

Universidade Federal do Pará
Centro de Ciências Exatas e Naturais
Programa de Pós-Graduação em Física

Fonte escalar acoplada ao campo de Klein-Gordon orbitando um objeto estelar

Damião Pedro Meira Filho

Orientador: Prof. Dr. Luís Carlos Bassalo Crispino

Belém
Fevereiro de 2006

Universidade Federal do Pará
Centro de Ciências Exatas e Naturais
Programa de Pós-Graduação em Física

Fonte escalar acoplada ao campo de Klein-Gordon
orbitando um objeto estelar

Dissertação de Mestrado

Belém
Fevereiro de 2006

Fonte escalar acoplada ao campo de Klein-Gordon orbitando um objeto estelar

Damião Pedro Meira Filho

Julgado em:

Conceito:

Comissão Julgadora:

Prof. Dr. Luís Carlos Bassalo Crispino
Orientador

Prof. Dr. George Emanuel Avraam Matsas
Membro

Prof. Dr. Jorge Castiñeiras Rodríguez
Membro

Belém/Fevereiro de 2006

Dedicatória

LYSHATY VELABOTAY

Agradecimentos

Ao Prof. Luís Carlos Bassalo Crispino pela sua competente e segura orientação, pela solicitude e empenho ao longo da realização deste projeto. Agradeço também pela oportunidade de colaborar neste e em futuros projetos.

Aos professores Sérgio Vizeu, Van Sérgio, Marcelo Lima, Danilo Alves, João Felipe, Petrus Agripino, Paulo de Tarso e José Bassalo, sempre solícitos e dispostos a colaborar.

Ao Prof. Jorge Castiñeiras pelas profícuas discussões em torno deste projeto e de temas diversos em Física.

Ao Prof. George Matsas pela atenção e solicitude dispensadas, por ocasião de minha primeira experiência como estudante visitante do IFT.

Aos responsáveis técnicos do Programa de Pós-Graduação em Física, Ângela Pacheco, Alzira Andrade e Anderson Viana, pela constante solicitude.

A todos os amigos entre os quais posso destacar Francisco, Lucivaldo, Eleutério, Charles, Tadeu, Renato, Edney, Fábio, Antônio e Nelson.

Aos meus queridos pais, Damião Meira e Joelna Meira pelo empenho na transmissão dos conceitos de moral e ética elevadíssimos de nossa TORAH e pela enorme e permanente disposição em apoiar-me total e incondicionalmente em todos os âmbitos da vida.

Aos meus estimados irmãos e às esferas familiares mais próximas por todo o incentivo.

À estimada esposa Çelet Meira, por ser amiga e companheira fiel, por ser minha legítima Eshet Chail.

LEATA HASHEM, HAKADOSH BARUCH HU, por criar o universo e elaborar suas leis, por trazer a existência as realidades finitas e transcendentes, e especialmente por outorgar a TORAH.

Resumo

Neste trabalho determinamos, utilizando Teoria Quântica de Campos em nível de árvore, a radiação escalar emitida por uma fonte em movimento circular uniforme no espaço-tempo plano de Minkowski, assumindo Gravitação Newtoniana, e no espaço-tempo curvo de um buraco negro sem carga e com momento angular nulo, assumindo Relatividade Geral. Efetuamos este cálculo analiticamente para o caso de Minkowski e numericamente no âmbito do espaço-tempo de Schwarzschild, sendo que neste espaço-tempo curvo obtivemos a forma analítica e a normalização dos modos nas regiões assintóticas. Verificamos que, para as órbitas circulares estáveis de acordo com a Relatividade Geral, a potência irradiada no caso de um buraco negro de Schwarzschild é menor do que a obtida no espaço-tempo de Minkowski assumindo a Gravitação Newtoniana. Obtemos também que apenas uma pequena parcela da radiação emitida é absorvida pelo buraco negro. Verificamos que a diferença entre as potências irradiadas em Schwarzschild e Minkowski diminui na medida em que aumentamos o valor da massa do campo. Em Schwarzschild, uma parcela cada vez maior da radiação emitida é absorvida pelo buraco negro na medida em que aumentamos o valor da massa do campo.

Palavras chave: Teoria Quântica de Campos, espaços-tempos curvos, buraco negro, radiação escalar.

Abstract

In this work we determine, using Quantum Field Theory in tree level, the scalar radiation emitted by a source in uniform circular motion in Minkowski spacetime, assuming Newtonian gravitation, and in the curved spacetime of a chargeless black hole with null angular momentum, assuming General Relativity. We perform this calculation analitically for the case of Minkowski spacetime and numerically for Schwarzschild spacetime. In the black hole case we obtain the analytic form and the normalization of the modes in the asymptotic regions. We verify, for stable circular orbits acording to general relativity, that the emitted power in Schwarzschild spacetime is lower than the one obtained in Minkowski spacetime assuming Newtonian gravitation. We obtain that only a little amount of the emitted radiation is absorbed by black hole. We also verify that the difference between the emitted powers in Schwarzschild and Minkowski cases decreases if the mass of field is increased. In Schwarzschild spacetime, the amount of radiation absorbed by the black hole increases for higher values of the mass of the scalar field.

Keywords: Quantum field theory, curved spacetimes, black hole, scalar radiation.

Sumário

1	Introdução	10
2	Quantização do campo de Klein-Gordon no espaço-tempo de Minkowski	12
2.1	Soluções clássicas da equação de Klein-Gordon em Minkowski	12
2.2	Normalização das soluções clássicas em Minkowski	15
2.3	Quantização do campo escalar massivo no espaço-tempo plano	17
3	Quantização do campo de Klein-Gordon no espaço-tempo de Schwarzschild	22
3.1	Soluções clássicas da equação de Klein-Gordon em Schwarzschild	22
3.2	Soluções clássicas em Schwarzschild no limite assintótico	26
3.3	Normalização das soluções clássicas em Schwarzschild no limite assintótico	28
3.4	Método numérico de determinação e normalização das soluções em Schwarzschild	29
3.5	Quantização do campo escalar massivo no espaço-tempo de um buraco negro estático e sem carga	35
4	Radiação emitida por uma fonte escalar girando ao redor de um objeto estelar	41
4.1	Taxa de emissão e potência emitida usando Teoria Quântica de Campos em Minkowski, assumindo Gravitação Newtoniana	41

4.2	Taxa de emissão e potência emitida usando Teoria Quântica de Campos em Schwarzschild	46
5	Análise e comparação dos resultados	50
5.1	Análise dos resultados no espaço-tempo plano (campo massivo e não massivo)	50
5.2	Comparação entre os resultados nos espaços-tempos curvo e plano	60
5.3	Radiação absorvida pelo Buraco Negro	74
6	Conclusões e perspectivas	76

Capítulo 1

Introdução

A Teoria Quântica de Campos em Espaços Curvos (TQCEC) empenha-se em elaborar um formalismo capaz de investigar as conseqüências de se definir uma teoria quântica de campos para a matéria e suas interações sobre um espaço-tempo curvo subjacente. Não obstante a TQCEC se apresentar como teoria efetiva e portanto ser inapta para abordar determinados fenômenos quânticos na escala de Planck, esta vem promovendo predições relevantes acerca de determinados efeitos tais como a radiação térmica medida por observadores acelerados (efeito Fulling-Davies-Unruh), a evaporação de buracos negros provocada por efeitos quânticos (radiação Hawking) e a criação de partículas em universos em expansão [1, 2, 3]. Em virtude disso optamos por uma teoria capaz de relacionar coerentemente os ingredientes da Relatividade Geral, que prevêem a existência de buracos negros, com os ingredientes da Teoria Quântica de Campos, que descrevem interações entre fonte e campo.

É particularmente importante e desafiador para astrofísica confirmar por meio de evidências diretas a existência de buracos negros, uma vez que existem várias evidências observacionais indiretas destes objetos [4]. Tais evidências deverão ser obtidas por meio de análises minuciosas da radiação proveniente dos discos de acreção de buracos negros. Com efeito, a observação de fenômenos relativísticos acontecendo nas proximidades do horizonte de eventos de buracos negros e as alterações no processo de emissão de radiação devido aos efeitos gerados pela curvatura não-trivial dos mesmos são altamente relevantes

[5]. Neste sentido, é relevante investigar teórica e experimentalmente efeitos relacionados à presença de fontes em movimento circular uniforme, tais como fonte escalar e carga elétrica orbitando um buraco negro e interagindo na região próxima do horizonte de eventos do mesmo.

Tem sido investigado na literatura o problema da radiação emitida por uma fonte escalar interagindo com um campo escalar não-massivo e por uma carga elétrica interagindo com um campo eletromagnético, ambos considerando espaços-tempos plano e curvo [16, 22]. Neste trabalho, nos dedicamos a analisar o problema da radiação emitida por uma fonte escalar interagindo com um campo escalar massivo, considerando os espaços-tempos de Minkowski e Schwarzschild.

A quantização do campo escalar massivo no espaço-tempo plano de Minkowski será revisitada no capítulo 2. No capítulo 3 reproduziremos a quantização do campo escalar massivo no espaço-tempo de um buraco negro sem carga e com momento angular nulo. No capítulo 4 calcularemos a taxa de emissão e a potência irradiada por uma fonte acelerada no espaço-tempo de Minkowski e em seguida determinaremos as mesmas grandezas para uma fonte orbitando um buraco negro de Schwarzschild. Serão apresentadas no capítulo 5 a análise e comparação dos resultados obtidos por tratamento analítico e via método numérico [6]. No capítulo 6 faremos os comentários finais e exibiremos as nossas conclusões.

Adotaremos neste trabalho o sistema natural de unidades, no qual $c = G = \hbar = 1$, bem como a assinatura $(+, -, -, -)$.

Capítulo 2

Quantização do campo de Klein-Gordon no espaço-tempo de Minkowski

Neste capítulo será reproduzido o procedimento de quantização do campo de Klein-Gordon no espaço-tempo de Minkowski. Para tanto, partiremos de uma formulação lagrangeana para o campo escalar massivo encontrando a equação de campo e obtendo então as soluções clássicas da equação de Klein-Gordon. Em seguida faremos a normalização das soluções clássicas e, finalmente, a partir da imposição de relações de comutação, efetuaremos a quantização do campo escalar massivo.

2.1 Soluções clássicas da equação de Klein-Gordon em Minkowski

O espaço-tempo plano ou espaço-tempo de Minkowski, apresenta elemento de linha em coordenadas polares esféricas dado por [7]

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = dt^2 - dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 (\sin \theta)^2 d\varphi^2, \quad (2.1)$$

onde

$$\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -r^2, -r^2(\sin \theta)^2). \quad (2.2)$$

Consideremos nesta particular configuração geométrica um dado campo escalar massivo livre, $\Phi(x^\mu)$, sendo a ação clássica invariante dada por [8, 9, 10]

$$S = \int d^4x \mathcal{L},$$

onde

$$\mathcal{L} = \frac{\sqrt{-\eta}}{2} [\nabla^\mu \Phi \nabla_\mu \Phi - m^2 \Phi^2] \quad (2.3)$$

é a densidade de Lagrangiana e $\eta \equiv \det(\eta_{\mu\nu})$, de forma que $d^4x \sqrt{-\eta}$ é o elemento de volume (quadridimensional) invariante do espaço-tempo de Minkowski.

A partir do princípio da ação extrema

$$\frac{\delta S}{\delta \Phi} = 0$$

obtemos a equação dinâmica de Euler-Lagrange,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} - \nabla_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla_\mu \Phi)} \right) = 0, \quad (2.4)$$

que, por sua vez, gera a equação de Klein-Gordon homogênea

$$(\nabla^\mu \nabla_\mu + m^2)\Phi = (\eta_{\mu\nu} \nabla^\mu \nabla^\nu + m^2)\Phi = 0. \quad (2.5)$$

Os modos de frequência positiva associados com observadores inerciais estáticos ($x^i = \text{constante}$),

$$u_{\omega lp}(x^\mu) \propto e^{-i\omega t}, \quad (2.6)$$

são soluções da equação homogênea do campo de Klein-Gordon no espaço-tempo de Minkowski, a saber

$$(\nabla^\mu \nabla_\mu + m^2)u_{\omega lp} = (\eta_{\mu\nu} \nabla^\mu \nabla^\nu + m^2)u_{\omega lp} = 0. \quad (2.7)$$

Como $u_{\omega lp}$ é uma função escalar, temos

$$\nabla_\mu u_{\omega lp} = \partial_\mu u_{\omega lp},$$

e

$$\nabla_\nu \nabla_\mu u_{\omega lp} = \nabla_\nu (\partial_\mu u_{\omega lp}) - \Gamma_{\nu\mu}^\lambda \partial_\lambda u_{\omega lp},$$

com os símbolos de Christoffel $\Gamma_{\nu\mu}^\lambda$ [7, 8] dados por

$$\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha = \frac{1}{2} \eta^{\alpha\delta} (\partial_\beta \eta_{\delta\gamma} + \partial_\gamma \eta_{\delta\beta} - \partial_\delta \eta_{\beta\gamma}). \quad (2.8)$$

Em se tratando do espaço-tempo de Minkowski com coordenadas polares esféricas, os únicos símbolos de Christoffel não-nulos são

$$\Gamma_{\theta\theta}^r = -r, \Gamma_{\varphi\varphi}^r = -r(\sin\theta)^2, \Gamma_{r\theta}^\theta = \Gamma_{\theta r}^\theta = \frac{1}{r},$$

$$\Gamma_{\varphi\varphi}^\theta = -\sin\theta \cos\theta, \Gamma_{r\varphi}^\varphi = \Gamma_{\varphi r}^\varphi = \frac{1}{r}, \Gamma_{\theta\varphi}^\varphi = \Gamma_{\varphi\theta}^\varphi = \cot\theta.$$

Podemos então reescrever (2.7), neste caso, como

$$(\nabla^\mu \nabla_\mu + m^2)u_{\omega lp} = \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \tilde{\nabla}^2 + m^2 \right] u_{\omega lp} = 0, \quad (2.9)$$

onde

$$\tilde{\nabla}^2 \equiv -\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \cot\theta \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{1}{(\sin\theta)^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \quad (2.10)$$

e

$$\tilde{\nabla}^2 Y_{lp}(\theta, \varphi) = l(l+1)Y_{lp}(\theta, \varphi). \quad (2.11)$$

Assumindo que a dependência angular de $u_{\omega lp}$ seja dada pelos harmônicos esféricos escalares [11, 12], podemos escrever

$$u_{\omega lp}(x^\mu) = R_{\omega l}(r)Y_{lp}(\theta, \varphi)e^{-i\omega t}. \quad (2.12)$$

Em seguida usamos (2.11) e (2.12) para reescrever (2.9) como

$$\left[-\frac{d^2}{dr^2} - \frac{2}{r} \frac{d}{dr} - (\omega^2 - m^2) + \frac{l(l+1)}{r^2} \right] R_{\omega l}(r) = 0, \quad (2.13)$$

ou, escolhendo $R_{\omega l}(r) \equiv \psi_{\omega l}^M(r)/r$, escrevemos a expressão anterior como

$$\left[-\frac{d^2}{dr^2} + V_M \right] \psi_{\omega l}^M(r) = \omega^2 \psi_{\omega l}^M(r), \quad (2.14)$$

com o potencial espalhador

$$V_M \equiv \frac{l(l+1)}{r^2} + m^2. \quad (2.15)$$

A equação diferencial (2.13) é a equação diferencial que define as funções de Bessel esféricas na variável $r(\sqrt{\omega^2 - m^2})$, i.e., $j_l(r(\sqrt{\omega^2 - m^2}))$ e $n_l(r(\sqrt{\omega^2 - m^2}))$. Podemos descartar a solução $n_l(r(\sqrt{\omega^2 - m^2}))$ pois os modos a ela associados não são normalizáveis pelo produto interno que adotaremos na seção seguinte, como consequência de seu comportamento divergente na origem [11, 12]. Podemos, desta forma, reescrever (2.12) como

$$u_{\omega lp}(x^\mu) = C_\omega j_l\left(r(\sqrt{\omega^2 - m^2})\right) Y_{lp}(\theta, \varphi) e^{-i\omega t} \quad (\omega \geq m), \quad (2.16)$$

onde C_ω é uma constante a ser determinada pela normalização de $u_{\omega lp}(x^\mu)$.

2.2 Normalização das soluções clássicas em Minkowski

Para ortonormalizar os modos $u_{\omega lp}(x^\mu)$, que representam as soluções clássicas obtidas na seção anterior, fazemos uso do produto interno de Klein-Gordon [2], a saber

$$\sigma_{KG}(\phi, \psi) = i \int_{\Sigma^{(3)}} d\Sigma^{(3)} n^\mu [\phi^*(\nabla_\mu \psi) - (\nabla_\mu \phi^*)\psi], \quad (2.17)$$

onde aqui $d\Sigma^{(3)} = \sqrt{-\eta^{(3)}}d^3x$ é o elemento de volume (em três dimensões) invariante da superfície de Cauchy $\Sigma^{(3)}$, n^μ é o vetor unitário ortogonal à superfície tipo espaço $\Sigma^{(3)}$, direcionado para o futuro, e $\eta^{(3)}$ é o determinante da métrica restrita a $\Sigma^{(3)}$ (para o espaço-tempo em questão temos $\eta^{(3)} = -r^4 \sin^2 \theta$). Uma vez que (2.17) é independente de $\Sigma^{(3)}$, escolhemos a superfície $\Sigma_t^{(3)}$ com $t = \text{constante}$. Desta forma, para o caso do espaço-tempo plano com coordenadas polares esféricas, temos que

$$d\Sigma_t^{(3)} = \sqrt{-\eta^{(3)}}drd\theta d\varphi = r^2 \sin \theta drd\theta d\varphi \quad (2.18)$$

e

$$n^\mu = \delta_0^\mu. \quad (2.19)$$

A seguir, impomos as condições de ortonormalização dos modos $u_{\omega l p}(x^\mu)$ e seus complexos conjugados $u_{\omega l p}^*(x^\mu)$, a saber

$$\sigma_{KG}(u_{\omega l p}, u_{\omega' l' p'}) = \delta(\omega - \omega') \delta_{ll'} \delta_{pp'}, \quad (2.20)$$

$$\sigma_{KG}(u_{\omega l p}^*, u_{\omega' l' p'}) = 0. \quad (2.21)$$

Utilizando o produto interno de Klein-Gordon, podemos normalizar os modos $u_{\omega l p}(x^\mu)$, determinando assim a constante C_ω . De (2.16)-(2.20), obtemos

$$\begin{aligned} \sigma_{KG}(u_{\omega l p}, u_{\omega' l' p'}) &= (\omega + \omega') C_\omega^* C_{\omega'} e^{i(\omega - \omega')t} \int_0^\infty dr r^2 j_{l'} \left[r \sqrt{(\omega')^2 - m^2} \right] j_l \left[r \sqrt{\omega^2 - m^2} \right] \times \\ &\int_0^{2\pi} \int_0^\pi d\theta d\varphi \sin \theta Y_{lp}^*(\theta, \varphi) Y_{l'p'}(\theta, \varphi). \end{aligned} \quad (2.22)$$

Sabemos que [11]

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi d\theta d\varphi \sin \theta Y_{lp}^*(\theta, \varphi) Y_{l'p'}(\theta, \varphi) = \delta_{ll'} \delta_{pp'} \quad (2.23)$$

e

$$\int_0^\infty dr r^2 j_{l'} \left[r \sqrt{(\omega')^2 - m^2} \right] j_l \left[r \sqrt{\omega^2 - m^2} \right] = \frac{\pi}{2(\omega^2 - m^2)} \delta \left[\sqrt{\omega^2 - m^2} - \sqrt{(\omega')^2 - m^2} \right] \quad (2.24)$$

e, ainda, usando uma das propriedades da delta de Dirac, a saber [11]

$$\delta [f(x)] = \sum_i \frac{\delta(x - x_i)}{\left| \frac{df}{dx} \Big|_{x_i} \right|},$$

obtemos

$$\delta \left[\sqrt{\omega^2 - m^2} - \sqrt{(\omega')^2 - m^2} \right] = \frac{\sqrt{\omega^2 - m^2}}{\omega} \left[\delta(\omega - \omega') + \delta(\omega + \omega') \right]. \quad (2.25)$$

Substituindo as expressões (2.23)-(2.25) na expressão (2.22), temos

$$\sigma_{KG}(u_{\omega l p}, u_{\omega' l' p'}) = \frac{\pi}{\sqrt{\omega^2 - m^2}} |C_\omega|^2 \left[\delta(\omega - \omega') + \delta(\omega + \omega') \right] \delta_{ll'} \delta_{pp'}, \quad (2.26)$$

onde o termo contendo a função de distribuição $\delta(\omega + \omega')$ resulta em uma contribuição nula, uma vez que $\omega \geq m$ e $\omega' \geq m$ impedem que $\omega = -\omega'$.

Comparando (2.20) com (2.26), obtemos

$$C_\omega = \left(\frac{\sqrt{\omega^2 - m^2}}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.27)$$

a menos de uma fase multiplicativa arbitrária.

2.3 Quantização do campo escalar massivo no espaço-tempo plano

No procedimento de quantização canônica do campo escalar massivo, impõem-se relações de comutação a tempos iguais, a saber

$$\left[\widehat{\Phi}(t, \vec{x}), \widehat{\Phi}(t, \vec{x}') \right] = \left[\widehat{\Pi}(t, \vec{x}), \widehat{\Pi}(t, \vec{x}') \right] = 0, \quad (2.28)$$

$$\left[\widehat{\Phi}(t, \vec{x}), \widehat{\Pi}(t, \vec{x}') \right] = \frac{i n^0}{\sqrt{-\eta}} \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}'), \quad (2.29)$$

onde o momento $\widehat{\Pi}$ conjugado ao campo $\widehat{\Phi}$ é definido como

$$\widehat{\Pi} \equiv n^\mu \widehat{\Pi}_\mu \equiv n^\mu \frac{1}{\sqrt{-\eta}} \frac{\partial \widehat{\mathcal{L}}}{\partial (\nabla^\mu \widehat{\Phi})}. \quad (2.30)$$

Usando a densidade de Lagrangiana apresentada pela expressão (2.3), podemos reescrever a expressão (2.30) como

$$\widehat{\Pi} = n^\mu \nabla_\mu \widehat{\Phi}. \quad (2.31)$$

Usando (2.19) e que

$$\sqrt{-\eta} = \sqrt{-\eta^{(3)}} = r^2 \sin \theta,$$

reescrevemos a expressão (2.29) como

$$\left[\widehat{\Phi}(t, \vec{x}), \widehat{\Pi}(t, \vec{x}') \right] = \frac{i}{r^2 \sin \theta} \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}'), \quad (2.32)$$

sendo \vec{x} e \vec{x}' representantes de todas as componentes espaciais de x^μ e x'^μ , respectivamente.

