



Serviço Público Federal  
Universidade Federal do Pará  
Instituto de Tecnologia  
Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Recursos Naturais da  
Amazônia

AVALANCHE COMO REDE DE PERCOLAÇÃO NÃO  
HOMOGÊNEA

Raimundo Nonato Carneiro de Souza



## AVALANCHE COMO REDE DE PERCOLAÇÃO NÃO HOMOGÊNEA

Raimundo Nonato Carneiro de Souza

Proposta de Tese de doutorado apresentada ao programa de Pós-Graduação em Engenharia de Recursos Naturais da Amazônia, ITEC, da Universidade Federal do Pará, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Engenharia de Recursos Naturais.

Orientador: André Luiz Amarante Mesquita

Coorientador: Heliton Ribeiro Tavares

**Belém**  
**SETEMBRO / 2019**

# AVALANCHE COMO REDE DE PERCOLAÇÃO NÃO HOMOGÊNEA

Raimundo Nonato Carneiro de Souza

PROPOSTA DE TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE RECURSOS NATURAIS DA AMAZÔNIA, DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ, COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM ENGENHARIA DE RECURSOS NATURAIS DA AMAZÔNIA.

Aprovado por:

---

Prof. Dr. André Luiz Amarante Mesquita  
UFPA/FEM-CAMTUC - Orientador

---

Prof. Dr. Heliton Ribeiro Tavares  
UFPA/ICEN - ESTATÍSTICA - Coorientador

---

Prof. Dr. Luciano Rodrigues da Silva  
UFRN – Física - Membro externo

---

Prof. Dr. Cláudio José Cavalcante Blanco  
UFPA / ITEC - PRODERNA – Membro interno

---

Prof. Dra. Marinalva Cardoso Marciel  
UFPA / ICEN - MATEMÁTICA – Membro externo

---

Prof. Dr. Jordan Del Nero  
UFPA / PPGF / PPGEE – Membro externo

BELÉM, PA – BRASIL  
SETEMBRO / 2019

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)  
Instituto de Tecnologia/Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Recursos  
Naturais da Amazônia

---

Souza, Raimundo Nonato C. de,

Avalanche como rede de percolação não homogênea /

Raimundo Nonato C. de Souza.

Belém: UFPA/PRODERNA, 2019.

Orientador: André Luiz Amarante Mesquita

Coorientador: Heliton Ribeiro Tavares.

Tese (doutorado) – UFPA/ITEC/Programa de Pós- Graduação em Engenharia de Recursos Naturais da Amazônia, 2019.

1. Percolação. 2. Geração de malhas numéricas (Análise numérica). 3. Teoria do ponto crítico (Análise matemática). 4. Avalanches. I. Título.

CDD

---

# Dedicatória

*Dedico esse trabalho  
a minha esposa Maria...  
aos meus filhos Gui e Zi..  
à minha família que me  
deu suporte para alcançar  
este feito, e que sempre me apoiam...  
Aos Professores do programa que  
me guiaram ao longo do curso...  
Em especial meus orientadores  
André Mesquita e Heliton Tavares...  
Aos meus colegas de turma que  
me alegam e dão exemplo...  
à Deus por sua graça.*

# Agradecimentos

Agradeço ao meu orientador, e ao meu coorientador, aos meus colegas e colaboradores, à seção administrativa do programa, à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES, que liberou verba para minhas pesquisas, aos meus amigos, à minha família, ao meu grande amor Maria e, também agradeço a Deus por ser tão generoso.

Resumo da tese de doutorado apresentado ao PRODERNA/UFPA como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Engenharia de Recursos Naturais da Amazônia (D. Eng.).

## AVALANCHE COMO REDE DE PERCOLAÇÃO NÃO HOMOGÊNEA

Raimundo Nonato Carneiro de Souza

SETEMBRO / 2019

Orientador: Prof. Dr. André Luiz Amarante Mesquita

Coorientador: Prof. Dr. Heliton Ribeiro Tavares

Área de concentração: Uso e Transformação de Recursos Naturais.

Linha de Pesquisa: Modelagem e Simulação de Processos.

As avalanches podem ser consideradas como um processo de percolação. Esta hipótese será afixada para avaliar se essa abordagem é possível e quais são suas vantagens. Algumas literaturas especulam que existe a possibilidade de considerar avalanches como um evento de percolação. No entanto, não existe uma distinção clara do modelo de percolação que estes eventos descrevem, seja um processo homogêneo ou não homogêneo. Este trabalho trata de simulações de avalanches como casos físicos de percolação. Para caracterizar as avalanches foram simulados dois modelos de percolação: homogênea e heterogênea. Criou-se simulações para comparar avalanches nos dois modelos. Para realizar essas simulações, usou-se a probabilidade de um sítio estar aberto igual a 0.5. Foram medidos os tamanhos e os transientes para cada avalanche nos diferentes modelos. Para o fechamento do trabalho, foram realizados experimentos criando avalanches, a fim de melhor calibrar as simulações usando dados de avalanches reais. Comparando os resultados simulados com dados existente na literatura, percebeu-se um comportamento típico de uma função de probabilidade. Considerando-se esse comportamento pode-se fazer previsões sobre o tamanho das avalanches. Analisando os resultados obtidos, tem-se que o comportamento das avalanches criadas com probabilidade não homogênea apresentaram características bem definidas, possuindo maiores valores de tamanho e transiente. Concluiu-se que o modelo não homogêneo possui acentuada estabilidade sendo melhor no aspecto de evolução da avalanche, portanto com alguns ajustes o modelo heterogêneo pode se aproximar de uma avalanche real com maior precisão.

**Palavras-chave:** Percolação, Avalanche, Modelo Homogêneo, Modelo Heterogêneo, Simulação.

Abstract of the doctoral thesis submitted to PRODERNA/UFPA as part of the requirements for obtaining a PhD in Natural Resources Engineering of the Amazon (D. Eng.).

## AVALANCHE AS NON-HOMOGENEOUS PERCOLATION LATTICE

Raimundo Nonato Carneiro de Souza

SEPTEMBER / 2019

Advisor: Prof. Dr. André Luiz Amarante Mesquita

Coorientador: Prof. Dr. Heliton Ribeiro Tavares

Area of concentration: Usage and transformation of natural resources.

Line of research: Modeling and simulation of processes.

Avalanches can be considered as a percolation process. This hypothesis will be posted to evaluate if this approach is possible and what are its advantages. Some literature speculates that there is the possibility of considering avalanches as a percolation event. However, there is no clear distinction from the percolation model that these events describe, either a homogeneous or non-homogeneous process. This work deals with avalanche simulations as physical cases of percolation. To characterize the avalanches, two percolation models were simulated: homogeneous and heterogeneous. Simulations were developed to compare avalanches in both models. To perform these simulations, the probability of a site being open equal to 0.5 was used. The sizes and transients were measured for each avalanche in the different models. To close the work, experiments were carried out to create avalanches, in order to better calibrate the simulations using real avalanche data. For when comparing the simulated results with existing data in the literature, a typical behavior of a probability function was perceived. Given this behavior one can make predictions about the size of the avalanches. Analyzing the results obtained, it is possible that the behavior of avalanches created with non-homogeneous probability presented well defined characteristics, having larger values of size and transient. It was concluded that the non-homogeneous model has a high stability and is better in the evolution aspect of the avalanche, so with some adjustments the heterogeneous model can approach a real avalanche with greater accuracy.

**Keywords:** Percolation, Avalanche, Homogeneous Model, Heterogeneous Model, Simulation.

# Conteúdo

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| <b>1</b> | <b>Introdução</b>  | <b>1</b>  |
| 1.1      | Histórico  | 4         |
| 1.2      | Objetivos  | 5         |
| 1.2.1    | Objetivo principal                                       | 5         |
| 1.2.2    | Objetivos específicos                                    | 6         |
| 1.3      | Desenvolvimento do projeto                               | 6         |
| <b>2</b> | <b>Teoria da Percolação</b>                              | <b>8</b>  |
| 2.1      | Introdução a percolação                                  | 8         |
| 2.1.1    | Espaço amostral e evento                                 | 10        |
| 2.1.2    | Probabilidade na rede de percolação                      | 11        |
| 2.1.3    | Rede hipercúbica $d$ -dimensional                        | 12        |
| 2.2      | Transição de fase  | 13        |
| 2.2.1    | Inexistência de transição de fase em dimensão $d = 1$    | 14        |
| 2.2.2    | Existência de transição de fase em dimensão $d \geq 2$   | 15        |
| 2.2.3    | Decaimento exponencial da função conectividade           | 19        |
| 2.2.4    | Caracterização da fase subcrítica                        | 21        |
| 2.3      | Modelos de Percolação                                    | 25        |
| 2.3.1    | Classificação dos modelos de percolação                  | 25        |
| 2.3.2    | Modelos homogêneos                                       | 26        |
| 2.3.3    | Modelos heterogêneos                                     | 27        |
| 2.4      | Variáveis aleatórias                                     | 30        |
| 2.4.1    | Variáveis aleatórias discretas                           | 31        |
| 2.4.2    | Variáveis aleatórias contínuas                           | 31        |
| 2.4.3    | Função de Distribuição Acumulada                         | 32        |
| 2.4.4    | Variáveis Aleatórias Bidimensionais                      | 32        |
| <b>3</b> | <b>Modelos de avalanche</b>                              | <b>33</b> |
| 3.1      | Criticalidade Auto Organizada                            | 34        |
| 3.2      | O experimento de Douady e Daerr e o modelo de Hinrichsen | 37        |
| 3.2.1    | O experimento de Douady e Daerr                          | 37        |
| 3.2.2    | O modelo de Hinrichsen                                   | 39        |
| 3.3      | Modelo proposto  | 40        |
| 3.3.1    | Condições periódicas de contorno                         | 40        |
| 3.3.2    | O modelo proposto  | 42        |
| <b>4</b> | <b>O experimento</b>                                     | <b>47</b> |
| 4.1      | Implementação do algoritmo numérico                      | 47        |
| 4.1.1    | Simulações preliminares                                  | 47        |

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| 4.1.2    | Representação do algoritmo                        | 48        |
| 4.2      | Experimento para calibração e validação do modelo | 51        |
| 4.2.1    | Materiais   | 52        |
| 4.2.2    | Procedimento                                      | 54        |
| 4.3      | Procedimento de calibração                        | 54        |
| 4.3.1    | Procedimento de validação                         | 61        |
| <b>5</b> | <b>Resultados e discussões</b>                    | <b>63</b> |
| 5.1      | Avalanche como rede de percolação homogênea       | 63        |
| 5.2      | Modelos homogêneos e heterogêneos                 | 70        |
| <b>6</b> | <b>Conclusões</b>                                 | <b>73</b> |

## Lista de Figuras

|             |   |    |
|-------------|---|----|
| Figura 2.1: | Caminho de uma informação de um ponto $x$ até outro ponto $y$ .                               | 8  |
| Figura 2.2: | Vizinhança na rede quadrada   | 9  |
| Figura 2.3: | Possível estrutura e organização de uma rede, onde os círculos representam os sítios da rede. | 11 |
| Figura 2.4: | Percolação em uma dimensão  | 14 |
| Figura 2.5: | Rede dual   | 18 |
| Figura 2.6: | Circuito dual ( $\gamma$ ), representado pelas linhas tracejadas vermelhas.                   | 18 |
| Figura 2.7: | Estrutura da rede triangular.   | 29 |
| Figura 3.1: | Pilha de minério de ferro na Vale.  | 34 |
| Figura 3.2: | Vista lateral da mesa com inclinação $\varphi$ .  | 37 |
| Figura 3.3: | Energias do sistema.  | 37 |
| Figura 3.4: | Transmissão da energia na rede.   | 39 |
| Figura 3.5: | Simulação de avalanche no modelo proposto.  | 44 |
| Figura 4.1: | Fluxograma da simulação.  | 49 |
| Figura 4.2: | Detalhamento da mesa e suas estruturas.   | 52 |
| Figura 4.3: | Mesa inclinada.   | 53 |
| Figura 4.4: | Comportamento de $h$ na fase supercrítica.  | 58 |
| Figura 4.5: | As funções de $p_{sub}$ e $p_{super}$ em relação aos valores de $r$ .                         | 61 |
| Figura 5.1: | Avalanches com probabilidades diferentes.   | 63 |
| Figura 5.2: | Probabilidade de sobrevivência $P(t)$ , usando a Equação mostrada em Hinrichsen.              | 64 |
| Figura 5.3: | O número de sítios ativos $N(t)$ , usando a Equação mostrada em Hinrichsen.                   | 65 |

|              |  |    |
|--------------|--|----|
| Figura 5.4:  | Comparação entre a probabilidade de sobrevivência de $10^4$ réplicas no modelo proposto e um experimento real de avalanche feita de grãos de feijão. . . . .                   | 66 |
| Figura 5.5:  | Comparação entre modelo proposto calibrado e um experimento real de avalanche feita de grãos de feijão. . . . .  | 67 |
| Figura 5.6:  | Experimento de avalanche de feijão recriado na mesa com inclinação de 15 graus. . . . .  | 67 |
| Figura 5.7:  | Quantidade de avalanches por tamanho. . . . .  | 68 |
| Figura 5.8:  | Comparação entre a probabilidade de avalanche nos experimentos e resultados gerados por uma função encontrada pelo Solver. . . . .   | 69 |
| Figura 5.9:  | Comparação entre dados de um experimento real de avalanche feita de grãos de feijão em mesa inclinada e dados simulados no modelo proposto usando $\bar{p}$ calibrado. . . . . | 69 |
| Figura 5.10: | A) Avalanche no modelo Homogêneo. B) Avalanche no modelo Não Homogêneo. . . . .  | 70 |
| Figura 5.11: | A) Transiente de avalanche no modelo homogêneo. B) Transiente de avalanche no modelo não homogêneo. . . . .  | 71 |

## Lista de Tabelas

|             |   |    |
|-------------|---|----|
| Tabela 3.1: | Valores das variáveis do modelo de Hinrichsen. . . . .  | 40 |
| Tabela 3.2: | Possíveis Funções de probabilidade em razão da distância entre vértices. Fonte: Jatene, 2007. . . . . | 46 |
| Tabela 4.1: | Valores de $\bar{p}$ para os grãos da avalanche em função do parâmetro $r$ e da fase crítica. . . . . | 61 |
| Tabela 5.1: | Constantes para o experimento de grãos de feijão e dos dados simulados. . . . .                       | 66 |
| Tabela 5.2: | Constantes calibradas com o experimento de grãos de feijão. . . . .                                   | 66 |
| Tabela 5.3: | Dados estatísticos dos tamanhos das avalanches com probabilidade homogênea e não homogênea. . . . .   | 71 |

# Capítulo 1

## Introdução

Avalanche é a precipitação de um material sobre um leito íngreme, geralmente pedras em encostas, mas pode ser composta de qualquer material particulado que seja considerado como escoamento de sólidos. Em geologia, avalanche é definida como "movimentos de massa" que ocorrem sempre devido à instabilidade do material (solo, neve, gelo, rocha) ocasionada pela atuação da força da gravidade aliada a algumas características determinantes como a inclinação do terreno, presença ou não de vegetação, e principalmente, a presença de água. Há outros fatores que também influenciam nesse movimento, como a ocorrência de erosão, sismicidade e a degradação das raízes da vegetação. Algumas avalanches são lentas, quase imperceptíveis, enquanto outras são rápidas e atingem grandes velocidades.

A natureza da transição entre regime estático e dinâmico em meios granulares fornece a chave para compreender seu comportamento [13]. Verifica-se que existem diferentes fenômenos agindo na mecânica dos escoamentos de sólidos: a transferência de calor, a transferência de massa, a transferência de energia potencial e vários outros. Estes podem ser descritos por um modelo matemático comum, onde a diferença está nas grandezas físicas envolvidas e seus respectivos coeficientes, de forma que essas grandezas podem ser conjuntamente modeladas via rede de percolação.

Para justificar a realização deste trabalho é preciso observar que as avalanches de areia quando postas em via de simulação apresentam comportamento de rede de percolação. Hinrichsen [19] observou experimentos que recriavam avalanches, e notou que existia a possibilidade de simular avalanches como rede de percolação. O comportamento gráfico de simulações de avalanches nesse modelo mostraram um comportamento típico de percolação em modelo homogêneo bidimensional na rede quadrada. Surgiram, portanto, algumas perguntas acerca do ponto crítico do modelo, do comportamento da rede quanto à homogeneidade dos sítios e elos, e se é aceitável o comportamento heterogêneo. Além disso, surge um forte questionamento: É possível que dando o tratamento percolativo às avalanches, pode-se obter resultados próximos aos reais?

Formulado no final da década de 50 por Broadbent e Hammersley, o primeiro modelo de percolação concentrava-se em descrever a penetração de um fluido em uma rocha. A pedra era considerada como um meio poroso que formava uma rede de canais aleatórios, por onde escoava o fluido. Para simular a passagem do líquido através dos canais, considerava-se que o canal ou poro estava aberto com probabilidade  $p$  e fechado com probabilidade  $1 - p$ , com  $0 < p < 1$ . E com o passar dos anos os poros e canais foram recebendo outras denominações, as mais conhecidas são sítios e elos. Usando a analogia que os sítios são como portas e os elos são como corredores que se ligam através de portas, pode-se entender com simplicidade a ideia de percolação.

O termo “percolação” vem do latim *percolatio* que significa filtragem. Existem alguns tipos de percolação, onde se pode destacar a percolação por sítio(vértice), por elo(ligação) e, por sítios e elos. Na percolação por sítios representa-se o meio pelo conjunto  $\mathbb{Z}^d$ , onde cada ponto será chamado de sítio, o qual estará aberto com probabilidade  $p$  e fechado com probabilidade  $1 - p$ . Elo é a ligação entre dois sítios, neste modelo é a ligação que estará aberta ou fechada dependendo da probabilidade  $p$  e  $1 - p$ , respectivamente. Unimos os sítios e as ligações como elementos que estarão abertos ou fechados na percolação por sítios e elos. A representação  $\mathbb{Z}^2$  é puramente direcionada para os assuntos desta tese. Certamente, esta representação abrange muitas descrições de meios percolativos, entretanto, apenas redes e ambientes planares podem ser englobados em rede quadrada bidimensional.

Percolação pode agir em modelos de topologia bidimensional e também em organizações que extrapolam o  $2D$ . De fato, estruturas tridimensionais podem ser modeladas via rede de percolação, pois a ideia de percolação é observar a passagem da informação de um ponto pré-estabelecido até um certo limiar e prever a probabilidade deste fato. O estudo da percolação em meios com dimensão maior que dois é provavelmente a direção dos próximos passos na evolução da percolação deste trabalho.

De maneira menos rigorosa, o emaranhado formado pelos sítios recebe o nome de rede. Em se tratando de superfície e modelagem, a rede pode tomar formas específicas, bem como no caso da rocha de Broadbent e Hammersley. Cada formação reticular recebe um nome específico que exprime sua característica ou o nome do seu descobridor.

A ligação entre os pontos da rede recebe o nome de elo e, também, um valor probabilístico que pode ser fixo ou variável. Sendo assim, um ponto pode não estar ligado a outro desde que o elo não esteja ativo. Quando o elo receber probabilidade fixa de estar ativo a rede será classificada como Homogênea. Quando esse valor for variável, a rede será chamada de não homogênea ou, simplesmente, heterogênea.

Modelos de percolação encontram aplicações em várias situações físicas de inte-

resse, tais como: o problema da mecânica estatística de sistemas ferromagnéticos diluídos [30], no problema do transporte de corrente elétrica através de uma rede composta por um grande número de resistores, em problemas de prospecção de petróleo e até mesmo na propagação de epidemias e de incêndios florestais [21].

A evolução da teoria da percolação está diretamente ligada ao desenvolvimento das redes e malhas geradas pelos vértices e as formas locais de união entre os pontos dessas redes. Um olhar apurado certamente perceberá a existência de uma estrutura maior que suporta a maioria dos modelos de rede imagináveis, com raras exceções. Nomeamos essa estrutura como *Rede hipercúbica  $d$ -dimensional*.

Percolação é um ramo da ciência que cresceu muito nos últimos anos. Possui várias aplicações como em estudos sobre sistemas complexos nos trabalhos de [9] e de [28], ou em [24], onde a percolação é usada para demarcar a porção de areia que está contaminada por gasolina. Existem outras aplicações em várias áreas do conhecimento científico, tais como física, química e biologia.

Na maioria dos trabalhos em percolação são usados modelos homogêneos e estes são bem definidos com transição de fase e expoentes críticos conhecidos, como podemos ver em [17]. O modelo homogêneo recebe esse nome porque apresenta probabilidade constante de um sítio ou elo estar ativo(aberto), e este valor é único para qualquer sítio ou elo da rede. O modelo homogêneo considera um sistema de percolação onde cada sítio ou elo tem probabilidade  $\bar{p}$  de estar ativo.

Este trabalho contém alguns tópicos da percolação homogênea e também trata de um modelo de percolação não homogêneo. A percolação não homogênea recebe essa denominação pelo fato de seus sítios ou elos possuírem diferentes probabilidades de estarem ativos. No modelo não homogêneo a probabilidade  $\bar{p}$  de um sítio ou elo estar ativo pode ser função da distância, ou ainda, pode-se orientar uma rede de percolação de maneira que, para uma direção a probabilidade de ter um sítio ou elo aberto seja diferente de outro sítio ou elo para outra direção [18].

A percolação não homogênea ou heterogênea vem crescendo por se tratar de modelos mais próximos de algumas realidades contemporâneas, como no caso de [21] que trata de incêndios florestais. Naquele trabalho, também é mencionado a aplicabilidade do modelo não homogêneo para caracterizar o crescimento de tumores em organismos vivos. Pode-se elencar outras possibilidades como na transmissão de doenças, proliferação de uma cultura, ou mesmo, na difusão de rumores e boatos. Seguramente, trabalhar percolação heterogênea tem grandes benefícios em vários ramos da ciência.

Haverá comparação do tamanho e do transiente de avalanche de cada modelo. A verificação do tamanho servirá para medir em qual modelagem a avalanche obteve maior duração. Os transientes de avalanche correspondem à quantidade de material que se desprende em cada deslizamento, ou especificamente, traduz-se com o

volume de partículas que se deslocaram com o evento de avalanche. Esta medida servirá para indicar em qual caso houve maior atividade nos sítios da rede.

## 1.1 Histórico

O ser humano sempre teve de lidar com a matéria no estado granular que é bastante frequente na natureza, razão pela qual houve grande desenvolvimento na compreensão dos materiais granulares do ponto de vista prático no passado. No entanto, há forte necessidade de se saber mais sobre os aspectos fundamentais e sobre as origens de muitas das propriedades desses materiais. O interesse por parte dos físicos nesses sistemas se deve à riqueza de fenômenos exibidos como transições de fase, formação de padrões induzidos por vibração e formação de aglomerados em fases granulares, à similaridade com outros sistemas bastante relevantes atualmente, como por exemplo, tráfego de veículos em vias urbanas. [26].

Em 1957 nascia a Teoria da percolação, com os matemáticos Broadbent e Hammersley [7]. Eles apresentaram uma modelagem para descrever a penetração de um líquido em meio poroso. A questão era imergir uma pedra em água, e saber com que probabilidade o líquido chegaria ao centro da rocha. O modelo de percolação concentra-se em descrever o meio poroso, que será visto como uma rede de canais aleatórios, por onde escoará o fluido.

O grande achado na Teoria da Percolação foi a descoberta do fenômeno da transição de fase com a existência de um valor acima do qual torna a rede com probabilidade positiva de percolar e que abaixo dele a rede não irá percolar. O valor que caracteriza a transição de fase nas redes recebe o nome de ponto crítico.

Em 1964, Sykes e Essam [32] deram um importante passo para se encontrar o real valor do ponto crítico em redes bidimensionais. Embora, esse trabalho tenha muitos resultados aceitáveis a comunidade científica não os acolheu em totalidade.

Em 1982, Kesten [22] provou, de fato, que o ponto crítico da rede quadrada regular(homogênea) com percolação em elos é " $\frac{1}{2}$ ". A partir de então vários outros valores foram encontrados para outras redes homogêneas bidimensionais, porém das redes heterogêneas pouco se sabe dada a dificuldade de provas algébricas desses valores.

Em 1987, Bak e colaboradores [2] publicaram seu resultados sobre avalanches que retratavam escoamentos em pilhas de areia. Através deste trabalho chegaram a mostrar o padrão dos sistemas auto organizados.

Em 1998, Douady e Daerr [13] trabalharam em um experimento real de avalanches. O experimento de Douady e Daerr usava uma mesa recoberta com veludo e areia para criar avalanches. Os resultados deste trabalho são bem plausíveis e mostram muitas características das avalanches.

Em 2000, Hinrichsen [19] considerou a abordagem de Douady e Daerr, e acrescentou o caráter percolativo assumindo os grãos da avalanche de areia como sítios de uma rede retangular quadrada. Hinrichsen modelou uma rede através da computação e implementou uma variável de inclinação como se os grãos rolassem no sentido da gravidade. Desta maneira o sistema fluía em uma direção preestabelecida, transformando o experimento em uma simulação do modelo de *percolação dirigida*.

Em 2007, Gillett [16] mostrou a caracterização da transição de fase no modelo de Bak-Snepper, tratando-se de um modelo de avalanche com percolação contínua.

Em 2013, Grimmett e Manolescu [18] postaram o artigo "Inhomogeneous bond percolation on square, triangular and hexagonal lattices" que mostra o ponto crítico de algumas rede não homogêneas, além de detalhar todo o comportamento das redes Quadrada, Triangular e Hexagonal não homogêneas.

## 1.2 Objetivos

### 1.2.1 Objetivo principal

A motivação deste trabalho perpassa por alguns achados derivados de simulações computacionais. Simulações de modelos de percolação bidimensional são comuns quando se pretende prever o comportamento de eventos em meios aleatórios planares. Tais simulações percolativas englobam variados modelos de percolação, entre os quais estão os modelos: homogêneo e o não homogêneo.

Um dos focos deste trabalho é traçar uma comparação entre avalanches criadas pelo modelo homogêneo e avalanches criadas pelo modelo não homogêneo que possivelmente servirá para aproximar eventos simulados de eventos reais.

O presente projeto aborda recursos dos modelos de rede quadrada homogênea e não homogênea.

Com o intuito de tornar simulações de avalanches mais realistas e com maior grau de confiança e de mostrar que usando a percolação pode-se modelar eventos de avalanche. Sob estas perspectivas, estabelece-se esse trabalho com os seguintes objetivos norteadores principais:

- Mostrar qualitativamente e quantitativamente que avalanches podem ser tratadas como rede de percolação homogênea.
- Fazer uma comparação entre avalanches criadas pelo modelo homogêneo e avalanches criadas pelo modelo não homogêneo.
- Apresentar uma equação que prediga a probabilidade do acontecimento de avalanches de determinado tamanho.

## 1.2.2 Objetivos específicos

A seguir são apresentados os objetivos específicos a serem alcançados neste trabalho.

- Propor uma nova técnica de abordagem nos problemas de avalanche;
- Modelar computacionalmente um evento de avalanche;
- Encontrar uma solução para relacionar eventos de avalanche em eventos de percolação;
- Apresentar dados de simulações percolativas que expressem um evento de avalanche;
- Analisar os dados através de gráficos e tabelas;
- Mostrar que eventos de avalanche simulados via percolação heterogênea podem se aproximar de eventos reais de avalanche.
- Classificar modelos de percolação e detalhar as características dos segmentos homogêneos e heterogêneos da percolação.

