

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
CENTRO DE GEOCIÊNCIAS
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM GEOFÍSICA

TESE DE MESTRADO

**MIGRAÇÃO 3D NO TEMPO USANDO A TEORIA DOS RAIOS
PARAXIAIS**

NORCIRIO PANTOJA QUEIROZ



BELÉM - PARÁ
1998

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
CENTRO DE GEOCIÊNCIAS
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM GEOFÍSICA

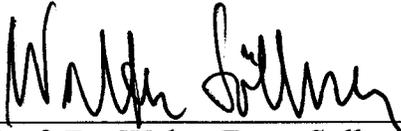
**MIGRAÇÃO 3D NO TEMPO USANDO TEORIA DOS RAIOS
PARAXIAIS**

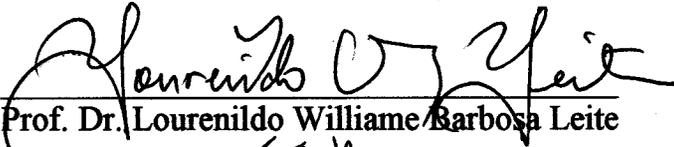
TESE APRESENTADA POR
NORCIRIO PANTOJA QUEIROZ

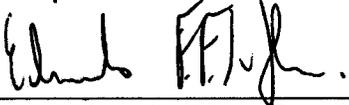
COMO REQUISITO PARCIAL À OBTENÇÃO DE GRAU DE MESTRE EM
CIÊNCIAS NA ÁREA DE GEOFÍSICA

Data de Aprovação: / 09 / 1998

COMITÊ DE TESE:


Prof. Dr. Walter Franz Söllner (Orientador)


Prof. Dr. Lourenildo Williame Barbosa Leite


Prof. Dr. Eduardo Filpo Ferreira da Silva

BELÉM

1998

À Deus, meus pais, Norberto e Síria,
minha esposa, Maria do Socorro e meus
filhos, Rita, Norcirio e Yasmin.

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente a Deus pela minha existência e por iluminar minha vida, a Petróleo Brasileiro S/A (PETROBRAS) pela oportunidade de aprimorar meus conhecimentos no Curso de pós Graduação em Geofísica (CPGf) da Universidade Federal do Pará (UFPA.), a coordenação do (CPGf) na pessoa do professor Lourenildo W. Barbosa Leite. Ao professor Walter Franz Söllner (orientador) pela orientação e paciência durante o desenvolvimento desta tese. Aos colegas de curso e professores pelo esclarecimento de dúvidas encontradas e discussões salutares. Aos desenhistas Eli Guerreiro e Elinete Almeida, do centro de Geociências (CG), aos técnicos da Petrobras Carlos Gomes e Carlos Max, e a Nuno Alvares pela confecção das figuras. Ao geofísico da Petrobras, Carlos Cunha, por sugestões que ajudaram no enriquecimento de alguns tópicos. Ao professor Jessé Carvalho Costa por permitir o uso de seu programa de traçado do raio na fase preliminar da dissertação. Aos colegas da Petrobras, E & P/AM, pelo apoio dado durante o período do curso. À minha esposa, filhos e familiares pela compreensão e paciência que tiveram com minha ausência nas horas de lazer. Finalmente, a todas as pessoas que colaboraram de uma forma ou de outra para a elaboração deste trabalho.

SUMÁRIO

	p
DEDICATÓRIA	i
AGRADECIMENTOS	ii
RESUMO	1
ABSTRACT	2
1 - INTRODUÇÃO	3
2 - CONCEITOS BÁSICOS	5
2.1 - MIGRAÇÃO NO TEMPO	5
2.1.1 - Raio normal e raio imagem	5
2.1.2 - Preservação de amplitude	9
3 - FUNDAMENTOS TEÓRICOS	12
3.1 - RAIO CENTRAL E RAO PARAXIAL	12
3.2 - FUNÇÃO DE HAMILTON PARA EVENTOS REFLETIDOS	16
3.3 - FUNÇÃO DE HAMILTON PARA EVENTOS TRANSMITIDOS E FUNÇÃO TEMPO DE TRÂNSITO DE DIFRAÇÃO	19
3.4 - POSIÇÃO DO PONTO MIGRADO	20
3.5 - ESPALHAMENTO GEOMÉTRICO	20
3.5.1 - Raios transmitidos	21
3.5.2 - Raios refletidos	24
4 - MIGRAÇÃO NO TEMPO USANDO TEORIA DOS RAIOS PARAXIAIS	29
4.1 - MIGRAÇÃO	29
4.1.1 - Amplitudes verdadeiras	33
4.1.2 - Filtro de diferenciação	34
4.2 - REDUÇÃO DOS DADOS PARA 2-D	37

4.3 - RELAÇÃO ENTRE A VELOCIDADE E OS PARÂMETROS	43
4.4 - ALGORITMO DE MIGRAÇÃO	44
5 - APLICAÇÃO A DADOS SINTÉTICOS E RESULTADOS	47
5.1 - RECONSTITUIÇÃO DA FASE	49
5.2 - RELAÇÃO ENTRE OS MERGULHOS DO MODELO, DA SEÇÃO AFASTAMEN - TO NULO NÃO MIGRADA E DA SEÇÃO MIGRADA	60
6 - CONCLUSÕES GERAIS	62
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	63
APÊNDICES	65
APÊNDICE A - DEMONSTRAÇÃO DAS EQUAÇÕES (3.3) E (3.4)	66
APÊNDICE B	69
B1 - DEMONSTRAÇÃO DA PROPRIEDADE SIMPLÉTICA DA MATRIZ TRANSFE- RÊNCIA T	69
B2 - DEDUÇÃO DA EQUAÇÃO (3.36)	72
B3 - DEDUÇÃO DA EQUAÇÃO (3.17)	74

RESUMO

O trabalho aqui apresentado visa o estudo da migração 3D no tempo, em amplitudes verdadeiras, de dados da seção afastamento nulo ("zero-offset"), usando a aproximação de segunda ordem do tempo de trânsito de difração. O processo de migração no tempo usa a função difração determinada, corretamente, através de mesmos parâmetros que controlam a função tempo de trânsito de reflexão, além do auxílio dos raios paraxiais. Os parâmetros que controlam a função tempo de trânsito de reflexão são determinados através de pelo menos nove medidas de tempo de trânsito, obtidas a partir de dados pré-empilhados (tiro comum, ponto médio comum-CMP, etc.).

Determinada a função difração, pode-se fazer a migração sem a necessidade de que se conheça o modelo de velocidades, pois a função tempo de trânsito de difração, como definido neste trabalho, não necessita do mesmo.

O espalhamento geométrico é removido através do processo de migração e aplicação de uma função peso aos dados da seção afastamento nulo. Juntamente com a função peso, aplicou-se um filtro objetivando a recuperação da fase do sinal, ocorrida como consequência do processo de migração.

Devido a limitação computacional, fez-se testes com dados sintéticos, em 2D, objetivando verificar a eficiência do programa. Os resultados obtidos foram satisfatórios, mostrando a eficiência e confiabilidade do processo.

ABSTRACT

This presentation aims at the 3-D time migration of zero offset data, in true amplitude. This method is based on paraxial ray theory and uses a diffraction time function which is directly and correctly determined by the measurement of pre-stack seismic data. It is not necessary to know a macro velocity model in order to apply the time migration. In order to obtain a true amplitude time migration the migration result must be multiplied by a scaling factor and convolved with a known function. Together with a scaling factor, a filter was applied in order to recover the signal phase altered during the migration process. Due to the computational limitation sintetic dada in 2-D was used aims to test the program efficiency. The result was satisfactory, showing the efficiency and robustness of process.

1 - INTRODUÇÃO

Na industria do petróleo, a obtenção do campo de velocidades é uma tarefa difícil. Contudo, ele é de fundamental importância para que se tenha uma migração confiável, tanto no domínio do tempo quanto da profundidade. Para contornar parte dessa dificuldade, desenvolveu-se uma migração 3-D, no domínio do tempo, para o qual não é necessário conhecer o campo de velocidades, como sugerido por SÖLLNER (1996). Para este desenvolvimento utilizou-se a teoria do raio baseado em BORTFELD (1989). No seu trabalho, Bortfeld obtém uma equação para o tempo de trânsito, a qual é controlada por nove parâmetros, os quais serão vistos no capítulo 3. Para a determinação desses parâmetros, deve-se ter pelo menos nove medidas do tempo de trânsito de reflexão, obtidos a partir de dados pré-empilhados. De posse destes parâmetros e com o auxílio dos raios paraxiais, constrói-se, corretamente, a curva de difração, sem a necessidade do conhecimento do campo de velocidades. Desta maneira, é importante neste processo de migração, a determinação destes parâmetros. Como parte do processo, as amplitudes verdadeiras são recuperadas, ou seja, o espalhamento geométrico é removido, obtendo-se no final do mesmo os coeficientes de reflexão sem seu efeito, porém ainda com o efeito da transmissão e absorção.

Esta tese está estruturada em 5 capítulos. No capítulo 1 é feita uma introdução geral. No capítulo 2 são feitas algumas considerações sobre a migração no tempo e as relações entre o domínio do tempo e da profundidade, mostrando as relações entre a hipérbole e o círculo relacionado com estes dois domínios. São apresentados também alguns fatores que afetam a amplitude sísmica, e são definidos o raio imagem e raio normal. No capítulo 3 são dados os fundamentos teóricos sobre a teoria dos raios baseados nas idéias de BORTFELD (1989). Este capítulo é um preparativo para o desenvolvimento do capítulo 4. Nele são definidos sistema sísmico, raios central e paraxial, tempo de trânsito de reflexão e difração, espalhamento geométrico e outros aspectos relacionados a teoria do raio. No capítulo 4 são desenvolvidos os aspectos teóricos do processo de migração proposto aqui. Nele desenvolve-se toda a parte matemática ligada à migração usando a teoria dos raios paraxiais. Finalmente, no capítulo 5 são mostrados os aspectos práticos usando dados sintéticos e os resultados obtidos.

O programa de computador para migração foi feito em 2D devido à falta de capacidade computacional para 3D. Para o seu desenvolvimento, usou-se o software MATLAB instalado nas estações IBM do Departamento de Geofísica.

2 - CONCEITOS BÁSICOS

2.1 - MIGRAÇÃO NO TEMPO

2.1.1 - Raio normal e raio imagem.

A migração em tempo é mais usada no processamento de rotina do que a migração em profundidade. O motivo para isto é que o conhecimento do campo de velocidades é de difícil determinação e, como se vê a seguir, a migração no tempo é menos sensível às variações de velocidade do que a migração em profundidade. No entanto, a migração no tempo não nos fornece a posição exata das camadas em subsuperfície, mesmo assim ela tende a ser mais robusta do que a migração em profundidade, quando as velocidades utilizadas não forem verdadeiras.

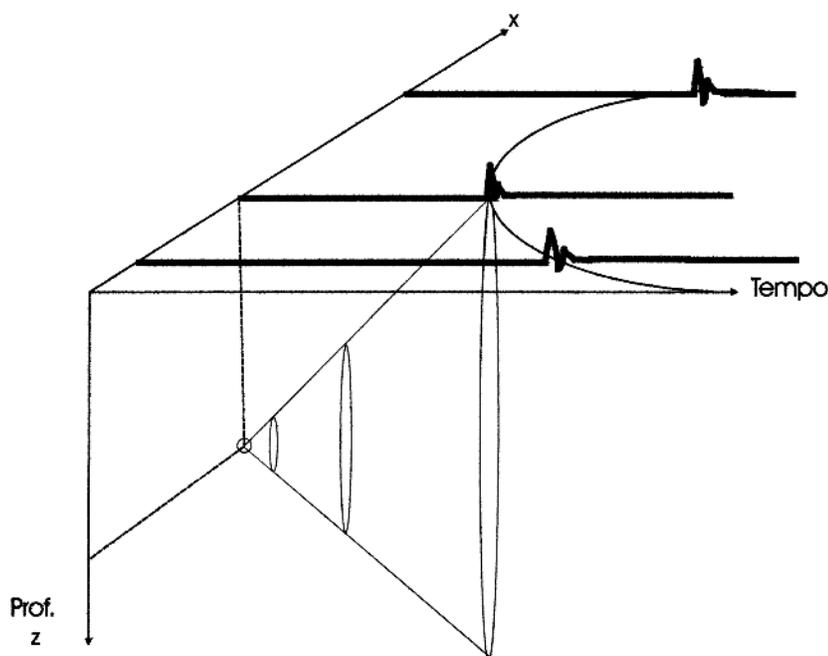


Figura 1 - A ilustração mostra a relação entre a migração no domínio do tempo (x, t) e no domínio da profundidade (x, z) . Ela mostra um ponto difrator que se propaga no espaço e como seria sua projeção no domínio do tempo. Adaptada de HATTON et al. (1994).

Para ilustrar as diferenças e aspectos comuns entre a migração no tempo e migração na profundidade, a Figura 1 é idealizada por HATTON et al. (1994), na qual, partindo de um modelo mais simples de refletor, ou seja, um ponto difrator, ele mostra a relação entre a migração no domínio do tempo e da profundidade e, conseqüentemente, a relação entre a curva de difração e a curva da frente de onda. Na figura em questão ele considerou um ponto difrator dentro de um meio homogêneo. Desta maneira tem-se no plano (x,z) a frente de onda projetada como um círculo, sua projeção no espaço (x,z,t) é um cone e no plano (x,t) , ou seja, quando o plano $z = 0$ intercepta o cone, tem-se uma hipérbole, que neste ponto corresponderia a uma seção afastamento nulo, isto é, uma seção no domínio do tempo.

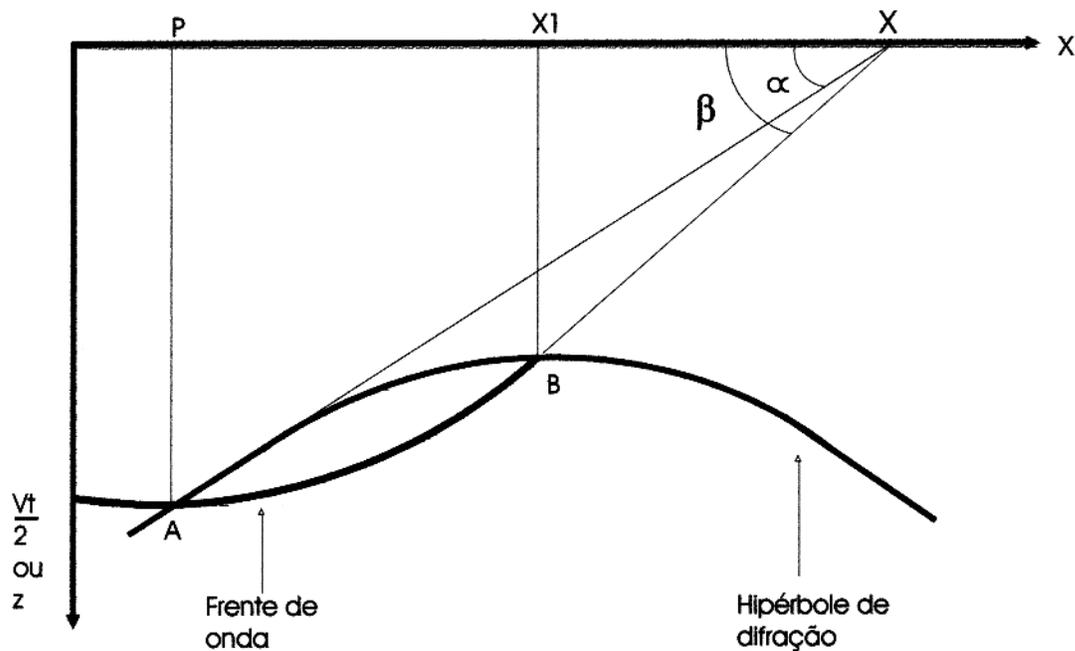


Figura 2 - A ilustração dá a relação entre o círculo (frente de onda) e a hipérbole de difração quando plotadas no mesmo eixo. \overline{XA} é a posição aparente da camada e \overline{XB} é a posição verdadeira. Adaptada de HATTON et al. (1994).

HATTON et al.(1994) também demonstrou a relação existente entre a hipérbole e círculo. Esta relação é apresentada na Figura 2, onde o tempo t e a profundidade $z = vt / 2$ são plotados no mesmo eixo. O semi-círculo (frente de onda) corta a curva de difração em dois pontos; no ponto A, cuja projeção na superfície (P) corresponde as posições da fonte e do receptor, quando estes são coincidentes, e no ponto B, que corresponde ao ápice da hipérbole de difração. A superfície aparente do refletor é tangente à hipérbole de difração e intercepta a frente de onda no seu ápice. A superfície verdadeira do refletor é tangente a frente de onda e intercepta a curva de difração no seu ápice. A superfície que originou as reflexões possui mergulho maior que a superfície refletora aparente. As curvas citadas acima são regidas pelas seguintes equações:

$$(X_1 - P)^2 + (\overline{X_1 B})^2 = \left(\frac{vt}{2}\right)^2, \quad (2.1)$$

$$\left(\frac{vt}{2}\right)^2 - (X_1 - P)^2 = (\overline{X_1 B})^2. \quad (2.2)$$

A equação (2.1) é a equação de um semi-círculo e a equação (2.2) é a equação de uma hipérbole. Na primeira a velocidade(v) e o tempo(t) são constantes, e na segunda a profundidade(z) é a constante.

A migração é o processo através do qual se procura obter o posicionamento correto dos refletores sísmicos a partir de observações das reflexões primárias. Ela é dada pela soma do campo de ondas observado em diferentes traços do sismograma, ao longo de uma superfície geométrica, que é definida pelos tempos de trânsito a partir de um ponto de difração (HAGEDOORN, 1954). Segundo HUBRAL (1977), a migração na profundidade significa que o resultado da soma do campo de ondas ao longo da superfície de difração deve ser colocado na extremidade do raio imagem que coincide com a posição do ponto de difração. Por outro lado, a migração no tempo utiliza a mesma superfície de difração ao longo da qual o campo de ondas deve ser somado, sendo o resultado colocado na posição do ponto de mínimo tempo de trânsito de difração.

Um entendimento deste processo é conseguido quando se analisa a Figura 3, idealizada por HUBRAL & KREY (1980), na qual eles usam os conceitos de raio normal e raio imagem para definir migração no tempo e na profundidade. A Figura 3 mostra o ponto D , a partir do qual a energia é espalhada e recebida na superfície nos vários receptores (G). A união de todos os campos de ondas recebidos por estes receptores definem uma curva de difração, no domínio, 2-D, ou uma superfície de difração, no domínio 3-D, representativo do campo espalhado no do-

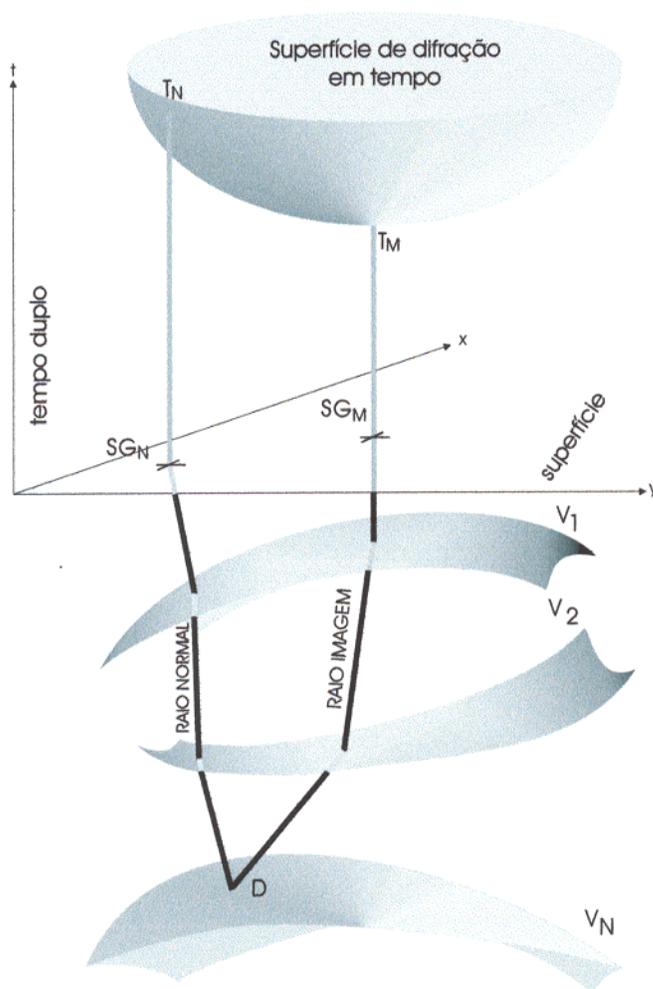


Figura 3 - Ilustração da relação entre raio normal e raio imagem. T_M é a migração, no tempo, do ponto T_N . A superfície de difração em tempo é construída a partir dos tempos de trânsito que partem da fonte S , atingem D e retornam até aos receptores G espalhados na superfície. Adaptada de HUBRAL & KREY (1980).

mínio do tempo. Através desta configuração define-se o raio imagem como aquele que parte do ponto D e chega perpendicularmente a superfície no receptor G_M . O raio normal é aquele que parte perpendicularmente à superfície onde se localiza o ponto D e alcança a superfície no receptor G_N . Para um meio isotrópico composto de camadas horizontais estes dois raios coincidem e o ponto D se localiza verticalmente abaixo do ponto onde supostamente estariam a fonte (S) e o receptor (G). A partir destes conceitos, e considerando o tempo T_N como parte de um campo refletido e pertencente a um raio normal de uma seção afastamento nulo, a migração no tempo pode ser entendida como a soma de todas as amplitudes contidas na curva de difração pertencente ao campo refletido, originado a partir do ponto D . Desta maneira, o ponto T_N após a soma é migrado para o ponto T_M , ou seja, para o ápice da curva de difração ou para o tempo mínimo de trânsito de difração.

Quando o meio é considerado isotrópico com camadas horizontais, a conversão para profundidade seria uma mera questão de escala vertical. Segundo HUBRAL & KREY (1980), o ponto migrado no tempo fica localizado no raio imagem num ponto imediatamente inferior ao ponto migrado em profundidade, e o fator responsável pela conversão é dado por $v/2$, onde v é velocidade de rms (raiz média quadrática), o que nos daria o ponto exato em subsuperfície caso a velocidade utilizada fosse a correta.

2.1.2 - Preservação de amplitude

Vários fatores, como os mostrados na Figura 4, afetam informações de amplitude de um evento sísmico. Fatores como divergência geométrica (espalhamento geométrico) e trajetória do raio podem ser calculados e corrigidos. Ganho do instrumento é usualmente conhecido, diretividade do arranjo, usualmente não afeta significativamente a amplitude dos eventos que não mergulham apreciavelmente e variação do coeficiente de reflexão com ângulo será pequena, exceto para grandes grandes afastamentos. Outros fatores relacionados com a perda de energia devido a absorção, dispersão, perda por transmissão e múltiplas (“peg-leg”) são de difícil determinação. Um terceiro grupo de fatores, são os que variam com a intensidade e acoplamento da fonte, sensibilidade e acoplamento do geofone e afastamento, podem ser determinados usando

a alta cobertura dos dados CDP. De todos os fatores envolvidos na perda de amplitude, vamos eliminar apenas o espalhamento geométrico por ser ele um dos que mais contribuem para o decaimento de amplitude. Segundo SHERIFF & GELDARD (1985), se o meio for homogêneo, o decréscimo de amplitude é inversamente proporcional a distância, ou a vt , porém como isso geralmente não acontece e a velocidade aumenta com a profundidade, o decréscimo de amplitude é ainda maior. Segundo Newton apud SHERIFF & GELDARD (1985), para camadas horizontais, esse decréscimo de amplitude é igual a $\frac{1}{V^2_{RMS} t}$. Essa situação é visualizada na Figura 5.

