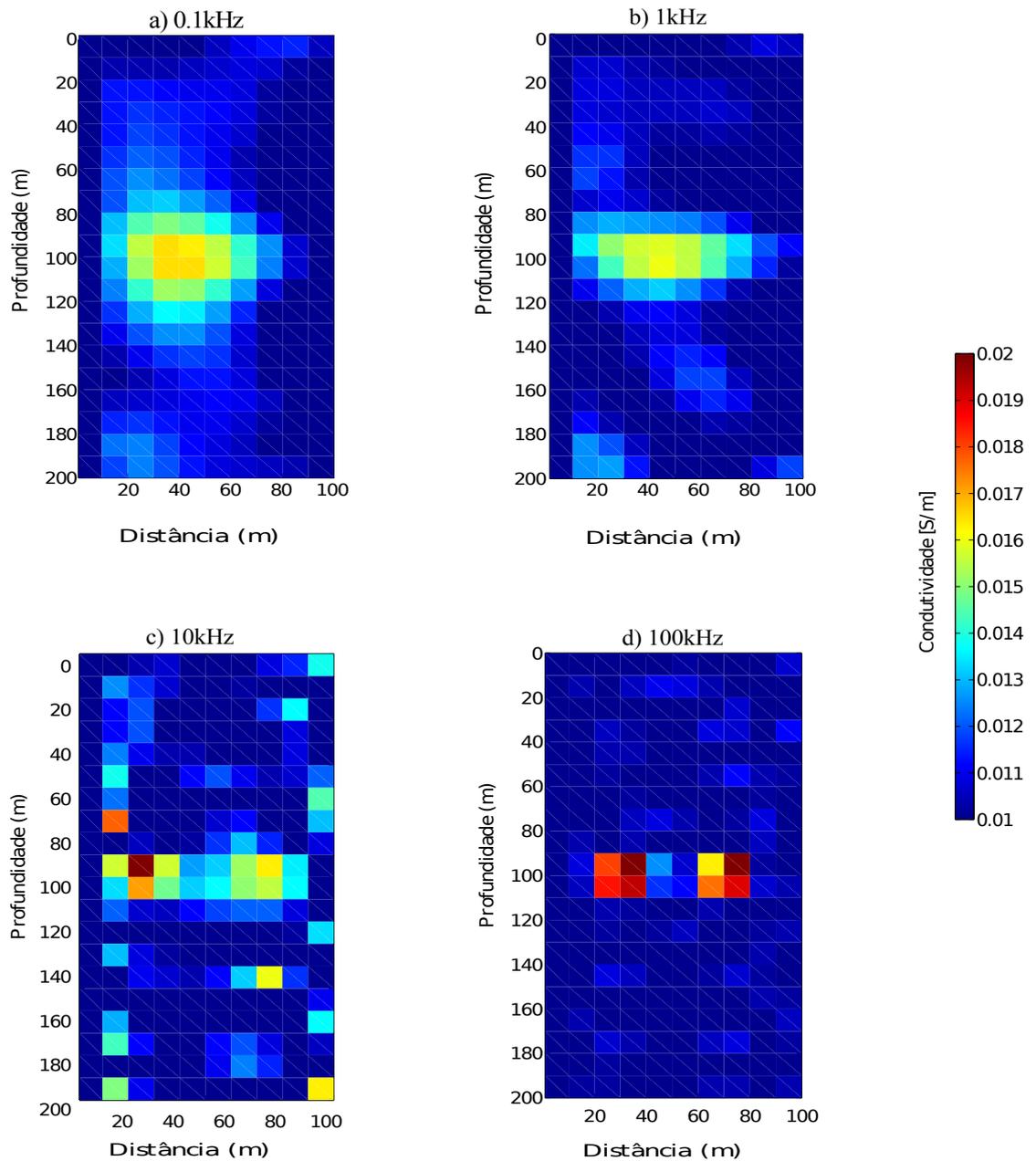
de variação total e igualdade absoluta mostram a presença de uma só imagem alongada horizontalmente, em vez das duas, conforme ilustrada o Modelo A. Nesses resultados a estimativa da condutividade ficou entre 0.015 a 0.019 S/m .

Semelhante ao resulta anterior acontece com a frequência de 1 kHz, seguindo a mesma metodologia, como mostra as figuras Figura 7 b), a Figura 8 b), a Figura 9 b) e a Figura 10 b).

A definição das duas imagens é ligeiramente incrementada com a frequência de 10 kHz como mostra os tomogramas ilustrados em : Figura 7 c), a Figura 8 c), a Figura 9 c) e a Figura 10 c) notando uma melhor recuperação da geometria e condutividade elétrica das heterogeneidades do modelo verdadeiro em Figura 9 c) e a Figura 10 c), onde foi usado a mesma estratégia dos resultados anteriores.

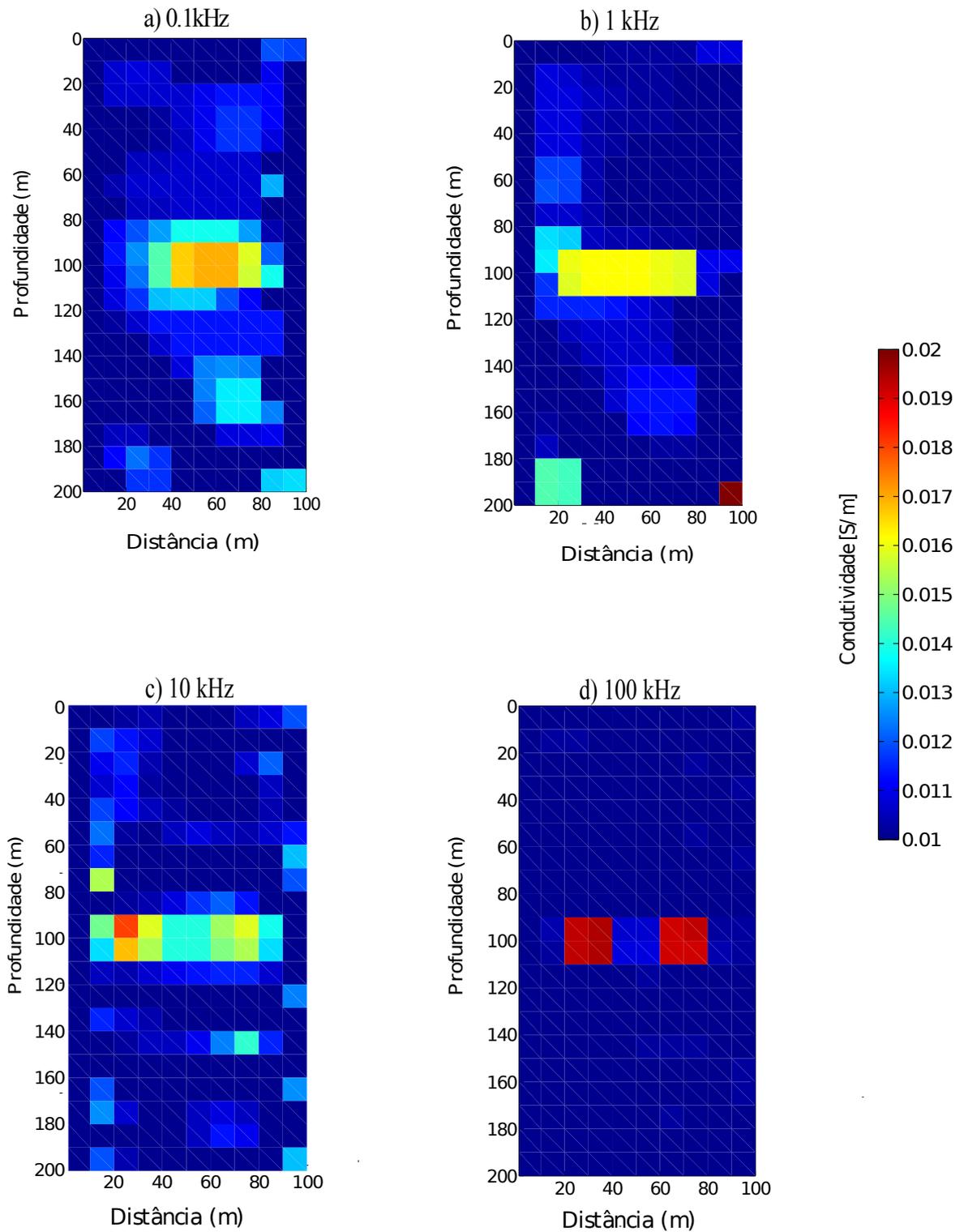
Os melhores resultados para esse modelo foram obtidos com a frequência de 100 kHz para todos vínculos utilizados, contudo o uso simultâneo do vínculo de suavidade global e variação total com o de igualdade absoluta, teve uma melhor estimativa da condutividade elétrica e da geometria das anomalias quase que semelhante ao modelo verdadeiro.

Figura 7 – Tomograma ilustrando a inversão do Modelo A, em que foi utilizado o regularizador GS com frequências : a) 0.1kHz e $\mu_{GS} = 10^{-20}$, b) 1kHz e $\mu_{GS} = 10^{-19}$ c) 10kHz e $\mu_{GS} = 10^{-19}$ e d) 100kHz e $\mu_{GS} = 10^{-22}$.