Admitindo o caráter quântico-operatorial do campo $\widehat{\Phi}(x^\mu)$, podemos então expandi-lo em termos dos modos de frequência positiva $u_{\omega lp}(x^\mu)$ e negativa $u_{\omega lp}^*(x^\mu)$, como

$$\widehat{\Phi}(x^\mu) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{p=-l}^l \int_m^{\infty} d\omega [u_{\omega lp}(x^\mu) \hat{a}_{\omega lp} + u_{\omega lp}^*(x^\mu) \hat{a}_{\omega lp}^\dagger], \quad (2.33)$$

sendo os coeficientes, $\hat{a}_{\omega lp}$ e $\hat{a}_{\omega lp}^\dagger$, respectivamente, operadores de aniquilação e criação. A partir de (2.30) e (2.33) temos

$$\widehat{\Pi}_\mu(x^\mu) \equiv \nabla_\mu \widehat{\Phi} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{p=-l}^l \int_m^\infty d\omega [(\nabla_\mu u_{\omega lp}) \widehat{a}_{\omega lp} + (\nabla_\mu u_{\omega lp}^*) \widehat{a}_{\omega lp}^\dagger]. \quad (2.34)$$

Podemos ainda definir o momento canônico $\widehat{\Pi}^C = \frac{\sqrt{-\eta}}{n^0} \widehat{\Pi}(x^\lambda)$, de tal maneira que

$$[\widehat{\Phi}(t, \vec{x}), \widehat{\Pi}^C(t, \vec{x}')] = i \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}').$$

Devemos então obter as relações de comutação entre os operadores $\widehat{a}_{\omega lp}$ e $\widehat{a}_{\omega lp}^\dagger$ definidos na expressão (2.33). Admitindo as condições de ortonormalização dos modos $u_{\omega lp}(x^\mu)$ e seus conjugados $u_{\omega lp}^*(x^\mu)$, expressas por (2.20) e (2.21) e utilizando a expressão (2.17), podemos determinar

$$\sigma_{KG}(\widehat{\Phi}, u_{\omega lp}) = i \int_{\Sigma^{(3)}} d\Sigma^{(3)} n^\mu [\widehat{\Phi}^\dagger (\nabla_\mu u_{\omega lp}) - (\nabla_\mu \widehat{\Phi}^\dagger) u_{\omega lp}], \quad (2.35)$$

e

$$\sigma_{KG}(u_{\omega' l' p'}, \widehat{\Phi}) = i \int_{\Sigma^{(3)}} d\Sigma^{(3)} n^\mu [u_{\omega' l' p'}^* (\nabla_\mu \widehat{\Phi}) - (\nabla_\mu u_{\omega' l' p'}^*) \widehat{\Phi}]. \quad (2.36)$$

Desta maneira, fazendo uso das expressões (2.28), (2.29) e (2.34), obtemos que o comutador entre os produtos internos de Klein-Gordon, $\sigma_{KG}(\widehat{\Phi}, u_{\omega lp})$ e $\sigma_{KG}(u_{\omega' l' p'}, \widehat{\Phi})$ é dado por

$$[\sigma_{KG}(\widehat{\Phi}, u_{\omega lp}), \sigma_{KG}(u_{\omega' l' p'}, \widehat{\Phi})] = i \int_{\Sigma^{(3)}} d\Sigma^{(3)} n^\mu [u_{\omega lp}^* (\nabla_\mu u_{\omega' l' p'}) - (\nabla_\mu u_{\omega lp}^*) u_{\omega' l' p'}].$$

Fazendo uso da definição de produto interno de Klein-Gordon expressa em (2.17), temos

$$[\sigma_{KG}(\widehat{\Phi}, u_{\omega lp}), \sigma_{KG}(u_{\omega' l' p'}, \widehat{\Phi})] = \sigma_{KG}(u_{\omega lp}, u_{\omega' l' p'}). \quad (2.37)$$

Usando ainda a condição expressa em (2.20), reescrevemos a expressão anterior como

$$[\sigma_{KG}(\widehat{\Phi}, u_{\omega lp}), \sigma_{KG}(u_{\omega' l' p'}, \widehat{\Phi})] = \delta_{ll'} \delta_{pp'} \delta(\omega - \omega'). \quad (2.38)$$

De outro modo, utilizando a definição do produto interno de Klein-Gordon expressa em (2.17), o campo $\widehat{\Phi}$ expresso em (2.33) e as condições dadas em (2.20) e (2.21), obtemos

$$\sigma_{KG}(u_{\omega lp}, \widehat{\Phi}) = \sum_{l'' p''} \widehat{a}_{\omega l'' p''} \delta_{l''} \delta_{pp''} = \widehat{a}_{\omega lp}, \quad (2.39)$$

e

$$\sigma_{KG}(\widehat{\Phi}, u_{\omega' l' p'}) = \sum_{l'' p''} \widehat{a}_{\omega' l'' p''}^{\dagger} \delta_{l' l''} \delta_{p' p''} = \widehat{a}_{\omega' l' p'}^{\dagger}. \quad (2.40)$$

Com efeito, usando as expressões (2.39) e (2.40), obtemos uma forma alternativa para o comutador entre os produtos internos de Klein-Gordon, $\sigma_{KG}(\widehat{\Phi}, u_{\omega lp})$ e $\sigma_{KG}(u_{\omega' l' p'}, \widehat{\Phi})$, a saber

$$\left[\sigma_{KG}(\widehat{\Phi}, u_{\omega lp}), \sigma_{KG}(u_{\omega' l' p'}, \widehat{\Phi}) \right] = \left[\widehat{a}_{\omega lp}^{\dagger}, \widehat{a}_{\omega' l' p'} \right]. \quad (2.41)$$

Deduzimos das expressões (2.38) e (2.41) que

$$\left[\widehat{a}_{\omega lp}^{\dagger}, \widehat{a}_{\omega' l' p'} \right] = \delta_{l' l} \delta_{p' p} \delta(\omega - \omega'). \quad (2.42)$$

Utilizando a expressão (2.36) podemos determinar o comutador entre $\sigma_{KG}(u_{\omega lp}, \widehat{\Phi})$ e $\sigma_{KG}(u_{\omega' l' p'}, \widehat{\Phi})$, a saber

$$\left[\sigma_{KG}(u_{\omega lp}, \widehat{\Phi}), \sigma_{KG}(u_{\omega' l' p'}, \widehat{\Phi}) \right] = 0, \quad (2.43)$$

podemos obter ainda o comutador entre $\sigma_{KG}(\widehat{\Phi}, u_{\omega lp})$ e $\sigma_{KG}(\widehat{\Phi}, u_{\omega' l' p'})$

$$\left[\sigma_{KG}(\widehat{\Phi}, u_{\omega lp}), \sigma_{KG}(\widehat{\Phi}, u_{\omega' l' p'}) \right] = 0. \quad (2.44)$$

Utilizando as expressões (2.39) e (2.40), podemos determinar resultados alternativos para as equações (2.43) e (2.44), respectivamente, a saber

$$\left[\sigma_{KG}(u_{\omega lp}, \widehat{\Phi}), \sigma_{KG}(u_{\omega' l' p'}, \widehat{\Phi}) \right] = \left[\widehat{a}_{\omega lp}, \widehat{a}_{\omega' l' p'} \right], \quad (2.45)$$

e

$$\left[\sigma_{KG}(\widehat{\Phi}, u_{\omega l p}), \sigma_{KG}(\widehat{\Phi}, u_{\omega' l' p'}) \right] = \left[\hat{a}_{\omega l p}^\dagger, \hat{a}_{\omega' l' p'}^\dagger \right]. \quad (2.46)$$

Efetuando comparações entre (2.43) e (2.45) e entre (2.44) e (2.46), obtemos

$$\left[\hat{a}_{\omega l p}, \hat{a}_{\omega' l' p'} \right] = 0, \quad (2.47)$$

e

$$\left[\hat{a}_{\omega l p}^\dagger, \hat{a}_{\omega' l' p'}^\dagger \right] = 0. \quad (2.48)$$

O estado quântico que, para os observadores inerciais, corresponde à ausência de partículas é denominado vácuo de Minkovski [13, 14], $|0\rangle_M$, sendo este estado aniquilado por todos os operadores $\hat{a}_{\omega l p}$, i.e.:

$$\hat{a}_{\omega l p} |0\rangle_M = 0. \quad (2.49)$$

Capítulo 3

Quantização do campo de Klein-Gordon no espaço-tempo de Schwarzschild

Neste capítulo, a exemplo do caso no espaço-tempo plano, estudaremos as soluções clássicas do campo escalar massivo no espaço-tempo curvo de Schwarzschild, encontraremos as soluções clássicas no limite assintótico e faremos sua normalização. Em seguida apresentaremos o método numérico de determinação e normalização das soluções e por fim executaremos, assumindo determinadas relações de comutação, a quantização do campo escalar massivo em Schwarzschild.

3.1 Soluções clássicas da equação de Klein-Gordon em Schwarzschild

O elemento de linha de Schwarzschild, que descreve um espaço-tempo exterior a um buraco negro com momento angular nulo e eletricamente neutro, em coordenadas polares esféricas, é dado por

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = f(r) dt^2 - f(r)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 (\sin \theta)^2 d\varphi^2, \quad (3.1)$$

onde $f(r) = (1 - \frac{2M}{r})$. A expressão (3.1), informa que

$$g_{\mu\nu} = \text{diag}(f, -f^{-1}, -r^2, -r^2(\sin \theta)^2). \quad (3.2)$$

Consideremos nesta particular configuração geométrica um dado campo escalar massivo livre, $\Phi(x^\mu)$, sendo a ação clássica invariante dada por

$$S = \int d^4x \mathcal{L},$$

onde

$$\mathcal{L} = \frac{\sqrt{-g}}{2} [\nabla^\mu \Phi \nabla_\mu \Phi - m^2 \Phi^2] \quad (3.3)$$

é a densidade de Lagrangiana e $g \equiv \det(g_{\mu\nu})$, de forma que $d^4x \sqrt{-g}$ é o elemento de volume (quadrimensional) invariante do espaço-tempo de Schwarzschild.

A partir do princípio da ação extrema

$$\frac{\delta S}{\delta \Phi} = 0$$

obtemos a equação dinâmica de Euler-Lagrange,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} - \nabla_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla_\mu \Phi)} \right) = 0, \quad (3.4)$$

que, por sua vez, gera a equação de Klein-Gordon homogênea

$$(\nabla^\mu \nabla_\mu + m^2) \Phi = (g_{\mu\nu} \nabla^\mu \nabla^\nu + m^2) \Phi = 0. \quad (3.5)$$

Os modos de frequência positiva associados ao campo de Killing tipo tempo ∂_t ,

$$u_{\omega l p}^n(x^\mu) \propto e^{-i\omega t} \quad (\omega \geq \omega_{min}), \quad (3.6)$$

onde $\omega_{min} = 0$ quando $n = \rightarrow$ e $\omega_{min} = m$ quando $n = \leftarrow$. Os números quânticos $n = \rightarrow$ e $n = \leftarrow$ representam, respectivamente, os modos normais provenientes do horizonte de eventos passado \mathcal{H}^- e do infinito passado tipo tempo \mathcal{I}^- . Tais modos são soluções da equação homogênea, que descreve o campo de Klein-Gordon massivo, no espaço-tempo de Schwarzschild, de forma que

$$(\nabla^\mu \nabla_\mu + m^2)u_{\omega lp}^n = (g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu + m^2)u_{\omega lp}^n = 0. \quad (3.7)$$

Como $u_{\omega lp}^n$ é uma função escalar, temos

$$\nabla_\mu u_{\omega lp}^n = \partial_\mu u_{\omega lp}^n,$$

e

$$\nabla_\nu \nabla_\mu u_{\omega lp}^n = \nabla_\nu (\partial_\mu u_{\omega lp}^n) - \Gamma_{\nu\mu}^\lambda (\partial_\lambda u_{\omega lp}^n),$$

com os símbolos de Christoffel $\Gamma_{\nu\mu}^\lambda$ dados por

$$\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha = \frac{1}{2} g^{\alpha\delta} (\partial_\beta g_{\delta\gamma} + \partial_\gamma g_{\delta\beta} - \partial_\delta g_{\beta\gamma}). \quad (3.8)$$

Em se tratando do espaço-tempo de Schwarzschild com coordenadas polares esféricas, os únicos símbolos de Christoffel não-nulos são

$$\Gamma_{\theta\theta}^r = -f r, \Gamma_{\varphi\varphi}^r = -f r (\sin \theta)^2, \Gamma_{r\theta}^\theta = \Gamma_{\theta r}^\theta = \frac{1}{r},$$

$$\Gamma_{\varphi\varphi}^\theta = -\sin \theta \cos \theta, \Gamma_{r\varphi}^\varphi = \Gamma_{\varphi r}^\varphi = \frac{1}{r}, \Gamma_{\theta\varphi}^\varphi = \Gamma_{\varphi\theta}^\varphi = \cot \theta,$$

podemos então reescrever (3.7), neste caso, como

$$(g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu + m^2)u_{\omega lp}^n = \left[\frac{1}{f} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - f \frac{\partial^2}{\partial r^2} - f \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{2M}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \tilde{\nabla}^2 + m^2 \right] u_{\omega lp}^n = 0 \quad (3.9)$$

onde usamos as expressões (2.10) e (2.11).

Pelo fato de assumirmos um substrato espaço-temporal estático e esfericamente simétrico, que é o caso do espaço-tempo de Schwarzschild, podemos escrever os modos $u_{\omega l p}^n$ na forma

$$u_{\omega l p}^n(x^\mu) = \sqrt{\frac{\pi}{\omega}} R_{\omega l}^n(r) Y_{lp}(\theta, \varphi) e^{-i\omega t} \quad (\omega \geq \omega_{min}), \quad (3.10)$$

onde $\sqrt{\frac{\pi}{\omega}}$ é uma constante arbitrada convenientemente. Em seguida usamos (3.9) e (3.10) para obtermos a equação diferencial a ser satisfeita pela função radial $R_{\omega l}^n(r)$, a saber

$$\left[-\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 f \frac{d}{dr} \right) - \frac{\omega^2}{f} + \frac{l(l+1)}{r^2} + m^2 \right] R_{\omega l}^n(r) = 0, \quad (3.11)$$

ou, escolhendo $R_{\omega l}^n(r) \equiv \psi_{\omega l}^{nS}(r)/r$, escrevemos a expressão anterior, como

$$\left[-f \frac{d}{dr} \left(f \frac{d}{dr} \right) + V_S \right] \psi_{\omega l}^{nS}(r) = \omega^2 \psi_{\omega l}^{nS}(r), \quad (3.12)$$

com o potencial de espalhamento [15], dado por

$$V_S = \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \left[\frac{2M}{r^3} + \frac{l(l+1)}{r^2} + m^2 \right]. \quad (3.13)$$

Analisemos os extremos do potencial de espalhamento em Schwarzschild. Observamos que para $l = 0$ e $mM < \frac{1}{4}$, o potencial exibe dois pontos extremos (um ponto de máximo e outro de mínimo). Para $l = 0$ e $mM > \frac{1}{4}$, o mesmo não apresenta pontos extremos. Para $l = 0$ e $mM = \frac{1}{4}$, o potencial apresenta um ponto de inflexão [ver fig. 5.11] [18].

Fazendo uso da coordenada adimensional de Wheeler [16]

$$x \equiv \frac{r}{2M} + \ln \left(\frac{r}{2M} - 1 \right), \quad (3.14)$$

podemos reescrever a expressão (3.12) como

$$\left[-\frac{d^2}{dx^2} + 4M^2 V_S(r) \right] \psi_{\omega l}^{nS}(x) = 4M^2 \omega^2 \psi_{\omega l}^{nS}(x) \quad (3.15)$$

3.2 Soluções clássicas em Schwarzschild no limite assintótico

Ao analisarmos a equação diferencial expressa em (3.12), encontramos dificuldades matemáticas que nos impedem de obter sua solução geral em termos de funções especiais conhecidas. Não obstante a estas complicações, é possível determinar suas soluções normalizadas na região espacial assintótica. Apresentaremos a forma analítica aproximada de $\psi_{\omega l}^{nS}$ nas proximidades do horizonte de eventos e no infinito.

Analizando o potencial de espalhamento (3.13), verificamos que este tende a zero ($V_S \rightarrow 0$) quando r se aproxima assintoticamente de $2M$ ($r \rightarrow 2M$ ou $x \rightarrow -\infty$). Verificamos também que este tende a m^2 ($V_S \rightarrow m^2$) quando r se aproxima assintoticamente do infinito ($r \rightarrow \infty$ ou $x \rightarrow \infty$). Com efeito, os modos provenientes do infinito estão associados a partículas com energias entre a massa de repouso e infinito enquanto que os modos provenientes do horizonte de eventos estão associados a partículas dotadas de energias entre zero e infinito.

Desta maneira, para as regiões assintóticas arbitrariamente próximas e distantes do horizonte de eventos a equação diferencial (3.15) para as funções $\psi_{\omega l}^{nS}(x)$, apresentar-se-á, respectivamente, como [5, 16]

$$\left[-\frac{d^2}{dx^2} \right] \psi_{\omega l}^{nS}(x) = 4M^2 \omega^2 \psi_{\omega l}^{nS}(x) \quad (r \gtrsim 2M), \quad (3.16)$$

e

$$\left[-\frac{d^2}{dx^2} + 4M^2 m^2 \right] \psi_{\omega l}^{nS}(x) = 4M^2 \omega^2 \psi_{\omega l}^{nS}(x) \quad (r \gg 2M). \quad (3.17)$$

Desta forma, os modos $\psi_{\omega l}^{\rightarrow, S}(x)$ provenientes do horizonte passado \mathcal{H}^- (horizonte do buraco branco) ($\omega \geq 0$), e os modos $\psi_{\omega l}^{\leftarrow, S}(x)$ provenientes do infinito passado tipo tempo \mathcal{I}^- ($\omega \geq m$), podem ser expressos como [5, 16]

$$\psi_{\omega l}^{\rightarrow, S}(x) \approx \begin{cases} A_{\omega l}^{\rightarrow} (e^{i2M\omega x} + \mathcal{R}_{\omega l}^{\rightarrow} e^{-i2M\omega x}) & (r \gtrsim 2M) \\ 2i^{l+1} A_{\omega l}^{\rightarrow} \mathcal{T}_{\omega l}^{\rightarrow} Mx \sqrt{\omega^2 - m^2} h_l^{(1)}(2Mx \sqrt{\omega^2 - m^2}) & (r \gg 2M) \end{cases}, \quad (3.18)$$

e

$$\psi_{\omega l}^{\leftarrow, S}(x) \approx \begin{cases} A_{\omega l}^{\leftarrow} \mathcal{T}_{\omega l}^{\leftarrow} e^{-i2M\omega x} & (r \gtrsim 2M) \\ 2A_{\omega l}^{\leftarrow} Mx \sqrt{\omega^2 - m^2} \left[(-i)^{l+1} h_l^{(1)*}(2Mx \sqrt{\omega^2 - m^2}) \right. \\ \left. + i^{l+1} \mathcal{R}_{\omega l}^{\leftarrow} h_l^{(1)}(2Mx \sqrt{\omega^2 - m^2}) \right] & (r \gg 2M) \end{cases}, \quad (3.19)$$

sendo $h_l^{(1)}$ a função esférica de Hankel ou função esférica de Bessel modificada [16, 17] definida como

$$h_l^{(1)}(x) = j_l(x) + in_l(x). \quad (3.20)$$

Podemos escrever $h_l^{(1)}(x)$, para $x \gg 1$, como

$$h_l^{(1)}(x) \approx (-i)^{l+1} \frac{e^{ix}}{x} \quad (x \gg 1). \quad (3.21)$$

Para $\omega \geq m$, os termos $|\mathcal{R}_{\omega l}^{\leftarrow}|^2$, $|\mathcal{R}_{\omega l}^{\rightarrow}|^2$ e $|\mathcal{T}_{\omega l}^{\leftarrow}|^2$, $|\mathcal{T}_{\omega l}^{\rightarrow}|^2$ podem ser vistos como os coeficientes de reflexão e transmissão, respectivamente [18, 19], satisfazendo as equações de conservação da probabilidade

$$|\mathcal{R}_{\omega l}^{\rightarrow}|^2 + \frac{\sqrt{\omega^2 - m^2}}{\omega} |\mathcal{T}_{\omega l}^{\rightarrow}|^2 = 1, \quad (3.22)$$

e

$$|\mathcal{R}_{\omega l}^{\leftarrow}|^2 + \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 - m^2}} |\mathcal{T}_{\omega l}^{\leftarrow}|^2 = 1. \quad (3.23)$$

Os modos provenientes do horizonte associados a partículas com energia inferior a massa de repouso são expressos como

$$\psi_{\omega l}^{\rightarrow, S}(x) \approx \begin{cases} A_{\omega l}^{\rightarrow} (e^{i2M\omega x} + \mathcal{R}_{\omega l}^{\rightarrow} e^{-i2M\omega x}) & (r \gtrsim 2M) \\ 2^{l+1} A_{\omega l}^{\rightarrow} \mathcal{T}_{\omega l}^{\rightarrow} i M x \sqrt{m^2 - \omega^2} h_l^{(1)} (2i M x \sqrt{m^2 - \omega^2}) & (r \gg 2M) \end{cases}. \quad (3.24)$$

Para $\omega < m$, os modos provenientes do horizonte decaem exponencialmente para muito distante do horizonte de eventos e portanto o termo $|\mathcal{T}_{\omega l}^{\rightarrow}|^2$ não pode ser mais interpretado como coeficiente de transmissão.

3.3 Normalização das soluções clássicas em Schwarzschild no limite assintótico

Para efetuarmos a normalização das soluções no limite assintótico, partimos da definição de produto interno de Klein-Gordon dado por (2.17) e adaptado para o espaço-tempo de Schwarzschild, usamos a expressão (3.10) e utilizamos o elemento de quadrivolume do espaço-tempo de Schwarzschild dado por

$$d\Sigma_t^{(3)} n^\mu = \sqrt{-g^{(3)}} d^3x n^\mu = \frac{\delta_0^\mu}{f} r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi,$$

onde $n^\mu = \frac{\delta_0^\mu}{\sqrt{f}}$ e $g^{(3)} = -\frac{r^4 (\sin\theta)^2}{f}$. Além disso, usamos a expressão (2.23).