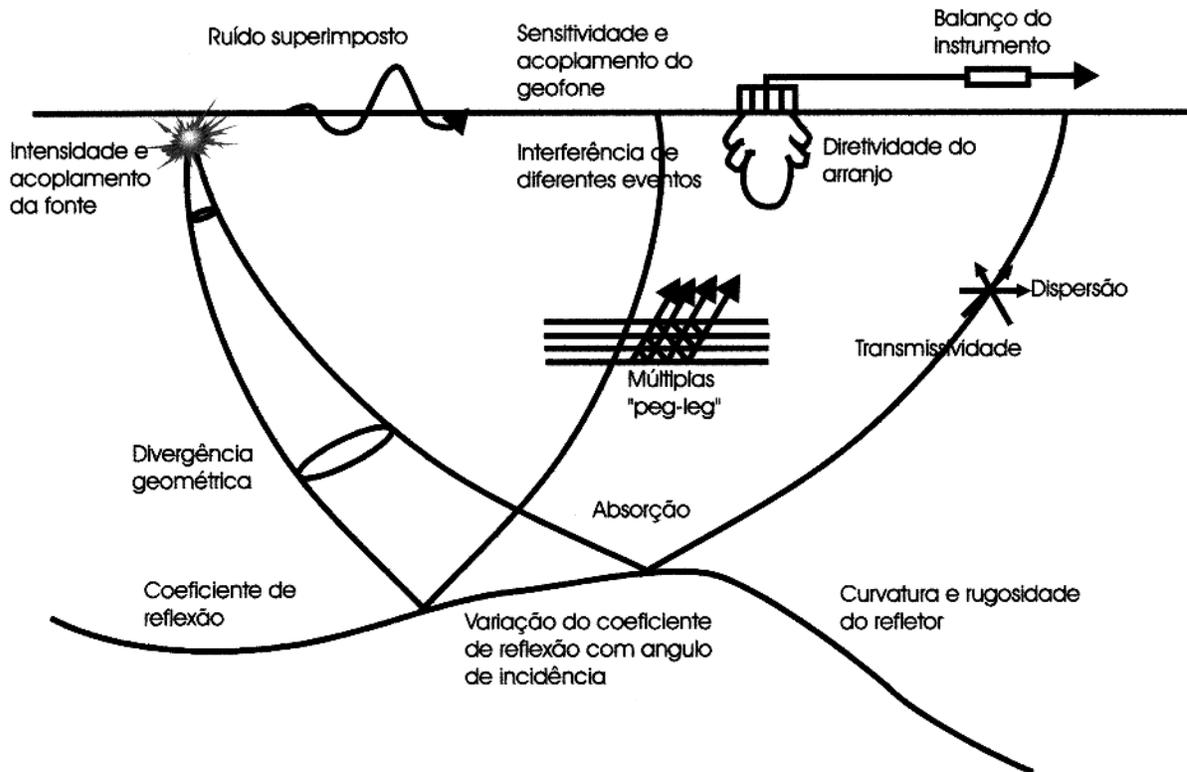


Figura 4 - Ilustração dos fatores que afetam a amplitude dos eventos sísmicos. Adaptada de SHERIFF & GELDARD (1985).

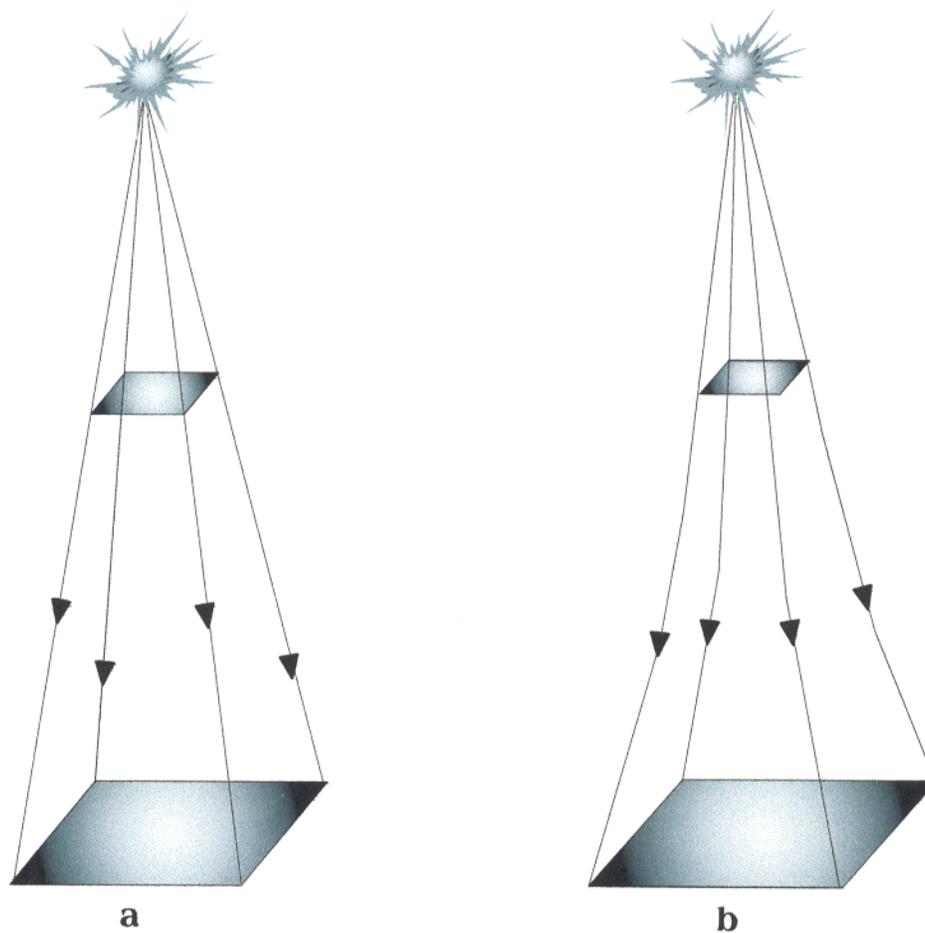


Figura 5 - Ilustração do decaimento de amplitude associado com o espalhamento geométrico. a) Meio uniforme. b) Meio não uniforme com a velocidade crescente com a profundidade. Adaptada de O'DOHERTY & ANSTEY (1971).

3 - FUNDAMENTOS TEÓRICOS

3.1 - RAIOS CENTRAL E RAIOS PARAXIAIS

Neste capítulo é abordado a teoria do raio, comentando sobre as equações que determinam o tempo de trânsito de reflexão, o tempo de trânsito de difração, o espalhamento geométrico e as equações que determinam o ápice de um evento migrado, para embasar o processo de migração que está sendo proposto aqui.

A teoria geométrica do raio, segundo BORTFELD (1989), quando aplicada a um sistema sísmico, considera que este é composto de um conjunto de camadas homogêneas e isotrópicas, separadas por interfaces suaves, e limitado por superfícies suaves; a denominada de superfície anterior, onde as fontes e os detetores são posicionados e a superfície posterior onde se dá a reflexão. A Figura 6 ilustra a organização desse sistema.

Dentro deste sistema sísmico, um raio que o atravessa e incide perpendicularmente à superfície posterior é denominado de raio central, e todos os raios vizinhos a ele são denominados de raios paraxiais (Figura 7).

A interseção do raio central com a superfície anterior define o ponto P_0 . Um plano tangente a esta superfície neste ponto define um sistema de coordenadas (x, y, z) .

A partir do ponto P_0 e na direção do raio central é definido o vetor vagarosidade, $\tilde{\mathbf{p}}_0$, como $1/v_0$ vezes o vetor unitário na direção do raio central, onde v_0 é a velocidade inicial (velocidade da primeira camada). Da mesma forma, um sistema de coordenadas (x', y', z') é definido quando o vetor vagarosidade $\tilde{\mathbf{p}}_0$ atinge a superfície posterior na forma de $\tilde{\mathbf{p}}'_0$.

Considerando um ponto arbitrário P na superfície anterior, este ponto pode ser referenciado ao ponto P_0 pelo vetor posição $\tilde{\mathbf{x}}$ e por um vetor vagarosidade $\tilde{\mathbf{p}}$, os quais são vetores de 3 componentes. Assim, a posição de P será representada por $\tilde{\mathbf{x}} = [x, y, f(x, y)]^T$ e $\tilde{\mathbf{p}} = [p, q, f_x p + f_y q]^T$. Para permitir a aplicação de todos os procedimentos de cálculo eles são

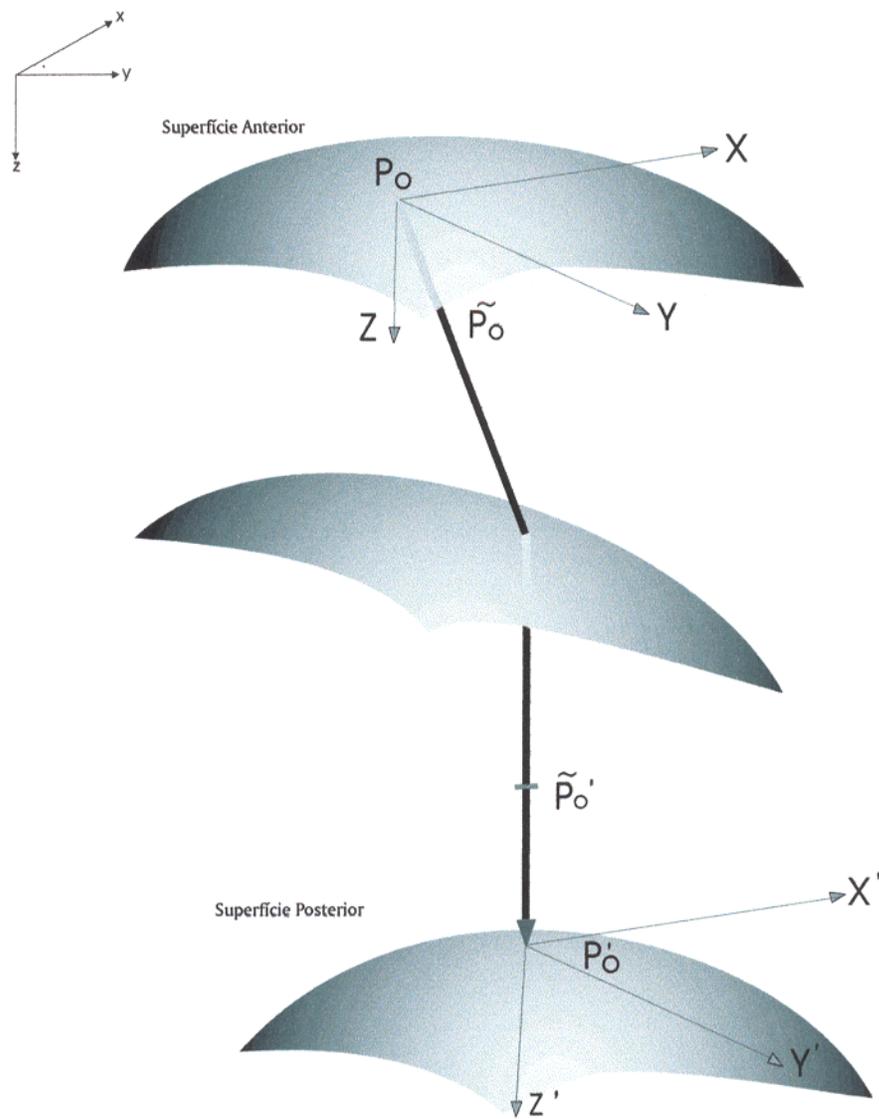


Figura 6 - Ilustração de um sistema sísmico com os vetores vagarosidade \tilde{p}_0 e \tilde{p}'_0 , e os sistemas de coordenadas (x, y, z) na superfície anterior e (x', y', z') na superfície posterior. Adaptada de BORTFELD (1989).

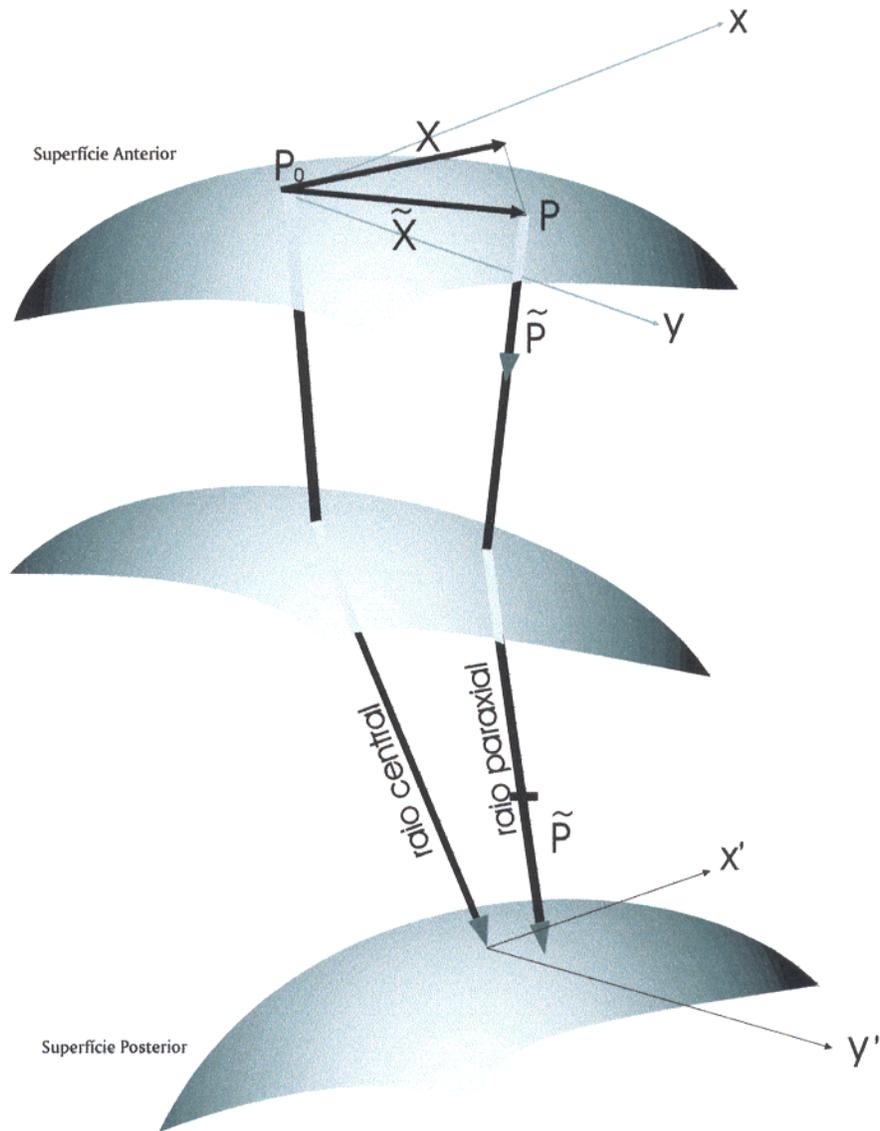


Figura 7 - Ilustração do mesmo sistema da Figura 6, mostrando as relações entre o raio central e o raio paraxial. Mostra também o vetor posição \mathbf{x} que é a projeção de $\tilde{\mathbf{x}}$ no plano (x,y) , e um ponto arbitrário P que é a projeção de $\tilde{\mathbf{p}}$ no plano (x,y) . Tal ponto pode ser referenciado ao ponto P_0 a partir do vetor posição $\tilde{\mathbf{x}}$ e do vetor vagarosidade $\tilde{\mathbf{p}}$. Adaptada de BORTFELD (1989).

representados no plano xy como vetores de 2 componentes; isto é, como $\mathbf{x} = (x, y)^T$ e $\mathbf{p} = (p, q)^T$ na superfície anterior. E na superfície posterior com seus respectivos símbolos com apóstrofos, ou seja, \mathbf{x}' e \mathbf{p}' . Como mencionado, o raio central é considerado como sendo normal a superfície posterior, ou seja, $\mathbf{p}'_0 = \mathbf{0}$.

Para um raio transmitido qualquer, existe para cada par de vetores iniciais \mathbf{x} e \mathbf{p} , um par de vetores finais \mathbf{x}' e \mathbf{p}' , os quais são funções de 4 componentes, ou seja, $\mathbf{x}' = \mathbf{x}'(\mathbf{x}, \mathbf{p})$ e $\mathbf{p}' = \mathbf{p}'(\mathbf{x}, \mathbf{p})$, que por sua vez são funções de \mathbf{x} e \mathbf{p} . Porém, aproximações de primeira ordem de \mathbf{x}' e \mathbf{p}' são usadas e correspondem à aproximações de segunda ordem do tempo de trânsito, que na ótica geométrica é chamada de ótica Gaussiana. Esta considera essas aproximações válidas, em geral, para pequenos valores de magnitude dos vetores \mathbf{x} , $\mathbf{p} - \mathbf{p}_0$, \mathbf{x}' e \mathbf{p}' , ou seja, nas vizinhanças do raio central.

As aproximações de primeira ordem citadas acima são:

$$\mathbf{x}'_1 = \mathbf{A}_0 \mathbf{x} + \mathbf{B}_0 (\mathbf{p} - \mathbf{p}_0) \quad (3.1)$$

$$\mathbf{p}'_1 = \mathbf{C}_0 \mathbf{x} + \mathbf{D}_0 (\mathbf{p} - \mathbf{p}_0), \quad (3.2)$$

onde $\mathbf{A}_0, \mathbf{B}_0, \mathbf{C}_0$ e \mathbf{D}_0 correspondem a matrizes simétricas constantes 2×2 . A matriz \mathbf{A}_0 é Jacobiana e ela corresponde a aproximação de ordem zero da matriz mais geral \mathbf{A} , e é definida como $\frac{\partial(x', y')}{\partial(x, y)}$, calculada em $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, $\mathbf{p} = \mathbf{p}_0$, ou seja, no raio central. As equações acima descrevem todos os raios transmitidos a partir da superfície anterior até a superfície posterior que estão nas vizinhanças do raio central, isto é, onde $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, $\mathbf{p} = \mathbf{p}_0$, $\mathbf{x}' = \mathbf{0}$ e $\mathbf{p}' = \mathbf{p}'_0 = \mathbf{0}$, e onde as aproximações de primeira ordem são definidas.

As equações para raios refletidos podem ser deduzidas de maneira semelhante, porém considera-se o raio refletido como um raio transmitido, invertendo-se sua direção, o que implica usar-se o sinal negativo para \mathbf{p}'_1 . Levando isso em consideração e fazendo algumas manipulações matemáticas, dedução no apêndice A, chega-se a:

$$\mathbf{x}'_1 = (\mathbf{A}_0 - \mathbf{B}_0 \mathbf{D}_0^{-1} \mathbf{C}_0) \frac{1}{2} (\mathbf{x}'' + \mathbf{x}) \quad (3.3)$$

$$\mathbf{p}'_1 = (-\mathbf{C}_0 + \mathbf{D}_0 \mathbf{B}_0^{-1} \mathbf{A}_0) \frac{1}{2} (\mathbf{x}'' - \mathbf{x}) \quad (3.4)$$

Nas equações acima \mathbf{x}'' corresponde a posição de um receptor e \mathbf{x} corresponde a posição da fonte (ver Figura 8). Neste sentido \mathbf{x}' depende apenas do vetor ponto médio para qualquer $\frac{1}{2}(\mathbf{x}'' + \mathbf{x})$ fixo. No caso particular, $\frac{1}{2}(\mathbf{x}'' + \mathbf{x}) = \mathbf{0}$, todos os raios tem o mesmo ponto de reflexão $\mathbf{x}' = \mathbf{0}$ e como consequência \mathbf{p}' dependeria apenas do vetor afastamento comum. Ou seja, para qualquer $\frac{1}{2}(\mathbf{x}'' - \mathbf{x})$, os raios refletidos de \mathbf{x} a \mathbf{x}'' têm o mesmo ângulo de incidência e o mesmo azimute na superfície posterior, especificamente para $\mathbf{x}'' = \mathbf{x}$ e $\mathbf{p}'_1 = \mathbf{0}$. Todas essas considerações só são válidas quando se está usando aproximações de segunda ordem do tempo de trânsito de reflexão.

3.2 - FUNÇÃO DE HAMILTON PARA EVENTOS REFLETIDOS

A equação para o tempo de trânsito para eventos refletidos é função de \mathbf{x} e \mathbf{x}'' , ou seja, $T = T(\mathbf{x}, \mathbf{x}'')$. Este tempo foi obtido por BORTFELD (1989) usando a equação principal de Hamilton como

$$T = T(\mathbf{x}, \mathbf{x}'') \cong T_0 + T_1 + T_2 = T_0 - 2\mathbf{p}_0 \cdot \frac{1}{2}(\mathbf{x}'' + \mathbf{x}) + \frac{1}{2}(\mathbf{x}'' + \mathbf{x}) \cdot \mathbf{D}_0^{-1} \mathbf{C}_0 \frac{1}{2}(\mathbf{x}'' + \mathbf{x}) + \frac{1}{2}(\mathbf{x}'' - \mathbf{x}) \cdot \mathbf{B}_0^{-1} \mathbf{A}_0 \frac{1}{2}(\mathbf{x}'' - \mathbf{x}) . \quad (3.5)$$

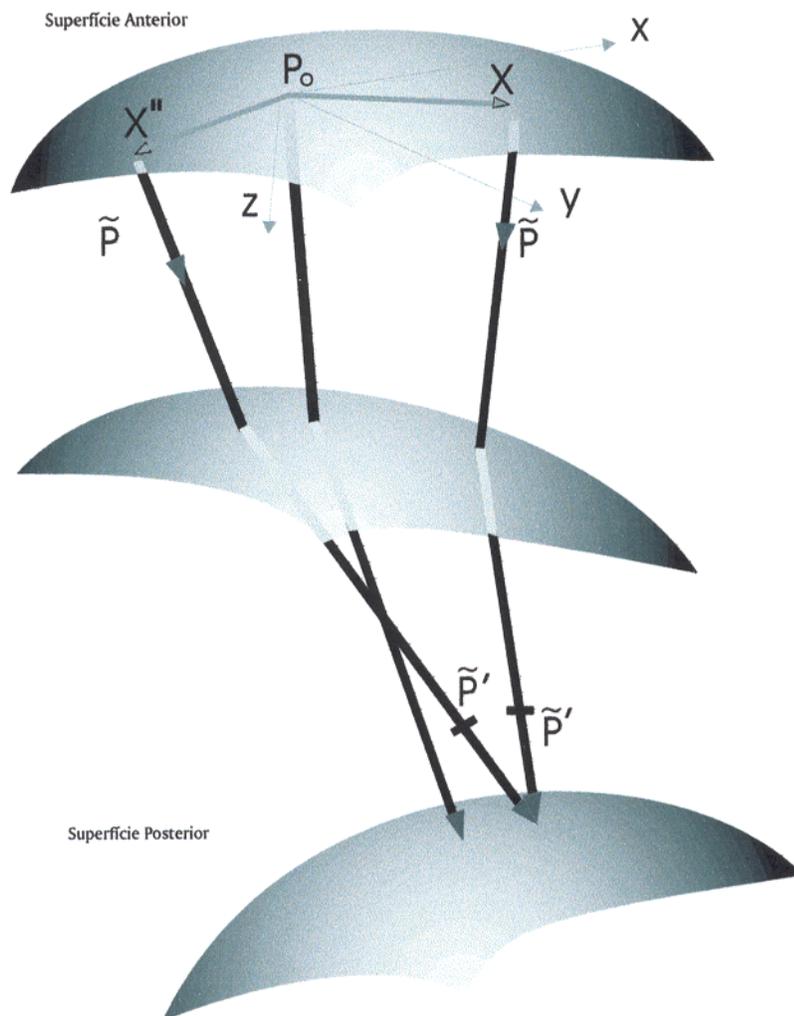


Figura 8 - Ilustração de um raio transmitido a partir da fonte x e de um raio refletido até o receptor x'' . O raio refletido pode ser considerado como um raio transmitido tendo apenas seu sentido invertido. Adaptada de BORTFELD (1989).

