



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM GEOFÍSICA

WAGNER ORMANES PALHETA CASTRO

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

MODELAGEM DE ELETORRESISTIVIDADE 2-D A PARTIR DO POTENCIAL
ELÉTRICO SECUNDÁRIO

BELÉM

2013

Wagner Ormanes Palheta Castro

**MODELAGEM DE ELETORRESISTIVIDADE 2-D A PARTIR DO POTENCIAL
ELÉTRICO SECUNDÁRIO**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Geofísica do Instituto de Geociências da Universidade Federal do Pará – UFPA em cumprimento às exigências para a obtenção de grau Mestre em Geofísica.

Área de concentração: Métodos elétrico e eletromagnético.

Orientador: Prof. Dr. Marcos Welby Correa Silva

BELÉM

2013

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da UFPA

Castro, Wagner Ormanes Palheta

Modelagem de eletrorresistividade 2-D a partir do potencial elétrico secundário / Wagner Ormanes Palheta Castro; Orientador: Marcos Welby Correa da Silva - 2013.

Dissertação (mestrado em geofísica) – Universidade Federal do Pará, Instituto de Geociências, Programa de Pós-Graduação em Geofísica, Belém, 2013.

1. Método de elementos finitos. 2. Eletrorresistividade. 3. Potencial secundário. 4. Potencial total. 5. Malhas não estruturadas. 6. Métodos eletromagnéticos. I. Silva, Marcos Welby Correa da, *orient.* II. Universidade Federal do Pará III. Título.

CDD 22º ed.: 620.00151535

Wagner Ormanes Palheta Castro

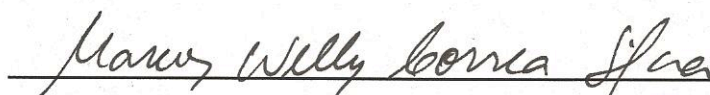
MODELAGEM DE ELETRORRESISTIVIDADE 2-D A PARTIR DO POTENCIAL ELÉTRICO

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Geofísica da Universidade Federal do Pará – UFPA em cumprimento às exigências para a obtenção de grau Mestre em Geofísica.

Data de aprovação: 07/02/2013

Conceito: Bom

Banca examinadora:


Prof. Marcos Welby Correa Silva- Orientador

Doutor em Geofísica

Universidade Federal do Pará


Prof. Victor Cezar Tocantins de Souza – Membro

Doutor em Geofísica

Universidade Federal do Pará


Prof. Frayzer Lima de Almeida – Membro

Doutor em Geofísica

Universidade Federal do Pará

A Deus por ter me concedido mais uma vitória em minha vida.

A meus pais, os grandes responsáveis.

AGRADECIMENTOS

Agradeço em primeiro lugar a Deus.

Aos meus pais, por terem sempre acreditado e investido em mim.

A todos os meus familiares.

A minha grande amiga e esposa, Ediane Santos dos Santos e seus pais.

Ao professor Marcos Welby Correa Silva pela oportunidade, ensinamentos e incentivos.

Aos professores Cícero Roberto Teixeira Régis, José Gouvêia Luiz, Lúcia Maria da Costa e Silva.

A todos os colegas do grupo de Métodos Elétricos e Eletromagnéticos em especial Diego da Costa Miranda, Edelson da Cruz Luz, Edna Machado da Silva, Valdelírio da Silva e Silva, Walleson Gomes dos Santos e Jerry Williamis Lima Alves.

A todos os professores e colegas que de forma direta ou indireta contribuíram para a realização deste trabalho. Por tudo e por todos, obrigado.

“Uma coisa eu aprendi ao longo da vida: que toda nossa ciência, comparada com a realidade, é primitiva e infantil – e, ainda assim, é a coisa mais preciosa que nós temos.”

Albert Einstein

RESUMO

Um dos métodos clássicos da geofísica de exploração é o Método de Eletorresistividade, estabelecido há um século pelos irmãos Schlumberger e desde então amplamente empregado em prospecção mineral, estudos ambientais e hidrogeologia e em pesquisa de fontes geotermiais. Conceitualmente o método consiste de injeção de corrente elétrica na subsuperfície e de medida de diferença de potencial elétrico, resultante da interação da corrente com o meio. As localizações dessas fontes e receptores são determinadas pelo arranjo escolhido para o levantamento. Após o processamento, obtém-se pseudo-seções de resistividade aparente que indicam a distribuição de condutividade em subsuperfície. Devido à simplicidade dos fundamentos físicos de sua formulação, o método apresenta fácil implementação computacional quando comparado aos métodos eletromagnéticos de fonte controlada. Na literatura há inúmeros trabalhos de modelagem computacional, onde se calcula a resposta para problemas 2-D e 3-D. Nestes trabalhos, as pseudo-seções são obtidas a partir do cálculo do potencial elétrico total. Neste trabalho, apresentaremos a resposta da modelagem de eletroresistividade 2-D com o arranjo dipolo-dipolo, obtida a partir do potencial elétrico secundário. A solução é calculada através do método de elementos finitos usando malhas não estruturadas. Para efeito de validação, os resultados são comparados com a resposta 2-D obtida a partir dos potenciais totais.

Palavras-chave: Métodos de elementos finitos. Eletorresistividade. Potencial secundário. Potencial total. Malhas não estruturadas. Métodos eletromagnéticos.

ABSTRACT

One of the traditional methods of exploration geophysics is the Electrical Resistivity Method, established about a century ago by the Schlumberger Brothers and since then widely used in mineral exploration, hydrogeology and environmental studies and research from geothermal sources. The method involves injection of electrical current in the subsurface and measurement of the resultant potential. The locations of sources and receivers will be determined by the arrangement chosen for the survey. After processing, we can obtain pseudo-sections of apparent resistivity that indicates the distribution of the conductivity in subsurface. Due to the simplicity of the physical basis of its formulation, the method presents easy computational implementation when compared to the other controlled source electromagnetic methods. In literature there are numerous computational modeling jobs, which computes the answer to problems 2D and 3D. In these previous works, the results are obtained from the total electric potential. In this work, we present the modeling of electrical response of 2D media with the dipole-dipole array, obtained from the secondary electric potential. The solution is calculated using the finite element method with unstructured mesh. To validate our results, we compare them with 2D response obtained from total potential.

Keywords: Methods finite elements, Electrical resistivity, total potential secondary, unstructured grids and Electromagnetic methods.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 2.1a - Esquema de uma fonte de corrente na superfície em um meio homogêneo e isotrópico.....	15
Figura 2.1b - Esquema de duas fontes de corrente na superfície em um meio homogêneo e isotrópico.....	15
Figura 2.2 - Esquema do arranjo dipolo-dipolo.....	16
Figura 2.3 - Elemento triangular da malha de elementos finitos.....	22
Figura 2.4 - Os potenciais primário e secundário no domínio k_y , discretizados para o cálculo da transformada inversa, enfatizando-se o melhor comportamento para a integração da curva de diferença de potencial.....	26
Figura 3.1 - Modelo de semi-espaco homogêneo de 10 Ωm de resistividade com uma camada bastante resistiva de 500 Ωm	27
Figura 3.2 - Pseudo-seções de resistividade aparente obtidas pelo potencial total e secundário através do arranjo dipolo-dipolo para um modelo de semi-espaco homogêneo de 10 Ωm e uma camada resistiva de 500 Ωm	28
Figura 3.3 - Pseudo-seção de resistividade aparente mostrando o erro relativo entre o potencial total e secundário para o modelo de semi-espaco homogêneo com uma camada resistiva.....	28
Figura 3.4 - Pseudo-seção de resistividade aparente obtida pelo potencial total através do software RES2DMOD, utilizando a técnica de elementos finitos para o arranjo dipolo-dipolo.....	29
Figura 3.5a - Malha de elementos finitos utilizada para o cálculo do potencial secundário: 940 nós	30
Figura 3.5b - Malha de elementos finitos utilizada para o cálculo do potencial total: 463 nós.....	30

Figura 3.6 -	Pseudo-seções de resistividade aparente obtida através do potencial total, utilizando o arranjo dipolo-dipolo, para um modelo de semi-espço homogêneo de 10 Ωm com heterogeneidade de 500 Ωm	31
Figura 3.7 -	Pseudo-seções de resistividade aparente obtida através do potencial secundário, utilizando o arranjo dipolo-dipolo, para um modelo de semi-espço homogêneo de 10 Ωm com heterogeneidade de 500 Ωm	31
Figura 3.8 -	Modelo homogêneo com heterogeneidade de 500 Ωm em um meio encaixante de 100 Ωm	33
Figura 3.9 -	Pseudo-seção de resistividade aparente obtida através do potencial total, utilizando o software RES2DMOD, para o arranjo dipolo-dipolo.....	33
Figura 3.10 -	Pseudo-seção de resistividade aparente obtida através do potencial secundário, para um modelo de semi-espço homogêneo de 100 Ωm com heterogeneidade de 100 Ωm , utilizando o arranjo dipolo-dipolo.....	34
Figura 3.11 -	Modelo de semi-espço homogêneo com heterogeneidades de 10 Ωm e 1000 Ωm em um meio encaixante de 100 Ωm	35
Figura 3.12 -	Pseudo-seção obtida pelo potencial total através do software RES2DMOD, utilizando a técnica de elementos finitos para o arranjo dipolo-dipolo, para um modelo de dois copos de resistividade 10 Ωm e 1000 Ωm , respectivamente, envolvidos em um meio de resistividade 100 Ωm	35
Figura 3.13 -	Pseudo-seções de resistividade aparente obtida através do potencial secundário, utilizando o arranjo dipolo-dipolo, para um modelo de dois copos de resistividade 10 Ωm e 1000 Ωm envolvidos em um meio de resistividade 100 Ωm	36
Figura 3.14 -	Modelo de semi-espço homogêneo de resistividade 100 Ωm com heterogeneidades em forma de dique de resistividade 25 Ωm	37

Figura 3.15 - Pseudo-seção de resistividade aparente obtida pelo potencial secundário para um modelo de semi-espço homogêneo de resistividade 100 Ωm com heterogeneidades em forma de dique de resistividade 25 Ωm , utilizando o arranjo dipolo-dipolo.....	37
Figura 3.16 - Modelo de semi-espço homogêneo de resistividade 100 Ωm com heterogeneidades em forma de dique inclinado de resistividade 25 Ωm	38
Figura 3.17 - Pseudo-seção de resistividade aparente obtida pelo potencial secundário para um modelo bidimensional de um dique inclinado.....	38

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO.....	13
2 METODOLOGIA.....	15
2.1 BASES TEÓRICAS DO MÉTODO DA ELETRORRESISTIVIDADE.....	15
2.2 FORMULAÇÃO POR ELEMENTOS FINITOS.....	18
3 RESULTADOS.....	27
3.1 MODELO DE SEMI-ESPAÇO HOMOGÊNEO COM UMA CAMADA RESISTIVA.....	27
3.2 MODELO DE SEMI-ESPAÇO HOMOGÊNEO COM HETEROGENEIDADE.....	27
3.3 MODELO BIDIMENSIONAL DE UM CORPO.....	32
3.4 MODELO BIDIMENSIONAL DE DOIS CORPOS.....	34
3.5 MODELO BIDIMENSIONAL DE UM DIQUE FINITO.....	36
3.6 MODELO BIDIMENSIONAL DE UM DIQUE INCLINADO.....	38
4 CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES.....	40
REFERÊNCIAS.....	41

1 INTRODUÇÃO

A geofísica de prospecção data do início do século XX, teve o seu desenvolvimento devido à escassez de depósitos de minérios, ocasionando a disputa por mercado e manutenção de insumos básicos para a indústria. Dentre as principais aplicações da geofísica de prospecção estão à procura por novas fontes de combustíveis fósseis, minérios, água subterrânea e também há aplicação em prospecção geotérmica, mapeamento geológico, construção civil, procura de materiais produzidos pelo homem, como materiais arqueológicos (objetos metálicos e fornos de argilas), materiais de obras subterrâneas (oleodutos e aquedutos) e na proteção ambiental, mapeando o fluxo subsuperficial de água poluída devido à presença de produtos químicos (SILVA; LUIZ, 1995).

