



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM GEOFÍSICA**

RODOLFO ANDRÉ CARDOSO NEVES

**APROXIMAÇÕES NÃO HIPERBÓLICAS DO TEMPO DE
TRÂNSITO UTILIZANDO APROXIMANTES DE PADÉ**

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

BELÉM-PARÁ

2017

RODOLFO ANDRÉ CARDOSO NEVES

**APROXIMAÇÕES NÃO HIPERBÓLICAS DO TEMPO DE
TRÂNSITO UTILIZANDO APROXIMANTES DE PADÉ**

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Geofísica do Instituto de Geociências da Universidade Federal do Pará, em cumprimento às exigências para obtenção do grau de Mestre em Geofísica.

Orientador: Prof. Dr. João Carlos Ribeiro Cruz

Belém-Pará

2017

Dados Internacionais de Catalogação de Publicação (CIP)
Biblioteca do Instituto de Geociências/SIBI/UFPA

Neves, Rodolfo André Cardoso, 1992 -
Aproximações não-hiperbólicas do tempo de trânsito
utilizando aproximantes de Padé / Rodolfo André Cardoso
Neves. – 2017.

149 f. : il. ; 30 cm

Inclui bibliografias

Orientador: João Carlos Ribeiro Cruz

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Pará,
Instituto de Geociências, Programa de Pós-Graduação em
Geofísica, Belém, 2017.

1. Prospecção sísmica. 2. Ondas sísmicas. 3. Método de
reflexão sísmica. I. Título.

CDD 22. ed. 622.1592

RODOLFO ANDRÉ CARDOSO NEVES

**APROXIMAÇÕES NÃO HIPERBÓLICAS DO TEMPO DE
TRÂNSITO UTILIZANDO APROXIMANTES DE PADÉ**

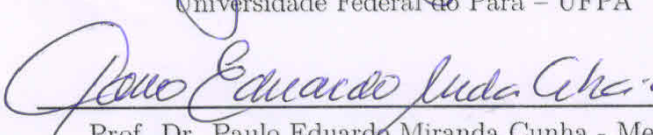
Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Geofísica do Instituto de Geociências da Universidade Federal do Pará, em cumprimento às exigências para obtenção do grau de Mestre em Geofísica.

Data de Aprovação: 03/07/2017


Banca Examinadora:



Prof. Dr. João Carlos Ribeiro Cruz - Orientador
Universidade Federal do Pará - UFPA



Prof. Dr. Paulo Eduardo Miranda Cunha - Membro
Petrobrás



Prof. Dr. Rubenvaldo Pereira - Membro
Universidade Federal do Pará - UFPA

Dedico este trabalho à minha família.

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Dr. João Carlos pela orientação desta dissertação, e pela proposta do tema. Além do suporte e paciência em responder as minhas dúvidas, e das sugestões inteligentes na solução de problemas que foram aparecendo no caminho.

Agradeço ao professor Sergey Fomel, que apesar de não conhecer pessoalmente, produziu trabalhos que inspiraram o tema, e disponibilizou gratuitamente vários dos programas aqui utilizados nesta dissertação.

Agradeço à minha mãe Regina de Nazaré, à minha irmã Rebeca Cristina, à minha sobrinha Ágatha, e ao meu pai Ricardo Neves, por todo apoio e dedicação durante a árdua caminhada para a realização deste sonho!

E agradeço à amizade de amigos que conquistei durante o curso de Geofísica, e que de forma direta ou indireta me ajudaram na realização do trabalho: Leonardo Reis, Hugo Souza, Diogo Rezende, Antônio Rizimar e Raphael Di Carlo.

“Todas as coisas excelentes são tão difíceis quanto raras”.
(Baruch Spinoza)

RESUMO

As aproximações de tempo de trânsito são ferramentas indispensáveis para as etapas de empilhamento e migração de dados sísmicos. Com o intuito de aumentar a acurácia das aproximações de tempo de trânsito, propomos a utilização dos aproximantes de Padé no desenvolvimento de novas aproximações para o configuração ponto médio comum e superfície de reflexão comum (SRC). As aproximações hiperbólicas, sobretempo normal e superfície de reflexão comum, são aproximações em série de Taylor de segunda ordem do tempo de trânsito de reflexão. Os aproximantes de Padé surgem como alternativa à série de Taylor, pois como característica principal possuem raio de convergência maior, melhorando a acurácia da aproximação. Estes aproximantes são produzidos através da própria série de Taylor da função aproximada. Essa nova aproximação é obtida através da aproximação de Padé $[2/2]$ da equação generalizada do sobretempo; e da aproximação de Padé $[2/2]$ das expansões em série de Taylor de quarta ordem para a superfície de reflexão comum. A acurácia das aproximações de Padé é superior as aproximações convencionais da literatura: sobretempo normal, hipérbole deslocada e aproximação para o modelo transversalmente isotrópico com eixo de simetria vertical (TIV). As aproximações de Padé para a configuração ponto médio comum dependem apenas de um parâmetro a mais do que a equação do sobretempo normal e mantém a acurácia para longos afastamentos. As aproximações não hiperbólicas para a configuração superfície de reflexão comum: SRC não hiperbólico, SRC quarta ordem e SRC Padé, possuem acurácia superior a aproximação SRC hiperbólico comumente utilizada pela indústria, e aumentam a região de convergência da aproximação no domínio do afastamento e da separação entre os pontos médios. A aproximação quadrática do SRC quarta ordem consegue ser superior inclusive a aproximação não hiperbólica do SRC, produzindo erros de aproximação consideravelmente menores na inversão dos parâmetros ótimos do SRC através do método dos mínimos quadrados.

Palavras-chave: Aproximantes de Padé. Aproximações não hiperbólicas do tempo de trânsito. Aproximações de Padé para a configuração ponto médio comum e configuração superfície de reflexão comum.

ABSTRACT

Traveltime approximation is a fundamental tool of the stack and migration steps in seismic data processing. To increase the accuracy of these approximations, we propose new traveltime approximations based on Padé approximants, to CMP and CRS gathers. Hyperbolic approximations such as normal moveout (NMO) and common reflection surface (CRS) are Taylor series approximations of second order of the reflection traveltime. Padé approximants appear as an alternative to Taylor series, because they converge quickly to the desired function, and they have a major radius of convergence improving approximations accuracy. They can be obtained through the proper Taylor series of the approximated function. This new approximation is obtained from the $[2/2]$ Padé approximation of the generalized moveout equation; and from $[2/2]$ Padé approximation of the Taylor series expansions of fourth order of the CRS surface. The accuracy of Padé approximation is superior when compared with other conventional approximations: normal moveout, shifted hyperbola and Transversal isotropic medium with vertical symmetry axis (VTI). CMP gather Padé approximations depend just only one more parameter than normal moveout approximation and they keep the accuracy for long offsets. CRS gather non hyperbolic approximations, non hyperbolic CRS, fourth order CRS and Padé CRS, have major accuracy than hyperbolic CRS, increasing the convergence of the approximation for offset and CMP domain. The quadratic approximation of fourth order CRS is superior than non hyperbolic CRS approximation, producing less error in least square CRS parameter inversion.

Keywords: Padé approximants. Non-hyperbolic traveltime approximation. Padé approximation CMP gather. Padé approximation CRS gather.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Representação esquemática da propagação de um raio de reflexão em um meio formado por uma pilha de camadas plano horizontais, cada uma com espessura variável d_k . A velocidade intervalar da k -ésima camada é v_k , o tempo de trânsito vertical na camada é t_k , x é o afastamento, e o tempo de trânsito $t(x)$ é obtido pela série na Equação 2.2.	22
Figura 2 – Representação esquemática do modelo do refletor hiperbólico, utilizado para derivar a equação generalizada do sobretempo (Equação 2.36). Esta equação descreve o sobretempo de reflexão dados os parâmetros da geometria do modelo e as posições de fonte e receptor.	25
Figura 3 – Representação esquemática do modelo do refletor circular em um meio de velocidade constante v . m é a posição do ponto médio do par fonte s e receptor r , L é o comprimento do raio normal, β é ângulo de emergência do raio normal na superfície e R é o raio do refletor circular.	38
Figura 4 – Amplitude do Erro relativo absoluto (%) das aproximações (da esquerda para direita e de cima para baixo): sobretempo normal (Equação 2.47), hipérbole deslocada (Equação 2.20), aproximação modelo TIV (Equação 2.48), aproximação generalizada (Equação 2.37) e aproximações de Padé [2/2] desenvolvidas no Capítulo 3 (Equações 3.11 e 3.13), para o modelo variação linear de velocidade.	49
Figura 5 – Amplitude do Erro relativo absoluto (%) das aproximações (da esquerda para direita e de cima para baixo): sobretempo normal (Equação 2.47), hipérbole deslocada (Equação 2.20), modelo TIV (Equação 2.48), aproximação generalizada (Equação 2.37) e aproximações de Padé [2/2] desenvolvidas no Capítulo 3 (Equações 3.14 e 3.16), para o modelo variação linear do quadrado da vagarosidade.	51
Figura 6 – Distribuição do parâmetro de anisotropia η (anelipticidade) no Modelo Marmousi anisotrópico. O parâmetro η é uma quantidade adimensional que varia comumente no intervalo de 0 a 0.27.	52
Figura 7 – Distribuição da velocidade horizontal (Km/s) no Modelo Marmousi anisotrópico. A velocidade horizontal varia de 1.5 Km/s a 6 Km/s. . .	52
Figura 8 – Distribuição da velocidade vertical (Km/s) no Modelo Marmousi anisotrópico. A velocidade vertical varia de 1.5 Km/s a 6 Km/s.	53
Figura 9 – Distribuição da velocidade vertical (Km/s) no modelo TIV 1D. O tempo de trânsito exato $\psi(x)$ é obtido através do traçamento de raios.	53

Figura 10 – Curvas de tempo de trânsito de reflexão das aproximações (da esquerda para direita e de cima para baixo): sobretempo normal (Equação 2.47), hipérbole deslocada (Equação 2.20), modelo TIV (Equação 2.48), aproximação generalizada (Equação 2.37) e aproximações de Padé [2/2] desenvolvidas no Capítulo 3 (Equações 3.17 e 3.18 para o modelo TIV 1D da Figura 9. Os pontos representam o tempo de trânsito exato $\psi(x)$ produzido através do traçamento de raios, as linhas contínuas as curvas de tempo de trânsito da aproximadas.	54
Figura 11 – Representação esquemática do experimento analítico para a produção da superfície SRC $\Psi(\alpha, \theta)$ para o refletor circular descrito na Seção 2.9. As letras (a), (b) e (c) representam os três experimentos realizados, cada um com uma posição do ponto médio central m_0 , escolhida para o calculo dos parâmetros t_0 , R_N , R_{NIP} e β através da Equações 2.101-2.104, que serão utilizados nas aproximações da SRC. Variando os ângulos α e θ ; obtemos m , h e Ψ através das Equações paramétricas 2.98-2.100. . . .	67
Figura 12 – Amplitude do Erro relativo absoluto (%) das aproximações (de cima para baixo): SRC hiperbólico de (Equação 2.80) e SRC não hiperbólico de (Equação 2.85), para o refletor circular descrito na Seção 2.9, o ponto médio central m_0 é localizado na origem.	69
Figura 13 – Amplitude do Erro relativo absoluto (%) das aproximações (de cima para baixo): SRC hiperbólico de (Equação 2.80) e SRC não hiperbólico de (Equação 2.85), para o refletor circular, descrito na Seção 2.9, o ponto médio central m_0 é localizado em $500m$	70
Figura 14 – Amplitude do Erro relativo absoluto (%) das aproximações (de cima para baixo): SRC hiperbólico de (Equação 2.80) e SRC não hiperbólico de (Equação 2.85), para o refletor circular, descrito na Seção 2.9, o ponto médio central m_0 é localizado em $1000m$	71
Figura 15 – Amplitude do Erro relativo absoluto (%) da aproximação SRC quarta ordem para a série $t(h, d)$. O erro relativo absoluto é produzido a partir da Equação 6.1: A aproximação $t_{approx}(h, d)$ utilizada é a Equação 5.13 e a Equação de referência $\Psi(h, d)$ é a expressão analítica do tempo de trânsito para o modelo do refletor circular 2.65, o ponto médio central m_0 é localizado na origem.	72
Figura 16 – Amplitude do Erro relativo absoluto (%) das aproximações (de cima para baixo): aproximação de Padé da SRC para $t(h, d)$, expansão em h desenvolvida na Seção 5.1 e aproximação de Padé da SRC para $t(h, d)$, expansão em d desenvolvida na Seção 5.4, para o refletor circular. O ponto médio central m_0 é localizado na origem.	73

Figura 17 – Amplitude do Erro relativo absoluto (%) da aproximação SRC quarta ordem para a série $t(h, d)$. O erro relativo absoluto é produzido a partir da Equação 6.1: A aproximação $t_{aprox}(h, d)$ utilizada é a Equação 5.13 e a Equação de referência $\Psi(h, d)$ é a expressão analítica do tempo de trânsito para o modelo do refletor circular 2.65, o ponto médio central m_0 é localizado em $500m$	74
Figura 18 – Amplitude do Erro relativo absoluto (%) das aproximações (de cima para baixo): aproximação de Padé da SRC para $t(h, d)$, expansão em h desenvolvida na Seção 5.1 e aproximação de Padé da SRC para $t(h, d)$, expansão em d desenvolvida na Seção 5.4, para o refletor circular. O ponto médio central m_0 é localizado em $500m$	75
Figura 19 – Amplitude do Erro relativo absoluto (%) da aproximação SRC quarta ordem para a série $t(h, d)$. O erro relativo absoluto é produzido a partir da Equação 6.1: A aproximação $t_{aprox}(h, d)$ utilizada é a Equação 5.13 e a Equação de referência $\Psi(h, d)$ é a expressão analítica do tempo de trânsito para o modelo do refletor circular 2.65, o ponto médio central m_0 é localizado em $1000m$	76
Figura 20 – Amplitude do Erro relativo absoluto (%) das aproximações (de cima para baixo): aproximação de Padé da SRC para $t(h, d)$, expansão em h desenvolvida na Seção 5.1 e aproximação de Padé da SRC para $t(h, d)$, expansão em d desenvolvida na Seção 5.4, para o refletor circular. O ponto médio central m_0 é localizado em $1000m$	77
Figura 21 – Amplitude do Erro relativo absoluto (%) da aproximação 5.23 do SRC quarta ordem para a série $t^2(h, d)$. O erro relativo absoluto é produzido a partir da Equação 6.1: A aproximação $t_{ap}(h, d)$ utilizada é a Equação 5.23 e a Equação de referência $\Psi(h, d)$ é a expressão analítica do tempo de trânsito para o modelo do refletor circular 2.65. O ponto médio central m_0 é localizado na origem.	78
Figura 22 – Amplitude do Erro relativo absoluto (%) das aproximações (de cima para baixo): aproximação de Padé da SRC para $t^2(h, d)$, expansão em h desenvolvida na Seção 5.2 e aproximação de Padé da SRC para $t^2(h, d)$, expansão em d desenvolvida na Seção 5.5, para o refletor circular. O ponto médio central m_0 é localizado está localizado na origem.	79
Figura 23 – Amplitude do Erro relativo absoluto (%) da aproximação SRC quarta ordem para a série $t^2(h, d)$, para o refletor circular. O erro relativo absoluto é produzido a partir da Equação 6.1: A aproximação $t_{aprox}(h, d)$ utilizada é a Equação 5.23 e a Equação de referência $\Psi(h, d)$ é a expressão analítica do tempo de trânsito para o modelo do refletor circular 2.65. O ponto médio central m_0 é localizado em $500m$	80

Figura 24 – Amplitude do Erro relativo absoluto (%) das aproximações (de cima para baixo): aproximação de Padé da SRC para $t(h, d)$, expansão em h desenvolvida na Seção 5.2 e aproximação de Padé da SRC para $t(h, d)$, expansão em d desenvolvida na Seção 5.5, para o refletor circular. O ponto médio central m_0 é localizado em $500m$	81
Figura 25 – Amplitude do Erro relativo absoluto (%) das aproximações (de cima para baixo): aproximação de Padé da SRC para $t(h, d)$, expansão em h desenvolvida na Seção 5.2 e aproximação de Padé da SRC para $t(h, d)$, expansão em d desenvolvida na Seção 5.5, para o refletor circular. O ponto médio central m_0 é localizado em $1000m$	82
Figura 26 – Amplitude do Erro relativo absoluto (%) da aproximação SRC quarta ordem para a série $t^2(h, d)$, para o refletor circular. O erro relativo absoluto é produzido a partir da Equação 6.1: A aproximação $t_{approx}(h, d)$ utilizada é a Equação 5.23 e a Equação de referência $\Psi(h, d)$ é a expressão analítica do tempo de trânsito para o modelo do refletor circular 2.65. O ponto médio central m_0 é localizado em $1000m$	83
Figura 27 – Amplitude do Erro relativo absoluto (%) da aproximação SRC quarta ordem para a série $(t(d, h) - t_0 + \frac{2}{v_0} R_{NIP})^2$, para o refletor circular. O erro relativo absoluto é produzido a partir da Equação 6.1: A aproximação $t_{approx}(h, d)$ utilizada é a Equação 5.34 e a Equação de referência $\Psi(h, d)$ é a expressão analítica do tempo de trânsito para o modelo do refletor circular 2.65. O ponto médio central m_0 está localizado na origem.	84
Figura 28 – Amplitude do Erro relativo absoluto (%) das aproximações (de cima para baixo): aproximação de Padé da SRC para $(t(d, h) - t_0 + \frac{2}{v_0} R_{NIP})^2$, expansão em h desenvolvida na Seção 5.3 e aproximação de Padé da SRC para $(t(d, h) - t_0 + \frac{2}{v_0} R_{NIP})^2$, expansão em d desenvolvida na Seção 5.6, para o refletor circular. O ponto médio central m_0 está localizado na origem.	85
Figura 29 – Amplitude do Erro relativo absoluto (%) da aproximação SRC quarta ordem para a série $(t(d, h) - t_0 + \frac{2}{v_0} R_{NIP})^2$, para o refletor circular. O erro relativo absoluto é produzido a partir da Equação 6.1: A aproximação $t_{approx}(h, d)$ utilizada é a Equação 5.34 e a Equação de referência $\Psi(h, d)$ é a expressão analítica do tempo de trânsito para o modelo do refletor circular 2.65. O ponto médio central m_0 é localizado em $500m$	86
Figura 30 – Amplitude do Erro relativo absoluto (%) das aproximações (de cima para baixo): aproximação de Padé da SRC para $(t(d, h) - t_0 + \frac{2}{v_0} R_{NIP})^2$, expansão em h desenvolvida na Seção 5.3 e aproximação de Padé da SRC para $(t(d, h) - t_0 + \frac{2}{v_0} R_{NIP})^2$, expansão em d desenvolvida na Seção 5.6, para o refletor circular. O ponto médio central m_0 é localizado em $500m$	87

Figura 31 – Amplitude do Erro relativo absoluto (%) da aproximação SRC quarta ordem para a série $(t(d, h) - t_0 + \frac{2}{v_0} R_{NIP})^2$, para o refletor circular. O erro relativo absoluto é produzido a partir da Equação 6.1: A aproximação $t_{aprox}(h, d)$ utilizada é a Equação 5.34 e a Equação de referência $\Psi(h, d)$ é a expressão analítica do tempo de trânsito para o modelo do refletor circular 2.65. O ponto médio central m_0 é localizado em 1000m.	88
Figura 32 – Amplitude do Erro relativo absoluto (%) das aproximações (de cima para baixo): aproximação de Padé da SRC para $(t(d, h) - t_0 + \frac{2}{v_0} R_{NIP})^2$, expansão em h desenvolvida na Seção 5.3 e aproximação de Padé da SRC para $(t(d, h) - t_0 + \frac{2}{v_0} R_{NIP})^2$, expansão em d desenvolvida na Seção 5.6, para o refletor circular. O ponto médio central m_0 é localizado em 1000m.	89
Figura 33 – Refletor gaussiano com centro em 5Km imerso em um meio de variação linear do gradiente de velocidade, a velocidade varia de 1,5Km a 3,5Km.	91
Figura 34 – De cima para baixo: Cubo de dados sísmicos de reflexão e Superfície de Reflexão Comum (SRC) extraída a partir da modelagem de dados sísmicos de reflexão do refletor gaussiano da Figura 33. Os eixos são: h meio afastamento, ponto médio comum (PMC) e tempo de reflexão em segundos.	92
Figura 35 – De cima para baixo: Curva ajustada (colorida) sobreposta aos dados modelados e superfície de erro relativo da aproximação do SRC hiperbólico (Equação 2.80). O ponto médio central m_0 é localizado em 3Km.	93
Figura 36 – De cima para baixo: Curva ajustada (colorida) sobreposta aos dados modelados e superfície de erro relativo da aproximação do SRC hiperbólico (Equação 2.80). O ponto médio central m_0 é localizado em 4Km.	94
Figura 37 – De cima para baixo: Curva ajustada (colorida) sobreposta aos dados modelados e superfície de erro relativo da aproximação do SRC não hiperbólico (Equação 2.85). O ponto médio central m_0 é localizado em 3Km.	95
Figura 38 – De cima para baixo: Curva ajustada (colorida) sobreposta aos dados modelados e superfície de erro relativo da aproximação do SRC hiperbólico de (FOMEL; KAZINNIK, 2013) (Equação 2.85). O ponto médio central m_0 é localizado em 4Km.	96
Figura 39 – De cima para baixo: Curva ajustada (colorida) sobreposta aos dados modelados e superfície de erro relativo da aproximação do SRC quarta ordem (Equação 5.23). O ponto médio central m_0 é localizado em 3Km.	98

Figura 40 – De cima para baixo: Curva ajustada (colorida) sobreposta aos dados modelados e superfície de erro relativo da aproximação do SRC quarta ordem (Equação 5.23). O ponto médio central m_0 é localizado em 4Km. 99

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	18
2	FUNDAMENTOS TEÓRICOS	21
2.1	Tempo de trânsito de reflexão para o modelo de camadas plano-horizontais	21
2.2	Aproximação da hipérbole deslocada	24
2.3	Aproximação não-hiperbólica do tempo de trânsito	25
2.4	Modelos com variação linear do gradiente de velocidade sobre refletores plano horizontais	29
2.4.1	Modelo de uma camada com variação linear de velocidade sobre um refletor plano horizontal	30
2.4.2	Modelo de uma camada com variação linear do quadrado da vagarosidade sobre um refletor plano horizontal	31
2.5	Modelo de uma camada homogênea e transversalmente isotrópica sobre um refletor plano horizontal	32
2.6	Superfície de reflexão comum hiperbólica	34
2.7	Superfície de reflexão comum não hiperbólica	35
2.8	Superfície de reflexão comum quarta ordem	36
2.9	Superfície de reflexão comum para o modelo do refletor circular	38
3	APROXIMAÇÕES DE PADÉ DO TEMPO DE TRÂNSITO PARA A CONFIGURAÇÃO PONTO MÉDIO COMUM	40
3.1	Aproximação de Padé da equação generalizada	40
3.2	Aproximação de Padé para o modelo de uma camada com variação linear de velocidade sobre um refletor plano horizontal	43
3.3	Aproximação de Padé para o modelo de uma camada com variação linear do quadrado da vagarosidade sobre um refletor plano horizontal	44
3.4	Aproximação de Padé para o modelo de uma camada homogênea e transversalmente isotrópica sobre um refletor plano horizontal	45
4	COMPARAÇÃO DAS APROXIMAÇÕES DO TEMPO DE TRÂNSITO PARA A CONFIGURAÇÃO PONTO MÉDIO COMUM	47
4.1	Modelo de variação linear de velocidade	48
4.2	Modelo de variação linear do quadrado da vagarosidade	50
4.3	Modelo transversalmente isotrópico (TIV)	52

5	APROXIMAÇÕES DE PADÉ DO TEMPO DE TRÂNSITO PARA A CONFIGURAÇÃO SUPERFÍCIE DE REFLEXÃO COMUM (SRC)	56
5.1	Aproximação de Padé para a série de Taylor de quarta ordem $t(h, d)$, expansão de Padé em h	57
5.2	Aproximação de Padé para a série de Taylor de quarta ordem $t^2(h, d)$, expansão de Padé em h	59
5.3	Aproximação de Padé para a série de Taylor de quarta ordem $(t(d, h) - t_0 + \frac{2}{v} R_{NIP})^2$, expansão de Padé em h	61
5.4	Aproximação de Padé para a série de Taylor de quarta ordem $t(h, d)$, expansão de Padé em d	62
5.5	Aproximação de Padé para a série de Taylor de quarta ordem $t^2(h, d)$, expansão de Padé em d	63
5.6	Aproximação de Padé para a série de Taylor de quarta ordem $(t(h, d) - t_0 + \frac{2}{v} R_{NIP})^2$, expansão de Padé em d	64
6	COMPARAÇÃO DAS APROXIMAÇÕES DO SRC NO MODELO DO REFLETOR CIRCULAR EM UM MEIO DE VELOCIDADE CONSTANTE	66
6.1	Aproximações hiperbólica e não hiperbólica da superfície de reflexão comum	67
6.2	Aproximação de Padé do SRC obtida da expansão em série $t(h, d)$	72
6.3	Aproximação de Padé do SRC obtida da expansão em série $t^2(h, d)$	78
6.4	Aproximação de Padé do SRC obtida da expansão em série quarta ordem $(t(d, h) - t_0 + \frac{2}{v_0} R_{NIP})^2$	83
7	INVERSÃO DA SUPERFÍCIE SRC UTILIZANDO AS APROXIMAÇÕES SRC QUARTA ORDEM, SRC HIPERBÓLICO E SRC NÃO HIPERBÓLICO	90
8	RESULTADOS	101
9	CONCLUSÃO	105
	REFERÊNCIAS	106
	APÊNDICES	108
	APÊNDICE A – APROXIMANTES DE PADÉ	109

APÊNDICE B – GENERALIZAÇÃO DO APROXIMANTE DE PADÉ PARA UMA SÉRIE NA FORMA $t(x) \approx \lambda_0 + \lambda_1 x^2 +$ $\lambda_2 x^4 + O(x^6)$	112
APÊNDICE C – GENERALIZAÇÃO DO APROXIMANTE DE PADÉ PARA UMA SÉRIE NA FORMA: $t(d) \approx \lambda_0 + \lambda_1 d +$ $\lambda_2 d^2 + \lambda_3 d^3 + \lambda_4 d^4$	114
APÊNDICE D – PROGRAMAS UTILIZADOS	116

1 INTRODUÇÃO

A imagem dos refletores em subsuperfície é produzida a partir das técnicas de processamento sísmico, visando suprimir ruído aleatório e aumentar a razão sinal/ruído dos dados adquiridos. Dentre essas técnicas, uma das mais fundamentais é o empilhamento dos traços em configurações de ponto médio comum. Esta etapa é realizada ao longo de curvas de tempo de trânsito, e sua qualidade depende da acurácia das aproximações.

A aproximação mais comumente utilizada é a sobretempo normal. Esta surgiu a partir de um modelo simplificado da subsuperfície, formada por uma pilha de camadas de velocidade intervalar v_k . Para esse modelo a curva de tempo de trânsito é uma expansão de k termos em série de Taylor do tempo de trânsito ao quadrado (TANER; KOEHLER, 1969).

Essa forma de empilhamento convencional, através de hipérbolas do tempo de reflexão, é estendida além do domínio ponto médio comum através da técnica da Superfície de Reflexão Comum¹ (SRC) (MÜLLER, 1998). Nesta técnica, obtém-se uma seção sísmica de afastamento fonte-receptor igual a zero a partir do registro em uma configuração arbitrária de posições das fontes e receptores. O tempo de trânsito é uma função da velocidade da camada superficial, que deve ser conhecida, dos raios de curvatura das frentes de onda N e NIP , e do ângulo de emergência do raio normal (JAGER et al., 2001).

A técnica SRC acrescenta mais informação ao empilhamento, pois além da soma de traços no domínio do afastamento o método estende o empilhamento convencional dos traços sísmicos sobre o afastamento para o empilhamento multidimensional sobre superfícies afastamento-ponto médio. Define-se um ponto médio comum central m_0 e é realizado o empilhamento nos afastamentos, e nos pontos médios definidos pela distância ao ponto médio central $d = m - m_0$.

Ambas as técnicas, sobretempo normal e o método SRC, empregam aproximações hiperbólicas do tempo de trânsito² baseadas em uma aproximação em séries de Taylor até segunda ordem. A aproximação hiperbólica é justificada através do truncamento de uma série de Taylor do tempo de trânsito ao quadrado ao longo de um raio de referência. Assim, é sempre acurada para pequenas variações do raio central. O aumento da região de convergência do método SRC pode ser obtido com a aproximação em série de Taylor da superfície SRC de quarta ordem (HÖCHT, 2002), ou da aproximação da superfície SRC não hiperbólica (FOMEL; KAZINNIK, 2013), ambas aproximações não hiperbólicas da superfície de tempo de trânsito.

¹ Do inglês common reflection surface (CRS) (DUARTE, 2007)

² A expressão “aproximações hiperbólicas” se refere à aproximações obtidas como uma expansão em série de Taylor de segunda ordem do tempo de trânsito. Do Autor.

O principal objetivo deste trabalho é formular uma aproximação de Padé de tempo de trânsito para a configuração ponto médio comum, válida para longos afastamentos, quando a distância entre fonte e receptor é maior do que a profundidade dos refletores alvos em subsuperfície. E construir aproximações de Padé do tempo de trânsito para a configuração SRC que possuam uma região de convergência maior no domínio do ponto médio comum e do afastamento, obtidas através das aproximações do SRC quarta ordem.

A procura por aproximações de tempo de trânsito acuradas para longos afastamentos é motivada pela busca por maiores informações sobre a subsuperfície, pois os dados sísmicos adquiridos em grandes afastamentos a iluminam de maneira diferente dos dados sísmicos de afastamentos curtos, trazendo informação adicional sobre os refletores: No imageamento de flancos de domos de sal, planos de falhas, camadas reviradas (como em regiões de dobras), imageamento da base de domos de sal, para a obtenção de melhor cobertura na análise Amplitude versus offset (AVO), ambos requerem dados de longos afastamentos (LIN, 2003).

Para tanto propomos a utilização dos aproximantes de Padé na obtenção das aproximações de tempo de trânsito para o sobretempo normal e para a superfície SRC. Esses aproximantes foram inicialmente desenvolvidos por Henri Padé em 1892, e surgem como alternativa à série de Taylor, pois como característica principal possuem raio de convergência maior e convergem mais rapidamente à função desejada. Além disso, podem ser obtidos através da própria série de Taylor da função aproximada (NAVARRO et al., 1999).

Esta dissertação está estruturada da seguinte forma:

No Capítulo 2 apresentamos o estado da arte das aproximações de tempo de trânsito e a equação não hiperbólica generalizada do tempo de trânsito (STOVAS; FOMEL, 2010). Esta equação é chamada generalizada pois pode ser particularizada para modelos arbitrários da subsuperfície e reduzida à aproximações bem conhecidas na literatura, como a equação do sobretempo normal (DIX, 1955), hipérbole deslocada (DE BAZELAIRE, 1988), aproximação para o meio transversalmente isotrópico (TIV) (ALKHALIFA; TSVANKIN, 1995), entre outras, através da escolha dos coeficientes A , B , e C da própria equação generalizada.

No final do Capítulo 2 apresentamos a particularização da equação generalizada para a configuração SRC. Esta equação é a generalização da aproximação hiperbólica da superfície SRC (JAGER et al., 2001). Também apresentamos as aproximações SRC quarta ordem desenvolvidas com o intuito de aumentar a acurácia do método SRC para maiores afastamentos e distâncias entre os ponto médios, são 3 expansões em série de Taylor de quarta ordem para a superfície SRC (HÖCHT, 2002): Parabólica, quadrática e quadrática deslocada.

No Capítulo 3 obtemos as aproximações de Padé do tempo de trânsito para a configuração ponto médio comum. Estas são aproximações do tempo de trânsito particularizadas para os modelos de variação linear da velocidade, variação linear do quadrado da vagarosidade e modelo TIV, em ambos os modelos a geometria do refletor é plano horizontal e está localizado à uma profundidade D .

No Capítulo 4 comparamos a acurácia das aproximações de Padé com as aproximações da equação generalizada (STOVAS; FOMEL, 2010), hipérbole deslocada (DE BAZELAIRE, 1988), (ALKHALIFA; TSVANKIN, 1995), e sobretempo normal (DIX, 1955), utilizando o tempo de trânsito exato dos modelos de variação linear da velocidade e variação linear do quadrado da vagarosidade. As aproximações de Padé do tempo de trânsito superam em acurácia as aproximações convencionais da literatura, e dependem apenas de um parâmetro a mais do que a aproximação sobretempo normal.

No Capítulo 5, obtemos as aproximações de Padé para a configuração SRC obtidas através das 3 expansões em série de Taylor de quarta ordem do SRC. São produzidas ao todo 6 aproximações de Padé, 3 ao longo da direção do meio-afastamento e 3 ao longo da separação entre os pontos médios.

No Capítulo 6 testamos a acurácia das aproximações comparando as superfícies de tempo de trânsito aproximadas com a superfície de tempo de trânsito exata, obtida para o modelo do refletor circular em um meio de velocidade constante. Os parâmetros do SRC, R_N , R_{NIP} e β , bem como o tempo de trânsito, são dados analiticamente para esse modelo. Os aproximantes de Padé aumentam a região de convergência da aproximação quando aplicada ao SRC quarta ordem. As aproximações não hiperbólicas do SRC são superiores a aproximação hiperbólica do SRC, isso é atestado pelo aumento da região de convergência das aproximações.

No Capítulo 7 comparamos a acurácia dos métodos SRC hiperbólico, SRC não hiperbólico e SRC quarta ordem através da diferença entre a superfície de tempo de trânsito aproximada e a exata obtida para o modelo de um refletor gaussiano em um meio de variação linear de velocidade. A superfície de tempo de trânsito exata é extraída dos dados sísmicos obtidos através da modelagem Kirchhoff aplicada ao modelo do refletor gaussiano. Os parâmetros das aproximações do SRC são obtidos através da otimização pelo método dos mínimos quadrados.

Nessa comparação as aproximações não hiperbólicas do SRC são mais acuradas para afastamentos maiores e maiores distâncias entre os pontos médios do que a aproximação hiperbólica do SRC. A aproximação quadrática do SRC quarta ordem produziu os melhores resultados de aproximação com um aumento considerável da região de erro mínimo.

2 FUNDAMENTOS TEÓRICOS

Esse capítulo apresenta o estado da arte das aproximações de tempo de trânsito de reflexão para a configuração ponto médio comum e configuração superfície de reflexão comum (SRC). As aproximações de tempo de trânsito são fundamentais na estimativa de parâmetros importantes que descrevem o tempo de trânsito, como a distribuição de velocidades, tempo duplo de reflexão e curvaturas, de modo a influenciar na qualidade das etapas subsequentes de processamento sísmico, como o empilhamento e a migração.

2.1 Tempo de trânsito de reflexão para o modelo de camadas plano-horizontais

A aproximação hiperbólica do tempo de trânsito, Equação 2.1, é comumente usada no processamento sísmico na configuração ponto médio comum. Essa aproximação, também chamada de aproximação sobretempo normal (DIX, 1955), é a versão truncada até segunda ordem da equação geral do tempo de trânsito para um modelo formado por uma pilha de camadas.

$$t(x)^2 = t_0^2 + \frac{x^2}{v_{RMS}^2} \quad (2.1)$$

A Equação 2.1 descreve o tempo de trânsito de reflexão em função do afastamento x , entre a fonte e o receptor. É obtida para um modelo de uma pilha de camadas com velocidade intervalar v_k e espessura d_k . t_k é o tempo duplo de trânsito na camada k . t_0 é o tempo de trânsito do raio normal, onde teoricamente fonte e receptor ocupariam a mesma posição na superfície. v_{RMS} é a velocidade média quadrática, média ponderada dos quadrados das velocidades intervalares v_k , a ponderação é igual ao tempo vertical t_k da camada.

O modelo de camadas plano horizontais é representado esquematicamente na Figura 1. A equação geral do tempo de trânsito para esse modelo é a expansão em série (TANER; KOEHLER, 1969):

$$t^2 = C_1 + C_2x^2 + C_3x^4 + C_4x^6 + \dots \quad (2.2)$$

Os três primeiros coeficientes C_i da Equação 2.2 são dados por:

$$C_1 = a_1^2 \quad (2.3)$$

$$C_2 = \frac{a_1}{a_2} \quad (2.4)$$

$$C_3 = \frac{a_2^2 - a_1 a_3}{4a_2^4} \quad (2.5)$$

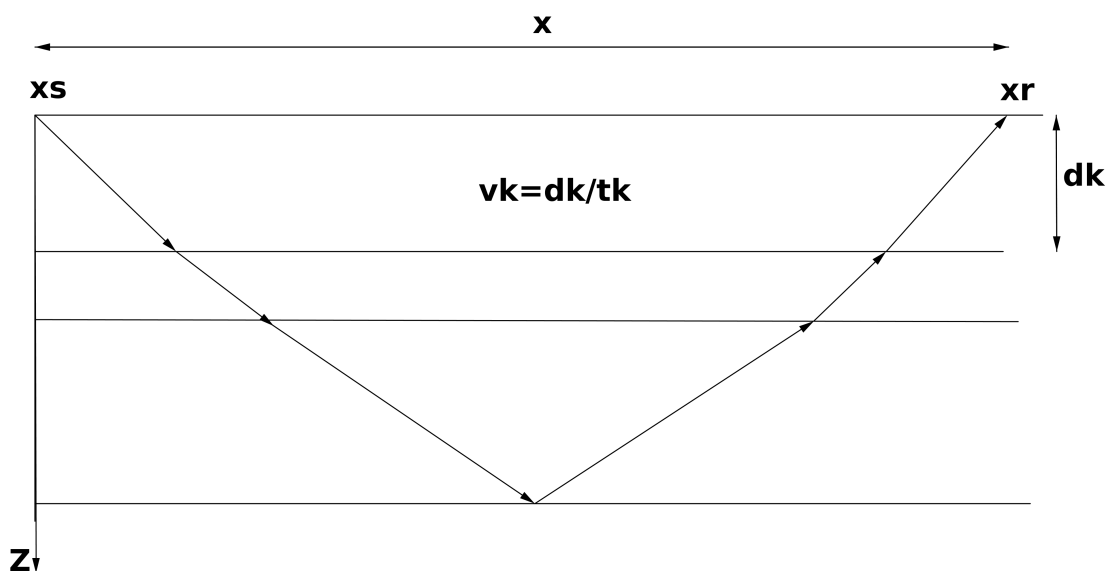
Onde a_m :

$$a_m = 2 \sum_k v_k^{2m-3} d_k \quad (2.6)$$

Definindo a espessura da camada k como $d_k = v_k t_k$ (a partir da velocidade intervalar v_k , e do tempo de trânsito vertical t_k na camada):

$$a_m = 2 \sum_k v_k^{2m-2} t_k \quad (2.7)$$

Figura 1 – Representação esquemática da propagação de um raio de reflexão em um meio formado por uma pilha de camadas plano horizontais, cada uma com espessura variável d_k . A velocidade intervalar da k -ésima camada é v_k , o tempo de trânsito vertical na camada é t_k , x é o afastamento, e o tempo de trânsito $t(x)$ é obtido pela série na Equação 2.2.



Fonte: Do Autor.

Generalizando a Equação 2.2, a relação entre o tempo de reflexão t e o afastamento x é representada por uma série de Taylor na vizinhança de x_0 , um afastamento arbitrário,

na forma (HAKE; HELBIG; MESDAG, 1984):

$$t^2 = \lim_{x \rightarrow x_0} \sum_{k=0}^{\infty} A_k (x^2 - x_0^2)^k \quad (2.8)$$

A série da Equação 2.8 deve ser utilizada até no máximo $k = 2$, pois para $k > 3$ começa a divergir do tempo de trânsito exato (GHOSH; KUMAR, 2002).