Esta equação corresponde a função característica de Hamilton na ótica, chamada de ponto característico, porque ela dá o tempo de trânsito de qualquer ponto \mathbf{x} (fonte) a qualquer outro ponto \mathbf{x}'' (receptor) para raios refletidos. Esses pontos podem ser, explicitamente e numericamente, estabelecidos através de medidas de tempo de trânsito. Nesta equação as matrizes $\mathbf{B}_0^{-1}\mathbf{A}_0$ e $\mathbf{D}_0^{-1}\mathbf{C}_0$ são simétricas e nelas existem seis parâmetros, que somados a T_0 e dois de \mathbf{p}_0 , completam os nove parâmetros a serem determinados. Na equação (3.5), para se determinar estes 9 parâmetros, precisa-se de pelo menos nove medidas do tempo de trânsito. Tais medidas podem ser obtidas a partir de dados pré-empilhados [tiro comum, CMP (ponto médio comum), etc]. De posse dessas medidas de tempo, monta-se um sistema de nove equações e são determinados os nove parâmetros, ou incógnitas, como um problema exato-determinado.

Conhecidos estes parâmetros e considerando uma situação de afastamento nulo, isto é, em que $\mathbf{x}'' = \mathbf{x}$, pode-se obter, a partir da função característica de Hamilton, o tempo de trânsito, bastando para isto que se remova desta função a correção de NMO (“normal move out” - correção de sobretempo normal), que é dada pelo termo

$$\frac{1}{2}(\mathbf{x}'' - \mathbf{x}) \cdot \mathbf{B}_0^{-1}\mathbf{A}_0 \frac{1}{2}(\mathbf{x}'' - \mathbf{x}). \quad (3.6)$$

Uma conclusão é que a correção de NMO depende do vetor afastamento $\frac{1}{2}(\mathbf{x}'' - \mathbf{x})$ e de seu azimute. Com isto, a curva do tempo de trânsito para uma situação afastamento nulo pode ser escrita como

$$T_{R0}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'') = T_0 - 2\mathbf{p}_0 \cdot \frac{1}{2}(\mathbf{x}'' + \mathbf{x}) + \frac{1}{2}(\mathbf{x}'' + \mathbf{x}) \cdot \mathbf{D}_0^{-1}\mathbf{C}_0 \frac{1}{2}(\mathbf{x}'' + \mathbf{x}), \quad (3.7)$$

ou ainda como

$$T_{R0}(\mathbf{x}_m) = T_0 - 2\mathbf{p}_0 \cdot (\mathbf{x}_m) + \mathbf{x}_m \cdot \mathbf{D}_0^{-1}\mathbf{C}_0 \mathbf{x}_m, \quad (3.8)$$

onde $\mathbf{x}_m = \frac{1}{2}(\mathbf{x}'' + \mathbf{x})$ é o vetor ponto médio comum.

Para situações que não as de afastamento nulo, ou seja, para qualquer conjunto CMP, o tempo de trânsito para os pontos característicos de Hamilton, equação (3.5), depende apenas do vetor afastamento.

3.3 - FUNÇÃO DE HAMILTON PARA EVENTOS TRANSMITIDOS E FUNÇÃO TEMPO DE TRÂNSITO DE DIFRAÇÃO.

A partir da equação principal de Hamilton para raios transmitidos, BORTFELD (1989) determinou a função característica para eventos transmitidos como

$$t(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = t \cong t_0 + t_1 + t_2 = t_0 - \mathbf{p}_0 \cdot \mathbf{x} + \frac{1}{2} \mathbf{x}' \cdot \mathbf{D}_0 \mathbf{B}_0^{-1} \mathbf{x}' + \frac{1}{2} \mathbf{x} \cdot \mathbf{B}_0^{-1} \mathbf{A}_0 \mathbf{x} - \mathbf{x} \cdot \mathbf{B}_0^{-1} \mathbf{x}' . \quad (3.9)$$

Esta equação dá o tempo de trânsito para eventos transmitidos para qualquer \mathbf{x}' na superfície posterior. Para um raio com incidência normal a esta superfície, isto é, onde $\mathbf{x}' = \mathbf{0}$, esta equação se reduz a

$$t(\mathbf{x}, \mathbf{0}) = t_0 - \mathbf{p}_0 \cdot \mathbf{x} + \frac{1}{2} \mathbf{x} \cdot \mathbf{B}_0^{-1} \mathbf{A}_0 \mathbf{x} . \quad (3.10)$$

O tempo de trânsito de difração é obtido multiplicando a equação (3.10) por 2 para a situação afastamento nulo, que corresponde ao ponto $\mathbf{x}' = \mathbf{0}$ na função característica de Hamilton. Desta maneira tem-se que

$$T_D = T_0 - 2\mathbf{p}_0 \cdot \mathbf{x}_m + \mathbf{x}_m \cdot \mathbf{B}_0^{-1} \mathbf{A}_0 \mathbf{x}_m . \quad (3.11)$$

A equação acima tem seis dos nove parâmetros que controlam a função tempo de trânsito de reflexão, além de \mathbf{x}_m que corresponde ao ponto médio comum (CMP) como definido para a equação (3.7). Assim, após a obtenção dos parâmetros, pode-se construir a curva de tempo de

trânsito de difração para uma situação afastamento nulo. Esta curva é usada, como é visto no capítulo 6, para se fazer a migração no tempo de uma seção afastamento nulo.

3.4 - POSIÇÃO DO PONTO MIGRADO

O ponto migrado deve ser posicionado num certo tempo T_A e num certo ponto espacial \mathbf{x}_A , os quais definem o ápice da curva de difração. A posição deste ápice é obtida derivando a equação do tempo de trânsito de difração (3.11) e igualando o resultado a zero, uma vez que ela corresponde a uma tangente horizontal, nos fornecendo um ponto de máximo ou mínimo de uma função. No presente caso específico se está interessado no ponto de mínimo tempo de trânsito de difração.

Como pode ser visto, estas equações também são controladas por parâmetros que fazem parte do tempo de trânsito de reflexão, como dadas abaixo:

$$\mathbf{x}_A = (\mathbf{B}_0^{-1} \mathbf{A}_0)^{-1} \cdot \mathbf{p}_0, \quad (3.12)$$

$$T_A = T_0 - \mathbf{p}_0 \cdot \mathbf{x}_A. \quad (3.13)$$

Estas equações são de suma importância para a migração no tempo, como é demonstrado no capítulo 6.

3.5 - ESPALHAMENTO GEOMÉTRICO

Nesta seção é definido o espalhamento geométrico, tanto para raios transmitidos, quanto para raios refletidos, objetivando sua eliminação no processo de migração, o qual é visto mais adiante no capítulo 4.

3.5.1 - Raios transmitidos

Como é visto em seguida, seis dos nove parâmetros determináveis também contribuem para a composição da expressão que fornece o espalhamento geométrico. Este é definido pela densidade dos raios, que por sua vez é dado pela relação entre a área, \overline{P}_{0A} , dos vetores vagarosidades iniciais e a área dos vetores posições finais, Q'_T , ambas perpendiculares ao raio central como pode ser visto na Figura 9. Assim, o espalhamento geométrico para raios transmitidos pode ser definido em termos destas áreas, ou seja, ele é inversamente proporcional a raiz quadrada da densidade dos raios. Desta maneira, o espalhamento geométrico para raios transmitidos é definido por

$$L = \sqrt{\frac{Q'_T}{\overline{P}_{0A}}} \quad (3.14)$$

Como apresentado, anteriormente, a expressão que descreve o raio transmitido a partir da superfície anterior até a superfície posterior é dada por

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}_0 \mathbf{x}_s + \mathbf{B}_0 (\mathbf{p}_s - \mathbf{p}_0), \quad (3.15)$$

onde \mathbf{p}_s é o vetor vagarosidade localizado na posição da fonte.

Considerando $\mathbf{x}_s = \mathbf{0}$ (posição inicial da fonte), para determinar a área Q'_T são necessários os vetores posição ortogonais a \mathbf{x}'_1 . Para determinar a área na superfície posterior usa-se a equação (3.15), na qual substituindo o valor de $\mathbf{x}_s = \mathbf{0}$, se obtém

$$\mathbf{x}' = \mathbf{B}_0 (\mathbf{p}_s - \mathbf{p}_0), \quad (3.16)$$

a qual pode ser reescrita na forma das áreas como (ver apêndice B)

$$Q'_T = \det \mathbf{B}_0 P_{0A}. \quad (3.17)$$

Na equação acima, P_{0A} é a projeção da área dos vetores vagarosidades iniciais na superfície anterior como pode ser visto na Figura 9. A partir da geometria desta figura pode-se tirar a relação

$$P_{0A} = \bar{P}_{0A} \cos \beta_0, \quad (3.18)$$

onde β_0 é o ângulo entre o raio central e a vertical.

A área \bar{P}_{0A} pode ser transformada em ângulo sólido, bastando para isto que ela seja multiplicada por v_0^2 , obtendo-se $\bar{\bar{P}}_{0A} = \bar{P}_{0A} v_0^2$, que é o mesmo que normalizar \bar{P}_{0A} . Desta maneira se obtém para P_{0A} a seguinte equação

$$P_{0A} = \bar{\bar{P}}_{0A} v_0^{-2} \cos \beta_0. \quad (3.19)$$

Como consequência, a área na superfície posterior pode ser escrita como

$$Q'_T = \det \mathbf{B}_0 \bar{\bar{P}}_{0A} v_0^{-2} \cos \beta_0. \quad (3.20)$$

Com as duas relações acima pode-se determinar o espalhamento geométrico para qualquer ponto da superfície posterior na forma

$$L = \sqrt{\frac{Q'_T}{\bar{\bar{P}}_{0A}}}. \quad (3.21a)$$

Substituindo na equação (3.21a) $\bar{\bar{P}}_{0A}$ e Q'_T , se obtém a expressão final para o espalhamento geométrico para raios transmitidos dada por

$$L = \sqrt{\frac{Q'_T}{\bar{\bar{P}}_{0A}}} = \det^{1/2} \mathbf{B}_0 \sqrt{v_0^{-2} \cos \beta_0}. \quad (3.21b)$$

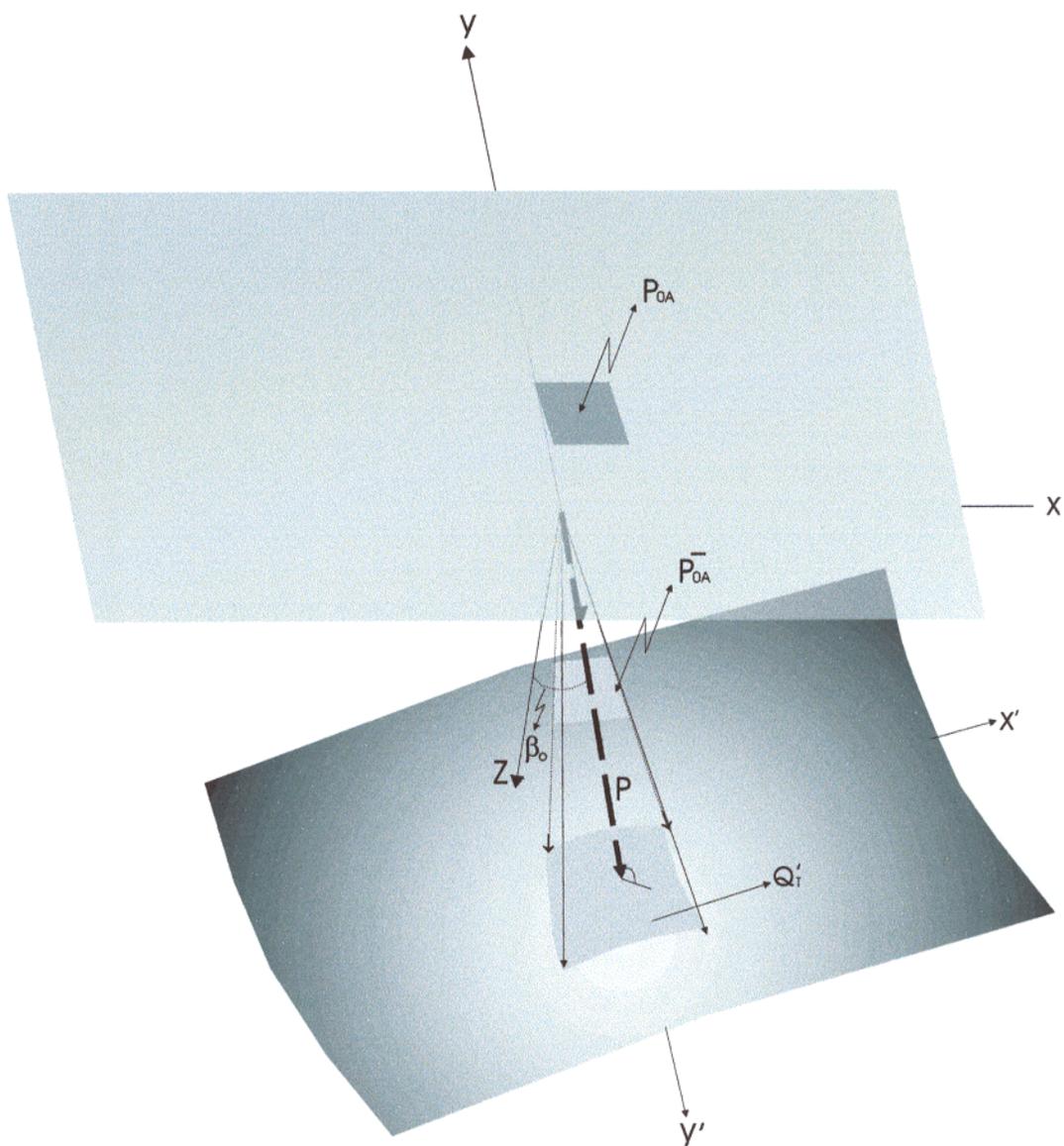


Figura 9 - Ilustração de um tubo de raios transmitidos a partir da origem do sistema de coordenadas (x, y, z) . A área P_{0A} é a projeção da área \bar{P}_{0A} na superfície anterior. A área \bar{P}_{0A} corta, perpendicularmente, o raio central. Q'_T é a área formada pelo tubo de raios na superfície posterior.

Nesta equação o problema é determinar \mathbf{B}_0 para raios transmitidos. Como se viu, anteriormente, para a determinação dos nove parâmetros se utiliza o tempo de trânsito de reflexão e se obteve o produto das matrizes $\mathbf{B}_0^{-1}\mathbf{A}_0$ e $\mathbf{D}_0^{-1}\mathbf{C}_0$, e não as matrizes individuais.

3.5.2 - Raios refletidos

Na seção anterior definiu-se espalhamento geométrico para raios transmitidos. Nesta seção é definido espalhamento geométrico para raios refletidos de maneira semelhante a que foi feito na seção anterior.

Na Figura 10, Q'_R é a área dos vetores posição final dos raios refletidos no plano perpendicular ao raio central, e Q'' é sua projeção na superfície anterior. A partir daí pode-se concluir que

$$Q'_R = Q'' \cos \beta_0. \quad (3.22)$$

Desta maneira o espalhamento geométrico para eventos refletidos fica definido como

$$L = \sqrt{\frac{Q'_R}{P_{0A}}}, \quad (3.23)$$

ou seja, ele é igual a raiz quadrada da relação entre a área das variações dos vetores posições finais e a área das variações dos vetores vagarosidades iniciais, considerando uma situação afastamento nulo, onde $\mathbf{x}_s = \mathbf{0}$.

Partindo da relação para raios transmitidos (BORTFELD, 1989) na qual

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}_0 \mathbf{x}_s + \mathbf{B}_0 (\mathbf{p}_s - \mathbf{p}_0), \quad (3.24)$$

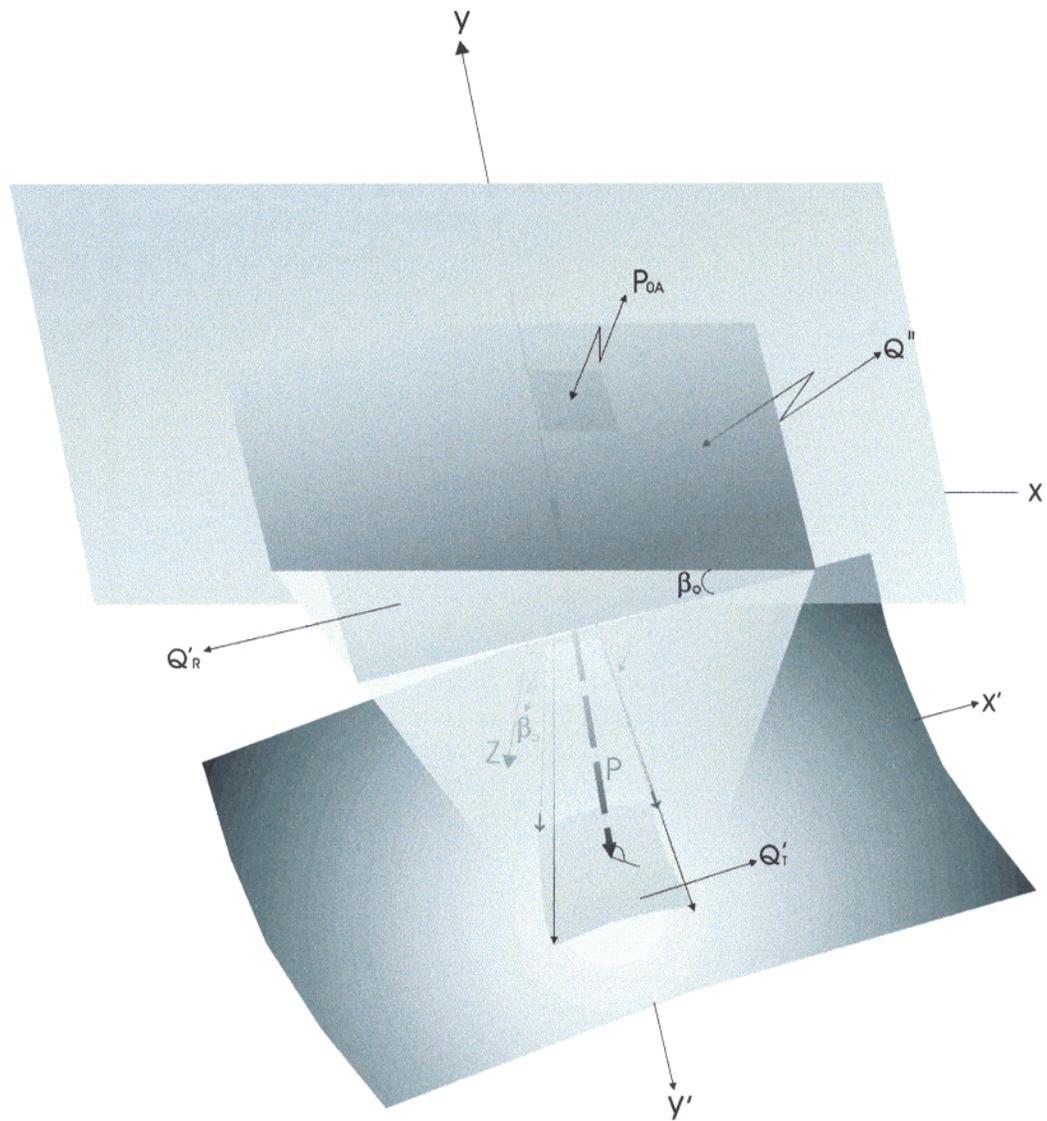


Figura 10- Ilustração de um tubo de raios refletidos a partir da superfície posterior. Ela mostra também a área Q'' na superfície anterior, a qual é a projeção da área Q'_R . Esta, por sua vez, corta o raio central perpendicularmente.

$$\mathbf{p}' = \mathbf{C}_0 \mathbf{x}_s + \mathbf{D}_0 (\mathbf{p}_s - \mathbf{p}_0) \quad (3.25)$$

e da relação (3.26) abaixo,

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}_g \\ \mathbf{p}_g - \mathbf{p}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{D}_0^T & -\mathbf{B}_0^T \\ -\mathbf{C}_0^T & \mathbf{A}_0^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}' \\ -\mathbf{p}' \end{pmatrix}, \quad (3.26)$$

deduz-se o espalhamento geométrico para raios refletidos. A relação (3.26) é obtida a partir das propriedades simpléticas da matriz transferência $\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_0 & \mathbf{B}_0 \\ \mathbf{C}_0 & \mathbf{D}_0 \end{pmatrix}$ (ver apêndice B). Nela, \mathbf{p}_g é a posição do vetor vagarosidade na mesma posição do receptor.

Fazendo as simples multiplicações implícitas na equação (3.26), e as devidas substituições se pode escrever que

$$\mathbf{x}_g = \mathbf{D}_0^T \mathbf{x}' + \mathbf{B}_0^T \mathbf{p}', \quad (3.27)$$

e que

$$\mathbf{p}_g - \mathbf{p}_0 = -\mathbf{C}_0^T \mathbf{x}' - \mathbf{A}_0^T \mathbf{p}'. \quad (3.28)$$

Substituindo as expressões (3.24) e (3.25) em (3.27) e (3.28), e levando em consideração que $\mathbf{x}_s = \mathbf{0}$, se tem [ver BORTFELD & KIEHN (1992)] que

$$\mathbf{x}_g = 2\mathbf{D}_0^T \mathbf{B}_0^T (\mathbf{p}_s - \mathbf{p}_0). \quad (3.29)$$

Esta expressão é reescrita na forma de área como

$$Q'' = 4 \det(\mathbf{D}_0^T \mathbf{B}_0) P_{0,A} \quad (3.30)$$

onde

$$P_{0A} = \bar{P}_{0A} \cos \beta_0. \quad (3.31)$$

Normalizando \bar{P}_{0A} se tem que

$$\bar{\bar{P}}_{0A} = \bar{P}_{0A} v_0^2,$$

de onde se pode escrever que

$$\bar{\bar{P}}_{0A} = \frac{P_{0A}}{\cos \beta_0} v_0^2. \quad (3.32)$$

Desta forma

$$P_{0A} = \bar{\bar{P}}_{0A} \cos \beta_0 v_0^{-2}. \quad (3.33)$$

Substituindo esta relação na equação (3.30) se tem que

$$Q'' = 4 \det(\mathbf{D}_0^T \mathbf{B}_0) \bar{\bar{P}}_{0A} \cos \beta_0 v_0^{-2}. \quad (3.34)$$

Com isto se pode escrever o espalhamento geométrico, L , como

$$L = \sqrt{\frac{Q''}{\bar{\bar{P}}_{0A}}} = \frac{2 \cos \beta_0}{v_0} \det^{1/2}(\mathbf{D}_0^T \mathbf{B}_0). \quad (3.35)$$

Nesta equação o problema é determinar a matriz $(\mathbf{D}_0^T \mathbf{B}_0)$. Entretanto, segundo BORTFELD (1989), (ver apêndice B)

$$\mathbf{D}_0 \mathbf{B}_0^{-1} \mathbf{A}_0 - \mathbf{C}_0 = (\mathbf{B}_0^{-1})^T. \quad (3.36)$$

Se esta equação for multiplicada à esquerda por \mathbf{D}_0^{-1} se obtém que

$$\mathbf{B}_0^{-1} \mathbf{A}_0 - \mathbf{D}_0^{-1} \mathbf{C}_0 = \mathbf{D}_0^{-1} (\mathbf{B}_0^{-1})^T = (\mathbf{B}_0^T \mathbf{D}_0)^{-1} = (\mathbf{D}_0^T \mathbf{B}_0)^{-1}, \quad (3.37)$$

que pode ainda ser escrita como

$$(\mathbf{B}_0^{-1} \mathbf{A}_0 - \mathbf{D}_0^{-1} \mathbf{C}_0)^{-1} = \mathbf{D}_0^T \mathbf{B}_0. \quad (3.38)$$

Desta, se deduz que

$$\left(\det^{1/2} \left(\mathbf{B}_0^{-1} \mathbf{A}_0 - \mathbf{D}_0^{-1} \mathbf{C}_0 \right) \right)^{-1} = \det^{1/2} (\mathbf{D}^T \mathbf{B}_0). \quad (3.39)$$

Como a matriz $(\mathbf{B}_0^{-1} \mathbf{A}_0 - \mathbf{D}_0^{-1} \mathbf{C}_0)$ é conhecida, o espalhamento geométrico pode ser determinado e é escrito como

$$L = \frac{2 \cos \beta_0}{v_0} \left(\det^{1/2} \left(\mathbf{B}_0^{-1} \mathbf{A}_0 - \mathbf{D}_0^{-1} \mathbf{C}_0 \right) \right)^{-1}. \quad (3.40)$$

Esta relação é semelhante àquela usada por HUBRAL (1983), com a distinção que aqui se usa a diferença das matrizes curvatura do tempo de trânsito para situações ponto médio comum (CMP) e afastamento nulo, enquanto a dele usa a diferença das matrizes curvatura da frente de onda.

