



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Densidade de energia e força de radiação
sobre fronteiras em movimento
para estados arbitrários do campo:
aplicação ao estado coerente

Dissertação de Mestrado

Mateus Gomes Lima

Belém

Agosto de 2008



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Densidade de energia e força de radiação
sobre fronteiras em movimento
para estados arbitrários do campo:
aplicação ao estado coerente

Dissertação de Mestrado

Orientador: Prof. Dr. Danilo Teixeira Alves

Belém

Agosto de 2008

Densidade de energia e força de radiação sobre fronteiras em movimento para estados arbitrários do campo: aplicação ao estado coerente

Mateus Gomes Lima

Julgado em:

Conceito:

Comissão Julgadora:

Prof. Dr. Danilo Teixeira Alves

Orientador - Universidade Federal do Pará

Prof. Dr. Viktor Dodonov

Membro - Universidade de Brasília

Prof. Dr. Silvana Perez

Membro - Universidade Federal do Pará

Prof. Dr. Luís Carlos Crispino

Suplente - Universidade Federal do Pará

Belém

Agosto de 2008

Resumo

No presente trabalho nós consideramos um campo escalar real não massivo em um espaço-tempo bidimensional, satisfazendo a condição de fronteira Dirichlet ou Neumann na posição instantânea de uma fronteira em movimento. Para uma lei de movimento relativística, nós mostramos que as condições de fronteira Dirichlet e Neumann produzem a mesma força de radiação sobre um espelho em movimento quando o estado inicial do campo é invariante sobre translações temporais. Obtemos as fórmulas exatas para a densidade de energia do campo e da força de radiação na fronteira para os estados de vácuo, coerente e comprimido. No limite não-relativístico, nossos resultados coincidem com os encontrados na literatura. Nós também investigamos o campo dentro de uma cavidade oscilante. Considerando as condições de fronteira Neumann e Dirichlet, escrevemos a fórmulas exata para a densidade de energia dentro de uma cavidade não-estática, para um estado inicial arbitrário do campo. Tomando como base a equação de Moore, nós calculamos recursivamente a densidade de energia e investigamos a evolução temporal da densidade de energia para o estado coerente do campo.

Abstract

In this work we consider a real massless scalar field in a two-dimensional spacetime, satisfying Dirichlet or Neumann boundary condition at the instantaneous position of a moving boundary. For a relativistic law of motion, we show that Dirichlet and Neumann boundary conditions yield the same radiation force on a moving mirror when the initial field state is invariant under time translations. We obtain the exact formulas for the energy density of the field and the radiation force on the boundary for vacuum, coherent and squeezed state. In the nonrelativistic limit, our results coincide with those found in the literature. We also investigate the field inside an oscillating cavity. Considering Neumann and Dirichlet boundary conditions, we write the exact formula for the energy density inside a non-static cavity for an arbitrary initial field state. Taking as basis the Moore equation, we calculate recursively the energy density and investigate its time evolution for the coherent state.

“À minha mãe, Rita Alves (In Memoriam)”.

Agradecimentos

Em nome de Allah, clemente e misericordioso!

Gostaria de agradecer, a minha mãe, Rita Alves (*In memoriam*), que sempre esteve ao meu lado, me apoiando e dando forças para eu alcançar meus objetivos. Com ela a paz e a glória!

Às minhas irmãs Rosângela e Monica que sempre acreditaram em mim e incentivaram os meus estudos. Aos meus sobrinhos Willian e Yasmin, para os quais eu tento ser um exemplo de que estudar vale o sacrifício.

Ao meu orientador e amigo Danilo T. Alves, por me orientar de forma serena e honesta, corrigindo minhas falhas e favorecendo, assim, meu crescimento acadêmico e, principalmente, meu amadurecimento pessoal. Através da força de suas ações, aprendi lições que levarei para o resto da minha vida. Muito obrigado!

Aos amigos de graduação do curso de física noturno: Alexandre Sampaio, Alexandre Pantoja, André Luiz, Amauri Paixão, Clayton Costa, Edson Carlos, Flávio Daniel, Gregório Barbosa, Gerson Castro, Jônatas Barros, Marcos Vinícius, Rogério Ferreira, Saulo Martins e Wanderson Medeiros.

Aos outros membros da “Equipe da Jamaica”: Bruno Wallacy, Ezequiel Belo, Kléber José e Marcel Luiz. Sempre transformando os bons e maus momentos em um BBB!

Aos amigos de convivência: Alex Cabral, Armando Neto, Elaine Palheta, Maronilson dos Santos, Rodrigo Canavieira, Rodrigo Gester, Lígia Matos, Kelly Braz, Joseane Cabral, Iramaia Lima, Michelle Gabriela, Aldilene Saraiva, Damiano Meira, Lizângela Almeida, Brenda Brandão, Shirsley dos Santos, Diógenes Leão, Jorge Edson, Diego Miranda, João Reis, Marcio Sales e Eduardo Gomes.

Aos companheiros do GTQC: Hector Okada, Andreson Rego, Wagner Pires e Edney Ramos.

Aos professores Luís Carlos Crispino, Sérgio Vizeu, Marcelo Lima, Van Sérgio e José M. F. Bassalo por elucidarem muitas das minhas dúvidas; Gandhi Aranha Jr. que se tornou um exemplo para mim; Miguel Ayan pela simpatia e disposição para solucio-

nar problemas burocráticos e Jair Amaral, Heleno Cunha e Samuel Maciel pelos sábios conselhos e companheirismo nas horas de descontração.

Gostaria de fazer um agradecimento especial à professora Silvana Perez, pela atenção, compreensão e bons conselhos dispensados a mim depois da perda de minha mãe e quando retornei a ser seu aluno, durante a disciplina mecânica estatística.

Gostaria de agradecer ao secretário da pós-graduação, Anderson Viana, e a Dona Jaciara que são as pessoas que permitem o avanço da ciência no laboratório de física da UFPA. Falando nisso, também gostaria de agradecer a CAPES pelo suporte financeiro e a Donald Knuth por criar o \TeX .

Finalizando, gostaria de agradecer ao Ás japonês da aviação Saburo Sakai (1916 - 2000) que através de seu livro, Samurai (onde narra, na minha opinião, algumas das maiores façanhas guerreiras de todos os tempos), inspira e fortalece meus princípios, com suas atitudes nobres e honradas, mostrando o verdadeiro significado do Bushido.

“Nanu Hachiman Daibosatu”.

“Amareis a paz como um meio para uma nova guerra, e amareis mais a paz breve que a prolongada. Aconselho-vos não a trabalhar, mas a lutar. Aconselho-vos não à paz, mas à vitória! Dizeis que a boa causa santifica até mesmo a guerra? Eu vos digo: é a boa guerra que santifica toda causa. A guerra e a coragem têm realizado mais do que a caridade.”

Friedrich Wilhelm Nietzsche

Sumário

1	Introdução	12
2	Uma fronteira móvel	17
2.1	Densidade de energia e força de radiação: fórmulas exatas	17
2.2	Estado inicial do campo: estado coerente	24
3	Cavidade com uma fronteira móvel	27
3.1	Densidade de energia: fórmulas exatas	27
3.2	Situação estática	30
3.3	Situação não-estática	33
3.3.1	Estados diagonais	38
3.3.2	Estados não diagonais: aplicação ao estado coerente	42
4	Comentários finais	48
4.1	Perspectiva: aplicação ao estado comprimido	48
4.2	Comentários finais	49
A	A condição de Neumann para um referencial de laboratório	51
B	Invariância conforme da equação de Klein - Gordon	53
C	Mapeamento conforme das coordenadas do sistema	56
D	Mapeamento conforme das condições de fronteira	59

D.1	Para uma fronteira	59
D.2	Para uma cavidade	60
D.2.1	Fronteira em repouso	61
D.2.2	Fronteira em movimento	61
E	A função de correlação \mathcal{C}	63
E.1	Para uma fronteira	63
F	Densidade de energia e força de radiação	65
F.1	Para uma fronteira	65
F.1.1	Densidade de energia: fórmulas gerais	65
F.1.2	Força de radiação: fórmulas gerais	68
F.1.3	Aplicação ao estado coerente	70
F.2	Para uma cavidade	71
F.2.1	Densidade de energia: fórmulas gerais	71

Capítulo 1

Introdução

O conceito de vácuo, discutido desde a antiguidade clássica, ganhou um novo significado a partir da hipótese de Max Planck (1858-1947) sobre a radiação do corpo negro que culminou na criação da mecânica quântica. Com a mecânica quântica surgem conceitos como o de energia de ponto zero (energia decorrente de flutuações quânticas que não podem ser eliminadas por nenhum processo físico), a criação e aniquilação de partículas, o princípio da incerteza de Heisenberg, entre outros. O estado de vácuo quântico (considerado como o estado de menor energia do sistema quântico) comporta-se como um meio capaz de se polarizar, magnetizar ou mesmo se desestabilizar, emitindo partículas reais.

Diante desse novo significado do conceito de vácuo, em maio de 1948 Hendrik Brugt Gerhard Casimir (1909-2000) publicou o famoso artigo: *On the attraction between two perfectly conducting plates* [1], onde mostrou que a mudança na energia de ponto zero do campo eletromagnético quantizado, induzida pela presença de placas metálicas, fixas, neutras, paralelas e perfeitamente condutoras estando no vácuo, dá origem a uma força macroscópica entre as placas que decai rapidamente com distância e é mensurável quando a distância entre os objetos é extremamente pequena. Desde então, a denominação forças de Casimir tem sido empregada para descrever, de um modo genérico, as forças entre corpos macroscópicos, provocadas pelas distorções nos modos do campo, causadas pela presença desses corpos, quando esse campo encontra-se no estado de vácuo.

A primeira verificação experimental do efeito Casimir foi feita em 1958 por M. J.

Sparnaay [2], porém o grau de incerteza na medida da separação entre as placas metálicas gerava uma incerteza muito grande a respeito dos resultados finais. Quase quarenta anos depois, em janeiro de 1997, S. K. Lamoreaux publicou seus resultados obtidos através de um experimento com uma geometria modificada [3], uma placa e uma lente esférica acoplados a um pêndulo de torção. Lamoreaux mediu a força de Casimir com uma incerteza de apenas 5%. Em 1998, U. Mohideen e A. Roy realizaram outro experimento [4], agora com um microscópio de força atômica, confirmando com alta precisão o efeito Casimir. Recentemente houveram outros experimentos [5] que não deixam qualquer dúvida sobre a existência concreta do efeito descoberto por Casimir e que leva o seu nome.

As forças dinâmicas de Casimir são aquelas exercidas pelas flutuações do vácuo do campo considerado, sobre corpos macroscópicos em movimento. No caso do campo eletromagnético, são forças de reação da radiação sobre fronteiras em movimento. Um dos efeitos relacionados com essa força é a possível dissipação da energia desses corpos, levando à criação de quanta reais do campo em questão. Tal criação de partículas reais pode ser entendida em termos do princípio da conservação da energia: forças dissipativas de Casimir retiram energia dos corpos em movimento, sendo que esta energia é convertida em quanta reais do campo (fótons no caso do campo eletromagnético).

Uma diferença básica entre as forças de Casimir estáticas e dinâmicas é que as últimas aparecem mesmo no caso onde existe somente um corpo em movimento (uma placa metálica ou espelho, por exemplo).

Na década de 70, os primeiros trabalhos investigando o problema quântico da radiação emitida por espelhos se movendo no vácuo foram publicados, motivados pela investigação de criação de partículas em um universo não estacionário (ver Refs. [6, 7, 8, 9, 10, 11, 12]).

Moore [6] investigou a radiação gerada em uma cavidade com uma fronteira em movimento, no contexto de um campo escalar real não massivo em espaço - tempo bi-dimensional. Impondo a condição de fronteira Dirichlet para o campo e também uma lei prescrita para o movimento da fronteira, Moore obteve uma fórmula exata para o valor do tensor energia-momentum, assumindo o estado inicial do campo como sendo o vácuo. A solução do campo obtida por Moore é dada em termos de uma equação funcio-

nal, usualmente chamada de equação de Moore, para a qual não há uma técnica geral de solução analítica.

Fulling e Davies [8] estudaram o problema da radiação de um espelho se movendo, também no contexto de um campo escalar real em um espaço - tempo bidimensional. Eles obtiveram uma fórmula exata para a parte física finita do valor esperado do tensor energia-momentum, assumindo o estado inicial do campo como sendo o vácuo. Seus resultados revelaram que a radiação é originada no espelho e propagada para além dele.

Law [13] obteve uma solução analítica exata para a equação de Moore, para um particular movimento ressonante da fronteira (veja também a Refs. [14]). Cole e Schieve [15] propuseram um método numérico para resolver exatamente a equação de Moore, para uma lei de movimento geral da fronteira. Soluções analíticas aproximadas para a equação de Moore foram também obtidas, por exemplo, por Dodonov-Klimov-Nikonov [16] e Dalvit-Mazzitelli [17].

Com abordagens diferentes daquelas adotadas por Moore [6] e Fulling-Davies [8], métodos perturbativos foram desenvolvidos para resolver o problema de um campo quântico na presença de uma única fronteira em movimento [18, 19] e também em cavidades oscilantes [20, 21].

Ford e Vilenkin [18] desenvolveram um método perturbativo que pode ser aplicado a espelhos que se deslocam com pequenas amplitudes e velocidades não relativísticas. Nesta aproximação, eles obtiveram para um campo escalar real em um espaço - tempo bidimensional que a força de radiação é proporcional à terceira derivada temporal da lei de movimento do espelho, que é o limite não relativístico do resultado obtido na Ref. [8]. Ford e Vilenkin também aplicaram seu método a um campo escalar em quatro dimensões no espaço - tempo, obtendo uma força proporcional à quinta derivada temporal do deslocamento do espelho.

Os primeiros trabalhos investigando o problema da criação de partículas por espelhos em movimento, com estados iniciais diferentes do vácuo, também foram publicados há trinta anos atrás, mostrando que a presença de partículas reais no estado inicial amplifica o fenômeno de criação de partículas. Como exemplo, temos o trabalho de Davies e

Fulling [10] (veja também a Ref. [22]), onde eles encontraram uma classe de trajetórias hiperbólicas de um espelho que se desloca num espaço - tempo de Minkowski em $1 + 1$ dimensões, para o qual a radiação emitida corresponde a um espectro térmico, que poderia ser registrado por um detector inercial. Para o banho térmico como o estado “in” do campo, ao invés do vácuo, Jaekel e Reynaud [23] obtiveram para o campo escalar em $1 + 1$ dimensões, a contribuição térmica para a força dissipativa proporcional à velocidade do espelho, válida no limite não relativístico.

O efeito Casimir dinâmico tem sido investigado, ainda considerando o banho térmico, para o caso de um único espelho [23, 24, 25, 26], e também para uma cavidade oscilante [16, 25, 27]. O estado coerente como estado inicial do campo foi considerado para uma fronteira em movimento nas Refs. [26, 28, 29, 30], assim como, a superposição de estados coerentes em conexão com a investigação de descoerência via efeito Casimir dinâmico [31]. Os estados comprimidos também foram considerados [26].

Recentemente, vários trabalhos têm investigado a influência de diferentes condições de fronteira no efeito Casimir dinâmico [28, 32]. No efeito Casimir estático, diferentes condições de fronteira podem alterar o sinal da força de Casimir [33]. Aplicações desta mudança, por exemplo, na construção de sistemas nano-eletromecânicos foram discutidos na Refs. [34]. O papel das condições de Dirichlet e Neumann na força de Casimir estática foi investigado na Refs. [35] no contexto do campo escalar. Neste contexto, Alves, Farina e Maia Neto [28] mostraram que as condições de fronteira Dirichlet e Neumann produzem a mesma força em um espelho em movimento, quando o estado inicial do campo é simétrico sobre translações temporais [28]. No entanto, a validade desta conclusão, obtida no contexto da aproximação de Ford-Vilenkin [18], foi restrita a aproximações não-relativísticas e de pequenas amplitudes.

O método exato de Fulling-Davies [8] é freqüentemente considerado menos flexível do que os métodos perturbativos, porque é baseado em transformações conformes e aplicável apenas para o espaço - tempo bidimensional [36, 37], enquanto que a abordagem perturbativa pode ser estendida às dimensões superiores. Por outro lado, o método de Fulling-Davies permite a obtenção de resultados exatos para o campo escalar no espaço -

tempo bidimensional.

No presente trabalho (Capítulo 2), em vez de seguir a abordagem aproximada considerada, por exemplo, na Ref. [28], usamos a abordagem exata proposta por Fulling e Davies [8] e calculamos, para um campo escalar real não massivo em um espaço - tempo bidimensional, as fórmulas (relativísticas) exatas para a densidade de energia do campo e para a força de radiação em um espelho, sendo que o estado inicial do campo é um estado arbitrário, mostrando que, também para leis de movimento relativísticas, as condições de fronteira Dirichlet e Neumann produzem a mesma força de radiação em um espelho em movimento, quando o estado inicial do campo é simétrico sobre translações temporais. No limite não relativístico, comparamos essas fórmulas exatas com os resultados aproximados encontrados nas Refs. [23, 28]. Aplicamos nossas fórmulas exatas para o estado inicial do campo sendo coerente, que é um exemplo de estado não invariante sobre translações temporais. No capítulo 3, no contexto do método de Cole-Schieve [15] para solucionar recursivamente a equação de Moore, nós estendemos, para um estado inicial do campo arbitrário, a relação de recorrência para a densidade de energia encontrada na Ref. [38]. Com esta generalização, obtemos recursivamente a densidade de energia dentro da cavidade, para um ponto arbitrário do espaço - tempo, em termos dos valores conhecidos da densidade de energia, calculada nas “regiões estáticas”, onde o estado inicial do campo não foi afetado pela perturbação causada pelo movimento da fronteira. Nós investigamos a evolução temporal da densidade de energia dentro de uma cavidade com uma fronteira móvel, considerando as condições de fronteira Dirichlet e Neumann e também um estado inicial do campo arbitrário. Também aplicamos as fórmulas obtidas para o campo em um estado inicial coerente. No capítulo 4, apresentamos algumas perspectivas, como a particularização das expressões exatas da densidade de energia do campo e da força de radiação, para o estado inicial do campo sendo o estado comprimido. Concluimos este capítulo resumando nossos resultados mais importantes e comentando-os.

Capítulo 2

Uma fronteira móvel

Neste capítulo consideramos um campo escalar real não massivo em um espaço-tempo bidimensional, satisfazendo a condição de fronteira Dirichlet ou Neumann na posição instantânea de uma fronteira em movimento. Para uma lei de movimento relativística, nós mostramos que as condições de fronteira Dirichlet e Neumann produzem a mesma força de radiação sobre um espelho em movimento, quando o estado inicial do campo é invariante sob translações temporais. Obtemos as fórmulas exatas para a densidade de energia do campo e para a força de radiação na fronteira, para um estado inicial do campo arbitrário e, posteriormente, aplicamos estes resultados a um estado inicial coerente. No limite não-relativístico, nossos resultados coincidem com os encontrados na literatura¹.

2.1 Densidade de energia e força de radiação: fórmulas exatas

Começamos revendo a solução exata para o campo escalar não massivo que está em um espaço - tempo plano, com condições de fronteira dinâmica de Dirichlet ou Neumann

¹Este capítulo compõe parte do artigo “Quantum radiation force on a moving mirror with Dirichlet and Neumann boundary conditions at vacuum, finite temperature and coherent state”, publicado na revista *Physical Review D* **77**, 125001 (2008).

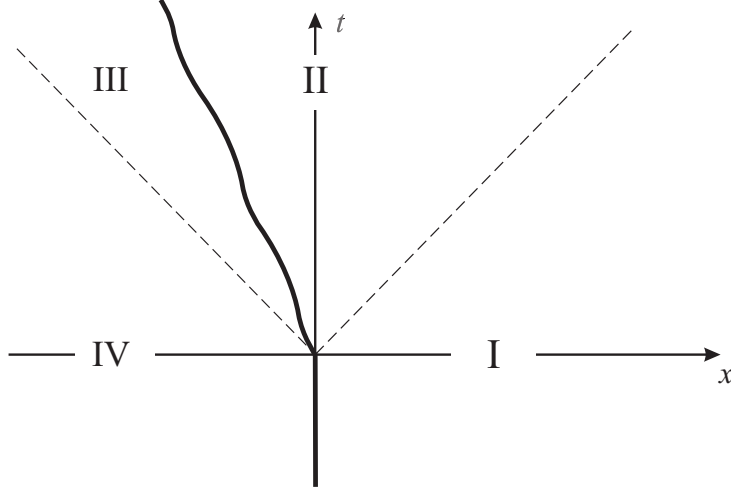


Figura 2.1: Trajetória do espelho em movimento. As linhas tracejadas são linhas-nulas separando a região I da região II, e região III da região IV.

[7, 8, 9]. Vamos considerar o campo não massivo $\phi(t, x)$ que satisfaça a equação de Klein - Gordon (nós assumimos ao longo do presente texto $\hbar = c = 1$):

$$(\partial_t^2 - \partial_x^2) \phi(t, x) = 0 \quad (2.1)$$

e obedeça a condição de Dirichlet ($\phi'(t', x')|_{fronteira} = 0$) ou Neumann ($\partial_{x'} \phi'(t', x')|_{fronteira} = 0$), tomadas no referencial de Lorentz instantaneamente co-móvel, na posição $x = z(t)$ da fronteira em movimento. Nós examinamos um conjunto particular de trajetórias do espelho para o qual $z(t < 0) = 0$, como mostrado na Fig. 2.1.

