

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

ESPALHAMENTO ELETROMAGNÉTICO NO GRAFENO ATRAVÉS DE
TRANSFORMADAS DE IMPEDÂNCIA

ANDREY VIANA PIRES

DM – 06/2019

UFPA / ITEC / PPGEE
Campus Universitário do Guamá
Belém-Pará-Brasil

2019

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

ANDREY VIANA PIRES

ESPALHAMENTO ELETROMAGNÉTICO NO GRAFENO ATRAVÉS DE
TRANSFORMADAS DE IMPEDÂNCIA

DM – 06/2019

UFPA / ITEC / PPGEE
Campus Universitário do Guamá
Belém-Pará-Brasil

2019

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

ANDREY VIANA PIRES

ESPALHAMENTO ELETROMAGNÉTICO NO GRAFENO ATRAVÉS DE
TRANSFORMADAS DE IMPEDÂNCIA

Dissertação submetida à Banca Examinadora do Programa de Pós-Graduação em Engenharia elétrica da UFPA para a obtenção do Grau de Mestre em Engenharia Elétrica na Área de Eletromagnetismo Aplicado.

UFPA / ITEC / PPGEE
Campus Universitário do Guamá
Belém-Pará-Brasil

2019

Dados Internacionais de Catalogação - na – Publicação (CIP) Sistema de Bibliotecas da UFPA

P667e Pires, Andrey Viana, 1993-

Espalhamento eletromagnético no grafeno através de transformadas de impedância / Andrey viana Pires.-2019.

Orientador: Karlo Queiroz da Costa
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Pará, Instituto de Tecnologia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, Belém, 2019.

1. Campos eletromagnéticos – Modelos matemáticos. 2. Análise espectral. 3. Ondas eletromagnéticas – Espalhamento. 4. Compostos de carbono. I. Título.

CDD 23. ed. 530.141

Elaborada por Lucicléa S. de Oliveira – CRB -2/648

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

**“ESPALHAMENTO ELETROMAGNÉTICO NO GRAFENO ATRAVÉS DE
TRANSFORMADAS DE IMPEDÂNCIA”**

AUTOR: ANDREY VIANA PIRES

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO SUBMETIDA À BANCA EXAMINADORA APROVADA PELO
COLEGIADO DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA, SENDO
JULGADA ADEQUADA PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM ENGENHARIA
ELÉTRICA NA ÁREA DE TELECOMUNICAÇÕES.

APROVADA EM: 22/02/2019

BANCA EXAMINADORA:



Prof. Dr. Karlo Queiroz da Costa

(Orientador – PPGEE/UFPA)



Prof. Dr. Fabrício José Brito Barros

(Avaliador Interno – PPGEE/UFPA)



Prof. Dr. Rodrigo Melo e Silva de Oliveira

(Avaliador Interno – PPGEE/UFPA)



Prof. Dr. Victor Alexandrovich Dmitriev

(Avaliador Interno – PPGEE/UFPA)



Prof. Dr. Vicente Ferrer Pureza Aleixo

(Avaliador Externo ao Programa – UFRA)

VISTO:

Prof.^a Dr.^a Maria Emília de Lima Tostes

(Coordenadora do PPGEE/ITEC/UFPA)

Este trabalho é dedicado ao meu pai Silvio Silva Pires, por sempre ter acreditado em mim.

Agradecimentos

Primeiramente a Deus, por iluminar o meu caminho.

À toda minha família, em especial aos meus pais Simone Costa Viana e Silvio Silva Pires, e à minha avó Maria de Lourdes, por ter sido uma segunda mãe.

Aos Professores do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, por proverem o conhecimento necessário para a realização deste trabalho.

Ao meu professor e orientador Dr. Karlo Q. da Costa, por toda paciência e grande auxílio durante a minha jornada acadêmica.

Aos meus companheiros do Ungaisouten.

Aos meus colegas de laboratório Patrick Coelho, André Souza e Yago Gomes por todo apoio.

À todos os meus amigos, em especial Heder Lee, pelo companheirismo.

À FAPESPA, pelo apoio financeiro em forma de bolsa.

À todos aqueles que contribuíram de forma direta ou indireta para a realização deste trabalho.

*“Mesmo desacreditado e ignorado por todos, não posso desistir, pois para mim, vencer é
nunca desistir.”
(Albert Einstein)*

Resumo

Este trabalho apresenta uma análise alternativa do problema de espalhamento de uma folha de grafeno através da Transformada de Impedância. São demonstradas as funções Green, os campos eletromagnéticos e as propriedades da onda superficial plasmônica sobre o grafeno. Os resultados numéricos mostram as distribuições espaciais de campo e análise espectral da onda plasmônica em função das propriedades dos meios, frequência e potencial químico. Os resultados obtidos mostram que a transformada de impedância é adequada para análise de espalhamento em folhas de grafeno devido esta utilizar as autofunções naturais do problema.

Palavras-chave: Espalhamento eletromagnético, análise espectral, grafeno, terahertz, transformada de impedância,

Abstract

Graphene is a two-dimensional material with good electrical properties that make possible new telecommunications applications in telecommunications on the terahertz range. This work presents an alternative analysis of the scattering problem in a graphene sheet using the impedance transform. The Green functions, electromagnetic fields and properties of the plasmonic surface wave on the graphene are demonstrated. The numerical results show the spatial field distributions and spectral analysis of the plasmonic wave as a function of media properties, frequency and chemical potential. The results show that the impedance transform is adequate for scattering analysis in graphene sheets because it uses the natural autofunctions of the problem.

Keywords: Electromagnetic scattering, graphene sheet, terahertz, spectral analysis.

Lista de Ilustrações

Figura 1.1 – Exemplos de aplicação do grafeno: (a) Aplicação em camuflagem de dispositivos, (b) Guias de onda baseados em grafeno, (c) e (d) Antenas baseadas em grafeno. Adaptado de [1, 2, 3, 4]	17
Figura 2.1 – Variação da condutividade superficial do grafeno σ versus a frequência para diferentes valores de μ_C	21
Figura 2.2 – Geometria do problema de espalhamento de uma folha de grafeno excitada por uma fonte de corrente linear magnética no modo TM_y	22
Figura 4.1 – Plano k_x da superfície de Riemann, mostrando as singularidades de (4.79) e (4.81).	43
Figura 5.1 – Fator de confinamento δ_q/λ_0 ($q = 1, 2$) e constante k_{xSP}/k_0 em função da frequência para diferentes valores de μ_C . Neste caso $\epsilon_{r1} = \epsilon_{r2} = 1$	46
Figura 5.2 – Fator de confinamento δ_q/λ_0 e constante k_{xSP}/k_0 em função da frequência para diferentes valores de $\mu_C = 0, 3; 0, 5$ e $0, 7eV$, $\epsilon_{r1} = 1$ e $\epsilon_{r2} = 2$	47
Figura 5.3 – Fator de confinamento δ_q/λ_0 e constante k_{xSP}/k_0 em função da frequência para diferentes valores de $\mu_C = 0, 3; 0, 5$ e $0, 7eV$, $\epsilon_{r1} = 1$ e $\epsilon_{r2} = 4$	47
Figura 5.4 – Fator de confinamento δ_q/λ_0 ($q = 1, 2$) e constante k_{xSP}/k_0 em função da frequência para diferentes valores de $\epsilon_{r1} = \epsilon_{r2}$. Neste caso $\mu_C = 0, 5eV$	48
Figura 5.5 – Fator de confinamento δ_q/λ_0 ($q = 1, 2$) e constante k_{xSP}/k_0 em função da frequência para diferentes valores de ϵ_{r1} e ϵ_{r2} . Neste caso $\mu_C = 0, 5eV$	49
Figura 5.6 – Distribuição de $Re(H_{zSP}(x, y))$. (a) Vista 3D. (b) Plano xy . (c) Variação com x . (d) Variação com y . Dados: $\epsilon_{r1} = 1$, $\epsilon_{r2} = 4$, $F = 1\text{THz}$ e $\mu_C = 0, 5eV$	50
Figura 5.7 – Variação do campo $Re[H_z(x, y)]$ versus x e y para diferentes valores de ϵ_{r1} e ϵ_{r2} , para $\mu_C = 0, 5eV$ e $F = 1, 0\text{THz}$. (a) e (b) para $\epsilon_{r1} = \epsilon_{r2} = 1$. (c) e (d) para $\epsilon_{r1} = 1$ e $\epsilon_{r2} = 2$. (e) e (f) para $\epsilon_{r1} = 1$ e $\epsilon_{r2} = 4$	50
Figura 5.8 – Variação do campo $Re[H_z(x, y)]$ versus x e y para $\epsilon_{r1} = \epsilon_{r2} = 1$, para diferentes valores de μ_C e $F = 1, 0\text{THz}$. (a) e (b) para $\mu_C = 0, 3eV$. (c) e (d) para $\mu_C = 0, 5eV$. (e) e (f) para $\mu_C = 0, 7eV$	51
Figura 5.9 – Variação do campo $Re[H_z(x, y)]$ versus x e y para $\epsilon_{r1} = 1$ e $\epsilon_{r2} = 4$, para diferentes valores de μ_C e $F = 1, 0\text{THz}$. (a) e (b) para $\mu_C = 0, 3eV$. (c) e (d) para $\mu_C = 0, 5eV$. (e) e (f) para $\mu_C = 0, 7eV$	51
Figura B.1 – Contorno fechado no plano $Re(\lambda)$ e $Im(\lambda)$ utilizada para resolver (B.3).	58
Figura C.1 – Contorno fechado no plano $Re(\lambda)$ e $Im(\lambda)$ utilizado para resolver (C.3)	60
Figura D.1 – Contorno fechado sobre os polos $z = ib$ e $z = -ia$ no plano $Re(z)$ e $Im(z)$	63

Lista de Símbolos

σ	Condutividade superficial do grafeno (S)
σ_{intra}	Condutividade de intrabanda do grafeno (S)
σ_{inter}	Condutividade de interbanda do grafeno (S)
μ_C	Potencial químico (Nível de Fermi) (eV)
ω	Frequência angular (rad/s)
T	Temperatura (K)
Γ	Taxa de espalhamento (s)
\hbar	Constante de Planck reduzida (J/s)
k_B	Contante de Boltzmann (J/K)
F	Frequência (Hz)
μ_0	Permeabilidade de meios não magnéticos (H/m)
ϵ_1	Permissividade do meio 1 (F/m)
ϵ_2	Permissividade do meio 2 (F/m)
ϵ_{r1}	Permissividade relativa do meio 1 (F/m)
ϵ_{r2}	Permissividade relativa do meio 2 (F/m)
M_z	Fonte linear de corrente magnética orientada em z (V)
B	Densidade de fluxo magnético (T)
J	Densidade de corrente (A/m^2)
D	Densidade de fluxo elétrico (C/m^2)
t	Tempo (s)
H	Intensidade de campo magnético (A/m)
H_{x1}	Componente x da intensidade de campo magnético no meio 1 (A/m)
H_{x2}	Componente x da intensidade de campo magnético no meio 2 (A/m)

H_{y1}	Componente y da intensidade de campo magnético no meio 1 (A/m)
H_{y2}	Componente y da intensidade de campo magnético no meio 2 (A/m)
H_{z1}	Componente z da intensidade de campo magnético no meio 1 (A/m)
H_{z2}	Componente z da intensidade de campo magnético no meio 2 (A/m)
H_{z10}	Componente z do espectro discreto da intensidade de campo magnético no meio 1 (A/m)
\hat{H}_{z1}	Componente z do espectro contínuo da intensidade de campo magnético no meio 1 (A/m)
H_{z20}	Componente z do espectro discreto da intensidade de campo magnético no meio 2 (A/m)
\hat{H}_{z2}	Componente z do espectro contínuo da intensidade de campo magnético no meio 2 (A/m)
E	Intensidade de campo elétrico (V/m)
E_{x1}	Componente x da intensidade de campo elétrico no meio 1 (V/m)
E_{x2}	Componente x da intensidade de campo elétrico no meio 2 (V/m)
E_{y1}	Componente y da intensidade de campo elétrico no meio 1 (V/m)
E_{y2}	Componente y da intensidade de campo elétrico no meio 2 (V/m)
E_{z1}	Componente z da intensidade de campo elétrico no meio 1 (V/m)
E_{z2}	Componente z da intensidade de campo elétrico no meio 2 (V/m)
k_1	Número de onda do meio 1 (rad/m)
k_2	Número de onda do meio 2 (rad/m)
k_x	Componente x da variável espectral contínua
k_{x1}	Componente x da variável espectral contínua no meio 1 ($\sqrt{k_1^2 - k_y^2}$)
k_{x2}	Componente x da variável espectral contínua no meio 2 ($\sqrt{k_2^2 - k_y^2}$)
k_y	Componente y da variável espectral contínua
k_{y1}	Componente y da variável espectral contínua no meio 1 ($\sqrt{k_1^2 - k_x^2}$)
k_{y2}	Componente y da variável espectral contínua no meio 2 ($\sqrt{k_2^2 - k_x^2}$)

k_{x01}	Componente x da variável espectral discreta no meio 1 ($\sqrt{k_1^2 + \gamma_1^2}$)
k_{x02}	Componente x da variável espectral discreta no meio 2 ($\sqrt{k_2^2 + \gamma_2^2}$)
γ_1	Parâmetro de condutividade do grafeno no meio 1 ($\frac{i\omega\epsilon_1}{\sigma}$)
γ_2	Parâmetro de condutividade do grafeno no meio 2 ($\frac{i\omega\epsilon_2}{\sigma}$)
V_1	Volume da região 1
V_2	Volume da região 2
g_1	Função de Green no meio 1
\hat{g}_1	Componente de espectro contínuo da função de Green no meio 1
g_{10}	Componente de espectro discreto da função de Green no meio 1
g_2	Função de Green no meio 2
g_{20}	Componente de espectro discreto da função de Green no meio 2
\hat{g}_2	Componente de espectro contínuo da função de Green no meio 2
L_λ	Operador de Sturm-Luville
h_1	Função de Green adjunta
$J(u, v)$	Conjunção entre as funções u e v
S_{1t}	Superfície total que delimita o volume V_1
S_{2t}	Superfície total que delimita o volume V_2
\bar{n}	Vetores unitários normal e apontando para fora dos volumes V_1 e V_2
\mathfrak{F}	Operador de Transformada de Fourier
α_{10}	Transformada de impedância de ordem zero para ao meio 1
α_{1k_y}	Transformada de impedância de ordem k_y para o meio 1
α_{20}	Transformada de impedância de ordem zero para ao meio 2
α_{2k_y}	Transformada de impedância de ordem k_y para o meio 2
k_{xSP}	Constante de propagação em x de onda de superfície plasmônica
C_1	Resíduo do pólo k_{xSP}
C_2	Resíduo do pólo k_{xSP}

δ_q	Nível de decaimento
λ_0	Comprimento de onda no espaço livre

Sumário

1	INTRODUÇÃO	17
1.1	Revisão Bibliográfica	17
1.2	Objetivos	18
1.3	Estrutura do Trabalho	18
2	FORMULAÇÃO DO PROBLEMA	20
2.1	Grafeno: Um Breve Resumo	20
2.2	Modelo de Condutividade	21
2.3	Geometria do Problema	22
2.4	Formulação do Problema	22
2.5	Método da Função de Green	24
3	SOLUÇÃO POR TRANSFORMADA DE FOURIER	28
3.1	Determinação das Funções de Green	28
3.2	Resolução dos Campos Magnéticos H_{z1} e H_{z2}	30
4	SOLUÇÃO POR TRANSFORMADAS DE IMPEDÂNCIA	34
4.1	Solução dos Problemas da Função de Green por Transformadas de Impedância	34
4.2	Resolução dos Campos Magnéticos H_{z1} e H_{z2}	37
5	RESULTADOS E DISCUSSÕES	45
5.1	Análise Espectral do Modo Plasmônico	45
5.2	Análise Espacial do Modo Plasmônico	48
6	CONCLUSÃO	52
6.1	Trabalhos Publicados	52
6.2	Premiações Recebidas	53
	Referências	54
	APÊNDICE A – VERIFICANDO SE O PROBLEMA É AUTO-ADJUNTO	56
	APÊNDICE B – TRANSFORMADA DE IMPEDÂNCIA DO MEIO 2	58
	APÊNDICE C – TRANSFORMADA DE IMPEDÂNCIA DO MEIO 1	60

APÊNDICE D – RESOLUÇÃO DOS COEFICIENTES $A(k_x, 0)$ E $B(k_x, 0)$	62
APÊNDICE E – RESOLUÇÃO DE (4.65)	65
APÊNDICE F – RESOLUÇÃO DA EQUAÇÃO CARACTERÍSTICA PARA MEIOS IGUAIS	67
APÊNDICE G – RESOLUÇÃO DA EQUAÇÃO CARACTERÍSTICA PARA MEIOS DIFERENTES E CÓDIGO EM MATLAB	69

1 Introdução

1.1 Revisão Bibliográfica

O grafeno é um material bidimensional composto por átomos de carbono organizados em uma estrutura em forma de favo de mel [5]. Em virtude de sua função condutividade, o grafeno apresenta propriedades elétricas diferentes de materiais comumente utilizados em aplicações na engenharia como o ouro e o cobre. Por exemplo, possui boa eficiência de perdas e alta velocidade no transporte de corrente elétrica, além de ser possível controlar suas propriedades condutivas através do seu potencial químico o qual é função de dopagem ou tensão aplicada. Esta propriedade promove versatilidade em suas aplicações [6]. Devido a estas propriedades, o grafeno se mostra um material promissor para diversas aplicações, como camuflagem de dispositivos [1], atuação em sensores, promovendo um aumento na interação entre campo e matéria [7, 8], aplicação em sistemas fotovoltaicos baseados em grafeno [9], atuação como elemento de regulação das propriedades plasmônicas de nano antenas ópticas metálicas [10], aplicação no projeto de antenas baseadas em grafeno [3, 4, 11], guiamento de ondas entre outros [2]. A Fig. 1.1 mostra exemplos de aplicação do grafeno.

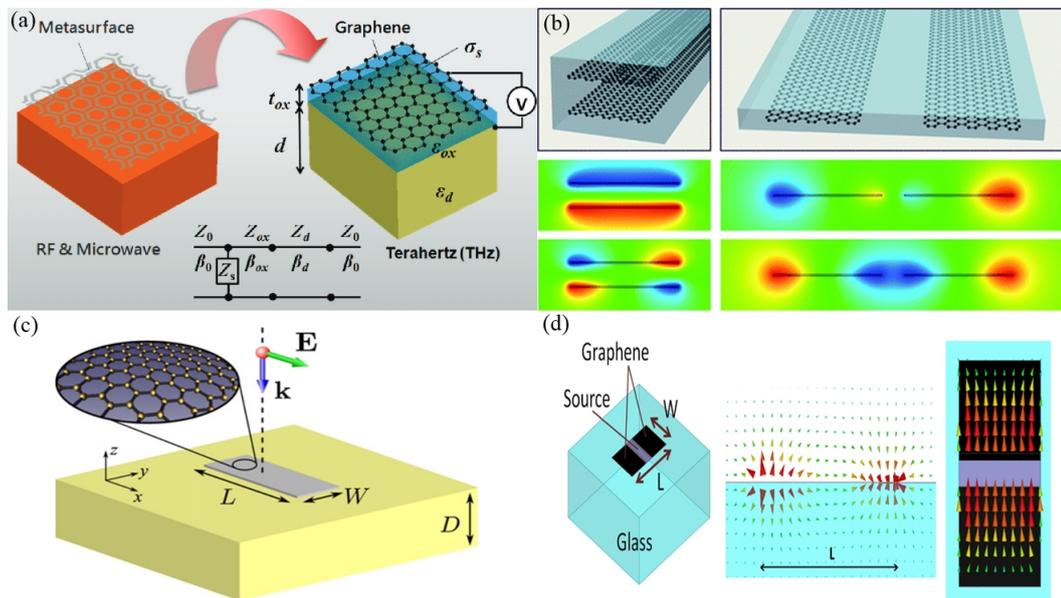


Figura 1.1 – Exemplos de aplicação do grafeno: (a) Aplicação em camuflagem de dispositivos, (b) Guias de onda baseados em grafeno, (c) e (d) Antenas baseadas em grafeno. Adaptado de [1, 2, 3, 4]

A modelagem eletromagnética teórica do grafeno é importante para as aplicações em projeto de dispositivos, por exemplo. Estudos prévios conseguiram utilizar de forma

satisfatória o método da função de Green para solucionar os problemas de campo e obter os modos plasmônicos do grafeno [12, 13, 14]. Nestes estudos, funções diádicas de Green foram utilizadas para o cálculo dos campos eletromagnéticos, onde fontes pontuais de corrente foram utilizadas para excitar folhas de grafeno. Resultados sobre as características do grafeno foram obtidos, tais como: taxa de confinamento e controle da ressonância da onda plasmônica, nível de perdas ôhmicas entre outros.

1.2 Objetivos

Neste trabalho, propõe-se uma análise teórica eletromagnética de uma folha de grafeno excitada por uma linha de corrente magnética. Utilizamos dois métodos distintos para a resolução do problema da função de Green bidimensional: O primeiro método consiste na utilização da Transformada de Fourier e o segundo método utiliza Transformadas de Impedância. Os resultados apresentados são a variável espectral da onda superficial plasmônica sobre o grafeno e a distribuição espacial do campo magnético deste modo. Analisamos a dependência destas características deste modo plasmônico em função da frequência, do potencial químico e das permissividades dos meios.

1.3 Estrutura do Trabalho

O trabalho apresenta os seguintes capítulos:

- O Capítulo 1 apresenta a introdução.
- O capítulo 2 apresenta uma introdução resumida sobre o grafeno e suas propriedades, o modelo de condutividade adotado para simular o grafeno, a geometria do problema juntamente com a formulação do mesmo através das equações de Maxwell e por fim a aplicação do método da Função de Green para a obtenção do campo magnético nos meios 1 e 2 que compõem o problema.
- O capítulo 3 apresenta o primeiro método utilizado para a solução do problema das funções de Green, utilizando transformada de Fourier, bem como a resolução do campo magnético nos dois meios a partir das soluções encontradas para as funções de Green.
- O capítulo 4 apresenta o segundo método utilizado para resolver as funções de Green, utilizando Transformadas de Impedância. O campo magnético para os meios 1 e 2 é formulado em seguida a partir das soluções das funções de Green. É apresentada ainda a análise das singularidades encontradas nas equações do campo magnético.

-
- O capítulo 5 apresenta os resultados numéricos obtidos através de um código desenvolvido no software Matlab [15]. São apresentados comentários a respeito da validação dos métodos utilizados nos capítulos 3 e 4 e uma análise paramétrica do modo plasmônico.
 - O capítulo 6 apresenta as conclusões e considerações finais do trabalho.
 - Os apêndices A-G apresentam demonstrações de algumas equações e o código em Matlab desenvolvido.

2 Formulação do Problema

2.1 Grafeno: Um Breve Resumo

Apesar do grafite ser um material presente de forma abundante na natureza e ser amplamente conhecido pela comunidade científica, o grafeno, material que consiste em uma camada fina, bidimensional retirada do grafite, tem atraído atenção apenas há alguns anos. Estudos utilizando grafite com poucas camadas já tinham sido feitos anteriormente até que, em 2004, Geim e seus colegas de trabalho conseguiram pela primeira vez isolar uma única camada de grafeno através de esfoliação reversa no grafite [16]. A partir desta descoberta, a quantidade de pesquisas sobre as propriedades, aplicações e métodos de obtenção do grafeno atingiram grandes escalas.

O motivo de tamanho interesse neste material está na sua estrutura bidimensional com seus átomos arranjados em estruturas hexagonais em forma de favo de mel. Segundo [17], esta estrutura com hibridização sp^2 concede ao grafeno propriedades altamente cobiçáveis nas mais diversas aplicações. Dentre elas, destacam-se a grande condutividade térmica ($5000WmK^{-1}$), grande durabilidade química, controle das propriedades elétricas pelo potencial químico e alta mobilidade de elétrons ($2.5 \times 10^5 cm^2V^{-1}s^{-1}$). Apesar destas propriedades promissoras e o alto interesse no grafeno, a maior dificuldade ainda é a obtenção do mesmo, pois a principal forma de obtenção (esfoliação mecânica do grafite) não fornece o grau de pureza necessário para aplicações onde é necessário um grau mais apurado de precisão do material, sendo ainda nada prática a obtenção do grafeno por este método em aplicações que necessitam de grandes quantidades de grafeno. Em resposta a isso, novos métodos de obtenção do grafeno estão em constante pesquisa e desenvolvimento[18].