4 - MIGRAÇÃO NO TEMPO USANDO A TEORIA DE RAIOS PARAXIAIS

4.1 - MIGRAÇÃO

Apresentado os fundamentos teóricos sobre da teoria dos raios, neste capítulo se mostra como é feita a migração com base nesta teoria.

A migração no tempo, estudada aqui, pode ser entendida a partir da análise da Figura 11. Nesta figura é feita a migração do ponto D para o ponto D'. A figura em questão representa uma seção afastamento nulo, não migrada, no domínio do tempo. A curva $T_{R0}(\mathbf{x}_m)$ representa a função tempo de trânsito de reflexão, ou seja, um refletor e $T_D(\mathbf{x}_m)$ representa a curva do tempo de trânsito de difração. Ambas são tangentes no ponto D, e este ponto é uma amostra de um traço da seção. Considerando este traço como um raio normal, é possível determinar a função difração, $T_D(\mathbf{x}_m)$, para a amostra deste traço que corresponde ao tempo T_0 , usando informações dos raios vizinhos (raios paraxiais). O ápice desta função é obtido como nas equações (3.12) e (3.13) (SÖLLNER, 1996). Considerando um raio vizinho como outro raio central, o processo pode ser repetido para as amostras deste novo traço, e assim sucessivamente para todas as amostras de cada traço, até que todas as amostras estejam migradas.

Matematicamente, este processo é descrito através do seguinte princípio. Considerando que o campo de ondas numa seção afastamento nulo pode ser representado por BORTFELD & KIEHN (1992)

$$U(\mathbf{x}, t) = \frac{\prod(d_i u_i)}{L} R_c \text{sinc} \left[\frac{\pi}{\Delta T} (t - T_{R0}(\mathbf{x}_m)) \right], \quad (4.1)$$

onde R_c é o coeficiente de reflexão e $\prod(d_i u_i)$ é o produto dos coeficientes de transmissão de ondas descendentes, (d_i) , e ascendentes, (u_i) .

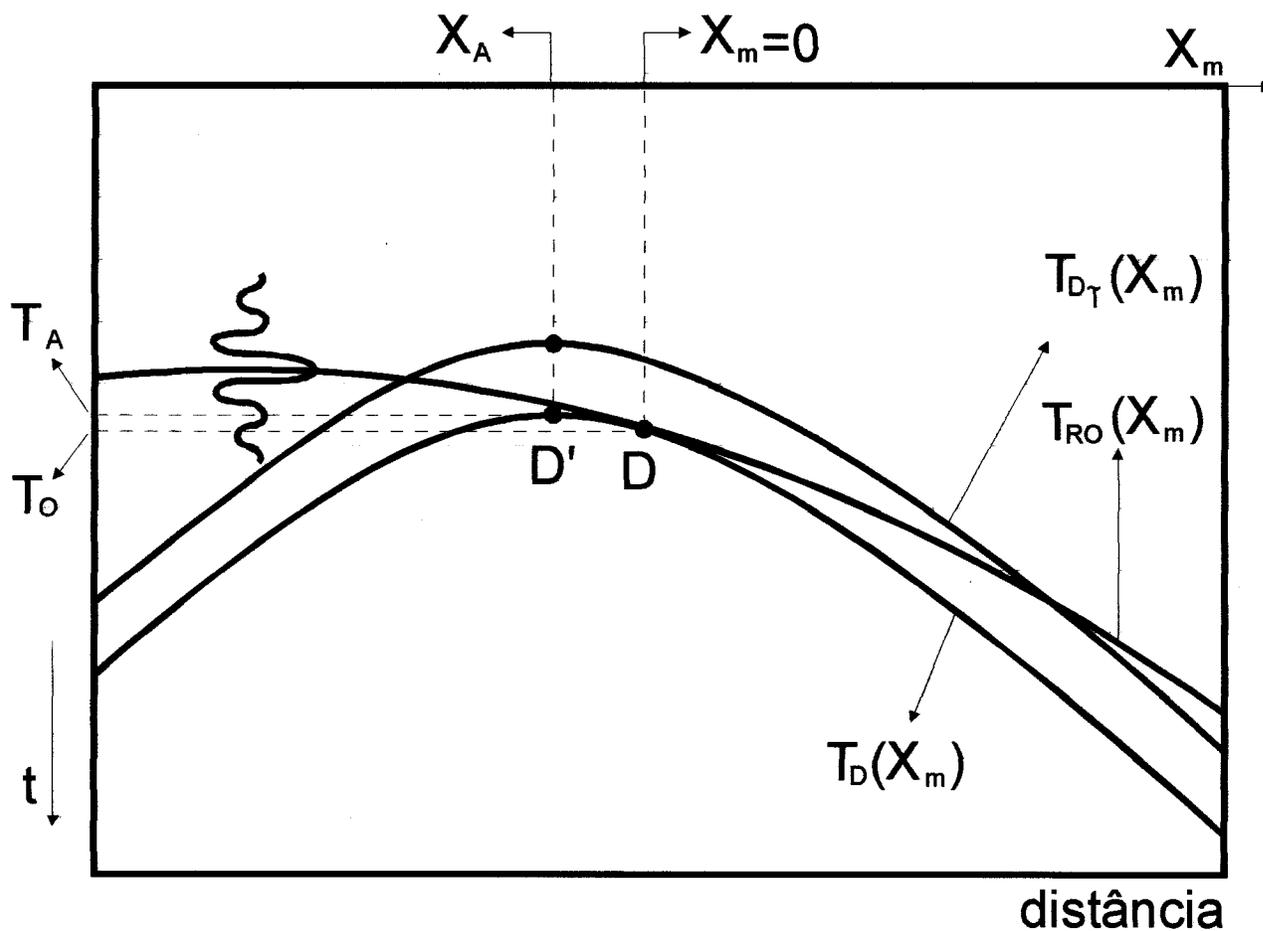


Figura 11 - Ilustração de uma seção afastamento nulo mostrando a função reflexão, $T_{RO}(\mathbf{x}_m)$ e a função difração $T_D(\mathbf{x}_m)$ calculada a partir dos parâmetros da primeira. Ambas coincidentes no ponto $\mathbf{x}_m = 0$, cujo traço na seção sísmica é considerado como um suposto raio central. Ela ilustra também a migração do ponto $D(\mathbf{x}_m = 0, T_0)$ para o ponto $D'(\mathbf{x}_A = 0, T_A)$. Nela se pode ver também a função difração $T_{D\tau}(\mathbf{x}_m)$ que é deslocamento da função $T_D(\mathbf{x}_m)$ de τ , pois o processo é feito amostra por amostra (ou para cada amostra).

A função *sinc* (seno cardinal) foi escolhida como sinal da fonte por ela ser a função interpoladora do teorema da amostragem e por ela corresponder a uma função retangular no domínio da frequência (banda limitada). A amostragem ao longo da função difração coleta os valores da função *sinc* (seção afastamento nulo), onde $t = T_D(\mathbf{x}_m)$.

Na equação (4.1) a diferença $[T_D(\mathbf{x}_m) - T_{R0}(\mathbf{x}_m)]$ significa a diferença entre as funções difração e reflexão, a qual quando substituída na função *sinc*, esta só terá valor significativo se a diferença citada for igual a zero, o que só ocorre quando ambas funções forem tangentes, significando que a amostra pertence a um ponto de reflexão.

Após se fazer a subtração $[T_D(\mathbf{x}_m) - T_{R0}(\mathbf{x}_m)]$ na equação (4.1), onde $T_D(\mathbf{x}_m)$ é dada pela equação (3.11) e $T_{R0}(\mathbf{x}_m)$ pela equação (3.8) e considerando cada amostra em $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ como possível tempo do raio central, T_0 , se obtém um resultado que deslocado de τ resulta em

$$U(\mathbf{x}_m, \tau) = \frac{\prod(d_i u_i)}{L} R_c \operatorname{sinc} \left[\frac{\pi}{\Delta T} \left(\tau + \mathbf{x}_m \cdot (\mathbf{B}_0^{-1} \mathbf{A}_0 - \mathbf{D}_0^{-1} \mathbf{C}_0) \mathbf{x}_m \right) \right]. \quad (4.2)$$

$\mathbf{B}_0^{-1} \mathbf{A}_0 - \mathbf{D}_0^{-1} \mathbf{C}_0$ é uma matriz simétrica 2x2 que pode ser escrita como $\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{12} & M_{22} \end{bmatrix}$ que depois de multiplicada pelo vetor ponto médio comum, \mathbf{x}_m , se obtém

$$U(\mathbf{x}_m, \tau) = \frac{\prod(d_i u_i)}{L} R_c \operatorname{sinc} \left[\frac{\pi}{\Delta T} \left(\tau + (x^2 M_{11} + 2xy M_{12} + y^2 M_{22}) \right) \right]. \quad (4.3)$$

Para se fazer a migração de um ponto \mathbf{x}_m para um ponto \mathbf{x}_A , soma-se o campo de ondas de todos os traços na janela -N e N na direção x , e na janela -M e M na direção y ao longo da hipérbole de difração. Desta maneira, se tem que

$$U(\mathbf{x}_A, \tau) = \frac{\prod(d_i u_i)}{L} R_c \sum_{\nu=-N}^N \sum_{\mu=-M}^M \text{sinc} \left[\frac{\pi}{\Delta T} (\tau + (x^2 M_{11} + 2xy M_{12} + y^2 M_{22})) \right] \nu \Delta x \mu \Delta y \quad (4.4)$$

onde Δx é o intervalo de traços na direção x e ν é o número de traços nesta direção e Δy é o intervalo de traços na direção y e μ é o número de traços nesta direção.

Transformando a equação (4.4) para o domínio da frequência, e em seguida transformando o resultado para a forma de integral, se obtém para o campo migrado a expressão

$$U(\mathbf{x}_A, f) = \frac{\prod(d_i u_i)}{L} R_c \Delta T \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i2\pi f (x^2 M_{11} + 2xy M_{12} + y^2 M_{22})) dx dy \quad (4.5)$$

A extensão dos limites de integração é permitido porque a maior contribuição é dado por ponto tangente comum das duas funções (ponto de fase estacionária).

Para se resolver a integração da equação (4.5), e aplicado uma transformação para os eixos principais x' , y' , se obtém

$$U(\mathbf{x}_A, f) = \frac{\prod(d_i u_i)}{L} R_c \Delta T \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[i2\pi f (\alpha x'^2 + \beta y'^2)] dx' dy' \quad (4.6)$$

com a condição que $\alpha\beta = M_{11}M_{22} - (M_{12})^2$.

A equação (4.6) pode ainda ser escrita com novos limites de integração em termo de seno e cosseno como

$$U(\mathbf{x}_A, f) = \frac{\prod(d_i u_i)}{L} R_c 2\Delta T \int_0^\infty \left(\int_0^\infty (\cos 2\pi f \alpha x'^2 + i \operatorname{sen} 2\pi f \alpha x'^2) dx' \right) (\cos 2\pi f \beta y'^2 + i \operatorname{sen} 2\pi f \beta y'^2) dy'. \quad (4.7)$$

Fazendo uma mudança de escala na forma de $2\pi f \alpha x'^2 = x^2$ e $2\pi f \beta y'^2 = y^2$, pode-se escrever a equação (4.7) como

$$U(\mathbf{x}_A, f) = \frac{\prod(d_i u_i)}{L 2\pi |f| \sqrt{\alpha \beta}} R_c 2\Delta T \int_0^\infty \left(\int_0^\infty (\cos x^2 + i \operatorname{sen} x^2) dx \right) (\cos y^2 + i \operatorname{sen} y^2) dy, \quad (4.8)$$

$\int_0^\infty \cos x^2 dx = \int_0^\infty \operatorname{sen} x^2 dx = \int_0^\infty \cos y^2 dy = \int_0^\infty \operatorname{sen} y^2 dy = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ são conhecidas como integrais de Fresnel, que substituídas na equação (4.8) fornece o resultado

$$U(\mathbf{x}_A, f) = \frac{\prod(d_i u_i)}{L} R_c \left[-\frac{\Delta T}{4\sqrt{\alpha \beta}} \frac{\operatorname{sgn}(f)}{i|f|} \right], \quad (4.9)$$

que corresponde ao campo migrado, mais ainda com a influência do espalhamento geométrico e as alterações de amplitude e fase que, como veremos nas seções seguintes, serão eliminados.

4.1.1 - Amplitudes verdadeiras

A migração obtida a partir da equação (4.9) ainda contém o efeito do espalhamento geométrico, L . Substituindo nela a expressão para L , segundo a equação (3.40), recupera-se no processo desejado parte das amplitudes perdidas, obtendo-se para o campo migrado a seguinte expressão

$$U(\mathbf{x}_A, f) = \prod (d_i u_i) R_c F_{3D}, \quad (4.10)$$

O fator dado por

$$F_{3D} = \left(\frac{v_0 \Delta T}{8 \cos \beta_0} \frac{-1}{i|f|} \operatorname{sgn}(f) \right) \quad (4.11a)$$

representa um operador cujo efeito pode ser eliminado multiplicando a seção sísmica no domínio da frequência, antes ou após a migração, pelo seu inverso dado por

$$F_{3D}^{-1} = \left(\frac{8 \cos \beta_0}{v_0 \Delta T} (-i|f| \operatorname{sgn}(f)) \right). \quad (4.11b)$$

4.1.2 - Filtro de diferenciação

Fazendo parte da expressão F_{3D} , existe o fator $\frac{-1}{i|f|} \operatorname{sgn}(f)$. Este fator, como é visto

adiante é o responsável pelo deslocamento de fase do sinal e pela alteração do espectro de frequência. Ele aparece em decorrência da integração inerente ao processo de migração. Para que seu efeito seja removido ou anulado, aplica-se o operador inverso, isto é, o processo de diferenciação. Por este motivo ele é chamado de operador de derivada e é dado por $-i|f|$ e que pode ser deduzido como na operação seguinte (CLAERBOUT, 1985):

$$f(t) = \int F(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \quad (4.12)$$

$$\frac{df}{dt} = \int -i\omega F(\omega) e^{-i\omega t} d\omega, \quad (4.13)$$

onde $\omega = 2\pi f$. O fator $-i|f|\text{sgn}(f)$, permite corrigir a fase do sinal em 90° no espectro de fase, pois como se sabe, $-i$ pode ser escrito como $\exp\left(-i\frac{\pi}{2}\right)$ (fórmula de Euler) ou ainda como $\cos\frac{\pi}{2} - i\text{sen}\frac{\pi}{2}$. O filtro em questão é ilustrado na Figura 12.

Seu espectro de amplitude é ilustrado na Figura 13, o qual é calculado pela expressão

$$A(f) = \sqrt{R^2(f) + I^2(f)}. \quad (4.14)$$

Como sua parte real é nula, se tem que

$$A(f) = \sqrt{I^2(f)}, \quad \text{ou ainda} \quad A(f) = |I(f)|. \quad (4.15)$$

Seu espectro de fase é dado por

$$\theta(f) = \text{tg}^{-1}\left(\frac{I(f)}{R(f)}\right) = -\frac{\pi}{2}\text{sgn}(f), \quad (4.16)$$

e tem a forma como a da Figura 14.

Junto com o filtro de diferenciação, é aplicada a função peso dada por

$$w = \frac{8\cos\beta_0}{v_0 \Delta T}, \quad (4.17)$$

onde β_0 é o ângulo que o vetor vagarosidade (\mathbf{p}_0) forma com o eixo vertical (ver Figura 9) e pode ser obtido após o cálculo deste parâmetro (\mathbf{p}_0), pois este é função de p e q , que por sua vez são funções de $\text{sen}\beta_0$ e $\text{cos}\beta_0$. A velocidade v_0 é a velocidade da primeira camada e pode ser obtida facilmente.

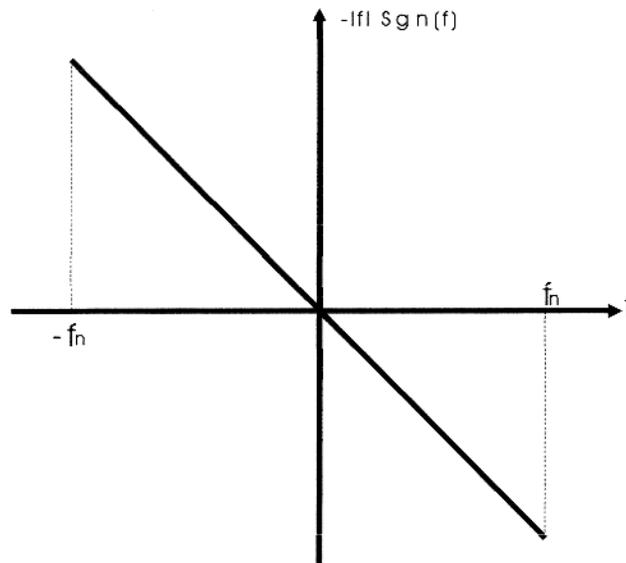


Figura 12 - Desenho do filtro de correção de fase dado por $-i|f| \operatorname{sgn}(f)$.

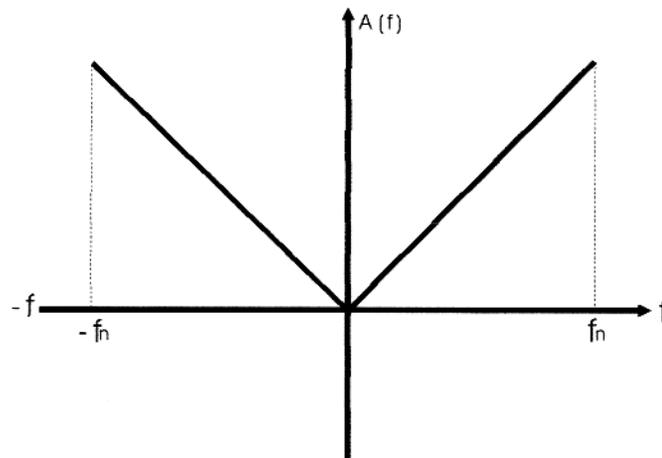


Figura 13 - Espectro de amplitude do filtro da Figura 12.

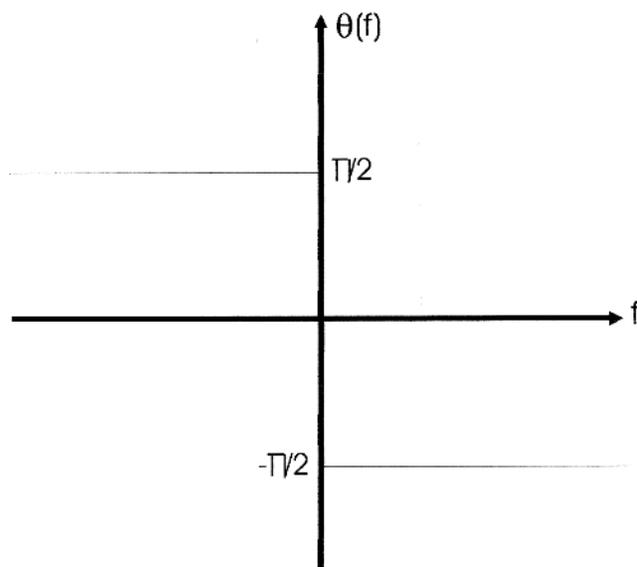


Figura 14 - Espectro de fase do filtro da Figura 12.

O filtro de diferenciação e a função peso formam o filtro inverso, F_{3D}^{-1} (4.11b), que quando aplicado à equação (4.10) recupera as amplitudes verdadeiras. Isto é, retiram o efeito do espalhamento geométrico, além de recuperarem a fase do sinal. Após a aplicação do filtro inverso, o campo migrado é representado no domínio da frequência como

$$U(\mathbf{x}_A, f) = \prod (d_i u_i) R_c . \quad (4.18)$$

4.2 - REDUÇÃO DOS DADOS PARA 2-D

Como mencionado anteriormente, com a impossibilidade de desenvolver o algoritmo em 3-D devido a problema computacional, o modelo de 3-D foi reduzido para 2-D seguindo o mesmo princípio usado para o desenvolvimento matemático usado no processo 3-D. Na verdade, o termo

2-D usado nesta seção refere-se a uma situação 3-D, na qual não se considera uma das direções, x e y . Desta maneira, partindo da equação (4.1) reproduzida abaixo

$$U(\mathbf{x}_m, t) = \frac{\prod(d_i u_i)}{L} R_c \operatorname{sinc} \left[\frac{\pi}{\Delta T} (t - T_{R0}(\mathbf{x}_m)) \right], \quad (4.19)$$

e usando as equações (3.7) e (3.9), e a condição de $t = T_D(\mathbf{x}_m)$ e considerando o modelo 2-D, e o deslocamento τ , a equação acima pode ser escrita como

$$U(\mathbf{x}_m, \tau) = \frac{\prod(d_i u_i)}{L} R_c \operatorname{sinc} \left[\frac{\pi}{\Delta T} (\tau + x (B_0^{-1} A_0 - D_0^{-1} C_0) x) \right] \quad (3.20)$$

Nesta equação a diferença $(B_0^{-1} A_0 - D_0^{-1} C_0)$ não é mais uma matriz e sim um escalar, devido à redução a 2-D. Desta forma, a equação (4.20) é reescrita como

$$U(\mathbf{x}_m, \tau) = \frac{\prod(d_i u_i)}{L} R_c \operatorname{sinc} \left[\frac{\pi}{\Delta T} (\tau + (x^2 M_{11})) \right]. \quad (4.21)$$

Colocando-a na forma de somatório, o campo migrado é dado por

$$U(\mathbf{x}_m, \tau) = \frac{\prod(d_i u_i)}{L} R_c \sum_{n=-N}^N \operatorname{sinc} \left[\frac{\pi}{\Delta T} (\tau + (x^2 M_{11})) \right] n \Delta x, \quad (4.22)$$

onde Δx é o intervalo de traços e n .