Um dos métodos tradicionais da geofísica e que também foi um dos primeiros a ser largamente utilizado, foi o Método da Eletorresistividade, que data desde os anos 1930, com os irmãos Schlumberger. Neste método os eletrodos são posicionados na superfície terrestre, o qual é injetada corrente elétrica na subsuperfície e mede-se diferença de potencial elétrico em pontos previamente determinados, podendo-se desta maneira estimar a resistividade aparente das camadas. O amplo uso da eletorresistividade na geofísica de prospecção e o desenvolvimento de equipamentos cada vez mais sofisticados incentivou a pesquisa em modelagem numérica do método e, por conseguinte a inversão geofísica dos dados obtidos em campo. Inúmeros autores têm abordado a simulação e inversão dos dados de eletorresistividade tanto em modelagens 1-D e 2-D quanto em 3-D, incluindo meios anisotrópicos (INMAN, 1975; JACKSON et. al, 2001; JINGTIAN et. al, 2011; KOEFOED et. al, 1972; LOKE; BARKER, 1996a, b; MOONEY et. al, 1966; RIJO et. al, 1977; SASAKI, 1994; WU et. al, 2003;).

Em todos estes trabalhos a simulação do método é feita ou por elementos finitos ou por diferenças finitas, em que os eletrodos são caracterizados por pontos de corrente através de funções Delta de Dirac. Em seguida os potenciais elétricos totais são obtidos e gera-se as pseudo-seções de resistividade aparente.

Neste trabalho propomos a simulação do método de eletorresistividade usando a técnica de elementos finitos calculando o potencial elétrico secundário conforme descrito por Rijo (2004) para fontes eletromagnéticas. Esta nova

abordagem permite a otimização da malha de elementos finitos pela eliminação dos nós necessários para simular os eletrodos de corrente. Como resultado, obtemos pseudo-seções com menor custo computacional, pelo fato de obtermos malhas com menor número de nós e também de elementos, ocupando menos memória no computador e menor gasto de tempo comparado as pseudo-seção obtidas através do potencial total.

O trabalho está dividido em quatro capítulos, no segundo capítulo é feito um breve estudo das bases teóricas do método e a formulação de elementos finitos aplicados ao Método da Eletrorresistividade. Já no terceiro capítulo mostramos alguns modelos geofísicos e resultados obtidos através do arranjo dipolo-dipolo. Já no quarto e último capítulo, mostramos uma síntese do trabalho, exaltando os pontos positivos deste, além de possíveis perspectivas para trabalhos futuros.

2 METODOLOGIA

2.1 BASES TEÓRICAS DO MÉTODO DA ELETRORRESISTIVIDADE

A eletrorresistividade consiste na injeção de corrente elétrica contínua ou de baixa frequência (inferior a 10 Hz), sendo possível a relação de proporcionalidade direta entre a corrente elétrica (I) num condutor e a diferença de potencial elétrico (ΔV) entre seus terminais. Essa injeção de corrente no solo é feita através de contatos galvânicos utilizando dois eletrodos (A e B), sendo possível medir a diferença de potencial elétrico em outros dois eletrodos (M e N), também através de contatos galvânicos. Após esses valores serem registrados podemos estimar o valor da resistividade de alguns materiais da superfície.

As figuras (2.1a) e (2.1b) estão representando uma e duas fontes de correntes, respectivamente, colocadas na superfície de um terreno de resistividade ρ que é homogêneo e isotrópico do ponto de vista elétrico.

Figura 2.1(a) - Esquema de uma fonte de corrente na superfície em um meio homogêneo e isotrópico.

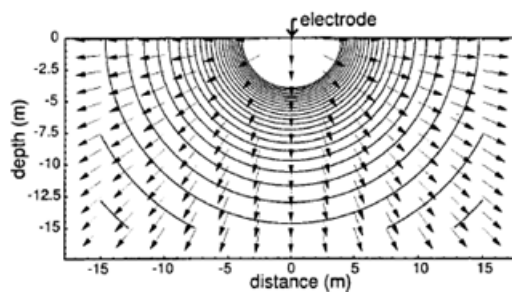
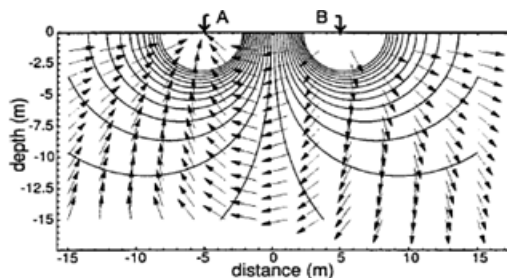


Figura 2.1(b) - Esquema de duas fontes de corrente na superfície em um meio homogêneo e isotrópico.



Fonte: Rhett Herman (2001)

A corrente elétrica injetada no ponto A da superfície do terreno penetra na subsuperfície distribuindo-se uniformemente em todas as direções. Perpendiculares às linhas de corrente, desenvolve-se as linhas de potencial, formando superfícies tridimensionais que têm a forma de semiesferas. Considerando que o meio geológico é em geral heterogêneo, não teremos um valor real para a resistividade das camadas e sim uma resistividade aparente, sendo possível calcular o potencial elétrico e posteriormente a resistividade aparente através das equações (2.1) e (2.2):

$$\Delta V = \frac{\rho \cdot I}{2\pi r} \quad (2.1)$$

$$\rho_a = \frac{\Delta V}{I} \cdot K \quad (2.2)$$

Onde: $K = \frac{2\pi}{C}$ é uma constante em que só depende da posição dos eletrodos tanto de corrente como de potencial, conhecido como fator geométrico.

Sendo que:

$\rho \rightarrow$ Resistividade elétrica [Ωm]

$\Delta V \rightarrow$ Diferença de potencial elétrico medido em M e N. [Volt]

$I \rightarrow$ Intensidade de Corrente elétrica aplicada em A e B. [Amper]

$k \rightarrow$ Fator geométrico que depende do arranjo de eletrodos AMNB, que é dado por:

$$k = \frac{2\pi}{\left[\frac{1}{AM} - \frac{1}{AN} - \frac{1}{BM} + \frac{1}{BN} \right]} \quad (2.3)$$

Em que AM, AN, BM e BN são as distâncias entre os eletrodos.

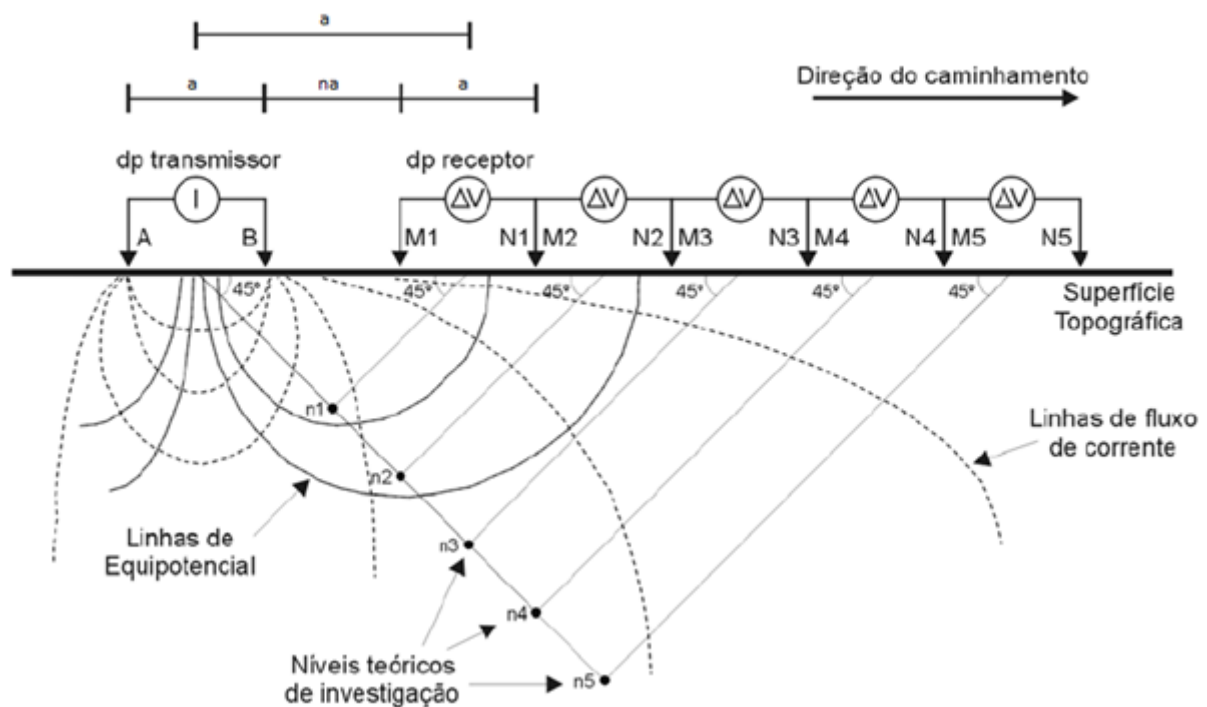
O método da eletrorresistividade tem como objetivo verificar como a resistividade está distribuída na superfície do terreno, tanto na direção vertical como na direção horizontal. Chamamos de Sondagem Elétrica Vertical (SEV), a

investigação de como essa resistividade elétrica varia em relação à profundidade e de Perfilagem Elétrica Horizontal ou Caminhamento Elétrico (CE) como ela se distribui na horizontal (ORELLANA, 1972).

Neste trabalho nos concentraremos no arranjo dipolo-dipolo, com o objetivo de calcular a resposta 2D de resistividade elétrica, a partir do potencial elétrico secundário, utilizando o método de Elementos Finitos com malhas não estruturadas.

Na configuração Dipolo-dipolo (Figura 2.2), podemos colocar os eletrodos em várias posições, sendo a mais comum a posição em que os eletrodos A, B, M, N são colineares. Sendo as distâncias AB e MN pequenas em relação à distância de seus centros. Tendo uma distância igual ou inferior a 1/5 do espaço que separa o centro dos eletrodos AB e MN.

Figura 2.2 - Esquema do arranjo dipolo-dipolo.



Fonte: Borges (2002), adaptado Elis (1998).

Em relação ao fator geométrico do arranjo Dipolo-dipolo (k_d). O qual pode ser calculado através da equação (2.3), obtendo a seguinte equação:

$$k_d = \frac{2\pi a}{\left[\frac{1}{n} - \frac{2}{n+1} + \frac{1}{n+2} \right]} \quad (2.4)$$

Em que **a** é o espaçamento entre os eletrodos e **n** é um múltiplo inteiro de **a**. A profundidade de investigação varia de acordo com o espaçamento (**na**) entre os pares de eletrodos AB e MN, correspondendo teoricamente à profundidade (**na/2**). Essas medidas são feitas em várias profundidades, conhecida como níveis de investigação, ou seja, $n=1, 2, 3, 4, \dots$. Pegando justamente o ponto de interseção da linha imaginária que sai do centro de arranjo de corrente AB e do centro de arranjo de eletrodo MN, formando assim um ângulo de 45° como podemos observar na figura (2.1). Estamos interessando nas variações laterais de resistividade, por isso usaremos a técnica de caminhamento elétrico (CE), em que os eletrodos serão expandidos simetricamente a partir do seu centro fixo, variando a profundidade de investigação, obtendo assim uma distribuição de resistividade proposto inicialmente por Hallof (MARSHALL; MADDEN, 1959).