As aplicações do grafeno abrangem várias áreas. No que diz respeito a telecomunicações, em especial, o grafeno ganhou notoriedade pela sua capacidade de transporte balístico de informação com baixo nível de perdas. Exemplos de aplicações utilizando o grafeno em telecomunicações incluem a criação de antenas nano-patch baseadas em grafeno, que impulsionou os avanços nas comunicações em nano-sistemas, apresentando-se como uma solução para a criação de estruturas capazes de operar em sistemas tão pequenos [3]. Os efeitos plasmônicos suportados pelo grafeno são ainda de grande interesse em aplicações como guiamento de ondas plasmônicas, com o grafeno promovendo altas velocidades de transmissão com menores níveis de perda quando comparados a materiais convencionais utilizados para estes fins, como o ouro [2]. Uma revisão sobre o grafeno e suas aplicações pode ser encontrada em [16].

2.2 Modelo de Condutividade

O modelo de condutividade do grafeno utilizado nesta dissertação é o modelo proposto por Kubo [19]. O modelo utilizado é descrito em termos de intrabanda e interbanda $\sigma = \sigma_{intra} + \sigma_{inter}$, onde σ_{intra} e σ_{inter} são dados pelas equações:

$$\sigma_{intra} = -i \frac{e^2 k_B T}{\pi \hbar^2 (\omega - i2\Gamma)} \left(\frac{\mu_C}{k_B T} + 2 \ln \left(e^{-\frac{\mu_C}{k_B T}} + 1 \right) \right) \quad (2.1)$$

$$\sigma_{inter} \simeq \frac{-ie^2}{4\pi\hbar} \ln \left(\frac{2|\mu_C| - (\omega - i2\Gamma)\hbar}{2|\mu_C| + (\omega - i2\Gamma)\hbar} \right) \quad (2.2)$$

onde μ_C é o potencial químico (nível de Fermi), ω é a frequência angular, $T=300\text{K}$ é a temperatura quântica (fônons), $\tau=0,5 \times 10^{-12}\text{s}$ é o tempo de relaxação, k_B é a constante de Boltzmann, Γ é a taxa de espalhamento, com valor $\Gamma = \frac{1}{2\tau}$ e $\hbar = h/2\pi$ é a constante de Planck reduzida. A Fig. 2.1 mostra exemplos deste modelo de condutividade em função da frequência para diferentes valores do potencial químico. Estes valores foram selecionados de modo a evitar que distorções ocorram na nuvem eletrônica devido ao potencial químico, afetando a condutividade superficial do grafeno. Nota-se que o grafeno apresenta a parte imaginária de sua condutividade negativa, algo necessário para que o material suporte ondas plasmônicas [20].

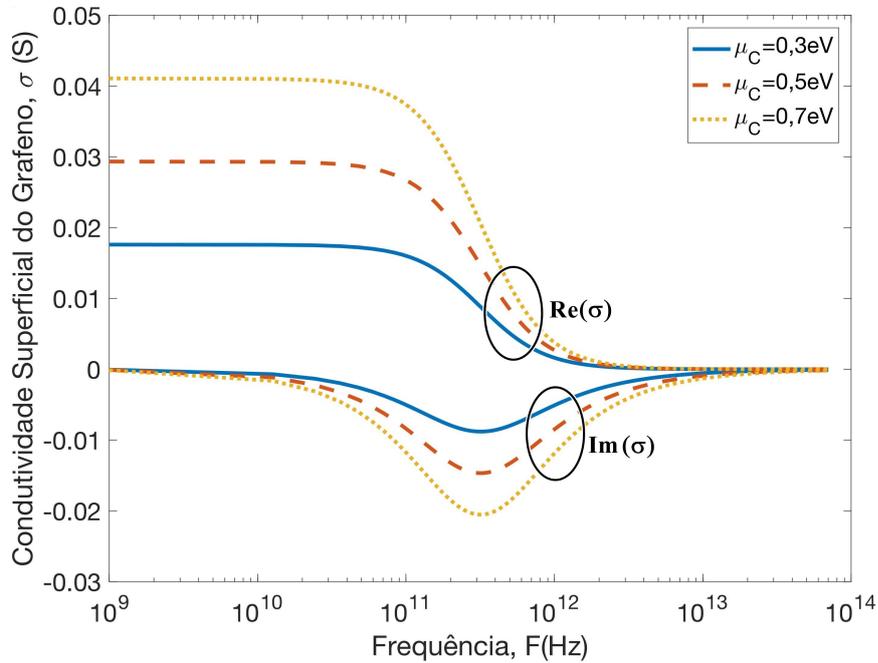


Figura 2.1 – Variação da condutividade superficial do grafeno σ versus a frequência para diferentes valores de μ_C

2.3 Geometria do Problema

A Fig. 2.2 mostra uma representação do problema a ser resolvido. O grafeno é modelado como uma superfície de condutividade σ que se encontra na interface ($y=0$) entre dois meios distintos 1 ($y < 0$) e 2 ($y > 0$). Estes meios são caracterizados pela permeabilidade μ_0 (meios não-magnéticos) e por diferentes permissividades ϵ_1 e ϵ_2 , respectivamente. Uma fonte linear de corrente magnética, localizada no meio 1, no ponto $x = \xi$ e $y = \eta$, orientada em z é utilizada para excitar a folha de grafeno.

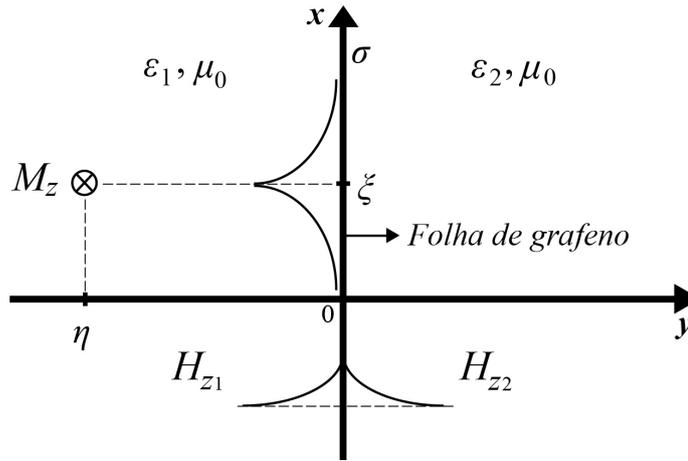


Figura 2.2 – Geometria do problema de espalhamento de uma folha de grafeno excitada por uma fonte de corrente linear magnética no modo TM_y

2.4 Formulação do Problema

No problema da Fig. 2.2 desejamos determinar os campos eletromagnéticos nos dois meios. Para isso, partimos das equações de Maxwell:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \mathbf{M} \quad (2.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (2.4)$$

Assumindo que a geometria do problema e a fonte são invariantes em relação a z , e adotando a dependência temporal $e^{i\omega t}$, temos:

$$\frac{\partial}{\partial z} = 0 \quad (2.5)$$

Expandindo (2.3) e (2.4) em coordenadas cartesianas e usando (2.5), temos o seguinte conjunto de equações para os meios 1 e 2 (Fig. 2.2):

$$\frac{\partial H_{zq}}{\partial y} = i\omega\epsilon_q E_{xq} \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial H_{zq}}{\partial x} = -i\omega\epsilon_q E_{yq} \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial H_{yq}}{\partial x} - \frac{\partial H_{xq}}{\partial y} = i\omega\epsilon_q E_{zq} \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial E_{zq}}{\partial y} = -i\omega\mu_0 H_{yq} \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial E_{zq}}{\partial x} = i\omega\mu_0 H_{yq} \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial E_{xq}}{\partial y} - \frac{\partial E_{yq}}{\partial x} = M_{zq} + i\omega\mu_0 H_{zq} \quad (2.11)$$

onde $q = 1$ ou 2 .

A fonte M_z , definida como uma fonte de corrente magnética linear $M_z(x, y) = M_0\delta(x - \xi)\delta(y - \eta)$, está localizada no meio 1. Portanto, $M_{z2} = 0$ e $M_{z1} \neq 0$. Esta fonte excita o conjunto formado pelas equações (2.6),(2.7) e (2.11), sendo estas desacopladas do conjunto não excitado pela fonte formado pelas equações (2.8),(2.9) e (2.10). Conclui-se então que $H_x = H_y = E_z = 0$. Derivando (2.6) em relação a y , (2.7) em relação a x , somando e substituindo em (2.11) temos o conjunto de equações:

$$\begin{aligned} (\nabla_{xy}^2 + k_q^2) H_{zq} &= i\omega\epsilon_q M_{zq} \\ E_{xq} &= \frac{1}{i\omega\epsilon_q} \frac{\partial H_{zq}}{\partial y} \\ E_{yq} &= -\frac{1}{i\omega\epsilon_q} \frac{\partial H_{zq}}{\partial x} \end{aligned} \quad (2.12)$$

sendo $k_1 = \omega(\mu_0\epsilon_1)^{1/2}$ e $k_2 = \omega(\mu_0\epsilon_2)^{1/2}$.

Na interface, em $y=0$, o problema apresenta as seguintes condições de contorno:

$$E_x = E_{x1} = E_{x2} \quad (2.13)$$

$$H_{z2} - H_{z1} = \sigma E_x \quad (2.14)$$

caracterizando em (2.14) uma condição de impedância.

Desenvolvendo a condição de impedância em (2.14) e utilizando (2.12), obtemos as relações para o campo magnético na interface ($y = 0$):

$$H_{z2} - H_{z1} = \sigma \frac{1}{i\omega\epsilon_1} \frac{\partial H_{z1}}{\partial y} \quad (2.15)$$

e

$$H_{z2} - H_{z1} = \sigma \frac{1}{i\omega\epsilon_2} \frac{\partial H_{z2}}{\partial y} \quad (2.16)$$

Por conveniência, serão definidos dois parâmetros γ_1 e γ_2 :

$$\gamma_1 = \frac{i\omega\epsilon_1}{\sigma} \quad (2.17)$$

$$\gamma_2 = \frac{i\omega\epsilon_2}{\sigma} \quad (2.18)$$

Desta forma, o problema de valor de contorno para o meio 1 torna-se:

$$\nabla_{xy}^2 H_{z1} + k_1^2 H_{z1} = i\omega\epsilon_1 M_{z1} \quad (2.19)$$

com as condições:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} H_{z1} = 0 \quad (2.20)$$

$$\lim_{y \rightarrow -\infty} H_{z1} = 0 \quad (2.21)$$

$$H_{z1} + \frac{1}{\gamma_1} \frac{\partial H_{z1}}{\partial y} = H_{z2} \quad |_{y=0} \quad (2.22)$$

onde é definido o volume V_1 para este problema como:

$$V_1 = \{-\infty < x < +\infty, -\infty < y < 0, -\infty < z < +\infty\} \quad (2.23)$$

Para o meio 2, o problema de valor de contorno torna-se:

$$\nabla_{xy}^2 H_{z2} + k_2^2 H_{z2} = 0 \quad (2.24)$$

com as condições:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} H_{z2} = 0 \quad (2.25)$$

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} H_{z2} = 0 \quad (2.26)$$

$$H_{z2} - \frac{1}{\gamma_2} \frac{\partial H_{z2}}{\partial y} = H_{z1} \quad |_{y=0} \quad (2.27)$$

onde é definido o volume V_2 para este problema como:

$$V_2 = \{-\infty < x < +\infty, 0 < y < +\infty, -\infty < z < +\infty\} \quad (2.28)$$

2.5 Método da Função de Green

Para resolver os campos magnéticos H_{z1} e H_{z2} utilizando o método da função de Green, definimos os problemas da função de Green para o meio 1 como:

$$-\nabla_{xy}^2 g_1(x, y, x', y') - k_1^2 g_1(x, y, x', y') = \delta(x - x')\delta(y - y') \quad (2.29)$$

$$\lim_{y \rightarrow -\infty} g_1 = 0 \quad (2.30)$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g_1 = 0 \quad (2.31)$$

$$g_1 + \frac{1}{\gamma_1} \frac{\partial g_1}{\partial y} = 0 \quad |_{y=0} \quad (2.32)$$

e para o meio 2 como:

$$\nabla_{xy}^2 g_2(x, y, x', y') + k_2^2 g_2(x, y, x', y') = \delta(x - x') \delta(y - y') \quad (2.33)$$

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} g_2 = 0 \quad (2.34)$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g_2 = 0 \quad (2.35)$$

$$g_2 - \frac{1}{\gamma_2} \frac{\partial g_2}{\partial y} = 0 \quad |_{y=0} \quad (2.36)$$

Aplicando o método da Função de Green para a resolução do problema para o meio 1 temos:

$$\langle L_\lambda H_{z1}, h_1 \rangle = \langle H_{z1}, L_\lambda^* h_1 \rangle + J(H_{z1}, h_1) \quad (2.37)$$

onde $L_\lambda = -\nabla^2 - k_1^2$ e $L_\lambda^* = -\nabla^2 - \bar{k}_1^2$, $\lambda = k_1$, h_1 é a função de Green adjunta e J é a conjugação [21].

Na forma explícita, (2.37) é dada por:

$$\int_{V_1} (-\nabla^2 - k_1^2) H_{z1} \bar{h}_1 dV_1 = \int_{V_1} H_{z1} (-\nabla^2 - \bar{k}_1^2) \bar{h}_1 dV_1 + \int_{S_{1t}} [H_{z1} \nabla \bar{h}_1 - \bar{h}_1 \nabla H_{z1}] \cdot d\bar{S}_{1t} \quad (2.38)$$

onde V_1 é o volume correspondente ao meio 1, S_{1t} refere-se as superfícies que delimitam o volume V_1 .

Pode-se mostrar que o problema é simétrico e não auto-adjunto (vide Apêndice A), ou seja, $\bar{h}_1 = g_1$. A equação (2.38) torna-se então:

$$\int_{V_1} (-\nabla^2 - k_1^2) H_{z1} g_1 dV_1 = \int_{V_1} H_{z1} (-\nabla^2 - \bar{k}_1^2) g_1 dV_1 + \int_{S_{1t}} [H_{z1} \nabla g_1 - g_1 \nabla H_{z1}] \cdot \bar{n} dS_{1t} \quad (2.39)$$

onde \bar{n} refere-se aos vetores unitários normais a superfície S_{1t} e com sentido para fora de V_1 .

Substituindo (2.19) e (2.29) em (2.39) temos:

$$-i\omega\epsilon_1 \int_{V_1} M_z(x, y) g_1 dV_1 = \int_{V_1} H_{z1}(x, y) \delta(x - x') \delta(y - y') dV_1 + J(H_{z1}, g_1) \quad (2.40)$$

ou:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H_{z1}(x', y') dz = -i\omega\epsilon_1 \int_{V_1} M_z(x, y) g_1(x, y, x', y') dV_1 - J(H_{z1}, g_1) \quad (2.41)$$

O volume V_1 é delimitado pelas superfícies de S_{1t} , que por sua vez, é composto da soma de seis superfícies: $S_{11}(y \rightarrow -\infty)$, $S_{12}(x \rightarrow +\infty)$, $S_{13}(x \rightarrow -\infty)$, $S_{14}(z \rightarrow +\infty)$, $S_{15}(z \rightarrow -\infty)$ e $S_{16}(y = 0)$, de modo que $S_{1t} = S_{11} + S_{12} + S_{13} + S_{14} + S_{15} + S_{16}$. Devido as condições de contorno e a invariância do problema com relação a z , as integrais para a conjunção $J(H_{z1}, g_1)$ limitam-se a contribuição da superfície S_{16} :

$$J(H_{z1}, g_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} [H_{z1} \nabla g_1 - g_1 \nabla H_{z1}] \cdot \bar{a}_y dx dz \quad (2.42)$$

$$J(H_{z1}, g_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[H_{z1} \frac{\partial g_1}{\partial y} - g_1 \frac{\partial H_{z1}}{\partial y} \right] dx dz \quad (2.43)$$

Assim, $H_{z1}(x', y')$ torna-se:

$$H_{z1}(x', y') = -i\omega\epsilon_1 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^0 M_{z1} g_1 dy dx - \int_{-\infty}^{+\infty} \left[H_{z1} \frac{\partial g_1}{\partial y} - g_1 \frac{\partial H_{z1}}{\partial y} \right] dx \Big|_{y=0} \quad (2.44)$$

Para facilitar os cálculos, denomina-se a segunda integral em (2.44) de I :

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[H_{z1} \frac{\partial g_1}{\partial y} - g_1 \frac{\partial H_{z1}}{\partial y} \right] dx \Big|_{y=0} \quad (2.45)$$

Substituindo (2.32) e (2.22) em (2.45) temos:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} [-\gamma_1 H_{z1} g_1 - (g_1 (\gamma_1 H_{z2} - \gamma_1 H_{z1}))] \Big|_{y=0} dx \quad (2.46)$$

$$I = -\gamma_1 \int_{-\infty}^{+\infty} g_1 H_{z2} dx \Big|_{y=0} \quad (2.47)$$

Substituindo (2.47) em (2.44) temos então:

$$H_{z1}(x', y') = -i\omega\epsilon_1 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^0 M_{z1}(x, y) g_1(x, y, x', y') dx dy + \gamma_1 \int_{-\infty}^{+\infty} g_1(x, 0, x', y') H_{z2}(x, 0) dx \quad (2.48)$$

Finalmente, trocando as variáveis linha e não linha e substituindo $M_{z1} = M_0 \delta(x' - \xi) \delta(y' - \eta)$, o campo magnético H_{z1} torna-se:

$$H_{z1}(x, y) = -i\omega\epsilon_1 M_0 g_1(x, y, \xi, \eta) + \gamma_1 \int_{-\infty}^{+\infty} g_1(x, y, x', 0) H_{z2}(x', 0) dx' \quad (2.49)$$

Utilizando o mesmo procedimento para o meio 2, obtemos a seguinte equação equivalente a (2.39):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H_{z2}(x', y') dz = - \int_{S_{2t}} [H_{z2} \nabla g_2 - g_2 \nabla H_{z2}] \cdot \bar{n} dS_{2t} \quad (2.50)$$

onde \bar{n} refere-se aos vetores unitários normais a superfície S_{2t} e com sentido para fora de V_2 .

Como no caso do meio 1, o volume V_2 é delimitado pelas superfícies de S_{2t} , que é composto da soma de seis superfícies: $S_{21}(y \rightarrow +\infty)$, $S_{22}(x \rightarrow +\infty)$, $S_{23}(x \rightarrow -\infty)$, $S_{24}(z \rightarrow +\infty)$, $S_{25}(z \rightarrow -\infty)$ e $S_{26}(y = 0)$. Devido às condições de contorno do problema, apenas a superfície S_{26} contribuirá na integral, desta forma:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H_{z2}(x', y') dz = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} [H_{z2} \nabla g_2 - g_2 \nabla H_{z2}] \cdot \bar{a}_y dx dz \quad (2.51)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H_{z2}(x', y') dz = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[H_{z2} \frac{\partial g_2}{\partial y} - g_2 \frac{\partial H_{z2}}{\partial y} \right] dx dz \quad (2.52)$$

Eliminando as integrações em z devido a invariância do problema com o mesmo, o campo magnético $H_{z2}(x', y')$ torna-se:

$$H_{z2}(x', y') = \int_{-\infty}^{+\infty} [\gamma_2 g_2 H_{z2} - g_2 (\gamma_2 H_{z2} - \gamma_2 H_{z1})] dx \quad (2.53)$$

$$H_{z2}(x', y') = \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma_2 g_2 H_{z1} dx |_{y=0} \quad (2.54)$$

Por fim, trocando as variáveis linha e não linha o campo magnético no meio 2 $H_{z2}(x, y)$ torna-se:

$$H_{z2}(x, y) = \gamma_2 \int_{-\infty}^{+\infty} g_2(x, y, x', 0) H_{z1}(x', 0) dx' \quad (2.55)$$

O próximo passo será determinar as Funções de Green g_1 e g_2 para então encontrar os campos magnéticos H_{z1} e H_{z2} em (2.49) e (2.55) respectivamente. Neste trabalho, dois métodos serão abordados para a resolução destas funções de Green. O primeiro consiste em utilizar a transformada de Fourier em x e Função de Green em y , abordado no capítulo 3. O segundo método visa utilizar a técnica da Transformada de Impedância em y e Função de Green em x , abordado no capítulo 4.

3 Solução por Transformada de Fourier

3.1 Determinação das Funções de Green

A função de Green para o meio 1 é obtida do seguinte problema:

$$-\nabla_{xy}^2 g_1(x, y, x', y') - k_1^2 g_1(x, y, x', y') = \delta(x - x')\delta(y - y') \quad (3.1)$$

com as condições:

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow -\infty} g_1 &= 0 \\ \lim_{x \rightarrow \pm\infty} g_1 &= 0 \\ g_1 + \frac{1}{\gamma_1} \frac{\partial g_1}{\partial y} &= 0 \quad |_{y=0} \end{aligned} \quad (3.2)$$

onde $x = [-\infty, +\infty]$ e $y = [-\infty, 0]$. O operador em x e as condições de contorno produzem a Transformada de Fourier. Aplicando a Transformada de Fourier, temos as seguintes transformadas direta e inversa:

$$\tilde{g}_1(k_x, y, x', y') = \int_{-\infty}^{+\infty} g_1(x, y, x', y') e^{-ik_x x} dx \quad (3.3)$$

$$g_1(x, y, x', y') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{g}_1(k_x, y, x', y') e^{ik_x x} dk_x \quad (3.4)$$

com os pares:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial^2 g_1}{\partial x^2} &\Leftrightarrow k_x^2 \tilde{g}_1 \\ \delta(x - x') &\Leftrightarrow e^{-ik_x x'} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Aplicando os pares de (3.5) em (3.1), obtemos:

$$k_x^2 \tilde{g}_1 - \frac{\partial^2 \tilde{g}_1}{\partial y^2} - k_1^2 \tilde{g}_1 = e^{-ik_x x'} \delta(y - y') \quad (3.6)$$

rearranjando:

$$-\frac{\partial^2 \tilde{g}_1}{\partial y^2} - k_{y1}^2 \tilde{g}_1 = e^{-ik_x x'} \delta(y - y') \quad (3.7)$$

onde $k_{y1}^2 = k_1^2 - k_x^2$

Para prosseguir a resolução, definimos a função α como segue:

$$\tilde{g}_1(k_x, y, x', y') = \alpha(k_x, y, y') e^{-ik_x x'} \quad (3.8)$$

Substituindo (3.8) em (3.7) temos:

$$-\frac{\partial^2 \alpha}{\partial y^2} - k_{y1}^2 \alpha = \delta(y - y') \quad (3.9)$$

com condições:

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow -\infty} \alpha &= 0 \\ \alpha + \frac{1}{\gamma_1} \frac{\partial \alpha}{\partial y} &= 0 \quad |_{y=0} \end{aligned} \quad (3.10)$$

Aplicando o método convencional de solução para a função de Green [21], o coeficiente α apresenta solução de forma:

$$\alpha = \begin{cases} A \cos k_{y1}y + B \operatorname{sen} k_{y1}y & , y > y' \\ C e^{-ik_{y1}y} + D e^{ik_{y1}y} & , y < y' \end{cases} \quad (3.11)$$

Utilizando a condição $\operatorname{Im}(k_{y1}) < 0$, a constante C é nula para satisfazer a condição de limite em (3.10), portanto (3.11) torna-se:

$$\alpha = \begin{cases} A \cos k_{y1}y + B \operatorname{sen} k_{y1}y & , y > y' \\ D e^{ik_{y1}y} & , y < y' \end{cases} \quad (3.12)$$

Aplicando a condição de impedância (3.10) em (3.12), temos:

$$A + \frac{1}{\gamma_1} B k_{y1} = 0 \quad (3.13)$$

$$B = -\frac{A \gamma_1}{k_{y1}} \quad (3.14)$$

Substituindo (3.14) em (3.12)

$$\alpha = \begin{cases} A \left[\cos k_{y1}y - \frac{\gamma_1}{k_{y1}} \operatorname{sen} k_{y1}y \right] & , y > y' \\ D e^{ik_{y1}y} & , y < y' \end{cases} \quad (3.15)$$

Aplicando as condições de continuidade e salto [21] em (3.15), temos o seguinte sistema:

$$A \left[\cos k_{y1}y' - \frac{\gamma_1}{k_{y1}} \operatorname{sen} k_{y1}y' \right] = D e^{ik_{y1}y'} \quad (3.16)$$

$$A [-k_{y1} \operatorname{sen} k_{y1}y' - \gamma_1 \cos k_{y1}y'] - D i k_{y1} e^{ik_{y1}y'} = -1 \quad (3.17)$$

Obtemos então:

$$A = \frac{e^{ik_{y1}y'}}{ik_{y1} + \gamma_1} \quad (3.18)$$

$$D = \frac{\left[\cos k_{y1}y' - \frac{\gamma_1}{k_{y1}} \operatorname{sen} k_{y1}y' \right]}{ik_{y1} + \gamma_1} \quad (3.19)$$

Substituindo os coeficientes $A(3.18)$ e $D(3.19)$ em (3.15):

$$\alpha = \frac{1}{ik_{y1} + \gamma_1} \begin{cases} e^{ik_{y1}y} \left[\cos k_{y1}y' - \frac{\gamma_1}{k_{y1}} \operatorname{sen} k_{y1}y' \right] & , y < y' \\ e^{ik_{y1}y'} \left[\cos k_{y1}y - \frac{\gamma_1}{k_{y1}} \operatorname{sen} k_{y1}y \right] & , y > y' \end{cases} \quad (3.20)$$

Substituindo (3.20) em (3.8) e (3.4), obtemos:

$$g_1(x, y, x', y') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_x \frac{e^{ik_x(x-x')}}{ik_{y1} + \gamma_1} \begin{cases} e^{ik_{y1}y'} \left[\cos k_{y1}y - \frac{\gamma_1}{k_{y1}} \text{sen } k_{y1}y \right], y > y' \\ e^{ik_{y1}y} \left[\cos k_{y1}y' - \frac{\gamma_1}{k_{y1}} \text{sen } k_{y1}y' \right], y < y' \end{cases} \quad (3.21)$$

Utilizando o mesmo procedimento para g_2 :

$$g_2(x, y, x', y') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_x \frac{e^{ik_x(x-x')}}{ik_{y2} + \gamma_2} \begin{cases} e^{-ik_{y2}y} \left[\cos k_{y2}y' + \frac{\gamma_2}{k_{y2}} \text{sen } k_{y2}y' \right], y > y' \\ e^{-ik_{y2}y} \left[\cos k_{y2}y + \frac{\gamma_2}{k_{y2}} \text{sen } k_{y2}y \right], y < y' \end{cases} \quad (3.22)$$

Apresentando as condições:

$$\begin{aligned} k_{y1} &= \sqrt{k_1^2 - k_x^2}, \quad \text{Im}(k_{y1}) < 0 \quad \text{Re}(\gamma_1) < 0 \\ k_{y2} &= \sqrt{k_2^2 - k_x^2}, \quad \text{Im}(k_{y2}) < 0 \quad \text{Re}(\gamma_2) < 0 \\ k_1 &= \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_1}, \quad \text{Im}(k_1) < 0 \quad \text{Re}(k_1) > 0 \\ k_2 &= \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_2}, \quad \text{Im}(k_2) < 0 \quad \text{Re}(k_2) > 0 \end{aligned} \quad (3.23)$$

As condições $\text{Re}(\gamma_1) < 0$ e $\text{Re}(\gamma_2) < 0$ surgem devido a γ_1 e γ_2 serem parâmetros em função da condutividade do grafeno (2.17) e (2.18), que possui parte imaginária negativa (Fig. 2.1). As condições em k_1 e k_2 surgem quando consideramos pequenas perdas nos meios 1 e 2.