Passando a equação acima para o domínio da frequência se tem que

$$U(\mathbf{x}_A, f) = \frac{\prod(d_i u_i)}{L} R_c \sum_{n=-N}^N \Delta T \exp(i 2\pi f x^2 M_{11}) n \Delta x. \quad (4.23)$$

Transformando o somatório em integral se tem que

$$U(\mathbf{x}_A, f) = \frac{\prod(d_i u_i)}{L} R_c 2 \Delta T \int_0^{\infty} \exp(i 2 \pi f M_{11} x^2) dx. \quad (4.24)$$

Esta mesma equação pode ser escrita em termos de seno e cosseno como

$$U(\mathbf{x}_A, f) = \frac{\prod(d_i u_i)}{L} R_c 2 \Delta T \int_0^{\infty} (\cos 2 \pi |f| M_{11} x^2 + i \operatorname{sgn}(f) \operatorname{sen} 2 \pi f M_{11} x^2) dx. \quad (4.25)$$

Fazendo uma mudança de variável na forma de $y^2 = 2 \pi f M_{11} x^2$, na equação acima, se tem que

$$U(\mathbf{x}_A, f) = \frac{\prod(d_i u_i)}{L} R_c \frac{2 \Delta T}{\sqrt{2 \pi |f| M_{11}}} \int_0^{\infty} (\cos y^2 + i \operatorname{sgn}(f) \operatorname{sen} y^2) dy. \quad (4.26)$$

Com os resultados $\int_0^{\infty} \cos y^2 dx = \int_0^{\infty} \operatorname{sen} y^2 dy = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$, substituídos na equação acima fornece a expressão

$$U(\mathbf{x}_A, f) = \frac{\prod(d_i u_i)}{L} R_c \frac{2 \Delta T}{\sqrt{2 \pi |f| M_{11}}} \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} + i \operatorname{sgn}(f) \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \right), \quad (4.27)$$

ou ainda mais simplificada como

$$U(\mathbf{x}_A, f) = \frac{\prod(d_i u_i)}{L} R_c \frac{\Delta T}{\sqrt{|f|} |M_{11}|} \left(\frac{1 + i \operatorname{sgn}(f)}{2} \right). \quad (4.28)$$

Substituindo o espalhamento geométrico L , como definido na equação (3.40), se tem que

$$U(\mathbf{x}_A, f) = \prod(d_i u_i) R_c \frac{v_0 \sqrt{M_{11}}}{2 \cos \beta_0} \frac{\Delta T}{2 \sqrt{M_{11}} \sqrt{|f|}} (1 + i \operatorname{sgn}(f)). \quad (4.29)$$

Após feitas as simplificações se tem

$$U(\mathbf{x}_A, f) = \prod(d_i u_i) R_c \frac{v_0 \Delta T}{4 \cos \beta_0 \sqrt{|f|}} (1 + i \operatorname{sgn}(f)). \quad (4.30)$$

O fator

$$F_{2D} = \frac{v_0 \Delta T}{4 \cos \beta_0 \sqrt{|f|}} (1 + i \operatorname{sgn}(f)), \quad (4.31a)$$

tem como inverso

$$F_{2D}^{-1} = \frac{4 \cos \beta_0 \sqrt{|f|}}{v_0 \Delta T} (1 + i \operatorname{sgn}(f))^{-1}. \quad (4.31b)$$

Deste se pode extrair o fator

$$F^{-1} = \frac{\sqrt{|f|}}{1 + i \operatorname{sgn}(f)}, \quad (4.32)$$

que ainda pode ser escrito como

$$F^{-1} = \frac{\sqrt{|f|}}{1 + i \operatorname{sgn}(f)} \frac{1 - i \operatorname{sgn}(f)}{1 - i \operatorname{sgn}(f)} \quad (4.33)$$

Finalmente o filtro de correção de amplitude e fase é dado pela equação abaixo

$$F^{-1} = \frac{\sqrt{|f|}}{2} - \frac{\sqrt{|f|}}{2} i \operatorname{sgn}(f). \quad (4.34)$$

O espectro de amplitude é dado por

$$A(f) = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{|f|}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{|f|}}{2} (\operatorname{sgn}(f))\right)^2}, \quad (4.35)$$

ou na forma simplificada como na equação abaixo, a qual tem a forma gráfica como da Figura 15.

$$A(f) = \sqrt{\frac{|f|}{2}}. \quad (4.36)$$

O espectro de fase é dado pela equação abaixo, e é ilustrado através da Figura 16.

$$\theta(f) = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{I}{R}\right) = -\frac{\pi}{4} \operatorname{sgn}(f). \quad (4.37)$$

Juntamente com o filtro dado pela equação (4.34) é aplicado a função peso, w , dado por.

$$w = \frac{4 \cos \beta_0}{v_0 \Delta T}. \quad (4.38)$$

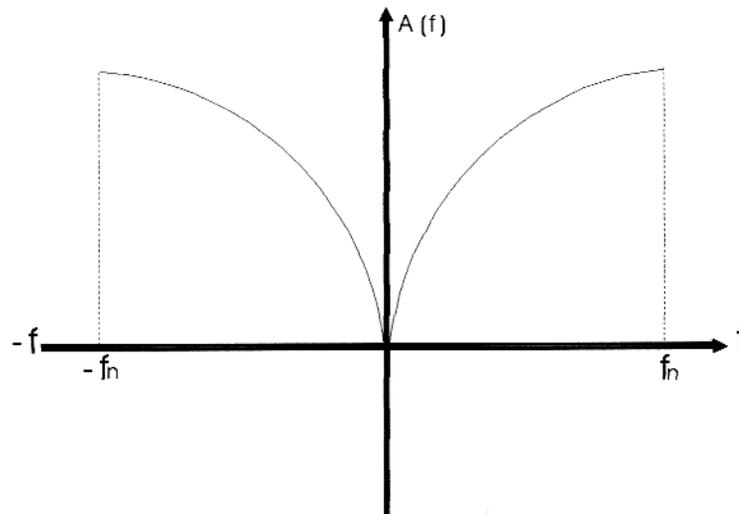


Figura 15 - Espectro de amplitude do filtro dado pela equação (4.34).

Os dois termos F^{-1} e w formam o filtro inverso F_{2D}^{-1} , que aplicados aos dados migrados recuperam a amplitude e a fase do sinal.

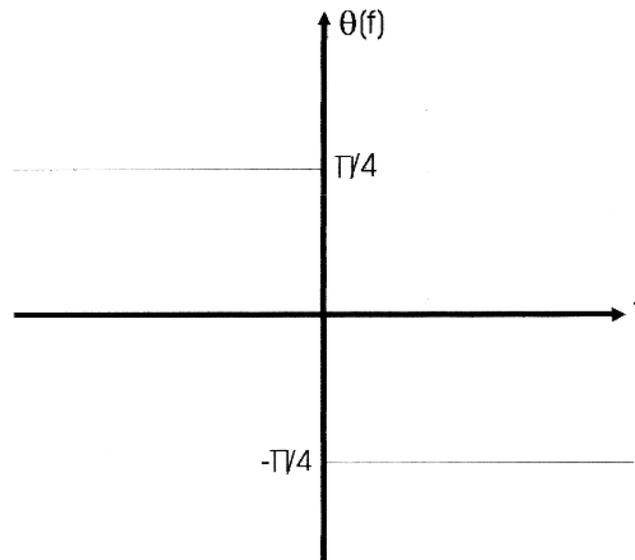


Figura 16 - Espectro de fase do filtro dado pela equação (4.34).

4.3 - RELAÇÃO ENTRE A VELOCIDADE E OS PARÂMETROS

Como analisado nos capítulos anteriores, o método não utiliza o modelo de velocidades para se fazer a migração. Entretanto, esta informação está embutida no tempo de trânsito de reflexão, ou nos 9 parâmetros calculados, como é visto em seguida. O objetivo nesta seção é apenas o de demonstrar que a velocidade está implícito no tempo de reflexão. Demonstrar-se-á isto usando modelo 2-D.

Partindo-se da equação (3.5) para ponto médio comum, onde $\frac{1}{2}(\mathbf{x}'' + \mathbf{x}) = \mathbf{0}$, na forma hiperbólica

$$T^2(\mathbf{x}, \mathbf{x}'') \cong T_0^2 + 2T_0 \frac{1}{2}(\mathbf{x}'' - \mathbf{x}) \cdot \mathbf{B}_0^{-1} \mathbf{A}_0 \frac{1}{2}(\mathbf{x}'' - \mathbf{x}), \quad (4.39)$$

e como o desenvolvimento é em 2-D, o que implica na disposição de tiros e geofones numa só direção, temos que a matriz $\mathbf{B}_0^{-1} \mathbf{A}_0$ depende de um só parâmetro, ou seja,

$$\mathbf{B}_0^{-1} \mathbf{A}_0 = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{bmatrix}, \quad (4.40)$$

onde $U_{12}, U_{21}, U_{22} = 0$ ou $U_{12}, U_{21}, U_{11} = 0$. Considerando a primeira hipótese, então $\mathbf{B}_0^{-1} \mathbf{A}_0 = [U_{11}]$ e $\mathbf{x}'' - \mathbf{x} = x$. Agora, x é um escalar e corresponde ao afastamento entre fonte e receptor. Então, a partir destas considerações pode-se escrever a equação (4.39) como

$$T^2(x) \cong T_0^2 + 2T_0 \frac{1}{4} U_{11} x^2. \quad (4.41)$$

Através da simples comparação com a hipérbole de empilhamento, se obtém que

$$\frac{T_0 U_{11}}{2} = \frac{1}{V_{ST}^2}, \quad (4.42)$$

ou seja, a relação entre os parâmetros (U_{11}) e a velocidade de empilhamento, V_{ST} .

Considerando um meio com camadas horizontais, pode-se determinar U_{11} da matriz transferência para N camadas (KHAN, 1987, e notas de aula de SÖLLNER, 1996) através de

$$\begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{12} & U_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sum_{i=1}^N v_i^2 \Delta t_i} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (4.43)$$

obtendo-se

$$\frac{T_0 U_{11}}{2} = \frac{T_0 / 2}{\sum_{i=1}^N v_i^2 \Delta t_i} = \frac{1}{V_{RMS}^2} \quad (4.44)$$

Com isto se mostra a relação entre a combinação das matrizes $\mathbf{B}_0^{-1} \mathbf{A}_0$ e a velocidade do meio, considerando camadas horizontais, embora ela não esteja limitada a este caso simplificado. Outros detalhes são apresentados por KHAN (1987), SÖLLNER (1996) e MONTES (1998) (no prelo).

4.4 - ALGORITMO DE MIGRAÇÃO

Após a apresentação dos fundamentos teóricos que envolve a migração aqui estudada, esta seção é denotada ao processo prático, partindo de uma seção afastamento nulo (metade superior da Figura 17). A migração é feita amostra por amostra através das etapas apresentadas a seguir:

- 1) Seleciona-se uma amostra qualquer (ponto D) da seção com parâmetros previamente calculados. Esta amostra teoricamente corresponde a um ponto de tangência entre uma curva de difração e uma de reflexão (refletor).
- 2) A partir dos parâmetros calculados (ver capítulo 5) para a amostra selecionada e com informações dos traços vizinhos (raios paraxiais) (o traço a qual pertence essa amostra é

considerado como raio central com $x = 0$ e um T_0 para aquela amostra), se calcula a curva de difração no gráfico tempo distância.

- 3) Faz-se a soma ao longo da curva de difração. Não são todos os tempos calculados que coincidem exatamente nos tempos das amostras.
- 4) Para estes tempos faz-se uma interpolação, que no presente caso foi do tipo linear utilizando os valores das amostras anteriores e posteriores ao tempo de ocorrência do campo de ondas a ser interpolado, para se obter a amplitude desejada neste tempo antes de se fazer a soma.
- 5) Feita a soma, o resultado deve ser colocado no ápice da curva de difração (ponto D'). Tal ápice é obtido com informações dos parâmetros determinados para a amostra que vai ser migrada, usando-se as equações (3.12) e (3.13). O tempo T_A do ápice nem sempre cai nos tempos das amostras previamente determinadas, caindo às vezes entre uma e outra amostra.
- 6) No caso acima deve-se fazer também uma interpolação, mas desta vez não mais linear, mas usando-se a função *sinc* (seno cardinal).
- 7) O mesmo procedimento utilizado para o tempo T_A foi utilizado para a coordenada X_A do ápice, pois como no caso do tempo T_A , a coordenada X_A , nem sempre cai sobre um traço da seção, mas sim entre um e outro traço, sendo necessário, nestes casos, se fazer a interpolação utilizando também a função *sinc*.
- 8) Após estas interpolações o ponto a ser migrado é posicionado corretamente. Se o ponto a ser migrado não coincide com um ponto de reflexão ele terá valor de amplitude desprezível em relação àquele correspondente a reflexão e conseqüentemente o ponto migrado também.

O procedimento descrito acima é repetido para todas as amostras de um traço, e assim sucessivamente para todas as amostras de todos os traços da seção, obtendo-se no final do processo uma seção migrada sem a utilização do campo de velocidades e com amplitudes ditas verdadeiras. Vale ressaltar que após o processo de migração os dados devem ser multiplicados por um filtro inverso, F^{-1} , visando a correção de fase. Tal procedimento também pode ser feito antes da migração e o resultado final é o mesmo.

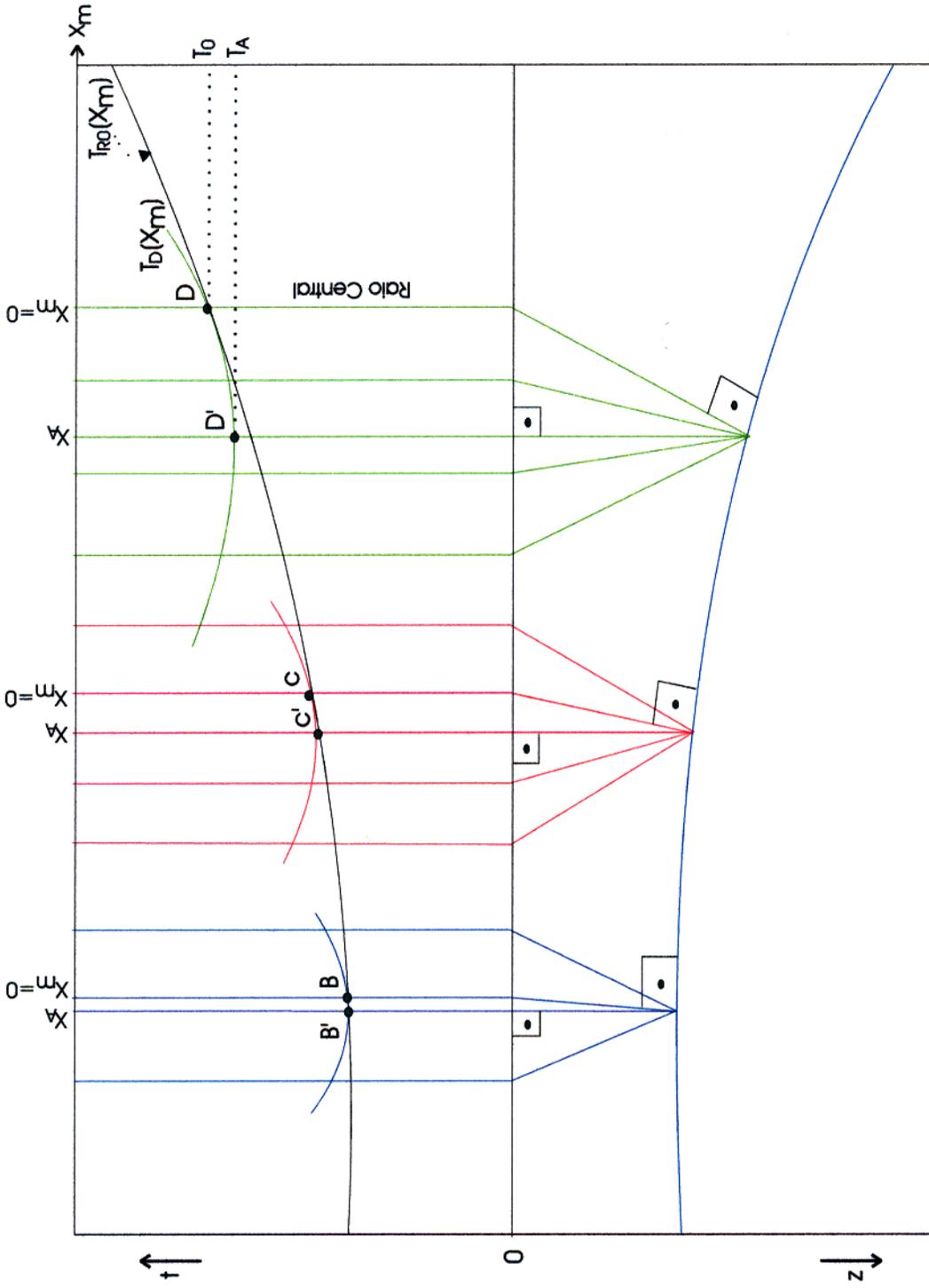


Figura 17 - A partir da amostra $D(X_m, T_0)$ de um traço da seção da seção afastamento nulo (suposto raio central), constrói-se a curva de difração com o auxílio dos parâmetros e dos traços vizinhos (raios paraxiais). Soma-se ao longo da curva e coloca-se o resultado no ápice $D'(X_A, T_A)$. Repete-se o procedimento para todas as amostras de cada traço da seção.

5 - APLICAÇÃO EM DADOS SINTÉTICOS E RESULTADOS

Nos capítulos anteriores foram analisados apenas os aspectos teóricos da migração no domínio do tempo. Neste capítulo são apresentados os aspectos práticos que para isto são feitos em dados sintéticos em 2-D.

O dado sintético aqui utilizado é composto de uma interface inclinada com velocidade de 2000 m/s e profundidade, em sua parte mais rasa, de 300m. A profundidade na parte mais profunda vai depender do ângulo de inclinação da camada, ou seja, 415m para uma inclinação de 15° e 500m para uma inclinação de 25° (ver Figura 18).

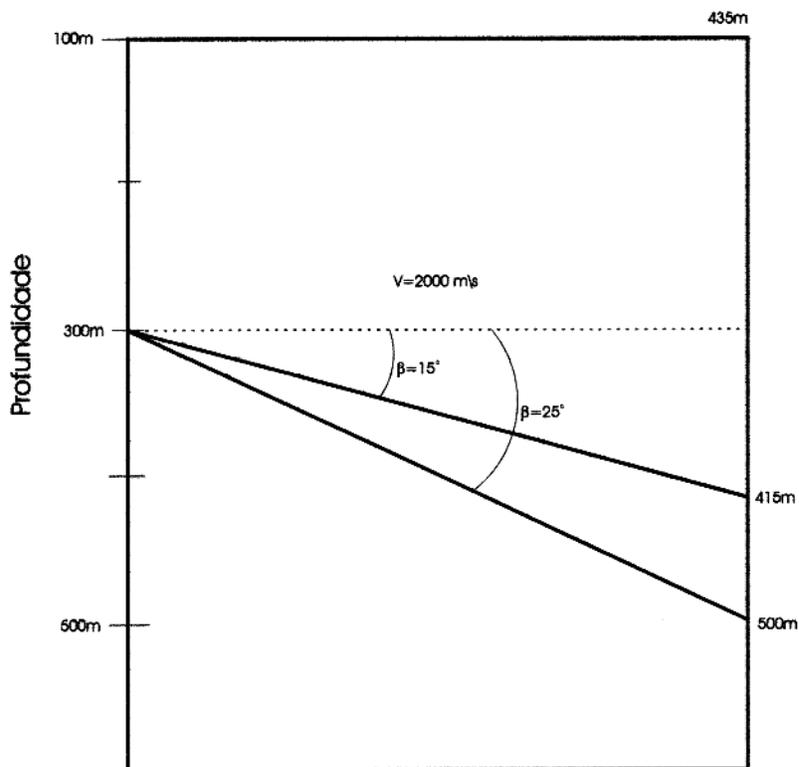


Figura 18 - Modelo geológico utilizado para migração dos dados sintéticos. Foram analisados mergulhos de 15° e 25° .

Devido a simplicidade do modelo, optou-se pelo cálculo dos parâmetros necessários para início do processo de maneira analítica. Simplificadamente, estes parâmetros são calculados da seguinte maneira: Faz-se pelo menos nove medidas de tempo de trânsito de reflexão em dados pré-empilhados. Em seguida, monta-se um sistema de nove equações, pois se tem nove parâmetros a calcular. Depois de resolvido este sistema, se obtém os nove parâmetros procurados. Esse cálculo é feito para cada refletor ou camada em alguns pontos ao longo dele e interpolado entre eles. Os parâmetros calculados para cada amostra da seção de entrada vão contribuir para se construir a função difração para cada amostra e conseqüentemente a migração de cada uma delas. Uma explicação detalhada de como esses parâmetros são calculados é dado por TAVARES (1998) e MONTES (1998).

Embora tenha sido usado um modelo simples, vale ressaltar que o processo pode ser aplicado para qualquer modelo com as limitações descritas no capítulo 3. Para a simulação de uma seção afastamento nulo, utilizou-se 30 traços com espaçamento de 15m entre eles. O algoritmo utilizou a função *sinc* (seno cardinal) como representativa do sinal da fonte (pontual).

A Figura 19 mostra uma seção sintética, afastamento nulo, não migrada, relativa a uma camada inclinada de 15°. Olhando-a com um certo cuidado, percebe-se que sua amplitude decai ao longo do mergulho do refletor como consequência dos fatores citados no capítulo 2, principalmente do espalhamento geométrico. A Figura 20 mostra a representação gráfica deste decaimento. Nela era de se esperar um comportamento regular deste decaimento fosse regular caso estivéssemos trabalhando com modelo de camadas horizontais, mas como se está trabalhando com modelo de camada inclinada, se tem problemas de interpolação, pois na hora da coleta das amplitudes das amostras, nem sempre é coletado o valor máximo delas, mas sim valores próximos do máximo, causando o efeito observado no gráfico em questão e que pode ser melhor entendido no gráfico da figura 25.

A Figura 21 mostra a migração dos dados da Figura 19. Como se pode perceber a partir desta figura, houve uma recuperação das amplitudes como consequência do processo de migração, ou seja, houve um aumento de amplitude após a migração, e tal aumento pode ser percebido nitidamente no gráfico da Figura 22, pois no gráfico da Figura 20 os valores de amplitude são da ordem de grandeza de 2.4 a 3.0 e no gráfico da Figura 22 estes valores são da ordem de de grandeza de 26. Não restando dúvida portanto, de que houve um aumento de

amplitude após o processo de migração. No gráfico da Figura 22, a análise deve ser feita utilizando apenas os traços de 1 a 18 da seção migrada, pois a migração dos pontos dos primeiros traços da seção não migrada são posicionados fora dos limites da seção migrada. Além disso, deve ser levado em consideração os efeitos de borda que ocorrem tanto no início como no final da seção. Como consequência, o que se vê são os pontos vindos das proximidades do traço 8 da seção não migrada, os quais estão representados na seção migrada a partir do traço 1 e os pontos relativos aos últimos traços da seção não migrada, estão representados até o traço 18 da seção migrada. É por isso que a análise do gráfico representativo das amplitudes, obtidas após a migração, deve ser feita do traço 1 ao 18, da Figura 22, levando-se em consideração as observações citadas acima. Testes com mergulho de 25° foram feitos e estão representados através das Figuras 24 a 28.

