

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ  
INSTITUTO DE TECNOLOGIA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

METODOLOGIA DE DISCRETIZAÇÃO ESPACIAL PARA O MÉTODO RADIAL  
DE INTERPOLAÇÃO POR PONTOS (RPIM) APLICADA PARA SOLUÇÃO  
NUMÉRICA DAS EQUAÇÕES DE MAXWELL

WASHINGTON CÉSAR BRAGA DE SOUSA

DM - 06 / 2013

UFPA / ITEC / PPGEE  
Campus Universitário do Guamá  
Belém-Pará-Brasil  
2013

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ  
INSTITUTO DE TECNOLOGIA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

METODOLOGIA DE DISCRETIZAÇÃO ESPACIAL PARA O MÉTODO RADIAL  
DE INTERPOLAÇÃO POR PONTOS (RPIM) APLICADA PARA SOLUÇÃO  
NUMÉRICA DAS EQUAÇÕES DE MAXWELL

WASHINGTON CÉSAR BRAGA DE SOUSA

DM - 06 / 2013

UFPA / ITEC / PPGEE  
Campus Universitário do Guamá  
Belém-Pará-Brasil  
2013

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ  
INSTITUTO DE TECNOLOGIA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

METODOLOGIA DE DISCRETIZAÇÃO ESPACIAL PARA O MÉTODO RADIAL  
DE INTERPOLAÇÃO POR PONTOS (RPIM) APLICADA PARA SOLUÇÃO  
NUMÉRICA DAS EQUAÇÕES DE MAXWELL

WASHINGTON CÉSAR BRAGA DE SOUSA

Dissertação submetida à  
Banca Examinadora do  
Programa de Pós-Graduação  
em Engenharia Elétrica da  
UFPA para a obtenção  
do Grau de Mestrado  
em Engenharia Elétrica.

UFPA / ITEC / PPGEE  
Campus Universitário do Guamá  
Belém-Pará-Brasil  
2013

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)  
Sistema de Bibliotecas da UFPA

---

Sousa, Washington César Braga de, 1980-

Metodologia de discretização espacial para o método radial de interpolação por pontos (rpim) aplicada para solução numérica das equações de maxwell / Washington César Braga de Sousa. - 2013.

Orientador: Rodrigo Melo e Silva de Oliveira.  
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Pará, Instituto de Tecnologia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, Belém, 2013.

1. Eletromagnetismo - modelos matemáticos. 2. Dinâmica dos fluidos. 3. Maxwell, equações de.  
I. Título.

CDD 22. ed. 537

---

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ  
INSTITUTO DE TECNOLOGIA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

METODOLOGIA DE DISCRETIZAÇÃO ESPACIAL PARA O MÉTODO RADIAL  
DE INTERPOLAÇÃO POR PONTOS (RPIM) APLICADA PARA SOLUÇÃO  
NUMÉRICA DAS EQUAÇÕES DE MAXWELL

AUTOR: WASHINGTON CÉSAR BRAGA DE SOUSA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO SUBMETIDA À AVALIAÇÃO DA BANCA EXAMI-  
NADORA APROVADA PELO COLEGIADO DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO  
EM ENGENHARIA ELÉTRICA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ E JUL-  
GADA ADEQUADA PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRADO EM ENGENHA-  
RIA ELÉTRICA NA ÁREA DE TELECOMUNICAÇÕES.

BANCA EXAMINADORA:

---

Prof. Dr. Rodrigo Melo e Silva de Oliveira  
(ORIENTADOR - UFPA)

---

Prof. Dr. Victor Dmitriev  
(MEMBRO - UFPA)

---

Prof. Dr. Rubem Gonçalves Farias  
(MEMBRO - UFPA)

---

Prof. Dr. Licinius Dimitri Sá de Alcantara  
(MEMBRO - UFPA)

---

Prof. Dr. Evaldo Gonçalves Pelaes  
(COORDENADOR DO PPGEE/ITEC/UFPA)

UFPA / ITEC / PPGEE

*“Pensar faz a grandeza do homem.”*

Blaise Pascal  
(1623 - 1662)

A Deus por toda existência.

A meus pais, sementes de tudo em minha vida.

A minha irmã e sobrinhos, por tudo que representam para mim.

A minha esposa pelo companheirismo, união e toda beleza de vivermos juntos.

# Agradecimentos

Primeiramente, agradeço ao meu orientador Rodrigo Melo pelo excelente, competente e exemplar trabalho de orientação. Muito obrigado!

Agradeço a todos os companheiros do Lane pelo ótimo relacionamento no laboratório. Principalmente ao Péricles pela parceria nesta caminhada.

Ao Felipe por anos de amizade, e por ter me iniciado no caminho da pesquisa.

Aos meus pais Pedro Sousa e Valquíria Braga, por todo amor, carinho e afeto que compartilhamos, por toda a base familiar, apoio e ensinamentos que são o pilar da minha formação pessoal e intelectual.

A minha irmã Priscila, minha sobrinha Jéssika e meu sobrinho Pedro por todo amor e carinho que sentimos.

A minha fonte de inspiração, companheira e grande esposa Hellen Pompeu, por sempre estar ao meu lado, por todo crescimento que me proporcionou e principalmente por todo amor que sentimos e compartilhamos.

A minhas afilhadas Talita, Ana Luiza, Giovanna e Tarcila.

A todas as pessoas que contribuíram de maneira direta ou indireta para a realização deste trabalho.



# Lista de Símbolos

$V$	Conjunto Finito
$\Omega$ e $\Omega_a$	Domínio de Análise
$\Omega_S$	Domínio de Suporte
$\Omega_{SR}$	Domínio de Suporte para o Método RPIM
$\Omega_{SC}$	Domínio de Suporte para o Método CLDM
$\bar{x}$ e $\bar{x}_i$	Elemento do Conjunto $V$
$f(\bar{x})$	Função Exata
$f^a(\bar{x})$	Função Aproximada de $f(\bar{x})$
$\Phi$	Função de Forma
$B_i(\bar{x})$	Função de Base
$R_i(\bar{x})$	Função de Base Radial
$P_i(\bar{x})$	Função de Polinomial
$c$	Fator de Forma
$Err^a$	Erro de Aproximação
$Err^a\%$	Erro Percentual de Aproximação
$Err^a_{\partial x}$ e $Err^a_{\partial y}$	Erro de Aproximação para as Derivadas Parciais
$\vec{F}$	Vetor Força de Coulomb
$q$ e $Q$	Cargas Puntiformes
$Rb$	Região de Borda
$\Upsilon$	Fator Multiplicado para Força de Coulomb
$\vec{E}$	Vetor Intensidade de Campo Elétrico
$\vec{H}$	Vetor Intensidade de Campo Magnético
$\vec{D}$	Densidade de Fluxo Elétrico
$\vec{B}$	Densidade de Fluxo Magnético

$\epsilon_o$	Permissividade Elétrica do Vácuo
$\mu_o$	Permeabilidade Magnética do Vácuo
$\epsilon$	Permissividade Elétrica
$\mu$	Permeabilidade Magnética
$\sigma$	Condutividade Elétrica
$\sigma_\alpha$	Condutividades para UPML
$t$	Tempo
$x, y$ e $z$	Coordenadas do Sistema Cartesiano
$E_z$	Componente do Campo Elétrico
$H_x$ e $H_y$	Componentes do Campo Magnético
$D_z$	Componente de $\vec{D}$
$B_x$ e $B_y$	Componentes de $\vec{B}$
$\frac{df}{d\alpha}$	Derivada de $f$ em relação a $\alpha$
$\frac{\partial f}{\partial \alpha}$	Derivada Parcial de $f$ em relação a $\alpha$
$(i, j)$	Endereçamento no Espaço Discretizado
$N_t$	Índice Temporal
$C_0$	Velocidade da Luz no Vácuo: $2,99792 \times 10^8$ m/s
$\Delta_{min}, \Delta_x$ e $\Delta_y$	Incrementos Espaciais
$\Delta_t$	Incremento Temporal
$A_\alpha^n$	Componente $\alpha$ de $\vec{A}$ discretizada no instante $n$
$\vec{\nabla} \times \vec{A}$	Rotacional de $\vec{A}$
$p(t)$	Sinal de Excitação
$A_p$	Amplitude do Sinal de Excitação
$\tau$	Parâmetro Relativo à Largura Temporal do Pulso Monociclo Gaussiano
$t_0$	Instante do Centro do Pulso Monociclo Gaussiano
$f_c$	Frequência Central do Pulso Monociclo Gaussiano
$bw$	Largura de banda definida para o pulso Monociclo Gaussiano

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
1.1	Estrutura do Trabalho . . . . .	5
<b>2</b>	<b>O Método Radial PIM (RPIM) em Eletromagnetismo</b>	<b>6</b>
2.1	Métodos Numéricos Sem Malhas ( <i>Meshless</i> ) . . . . .	6
2.1.1	Domínio de Análise $\Omega$ . . . . .	7
2.1.2	O Domínio de Suporte $\Omega_S(\bar{x})$ e o Domínios de Suporte $\Omega_{SR}(\bar{x})$ para o RPIM . . . . .	8
2.1.3	O Princípio Básico dos Métodos <i>Meshless</i> . . . . .	9
2.2	O método RPIM . . . . .	10
2.3	O método RPIM e as equações de Maxwell . . . . .	14
2.3.1	Aplicação do RPIM nas equações de Maxwell . . . . .	15
2.4	Método de Truncagem por UPML para o RPIM . . . . .	16
2.5	Otimização do método RPIM com base no fator de forma $c$ . . . . .	19
<b>3</b>	<b>Proposta: Método de Discretização do Espaço Baseado na Lei de Coulomb (CLDM) para métodos numéricos sem malha (<i>meshless</i>)</b>	<b>23</b>
3.1	Métodos de Discretização do Espaço . . . . .	23
3.1.1	Qualidade da discretização espacial . . . . .	25
3.2	A lei de Coulomb e o princípio da superposição . . . . .	29
3.3	O Método Desenvolvido . . . . .	32

3.4	Arranjos na discretização para campos elétrico e magnético . . . . .	46
3.5	Avaliação da qualidade da discretização espacial gerada pelo método CLDM . . . . .	53
<b>4</b>	<b>Simulações Numéricas e Análise de Resultados</b>	<b>58</b>
4.1	Casos de validação . . . . .	58
4.1.1	Caso 1 - Cilindro Metálico . . . . .	59
4.1.2	Caso 2 - RCS Cilindro Triangular . . . . .	68
4.1.3	Caso 3 - RCS Cilindro Circular . . . . .	77
4.1.4	Caso 4 - RCS Cilindro Retangular . . . . .	82
4.1.5	Caso 5 - Estrutura Periódica Cilíndrica . . . . .	87
4.2	Simulações Adicionais . . . . .	97
4.2.1	Simulação 1 - Estrutura Periódica Cilíndrica de Raio $a = 2mm$ . . . . .	97
4.2.2	Simulação 2 - Estrutura Periódica Cilíndrica com base Triangular . . . . .	105
4.2.3	Simulação3 - Estrutura Periódica Amálgama Longitudinal . . . . .	110
<b>5</b>	<b>Considerações Finais e Propostas para Trabalhos Futuros</b>	<b>117</b>
<b>A</b>	<b>Níveis de reflexão na UPML gerados pelos arranjos e combinações</b>	<b>120</b>
<b>B</b>	<b>Resultados do método RPIM no Caso 1 para discretizações com diferentes <math>\Delta_{min}</math></b>	<b>124</b>

# Lista de Figuras

2.1	Domínio de Análise $\Omega$ para uma região bidimensional quadrada: a) Domínio de Análise $\Omega$ com arranjo retangular equilibrado, b) Domínio de Análise $\Omega$ com arranjo aleatório. . . . .	7
2.2	Domínio de Suporte $\Omega_S(\bar{x})$ . a) Domínio de Suporte $\Omega_S(\bar{x})$ genérico, b) Domínio de Suporte $\Omega_{SR}(\bar{x})$ específico para RPIM. . . . .	8
2.3	$Err\%$ versus $c$ , para arranjos regular, pouco irregular e irregular, com 12 pontos no domínio de suporte. . . . .	21
3.1	Discretização espacial para um dado domínio da análise, que possui duas regiões distintas, sendo que uma das regiões está contida na outra. a) Espaço de análise a ser discretizado, b) discretização com malha estruturada, c) discretização com malha não-estruturada, d) discretização sem malha (meshless). . . . .	25
3.2	Qualidade da forma dos elementos que discretizam uma região. a) Elementos com formas equilibradas, b) Elementos com formas muito distorcidas, que aumentam os erros numéricos. . . . .	26
3.3	Qualidade da conformidade da discretização. a) Exemplos de discretizações que respeitam a conformidade, b) Exemplos de discretizações que não respeitam a conformidade. . . . .	26

3.4	Qualidade da representação dos contornos das interfaces. a) Interface entre regiões com forma circular, b) Representação das interfaces com malhas estruturadas, c) Representação das interfaces com malhas não-estruturadas, d) Representação das interfaces através de discretização <i>meshless</i> . . . . .	27
3.5	Qualidade da variação direcional da distância entre nós. a) Variação direcional equilibrada, b) Variação direcional desequilibrada. . . . .	28
3.6	Qualidade da uniformidade do domínio de suporte $\Omega_S(\bar{x}_c)$ circular relativo ao nó $\bar{x}_c$ destacado na cor azul. a) Domínio de suporte com boa qualidade de distribuição de pontos, b) Domínio com distribuição de pontos inadequada (baixa qualidade de distribuição). . . . .	28
3.7	Lei de Coulomb para duas cargas eletricamente carregadas. a) Cargas com sinais diferentes, b) Cargas com sinal positivo, c) Cargas com sinal negativo.	30
3.8	Princípio da superposição (soma vetorial de forças), resultando em afastamento da carga de teste $q_4$ . . . . .	31
3.9	Princípio da superposição resultando em um deslocamento para o ponto de equilíbrio entre as cargas. a) Carga de teste $q_4$ posicionada em um ponto da região interna do triângulo diferente do ponto de equilíbrio, e sofrendo ação da força $\vec{F}_R$ . b) Carga de teste $q_4$ deslocada para o ponto de equilíbrio entre as cargas $q_1, q_2$ e $q_3$ . . . . .	31
3.10	Princípio da superposição aplicado a um conjunto infinito de cargas. a) Equilíbrio do conjunto, b) Desequilíbrio forçado pelo deslocamento uma das cargas do conjunto, c) Reação do sistema a fim de promover equilíbrio de força entre as cargas. . . . .	32
3.11	Discretização espacial de uma região de análise. a) Região de análise, b) Discretização aleatória, c) Discretização baseada em malhas. . . . .	34

3.12	Efeito da limitação de um domínio de análise $\Omega_a$ sem a utilização de um técnica de truncagem que possibilite a aplicação da lei de Coulomb. a) Região de análise, b) Domínio $\Omega_a$ finito, antes da aplicação da lei de Coulomb, c) Domínio $\Omega_a$ finito, após da aplicação da lei de Coulomb (sem truncagem especial). . . . .	35
3.13	Domínio total $\Omega$ contendo a região de borda $Rb$ e o domínio de análise $\Omega_a$ . a) Região de borda $Rb$ suficientemente grande, b) Região de borda $Rb$ muito pequena, antes da aplicação da lei de Coulomb, c) Região de borda $Rb$ muito pequena, após da aplicação da lei de Coulomb. . . . .	36
3.14	Influência entre cargas iguais. a) A carga $Q_1$ influencia mais em $\vec{F}_i$ do que $Q_2$ , b) As cargas que estão dentro de uma vizinhança próxima de $q_i$ influenciam mais $\vec{F}_i$ que as posicionadas fora da vizinhança. . . . .	37
3.15	Domínio de suporte $\Omega_{SC}(\bar{x}_c) \in V$ centrado em $\bar{x}_c$ . a) Domínio de suporte em uma distribuição aleatória, b) Domínio de suporte em uma distribuição baseada em malha). . . . .	38
3.16	Domínio de suporte $\Omega_{SC}(\bar{x}_c)$ em uma distribuição baseada em malha, que possui uma região de pesquisa circular de raio $r = 8\Delta_{min}$ . . . . .	38
3.17	Formatação da interface entre $R1$ e $R2$ , onde $R2 \in R1$ e $R1 \in \Omega$ . . . . .	39
3.18	Formatação da interface entre $R1$ e $R2$ . a) Identificação dos pontos próximos da interface, b) Deslocamentos dos pontos próximos para cima da interface. . . . .	40
3.19	Aplicação do reposicionamento dos nós. a) Domínio $\Omega$ , após a formatação das interfaces, b) Domínio $\Omega$ , após o reposicionamento dos nós. . . . .	41
3.20	Classificação das cargas de acordo com sua capacidade de reagir ao sistema. A cargas fixas na região de borda $Rb$ (cor preta) e na interface entre regiões (cor vermelha). Todas as outras são cargas móveis (cor branca). . . . .	41

3.21	Aplicação do método de discretização por Coulomb para 150 iterações. a) formatação da interface entre as regiões, b) reposicionamento de nós após 150 iterações. . . . .	42
3.22	Aplicação do método de discretização por Coulomb para 150 iterações. a) reposicionamento de nós após 0 iterações, b) reposicionamento de nós após 50 iterações, c) reposicionamento de nós após 100 iterações, d) reposicionamento de nós após 150 iterações. . . . .	43
3.23	Algoritmo básico desenvolvido para atualizar a posição dos pontos móveis empregados para discretizar a região de análise. . . . .	44
3.24	Fluxograma representativo do processo de aplicação do método CLDM. . .	45
3.25	Exemplos de arranjos testados. a) Arranjo 1, b) Arranjo 2, c) Arranjo 3. .	47
3.26	Arranjos que possibilitam a truncagem do método RPIM por UPML. a) Arranjo Arpim1, b) Arranjo Arpim2. . . . .	47
3.27	Cominação dos arranjos Arpim1 e Arpim2 com outros tipos. a) Combinação 1, b) Combinação 2. . . . .	48
3.28	Casamento na interface entre arranjos. a) Casamento perfeito na interface, b) Problemas no casamento da interface. . . . .	48
3.29	Equilíbrio inicial entre cargas para o arranjo Arpim2. a) Domínio $\Omega$ para o arranjo Arpim2 representado pelos conjuntos $V_E$ e $V_H$ , b) Domínio $\Omega$ para o arranjo Arpim2 representado pelo conjunto de cargas, demonstrando o equilíbrio inicial entre cargas. . . . .	49
3.30	Equilíbrio inicial entre cargas para o arranjo Arpim1. a) Domínio $\Omega$ para o arranjo Arpim1 representado pelos conjuntos $V_E$ e $V_H$ , b) Domínio $\Omega$ para o arranjo Arpim1 representado pelo conjunto de cargas, demonstrando o desequilíbrio inicial entre cargas, c) Conjunto $V_E$ para o arranjo Arpim1 representado pelo conjunto de cargas, demonstrando o equilíbrio inicial entre cargas. . . . .	50



3.31	Equilíbrio inicial entre cargas para o arranjo Arpim1 com nós pivô. a) Domínio $\Omega$ para o arranjo Arpim1 com nó pivô representado pelos conjuntos $V_E$ , $V_H$ e conjunto de nós pivôs $V_{piv}$ , b) Domínio $\Omega$ para o arranjo Arpim1 com nó pivô representado pelo conjunto de cargas, demonstrando o equilíbrio inicial entre cargas. . . . .	50
3.32	Representação da interface entre regiões para o arranjo Arpim1 sem nó pivô, a) Arranjo Arpim1 com nó pivô representado pelos conjuntos $V_E$ , $V_H$ e conjunto de nós pivôs $V_{piv}$ , b) Representação da interface entre regiões sem nó pivô. . . . .	51
3.33	Representação da interface entre regiões para o arranjo Arpim1 com nó pivô, a) Nós pivôs mais próximos da interface entre regiões, b) Deslocamento dos nós pivôs para interface entre regiões e conversão para nós elétricos, para melhor representação da interface entre regiões garantindo as condições de contorno para o metal. . . . .	52
3.34	Domínio $\Omega$ com distribuição irregular, sem aplicar <i>Reposicionamento dos Nós</i> utilizando a lei de Coulomb. . . . .	54
3.35	Avaliação do domínio $\Omega$ com distribuição irregular, sem aplicar <i>Reposicionamento dos Nós</i> utilizando a lei de Coulomb. $Err^a$ calculados para $c = 0.01$ . . . . .	54
3.36	Avaliação do domínio $\Omega$ com distribuição irregular, sem aplicar <i>Reposicionamento dos Nós</i> utilizando a lei de Coulomb. Ajuste do $Err^a$ utilizando força bruta e falsa posição, seção 2.5. . . . .	55
3.37	Avaliação do domínio $\Omega$ com distribuição irregular, após aplicar <i>Reposicionamento dos Nós</i> utilizando a lei de Coulomb. $Err^a$ calculados para $c = 0.01$ . . . . .	55
3.38	Avaliação do domínio $\Omega$ com distribuição irregular, após aplicar <i>Reposicionamento dos Nós</i> utilizando a lei de Coulomb. Ajuste do $Err^a$ utilizando força bruta e falsa posição, seção 2.5. . . . .	56

3.39 Fluxograma representativo do processo de aplicação do método CLDM e avaliação da discretização gerada por este método. . . . .	57
4.1 Representação do problema no plano-xy. . . . .	59
4.2 Círculo metálico e suas medidas. . . . .	60
4.3 Posicionamento da fonte. . . . .	60
4.4 Sinal monociclo gaussiano. . . . .	61
4.5 Espectro de frequência do monociclo gaussiano. . . . .	61
4.6 Distribuição do ponto de medição. . . . .	62
4.7 Discretização espacial da região próxima ao espalhador obtida com o método CLDM. a)Zoom=1000, b)Zoom=2500. . . . .	63
4.8 Distribuição da componente Ez total no instante $t = 2.4ns$ . . . . .	64
4.9 Distribuição da componente Ez total no instante $t = 3.6ns$ . . . . .	64
4.10 Distribuição da componente Ez total no instante $t = 4.8ns$ . . . . .	65
4.11 Distribuição da componente Ez total no instante $t = 5.4ns$ . . . . .	65
4.12 Distribuição da componente Ez total no instante $t = 6.0ns$ . . . . .	65
4.13 Distribuição da componente Ez total no instante $t = 6.6ns$ . . . . .	66
4.14 Distribuição da componente Ez total no instante $t = 7.2ns$ . . . . .	66
4.15 Distribuição da componente Ez total no instante $t = 9.6ns$ . . . . .	66
4.16 Comparação dos resultados para o método RPIM, FDTD e solução analítica. Ponto de medição $\rho_1$ . . . . .	67
4.17 Representação do problema no plano-xy. . . . .	69
4.18 Triângulo isósceles e suas medidas. . . . .	70
4.19 Posicionamento da fonte. . . . .	70
4.20 Sinal monociclo gaussiano. . . . .	71
4.21 Espectro de frequência do monociclo gaussiano. . . . .	71
4.22 Distribuição dos pontos de medição. . . . .	72

4.23	Discretização espacial da região próxima ao espalhador obtida com o método CLDM, zoom=3000. . . . .	72
4.24	Discretização espacial da região próxima ao espalhador obtida com o método CLDM, zoom=1000. . . . .	73
4.25	Distribuição da componente Ez incidente. a) Instante $t = 8.0ns$ , b) Instante $t = 20.0ns$ , c) Instante $t = 32.0ns$ , d) Instante $t = 48.0ns$ . . . . .	74
4.26	Distribuição da componente Ez total. a) Instante $t = 32.0ns$ , b) Instante $t = 36.0ns$ , c) Instante $t = 40.0ns$ , d) Instante $t = 44.0ns$ , e) Instante $t = 48.0ns$ . . . . .	75
4.27	Comparação dos resultados da RCS para os métodos RPIM, FDTD e solução analítica; $\theta = \phi - \pi$ . . . . .	76
4.28	Representação do problema no plano-xy. . . . .	77
4.29	Círculo metálico e suas medidas. . . . .	77
4.30	Posicionamento da fonte. . . . .	78
4.31	Distribuição dos pontos de medição. . . . .	78
4.32	Discretização da região próxima ao espalhador obtida com o método CLDM. . . . .	79
4.33	Distribuição da componente Ez total. a) Instante $t = 32.0ns$ , b) Instante $t = 36.0ns$ . . . . .	79
4.34	Distribuição da componente Ez total. a) Instante $t = 40.0ns$ , b) Instante $t = 44.0ns$ , c) Instante $t = 48.0ns$ . . . . .	80
4.35	Comparação dos resultados da RCS pra RPIM, FDTD e solução analítica; $\theta = \phi - \pi$ . . . . .	81
4.36	Representação do problema no plano-xy. . . . .	82
4.37	Retângulo rotacionado $45^\circ$ e suas medidas. . . . .	82
4.38	Posicionamento da fonte. . . . .	83
4.39	Distribuição dos pontos de medição. . . . .	83

4.40	Discretização espacial da região próxima ao espalhador obtida com o método CLDM. . . . .	84
4.41	Distribuição da componente $E_z$ total. a) Instante $t = 36.0ns$ , b) Instante $t = 40.0ns$ , b) Instante $t = 48.0ns$ . . . . .	85
4.42	Comparação dos resultados da RCS para os métodos RPIM, FDTD e solução analítica; $\theta = \phi - 3\pi/4$ . . . . .	86
4.43	Representação do problema no plano-xy. . . . .	87
4.44	Círculo metálico e suas medidas. . . . .	88
4.45	Posicionamento da fonte. . . . .	88
4.46	Sinal monociclo gaussiano. . . . .	89
4.47	Espectro de frequência do monociclo gaussiano. . . . .	89
4.48	Distribuição dos pontos de medição. . . . .	90
4.49	Discretização espacial da região próxima ao espalhador obtida com o método CLDM. Zoom=8000. . . . .	90
4.50	Discretização espacial da região próxima ao espalhador obtida com o método CLDM. Zoom=1000. . . . .	91
4.51	Distribuição da componente $E_z$ total no instante $t = 0.2ns$ . . . . .	92
4.52	Distribuição da componente $E_z$ total no instante $t = 0.3ns$ . . . . .	93
4.53	Distribuição da componente $E_z$ total no instante $t = 0.4ns$ . . . . .	93
4.54	Distribuição da componente $E_z$ total no instante $t = 0.5ns$ . . . . .	93
4.55	Distribuição da componente $E_z$ total no instante $t = 0.55ns$ . . . . .	93
4.56	Distribuição da componente $E_z$ total no instante $t = 0.6ns$ . . . . .	94
4.57	Distribuição da componente $E_z$ total no instante $t = 0.7ns$ . . . . .	94
4.58	Distribuição da componente $E_z$ total no instante $t = 0.8ns$ . . . . .	94
4.59	Distribuição da componente $E_z$ total no instante $t = 0.9ns$ . . . . .	94
4.60	Comparação dos coeficientes de reflexão para o método RPIM, FDTD e solução analítico. Ponto de medição $\rho_1$ . . . . .	95

4.61	Comparação dos coeficientes de transmissão para o método RPIM, FDTD e solução analítico. Ponto de medição $\rho_2$ . . . . .	96
4.62	Comparação entre o círculo de raio $a_1$ utilizado no caso 5 e o círculo de raio $a_2$ utilizado nesta simulação, onde $a_2 = 4 \times a_1$ . . . . .	97
4.63	Discretização espacial da região próxima ao espalhador obtida com o método CLDM. Zoom=4000. . . . .	98
4.64	Discretização espacial da região próxima ao espalhador obtida com o método CLDM. a) Zoom=2000. b) Zoom=1000. . . . .	99
4.65	Distribuição da componente $E_z$ total no instante $t = 0.3ns$ . . . . .	100
4.66	Distribuição da componente $E_z$ total no instante $t = 0.4ns$ . . . . .	100
4.67	Distribuição da componente $E_z$ total no instante $t = 0.5ns$ . . . . .	100
4.68	Distribuição da componente $E_z$ total no instante $t = 0.6ns$ . . . . .	100
4.69	Distribuição da componente $E_z$ total no instante $t = 0.7ns$ . . . . .	101
4.70	Comparação dos coeficientes de reflexão para os métodos RPIM e FDTD. Ponto de medição $\rho_1$ . . . . .	101
4.71	Comparação dos coeficientes de transmissão para os métodos RPIM e FDTD. Ponto de medição $\rho_2$ . . . . .	102
4.72	Comparação dos coeficientes de reflexão obtidos com o método RPIM para a simulação 1 e o resultado analítico do caso de validação 5. Ponto de medição: $\rho_1$ . . . . .	103
4.73	Comparação dos coeficientes de reflexão obtidos com o método RPIM para a simulação 1 e o resultado analítico do caso de validação 5. Ponto de medição: $\rho_2$ . . . . .	104
4.74	Representação do problema no plano-xy. . . . .	105
4.75	Comparação entre o triângulo utilizado nesta simulação e o círculo utilizado na simulação 1, onde $S_{triangulo} = S_{circulo}$ . . . . .	106
4.76	PBG e suas medidas. . . . .	106

4.77	Discretização espacial da região próxima ao espalhador obtida com o método CLDM. Zoom=4000. . . . .	107
4.78	Discretização espacial da região próxima ao espalhador obtida com o método CLDM. a) Zoom=2000. b) Zoom=1000. . . . .	108
4.79	Distribuição da componente $E_z$ total no instante $t = 0.4ns$ . . . . .	109
4.80	Distribuição da componente $E_z$ total no instante $t = 0.5ns$ . . . . .	109
4.81	Distribuição da componente $E_z$ total no instante $t = 0.6ns$ . . . . .	109
4.82	Distribuição da componente $E_z$ total no instante $t = 0.7ns$ . . . . .	109
4.83	Representação do problema no plano-xy. . . . .	110
4.84	Estrutura PBG e suas medidas. . . . .	111
4.85	Discretização espacial da região próxima ao espalhador obtida com o método CLDM. Zoom=2000. . . . .	112
4.86	Discretização espacial da região próxima ao espalhador obtida com o método CLDM. Zoom=1000. . . . .	112
4.87	Distribuição da componente $E_z$ total no instante $t = 0.3ns$ . . . . .	113
4.88	Distribuição da componente $E_z$ total no instante $t = 0.4ns$ . . . . .	113
4.89	Distribuição da componente $E_z$ total no instante $t = 0.5ns$ . . . . .	113
4.90	Distribuição da componente $E_z$ total no instante $t = 0.6ns$ . . . . .	113
4.91	Distribuição da componente $E_z$ total no instante $t = 0.7ns$ . . . . .	114
4.92	Comparação dos coeficientes de reflexão obtidos pelo o método RPIM, nas simulações 1, 2, 3 e no caso de validação 5. Ponto de medição $\rho_1$ . . . . .	114
4.93	Comparação dos coeficientes de transmissão obtidos pelo o método RPIM, nas simulações 1, 2, 3 e no caso de validação 5. Ponto de medição $\rho_2$ . . . . .	115
A.1	Resultado dos testes de truncagem por UPML para o arranjo 1. . . . .	120
A.2	Resultado dos testes de truncagem por UPML para o arranjo 2. . . . .	121
A.3	Resultado dos testes de truncagem por UPML para o arranjo Arpim 1. . . . .	121
A.4	Resultado dos testes de truncagem por UPML para o arranjo Arpim 2. . . . .	122

A.5	Resultado dos testes de truncagem por UPML para a combinação entre arranjos 1. . . . .	122
A.6	Resultado dos testes de truncagem por UPML para a combinação entre arranjos 2. . . . .	123
B.1	Comparação dos resultados para o método RPIM com diferentes $\Delta_{min}$ e solução analítica. Ponto de medição $\rho_1$ . . . . .	124

# Lista de Tabelas

4.1	Parâmetros de simulação . . . . .	64
4.2	Parâmetros de simulação . . . . .	73
4.3	Parâmetros de simulação . . . . .	92



## Resumo

Neste trabalho, foi desenvolvido e implementado um método de discretização espacial baseado na lei de Coulomb para geração de pontos que possam ser usados em métodos *meshless* para solução das equações de Maxwell. Tal método aplica a lei de Coulomb para gerar o equilíbrio espacial necessário para gerar alta qualidade de discretização espacial para um domínio de análise. Este método é denominado aqui de CLDM (*Coulomb Law Discretization Method*) e é aplicado a problemas bidimensionais. Utiliza-se o método RPIM (*Radial Point Interpolation Method*) com truncagem por UPML (*Uniaxial Perfectly Matched Layers*) para solução das equações de Maxwell no domínio do tempo (modo TMz).

*Palavras-chave:* CLDM, Lei de Coulomb, Discretização *Meshless*, RPIM, Equações de Maxwell 2D, Modo TMz.

## **Abstract**

In this work, a new method, based on Coulomb's Law, has been developed and computationally implemented for performing spatial discretization for meshless methods. The new methodology, named Coulomb Law Discretization Method (CLDM), employs an adapted version of the Coulomb's vector force equation for obtaining a balanced distribution of nodes in space, in such way to achieve high discretization quality for the node set. The Radial Point Interpolation Method (RPIM) and the Uniaxial Perfectly Matched Layers (UPML) are used for solving Maxwell's Equations in time domain for 2D problems (TMz mode).

*Keywords:* CLDM, Meshless Discretization, Coulomb's Law, RPIM, 2D-Maxwell's Equations, TMz Mode.

# Capítulo 1

## Introdução

Durante a evolução humana, nota-se a necessidade que o ser humano tem de representar o espaço-tempo e os fenômenos ao seu redor. Na pré-história, vê-se desenhos feitos nas cavernas que representam o cotidiano dos nossos ancestrais deste período [1]; nas civilizações antigas, há o surgimento da escrita, matemática e engenharia [2], que ampliou as possibilidades de representar o mundo; nos dias de hoje, há a utilização de formas para representar e simular o universo a nossa volta, utilizando técnicas digitais, que estão associadas às mais diversas áreas do conhecimento.

Atualmente, existem diversos métodos, técnicas e abstrações que podem ser usados a fim de representar ou modelar adequadamente os fenômenos espaço-temporais (reais ou abstratos) e todos os elementos envolvidos. Dentre os mais diversos métodos, destacam-se os métodos gráficos, os matemáticos e mais atualmente os computacionais.

Os métodos gráficos são aqueles que representam o espaço através de desenhos, gravuras, pinturas, símbolos, etc [1, 3, 4]. Métodos matemáticos são aqueles que se utilizam de modelos e/ou equações matemáticas para representações espaço-temporais [5, 6, 7].

Os métodos computacionais são um conjunto de ferramentas, técnicas, algoritmos e formulações, utilizados para representação computacional de fenômenos físicos [8] a partir de equações diferenciais [9]. Sua área de estudo é denominada modelagem computacional, que reúne conhecimentos direcionados à simulação, análise e solução de problemas com-

plexos (envolvendo grande número de variáveis, volumosa massa de dados, processamento e manipulação de imagens) em áreas tão abrangentes quanto as engenharias, ciências exatas, biológicas, humanas, economia e ciências ambientais [10, 11, 12, 13].

Alguns dos métodos estudados na modelagem computacional direcionados à solução de problemas típicos das engenharias, das ciências exatas, biológicas e ambientais, são: Métodos dos Elementos Finitos, Métodos dos Elementos de Contorno, Método dos Volumes Finitos, Métodos das Diferenças Finitas, Método Integral e Variacional, Métodos Auto-adaptativos, computação distribuída, Redes e Grids Computacionais, Computação Vetorial e Paralela Aplicada, Pré e Pós-processamento Gráfico e Otimização, Sistemas de Orientação Espacial, Modelagem do Espaço Humano, Simulação Computacional, realidade virtual e Protótipos Computacionais [14].

Na área de engenharia voltada para estudos e investigações de fenômenos eletromagnéticos regidos pelas equações de Maxwell [15], os métodos computacionais mais tradicionalmente utilizados para resolver estas equações são o método de diferenças finitas (FDM) [16, 17] e o método de elementos finitos (FEM) [18, 19, 20]. Estes dois métodos utilizam a discretização espacial que representa um domínio espacial segundo uma malha [21].

A malha [21, 22] se caracteriza por um conjunto de pontos (nós) que possuem uma conectividade direta uns com os outros. Cada método baseia-se em um tipo de malha específica. Para o FDM, a malha é do tipo estruturada (*grid*) e para o FEM, a malha é do tipo não estruturada, formada a partir de um conjunto de elementos, tais como triângulos ou pirâmides.

Apesar de serem métodos robustos e bastante estudados, os métodos tradicionais possuem problemas relacionados à representação de formas geométricas complexas [21].

Mais recentemente, novas abordagens baseadas em discretização espacial sem malhas (*meshless*) [23] vem obtendo destaque na solução desse problemas. Dentre elas, estão a *Smooth Particle Hydrodynamics* (SPH), *Element Free Galerkin* (EFG), *Meshless Local*

*Petrov-Galerkin* (MLPG), *Point Interpolation Method* (PIM) e o *Radial Point Interpolation Method* (RPIM). Cada um destes métodos possui sua própria formulação para encontrar a função de forma.

Os métodos *meshless* surgem em 1977 com a proposta do *Smooth Particle Hydrodynamics* (SPH) [24], primeiro método sem malhas implementado inicialmente para estudos de problemas astrofísicos. Posteriormente surgiram os métodos *Reproduced Kernel Particle Method* (RKPM) [25] e *Corrected Smooth Particle Hydrodynamic* (CSPH) [26] como resultados de várias correções do método SPH.

Lancaster apresenta em 1981 uma descrição detalhada sobre mínimos quadrados móveis [27], porém apenas em 1992 Nayroles propõe o *diffuse element method* (DEM) [28], considerado a primeira aplicação de mínimos quadrados móveis.

Em 1994, a partir de refinamento do DEM, Belytschko propõe o método *Element Free Galerkin* (EFG) [29], considerado o primeiro método *meshless* baseado na técnica de Galerkin. Uma das principais características deste método é a necessidade de um *grid*, independente da distribuição dos pontos, que possibilita integrar a forma fraca do problema.

O método *Meshless Local Petrov-Galerkin* (MLPG) [30], desenvolvido por Atluri, aplica as formas locais dos métodos de Galerkin, evitando a utilização de *grid*. Por este motivo, é identificado como o primeiro método verdadeiramente sem malha.

Posteriormente, baseados no método MLPG, Liu e Gu desenvolvem o *Point Interpolation Method* (PIM) [31] e, em 2000, Wang e Liu propõem o *Radial PIM* (RPIM) [32], a partir do refinamento do PIM por função de base radial.

Os métodos *meshless* são assim denominados, pois, baseiam-se em discretização espacial que não necessita de malha, onde a representação do espaço de análise é feita a partir de um conjunto de pontos que não possuem conectividade direta uns com os outros, ou seja, não formam elementos (como no FEM) ou células (como no FDM). Com isso, os problemas relacionados com a malha deixam de existir. No entanto, a distribuição dos

pontos precisa ser tal que garanta a representatividade de todo o domínio, o que exige métodos criteriosos de discretização espacial.

A abordagem mais simples e intuitiva na discretização espacial para os métodos *meshless* é a geração aleatória de pontos. Porém, esta técnica não garante a representação adequada para todo o domínio, devido a distribuição dos pontos no espaço de análise ser totalmente aleatória e não possuir critérios de espaçamento, que garanta uma distribuição de pontos adequada, de forma a garantir a representação dos contornos e a estabilidade do método numérico.

A abordagem mais utilizada atualmente para método *meshless* é a baseada em discretização espacial por malhas não estruturadas. Neste tipo de discretização, é gerada uma malha não estruturada de boa qualidade e, a partir desta malha, é extraído o conjunto de pontos. A malha só serve como guia para a distribuição dos pontos no domínio. A popularidade desta abordagem dá-se pela grande utilização do método FEM e a variedade de ferramentas existentes, que geralmente são comerciais.

Outras abordagens têm sido desenvolvidas [33, 34, 35], porém as mais bem sucedidas são baseadas em métodos tradicionais que utilizam as teorias de diagrama de Voronoi [36] e da triangulação de Delaunay [37].

Os estudos voltados à discretização espacial para métodos sem malhas estão em estágio inicial e ainda há muito o que ser explorado, a fim de gerar métodos de discretização totalmente sem malha

É neste contexto que a proposta deste trabalho surge. O objetivo principal desta dissertação é propor e implementar um método de discretização espacial para métodos *meshless*, que utiliza a lei de Coulomb para gerar a distribuição dos nós para domínios de análise. O método desenvolvido é chamado *Coulomb Law Discretization Method* - CLDM. Este método não tem associação com métodos tradicionais, podendo ser considerado totalmente *meshless*.

Para solução das equações de Maxwell, utiliza-se o método RPIM com abordagem que

possibilita truncagem por UPML [38]. O estudo é realizado em duas dimensões e o modo de propagação é o transversal magnético  $z$  (TM $_z$ ) em coordenadas retangulares [15].

## 1.1 Estrutura do Trabalho

O texto deste trabalho está organizado da seguinte maneira:

- No Capítulo 2 é apresentada a abordagem teórica relacionada aos método *meshless*, mais especificamente a formulação matemática do método RPIM, sua implementação para solução numérica das equações de Maxwell, condições de fronteiras absorventes e a otimização da função de forma para o método RPIM por falsa posição;
- O Capítulo 3 descreve a teoria e o desenvolvimento do método CLDM proposto neste trabalho. Discute-se sobre as restrições geradas pelo uso da UPML e define-se uma métrica de quantificação da qualidade da discretização;
- O Capítulo 4 trata dos casos de validação utilizados para avaliar a aplicação do método CLDM na geração de domínios. Os resultados obtidos são comparados com soluções disponíveis na literatura. Adicionalmente, são apresentadas simulações envolvendo elementos com múltiplas geometrias em estruturas periódicas.
- Por fim, o Capítulo 5 expõe as considerações finais e propostas para trabalhos futuros.

## Capítulo 2

# O Método Radial PIM (RPIM) em Eletromagnetismo

É apresentada a formulação necessária para implementação do método RPIM (*Radial point interpolation method*) na solução numérica das equações de Maxwell com truncagem por UPML (*uniaxial perfectly matched layer*). É abordada também a técnica LSFCM (*local shape function calibration method*), que possibilita a aplicação do método RPIM em discretizações com alto grau de irregularidade.

### 2.1 Métodos Numéricos Sem Malhas (*Meshless*)

Os métodos sem malhas (*Meshless* ou *Meshfree*) [39,40], também conhecidos como métodos de partículas, são métodos de aproximação numérica que utilizam novas metodologias de aproximação de funções para solução de equações diferenciais. Estas metodologias baseiam-se na discretização do espaço de análise a partir de um conjunto  $V$  de nós (pontos) que dispensam a utilização de qualquer tipo de malha [41]. Esta característica garante um alto grau de liberdade no posicionamento dos nós pertencentes a  $V$ , o que possibilita a representação de qualquer tipo de estrutura geométrica.

Todavia, para que os métodos *meshless* possam definir as funções de aproximação, é



necessário estabelecer como os nós do conjunto  $V$  influenciam-se uns aos outros. Para isso, utiliza-se a idéia de subconjuntos, que é definida a partir de uma vizinhança de influência relativa a cada nó  $\bar{x}$  pertencente ao conjunto  $V$ . Tais funções são obtidas a partir de técnicas de interpolação discutidas no tópico 2.1.3.

### 2.1.1 Domínio de Análise $\Omega$

O domínio de análise  $\Omega$  [42] é um conjunto  $V$  de nós  $\bar{x}_i$  (onde  $i = 1, 2, \dots, N$ , sendo  $N$  o tamanho de  $\Omega$ ), que descreve toda uma região de interesse.

O posicionamento de cada nó  $\bar{x}_i \in \Omega$  é dado por  $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_D)$ , onde  $D$  é a quantidade de dimensões espaciais do problema [43].

Desta forma, para o caso 2D (bidimensional),  $\bar{x} = (x_1, x_2) = (x, y)$  e, para o caso 3D (tridimensional),  $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3) = (x, y, z)$ .

Para os métodos de discretização sem malha, a distribuição dos nós  $\bar{x}_i \in \Omega$  pode ser feita de diversas formas, Fig.2.1, contanto que satisfaçam parâmetros de qualidade da discretização, que serão vistos no Capítulo 3. Esta liberdade possibilita a geração dos mais diversos tipos de arranjos, incluindo arranjos aleatórios, Fig.2.1(b).

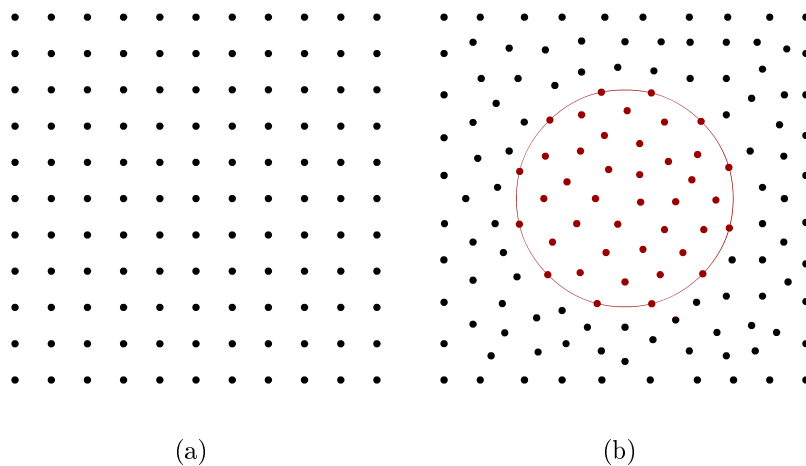


Figura 2.1: Domínio de Análise  $\Omega$  para uma região bidimensional quadrada: a) Domínio de Análise  $\Omega$  com arranjo retangular equilibrado, b) Domínio de Análise  $\Omega$  com arranjo aleatório.

## 2.1.2 O Domínio de Suporte $\Omega_S(\bar{x})$ e o Domínios de Suporte $\Omega_{SR}(\bar{x})$ para o RPIM

O subconjunto de  $n$  nós ( $\bar{x}_i \neq \bar{x}$ )  $\in \Omega$  mais próximos do nó  $\bar{x} \in \Omega$  (onde  $n < N$  e  $N$  a quantidade total de nós do domínio  $\Omega$ ) é também chamado de Domínio de Suporte  $\Omega_S(\bar{x})$  [42, 34], Fig.2.2.

O domínio de suporte  $\Omega_S(\bar{x})$  é definido a partir de uma região de pesquisa, que pode possuir tamanhos e formas diferentes, normalmente centrado no nó  $\bar{x}$ , pois ajuda a manter a uniformidade de  $\Omega_S(\bar{x})$ , Fig.2.2(a).

Para o método RPIM, o domínio de suporte  $\Omega_{SR}(\bar{x})$  possui um formato específico centrado no nó  $\bar{x}$ . Este formato de  $\Omega_{SR}(\bar{x})$  depende do número de dimensões do problema: para casos 2D (bidimensionais) a região possui formato circular [44], Fig.2.2(b), e para 3D (tridimensionais) o formato é esférico [45], ambos de raio  $r$  variável. A quantidade  $n$  de nós pertencentes a cada  $\Omega_{SR}(\bar{x})$  também é variável. Neste trabalho,  $n$  varia entre 8 e 16, sendo que o normal é encontrar  $n = 12$ .

A definição dos domínios de suporte  $\Omega_S(\bar{x})$  é de fundamental importância para os métodos sem malha, pois é a partir de  $\Omega_S(\bar{x})$  que se definem as funções de aproximação de  $f(\bar{x})$  para cada nó  $\bar{x} \in \Omega$ .

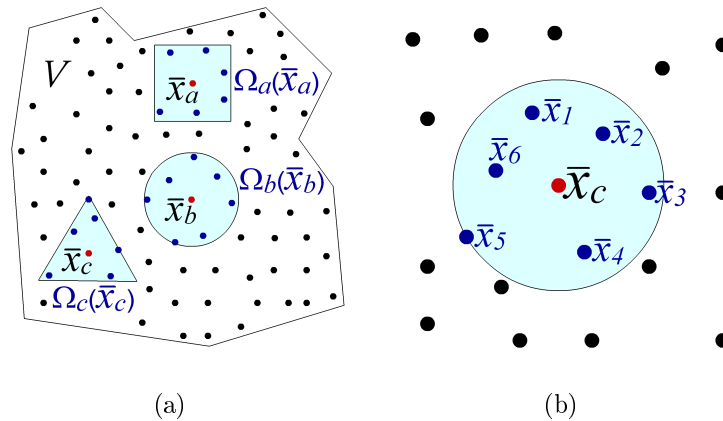


Figura 2.2: Domínio de Suporte  $\Omega_S(\bar{x})$ . a) Domínio de Suporte  $\Omega_S(\bar{x})$  genérico, b) Domínio de Suporte  $\Omega_{SR}(\bar{x})$  específico para RPIM.

### 2.1.3 O Princípio Básico dos Métodos *Meshless*

O princípio básico dos métodos *Meshless* é encontrar os valores aproximados  $f^a(\bar{x})$  de uma função  $f(\bar{x})$  em cada nó  $\bar{x} \in \Omega$  [46].

Tal aproximação pode ser feita usando uma função de forma  $\Phi$  [47], de maneira que a função de aproximação  $f^a(\bar{x})$  [48, 49] possa ser descrita por

$$f(\bar{x}) \approx f^a(\bar{x}) = \sum_{i=1}^n \phi_i(\bar{x}) \cdot f(\bar{x}_i), \quad (2.1)$$

onde  $n$  é a quantidade de nós em  $\Omega_{SR}(\bar{x})$ ,  $f(\bar{x}_i)$  é o valor exato da função  $f(\bar{x})$  para cada nó  $\bar{x}_i \in \Omega_S(\bar{x})$  e  $\phi_i(\bar{x})$  são os coeficientes associados a cada função  $f(\bar{x}_i)$  que auxiliam a interpolação. Estes coeficientes são conhecidos como funções de forma  $\Phi$  e dependem de  $\bar{x}$  e de  $\bar{x}_i$ .

Na forma matricial, a função de aproximação  $f^a(\bar{x})$  é descrita como sendo

$$f(\bar{x}) \approx f^a(\bar{x}) = \Phi(\bar{x}) \cdot F, \quad (2.2)$$

onde  $\Phi = [\phi_1(\bar{x}), \phi_2(\bar{x}), \dots, \phi_n(\bar{x})]$ ,  $F = [f(\bar{x}_1), f(\bar{x}_2), \dots, f(\bar{x}_n)]^T$  e  $n$  é a quantidade de nós em  $\Omega_{SR}(\bar{x})$ .

Dentre os métodos *meshless* encontra-se o método PIM, que é a base para o método RPIM discutido neste trabalho.

O *Point Interpolation Method* (PIM) [31, 50] é um método *meshless* que utiliza formulações matemáticas baseadas em interpolações por pontos com a intenção de definir a função de aproximação  $f^a(\bar{x})$ .

Para construção das funções de forma  $\phi_i$ , o método PIM utiliza funções de base  $B_i(\bar{x})$  [51] para cada nó  $\bar{x}_i \in \Omega_{SR}(\bar{x})$ , de forma que a função de aproximação é dada por

$$f^a(\bar{x}) = B_1(\bar{x}) \cdot a_1 + B_2(\bar{x}) \cdot a_2 + \dots + B_n(\bar{x}) \cdot a_n = \sum_{i=1}^n B_i(\bar{x}) \cdot a_i, \quad (2.3)$$

onde  $n$  é a quantidade de nós em  $\Omega_{SR}(\bar{x})$  e  $a_i$  são os coeficientes das funções de base  $B_i(\bar{x})$ .

Igualando (2.2) com (2.3), tem-se:

$$f(\bar{x}) \approx f^a(\bar{x}) = \sum_{i=1}^n B_i(\bar{x}) \cdot a_i = \sum_{i=1}^n \phi_i(\bar{x}) \cdot f(\bar{x}_i), \quad (2.4)$$

ou na forma matricial,

$$f(\bar{x}) \approx f^a(\bar{x}) = B^T(\bar{x}) \cdot a = \Phi(\bar{x}) \cdot F, \quad (2.5)$$

onde  $B^T = [B_1(\bar{x}), B_2(\bar{x}), \dots, B_n(\bar{x})]$ ,  $a = [a_1, a_2, \dots, a_n]^T$ ,  $\Phi = [\phi_1(\bar{x}), \phi_2(\bar{x}), \dots, \phi_n(\bar{x})]$ ,  $F = [f(\bar{x}_1), f(\bar{x}_2), \dots, f(\bar{x}_n)]^T$  e  $n$  é a quantidade de nós em  $\Omega_{SR}(\bar{x})$ .