Os coeficientes C_i na Equação 2.2 são reescritos da seguinte forma:

$$C_1 = t_0^2 \quad (2.9)$$

$$C_2 = \frac{1}{v_{RMS}^2} \quad (2.10)$$

$$C_3 = \frac{-\sigma}{v_{RMS}^4} \quad (2.11)$$

Onde σ :

$$\sigma = \frac{1}{4t_0^2} \frac{\mu_4 - \mu_2^2}{\mu_2^2} \quad (2.12)$$

Onde:

$$\mu_2 = \frac{1}{t_0} \sum_k v_k^2 t_k \quad (2.13)$$

$$\mu_4 = \frac{1}{4t_0^2} \sum_k v_k^4 t_k \quad (2.14)$$

E v_{RMS} é definida como:

$$v_{RMS}^2 = \mu_2 \quad (2.15)$$

Define-se a aproximação de quarta ordem dada por:

$$t^2 = t_0^2 + \frac{x^2}{v_{RMS}^2} - \frac{\sigma x^4}{v_{RMS}^4} \quad (2.16)$$

A Equação 2.16 é uma aproximação capaz de incluir parcialmente o efeito da curvatura do raio em um meio de velocidade verticalmente variável, o que justifica o nome

“aproximação do raio curvo” (ROMANELLI, 2007). Esta é uma versão truncada até quarta ordem da Equação 2.2. E pode ser reescrita na forma:

$$t^2 = t_0^2 + \frac{x^2}{v_{RMS}^2} \left(1 - \frac{\sigma x^2}{v_{RMS}^2} + \dots \right) \quad (2.17)$$

Para valores típicos de afastamento fonte receptor, velocidade e tempo vertical, o módulo de $\sigma x^4/v_{RMS}^2$ é menor do que 1. O termo entre parênteses é tratado como uma expansão binomial, e pode ser transformado no inverso de um binômio:

$$t^2 = t_0^2 + \frac{x^2}{v_{RMS}^2 + \sigma x^2} \quad (2.18)$$

A Equação 2.18 pode ser modificada através do conceito de frações contínuas. Aplica-se a seguinte recursão, multiplicando-se v_{RMS}^2 por $1 + \sigma x^2/v_{RMS}^2$ na Equação 2.18, e assim de maneira subsequente para cada novo v_{RMS}^2 acrescentado de modo a produzir a seguinte equação recursiva ¹ (ROMANELLI, 2007):

$$t^2(x) = t_0^2 + \frac{x^2}{v_{RMS}^2} \left(1 + \frac{\sigma x^2}{v_{RMS}^2} \left\{ 1 + \frac{\sigma x^2}{v_{RMS}^2} \left[1 + \frac{\sigma x^2}{v_{RMS}^2} \right]^{-1} \right\}^{-1} \right)^{-1} \quad (2.19)$$

As Equações 2.16, 2.18 e 2.19 acrescentam maior precisão para à aproximação hiperbólica (Equação 2.1) em meios $v(z)$. Na Equação 2.18, é como se a aproximação hiperbólica fosse aplicada com uma velocidade variável em função do afastamento fonte-receptor (ROMANELLI, 2007).

2.2 Aproximação da hipérbole deslocada

As Equações 2.16, 2.18 e 2.19 também podem ser expressas alternativamente como a Equação da hipérbole deslocada (DE BAZELAIRE, 1988), também baseada na expansão na série do tempo de reflexão, Equação 2.2. Nesse caso a geometria de uma reflexão, em uma configuração de ponto médio comum qualquer, é descrita por uma hipérbole deslocada no tempo. Na forma:

$$t(x) = t_0 \left(1 - \frac{1}{s} \right) + \frac{1}{s} \sqrt{t_0^2 + s \frac{x^2}{v^2}} \quad (2.20)$$

¹ A dedução detalhada da série recursiva, Equação 2.19, é descrita na página 188 de Análise do Sinal Sísmico (ROMANELLI, 2007), a ideia foi desenvolvida como parte de um trabalho em conjunto de André Romanelli Rosa e Carlos Cunha Filho. Do Autor.

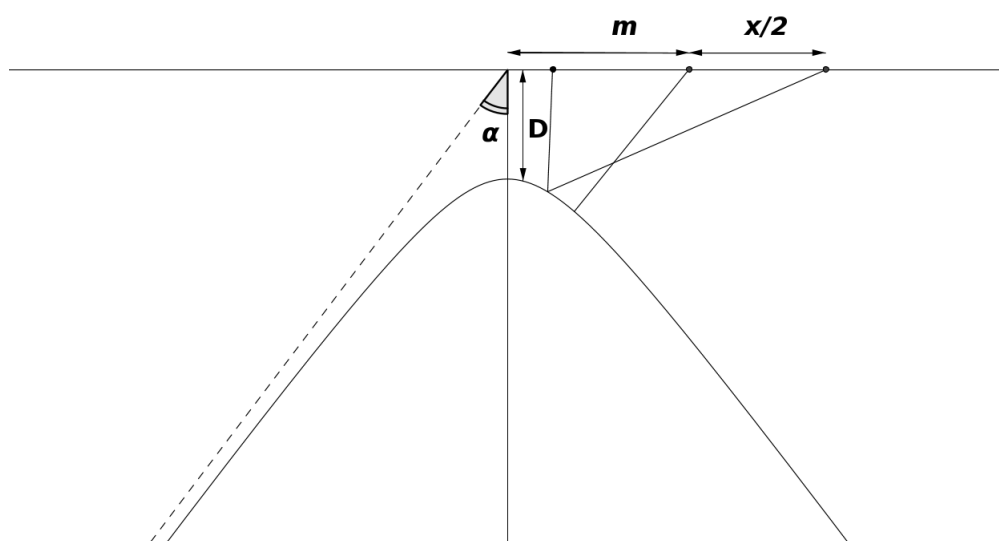
onde s é dado em função dos coeficientes das Equações 2.13-2.14:

$$s = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} \quad (2.21)$$

2.3 Aproximação não-hiperbólica do tempo de trânsito

A Figura 2 é a representação esquemática de um refletor hiperbólico cujo centro da hipérbole está localizado a uma profundidade D , a hipérbole possui assíntotas de inclinação α , o meio sobre o refletor possui velocidade v constante, m é a coordenada do ponto médio e x é o afastamento fonte-receptor .

Figura 2 – Representação esquemática do modelo do refletor hiperbólico, utilizado para derivar a equação generalizada do sobretempo (Equação 2.36). Esta equação descreve o sobretempo de reflexão dados os parâmetros da geometria do modelo e as posições de fonte e receptor.



Fonte: Do Autor.

Considerando a posição da fonte x_S e do receptor x_r , separados por um afastamento x . A equação que define o refletor hiperbólico em subsuperfície será² (STOVAS; FOMEL, 2010):

$$z(x) = \sqrt{D^2 + x^2 \tan^2 \alpha} \quad (2.22)$$

² A seguinte dedução foi retirada do Apêndice C do artigo Generalized Nonhyperbolic moveout approximation de Fomel e Stovas, (2010). Do Autor.

O tempo de trânsito de reflexão em função do ponto de reflexão y é:

$$t = \frac{\sqrt{(x_s - y)^2 + z^2(y)} + \sqrt{(x_r - y)^2 + z^2(y)}}{v} \quad (2.23)$$

Utilizando o princípio de Fermat, o tempo de trânsito é estacionário em relação ao ponto de reflexão:

$$0 = \frac{\partial t}{\partial y} = \frac{y - x_s + y \tan^2 \alpha}{v \sqrt{(x_s - y)^2 + D^2 + y^2 \tan^2 \alpha}} + \frac{y - x_r + y \tan^2 \alpha}{v \sqrt{(x_r - y)^2 + D^2 + y^2 \tan^2 \alpha}} \quad (2.24)$$

$$0 = \left[\frac{y}{\cos^2 \alpha} - x_s \right]^2 [(x_r - y)^2 + D^2 + y^2 \tan^2 \alpha] + \left[\frac{y}{\cos^2 \alpha} - x_r \right]^2 [(x_s - y)^2 + D^2 + y^2 \tan^2 \alpha] \quad (2.25)$$

A Equação 2.25 é simplificada à seguinte equação quadrática:

$$y^2(x_s + x_r) \tan^2 \alpha - 2y(x_s x_r \sin^2 \alpha - D^2) - D^2(x_s + x_r) \cos^2 \alpha = 0 \quad (2.26)$$

O discriminante da Equação 2.26 é:

$$\Delta = (x_s x_r \sin^2 \alpha - D^2)^2 + D^2(x_s + x_r)^2 \sin^2 \alpha = (D^2 + x_s^2 \sin^2 \alpha)(D^2 + x_r^2 \sin^2 \alpha) \quad (2.27)$$

Apenas uma das soluções tem significado físico:

$$y = \frac{x_s x_r \sin^2 \alpha - D^2 + \sqrt{(D^2 + x_s^2 \sin^2 \alpha)(D^2 + x_r^2 \sin^2 \alpha)}}{(x_s + x_r) \tan^2 \alpha} \quad (2.28)$$

$$y = \frac{D^2(x_s + x_r) \cos^2 \alpha}{D^2 - x_s x_r \sin^2 \alpha + \sqrt{(D^2 + x_s^2 \sin^2 \alpha)(D^2 + x_r^2 \sin^2 \alpha)}} \quad (2.29)$$

Substituindo a Equação 2.29 na Equação 2.23:

$$t = \sqrt{\frac{2D^2 + x_s^2 + x_r^2 - 2x_s x_r \cos^2 \alpha + 2\sqrt{(D^2 + x_s^2 \sin^2 \alpha)(D^2 + x_r^2 \sin^2 \alpha)}}{v}} \quad (2.30)$$

Definindo os parâmetros da Equação 2.30 da seguinte forma:

$$t_0 = \frac{2\sqrt{D^2 + m^2 \sin^2 \alpha}}{v} \quad (2.31)$$

$$a = \frac{2 - \text{sen}^2\alpha}{v^2} \quad (2.32)$$

$$b = \frac{\text{sen}^2\alpha}{v^2} \frac{D^2 - m^2\text{sen}^2\alpha}{D^2 + m^2\text{sen}^2\alpha} \quad (2.33)$$

$$c = \frac{\text{sen}^4\alpha}{v^4} \quad (2.34)$$

$$\xi = \frac{1}{2} \quad (2.35)$$

E, para uma trajetória de reflexão qualquer, definindo as posições de fonte e receptor em função das coordenadas do ponto médio m e do afastamento x : $x_s = m - x/2$ e $x_r = m + x/2$, respectivamente. A Equação do tempo de trânsito para o refletor hiperbólico, Equação 2.30, é reescrita como (STOVAS; FOMEL, 2010):

$$t^2(x) = (1 - \xi)(t_0^2 + ax^2) + \xi\sqrt{t_0^4 + 2bt_0^2 + cx^4} \quad (2.36)$$

A Equação 2.36 pode ser expressa também na forma:

$$t^2(x) = t_0^2 + \frac{x^2}{v^2} + \frac{Ax^4}{v^4(t_0^2 + B\frac{x^2}{v^2} + \sqrt{t_0^4 + 2Bt_0^2\frac{x^2}{v^2} + C\frac{x^4}{v^4}})} \quad (2.37)$$

A Equação 2.37 é semelhante à Equação 2.36, a relação entre os parâmetros é dada por:

$$a = \frac{AB + B^2 - C}{v^2(A + B^2 - C)} \quad (2.38)$$

$$b = \frac{B}{v^2} \quad (2.39)$$

$$c = \frac{C}{v^4} \quad (2.40)$$

$$\xi = \frac{A}{C - B^2} \quad (2.41)$$

A relação inversa é dada por:

$$v^2 = \frac{1}{a(1 - \xi) + b\xi} \quad (2.42)$$

$$A = \frac{\xi(c - b^2)}{[a(1 - \xi) + b\xi]^2} \quad (2.43)$$

$$B = \frac{b}{a(1 - \xi) + b\xi} \quad (2.44)$$

$$C = \frac{c}{[a(1 - \xi) + b\xi]^2} \quad (2.45)$$

A expansão em série de Taylor de quarta ordem da Equação 2.37 somada a um erro de aproximação de sexta ordem, é:

$$t^2(x) \approx t_0^2 + \frac{x^2}{v^2} + \frac{A}{2} \frac{x^4}{v^4 t_0^2} + O(x^6) \quad (2.46)$$

O parâmetro A na Equação 2.46 é dado na Equação 2.43, utilizando os parâmetros a , b , c e ξ dados nas Equações 2.38-2.41 para o refletor hiperbólico.

A Equação 2.37 é chamada equação não hiperbólica generalizada, esta se reduz a algumas aproximações conhecidas da literatura com determinada escolha dos parâmetros A , B , e C (STOVAS; FOMEL, 2010).

1. Escolhendo $A = 0$, A Equação 2.37 se reduz a aproximação hiperbólica clássica, equação do sobretempo normal:.

$$t^2(x) = t_0^2 + \frac{x^2}{v^2} \quad (2.47)$$

2. Pela escolha de $A = -4\eta$, $B = 1 + 2\eta$ e $C = (1 + 2\eta)^2$ na Equação 2.37, esta se reduz a aproximação para o modelo transversalmente isotrópico (TIV) (ALKHALIFA; TSVANKIN, 1995).

$$t^2(x) = t_0^2 + \frac{x^2}{v^2} - \frac{2\eta x^4}{v^4 [t_0^2 + (1 + 2\eta) \frac{x^2}{v^2}]} \quad (2.48)$$

3. A escolha $A = -2\gamma t_0^2 v^2$, $B = -A/2$ e $C = A^2/4$, reduz a Equação 2.37 à aproximação proposta por Blias, (2007).

$$t^2(x) = t_0^2 + \frac{x^2}{v^2(1 + \gamma x^2)} \quad (2.49)$$

4. Escolhendo $A = \frac{(1-s)}{2}$, $B = s/2$ e $C = 0$, a Equação 2.37 se reduz à Equação da hipérbole deslocada (Equação 2.20).

A aproximação generalizada não hiperbólica (Equação 2.37) é uma forma geral da equação do tempo de trânsito; a partir da escolha dos parâmetros A , B e C , esta se reduz a aproximações bem conhecidas na literatura. A Equação 2.37 também pode ser particularizada para os modelos de uma camada com variação linear da velocidade sobre um refletor plano horizontal ou de uma camada com variação linear do quadrado da vagarosidade sobre um refletor plano horizontal, bem como para o modelo TIV homogêneo. Apresentaremos essas particularizações nas próximas Seções.

2.4 Modelos com variação linear do gradiente de velocidade sobre refletores plano horizontais

De acordo com observações de caráter empírico, a compactação dos sedimentos tende a induzir um comportamento linear para a distribuição de velocidades intervalares, ou instantâneas, em função da profundidade (SLOTNICK, 1959). Justifica-se assim, a importância de desenvolver aproximações de tempo de trânsito para esses modelos.

Existe solução analítica compacta para o tempo de trânsito de propagação em função do afastamento para um meio homogêneo e de distribuição linear de velocidades sobre um refletor plano horizontal, em que a velocidade $v(z)$ cresce linearmente com a profundidade, com gradiente g , esse modelo é denominado de modelo com variação linear da velocidade.

Existe também uma solução analítica compacta do tempo de trânsito para o modelo de variação linear do gradiente do quadrado da vagarosidade sobre um refletor plano horizontal. Nesse modelo, o quadrado da vagarosidade, $1/v^2$, cresce linearmente com a profundidade, com um gradiente G (CERVENY, 2001).

A Equação generalizada (Equação 2.37) pode ser particularizada para os modelos variação linear da velocidade e variação linear do quadrado da vagarosidade, a partir da redefinição dos coeficientes A , B e C para cada modelo.

Em ambos os modelos é possível obter o tempo de trânsito analiticamente, e comparar aproximações de tempo de trânsito com o sobretempo exato (STOVAS; FOMEL, 2010). Os principais parâmetros que descrevem o tempo de trânsito, t_0 e v , também são dados analiticamente.

A equação do tempo de trânsito é descrita em função de uma velocidade constante v , para ambos os modelos. Pois, apesar de no modelo original a velocidade variar com a profundidade, a equação do tempo de trânsito é obtida em termos de um modelo equivalente onde a velocidade é uma constante dada em função dos parâmetros do modelo original. Esta abordagem é semelhante à utilização da velocidade v_{RMS} no modelo de uma pilha de camadas plano horizontais da Seção 2.1 onde o meio não é mais representado pelas velocidades intervalares v_k de cada camada, mas sim por um meio equivalente onde

a velocidade é uma constante, v_{RMS} , obtida em função das velocidades intervalares do modelo original.

2.4.1 Modelo de uma camada com variação linear de velocidade sobre um refletor plano horizontal

Neste modelo, também chamado somente de modelo variação linear da velocidade, a velocidade varia linearmente com a profundidade z em uma camada de espessura D sobre um refletor plano horizontal. O topo do modelo tem velocidade v_0 e o gradiente de velocidade é g . Este modelo é definido por:

$$v(z) = v_0(1 + gz) \quad (2.50)$$

Para o modelo variação linear da velocidade, o tempo de trânsito de reflexão pode ser expresso analiticamente como função do afastamento (SLOTNICK, 1959):

$$t(x) = \frac{2D}{v_0(r-1)} \cosh^{-1} \left[1 + \frac{(r-1)^2}{2r} \left(1 + \frac{x^2}{4D^2} \right) \right] \quad (2.51)$$

Onde D é a profundidade do refletor, $r = \frac{v(D)}{v_0}$ razão entre a velocidade na base e no topo do modelo. Para esse modelo, os parâmetros da Equação 2.51 serão dados analiticamente por (STOVAS; FOMEL, 2010):

$$t_0 = \frac{2D}{v_0} \frac{\ln r}{r-1} \quad (2.52)$$

$$v^2 = v_0^2 \frac{r^2 - 1}{2 \ln r} \quad (2.53)$$

$$A = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{r^2 + 1}{r^2 - 1} \ln r \right) \quad (2.54)$$

$$B = \frac{t_0^2(X - PTv^2)}{X(t_0^2 - T^2 + PTX)} - \frac{AX^2}{X^2 + v^2(t_0^2 - T^2)} \quad (2.55)$$

$$C = \frac{t_0^4(X - PTv^2)^2}{X^2(t_0^2 - T^2 + PTX)^2} + \frac{2Av^2t_0^2}{X^2 + v^2(t_0^2 - T^2)} \quad (2.56)$$

Onde T , X e P :

$$T = \frac{2D}{v_0} \frac{\cosh^{-1} r}{r-1} \quad (2.57)$$

$$X = 2D\sqrt{\frac{r+1}{r-1}} \quad (2.58)$$

$$P = \frac{X(r-1)}{D} \frac{1}{2rv_0} \sinh^{-1} \left[1 + \frac{(r-1)^2}{2r} \left(1 + \frac{X^2}{4D^2} \right) \right] \quad (2.59)$$

Substituindo os parâmetros A , B e C das Equações 2.54-2.56 na Equação 2.37 obtemos a aproximação do tempo de trânsito de reflexão particularizada para o modelo variação linear da velocidade. A expansão em série de Taylor da Equação 2.37 dada por 2.46, é particularizada para o modelo de variação linear de velocidade, substituindo o coeficiente A dado por 2.54 na Equação 2.46:

$$t^2(x) \approx t_0^2 + \frac{x^2}{v^2} + \frac{1}{4} \left(1 - \frac{r^2+1}{r^2-1} \ln r \right) \frac{x^4}{v^4 t_0^2} + O(x^6) \quad (2.60)$$

2.4.2 Modelo de uma camada com variação linear do quadrado da vagarosidade sobre um refletor plano horizontal

Neste modelo, também chamado somente de variação linear do quadrado da vagarosidade, $(1/v^2)$ varia linearmente com a profundidade z em uma camada de espessura D , sobre um refletor plano horizontal. O topo do modelo tem velocidade v_0 e o gradiente é G . Este modelo é definido por:

$$\frac{1}{v^2(z)} = \frac{1}{v_0^2}(1 + Gz) \quad (2.61)$$

A Equação do tempo de trânsito, para este modelo, é dada analiticamente por (CERVENY, 2001):

$$t^2(x) = t_0^2 + \frac{x^2}{v^2} - \frac{x^4(r^2-1)^2(2Q+1)}{144Q^3D^2v^2(Q+1)^2} \quad (2.62)$$

Onde $r = v(D)/v_0$ é a razão entre a velocidade do topo e da base do modelo. E o coeficiente Q :

$$Q = \sqrt{1 - \frac{x^2(r^2-1)^2}{16r^2D^2}} \quad (2.63)$$

Os parâmetros da Equação 2.62 são dados por:

$$t_0 = \frac{4D}{v_0} \frac{1+r+r^2}{r(r+1)} \quad (2.64)$$

$$v^2 = v_0^2 \frac{3r^2}{1+r+r^2} \quad (2.65)$$

Particularizamos a equação generalizada do tempo de trânsito (Equação 2.37), para o modelo variação linear do quadrado da vagarosidade, definindo os coeficientes A , B e C da seguinte forma (STOVAS; FOMEL, 2010):

$$A = -\frac{(r-1)^2}{6r} \quad (2.66)$$

$$B = -\frac{(r-1)^2(1+r+r^2)}{2r(r+2)(2r+1)} \quad (2.67)$$

$$C = -\frac{(r-1)^4(1+r+r^2)^2}{3r(r+2)(2r+1)^2} \quad (2.68)$$

A expansão em série de Taylor da Equação 2.37 será dada por 2.46, particularizamos esta equação para o modelo variação linear do quadrado da vagarosidade substituindo o coeficiente A dado pela Equação 2.66 na Equação 2.46:

$$t(x) = t_0^2 + \frac{x^2}{v^2} - \frac{(r-1)^2}{12r} \frac{x^4}{v^4 t_0^2} + O(x^6) \quad (2.69)$$

2.5 Modelo de uma camada homogênea e transversalmente isotrópica sobre um refletor plano horizontal

Na Seção 2.1 adotou-se a premissa de que o comportamento não hiperbólico do sobretempo se deve a divergência entre as aproximações hiperbólicas utilizadas e o valor exato do tempo de trânsito para grandes afastamentos, sendo válida a aproximação do sobretempo normal para pequenos afastamentos.

Todavia, implicitamente outra premissa foi adotada, de que as propriedades elásticas do meio não dependem da direção de propagação. Adotar essa premissa tem como consequência prática a idéia de que a velocidade de propagação na direção vertical é igual à velocidade de propagação em qualquer outra direção (ROMANELLI, 2007).

Porém, para um meio anisotrópico, as propriedades físicas elásticas variam com a direção, mesmo em um meio homogêneo: A presença de anisotropia produz o sobretempo não hiperbólico mesmo em um meio formado por camadas homogêneas. Um meio transversalmente isotrópico com um eixo vertical de simetria (TIV) é uma aproximação razoável de um meio anisotrópico formado por uma pilha de camadas plano horizontais (SONG et al., 2016).

A importância do estudo e desenvolvimento de aproximações de tempo de trânsito para os meios anisotrópicos, principalmente o meio TIV, onde as propriedades elásticas dependem apenas da profundidade, e não da posição horizontal, se justifica de duas maneiras:

1. A aproximação de tempo de trânsito é essencial para determinar os parâmetros de anisotropia das camadas em um meio TIV (SONG et al., 2016).
2. Um bom exemplo de anisotropia TIV, são alguns folhelhos, um exemplo particularmente importante é o dos folhelhos geradores de petróleo, que correspondem na direção vertical, a uma pilha de intercalações entre minerais argilosos, ou carbonáticos, e matéria orgânica (ROMANELLI, 2007).

A aproximação compacta do tempo de trânsito para o modelo TIV homogêneo sobre um refletor plano horizontal (ALKHALIFA; TSVANKIN, 1995):

$$t^2(x) = t_0^2 + \frac{x^2}{v^2} - \frac{2\eta x^4}{v^2[t_0^2 v^2 + (1 + 2\eta)x^2]} \quad (2.70)$$

Onde o parâmetro η , anelipticidade é definido em função dos *parâmetros de Thomsen* por:

$$\eta = \frac{\varepsilon - \delta}{1 + 2\delta} \quad (2.71)$$

δ e ε são dados em função das velocidades v_p (da onda p), v_s (da onda s), e das velocidades de fase v_h e v_q medidas nas direções $\pi/2$ e $\pi/4$, respectivamente (THOMSEN, 1986):

$$\varepsilon = \frac{v_h^2 - v_p^2}{2v_p^2} \quad (2.72)$$

$$\delta = \frac{2}{\nu} \left(\frac{v_q^2 - v_p^2}{v_p^2} + \frac{\nu - \varepsilon}{2} \right) - \frac{\nu^2 + \varepsilon^2}{2\nu} \quad (2.73)$$

onde:

$$\nu = \frac{v_p^2 - v_s^2}{v_p^2} \quad (2.74)$$

Os coeficientes A , B e C da equação generalizada, Equação 2.37, são definidos para o modelo TIV como (STOVAS; FOMEL, 2010):

$$A = -4\eta \quad (2.75)$$

$$B = \frac{1 + 8\eta + 8\eta^2}{1 + 2\eta} \quad (2.76)$$

$$C = \frac{1}{(1 + 2\eta)^2} \quad (2.77)$$

A particularização para o modelo TIV da aproximação do tempo de trânsito generalizada é obtida substituindo os parâmetros definidos em 2.75-2.77 na Equação 2.37. E substituindo na Equação 2.46 o coeficiente A , dado na Equação 2.75, particularizamos a Equação 2.46 para o modelo, essa é a expansão em série de Taylor do tempo de trânsito para o modelo TIV:

$$t^2(x) \approx t_0^2 + \frac{x^2}{v^2} + \frac{-4\eta}{2} \frac{x^4}{v^4 t_0^2} + O(x^6) \quad (2.78)$$

2.6 Superfície de reflexão comum hiperbólica

O método da superfície de reflexão comum (SRC) estende o empilhamento convencional dos traços sísmicos sobre o afastamento para o empilhamento multidimensional sobre superfícies afastamento-ponto médio (FOMEL; KAZINNIK, 2013). O empilhamento SRC assume a seguinte forma:

$$S(t_0, m_0) = \int \int P(t(h, d = m - m_0; t_0)) dh dm \quad (2.79)$$

Onde a integral, Equação 2.79, ao redor do ponto médio m é realizada ao longo de uma vizinhança limitada de um ponto médio central arbitrário m_0 . A superfície SRC $t(h, d)$ é uma função do tempo de trânsito, em que $d = m_0 - m$, é a distância entre o ponto médio central m_0 e um ponto médio m na vizinhança; $h = x/2$ é metade do afastamento entre a fonte e o receptor.

A aproximação SRC hiperbólica pode ser justificada como uma expansão em série de Taylor, até segunda ordem, do quadrado do tempo de trânsito ao longo de um raio normal de referência (FOMEL; KAZINNIK, 2013). Para esse raio de referência, fonte e receptor estão em teoria na mesma posição em superfície, por isso este método de empilhamento é dito SRC de afastamento nulo. A aproximação do SRC hiperbólico (JAGER et al., 2001):

$$\theta_{SRC}(h, d; t_0) = \sqrt{F(d) + b_2 h^2} \quad (2.80)$$

Onde:

$$F(d) = (t_0 + a_1 d)^2 + a_2 d^2 \quad (2.81)$$

$$a_1 = \frac{2\text{sen}(\beta)}{v} \quad (2.82)$$

$$a_2 = \frac{2 \cos^2(\beta)t_0}{R_N v} \quad (2.83)$$

$$b_2 = \frac{2 \cos^2(\beta)t_0}{R_{NIP} v} \quad (2.84)$$

Os quatro parâmetros v , R_N , R_{NIP} e β tem um claro significado físico em termos de frentes de onda e geometria do raio (GELCHINSKY; BERKOVITCH; KEYDAR, 1999a). v representa a velocidade na superfície, assumida constante ao longo do raio central. β_0 é o ângulo de emergência do raio de afastamento nulo; R_N e R_{NIP} são os raios de curvatura de duas frentes de onda hipotéticas, as ondas N e NIP (HUBRAL, 1983). Estas ondas hipotéticas são definidas da seguinte maneira (TYGEL; SANTOS; SCHLEICHER, 1999):

1. A onda N é gerada em uma frente de onda que coincide com o refletor alvo, propagando para cima com metade da velocidade do meio e chega ao ponto central X_0 no tempo t_0 .
2. A onda NIP é gerada no refletor alvo como uma fonte pontual no ponto NIP , propagando para cima com metade da velocidade do meio, e chega ao ponto X_0 também no tempo t_0 .

2.7 Superfície de reflexão comum não hiperbólica

A seguinte modificação da Equação 2.80 é proposta com o intuito de melhorar sua acurácia para grandes afastamentos e separação entre os pontos médios (FOMEL; KAZINNIK, 2013):

$$\Phi_{SRC}(h, d; t_0) = \sqrt{\frac{F(d) + ch^2 + \sqrt{F(d-h)F(d+h)}}{2}} \quad (2.85)$$

A Equação 2.85 é chamada aproximação SRC não hiperbólica. A expansão em série de Taylor 2D de segunda ordem da Equação 2.85 utiliza os mesmos parâmetros a_1 , a_2 e b_2 do SRC hiperbólico definidos nas Equações 2.82-2.84. Definindo os parâmetros da Equação 2.85:

$$c = 2b_2 + a_1^2 - a_2 \quad (2.86)$$

$$F(d-h) = (t_0 + a_1(d-h))^2 + a_2(d-h)^2 \quad (2.87)$$

$$F(d+h) = (t_0 + a_1(d+h))^2 + a_2(d+h)^2 \quad (2.88)$$

A Equação do SRC não hiperbólico é produzida, da mesma forma que a equação generalizada (Equação 2.37), a partir do modelo do refletor hiperbólico³. Basta definir uma parametrização diferente para as posições de fonte e receptor da adotada na Seção 2.3. Definindo as posições da fonte e do receptor em função das coordenadas do ponto médio m e do meio afastamento h :

$$x_s = m - h = m_0 + d - h \quad (2.89)$$

$$x_r = m + h = m_0 + d + h \quad (2.90)$$

Substituindo as definições de x_s e x_r das Equações 2.89 e 2.91 na Equação 2.30, e utilizando a seguinte definição de parâmetros:

$$t_0 = 2 \frac{\sqrt{m_0^2 \text{sen}^2 \alpha + D^2}}{v} \quad (2.91)$$

$$a_1 = \frac{2m_0 \text{sen}^2 \alpha}{v \sqrt{m_0^2 \text{sen}^2 \alpha + D^2}} \quad (2.92)$$

$$a_2 = \frac{4D^2 \text{sen}^2 \alpha}{v^2 (m_0^2 \text{sen}^2 \alpha + D^2)} \quad (2.93)$$

$$b_2 = \frac{4(D^2 \text{sen}^2 \alpha \cos^2 \alpha + D^2)}{v^2 (m_0^2 \text{sen}^2 \alpha + D^2)} \quad (2.94)$$

A partir destas definições, a equação do tempo de trânsito para o modelo do refletor hiperbólico, Equação 2.30, é particularizada para a configuração SRC e se torna equivalente à Equação 2.85.

2.8 Superfície de reflexão comum quarta ordem

O método SRC hiperbólico é estendido a partir de 3 expansões em série de Taylor de quarta ordem para a superfície SRC. As aproximações SRC quarta ordem dependem dos mesmos parâmetros v , R_N , R_{NIP} e β do SRC hiperbólico (HöCHT, 2002).

A aproximação *parabólica* do SRC quarta ordem é definida como:

³ A seguinte particularização da Equação 2.30 foi retirada do Apêndice A do artigo Nonhyperbolic common reflection surface de Fomel e Kazinnik, (2013). Do Autor.

$$\begin{aligned}
t(h, d) = t_0 &+ \frac{2\text{sen}(\beta)}{v}d + \frac{\cos^2(\beta)}{vR_N}d^2 + \frac{\cos^2(\beta)}{vR_{NIP}}h^2 \\
&- \frac{\text{sen}(\beta)\cos^2(\beta)}{vR_N^2}d^3 - \frac{\text{sen}(\beta)\cos^2(\beta)}{vR_{NIP}^2R_N}(2R_{NIP} + R_N)dh^2 \\
&- \frac{\cos^2(\beta)}{2vR_{NIP}^3R_N^2}[R_{NIP}^2(8\cos^2(\beta) - 6) + R_{NIP}R_N(5\cos^2(\beta) - 4) \\
&\quad - 2R_N^2\text{sen}^2(\beta)]h^2d^2 - \frac{\cos^2(\beta)(5\cos^2(\beta) - 4)}{4vR_N^3}d^4 \\
&\quad + \frac{\cos^2(\beta)(4R_{NIP}\text{sen}^2(\beta) - R_N\cos^2(\beta))}{4vR_{NIP}^3R_N}h^4 \quad (2.95)
\end{aligned}$$

A aproximação *quadrática* do SRC quarta ordem é definida como:

$$\begin{aligned}
t^2(d, h) = t_0^2 &+ \frac{4t_0\text{sen}(\beta)}{v}d + 2\frac{vt_0\cos^2(\beta) + 2R_N\text{sen}^2(\beta)}{v^2R_N}d^2 + \frac{2t_0\cos^2(\beta)}{vR_{NIP}}h^2 \\
&+ \frac{2\text{sen}(\beta)\cos^2(\beta)(2R_N - vt_0)}{v^2R_N^2}d^3 \\
&+ \frac{2\text{sen}(\beta)\cos^2(\beta)(2R_{NIP}R_N - 2vt_0R_{NIP} - vt_0R_N)}{v^2R_{NIP}^2R_N}dh^2 \\
&+ \frac{\cos^2(\beta)}{v^2R_{NIP}^3R_N^2}[vt_0R_{NIP}^2(6 - 8\cos^2(\beta)) + vt_0R_{NIP}R_N(4 - 5\cos^2(\beta)) \\
&+ 2vt_0R_N^2\text{sen}^2(\beta) - 4R_{NIP}R_N^2\text{sen}^2(\beta) + R_{NIP}R_N(10\cos^2(\beta) - 8)]d^2h^2 \\
&+ \frac{\cos^2(\beta)(R_N(10\cos^2(\beta) - 8) + vt_0(4 - 5\cos^2(\beta)))}{2v^2R_N^3}d^4 \\
&+ \frac{\cos^2(\beta)(4vt_0R_{NIP}\text{sen}^2(\beta) - vt_0R_N\cos^2(\beta) + 2R_{NIP}R_N\cos^2(\beta))}{2v^2R_{NIP}^3R_N}h^4 \quad (2.96)
\end{aligned}$$

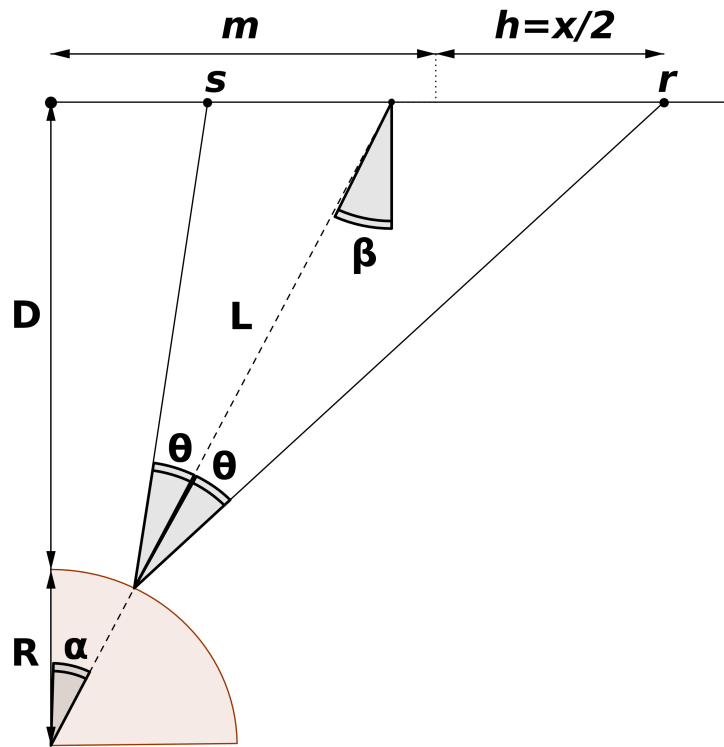
A aproximação *quadrática deslocada* do SRC quarta ordem é definida como:

$$\begin{aligned}
(t(h, d) - t_0 + \frac{2}{v}R_{NIP})^2 &= (\frac{2}{v}R_{NIP})^2 + \frac{8R_{NIP}\text{sen}(\beta)}{v^2}d + 4\frac{R_{NIP}\cos^2(\beta) + R_N\text{sen}^2(\beta)}{v^2R_N}d^2 \\
&+ \frac{4\cos^2(\beta)}{v^2}h^2 + \frac{4\text{sen}(\beta)\cos^2(\beta)(R_N - R_{NIP})}{v^2R_N^2}d^3 - \frac{8\text{sen}(\beta)\cos^2(\beta)}{v^2R_N}dh^2 \\
&+ \frac{\cos^2(\beta)}{v^2R_N^3}[R_N(5\cos^2(\beta) - 4) + R_{NIP}(4 - 5\cos^2(\beta))]d^4 + \frac{4\cos^2(\beta)(3 - 4\cos^2(\beta))}{v^2R_N^2}d^2h^2 \\
&\quad + \frac{4\cos^2(\beta)\text{sen}^2(\beta)}{v^2R_{NIP}R_N}h^4 \quad (2.97)
\end{aligned}$$

2.9 Superfície de reflexão comum para o modelo do refletor circular

No caso do modelo do refletor circular, representado esquematicamente na Figura 3, em um meio homogêneo de velocidade v , a solução analítica fechada é complicada, pois envolve uma solução de uma equação polinomial de alta ordem (LANDA et al., 1999). No entanto, a superfície de tempo de trânsito de reflexão pode ser descrita analiticamente por relações paramétricas (GLAESER, 1999).

Figura 3 – Representação esquemática do modelo do refletor circular em um meio de velocidade constante v . m é a posição do ponto médio do par fonte s e receptor r , L é o comprimento do raio normal, β é ângulo de emergência do raio normal na superfície e R é o raio do refletor circular.



Fonte: Do Autor.

As coordenadas do ponto médio e do meio-afastamento $h = x/2$ são expressas parametricamente por:

$$m = R\sin(\alpha) + (D + R - R\cos(\alpha)) \frac{\cos(\alpha)\cos(\alpha)}{\cos^2(\theta) - \sin^2(\alpha)} \quad (2.98)$$

$$h = (D + R - R\cos(\alpha)) \frac{\cos(\theta)\cos(\theta)}{\cos^2(\theta) - \sin^2(\alpha)} \quad (2.99)$$

E o tempo de reflexão é expresso como:

$$\begin{aligned}\Psi &= \frac{D + R - R \cos(\alpha)}{v} \left[\frac{1}{\cos(\alpha - \theta)} + \frac{1}{\cos(\alpha + \theta)} \right] \\ &= 2 \frac{D + R - R \cos(\alpha)}{v} \frac{\cos(\alpha) \cos(\theta)}{\cos^2(\theta) - \sin^2(\alpha)}\end{aligned}\quad (2.100)$$

Onde v é a velocidade do meio. A relação com os parâmetros do SRC é dada analiticamente, em função dos parâmetros do modelo, por:

$$t_0 = \frac{2(\sqrt{m_0^2 + L^2} - R)}{v} \quad (2.101)$$

$$R_{NIP} = \sqrt{m_0^2 + L^2} - R \quad (2.102)$$

$$R_N = \sqrt{m_0^2 + L^2} \quad (2.103)$$

$$\sin(\beta) = \frac{m_0}{\sqrt{m_0^2 + L^2}} \quad (2.104)$$

As Equações 2.98-2.100 definem a superfície de tempo de reflexão $\Psi(h, d)$ pela dependência paramétrica $\{m(\alpha, \theta), h(\alpha, \theta), \Psi(\alpha, \theta)\}$. Onde L é o comprimento do raio normal, v é a velocidade do meio, β é ângulo de emergência do raio normal, e m_0 é o ponto médio central.

3 APROXIMAÇÕES DE PADÉ DO TEMPO DE TRÂNSITO PARA A CONFIGURAÇÃO PONTO MÉDIO COMUM

Nessa Caítulo são desenvolvidas aproximações de Padé para as séries de Taylor de quarta ordem obtidas nas Seções 2.4.1, 2.4.2 e 2.5. Estas expansões em série de Taylor do tempo de trânsito são dadas para os modelos: variação linear da velocidade (Equação 2.60), variação linear do quadrado da vagarosidade (Equação 2.69) e modelo TIV (Equação 2.78).

Para o modelo variação linear da velocidade e variação linear do quadrado da vagarosidade a equação do tempo de trânsito é dada analiticamente em função dos parâmetros do modelo. Para o modelo TIV homogêneo a aproximação de Padé do tempo de trânsito depende do parâmetro η (anelipticidade). As aproximações de Padé do tempo de trânsito em função do afastamento, obtidas neste Capítulo, são válidas para a configuração ponto médio comum.

3.1 Aproximação de Padé da equação generalizada

Para obtenção dos aproximantes de Padé das expansões em série de Taylor, utilizamos a forma geral dos aproximantes de Padé, desenvolvida no Apêndice B, para uma série na forma:

$$t^2(x) \approx \lambda_0 + \lambda_1 x^2 + \lambda_2 x^4 + O(x^6) \quad (3.1)$$

Para uma série de Taylor quarta ordem descrita pela Equação 3.1, o aproximante de Padé será:

$$[2/2] = \zeta_1 + \frac{x^2 \zeta_2}{1 + \zeta_3 x^2} \quad (3.2)$$

Onde:

$$\zeta_1 = \lambda_0 \quad (3.3)$$

$$\zeta_2 = \lambda_1 \quad (3.4)$$

$$\zeta_3 = \frac{-\lambda_2}{\lambda_1} \quad (3.5)$$

A Equação 3.2 é uma generalização do aproximante de Padé para uma série de Taylor que possa ser expressa na forma da Equação 3.1. De modo que para obter o aproximante de Padé da série de Taylor de quarta ordem, basta substituir os coeficientes λ_i da série de Taylor (Equação 3.1) na Equação 3.2.