2.2 FORMULAÇÃO POR ELEMENTOS FINITOS

O método de elementos finitos (MEF) é um dos métodos numéricos mais eficientes na resolução de equações diferenciais baseado no método das projeções, que consiste em procurar uma solução aproximada de uma equação diferencial. Sendo possível analisar o comportamento de qualquer sistema físico regido por essas equações.

Segundo Rijo (2002) o método de elementos finitos baseia-se no método de Galerkin restrito a uma classe de funções bases bem específica, aproximando a solução da equação diferencial através de uma combinação linear. Se $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \dots \varphi_m$ são as funções bases, podemos aproximar a solução por

$u_n = \sum_{j=1}^n \alpha_j \varphi_j$, em que deveremos determinar os coeficientes α_j . Podemos escrever

a solução aproximada u_n da seguinte maneira: $L(u) = b$, sendo **L** um operador diferencial e **b** o termo fonte. O método de Galerkin baseia-se na condição de

ortogonalidade das funções, ou seja, dada duas funções u e v , elas serão ortogonais se $\langle u, v \rangle = \int_{\Omega} uv d\Omega = 0$.

Ao aplicarmos a linearidade do operador L na solução aproximada U_n , aparecerá uma função resíduo (erro), em que este é o erro cometido ao aproximar a solução. O qual pode ser escrito da seguinte forma:

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j L\varphi_j + e = b \quad (2.5)$$

A solução U_n terá uma melhor aproximação da solução exata, quanto mais próximo de zero o resíduo estiver. O método dos resíduos ponderados trabalha no sentido de minimizar esse erro, através da ponderação de um conjunto de funções φ_i , conhecida como funções pesos. Na verdade o que está por traz do método dos resíduos ponderados é a condição de que cada uma dessas funções pesos deve ser perpendicular ao resíduo, podendo ser expresso da seguinte forma: $\langle e, \varphi_i \rangle = 0, i = 1, 2, 3 \dots n$. Com isso o resíduo se anula, fazendo com que a solução aproximada tenda pra a solução exata.

Aplicando a condição de ortogonalidade das funções e fazendo o resíduo igual à zero, podemos reescrever a equação (2.5) da seguinte forma:

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j \langle \varphi_i, L\varphi_j \rangle = \langle \varphi_i, b \rangle \quad (2.6)$$

Agora vamos definir uma região Ω do espaço, em que nossas funções bases sejam bem definidas. Criando sub-regiões dentro do domínio Ω , que tenha o formato triangular e para cada elemento Ω_e formado aplicaremos a equação (2.6), definindo assim o produto interno em cada elemento.

$$\sum_{j=1}^n \alpha_n \int_{\Omega_e} \varphi_i L\varphi_j d\Omega_e = \int_{\Omega_e} \varphi_j b d\Omega_e \quad (2.7)$$

Neste momento podemos nos direcionar de fato em nosso problema. Partindo da equação de Poisson:

$$\nabla \cdot [\sigma(x, y, z) \nabla V(x, y, z)] = I \delta(x) \delta(y) \delta(z) \quad (2.8)$$

Em que $V(x, y, z)$ é o potencial elétrico, $\sigma(x, y, z)$ é a condutividade do meio, I é a intensidade de corrente δ é a função generalizada delta de Dirac (função impulso), representando o elemento de corrente.

Primeiramente vamos dividir o potencial elétrico em duas partes $V^p + V^s$, uma referente ao potencial primário V^p devido à fonte interagindo com o meio homogêneo e a outra referente ao potencial secundário V^s que é a resposta das heterogeneidades do meio. Deste modo podemos escrever a condutividade da seguinte maneira: $\sigma = \sigma^p + \Delta\sigma$, onde σ^p é a condutividade do meio homogêneo e $\Delta\sigma$ é a diferença das variações 2D neste meio. Portanto podemos escrever a equação (2.8) como:

$$\nabla \cdot [(\sigma^p + \Delta\sigma) \nabla (V^p + V^s)] = I \delta(r) \quad (2.9)$$

Desmembrado o primeiro membro da equação (2.9), temos:

$$\nabla \cdot [\Delta\sigma \nabla V^p + \sigma \nabla V^s] + \nabla \cdot [\sigma^p \nabla V^p] = I \delta(r) \quad (2.10)$$

Agora é possível eliminarmos o fator correspondente ao segundo membro da equação (2.10), o qual faz referencia a fonte de nosso problema. Obtendo a seguinte equação:

$$\nabla \cdot [\sigma \nabla V^s] = -\nabla \cdot [\Delta\sigma \nabla V^p] \quad (2.11)$$

Em nosso problema usamos uma fonte pontua 3D, em um meio 2D. Para podermos fazer uma modelagem 2D aplicamos a transformada de Fourier $\bar{V}(x, k_y, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} V(x, y, z) e^{-ik_y y} dy$ em (2.11) para efetivar a mudança do meio 3D para o meio 2D no domínio k_y , chegando assim na equação:

$$\nabla \cdot [\sigma \nabla \bar{V}^s] - k_y^2 \sigma \bar{V}^s = -[\nabla \cdot (\Delta\sigma \nabla \bar{V}^p) - k_y^2 \Delta\sigma \bar{V}^p] \quad (2.12)$$

Onde \bar{V}^s e \bar{V}^p são os vetores potenciais transformados e k_y é a variável de transformação de Fourier.

Aplicando a formulação de elementos finitos, obtemos:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \varphi_i \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\sigma \frac{\partial}{\partial x} \bar{V}^s \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\sigma \frac{\partial}{\partial z} \bar{V}^s \right) \right] dx dz - \int_{\Omega} \varphi_i k_y^2 \sigma \bar{V}^s dx dz = \\ - \int_{\Omega} \varphi_i \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\Delta \sigma \frac{\partial}{\partial x} \bar{V}^p \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\Delta \sigma \frac{\partial}{\partial z} \bar{V}^p \right) \right] dx dz + \int_{\Omega} \varphi_i k_y^2 \Delta \sigma \bar{V}^p dx dz \end{aligned} \quad (2.13)$$

A seguir, utilizando a identidade:

$$\varphi_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sigma \frac{\partial \bar{V}^s}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\varphi_i \sigma \frac{\partial \bar{V}^s}{\partial x_i} \right) - \sigma \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i} \frac{\partial \bar{V}^s}{\partial x_i} \quad (2.14)$$

Tanto para x como para z e aplicando o teorema da divergência, obtemos a contribuição das integrais nas bordas de cada elemento, chegando à seguinte expressão:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left[\sigma \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \frac{\partial \bar{V}^s}{\partial x} + \sigma \frac{\partial \varphi_i}{\partial z} \frac{\partial \bar{V}^s}{\partial z} \right] dx dz + \int_{\Omega} \varphi_i k_y^2 \sigma \bar{V}^s - \int_{\partial \Omega} \sigma \varphi_i \frac{\partial \bar{V}^s}{\partial n} \hat{t} dl = \\ \int_{\Omega} \varphi_i \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\Delta \sigma \frac{\partial \bar{V}^p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\Delta \sigma \frac{\partial \bar{V}^p}{\partial z} \right) \right] dx dz - \int_{\Omega} \varphi_i k_y^2 \Delta \sigma \bar{V}^p dx dz \end{aligned} \quad (2.15)$$

O termo $\int_{\partial \Omega} \sigma \varphi_i \frac{\partial \bar{V}^s}{\partial n} \hat{t} dl$ se cancelará mutualmente dentro do domínio do plano xz,

indicando a continuidade do potencial elétrico. Em relação à equação (2.15) temos:

$$\bar{V}^p = 2K_0(ak_y); a = \sqrt{x^2 + z^2} \quad (2.16)$$

$$\bar{V}_x^p = \frac{\partial \bar{V}^p}{\partial x} = -\frac{xk_y K_1(ak_y)}{a} \quad (2.17)$$

$$\bar{V}_z^p = \frac{\partial \bar{V}^p}{\partial z} = -\frac{zk_y K_1(ak_y)}{a} \quad (2.18)$$

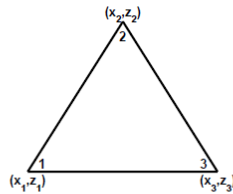
Na equação (2.16) temos o potencial primário obtido através da transformada de Fourier, fazendo referência à fonte do nosso problema, a é a distância radial da fonte, k_y o número de onda espacial na direção y e K_0 a função modificada de Bessel de segunda espécie e ordem zero. Já as equações (2.17) e (2.18) são as derivadas do potencial primário em relação às coordenadas x e z , respectivamente, em que K_1 é a função de Bessel de segunda espécie e ordem 1.

A partir da equação (2.15) e de posse das funções bases $\varphi_i = \frac{(a_i + b_i x + c_i z)}{2A_e}$ tomada em cada elemento podemos montar a ideia do algoritmo de elementos finitos em que:

$$\begin{aligned} a_1 &= x_2 z_3 - x_3 z_2; a_2 = x_3 z_1 - x_1 z_3; a_3 = x_1 z_2 - x_2 z_1; \\ b_1 &= z_2 - z_3; b_2 = z_3 - z_1; b_3 = z_1 - z_2; \\ c_1 &= x_3 - x_2; c_2 = x_1 - x_3; c_3 = x_2 - x_1. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Sendo $A_e = \frac{|a_1 + a_2 + a_3|}{2}$ a área de cada elemento.

Figura (2.3) - Elemento triangular da malha de elementos finitos.



Substituindo a solução proposta $\bar{V}^s = \sum_{j=1}^3 \bar{V}_j^s \varphi_j$ na equação (2.15), iremos obter

a matriz local e o vetor fonte do elemento Ω_e .