## 2.2 O método RPIM

O método Radial PIM ou RPIM [32, 52] é uma variação do método PIM que utiliza uma função de base radial [53] para construção das funções de forma. Sendo assim, a função de aproximação é dada por

$$f(\bar{x}) \approx f^a(\bar{x}) = R_1(\bar{x}) \cdot a_1 + R_2(\bar{x}) \cdot a_2 + \dots + R_k(\bar{x}) \cdot a_k,$$

ou

$$f(\bar{x}) \approx f^a(\bar{x}) = \sum_{i=1}^n R_i(\bar{x}) \cdot a_i, \quad (2.6)$$

onde  $n$  é a quantidade de nós em  $\Omega_{SR}(\bar{x})$  e  $R_i(\bar{x})$  são as funções de base radial centradas em  $\bar{x}$ .

De maneira geral, as funções de base radial não conseguem gerar aproximações para qualquer tipo de função, sendo necessário adicionar uma função polinomial [39, 52] para solucionar este problema. Desta forma,  $f^a(\bar{x})$  passa a ser

$$f(\bar{x}) \approx f^a(\bar{x}) = \sum_{i=1}^n R_i(\bar{x}) a_i + \sum_{j=1}^m P_j(\bar{x}) b_j, \quad (2.7)$$

ou matricialmente,

$$f(\bar{x}) \approx f^a(\bar{x}) = R^T(\bar{x}) a + P^T(\bar{x}) b, \quad (2.8)$$

onde  $R^T(\bar{x}) = [R_1(\bar{x}), R_2(\bar{x}), \dots, R_n(\bar{x})]$  é a matriz das funções de base radial,  $a = [a_1, a_2, \dots, a_n]^T$  são os coeficientes para as funções de base radial,  $P^T(\bar{x}) = [P_1(\bar{x}), P_2(\bar{x}), \dots, P_m(\bar{x})] =$

$[1, x, y, x^2, xy, y^2, \dots]_m$  é o vetor da base polinomial,  $b = [b_1, b_2, \dots, b_m]^T$  são os coeficientes dos termos da base polinomial,  $n$  é a quantidade de nós em  $\Omega_{SR}(\bar{x})$  e  $m$  quantidade de termos da base polinomial.

Alguns autores classificam o método baseado em (2.6) de RPIM e o baseado em (2.7) de RPIMp (rpim polinomial) [39]. Neste trabalho, utiliza-se a nomenclatura RPIM para definir a equação (2.7), por entender-se que a mesma é uma melhoria indispensável para a utilização do método.

Para o caso 2D (bidimensional), a função de base radial  $R_i(\bar{x})$  é dada por,

$$R_i(\bar{x}) = e^{-\frac{c}{r_{max}} \left( \sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2} \right)^2}, \quad (2.9)$$

e o vetor da base polinomial  $P^T(\bar{x})$  por,

$$P^T(\bar{x}) = [1, x, y]. \quad (2.10)$$

Para determinar os coeficientes  $a_i$  e  $b_j$  que melhor ajustam as curvas, é utilizado um sistema de equações lineares [54], que é obtido a partir da expressão

$$f(\bar{x}_h) \approx f^a(\bar{x}_h) = \sum_{i=1}^n R_i(\bar{x}_h) a_i + \sum_{j=1}^m P_j(\bar{x}_h) b_j, \quad h = 1, 2, \dots, n, \quad (2.11)$$

quando (2.11) é aplicada a todos os pontos do domínio de suporte. Dessa forma, obtém-se, na forma matricial,

$$F = R_0 a + P_0 b = \begin{bmatrix} R_0 & P_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, \quad (2.12)$$

onde

$$R_0 = \begin{bmatrix} R_1(x_1, y_1) & R_2(x_1, y_1) & \dots & R_n(x_1, y_1) \\ R_1(x_2, y_2) & R_2(x_2, y_2) & \dots & R_n(x_2, y_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_1(x_n, y_n) & R_2(x_n, y_n) & \dots & R_n(x_n, y_n) \end{bmatrix}_{n \times n}, \quad (2.13)$$

$$P_0 = \begin{bmatrix} P_1(x_1, y_1) & P_2(x_1, y_1) & \dots & P_m(x_1, y_1) \\ P_1(x_2, y_2) & P_2(x_2, y_2) & \dots & P_m(x_2, y_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_1(x_n, y_n) & P_2(x_n, y_n) & \dots & P_m(x_n, y_n) \end{bmatrix}_{n \times m} \quad (2.14)$$

e

$$F = \begin{bmatrix} f(x_1, y_1) \\ f(x_2, y_2) \\ \vdots \\ f(x_n, y_n) \end{bmatrix}_{n \times 1}. \quad (2.15)$$

Para garantir solução única, a base polinomial deve satisfazer a seguinte condição

$$\sum_{i=1}^n P_j(x_i, y_i) a_i = 0; j = 1, 2, \dots, m, \quad (2.16)$$

ou matricialmente,

$$\begin{bmatrix} P_0^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}. \quad (2.17)$$

Portanto, acoplando-se (2.12) e (2.17), verifica-se que os coeficientes da interpolação podem ser calculados através do sistema

$$\begin{bmatrix} R_0 & P_0 \\ P_0^T & [0]_{m \times m} \end{bmatrix}_{(n+m) \times (n+m)} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}_{(n+m)} = \begin{bmatrix} F \\ [0]_m \end{bmatrix}_{(n+m)},$$

ou

$$\begin{bmatrix} R_0 & P_0 \\ P_0^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.18)$$

Para efeito de simplificação, pode-se definir

$$\begin{bmatrix} R_0 & P_0 \\ P_0^T & 0 \end{bmatrix} = G, \quad (2.19)$$

de forma que (2.18) passa a ser,

$$G \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Assim, pode-se definir os coeficientes  $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$  em função da matriz inversa de  $G$ ,

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = G^{-1} \cdot \begin{bmatrix} F \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.20)$$

Por substituição dos coeficientes  $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$  de (2.20) em (2.8) (forma matricial), tem-se

$$f(\bar{x}) \approx R^T(\bar{x})a + P^T(\bar{x})b = \begin{bmatrix} R^T & P^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix},$$

$$f(\bar{x}) \approx \begin{bmatrix} R^T & P^T \end{bmatrix} G^{-1} \begin{bmatrix} F \\ 0 \end{bmatrix},$$

obtém-se

$$f(\bar{x}) \approx \begin{bmatrix} R^T & P^T \end{bmatrix} G^{-1} F, \quad (2.21)$$

onde

$$R^T(\bar{x}) = [R_1(\bar{x}), R_2(\bar{x}), \dots, R_n(\bar{x})], \quad (2.22)$$

$$P^T(\bar{x}) = [P_1(\bar{x}), P_2(\bar{x}), \dots, P_m(\bar{x})] \quad (2.23)$$

e

$$G^{-1} = \begin{bmatrix} \bar{G}_{11} & \bar{G}_{12} & \dots & \bar{G}_{1(n+m)} \\ \bar{G}_{21} & \bar{G}_{22} & \dots & \bar{G}_{2(n+m)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{G}_{(n+m)1} & \bar{G}_{(n+m)2} & \dots & \bar{G}_{(n+m)(n+m)} \end{bmatrix}_{(n+m)}. \quad (2.24)$$

Igualando as equações (2.2) e (2.21), tem-se a função de forma

$$\begin{aligned}\Phi(\bar{x})F &= \begin{bmatrix} R^T & P^T \end{bmatrix} G^{-1}F, \\ \Phi(\bar{x}) &= \begin{bmatrix} R^T & P^T \end{bmatrix} G^{-1}.\end{aligned}\tag{2.25}$$

Como

$$\Phi = [\phi_1(\bar{x}), \phi_2(\bar{x}), \dots, \phi_n(\bar{x})],\tag{2.26}$$

conclui-se que

$$\phi_h(\bar{x}) = \sum_{i=1}^n R_i(\bar{x}_h)\bar{G}_{i,h} + \sum_{j=1}^m P_j(\bar{x}_h)\bar{G}_{j+n,h}, h = 1, 2, \dots, n,\tag{2.27}$$

onde  $\phi_h(\bar{x})$  é o  $h$ -ésimo elemento de (2.26).

## 2.3 O método RPIM e as equações de Maxwell

Para aplicações baseadas nas equações de Maxwell, é necessário que se calculem derivadas parciais no método RPIM [55].

Neste contexto, a derivada parcial da função de aproximação  $f^a(\bar{x})$  pode ser obtida facilmente a partir de (2.2) (reproduzida a seguir por conveniência),

$$\begin{aligned}f(\bar{x}) &\approx \Phi(\bar{x})F, \\ f(x, y) &\approx \Phi(x, y)F.\end{aligned}$$

Desta forma, a derivada parcial de  $f(x, y)$  em relação a  $x$  pode ser aproximada por (caso 2D, onde  $\bar{x} = (x, y)$ )

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \approx \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial x} F.\tag{2.28}$$

Substituindo-se (2.26) em (2.28), tem-se

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} &\approx \frac{\partial [\phi_1(x, y), \phi_2(x, y), \dots, \phi_n(x, y)]}{\partial x} F, \\ \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} &\approx \left[ \frac{\partial \phi_1(x, y)}{\partial x} \quad \frac{\partial \phi_2(x, y)}{\partial x} \quad \dots \quad \frac{\partial \phi_n(x, y)}{\partial x} \right] F,\end{aligned}\tag{2.29}$$



onde  $\frac{\partial \phi_h(x,y)}{\partial x}$  é a derivada parcial em relação a x de cada elemento  $\phi_h(\bar{x})$ , de tal forma que pode-se encontrar  $\frac{\partial \phi_h(x,y)}{\partial x}$  a partir de (2.27). Tem-se, portanto

$$\begin{aligned}\phi_h(\bar{x}) &= \sum_{i=1}^n R_i(\bar{x}_h) \bar{G}_{i,h} + \sum_{j=1}^m P_j(\bar{x}_h) \bar{G}_{j+n,h}, \\ \frac{\partial \phi_h(\bar{x})}{\partial x} &= \frac{\partial \left( \sum_{i=1}^n R_i(\bar{x}_h) \bar{G}_{i,h} + \sum_{j=1}^m P_j(\bar{x}_h) \bar{G}_{j+n,h} \right)}{\partial x}, \\ \frac{\partial \phi_h(\bar{x})}{\partial x} &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial R_i(\bar{x}_h)}{\partial x} \bar{G}_{i,h} + \sum_{j=1}^m \frac{\partial P_j(\bar{x}_h)}{\partial x} \bar{G}_{j+n,h},\end{aligned}\tag{2.30}$$

e, de forma análoga, obtém-se a derivada de  $\phi_h(\bar{x})$  em relação a y, que é dada por

$$\frac{\partial \phi_h(\bar{x})}{\partial y} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial R_i(\bar{x}_h)}{\partial y} \bar{G}_{i,h} + \sum_{j=1}^m \frac{\partial P_j(\bar{x}_h)}{\partial y} \bar{G}_{j+n,h}.\tag{2.31}$$

Por fim, as derivadas parciais da função de aproximação para cada componente 2D, são calculadas da seguinte forma:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \Big|_{\bar{x}} \approx \left[ \frac{\partial \phi_1(\bar{x})}{\partial x} \quad \frac{\partial \phi_2(\bar{x})}{\partial x} \quad \dots \quad \frac{\partial \phi_n(\bar{x})}{\partial x} \right] \Big|_{\bar{x}} F\tag{2.32}$$

e

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \Big|_{\bar{x}} \approx \left[ \frac{\partial \phi_1(\bar{x})}{\partial y} \quad \frac{\partial \phi_2(\bar{x})}{\partial y} \quad \dots \quad \frac{\partial \phi_n(\bar{x})}{\partial y} \right] \Big|_{\bar{x}} F\tag{2.33}$$

### 2.3.1 Aplicação do RPIM nas equações de Maxwell

As equações de Maxwell [15, 17] são um conjunto de equações que descrevem a física relativa à propagação de ondas eletromagnéticas. Fenômenos físicos, tais como difrações, reflexões e refrações, fazem parte do modelo físico de Maxwell. Neste trabalho, utiliza-se uma abordagem baseada no modo TMz (transversal magnético z) em coordenadas retangulares, onde as equações de Maxwell, no espaço bidimensional, são representadas através das componentes de campo  $E_z$ ,  $H_x$  e  $H_y$ , onde

$$\frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon} \left( \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right),\tag{2.34}$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial t} = -\frac{1}{\mu} \left( \frac{\partial E_z}{\partial y} \right) \quad (2.35)$$

e

$$\frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \left( \frac{\partial E_z}{\partial x} \right). \quad (2.36)$$

Ressalta-se que as leis de Gauss são automaticamente satisfeitas pelas leis de Faraday e Ampère em coordenadas retangulares [17]. Introduzindo a idéia de função de forma para derivadas parciais  $\frac{\partial \phi_j}{\partial x}$ , nas equações de Maxwell para o modo TMz, tem-se

$$E_z^{N_{t+1}}(i) = E_z^{N_t}(i) + \frac{\Delta t}{\epsilon} \left( \sum_j^{n_p} H_y^{N_t}(j) \frac{\partial \phi_j}{\partial x} - \sum_j^{n_p} H_x^{N_t}(j) \frac{\partial \phi_j}{\partial y} \right), \quad (2.37)$$

$$H_x^{N_{t+1}}(i) = H_x^{N_t}(i) - \frac{\Delta t}{\mu} \left( \sum_j^{n_p} E_z^{N_t}(j) \frac{\partial \phi_j}{\partial y} \right) \quad (2.38)$$

e

$$H_y^{N_{t+1}}(i) = H_y^{N_t}(i) - \frac{\Delta t}{\mu} \left( \sum_j^{n_p} E_z^{N_t}(j) \frac{\partial \phi_j}{\partial x} \right). \quad (2.39)$$

onde,  $n_p \approx 12$  é a quantidade de pontos no domínio de suporte  $\Omega_{SR}(\bar{x})$  e  $t = N_t \times \Delta t$ . Ressalta-se que, neste trabalho,  $n_p$  varia entre 8 e 16, dependendo do domínio de suporte considerado. Além disso, destaca-se que os raios de todos os domínios de suporte são iguais.

## 2.4 Método de Truncagem por UPML para o RPIM

O método RPIM tem se mostrado uma ferramenta bastante eficiente para análise e síntese de problemas em eletromagnetismo. Porém, assim como os métodos tradicionais, possui um problema relacionado a sua aplicação direta, que limita sua utilização a problemas fechados (truncados) onde há confinamento das ondas na região de análise. O uso destas equações em problemas abertos requer a aplicação de algum critério de continuidade

virtual do domínio. Caso contrário, a aplicação do método torna-se impraticável, pois requer número de iterações e quantidade de domínios infinitos.

Muitos estudos foram desenvolvidos a fim de propor soluções para este problema, sem causar alterações da propagação na região de interesse. Assim, foram criadas as ABCs (Absorbing Boundary Conditions) [56, 57, 58, 59], um conjunto de técnicas que simula a propagação para o infinito a partir da absorção das ondas que chegam aos limites da região de análise.

Entre os diversos métodos desenvolvidos, destacam-se a Perfect Matched Layer (PML) [60] e a Uniaxial Perfectly Matched Layers (UPML) [38]. A PML é uma técnica bastante eficiente que utiliza a ideia de um meio material dispersivo e dividido por camadas com casamento perfeito de impedâncias. A UPML segue linha semelhante à PML, porém traz uma interpretação física e é matematicamente mais elegante, mantendo a mesma eficiência da PML.

As equações apresentadas neste trabalho são adaptações da formulação para FDTD 3D em coordenadas retangulares [61] que visam possibilitar a utilização da truncagem por UPML para o método RPIM 2D (modo TM<sub>z</sub>). Aplicando-se a ideia de aproximação por função de forma para as derivadas espaciais, tem-se

$$D_z^{N_t+1} = D_z^{N_t} \left( \frac{1 - \frac{\sigma_y \Delta t}{2\epsilon_o}}{1 + \frac{\sigma_y \Delta t}{2\epsilon_o}} \right) + \frac{\Delta t}{1 + \frac{\sigma_y \Delta t}{2\epsilon_o}} \left[ \sum_j^{n_p} H_y^{N_t+1} \frac{\partial \phi_j}{\partial x} - \sum_j^{n_p} H_x^{N_t+1} \frac{\partial \phi_j}{\partial y} \right], \quad (2.40)$$

$$E_z^{N_t+1} = E_z^{N_t-1} \left( \frac{1 - \frac{\sigma_x \Delta t}{2\epsilon_o}}{1 + \frac{\sigma_x \Delta t}{2\epsilon_o}} \right) + \frac{1}{\epsilon_o \epsilon_r \left( 1 + \frac{\sigma_x \Delta t}{2\epsilon_o} \right)} \left[ D_z^{N_t+\frac{1}{2}} \left( 1 + \frac{\sigma_z \Delta t}{2\epsilon_o} \right) - D_z^{N_t-\frac{1}{2}} \left( 1 - \frac{\sigma_z \Delta t}{2\epsilon_o} \right) \right], \quad (2.41)$$

$$\begin{aligned}
B_x^{N_t+\frac{1}{2}} &= B_x^{N_t-\frac{1}{2}} \left( \frac{1 - \frac{\sigma_z \Delta t}{2\epsilon_o}}{1 + \frac{\sigma_z \Delta t}{2\epsilon_o}} \right) \\
&+ \frac{\Delta t}{1 + \frac{\sigma_z \Delta t}{2\epsilon_o}} \left[ - \sum_j^{n_p} E_z^{N_t(j)} \frac{\partial \phi_j}{\partial y} \right], \tag{2.42}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_x^{N_t+\frac{1}{2}} &= H_x^{N_t-\frac{1}{2}} \left( \frac{1 - \frac{\sigma_y \Delta t}{2\epsilon_o}}{1 + \frac{\sigma_y \Delta t}{2\epsilon_o}} \right) \\
&+ \frac{1}{\mu_o \left(1 + \frac{\sigma_y \Delta t}{2\epsilon_o}\right)} \left[ B_x^{N_t+\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{\sigma_x \Delta t}{2\epsilon_o}\right) - B_x^{N_t-\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{\sigma_x \Delta t}{2\epsilon_o}\right) \right], \tag{2.43}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
B_y^{N_t+\frac{1}{2}} &= B_y^{N_t-\frac{1}{2}} \left( \frac{1 - \frac{\sigma_x \Delta t}{2\epsilon_o}}{1 + \frac{\sigma_x \Delta t}{2\epsilon_o}} \right) \\
&+ \frac{\Delta t}{1 + \frac{\sigma_x \Delta t}{2\epsilon_o}} \left[ \sum_j^{n_p} E_z^{N_t(j)} \frac{\partial \phi_j}{\partial x} \right], \tag{2.44}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_y^{N_t+\frac{1}{2}} &= H_y^{N_t-\frac{1}{2}} \left( \frac{1 - \frac{\sigma_z \Delta t}{2\epsilon_o}}{1 + \frac{\sigma_z \Delta t}{2\epsilon_o}} \right) \\
&+ \frac{1}{\mu_o \left(1 + \frac{\sigma_z \Delta t}{2\epsilon_o}\right)} \left[ B_y^{N_t+\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{\sigma_y \Delta t}{2\epsilon_o}\right) - B_y^{N_t-\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{\sigma_y \Delta t}{2\epsilon_o}\right) \right], \tag{2.45}
\end{aligned}$$

onde as derivadas temporais são aproximadas por diferenças finitas,  $n_p \approx 12$  é a quantidade de pontos no domínio de suporte  $\Omega_{SR}(\bar{x})$  e  $t = N_t \times \Delta t$ . Os parâmetros, que promovem a atenuação das ondas, são dados por

$$\sigma_x(x) = \begin{cases} \left( \frac{|x-x_1|}{L_x} \right)^m \sigma_{xmax} & , \text{ se } x \leq x_1 \\ 0 & , \text{ se } x_1 < x < x_2 \\ \left( \frac{|x-x_2|}{L_x} \right)^m \sigma_{xmax} & , \text{ se } x \geq x_2 \end{cases} \tag{2.46}$$

$$\sigma_y(y) = \begin{cases} \left( \frac{|y-y_1|}{L_y} \right)^m \sigma_{ymax} & , \text{ se } y \leq y_1 \\ 0 & , \text{ se } y_1 < y < y_2 \\ \left( \frac{|y-y_2|}{L_y} \right)^m \sigma_{ymax} & , \text{ se } y \geq y_2 \end{cases} \tag{2.47}$$

e

$$\sigma_{\alpha max} = \frac{1 + m}{15\pi L_{\alpha}}, \quad (2.48)$$

onde  $\alpha = x$  ou  $y$  e  $x_1, y_1, x_2$  e  $y_2$  são as coordenadas que definem as interfaces entre a UPML e a região de análise,  $L_{\alpha} = L_x$  e  $L_y$  são as espessuras da UPML (em metros) e  $m$  é uma variável que, para os casos discutidos neste trabalho, é definida como  $m = 4$ .

## 2.5 Otimização do método RPIM com base no fator de forma $c$

Como visto anteriormente, os métodos numéricos sem malha têm sido uma alternativa bastante atraente, em comparação aos métodos tradicionais, para solução de problemas relacionados à representação de geometrias complexas.

Porém, como os métodos *meshless* possuem desenvolvimentos relativamente recentes, é necessário assegurar a eficiência e confiabilidade das implementações, para garantir o sucesso destes métodos frente aos tradicionais.

A análise do erro gerado pelas aproximações [51] é um bom parâmetro para garantir que uma implementação seja estável o suficiente para ser utilizada nas mais diversas aplicações.

De forma geral, um conjunto de nós bem formado (com bases nos parâmetros de qualidade da discretização, Capítulo 3) garante um sistema bem condicionado que minimiza os erros de aproximação  $Err^a$ . Todavia, garantir o equilíbrio do conjunto de nós não é uma tarefa fácil e, em muitos casos, um alto grau de desequilíbrio pode ter que ser considerado. Desta forma, quantificar o  $Err^a$  é extremamente necessário para que se consiga verificar regiões de desequilíbrio e aplicar métodos que minimizem o  $Err^a$ .

Para quantificar o erro de aproximação, pode-se utilizar diversas métricas. A métrica

usada neste trabalho é [62]

$$Err^{a\%} = 100 \times \left[ \frac{f^a(\bar{x}) - f(\bar{x})}{f(\bar{x})} \right], \quad (2.49)$$

onde  $f(\bar{x})$  é a função exata (pode ser qualquer função) e  $f^a(\bar{x})$  é a função aproximada (interpolada) de  $f(\bar{x})$ . Neste trabalho, utiliza-se como referência a função [62]

$$f(\bar{x}) = f(x, y) = \sin(kx) + \sin(ky), \quad (2.50)$$

onde  $k = 2\pi/T$  e cujas derivadas parciais são dadas por

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = k \cos(kx), \quad (2.51)$$

e

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = k \cos(ky), \quad (2.52)$$

pois, as aplicações são para estudos eletromagnéticos regidos pela equações Maxwell, seção 2.3. Logo, deve-se analisar o erro para cada termo da derivada. Então, (2.49) na forma de derivadas parciais, é dada por

$$Err_{\partial x}^a = 100 \times \left[ \frac{\frac{\partial f^a(x_i, y_i)}{\partial x} - \frac{\partial f(x_i, y_i)}{\partial x}}{\frac{\partial f(x_i, y_i)}{\partial x}} \right] \quad (2.53)$$

e

$$Err_{\partial y}^a = 100 \times \left[ \frac{\frac{\partial f^a(x_i, y_i)}{\partial y} - \frac{\partial f(x_i, y_i)}{\partial y}}{\frac{\partial f(x_i, y_i)}{\partial y}} \right]. \quad (2.54)$$

O fator de forma  $c$  da função de base radial (2.9) utilizada pelo método RPIM, possui relação direta com o erro de aproximação  $Err^a$  [62]. Por isso, pode ser utilizado  $c$  como fator de calibração para minimizar  $Err^a$ .

Na literatura, considera-se  $c \approx 0$  como parâmetro global, e normalmente utiliza-se  $c = 0.01$  [52, 55], porém este valor nem sempre retorna o erro aceitável.

Alguns estudos realizados determinaram o comportamento do erro de aproximação em relação à variação do coeficiente de forma  $c$  [62]. Esta relação pode ser vista na Fig.2.3.

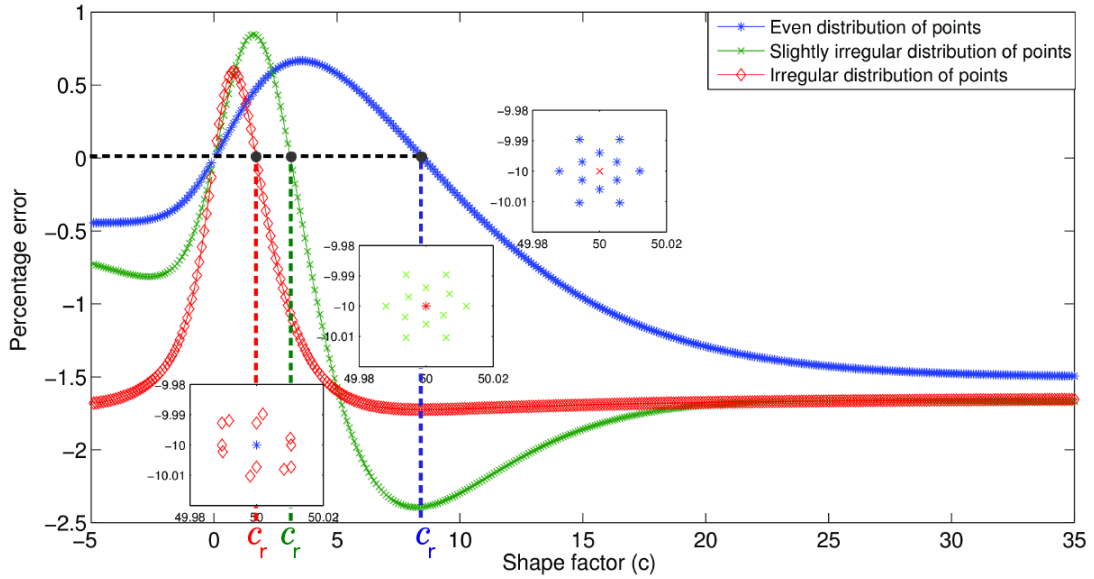


Figura 2.3:  $Err\%$  versus  $c$ , para arranjos regular, pouco irregular e irregular, com 12 pontos no domínio de suporte.

De acordo com os gráficos mostrados na Fig.2.3 [62], pode-se verificar que para os três casos estudados,  $c = 0.01$  não é raiz do problema (pois  $Err^a(c) \neq 0$ ); porém para todos os três casos, outros valores de  $c > 0.01$  são raízes do problema. Isso pode ajudar a resolver problemas onde  $c = 0.01$  retorna  $Err^a(c)$  inaceitáveis (valores de  $Err^a(c)$  muito altos ou gere dificuldade de inversão da matriz  $G$ ) [55].

De forma geral, duas abordagens podem ser utilizadas quando o  $Err^a$  é inaceitável para  $c = 0.01$ : Alterar a distribuição dos pontos (o que dependendo do caso pode ser muito custoso e de difícil implementação) ou encontrar o valor de  $c > 0.01$  que seja raiz do problema, o que necessita a utilização de algum método de busca.

Um dos métodos triviais mais utilizados é o método força bruta (ou busca exaustiva) [63], o qual verifica se cada um dos elementos de um universo de busca satisfaz a solução do problema. Porém, este método é computacionalmente custoso, principalmente para níveis altos de precisão onde o universo de busca torna-se muito grande.

Outro método de busca bastante conhecido para este tipo de problema é o método

iterativo da falsa posição [64], que consiste em um algoritmo para encontrar raízes, o qual expressa a aproximação linear da função dada em termos da equação de uma reta que passa por dois pontos. Este método possui desempenho elevado e em poucas interações consegue encontrar valores de  $c$  para  $Errr^a$  aceitáveis [62]. Porém, esta técnica necessita de dois pontos de partida onde a aproximação linear da função dada cruze o eixo das abscissas. Caso isso não ocorra, a utilização do método é inviável.

Neste trabalho, os dois métodos foram fundidos. Primeiramente aplica-se o método força bruta com baixa precisão para encontrar a faixa de busca que contém a raiz do problema. Posteriormente, aplica-se o método falsa posição para aumentar a precisão da busca encontrando o valor mais próximo de  $c$ , raiz do problema.

O processo de otimização discutido nesta seção é a implementação do método LSFCM (*Local Shape Factor Calibration Method*) [62].



## Capítulo 3

# Proposta: Método de Discretização do Espaço Baseado na Lei de Coulomb (CLDM) para métodos numéricos sem malha (*meshless*)

É proposta uma técnica baseada na lei de Coulomb, para implementação e otimização do método de discretização espacial para técnicas numéricas *meshless*, para solução de equações diferenciais parciais. Ressalta-se que, neste trabalho, introduz-se a técnica CLDM na literatura.

### 3.1 Métodos de Discretização do Espaço

Os métodos de discretização do espaço dividem um espaço de análise, Fig.3.1(a), em um conjunto finito de elementos com dimensionamento controlado, de tal forma que não haja superposição nem espaçamento entre os elementos [65]. Estes métodos podem ser classificados segundo a existência ou não de malha [23].

A malha define uma relação de dependência ou conectividade entre os nós, seguindo

um padrão pré-estabelecido. Ela é a base para a formulação dos métodos numéricos convencionais. Existem dois tipos básicos de malhas: as estruturadas e as não-estruturadas.

A malha do tipo estruturada, Fig.3.1(b), é também conhecida como grade ou *grid*, já que os nós são ordenados pela grade de forma sistemática. A determinação dos nós vizinhos para cada nó da malha é bem simples, dada sua ordenação. Entretanto, esta malha não se adapta bem a problemas com geometrias curvas ou até mesmo retas e planos inclinados. Este tipo de malha é usado pelo método de diferenças finitas (FDM).

Já no método de elementos finito (FEM), é usada uma malha não-estruturada, que é um tipo de malha composto por elementos que podem assumir formas geométricas diversas. Normalmente, são utilizadas formas triangulares, Fig.3.1(c), para definir os elementos em problemas bidimensionais e formas tetraédricas para os tridimensionais. Dessa forma, a malha do FEM é capaz de se ajustar bem a geometrias complexas com inclinações e discretizar curvas em um conjunto de segmentos ou planos. Ressalta-se que a malha não estruturada não pode ser representada por uma matriz simples, tal como a estruturada e que o método das diferenças finitas pode ser adaptado para malhas não estruturadas [17].

A discretização por malha não-estruturada é um método robusto e amplamente usado na solução de problemas eletromagnéticos, mas possui limitações na geração de um grupo de nós que represente bem o problema e para que seja numericamente de boa qualidade [17,23].

Nos métodos sem malha (*meshless*), a discretização do espaço é feita através de um conjunto de nós espalhados sobre o domínio do problema [66], como pode ser visto na Fig.3.1(d). Por não necessitarem diretamente de informações sobre conectividade para interpolações de variáveis de campo, são considerados métodos independentes de malhas. A ausência de conectividade torna fácil a resolução de algumas dificuldades relacionados aos métodos com malhas. No entanto, a falta de malha introduz outras dificuldades. Relações entre os nós, para os métodos sem malha, são determinadas a partir da análise

da vizinhança de cada um dos nós. A vizinhança, para um nó  $\bar{x}_c$  qualquer, é normalmente uma região circular centrada no nó  $\bar{x}_c$  e o conjunto de nós que pertence a esta vizinhança é comumente chamado de *domínio de suporte*  $\Omega_S(\bar{x}_c)$ .

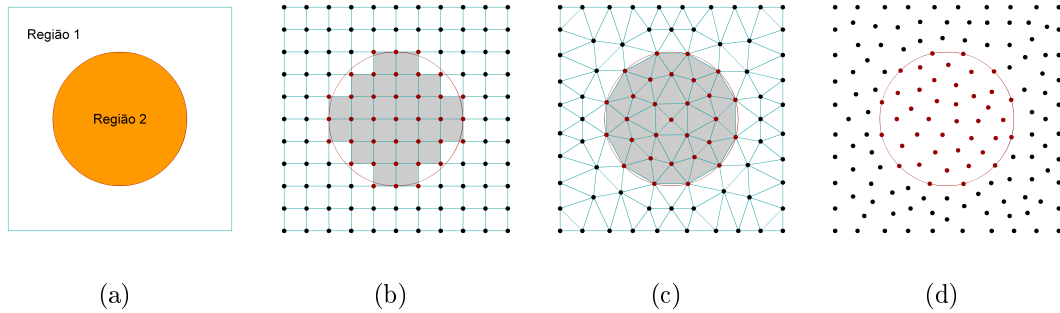


Figura 3.1: Discretização espacial para um dado domínio da análise, que possui duas regiões distintas, sendo que uma das regiões está contida na outra. a) Espaço de análise a ser discretizado, b) discretização com malha estruturada, c) discretização com malha não-estruturada, d) discretização sem malha (meshless).

### 3.1.1 Qualidade da discretização espacial

A qualidade da discretização espacial afeta a precisão dos resultados numéricos. Uma malha com boa distribuição de nós e elementos bem formados contribui para a geração de sistemas numéricos bem condicionados, minimizando erros numéricos e singularidades [67].

De forma geral, as principais dificuldades na geração de uma discretização espacial de alta qualidade, para métodos com ou sem malha *meshless*, estão associadas a um conjunto de parâmetros que definem a qualidade numérica da discretização [23,66]. Estes parâmetros são:

Forma dos Elementos - os elementos devem possuir uma forma equilibrada, Fig.3.2(a), evitando a geração de elementos estreitos, ou que possuam um pequeno ângulo interno, Fig.3.2(b). Especificamente, pode-se mostrar que o erro na solução de elementos finitos é inversamente proporcional ao seno do menor ângulo interno [67]. Para discretizações

baseadas em triângulos, os elementos devem ter o formato mais próximo possível do triângulo equilátero. Já nas discretizações baseadas em quadriláteros, os elementos devem possuir formato equivalente ao quadrado.

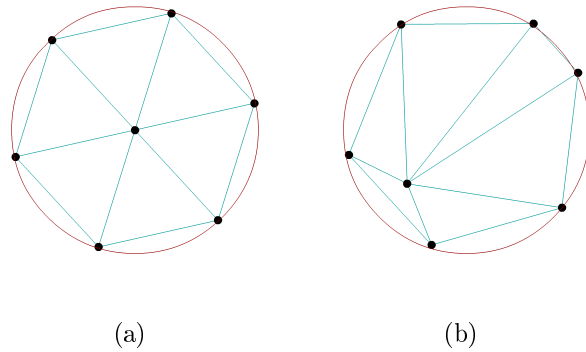


Figura 3.2: Qualidade da forma dos elementos que discretizam uma região. a) Elementos com formas equilibradas, b) Elementos com formas muito distorcidas, que aumentam os erros numéricos.

Conformidade - Os elementos devem possuir a mesma forma ou formas que possibilitem o encaixe entre os mesmos, Fig.3.3.

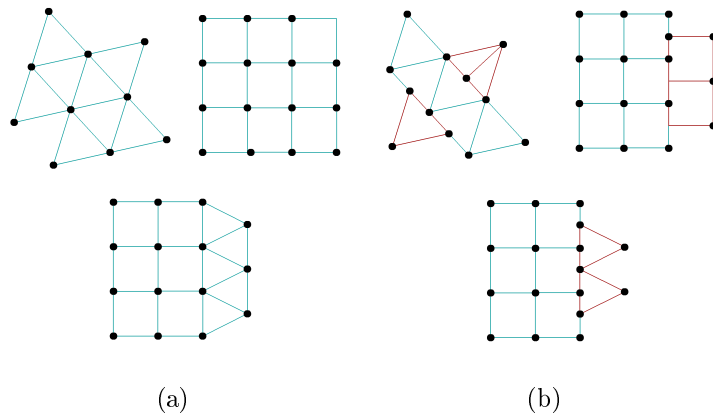


Figura 3.3: Qualidade da conformidade da discretização. a) Exemplos de discretizações que respeitam a conformidade, b) Exemplos de discretizações que não respeitam a conformidade.

Interface entre Regiões - para problemas que envolvem mais de uma região com dife-

rentes propriedades geométricas, a geometria da interface entre as regiões deve ser respeitada. Para isso, um conjunto de nós deve ser posto sobre as fronteiras para representar os contornos das interfaces, Fig.3.4.

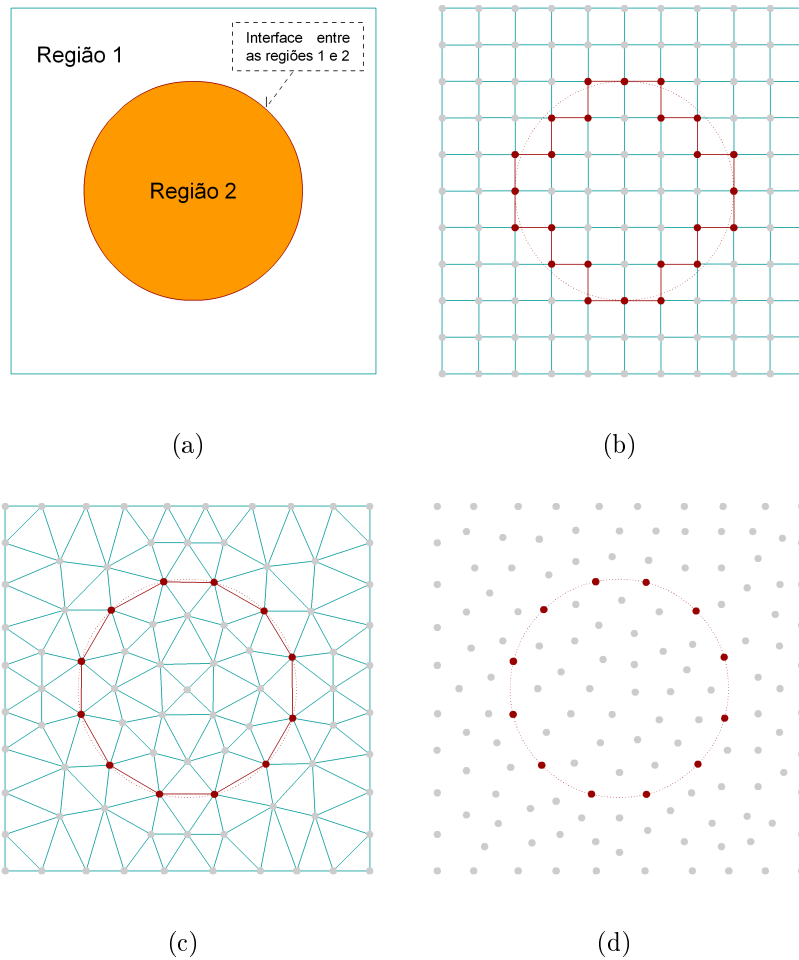


Figura 3.4: Qualidade da representação dos contornos das interfaces. a) Interface entre regiões com forma circular, b) Representação das interfaces com malhas estruturadas, c) Representação das interfaces com malhas não-estruturadas, d) Representação das interfaces através de discretização *meshless*.

Variação Direcional da Distância entre Nós - A discretização do espaço deve ser aproximadamente igual em todas as direções, Fig.3.5. Caso isso não ocorra, a distância entre os nós será maior em uma das direções do que em outras, Fig.2.5(b), e instabilidades

numéricas poderão ser observadas.

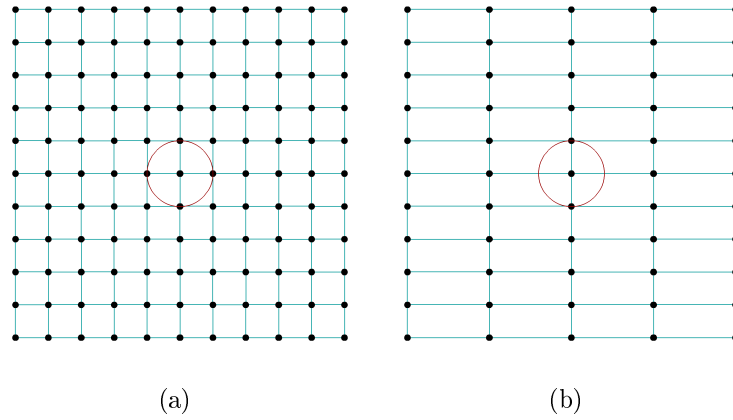


Figura 3.5: Qualidade da variação direcional da distância entre nós. a) Variação direcional equilibrada, b) Variação direcional desequilibrada.

Uniformidade do *Domínio de Suporte*  $\Omega_S(\bar{x}_c)$  - A distribuição dos nós deve ser uniforme, Fig.3.6(a), de tal forma que haja transição suave entre as diferentes geometrias (garantindo a qualidade da forma dos elementos de discretização). Caso isso não aconteça, haverá maior concentração de nós em uma dada região e deficiência de nós em outra, Fig.3.6(b).

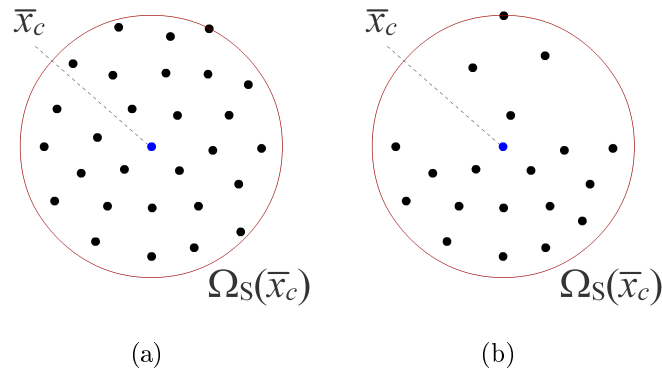


Figura 3.6: Qualidade da uniformidade do domínio de suporte  $\Omega_S(\bar{x}_c)$  circular relativo ao nó  $\bar{x}_c$  destacado na cor azul. a) Domínio de suporte com boa qualidade de distribuição de pontos, b) Domínio com distribuição de pontos inadequada (baixa qualidade de distribuição).

Pelo que pode ser visto na literatura, todas as técnicas utilizadas para realizar discretizações espaciais para métodos *meshless*, são baseadas em procedimentos desenvolvidos inicialmente para os métodos tradicionais [33, 34, 35]. Sendo assim, pode-se concluir que nenhuma técnica de discretização espacial puramente *meshless* foi desenvolvida até este momento.

Neste trabalho, é proposta uma nova técnica de discretização espacial puramente *meshless* baseada na lei de Coulomb para gerar a distribuição do conjunto de nós de um dado domínio de análise, de forma a satisfazer todas as características de uma boa discretização espacial. A idéia principal é simular cargas eletrostáticas em cada nó do conjunto de pontos da região de análise e fazer com que eles interagem entre si, proporcionando os deslocamentos necessários para gerar a representação discreta ideal do espaço de análise. Ressalta-se que isto ocorre naturalmente na física de partículas elementares carregadas, que tendem a se distribuir com equilíbrio de forças no espaço.

## 3.2 A lei de Coulomb e o princípio da superposição

A Lei de Coulomb é uma lei da Física que descreve a interação eletrostática entre partículas eletricamente carregadas [68]. Foi formulada e publicada pela primeira vez em 1783 pelo físico francês Charles Augustin de Coulomb [69] e foi essencial para o desenvolvimento do estudo da Eletricidade.

Esta lei estabelece que o módulo da força  $\vec{F}$  entre duas cargas elétricas puntiformes,  $q_1$  e  $q_2$ , é diretamente proporcional ao produto dos valores absolutos (módulos) das duas cargas e inversamente proporcional ao quadrado da distância  $r$  entre elas [70]. Esta força pode ser atrativa, Fig.3.7(a), se as cargas tiverem sinais opostos, ou repulsivos, Fig.3.7(b) e 3.7(c), se as cargas tiverem o mesmo sinal.

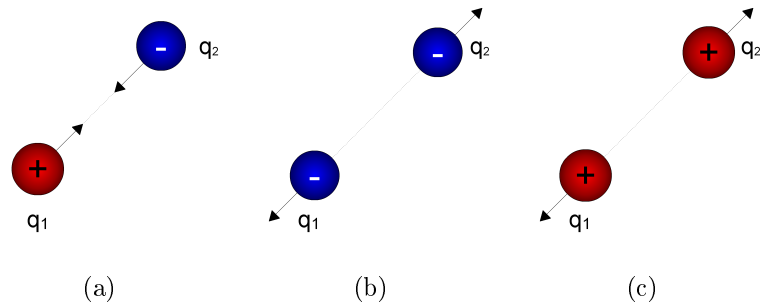


Figura 3.7: Lei de Coulomb para duas cargas eletricamente carregadas. a) Cargas com sinais diferentes, b) Cargas com sinal positivo, c) Cargas com sinal negativo.

Após detalhadas experiências, Coulomb concluiu que esta força é completamente descrita por (3.1)

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^3} \vec{r}. \quad (3.1)$$

A notação anterior é uma notação vetorial compacta, onde não é especificado qualquer sistema de coordenadas. Analisando a lei de Coulomb no sistema de coordenadas cartesianas, supondo que a carga  $q_1$  esteja na origem e a carga  $q_2$  em alguma posição  $(x, y, z)$  do sistema, a força de Coulomb  $\vec{F}$  (de  $q_1$  para  $q_2$ ) passa a ser expressa por (3.2)

$$\vec{F}_{1,2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} (x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}). \quad (3.2)$$

A lei de Coulomb é descrita apenas para duas cargas presentes numa dada região do espaço, porém, experimentos mostram que a força total sobre uma carga de teste, produzida por um conjunto de cargas puntiformes, pode ser obtida através da soma vetorial da força de cada carga individual, na ausência das demais. A este, princípio dá-se o nome de princípio da superposição.

Em termos matemáticos, quando existem  $N$  cargas presentes,  $q_1, q_2, \dots, q_N$ , a força total  $\vec{F}_t^i$  sobre a carga  $q^i$  é dada por (3.3)

$$\vec{F}_t^i = \sum_{j=1}^n \vec{F}_{j,i}, \quad (3.3)$$



Aplicando a lei de Coulomb e o princípio da superposição a um sistema de 4 cargas puntiformes de mesmo valor, onde as cargas  $q_1$ ,  $q_2$  e  $q_3$  estão fixas nos vértices de um triângulo equilátero e a  $q_4$  está livre no espaço, pode-se verificar que: caso a carga  $q_4$  esteja posicionada na parte externa do triângulo, Fig.3.8, as forças que agem sobre a carga resultam em uma força  $\vec{F}$  que desloca a carga  $q_4$  para longe do triângulo. Porém, se a carga  $q_4$  estiver posicionada na região interna ao triângulo, Fig.3.9(a), a força  $\vec{F}$  resultante agirá deslocando esta carga para o baricentro do triângulo, Fig.3.9(b), ponto de equilíbrio entre cargas.

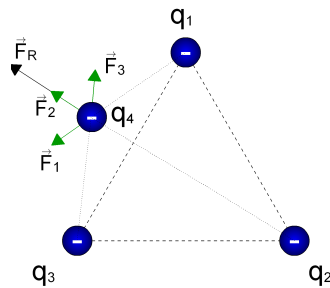


Figura 3.8: Princípio da superposição (soma vetorial de forças), resultando em afastamento da carga de teste  $q_4$ .

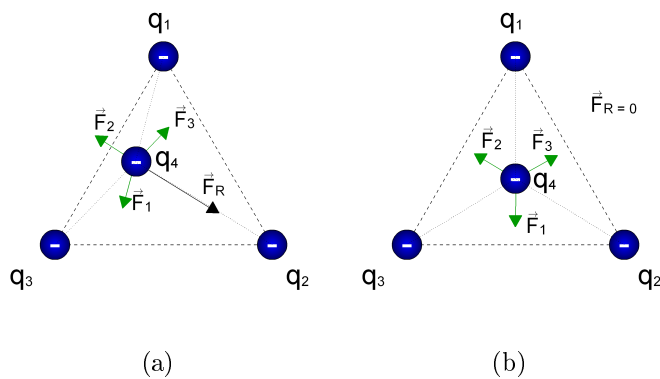


Figura 3.9: Princípio da superposição resultando em um deslocamento para o ponto de equilíbrio entre as cargas. a) Carga de teste  $q_4$  posicionada em um ponto da região interna do triângulo diferente do ponto de equilíbrio, e sofrendo ação da força  $\vec{F}_R$ . b) Carga de teste  $q_4$  deslocada para o ponto de equilíbrio entre as cargas  $q_1$ ,  $q_2$  e  $q_3$ .

Expandindo esta análise para um conjunto infinito de cargas pontuais de mesmo valor, nota-se que a influência que as cargas exercem mutuamente gera um equilíbrio espacial, tendendo a criar uma distribuição equidistante entre as cargas, como pode ser visto na Fig.3.10(a). Neste contexto, caso uma carga  $q_i$  seja deslocada e fixada em uma posição diferente da sua posição de equilíbrio no conjunto, Fig.3.10(b), o sistema reage reposicionando as cargas, a fim de sanar o distúrbio iniciado pela carga  $q_i$ , criando um novo equilíbrio, Fig.3.10(c).

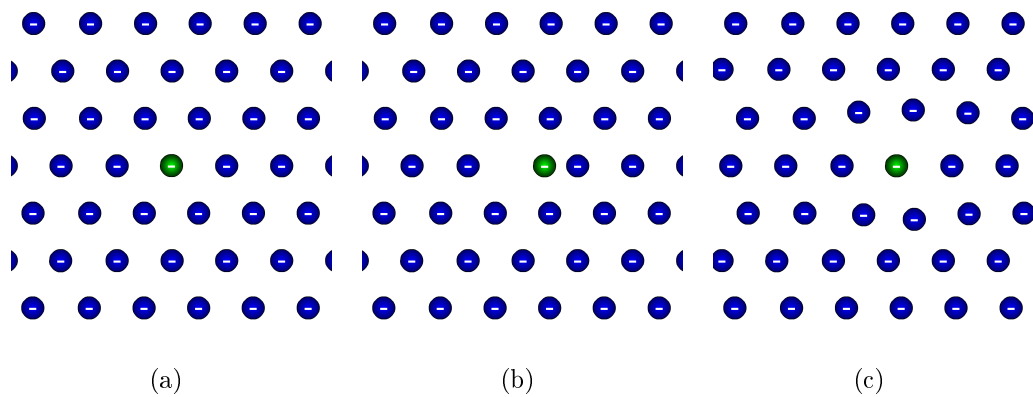


Figura 3.10: Princípio da superposição aplicado a um conjunto infinito de cargas. a) Equilíbrio do conjunto, b) Desequilíbrio forçado pelo deslocamento de uma das cargas do conjunto, c) Reação do sistema a fim de promover equilíbrio de força entre as cargas.

Este efeito é a base para o método proposto neste trabalho, pois auxilia na criação e formatação de um conjunto de nós que satisfaça naturalmente a todos os requisitos associados à qualidade da discretização espacial.

### 3.3 O Método Desenvolvido

O método de discretização baseada na lei de Coulomb - CLDM (*Coulomb Law Discretization Method*), em síntese, é a implementação computacional da ideia do equilíbrio entre cargas aplicada na discretização de um domínio, a fim de promover o equilíbrio da distribuição entre nós, garantindo, por tanto, a qualidade da discretização, tal como

anteriormente discutido.

Para o desenvolvimento computacional do método, optou-se pela utilização de paradigmas de programação orientada a objeto [71] por facilitar a implementação e reutilização dos códigos. Entre as diversas linguagens de programação baseadas em orientação a objeto, optou-se pela utilização da linguagem *C++* [72, 73], por ser uma linguagem robusta que possibilita a implementação de software de alto nível bastante difundida nos meios acadêmico e comercial.

O método de discretização CLDM é aplicado em 4 etapas: geração do domínio inicial, definição dos domínios de suportes, formatação das interfaces e reposicionamento dos nós.

### **Geração do Domínio Inicial $\Omega$**

A geração do domínio inicial  $\Omega$  é a primeira etapa do método proposto neste trabalho, e corresponde a criação do domínio de análise  $\Omega_a$  onde será aplicada a lei de Coulomb.

O domínio de análise  $\Omega_a$  é um conjunto de nós  $\bar{x}_i$  (onde  $i = 1, 2, \dots, N$ , sendo  $N$  o número de elementos em  $\Omega_a$ ), que descreve toda região de interesse.

Para os métodos de discretização sem malha, a distribuição dos nós em um domínio de análise  $\Omega_a$  pode ser feita de forma aleatória, Fig.3.11(b), contanto que se satisfaçam os parâmetros de qualidade da discretização e representem de forma precisa os contornos de interesse ao problema.