Usando a transformação de Lorentz, as condições de Dirichlet e Neumann podem ser escritas em termos de quantidades no referencial inercial de laboratório, respectivamente, como segue²:

$$\phi[t, z(t)] = 0, \quad (2.2)$$

$$\{[\dot{z}(t)\partial_t + \partial_x] \phi(t, x)\}|_{x=z(t)} = 0. \quad (2.3)$$

A solução do campo pode ser obtida através da exploração da invariância conforme da

²Cf. a demonstração da condição de Neumann no referencial de laboratório, mostrada no Apêndice A

equação Klein - Gordon [6, 8]. Considerando as transformações conformes de coordenadas

$$t - x = f(w - s) \quad \text{e} \quad t + x = g(w + s), \quad (2.4)$$

a equação da onda escalar em 1 + 1 dimensões permanece invariante³:

$$(\partial_t^2 - \partial_x^2) \phi(t, x) = 0 \rightarrow (\partial_w^2 - \partial_s^2) \phi(w, s) = 0. \quad (2.5)$$

As funções f e g podem ser definidas, para uma grande classe de leis de movimento $z(t)$ (ver Ref. [8]), de modo que a curva $s = 0$ coincide com a trajetória da fronteira $x = z(t)$: $[t, z(t)] \rightarrow (w, 0)$ [8]⁴. Então, podemos fazer o seguinte mapeamento conforme das condições de fronteira⁵:

$$\phi[t, z(t)] = 0 \rightarrow \phi(w, 0) = 0, \quad (2.6)$$

$$\{[\dot{z}(t)\partial_t + \partial_x] \phi(t, x)\}_{x=z(t)} = 0 \rightarrow [\partial_s \phi(w, s)]_{s=0} = 0. \quad (2.7)$$

Os modos normais solução da equação da onda no espaço (w, s) , com condições de fronteira estática de Dirichlet ou Neumann, são bem conhecidos, de modo que, voltando às coordenadas (t, x) , obtemos o operador campo na descrição de Heisenberg dado por:

$$\phi(t, x) = \int_0^\infty d\omega [\hat{a}_\omega \phi_\omega + \hat{a}_\omega^\dagger \phi_\omega^*], \quad (2.8)$$

onde

$$\phi_\omega(t, x) = (4\pi\omega)^{-\frac{1}{2}} [\gamma e^{-i\omega r(v)} + \gamma^* e^{-i\omega p(u)}] \quad (2.9)$$

forma um conjunto completo de soluções com frequências positivas, e, ao longo de todo o presente trabalho, adotamos a notação:

$$u = t - x \quad \text{e} \quad v = t + x. \quad (2.10)$$

Na Eq. (2.9), introduzimos uma notação que nos permite por em uma única fórmula, as soluções para as condições de fronteira de Dirichlet e Neumann, bem como as soluções

³Cf. o Apêndice B.

⁴Cf. o Apêndice C.

⁵Cf. o Apêndice D.

do campo para o lado direito (regiões I e II, na Fig. 2.1), e lado esquerdo (regiões III e IV na Fig. 2.1) do espelho. Neste sentido, para $\gamma = 1$, a Eq.(2.9) dá a solução para a condição de fronteira de Neumann, enquanto que, para $\gamma = i$, temos a solução para a condição de fronteira Dirichlet.

Para as regiões I e II mostradas na Fig. 2.1: $r(v) = v$ e $2\tau(u) - u = f^{-1}(u) \equiv p(u)$, onde $\tau(u)$ pode ser obtido de $\tau(u) - z[\tau(u)] = u$; para as regiões III and IV: $p(u) = u$ e $2\tau(v) - v = g^{-1}(u) \equiv r(v)$, onde $\tau(v) + z[\tau(v)] = v$. Como exigência da causalidade, o campo nas regiões I e IV, representado por $\phi_0(t, x)$, não é afetado pelo movimento da fronteira [8], de modo que as funções p e r são igualmente escolhidas para serem as funções identidade nestas regiões estáticas. Neste capítulo, consideramos as médias $\langle \dots \rangle$ tomadas sobre um estado inicial arbitrário do campo (regiões I e IV na Fig. 2.1) assumido aqui, por simplicidade, como sendo o mesmo estado para ambos os lados do espelho.

Continuamos a nossa análise escrevendo a função de correlação $\mathcal{C} = \langle \phi_0(t, x)\phi_0(t', x') \rangle$, dividida da seguinte forma:

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}_{vac} + \mathcal{C}_{non-vac}, \quad (2.11)$$

com

$$\mathcal{C}_{non-vac} = \mathcal{C}_{\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle} + \mathcal{C}_{\langle \hat{a} \hat{a} \rangle}, \quad (2.12)$$

onde⁶

$$\mathcal{C}_{vac} = \int_0^\infty d\omega \mathcal{F}_1(\omega, \omega', |\gamma|, \gamma)|_{\omega=\omega'}, \quad (2.13)$$

$$\mathcal{C}_{\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle} = \int_0^\infty \int_0^\infty d\omega d\omega' \langle \hat{a}_\omega^\dagger \hat{a}_\omega \rangle \mathcal{F}_1(\omega, \omega', |\gamma|, \gamma) + \text{c.c.}, \quad (2.14)$$

$$\mathcal{C}_{\langle \hat{a} \hat{a} \rangle} = \int_0^\infty \int_0^\infty d\omega d\omega' \langle \hat{a}_\omega \hat{a}_{\omega'} \rangle \mathcal{F}_1(\omega, -\omega', \gamma, |\gamma|) + \text{c.c.} \quad (2.15)$$

e

$$\mathcal{F}_1(\omega, \omega', \rho, \lambda) = \frac{e^{-i(\omega t - \omega' t')}}{4\pi\sqrt{\omega\omega'}} \left[\rho^2 e^{-i(\omega x - \omega' x')} + \lambda^2 e^{-i(\omega x + \omega' x')} + \text{c.c.} \right]. \quad (2.16)$$

⁶Cf. o Apêndice E.

A partir das Eqs. (2.13), (2.14), (2.15) e (2.16) verificamos que, na presença de fronteiras, \mathcal{C}_{vac} , $\mathcal{C}_{\langle\hat{a}^\dagger\hat{a}\rangle}$ e $\mathcal{C}_{\langle\hat{a}\hat{a}\rangle}$ não são simétricos sob translações espaciais. O termo \mathcal{C}_{vac} é simétrico sob translações temporais, enquanto que $\mathcal{C}_{\langle\hat{a}^\dagger\hat{a}\rangle}$ é simétrico se $\langle\hat{a}^\dagger_\omega, \hat{a}_\omega\rangle \propto \delta(\omega' - \omega)$. Por outro lado $\mathcal{C}_{\langle\hat{a}\hat{a}\rangle}$, se for não nulo, não é simétrico sob translações temporais.

No contexto da abordagem perturbativa de Ford-Vilenkin [18], de acordo com as referências [18, 28] a força de radiação pode ser dada em termos das funções de correlação, as quais são dependentes do operador campo não perturbado ϕ_0 : $[\partial_x \partial_{x'} \mathcal{C}]_{x'=x=0}$ e $[\mathcal{C}]_{x'=x=0}$, para as condições de fronteira Dirichlet e Neumann respectivamente. Conforme mostrado na Ref. [28], as partes da força relacionadas com \mathcal{C}_{vac} e $\mathcal{C}_{\langle\hat{a}^\dagger\hat{a}\rangle}$ são as mesmas para as condições de fronteira Dirichlet e Neumann. Contudo, a parte relacionada com $\mathcal{C}_{\langle\hat{a}\hat{a}\rangle}$ é diferente por um sinal. Em outras palavras, na Ref. [28] é mostrado que a diferença entre a força agindo nos casos Dirichlet e Neumann emerge, no contexto do movimento não relativístico com pequena amplitude do espelho, na parte $\mathcal{C}_{\langle\hat{a}\hat{a}\rangle}$, que é a parte não invariante sob translações temporais.

Agora vamos investigar este problema da força de radiação sobre a fronteira, no contexto de uma abordagem exata, iniciando a partir da solução do campo (Eq. (2.9)) e obtendo as fórmulas exatas para o valor esperado do operador densidade de energia $\mathcal{T} = \langle\hat{T}_{00}(t, x)\rangle$, bem como a força resultante $F(t)$ que atua sobre a fronteira em movimento, a qual é definida por (visto que $T_{00} = T_{11}$ neste modelo)⁷:

$$F(t) = \mathcal{T}[t, z(t)]^{(-)} - \mathcal{T}[t, z(t)]^{(+)}, \quad (2.17)$$

onde o sobrescrito “+” indica as regiões I e II, enquanto que “-” indica as regiões III e IV na Fig. 2.1.

Vamos separar \mathcal{T} , escrevendo:

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}_{vac} + \mathcal{T}_{non-vac}, \quad (2.18)$$

com

$$\mathcal{T}_{non-vac} = \mathcal{T}_{\langle\hat{a}^\dagger\hat{a}\rangle} + \mathcal{T}_{\langle\hat{a}\hat{a}\rangle}, \quad (2.19)$$

⁷Para visualizar esses cálculos com maiores detalhes *cf.* o Apêndice F.

onde:

$$\mathcal{T}_{vac} = \frac{1}{2} \int_0^\infty d\omega \mathcal{F}_2(\omega, \omega', |\gamma|, |\gamma|)|_{\omega=\omega'}, \quad (2.20)$$

$$\mathcal{T}_{\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle} = \frac{1}{2} \int_0^\infty \int_0^\infty d\omega d\omega' \langle \hat{a}_\omega^\dagger \hat{a}_{\omega'} \rangle \mathcal{F}_2(\omega, \omega', |\gamma|, |\gamma|) + c.c., \quad (2.21)$$

$$\mathcal{T}_{\langle \hat{a} \hat{a} \rangle} = -\frac{1}{2} \int_0^\infty \int_0^\infty d\omega d\omega' \langle \hat{a}_\omega \hat{a}_{\omega'} \rangle \mathcal{F}_2(-\omega, \omega', \gamma, \gamma^*) + c.c. \quad (2.22)$$

e

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_2(\omega, \omega', \rho, \lambda) = & \frac{\sqrt{\omega\omega'}}{2\pi} \left\{ \rho^2 [r'(v)]^2 e^{i(\omega-\omega')r(v)} \right. \\ & \left. + \lambda^2 [p'(u)]^2 e^{i(\omega-\omega')p(u)} \right\}. \end{aligned} \quad (2.23)$$

O termo \mathcal{T}_{vac} é a densidade local de energia relacionada com o estado de vácuo, que é divergente. Após a regularização e renormalização (veja a Ref. [8]), \mathcal{T}_{vac} pode ser redefinido como a densidade local de energia renormalizada:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{vac} = & -|\gamma|^2/24\pi [p'''(u)/p'(u) - (3/2)p''(u)^2/p'(u)^2] \\ & + p(u) \rightarrow r(v), \end{aligned} \quad (2.24)$$

onde o objeto aparecendo nos colchetes é conhecido como a derivada Schwarziana. Nós observamos que, de acordo com a nossa notação, para o lado direito do espelho temos $r(v) = v$, de modo que a Eq. (2.24) dá a fórmula encontrada na Ref. [8] para a condição de fronteira Dirichlet. Além disso, verificamos que a mesma fórmula é válida para a condição de fronteira Neumann ($|\gamma| = 1$ em ambos os casos).

A força de radiação resultante F que age sobre o espelho em movimento pode ser escrita como:

$$F = F_{vac} + F_{non-vac}, \quad (2.25)$$

com

$$F_{non-vac} = F_{\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle} + F_{\langle \hat{a} \hat{a} \rangle}, \quad (2.26)$$

onde:

$$F_{vac} = |\gamma|^2 (1 + \dot{z}^2) \times \left[(\ddot{z}^2 \dot{z} / 2\pi) / (1 - \dot{z}^2)^4 + (\ddot{z} / 6\pi) / (1 - \dot{z}^2)^3 \right], \quad (2.27)$$

$$F_{\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle} = 2 \int_0^\infty \int_0^\infty d\omega d\omega' \langle \hat{a}_\omega^\dagger \hat{a}_{\omega'} \rangle \mathcal{F}_3(\omega, \omega', |\gamma|, |\gamma|) + \text{c.c.}, \quad (2.28)$$

$$F_{\langle \hat{a} \hat{a} \rangle} = - \int_0^\infty \int_0^\infty d\omega d\omega' \langle \hat{a}_\omega \hat{a}_{\omega'} \rangle \mathcal{F}_3(\omega, \omega', \gamma^*, \gamma) + \text{c.c.}, \quad (2.29)$$

e

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_3(\omega, \omega', \rho, \lambda) = & \frac{\sqrt{\omega\omega'}}{4\pi} \left\{ -\rho^2 \frac{(1 + \dot{z})^2}{(1 - \dot{z})^2} e^{-i(\omega - \omega')p[t - z(t)]} \right. \\ & \left. + \rho^2 e^{-i(\omega - \omega')[t - z(t)]} \right. \\ & \left. - [(z, \dot{z}, p, \rho) \rightarrow (-z, -\dot{z}, r, \lambda)] \right\}. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Vemos que F_{vac} e $F_{\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle}$ dependem de $|\gamma|^2$, que tem o mesmo valor para as condições Dirichlet e Neumann. Por outro lado, $F_{\langle \hat{a} \hat{a} \rangle}$ depende de γ^{*2} (ou γ^2) que se distinguem por um sinal nos casos Dirichlet e Neumann. Notando que o termo $\mathcal{C}_{\langle \hat{a} \hat{a} \rangle}$ ($\langle \hat{a} \hat{a} \rangle \neq 0$) não é simétrico sob translações temporais, podemos generalizar o resultado encontrado na Ref. [28], concluindo que, para uma lei de movimento geral (relativística), as condições de fronteira Dirichlet e Neumann produzem a mesma força de radiação sobre um espelho em movimento, quando o estado inicial campo é simétrico sob translações temporais. Desse modo, temos uma generalização do resultado encontrado na Ref. [28], válido para movimentos não relativísticos, oscilatórios e de pequenas amplitudes.

Assumindo o limite não relativístico (sem usar a condição de movimento de pequena amplitude), recuperamos a fórmula:

$$F_{vac}(t) \approx |\gamma|^2 \ddot{z} / 6\pi, \quad (2.31)$$

encontrada na Ref. [18] para a condição de Dirichlet e, na Ref. [28] para a condição de Neumann. Vale mencionar que, nessas referências, a obtenção da fórmula aproximada dada pela Eq. (2.31) também envolveu a consideração de que o movimento da fronteira é de pequena amplitude.

2.2 Estado inicial do campo: estado coerente

Vamos analisar a força de radiação em um espelho em movimento, quando há partículas reais no estado inicial do campo. Para isso, consideramos o estado inicial como sendo o estado coerente, que é um exemplo de um estado não invariante sob translações temporais. O estado coerente de amplitude α é definido como um auto-estado do operador aniquilação: $\hat{a}_\omega |\alpha\rangle = \alpha \delta(\omega - \omega_0) |\alpha\rangle$, onde $\alpha = |\alpha| e^{i\theta}$ e ω_0 é a frequência do modo excitado. Para este caso, temos que $\mathcal{T}_{\langle\hat{a}^\dagger\hat{a}\rangle}$ e $\mathcal{T}_{\langle\hat{a}\hat{a}\rangle}$ são renomeados como $\mathcal{T}_{\langle\hat{a}^\dagger\hat{a}\rangle}^{(\alpha)}$ e $\mathcal{T}_{\langle\hat{a}\hat{a}\rangle}^{(\alpha)}$, respectivamente, e dados por:

$$\mathcal{T}_{\langle\hat{a}^\dagger\hat{a}\rangle}^{(\alpha)} = \frac{|\gamma|^2 \omega_0}{(2\pi)} \{ |\alpha|^2 [r'(v)^2 + p'(u)^2] \}, \quad (2.32)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{\langle\hat{a}\hat{a}\rangle}^{(\alpha)} = & -\frac{\omega_0}{4\pi} \left\{ \alpha^2 \left[\gamma^2 [r'(v)]^2 e^{-2i\omega_0 r(v)} \right. \right. \\ & \left. \left. + \gamma^{*2} [p'(u)]^2 e^{-2i\omega_0 p(u)} \right] + \text{c.c.} \right\}. \end{aligned} \quad (2.33)$$

As forças exatas $F_{\langle\hat{a}^\dagger\hat{a}\rangle}$ e $F_{\langle\hat{a}\hat{a}\rangle}$, renomeadas como as forças coerentes $F_{\langle\hat{a}^\dagger\hat{a}\rangle}^{(\alpha)}$ e $F_{\langle\hat{a}\hat{a}\rangle}^{(\alpha)}$, respectivamente, são dadas por:

$$F_{\langle\hat{a}^\dagger\hat{a}\rangle}^{(\alpha)} = -\frac{4|\gamma|^2 \omega_0}{\pi} |\alpha|^2 \dot{z} \frac{(1 + \dot{z}^2)}{(1 - \dot{z}^2)^2} \quad (2.34)$$

e

$$\begin{aligned} F_{\langle\hat{a}\hat{a}\rangle}^{(\alpha)} = & -\frac{\omega_0}{4\pi} |\alpha|^2 e^{-2i(\omega_0 t - \theta)} \\ & \times \left\{ \gamma^2 \left[e^{2i\omega_0 z(t)} \left(\frac{1 - \dot{z}}{1 + \dot{z}} \right)^2 - e^{-2i\omega_0 z(t)} \right] \right. \\ & \left. - \gamma^{*2} \left[\left(\frac{1 + \dot{z}}{1 - \dot{z}} \right)^2 e^{-2i\omega_0 z(t)} - e^{2i\omega_0 z(t)} \right] \right\} + \text{c.c.} \end{aligned} \quad (2.35)$$

Se considerarmos simultaneamente velocidades não relativísticas e pequenas amplitudes de deslocamento (no sentido considerado na Ref. [28]), de acordo com o que é requerido pela abordagem de Ford-Vilenkin [18], a força coerente exata $F_{non-vac}^{(\alpha)} = F_{\langle\hat{a}^\dagger\hat{a}\rangle}^{(\alpha)} + F_{\langle\hat{a}\hat{a}\rangle}^{(\alpha)}$ pode ser aproximada como:

$$\begin{aligned} F^{(\alpha)} \approx & -\frac{2\omega_0}{\pi} |\alpha|^2 \{ 2|\gamma|^2 \dot{q}(t) - (\gamma^2 + \gamma^{*2}) \\ & \times [\cos(2\omega_0 t - 2\theta) \dot{q}(t) - \sin(2\omega_0 t - 2\theta) \omega_0 q(t)] \}. \end{aligned} \quad (2.36)$$

O resultado acima está em acordo com o obtido com o obtido na Ref. [28], a menos de um sinal, que acreditamos estar equivocado em [28].

Na Fig. 2.2 plotamos a força coerente exata como uma função do tempo, para a condição de fronteira Dirichlet e diferentes valores da velocidade do espelho. Assumindo que o espelho se movimenta com velocidade uniforme, em direção ao sentido negativo do eixo - x , a Fig. 2.2 mostra a força oscilante $F_{non-vac}^{(\alpha)}$ e o gráfico deslocado para a região positiva do eixo vertical, conforme a velocidade do espelho aumenta, tornando a força mais intensa e oposta ao movimento.

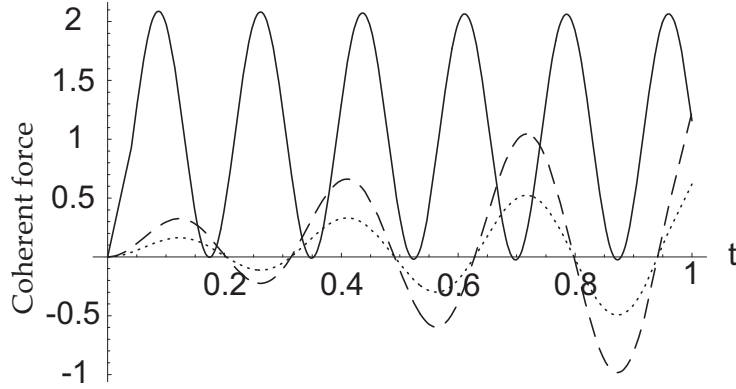


Figura 2.2: Força coerente exata $F_{non-vac}^{(\alpha)}$ como função do tempo, para o caso Dirichlet. Consideramos $\alpha = e^{(i\pi/2)}$, $\omega_0 = 10$ e os seguintes valores da velocidade: -10^{-8} (linha pontilhada), -10^{-2} (linha tracejada) e -8×10^{-1} (linha sólida). As linhas pontilhada e sólida exibem a força coerente multiplicadas pelos fatores 5×10^5 e $1/125$ respectivamente.

Para a condição de fronteira Neumann, Fig. 2.3, a força oscila de uma maneira diferente, mas exibe deslocamento análogo para velocidades relativísticas.

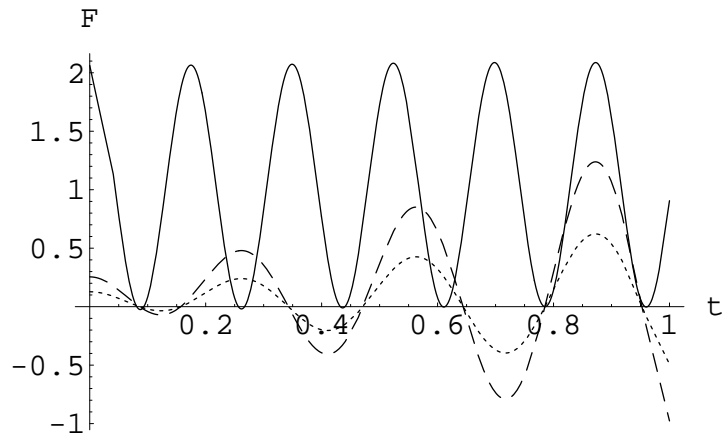


Figura 2.3: Força coerente exata $F_{non-vac}^{(\alpha)}$ como função do tempo, para o caso Neumann. Consideramos $\alpha = e^{(i\pi/2)}$, $\omega_0 = 10$ e os seguintes valores da velocidade: -10^{-8} (linha pontilhada), -10^{-2} (linha tracejada) e -8×10^{-1} (linha sólida). As linhas pontilhada e sólida exibem a força coerente multiplicadas pelos fatores 5×10^5 e $1/125$ respectivamente.