## 1.3 Desenvolvimento do projeto

A evidência da possibilidade de simular eventos de avalanche como eventos de percolação foi um passo fundamental para realização deste projeto e as deduções contidas aqui. À medida que algumas hipóteses surgem empiricamente, este objeto de estudo advém de simulações estocásticas e comparações entre eventos simulados e reais. Tais simulações foram realizadas no modelo de percolação homogêneo e no não homogêneo que geraram um esboço da função de probabilidade de percolação. O desenho da curva possuía um formato aproximado dos mostrados na literatura. A partir das simulações verificou-se um comportamento rotineiro na curva de probabilidade de percolação, em relação à variação dos transientes. O mesmo aconteceu para as curvas em relação a variação da regularidade da rede e dos tamanhos dos caminhos.

O Capítulo 1 é uma introdução ao projeto. Mostra alguns tópicos e traça um roteiro para melhor se explorar esta teoria. Teoria a qual pretende mostrar: Avalanches simuladas via rede de percolação. Este capítulo trata dos objetivos e meandres que se visa alcançar.

O Capítulo 2, trata-se da iniciação à teoria da percolação. Aborda-se alguns conceitos básicos e fundamentais para o entendimento da dinâmica de percolação, tais como: vértice, elo, rede, aglomerado, caminho e conectividade. Expõe-se o

fenômeno da transição de fase nas redes. Neste capítulo também são apresentados e provados alguns teoremas importantes da literatura. O Teorema 2.1 resume a característica da transição de fase. Dada a existência do limiar de percolação, tomando o comportamento matemático da rede quadrada bidimensional nos pólos gerados pelo ponto crítico. Neste capítulo também é possível ver os conceitos e definições sobre as variáveis aleatórias.

A partir do terceiro capítulo, o trabalho passa a detalhar as avalanches, focando em particular no modelo homogêneo. Dele irá se obter a forma e algumas das características mais importantes dos modelos de avalanche, tais como: o comportamento auto organizado, a interação entre os grãos e o ângulo de repouso destes. O destaque nesse capítulo é dado ao experimento de Douady e Daerr e o modelo de Hinrichsen. Neste capítulo, encontra-se o cerne do trabalho, pois traz a modelagem computacional do problema de percolação enquanto avalanche. E também, revela a Distribuição de Probabilidade Associada ao tamanho das avalanches que resulta num parâmetro capaz de gerar computacionalmente avalanches similares as reais.

No quarto capítulo são apresentados os resultados e suas implicações. São as ponderações sobre os tamanhos e transientes das avalanches. Nesse texto são apresentados resultados dos experimentos e sua relação com a geração de avalanches simuladas, porém o foco recai sobre os resultados das avalanches como rede de percolação homogênea e não homogênea e também nos comentários da comparação entre modelos. Ao fim, tem-se o capítulo 5 com as conclusões da tese e algumas sugestões de trabalhos.



A rede de percolação é um conjunto formado por vários pontos, estes pontos são idealizados para representar a estrutura do meio que se pretende modelar via rede de percolação. No caso descrito em Broadbent e Hammersley, por exemplo, os pontos representavam os poros existentes em uma rocha. Cada ponto da rede é chamado de sítio. Neste sentido, *os sítios* são definidos como os pontos da rede. Na Figura 2.1, a intersecção entre as linhas horizontais e as linhas verticais representaram os pontos ou sítios da rede. Diz-se que cada ponto representa um sítio (nó, nódulo, vértice). Todo o conjunto desses pontos é chamado de rede e as interligações entre dois pontos são definidas como elos (aresta, ligação). Os elos são formados quando se une dois sítios (pontos) vizinhos. Logo, *elo* é definido como a ligação entre dois sítios vizinhos. Os *sítios* e os *elos* podem ter duas configurações: aberto e fechado. O sítio ou o elo aberto significa que a informação pode fluir através dele enquanto que o fechado impede esse fluxo. A quantidade de vizinhos de um sítio é determinada pelo formato da rede.

Existem inúmeras formas de rede. Em teoria dos Grafos estuda-se grande parte dessas formas, tais como: Rede de Bethe, Rede Quadrada, Rede Triangular, Rede colmeia, etc. Para maior aprofundamento sugere-se consultar Feofiloff [14]. A rede chamada de: rede hipercúbica  $d$ -dimensional é uma estrutura que pode ser considerada como o conjunto que contém a maioria das redes de percolação, independente dos seus formatos espaciais. Para todos os efeitos a rede criada neste trabalho aproxima-se da rede quadrada que por sua vez pertence a estrutura hipercúbica  $d$ -dimensional. A rede quadrada é chamada assim porque cada sítio possui quatro vizinhos: um em cima, um em baixo, uma na esquerda e outro na direita. Veja Figura 2.2.

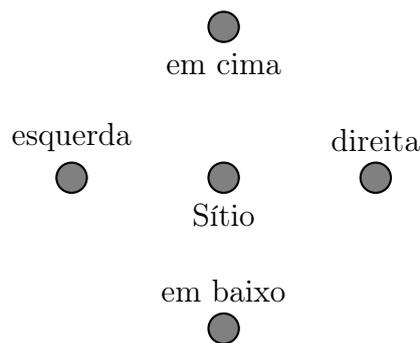


Figura 2.2: Vizinhança na rede quadrada

Para este trabalho, a informação transmitida será a avalanche e os sítios serão os grãos do material da avalanche, notando que a rede idealizada para este fim pode ser considerada como uma rede de percolação quadrada que flui, unicamente, no sentido descendente, caracterizando o processo como *percolação dirigida*, Ver Figura 2.3.

A percolação dirigida, também chamada de *percolação orientada*, é marcada pelo fato do caminho de percolação migrar rumo a uma direção predeterminada. Por exemplo, no caso de uma rolha na base de um tubo vertical com água, onde a gravidade faz pressão sobre a água que tenta passar através da rolha usando como caminho os poros da rolha. Outro exemplo, é a passagem da água quente através do pó de café na cafeteira. No caso descrito a percolação vai de cima para baixo, mas pode ter outras formas de orientação como da esquerda para direita ou vice-versa [18].

### 2.1.1 Espaço amostral e evento

Antes de entrar no cerne da percolação deve se conhecer algumas questões importantes. Como se sabe, a rede é formada de pontos e em um dado momento atribui-se valores de probabilidade para esses pontos e ao final tem-se um valor probabilístico da rede como se fosse um evento que exprime estatísticas. Para compreender esse aspecto deve-se entender os conceitos de probabilidade e variáveis aleatórias.

**Definição 2.2** *Espaço amostral*<sup>1</sup> é o conjunto de todos resultados possíveis de um experimento aleatório e representado por  $\varepsilon$  [25].

Uma classe de Subconjuntos de  $\varepsilon$ , denotada por  $\mathcal{F}$ , é dita uma  $\sigma$ -álgebra se possuir as propriedades:

- $\varepsilon \in \mathcal{F}$ ;
- Se  $A \in \mathcal{F}$ , então  $A^c \in \mathcal{F}$ , onde  $A^c$  é complementar de  $A$ ;
- Se  $A_i \in \mathcal{F}$ ,  $i \geq 1$ , então  $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$ .

Seja a função  $\mathcal{P}$ , definida na  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{F}$  de subconjuntos de  $\varepsilon$ , tal que a função só assuma valores pertencentes ao intervalo  $[0, 1]$ . Se a função  $\mathcal{P}$  satisfizer os *Axiomas de Kolmogorov* citados abaixo, então  $\mathcal{P}$  é uma função de probabilidade.

1.  $\mathcal{P}(\varepsilon) = 1$ ;
2. Para todo subconjunto  $A \in \mathcal{F}$ ,  $\mathcal{P}(A) \geq 0$ ;
3. Para toda sequência  $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$ , de subconjuntos disjuntos, tem-se:

$$\mathcal{P} \left( \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{P}(A_i).$$

A trinca  $(\varepsilon, \mathcal{F}, \mathcal{P})$  é denominada *Espaço de Probabilidade*. Os subconjuntos que estão em  $\mathcal{F}$  são chamados de eventos e é somente a eles que se pode atribuir probabilidade.

---

<sup>1</sup>Os conceitos aqui foram adaptados do Livro: Probabilidade e Variáveis aleatórias [25].

## Evento

**Definição 2.3** *Um conjunto para o qual se pode definir um peso estatístico é chamado de evento [6].*

Portanto, evento é um elemento da  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{F}$ .

Dados dois eventos  $A, B \in \Omega$ , e seja  $P$  uma função de probabilidade, valem as seguintes propriedades:

- $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ , se  $A \cap B = \emptyset$ ;
- $P(A) \leq P(B)$ , se  $A \subset B$ .

### 2.1.2 Probabilidade na rede de percolação

**Definição 2.4** *Define-se a probabilidade  $\bar{p}$  como sendo a probabilidade de um elo ou sítio estar ativo na rede de percolação.*

Normalmente é usado apenas o ' $p$ ' para desempenhar esse papel, contudo serão trabalhadas redes de vários modelos, entre eles os modelos heterogêneos, onde a probabilidade  $p$  é uma variável. Dado isso, o uso do  $p$  seria por vezes confuso, ora fixo ora variável. E para pacificar esta questão toma-se apenas  $\bar{p}$  em todas as situações para evitar qualquer desentendimento futuro. A menos que seja expressamente comentado, os valores de probabilidade referentes a atividade dos sítios e elos será denotado por  $\bar{p}$ .

Para conceber a rede o *status* de evento, atribui-se a cada sítio, a probabilidade  $\bar{p}$  de estar aberto e  $1 - \bar{p}$  de estar fechado, sendo  $0 \leq \bar{p} \leq 1$ . Desta forma, pode-se imaginar inúmeras ligações entres os vértices da rede, caracterizando várias configurações dentro da rede, veja Figura 2.3. Cada configuração existindo com uma probabilidade distinta.

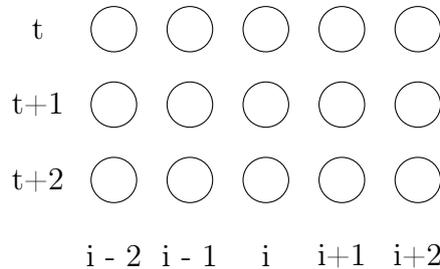


Figura 2.3: Possível estrutura e organização de uma rede, onde os círculos representam os sítios da rede.

### 2.1.3 Rede hipercúbica $d$ -dimensional

A Rede hipercúbica  $d$ -dimensional é uma estrutura espacial comparada ao  $\mathbb{R}^n$ , e que contém a maioria das redes planares. Ela será representada por  $\mathbb{L}^d = (\mathbb{Z}^d, \mathbb{E}^d)$ , nesta notação  $\mathbb{Z}^d$  representa o conjunto dos sítios e  $\mathbb{E}^d$  o conjunto dos elos. Mais especificamente  $\mathbb{Z}^d = \{(x_1, x_2, \dots, x_d) : x_i \in \mathbb{Z}\}$  e  $\mathbb{E}^d = \{e = (x, y) \in \mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}^d : \|x - y\| = 1\}$ . A condição  $\|x - y\| = 1$ , indica que serão admitidas apenas ligações entre sítios vizinhos, sem essa condição o número de redes aumenta consideravelmente.

O conjunto formado apenas por sítios abertos é chamado de aglomerado. É denotado por  $C(x)$  o aglomerado que contém o sítio  $x$ . Cada aglomerado possui um ponto inicial que se chama de Origem. A origem é representada pelo  $O$  e  $C(O)$  recebe o nome de aglomerado da origem e é comum representar esse aglomerado por uma única letra  $C$ .

Ocasionalmente, haverá interesse no tamanho de  $C(O)$ , que representa o transiente de avalanche que é o número total de sítios que participaram da avalanche, e desta forma denota-se por  $|C(O)|$  o número de sítios em  $C(O)$ . O tamanho ou número de vértices do aglomerado da origem pode ser resumido por  $|C|$ . Define-se como sendo a probabilidade de ocorrer o aglomerado de tamanho  $|C|$ , dada a probabilidade  $\bar{p}$  de um sítio ou elo estar ativo.

$$P_{\bar{p}}(|C|) = \frac{\text{numero de sítios abertos } |C|}{\text{numero total de sítios } |\mathbb{Z}^d|} \quad (2.1)$$

Seja  $C$  um conjunto de sítios de  $\mathbb{Z}^d$ . Denota-se por  $\partial C$  o conjunto de vértices que formam a fronteira de  $C$ . Ou seja, são sítios que pertencem ao limiar de  $C$ . Este conjunto servirá para medir a quantidade de sítios ativos a cada tempo. Especificamente, o conjunto  $\partial C$  representará a frente e os lados da avalanche.

**Definição 2.5** *Define-se como sítios conectados ( $x \leftrightarrow y$ ), caso exista, o caminho que interliga os dois sítios. Define-se caminho como o conjunto conexo de sítios sem auto intersecções, ou seja, não admite volta. Representa-se por  $\omega_{xy}$  o caminho que liga o sítio  $x$  ao  $y$ .*

$$\omega_{xy} = \{e_1 = (x_1 = x, x_2), e_2, \dots, e_{n-1} = (x_{n-1}, x_n = y)\} \quad (2.2)$$

A distância entre dois vértices  $|x \leftrightarrow y|$  é dada pela norma:

$$|x \leftrightarrow y| = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i| \quad (2.3)$$

O conceito de sítios conectados pode ser usado para medir o tamanho da avalanche usando a Equação 2.3. Neste caso, o interesse é saber o tamanho do caminho

que liga  $\partial C$  a  $O$ , em notação:  $|\partial C \leftrightarrow O|$ . Ou seja, deve-se descobrir o tamanho do caminho que liga a origem a borda do aglomerado.

## 2.2 Transição de fase

Chama-se de Transição de Fase em percolação o fato de, em uma dada rede e para um dado intervalo de probabilidade  $\bar{p}$ , não existir percolação, enquanto que para o intervalo complementar de  $\bar{p}$ , haverá uma probabilidade positiva de percolação.

**Definição 2.6** *Define-se como probabilidade de percolação  $\theta(\bar{p})$ , a probabilidade de um sítio pertencer a um aglomerado de tamanho infinito.*

Denotado por  $\{O \leftrightarrow \infty\}$  ou  $|C| = \infty$  como sendo o evento “ A origem pertence a um aglomerado de tamanho infinito ”. Assim, matematicamente:

$$\theta(\bar{p}) = P_{\bar{p}}(|C| = \infty). \quad (2.4)$$

Como consequência imediata da definição matemática de percolação pode-se obter, alternativamente, outra equação matemática para 2.4:

$$\theta(\bar{p}) = 1 - P_{\bar{p}}(|C| < \infty). \quad (2.5)$$

A equação 2.5 é a probabilidade complementar do evento “A origem pertence a um aglomerado de tamanho infinito”. Portanto,  $P_{\bar{p}}(|C| < \infty)$  é a probabilidade de um aglomerado de tamanho finito. Um evento complementar é um evento que leva em conta a exclusão de outro evento. Em suma ele representa a não ocorrência do evento principal.

Dado que percolação está definida como um evento de probabilidade, sua ocorrência atrela-se ao parâmetro  $\bar{p}$  de forma que para valores pequenos de  $\bar{p}$  não há percolação e em se considerando valores maiores para  $\bar{p}$  pode-se ter percolação. Esse fato caracteriza a mudança de fase em percolação.

Neste sentido é cabível ressaltar que  $0 \leq \bar{p} \leq 1$ . Desta forma existe um  $p_c$  dentro desse intervalo que serve como limiar onde para os valores abaixo desse limiar não haverá percolação enquanto para valores superiores tem-se probabilidade positiva do sistema percolar.

Os valores de  $p_c$  não são fáceis de deduzir analiticamente, porém alguns valores já são conhecidos. Em Souza[11] e Tavares *et al.* [33] estas deduções são vistas com riqueza de detalhes, bem como o procedimento para encontrar esses valores.

Na seção 2.2.2 é mostrado que a variação de  $p_c$  em relação a dimensão é inversamente proporcional, ou seja, a medida que aumenta a dimensão, o  $p_c$  tende para zero como descrito em [22].

Para entender o comportamento dos aglomerados tendo como base os valores de  $p_c$ , faz-se um exercício imaginando hipóteses sobre o ponto crítico e os possíveis valores de  $\bar{p}$  em uma rede  $\mathbb{Z}^2$ . O aglomerado  $C(O)$  é o máximo de componentes conectados da rede de sítios ativos de  $\mathbb{Z}^2$ , e  $\theta(\bar{p})$  é a probabilidade de que  $C(O)$  seja infinito. Se  $\bar{p} \leq p_c$ , então  $\theta(\bar{p}) = 0$  por definição, de modo que  $C(O)$  é finito com probabilidade igual a um. Não é difícil ver que, neste caso, todos os aglomerados ativos são finitos. Se  $\bar{p} > p_c$ , então  $\theta(\bar{p}) > 0$  e há uma probabilidade estritamente positiva de que  $C(O)$  seja infinito. Uma aplicação do primeiro axioma de Kolmogorov, mostra que existe com probabilidade 1 algum aglomerado infinito.

Deve-se perceber que as redes de percolação têm muitos formatos e por óbvio devem existir redes em várias dimensões. Então a existência de transição de fase fica condicionada a dimensão da rede. No intuito de esclarecer alguns pontos sobre esse assunto, a seguir, vai-se abordar o comportamento da transição de fase levando em conta a dimensão da rede de percolação.

### 2.2.1 Inexistência de transição de fase em dimensão $d = 1$

Considerando percolação de primeiros vizinhos, onde o elo é formado por sítios próximos  $\{\|x - y\| = 1\}$ . Para uma rede  $\mathbb{Z}^1$ , ou seja uma reta, considere o modelo de percolação unidimensional na Figura 2.4:

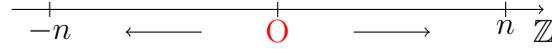


Figura 2.4: Percolação em uma dimensão

Observando, na Figura 2.4 da rede unidimensional, que se deseja ter a origem conectada ao infinito, ou seja  $\{O \leftrightarrow \infty\}$ , então ou  $\{O \leftrightarrow -n\}$  ou  $\{O \leftrightarrow n\}$ . Em qualquer caso:

$$\{O \leftrightarrow \infty\} \subset \{O \leftrightarrow -n\} \cup \{O \leftrightarrow n\}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Das propriedades de probabilidade dadas na Seção 2.1.1, tem-se:

$$\theta(\bar{p}) = P_{\bar{p}}(O \longleftrightarrow \infty) \leq P(O \longleftrightarrow -n) + P(O \longleftrightarrow n). \quad (2.6)$$

A probabilidade da origem estar conectada ao vértice  $n$  ou ao  $-n$  é dada por,

$$P(O \longleftrightarrow -n) = P(O \longleftrightarrow n) = \bar{p}^n.$$

logo,

$$\begin{aligned} \theta(\bar{p}) &= P_{\bar{p}}(O \longleftrightarrow \infty) \leq \bar{p}^n + \bar{p}^n, \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ \theta(\bar{p}) &\leq 2\bar{p}^n, \quad \text{como } 0 \leq \bar{p} \leq 1 \text{ e para } n \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\theta(\bar{p}) = 0. \quad (2.8)$$

Desta forma fica provado a inexistência de transição de fase em dimensão  $d = 1$ . Esse resultado vale para percolação de primeiros vizinhos ou curto alcance.

## 2.2.2 Existência de transição de fase em dimensão $d \geq 2$

Em dimensões maiores que dois existe mudança de fase, ou seja, existe um intervalo de  $\bar{p}$  onde não ocorrerá percolação e outro no qual tem probabilidade positiva de percolação. Esta seção visa provar essa afirmação.

**Proposição 2.1** *Existem valores  $p_{inf}$  e  $p_{sup}$ ,  $0 < p_{inf} < p_{sup} < 1$ , ambos dependentes da dimensão tais que:*

1.  $\theta(\bar{p}) = 0$  para  $d \geq 1$  e  $0 \leq \bar{p} \leq p_{inf}$ ;
2.  $\theta(\bar{p}) > 0$  para  $d \geq 2$  e  $p_{sup} \leq \bar{p} \leq 1$ .

De acordo com a proposição 2.1, pode-se definir a probabilidade crítica como o supremo de todos os valores de  $\bar{p}$  para os quais  $\theta(\bar{p}) = 0$ .

$p_c \equiv \sup\{\bar{p} : \theta(\bar{p}) = 0\}$ , onde  $p_c$  denota a probabilidade crítica.

Dado que  $p_c$  é função da dimensão, ou seja,  $p_c = p_c(d)$ . Segue da proposição 2.1 que  $p_c \in [0, 1]$ .

O seguinte teorema mostra matematicamente o fenômeno de transição de fase em percolação.

**Teorema 2.1** *Existe, para  $d \geq 2$ , um valor  $p_c$  da probabilidade  $\bar{p}$  tal que:*

1.  $0 < p_c < 1$ .
2.  $\theta(\bar{p}) = 0$  se  $0 \leq \bar{p} < p_c$
3.  $\theta(\bar{p}) > 0$  se  $p_c < \bar{p} \leq 1$ .

**Definição 2.7** *Chama-se de fase subcrítica o intervalo  $[0, p_c)$  e de fase supercrítica ao intervalo  $(p_c, 1]$ . O ponto  $\bar{p} = p_c$  é chamado de ponto crítico. A função  $\theta$  funciona como um parâmetro de ordem: exceto pelo ponto crítico, se  $\theta(\bar{p}) = 0$  está-se na fase subcrítica e se  $\theta(\bar{p}) = 1$  na fase supercrítica.*

### Prova da proposição 2.1, item(1)

Considere uma "caixa"hipercúbica  $d$ -dimensional, de lado  $2n$ , dada por:

$$B(n) = [-n, n]^d = \{x \in \mathbb{V}^d : \|x_i\| \leq n, \forall i\}.$$

Seja  $\delta$  conjunto dos caminhos nos quais a origem está conectada a fronteira da caixa.

$$\delta = \{\omega \in B(n); \omega_{O, \partial B_n} = (O \leftrightarrow \partial B_n)\}, \forall n. \quad (2.9)$$

Pode-se observar que  $\delta$  contém o conjunto dos caminhos em que a origem se conecta ao infinito:  $\{|C| = \infty\} \subset \delta$ .

$$\{|C| = \infty\} = \{\omega_{O,\infty} : O \mapsto \infty\} \subset \{\omega_{O,\partial B_n} : O \leftrightarrow \partial B_n\}, \forall n.$$

Observando que  $|\partial B_n|$  representa o número de vértices que formam a superfície da caixa hipercúbica. Considerando também que não existem *loops*, ou seja, um dado vértice só participa uma única vez do caminho, tem-se:

$$\theta(\bar{p}) \leq P(\omega_{O,\partial B_n} : O \leftrightarrow \partial B_n), \quad (2.10)$$

Onde  $P(\omega : O \leftrightarrow \partial B_n)$  representa a probabilidade dos caminhos possíveis que ligam a origem  $O$  a fronteira da caixa  $\partial B_n$ .

O número de caminhos até a fronteira pode ser majorado por,

$$|\partial B_n| \times 2d \times (2d - 1)^{|\omega_i| - 1}.$$

A seguir vai-se detalhar essas componentes:

- $2d$  - Pois, partindo da origem, a informação têm  $2d$  possíveis vértices de destino.
- $|\omega_i|$  - Representa o tamanho do caminho, ou seja a quantidade de vértices que existe entre a fronteira e a origem, contando apenas caminhos do tamanho  $i$ , observando que neste contexto:  $[|\omega_i| - 1]$  o vértice da origem já foi levado em conta.
- $(2d - 1)^{|\omega_i| - 1}$  - Representa o número de opções para cada vértice, exeto a origem, após a partida da informação, dado que não se pode ter *loops*.
- $|\partial B_n|$  - Denota o número dos possíveis vértices de chegada na borda da caixa.

Como cada elo está aberto com probabilidade  $\bar{p}$  e são independentes entre si, tem-se que:

$$P(\omega_i) = \bar{p}^{|\omega_i|}. \quad (2.11)$$

Resta também perceber que o menor caminho  $\omega_i$  terá tamanho  $n$ , ou seja,  $i \geq n$ .

$$P(\omega_{O,\partial B_n} : O \leftrightarrow \partial B_n) \leq \sum_{i \geq n} |\partial B_n| \times 2d \times (2d - 1)^{|\omega_i| - 1} \times \bar{p}^{|\omega_i|}. \quad (2.12)$$

Pode-se destacar algumas partes da Equação 2.12. Substituindo em 2.10.

$$\theta(\bar{p}) \leq \frac{|\partial B_n| \times 2d}{(2d - 1)} \sum_{i \geq n} (2d - 1)^{|\omega_i|} \times \bar{p}^{|\omega_i|}. \quad (2.13)$$

Considerando  $|\omega_i| = i$  e levando nosso somatório até o infinito na Equação 2.13, tem-se a soma de uma Progressão Geométrica Infinita, e se condicionar  $i - n = m$ . Desta maneira a equação 2.13 se apresenta como

$$\begin{aligned}\theta(\bar{p}) &\leq \frac{|\partial B_n| \times 2d}{(2d-1)} \times [(2d-1)\bar{p}]^n \sum_{m \geq 0} [(2d-1)\bar{p}]^m \\ \theta(\bar{p}) &\leq \frac{|\partial B_n| \times 2d}{(2d-1)} \times [(2d-1)\bar{p}]^n \times \frac{1}{1 - [(2d-1)\bar{p}]}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Adotando a condição  $(2d-1)\bar{p} < 1$  para se obter a Equação 2.14. Pode-se encontrar uma cota superior para a Equação 2.14, usando o fato de estar trabalhando em uma caixa  $d$ -dimensional de lado  $2n$ . Notando que uma esfera  $d$ -dimensional de Raio  $2n$  tem área superficial  $(C_d n^{d-1})$  maior que a área da superfície da nossa caixa. Temos, portanto:  $|\partial B| \leq C_d n^{d-1}$ , de onde deduz a Equação 2.15,

$$\theta(\bar{p}) \leq \frac{2dC_d}{1 - (2d-1)\bar{p}} \times n^{d-1} [(2d-1)\bar{p}]^n. \quad (2.15)$$

Como a Equação 2.15 vale para qualquer  $n$ , pode-se fazer  $n$  tender para o infinito ( $n \rightarrow \infty$ ) e como tem a condição  $(2d-1)\bar{p} < 1$ . Finalmente, pode-se afirmar que se  $0 \leq \bar{p} < \frac{1}{2d-1}$  então  $\theta(\bar{p}) = 0$ .

Para provar o item (2) da proposição 2.1, tem que usar a Proposição 2.2.

**Proposição 2.2**  $\theta(\bar{p}, d)$  é uma função não crescente da dimensão  $d$ .

### Prova da proposição 2.2

Pode-se construir o modelo de percolação em  $d$  dimensões em um hiperplano  $d$ -dimensional da rede  $(d+1)$ -dimensional contendo a origem. Para tanto, declara-se fechados os elos ligando o hiperplano ao resto do espaço. Chama-se de  $C'$  o aglomerado da origem neste modelo. É fácil ver que  $C' \subset C$  e assim:

$$\theta(\bar{p}, d+1) = P_{\bar{p}, d+1}(|C'| = \infty) \leq P_{\bar{p}, d}(|C| = \infty) = \theta(\bar{p}, d).$$

### Prova da proposição 2.1, item (2)

Segue da proposição 2.2 que, para provar a segunda afirmação da proposição 2.1, é suficiente provar para  $d = 2$ . Além disto, como  $\theta(\bar{p}) = 1 - P(|C| < \infty)$ , é necessário mostrar que  $\exists P_{sup}; P_{sup} > 0 \Rightarrow P(|C| < \infty) < 1; \forall \bar{p} > P_{sup}$ .