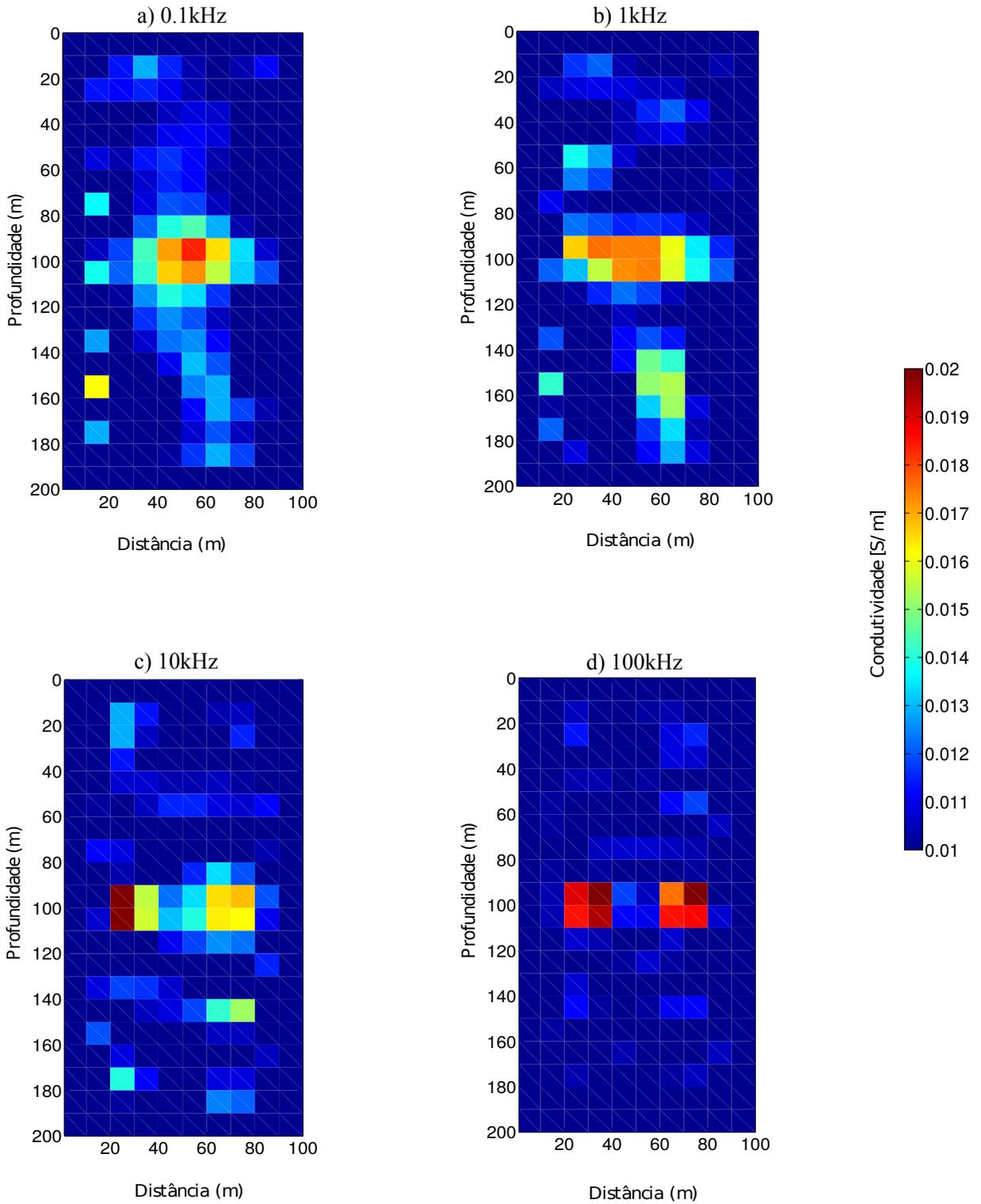
Fonte: Do autor

Figura 8 – Inversão do Modelo A no qual foi utilizado o regularizador TV e frequências : a) 0.1 kHz, $\mu_{TV} = 10^{-21}$ e $\beta = 10^{-1}$, b) 1 kHz, $\mu_{TV} = 10^{-20}$ e $\beta = 10^{-4}$, c) 10 kHz, $\mu_{TV} = 10^{-19}$ e $\beta = 10^{-1}$ e d) 100 kHz, $\mu_{TV} = 10^{-20}$ e $\beta = 10^{-3}$.



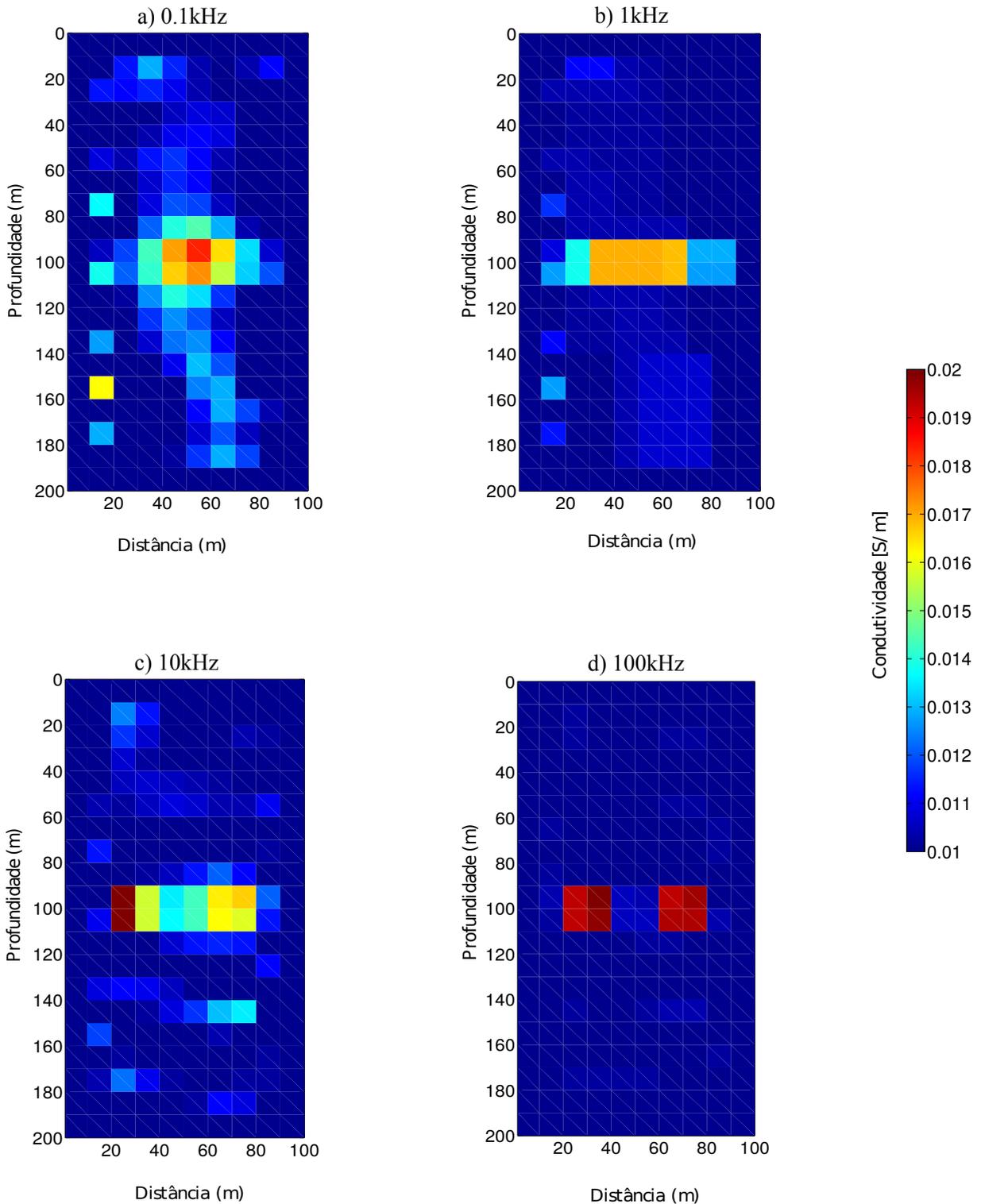
Fonte: Do autor

Figura 9 – Tomograma ilustrando a inversão do Modelo A, em que foi utilizado o regularizador GS com o auxílio do vínculo AI e frequências : a) 0.1 kHz e $\mu_{GS} = 10^{-21}$, b) 1 kHz e $\mu_{GS} = 10^{-19}$, c) 10 kHz e $\mu_{GS} = 10^{-19}$ e d) 100 kHz e $\mu_{GS} = 10^{-20}$.



Fonte: Do autor

Figura 10 – Tomograma ilustrando a inversão do Modelo A, onde foi utilizado o regularizador TV com o auxílio do vínculo AI e frequências : a) 0.1 kHz, $\mu_{TV} = 10^{-22}$ e $\beta = 10^{-5}$, b) 1 kHz, $\mu_{TV} = 10^{-20}$ e $\beta = 10^{-4}$, c) 10 kHz, $\mu_{TV} = 10^{-19}$ e $\beta = 10^{-1}$ e d) 100 kHz, $\mu_{TV} = 10^{-20}$ e $\beta = 10^{-3}$.



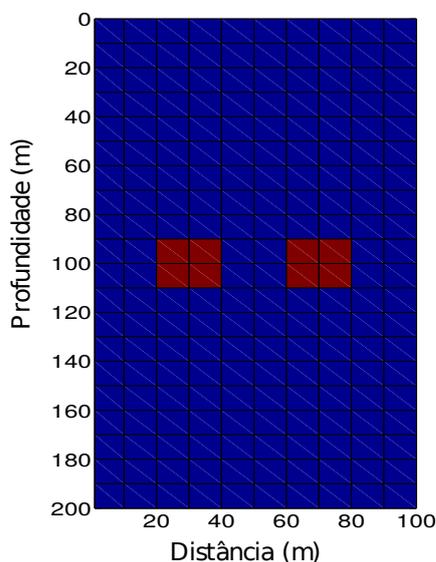
Fonte: Do autor

3.2 Variando o contraste de condutividade entre o alvo e o meio encaixante

Nosso segundo teste foi feito uma análise no efeito da variação do contraste da heterogeneidade com relação ao meio encaixante. Usamos o Modelo A1 figura 11, cujas imagens foram geradas com a frequência de 100 kHz. A condutividade do meio encaixante é mantida fixa em $0.01 S/m$. A condutividade das anomalias são em S/m de: 0.02, 0.1, 1 e 2, cujos os contrastes da heterogeneidade com relação ao meio encaixante são iguais a 2: Figura 12 a), Figura 13 a), Figura 14 a) e 15 a), 10: Figura 12 b), Figura 13 b), Figura 14 b) e 15 b), 100: Figura 12 c), Figura 13 c), Figura 14 c) e 15 c) e 200: Figura 12 d), Figura 13 d), Figura 14 d) e 15 d).

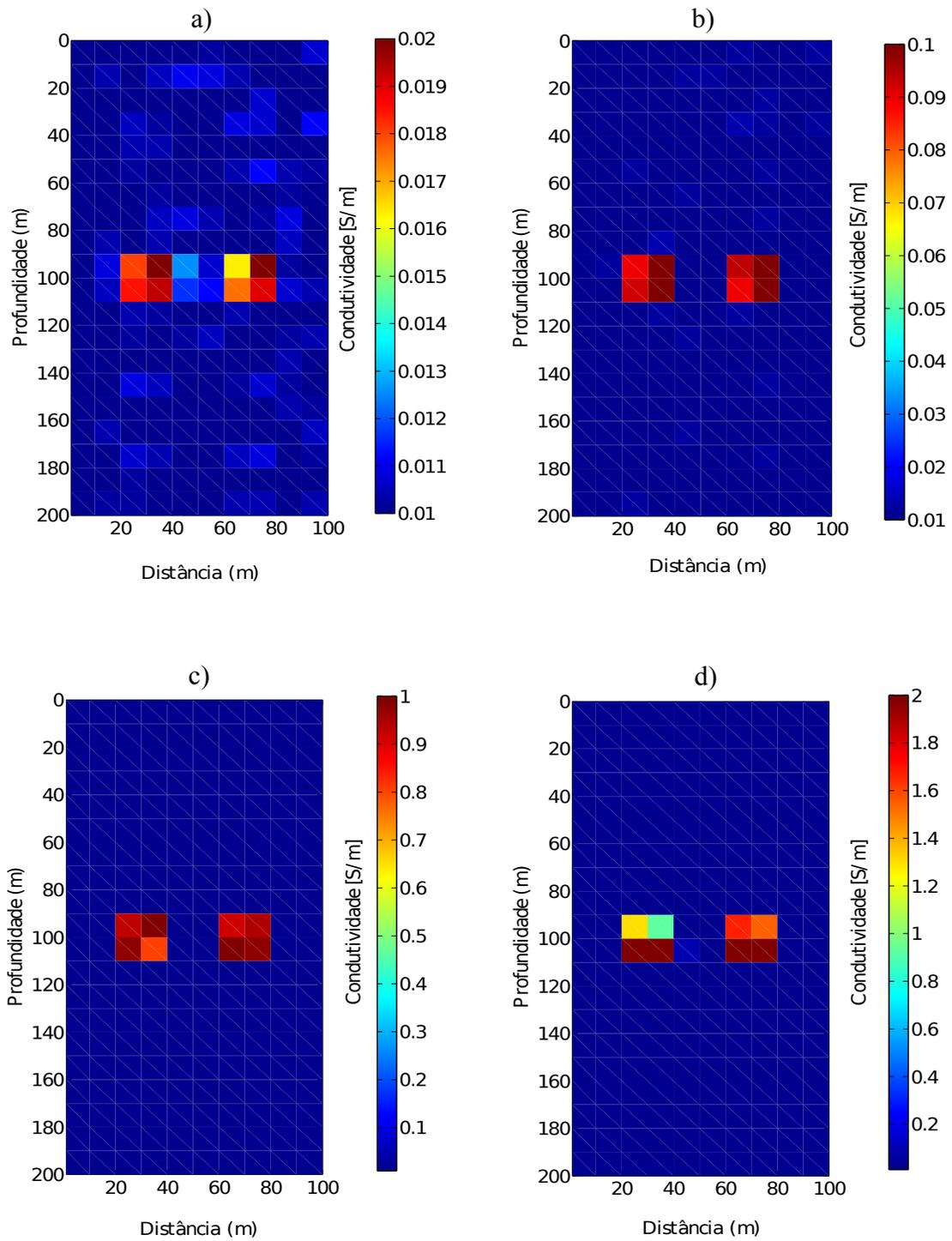
Analisando as Figuras 12, 13, 14 e 15 observa-se boa resolução para todos os contrastes, tendo uma boa recuperação da condutividade elétrica e também na geometria da heterogeneidade. Porém, na Figura 13 d) e 15 não houve uma boa recuperação da geometria verdadeira, para os contrastes de 100 e 200. Este fato está relacionado ao fenômeno de espalhamento eletromagnético que produz um campo elétrico forte dentro da heterogeneidade devido sua elevada condutividade elétrica. Por conta disso, o campo magnético observado no receptor originado por essas correntes, também possui magnitudes relevantes.