Podemos obter o aproximante de Padé de maneira direta, por outra metodologia, sem realizar as substituições descritas: A expressão geral do aproximante de Padé para uma série na forma descrita pela Equação 3.1, é a divisão de dois polinômios $P(x) = p_0 + p_1x + p_2x^2$ e $Q(x) = q_0 + q_1x + q_2x^2$, cujos coeficientes p_i e q_i serão os coeficientes do aproximante de Padé.

Substituindo a expansão em série de Taylor quarta ordem da equação generalizada (Equação 2.46) na condição de existência para os aproximantes de Padé (Equação A.7):

$$(p_0 + p_1x + p_2x^2) = \left(t_0^2 + \frac{x^2}{v^2} + \frac{A}{2} \frac{x^4}{v^4 t_0^2} + O(x^6) \right) (q_0 + q_1x + q_2x^2) \quad (3.6)$$

Sem perda de generalidade escolhe-se o valor de $q_0 = 1$. O lado esquerdo de 3.6 é o polinômio $P(x)$, o lado direito é a multiplicação da série de Taylor (Equação 2.46) com o polinômio $Q(x)$. Essa multiplicação resulta em:

$$(p_0 + p_1x + p_2x^2) = t_0^2 + q_1 t_0^2 x + q_2 t_0^2 x^2 + \frac{x^2}{v^2} + q_1 \frac{x^3}{v^2} + q_2 \frac{x^4}{v^2} + \frac{A}{2} \frac{x^4}{v^4 t_0^2} + q_1 \frac{A}{2} \frac{x^5}{v^4 t_0^2} + q_2 \frac{A}{2} \frac{x^6}{v^4 t_0^2}$$

Organizando as igualdades a partir das potências de x , e ignorando termos de ordem superior a x^4 :

$$\begin{aligned} x^0 : p_0 &= t_0^2 \\ x^1 : p_1 &= q_1 t_0^2 \\ x^2 : p_2 &= q_2 t_0^2 + \frac{q_2}{v^2} \\ x^3 : 0 &= \frac{q_1}{v^2} \\ x^4 : 0 &= \frac{q_2}{v^2} + \frac{A}{2v^4 t_0^2} \end{aligned}$$

Dessas expressões surge que:

$$q_1 = 0$$

$$p_1 = 0$$

$$q_2 = \frac{-A}{2v^2 t_0^2}$$

$$p_2 = \frac{1}{v^2} \left[1 - \frac{A}{2} \right]$$

Então, substituindo os coeficientes q_i e p_i na Equação A.1, utilizando as Equações A.2 e A.3, e após algumas simplificações, a expressão para o aproximante de Padé será:

$$[2/2] = t_0^2 + \frac{x^2}{v^2} \frac{1}{1 + g_e x^2} \quad (3.7)$$

Onde o coeficiente g_e é dado por:

$$g_e = \frac{-A}{2t_0^2 v^2} \quad (3.8)$$

A Equação 3.2 generaliza a metodologia descrita para a obtenção do aproximante de Padé: Primeiro, comparamos a série de Taylor quarta ordem, Equação 2.46, com a Equação 3.1. Por comparação estabelecemos as constantes λ_i como:

$$\lambda_0 = t_0^2$$

$$\lambda_1 = \frac{1}{v^2}$$

$$\lambda_2 = \frac{A}{2v^4 t_0^2}$$

Substituindo os coeficientes λ_i nas Equações 3.3-3.5:

$$\zeta_1 = t_0^2$$

$$\zeta_2 = \frac{1}{v^2}$$

$$\zeta_3 = \frac{-A}{2t_0^2 v^2}$$

Substituindo os coeficientes ζ_i na Equação 3.2, a aproximação de Padé será a Equação 3.7:

A Equação 3.7 é semelhante à Equação 2.18 desenvolvida para o modelo de uma pilha de camadas plano horizontais, e também é semelhante à Equação 2.49 desenvolvida

por Blias (2007). Se escolhermos $A = -2\gamma t_0^2 v^2$, $B = -A/2$ e $C = A^2/4$; e substituímos esses valores na Equação 2.37, teremos:

$$t^2(x) = t_0^2 + \frac{x^2}{v^2} \frac{1}{1 + \gamma x^2} \quad (3.9)$$

Que é a Equação 2.49 proposta por Blias (2007). Onde γ é dado por:

$$\gamma = \frac{-A}{2t_0^2 v^2} \quad (3.10)$$

A Equação 3.7 é equivalente à Equação 2.49, ou seja, a Equação 2.49 é a aproximação de Padé para a Equação generalizada (Equação 2.37).

3.2 Aproximação de Padé para o modelo de uma camada com variação linear de velocidade sobre um refletor plano horizontal

A expansão em série de Taylor do tempo de trânsito no modelo variação linear da velocidade é expressa na Equação 2.60. Comparando a Equação 2.60 com a Equação 3.1, estabelecemos as constantes λ_i como:

$$\lambda_0 = t_0^2$$

$$\lambda_1 = \frac{1}{v^2}$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{r^2 + 1}{r^2 - 1} \ln r \right) \frac{1}{v^4 t_0^2}$$

Substituindo os coeficientes λ_i nas Equações 3.3-3.5:

$$\zeta_1 = t_0^2$$

$$\zeta_2 = \frac{1}{v^2}$$

$$\zeta_3 = -\frac{1}{4} \left(1 - \frac{r^2 + 1}{r^2 - 1} \ln r \right) \frac{1}{v^2 t_0^2}$$

Substituindo os coeficientes ζ_i na Equação 3.2, a aproximação de Padé será:

$$[2/2] = t_0^2 + \frac{x^2}{v^2} \frac{1}{1 + \Omega_v x^2} \quad (3.11)$$

Onde:

$$\Omega_v = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{r^2 + 1}{r^2 - 1} \ln r \right) \frac{1}{v^2 t_0^2} \quad (3.12)$$

r é definido como a razão entre a velocidade na base e no topo do modelo. Para melhorar a acurácia da aproximação de Padé 3.11, utilizamos o conceito de frações contínuas apresentado na Seção 2.1. A fração, do lado direito da aproximação de Padé 3.11, pode ser representada como o primeiro termo de uma série recursiva de frações contínuas (semelhante premissa foi utilizada para obter a Equação 2.19 na Seção 2.1):

$$t^2(x) = t_0^2 + \frac{x^2}{v^2} \left(1 + \Omega_v x^2 \left\{ 1 + \Omega_v x^2 \left[1 + \Omega_v x^2 \right]^{-1} \right\}^{-1} \right)^{-1} \quad (3.13)$$

3.3 Aproximação de Padé para o modelo de uma camada com variação linear do quadrado da vagarosidade sobre um refletor plano horizontal

A expansão em série de Taylor do tempo de trânsito no modelo variação linear do quadrado da vagarosidade é expressa na Equação 2.69. Comparando a Equação 2.69 com a Equação 3.1, estabelecemos as constantes λ_i como:

$$\lambda_0 = t_0^2$$

$$\lambda_1 = \frac{1}{v^2}$$

$$\lambda_2 = -\frac{(r-1)^2}{12r} \frac{1}{v^4 t_0^2}$$

Substituindo os coeficientes λ_i nas Equações 3.3-3.5:

$$\zeta_1 = t_0^2$$

$$\zeta_2 = \frac{1}{v^2}$$

$$\zeta_3 = \frac{(r-1)^2}{12r} \frac{1}{v^2 t_0^2}$$

Substituindo os coeficientes ζ_i na Equação 3.2, a aproximação de Padé será:

$$[2/2] = t_0^2 + \frac{x^2}{v^2} \frac{1}{1 + \Omega_s x^2} \quad (3.14)$$

Onde:

$$\Omega_s = \frac{(r - 1)^2}{12r} \frac{1}{v^2 t_0^2} \quad (3.15)$$

r é definido como a razão entre a velocidade na base e no topo do modelo. Para melhorar a acurácia da aproximação de Padé 3.14, utilizamos o conceito de frações contínuas apresentado na Seção 2.1. A fração, do lado direito da aproximação de Padé 3.14, pode ser representada como o primeiro termo de uma série recursiva de frações contínuas (semelhante premissa foi utilizada para obter a Equação 2.19 na Seção 2.1):

$$t^2(x) = t_0^2 + \frac{x^2}{v^2} (1 + \Omega_s x^2 \{1 + \Omega_s x^2 [1 + \Omega_s x^2]^{-1}\}^{-1})^{-1} \quad (3.16)$$

3.4 Aproximação de Padé para o modelo de uma camada homogênea e transversalmente isotrópica sobre um refletor plano horizontal

A expansão em série de Taylor quarta ordem do tempo de trânsito para o modelo TIV é expressa na Equação 2.78. Comparando a Equação 2.78 com a Equação 3.1, estabelecemos os coeficientes λ_i :

$$\lambda_0 = t_0^2$$

$$\lambda_1 = \frac{1}{v^2}$$

$$\lambda_2 = \frac{-2\eta}{v^4 t_0^2}$$

Substituindo os coeficientes λ_i nas Equações 3.3-3.5:

$$\zeta_1 = t_0^2$$

$$\zeta_2 = \frac{1}{v^2}$$

$$\zeta_3 = \frac{2\eta}{v^2 t_0^2}$$

Substituindo os coeficientes ζ_i na Equação 3.2, a aproximação de Padé para o modelo TIV será:

$$[2/2] = t_0^2 + \frac{x^2}{v^2} \frac{1}{1 + \frac{2\eta}{t_0^2 v^2} x^2} \quad (3.17)$$

Para melhorar a acurácia da aproximação de Padé 3.17, utilizamos o conceito de frações contínuas apresentado na Seção 2.1. A fração, do lado direito da aproximação de Padé 3.17, pode ser representada como o primeiro termo de uma série recursiva de frações contínuas (semelhante premissa foi utilizada para obter a Equação 2.19 na Seção 2.1):

$$t^2(x) = t_0^2 + \frac{x^2}{v^2} (1 + \Omega_{tiv} x^2 \{1 + \Omega_{tiv} x^2 [1 + \Omega_{tiv} x^2]^{-1}\}^{-1})^{-1} \quad (3.18)$$

Onde:

$$\Omega_{tiv} = \frac{2\eta}{v^2 t_0^2} \quad (3.19)$$

4 COMPARAÇÃO DAS APROXIMAÇÕES DO TEMPO DE TRÂNSITO PARA A CONFIGURAÇÃO PONTO MÉDIO COMUM

Testamos a acurácia das aproximações de Padé do tempo de trânsito desenvolvidas no Capítulo 3 e das aproximações: generalizada, Equação 2.37 (STOVAS; FOMEL, 2010); sobretempo normal, Equação 2.47 (DIX, 1955); hipérbole deslocada, Equação 2.20 (DE BAZELAIRE, 1988) e Equação 2.48 (ALKHALIFA; TSVANKIN, 1995), nos modelos de variação linear de velocidade, variação linear do quadrado da vagarosidade e modelo TIV.

Os programas utilizados para a realização dos testes foram desenvolvidos e disponibilizados por Sergey Fomel e estão disponíveis em: www.ahay.org na aba *reproducible documents*. Utilizamos os mesmos parâmetros disponíveis nos *Scripts*, reproduzindo fielmente os experimentos realizados pelos autores Fomel e Stovas, (2010). Apenas incluímos as aproximações de Padé e Padé com frações contínuas aqui desenvolvidas. As versões modificadas dos *Scripts*, utilizadas neste trabalho, são apresentadas no Apêndice D.

Estes programas produzem superfícies de erro relativo absoluto para cada aproximação testada: O erro relativo absoluto é o módulo da diferença entre a aproximação do tempo de trânsito utilizada e o tempo de trânsito exato, dividida pelo tempo de trânsito exato (Equação 4.1). O resultado é um valor percentual que representa o erro da aproximação de tempo de trânsito, sendo próximo de zero quando o erro de aproximação é pequeno.

$$erro = 100 \times \frac{|t_{aprox}(x) - \psi(x)|}{\psi(x)} \quad (4.1)$$

As velocidades utilizadas nas aproximações de tempo de trânsito para os modelos de uma camada com variação linear de velocidade e com variação linear do quadrado da vagarosidade sobre um refletor plano horizontal são obtidas a partir das Equações 2.53-2.65, respectivamente. O modelo TIV utilizado é formado por uma pilha de camadas anisotrópicas sobre um refletor plano horizontal, a velocidade v , utilizada nas aproximações, é escolhida de modo a produzir o melhor ajuste das curvas aproximadas com o tempo de trânsito exato. O parâmetro de anisotropia η é calculado a partir da Equação 2.75 em função de A , dado por:

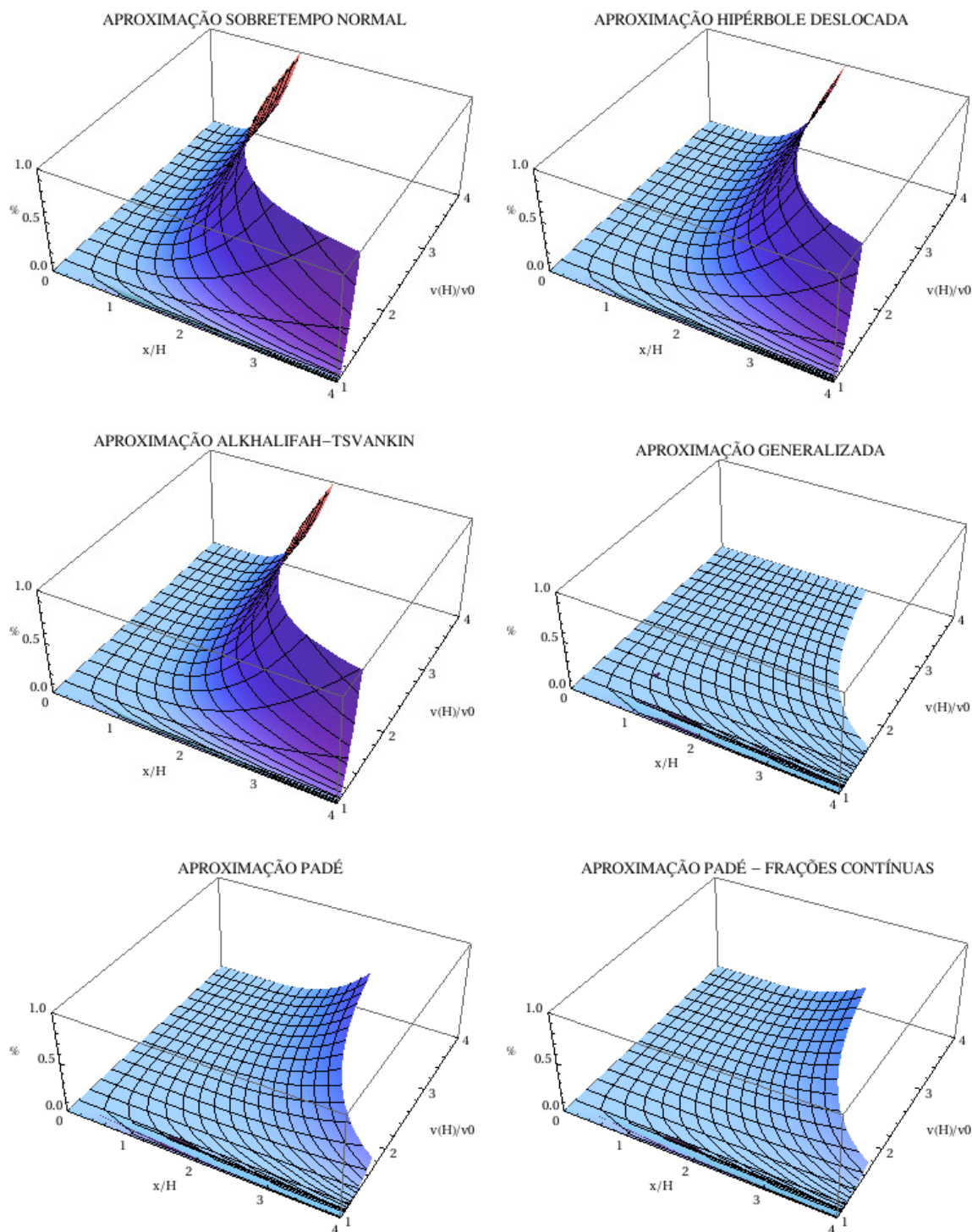
$$A = \frac{(1 - s)}{2} \quad (4.2)$$

Onde s é um parâmetro adimensional dado em função das velocidades intervalares v_k do modelo pela Equação 2.21.

4.1 Modelo de variação linear de velocidade

O tempo de trânsito exato para o modelo variação linear de velocidade é dado pela Equação 2.51, em função de parâmetros do modelo. O erro relativo absoluto é produzido a partir da Equação 4.1: A aproximação do tempo de trânsito é comparada com a Equação de referência do tempo de trânsito para o modelo variação linear de velocidade (Equação 2.51).

Figura 4 – Amplitude do Erro relativo absoluto (%) das aproximações (da esquerda para direita e de cima para baixo): sobretempo normal (Equação 2.47), hipérbole deslocada (Equação 2.20), aproximação modelo TIV (Equação 2.48), aproximação generalizada (Equação 2.37) e aproximações de Padé [2/2] desenvolvidas no Capítulo 3 (Equações 3.11 e 3.13), para o modelo variação linear de velocidade.



Fonte: Do Autor.

Construímos as superfícies de erro absoluto relativo para o modelo de variação linear da velocidade, a partir da Equação 4.1, para as aproximações de tempo de trânsito:

generalizada (STOVAS; FOMEL, 2010) (Equação 2.37), sobretempo normal (DIX, 1955) (Equação 2.47), hipérbole deslocada (DE BAZELAIRE, 1988) (Equação 2.20), (ALKHALIFA; TSVANKIN, 1995) (Equação 2.48) e a aproximação de Padé dada pela Equação 3.11. x/D (abcissas) é o afastamento fonte-receptor sobre a profundidade do refletor; $r = V(D)/V_0$ (ordenadas), é a razão entre a velocidade da base e do topo do modelo, relacionada ao gradiente de velocidade.

A aproximação de Padé consegue aumentar a acurácia da aproximação hiperbólica de tempo de trânsito, sobretempo normal, e diverge mais suavemente que as aproximações hipérbole deslocada e aproximação modelo TIV (Figura 4). A acurácia da aproximação de Padé é melhorada com o auxílio das frações contínuas, suavizando ainda mais a divergência da superfície de erro da aproximação.

A aproximação de Padé é inferior à aproximação que a originou, equação generalizada. Porém, apresenta uma vantagem, essa aproximação e a aproximação de Padé com frações contínuas necessitam apenas do parâmetro A , dependendo de menos parâmetros do que a equação generalizada, Equação 2.37.

4.2 Modelo de variação linear do quadrado da vagarosidade

O tempo de trânsito exato para o modelo variação linear do quadrado da vagarosidade é dado pela Equação 2.62 (CERVENY, 2001), em função de parâmetros do modelo.

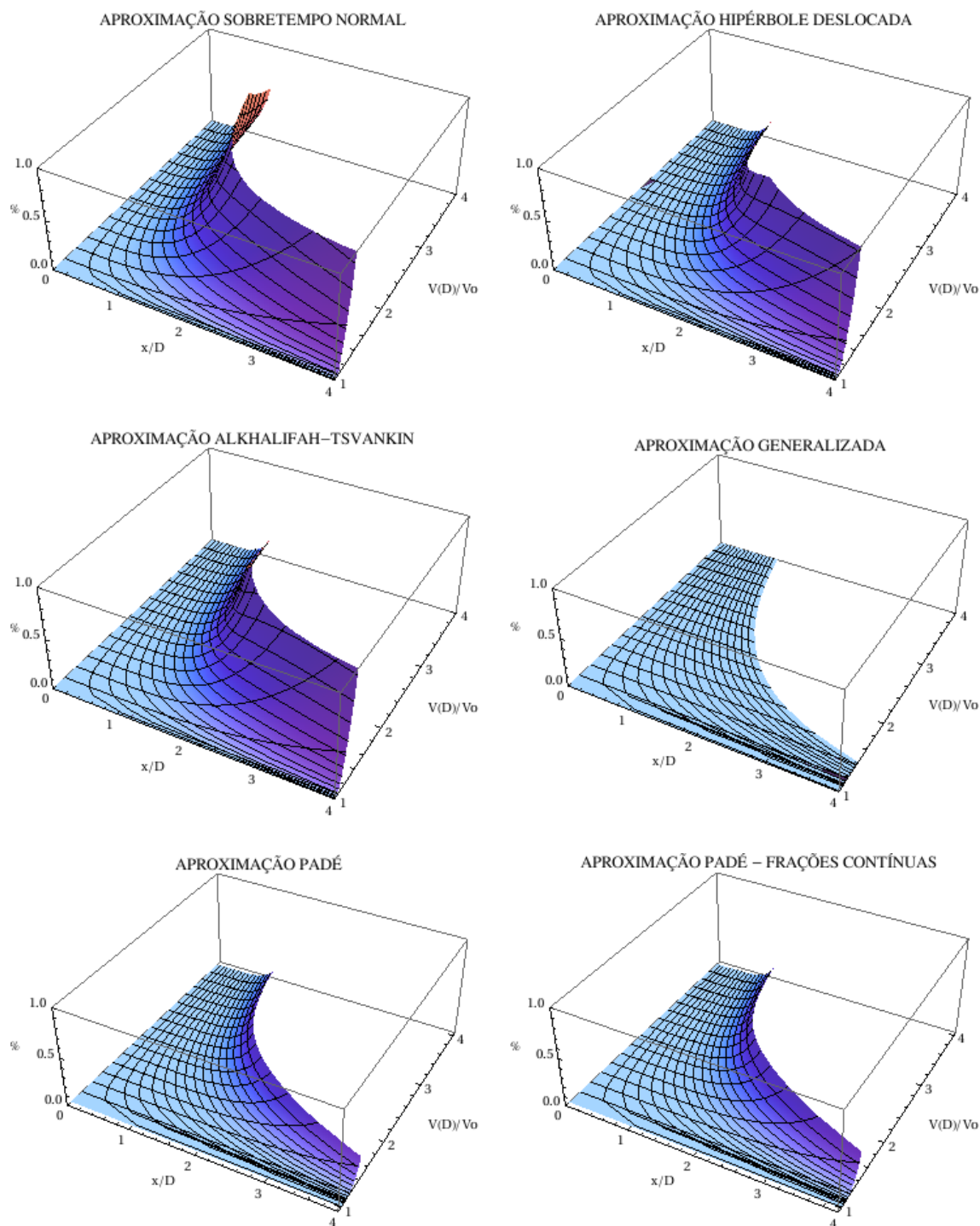
Construímos as superfícies de erro absoluto relativo, a partir da Equação 4.1, para as aproximações de tempo de trânsito: generalizada (STOVAS; FOMEL, 2010) (Equação 2.37), sobretempo normal (DIX, 1955) (Equação 2.47), hipérbole deslocada (DE BAZELAIRE, 1988) (Equação 2.20), (ALKHALIFA; TSVANKIN, 1995) (Equação 2.48) e a aproximação de Padé dada pela Equação 3.14. x/D (abcissas) é o afastamento fonte-receptor sobre a profundidade do refletor; $r = V(D)/V_0$ (ordenadas), é a razão entre a velocidade da base e do topo do modelo, relacionada ao gradiente da vagarosidade.

As aproximações de Padé aumentam a região de erro mínimo, quando comparadas com as aproximações sobretempo normal, hipérbole deslocada e a aproximação do modelo TIV. As aproximações de Padé também divergem mais suavemente na região apresentada (Figura 5).

Da mesma forma que no experimento anterior, a acurácia das aproximações de Padé é intermediária entre as aproximações de tempo de trânsito supracitadas e a aproximação generalizada. E a mesma vantagem, a favor das aproximações de Padé, se mantém. Pois, para o modelo de variação linear da vagarosidade, essas aproximações dependerão também apenas do parâmetro A . Essa vantagem pode facilitar a construção de algoritmos de

inversão: Apenas um parâmetro além da velocidade do meio precisa ser invertido.

Figura 5 – Amplitude do Erro relativo absoluto (%) das aproximações (da esquerda para direita e de cima para baixo): sobretempo normal (Equação 2.47), hipérbole deslocada (Equação 2.20), modelo TIV (Equação 2.48), aproximação generalizada (Equação 2.37) e aproximações de Padé [2/2] desenvolvidas no Capítulo 3 (Equações 3.14 e 3.16), para o modelo variação linear do quadrado da vagarosidade.



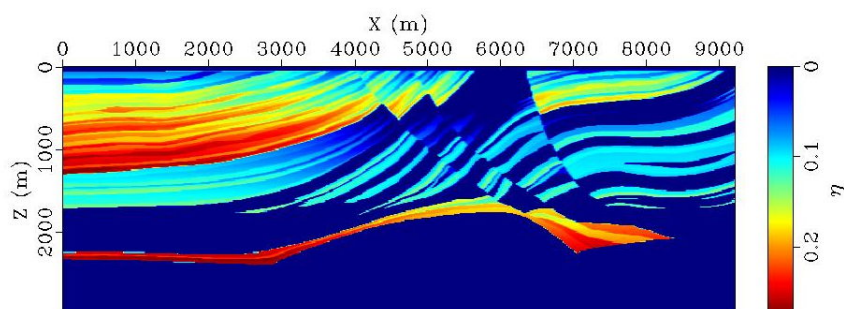
Fonte: Do Autor.

4.3 Modelo transversalmente isotrópico (TIV)

Realizamos um teste numérico para as aproximações de Padé de tempo de transito em um meio transversalmente isotrópico com eixo de simetria vertical (TIV) utilizando o modelo anisotrópico Marmousi: Neste modelo, η varia no intervalo de 0 a 0.27, que são valores comumente observados na prática (ALKHALIFA, 1997).

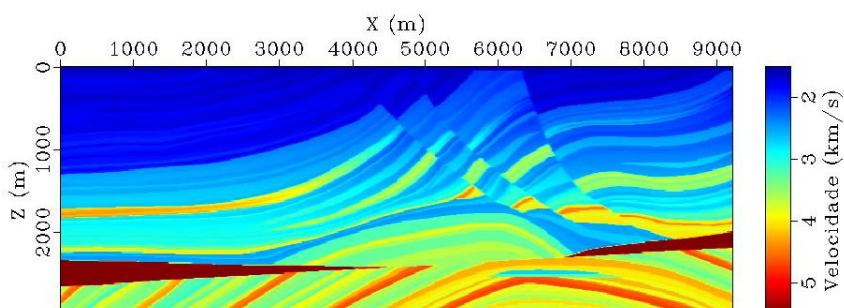
O modelo Marmousi anisotrópico foi criado a partir de dados de um perfil ao norte de Benguela atravessando a bacia de Kwanza em Angola, simula uma região de drift continental, com numerosas e extensas falhas normais criadas por causa do drift (VERSTEEG, 1993). A zona alvo é o reservatório localizado a 2500m. O modelo contém muitos refletores, falhas inclinadas, e forte variação de velocidade em ambas as direções, vertical e horizontal (variando de 1500m/s para 5500m/s) (ALKHALIFA, 1997).

Figura 6 – Distribuição do parâmetro de anisotropia η (anelipticidade) no Modelo Marmousi anisotrópico. O parâmetro η é uma quantidade adimensional que varia comumente no intervalo de 0 a 0.27.



Fonte: Adaptado de (STOVAS; FOMEL, 2010).

Figura 7 – Distribuição da velocidade horizontal (Km/s) no Modelo Marmousi anisotrópico. A velocidade horizontal varia de 1.5 Km/s a 6 Km/s.

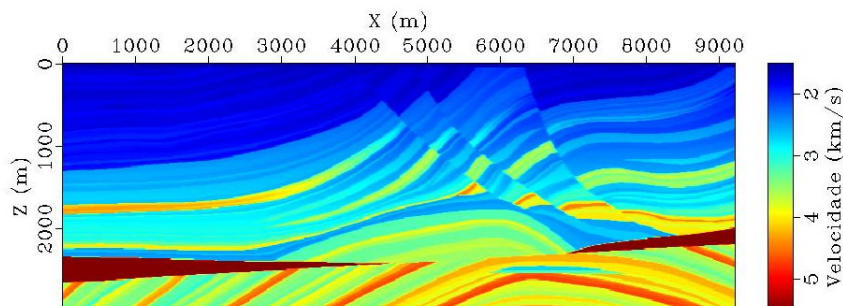


Fonte: Adaptado de (STOVAS; FOMEL, 2010).

Extraindo a primeira coluna à esquerda do modelo Marmousi anisotrópico, e a partir da extensão dessa coluna produzindo um modelo unidimensional TIV, formado

por uma pilha de camadas plano horizontais, cada uma com parâmetro de anisotropia η_i (STOVAS; FOMEL, 2010).

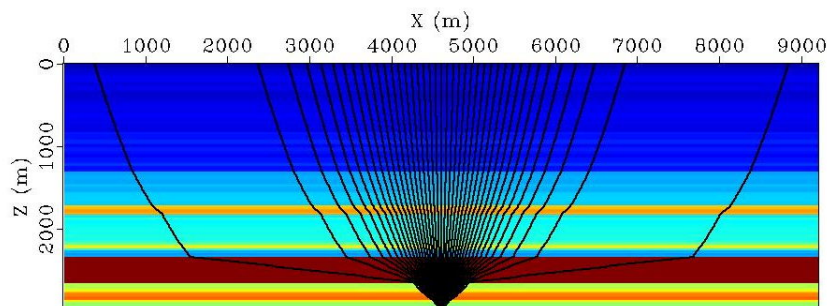
Figura 8 – Distribuição da velocidade vertical (Km/s) no Modelo Marmousi anisotrópico. A velocidade vertical varia de 1.5 Km/s a 6 Km/s.



Fonte: Adaptado de (STOVAS; FOMEL, 2010).

O tempo de reflexão exato é obtido através do traçamento de raios. Comparamos o tempo de trânsito exato com as aproximações de Padé do tempo de trânsito e as aproximações de tempo de trânsito: para o modelo TIV (ALKHALIFA; TSVANKIN, 1995), hipérbole deslocada (DE BAZELAIRE, 1988) e equação generalizada (STOVAS; FOMEL, 2010) (Equação 2.37). Todas as etapas são realizadas automaticamente pelo *Script* disponibilizado por Sergey Fomel¹. Utilizamos os mesmos parâmetros v e η disponíveis no *Script* original, reproduzindo o experimento realizado pelos autores Fomel e Stovas, (2010). Apenas incluímos as aproximações de Padé e Padé com frações contínuas desenvolvidas para o modelo TIV; a versão modificada do *Script*, utilizada neste trabalho, é apresentada no Apêndice D.

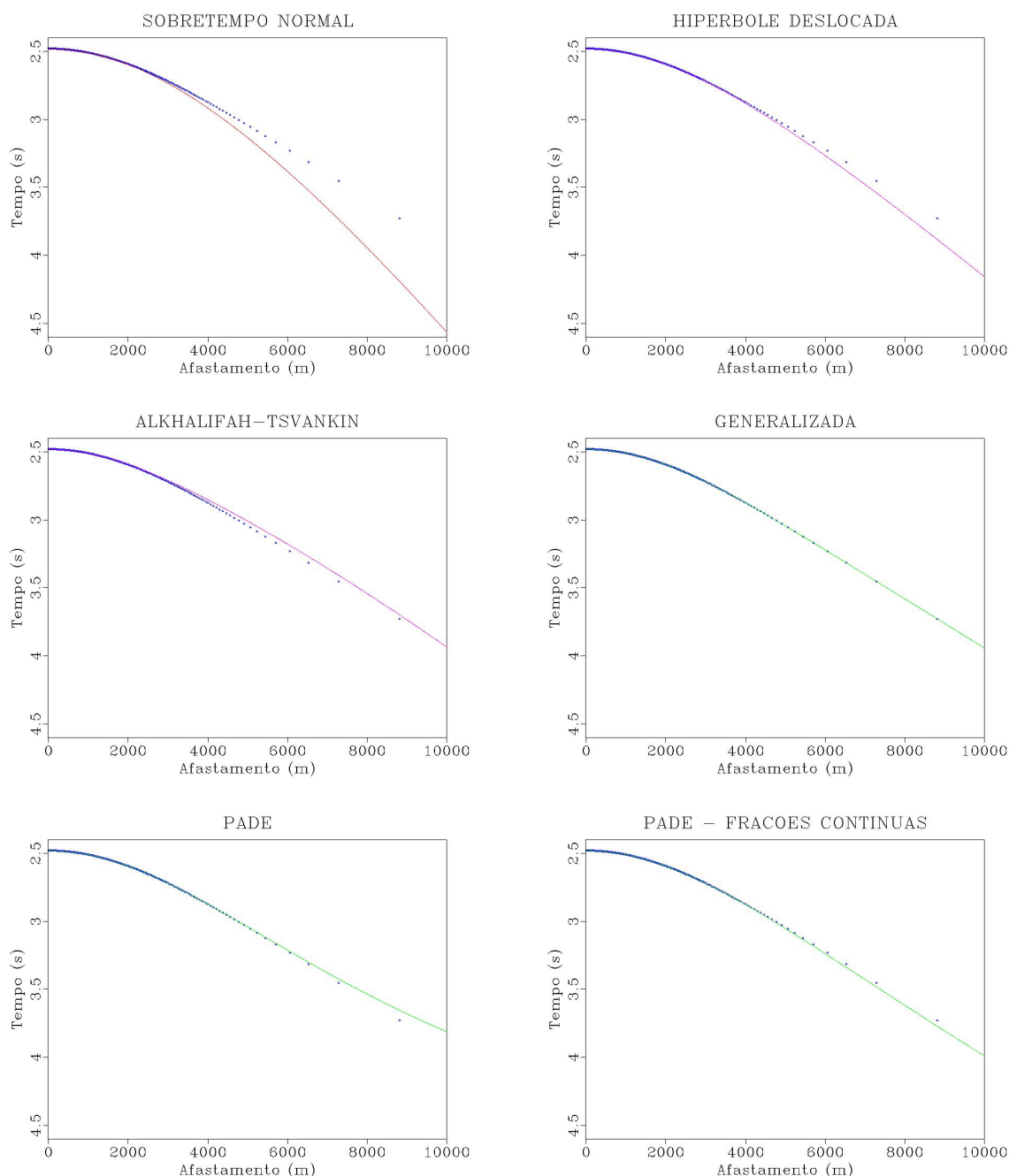
Figura 9 – Distribuição da velocidade vertical (Km/s) no modelo TIV 1D. O tempo de trânsito exato $\psi(x)$ é obtido através do traçamento de raios.



Fonte: Adaptado de (STOVAS; FOMEL, 2010).

¹ O pacote MADAGASCAR utiliza scripts chamados de “SConstruct” que realizam as etapas de processamento seguindo uma sequência determinada de passos. Os *Scripts* utilizados estão disponíveis em: www.ahay.org na aba *reproducible documents*. Do Autor.

Figura 10 – Curvas de tempo de trânsito de reflexão das aproximações (da esquerda para direita e de cima para baixo): sobretempo normal (Equação 2.47), hipérbole deslocada (Equação 2.20), modelo TIV (Equação 2.48), aproximação generalizada (Equação 2.37) e aproximações de Padé [2/2] desenvolvidas no Capítulo 3 (Equações 3.17 e 3.18 para o modelo TIV 1D da Figura 9. Os pontos representam o tempo de trânsito exato $\psi(x)$ produzido através do traçamento de raios, as linhas contínuas as curvas de tempo de trânsito da aproximadas.



Fonte: Do Autor.

A velocidade v utilizada nas aproximações é igual a 2.610 km/s, é a velocidade que produz o melhor ajuste entre as curvas aproximadas e o tempo de trânsito exato. O

parâmetro adimensional s é igual a 2.267 e o parâmetro η é calculado a partir da Equação 2.75 em função de A , dado pela Equação 4.2.

A aproximação de Padé para o modelo TIV produz resultados melhores que a aproximação hiperbólica do tempo de trânsito, sobretempo normal, que começa a divergir a partir de 3000m. As aproximações de Padé e Padé frações contínuas mantém a sua acurácia até 6500m, superando inclusive a aproximação convencional do modelo TIV (Equação 2.48) e a aproximação hipérbole deslocada, estas começam a divergir do valor exato a partir de 4000m.

A equação generalizada é exata até 10000m, produzindo o melhor resultado de todas as aproximações para o modelo TIV. No caso do meio TIV os parâmetros da aproximação generalizada são dados diretamente pelas Equações 2.75-2.77, sendo apenas necessário o conhecimento do parâmetro η do meio.

5 APROXIMAÇÕES DE PADÉ DO TEMPO DE TRÂNSITO PARA A CONFIGURAÇÃO SUPERFÍCIE DE REFLEXÃO COMUM (SRC)

No Apêndice B desenvolvemos a forma generalizada do aproximante de Padé para uma série de Taylor de quarta ordem na forma $t^2(h) \approx \lambda_0 + \lambda_1 h^2 + \lambda_2 h^4 + O(h^6)$. No Apêndice C desenvolvemos a forma generalizada do aproximante de Padé para uma série de Taylor de quarta ordem na forma $t(d) \approx \lambda_0 + \lambda_1 d + \lambda_2 d^2 + \lambda_3 d^3 + \lambda_4 d^4$. Esses resultados serão úteis para definirmos os aproximantes de Padé para as aproximações em séries de Taylor quarta ordem da superfície SRC (HöCHT, 2002). Apresentadas previamente na Seção 2.8, basta definir os coeficientes λ_i para cada série de Taylor e substituir na forma generalizada correspondente.

Como os aproximantes de Padé são definidos para funções de apenas uma variável (ver Apêndice A), as aproximações de Padé para a configuração SRC serão realizadas em uma direção de cada vez. Por isso serão definidas aproximações de Padé com expansão na direção h , e aproximações de Padé com expansão na direção d . Uma das direções é tida como contante e a aproximação de Padé é realizada na outra direção.

Para uma série de Taylor na forma; os coeficientes λ_i são constantes e h é variável:

$$t^2(h) \approx \lambda_0 + \lambda_1 h^2 + \lambda_2 h^4 + O(h^6) \quad (5.1)$$

O aproximante de Padé será dado por:

$$[2/2] = \zeta_1 + \frac{h^2 \zeta_2}{1 + \zeta_3 h^2} \quad (5.2)$$

Onde:

$$\zeta_1 = \lambda_0 \quad (5.3)$$

$$\zeta_2 = \lambda_1 \quad (5.4)$$

$$\zeta_3 = \frac{-\lambda_2}{\lambda_1} \quad (5.5)$$

Se a série de Taylor é expressa na forma da Equação 5.1, o aproximante de Padé desta série de Taylor de quarta ordem será dado pela Equação 5.2.

Para uma série de Taylor de quarta ordem na forma; os coeficientes λ_i são constantes e d é variável:

$$t^2(d) \approx \lambda_0 + \lambda_1 d + \lambda_2 d^2 + \lambda_3 d^3 + \lambda_4 d^4 \quad (5.6)$$

O aproximante de Padé será:

$$[2/2] = \frac{p_0 + p_1 d + p_2 d^2}{q_0 + q_1 d + q_2 d^2} \quad (5.7)$$

Onde:

$$q_1 = \frac{-\lambda_2 - \lambda_3 + \lambda_4 \lambda_1}{\lambda_2^2 - \lambda_3 \lambda_1} \quad (5.8)$$

$$q_2 = \frac{-\lambda_4 - \lambda_3 q_1}{\lambda_2} \quad (5.9)$$

$$p_0 = \lambda_0 \quad (5.10)$$

$$p_1 = \lambda_1 + \lambda_0 q_1 \quad (5.11)$$

$$p_2 = \lambda_0 q_2 + \lambda_1 q_1 + \lambda_2 \quad (5.12)$$

O aproximante de Padé da Equação 5.6 não possui uma forma compacta como a Equação 5.2. No entanto, é dado pela Equação 5.7 em função dos coeficientes p_i e q_i nas Equações 5.8-5.12 que dependem dos coeficientes da própria série de Taylor aproximada (coeficientes λ_i).