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^3 \left[\sigma \int_{\Omega_e} \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial z} \frac{\partial \varphi_j}{\partial z} \right) dx dz + \int_{\Omega_e} \varphi_i \varphi_j k_y^2 dx dz \right] \bar{V}^s = \\
& \int_{\Omega_e} \varphi_i \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\Delta \sigma \frac{\partial \bar{V}^p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\Delta \sigma \frac{\partial \bar{V}^p}{\partial z} \right) \right] dx dz - \int_{\Omega_e} \varphi_i k_y^2 \Delta \sigma \bar{V}^p dx dz
\end{aligned} \tag{2.20}$$

Utilizando a mesma identidade (2.13) para o segundo membro da equação (2.15) e resolvendo de maneira análoga, chegamos à seguinte expressão:

$$- \int_{\Omega_e} \left[\Delta \sigma \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \bar{V}_x^p + \Delta \sigma \frac{\partial \varphi_i}{\partial z} \bar{V}_z^p \right] dx dz - \int_{\Omega_e} \varphi_i k_y^2 \Delta \sigma \bar{V}^p dx dz \tag{2.21}$$

Vamos agora montar a solução para o potencial primário $\bar{V}^p = \sum_{j=1}^3 \bar{V}_j^p \varphi_j$ de maneira

análoga ao que fizemos para o potencial secundário e substituindo na equação (2.21), tanto para coordenada x, como para a coordenada z. Desta maneira chegaremos à equação (2.22).

$$\sum_{j=1}^3 \left[-\Delta \sigma \int_{\Omega_e} \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \varphi_j \bar{V}_{x_j}^p + \frac{\partial \varphi_i}{\partial z} \varphi_j \bar{V}_{z_j}^p \right) dx dz \right] - \int_{\Omega_e} \varphi_i \varphi_j k_y^2 \bar{V}_j^p dx dz \tag{2.22}$$

Feito isto, podemos reescrever a equação (2.19) da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^3 \left[\sigma \int_{\Omega_e} \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial z} \frac{\partial \varphi_j}{\partial z} \right) dx dz + \int_{\Omega_e} \varphi_i \varphi_j k_y^2 dx dz \right] \bar{V}^s = \\
& \sum_{j=1}^3 \left[-\Delta \sigma \int_{\Omega_e} \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \varphi_j \bar{V}_{x_j}^p + \frac{\partial \varphi_i}{\partial z} \varphi_j \bar{V}_{z_j}^p \right) dx dz \right] - \int_{\Omega_e} \varphi_i \varphi_j k_y^2 \bar{V}_j^p dx dz
\end{aligned} \tag{2.23}$$

Para resolvermos, as integrais da equação (2.23), teremos que ter auxílio da identidade:

$$\int_{\Omega_e} \varphi_1^\alpha \varphi_2^\beta \varphi_3^\gamma dx dz = 2A_e \frac{\alpha! \beta! \gamma!}{(\alpha + \beta + \gamma + 2)!} \tag{2.24}$$

Desta maneira obtemos a matriz local e o vetor fonte dados por:

$$\mathbf{G} = \frac{\sigma}{4A_e} \begin{pmatrix} b_1^2 + c_1^2 & b_1b_2 + c_1c_2 & b_1b_3 + c_1c_3 \\ b_2b_1 + c_2c_1 & b_2^2 + c_2^2 & b_2b_3 + c_2c_3 \\ b_3b_1 + c_3c_1 & b_3b_2 + c_3c_2 & b_3^2 + c_3^2 \end{pmatrix} + \frac{\sigma k_y^2 A_e}{12} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad (2.25)$$

$$\mathbf{F} = -\frac{\Delta\sigma}{3} \left[\left(\bar{V}_{x_1}^p b_1 + \bar{V}_{x_1}^p c_1 \right) + \left(\bar{V}_{x_2}^p b_2 + \bar{V}_{z_2}^p c_2 \right) + \left(\bar{V}_{x_3}^p b_3 + \bar{V}_{z_3}^p c_3 \right) \right] \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} +$$

$$-\frac{\Delta\sigma k_y^2 A_e}{12} \begin{pmatrix} 2\bar{V}_1^p + \bar{V}_2^p + \bar{V}_3^p \\ \bar{V}_1^p + 2\bar{V}_2^p + \bar{V}_3^p \\ \bar{V}_1^p + \bar{V}_2^p + 2\bar{V}_3^p \end{pmatrix} \quad (2.26)$$

De posse das matrizes locais e do vetor fonte local, podemos montar tanto a matriz global e o vetor fonte global, o qual é descrito detalhadamente em Rijo (2002). A matriz de elementos finitos resultante de malhas não regulares utilizada neste trabalho é esparsa e simétrica, com uma grande quantidade de elementos nulos, sendo indicado o uso de algoritmos de gradiente conjugado que faça uso desta característica, reduzindo a quantidade de memória utilizada na solução do sistema linear. Uma boa descrição deste método pode ser vista em Golub e Van Loan (1996).

Após obtermos a solução do sistema linear, no domínio k_y , devemos recuperar o potencial secundário no domínio do espaço y por meio da transformada inversa de Fourier, de acordo com a equação (2.27).

$$V^s(x, y, z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \bar{V}^s(x, k_y, z) e^{iyk_y} dk_y \quad (2.27)$$

Segundo Guimarães (1983), como estamos trabalhando no caso particular em que a linha de medida é perpendicular ao corpo, podemos fazer $y = 0$ na equação (2.27) e reescrever a transformada da seguinte forma:

$$V^s(x, 0, z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \bar{V}^s(x, k_y, z) dk_y \quad (2.28)$$

Utilizando a equação (2.2) iremos determinar a resistividade aparente do modelo proposto calculando as diferenças de potencial ainda no espaço k_y , pois esta curva tem um comportamento mais suave e de fácil integração, como podemos visualizar nos gráficos da figura (2.4). Outro ponto importante é que a separação dos potenciais em primário e secundário nos permite calcular a transformada inversa de Fourier apenas da componente secundária conforme a equação (2.30).

$$\rho_a = K \cdot \frac{\Delta V}{I} = \frac{K}{I} (\Delta V^p + \Delta V^s) = \rho_a^p + \rho_a^s \quad (2.29)$$

$$\rho_a = \rho_a^p + \frac{K}{I\pi} \int_0^\infty \Delta \bar{V}^s(x, k_y, z) dk_y \quad (2.30)$$

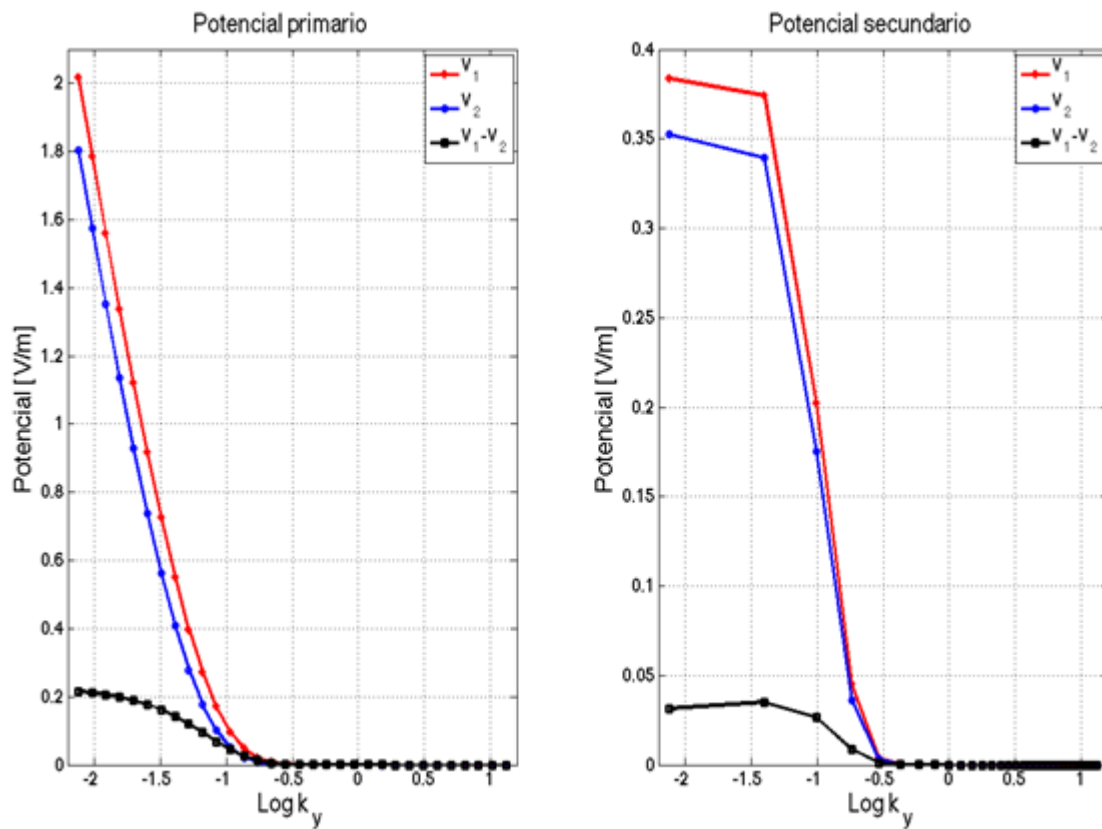
Como sempre usamos para o modelo primário o semi-espaco homogêneo, a resistividade aparente primária é a própria resistividade do semi-espaco, não precisando ser calculada. Guimarães (1983) mostrou detalhadamente o cálculo da resistividade aparente usando o potencial total através de elementos finitos.

A ausência do termo oscilante da equação (2.27) facilita ainda mais a integração numérica da equação (2.30). O método numérico utilizado para solucioná-la foi a quadratura de Gauss-Laguerre de 32 pontos (ABRAMOWITZ; STEGUN, 1972).

Finalmente, observamos que, devido à posição relativa dos eletrodos de corrente e potencial e a localização das heterogeneidades, o cálculo da integral da equação (2.30) possui convergências diferentes para diferentes fontes, nem sempre sendo necessários os 32 pontos da quadratura. Deste modo, considerando que em uma pseudo-seção a soma de todos os valores de ρ_a tem um valor definido, durante o cálculo computacional avaliamos a soma das resistividades aparentes em cada iteração e verificamos a convergência desta para um valor constante, com tolerância pré-definida. Neste trabalho o valor utilizado foi de 10^{-6} erro relativo. Deste modo

otimizamos o tempo computacional sempre que o valor da abscissa da quadratura não contribuir para o cálculo da transformada inversa.

Figura 2.4 - Os potenciais primário e secundário no domínio k_y , discretizados para o cálculo da transformada inversa, enfatizando-se o melhor comportamento para a integração da curva de diferença de potencial.



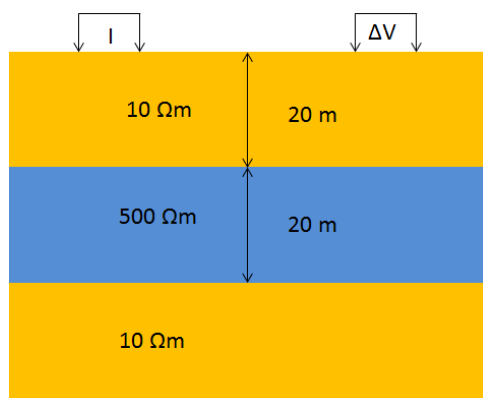
3. RESULTADOS

De posse dos programas escritos em Fortran, obtivemos vários resultados a partir de alguns modelos.

3.1 MODELO DE SEMI-ESPAÇO HOMOGÊNEO COM UMA CAMADA RESISTIVA

Para testarmos o nosso programa, fizemos uma comparação entre os modelos obtidos através do potencial elétrico total e potencial elétrico secundário para um modelo de semi-espço estratificado com três camadas de resistividade e espessuras de 10 Ωm e 20 m, 500 Ωm e 20 m, 10 Ωm respectivamente, como podemos visualizar na figura (3.1). Para este modelo utilizamos um espaçamento de 5m entre os eletrodos de corrente e potencial, sendo feitas 50 medidas.

Figura (3.1) - Modelo de semi-espço homogêneo de 10 Ωm de resistividade com uma camada bastante resistiva de 500 Ωm .



A figura (3.2) mostra as pseudo-seções para o semi-espço estratificado obtidos através do potencial elétrico total e potencial elétrico secundário. Podemos perceber que para a primeira camada que está localizada nos primeiros 20 m a resistividade aparente tende para 10 Ωm , aumentando o valor da resistividade gradativamente, estando em pleno acordo com os dados fornecidos ao programa. Podemos perceber também que há uma nítida diferença próximo a 150 m, o que se deve ao fato da malha ser não estruturada.

Na figura (3.3) plotamos o erro relativo, dado em percentagem, entre as pseudo-seções obtidas entre o potencial elétrico total e o secundário que é em torno de 0,5%.