Porém, neste trabalho, optou-se por uma geração inicial de nós baseada em malha (estruturada ou não estruturada), Fig.3.11(c), pois este tipo de organização auxilia em alguns aspectos, tais como:

- equilíbrio inicial entre cargas, haja visto que, para aplicação da lei de Coulomb, cada nó  $\bar{x}_i$  do domínio  $\Omega$  é considerado uma partícula carregada  $q_i$ ;
- identificação facilitada dos domínios de suporte  $\Omega_{SC}(\bar{x}_c)$ , pois existe um padrão inicial de conexão entre os nós;

- satisfação de alguns dos parâmetros da qualidade da discretização, tais como: conformidade e uniformidade do  $\Omega_S(\bar{x}_c)$ .
- eficiência dos métodos de truncagem aplicados para a lei de Coulomb (explicado a seguir) e para o RPIM (tal como a UPML).

Esta malha só serve como organização inicial e não possui função direta na aplicação da lei de Coulomb ou do método RPIM.

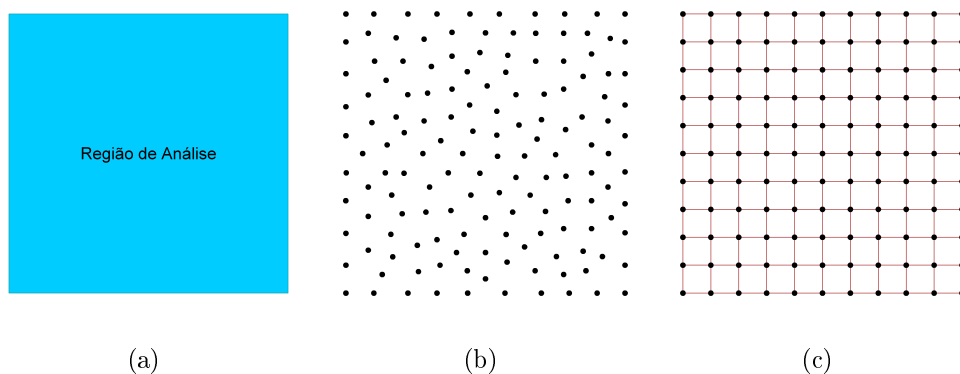


Figura 3.11: Discretização espacial de uma região de análise. a) Região de análise, b) Discretização aleatória, c) Discretização baseada em malhas.

A discretização de um domínio de análise  $\Omega_a$  deve considerar alguns fatores importantes, tais como: a distância mínima entre os pontos  $\Delta_{min}$ , a truncagem do espaço de interesse e o arranjo do conjunto de nós elétricos (onde será calculado o campo  $\vec{E}$ ) e magnéticos (onde será calculado o campo  $\vec{H}$ ).

A distância mínima entre pontos  $\Delta_{min}$  dever ser menor ou igual à  $\lambda_{min}/10$ , para  $\lambda_{min} = C_0/f_{max}$  (mínimo comprimento de onda), onde  $C_0$  é a velocidade da luz e  $f_{max}$  a frequência máxima do pulso a ser aplicado.

A truncagem (limitação) do espaço de análise infinito em uma região finita é outro aspecto importante a ser tratado no método proposto. Para garantir o equilíbrio perfeito entre as cargas, seria necessário utilizar um domínio infinito  $\Omega_\infty$ , o que torna inviável a implementação computacional do método. A tentativa de utilizar a lei de Coulomb em

um domínio finito  $\Omega$  (onde os nós comportam-se como cargas livres no espaço) sem a utilização de qualquer técnica de truncagem, resulta em uma repulsão mútua entre os nós, espalhando-os para fora da região de análise, Fig.3.12.

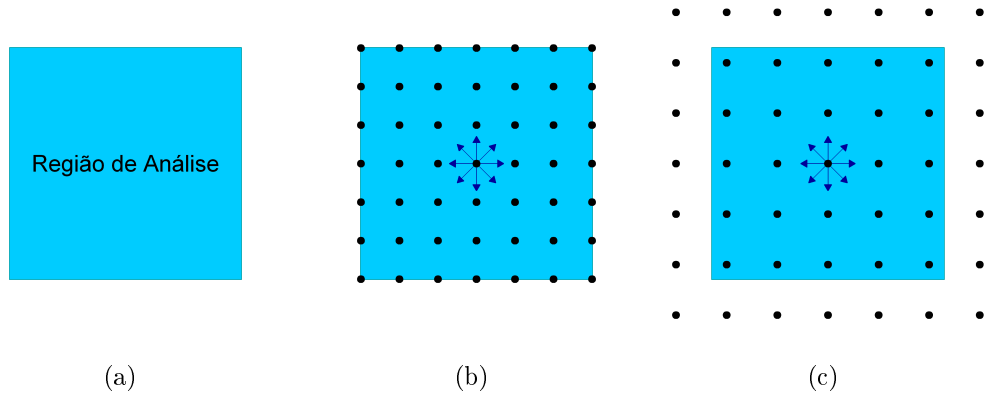


Figura 3.12: Efeito da limitação de um domínio de análise  $\Omega_a$  sem a utilização de uma técnica de truncagem que possibilite a aplicação da lei de Coulomb. a) Região de análise, b) Domínio  $\Omega_a$  finito, antes da aplicação da lei de Coulomb, c) Domínio  $\Omega_a$  finito, após da aplicação da lei de Coulomb (sem truncagem especial).

Neste trabalho, desenvolveu-se uma técnica de truncagem para lei de Coulomb, baseada na criação de uma região de borda  $Rb$  ao redor do domínio de análise  $\Omega_a$ , Fig.3.13(a). A região de borda  $Rb$  deve seguir o mesmo padrão definido pela malha e todos os nós  $\bar{x}_j \in Rb$  (onde  $j = 1, 2, \dots, K$ , sendo  $K$  o tamanho de  $Rb$ ) devem funcionar como cargas fixas, que não sofrem influência dos outros nós, porém influenciam os nós do domínio de análise  $\Omega_a$  que se comportam com cargas livres.

A região de borda  $Rb$  deve ser grande o suficiente para garantir a estabilidade do sistema, Fig.3.13.

O domínio total  $\Omega$  é a união do domínio de análise  $\Omega_a$  com a região de bordas  $Rb$ , 3.4.

$$\Omega = \Omega_a \cup Rb. \quad (3.4)$$

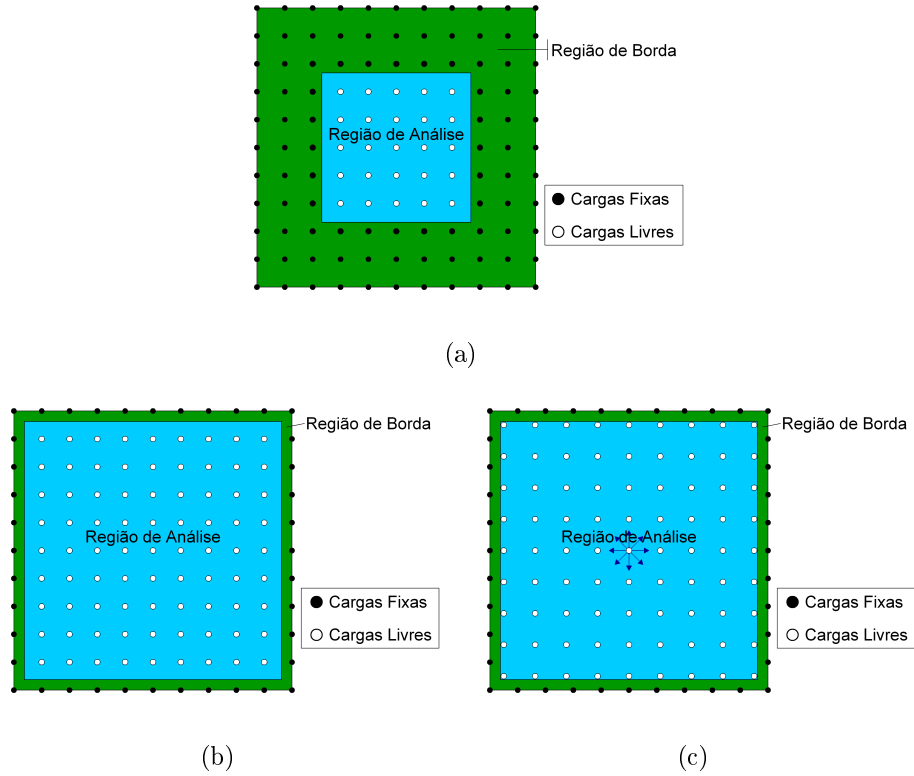


Figura 3.13: Domínio total  $\Omega$  contendo a região de borda  $Rb$  e o domínio de análise  $\Omega_a$ . a) Região de borda  $Rb$  suficientemente grande, b) Região de borda  $Rb$  muito pequena, antes da aplicação da lei de Coulomb, c) Região de borda  $Rb$  muito pequena, após da aplicação da lei de Coulomb.

### Definição dos domínios de suporte $\Omega_{SC}(\bar{x}_c)$ para o método de Coulomb

A aplicação da lei de Coulomb pelo método de força bruta [63] no domínio de análise  $\Omega_a$ , implica que cada nó  $\bar{x}_i \in \Omega_a$ , comporta-se como um carga  $q_i$  e recebe a influência de todos os outros  $N$  nós pertencentes ao  $\Omega_a$  que forem diferentes de  $\bar{x}_i$  (onde  $i = 1, 2, \dots, N$ , sendo  $N$  tamanho de  $\Omega_a$ ). Este processo é trivial, porém, quando aplicado para um domínio  $\Omega$  muito grande, torna-se inviável, pois demanda enorme tempo e esforço computacional. A fim de otimizar este processo, utiliza-se a idéia de subdomínios [43].

Pela lei de Coulomb, a força  $\vec{F}$  é inversamente proporcional ao quadrado da distância  $r$  entre duas cargas. Desta forma, para um conjunto  $V$  de cargas puntiformes iguais, a

força resultante  $\vec{F}_i$  (para uma carga  $q_i$ ) sofre influência maior de cargas próximas a  $q_i$  do que de cargas distantes, Fig.3.14(a).

Este fato garante a viabilidade da utilização da idéia de subdomínio, dado que somente o subconjunto de cargas mais próximas de  $q_i$  é que exerce maior influência para o cálculo da força resultante  $\vec{F}_i$ , Fig.3.14(b).

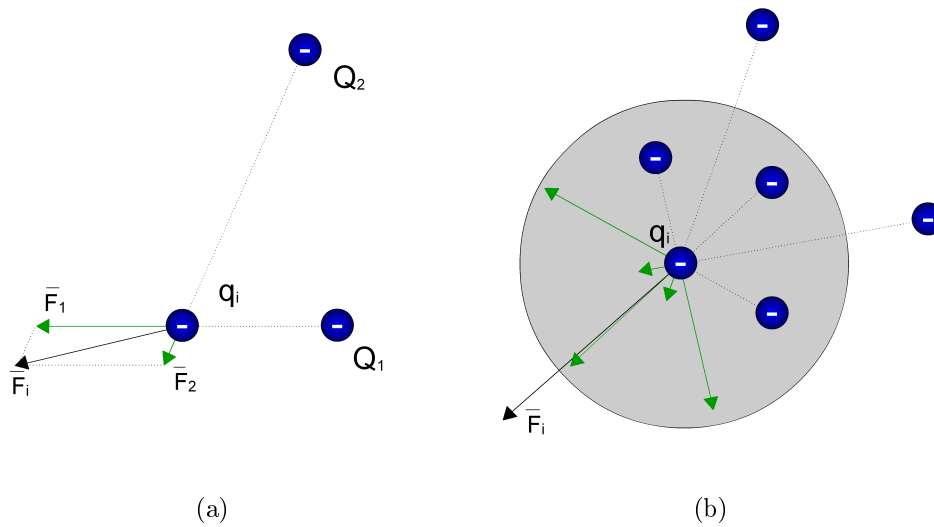


Figura 3.14: Influência entre cargas iguais. a) A carga  $Q_1$  influencia mais em  $\vec{F}_i$  do que  $Q_2$ , b) As cargas que estão dentro de uma vizinhança próxima de  $q_i$  influenciam mais  $\vec{F}_i$  que as posicionadas fora da vizinhança.

O subconjunto de  $k$  nós  $(\bar{x}_i \neq \bar{x}_c) \in V$  mais próximos do nó  $\bar{x}_c \in V$  (onde  $k < N$  e  $N$  a quantidade total de nós do conjunto  $V$ ) é também chamado de *Domínio de Suporte*  $\Omega_{SC}(\bar{x}_c)$  [45], Fig.3.15(a).

O domínio de suporte  $\Omega_{SC}(\bar{x}_c)$  é definido a partir de uma região de pesquisa, que pode possuir tamanhos e formas diferentes. Porém, neste trabalho, as regiões de pesquisa são todas iguais e possuem a forma de um círculo de raio  $r$  centrado no nó  $\bar{x}_c$ , pois ajuda a manter o equilíbrio entre as cargas, Fig.3.15(b).

Apesar do domínio de suporte  $\Omega_{SC}(\bar{x}_c)$  ter quantidade de nós menor que o domínio total  $\Omega$ , ele deve ser grande o suficiente para reduzir os erros no cálculo da força resultante

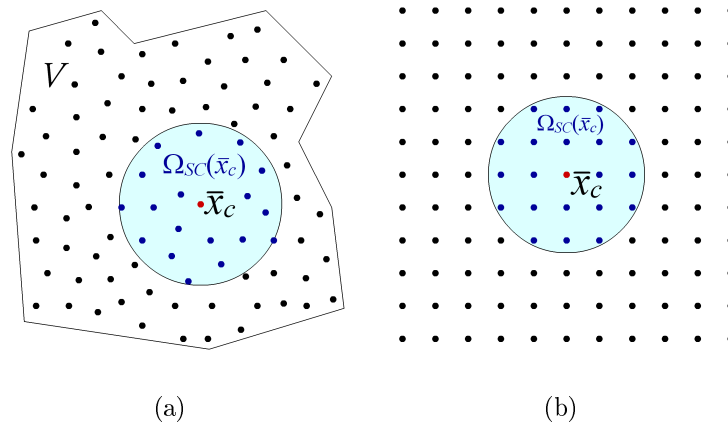


Figura 3.15: Domínio de suporte  $\Omega_{SC}(\bar{x}_c) \in V$  centrado em  $\bar{x}_c$ . a) Domínio de suporte em uma distribuição aleatória, b) Domínio de suporte em uma distribuição baseada em malha).

de Coulomb. Neste trabalho, define-se  $r = 8\Delta_{min}$ , onde  $r$  é o raio do domínio de suporte  $\Omega_{SC}(\bar{x}_c)$  e  $\Delta_{min}$  é o valor da distância mínima entre os nós do domínio total  $\Omega$ , Fig.3.16. Note que esta definição implica que cada domínio de suporte possui, de forma geral, um número de pontos próprio.

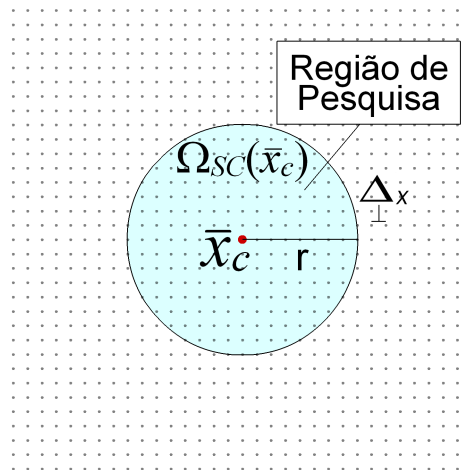


Figura 3.16: Domínio de suporte  $\Omega_{SC}(\bar{x}_c)$  em uma distribuição baseada em malha, que possui uma região de pesquisa circular de raio  $r = 8\Delta_{min}$



## Formatação das Interfaces

Esta etapa é responsável por satisfazer a *Interface entre Regiões*, parâmetro da qualidade da discretização espacial que especifica a necessidade de existir nós que descrevam o contorno das fronteiras entre regiões pertencentes a um dado domínio  $\Omega$ , Fig.3.17.

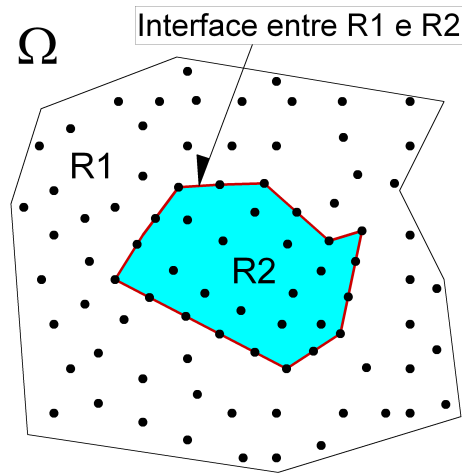


Figura 3.17: Formatação da interface entre  $R1$  e  $R2$ , onde  $R2 \in R1$  e  $R1 \in \Omega$ .

A implementação desta etapa é relativamente simples e se resume em identificar os pontos mais próximos de uma interface e deslocá-los para cima do contorno da interface, Fig.3.18.

Apesar da simplicidade, esta etapa requer alguns cuidados:

- O deslocamento de um nó  $\bar{x}_i$  não pode ser maior que  $\Delta_{min}$  (a distância mínima entre todos os nós do domínio  $\Omega$ );
- dois nós não podem sobrepor-se após o deslocamento;
- a distância mínima entre os pontos na interface  $\Delta_{min}^{int}$  deve ser aproximadamente igual a  $\Delta_{min}$ .

Caso algum destes aspectos não seja respeitado, pode haver problemas de forças muito grandes na aplicação da lei de Coulomb e, conseqüentemente, problemas na qualidade da discretização espacial.

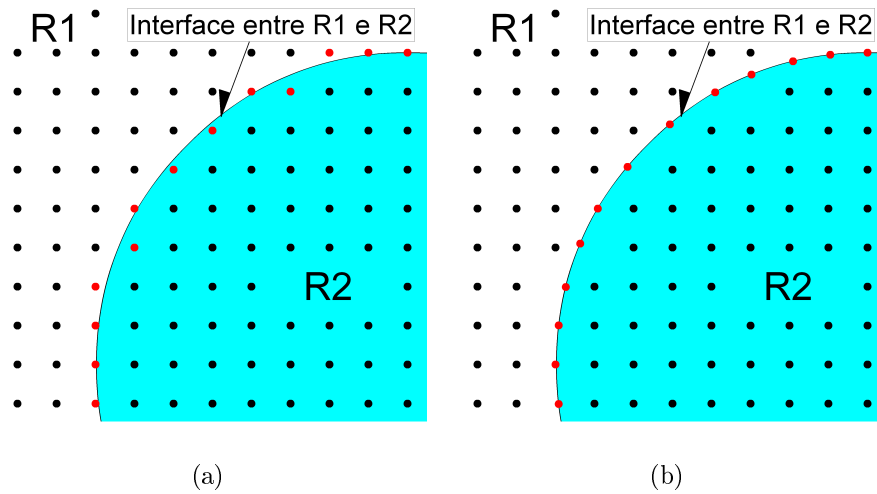


Figura 3.18: Formação da interface entre  $R1$  e  $R2$ . a) Identificação dos pontos próximos da interface, b) Deslocamentos dos pontos próximos para cima da interface.

### Reposicionamento dos nós

Após a etapa de *Formatação das Interfaces*, alguns nós são deslocados de suas posições de equilíbrio e isso interfere na qualidade da discretização espacial, Fig.3.19. O *Reposicionamento dos Nós* utiliza a lei de Coulomb e o princípio do equilíbrio entre cargas para reequilibrar a distribuição no domínio  $\Omega$ , mantendo a formatação das interfaces, Fig.3.19.

Este processo considera o domínio  $\Omega$  como um conjunto de partículas eletricamente carregadas. Estas partículas ou cargas possuem o mesmo valor e podem ser classificadas de acordo com sua capacidade de reagir ao sistema, como fixas ou móveis.

As cargas fixas são aquelas que não reagem a força  $\vec{F}_i$  (resultante da interação como as outras cargas presentes no sistema) mantendo-se desta forma fixas na sua posição inicial. Estas cargas são encontradas na região de borda  $Rb$  e nos contornos entre as regiões, Fig.3.20.

As móveis são cargas que respondem ao estímulo da força  $\vec{F}_i$ , deslocando-se da sua posição de origem. Estão, em toda a região do domínio diferente da região de borda  $Rb$  e dos contornos entre regiões, Fig.3.20, o *Reposicionamento dos Nós* atua nas cargas

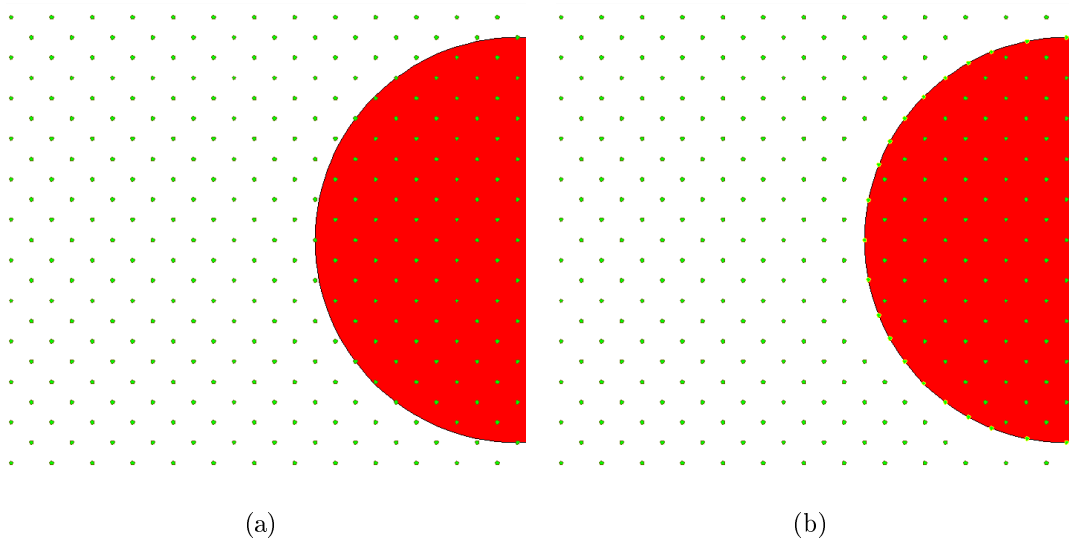


Figura 3.19: Aplicação do reposicionamento dos nós. a) Domínio  $\Omega$ , após a formatação das interfaces, b) Domínio  $\Omega$ , após o reposicionamento dos nós.

moveis, deslocando-as a fim de reequilibrar a distribuição de cargas.

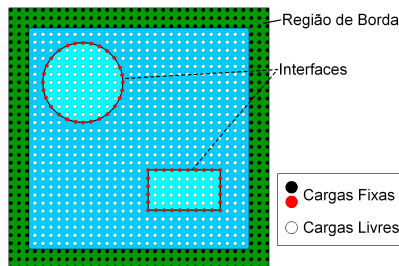


Figura 3.20: Classificação das cargas de acordo com sua capacidade de reagir ao sistema. As cargas fixas na região de borda  $Rb$  (cor preta) e na interface entre regiões (cor vermelha). Todas as outras são cargas móveis (cor branca).

O deslocamento de uma carga  $\bar{x}_c$  depende da força resultante  $\vec{F}_c$ . Esta força é a soma vetorial de todas as forças que atuam sobre  $\bar{x}_c$  devido à interação de  $\bar{x}_c$  com cada carga  $\bar{x}_j \in \Omega_{SC}(\bar{x}_c)$ , onde  $\bar{x}_j \neq \bar{x}_c$  e  $j = 1, 2, \dots, K$ , sendo  $K$  a quantidade de pontos no domínio de suporte  $\Omega_{SC}(\bar{x}_c)$ .

Atualizar a posição de todas as cargas (pontos) é um processo que requer um número

de iterações relativamente grande para alcançar o resultado esperado, pois o deslocamento das cargas deve ser o menor possível a cada iteração para que se mantenham todos os princípios físicos e se reduza o erro computacional, Fig.3.21 e 3.22.

A força  $\vec{F}_c$  resultante da interação entre cargas é inversamente proporcional a  $\Delta_{min}$ , o que interfere no deslocamento proporcionado pelo *Reposicionamento dos Nós*. A fim de possibilitar o ajuste do deslocamento, é inserido um fator multiplicador  $\Upsilon$  que gradua o efeito da força resultante  $\vec{F}_c$ .

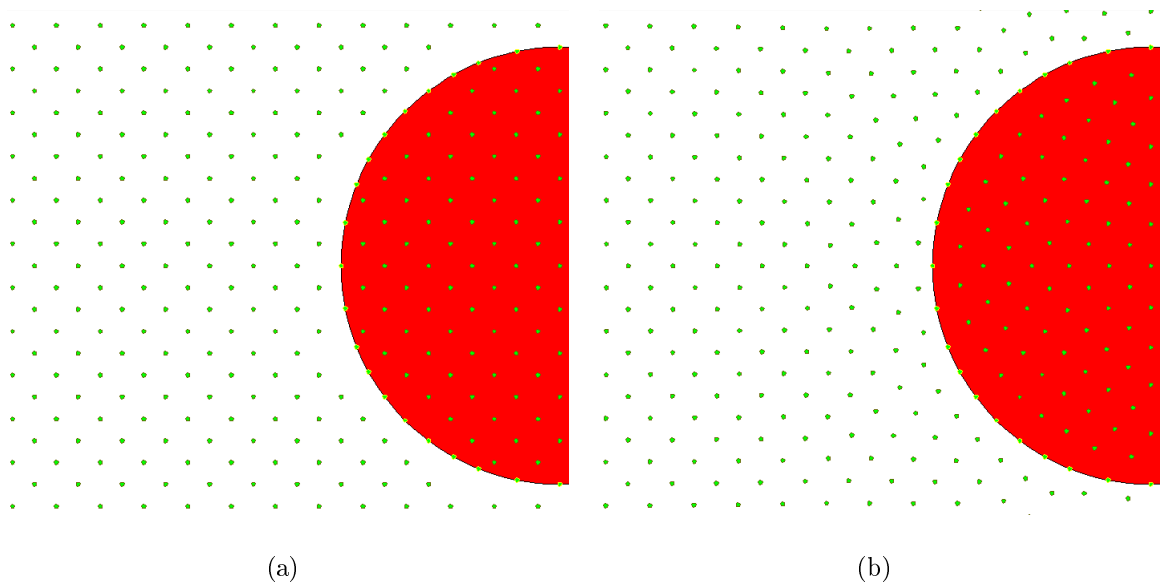


Figura 3.21: Aplicação do método de discretização por Coulomb para 150 iterações. a) formatação da interface entre as regiões, b) reposicionamento de nós após 150 iterações.

O algoritmo básico desenvolvido para atualizar a posição dos pontos móveis é ilustrado pela Fig.3.23. A Fig.3.24 apresenta o fluxograma que descreve a aplicação do método CLDM.

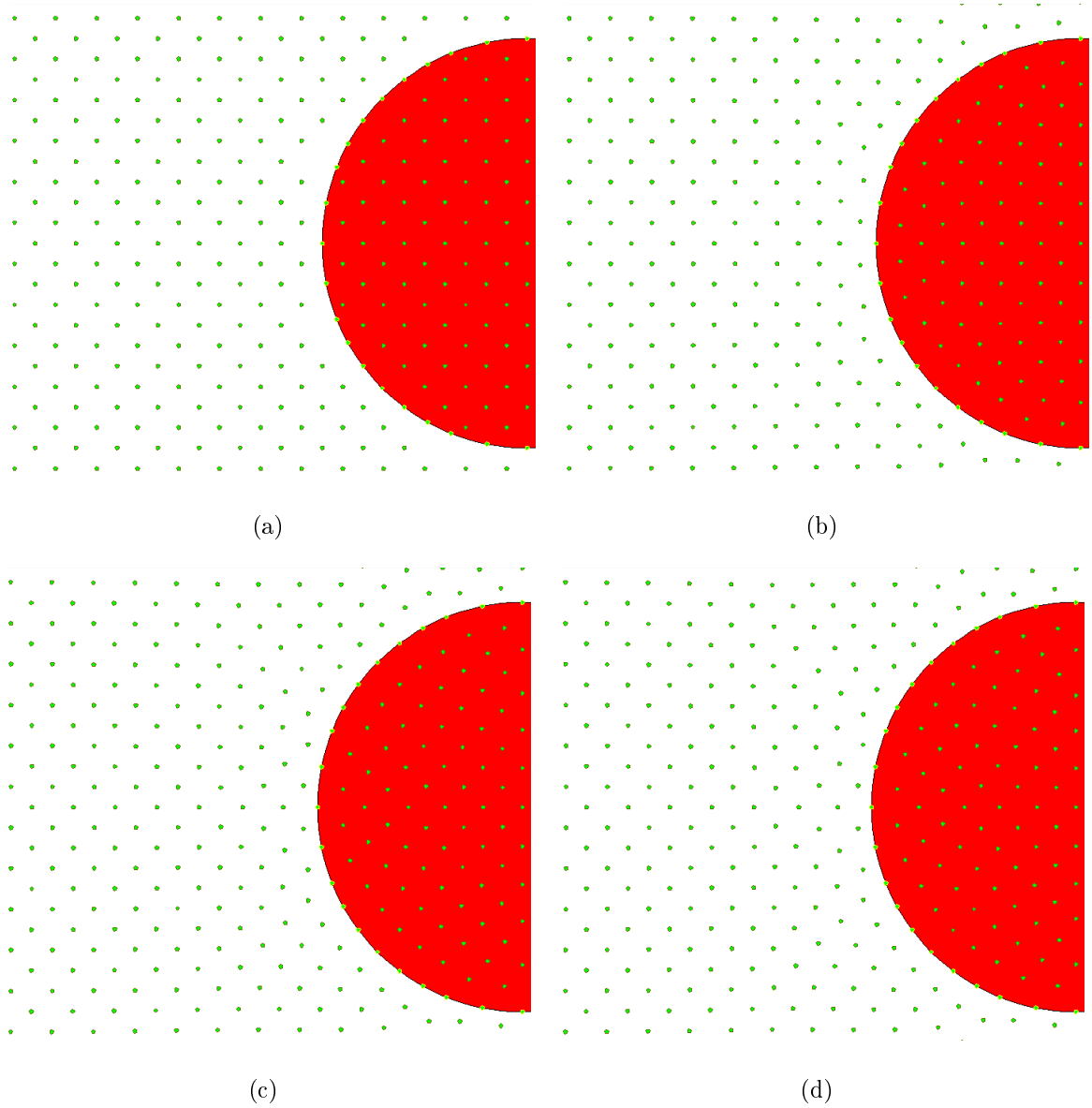


Figura 3.22: Aplicação do método de discretização por Coulomb para 150 iterações. a) reposicionamento de nós após 0 iterações, b) reposicionamento de nós após 50 iterações, c) reposicionamento de nós após 100 iterações, d) reposicionamento de nós após 150 iterações.

1. **reposicionamentoCoulomb2D**( $x, y, X\Omega_r, Y\Omega_r, \Upsilon$ )
2.  $N \leftarrow x[i].tamanho$
3. **para**  $i \leftarrow 1$  **até**  $N$  **faça**
4.  $F_x[i] \leftarrow 0$
5.  $F_y[i] \leftarrow 0$
6.  $n\Omega_r \leftarrow X\Omega_r[i].tamanho$
7. **para**  $j \leftarrow 1$  **até**  $n\Omega_r$  **faça**
8.  $x1 \leftarrow X\Omega_r[i][j]$
9.  $y1 \leftarrow Y\Omega_r[i][j]$
10.  $r \leftarrow raiz(potencia(x1 - x[i], 2) + potencia(y1 - y[i], 2))$
11.  $F_x[i] \leftarrow F_x[i] + (q[i] * q[j]/r^3) * (x1 - x[i])$
12.  $F_y[i] \leftarrow F_y[i] + (q[i] * q[j]/r^3) * (y1 - y[i])$
13. **para fim**
14. **para fim**
15. **para**  $i \leftarrow 1$  **até**  $N$  **faça**
16.  $x[i] \leftarrow x[i] + F_x[i] * \Upsilon$
17.  $y[i] \leftarrow y[i] + F_y[i] * \Upsilon$
18. **para fim**
19. **reposicionamentoCoulomb2D fim**

Figura 3.23: Algoritmo básico desenvolvido para atualizar a posição dos pontos móveis empregados para discretizar a região de análise.

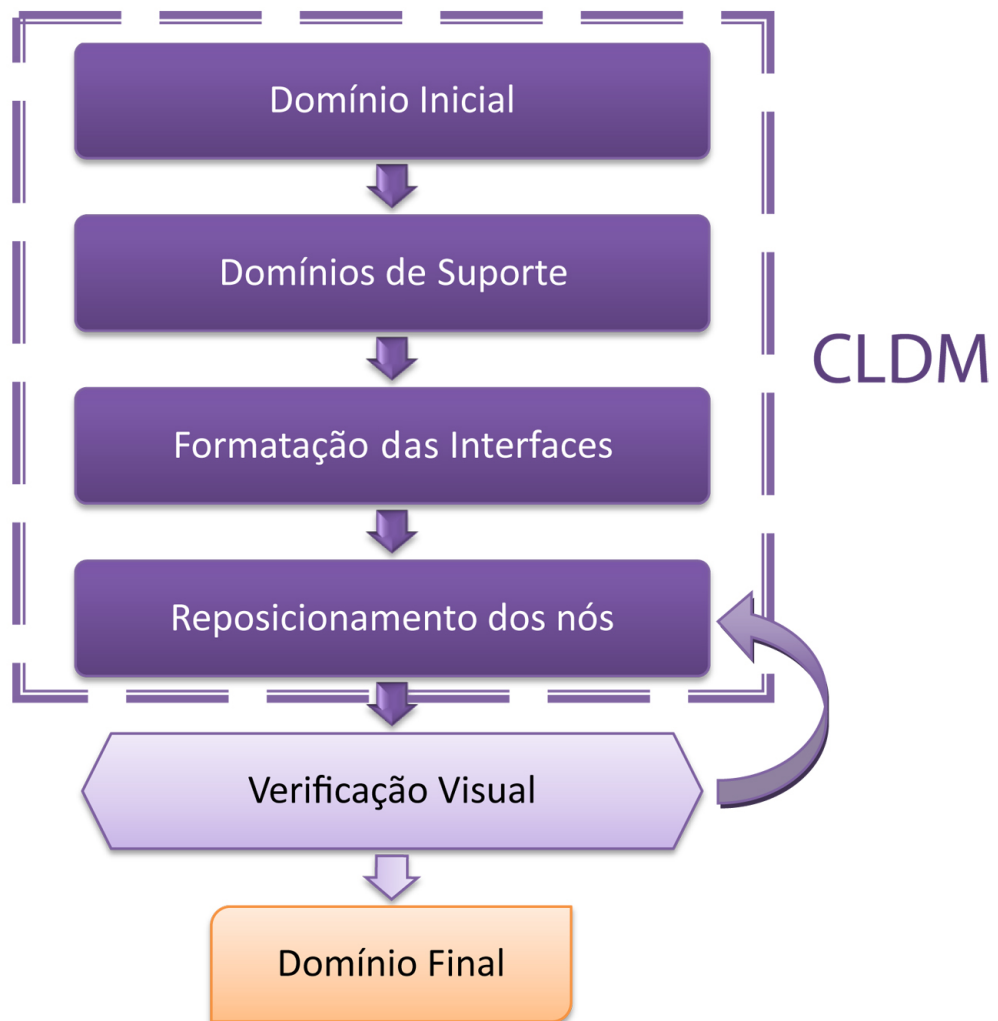


Figura 3.24: Fluxograma representativo do processo de aplicação do método CLDM.

### 3.4 Arranjos na discretização para campos elétrico e magnético

Devido às características da propagação eletromagnética (equações baseadas no rotacional dos campos), onde se observa a dependência mútua entre os campos elétrico e magnético, é necessário dividir o domínio total  $\Omega$  em dois conjuntos de nós que possibilitem a utilização de métodos numéricos em estudos baseados nas equações de Maxwell, de tal forma que,

$$\Omega = V_E + V_H, \quad (3.5)$$

onde  $V_E$  é o conjunto de nós elétricos e  $V_H$  é o conjunto de nós magnéticos. Se os campos  $\vec{E}$  e  $\vec{H}$  forem computados nos mesmos pontos do espaço, problemas de precisão ou de estabilidade podem se manifestar [17].

A forma como estes conjuntos estão distribuídos e interagem entre si é o que caracteriza o arranjo do domínio  $\Omega$ . Existem vários tipos de arranjos. Um dos arranjos mais conhecidos é a célula de Yee para o método *Finite-difference time-domain* (FDTD) [74].

Como citado na seção 2.1.1, os métodos sem malhas possibilitam a utilização de diversos tipos de arranjos, contanto que a qualidade da discretização seja mantida. Porém, neste trabalho, outros fatores, além da qualidade da discretização, devem ser consideradas, como: a utilização de truncagem por UPML e a aplicação do método aqui proposto (CLDM).

A truncagem do método RPIM por UPML promove restrições no tipo de arranjos possíveis. Isto pode ser constatado em experiências realizadas neste trabalho. Nestas experiências, foram testados os níveis de reflexão para vários tipos de arranjos. A Fig.3.25 mostra alguns exemplos de arranjos testados.

Com base nos resultados destas experiências, optou-se por dois tipos de arranjos aqui chamados de Arpim1 e Arpim2, Fig.3.26, pois seus níveis de reflexão foram muito próximos de zero.

Com base em Arpim1 e Arpim2, uma nova bateria de testes foi realizada a partir de



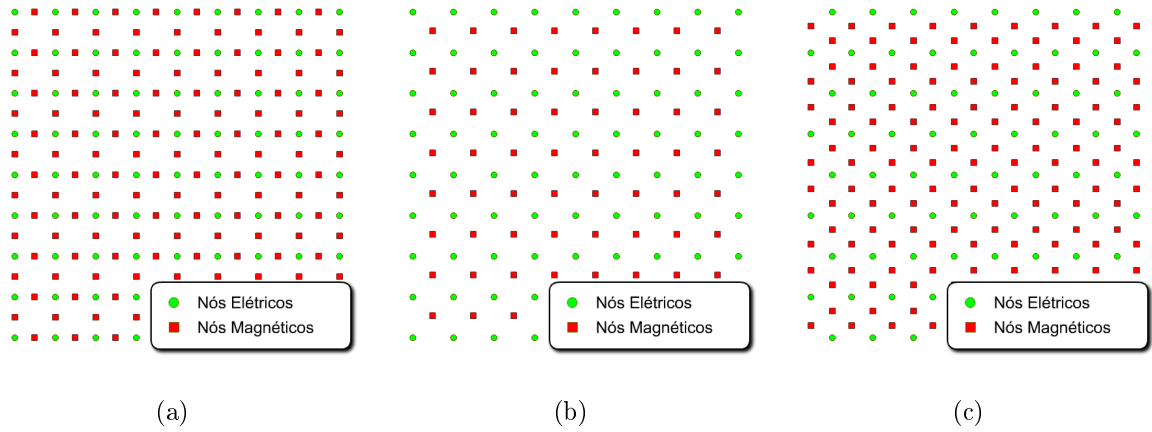


Figura 3.25: Exemplos de arranjos testados. a) Arranjo 1, b) Arranjo 2, c) Arranjo 3.

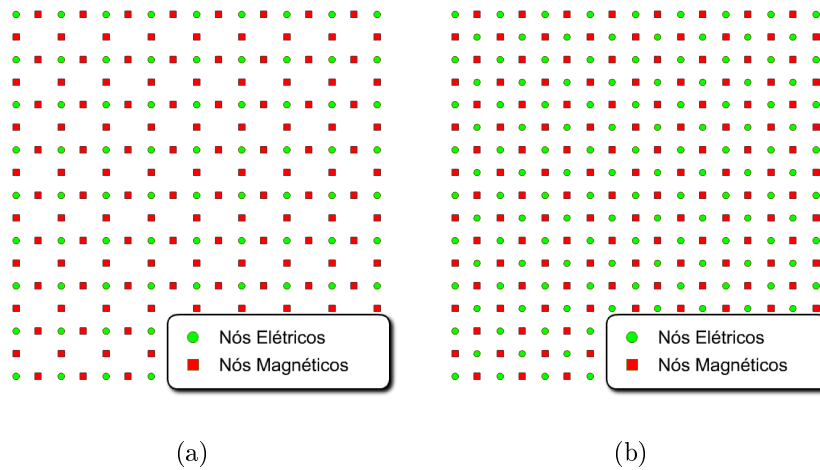


Figura 3.26: Arranjos que possibilitam a truncagem do método RPIM por UPML. a) Arranjo Arpim1, b) Arranjo Arpim2.

combinações entre arranjos. Nestes testes, um dos arranjos Arpim1 ou Arpim2 é utilizado na região de UPML e outro arranjo diferente dos dois é utilizado no domínio de análise  $\Omega_a$ , Fig.3.27.

Para que a combinação entre dois arranjos alcance resultados satisfatórios, é necessário casamento geométrico perfeito na interface entre os dois arranjos, Fig.3.28. Muitos testes foram realizados, porém, nenhum obteve resultado satisfatório, mantendo-se a seleção dos dois arranjos escolhidos anteriormente.

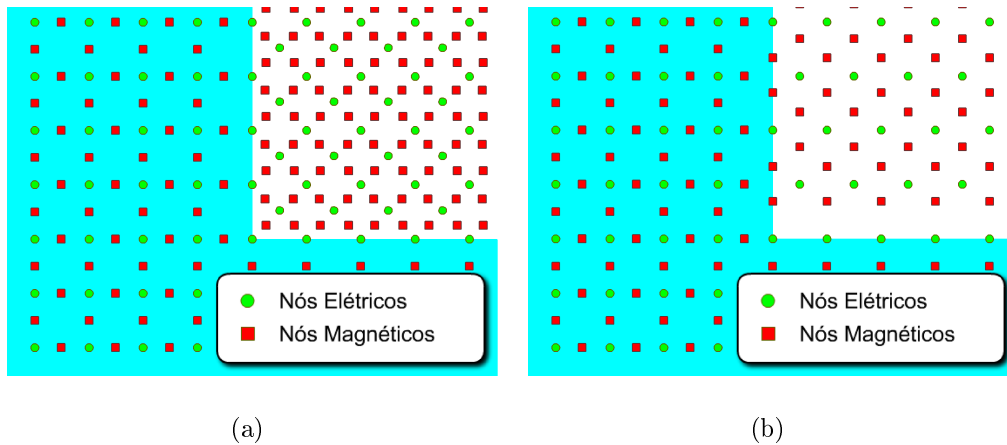


Figura 3.27: Combinação dos arranjos Arpim1 e Arpim2 com outros tipos. a) Combinação 1, b) Combinação 2.

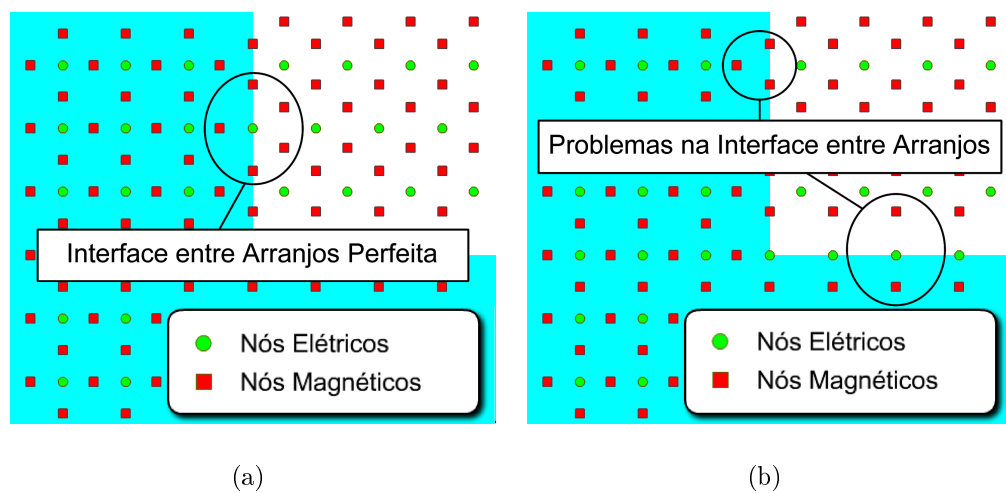


Figura 3.28: Casamento na interface entre arranjos. a) Casamento perfeito na interface, b) Problemas no casamento da interface.

Os resultados dos testes realizados com os arranjos e combinações mostrados neste trabalho, podem ser vistos no Apêndice A.

A aplicação do Método de Discretização Baseada na Lei de Coulomb é outro fator muito importante a ser considerado, pois, para muitos arranjos a aplicação da lei de Coulomb para  $\Omega$  fatalmente não gera organização espacial adequada para o arranjo dos nós devido ao pouco equilíbrio inicial entre cargas.

Muitos arranjos possibilitam a aplicação do método de discretização por Coulomb, porém devido à restrição de absorção imposta pela UPML, discutida anteriormente, apenas Arpim1 e Arpim2 podem ser utilizados.

Inicialmente, optou-se por utilizar Arpim2, pois este arranjo garante certo nível de equilíbrio inicial de cargas para todo o domínio  $\Omega$ , Fig.3.29. Porém, após alguns testes, este tipo de arranjo mostrou-se ineficiente, pois gera problemas no processo de simulação causando erros nos cálculos dos campos e distorções na propagação eletromagnética.

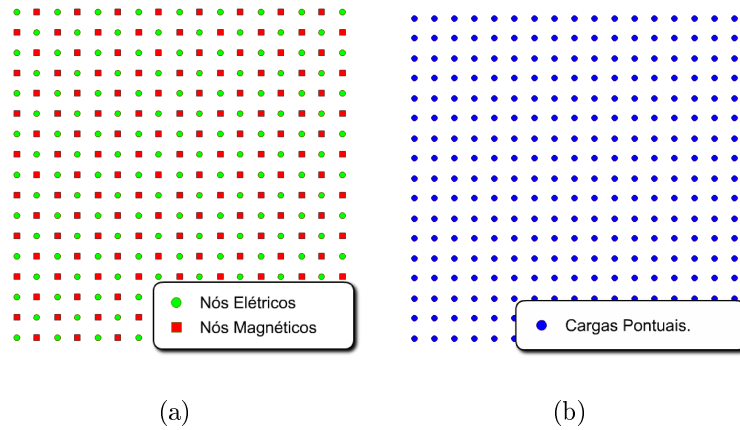


Figura 3.29: Equilíbrio inicial entre cargas para o arranjo Arpim2. a) Domínio  $\Omega$  para o arranjo Arpim2 representado pelos conjuntos  $V_E$  e  $V_H$ , b) Domínio  $\Omega$  para o arranjo Arpim2 representado pelo conjunto de cargas, demonstrando o equilíbrio inicial entre cargas.

Desta forma, o arranjo Arpim1 tornou-se a única opção disponível. Porém, este arranjo não promove o equilíbrio inicial entre cargas, Fig.3.30, o que impossibilita a aplicação da lei de Coulomb no domínio total  $\Omega$ . Para solucionar esta questão, optou-se inicialmente por aplicar a lei de Coulomb apenas ao conjunto de nós elétricos  $V_E$ , pois como pode ser visto na Fig.3.30(c) este conjunto garante o equilíbrio inicial entre cargas, porém isso implica em utilizar outra técnica para ajustar a distribuição do conjunto de nós magnéticos  $V_H$ . Várias propostas foram implementadas, porém, a mais satisfatória baseia-se na ideia de ponto pivô. A ideia é adicionar ao arranjo Arpim1 um nó (ponto pivô) que proporcione

o equilíbrio de cargas desejado, Fig.3.31, sem interferir no domínio de suporte  $\Omega_{SR}(\bar{x}_c)$ , nem na simulação para o RPIM, agindo apenas no cálculo da força de Coulomb.

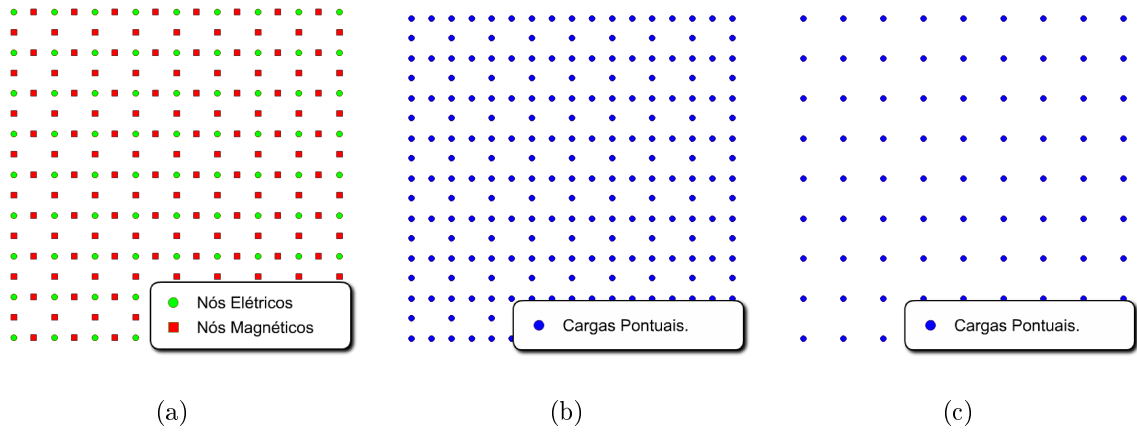


Figura 3.30: Equilíbrio inicial entre cargas para o arranjo Arpim1. a) Domínio  $\Omega$  para o arranjo Arpim1 representado pelos conjuntos  $V_E$  e  $V_H$ , b) Domínio  $\Omega$  para o arranjo Arpim1 representado pelo conjunto de cargas, demonstrando o desequilíbrio inicial entre cargas, c) Conjunto  $V_E$  para o arranjo Arpim1 representado pelo conjunto de cargas, demonstrando o equilíbrio inicial entre cargas.

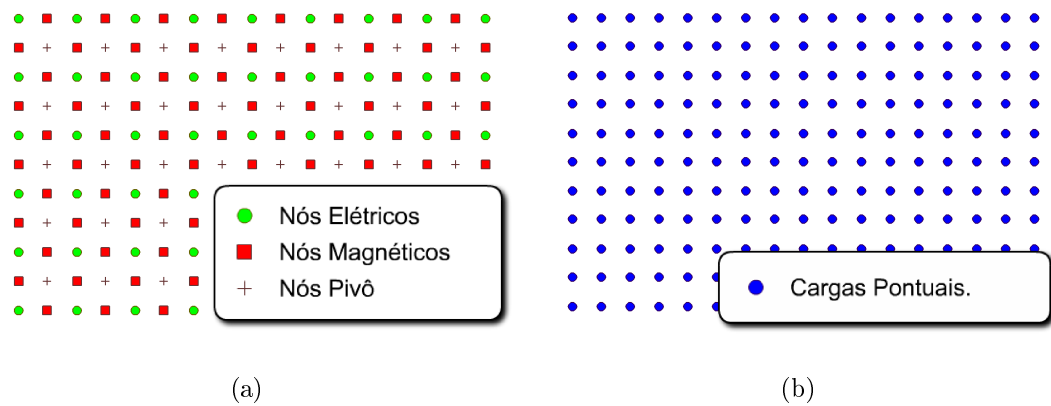


Figura 3.31: Equilíbrio inicial entre cargas para o arranjo Arpim1 com nós pivô. a) Domínio  $\Omega$  para o arranjo Arpim1 com nó pivô representado pelos conjuntos  $V_E$ ,  $V_H$  e conjunto de nós pivôs  $V_{piv}$ , b) Domínio  $\Omega$  para o arranjo Arpim1 com nó pivô representado pelo conjunto de cargas, demonstrando o equilíbrio inicial entre cargas.

Esta solução para o arranjo Arpim1, garante a aplicação do método de Coulomb no domínio total  $\Omega$ , porém, notou-se que a representação dos contornos nas interfaces entre regiões ainda não estava totalmente adequada, Fig.3.32. Por este motivo, optou-se em transformar os nós pivôs que pudessem auxiliar na representação das interfaces em nós elétricos para garantir as condições de contorno para o metal, Fig.3.33. Esta alteração garantiu melhor representação das interfaces entre regiões, o que resultou em melhores resultados das simulações.