Capítulo 3

Cavidade com uma fronteira móvel

Neste capítulo, investigamos a evolução temporal da densidade de energia, para um campo escalar real não massivo em um espaço - tempo bidimensional, dentro de uma cavidade não estática. Considerando as possíveis combinações das condições de fronteira Neumann e Dirichlet, escrevemos a fórmula exata para a densidade de energia dentro de uma cavidade, para um estado inicial do campo arbitrário. Tomando como base a equação de Moore (vista a seguir na Eq. (3.5)), calculamos recursivamente a densidade de energia e investigamos a sua evolução temporal para o estado inicial do campo como sendo o estado coerente.

3.1 Densidade de energia: fórmulas exatas

Assim como no capítulo 2, começamos considerando o campo $\phi(t, x)$ que satisfaz a equação de Klein - Gordon (2.1). Mas, agora, o campo obedece a duas condições de fronteira: a condição imposta na fronteira estática em $x = 0$, e também a condição imposta na posição da fronteira em movimento em $x = L(t)$, onde $x = L(t)$ é uma lei prescrita para a fronteira em movimento e $L(t < 0) = L_0$, com L_0 sendo o comprimento da cavidade na situação estática.

Nós investigamos quatro tipos de condições de fronteira. A condição de fronteira Dirichlet-Neumann (DN) impõe a condição de Dirichlet na fronteira estática, enquanto

a derivada espacial do campo, tomada no referencial de Lorentz instantaneamente comóvel à fronteira dinâmica, se anula (condição de Neumann) na posição da fronteira em movimento (vide capítulo anterior). Usando a transformação de Lorentz, conforme já mencionado, esta condição de fronteira pode ser escrita em termos de quantidades no referencial inercial de laboratório como segue¹: $\partial_{x'}\phi'(t', x') = \left[\left(\dot{L}(t)\partial_t + \partial_x \right) \phi(t, x) \right] \Big|_{x=L(t)} = 0$. A condição de fronteira Neumann-Neumann (NN) impõe: $[\partial_x\phi(t, x)] \Big|_{x=0} = 0$ e $\left[\left(\dot{L}(t)\partial_t + \partial_x \right) \phi(t, x) \right] \Big|_{x=L(t)} = 0$. A condição de fronteira Neumann-Dirichlet (ND) impõe: $[\partial_x\phi(t, x)] \Big|_{x=0} = 0$ e $\phi(t, L(t)) = 0$, enquanto a condição de fronteira Dirichlet-Dirichlet (DD) impõe: $\phi(t, 0) = 0$ e $\phi(t, L(t)) = 0$.

Considerando o procedimento adotado nas Refs. [6, 8], o campo na cavidade pode ser obtido pela exploração da invariância conforme da equação de Klein-Gordon². O operador campo, solução da equação de onda (2.1), para uma cavidade é dado por:

$$\phi(t, x) = \lambda[\hat{A} + \hat{B}\phi^{(0)}(t, x)] + \sum_{n=1-2\beta}^{\infty} [\hat{a}_n\phi_n(t, x) + H.c.], \quad (3.1)$$

onde

$$\phi^{(0)}(t, x) = [R(v) + R(u)]/2, \quad (3.2)$$

e os modos do campo $\phi_n(t, x)$ são dados por:

$$\phi_n(t, x) = \frac{1}{\sqrt{4(n+\beta)\pi}} [\gamma \varphi_n^{(\beta)}(v) + \gamma^* \varphi_n^{(\beta)}(u)], \quad (3.3)$$

com

$$\varphi_n^{(\beta)}(z) = e^{-i(n+\beta)\pi R(z)}, \quad (3.4)$$

sendo u e v dados pela Eq. (2.10), e R satisfazendo a equação funcional

$$R[t + L(t)] - R[t - L(t)] = 2, \quad (3.5)$$

que é a equação de Moore³.

¹ Cf. a demonstração da condição de Neumann no referencial de laboratório no Apêndice A.

² Cf. o Apêndice B.

³ Cf. o Apêndice C.

Nas Eqs. (3.1) e (3.3), nós introduzimos uma notação que nos permite colocar dentro de uma única fórmula, as soluções para as quatro condições de fronteira mencionadas acima. Neste sentido, para $\lambda = \gamma = 1$ e $\beta = 0$, as Eqs. (3.1) e (3.3) dão a solução NN, onde \hat{A} e \hat{B} são operadores que satisfazem as regras de comutação $[\hat{A}, \hat{B}] = i$, $[\hat{A}, \hat{a}_n] = [\hat{B}, \hat{a}_n] = 0$. As outras três possíveis situações são recuperadas se nós considerarmos $\lambda = 0$, $\beta = 0$ e $\gamma = i$ para o caso DD; $\beta = 1/2$ e $\gamma = i$ para o caso DN; $\beta = 1/2$ e $\gamma = 1$ para o caso ND.

Daqui em diante, investigaremos as médias $\langle \dots \rangle$ tomadas sobre um estado inicial arbitrário do campo, desde que aniquilado pelo operador \hat{B} . Neste contexto, nós escreveremos as fórmulas exatas para o valor esperado do operador densidade de energia $\mathcal{T} = \langle \hat{T}_{00}(t, x) \rangle$. Nós podemos separar \mathcal{T} , da mesma forma como foi feito no capítulo 2, escrevendo:

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}_{\text{vac}} + \mathcal{T}_{\text{non-vac}}, \quad (3.6)$$

onde:

$$\mathcal{T}_{\text{vac}} = \frac{\pi}{4} \sum_{n=1-2\beta}^{\infty} (n + \beta) |\gamma|^2 \left[R'^2(v) + R'^2(u) \right] \quad (3.7)$$

e

$$\mathcal{T}_{\text{non-vac}} = \mathcal{T}_{\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle} + \mathcal{T}_{\langle \hat{a} \hat{a} \rangle}. \quad (3.8)$$

Definimos, em seguida:

$$\mathcal{T}_{\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle} = g_1(v) + g_1(u), \quad (3.9)$$

$$\mathcal{T}_{\langle \hat{a} \hat{a} \rangle} = g_2(v) + g_2(u), \quad (3.10)$$

sendo

$$g_1(z) = \frac{\pi |\gamma|^2}{4} \sum_{n, n'=(1-2\beta)}^{\infty} \sqrt{(n + \beta)(n' + \beta)} \times \text{Re} \left\{ 2e^{i(n-n')\pi R(z)} [R'(z)]^2 \langle \hat{a}_n^\dagger \hat{a}_{n'} \rangle \right\} \quad (3.11)$$

e

$$g_2(z) = -\frac{\pi \gamma^2}{4} \sum_{n, n'=(1-2\beta)}^{\infty} \sqrt{(n + \beta)(n' + \beta)} \times \text{Re} \left\{ 2e^{-i(n+n'+2\beta)\pi R(z)} [R'(z)]^2 \langle \hat{a}_n \hat{a}_{n'} \rangle \right\}. \quad (3.12)$$

A densidade de energia local relacionada ao estado de vácuo \mathcal{T}_{vac} é divergente. Seguindo a Ref. [8], nós adotamos o método de regularização “point-splitting” (o mesmo método usado no capítulo 2) e obtemos ⁴ \mathcal{T}_{vac} (agora redefinida) como a densidade local de energia renormalizada:

$$\mathcal{T}_{\text{vac}} = -f(v) - f(u), \quad (3.13)$$

onde

$$f = \frac{|\gamma|^2}{24\pi} \left\{ \frac{R'''}{R'} - \frac{3}{2} \left(\frac{R''}{R'} \right)^2 + \pi^2 \left[\frac{1}{2} - 3(\beta - \beta^2) \right] R'^2 \right\}. \quad (3.14)$$

Na equação acima, as derivadas são tomadas com respeito ao argumento da função R .

Nós podemos escrever a parte não-vácuo da densidade de energia em uma notação análoga:

$$\mathcal{T}_{\text{non-vac}} = -g(v) - g(u), \quad (3.15)$$

onde $g = -(g_1 + g_2)$. Note que \mathcal{T}_{vac} e $\mathcal{T}_{\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle}$ dependem de $|\gamma|^2$, que tem o mesmo valor para as quatro combinações de condições de fronteira consideradas. Por outro lado, $\mathcal{T}_{\langle \hat{a} \hat{a} \rangle}$ depende de γ^2 , que pode diferir por um sinal, dependendo da situação considerada. Para análises posteriores é conveniente também escrever a densidade de energia como:

$$\mathcal{T} = -h(v) - h(u), \quad (3.16)$$

onde $h = f + g$.

3.2 Situação estática

Vamos primeiro examinar as fórmulas obtidas na seção anterior para a situação estática ($t \leq 0$), quando a equação de Moore é reduzida a $R(t + L_0) - R(t - L_0) = 2$. Para este caso, a função R é dada por $R(z) = z/L_0$ [6] e as funções f , g , g_1 e g_2 , renomeadas, respectivamente, por $f^{(s)}$, $g^{(s)}$, $g_1^{(s)}$ e $g_2^{(s)}$, são dadas por:

$$f^{(s)} = |\gamma|^2 \pi / (24L_0^2) [1/2 - 3(\beta - \beta^2)], \quad (3.17)$$

⁴C.f. Apêndice F.

$$g^{(s)} = -g_1^{(s)} - g_2^{(s)}, \quad (3.18)$$

$$g_1^{(s)}(z) = \frac{\pi |\gamma|^2}{4L_0^2} \sum_{n,n'=(1-2\beta)}^{\infty} \sqrt{(n+\beta)(n'+\beta)} \\ \times \text{Re} \left\{ 2e^{i(n-n')\pi(z/L_0)} \langle \hat{a}_n^\dagger \hat{a}_{n'} \rangle \right\} \quad (3.19)$$

e

$$g_2^{(s)}(z) = -\frac{\pi \gamma^2}{4L_0^2} \sum_{n,n'=(1-2\beta)}^{\infty} \sqrt{(n+\beta)(n'+\beta)} \\ \times \text{Re} \left\{ 2e^{-i(n+n'+2\beta)\pi(z/L_0)} \langle \hat{a}_n \hat{a}_{n'} \rangle \right\}. \quad (3.20)$$

Observe que $f^{(s)}$ é uma constante e, neste caso, o termo \mathcal{T}_{vac} é a densidade de energia de Casimir e pode ser renomeado como \mathcal{T}_{cas} , de modo que:

$$\mathcal{T}_{\text{cas}}^{\text{DD}} = \mathcal{T}_{\text{cas}}^{\text{NN}} = -\pi/(24L_0^2), \quad (3.21)$$

$$\mathcal{T}_{\text{cas}}^{\text{DN}} = \mathcal{T}_{\text{cas}}^{\text{ND}} = \pi/(48L_0^2), \quad (3.22)$$

onde os sobrescritos DD, NN, DN e ND significam os tipos de condições de fronteira considerados nos cálculos. Os resultados mostrados nas Eqs. (3.21) e (3.22), podem ser encontrados na literatura [40, 41]. Note que, para condições de fronteira mistas (neste caso ND ou DN), a energia de Casimir é positiva, originando uma força de Casimir repulsiva (veja a Ref. [42]).

Por outro lado, em geral, $g^{(s)}$ é dependente do espaço - tempo, implicando que $\mathcal{T}_{\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle}$ e $\mathcal{T}_{\langle \hat{a} \hat{a} \rangle}$, nesta situação estática renomeados como $\mathcal{T}_{\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle}^{(s)}$ e $\mathcal{T}_{\langle \hat{a} \hat{a} \rangle}^{(s)}$, sejam, em geral, funções das variáveis do espaço - tempo.

Para um estado inicial arbitrário do campo, nós temos:

$$\int_0^{L_0} \mathcal{T}_{\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle}^{(s)} dx = \sum_{n=(1-2\beta)}^{\infty} \omega_n \mathcal{N}_n \quad (3.23)$$

e

$$\int_0^{L_0} \mathcal{T}_{\langle \hat{a} \hat{a} \rangle}^{(s)} dx = 0, \quad (3.24)$$

onde $\omega_n = \pi(n + \beta)/L_0$ e $\mathcal{N}_n = \langle \hat{a}_n^\dagger \hat{a}_n \rangle$ é a média do número inicial de partículas no n -ésimo modo do campo. Portanto, para uma cavidade estática, a função $\mathcal{T}_{\langle \hat{a} \hat{a} \rangle}^{(s)}$ pode contribuir para o comportamento no espaço e no tempo da densidade de energia \mathcal{T} , mas não para a energia total armazenada na cavidade. A energia estática total $\mathcal{E}^{(s)}$ pode ser escrita (como esperado) como:

$$\mathcal{E}^{(s)} = \mathcal{E}_{\text{cas}} + \sum_n \omega_n \mathcal{N}_n, \quad (3.25)$$

onde

$$\mathcal{E}_{\text{cas}} = \int_0^{L_0} \mathcal{T}_{\text{cas}} dx. \quad (3.26)$$

Concluimos que, para uma cavidade estática, para qualquer estado inicial do campo aniquilado pelo operador \hat{B} , temos que, nessa cavidade:

$$\mathcal{E}^{(s)\text{ND}} = \mathcal{E}^{(s)\text{DN}}, \quad (3.27)$$

$$\mathcal{E}^{(s)\text{DD}} = \mathcal{E}^{(s)\text{NN}}. \quad (3.28)$$

Consideremos, agora, estados iniciais do campo “diagonais”, ou seja, cuja matriz densidade seja diagonal na base de Fock, de modo que:

$$\langle \hat{a}_n \hat{a}_{n'} \rangle = 0 \quad \text{e} \quad \langle \hat{a}_n^\dagger \hat{a}_{n'} \rangle = \mathcal{N}_n \delta_{nn'}. \quad (3.29)$$

Para estes estados, temos que:

$$g_2^{(s)}(z) = 0, \quad (3.30)$$

$$\partial_z [g^{(s)}(z)] = 0, \quad (3.31)$$

$$g^{(s)}(z) \geq 0, \quad (3.32)$$

ou seja, $g^{(s)}$ não depende das variáveis do espaço-tempo, conduzindo à uma densidade de energia uniforme na situação estática. Para estados iniciais “não diagonais”, para os quais

$$\langle \hat{a}_n \hat{a}_{n'} \rangle \neq 0, \quad (3.33)$$

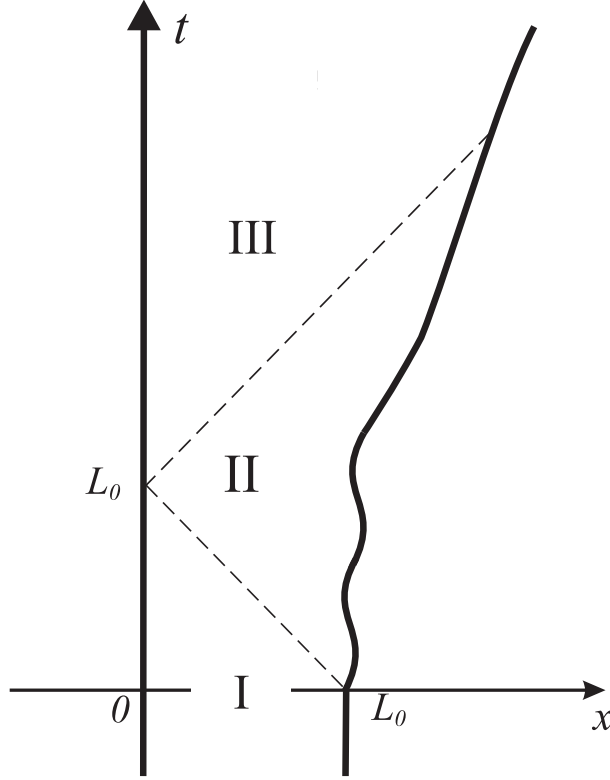


Figura 3.1: Trajetória das fronteiras (linhas sólidas). As linhas tracejadas são linhas nulas separando as regiões I de II, e II de III.

a função $g^{(s)}$, ou mais especificamente $g_2^{(s)}$, tem uma dependência das coordenadas do espaço-tempo:

$$\partial_z[g^{(s)}(z)] \neq 0. \quad (3.34)$$

Estados térmicos e coerentes são, respectivamente, exemplos de estados diagonal e não-diagonal.

3.3 Situação não-estática

Agora, vamos examinar a cavidade na situação não-estática ($t > 0$). Os modos do campo na Eq. (3.1) são formados por partes que se propagam para a esquerda (funções de v) e para a direita (funções de u). Como requer a causalidade, o campo na região I (Fig

3.1) não é afetado pelo movimento da fronteira, de modo que esta região é considerada como uma “zona estática”. Na região II ($v > L_0$ e $u \leq L_0$), as partes dos modos do campo (Eq.(3.3)) que se propagam para a direita, permanecem não sendo afetadas pelo movimento da fronteira; logo, a região II também é uma zona estática para estes termos. Por outro lado, as partes dos modos do campo que se propagam para a esquerda na região II são, em geral, afetadas pelo movimento da fronteira. Na região III ($u > L_0$), tanto as partes dos modos do campo que se propagam para a esquerda, quanto as que se propagam para a direita, são afetadas. Em suma, as funções correspondentes às partes dos modos do campo que se propagam para a esquerda e para a direita são consideradas na zona estática, se o argumento z dessas funções (z simbolizando v ou u) é tal que $z \leq L_0$. Na zona estática $R(z) = z/L_0$.

Para um certo ponto (\tilde{t}, \tilde{x}) no espaço-tempo, o operador campo $\phi(\tilde{t}, \tilde{x})$ é conhecido se as partes que se propagam para a esquerda e para a direita, tomadas sobre, respectivamente, as linhas nulas $v = z_1$ e $u = z_2$ (onde $z_1 = \tilde{t} + \tilde{x}$ e $z_2 = \tilde{t} - \tilde{x}$), são conhecidas; ou, em outras palavras, $\phi(\tilde{t}, \tilde{x})$ é conhecido se $R(v)|_{v=z_1}$ e $R(u)|_{u=z_2}$ são conhecidos. Cole e Schieve [15] propuseram um método recursivo para obter a função R para um lei de movimento geral da fronteira, traçando reversamente uma sequência de linhas nulas, até que uma linha nula entre na zona estática, onde R é uma função conhecida. Para uma breve discussão desse método, vamos assumir que (\tilde{t}, \tilde{x}) pertence à região III, e que a linha nula $v = z_1$ intercepta linha de mundo da fronteira em movimento no ponto $[t_1, L(t_1)]$ (veja a Ref. [15]). Assim, nós temos que $R(v)|_{v=z_1} = R[t_1 + L(t_1)]$. Usando a equação de Moore (3.5), obtemos $R(v)|_{v=z_1} = R(u)|_{u=t_1-L(t_1)} + 2$. Disto concluímos que a parte do campo propagada para a esquerda, tomada sobre a linha nula $v = z_1$, pode ser escrita em termos da parte propagada para a direita, tomada sobre a linha nula $u = t_1 - L(t_1)$. Se $t_1 - L(t_1) \leq L_0$, então a linha nula $u = t_1 - L(t_1)$ está na zona estática, de modo que podemos escrever $R(u)|_{u=t_1-L(t_1)} = [t_1 - L(t_1)]/L_0$, e também $R(v)|_{v=z_1} = [t_1 - L(t_1)]/L_0 + 2$. Por outro lado, se $t_1 - L(t_1) > L_0$, podemos traçar outra linha nula $v = t_1 - L(t_1)$, interceptando a linha de mundo da fronteira estática no ponto $[t_1 - L(t_1), 0]$. Então obtemos $R(u)|_{u=t_1-L(t_1)} = R(v)|_{v=t_1-L(t_1)}$, o que quer dizer que a parte de um dado modo do campo propagando-se

para a direita, tomada sobre a linha nula $u = t_1 - L(t_1)$, tem o mesmo valor da parte propagando-se para a esquerda, tomada sobre a linha nula $v = t_1 - L(t_1)$, ou, em outras palavras, a reflexão da radiação do campo na fronteira estática não muda seu valor. Em seguida, nós podemos escrever $R(v)|_{v=z_1} = R(v)|_{v=t_1-L(t_1)} + 2$. Assumindo que a linha nula $v = t_1 - L(t_1)$ intercepta a linha de mundo da fronteira em movimento no ponto $(t_2, L(t_2))$, temos $t_2 + L(t_2) = t_1 - L(t_1)$, e também: $R(v)|_{v=z_1} = R[t_2 + L(t_2)] + 2$. Da mesma forma, considerando a equação de Moore, nós podemos escrever $R(v)|_{v=z_1} = R(u)|_{u=t_2-L(t_2)} + 4$, e assim por diante, até uma linha nula considerada nesse processo entrar na zona estática, onde a função R é conhecida. Em resumo, de acordo com a Ref. [15], nós podemos escrever: $R(z) = 2n + [z - 2 \sum_{i=1}^n L(t_i)]/L_0$, onde n é o número de reflexões sobre a fronteira em movimento, necessárias para conectar uma linha nula $v = z$ (ou $u = z$) a uma linha nula na zona estática.

Vamos agora examinar o comportamento das partes dos modos do campo que se propagam na cavidade. Levando em consideração a análise acima, para o comportamento função R , para os casos DD e NN (para ambos $\beta = 0$), temos: $\varphi_n^{(0)}(v)|_{v=z_1} = \varphi_n^{(0)}(u)|_{u=t_1-L(t_1)}$, $\varphi_n^{(0)}(u)|_{u=t_1-L(t_1)} = \varphi_n^{(0)}(v)|_{v=t_1-L(t_1)}$, e $\varphi_n^{(0)}(v)|_{v=t_1-L(t_1)} = \varphi_n^{(0)}(u)|_{u=t_2-L(t_2)}$. Nós podemos ver que os valores de $\varphi_n^{(0)}$ não se alteram sob uma reflexão nas fronteiras estática ou dinâmica. Ressaltamos, portanto, que o fato relevante aqui é a seqüência de pontos do espaço-tempo onde as reflexões ocorrem, porque ela é que irá mapear uma linha nula inicial em uma zona não estática, em uma certa linha nula na zona estática onde o valor de $\varphi_n^{(0)}$ é então determinado. Esta última conclusão também é válida para o caso de condições mistas ($\beta = 1/2$), mas, para esse caso, temos: $\varphi_n^{(1/2)}(v)|_{v=z_1} = -\varphi_n^{(1/2)}(u)|_{u=t_1-L(t_1)}$, $\varphi_n^{(1/2)}(u)|_{u=t_1-L(t_1)} = \varphi_n^{(1/2)}(v)|_{v=t_1-L(t_1)}$, e $\varphi_n^{(1/2)}(v)|_{v=t_1-L(t_1)} = -\varphi_n^{(1/2)}(u)|_{u=t_2-L(t_2)}$. Nós observamos que o valor de $\varphi_n^{(1/2)}$ não se altera sob uma reflexão na fronteira estática, mas muda por um sinal ao refletir na fronteira dinâmica.