Utilizando um artifício nesta parte, faz-se uso da rede dual <sup>2</sup> de  $\mathbb{V}^2, \mathbb{Z}_*^2 = \mathbb{Z}^2 + (1/2, 1/2)$  [4].

---

<sup>2</sup>Tem-se como referência para consulta neste assunto o livro de Bella Bollobas: Modern Graph Theory, editora Springer.

**Definição 2.8** Um grafo dual  $G'$  de um grafo planar  $G$  é um grafo que tem um vértice por cada região de  $G$ , e um elo para cada elo em  $G$  que une duas regiões adjacentes.

Na Figura 2.5, é fácil ver que se pode associar cada elo da rede  $\mathbb{Z}^2$  a um elo correspondente na rede dual, em uma relação 1 a 1.

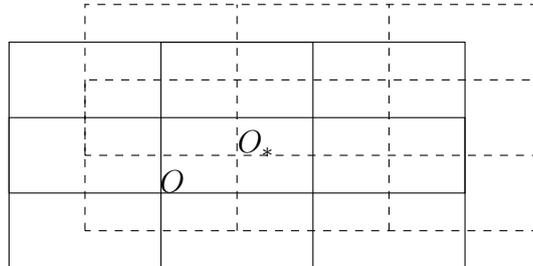


Figura 2.5: Rede dual

Define-se um modelo de percolação na rede dual ( $\mathbb{Z}_*^2$ ), baseado no modelo em  $\mathbb{Z}^2$ , declarando os elos  $e_{i_*}$  da rede dual abertos (com probabilidade  $1 - \bar{p}$ ) e fechados (com probabilidade  $\bar{p}$ ) conforme os  $e'_i$ s estejam abertos ou fechados. Criando um circuito dual, como na Figura 2.6. Notando que a existência de um circuito  $\gamma$  de elos fechados na rede dual ao redor da origem está relacionada com a existência de uma aglomeração finita de elos abertos contendo a origem em  $\mathbb{Z}^2$ . Denotando  $\gamma \odot O$  como sendo um circuito Gama que contém a origem. Portanto, tem-se que  $P(|C| < \infty) = P(\exists \gamma \odot O)$ , e como  $1 = P(|C| < \infty) + P(|C| = \infty)$ , conclui-se que  $P(|C| = \infty) > 0$  sempre que  $P(\exists \gamma \odot O) < 1$ , e é justamente o que se pretende mostrar.

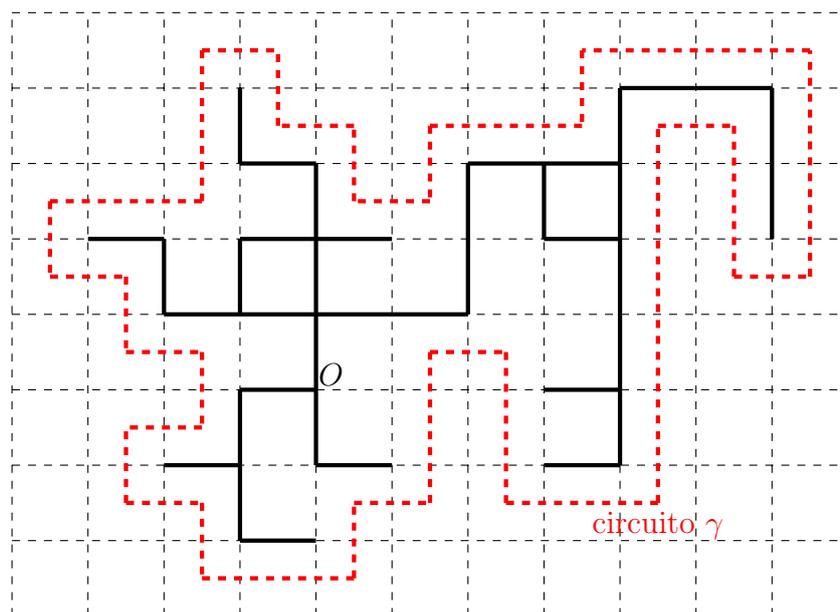


Figura 2.6: Circuito dual ( $\gamma$ ), representado pelas linhas tracejadas vermelhas.

Observe que:

$$P(\exists \gamma \odot O) = \sum_{\gamma} P(\gamma \odot O) \leq \sum_{n \geq 4} \sum_{|\gamma|=n} P(\gamma \odot O).$$

A primeira soma refere-se a todos os circuitos fechados  $\gamma$  de elos fechados na rede dual ao redor da origem. A segunda soma começa com 4 porque este é o menor tamanho de circuito possível ao redor da origem. A probabilidade dentro do último somatório depende do comprimento  $n$  do circuito, e vale  $(1 - \bar{p})^n$ . O número de circuitos de comprimento  $n$  na rede dual ao redor da origem é no máximo igual a  $(n \times 4 \times 3^{n-1})$  pois, a partir de um vértice da rede dual teremos inicialmente 4 direções para escolher o elo inicial e, depois desta escolha, tem no máximo 3 escolhas, sendo  $n$  o número máximo de possibilidades. Além disso, tem, no máximo  $n^2$  possíveis escolhas do vértice inicial. Desta forma, obtém-se:

$$P(|C| < \infty) \leq \frac{4}{3} \sum_{n \geq 4} n^2 [3(1 - \bar{p})]^n. \quad (2.16)$$

A expressão do lado direito da desigualdade 2.16 é uma função contínua e decrescente de  $\bar{p}$  para valores de  $\bar{p}$  maiores que  $\frac{2}{3}$ , e se anula quando  $\bar{p} = 1$ . Assim, pode-se concluir que existe  $p_{sup} < 1$  tal que a soma acima é estritamente menor que 1 para  $\bar{p} > p_{sup}$ , concluindo a prova.

Notando que a prova da proposição 2.1 fornece cotas superiores e inferiores para  $p_c$ , dependentes da dimensão e dadas por:

$$\frac{1}{2d - 1} \leq p_c(d) \leq p_{sup}. \quad (2.17)$$

## 2.2.3 Decaimento exponencial da função conectividade

**Definição 2.9** *A função conectividade entre os vértices  $x$  e  $y$  é definida como a probabilidade de haver um caminho de elos abertos conectando estes dois pontos, isto é,*

$$\tau_{xy} \equiv P_{\bar{p}}\{x \longleftrightarrow y\}. \quad (2.18)$$

### 2.2.3.1 Cálculo de $\tau_{xy}$ em dimensão $d = 1$

Para a dimensão  $d = 1$  e  $\bar{p} > 0$ , pode-se observar que

$$\tau_{xy} = \bar{p}^{\|x-y\|} = e^{-(\ln \frac{1}{\bar{p}})\|x-y\|}. \quad (2.19)$$

Notando que  $0 < \ln \frac{1}{\bar{p}} < \infty$  para valores  $0 < \bar{p} < 1$  e observando que a conectividade se anula para  $\bar{p} = 0$ , é fácil concluir que a conectividade decai exponencialmente  $\forall \bar{p}$  no intervalo  $0 \leq \bar{p} < 1$ .

### 2.2.3.2 Decaimento exponencial de $\tau_{xy}$ em dimensão $d > 1$

Primeiro deve-se mostrar que ela não pode cair a uma taxa mais rápida que exponencial. Para isto, precisa-se da desigualdade FKG (Fortuin-Kasteleyn-Ginibre) [6].

**Teorema 2.2 (Desigualdade FKG)** *Se  $A$  e  $B$  forem eventos crescentes, então:*

$$P(A \cap B) \geq P(A)P(B).$$

Observe que o evento  $\{x_1 \leftrightarrow x_{i+1}, i = 1, 2, \dots\}$  é crescente. Aplicando diretamente a desigualdade FKG obtém-se,

$$\begin{aligned} \tau_{xy} = P(x \leftrightarrow y) &\geq P(x \leftrightarrow x_1 \text{ e } x_1 \leftrightarrow x_2 \text{ e } x_2 \leftrightarrow x_3 \text{ e } \dots \text{ e } x_{n-1} \leftrightarrow y) \\ &\geq \prod_{i=0}^{n-1} P(x_i \leftrightarrow x_{i+1}) \geq \bar{p}^n = \bar{p}^{\|x-y\|}, \forall n \in \mathbb{N}. \\ &\geq e^{-(\ln \frac{1}{\bar{p}})\|x-y\|}. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Para valores de  $\bar{p}$  no intervalo  $0 < \bar{p} < 1$  conclui que, se  $\tau_{xy}$  decai para zero com a distância  $\|x - y\|$ , então o decaimento é no máximo exponencial. Dessa forma, só resta provar que a conectividade de fato decai e para isto será necessário exigir que  $\bar{p}$  seja pequeno.

Sejam  $x_1, x_2, \dots, x_{2d}$  os  $2d$  primeiros vizinhos de  $x$ . Então:

$$\begin{aligned} \tau_{xy} &= P\{(x \leftrightarrow x_1 \text{ e } x_1 \leftrightarrow y) \text{ ou } \dots \text{ ou } x \leftrightarrow x_{2d} \text{ e } x_{2d} \leftrightarrow y\} \\ &\leq \sum_{i=1}^{2d} P(x \leftrightarrow x_i \text{ e } x_i \leftrightarrow y) \leq \bar{p} \times \sum_{i=1}^{2d} P(x_i \leftrightarrow y) \\ &\leq \bar{p} \times 2d \times P(x_{mx} \leftrightarrow y). \end{aligned} \quad (2.21)$$

Na Equação 2.21,  $x_{mx}$  corresponde ao vizinho de  $x$  para o qual a probabilidade  $P(x_i \leftrightarrow y)$  é máxima. Aplicando a desigualdade iterativamente, vem que

$$\tau_{xy} \leq (2d\bar{p})^{\|x-y\|}, \quad (2.22)$$

E daí, conclui-se que  $\tau_{xy}$  decai exponencialmente se  $2d\bar{p} < 1$ .

Os elementos obtidos nessa seção podem ser resumidos no Teorema 2.3.

**Teorema 2.3** *Suponha que  $0 < \bar{p} < \frac{1}{2d}$ . Então existem constantes estritamente positivas  $\bar{m} = \bar{m}(d, \bar{p})$  e  $\underline{m} = \underline{m}(d, \bar{p})$  tais que:*

$$\exp(-\bar{m}\|x - y\|) \leq \tau_{xy} \leq \exp(-\underline{m}\|x - y\|).$$

Designando por  $x$  o vértice que tem distância  $n$  da origem, ou seja  $\|O \leftrightarrow x\| = n$ , localizado em um dos eixos coordenados da rede  $\mathbb{Z}^2$ . Pode-se expressar como

$$\underline{m} \leq -\frac{\ln \tau_{Ox}}{n} \leq \bar{m}, \quad (2.23)$$

e as cotas exponenciais que se pode obter são  $\underline{m} = \ln(\frac{1}{\bar{p}})$ ;  $\bar{m} = \ln(\frac{1}{2d\bar{p}})$ .

**Proposição 2.3** *O limite*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ -\frac{\ln \tau_{Ox}}{n} \right],$$

Existe e é não negativo para todo  $0 < \bar{p} < 1$ .

**Prova da Proposição 2.3**

Considere que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( -\frac{\ln \tau_{Ox}}{n} \right) \equiv m(\bar{p})$ , e  $m(p) \geq 0$ ;  $\forall 0 < \bar{p} < 1$ . Note que  $m(\bar{p})$  não depende do eixo coordenado em que  $x$  pertence. Para provar a proposição 2.3, lembrar que, devido à invariância translacional, e usando a Desigualdade FKG, tem-se:

$$\tau_{Ox} \geq \tau_{Om} \cdot \tau_{mx} = \tau_{Om} \tau_{O(x-m)},$$

que é equivalente a

$$-\ln \tau_{Ox} \leq -\ln \tau_{Om} - \ln \tau_{O(x-m)}.$$

A sequência acima é chamada de sub-aditiva. É um fato geral que se  $\{a_m\}$  é uma sequência sub-aditiva então o seguinte limite existe, provando a proposição 2.3.

$$\lim_{m \rightarrow \infty} -\frac{a_m}{m}.$$

Como existe o limite  $-\ln \frac{\tau_{Ox}}{n}$ , o Teorema 2.3 diz que  $m(\bar{p}) > 0$ ;  $\forall \bar{p} < \frac{1}{2d}$ .

## 2.2.4 Caracterização da fase subcrítica

A função conectividade  $\tau_{xy}$ , tem uma estreita relação com a média estatística (Esperança matemática) do tamanho do aglomerado da origem e também com a probabilidade de percolação. Obviamente essas relações dependem do parâmetro  $\bar{p}$ .

**Definição 2.10** *Define-se a susceptibilidade do modelo, denotada  $\chi(\bar{p})$ , como sendo o valor esperado do tamanho do aglomerado aberto contendo a origem:*

$$\chi(\bar{p}) = E_{\bar{p}}(|C|) = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot P(|C| = n) + \infty \cdot P(|C| = \infty). \quad (2.24)$$

É preciso argumentar que  $\chi(\bar{p})$  é monótona e não decrescente. Pode-se usar outra expressão que é equivalente a Equação 2.24, para sintetizar a susceptibilidade:

$$\chi(\bar{p}) = \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} \tau_{Ox}. \quad (2.25)$$

Segue que se  $\bar{p} < \frac{1}{2d}$  então  $\chi(\bar{p}) < \infty$ . Mas por (2.24),  $\chi(\bar{p}) = \infty$  se  $\bar{p} > p_c$ . Logo, pode-se definir outro ponto crítico ( $\pi_c$ ) para o modelo e verificar se podem existir dois pontos críticos. Desta forma, o valor do parâmetro para o qual a esperança do tamanho do aglomerado torna-se infinita será outro ponto crítico  $p_c^* = \pi_c$ .

**Definição 2.11** *Existe um valor crítico  $\pi_c$  tal que:*

$$\pi_c \equiv \sup\{p : \chi(\bar{p}) < \infty\}.$$

A princípio não se sabe o valor de  $\chi(\pi_c)$ . Notando que  $\pi_c \leq p_c < 1$ . A região onde o parâmetro  $\bar{p}$  é menor do que  $\pi_c$  pode ser também chamada de *fase subcrítica*.

**Teorema 2.4 (Unicidade do ponto crítico)** *Seja  $\pi_c$  e  $p_c$ , então vale:*

$$\pi_c = p_c.$$

O Teorema 2.4 foi provado por Aizerman [1].

**Teorema 2.5**  $\tau_{xy}$  *decai exponencialmente, se e somente se,  $\chi(\bar{p}) < \infty$ .*

**Prova do Teorema 2.5**

Se  $\chi(\bar{p}) < \infty$ , pode-se fixar  $n$  suficientemente grande de modo que:

$$\eta \equiv \sum_{x: \|x\|=n} \tau_{Ox} < 1.$$

Seja  $\Lambda_n = \{x \in \mathbb{Z}^d \mid \|x\| = n\}$ . Tomando  $x$  e  $y$  tais que  $\|x - y\| > n$  e aplicando a Desigualdade de Simon-Lieb (Teorema 2.7):

$$\tau_{xy} \leq \sum_{u \in \partial\Lambda_n} \tau_{xu}^{\Lambda_n} \tau_{uy} \leq \left( \sum_{u \in \partial\Lambda_n} \tau_{xu} \right) \tau_{uy}^{max}.$$

Seja  $L_n$  a parte inteira de  $\|x - y\|/n$ . Aplicando a desigualdade SL, obtém-se a cota superior:

$$\tau_{xy} \leq \eta^{\frac{\|x-y\|}{L_n}} = e^{-(\frac{1}{L_n} \ln \frac{1}{\eta})\|x-y\|}.$$

Reciprocamente se a conectividade decai exponencialmente,  $\tau_{xy}(\bar{p}) \leq \exp(-m(\bar{p})\|x-y\|)$ , com  $\bar{p} > 0$ , conclui-se que:

$$\begin{aligned} \chi(\bar{p}) &= \sum_n \sum_{x:\|x\|=n} \tau_{Ox} \leq \sum_n e^{-m(\bar{p})n} \|\partial\Lambda_n\| \\ &\leq C_d \sum_{n \geq 0} n^{d-1} e^{-m(\bar{p})n} < \infty, \forall \bar{p}. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Resta ainda entender como a conectividade se comporta no ponto crítico  $\pi_c$ .

**Definição 2.12** *Sejam dois eventos crescentes  $A$  e  $B$  dependentes apenas de um número finito de elos.  $A$  e  $B$  então ocorrem disjuntamente, para uma dada configuração  $\omega$ , se existirem dois caminhos abertos disjuntos em  $\omega$ , tais que o primeiro garanta a ocorrência de  $A$  e o segundo a ocorrência de  $B$ . Essa ocorrência disjunta de  $A$  e  $B$  é denotada por  $A \circ B$ .*

**Observação:** Para dois eventos  $A, B \subseteq \Omega$ :

$$A \circ B = \{\omega \in \Omega; \exists I = I(\omega) \subset \{1, 2, \dots, m\} \text{ tal que } C_{\omega_I} \subset A \text{ e } C_{\omega_{I^c}} \subset B\}.$$

**Teorema 2.6 (Desigualdade BK - Berg e Kesten)** *Se  $A$  e  $B$  são ambos eventos crescentes ou decrescentes, então vale a desigualdade*

$$P(A \circ B) \leq P(A)P(B).$$

Pode-se observar que a desigualdade BK é complementar a FKG, pois enquanto uma fornece cota superior a outra fornece cota inferior para  $P(A) \cdot P(B)$ . Como consequência do Teorema 2.6 tem-se a desigualdade de Simon-Lieb, que é resumida no Teorema 2.7.

**Teorema 2.7 (Desigualdade SL - Simon-Lieb)** *Seja  $\Lambda$  uma caixa quadrada contendo a origem, e  $x$  um vértice na fronteira  $\partial\Lambda$  da caixa, então:*

$$\tau_{Ox} \leq \sum_{x \in \partial\Lambda} \tau_{Ox}^\Lambda \tau_{xy}.$$

Usado no Teorema 2.7 a notação  $\tau_{Ox}^\Lambda = P(O \leftrightarrow \partial\Lambda)$  representa apenas os elos dentro da caixa  $\Lambda$ .

**Teorema 2.8** *No ponto crítico  $\pi_c$  tem-se  $m(\pi_c) = 0$  ou, equivalentemente,  $\chi_{\pi_c} = \infty$ .*

**Prova Teorema 2.8**

Suponha, por contradição, que  $m(\pi_c) > 0$ . Assim,  $\tau_{Ox}(\pi_c)$  decai exponencialmente e pelo Teorema 2.5 tem-se  $\chi(\pi_c) < \infty$ . Como na demonstração do Teorema 2.5, existiria uma caixa  $\Lambda_n$  suficientemente grande para que

$$\sum_{x \in \partial\Lambda_n} \tau_{Ox}(\pi_c) < 1,$$

e como  $\tau_{xu}^{\Lambda_n} \leq \tau_{xu}$ , vem que

$$\sum_{x \in \partial\Lambda_n} \tau_{Ox}^{\Lambda_n}(\pi_c) < 1.$$

Portanto, para  $\bar{p} > (\pi_c)$ , levando em conta a continuidade do parâmetro  $\bar{p}$ , também vale

$$\sum_{x \in \partial\Lambda_n} \tau_{Ox}^{\Lambda_n}(\bar{p}) < 1. \quad (2.27)$$

Aplicando a desigualdade SL e usando o resultado anterior:

$$\tau_{Ox}(\bar{p}) \leq \sum_{x \in \partial\Lambda_n} \tau_{Ox}^{\Lambda_n}(\bar{p})\tau_{xu}(\bar{p}),$$

desta forma obtemos que  $\tau_{Ox}(\bar{p})$  decai exponencialmente para algum  $\bar{p} > \pi_c$ . Isto implicaria que  $\chi(\bar{p}) < \infty$ , o que é uma **contradição**.

**Observação:** Segue do Teorema 2.8 que se a função conectividade decai para zero com a distância quando calculada no ponto  $\pi_c$ , então este decaimento não pode ser exponencial. Supondo-se, que decai polinomialmente, ela é da forma:

$$\tau_{Ox} \approx \frac{1}{\|x\|^{\eta+d-2}}. \quad (2.28)$$

Então conclui-se que  $\eta \leq 1$ .

**Teorema 2.9**  *$\theta(\bar{p})$  é uma função contínua à direita em todo intervalo  $[0, 1]$ .*

**Prova Teorema 2.9**

Seja  $\theta_n(\bar{p}) \leq P(O \leftrightarrow \partial\Lambda_n)$ . Notando que:

- i)  $\theta_n(\bar{p})$  é contínua em todo intervalo  $[0, 1]$ ;
- ii)  $\theta_n(\bar{p})$  é uma sequência decrescente de funções;
- iii) Para cada  $n$  fixo,  $\theta_n(\bar{p})$  é crescente em  $\bar{p}$ ;

iv)  $\forall \bar{p} \in [0, 1]$ ,  $\theta(\bar{p}) \leq \theta_n(\bar{p})$  e ainda mais,  $\theta(\bar{p}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \theta_n(\bar{p})$ .

Conclui-se que  $\theta(\bar{p})$  decrescente em  $\bar{p}$  pois  $\theta(\bar{p}) \leq \theta_n(\bar{p}) \leq \theta_n(r)$  para  $\bar{p} < r$ , tomando o limite, tem-se  $\theta(\bar{p}) \leq \theta(r)$ . Considere uma sequência  $p_n$  convergindo para  $p_0$  pela direita,  $p_n \searrow p_0$ . Como  $\theta(\bar{p})$  é decrescente,  $\theta(p_n)$  é uma sequência decrescente minorada por  $\theta(p_0)$ , então  $\theta(p_n)$  converge para algum valor  $\theta_0$ . Querendo, agora, mostrar que  $\theta(p_0) = \theta_0$ . Por um lado, é claro que  $\theta(p_0) \leq \theta_0$  e se  $\theta(p_0) < \theta_0$  poder-se-ia encontrar um  $n$  suficientemente grande de modo que  $\theta(p_0) < \theta_n(p_0) < \theta_0$ , pois  $\theta_n(p_0) \rightarrow \theta(p_0)$  e um  $m$  suficientemente grande para que  $\theta_n(p_0) < \theta_n(p_m) < \theta_0$  pois  $p_m \rightarrow p_0$ . Logo, isso é uma **contradição**.

## 2.3 Modelos de Percolação

Aqui, tem-se algumas apresentações sobre o comportamento estrutural das redes, bem como a justificativa acerca de seus desenvolvimentos.

Quando se fala de modelos de percolação faz-se referência a uma classificação que tem tomado corpo nos últimos anos. Outrora, ao modelar um evento usando percolação era comum o autor chamar essa modelagem de modelo de percolação. Assim ao falar de modelos de percolação pode vir a ideia errônea de que se deve citar algumas modelagens famosas como modelos de percolação. Entretanto será adotada uma forma de classificação que leva em conta as características de interação na rede, e não a modelagem que ela possa produzir.

Algumas modelagens como o modelo de Ising [20] e a modelagem de poros de Broadbent [7] são bem famosas, e são sempre citadas em trabalhos de percolação. Esses trabalhos são exemplos do uso do modelo de percolação em sítios e elos. Portanto, as modelagens, nessa forma de classificação, não são modelos, elas são meramente frutos de um modelo.

### 2.3.1 Classificação dos modelos de percolação

Os modelos de percolação podem ser classificados quanto a regularidade. O termo regularidade é usado no trabalho de Jatene [21], para indicar que uma rede de percolação é homogênea. Contudo, pode-se fazer uso dela para classificar os modelos.

A regularidade diz respeito quanto a homogeneidade do modelo, assim pode-se entender que: quanto a regularidade, os modelos são classificados em homogêneo e heterogêneo.

## 2.3.2 Modelos homogêneos

No modelo homogêneo a probabilidade de um sítio ou elo estar ativo é constante, sendo o mesmo valor para qualquer sítio ou elo da rede. Diz-se que um sítio ou elo da rede tem probabilidade  $\bar{p}$  de estar ativo.

A maioria das modelagens feitas em percolação são realizadas em modelos homogêneos, isto porque a modelagem é simples e facilmente implementada. Por esse motivo as modelagens homogêneas são a base para percolação e possuem um grande potencial para modelar muitos eventos.

Um outro ponto que se deve observar é a diferença entre modelo de percolação e rede de percolação. O modelo diz respeito a forma de interação entre os elementos da rede, enquanto que rede é a estrutura formada pelos sítios e elos.

Voltando-se para estes modelos, destaca-se algumas redes que se encaixam nessa regularidade. Tem-se vários formatos de rede de percolação. Em teoria dos Grafos estuda-se grande parte delas, tais como: Rede de Bethe, Quadrada, Triangular, Rede colmeia, etc. Em [14], pode-se ver o desenvolvimento dessa teoria de maneira simples e sucinta.

### 2.3.2.1 Percolação de elos

O modelo de percolação homogêneo de elos trabalha atribuindo uma probabilidade aos elos de estarem ativos. Para criar uma rede de percolação é preciso conceber alguns elementos para essa rede, tais como: sítios e elos, como na rede hipercúbica  $d$ -dimensional na seção 2.1.3. Desta maneira tem-se uma estrutura que possui todos os elementos de rede.

Ao passo que se cria a rede com seus elos e nós, precisa-se estabelecer algumas condições. Dados dois pontos  $x$  e  $y$ , dessa rede. A condição  $\|x - y\| = 1$ , significa que se trata de um modelo de percolação de primeiros vizinhos, ou seja, a condição é que apenas sítios vizinhos podem passar atividade para outros vizinhos, formando os elos apenas entre sítios próximos.

Para finalizar as condições, confere-se ao elo, a propriedade ativo ou inativo. Assim, associa-se uma variável  $\omega_e$  que terá valor 1, caso o elo esteja ativo, ou valor zero, caso contrário. Desta maneira, diz-se que cada elo  $\omega_e = 1$  da rede estará ativo com probabilidade  $\bar{p}$ . Na hipótese de  $\omega_e = 0$ , o elo é inativo com probabilidade  $1 - \bar{p}$  de ocorrer. Além disso, assume-se que o estado de um elo não será afetado por quaisquer outros elos da rede obtendo, assim, o modelo de percolação de elos independentes.

Criando uma rede infinita, juntamente com a independência dos elos e a unicidade do parâmetro  $\bar{p}$  (o mesmo  $\bar{p}$  para todos os elos), garante a invariância translacional da rede. Isso significa que a origem nada tem de especial, isto é, pode-se

tomar qualquer sítio da rede como a origem.

É importante notar que a percolação de elos também pode ser estendida aos sítios, bastando para tal atribuir a eles a propriedade de ativo e inativo conforme se estabeleceu para os elos. Feito esse passo agora tem-se os sítios ativos com probabilidade  $\bar{p}$  e inativos com probabilidade  $1 - \bar{p}$ .

### 2.3.2.2 Percolação de sítios

Pode-se adicionar o caráter aleatório dos elos aos sítios da rede, e desta forma passar a ter percolação nos sítios da rede. Neste contexto, pode-se também, atentar para os conceitos básicos já estudados para percolação de elos. Conceitos como caminho e conexão de elementos (conexão de vértices) são adotados naturalmente neste tipo de percolação.

As formas de percolação elo e sítios, não são idênticas. Embora provar isso exija bastante esforço matemático, ainda assim é verdade para todas as redes. Estudos mostram que ambas possuem transição de fase diferentes e por tanto  $p_c$ , distintos [22]. E também, vale a seguinte desigualdade  $p_c(\text{elos}) < p_c(\text{sítios})$ . Onde, o ponto crítico da percolação em elos é menor que o da percolação de sítios.