5.1 Aproximação de Padé para a série de Taylor de quarta ordem $t(h, d)$, expansão de Padé em h

A aproximação $t(h, d)$ em série de Taylor de quarta ordem da superfície SRC (HöCHT, 2002):

$$t(h, d) = t_0 + \frac{2\text{sen}(\beta)}{v} d + \frac{\cos^2(\beta)}{v R_N} d^2 + \frac{\cos^2(\beta)}{v R_{NIP}} h^2 - \frac{\text{sen}(\beta) \cos^2(\beta)}{v R_N^2} d^3 - \frac{\text{sen}(\beta) \cos^2(\beta)}{v R_{NIP} R_N} (2R_{NIP} + R_N) dh^2$$

$$\begin{aligned}
 & - \frac{\cos^2(\beta)}{2vR_{NIP}^3R_N^2} [R_{NIP}^2(8\cos^2(\beta) - 6) + R_{NIP}R_N(5\cos^2(\beta) - 4) \\
 & \quad - 2R_N^2\text{sen}^2(\beta)]h^2d^2 - \frac{\cos^2(\beta)(5\cos^2(\beta) - 4)}{4vR_N^3}d^4 \\
 & \quad + \frac{\cos^2(\beta)(4R_{NIP}\text{sen}^2(\beta) - R_N\cos^2(\beta))}{4vR_{NIP}^3R_N}h^4 \quad (5.13)
 \end{aligned}$$

A variável onde será realizada a aproximação de Padé é o meio-afastamento $h = x/2$, d é mantido constante, e a aproximação de Padé é realizada somente em h . Definindo os coeficientes λ_i na forma:

$$\lambda_0 = t_0 + \frac{2\text{sen}(\beta)}{v}d + \frac{\cos^2(\beta)}{vR_N}d^2 - \frac{\text{sen}(\beta)\cos^2(\beta)}{vR_N^2}d^3 - \frac{\cos^2(\beta)(5\cos^2(\beta) - 4)}{4vR_N^3}d^4 \quad (5.14)$$

$$\begin{aligned}
 \lambda_1 &= \frac{\cos^2(\beta)}{vR_{NIP}} - \frac{\text{sen}(\beta)\cos^2(\beta)}{vR_{NIP}R_N}(2R_{NIP} + R_N)d \\
 & - \frac{\cos^2(\beta)}{2vR_{NIP}^3R_N^2} [R_{NIP}^2(8\cos^2(\beta) - 6) + R_{NIP}R_N(5\cos^2(\beta) - 4) - 2R_N^2\text{sen}^2(\beta)]d^2 \quad (5.15)
 \end{aligned}$$

$$\lambda_2 = \frac{\cos^2(\beta)(4R_{NIP}\text{sen}^2(\beta) - R_N\cos^2(\beta))}{4vR_{NIP}^3R_N} \quad (5.16)$$

$$\frac{-\lambda_2}{\lambda_1} = -\frac{1}{2} \frac{Q_1}{Q_2} \quad (5.17)$$

Onde:

$$Q_1 = 4R_{NIP}R_N\text{sen}^2(\beta) - R_N^2\cos^2(\beta) \quad (5.18)$$

$$\begin{aligned}
 Q_2 &= 2R_{NIP}^2R_N^2 - 2R_{NIP}R_N(2R_{NIP} + R_N)\text{sen}(\beta)d \\
 & - [R_{NIP}^2(8\cos^2(\beta) - 6) + R_{NIP}R_N(5\cos^2(\beta) - 4) - 2R_N^2\text{sen}^2(\beta)]d^2 \quad (5.19)
 \end{aligned}$$

Definindo os coeficientes λ_i dessa forma, a Equação 5.13 se torna semelhante a Equação 5.1. Portanto, o aproximante de Padé da Equação 5.13 será dado também pela Equação 5.2.

Substituímos os coeficientes λ_i definidos em 5.14-5.17 na definição dos coeficientes ζ_i nas Equações 5.3-5.5:

$$\zeta_1 = t_0 + \frac{2\text{sen}(\beta)}{v}d + \frac{\cos^2(\beta)}{vR_N}d^2 - \frac{\text{sen}(\beta)\cos^2(\beta)}{vR_N^2}d^3 - \frac{\cos^2(\beta)(5\cos^2(\beta) - 4)}{4vR_N^3}d^4 \quad (5.20)$$

$$\zeta_2 = \frac{\cos^2(\beta)}{vR_{NIP}} - \frac{\text{sen}(\beta) \cos^2(\beta)}{vR_{NIP}^2 R_N} (2R_{NIP} + R_N)d - \frac{\cos^2(\beta)}{2vR_{NIP}^3 R_N^2} [R_{NIP}^2 (8 \cos^2(\beta) - 6) + R_{NIP} R_N (5 \cos^2(\beta) - 4) - 2R_N^2 \text{sen}^2(\beta)] d^2 \quad (5.21)$$

$$\zeta_3 = -\frac{1}{2} \frac{Q_1}{Q_2} \quad (5.22)$$

O aproximante de Padé para a série de Taylor de quarta ordem $t(h, d)$ será dado pela Equação 5.1, utilizando os coeficientes ζ_i definidos nas Equações 5.20-5.22, obtidos a partir dos coeficientes λ_i definidos nas Equações 5.14-5.17.

5.2 Aproximação de Padé para a série de Taylor de quarta ordem $t^2(h, d)$, expansão de Padé em h

A aproximação $t^2(h, d)$ em série de Taylor de quarta ordem da superfície SRC (HöCHT, 2002):

$$\begin{aligned} t^2(d, h) = & t_0^2 + \frac{4t_0 \text{sen}(\beta)}{v} d + 2 \frac{vt_0 \cos^2(\beta) + 2R_N \text{sen}^2(\beta)}{v^2 R_N} d^2 + \frac{2t_0 \cos^2(\beta)}{v R_{NIP}} h^2 \\ & + \frac{2 \text{sen}(\beta) \cos^2(\beta) (2R_N - vt_0)}{v^2 R_N^2} d^3 \\ & + \frac{2 \text{sen}(\beta) \cos^2(\beta) (2R_{NIP} R_N - 2vt_0 R_{NIP} - vt_0 R_N)}{v^2 R_{NIP}^2 R_N} dh^2 \\ & + \frac{\cos^2(\beta)}{v^2 R_{NIP}^3 R_N^2} [vt_0 R_{NIP}^2 (6 - 8 \cos^2(\beta)) + vt_0 R_{NIP} R_N (4 - 5 \cos^2(\beta))] \\ & + 2vt_0 R_N^2 \text{sen}^2(\beta) - 4R_{NIP} R_N^2 \text{sen}^2(\beta) + R_{NIP}^2 R_N (10 \cos^2(\beta) - 8)] d^2 h^2 \\ & + \frac{\cos^2(\beta) (R_N (10 \cos^2(\beta) - 8) + vt_0 (4 - 5 \cos^2(\beta)))}{2v^2 R_N^3} d^4 \\ & + \frac{\cos^2(\beta) (4vt_0 R_{NIP} \text{sen}^2(\beta) - vt_0 R_N \cos^2(\beta) + 2R_{NIP} R_N \cos^2(\beta))}{2v^2 R_{NIP}^3 R_N} h^4 \quad (5.23) \end{aligned}$$

A variável onde será realizada a aproximação é meio afastamento $h = x/2$, d é mantido constante, e a aproximação de Padé é realizada somente em h . Definindo os coeficientes λ_i na forma:

$$\lambda_0 = t_0^2 + \frac{4t_0 \text{sen}(\beta)}{v} d + 2 \frac{vt_0 \cos^2(\beta) + 2R_N \text{sen}^2(\beta)}{v^2 R_N} d^2 + \frac{2 \text{sen}(\beta) \cos^2(\beta) (2R_N - vt_0)}{v^2 R_N^2} d^3$$

$$+ \frac{\cos^2(\beta)(R_N(10 \cos^2(\beta) - 8) + vt_0(4 - 5 \cos^2(\beta)))}{2v^2 R_N^3} d^4 \quad (5.24)$$

$$\begin{aligned} \lambda_1 = & \frac{2t_0 \cos^2(\beta)}{v R_{NIP}} + \frac{2\text{sen}(\beta) \cos^2(\beta)(2R_{NIP}R_N - 2vt_0R_{NIP} - vt_0R_N)}{v^2 R_{NIP}^2 R_N} d \\ & + \frac{\cos^2(\beta)}{v^2 R_{NIP}^3 R_N^2} [vt_0 R_{NIP}^2 (6 - 8 \cos^2(\beta)) + vt_0 R_{NIP} R_N (4 - 5 \cos^2(\beta)) \\ & + 2vt_0 R_N^2 \text{sen}^2(\beta) - 4R_{NIP} R_N^2 \text{sen}^2(\beta) + R_{NIP}^2 R_N (10 \cos^2(\beta) - 8)] d^2 \quad (5.25) \end{aligned}$$

$$\lambda_2 = \frac{\cos^2(\beta)(4vt_0 R_{NIP} \text{sen}^2(\beta) - vt_0 R_N \cos^2(\beta) + 2R_{NIP} R_N \cos^2(\beta))}{2v^2 R_{NIP}^3 R_N} \quad (5.26)$$

$$[-\lambda_2/\lambda_1] = \frac{-R_N Q_3}{2} \frac{1}{(2vt_0 R_{NIP}^2 R_N^2 + 2R_{NIP} R_N Q_1 \text{sen}(\beta) d + Q_2 d^2)} \quad (5.27)$$

Os coeficientes geométricos Q 's na Equação 5.27 são:

$$Q_1 = 2R_{NIP}R_N - 2vt_0R_{NIP} - vt_0R_N \quad (5.28)$$

$$\begin{aligned} Q_2 = & vt_0 R_{NIP}^2 (6 - 8 \cos^2(\beta)) + vt_0 R_{NIP} R_N (4 - 5 \cos^2(\beta)) \\ & + 2vt_0 R_N^2 \text{sen}^2(\beta) - 4R_{NIP} R_N^2 \text{sen}^2(\beta) + R_{NIP}^2 R_N (10 \cos^2(\beta) - 8) \quad (5.29) \end{aligned}$$

$$Q_3 = 4vt_0 R_{NIP} \text{sen}^2(\beta) - vt_0 R_N \cos^2(\beta) + 2R_{NIP} R_N \cos^2(\beta) \quad (5.30)$$

Definindo os coeficientes λ_i dessa forma, a Equação 5.23 se torna semelhante a Equação 5.1. Portanto, o aproximante de Padé da Equação 5.23 será dado também por 5.2.

Substituímos os coeficientes λ_i definidos nas Equações 5.25-5.27 na definição dos coeficientes ζ_i em 5.3-5.5:

$$\begin{aligned} \zeta_1 = \lambda_0 = & t_0^2 + \frac{4t_0 \text{sen}(\beta)}{v} d + 2 \frac{vt_0 \cos^2(\beta) + 2R_N \text{sen}^2(\beta)}{v^2 R_N} d^2 \\ & + \frac{2\text{sen}(\beta) \cos^2(\beta)(2R_N - vt_0)}{v^2 R_N^2} d^3 \end{aligned}$$

$$+ \frac{\cos^2(\beta)(R_N(10 \cos^2(\beta) - 8) + vt_0(4 - 5 \cos^2(\beta)))}{2v^2 R_N^3} d^4 \quad (5.31)$$

$$\begin{aligned} \zeta_2 = \lambda_1 = & \frac{2t_0 \cos^2(\beta)}{v R_{NIP}} + \frac{2\text{sen}(\beta) \cos^2(\beta)(2R_{NIP}R_N - 2vt_0R_{NIP} - vt_0R_N)}{v^2 R_{NIP}^2 R_N} d \\ & + \frac{\cos^2(\beta)}{v^2 R_{NIP}^3 R_N^2} [vt_0 R_{NIP}^2 (6 - 8 \cos^2(\beta)) + vt_0 R_{NIP} R_N (4 - 5 \cos^2(\beta)) \\ & + 2vt_0 R_N^2 \text{sen}^2(\beta) - 4R_{NIP} R_N^2 \text{sen}^2(\beta) + R_{NIP}^2 R_N (10 \cos^2(\beta) - 8)] d^2 \quad (5.32) \end{aligned}$$

$$\zeta_3 = \frac{-\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{-R_N Q_3}{2} \frac{1}{(2vt_0 R_{NIP}^2 R_N^2 + 2R_{NIP} R_N Q_1 \text{sen}(\beta) d + Q_2 d^2)} \quad (5.33)$$

O aproximante de Padé para a série de Taylor de quarta ordem $t^2(h, d)$ será dado pela Equação 5.2, utilizando os coeficientes ζ_i definidos nas Equações 5.31-5.33, obtidos a partir dos coeficientes λ_i definidos nas Equações 5.24-5.27.

5.3 Aproximação de Padé para a série de Taylor de quarta ordem $(t(d, h) - t_0 + \frac{2}{v} R_{NIP})^2$, expansão de Padé em h

A aproximação $(t(h, d) - t_0 + \frac{2}{v} R_{NIP})^2$ em série de Taylor de quarta ordem da superfície SRC (HöCHT, 2002):

$$\begin{aligned} (t(h, d) - t_0 + \frac{2}{v} R_{NIP})^2 = & \left(\frac{2}{v} R_{NIP}\right)^2 + \frac{8R_{NIP} \text{sen}(\beta)}{v^2} d + 4 \frac{R_{NIP} \cos^2(\beta) + R_N \text{sen}^2(\beta)}{v^2 R_N} d^2 \\ & + \frac{4 \cos^2(\beta)}{v^2} h^2 + \frac{4\text{sen}(\beta) \cos^2(\beta)(R_N - R_{NIP})}{v^2 R_N^2} d^3 - \frac{8\text{sen}(\beta) \cos^2(\beta)}{v^2 R_N} dh^2 \\ & + \frac{\cos^2(\beta)}{v^2 R_N^3} [R_N(5 \cos^2(\beta) - 4) + R_{NIP}(4 - 5 \cos^2(\beta))] d^4 + \frac{4 \cos^2(\beta)(3 - 4 \cos^2(\beta))}{v^2 R_N^2} d^2 h^2 \\ & + \frac{4 \cos^2(\beta) \text{sen}^2(\beta)}{v^2 R_{NIP} R_N} h^4 \quad (5.34) \end{aligned}$$

A variável onde será realizada a aproximação é meio afastamento $h = x/2$, d é mantido constante, e a aproximação de Padé é realizada somente em h . Definindo os coeficientes λ_i na forma:

$$\begin{aligned} \lambda_0 = & \left(\frac{2}{v} R_{NIP}\right)^2 + \frac{8R_{NIP} \text{sen}(\beta)}{v^2} d + 4 \frac{R_{NIP} \cos^2(\beta) + R_N \text{sen}^2(\beta)}{v^2 R_N} d^2 \\ & + \frac{4\text{sen}(\beta) \cos^2(\beta)(R_N - R_{NIP})}{v^2 R_N^2} d^3 \end{aligned}$$

$$+ \frac{\cos^2(\beta)}{v^2 R_N^3} [R_N(5 \cos^2(\beta) - 4) + R_{NIP}(4 - 5 \cos^2(\beta))] d^4 \quad (5.35)$$

$$\lambda_1 = \frac{4 \cos^2(\beta)}{v^2} - \frac{8 \text{sen}(\beta) \cos^2(\beta)}{v^2 R_N} d + \frac{4 \cos^2(\beta)(3 - 4 \cos^2(\beta))}{v^2 R_N^2} d^2 \quad (5.36)$$

$$\lambda_2 = \frac{4 \cos^2(\beta) \text{sen}^2(\beta)}{v^2 R_{NIP} R_N} \quad (5.37)$$

$$[-\lambda_2/\lambda_1] = -\frac{R_N \text{sen}^2(\beta)}{R_{NIP}} \frac{1}{R_N^2 - 2R_N \text{sen}(\beta) d + (3 - 4 \cos^2(\beta)) d^2} \quad (5.38)$$

Definindo os coeficientes λ_i dessa forma, a Equação 5.34 se torna semelhante a Equação 5.1. Portanto, o aproximante de Padé da Equação 5.34 será dado também pela Equação 5.2.

Substituímos os coeficientes λ_i definidos em 5.35-5.38 na definição dos coeficientes ζ_i nas Equações 5.3-5.5:

$$\begin{aligned} \zeta_1 = \lambda_0 = & \left(\frac{2}{v} R_{NIP}\right)^2 + \frac{8 R_{NIP} \text{sen}(\beta)}{v^2} d + 4 \frac{R_{NIP} \cos^2(\beta) + R_N \text{sen}^2(\beta)}{v^2 R_N} d^2 \\ & + \frac{4 \text{sen}(\beta) \cos^2(\beta) (R_N - R_{NIP})}{v^2 R_N^2} d^3 \\ & + \frac{\cos^2(\beta)}{v^2 R_N^3} [R_N(5 \cos^2(\beta) - 4) + R_{NIP}(4 - 5 \cos^2(\beta))] d^4 \quad (5.39) \end{aligned}$$

$$\zeta_2 = \lambda_1 = \frac{4 \cos^2(\beta)}{v^2} - \frac{8 \text{sen}(\beta) \cos^2(\beta)}{v^2 R_N} d + \frac{4 \cos^2(\beta)(3 - 4 \cos^2(\beta))}{v^2 R_N^2} d^2 \quad (5.40)$$

$$\zeta_3 = \frac{-\lambda_2}{\lambda_1} = -\frac{R_N \text{sen}^2(\beta)}{R_{NIP}} \frac{1}{R_N^2 - 2R_N \text{sen}(\beta) d + (3 - 4 \cos^2(\beta)) d^2} \quad (5.41)$$

O aproximante de Padé para a série de Taylor de quarta ordem $(t(h, d) - t_0 + \frac{2}{v} R_{NIP})^2$ será dado pela Equação 5.2, utilizando os coeficientes ζ 's definidos nas Equações 5.39-5.41, a partir dos coeficientes λ_i definidos em 5.35-5.38.

5.4 Aproximação de Padé para a série de Taylor de quarta ordem $t(h, d)$, expansão de Padé em d

A variável onde será realizada a expansão é $d = m - mo$ distância entre o ponto médio central da superfície SRC e um ponto médio na vizinhança, para tanto h é mantido

constante e a aproximação de Padé é realizada somente em d . Se definimos os coeficientes λ_i na Equação 5.14 de modo que esta se torne semelhante a Equação 5.6, o aproximante de Padé da Equação 5.14 será dado pela Equação 5.7. Definindo os coeficientes λ_i da aproximação $t(h, d)$ em série de Taylor de quarta ordem da superfície SRC (HöCHT, 2002):

$$\lambda_0 = t_0 + \frac{\cos^2(\beta)}{vR_{NIP}}h^2 + \frac{\cos^2(\beta)(4R_{NIP}\text{sen}^2(\beta) - R_N \cos^2(\beta))}{4vR_{NIP}^3R_N}h^4 \quad (5.42)$$

$$\lambda_1 = \frac{2\text{sen}(\beta)}{v} - \frac{\text{sen}(\beta) \cos^2(\beta)}{vR_{NIP}^2R_N}(2R_{NIP} + R_N)h^2 \quad (5.43)$$

$$\lambda_2 = \frac{\cos^2(\beta)}{vR_N} - \frac{\cos^2(\beta)}{2vR_{NIP}^3R_N^2}[R_{NIP}^2(8 \cos^2(\beta) - 6) + R_{NIP}R_N(5 \cos^2(\beta) - 4) - 2R_N^2\text{sen}^2(\beta)]h^2 \quad (5.44)$$

$$\lambda_3 = -\frac{\text{sen}(\beta) \cos^2(\beta)}{vR_N^2} \quad (5.45)$$

$$\lambda_4 = -\frac{\cos^2(\beta)(5 \cos^2(\beta) - 4)}{4vR_N^3} \quad (5.46)$$

O aproximante de Padé será dado pela Equação 5.7: Os coeficientes dos polinômios $p(d)$ e $q(d)$ são obtidos por meio de 5.8-5.12, utilizando os coeficientes λ_i definidos nas Equações 5.42-5.46.

5.5 Aproximação de Padé para a série de Taylor de quarta ordem $t^2(h, d)$, expansão de Padé em d

A variável onde será realizada a expansão é $d = m - mo$ distância entre o ponto médio central da superfície SRC e um ponto médio na vizinhança, para tanto h é mantido constante e a aproximação de Padé é realizada somente em d . Se definimos os coeficientes λ_i na Equação 5.23 de modo que esta se torne semelhante à 5.6, o aproximante de Padé da Equação 5.23 será dado por 5.7. Definindo os coeficientes λ_i da aproximação $t^2(h, d)$ em série de Taylor de quarta ordem da superfície SRC (HöCHT, 2002):

$$\lambda_0 = t_0^2 + \frac{2h^2t_0 \cos^2(\beta)}{vR_{NIP}} + \frac{h^4 \cos^2(\beta)(4vt_0R_{NIP}\text{sen}^2(\beta) - vt_0R_N \cos^2(\beta) + 2R_{NIP}R_N \cos^2(\beta))}{2v^2R_{NIP}^3R_N} \quad (5.47)$$

$$\lambda_1 = \frac{4t_0 \text{sen}(\beta)}{v} + \frac{2\text{sen}(\beta) \cos^2(\beta)(2R_{NIP}R_N - 2vt_0R_{NIP} - vt_0R_N)h^2}{v^2 R_{NIP}^2 R_N} \quad (5.48)$$

$$\begin{aligned} \lambda_2 = & \frac{2(vt_0 \cos^2(\beta) + 2R_N \text{sen}^2(\beta))}{v^2 R_N} \\ & + \frac{\cos^2(\beta)}{v^2 R_{NIP}^3 R_N^2} [vt_0 R_{NIP}^2 (6 - 8 \cos^2(\beta)) + vt_0 R_{NIP} R_N (4 - 5 \cos^2(\beta)) \\ & + 2vt_0 R_N^2 \text{sen}^2(\beta) - 4R_{NIP} R_N^2 \text{sen}^2(\beta) + R_{NIP}^2 R_N (10 \cos(\beta) - 8)] h^2 \end{aligned} \quad (5.49)$$

$$\lambda_3 = \frac{2\text{sen}(\beta) \cos^2(\beta)(2R_N - vt_0)}{v^2 R_N^2} \quad (5.50)$$

$$\lambda_4 = \frac{\cos^2(\beta)(R_N(10 \cos^2(\beta) - 8) + vt_0(4 - 5 \cos^2(\beta)))}{2v^2 R_N^3} \quad (5.51)$$

O aproximante de Padé será dado pela Equação 5.7: Os coeficientes dos polinômios $p(d)$ e $q(d)$ são obtidos por meio das Equações 5.8-5.12, utilizando os coeficientes λ_i definidos nas Equações 5.47-5.51.

5.6 Aproximação de Padé para a série de Taylor de quarta ordem $(t(h, d) - t_0 + \frac{2}{v}R_{NIP})^2$, expansão de Padé em d

A variável onde será realizada a expansão é $d = m - mo$ distância entre o ponto médio central da superfície SRC e um ponto médio na vizinhança, para tanto h é mantido constante e a aproximação de Padé é realizada somente em d . Se definimos os coeficientes λ_i na Equação 5.34 de modo que esta se torne semelhante a Equação 5.6, o aproximante de Padé da Equação 5.34 será dado por 5.7. Definindo os coeficientes λ_i da aproximação $(t(d, h) - t_0 + \frac{2}{v}R_{NIP})^2$ em série de Taylor de quarta ordem da superfície SRC (HöCHT, 2002):

$$\lambda_0 = \left(\frac{2}{v}R_{NIP}\right)^2 + \frac{4 \cos^2(\beta)}{v^2} h^2 + \frac{4 \cos^2(\beta) \text{sen}^2(\beta)}{v^2 R_{NIP} R_N} h^4 \quad (5.52)$$

$$\lambda_1 = \frac{8R_{NIP} \text{sen}(\beta)}{v^2} - \frac{8\text{sen}(\beta) \cos^2(\beta)}{v^2 R_N} h^2 \quad (5.53)$$

$$\lambda_2 = 4 \frac{R_{NIP} \cos^2(\beta) + R_N \text{sen}^2(\beta)}{v^2 R_N} + \frac{4 \cos^2(\beta)(3 - 4 \cos^2(\beta))}{v^2 R_N^2} h^2 \quad (5.54)$$

$$\lambda_3 = \frac{4\text{sen}(\beta) \cos^2(\beta)(R_N - R_{NIP})}{v^2 R_N^2} \quad (5.55)$$

$$\lambda_4 = \frac{\cos^2(\beta)}{v^2 R_N^3} [R_N(5 \cos^2(\beta) - 4) + R_{NIP}(4 - 5 \cos^2(\beta))] \quad (5.56)$$

O aproximante de Padé será dado pela Equação 5.7: Os coeficientes dos polinômios $p(d)$ e $q(d)$ são obtidos por meio das Equações 5.8-5.12, utilizando os coeficientes λ_i definidos nas Equações 5.52-5.56.

6 COMPARAÇÃO DAS APROXIMAÇÕES DO SRC NO MODELO DO REFLETOR CIRCULAR EM UM MEIO DE VELOCIDADE CONSTANTE

Para o modelo do refletor circular na Seção 2.6, a superfície de tempo de reflexão $\Psi(h(\alpha, \theta), d(\alpha, \theta))$ é dada a partir da relação paramétrica dada pela Equação 2.65. A variável $h(\alpha, \theta)$ é obtida pela parametrização dada pela Equação 2.64; $d = m - m_0$ é obtido calculando-se m a partir da Equação 2.63 para um m_0 fixo. Os parâmetros do SRC, R_N , R_{NIP} e β , são dados analiticamente em função dos parâmetros da geometria do refletor circular a partir das Equações 2.67-2.70. Todavia, esses parâmetros irão depender da localização do ponto médio comum central m_0 , ou seja, os valores dos raios de curvatura R_N e R_{NIP} e o ângulo de emergência do raio zero-afastamento β irão depender da posição do ponto médio central m_0 , e isso irá influenciar a qualidade das aproximações, como veremos adiante.

Os mesmos parâmetros obtidos pelas Equações 2.67-2.70 são utilizados nas aproximações SRC-Padé, SRC quarta ordem (HöCHT, 2002), SRC hiperbólico (JAGER et al., 2001) e SRC não hiperbólico (FOMEL; KAZINNIK, 2013), para obter a aproximação do tempo de trânsito de reflexão para o refletor circular.

O erro relativo absoluto é dado pelo módulo da diferença entre o valor do tempo de trânsito da aproximação SRC $t_{approx}(h, d)$ utilizada e o tempo de trânsito da superfície SRC $\Psi(h, d)$ obtido analiticamente, dividido pelo próprio tempo de trânsito $\Psi(h, d)$ da superfície SRC, Equação 6.1. O resultado é um valor percentual que representa a diferença entre o tempo de trânsito da aproximação e o valor exato, sendo próximo a zero quando o erro de aproximação é pequeno.

$$erro\% = 100 \times \frac{|t_{approx}(h, d) - \Psi(h, d)|}{\Psi(h, d)} \quad (6.1)$$

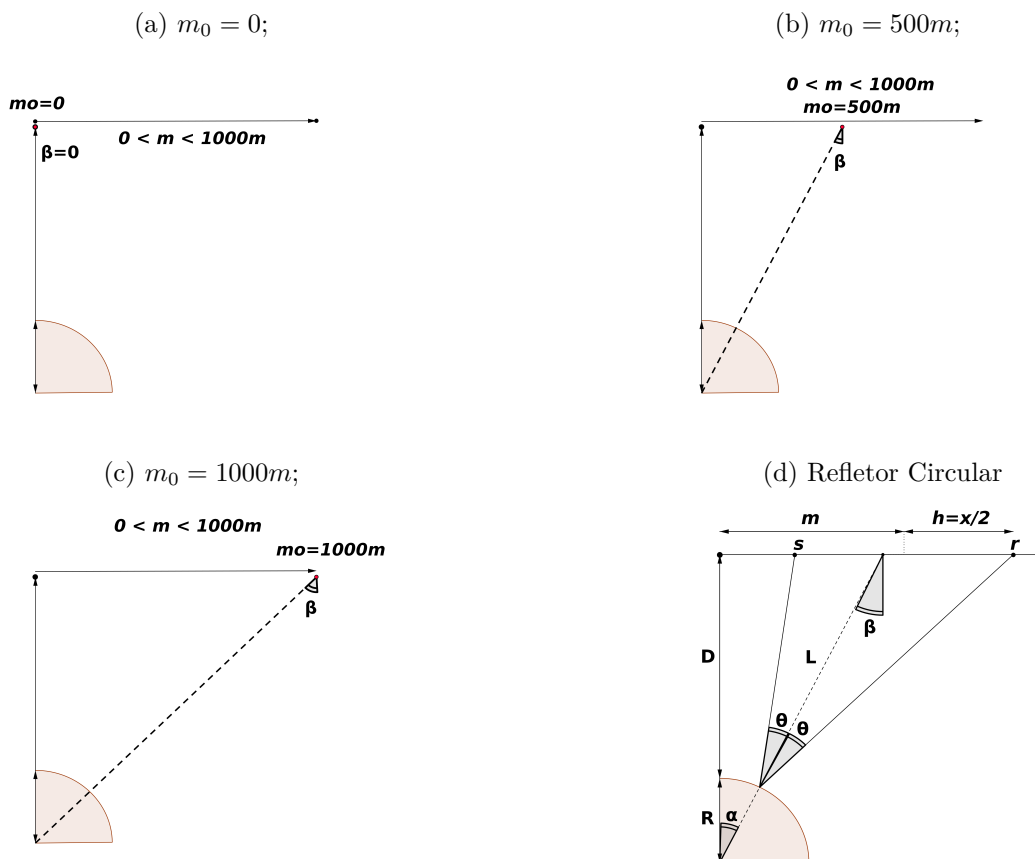
Para testar a qualidade das aproximações utilizando 6.1, simulamos um experimento no modelo do refletor circular na Figura 2. A profundidade mínima do refletor circular D é fixa e igual a 1000m. Fixamos m_0 em 0m, e calculamos os parâmetros do SRC a partir de 2.67-2.70. m_0 não precisa estar localizado na origem, portanto repetimos o experimento para $m_0 = 500m$ e $m_0 = 1000m$ (ver Figura 11. Variando α e θ , obtemos a superfície $\Psi(h(\alpha, \theta), d(\alpha, \theta))$, para cada posição de m_0 . E da mesma forma, obtemos $h(\alpha, \theta)$ e $m(\alpha, \theta)$.

Utilizando os valores de $h(\alpha, \theta)$ e $d = m(\alpha, \theta) - m_0$ nas aproximações do SRC quarta ordem, SRC-Padé, SRC hiperbólico e não hiperbólico, e os parâmetros do SRC, obtivemos as superfícies de tempo de trânsito de reflexão aproximadas.

Substituindo as superfícies aproximadas e o tempo de trânsito exato $\Psi(h, d)$, em

6.1, obtemos as superfícies de erro relativo absoluto $erro_{\%}(h, d)$. O erro relativo absoluto é produzido a partir da Equação 6.1: A aproximação $t_{approx}(h, d)$ utilizada é comparada com a Equação de referência $\Psi(h, d)$, expressão analítica do tempo de trânsito para o modelo do refletor circular Equação 2.65. h/D é o meio-afastamento sobre a profundidade mínima do refletor; d/D , é a razão entre a separação dos pontos médios comuns sobre a profundidade mínima do refletor. Por conveniência apresentamos a superfície de erro relativo absoluto, com os eixos h e d normalizados, dividindo-os por D (profundidade mínima do refletor circular).

Figura 11 – Representação esquemática do experimento analítico para a produção da superfície SRC $\Psi(\alpha, \theta)$ para o refletor circular descrito na Seção 2.9. As letras (a), (b) e (c) representam os três experimentos realizados, cada um com uma posição do ponto médio central m_0 , escolhida para o calculo dos parâmetros t_0 , R_N , R_{NIP} e β através da Equações 2.101-2.104, que serão utilizados nas aproximações da SRC. Variando os ângulos α e θ ; obtemos m , h e Ψ através das Equações paramétricas 2.98-2.100.



Fonte: Do Autor.

6.1 Aproximações hiperbólica e não hiperbólica da superfície de reflexão comum

As Figuras 12-13 são o erro relativo absoluto do SRC hiperbólico, aproximação é apresentada na Equação 2.53 (JAGER et al., 2001), e o erro relativo absoluto da Equação

2.85 do SRC não hiperbólico (FOMEL; KAZINNIK, 2013).

O erro relativo absoluto produzido pela aproximação do SRC não hiperbólico é menor em comparação a aproximação hiperbólica, esta é sempre acurada para pequenos desvios ao longo do raio central, porém perde sua acurácia para grandes afastamentos e distâncias de separação entre os pontos médios comuns (FOMEL; KAZINNIK, 2013).

Um resultado teórico importante surge ao analisar a Figura 12: A diferença na acurácia das aproximações do SRC aumenta quando a razão d/D (distância entre os pontos médios sobre a profundidade do refletor) cresce. Isso significa que ao realizar o empilhamento a aberturas de empilhamento utilizadas irão influenciar na qualidade da seção empilhada resultante.

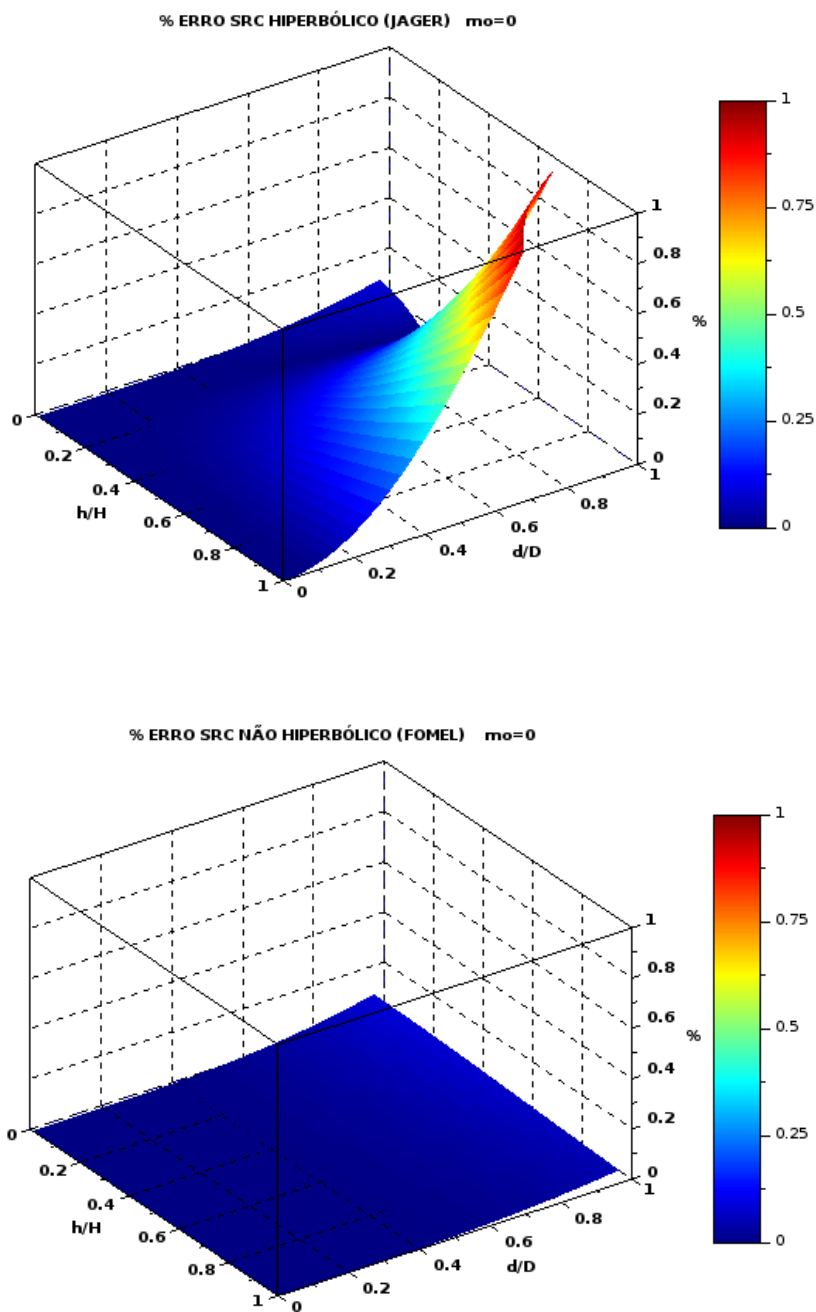
Ou seja, não haverá diferença significativa entre a seção empilhada produzida a partir da aproximação do SRC hiperbólico e a seção produzida a partir da aproximação do SRC não hiperbólico, se as aberturas utilizadas em $d = m - m_0$ forem estreitas ¹.

Na Figura 13, escolhermos $m_0 = 500m$, o comportamento das aproximações é o oposto, porém a mesma análise é válida. A aproximação do SRC hiperbólico passa a divergir rapidamente para h/D , meio afastamento sobre a profundidade do refletor, maior que 0.4. A aproximação do SRC não hiperbólico possui uma região de erro mínimo azul maior, não passando de 0,2% de erro absoluto relativo máximo.

Em $m_0 = 1000m$, na Figura 14, a aproximação do SRC hiperbólico possui uma faixa estreita de erro mínimo em azul, até $h/D=0.4$ e $d/D=0.2$. O erro do SRC não hiperbólico, apesar de inferior ao SRC hiperbólico, possui uma faixa estreita de erro mínimo até $d/D=0.2$, divergindo a partir daí.

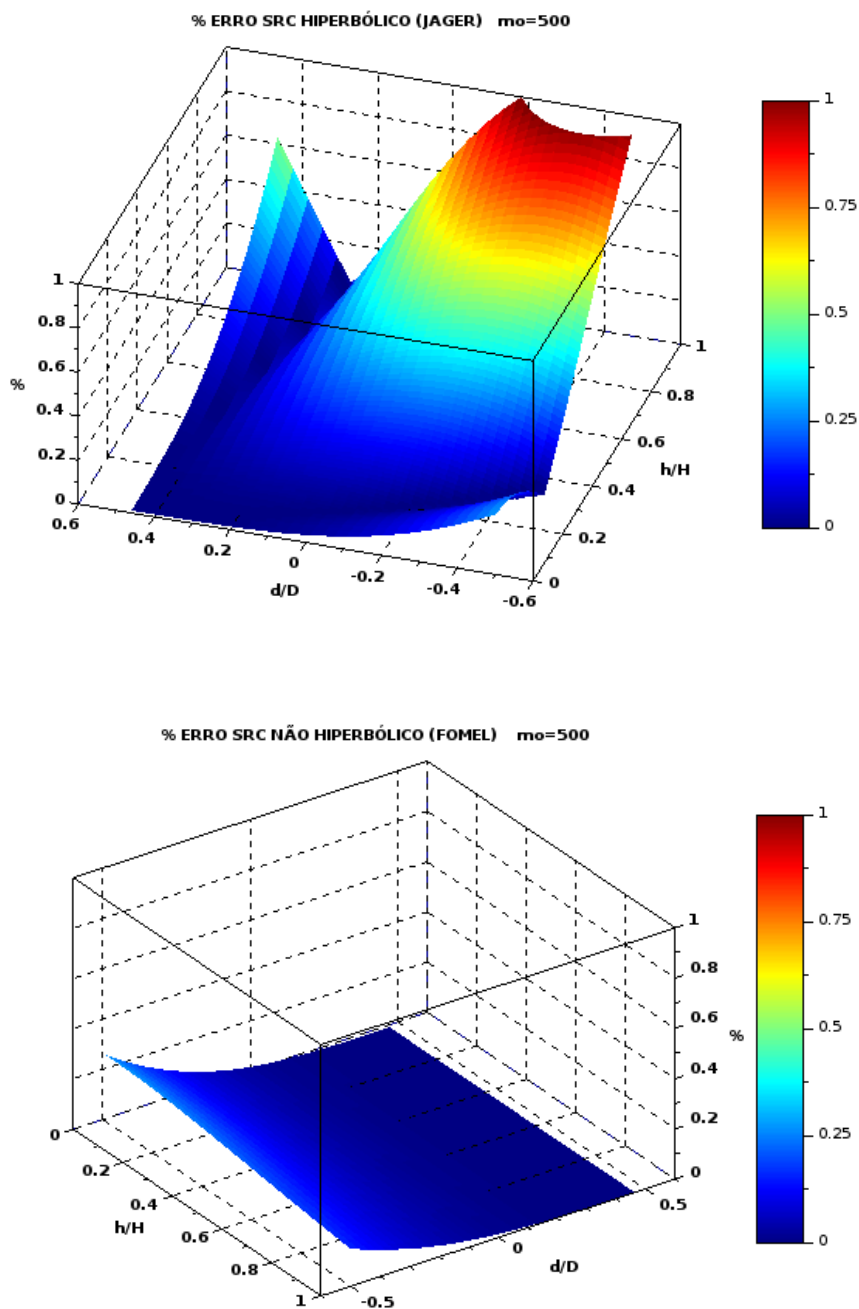
¹ entende-se “estreita“ de acordo com a razão d/D , ou seja a aberturas depende da profundidade do refletor e da distância entre os pontos médios

Figura 12 – Amplitude do Erro relativo absoluto (%) das aproximações (de cima para baixo): SRC hiperbólico de (Equação 2.80) e SRC não hiperbólico de (Equação 2.85), para o refletor circular descrito na Seção 2.9, o ponto médio central m_0 é localizado na origem.