3.2 Resolução dos Campos Magnéticos H_{z1} e H_{z2}

Para resolver os campos H_{z1} e H_{z2} em (2.49) e (2.55), utilizamos as funções de Green (3.21) e (3.22) encontradas na seção anterior. Preparando (3.21) em $x' = \xi$ e $y' = \eta$, temos:

$$g_1(x, y, \xi, \eta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk_x e^{ik_x(x-\xi)}}{ik_{y1} + \gamma_1} e^{ik_{y1}\eta} \left[\cos k_{y1}y - \frac{\gamma_1}{k_{y1}} \text{sen } k_{y1}y \right] \quad (3.24)$$

para $y > \eta$.

Em $y' = 0$ temos g_2 e g_1 :

$$g_2(x, y, x', 0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk_x e^{ik_x(x-x')}}{ik_{y2} + \gamma_2} e^{-ik_{y2}y} \quad (3.25)$$

$$g_1(x, y, x', 0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk_x e^{ik_x(x-x')}}{ik_{y1} + \gamma_1} e^{ik_{y1}y} \quad (3.26)$$

Substituindo (3.24) e (3.26) em (2.49), O campo magnético $H_{z1}(x, y)$ torna-se:

$$\begin{aligned} H_{z1}(x, y) &= -i\omega\epsilon_1 M_0 \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_x \frac{e^{ik_x(x-\xi)}}{ik_{y1} + \gamma_1} e^{ik_{y1}\eta} \left[\cos k_{y1}y - \frac{\gamma_1}{k_{y1}} \text{sen } k_{y1}y \right] + \\ &+ \gamma_1 \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_x \frac{e^{ik_x(x-x')}}{ik_{y1} + \gamma_1} e^{ik_{y1}y} H_{z2}(x', 0) dx' \right] dx' \end{aligned} \quad (3.27)$$

Definindo:

$$f_1 = -i\omega\epsilon_1 M_0 \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_x \frac{e^{ik_x(x-\xi)}}{ik_{y1} + \gamma_1} e^{ik_{y1}\eta} \left[\cos k_{y1}y - \frac{\gamma_1}{k_{y1}} \operatorname{sen} k_{y1}y \right] \quad (3.28)$$

$$f_2 = \gamma_1 \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_x \frac{e^{ik_x(x-x')}}{ik_{y1} + \gamma_1} e^{ik_{y1}y} H_{z2}(x', 0) dx' \right] \quad (3.29)$$

A transformada de Fourier a ser utilizada para a resolução dos campos é definida como:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(k_x) e^{ik_x x} dk_x \Leftrightarrow \tilde{f}(k_x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ik_x x} dx \quad (3.30)$$

Aplicando a transformada de Fourier em H_{z1} obtêm-se:

$$\mathfrak{F} \{H_{z1}(x, y)\} = \tilde{H}_{z1}(k_x, y) = \mathfrak{F} \{f_1\} + \mathfrak{F} \{f_2\} = F_1 + F_2 \quad (3.31)$$

Para encontrar F_1 em (3.31), aplicamos a transformada definida em (3.30) em (3.28):

$$F_1 = -i\omega\epsilon_1 M_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(e^{-ik_x \xi} \frac{a e^{ik_{y1}\eta}}{b i k_{y1} + \gamma_1} \left[\cos k_{y1}y - \frac{\gamma_1}{k_{y1}} \operatorname{sen} k_{y1}y \right] \right) e^{ik_x x} dk_x \right] e^{-ik_x x} dx \quad (3.32)$$

Nota-se em (3.32) a transformada direta de uma transformada inversa, de modo que as operações se cancelam, ou seja, $\mathfrak{F} \{\mathfrak{F}^{-1} \{A\}\} = A$ sendo A uma função qualquer. Então, (3.32) torna-se:

$$F_1 = -i\omega\epsilon_1 M_0 \frac{e^{-ik_x \xi} e^{ik_{y1}\eta}}{i k_{y1} + \gamma_1} \left[\cos k_{y1}y - \frac{\gamma_1}{k_{y1}} \operatorname{sen} k_{y1}y \right] \quad (3.33)$$

A resolução para F_2 é dada por:

$$F_2 = \gamma_1 \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ik_x x} e^{-ik_x x'} e^{ik_{y1}y}}{i k_{y1} + \gamma_1} dk_x \right] H_{z2}(x', 0) dx' \right] e^{-ik_x x} dx \quad (3.34)$$

Mudando a ordem de integração das duas integrais internas em (3.34):

$$F_2 = \gamma_1 \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ik_x x} e^{ik_{y1}y}}{i k_{y1} + \gamma_1} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} H_{z2}(x', 0) e^{-ik_x x'} dx' \right] dk_x \right] e^{-ik_x x} dx \quad (3.35)$$

onde:

$$\left[\int_{-\infty}^{+\infty} H_{z2}(x', 0) e^{-ik_x x'} dx' \right] = \mathfrak{F} \{H_{z2}(x', 0)\} = \tilde{H}_{z2}(k_x, 0) \quad (3.36)$$

substituindo (3.36) em (3.35):

$$F_2 = \gamma_1 \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\tilde{H}_{z2}(k_x, 0) e^{ik_{y1}y}}{i k_{y1} + \gamma_1} \right) e^{ik_x x} dk_x \right] e^{-ik_x x} dx \quad (3.37)$$

Novamente, observa-se em (3.37) a transformada direta de uma transformada inversa, o que resulta no cancelamento destas operações. Deste modo, F_2 resulta em:

$$F_2 = \frac{\gamma_1 \tilde{H}_{z2}(k_x, 0) e^{ik_y 1 y}}{ik_{y1} + \gamma_1} \quad (3.38)$$

Substituindo (3.33) e (3.38) em (3.31) têm-se então:

$$\tilde{H}_{z1}(k_x, y) = \frac{-i\omega\epsilon_1 M_0 e^{-ik_x \xi} e^{ik_{y1} \eta}}{ik_{y1} + \gamma_1} \left[\cos k_{y1} y - \frac{\gamma_1}{k_{y1}} \operatorname{sen} k_{y1} y \right] + \frac{\gamma_1 \tilde{H}_{z2}(k_x, 0) e^{ik_{y1} y}}{(ik_{y1} + \gamma_1)} \quad (3.39)$$

De forma semelhante, a mesma Transformada de Fourier em (3.30) é aplicada para $H_{z2}(x, y)$ ((2.55)), já substituindo (3.25):

$$\mathfrak{F}\{H_{z2}(x, y)\} = \tilde{H}_{z2}(k_x, y) = \gamma_2 \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_x \frac{e^{ik_x(x-x')}}{ik_{y2} + \gamma_2} e^{-ik_{y2} y} \right] H_{z1}(x', 0) dx' \right] e^{-ik_x x} dx \quad (3.40)$$

Trocando a ordem de integração das duas integrais internas em (3.40), obtemos:

$$\tilde{H}_{z2}(k_x, y) = \gamma_2 \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\left(\frac{e^{ik_x x} e^{-ik_{y2} y}}{ik_{y2} + \gamma_2} \right) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} H_{z1}(x', 0) e^{-ik_x x'} dx' \right) \right] dk_x \right] e^{-ik_x x} dx \quad (3.41)$$

onde:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H_{z1}(x', 0) e^{-ik_x x'} dx' = \mathfrak{F}\{H_{z1}(x', 0)\} = \tilde{H}_{z1}(k_x, 0) \quad (3.42)$$

Substituindo (3.42) em (3.41):

$$\tilde{H}_{z2}(k_x, y) = \gamma_2 \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\tilde{H}_{z1}(k_x, 0) e^{-ik_{y2} y}}{ik_{y2} + \gamma_2} \right) e^{ik_x x} dk_x \right] e^{-ik_x x} dx \quad (3.43)$$

Igualmente aos casos anteriores, cancelando as operações de transformadas direta e inversa em (3.43):

$$\tilde{H}_{z2}(k_x, y) = \frac{\gamma_2 \tilde{H}_{z1}(k_x, 0) e^{-ik_{y2} y}}{ik_{y2} + \gamma_2} \quad (3.44)$$

Substituindo (3.44) em (3.39), para $y = 0$, temos:

$$\tilde{H}_{z1}(k_x, 0) = \frac{-i\omega\epsilon_1 M_0 e^{-ik_x \xi} e^{ik_{y1} \eta}}{ik_{y1} + \gamma_1} + \frac{\gamma_1 \gamma_2 \tilde{H}_{z1}(k_x, 0)}{(ik_{y1} + \gamma_1)(ik_{y2} + \gamma_2)} \quad (3.45)$$

então:

$$\frac{-i\omega\epsilon_1 M_0 e^{-ik_x \xi} e^{ik_{y1} \eta}}{(ik_{y1} + \gamma_1)} = \left[1 - \frac{\gamma_1 \gamma_2}{(ik_{y1} + \gamma_1)(ik_{y2} + \gamma_2)} \right] \tilde{H}_{z1}(k_x, 0) \quad (3.46)$$

$$\frac{-i\omega\epsilon_1 M_0 e^{-ik_x \xi} e^{ik_{y1} \eta}}{(ik_{y1} + \gamma_1)} = \frac{[-k_{y1} k_{y2} + ik_{y1} \gamma_2 + ik_{y2} \gamma_1 + \gamma_1 \gamma_2 - \gamma_1 \gamma_2]}{(ik_{y1} + \gamma_1)(ik_{y2} + \gamma_2)} \tilde{H}_{z1}(k_x, 0) \quad (3.47)$$

por fim:

$$\tilde{H}_{z1}(k_x, 0) = -i\omega\epsilon_1 M_0 e^{-ik_x\xi} e^{ik_{y1}\eta} \frac{(ik_{y2} + \gamma_2)}{[i(k_{y1}\gamma_2 + k_{y2}\gamma_1) - k_{y1}k_{y2}]} \quad (3.48)$$

Substituindo (3.48) em (3.44), encontramos \tilde{H}_{z2} como:

$$\tilde{H}_{z2}(k_x, y) = -i\omega\epsilon_1 M_0 e^{-ik_x\xi} e^{ik_{y1}\eta} e^{-ik_{y2}y} \frac{\gamma_2}{[i(k_{y1}\gamma_2 + k_{y2}\gamma_1) - k_{y1}k_{y2}]} \quad (3.49)$$

Para encontrar $\tilde{H}_{z1}(k_x, y)$ substitui-se (3.48) em (3.39), obtendo:

$$\begin{aligned} \tilde{H}_{z1}(k_x, y) = & \frac{-i\omega\epsilon_1 M_0 e^{-ik_x\xi} e^{ik_{y1}\eta}}{ik_{y1} + \gamma_1} \left[\cos k_{y1}y - \frac{\gamma_1}{k_{y1}} \operatorname{sen} k_{y1}y \right] + \\ & -i\omega\epsilon_1 M_0 e^{-ik_x\xi} e^{ik_{y1}\eta} e^{ik_{y1}y} \frac{\gamma_1\gamma_2}{(ik_{y1} + \gamma_1)[i(k_{y1}\gamma_2 + k_{y2}\gamma_1) - k_{y1}k_{y2}]} \end{aligned} \quad (3.50)$$

Para simplificação dos cálculos, admite-se que:

$$\tilde{H}_{z1}(k_x, y) = (A + B) \times (-i\omega\epsilon_1 M_0) \quad (3.51)$$

onde

$$A = \frac{e^{-ik_x\xi} e^{ik_{y1}\eta}}{ik_{y1} + \gamma_1} \left[\cos k_{y1}y - \frac{\gamma_1}{k_{y1}} \operatorname{sen} k_{y1}y \right] \quad (3.52)$$

$$B = e^{-ik_x\xi} e^{ik_{y1}\eta} e^{ik_{y1}y} \frac{\gamma_1\gamma_2}{(ik_{y1} + \gamma_1)[i(k_{y1}\gamma_2 + k_{y2}\gamma_1) - k_{y1}k_{y2}]} \quad (3.53)$$

O campo $H_{z1}(x, y)$ será encontrado aplicando a Transformada inversa de Fourier em (3.52) e (3.53):

$$H_{z1}(x, y) = -i\omega\epsilon_1 M_0 \left[\mathfrak{F}^{-1}\{A\} + \mathfrak{F}^{-1}\{B\} \right] \quad (3.54)$$

obtendo assim:

$$H_{z1}(x, y) = -i\omega\epsilon_1 M_0 \left[g_1(x, y, \xi, \eta) + \mathfrak{F}^{-1}\{B\} \right] \quad (3.55)$$

onde:

$$\mathfrak{F}^{-1}\{B\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\gamma_1\gamma_2 e^{ik_x(x-\xi)} e^{ik_{y1}(y+\eta)}}{(ik_{y1} + \gamma_1)[i(k_{y1}\gamma_2 + k_{y2}\gamma_1) - k_{y1}k_{y2}]} dk_x \quad (3.56)$$

Seguindo o mesmo raciocínio, para encontrar o campo $H_{z2}(x, y)$ será necessário aplicar a Transformada Inversa de Fourier em (3.49) resultando em:

$$H_{z2}(x, y) = -i\omega\epsilon_1 M_0 \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\gamma_2 e^{ik_x(x-\xi)} e^{ik_{y1}\eta} e^{-ik_{y2}y}}{[i(k_{y1}\gamma_2 + k_{y2}\gamma_1) - k_{y1}k_{y2}]} dk_x \quad (3.57)$$

Obtido os campos magnéticos em ambos os meios pelo método 1, o próximo capítulo apresentará a solução do mesmo problema utilizando Transformadas de Impedância.

4 Solução por Transformadas de Impedância

Como constatado em (2.29)-(2.36), os problemas da Função de Green g_1 e g_2 apresentam condições de impedância na variável y e por isso podem ser resolvidos pela Transformada de Impedância[21].

É importante ressaltar que neste trabalho serão resolvidos os campos completos para os meios 1 e 2. No entanto, é possível separar as componentes de espectro discreto, que contribuem para as ondas superfície, das componentes de espectro contínuo nos campos H_{z1} e H_{z2} e nas Funções de g_1 e g_2 . Para o caso das funções de Green, serão adotados:

$$\begin{aligned} g_1 &= g_{10} + \hat{g}_1 \\ g_2 &= g_{20} + \hat{g}_2 \end{aligned} \quad (4.1)$$

sendo g_{10} e g_{20} as componentes de espectro discreto e \hat{g}_1 e \hat{g}_2 os componentes de espectro contínuo.

Nos Apêndices B e C estão as definições das transformadas de impedância e os correspondentes problemas das funções de Green que originaram estas transformadas.

4.1 Solução dos Problemas da Função de Green por Transformadas de Impedância

O problema da função de Green no meio 1 será repetido aqui por conveniência:

$$-\nabla_{xy}^2 g_1(x, y, x', y') - k_1^2 g_1(x, y, x', y') = \delta(x - x')\delta(y - y') \quad (4.2)$$

$$\lim_{y \rightarrow -\infty} g_1 = 0 \quad (4.3)$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g_1 = 0 \quad (4.4)$$

$$g_1 + \frac{1}{\gamma_1} \frac{\partial g_1}{\partial y} = 0 \Big|_{y=0} \quad (4.5)$$

Definimos as transformadas de impedância de ordem 0 e k_y para a Função de Green de (4.2) como (Apêndice C):

$$g_1(x, y, x', y') = -2\gamma_1 e^{-\gamma_1 y} \alpha_{10} + \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \alpha_{1k_y} \left[\cos k_y y - \frac{\gamma_1}{k_y} \text{sen } k_y y \right] \frac{k_y^2}{k_y^2 + \gamma_1^2} dk_y \quad (4.6)$$

onde:

$$\alpha_{10}(x, \gamma_1, x', y') = \int_{-\infty}^0 g_1(x, y, x', y') e^{-\gamma_1 y} dy \quad (4.7)$$

A equação (4.7) será representada simbolicamente por:

$$g_1 \stackrel{0}{\Rightarrow} \alpha_{10} \quad (4.8)$$

$$\alpha_{1k_y}(x, k_y, x', y') = \int_{-\infty}^0 g_1(x, y, x', y') \left[\cos k_y y - \frac{\gamma_1}{k_y} \operatorname{sen} k_y y \right] dy \quad (4.9)$$

A equação (4.7) será representada simbolicamente por:

$$g_1 \stackrel{k_y}{\Rightarrow} \alpha_{1k_y} \quad (4.10)$$

Em (4.6), como explicado anteriormente, podemos separar os componentes de espectro discreto e contínuo, sendo a componente de espectro discreto:

$$g_{10} = -2\gamma_1 e^{-\gamma_1 y} \alpha_{10} \quad (4.11)$$

e o componente de espectro contínuo:

$$\hat{g}_{10} = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \alpha_{1k_y} \left[\cos k_y y - \frac{\gamma_1}{k_y} \operatorname{sen} k_y y \right] \frac{k_y^2}{k_y^2 + \gamma_1^2} dk_y \quad (4.12)$$

O próximo passo da resolução por transformadas de impedância será encontrar os coeficientes α_{10} e α_{1k_y} . Aplicando os pares de transformada de ordem zero:

$$g_1 \stackrel{0}{\Rightarrow} \alpha_{10}(x, \gamma_1, x', y') \quad (4.13)$$

$$\frac{-\partial^2 g_1}{\partial y^2} \stackrel{0}{\Rightarrow} -\gamma_1 \alpha_{10}(x, \gamma_1, y, y') \quad (4.14)$$

$$\delta(y - y') \stackrel{0}{\Rightarrow} e^{-\gamma_1 y'} \quad (4.15)$$

no problema da função de Green (4.2), obtêm-se:

$$-\gamma_1^2 \alpha_{10} - \frac{\partial^2 \alpha_{10}}{\partial x^2} - k_1^2 \alpha_{10} = e^{-\gamma_1 y'} \delta(x - x') \quad (4.16)$$

sendo $k_{x01}^2 = k_1^2 + \gamma_1^2$, então:

$$-\frac{\partial^2 \alpha_{10}}{\partial x^2} - k_{x01}^2 \alpha_{10} = e^{-\gamma_1 y'} \delta(x - x') \quad (4.17)$$

Para prosseguir a resolução, definimos:

$$\alpha_{10} = \beta e^{-\gamma_1 y'} \quad (4.18)$$

Substituindo (4.18) em (4.17) temos:

$$-\frac{\partial^2 \beta}{\partial x^2} - k_{x01}^2 \beta = \delta(x - x') \quad (4.19)$$

com a condição:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \beta = 0 \quad (4.20)$$

Segundo [21], a solução produzida por (4.19) é:

$$\beta = \frac{e^{-ik_{x01}|x-x'|}}{2ik_{x01}} \quad (4.21)$$

para $\text{Im}(k_{x01}) < 0$.

Substituindo (4.21) em (4.18):

$$\alpha_{10}(x, \gamma_1, x', y') = e^{-\gamma_1 y'} \frac{e^{-ik_{x01}|x-x'|}}{2ik_{x01}} \quad (4.22)$$

De maneira similar, utilizando os pares de transformada de ordem k_y :

$$g_1 \xrightarrow{k_y} \alpha_{1k_y} \quad (4.23)$$

$$-\frac{\partial^2 g_1}{\partial y^2} \xrightarrow{k_y} k_y^2 \alpha_{1k_y} \quad (4.24)$$

$$\delta(y - y') \xrightarrow{k_y} \left[\cos k_y y' - \frac{\gamma_1}{k_y} \text{sen } k_y y' \right] \quad (4.25)$$

o coeficiente α_{1k_y} torna-se:

$$\alpha_{1k_y} = \left[\cos k_y y' - \frac{\gamma_1}{k_y} \text{sen } k_y y' \right] \frac{e^{-ik_{x1}|x-x'|}}{2ik_{x1}} \quad (4.26)$$

para $\text{Im}(k_{x1}) < 0$, sendo $k_{x1} = \sqrt{k_1^2 - k_y^2}$.

Substituindo (4.22) (4.26) em (4.6), temos a função de Green para o meio 1 g_1 :

$$\begin{aligned} g_1(x, y, x', y') = & -2\gamma_1 e^{-\gamma_1 y} \left(\frac{e^{-\gamma_1 y'} e^{-ik_{x01}|x-x'|}}{2ik_{x01}} \right) \\ & + \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \left(\left[\cos k_y y' - \frac{\gamma_1}{k_y} \text{sen } k_y y' \right] \frac{e^{-ik_{x1}|x-x'|}}{2ik_{x1}} \right) \left[\cos k_y y \right. \\ & \left. - \frac{\gamma_1}{k_y} \text{sen } k_y y \right] \frac{k_y^2}{k_y^2 + \gamma_1^2} dk_y \end{aligned} \quad (4.27)$$

Os mesmos procedimentos são aplicados para encontrar a função de Green no meio 2 como:

$$\begin{aligned}
 g_2(x, y, x', y') = & -2\gamma_2 e^{\gamma_2 y} \left(\frac{e^{-ik_{x02}|x-x'|}}{2ik_{x02}} \right) \\
 & + \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \left(\left[\cos k_y y' + \frac{\gamma_2}{k_y} \operatorname{sen} k_y y' \right] \frac{e^{-ik_{x2}|x-x'|}}{2ik_{x2}} \right) \left[\cos k_y y \right. \\
 & \left. + \frac{\gamma_2}{k_y} \operatorname{sen} k_y y \right] \frac{k_y^2}{k_y^2 + \gamma_2^2} dk_y
 \end{aligned} \quad (4.28)$$

sendo:

$$\alpha_{20}(x, \gamma_2, x', y') = e^{\gamma_2 y'} \frac{e^{-ik_{x02}|x-x'|}}{2ik_{x02}} \quad (4.29)$$

onde $k_{x02} = \sqrt{k_2^2 + \gamma_2^2}$, com $\operatorname{Im}(k_{x02}) < 0$ e ainda:

$$\alpha_{2k_y}(x, k_y, x', y') = \left[\cos k_y y' + \frac{\gamma_2}{k_y} \operatorname{sen} k_y y' \right] \frac{e^{-ik_{x2}|x-x'|}}{2ik_{x2}} \quad (4.30)$$

onde $k_{x2} = \sqrt{k_2^2 - k_y^2}$, com $\operatorname{Im}(k_{x2}) < 0$

Os termos de espectro discreto e contínuo destas funções g_1 e g_2 são:

$$g_{10}(x, y, x', y') = -2\gamma_1 e^{-\gamma_1(y+y')} \frac{e^{-ik_{x01}|x-x'|}}{2ik_{x01}} \quad (4.31)$$

onde $k_{x01} = \sqrt{\gamma_1^2 + k_1^2}$, com $\operatorname{Im}(k_{x01}) < 0$ e $\operatorname{Re}(\gamma_1) < 0$ para o meio 1 e:

$$g_{20}(x, y, x', y') = -2\gamma_2 e^{\gamma_2(y+y')} \frac{e^{-ik_{x02}|x-x'|}}{2ik_{x02}} \quad (4.32)$$

onde $k_{x02} = \sqrt{\gamma_2^2 + k_2^2}$, com $\operatorname{Im}(k_{x02}) < 0$ e $\operatorname{Re}(\gamma_2) < 0$ para o meio 2.

$$\hat{g}_1(x, y, x', y') = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \left[\cos k_y y' - \frac{\gamma_1}{k_y} \operatorname{sen} k_y y' \right] \left[\cos k_y y - \frac{\gamma_1}{k_y} \operatorname{sen} k_y y \right] \frac{e^{-ik_{x1}|x-x'|} k_y^2}{2ik_{x1} (k_y^2 + \gamma_1^2)} dk_y \quad (4.33)$$

onde $k_{x1} = \sqrt{k_1^2 - k_y^2}$ e $\operatorname{Im}(k_{x1}) < 0$ para o meio 1 e:

$$\hat{g}_2(x, y, x', y') = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \left[\cos k_y y' + \frac{\gamma_2}{k_y} \operatorname{sen} k_y y' \right] \left[\cos k_y y + \frac{\gamma_2}{k_y} \operatorname{sen} k_y y \right] \frac{e^{-ik_{x2}|x-x'|} k_y^2}{2ik_{x2} (k_y^2 + \gamma_2^2)} dk_y \quad (4.34)$$

onde $k_{x2} = \sqrt{k_2^2 - k_y^2}$ e $\operatorname{Im}(k_{x2}) < 0$ para o meio 2.