### 2.3.2.3 Percolação orientada

Esse tipo de percolação é marcado pelo fato de o caminho de percolação obedecer a um curso ou rumo predeterminado. O caso de uma rolha na base de um tubo vertical com água, onde a gravidade faz pressão sobre a água que tentará passar através da rolha usando como caminho os poros da rolha.

No caso descrito a percolação vai de cima para baixo mas podemos ter outras formas de orientação como da esquerda para direita ou vice-versa. Este modelo, também apresenta transição de fase [18].

## 2.3.3 Modelos heterogêneos

A percolação heterogênea ou não homogênea recebe esse nome pelo fato de seus vértices possuírem diferentes probabilidades de estarem conectados. Podemos orientar uma rede de percolação de maneira que, para uma direção a probabilidade de termos um elo aberto seja diferente da de outro elo para outra direção. A percolação com probabilidade diferente de sítio pra sítio e é feita com certa cautela, pois, essa diferença é controlada escolhendo-se uma direção e atribuindo a esta certa probabilidade. A referida probabilidade é dada para que seus sítios estejam abertos com essa probabilidade e para seu complementar os sítios estejam fechados.

Adiante, vai-se apresentar um tipo de percolação heterogênea através de duas redes, a Rede Quadrada e a Rede Triangular, a fim de mostrar a diversificada vari-

idade de modelos heterogêneos. A rede quadrada recebe esse nome pela disposição de seus vértices e a formação de seus elos que possuem semelhança a um quadrado. Enquanto, a Rede triangular possui esse nome pela semelhança de sua estrutura com triângulos. Assumindo que essas duas Redes estão contidas (imersas) no plano  $\mathbb{R}^2$ , e que os elos são segmentos de reta no plano [17].

### 2.3.3.1 Elo vertical e elo horizontal

Ao longo desse trabalho, fixou-se a probabilidade de um elo estar aberto ou não. É natural que haja questionamento sobre a variabilidade dessa probabilidade de sítio para sítio. Trabalhando com diversas redes, pode-se imaginar modelos espaciais com elos verticais e horizontais, ambos com probabilidades diferentes de estarem abertos ou fechados.

Na rede quadrada  $\mathbb{Z}^2$  toma-se dois parâmetros,  $p_v$  e  $p_h$  que designam a probabilidade de um elo vertical e um horizontal, respectivamente, estarem abertos. O modelo "elo vertical e elo horizontal" ( $\mathbb{Z}^2$ ) também possui transição de fase que ocorre na superfície  $p_v + p_h = 1$  do parâmetros [17].

### 2.3.3.2 Rede quadrada não homogênea $\mathbb{L}^2$

Considere a rede quadrada  $\mathbb{L}^2$ , e que  $\bar{p} = (p_h, p_v) \in [0, 1]^2$ . Declara-se cada elo horizontal e vertical para ser aberto com probabilidade  $p_h$  e  $p_v$ , e fechados para seus complementares, respectivamente. Declarando independência entre elos. Denota-se  $P_{\bar{p}}$  como a medida de probabilidade associada ao modelo, quanto à probabilidade de percolação é denotada por:

$$\theta(\bar{p}) = P_{\bar{p}}(0 \leftrightarrow \infty). \quad (2.29)$$

Pode-se analisar esse modelo em muitas partes da mesma maneira que o modelo homogêneo na rede quadrada, embora a total falta de simetria seja um fator que impõe dificuldade. Nem todos os cálculos e ponderações serão apresentados aqui, onde fica restringido a um trato crítico superficial do modelo não homogêneo.

**Teorema 2.10** *Considere a superfície crítica da rede quadrada heterogênea.*

*Suponha que  $\bar{p} = (p_h, p_v)$  é tal que  $p_h, p_v < 1$ . Temos que:*

$$\theta(\bar{p}) \begin{cases} = 0 & \text{se } \varphi(\bar{p}) \leq 1 \\ > 0 & \text{se } \varphi(\bar{p}) > 1 \end{cases},$$

onde:  $\varphi(\bar{p}) = p_h + p_v$ .

A conclusão deste teorema é por vezes chamada informalmente de "Superfície crítica na reta:  $p_h + p_v = 1$ ". O Teorema 2.10 generaliza o cálculo exato de  $p_c(\mathbb{L}^2) =$

$\frac{1}{2}$ . Para provar que a Rede Quadrada tem probabilidade crítica  $\frac{1}{2}$ , precisa-se da propriedade da Dualidade (sua rede Dual).

### 2.3.3.4 Rede triangular não homogênea

Considere a estrutura triangular  $\mathbb{T}$ , da forma da Figura 2.7, no plano. Isto é,  $\mathbb{T}$  é obtido a partir da estrutura de  $\mathbb{L}^2$  por adição de uma ligação diagonal sudeste-nordeste de cada quadrado. Seja  $\bar{p} = (p_h, p_v, p_d) \in [0, 1]^3$ . Declara-se que cada elo horizontal, vertical e diagonal, respectivamente, estão abertos com probabilidade  $p_h, p_v, p_d$ , admitindo elo fechado para os complementares e independência entre elos. Denota-se por  $P_{\bar{p}}$  a medida de probabilidade da Rede e  $\theta(\bar{p})$  a probabilidade de percolação que é dada por:

$$\theta(\bar{p}) = p_{\bar{p}}(0 \leftrightarrow \infty).$$

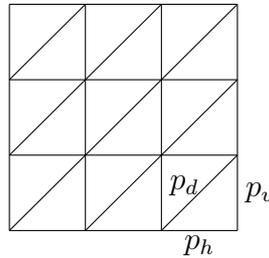


Figura 2.7: Estrutura da rede triangular.

**Teorema 2.11** *Considere a superfície crítica da rede triangular heterogênea. Suponha que  $\bar{p}$  é tal que  $p_h, p_v, p_d < 1$ . Tem-se que:*

$$\theta(\bar{p}) \begin{cases} = 0 & \text{se } \psi(\bar{p}) \leq 1; \\ > 0 & \text{se } \psi(\bar{p}) > 1; \end{cases}.$$

Onde  $\psi(\bar{p}) = p_h + p_v + p_d - p_h p_v p_d$ .

Assim, a superfície crítica da estrutura triangular é o conjunto de todos os  $\bar{p}$  que satisfazem a equação  $\psi(\bar{p}) = 1$ . Este teorema contém vários casos especiais de interesse [18].

- Rede Quadrada  $\mathbb{L}^2$ : Se  $p_d \equiv 0$ , tem-se o Teorema 2.11. Embora o Teorema 2.11, seja mais geral do que o Teorema 2.10, existem provas separadas para ambos.
- Rede Triangular Homogênea  $\mathbb{T}$ : No caso do modelo homogêneo, monta-se  $p_h = p_v = p_d = \bar{p}$ . O valor crítico de  $\bar{p}$  satisfaz  $\psi(\bar{p}, \bar{p}, \bar{p}) = 1$ , onde  $p_c = 2 \sin(\pi/18)$ .

- Rede Hexagonal Não Homogênea  $\mathbb{H}$ : Essa Rede é a Rede Dual da Rede Triangular, sua superfície crítica é dada por,  $\psi(\mathbf{1} - \mathbf{p}) = 1$ . Para o caso Homogêneo a probabilidade crítica é

$$p_c(\mathbb{H}) = 1 - p_c(\mathbb{T}) = 1 - 2 \sin(\pi/18), \quad (2.30)$$

quando  $p_h = p_v = p_d = p$ .

## 2.4 Variáveis aleatórias

Ao caracterizar o espaço amostral de um experimento, nem sempre o resultado obtido é necessariamente um número. De fato, existem alguns resultados nos quais o experimento não representam uma quantidade numérica. Por exemplo, ao descrever uma peça manufaturada, podemos empregar apenas as categorias "defeituosa" e "não defeituosa". Também, ao observar a temperatura durante o período de 24 horas, pode-se simplesmente registrar a curva traçada pelo termógrafo. Contudo, em muitas situações experimentais, têm-se interesse na mensuração de alguma coisa e no seu registro como um número. Mesmo nos casos mencionados acima, pode-se atribuir um número a cada resultado ao experimento. Por exemplo, pode-se atribuir o valor *um* às peças perfeitas e o valor *zero* às defeituosas. Podendo registrar a temperatura máxima do dia, ou a temperatura mínima, ou a média das temperaturas máxima e mínima [27].

Os exemplos acima são bastante típicos, de uma classe muito geral de problemas: em muitas situações experimentais, deseja-se atribuir um número real  $t$  a todo elemento  $s$  do espaço amostral  $\varepsilon$ . Isto é,  $t = T(s)$  é o valor de uma função  $T$  do espaço amostral no espaço dos números reais.

**Definição 2.13** *Sejam  $S$  um experimento e  $\varepsilon$  um espaço amostral associado ao experimento. Uma função  $T$ , que associa a cada elemento  $t \in \varepsilon$  um número real,  $T(t)$ , é denominada variável aleatória.*

Embora  $T(t)$  seja uma função mundialmente conhecida como "variável aleatória (VA)". Nem toda função imaginável pode ser considerada uma variável aleatória, para isso, elas devem ter probabilidades bem definidas, consistentes com os axiomas básicos, 2.1.1. No estudo das variáveis aleatórias o interesse está mais nos valores que  $T$  recebe do que em sua forma funcional.

Referindo-se a variáveis aleatórias, emprega-se quase sem exceção letras maiúsculas, como T, U, V, etc. Contudo, quando se fala do valor que essas variáveis aleatórias tomam, geralmente se usa letras minúsculas como: t, u, v.

## 2.4.1 Variáveis aleatórias discretas

**Definição 2.14** *Seja  $T$  uma variável aleatória. Se o número de valores possíveis de  $T$  for finito ou infinito numerável, denomina-se  $T$  de variável aleatória discreta. A cada possível resultado  $t_i$  associa-se um número  $p(t_i) = P(T = t_i)$ , denominado probabilidade de  $t_i$ , onde:*

- $p(t_i) \geq 0$ , para todo  $i$ .
- $\sum_{i=1}^{\infty} p(t_i) = 1$ .

Isto é, os valores possíveis de  $T$ , podem ser postos em lista como:  $t_1, t_2, \dots, t_n$ . No caso finito, a lista acaba, e no caso infinito numerável, a lista continua indefinidamente. A função  $p$ , definida acima, é denominada função de probabilidade da variável aleatória  $T$ . A coleção de pares  $[t_i, p(t_i)]$ , é algumas vezes denominada *distribuição de probabilidade de  $T$* .

Alguns modelos matemáticos relativamente simples parecem ser capazes de descrever uma classe bastante grande de fenômenos. As VA discretas possuem muitas distribuições de probabilidade dentre elas: Poisson, Geométrica, Pascal ou Binomial Negativa, Hipergeométrica, Multinomial ou Polinomial.

## 2.4.2 Variáveis aleatórias contínuas

**Definição 2.15** *Diz-se que  $T$  é uma variável aleatória contínua, se existir uma função  $f$ , denominada função densidade de probabilidade (fdp) de  $T$  que satisfaça às seguintes condições:*

- $f(t) \geq 0$ , para todo  $t$ ;
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1$ ;
- para quaisquer  $a, b$  com  $-\infty < a < b < +\infty$ , teremos  $P(a \leq t \leq b) = \int_a^b f(t)dt$ .

Essencialmente afirma-se que  $T$  é uma variável aleatória contínua, se  $T$  puder tomar todos os valores em algum intervalo  $(c, d)$ , onde  $c$  e  $d$  podem ser  $-\infty$  e  $+\infty$ , respectivamente. A existência estipulada de uma fdp constitui um artifício matemático, que possui considerável apelo intuitivo e torna os cálculos mais simples. Em relação a isso, também deve-se salientar que, quando se supõe que  $T$  seja uma variável aleatória contínua, trata-se de uma descrição idealizada de  $T$ .

A função  $f(t)$  não representa a medida de probabilidade de  $t$ , somente quando a função for integrada entre dois limites, ela produzirá uma probabilidade.

$$P(c \leq t \leq d) = \int_c^d f(t)dt \quad (2.31)$$

### 2.4.3 Função de Distribuição Acumulada

A função de distribuição acumulada mostra uma maneira de descrever como as probabilidades são associadas aos valores ou aos intervalos de valores de uma variável aleatória. De forma geral, considere o espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ .

O conhecimento da função de distribuição acumulada é suficiente para se entender o comportamento de uma variável aleatória. Mesmo que a variável assuma valores apenas num subconjunto dos reais, a função de distribuição é definida em toda a reta. Ela é chamada de função de distribuição acumulada, pois acumula as probabilidades dos valores inferiores ou iguais a  $t$ .

**Definição 2.16** *Seja  $T$  uma variável aleatória, discreta ou contínua. Define-se a função  $F$  como a função distribuição acumulada da variável aleatória  $T$ , denotada por  $F(t) = P(T \leq t)$ .*

- Se  $T$  for uma variável aleatória discreta:  $F(t) = \sum_j p(t_j)$ ;
- Se  $T$  for uma variável aleatória contínua:  $F(t) = \int_{-\infty}^t f(t)dt$ .

### 2.4.4 Variáveis Aleatórias Bidimensionais

Em muitas situações tem-se o interesse de observar duas ou mais características simultaneamente num mesmo evento. Há a possibilidade dessas duas características interferirem uma na outra, ou simplesmente serem independentes. Contudo, devem ser estudadas conjuntamente através de variáveis aleatórias bidimensionais.

**Definição 2.17** *Sejam  $S$  um experimento e  $\varepsilon$  um espaço amostral associado a  $S$ . Sejam  $p = P(p)$  e  $T = T(t)$  duas funções, cada uma associando um número real a cada resultado  $s \in \varepsilon$ . Denomina-se  $(P, T)$  de variável aleatória bidimensional.*

Seja  $(P, T)$  uma variável aleatória contínua, então a função densidade de probabilidade conjunta  $h$  é uma função que satisfaz às seguintes condições:

- $h(p, t) \geq 0$  para todo  $(p, t) \in \mathbb{R}$ .
- $\int \int h(p, t) dt dp = 1$ .

A função de distribuição acumulada no caso bidimensional é dada por:

**Definição 2.18** *Seja  $(P, T)$  uma variável aleatória bidimensional. A função de distribuição acumulada  $F$  da variável aleatória bidimensional  $(P, T)$  é definida por:*

$$F(p, t) = P(P \leq p, T \leq t) = \int^p \int^t h(p, t) dt dp. \quad (2.32)$$

# Capítulo 3

## Modelos de avalanche

Pedras, neve, lama, grãos e até mesmo alguns minérios podem se mover em grandes quantidades, com muita rapidez e com resultados inesperados. Fenômenos naturais com estas características são considerados avalanches. Existem, também, avalanches relacionadas ao deslocamento de animais ou seres humanos. Estas ocorrem quando um grande número de indivíduos se deslocam rapidamente de um lugar para outro.

A palavra avalanche possui alguns sinônimos como: alude ou avalancha no campo da geologia. Já em relação ao deslocamento de homens e animais pode ser sinônimo de debandada, estouro, romaria. Também são chamadas de movimento de massa, deslizamento, derrocada, desabamento, desmoronamento, aluição, aluimento, enxurrada, profusão, etc.

As avalanches ocorrem naturalmente na maior parte dos casos, porém a ação do homem pode ocasionar ou desencadear o surgimento de avalanches. Os movimentos de massas, na maioria das ocasiões, não podem ser previstos. Todavia, grande parte delas podem ser evitadas, prevenindo a humanidade de catástrofes.

Deslizamentos de grande magnitude são observados na natureza e são responsáveis por grandes desastres em encostas de montanhas onde há ocupação humana. A ação humana pode influenciar a ocorrência de avalanches como no caso da construção de rodovias, prédios e residências em locais de risco, por exemplo. Engenheiros e geólogos possuem equipamentos e saberes que podem evitar as catástrofes geradas pelas avalanches. Evitar construções em áreas propícias a esses fenômenos os riscos de acidentes provavelmente reduziram as ocorrências.

As avalanches podem acontecer em uma simples pilha de areia, onde o movimento das camadas superficiais da pilha de areia podem se estabelecer devido a pequenas perturbações como a adição de mais grãos ou inclinando a pilha. Essas perturbações podem ocasionar avalanches, que são deslizamentos de grãos na superfície de um meio granular provocados por instabilidades. Pequenas perturbações podem ser amplificadas dando origem a grandes deslocamentos de massa.

A modelagem é uma área muito importante dentro das ciências, com aplicações em diversas áreas como engenharias, física e biologia. Usando a modelagem é possível prever até mesmo o comportamento de um simples íon dentro de uma célula do corpo humano. A previsão de avalanches e outros fenômenos, tornam-se importantes para elaboração de tecnologias contra tragédias, e também relevante ferramenta para desenvolvimento de silos, ou outros locais para estocagem e transporte de grãos ou minério.

Na dinâmica de avalanches em pilha de areia, geralmente, os grãos em movimento se restringem a uma camada superficial. Os deslocamentos de grãos podem se dar por meio de um fluxo contínuo de matéria ou por um fluxo intermitente dependendo da intensidade da fonte externa de energia. Este agente externo, que pode ser tanto a adição de novos grãos ou a variação da inclinação da superfície livre, dita sozinho a dinâmica do sistema, visto que perturbações térmicas são insignificantes se comparadas à energia necessária para vencer a barreira entre dois estados de equilíbrio.

As pilhas de minério também possuem avalanches. Ao se depositar grão sobre grão nas pilhas, elas crescem até seu estado de instabilidade onde começam a surgir deslizamentos de grãos que formam as avalanches que se iniciam no topo da pilha e percorrem a extensão de sua superfície, ver Figura 3.1.



Figura 3.1: Pilha de minério de ferro na Vale.

### 3.1 Criticalidade Auto Organizada

Sistemas constituídos de muitos componentes interagindo entre si podem apresentar um tipo interessante de comportamento auto organizado. Tal comportamento recebe o nome de Criticalidade Auto Organizada, *Self Organized Criticality - SOC*.

Eventos com criticalidade auto organizada são caracterizados por uma aparente ausência de parâmetros de controle, sendo orientados para o estado crítico por fenô-

menos coletivos e sucessivos geralmente chamados de avalanches [28]. Experimentos reais com pilha de areia feitos em laboratório não apresentaram evidências de criticalidade devido ao efeito de inércia, uma vez que o grão de areia encontra dificuldade para superar o ângulo de repouso [9]. Este ângulo formado pela superfície livre do material com o plano horizontal, definido pelos grãos menos instáveis e não confinados situados próximos ou na superfície.

O sistema alcança um estado estacionário, onde a pilha passa a ter a inclinação constante, chamada de ângulo de repouso, e a média dos grãos que entram no sistema é comparável com a média dos grãos que o deixam. Neste estado estacionário, o sistema encontra-se também no estado crítico, que é caracterizado por grandes flutuações, não sendo possível prever qual o tamanho e o instante em que as avalanches irão ocorrer. Isto significa que quando deslizamentos locais acontecem, podem ou não ser geradas avalanches de grandes tamanhos envolvendo todo o sistema. O sistema atingiu então, a criticalidade auto organizada.

O modelo da pilha de areia ilustra o surgimento da criticalidade auto organizada em um sistema complexo. Considere um fluxo constante de areia sendo despejado sobre um plano. Inicialmente, a pilha de areia estará baixa, ocorrendo alguns deslizamentos quando o tamanho e a inclinação da pilha começar a aumentar. À medida que a altura da pilha atinge dimensões proporcionalmente maiores que a sua base, deslizamentos maiores começam a acontecer envolvendo todo o sistema, e não apenas os vizinhos locais, até que surge certa forma de organização.

É interessante notar que apesar de se conhecer todas as propriedades do grãos tais como tamanho, massa e formato, isso não é suficiente para entender e prever como e quando estes deslizamentos ocorrerão. Estes deslizamentos são consequência da interação de um grão de areia com seus vizinhos [28].

Existem alguns modelos que tratam da criticalidade em pilhas de areia, entre eles os modelos *BTW*, *Manna*, *Burridge-Knopoff* e *OFC*. Estes modelos são bem detalhados em [28] e [9]. O modelo *BTW*, funciona da seguinte maneira em uma dimensão: define-se um vetor  $h$  de largura  $L$  igual ao tamanho do sistema, onde  $h_i$  representa a altura da pilha na posição horizontal  $i$ . A evolução da inclinação local, dada por  $Z_i = h_i - h_{i+1}$ , é ditada pela seguinte regra que reproduz o crescimento de uma pilha de areia.

$$\begin{aligned} Z_i &\rightarrow Z_i + 1 && \text{quando um grão é adicionado ao sítio } i. \\ Z_{i-1} &\rightarrow Z_{i-1} - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Z_i &\rightarrow Z_i - 2 && \text{quando } z_i \text{ ultrapassar o valor crítico.} \\
Z_{i\pm 1} &\rightarrow Z_{i\pm 1} + 1
\end{aligned}$$

Como em  $1D$ , o estado crítico não se altera, sendo que pequenas perturbações não se propagam por toda extensão do sistema. As perturbações desaparecem após um intervalo de tempo cuja duração segue uma lei de potência, gerando deslocamentos de grãos de várias magnitudes, sem um tamanho característico. O espectro de potências da distribuição do tempo de vida desses deslocamentos varia com  $\frac{1}{f}$  para baixas frequências, o que sugere que essa propriedade, antes atribuída a um ruído, está na verdade associada a uma organização espacial do sistema, que passa a exibir uma estrutura auto similar.

Se pensar em uma pilha de areia composta de grãos esféricos, que não apresentam dispersão no tamanho, é possível um estado altamente ordenado tal que a adição cuidadosa de grãos não é capaz de alterá-lo drasticamente e todo grão adicionado rola pela superfície até deixar o sistema. Esse estado equivale ao estado minimamente estável para o qual evolui o modelo BTW em uma dimensão [26].

No caso de uma rede quadrada, a evolução consiste dos seguintes passos: Cada sítio receberá uma quantidade finita de grãos,  $z(x, y)$  (altura da coluna de areia  $(x, y)$ ), variando de zero até  $z_c$ , onde  $z_c(x, y)$  é um valor crítico a partir do qual acontece um deslizamento.

O modelo BTW foi pioneiro e relevante para a compreensão de fenômenos diversos que apresentam grandes flutuações e são invariantes por transformações de escala. Ele motivou uma série de investigações experimentais da dinâmica de avalanches em meios granulares.

De início, a principal crítica dos autores contra os modelos comumente usados nas simulações de avalanches, se refere à falta de um tratamento adequado para o atrito de rolamento entre as partículas, que é muito relevante no caso de partículas esféricas e é fortemente inibido se os grãos possuem um formato irregular. O atrito de rolamento é um caso específico dentro do atrito dinâmico. Esse tipo de atrito ocorre quando a superfície de um corpo rola sobre a superfície do outro sem escorregar. Contudo o trabalho de Frette [15], mostrou que as características superficiais dos grãos não possuem nenhuma relação com a distribuição de avalanches, o que significa que o atrito de rolamento não é um fator relevante na caracterização do estado crítico. As avalanches foram mensuradas de modo a contemplar todos os eventos por meio da energia potencial dissipada o que livra os resultados dos problemas com atrito de rolamento.

## 3.2 O experimento de Douady e Daerr e o modelo de Hinrichsen

No trabalho de Hinrichsen [19], as avalanches foram criadas via simulação computacional e seus dados comparados com os dados de Douady e Daerr [13] que trabalharam em um experimento real. O experimento de Douady e Daerr usava uma mesa recoberta com veludo onde repousava a sílica (areia) que formava uma camada uniforme por toda extensão da mesa. Inclina-se a mesa até certa angulação e iniciava-se a avalanche com um leve toque na areia do topo da mesa.

A Figura 3.2, mostra a vista lateral da mesa no estado de inclinação em que os grãos começam a rolar. A inclinação será medida em graus e representada por ( $\varphi$ ), na prática essa inclinação serve para romper a barreira do ângulo de repouso dos grãos.

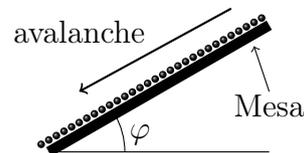


Figura 3.2: Vista lateral da mesa com inclinação  $\varphi$ .

O experimento de Douady e Daerr é um experimento simples, eleva-se uma borda da mesa, conferindo-lhe certa inclinação. Os grãos do topo repousam sobre os grãos da linha de baixo, por isso a camada em baixo concede para a camada do topo energia *potencial de altura* ( $E_p$ ), como na figura 3.3. Nestes moldes os grãos necessitam absorver certa quantidade de energia para entrarem no estado ativo, esta energia inicial é dita *Energia de Barreira* ( $E_b$ ). Um grão ativo é definido como um grão que possui energia maior que a energia de barreira.

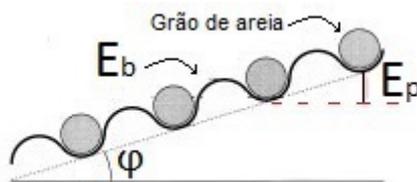


Figura 3.3: Energias do sistema.

### 3.2.1 O experimento de Douady e Daerr

O aparato experimental consiste de um plano inclinado (de aproximadamente 1 m) recoberto por tecido; o ângulo de inclinação ( $\varphi_0$ ) pode variar. Pedacos de sílica (areia) de diâmetro 250-425  $\mu m$  são espalhados uniformemente sobre o plano

e escoam para baixo. Enquanto isso, existe uma camada de espessura  $q = q_d(\varphi_0)$ , consistindo de várias monocamadas individuais que permanece imóvel. Nesta espessura a areia é dinamicamente estável; a espessura  $q_d$  decresce com o aumento do ângulo de inclinação.

Para qualquer ângulo  $\varphi_0$  existe uma espessura  $q_s$  com  $q_s(\varphi_0) > q_d(\varphi_0)$  para além da qual uma camada estática passa a ser instável. A camada não irá escoar espontaneamente, mas se causar um distúrbio no topo, gerando um escoamento próximo a perturbação, o escoamento irá persistir e uma avalanche será gerada, deixando para trás uma camada de espessura  $q_d(\varphi)$ . Esta avalanche tem a forma parecida de um triângulo regular com ângulo de abertura  $\phi$ .

Quando o incremento da inclinação

$$\Delta\varphi = \varphi - \varphi_0. \quad (3.1)$$

diminui, o valor de  $\phi$  diminui, e a área da avalanche também diminui, desaparecendo quando  $\Delta\varphi \rightarrow 0$ . Isto é usado para provar que

$$\phi \sim \varphi^k. \quad (3.2)$$

Se ao invés de aumentar  $\varphi$ , diminuísse o plano para  $\Delta\varphi < 0$ , o sistema, cuja espessura é  $q_d(\varphi_0)$ , acima da espessura de estabilidade dinâmica,  $q_d(\varphi)$ . Nesse caso uma perturbação inicial não iria se propagar, então desapareceria após certo tempo (nem ultrapassaria certo tamanho  $\xi_{\parallel}$  de transiente de avalanche). O desvio  $|\Delta\varphi|$ , que mede o tamanho do transiente da região ativa tende a crescer, assim o decaimento do tamanho deve crescer de acordo com a lei de potência

$$\xi_{\parallel} \sim (-\Delta\varphi)^{k_1}. \quad (3.3)$$

Então, pela areia escorrendo na inclinação  $\varphi_0$ , Douady e Daerr concluíram que havia uma auto organização do sistema crítico. O sistema comporta-se precisamente como uma mudança de fase em relação a mudança de ângulo. Alternando entre um regime estável sem perturbações ( $\varphi < \varphi_0$ ) e um instável ( $\varphi > \varphi_0$ ), onde perturbações propagam-se persistentemente. Este tipo de criticidade auto organizada durante a preparação do processo difere dos modelos convencionais de *SOC* em que uma baixa força direcionada, agindo em uma escala de tempo muito menor que a resposta do sistema dinâmico, causa evolução até o estado crítico.