Figura 11 – Modelo A1



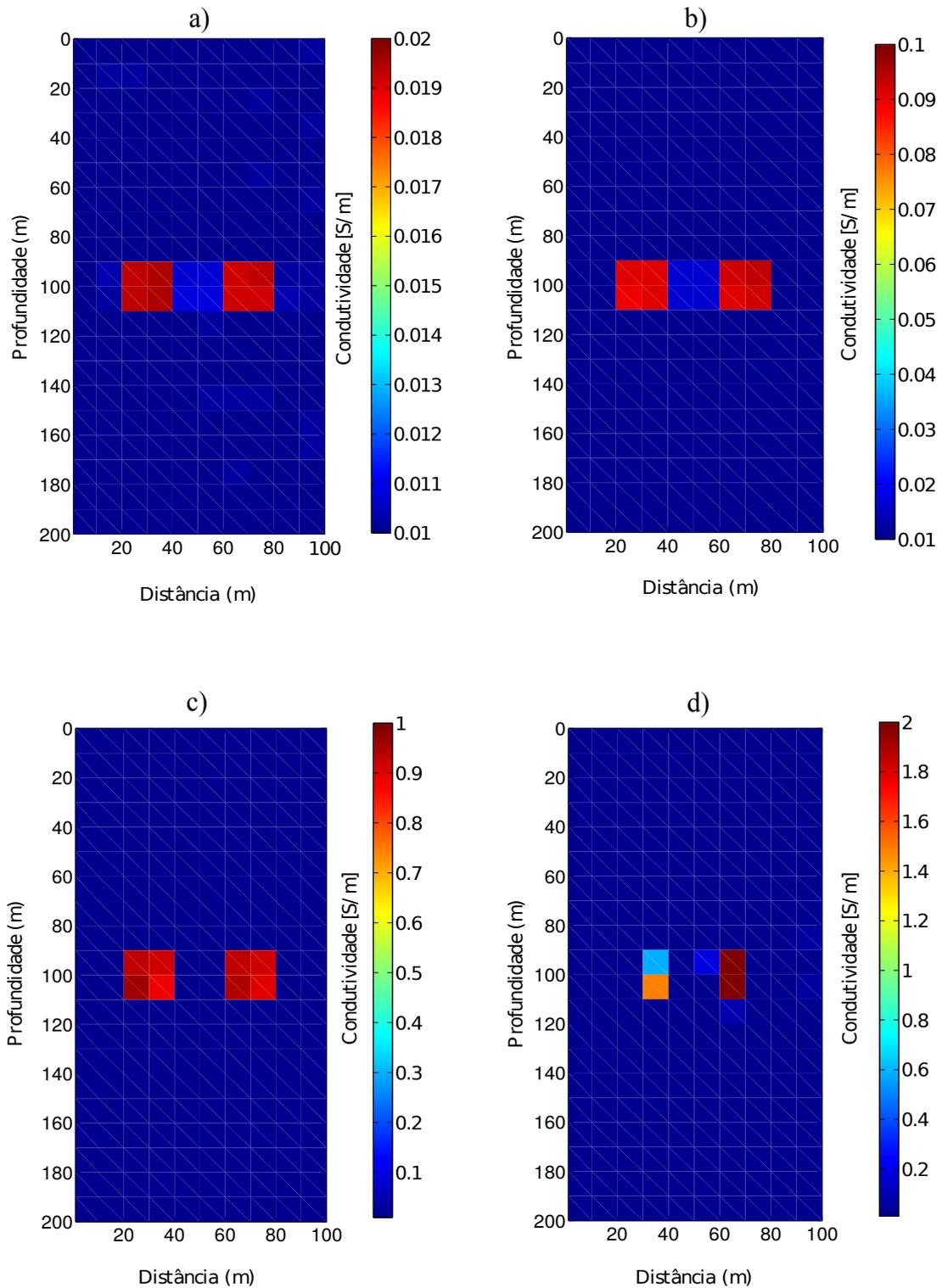
Fonte: Do autor

Figura 12 – Tomograma ilustrando a inversão do Modelo A1, no qual foi utilizado o vínculo de GS, onde: a) $\mu_{GS} = 10^{-20}$, b) $\mu_{GS} = 10^{-20}$, c) $\mu_{GS} = 10^{-22}$ e d) $\mu_{GS} = 10^{-23}$.



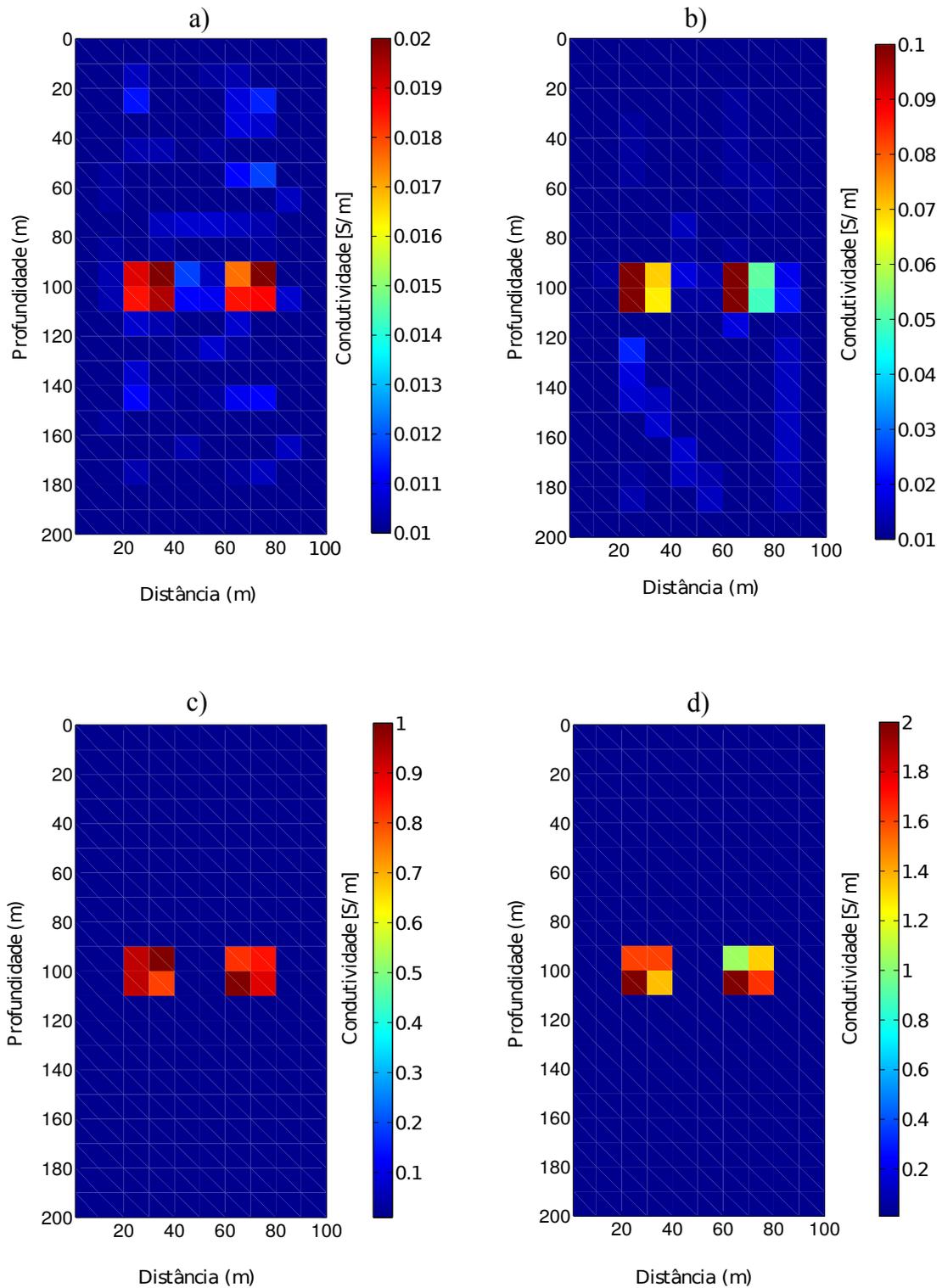
Fonte: Do autor

Figura 13 – Tomograma ilustrando a inversão do Modelo A1, no qual foi utilizado o vínculo de (TV), onde: a) $\mu_{TV} = 10^{-20}$ e $\beta = 10^{-3}$, b) $\mu_{TV} = 10^{-20}$ e $\beta = 10^{-1}$, c) $\mu_{TV} = 10^{-20}$ e $\beta = 10^{-1}$ e d) $\mu_{TV} = 10^{-21}$ e $\beta = 10^{-1}$.