4.2 Resolução dos Campos Magnéticos H_{z1} e H_{z2}

De (2.49) e (2.55), os campos H_{z1} e H_{z2} são:

$$H_{z1}(x, y) = -i\omega\epsilon_1 M_0 g_1(x, y, \xi, \eta) + \gamma_1 \int_{-\infty}^{+\infty} g_1(x, y, x', 0) H_{z2}(x', 0) dx' \quad (4.35)$$

$$H_{z2}(x, y) = \gamma_2 \int_{-\infty}^{+\infty} g_2(x, y, x', 0) H_{z1}(x', 0) dx' \quad (4.36)$$

Para $g_2 = g_{20} + \hat{g}_2$ e $g_1 = g_{10} + \hat{g}_1$, temos:

$$H_{z2}(x, y) = \gamma_2 \int_{-\infty}^{+\infty} g_{20}(x, y, x', 0) H_{z1}(x', 0) dx' + \gamma_2 \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{g}_2(x, y, x', 0) H_{z1}(x', 0) dx' \quad (4.37)$$

por conveniência definimos:

$$\begin{aligned} f_1 &= \gamma_2 \int_{-\infty}^{+\infty} g_{20}(x, y, x', 0) H_{z1}(x', 0) dx' \\ f_2 &= \gamma_2 \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{g}_2(x, y, x', 0) H_{z1}(x', 0) dx' \end{aligned} \quad (4.38)$$

Para o campo H_{z1} temos:

$$\begin{aligned} H_{z1}(x, y) &= -i\omega\epsilon_1 M_0 g_{10}(x, y, \xi, \eta) + \gamma_1 \int_{-\infty}^{+\infty} g_{10}(x, y, x', 0) H_{z2}(x', 0) dx' \\ &\quad - i\omega\epsilon_1 M_0 \hat{g}_1(x, y, \xi, \eta) + \gamma_1 \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{g}_1(x, y, x', 0) H_{z2}(x', 0) dx' \end{aligned} \quad (4.39)$$

por conveniência, definimos:

$$\begin{aligned} f_3 &= -i\omega\epsilon_1 M_0 g_{10}(x, y, \xi, \eta) \\ f_4 &= \gamma_1 \int_{-\infty}^{+\infty} g_{10}(x, y, x', 0) H_{z2}(x', 0) dx' \\ f_5 &= -i\omega\epsilon_1 M_0 \hat{g}_1(x, y, \xi, \eta) \\ f_6 &= \gamma_1 \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{g}_1(x, y, x', 0) H_{z2}(x', 0) dx' \end{aligned} \quad (4.40)$$

Em seguida, para a resolução dos campos H_{z1} e H_{z2} aplica-se a Transformada de Fourier em x em (4.37) e (4.39), de forma que:

$$\mathfrak{F}\{H_{z2}(x, y)\} = \mathfrak{F}\{f_1\} + \mathfrak{F}\{f_2\} = F_1 + F_2 = \tilde{H}_{z2}(k_x, y) \quad (4.41)$$

$$\mathfrak{F}\{H_{z1}(x, y)\} = \mathfrak{F}\{f_3\} + \mathfrak{F}\{f_4\} + \mathfrak{F}\{f_5\} + \mathfrak{F}\{f_6\} = F_3 + F_4 + F_5 + F_6 = \tilde{H}_{z1}(k_x, y) \quad (4.42)$$

Substituindo (4.32) em F_1 e mudando a ordem de integração:

$$F_1 = \gamma_2 \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \left[-2\gamma_2 e^{\gamma_2 y} \frac{e^{-ik_{x02}|x-x'|}}{2ik_{x02}} \right] H_{z1}(x', 0) dx' \right] e^{-ik_x x} dx \quad (4.43)$$

$$F_1 = \frac{-\gamma_2^2 e^{\gamma_2 y}}{ik_{x20}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[H_{z1}(x', 0) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ik_{x02}|x-x'|} e^{-ik_x x} dx \right] \right] dx' \quad (4.44)$$

A transformada de Fourier $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ik_{x20}|x-x'|} e^{-ik_x x} dx$ apresenta solução conhecida [22]:

$$\mathfrak{F} \left\{ e^{-a|x-x'|} \right\} = \frac{2a}{a^2 + k_x^2} e^{-ik_x x'} \quad , \quad \text{Re}(a) > 0 \quad (4.45)$$

onde $a = ik_{x02}$, que está de acordo com $\text{Im}(k_{x02}) < 0$.

Substituindo (4.45) em (4.44):

$$F_1 = \frac{-\gamma_2^2 e^{\gamma_2 y}}{ik_{x20}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[H_{z1}(x', 0) \frac{2ik_{x02}}{(ik_{x02})^2 + k_x^2} e^{-ik_x x'} \right] dx' \quad (4.46)$$

$$F_1 = \frac{-\gamma_2^2 e^{\gamma_2 y}}{ik_{x20}} \times \frac{2ik_{x02}}{(ik_{x20})^2 + k_x^2} \int_{-\infty}^{+\infty} H_{z1}(x', 0) e^{-ik_x x'} dx' \quad (4.47)$$

por fim:

$$F_1 = \frac{-2\gamma_2^2 e^{\gamma_2 y}}{(ik_{x02})^2 + k_x^2} \tilde{H}_{z1}(k_x, 0) \quad (4.48)$$

Substituindo (4.34) em F_2 , mudando a ordem das integrais e utilizando novamente (4.45):

$$F_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{2\gamma_2}{\pi} \int_0^{+\infty} \left[\cos k_y y + \frac{\gamma_2}{k_y} \text{sen } k_y y \right] \times \right. \right. \quad (4.49)$$

$$\left. \left. \times \frac{k_y^2}{k_y^2 + \gamma_2^2} \frac{e^{-ik_{x2}|x-x'|}}{2ik_{x2}} dk_y \right] H_{z1}(x', 0) dx' \right] e^{-ik_x x} dx$$

$$F_2 = \frac{2\gamma_2}{\pi} \int_0^{+\infty} \left[\left(\left[\cos k_y y + \frac{\gamma_2}{k_y} \text{sen } k_y y \right] \frac{k_y^2}{k_y^2 + \gamma_2^2} \times \frac{1}{2ik_{x2}} \right) \times \right. \quad (4.50)$$

$$\left. \times \int_{-\infty}^{+\infty} \left[H_{z1}(x', 0) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ik_{x2}|x-x'|} e^{-ik_x x} dx \right] dx' \right] dk_y$$

$$F_2 = \frac{2\gamma_2}{\pi} \int_0^{+\infty} \left[\left[\cos k_y y + \frac{\gamma_2}{k_y} \text{sen } k_y y \right] \frac{k_y^2}{k_y^2 + \gamma_2^2} \times \frac{\tilde{H}_{z1}(k_x, 0)}{(ik_{x2})^2 + k_x^2} \right] dk_y \quad (4.51)$$

$$F_2 = \tilde{H}_{z1}(k_x, 0) \left\{ \frac{2\gamma_2}{\pi} \int_0^{+\infty} \left[\cos k_y y + \frac{\gamma_2}{k_y} \text{sen } k_y y \right] \frac{k_y^2 dk_y}{(k_y^2 + \gamma_2^2) [(ik_{x2})^2 + k_x^2]} \right\} \quad (4.52)$$

definindo:

$$A(k_x, y) = \frac{2\gamma_2}{\pi} \int_0^{+\infty} \left[\cos k_y y + \frac{\gamma_2}{k_y} \text{sen } k_y y \right] \frac{k_y^2 dk_y}{(k_y^2 + \gamma_2^2) [(ik_{x2})^2 + k_x^2]} \quad (4.53)$$

Substituindo (4.48), (4.52) e (4.53) em (4.41), obtêm-se o campo $\tilde{H}_{z2}(k_x, y)$:

$$\tilde{H}_{z2}(k_x, y) = \left[\frac{-2\gamma_2^2 e^{\gamma_2 y}}{(ik_{x02})^2 + k_x^2} + A(k_x, y) \right] \tilde{H}_{z1}(k_x, 0) \quad (4.54)$$

Pode-se demonstrar, por um procedimento similar ao utilizado em (4.43)-(4.52), que os coeficientes F_3 , F_4 , F_5 e F_6 são dados respectivamente por:

$$F_3 = -i\omega\epsilon_1 M_0 \mathfrak{F} \{g_{10}(x, y, \xi, \eta)\} \quad (4.55)$$

$$F_4 = \frac{-2\gamma_1^2 e^{-\gamma_1 y}}{(ik_{x01})^2 + k_x^2} \hat{H}_{z2}(k_x, 0) \quad (4.56)$$

$$F_5 = -i\omega\epsilon_1 M_0 \mathfrak{F} \{\hat{g}_1(x, y, \xi, \eta)\} \quad (4.57)$$

$$F_6 = \tilde{H}_{z2}(k_x, 0) \left\{ \frac{2\gamma_1}{\pi} \int_0^{+\infty} \left[\cos k_y y - \frac{\gamma_1}{k_y} \text{sen } k_y y \right] \frac{k_y^2 dk_y}{(k_y^2 + \gamma_1^2) [(ik_{x1})^2 + k_x^2]} \right\} \quad (4.58)$$

sendo em F_6 :

$$B(k_x, y) = \frac{2\gamma_1}{\pi} \int_0^{+\infty} \left[\cos k_y y - \frac{\gamma_1}{k_y} \text{sen } k_y y \right] \frac{k_y^2 dk_y}{(k_y^2 + \gamma_1^2) [(ik_{x1})^2 + k_x^2]} \quad (4.59)$$

O campo $\tilde{H}_{z1}(k_x, y)$ pode ser encontrado substituindo (4.55), (4.56), (4.57), (4.58) e (4.59) em (4.42):

$$\tilde{H}_{z1}(k_x, y) = -i\omega\epsilon_1 M_0 [\mathfrak{F} \{g_{10}(x, y, \xi, \eta) + \hat{g}_1(x, y, \xi, \eta)\}] + \left[\frac{-2\gamma_1^2 e^{-\gamma_1 y}}{(ik_{x01})^2 + k_x^2} + B(k_x, y) \right] \tilde{H}_{z2}(k_x, 0) \quad (4.60)$$

Na interface em $y = 0$ (4.54) e (4.60) tornam-se:

$$\tilde{H}_{z2}(k_x, 0) = \left[\frac{-2\gamma_1^2}{(ik_{x02})^2 + k_x^2} + A(k_x, 0) \right] \tilde{H}_{z1}(k_x, 0) \quad (4.61)$$

$$\tilde{H}_{z1}(k_x, 0) = -i\omega\epsilon_1 M_0 \tilde{g}_1(k_x, 0, \xi, \eta) + \left[\frac{-2\gamma_1^2}{(ik_{x01})^2 + k_x^2} + B(k_x, 0) \right] \tilde{H}_{z2}(k_x, 0) \quad (4.62)$$

Substituindo (4.61) em (4.62), obtemos:

$$\left[1 - \left[\frac{-2\gamma_1^2}{(ik_{x01})^2 + k_x^2} + B(k_x, 0) \right] \left[\frac{-2\gamma_2^2}{(ik_{x02})^2 + k_x^2} + A(k_x, 0) \right] \right] \tilde{H}_{z1}(k_x, 0) = -i\omega\epsilon_1 M_0 \tilde{g}_1(k_x, y, \xi, \eta) \quad (4.63)$$

O próximo passo será determinar os coeficientes $A(k_x, 0)$ e $B(k_x, 0)$, a resolução destes coeficientes encontram-se no Apêndice D.

Para dar prosseguimento a resolução dos campos magnéticos H_{z1} e H_{z2} , é necessário substituir os coeficientes $A(k_x, 0)$ e $B(k_x, 0)$ encontrados no Apêndice D em (4.63). A princípio, para facilitar o processo de resolução, o termo que multiplica $\tilde{H}_{z1}(k_x, 0)$ em (4.63) será denominado t por conveniência:

$$t = \left[1 - \left[\frac{-2\gamma_1^2}{(ik_{x01})^2 + k_x^2} + B(k_x, 0) \right] \left[\frac{-2\gamma_2^2}{(ik_{x02})^2 + k_x^2} + A(k_x, 0) \right] \right] \quad (4.64)$$

Substituindo então os coeficientes $A(k_x, 0)$ e $B(k_x, 0)$ (Apêndice D) em (4.64), obtemos:

$$t = \left[1 - \left[\frac{-2\gamma_1^2}{-k_1^2 - \gamma_1^2 + k_x^2} + \frac{\gamma_1}{\sqrt{k_x^2 - k_1^2 - \gamma_1}} \right] \left[\frac{-2\gamma_2^2}{-k_2^2 - \gamma_2^2 + k_x^2} + \frac{\gamma_2}{\sqrt{k_x^2 - k_2^2 - \gamma_2}} \right] \right] \quad (4.65)$$

Pode-se demonstrar (Apêndice E) que:

$$t = \frac{\left(\sqrt{k_x^2 - k_1^2} + \gamma_1 \right) \left(\sqrt{k_x^2 - k_2^2} + \gamma_2 \right) - \gamma_1 \gamma_2}{\left(\sqrt{k_x^2 - k_1^2} + \gamma_1 \right) \left(\sqrt{k_x^2 - k_2^2} + \gamma_2 \right)} \quad (4.66)$$

Substituindo (4.66) em (4.63) obtemos a equação para $\tilde{H}_{z1}(k_x, 0)$:

$$\tilde{H}_{z1}(k_x, 0) = \frac{-i\omega\epsilon_1 M_0 \tilde{g}_1(k_x, 0, \xi, \eta) \left(\sqrt{k_x^2 - k_1^2} + \gamma_1 \right) \left(\sqrt{k_x^2 - k_2^2} + \gamma_2 \right)}{\left(\sqrt{k_x^2 - k_1^2} + \gamma_1 \right) \left(\sqrt{k_x^2 - k_2^2} + \gamma_2 \right) - \gamma_1 \gamma_2} \quad (4.67)$$

A função de Green $\tilde{g}_1(k_x, 0, \xi, \eta)$ pode ser separada em suas componentes de espectro discreto e espectro contínuo, como:

$$\tilde{g}_1 = \mathfrak{F} \{g_{10}(x, y, \xi, \eta)\} + \mathfrak{F} \{\hat{g}_1(x, y, \xi, \eta)\} \quad (4.68)$$

Como o foco deste trabalho é o estudo das ondas superficiais do grafeno, trabalharemos a componente de espectro discreto de \tilde{g}_1 , então sua transformada de Fourier é:

$$\tilde{g}_{10} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[-2\gamma_1 e^{-\gamma_1(y+\eta)} \frac{e^{-ik_{x01}|x-\xi|}}{2ik_{x01}} \right] e^{-ik_x x} dx \quad (4.69)$$

resolvendo (4.69):

$$\tilde{g}_{10}(k_x, y, \xi, \eta) = \frac{-\gamma_1 e^{-\gamma_1(y+\eta)}}{ik_{x01}} \mathfrak{F} \left\{ e^{-ik_{x01}|x-\xi|} \right\} = \frac{-\gamma_1 e^{-\gamma_1(y+\eta)}}{ik_{x01}} \frac{2ik_{x01}}{(ik_{x01})^2 + k_x^2} e^{-ik_x \xi} \quad (4.70)$$

para $\text{Re}(ik_{x01}) > 0$

Em $y = 0$, (4.70) torna-se:

$$\tilde{g}_{10}(k_x, 0, \xi, \eta) = \frac{-2\gamma_1 e^{-\gamma_1 \eta} e^{-ik_x \xi}}{(ik_{x10})^2 + k_x^2} \quad (4.71)$$

Para trabalharmos apenas com a onda de superfície, novamente faremos a separação de termos discreto e contínuo em $\tilde{H}_{z1}(k_x, 0)$:

$$\tilde{H}_{z1}(k_x, 0) = \tilde{H}_{z10}(k_x, 0) + \tilde{\hat{H}}_{z1}(k_x, 0) \quad (4.72)$$

sendo $\tilde{H}_{z10}(k_x, 0)$ o termo que contribui para a onda de superfície (discreto) dado por:

$$\tilde{H}_{z10}(k_x, 0) = \frac{-i\omega\epsilon_1 M_0 \tilde{g}_{10}(k_x, 0, \xi, \eta) \left(\sqrt{k_x^2 - k_1^2} + \gamma_1\right) \left(\sqrt{k_x^2 - k_2^2} + \gamma_2\right)}{\left(\sqrt{k_x^2 - k_1^2} + \gamma_1\right) \left(\sqrt{k_x^2 - k_2^2} + \gamma_2\right) - \gamma_1 \gamma_2} \quad (4.73)$$

Desta forma, (4.54) torna-se:

$$\tilde{H}_{z2}(k_x, y) = \left[\frac{-2\gamma_2^2 e^{\gamma_2 y}}{(ik_{x02})^2 + k_x^2} + A(k_x, y) \right] \left[\tilde{H}_{z10}(k_x, 0) + \tilde{H}(k_x, 0) \right] \quad (4.74)$$

$$\tilde{H}_{z20}(k_x, y) = \frac{-2\gamma_2^2 e^{\gamma_2 y}}{(ik_{x02})^2 + k_x^2} \tilde{H}_{z10}(k_x, 0) \quad (4.75)$$

pois $A(k_x, y)$ e $\tilde{H}(k_x, 0)$ possuem espectros contínuos em k_y . Sabendo que:

$$(ik_{x01})^2 + k_x^2 = \sqrt{(k_x^2 - k_1^2)^2 - \gamma_1^2} = \left(\sqrt{k_x^2 - k_1^2} - \gamma_1\right) \left(\sqrt{k_x^2 - k_1^2} + \gamma_1\right) \quad (4.76)$$

e também:

$$(ik_{x02})^2 + k_x^2 = \sqrt{(k_x^2 - k_2^2)^2 - \gamma_2^2} = \left(\sqrt{k_x^2 - k_2^2} - \gamma_2\right) \left(\sqrt{k_x^2 - k_2^2} + \gamma_2\right) \quad (4.77)$$

Substituindo (4.73), (4.71), (4.76) e (4.77) em (4.75) temos:

$$\begin{aligned} \tilde{H}_{z20}(k_x, y) &= \frac{-i\omega\epsilon_1 M_0 2\gamma_1 e^{-\gamma_1 \eta} e^{-ik_x \xi} 2\gamma_2^2 e^{\gamma_2 y}}{\left(\sqrt{k_x^2 - k_1^2} - \gamma_1\right) \left(\sqrt{k_x^2 - k_1^2} + \gamma_1\right) \left(\sqrt{k_x^2 - k_2^2} - \gamma_2\right)} \times \\ &\quad \left(\sqrt{k_x^2 - k_1^2} + \gamma_1\right) \left(\sqrt{k_x^2 - k_2^2} + \gamma_2\right) \\ &\times \frac{1}{\left(\sqrt{k_x^2 - k_2^2} + \gamma_2\right) \left[\left(\sqrt{k_x^2 - k_1^2} + \gamma_1\right) \left(\sqrt{k_x^2 - k_2^2} + \gamma_2\right) - \gamma_1 \gamma_2\right]} \end{aligned} \quad (4.78)$$

Simplificando (4.78), temos finalmente:

$$\begin{aligned} \tilde{H}_{z20}(k_x, y) &= \frac{-i\omega\epsilon_1 M_0 4\gamma_1 \gamma_2^2}{\left(\sqrt{k_x^2 - k_1^2} - \gamma_1\right) \left(\sqrt{k_x^2 - k_2^2} - \gamma_2\right)} \times \\ &\quad e^{-\gamma_1 \eta} e^{-ik_x \xi} e^{\gamma_2 y} \\ &\times \frac{1}{\left[\left(\sqrt{k_x^2 - k_1^2} + \gamma_1\right) \left(\sqrt{k_x^2 - k_2^2} + \gamma_2\right) - \gamma_1 \gamma_2\right]} \end{aligned} \quad (4.79)$$

Aplica-se então a transformada inversa de Fourier para obter o campo magnético de superfície do meio 2 H_{z20} :

$$H_{z20}(x, y) = \mathfrak{F}^{-1} \left\{ \tilde{H}_{z20}(k_x, y) \right\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{H}_{z20}(k_x, y) e^{ik_x x} dk_x \quad (4.80)$$

De maneira análoga, a componente de espectro discreto em y para o campo magnético no meio 1 é obtido substituindo (4.79) por $y = 0$ em (4.60) e :

$$\tilde{H}_{z10}(k_x, y) = -i\omega\epsilon_1 M_0 \left\{ \tilde{g}_{10}(k_x, y, \xi, \eta) + \frac{8\gamma_1^3 \gamma_2^2}{[(ik_{x01})^2 + k_x^2] \left(\sqrt{k_x^2 - k_1^2} + \gamma_1\right) \left(\sqrt{k_x^2 - k_2^2} - \gamma_2\right)} \times \frac{e^{-ik_x \xi} e^{\gamma_1 \eta} e^{-\gamma_1 y}}{\left[\left(\sqrt{k_x^2 - k_1^2} + \gamma_1\right) \left(\sqrt{k_x^2 - k_2^2} + \gamma_2\right) - \gamma_1 \gamma_2\right]} \right\} \quad (4.81)$$

E aplicando a transformada inversa de Fourier para obter o campo no domínio espacial:

$$H_{z10}(x, y) = \mathfrak{F}^{-1} \left\{ \tilde{H}_{z10}(k_x, y) \right\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{H}_{z10}(k_x, y) e^{ik_x x} dk_x \quad (4.82)$$

A característica de espectro discreto na variável y em (4.79) e (4.81) é devido aos termos exponenciais $e^{-\gamma_1 y}$ e $e^{\gamma_2 y}$. Como $\text{Re}(\gamma_1) < 0$ e $\text{Re}(\gamma_2) < 0$, estes termos produzem variação exponencial decrescente do grafeno, localizado em $y = 0$, para ambos os meios ($y < 0$) e ($y > 0$).

A análise espectral de k_x em (4.79) e (4.81) pode ser feita estudando suas singularidades. Nestas equações, observamos dois tipos de singularidade, sendo cortes de ramo e pólos simples. Os cortes de ramo possuem ponto de ramificação em $\pm k_1$ e $\pm k_2$ conforme a Fig. 4.1 abaixo. Já os pólos deverão ser analisados a partir do denominador de (4.79).

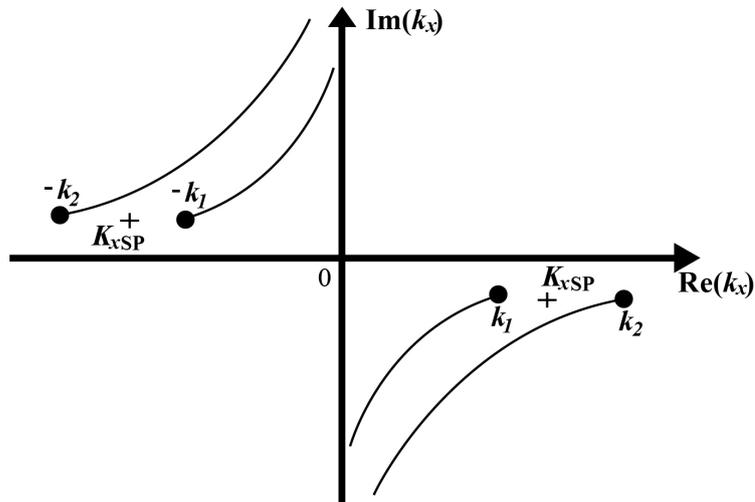


Figura 4.1 – Plano k_x da superfície de Riemann, mostrando as singularidades de (4.79) e (4.81).