Figura (3.2) - Pseudo-seções de resistividade aparente obtidas pelo potencial total e secundário através do arranjo dipolo-dipolo para um modelo de semi-espço homogêneo de $10\ \Omega\text{m}$ e uma camada resistiva de $500\ \Omega\text{m}$.

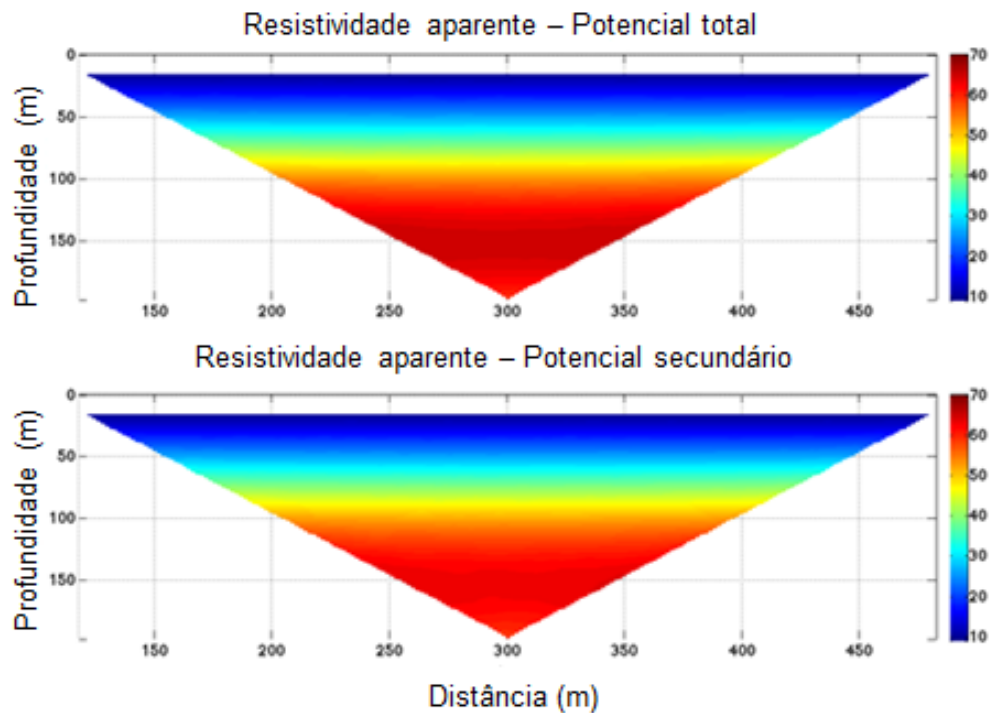
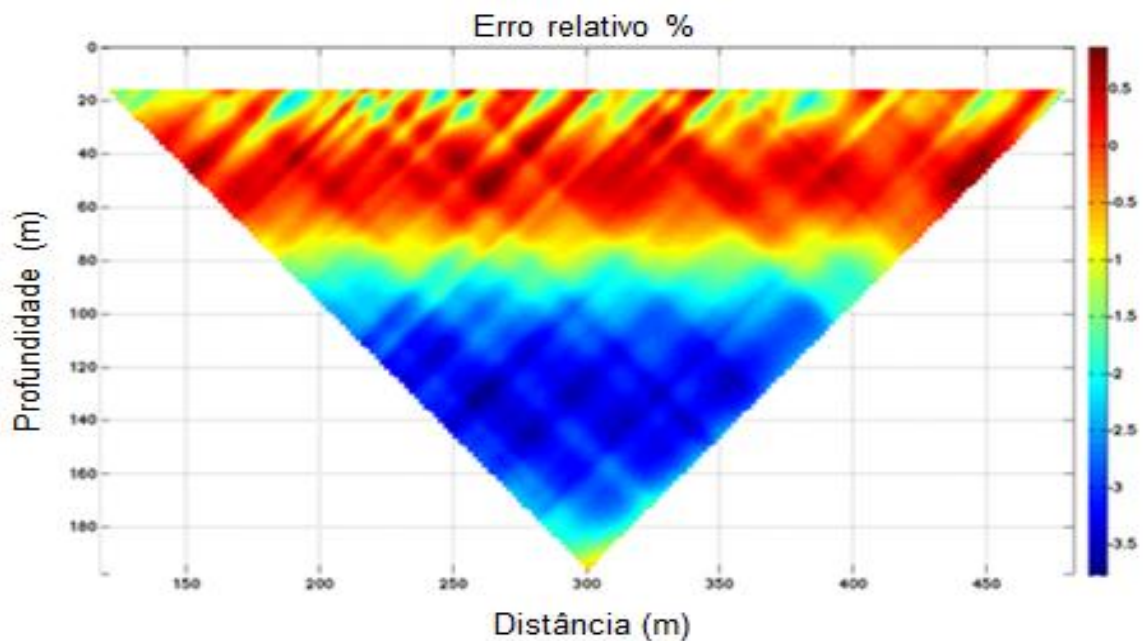


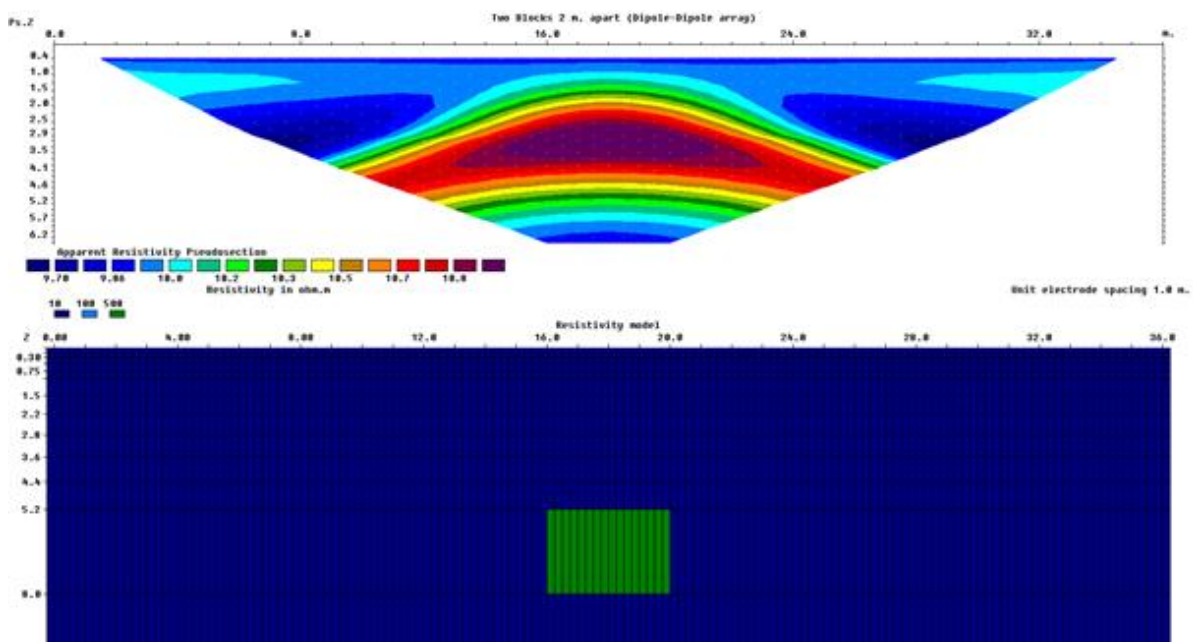
Figura (3.3) - Pseudo-seção de resistividade aparente mostrando o erro relativo entre o potencial total e secundário para o modelo de semi-espço homogêneo com uma camada resistiva.



3.2 MODELO DE SEMI-ESPAÇO HOMOGÊNEO COM HETEROGENEIDADE

Este modelo, proposto e calculado pelo Prof. Welitom Borges (comunicação pessoal) é composto por um semi-espaço homogêneo com uma heterogeneidade de 4 m de comprimento por 2,8 m de espessura, sendo o seu topo situado a 5,2 m abaixo da superfície. A resistividade da encaixante é de 10 Ωm e o corpo é muito mais resistivo, possuindo 500 Ωm . A resposta foi calculada pelo software RES2DMOD (<http://www.geoelectrical.com>), que é um programa de modelagem 2D que calcula pseudo-seções de resistividade aparente a partir de um modelo de subsuperfície 2D, usando elementos finitos e a formulação de potencial total.

Figura 3.4 - Pseudo-seção de resistividade aparente obtida pelo potencial total através do software RES2DMOD, utilizando a técnica de elementos finitos para o arranjo dipolo-dipolo.



Reproduzimos o modelo fornecido pelo Prof. Borges, em que podemos visualizar nas figuras (3.5a) e (3.5b) as respectivas malhas de Elementos Finitos com a heterogeneidade tanto para o potencial secundário como para o potencial total. Na malha do potencial total é necessária que haja uma maior discretização próxima à fonte, enquanto que na malha do potencial secundário, essa discretização se faz necessário próximo ao corpo, pois o mesmo fará o papel da fonte. Neste modelo utilizamos o espaçamento de 1 m entre os eletrodos, sendo realizadas 36 posições de transmissores.

A malha de elementos finitos obtida para o potencial secundário, figura (3.5a) possui 940 nós e 1772 elementos, enquanto que a malha obtida para o potencial total, figura (3.5b) possui 4263 nós e 7917 elementos.

Figura 3.5a - Malha de elementos finitos utilizada para o cálculo do potencial secundário: 940 nós.