O comportamento da densidade de energia na cavidade, no caso do estado inicial sendo o vácuo, é descrito pelo comportamento da função f , a qual obedece à equação a seguir,

obtida por Cole-Schieve [38]:

$$f[t + L(t)] = f[t - L(t)] \mathcal{A}(t) + \mathcal{B}(t), \quad (3.35)$$

onde

$$\mathcal{A}(t) = \left[\frac{1 - L'(t)}{1 + L'(t)} \right]^2, \quad (3.36)$$

$$\mathcal{B}(t) = -\frac{1}{12\pi} \frac{L'''(t)}{[1 + L'(t)]^3 [1 - L'(t)]} - \frac{1}{4\pi} \frac{L''^2(t) L'(t)}{[1 + L'(t)]^4 [1 - L'(t)]^2}, \quad (3.37)$$

que nos permite obter $f(z)$, e conseqüentemente \mathcal{T}_{vac} , recursivamente, em termos do valor de $f = f^{(s)}$ na zona estática (veja a Ref. [38]).

Para um estado inicial arbitrário, o comportamento da densidade de energia na cavidade é descrito tanto pelo comportamento da função f (relacionada com a parte de vácuo), quanto pelo comportamento da função g (relacionada com a parte não-vácuo). Para esta última, obtemos a seguinte equação ⁵:

$$g[t + L(t)] = g[t - L(t)] \mathcal{A}(t), \quad (3.38)$$

que nos permite obter a função “não-vácuo” $g(z)$, e conseqüentemente $\mathcal{T}_{\text{non-vac}}$, recursivamente a partir dos valores calculados na zona estática, onde $g = g^{(s)}$. Agora, para uma análise completa envolvendo simultaneamente as partes vácuo e não-vácuo, escrevemos a seguinte equação que define o comportamento da função h :

$$h[t + L(t)] = h[t - L(t)] \mathcal{A}(t) + \mathcal{B}(t). \quad (3.39)$$

O processo para resolver a Eq. (3.39) inicia traçando-se a linha nula $v = t_1 + L(t_1)$, de forma que nós fazemos $z = t_1 + L(t_1)$. Da Eq. (3.39), após a primeira reflexão na fronteira dinâmica, obtemos:

$$h(z) = h[t_1 - L(t_1)] \mathcal{A}(t_1) + \mathcal{B}(t_1). \quad (3.40)$$

⁵C.f Apêndice F.

Seguindo conforme o procedimento já descrito, nós igualamos $t_1 - L(t_1) = t_2 + L(t_2)$, e, após a segunda reflexão na fronteira dinâmica, obtemos:

$$h(z) = h[t_2 - L(t_2)]\mathcal{A}(t_2)\mathcal{A}(t_1) + \mathcal{B}(t_2)\mathcal{A}(t_1) + \mathcal{B}(t_1).$$

Este processo segue, até que uma linha nula entre na zona estática, onde: $h = h^{(s)} = f^{(s)} + g^{(s)}$ é conhecido. Ao fim do processo, temos:

$$h(z) = h^{(s)}(z)\tilde{\mathcal{A}}(z) + \tilde{\mathcal{B}}(z) \quad (3.41)$$

onde:

$$h^{(s)}(z) = f^{(s)} + g^{(s)}[\tilde{z}(z)], \quad (3.42)$$

$$\tilde{\mathcal{A}}(z) = \prod_{i=1}^n \mathcal{A}(t_i), \quad (3.43)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{B}}(z) &= \mathcal{B}(t_n)\prod_{i=1}^{n-1} \mathcal{A}(t_i) + \mathcal{B}(t_{n-1})\prod_{i=1}^{n-2} \mathcal{A}(t_i) \\ &+ \dots + \mathcal{B}(t_2)\mathcal{A}(t_1) + \mathcal{B}(t_1). \end{aligned} \quad (3.44)$$

Enfatizamos que o número n de reflexões e a seqüência de instantes t_1, \dots, t_n dependem de z . Neste sentido, na Eq. (3.42) nós definimos:

$$\tilde{z}(z) = t_n - L(t_n). \quad (3.45)$$

Deste processo, nós observamos que o valor de h não se altera sob reflexões na fronteira estática, mas se altera quando h reflete na fronteira dinâmica, o que é esperado. Nós também observamos que, da Eq. (3.39), a função h , após uma reflexão na fronteira dinâmica, muda da mesma forma para todas as condições de fronteira consideradas no presente trabalho (para uma mesma lei de movimento da fronteira).

Uma observação fundamental para as análises seguintes é que, na Eq. (3.41), as funções $\tilde{\mathcal{A}}$ e $\tilde{\mathcal{B}}$ somente dependem da lei de movimento da fronteira, enquanto que toda a dependência das condições de fronteira e do estado inicial do campo estão armazenadas na função da zona estática $h^{(s)}(z)$.

A densidade de energia \mathcal{T} novamente é escrita como na Eq. (3.6), $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{\text{vac}} + \mathcal{T}_{\text{non-vac}}$, mas agora com as partes \mathcal{T}_{vac} e $\mathcal{T}_{\text{non-vac}}$ reescritas como:

$$\mathcal{T}_{\text{vac}} = -f^{(s)}\tilde{\mathcal{A}}(u) - \tilde{\mathcal{B}}(u) + u \rightarrow v, \quad (3.46)$$

$$\mathcal{T}_{\text{non-vac}} = -g^{(s)}[\tilde{z}(u)]\tilde{\mathcal{A}}(u) + u \rightarrow v. \quad (3.47)$$

Para uma lei de movimento genérica para a fronteira, $\tilde{\mathcal{A}}$ e $\tilde{\mathcal{B}}$ são funções diferentes entre si. Elas também possuem as seguintes propriedades:

$$\tilde{\mathcal{A}}(z) > 0 \quad \forall z, \quad (3.48)$$

$$\tilde{\mathcal{A}}(z \leq L_0) = 1, \quad (3.49)$$

$$\tilde{\mathcal{B}}(z \leq L_0) = 0. \quad (3.50)$$

Verificamos, ainda, que a dinâmica da evolução da densidade de energia na cavidade é regida, de forma geral, pelas funções $\tilde{\mathcal{A}}(z)$, $\tilde{\mathcal{B}}(z)$ e $g^{(s)}[\tilde{z}(z)]$.

3.3.1 Estados diagonais

Para estados diagonais (Eq. (3.29)), temos as conclusões descritas nas Eqs. (3.30)-(3.32), as quais implicam que:

$$\partial_z[h^{(s)}(z)] = 0, \quad (3.51)$$

onde $h^{(s)}$ está definido na Eq. (3.42). Temos, então, que dada uma cavidade com um certo estado inicial diagonal, a evolução temporal da densidade de energia nessa cavidade é definida apenas pelas funções $\tilde{\mathcal{A}}(z)$ e $\tilde{\mathcal{B}}(z)$ que, para um movimento genérico da fronteira, são em distintas entre si (conforme já comentado). Disto concluimos que, de um modo geral, a dependência espacial, bem como a evolução temporal de \mathcal{T}_{vac} , $\mathcal{T}_{\text{non-vac}}$ e \mathcal{T} são distintos entre si. Podemos, entretanto, encontrar leis de movimento da fronteira, para as quais \mathcal{T}_{vac} , $\mathcal{T}_{\text{non-vac}}$ e \mathcal{T} apresentem aproximadamente uma estrutura similar, o que significa, por exemplo, que se houverem picos e vales em cada um desses termos, eles estariam localizados aproximadamente na mesma posição na cavidade. Isto pode ser

possível para leis de movimento que proporcionem uma dependência linear entre $\tilde{\mathcal{B}}(z)$ e $\tilde{\mathcal{A}}(z)$, ou seja:

$$\tilde{\mathcal{B}}(z) \approx k_1 \tilde{\mathcal{A}}(z) + k_2, \quad (3.52)$$

onde k_1 e k_2 são constantes. Usando as condições dadas nas Eqs. (3.49) e (3.50), obtemos que $k_1 \approx -k_2$, o que resulta:

$$\tilde{\mathcal{B}}(z) \approx k_1 [\tilde{\mathcal{A}}(z) - 1]. \quad (3.53)$$

Substituindo a Eq. (3.53) em (3.46) e (3.47), obtemos:

$$\mathcal{T}_{\text{vac}} = -(f^{(s)} + k_1) [\tilde{\mathcal{A}}(u) + \tilde{\mathcal{A}}(v)] + 2k_1, \quad (3.54)$$

$$\mathcal{T}_{\text{non-vac}} = -g^{(s)} [\tilde{\mathcal{A}}(u) + \tilde{\mathcal{A}}(v)], \quad (3.55)$$

$$\mathcal{T} = -(f^{(s)} + g^{(s)} + k_1) [\tilde{\mathcal{A}}(u) + \tilde{\mathcal{A}}(v)] + 2k_1. \quad (3.56)$$

As densidades de energia dadas nas Eqs. (3.54)-(3.56) que apresentarem os fatores multiplicativos do termo $\tilde{\mathcal{A}}(u) + \tilde{\mathcal{A}}(v)$ com o mesmo sinal, terão estruturas similares entre si, no sentido comentado acima.

Um exemplo de uma lei de movimento para a qual a aproximação (3.53) pode ser válida, é a seguinte:

$$L(t) = L_0 \left[1 + \varepsilon \sin \left(\frac{p\pi t}{L_0} \right) \right], \quad |\varepsilon| \ll 1 \text{ e } p = 1, 2, \dots \quad (3.57)$$

Considerando em (3.57) os parâmetros $L_0 = 1$ e $p = 2$, e na Eq. (3.53) a constante $k_1 = -\pi p^2 / (48L_0^2)$, mostramos nas Figs. 3.2, 3.3 e 3.4 uma comparação entre os gráficos das funções $\tilde{\mathcal{B}}(z)$ e $k_1 [\tilde{\mathcal{A}}(z) - 1]$, sendo ambas calculadas de forma exata, com base nas fórmulas (3.43) e (3.44). Nestas figuras, consideramos, respectivamente, $\varepsilon = 0.01$, $\varepsilon = 0.05$ e $\varepsilon = 0.1$. Observamos que quanto menor o valor de ε , ou seja, quanto menor a amplitude do movimento, maior é a validade da aproximação (3.53). Observamos ainda que, para este caso, e ainda para qualquer uma das condições de contorno consideradas no presente trabalho, temos:

$$f^{(s)} + k_1 < 0 \text{ e } g^{(s)} < 0. \quad (3.58)$$

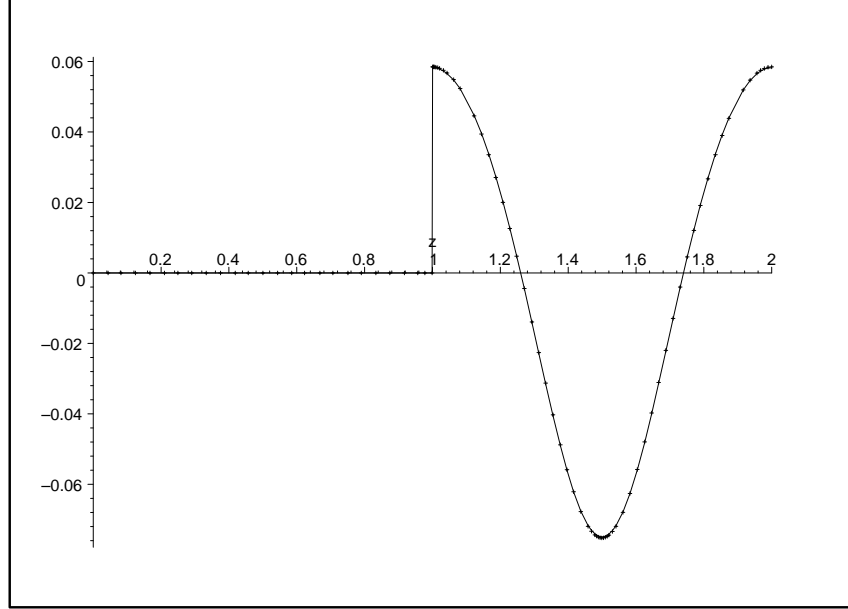


Figura 3.2: Comparação entre os gráficos das funções $\tilde{\mathcal{B}}(z)$ (linha pontilhada) e $k_1[\tilde{\mathcal{A}}(z)-1]$ (linha contínua), para $\epsilon = 0.01$.

No contexto desta lei de movimento com pequenas amplitudes de oscilação, a Eq. (3.58) considerada em (3.54 - 3.56), resulta que a estrutura da densidade de energia (no sentido da posição de picos e vales) é, em boa aproximação, a mesma para \mathcal{T}_{vac} , $\mathcal{T}_{\text{non-vac}}$ e \mathcal{T} . Esta conclusão, neste contexto aproximado, está de acordo com a obtida por Andreatta e Dodonov na Ref. [30].

Finalizando esta seção, concluímos ainda que, para um mesmo estado inicial diagonal do campo:

$$\mathcal{T}^{\text{DD}}(t, x) = \mathcal{T}^{\text{NN}}(t, x), \quad (3.59)$$

$$\mathcal{T}^{\text{ND}}(t, x) = \mathcal{T}^{\text{DN}}(t, x), \quad (3.60)$$

As Eqs. (3.59) e (3.60) significam que, qualquer que seja o movimento da fronteira, para um mesmo estado inicial do campo, desde que diagonal, a densidade de energia na cavidade DD será igual à densidade NN a todo instante, sendo que o mesmo ocorrerá entre os casos ND e DN. A Eq. (3.60) generaliza, para um estado diagonal arbitrário, a conclusão encontrada na Ref. [39], onde a igualdade $\mathcal{T}^{\text{ND}}(t, x) = \mathcal{T}^{\text{DN}}(t, x)$ apenas foi

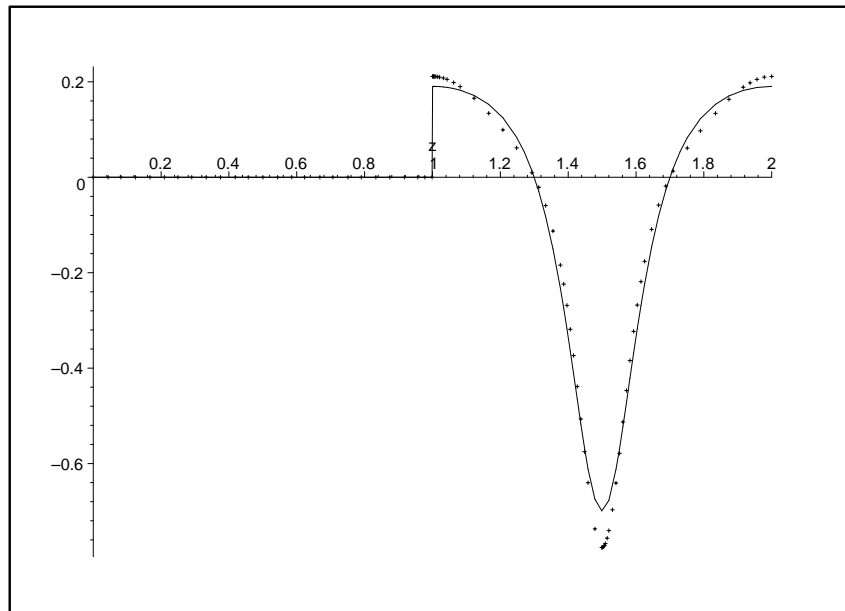


Figura 3.3: Comparação entre os gráficos das funções $\tilde{\mathcal{B}}(z)$ (linha pontilhada) e $k_1[\tilde{\mathcal{A}}(z)-1]$ (linha contínua), para $\epsilon = 0.05$.

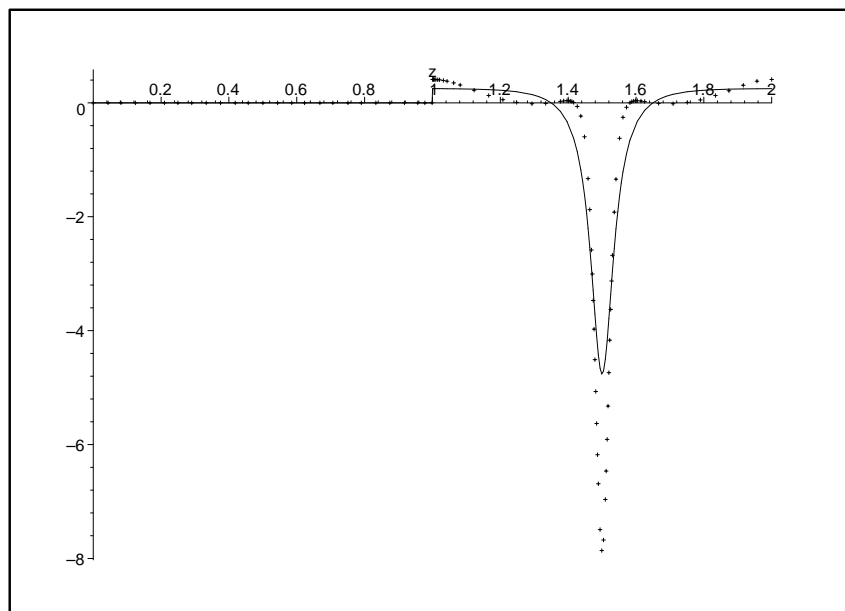


Figura 3.4: Comparação entre os gráficos das funções $\tilde{\mathcal{B}}(z)$ (linha pontilhada) e $k_1[\tilde{\mathcal{A}}(z)-1]$ (linha contínua), para $\epsilon = 0.1$.

apontada para o caso de vácuo.

3.3.2 Estados não diagonais: aplicação ao estado coerente

Para os estados diagonais, os valores das funções $f^{(s)}$ e $g^{(s)}$, tomados sobre linhas nulas na zona estática, são constantes e independem da linha nula na zona estática em que estão sendo consideradas. Aqui, para estados não-diagonais, há uma alteração: a função $g^{(s)} = g^{(s)}(u)|_{u=t_n-L(t_n)}$ (vide Eq. (3.45)), ou seja, $g^{(s)}$ passa a depender de sobre qual linha nula na zona estática ela é considerada. Tomemos um estado coerente, tal que $\hat{a}_n |\alpha\rangle = \alpha \delta_{nn_0} |\alpha\rangle$, onde $\alpha = |\alpha|e^{i\theta}$, e n_0 está relacionado à frequência do modo excitado [43]. Para este caso, o termo $g_1^{(s)}$ é constante na zona estática, enquanto que o termo $g_2^{(s)}$ não o é, sendo este último o gerador da alteração mencionada acima. Em função desse comportamento distinto entre $g_1^{(s)}$ e $g_2^{(s)}$, vamos subdividir o termo $\mathcal{T}_{\text{non-vac}}$ do modo feito na Eq. (3.8): $\mathcal{T}_{\text{non-vac}} = \mathcal{T}_{\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle} + \mathcal{T}_{\langle \hat{a} \hat{a} \rangle}$. Assim sendo, para facilitar a visualização, reescreveremos as Eqs. (3.46) e (3.47) da seguinte forma:

$$\mathcal{T}_{\text{vac}} = -f^{(s)} \tilde{\mathcal{A}}(u) - \tilde{\mathcal{B}}(u) + u \rightarrow v, \quad (3.61)$$

$$\mathcal{T}_{\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle} = g_1^{(s)} \tilde{\mathcal{A}}(u) + u \rightarrow v. \quad (3.62)$$

$$\mathcal{T}_{\langle \hat{a} \hat{a} \rangle} = g_2^{(s)} [\tilde{z}(u)] \tilde{\mathcal{A}}(u) + u \rightarrow v. \quad (3.63)$$

Temos, então, que dada uma cavidade com um estado inicial coerente, a evolução temporal da densidade de energia nessa cavidade é definida pelas funções $\tilde{\mathcal{A}}(z)$, $\tilde{\mathcal{B}}(z)$ e $g_2^{(s)}[\tilde{z}(z)]$, as quais, para um movimento genérico da fronteira, são, em geral, distintas entre si. Enfatizamos, então, que a dependência espacial, bem como a evolução temporal de \mathcal{T}_{vac} , $\mathcal{T}_{\text{non-vac}}$ e \mathcal{T} são distintos entre si.