Uma vez feita esta conexão, é natural associar este sistema com um problema de percolação direcionada. Associando a mudança de fase com  $\bar{p} - p_c$  e assumindo que próximo ao ângulo de preparação o comportamento do sistema de areia é relatado

como um problema de percolação direcionada e se pode associar os parâmetros:

$$\Delta\varphi = \varphi - \varphi_0 \propto \bar{p} - p_c. \quad (3.4)$$

Por isso, o expoente  $k_{\perp}$  deve ser comparado com os valores conhecidos de percolação. O expoente  $k$  na Eq. 3.2, também pode ser medido e comparado com expoentes conhecidos, através da relação:

$$\tan \phi \sim \xi_{\perp} / \xi_{\parallel} \sim (-\Delta\varphi)^{k_{\parallel} - k_{\perp}}. \quad (3.5)$$

### 3.2.2 O modelo de Hinrichsen

Hinrichsen [19] considerou a abordagem de Douady e Daerr, e acrescentou o caráter percolativo assumindo os grãos como sítios de uma rede retangular quadrada. No contexto de Hinrichsen, os grãos são os sítios, logo, os grãos sobre a mesa representam a rede. A rede é formada por quatro lados, porém, os grãos rolam no sentido da gravidade desta maneira o sistema percola em uma direção preestabelecida. O fato dos grãos rolarem para baixo encaixa o modelo como *percolação dirigida* (veja, Figura 3.4).

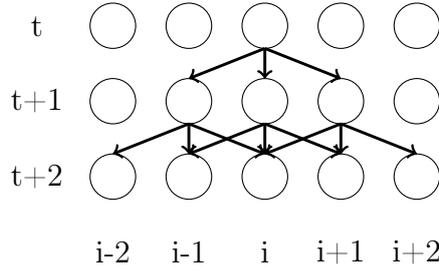


Figura 3.4: Transmissão da energia na rede.

A Figura 3.4, mostra o desenho esquemático do plano, a forma de transmissão da energia entre os grãos e também revela o modelo de referencial para os sítios. Este modelo de referencial identifica um sítio da rede como um par  $(t, i)$ . Naturalmente,  $t$  e  $i$  só admitem valores inteiros ou zero, pois representam uma rede de percolação quadrada. Os valores de  $t$  representam a linha que o sítio está situado e também a distância do sítio para a borda superior, enquanto que  $i$  discrimina a coluna e a distância do sítio em relação a coluna central. Importante notar que a mesa tem limitações laterais, assim sendo, temos que  $(t, i)$  representa sítios até as bordas da mesa. No trabalho de Hinrichsen [19], há uma clara analogia entre  $t$  e o tempo(iteração). Esta comparação é possível considerando cada linha da rede como um passo de iteração computacional, ou seja, no instante  $t = 1$  tem se a primeira iteração que ocorre na linha  $t = 1$ .

Os grãos ativos em uma linha acima podem ativar os grãos da linha abaixo. Um sítio  $X$  pode inicialmente estar ativo se pelo menos um dos sítios na vizinhança da linha acima estiver ativo. O sítio ativo acima de  $X$  pode transferir energia para  $X$ ; Se  $\Delta E(X)$  a energia total transferida para  $X$ , exceder a barreira de energia  $E_b$ ,  $X$  fica ativo. O grão ativo "rola para baixo" e colide com o grão da próxima linha, a energia produzida nessa colisão é  $1 + \Delta E(X)$ , onde 1 é a energia potencial da diferença de altura entre as duas linhas consecutivas (linha de  $X$  e a linha abaixo).

Supondo que ao rolar o grão ativo vai se chocar com os três vizinhos da linha abaixo, ver Figura ???. A energia dissipada na colisão é denotada por  $f$ , enquanto que a energia transferida é dividida igualmente entre os três vizinhos da linha abaixo.

Por todas essas características o modelo de Hinrichsen possui duas variáveis:

1. Uma variável de ativação  $S_i^t$ ;
2. uma variável de energia  $E_i^t$ .

Com os seguintes valores, dada a condição do sítio:

| Variável | Situação do Sítio |               |
|----------|-------------------|---------------|
|          | Inativo           | Ativo         |
| $S_i^t$  | 0                 | 1             |
| $E_i^t$  | $E_i^t \leq E_b$  | $E_i^t > E_b$ |

Tabela 3.1: Valores das variáveis do modelo de Hinrichsen.

A energia de barreira ( $E_b$ ) e a fração de energia dissipada ( $f$ ) são parâmetros que controlam o modelo.

## 3.3 Modelo proposto

### 3.3.1 Condições periódicas de contorno

Para simular um sistema com uma dada densidade de sítios  $\rho$ , pode-se colocar  $N$  sítios em um volume apropriado  $V$  tal que  $\rho = N/V$ . Uma vez que a interação entre os sítios do sistema foi especificada, pode-se estudar a dinâmica do sistema integrando as equações do movimento. Entretanto, um problema é levantado quando a interação dos sítios se aproxima da parede da caixa da simulação. Se permitir que o sítio saia da caixa, simplesmente estará mudando a densidade do sistema. Por outro lado, é possível deixar o sítio interagir com o limiar da caixa da simulação, assim tendo que definir um potencial de interação entre os sítios e a parede da caixa de simulação.

Para o modelo definido em uma rede quadrada, tem-se duas condições de contorno principais que são impostas apenas definindo quais são os vizinhos de cada sítio na borda:

- Condições de contorno periódicas;
- Condições de contorno livres.

Condição de contorno periódica é equivalente a um modelo definido em uma rede plana infinita, mas com uma regularidade periódica em ambas as direções da rede (vertical e horizontal). Como em uma rede de tamanho infinito não existe o problema de se ter que tratar os limites da rede de forma diferente, isso equivale a não usar bordas no modelo. Portanto, sendo a condição ideal para simulações como as da natureza deste trabalho, pois essa abordagem é muito comum em vários problemas de mecânica estatística [29].

Já as condições de contorno livres são como se a demanda que saísse da borda não pudesse mais voltar para o sistema. Ou seja, pode ser interpretada como a existência de um tipo diferente de sítio, cuja tensão anula-se na fronteira. O sítio da fronteira da caixa obedece a uma regra diferente de evolução dos sítios comuns e acaba atuando como um sorvedouro de atividade. Esses sítios são convenientemente chamados de bordas e os sítios que obedecem às regras normais são chamados blocos.

A fração do sistema influenciada pela parede é aproximadamente proporcional à relação entre a área total da parede e o volume total. Para redes com número de sítios superiores a  $10^{23}$ , temos que a influência dos sítios da borda em um sistema real é insignificante. Mas para redes com número de sítios de  $10^7$ , que é o que geralmente é possível em termos computacionais, a influência é da ordem de 1%. Conseqüentemente, os efeitos das paredes, junto com um número limitado de sítios na simulação, geram efeitos consideráveis no sistema e nos resultados.

Embora 1% seja razoavelmente pequeno em trabalhos de comparação, onde busca-se a menor diferença possível entre os dados, esse efeito de parede pode mascarar os resultados apontando para falsos dados de proximidade entre os modelos comparados, ou ainda causar o inverso disso e provocar o descarte de um boa comparação. Por esses motivos, é mais que prudente seguir por caminhos que não levem ao aparecimento dos efeitos de parede.

Uma maneira de evitar os efeitos da parede é usar as condições periódicas de contorno. Em outras palavras, as condições periódicas de contorno significam que será considerado um sistema com um número infinito de subsistemas idênticos. Agindo assim o sistema não terá uma parede, pois ao chegar no limiar a rede se estende ou em alguns casos retorna para o início. Com a intenção de evitar os efeitos de parede, as condições de contornos aplicadas nas simulações são as condições periódicas de contorno.

### 3.3.2 O modelo proposto

O modelo de avalanche descrito por Hinrichsen *et al.*, influenciou fortemente a modelagem. Pode-se imaginar uma pilha de areia na qual os grãos repousam uns sobre os outros como os blocos empilhados que formam uma pirâmide. Os grãos da superfície da pilha são aqueles os quais nem um outro grão o sobrepõe, de dentro para fora estes são os mais externos. Fazendo uma analogia da pilha de areia com o planeta Terra, os grãos da superfície seriam como a exosfera que envolve todo planeta Terra. Considerando a analogia, a pilha de areia é formada por várias camadas sobrepostas, contudo o material de cada camada são os grãos de areia. Em Hinrichsen, os grãos da camada superficial são os sítios da rede de percolação, Hinrichsen condicionou as avalanches considerando que apenas os grãos da camada superficial participassem do evento, portanto a superfície da pilha é considerada uma rede quadrada de percolação.

Nas avalanches, a dinâmica dos grãos na superfície é bastante diversa daquela dos grãos interiores. Os grãos internos são bem mais estáveis, pois seu movimento é impedido pelos vizinhos em todas as direções. Por outro lado, quando na superfície, a partícula possui vizinhos em apenas um dos lados, estando livre para rolar pela fronteira uma vez desestabilizada. Existem alguns modelos teóricos que capturam aspectos isolados da superfície de meios granulares.

A abordagem em que apenas os grãos superficiais participam será adotada nesta tese para fins de simulação, assim se idealiza uma rede superficial de grãos onde apenas os grãos da superfície participam.

Diferente dos experimentos de Douady e das simulações de Hinrichsen, em que a inclinação do plano agia como regulador da atividade dos sítios. No modelo proposto nesta tese, os sítios não dependem de uma forma de energia e sim da atividade de outros sítios. Especificamente no modelo de Hinrichsen, existia uma energia de barreira, uma cota de energia que precisava ser ultrapassada para que o sítio pudesse se ativar e transmitir energia para o sítio da vizinhança, tornando assim um processo de transmissão de energia de sítio para sítio. Se a energia recebida fosse baixa o sítio não se ativaria encerrando o processo. Os sítios são configurados com certa probabilidade de receberem atividade. Um sítio ativo transmite atividade aos seus vizinhos. Os sítios inativos possuem um valor probabilístico de ficarem ativos.

Resultados preliminares dão conta que implementando uma rede de tamanho aproximado de  $220 \times 100$  pontos são suficientes para boas simulações.

Recriou-se um plano retangular dimensionado da seguinte maneira:  $t_{max} = 220$  e  $i_{max} = 50$ , este retângulo será a rede de percolação que representa a superfície da pilha de areia, os pontos(sítios) representam os grãos. Estes valores foram escolhidos, pois são suficientemente grandes, para conciliar quantidade de sítios e facilidade

de simulação. Ainda justificando o dimensionamento do plano, tem que se levar em conta estar trabalhando com as condições periódicas de contorno. Com este dimensionamento tem-se uma rede de 22000 sítios.

Estes 22000 sítios são espalhados no plano retangular, um ao lado do outro, sem sobreposição de sítios, criando uma rede quadrada de sítios como uma camada fina sobre uma superfície. Um dos lados do retângulo receberá a denominação de topo e deste a energia fluirá, através das linhas de sítios para as outras extremidades do retângulo. A transmissão da energia dentro do retângulo é feita de sítios para sítio e leva em conta três vizinhos da linha subsequente como na Figura 3.4.

Aqui a energia de barreira se relaciona com  $\bar{p}$  da percolação, e a energia dissipada é variável de maneira que a energia que chega no grão da linha de baixo pode ser ou maior que  $E_b$  ou menor que  $E_b$ .

$$E_b \sim \bar{p} \tag{3.6}$$

A Equação 3.6, trás toda carga das trocas de energias entre os grãos para o parâmetro  $\bar{p}$ , assim as inúmeras mensurações sobre a cota de energia que cada grão recebe e passa, é condensada numa probabilidade. Esse processo facilita em muito toda a construção das avalanches computacionais porque ao invés de fazer muitos cálculos e aproximações, o processo se resume em assumir um valor de acordo com a probabilidade especificada.

Por se tratar de uma cota energética que os grãos precisam adquirir para entrar em atividade, fazer essa substituição de parâmetros não acarreta qualquer ônus para as simulações. E isto será testado para mostrar que a Equação 3.6, de fato pode ser usada.

O modelo será implementado computacionalmente e os sítios ficaram ativos com probabilidade  $\bar{p}$  e inativos com  $(1 - \bar{p})$ . O sítio  $O(0,0)$  que no experimento de Douady e Daerr (1998) era ativado com um impulso, aqui, inicialmente estará ativo com probabilidade  $\bar{p}$  de passar essa atividade para os vizinhos da linha abaixo.

A forma mais simples para se simular computacionalmente uma avalanche é modela-la na forma de um autômato celular. Um autômato celular é um sistema dinâmico formado por muitas unidades interagindo umas com as outras, podendo ser visto na forma de uma matriz de sítios onde existe uma regra de interação que influencia apenas os vizinhos mais próximos à região dos fenômenos [28].

A participação dos sítios na avalanche será composta por três estágios, cada estágio é representado por uma cor. Os sítios inicialmente terão coloração branca indicando que estão inativos. No estágio dois, os sítios ficam ativos e passaram para a cor vermelha, indicando que estão ativos. No último estágio, eles ficaram na cor preta, indicando que participaram da avalanche. Os sítios da borda inferior da

avalanche ficaram com a cor vermelha indicando que estão ativos e em transição, ou seja, receberam energia do sítio da vizinhança acima, e na próxima iteração, eles que irão transferir essa energia para os sítios da linha consecutiva abaixo, como na Figura 3.5.

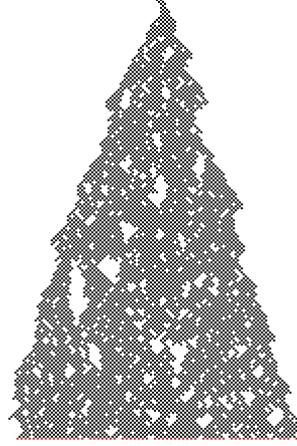


Figura 3.5: Simulação de avalanche no modelo proposto.

O modelo proposto de avalanche é finalizado dando um valor probabilístico para cada sítio, isto significa dizer que um sítio ficará ativo aleatoriamente de acordo com sua probabilidade. É esta característica probabilística que torna a avalanche um caso de percolação. Serão usados dois modelos de percolação neste trabalho: Percolação homogênea e não homogênea.

No modelo homogêneo a probabilidade de um sítio estar ativo é constante, sendo o mesmo valor para qualquer sítio da rede. Diz-se que um sítio da rede tem probabilidade  $\bar{p}$  de estar ativo.

O modelo não homogêneo é dito assim porque faz variar a probabilidade  $\bar{p}$  ao longo da rede, isto significa que a probabilidade de um sítio nas proximidades da borda superior é diferente da probabilidade de um sítios no centro da rede. A probabilidade  $\bar{p}$  definida na percolação homogênea como um parâmetro fixo será redefinida como função da distância partindo do topo da pilha. Assim, na rede não homogênea, a probabilidade de um sítio  $X$  da linha  $t$  e coluna  $i$ , estar ativo será definida por:

$$\bar{p}(\|O \leftrightarrow X\| = t) = p_0 + (1 - p_0) \left| \text{sen} \left( t \times \frac{\pi}{180} \right) \right|. \quad (3.7)$$

A equação 3.7 representa probabilidade crescente à medida que a avalanche se distancia da origem, isto porque em uma avalanche espera se que os grãos de baixo recebam maior carga ficando ativos com maior facilidade. Além disso, ela representa a probabilidade de ficar ativo para qualquer grão que esteja na linha  $t$ .

Fazendo uma análise das estruturas da Equação 3.7, deve-se perceber que trata-

se de uma função que leva em conta a distância do sítio em relação à origem. Para representar essa distância é usada a Norma de  $\|O \leftrightarrow X\|$ , essa norma inevitavelmente terá valor  $t$ , pois isso é devido à forma de iteração dos sítios. A constante  $p_0$  é a probabilidade inicial do sítio na origem. O segundo elemento da soma  $((1 - p_0)|\text{sen}(t \times \frac{\pi}{180})|)$  é o termo que faz a probabilidade variar. A variação é dada em termos do seno e do valor da norma de  $X$  que é igual a  $t$ , usando a Equação 2.3.

$$\|X\| = t \tag{3.8}$$

Na classe das funções senoides, representadas por  $\bar{p}(t) = p_0 + (1 - p_0)|\text{sen}(\Theta)|$ . O ângulo  $\Theta$ , que é a norma de  $\|O \leftrightarrow X\|$ , é recebido em graus, de modo que precisa ser convertido para radianos antes da aplicação da função seno, sendo assim expressa por:

$$\bar{p}(t) = p_0 + (1 - p_0)|\text{sen}(\Theta\pi/180)|. \tag{3.9}$$

A senoide quadrada é caracterizada pela variação ondulatória da probabilidade  $\bar{p}(t)$  através do meio, e pela formação das cristas de onda em quadrados concêntricos. São estas duas características marcantes que dão o nome a função.

A função senoide é uma função que apresenta uma característica peculiar de "loop", ela é responsável pela variação de  $\bar{p}(t)$  através do meio. O modulo da função seno é usado, pois valores negativos do seno podem interferir nos valores da probabilidade, em resumo, o modulo do seno é necessário para garantirmos que  $\bar{p}$  seja uma probabilidade. Por todas essas características, a função senoide é, no momento, a melhor candidata para representar a variação de probabilidade dentro da avalanche.

Em Jatene [21] são apresentadas outras funções, porém não possuem as mesmas características que a função senoide quadrada onde a norma é dada por  $\|O \leftrightarrow X\| = \|\omega_{Ox}\| = t$ , pois  $\sum_{i=1}^t = |t_i - O| = t$ . No modelo proposto considerar-se-á apenas a função senoide com esta norma, pois é a função que se adéqua aos objetivos do trabalho.

A título de conhecimento, algumas outras funções apresentadas por Jatene [21] [21] serão mostradas de maneira resumida na Tabela 3.2. Nem todas são senoides mas sempre diferem na função norma  $f(X)$ . Seja  $X$  um ponto dentro da Rede  $\mathbb{Z}^2$ , com as coordenadas  $(t, i)$ , então a norma de  $\|X\|$  é dada em termos de  $t$  e  $i$ . E a probabilidade de  $X$  é dada por:

$$\bar{p}(X) = p_0 + (1 - p_0)f(x). \tag{3.10}$$

| Nome da função   | Norma da função  | Descrição   |
|------------------|--|---|
| Senoide Circular | $f(x) = \text{sen}  X  $ , onde $  X   = \sqrt{t^2 + i^2}$                       | É caracterizada pela formação das cristas de onda em círculos concêntricos.           |
| Pulso Quadrado   | $f(x) = I_{[\text{mod}(\ X\ ,T)]=0}$ , sendo $  X   =  t  +  i $                 | é caracterizada pela formação de pulsos dispostos em quadrados concêntricos.          |
| Pulso Circular   | $f(X) = I_{[\text{mod}(\ X\ ,T)]=0}$ , sendo $  X   = \sqrt{t^2 + i^2}$          | é caracterizada pela formação de pulsos dispostos em círculos concêntricos.           |
| Serra Quadrada   | $f(X) = \frac{\text{mod}(\ X\ ,T)}{T}$ , sendo $  X   =  t  +  i $               | é caracterizada pela formação de dentes de serra dispostos em quadrados concêntricos. |
| Serra Circular   | $f(x) = \frac{\text{mod}(\ X\ ,T)}{T}$ , sendo $  X   = \sqrt{t^2 + i^2}$        | é caracterizada pela formação de dentes de serra dispostos em círculos concêntricos.  |
| Cone             | $f(x) = \sqrt{\frac{2(t^2 + i^2)}{L^2}}$ , onde $L$ representa o tamanho da rede | é caracterizada pela formação de uma superfície que lembra um cone invertido.         |

Tabela 3.2: Possíveis Funções de probabilidade em razão da distância entre vértices. Fonte: Jatene, 2007.

# Capítulo 4

## O experimento

Neste capítulo será mostrado a realização de um experimento de avalanche. Ele traz a descrição do experimento: os materiais usados, as estruturas necessárias e as ferramentas utilizadas. Este capítulo, também, contém a descrição de como realizar as simulações e mostra quais são as características das avalanches simuladas.

Outro assunto abordado nesse capítulo é a forma de calibrar o parâmetro  $\bar{p}$ . De importante conhecimento é este conteúdo, pois revela como proceder para tornar avalanches reais suscetíveis a uma abordagem computacional. De imediato, o que se deve saber é que não são as simulações computacionais que calibram o parâmetro  $\bar{p}$ . Será mostrado que a calibração se dá em termos de tratamento de dados provenientes de avalanches reais. Contudo, nas simulações pode-se usar o parâmetro  $\bar{p}$  calibrado, outrora obtido, para gerar seus resultados.

### 4.1 Implementação do algoritmo numérico

#### 4.1.1 Simulações preliminares

Antes de partir para simulações volumosas dos modelos, trabalhar-se-á preliminarmente algumas simulações do modelo homogêneo. Obtendo assim, alguns resultados que darão rumo as simulações maiores. Apenas para a modelagem homogênea que serão realizados esses pré-testes, isto porque inicialmente tem-se o objetivo de mostrar que avalanches podem ser tratadas como percolação e mais ainda que podem ser representadas via simulação. Esse processo equivale a realizar em pequena escala um experimento muito maior.

Para simulações preliminares, foram feitas  $T_{max} = 10^4$  réplicas do modelo homogêneo para comparar com eventos reais da literatura. Os resultados preliminares serviram para nortear as ações em relação às simulações. Estas serão usadas para limitar o campo de simulação, assim melhorando a programação, ajustando parâmetros, ajustando o tamanho da mesa, ajustando a quantidade máxima de sítios,

ajustando a coloração dos sítios, ajustando o método de iteração entre os sítios. Em suma, estes pré-testes servirão para otimizar o processo e também ajudarão na confirmação da hipótese, uma vez que servirão para prever a viabilidade de se comparar eventos reais com os simulados pelo modelo proposto.

Já para comparação principal entre modelos simulados de homogênea e heterogênea, cada simulação terá  $T_{max} = 10^5$  réplicas dos dois modelos, pois a máquina disponível não consegue processar números maiores de simulações. A probabilidade  $\bar{p}$  será definida antes de cada simulação. Deste modo configura-se  $\bar{p} = 0.5$  nas simulações do modelo homogêneo e no caso heterogêneo  $p_0 = 0.5$ .

Elevou-se o número de simulações em dez vezes mais para comparação final, a fim de se obter resultados mais confiáveis, pois passado os resultados preliminares, a realização de ajustes reduzirá o tempo de processamento permitindo maiores valores para  $T_{max}$ .

Espera-se que o modelo de percolação homogênea tenha menor impacto que o modelo heterogêneo, pois os modelos homogêneos apresentam transição de fase para valores de  $p_c$  bem maiores que os modelos não homogêneos, veja Tavares *et al.*, [33]. Pelo fato dos modelos homogêneos possuírem valores elevados para  $p_c$ , acredita-se que as avalanches geradas pelo modelo homogêneo terão menor transiente que as do modelo heterogêneo que possuem baixos valores para  $p_c$ .

## 4.1.2 Representação do algoritmo

Usando muitas repetições de um mesmo evento, afim de mensurar probabilisticamente sua existência e comportamento, por meio de hipótese, isto é, far-se-á uso do método de Monte Carlo para obtenção dos resultados publicados nesta tese.

O método de Monte Carlo é baseado em uma abordagem estatística que busca obter estimativas, tal como a média, por meio de algum processo de amostragem do sistema em estudo [23]. É particularmente útil quando se deseja estudar comportamentos de sistemas com grande número de dados, em muitos desses sistemas pode não haver solução analítica possível ou o cálculo numérico pode falhar, tornando a amostragem aleatória dos dados do sistema uma estratégia muito interessante para encontrar estimativas como a média e o desvio padrão.

Para realização das simulações, deve-se observar que os experimentos de Douady e Daerr foram realizados sobre uma mesa recoberta com tecido de veludo. Para criar suas simulações Hinrichsen, elaborou computacionalmente, uma mesa para aproximar suas simulações dos experimentos de Douady e Daerr. No experimento de Douady e Daerr, a avalanche de sílica acontecia sobre a mesa, e desta mesma maneira Hinrichsen elaborou suas simulações, recriando a mesa e sobre esta fazendo acontecer as avalanches.

Percebe-se que para simular o evento da avalanche é fundamental que se recrie o leito por onde escoará a avalanche. Importante notar que a criação da mesa também implica em criar limites para a extensão das avalanches. Por exemplo, se a avalanche se prolongar até as bordas da mesa não haverá mais espaço e nem grãos para a avalanche continuar. Por esse motivo a mesa pode ser vista nas simulações como uma caixa. A interação e o comportamento dos grãos ao se chocarem com as paredes da caixa são pré-estabelecidas pelas condições de contorno. Estas condições devem ser estabelecidas de tal modo que seus efeitos não interfiram no resultado das simulações. As condições de contorno mencionadas são encontradas na Seção 3.3.1.

Na Figura 4.1, tem-se o fluxograma do programa para realização das simulações. O fluxograma nada mais é do que uma representação gráfica do algoritmo, através de formas geométricas, facilitando a compreensão da lógica utilizada pelo programador. A Figura 4.1, representa o algoritmo do programa feito na plataforma JAVA, através do aplicativo NetLogo 6. O programa completo encontra-se no Anexo 1.

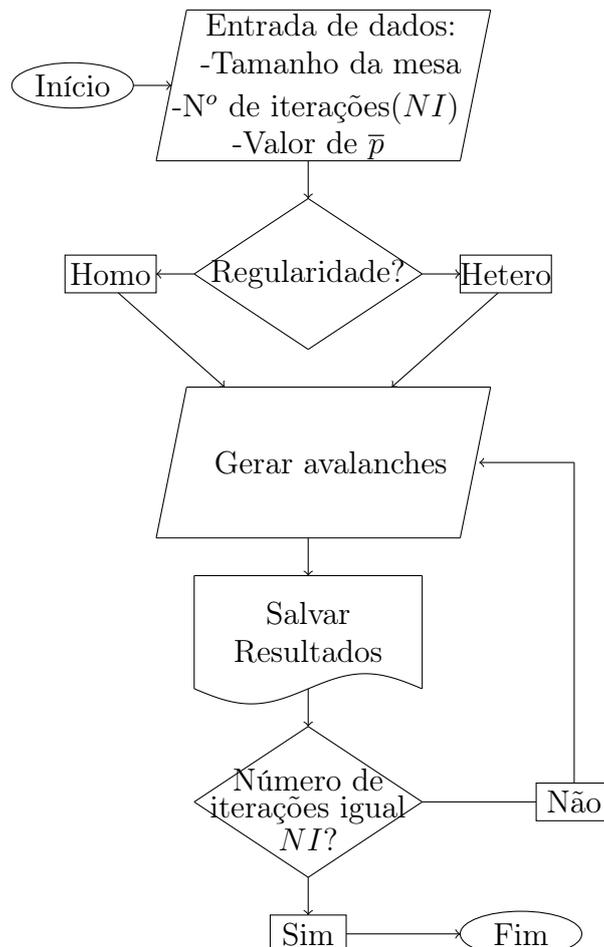


Figura 4.1: Fluxograma da simulação.

Inicia-se o programa com a entrada de dados, tais como: tamanho da mesa, quantidade de iterações e a definição de qual valor  $\bar{p}$  assumirá na simulação. É im-

portante mencionar as formas contidas no fluxograma, pois cada uma representa um tipo específico de ação que será tomada pelo programa. Por exemplo, as formas de paralelogramo representam entrada de dados, enquanto que os losangos representam tomadas de decisão. As elipses são o começo e o fim do programa. A forma sinuosa na base destaca a armazenagem de dados gerados pelo programa.