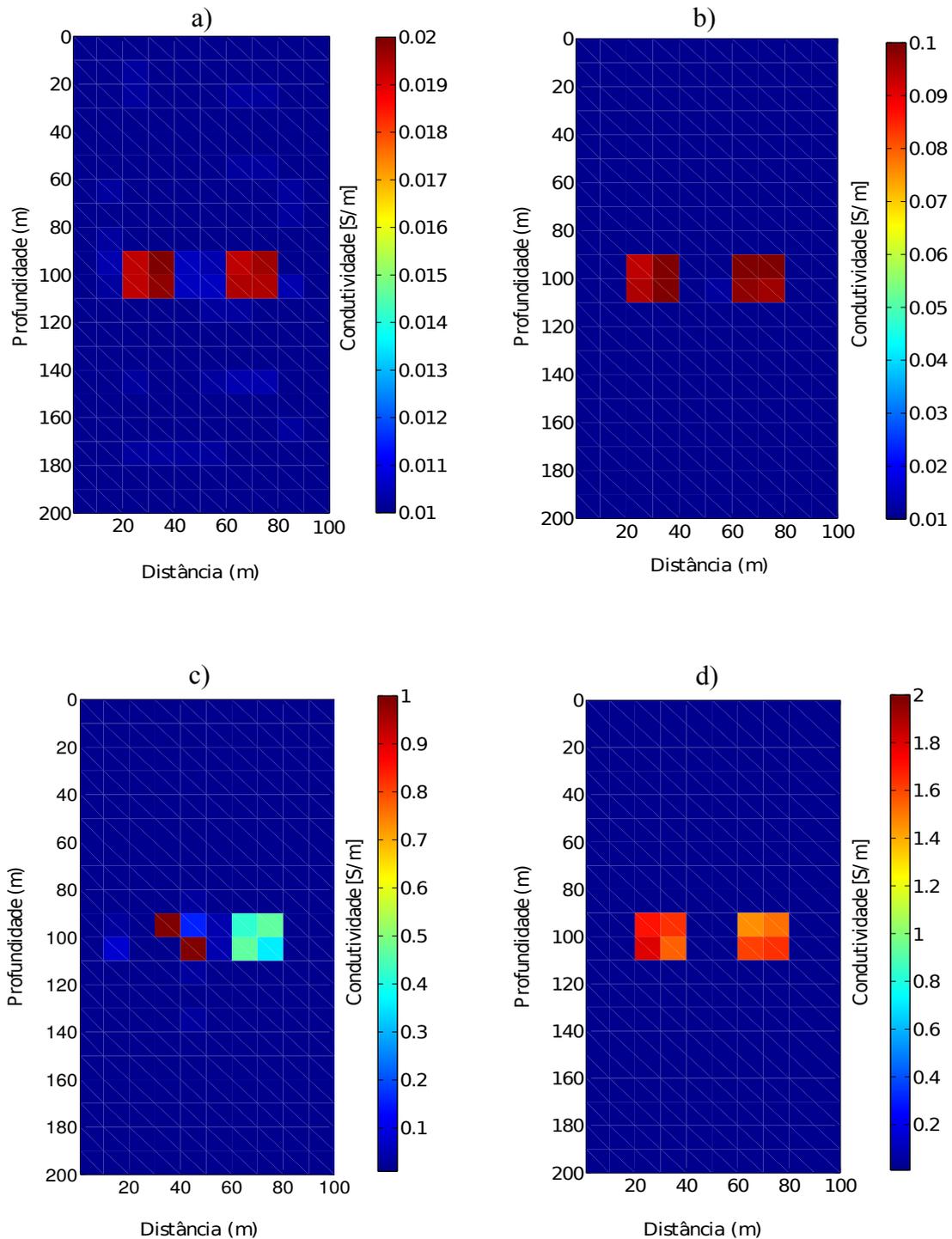
Fonte: Do autor

Figura 14 – Tomograma ilustrando a inversão do Modelo A1, no qual foi utilizado simultaneamente os vínculos de (GS) e (AI), onde: a) $\mu_{GS} = 10^{-20}$, b) $\mu_{GS} = 10^{-20}$, c) $\mu_{GS} = 10^{-21}$ e d) $\mu_{GS} = 10^{-21}$.



Fonte: Do autor

Figura 15 – Tomograma ilustrando a inversão do Modelo A1, no qual foi utilizado simultaneamente os vínculos de (TV) e (AI), onde: a) $\mu_{TV} = 10^{-20}$ e $\beta = 10^{-3}$, b) $\mu_{TV} = 10^{-20}$ e $\beta = 10^{-1}$, c) $\mu_{TV} = 10^{-20}$ e $\beta = 10^{-1}$ e d) $\mu_{TV} = 10^{-21}$ e $\beta = 10^{-1}$



Fonte: Do autor

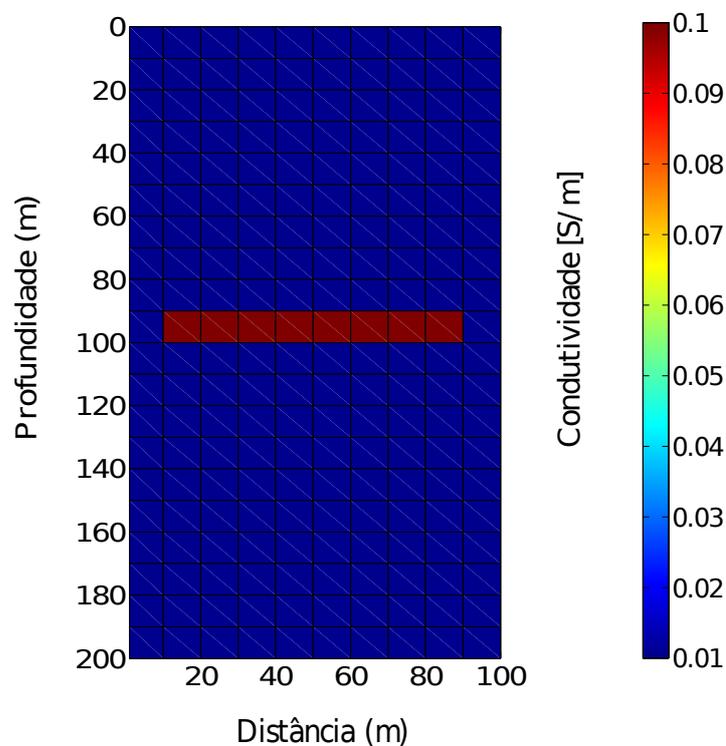
3.3 Variando a geometria para uma frequência fixa

Nosso terceiro teste foi feito com o modelo físico da Figura 16, no qual consiste de um toro alongado na direção r com dimensão $80 \times 20 \text{ m}^2$ e condutividade 0.1 S/m . Para este teste foi usado uma frequência de 100 kHz e 5% de ruído adicionado aos dados.

A análise dos tomogramas nas Figuras 17 e 18 resultante das inversões, mostram uma boa estimativa das características espaciais das heterogeneidades comparado ao modelo verdadeiro.

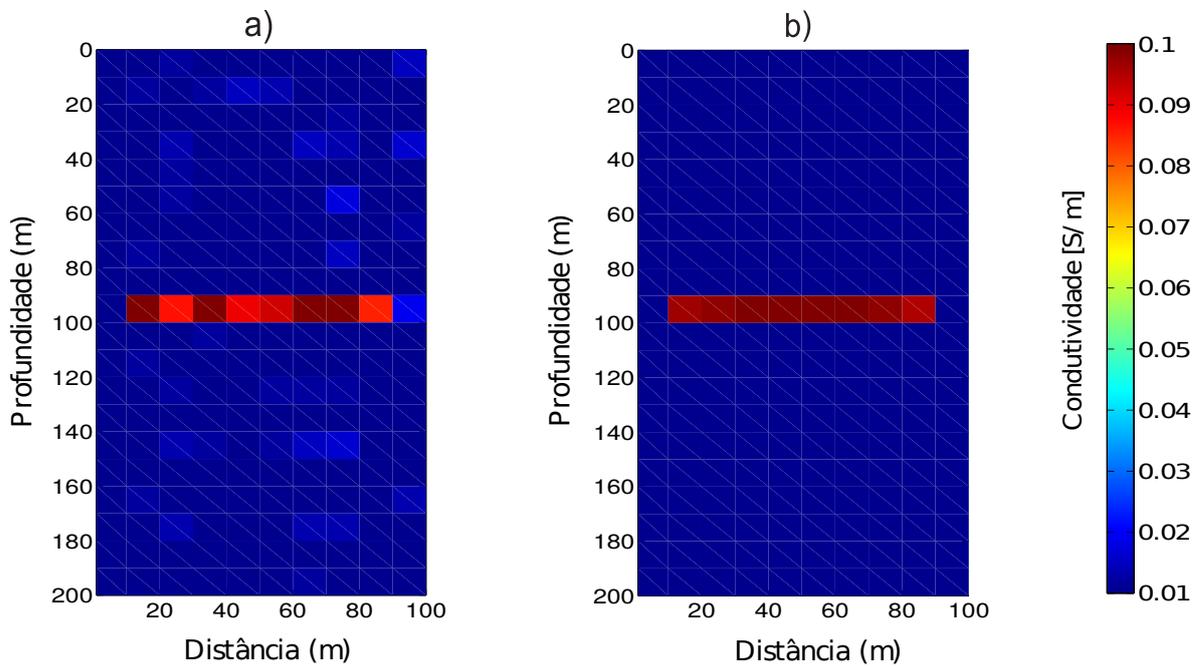
As imagens geradas mostradas nas Figuras 17 a), onde foi usado o vínculo suavidade global, e 17 b), no qual foi usado o vínculo de variação total, apresentam uma excelente recuperação da anomalia, tanto na geometria quanto da condutividade elétrica. Já as Figuras 18 a), em que foi usado o vínculo suavidade global e de igualdade absoluta, e 18 b), onde foi usado o vínculo de variação total e de igualdade absoluta, mostram a posição correta da anomalia. O valor estimado da condutividade elétrica da anomalia estar situado entre 0.04 e 0.09 S/m .

Figura 16 – Modelo B



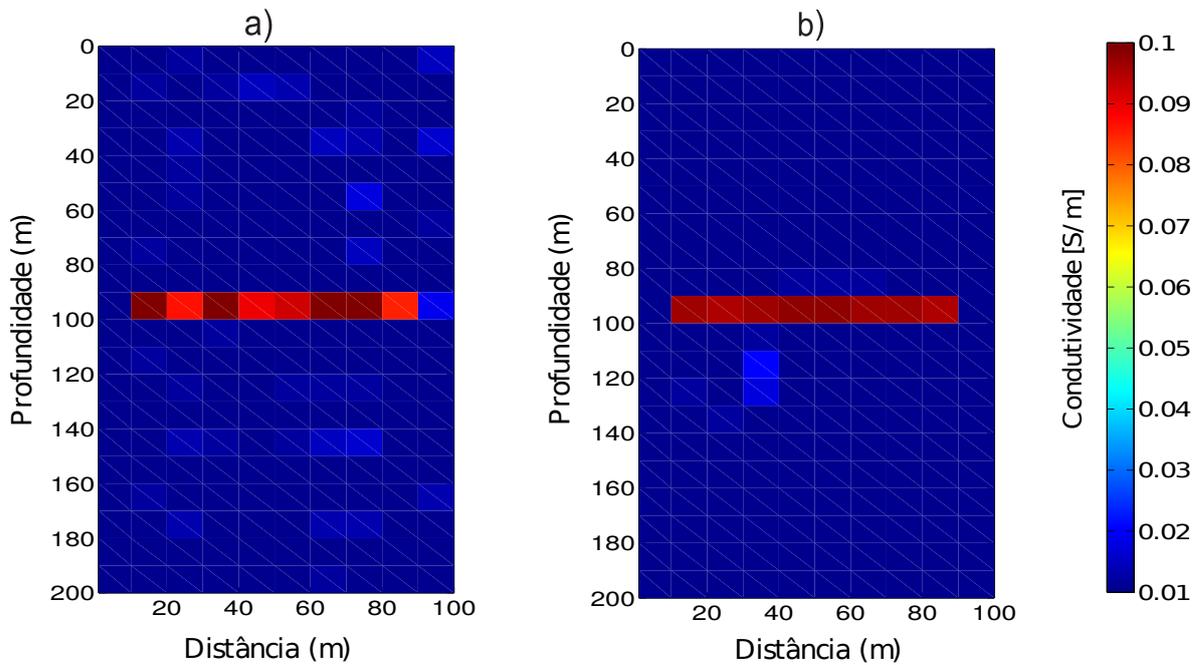
Fonte: Do autor

Figura 17 – Tomograma ilustrando a inversão do Modelo B em que foram utilizados os regularizadores: (a) GS com $\mu_{GS} = 10^{-19}$ e (b) TV com $\mu_{TV} = 10^{-18}$ e $\beta = 10^{-2}$



Fonte: Do autor

Figura 18 – Tomograma ilustrando a inversão do Modelo B em que foram utilizados os regularizadores: (a) GS com $\mu_{GS} = 10^{-19}$ e (b) TV com $\mu_{TV} = 10^{-18}$ e $\beta = 10^{-2}$



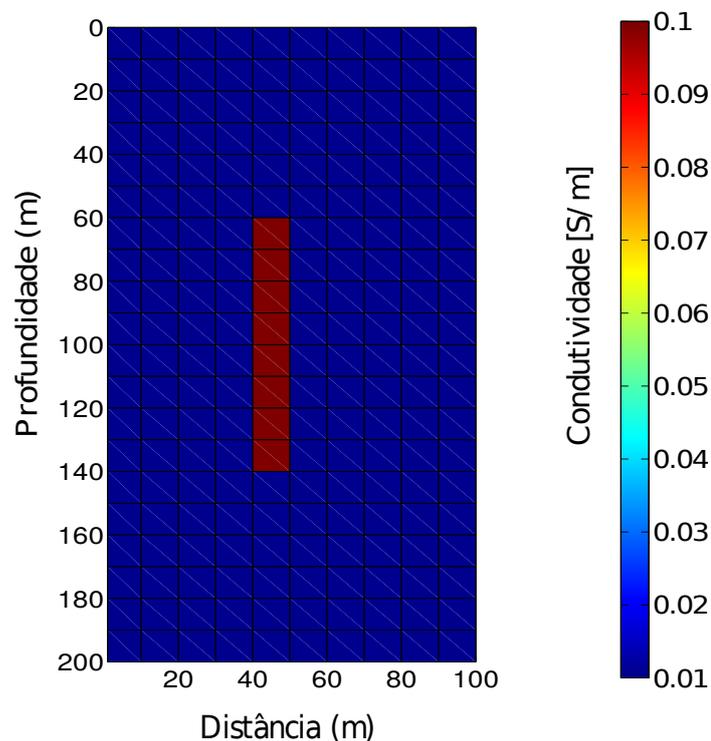
Fonte: Do autor

Nosso quarto teste foi feito com o modelo físico da Figura 19, no qual consiste de um toro alongado na direção z com dimensão $20 \times 80 \text{ m}^2$ e condutividade 0.1 S/m . Para este teste foi usado uma frequência de 100 kHz e 5% de ruído adicionado aos dados.