Da mesma forma que na seção anterior, vamos focar o caso de leis de movimento da fronteira, tais que a aproximação (3.53) seja válida. Assim sendo, teremos:

$$\mathcal{T}_{\text{vac}} = -(f^{(s)} + k_1)[\tilde{\mathcal{A}}(u) + \tilde{\mathcal{A}}(v)] + 2k_1, \quad (3.64)$$

$$\mathcal{T}_{\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle} = g_1^{(s)}[\tilde{\mathcal{A}}(u) + \tilde{\mathcal{A}}(v)], \quad (3.65)$$

$$\mathcal{T}_{\langle\hat{a}\hat{a}\rangle} = g_2^{(s)}[\tilde{z}(u)]\tilde{\mathcal{A}}(u) + g_2^{(s)}[\tilde{z}(v)]\tilde{\mathcal{A}}(v), \quad (3.66)$$

$$\mathcal{T} = -(f^{(s)} - g_1^{(s)} + k_1)[\tilde{\mathcal{A}}(u) + \tilde{\mathcal{A}}(v)] + g_2^{(s)}[\tilde{z}(u)]\tilde{\mathcal{A}}(u) + g_2^{(s)}[\tilde{z}(v)]\tilde{\mathcal{A}}(v) + 2k_1. \quad (3.67)$$

As densidades de energia dadas nas Eqs. (3.64) e (3.65) que apresentarem os fatores multiplicativos constantes do termo $\tilde{\mathcal{A}}(u) + \tilde{\mathcal{A}}(v)$ com o mesmo sinal, terão estruturas similares entre si, no sentido comentado na seção anterior. Novamente, considerando a lei de movimento específica mostrada na Eq. (3.57), com os mesmos parâmetros e também o valor da constante k_1 adotados na seção anterior, obtemos que, para o caso coerente, e ainda qualquer uma das condições de contorno consideradas no presente trabalho, temos:

$$-(f^{(s)} + k_1) > 0 \text{ e } g_1^{(s)} > 0. \quad (3.68)$$

Então, no contexto dessa lei de movimento e com pequenas amplitudes de oscilação, temos que a estrutura da densidade de energia é, em boa aproximação, a mesma para os termos \mathcal{T}_{vac} e $\mathcal{T}_{\langle\hat{a}\dagger\hat{a}\rangle}$.

O termo $\mathcal{T}_{\text{non-vac}}$ da densidade de energia coerente (agora renomeado como $\mathcal{T}_{\text{non-vac}}^{(\alpha)}$) é dado por:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{\text{non-vac}}^{(\alpha)} &= \frac{\pi}{2}(n_0 + \beta)|\alpha|^2 \\ &\times \left\{ R'^2(v) - \gamma^2 R'^2(v) \cos[2\pi(n_0 + \beta)R(v) - 2\theta] + v \rightarrow u \right\}. \end{aligned} \quad (3.69)$$

Observamos que, com a mudança de fase $\theta \rightarrow \theta' = \theta + \frac{\pi}{2}$, nós temos que:

$$\mathcal{T}_{\text{non-vac}}^{(\alpha) \text{ DD}}|_{\theta} = \mathcal{T}_{\text{non-vac}}^{(\alpha) \text{ NN}}|_{\theta + \frac{\pi}{2}}, \quad (3.70)$$

$$\mathcal{T}_{\text{non-vac}}^{(\alpha) \text{ DN}}|_{\theta} = \mathcal{T}_{\text{non-vac}}^{(\alpha) \text{ ND}}|_{\theta + \frac{\pi}{2}}. \quad (3.71)$$

A Eq. (3.69) pode ser escrita em termos das funções \tilde{A} , da seguinte forma:

$$\mathcal{T}_{\text{non-vac}}^{(\alpha)} = \mathcal{T}_{\langle\hat{a}\dagger\hat{a}\rangle}^{(\alpha)} + \mathcal{T}_{\langle\hat{a}\hat{a}\rangle}^{(\alpha)}, \quad (3.72)$$

onde

$$\mathcal{T}_{\langle\hat{a}\dagger\hat{a}\rangle}^{(\alpha)} = \frac{\pi}{(2L_0^2)}(n_0 + \beta)|\gamma|^2|\alpha|^2 \left[\tilde{A}(u) + \tilde{A}(v) \right], \quad (3.73)$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{\langle\hat{a}\hat{a}\rangle}^{(\alpha)} &= -\frac{\pi}{(2L_0^2)}\gamma^2|\alpha|^2(n_0+\beta) \\
&\times\left\{\cos\left[2(n_0+\beta)\pi(\tilde{z}(u)/L_0)-2\theta\right]\times\tilde{A}(u)\right. \\
&\left.+u\rightarrow v\right\}.
\end{aligned}
\tag{3.74}$$

Um gráfico correspondente à Eq. (3.73), gerado com uso da Eq. (3.43), pode ser visualizado na Fig. 3.5. Vê-se que a parte correspondente a (3.73), que tem a mesma estrutura da parte de vácuo, está relacionada com a formação de “picos”. Além disso, observa-se apenas duas linhas, em virtude do fator $|\gamma|^2$ em (3.73), que torna o caso NN idêntico a DD, e ND idêntico a DN.

Um gráfico correspondente à Eq. (3.74), também gerado com uso da Eq. (3.43), pode ser visualizado na Fig. 3.6. Vê-se que a parte correspondente a (3.74) pode assumir valores negativos, apresentando gráficos diferentes para cada uma das quatro condições de contorno consideradas, em virtude dos fatores γ^2 e β .

O gráfico resultante, soma dos gráficos mostrados nas Figs. 3.5 e 3.6, mostra a interferência de (3.74) em (3.73), produzindo uma distorção nos picos de (3.73), que na Ref. [30] foi chamada de “estrutura fina”.

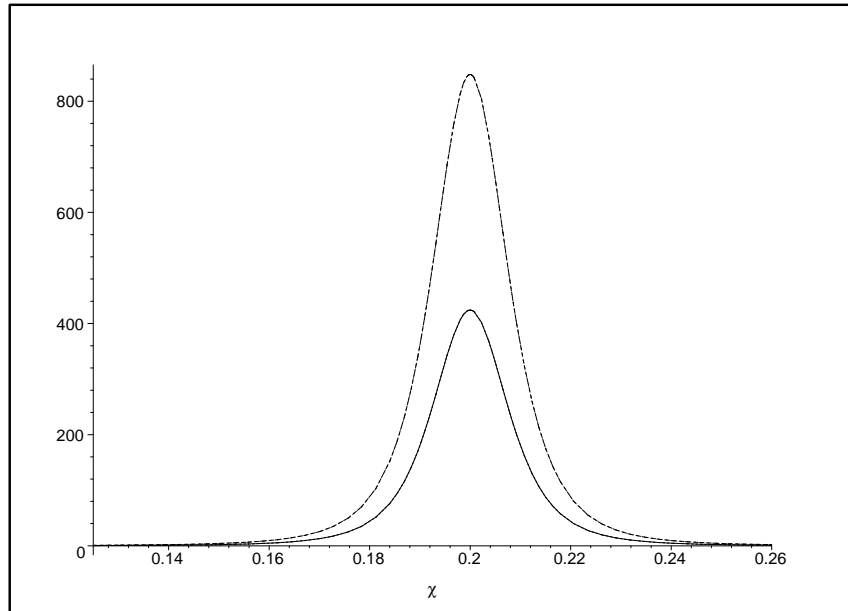


Figura 3.5: Densidade de energia $\mathcal{T}_{\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle}^{(\alpha)}$ (eixo vertical), em função de $\chi = x/L_0$ (eixo horizontal), para $|\alpha| = 1$, $t = 50.3L_0$, $L_0 = 1$, $\epsilon = 0.01$ e a lei de movimento dada na Eq. (3.57). A linha tracejada corresponde a ambos casos DD e NN. A linha contínua corresponde a ambos os casos DN e ND.

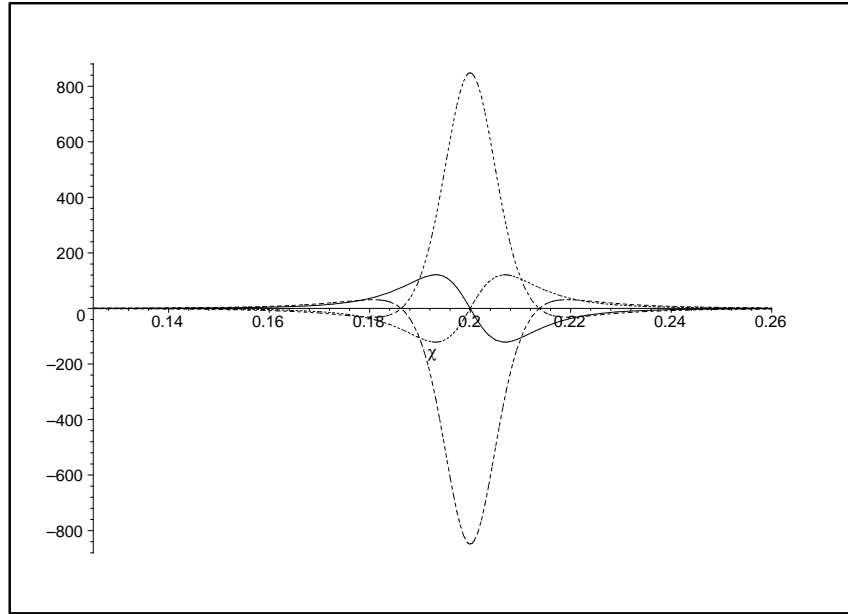


Figura 3.6: Densidade de energia $\mathcal{T}_{\langle\hat{a}\hat{a}\rangle}^{(\alpha)}$ (eixo vertical), em função de $\chi = x/L_0$ (eixo horizontal), para $|\alpha| = 1$, $t = 50.3L_0$, $L_0 = 1$, $\epsilon = 0.01$ e a lei de movimento dada na Eq. (3.57). A linha pontilhada corresponde a ambos: $\mathcal{T}_{\langle\hat{a}\hat{a}\rangle}^{(\alpha) \text{ DD}}$ com $\theta = 0$, e $\mathcal{T}_{\langle\hat{a}\hat{a}\rangle}^{(\alpha) \text{ NN}}$ com $\theta = \pi/2$. A linha tipo traço-ponto corresponde a ambos: $\mathcal{T}_{\langle\hat{a}\hat{a}\rangle}^{(\alpha) \text{ NN}}$ com $\theta = 0$, e $\mathcal{T}_{\langle\hat{a}\hat{a}\rangle}^{(\alpha) \text{ DD}}$ com $\theta = \pi/2$. A linha contínua corresponde a ambos: $\mathcal{T}_{\langle\hat{a}\hat{a}\rangle}^{(\alpha) \text{ DN}}$ com $\theta = 0$, e $\mathcal{T}_{\langle\hat{a}\hat{a}\rangle}^{(\alpha) \text{ ND}}$ com $\theta = \pi/2$. A linha tipo espaço-ponto corresponde a ambos: $\mathcal{T}_{\text{non-vac}}^{(\alpha) \text{ ND}}$ com $\theta = 0$, e $\mathcal{T}_{\text{non-vac}}^{(\alpha) \text{ DN}}$ com $\theta = \pi/2$.

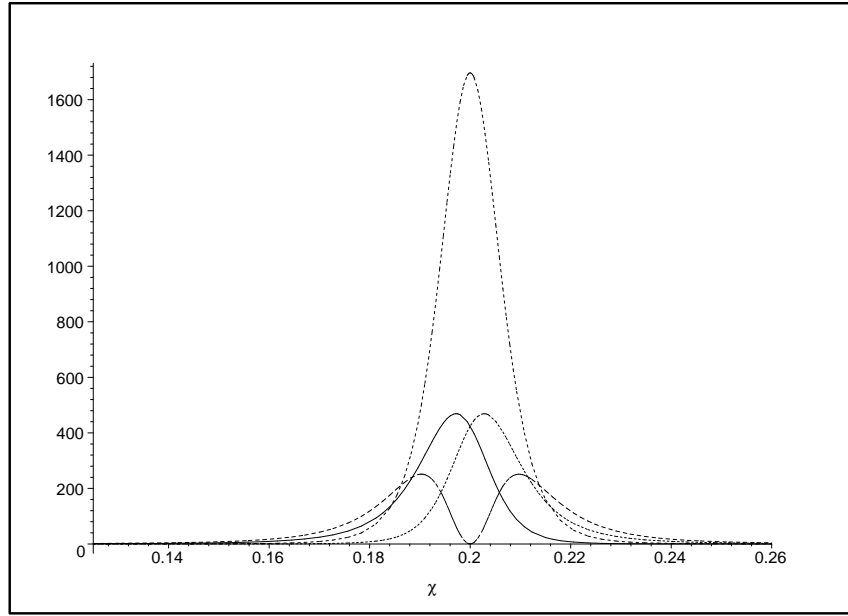


Figura 3.7: Densidade de energia $\mathcal{T}_{\text{non-vac}}^{(\alpha)}$ (eixo vertical), em função de $\chi = x/L_0$ (eixo horizontal), para $|\alpha| = 1$, $t = 50.3L_0$, $L_0 = 1$, $\epsilon = 0.01$ e a lei de movimento dada na Eq. (3.57). A linha pontilhada corresponde a ambos: $\mathcal{T}_{\text{non-vac}}^{(\alpha)\text{DD}}$ com $\theta = 0$, e $\mathcal{T}_{\text{non-vac}}^{(\alpha)\text{NN}}$ com $\theta = \pi/2$. A linha tipo traço-ponto corresponde a ambos: $\mathcal{T}_{\text{non-vac}}^{(\alpha)\text{NN}}$ com $\theta = 0$, e $\mathcal{T}_{\text{non-vac}}^{(\alpha)\text{DD}}$ com $\theta = \pi/2$. A linha contínua corresponde a ambos: $\mathcal{T}_{\text{non-vac}}^{(\alpha)\text{DN}}$ com $\theta = 0$, e $\mathcal{T}_{\text{non-vac}}^{(\alpha)\text{ND}}$ com $\theta = \pi/2$. A linha tipo espaço-ponto corresponde a ambos: $\mathcal{T}_{\text{non-vac}}^{(\alpha)\text{ND}}$ com $\theta = 0$, e $\mathcal{T}_{\text{non-vac}}^{(\alpha)\text{DN}}$ com $\theta = \pi/2$.

Capítulo 4

Comentários finais

Finalizamos esta dissertação, apresentando uma perspectiva imediata da aplicação dos resultados obtidos para um estado inicial arbitrário, para um estado comprimido (no caso de uma fronteira). Além disso, resumizamos e comentamos os resultados mais relevantes, mostrando quais são as generalizações ou extensões naturais que fizemos aqui, apontando, quando for o caso, as perspectivas de trabalhos futuros.

4.1 Perspectiva: aplicação ao estado comprimido

Um outro exemplo de um estado não invariante sob translações temporais é o estado comprimido puro de modo único, gerado pela ação do operador de compressão

$$\hat{S}(\xi) = \exp\left(\frac{\xi^* \hat{a}_{\omega_0}^2 - \xi (\hat{a}_{\omega_0}^\dagger)^2}{2}\right) \quad (4.1)$$

no estado de vácuo: $|\xi\rangle = \hat{S}(\xi)|0\rangle$, onde $\xi = re^{i\varphi}$ (veja a Ref. [44]).

As forças exatas $F_{\langle\hat{a}^\dagger\hat{a}\rangle}$ e $F_{\langle\hat{a}\hat{a}\rangle}$, neste caso, serão renomeadas como $F_{\langle\hat{a}^\dagger\hat{a}\rangle}^{(\xi)}$ e $F_{\langle\hat{a}\hat{a}\rangle}^{(\xi)}$, respectivamente. Nós encontramos que as fórmulas para $F_{\langle\hat{a}^\dagger\hat{a}\rangle}^{(\xi)}$ e $F_{\langle\hat{a}\hat{a}\rangle}^{(\xi)}$ exibem a mesma estrutura encontrada para o caso coerente, no sentido que $F_{\langle\hat{a}^\dagger\hat{a}\rangle}^{(\xi)}$ pode ser escrito apenas pela mudança do coeficiente $|\alpha|^2 \rightarrow \sinh(r)^2$ em $F_{\langle\hat{a}^\dagger\hat{a}\rangle}^{(\alpha)}$, enquanto que $F_{\langle\hat{a}\hat{a}\rangle}^{(\xi)}$ pode ser escrito pela mudança $|\alpha|^2 e^{\pm 2i\theta} \rightarrow -\sinh(r) \cosh(r) e^{\pm i\varphi}$ em $F_{\langle\hat{a}\hat{a}\rangle}^{(\alpha)}$.

Cálculos para cavidades estão em andamento. Nós também estamos considerando o estado de gato de Schrödinger como estado inicial. Finalmente, correções térmicas para a densidade de energia também estão sendo investigadas.

4.2 Comentários finais

Em síntese, centrando-se sobre as vantagens da abordagem de Fulling-Davies, para o caso de um campo escalar não massivo em $1 + 1$ dimensões, nesta dissertação calculamos a força de Casimir dinâmica exata que atua sobre um espelho em movimento sob às condições de fronteira Neumann ou Dirichlet, para um estado inicial arbitrário do campo (Eqs. (2.25 - 2.30)). Estes resultados compõe parte do artigo “Quantum radiation force on a moving mirror with Dirichlet and Neumann boundary conditions at vacuum, finite temperature and coherent state”, publicado na revista *Physical Review D* **77**, 125001 (2008). Vale mencionar que Fulling e Daves também obtiveram a força de Casimir dinâmica exata [8], porém eles consideram apenas a condição de fronteira Dirichlet e o estado inicial do campo como sendo o vácuo.

Para o caso em que o estado inicial do campo é o vácuo, obtivemos a força de Casimir dinâmica aproximada (Eq. (2.31)), generalizando o resultado não relativístico encontrado na Ref. [18] para a condição de Dirichlet e, na Ref. [28] para a condição de Neumann. Para o estado inicial do campo sendo coerente, encontramos as fórmulas exatas para a força de radiação (Eqs. (2.34 e 2.35)), que são diferentes, se considerarmos a condição Dirichlet ou Neumann, generalizando as fórmulas perturbativas encontradas na Ref. [28]. Posteriormente, estendemos para uma lei de movimento geral (relativística) da fronteira a conclusão encontrada na literatura [28], que as condições de fronteira Dirichlet e Neumann produzem a mesma força de radiação sobre um espelho em movimento, quando o estado inicial do campo é invariante sob translações temporais.

Nós propusemos expressões gerais exatas para a densidade de energia dentro de uma cavidade unidimensional que contenham as condições de fronteira DD, NN, DN ou ND e um campo escalar real não massivo, com um estado inicial arbitrário (Eqs. (3.6 -

3.16)). Neste sentido, generalizamos a fórmula para a densidade de energia encontrada na literatura [6, 8] (que é válida somente para a condição de fronteira Dirichlet e o vácuo como o estado inicial do campo).

No contexto do método de Cole-Schieve [15] para solucionar recursivamente a equação de Moore, nós estendemos, para um estado inicial arbitrário do campo, a relação de recorrência para a densidade de energia encontrada na Ref. [38] (Eq. (3.39)). Esta extensão nos permite obter recursivamente a densidade de energia dentro da cavidade, para um ponto arbitrário do espaço - tempo, em termos dos valores conhecidos da densidade de energia calculada nas “regiões estáticas”, onde o estado inicial do campo não foi afetado pela perturbação causada pelo movimento da fronteira (Eqs. (3.46 e 3.47)).

Finalmente, como um exemplo da efetividade destas equações e da abordagem numérica de Cole e Schieve, nós descrevemos o comportamento da densidade de energia para estados diagonais e não diagonais, onde concluímos que para um mesmo estado inicial do campo, qualquer que seja o movimento da fronteira ou o instante considerado, temos que:

i) Para um estado diagonal, a densidade de energia na cavidade DD será igual à densidade NN. O mesmo ocorrerá para as condições de fronteira mistas ND e DN (Eqs. (3.59 e 3.60)), sendo que o resultado obtido para as condições mistas generaliza a conclusão encontrada na Ref. [39], válida apenas para o estado de vácuo.

ii) Para um estado inicial coerente (exemplo de um estado não diagonal), a densidade de energia na cavidade DD, calculada em uma certa fase θ , será igual à densidade NN calculada em $\theta' = \theta + \frac{\pi}{2}$. O mesmo ocorrerá para as condições de fronteira mistas ND e DN (Eqs. (3.70 e 3.71)).

APÊNDICES

Apêndice A

A condição de Neumann para um referencial de laboratório

Neste apêndice, deduzimos a condição de fronteira Neumann para o caso de um espelho em movimento, nos baseando na Ref. [20].

Considerando um espelho (fronteira) movendo-se em um espaço-tempo bidimensional (t, x) , de acordo com $x = z(t)$, podemos associar uma estrutura de Lorentz $S'(t_0)$ a este espelho, cujo a trajetória vista no referencial de laboratório S é dada por

$$x = \dot{z}(t_0)(t - t_0) + z(t_0), \quad (\text{A.1})$$

de modo que $S'(t_0)$ representa um referencial inercial instantaneamente co-móvel ao espelho no instante t_0 . As quantidades tomadas em $S'(t_0)$ serão denotadas por primo.

As coordenadas espaço-temporais em $S'(t_0)$ estão relacionadas àquelas em S por

$$x = \gamma(\dot{z}(t_0))(x' + \dot{z}(t_0)t') + z(t_0), \quad (\text{A.2})$$

$$t = \gamma(\dot{z}(t_0))(t' + \dot{z}(t_0)x') + t_0, \quad (\text{A.3})$$

onde $\gamma(\dot{z}(t_0)) = [1 - \dot{z}(t_0)^2]^{-1/2}$. No referencial de laboratório S , a posição do espelho no espaço - tempo $(t_0, z(t_0))$ corresponde a posição $(0, 0)$ no referencial $S'(t_0)$.

O campo $\phi'(t', x')$ irradiado no espelho no instante t_0 obedece a condição de Neumann

para o referencial $S'(t_0)$:

$$[\partial_{x'} \phi'(t', x')] |_{(x'=0, t'=0)} = 0, \quad (\text{A.4})$$

mas do ponto de vista do referencial S , a condição de Neumann não é percebida desta forma, pois, ao contrário do referencial $S'(t_0)$, no instante t_0 o espelho está em movimento com relação ao referencial S . Por outro lado, podemos escrever o lado esquerdo da Eq. (A.4) em termos das quantidades sem primo do referencial S , usando as Eqs. (A.2) e (A.3) como segue:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x'} &= \frac{\partial x}{\partial x'} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial t}{\partial x'} \frac{\partial}{\partial t} \\ &= \gamma(\dot{z}(t_0)) \left(\frac{\partial}{\partial x} + \dot{z}(t_0) \frac{\partial}{\partial t} \right), \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

logo,

$$[\partial_{x'} \phi'(t', x')] |_{(x'=0, t'=0)} = \gamma(\dot{z}(t_0)) \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial x} + \dot{z}(t_0) \frac{\partial}{\partial t} \right] \phi(t, x) \right\} |_{(x=z(t_0), t=t_0)} = 0. \quad (\text{A.6})$$

Podemos, ainda, fazer $t_0 \rightarrow t$ na expressão acima. Portanto, a condição de Neumann para um espelho em movimento no referencial de laboratório S será:

$$\left\{ \left[\frac{\partial}{\partial x} + \dot{z}(t) \frac{\partial}{\partial t} \right] \phi(t, x) \right\} |_{(x=z(t))} = 0. \quad (\text{A.7})$$

Apêndice B

Invariância conforme da equação de Klein - Gordon

A teoria quântica dos sistemas tratados nesta dissertação, tanto para uma fronteira (espelho), quanto para uma cavidade é mais facilmente construída, com a ajuda de um conjunto completo de modos normais soluções da equação de Klein - Gordon (2.1) e das condições de contorno impostas aos espelhos. Estas soluções podem ser obtidas pela exploração da invariância conforme da Eq. (2.1).