5.1 - RECONSTITUIÇÃO DA FASE

A análise da Figura 19 (dados antes da migração), indica que seus traços possuem fase zero e que após a migração (Figura 21) eles estão com alteração de fase. Este deslocamento de fase ocorre como parte integrante do processo, mas é corrigido pela aplicação do operador que recupera a fase do sinal. Este filtro é o mesmo que foi discutido no capítulo 4 para dados 2-D. Seu efeito pode ser observado nas Figuras 23 e 28, as quais representam a migração dos dados das Figuras 19 e 24, agora com a aplicação deste filtro. Pode-se notar que não há mais o deslocamento de fase, ou seja, a fase é zero como consequência da sua aplicação.

Embora se tenha recuperado a fase do sinal, este não possui a parte negativa. Este problema ocorre, por se ter durante o processo de migração equação (4.30), divisão por $\sqrt{|f|}$, dando problema na frequência zero, porém como no processamento não se trabalha com esta frequência, isto não chega a ser um problema.

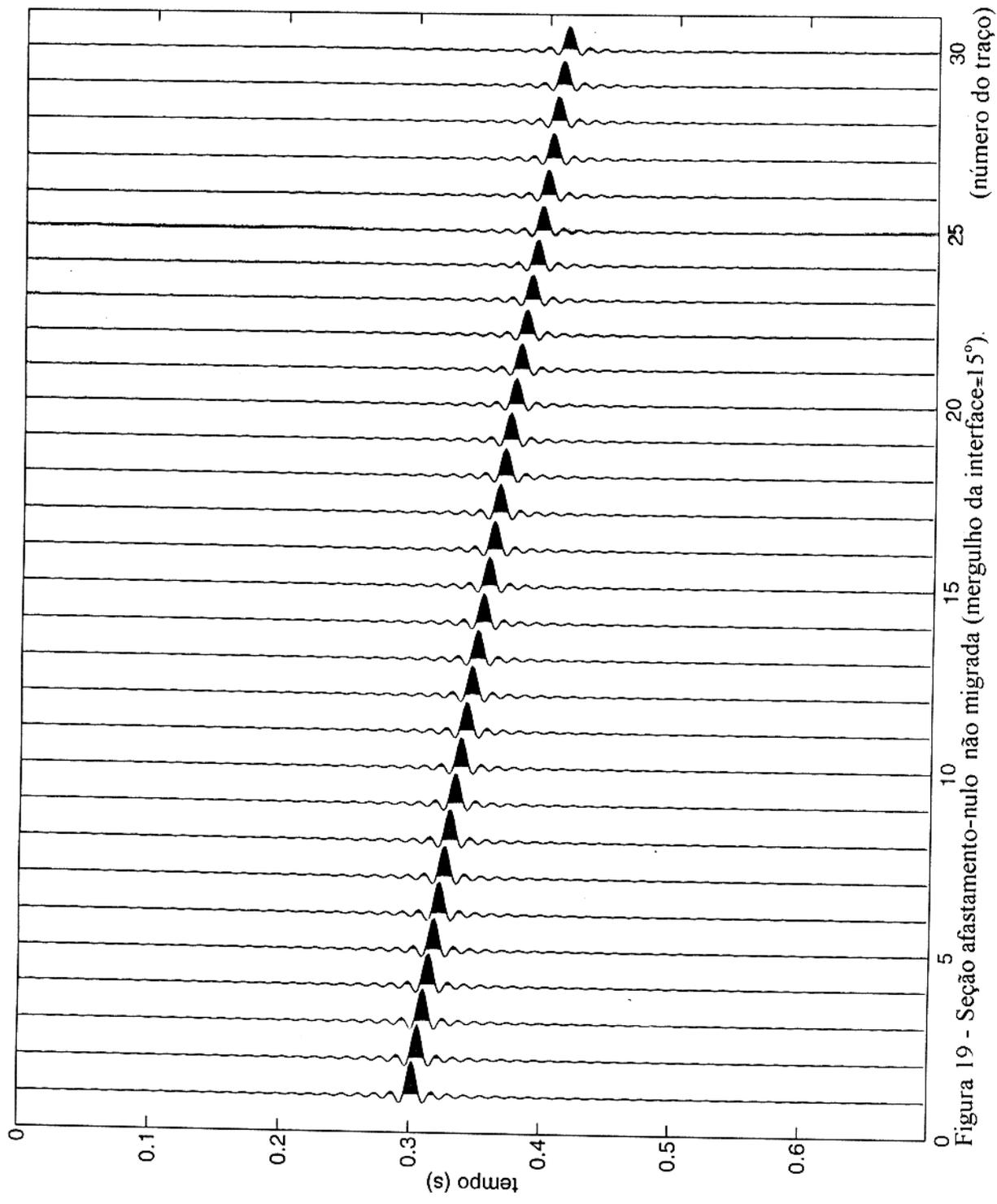


Figura 19 - Seção afastamento-nulo não migrada (mergulho da interface=15°).

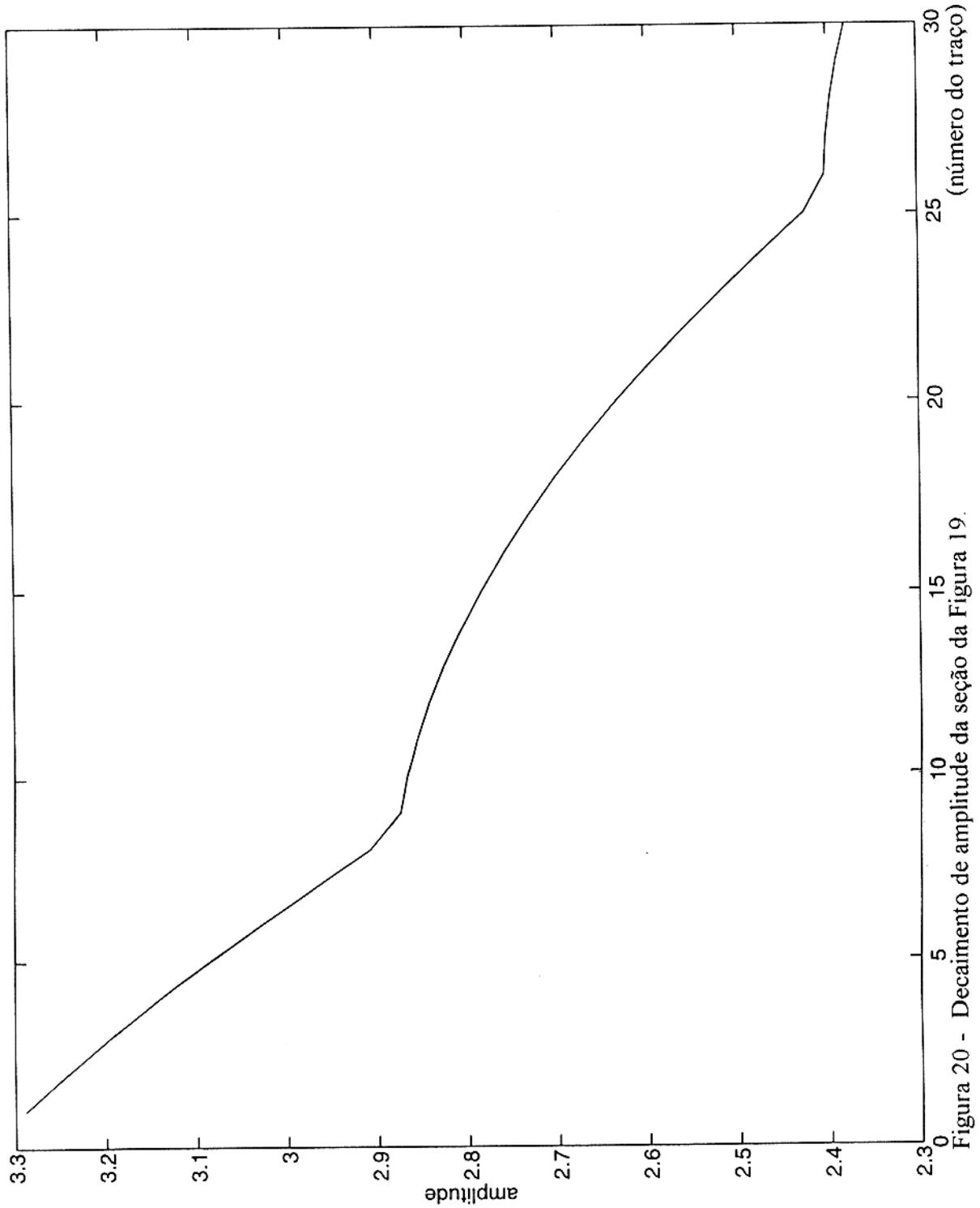


Figura 20 - Decaimento de amplitude da seção da Figura 19.

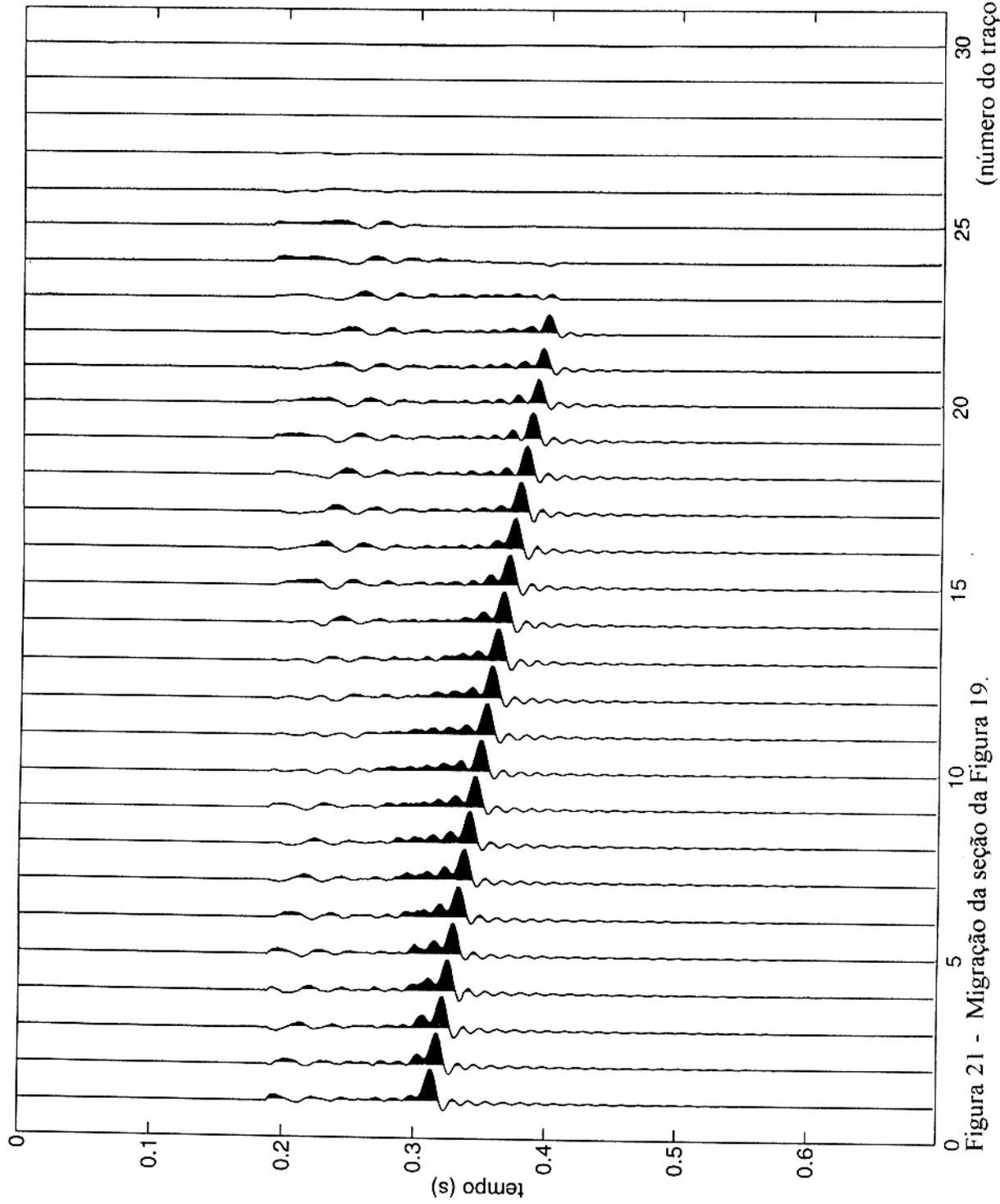


Figura 21 - Migração da seção da Figura 19.

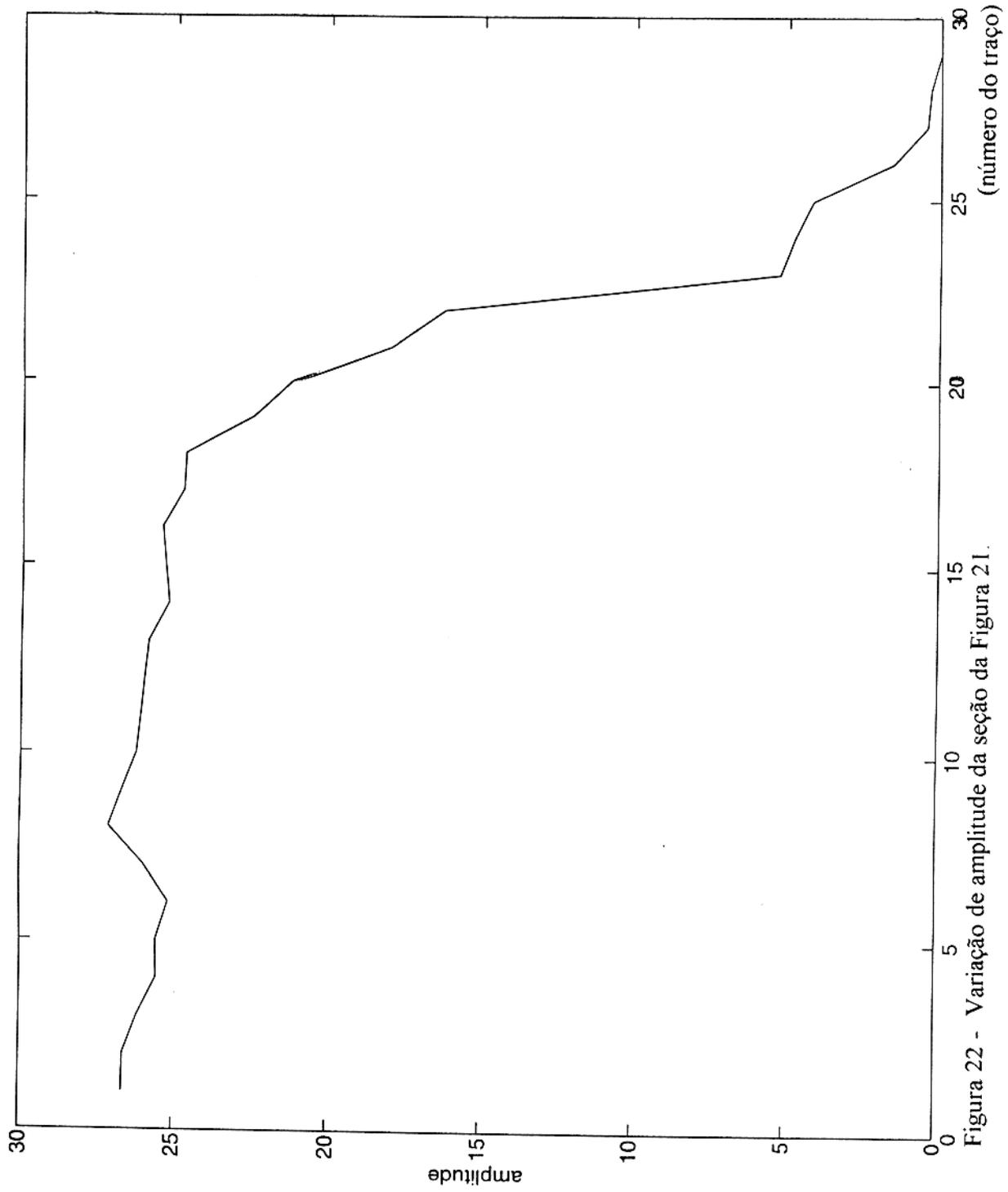


Figura 22 - Variação de amplitude da seção da Figura 21.

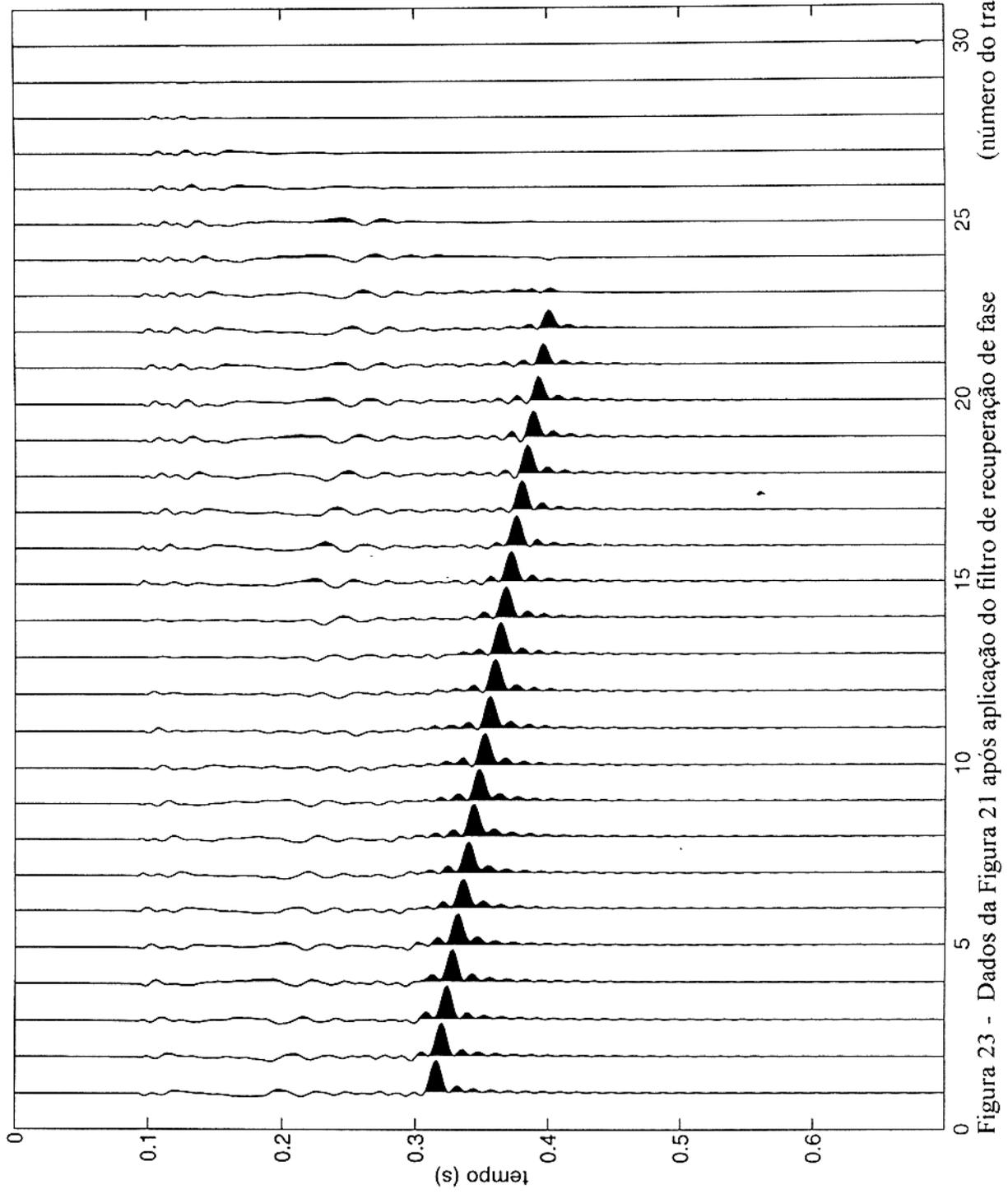


Figura 23 - Dados da Figura 21 após aplicação do filtro de recuperação de fase

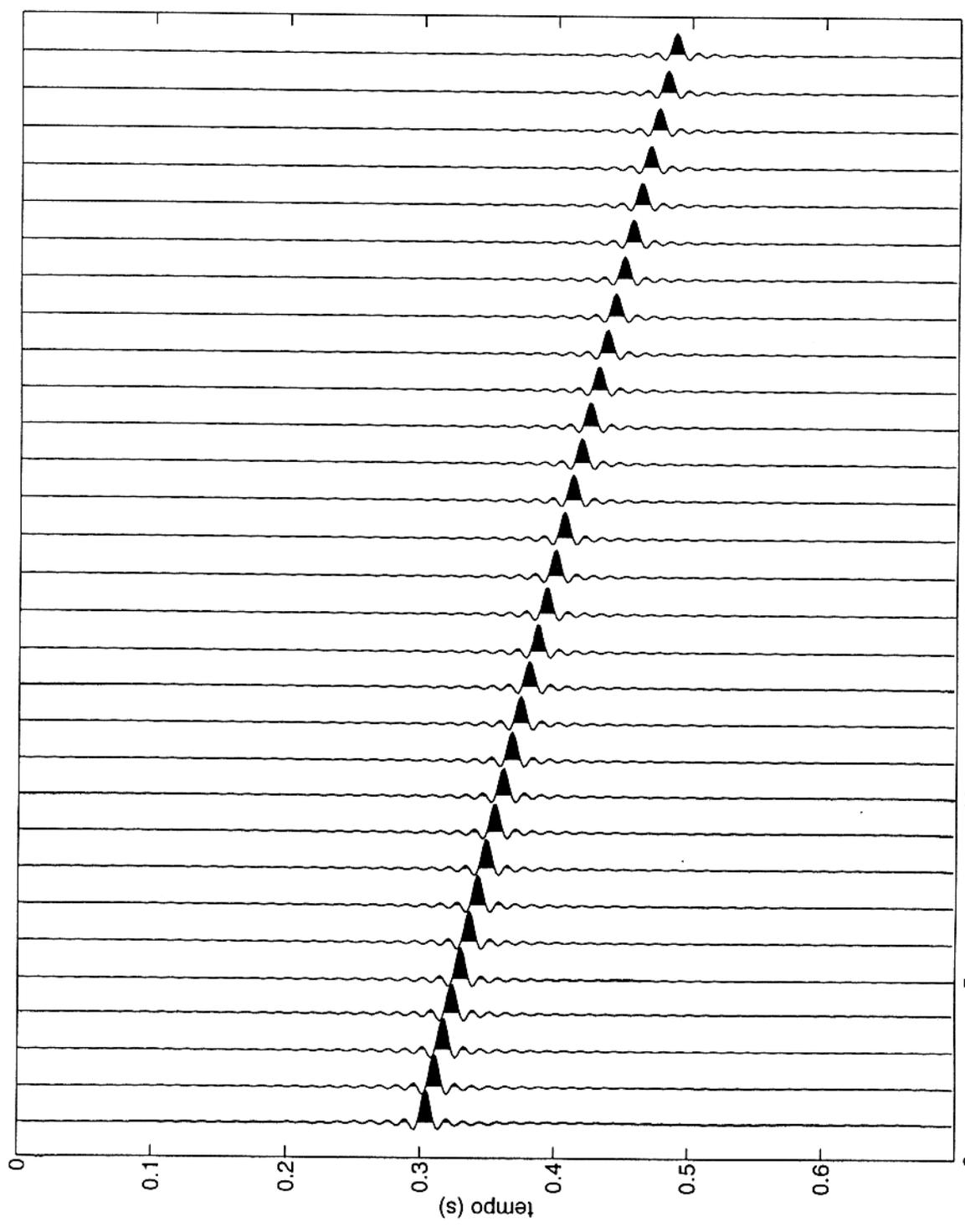


Figura 24 - Seção afastamento-nulo não migrada (mergulho da interface=25°).