A análise dos tomogramas nas Figuras 20 e 21 resultante das inversões, mostram uma boa estimativa das características espaciais das heterogeneidades comparado ao modelo verdadeiro.

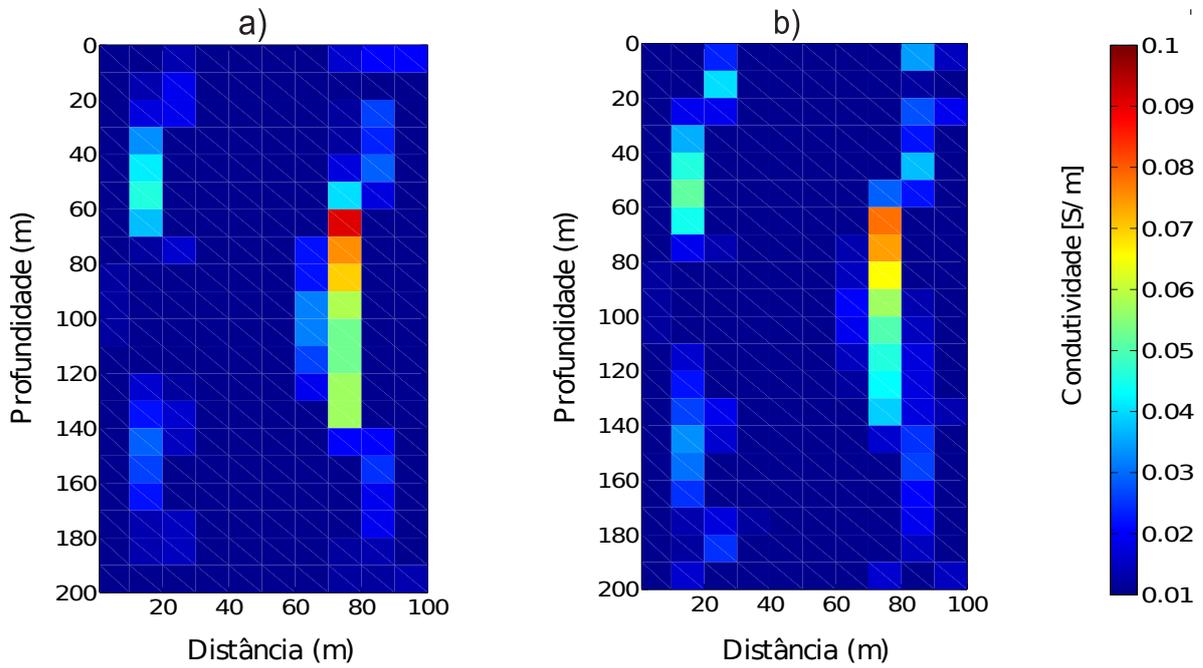
As imagens geradas mostradas nas Figuras 20 a), onde foi usado o vínculo suavidade global, e 20 b), no qual foi usado o vínculo de variação total, apresentam um deslocamento na direção radial para a direita da posição verdadeira do corpo. Já as Figuras 21 a), em que foi usado o vínculo suavidade global e de igualdade absoluta, e 21 b), onde foi usado o vínculo de variação total e de igualdade absoluta, mostram a posição correta da anomalia, porém a Figura 21 a) mostra um distorção da geometria do corpo enquanto a Figura 21 b) mostra a posição e a geometria correta do mesmo. O valor estimado da condutividade elétrica da anomalia estar situado entre 0.09 e 0.1 S/m .

Figura 19 – Modelo C.



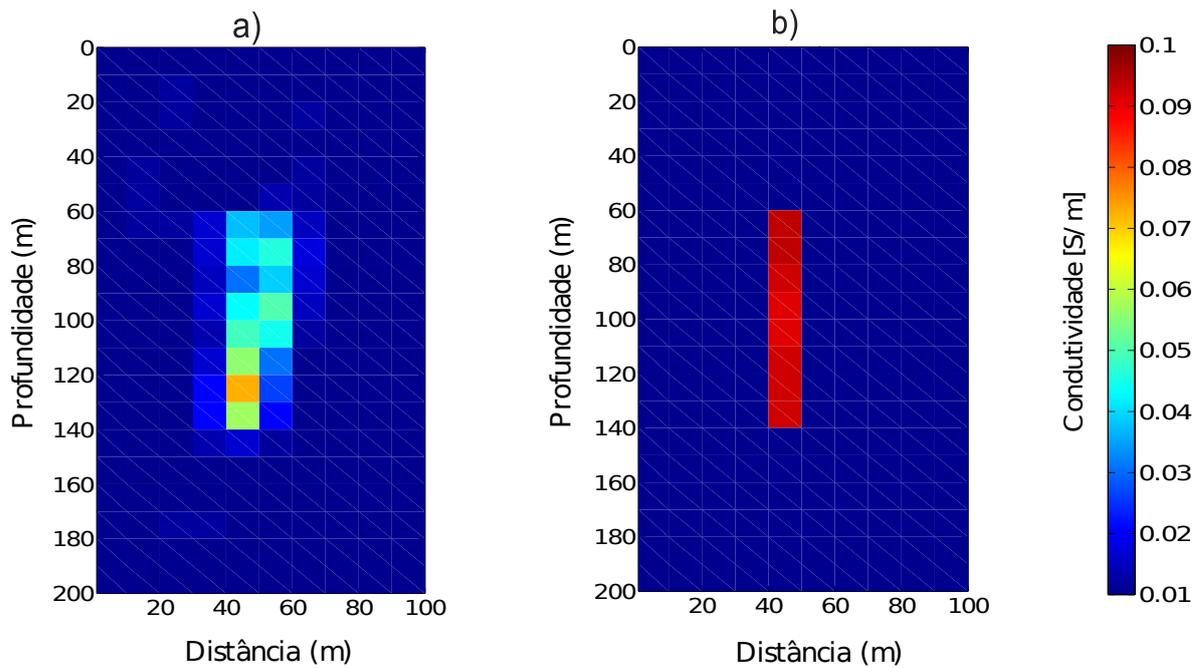
Fonte: Do autor

Figura 20 – Tomograma ilustrando a inversão do Modelo C em que foram utilizados os regularizadores: a) (GS) com $\mu_{GS} = 10^{-19}$ e b) (TV) com $\mu_{TV} = 10^{-18}$ e $\beta = 10^{-2}$



Fonte: Do autor

Figura 21 – Tomograma ilustrando a inversão do Modelo C, em que foram utilizados os regularizadores: a) (GS) com (AI), onde $\mu_{GI} = 10^{-19}$ e b) TV com AI, onde $\mu_{TV} = 10^{-18}$, $\beta = 10^{-2}$.



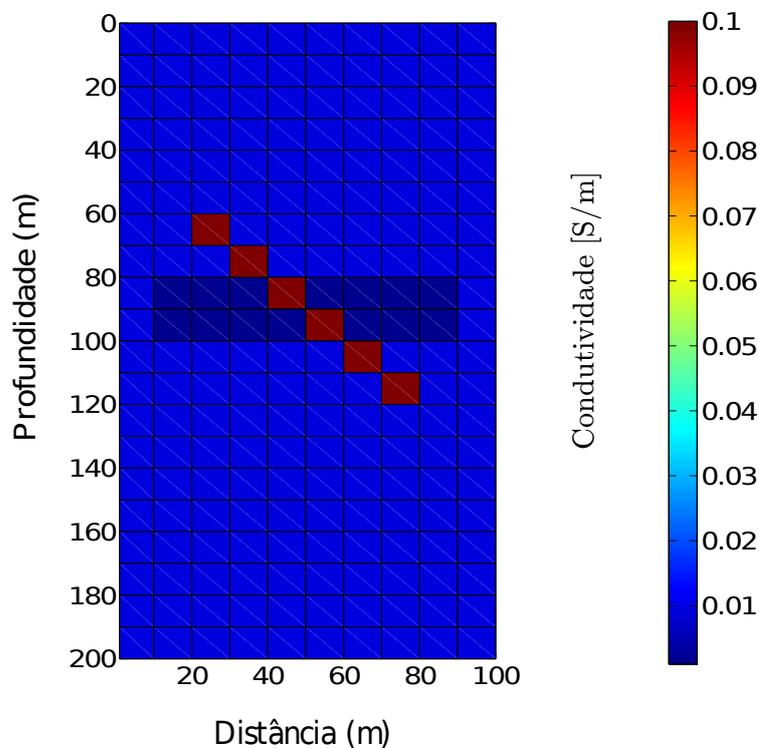
Fonte: Do autor

Nosso quinto teste, foi feito com o modelo D como mostra a Figura 19, no qual consiste de um toro inclinado a 45° . Isto significa que o toro aumenta proporcionalmente na direção vertical. Este toro tem a área de secção $10 \times 60 \text{ m}^2$ e condutividade 0.1 S/m atravessado a um anel toroidal de secção retangular de $80 \times 20 \text{ m}^2$ e condutividade 0.001 S/m .

Para estes dados foi usado uma frequência de 100 kHz e 5% de ruído adicionado aos mesmos.