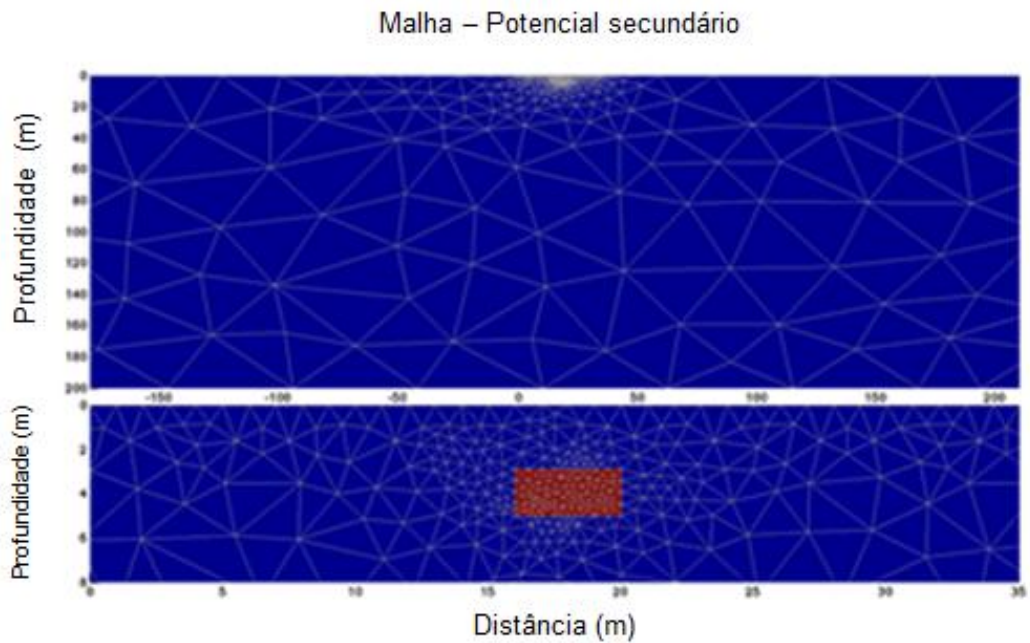
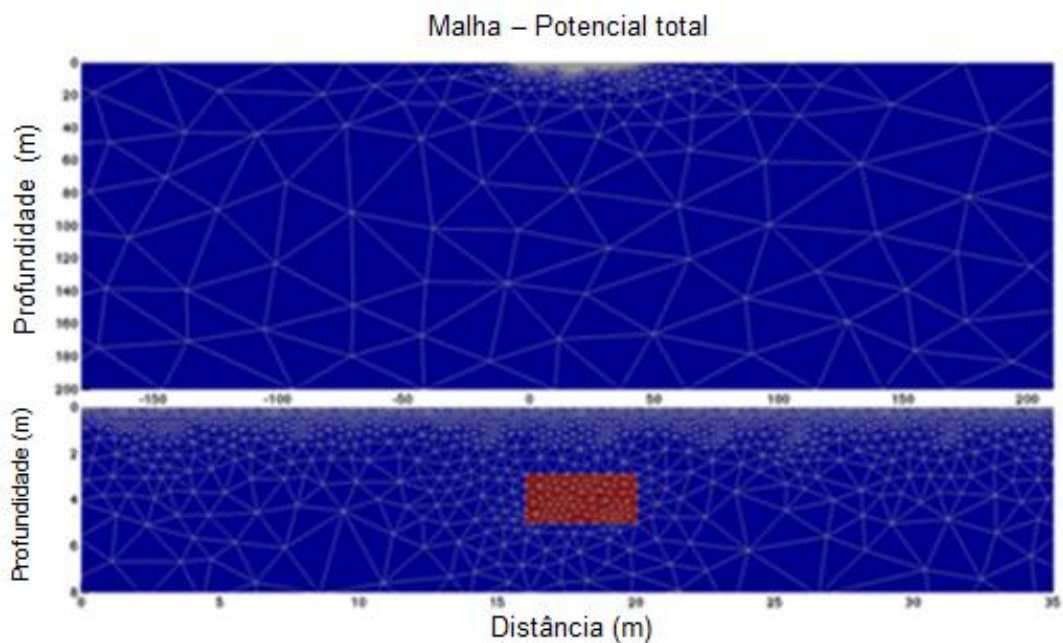


Figura 3.5b - Malha de elementos finitos utilizada para o cálculo do potencial total: 463 nós.



Nas figuras (3.6) e (3.7) estão representadas as pseudo-seções tanto para o potencial total como para o potencial secundário sugerido por Borges.

Figura 3.6 - Pseudo-seções de resistividade aparente obtida através do potencial total, utilizando o arranjo dipolo-dipolo, para um modelo de semi-espço homogêneo de $10 \Omega\text{m}$ com heterogeneidade de $500 \Omega\text{m}$.

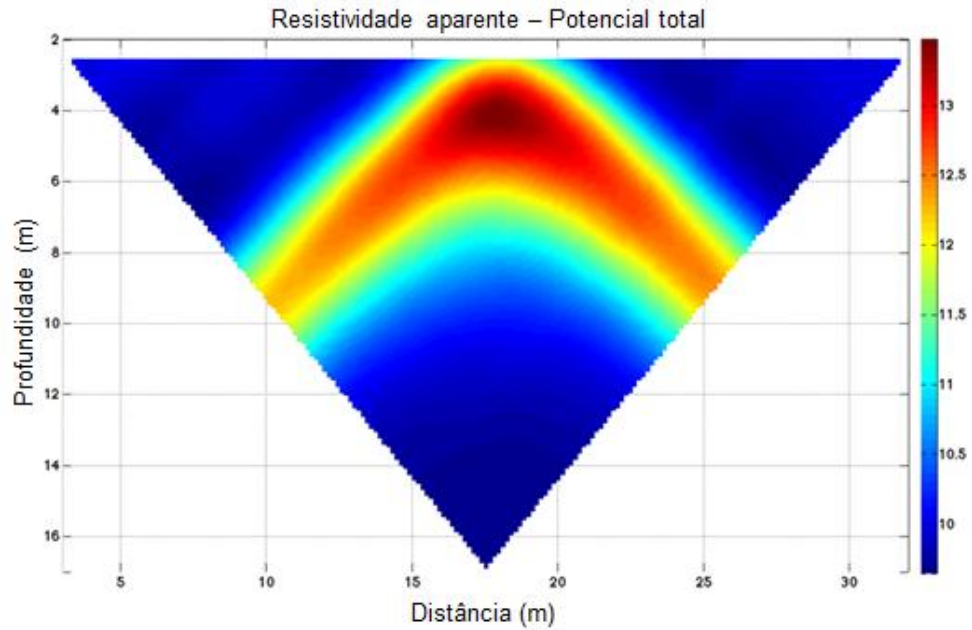
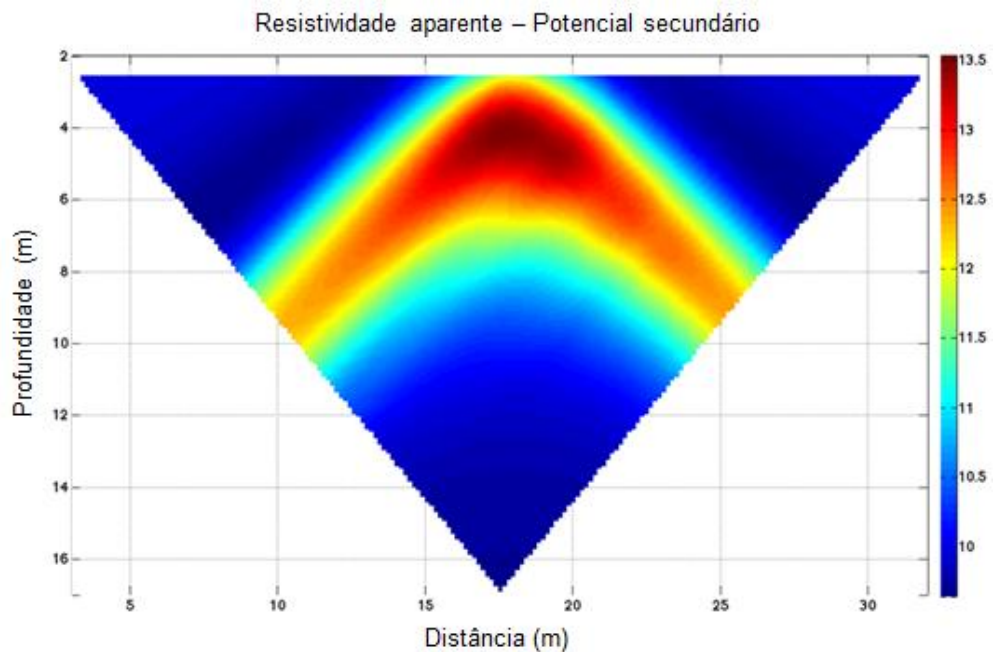


Figura 3.7 - Pseudo-seções de resistividade aparente obtida através do potencial secundário, utilizando o arranjo dipolo-dipolo, para um modelo de semi-espço homogêneo de $10 \Omega\text{m}$ com heterogeneidade de $500 \Omega\text{m}$.



Comparando as pseudo-seções, podemos afirmar com plena convicção que os resultados são satisfatório, tendo uma pequena diferença entre as pseudo-seções de resistividade aparente obtida através do campo total e secundário sendo este apresentando uma maior suavização próximo ao corpo, o que se deve ao fato de termos uma maior discretização da malha próximo a heterogeneidade. Pelo fato do modelo geofísico e as medidas serem simétricas em relação à origem, percebemos também certa simétrica nas pseudo-seções, garantindo assim o princípio da reciprocidade, pois ao trocarmos as posições relativas entre fonte e transmissor a resposta geofísica em um mesmo ponto não muda.

No cálculo da pseudo-seção do potencial total, obtido através da malha (3.5b), foram gastos 12,37 minutos de execução. Comparativamente no cálculo do campo secundário, obtido através da malha de elementos finitos, figura (3.5a), o tempo gasto na computação do mesmo modelo e arranjo foi de 1,36 minutos. Estes tempos foram obtidos em uma estação Dell Precision T3500 (processador Intel Xeon Quad 2.8 GHZ, 24 GB de memória).

Comparando o nosso resultado com o de Borges, observamos que os valores de resistividade aparente varia entre 9,7 Ωm e 11 Ωm , sendo que no modelo de Borges tem uma maior variação de cores na pseudo-seção, porém em ambos os modelos obtemos valores de resistividade aparente de 10 Ωm para o meio encaixante e valores cada vez maiores próximo a localização do corpo, o que nos leva a crer que as pseudo-seções obtidas através do potencial total e secundário está de acordo com a pseudo-seção obtida através do software RES2DMOD.

3.3 MODELO BIDIMENSIONAL DE UM CORPO

Na figura (3.8) temos um modelo de estrutura bidimensional, constituída por um corpo resistivo de 500 Ωm , envolto por um meio de resistividade 100 Ωm . Esse corpo possui 20 m de espessura por 100 m de comprimento e seu topo está 25 m abaixo da superfície.

Apresentamos na figura (3.9) o resultado obtido para o modelo não estratificado de estrutura bidimensional utilizando o potencial secundário e

comparamos com o resultado de Loke (1999), obtido pelo potencial total, figura (3.10), através do software RES2DMOD.

Figura 3.8 - Modelo homogêneo com heterogeneidade de 500 Ωm em um meio encaixante de 100 Ωm .

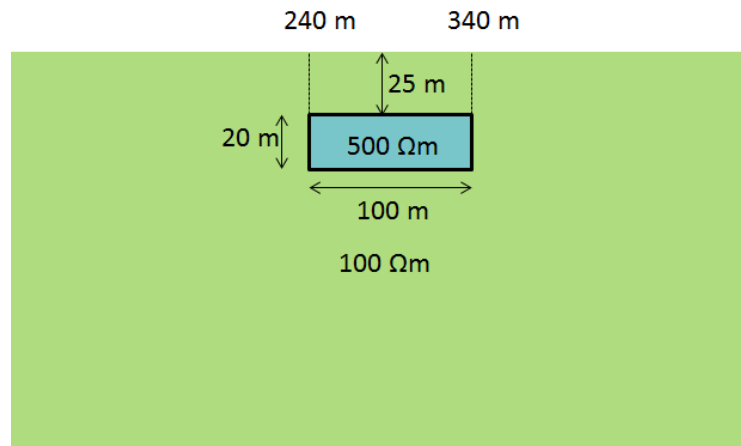


Figura 3.9 - Pseudo-seção de resistividade aparente obtida através do potencial total, utilizando o software RES2DMOD, para o arranjo dipolo-dipolo.