Podemos escrever o campo $\phi(t, x)$ como $\Phi(w, s)$, pois o mesmo é um campo escalar e é invariante por transformação conforme, de forma que as primeiras derivadas em relação a t e x serão:

$$\frac{\partial}{\partial t}\phi(t, x) = \frac{\partial}{\partial t}\Phi(w(t, x), s(t, x)) = \frac{\partial\Phi}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial\Phi}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial t}. \quad (\text{B.1})$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\phi(t, x) = \frac{\partial}{\partial x}\Phi(w(t, x), s(t, x)) = \frac{\partial\Phi}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial\Phi}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x}. \quad (\text{B.2})$$

Portanto, para mostrar que a equação de Klein - Gordon é invariante sobre transformação conforme é necessário realizar uma mudança de operadores na Eq. (2.1):

$$\partial_t = \partial_t s \partial_s + \partial_t w \partial_w \quad (\text{B.3})$$

$$\partial_x = \partial_x s \partial_s + \partial_x w \partial_w \quad (\text{B.4})$$

A partir das transformações conformes (2.4), obtemos as variáveis conformes w e s :

$$w = \frac{1}{2} [g^{-1}(t+x) + f^{-1}(t-x)] \quad \text{e} \quad s = \frac{1}{2} [g^{-1}(t+x) - f^{-1}(t-x)], \quad (\text{B.5})$$

onde as funções f e g são arbitrárias. Calculando as derivadas de w e s com relação a t e x , virá:

$$\begin{aligned} \frac{\partial s}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{1}{2} [g^{-1}(t+x) - f^{-1}(t-x)] \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial g^{-1}(t+x)}{\partial(t+x)} - \frac{\partial f^{-1}(t-x)}{\partial(t-x)} \right], \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{1}{2} [g^{-1}(t+x) + f^{-1}(t-x)] \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial g^{-1}(t+x)}{\partial(t+x)} + \frac{\partial f^{-1}(t-x)}{\partial(t-x)} \right] \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial s}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{1}{2} [g^{-1}(t+x) - f^{-1}(t-x)] \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial g^{-1}(t+x)}{\partial(t+x)} + \frac{\partial f^{-1}(t-x)}{\partial(t-x)} \right], \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{1}{2} [g^{-1}(t+x) + f^{-1}(t-x)] \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial g^{-1}(t+x)}{\partial(t+x)} - \frac{\partial f^{-1}(t-x)}{\partial(t-x)} \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

Substituindo as expressões (B.6) e (B.7) em (B.3), temos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial g^{-1}(t+x)}{\partial(t+x)} - \frac{\partial f^{-1}(t-x)}{\partial(t-x)} \right] \frac{\partial}{\partial s} + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial g^{-1}(t+x)}{\partial(t+x)} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial f^{-1}(t-x)}{\partial(t-x)} \right] \frac{\partial}{\partial w} \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

e então,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial t^2} &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 g^{-1}(t+x)}{\partial(t+x)^2} - \frac{\partial^2 f^{-1}(t-x)}{\partial(t-x)^2} \right] \frac{\partial}{\partial s} + \\
&+ \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 g^{-1}(t+x)}{\partial(t+x)^2} + \frac{\partial^2 f^{-1}(t-x)}{\partial(t-x)^2} \right] \frac{\partial}{\partial w} + \\
&+ \left\{ \frac{1}{2} \left[\frac{\partial g^{-1}(t+x)}{\partial(t+x)} - \frac{\partial f^{-1}(t-x)}{\partial(t-x)} \right] \right\}^2 \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \\
&+ \left\{ \frac{1}{2} \left[\frac{\partial g^{-1}(t+x)}{\partial(t+x)} + \frac{\partial f^{-1}(t-x)}{\partial(t-x)} \right] \right\}^2 \frac{\partial^2}{\partial w^2}. \tag{B.11}
\end{aligned}$$

De maneira análoga, substituímos as expressões (B.8) e (B.9) em (B.4) e obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial g^{-1}(t+x)}{\partial(t+x)} + \frac{\partial f^{-1}(t-x)}{\partial(t-x)} \right] \frac{\partial}{\partial s} + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial g^{-1}(t+x)}{\partial(t+x)} - \right. \\
&\left. - \frac{\partial f^{-1}(t-x)}{\partial(t-x)} \right] \frac{\partial}{\partial w}, \tag{B.12}
\end{aligned}$$

logo, temos que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial x^2} &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 g^{-1}(t+x)}{\partial(t+x)^2} - \frac{\partial^2 f^{-1}(t-x)}{\partial(t-x)^2} \right] \frac{\partial}{\partial s} + \\
&+ \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 g^{-1}(t+x)}{\partial(t+x)^2} + \frac{\partial^2 f^{-1}(t-x)}{\partial(t-x)^2} \right] \frac{\partial}{\partial w} + \\
&+ \left\{ \frac{1}{2} \left[\frac{\partial g^{-1}(t+x)}{\partial(t+x)} + \frac{\partial f^{-1}(t-x)}{\partial(t-x)} \right] \right\}^2 \frac{\partial^2}{\partial s^2} \\
&+ \left\{ \frac{1}{2} \left[\frac{\partial g^{-1}(t+x)}{\partial(t+x)} - \frac{\partial f^{-1}(t-x)}{\partial(t-x)} \right] \right\}^2 \frac{\partial^2}{\partial w^2}. \tag{B.13}
\end{aligned}$$

Finalmente, substituindo as Eqs. (B.11) e (B.13) na Eq. (2.1), obtemos:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \phi(t, x) = \frac{\partial g^{-1}(t+x)}{\partial(t+x)} \frac{\partial f^{-1}(t-x)}{\partial(t-x)} \left(\frac{\partial^2}{\partial w^2} - \frac{\partial^2}{\partial s^2} \right) \Phi(w, s) = 0. \tag{B.14}$$

Para não carregar a notação, vamos escrever o campo $\Phi(w, s)$ como $\phi(w, s)$. Portanto, sendo as funções f e g analíticas e suas derivadas inversíveis, temos:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial w^2} - \frac{\partial^2}{\partial s^2} \right) \phi(w, s) = 0, \tag{B.15}$$

que é a equação de Klein - Gordon no sistema de coordenadas (w, s) , como queríamos demonstrar.

Apêndice C

Mapeamento conforme das coordenadas do sistema

Neste apêndice, descrevemos o mapeamento conforme de coordenadas utilizado por Moore [6] e Fulling e Davies [8], que usamos nesta dissertação para tratar tanto o caso de uma fronteira (ou espelho) quanto para uma cavidade unidimensional.

O mapeamento conforme de duas curvas quaisquer de uma geometria para outra preservará o ângulo entre estas curvas, por isso, este é um mapeamento restrito à duas dimensões. As situações analisadas nesta dissertação envolvem um campo escalar não massivo em 1+1 dimensões, com um espelho (ou um dos espelhos, para o caso da cavidade não-estática) em movimento sob as condições de contorno de Dirichlet e/ou Neumann. Em 1 + 1 dimensões, esta fronteira se torna um ponto no espaço, movendo-se, em geral, de acordo com $x = z(t)$ com $|\dot{z}(t)| < 1$. Além disso, o campo não massivo $\phi(t, x)$ satisfaz a equação de Klein - Gordon Eq. (2.1) na região à direita [$x > z(t)$] do espelho.

Moore [6] demonstrou que considerar o movimento do espelho sobre certas condições, em modelos bidimensionais não massivos, é sempre equivalente (classicamente), sobre uma transformação conforme, aos modelos com espelhos estacionários, simplificando o problema. Com esse intuito, construímos um sistema de coordenadas conformes retardadas (w, s) que se relaciona com o sistema de coordenadas (t, x) . Assim, uma geometria

espaço-temporal é substituída por outra, mas os pontos das duas geometrias são identificados através das transformações conformes de coordenadas, dada pela Eq. (2.4).

Um conjunto de trajetórias do espelho de interesse particular são aquelas em que a velocidade inicial é uniforme [8]. Uma escolha apropriada da origem do sistema e estrutura de Lorentz, nos permite assumir que $z(t) = 0$ para $t < 0$. A partir das transformações conformes (2.4) podemos isolar as coordenadas t e x :

$$t = \frac{1}{2} [f(w-s) + g(w+s)] \quad \text{e} \quad x = \frac{1}{2} [g(w+s) - f(w-s)]. \quad (\text{C.1})$$

Para o caso de uma única fronteira, as funções f e g são escolhidas de modo que a curva $s = 0$ coincida com trajetória do espelho $x = z(t)$. Logo, fazendo uso da Eq. (C.1) temos:

$$\frac{1}{2} [g(w) - f(w)] = z \left(\frac{1}{2} [f(w) + g(w)] \right). \quad (\text{C.2})$$

Existem soluções globais dessa equação para movimentos razoáveis de $z(t)$. Desconsideramos os casos em que a trajetória do espelho aproxima-se de uma assíntota como $t \rightarrow \infty$. A Eq. (C.2) satisfaz a condição de velocidade inicial uniforme, se $f(w) = g(w) = w$ para $w < 0$. Portanto, $z(w) = z(t) = 0$ para w e $t < 0$.

Para o caso de uma cavidade, as funções f e g são escolhidas de modo que o espelho em repouso na origem ($x = 0$) seja mapeado pela curva $s = 0$, enquanto que o espelho em movimento ($x = L(t)$) seja mapeado pela curva $s = 1$. Agora, substituindo o mapeamento conforme realizado no espelho em repouso ($x = 0 \rightarrow s = 0$) nas transformações conformes (2.4), teremos que: $t = f(w) = g(w), \forall t$. A partir da relação anterior, introduzimos uma função real R que está relacionada com f e g por meio de sua inversa [6]: $f(w) = g(w) = R^{-1}(w)$.

As transformações conformes inversas serão:

$$w - s = f^{-1}(t - x) \quad \text{e} \quad w + s = g^{-1}(t + x). \quad (\text{C.3})$$

Então, substituindo o mapeamento conforme realizado no espelho em movimento ($x = L(t) \rightarrow s = 1$) na expressão anterior, juntamente com a função real R , temos que $w - 1 = R(t - L(t))$ e $w + 1 = R(t + L(t))$. Fazendo a diferença de $(w - 1)$ e $(w + 1)$ encontramos

a equação funcional Eq. (3.5), conhecida como equação de Moore. Ela é de grande relevância na análise das recorrências da radiação na cavidade, assim como na evolução do comportamento da densidade de energia na cavidade.

Apêndice D

Mapeamento conforme das condições de fronteira

Neste apêndice, mapeamos as condições de fronteira Dirichlet e Neumann das coordenadas (t, x) para as coordenadas (w, s) , através das transformações conformes (2.4), tanto para o problema com uma fronteira quanto para a cavidade não-estacionária.

D.1 Para uma fronteira

Como visto no Apêndice C, podemos escolher as funções f e g , a fim de obter o seguinte mapeamento para uma fronteira: $[t, z(t)] \rightarrow (w, 0)$ [8]. De imediato, obtemos a condição de Dirichlet conforme: $\phi(w, s)|_{s=0} = 0$.

A condição de Neumann nas coordenadas (t, x) é dada pela Eq. (A.7). A partir das transformações conformes inversas (C.3), obtemos as variáveis conformes w e s como estão na Eq. (B.5). Os operadores diferenciais ∂_t e ∂_x nas coordenadas (w, s) são dados, respectivamente, pelas Eqs. (B.10) e (B.12).

Aplicando o mapeamento $[t, z(t)] \rightarrow (w, 0)$ na Eq. (C.3) obtemos que $g^{-1}(t + z(t)) =$

$f^{-1}(t - z(t)) = w$, cuja a relação entre as derivadas dos operandos será:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g^{-1}(t + z(t))}{\partial t} &= \frac{\partial f^{-1}(t - z(t))}{\partial(t - z(t))} \frac{\partial(t - z(t))}{\partial t} \\ &= \frac{\partial f^{-1}(t - z(t))}{\partial(t - z(t))} [1 - \dot{z}(t)]. \end{aligned} \quad (\text{D.1})$$

A derivada do lado esquerdo da expressão (D.1) acima é:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g^{-1}(t + z(t))}{\partial t} &= \frac{\partial g^{-1}(t + z(t))}{\partial(t + z(t))} \frac{\partial(t + z(t))}{\partial t} \\ &= \frac{\partial g^{-1}(t + z(t))}{\partial(t + z(t))} [1 + \dot{z}(t)], \end{aligned} \quad (\text{D.2})$$

igualando as Eqs. (D.1) e (D.2) obtemos, finalmente, a seguinte relação entre as derivadas:

$$\frac{\partial g^{-1}(t + z(t))}{\partial(t + z(t))} = \frac{\partial f^{-1}(t - z(t))}{\partial(t - z(t))} \left[\frac{1 - \dot{z}(t)}{1 + \dot{z}(t)} \right]. \quad (\text{D.3})$$

Sabemos que $x = z(t)$, então, podemos escrever com o auxílio da Eq. (2.4) que

$$\dot{z}(t) = \dot{z} \left(\frac{1}{2} [f(w - s) + g(w + s)] \right) \Big|_{s=0} = \dot{z}(w). \quad (\text{D.4})$$

Portanto, substituindo as Eqs. (B.10), (B.12) e (D.4) no lado esquerdo da Eq. (A.7), com a substituição de variáveis dada pela Eq. (2.10), temos que

$$\left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial g^{-1}(v)}{\partial v} \left(\frac{\partial}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial w} \right) [1 + \dot{z}(w)] + \frac{1}{2} \frac{\partial f^{-1}(u)}{\partial u} \left(\frac{\partial}{\partial s} - \frac{\partial}{\partial w} \right) [1 - \dot{z}(w)] \right\} \phi(w, s) \Big|_{s=0} = 0, \quad (\text{D.5})$$

agora substituindo a Eq. (D.3) na expressão anterior e manipulando de forma algébrica, virá:

$$\left\{ [1 - \dot{z}(w)] \frac{\partial f^{-1}(u)}{\partial u} \frac{\partial}{\partial s} \right\} \phi(w, s) \Big|_{s=0} = 0. \quad (\text{D.6})$$

Finalmente, podemos escrever a condição de Neumann mapeada nas coordenadas (w, s) como:

$$\frac{\partial}{\partial s} \phi(w, s) \Big|_{s=0} = 0. \quad (\text{D.7})$$

D.2 Para uma cavidade

Vamos analisar o mapeamento conforme feito no Apêndice C para cada fronteira.

D.2.1 Fronteira em repouso

A fronteira em repouso está na origem e é mapeada pela curva $s = 0$: $[t, 0] \rightarrow (w, 0)$. Se a fronteira em repouso obedecer a condição de Dirichlet, esta será dada por $\phi(w, s)|_{s=0} = 0$. Por outro lado, se a fronteira em repouso obedecer a condição de Neumann $[\partial_x \phi(t, x)]|_{x=0} = 0$, escrevemos o operador diferencial ∂_x nas coordenadas (w, s) como na Eq. (B.12), onde as variáveis conformes são dadas pela Eq. (B.5).

Fazendo uso das mudanças de variáveis (2.10), obtemos que

$$[\partial_x \phi(t, x)]|_{x=0} = \left[\frac{1}{2} \frac{\partial g^{-1}(v)}{\partial v} \left(\frac{\partial}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial w} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial f^{-1}(u)}{\partial u} \left(\frac{\partial}{\partial s} - \frac{\partial}{\partial w} \right) \right] \phi(w, s) \Big|_{s=0} = 0. \quad (\text{D.8})$$

Substituindo a função real R (introduzida no Apêndice C) na expressão anterior, virá:

$$\left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial R(v)}{\partial v} + \frac{\partial R(u)}{\partial u} \right) \frac{\partial}{\partial s} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial R(v)}{\partial v} - \frac{\partial R(u)}{\partial u} \right) \frac{\partial}{\partial w} \right] \phi(w, s)_{s=0} = 0. \quad (\text{D.9})$$

Manipulando as transformações conformes inversas (C.3), juntamente com a função real R , obtemos:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1}{2} [R'(t+x) - R'(t-x)] \quad \text{e} \quad \frac{\partial s}{\partial x} = \frac{1}{2} [R'(t+x) + R'(t-x)], \quad (\text{D.10})$$

com isso, a expressão (D.9) se torna

$$\left[\frac{\partial s}{\partial x} \Big|_{x=0} \frac{\partial}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{x=0} \frac{\partial}{\partial w} \right] \phi(w, s) \Big|_{x=0} = 0. \quad (\text{D.11})$$

Portanto, a condição de Neumann para a fronteira em repouso, dada em termos das coordenadas (w, s) será: $\partial_x \phi(w, s)|_{s=0} = 0$.

D.2.2 Fronteira em movimento

A fronteira está em movimento de acordo com $x = L(t)$, sendo mapeada pela curva $s = 1$: $[t, L(t)] \rightarrow (w, 1)$. Se a fronteira em movimento obedecer a condição de Dirichlet, esta será dada por $\phi(w, s)|_{s=1} = 0$.

Se a fronteira em movimento obedecer a condição de Neumann, usamos o mesmo procedimento empregado no item anterior, para calcular a condição de Neumann para uma fronteira e obtemos uma expressão que difere da Eq. (D.7), apenas pelo valor em que s é tomado:

$$\left. \frac{\partial}{\partial s} \phi(w, s) \right|_{s=1} = 0. \quad (\text{D.12})$$

Apêndice E

A função de correlação \mathcal{C}

Neste apêndice, obtemos a função de correlação, que nos permite concluir se o campo considerado é ou não invariante sobre translações temporais, tanto para uma fronteira quanto para uma cavidade.

E.1 Para uma fronteira

Vamos calcular o correlator $\langle \phi(t, x)\phi(t', x') \rangle$, para isso, utilizamos as Eqs. (2.8) e (2.9) e escrevemos o correlator em termos das médias dos operadores \hat{a}_ω e \hat{a}_ω^\dagger :

$$\langle \phi(t, x)\phi(t', x') \rangle = \int_0^\infty \int_0^\infty d\omega d\omega' \frac{1}{4\pi\sqrt{\omega\omega'}} (A + B + C + D), \quad (\text{E.1})$$

onde

$$A = \langle \hat{a}_\omega \hat{a}_{\omega'} \rangle (\gamma e^{-i\omega r(v)} + \gamma^* e^{-i\omega p(u)}) (\gamma e^{-i\omega' r(v')} + \gamma^* e^{-i\omega' p(u')}), \quad (\text{E.2})$$

$$B = \langle \hat{a}_\omega \hat{a}_{\omega'}^\dagger \rangle (\gamma e^{-i\omega r(v)} + \gamma^* e^{-i\omega p(u)}) (\gamma^* e^{i\omega' r(v')} + \gamma e^{i\omega' p(u')}), \quad (\text{E.3})$$

$$C = \langle \hat{a}_\omega^\dagger \hat{a}_{\omega'} \rangle (\gamma^* e^{i\omega r(v)} + \gamma e^{i\omega p(u)}) (\gamma e^{-i\omega' r(v')} + \gamma^* e^{-i\omega' p(u')}), \quad (\text{E.4})$$

e

$$D = \langle \hat{a}_\omega^\dagger \hat{a}_{\omega'}^\dagger \rangle (\gamma^* e^{i\omega r(v)} + \gamma e^{i\omega p(u)}) (\gamma^* e^{i\omega' r(v')} + \gamma e^{i\omega' p(u')}). \quad (\text{E.5})$$

Note que A é igual ao Hermitiano conjugado de D .

A partir do comutador $[\hat{a}_\omega, \hat{a}_{\omega'}^\dagger] = \delta(\omega - \omega')$, temos que a média $\langle \hat{a}_\omega \hat{a}_{\omega'}^\dagger \rangle = \delta(\omega - \omega') + \langle \hat{a}_{\omega'}^\dagger \hat{a}_\omega \rangle$, que substituída em B e, posteriormente, na Eq. (E.1) nos dá (após certa manipulação algébrica):

$$\begin{aligned} \langle \phi(t, x) \phi(t', x') \rangle &= \int_0^\infty \int_0^\infty d\omega d\omega' \frac{1}{4\pi\sqrt{\omega\omega'}} \\ &\times \left\{ \delta(\omega - \omega') \left[|\gamma|^2 \left(e^{-i[\omega r(v) - \omega' r(v')]} + e^{-i[\omega p(u) - \omega' p(u')]} \right) \right. \right. \\ &+ \left. \left. \gamma^2 e^{-i[\omega r(v) - \omega' p(u')]} + \gamma^{*2} e^{-i[\omega p(u) - \omega' r(v')]} \right] + \right. \\ &\left. + \text{Re} \{2C\} + \text{Re} \{2A\} \right\}. \end{aligned} \quad (\text{E.6})$$

Para o campo não perturbado (regiões I e IV na Fig. 2.1), temos que: $p(u) = u$ e $r(v) = v$. Logo a função de correlação para uma fronteira $\mathcal{C} = \langle \phi_0(t, x) \phi_0(t', x') \rangle$, será:

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &= \int_0^\infty d\omega \frac{1}{4\pi\omega} e^{-i\omega(t-t')} \left[|\gamma|^2 e^{-i\omega(x-x')} + \gamma^2 e^{-i\omega(x+x')} + c.c. \right] \\ &+ \int_0^\infty \int_0^\infty d\omega d\omega' \frac{1}{4\pi\sqrt{\omega\omega'}} \\ &\times \left\{ \left[\langle \hat{a}_{\omega'}^\dagger \hat{a}_\omega \rangle e^{-i(\omega t - \omega' t')} \left[|\gamma|^2 e^{-i(\omega x - \omega' x')} + \gamma^2 e^{-i(\omega x + \omega' x')} \right] + c.c. \right] + \right. \\ &\left. + \left[\langle \hat{a}_\omega \hat{a}_{\omega'} \rangle e^{-i(\omega t + \omega' t')} \left[\gamma^2 e^{-i(\omega x + \omega' x')} + |\gamma|^2 e^{-i(\omega x - \omega' x')} + c.c. \right] + c.c. \right] \right\}. \end{aligned} \quad (\text{E.7})$$

Observando a expressão anterior podemos distinguir os termos \mathcal{C}_{vac} , $\mathcal{C}_{\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle}$ e $\mathcal{C}_{\langle \hat{a} \hat{a} \rangle}$, dados pelas Eqs. (2.13), (2.14) e (2.15), respectivamente.