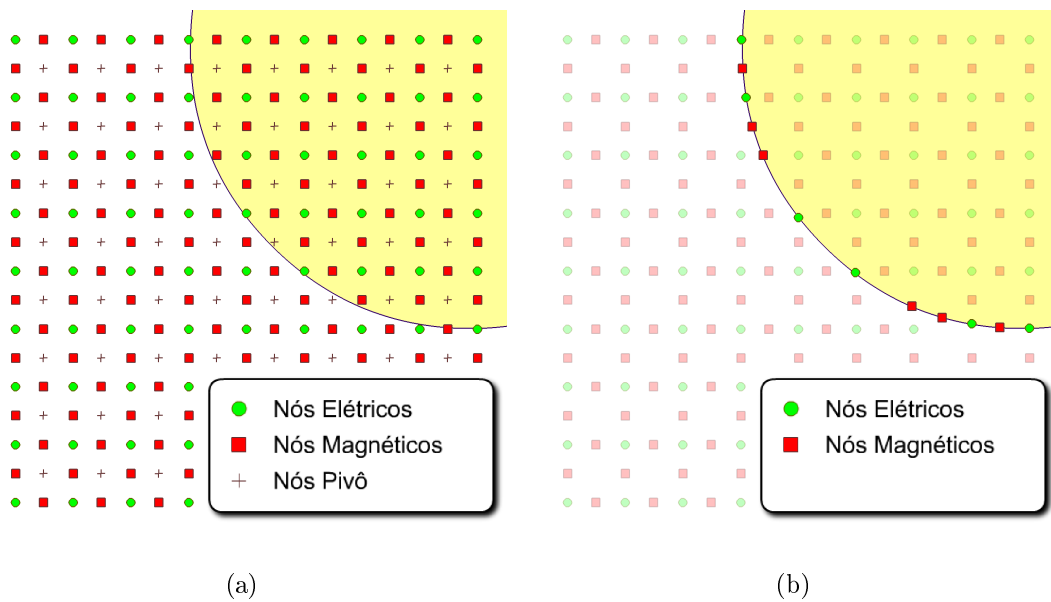
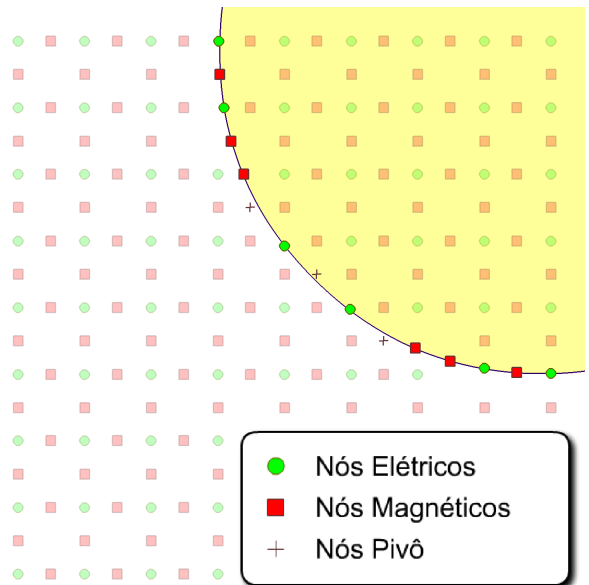
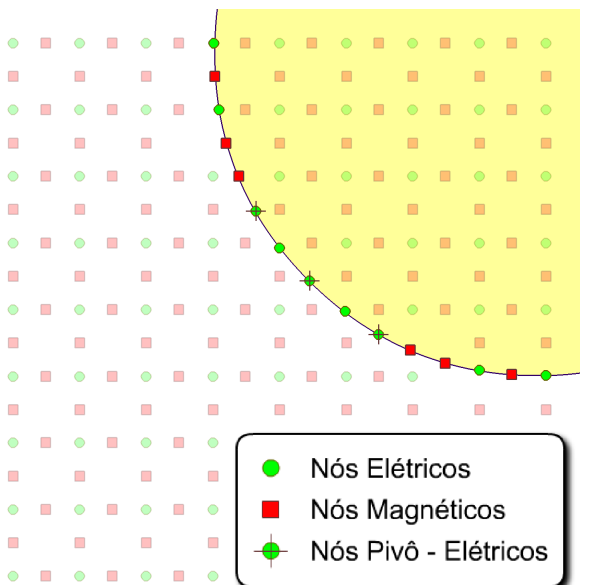


Figura 3.32: Representação da interface entre regiões para o arranjo Arpim1 sem nó pivô, a) Arranjo Arpim1 com nó pivô representado pelos conjuntos  $V_E$ ,  $V_H$  e conjunto de nós pivôs  $V_{piv}$ , b) Representação da interface entre regiões sem nó pivô.



(a)



(b)

Figura 3.33: Representação da interface entre regiões para o arranjo Arpim1 com nó pivô, a) Nós pivôs mais próximos da interface entre regiões, b) Deslocamento dos nós pivôs para interface entre regiões e conversão para nós elétricos, para melhor representação da interface entre regiões garantindo as condições de contorno para o metal.

### 3.5 Avaliação da qualidade da discretização espacial gerada pelo método CLDM

Após a aplicação do método CLDM, tem-se o domínio  $\Omega$  pronto para ser utilizado no processo de simulação eletromagnética por RPIM. A aplicação do método RPIM se divide em duas etapas: o cálculo das derivadas das funções de forma ( $\frac{\partial\Phi(\bar{x})}{\partial x}$  e  $\frac{\partial\Phi(\bar{x})}{\partial y}$ ) e os cálculos das equações de Maxwell para todo o domínio  $\Omega$ , seção 2.3. Porém, para que o método RPIM seja executado com sucesso, é necessário que o nível da qualidade da discretização seja aceitável.

Existem várias maneiras de quantificar a qualidade da discretização [67]. Neste trabalho, esta quantificação é feita através do cálculo do erro de aproximação  $Err^a$ , seção 2.5, pois existe uma relação direta entre a qualidade da discretização e  $Err^a$ , de tal forma que a qualidade da discretização espacial é inversamente proporcional a  $Err^a$ .

A avaliação da qualidade da discretização (cálculo de  $Err^a$ ) é feita durante a primeira etapa de aplicação do método RPIM, quando obtém-se  $\frac{\partial\Phi(\bar{x})}{\partial x}$  e  $\frac{\partial\Phi(\bar{x})}{\partial y}$  para cada nó  $\bar{x} \in \Omega$ . Estas funções são inicialmente calculadas para o fator de forma  $c = 0.01$  e, a partir das derivadas de  $\Phi(\bar{x})$ , pode-se calcular  $Err^a$  para cada derivada parcial em cada nó  $\bar{x} \in \Omega$ .

Este critério de quantificação da qualidade da discretização, que aqui é proposto, é uma solução conveniente, pois avalia a discretização espacial diretamente em relação ao método RPIM. Dessa forma, na verdade, avalia-se a qualidade de cada domínio de suporte.

As figuras de 3.34 a 3.38 apresentam alguns resultados da avaliação da qualidade da discretização, para o caso de um domínio  $\Omega$  com distribuição irregular (visualização na interface gráfica aqui desenvolvida). A avaliação é feita com base no erro de aproximação máximo ( $Err_{max}^a$ ), que é o valor do erro de interpolação máximo tolerado para todos os domínios de suporte  $\Omega_{SR}(\bar{x}_c)$ . Neste trabalho, são utilizados como parâmetro de referência para  $Err_{max}^a$  os erros dos nós pertencentes a região de UPML, pois garante-se que estes nós possuem a melhor distribuição para  $\Omega_{SR}(\bar{x}_c)$  de todo o domínio  $\Omega$ , com erro máximo

$Err_{max}^a$  de  $10^{-4}\%$ .

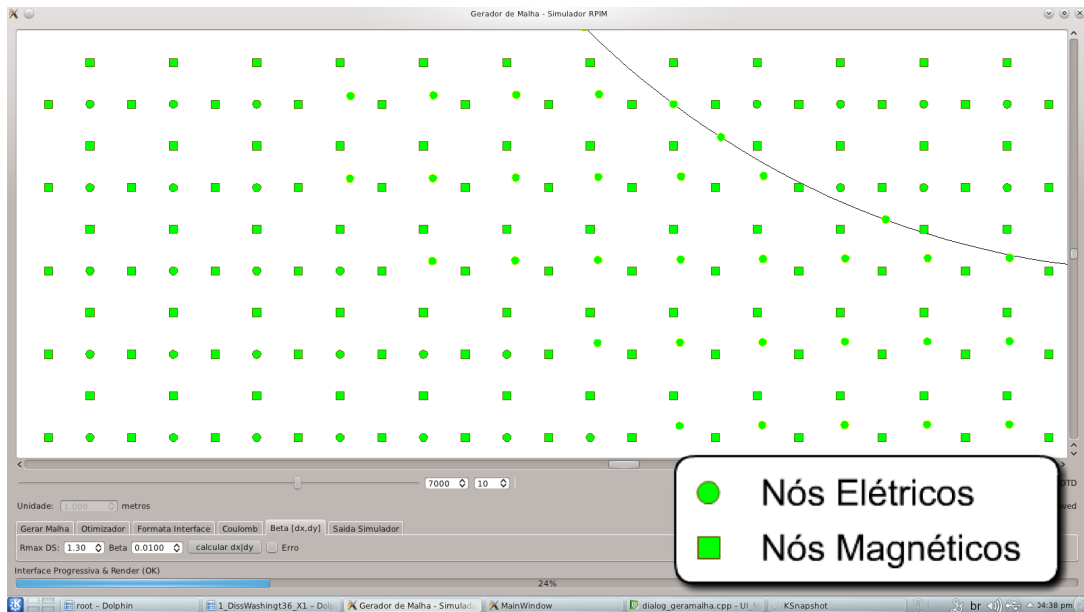


Figura 3.34: Domínio  $\Omega$  com distribuição irregular, sem aplicar *Reposicionamento dos Nós* utilizando a lei de Coulomb.

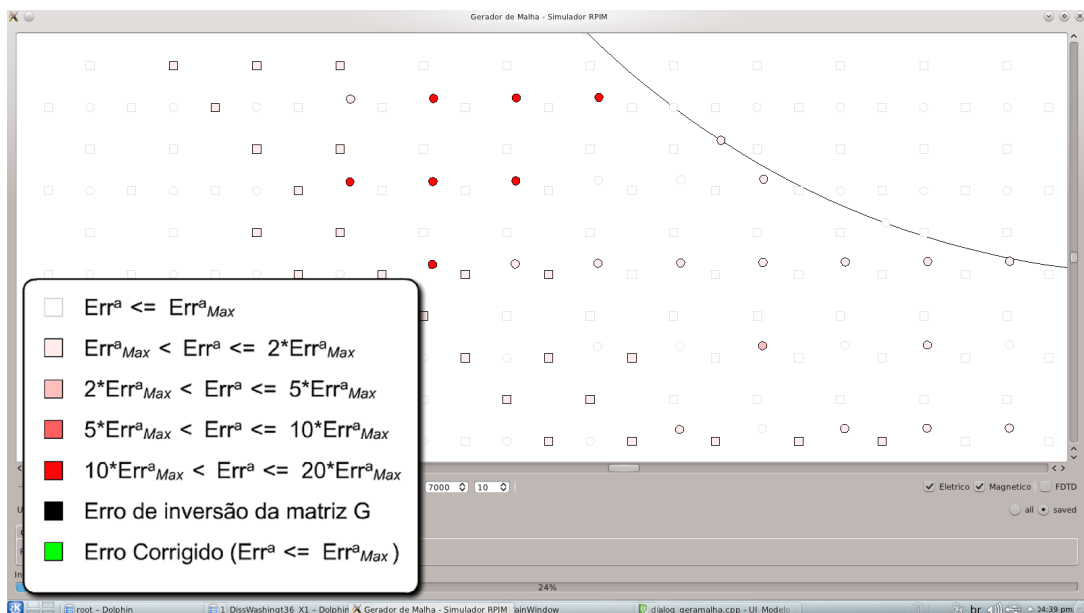


Figura 3.35: Avaliação do domínio  $\Omega$  com distribuição irregular, sem aplicar *Reposicionamento dos Nós* utilizando a lei de Coulomb.  $Err^a$  calculados para  $c = 0.01$ .



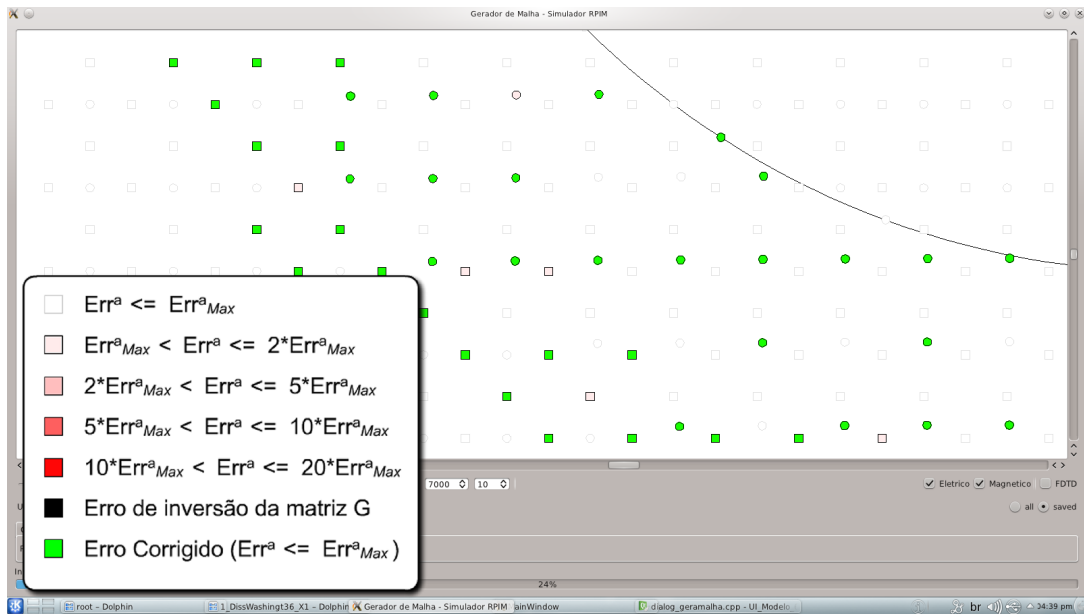


Figura 3.36: Avaliação do domínio  $\Omega$  com distribuição irregular, sem aplicar *Reposicionamento dos Nós* utilizando a lei de Coulomb. Ajuste do  $Err^a$  utilizando força bruta e falsa posição, seção 2.5.

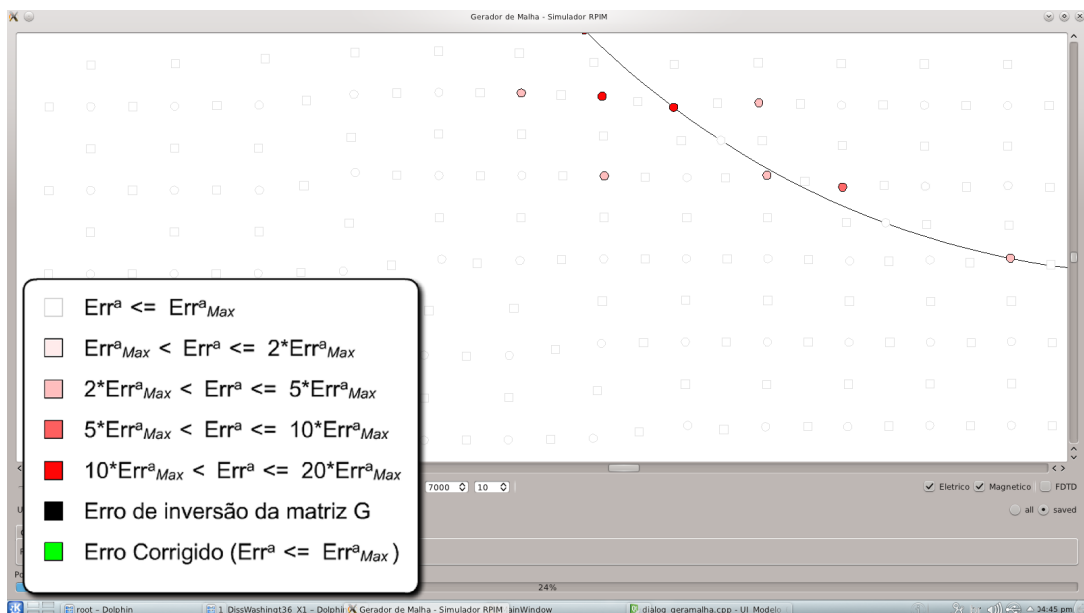


Figura 3.37: Avaliação do domínio  $\Omega$  com distribuição irregular, após aplicar *Reposicionamento dos Nós* utilizando a lei de Coulomb.  $Err^a$  calculados para  $c = 0.01$ .

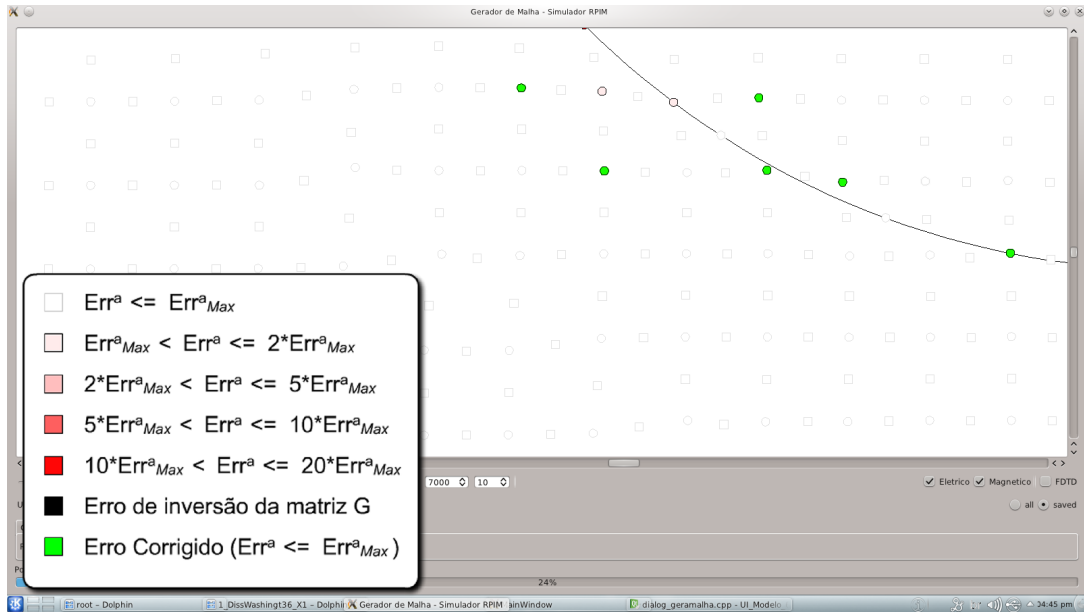


Figura 3.38: Avaliação do domínio  $\Omega$  com distribuição irregular, após aplicar *Reposicionamento dos Nós* utilizando a lei de Coulomb. Ajuste do  $Err^a$  utilizando força bruta e falsa posição, seção 2.5.

Em casos que  $Err^a > Err^a_{max}$ , aplica-se o método apresentado na seção 2.5 para ajustar os valores de  $\frac{\partial\Phi(\bar{x})}{\partial x}$  e  $\frac{\partial\Phi(\bar{x})}{\partial y}$ , a fim de, diminuir  $Err^a$  causado pela baixa qualidade da discretização. Caso isso não funcione, ajusta-se a distribuição dos nós com o método CLDM até que a qualidade da discretização espacial chegue a níveis aceitáveis.

A Fig.3.39 apresenta o fluxograma que descreve a aplicação do método CLDM e do processo de avaliação da qualidade da discretização espacial gerada pelo método CLDM.

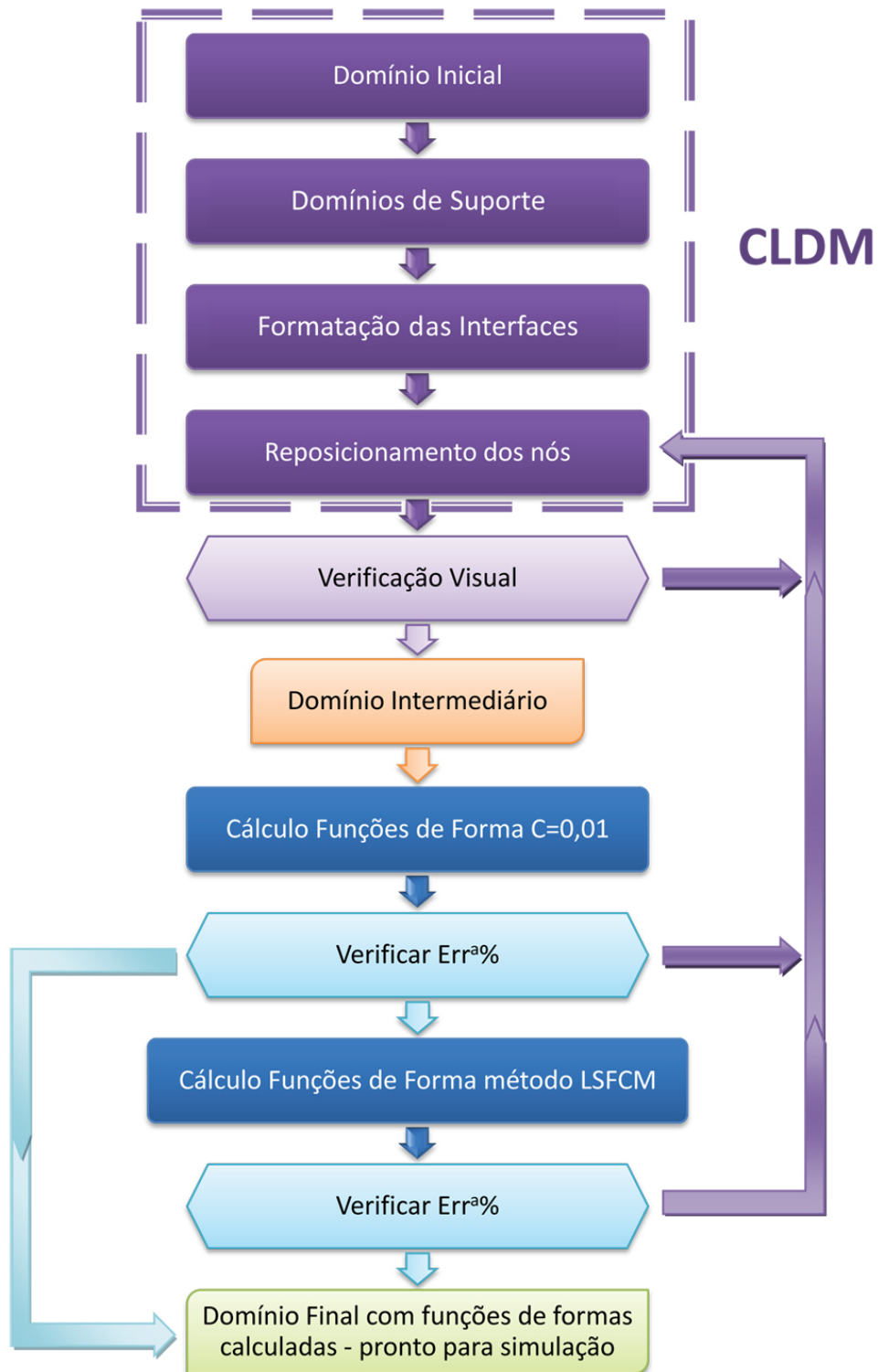


Figura 3.39: Fluxograma representativo do processo de aplicação do método CLDM e avaliação da discretização gerada por este método.

# Capítulo 4

## Simulações Numéricas e Análise de Resultados

Neste capítulo, são apresentados resultados de simulações realizadas utilizando os softwares e métodos desenvolvidos neste trabalho. O objetivo é validar o método RPIM com discretização espacial obtida através do método proposto: CLDM.

### 4.1 Casos de validação

A eficiência, a estabilidade e a precisão são de fundamental importância para o sucesso de um método numérico. O processo de validação tem a finalidade de garantir, através de estudos numéricos, que o método concorde com soluções analíticas, assegurando a consistência dos resultados.

Nesta seção, são apresentados cinco estudos de caso que foram realizados com a finalidade de validar as implementações bidimensionais do método RPIM com CLDM. Os quatro primeiros são análises do espalhamento eletromagnético gerado a partir de diferentes tipos de espalhadores. No último caso, analisam-se os coeficientes de transmissão e reflexão, para uma estrutura periódica (PBG).

Em todos os casos, foram realizadas simulações com o método RPIM (CLDM) e com

o método FDTD. Todos os resultados foram comparados com soluções analíticas.

#### 4.1.1 Caso 1 - Cilindro Metálico

O primeiro caso de validação é baseado no problema de espalhamento eletromagnético gerado por um cilindro metálico descrito no livro *Advanced Engineering Electromagnetics* [15]. A análise deste problema é feita para campos próximos do espalhador que está inserido em uma região do espaço livre, onde se propaga uma onda eletromagnética plana. Este estudo é realizado para duas dimensões e a Fig.4.1 representa a seção transversal da região do problema no plano-xy. O modo de propagação é o TMz e a onda plana é excitada através da componente z do campo elétrico.

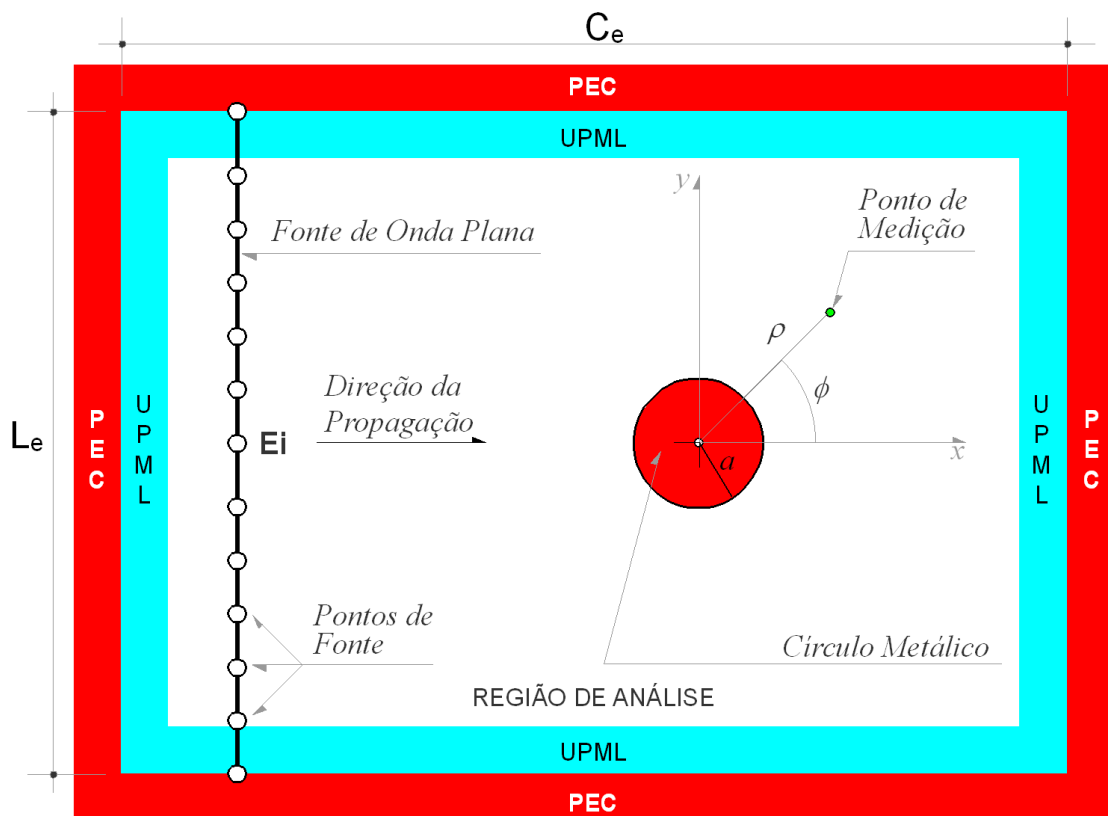


Figura 4.1: Representação do problema no plano-xy.

O espalhador utilizado neste caso é um cilindro circular metálico de raio  $a = 0.05$  metro e comprimento infinito na direção z, Fig.4.2.

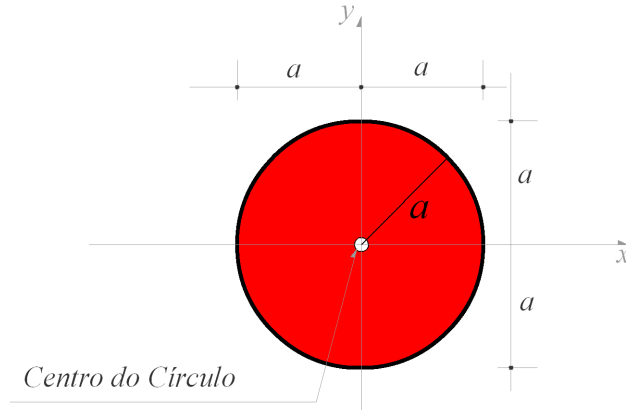


Figura 4.2: Círculo metálico e suas medidas.

A fonte de excitação usada é uma onda plana localizada a uma distância de  $D_{fb} = 0.8$  metro do centro do círculo, Fig.4.3. Ressalta-se que a distância entre os nós que descrevem a fonte  $\Delta^{fonte}$  (onda plana) deve ser menor ou igual a  $\lambda_{min}/10$ , baseando-se na distância mínima entre os nós  $\Delta_{min}$  definida para o domínio de análise  $\Omega_a$ .

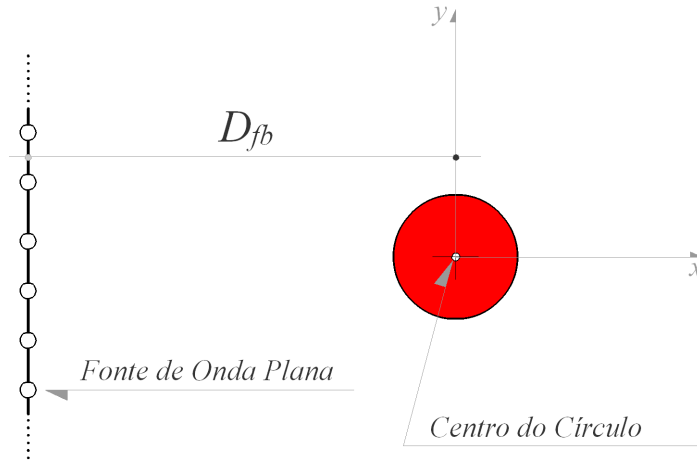


Figura 4.3: Posicionamento da fonte.

O sinal de excitação é descrito por um pulso monociclo gaussiano dado por

$$p(t) = A_p \sqrt{\frac{2e}{\tau^2}} (t - t_0) e^{-\frac{(t-t_0)^2}{\tau^2}}, \quad (4.1)$$

onde  $A_p$  é a amplitude do pico do sinal,  $\tau$  é um indicador da largura temporal do pulso e está relacionado a  $f_c$  e  $bw$ ,  $t_0$  é o instante que corresponde ao centro do pulso,  $e$  é a constante de Neper ( $e \approx 2,71828$ ) e  $t$  é o tempo em segundos.

O monociclo gaussiano é um sinal de banda larga, no qual a largura de banda é definida como  $bw = f_{max} - f_{min}$  e a frequência central  $f_c = f_{min} + bw/2$ , onde  $f_{min}$  e  $f_{max}$  são os pontos de amplitude de 10dB do espectro. Para este caso, utilizou-se a largura de banda igual a  $bw \approx 1.5GHz$  e a frequência central de  $f_c = 0.75GHz$ . A Fig.4.4 mostra este sinal no domínio do tempo e a Fig.4.5 no domínio da frequência.

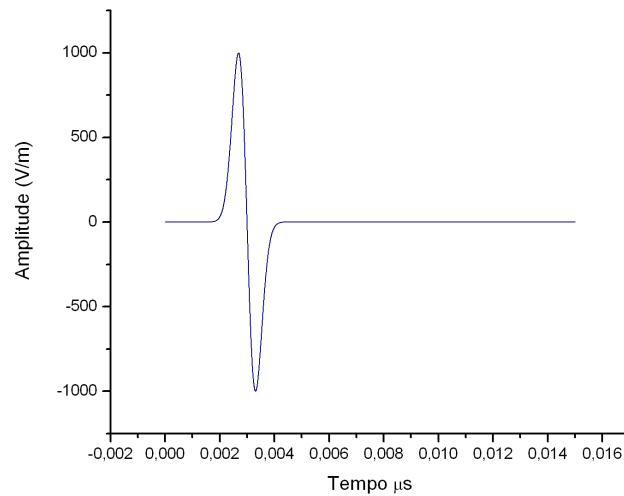


Figura 4.4: Sinal monociclo gaussiano.

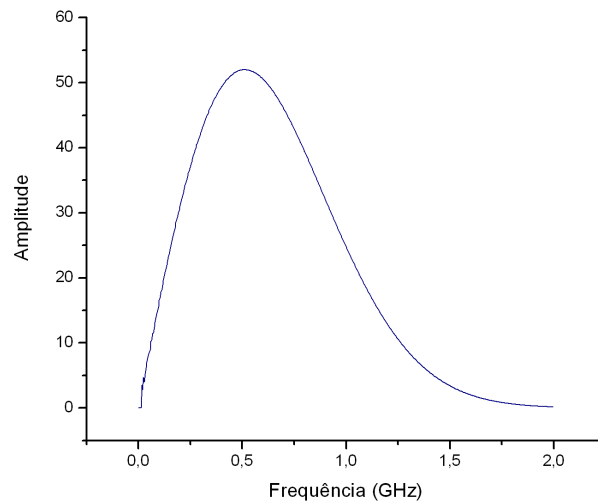


Figura 4.5: Espectro de frequência do monociclo gaussiano.

Os pontos de medição estão distribuídos na região de sombra do círculo, Fig.4.6. A

distância do receptor ao centro do círculo é  $\rho_1 = 0.06$  metro.

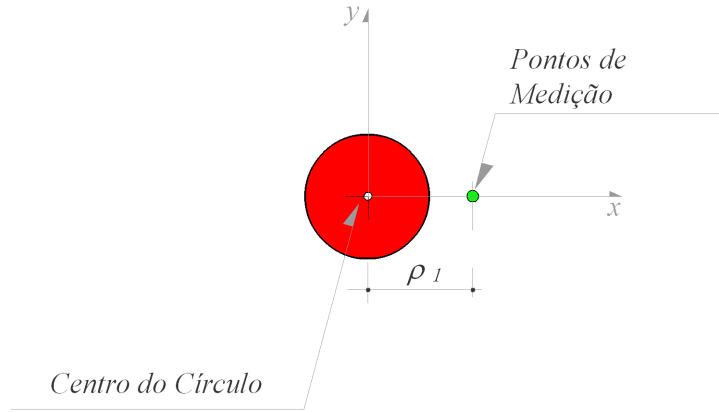
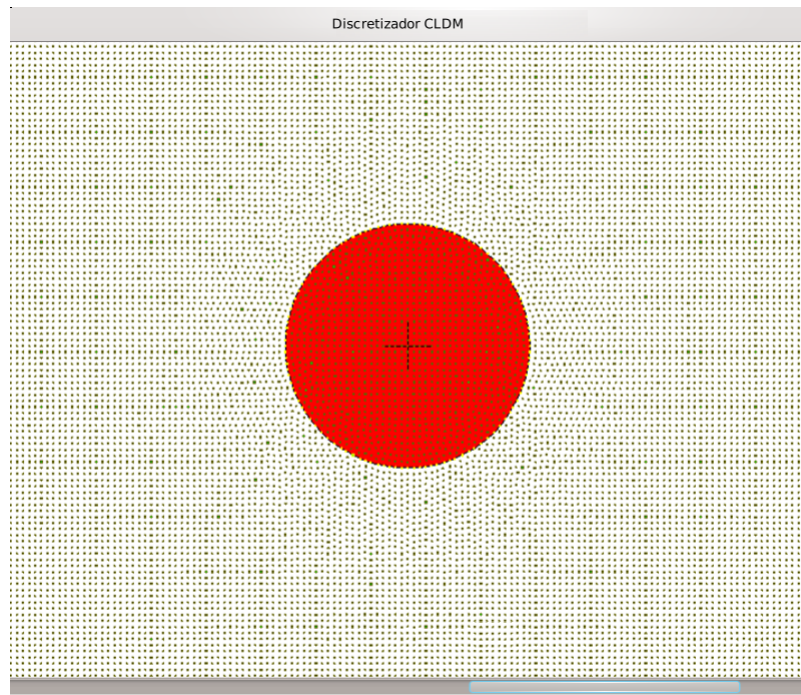


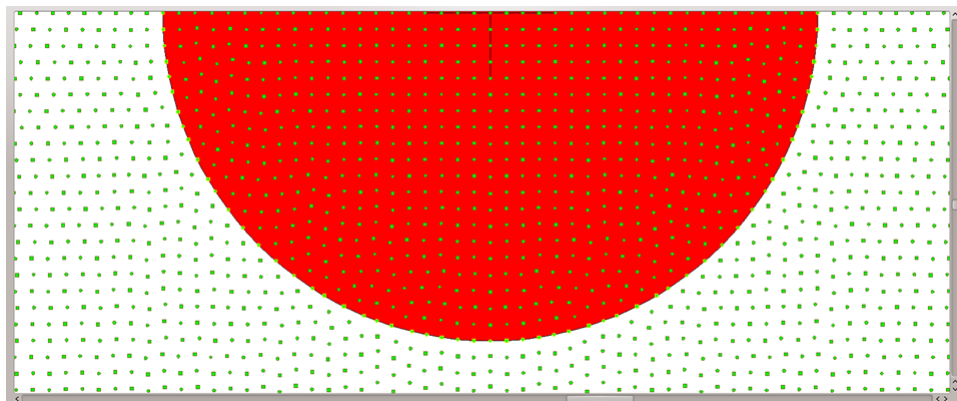
Figura 4.6: Distribuição do ponto de medição.

A distribuição dos nós no domínio foi gerada a partir do método CLDM, com base na distância mínima entre os nós  $\Delta_{min}$  que deve ser menor ou igual a  $\lambda_{min}/10$ , para  $\lambda_{min} = C_0/f_{max}$  (mínimo comprimento de onda), onde  $C_0$  é a velocidade da luz e  $f_{max}$  a frequência máxima do pulso a ser aplicado. Para este caso, a distância mínima entre os nós é dada por  $\Delta_{min} = \lambda_{min}/40 = 0.005(m)$ . Este valor de  $\Delta_{min}$  foi definido após simulações utilizando  $\lambda_{min}/20$ ,  $\lambda_{min}/25$  e por fim  $\lambda_{min}/40$ , que gerou melhor resultado. A comparação dos resultados destas simulações pode ser vista no Apêndice B. O resultado obtido para discretização por CLDM é apresentado na Fig.4.7. Como pode ser visto, a região do cilindro foi discretizada de modo conformal, representando de forma adequada a interface entre regiões e garantindo o equilíbrio da distribuição de nós.





(a)



(b)

Figura 4.7: Discretização espacial da região próxima ao espalhador obtida com o método CLDM. a)Zoom=1000, b)Zoom=2500.

Foram realizadas simulações para os métodos RPIM e FDTD. Os parâmetros das simulações podem ser vistos na Tabela 4.1.

Tabela 4.1: Parâmetros de simulação

PARÂMETROS	RPIM	FDTD
Tamanho da Região de Análise+UPML= $L_e \times C_e$ (m)	0.6 x 1.6	0.6 x 1.6
$f_c(GHz)$ (frequência central do pulso de excitação)	0.75	0.75
$bw[f_{min}, f_{max}](GHz)$	[1.0e-3, 1.5]	[1.0e-3, 1.5]
$dt(s)$	3.0e-12	3.0e-12
$A_p(V/m)$	1	1
$\tau(s)$	440.0e-12	440.0e-12
$t_0(s)$	3000.0e-12	3000.0e-12
$\lambda_{min} = C_0/f_{max}(m)$	0.2	0.2
$\Delta_{min} = \Delta x = \Delta y(m)$ (distância mínima entre pontos)	$\lambda_{min}/40$	$\lambda_{min}/40$
Quantidade de pontos de medição	1	1
Número de iterações no tempo	5000	5000

As propagações do pulso para as simulações em RPIM, podem ser vistas nas Fig.4.8 a Fig.4.15 .

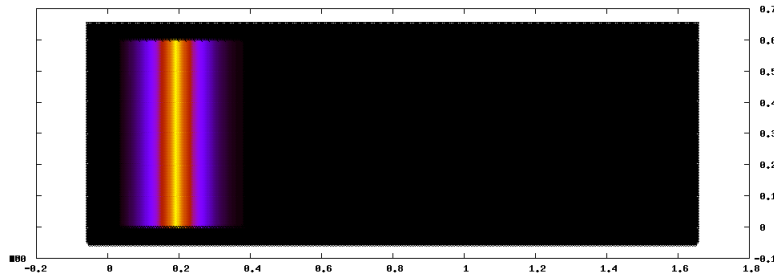


Figura 4.8: Distribuição da componente Ez total no instante  $t = 2.4ns$ .

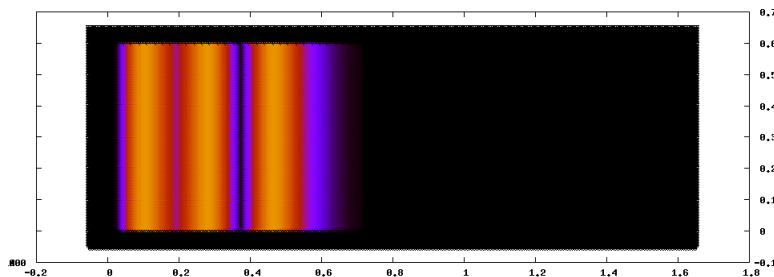


Figura 4.9: Distribuição da componente Ez total no instante  $t = 3.6ns$ .

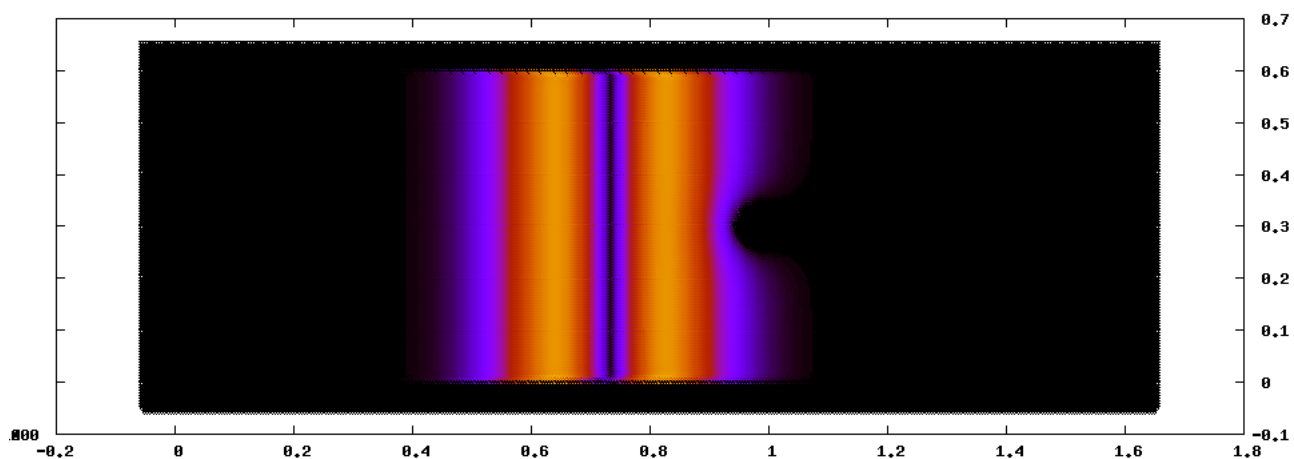


Figura 4.10: Distribuição da componente  $E_z$  total no instante  $t = 4.8ns$ .

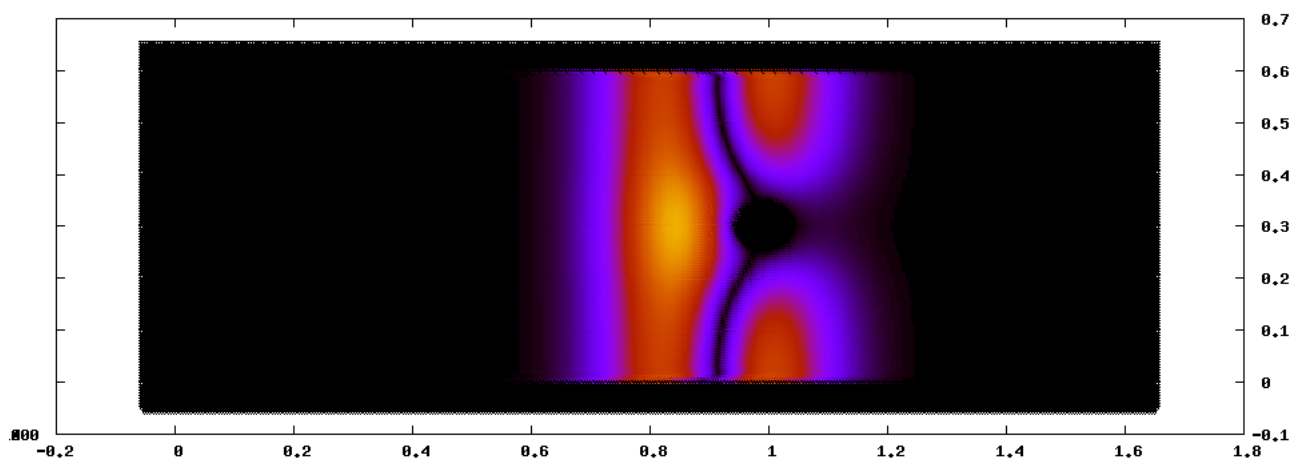


Figura 4.11: Distribuição da componente  $E_z$  total no instante  $t = 5.4ns$ .

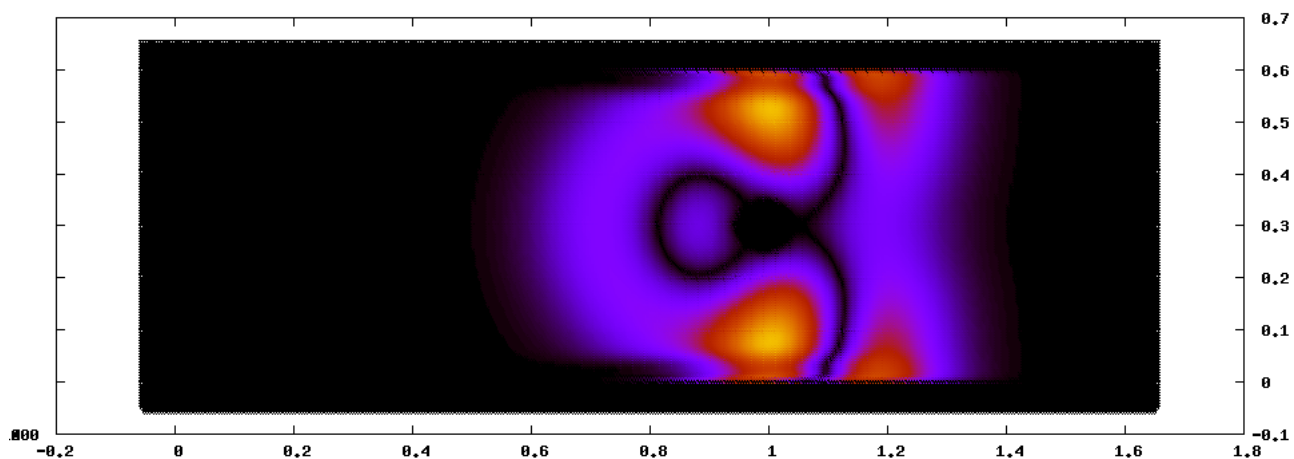


Figura 4.12: Distribuição da componente  $E_z$  total no instante  $t = 6.0ns$ .

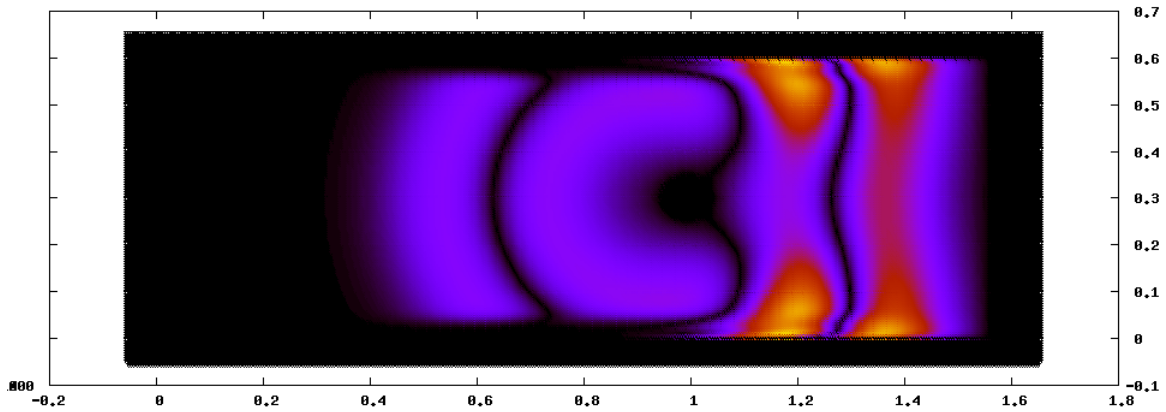


Figura 4.13: Distribuição da componente  $E_z$  total no instante  $t = 6.6ns$ .

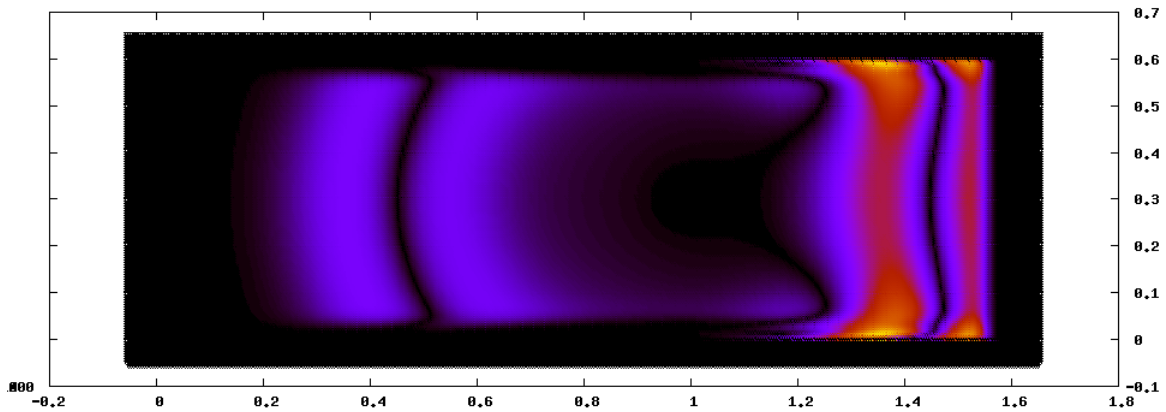


Figura 4.14: Distribuição da componente  $E_z$  total no instante  $t = 7.2ns$ .

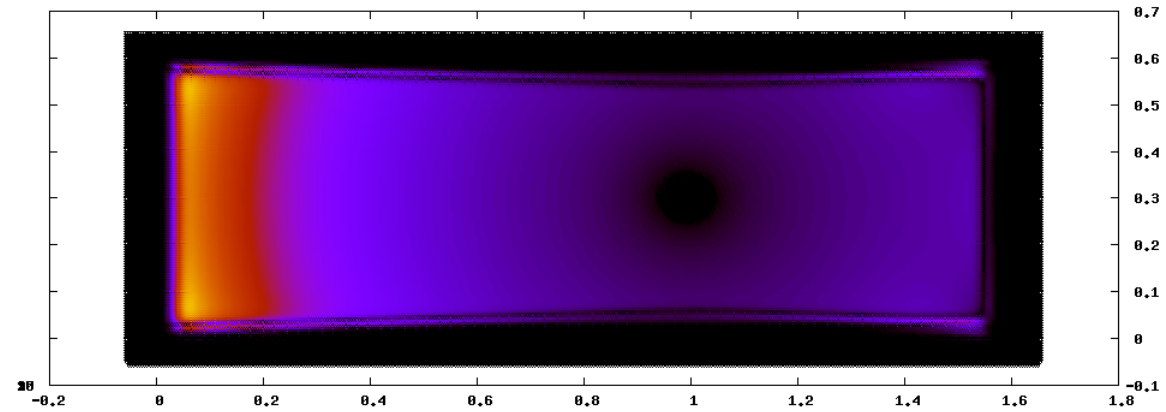


Figura 4.15: Distribuição da componente  $E_z$  total no instante  $t = 9.6ns$ .