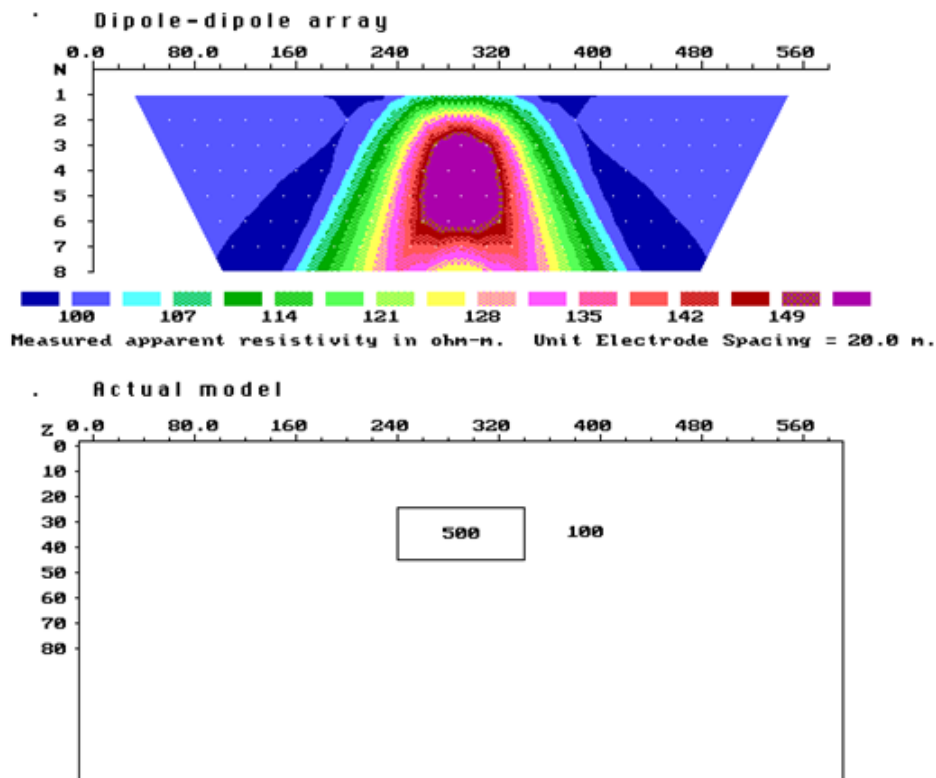
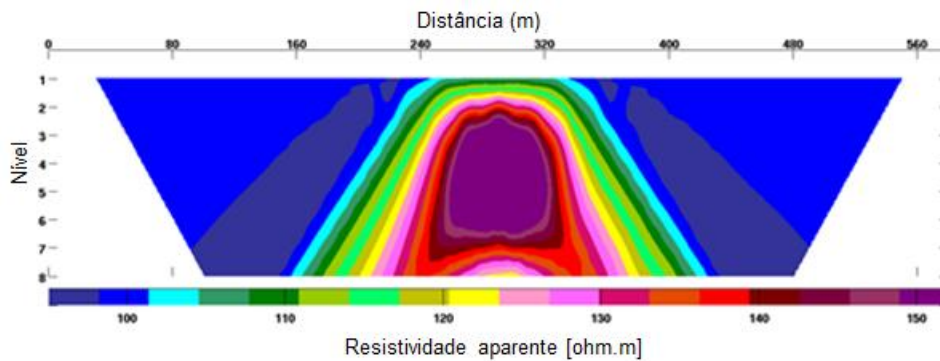


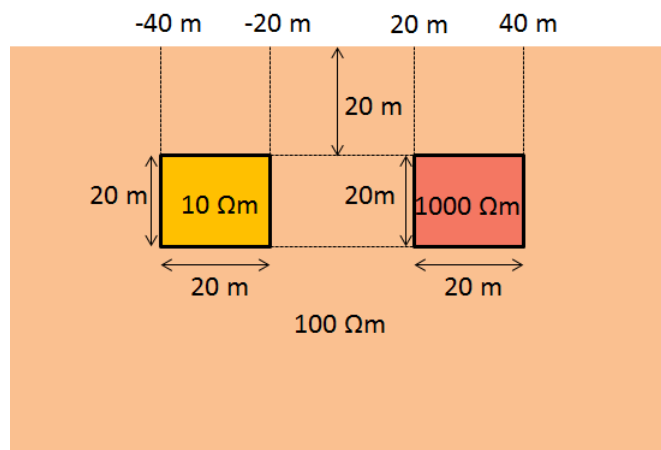
Figura 3.10 - Pseudo-seção de resistividade aparente obtida através do potencial secundário, para um modelo de semi-espço homogêneo de $100 \Omega\text{m}$ com heterogeneidade de $100 \Omega\text{m}$, utilizando o arranjo dipolo-dipolo.



3.4 MODELO BIDIMENSIONAL DE DOIS COPOS

No modelo da figura (3.11) reproduzimos o modelo obtido por Gallardo (2004). Neste modelo temos uma estrutura bidimensional, formada por dois corpos, um menos resistivo e outro mais resistivo, de extensão $20 \text{ m} \times 20 \text{ m}$, com resistividades de $10 \Omega\text{m}$ e $1000 \Omega\text{m}$, respectivamente, envolvidos em um meio encaixante de resistividade $100 \Omega\text{m}$. Utilizamos um espaçamento de 10 m entre os eletrodos e 21 medidas.

Figura 3.11 - Modelo de semi-espço homogêneo com heterogeneidades de $10 \Omega\text{m}$ e $1000 \Omega\text{m}$ em um meio encaixante de $100 \Omega\text{m}$.



Podemos perceber muita semelhança entre os resultados encontrados por Gallardo (2004) apresentado na figura (3.12) obtidos através do potencial total e os resultados obtidos através do potencial secundário. Em que podemos verificar as

linhas de contornos indicando os valores de resistividade aparente em escala logarítmica.

Figura 3.12 - Pseudo-seção obtida pelo potencial total através do software RES2DMOD, utilizando a técnica de elementos finitos para o arranjo dipolo-dipolo, para um modelo de dois copos de resistividade $10\ \Omega\text{m}$ e $1000\ \Omega\text{m}$, respectivamente, envolvidos em um meio de resistividade $100\ \Omega\text{m}$.

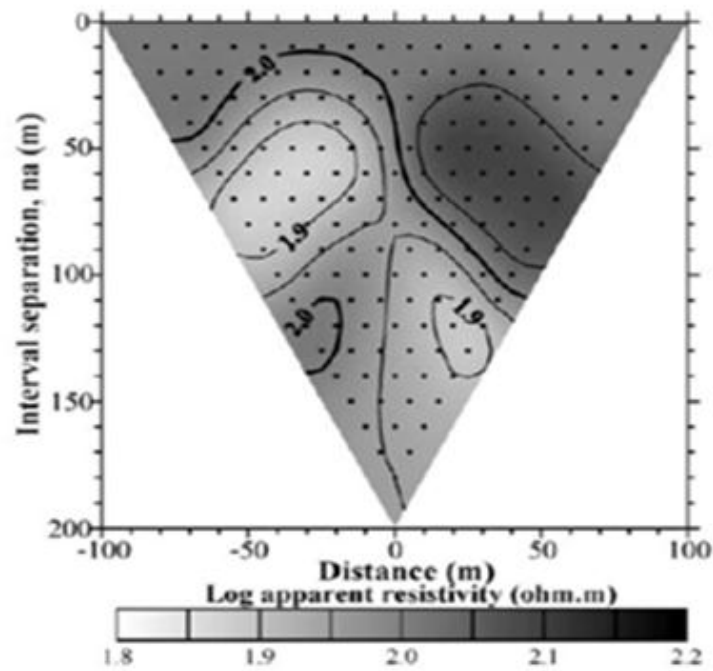
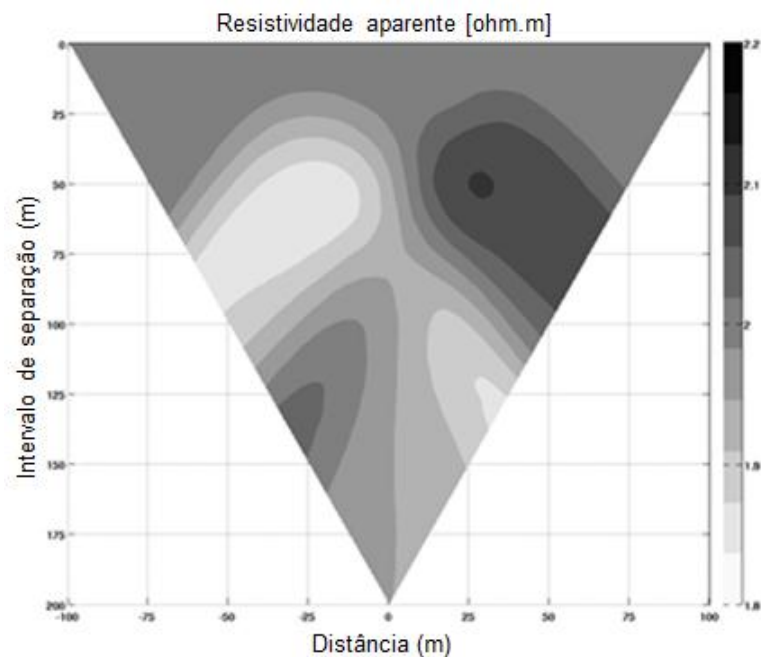


Figura 3.13 - Pseudo-seções de resistividade aparente obtida através do potencial secundário, utilizando o arranjo dipolo-dipolo, para um modelo de dois copos de resistividade $10\ \Omega\text{m}$ e $1000\ \Omega\text{m}$ envolvidos em um meio de resistividade $100\ \Omega\text{m}$.



Nas pseudo-seções das figuras (3.12) e (3.13) podemos observar que a escala de resistividade aparente está variando entre $1.8 \Omega\text{m}$ e $2.2 \Omega\text{m}$. Percebemos também uma superposição entre os corpos menos resistivos, região mais clara, e o corpo mais resistivo, região mais escura, o qual está plenamente de acordo com os resultados obtidos por Gallardo (2004).

3.5 MODELO BIDIMENSIONAL DE UM DIQUE FINITO

Neste modelo apresentamos uma estrutura bidimensional de um dique de 2 m de espessura por 40 m de comprimento, em que o seu topo encontra-se a 5 m abaixo da superfície. Sua resistividade é de $25 \Omega\text{m}$ e o meio que o envolve possui uma resistividade de $100 \Omega\text{m}$. O espaçamento entre os eletrodos são de 5 m e foram realizadas 41 medidas.

Apesar da técnica de Caminhamento Elétrico (CE) ser indicado para investigação de como a resistividade elétrica se distribui na horizontal, queremos mostrar nos modelos (3.5) e (3.6), que em uma variação em profundidade a resposta fica bastante perturbada, como podemos observar nas pseudo-seções das figuras (3.14) e (3.15). Na figura (3.14) apresentamos o resultado obtido para o modelo do dique finito. Podemos observar na pseudo-seção que a resistividade do meio é em torno de $100 \Omega\text{m}$ e que a mesma apresenta simetria em torno da origem. Ocorrendo uma nítida variação da resistividade próxima ao topo do corpo, reduzindo cada vez mais o valor da resistividade aparente, indicando assim, a presença de um corpo condutivo em um meio resistivo.

Figura 3.14 - Modelo de semi-espço homogêneo de resistividade $100 \Omega\text{m}$ com heterogeneidades em forma de dique de resistividade $25 \Omega\text{m}$.