Apêndice F

Densidade de energia e força de radiação

Neste apêndice, mostramos os cálculos da densidade de energia e da força de radiação com maiores detalhes.

F.1 Para uma fronteira

F.1.1 Densidade de energia: fórmulas gerais

O operador densidade de energia em um espaço - tempo plano é dado por

$$\hat{T}_{00}(t, x) = \frac{1}{2} [(\partial_t \phi(t, x))^2 + (\partial_x \phi(t, x))^2], \quad (\text{F.1})$$

onde o operador campo $\phi(t, x)$, juntamente com os modos normais desse campo, são dados pelas Eqs. (2.8) e (2.9), respectivamente. Sendo $[\hat{a}_\omega, \hat{a}_{\omega'}^\dagger] = \delta(\omega - \omega')$ e $\hat{a}_{\omega'}^\dagger \hat{a}_\omega = (\hat{a}_\omega^\dagger \hat{a}_{\omega'})^\dagger$, escrevemos o operador densidade de energia como

$$\begin{aligned} \hat{T}_{00}(t, x) &= \frac{1}{2} \int_0^\infty d\omega [|\partial_t \phi_\omega|^2 + |\partial_x \phi_\omega|^2] + \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^\infty \int_0^\infty d\omega d\omega' \\ &\times \{ \hat{a}_\omega^\dagger \hat{a}_{\omega'} [\partial_t \phi_\omega^* \partial_t \phi_{\omega'} + \partial_x \phi_\omega^* \partial_x \phi_{\omega'}] + c.c. \\ &+ \hat{a}_\omega \hat{a}_{\omega'} [\partial_t \phi_\omega \partial_t \phi_{\omega'} + \partial_x \phi_\omega \partial_x \phi_{\omega'}] + c.c. \}. \end{aligned} \quad (\text{F.2})$$

Utilizando a mudança de variáveis dada pela Eq. (2.10), escrevemos as derivadas dos modos normais do campo como segue:

$$\partial_t \phi_\omega = -i \sqrt{\frac{\omega}{4\pi}} [\gamma r'(t+x) e^{-i\omega r(t+x)} + \gamma^* p'(t-x) e^{-i\omega p(t-x)}] \quad (\text{F.3})$$

e

$$\partial_x \phi_\omega = i \sqrt{\frac{\omega}{4\pi}} (-\gamma r'(t+x) e^{-i\omega r(t+x)} + \gamma^* p'(t-x) e^{-i\omega p(t-x)}). \quad (\text{F.4})$$

Logo, temos que

$$\begin{aligned} \partial_t \phi_\omega^* \partial_t \phi_{\omega'} &= \frac{1}{4\pi} \sqrt{\omega \omega'} \\ &\times \left\{ |\gamma|^2 \left[[r'(t+x)]^2 e^{i(\omega-\omega')r(t+x)} + [p'(t-x)]^2 e^{i(\omega-\omega')p(t-x)} \right] \right. \\ &\left. + r'(t+x) p'(t-x) \left[\gamma^2 e^{i[\omega p(t-x) - \omega' r(t+x)]} + \gamma^{*2} e^{i[\omega r(t+x) - \omega' p(t-x)]} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (\text{F.5})$$

$$\begin{aligned} \partial_t \phi_\omega^* \partial_x \phi_{\omega'} &= -\frac{1}{4\pi} \sqrt{\omega \omega'} \\ &\times \left\{ |\gamma|^2 r'(t+x) p'(t-x) \left[e^{-i[\omega r(t+x) + \omega' p(t-x)]} + e^{-i[\omega p(t-x) + \omega' r(t+x)]} \right] \right. \\ &\left. + \gamma^2 [r'(t+x)]^2 e^{-i(\omega+\omega')r(t+x)} + \gamma^{*2} [p'(t-x)]^2 e^{-i(\omega+\omega')p(t-x)} \right\}, \end{aligned} \quad (\text{F.6})$$

$$\begin{aligned} \partial_x \phi_\omega^* \partial_x \phi_{\omega'} &= \frac{1}{4\pi} \sqrt{\omega \omega'} \\ &\times \left\{ |\gamma|^2 \left[[r'(t+x)]^2 e^{i(\omega-\omega')r(t+x)} + [p'(t-x)]^2 e^{i(\omega-\omega')p(t-x)} \right] \right. \\ &\left. - r'(t+x) p'(t-x) \left[\gamma^2 e^{i[\omega p(t-x) - \omega' r(t+x)]} + \gamma^{*2} e^{i[\omega r(t+x) - \omega' p(t-x)]} \right] \right\} \end{aligned} \quad (\text{F.7})$$

e

$$\begin{aligned} \partial_x \phi_\omega^* \partial_t \phi_{\omega'} &= -\frac{1}{4\pi} \sqrt{\omega \omega'} \\ &\times \left\{ -|\gamma|^2 r'(t+x) p'(t-x) \left[e^{-i[\omega r(t+x) + \omega' p(t-x)]} + e^{-i[\omega p(t-x) + \omega' r(t+x)]} \right] \right. \\ &\left. + \gamma^2 [r'(t+x)]^2 e^{-i(\omega+\omega')r(t+x)} + \gamma^{*2} [p'(t-x)]^2 e^{-i(\omega+\omega')p(t-x)} \right\}. \end{aligned} \quad (\text{F.8})$$

Portanto, substituindo esses produtos de derivadas na Eq. (F.2) e tomando o valor esperado sobre um estado arbitrário, escrevemos a densidade de energia na forma geral como:

$$\begin{aligned}
\mathcal{T} &= \langle \hat{T}_{00}(t, x) \rangle = \frac{1}{2} \int_0^\infty d\omega [|\partial_t \phi_\omega|^2 + |\partial_x \phi_\omega|^2] + \\
&+ \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty d\omega d\omega' \sqrt{\omega\omega'} \\
&\times \left\{ \langle \hat{a}_\omega^\dagger \hat{a}_{\omega'} \rangle |\gamma|^2 \left[[r'(t+x)]^2 e^{i(\omega-\omega')r(t+x)} + [p'(t-x)]^2 e^{i(\omega-\omega')p(t-x)} \right] + c.c. \right. \\
&\left. - \langle \hat{a}_\omega \hat{a}_{\omega'} \rangle \left[\gamma^2 [r'(t+x)]^2 e^{-i(\omega+\omega')r(t+x)} + \gamma^{*2} [p'(t-x)]^2 e^{-i(\omega+\omega')p(t-x)} \right] + c.c. \right\}.
\end{aligned} \tag{F.9}$$

De modo que \mathcal{T} pode ser separado como: $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{vac} + \mathcal{T}_{non-vac}$ (com $\mathcal{T}_{non-vac} = \mathcal{T}_{\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle} + \mathcal{T}_{\langle \hat{a} \hat{a} \rangle}$), onde seus termos são dados, respectivamente, pelas Eq. (2.20), (2.21) e (2.22), com o auxílio da Eq. (2.23).

Regularização do termo de vácuo

O termo \mathcal{T}_{vac} é divergente:

$$\mathcal{T}_{vac} = \frac{1}{2} \int_0^\infty d\omega [\partial_t \phi_\omega \partial_t \phi_\omega^* + \partial_x \phi_\omega \partial_x \phi_\omega^*]. \tag{F.10}$$

Por isso, é necessário realizar a regularização e renormalização deste termo. Neste sentido, escolhemos a técnica de regularização point-splitting (veja a Ref. [8]) que consiste em considerar os modos normais do campo conjugado, como sendo $\phi_\omega^*(t, x) = \phi_\omega^*(t + \varepsilon, x)$ na Eq. (2.9), onde ε é uma quantidade infinitesimal com a parte imaginária positiva. Sendo assim, temos que

$$\begin{aligned}
\partial_t \phi_\omega \partial_t \phi_\omega^* &= \frac{\omega}{4\pi} \left\{ |\gamma|^2 \left[r'(v) r'(v + \varepsilon) e^{-i\omega[r(v) - r(v + \varepsilon)]} + p'(u) p'(u + \varepsilon) e^{-i\omega[p(u) - p(u + \varepsilon)]} \right] + \right. \\
&\left. + \gamma^2 r'(v) p'(u + \varepsilon) e^{-i\omega[r(v) - p(u + \varepsilon)]} + \gamma^{*2} p'(u) r'(v + \varepsilon) e^{-i\omega[p(u) - r(v + \varepsilon)]} \right\}
\end{aligned} \tag{F.11}$$

e

$$\begin{aligned} \partial_x \phi_\omega \partial_x \phi_\omega^* &= \frac{\omega}{4\pi} \left\{ |\gamma|^2 \left[r'(v) r'(v+\varepsilon) e^{-i\omega[r(v)-r(v+\varepsilon)]} + p'(u) p'(u+\varepsilon) e^{-i\omega[p(u)-p(u+\varepsilon)]} \right] + \right. \\ &\quad \left. - \gamma^2 r'(v) p'(u+\varepsilon) e^{-i\omega[r(v)-p(u+\varepsilon)]} - \gamma^{*2} p'(u) r'(v+\varepsilon) e^{-i\omega[p(u)-r(v+\varepsilon)]} \right\}. \end{aligned} \quad (\text{F.12})$$

Logo,

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{vac} &= \frac{1}{4\pi} |\gamma|^2 \left\{ r'(v) r'(v+\varepsilon) \int_0^\infty \omega \left[e^{-i\omega[r(v)-r(v+\varepsilon)]} \right] d\omega \right. \\ &\quad \left. + p'(u) p'(u+\varepsilon) \int_0^\infty \omega \left[e^{-i\omega[p(u)-p(u+\varepsilon)]} \right] d\omega \right\}. \end{aligned} \quad (\text{F.13})$$

Deste modo, para eliminarmos os termos espúrios da expressão anterior, realizamos uma expansão em torno do parâmetro ε e tomamos o limite quando $\varepsilon \rightarrow 0$, obtendo o termo \mathcal{T}_{vac} renormalizado como está na Eq. (2.24).

F.1.2 Força de radiação: fórmulas gerais

Agora vamos calcular a força resultante sobre a fronteira, dada por: $F(t) = \mathcal{T} [t, z(t)]^{(-)} - \mathcal{T} [t, z(t)]^{(+)}$, onde “+” indica a região à direita da fronteira, enquanto que “-” indica a região à esquerda da fronteira.

Para isso, precisamos das 3 primeiras derivadas das funções $p(u)$ e $r(v)$ em relação aos seus argumentos, tomadas nos instantes $\tau(u)$ e $\tau(v)$, respectivamente (τ corresponde à coordenada temporal da interceção da trajetória do espelho, com as linhas nulas u e v).

Definindo $\dot{z} \equiv dz(\tau)/d\tau$, temos que essas derivadas serão:

$$\frac{dp(u)}{du} = \frac{1 + \dot{z}}{1 - \dot{z}}, \quad (\text{F.14})$$

$$\frac{d^2p(u)}{du^2} = \frac{2\ddot{z}}{(1 - \dot{z})^3}, \quad (\text{F.15})$$

$$\frac{d^3p(u)}{du^3} = \frac{6\ddot{z}^2}{(1 - \dot{z})^5} + \frac{2\dot{z}'}{(1 - \dot{z})^4}, \quad (\text{F.16})$$

$$\frac{dr(v)}{dv} = \frac{1 - \dot{z}}{1 + \dot{z}}, \quad (\text{F.17})$$

$$\frac{d^2 r(v)}{dv^2} = -\frac{2\ddot{z}}{(1+\dot{z})^3} \quad (\text{F.18})$$

e

$$\frac{d^3 r(v)}{dv^3} = \frac{6\ddot{z}^2}{(1+\dot{z})^5} - \frac{2\dot{\ddot{z}}}{(1+\dot{z})^4}. \quad (\text{F.19})$$

Se fazemos:

(I) $r(v) = v$ e $p(u) = 2\tau(u) - u$, onde $\tau(u) - z(\tau(u)) = u$, temos o resultado à direita da fronteira. Portanto,

$$\mathcal{T}_{vac}^{(+)} = -\frac{1}{4\pi} \frac{\ddot{z}^2 \dot{z}}{(1-\dot{z})^4 (1+\dot{z})^2} - \frac{1}{12\pi} \frac{\dot{\ddot{z}}}{(1-\dot{z})^3 (1+\dot{z})} \quad (\text{F.20})$$

e os termos de $\mathcal{T}_{non-vac}^{(+)}$ serão dados por:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle}^{(+)} &= \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty d\omega d\omega' \sqrt{\omega\omega'} \\ &\times \langle \hat{a}_\omega^\dagger \hat{a}_{\omega'} \rangle |\gamma|^2 e^{i(\omega-\omega')v} \left[1 + \left[\frac{1+\dot{z}}{1-\dot{z}} \right]^2 \right] + c.c. \end{aligned} \quad (\text{F.21})$$

e

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{\langle \hat{a} \hat{a} \rangle}^{(+)} &= -\frac{1}{4\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty d\omega d\omega' \sqrt{\omega\omega'} \\ &\times \langle \hat{a}_\omega \hat{a}_{\omega'} \rangle e^{-i(\omega+\omega')v} \left[\gamma^2 + \gamma^{*2} \left[\frac{1+\dot{z}}{1-\dot{z}} \right]^2 \right] + c.c. \end{aligned} \quad (\text{F.22})$$

Se fazemos:

(II) $r(v) = 2\tau(v) - v$ e $p(u) = u$, onde $\tau(v) + z(\tau(v)) = v$, temos o resultado à esquerda da fronteira. Portanto,

$$\mathcal{T}_{vac}^{(-)} = \frac{1}{4\pi} \frac{\ddot{z}^2 \dot{z}}{(1+\dot{z})^4 (1-\dot{z})^2} + \frac{1}{12\pi} \frac{\dot{\ddot{z}}}{(1+\dot{z})^3 (1-\dot{z})} \quad (\text{F.23})$$

e os termos de $\mathcal{T}_{non-vac}^{(-)}$ serão dados por:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle}^{(-)} &= \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty d\omega d\omega' \sqrt{\omega\omega'} \\ &\times \langle \hat{a}_\omega^\dagger \hat{a}_{\omega'} \rangle |\gamma|^2 e^{i(\omega-\omega')u} \left[\left[\frac{1-\dot{z}}{1+\dot{z}} \right]^2 + 1 \right] + c.c. \end{aligned} \quad (\text{F.24})$$

e

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{\langle\hat{a}\hat{a}\rangle}^{(-)} &= -\frac{1}{4\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty d\omega d\omega' \sqrt{\omega\omega'} \\ &\times \langle\hat{a}_\omega\hat{a}_{\omega'}\rangle e^{-i(\omega+\omega')u} \left[\gamma^2 \left[\frac{1-\dot{z}}{1+\dot{z}} \right]^2 + \gamma^{*2} \right] + c.c.. \end{aligned} \quad (\text{F.25})$$

Finalmente temos que

$$F_{vac} = \mathcal{T}_{vac}^{(-)} - \mathcal{T}_{vac}^{(+)}, \quad (\text{F.26})$$

$$F_{\langle\hat{a}^\dagger\hat{a}\rangle} = \mathcal{T}_{\langle\hat{a}^\dagger\hat{a}\rangle}^{(-)} - \mathcal{T}_{\langle\hat{a}^\dagger\hat{a}\rangle}^{(+)} \quad (\text{F.27})$$

e

$$F_{\langle\hat{a}\hat{a}\rangle} = \mathcal{T}_{\langle\hat{a}\hat{a}\rangle}^{(-)} - \mathcal{T}_{\langle\hat{a}\hat{a}\rangle}^{(+)}, \quad (\text{F.28})$$

cujo os resultados são dados, respectivamente, pelas Eqs. (2.27), (2.28) e (2.29).

F.1.3 Aplicação ao estado coerente

Quando tomamos as médias sobre um estado coerente ($\hat{a}_\omega|\alpha\rangle = \alpha\delta(\omega - \omega_0)|\alpha\rangle$), obtemos que:

$$\mathcal{T}_{\langle\hat{a}^\dagger\hat{a}\rangle}^{(\alpha)(+)} = |\gamma|^2 \frac{\omega_0}{2\pi} \left\{ |\alpha|^2 \left[1 + \left[\frac{1+\dot{z}}{1-\dot{z}} \right]^2 \right] \right\}, \quad (\text{F.29})$$

$$\mathcal{T}_{\langle\hat{a}\hat{a}\rangle}^{(\alpha)(+)} = -\frac{\omega_0}{4\pi} \alpha^2 e^{-2i\omega_0(t+z(t))} \left\{ \gamma^2 + \gamma^{*2} \left[\frac{1+\dot{z}}{1-\dot{z}} \right]^2 \right\} + c.c., \quad (\text{F.30})$$

$$\mathcal{T}_{\langle\hat{a}^\dagger\hat{a}\rangle}^{(\alpha)(-)} = |\gamma|^2 \frac{\omega_0}{2\pi} \left\{ |\alpha|^2 \left[\left[\frac{1-\dot{z}}{1+\dot{z}} \right]^2 + 1 \right] \right\} \quad (\text{F.31})$$

e

$$\mathcal{T}_{\langle\hat{a}\hat{a}\rangle}^{(\alpha)(-)} = -\frac{\omega_0}{4\pi} \alpha^2 e^{-2i\omega_0(t-z(t))} \left\{ \gamma^2 \left[\frac{1-\dot{z}}{1+\dot{z}} \right]^2 + \gamma^{*2} \right\} + c.c.. \quad (\text{F.32})$$

Substituindo $\alpha = |\alpha| e^{i\theta}$, temos que as forças coerentes exatas

$$F_{\langle\hat{a}^\dagger\hat{a}\rangle}^{(\alpha)} = \mathcal{T}_{\langle\hat{a}^\dagger\hat{a}\rangle}^{(\alpha)(-)} - \mathcal{T}_{\langle\hat{a}^\dagger\hat{a}\rangle}^{(\alpha)(+)} \quad (\text{F.33})$$

e

$$F_{\langle\hat{a}\hat{a}\rangle}^{(\alpha)} = \mathcal{T}_{\langle\hat{a}\hat{a}\rangle}^{(\alpha)(-)} - \mathcal{T}_{\langle\hat{a}\hat{a}\rangle}^{(\alpha)(+)} \quad (\text{F.34})$$

são dadas pelas Eqs. (2.34) e (2.35), respectivamente.

Agora vamos obter as expressões dos termos coerentes da força de radiação para velocidades não relativísticas e pequenas amplitudes, para isso, substituímos $z(t) = \varepsilon q(t)$ e expandimos as expressões (2.34) e (2.35) em torno de epsilon, obtendo assim:

$$F^I(t) = F_{\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle}^{(\alpha)} \approx -\frac{4\omega_0}{\pi} |\gamma|^2 |\alpha|^2 \dot{q}(t) \quad (\text{F.35})$$

e

$$\begin{aligned} F^{II}(t) &= F_{\langle \hat{a} \hat{a} \rangle}^{(\alpha)} \approx \frac{2\omega_0}{\pi} |\alpha|^2 (\gamma^2 + \gamma^{*2}) \\ &\times [\cos(2\omega_0 t - 2\theta) \dot{q}(t) - \sin(2\omega_0 t - 2\theta) \omega_0 q(t)]. \end{aligned} \quad (\text{F.36})$$

Portanto, a força coerente aproximada

$$F^{(\alpha)} = F^I(t) + F^{II}(t) \quad (\text{F.37})$$

é dada pela Eq. (2.36).