Fazendo o devido tratamento matemático, obtemos

$$\sigma_{KG}(u_{\omega l p}^n, u_{\omega' l' p'}^{n'}) = \frac{\sqrt{\omega \omega'}}{\pi} (\omega + \omega') e^{it(\omega - \omega')} \delta_{nn'} \delta_{ll'} \delta_{pp'} \int_{r=2M}^{\infty} dr f^{-1} \psi_{\omega l}^{n S*}(r) \psi_{\omega' l'}^{n' S}(r). \quad (3.25)$$

Partindo da equação diferencial (3.15) e usando a relação entre as variáveis r e x , pode-se mostrar que

$$\int_{r=2M}^{\infty} dr f^{-1} \psi_{\omega l}^{n* S}(r) \psi_{\omega' l'}^{n S}(r) = -\frac{1}{2M(\omega^2 - \omega'^2)} \left[\psi_{\omega' l'}^{n S}(x) \frac{d}{dx} \psi_{\omega l}^{n* S}(x) - \psi_{\omega l}^{n* S}(x) \frac{d}{dx} \psi_{\omega' l'}^{n S}(x) \right]_{x \rightarrow -\infty}^{x \rightarrow \infty}. \quad (3.26)$$

Assim sendo, fazendo uso das expressões (2.20), (3.25) e (3.26) obtemos

$$\frac{1}{(\omega - \omega')} \left[\psi_{\omega' l'}^{nS}(x) \frac{d}{dx} \psi_{\omega l}^{n*S}(x) - \psi_{\omega l}^{n*S}(x) \frac{d}{dx} \psi_{\omega' l'}^{nS}(x) \right]_{x \rightarrow -\infty}^{x \rightarrow \infty} = -\frac{2M\pi}{\omega} \delta(\omega - \omega'). \quad (3.27)$$

A igualdade acima, permite-nos obter a normalização de $\psi_{\omega l}^{nS}(x)$ na sua forma assintótica e, conseqüentemente, de $u_{\omega l p}^n$.

Aplicando as expressões (3.18), (3.19) e (3.21) na expressão (3.27) e lembrando que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin[(\omega - \omega')x]}{(\omega - \omega')} = \pi \delta(\omega - \omega'),$$

obtemos as constantes de normalização das formas assintóticas de $\psi_{\omega l}^{nS}$, a saber:

$$A_{\omega l}^{\rightarrow} = \frac{1}{2\omega}, \quad (3.28)$$

e

$$A_{\omega l}^{\leftarrow} = \frac{1}{2\sqrt{\omega}\sqrt{\omega^2 - m^2}}. \quad (3.29)$$

3.4 Método numérico de determinação e normalização das soluções em Schwarzschild

Encontraremos nesta seção as soluções de (3.15) originárias do horizonte passado \mathcal{H}^- e do infinito passado tipo tempo \mathcal{I}^- , $\psi_{\omega l}^{\rightarrow, S}(x)$ e $\psi_{\omega l}^{\leftarrow, S}(x)$, cujos valores assintóticos sejam coerentes com as expressões (3.18) e (3.19), respectivamente.

Vamos agora descrever o procedimento relativo ao método numérico utilizado na obtenção das funções radiais $\psi_{\omega l}^{\leftarrow, S}(x)$, originárias do infinito passado \mathcal{I}^- .

De (3.19) deduzimos que, próximo do horizonte de eventos,

$$\psi_{\omega l}^{\leftarrow, S}(x) \propto e^{-i2M\omega x} \quad (x \ll -1).$$

Assumindo uma solução de (3.15), originária do infinito passado tipo tempo \mathcal{I}^- , com módulo unitário, expressa por

$$\chi_{\omega l}^{\leftarrow, S}(x_E) = e^{-i2M\omega x_E} \quad (x_E \ll -1), \quad (3.30)$$

para um valor fixo de ω entre m e ∞ , sendo $\chi_{\omega l}^{\leftarrow, S}(x_E)$ a condição inicial na região assintótica próxima ao horizonte de eventos futuro \mathcal{H}^+ , onde $x \rightarrow -\infty$ (ou $r \rightarrow 2M$). Em seguida evoluímos numericamente esta solução no sentido de $x \rightarrow +\infty$ (ou $r \rightarrow +\infty$), por meio da equação diferencial (3.15). O resultado para regiões suficientemente distantes do horizonte de eventos (para muito além do máximo do potencial (3.13)), é dado por [5, 15, 16]

$$\chi_{\omega l}^{\leftarrow, S}(x_D) \approx C_{\omega l}^{\leftarrow} e^{-i2M\sqrt{\omega^2 - m^2}x_D} + D_{\omega l}^{\leftarrow} e^{i2M\sqrt{\omega^2 - m^2}x_D} \quad (x_D \gg 1), \quad (3.31)$$

com $|C_{\omega l}^{\leftarrow}|^2 - |D_{\omega l}^{\leftarrow}|^2 = \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 - m^2}}$. Efetuando o cálculo da derivada de $\chi_{\omega l}^{\leftarrow, S}(x)$ (com respeito a x), no ponto $x_D \gg 1$, obtemos

$$\frac{d\chi_{\omega l}^{\leftarrow, S}}{dx}(x_D) \approx i2M\sqrt{\omega^2 - m^2} \left[-C_{\omega l}^{\leftarrow} e^{-i2M\sqrt{\omega^2 - m^2}x_D} + D_{\omega l}^{\leftarrow} e^{i2M\sqrt{\omega^2 - m^2}x_D} \right]. \quad (3.32)$$

Manipulando algebricamente (3.31) e (3.32), obtemos

$$|C_{\omega l}^{\leftarrow}|^2 = \frac{1}{4} \left[\left| \chi_{\omega l}^{\leftarrow, S}(x_D) \right|^2 + \frac{1}{4M^2(\omega^2 - m^2)} \left| \frac{d\chi_{\omega l}^{\leftarrow, S}}{dx}(x_D) \right|^2 \right] + \frac{1}{2} \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 - m^2}}, \quad (3.33)$$

e

$$|D_{\omega l}^{\leftarrow}|^2 = \frac{1}{4} \left[\left| \chi_{\omega l}^{\leftarrow, S}(x_D) \right|^2 + \frac{1}{4M^2(\omega^2 - m^2)} \left| \frac{d\chi_{\omega l}^{\leftarrow, S}}{dx}(x_D) \right|^2 \right] - \frac{1}{2} \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 - m^2}}. \quad (3.34)$$

Devemos lembrar que a função $\chi_{\omega l}^{\leftarrow, S}$ não se apresenta normalizada. Vamos então multiplicá-la por uma constante de normalização $K_{\omega l}^{\leftarrow}$:

$$K_{\omega l}^{\leftarrow} \chi_{\omega l}^{\leftarrow, S}(x) \approx \begin{cases} K_{\omega l}^{\leftarrow} e^{-i2Mx\omega} & (x \ll -1) \\ K_{\omega l}^{\leftarrow} \left(C_{\omega l}^{\leftarrow} e^{-i2Mx\sqrt{\omega^2-m^2}} + D_{\omega l}^{\leftarrow} e^{i2Mx\sqrt{\omega^2-m^2}} \right) & (x \gg 1) \end{cases} . \quad (3.35)$$

Sendo assim, determinaremos $K_{\omega l}^{\leftarrow}$ requerendo que as condições de contorno assintóticas de (3.35) sejam compatíveis com (3.19). Usando a expressão (3.21), podemos reescrever (3.19) como

$$\psi_{\omega l}^{\leftarrow, S}(x) \approx \begin{cases} A_{\omega l}^{\leftarrow} \mathcal{T}_{\omega l}^{\leftarrow} e^{-i2M\omega x} & (r \gtrsim 2M) \\ A_{\omega l}^{\leftarrow} \left[e^{-2iMx\sqrt{\omega^2-m^2}} + \mathcal{R}_{\omega l}^{\leftarrow} e^{2iMx\sqrt{\omega^2-m^2}} \right] & (r \gg 2M) \end{cases} . \quad (3.36)$$

Desta forma, podemos determinar os coeficientes $C_{\omega l}^{\leftarrow}$, $D_{\omega l}^{\leftarrow}$ e $K_{\omega l}^{\leftarrow}$:

$$C_{\omega l}^{\leftarrow} = \frac{1}{\mathcal{T}_{\omega l}^{\leftarrow}} ,$$

$$D_{\omega l}^{\leftarrow} = \frac{\mathcal{R}_{\omega l}^{\leftarrow}}{\mathcal{T}_{\omega l}^{\leftarrow}} ,$$

$$K_{\omega l}^{\leftarrow} = A_{\omega l}^{\leftarrow} \mathcal{T}_{\omega l}^{\leftarrow} .$$

Deduzimos, do tratamento realizado acima, a expressão normalizada de $\psi_{\omega l}^{\leftarrow, S}(x)$, a saber

$$\psi_{\omega l}^{\leftarrow, S}(x) = A_{\omega l}^{\leftarrow} \mathcal{T}_{\omega l}^{\leftarrow} \chi_{\omega l}^{\leftarrow, S}(x) . \quad (3.37)$$

Efetuada procedimento análogo, podemos obter a função radial $\psi_{\omega l}^{\rightarrow, S}(x)$, associada aos modos provenientes do horizonte de eventos passado \mathcal{H}^- .

De (3.18) concluímos que, distante do horizonte de eventos (para muito além do máximo do potencial (3.13)),

$$\psi_{\omega l}^{\rightarrow, S}(x) \propto e^{i2Mx\sqrt{\omega^2-m^2}} \quad (x \gg 1) .$$

Assumindo uma solução de (3.15), originária do horizonte de eventos passado \mathcal{H}^- , com módulo unitário, expressa por

$$\chi_{\omega l}^{\rightarrow, S}(x_D) = e^{i2Mx_D\sqrt{\omega^2-m^2}} \quad (x_D \gg 1), \quad (3.38)$$

para um valor fixo de ω entre m e ∞ , sendo $\chi_{\omega l}^{\rightarrow, S}(x_D)$ a condição inicial na região assintótica próxima ao infinito futuro tipo tempo \mathcal{I}^+ , onde $x \rightarrow \infty$ (ou $r \rightarrow \infty$). Em seguida evoluímos numericamente esta solução no sentido de $x \rightarrow -\infty$ (ou $r \rightarrow 2M$), por meio da equação diferencial (3.15). O resultado para regiões suficientemente próximas ao horizonte de eventos, é dado por [5, 15, 16]

$$\chi_{\omega l}^{\rightarrow, S}(x_E) \approx C_{\omega l}^{\rightarrow} e^{i2M\omega x_E} + D_{\omega l}^{\rightarrow} e^{-i2M\omega x_E} \quad (x_E \ll -1), \quad (3.39)$$

com $|C_{\omega l}^{\rightarrow}|^2 - |D_{\omega l}^{\rightarrow}|^2 = \frac{\sqrt{\omega^2-m^2}}{\omega}$. Efetuando o cálculo da derivada de $\chi_{\omega l}^{\rightarrow, S}(x)$ (com respeito a x), no ponto $x_E \ll -1$, obtemos

$$\frac{d\chi_{\omega l}^{\rightarrow, S}}{dx}(x_E) \approx i2M\omega [C_{\omega l}^{\rightarrow} e^{i2M\omega x_E} - D_{\omega l}^{\rightarrow} e^{-i2M\omega x_E}]. \quad (3.40)$$

Manipulando algebricamente (3.39) e (3.40), obtemos

$$|C_{\omega l}^{\rightarrow}|^2 = \frac{1}{4} \left[\left| \chi_{\omega l}^{\rightarrow, S}(x_E) \right|^2 + \frac{1}{4M^2\omega^2} \left| \frac{d\chi_{\omega l}^{\rightarrow, S}}{dx}(x_E) \right|^2 \right] + \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\omega^2-m^2}}{\omega}, \quad (3.41)$$

e

$$|D_{\omega l}^{\rightarrow}|^2 = \frac{1}{4} \left[\left| \chi_{\omega l}^{\rightarrow, S}(x_E) \right|^2 + \frac{1}{4M^2\omega^2} \left| \frac{d\chi_{\omega l}^{\rightarrow, S}}{dx}(x_E) \right|^2 \right] - \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\omega^2-m^2}}{\omega}. \quad (3.42)$$

Devemos lembrar que a função $\chi_{\omega l}^{\rightarrow, S}$ não se apresenta normalizada. Vamos então multiplicá-la por uma constante de normalização $K_{\omega l}^{\rightarrow}$:

$$K_{\omega l}^{\rightarrow} \chi_{\omega l}^{\rightarrow, S}(x) \approx \begin{cases} K_{\omega l}^{\rightarrow} (C_{\omega l}^{\rightarrow} e^{i2Mx\omega} + D_{\omega l}^{\rightarrow} e^{-i2Mx\omega}) & (x \ll -1) \\ K_{\omega l}^{\rightarrow} e^{i2Mx\sqrt{\omega^2-m^2}} & (x \gg 1) \end{cases}. \quad (3.43)$$

Sendo assim, determinaremos $K_{\omega l}^{\rightarrow}$ requerendo que as condições de contorno assintóticas de (3.43) sejam compatíveis com (3.18). Usando a expressão (3.21), podemos reescrever (3.18) como

$$\psi_{\omega l}^{\rightarrow, S}(x) \approx \begin{cases} A_{\omega l}^{\rightarrow} [e^{2iMx\omega} + \mathcal{R}_{\omega l}^{\rightarrow} e^{-2iMx\omega}] & (x \ll -1) \\ A_{\omega l}^{\rightarrow} \mathcal{T}_{\omega l}^{\rightarrow} e^{i2Mx\sqrt{\omega^2 - m^2}} & (x \gg 1) \end{cases}. \quad (3.44)$$

Desta forma, podemos determinar os coeficientes $C_{\omega l}^{\rightarrow}$, $D_{\omega l}^{\rightarrow}$ e $K_{\omega l}^{\rightarrow}$:

$$C_{\omega l}^{\rightarrow} = \frac{1}{\mathcal{T}_{\omega l}^{\rightarrow}},$$

$$D_{\omega l}^{\rightarrow} = \frac{\mathcal{R}_{\omega l}^{\rightarrow}}{\mathcal{T}_{\omega l}^{\rightarrow}},$$

$$K_{\omega l}^{\rightarrow} = A_{\omega l}^{\rightarrow} \mathcal{T}_{\omega l}^{\rightarrow}.$$

Deduzimos, do tratamento realizado acima, a expressão normalizada de $\psi_{\omega l}^{\rightarrow, S}(x)$, a saber

$$\psi_{\omega l}^{\rightarrow, S}(x) = A_{\omega l}^{\rightarrow} \mathcal{T}_{\omega l}^{\rightarrow} \chi_{\omega l}^{\rightarrow, S}(x). \quad (3.45)$$

Vale ressaltar, que as expressões (3.37) e (3.45) foram obtidas considerando $\omega > m$. Passemos agora para a descrição do procedimento relativo ao método numérico utilizado na obtenção da função radial $\chi_{\omega l}^{\rightarrow, S}(x)$, originária do horizonte de eventos passado \mathcal{H}^- , considerando $\omega < m$.

De (3.18) deduzimos que, distante do horizonte de eventos (para muito além do máximo do potencial (3.13)),

$$\psi_{\omega l}^{\rightarrow, S}(x) \propto e^{-2Mx\sqrt{m^2 - \omega^2}} \quad (x \gg 1).$$

Admitindo uma solução de (3.15), proveniente do horizonte de eventos passado, expressa por

$$\chi_{\omega l}^{\rightarrow, S}(x) = e^{-2Mx_D\sqrt{m^2 - \omega^2}} \quad (x_D \gg 1), \quad (3.46)$$

onde $\chi_{\omega l}^{\rightarrow, S}(x_D)$ é a condição inicial na região assintótica próxima ao infinito futuro tipo tempo, onde $x \rightarrow \infty$ (ou $r \rightarrow \infty$). Em seguida evoluímos numericamente esta solução

no sentido de $x \rightarrow -\infty$ (ou $r \rightarrow 2M$), por meio da equação diferencial (3.15). Para regiões suficientemente próximas ao horizonte de eventos temos

$$\chi_{\omega l}^{\rightarrow, S}(x_E) \approx C_{\omega l}^{\rightarrow} e^{i2M\omega x_E} + D_{\omega l}^{\rightarrow} e^{-i2M\omega x_E} \quad (x_E \ll -1), \quad (3.47)$$

com $|C_{\omega l}^{\rightarrow}|^2 - |D_{\omega l}^{\rightarrow}|^2 = 0$. Efetuando o cálculo da derivada de $\chi_{\omega l}^{\rightarrow, S}(x)$ (com respeito a x), no ponto $x_E \ll -1$, obtemos

$$\frac{d\chi_{\omega l}^{\rightarrow, S}}{dx}(x_E) \approx i2M\omega [C_{\omega l}^{\rightarrow} e^{i2M\omega x_E} - D_{\omega l}^{\rightarrow} e^{-i2M\omega x_E}]. \quad (3.48)$$

Manipulando algebricamente (3.47) e (3.48), obtemos

$$|C_{\omega l}^{\rightarrow}|^2 = |D_{\omega l}^{\rightarrow}|^2 = \frac{1}{4} \left[\left| \chi_{\omega l}^{\rightarrow, S}(x_E) \right|^2 + \frac{1}{4M^2\omega^2} \left| \frac{d\chi_{\omega l}^{\rightarrow, S}}{dx}(x_E) \right|^2 \right]. \quad (3.49)$$

Uma vez que a função $\chi_{\omega l}^{\rightarrow, S}$ não se apresenta normalizada, vamos então multiplicá-la por uma constante de normalização $K_{\omega l}^{\rightarrow}$:

$$K_{\omega l}^{\rightarrow} \chi_{\omega l}^{\rightarrow, S}(x) \approx \begin{cases} K_{\omega l}^{\rightarrow} (C_{\omega l}^{\rightarrow} e^{i2Mx\omega} + D_{\omega l}^{\rightarrow} e^{-i2Mx\omega}) & (x \ll -1) \\ K_{\omega l}^{\rightarrow} e^{-2Mx\sqrt{m^2-\omega^2}} & (x \gg 1) \end{cases}. \quad (3.50)$$

Sendo assim, determinaremos $K_{\omega l}^{\rightarrow}$ requerendo que as condições de contorno assintóticas de (3.50) sejam compatíveis com (3.24). Usando a expressão (3.21), podemos reescrever (3.24) como

$$\psi_{\omega l}^{\rightarrow, S}(x) \approx \begin{cases} A_{\omega l}^{\rightarrow} (e^{i2M\omega x} + \mathcal{R}_{\omega l}^{\rightarrow} e^{-i2M\omega x}) & (r \ll -1) \\ A_{\omega l}^{\rightarrow} \mathcal{T}_{\omega l}^{\rightarrow} e^{-2Mx\sqrt{m^2-\omega^2}} & (x \gg 1) \end{cases}. \quad (3.51)$$

Desta forma, podemos determinar os coeficientes $C_{\omega l}^{\rightarrow}$, $D_{\omega l}^{\rightarrow}$ e $K_{\omega l}^{\rightarrow}$:

$$C_{\omega l}^{\rightarrow} = \frac{1}{\mathcal{T}_{\omega l}^{\rightarrow}},$$

$$D_{\omega l}^{\rightarrow} = \frac{\mathcal{R}_{\omega l}^{\rightarrow}}{\mathcal{T}_{\omega l}^{\rightarrow}},$$

$$K_{\omega l}^{\rightarrow} = A_{\omega l}^{\rightarrow} \mathcal{T}_{\omega l}^{\rightarrow}.$$

Concluimos, do tratamento realizado acima, a expressão normalizada de $\psi_{\omega l}^{\rightarrow, S}(x)$, a saber

$$\psi_{\omega l}^{\rightarrow, S}(x) = A_{\omega l}^{\rightarrow} \mathcal{T}_{\omega l}^{\rightarrow} \chi_{\omega l}^{\rightarrow, S}(x) \quad (\omega < m). \quad (3.52)$$

A partir da condição $|C_{\omega l}^{\rightarrow}|^2 = |D_{\omega l}^{\rightarrow}|^2$ podemos mostrar que $|\mathcal{R}_{\omega l}^{\rightarrow}|^2 = 1$ e, portanto, todos os modos provenientes do horizonte de eventos com $\omega < m$ são totalmente refletidos de volta para o horizonte.

Verificamos, neste método, que o erro numérico será tanto menor quanto maiores os módulos de $x_E < 0$ e $x_D > 0$. Podemos padronizar este procedimento, para cada valor de ω , escolhendo x_E e x_D tais que o potencial V_S , dado em (3.13), seja sempre menor ou igual a 5% de ω^2 , de forma que as funções $e^{i2Mx\omega}$ e $e^{i2Mx\sqrt{\omega^2 - m^2}}$ apresentem-se de fato como boas aproximações para $\psi_{\omega l}^{\rightarrow, S}(x)$ e $\psi_{\omega l}^{\leftarrow, S}(x)$, respectivamente. O teste efetuado para garantir a confiabilidade de nossos métodos foi a verificação de que as equações 3.18 e 3.19 foram satisfeitas (com as relações apropriadas para $\mathcal{R}_{\omega l}^n$ e $\mathcal{T}_{\omega l}^n$) ao longo do cálculo numérico.