O tempo de processamento serial da simulação foi 92 segundos para o método FDTD e 620 segundos para o método RPIM. A solução analítica deste problema foi obtida a partir do cálculo para campos próximos, apresentado por Balanis [15]. Esta formulação obtém os resultados para o domínio da frequência. Por este motivo, para tornar possível

a comparação, é necessário calcular a transformada de Fourier dos sinais transitórios do campo elétrico. A Fig.B.1 mostra a comparação dos espectros de frequência dos resultados obtidos nas simulações (RPIM e FDTD) com a solução analítica.

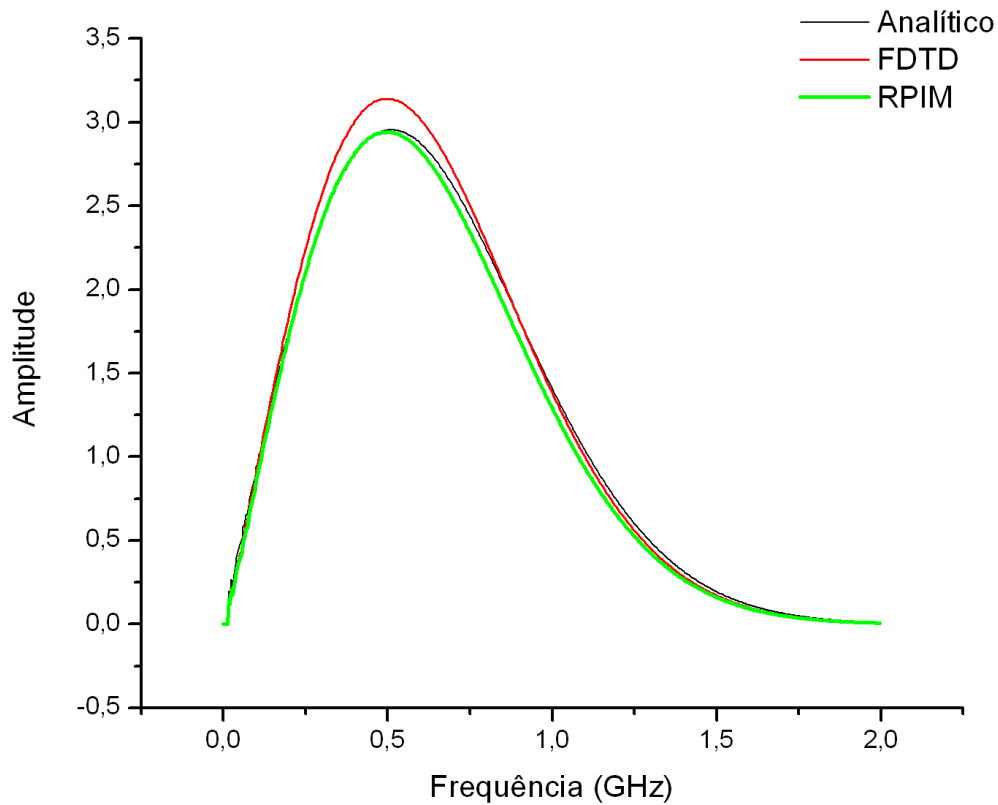


Figura 4.16: Comparação dos resultados para o método RPIM, FDTD e solução analítica. Ponto de medição  $\rho_1$

Como pode ser visto, apesar do maior tempo computacional, o resultado obtido pelo método RPIM (com CLDM), ficou mais próximo da solução analítica do que o obtido pelo método FDTD. Isso valida a aplicação do método RPIM e da discretização pelo método CLDM para este caso de espalhamento eletromagnético.

Para comparação dos resultados, tentou-se gerar a distribuição dos nós no domínio utilizando o software GiD [75]. Porém, as discretizações geradas não se adaptaram ao método RPIM com UPML, o que resultou em altos níveis de reflexão na interface entre a região de análise e a UPML.

### 4.1.2 Caso 2 - RCS Cilindro Triangular

O problema abordado neste caso também é um estudo sobre espalhamento eletromagnético. Porém, diferente do caso anterior, a análise é feita para campos distantes através do cálculo do parâmetro *Radar Cross Section* (RCS).

A RCS é uma medida que compara o campo elétrico irradiado com o campo elétrico espalhado, a fim de mensurar a capacidade de espalhamento de um determinado objeto chamado de espalhador. Esta métrica possui muitas aplicações práticas e é muito utilizada para detecção e definição de alvos [76, 17, 15].

A necessidade de utilizar pontos de observação muito distantes é o maior inconveniente da aplicação da RCS para simulações baseados em métodos numéricos, pois requer a geração de um domínio de análise muito grande, ocasionando alto custo computacional.

A fim de solucionar este problema, Bavelis [76] propõe uma expressão que possibilita calcular a RCS-2D de forma numérica, utilizando pontos de observação próximos do objeto a ser analisado. Isso facilita a implementação de métodos numéricos para solução de problemas com RCS. A versão bidimensional da RCS é definida por

$$\sigma_{2-D} = \lim_{\rho \rightarrow \infty} \left[ 2\pi\rho \frac{|\tilde{\Phi}_z^{sc}|^2}{|\tilde{\Phi}_z^{inc}|^2} \right], \quad (4.2)$$

onde  $\rho$  é a distância do centro do objeto espalhador ao ponto de observação,  $\tilde{\Phi}_z^{sc}$  é o campo elétrico (ou magnético) espalhado, e  $\tilde{\Phi}_z^{inc}$  é o campo elétrico (ou magnético) incidente. O campo total  $\tilde{\Phi}_z^t$  é a soma dos campo espalhado e incidente, ou seja,

$$\tilde{\Phi}_z^t = \tilde{\Phi}_z^{sc} + \tilde{\Phi}_z^{inc}, \quad (4.3)$$

O cálculo proposto por Bavelis expressa a RCS em termos do campo elétrico (para o modo TMz), a partir de

$$A_n = \frac{\int_{\Gamma_x} \tilde{E}_z^{sc}(\rho_a, \phi) e^{-jn\phi} d\Gamma}{2\pi\rho_a H_n^{(2)}(k_0\rho_a)} \quad (4.4)$$

e, para um dado ângulo  $\theta$ , tem-se

$$\sigma_{2-D}(\theta) = \frac{2\lambda \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n j^n e^{jn\theta}}{\pi \tilde{\Phi}_z^{inc}}, \quad (4.5)$$

onde  $H_n^{(2)}$  é a função de Hankel de segunda espécie de ordem  $n$ ,  $k_0$  é o número de onda no vácuo,  $\tilde{E}_z^{sc}$  é a intensidade do campo elétrico espalhado,  $\rho_a$  e  $\phi$  são o raio e o ângulo onde o campo é calculado,  $\Gamma$  é o contorno circular onde o campo é calculado,  $d\Gamma = \rho_a d\phi$  e  $\lambda$  é o comprimento de onda igual a  $C_0/f_c$ . Para os casos deste trabalho,  $\lambda = 1(m)$ .

As equações (4.4) e (4.5) permitem calcular a RCS-2D utilizando medições do campo elétrico próximo do espalhador, pois a condição de campo distante está implícita na equação.

O espalhador utilizado para este caso é um cilindro triangular metálico com comprimento infinito na direção  $z$ , posicionado no centro de uma região do espaço livre, onde se propaga uma onda eletromagnética plana. A Fig.4.17 mostra a representação deste problema no plano  $xy$ .

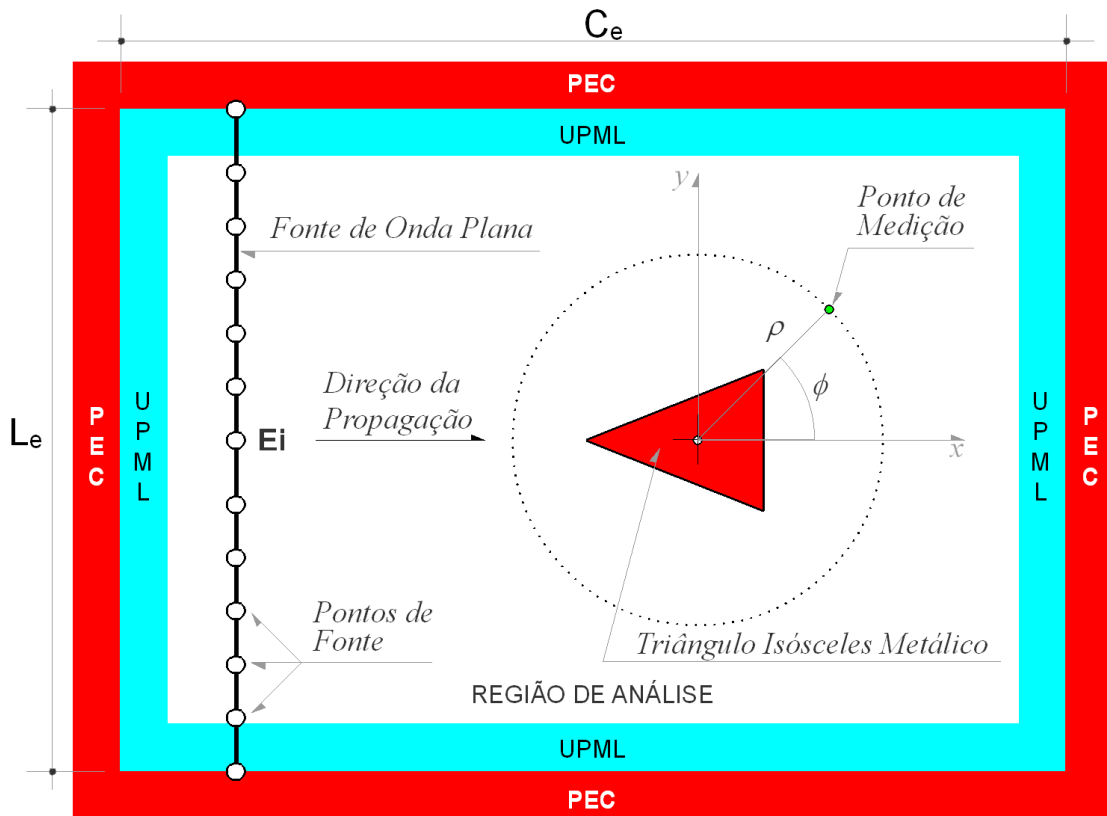


Figura 4.17: Representação do problema no plano-xy.

A geometria base deste cilindro metálico é um triângulo isósceles de base  $\sqrt{2}\lambda$  e altura  $(1 + \sqrt{2})\lambda$ , Fig.4.18.

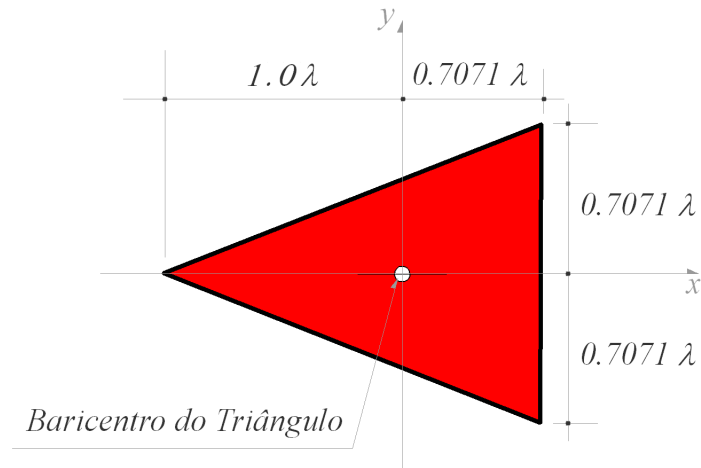


Figura 4.18: Triângulo isósceles e suas medidas.

A fonte de excitação usada é uma onda plana localizada a uma distância de 8 metros do baricentro do triângulo, Fig.4.19. A distância entre os nós que descrevem a fonte  $\Delta^{fonte}$  basea-se na distância mínima entre os nós  $\Delta_{min}$ , definida para o domínio de análise  $\Omega_a$ .

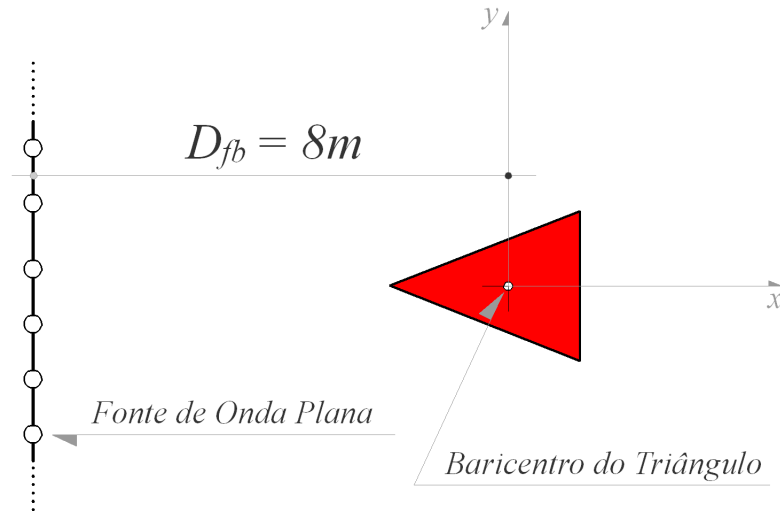


Figura 4.19: Posicionamento da fonte.

O sinal é descrito por um pulso monociclo gaussiano

$$p(t) = A_p \sqrt{\frac{2e}{\tau^2}} (t - t_0) e^{-\frac{(t-t_0)^2}{\tau^2}}, \quad (4.6)$$

onde  $A_p$  é a amplitude do pico do sinal,  $\tau$  é um indicador da largura temporal do pulso e está relacionado a  $f_c$  e  $bw$ ,  $t_0$  é o instante que corresponde ao centro do pulso,  $e$  é a contante de Neper ( $e \approx 2,71828$ ) e  $t$  é o tempo.



Para este caso, utilizou-se a largura de banda igual a  $bw \approx 600MHz$  e a frequência central de  $f_c = 300MHz$ . A Fig.4.20 mostra este sinal no domínio do tempo e a no domínio da frequência.

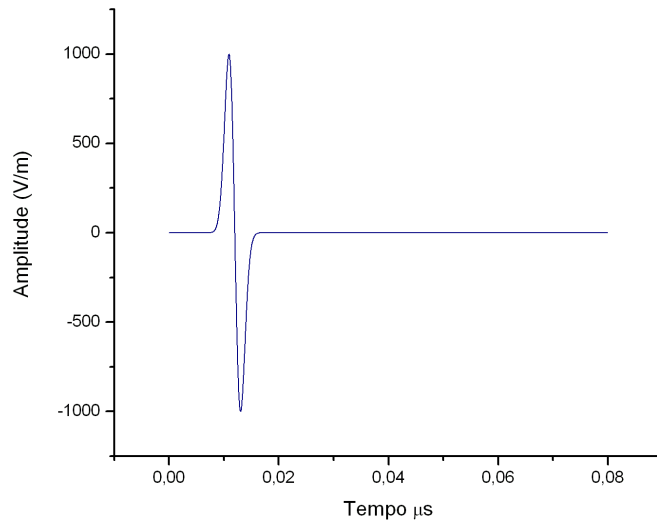


Figura 4.20: Sinal monociclo gaussiano.

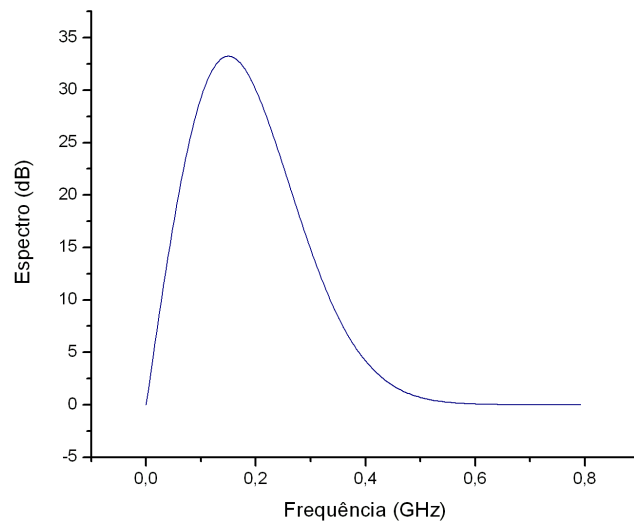


Figura 4.21: Espectro de frequência do monociclo gaussiano.

Os pontos de medição estão distribuídos em torno de uma circunferência virtual que envolve o triângulo, Fig.4.22. O raio desta circunferência mede 1.5 metros e o seu centro coincide com o baricentro do triângulo.

A discretização espacial obtida a partir da aplicação do método CLDM para este caso, resulta na distribuição de nós apresentada nas Figs.4.23 e 4.24, onde a distância mínima

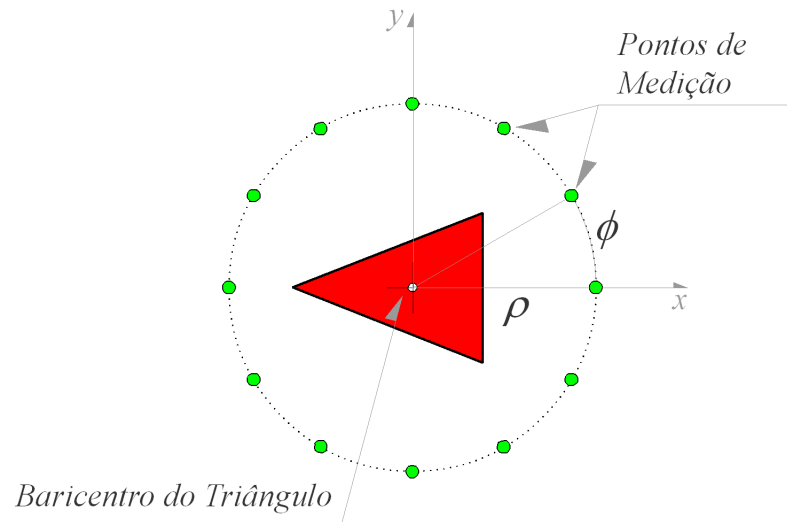


Figura 4.22: Distribuição dos pontos de medição.

entre os nós  $\Delta_{min}$  é  $\lambda_{min}/20$ . Como pode ser visto, a representação das interfaces entre regiões é satisfatória e o equilíbrio da distribuição é garantido.

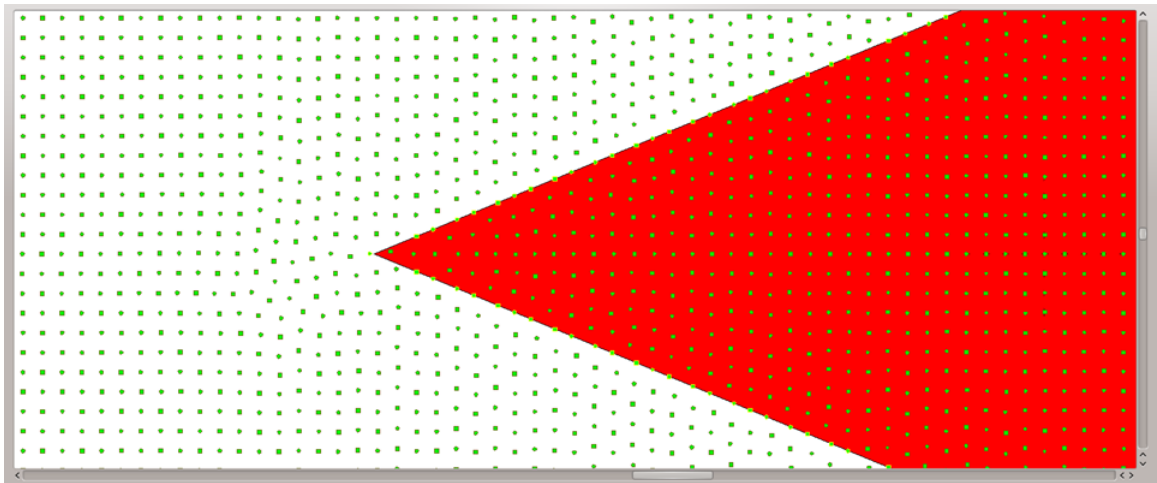


Figura 4.23: Discretização espacial da região próxima ao espalhador obtida com o método CLDM, zoom=3000.

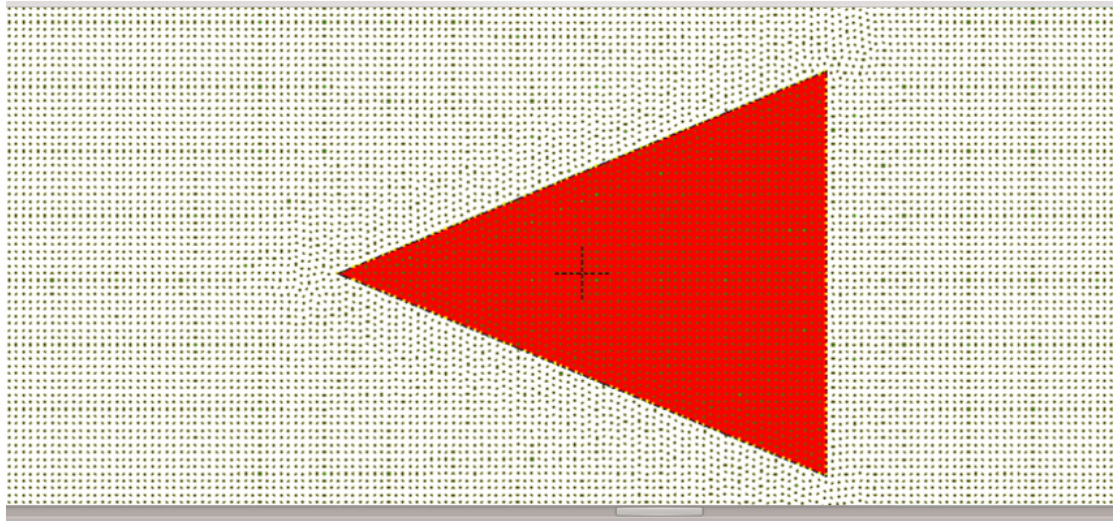


Figura 4.24: Discretização espacial da região próxima ao espalhador obtida com o método CLDM, zoom=1000.

Foram realizadas simulações para os métodos RPIM e FDTD. Os parâmetros das simulações podem ser vistos na Tabela 4.2.

Tabela 4.2: Parâmetros de simulação

PARÂMETROS	RPIM	FDTD
Tamanho da Região de Análise+UPML= $L_e \times C_e$ (m)	12 x 15	12 x 15
$f_c$ (GHz) (frequência central do pulso de excitação)	0.3	0.3
$bw[f_{min}, f_{max}]$ (GHz)	[1.0e-3, 0.6]	[1.0e-3, 0.6]
$dt$ (s)	2.00e-11	2.00e-11
$A_p$ (V/m)	1	1
$\tau$ (s)	200.0e-11	200.0e-11
$t_0$ (s)	1200.0e-11	1200.0e-11
$\lambda_{min} = C_0/f_{max}$ (m)	0.5	0.5
$\Delta_{min} = \Delta x = \Delta y$ (m) (distância mínima entre pontos)	$\lambda_{min}/20$	$\lambda_{min}/40$
Quantidade de pontos de medição	200	150
Número de iterações no tempo	4000	4000

Para calcular o RCS, é necessário obter os valores das medições do campo total e do incidente. Por este motivo, foram realizadas simulações com o espalhador (Campo Total) e sem o espalhador (Campo Incidente). As propagações do sinal sem e com o espalhador, obtidas nas simulações em RPIM, podem ser vistas respectivamente em Fig.4.25 e 4.26.

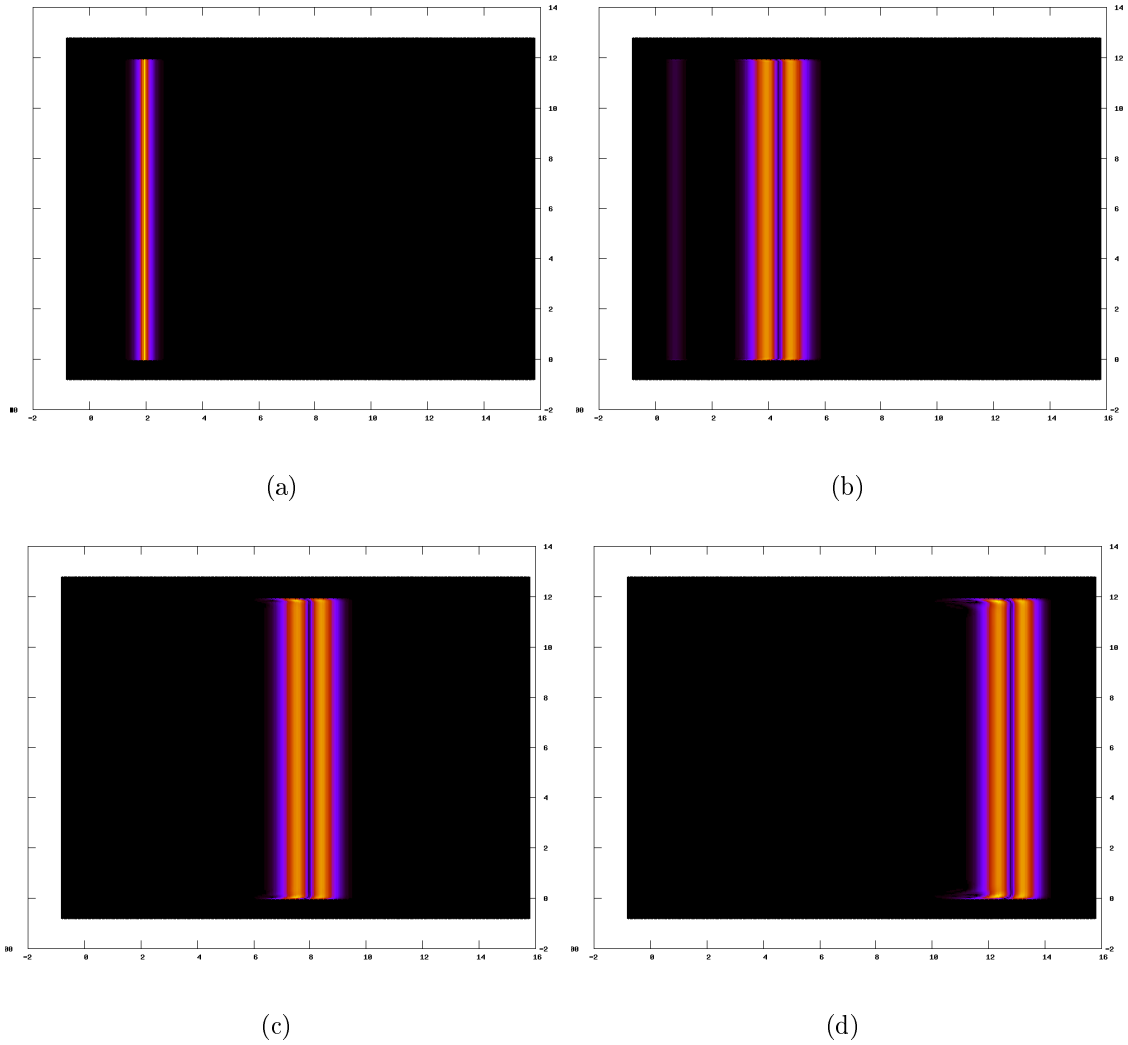


Figura 4.25: Distribuição da componente  $E_z$  incidente. a) Instante  $t = 8.0ns$ , b) Instante  $t = 20.0ns$ , c) Instante  $t = 32.0ns$ , d) Instante  $t = 48.0ns$ .

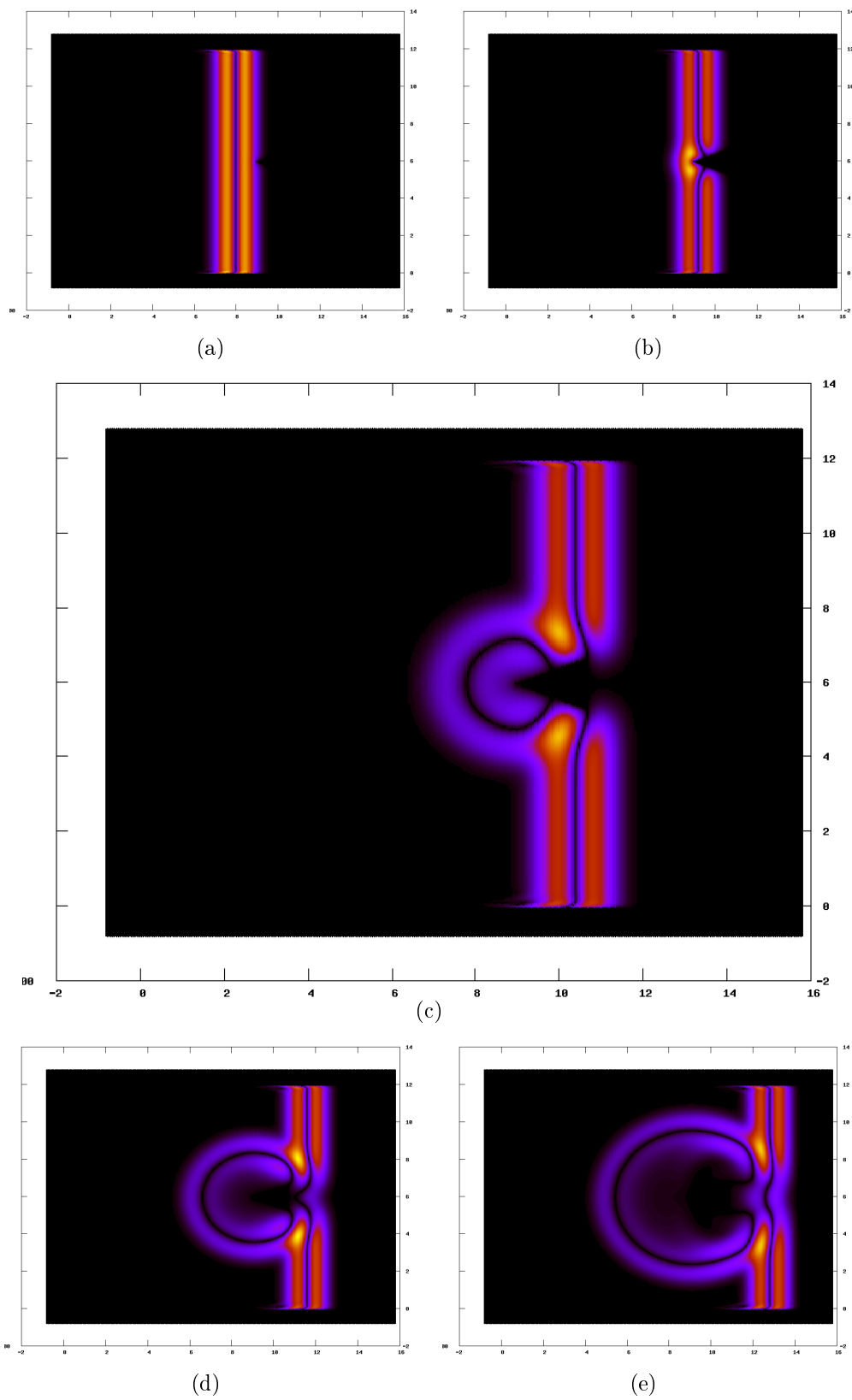


Figura 4.26: Distribuição da componente  $E_z$  total. a) Instante  $t = 32.0ns$ , b) Instante  $t = 36.0ns$ , c) Instante  $t = 40.0ns$ , d) Instante  $t = 44.0ns$ , e) Instante  $t = 48.0ns$ .

O tempo de processamento serial da simulação foi 620 segundos para o método FDTD e 1280 segundos para o método RPIM. Após as simulações, foi realizado o cálculo da RCS para cada método e os resultados foram comparados com a solução analítica obtida na tese de Bavelis [76], Fig.4.27.

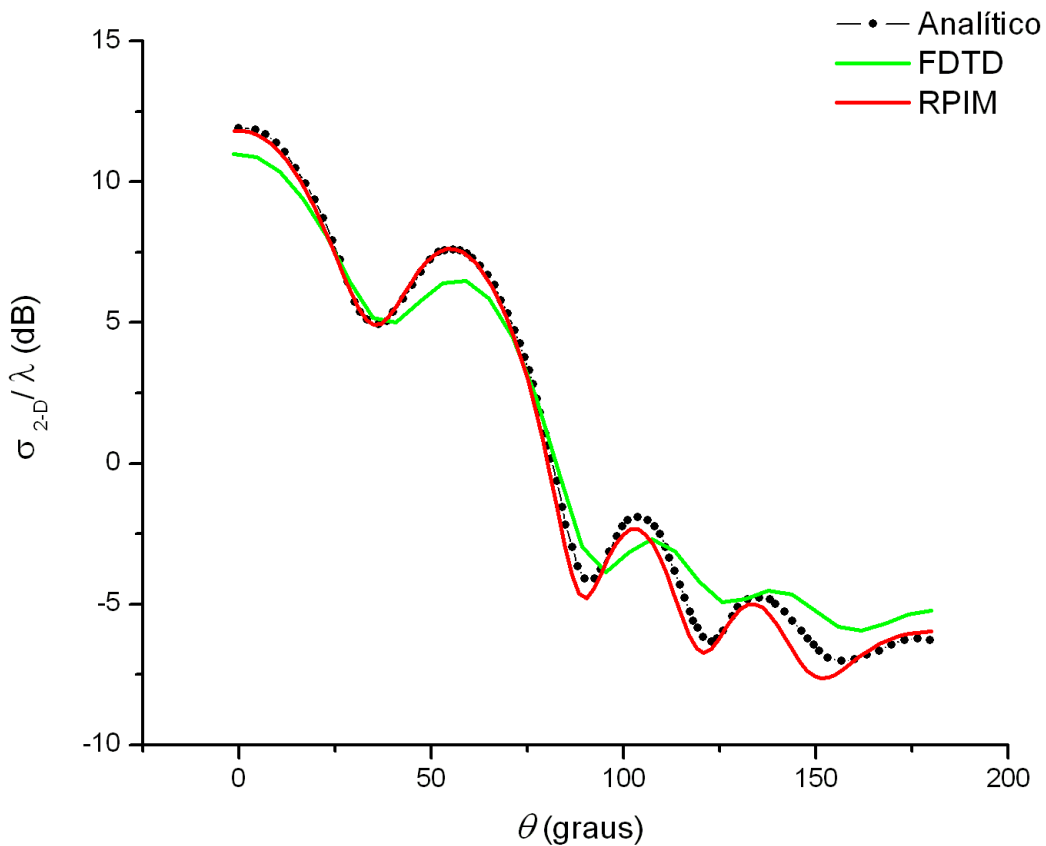


Figura 4.27: Comparação dos resultados da RCS para os métodos RPIM, FDTD e solução analítica;  $\theta = \phi - \pi$ .

Como pode ser visto na Fig.4.27, o RCS obtido pelo método RPIM (com CLDM) teve resultados mais próximos do analítico do que o obtido pelo método FDTD. Isso valida a aplicação do método RPIM e da discretização pelo método CLDM para este caso.

### 4.1.3 Caso 3 - RCS Cilindro Circular

Neste caso, aplica-se a RCS para analisar o espalhamento causado por um cilindro circular metálico. O problema é idêntico ao do caso 2 diferenciado apenas pelo tipo de espalhador utilizado. A Fig.4.28 mostra a representação deste problema no plano xy.

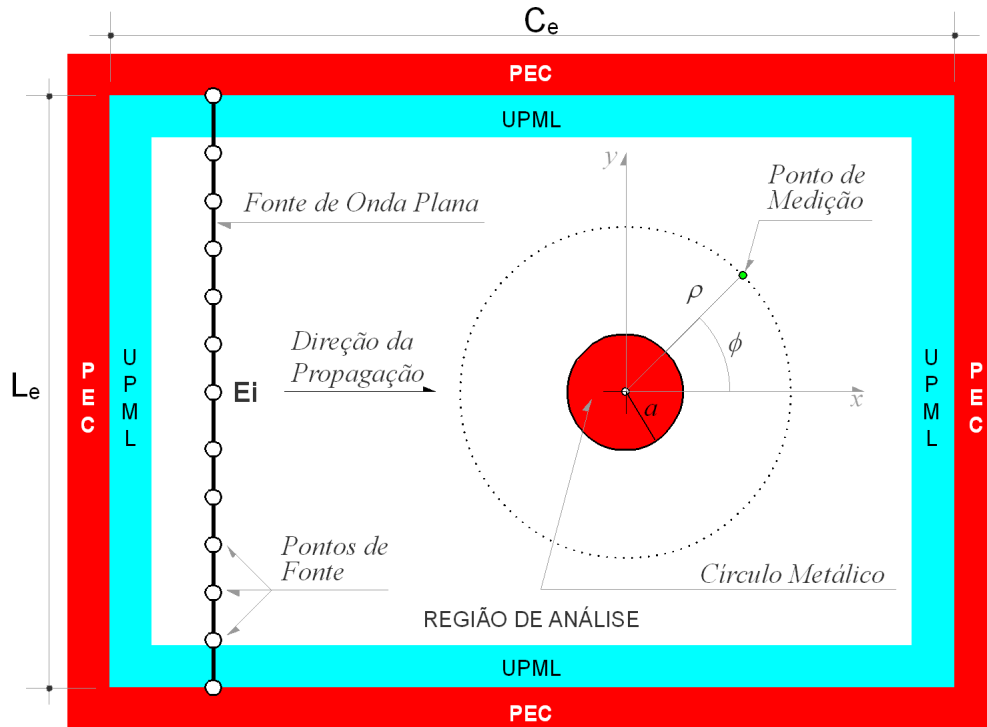


Figura 4.28: Representação do problema no plano-xy.

A geometria base do cilindro é um círculo de raio  $a = \lambda/2$ , Fig.4.29.

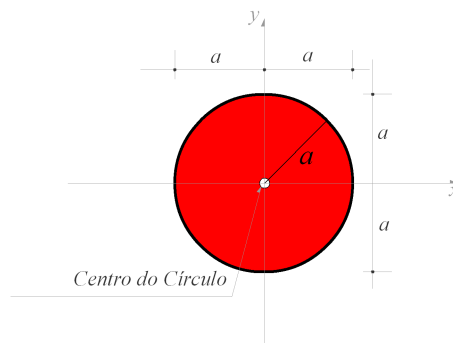


Figura 4.29: Círculo metálico e suas medidas.

A fonte de excitação é a mesma utilizada no caso 2 (monociclo gaussiano) e está localizada a uma distância de 8 metros do centro do círculo, Fig.4.30. O sinal é descrito por (4.6), Fig.4.20.

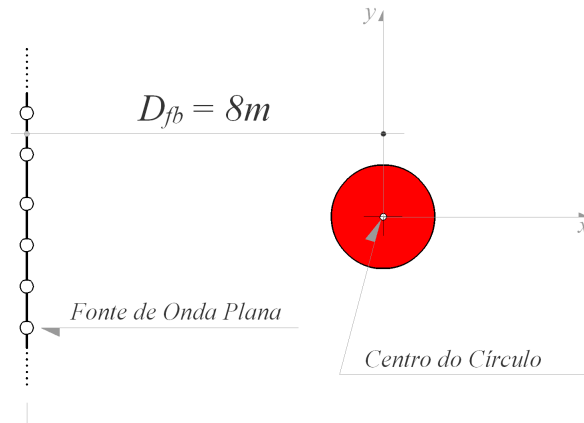


Figura 4.30: Posicionamento da fonte.

Os pontos de medição estão distribuídos em torno de uma circunferência virtual de raio  $\rho = 1.5$  metros, cujo centro coincide com o centro do cilindro, Fig.4.31.

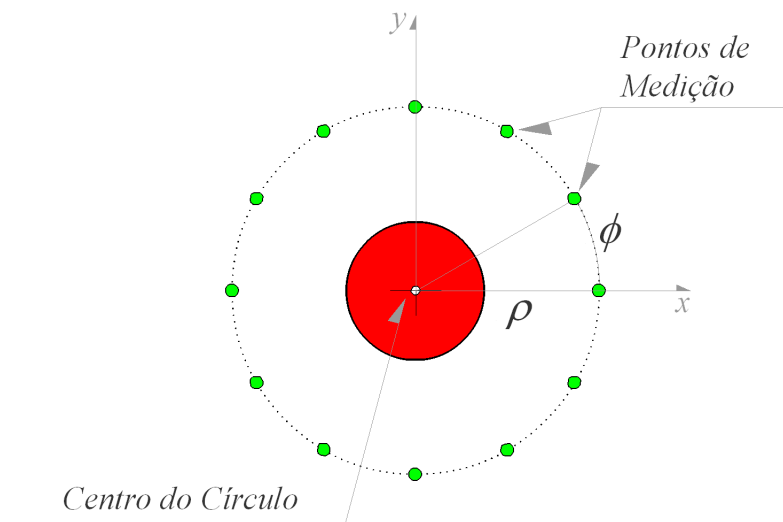


Figura 4.31: Distribuição dos pontos de medição.

O domínio gerado a partir da aplicação do método CLDM (para  $\Delta_{min} = \lambda_{min}/20$ ) pode ser vista na Fig.4.32.



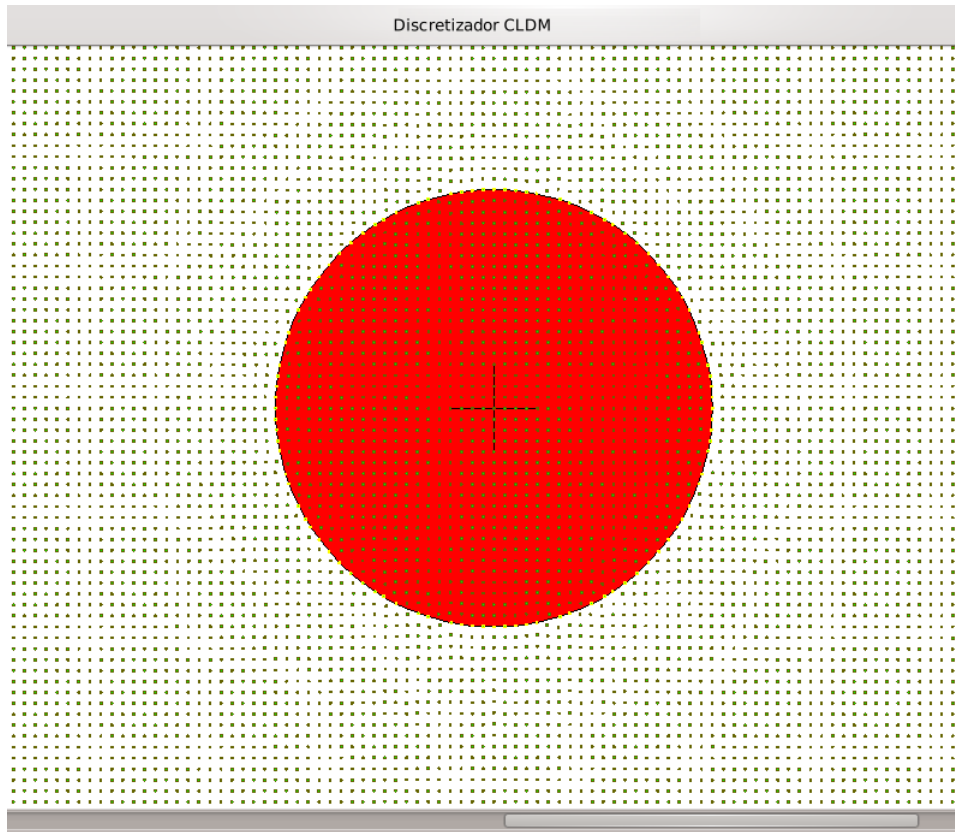


Figura 4.32: Discretização da região próxima ao espalhador obtida com o método CLDM.

Os parâmetros das simulações podem ser vistos na Tabela 4.2. A propagação do sinal com o espalhador, obtida na simulação em RPIM, pode ser vista nas Fig.4.33 e Fig.4.34.

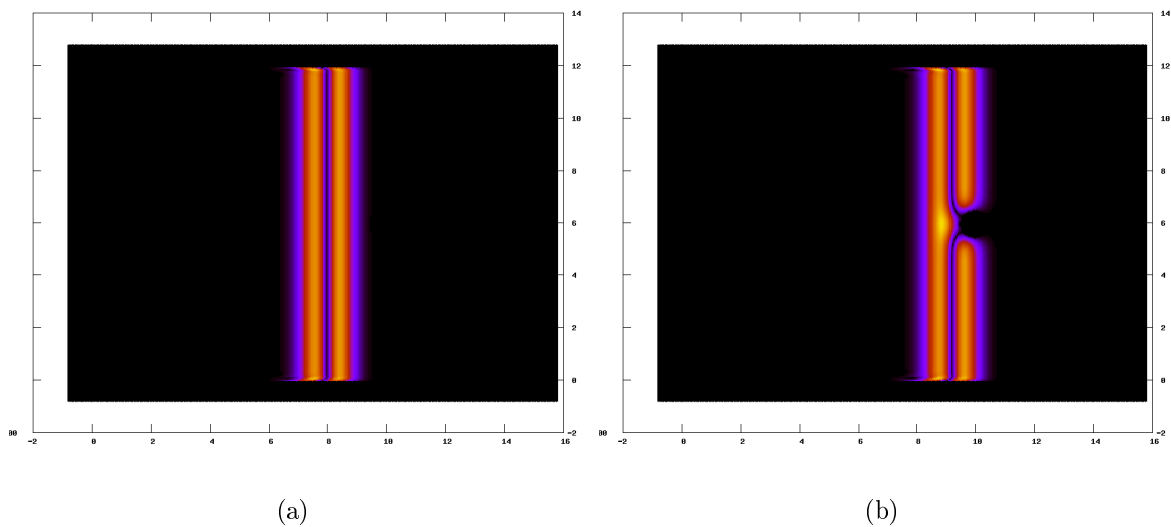
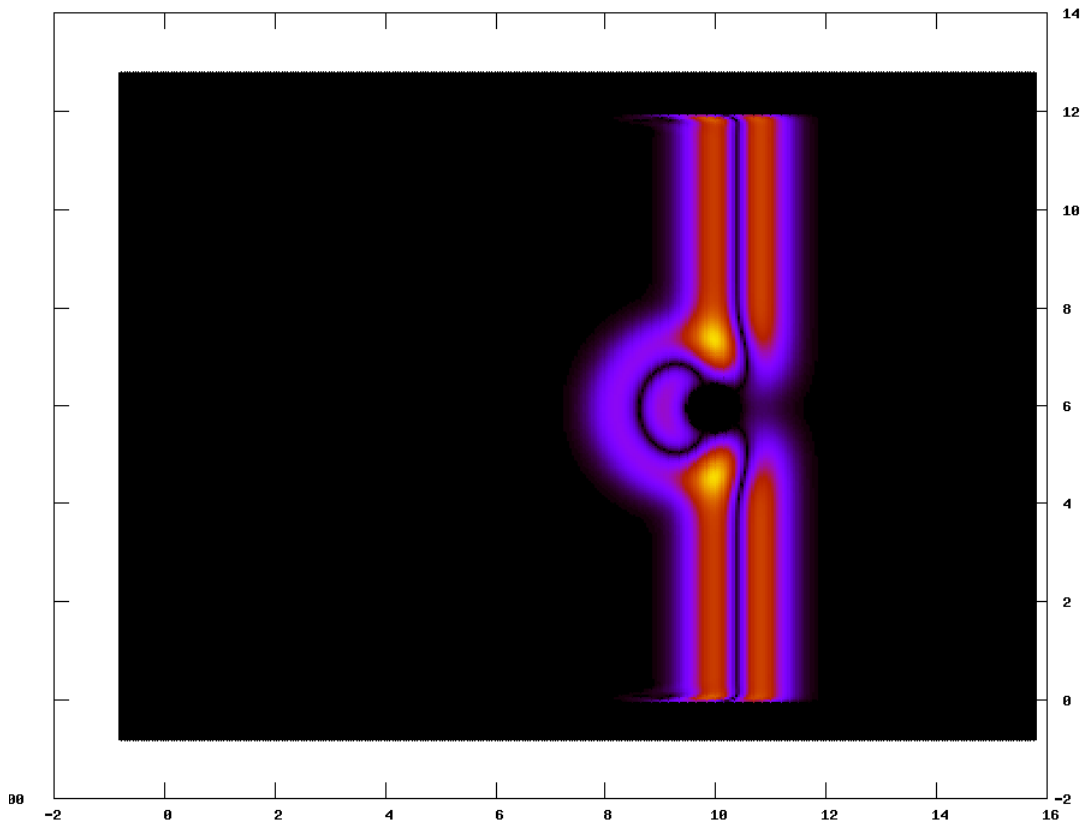
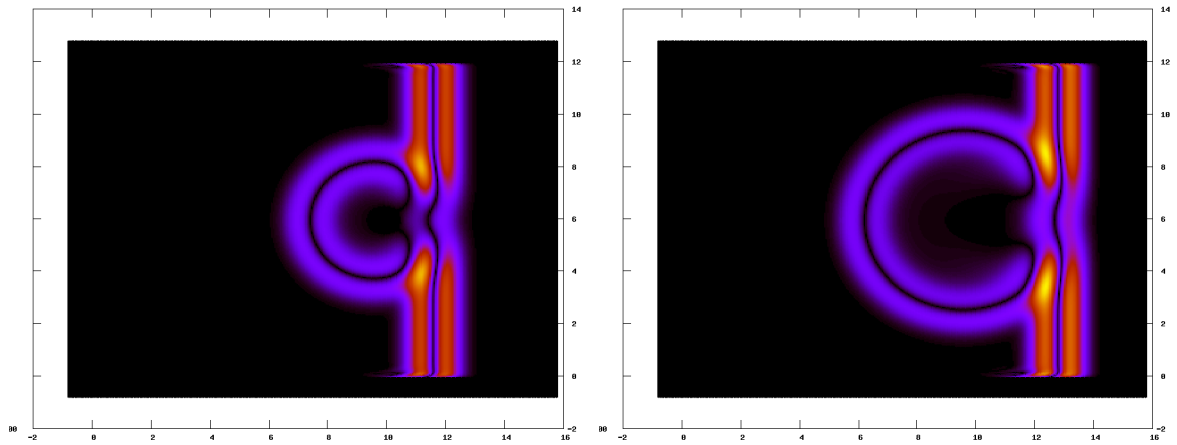


Figura 4.33: Distribuição da componente  $E_z$  total. a) Instante  $t = 32.0ns$ , b) Instante  $t = 36.0ns$



(a)



(b)

(c)

Figura 4.34: Distribuição da componente  $E_z$  total. a) Instante  $t = 40.0ns$ , b) Instante  $t = 44.0ns$ , c) Instante  $t = 48.0ns$ .

O tempo de processamento serial da simulação foi 620 segundos para o método FDTD e 1280 segundos para o método RPIM. Após as simulações, foi realizado o cálculo da RCS para cada método e os resultados foram comparados com a solução analítica obtida na tese de Bavelis [76], Fig.4.35.