Iniciaremos a análise então pelo pólo $\sqrt{k_x^2 - k_1^2} - \gamma_1 = 0$, sendo as condições $\text{Re}(\gamma_1) < 0$ e $\text{Im}(\sqrt{k_1^2 - k_x^2}) < 0$ (D.10), temos:

$$i\sqrt{k_1^2 - k_x^2} = \gamma_1 \rightarrow k_x = \sqrt{k_1^2 + \gamma_1^2} \quad (4.83)$$

O polo em (4.83) não pertence a superfície própria de Riemann, ou seja, este pólo não atende a condição $\text{Im}(\sqrt{k_1^2 - k_x^2}) < 0$, pois $\text{Re}(\gamma_1) < 0$. Desta forma, este pólo não produz uma solução de onda do tipo espectro discreto e não contribui para as ondas de superfície.

A mesma conclusão é válida para o polo:

$$\sqrt{k_x^2 - k_2^2} - \gamma_2 = 0 \rightarrow k_x = \sqrt{k_2^2 + \gamma_2^2} \quad (4.84)$$

pois não satisfaz simultaneamente $\text{Re}(\gamma_2)$ e $\text{Im}(\sqrt{k_2^2 - k_x^2}) < 0$ (D.24).

O termo $[(ik_{x01})^2 + k_x^2]$ possui raiz que satisfaz $\text{Im}(\sqrt{k_x^2 - k_1^2}) < 0$, porém pode-se mostrar que a contribuição deste pólo irá se anular com o termo \tilde{g}_{10} em (4.81).

Apenas um único termo contribuirá para o espectro discreto em k_x de (4.79), sendo eles obtidos através da resolução da equação característica:

$$\left[\left(\sqrt{k_x^2 - k_1^2} + \gamma_1 \right) \left(\sqrt{k_x^2 - k_2^2} + \gamma_2 \right) - \gamma_1 \gamma_2 \right] = 0 \quad (4.85)$$

O pólo de (4.85) é chamado de pólo de onda de superfície plasmônica $\pm k_{xSP}$ na Fig.4.1, que satisfaz as condições (D.24) (D.10).

Pode-se mostrar que esta equação é análoga aquela que descreve os pólos discretos do capítulo anterior (denominador do integrando de (3.57):

$$[i(k_{y1}\gamma_2 + k_{y2}\gamma_1) - k_{y1}k_{y2}] = 0 \quad (4.86)$$

Quando os dois meios são iguais ($\epsilon_1 = \epsilon_2$), as equações (4.85) e (4.86) possuem a seguinte solução explícita para a constante de propagação de onda de superfície plasmônica:

$$k_{xSP} = k_1 \sqrt{1 - \left(\frac{2}{\sigma \eta_1} \right)^2} \quad (4.87)$$

onde $\eta_1 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_1}}$.

A demonstração de (4.87) para meios iguais é apresentada no Apêndice F. Já para meios diferentes, o Apêndice G apresenta o desenvolvimento matemático e o código desenvolvido em Matlab [15] para solução numérica de (4.85). Este código calcula também a distribuição de H_{z1} e H_{z2} do modo plasmônico no plano xy . O próximo capítulo apresentará os resultados numéricos obtidos da resolução da equação característica, dos campos magnéticos H_{z10} e H_{z20} para diferentes frequências, permissividades dos meios 1 e 2 e potencial químico do grafeno.

5 Resultados e Discussões

Neste capítulo, são apresentados os resultados obtidos a partir do código desenvolvido em Matlab (Apêndice G) para encontrar as raízes da equação característica e as distribuições correspondentes do campo magnético no plano xy . Alguns resultados são comparados aos obtidos em [14] para validação. Os resultados apresentam uma análise espacial e espectral do modo plasmônico em função da frequência, permissividades dos meios e potencial químico do grafeno.

5.1 Análise Espectral do Modo Plasmônico

Nesta seção, são apresentados os resultados numéricos da análise espectral do modo plasmônico:

$$H_{z1SP}(x, y) = C_1 e^{-\gamma_1 y} e^{-ik_{xSP}|x-\xi|} \quad (y < 0) \quad (5.1)$$

$$H_{z2SP}(x, y) = C_2 e^{\gamma_2 y} e^{-ik_{xSP}|x-\xi|} \quad (y > 0) \quad (5.2)$$

As equações (5.1) e (5.2) são os resultados produzidos pelos resíduos dos pólos obtidos de (4.79) e (4.81), onde o pólo k_{xSP} é a raiz de (4.85) que pertence a superfície própria de Riemann, a qual representa a constante de propagação em x do modo plasmônico superficial. As constantes C_1 e C_2 são obtidas dos resíduos do pólo k_{xSP} para os campos H_{z10} (4.82) e H_{z20} (4.81), respectivamente. Estas constantes dos resíduos não foram calculadas neste trabalho.

Calculamos o decaimento do campo de e^{-1} ou confinamento normalizado com λ_0 do modo na direção y , o qual é definido por $\delta_q/\lambda_0 = |1/(\text{Re}(\gamma_q)\lambda_0)|$, onde o índice q varia em 1 e 2 para os dois meios e λ_0 é o comprimento de onda no espaço livre. São calculadas também as partes real e imaginária da constante de propagação em x normalizadas com k_0 , as quais são definidas por $\text{Re}(k_{xSP}/k_0)$ e $\text{Im}(k_{xSP}/k_0)$, onde k_0 é a constante de propagação no espaço livre. Os meios 1 e 2 possuem permissividades relativas ϵ_{r1} e ϵ_{r2} respectivamente.

A Fig. 5.1 mostra os resultados destes parâmetros definidos acima em função da frequência para diferentes valores de μ_C e meios iguais ($\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$, $\epsilon_{r1} = \epsilon_{r2} = 1$). Nesta figura apresentamos também os resultados obtidos em [14] para $\mu_C = 0, 5\text{eV}$, onde observamos uma boa concordância para as partes real e imaginária de k_{xSP}/k_0 , mostrando que este parâmetro não varia com o tipo de fonte (pontual ou linha de corrente) que alimenta a folha de grafeno. No entanto, δ_q/λ_0 para o caso com fonte pontual [14] possui valores menores que o caso alimentado com fonte linear de corrente utilizada neste trabalho. Isto é devido ao fato natural de espalhamento que ondas cilíndricas, do caso produzidas

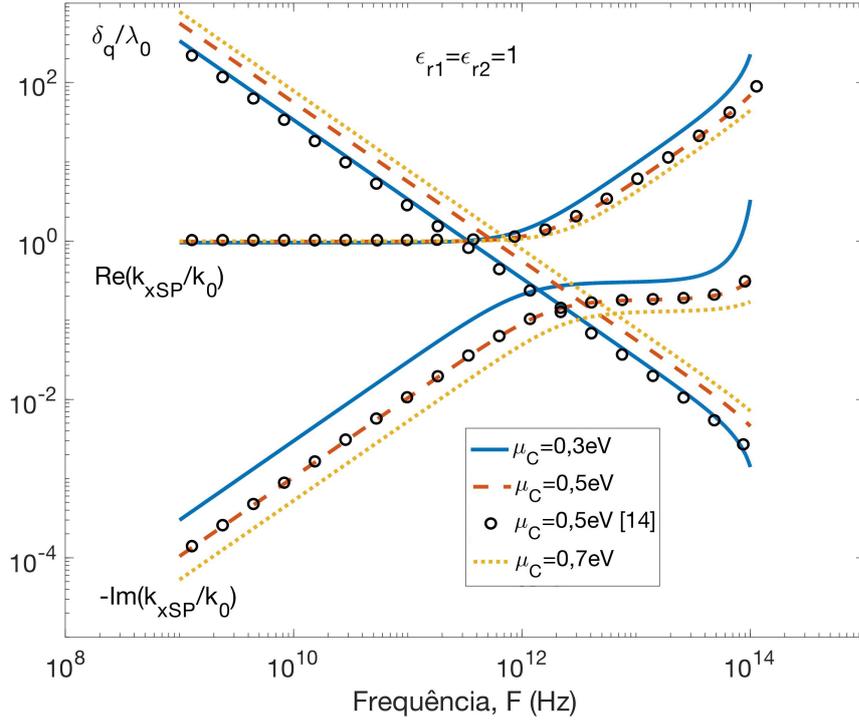


Figura 5.1 – Fator de confinamento δ_q/λ_0 ($q = 1, 2$) e constante k_{xSP}/k_0 em função da frequência para diferentes valores de μ_C . Neste caso $\epsilon_{r1} = \epsilon_{r2} = 1$.

Fonte (autor)

por fonte pontual [14], as quais possuem um maior decaimento da amplitude, na direção normal a folha de grafeno, em relação as ondas planas produzidas por linha de corrente.

Os resultados da Fig. 5.1 mostram que quando se aumenta o potencial químico, o confinamento δ_q/λ_0 em y nos dois meios aumenta, a atenuação $\text{Im}(k_{xSP}/k_0)$ em x diminui e a constante de fase $\text{Re}(k_{xSP}/k_0)$ em x diminui. Estes fenômenos ocorrem devido ao grafeno se tornar uma superfície menos indutiva com o aumento de μ_C , ou seja, o efeito plasmônico diminui, visto que o comprimento de onda plasmônico normalizado $\lambda_{SP}/\lambda_0 = 1/\text{Re}(k_{xSP}/k_0)$ aumenta com o aumento de μ_C .

As Figs. 5.2 e 5.3 mostram a variação dos mesmos parâmetros definidos acima para diferentes valores de μ_C e para meios diferentes. Na Figura 5.2, temos $\epsilon_{r1} = 1$ e $\epsilon_{r2} = 2$ e na Figura 5.3 temos $\epsilon_{r1} = 1$ e $\epsilon_{r2} = 4$.

Observamos uma dependência similar dos parâmetros em função de μ_C aos observados para meios iguais (Fig. 5.1). A diferença ocorre principalmente no confinamento em y , onde, neste caso, temos $\delta_1/\lambda_0 > \delta_2/\lambda_0$, ou seja, a onda é mais confinada no meio que possui a maior permissividade. Além disso, essa diferença entre os confinamentos nos dois meios aumenta com a diferença entre as permissividades, como pode ser observado nas Figs. 5.2 e 5.3. Também é possível observar que com o aumento da permissividade do meio 2, a atenuação $\text{Im}(k_{xSP}/k_0)$ em x aumenta e o comprimento de onda plasmônico normalizado $\lambda_{SP}/\lambda_0 = 1/\text{Re}(k_{xSP}/k_0)$ diminui. Em outras palavras, o efeito plasmônico

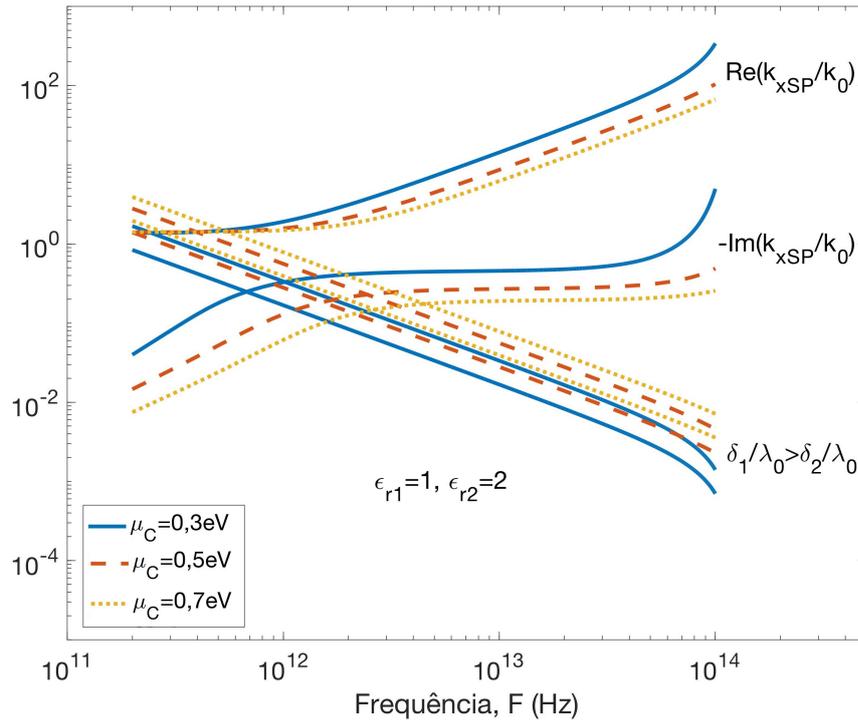


Figura 5.2 – Fator de confinamento δ_q/λ_0 e constante k_{xSP}/k_0 em função da frequência para diferentes valores de $\mu_C = 0,3; 0,5$ e $0,7eV$, $\epsilon_{r1} = 1$ e $\epsilon_{r2} = 2$

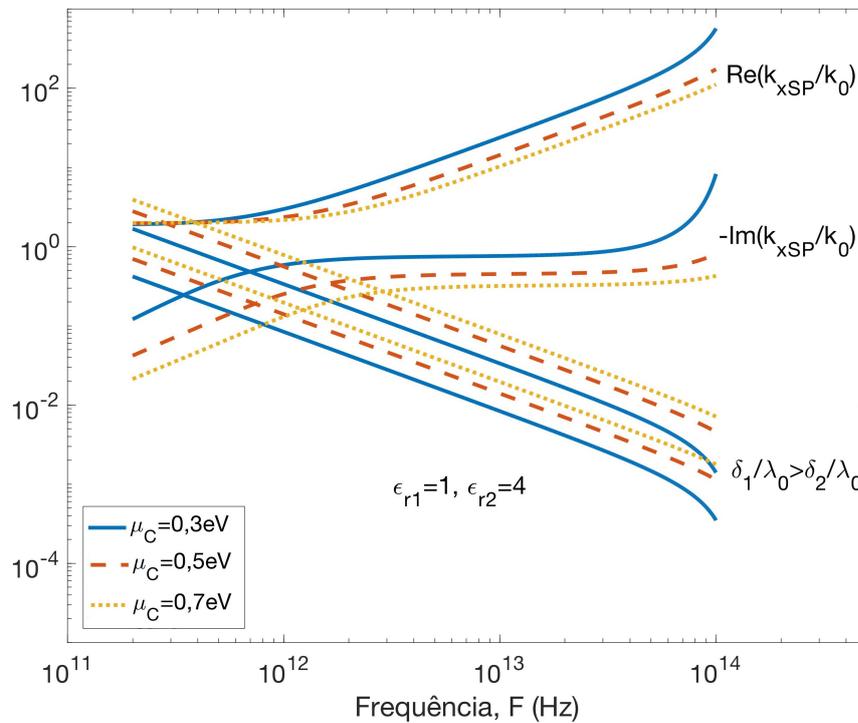


Figura 5.3 – Fator de confinamento δ_q/λ_0 e constante k_{xSP}/k_0 em função da frequência para diferentes valores de $\mu_C = 0,3; 0,5$ e $0,7eV$, $\epsilon_{r1} = 1$ e $\epsilon_{r2} = 4$

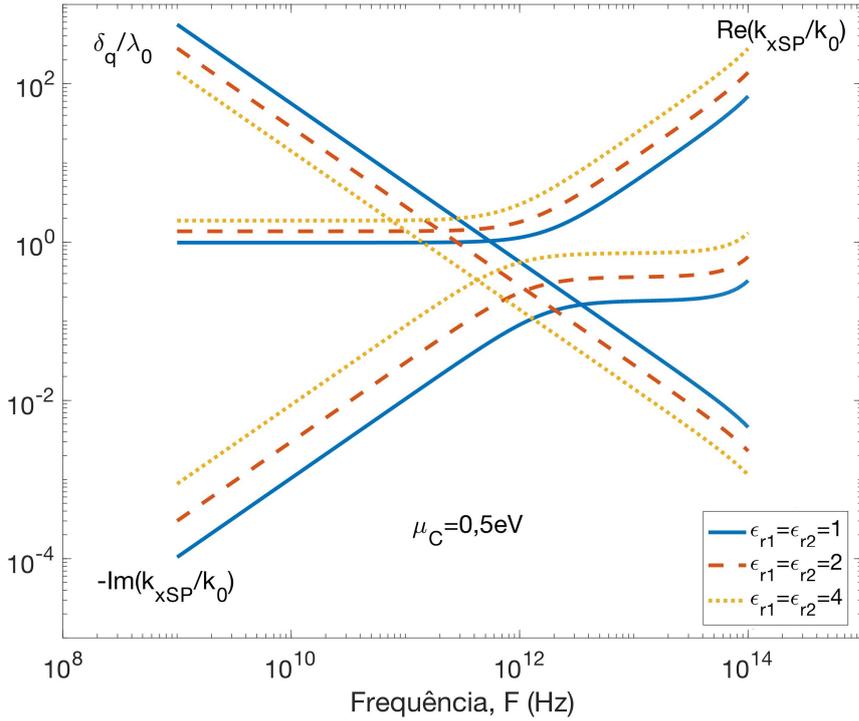


Figura 5.4 – Fator de confinamento δ_q/λ_0 ($q = 1, 2$) e constante k_{xSP}/k_0 em função da frequência para diferentes valores de $\epsilon_{r1} = \epsilon_{r2}$. Neste caso $\mu_C = 0,5eV$.

da folha de grafeno é amplificado com o aumento da permissividade do meio 2, isto para μ_C constante.

As Figs. 5.4 e 5.5 mostram a variação dos parâmetros definidos acima para diferentes valores de permissividade ϵ_q ($q = 1, 2$) com o valor constante de $\mu_C = 0,5eV$. Na Figura 5.4, os valores de permissividade são alterados igualmente nos dois meios para $\epsilon_{r1} = \epsilon_{r2} = 1, 2$ e 4 . Na Figura 5.5 apenas a permissividade do meio 2 é alterada para $\epsilon_{r2} = 1, 2$ e 4 , mantendo-se $\epsilon_{r1} = 1$. Os resultados obtidos na Figura 5.4 estão de acordo com os resultados obtidos anteriormente em [14] mostrando que o efeito plasmônico da folha de grafeno é amplificado com o aumento da permissividade, observando que a atenuação $Im(k_{xSP}/k_0)$ em x aumenta e o comprimento de onda plasmônico normalizado $\lambda_{SP}/\lambda_0 = 1/Re(k_{xSP}/k_0)$ diminui conforme os valores de permissividade aumentam. A Figura 5.5 apresenta conclusões similares, com diferença apenas no confinamento em y , onde neste caso temos $\delta_1/\lambda_0 > \delta_2/\lambda_0$, ou seja, a onda é mais confinada no meio que possui a maior permissividade.

5.2 Análise Espacial do Modo Plasmônico

Esta seção apresenta exemplos de distribuição espacial do modo plasmônico (5.1) e (5.2). Nos resultados apresentados a seguir utilizaram-se amplitudes normalizadas $C_1 = 1 = -C_2$ e fixou-se também a frequência $F = 1,0THz$.

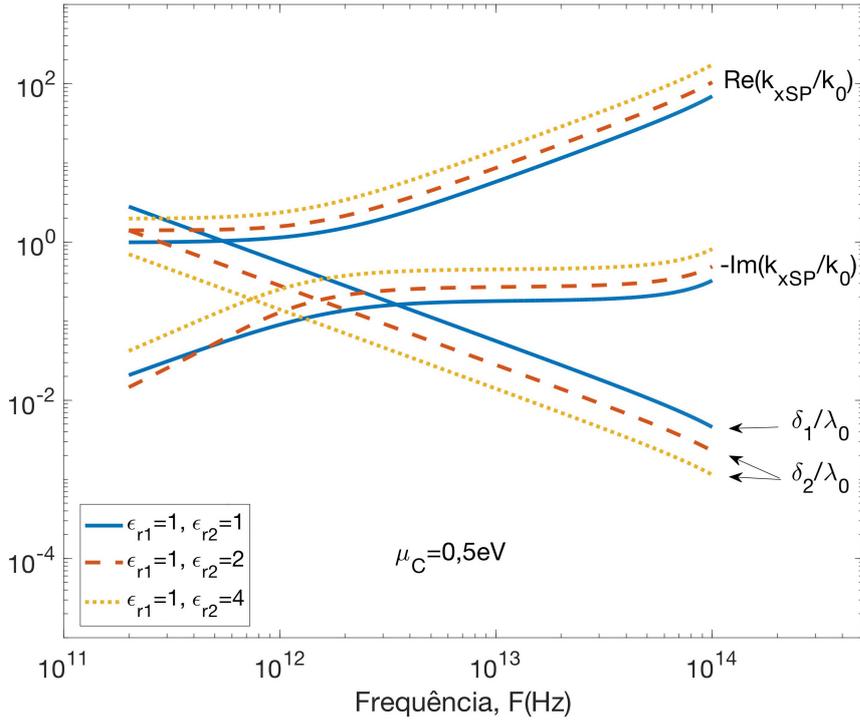


Figura 5.5 – Fator de confinamento δ_q/λ_0 ($q = 1, 2$) e constante k_{xSP}/k_0 em função da frequência para diferentes valores de ϵ_{r1} e ϵ_{r2} . Neste caso $\mu_C = 0,5eV$.

A Fig. 5.6 mostra um exemplo da distribuição do campo H_{xSP} no plano xy para meios diferentes. Observamos as concentrações do modo plasmônico próximo de $y = 0$, próximo da superfície do grafeno, e em x com o valor máximo perto da fonte de corrente linear $x = \xi = 472\mu m$. Observe que este campo não é uma onda cilíndrica em xy , como no caso obtido para uma fonte de corrente pontual [14], mas sim é uma onda unidimensional que se propaga no modelo para $+x$ e $-x$ a partir de $x = \xi$, independente de z , visto que a fonte de excitação é uma corrente linear infinita em z . A Fig. 5.7 mostra a variação da distribuição $\text{Re}[H_{zSP}(x, y)]$, do modo plasmônico, em função de x e y para diferentes valores da permissividade do meio 2. Observamos que os resultados estão de acordo com a análise espectral da seção anterior. Por exemplo, o efeito plasmônico é acentuado com o aumento da permissividade do meio 2, para μ_C constante. Já as Figs. 5.8 e 5.9 mostram a variação da distribuição de $\text{Re}[H_{zSP}(x, y)]$ para diferentes valores de μ_C para $\epsilon_{r1} = \epsilon_{r2} = 1$ (Fig.5.8) e $\epsilon_{r1} = 1$ e $\epsilon_{r2} = 4$ (Fig.5.9). Novamente os resultados estão de acordo com a análise espectral feita anteriormente, onde o efeito plasmônico é acentuado para menores valores de μ_C .

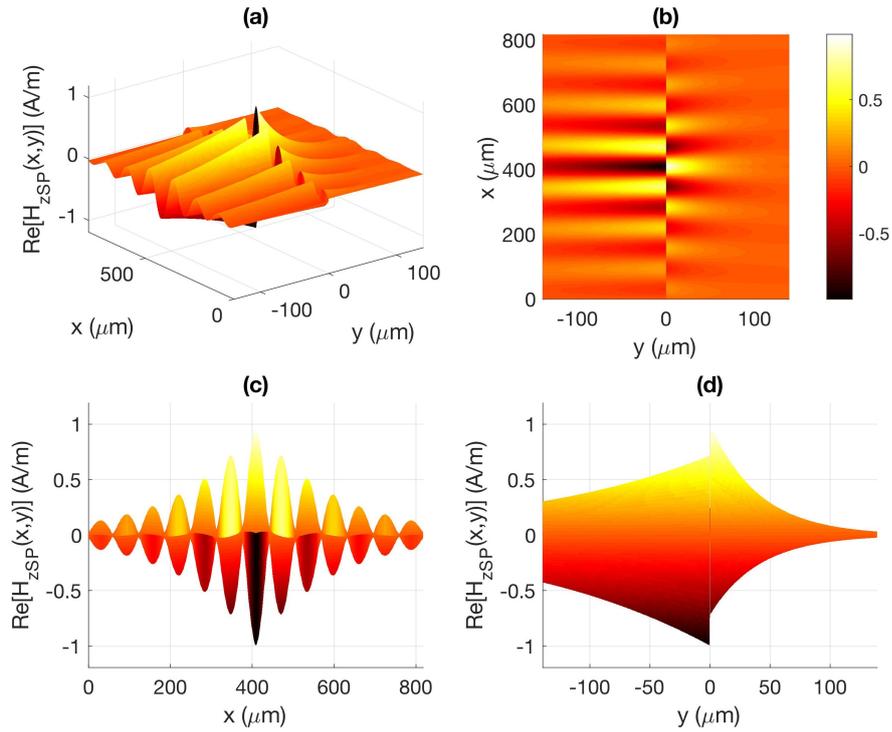


Figura 5.6 – Distribuição de $Re(H_{zSP}(x, y))$. (a) Vista 3D. (b) Plano xy . (c) Variação com x . (d) Variação com y . Dados: $\epsilon_{r1} = 1$, $\epsilon_{r2} = 4$, $F = 1\text{THz}$ e $\mu_C = 0,5eV$.