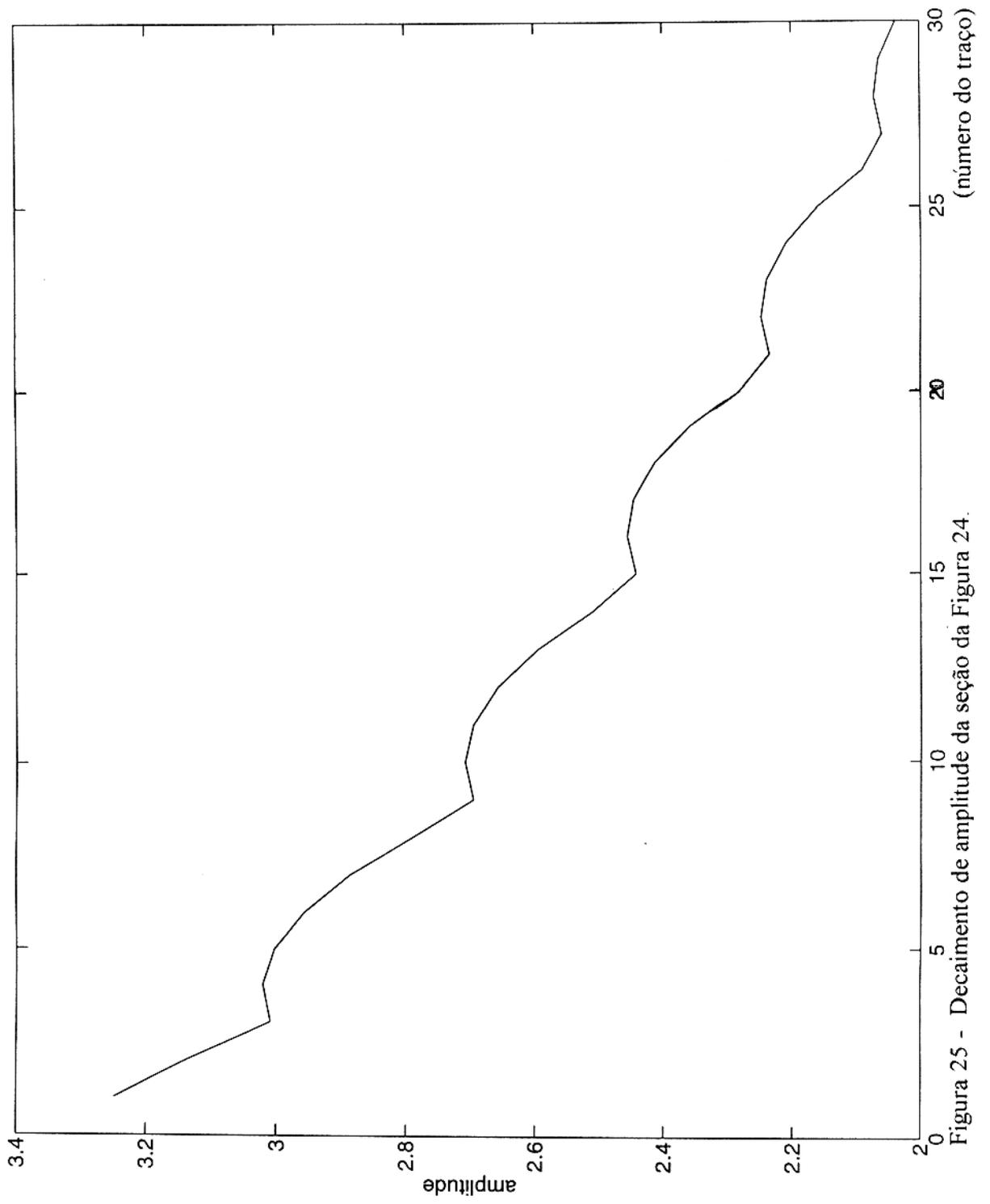


Figura 25 - Decaimento de amplitude da seção da Figura 24.

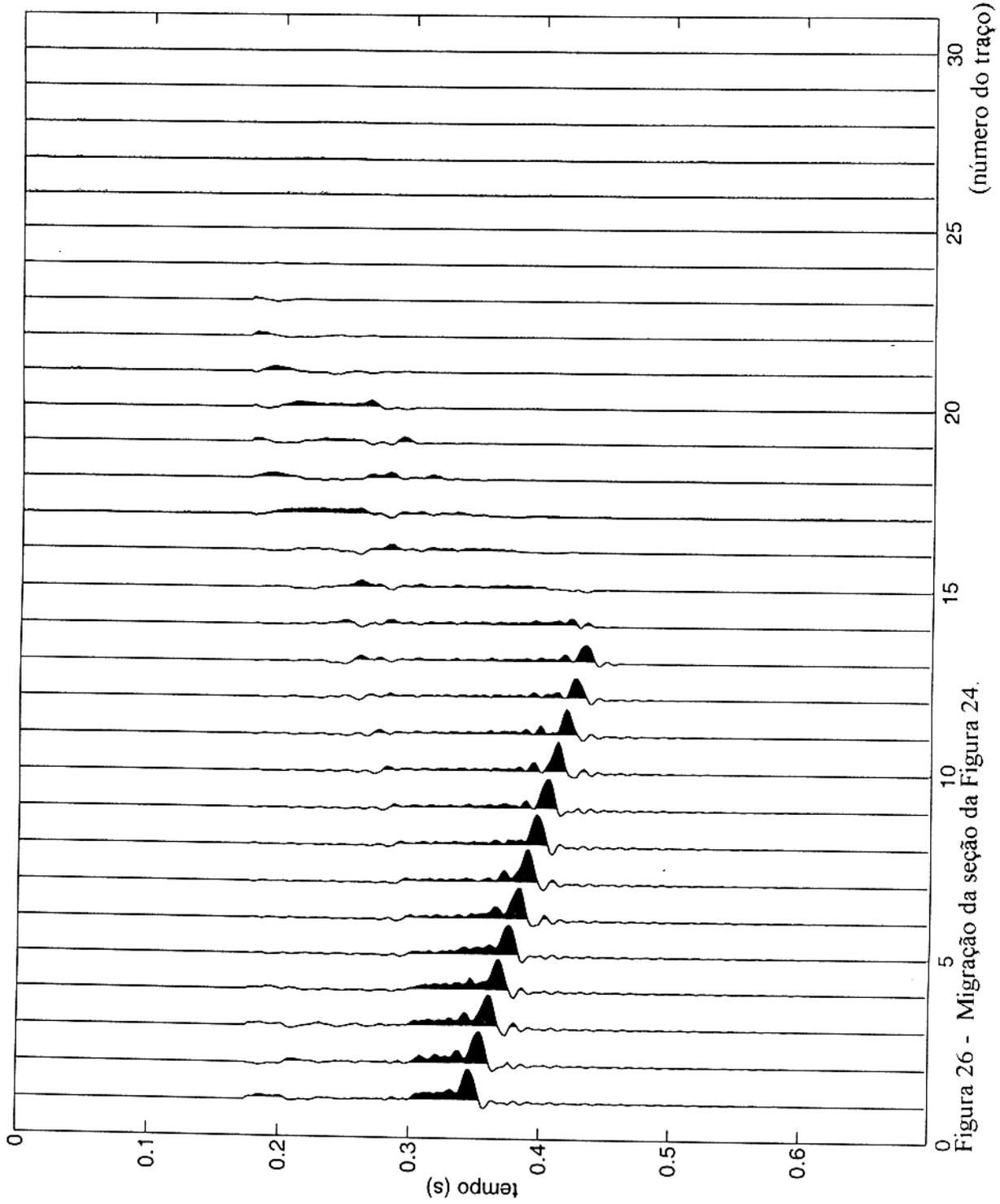


Figura 26 - Migração da seção da Figura 24.

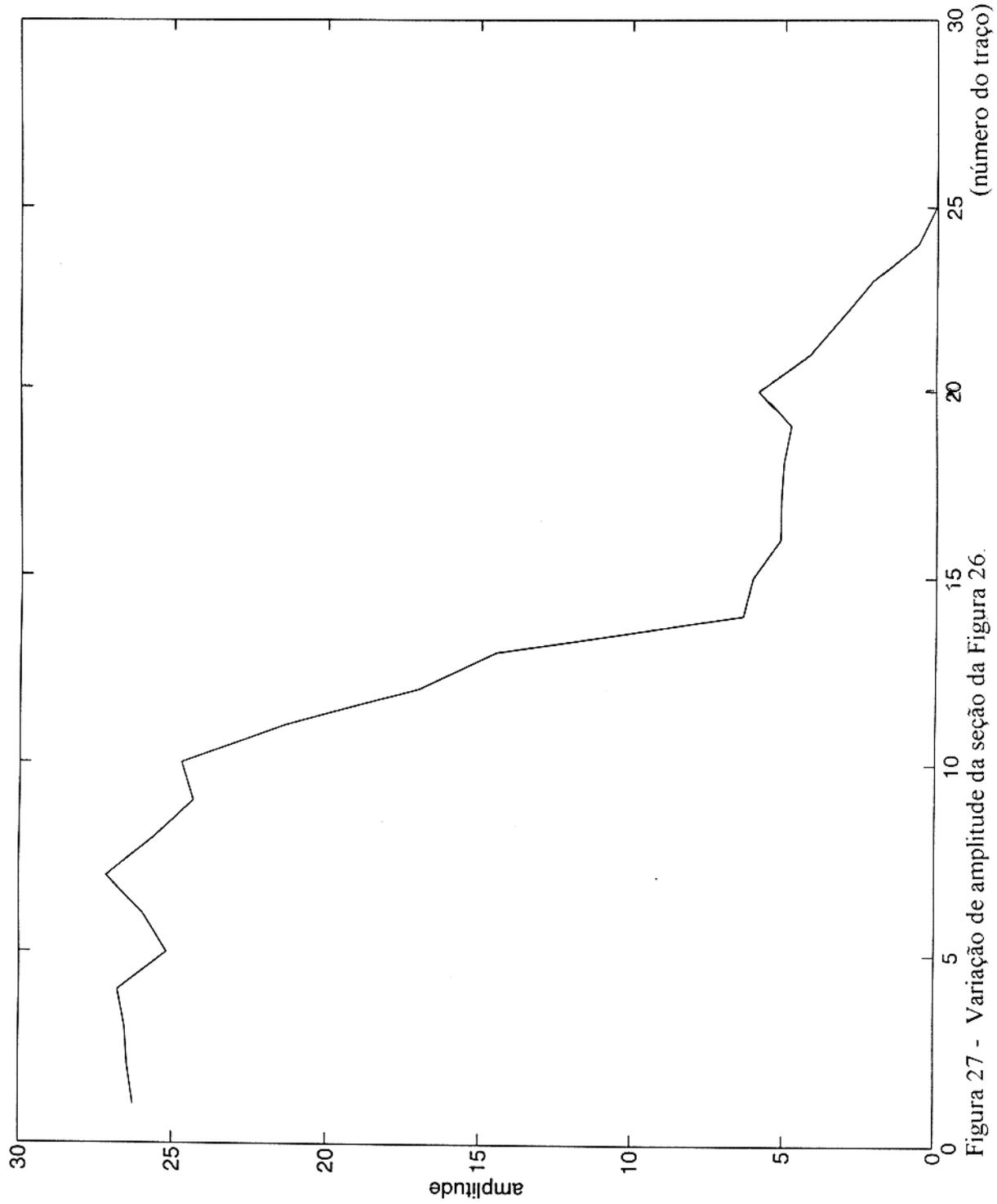


Figura 27 - Variação de amplitude da seção da Figura 26.

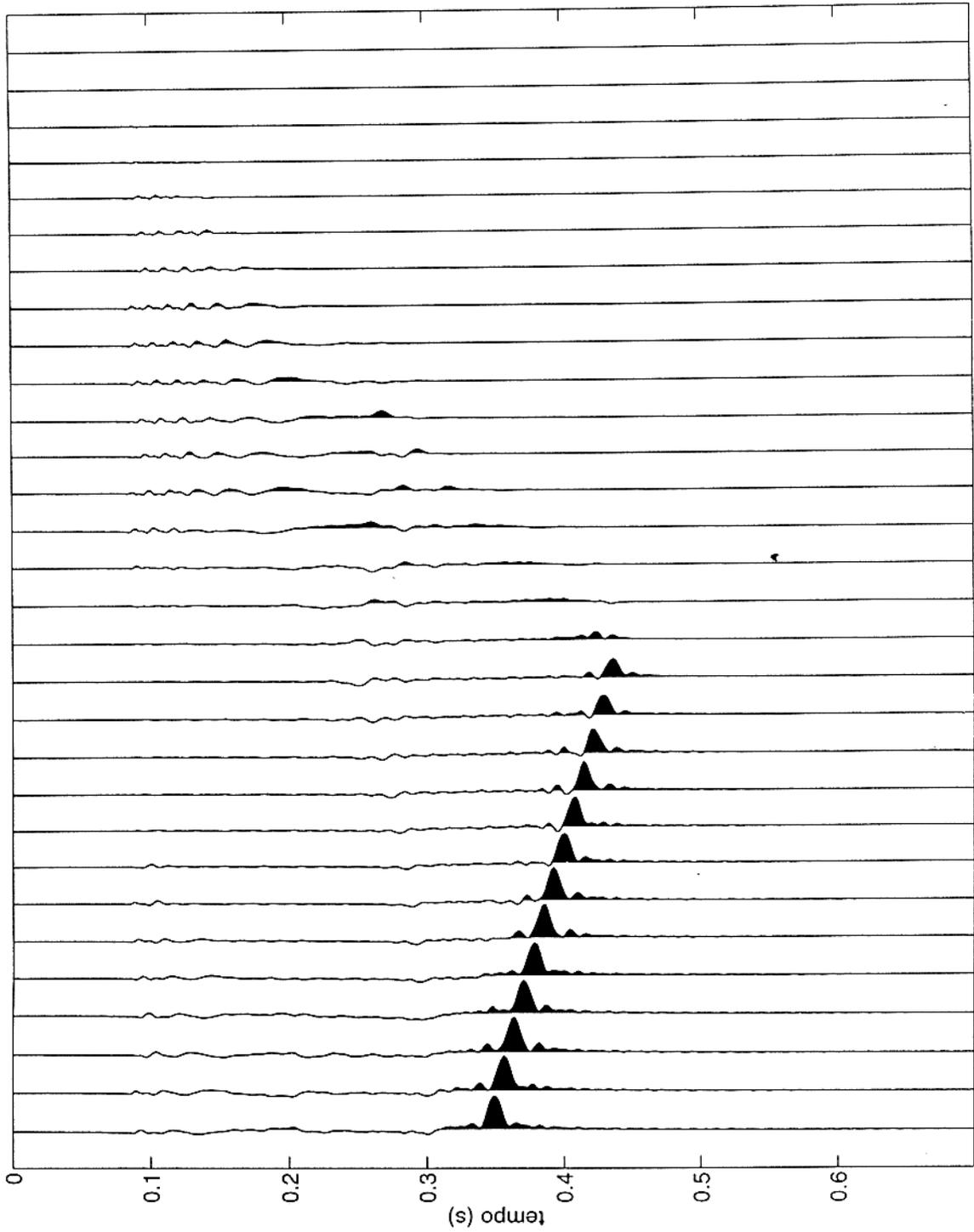


Figura 28 - Dados da Figura 26 após aplicação do filtro de recuperação de fase

5.2 - RELAÇÃO ENTRE OS MERGULHOS DO MODELO, DA SEÇÃO AFASTAMENTO NULO NÃO MIGRADA E DA SEÇÃO MIGRADA

Com os resultados obtidos pode-se demonstrar que eles estão coerentes com o que era esperado. Uma das maneiras é utilizar as equações (5.1) e (5.2), obtidas através da Figura 29,

$$dt / dx = 2 \operatorname{sen} \beta / v \quad (5.1)$$

para a seção não migrada e

$$dt / dx = 2 \operatorname{tg} \beta / v \quad (5.2)$$

para a seção migrada. A aplicação destas equações fornece o ângulo de mergulho do modelo utilizado para se fazer a migração. Assim, aplicando estas equações nas Figuras 19 e 21, se obtém como resultado $\beta = 15.135^\circ$ a partir da seção não migrada, e $\beta = 15.72^\circ$ a partir da seção migrada, ou seja, o ângulo obtido através destas seções está muito próximo do modelo de entrada, como era de se esperar.

A equação

$$\operatorname{sen} \beta = \operatorname{tg} \alpha, \quad (5.3)$$

onde β é o mergulho verdadeiro e α é o mergulho aparente (ver Figura 2), dá a relação entre mergulho aparente (seção não migrada) e mergulho real (seção migrada), ou seja, para que isto aconteça é necessário que α seja um arco menor que β , isto é, que o mergulho da seção não migrada seja menor que o da seção migrada. Isto é verificado neste processo através do uso destas equações, onde se obteve $\operatorname{tg} \alpha = 0.2611$, a partir da seção não migrada e $\operatorname{sen} \beta = 0.2709$, a partir da seção migrada, ou seja, seus valores são, aproximadamente, iguais, confirmando a coerência do processo.

Quando se usa as relações (5.1) e (5.2) para ângulos maiores, nota-se que o ângulo do modelo calculado a partir da seção migrada já não é tão próximo do valor do ângulo do modelo original. No caso de um ângulo de 25° obtivemos $\beta = 25.2562^\circ$ a partir da seção não migrada e

$\beta = 26.73^\circ$ a partir da seção migrada. Daí se conclui que quanto maior o ângulo de mergulho, maior o erro no cálculo do ângulo do modelo calculado a partir da seção não migrada. Isto acontece porque se está trabalhando com aproximações de segunda ordem.

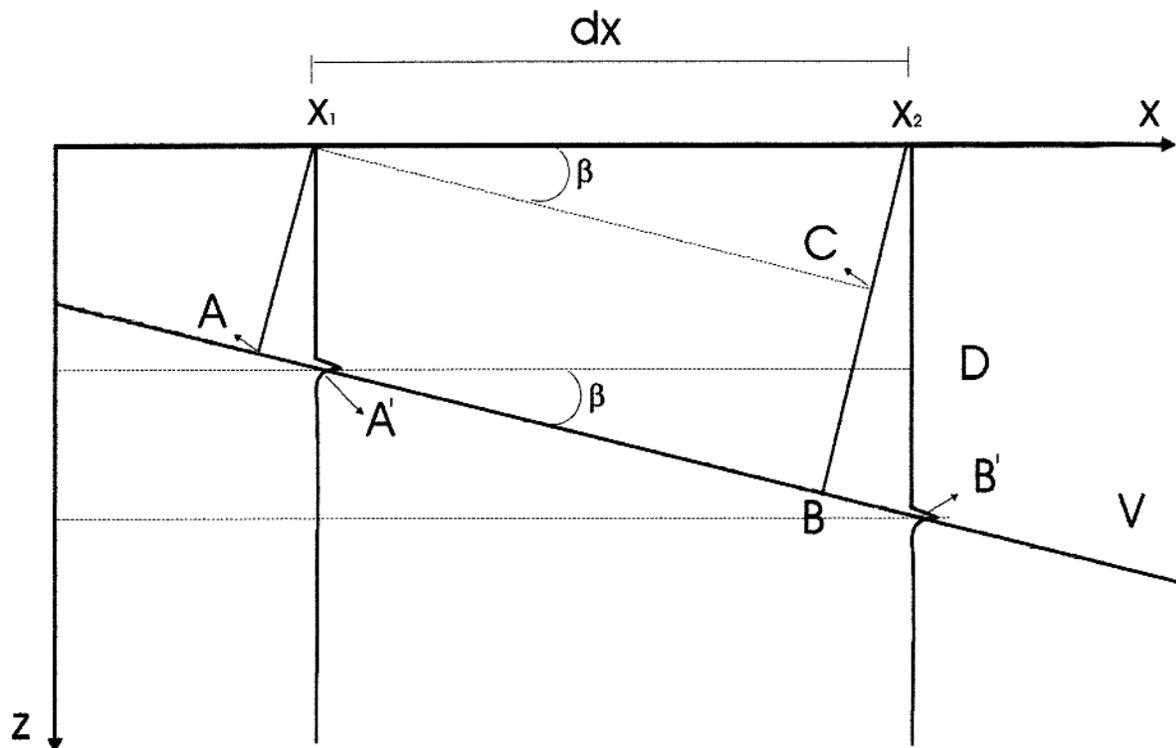


Figura 29 - Modelo utilizado para obtenção das equações (5.1) e (5.2). Os segmentos $\overline{X_1A}$ e $\overline{X_2B}$ são consideradas raios normais e são utilizadas para calcular os tempos da seção não migrada e os segmentos $\overline{X_1A'}$ e $\overline{X_2B'}$ são utilizados para calcular os tempos da seção migrada.

6 - CONCLUSÕES

O processo de migração 3 D no domínio do tempo aqui apresentado, usando a teoria dos raios paraxiais, mostra que não é necessário que se conheça o modelo de velocidades para se fazer a migração. Contudo, é necessário que se conheça a velocidade da primeira camada (v_0) e os demais parâmetros, nos quais, implicitamente, está embutido o modelo de velocidades.

Com este processo recupera-se a amplitude verdadeira através da eliminação do espalhamento geométrico. Isto tudo é possível, porque através dos parâmetros obtidos a partir de pelo menos nove traços, pré-empilhados, pode-se determinar o espalhamento geométrico, além de se poder construir corretamente a função difração.

Os resultados obtidos com o modelo utilizado mostram a eficiência do método e que se tendo os parâmetros bem determinados, ter-se-á mais uma opção para se fazer a migração em dados empilhados de maneira mais correta, pois nas migrações nas quais se usa o modelo de velocidade para se construir a curva de difração e conseqüentemente se fazer a migração, a construção desta curva pode não estar correta se o modelo de velocidades também não estiver correto, o que é o mais provável de acontecer se não for usado um método de cálculo de velocidade bem apurado. Neste sentido a migração proposta neste trabalho, por não utilizar modelo de velocidades, leva grande vantagem sobre os métodos convencionais utilizados hoje quando for aplicada à dados reais.