3.5 Quantização do campo escalar massivo no espaço-tempo de um buraco negro estático e sem carga

No processo de quantização canônica do campo escalar massivo, impõem-se relações de comutação a tempos iguais, a saber

$$\left[\widehat{\Phi}(t, \vec{x}), \widehat{\Phi}(t, \vec{x}') \right] = \left[\widehat{\Pi}(t, \vec{x}), \widehat{\Pi}(t, \vec{x}') \right] = 0, \quad (3.53)$$

$$\left[\widehat{\Phi}(t, \vec{x}), \widehat{\Pi}(t, \vec{x}') \right] = \frac{i n^0}{\sqrt{-g}} \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}'), \quad (3.54)$$

onde o momento $\hat{\Pi}$ conjugado ao campo $\hat{\Phi}$ é definido como

$$\hat{\Pi} \equiv n^\mu \hat{\Pi}_\mu \equiv n^\mu \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \hat{\mathcal{L}}}{\partial (\nabla^\mu \hat{\Phi})}. \quad (3.55)$$

Usando a expressão (3.3), podemos reescrever a expressão (3.55) como

$$\hat{\Pi} = n^\mu \nabla_\mu \hat{\Phi}. \quad (3.56)$$

Para o espaço-tempo de Schwarzschild usamos que

$$n^\mu = \frac{\delta_0^\mu}{\sqrt{f}},$$

e que

$$\sqrt{-g} = r^2 \sin \theta.$$

Assim, a expressão (3.54) pode ser reescrita como

$$\left[\hat{\Phi}(t, \vec{x}), \hat{\Pi}(t, \vec{x}') \right] = \frac{i}{(\sqrt{f}) r^2 \sin \theta} \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}'), \quad (3.57)$$

sendo \vec{x} e \vec{x}' representantes de todas as componentes espaciais de x^μ e x'^μ , respectivamente.

Admitindo o caráter quântico-operatorial do campo $\hat{\Phi}(x^\mu)$, podemos então expandi-lo em termos dos modos de frequência positiva $u_{\omega lp}(x^\mu)$ e negativa $u_{\omega lp}^*(x^\mu)$, como

$$\hat{\Phi}(x^\mu) = \sum_{n=\rightarrow, \leftarrow} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{p=-l}^l \int_{\omega_{min}}^{\infty} d\omega [u_{\omega lp}^n(x^\mu) \hat{a}_{\omega lp}^n + u_{\omega lp}^{n*}(x^\mu) \hat{a}_{\omega lp}^{n\dagger}], \quad (3.58)$$

sendo os coeficientes, $\hat{a}_{\omega lp}^n$ e $\hat{a}_{\omega lp}^{n\dagger}$, respectivamente, operadores de aniquilação e criação. A partir de (3.56) e (3.58) temos

$$\hat{\Pi}_\mu(x^\mu) \equiv \nabla_\mu \hat{\Phi} = \sum_{n=\rightarrow, \leftarrow} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{p=-l}^l \int_{\omega_{min}}^{\infty} d\omega [(\nabla_\mu u_{\omega lp}^n) \hat{a}_{\omega lp}^n + (\nabla_\mu u_{\omega lp}^{n*}) \hat{a}_{\omega lp}^{n\dagger}]. \quad (3.59)$$

Podemos também definir o momento canônico $\widehat{\Pi}^C = \frac{\sqrt{-g}}{n^0} \widehat{\Pi}(x^\lambda)$, de tal maneira que

$$\left[\widehat{\Phi}(t, \vec{x}), \widehat{\Pi}^C(t, \vec{x}') \right] = i \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}').$$

Devemos então obter as relações de comutação entre os operadores $\hat{a}_{\omega lp}^n$ e $\hat{a}_{\omega lp}^{n\dagger}$ definidos na expressão (3.58). Procedemos inicialmente exigindo que os modos $u_{\omega lp}$ satisfaçam

$$\sigma_{KG}(u_{\omega lp}^n, u_{\omega' l' p'}^{n'}) = M_{\rho \rho'} \delta(\omega - \omega') \quad (3.60)$$

$$\sigma_{KG}(u_{\omega lp}^{n*}, u_{\omega' l' p'}^{n'}) = 0, \quad (3.61)$$

sendo ρ o índice que representa os números quânticos n , l e p . Utilizando a definição de produto interno de Klein-Gordon apresentada na expressão (2.17) adaptada para o espaço-tempo de Schwarzschild podemos definir

$$\sigma_{KG}(\widehat{\Phi}, u_{\omega \rho}) = i \int_{\Sigma^{(3)}} d\Sigma^{(3)} n^\mu [\widehat{\Phi}^\dagger (\nabla_\mu u_{\omega \rho}) - (\nabla_\mu \widehat{\Phi}^\dagger) u_{\omega \rho}], \quad (3.62)$$

e

$$\sigma_{KG}(u_{\omega' \rho'}, \widehat{\Phi}) = i \int_{\Sigma^{(3)}} d\Sigma^{(3)} n^\mu [u_{\omega' \rho'}^* (\nabla_\mu \widehat{\Phi}) - (\nabla_\mu u_{\omega' \rho'}^*) \widehat{\Phi}]. \quad (3.63)$$

Também podemos definir que o comutador entre os produtos internos de Klein-Gordon, $\sigma_{KG}(\widehat{\Phi}, u_{\omega \rho})$ e $\sigma_{KG}(u_{\omega' \rho'}, \widehat{\Phi})$ é dado por

$$\left[\sigma_{KG}(\widehat{\Phi}, u_{\omega \rho}), \sigma_{KG}(u_{\omega' \rho'}, \widehat{\Phi}) \right] = i \int_{\Sigma^{(3)}} d\Sigma^{(3)} n^\mu [u_{\omega \rho}^* (\nabla_\mu u_{\omega' \rho'}) - (\nabla_\mu u_{\omega \rho}^*) u_{\omega' \rho'}].$$

Fazendo uso da definição do produto interno de Klein-Gordon expressa em (2.17), temos

$$\left[\sigma_{KG}(\widehat{\Phi}, u_{\omega \rho}), \sigma_{KG}(u_{\omega' \rho'}, \widehat{\Phi}) \right] = \sigma_{KG}(u_{\omega \rho}, u_{\omega' \rho'}). \quad (3.64)$$

Usando ainda a condição expressa em (3.60), reescrevemos a expressão anterior como

$$\left[\sigma_{KG}(\widehat{\Phi}, u_{\omega\rho}), \sigma_{KG}(u_{\omega'\rho'}, \widehat{\Phi}) \right] = M_{\rho\rho'} \delta(\omega - \omega'). \quad (3.65)$$

De outro modo, utilizando a definição de produto interno de Klein-Gordon expressa em (2.17), o campo $\widehat{\Phi}$ expresso em (3.58) e as condições dadas em (3.60) e (3.61), obtemos

$$\sigma_{KG}(u_{\omega\rho}, \widehat{\Phi}) = \sum_{\rho''} \hat{a}_{\omega\rho''} M_{\rho\rho''}, \quad (3.66)$$

e

$$\sigma_{KG}(\widehat{\Phi}, u_{\omega'\rho'}) = \sum_{\rho'''} \hat{a}_{\omega'\rho'''}^\dagger M_{\rho'''\rho'}. \quad (3.67)$$

Com efeito, usando as expressões (3.66) e (3.67), obtemos uma forma alternativa para o comutador entre os produtos internos de Klein-Gordon, $\sigma_{KG}(\widehat{\Phi}, u_{\omega\rho})$ e $\sigma_{KG}(u_{\omega'\rho'}, \widehat{\Phi})$, a saber

$$\left[\sigma_{KG}(\widehat{\Phi}, u_{\omega\rho}), \sigma_{KG}(u_{\omega'\rho'}, \widehat{\Phi}) \right] = \sum_{\rho'', \rho'''} M_{\rho\rho''} \left[\hat{a}_{\omega'\rho'''}^\dagger, \hat{a}_{\omega\rho''} \right] M_{\rho'''\rho'}. \quad (3.68)$$

Deduzimos das expressões (3.65) e (3.68) que

$$\left[\hat{a}_{\omega'\rho'}^\dagger, \hat{a}_{\omega\rho} \right] = (M^{-1})_{\rho\rho'} \delta(\omega - \omega'). \quad (3.69)$$

Requerendo que os modos $u_{\omega lp}^n$ sejam ortonormalizados por meio do produto interno de Klein-Gordon como

$$\sigma_{KG}(u_{\omega lp}^n, u_{\omega' l' p'}^{n'}) = \delta(\omega - \omega') \delta_{nn'} \delta_{ll'} \delta_{pp'}, \quad (3.70)$$

$$\sigma_{KG}(u_{\omega lp}^{n*}, u_{\omega' l' p'}^{n'}) = 0, \quad (3.71)$$

podemos comparar (3.60) com (3.70) para obtermos

$$M_{\rho\rho'} = \delta_{nn'} \delta_{ll'} \delta_{pp'}.$$

Como as deltas $\delta_{nn'}$, $\delta_{ll'}$ e $\delta_{pp'}$ são componentes de matrizes identidade, é fácil verificar que

$$(M^{-1})_{\varrho\varrho'} = \delta_{nn'}\delta_{ll'}\delta_{pp'}. \quad (3.72)$$

Assim, podemos reescrever a expressão (3.69) como

$$\left[\hat{a}_{\omega'\varrho'}^\dagger, \hat{a}_{\omega\varrho} \right] = \left[\hat{a}_{\omega'l'p'}^{n'\dagger}, \hat{a}_{\omega lp}^n \right] = \delta_{nn'}\delta_{ll'}\delta_{pp'}\delta(\omega - \omega'). \quad (3.73)$$

Utilizando a expressão (3.63) podemos determinar o comutador entre $\sigma_{KG}(u_{\omega\varrho}, \hat{\Phi})$ e $\sigma_{KG}(u_{\omega'\varrho'}, \hat{\Phi})$, a saber

$$\left[\sigma_{KG}(u_{\omega\varrho}, \hat{\Phi}), \sigma_{KG}(u_{\omega'\varrho'}, \hat{\Phi}) \right] = 0. \quad (3.74)$$

Podemos obter ainda o comutador entre $\sigma_{KG}(\hat{\Phi}, u_{\omega\varrho})$ e $\sigma_{KG}(\hat{\Phi}, u_{\omega'\varrho'})$

$$\left[\sigma_{KG}(\hat{\Phi}, u_{\omega\varrho}), \sigma_{KG}(\hat{\Phi}, u_{\omega'\varrho'}) \right] = 0. \quad (3.75)$$

Utilizando as expressões (3.66) e (3.57), podemos determinar resultados alternativos para as equações (3.74) e (3.75), respectivamente, a saber

$$\left[\sigma_{KG}(u_{\omega\varrho}, \hat{\Phi}), \sigma_{KG}(u_{\omega'\varrho'}, \hat{\Phi}) \right] = \sum_{\varrho'', \varrho'''} M_{\varrho\varrho''} \left[\hat{a}_{\omega\varrho''}, \hat{a}_{\omega'\varrho'''} \right] M_{\varrho'''\varrho'}, \quad (3.76)$$

e

$$\left[\sigma_{KG}(\hat{\Phi}, u_{\omega\varrho}), \sigma_{KG}(\hat{\Phi}, u_{\omega'\varrho'}) \right] = \sum_{\varrho'', \varrho'''} M_{\varrho\varrho''} \left[\hat{a}_{\omega\varrho''}^\dagger, \hat{a}_{\omega'\varrho'''}^\dagger \right] M_{\varrho'''\varrho'}. \quad (3.77)$$

Efetuada comparações entre (3.74) e (3.76) e entre (3.75) e (3.77), obtemos

$$\left[\hat{a}_{\omega lp}^n, \hat{a}_{\omega'l'p'}^{n'} \right] = 0, \quad (3.78)$$

e

$$\left[\hat{a}_{\omega l p}^{n\dagger}, \hat{a}_{\omega' l' p'}^{n'\dagger} \right] = 0. \quad (3.79)$$

O estado quântico que, para os observadores estáticos fora do horizonte de eventos do buraco negro, corresponde à ausência de partículas é denominado vácuo de Boulware [20], $|0\rangle_B$, sendo este estado aniquilado por todos os operadores $\hat{a}_{\omega l p}^n$, i.e.:

$$\hat{a}_{\omega l p}^n |0\rangle_B = 0. \quad (3.80)$$

Capítulo 4

Radiação emitida por uma fonte escalar girando ao redor de um objeto estelar

Neste capítulo analisaremos a radiação escalar emitida por uma fonte em movimento circular uniforme, interagindo com o campo de Klein-Gordon. Inicialmente faremos esta análise para a fonte no espaço-tempo plano de Minkowski, assumindo Gravitação Newtoniana. Em seguida analisaremos a mesma fonte no espaço-tempo curvo de Schwarzschild, assumindo Relatividade Geral, sendo que em ambas as análises usaremos a abordagem da Teoria de Pertubação em Teoria Quântica de Campos em nível de árvore.

4.1 Taxa de emissão e potência emitida usando Teoria Quântica de Campos em Minkowski, assumindo Gravitação Newtoniana

Nesta seção calculamos a taxa de emissão e a potência emitida por uma fonte em movimento circular uniforme no espaço-tempo plano de Minkowski, interagindo com o campo de Klein-Gordon. Para tanto, usamos a Teoria Quântica de Campos em nível de árvore

e assumimos que a fonte é mantida em sua trajetória circular em torno de um objeto massivo localizado na origem do sistema de coordenadas devido à interação gravitacional, descrita pela Lei da Gravitação Universal de Newton.

A corrente escalar associada a uma fonte puntual seguindo uma linha de mundo $z^\mu(\tau)$, com quadrivelocity $u^\mu[z(\tau)] \equiv \frac{dz^\mu}{d\tau}$, é dada por

$$j^M(x^\mu) = \frac{q}{\sqrt{-\eta(x)}} \frac{1}{u^0(x)} \delta^3[\vec{x} - \vec{z}(\tau)],$$

onde $\eta \equiv \det(\eta_{\mu\nu})$ é o determinante da métrica do espaço-tempo em questão, e a constante q determina a magnitude do acoplamento entre a fonte e o campo.

Considerando o caso em que a fonte descreve uma trajetória circular no plano $\theta = \frac{\pi}{2}$, com raio R_M e com velocidade angular constante $\Omega > 0$ (assim como medida por observadores estáticos neste espaço-tempo plano), temos que a linha de mundo e a quadrivelocity da fonte são, respectivamente, dados por

$$z^\mu = (t, R_M, \frac{\pi}{2}, \Omega t),$$

e

$$u^\mu = \gamma(1, 0, 0, \Omega).$$

Assim, a corrente clássica associada a esta fonte é dada por

$$j^M(x^\mu) = \frac{q}{R_M^2 \gamma} \delta(r - R_M) \delta(\theta - \frac{\pi}{2}) \delta(\varphi - \Omega t), \quad (4.1)$$

onde $\gamma = \frac{1}{\sqrt{(1-R_M^2 \Omega^2)}}$.

A fonte escalar representada pela corrente (4.1) descreve um movimento circular uniforme com aceleração (centrípeta) constante, com módulo dado por

$$|\vec{a}_c| = \Omega^2 R_M.$$

A corrente j^M foi normalizada admitindo-se que $\int d\sigma^3 j^M(x^\mu) = q$, onde $d\sigma^3$ é o elemento de volume (em três dimensões) ortogonal à quadrivelocity u_M^μ da fonte clássica.

A interação entre a fonte $j^M(x^\mu)$ e o campo escalar quântico $\hat{\Phi}(x^\mu)$ será dada pelo acoplamento mínimo, de forma que a ação de interação será

$$\hat{S}_I = \int d^4x \sqrt{-\eta} j^M \hat{\Phi}, \quad (4.2)$$

onde $d^4x \sqrt{-\eta}$ é o elemento de volume (quadridimensional) invariante do espaço-tempo de Minkowski.

Passemos agora à determinação da amplitude de transição, associada à emissão de um quantum do campo $\hat{\Phi}$.

Em nível de árvore, a amplitude de transição entre o vácuo e o estado de uma partícula com números quânticos ω, l e p , $|1; \omega l p\rangle$, é dada por [2, 13] :

$$\mathcal{A}_{\omega l p}^{M,em} = \langle 1; \omega l p | i \hat{S}_I | 0 \rangle_M.$$

Desta forma, usando (2.33), (2.49), que

$$\hat{a}_{\omega l p}^\dagger |0\rangle_M = |1; \omega l p\rangle,$$

e que

$$\langle 1; \omega l p | 1; \omega' l' p' \rangle_M = \delta(\omega - \omega') \delta_{ll'} \delta_{pp'},$$

podemos escrever

$$\mathcal{A}_{\omega l p}^{M,em} = \langle 1; \omega l p | i \int d^4x \sqrt{-\eta} j^M(x^\mu) \hat{\Phi}(x^\mu) | 0 \rangle_M = i \int d^4x \sqrt{-\eta} j^M(x^\mu) u_{\omega l p}^*(x^\mu). \quad (4.3)$$

No espaço-tempo plano com coordenadas polares esféricas, temos que

$$d^4x \sqrt{-\eta} = dt dr d\theta d\varphi r^2 \sin \theta.$$

Sendo assim, usando as funções de distribuição delta de Dirac na definição da corrente j^M dada em (4.1), e a expressão (2.16) para os modos normais, com C_ω dada em (2.27), obtemos

$$\mathcal{A}_{\omega lp}^{M,em} = i \left(\frac{\sqrt{\omega^2 - m^2}}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{q}{\gamma} j_l \left(R_M \sqrt{\omega^2 - m^2} \right) \int_{-\infty}^{\infty} dt Y_{lp} \left(\frac{\pi}{2}, \Omega t \right) e^{-i\omega t}. \quad (4.4)$$

Lembrando que [11]

$$Y_{lp} = (\theta, \varphi) = C_{lp} P_l^p(\cos \theta) e^{ip\varphi} \quad (4.5)$$

com

$$C_{lp} \equiv (-1)^p \sqrt{\frac{(2l+1)(l-p)!}{4\pi(l+p)!}}, \quad (4.6)$$

podemos reescrever (4.4) como

$$\mathcal{A}_{\omega lp}^{M,em} = i \left(\frac{\sqrt{\omega^2 - m^2}}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{q}{\gamma} C_{lp} P_l^p(0) j_l \left(R_M \sqrt{\omega^2 - m^2} \right) \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-i(\omega - p\Omega)t}. \quad (4.7)$$

Lançando mão da definição usual da função distribuição delta de Dirac, a saber

$$\delta(x - x_0) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{-i(x-x_0)k}, \quad (4.8)$$

obtemos

$$\mathcal{A}_{\omega lp}^{M,em} = 2\pi i \left(\frac{\sqrt{\omega^2 - m^2}}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{q}{\gamma} C_{lp} P_l^p(0) j_l \left(R_M \sqrt{(p\Omega)^2 - m^2} \right) \delta(\omega - p\Omega). \quad (4.9)$$

É relevante ressaltar que a presença de $\delta(\omega - p\Omega)$ em (4.9) indica que serão emitidas apenas partículas com frequência $\omega = p\Omega$. Ademais, temos a condição de vínculo entre Ω e m dada por

$$p\Omega \geq m,$$

consequência do fato de que $\omega \geq m$, para o campo escalar massivo no espaço-tempo de Minkowski.

A taxa de emissão, assim como medida por observadores estáticos, para um valor fixo de momento angular, é dada por

$$R_{lp}^{M,em} = \int_m^\infty d\omega \frac{|\mathcal{A}_{\omega lp}^{M,em}|^2}{T}, \quad (4.10)$$

onde

$$T \equiv 2\pi\delta(0) = \int_{-\infty}^\infty dt,$$

é o tempo total medido por observadores inerciais estáticos. Usando (4.9) e (4.10) e somando sobre todos os números quânticos possíveis, obtemos a taxa total de emissão

$$R^{M,em} = \sum_{l=1}^\infty \sum_{p=1}^l R_{lp}^{M,em} = \sum_{l=1}^\infty \sum_{p=1}^l \frac{2q^2 \sqrt{p^2\Omega^2 - m^2}}{\gamma^2} \left| j_l \left(R_M \sqrt{(p\Omega)^2 - m^2} \right) \right|^2 \left| Y_{lp} \left(\frac{\pi}{2}, \Omega t \right) \right|^2. \quad (4.11)$$

Notemos que [5, 16] $Y_{lp} \left(\frac{\pi}{2}, \Omega t \right) = 0$, para $l + p$ ímpar e

$$\left| Y_{lp} \left(\frac{\pi}{2}, \Omega t \right) \right|^2 = \frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l+p-1)!!(l-p-1)!!}{(l+p)!!(l-p)!!}, \quad (4.12)$$

para $l + p$ par. A expressão (4.12) torna notório que $Y_{lp} \left(\frac{\pi}{2}, \Omega t \right)$ não depende do tempo. Aqui $n!! = n(n-2)\dots 1$, se n for ímpar e $n!! = n(n-2)\dots 2$, se n for par.

Vale ressaltar que o modo para o qual $l = 0$, não contribui para energia emitida, uma vez que tal modo está associado a partículas com energia nula.

Assumindo-se a Lei da Gravitação Newtoniana e usando a Lei de Kepler,

$$R_M(\Omega) = \left(\frac{M}{\Omega^2} \right)^{\frac{1}{3}},$$

obtemos $R_N^{M,em}$ como função dos observáveis Ω , q e M , como sendo

$$R_N^{M,em} = \sum_{l=1}^\infty \sum_{p=1}^l \frac{2q^2 \sqrt{p^2\Omega^2 - m^2}}{(\gamma_\Omega^N)^2} \left| j_l \left(\left(\frac{M}{\Omega^2} \right)^{\frac{1}{3}} \sqrt{(p\Omega)^2 - m^2} \right) \right|^2 \left| Y_{lp} \left(\frac{\pi}{2}, \Omega t \right) \right|^2, \quad (4.13)$$

onde

$$\gamma_{\Omega}^N \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - (M\Omega)^{\frac{2}{3}}}}.$$

A potência emitida, assim como calculada por observadores estáticos, para um valor fixo de momento angular, é dada por

$$W_{lp}^{M,em} = \int_m^{\infty} d\omega \omega \frac{|\mathcal{A}_{\omega lp}^{M,em}|^2}{T}, \quad (4.14)$$

Fazendo um tratamento semelhante ao realizado para a potência emitida, obtemos a potência total irradiada

$$W_N^{M,em} = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{p=1}^l \frac{2q^2 p \Omega \sqrt{p^2 \Omega^2 - m^2}}{(\gamma_{\Omega}^N)^2} \left| j_l \left(\left(\frac{M}{\Omega^2} \right)^{\frac{1}{3}} \sqrt{(p\Omega)^2 - m^2} \right) \right|^2 \left| Y_{lp} \left(\frac{\pi}{2}, \Omega t \right) \right|^2. \quad (4.15)$$

Assumindo que a massa do campo seja nula $m = 0$ obtemos a expressão determinada via teoria clássica de campos [5, 16]

$$W_N^{M,em} = \frac{q^2 M^2 \Omega^{8/3}}{12\pi}.$$

4.2 Taxa de emissão e potência emitida usando Teoria Quântica de Campos em Schwarzschild

Nesta seção calculamos a taxa de emissão e a potência emitida por uma fonte em movimento circular uniforme no espaço-tempo curvo de Schwarzschild, interagindo com o campo de Klein-Gordon. Para tanto, usamos a Teoria Quântica de Campos em nível de árvore e assumimos que a fonte é mantida em sua trajetória circular em torno de um objeto massivo localizado na origem devido à interação gravitacional, descrita pela Relatividade Geral.