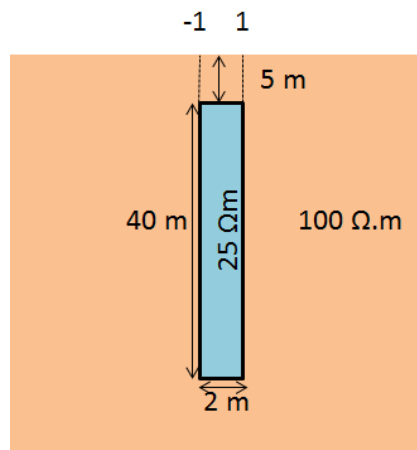
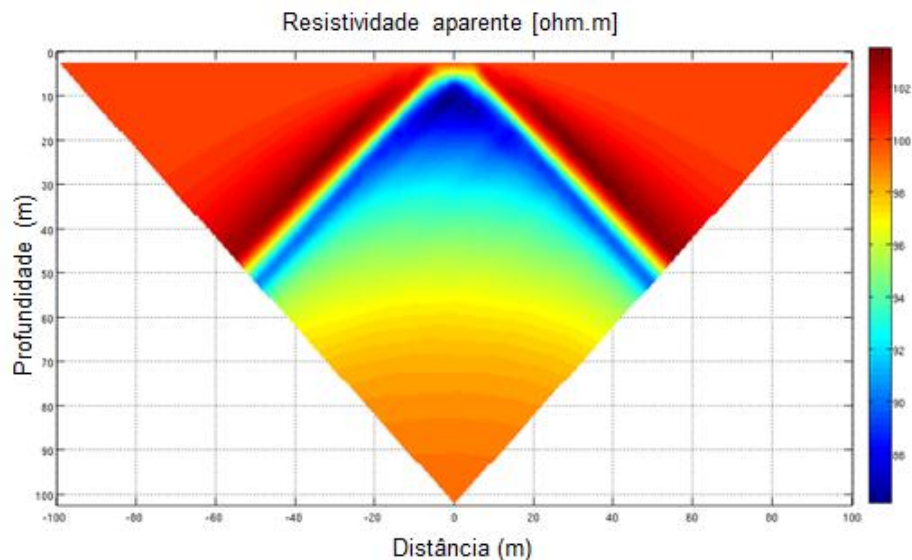


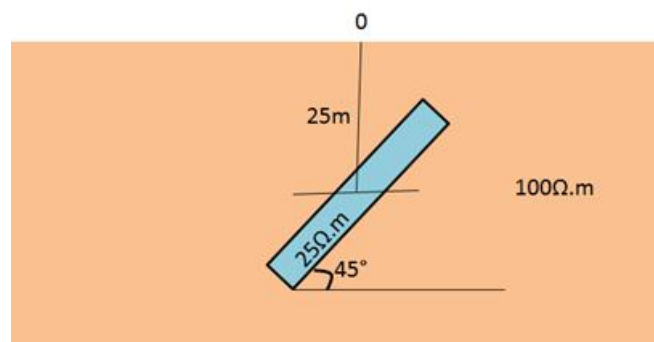
Figura 3.15 - Pseudo-seção de resistividade aparente obtida pelo potencial secundário para um modelo de semi-espço homogêneo de resistividade $100 \Omega\text{m}$ com heterogeneidades em forma de dique de resistividade $25 \Omega\text{m}$, utilizando o arranjo dipolo.



3.6 MODELO BIDIMENSIONAL DE UM DIQUE INCLINADO

Neste modelo utilizamos os mesmos parâmetros do modelo (3.5), porém o corpo sofreu uma rotação de 45° em torno do centro de massa, que está localizado a 25 m abaixo da superfície.

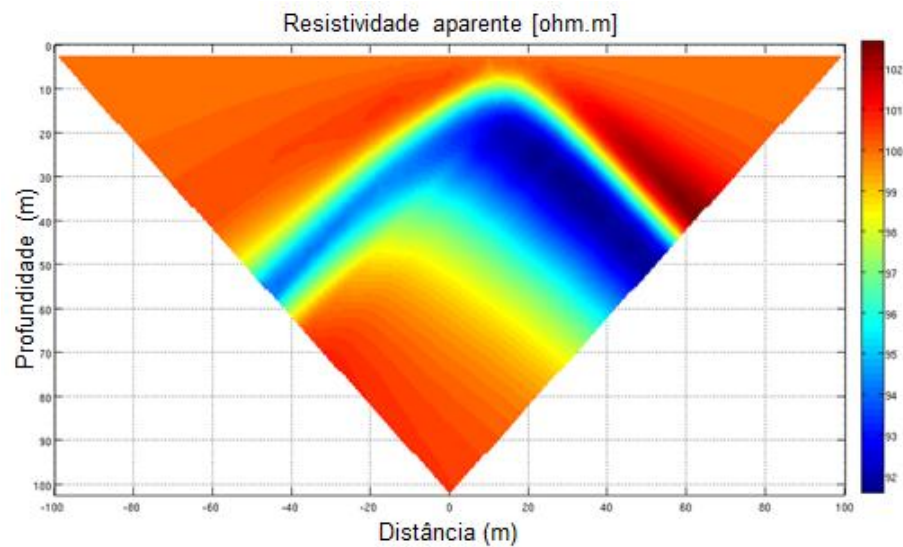
Figura 3.16 - Modelo de semi-espço homogêneo de resistividade $100 \Omega\text{m}$ com heterogeneidades em forma de dique inclinado de resistividade $25 \Omega\text{m}$.



Podemos verificar grande semelhança entre as pseudo-seções obtidas dos modelos (3.5) e (3.6), como o modelo (3.6) sofreu um giro de 45° em torno do seu

centro de massa, isso fez com que ocorresse uma leve mudança dos valores resistividade aparente como podemos observar na pseudo-seção apresentada na figura (3.17), fazendo com que perdesse a simetria em torno da origem, deslocando o topo do corpo para direita.

Figura 3.17 - Pseudo-seção de resistividade aparente obtida pelo potencial secundário para um modelo bidimensional de um dique inclinado.



Nos modelos apresentados neste trabalho, obtemos pseudo-seções tanto pelo potencial total como pelo potencial secundário, mostrando que o uso de potenciais secundário é bastante vantajoso na modelagem de corrente direta (DC), já que comparado ao potencial total, obtemos malhas com o menor número de nós e de elementos e também menor tempo gasto em processamento.

4 CONCLUSÃO

Neste trabalho propomos a simulação do método de eletrorresistividade usando a técnica de elementos finitos calculando o potencial elétrico secundário e comparando com os resultados advindos da abordagem tradicional da literatura geofísica para fontes eletromagnéticas.

Esta nova abordagem permitiu a otimização da malha de elementos finitos pela eliminação dos nós necessários para simular os eletrodos de corrente. Como principal consequência, obtemos pseudo-seções com menor custo computacional, possibilitando o uso desta abordagem em simulações mais complexas.

Para validar nossos resultados, comparamos as pseudo-seções obtidas com os resultados disponíveis na literatura, obtendo boa concordância.

Como sugestão de futuros trabalhos, considero importante testar o uso de algoritmos de solução de sistema linear de grande porte que faça uso de matrizes esparsas e simétricas. Outro ponto importante é a implementação de novos arranjos usados na eletrorresistividade, como os arranjos schlumberger e wenner.

REFERÊNCIAS

- ABRAMOWITZ, M.; STEGUN, I. A. **Handbook of mathematical functions**. New York: Dover, 1965. 1046 p.
- BORGES, W.R. **Investigações geofísicas na borda da bacia sedimentar de São Paulo, utilizando-se GPR e eletrorresistividade**. 2002. 60 f. Dissertação (Mestrado em Geofísica) – Universidade de São Paulo, São Paulo, 2002.
- DAMASCENO, F. F. **Levantamento geofísico do cemitério do Tapanã**. 2001. 67 f. Trabalho de Conclusão de Curso. (graduação) – UFPA, CG, DGF, Belém, 2001.
- ERDOGON, E. DEMIRCI, I.; CANDANSAYAR. M.E. **Incorporating topography into 2D resistivity modeling using finite-element and finite-difference approaches**. *Geophysics*, v. 73, n. 3, p. f135-f142 - may-june 2008. 10.1190/1.2905835.
- GOLUB, G. H.; LOAN, C. F. V. **Matrix computations**. Baltimore, Maryland: Johns Hopkins. 1983. 520 p.
- GUIMARÃES, P.B.M. **Efeitos do strike das estruturas geológicas de duas dimensões nas pseudo-seções de IP resistividade**. 148 f. Dissertação (Mestrado em Geofísica) – UFPA, CG, DGF, Belém, 1983.
- GALLARDO, L.A.; MEJU, M. A. **Joint two-dimensional DC resistivity and seismic travel time inversion with cross-gradients constraints**. *Journal of Geophysical Research*, v. 109, b03311, doi:10.1029/2003jb002716. 2004.
- HERMAN, R. **An introduction to electrical resistivity in geophysics**. *Am. J. Phys*, v. 69, n.9 p. f127-f137, Sep. 2001.
- INMAN, J. R. **Resistivity inversion with ridge regression**. *Geophysics*, v. 40, p. 789-817. 1975.
- JACKSON, et al. **3D resistivity inversion using 2D measurements of the electric field**. *Geophysical Prospecting*, v. 49, p. 26-39. 2001.
- JINGTIAN, et, al. **2.5-D DC Resistivity Modeling Considering Flexibility and Accuracy**. *Journal of Earth Science*, v. 22, n. 1, p. 124–130, Feb. 2011.
- LOKE, M.H. **Electrical imaging surveys for environmental and engineering studies**. [S.l.:sn], 1999.
- MARANHÃO, C.H.M; FARIAS, V.J.C.; ROCHA, B.R.P. **Direct modelling 2D of lands with lateral heterogeneity for a system of electric grounding**. *Ieee Latin America Transactions*, v. 6, n. 5, p. 135-141, sep. 2008.
- MARSHALL, D.J.; MADDEN, T.R. **induced polarization, a study of its causes**. *Geophysics*, v. 24, n. 4, p. 780-816, 1959.
- MOONEY, et al. **A resistivity computation method for layered earth methods**. *Geophysics*, v. 31, n. 10, p. 192-203, 1966.

KOEFOED, O., GHOSH, D. P.; POLMAN, G. J. **Computation of type curves for electromagnetic depth sounding with a horizontal transmitting coil by means of a digital linear filter. Geophysical Prospecting.** v. 20, n. 25, p. 206-420, 1972.

LOKE M.H.; BARKER R.D. **Practical techniques for 3D resistivity surveys and data inversion. Geophysical Prospecting,** v. 44, n. 9, p. 499-523, 1996a.

LOKE M.H.; BARKER R.D. **Rapid least-squares inversion of apparent resistivity pseudosections by a quasi-Newton method. Geophysical Prospecting,** v. 44, n. 9, p. 131-152, 1996b.

ORELLANA, E. **Prospeccion geoeletrica en corriente continua.** Madrid: Paraninfo, 1972, 560p.

RIJO, L. **Electrical geophysics 2-D earth direct modeling.** [S.l.:s.n.], 2002.

RIJO, L. **Electrical Geophysics 1-D earth direct modeling.** [S.l.:s.n.], 2004.

RIJO, et al. **Interpretation of apparent resistivity data from apodi valley, Rio Grande do Norte, Brazil. Geophysics,** v. 42, n. 4, p. 811-822, 1977.

SASAKI, Y. **3D resistivity inversion using the finite element method. Geophysics,** v. 59, n. 30, p. 1839-1848, 1994.

SILVA, L.M.C.; LUIZ, J.G. **Geofísica de Prospeção.** Belém, Universidade Federal do Pará. Centro de Geociências, 1995, 311p.

SILVA, R.W.C; FILHO, W.M.; MOREIRA, C.A. **Emprego do método da eletrorresistividade no estudo da contaminação subterrânea do cemitério municipal de Vila Rezende, Piracicaba – sp. Revista Brasileira de Geofísica,** v. 27, n. 3, p. 389-399, 2009.

WU, et al. **Computations of secondary potential for 3D DC resistivity modelling using an incomplete choleski conjugate-gradient method. Geophysical Prospecting,** v. 51, n. 5, p. 567–577, 2003.