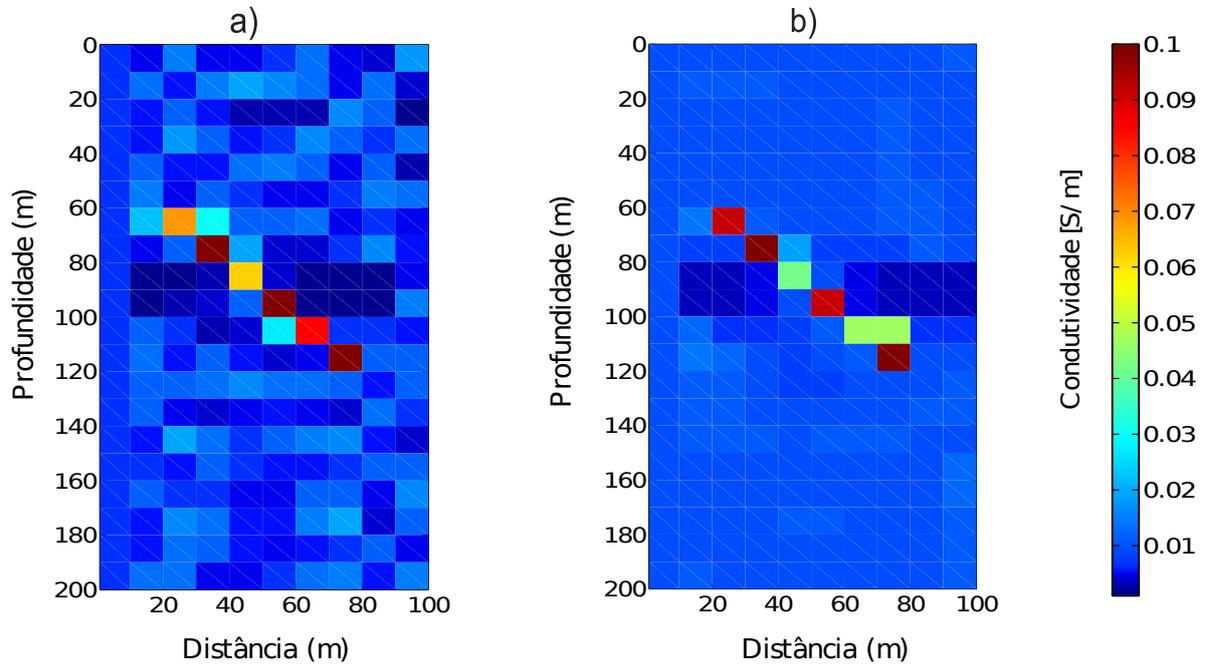
A Figura 23 a), onde foi usado o vínculo de suavidade global, e a Figura 23 b), no qual foi usado o vínculo de variação total, mostram uma boa recuperação na posição e geometria e condutividade elétrica comparado ao modelo verdadeiro. Da mesma forma, a Figura 24 a), onde foi usado simultaneamente o vínculo de suavidade global e igualdade absoluta, e a Figura 24 b), no qual foi usado simultaneamente o vínculo de variação total e igualdade absoluta, mostram também uma boa recuperação na posição e geometria e condutividade elétrica comparado ao modelo verdadeiro. A Figura 24, mostra um estimativa da propriedade física da heterogeneidade mais próxima da verdadeira comparado aos resultados da Figura 23.

Figura 22 – Modelo D.



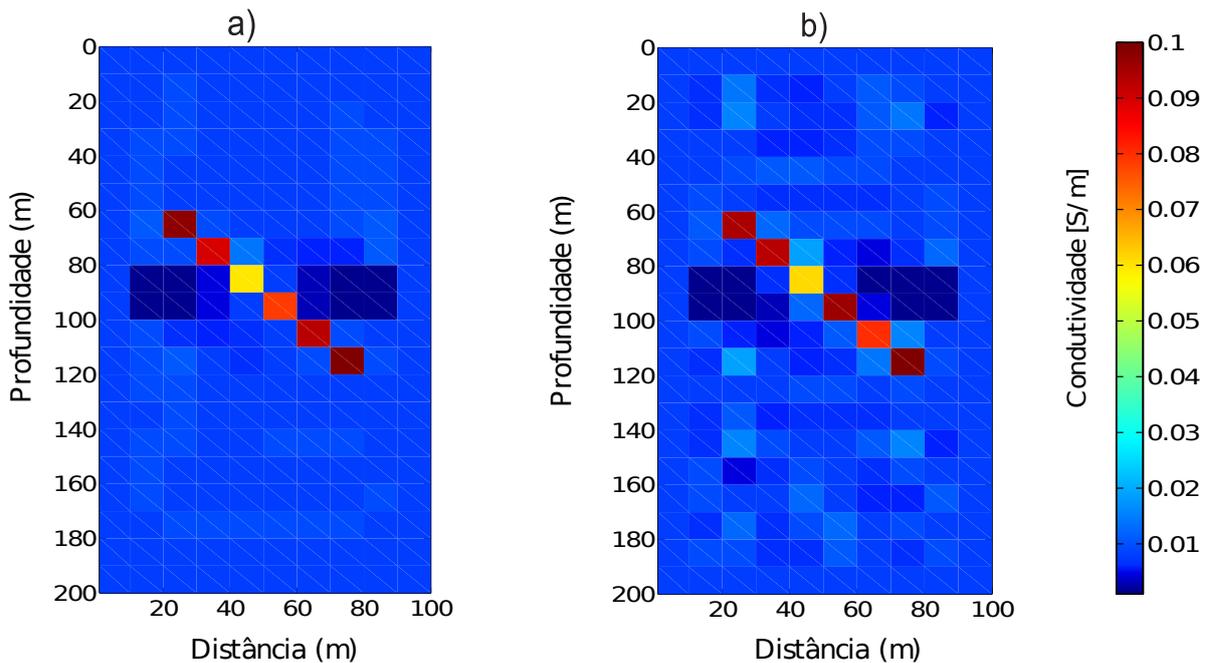
Fonte: Do autor

Figura 23 – Tomograma ilustrando a Inversão do Modelo D, no qual foram utilizados os regularizadores: a) (GS) com $\mu_{GS} = 10^{-20}$ e b) (TV) com $\mu_{TV} = 10^{-19}$ e $\beta = 10^{-2}$.



Fonte: Do autor

Figura 24 – Tomograma ilustrando a inversão do Modelo D, em que foram utilizados os regularizadores: a) (GS) e (AI) simultaneamente, com $\mu_{SG} = 10^{-21}$ e b) (TV) e (AI) simultaneamente, com $\mu_{TV} = 10^{-19}$, $\beta = 10^{-2}$.

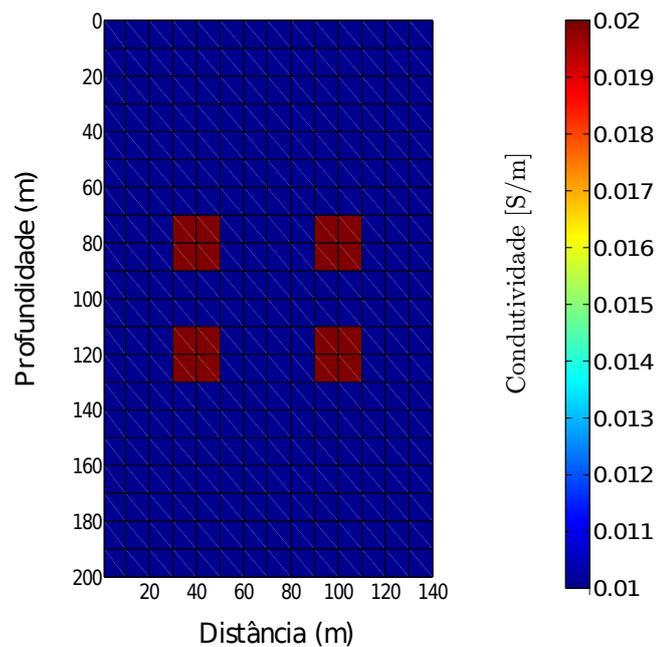


Fonte: Do autor

Nosso sexto teste foi feito com o modelo físico da Figura 16, no qual consiste de 4 anéis toroidais de seção retangular de $20 \times 20 \text{ m}^2$ e ambos com a mesma condutividade elétrica 0.02 S/m . Para este teste foi usado uma frequência de 100 kHz e 5% de ruído adicionado aos dados.

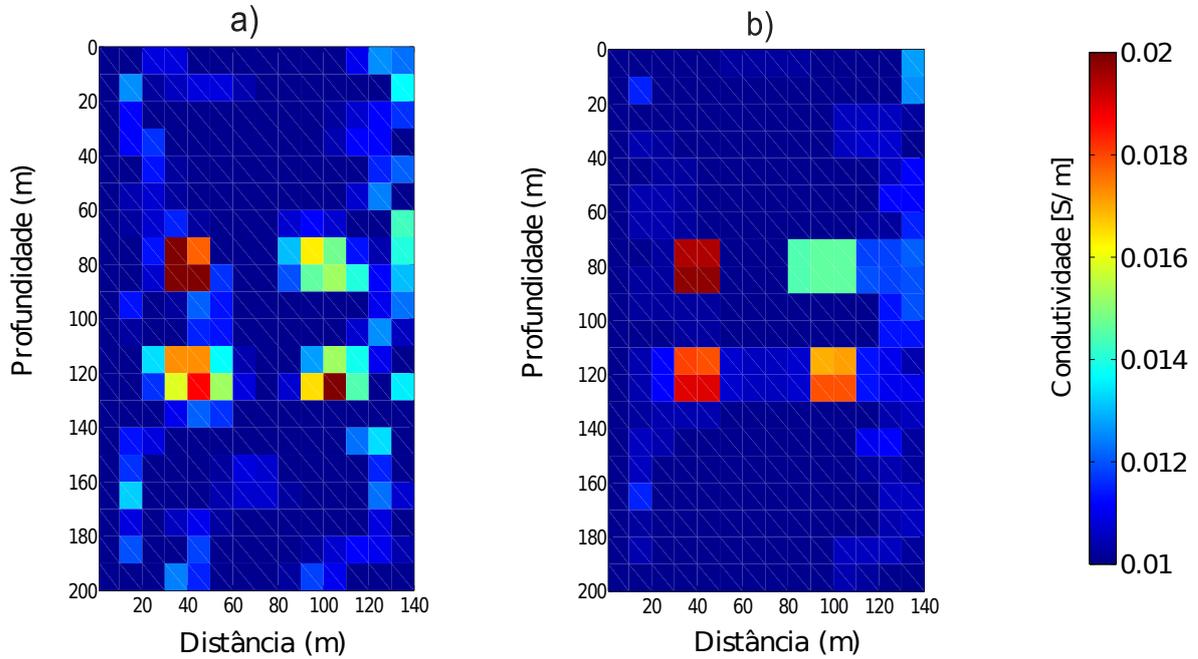
Observando os tomogramas resultante das inversões, nota-se uma boa estimativa das características espaciais e propriedades físicas das heterogeneidades como mostra as Figuras 26 e 27. As imagens obtidas com o vínculo de variação total Figura 26 b) mostra uma melhor estimativa da geometria e condutividade das anomalias, comparado as imagens obtidas com o vínculo suavidade global (Figura 26 b)), onde mostra uma deformação na direção radial da geometria do corpo que esta localizado a 80 m de profundidade e 100 m da distancia do poço que contém a fonte. A condutividade foi estimada entre 0.014 a 0.02 S/m .

Figura 25 – Modelo E.



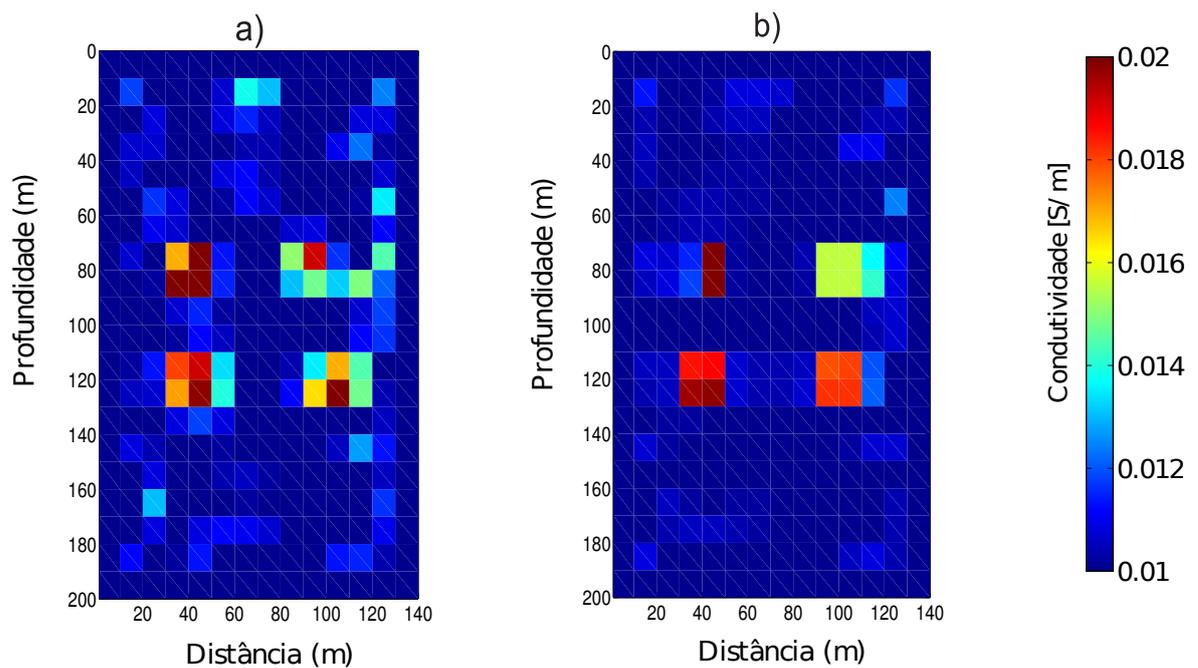
Fonte: Do autor

Figura 26 – Tomograma ilustrando as imagens recuperadas do Modelo E pelo processo de inversão, onde foram utilizados os regularizados: a) (GS) com $\mu_{GS} = 10^{-22}$ e b) (TV) com $\mu_{TV} = 10^{-22}$ e $\beta = 10^{-5}$.