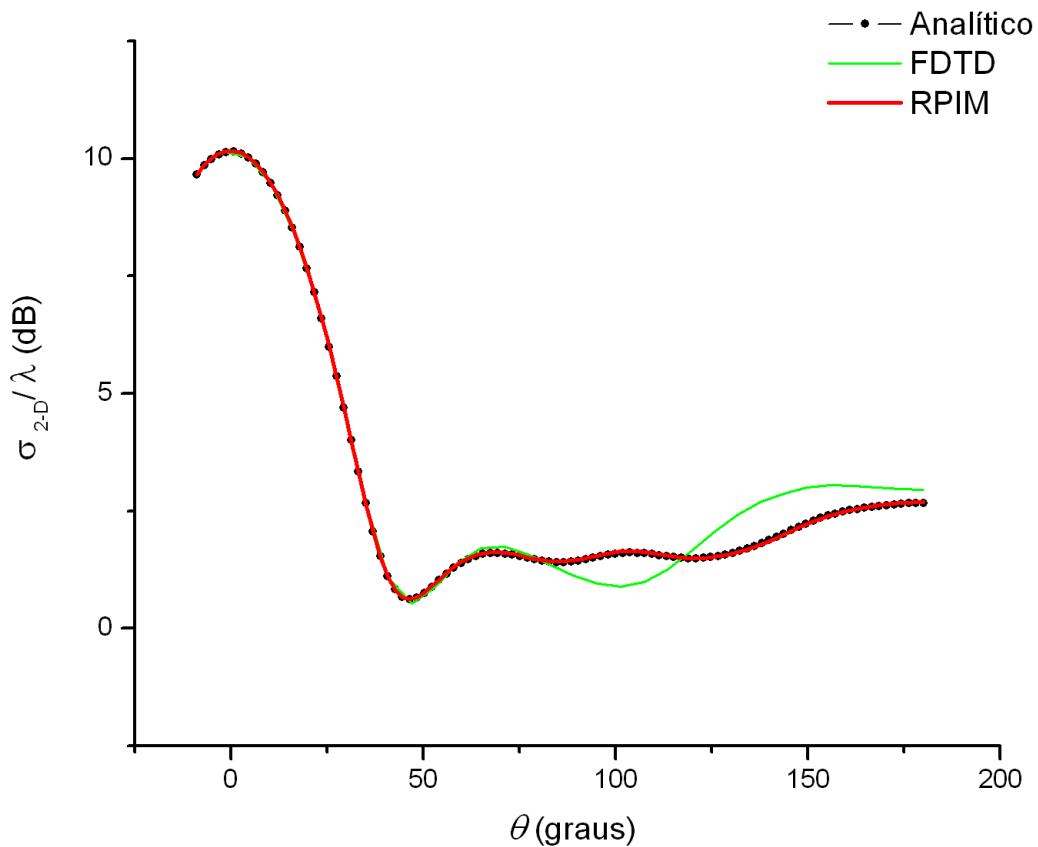


Figura 4.35: Comparação dos resultados da RCS pra RPIM, FDTD e solução analítica;  $\theta = \phi - \pi$ .

Como pode ser visto na Fig.4.35, o RCS obtido pelo método RPIM (com CLDM) teve resultados mais próximos do analítico do que o obtido pelo método FDTD. Isso valida a aplicação do método RPIM e da discretização pelo método CLDM para este caso.

O resultado visto na Fig.4.35, serve para confirmar os obtidos no caso 2, validando os métodos RPIM e CLDM.

#### 4.1.4 Caso 4 - RCS Cilindro Retangular

Este caso, assim como os dois anteriores, é uma análise de espalhamento eletromagnético utilizado RCS. O espalhador utilizado é um prisma retangular de comprimento infinito na direção  $z$ , Fig.4.36. A forma base para este prisma é um retângulo de lado  $s = \lambda/\pi$  rotacionado  $45^\circ$  em torno do eixo  $z$ , Fig.4.37.

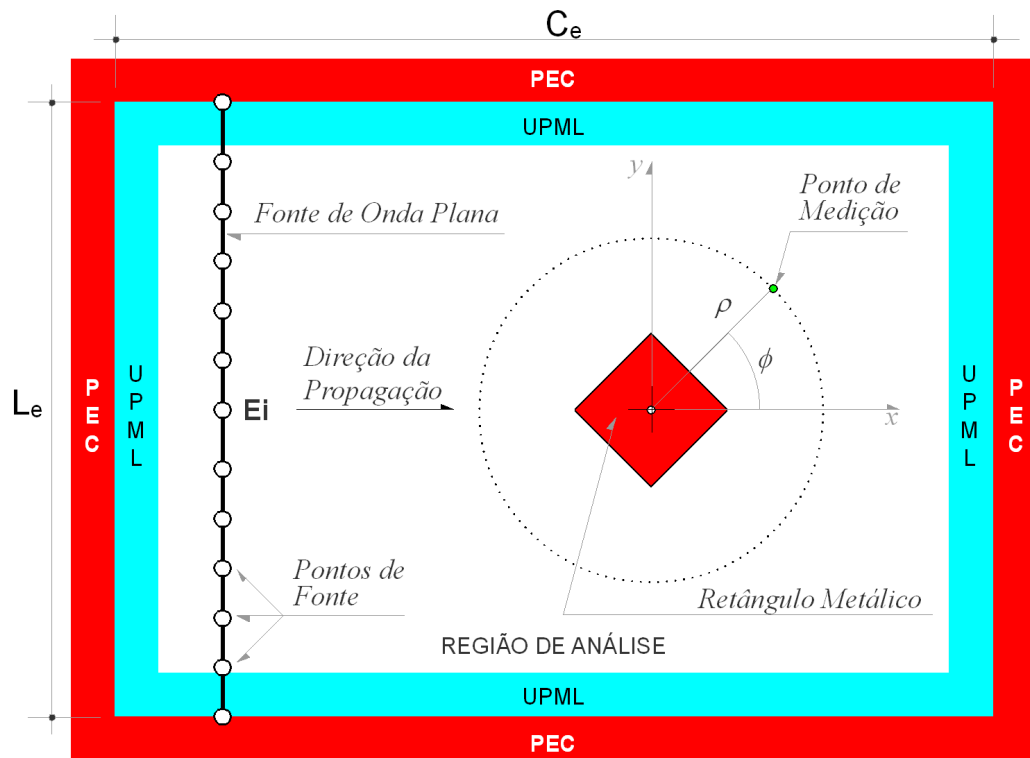


Figura 4.36: Representação do problema no plano-xy.

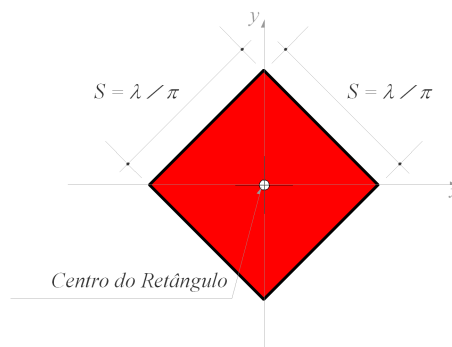


Figura 4.37: Retângulo rotacionado  $45^\circ$  e suas medidas.

A fonte de excitação é idêntica a dos casos 2 (monociclo gaussiano) e está localizada a 8 metros de distância do centro do retângulo. Fig.4.38.

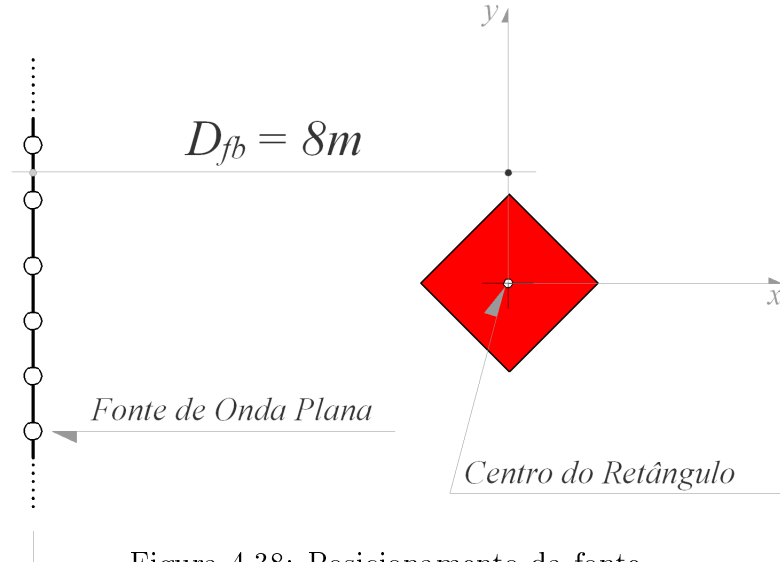


Figura 4.38: Posicionamento da fonte.

Os pontos de medição estão distribuídos em torno de uma circunferência virtual de raio  $\rho = 1.5$  metros, cujo centro coincide com o centro do cilindro, Fig.4.39.

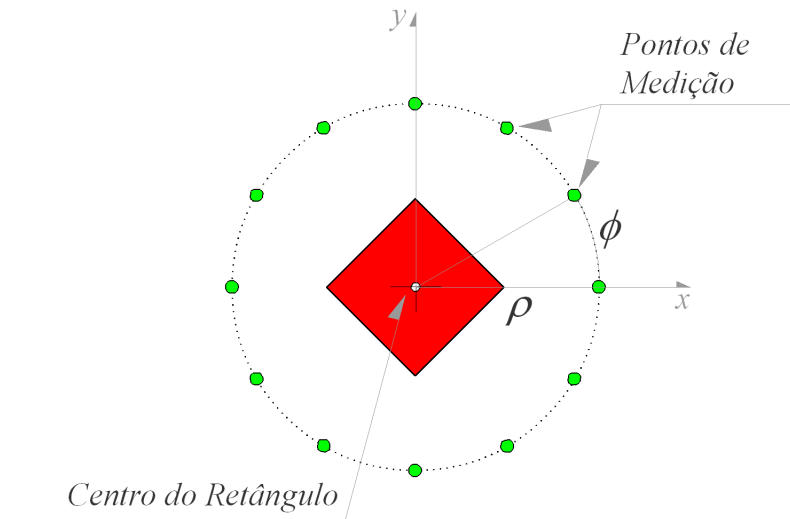


Figura 4.39: Distribuição dos pontos de medição.

O domínio gerado a partir da aplicação do método CLDM (para  $\Delta_{min} = \lambda_{min}/20$ )

pode ser visto na Fig.4.40.

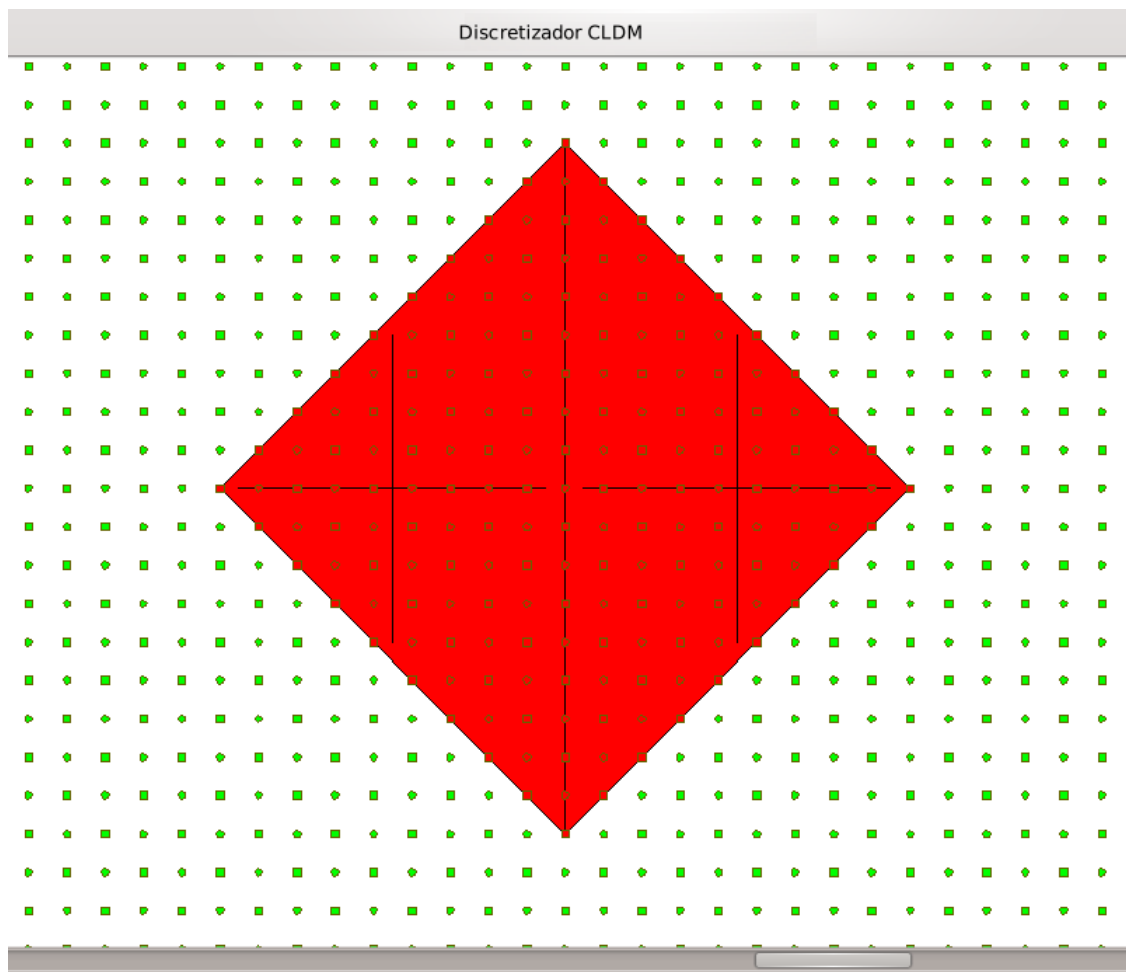


Figura 4.40: Discretização espacial da região próxima ao espalhador obtida com o método CLDM.

Os parâmetros das simulações estão na Tabela 4.2.

A propagação do sinal sem o espalhador (simulações RPIM), pode ser vista na Fig.4.25 e a propagação com o espalhador, pode ser vista pela Fig4.41.

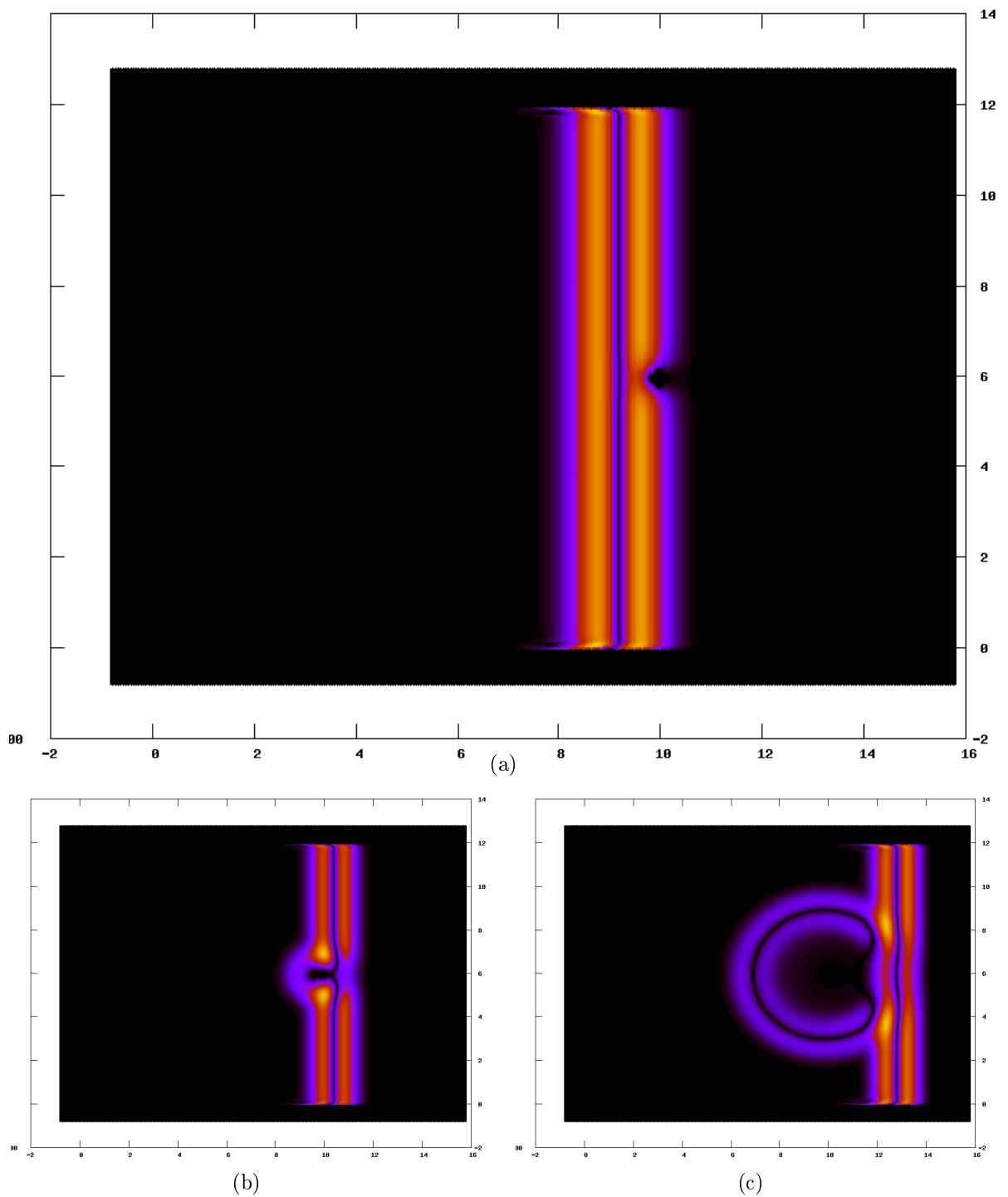


Figura 4.41: Distribuição da componente  $E_z$  total. a) Instante  $t = 36.0 \text{ ns}$ , b) Instante  $t = 40.0 \text{ ns}$ , b) Instante  $t = 48.0 \text{ ns}$ .

O tempo de processamento serial da simulação foi 620 segundos para o método FDTD

e 1280 segundos para o método RPIM. A solução analítica foi obtida na tese de Bavelis [76] e a comparação dos resultados para RCS pode ser vista na Fig.A.6.

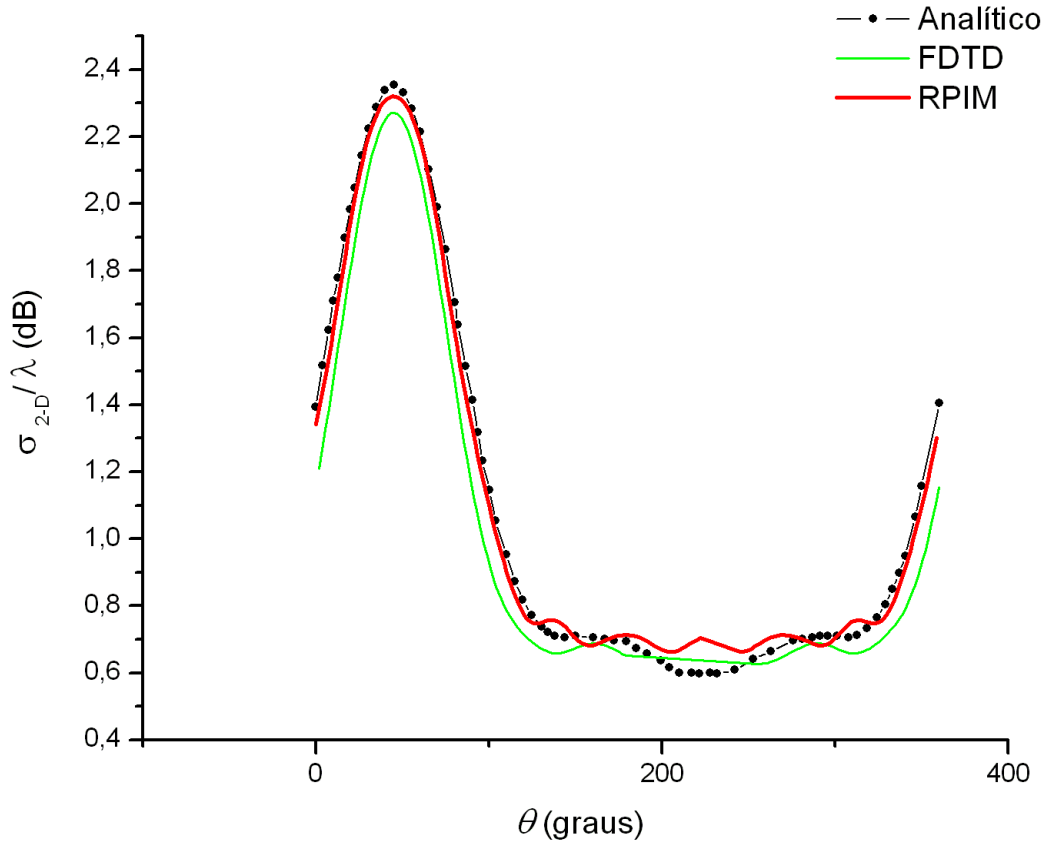


Figura 4.42: Comparação dos resultados da RCS para os métodos RPIM, FDTD e solução analítica;  $\theta = \phi - 3\pi/4$ .

Como nos casos anteriores, os resultados obtidos nas simulações para o método RPIM (com CLDM) tiveram resultados mais próximos do analítico do que os obtidos pelo método FDTD, conforme esperado.



### 4.1.5 Caso 5 - Estrutura Periódica Cilíndrica

O último caso de validação é baseado no estudo da propagação de ondas eletromagnéticas em estruturas periódicas, descrito por Tarot [77].

Uma estrutura periódica é um conjunto de elementos dispostos espacialmente com deslocamento periódico ao longo de uma ou mais direções.

A utilização deste tipo de estrutura é muito ampla e está associada ao fato de que, para cada tipo de estrutura periódica existe uma banda de frequência proibida onde as ondas eletromagnéticas são fortemente espalhadas e não se propagam. Por este motivo, são conhecidas como estruturas PBG (*Photonic Band Gap*) [78,79].

Neste trabalho, foi utilizada uma periodicidade bidimensional no plano-xy, que se caracteriza por ser finita na direção x e infinita na direção y, Fig.4.43. O elemento base da estrutura é um cilindro metálico de raio  $r = 0.5mm$  e comprimento infinito na direção z. O período longitudinal é igual ao transversal e é dado por  $p_l = p_t = 12$  milímetros. O número de camadas da direção x é  $n_c = 3$  e infinito na direção y, Fig.4.44.

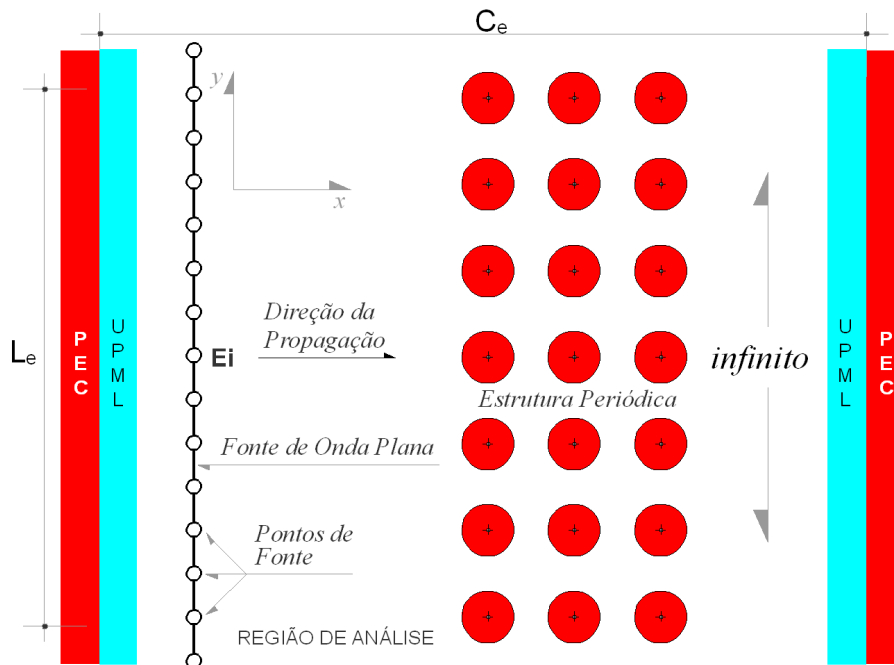


Figura 4.43: Representação do problema no plano-xy.

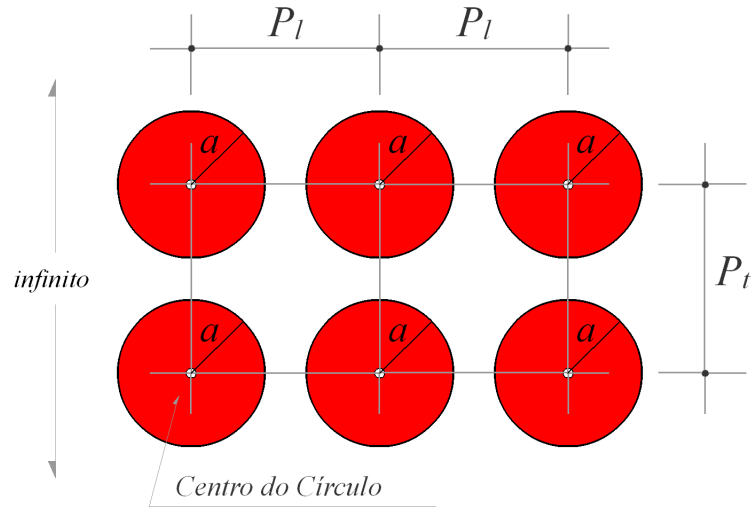


Figura 4.44: Círculo metálico e suas medidas.

A fonte de excitação usada é uma onda plana localizada a uma distância  $D_{fb} = 78$  milímetros do início da estrutura periódica, Fig.4.45. A distância entre os nós que descrevem a fonte  $\Delta^{fonte}$  base-se na distância mínima entre os nós  $\Delta_{min}$  definida para o domínio de análise  $\Omega_a$ .

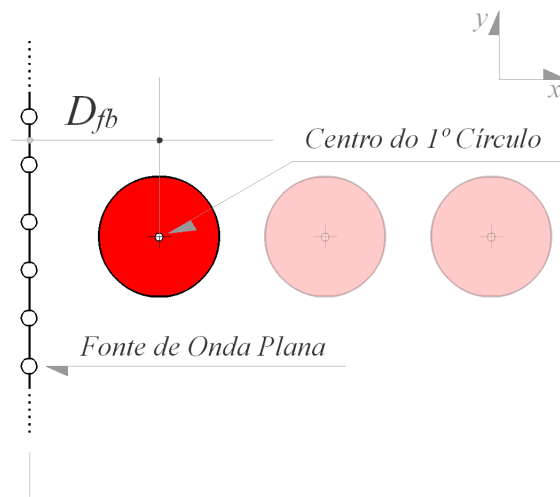


Figura 4.45: Posicionamento da fonte.

O sinal é descrito por um pulso monociclo gaussiano (4.1), com  $A_p = 1V/m$ ,  $\tau = 230e-13s$ ,  $t_0 = 2250e-13s$ ,  $bw \approx 28GHz$  e  $fc = 11.085GHz$ . A Fig.4.46 mostra este sinal

no domínio do tempo e a Fig.4.47 no domínio da frequência.

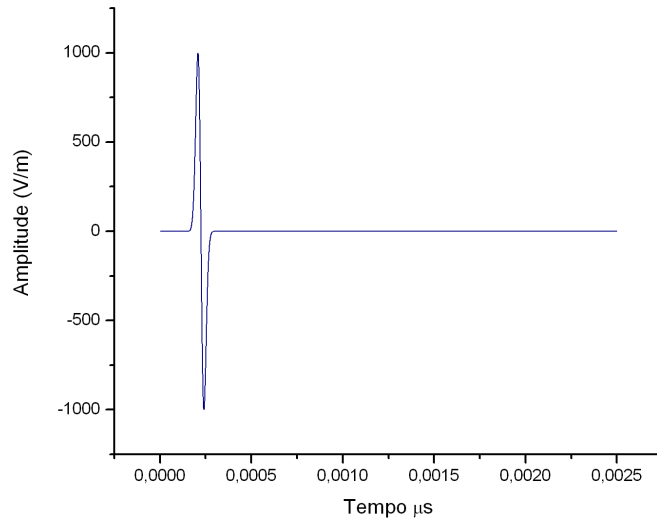


Figura 4.46: Sinal monociclo gaussiano.

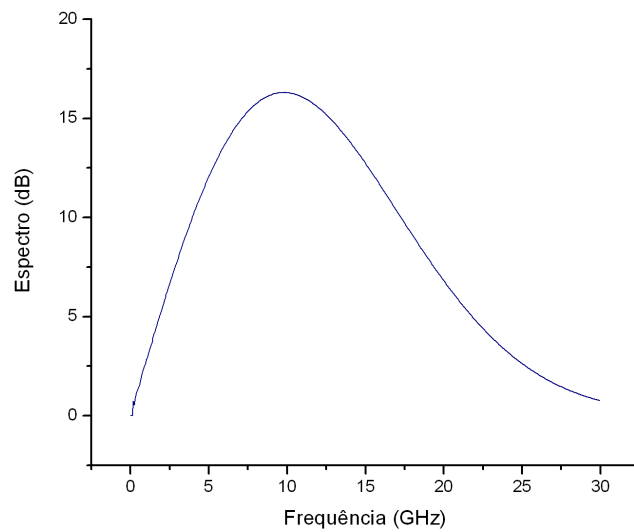


Figura 4.47: Espectro de frequência do monociclo gaussiano.

Os pontos de medição estão distribuídos na direção  $x$ , antes e depois da estrutura. O ponto que está antes da PBG registra o campo total  $\tilde{E}_z^t$  (4.3) e o que está depois registra o campo transmitido. Suas distâncias relativas a PBG são  $\rho_1 = 10$  e  $\rho_2 = 10$  milímetros, de acordo com a Fig.4.48.

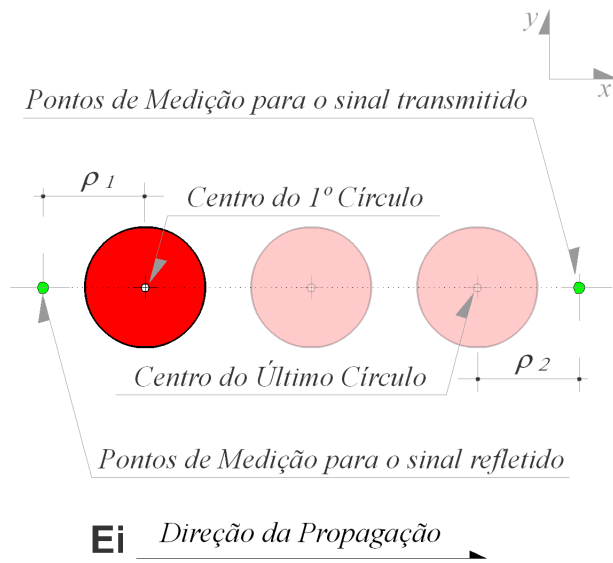


Figura 4.48: Distribuição dos pontos de medição.

A distribuição dos nós no domínio foi gerada a partir do método CLDM, com base na distância mínima entre os nós  $\Delta_{min} = 0.25mm$ . O resultado desta discretização é apresentada na Fig.4.49 e 4.50.

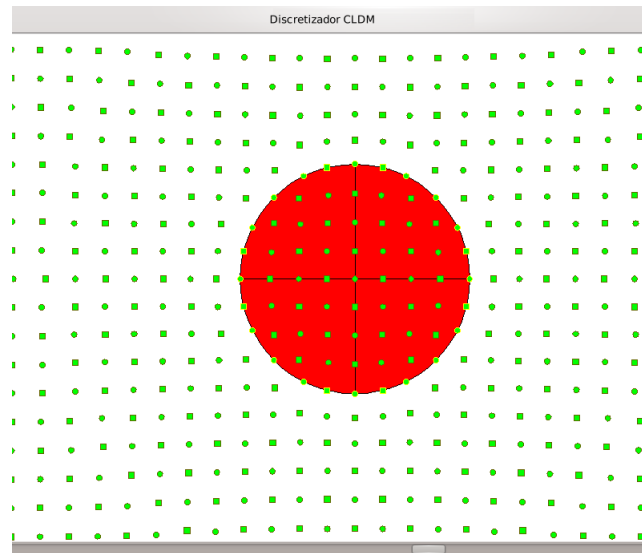


Figura 4.49: Discretização espacial da região próxima ao espalhador obtida com o método CLDM. Zoom=8000.

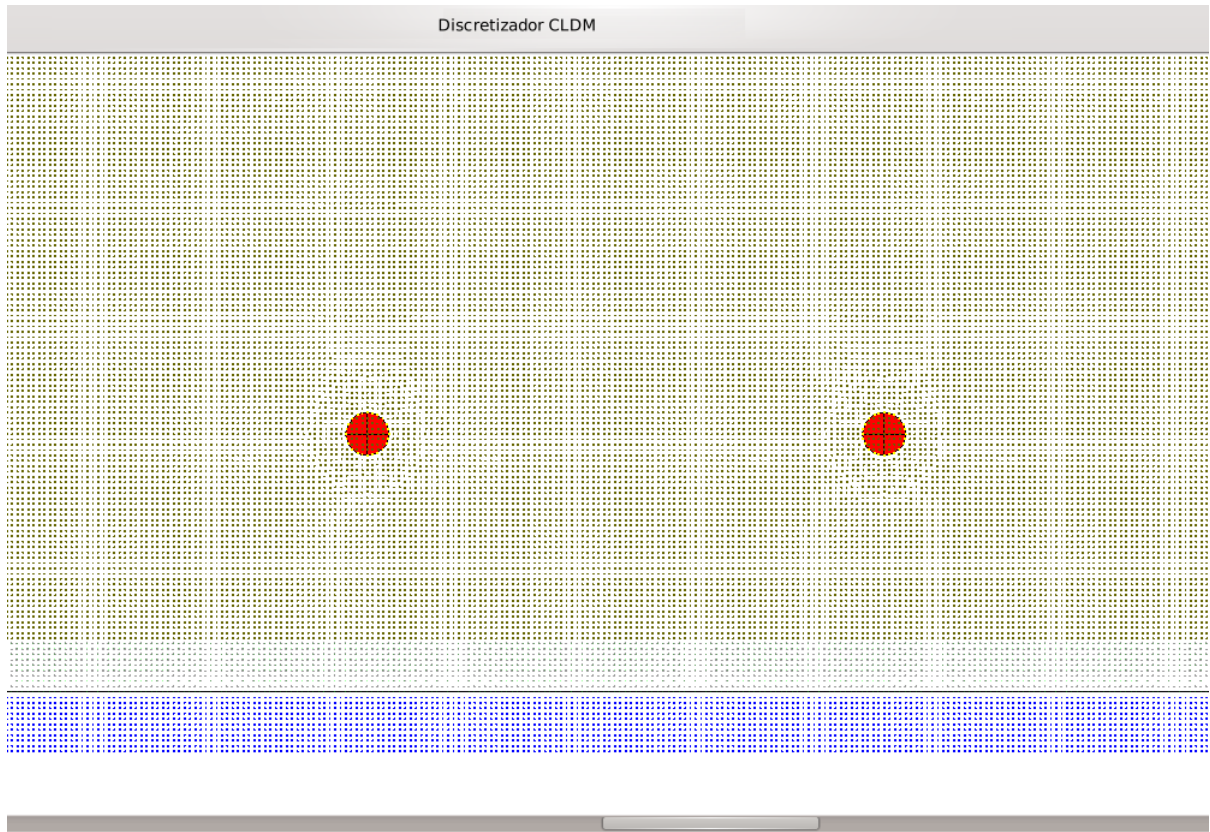


Figura 4.50: Discretização espacial da região próxima ao espalhador obtida com o método CLDM. Zoom=1000.

Foram realizadas simulações para os métodos RPIM e FDTD. Os parâmetros das simulações podem ser vistos na Tabela 4.3.

Tabela 4.3: Parâmetros de simulação

PARÂMETROS	RPIM	FDTD
Tamanho da Região de Análise+UPML= $L_e \times C_e$ (mm)	24 x 160	24 x 160
$f_c(GHz)$ (frequência central do pulso de excitação)	11.085	11.085
$bw[f_{min}, f_{max}](GHz)$	[2, 30]	[2, 30]
$dt(s)$	2.5e-13	2.5e-13
$A_p(V/m)$	1	1
$\tau(s)$	230e-13	230e-13
$t_0(s)$	2250e-13	2250e-13
$\lambda_{min} = C_0/f_{max}(mm)$	10	10
$\Delta_{min} = \Delta x = \Delta y(mm)$ (distância mínima entre pontos)	0.25	0.25
Quantidade de pontos de medição para campo refletido	1	1
Quantidade de pontos de medição para campo transferido	1	1
Número de iterações no tempo	10000	10000

As propagações do pulso para as simulações em RPIM, pode ser vista nas figuras de Fig.4.51 a 4.59 .

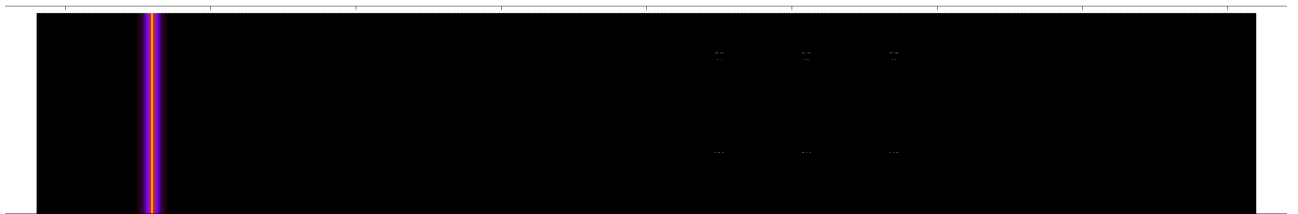


Figura 4.51: Distribuição da componente Ez total no instante  $t = 0.2ns$ .

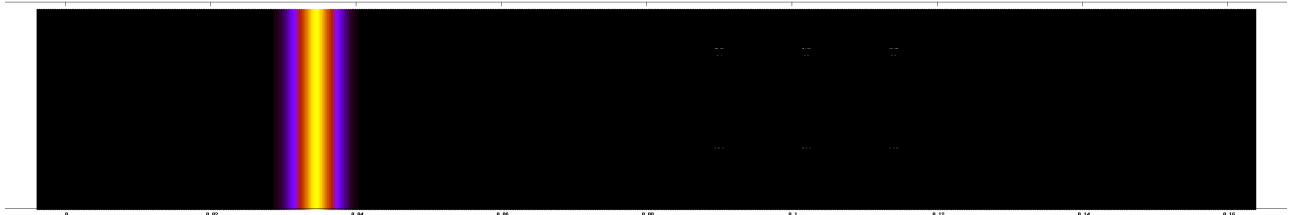


Figura 4.52: Distribuição da componente  $E_z$  total no instante  $t = 0.3ns$ .

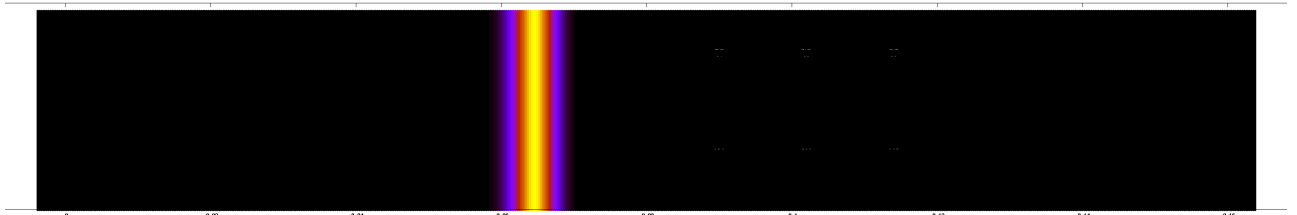


Figura 4.53: Distribuição da componente  $E_z$  total no instante  $t = 0.4ns$ .

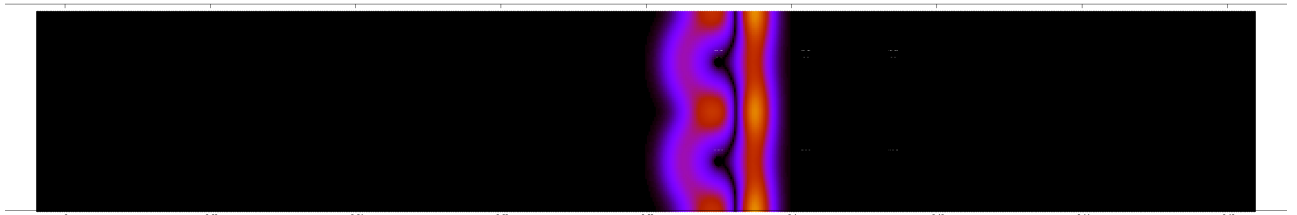


Figura 4.54: Distribuição da componente  $E_z$  total no instante  $t = 0.5ns$ .

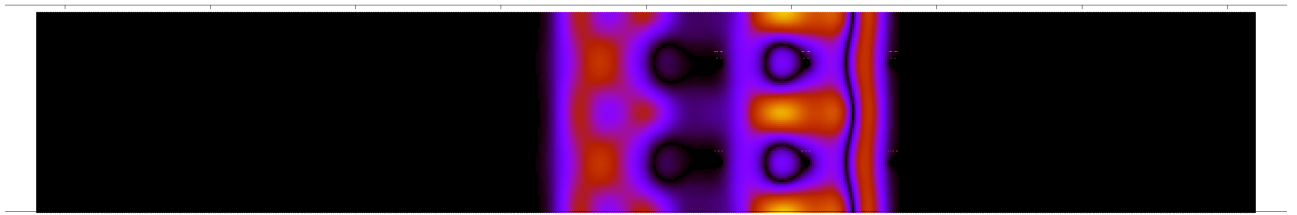


Figura 4.55: Distribuição da componente  $E_z$  total no instante  $t = 0.55ns$ .

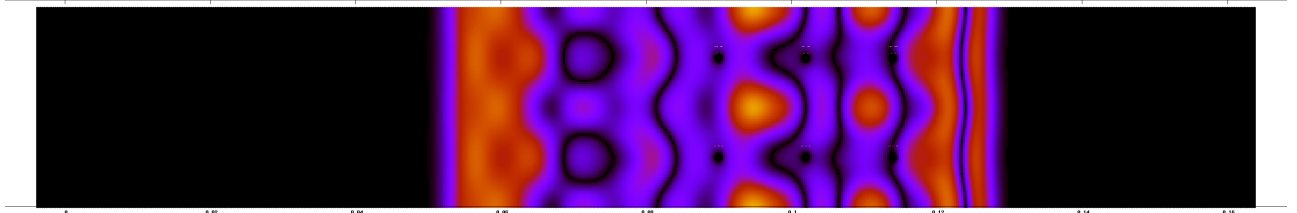


Figura 4.56: Distribuição da componente  $E_z$  total no instante  $t = 0.6ns$ .

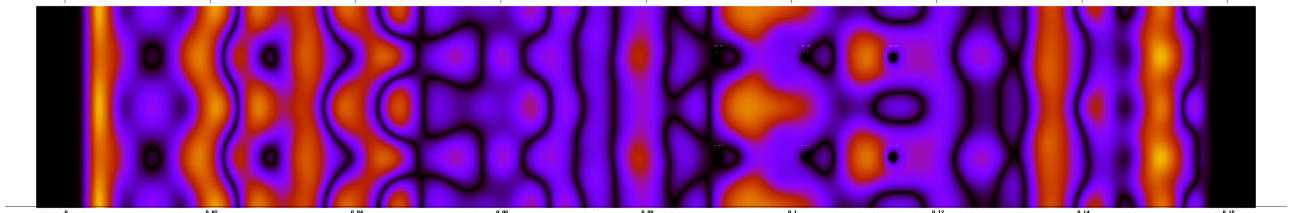


Figura 4.57: Distribuição da componente  $E_z$  total no instante  $t = 0.7ns$ .

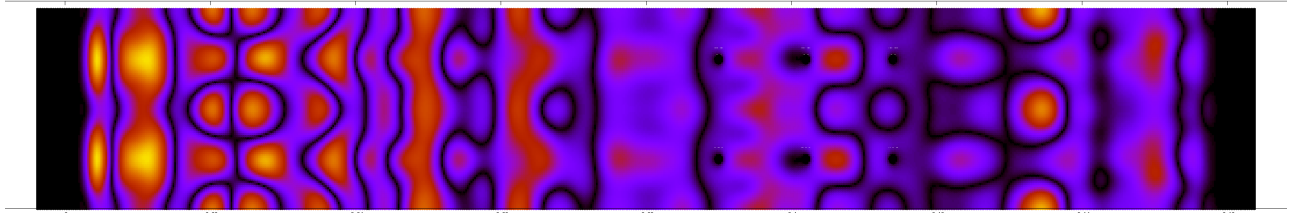


Figura 4.58: Distribuição da componente  $E_z$  total no instante  $t = 0.8ns$ .

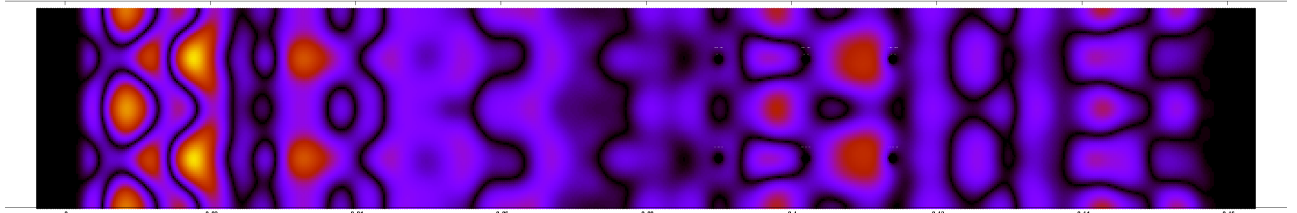


Figura 4.59: Distribuição da componente  $E_z$  total no instante  $t = 0.9ns$ .

O tempo de processamento serial da simulação foi 180 segundos para o método FDTD e 1473 segundos para o método RPIM. A solução analítica deste problema foi obtida a partir dos resultados de reflexão e transmissão, apresentados por Tarot [77]. A Fig.4.60 mostra a comparação dos coeficientes de reflexão.



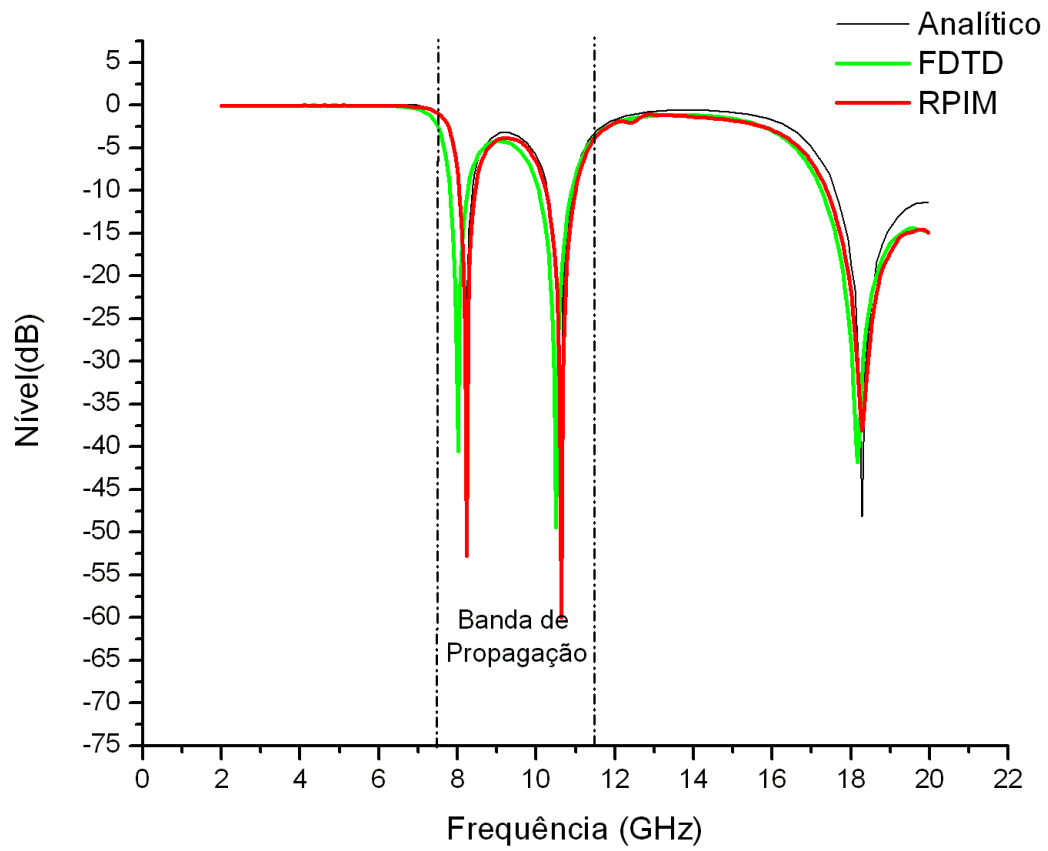


Figura 4.60: Comparação dos coeficientes de reflexão para o método RPIM, FDTD e solução analítico. Ponto de medição  $\rho_1$ .

A Fig.4.61 mostra a comparação dos coeficientes de transmissão.

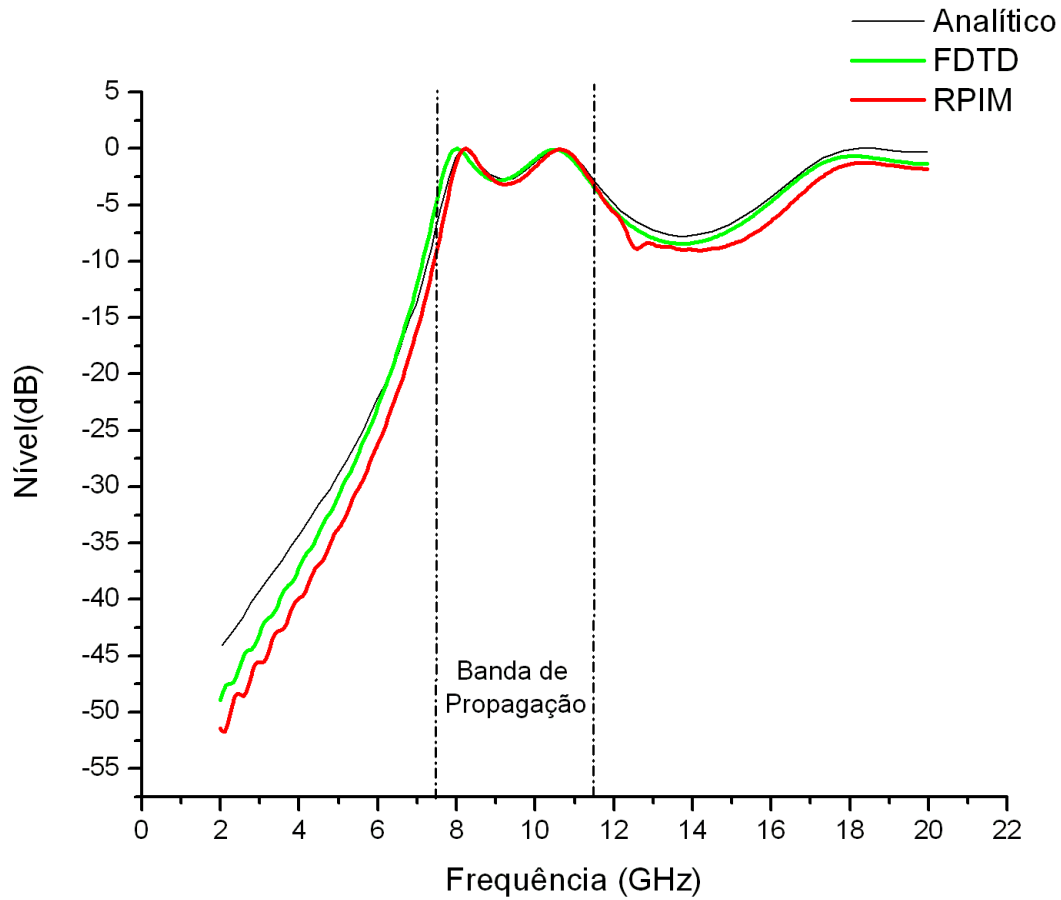


Figura 4.61: Comparação dos coeficientes de transmissão para o método RPIM, FDTD e solução analítico. Ponto de medição  $\rho_2$ .

Os resultados obtidos pelo método RPIM (com CLDM) na banda de frequência de transmissão (7.5 a 11.5 GHz), são mais próximos da solução analítica que o obtido pelo método FDTD. Isso valida a aplicação do método RPIM e da discretização pelo método CLDM para este caso de espalhamento eletromagnético.

Com este caso, conclui-se a etapa de validação dos métodos RPIM e CLDM. Como pode ser visto, a utilização destes dois métodos em conjunto produz resultados mais precisos do que os gerados através do método FDTD. A próxima etapa mostra variações deste último problema.

## 4.2 Simulações Adicionais

Além dos casos de validação, outras simulações foram realizadas com a finalidade de verificar o comportamento eletromagnético na estrutura periódica [77] do caso 5 (tópico 4.1.5), a partir de alterações na geometria-base da PBG. Nestas simulações, foram utilizadas geometrias circulares e triangulares, para verificar possíveis alterações nas curvas anteriormente obtidas e analisar a eficiência do método CLDM para geometrias diversas postas em um mesmo domínio de análise.