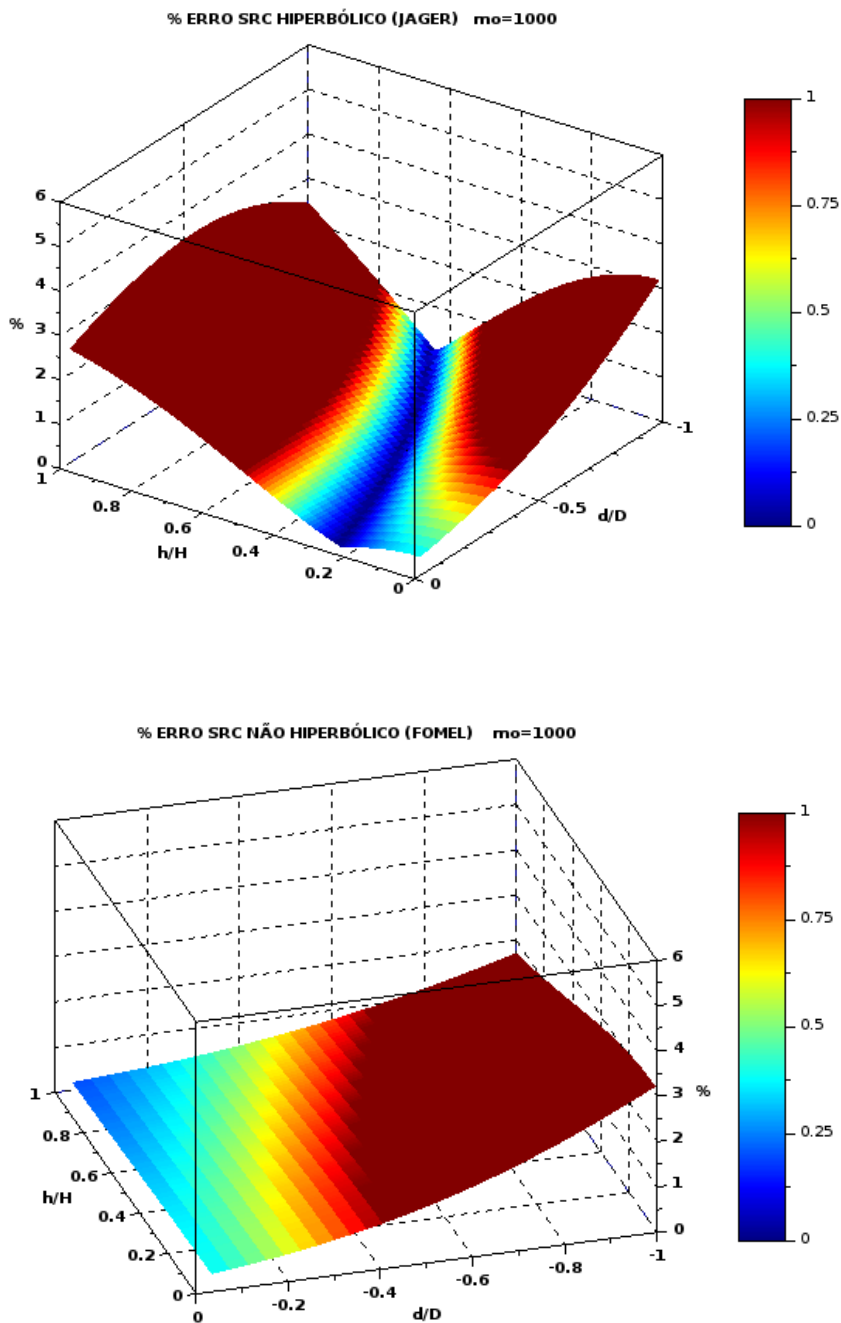
Fonte: Do Autor.

Figura 13 – Amplitude do Erro relativo absoluto (%) das aproximações (de cima para baixo): SRC hiperbólico de (Equação 2.80) e SRC não hiperbólico de (Equação 2.85), para o refletor circular, descrito na Seção 2.9, o ponto médio central m_0 é localizado em 500m.



Fonte: Do Autor.

Figura 14 – Amplitude do Erro relativo absoluto (%) das aproximações (de cima para baixo): SRC hiperbólico de (Equação 2.80) e SRC não hiperbólico de (Equação 2.85), para o refletor circular, descrito na Seção 2.9, o ponto médio central m_0 é localizado em $1000m$.



Fonte: Do Autor.

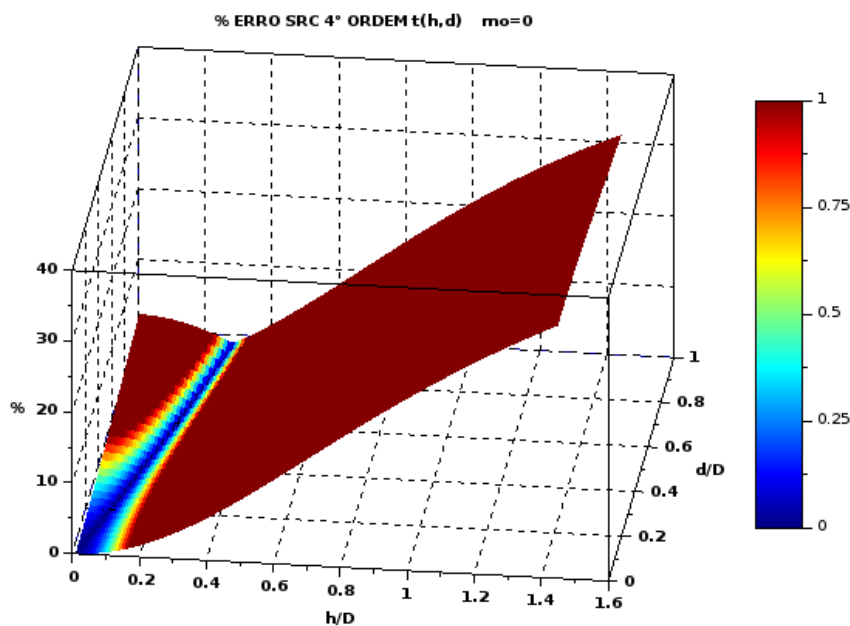
6.2 Aproximação de Padé do SRC obtida da expansão em série $t(h, d)$

A Figura 15 é o erro relativo absoluto da aproximação 5.1 do SRC quarta ordem para $t(h, d)$ (HöCHT, 2002). A aproximação possui erro mínimo ao longo de uma faixa estreita (região azul) e diverge muito rapidamente para grandes afastamentos e separação dos pontos médios.

No entanto, ao realizar a aproximação SRC Padé na Equação 5.1, o raio de convergência da aproximação aumenta, assim como a região de erro mínimo (azul): Compare as Figuras 17 e 18 com 16.

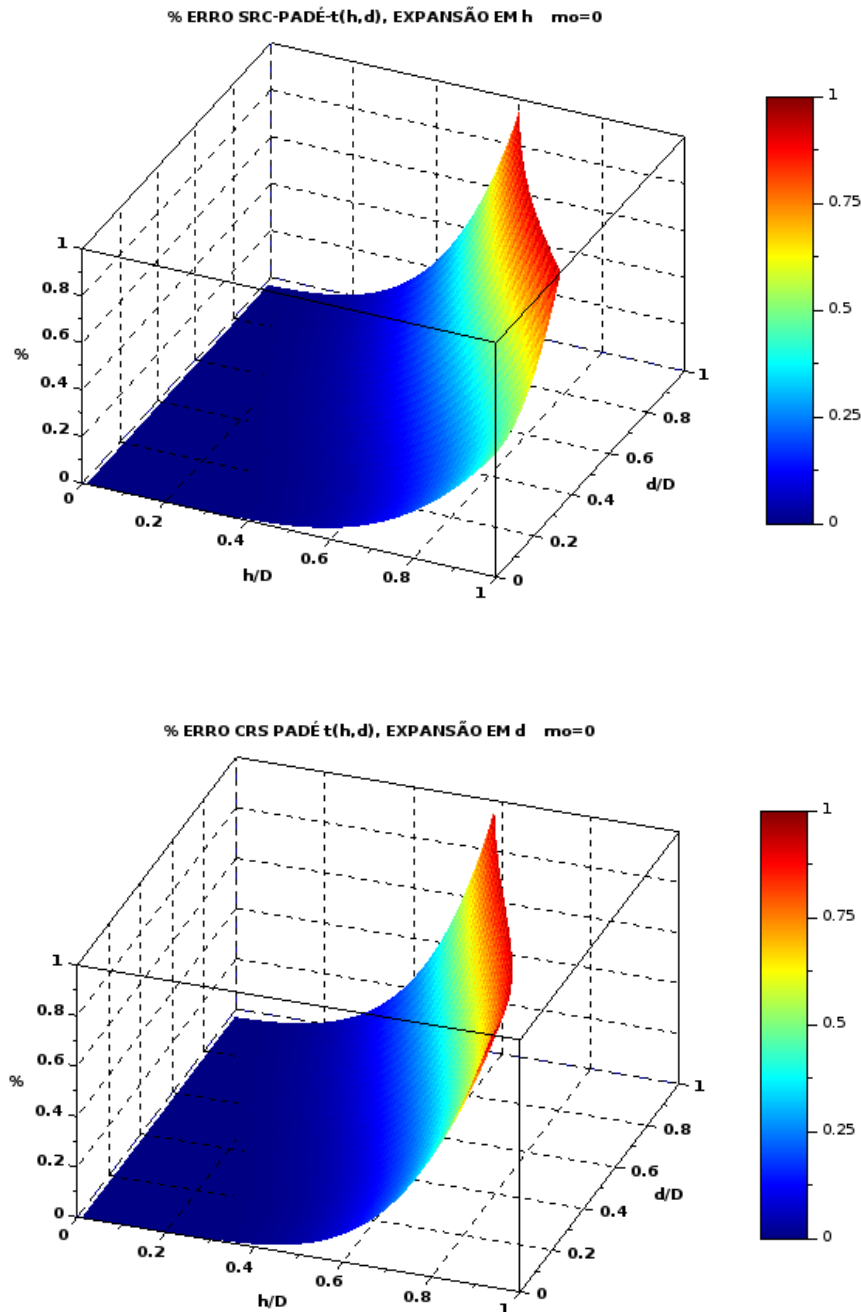
As aproximações de Padé, expansão em h e expansão em d para a série $t(h, d)$ são dadas nas seções 5.1 e 5.4, respectivamente.

Figura 15 – Amplitude do Erro relativo absoluto (%) da aproximação SRC quarta ordem para a série $t(h, d)$. O erro relativo absoluto é produzido a partir da Equação 6.1: A aproximação $t_{approx}(h, d)$ utilizada é a Equação 5.13 e a Equação de referência $\Psi(h, d)$ é a expressão analítica do tempo de trânsito para o modelo do refletor circular 2.65, o ponto médio central m_0 é localizado na origem.



Fonte: Do Autor.

Figura 16 – Amplitude do Erro relativo absoluto (%) das aproximações (de cima para baixo): aproximação de Padé da SRC para $t(h, d)$, expansão em h desenvolvida na Seção 5.1 e aproximação de Padé da SRC para $t(h, d)$, expansão em d desenvolvida na Seção 5.4, para o refletor circular. O ponto médio central m_0 é localizado na origem.



Fonte: Do Autor.

O comportamento assintótico da superfície de erro absoluto relativo nas Figuras 17 e 18, evidencia a diminuição da qualidade da aproximação quando as razões d/D e h/D tendem para 1, a superfície de erro absoluto relativo diverge. Porém, as aproximações

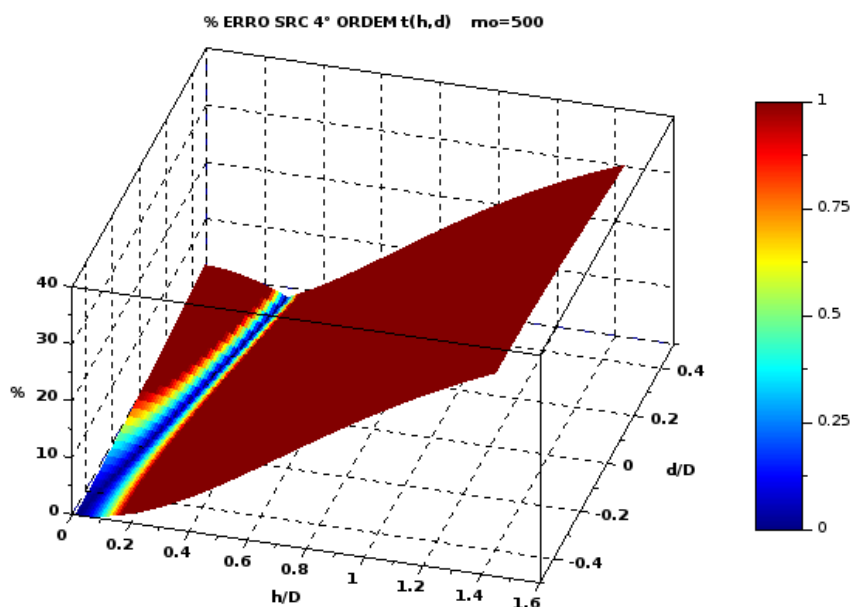
de Padé ampliaram a região de erro mínimo da aproximação do SRC quarta ordem para $t(h, d)$.

A qualidade da aproximação SRC Padé depende da posição de m_0 , pois a partir de m_0 são calculados os valores dos parâmetros do SRC t_0 , R_N , R_{NIP} e β , a partir das Equações 2.101-2.104.

Nas Figuras 18 e 20, refizemos as superfícies de erro absoluto relativo para duas posições de m_0 : $500m$ e $1000m$.

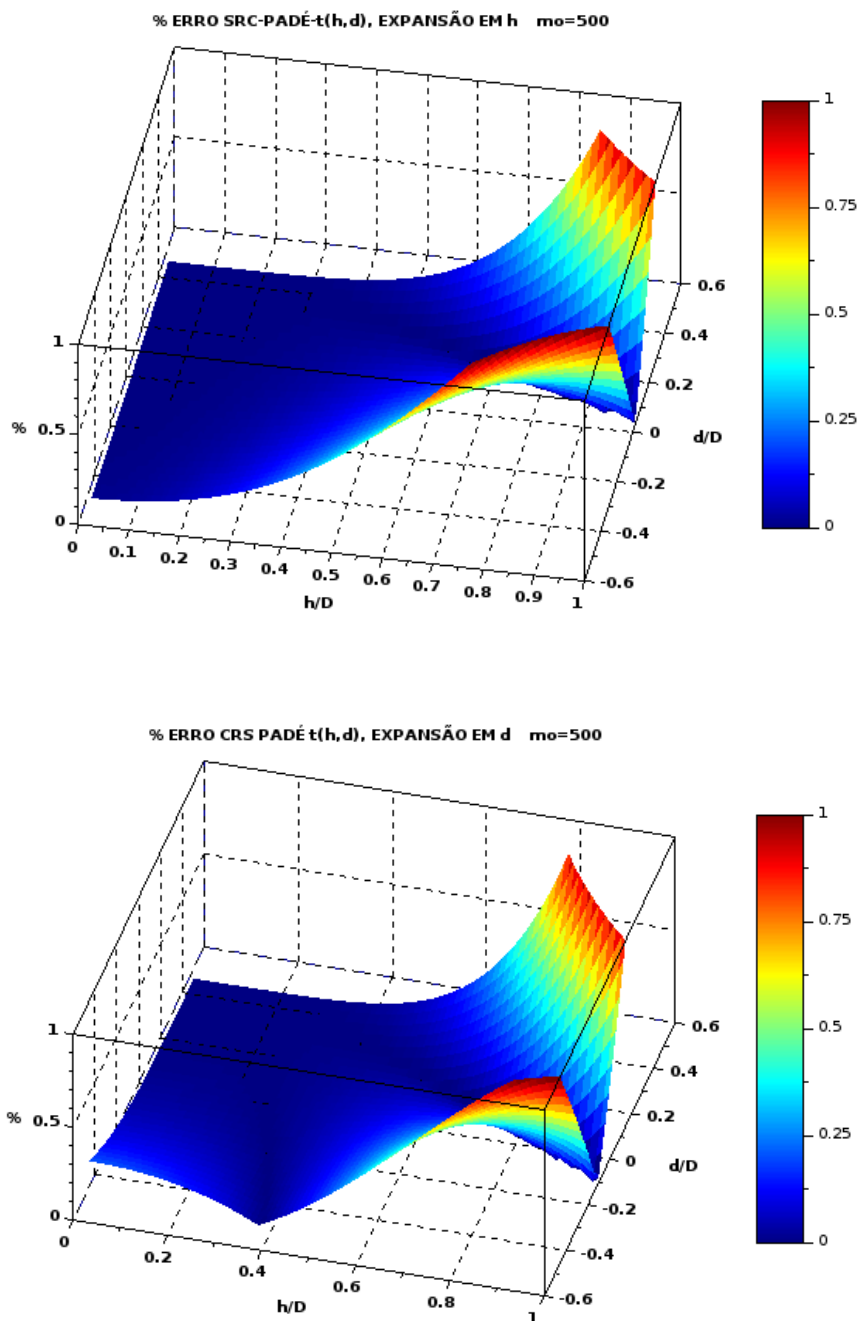
O erro relativo absoluto cresce para as razões d/D maiores que $-0,5$ e $0,5$ (Figuras 17 e 18), quando $m_0 = 500m$; para $m_0 = 1000m$ a superfície de erro absoluto diverge muito rapidamente para pequenas variações das razões h/D e d/D (Figuras 19 e 20).

Figura 17 – Amplitude do Erro relativo absoluto (%) da aproximação SRC quarta ordem para a série $t(h, d)$. O erro relativo absoluto é produzido a partir da Equação 6.1: A aproximação $t_{aprox}(h, d)$ utilizada é a Equação 5.13 e a Equação de referência $\Psi(h, d)$ é a expressão analítica do tempo de trânsito para o modelo do refletor circular 2.65, o ponto médio central m_0 é localizado em $500m$.



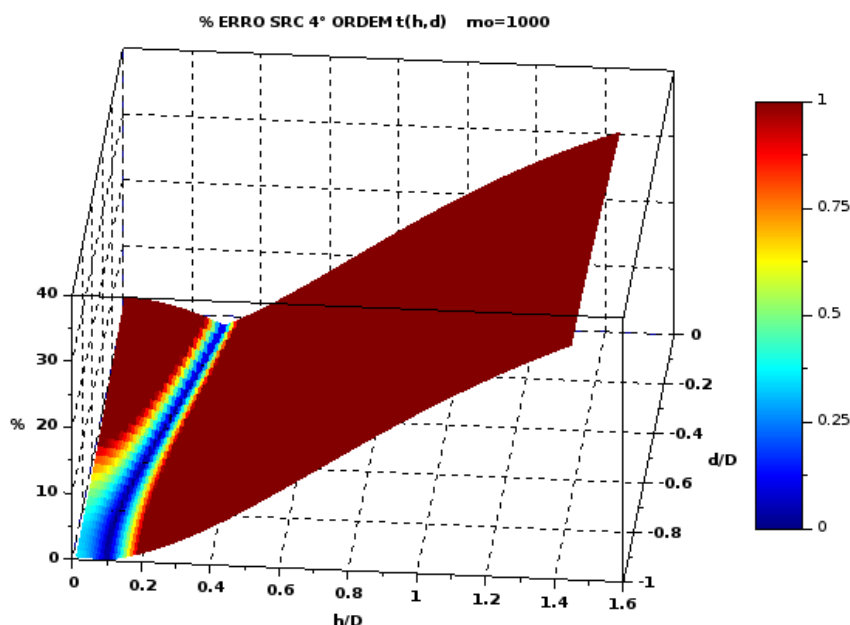
Fonte: Do Autor.

Figura 18 – Amplitude do Erro relativo absoluto (%) das aproximações (de cima para baixo): aproximação de Padé da SRC para $t(h, d)$, expansão em h desenvolvida na Seção 5.1 e aproximação de Padé da SRC para $t(h, d)$, expansão em d desenvolvida na Seção 5.4, para o refletor circular. O ponto médio central m_0 é localizado em $500m$.



Fonte: Do Autor.

Figura 19 – Amplitude do Erro relativo absoluto (%) da aproximação SRC quarta ordem para a série $t(h, d)$. O erro relativo absoluto é produzido a partir da Equação 6.1: A aproximação $t_{approx}(h, d)$ utilizada é a Equação 5.13 e a Equação de referência $\Psi(h, d)$ é a expressão analítica do tempo de trânsito para o modelo do refletor circular 2.65, o ponto médio central m_0 é localizado em $1000m$.



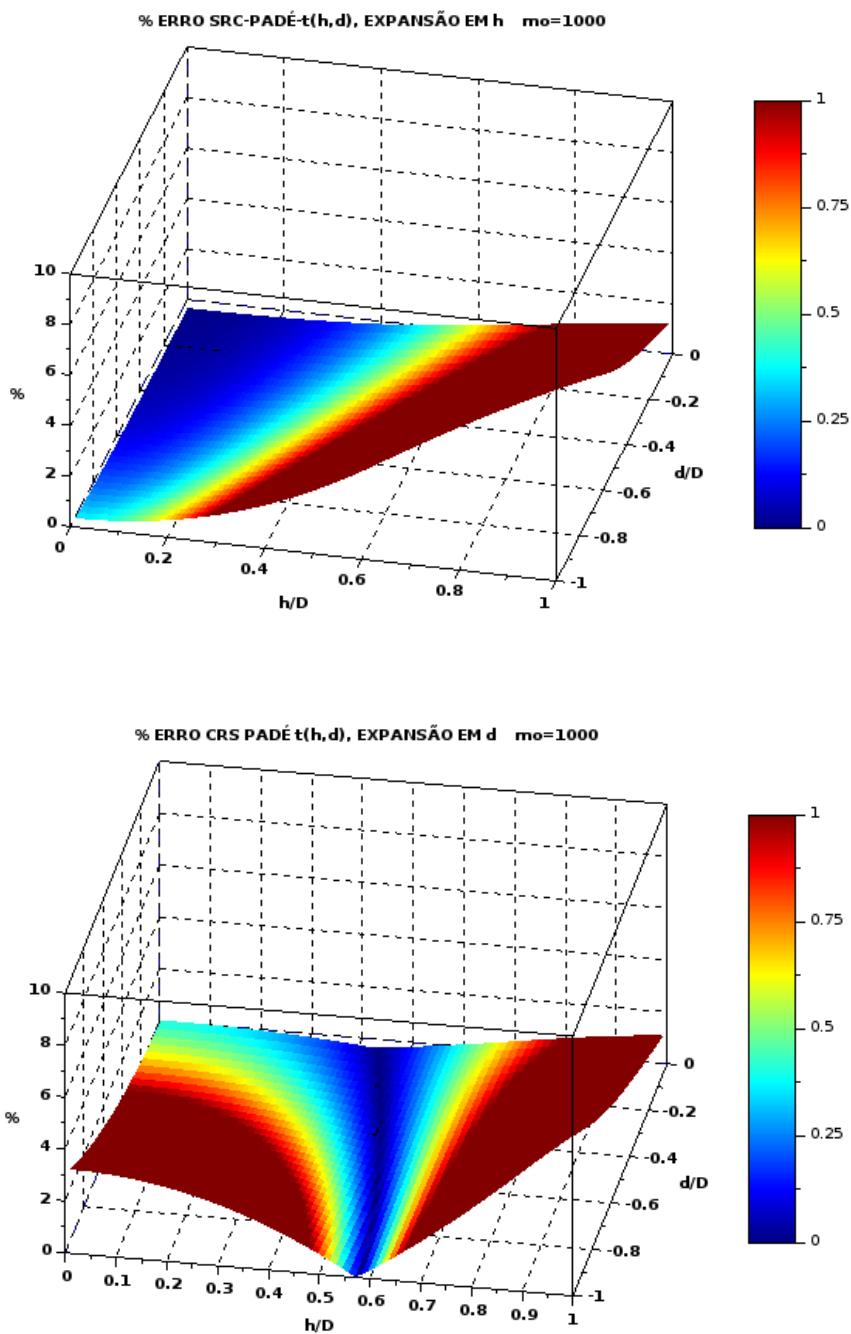
Fonte: Do Autor.

Para a expansão $t(h, d)$ em série de Taylor de quarta ordem da superfície SRC, a aproximação de Padé aumentou significativamente a região de convergência da aproximação do SRC.

A superfície gerada pela aproximação de Padé SRC também diverge mais devagar para grandes afastamentos h e distâncias de ponto médio $d = m - m_0$. A vantagem de utilizar as aproximações de Padé dessa forma consiste que essas aproximações são apenas a reorganização dos coeficientes da expansão em série de Taylor original.

A pior superfície de erro relativo absoluto das aproximações de Padé da SRC foi produzida quando $m_0 = 1000m$, porém essa é também superior a aproximação do SRC quarta ordem para a série $t(h, d)$. A expansão de Padé do SRC em h possui melhor resultado do que a expansão em d , sobretudo para razões h/D , afastamento sobre a profundidade do refletor, menores ou iguais a 0,2 (ver Figura 20).

Figura 20 – Amplitude do Erro relativo absoluto (%) das aproximações (de cima para baixo): aproximação de Padé da SRC para $t(h, d)$, expansão em h desenvolvida na Seção 5.1 e aproximação de Padé da SRC para $t(h, d)$, expansão em d desenvolvida na Seção 5.4, para o refletor circular. O ponto médio central m_0 é localizado em $1000m$.

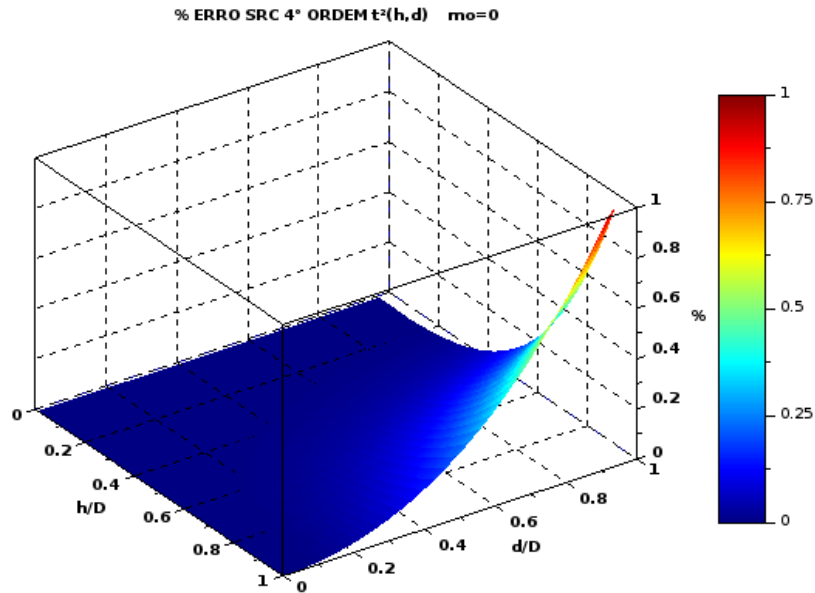


Fonte: Do Autor.

6.3 Aproximação de Padé do SRC obtida da expansão em série $t^2(h, d)$

A Figura 21 é erro relativo absoluto da aproximação 5.23 do SRC quarta ordem para a série $t^2(h, d)$. Na Figura 22 apresentamos as superfícies de erro relativo absoluto das aproximações de Padé, expansão em h e expansão em d , dadas nas seções 5.2 e 5.5, respectivamente.

Figura 21 – Amplitude do Erro relativo absoluto (%) da aproximação 5.23 do SRC quarta ordem para a série $t^2(h, d)$. O erro relativo absoluto é produzido a partir da Equação 6.1: A aproximação $t_{ap}(h, d)$ utilizada é a Equação 5.23 e a Equação de referência $\Psi(h, d)$ é a expressão analítica do tempo de trânsito para o modelo do refletor circular 2.65. O ponto médio central m_0 é localizado na origem.

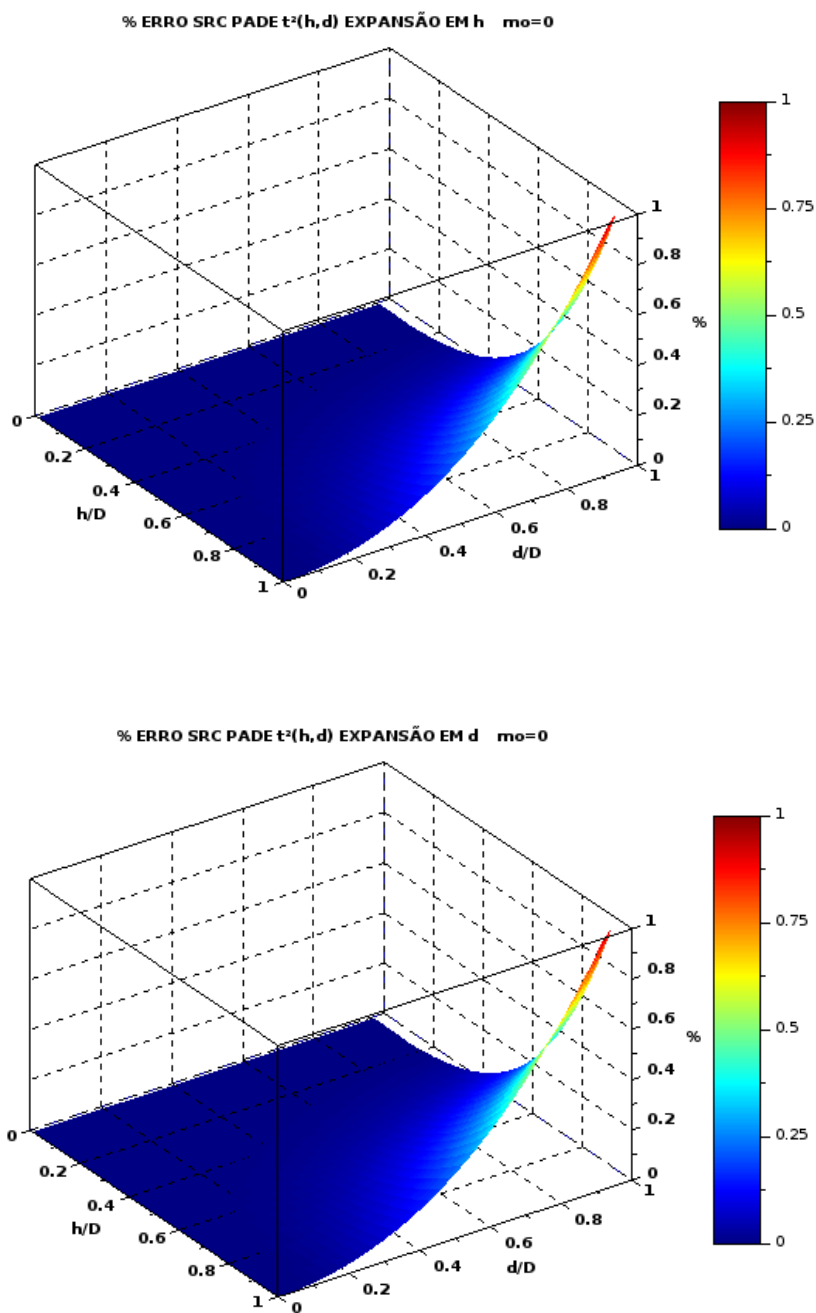


Fonte: Do Autor.

As aproximações SRC quarta ordem e SRC Padé produzem o mesmo resultado, a mesma região de erro mínimo e o mesmo comportamento assintótico para grandes separações entre os ponto médios (razão d/D); basta comparar as Figuras 21 e 22.

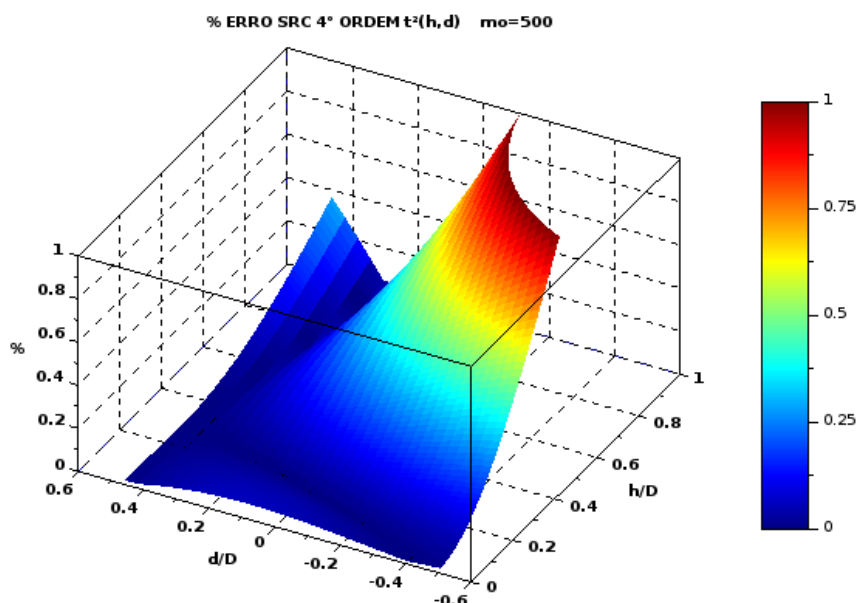
refazendo as superfícies de erro relativo absoluto para duas posições de m_0 , $500m$ e $1000m$: As superfícies de erro relativo absoluto das aproximações SRC quarta ordem para $t^2(h, d)$ e SRC Padé expansão em h (Figura 23), divergem para razões h/D tendendo para 1, quando $m_0 = 500m$; a aproximação de Padé da SRC com expansão em d diverge mais suavemente para grandes afastamentos (Figura 25). Quando $m_0 = 1000m$, as aproximações divergem muito rapidamente, para pequenas variações da razão h/D (Figuras 26 e 25).

Figura 22 – Amplitude do Erro relativo absoluto (%) das aproximações (de cima para baixo): aproximação de Padé da SRC para $t^2(h, d)$, expansão em h desenvolvida na Seção 5.2 e aproximação de Padé da SRC para $t^2(h, d)$, expansão em d desenvolvida na Seção 5.5, para o refletor circular. O ponto médio central m_0 está localizado na origem.



Fonte: Do Autor.

Figura 23 – Amplitude do Erro relativo absoluto (%) da aproximação SRC quarta ordem para a série $t^2(h, d)$, para o refletor circular. O erro relativo absoluto é produzido a partir da Equação 6.1: A aproximação $t_{approx}(h, d)$ utilizada é a Equação 5.23 e a Equação de referência $\Psi(h, d)$ é a expressão analítica do tempo de trânsito para o modelo do refletor circular 2.65. O ponto médio central m_0 é localizado em $500m$.



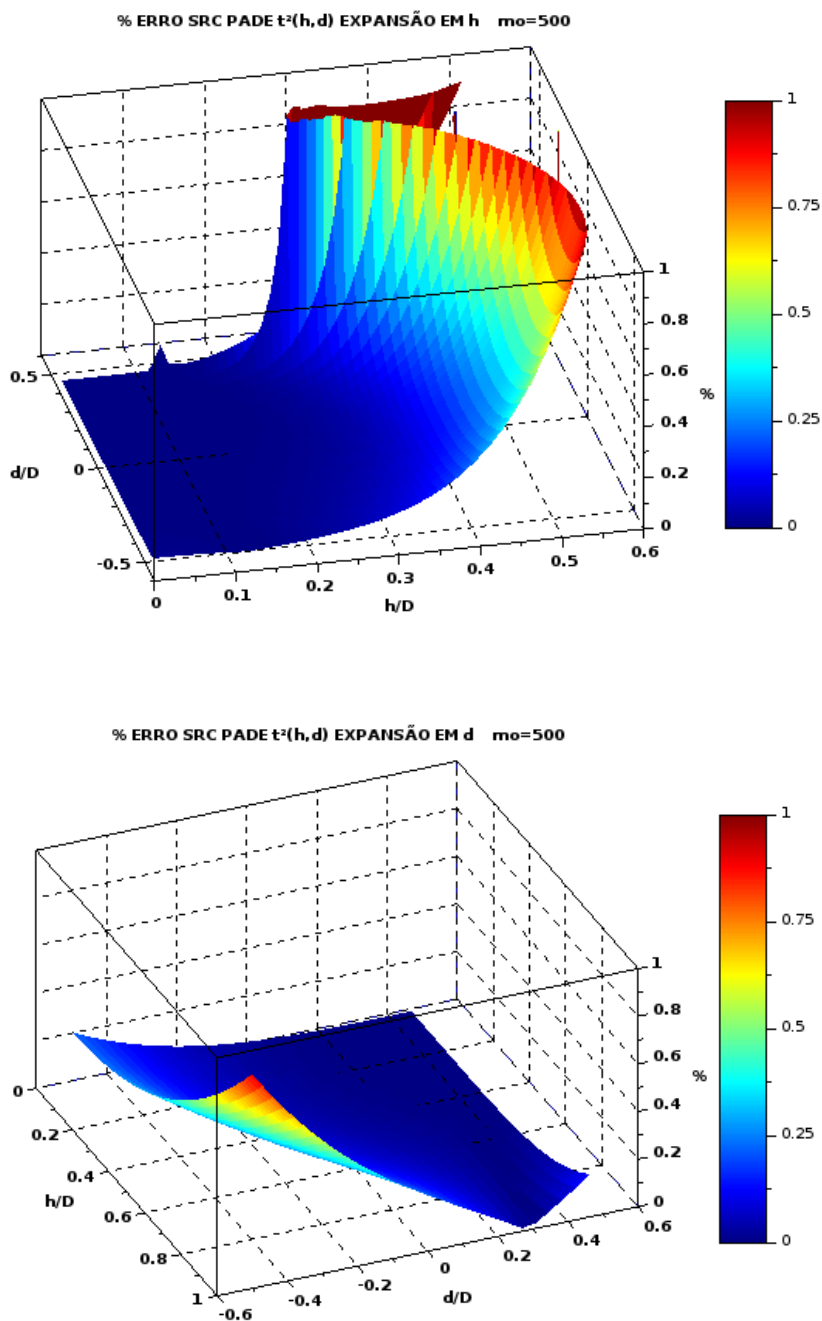
Fonte: Do Autor.

Escolhendo $m_0 = 500m$ a aproximação do SRC quarta ordem passa a divergir muito mais rápido para razões h/D maiores que 0.2 da mesma forma que a aproximação do SRC hiperbólico. O mesmo ocorre com a aproximação de Padé do SRC expansão em h .

A aproximação de Padé do SRC com expansão em d é a que produz a maior região de erro mínimo, sendo inclusive melhor que a aproximação do SRC hiperbólico.

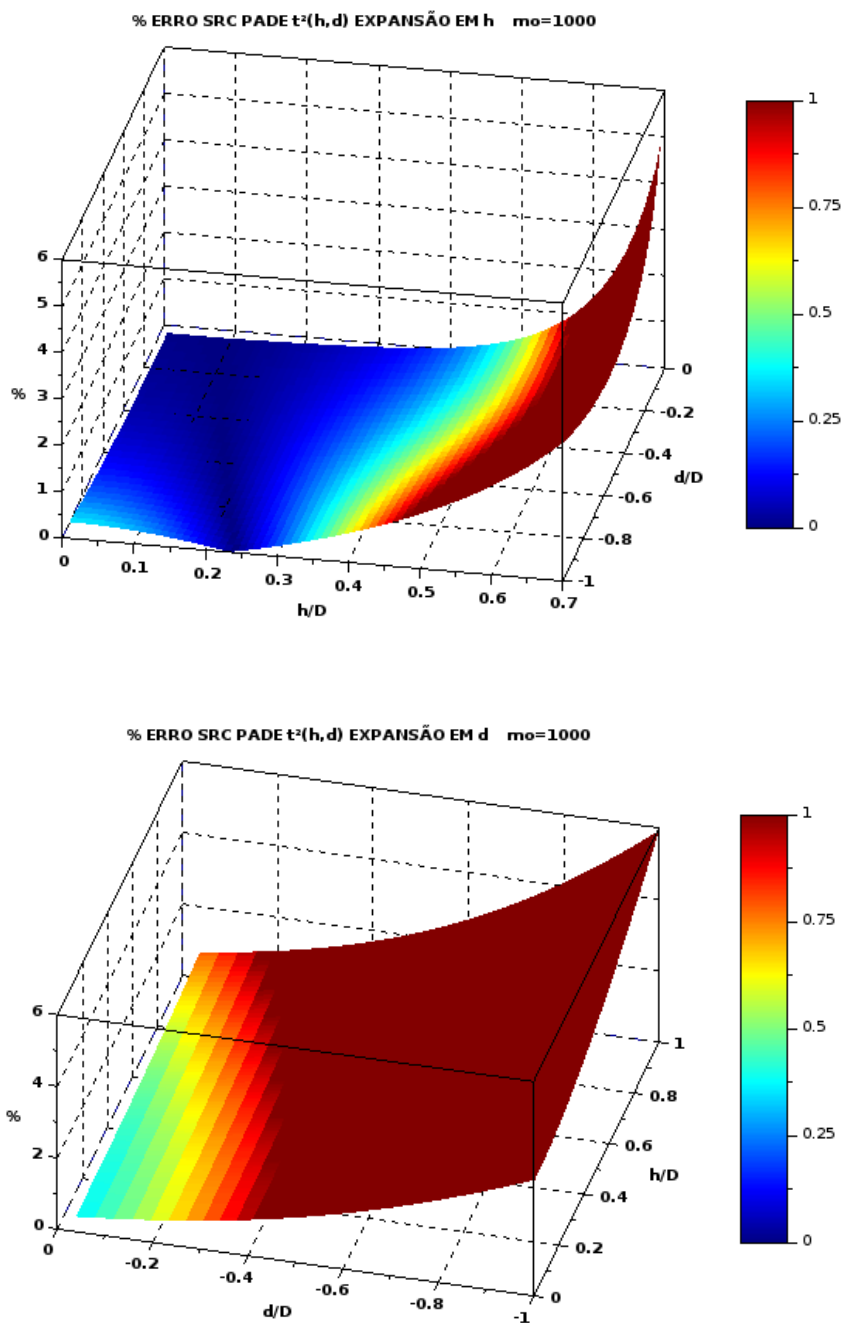
O mesmo não ocorre ao escolhermos $m_0 = 100m$, as aproximações divergem a partir de razões h/D maiores que 0.2, sendo a aproximação de Padé SRC com expansão em d a que produz o pior resultado. Apesar disso as aproximações de Padé produzem resultado superior a aproximação do SRC (ver Figura 14).