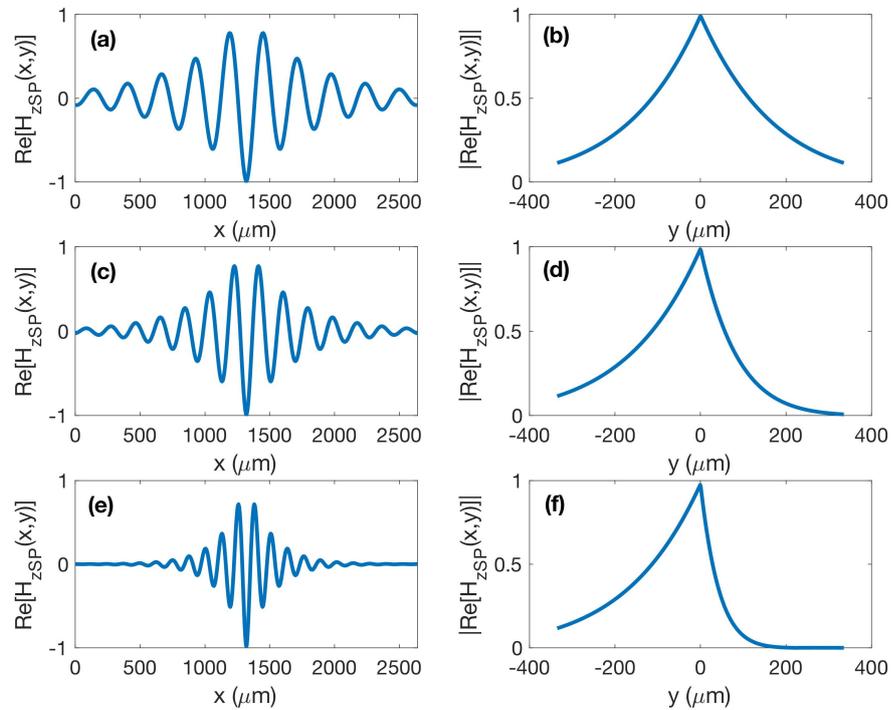


Figura 5.7 – Variação do campo $Re[H_z(x, y)]$ versus x e y para diferentes valores de ϵ_{r1} e ϵ_{r2} , para $\mu_C = 0,5eV$ e $F = 1,0\text{THz}$. (a) e (b) para $\epsilon_{r1} = \epsilon_{r2} = 1$. (c) e (d) para $\epsilon_{r1} = 1$ e $\epsilon_{r2} = 2$. (e) e (f) para $\epsilon_{r1} = 1$ e $\epsilon_{r2} = 4$.

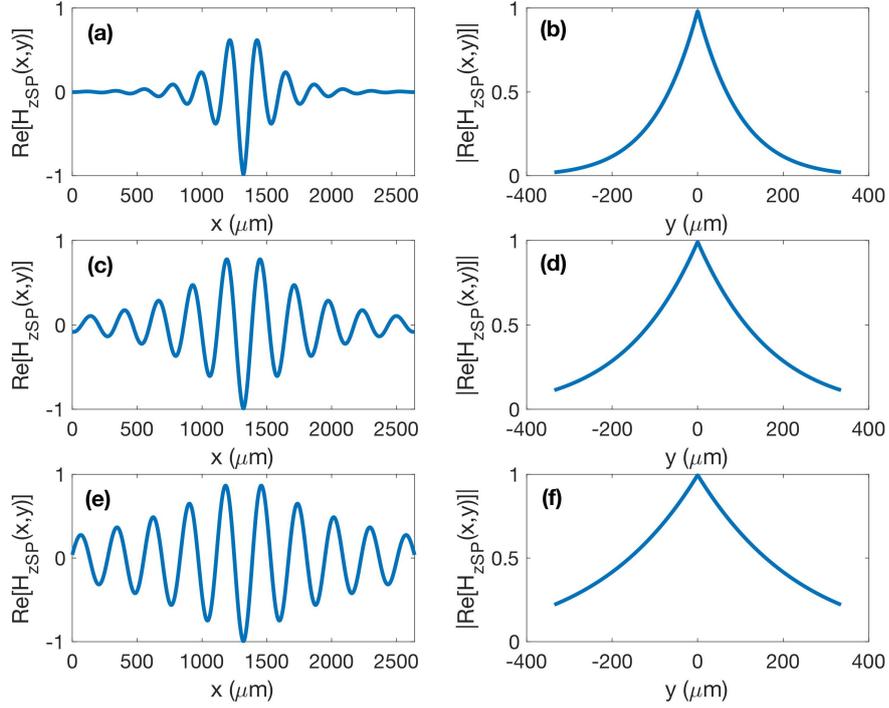


Figura 5.8 – Variação do campo $\text{Re}[H_z(x,y)]$ versus x e y para $\epsilon_{r1} = \epsilon_{r2} = 1$, para diferentes valores de μ_C e $F = 1,0\text{THz}$. (a) e (b) para $\mu_C = 0,3\text{eV}$. (c) e (d) para $\mu_C = 0,5\text{eV}$. (e) e (f) para $\mu_C = 0,7\text{eV}$.

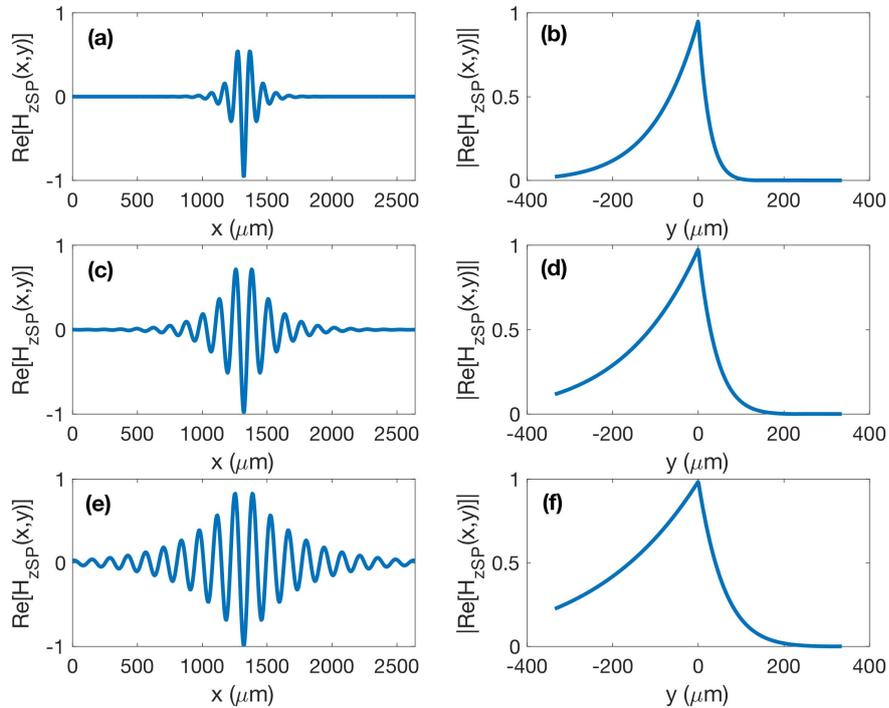


Figura 5.9 – Variação do campo $\text{Re}[H_z(x,y)]$ versus x e y para $\epsilon_{r1} = 1$ e $\epsilon_{r2} = 4$, para diferentes valores de μ_C e $F = 1,0\text{THz}$. (a) e (b) para $\mu_C = 0,3\text{eV}$. (c) e (d) para $\mu_C = 0,5\text{eV}$. (e) e (f) para $\mu_C = 0,7\text{eV}$.

6 Conclusão

Neste trabalho foi apresentada uma análise do problema de espalhamento de uma folha de grafeno, situada entre dois meios distintos, e excitada por uma fonte de corrente linear magnética. Os campos foram obtidos através do método da função de Green, que por sua vez foi determinada utilizando-se dois métodos: Transformada de Fourier e a Transformada de Impedância. Os resultados mostraram uma análise espectral e espacial do modo plasmônico em função do potencial químico, frequência e propriedades dos meios. Os principais efeitos observados nos resultados com o aumento do potencial químico foram o aumento do confinamento em y nos dois meios e a diminuição da atenuação em x e da constante de fase em x , devido ao grafeno se tornar uma superfície menos indutiva com o aumento do potencial químico, diminuindo o efeito plasmônico. Com o aumento da permissividade em um dos meios (no caso deste trabalho, o meio 2) observou-se o aumento da atenuação em x e a diminuição do comprimento de onda normalizado, ou seja, o efeito plasmônico do grafeno é amplificado no meio que possui maior permissividade.

Ambos os métodos produziram resultados que estão de acordo com os dados disponíveis na literatura, comprovando, assim, a validade do método da Transformada de Impedância para a resolução deste tipo de problemas. A vantagem observada em comparação com os outros métodos consiste na utilização das autofunções naturais do problema, o que fornece de uma forma mais direta o modo plasmônico e suas características, visto que é possível separar os espectros discreto e contínuo contidos nas dependências dos campos com a variável normal a folha de grafeno, que no presente trabalho é a variável y .

Uma proposta de trabalho futuro seria investigar a eficiência computacional da solução por integração numérica dos termos que representam os campos de radiação (espectro contínuo), comparando com métodos convencionais que utilizam transformada de Fourier. Outra proposta seria calcular o resíduo do polo "plasmônico" para análise de sua intensidade em função dos parâmetros do problema (frequência, permissividade e potencial químico). Uma outra proposta de trabalho futuro seria utilizar fontes pontuais e analisar o problema por Transformada de Impedância.

6.1 Trabalhos Publicados

1. PIRES, A. V.; COSTA, K. Q. . Espalhamento Eletromagnético no Grafeno por meio da Transformada de Impedância. In: 18 SBMO - Simpósio Brasileiro de Microondas e Optoeletrônica e 13 CBMAG - Congresso Brasileiro de Eletromagnetismo, 2018, Santa Rita do Sapucaí - MG. MOMAG 2018 - Vale da Eletrônica, 2018. p. 653-657.

2. PIRES, A. V.; COSTA, K. Q. . Análise Espectral de uma Folha de Grafeno Excitada por uma Linha de Corrente Magnética. In: XXXVI Simpósio Brasileiro de Telecomunicações e Processamento de Sinais, 2018, Campina Grande - PB. XXXIV SIMPÓSIO BRASILEIRO DE TELECOMUNICAÇÕES - SBrT2018, 2018.

6.2 Premiações Recebidas

- Menção Honrosa como um dos destaques dentre os artigos submetidos ao MOMAG 2018 na área de "Magnetismo".

Referências

- 1 CHEN, P.-Y.; ALU, A. Atomically thin surface cloak using graphene monolayers. *ACS nano*, ACS Publications, v. 5, n. 7, p. 5855–5863, 2011. Citado 2 vezes nas páginas 10 e 17.
- 2 CHRISTENSEN, J. et al. Graphene plasmon waveguiding and hybridization in individual and paired nanoribbons. *ACS nano*, ACS Publications, v. 6, n. 1, p. 431–440, 2011. Citado 3 vezes nas páginas 10, 17 e 20.
- 3 LLATSER, I. et al. Graphene-based nano-patch antenna for terahertz radiation. *Photonics and Nanostructures-Fundamentals and Applications*, Elsevier, v. 10, n. 4, p. 353–358, 2012. Citado 3 vezes nas páginas 10, 17 e 20.
- 4 TAMAGNONE, M. et al. Analysis and design of terahertz antennas based on plasmonic resonant graphene sheets. *Journal of applied physics*, AIP, v. 112, n. 11, p. 114915, 2012. Citado 2 vezes nas páginas 10 e 17.
- 5 GEIM, A. K.; NOVOSELOV, K. S. The rise of graphene. In: *Nanoscience and Technology: A Collection of Reviews from Nature Journals*. [S.l.]: World Scientific, 2010. p. 11–19. Citado na página 17.
- 6 GRIGORENKO, A.; POLINI, M.; NOVOSELOV, K. Graphene plasmonics. *Nature photonics*, Nature Publishing Group, v. 6, n. 11, p. 749, 2012. Citado na página 17.
- 7 KOPPENS, F. H.; CHANG, D. E.; ABAJO, F. J. Garcia de. Graphene plasmonics: a platform for strong light–matter interactions. *Nano letters*, ACS Publications, v. 11, n. 8, p. 3370–3377, 2011. Citado na página 17.
- 8 ZHAO, Y.; ZHU, Y. Graphene-based hybrid films for plasmonic sensing. *Nanoscale*, Royal Society of Chemistry, v. 7, n. 35, p. 14561–14576, 2015. Citado na página 17.
- 9 YONG, V.; TOUR, J. M. Theoretical efficiency of nanostructured graphene-based photovoltaics. *Small*, Wiley Online Library, v. 6, n. 2, p. 313–318, 2010. Citado na página 17.
- 10 MEHTA, B.; ZAGHLOUL, M. Tuning the scattering response of the optical nano antennas using graphene. *IEEE Photonics Journal*, IEEE, v. 6, n. 1, p. 1–8, 2014. Citado na página 17.
- 11 COSTA, K. Q. da et al. Theoretical analysis of graphene nanoantennas with different shapes. *Microwave and Optical Technology Letters*, Wiley Online Library, v. 56, n. 5, p. 1019–1024, 2014. Citado na página 17.
- 12 HANSON, G. W. Dyadic green’s functions for an anisotropic, non-local model of biased graphene. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, IEEE, v. 56, n. 3, p. 747–757, 2008. Citado na página 18.
- 13 HANSON, G. W. Dyadic green’s functions and guided surface waves for a surface conductivity model of graphene. *Journal of Applied Physics*, AIP, v. 103, n. 6, p. 064302, 2008. Citado na página 18.

- 14 HANSON, G. W.; YAKOVLEV, A. B.; MAFI, A. Excitation of discrete and continuous spectrum for a surface conductivity model of graphene. *Journal of Applied Physics*, AIP, v. 110, n. 11, p. 114305, 2011. Citado 6 vezes nas páginas 18, 45, 46, 48, 49 e 68.
- 15 THE MATHWORKS, INC. *MATLAB version 8.5.0.197613 (R2015a)*. Natick, Massachusetts, 2015. Citado 3 vezes nas páginas 19, 44 e 72.
- 16 ALLEN, M. J.; TUNG, V. C.; KANER, R. B. Honeycomb carbon: a review of graphene. *Chemical reviews*, ACS Publications, v. 110, n. 1, p. 132–145, 2009. Citado na página 20.
- 17 CHABOT, V. et al. A review of graphene and graphene oxide sponge: material synthesis and applications to energy and the environment. *Energy & Environmental Science*, Royal Society of Chemistry, v. 7, n. 5, p. 1564–1596, 2014. Citado na página 20.
- 18 BHUYAN, M. S. A. et al. Synthesis of graphene. *International Nano Letters*, Springer, v. 6, n. 2, p. 65–83, 2016. Citado na página 20.
- 19 GUSYNIN, V. Vp gusynin, sg sharapov, and jp carbotte, j. phys.: Condens. matter 19, 026222 (2007). *J. Phys.: Condens. Matter*, v. 19, p. 026222, 2007. Citado na página 21.
- 20 GONÇALVES, P. A. D.; PERES, N. M. *An introduction to graphene plasmonics*. [S.l.]: World Scientific, 2016. Citado na página 21.
- 21 DUDLEY, D. G. *Mathematical foundations for electromagnetic theory*. [S.l.]: IEEE press New York, 1994. Citado 8 vezes nas páginas 25, 29, 34, 36, 56, 57, 58 e 60.
- 22 DEBNATH, L.; BHATTA, D. *Integral transforms and their applications*. [S.l.]: Chapman and Hall/CRC, 2006. Citado na página 39.
- 23 BROWN, J. W.; CHURCHILL, R. V. *Variáveis complexas e aplicações*. [S.l.]: McGraw Hill Brasil, 2015. Citado 3 vezes nas páginas 59, 61 e 63.

APÊNDICE A – Verificando se o Problema é Auto-Adjunto

O primeiro passo para verificar se o problema é auto adjunto é resolver a seguinte equação, considerando que a conjunção do operador ∇^2 é nula, ou seja [21]:

$$J(u, v) = - \int_{S_{t1}} (\bar{v}\nabla u - u\nabla\bar{v}) \cdot \bar{n}dS = 0 \quad (\text{A.1})$$

onde J é a conjunção do operador $-\nabla^2$, e S_{t1} é a superfície total que delimita o volume V_1 do problema, formado a partir das somas das seis superfícies individuais do volume V_1 de forma que $S_{t1}=S_1+S_2+S_3+S_4,+S_5+S_6$. A superfície S_1 compreende o intervalo $y \rightarrow -\infty$, S_2 corresponde a $x \rightarrow +\infty$, S_3 corresponde a $x \rightarrow -\infty$, S_4 e S_5 correspondem a $z \rightarrow +\infty$ e $z \rightarrow -\infty$ respectivamente e S_6 e a interface $y = 0$. As condições de u são definidas como as mesmas condições de H_{z1} em sua forma homogênea, ou seja:

$$\begin{aligned} u + \frac{1}{\gamma_1} \frac{\partial u}{\partial y} &= 0 \\ \lim_{y \rightarrow -\infty} u &= 0 \\ \lim_{x \rightarrow \pm\infty} u &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Desta forma, é feita a análise individual de cada superfície utilizando (A.2). Para S_1 , temos:

$$\int_{S_1} (\bar{v}\nabla u - u\nabla\bar{v}) \cdot \bar{a}_y dx dz = \int_{S_1} \left[\bar{v} \left(-\frac{\partial u}{\partial y} \right) + 0 \right] dx dz = \int_{S_1} -\bar{v} \frac{\partial u}{\partial y} dx dz \quad (\text{A.3})$$

Para S_2 :

$$\int_{S_2} (\bar{v}\nabla u - u\nabla\bar{v}) \cdot \bar{a}_x dy dz = \int_{S_2} \left[\bar{v} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + 0 \right] dy dz = \int_{S_2} \bar{v} \frac{\partial u}{\partial x} dy dz \quad (\text{A.4})$$

A superfície S_3 consiste em:

$$\int_{S_3} -\bar{v} \frac{\partial u}{\partial x} dy dz \quad (\text{A.5})$$

As integrais nas superfícies S_4 e S_5 tem valor nulo pois o problema é invariável em z , então temos:

$$\int_{S_4} (\bar{v}\nabla u - u\nabla\bar{v}) \cdot \bar{a}_z dS = 0 \quad (\text{A.6})$$

$$\int_{S_5} (\bar{v}\nabla u - u\nabla\bar{v}) \cdot -\bar{a}_z dS = 0 \quad (\text{A.7})$$

Na superfície S_6 , utilizando (A.2) temos:

$$\int_{S_6} (\bar{v}\nabla u - u\nabla\bar{v}) \cdot \bar{a}_y dx dz = \int_{S_6} \left[\bar{v} \frac{\partial u}{\partial y} - u \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right] dx dz = \int_{S_6} \left[-u \left(\gamma_1 \bar{v} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right) \right] dx dz \quad (\text{A.8})$$

Definimos as condições de contorno de \bar{v} de tal forma que (A.1) seja satisfeita, ou seja:

$$\int_{S_1} -\bar{v} \frac{\partial u}{\partial y} dx dz + \int_{S_2} \bar{v} \frac{\partial u}{\partial x} dy dz + \int_{S_3} -\bar{v} \frac{\partial u}{\partial x} dy dz + \int_{S_6} \left[-u \left(\gamma_1 \bar{v} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right) \right] dx dz = 0 \quad (\text{A.9})$$

Desta forma, temos:

$$\lim_{y \rightarrow -\infty} \bar{v} = 0 \quad (\text{A.10})$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \bar{v} = 0 \quad (\text{A.11})$$

$$\bar{v} + \frac{1}{\gamma_1} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = 0 \Big|_{y=0} \quad (\text{A.12})$$

Aplicando o complexo conjugado nas condições anteriores, obtemos:

$$\lim_{y \rightarrow -\infty} v = 0 \quad (\text{A.13})$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} v = 0 \quad (\text{A.14})$$

$$v + \frac{1}{\gamma_1} \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \Big|_{y=0} \quad (\text{A.15})$$

Conclui-se que o problema é não auto adjunto pois as condições de u e v são diferentes. Porém, de acordo com a teoria em [21], é correto afirmar que o problema é simétrico, pois as condições de u e \bar{v} são iguais.

APÊNDICE B – Transformada de Impedância do Meio 2

O problema da Função de Green tendo y como variável independente para o meio 2 $y = [0, +\infty]$ é:

$$\begin{aligned} -\frac{d^2 g_2}{dy^2} - \lambda g_2 &= \delta(y - y') \\ \frac{dg_2}{dy}(0, y') &= \gamma_2 g_2(0, y'), \operatorname{Re}(\gamma_2) < 0 \\ \lim_{y \rightarrow \infty} g_2(y, y') &= 0 \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

Utilizando o método convencional para determinar a função de Green [21], obtemos o seguinte resultado:

$$g_2(y, y') = \frac{1}{i\sqrt{\lambda} + \gamma_2} \begin{cases} e^{-i\sqrt{\lambda}y} \cos \sqrt{\lambda}y' + \frac{\gamma_2}{\sqrt{\lambda}} \operatorname{sen} \sqrt{\lambda}y' & , y > y' \\ e^{-i\sqrt{\lambda}y'} \cos \sqrt{\lambda}y + \frac{\gamma_2}{\sqrt{\lambda}} \operatorname{sen} \sqrt{\lambda}y & , y < y' \end{cases} \quad (\text{B.2})$$

onde $\operatorname{Im}(\sqrt{\lambda}) < 0$.

A representação espectral da função $\delta(y - y')$ é obtida resolvendo a seguinte integral[21]:

$$\delta(y - y') = -\frac{i}{2\pi i} \lim_{R \rightarrow \infty} \oint_{C_R} g_2(y, y', \lambda) d\lambda \quad (\text{B.3})$$

onde R é o raio do círculo do caminho de integração C_R mostrado na Fig. B.1 no plano complexo λ . Nesta figura mostramos também as singularidades de (B.2), do tipo corte de ramo (eixo real positivo) e pólo simples em $\lambda_p = -\gamma_2^2$.

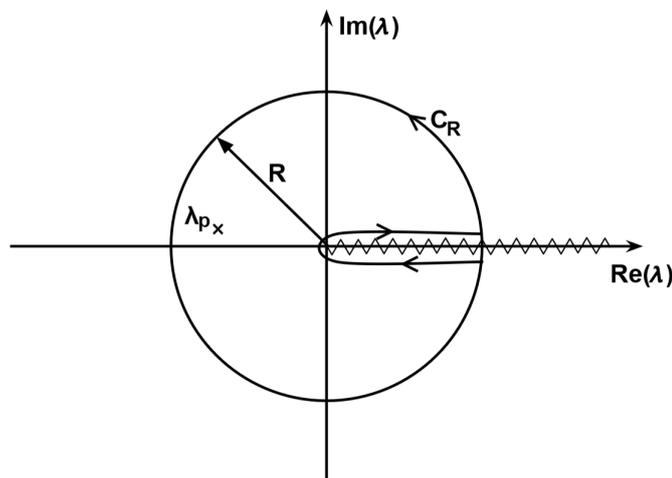


Figura B.1 – Contorno fechado no plano $\operatorname{Re}(\lambda)$ e $\operatorname{Im}(\lambda)$ utilizada para resolver (B.3).

O resultado da integral (B.3) é obtido aplicando os teoremas de Cauchy e resíduos [23]:

$$\delta(y-y') = -2\gamma_2 e^{\gamma_2(y+y')} + \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \left(\cos k_y y + \frac{\gamma_2}{k_y} \text{sen } k_y y \right) \left(\cos k_y y' + \frac{\gamma_2}{k_y} \text{sen } k_y y' \right) \frac{k_y^2 dk_y}{\gamma_2^2 + k_y^2} \quad (\text{B.4})$$

onde $k_y = |\lambda|^{1/2}$.