### 4.2.1 Simulação 1 - Estrutura Periódica Cilíndrica de Raio $a = 2mm$

Nesta simulação, utilizou-se um cilindro de raio  $a = 2mm$ , Fig.4.62, na estrutura periódica do caso 5, mantendo  $P_l = P_t = 12mm$ . Esta mudança ocasionou uma diminuição do espaçamento entre os cilindros, que resultou em alterações nos coeficientes de reflexão e transmissão. A idéia é verificar a acomodação dos nós de discretização na região entre dois cilindros (esta transição deve ser suave).

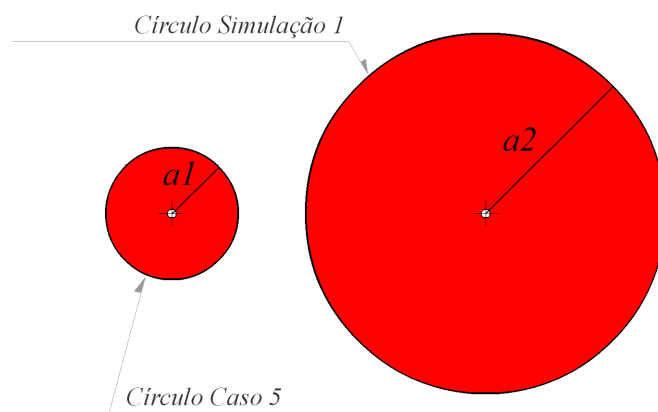


Figura 4.62: Comparação entre o círculo de raio  $a1$  utilizado no caso 5 e o círculo de raio  $a2$  utilizado nesta simulação, onde  $a2 = 4 \times a1$ .

A discretização por CLDM pode ser vista nas figuras 4.63 e 4.64.

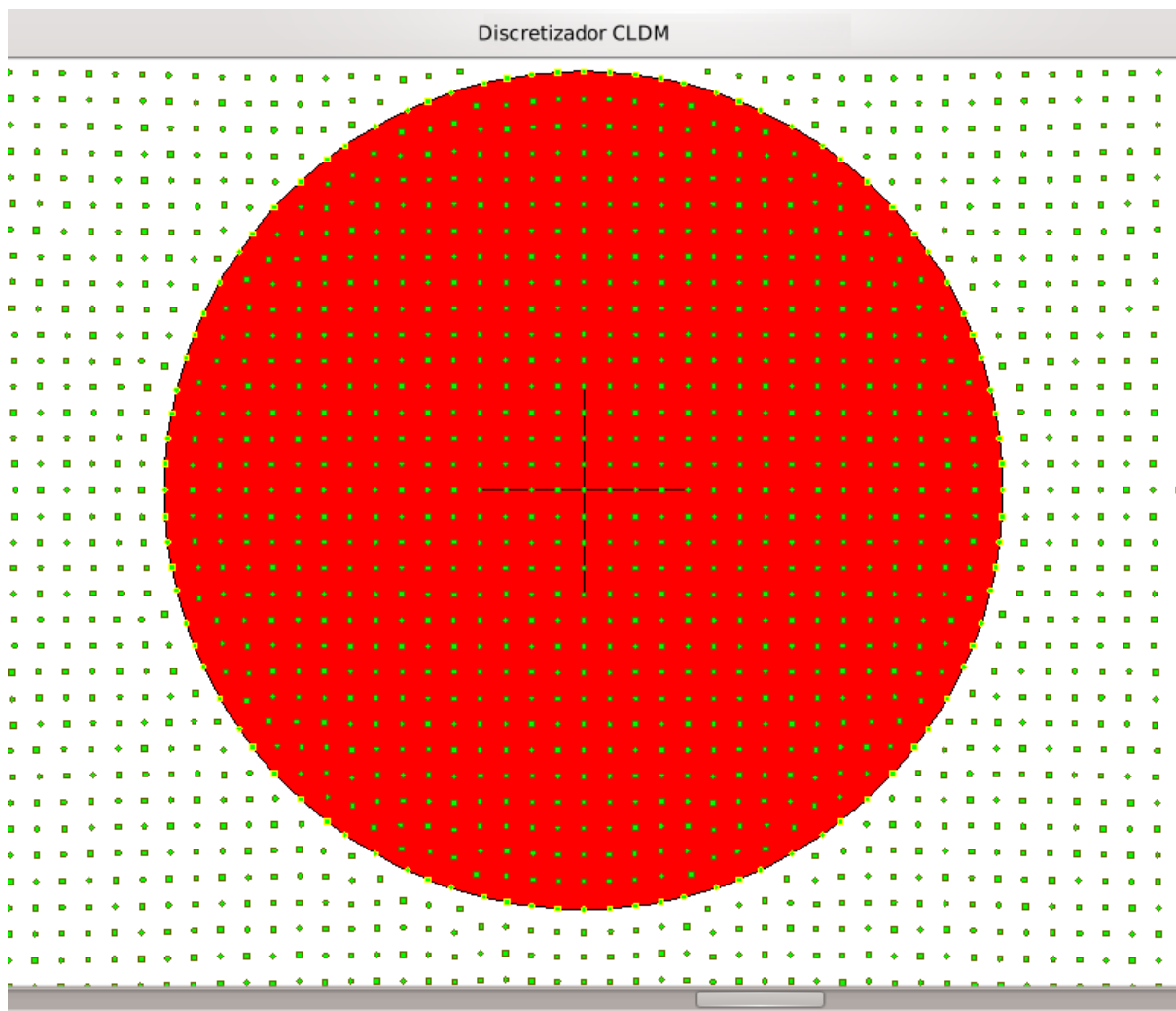
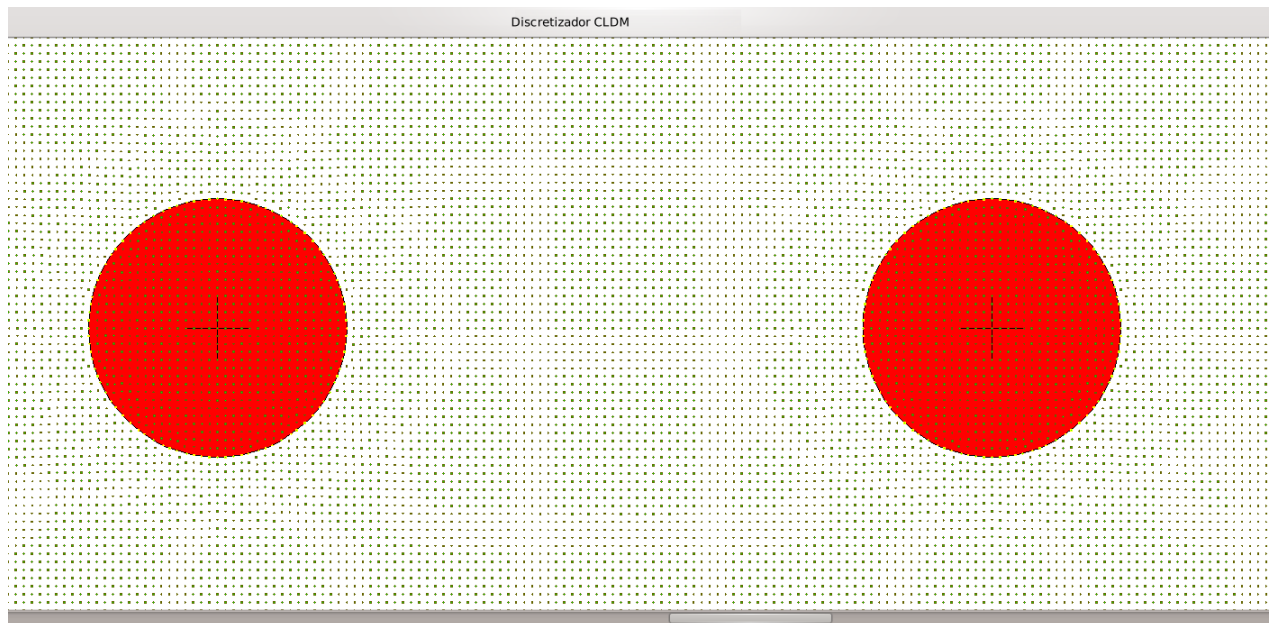
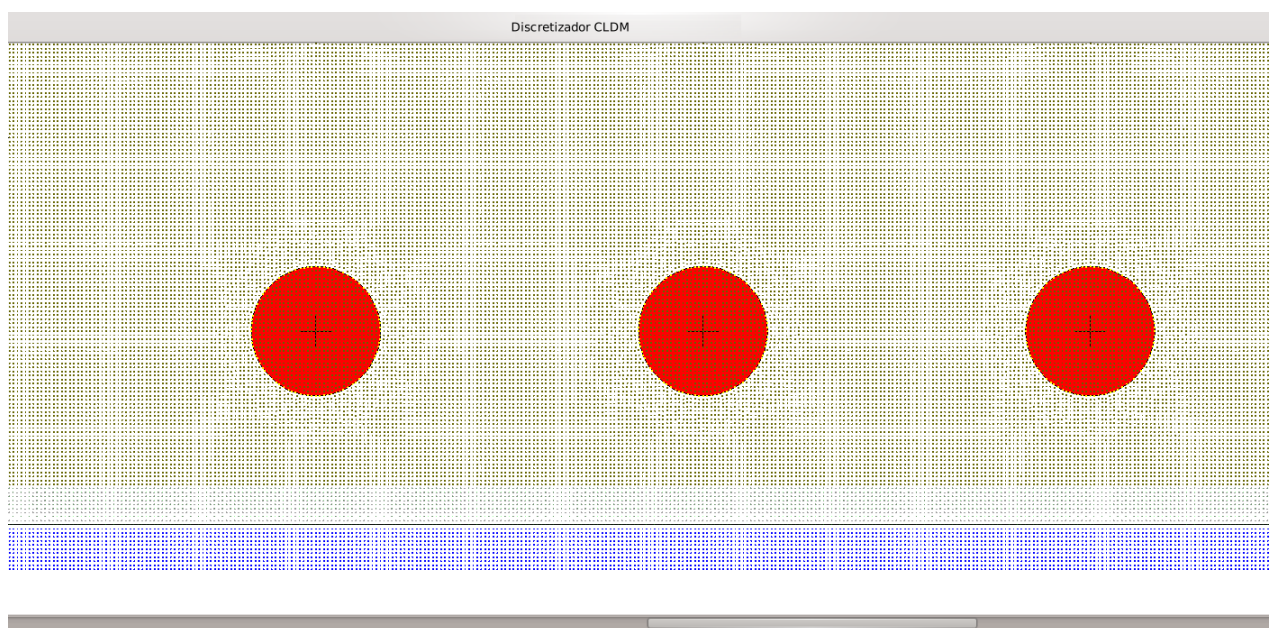


Figura 4.63: Discretização espacial da região próxima ao espalhador obtida com o método CLDM. Zoom=4000.



(a)



(b)

Figura 4.64: Discretização espacial da região próxima ao espalhador obtida com o método CLDM. a) Zoom=2000. b) Zoom=1000.

Esta simulação é idêntica a realizada no caso 5 e os parâmetros podem ser vistos na

Tabela 4.3. A propagação do sinal é apresentada nas figuras de 4.65 a 4.69.



Figura 4.65: Distribuição da componente Ez total no instante  $t = 0.3ns$ .

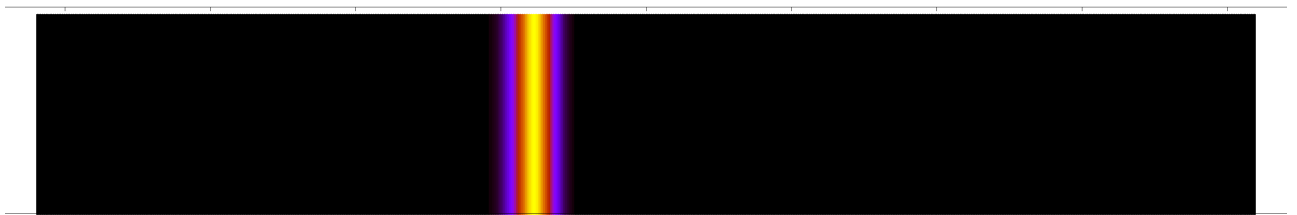


Figura 4.66: Distribuição da componente Ez total no instante  $t = 0.4ns$ .

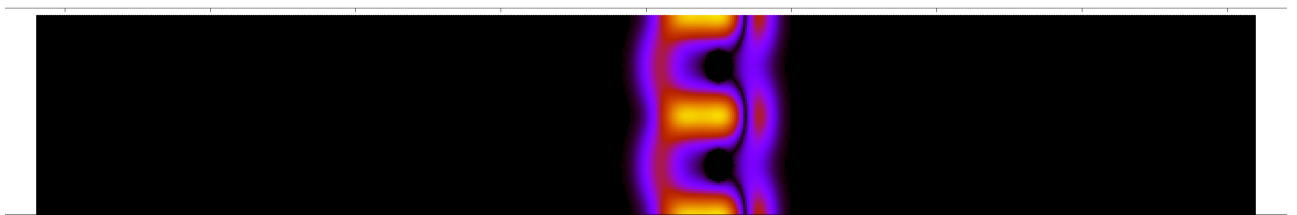


Figura 4.67: Distribuição da componente Ez total no instante  $t = 0.5ns$ .

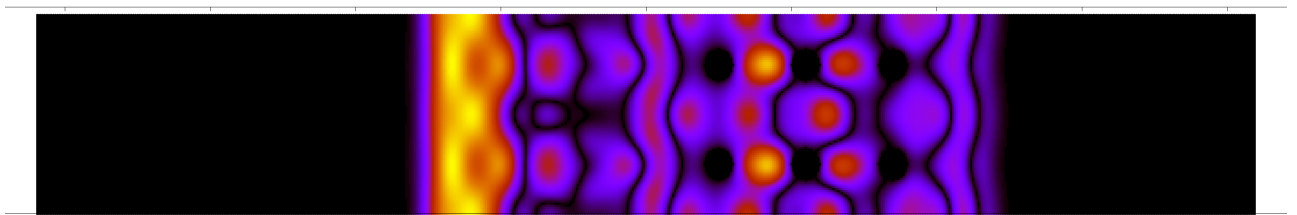


Figura 4.68: Distribuição da componente Ez total no instante  $t = 0.6ns$ .

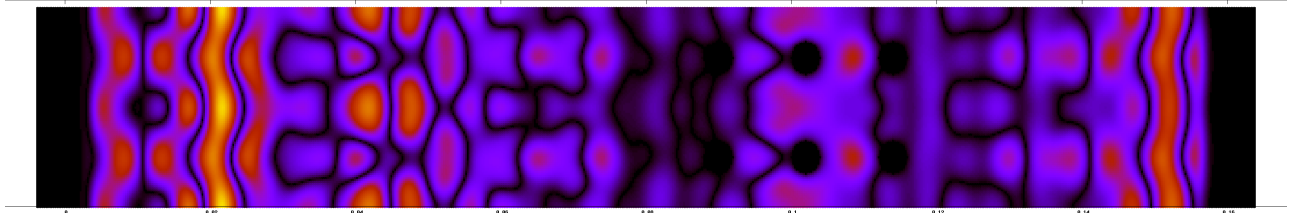


Figura 4.69: Distribuição da componente  $E_z$  total no instante  $t = 0.7ns$ .

Os resultados obtidos podem ser vistos nas figuras de 4.70 a 4.71.

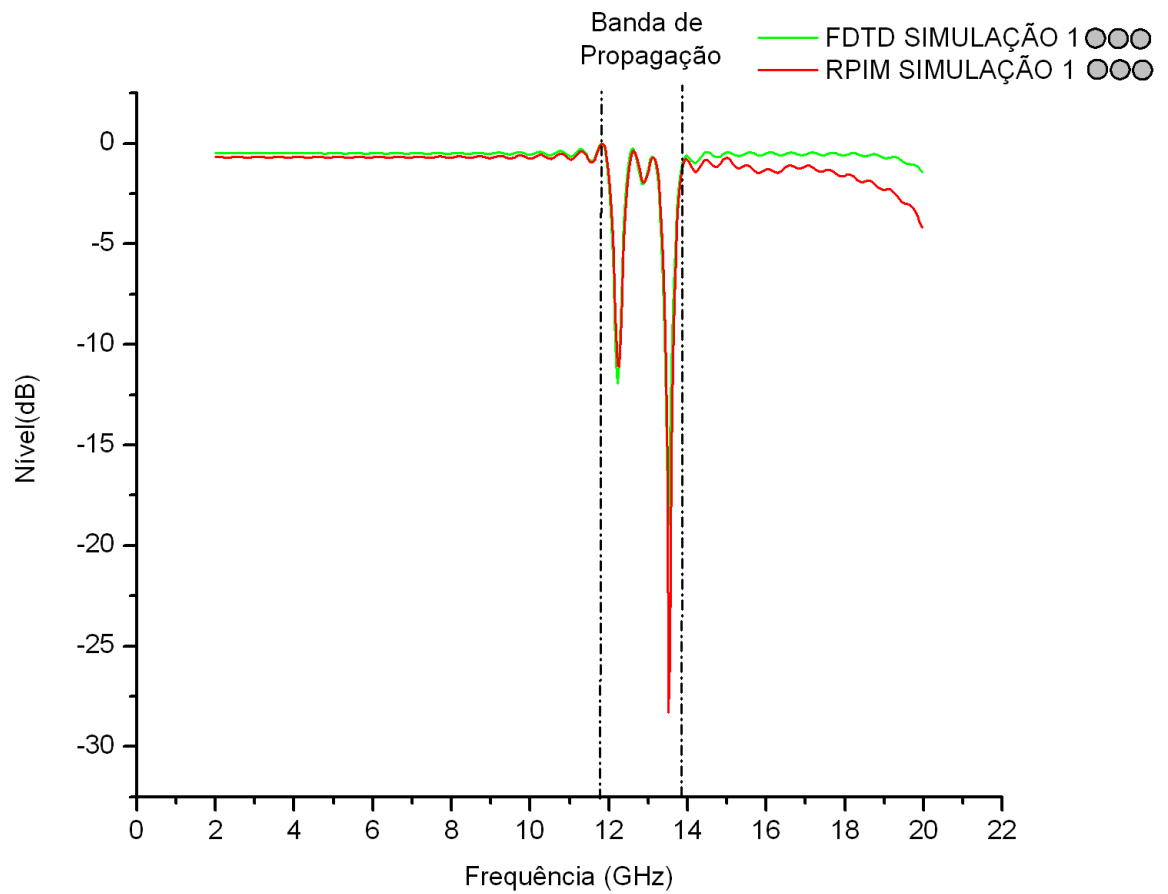


Figura 4.70: Comparação dos coeficientes de reflexão para os métodos RPIM e FDTD. Ponto de medição  $\rho_1$ .

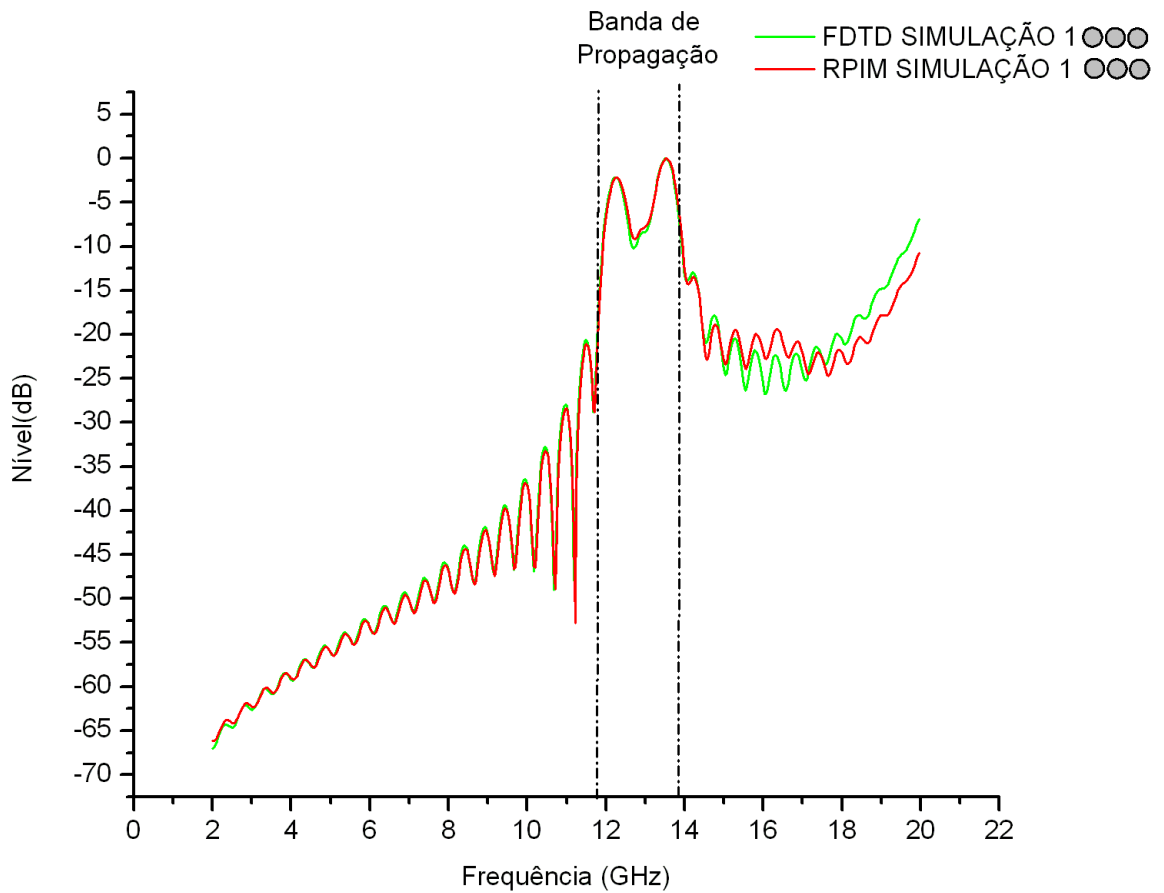


Figura 4.71: Comparação dos coeficientes de transmissão para os métodos RPIM e FDTD. Ponto de medição  $\rho_2$ .

Os resultados obtidos pelo método RPIM nesta simulação, são comparados com os obtidos no caso 5 (tópico 4.1.5). As Fig.4.72 e 4.73 mostram respectivamente as comparações dos coeficientes de reflexão e transmissão. Conforme esperado, a faixa de frequência de transmissão é deslocada para direita, pois o espaçamento entre os elementos foi reduzido. Porém, nota-se que isto aumentou o nível de reflexão em relação ao caso 5.



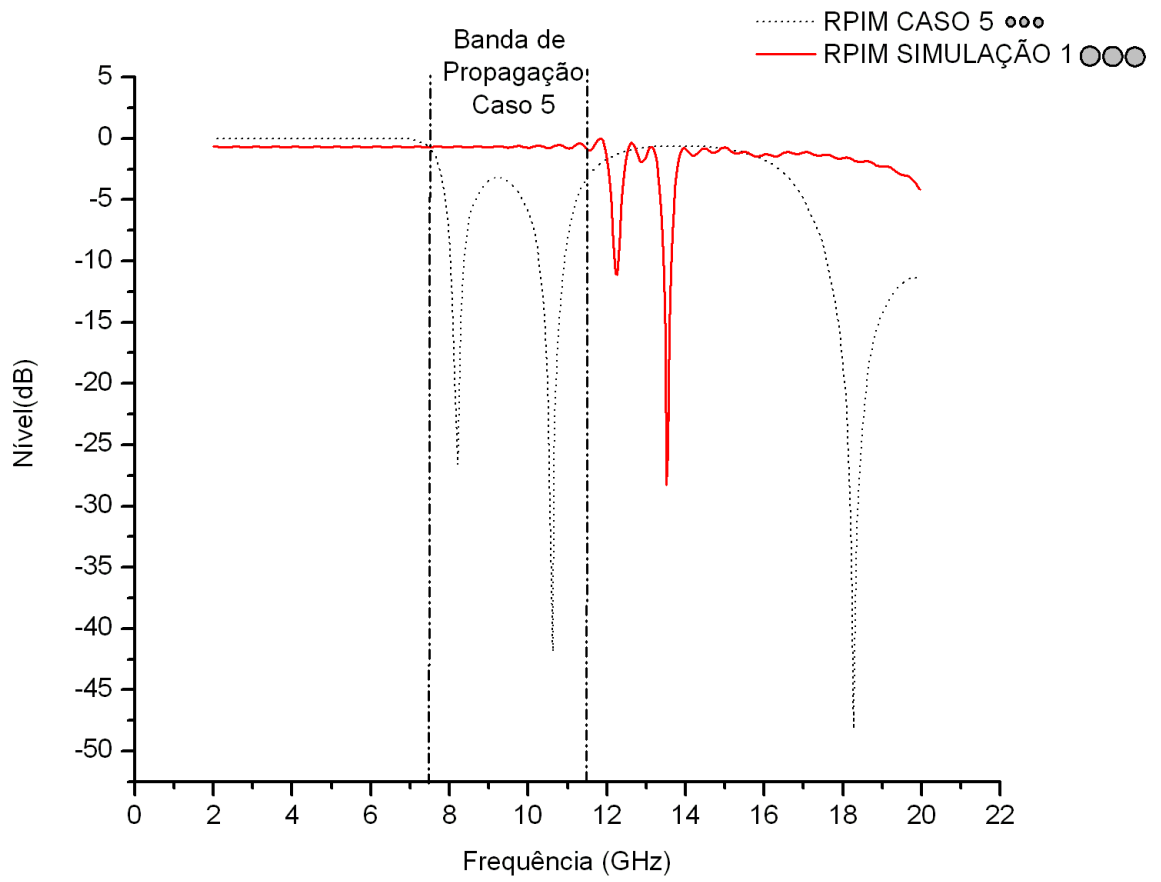


Figura 4.72: Comparação dos coeficientes de reflexão obtidos com o método RPIM para a simulação 1 e o resultado analítico do caso de validação 5. Ponto de medição:  $\rho_1$ .

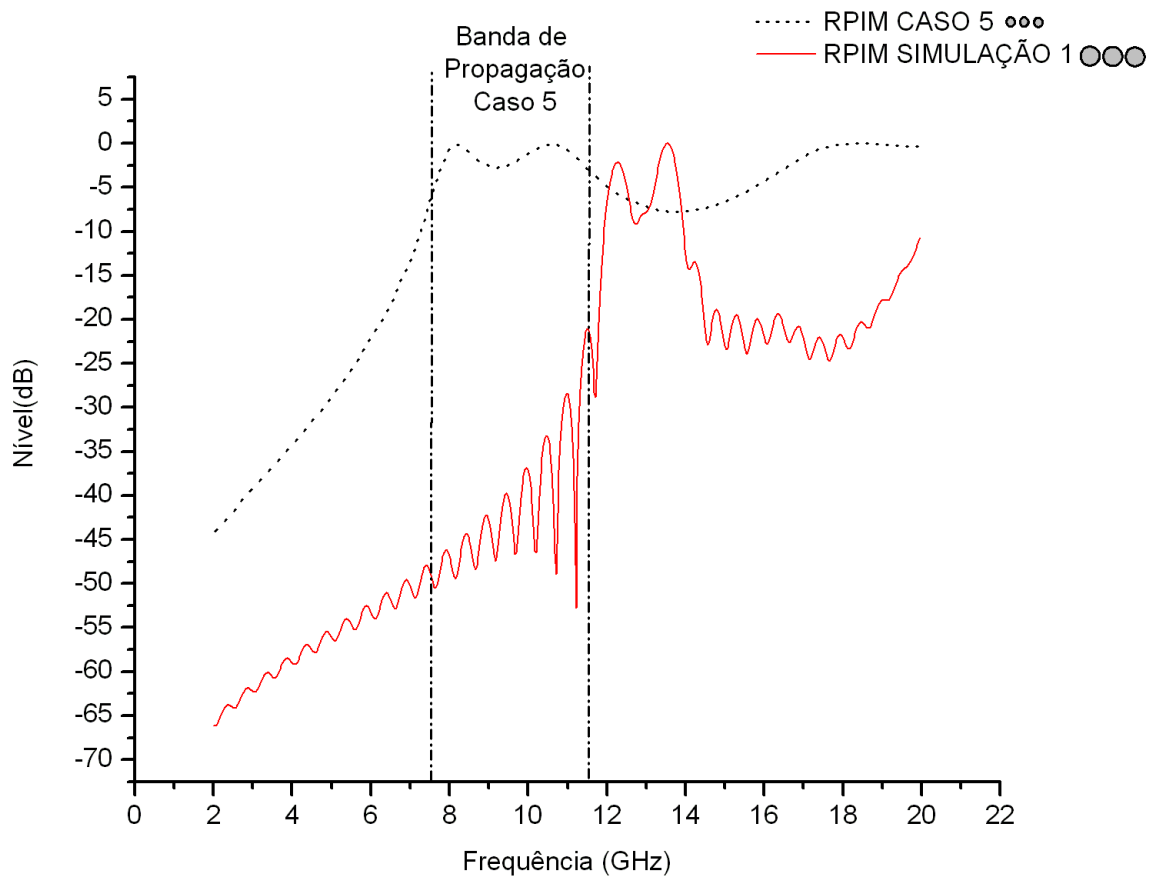


Figura 4.73: Comparação dos coeficientes de reflexão obtidos com o método RPIM para a simulação 1 e o resultado analítico do caso de validação 5. Ponto de medição:  $\rho_2$ .

## 4.2.2 Simulação 2 - Estrutura Periódica Cilíndrica com base Triangular

Na segunda simulação utilizou-se um cilindro triangular como elemento base da estrutura periódica, Fig.4.74. Este cilindro tem como forma base um triângulo equilátero de lado  $l = 5.3871mm$ . A área deste triângulo  $S_{triângulo}$  é igual a área da base do cilindro  $S_{circulo}$  (simulação 1), Fig.4.75. O período longitudinal é igual ao transversal e é dado por  $P_l = P_t = 12mm$ , Fig.4.76.

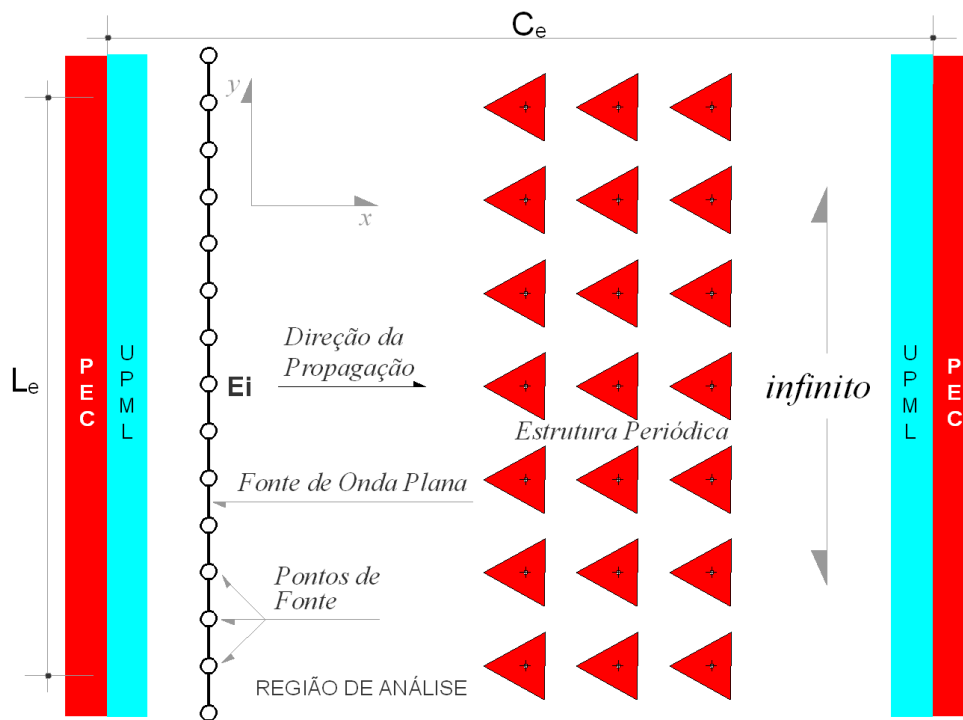


Figura 4.74: Representação do problema no plano-xy.

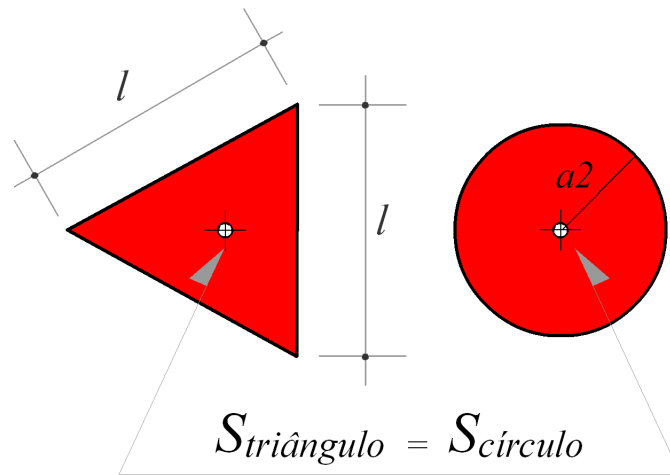


Figura 4.75: Comparação entre o triângulo utilizado nesta simulação e o círculo utilizado na simulação 1, onde  $S_{\text{triângulo}} = S_{\text{círculo}}$ .

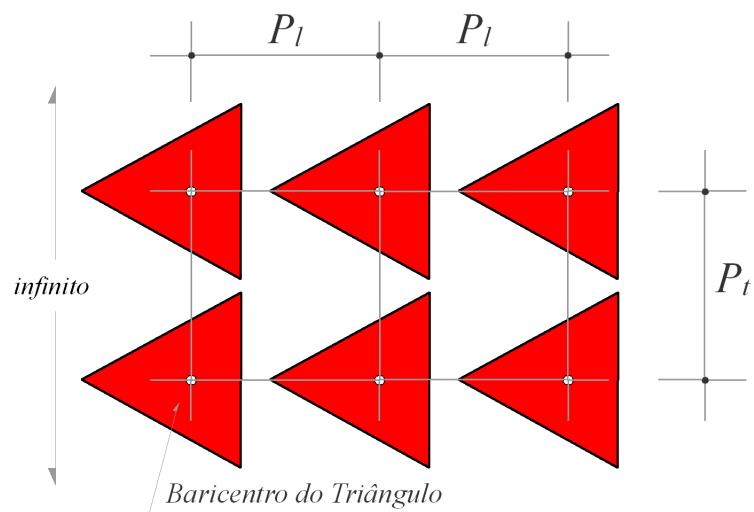


Figura 4.76: PBG e suas medidas.

A discretização por CLDM é apresentada nas Fig.4.77 e 4.78 .

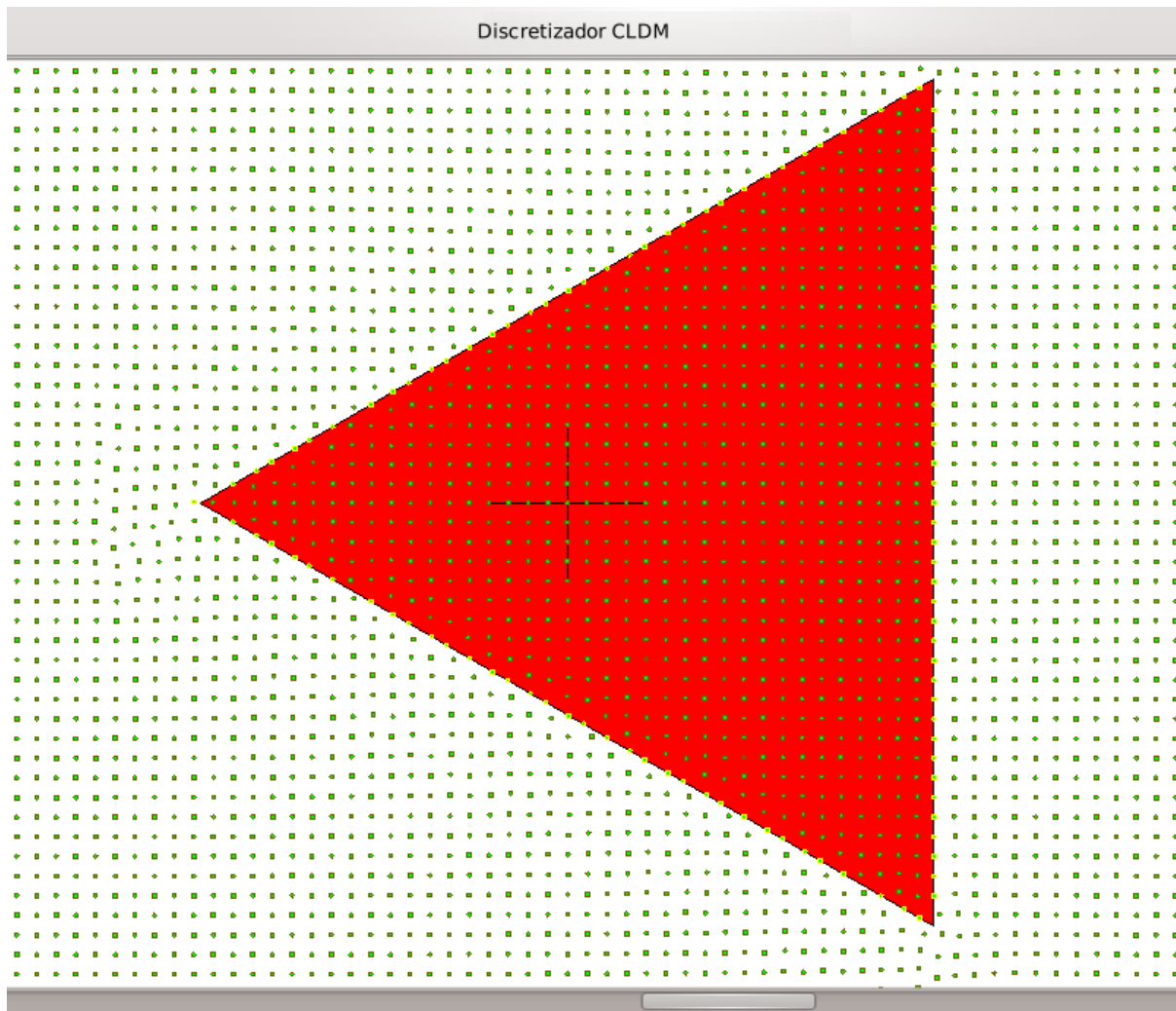
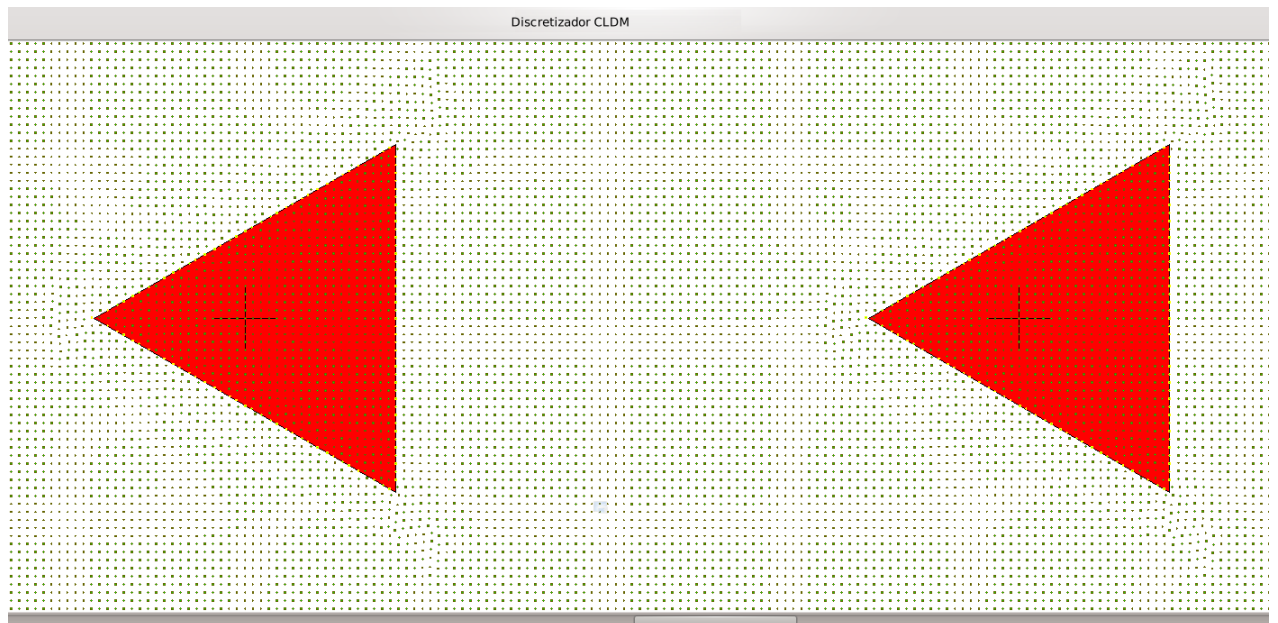
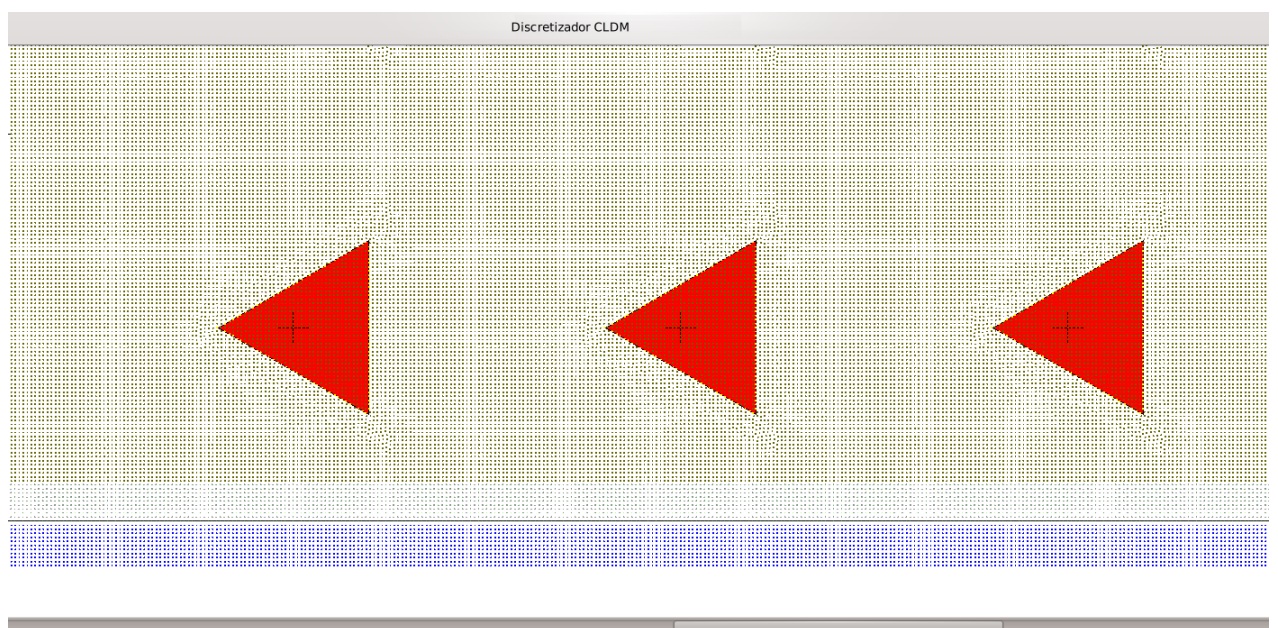


Figura 4.77: Discretização espacial da região próxima ao espalhador obtida com o método CLDM. Zoom=4000.



(a)



(b)

Figura 4.78: Discretização espacial da região próxima ao espalhador obtida com o método CLDM. a) Zoom=2000. b) Zoom=1000.

Os parâmetros de simulação podem ser vistos na Tabela 4.3. A propagação do sinal

pode ser vista nas figuras de Fig.4.79 a 4.82.

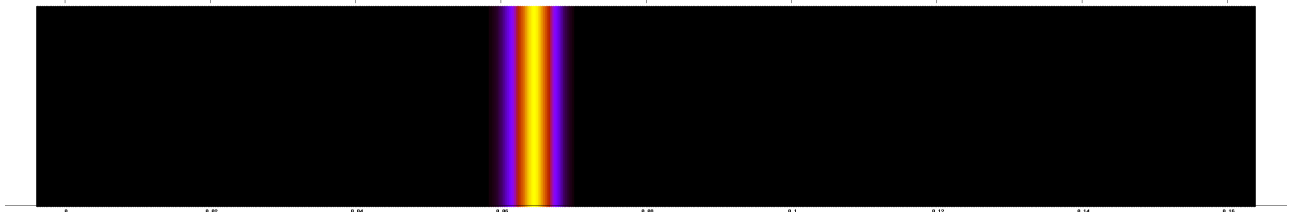


Figura 4.79: Distribuição da componente Ez total no instante  $t = 0.4ns$ .

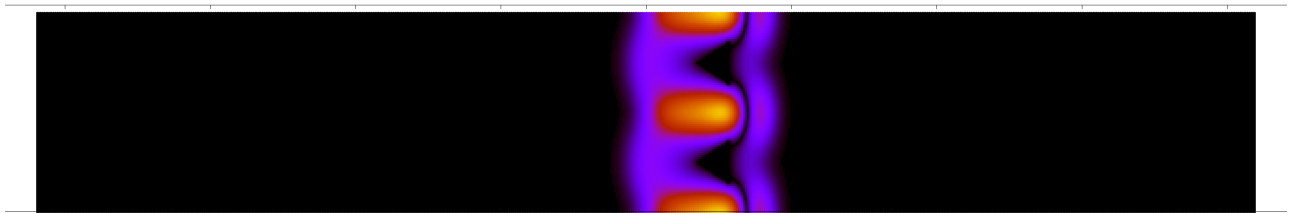


Figura 4.80: Distribuição da componente Ez total no instante  $t = 0.5ns$ .

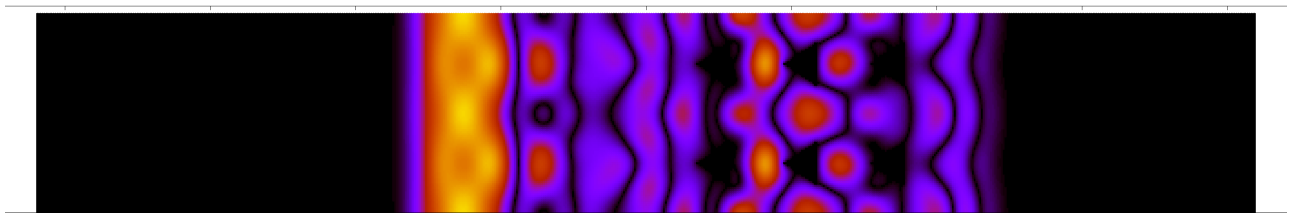


Figura 4.81: Distribuição da componente Ez total no instante  $t = 0.6ns$ .

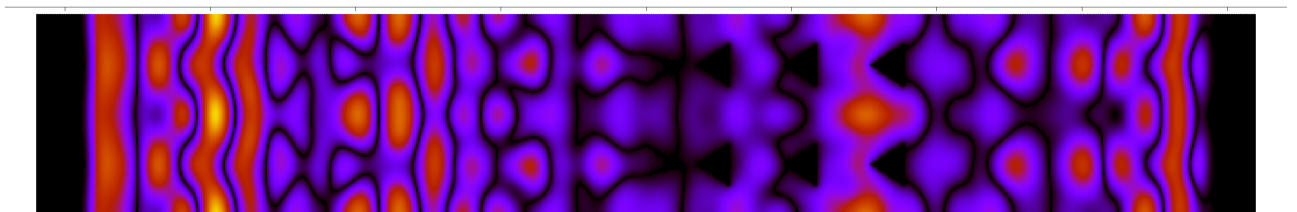


Figura 4.82: Distribuição da componente Ez total no instante  $t = 0.7ns$ .

Os resultados obtidos pelo método RPIM nesta simulação, são comparados com os resultados obtidos na simulação 1, 3 e no caso 5, Fig.4.92 e Fig.4.93 (seção 4.2.3).

### 4.2.3 Simulação3 - Estrutura Periódica Amálgama Longitudinal

Esta simulação utiliza os dois elementos das simulações anteriores para criar uma estrutura periódica amálgama, a qual utiliza uma variação Longitudinal de elementos, Fig.4.83. O período longitudinal é igual ao transversal e é dados por  $P_l = P_t = 12mm$ , Fig.4.84.

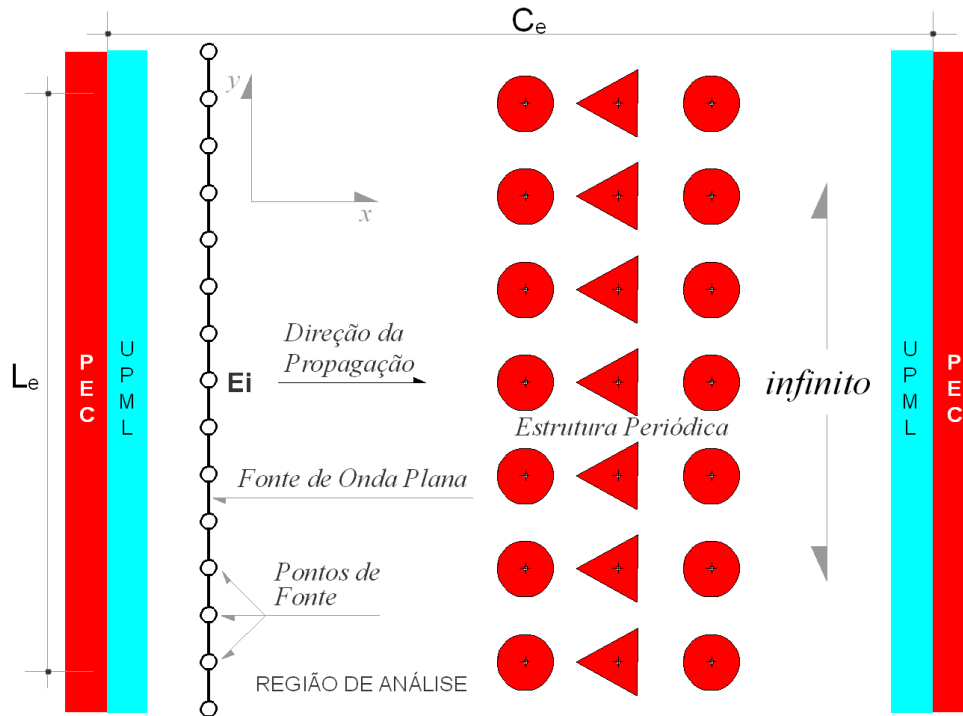


Figura 4.83: Representação do problema no plano-xy.



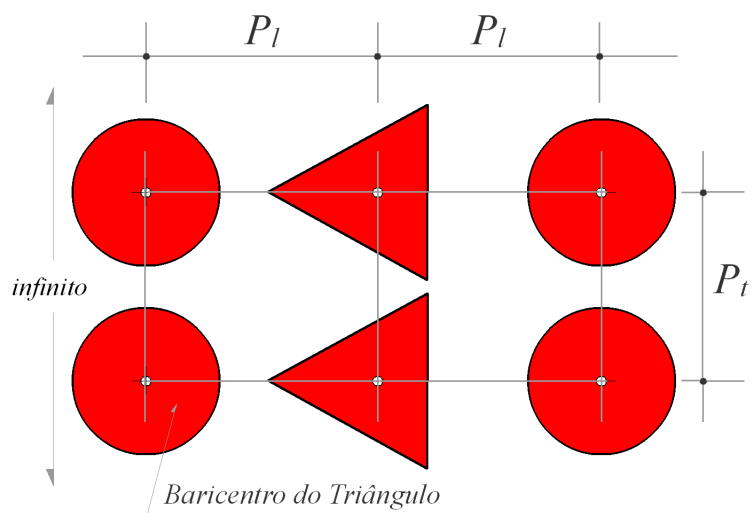


Figura 4.84: Estrutura PBG e suas medidas.

Com relação à discretização, pode-se notar que o método CLDM se adapta bem a mudanças de sistemas de coordenadas em uma mesma região de análise, possibilitando a utilização de diversos tipos de estruturas diferentes em uma mesma região, Fig.4.85 e 4.86.