Figura 24 – Amplitude do Erro relativo absoluto (%) das aproximações (de cima para baixo): aproximação de Padé da SRC para $t(h, d)$, expansão em h desenvolvida na Seção 5.2 e aproximação de Padé da SRC para $t(h, d)$, expansão em d desenvolvida na Seção 5.5, para o refletor circular. O ponto médio central m_0 é localizado em $500m$.



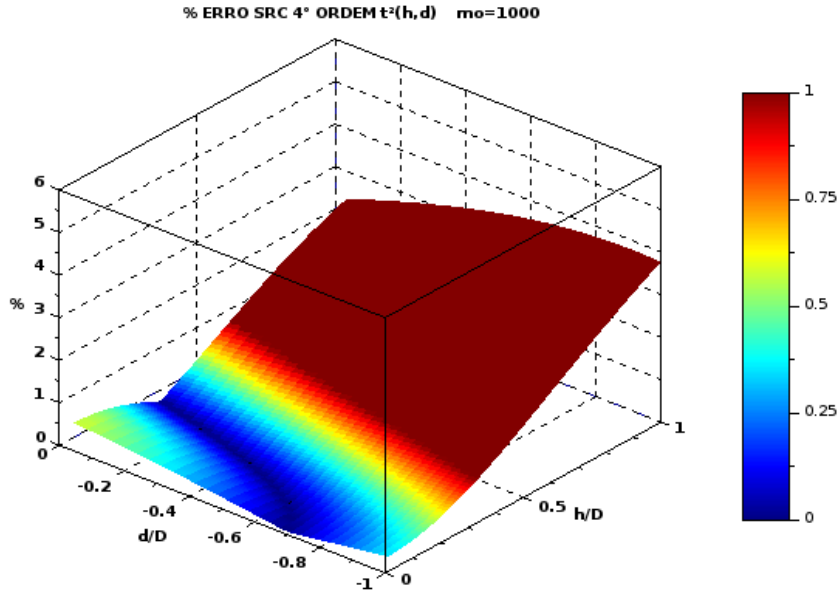
Fonte: Do Autor.

Figura 25 – Amplitude do Erro relativo absoluto (%) das aproximações (de cima para baixo): aproximação de Padé da SRC para $t(h, d)$, expansão em h desenvolvida na Seção 5.2 e aproximação de Padé da SRC para $t(h, d)$, expansão em d desenvolvida na Seção 5.5, para o refletor circular. O ponto médio central m_0 é localizado em $1000m$.



Fonte: Do Autor.

Figura 26 – Amplitude do Erro relativo absoluto (%) da aproximação SRC quarta ordem para a série $t^2(h, d)$, para o refletor circular. O erro relativo absoluto é produzido a partir da Equação 6.1: A aproximação $t_{approx}(h, d)$ utilizada é a Equação 5.23 e a Equação de referência $\Psi(h, d)$ é a expressão analítica do tempo de trânsito para o modelo do refletor circular 2.65. O ponto médio central m_0 é localizado em $1000m$.



Fonte: Do Autor.

6.4 Aproximação de Padé do SRC obtida da expansão em série quarta ordem $(t(d, h) - t_0 + \frac{2}{v_0} R_{NIP})^2$

A Figura 27 é o erro relativo absoluto da Equação 5.21 do SRC quarta ordem para a série $(t(d, h) - t_0 + \frac{2}{v_0} R_{NIP})^2$ desenvolvida por (HöCHT, 2002). As aproximações de Padé, expansão em h e expansão em d , Figura 28, são dadas nas seções 5.3 e 5.6, respectivamente.

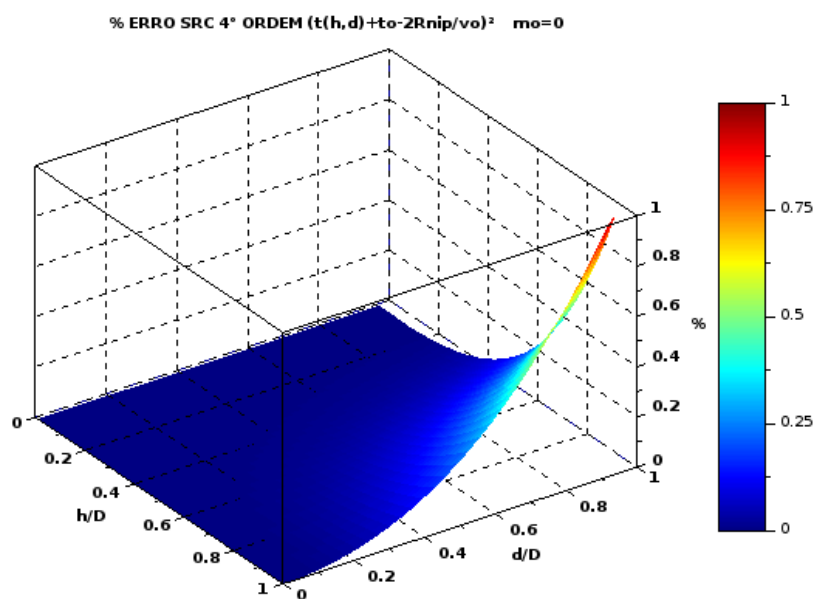
O erro relativo absoluto da aproximação do SRC quarta ordem de (HöCHT, 2002) é semelhante ao erro da aproximação de Padé do SRC. Ou seja, para a expansão em série de Taylor da superfície SRC, $(t(d, h) - t_0 + \frac{2}{v_0} R_{NIP})^2$, a aproximação de Padé não resulta em melhora na acurácia da aproximação original.

O mesmo ocorre para a escolha de $m_0 = 500m$, as aproximações do SRC quarta ordem e aproximação de Padé do SRC, expansão em h , produzem a mesma superfície de erro relativo absoluto. A aproximação de Padé SRC, com expansão em d apresenta a pior acurácia das três aproximações divergindo ligeiramente para d/D tendendo a -0.5 .

Ao escolher $m_0 = 1000m$ o erro relativo absoluto aumenta para as três aproximações,

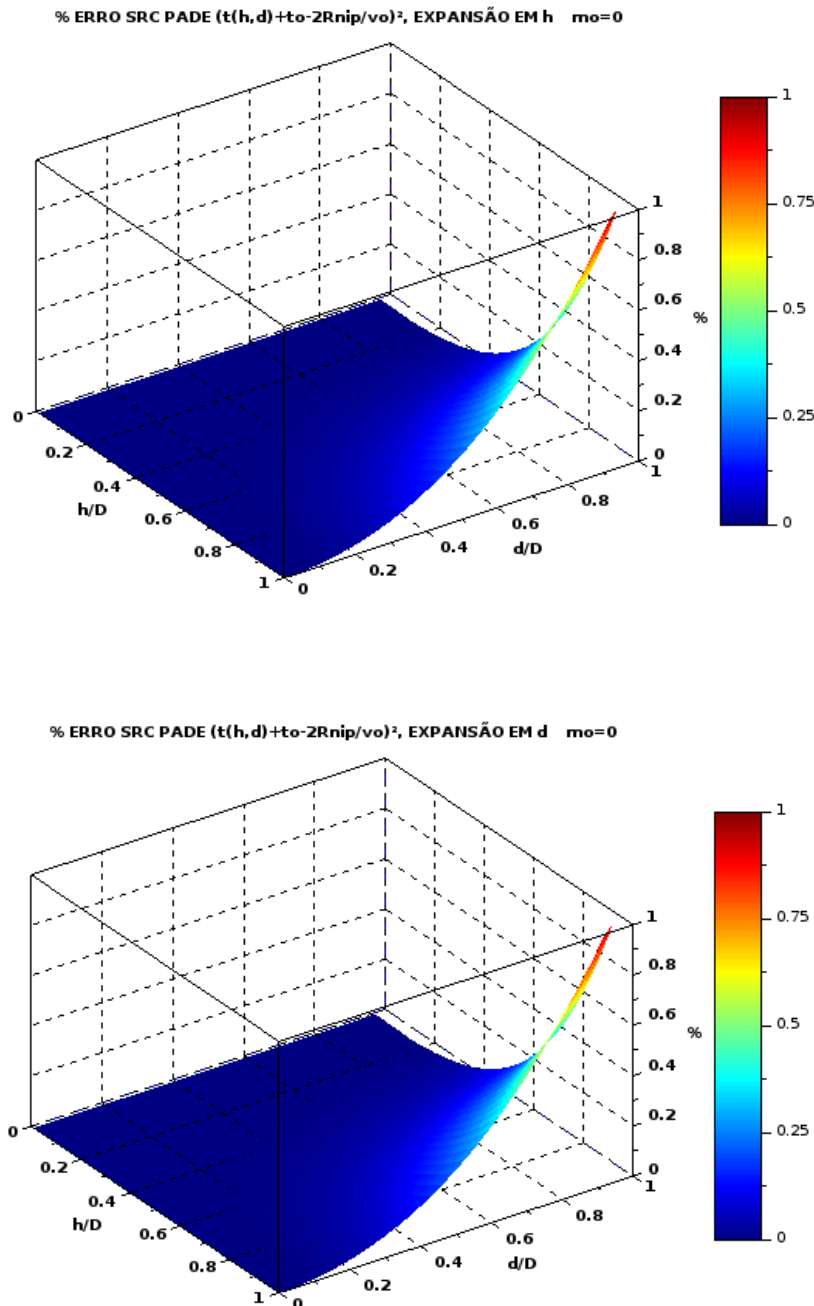
porém a aproximação de Padé SRC, com expansão em d produz a pior das três superfícies de erro relativo absoluto divergindo rapidamente para d/D tendendo para -1.

Figura 27 – Amplitude do Erro relativo absoluto (%) da aproximação SRC quarta ordem para a série $(t(d, h) - t_0 + \frac{2}{v_0} R_{NIP})^2$, para o refletor circular. O erro relativo absoluto é produzido a partir da Equação 6.1: A aproximação $t_{approx}(h, d)$ utilizada é a Equação 5.34 e a Equação de referência $\Psi(h, d)$ é a expressão analítica do tempo de trânsito para o modelo do refletor circular 2.65. O ponto médio central m_0 está localizado na origem.



Fonte: Do Autor.

Figura 28 – Amplitude do Erro relativo absoluto (%) das aproximações (de cima para baixo): aproximação de Padé da SRC para $(t(d, h) - t_0 + \frac{2}{v_0} R_{NIP})^2$, expansão em h desenvolvida na Seção 5.3 e aproximação de Padé da SRC para $(t(d, h) - t_0 + \frac{2}{v_0} R_{NIP})^2$, expansão em d desenvolvida na Seção 5.6, para o refletor circular. O ponto médio central m_0 está localizado na origem.

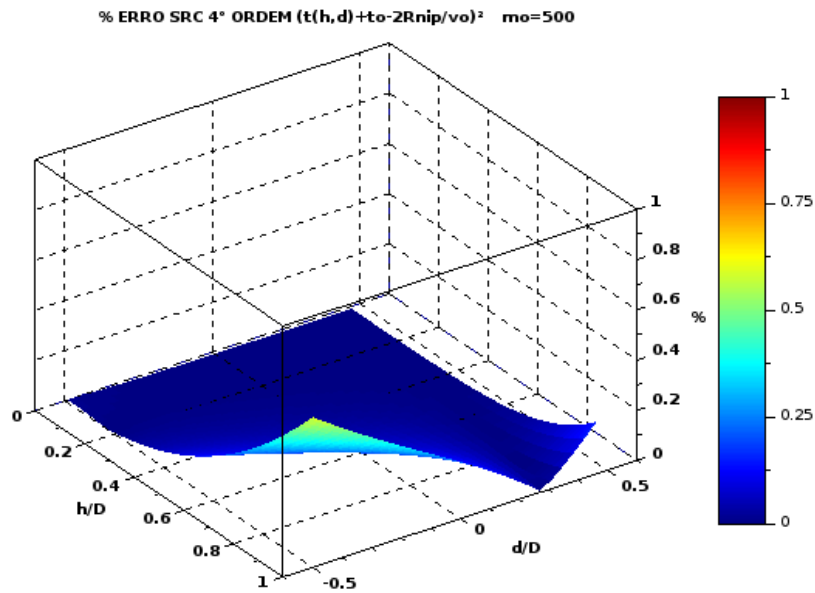


Fonte: Do Autor.

refazendo as superfícies de erro absoluto relativo para duas posições de m_0 , $500m$ e $1000m$: Para $m_0 = 500m$, o erro relativo absoluto das aproximações SRC quarta ordem

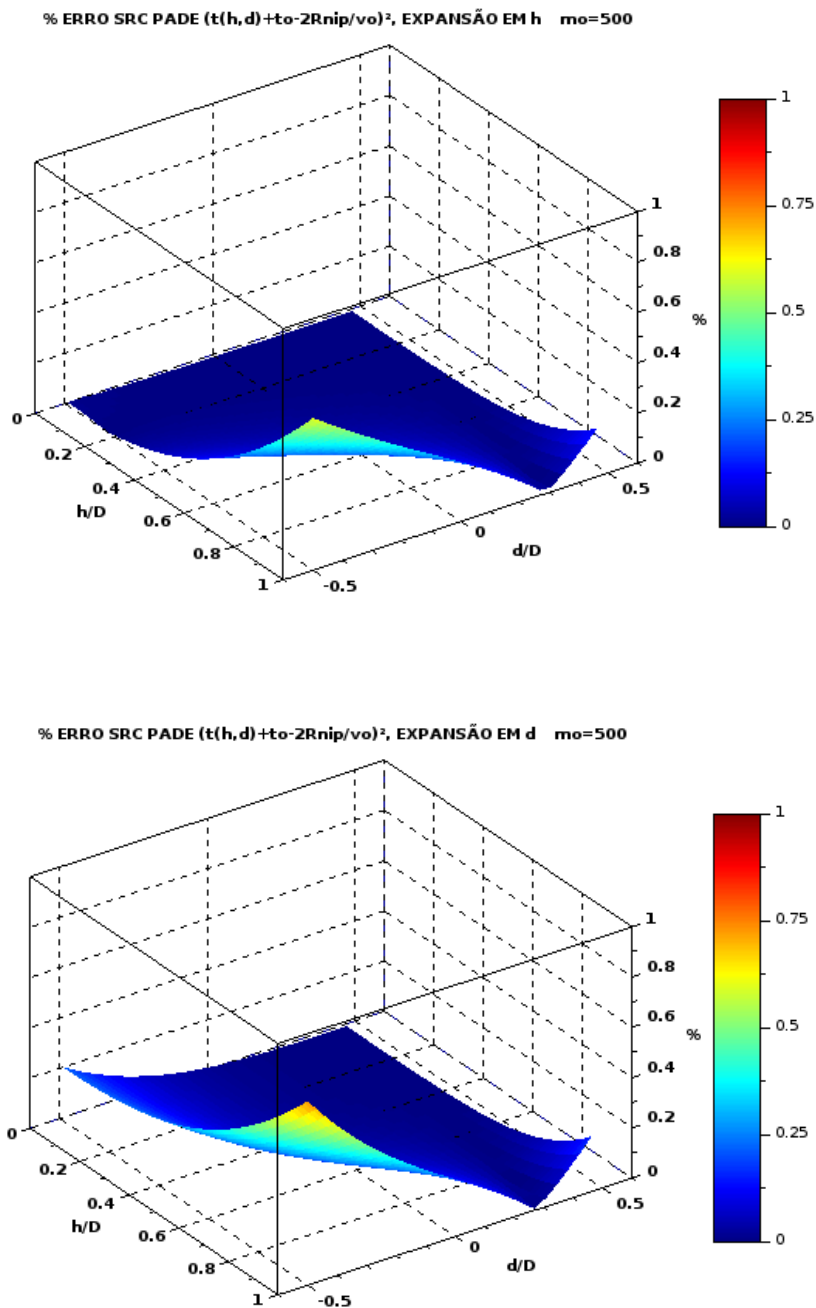
para $(t(d, h) - t_0 + \frac{2}{v_0}R_{NIP})^2$ e SRC-Padé expansão em h e expansão em d é semelhante (Figuras 29-??), apesar de a aproximação de Padé da SRC com expansão em d divergir um pouco mais quando a razão d/D tende a -0.5. Quando $m_0 = 100m$, as aproximações SRC quarta ordem para $(t(d, h) - t_0 + \frac{2}{v_0}R_{NIP})^2$ e SRC Padé expansão em h apresentam resultados semelhantes (Figuras 31 e 32); Todavia, a expansão em d do SRC Padé diverge para pequenas variações da razão d/D (Figura ??).

Figura 29 – Amplitude do Erro relativo absoluto (%) da aproximação SRC quarta ordem para a série $(t(d, h) - t_0 + \frac{2}{v_0}R_{NIP})^2$, para o refletor circular. O erro relativo absoluto é produzido a partir da Equação 6.1: A aproximação $t_{approx}(h, d)$ utilizada é a Equação 5.34 e a Equação de referência $\Psi(h, d)$ é a expressão analítica do tempo de trânsito para o modelo do refletor circular 2.65. O ponto médio central m_0 é localizado em $500m$.



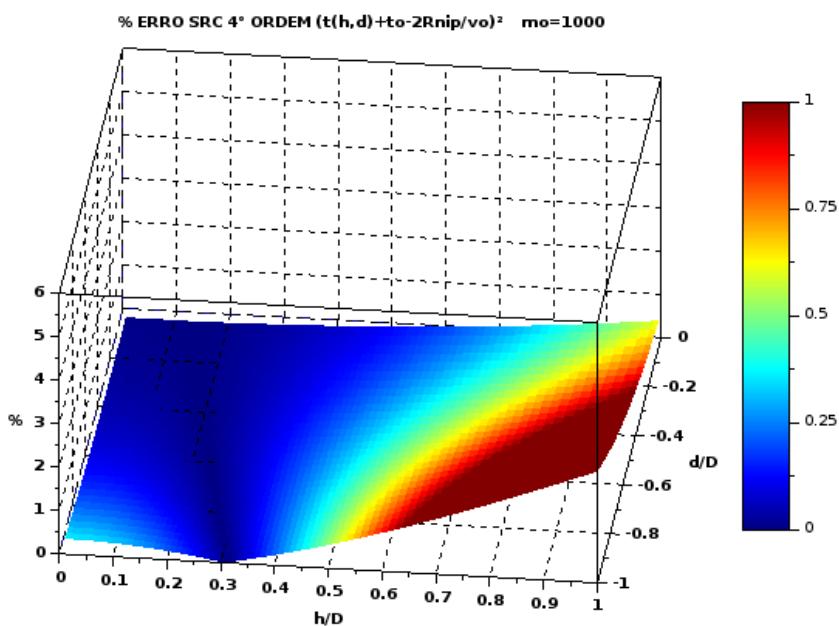
Fonte: Do Autor.

Figura 30 – Amplitude do Erro relativo absoluto (%) das aproximações (de cima para baixo): aproximação de Padé da SRC para $(t(d, h) - t_0 + \frac{2}{v_0} R_{NIP})^2$, expansão em h desenvolvida na Seção 5.3 e aproximação de Padé da SRC para $(t(d, h) - t_0 + \frac{2}{v_0} R_{NIP})^2$, expansão em d desenvolvida na Seção 5.6, para o refletor circular. O ponto médio central m_0 é localizado em $500m$.



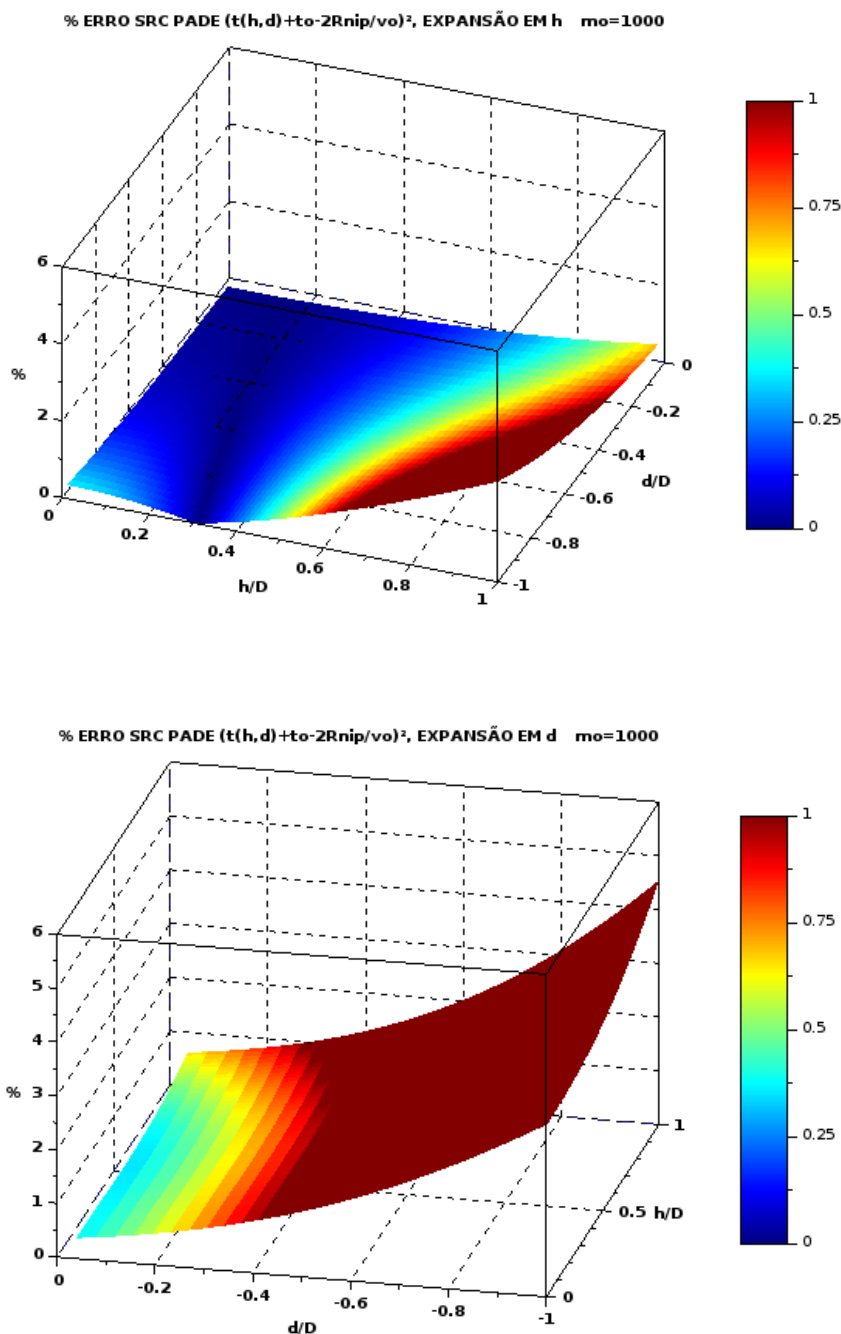
Fonte: Do Autor.

Figura 31 – Amplitude do Erro relativo absoluto (%) da aproximação SRC quarta ordem para a série $(t(d, h) - t_0 + \frac{2}{v_0} R_{NIP})^2$, para o refletor circular. O erro relativo absoluto é produzido a partir da Equação 6.1: A aproximação $t_{approx}(h, d)$ utilizada é a Equação 5.34 e a Equação de referência $\Psi(h, d)$ é a expressão analítica do tempo de trânsito para o modelo do refletor circular 2.65. O ponto médio central m_0 é localizado em $1000m$.



Fonte: Do Autor.

Figura 32 – Amplitude do Erro relativo absoluto (%) das aproximações (de cima para baixo): aproximação de Padé da SRC para $(t(d, h) - t_0 + \frac{2}{v_0} R_{NIP})^2$, expansão em h desenvolvida na Seção 5.3 e aproximação de Padé da SRC para $(t(d, h) - t_0 + \frac{2}{v_0} R_{NIP})^2$, expansão em d desenvolvida na Seção 5.6, para o refletor circular. O ponto médio central m_0 é localizado em $1000m$.



Fonte: Do Autor.

7 INVERSÃO DA SUPERFÍCIE SRC UTILIZANDO AS APROXIMAÇÕES SRC QUARTA ORDEM, SRC HIPERBÓLICO E SRC NÃO HIPERBÓLICO

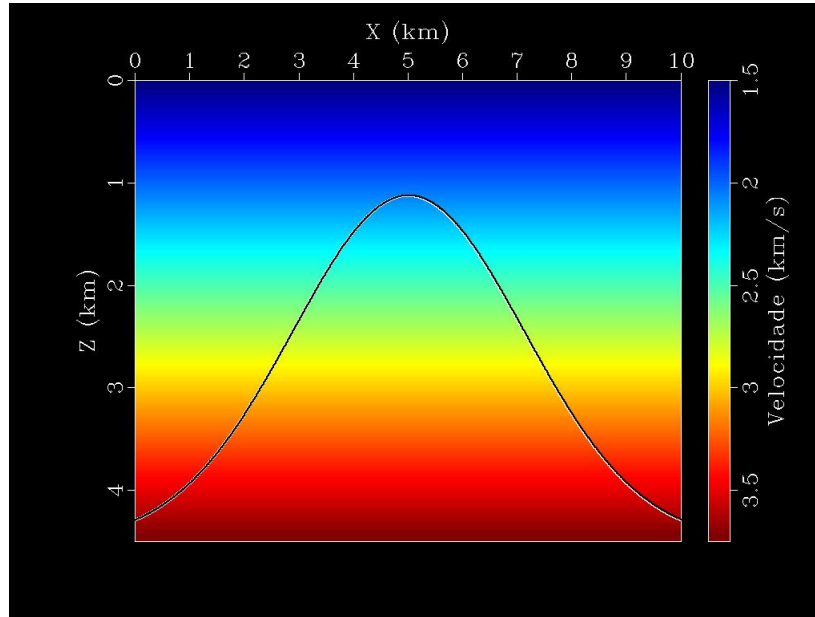
Neste Capítulo realizaremos um experimento numérico com um algoritmo de otimização por mínimos quadrados utilizando as aproximações do SRC hiperbólico, SRC não hiperbólico e SRC quarta ordem. Nosso objetivo é produzir o melhor ajuste possível da superfície SRC aproximada em relação a uma superfície SRC extraída a partir dos dados da aquisição sísmica simulada do modelo de um refletor gaussiano. Utilizaremos os programas de modelagem (*sfkirmod*) e inversão (*sflsfit*) disponibilizados através do pacote MADAGASCAR¹. Os Scripts modificados de modo a incluir a aproximação quadrática do SRC quarta ordem são apresentados no Apêndice D. A metodologia utilizada:

1. A superfície SRC $\Psi(h, d)$ é gerada através da modelagem Kirchhoff dos dados sísmicos de reflexão, a partir do modelo do refletor gaussiano, a velocidade varia linearmente com a profundidade (Figura 33). O gradiente de variação de velocidade vertical no modelo é igual a 0,5; e a velocidade inicial é 1,5km/s. O programa responsável pela modelagem, *SFKIRMOD*, gera um cubo de dados já organizados em famílias de ponto médio comum (Figura 34). Os parâmetros do levantamento simulado são: frequência pico do pulso sísmico é 10 Hz, 161 receptores espaçados de 25m, 401 fontes espaçadas de 25m e 1001 amostras com um intervalo de amostragem no tempo de 4ms somando no total 4s de levantamento.
2. A superfície SRC extraída dos dados modelados é utilizada para ajustar as aproximações da superfície SRC através da otimização por mínimos quadrados. O programa *SFLSFIT* tem como entrada a diferença entre a superfície SRC modelada e a superfície SRC aproximada (resíduo) e os coeficientes da aproximação SRC a serem ajustados. A saída é um novo valor dos coeficientes da superfície SRC aproximada, utilizando esses novos coeficientes é gerada uma nova superfície SRC aproximada. O processo se repete até que o resíduo seja mínimo ou que o máximo de iterações seja atingido.

Após a otimização dos coeficientes da aproximação da SRC, são produzidas as superfícies de erro. Essa superfície é o valor absoluto da diferença entre a superfície de reflexão comum extraída dos dados modelados e a superfície aproximada otimizada através do método dos mínimos quadrados. Essa diferença representa o quanto a superfície aproximada difere da superfície de reflexão modelada.

¹ Os programas *sfkirmod* e *sflsfit* foram desenvolvidos e disponibilizados para uso livre por Sergey Fomel no site ww.ahay.org.

Figura 33 – Refletor gaussiano com centro em 5Km imerso em um meio de variação linear do gradiente de velocidade, a velocidade varia de 1,5Km a 3,5Km.



Fonte: Adaptado de (FOMEL; KAZINNIK, 2013).

A estratégia de otimização consiste em encontrar para um dado experimental, os coeficientes κ_i que minimizem a função erro quadrático $f(\kappa)$, Equação 7.1 (FOMEL; KAZINNIK, 2013):

$$f(\kappa) = \frac{1}{2} \sum_d \sum_h |t_{ap}(h, d) - \Psi(h, d)|^2 \quad (7.1)$$

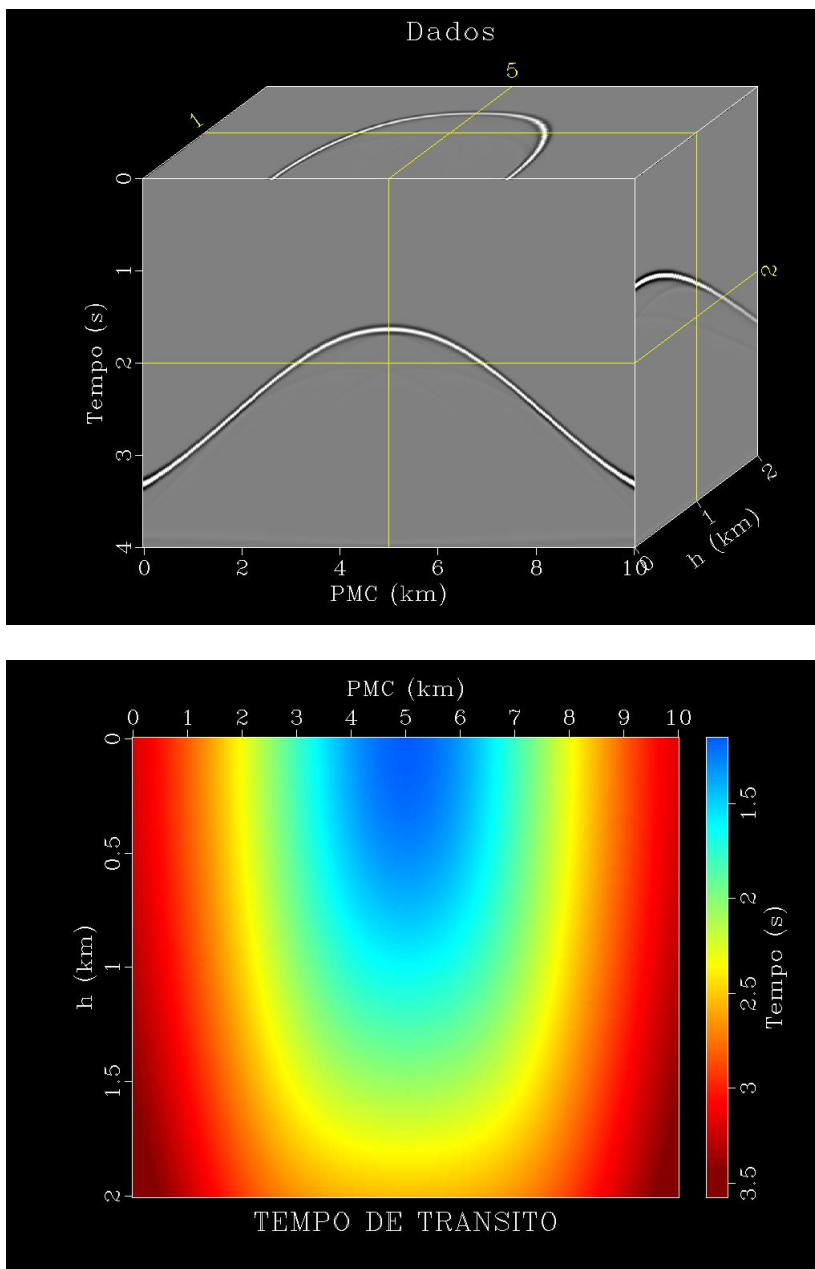
O gradiente da função objeto (FOMEL; KAZINNIK, 2013):

$$\frac{\partial f}{\partial \kappa_i} = \sum_d \sum_h |t_{ap}(h, d) - \Psi(h, d)| \frac{\partial t_{ap}}{\partial \kappa_i} \quad (7.2)$$

A Equação 7.2 descreve o funcionamento do programa SFLSFIT, seu objetivo é encontrar o mínimo da função $f(\kappa)$ através da busca pelos valores de κ_i que tornem a Equação nula. Para tanto, o programa precisa do resíduo, diferença entre a superfície SRC aproximada $t_{ap}(h, d)$ e a superfície SRC modelada $\Psi(h, d)$; e das derivadas parciais da superfície SRC aproximada em relação aos coeficientes a serem invertidos.

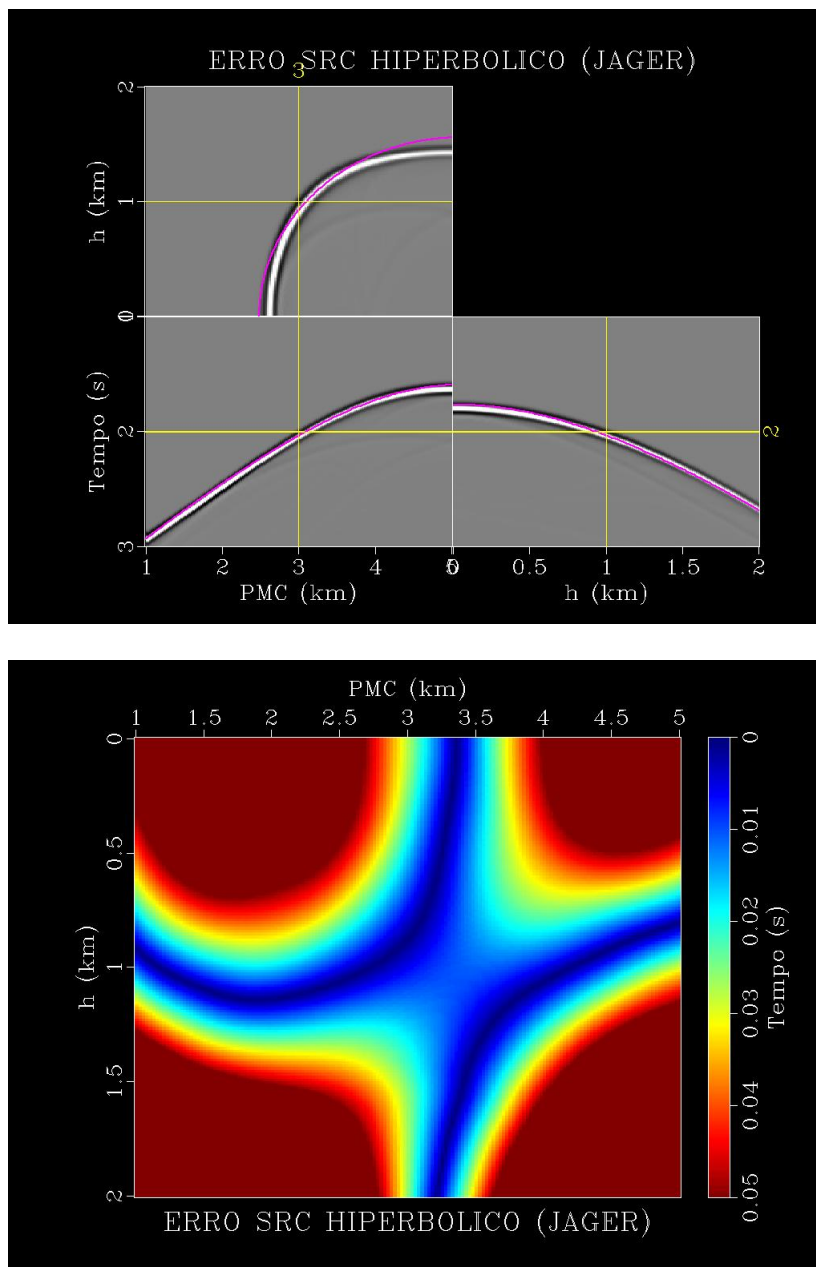
As aberturas em h e $d = m - m_0$ são iguais a 2km, obtivemos as figuras 35-38. Para essas Figuras m_0 foi escolhido igual a 3Km e 4Km, o meio afastamento h varia de 0 a 2Km.

Figura 34 – De cima para baixo: Cubo de dados sísmicos de reflexão e Superfície de Reflexão Comum (SRC) extraída a partir da modelagem de dados sísmicos de reflexão do refletor gaussiano da Figura 33. Os eixos são: h meio afastamento, ponto médio comum (PMC) e tempo de reflexão em segundos.



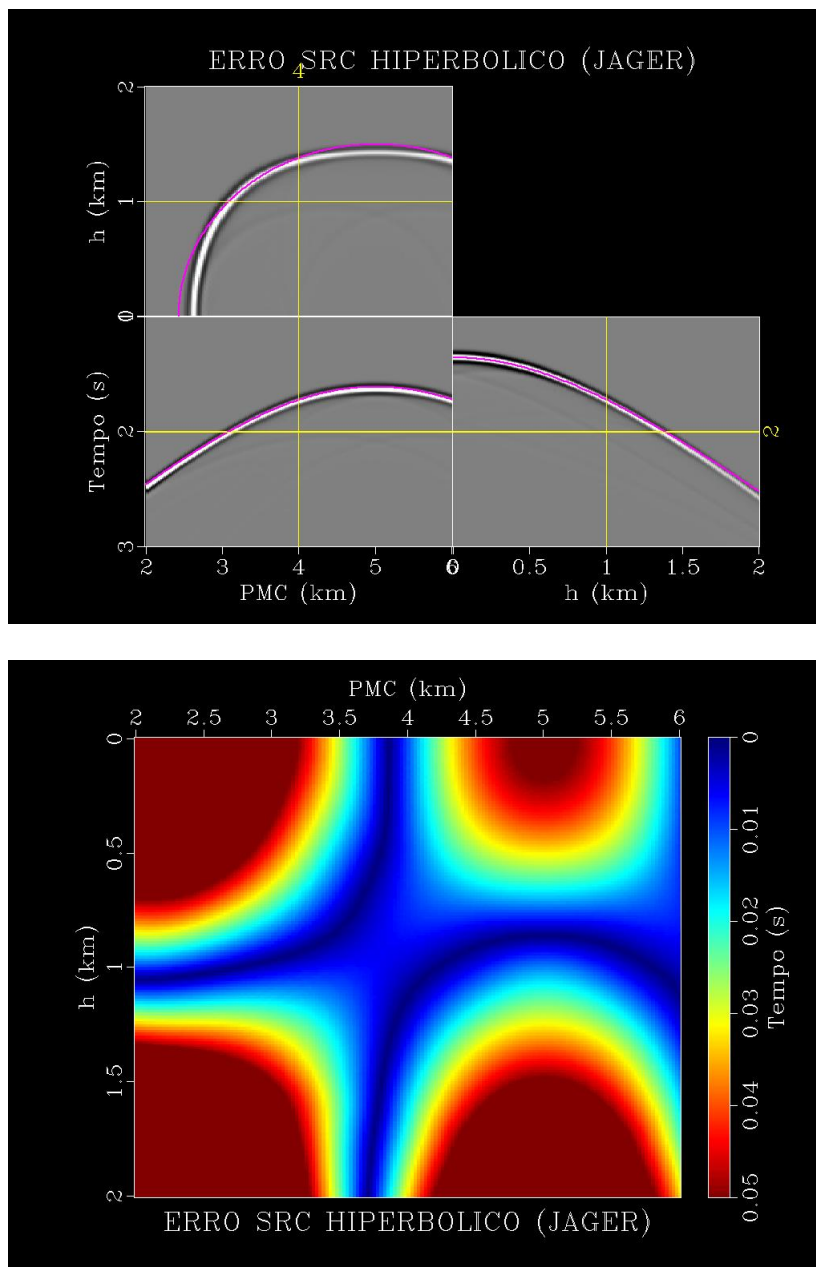
Fonte: Do Autor.