Fonte: Do autor

Figura 27 – Tomograma ilustrando as imagens recuperadas do Modelo E pelo processo de inversão, onde foram utilizados os regularizados: a) (GS) aliado com o regularizador (AI) com $\mu_{GS} = 10^{-22}$ e b) (TV) aliado com (AI) onde $\mu_{TV} = 10^{-22}$, $\beta = 10^{-3}$.



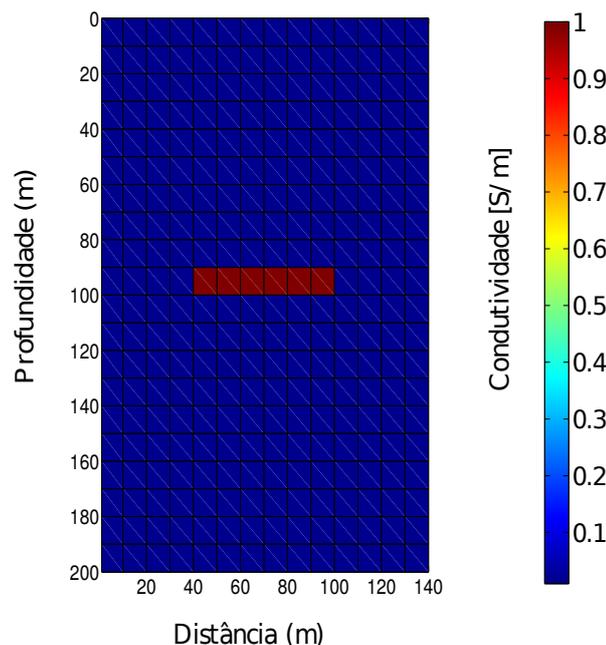
Fonte: Do autor

Nosso sétimo teste foi feito com o modelo F Figura 28, no qual é constituído de um anel toroidal alongado na horizontal com dimensão $60 \times 10 \text{ m}^2$ e condutividade 1 S/m .

Para este teste foi usado uma frequência de 100 kHz e 5% de ruído adicionado aos dados.

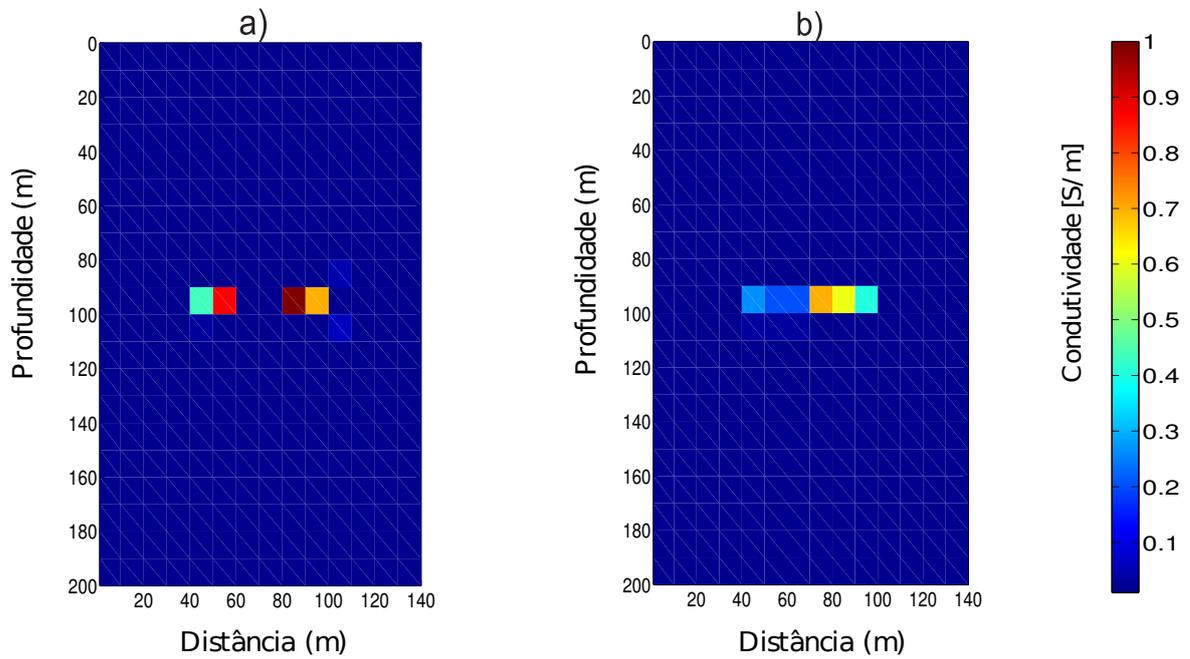
A análise dos tomogramas do modelo F revela uma boa estimativa da forma geométrica, dimensões e propriedades físicas das imagens recuperadas como mostrado nas Figuras 29 e 30. A imagem obtida com o vínculo de Suavidade Figura 29 a) mostra uma quebra na geometria do corpo no seu centro. Para esta imagem recuperada, a estimativa da condutividade das anomalias estar entre 0.4 a 1 S/m . Enquanto as imagens obtidas em o vínculo variação total Figura 30 b) preserva bem a geometria do corpo recuperado, porém a estimativa da propriedade física fica entre 0.2 a 0.8 S/m . Já na imagem obtida com o vínculo de Suavidade com o uso simultâneo do vínculo de igualdade absoluta Figura 30 a) mostra uma boa recuperação da posição e geometria do corpo condutivo. Porém, a estimativa da propriedade física foi não homogênea, variando entre 0.4 a 1 S/m . Enquanto a imagem recuperada com o uso do vínculo de variação total com o uso simultâneo do regularizador de igualdade absoluta Figura 30 b) mostra uma boa estimativa tanto da posição, geometria e propriedade física da anomalia. A condutividade estimada para este resultado, esta entre 0.8 a 1 S/m . Devido a disposição horizontal apresentada pelo heterogeneidade, no qual permite maior cobertura pelo campo magnético, as imagens resultantes são de alta definição.

Figura 28 – Tomograma representando o Modelo F.



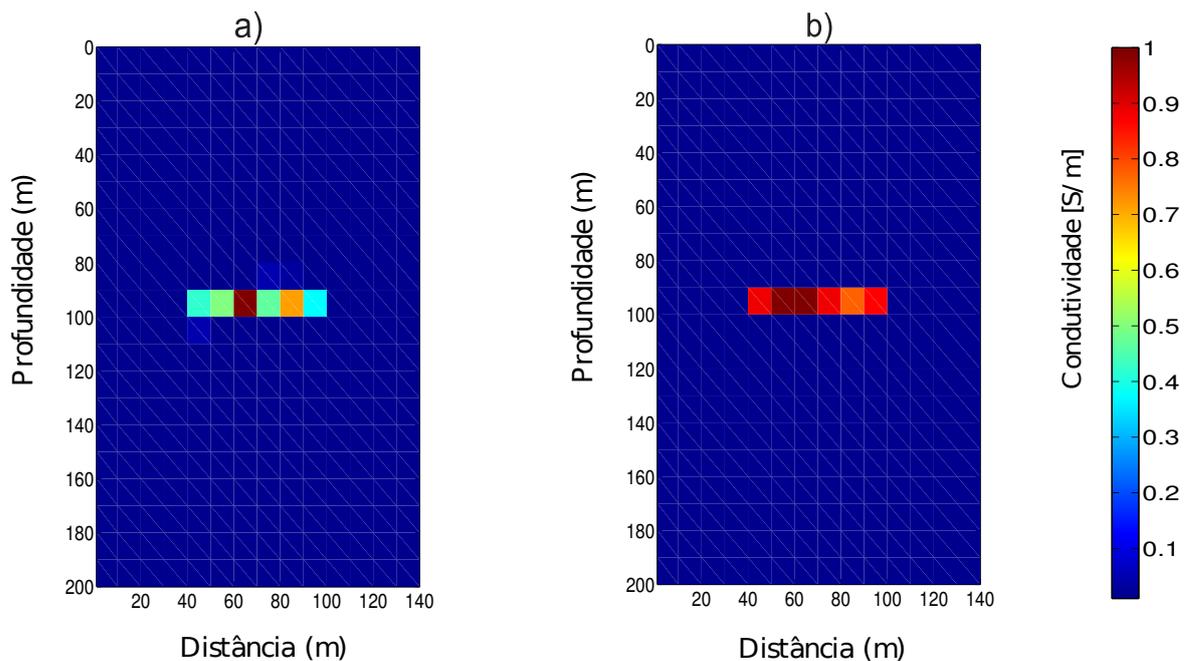
Fonte: Do autor

Figura 29 – Tomograma ilustrando a inversão do Modelo F, em que foram utilizados os regularizadores: a) (GS) aliado com o vínculo (AI), em que $\mu_{GS} = 10^{-26}$ e $\mu_{AI} = 10$ e b) (TV) aliado com o vínculo (AI), em que $\mu_{TV} = 10^{-23}$, $\beta = 10^{-2}$.



Fonte: Do autor

Figura 30 – Tomograma ilustrando a inversão do Modelo F, em que foram utilizados os regularizadores : a) (GS) aliado com o vínculo (AI), em que $\mu_{GS} = 10^{-24}$ e b) (TV) aliado com o regularizador (IA), em que $\mu_{TV} = 10^{-23}$, $\beta = 10^{-2}$.



Fonte: Do autor

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho foi desenvolvido uma metodologia do problema direto e inverso dos dados de tomografia eletromagnética poço-a-poço. Os métodos apresentados neste trabalho tiveram seu desempenho avaliado através de dados sintéticos atribuídos com ruído pseudo aleatório de distribuição uniforme com 1 % e 5 % da observação.

No problema direto foi utilizado o método de elementos finitos para a solução numérica da equação de Helmholtz. Já no problema inverso, foi utilizado o uso do algoritmo de Marquardt para resolvê-lo, onde este é robusto e permite fácil introdução de informação a priori, obtendo-se solução mais estáveis, na qual permite a obtenção de imagens com alta definição mesmo usando modelos com grandes contrastes de condutividade elétrica da heterogeneidade com relação a do meio encaixante e uma maior faixa de frequência. Essa solução estável se dar, principalmente, pelo o uso dos funcionais estabilizadores de suavidade global, de variação total e de igualdade absoluta, em que estes atribuem informação a priori. Outro tipo de informação a priori utilizada, foi o modelo inicial tendo a mesma condutividade do meio encaixante.