É relevante discorrer sobre o critério de parada do programa:  $NI$  - Número de Iterações. Esse critério trata da quantidade desejada de replicação do processo, pois não se busca uma aproximação numérica de um parâmetro, mas sim, a reprodução numerosa de eventos de avalanche. Desta maneira, não é usado um critério de convergência, mas um número máximo de simulações.

Criou-se, computacionalmente, uma mesa(plano) retangular com as dimensões  $220 \times 100$  pontos. Esta será a caixa onde serão feitas as simulações. Essas dimensões facilitam a simulação, pois reduzem o tempo de simulação e o esforço computacional, visto que a caixa terá condições periódicas de contorno, desta forma a rede se ajusta ao tamanho da avalanche quando ela se aproxima da borda [9] e [28]. É nesta caixa que as avalanches irão acontecer.

A Elipse do início do fluxograma representa o começo do processo de simulação. O paralelogramo que vem em seguida contém a entrada de dados que são as especificações de quantidade e de forma.

No losango regularidade, tem-se que tomar uma decisão sobre qual tipo de avalanche o programa deve reproduzir. As avalanches serão caracterizadas com dois tipos de percolação: homogênea e não homogênea. Esta caracterização será dada antes de iniciar a simulação. Configurado o tipo de percolação, também será necessário configurar o valor funcional de probabilidade que cada sítio receberá.

Para monitorar numericamente as simulações, criaram-se duas variáveis que são o tamanho da avalanche ( $t$ ) e o transiente de avalanche  $N(t)$ .

**Definição 4.1** *O tamanho da avalanche ( $t$ ) é a distância da borda superior até a última linha ativa da avalanche.*

A variável  $t$  serve para saber o tamanho das avalanches, ou seja, é através deste que se chega a taxa média de sobrevivência.

**Definição 4.2** *O transiente de avalanche  $N(t)$  é a quantidade de sítios que ficaram ativos em cada avalanche.*

Estas duas variáveis servirão para comparar os dois modelos de avalanches. Escolhendo-se Homogênea ou Heterogênea, a próxima ação será gerar as avalanches. Esse processo de geração de avalanches é representado na Figura 4.1 pela imagem do paralelogramo. Nessa etapa, o programa simula as avalanches uma a

uma, usando como base a hipótese de percolação, admitindo a atividade de cada sítio como uma probabilidade.

Em sucessão a etapa de geração, vem a etapa de armazenamento dos resultados. Essa etapa do fluxograma é representada por um semi-retângulo com um dos lados sinuosos(a base). O programa funciona da seguinte forma: gerou-se uma avalanche então seus dados de tamanho e transiente são salvos. Esses dados são salvos em formato ".txt", pois além de ser um formato que ocupa pouco espaço de memória, também é suportado por muitos programas.

O ultimo losango do fluxograma, diz respeito à continuidade do processo. Nele, o programa questiona se o objetivo foi cumprido. Nessa etapa se  $NI$  não foi alcançado o programa continua gerando avalanches, caso contrário o programa é finalizado, sendo essa decisão representada pela elipse no final do fluxograma.

## 4.2 Experimento para calibração e validação do modelo

Na busca de uma abordagem adequada para criar um experimento que disponha o comportamento de avalanches reais, elaborou-se uma atividade experimental que leva à prática em laboratório do fenômeno da avalanche, fazendo uso de materiais de fácil acesso para melhorar a ferramenta da simulação computacional e para dar norteamento ao modelo matemático que pretende descrever eventos de avalanche com maior realismo.

O experimento avalanche será utilizado como ponto culminante do desenvolvimento da teoria, isto é, na medida em que a modelagem for se aproximando dos eventos reais, o experimento funcionará como objeto para comparação substantiva aos dados simulados trazendo assim maior confiabilidade.

Um experimento é potencialmente interessante, pois possibilita encontrar uma situação natural do evento de avalanche onde um modelo simulado possa ser utilizado, além do fato de que as avalanches provocam sentimentos de fascínio e medo devido sua relação com verdadeiras tragédias, como os desmoronamentos de morros e encostas que são presenciados com tanta frequência no Brasil, principalmente nos períodos de chuva intensa.

Trabalhou-se um método prático que propõe modelar probabilisticamente avalanches provocadas por material granular: grãos de feijão em uma mesa. Coletam-se os dados para analisar seu comportamento, a fim de modelar o fenômeno e até mesmo fazer algumas previsões.

O Método da Mesa foi um experimento realizado primeiramente por Douadyr e daerr em 1998 [13]. O experimento é de elaborada implementação, pois a avalanche

é formada por grãos espalhados sob uma mesa. Inclina-se uma borda da mesa, conferindo-lhe certa altura em relação aos outros lados. Os grãos repousam uns sobre os outros até que movidos por um impulso começam a rolar.

#### 4.2.1 Materiais

- Mesa retangular 1 m x 0,8 m;
- Transferidor;
- Grãos de feijão;

A mesa tem formato de um retângulo de lado um metro por oitenta centímetros de largura que formará a superfície de escoamento. Ela fica apoiada sobre uma estrutura que tem 80 centímetros de altura em relação ao solo. A superfície plana da mesa deve ter um mecanismo de inclinação que será chamado de Eixo de inclinação da mesa. Esse mecanismo serve para dar a inclinação necessária para mesa, pois caso queiramos usar outros materiais no experimento de avalanche haverá variação no ângulo de repouso do grão [8] e, conseqüentemente, haverá grande diferença na inclinação entre os materiais da avalanche, criando assim variação nos resultados. É certo que a medida da inclinação é importante, guardando relação com  $p$ , mas isso não será o objeto de estudo nesse experimento.

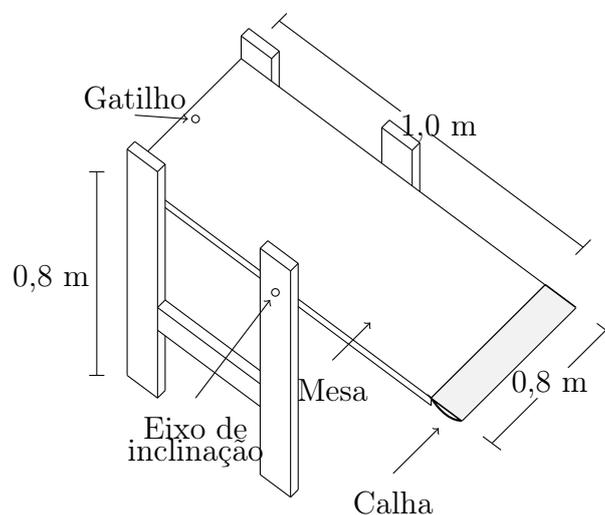


Figura 4.2: Detalhamento da mesa e suas estruturas.

Numa das bordas é acoplado um sistema de mola que servirá para conferir a mesa uma gatilho para iniciar as avalanches. Importante nesse gatilho é a intensidade de interação dele com a mesa, e tal cuidado é necessário para garantir que todas as réplicas do experimento aconteçam sob as mesmas condições. Ao ativar a mola (esticar e soltar), ela cria uma perturbação que ressoará na mesa e iniciará as

avalanches. No lado inferior, existe uma calha que é utilizada para coletar os grão que caem da mesa por força da avalanche. Esses detalhes são mostrados na Figura 4.2.

Na Figura 4.3, tem-se a mesa que será usada no experimento em estado de inclinação. A inclinação da mesa ( $\varphi$ ) servirá para levar o sistema até seu limite de estabilidade. Esse limiar possivelmente é o ponto crítico do material, estado no qual uma perturbação no topo da mesa causará as avalanches. Para se chegar na inclinação ideal serão realizados teste de inclinação. Coloca-se os grão sobre a mesa; Usando o transferidor, eleva-se cuidadosamente uma das bordas; No momento que os grãos começarem a rolar, anota-se a angulação medida do transferidor.



Figura 4.3: Mesa inclinada.

Para evitar que as peças da avalanche tenham contato com o solo, e até mesmo para evitar que se quebrem ou se contaminem no contato com o solo, existe uma calha na base inferior da superfície da mesa. Esta calha tanto ajuda na contenção dos grãos da avalanche como facilita a contagem dos grãos.

A superfície pela qual a avalanche de grãos deslizará é feita do material da mesa, ou seja uma superfície plana feita de madeira polida. Ela não acrescentará resistência relevante ao escoamento dos grãos, pois em natureza o atrito dos grãos rolando sobre os outros causaria esse efeito. Para fins de simulação esse atrito será desprezado. No entanto, trabalhar esses fatores até aqui ignorados por força da idealização da hipótese, em alguns cenários podem ser aproveitados para melhor aproximar resultados simulados dos eventos reais.

Os materiais utilizados na experiência são grãos de feijão, que possuem ângulo de repouso pouco elevado, pois possuem uma forma aproximadamente cilíndrica. O ângulo de repouso do feijão depende de seu teor de água que varia entre 11% e 12%, e seu ângulo de repouso fica na faixa de  $18^\circ$  até  $25^\circ$  graus [12].

Para a condução do experimento foi usado 1 *Kg* de feijão preto - *Phaseolus vulgaris*. Imagina-se que usando esse material, tem-se uma amostra razoável do escoamento real desse material [31]. A variabilidade idade de grãos com os quais se pode realizar esse experimento é enorme, por esse motivo devemos limitar o escopo do trabalho e a justificativa dá-se em termos de tempo e razoabilidade. Trabalhar muitos materiais demandaria muito tempo, e é razoável que se trabalhe materiais de fácil acesso.

## 4.2.2 Procedimento

- Com a mesa na posição horizontal, espalha-se o material. Evitando acúmulo de materiais em um único ponto;
- Elevar a mesa até a inclinação crítica, ponto em que o material fica instável;
- Iniciar as avalanches com um impulso na mola;
- Contabilizar os grãos que participaram da avalanche e guardar os valores.

A realização da contagem é feita da seguinte maneira: Após o fim da avalanche, cuidadosamente, retorna-se a mesa ao estado inicial, na posição horizontal; contam-se as peças que caíram da mesa; Realiza-se uma soma das peças caídas, então se tem o tamanho da avalanche. Retorna-se os grãos caídos para o topo da mesa, distribuindo-os uniformemente sobre a superfície, a fim de manter a mesma quantidade do experimento de avalanche que se encerrou.

O processo se repetirá até o número de eventos desejados. Para esse experimento realizou-se um montante de 1000 avalanches.

## 4.3 Procedimento de calibração

A calibração é um processo de ajuste do modelo. Trata-se do ajuste dentro de um intervalo que seja aceitável e faça com que as diferenças entre os resultados do modelo e dados reais sejam minimizadas até uma acurácia aceitável.

A calibração consiste em determinar todos os parâmetros que caracterizam o sistema, o ambiente em que se insere e o modo como vai ser utilizado. Estes parâmetros podem ser referentes tanto a características físicas de objetos como a coeficientes ou matrizes. Têm valores constantes cujo valor pretende-se estimar. A caracterização

total do modelo passa pela determinação de todos os parâmetros. Uma estimativa grosseira pode deteriorar a qualidade dos resultados ou mesmo inviabilizar o correto funcionamento do sistema.

Não há uma forma previamente estabelecida de calibração de parâmetros para amparar as hipóteses desta tese. Toda técnica e desenvolvimento para calibrar as simulações vem unicamente de achados nesta pesquisa. Embora se possa colocar como calibração, os procedimentos desta seção podem ser tratados como processo para estimar o parâmetro  $\bar{p}$  dos grãos de uma avalanche.

Nessa abordagem sobre avalanches, a produção de resultados depende de um único parâmetro, a saber: o parâmetro  $\bar{p}$ . Então, a calibração deve ser conduzida para encontrar o parâmetro  $\bar{p}$ , de tal forma que este retorne simulações aparente às reais. Trata-se de uma técnica extremamente nova, fazer simulações de avalanches considerando-as como caso de percolação, onde cada grão é ativado por uma medida de probabilidade.

Frequentemente usa-se experimentos reais para calibrar experimentos simulados. Por exemplo, pretende-se simular a resistência de certo material, faz-se um experimento real, obtém-se o valor, em seguida faz-se simulações até aproximar as simulações do valor do experimento real.

Com base na hipótese de que as avalanches podem ser tratadas como caso de percolação, pode-se por meio de um parâmetro  $\bar{p}$  gerar uma simulação de avalanche. Isto implica dizer que, computacionalmente e para um  $\bar{p}$  escolhido, tem-se um evento de avalanche. Por outro lado, também implica dizer que os eventos reais possuem um  $\bar{p}$  em cada um de seus grãos que pré-dispõe algumas de suas características de tal maneira que podem ser replicadas via computador.

Para provar que a hipótese que se pode retirar um  $\bar{p}$  de avalanches reais é válida, deve-se mostrar que as avalanches computacionais possuem substrato igual às reais, e além disso deve-se mostrar que a partir de avalanches reais pode-se calibrar o parâmetro  $\bar{p}$  de maneira a registrar eventos virtuais de similar conduta aos eventos reais.

Basicamente, o desafio consiste em retirar de dados de experimentos reais um parâmetro  $\bar{p}$  e com este replicar os resultados reais via simulação. A tarefa inicia-se com a realização de experimentos de avalanche. Em seguida coletam-se os dados, então destes aferir o parâmetro  $\bar{p}$  de maneira que este retorne dados aproximadamente idênticos aos reais.

Embora possamos colocar como calibração, os procedimentos desta seção podem ser tratados como processo para estimar o parâmetro  $p$  dos grãos de uma avalanche.

Deve-se levar em conta os conceitos abordados na seção 2.1, pois far-se-á uso da função densidade de probabilidade conjunta  $h$ . A função  $h(p, t)$  é uma função distribuição de probabilidade bidimensional que nada mais é do que uma função

em duas variáveis, onde sua integral definida tem valor 1. Também será usado o parâmetro  $r$ , este não é um parâmetro comumente encontrado nas avalanches, trata-se de uma variável criada neste trabalho com o intuito de facilitar os cálculos das integrais das funções bidimensionais, além disso  $r$  é função de  $p$  e nesse contexto age como indicador da permeabilidade do meio em relação ao evento avalanche.

Far-se-á uso da notação  $P^*$ , para simbolizar uma Variável aleatória. Trata-se das variações de  $p$  de avalanche para avalanche, sendo assim a forma  $p^*$  trará uma estimativa do valor de  $p$  que pode ser usado na geração de avalanches.

Para se fazer a correspondência dos pontos da avalanche simulada com os pontos da avalanche real, é necessário efetuar, previamente, a calibração do parâmetro  $\bar{p}$ . Esta calibração compreende duas fases, cujas quantidades de interesse são  $\bar{p}$  e  $r$ . Inicia-se com a determinação de um parâmetro  $r$  e, em seguida, do parâmetro intrínseco  $\bar{p}$ . Pode-se fazer isto seguindo os passos:

- **Passo 1** - Dos dados experimentais, encontrar a função  $h(p^*, t)$ ;
- **Passo 2** - Da função  $h$ , encontrar  $p_c$  em função de  $r$ ;
- **Passo 3** - Com os valores de  $\alpha$  e  $\beta$  encontrar  $r$ .
- **Passo 4** - Usar  $r$  para encontrar  $\bar{p}$ .

Os valores  $\alpha$  e  $\beta$  são números reais encontrados a partir da Probabilidade acumulada  $P(T < t)$ . A probabilidade  $P(T < t)$  é encontrada fazendo uso dos dados experimentais, e ela quem fornece uma estrutura de função para  $h(p^*, t)$ .

A primeira fase compreende os passos 1 e 2, e é iniciada com a determinação da função  $h$  que se obtém a partir de dados de avalanches reais. A função  $h$  é uma função densidade de probabilidade conjunta, descrita na Seção 2.4.

Ao realizar um experimento de avalanche numerosas vezes e guardar o tamanho ( $T$ ) de cada avalanche, obtém-se um montante diversificado de valores que representam o tamanho das avalanches. Ao realizar  $N$  avalanches, e destas apenas  $n$  avalanches têm o tamanho  $T = t$ , é possível estimar a probabilidade de se ter uma avalanche de tamanho  $t$ , basta dividir  $n$  por  $N$ , ou matematicamente

$$P(t) = P(T = t) = \frac{n}{N}. \quad (4.1)$$

Essa é uma estatística importante no sentido de estimar a probabilidade de uma avalanche de tamanho  $t$ , porém não revela diretamente o parâmetro  $\bar{p}$  embutido nas avalanches. Por outro lado, a probabilidade acumulada pode ser bem útil nesse sentido.

A probabilidade acumulada do evento de avalanche nesses moldes, é dada pela soma das probabilidade de todos os resultados em que os tamanhos são menores que  $t$ , matematicamente

$$P(T \leq t) = \sum_{i=0}^t P(T = i). \quad (4.2)$$

A Equação 4.2, nesse caso representa a probabilidade de percolação da avalanche dado um tamanho  $t$ . Ising [20], supôs um modelo de interação entre as partículas no qual se pode implementar um método numérico para se obter um valor médio observável. Não se tem a intenção de descrever detalhadamente o modelo de Ising, mas essa implementação numérica é feita usando o método de Monte Carlo, através de um processo chamado Algoritmo de Metropolis. Após a implementação numérica, esse valor pode ser dado por  $P(t) = \sum_{i=1}^M \exp(-t_i \beta)$ , que é uma forma resumida da distribuição de Boltzmann, onde  $M$  é o numero de passos.

Hinrichsen [19], menciona que a probabilidade de sobrevivência tem a forma  $P(t) = t^{-\sigma}$ . Por outro lado, Samuel [31] indica que essa probabilidade pode ser generalizada por  $P(t) = a.t^{-b}$ . Essas três literaturas divergem em parte quando a intenção é dar uma formulação para  $P(t)$ , então para resolver este problema recorreu-se a uma ferramenta computacional aliada a dados experimentais.

Ao simular algumas dezenas de milhares de vezes o evento de avalanche, guardaram-se os resultados e nestes aplica-se a equação 4.2, obtendo assim uma curva peculiar a uma curva exponencial. Para confirmar essa hipótese de exponencial usou-se o método dos mínimos quadrados através da ferramenta computacional *Solver* do software Excel, onde se constatou que  $P(t)$  tem a forma

$$P(t) = \alpha.e^{-\beta.t}. \quad (4.3)$$

Sendo que  $\alpha$  e  $\beta$  são números reais, provenientes da hipótese de exponencial e encontrados a partir da aproximação de  $P(t)$  a uma função exponencial.

Tendo a ideia de que para a avalanche chegar até determinado  $t$ , é preciso que se tenha um  $p$  que supra essa demanda. Por exemplo, se  $p = 0$  então  $t = 0$ . Desta maneira  $P(t)$  depende do valor de  $p$ . Com essa ideia é possível usar  $P(t)$  para encontrar  $h(p^*, t)$ .

Embora  $p$  seja uma parâmetro fixo dentro da avalanche, ele varia de avalanche para avalanche, por esse motivo pode ser considerado uma variável aleatória de evento para evento.

**Definição 4.3** *Sejam  $P^*$  e  $T$  variáveis aleatórias contínuas, então existe uma fun-*

ção densidade de probabilidade conjunta  $h$  de  $p^*$  e  $t$ , tal que:

$$h(p^*, t) = r \cdot p^* e^{-\beta \cdot t}; \quad 0 \leq p^* \leq 1 \quad e \quad t \geq 0. \quad (4.4)$$

Conseqüentemente,

- $h(p^*, t) \geq 0$ , para todo  $(p^*, t) \in \mathbb{R}$ ;
- $P(0 \leq p^* \leq 1, t \geq 0) = \int_0^1 \int_0^\infty h(p^*, t) dt dp^* = 1$ .

Na Seção 2.2, debate-se sobre a existência de um limiar de percolação, o ponto crítico. Aplicando o conceito de transição de fase e de ponto crítico, tem-se a fase supercrítica ( $p > p_c$ ) e a fase subcrítica ( $p < p_c$ ). Transformar  $P^*$  numa variável aleatória é um recurso matemático, pois se imagina que cada avalanche é produzida por um  $p$  que varia minimamente e que as muitas repetições aproximam  $p$  do seu verdadeiro valor. Esse valor de  $p$  que será retirado das simulações é próximo ao  $p_c$ , pois é a menor ou maior probabilidade capaz de gerar uma avalanche de tamanho  $t$ .

**Primeiro caso: Fase supercrítica.** Supondo que  $p^* > p_c$ , então:

$$P(0 < p^* < p_c, t > 0) = 0$$

$$P(p_c < p^* < 1, t > 0) \neq 0.$$

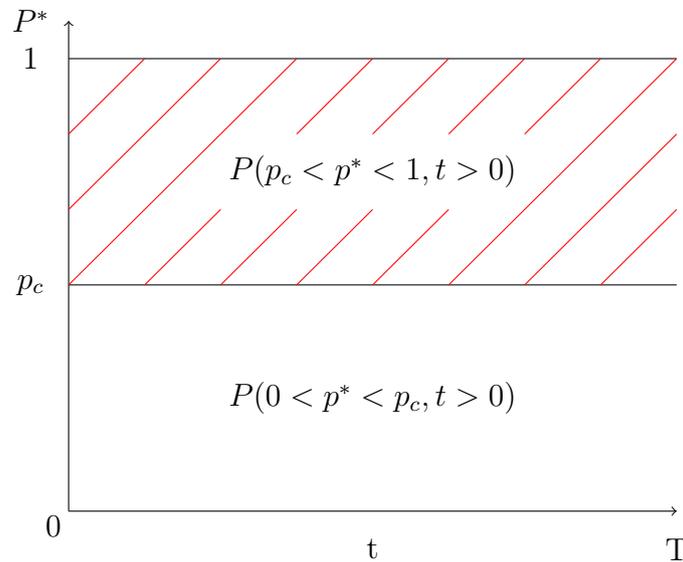


Figura 4.4: Comportamento de  $h$  na fase supercrítica.

Na Figura 4.4, tem-se a marcação da área que será tomada pela probabilidade,

visto que  $p$  pertence a fase supercrítica. A Equação 4.4, fica reduzida a:

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{p_c}^1 \int_0^\infty h(p^*, t) dt dp^*, \text{ aplicando a Equação 4.3, fica:} \\ &= \int_{p_c}^1 \int_0^\infty \alpha \cdot e^{-\beta \cdot t} dt dp^*, \text{ e fazendo } \alpha = r \cdot p^* \cdot \beta: \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$= \int_{p_c}^1 \int_0^\infty r \cdot p^* \cdot \beta \cdot e^{-\beta \cdot t} dt dp^*. \quad (4.6)$$

A resolução da Equação 4.6, fornece:

$$p_c = \sqrt{1 - \frac{2}{r}}. \quad (4.7)$$

O parâmetro  $r$ , é uma quantidade que recebe a carga da mecânica do evento avalanche, e a condição de existência é  $r \geq 2$ . Quanto maior o valor de  $r$ , maior é a resistência do meio ao evento avalanche.

A obtenção de  $p_c$  é feita usando a Equação 4.7, porém ela depende de  $r$  que pode ser encontrado fazendo alguns passos matemáticos. A última fase na calibração de  $\bar{p}$  é a determinação do parâmetro  $r$ .

**Definição 4.4** *Seja  $P^*$  uma variável aleatória associada a função densidade de probabilidade  $f$ , tal que:*

$$f(p^*) = r \cdot p^*; \quad \sqrt{\frac{r-2}{r}} \leq p^* \leq 1. \quad (4.8)$$

Na Equação 4.5, é feita uma substituição de  $\alpha$  por  $r \cdot p^* \cdot \beta$ , sendo assim vale a igualdade  $\alpha = r \cdot p^* \cdot \beta$ , que pode ser tratada:

$$\begin{aligned} \alpha &= r \cdot p^* \cdot \beta \\ r \cdot p^* &= \frac{\alpha}{\beta}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Analisando  $f$  no ponto  $p^* = \sqrt{\frac{r-2}{r}}$ , fica:  $f(p^* = \sqrt{\frac{r-2}{r}}) = \frac{\alpha}{\beta}$ , logo:

$$r.p^* = \frac{\alpha}{\beta}$$

$$r.\sqrt{\frac{r-2}{r}} = \frac{\alpha}{\beta} \quad (4.10)$$

$$\sqrt{\frac{r^2(r-2)}{r}} = \frac{\alpha}{\beta} \quad (4.11)$$

$$\frac{r^2(r-2)}{r} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 \quad (4.12)$$

$$r^2 - 2r = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2. \quad (4.13)$$

Resolvendo a Equação 4.13 com a condição  $r \geq 2$ , tem-se:

$$r = 1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2} \quad (4.14)$$

**Segundo caso: Fase subcrítica.** Supondo que  $p^* < p_c$ :

$$P(0 < p^* < p_c, t > 0) \neq 0$$

$$P(p_c < p^* < 1, t > 0) = 0.$$

Assim a Equação 4.4, toma outra forma:

$$\begin{aligned} 1 &= \int_0^{p_c} \int_0^\infty h(p^*, t) dt dp^*, \text{ aplicando a Equação 4.3, fica:} \\ &= \int_0^{p_c} \int_0^\infty \alpha.e^{-\beta.t} dt dp^*, \text{ fazendo } \alpha = r.p^*.\beta \end{aligned} \quad (4.15)$$

$$= \int_0^{p_c} \int_0^\infty r.p^*.\beta.e^{-\beta.t} dt dp^*. \quad (4.16)$$

A resolução da Equação 4.16, fornece:

$$p_c = \sqrt{\frac{2}{r}}. \quad (4.17)$$

O parâmetro  $r$  é dado por:

$$r = \frac{\alpha^2}{2.\beta^2}. \quad (4.18)$$

Pode-se resumir os achados dessa Seção na Tabela 4.1.

Para saber em qual fase  $\bar{p}$  se encontra, vale o seguinte:

- Se  $2 \leq r < 4$  então  $\bar{p}$  pertence a fase supercrítica.
- Se  $r > 4$  então  $\bar{p}$  pertence a fase subcrítica.

| Fase onde se encontra $\bar{p}$ | $r$                                       | $p_c$                  |
|---------------------------------|---|------------------------|
| supercrítica                    | $1 + \sqrt{1 + (\frac{\alpha}{\beta})^2}$ | $\sqrt{\frac{r-2}{r}}$ |
| subcrítica                      | $\frac{\alpha^2}{2\beta^2}$               | $\sqrt{\frac{2}{r}}$   |

Tabela 4.1: Valores de  $\bar{p}$  para os grãos da avalanche em função do parâmetro  $r$  e da fase crítica.

A justificativa desses intervalos para classificar quanto a que fase pertence  $\bar{p}$ , começa pela implicação de que não existe número real que retorna uma raiz negativa, dessa forma:

- Na fase subcrítica:  $\sqrt{\frac{2}{r}} \geq 0$ , que implica que  $r > 0$ ;
- Na fase supercrítica:  $\sqrt{\frac{r-2}{r}} \geq 0$ , que implica que  $r \geq 2$ .

Ainda justificando o intervalo, sabe-se que quando  $r = 4$ , vale a igualdade:

$$\sqrt{\frac{2}{r}} = \sqrt{\frac{r-2}{r}}. \quad (4.19)$$

As funções de  $p_{sub}(r) = \sqrt{\frac{2}{r}}$  e  $p_{super}(r) = \sqrt{\frac{r-2}{r}}$ , em relação aos valores de  $r$ , mostram que os valores de  $p_{sub}$  são mais próximos de 1, tanto quanto mais  $r$  decresce abaixo de 4. Como na Figura 4.5. Isso implica dizer que quando  $r$  está entre 2 e 4, não se pode estar na fase subcrítica. Assumindo, portanto, que se está na fase supercrítica. Fenômeno inverso acontece quando  $r > 4$ , onde o valor de  $p_{sub}$  decai.