F.2 Para uma cavidade

F.2.1 Densidade de energia: fórmulas gerais

O operador densidade de energia em um espaço - tempo plano é dado pela Eq. (F.1). Para a cavidade, o operador campo $\phi(t, x)$ e os modos normais desse campo, são dados pelas Eqs. (3.1) e (3.3), respectivamente. Sabendo que $[\hat{a}_n, \hat{a}_{n'}^\dagger] = \delta_{nn'}$, escrevemos o operador densidade de energia como

$$\begin{aligned} \hat{T}_{00}(t, x) &= \frac{1}{2} \sum_{n=1-2\beta} [|\partial_t \phi_n|^2 + |\partial_x \phi_n|^2] + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{n, n'=1-2\beta} \{ \hat{a}_n^\dagger \hat{a}_{n'} [\partial_t \phi_n^* \partial_t \phi_{n'} + \partial_x \phi_n^* \partial_x \phi_{n'}] + c.c. \\ &+ \hat{a}_n \hat{a}_{n'} [\partial_t \phi_n \partial_t \phi_{n'} + \partial_x \phi_n \partial_x \phi_{n'}] + c.c. \}. \end{aligned} \quad (\text{F.38})$$

Utilizando a mudança de variáveis dada pela Eq. (2.10), escrevemos as derivadas dos modos normais do campo como segue:

$$\partial_t \phi_n(t, x) = -i \sqrt{\frac{(n+\beta)\pi}{4}} \left[\gamma e^{-i(n+\beta)\pi R(t+x)} R'(t+x) + \gamma^* e^{-i(n+\beta)\pi R(t-x)} R'(t-x) \right] \quad (\text{F.39})$$

e

$$\partial_x \phi_n(t, x) = -i \sqrt{\frac{(n+\beta)\pi}{4}} \left[\gamma e^{-i(n+\beta)\pi R(t+x)} R'(t+x) - \gamma^* e^{-i(n+\beta)\pi R(t-x)} R'(t-x) \right]. \quad (\text{F.40})$$

Utilizando as 2 equações acima, obtemos:

$$\begin{aligned} \partial_t \phi_n^* \partial_t \phi_{n'} + \partial_x \phi_n^* \partial_x \phi_{n'} &= \frac{\pi}{2} \sqrt{(n+\beta)(n'+\beta)} \left\{ |\gamma|^2 \left[e^{i(n-n')\pi R(t+x)} (R'(t+x))^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + e^{i(n-n')\pi R(t-x)} (R'(t-x))^2 \right] \right\}, \end{aligned} \quad (\text{F.41})$$

$$\begin{aligned} \partial_t \phi_n \partial_t \phi_{n'}^* + \partial_x \phi_n \partial_x \phi_{n'}^* &= \frac{\pi}{2} \sqrt{(n+\beta)(n'+\beta)} \left\{ |\gamma|^2 \left[e^{-i(n-n')\pi R(t+x)} (R'(t+x))^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + e^{-i(n-n')\pi R(t-x)} (R'(t-x))^2 \right] \right\}, \end{aligned} \quad (\text{F.42})$$

$$\begin{aligned} \partial_t \phi_n \partial_t \phi_{n'} + \partial_x \phi_n \partial_x \phi_{n'} &= -\frac{\pi}{2} \sqrt{(n+\beta)(n'+\beta)} \left\{ \gamma^2 e^{-i(n+n'+2\beta)\pi R(t+x)} (R'(t+x))^2 \right. \\ &\quad \left. + \gamma^{*2} e^{i(n+n'+2\beta)\pi R(t-x)} (R'(t-x))^2 \right\} \end{aligned} \quad (\text{F.43})$$

e

$$\begin{aligned} \partial_t \phi_n^* \partial_t \phi_{n'}^* + \partial_x \phi_n^* \partial_x \phi_{n'}^* &= -\frac{\pi}{2} \sqrt{(n+\beta)(n'+\beta)} \left\{ \gamma^{*2} e^{i(n+n'+2\beta)\pi R(t+x)} (R'(t+x))^2 \right. \\ &\quad \left. + \gamma^2 e^{i(n+n'+2\beta)\pi R(t-x)} (R'(t-x))^2 \right\}. \end{aligned} \quad (\text{F.44})$$

Substituindo os termos obtidos acima, na expressão do operador densidade de energia (F.38) e tomando o valor esperado da mesma, escrevemos a densidade de energia na

forma geral como:

$$\begin{aligned}
\mathcal{T} &= \langle \hat{T}_{00}(t, x) \rangle = \frac{\pi}{4} \sum_{n=1-2\beta} (n + \beta) |\gamma|^2 \left[(R'(t+x))^2 + (R'(t-x))^2 \right] + \\
&+ \frac{\pi}{4} \sum_{n, n'=1-2\beta} \sqrt{(n + \beta)(n' + \beta)} \\
&\times \left\{ \left\{ |\gamma|^2 \left[e^{i(n-n')\pi R(t+x)} (R'(t+x))^2 + e^{i(n-n')\pi R(t-x)} (R'(t-x))^2 \right] \right\} \right. \\
&\times \langle \hat{a}_n^\dagger \hat{a}_{n'} \rangle + c.c. + \\
&- \left\{ \gamma^2 e^{-i(n+n'+2\beta)\pi R(t+x)} (R'(t+x))^2 + \gamma^{*2} e^{-i(n+n'+2\beta)\pi R(t-x)} (R'(t-x))^2 \right\} \\
&\left. \times \langle \hat{a}_n \hat{a}_{n'} \rangle + c.c. \right\}. \tag{F.45}
\end{aligned}$$

A partir da expressão acima, podemos escrever \mathcal{T} como está na Eq. (3.6), onde a parte relacionada a densidade de energia do estado de vácuo \mathcal{T}_{vac} é dada pela Eq. (3.7) e as partes do estado não-vácuo:

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle} &= \frac{\pi}{4} \sum_{n, n'=1-2\beta} \sqrt{(n + \beta)(n' + \beta)} \\
&\times \left\{ \left\{ |\gamma|^2 \left[e^{i(n-n')\pi R(t+x)} (R'(t+x))^2 + e^{i(n-n')\pi R(t-x)} (R'(t-x))^2 \right] \right\} \right. \\
&\left. \times \langle \hat{a}_n^\dagger \hat{a}_{n'} \rangle + c.c. \right\} \tag{F.46}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{\langle \hat{a} \hat{a} \rangle} &= -\frac{\pi}{4} \sum_{n, n'=1-2\beta} \sqrt{(n + \beta)(n' + \beta)} \\
&\times \left\{ \left\{ \gamma^2 e^{-i(n+n'+2\beta)\pi R(t+x)} (R'(t+x))^2 + \gamma^{*2} e^{-i(n+n'+2\beta)\pi R(t-x)} (R'(t-x))^2 \right\} \right. \\
&\left. \times \langle \hat{a}_n \hat{a}_{n'} \rangle + c.c. \right\}, \tag{F.47}
\end{aligned}$$

são expressas em termos de funções dadas pelas Eq. (3.11) e (3.12).

Regularização do termo de vácuo

A densidade local de energia do estado de vácuo, dada pela Eq. (3.7) é divergente. Então, realizaremos a regularização e renormalização deste termo, através do método

point-splitting descrito na seção anterior. Neste sentido, partimos da seguinte expressão para densidade de energia do estado de vácuo:

$$\mathcal{T}_{vac} = \frac{1}{2} \sum_{n=1-2\beta} [\partial_t \phi_n \partial_t \phi_n^* + \partial_x \phi_n \partial_x \phi_n^*], \quad (\text{F.48})$$

de modo que

$$\begin{aligned} \partial_t \phi_n \partial_t \phi_n^* &= \frac{\pi}{4} (n + \beta) \{ |\gamma|^2 [e^{i(n+\beta)\pi[R(v+\varepsilon)-R(v)]} R'(v) R'(v + \varepsilon) + \\ &+ e^{i(n+\beta)\pi[R(u+\varepsilon)-R(u)]} R'(u) R'(u + \varepsilon)] + \\ &+ \gamma^2 e^{i(n+\beta)\pi[R(u+\varepsilon)-R(v)]} R'(v) R'(u + \varepsilon) + \\ &+ \gamma^{*2} e^{i(n+\beta)\pi[R(v+\varepsilon)-R(u)]} R'(u) R'(v + \varepsilon) \} \end{aligned} \quad (\text{F.49})$$

e

$$\begin{aligned} \partial_x \phi_n \partial_x \phi_n^* &= \frac{\pi}{4} (n + \beta) \{ |\gamma|^2 e^{i(n+\beta)\pi[R(v+\varepsilon)-R(v)]} R'(v) R'(v + \varepsilon) + \\ &+ e^{i(n+\beta)\pi[R(u+\varepsilon)-R(u)]} R'(u) R'(u + \varepsilon) \} + \\ &- \gamma^2 e^{i(n+\beta)\pi[R(u+\varepsilon)-R(v)]} R'(v) R'(u + \varepsilon) + \\ &- \gamma^{*2} e^{i(n+\beta)\pi[R(v+\varepsilon)-R(u)]} R'(u) R'(v + \varepsilon) \}. \end{aligned} \quad (\text{F.50})$$

Logo,

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{vac} &= \frac{1}{4} |\gamma|^2 R'(v) R'(v + \varepsilon) \sum_{n=1-2\beta}^{\infty} (n + \beta) \pi e^{i(n+\beta)\pi[R(v+\varepsilon)-R(v)]} + \\ &+ v \rightarrow u. \end{aligned} \quad (\text{F.51})$$

Utilizando a seguinte substituição:

$$R(v + \varepsilon) - R(v) = \rho, \quad (\text{F.52})$$

\mathcal{T}_{vac} será dado por:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{vac} &= \frac{1}{4} |\gamma|^2 R'(v) R'(v + \varepsilon) \sum_{n=1-2\beta}^{\infty} (n + \beta) \pi e^{i(n+\beta)\pi\rho} + \\ &+ v \rightarrow u. \end{aligned} \quad (\text{F.53})$$

Este somatório pode ser expresso como:

$$\sum_{n=1-2\beta}^{\infty} (n + \beta) \pi e^{i(n+\beta)\pi\rho} = -i \frac{\partial}{\partial \rho} \sum_{n=1-2\beta}^{\infty} e^{i(n+\beta)\pi\rho}. \quad (\text{F.54})$$

A série geométrica (infinita) que está no segundo termo da equação acima é semelhante a uma PG que possui infinitos elementos, com razão $q = e^{i\pi\rho}$, sendo que o primeiro termo será denotado por a_1 , então:

$$\begin{aligned} -i \frac{\partial}{\partial \rho} \left[e^{i\beta\pi\rho} \sum_{n=1-2\beta}^{\infty} e^{in\pi\rho} \right] &= -i \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\frac{a_1}{1-q} \right] \\ &= \pi \frac{e^{i(1-\beta)\pi\rho}}{1 - e^{i\pi\rho}} \left[(1 - \beta) + \frac{e^{i\pi\rho}}{(1 - e^{i\pi\rho})} \right]. \end{aligned} \quad (\text{F.55})$$

Portanto, a densidade de energia no vácuo será:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{vac} &= \frac{\pi}{4} |\gamma|^2 R'(v) R'(v + \varepsilon) \left\{ \frac{e^{i(1-\beta)\pi[R(v+\varepsilon)-R(v)]}}{1 - e^{i\pi[R(v+\varepsilon)-R(v)]}} \left[(1 - \beta) + \frac{e^{i\pi[R(v+\varepsilon)-R(v)]}}{(1 - e^{i\pi[R(v+\varepsilon)-R(v)]})} \right] \right\} + \\ &+ v \rightarrow u. \end{aligned} \quad (\text{F.56})$$

Expandindo a expressão acima em torno do parâmetro ε e, posteriormente, tomando o limite quando $\varepsilon \rightarrow 0$, obtemos o termo \mathcal{T}_{vac} (agora sem quantidades espúrias) como na Eq. (3.13).

Relação de recorrência para o termo não-vácuo

Com a intenção de obter uma relação de recorrência para a densidade de energia relacionada ao estado não-vácuo, vamos separar o termo $\mathcal{T}_{non-vac}$ em função das coordenadas $[t + L(t)]$ e $[t - L(t)]$, da seguinte forma:

$$\begin{aligned} g[t + L(t)] &= \frac{\pi}{4} \sum_{n,n'=1-2\beta} \sqrt{(n + \beta)(n' + \beta)} \\ &\times \left\{ |\gamma|^2 [R'(t + L(t))]^2 \left[e^{i(n-n')\pi R(t+L(t))} + e^{-i(n-n')\pi R(t+L(t))} \right] \langle \hat{a}_n^\dagger \hat{a}_{n'} \rangle + \right. \\ &- [R'(t + L(t))]^2 \left[\gamma^2 \langle \hat{a}_n \hat{a}_{n'} \rangle e^{-i(n+n'+2\beta)\pi R(t+L(t))} + \right. \\ &\left. \left. + \gamma^{*2} \langle \hat{a}_n^\dagger \hat{a}_{n'}^\dagger \rangle e^{i(n+n'+2\beta)\pi R(t+L(t))} \right] \right\} \end{aligned} \quad (\text{F.57})$$

e

$$\begin{aligned}
g[t - L(t)] &= \frac{\pi}{4} \sum_{n, n'=1-2\beta} \sqrt{(n + \beta)(n' + \beta)} \\
&\times \left\{ |\gamma|^2 [R'(t - L(t))]^2 \left[e^{i(n-n')\pi R(t-L(t))} + e^{-i(n-n')\pi R(t-L(t))} \right] \langle \hat{a}_n^\dagger \hat{a}_{n'} \rangle + \right. \\
&- [R'(t - L(t))]^2 \left[\gamma^{*2} \langle \hat{a}_n \hat{a}_{n'} \rangle e^{-i(n+n'+2\beta)\pi R(t-L(t))} + \right. \\
&\left. \left. + \gamma^2 \langle \hat{a}_n^\dagger \hat{a}_{n'}^\dagger \rangle e^{i(n+n'+2\beta)\pi R(t-L(t))} \right] \right\}. \tag{F.58}
\end{aligned}$$

A partir da equação de Moore Eq. (3.5), temos:

$$R'(t + L(t)) = \frac{t - \dot{L}(t)}{t + \dot{L}(t)} R'(t - L(t)) \tag{F.59}$$

que substituído na expressão (F.57), juntamente com a própria equação de Moore, provem:

$$\begin{aligned}
g[t + L(t)] &= \frac{\pi}{4} \left[\frac{t - \dot{L}(t)}{t + \dot{L}(t)} \right]^2 [R'(t - L(t))]^2 \sum_{n, n'=1-2\beta} \sqrt{(n + \beta)(n' + \beta)} \\
&\times \left\{ |\gamma|^2 \left[e^{i(n-n')\pi R(t-L(t))} e^{2i(n-n')\pi} + e^{-i(n-n')\pi R(t-L(t))} e^{-2i(n-n')\pi} \right] \langle \hat{a}_n^\dagger \hat{a}_{n'} \rangle + \right. \\
&- \left[\gamma^2 \langle \hat{a}_n \hat{a}_{n'} \rangle e^{-i(n+n'+2\beta)\pi R(t-L(t))} e^{-2i(n+n'+2\beta)\pi} + \right. \\
&\left. \left. + \gamma^{*2} \langle \hat{a}_n^\dagger \hat{a}_{n'}^\dagger \rangle e^{i(n+n'+2\beta)\pi R(t-L(t))} e^{2i(n+n'+2\beta)\pi} \right] \right\}. \tag{F.60}
\end{aligned}$$

Como n e n' são números inteiros e β é 0 ou 1/2, obtemos que

$$e^{\pm 2i(n-n')\pi} = e^{\pm 2i(n+n'+2\beta)\pi} = 1. \tag{F.61}$$

Portanto, a função que relaciona as recorrências da radiação nas linhas nulas u e v , para o termo $\mathcal{T}_{non-vac}$ será:

$$g[t + L(t)] = \frac{\pi}{4} \left[\frac{t - \dot{L}(t)}{t + \dot{L}(t)} \right]^2 g[t - L(t)]. \tag{F.62}$$

Referências Bibliográficas

- [1] H. B. G. Casimir, Proc. K. Ned. Akad. Wet. **51**, 793 (1948).
- [2] M. J. Sparnaay, Physica **XXIV**, 751 (1958).
- [3] S. K. Lamoreaux, Phys.Rev. Lett. **78**, 5 (1997).
- [4] U. Mohideen e A. Roy, Phys. Rev. Lett. **81**, 4549 (1998).
- [5] A. Roy, C.-Y. Lin, e U. Mohideen, Phys. Rev. D **60**, 111101(R) (1999); A. Roy e U. Mohideen, Phys. Rev. Lett. **82**, 4380 (1999); K. A. Milton, J. Phys. A: Math. Gen. **37**, 209 (2004); A. Agnesi *et al*, J. Phys. A: Math. Gen. **41**, 164 (2008).
- [6] G. T. Moore, J Math. Phys. **11**, 2679 (1970).
- [7] B. S. DeWitt, Phys. Rep. **19**, 295 (1975).
- [8] S. A. Fulling e P. C. W. Davies, Proc. R. Soc. London, **A 348**, 393 (1976).
- [9] P. C. W. Davies e S. A. Fulling, Proc. R. Soc. London, **A 354**, 59 (1977).
- [10] P. C. W. Davies e S. A. Fulling, Proc. R. Soc. London, **A 356**, 237 (1977).
- [11] P. Candelas e D. J. Raine, J. Math. Phys. **17**, 2101 (1976).
- [12] P. Candelas e D. J. Raine, Proc. R. Soc. London, **A 354**, 79 (1977).
- [13] C. K. Law, Phys. Rev. Lett. **73**, 1931 (1994).

- [14] Y. Wu, K. W. Chan, M. C. Chu e P. T. Leung, Phys. Rev. A **59**, 662 (1999); P. Wegrzyn, J. Phys. B **40**, 2621 (2007).
- [15] C. K. Cole e W. C. Schieve, Phys. Rev. A **52**, 4405 (1995).
- [16] V. V. Dodonov, A. B. Klimov e D. E. Nikonov, J. Math. Phys. **34**, 2742 (1993).
- [17] D. A. R. Dalvit e F. D. Mazzitelli, Phys. Rev. A **57**, 2113 (1998).
- [18] L. H. Ford e A. Vilenkin, Phys. Rev. D **25**, 2569 (1982).
- [19] P. A. Maia Neto, J. Phys. A **27**, 2167 (1994); P. A. Maia Neto e L. A. S. Machado, Phys. Rev. A **54**, 3420 (1996).
- [20] D. F. Mundarain e P. A. Maia Neto, Phys. Rev. A **57**, 1379 (1998).
- [21] M. Razavy e J. Terning, Phys. Rev. D **31**, 307 (1985); G. Calucci, J. Phys. A **25**, 3873 (1992); C. K. Law, Phys. Rev. A **49**, 433 (1994); C. K. Law, Phys. Rev. A **51**, 2537 (1995); V. V. Dodonov e A. B. Klimov, Phys. Rev. A, **53**, 2664 (1996).
- [22] N. D. Birrell e P. C. W. Davies, *Quantum Fields in Curved Space* (Cambridge University Press, Cambridge, England, 1982).
- [23] M. -T. Jaekel e S. Reynaud, J. Phys. I (France) **3**, 339 (1993).
- [24] M. T. Jaekel e S. Reynaud, Phys. Lett. A **172**, 319 (1993); L. A. S. Machado, P. A. Maia Neto e C. Farina, Phys. Rev. D **66**, 105016 (2002).
- [25] G. Plunien, R. Schutzhold e G. Soff, Phys. Rev. Lett. **84**, 1882 (2000).
- [26] D. T. Alves, E. R. Granhen e M. G. Lima, Phys. Rev. D **77**, 125001 (2008).
- [27] J. Hui, S. Qing-Yun e W. Jian-Sheng, Phys. Lett. A **268**, 174 (2000); R. Schutzhold, G. Plunien e G. Soff, Phys. Rev. A **65**, 043820 (2002); G. Schaller, R. Schützhold, G. Plunien e G. Soff, Phys. Rev. A **66**, 023812 (2002).
- [28] D. T. Alves, C. Farina e P. A. Maia Neto, J. Phys. A **36**, 1333 (2003).

- [29] V. V. Dodonov, A. Klimov e V. I. Man'ko, Phys. Lett. A **149**, 225 (1990).
- [30] M. A. Andreatta e V. V. Dodonov, J. Phys. A **33**, 3209 (2000).
- [31] V. V. Dodonov, M. A. Andreatta e S. S. Mizrahi, J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt. **7** S468 (2005); D. A. R. Dalvit e P. A. Maia Neto, Phys. Rev. Lett **84**, 798 (2000).
- [32] M. Montazeri e M. F. Miri, Phys. Rev. A **71**, 063814 (2005); D. T. Alves, C. Farina e E. R. Granhen, *ibid.* **73**, 063818 (2006); B. Mintz, C. Farina, P. A. M. Neto e R. B. Rodrigues, *ibid.* **39**, 6559 (2006); J. Sarabadani e M. F. Miri, *ibid.* **75**, 055802 (2007).
- [33] T. H. Boyer, Phys. Rev. A **9**, 2078 (1974); I. Klich, A. Mann e M. Revzen, Phys. Rev. D **65**, 045005 (2002); O. Kenneth, I. Klich, A. Mann e M. Revzen, Phys. Rev. Lett. **89**, 033001 (2002).
- [34] E. Buks e M. L. Roukes, Nature (London) **419**, 119 (2002); D. Iannuzzi e F. Capasso, Phys. Rev. Lett. **91**, 029101 (2003); O. Kenneth, I. Klich, A. Mann e M. Revzen, Phys. Rev. Lett. **91**, 029102 (2003).
- [35] T. H. Boyer, Am. J. Phys. **71**, 990 (2003); S. A. Fulling, L. Kaplan e J. H. Wilson, Phys. Rev. A **76**, 012118 (2007); X. H. Zhai e X. Z. Li, Phys. Rev. D **76**, 047704 (2007).
- [36] L. A. S. Machado, P. A. Maia Neto e C. Farina, Phys. Rev. D **66**, 105016 (2002).
- [37] R. Schutzhold, G. Plunien e G. Soff, Phys. Rev. A **65**, 043820 (2002).
- [38] C. K. Cole e W. C. Schieve, Phys. Rev. A **64**, 023813-1 (2001).
- [39] D. T. Alves e E. R. Granhen, Phys. Rev. A **77**, 015808 (2008).
- [40] D. A. R. Dalvit, F. D. Mazzitelli e O. Millán, J. Phys. A **39**, 6261 (2006).
- [41] T. H. Boyer, Am. J. Phys. **71**, 990 (2003).

- [42] T. H. Boyer, Phys. Rev. A **9**, 2078 (1974).
- [43] R. J. Glauber, Phys. Rev. **131** 6, 2766 (1963); R. J. Glauber, Phys. Rev. Letters. **10** 84 (1963)
- [44] W. Zhang, D. H. Feng and R. Gilmore, Reviews of Modern Physics **62**, 4, 867 (1990); L. Mandel and E. Wolf, *Optical Coherence and Quantum Optics* (Cambridge University Press, 1995).