Finalmente, com esta representação da função $\delta(y-y')$, definimos a transformada de impedância no meio 2, para uma determinada função $u(y)$:

$$u(y) = \int_0^{+\infty} \delta(y-y') u(y') dy' \quad (\text{B.5})$$

$$u(y) = -2\gamma_2 e^{\gamma_2 y} U_0 + \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} U(k_y) \left(\cos k_y y + \frac{\gamma_2}{k_y} \text{sen } k_y y \right) \frac{k_y^2 dk_y}{k_y^2 + \gamma_2^2} \quad (\text{B.6})$$

onde:

$$\begin{aligned} U_0 &= \int_0^{+\infty} u(y) e^{\gamma_2 y} dy \\ U(k_y) &= \int_0^{+\infty} u(y) \left(\cos k_y y + \frac{\gamma_2}{k_y} \text{sen } k_y y \right) dy \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

Definimos U_0 como a transformada de impedância de ordem zero e $U(k_y)$ como a transformada de impedância de ordem k_y . Representamos estas transformadas simbolicamente por:

$$u(y) \stackrel{0}{\Rightarrow} U_0 \quad (\text{B.8})$$

$$u(y) \stackrel{k_y}{\Rightarrow} U(k_y) \quad (\text{B.9})$$

APÊNDICE C – Transformada de Impedância do Meio 1

O problema de função de Green para o meio 1 $y = [-\infty, 0]$ é:

$$\begin{aligned} -\frac{d^2 g_1}{dy^2} - \lambda g_1 &= \delta(y - y') \\ \frac{dg_1}{dy}(0, y') &= -\gamma_1 g_1(0, y'), \quad \text{Re}(\gamma_1) < 0 \\ \lim_{y \rightarrow -\infty} g_1(y, y') &= 0 \end{aligned} \quad (\text{C.1})$$

Utilizando o método convencional para determinar a função de Green [21], obtemos o seguinte resultado:

$$g_1(y, y') = \frac{1}{i\sqrt{\lambda} + \gamma_1} \begin{cases} e^{i\sqrt{\lambda}y'} \left[\cos \sqrt{\lambda}y - \frac{\gamma_1}{\sqrt{\lambda}} \text{sen} \sqrt{\lambda}y \right] & , y > y' \\ e^{i\sqrt{\lambda}y} \left[\cos \sqrt{\lambda}y' - \frac{\gamma_1}{\sqrt{\lambda}} \text{sen} \sqrt{\lambda}y' \right] & , y < y' \end{cases} \quad (\text{C.2})$$

onde $\text{Im}(\sqrt{\lambda}) < 0$.

A representação espectral da função $\delta(y - y')$ é obtida resolvendo a seguinte integral[21]:

$$\delta(y - y') = -\frac{1}{2\pi i} \lim_{R \rightarrow +\infty} \oint_{C_R} g_1(y, y', \lambda) d\lambda \quad (\text{C.3})$$

onde R é o raio do círculo do caminho de integração C_R mostrado na Fig. C.1 no plano complexo λ . Nesta figura mostraremos também as singularidades de (C.2), de tipo corte de ramo (eixo real positivo) e pólos simples em $\lambda_p = -\gamma_1^2$:

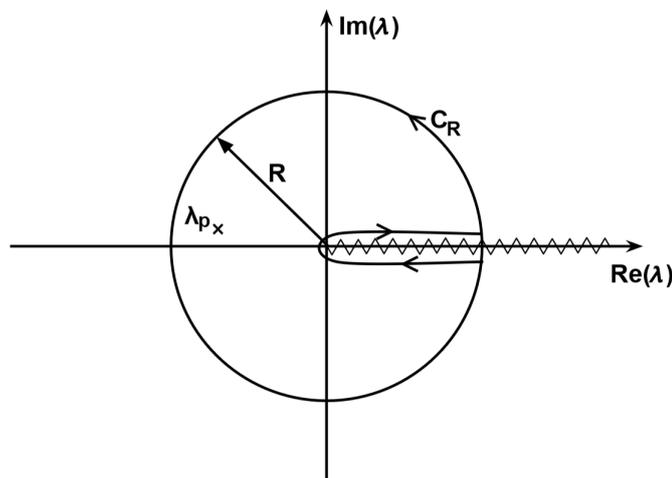


Figura C.1 – Contorno fechado no plano $\text{Re}(\lambda)$ e $\text{Im}(\lambda)$ utilizado para resolver (C.3)

O resultado da integral (C.3) é obtido aplicando os teoremas de Cauchy e resíduos [23]:

$$\delta(y-y') = -2\gamma_1 e^{-\gamma_1(y+y')} + \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \left[\cos k_y y - \frac{\gamma_1}{k_y} \text{sen } k_y y \right] \left[\cos k_y y' - \frac{\gamma_1}{k_y} \text{sen } k_y y' \right] \frac{k_y^2}{\gamma_1^2 + k_y^2} dk_y \quad (\text{C.4})$$

onde $k_y = |\lambda|^{1/2}$.

Finalmente, com esta representação da função $\delta(y - y')$, definimos a transformada de impedância no meio 1, para uma determinada função $u(y)$:

$$u(y) = \int_{-\infty}^0 \delta(y - y') u(y') dy' \quad (\text{C.5})$$

$$u(y) = -2\gamma_1 e^{-\gamma_1 y} U_0 + \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} U(k_y) \left[\cos k_y y - \frac{\gamma_1}{k_y} \text{sen } k_y y \right] \frac{k_y^2}{\gamma_1^2 + k_y^2} dk_y \quad (\text{C.6})$$

onde:

$$\begin{aligned} U_0 &= \int_{-\infty}^0 u(y) e^{-\gamma_1 y} dy \\ U(k_y) &= \int_{-\infty}^0 u(y) \left[\cos k_y y - \frac{\gamma_1}{k_y} \text{sen } k_y y \right] dy \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

Definimos U_0 como a transformada de impedância de ordem zero e $U(k_y)$ como a transformada de impedância de ordem k_y . Representamos estas transformadas simbolicamente por:

$$u(y) \stackrel{0}{\Rightarrow} U_0 \quad (\text{C.8})$$

$$u(y) \stackrel{k_y}{\Rightarrow} U(k_y) \quad (\text{C.9})$$

APÊNDICE D – Resolução dos Coeficientes $A(k_x, 0)$ e $B(k_x, 0)$

Inicialmente, para encontrar o coeficiente $A(k_x, 0)$ temos:

$$A(k_x, 0) = \frac{2\gamma_2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{k_y^2 dk_y}{(k_y^2 + \gamma_2^2) [(ik_{x2}^2) + k_x^2]} \quad (\text{D.1})$$

sendo $k_{x2} = \sqrt{k_2^2 - k_x^2}$, então:

$$A(k_x, 0) = \frac{2\gamma_2}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{k_y^2 dk_y}{(k_y^2 + \gamma_2^2) (k_y^2 - k_2^2 + k_x^2)} \quad (\text{D.2})$$

Para facilitar os cálculos, denomina-se $k_y = z$, $\gamma_2^2 = a^2$, $k_x^2 - k_2^2 = b^2$. A integral I em (D.2):

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{k_y^2 dk_y}{(k_y^2 + \gamma_2^2) (k_y^2 - k_2^2 + k_x^2)} \quad (\text{D.3})$$

torna-se:

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{z^2 dz}{(z^2 + a^2) (z^2 + b^2)} \quad (\text{D.4})$$

então,

$$I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{z^2 dz}{(z^2 + a^2) (z^2 + b^2)} \quad (\text{D.5})$$

A equação (D.5) resulta em:

$$f(z) = \frac{z^2}{(z^2 + a^2) (z^2 + b^2)} = f(z) = \frac{z^2}{(z + ia) (z - ia) (z + ib) (z - ib)} \quad (\text{D.6})$$

onde $a = \gamma_2$, $\text{Re}(\gamma_2) < 0 \rightarrow \text{Im}(ia) < 0$, $\text{Im}(-ia) > 0$.

Para b :

$$b = \sqrt{k_x^2 - k_2^2} \quad (\text{D.7})$$

$$b = i\sqrt{k_2^2 - k_x^2} \quad (\text{D.8})$$

$$ib = -\sqrt{k_2^2 - k_x^2} \quad (\text{D.9})$$

considerando:

$$\text{Im}(\sqrt{k_2^2 - k_x^2}) < 0 \quad (\text{D.10})$$

esta consideração implica em: $\text{Im}(ib) > 0$, $\text{Im}(-ib) < 0$.

Para solucionar (D.6), considera-se a integral I no contorno fechado de maneira tal que os polos $z = ib$ e $z = -ia$ estejam contidos dentro do contorno, como mostra a figura 13.

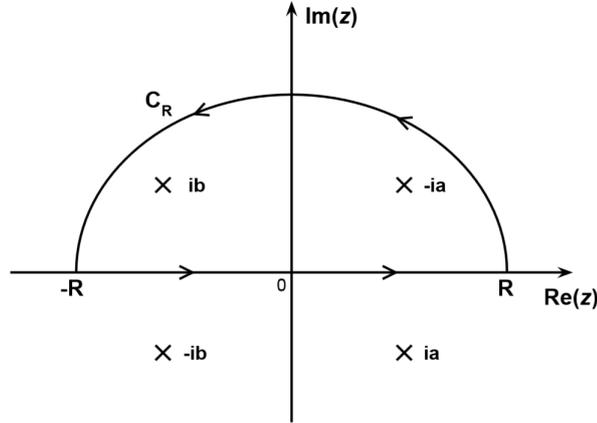


Figura D.1 – Contorno fechado sobre os polos $z = ib$ e $z = -ia$ no plano $\text{Re}(z)$ e $\text{Im}(z)$

A solução pode ser obtida pela teoria dos resíduos [23]:

$$\oint f(z)dz = \int_{C_R} f(z)dz + \int_{-R}^R f(z)dz = 2\pi i(k_1 + k_2) \quad (\text{D.11})$$

onde k_1 e k_2 são resíduos dos polos 1 e 2. Sendo o pólo 1 $z = ib$ e pólo 2 $z = -ia$.

Resolvendo k_1 :

$$k_1 = f(z)(z - ib)|_{z=ib} \quad (\text{D.12})$$

Então:

$$k_1 = \frac{z^2}{(z + ia)(z - ia)(z + ib)}|_{z=ib} = \frac{z^2}{(z^2 + a^2)(z + ib)}|_{z=ib} \quad (\text{D.13})$$

$$k_1 = \frac{-b^2}{(a^2 - b^2)2ib} = \frac{-b}{2i(a^2 - b^2)} \quad (\text{D.14})$$

Para k_2 :

$$k_2 = f(z)(z + ia) \quad (\text{D.15})$$

para $z = -ia$. Então:

$$k_2 = \frac{z^2}{(z - ia)(z^2 + b^2)}|_{z=-ia} = \frac{-a^2}{-2ia(-a^2 + b^2)} \quad (\text{D.16})$$

$$k_2 = \frac{-a}{2i(a^2 - b^2)} \quad (\text{D.17})$$

Pode-se mostrar que:

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{C_R} f(z)dz = 0 \quad (\text{D.18})$$

portanto, fazendo o limite $R \rightarrow +\infty$ com (D.11), obtemos:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(z)dz = 2\pi i \left(\frac{-b}{2i(a^2 - b^2)} - \frac{a}{2i(a^2 - b^2)} \right) \quad (D.19)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(z)dz = \pi \frac{(-b - a)}{(a^2 - b^2)} = \pi \frac{-(b + a)}{(a + b)(a - b)} = \frac{\pi}{b - a} \quad (D.20)$$

Finalmente, a solução para a integral I é obtida como:

$$I = \frac{\pi}{2(b - a)} \quad (D.21)$$

Substituindo (D.21) em (D.2) temos a solução para o coeficiente A como:

$$A(k_x, 0) = \frac{2\gamma_2}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2(b - a)} = \frac{\gamma_2}{\sqrt{k_x^2 - k_2^2} - \gamma_2} \quad (D.22)$$

De maneira análoga, utilizando o mesmo procedimento para o coeficiente B temos o resultado:

$$B(k_x, 0) = \frac{\gamma_1}{\sqrt{k_x^2 - k_1^2} - \gamma_1} \quad (D.23)$$

e:

$$\text{Im} \left(\sqrt{k_1^2 - k_x^2} \right) < 0 \quad (D.24)$$

APÊNDICE E – Resolução de (4.65)

Para resolver:

$$t = \left[1 - \left[\frac{-2\gamma_1^2}{-k_1^2 - \gamma_1^2 + k_x^2} + \frac{\gamma_1}{\sqrt{k_x^2 - k_1^2 - \gamma_1}} \right] \left[\frac{-2\gamma_2^2}{-k_2^2 - \gamma_2^2 + k_x^2} + \frac{\gamma_2}{\sqrt{k_x^2 - k_2^2 - \gamma_2}} \right] \right] \quad (\text{E.1})$$

será feita uma separação de variáveis denominado-os de t_1 e t_2 respectivamente:

$$t_1 = \left[\frac{-2\gamma_1^2}{(-k_1^2 - \gamma_1^2 + k_x^2) + \sqrt{k_x^2 - k_1^2 - \gamma_1}} \right] \quad (\text{E.2})$$

$$t_2 = \left[\frac{-2\gamma_2^2}{-k_2^2 - \gamma_2^2 + k_x^2} + \frac{\gamma_2}{\sqrt{k_x^2 - k_2^2 - \gamma_2}} \right] \quad (\text{E.3})$$

Inicialmente resolveremos t_1 , portanto:

$$t_1 = \frac{-2\gamma_1^2}{\sqrt{(k_x^2 - k_1^2)^2 - \gamma_1^2}} + \frac{\gamma_1}{\sqrt{k_x^2 - k_1^2 - \gamma_1}} \quad (\text{E.4})$$

resolvendo (E.4):

$$t_1 = \frac{-2\gamma_1^2}{\left(\sqrt{k_x^2 - k_1^2 - \gamma_1}\right) \left(\sqrt{k_x^2 - k_1^2 + \gamma_1}\right)} + \frac{\gamma_1}{\sqrt{k_x^2 - k_1^2 - \gamma_1}} \quad (\text{E.5})$$

$$t_1 = \frac{1}{\sqrt{k_x^2 - k_1^2 - \gamma_1}} \left[\frac{-2\gamma_1^2}{\sqrt{k_x^2 - k_1^2 + \gamma_1}} + \gamma_1 \right] \quad (\text{E.6})$$

então:

$$t_1 = \frac{-2\gamma_1^2 + \gamma_1 \sqrt{k_x^2 - k_1^2 + \gamma_1}}{\sqrt{(k_x^2 - k_1^2)^2 - \gamma_1^2}} \quad (\text{E.7})$$

$$t_1 = \frac{\gamma_1 \sqrt{k_x^2 - k_1^2 - \gamma_1}}{\sqrt{(k_x^2 - k_1^2)^2 - \gamma_1^2}} \quad (\text{E.8})$$

manipulando:

$$t_1 = \frac{\gamma_1 \left[\sqrt{k_x^2 - k_1^2 - \gamma_1} \right]}{\left(\sqrt{k_x^2 - k_1^2 - \gamma_1}\right) \left(\sqrt{k_x^2 - k_1^2 + \gamma_1}\right)} \quad (\text{E.9})$$

finalmente:

$$t_1 = \frac{\gamma_1}{\sqrt{k_x^2 - k_1^2 + \gamma_1}} \quad (\text{E.10})$$

Para a solução de t_2 temos:

$$t_2 = \frac{-2\gamma_2^2}{\sqrt{(k_x^2 - k_2^2)^2 - \gamma_2^2}} + \frac{\gamma_2}{\sqrt{k_x^2 - k_2^2 - \gamma_2^2}} \quad (\text{E.11})$$

resolvendo (E.11):

$$t_2 = \frac{-2\gamma_2^2}{\left(\sqrt{k_x^2 - k_2^2 - \gamma_2}\right)\left(\sqrt{k_x^2 - k_2^2 + \gamma_2}\right)} + \frac{\gamma_2}{\sqrt{k_x^2 - k_2^2 - \gamma_2}} \quad (\text{E.12})$$

$$t_2 = \frac{1}{\sqrt{k_x^2 - k_2^2 - \gamma_2}} \left[\frac{-2\gamma_2^2}{\sqrt{k_x^2 - k_2^2 + \gamma_2}} + \gamma_2 \right] \quad (\text{E.13})$$

$$t_2 = \frac{1}{\sqrt{k_x^2 - k_2^2 - \gamma_2}} \left[\frac{-2\gamma_2^2 + \gamma_2\sqrt{k_x^2 - k_2^2 + \gamma_2^2}}{\sqrt{k_x^2 - k_2^2 + \gamma_2}} \right] \quad (\text{E.14})$$

manipulando:

$$t_2 = \frac{\gamma_2 \left[\sqrt{k_x^2 - k_2^2 - \gamma_2} \right]}{\left(\sqrt{k_x^2 - k_2^2 - \gamma_2}\right)\left(\sqrt{k_x^2 - k_2^2 + \gamma_2}\right)} \quad (\text{E.15})$$

finalmente:

$$t_2 = \frac{\gamma_2}{\sqrt{k_x^2 - k_2^2 + \gamma_2}} \quad (\text{E.16})$$

Substituindo (E.10) e (E.16) em (E.1), obtemos o resultado do coeficiente t :

$$t = \left[1 - \left(\frac{\gamma_1}{\sqrt{k_x^2 - k_1^2 + \gamma_1}} \right) \left(\frac{\gamma_2}{\sqrt{k_x^2 - k_2^2 + \gamma_2}} \right) \right] \quad (\text{E.17})$$

APÊNDICE F – Resolução da Equação Característica para Meios Iguais

Para encontrar as raízes utilizando o termo provindo do método 1 temos:

$$ik_{y_1} = i\sqrt{k_1^2 - k_x^2} = \sqrt{k_x^2 - k_1^2} = p_1 \quad (\text{F.1})$$

e:

$$ik_{y_2} = i\sqrt{k_2^2 - k_x^2} = \sqrt{k_x^2 - k_2^2} = p_2 \quad (\text{F.2})$$

então, (4.86) torna-se:

$$(p_1\gamma_2 + p_2\gamma_1) + p_1p_2 = 0 \quad (\text{F.3})$$

Dividindo (F.3) por γ_1 temos:

$$p_1\frac{\gamma_2}{\gamma_1} + p_2 + \frac{p_1p_2}{\gamma_1} = 0 \quad (\text{F.4})$$

$$p_1N^2 + p_2 + \frac{p_1p_2}{\frac{i\omega\epsilon_1}{\sigma}} = 0 \quad (\text{F.5})$$

$$N^2p_1 + p_2 + \frac{\sigma p_1p_2}{i\omega\epsilon_1} = 0 \quad (\text{F.6})$$

onde $N = \frac{\sqrt{\epsilon_2}}{\sqrt{\epsilon_1}}$

Para meios iguais, $p_1 = p_2$ e $N = 1$. Logo, temos:

$$N^2p_1 + p_1 = \frac{-\sigma p_1^2}{i\omega\epsilon_1} \quad (\text{F.7})$$

$$p_1 = \left(\frac{-i\omega\epsilon_1}{\sigma}\right)^2 \quad (\text{F.8})$$

então:

$$\sqrt{k_x^2 - k_1^2} = \left(\frac{-i\omega\epsilon_1}{\sigma}\right)^2 \quad (\text{F.9})$$

$$k_x^2 - k_1^2 = \left(\frac{2i\omega\epsilon_1}{\sigma}\right)^2 \quad (\text{F.10})$$

assim:

$$k_x^2 = \sqrt{k_1^2 + \left(\frac{2i\omega\epsilon_1}{\sigma}\right)^2} \quad (\text{F.11})$$

substituindo $k_1^2 = \omega^2\mu_0\epsilon_1$:

$$k_x = k_1\sqrt{1 + \left(\frac{2i\omega\epsilon_1}{\sigma\omega\sqrt{\mu_0\epsilon_1}}\right)^2} \quad (\text{F.12})$$

por fim:

$$k_x = k_1 \sqrt{1 - \left(\frac{2}{\sigma\eta_1}\right)^2} \quad (\text{F.13})$$

Para o método 2, partimos da equação (4.85):

$$(p_1 + \gamma_1)(p_2 + \gamma_2) - \gamma_1\gamma_2 = 0 \quad (\text{F.14})$$

$$p_1p_2 + p_1\gamma_2 + p_2\gamma_1 + \gamma_1\gamma_2 - \gamma_1\gamma_2 = 0 \quad (\text{F.15})$$

$$p_1\gamma_2 + p_2\gamma_1 + p_1p_2 = 0 \quad (\text{F.16})$$

a qual é a mesma equação do método 1 (F.3) Quando $p_1 = p_2$ o procedimento é o mesmo utilizado para o método 1, e encontra-se o mesmo resultado:

$$k_x = k_1 \sqrt{1 - \left(\frac{2}{\sigma\eta_1}\right)^2} \quad (\text{F.17})$$

mostrando assim que os resultados para o método 1 e 2 são equivalentes, sendo ainda ambas equações características as mesmas obtidas em [14] para meios iguais.

APÊNDICE G – Resolução da Equação Característica para Meios Diferentes e Código em Matlab

Prosseguindo a resolução da equação característica (F.17), quando $p_1 \neq p_2$ temos:

$$\gamma_2 \sqrt{k_x^2 - k_1^2} + \gamma_1 \sqrt{k_x^2 - k_2^2} + \sqrt{k_x^2 - k_1^2} \sqrt{k_x^2 - k_2^2} = 0 \quad (\text{G.1})$$

elevando ao quadrado (G.1):

$$\gamma_2^2 (k_x^2 - k_1^2) + 2\gamma_2\gamma_1 \sqrt{k_x^2 - k_1^2} \sqrt{k_x^2 - k_2^2} + \gamma_1^2 (k_x^2 - k_2^2) = (k_x^2 - k_1^2) (k_x^2 - k_2^2) \quad (\text{G.2})$$

Para resolver (G.2), adotamos $k_x^2 = y$ e elevamos ao quadrado novamente:

$$\left[\gamma_2^2 (y - k_1^2) - (y - k_1^2) (y - k_2^2) + \gamma_1^2 (y - k_2^2) \right]^2 = \left[-2\gamma_2\gamma_1 \sqrt{y - k_1^2} \sqrt{y - k_2^2} \right]^2 \quad (\text{G.3})$$

A equação (G.3) para fins de facilitar o cálculo será dividida em dois termos t_1 e t_2 :

$$t_1 = \left[\gamma_2^2 (y - k_1^2) - (y - k_1^2) (y - k_2^2) + \gamma_1^2 (y - k_2^2) \right]^2 \quad (\text{G.4})$$

$$t_2 = \left[-2\gamma_2\gamma_1 \sqrt{y - k_1^2} \sqrt{y - k_2^2} \right]^2 \quad (\text{G.5})$$

Os termos de t_1 por sua vez, serão separados em:

$$\begin{aligned} a &= \gamma_2^2 (y - k_1^2) \\ b &= (y - k_1^2) (y - k_2^2) \\ c &= \gamma_1^2 (y - k_2^2) \end{aligned} \quad (\text{G.6})$$

Desta forma, t_1 :

$$t_1 = [(a - b) + c]^2 = (a - b)^2 + 2(a - b)c + c^2 \quad (\text{G.7})$$

então:

$$t_1 = a^2 - 2ab + b^2 + 2ca - 2bc + c^2 \quad (\text{G.8})$$

onde $x_1 = a^2$, $x_2 = -2ab$, $x_3 = b^2$, $x_4 = 2ca$, $x_5 = -2bc$ e $x_6 = c^2$.

O próximo passo será resolver as equações x_1 a x_6 . Para x_1 temos:

$$x_1 = a^2 = \left[\gamma_2^2 (y - k_1^2) \right]^2 = \gamma_2^4 \left[y^2 - 2yk_1^2 + k_1^4 \right] \quad (\text{G.9})$$

$$x_1 = \gamma_2^4 y^2 - 2k_1^2 \gamma_2^4 y + \gamma_2^4 k_1^4 \quad (\text{G.10})$$

Resolvendo x_2 :

$$x_2 = -2ab = -2\gamma_2^2 (y - k_1^2)(y - k_1^2)(y - k_2^2) = -2\gamma_2^2 (y - k_1^2) [y - k_2^2 y - yk_1^2 + k_1 k_2] \quad (\text{G.11})$$

$$x_2 = -2\gamma_2^2 [y^3 - (k_2^2 + k_1^2)y^2 + k_1^2 k_2^2 y - k_1^2 y^2 + k_1^2 (k_1^2 + k_2^2)y - k_1^4 k_2^2] \quad (\text{G.12})$$

$$x_2 = -2\gamma_2^2 y^3 + 2\gamma_2^2 [2k_1^2 + k_2^2] y^2 - 2\gamma_2^2 [2k_1^2 k_2^2 + k_1^4] y + 2\gamma_2^2 k_1^4 k_2^2 \quad (\text{G.13})$$

Resolvendo x_3 :

$$x_3 = b^2 = (y - k_1^2)^2 (y - k_2^2) = [y^2 - 2k_1^2 y + k_1^4] [y^2 - 2k_2^2 y + k_2^4] \quad (\text{G.14})$$

$$x_3 = b^2 = y^4 - 2k_2^2 y^3 + k_2^4 y^2 - 2k_1^2 y^3 + 4k_1^2 k_2^2 y^2 - 2k_1^2 k_2^4 y + k_1^4 y^2 - 2k_1^4 k_2^2 y + k_1^4 k_2^4 \quad (\text{G.15})$$

$$x_3 = y^4 - 2(k_1^2 + k_2^2)y^3 + (k_2^2 + k_1^4 + 4k_1^2 k_2^2)y^2 - 2(k_1^2 k_2^4 + k_1^4 k_2^2)y + k_1^4 k_2^4 \quad (\text{G.16})$$

Resolvendo x_4 :

$$x_4 = 2ca = 2\gamma_1^2 (y - k_2^2)\gamma_2^2 (y - k_1^2) = 2\gamma_1^2 \gamma_2^2 [y^2 - k_1^2 y - k_2^2 + k_1^2 k_2^2] \quad (\text{G.17})$$

$$x_4 = 2\gamma_1^2 \gamma_2^2 y^2 - 2\gamma_1^2 \gamma_2^2 [k_1^2 + k_2^2] y + 2\gamma_1^2 \gamma_2^2 k_1^2 k_2^2 \quad (\text{G.18})$$

Resolvendo x_5

$$x_5 = -2bc = -2\gamma_1^2 (y - k_2^2)^2 (y - k_1^2) = -2\gamma_1^2 (y - k_1^2) [y^2 - 2k_2^2 y + k_2^4] \quad (\text{G.19})$$

$$x_5 = -2\gamma_1^2 [y^3 - 2k_2^2 y^2 + k_2^4 y - k_1^2 y^2 + 2k_1^2 k_2^2 y - k_1^2 k_2^4] \quad (\text{G.20})$$

$$x_5 = -2\gamma_1^2 y^3 + 2\gamma_1^2 [2k_2^2 + k_1^2] y^2 - 2\gamma_1^2 [k_2^4 + 2k_1^2 k_2^2] y + 2\gamma_1^2 k_1^2 k_2^4 \quad (\text{G.21})$$

Resolvendo x_6

$$x_6 = c^2 = \gamma_1^4 (y - k_2^2)^2 = \gamma_1^4 (y^2 - 2k_2^2 y + k_2^4) \quad (\text{G.22})$$

$$x_6 = \gamma_1^4 y^2 - 2\gamma_1^4 k_2^2 y + \gamma_1^4 k_2^4 \quad (\text{G.23})$$

O próximo passo é resolver o termo t_2 :

$$t_2 = 4\gamma_1^2\gamma_2^2(y - k_1^2)(y - k_2^2) = 4\gamma_1^2\gamma_2^2 \left[y^2 - k_2^2y - k_1^2y + k_1^2k_2^2 \right] \quad (\text{G.24})$$

$$t_2 = 4\gamma_1^2\gamma_2^2 - 4\gamma_1^2\gamma_2^2[k_1^2 + k_2^2]y + 4\gamma_1^2\gamma_2^2k_1^2k_2^2 \quad (\text{G.25})$$

A equação (G.8) torna-se então:

$$t_1 - t_2 = c_4y^4 + c_3y^3 + c_2y^2 + c_1y + c_0 = 0 \quad (\text{G.26})$$

onde $k_x = \pm\sqrt{y}$.