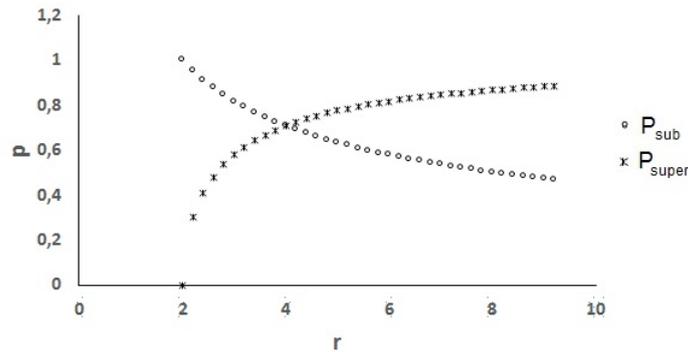


Figura 4.5: As funções de  $p_{sub}$  e  $p_{super}$  em relação aos valores de  $r$ .

### 4.3.1 Procedimento de validação

A validação consiste em comparar conceitos e determinar o quanto eles são apropriados para a investigação que foi desenvolvida [10]. No processo de validação, o

método é avaliado em termos da sua representatividade, reprodutibilidade e repetitividade. A comparação de resultados dos modelos com dados reais é indispensável para avaliar o modelo.

Pode-se caracterizar os diferentes procedimentos de validação através de uma abordagem científica ou comparativa. No caso de ser uma validação científica pode ser baseada em informação publicada na literatura ou experimentos próprios sobre o desenvolvimento do método. O Experimento tem de conter fatores relevantes a serem analisados e se estão dentro do controle associado com o método. Para a validação comparativa, o método de teste será feito comparando os resultados com outros obtidos através de um método já validado que foi desenvolvido para o mesmo propósito. Se isto não for possível, a performance do teste pode ser avaliada por comparações. O método pode ser considerado validado se os resultados obtidos estiverem dentro dos limites esperados [3].

Deve-se usar dados que sejam confiáveis para conhecer as capacidades e limitações do modelo. Para avaliar o modelo, serão usados dados de avalanches reais. Com a intenção de tornar a validação robusta, serão usados números obtidos a partir de eventos reais mas que não estejam na literatura. Tem-se o intuito de fazer uso de dados criados particularmente através da realização de experimentos de avalanches reais. Com a utilização de um terceiro conjunto de dados aumenta-se a confiabilidade do modelo, provando que ele pode ser utilizado para investigar diferentes cenários. A qualidade do modelo será mostrada através de gráficos e comparações estatísticas.

# Capítulo 5

## Resultados e discussões

### 5.1 Avalanche como rede de percolação homogênea

Elaborou-se primeiro uma rede de percolação homogênea e se trabalhou na hipótese que esta poderia representar em conteúdo dados de uma avalanche real. Posta esta premissa e realizadas  $10^4$  simulações do modelo homogêneo como descrito na seção 3.3.2, pode-se aferir alguns resultados.

Em se tratando de análise qualitativa, um dos pontos a se observar é a transição de fase. Dada a caracterização da rede como  $\mathbf{Z}^2$ , é evidente que temos transição de fase de primeira ordem, pacificado no trabalho de Broadbent e Hammersley. Para ilustrar essa constatação tem-se a Figura 5.1.

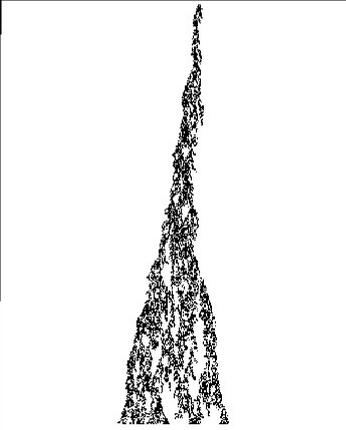
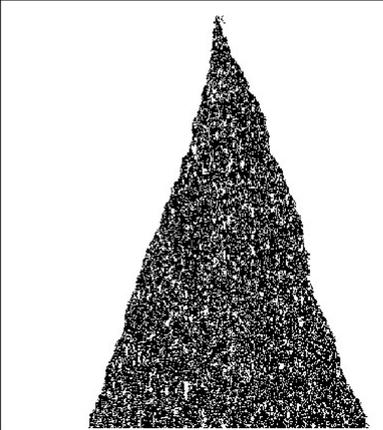
| Probabilidade: 0.4  | Probabilidade: 0.45   | Probabilidade: 0.5   |
|---|---|--|
| Quantidade de Sítios ativos: 720  | Quantidade de Sítios ativos: 49700  | Quantidade de Sítios ativos: 237000  |
| Tamanho da avalanche: 124   | Tamanho da avalanche: 1000  | Tamanho da avalanche: 1000   |
|  |  |  |

Figura 5.1: Avalanches com probabilidades diferentes.

Na Figura 5.1, pode-se observar que quanto mais a probabilidade  $\bar{p}$  se distancia de 0.59 em direção ao zero, menores são os tamanhos e a quantidade de sítios ativos nas avalanches. O ponto crítico da rede  $\mathbf{Z}^2$  de percolação em sítios é 0.59 [22], por

esse motivo este valor foi tomado como referência. Não foi trabalhado um mecanismo para detectar o ponto crítico da rede por se tratar de uma rede conhecida e com ponto crítico conhecido das literaturas. Entretanto, levando-se em conta a forma de iteração entre os grãos e o fato de ser percolação direcionada isso pode influenciar de tal maneira que o  $p_c$  tome outro valor, sendo portanto um tópico de estudos futuros.

Pode-se notar pela Figura 5.1 que quando diminui o valor de  $\bar{p}$ , também diminui o valor do ângulo de abertura  $\phi$ , isto nos leva a crer que qualitativamente o modelo segue os padrões de Douady e Daerr [13], agindo como regulador do tamanho das avalanches.

As avalanches simuladas, qualitativamente, devem possuir certas características, com observado por Hinrichsen:

*"A avalanche foi compacta, triangular e fortemente delineada nas bordas."*

Este é o comportamento esperado das simulações. Hinrichsen, expõe que este comportamento das avalanches caracterizam resultados qualitativamente bem simulados, haja visto o comportamento das avalanches nos experimentos de Douady e Daerr. Na Figura 5.1, pode-se ver claramente este comportamento, o que significa que as simulações estão qualitativamente bem realizadas.

Recriou-se alguns gráficos apresentados em Hinrichsen para mostrar o comportamento das simulações do ponto de vista quantitativo. Para a Probabilidade de sobrevivência  $P(t)$ , o número de sítios ativos  $N(t)$ , Hinrichsen sugere aplicar as equações:  $P(t) = t^{-0.1575}$  e  $N(t) = t^{0.3137}$  para encontrar as curvas de  $P(t)$  e  $N(t)$ .

Alguns gráficos possuem aspectos diferentes dos apresentados em Hinrichsen, por vários fatores entre eles a falta de uma escala específica entre os trabalhos, e a própria construção dos resultados. Porém essas diferenças eram esperadas visto que os trabalhos têm abordagens e objetivos distintos.

Claramente, usando as equações dadas em Hinrichsen os dados fogem da realidade, visto na Figura 5.2 e na Figura 5.3. Pois, são apenas estimativas baseadas em ajustes de outras literaturas.

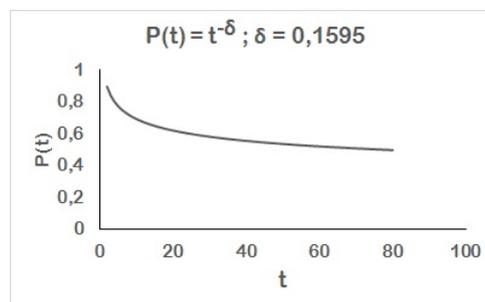


Figura 5.2: Probabilidade de sobrevivência  $P(t)$ , usando a Equação mostrada em Hinrichsen.

Para validar as simulações realizadas na tese são usados dados de um experimento

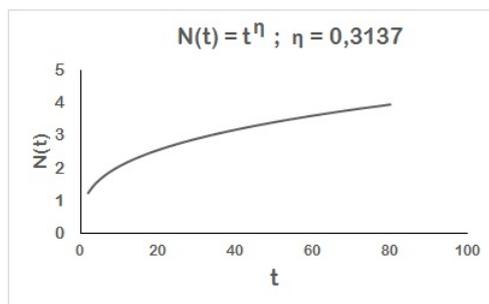


Figura 5.3: O número de sítios ativos  $N(t)$ , usando a Equação mostrada em Hinrichsen.

real, também são usados dados reais de outras literaturas.

No ano de 2010, o professor Samuel Rocha da Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP), elaborou um trabalho que consistia em simular avalanches usando grãos de feijões. Este trabalho foi publicado pelo Ministério da Educação e serve como base para professores do mundo todo elaborarem suas aulas e realizar experimentos de avalanche [31]. Toda metodologia de como realizar esse experimento pode ser encontrada no site: <http://m3.ime.unicamp.br>. Usando os dados deste experimento para comparar o comportamento das avalanches reais feitas de grãos de feijão com os eventos simulados.

Resguardando as proporções, é evidente a similaridade no comportamento da Probabilidade de sobrevivência do trabalho de Hinrichsen e a deste trabalho. Porém, os gráficos apresentados parecem ter um cauda mais leve permitindo avalanches maiores com menor probabilidade do que se levássemos em conta a aproximação dada pelas equações apresentadas em Hinrichsen. Ademais, esse tipo de comportamento é o que mais se parece com o apresentado no trabalho de Hinrichsen. Levando em conta que naquele trabalho existem aproximadamente 50 tentativas sem ativação e uma grande mudança na escala quando  $P(t) < 0.1$ , resultando num gráfico constante  $P(t) = 1$  para  $0 < t < 50$  e uma calda que se aproxima de zero para  $t > 10^3$ .

A Figura 5.4, mostra a comparação entre a probabilidade de sobrevivência de avalanches reais e avalanches simuladas. Notadamente, seus aspectos são semelhantes visualmente, onde ambos possuem característica decrescente e exponencial. A fim de confirmar se eles têm um comportamento exponencial e decrescente, realizou-se uma regressão através de uma ferramenta de software do Excel chamada Solver que aplica o método dos mínimos quadrados, onde foi verificado que eles podem ser aproximados por uma função do tipo:  $P(t) = \alpha \cdot \exp(-t \cdot \beta)$ , como a Equação 4.3.

As estimativas de  $\alpha$  e  $\beta$  são mostrados na Tabela 5.1. Tem-se essas constantes para o experimento de grãos de feijão e os dados simulados com  $\bar{p} = 0,5$ .

A Equação 4.3, revela que se pode avaliar com alguma propriedade a ocorrência de uma avalanche com certa extensão. É claro que se deve ter antecipadamente os

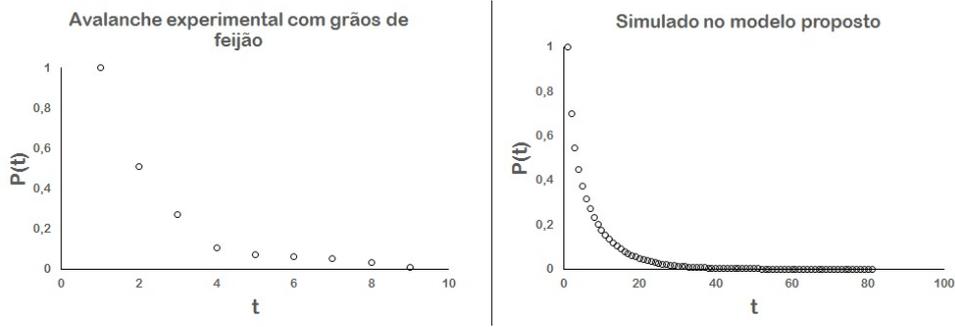


Figura 5.4: Comparação entre a probabilidade de sobrevivência de  $10^4$  réplicas no modelo proposto e um experimento real de avalanche feita de grãos de feijão.

| Avalanche | $\alpha$ | $\beta$ |
|-----------|----------|---------|
| Feijão    | 1,928    | 0,660   |
| Simulado  | 1,300    | 0,188   |

Tabela 5.1: Constantes para o experimento de grãos de feijão e dos dados simulados.

parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$ . Assim para as avalanches geradas por [31], tem-se:

$$P(t) = 1,928.e^{-0,660.t} \quad (5.1)$$

Em posse da Equação 5.1, pode-se calibrar  $\bar{p}$ , para simular eventos de avalanches. Usando a técnica desenvolvida na seção 4.3, encontra-se  $\bar{p} = 0,20558$ , como função de  $\hat{\alpha} = 1,928$  e  $\hat{\beta} = 0,660$ . Pondo esse valor no modelo e gerando simulações, os resultados são mais aproximados.

Na Tabela 5.2 são mostradas as constantes  $\alpha$  e  $\beta$  para simulações obtidas a partir da calibração do modelo usando os dados das avalanches de grãos de feijão. Outro ponto de destaque é a proximidade das avalanches simuladas com as avalanches reais, pois mesmo se tratando de um  $\bar{p}$  aproximado os resultados tendenciaram para a realidade.

| Avalanche          | $\alpha$ | $\beta$ |
|--------------------|----------|---------|
| Feita de feijão    | 1,928    | 0,660   |
| Simulada calibrada | 2,009    | 0,693   |

Tabela 5.2: Constantes calibradas com o experimento de grãos de feijão.

O gráfico comparativo dos dados gerados é mostrado na Figura 5.5. Com diferença máxima entre os dados de 0,0005, tem-se uma noção do ajuste do modelo dada a calibração. E chama atenção a proximidade dos valores, dando a entender que a técnica de encontrar  $\bar{p}$  de avalanches reais e simular avalanches com esse valor pode ser empregada sem se distanciar da realidade.

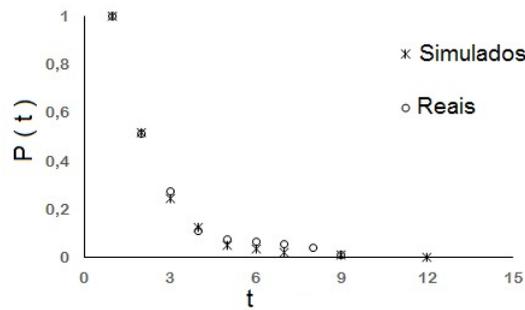


Figura 5.5: Comparação entre modelo proposto calibrado e um experimento real de avalanche feita de grãos de feijão.

Os eventos de avalanche realizados por Samuel [31], são do tipo *Self Organized Criticality - SOC*, pois o sistema evolui até um estado de instabilidade e avalanche sem necessidade de uma ação externa.

A realização de experimentos de avalanche como os de Douady e Daerr [13], não são caso de *SOC* porque a avalanche já parte do estado de instabilidade. Foram Realizados alguns experimentos de avalanche como descritos na Seção 3.3.2. Estes são experimentos onde a avalanche é provocada por um impulso externo, quando a pilha é posta no estado crítico.

Na Figura 5.6, tem-se a realização do experimento, levando em conta a inclinação da mesa em 15 graus, Essa inclinação foi estabelecida através de testes de inclinação, onde se chegou a esse valor que mostra baixa inclinação para ativação das avalanches. E o motivo dessa baixa inclinação diz respeito ao ângulo de repouso do feijão de acordo com Bonser [5].



Figura 5.6: Experimento de avalanche de feijão recriado na mesa com inclinação de 15 graus.

As avalanches foram acionadas por um impulso gerado pela perturbação de uma mola localizada no topo da mesa. O material da avalanche e composto de grãos de feijão que foram cuidadosamente distribuídos sobre a mesa, recobrando metade da

extensão do plano da mesa. Os dados do experimento são mostrados na Figura 5.7 e podem ser encontrados no anexo II, e também na internet no endereço:

"<https://mega.nz/#F!BVFjRIaC!GTfT-F-9Q910ZWE-uvSmyw>"

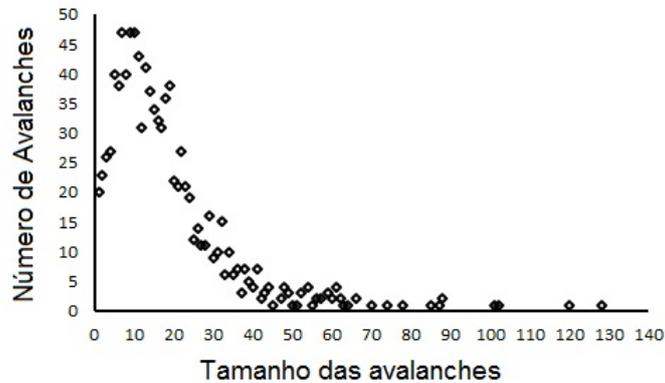


Figura 5.7: Quantidade de avalanches por tamanho.

Foram realizados mil experimento e é possível ver que a maior parte das avalanches experimentais são de tamanhos menores que 40 grãos. Acima de 100 grãos essas avalanches são mais raras, isso devido à inclinação que serve como reguladora do tamanho. Na Figura 5.7, também é possível observar que a maior avalanche do experimento obteve tamanho de 128 grãos, enquanto os tamanhos que mais se repetiram foram os de 7, 9 e 10 grãos. As menores avalanches obtiveram tamanho de um grão.

As realizações dos experimentos na mesa trouxeram a Equação 5.2. Esta equação foi usada para encontrar a função densidade de probabilidade conjunta de  $\bar{p}$  e  $t$ , que são respectivamente a probabilidade e o tamanho das avalanches.

$$P(t) = 1,165.e^{-0,066.t} \quad (5.2)$$

A Figura 5.8, revela a curva de probabilidade  $P(t)$  para os experimentos na mesa em comparação aos resultados obtidos a partir da curva feita com a função promovida pelo SOLVER. A maior diferença entre os pontos do experimento e os pontos do SOLVER é de 0.04. Esse ajuste é possível porque a probabilidade  $P(t)$  comportasse como uma curva exponencial, que apesar de ter uma estrutura diferente de Ising, Samuel e Hinrichsen [20, 31, 19], é englobada por uma forma derivada da lei de potência.

Usando a metodologia desenvolvida: primeiro encontrou-se  $r = 18,66$  que indica fase subcritica; em seguida, encontra-se uma estimativa do valor do parâmetro  $p$  para as avalanches criadas na mesa, o valor encontrado é  $p = 0,327$ . Este valor

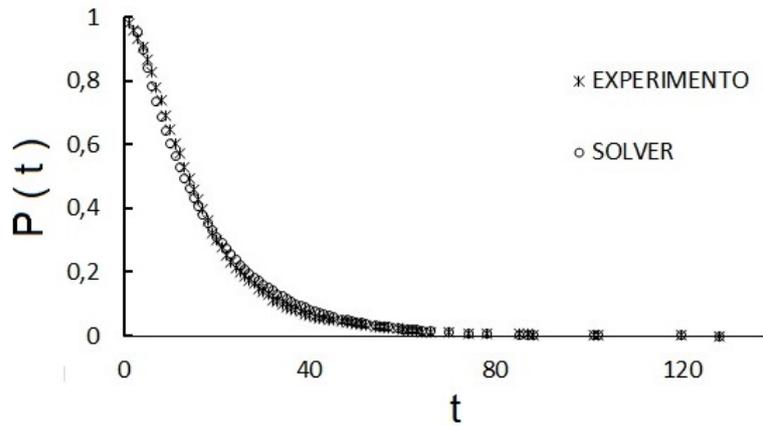


Figura 5.8: Comparação entre a probabilidade de avalanche nos experimentos e resultados gerados por uma função encontrada pelo Solver.

calibrado de  $p$  foi usado para realizar  $10^3$  simulações de avalanches. Os resultados das avalanches simuladas podem ser vista na Figura 5.9.

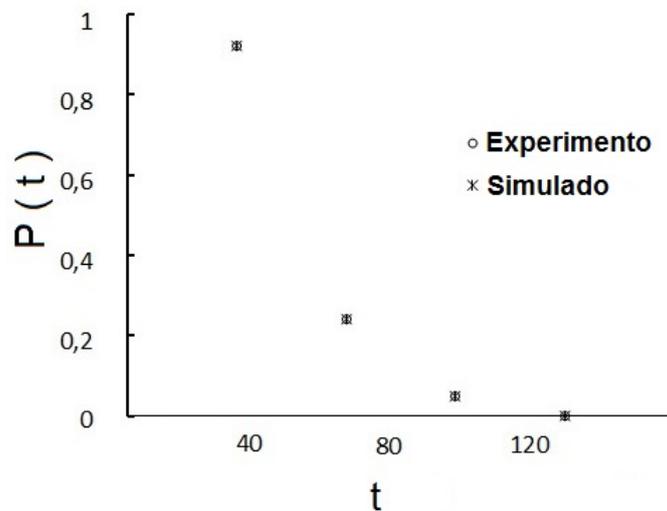


Figura 5.9: Comparação entre dados de um experimento real de avalanche feita de grãos de feijão em mesa inclinada e dados simulados no modelo proposto usando  $\bar{p}$  calibrado.

A Figura 5.9, mostra um gráfico probabilidade  $P(t)$  versus o tamanho  $t$  das avalanches do experimento e das simulações feitas com  $\bar{p}$  calibrado. O reduzido número de pontos é justificado pela condição entre experimento e simulação, neste caso não é possível uma comparação evento a evento sendo cabível uma comparação apenas entre intervalos de valores de cada amostra.

A diferença máxima entre os dados é de 0,05 que revela uma grande compactabilidade entre os dados, corroborando e firmando a hipótese que existe um parâmetro intrínseco  $\bar{p}$  em avalanches reais. Também, prova que as simulações feitas seguindo a arquitetura do modelo proposto podem representar o comportamento de avalanches

reais retornando valores compatíveis.

## 5.2 Modelos homogêneos e heterogêneos

O resultados mostrados nesta seção são sobre a comparação entre os modelos homogêneo e não homogêneo. Criou-se  $10^5$  réplicas dos dois modelos para comparar os dados em ambos os modelos.

Na Figura 5.10, é possível ver o comportamento da avalanche nos modelos de percolação dirigida com probabilidade homogênea e no modelo de percolação dirigida com percolação não homogênea. A Figura 5.10 é o desenho das avalanches pela vista frontal. Pode-se perceber que a quantidade de sítios ativos no caso heterogêneo é maior e apresenta compacidade acentuada no interior do transiente.

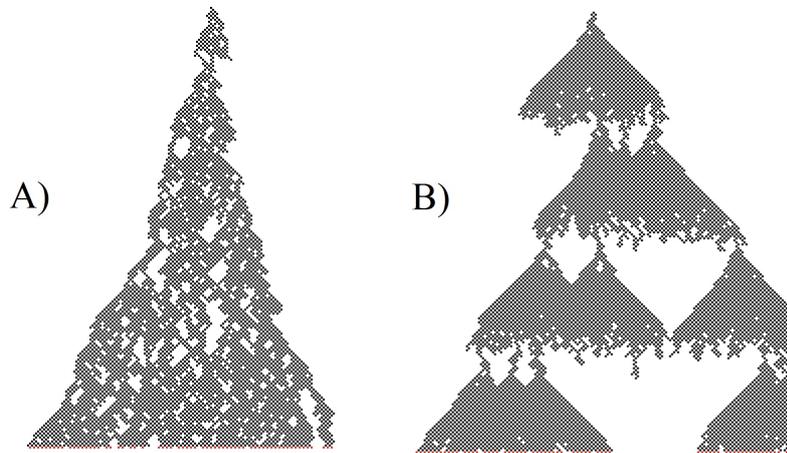


Figura 5.10: A) Avalanche no modelo Homogêneo. B) Avalanche no modelo Não Homogêneo.

As bordas dos modelos são bastante diferentes, no modelo homogêneo as bordas são irregulares e mal definidas; no modelo não homogêneo as bordas são compactas e bem delineadas. O tamanho de uma em relação à outra difere consideravelmente como era aguardado, pois os modelos homogêneos possuem  $p_c$  elevados quando comparados com os dos modelos heterogêneos.

A superioridade em quantidade de sítios ativos e no tamanho médio das avalanches do modelo não homogêneo é devido à variação de  $\bar{p}$ , que se torna maior a medida que  $t \gg 1$ . Quando  $t = 90 \Rightarrow \bar{p}(t) = 1$ . Ao assumir seu valor máximo, a probabilidade  $\bar{p}$  passa a decrescer em virtude da função senoide, isto gera as ilhas inativas vista na Figura 5.10-B.

Para Percolação homogênea esperávamos baixa quantidade de avalanches de grande porte, fato que se confirmou. Os deslizamentos simulados com probabilidade constante obtiveram menor duração média quando comparados com os do modelo

heterogêneo. Em média, as avalanches do modelo homogêneo, avançam 7,6098 linhas. Na Tabela 5.3, é possível ver alguns dados estatísticos sobre os tamanhos das avalanches nos modelos homogêneo e não homogêneo.

| Parâmetro   | Homogênea | Heterogênea |
|-------------|-----------|-------------|
| Média       | 7,60      | 119,50      |
| Variância   | 56,97     | 11733,92    |
| Erro padrão | 0,07      | 1,08        |
| Mínimo      | 2         | 2           |
| Máximo      | 80        | 221         |

Tabela 5.3: Dados estatísticos dos tamanhos das avalanches com probabilidade homogênea e não homogênea.

Os valores dos tamanhos médios indicam que o modelo homogêneo tem menor duração que o modelo não homogêneo. O tamanho médio também representa a taxa média de sobrevivência, isto significa que o modelo heterogêneo possui deslizamentos maiores e com maior duração, o que na prática reflete maior estabilidade do sistema. Os dados da Tabela 5.3 corroboram com aquilo que era esperado, pois os modelos heterogêneos têm apresentado transição de fase de segunda ordem. A taxa média de sobrevivência do modelo homogêneo aproxima-se consideravelmente da média encontrada por Hinrichsen que é de aproximadamente 10 pontos para  $10^4$  réplicas, isto se explica pelo fato do modelo de Hinrichsen ser homogêneo, visto que é baseado em quantidade de *energia de barreira* e *energia dissipada* que são parâmetros constantes em cada réplica. O reflexo desses dados é notado no contorno das avalanches que é mais acentuado nos modelos não homogêneos.

Os gráficos na Figura 5.11 representam os valores dos transientes encontrados nas simulações dos dois casos.

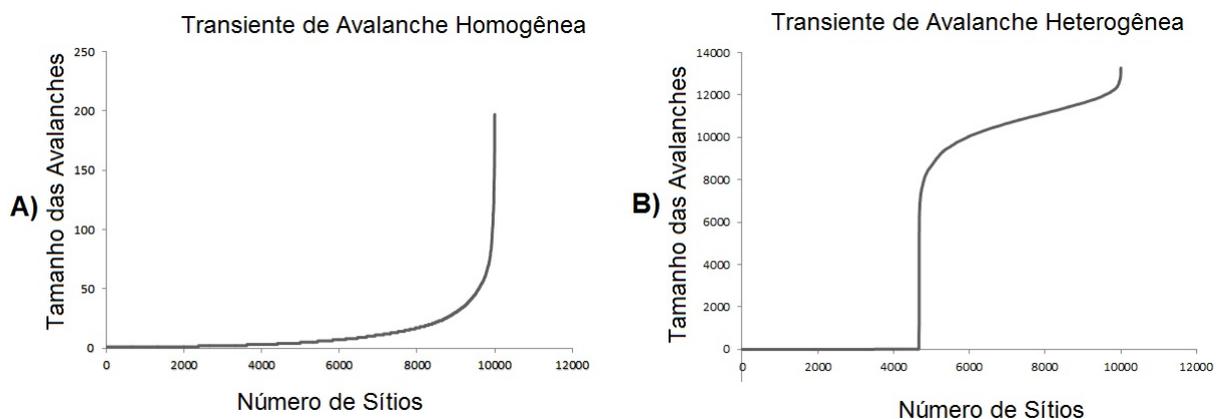


Figura 5.11: A) Transiente de avalanche no modelo homogêneo. B) Transiente de avalanche no modelo não homogêneo.