Figura 35 – De cima para baixo: Curva ajustada (colorida) sobreposta aos dados modelados e superfície de erro relativo da aproximação do SRC hiperbólico (Equação 2.80). O ponto médio central m_0 é localizado em 3Km.



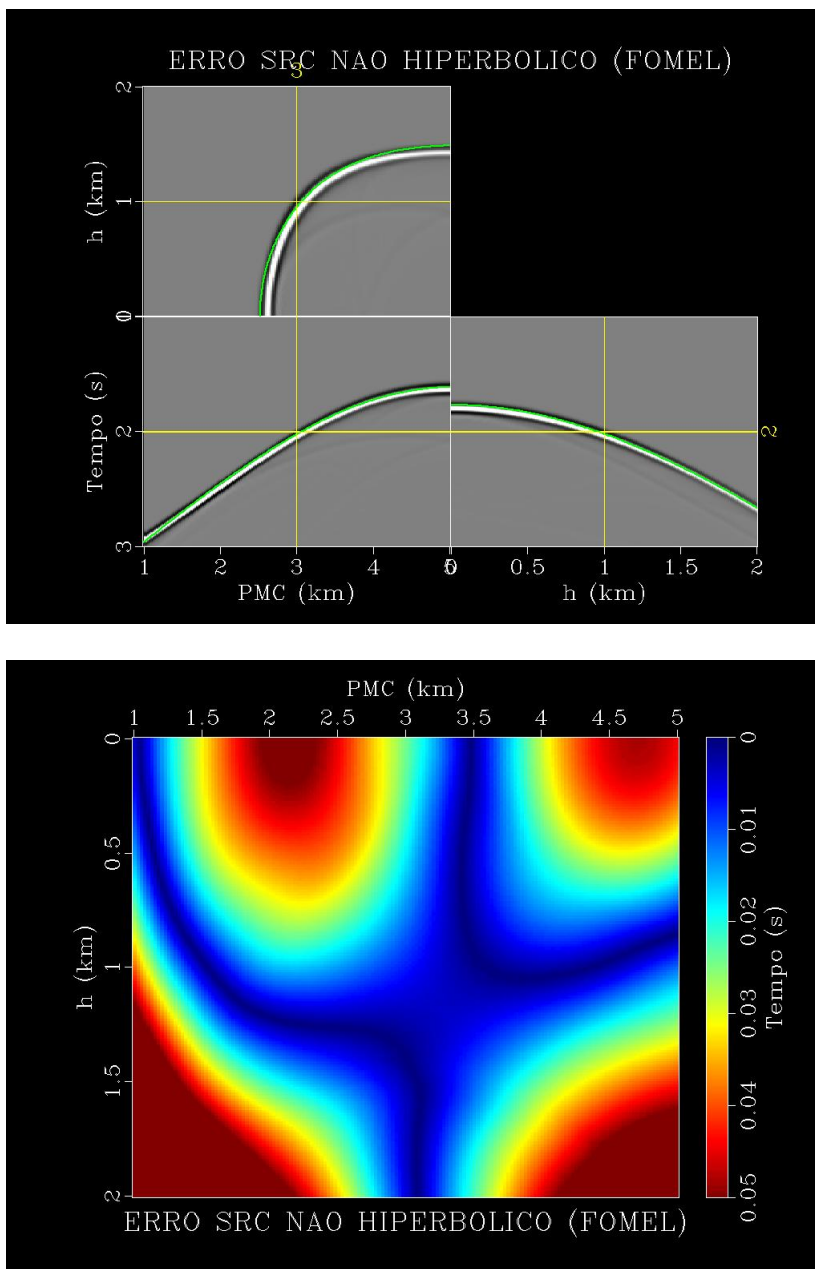
Fonte: Do Autor.

Figura 36 – De cima para baixo: Curva ajustada (colorida) sobreposta aos dados modelados e superfície de erro relativo da aproximação do SRC hiperbólico (Equação 2.80). O ponto médio central m_0 é localizado em 4Km.



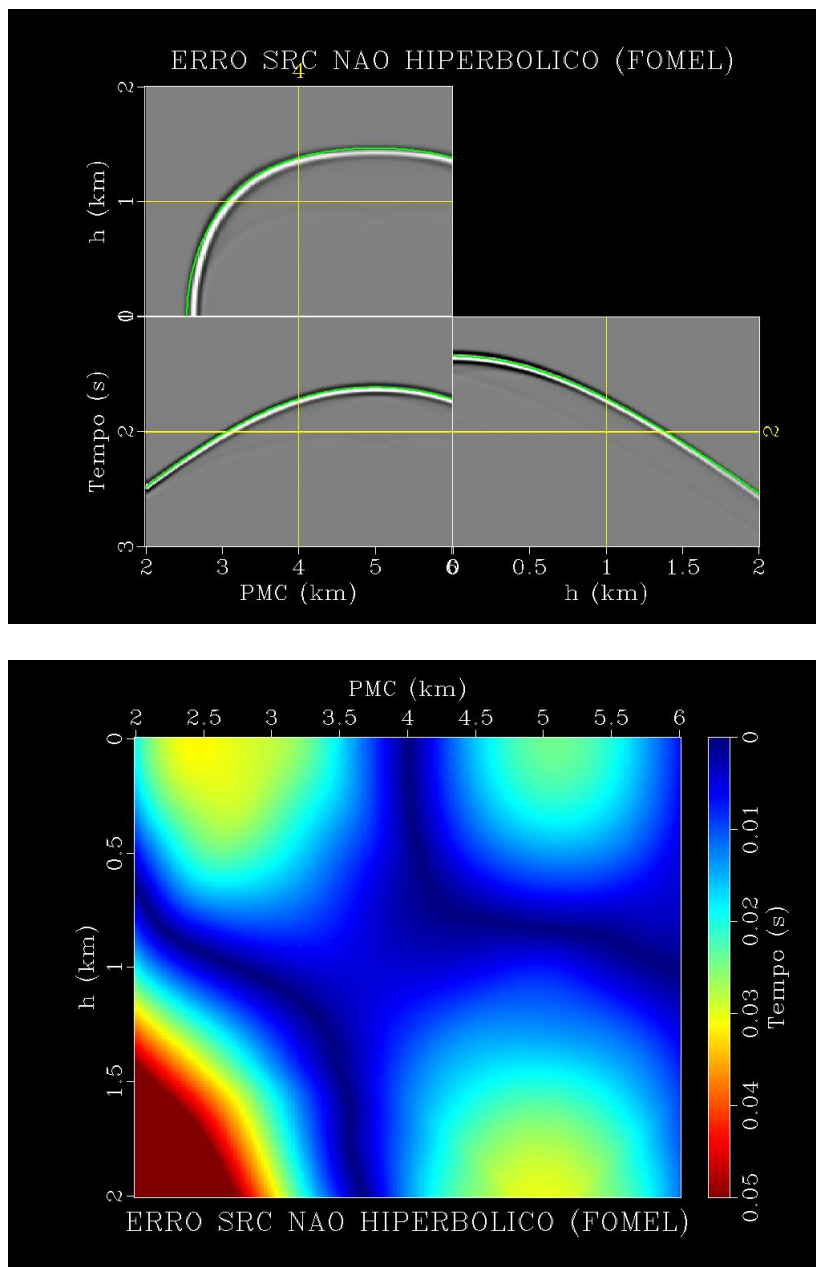
Fonte: Do Autor.

Figura 37 – De cima para baixo: Curva ajustada (colorida) sobreposta aos dados modelados e superfície de erro relativo da aproximação do SRC não hiperbólico (Equação 2.85). O ponto médio central m_0 é localizado em 3Km.



Fonte: Do Autor.

Figura 38 – De cima para baixo: Curva ajustada (colorida) sobreposta aos dados modelados e superfície de erro relativo da aproximação do SRC hiperbólico de (FOMEL; KAZINNIK, 2013) (Equação 2.85). O ponto médio central m_0 é localizado em 4Km.



Fonte: Do Autor.

A aproximação do SRC não hiperbólico é mais acurada do que a aproximação do SRC hiperbólico, pois, como pode ser visto nas Figuras 35-38, a região de erro mínimo em azul aumenta, sobretudo em m_0 localizado em 4Km, mais próximo do ápice do refletor gaussiano, onde há menor influência da variação de velocidade e da inclinação do refletor.

Utilizamos a aproximação quadrática do SRC quarta ordem, a série $t^2(h, d)$, pois o

cálculo dos coeficientes das derivadas em 7.2 são facilmente calculados como potências de d e h . Podemos representar a expansão em série de Taylor quarta ordem do tempo de trânsito para a série $t^2(h, d)$ (Equação 5.23) da seguinte forma:

$$t_{ap}^2(h, d) = \kappa_0 + \kappa_1 d + \kappa_2 d^2 + \kappa_3 h^2 + \kappa_4 d^3 + \kappa_5 d h^2 + \kappa_6 h^2 d^2 + \kappa_7 d^4 + \kappa_8 h^4 \quad (7.3)$$

Onde os coeficientes κ_i representam os coeficientes constantes da Equação 5.23 que dependem apenas dos parâmetros R_N , R_{NIP} , β , t_0 e v_0 . As derivadas da Equação 7.3 em relação aos coeficientes serão:

$$\frac{\partial t_{ap}^2(h, d)}{\partial \kappa_0} = 1 \quad (7.4)$$

$$\frac{\partial t_{ap}^2(h, d)}{\partial \kappa_1} = d \quad (7.5)$$

$$\frac{\partial t_{ap}^2(h, d)}{\partial \kappa_2} = d^2 \quad (7.6)$$

$$\frac{\partial t_{ap}^2(h, d)}{\partial \kappa_3} = h^2 \quad (7.7)$$

$$\frac{\partial t_{ap}^2(h, d)}{\partial \kappa_4} = d^3 \quad (7.8)$$

$$\frac{\partial t_{ap}^2(h, d)}{\partial \kappa_5} = d h^2 \quad (7.9)$$

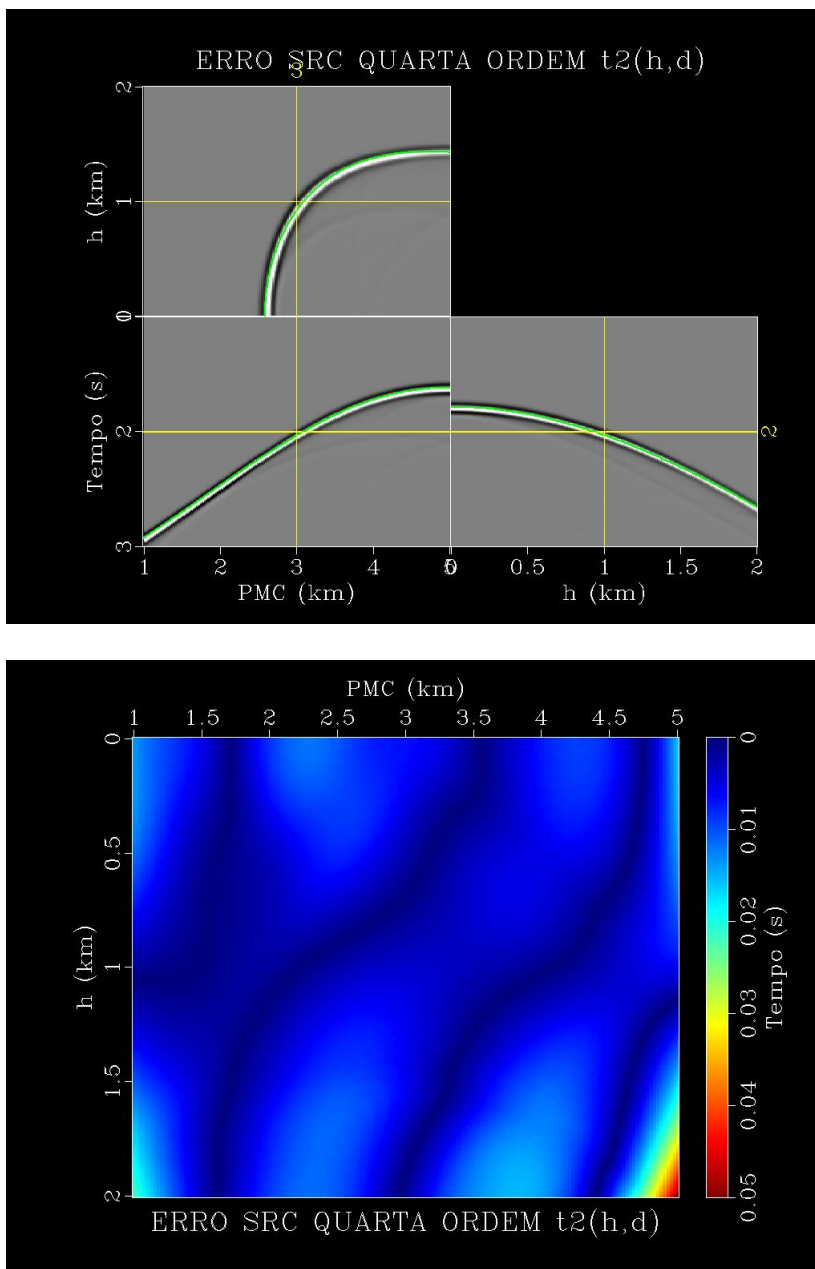
$$\frac{\partial t_{ap}^2(h, d)}{\partial \kappa_6} = h^2 d^2 \quad (7.10)$$

$$\frac{\partial t_{ap}^2(h, d)}{\partial \kappa_7} = d^4 \quad (7.11)$$

$$\frac{\partial t_{ap}^2(h, d)}{\partial \kappa_8} = h^4 \quad (7.12)$$

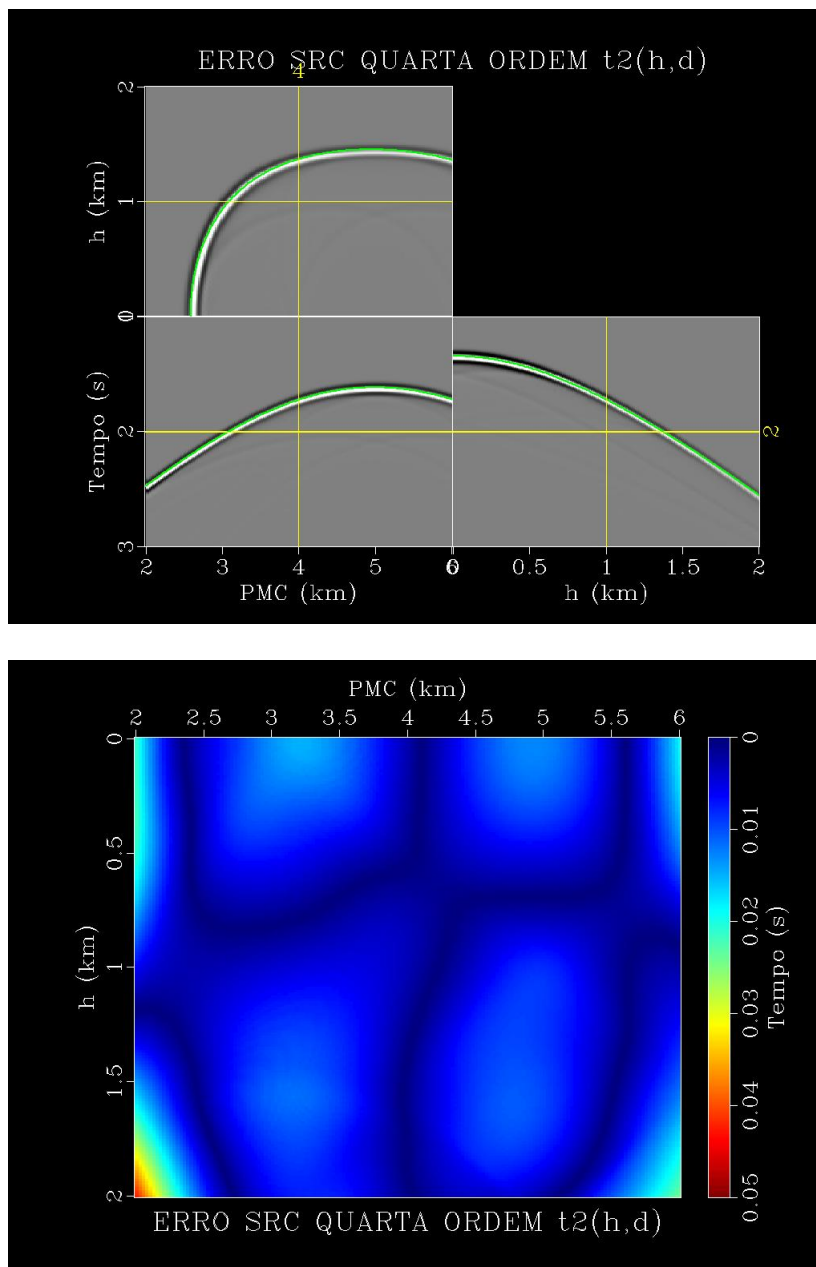
Assim podemos realizar a inversão utilizando a Equação 7.2 que depende do erro relativo entre a superfície SRC aproximada e a superfície SRC extraída dos dados e das derivadas parciais da aproximação em relação aos coeficientes. A Equação 7.2 na realidade representa um grupo de 9 Equações, uma para cada coeficiente a ser otimizado.

Figura 39 – De cima para baixo: Curva ajustada (colorida) sobreposta aos dados modelados e superfície de erro relativo da aproximação do SRC quarta ordem (Equação 5.23). O ponto médio central m_0 é localizado em 3Km.



Fonte: Do Autor.

Figura 40 – De cima para baixo: Curva ajustada (colorida) sobreposta aos dados modelados e superfície de erro relativo da aproximação do SRC quarta ordem (Equação 5.23). O ponto médio central m_0 é localizado em 4Km.



Fonte: Do Autor.

Como as derivadas parciais das aproximações SRC utilizadas são funções contínuas, poderemos utilizar os métodos de minimização clássicos para encontrar um mínimo local (BJORC, 1996). As aproximações de Padé do SRC não podem ser utilizadas nesse processo de inversão, pois as derivadas parciais dependerão dos próprios coeficientes que se deseja inverter, ou seja, a dependência não será linear.

Modificamos o programa de inversão disponibilizados no pacote MADAGASCAR, inserindo a aproximação na Equação 7.3, e as derivadas nas Equações 7.4-7.12. Assim, produzimos as Figuras 39 e 40.

A aproximação do SRC quarta ordem amplia a região de erro mínimo em azul das outras aproximações do SRC hiperbólico e SRC não hiperbólico, produzindo resultados acurados até para aberturas da ordem de 2Km tanto em h , quanto em $d = m - m_0$. O custo computacional, porém é alto. Para realizar a inversão dos métodos SRC hiperbólico e não hiperbólico há apenas 4 coeficientes a inverter, dados pelas Equações 2.82-2.84, e consequentemente 4 derivadas parciais em relação a cada um dos coeficientes.

Porém, na aproximação SRC quarta ordem precisamos inverter 9 coeficientes da Equação 7.3, consequentemente calculamos as 9 derivadas dadas pelas Equações 7.4-7.12. Além disso Utilizamos o parâmetro de regularização disponível no programa de otimização por mínimos quadrados SFLSFIT, esse regularizador é um número natural adicionado ao operador matricial de inversão de modo a evitar singularidades.

8 RESULTADOS

As aproximações de Padé no domínio do ponto médio comum apresentam como vantagem a necessidade de três parâmetros de aproximação: A , v e o t_0 . A é um parâmetro que depende apenas do raio de afastamento nulo, e para encontrá-lo basta apenas comparar a Equação 2.46 com a expansão em série de Taylor de quarta ordem do tempo de trânsito do modelo (STOVAS; FOMEL, 2010), método utilizado nas Seções 2.4.1, 2.4.2 e 2.5.

A equação generalizada do tempo de trânsito (STOVAS; FOMEL, 2010) depende de 5 parâmetros, v e t_0 , e os coeficientes A , B e C . Para a determinação dos parâmetros B e C necessitamos do traçamento de um raio de afastamento não nulo, os parâmetros serão dados a partir das Equações 2.55 e 2.56, dependentes do tempo de chegada $t(X) = T$ e $P = dt/dX$ desse raio de afastamento não nulo igual a X .

Por isso, as aproximações de Padé para o domínio do ponto médio comum são mais simples de serem utilizadas do que a aproximação generalizada. A acurácia das aproximações de Padé para o domínio do ponto médio comum, descritas genericamente pela Equação 3.9, é aumentada com o auxílio do conceito de frações contínuas, resultando nas Equações 3.13, 3.16 e 3.18.

Tabela 1 – Acurácia das aproximações de tempo de trânsito para o domínio do ponto médio comum, a escala vai da melhor(6) para a pior aproximação (1).

Aproximação	Fonte	Parâmetros	Acurácia
Generalizada	(STOVAS; FOMEL, 2010)	A, B, C, v, t_0	6
Padé frações contínuas	Do Autor	A, v, t_0	5
Padé	Do Autor	A, v, t_0	4
Hipérbole deslocada	(DE BAZELAIRE, 1988)	s, t_0, v	3
Modelo TIV	(ALKHALIFA; TSVANKIN, 1995)	η, t_0, v	2
Sobretempo normal	(DIX, 1955)	v, t_0	1

Na comparação das aproximações de tempo de trânsito no domínio do ponto médio comum, no Capítulo 4, a aproximação de Padé é mais robusta do que as aproximações convencionais da literatura: sobretempo normal (Equação 2.47), hipérbole deslocada (Equação 2.20) e aproximação para o modelo TIV (Equação 2.48). As aproximações de Padé apresentam regiões de erro mínimo maiores para os modelos de variação linear da velocidade e variação linear do quadrado da vagarosidade (Figuras 4 e 5), além divergirem mais suavemente do que as aproximações convencionais (ver Tabela 1).

Como a aproximação de Padé é uma aproximação que surge a partir da Equação generalizada, esta possui erro maior do que a equação original. O erro da Equação generalizada é várias ordens de magnitude inferior do que qualquer uma das aproximações

para os modelos variação linear da velocidade e variação linear do quadrado da vagarosidade.

Para o o modelo TIV, a aproximação de Padé e aproximação de Padé com Frações Contínuas também apresentaram melhor resultado do que as aproximações convencionais. A aproximação apresenta erro mínimo em afastamentos até $6000m$, enquanto que a aproximação para o modelo TIV, Equação 2.48, já começa a divergir a partir de $3000m$. Todavia, a aproximação generalizada ainda é superior a todas as aproximações, inclusive à aproximação de Padé produzida a partir dela. O erro desta aproximação é desprezível até afastamentos de $10000m$ (Afastamento máximo utilizado).

Assim, a aproximação de Padé para o tempo de trânsito nas famílias de ponto médio comum é uma ferramenta útil por causa da sua simplicidade, dependente apenas do parâmetro A . Essa simplicidade é útil na criação de algoritmos de inversão baseados nessa aproximação com poucos parâmetros para inverter. A aproximação se mostrou robusta até $6000m$ no meio TIV, produzindo bons resultados para afastamentos 2 vezes superiores ao afastamento em que a aproximação hiperbólica começa a divergir ($3000m$). No caso, dos modelos de variação linear de velocidade e de variação linear da vagarosidade a aproximação de Padé produz erros bem menores que as aproximações convencionais e suporta grandes afastamentos e gradientes de variação de velocidade.

As comparações das aproximações do método SRC para o modelo do refletor circular em um meio de velocidade constante, Capítulo 6, apresentam um importante resultado (ver Tabela 2): O método SRC hiperbólico diverge rapidamente para distâncias entre o ponto médio central m_0 e o ponto médio m , isso significa que as aberturas escolhidas, no domínio do meio afastamento h e no domínio da distância entre os pontos médios, irão influenciar na qualidade da seção empilhada. Ou seja, não haverá diferença significativa em relação a uma seção sísmica empilhada com o método SRC hiperbólico e uma seção empilhada com o SRC quarta ordem para pequenas aberturas em h e pequenas aberturas em d ; a diferença na qualidade da seção sísmica empilhada deve surgir quando aumenta-se a abertura de empilhamento no domínio do ponto médio comum $d = m - m_0$ e no domínio do meio afastamento h .

Tabela 2 – Acurácia das aproximações de tempo de trânsito para a configuração SRC para o modelo do refletor circular em um meio de velocidade constante, no Capítulo 6, a escala vai da melhor(3) para a pior aproximação (1).

Aproximação SRC	Fonte	Parâmetros	Acurácia
Não hiperbólico	(FOMEL; KAZINNIK, 2013)	R_N, R_{NIP}, β, t_0 e v_0	3
Quarta ordem	(HöCHT, 2002)	R_N, R_{NIP}, β, t_0 e v_0	2
Padé	Do Autor	R_N, R_{NIP}, β, t_0 e v_0	2
Hiperbólico	(JAGER et al., 2001)	R_N, R_{NIP}, β, t_0 e v_0	1

A aproximação SRC que apresentou o melhor resultado no teste analítico foi a aproximação SRC não hiperbólica, essa aproximação produziu o menor erro para as três

posições de m_0 escolhidas, superando a aproximação do SRC hiperbólico, as aproximações SRC quarta ordem e as aproximações de Padé SRC.

A aproximação de Padé aumenta a região de erro mínimo da aproximação *parabólica* do SRC quarta ordem, série $t(h, d)$, como visto na Seção 6.2. A região de erro mínimo em azul aumenta e o erro diminui de várias ordens de magnitude (O erro alcança valores de 20% na aproximação SRC quarta ordem e diminui para menos de 1% para valores das razões h/D iguais a 0.8).

As aproximações de Padé da aproximação *quadrática* do SRC quarta ordem, série $t^2(h, d)$, não produzem diferença significativa para $m_0 = 0$. A diferença surge quando $m_0 = 500m$, as aproximações de Padé SRC aumentam a região de erro mínimo em azul para razões h/D até 0.4, a aproximação de Padé em d consegue manter um comportamento assintótico mais suave que as outras duas aproximações. Na posição de $m_0 = 100m$, as três aproximações apresentam o mesmo comportamento assintótico, divergindo rapidamente para razões h/D maiores que 0.4 sendo o pior resultado o da aproximação de Padé SRC expansão em d .

Na Seção 6.4 a aproximação de Padé *quadrática deslocada* do SRC quarta ordem, série $(t(d, h) - t_0 + \frac{2}{v_0} R_{NIP})^2$, não produziu diferença na acurácia da aproximação, a exceção da expansão em d que apresentou o pior resultado para $m_0 = 500m$ e $m_0 = 100m$. No caso desta série do SRC quarta ordem, a aproximação de Padé não produz melhora na qualidade da aproximação.

Na inversão dos parâmetros do SRC, realizada no Capítulo 7, a aproximação *quadrática* do SRC quarta ordem apresenta um aumento da região de convergência em relação ao SRC não hiperbólico e o SRC hiperbólico (ver Tabela 3). O mesmo teste não foi realizado para as aproximações de Padé, e para as aproximações *parabólica* e *quadrática deslocada* do SRC quarta ordem, pois o cálculo das derivadas parciais utilizando essa metodologia é complicado. Porém, a inversão dos parâmetros do SRC pode ser feita de outras maneiras, como alguma metodologia de *Semblance*¹ por exemplo, de modo a possibilitar a inclusão dessas aproximações.

Apesar do custo computacional aumentar para a inversão dos 9 coeficientes e cálculo das 9 derivadas parciais da aproximação *quadrática* do SRC quarta ordem, os resultados justificam a sua utilização. Propomos portanto, como sugestão para pesquisas futuras, a realização da etapa de empilhamento sobre as superfícies SRC quarta ordem e SRC não hiperbólico, com o mesmo modelo do refletor gaussiano e metodologia de inversão, para comparação entre os resultados da seção empilhada.

¹ Do inglês, coerência. (DUARTE, 2007)

Tabela 3 – Acurácia das aproximações de tempo de trânsito para a configuração SRC, no teste numérico, a escala vai da melhor(3) para a pior aproximação (1).

Aproximação SRC	Fonte	Parâmetros	Acurácia
Quarta ordem	(HöCHT, 2002)	R_N, R_{NIP}, β, t_0 e v_0	3
Não hiperbólico	(FOMEL; KAZINNIK, 2013)	R_N, R_{NIP}, β, t_0 e v_0	2
Hiperbólico	(JAGER et al., 2001)	R_N, R_{NIP}, β, t_0 e v_0	1

9 CONCLUSÃO

As equações do tempo de trânsito utilizando aproximantes de Padé surgem como alternativa para aproximar o tempo de trânsito em grandes afastamentos são mais acuradas do que a aproximação hiperbólica do tempo de trânsito (sobretempo normal). Estas aproximações dependem apenas de 3 parâmetros, v , t_0 e o parâmetro A , obtido através da expansão em série de Taylor de quarta ordem do tempo de trânsito ao longo do raio normal.

As aproximações do SRC utilizando aproximantes de Padé, são mais acuradas que a aproximação hiperbólica do SRC. As aproximações não hiperbólicas do SRC: SRC Padé, SRC não hiperbólico e SRC quarta ordem, estendem a região de convergência da aproximação hiperbólica do SRC para maiores distâncias entre os pontos médios e meio afastamentos, surgindo como alternativa para a realização do empilhamento através de superfícies SRC não hiperbólicas que estendem a região de empilhamento, aumentando a cobertura e razão sinal/ruído.

A aproximação *quadrática* do SRC quarta ordem produziu o melhor ajuste na inversão dos parâmetros do SRC através da otimização por mínimos quadrados. Isso sugere que, apesar do método de inversão utilizado tornar complicada a utilização das aproximações SRC Padé por causa da dificuldade em calcular as derivadas parciais necessárias, utilizando outro método de inversão dos parâmetro do SRC que não necessite dessas derivadas, a região de convergência obtida tenderia a aumentar através da introdução das aproximações SRC Padé.

Como sugestão para pesquisas futuras propomos a realização das etapas de empilhamento, tanto para a configuração ponto médio comum quanto SRC, sobre as curvas e superfícies produzidas através das aproximações de Padé. Enfatizando que as aberturas no domínio do afastamento e dos pontos médios irá influenciar na diferença de acurácia nas seções empilhadas. Uma vez, que a melhora na acurácia das aproximações não hiperbólicas em relação as aproximações sobretempo normal e SRC hiperbólico, surge para grandes afastamentos e distâncias entre os pontos médios. O parâmetro A pode ser obtido através de *Semblance*, para encontrar o parâmetro que melhor ajusta a curva aos dados para grandes afastamentos, a velocidade utilizada na aproximação será a v_{RMS} . No caso SRC, uma vez obtidos os parâmetros R_N , R_{NIP} e β bastará substituí-los nas aproximações SRC Padé e realizar o empilhamento sobre as superfícies SRC aproximadas.

REFERÊNCIAS

- ALKHALIFA, T. An anisotropic marmousi model. *Stanford Exploration Project*, p. 265–282, 1997.
- ALKHALIFA, T.; TSVANKIN, I. Velocity analysis for transversely isotropic media. *Geophysics*, n. 60, p. 1550–1566, 1995.
- BJORC, A. *numerical methods for least squares problems*. [S.l.]: SIAM, 1996.
- CERVENY, V. *Seismic Ray Theory*. [S.l.]: Cambridge:Cambridge University press, 2001.
- DE BAZELAIRE, E. Normal moveout revisited - inhomogeneous media and curved interfaces. *Geophysics*, n. 53, p. 143–157, 1988.
- DIX, C. H. Seismic velocities from seismic measurements. *Geophysics*, n. 20, p. 68–86, 1955.
- DUARTE, O. *Dicionário enciclopédico inglês-português de geofísica e geologia*. [S.l.]: SBGf - Sociedade Brasileira de Geofísica, Rio de Janeiro, RJ., 2007.
- FOMEL, S.; KAZINNIK, R. Nonhyperbolic common reflection surface. *Geophysical Prospecting*, v. 61, p. 21–27, 2013.
- GELCHINSKY, B.; BERKOVITCH, A.; KEYDAR, S. Multifocusing homeomorphic imaging – part 1. basic concepts and formulas. *Journal of Applied Geophysics*, n. 42, p. 229–242, 1999a.
- GHOSH, S. G.; KUMAR, P. Divergent and asymptotic nature of the time-offset taner-koehler series in reflection seismics. *Geophysics*, n. 67, p. 1913–1919, 2002.
- GLAESER, G. Reflection on spheres and cylinders of revolution. *Journal for Geometry and Graphics*, n. 3, p. 121–139, 1999.
- HAKE, H.; HELBIG, K.; MESDAG, C. S. Three-term taylor series for $x^2 + t^2$ curves of p- and s-waves over layered transversely isotropic ground. *Geophysical Prospecting*, n. 32, p. 828–850, 1984.
- HUBRAL, P. Computing true amplitude reflections in a laterally inhomogeneous earth. *Geophysics*, n. 48, p. 1051–1062, 1983.
- HÖCHT, G. *Traveltime approximations for 2D and 3D media and kinematic wavefield attributes*. Tese (Doutorado) — Faculdade de Física Karlsruhe (TH) Genehmigte, 2002.
- JAGER, R. et al. Common reflection surface stack: Image and attributes. *Geophysics*, n. 66, p. 97–109, 2001.
- LANDA, E. et al. Application of multifocusing method for subsurface imaging. *Journal of Applied Geophysics*, n. 42, p. 283–300, 1999.
- LIN, Q. *A Study of long-offset seismic imaging with an upgraded physical modeling system*. Tese (Doutorado) — Faculdade do departamento de geociências da universidade de Houston, 2003.

- MÜLLER, T. Common reflection surface versus nmo/stack and nmo/dmo/stack. *In 60th EAGE Annual International Meeting*, 1998.
- NAVARRO, M. C. et al. Os aproximantes de padé. *MATEMÁTICA UNIVERSITÁRIA*, n. 26/27, p. 49–66, junho/dezembro 1999.
- ROMANELLI, A. L. *Análise do sinal sísmico*. [S.l.]: PETROBRAS, 2007.
- SLOTNICK, M. M. *Lessons in seismic computing*. [S.l.]: Society of Exploration Geophysicists, 1959.
- SONG, H. et al. Long-offset moveout for vti using padé approximation. *Geophysics*, v. 81, n. 5, p. 219–227, 2016.
- STOVAS, A.; FOMEL, S. Generalized nonhyperbolic moveout approximation. *Geophysics*, v. 75, n. 2, p. U9–U18, 2010.
- TANER, M. T.; KOEHLER, F. Velocity spectra – digital computer derivation and applications of velocity functions. *Geophysics*, n. 34, p. 859–881, 1969.
- THOMSEN, L. Weak elastic anisotropy. *Geophysics*, n. 51, p. 1954–1966, 1986.
- TYGEL, M.; SANTOS, L. T.; SCHLEICHER, J. Multifocus moveout revisited: derivations and alternative expressions. *Applied Geophysics*, n. 42, p. 319–331, 1999.
- VERSTEEG, R. J. Sensitivity of prestack depth migration to the velocity model. *Geophysics*, v. 58, n. 6, p. 873–882, 1993.

APÊNDICES

APÊNDICE A – APROXIMANTES DE PADÉ

Em 1892 foi publicada uma tese na revista parisiense *Ann. Sci. Ecole Normale Supérieure* sobre um método para aproximar funções através de funções racionais. Estes ‘aproximantes’ receberam o nome de ‘aproximantes de Padé’ em homenagem ao autor, o matemático francês Henri Padé. O método de Padé surge como alternativa à teoria das perturbações que resulta em uma aproximação polinomial da função desejada através de truncamentos sucessivos de uma serie proveniente de uma família de funções polinomiais: Em geral a partir do truncamento de uma série de Taylor.

Existem problemas com essa aproximações polinomiais, pois em geral a convergência é lenta, o raio de convergência além de ser estreito pode não englobar regiões com significado físico. Para tanto, o método de Padé apresenta várias vantagens: convergem mais rapidamente do que a série de Taylor e se estendem a regiões muito além da definida pelo raio de convergência da série. Os aproximantes de Padé surgem através da própria serie de Taylor e sendo funções racionais trazem muito mais informação sobre a função aproximada do que a série de Taylor original. Se diz que os aproximantes de Padé são uma forma multilinear dos aproximantes de Taylor, a aproximação de Taylor é um caso particular do método de Padé.

Os aproximantes de Padé são funções racionais, ou seja, quocientes de dois polinômios, que representam a expansão (NAVARRO et al., 1999). Esses aproximantes são caracterizados por dois inteiros positivos L e M , graus do numerador e denominador, respectivamente, da função racional, e são representados pela notação:

$$[L/M] = \frac{P_L(x)}{Q_M(x)}, \quad (\text{A.1})$$

Onde:

$$L, M \geq 0$$

Os polinômios $P_L(x)$ e $Q_M(x)$ são definidos:

$$P_L(x) = p_0 + p_1x + p_2x^2 + \dots + p_Lx^L \quad (\text{A.2})$$

e

$$Q_M(x) = q_0 + q_1x + q_2x^2 + \dots + q_Mx^M \quad (\text{A.3})$$

É tomado, sem perda de generalidade, $q_0 = 1$ (NAVARRO et al., 1999). De modo que o polinômio se expressa por:

$$Q_M(x) = 1 + q_1x + q_2x^2 + \dots + q_Mx^M \quad (\text{A.4})$$

A condição de existência para os aproximantes de Padé estabelece que os coeficientes e podem ser determinados a partir das peças de informação contidas na expansão em série de Taylor da função desejada, ou seja, a partir dos n coeficientes da série. Esta é dada por:

$$f(x) - \frac{P_L(x)}{Q_M(x)} = O(x^{L+M+1}) \quad (\text{A.5})$$

A.5 garante que $f(x)$ e o aproximante de Padé $[\frac{P_L(x)}{Q_M(x)}]$ diferem apenas por termos da ordem x^{L+M+1} (NAVARRO et al., 1999). A partir desta condição é construído um sistema de equações lineares algébricas que permite a determinação dos coeficientes p_i e q_j a partir de f_n . A condição de existência pode ser reescrita (NAVARRO et al., 1999):

$$P_L(x) = f(x)Q_M(x) + O(x^{L+M+1}) \quad (\text{A.6})$$

ou,

$$p_0 + p_1x + p_2x^2 + \dots + p_Lx^L = (f_0 + f_1x + f_2x^2 + \dots)(1 + q_1x + q_2x^2 + \dots + q_Mx^M) + O(x^{L+M+1}) \quad (\text{A.7})$$

Desenvolvendo o lado direito da expressão até termos de ordem x^{L+M} e comparando as potencias de x :

$$\begin{aligned} p_0 &= f_0 \\ p_1 &= f_1 + f_0q_1 \\ p_2 &= f_2 + f_1q_1 + f_0q_2 \\ &\vdots \\ p_l &= f_l + f_{l-1}q_1 + \dots + f_0q_l \\ 0 &= f_{L+1} + f_Lq_1 + \dots + f_{L-M+1}q_M \\ 0 &= f_{L+2} + f_{L+1}q_1 + \dots + f_{L-M+2}q_M \\ &\vdots \\ 0 &= f_{L+M} + f_{L+M-1}q_1 + \dots + f_Lq_M \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

com $f_n \equiv 0$ se $n < 0$, e $q_j \equiv 0$ se $j > M$

O sistema A.8 de $L + M + 1$ equações determina os coeficientes dos polinômios $P_L(x)$ e $Q_M(x)$ do aproximante de Padé, em termos dos coeficientes da expansão original. A série de Taylor original deve conter no mínimo $L + M + 1$ coeficientes.