A corrente escalar associada a uma fonte puntual seguindo uma linha de mundo $z^{\mu}(\tau)$, com quadrivelocidade $u^{\mu}[z(\tau)] \equiv \frac{dz^{\mu}}{d\tau}$, é dada por

$$j^S(x^\mu) = \frac{q}{\sqrt{-g(x)}} \frac{1}{u_S^0(x)} \delta^3[\vec{x} - \vec{z}(\tau)],$$

onde g é o determinante da métrica $g_{\mu\nu}$ do espaço-tempo em questão, e a constante q determina, a exemplo do caso plano, a magnitude do acoplamento entre a fonte e o campo.

Considerando o caso em que a fonte descreve uma trajetória circular neste espaço-tempo de um buraco negro de Schwarzschild, no plano $\theta = \frac{\pi}{2}$, com raio R_S e com velocidade angular constante $\Omega > 0$ (assim como medida por observadores estáticos no infinito), temos que a linha de mundo e a quadrivelocidade da fonte são, respectivamente, dadas por

$$z_S^\mu(\Omega, R_S) = \left[t, R_S, \frac{\pi}{2}, \Omega t \right],$$

e

$$u_S^\mu(\Omega, R_S) = \left[\frac{1}{(f(R_S) - R_S^2 \Omega^2)^{\frac{1}{2}}}, 0, 0, \frac{\Omega}{(f(R_S) - R_S^2 \Omega^2)^{\frac{1}{2}}} \right].$$

Assim, a corrente clássica associada a esta fonte é dada por

$$j^S(x^\mu) = \frac{q}{R_S^2 u_S^0} \delta(r - R_S) \delta(\theta - \frac{\pi}{2}) \delta(\varphi - \Omega t). \quad (4.16)$$

A fonte foi normalizada requerendo-se que $\int d\sigma^{(3)} j^S(x^\mu) = q$, onde $d\sigma^{(3)}$ é o elemento diferencial de trivolume ortogonal a u_S^μ , pela métrica de Schwarzschild.

É importante mencionar que, de acordo com a Relatividade Geral [24], uma fonte em movimento circular uniforme ao redor de um buraco negro segue uma geodésica e portanto tem aceleração própria nula. A fonte orbitando um buraco negro de Schwarzschild, com momento angular L , executa órbitas circulares estáveis para $R_S > 6M$, e órbitas circulares instáveis para $3M < R_S \leq 6M$. No caso da fonte executar órbitas circulares estáveis, temos

$$R_S = \left(\frac{M}{\Omega^2} \right)^{\frac{1}{3}}.$$

A interação entre a fonte $j^S(x^\mu)$ e o campo escalar quântico $\widehat{\Phi}(x^\mu)$ será dada pelo acoplamento mínimo, de forma que a ação de interação será

$$\widehat{S}_I = \int d^4x \sqrt{-g} j^S \widehat{\Phi}, \quad (4.17)$$

onde $d^4x \sqrt{-g}$ é o elemento de volume (quadridimensional) invariante do espaço-tempo de Schwarzschild.

Passemos agora à determinação da amplitude de emissão, associada à emissão de um quantum do campo $\widehat{\Phi}$. Em nível de árvore, a amplitude de transição entre o vácuo e o estado de uma partícula com números quânticos n, ω, l e p , $|1; n\omega lp\rangle$, é dada por

$$\mathcal{A}_{\omega lp}^{n,em} = \langle 1; n\omega lp | i\widehat{S}_I | 0 \rangle_B.$$

Desta forma, usando (3.58), (3.80), que

$$\hat{a}_{\omega lp}^{n\dagger} | 0 \rangle_B = | 1; n\omega lp \rangle$$

e que

$$\langle 1; n\omega lp | 1; n'\omega' l' p' \rangle = \delta(\omega - \omega') \delta_{nn'} \delta_{ll'} \delta_{pp'}$$

podemos escrever

$$\mathcal{A}_{\omega lp}^{n,S,em} = i \int d^4x \sqrt{-g} j^S(x^\mu) u_{\omega lp}^{n*}(x^\mu). \quad (4.18)$$

De (3.2), (3.12) e (4.5) podemos escrever (4.18) como

$$\mathcal{A}_{\omega lp}^{n,S,em} = 2\pi i q \left(\frac{\omega}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{u_S^0(R_S)} \frac{\psi_{\omega l}^{*n,S}(R_S)}{R_S} C_{lp} P_l^p(0) \delta(\omega - p\Omega). \quad (4.19)$$

A taxa de emissão, assim como calculada por observadores estáticos assintóticos, é dada por

$$R_{lp}^{n,S,em} = \int_{\omega_{min}}^{\infty} d\omega \frac{|\mathcal{A}_{\omega lp}^{n,S,em}|^2}{T}, \quad (4.20)$$

onde $T = 2\pi\delta(0)$ é o tempo total assim como medido por estes observadores. Substituindo (4.19) em (4.20) e somando sobre todos os números quânticos possíveis, obtemos a taxa total de emissão

$$R^{S,em} = \sum_{n=\rightarrow, \leftarrow} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{p=1}^l R_{lp}^{n,S,em} = \sum_{n=\rightarrow, \leftarrow} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{p=1}^l 2q^2(p\Omega) [f(R_S) - (R_S\Omega)^2] \frac{|\psi_{\omega_0 l}^{*n,S}(R_S)|^2}{R_S^2} \left| Y_{lp} \left(\frac{\pi}{2}, \Omega t \right) \right|^2, \quad (4.21)$$

onde $\omega_0 \equiv p\Omega$ e $l, p \geq 1$.

A potência emitida, assim como calculada por observadores estáticos assintóticos, é dada por

$$W_{lp}^{n,S,em} = \int_{\omega_{min}}^{\infty} d\omega \omega \frac{|\mathcal{A}_{\omega lp}^{n,S,em}|^2}{T}. \quad (4.22)$$

Fazendo um tratamento análogo ao realizado na obtenção da taxa de emissão, determinamos a potência total irradiada

$$W^{S,em} = \sum_{n=\rightarrow, \leftarrow} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{p=1}^l W_{lp}^{n,S,em} = \sum_{n=\rightarrow, \leftarrow} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{p=1}^l 2q^2(p\Omega)^2 [f(R_S) - (R_S\Omega)^2] \frac{|\psi_{\omega_0 l}^{*n,S}(R_S)|^2}{R_S^2} \left| Y_{lp} \left(\frac{\pi}{2}, \Omega t \right) \right|^2. \quad (4.23)$$

Vale lembrar que a função $\psi_{\omega_0 l}^{n,S}$ não pode ser expressa em termos de funções analíticas disponíveis na literatura e que, portanto, o seu cálculo foi efetuado numericamente, como indicado na seção 3.4. Consequentemente, o cálculo da potência total irradiada e taxa total de emissão foi efetuado numericamente. Os resultados destes cálculos numéricos serão exibidos no próximo capítulo.

Capítulo 5

Análise e comparação dos resultados

Neste capítulo, devotaremos especial atenção à análise e comparação dos resultados obtidos no capítulo 4, para a taxa de emissão e a potência emitida pela fonte em movimento circular uniforme ao redor do objeto estelar. Nossos resultados serão expressos em termos de grandezas medidas por observadores estáticos assintóticos (massa do objeto estelar e velocidade angular Ω).

5.1 Análise dos resultados no espaço-tempo plano (campo massivo e não massivo)

Nesta seção realizamos comparações entre as taxas de emissão e as potências emitidas para o campo massivo e não massivo, ambas calculadas no espaço-tempo plano de Minkowski.

Comparamos, na figura 5.2, o comportamento da taxa de emissão calculada para o campo massivo e não massivo. Observamos que a taxa de emissão para o campo massivo é sempre menor que para o campo não massivo, e na medida que aumentamos a massa do campo a diferença se acentua. Justificamos esta diferença argumentando que, enquanto para o campo não massivo as partículas emitidas por unidade de tempo admitem valores de energia entre zero e infinito, para o campo massivo as partículas emitidas por unidade de tempo admitem valores de energia entre a massa de repouso e infinito. Sendo assim, o

campo massivo deixa de emitir partículas com energias entre zero e a massa de repouso e consequentemente a taxa de emissão do mesmo é inferior em relação a taxa de emissão do campo não massivo. Devemos ressaltar que devido à desigualdade $p\Omega \geq m$, apresentada na seção 4.1, para valores de momento angular magnético p maiores que 1, a fonte escalar orbita o objeto estelar com valor da velocidade angular Ω menor que o valor da massa de repouso m das partículas do campo emitidas. Contudo, mostraremos nesta seção, na figura 5.1, que a contribuição dominante é gerada pelos modos com momento angular $l = p = 1$. Consequentemente, a probabilidade de da fonte emitir partículas associadas a modos com valores de $l = p$ superiores a 1 é baixa. Fazendo comparação análoga, agora para a potência emitida (figura 5.3), obtemos fundamentalmente as mesmas características. Deve-se ressaltar que em ambas as análises arbitramos $l_{max} = 3$ (l_{max} é definido como o valor máximo para o número quântico l) e que a diferença entre as curvas, neste caso, é menor em relação as curvas das a taxas de emissão, assumindo os mesmos valores de massa. Isto se deve à presença de um termo multiplicativo (frequência ω) no integrando na expressão da potência emitida (cf. expressões (4.10) e (4.14)) [25]. Na figura 5.4 comparamos a potência total emitida obtida via teoria clássica de campos W^{class} e a potência emitida obtida via teoria quântica de campos a nível de árvore $W_{lp}^{M,em}$, para $l_{max} = 1, 2$ e 3 , assumindo $m = 0$. Verificamos que aumentando o valor do momento angular l mais $W_{lp}^{M,em}$ se aproxima de W^{class} . Fazendo a soma sobre todos os números quânticos l temos $W_{lp}^{M,em} = W^{class}$ [16]. Na figura 5.5 efetuamos a razão entre $W_{lp}^{M,em}$ e W^{class} assumindo $m = 0$, para $l_{max} = 1, 2, 3, 4, 5$ e 6 . Notamos que a referida razão tende a 1 na medida em que aumentamos o momento angular máximo l_{max} . Deve-se ressaltar que tanto a potência quanto a taxa de emissão são plotadas como uma função de $M\Omega$ cujo domínio está determinado entre 0 e 0.068 (associado com a órbita circular da fonte escalar em $R = 6M$). A escolha deste intervalo é motivada pelas futuras comparações entre os resultados obtidos nos espaços-tempos curvo e plano, efetuadas na seção 5.2.

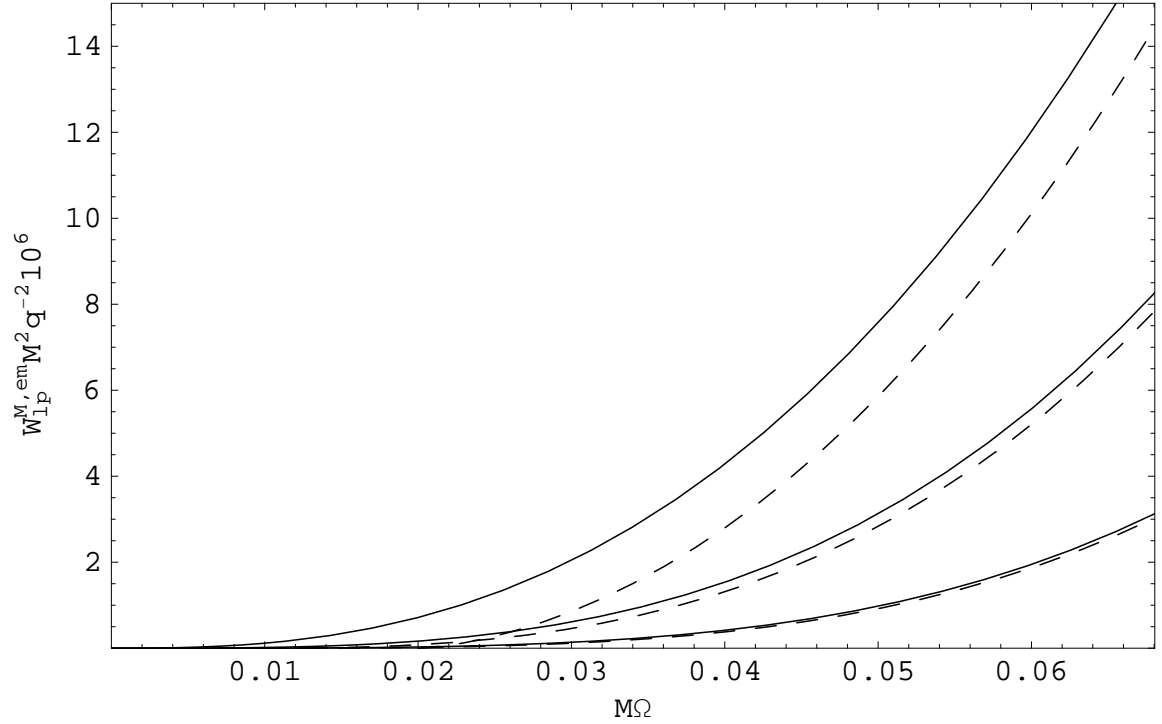


Figura 5.1: $W_{lp}^{M,em}$ é plotado como uma função de Ω para diferentes escolhas de l e p , com $mM = 0$ (linhas contínuas) e $mM = 0.02$ (linhas tracejadas). A contribuição de $l = p = 1$ é determinada pelo par de linhas tracejada (caso massivo) e contínua (caso não-massivo) mais elevadas no gráfico, de $l = p = 2$ é determinada pelo par de linhas tracejada (caso massivo) e contínua (caso não-massivo) intermediárias no gráfico, enquanto que $l = p = 3$ é determinada pelo par de linhas tracejada (caso massivo) e contínua (caso não-massivo) menos elevadas no gráfico. A principal contribuição para a potência emitida é proveniente dos modos com momento angular $l = p = 1$. Quanto maior o valor de l , menor é a contribuição para a potência total emitida.

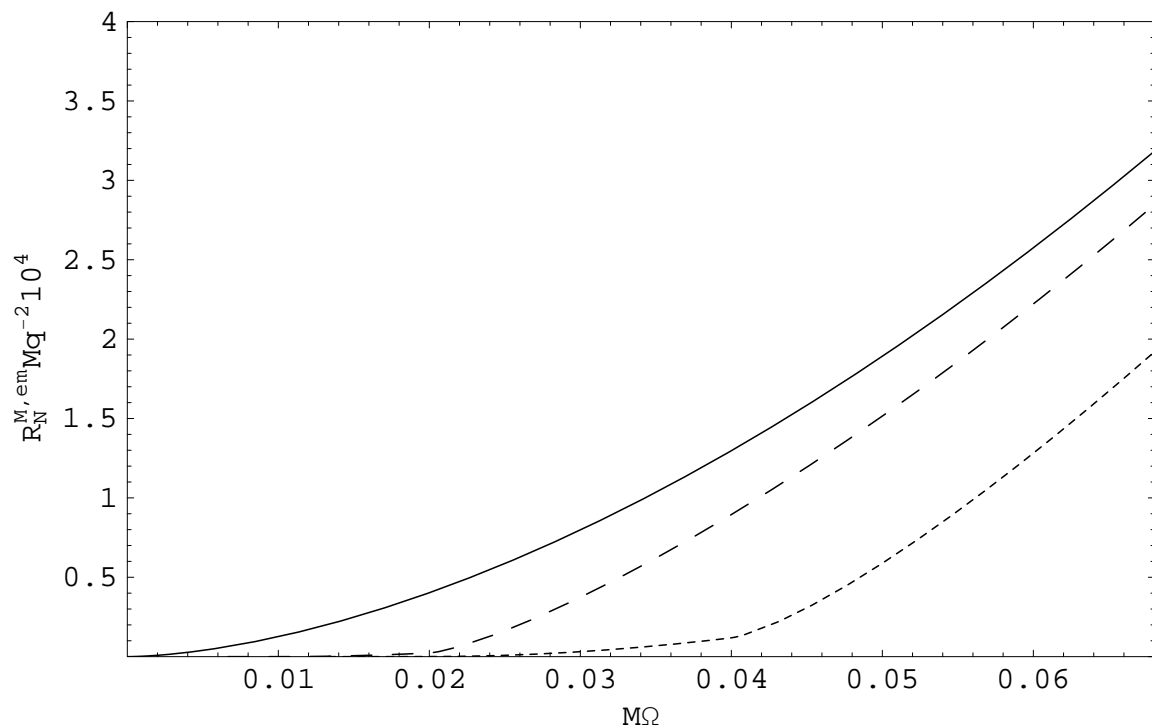


Figura 5.2: A contribuição para a taxa de emissão $R_N^{M,em}$ proveniente de partículas com momento angular até $l = 3$ é plotada como função da velocidade angular Ω da fonte girante, como medida por observadores estáticos assintóticos, para o caso não-massivo $m = 0$ (curva contínua) e para os casos massivos $mM = 0.02$ (curva tracejada) e $mM = 0.04$ (curva pontilhada). $M\Omega$ está definido entre 0 e 0.068 (associado com a órbita circular em $R = 6M$). Notamos que nos casos massivos $mM = 0.02$ (curva tracejada) e $mM = 0.04$ (curva pontilhada), para valores próximos e menores do que $M\Omega = mM = 0.02$ e $M\Omega = mM = 0.04$, respectivamente, a contribuição para a taxa de emissão é muito pequena. Isto se deve ao fato de que a probabilidade de emissão de modos com $l = p$ maiores do que 1 é consideravelmente baixa. Notamos também que a probabilidade de emissão de partículas do campo por unidade de tempo para o caso massivo é menor do que no caso não-massivo.

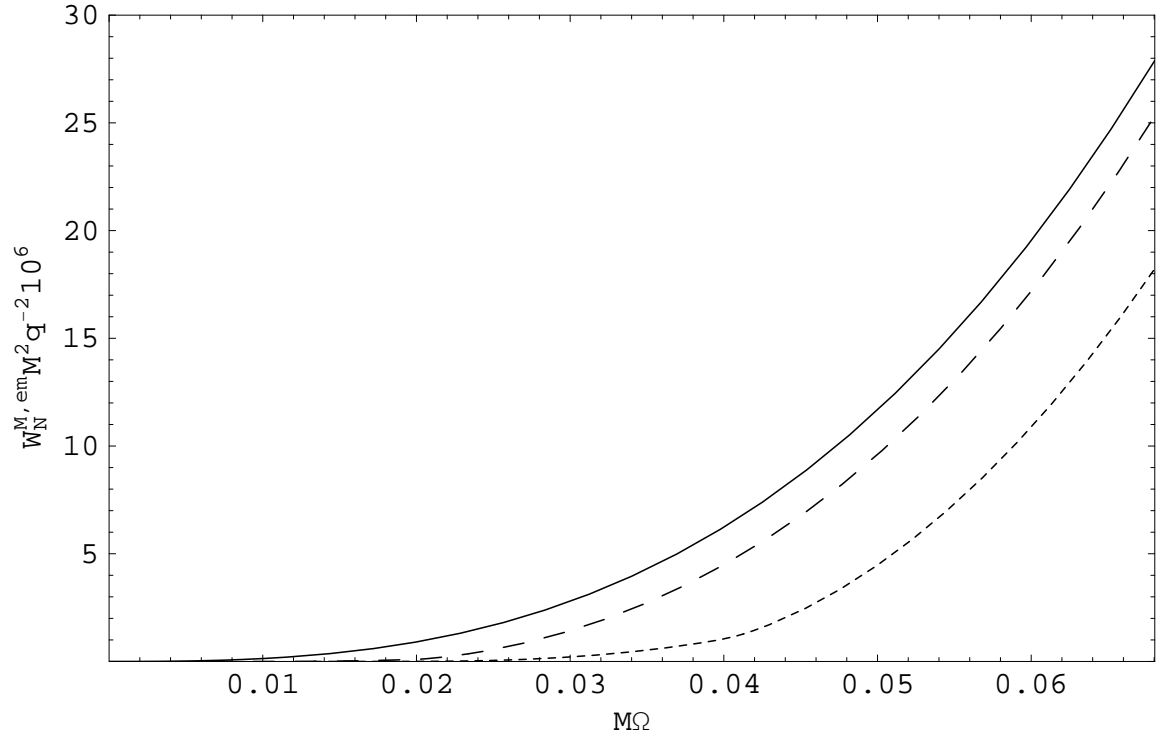


Figura 5.3: No gráfico acima plotamos as curvas referentes à potência emitida como função de Ω para os casos massivos $mM = 0.02$ (curva tracejada) e $mM = 0.04$ (curva pontilhada) e não-massivo $m = 0$ (curva contínua). Assumimos aqui que a soma no momento angular na expressão (4.15) é efetuada até $l = 3$. Notamos que a potência emitida para o caso massivo é menor em relação ao caso não-massivo.