Os gráficos na Figura 5.11 estão em escalas diferentes, pois os valores de transiente diferem bastante de caso a caso. Cerca de 60% das réplicas do modelo heterogêneo atingiram transiente superior a 8000 sítios. O modelo homogêneo comportou-se dentro do esperado com transientes pequenos e pouco compactos, observando que no caso homogêneo as avalanches chegaram ao máximo com 197 sítios ativos, portanto não houve grandes avalanches. O gráfico mostra, também, que no caso heterogêneo, onde as avalanches alcançaram a borda em boa parte das réplicas, o transiente máximo foi de 13280 sítios ativos. Sendo o modelo heterogêneo mais adaptável para avalanches de maior extensão.

# Capítulo 6

## Conclusões

Iniciou-se este trabalho expondo-se no Capítulo 1, uma introdução sobre o tema e também apresentando os objetivos e finalidades desta tese. No Capítulo seguinte foi a vez de mostrar como funciona os axiomas da probabilidade e a percolação. Mostrou-se algo fundamental sobre a percolação que é a *transição de fase* e o que são variáveis aleatórias.

No Capítulo 3, apresentou-se os modelos e as nuances de uma avalanche, conhecendo sua definição, comportamento e, também, apresentou-se alguns modelos de simulações de avalanches. Seguindo para o quarto Capítulo, abordou-se como se iniciou os trabalhos de simulação de avalanche. A maioria dos modelos não considera um abordagem percolativa, contudo o trabalho de Douady & Daerr [13] inspirou Hinrichsen [19] que introduziu a abordagem percolativa para os problemas de simulação de avalanche. Desta forma, criou-se um ambiente para introduzir a percolação no contexto das simulações de avalanche. No Capítulo 5, apresenta-se o experimento de avalanche responsável por calibrar o parâmetro  $p$  que posteriormente foi usado para simular avalanches e fazer comparação dos modelos.

O conhecimento das modelagens foi usado para gerar uma modelagem própria. O modelo proposto difere bastante dos antigos no sentido de que é uma abordagem totalmente percolativa, aglutinando uma gama de parâmetros em uma única variável. Esta mudança foi analisada quantitativa e qualitativamente através das simulações. Com uma malha de  $220 \times 100$  pontos, realizou-se  $10^5$  simulações; embora seja um valor elevado de simulações, ainda assim está abaixo do pretendido sendo um tópico a ser trabalhado futuramente.

Usou-se dois tipos de modelos de percolação: Homogênea e não homogênea. No caso não homogêneo considerou-se que a probabilidade de um sítio estar ativo em razão da distância da borda superior até a linha  $t$ , é dada por uma função senoide  $\bar{p}(|O \leftrightarrow X) = t) = p_0 + (1 - p)|\text{sen}(t \times \frac{\pi}{180})|$ . Em cada caso simulamos  $10^5$  réplicas e comparou-se os dados de cada modelo.

Preliminarmente, teve-se a ideia de elaborar um atividade de comparação entre

simulações do modelo homogêneo com dados de avalanches reais, em que o intuito era garantir que ao simular o modelo este tivesse o comportamento quantitativo e qualitativos dos eventos reais. Realizou-se  $10^4$  réplicas que foram comparadas aos dados reais, onde se obteve resultados satisfatórios, onde a maior diferença entre o simulado e o real foi de 0,0005, credenciando a realização das etapas posteriores da tese.

No sentido de desenvolvimento teórico a tese traz uma metodologia inovadora e inédita. Em si tratando de grãos de feijão preto, ela é capaz de encontrar o parâmetro intrínseco  $\bar{p}$  de avalanches reais cujos os dados de tamanhos sejam conhecidos com 0,05 de exatidão nos resultados.

As simulações de avalanches realizadas, preliminarmente, tinham o pressuposto que estas são, de fato, um caso de percolação homogênea dirigida. Do ponto de vista quantitativo, revelou-se que a percolação homogênea tem baixa sobrevivência quando atribui-se baixos valores de probabilidade para  $\bar{p}$ , isto por conta da rede usada possuir transição de fase em  $\bar{p} = 0.59$ . Os transientes neste caso são pequenos e raramente percolam. Por outro lado, este modelo é adequado para representar eventos com alta probabilidade de perturbação dos sítios. Os transientes são robustos e a alta quantidade de simulações que percolaram dão a dimensão do excelente ajuste entre a hipótese e a realidade. Percebeu-se que valores de  $\bar{p}$ , acima de 0.59, geram redes infinitas com altos valores de transiente de avalanche.

Do ponto de vista qualitativo, a implementação do modelo ajudou na visualização de algumas propriedades comuns aos sistemas percolativos, tais como ângulo de abertura, tamanho e o transiente de avalanche. Pode-se ver a delineação dos aglomerados gerados, e mencionar a forma triangular esperada. A delineação das bordas, tal como em Hinrichsen, releva o grau de ajuste da hipótese, pois caso contrário ter-se-ia formações não triangulares, o que é atípico para as avalanches dirigidas geradas em simulações. Ademais, percebeu-se que em se aumentando o valor de  $\bar{p}$ , o ângulo de abertura  $\phi$  também aumenta. Notou-se que o comportamento do tamanho e o transiente das avalanches estão atrelados ao parâmetro  $\bar{p}$ , pois variando se o  $\bar{p}$  para próximo de 1, os transientes são mais compactos e maiores. À luz dos resultados fica evidente que as avalanches podem ser descritas por um modelo de percolação homogênea e/ou não homogênea dirigida.

Firmando, portanto, que o modelo homogêneo não é adequado para representar eventos com baixa probabilidade de perturbação dos sítios. Levando em conta o trabalho de Hinrichsen, pôde-se aferir que não houve casos de percolação direcionada compacta. De fato, as avalanches do modelo heterogêneo são maiores e mais compactas, portanto são melhores para descreverem situações de alta criticidade.

Mostrou-se que qualitativamente e quantitativamente que as avalanches podem ser tratadas como rede de percolação homogênea. Abrindo, assim a oportunidade

para comparar diferentes modelos de percolação. Como se atingiu um patamar de semelhança considerável entre eventos simulados e eventos reais a premissa inicial foi alcançada e só restou admitir que avalanches podem ser tratadas como rede de percolação. Este resultado, também serve para evidenciar uma nova técnica de abordagem nos problemas de avalanche, garantido coerência a essa nova teoria. Assim, é viável a modelagem computacional de eventos de avalanche via teoria da percolação.

Encontrou-se, portanto, uma solução para aproximar eventos de avalanche a eventos de percolação, correlacionando os parâmetros de energia com o parâmetro  $\bar{p}$  da estatística percolativa. Obteve-se com a correlação de parâmetros uma comparação entre avalanches criadas pelo modelo homogêneo e avalanches criadas pelo modelo não homogêneo. Gerando, assim, dados criados através de simulações percolativas que exprimiram eventos de avalanche nos modelos homo e heterogêneo.

As simulações foram analisadas com o auxílio de gráficos e tabelas que auxiliaram na prova de que eventos de avalanche simulados via percolação heterogênea podem se aproximar de eventos reais de avalanche, resguardando algumas condições como extensão e contorno.

Um dos principais objetivos alcançados foi a equação 4.3. Ela prediz a probabilidade do acontecimento de avalanches de determinado tamanho. Sendo portanto, um dos grandes achados dessa tese. Com ela pretende-se alcançar outros trabalhos como a criação de uma tabela de valores para variados materiais e situações de avalanche.

Usando a forma  $\bar{p}(t) = p_0 + (1 - p)|\text{sen}(t \times \frac{\pi}{180})|$ , foi possível observar um comportamento diferente de avalanche, a conclusão sobre esse fato é que deve existir uma forma aproximada que una com exatidão o comportamento das avalanches e característica percolativa heterogênea, sendo importante passo nessa direção.

Em trabalhos futuros é possível alcançar um número maior de simulações e testar quais os efeitos desse aumento. É necessário, também, estudar outros grãos e materiais como o minério para se determinar seus parâmetros. Para fechar o trabalho é possível levantar outra questão: quais são os pontos críticos desses modelos? Pergunta que se pretende responder nos próximos trabalhos.

# Bibliografia

- [1] MA Aizerman and FR Gantmakher. On the stability of the equilibrium positions for discontinuous systems. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 24(2):406–421, 1960.
- [2] P Bak, C Tang, and K Wiesenfeld. Self-organized criticality: an explanation of 1/f noise, 1987. *Phys. Rev. Lett*, 59:381, 1987.
- [3] E Batista, A Sabrosa, M Ferreira, I Castanheira, and AMH Van der Veen. Uncertainty calculation in the calibration of volumetric laboratory glassware. *Metrologia*, 2000.
- [4] Béla Bollobás. *Modern graph theory*, volume 184. Springer Science & Business Media, 2013.
- [5] Amy M Bonser, Jonathan Lynch, and Sieglinde Snapp. Effect of phosphorus deficiency on growth angle of basal roots in *phaseolus vulgaris*. *New Phytologist*, 132(2):281–288, 1996.
- [6] Gastao A Braga and Francisco Fontenele Araujo Jr. Caracterização da fase desordenada do modelo de ising d-dimensional via desigualdades de correlações. *Departamento de Matemática*, 1, 2000.
- [7] Simon R Broadbent and John M Hammersley. Percolation processes: I. crystals and mazes. In *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, volume 53, pages 629–641. Cambridge University Press, 1957.
- [8] Maurice A Carrigy. Experiments on the angles of repose of granular materials 1. *Sedimentology*, 14(3-4):147–158, 1970.
- [9] Paulo Alexandre de Castro. *Rede complexa e criticalidade auto-organizada: modelos e aplicações*. PhD thesis, Universidade de São Paulo, 2007.
- [10] Sabrina da Silva de Souza and Denise Maria Guerreiro Vieira da Silva. Validação de modelo teórico: conhecendo os processos interativos na rede de apoio às pessoas com tuberculose. *Acta Paulista de Enfermagem*, 24(6), 2011.

- [11] Souza Raimundo N. C. de. Ponto crítico da rede de bethe não homogênea. Master's thesis, Instituto de Ciências Exatas e Naturais da Universidade Federal do Pará, 2014.
- [12] Nattália Di Lanaro, Larissa Grazielle Bajay, Victor Martins Pinto de Queiroz, Renan Cupertino Silva Pinto, Isadora Garcia de Albuquerque Leitão, Bruna Candiani Lessio, and Pedro Esteves Duarte Augusto. Determinação de propriedades físicas do feijão fradinho. *Revista Brasileira de Produtos Agroindustriais*, 13(1):27–35, 2011.
- [13] S Douady, A Daerr, and HJ Herrmann. Physics of dry granular media. *Physics of Dry Granular Media*, 1998.
- [14] P FEOFILOFF, Y KOHAYAKAWA, and Y WAKABAYASHI. Uma introdução sucinta à teoria dos grafos. são paulo, 2009, 2011. Last modified: Wed Sep 27 13:12:28 BRT 2017.
- [15] Vidar Frette, Kim Christensen, Anders Malthé-Sørensen, Jens Feder, Torstein Jøssang, and Paul Meakin. Avalanche dynamics in a pile of rice. *Nature*, 379(6560):49, 1996.
- [16] Alexis Jonathan Gillett. Phase transitions in bak-sneppen avalanches and in a continuum percolation model. 2007.
- [17] Geoffrey Grimmett. What is percolation? In *Percolation*, pages 1–31. Springer, 1999.
- [18] Geoffrey R Grimmett, Ioan Manolescu, et al. Inhomogeneous bond percolation on square, triangular and hexagonal lattices. *The Annals of Probability*, 41(4):2990–3025, 2013.
- [19] Haye Hinrichsen, Andrea Jiménez-Dalmaroni, Yadin Rozov, and Eytan Doman. Flowing sand—a possible physical realization of directed percolation. *Journal of Statistical Physics*, 98(5-6):1149–1168, 2000.
- [20] Ernst Ising. Beitrag zur theorie des ferromagnetismus. *Zeitschrift für Physik*, 31(1):253–258, 1925.
- [21] Carlos Augusto Sousa Jatene. Percolação regular em rede quadrada com probabilidade sub-limitada em ondas. Master's thesis, Ufpa, 2007.
- [22] Harry Kesten. *Percolation theory for mathematicians*. Springer, 1982.
- [23] Werner Krauth. *Statistical mechanics: algorithms and computations*, volume 13. OUP Oxford, 2006.

- [24] Gabriel Olívio Locatelli, Lidiane Silva do Espírito Santo Nunes, Maria de Fátima Vieira De Queiroz, Carlos Edison Lopes, and Christine Lamenha Luna Finkler. Predição de um modelo de percolação de óleo diesel em areias da praia do porto de suape-pe, brasil. *Geologia*, 28(1), 2015.
- [25] Marcos Nascimento Magalhães. *Probabilidade e variáveis aleatórias*. Edusp, 2006.
- [26] Caio França Merelim Magalhães. Simulação de materiais granulares. Master's thesis, Universidade Federal de Minas Gerais, 2008.
- [27] Paul L Meyer. Probabilidade: Aplicações à estatística.(2ª edição). *Livros Técnicos e Científicos Editora SA*, 1983.
- [28] Luciene Lopes Borges Miranda. Avalanches e criticalidade auto-organizada em pilhas de areia estocásticas. Master's thesis, CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE MINAS GERAIS, 2012.
- [29] AM Namba, VB Da Silva, and CHTP Da Silva. Dinâmica molecular: teoria e aplicações em planejamento de fármacos. *Eclética Química*, 33(4), 2008.
- [30] Luiz Francisco Pontin. *Sobre a Equivalência dos Modelos Antiferromagnético Diluído e Ferromagnético em Campo Aleatório: Versão Hierárquica*. PhD thesis, Universidade de São Paulo, 1990.
- [31] Samuel Rocha et al. Avalanches, 2010. [Online; accessed 07- june-2019].
- [32] Mq F Sykes and John W Essam. Exact critical percolation probabilities for site and bond problems in two dimensions. *Journal of Mathematical Physics*, 5(8):1117–1127, 1964.
- [33] Heliton Ribeiro Tavares, RNC Souza, MR Madruga, and VJC Farias. Densidade crítica no modelo de percolação em rede de bethe não-homogênea. *TEMA (São Carlos)*, 16(2):173–182, 2015.
- [34] Wikipédia. Percolação — wikipédia, a enciclopédia livre, 2017. [Online; accessed 11-abril-2017].

# Anexo I

Aqui se pode ver a estrutura do programa feito no NetLogo, para simular as avalanches nos casos Homogênea e Não-Homogênea.

```
globals [ linha-da-frente tamanho-da-avalanche iteracao  
transiente transiente-parcial] ;;variáveis globais
```

```
to preparar ;;prepara a mesa
```

```
  ca
```

```
  set transiente 1 ;;tamanho inicial de transiente
```

```
  set tamanho-da-avalanche 1 ;;tamanho inicial da avalanche
```

```
  ask patches [ set pcolor brown ]
```

```
  set linha-da-frente patches with [ pycor = max-pycor ]
```

```
  ask linha-da-frente [
```

```
    if (pxcor = max-pxcor mod 2) [ set pcolor red ]
```

```
    ;;cria um sítio ativo na borda superior.
```

```
  ]
```

```
end
```

```
;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;  
;; vamos dar a avalanche caráter percolativo homogêneo ;;  
;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;
```

```
to homogenea ;;roda a simulação com probabilidade constante.
```

```
  while [iteracao < numero-de-iteracoes ] [ ;;numero de iterações pedidas
```

```
  if desliga? [ stop ]
```

```
  ifelse tamanho-da-avalanche <= 220 [ ;; limita o tamanho
```

```
  da avalanche em 220 pontos
```

```
  if not any? linha-da-frente with [ pcolor = red ][nova-avalanche]
```

```
  ;;se não houver sítios ativos encerra e cria outra avalanche.
```

```
    percolar ;; função que testa a probabilidade do sitio passar
```

```
    a atividade para próxima linha.
```

```
  ;if graficos? [desenha-graficos] ;comando para desenhar
```

```
  o gráfico das simulações.
```

```
  ]
```

```
  [ nova-avalanche ]
```

```

    set tamanho-da-avalanche tamanho-da-avalanche + 1
    ;; guarda o tamanho parcial de cada avalanche.
  ]

end

;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;
;;; vamos prepara a mesa para uma nova avalanche ;;;;;;;;;
;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;

to nova-avalanche ;;limpa a mesa deixando 1 único sitio ativo.

;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;
;;; Salvando o transiente da avalanche passada ;;;;;;;;;
;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;

file-open "C:\\Users\\GUI\\Desktop\\DOCUMENTOS
DOUTORADO\\TESE\\netlogo\\ARTIGO 1\\transiente-homogenea.txt"
;;para facilitar, deve-se criar na pasta de destino
file-type " " ;; um arquivo com esse nome
                e inserir o caminho.
file-print transiente ;; escreve o dado no arquivo.
file-close

;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;
;;; Salvando o tamanho de cada avalanche ;;;;;;;;;
;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;

file-open "C:\\Users\\GUI\\Desktop\\DOCUMENTOS
DOUTORADO\\TESE\\netlogo\\ARTIGO 1\\tamanho-homogenea.txt"
file-type " " ;;salva criando um espaço entre cada valor.
file-print tamanho-da-avalanche ;;gravando o arquivo '.txt'
file-close

;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;
;;; reinicia a mesa a cada nova iteração ;;;;;;;;;
;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;

if graficos? [desenha-graficos] ;gera gráficos

```

```

ask patches [ set pcolor brown ]
set linha-da-frente patches with [ pycor = max-pycor ]
ask linha-da-frente [
  if (pxcor = max-pxcor mod 2) [ set pcolor red ]
]

set iteracao iteracao + 1 ;;incrementando mais uma avalanche
set tamanho-da-avalanche 1 ;; reiniciando o valor do
                             tamanho-da-avalanche

set transiente 1

end

;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;
;;; Cria novos sítios de acordo com a probabilidade;;;
;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;

to percolar ;;aquí entra a interação do modelo. Cada sítio
  abaixo recebe uma probabilidade de estar ativo.

set transiente-parcial 0
ask linha-da-frente with [ pcolor = red ][
  ask patches at-points [ [-1 -1] [1 -1] ][
    ifelse (pcolor = brown) and (random-float 100
  < probabilidade )[
      set pcolor red
    ][stop]
  ]
  set pcolor black
]

set linha-da-frente patches with [ pcolor = red ]
;;confere cor vermelha aos sítios ativos.

set transiente-parcial count patches with [ pcolor = red ]
;;conta o numero de sítios ativos na ultima linha.

set transiente transiente + transiente-parcial

```

```

;;soma todos os sítios ativos.

end

;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;
;;;      Aqui vamos por a parte não-homogênea      ;;;;
;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;

to nao-homogenea

while [iteracao < numero-de-iteracoes ] [
;;numero de iterações pedidas
if desliga? [ stop ]
ifelse tamanho-da-avalanche <= 220 [
;; limita o tamanho da avalanche em 220 pontos
if not any? linha-da-frente with [ pcolor = red ]
[nova-avalanche-n-homogenea ]
;;se nao houver sitios ativos encerra e cria outra avalanche.

    percolar1 ;; função que testa a probabilidade
    do sitio passar a atividade para próxima linha.

]
[nova-avalanche-n-homogenea ]

set tamanho-da-avalanche tamanho-da-avalanche + 1
;; guarda o tamanho parcial de cada avalanche.
]

end

;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;
;;; Cria novos sítios de acordo com a probabilidade;;;
;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;

to percolar1 ;;aqui entra a interação do modelo. Cada sítio
abaixo recebe uma probabilidade variada de estar ativo.

```

```

set transiente-parcial 0
ask linha-da-frente with [ pcolor = red ][
    ask patches at-points [ [-1 -1] [1 -1] ][
        ifelse (pcolor = brown) and (random-float 100
< probabilidade + ((100 - probabilidade ) * (abs ( sin (
tamanho-da-avalanche * (3.14 mod 180)))) )))[
            set pcolor red
        ][stop]
    ]
    set pcolor black
]

set linha-da-frente patches with [ pcolor = red ]

;;confere cor vermelha aos sítios ativos.

set transiente-parcial count patches with [ pcolor = red ]

;;conta o numero de sítios ativos na ultima linha.

set transiente transiente + transiente-parcial
;;soma todos os sítios ativos.

end

to nova-avalanche-n-homogenea
;;limpa a mesa deixando 1 único sitio ativo.

;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;
;;; Salvando o transiente da avalanche passada ;;;;
;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;

file-open "C:\\Users\\RAIMUNDO\\Desktop\\DOCUMENTOS
DOUTORADO\\TESE\\netlogo\\transiente-n-homogenea.txt"
file-type " "
file-print transiente ;; escreve no arquivo.
file-close

```

```

;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;
;;; Salvando o tamanho de cada avalanche ;;;;;;;;;;;;;;;;;;
;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;

file-open "C:\\Users\\RAIMUNDO\\Desktop\\DOCUMENTOS
DOUTORADO\\TESE\\netlogo\\tamanho-n-homogenea.txt"
file-type " " ;;salva criando um espaço entre cada valor.
file-print tamanho-da-avalanche ;;gravando o arquivo '.txt'
file-close

;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;
;;; reinicia a mesa a cada nova iteração ;;;;;;;;;;;;;;;;;;
;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;

if graficos? [desenha-graficos] ;gera gráficos

ask patches [ set pcolor brown ]
set linha-da-frente patches with [ pycor = max-pycor ]
ask linha-da-frente [
  if (pxcor = max-pxcor mod 2) [ set pcolor red ]
]

set iteracao iteracao + 1 ;;incrementando mais uma avalanche
set tamanho-da-avalanche 1
;; reiniciando o valor do tamanho-da-avalanche
set transiente 1

end

;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;
;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;

to desenha-graficos
set-current-plot "Percolado"
plot count linha-da-frente with [pcolor = red]
set-current-plot "Transiente de avalanche"

```

```
plot transiente ;  
set-current-plot "transiente medio"  
plotxy iteracao (transiente / numero-de-iteracoes )  
end
```

```
## Versao Final por Raimundo de souza
```

## Anexo II

Aqui podemos ver os dados dos experimentos de avalanches desenvolvidas na mesa.

36 20 9 2 47 19 19 5 52 32 1 17 3 13 10 2 24 24 16 25 9 40 9 1 38 5 29 4 30 15 3 6 2  
8 4 25 8 12 7 1 11 2 9 7 27 4 22 5 3 8 9 2 13 14 34 7 6 9 10 19 32 9 59 33 74 55 5 36  
128 88 7 34 23 11 62 18 10 88 21 39 14 6 10 25 24 29 11 40 7 66 33 25 22 27 12 49  
41 61 6 23 2 5 10 16 29 17 1 20 14 16 7 14 14 13 54 23 7 38 19 32 18 31 24 15 15 27  
13 23 23 19 87 9 13 1 13 31 12 8 29 2 19 10 9 17 8 26 5 8 11 11 11 13 18 11 18 17  
32 19 10 20 26 25 29 11 7 10 17 21 7 35 34 14 30 14 21 16 13 12 6 3 27 19 4 9 7 12  
18 19 14 14 11 30 7 11 5 14 16 8 26 11 15 9 19 10 9 20 27 24 9 12 6 27 6 10 9 13 19  
6 9 2 11 17 26 10 5 13 22 18 4 18 9 32 22 29 19 11 11 18 19 4 15 25 16 10 13 3 11  
12 22 102 49 2 13 7 1 6 3 12 5 20 5 3 8 8 6 7 11 22 6 18 11 6 1 25 15 16 18 5 8 11  
18 5 61 4 22 5 4 11 5 6 11 23 14 23 17 6 8 8 7 6 3 12 14 3 8 11 11 13 13 3 12 6 20 7  
8 6 19 9 15 9 4 4 1 2 5 4 5 27 6 13 5 9 6 10 3 20 10 7 17 10 17 9 3 10 12 17 5 44 14  
5 3 9 11 12 8 21 16 14 13 1 9 4 11 5 28 6 12 22 18 16 13 9 7 35 9 2 15 2 14 28 14 8  
16 5 13 16 13 9 8 17 12 25 9 18 6 14 8 11 17 24 17 23 3 4 20 16 19 28 7 21 6 5 8 12  
4 2 21 5 6 8 11 10 16 6 10 6 5 19 19 8 17 3 22 7 8 15 2 17 1 22 3 28 19 3 11 20 14 4  
10 10 5 20 7 20 5 8 9 7 17 59 7 8 18 2 1 12 12 23 16 26 18 7 7 61 15 19 19 2 8 19 48  
7 19 18 13 15 29 11 13 14 18 44 14 7 8 19 4 13 23 16 2 17 15 18 14 23 11 34 13 11  
10 13 11 4 14 15 41 41 62 11 5 15 45 34 12 5 12 20 14 26 26 10 16 19 41 9 14 16 23  
26 7 41 1 18 66 48 85 3 4 10 24 18 1 36 13 51 15 8 37 4 10 37 5 32 5 59 14 23 15 32  
18 7 18 44 12 14 15 9 31 13 11 12 10 17 35 52 27 28 36 21 7 22 101 24 78 6 120 13  
21 44 50 2 20 7 1 6 11 13 2 57 14 7 8 8 8 23 38 16 25 13 19 18 11 4 25 7 3 20 1 1 3  
7 2 9 9 4 3 5 16 16 61 10 15 11 32 6 11 6 24 29 6 28 24 21 9 33 31 6 32 10 9 17 8 22  
29 28 13 7 22 13 8 5 17 8 15 9 13 20 9 10 5 9 5 5 8 21 22 15 24 4 21 11 19 14 21 5 3  
1 23 4 4 19 7 4 52 10 5 7 17 19 18 10 20 13 18 29 36 7 14 9 22 29 16 15 34 15 32 9  
32 21 33 18 26 38 33 17 40 4 26 22 41 39 36 35 28 22 22 19 34 9 19 27 28 31 34 42  
21 38 24 15 23 21 38 19 18 15 54 38 16 22 27 1 1 10 11 5 8 10 7 8 57 13 6 7 7 12 24  
4 9 12 16 10 3 15 15 23 24 30 41 14 70 22 19 31 14 18 64 30 11 18 29 17 31 21 17 16  
11 18 18 12 39 2 17 15 54 14 30 16 23 34 16 12 14 36 56 48 21 31 49 15 5 26 13 16  
17 16 13 26 18 20 20 10 16 21 8 11 21 12 43 15 20 8 31 35 16 19 26 30 7 24 19 10 16  
17 32 60 30 12 6 19 14 30 22 22 13 40 43 32 21 10 29 18 9 7 43 25 14 22 35 9 7 47  
22 7 23 22 42 34 63 39 29 22 7 14 10 20 6 22 10 5 8 17 6 18 24 48 17 31 12 9 24 24  
26 29 28 10 2 11 3 7 23 27 15 13 12 17 10 10 13 19 14 10 39 12 24 16 54 10 3 6 32  
19 2 23 9 29 6 15 37 18 8 7 33 12 25 56 13 18 32 17 60 10 9 10 10 9 28 20 9 19 13 1  
15 6 15 21 15 3 20 10