O uso do vínculo de Igualdade Absoluta, como ferramenta para estabilizar o problema de inversão, tem a vantagem de poder incorporar informação que possua significado geológico. Entretanto, este tipo de informação pode levar a uma interpretação enganosa caso não for de fato representativo da realidade geológica. Medidas realizadas em poços geralmente proporcionam informação de elevada qualidade. Na introdução dos vínculos de Igualdade Absoluta, as células representantes das bordas da região de imageamento, receberam a condutividade do meio encaixante e foram excluídos do processo de inversão.

A primeira parte dos resultados, foi feito o teste com dois anéis na horizontal, no qual foi feito o uso de 4 frequências em kHz: 0.1, 1, 10 e 100. Obteve-se uma boa recuperação da geometria e condutividade elétrica do modelo verdadeiro com a frequência de 100 kHz. Em seguida foi utilizado o mesmo modelo descrito anteriormente, só que foi mantida fixa a frequência, cujo o valor foi de 100 kHz, variando o contraste das heterogeneidades de 2, 10, 100 e 200 em relação a do meio encaixante, onde este foi mantido com uma condutividade fixa de $0.01 S/m$. Com o uso do vínculo de suavidade global, obteve-se uma boa recuperação da geometria do corpo e sua condutividade elétrica, principalmente as heterogeneidades de 0.1 e $1 S/m$, no qual foi estimado quase que idêntica a anomalia verdadeira. Já com o uso simultâneo do vínculo de igualdade absoluta com o de suavidade global, teve-se uma boa estimativa das anomalias de 0.02 e $1 S/m$ de condutividade elétrica, no qual foram recuperadas quase que perfeitamente comparado as anomalias verdadeiras. Com o uso do vínculo de Variação Total, obteve-se bons resultados, menos para a heterogeneidade, que possui diferença de contraste 200 com relação ao meio

encaixante. Enquanto o uso simultâneo do vínculo de variação total com o de igualdade absoluta, teve uma boa estimativa da geometria e condutividade das anomalias, menos com as heterogeneidades de $1 S/m$

Por conseguinte, foi feito testes com modelos de várias geometrias e contrastes com uma frequência fixa de 100 kHz. Obteve-se ótimos resultados, na sua grande maioria, na qual foi utilizado simultaneamente o uso do vínculo de igualdade absoluta com os vínculos de Suavidade Global e variação total. Teve-se uma boa recuperação das geometrias dos alvos que se localizavam na horizontal, vertical e com uma inclinação de 45° . Até quando as anomalias variavam de contrastes entre si, obteve-se uma boa recuperação das geometrias e condutividade elétrica. Na segunda parte foi feito um teste com a distancia dos poço um pouco maior do que dos modelos anteriores, com 140 m e manteve-se a profundidade de 200 m. Inicialmente, foi feito o teste com um modelo de 4 ameias toroidais que se desponham, tanto na horizontal quanto na vertical. Para este teste, foi feita com anomalias de $0.02 S/m$ de condutividade elétrica. Foi obtidos boas estimativas das heterogeneidades, principalmente com o vínculo de variação total e este usado simultaneamente com o vínculo de igualdade absoluta, porém com algumas distorções na horizontal com a geometria de alguns corpos. Em seguida, foi feito o teste com um anel toroidal alongado na horizontal de condutividade de $1 S/m$. Obteve-se boa recuperação da geometria e condutividade da anomalia com o uso simultâneo do vínculo variação total com o de Igualdade.

Em geral, obteve-se bons resultados para modelos de diversas geometrias e contrastes com a frequência de 100 kHz.

Conclui-se que, os resultados dependem da diferença de contrastes das heterogeneidades com o meio encaixante, sendo este com mesma condutividade do modelo inicial, e da geometria das anomalias e de que forma ela estar arranjada com relação a fonte e da frequência utilizada.

Algumas sugestão para trabalhos futuros:

- Fazer a inversão dos dados de tomografia da componente H_r
- Fazer a inversão da associação das componentes H_z e H_r
- Utilizar outros regularizadores como por exemplo Suavidade ponderada, Compacidade e Concentração no entorno de eixos e pontos.
- Fazer inversão com dados reais

REFERÊNCIAS

- ACAR, R.; VOGEL, C. R. Analysis of bounded variation penalty methods for ill-posed problems. *Inverse Problems*, v. 10, n. 6, p. 1217, 1994.
- ALUMBAUGH, D. L.; MORRISON, H. F. Theoretical and practical considerations for crosswell electromagnetic tomography assuming a cylindrical geometry. *Geophysics*, v. 60, n. 3, p. 846–870, 1995.
- BACKUS, G.; GILBERT, F. The resolving power of gross earth data. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, Blackwell Publishing Ltd, v. 16, n. 2, p. 169–205, 1968. ISSN 1365-246X. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1111/j.1365-246X.1968.tb00216.x>>.
- BAPTISTA, J. J. *Tomografia Eletromagnética para Caracterização de Hidrocarbonetos*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Pará, 2003.
- BARD, Y. *Nonlinear Parameter Estimation*. [S.l.]: Academic Press, 1974. 341 p.
- BERDICHEVSKI, M.; ZHDANOV, M.; KELLER, G. *Advanced theory of deep geomagnetic sounding*. [S.l.]: Elsevier, 1984. (Methods in geochemistry and geophysics). ISBN 9780444416902.
- CONSTABLE, S.; PARKER, R.; CONSTABLE, C. Occam's inversion: A practical algorithm for generating smooth models from electromagnetic sounding data. *GEOPHYSICS*, v. 52, n. 3, p. 289–300, 1987.
- deGROOT-HEDLIN, C.; CONSTABLE, S. C. Occam's inversion to generate smooth, two-dimensional models from magnetotelluric data. *GEOPHYSICS*, v. 55, n. 12, p. 1613–1624, 1990. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1190/1.1442813>>.
- FRENCH, W.; MARCOUX, M.; MATZUK, T. Technical limitation of seismic holography. *Geophysics*, v. 38, p. 16–22, 1973.
- HADAMARD, J. Sur les problèmes aux dérivées partielles et leur signification physique. *Princeton University Bulletin*, v. 13, p. 49–52, 1902.
- HOERL, A. E.; KENNARD, R. W. Ridge regression: Biased estimation for nonorthogonal problems. *Technometrics*, v. 12, n. 1, p. 55–67, 1970.
- LANCZOS, C. *Linear Differential Operators*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1996. (Classics in Applied Mathematics). ISBN 9780898713701. Disponível em: <<http://books.google.ca/books?id=I1UtTmTjJEcC>>.
- LIMA, W. A. et al. Total variation regularization for depth-to-basement estimate: Part 2 — physicogeologic meaning and comparisons with previous inversion methods. *Geophysics*, v. 76, n. 1, p. I13–I20, 2011.
- LUIZ, J. G. *Informação a Priori na Inversão de Dados Magnetotelúricos*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Pará, 1999.

- MACKIE, R. L.; MADDEN, T. R. Three-dimensional magnetotelluric inversion using conjugate gradients. *Geophysical Journal International*, v. 115, n. 1, p. 215–229, 1993. Disponível em: <<http://gji.oxfordjournals.org/content/115/1/215.abstract>>.
- MACLENNAN, K.; KARAOULIS, M.; REVIL, A. Complex conductivity tomography using low-frequency crosswell electromagnetic data. *GEOPHYSICS*, v. 79, n. 1, p. E23–E38, 2014.
- MARQUARDT, D. An algorithm for least-squares estimation of nonlinear parameters. *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*, v. 11, n. 2, p. 431–441, 1963.
- MARTINS, C. M. *Inversão gravimétrica do relevo 3d de bacias sedimentares e da variação da densidade usando informação a priori sobre o ambiente geológico*. Tese (Doutorado) — Observatório Nacional, 2009.
- NEWMAN, G. A.; ALUMBAUGH, D. L. Three-dimensional magnetotelluric inversion using non-linear conjugate gradients. *Geophysical Journal International*, v. 140, n. 2, p. 410–424, 2000. Disponível em: <<http://gji.oxfordjournals.org/content/140/2/410.abstract>>.
- PHILLIPS, D. L. A technique for the numerical solution of certain integral equations of the first kind. *J. ACM*, ACM, New York, NY, USA, v. 9, n. 1, p. 84–97, jan. 1962. ISSN 0004-5411. Disponível em: <<http://doi.acm.org/10.1145/321105.321114>>.
- RIJO, L. *Electrical Geophysics 2D-3D Earth Modeling*. [S.l.], 2004.
- RUDIN, L. I.; OSHER, S.; FATEMI, E. Nonlinear total variation based noise removal algorithms. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, v. 60, n. 1–4, p. 259 – 268, 1992. ISSN 0167-2789. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/016727899290242F>>.
- SCHLUMBERGER. *Efect annulus*. 2014. Disponível em: <http://www.slb.com/~media/Files/resources/oilfield_review/ors89/jan89/3_annulus.pdf/>. Acesso em: 11/09/2014.
- SCHLUMBERGER: crosswell electromagnetic tomography. 2014. Disponível em: <http://www.glossary.oilfield.slb.com/en/Terms/c/crosswell_electromagnetic_tomography.aspx>. Acesso em: 24/08/2014.
- SHAO-HUI, W. R. shan . X. digital holography applied to borehole electromagnetic wave exploration. 1979.
- SILVA, J.; MEDEIROS, W.; BARBOSA, V. Potential-field inversion: Choosing the appropriate technique to solve a geologic problem. *GEOPHYSICS*, v. 66, n. 2, p. 511–520, 2001.
- SILVA, J. B. C.; BARBOSA, V. C. F. Interactive gravity inversion. *Geophysics*, v. 71, n. 1, p. J1–J9, 2006.
- SILVA, J. B. C.; MEDEIROS, W. E.; BARBOSA, V. C. F. Gravity inversion using convexity constraint. *Geophysics*, v. 65, n. 1, p. 102–112, 2000. Disponível em: <<http://geophysics.geoscienceworld.org/content/65/1/102.abstract>>.

- SILVA, J. B. C.; MEDEIROS, W. E.; BARBOSA, V. C. F. Pitfalls in nonlinear inversion. *pure and applied geophysics*, Birkhäuser Verlag, v. 158, n. 5-6, p. 945–964, 2001. ISSN 0033-4553.
- SILVA, L. M. da Costa e. *DesG: Uma nova metodologia para inversão e coleta de dados magnetotélúrico*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Pará, 2006.
- SOUZA, V. C. T. *Tomografia eletromagnética usando vínculos absolutos*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Pará, 2001.
- SURGUCHEV, L. et al. Cyclic water injection: improved oil recovery at zero cost. *Petroleum Geoscience*, v. 8, n. 1, p. 89–95, 2002.
- TIKHONOV, A. N.; ARSEININ, V. Y. *Solutions of Ill-posed Problems*. [S.l.]: John Wiley, 1977.
- TWOMEY, S. On the numerical solution of fredholm integral equations of the first kind by the inversion of the linear system produced by quadrature. *J. ACM*, ACM, New York, NY, USA, v. 10, n. 1, p. 97–101, jan. 1963. ISSN 0004-5411. Disponível em: <<http://doi.acm.org/10.1145/321150.321157>>.
- WADE, R. K. M. M. K. G. Reconstructive tomography and applications to ultrasonics. *Proceedings of the IEEE*, v. 67, p. 567–587, April 1979.
- WARD, S. H.; HOHMANN, G. W. *Electromagnetic Theory for Geophysical Applications*. [S.l.]: Society of Exploration Geophysicists SEG, 1988. (Investigations in Geophysics, v. 1).
- WILT, M. J. et al. Crosswell electromagnetic tomography; system design considerations and field results. *Geophysics*, v. 60, n. 3, p. 871–885, 1995.
- ZHOU, Q.; BECKER, A.; MORRISON, H. F. Audio-frequency electromagnetic tomography in 2-d. *Geophysics*, v. 58, p. 482–495, 1993.