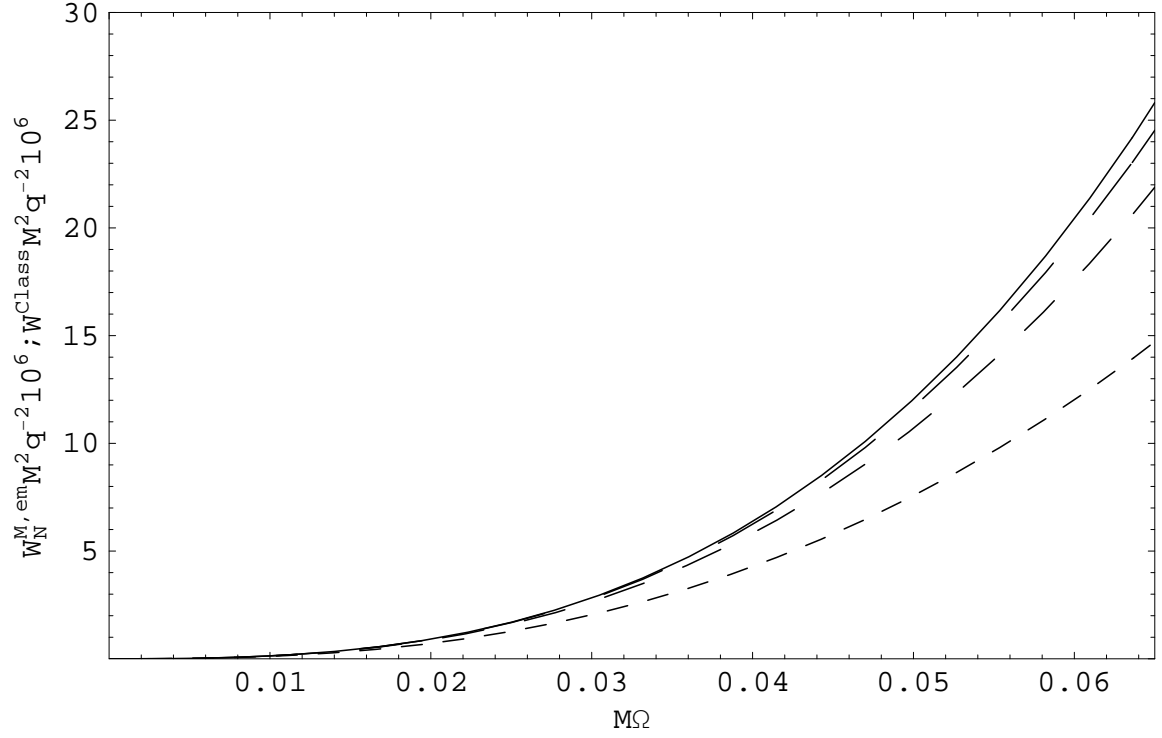


Figura 5.4: Neste gráfico plotamos as curvas referentes a potência total emitida obtida via teoria clássica de campos W^{class} (curva contínua) e a potência emitida obtida via teoria quântica de campos a nível de árvore $W_{lp}^{M,em}$ (curvas tracejadas), para $l_{max} = 1$, $l_{max} = 2$ e $l_{max} = 3$, respectivamente. Assumimos aqui $m = 0$ para a massa do campo. Verificamos que aumentando o valor do momento angular máximo l_{max} , diminui a diferença entre $W_{lp}^{M,em}$ e W^{class} . Fazendo a soma sobre todos os números quânticos l obtemos $W_{lp}^{M,em} = W^{class}$ [16].

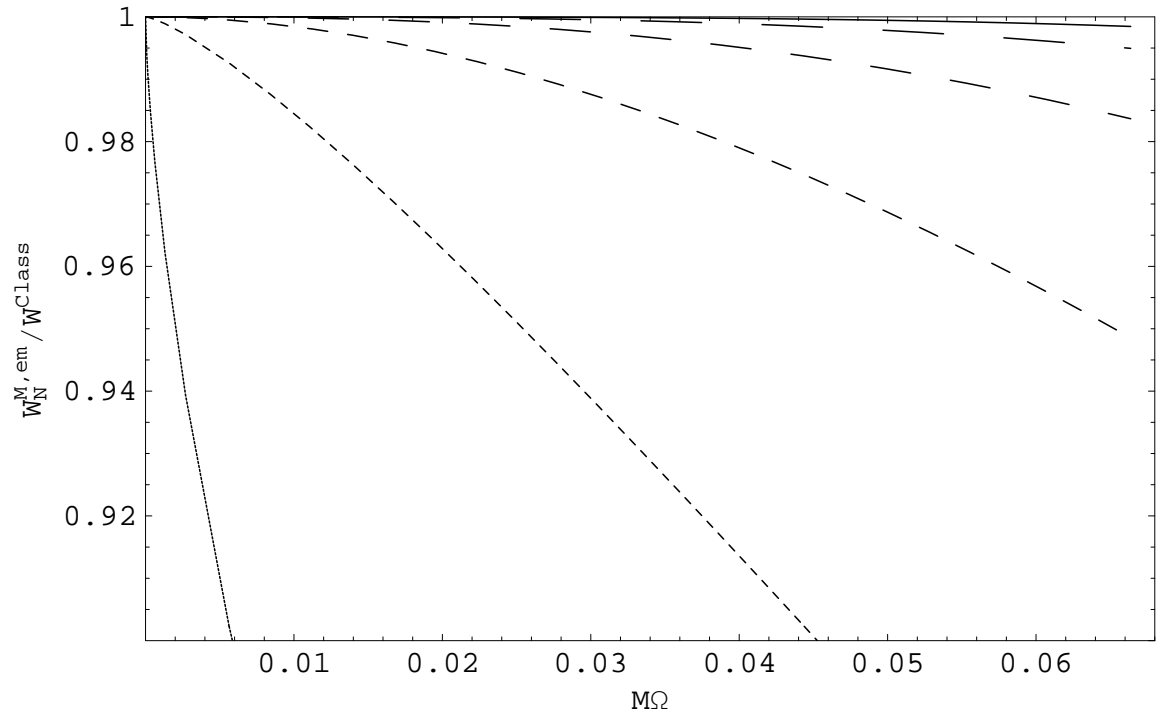


Figura 5.5: Neste gráfico plotamos as curvas referentes à razão entre a potência total emitida obtida via teoria clássica de campos W^{class} e a potência emitida obtida via teoria quântica de campos a nível de árvore $W^{M,em}$, para $l_{max} = 1, 2, 3, 4, 5$ e 6 . Assumimos aqui $m = 0$ para a massa do campo. Notamos que aumentando o valor do momento angular máximo l_{max} , a razão entre $W^{M,em}$ e W^{class} tende a 1. Fazendo a soma sobre todos os números quânticos l obtemos $W^{M,em} / W^{class} = 1$ [16].

Na figura 5.6 comparamos as curvas referentes à razão entre as taxas de emissão para o caso massivo e não massivo, onde cada curva é plotada assumindo-se $l_{max} = 3$ e um determinado valor para a massa da partícula do campo. Notamos que a razão é tanto maior quanto menor for a massa do campo. Verificamos que a referida razão tende a 1 na medida em que aumentamos o valor da velocidade angular Ω da fonte. Este comportamento pode ser entendido considerando que para altos valores da velocidade angular a probabilidade de emissão de partículas com baixa energia deixa de ser significativa. Verificamos também que as referidas razões caem a 0 próximo de $M\Omega = mM$. Este comportamento pode ser compreendido considerando que a contribuição para a taxa de emissão para valores de momento angular l maiores que 1 é consideravelmente reduzida. Na figura 5.7 efetuamos uma análise semelhante, agora comparando potência emitida e obtendo essencialmente as mesmas características observadas na figura 5.6.

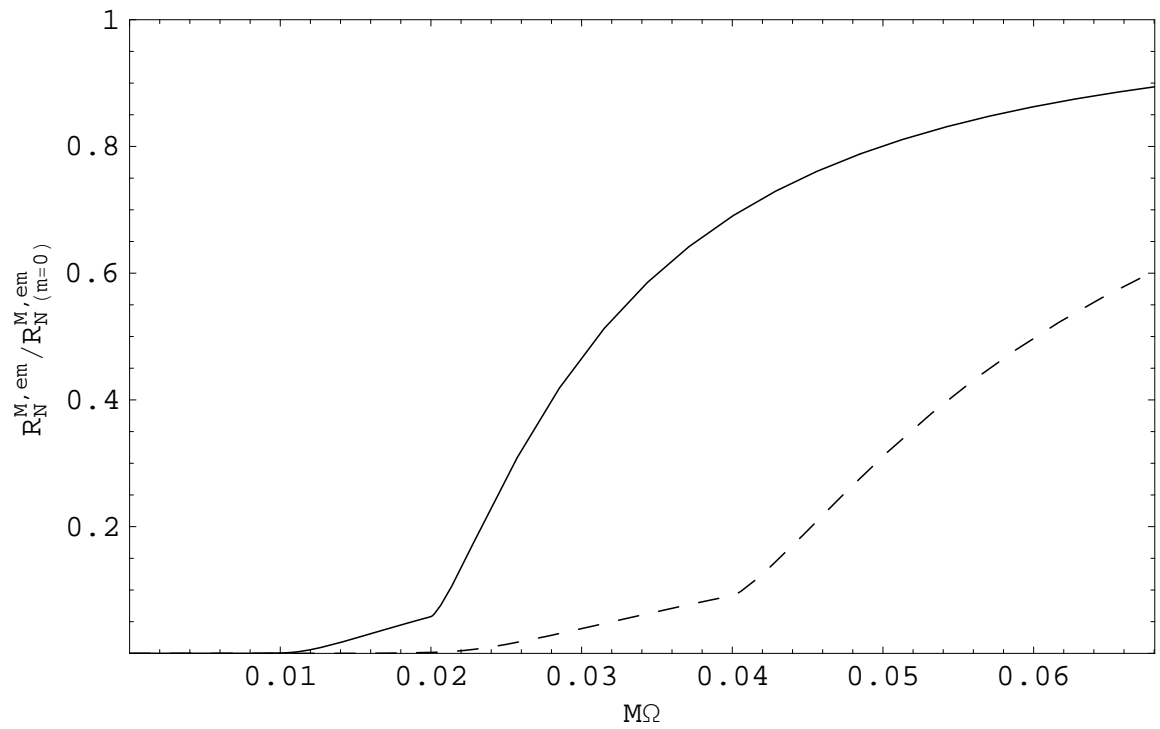


Figura 5.6: No gráfico acima plotamos as curvas referentes à razão entre as taxas de emissão como função de Ω para o caso massivo e não-massivo. A curva contínua está associada a $mM = 0.02$, enquanto que a curva tracejada está associada a $mM = 0.04$.

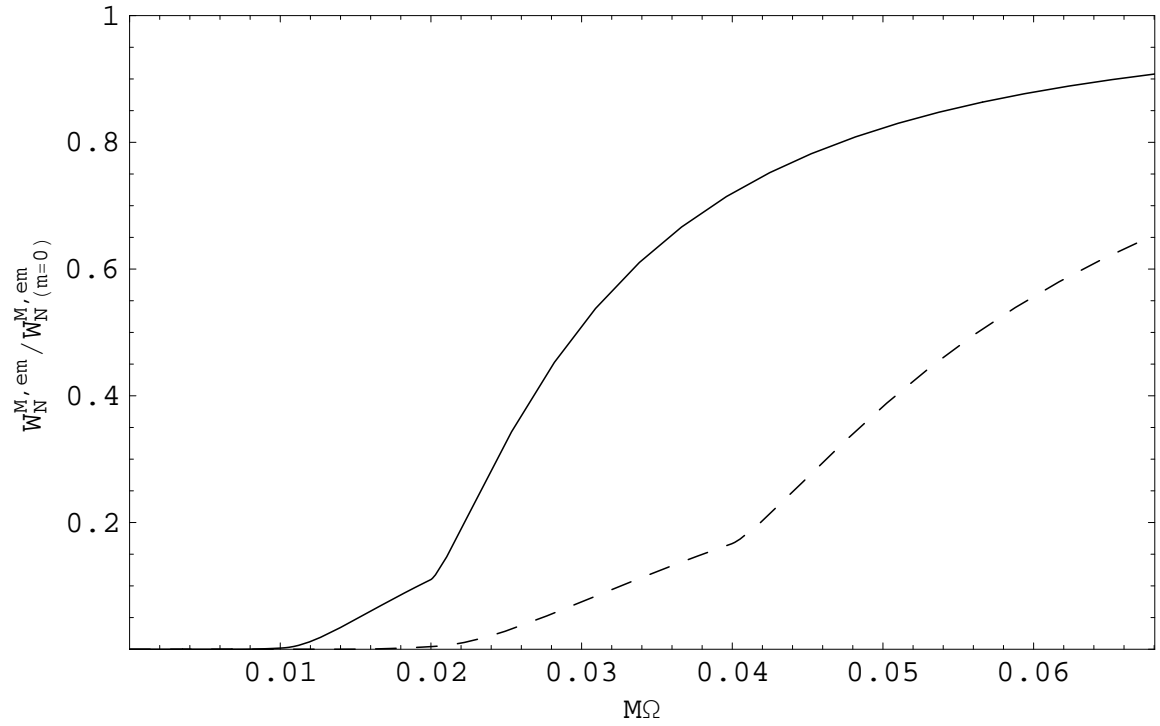


Figura 5.7: De forma análoga à figura 5.6, a razão entre as potências emitidas como função de Ω é tanto maior quanto menor o valor arbitrado para a massa do campo. A curva contínua está associada a $mM = 0.02$, enquanto que a curva tracejada está associada a $mM = 0.04$.

5.2 Comparação entre os resultados nos espaços-tempos curvo e plano

Nesta seção efetuamos comparações entre potenciais de espalhamento, entre taxas de emissão e entre potências emitidas nos espaços-tempos curvo e plano, assumindo em todas as situações a fonte girando ao redor de um objeto estelar interagindo com um campo escalar massivo.

Realizamos, na figura 5.8, a comparação entre os potenciais de espalhamento em Minkowski e Schwarzschild para $l = 1$. Na região assintótica $r \gg 2M$ ambos V_M e V_S comportam-se com $\frac{1}{r^2}$ e tendem a m^2 corroborando o fato de que o espaço-tempo de Schwarzschild é assintoticamente plano. Verificamos que V_S só está definido na região externa ao horizonte de eventos do buraco negro ($r > 2M$), enquanto que V_M também é definido no intervalo $0 < r \leq 2M$. Nas figuras 5.9 e 5.10 plotamos o potencial de espalhamento V_S para $l = 0$, $l = 1$ e $l = 6$, assumindo $mM = 1$ e $mM = 0.1$, respectivamente. Observamos que para $mM < 1/4$ a barreira de potencial é presente para todos os valores do momento angular l . Notamos que o máximo do potencial V_S depende do momento angular l . Percebemos que somente partículas provenientes do horizonte de eventos passado \mathcal{H}^- (buraco branco) podem ter energia menor que a massa de repouso $\omega < m$ e os modos associados a estas partículas serão totalmente refletidos para o horizonte de eventos do buraco negro \mathcal{H}^+ . Partículas provenientes do infinito passado tipo tempo \mathcal{I}^- terão necessariamente $\omega > m$. Verificamos que quanto maior o l , maior é a barreira de potencial. Como consequência, partículas com momento angular muito alto $l \gg 1$ e com energia $\omega < m$ estarão necessariamente restritas a regiões extremamente próximas do horizonte de eventos, onde o campo gravitacional é forte o suficiente para compensar o efeito do momento angular. Consequentemente, encontrar partículas satisfazendo a condição $\omega < m$ relativamente longe do horizonte de eventos, significa fundamentalmente encontrar partículas com momento angular $l = 1$. Na figura 5.11 plotamos o potencial de espalhamento, assumindo $l = 0$, para os valores de massa $mM = 1/8$ e $mM = 1$, respectivamente. Observamos que a probabilidade de encontrar partículas com $\omega < m$

distante do horizonte para um valor fixo de l será tanto maior quanto maior for a massa do campo [18].

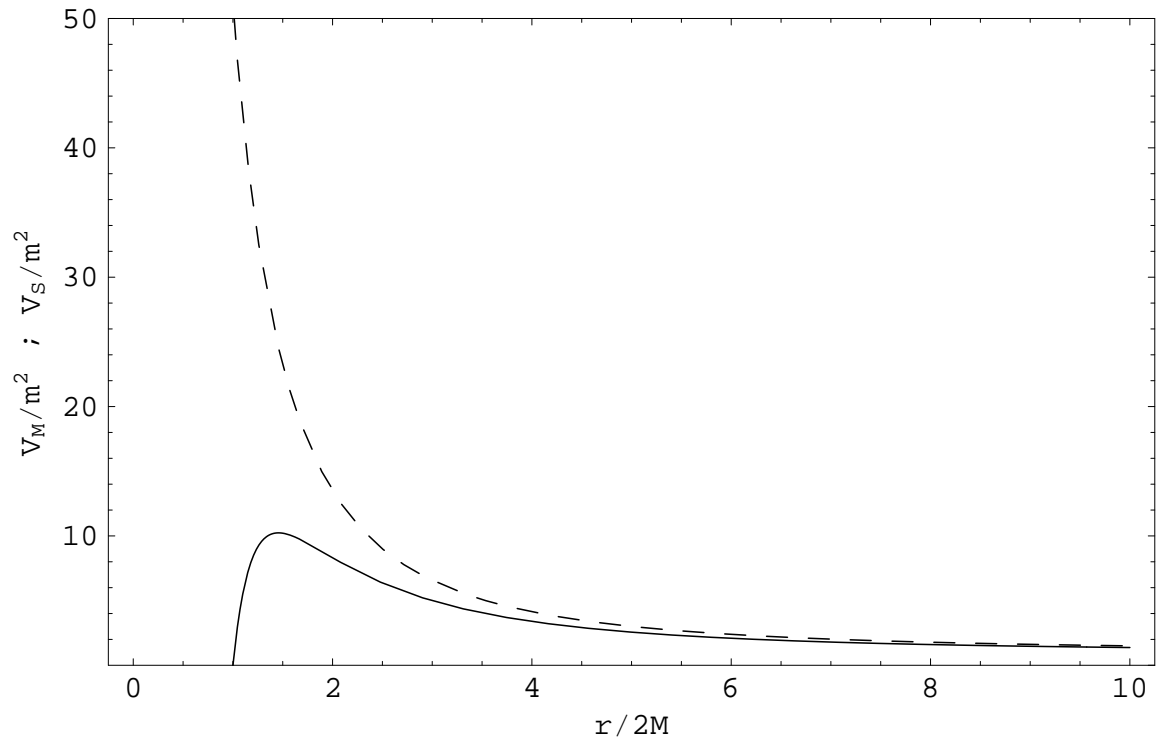


Figura 5.8: Neste gráfico plotamos as curvas relativas aos potenciais V_M (curva tracejada) e V_S (curva contínua) em função de $\frac{r}{2M}$ para $l = 1$ e para $mM = 0.1$. Verificamos que assintoticamente ambos os potenciais de espalhamento V_M e V_S comportam-se como $\frac{1}{r^2}$ tendendo ao valor m^2 . O potencial espalhador no caso do espaço-tempo de Minkowski, V_M , é definido no intervalo $0 < r \leq \infty$ enquanto que o potencial de espalhamento do buraco negro de Schwarzschild, V_S , é unicamente definido na região $r > 2M$, pois este sofre restrição em seu intervalo de definição devido à existência de um horizonte de eventos.

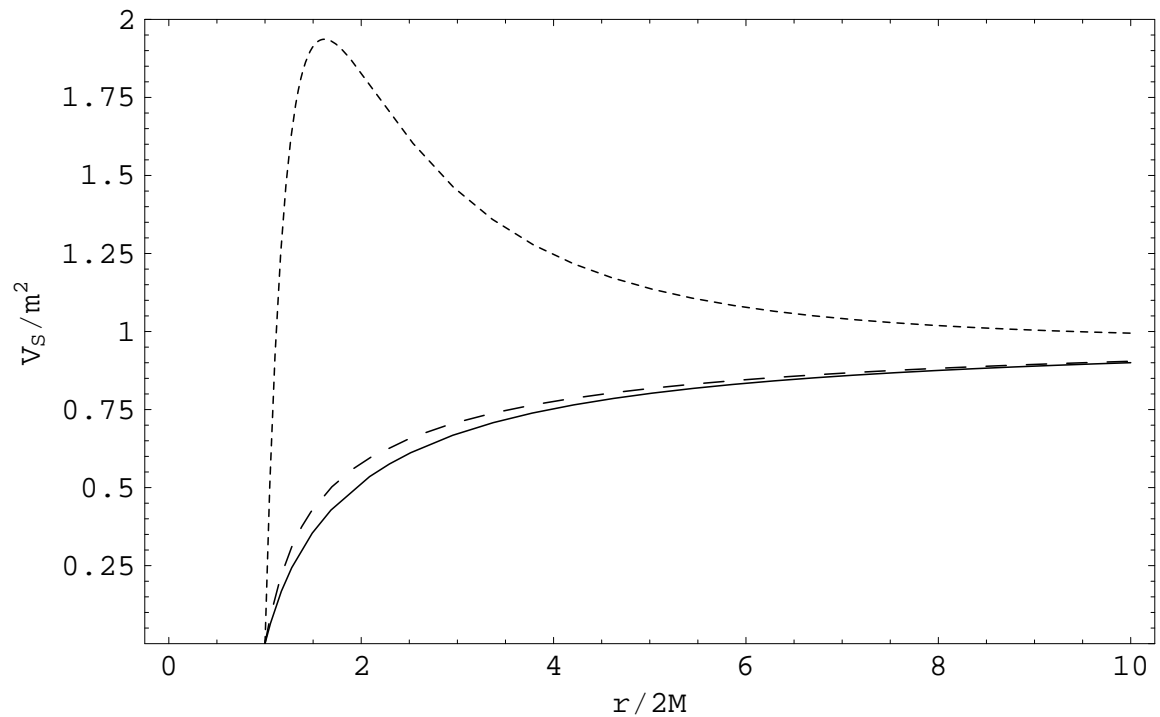


Figura 5.9: O potencial de espalhamento V_S é plotado para $l = 0$ (curva contínua), $l = 1$ (curva tracejada) e $l = 6$ (curva pontilhada). Assumimos aqui $mM = 1$. V_S se anula no horizonte de eventos e tende assintoticamente a m^2 . Verificamos que quanto maior o momento angular l , maior é o potencial de espalhamento V_S e menor é a probabilidade de encontrar uma partícula com $\omega < m$ longe do horizonte.