Resta agora determinar os coeficientes c_1 , c_2 , c_3 , c_4 e c_0 . Temos então que:

$$c_4 = 1 \quad (\text{G.27})$$

Para c_3 :

$$c_3 = \left[-2\gamma_2^2 - 2(k_1^2 + k_2^2) - 2\gamma_1^2 \right] \quad (\text{G.28})$$

Para c_2 :

$$c_2 = \left[\gamma_2^4 + 2\gamma_2^2(2k_1^2 + k_2^2) + (k_2^4 + k_1^4 + 4k_1^2k_2^2) + 2\gamma_1^2\gamma_2^2 + 2\gamma_1^2(2k_2^2 + k_1^2) + \gamma_1^4 - 4\gamma_1^2\gamma_2^2 \right] \quad (\text{G.29})$$

$$c_2 = \left[\gamma_2^4 + \gamma_1^4 - 2\gamma_1^2\gamma_2^2 + 2\gamma_2^2(2k_1^2k_2^2) + 2\gamma_1^2(2k_2^2 + k_1^2) + k_2^4 + k_1^4 + 4k_1^2k_2^2 \right] \quad (\text{G.30})$$

Para c_1

$$c_1 = -2k_1^2\gamma_2^4 - 2\gamma_2^2(2k_1^2k_2^2 + k_1^4) - 2(k_1^2k_2^4 + k_1^4k_2^2) - 2\gamma_1^2\gamma_2^2(k_1^2 + k_2^2) - 2\gamma_1^2(k_2^4 + 2k_1^2k_2^2) - 2\gamma_1^4k_2^2 + 4\gamma_1^2\gamma_2^2(k_1^2 + k_2^2) \quad (\text{G.31})$$

$$c_1 = -2k_1^2\gamma_2^4 - 2k_2^2\gamma_1^4 - 2\gamma_2^2(2k_1^2k_2^2 + k_1^4) - 2\gamma_1^2(2k_1^2k_2^2 + k_2^4) + 2\gamma_1^2\gamma_2^2(k_1^2 + k_2^2) - 2k_1^2k_2^4 - 2k_1^4k_2^2 \quad (\text{G.32})$$

E para c_0 :

$$c_0 = \left[\gamma_2^4k_1^4 + 2\gamma_2^2k_1^4k_2^2 + k_1^4k_2^4 + 2\gamma_1^2\gamma_2^2k_1^2k_2^2 + 2\gamma_1^2k_1^2k_2^4 + \gamma_1^4k_2^4 - 4\gamma_1^2\gamma_2^2k_1^2k_2^2 \right] \quad (\text{G.33})$$

$$c_0 = \left[k_1^4\gamma_2^4 + k_2^4\gamma_1^4 - 2\gamma_1^2\gamma_2^2k_1^2k_2^2 + 2\gamma_2^2k_1^4k_2^2 + 2\gamma_1^2k_1^2k_2^4 + k_1^4k_2^4 \right] \quad (\text{G.34})$$

As raízes de (G.26) serão $y_1, y_2, y_3, y_4 \rightarrow \pm(k_x^1, k_x^2, k_x^3, k_x^4)$ e devem satisfazer as condições:

$$\text{Im}(\sqrt{k_1^2 - k_x^2}) < 0 \quad (\text{G.35})$$

$$\text{Im}(\sqrt{k_2^2 - k_x^2}) < 0 \quad (\text{G.36})$$

onde $k_1 = \omega\sqrt{\mu_0\epsilon_1}$, $k_2 = \omega\sqrt{\mu_0\epsilon_2}$, $\gamma_1 = \frac{i\omega\epsilon_1}{\sigma}$ e $\gamma_2 = \frac{i\omega\epsilon_2}{\sigma}$ e $\sigma = \sigma_{intra} + \sigma_{inter}$, dados em (2.1) e (2.2) respectivamente.

Para encontrar as raízes que satisfazem as condições apresentadas acima e, assim, encontrar os campos magnéticos superficiais no grafeno, foi desenvolvido o seguinte código em Matlab [15]. Este código também plota as distribuições dos campos H_{z_1} e H_{z_2} do modo plasmônico no plano xy .

```

1 clc
2 clear
3
4 % ##### DEFINICAO DOS PARAMETROS #####
5 er1=(1-j*1e-15); %Permissividade relativa do meio 1
6 er2=(1-j*1e-15); %Permissividade relativa do meio 2
7 jay=sqrt(-1); %Unidade imaginaria
8 cc=2.997925e8; %Velocidade da luz
9 e0=8.854223e-12; %Permissividade absoluta do vacuo
10 u0=1.256640e-6; %Permeabilidade absoluta do vacuo
11 eta=sqrt(u0/e0); %Impedancia do vacuo
12 f_inicial=1e9;%0.01e11;%0.2e12; %Frequencia inicial de analise
13 f_final=1e14;%80.0e12; %Frequencia final de analise
14 Nq=6000; %Numero de pontos em frequencia
15
16 ##### IMPEDANCIA SUPERFICIAL #####
17 f=linspace(f_inicial,f_final,Nq);
18 %Constantes
19 hp=(6.626e-34)/(2*pi); %Constante de plank - reduzida (J/s)
20 qe=1.6e-19; %Carga do el̃tron (C)
21 kB=1.38e-23; %Constante de Boltzmann (J/K)
22 T=300; %Temperatura (K)
23 muc=0.5+eps;%0.25;%0.13; %Potencial quimico (eV) do braco
esquerdo do dipolo
24 muc=muc*1.60217646e-19; %Potencial quimico (J)
25 tau=0.5e-12; %Tempo de relaxacao (s)
26 %Modelo 1 (Intra)
27 sigma=(2.*(qe.^2).*kB.*T./(pi.*(hp.^2)).*log(2.*cosh(muc./(2.*kB.*T))).*-jay./
(2.*pi.*f-jay./tau);
28 %Modelo 2 (Intra - Hanson)
29 sigma=(-1.*jay.*(qe.^2).*kB.*T./(pi.*(hp.^2)*(2.*pi.*f-jay./tau)))*((muc./(kB.*
*T))+2.*log((exp(-1.*muc./(kB.*T))+1))+eps);
30 %Modelo 3 (Intra e Inter Hanson)
31 sigma_intra=(-1.*jay.*(qe.^2).*kB.*T./(pi.*(hp.^2)*(2.*pi.*f-jay./tau))*((muc./
kB.*T))+2.*log((exp(-1.*muc./(kB.*T))+1))+eps);
32 sigma_inter=(-1.*jay.*(qe.^2)./(4.*pi.*hp))*log((2.*muc-(2.*pi.*f-jay./tau).*hp)./
(2.*muc+(2.*pi.*f-jay./tau).*hp));
33 sigma=sigma_intra+sigma_inter+eps;
34 %semilogx(f,real(sigma),f,(-1.*imag(sigma))),xlabel('Frequencia, f (Hz)'),ylabel
('Condutividade Superficial do Grafeno, \sigma (S)')
35
36 ##### CALCULO DO Kx_spp DA ONDA SUPERFICIAL NO GRAFENO #####
37 k1=2.*pi.*f.*sqrt(u0.*er1.*e0);
38 k2=2.*pi.*f.*sqrt(u0.*er2.*e0);
39 k0=2.*pi.*f.*sqrt(u0.*1.*e0);
40 Lamb0=2.*pi./k0;
41 gamal=jay.*2.*pi.*f.*er1.*e0./sigma;
42 gama2=jay.*2.*pi.*f.*er2.*e0./sigma;
43 c4=1; %Coeficiente 4 da equacao caracteristica
44
45 %Loop da frequencia para calculo de Kx_spp(q)
46 for q=1:Nq
47 q
48 %Calculo dos coeficientes da eq caracteristica
49 c3=-2.*(gama2(q).^2)-2.*(k1(q).^2+k2(q).^2)-2.*(gamal(q).^2);
50 c2=gama2(q).^4+gamal(q).^4-2.*(gamal(q).^2).*gama2(q).^2+2.*((gama2(q).^2)).
*(2.*k1(q).^2+k2(q).^2)+2.*((gamal(q).^2)).*(2.*k2(q).^2+k1(q).^2)+k2(q).^4+k1(q).^
^4+4.*(k1(q).^2).*k2(q).^2);
51 c1=-2.*(k1(q).^2).*gama2(q).^4-2.*(k2(q).^2).*gamal(q).^4-2.*(gama2(q).^
^2).*k1(q).^2+k2(q).^2)+k1(q).^4)-2.*(gamal(q).^2).*k1(q).^2).*k2(q).^

```

```

^2)+(k2(q).^4))+2.*(gama1(q).^2).*(gama2(q).^2).*((k1(q).^2)+(k2(q).^2))-2.*(k1(q).^
^2).*(k2(q).^4)-2.*(k2(q).^2).*(k1(q).^4);
52     c0=(k1(q).^4).*(gama2(q).^4)+(k2(q).^4).*(gama1(q).^4)-2.*(gama1(q).^2).*
(gama2(q).^2).*(k1(q).^2).*(k2(q).^2)+2.*(gama2(q).^2).*(k1(q).^4).*(k2(q).^2)+2.*
(gama1(q).^2).*(k2(q).^4).*(k1(q).^2)+(k1(q).^4).*(k2(q).^4);
53
54     y(:,q)=roots([c4 0 c3 0 c2 0 c1 0 c0]);
55     %y(:,q)=roots([(k0(q)^8)*c4 0 (k0(q)^6)*c3 0 (k0(q)^4)*c2 0 (k0(q)^2)*c1 0
c0]./(k0(q)^8));
56
57     C4(q)=c4;
58     C3(q)=c3;
59     C2(q)=c2;
60     C1(q)=c1;
61     C0(q)=c0;
62
63     if ((imag((y(1,q))))<0)&((real((y(1,q))))>0)%&(imag(sqrt(k1(q).^2-y(1,q).^2))
<0)%&(imag(sqrt(k2(q).^2-y(1,q).^2))<0)
64         %kx(q)=sqrt(y(1,q));
65         kx1(q)=(y(1,q));
66     else
67         kx1(q)=0;
68     end
69     if ((imag((y(2,q))))<0)&((real((y(2,q))))>0)%&(imag(sqrt(k1(q).^2-y(2,q).^2))
<0)%&
&(imag(sqrt(k2(q).^2-y(2,q).^2))<0)
70         %kx(q)=sqrt(y(3,q));
71         kx2(q)=(y(2,q));
72     else
73         kx2(q)=0;
74     end
75     if ((imag((y(3,q))))<0)&((real((y(3,q))))>0)%&(imag(sqrt(k1(q).^2-y(4,q).^2))
<0)%&
&(imag(sqrt(k2(q).^2-y(4,q).^2))<0)
76         %kx(q)=sqrt(y(4,q));
77         kx3(q)=(y(3,q));
78     else
79         kx3(q)=0;
80     end
81     if ((imag((y(4,q))))<0)&((real((y(4,q))))>0)%&(imag(sqrt(k1(q).^2-y(4,q).^2))
<0)%&
&(imag(sqrt(k2(q).^2-y(4,q).^2))<0)
82         %kx(q)=sqrt(y(4,q));
83         kx4(q)=(y(4,q));
84     else
85         kx4(q)=0;
86     end
87     if ((imag((y(5,q))))<0)&((real((y(5,q))))>0)%&(imag(sqrt(k1(q).^2-y(4,q).^2))
<0)%&
&(imag(sqrt(k2(q).^2-y(4,q).^2))<0)
88         %kx(q)=sqrt(y(4,q));
89         kx5(q)=(y(5,q));
90     else
91         kx5(q)=0;
92     end
93     if ((imag((y(6,q))))<0)&((real((y(6,q))))>0)%&(imag(sqrt(k1(q).^2-y(4,q).^2))
<0)%&
&(imag(sqrt(k2(q).^2-y(4,q).^2))<0)
94         %kx(q)=sqrt(y(4,q));
95         kx6(q)=(y(6,q));
96     else
97         kx6(q)=0;
98     end
99     if ((imag((y(7,q))))<0)&((real((y(7,q))))>0)%&(imag(sqrt(k1(q).^2-y(4,q).^2))
<0)%&
&(imag(sqrt(k2(q).^2-y(4,q).^2))<0)

```

```
100     %kx(q)=sqrt(y(4,q));
101     kx7(q)=(y(7,q));
102     else
103     kx7(q)=0;
104     end
105     if ((imag((y(8,q))))<0)&((real((y(8,q))))>0)%&(imag(sqrt(k1(q).^2-y(4,q)))<0)%&
&(imag(sqrt(k2(q).^2-y(4,q)))<0)
106     %kx(q)=sqrt(y(4,q));
107     kx8(q)=(y(8,q));
108     else
109     kx8(q)=0;
110     end
111
112     [x,I]=max([abs(imag(kx1(q))) abs(imag(kx2(q))) abs(imag(kx3(q))) abs(imag(kx4
(q))) abs(imag(kx5(q))) abs(imag(kx6(q))) abs(imag(kx7(q))) abs(imag(kx8(q)))]);
113     xx(q)=I;
114     kx(q)=(y(I,q));
115
116 end
117
118 ##### RESULTADOS #####
119
120 ##### Kx/k0 e Decaimento #####
121 %Plot do kx
122 figure(1),loglog(f,real((kx))./abs(k0),'b',f,abs(imag((kx))./abs(k0),'r')
123 hold on, loglog(f,abs(1./real(gama1))./Lamb0,'b')
124 hold on, loglog(f,abs(1./real(gama2))./Lamb0,'r'),axis([f_inicial*1e-1 100e13 1e-5
1e3]),xlabel('Frequencia, f (Hz)')
125
126 % figure(1),loglog(f,real(kx),'b',f,abs(imag(kx)),'r')
127 % hold on, loglog(f,abs(1./real(gama1))./Lamb0,'b')
128 % hold on, loglog(f,abs(1./real(gama2))./Lamb0,'r'),axis([f_inicial*1e-1 100e13
1e-5 1e3]),xlabel('Frequencia, f (Hz)')
129
130 %plot das raizes kxs / k0
131 figure(2)
132 subplot(4,2,1),loglog(f,abs(real((y(1,:))))./abs(k0),'b',f,abs(imag((y(1,:))))./
/abs(k0),'b'),hold on, loglog(f,abs(1./real(gama1))./Lamb0)
133 hold on, loglog(f,abs(1./real(gama2))./Lamb0),axis([1e8 1e15 1e-5 1e3]),title
('Raiz 1')
134 subplot(4,2,2),loglog(f,abs(real((y(2,:))))./abs(k0),'r',f,abs(imag((y(2,:))))./
/abs(k0),'r'),hold on, loglog(f,abs(1./real(gama1))./Lamb0)
135 hold on, loglog(f,abs(1./real(gama2))./Lamb0),axis([1e8 1e15 1e-5 1e3]),title
('Raiz 2')
136 subplot(4,2,3),loglog(f,abs(real((y(3,:))))./abs(k0),'b',f,abs(imag((y(3,:))))./
/abs(k0),'b'),hold on, loglog(f,abs(1./real(gama1))./Lamb0)
137 hold on, loglog(f,abs(1./real(gama2))./Lamb0),axis([1e8 1e15 1e-5 1e3]),title
('Raiz 3')
138 subplot(4,2,4),loglog(f,abs(real((y(4,:))))./abs(k0),'r',f,abs(imag((y(4,:))))./
/abs(k0),'r'),hold on, loglog(f,abs(1./real(gama1))./Lamb0)
139 hold on, loglog(f,abs(1./real(gama2))./Lamb0),axis([1e8 1e15 1e-5 1e3]),title
('Raiz 4')
140 subplot(4,2,5),loglog(f,abs(real((y(5,:))))./abs(k0),'b',f,abs(imag((y(5,:))))./
/abs(k0),'b'),hold on, loglog(f,abs(1./real(gama1))./Lamb0)
141 hold on, loglog(f,abs(1./real(gama2))./Lamb0),axis([1e8 1e15 1e-5 1e3]),title
('Raiz 5')
142 subplot(4,2,6),loglog(f,abs(real((y(6,:))))./abs(k0),'r',f,abs(imag((y(6,:))))./
/abs(k0),'r'),hold on, loglog(f,abs(1./real(gama1))./Lamb0)
143 hold on, loglog(f,abs(1./real(gama2))./Lamb0),axis([1e8 1e15 1e-5 1e3]),title
('Raiz 6')
```

```

144 subplot(4,2,7),loglog(f,abs(real((y(7,:)))/abs(k0),'b',f,abs(imag((y(7,:)))/
/abs(k0),'b')),hold on, loglog(f,abs(1./real(gama1))/Lamb0)
145 hold on, loglog(f,abs(1./real(gama2))/Lamb0),axis([1e8 1e15 1e-5 1e3]),title
('Raiz 7')
146 subplot(4,2,8),loglog(f,abs(real((y(8,:)))/abs(k0),'r',f,abs(imag((y(8,:)))/
/abs(k0),'r')),hold on, loglog(f,abs(1./real(gama1))/Lamb0)
147 hold on, loglog(f,abs(1./real(gama2))/Lamb0),axis([1e8 1e15 1e-5 1e3]),title
('Raiz 8')
148
149 ##### Campo Hz(x,y) #####
150 Hzc=1; %Amplitude do campo magnetico
151 Fr=61; %Indice da frequencia do grafico
152 dy1=1/abs(real(gama1(Fr))); %Comprimento de decaimento em y no meio 1 em Fr
153 dy2=1/abs(real(gama2(Fr))); %Comprimento de decaimento em y no meio 2 em Fr
154 dx=1/abs(imag(kx(Fr))); %Comprimento de decaimento em x em Fr
155 delta_y=4*max([dy1 dy2]); %Largura em y do grafico
156 Lamb_sp=2*pi/real(kx(Fr)); %Comprimento de onda da da onda superficial em Fr
157 delta_x=5*dx; %Largura em x do grafico
158 Ny=500; %Numero de pontos em y (PAR)
159 Nx=500; %Numero de pontos em x (IMPAR)
160 chi=0.5*delta_x; %posicao da fonte em x
161 yii=linspace(-0.5*delta_y,0.5*delta_y,Ny); %As colunas sao o eixo y
162 xii=linspace(0,delta_x,Nx); %As linhas sao o eixo x
163 for i=1:Nx
164     for j=1:Ny
165         if yii(j)<0
166             Hz(i,j)=-1.*Hzc.*exp(-1.*gama1(Fr).*yii(j)).*exp(-1.*jay.*kx(Fr).*abs
(xii(i)-chi));
167         end
168         if yii(j)>0
169             Hz(i,j)=Hzc.*exp(gama2(Fr).*yii(j)).*exp(-1.*jay.*kx(Fr).*abs(xii(i)-
chi));
170         end
171     end
172 end
173
174 figure(3)
175 [myy,mxx]=meshgrid(yii,xii);
176 subplot(2,2,1),surf(1e6.*myy,1e6.*mxx,real(Hz));
177 colormap hot
178 colorbar
179 %alpha 0.5
180 shading flat
181 %view(90,0)
182 xlabel('y (\mum)'),ylabel('x (\mum)'),zlabel('Re[H_z(x,y)] (A/m)')
183 axis([-0.5*delta_y.*1e6 0.5*delta_y.*1e6 0 1e6.*delta_x -1.2*max(max(abs(Hz)))
1.2*max(max(abs(Hz)))])
184
185 subplot(2,2,2),surf(1e6.*myy,1e6.*mxx,real(Hz));
186 colormap hot
187 colorbar
188 %alpha 0.5
189 shading flat
190 view(360,90)
191 xlabel('y (\mum)'),ylabel('x (\mum)'),zlabel('Re[H_z(x,y)] (A/m)')
192 axis([-0.5*delta_y.*1e6 0.5*delta_y.*1e6 0 1e6.*delta_x -1.2*max(max(abs(Hz)))
1.2*max(max(abs(Hz)))])
193
194 subplot(2,2,3),surf(1e6.*myy,1e6.*mxx,real(Hz));
195 colormap hot

```

```

196 colorbar
197 %alpha 0.5
198 shading flat
199 view(90,0)
200 xlabel('y (\mum)'),ylabel('x (\mum)'),zlabel('Re[H_z(x,y)] (A/m)')
201 axis([-0.5*delta_y.*1e6 0.5*delta_y.*1e6 0 1e6.*delta_x -1.2*max(max(abs(Hz))) ↵
1.2*max(max(abs(Hz)))])
202
203 subplot(2,2,4),surf(1e6.*myy,1e6.*mxx,real(Hz));
204 colormap hot
205 colorbar
206 %alpha 0.5
207 shading flat
208 view(360,0)
209 xlabel('y (\mum)'),ylabel('x (\mum)'),zlabel('Re[H_z(x,y)] (A/m)')
210 axis([-0.5*delta_y.*1e6 0.5*delta_y.*1e6 0 1e6.*delta_x -1.2*max(max(abs(Hz))) ↵
1.2*max(max(abs(Hz)))])
211
212 ##### Campo Hz(x,y) unidimensional #####
213
214
215 figure(4)
216 plot(1e6.*xii,(real(Hz(:,0.5*Ny))));
217 xlabel('x (\mum)'),ylabel('Re[H_z(x,y)] (A/m)')
218 axis([ 0 1e6.*delta_x 1.2*min((real(Hz(:,0.5*Ny)))) 1.2*max((real(Hz(:,0.5 ↵
*Ny))))])
219
220 figure(5)
221 plot(1e6.*yii,abs(real(Hz(0.5*Nx,:))));
222 xlabel('y (\mum)'),ylabel('|Re[H_z(x,y)]| (A/m)')
223 axis([-0.5*delta_y.*1e6 0.5*delta_y.*1e6 0 1.2*max(abs(real(Hz(:,0.5*Ny))))])
224
225
226
227 % ##### ANIMACAO Hz(x,y) #####
228
229 Numero_de_voltas=10;
230 Amostras_por_ciclo=30;
231 FASE=linspace(0,Numero_de_voltas*2*pi,Numero_de_voltas*Amostras_por_ciclo);
232
233 hd=figure(6)
234 for q=1:(Numero_de_voltas*Amostras_por_ciclo)
235     surf(1e6.*myy,1e6.*mxx,real(Hz(:,:,:).*exp(jay*FASE(q))));
236     colormap hot
237     %colorbar
238     %alpha 0.5
239     shading flat
240     %view(360,90)%view(360,90)%view(90,0)
241     xlabel('y (\mum)'),ylabel('x (\mum)'),zlabel('Re[H_z(x,y)] (A/m)')
242     axis([-0.5*delta_y.*1e6 0.5*delta_y.*1e6 0 1e6.*delta_x -1.2*max(max(abs ↵
(Hz))) 1.2*max(max(abs(Hz)))])
243
244     v_movie(q)=getframe(hd);
245 end
246
247

```