Com o objetivo de se mostrar a funcionalidade do método, aplicou-se a teoria em um modelo simplificado de uma camada plana com velocidade constante, com a qual obteve-se resultados satisfatórios. Sugere-se, contudo, para trabalhos futuros, que esta teoria seja também aplicada em modelos de refletores curvos soterrados em um meio com velocidade variando lateralmente.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BORTFELD, R., 1989. Geometrical ray theory: Rays and traveltimes in seismic systems (second order approximations of the traveltimes). **Geophysics**, 54: p.342-349.
- BORTFELD, R. & KIEHN, M., 1992. Reflection amplitudes and migration amplitudes (zero offset situation). **Geophys. Prosp.**, 40: 873 - 884.
- CERVENÝ, V., 1985. The application of ray tracing to the numerical modeling of seismic wavefields in complex structures. In: DOHR, G.(Ed) **Seismic shear waves**,: Theory, London, Geophysical Press. Part A, p. 1-124. (Handbook of Geophysical Exploration, 15).
- CLAERBOUT, J. F., 1985. **Fundamentals of geophysical data processing**, USA, Canada and Australia, Blackwell.
- HAGEDOORN, J. G., 1954. A process of seismic reflection interpretation: **Geophys. Prosp.**, 2: 85-127.
- HATTON, L., WORTHINGTON, M. H.; MAKIN, J., 1994. **Seismic data processing -theory and practice**, Oxford, Blackwell.
- HUBRAL, P., 1977. Time migration - Some ray theoretical aspects: **Geophys. Prosp.**, 25: 738 - 745.
- HUBRAL, P., 1983. Computing time amplitude reflections in a laterally inhomogeneous earth: **Geophysics**, 48: 1051-1062.
- HUBRAL, P. & KREY, T., 1980. **Intreval velocities from seismic reflection time measurements**: Soc. Expl. Geophys. Monograph.
- KHAN, S.V., 1987. **Die Aufdeckung der Mehrdeutigkeiten in der Deflexionseismik**, Phd thesis TU Clausthal.
- MONTES, L. A., 1998. **Determinação das velocidades intervalares pela teoria do raio paraxial: Aproximação de segunda ordem dos tempos de trânsito**. Belém, Universidade Federal do Pará - Centro de Geociências (Tese de Doutorado) (no prelo).
- MONTES, L. & SÖLLNER, W. , 1997. Interval velocity determination by time migration decomposition: A synthetic data application. In: CONG. INT. SOC. BRAS. GEOF., 5, São Paulo, 1997. **Resumos expandidos**. São Paulo, SBGf. 2v.

- O'DOHERTY, R. F. & ANSTEY, N. A., 1971. Reflections on amplitudes, **Geophysical Prospecting**, 19: 430.
- SCHLEICHER, J.; TYGEL, M.; HUBRAL, P., 1993. 3-D true-amplitude finite-offset migration: **Geophysics**, 58, (8):1112 - 1126.
- SHERIFF, R.E. & GELDARD, L. P., 1985. **Exploration seismology**, Cambridge, Cambridge University, 2v.
- SÖLLNER, W., 1996. Time migration decomposition: a tool for velocity determination. 66th. International SEG meeting.
- TAVARES, I.C., 1998. **Análise de parâmetros da função característica de Hamilton**. Belém, Universidade Federal do Pará - Centro de Geociências (Tese de Mestrado).
- TAVARES, I.C. & SÖLLNER, W., 1997. Determinação da função característica de Hamilton: aplicação da correção dinâmica. In: CONG. INT. SOC. BRAS. GEOF., 5, São Paulo, 1997. **Resumos expandidos**. São Paulo, SBGf. 2v.

APÊNDICES

APÊNDICE A

Neste apêndice são demonstradas as equações (3.3) e (3.4) abaixo:

$$\mathbf{x}' = (\mathbf{A}_0 - \mathbf{B}_0 \mathbf{D}_0^{-1} \mathbf{C}_0) \frac{1}{2} (\mathbf{x}_g + \mathbf{x}_s), \quad (3.3)$$

$$\mathbf{p}' = (-\mathbf{C}_0 + \mathbf{D}_0 \mathbf{B}_0^{-1} \mathbf{A}_0) \frac{1}{2} (\mathbf{x}_g - \mathbf{x}_s), \quad (3.4)$$

partindo das aproximações de primeira ordem seguintes:

$$\mathbf{x}'_s = \mathbf{A}_0 \mathbf{x}_s + \mathbf{B}_0 (\mathbf{p}_s - \mathbf{p}_0), \quad (A3.1)$$

$$\mathbf{p}'_s = \mathbf{C}_0 \mathbf{x}_s + \mathbf{D}_0 (\mathbf{p}_s - \mathbf{p}_0), \quad (A3.2)$$

$$\mathbf{x}'_g = \mathbf{A}_0 \mathbf{x}_g + \mathbf{B}_0 (\mathbf{p}_g - \mathbf{p}_0), \quad (A3.3)$$

e

$$\mathbf{p}'_g = \mathbf{C}_0 \mathbf{x}_g + \mathbf{D}_0 (\mathbf{p}_g - \mathbf{p}_0). \quad (A3.4)$$

O índice s corresponde a posição da fonte e o índice g corresponde a posição do receptor.

Considerando que

$$\mathbf{x}'_g = \mathbf{x}'_s \quad (A3.5)$$

e

$$-\mathbf{p}'_g = \mathbf{p}'_s. \quad (A3.6)$$

Para a demonstração das equações (3.3) e (3.4), o primeiro passo é multiplicar as equações

(A3.1) por $-\frac{1}{2}$ e (A3.3) por $\frac{1}{2}$ para se obter:

$$-\mathbf{x}'_s \frac{1}{2} = -(\mathbf{A}_0 \mathbf{x}_s) \frac{1}{2} + \mathbf{B}_0 (\mathbf{p}_s - \mathbf{p}_0) - \frac{1}{2} \quad (A3.7)$$

e

$$\mathbf{x}'_g \frac{1}{2} = (\mathbf{A}_0 \mathbf{x}_g) \frac{1}{2} + \mathbf{B}_0 (\mathbf{p}_g - \mathbf{p}_0) \frac{1}{2}. \quad (\text{A3.8})$$

Somando as duas equações acima, se obtém

$$(\mathbf{p}_g - \mathbf{p}_s) \frac{1}{2} = -\mathbf{B}_0^{-1} \mathbf{A}_0 \frac{1}{2} (\mathbf{x}_g - \mathbf{x}_s). \quad (\text{A3.9})$$

O passo seguinte é multiplicar \mathbf{p}'_s e \mathbf{p}'_g por $\frac{1}{2}$ para se obter:

$$\frac{1}{2} \mathbf{p}'_s = \frac{1}{2} \mathbf{C}_0 \mathbf{x}_s + \frac{1}{2} \mathbf{D}_0 (\mathbf{p}_s - \mathbf{p}_0) \quad (\text{A3.10})$$

e

$$\frac{1}{2} \mathbf{p}'_g = \frac{1}{2} \mathbf{C}_0 \mathbf{x}_g + \frac{1}{2} \mathbf{D}_0 (\mathbf{p}_g - \mathbf{p}_0). \quad (\text{A3.11})$$

Como definido acima $-\mathbf{p}'_g = \mathbf{p}'_s$, então se tem que

$$-\frac{1}{2} \mathbf{C}_0 \mathbf{x}_g - \frac{1}{2} \mathbf{D}_0 (\mathbf{p}_g - \mathbf{p}_0) = \frac{1}{2} \mathbf{C}_0 \mathbf{x}_s + \frac{1}{2} \mathbf{D}_0 (\mathbf{p}_s - \mathbf{p}_0), \quad (\text{A3.12})$$

onde o lado esquerdo da igualdade corresponde a $-\mathbf{p}'_g \frac{1}{2}$. Após as operações matemáticas se obtém

$$\frac{1}{2} (\mathbf{p}_g + \mathbf{p}_s - 2\mathbf{p}_0) = -\mathbf{D}_0^{-1} \mathbf{C}_0 \frac{1}{2} (\mathbf{x}_g + \mathbf{x}_s). \quad (\text{A3.13})$$

Fazendo as operações no lado esquerdo da equação acima, e chamando $\frac{1}{2}(\mathbf{p}_g + \mathbf{p}_s) = \mathbf{p}$ se obtém

$$\frac{1}{2}(\mathbf{p}_g + \mathbf{p}_s - 2\mathbf{p}_0) = \mathbf{p} - \mathbf{p}_0 = -\mathbf{D}_0^{-1} \mathbf{C}_0 \frac{1}{2}(\mathbf{x}_g + \mathbf{x}_s). \quad (\text{A3.14})$$

Substituindo este fator na equação (A3.1) se obtém como resultado a equação (3.3) abaixo, reproduzida como (A3.15)

$$\mathbf{x}' = (\mathbf{A}_0 - \mathbf{B}_0 \mathbf{D}_0^{-1} \mathbf{C}_0) \frac{1}{2}(\mathbf{x}_g + \mathbf{x}_s). \quad (\text{A3.15})$$

Com isto fica deduzida a equação (3.3).

Em seguida vai-se demonstrar a equação (3.4). De forma semelhante a dedução da equação (3.3), multiplica-se a equação (A3.2) por $-\frac{1}{2}$ e (A3.4) por $\frac{1}{2}$ para se obter

$$\frac{1}{2}\mathbf{p}'_g = \frac{1}{2}\mathbf{C}_0 \mathbf{x}_g + \frac{1}{2}\mathbf{D}_0(\mathbf{p}_g - \mathbf{p}_0) \quad (\text{A3.16})$$

e

$$-\frac{1}{2}\mathbf{p}'_s = -\frac{1}{2}\mathbf{C}_0 \mathbf{x}_s - \frac{1}{2}\mathbf{D}_0(\mathbf{p}_s - \mathbf{p}_0). \quad (\text{A3.17})$$

A adição de (A3.16) e (A3.17) resulta em

$$\frac{1}{2}(\mathbf{p}'_g - \mathbf{p}'_s) = \mathbf{C}_0 \frac{1}{2}(\mathbf{x}_g - \mathbf{x}_s) + \mathbf{D}_0 \frac{1}{2}(\mathbf{p}_g - \mathbf{p}_s). \quad (\text{A3.18})$$

Chamando

$$\frac{1}{2}(\mathbf{p}'_g - \mathbf{p}'_s) = \mathbf{p}', \quad (\text{A3.19})$$

e usando (A3.9), se tem que

$$\mathbf{p}' = \left(-\mathbf{C}_0 + \mathbf{D}_0 \mathbf{B}^{-1}_0 \mathbf{A}_0 \right) \frac{1}{2} (\mathbf{x}_g - \mathbf{x}_s). \quad (\text{A3.20})$$

Com isto está completa a dedução da equação (3.4)

APÊNDICE B

Neste apêndice é demonstrado a propriedade simplética da matriz transferência \mathbf{T} e a dedução das equações (3.36) e (3.17).

B1- DEMONSTRAÇÃO DA PROPRIEDADE SIMPLÉTICA DA MATRIZ TRANSFERÊNCIA

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_0 & \mathbf{B}_0 \\ \mathbf{C}_0 & \mathbf{D}_0 \end{pmatrix} \quad (\text{B3.1})$$

Aqui vai-se provar que a inversa de \mathbf{T} pode ser obtida usando a transposta de cada um dos seus elementos, trocando a posição dos elementos da diagonal principal, permanecendo com o sinal e trocando a posição dos elementos da diagonal secundária, invertendo o sinal destes elementos como é dado na equação (B3.4).

A partir de BORTFELD (1989) se tem que

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}' \\ \mathbf{p}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_0 & \mathbf{B}_0 \\ \mathbf{C}_0 & \mathbf{D}_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{p}_s - \mathbf{p}_0 \end{pmatrix}, \quad (\text{B3.2})$$

cuja solução é dada através da inversa de \mathbf{T} representada de forma geral por

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{p}_s - \mathbf{p}_0 \end{pmatrix} = \mathbf{T}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{x}' \\ \mathbf{p}' \end{pmatrix}, \quad (\text{B3.3})$$

onde

$$\mathbf{T}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{D}_0^T & -\mathbf{B}_0^T \\ -\mathbf{C}_0^T & \mathbf{A}_0^T \end{pmatrix}, \quad (\text{B3.4})$$

que é o que se quer provar, ou seja, que a matriz \mathbf{T} multiplicada por sua simplética dá a identidade. Desta maneira se tem que

$$\begin{pmatrix} \mathbf{D}_0^T & -\mathbf{B}_0^T \\ -\mathbf{C}_0^T & \mathbf{A}_0^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{A}_0 & \mathbf{B}_0 \\ \mathbf{C}_0 & \mathbf{D}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix}. \quad (\text{B3.5})$$

A partir de (B3.5), pela multiplicação no lado esquerdo, se obtém que

$$\mathbf{A}_0^T \mathbf{C}_0 = \mathbf{C}_0^T \mathbf{A}_0, \quad (\text{B3.6})$$

$$\mathbf{B}_0^T \mathbf{D}_0 = \mathbf{D}_0^T \mathbf{B}_0, \quad (\text{B3.8})$$

$$\mathbf{C}_0^T \mathbf{B}_0 = \mathbf{A}_0^T \mathbf{D}_0 - \mathbf{I} \quad (\text{B3.9})$$

e

$$\mathbf{D}_0^T \mathbf{A}_0 = \mathbf{I} - \mathbf{B}_0 \mathbf{C}_0^T, \quad (\text{B3.10})$$

Esta relação pode ser provada partindo da equação de Hamilton (B3.11) para raios transmitidos, segundo BORTFELD (1989)

$$dt = \mathbf{p}' dx' - \mathbf{p} dx, \quad (\text{B3.11})$$

onde

$$\mathbf{p}'_s = \mathbf{C}_0 \mathbf{x}_s + \mathbf{D}_0 (\mathbf{p}_s - \mathbf{p}_0) \quad (\text{B3.12})$$

e

$$d\mathbf{x}' = \mathbf{A}_0 d\mathbf{x} + \mathbf{B}_0 d\mathbf{p}. \quad (\text{B3.13})$$

Substituindo estas relações na equação (B2.11), se tem que

$$dt = \left[(\mathbf{C}_0 \mathbf{x}_s + \mathbf{D}_0 (\mathbf{p}_s - \mathbf{p}_0)) (\mathbf{A}_0 d\mathbf{x} + \mathbf{B}_0 d\mathbf{p}) \right] - \mathbf{p} d\mathbf{x}. \quad (\text{B3.14})$$

Fazendo a derivada parcial em relação a \mathbf{x} se tem que

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \\ \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}} \end{pmatrix} = \mathbf{A}_0^T \mathbf{C}_0 \mathbf{x} + \mathbf{A}_0^T \mathbf{D}_0 (\mathbf{p} - \mathbf{p}_0) - \mathbf{p}. \quad (\text{B3.15})$$

Derivando a equação (B3.14) em relação a \mathbf{p} se tem que

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \\ \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \end{pmatrix} = \mathbf{B}_0^T \mathbf{C}_0 \mathbf{x} + \mathbf{B}_0^T \mathbf{D}_0 (\mathbf{p} - \mathbf{p}_0). \quad (\text{B3.16})$$

Derivando a equação (B3.15) em relação a \mathbf{x} se tem a seguinte estrutura:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 t}{\partial \mathbf{x}^2} & \frac{\partial^2 t}{\partial \mathbf{x} \partial \mathbf{y}} \\ \frac{\partial^2 t}{\partial \mathbf{y} \partial \mathbf{x}} & \frac{\partial^2 t}{\partial \mathbf{y}^2} \end{pmatrix} = \mathbf{A}_0^T \mathbf{C}_0 = \mathbf{C}_0^T \mathbf{A}_0. \quad (\text{B3.17})$$

Derivando a equação (B3.16) em relação a \mathbf{p} se tem a matriz

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 t}{\partial p^2} & \frac{\partial^2 t}{\partial p \partial q} \\ \frac{\partial^2 t}{\partial q \partial p} & \frac{\partial^2 t}{\partial q^2} \end{pmatrix} = \mathbf{B}^T \mathbf{D}_0 = \mathbf{D}^T \mathbf{B}_0. \quad (\text{B3.18})$$

Derivando a equação (B3.15) em relação a \mathbf{p} se tem a matriz

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 t}{\partial x \partial p} & \frac{\partial^2 t}{\partial x \partial q} \\ \frac{\partial^2 t}{\partial y \partial p} & \frac{\partial^2 t}{\partial y \partial q} \end{pmatrix} = \mathbf{A}^T \mathbf{D}_0 - \mathbf{I} \quad (\text{B3.19})$$

e

Derivando a equação (B3.16) em relação a \mathbf{x} se tem a matriz

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 t}{\partial p \partial x} & \frac{\partial^2 t}{\partial p \partial y} \\ \frac{\partial^2 t}{\partial q \partial x} & \frac{\partial^2 t}{\partial q \partial y} \end{pmatrix} = \mathbf{B}^T \mathbf{C}_0. \quad (\text{B3.20})$$

Pode-se perceber que (B3.19) é a simétrica de (B3.20) e

$$\mathbf{C}^T \mathbf{B}_0 = \mathbf{A}^T \mathbf{D}_0 - \mathbf{I}. \quad (\text{B3.21})$$

Com isto fica provada a propriedade simplética da matriz transferência \mathbf{T} .

B2 -DEDUÇÃO DA EQUAÇÃO (3.36).

$$\mathbf{C}_0 - \mathbf{D}_0 \mathbf{B}_0^{-1} \mathbf{A}_0 = -(\mathbf{B}_0^{-1})^T. \quad (3.36)$$

Esta equação servirá de ponto de partida para a demonstração da equação (3.38), a qual será utilizada na equação do espalhamento geométrico (3.40) para raios refletidos. Partiria-se novamente da equação de Hamilton, segundo BORTFELD (1989),

$$dt = \mathbf{p}' d\mathbf{x}' - \mathbf{p} d\mathbf{x} \quad (B3.22)$$

e das já conhecidas equações (B3.23) e (B3.24):

$$\mathbf{p}'_s = \mathbf{C}_0 \mathbf{x}_s + \mathbf{D}_0 (\mathbf{p}_s - \mathbf{p}_0) \quad (B3.23)$$

e

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}_0 \mathbf{x} + \mathbf{B}_0 (\mathbf{p} - \mathbf{p}_0). \quad (B3.24)$$

Multiplica-se \mathbf{x}' à esquerda por \mathbf{B}_0^{-1} e se tem que

$$\mathbf{B}_0^{-1} \mathbf{x}' - \mathbf{B}_0^{-1} \mathbf{A}_0 \mathbf{x} = \mathbf{p} - \mathbf{p}_0. \quad (B3.25)$$

Desta forma a equação (B3.22) é escrita como

$$dt = [\mathbf{C}_0 \mathbf{x} + \mathbf{D}_0 (\mathbf{B}_0^{-1} \mathbf{x}' - \mathbf{B}_0^{-1} \mathbf{A}_0 \mathbf{x})] d\mathbf{x}' - [\mathbf{p}_0 + (\mathbf{B}_0^{-1} \mathbf{x}' - \mathbf{B}_0^{-1} \mathbf{A}_0 \mathbf{x})] d\mathbf{x}. \quad (B3.26)$$

Se ela for diferenciada com relação a \mathbf{x} se tem

$$\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right) = -\mathbf{p}_0 - \mathbf{B}_0^{-1} \mathbf{x}' + \mathbf{B}_0^{-1} \mathbf{A}_0 \mathbf{x}, \quad (B3.27)$$

e em relação a \mathbf{x}' se tem

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}'} \\ \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}'} \end{pmatrix} = [\mathbf{C}_0 \mathbf{x} + \mathbf{D}_0 (\mathbf{B}_0^{-1} \mathbf{x}' - \mathbf{B}_0^{-1} \mathbf{A}_0 \mathbf{x})]. \quad (\text{B3.28})$$

Derivando a equação (B3.27) em relação a \mathbf{x}' se tem que

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 t}{\partial \mathbf{x} \partial \mathbf{x}'} & \frac{\partial^2 t}{\partial \mathbf{x} \partial \mathbf{y}'} \\ \frac{\partial^2 t}{\partial \mathbf{y} \partial \mathbf{x}'} & \frac{\partial^2 t}{\partial \mathbf{y} \partial \mathbf{y}'} \end{pmatrix} = -\mathbf{B}_0^{-1}, \quad (\text{B3.29})$$

e derivando a equação (B3.27) em relação a \mathbf{x} se tem

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 t}{\partial \mathbf{x}' \partial \mathbf{x}} & \frac{\partial^2 t}{\partial \mathbf{x}' \partial \mathbf{y}} \\ \frac{\partial^2 t}{\partial \mathbf{y}' \partial \mathbf{x}} & \frac{\partial^2 t}{\partial \mathbf{y}' \partial \mathbf{y}} \end{pmatrix} = \mathbf{C}_0 - \mathbf{D}_0 \mathbf{B}_0^{-1} \mathbf{A}_0. \quad (\text{B3.30})$$

Desta se deduz a equação (3.36) abaixo

$$\mathbf{C}_0 - \mathbf{D}_0 \mathbf{B}_0^{-1} \mathbf{A}_0 = -(\mathbf{B}_0^{-1})^T. \quad (\text{B3.31})$$

B3 -DEDUÇÃO DA EQUAÇÃO (3.17)

Nesta seção é feita a demonstração da equação (3.17) partindo do princípio de que uma área, Q , pode ser obtida pelo produto dois vetores que no caso são compostos dos componentes x' e y' do vetor \mathbf{x}' . Deste princípio se tem que

$$Q = \mathbf{x}' \times \mathbf{y}' = \begin{pmatrix} x' \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x' & 0 & 0 \\ 0 & y' & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{k} (x' y'), \quad (\text{B3.32})$$

onde

$$(x' y') = Q'_T. \quad (\text{B3.33})$$

e Q'_T é a área perpendicular ao raio central para eventos transmitidos.

Tem-se também que

$$\begin{pmatrix} x' \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{B}_0(\mathbf{p}_s - \mathbf{p}_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x'}{\partial p} & 0 \\ \frac{\partial x'}{\partial q} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p - p_0 \\ q - q_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x'}{\partial p} (p - p_0) \\ \frac{\partial x'}{\partial q} (p - p_0) \end{pmatrix}. \quad (\text{B3.34})$$

Seguindo o mesmo princípio do desenvolvimento acima,

$$\begin{pmatrix} 0 \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial y'}{\partial p} (q - q_0) \\ \frac{\partial y'}{\partial q} (q - q_0) \end{pmatrix}. \quad (\text{B3.35})$$

Com isto se pode escrever Q como

$$Q = \begin{pmatrix} x' \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial x'}{\partial p}(p-p_0) & \frac{\partial y'}{\partial q}(q-q_0) & 0 \\ \frac{\partial x'}{\partial q}(p-p_0) & \frac{\partial x'}{\partial p}(q-q_0) & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B3.36})$$

ou ainda como

$$Q = \mathbf{k} \left(\frac{\partial x'}{\partial p}(p-p_0) \frac{\partial y'}{\partial p}(q-q_0) \right) - \mathbf{k} \left(\frac{\partial y'}{\partial q}(q-q_0) \frac{\partial x'}{\partial q}(p-p_0) \right). \quad (\text{B3.37})$$

Colocando \mathbf{k} em evidência se tem

$$Q = \mathbf{k} \left(\frac{\partial x'}{\partial p}(p-p_0) \frac{\partial y'}{\partial p}(q-q_0) - \frac{\partial y'}{\partial q}(q-q_0) \frac{\partial x'}{\partial q}(p-p_0) \right), \quad (\text{B3.38})$$

que ainda pode ser escrita como

$$Q = \begin{pmatrix} x' \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ y' \end{pmatrix} = \mathbf{k} \cdot \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x'}{\partial p} & \frac{\partial y'}{\partial q} \\ \frac{\partial x'}{\partial q} & \frac{\partial y'}{\partial p} \end{pmatrix} (p-p_0)(q-q_0), \quad (\text{B3.39})$$

onde

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial x'}{\partial p} & \frac{\partial y'}{\partial q} \\ \frac{\partial x'}{\partial q} & \frac{\partial y'}{\partial p} \end{pmatrix} = \det(\mathbf{B}_0)$$

e

$$(p - p_0)(q - q_0) = P_{0A}.$$

Desta maneira a equação (B3.39) pode ser escrita como

$$Q = \begin{pmatrix} x' \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ y' \end{pmatrix} = \mathbf{k} \cdot \det(\mathbf{B}_0) P_{0A}, \quad (\text{B3.40})$$

onde

$$\det(\mathbf{B}_0) P_{0A} = Q'. \quad (\text{B3.41})$$

Com o resultado acima esta deduzida a equação (3.17).