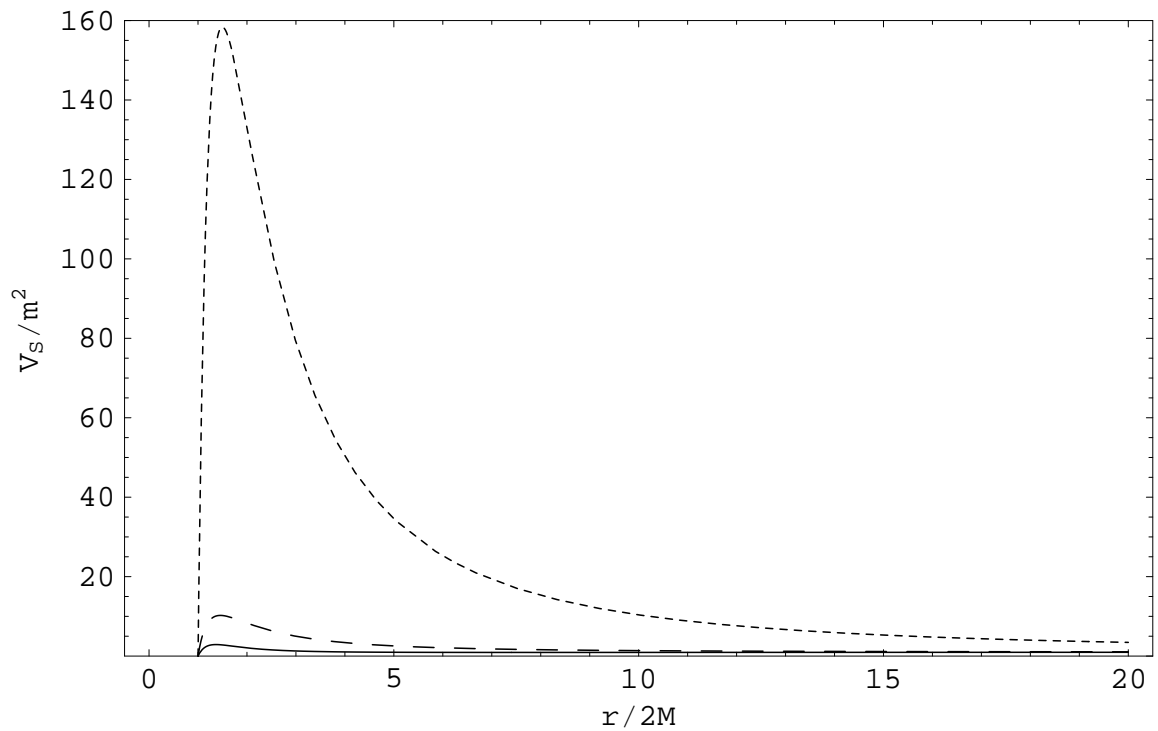


Figura 5.10: O potencial de espalhamento V_S é plotado para $l = 0$ (curva contínua), $l = 1$ (curva tracejada) e $l = 6$ (curva pontilhada). Assumimos aqui $mM = 0.1$. V_S se anula no horizonte de eventos e tende assintoticamente a m^2 . Verificamos que para $mM < 1/4$ a barreira de potencial se apresenta para todos os valores do momento angular l .

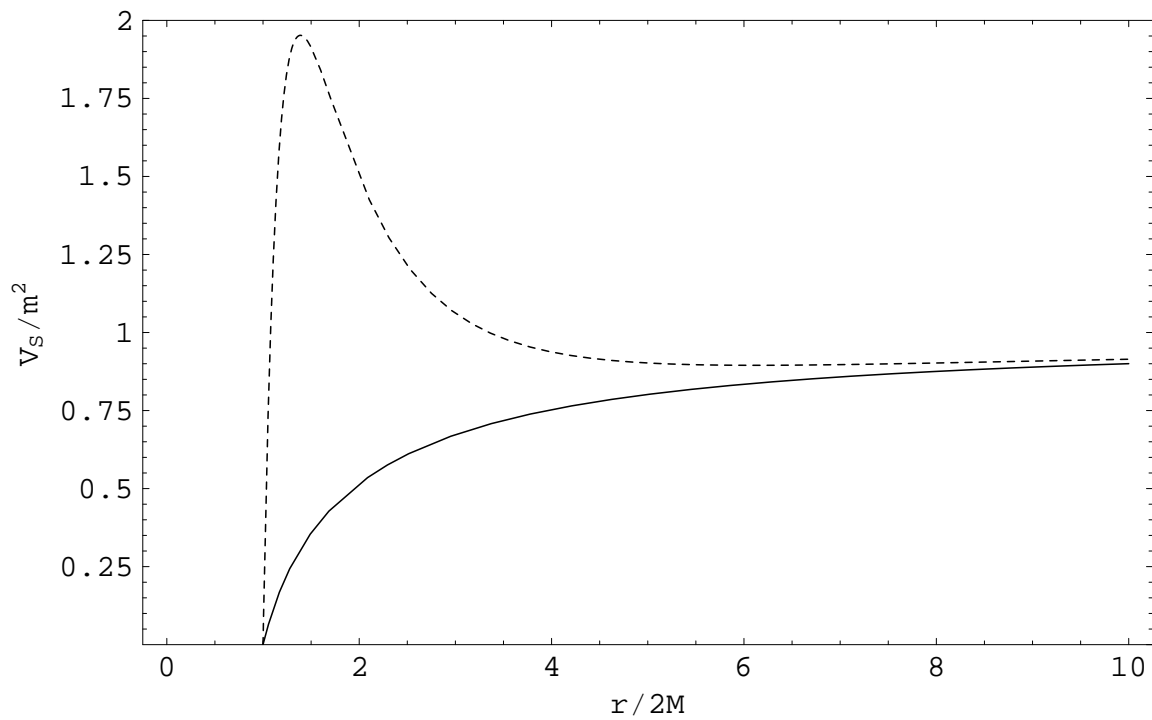


Figura 5.11: O potencial de espalhamento V_S é plotado para $mM = 1/8$ e $l = 0$ (curva pontilhada) e para $mM = 1$ e $l = 0$ (curva contínua). Notamos que quanto maior o produto mM , maior a probabilidade de detetar partículas com $\omega < m$ próximo ao horizonte de eventos.

Nas figuras 5.12 e 5.13 plotamos $R_{lp}^{S,em}$ e $W_{lp}^{S,em}$, respectivamente, para diferentes valores do momento angular. Ambas as curvas foram plotadas assumindo para valores de momento angular $l = p = 1$, $l = p = 2$ e $l = p = 3$ e $mM = 0.04$. Observamos que, a partir de um certo valor de $\Omega > m$, a contribuição mais significativa é proveniente dos modos dotados de momento angular $l = p = 1$ e que quanto maior o valor de $l = p$, menor é a contribuição para a amplitude de emissão. As interseções entre as curvas podem ser entendidas considerando o fato de que, para $0 < \Omega < m/p$, as contribuições, tanto para a potência emitida quanto para a taxa de emissão, provêm apenas dos modos originários do horizonte e, portanto, são muito pequenas. Na figura 5.14 plotamos $W^{S,em}$ somando o momento angular até $l_{max} = 3$ para diferentes valores da massa do campo. Percebemos que a potência é tanto menor quanto maior o valor da massa do campo. Percebemos também que, nos casos massivos, considerando valores menores do que $\Omega = m$, a contribuição para a potência emitida é muito pequena. Isto se deve ao fato de que a probabilidade de emissão de modos com $l = p$ maiores do que 1 é consideravelmente baixa. Efetuamos, nas figuras 5.15 e 5.16 a razão entre as taxas de emissão em Minkowski e Schwarzschild e entre as potências emitidas em Minkowski e Schwarzschild, respectivamente. Nas figuras 5.15 e 5.16, cada curva é plotada assumindo-se $l_{max} = 3$ e um determinado valor para a massa do campo (assumimos $m = 0$, $mM = 0.02$ e $mM = 0.04$). É importante ressaltar que para regiões muito afastadas do horizonte, os modos com energia $\omega > m$, possuem comprimento de onda λ proporcional a $\frac{1}{\sqrt{\omega^2 - m^2}}$ e, portanto, o seu comprimento de onda λ será tanto maior quanto maior a massa m . Deste modo, a importância dos efeitos de curvatura do espaço-tempo será tanto menor quanto maior for a massa do campo. Observamos que as referidas razões, para $\Omega \rightarrow m$ ($\Omega > m$), tendem a 1, na medida em que aumentamos a massa do campo. Esta aproximação de 1 com o aumento da massa do campo justifica-se pelo conseqüente aumento do comprimento de onda, discutido anteriormente. Para $0 < \Omega < m$, as citadas razões diminuem, tendendo a zero, uma vez que $R_N^{M,em} = 0$ e $W_N^{M,em} = 0$, para $0 < \Omega < m/p$. Ainda nas figuras 5.15 e 5.16, verificamos que para o caso das últimas órbitas circulares estáveis (maiores valores da velocidade angular da fonte, no caso do buraco negro de Schwarzschild), a referida razão é cerca de 1,4 para $m = 0$

(em outras palavras, que o resultado em Schwarzschild é em torno de 30% menor que em Minkowski [16]) e diminui, aproximando-se de 1, na medida em que aumentamos o valor da massa do campo. No gráfico 5.17 plotamos a razão $W_{lp}^{\leftarrow, S, em} / W^{S, em}$. Notamos que esta razão é sempre maior que 0.96 para $m = 0$ (o valor 0.96 é obtido para a órbita circular estável mais veloz e mais interna possível, segundo a Relatividade Geral) e que a referida razão é tanto menor quanto maior o valor da massa do campo. Este efeito é consequência do fato de que, fixado um valor para o momento angular l , o máximo do potencial diminui na medida em que aumentamos a massa e, portanto, maior é a contribuição dos modos provenientes do horizonte de eventos para a potência total emitida. Ressaltemos que, para $0 < \Omega < m/p$, temos $W_{lp}^{\leftarrow, S, em} = 0$.

Estes resultados atestam o fato de que fenômenos astrofísicos envolvendo comprimentos de onda da ordem do raio de Schwarzschild, devem ser analisados por meio de um tratamento que considere a curvatura do espaço-tempo do buraco negro.

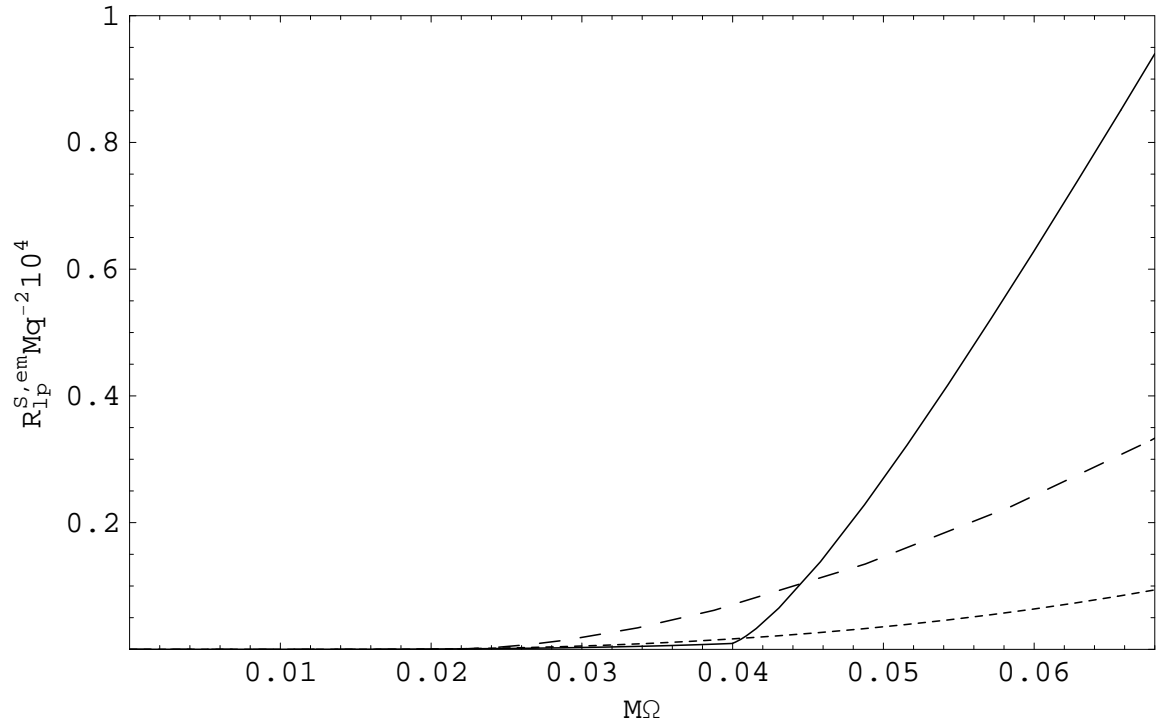


Figura 5.12: $R_{lp}^{S,em}$ é plotado como uma função de Ω para diferentes escolhas de l e p , com $mM = 0.04$. A contribuição de $l = p = 1$ é representada pela linha contínua, de $l = p = 2$ é representada pela linha tracejada e de $l = p = 3$ é representada pela linha pontilhada. A partir de um certo valor de $M\Omega > 0.04$ a principal contribuição para a taxa de emissão é proveniente dos modos com momento angular $l = p = 1$, e quanto maior o valor de $l = p$, menor é a contribuição para a amplitude de emissão.

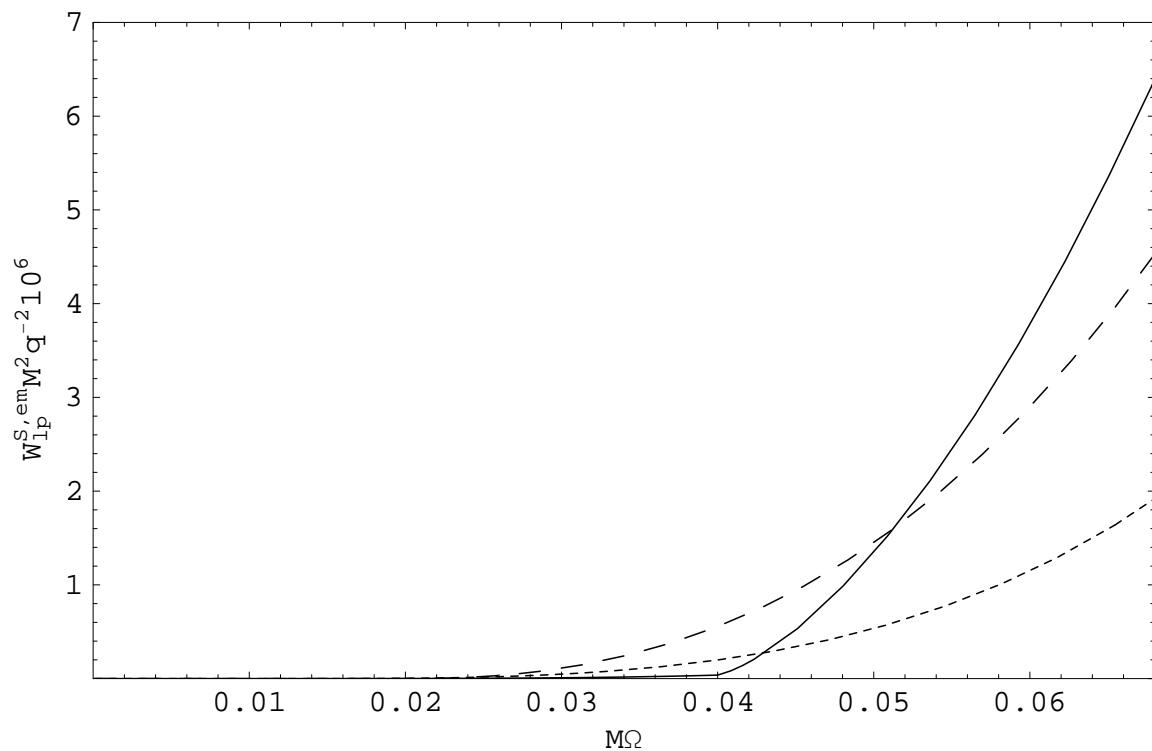


Figura 5.13: A exemplo do gráfico 5.12. Plotamos $W_{lp}^{S,em}$ como uma função de Ω para diferentes escolhas de l e p , com $mM = 0.04$. A contribuição de $l = p = 1$ é representada pela linha contínua, de $l = p = 2$ é representada pela linha tracejada e de $l = p = 3$ é representada pela linha pontilhada. A partir de um certo valor de $M\Omega > 0.04$ a principal contribuição para a potência emitida é proveniente dos modos com momento angular $l = p = 1$, e quanto maior o valor de $l = p$, menor é a contribuição para a potência emitida.

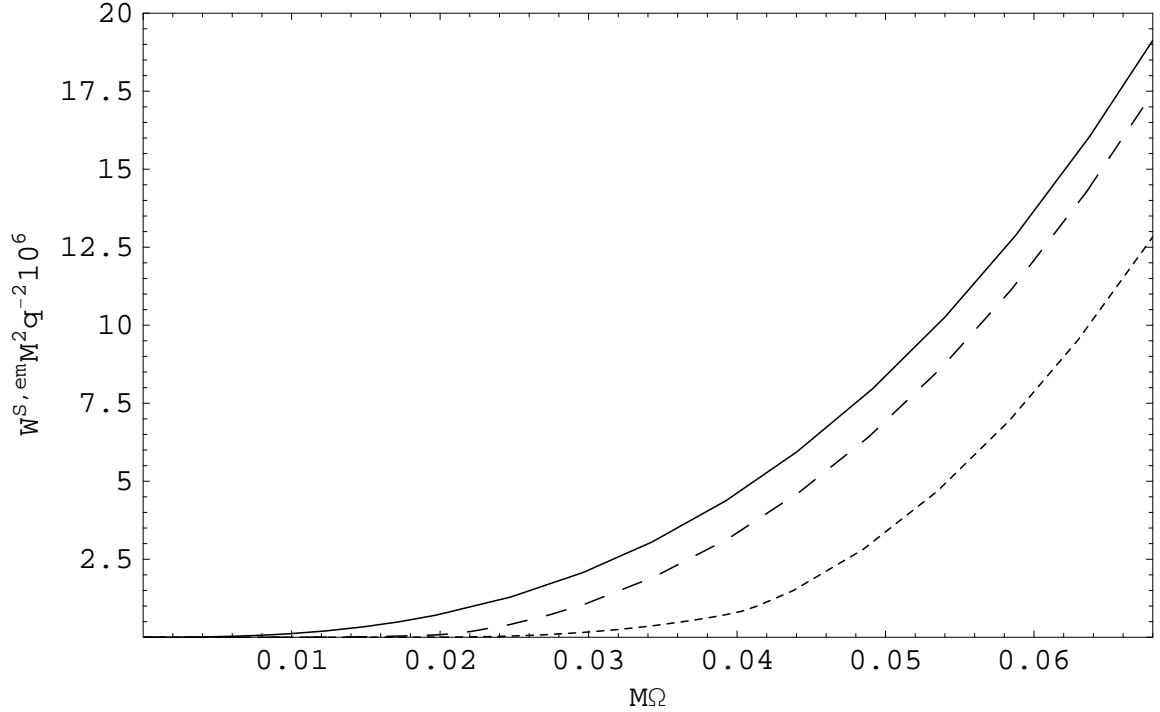


Figura 5.14: A contribuição para a potência emitida $W^{S,em}$ proveniente de partículas com momento angular até $l = 3$ é plotada como função da velocidade angular Ω da fonte girante, como medida por observadores estáticos assintóticos, para o caso não-massivo $m = 0$ (curva contínua) e para os casos massivos $mM = 0.02$ (curva tracejada) e $mM = 0.04$ (curva pontilhada). $M\Omega$ está definido entre 0 e 0.068 (associado com a órbita circular estável mais interna possível em $R = 6M$). Notamos que nos casos massivos para $mM = 0.02$ (curva tracejada) e para $mM = 0.04$ (curva pontilhada) considerando valores próximos e menores do que $M\Omega = mM = 0.02$ e $M\Omega = mM = 0.04$, respectivamente, a contribuição para a potência emitida é muito pequena. Isto se deve ao fato de que a probabilidade de emissão de modos com $l = p$ maiores do que 1 é consideravelmente baixa.

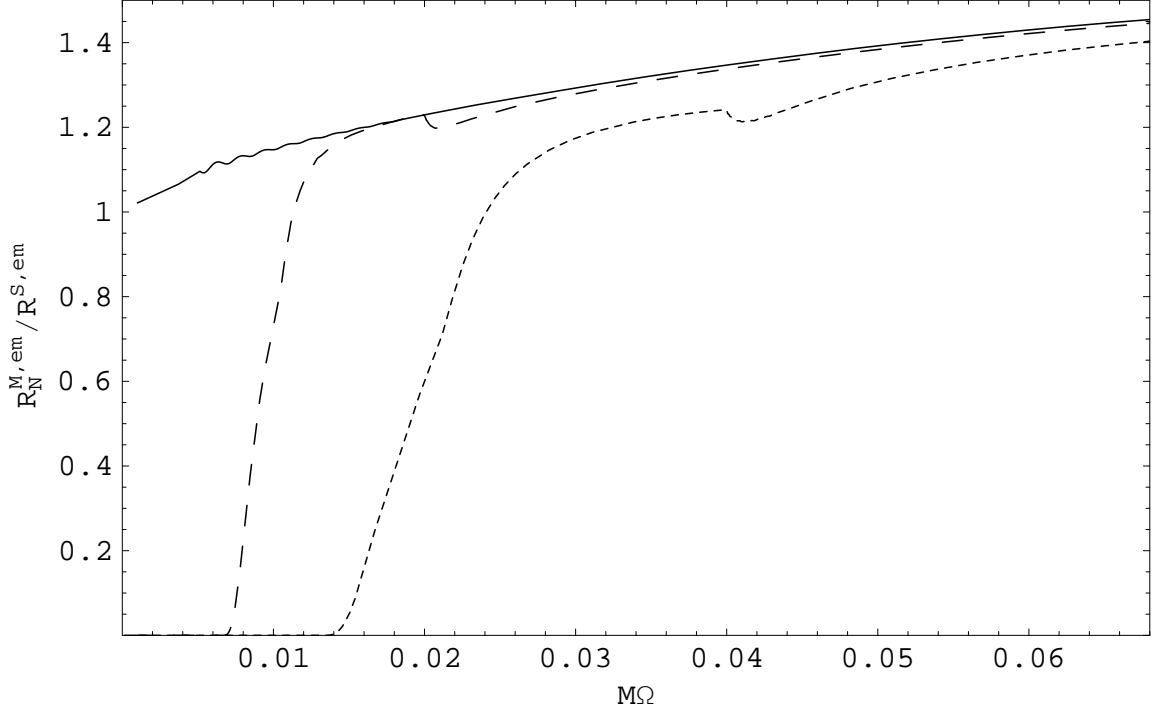


Figura 5.15: No gráfico acima plotamos a razão entre as taxas de emissão em Minkowski e Schwarzschild como função de Ω . $R^{S,em}$ e $R_N^{M,em}$ são as taxas de emissão da fonte em movimento circular uniforme, assim como medidas por observadores assintóticos estáticos. O número quântico l que representa o momento angular foi somado até $l_{max} = 3$. As curvas são plotadas até o valor $\Omega M = 0.068$, característico da órbita circular estável mais veloz e mais interna possível, segundo a Relatividade Geral. Assumindo $m = 0$ (linha contínua), $mM = 0.02$ (linha tracejada) e $mM = 0.04$ (linha pontilhada), verificamos que a razão $\frac{R_N^{M,em}}{R^{S,em}}$, para $\Omega \rightarrow m$ ($\Omega > m$), tende a 1, na medida em que aumentamos o valor de mM . Em particular, para $\Omega M = 0.068$, a referida razão diminui, aproximando-se de 1, na medida em que aumentamos o valor da massa do campo. Para $0 < \Omega < m$ esta razão tende a zero, uma vez que $R_N^{M,em} = 0$, para $0 < \Omega < m/p$.