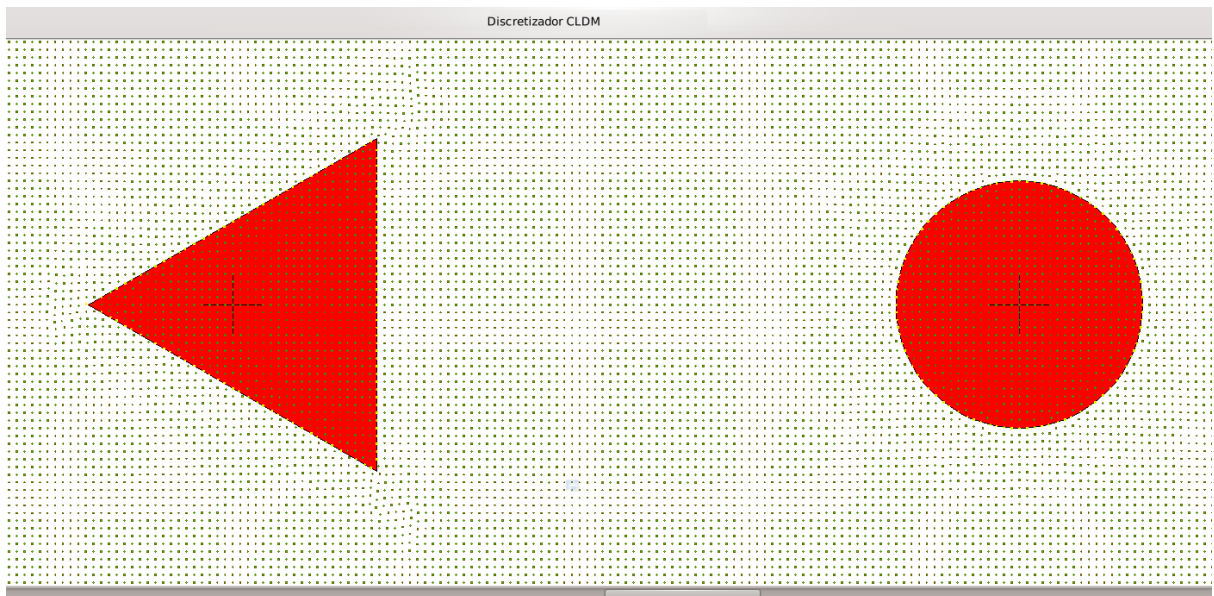


Figura 4.85: Discretização espacial da região próxima ao espalhador obtida com o método CLDM. Zoom=2000.

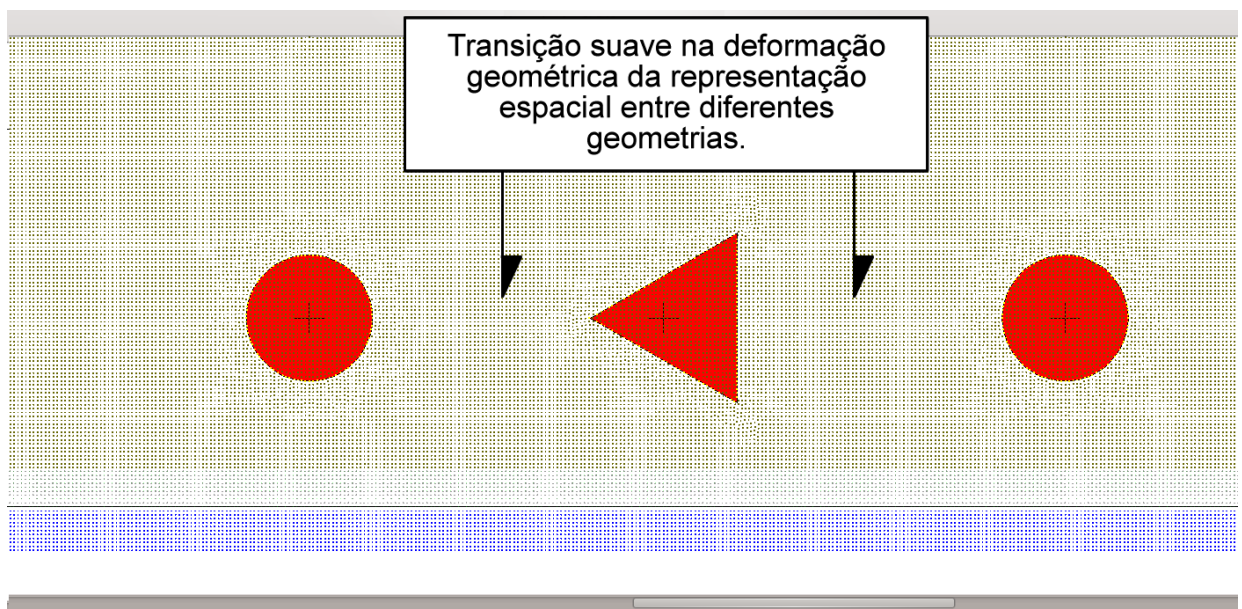


Figura 4.86: Discretização espacial da região próxima ao espalhador obtida com o método CLDM. Zoom=1000.

A propagação do sinal pode ser vista nas figuras de Fig.4.87 a 4.91.



Figura 4.87: Distribuição da componente  $E_z$  total no instante  $t = 0.3ns$ .

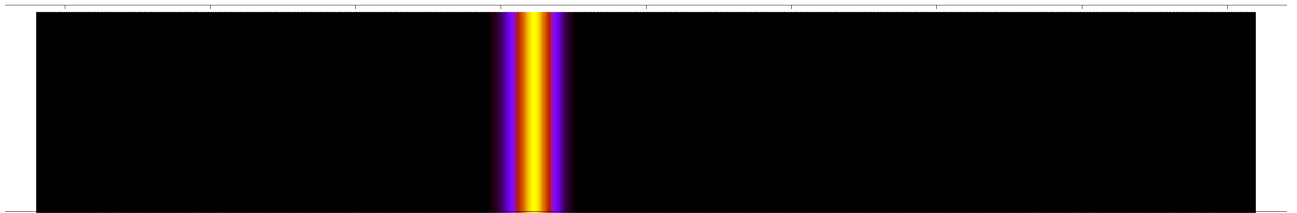


Figura 4.88: Distribuição da componente  $E_z$  total no instante  $t = 0.4ns$ .

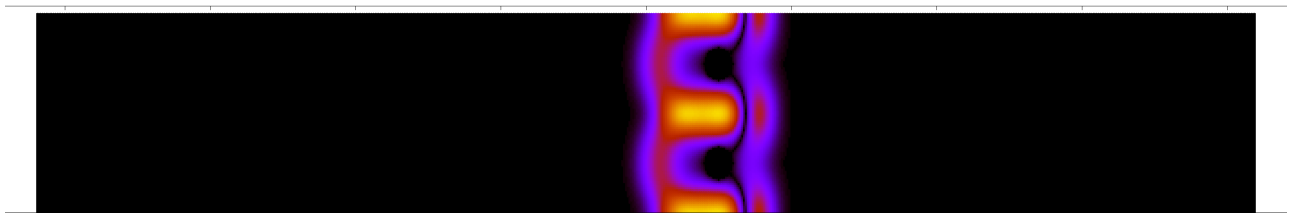


Figura 4.89: Distribuição da componente  $E_z$  total no instante  $t = 0.5ns$ .

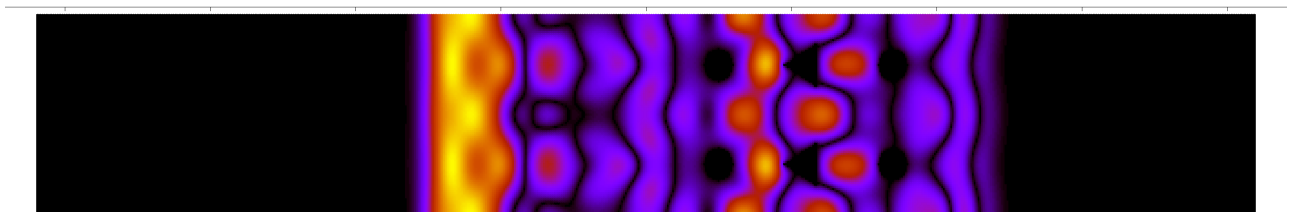


Figura 4.90: Distribuição da componente  $E_z$  total no instante  $t = 0.6ns$ .

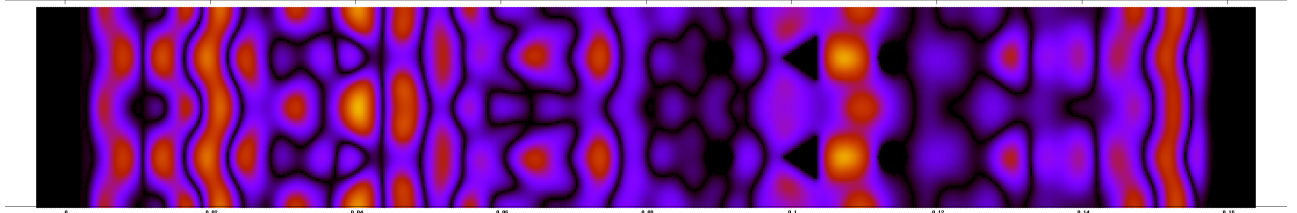


Figura 4.91: Distribuição da componente  $E_z$  total no instante  $t = 0.7ns$ .

Os resultados obtidos pelo método RPIM nesta simulação, são comparados com os resultados obtidos nas simulações 1, 2 e no caso de validação 5. As Fig.4.92 e Fig.4.93 mostram respectivamente os coeficientes de reflexão e transmissão.

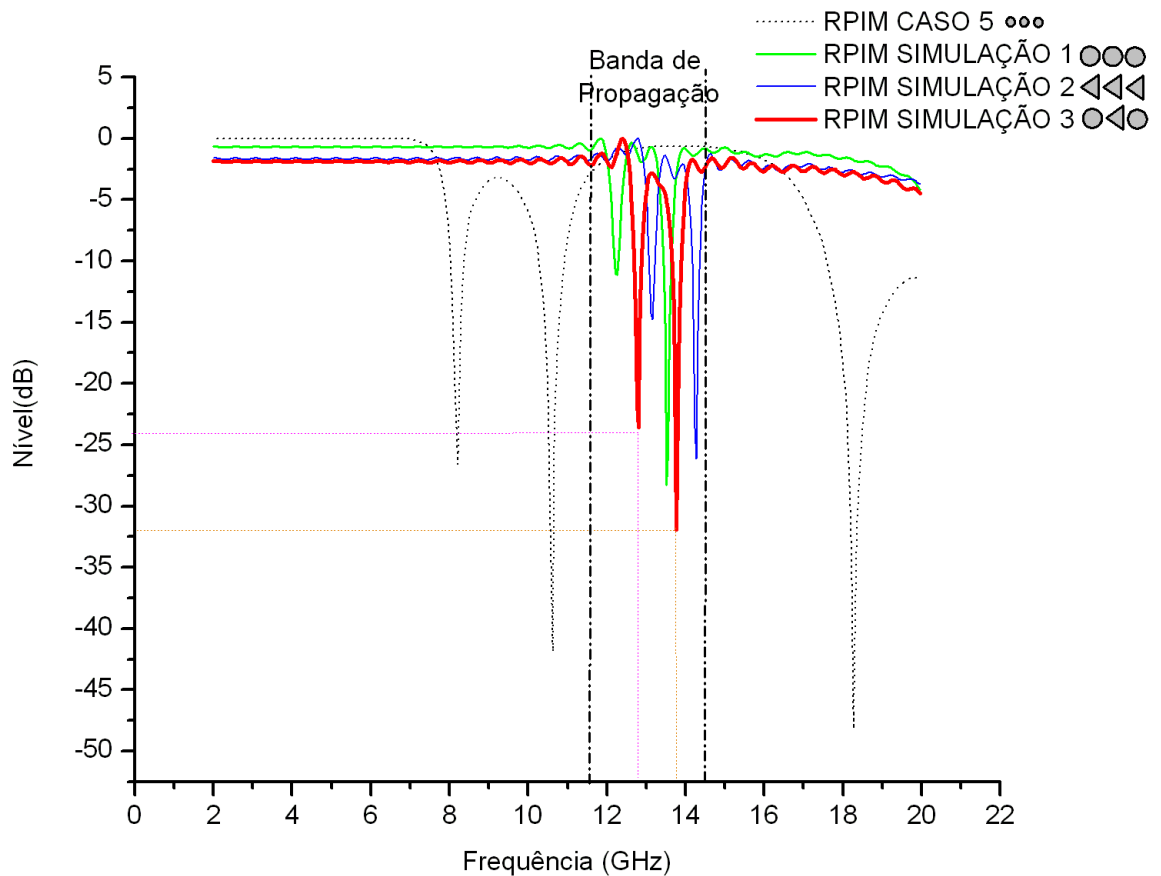


Figura 4.92: Comparação dos coeficientes de reflexão obtidos pelo o método RPIM, nas simulações 1, 2, 3 e no caso de validação 5. Ponto de medição  $\rho_1$ .

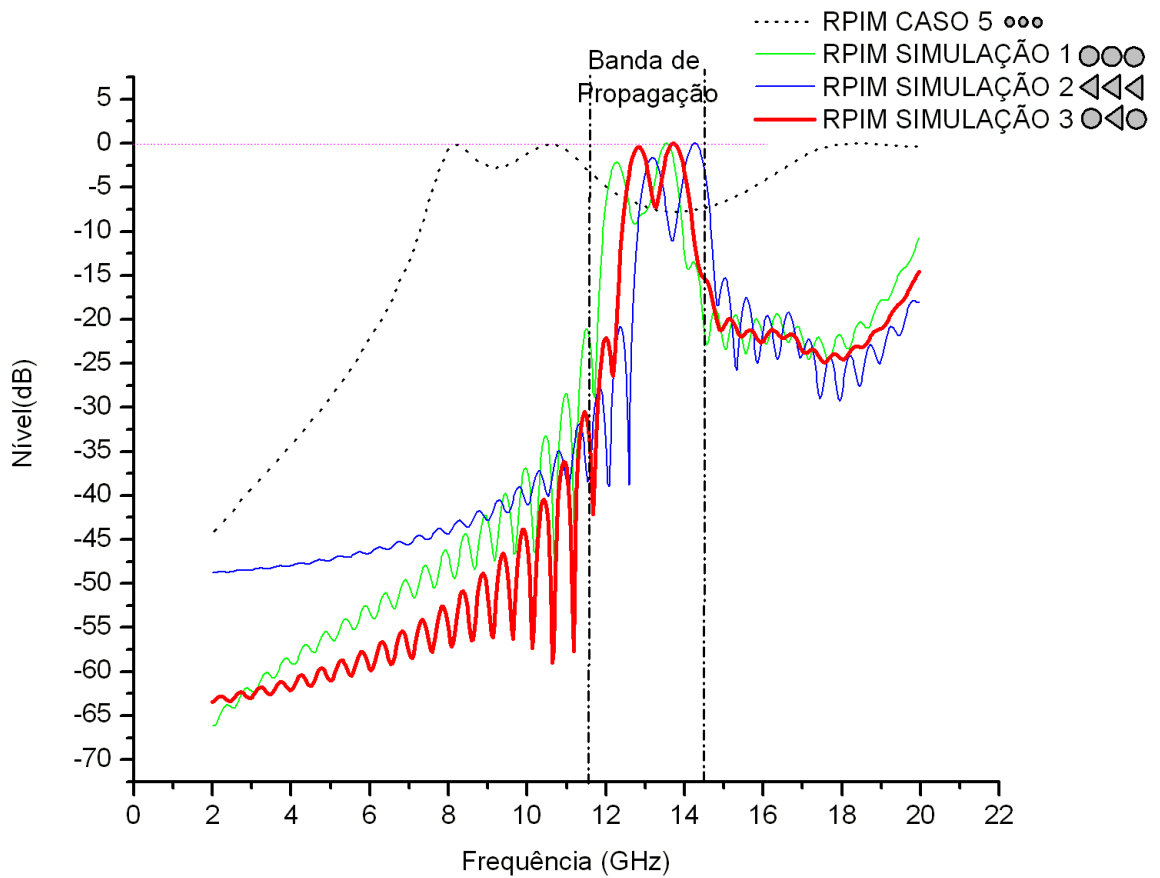


Figura 4.93: Comparação dos coeficientes de transmissão obtidos pelo o método RPIM, nas simulações 1, 2, 3 e no caso de validação 5. Ponto de medição  $\rho_2$ .

Estes resultados mostram como a variação dos elementos bases da estrutura periódica, pode alterar a característica eletromagnética da PBG.

A partir das Figs. 31 e 32, podem ser feitas as seguintes observações:

1. Para a Simulação 1, o aumento do diâmetro dos cilindros em quatro vezes, em relação ao Caso 5, fez com que a banda de transmissão fosse deslocada da faixa de 7.5-11.5 GHz para 11.5-14.0 GHz. Isto se justifica pelo fato de que, na prática, o afastamento entre os cilindros metálicos foi reduzido. Além disso, notou-se que os mínimos níveis de reflexão, que foram deslocados de 8.1 GHz e 10.6 GHz para 12.3 GHz e 13.5 GHz, respectivamente, subiram de -26 dB e -42 dB para -11 dB e -27

dB;

2. Para a Simulação 2, a substituição dos cilindros por triângulos metálicos equiláteros (que conservam a área dos círculos da Simulação 1) fez com que a banda de transmissão fosse deslocada da faixa de 11.5-14.0 GHz para 12.9-14.5 GHz. Além disso, notou-se que os mínimos níveis de reflexão, que foram deslocados de 12.3 GHz e 13.5 GHz para 13.1 GHz e 14.2 GHz, respectivamente, foram alterados de -11 dB e -27 dB para -15 dB e -25 dB, respectivamente;
3. Finalmente, para a Simulação 3, em que os triângulos se alternam com círculos, verificou-se que as frequências onde os mínimos níveis de reflexão ocorrem, se manifestam em 13 GHz e em 13.9 GHz (entre as frequências de mínima reflexão das simulações 2 e 3, o que é esperado fisicamente). Além disso, reduziram-se os níveis de reflexão nestas frequências para -24 dB e -50dB, respectivamente. Ressalta-se que para 13.9 GHz, o nível de reflexão é bem menor que o obtido por A. Tarot em [77] para 10.6 GHz.

## Capítulo 5

# Considerações Finais e Propostas para Trabalhos Futuros

Nesta dissertação, foi proposto um novo método de discretização espacial, Coulomb Law Discretization Method - CLDM - para criação de domínios que possam ser usados em simulações eletromagnéticas baseadas no método RPIM (Radial Point Interpolation Method) truncado por UPML.

O método proposto baseia-se na lei de Coulomb para gerar a distribuição dos nós pertencentes a um domínio de análise. O diferencial deste método é que ele não utiliza abordagens tradicionais, podendo ser considerado o primeiro método de discretização espacial totalmente meshless.

Por ser um método computacionalmente robusto, optou-se por uma implementação utilizando a linguagem C/C++, por se tratar de uma linguagem de alto nível de desenvolvimento. Para facilitar a aplicação do CLDM, foi desenvolvida uma interface gráfica utilizando a plataforma Qt [80] que possibilita a visualização da aplicação do método em tempo real. Além da aplicação do CLDM, esta interface possui a implementação do cálculo das funções de forma para o método RPIM. Para aplicação das equações de Maxwell nos domínios gerados pelo método CLDM, desenvolveu-se um simulador baseado

no método RPIM que implementa a truncagem por UPML.

O ponto mais importante, quando se trata de discretização espacial, é a análise da qualidade numérica da discretização. No tópico 3.5, é proposta uma abordagem para analisar a qualidade da discretização que se baseia no cálculo do erro gerado pelas funções de forma (método RPIM). Outro ponto importante mencionado no tópico 3.4 é a limitação dos arranjos entre pontos elétricos e magnéticos gerados pela utilização da truncagem por UPML.

No Capítulo 4 são realizadas simulações, baseadas em problemas de espalhamento eletromagnético existentes na literatura, com a finalidade de validar a implementação do método CLDM. Os resultados obtidos nas simulações com o método RPIM (CLDM) são analisados em relação a solução analítica e com os obtidos pelo método FDTD. A partir destas análises pode-se verificar resultados promissores do método CLDM, em conjunto com o método RPIM. Isso se dá devido a vantagem que o método CLDM possui de minimizar as deficiências ligadas à não conformidade da discretização do domínio.

Notou-se que o método proposto foi capaz de otimizar o conjunto de nós de tal forma a reduzir os erros de interpolação a níveis aceitáveis, que garantem a estabilidade do método RPIM. Neste ponto, ressalta-se que foi introduzido um novo método de avaliação da qualidade da malha, que utiliza o próprio método RPIM para realizar esta quantificação. O método desenvolvido neste trabalho, CLDM, complementa a metodologia LSFCM, anteriormente publicada em [62]. O CLDM viabiliza a aplicação do LSFCM para os casos em que observam erros de inversão de matrizes. Estes erros são monitorados graficamente através da interface gráfica desenvolvida neste trabalho e são corrigidos através do CLDM.

Até o momento, a implementação do método CLDM está voltada a problemas bidimensionais. Porém, sua formulação possibilita a implementação tridimensional do método. Além disso, outras implementações podem ser desenvolvidas a fim de melhorar a aplicação deste método. Entre elas estão:

- Paralelização - possibilitando a modelagem de problemas mais complexos, com re-



gião de análise e número de elementos maiores. Esta implementação é fundamental para a aplicação do método CLDM em problemas 3D;

- Automatização - a implementação atual requer a interação humana no processo de geração da distribuição dos nós. Porém este processo pode ser totalmente automatizado, fazendo com que a interação humana seja necessária apenas para iniciar o processo;
- Truncagem por CPML - A CPML [81] é uma nova técnica ABC que se mostra adequada para método meshless. A aplicação da truncagem do método RPIM por CPML possibilita a utilização de arranjos (para pontos elétricos e magnéticos) mais adequados para o método CLDM.

As implementações mencionadas são apenas exemplos de melhorias que podem ser desenvolvidas, a fim de dar continuidade a este trabalho e contribuir para a evolução do método CLDM.

Ressalta-se que o método proposto (CLDM), dada a sua relativa simplicidade de implementação em comparação com métodos para geração de malhas não-estruturadas, mostrou-se uma alternativa viável aos geradores de malha comerciais e aos complexos algoritmos de geração de malhas não-estruturadas. Além disso, o algoritmo permite avaliar previamente se o conjunto de pontos funcionará adequadamente com o método RPIM. Mesmo com geradores de malha comerciais, a qualidade da discretização (para o método Meshless) não é assegurada automaticamente, pois instabilidades numéricas podem ser observadas quando malhas de elementos finitos (com alta qualidade para o FEM) são empregadas em métodos meshless. Desta forma, isto constitui a principal contribuição deste trabalho.

# Apêndice A

## Níveis de reflexão na UPML gerados pelos arranjos e combinações

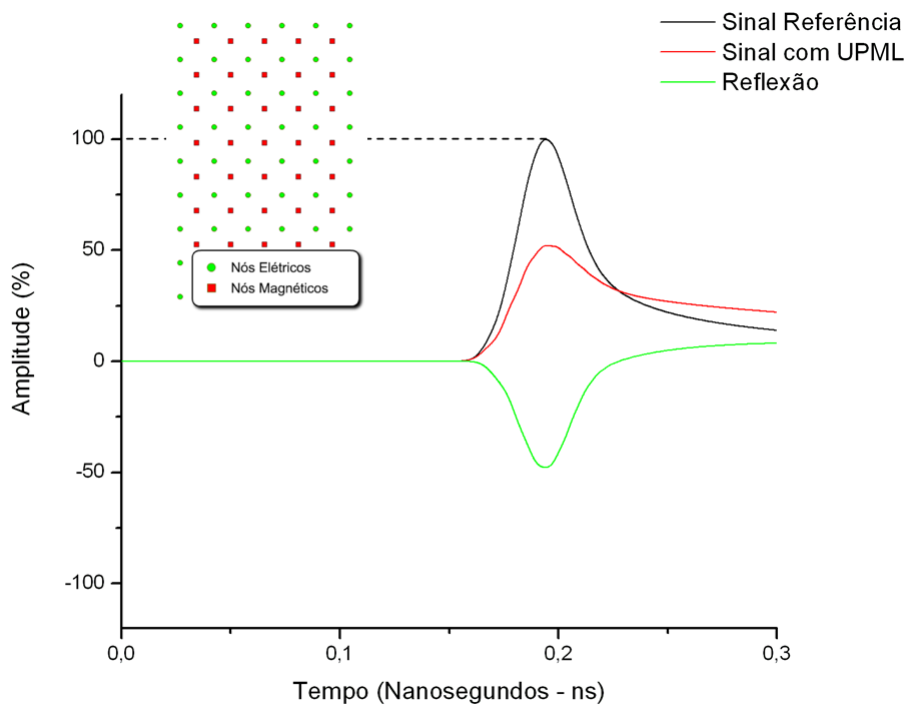


Figura A.1: Resultado dos testes de truncagem por UPML para o arranjo 1.

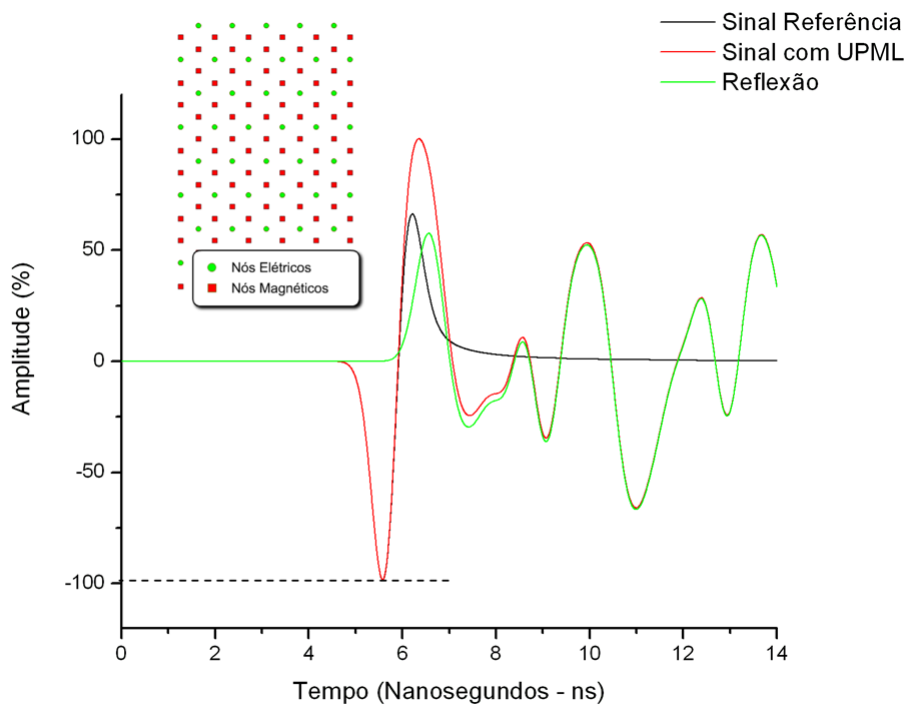


Figura A.2: Resultado dos testes de truncagem por UPML para o arranjo 2.

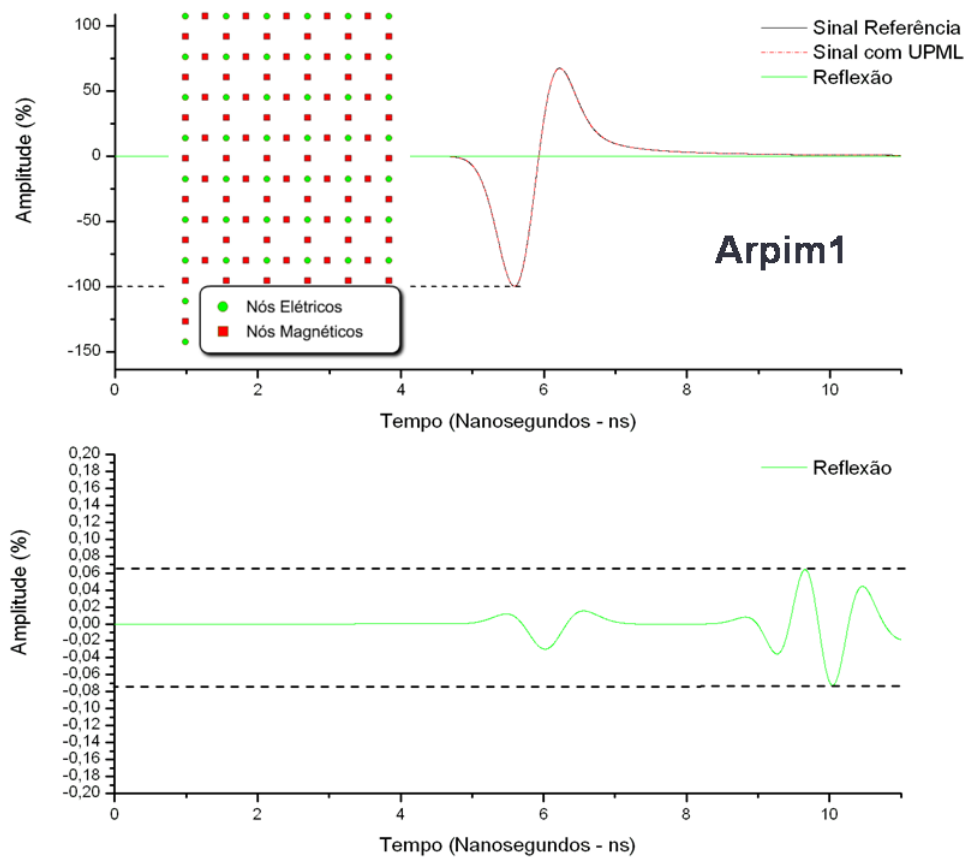


Figura A.3: Resultado dos testes de truncagem por UPML para o arranjo Arpim 1.

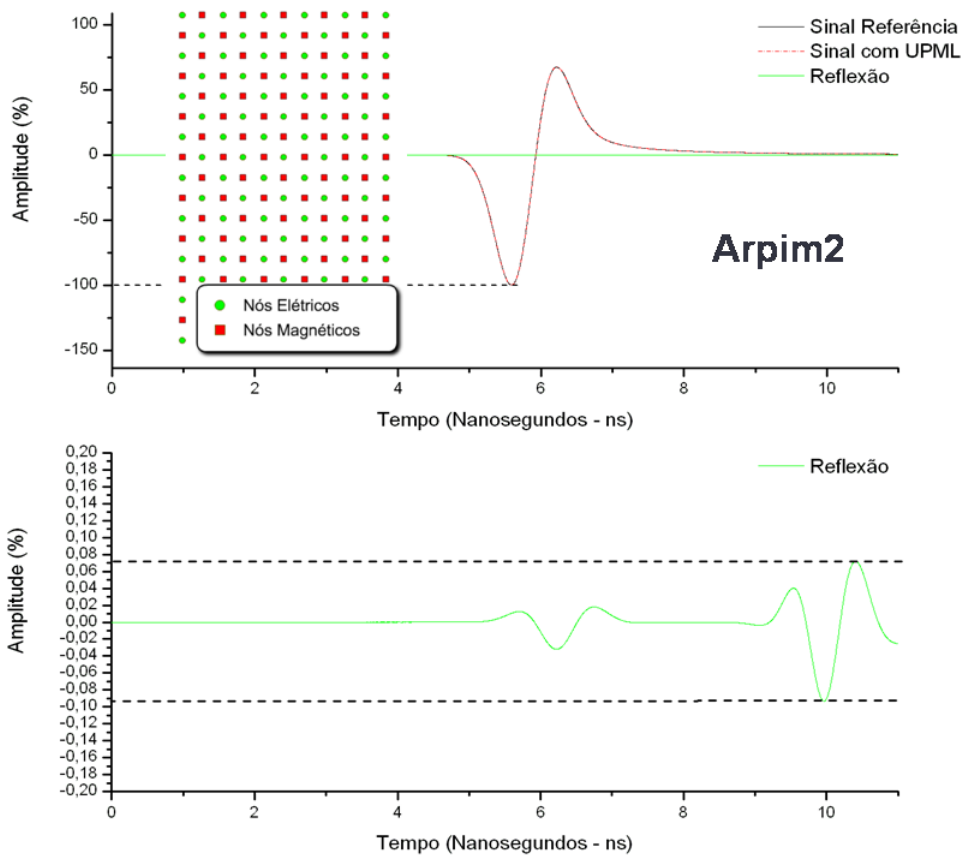


Figura A.4: Resultado dos testes de truncagem por UPML para o arranjo Arpim 2.

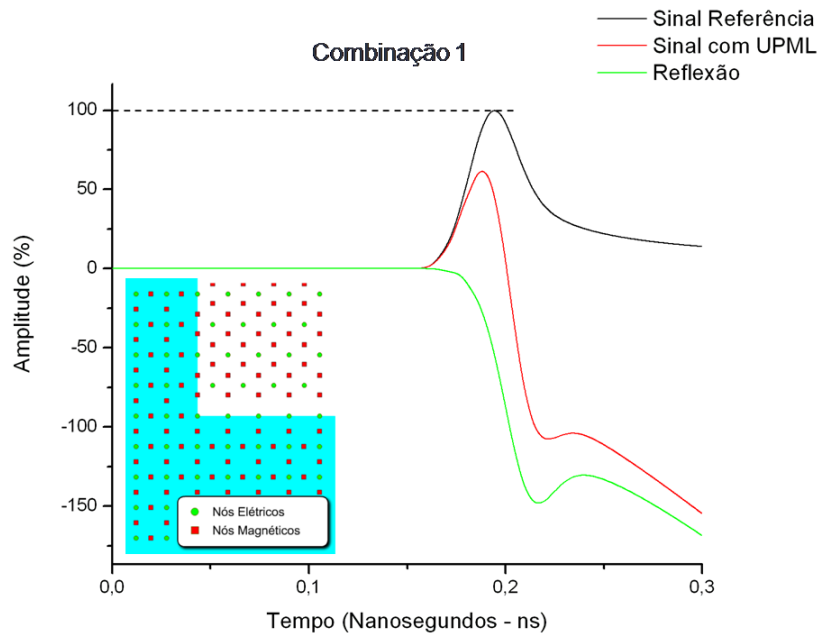


Figura A.5: Resultado dos testes de truncagem por UPML para a combinação entre arranjos 1.

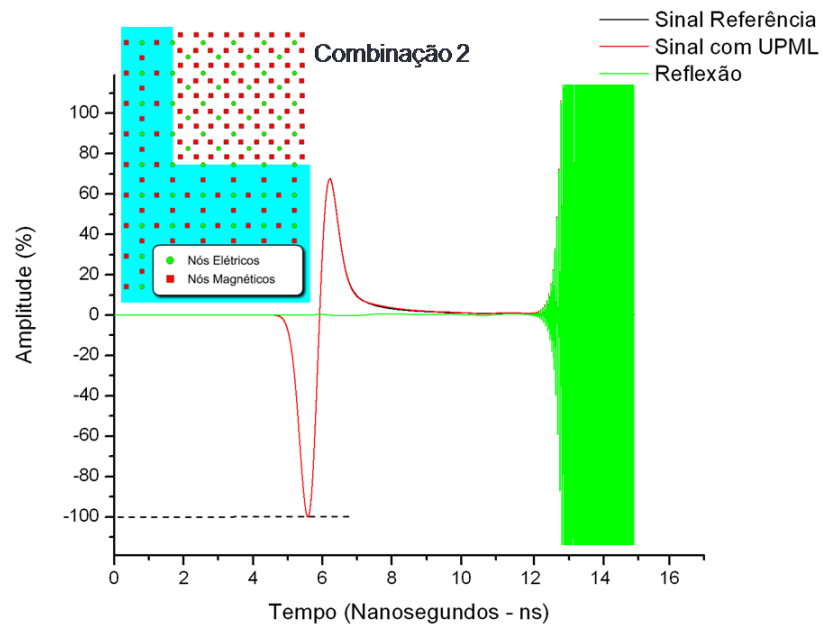


Figura A.6: Resultado dos testes de truncagem por UPML para a combinação entre arranjos 2.

## Apêndice B

### Resultados do método RPIM no Caso 1 para discretizações com diferentes $\Delta_{min}$

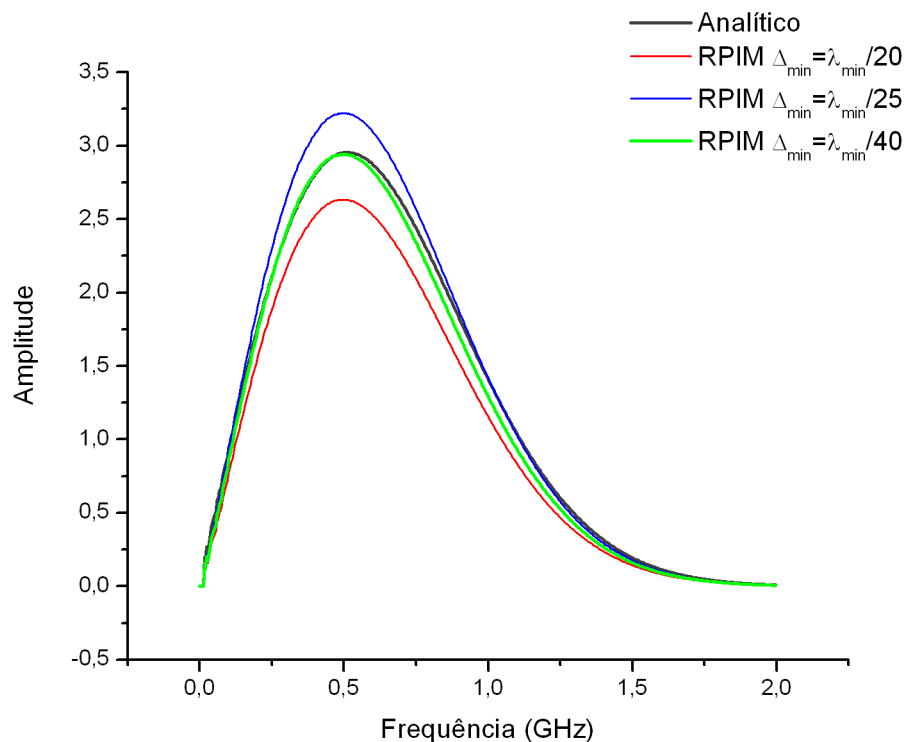


Figura B.1: Comparação dos resultados para o método RPIM com diferentes  $\Delta_{min}$  e solução analítica. Ponto de medição  $\rho_1$

# Referências Bibliográficas

- [1] E. Gombrich, *História da Arte*, 1st ed. São Paulo: LTC, 2002.
- [2] C. A. de Proença Rosa, *A História da Ciência Vol. 1, 2 e 3*, 1st ed. Brasília : Fundação Alexandre de Gusmão, 2010.
- [3] B. Nunes, *Introdução à Filosofia da Arte*, 1st ed. São Paulo: Ática, 1999.
- [4] M. Joly and T. de Maria Appenzelle., *Introdução à Análise da Imagem*, 1st ed. Campinas, São Paulo: Papirus, 1996.
- [5] A. Rooney, *A História da Matemática - Desde a Criação das Pirâmides Até a Exploração do Infinito*, 1st ed. M. BOOKS, 2012.
- [6] N. Bellomo, L. Preziosi, and A. Romano., *Mechanics and Dynamical Systems With Mathematica.*, 1st ed. Birkhäuser, 2000.
- [7] V. Teodoro, J. Vieira, and F. Clérigo., *Modellus, Interactive Modelling with Mathematica.*, 1st ed. Knowledge Revolution, San Diego, 1997.
- [8] C. F. Filho, *A História da Computação - O caminho do pensamento e da tecnologia*, 1st ed. EDIPUCRS, 2007.
- [9] A. Quarteroni and A. Valli, *Numerical Approximation of Partial Differential Equations*, xvi ed. Springer-Verlag, 1994.

- [10] F. P. Preparata and M. I. Shamos, *Computational Geometry: An Introduction*, 1st ed. Springer-Verlag, 1985.
- [11] S. C. Chapra and R. P. Canale, *Numerical Methods for Engineers.*, 6th ed. McGraw-Hill, 2010.
- [12] D. Duffy, *Transform Methods for solving partial differential equations.*, 6th ed. CRC Press, New York, 1994.
- [13] E. A. Veit, “Modelagem computacional no ensino de física.” in *Simpósio Nacional de Ensino de Física*, 2005, pp. 61–65.
- [14] L. Chwif and A. C. Medina, *Modelagem e Simulação de Eventos Discretos: teorias e aplicações.*, 3rd ed. São Paulo ed. do Autor, 2010.
- [15] C. Balanis, *Advanced Engineering Electromagnetics.* Wiley, 1989.
- [16] A. Thom and C. J. Apelt, *Field Computations in Engineering and Physics.*, 1st ed. London: D. Van Nostrand, 1961.
- [17] A. Taflove and S. Hagness, *Computational Electrodynamics: The Finite-Difference Time-Domain Method*, 3rd ed., ser. Artech House Antennas and Propagation Library. Artech House, 2005.
- [18] T. Hughes, *The Finite Element Method: Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis.*, 1st ed. Dover Publications, 2000.
- [19] P. P. Silvester and R. L. Ferrari, *Finite elements for electrical engineers.*, 3rd ed. ed. New York: Cambridge, 1996.
- [20] K.-J. Bathe, *Finite Element Procedures.*, 1st ed. New Jersey: Prentice Hall, 1996.
- [21] J. Thompson, B. Soni, and N. Weatherill, *Handbook of Grid Generation.* Taylor & Francis, 2010.



- [22] P. Frey and P.-L. George, *Mesh Generation*, 2nd ed. John Wiley & Sons, 2010.
- [23] S. Li and W. K. Liu, *Meshfree Particle Methods.*, 1st ed. Springer, 2007.
- [24] R. Gingold and J. Monaghan, “Smoothed particle hydrodynamics - Theory and application to non-spherical stars,” *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol. 181, Nov. 1977, p. 375-389., vol. 181, pp. 375–389, Nov. 1977.
- [25] M. Xu, P. Thompson, and A. Toga, “Adaptive reproducing kernel particle method for extraction of the cortical surface,” *Medical Imaging, IEEE Transactions on*, vol. 25, no. 6, pp. 755 –767, june 2006.
- [26] J. Bonet and S. Kulasegaram, “Remarks on tension instability of Eulerian and Lagrangian Corrected Smooth Particle Hydrodynamics (CSPH) methods,” *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 52, no. 11, 2001.
- [27] G. A. Dilts, “Moving-least-squares-particle hydrodynamics. Consistency and stability,” *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 44, no. 8, 1999.
- [28] M. Caldora Costa, J.-L. Coulomb, Y. Marechal, and S. Nabeta, “An adaptive method applied to the diffuse element approximation in optimization process,” *Magnetics, IEEE Transactions on*, vol. 37, no. 5, pp. 3418 –3422, sep 2001.
- [29] T. Belytschko, Y. Y. Lu, and L. Gu, “Element-free Galerkin methods,” *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 37, no. 2, pp. 229–256, 1994.
- [30] S. N. Atluri and T. Zhu, “A new Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) approach in computational mechanics,” *Computational Mechanics*, vol. 22, no. 2, pp. 117–127, 1998.
- [31] G.-R. Liu and Y. Gu, “A point interpolation method,” in *4th Asian-Pacific Conference on Computational Mechanics*, Singapore, December 1999, pp. 1009–1014.

- [32] J. G. Wang and G. R. Liu, “Radial point interpolation method for elastoplastic problem,” in *1st International Conference on Structural Stability and Dynamics*, Taipei, Taiwan, December 2000, pp. 703–708.
- [33] K. Shanazari and M. Hosami, “A two-dimensional adaptive nodes technique in irregular regions applied to meshless-type methods,” *Engineering Analysis with Boundary Elements*, vol. 36, no. 2, pp. 161 – 168, 2012.
- [34] Q. Du, M. Gunzburger, and L. Ju, “Meshfree, probabilistic determination of point sets and support regions for meshless computing,” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 191, no. 13, pp. 1349–1366, 2002.
- [35] D. Burgarelli, “Modelagem computacional e simulação numérica adaptativa de equações diferenciais parciais evolutivas aplicadas a um problema termoacústico.” PhD thesis, Departamento de Matemática da PUC-RIO, 1998.
- [36] A. Okabe, B. Boots, K. Sugihara, and S. N. Chiu, *Spatial Tessellations - Concepts and Applications of Voronoi Diagrams.*, 2nd ed. John Wiley, 2000.
- [37] J. Shewchuk, *Delaunay Refinement Mesh Generation.*, 2nd ed. John Wiley, 2000.
- [38] R. L. Z. Sacks, D. Kingsland and J. Lee, “A perfectly matched anisotropic absorber for use as an absorbing boundary condition,” *IEEE Trans. Antennas and Propagation*, vol. 43, pp. 1460–1463, 1995.
- [39] G. Liu and Y. Gu, *An Introduction to Meshfree Methods and Their Programming.* Springer, Dordrecht, The Netherlands, 2005.
- [40] T. Belytschko, Y. Krongauz, J. Dolbow, and C. Gerlach, “On the completeness of meshfree particle methods,” *Int. J. Numer. Mech. Engng*, vol. 43, pp. 785–819, 1998.

- [41] T.-P. Fries and H.-G. Matthies, *Classification and overview of meshfree methods*. Technical report, Technical University Braunschweig, Department of Mathematics and Computer Science., July 2004.
- [42] S. Lipschutz and M. Lipson, *Matemática Discreta: Coleção Schaum*. BOOKMAN COMPANHIA ED, 2004.
- [43] E. L. Lima, *Espaços Métricos*. IMPA-Projeto Euclides, 1993.
- [44] J. G. Wang and G. R. Liu, “On the optimal shape parameters of radial basis functions used for 2-D meshless methods,” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 191, pp. 2611–2630, 2002.
- [45] Y. Yu and Z. Chen, “A 3-D Radial Point Interpolation Method for Meshless Time-Domain Modeling,” *IEEE Transactions on microwave theory and techniques*, vol. 57, no. 8, pp. 2015–2020, 2009.
- [46] G. Liu, *Meshfree Methods: Moving Beyond the Finite Element Method*, 2nd ed. CRC Press, 2010.
- [47] W. Nicomedes, R. Mesquita, and F. Moreira, “2D Scattering Analysis Through Meshless Methods: A Comparison Between Two Different Shape Function Schemes,” in *Microwave and Optoelectronics Conference (IMOC), 2009 SBMO/IEEE MTT-S International*, 2009, pp. 368–372.
- [48] J. Powell, *Approximation Theory and Methods*. Cambridge University Press, 1981.
- [49] A. Stepanets, *Methods of Approximation Theory*. Brill, 2005.
- [50] G.-R. Liu and Y. Gu, “A point interpolation method for two-dimensional solids,” *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 50, no. 4, pp. 937–951, February 2001.

- [51] P. Heuberger, P. van den Hof, and B. Wahlberg, *Modelling and Identification with Rational Orthogonal Basis Functions*. Springer, 2005.
- [52] J. G. Wang and G. R. Liu, “A point interpolation meshless method based on radial basis functions,” *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 54, no. 11, pp. 1623–1648, 2002.
- [53] M. Buhmann, *Radial Basis Functions: Theory and Implementations*, ser. Cambridge Monographs on Applied and Computational Mathematics. Cambridge University Press, 2009, vol. 12.
- [54] F. Ayres and P. Schmidt, *Teoria e Prob. de Matemática para o Ensino Superior*. BOOKMAN COMPANHIA ED, 2006.
- [55] T. Kaufmann, C. Fumeaux, and R. Vahldieck, “The meshless radial point interpolation method for time-domain electromagnetics,” in *Microwave Symposium Digest, 2008 IEEE MTT-S International*, june 2008, pp. 61–64.
- [56] A. Bayliss and E. Turkel, “Radiation boundary conditions for wave-like equations,” *Communications on Pure and Applied Mathematics*, vol. 33, no. 6, pp. 707–725, 1980. [Online]. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1002/cpa.3160330603>
- [57] G. Mur, “Absorbing boundary conditions for the finite-difference approximation of the time-domain electromagnetic-field equations,” *Electromagnetic Compatibility, IEEE Transactions on*, vol. EMC-23, no. 4, pp. 377–382, nov. 1981.
- [58] R. L. Higdon, “Numerical absorbing boundary conditions for the wave equation,” *Math. Comp.*, vol. 49, no. 179, pp. 65–90, 1987.
- [59] Z. Liao, H. Wong, B.P.Yang, and Y.F.Yuan, “A transmitting boundary for transient wave analysis,” *Scientia Sinica*, vol. XXVII (series A), no. 10, pp. 1063–1076, 1984.

- [60] J.-P. Berenger, “A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves,” *Journal of Computational Physics*, vol. 114, no. 2, pp. 185–200, 1994.
- [61] R. M. S. Oliveira, “Nova Metodologia para Análise e Síntese de Sistemas de Aterramento Complexos Utilizando o Método LN-FDTD, Computação Paralela Automática e Redes Neurais Artificiais,” Doutorado em engenharia elétrica, ITEC - Instituto de Tecnologia, Universidade Federal do Pará, 2008.
- [62] P. L. Machado, R. M. S. Oliveira, W. C. B. Souza, R. C. F. Araújo, M. E. L. Tostes, and C. Gonçalves, “An automatic methodology for obtaining optimum shape factors for the radial point interpolation method,” *Journal of Microwaves, Optoelectronics and Electromagnetic Applications*, vol. 10, pp. 389 – 401, 2011.
- [63] M. T. Goodrich and R. Tamassia, *Projeto de algoritmos: fundamentos, análise e exemplo da internet*. Bookman, 2004.
- [64] C. F. Medeiros and A. Medeiros, “O método da falsa posição na história e na educação matemática,” *Ciência Educação (Bauru)*, vol. 10, pp. 545 – 557, 12 2004. [Online]. Disponível em: [http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci\\_arttext&pid=S1516-73132004000300016&nrm=iso](http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1516-73132004000300016&nrm=iso)
- [65] J. H. Ferziger and M. Peric, *Computational Methods for Fluid Dynamics.*, 1st ed. Springer, 1998.
- [66] S.A.Viana, “Meshless methods applied to computational electromagnetics.” PhD thesis, University of Bath, 2006.
- [67] R. M. C.R.S. Nunes and D. Lowther, “Remeshing driven by smooth-surface approximation of mesh nodes,” in *In IEEE Transactions on Magnetics*, 2007, pp. 1541–1544.
- [68] M. Gussow, *Eletricidade Básica.*, 1st ed. McGraw-Hill de Brasil, 1985.
- [69] D. N. Paraná, *Física, vol. único.*, 1st ed. Atica, 1994.

- [70] W. H. Hayt Jr, *Eletromagnetismo.*, 3rd ed. LTC, 1983.
- [71] C. Horstmann, *Padrões e Projeto Orientados a Objeto.*, 2nd ed. Porto Alegre: Bookman, 2007.
- [72] B. Stroustrup, *The C++ Programming Language.* Addison-Wesley Professional, 2000.
- [73] —, *Programming: Principles and Practice using C++.* Addison-Wesley, 2009.
- [74] K. Yee, “Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell’s equations in isotropic media,” *Antennas and Propagation, IEEE Transactions on*, vol. 14, no. 3, pp. 302–307, may 1966.
- [75] (2013) GiD - The Personal Pre and Post Processor. [Online]. Disponível em: <http://www.gidhome.com/>
- [76] K. Bavelis, “Finite-element time-domain modelling of cylindrical structures with a modal non-reflecting boundary condition,” PhD Thesis on Philosophy in Engineering, School of Engineering, University of Warwick, 2010.
- [77] A.-C. Tarot, S. Collardey, and K. Mahdjoubi, “Numerical studies of metallic PBG structures,” *Progress In Electromagnetics Research*, vol. 41, pp. 133–157, 2003.
- [78] X. L. Bao and W. X. Zhang, “The dispersion characteristics of PBG with complex medium by using non-Yee grid higher order FDTD method,” in *Antennas and Propagation Society International Symposium, 2003. IEEE*, vol. 2, june 2003, pp. 1128–1131 vol.2.
- [79] L. G. Zheng and W. X. Zhang, “PWE analysis modeling for bi-anisotropic PBG structure,” in *Antennas and Propagation Society International Symposium, 2003. IEEE*, vol. 3, june 2003, pp. 1100–1103 vol.3.
- [80] (2013) Qt project. [Online]. Disponível em: <http://qt-project.org/>

- [81] Y. Yu and Z. Chen, “The CPML Absorbing Boundary Conditions for the Unconditionally Stable Meshless Modeling,” *Antennas and Wireless Propagation Letters, IEEE*, vol. 11, pp. 468–472, 2012.