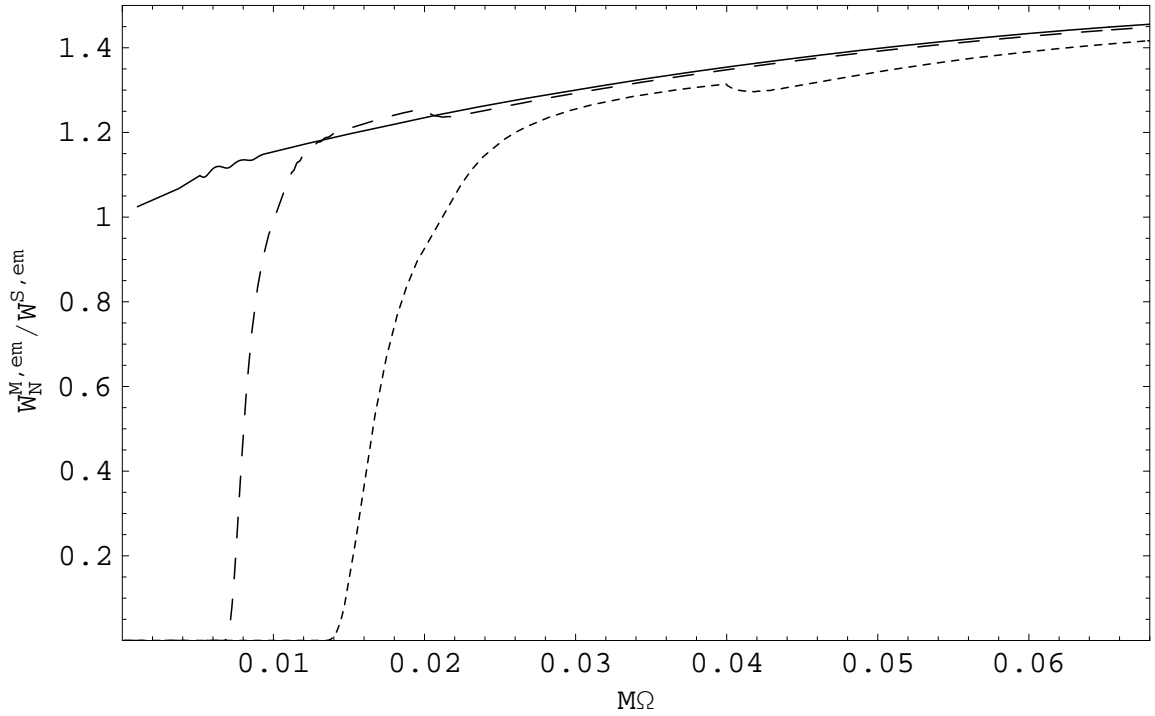


Figura 5.16: De forma análoga à figura 5.15, a razão entre as potências de emissão em Minkowski e Schwarzschild $\frac{W_N^{M,em}}{W_N^{S,em}}$ é apresentada aqui como função de Ω . Verifica-se que as curvas plotadas nos gráficos 5.15 e 5.16 possuem as seguintes semelhanças: (i) $\frac{R_N^{M,em}}{R_N^{S,em}}$ e $\frac{W_N^{M,em}}{W_N^{S,em}}$, para $\Omega \rightarrow m$ ($\Omega > m$), tendem a 1, na medida em que aumentamos a massa do campo (ii) Em particular, $\frac{R_N^{M,em}}{R_N^{S,em}}$ e $\frac{W_N^{M,em}}{W_N^{S,em}}$, para $\Omega \rightarrow 0.068$, diminuem, aproximando-se de 1, na medida em que aumentamos o valor da massa do campo (iii) $\frac{R_N^{M,em}}{R_N^{S,em}}$ e $\frac{W_N^{M,em}}{W_N^{S,em}}$, para $0 < \Omega < m$, diminuem, tendendo a zero, uma vez que $R_N^{M,em} = 0$ e $W_N^{M,em} = 0$, para $0 < \Omega < m/p$. Assumimos aqui $m = 0$ (linha contínua), $mM = 0.02$ (linha tracejada) e $mM = 0.04$ (linha pontilhada).

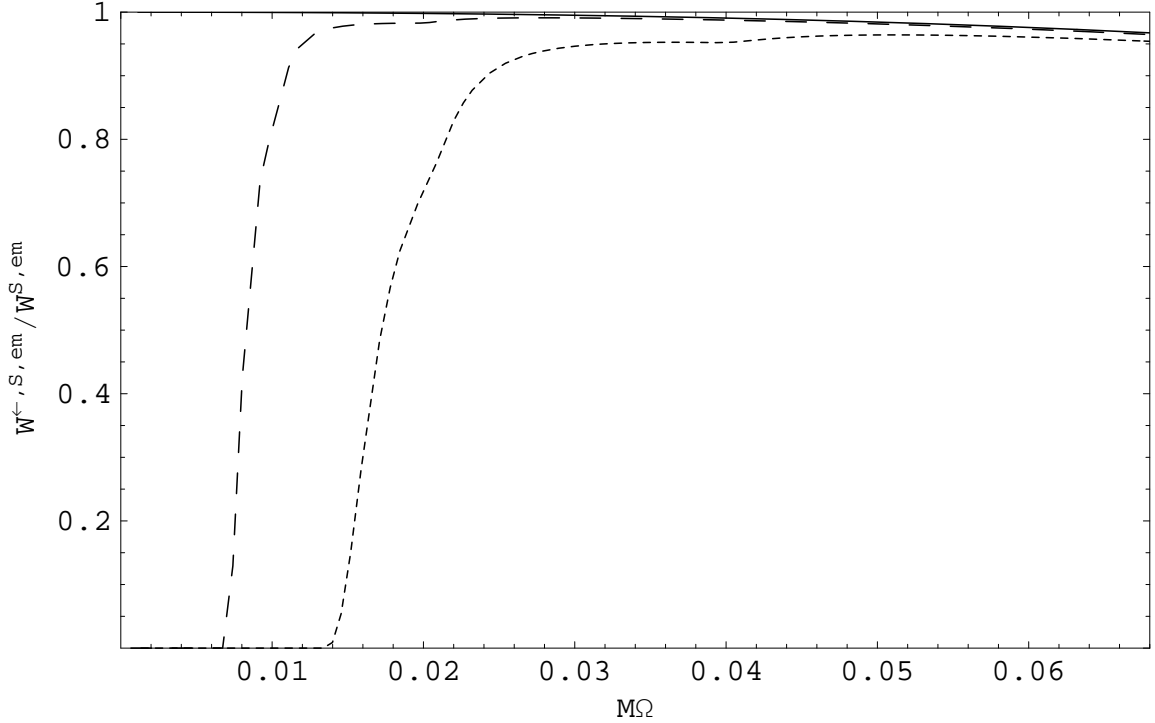


Figura 5.17: Neste gráfico plotamos a curva referente a razão $W^{\leftarrow,S,em} / W^{S,em}$ como função de Ω . O número quântico l , que representa o momento angular, foi somado até $l_{max} = 3$. Assumimos aqui $m = 0$ (curva contínua), $mM = 0.02$ (curva tracejada) e $mM = 0.04$ (curva pontilhada). Notamos que para a órbita circular estável mais veloz e mais interna possível, segundo a Relatividade Geral, a potência gerada pelos modos provenientes do infinito contribuem com aproximadamente 96% da potência total emitida. Percebemos também que esta contribuição é tanto menor quanto maior a massa do campo. Isto se deve ao fato de que, fixado um valor para o momento angular l , o máximo do potencial diminui na medida em que aumentamos a massa e, portanto, maior é a contribuição dos modos provenientes do horizonte de eventos para a potência total emitida. Lembramos que, para $0 < \Omega < m/p$, temos $W^{\leftarrow,S,em} = 0$.

5.3 Radiação absorvida pelo Buraco Negro

Calcularemos agora o quanto de radiação emitida pela fonte em movimento circular uniforme em torno do buraco negro é observada assintoticamente, i.e. ,

$$W^{S,obs} = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{p=1}^l \left[|\mathcal{T}_{\omega l}^{\rightarrow}|^2 W_{lp}^{\rightarrow,S,em} + |\mathcal{R}_{\omega l}^{\leftarrow}|^2 W_{lp}^{\leftarrow,S,em} \right] \quad (\omega > m). \quad (5.1)$$

Os termos $|\mathcal{T}_{\omega l}^{\rightarrow}|^2 W_{lp}^{\rightarrow,S,em}$ e $|\mathcal{R}_{\omega l}^{\leftarrow}|^2 W_{lp}^{\leftarrow,S,em}$ representam a contribuição dos modos provenientes do horizonte de eventos passado \mathcal{H}^- e infinito passado tipo tempo \mathcal{I}^- , respectivamente.

Para $\omega < m$ a radiação observada assintoticamente é nula ($W^{S,obs} = 0$), uma vez que não há modos provenientes do infinito passado tipo tempo \mathcal{I}^- e todos os modos originários do horizonte de eventos passado \mathcal{H}^- são refletidos para o horizonte de eventos futuro \mathcal{H}^+ .

A partir do tratamento numérico apresentado na secção 3.3 plotamos as curvas relativas à razão entre a potência observada no infinito e a potência total emitida. Tais curvas, apresentadas na figura 5.18, mostram-nos que para $\Omega M = 0.068$ e $m = 0$, cerca de 97% da radiação emitida alcança observadores estáticos no infinito e que esta porcentagem diminui na medida em que aumentamos a massa do campo. Este efeito de diminuição da referida porcentagem ocorre devido o fato de que, para um dado valor do momento angular l , o máximo do potencial de espalhamento diminui na medida em que aumentamos o valor da massa do campo (conforme visto na figura 5.11) e, portanto, uma parcela cada vez maior dos modos provenientes do infinito é transmitida. Para $0 < \Omega < m/p$, a contribuição para a potência total emitida provêm unicamente dos modos originários do horizonte de eventos dotados de energia inferior a massa de repouso ($\omega < m$). A radiação associada a estes modos não alcança observadores estáticos no infinito e, portanto, para $0 < \Omega < m/p$, a potência observada é nula.

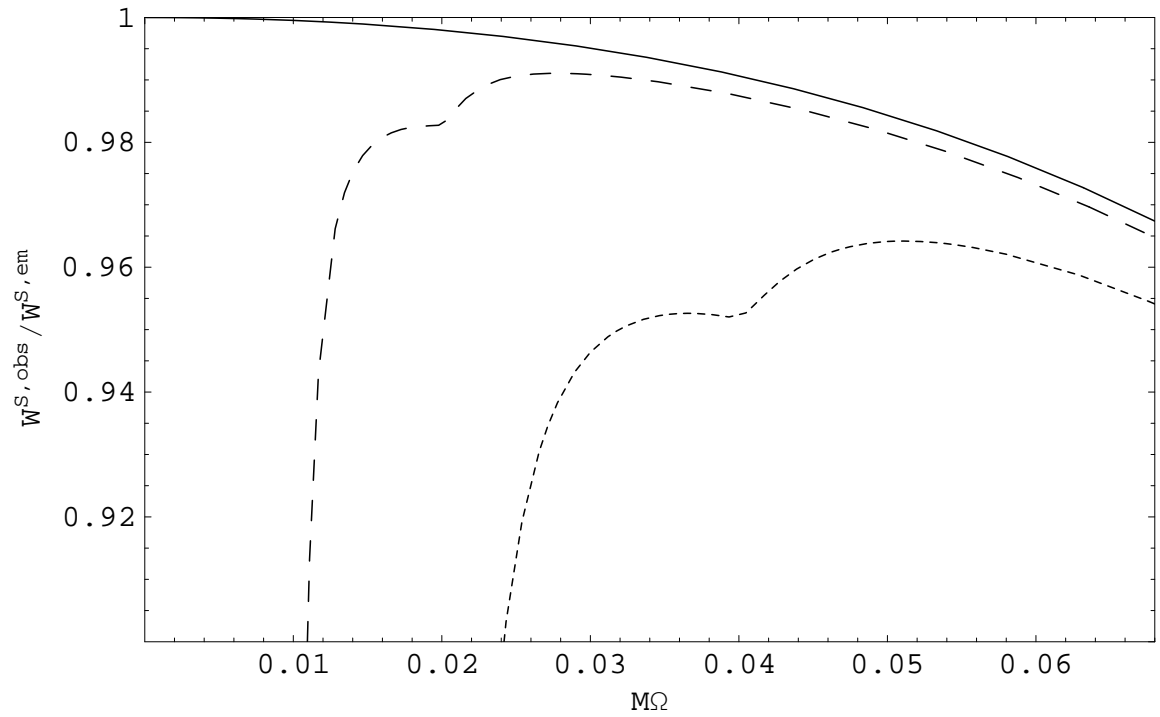


Figura 5.18: Neste gráfico apresentamos a razão $\frac{W^{S,obs}}{W^{S,em}}$ como função de Ω para órbitas circulares geodésicas estáveis. Consideramos as somas nos momentos angulares até $l_{max} = 3$. Assumimos aqui $m = 0$ (curva contínua), $mM = 0.02$ (curva tracejada) e $mM = 0.04$ (curva pontilhada). Percebemos nas curvas aqui plotadas que, para $\omega > m$ e $m = 0$, cerca de 3% da potência emitida pela fonte é absorvida pelo buraco negro e que esta porcentagem aumenta a medida que aumentamos a massa do campo.

Capítulo 6

Conclusões e perspectivas

Apresentamos neste trabalho os procedimentos de quantização do campo de Klein-Gordon massivo nos espaços-tempos de Minkowski e Schwarzschild. Para o espaço-tempo plano determinamos os modos normais em termos de funções especiais, normalizamos as soluções e em seguida quantizamos o campo. Para o espaço-tempo de um buraco negro neutro e com momento angular nulo não foi possível determinarmos analiticamente os modos normais do campo (para quaisquer frequências) e sua respectiva normalização, uma vez que as equações diferenciais não possuem soluções analíticas em termos de funções especiais disponíveis na literatura. Não obstante a estas limitações de caráter matemático, obtivemos os resultados almejados via método de análise numérica da equação diferencial envolvida. Lançamos mão das peculiaridades assintóticas do espaço-tempo de um buraco negro de Schwarzschild e determinamos os modos normais e a normalização dos mesmos nas regiões assintóticas muito próxima e muito distante do seu horizonte de eventos.

Determinamos a taxa de emissão e a potência emitida por uma fonte orbitando um objeto estelar considerando os espaços-tempos de Minkowski e Schwarzschild.

Para o espaço-tempo de Minkowski com os modos normalizados obtidos analiticamente, calculamos a taxa de emissão e a potência emitida por uma fonte em movimento circular uniforme. Notamos que devido à forma do potencial de espalhamento em Minkowski, os únicos modos existentes são aqueles provenientes do infinito, dotados de energia maior do que a massa do campo [16, 25]. Verificamos que a contribuição mais significativa

para a potência e para a taxa de emissão provém dos modos com momento angular igual a 1. Para o campo escalar não massivo, sabemos que a potência obtida via teoria quântica de campos em nível de árvore é igual a potência obtida via teoria clássica de campos quando somamos sobre todos os valores do momento angular.

No caso do espaço-tempo de Schwarzschild efetuamos o devido tratamento numérico e obtivemos a taxa de emissão e a potência emitida por uma fonte orbitando o buraco negro. Percebemos que os modos provenientes do infinito estão associados a partículas com energia igual ou superior a massa de repouso do campo e que modos provenientes do horizonte de eventos estão associados a partículas com energias com valores maiores que zero. Notamos que a probabilidade de se encontrar partículas com energia inferior à sua massa de repouso distante do horizonte é tanto menor quanto maior for o valor do momento angular l para um dado valor fixo da massa do campo e tanto maior quanto maior for o valor para a massa do campo para um dado valor fixo do momento angular. Percebemos que, os modos com energia superior a massa de repouso serão tanto menos influenciados pelos efeitos de curvatura do espaço-tempo quanto maior a massa do campo. Observamos que a potência em Schwarzschild quando a fonte está próxima à última órbita circular estável é pouco mais de 30% menor que o valor correspondente em Minkowski (assumindo caso não-massivo) e que esta porcentagem diminui na medida em que aumentamos a massa do campo. Notamos que a potência gerada pelos modos provenientes do infinito contribuem com a maior parte da potência total emitida e que esta contribuição é tanto menor quanto maior a massa do campo. Percebemos também que o buraco negro de Schwarzschild absorve em torno de 3% da radiação emitida para as órbitas circulares estáveis mais internas possíveis de acordo com a Relatividade Geral (assumindo caso não-massivo) e que este valor aumenta na medida em que aumentamos o valor da massa do campo. Atribuímos este efeito ao fato de que o máximo do potencial de espalhamento diminui na medida em que aumentamos o valor da massa do campo, para um valor fixo do momento angular l e, portanto, uma parcela cada vez maior dos modos provenientes do infinito é transmitida.

Em trabalhos anteriores foram analisados os casos de uma fonte escalar interagindo

com um campo escalar não massivo [16, 21] e uma carga elétrica interagindo com um campo eletromagnético [22, 23]. Em ambos os casos foram considerados os espaços-tempos plano e curvo. Como vimos, no presente trabalho, investigamos o efeito da massa do campo no cálculo da energia irradiada por uma fonte escalar interagindo com um campo escalar massivo nos espaços-tempos de Minkowski e Schwarzschild.

Este conjunto de análises, realizadas com intuito de compreender fenômenos relacionados à emissão de partículas na vizinhança do horizonte de eventos de buracos negros, nos confirma a relevância dos efeitos da curvatura e topologia não triviais deste espaço-tempo.

Além das situações já analisadas, outros problemas interessantes relacionados com estes trabalhos podem ser investigados. Primeiramente, sugerimos a substituição de uma fonte puntual por outras, representadas por uma combinação de funções de distribuição, de forma que sejam capazes de simular de maneira mais realista os discos de acreção ao redor de buracos negros. Sugerimos também a determinação da radiação emitida por uma fonte orbitando um buraco negro de Reissner-Nordstrom.

Referências Bibliográficas

- [1] G.E.A. Matsas, Preliminaries to Quantum Field Theory in Curved Spacetimes, em Proceedings of the IXth Jorge André Swieca Summer School, Campos do Jordão-SP, Brasil, 1997, editado por J.C.A. Barata, A.P.C. Malbouisson e S.F. Novaes (World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 1998).
- [2] N.D. Birrel e P.C.W. Davies, Quantum fields in curved space (Cambridge University Press, 1982).
- [3] L.H. Ford, Quantum Field Theory in Curved Spacetime, em Proceedings of the IXth Jorge André Swieca Summer School, Campos do Jordão-SP, Brasil, 1997, editado por J.C.A. Barata, A.P.C. Malbouisson e S.F. Novaes (World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 1998).
- [4] J. Castiñeiras, L.C.B. Crispino e G.E.A. Matsas, Horizonte de eventos, Scientific American Brasil 29, 50 (2004).
- [5] L.C.B. Crispino, Quantização a baixas frequências de campos bosônicos no espaço-tempo de Schwarzschild e aplicações, Tese de Doutorado, IFT-UNESP (2001).
- [6] S. Wolfram, Mathematica: a System for Doing Mathematics by Computer (Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1988).
- [7] R. D’Inverno, Introducing Einstein’s Relativity (Clarendon Press, Oxford, 1992).
- [8] L. Landau e E. Lifshitz, Teoria do campo (Editora Mir, 1980).

- [9] A.O. Barut, *Electrodynamics and Classical Theory of Fields and Particles* (Dover Publications Inc., 1980).
- [10] N.N. Bogoliubov e D.V. Shirkov, *Introduction to the Theory of Quantized Fields* (Interscience Publishers Inc., 1959).
- [11] G.B. Arfken e H.J. Weber, *Mathematical Methods for Physics* (Academic Press, 1995).
- [12] P.M. Morse e H. Feshbach, *Methods of Theoretical Physics* (McGraw-Hill Inc., 1953).
- [13] C. Itzykson e J.B. Zuber, *Quantum Field Theory* (McGraw-Hill Inc., 1965).
- [14] W. Greiner e J. Reinhardt, *Field Quantization* (Springer-Verlag, 1996).
- [15] J. Castiņeiras, I.P. Costa e Silva e G.E.A. Matsas, *Phys. Rev. D* 67, 067502 (2003).
- [16] L.C.B. Crispino, A. Higuchi e G.E.A. Matsas, *Class. Quantum Grav.* 17, 19 (2000).
- [17] I.S. Gradshteyn e I.M. Ryzhik, *Tables of Integrals, Series, and Products* (Academic Press, 1980).
- [18] J. Castiņeiras, L.C.B. Crispino, G.E.A. Matsas e D.A.T. Vanzella, *Phys. Rev. D* 65, 104019 (2002).
- [19] J. Castiņeiras e G.E.A. Matsas, *Phys. Rev. D* 62, 064001 (2000).
- [20] D.G. Boulware, *Phys. Rev. D* 11, 1404 (1975).
- [21] L.C.B. Crispino, A. Higuchi e G.E.A. Matsas, *Proceedings of the Ninth Marcel Grossmann Meeting on General Relativity, Roma, Italia, 2000*, editado por V.G. Gurzadyan, R.T. Jantzen e R. Ruffini (World Scientific, 2002).
- [22] J. Castiņeiras, L. C.B. Crispino, R. Murta e G.E.A. Matsas, *Phys. Rev. D* 71, 104013 (2005).

- [23] R. Murta, Radiação emitida por uma carga elétrica orbitando um buraco negro de Schwarzschild segundo teoria quântica de campos, Dissertação de Mestrado, PPGF-DF-UFGA (2005).
- [24] R. Wald, General Relativity (The University of Chicago Press, 1984).
- [25] L.C.B. Crispino, D.P. Meira Filho, Braz.J.Phys., vol 35, no 4B, 1084 (2005).