**APÊNDICE B – GENERALIZAÇÃO DO APROXIMANTE DE PADÉ PARA
UMA SÉRIE NA FORMA $t(x) \approx \lambda_0 + \lambda_1 x^2 + \lambda_2 x^4 + O(x^6)$**

Generalizaremos a equação para o aproximante de Padé para uma expansão em série de Taylor de quarta ordem na forma:

$$t^2(x) \approx \lambda_0 + \lambda_1 x^2 + \lambda_2 x^4 + O(x^6) \quad (\text{B.1})$$

Onde os coeficientes λ_i são constantes, x é uma variável qualquer e $O(x^6)$ representa o erro de aproximação da série de Taylor, como a expansão é feita ao longo de x muito pequeno esse erro deve ser desprezível. Retomando a condição de existência do aproximante de Padé em A.7, e utilizando a série de Taylor em B.1:

$$(p_0 + p_1 x + p_2 x^2) = (\lambda_0 + \lambda_1 x^2 + \lambda_2 x^4) (q_0 + q_1 x + q_2 x^2) \quad (\text{B.2})$$

Escolhendo-se $q_0 = 1$ sem perda de generalidade, desprezando termos de ordem superior a x^4 . Então:

$$(p_0 + p_1 x + p_2 x^2) = \lambda_0 + \lambda_1 x^2 + \lambda_2 x^4 + \lambda_0 q_1 x + \lambda_1 q_1 x^3 + \lambda_2 q_1 x^5 + \lambda_0 q_2 x^2 + \lambda_1 q_2 x^4 + \lambda_2 q_2 x^6$$

Organizando as igualdades a partir das potencias de x :

$$x^0 : p_0 = \lambda_0 \quad (\text{B.3})$$

$$x^1 : p_1 = \lambda_0 q_1 \quad (\text{B.4})$$

$$x^2 : p_2 = \lambda_1 + \lambda_0 q_2 \quad (\text{B.5})$$

$$x^3 : 0 = \lambda_1 q_1 \quad (\text{B.6})$$

$$x^4 : 0 = \lambda_2 + \lambda_1 q_2 \quad (\text{B.7})$$

Dessas expressões surge que:

$$q_1 = 0 \quad (\text{B.8})$$

$$p_1 = 0 \tag{B.9}$$

$$q_2 = \frac{-\lambda_2}{\lambda_1} \tag{B.10}$$

$$p_2 = \lambda_1 - \lambda_0 \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \tag{B.11}$$

Substituindo os coeficientes q_i e p_i em B.1 e após algumas simplificações algébricas:

$$[2/2] = \zeta_1 + \frac{x^2 \zeta_2}{1 + \zeta_3 x^2} \tag{B.12}$$

Onde:

$$\zeta_1 = \lambda_0 \tag{B.13}$$

$$\zeta_2 = \lambda_1 \tag{B.14}$$

$$\zeta_3 = \frac{-\lambda_2}{\lambda_1} \tag{B.15}$$

B.12 é a generalização do aproximante de Padé: De modo que para obtermos o aproximante de Padé de uma série de Taylor que possa ser expressa na forma $t^2(x) \approx \lambda_0 + \lambda_1 x^2 + \lambda_2 x^4 + O(x^6)$, basta substituir os valores dos coeficientes λ_i da série de Taylor em B.13-B.15, e depois substituir os coeficientes ζ_i em B.12.

**APÊNDICE C – GENERALIZAÇÃO DO APROXIMANTE DE PADÉ PARA
UMA SÉRIE NA FORMA: $t(d) \approx \lambda_0 + \lambda_1 d + \lambda_2 d^2 + \lambda_3 d^3 + \lambda_4 d^4$**

Para realizar a expansão de Padé em d ao invés de h , nas expansões em série de Taylor de quarta ordem desenvolvidas por (HöCHT, 2002), generalizaremos a expressão para o Padé para uma série de Taylor na forma $t(d) \approx \lambda_0 + \lambda_1 d + \lambda_2 d^2 + \lambda_3 d^3 + \lambda_4 d^4$. Rearranjando as séries de Taylor de quarta ordem na forma desejada, os coeficientes do aproximante de Padé serão obtidos por comparação entre a série de Taylor aproximada e a série de Taylor genérica.

O aproximante de Padé é dado pela razão de dois polinômios $p(d) = p_0 + p_1 d + p_2 d^2$ e $q(d) = q_0 + q_1 d + q_2 d^2$, como explicado no apêndice A em A.1.

$$[2/2] = \frac{p_0 + p_1 d + p_2 d^2}{q_0 + q_1 d + q_2 d^2} \quad (\text{C.1})$$

Da condição de existência dos aproximantes de Padé escrita na forma A.7, utilizando a série de Taylor $t(d) \approx \lambda_0 + \lambda_1 d + \lambda_2 d^2 + \lambda_3 d^3 + \lambda_4 d^4$ no lugar de $f(x) \approx f_0 + f_1 x + f_2 x^2 + \dots$, e escolhendo-se $q_0 = 1$ sem perda de generalidade:

$$(p_0 + p_1 d + p_2 d^2) = (t(d) \approx \lambda_0 + \lambda_1 d + \lambda_2 d^2 + \lambda_3 d^3 + \lambda_4 d^4)(1 + q_1 d + q_2 d^2) \quad (\text{C.2})$$

Expandindo o produto do lado direito.

$$\begin{aligned} (p_0 + p_1 d + p_2 d^2) &= \lambda_0 + \lambda_1 d + \lambda_2 d^2 + \lambda_3 d^3 + \lambda_4 d^4 \\ &+ \lambda_0 q_1 d + \lambda_1 q_1 d^2 + \lambda_2 q_1 d^3 + \lambda_3 q_1 d^4 + \dots \\ &+ \lambda_0 q_2 d^2 + \lambda_1 q_2 d^3 + \lambda_2 q_2 d^4 + \dots \end{aligned}$$

Isolando de acordo com as potências de d .

$$d^0 : p_0 = \lambda_0 \quad (\text{C.3})$$

$$d^1 : p_1 = \lambda_1 + \lambda_0 q_1 \quad (\text{C.4})$$

$$d^2 : p_2 = \lambda_0 q_2 + \lambda_1 q_1 + \lambda_2 \quad (\text{C.5})$$

$$d^3 : 0 = \lambda_3 + \lambda_1 q_2 + \lambda_2 q_1 \quad (\text{C.6})$$

$$d^4 : 0 = \lambda_4 + \lambda_3 q_1 + \lambda_2 q_2 \quad (\text{C.7})$$

Isolando q_2 em C.7.

$$q_2 = \frac{-\lambda_4 - \lambda_3 q_1}{\lambda_2} \quad (\text{C.8})$$

Substituindo C.8 em C.6, obtém-se o valor de q_1 .

$$q_1 = \frac{-\lambda_2 - \lambda_3 + \lambda_4 \lambda_1}{\lambda_2^2 - \lambda_3 \lambda_1} \quad (\text{C.9})$$

Os coeficientes λ_i são os próprios coeficientes da série de Taylor na qual será realizada a aproximação de Padé. Note que, diferente da expansão em h , na expansão em d , o aproximante de Padé é dado implicitamente em C.1; necessitando do cálculo dos coeficientes p_i e q_i : A partir de C.9 se obtém o valor de q_1 em função dos coeficientes λ_i da série aproximada. Da mesma forma, o coeficiente q_2 é calculado em função de q_1 e dos coeficientes λ_i , por C.8. Os coeficientes do polinômio $p(d)$, p_0 , p_1 e p_2 são obtidos por C.3-C.5.

APÊNDICE D – PROGRAMAS UTILIZADOS

Os programas utilizados para a realização dos testes analíticos e numéricos para as configurações ponto médio comum e SRC:

1. Teste analítico modelo velocidade linear (Script do *Matemática*): Reproduz o experimento da Seção 4.1, compara a acurácia das aproximações de tempo de trânsito para o modelo de uma camada com variação linear de velocidade sobre um refletor plano horizontal.
2. Teste analítico modelo vagarosidade linear (Script do *Matemática*): Reproduz o experimento da Seção 4.2, compara a acurácia das aproximações de tempo de trânsito para o modelo de uma camada com variação linear do quadrado da vagarosidade sobre um refletor plano horizontal.
3. Teste analítico modelo TIV (Sconstruct; script do MADAGASCAR): Reproduz o experimento do modelo TIV da Seção 4.3, extraindo a primeira coluna do modelo Marmousi, gerando o modelo TIV 1D, as curvas de aproximação e extraindo o tempo de trânsito do modelo TIV através do traçamento de raio.
4. Teste analítico do SRC (Scripts do Scilab): Produz as superfícies de erro relativo absoluto das aproximações do SRC em relação à superfície SRC exata obtida para o modelo do refletor circular descrito na Seção 2.9. Os resultados deste experimento foram apresentados no Capítulo 6
5. Teste numérico do SRC (Sconstruct; script do MADAGASCAR): Reproduz o experimento numérico, realizado no Capítulo 7, para testar a acurácia da aproximação quadrática do SRC quarta ordem na inversão da superfície SRC através da otimização por mínimos quadrados.

*Esse Script necessita do programa 'crs4ordfit.c' para funcionar: o programa 'crs4ordfit.c' deve ser adicionado ao pacote MADAGASCAR instalado na máquina do usuário.

6. Programa crs4ordfit.c (Programa em linguagem c): Produz a superfície quadrática do SRC quarta ordem e calcula as derivadas necessárias para a realização da metodologia de inversão por mínimos quadrados descrita no Capítulo 7.

*Dúvidas e sugestões, enviar email para rodolfo_profissional@hotmail.com.

TESTE ANALÍTICO MODELO VELOCIDADE LINEAR

```

t[x_] := 2 H/(v (g - 1)) ArcCosh[1 + (g - 1)^2/(2 g) (1 + x^2/(4 H^2))];
tf[x_] := t0^2 + x^2/w + A x^4/(w^2 (t0^2 + B x^2/w + Sqrt[t0^4 + 2 B t0^2 x^2/w + c x^4/w^2]));
ts[x_] := (-2*A*t0 + Sqrt[t0^2 + ((1 - 2*A)*x^2)/w])^2/(1 - 2*A)^2;
th[x_] := t0^2 + x^2/w;
ta[x_] := t0^2 + x^2/w + (A*x^4)/(w*(2*t0^2*w - (-2 + A)*x^2));
tp[x_] := t0^2 + (x^2/w)*(1/(1+x^2*(-A/(2*w*t0^2))));
ge[x_] := 1/(1+x^2*(-A/(2*w*t0^2)));
tpfc[x_] := t0^2 + (x^2/w)*(1/(1+x^2*(-A/(2*w*t0^2)))*(1/(1+x^2*(-A/(2*w*t0^2)))*
(2*w*t0^2)*(1/(1+x^2*(-A/(2*w*t0^2)))*(1/(1+x^2*(-A/(2*w*t0^2)))))))));
x[g_,t_] := 2*Sqrt[(1 + g)/(-1 + g)]*t;
{Abs[(Sqrt[th[x]] - t[x])/t[x]],Abs[(Sqrt[ts[x]] - t[x])/t[x]],Abs[(Sqrt[ta[x]] - t[x])/t[x]],Abs[(Sqrt[tf[x]] -
t[x])/t[x]],Abs[(Sqrt[tp[x]] - t[x])/t[x]],Abs[(Sqrt[tpfc[x]] - t[x])/t[x]]];
% /. {B -> (t0^2 (-P T w + X))/(X (t0^2 - T^2 + P T X)) - (A X^2)/((t0^2 - T^2) w + X^2),
c -> (t0^4 (-P T w + X)^2)/(X^2 (t0^2 - T^2 + P T X)^2) + (2 A w t0^2)/((t0^2 - T^2) w + X^2)} /. {X-
>2*Sqrt[(1 + g)/(-1 + g)]*H,
P->1/(g*v), T->(-2*H*ArcCosh[g])/(v - g*v)} /. {t0 -> (2 H Log[g])/((-1 + g) v), w -> v^2 (g^2 - 1)/(2
Log[g]),
A -> 1/2 (1 - (g^2 + 1) Log[g]/(g^2 - 1))} /. {H -> 1, v -> 1};
err = 100 % /. {x -> x[g,t]};
eh = ParametricPlot3D[{x[g,t], g, err[[1]]}, {g, 1.001, 4}, {t, 0, 1},
BoxRatios -> {1, 1, 0.4}, PlotLabel -> "APROXIMAÇÃO SOBRETENPO NORMAL",
AxesLabel -> {"x/H", "v(H)/v0", "%"},
PlotRange -> {{0, 4}, {1, 4}, {0, 1}}];
es = ParametricPlot3D[{x[g,t], g, err[[2]]}, {g, 1.001, 4}, {t, 0, 1},
BoxRatios -> {1, 1, 0.4}, PlotLabel -> "APROXIMAÇÃO HIPÉRBOLE DESLOCADA",
AxesLabel -> {"x/H", "v(H)/v0", "%"},
PlotRange -> {{0, 4}, {1, 4}, {0, 1}}];
ea = ParametricPlot3D[{x[g,t], g, err[[3]]}, {g, 1.001, 4}, {t, 0, 1},
BoxRatios -> {1, 1, 0.4}, PlotLabel -> "APROXIMAÇÃO ALKHALIFAH-TSVANKIN",
AxesLabel -> {"x/H", "v(H)/v0", "%"},
PlotRange -> {{0, 4}, {1, 4}, {0, 1}}];
ef = ParametricPlot3D[{x[g,t], g, err[[4]]}, {g, 1.001, 4}, {t, 0, 1},
BoxRatios -> {1, 1, 0.4}, PlotLabel -> "APROXIMAÇÃO GENERALIZADA",
AxesLabel -> {"x/H", "v(H)/v0", "%"},
PlotRange -> {{0, 4}, {1, 4}, {0, 1}}];
ep = ParametricPlot3D[{x[g,t], g, err[[5]]}, {g, 1.001, 4}, {t, 0, 1},
BoxRatios -> {1, 1, 0.4}, PlotLabel -> "APROXIMAÇÃO PADÉ",
AxesLabel -> {"x/H", "v(H)/v0", "%"},
PlotRange -> {{0, 4}, {1, 4}, {0, 1}}];
epfc = ParametricPlot3D[{x[g,t], g, err[[6]]}, {g, 1.001, 4}, {t, 0, 1},
BoxRatios -> {1, 1, 0.4}, PlotLabel -> "APROXIMAÇÃO PADÉ - FRAÇÕES CONTÍNUAS",
AxesLabel -> {"x/H", "v(H)/v0", "%"},
PlotRange -> {{0, 4}, {1, 4}, {0, 1}}];
ga = GraphicsArray[{{Rasterize[eh],Rasterize[es]}, {Rasterize[ea], Rasterize[ef]},
{Rasterize[ep],Rasterize[epfc]}}];
Export["padevel.eps", ga, "EPS"];

```

TESTE ANALÍTICO MODELO VAGAROSIDADE LINEAR


```

t[x_] := Sqrt[t0^2 + x^2/w - ((-1 + g^2)^2 x^4 (1 + 2 Sqrt[1 - ((-1 + g^2)^2 x^2)/(16 g^2 H^2)])) /
      (144 g^3 H^2 v^2 (1 + Sqrt[1 - ((-1 + g^2)^2 x^2)/(16 g^2 H^2)]^2));
tf[x_] := t0^2 + x^2/w + A x^4/(w^2 (t0^2 + B x^2/w + Sqrt[t0^4 + 2 B t0^2 x^2/w + c x^4/w^2]));
ts[x_] := (-2*A*t0 + Sqrt[t0^2 + ((1 - 2*A)*x^2)/w])^2/(1 - 2*A)^2;
th[x_] := t0^2 + x^2/w;
ta[x_] := t0^2 + x^2/w + (A*x^4)/(w*(2*t0^2*w - (-2 + A)*x^2));
tp[x_] := t0^2 + (x^2/w)*(1/(1+x^2*(-A/(2*w*t0^2))));
ge[x_] := 1/(1+x^2*(-A/(2*w*t0^2)));
tpfc[x_] := t0^2 + (x^2/w)*(1/(1+x^2*(-A/(2*w*t0^2))*(1/(1+x^2*(-A/(2*w*t0^2))*(1/(1+x^2*(-A/(2*w*t0^2))*(1/(1+x^2*(-A/(2*w*t0^2))))))))));
x[g_,t_] := 4 t/Sqrt[-1 + g^2];
{Abs[(Sqrt[th[x]] - t[x])/t[x]],Abs[(Sqrt[ts[x]] - t[x])/t[x]],Abs[(Sqrt[ta[x]] - t[x])/t[x]],Abs[(Sqrt[tf[x]] -
t[x])/t[x]],Abs[(Sqrt[tp[x]] - t[x])/t[x]],Abs[(Sqrt[tpfc[x]] - t[x])/t[x]]];
% /. {B -> (t0^2 (-P T w + X))/(X (t0^2 - T^2 + P T X)) - (A X^2)/((t0^2 - T^2) w + X^2),
      c -> (t0^4 (-P T w + X)^2)/(X^2 (t0^2 - T^2 + P T X)^2) + (2 A w t0^2)/((t0^2 - T^2) w + X^2)} /. {X->(4
H)/Sqrt[-1 + g^2],
      P->1/(g*v), T->(4 (2 + g^2) H)/(3 g Sqrt[-1 + g^2] v)} /. {t0 -> (4 (1 + g + g^2) H)/(3 (g + g^2) v),
      w -> 3 g^2 v^2/(1 + g + g^2), A -> -(-1 + g)^2/(6 g)} /. {H -> 1, v -> 1};
err = 100 % /. {x -> x[g,t]};
eh = ParametricPlot3D[{x[g,t], g, err[[1]]}, {g, 1.001, 4}, {t, 0, 1},
BoxRatios -> {1, 1, 0.4}, PlotLabel -> "APROXIMAÇÃO SOBRETENPO NORMAL",
AxesLabel -> {"x/D", "V(D)/Vo", "%"},
PlotRange -> {{0, 4}, {1, 4}, {0, 1}}];
es = ParametricPlot3D[{x[g,t], g, err[[2]]}, {g, 1.001, 4}, {t, 0, 1},
BoxRatios -> {1, 1, 0.4}, PlotLabel -> "APROXIMAÇÃO HIPÉRBOLE DESLOCADA",
AxesLabel -> {"x/D", "V(D)/Vo", "%"},
PlotRange -> {{0, 4}, {1, 4}, {0, 1}}];
ea = ParametricPlot3D[{x[g,t], g, err[[3]]}, {g, 1.001, 4}, {t, 0, 1},
BoxRatios -> {1, 1, 0.4}, PlotLabel -> "APROXIMAÇÃO ALKHALIFAH-TSVANKIN",
AxesLabel -> {"x/D", "V(D)/Vo", "%"},
PlotRange -> {{0, 4}, {1, 4}, {0, 1}}];
ef = ParametricPlot3D[{x[g,t], g, err[[4]]}, {g, 1.001, 4}, {t, 0, 1},
BoxRatios -> {1, 1, 0.4}, PlotLabel -> "APROXIMAÇÃO GENERALIZADA",
AxesLabel -> {"x/D", "V(D)/Vo", "%"},
PlotRange -> {{0, 4}, {1, 4}, {0, 1}}];
ep = ParametricPlot3D[{x[g,t], g, err[[5]]}, {g, 1.001, 4}, {t, 0, 1},
BoxRatios -> {1, 1, 0.4}, PlotLabel -> "APROXIMAÇÃO PADÉ",
AxesLabel -> {"x/D", "V(D)/Vo", "%"},
PlotRange -> {{0, 4}, All, {0, 1}}];
epfc = ParametricPlot3D[{x[g,t], g, err[[6]]}, {g, 1.001, 4}, {t, 0, 1},
BoxRatios -> {4, 4, 1.6}, PlotLabel -> "APROXIMAÇÃO PADÉ - FRAÇÕES CONTÍNUAS",
AxesLabel -> {"x/D", "V(D)/Vo", "%"},
PlotRange -> {{0, 4}, All, {0, 1}}];
ga = GraphicsArray[{{Rasterize[eh],Rasterize[es]}, {Rasterize[ea], Rasterize[ef]},
{Rasterize[ep],Rasterize[epfc]}}];
Export["padesl.eps", ga, "EPS"];

```

TESTE ANALÍTICO MODELO TIV

```

from rsf.proj import *
import math

for comp in ('vx','vz','eta'):
    src = 'marm%.HH' % comp
    Fetch(src,'marm')
    Flow(comp,src,'dd form=native | put o2=0')
    Flow(comp+'1',comp,'window n2=1')

grey = ""
grey allpos=y scalebar=y color=j barreverse=y
screenratio=.327 screenht=4.7 pclip=100 labelsz=6 titlesz=7.5
label1=Z unit1=m label2=X unit2=m wanttitle=n
""

Result('vz',
""
    scale dscale=0.001 |
    %s bias=1.3 barlabel="Velocidade" barunit="km/s"
    "" % grey)
Result('eta',grey + ' barlabel="F10 hF3 "')

Plot('vz1',
""
    spray axis=2 n=737 |
    scale dscale=0.001 |
    %s bias=1.3 scalebar=n
    "" % grey)

vmax = 5500
pmax = 0.999/vmax
np = 202
dp = pmax/(np-1)

Flow('v','vx eta','math n=${SOURCES[1]} output="input/sqrt(1+2*n)" ')
Flow('v1','vx1 eta1','math n=${SOURCES[1]} output="input/sqrt(1+2*n)" ')

Result('v',
""
    scale dscale=0.001 |
    %s bias=1.3 barlabel="Velocidade" barunit="km/s"
    "" % grey)

for case in ('vz','v','eta'):
    Flow(case+'2',case+'1','spray axis=2 n=%d d=%g o=0' % (np,dp))

Flow('dx','vz2 v2 eta2',
""
    math v=${SOURCES[1]} n=${SOURCES[2]} output="1-2*n*x2*x2*v*v" |
    math vz=${SOURCES[0]} v=${SOURCES[1]} n=${SOURCES[2]}
    output="x2*v*v/(vz*input*input*sqrt(1-x2*x2*v*v/input))"
    "")
Flow('dt','vz2 v2 eta2',
""
    math v=${SOURCES[1]} n=${SOURCES[2]} output="1-2*n*x2*x2*v*v" |
    math vz=${SOURCES[0]} v=${SOURCES[1]} n=${SOURCES[2]}

```

```

output="(input*input+2*n*(x2*v)^4)/(vz*input*input*sqrt(1-x2*x2*v*v/input))"
")

dz = 12.5

Flow('x','dx','stack axis=1 norm=n | scale dscale=%d' % (2*dz))
Flow('t','dt','stack axis=1 norm=n | scale dscale=%d' % (2*dz))

Flow('ray','dx',
      'window n2=%d | reverse which=1 opt=i | causint | scale dscale=%d' %
      (np-1,dz))

xmax = 9200

for case in '+-':
    ray = 'ray'+case
    Flow(ray,'ray','math output=%g%cinput' % (xmax/2,case))
    Plot(ray,
          ""
          window j2=10 |
          graph wanttitle=n transp=y min2=0 max2=%g pad=n
          wantaxis=n plotcol=7 screenratio=.327 screenht=4.7
          scalebar=n plotfat=5
          "" % xmax)
    Result('vz1','vz1 ray+ ray-', 'Overlay')

tmin = 2.4
tmax = 4.6

xmin = - 10.0
xmax = 10000.0
nx = 1000
dx = xmax/(nx-1)

Plot('t','x t',
      ""
      cmplx ${SOURCES[1]} |
      graph symbol=o yreverse=y wanttitle=n wantaxis=n
      min1=%g max1=%g min2=%g max2=%g
      "" % (xmin,xmax,tmin,tmax))

t0 = 2.482
t2 = t0*t0
vn = 2610.0
v2 = vn*vn

Flow('nmo',None,
      'math n1=%d d1=%g o1=0 output="sqrt(%g+%g*x1*x1)" ' %
      (nx,dx,t2,1/v2))

Plot('nmo',
      ""
      graph plotcol=5 yreverse=y title="SOBRETENPO NORMAL"
      label2=Tempo unit2=s label1=Afastamento unit1=m
      min1=%g max1=%g min2=%g max2=%g
      "" % (xmin,xmax,tmin,tmax))

```

Result('hynmo','t nmo','Overlay')

s = 2.267
 A = (1-s)/2
 n = -A/4

Flow('tnmo','nmo',
 ""
 math output="sqrt(%g+%g*x1*x1+%g*x1*x1*x1*x1/(%g+%g*x1*x1))"
 "" % (t2,1/v2,A/(v2*v2),t2,(1+2*n)/v2))

Plot('tnmo',
 ""
 graph plotcol=4 yreverse=y title="ALKHALIFAH-TSVANKIN"
 label2=Tempo unit2=s label1=Afastamento unit1=m
 min1=%g max1=%g min2=%g max2=%g
 "" % (xmin,xmax,tmin,tmax))

Result('atnmo','t tnmo','Overlay')

Flow('anmo','nmo',
 'math output="%g+%g*sqrt(%g+%g*x1*x1)" ' %
 (t0*(1-1/s),1/s,t2,s/v2))

Plot('anmo',
 ""
 graph plotcol=4 yreverse=y title="HIPERBOLE DESLOCADA"
 label2=Tempo unit2=s label1=Afastamento unit1=m
 min1=%g max1=%g min2=%g max2=%g
 "" % (xmin,xmax,tmin,tmax))

Result('shnmo','t anmo','Overlay')

T = 3.726
 X = 8809

T2 = T*T
 X2 = X*X

P = pmax-dp

F = t2*(X-P*T*v2)/(X*(t2-T2+P*T*X))
 B = F - A*X2/(X2+v2*(t2-T2))
 C = F*F + 2*A*t2*v2/(X2+v2*(t2-T2))

Flow('fnmo','nmo',
 ""
 math output="sqrt(%g+%g*x1*x1+%g*x1*x1*x1*x1/
 (%g+%g*x1*x1+sqrt(%g+%g*x1*x1+%g*x1*x1*x1*x1)))"
 "" % (t2,1/v2,A/(v2*v2),t2,B/v2,t2*t2,2*B*t2/v2,C/(v2*v2)))

Plot('fnmo',
 ""
 graph plotcol=3 yreverse=y title="GENERALIZADA"
 label2=Tempo unit2=s label1=Afastamento unit1=m
 min1=%g max1=%g min2=%g max2=%g
 "" % (xmin,xmax,tmin,tmax))

TESTE ANALÍTICO DO SRC

```

//Teste analítico do SRC - modelo do refletor circular
clc
clear
close

//PARÂMETROS ESCALA DE CORES
Zmin=min(0); //Mínimo absoluto dos dados
Zmax=max(1); //Máximo absoluto dos dados
nc=200; //número de cores no mapa de cores

//janela
xm=0// x mínimo (as abcissas é a razão d/D; distância entre os CMP's sobre a profundidade do refletor)
ym=0 // y mínimo (as ordenadas é a razão h/D; meio afastamento sobre a profundidade do refletor)
zm=0 // valor mínimo do erro relativo absoluto em %
xM=1 // x máximo
yM=1 // y máximo
zM=1 // valor máximo do erro relativo absoluto em %
mo=0 // posição do CMP central
mex(2)=string(mo)

D=1000 // profundidade mínima do refletor circular
R=1000 // raio do refletor circular
L=D+R // comprimento do raio normal
V=1500 // velocidade do meio

dteta=0.5 // incremento
dgama=0.5 // incremento
gama_in=0 //ângulo gama inicial

//parametros do SRC
to=2*(sqrt(mo^2+L^2)-R)/V
knip=1/(sqrt(mo^2+L^2)-R)
kn=1/sqrt(mo^2+L^2)
alpha=asin(mo/sqrt(mo^2+L^2))

a1=2*sin(alpha)/V
a2=2*cos(alpha)^2*kn*to/V
b2=2*cos(alpha)^2*knip*to/V

c=2*b2+a1^2-a2

//PARÂMETROS SRC-PADÉ
rn=1/kn
rnip=1/knip

k2=(4*rnip*sin(alpha)^2-rn*cos(alpha)^2)

kapa1=(cos(alpha)^4)/(V*rnip)

kapa2=-k2/4*(rnip^2*rn^2)

//parametros SRC-Padé

```



```

co=to^2
c1=(2*to*cos(alpha)^2/(V*rnip))
c2=(cos(alpha)^2*(4*V*to*rnip*sin(alpha)^2-V*to*rn*cos(alpha)^2+2*rnip*rn*cos(alpha)^2)/
(2*V^2*rnip^3*rn)

//varia posição do cmp através de gama
for j=1:1:30

    gama=dgama*(j-1)*%pi/180+gama_in*%pi/180

//varia offset através de teta
for i=1:1:100

    teta=dteta*(i)*%pi/180

    //calculando m, h, e t através de suas parametrizações pelos ângulos
    //calcula a posição do CMP m em relação a mo
    m(j)=R*sin(gama)+(L-R*cos(gama))*(cos(gama)*sin(gama)/(cos(teta)^2-sin(gama)^2))
    m(j)=m(j)-mo

    // calcula o meio afastamento
    h(i)=(L-R*cos(gama))*(cos(teta)*sin(teta))/(cos(teta)^2-sin(gama)^2)

    //calcula o tempo de trânsito de reflexão
    t(i,j)=2*((L-R*cos(gama))/V)*(cos(gama)*cos(teta)/(cos(teta)^2-sin(gama)^2))

//APROXIMAÇÃO SRC NÃO HIPERBÓLICO

//f(d-h)f(d+h)
f_dh=(to+a1*(m(j)-h(i)))^2+a2*(m(j)-h(i))^2
f_dh=f_dh*((to+a1*(m(j)+h(i)))^2+a2*(m(j)+h(i))^2)

f(i,j)=((to+a1*m(j))^2+a2*m(j)^2+c*h(i)^2+sqrt(f_dh))/2
f(i,j)=sqrt(f(i,j))

//APROXIMAÇÃO SRC HIPERBÓLICO

crs(i,j)=(to+a1*m(j))^2+a2*m(j)^2+b2*h(i)^2
crs(i,j)=sqrt(crs(i,j))

// APROXIMAÇÃO QUADRÁTICA SRC QUARTA ORDEM

g1=to^2+((4*to*sin(alpha))*(m(j))/V)+(2*(V*to*cos(alpha)^2+2*rn*sin(alpha)^2)*(m(j)^2)/(V^2*rn))+
((2*to*cos(alpha)^2)/(V*rnip))*h(i)^2
g2=((2*sin(alpha)*cos(alpha)^2*(2*rn-V*to)*m(j)^3)/(V^2*rn^2))
g3=(2*sin(alpha)*cos(alpha)^2*(2*rnip*rn-2*V*to*rnip-V*to*rn)*(m(j))*h(j)^2)/(V^2*rnip^2*rn)
g4=(cos(alpha)^2*(rn*(10*cos(alpha)^2-8)+V*to*(4-5*cos(alpha)^2))*m(j)^4)/(2*V^2*rn^3)

```

```

g5=(cos(alpha)^2/(V^2*rnip^3*rn^2))*(V*to*rnip^2*(6-8*cos(alpha)^2)+V*to*rnip*rn*(4-
5*cos(alpha)^2)+2*V*to*rn^2*sin(alpha)^2-4*rnip*rn^2*sin(alpha)^2+rnip^2*rn*(10*cos(alpha)-
8))*(m(j)^2*h(i)^2)
g6=(cos(alpha)^2*(4*V*to*rnip*sin(alpha)^2-V*to*rn*cos(alpha)^2+2*rnip*rn*cos(alpha)^2)*h(j)^4)/
(2*V^2*rnip^3*rn)
germam2(i,j)=g1+g2+g3+g4+g5+g6
germam2(i,j)=sqrt(germam2(i,j))

//APROXIMAÇÃO QUADRÁTICA SRC-PADÉ EXPANSÃO EM h
CO=to^2+((4*to*sin(alpha))*(m(j))/V)+(2*(V*to*cos(alpha)^2+2*rn*sin(alpha)^2)*(m(j)^2)/(V^2*rn))+
((2*sin(alpha)*cos(alpha)^2*(2*rn-V*to)*m(j)^3)/(V^2*rn^2))+cos(alpha)^2*(rn*(10*cos(alpha)^2-
8)+V*to*(4-5*cos(alpha)^2))*m(j)^4/(2*V^2*rn^3)
C1=((2*to*cos(alpha)^2)/(V*rnip))+((2*sin(alpha)*cos(alpha)^2*(2*rnip*rn-2*V*to*rnip-
V*to*rn)*(m(j)))/(V^2*rnip^2*rn))+cos(alpha)^2/(V^2*rnip^3*rn^2))*(V*to*rnip^2*(6-
8*cos(alpha)^2)+V*to*rnip*rn*(4-5*cos(alpha)^2)+2*V*to*rn^2*sin(alpha)^2-
4*rnip*rn^2*sin(alpha)^2+rnip^2*rn*(10*cos(alpha)-8))*(m(j)^2)
C2=(cos(alpha)^2*(4*V*to*rnip*sin(alpha)^2-V*to*rn*cos(alpha)^2+2*rnip*rn*cos(alpha)^2))/
(2*V^2*rnip^3*rn)
C3=-(((4*rn*V*to*rnip*sin(alpha)^2-V*to*rn*cos(alpha)^2+2*rnip*rn*cos(alpha)^2)/2)*(1/
(2*V*to*rnip^2*rn+2*rn*rnip*sin(alpha)*((2*rnip*rn-2*V*to*rnip-V*to*rn))*m(j))+((V*to*rnip^2*(6-
8*cos(alpha)^2)+V*to*rnip*rn*(4-5*cos(alpha)^2))*m(j)^2)))

pade2(i,j)=(h(i)^2*C1)/(1+h(i)^2*(C3))
pade2(i,j)=CO + pade2(i,j)

pade2(i,j)=sqrt(pade2(i,j))

//APROXIMAÇÃO QUADRÁTICA SRC PADE EXAPANSÃO EM d
CO=to^2+((h(i)^2*2*to*cos(alpha)^2)/(V*rnip))+((h(i)^4*cos(alpha)^2*(4*V*to*rnip*sin(alpha)^2-
V*to*rn*cos(alpha)^2+2*rnip*rn*cos(alpha)^2))/(2*V^2*rnip^3*rn)
C1=((((4*to*sin(alpha))/V)+(2*sin(alpha)*cos(alpha)^2*(2*rnip*rn-2*V*to*rnip-V*to*rn))*(h(i)^2))/
(V^2*rnip^2*rn)
C2=((2*(V*to*cos(alpha)^2+2*rn*sin(alpha)^2))/(V^2*rn))+cos(alpha)^2/
(V^2*rnip^3*rn^2))*(V*to*rnip^2*(6-8*cos(alpha)^2)+V*to*rnip*rn*(4-
5*cos(alpha)^2)+2*V*to*rn^2*sin(alpha)^2-4*rnip*rn^2*sin(alpha)^2+rnip^2*rn*(10*cos(alpha)-8))*(h(i)^2)
C3=((2*sin(alpha)*cos(alpha)^2*(2*rn-V*to))/(V^2*rn^2))
C4=(cos(alpha)^2*(rn*(10*cos(alpha)^2-8)+V*to*(4-5*cos(alpha)^2)))/(2*V^2*rn^3)

q1=(-C3*C2)/(C2^2-C1*C2+C1*C3)
q2=-((C4+C3*q1)/C2)
po=CO
p1=CO*q1+C1
p2=CO*q2+C2+C1*q1

p=po+p1*m(j)+p2*m(j)^2
q=1+q1*m(j)+q2*m(j)^2

pd2(i,j)=p/q
pd2(i,j)=sqrt(pd2(i,j))

//*****
*****

```

```

//APROXIMAÇÃO PARABÓLICA SRC QUARTA ORDEM

g1=to+m(j)*(2*sin(alpha)/V)+((cos(alpha)^2*m(j)^2)/(V*rn))+h(j)^2*(cos(alpha)^2/(V*rnip))-
((sin(alpha)*cos(alpha)^2*m(j)^3)/(V*rn^2))
g2=-h(j)^2*m(j)*(sin(alpha)*cos(alpha)^2/(V*rnip^2*rn))*(2*rnip+rn)
g3=-h(j)^2*m(j)^2*(cos(alpha)^2/(2*V*rnip^3*rn^2))*(rnip^2*(8*cos(alpha)^2-
6)+rnip*rn*(5*cos(alpha)^2-4)-2*rn^2*sin(alpha)^2)
g4=-m(j)^4*(cos(alpha)^2*(5*cos(alpha)^2-4))/(4*V*rn^3)
g5=h(j)^4*cos(alpha)^2*(4*rnip*sin(alpha)^2-rn*cos(alpha)^2)/(4*V*rnip^3*rn)
germam1(i,j)=g1+g2+g3+g4+g5

//APROXIMAÇÃO PARABÓLICA SRC PADE EXPANSÃO EM d

CO=to+(cos(alpha)^2/(V*rnip))*h(i)^2+((cos(alpha)^2*(4*rnip*sin(alpha)^2-rn*cos(alpha)^2)/
(4*V*rnip^3*rn))*h(i)^4
C1=(2*sin(alpha)/V)-h(i)^2*((sin(alpha)*cos(alpha)^2*(2*rnip+rn))/(V*rnip^2*rn))
kapa=rnip^2*(8*cos(alpha)^2-6)+rnip*rn*(5*cos(alpha)^2-4)-2*rn^2*sin(alpha)^2
C2=(cos(alpha)^2/(V*rn))-h(i)^2*((cos(alpha)^2/(2*V*rnip^3*rn^2))*kapa)
C3=-((sin(alpha)*cos(alpha)^2)/(V*rn^2))
C4=-((cos(alpha)^2*(5*cos(alpha)^2-4))/(4*V*rn^3))

q1=(-C3*C2)/(C2^2-C1*C2+C1*C3)
q2=-C4+C3*q1/C2
po=CO
p1=CO*q1+C1
p2=CO*q2+C2+C1*q1

p=po+p1*m(j)+p2*m(j)^2
q=1+q1*m(j)+q2*m(j)^2

pd1(i,j)=p/q

//APROXIMAÇÃO PARABÓLICA SRC PADÉ EXPANSÃO EM h

CO=to+m(j)*(2*sin(alpha)/V)+((cos(alpha)^2*m(j)^2)/(V*rn))-((sin(alpha)*cos(alpha)^2*m(j)^3)/
(V*rn^2))-m(j)^4*(cos(alpha)^2*(5*cos(alpha)^2-4))/(4*V*rn^3)
C1=(cos(alpha)^2/(V*rnip))-m(j)^2*(cos(alpha)^2/(2*V*rnip^3*rn^2))*(rnip^2*(8*cos(alpha)^2-
6)+rnip*rn*(5*cos(alpha)^2-4)-2*rn^2*sin(alpha)^2)-m(j)*(sin(alpha)*cos(alpha)^2/
(V*rnip^2*rn))*(2*rnip+rn)
C2=cos(alpha)^2*(4*rnip*sin(alpha)^2-rn*cos(alpha)^2)/(4*V*rnip^3*rn)

pade1(i,j)=(h(i)^2*C1)/(1+h(i)^2*(-C2/C1))
pade1(i,j)=CO + pade1(i,j)

//*****
*****

//APROXIMAÇÃO DESLOCADA CRS QUARTA ORDEM

g1=(2*rnip/V)^2+m(j)*(8*rnip*sin(alpha)/V^2)+4*m(j)^2*((rnip*cos(alpha)^2+rn*sin(alpha)^2)/
(V^2*rn))

```

```

g2=h(i)^2*(4*cos(alpha)^2/V^2)+m(j)^3*((4*sin(alpha)*cos(alpha)^2*(rn-rnip))/(V^2*rn^2))-
m(j)*h(i)^2*((8*sin(alpha)*cos(alpha)^2)/(V^2*rn))
g3=(cos(alpha)^2/(V^2*rn^3))*(rn*(5*cos(alpha)^2-4)+rnip*(4-5*cos(alpha)^2))*m(j)^4
g4=m(j)^2*h(i)^2*((4*cos(alpha)^2*(3-4*cos(alpha)^2))/(V^2*rn^2))
g5=h(i)^4*(4*cos(alpha)^2*sin(alpha)^2)/(V^2*rnip*rn)

germam3(i,j)=g1+g2+g3+g4+g5
germam3(i,j)=sqrt(germam3(i,j))
germam3(i,j)=germam3(i,j)+to-(2*rnip/V)

//APROXIMAÇÃO DESLOCADA SRC PADE EXPANSÃO EM d
CO=(2*rnip/V)^2+h(i)^2*(4*cos(alpha)^2/V^2)+h(i)^4*(4*cos(alpha)^2*sin(alpha)^2)/(V^2*rnip*rn)
C1=(8*rnip*sin(alpha)/V^2)-h(i)^2*((8*sin(alpha)*cos(alpha)^2)/(V^2*rn))
C2=4*((rnip*cos(alpha)^2+rn*sin(alpha)^2)/(V^2*rn))+h(i)^2*((4*cos(alpha)^2*(3-4*cos(alpha)^2))/
(V^2*rn^2))
C3=((4*sin(alpha)*cos(alpha)^2*(rn-rnip))/(V^2*rn^2))
C4=(cos(alpha)^2/(V^2*rn^3))*(rn*(5*cos(alpha)^2-4)+rnip*(4-5*cos(alpha)^2))

q1=(-C3*C2)/(C2^2-C1*C2+C1*C3)
q2=-(C4+C3*q1)/C2
po=CO
p1=CO*q1+C1
p2=CO*q2+C2+C1*q1

p=po+p1*m(j)+p2*m(j)^2
q=1+q1*m(j)+q2*m(j)^2

pd3(i,j)=p/q
pd3(i,j)=sqrt(pd3(i,j))
pd3(i,j)=pd3(i,j)+to-(2*rnip/V)

//APROXIMAÇÃO DESLOCADA SRC-PADÉ EXPANSÃO EM h
CO=(2*rnip/V)^2+m(j)*(8*rnip*sin(alpha)/V^2)+4*m(j)^2*((rnip*cos(alpha)^2+rn*sin(alpha)^2)/
(V^2*rn))+m(j)^3*((4*sin(alpha)*cos(alpha)^2*(rn-rnip))/(V^2*rn^2))+cos(alpha)^2/
(V^2*rn^3))*(rn*(5*cos(alpha)^2-4)+rnip*(4-5*cos(alpha)^2))*m(j)^4
C1=(4*cos(alpha)^2/V^2)-m(j)*((8*sin(alpha)*cos(alpha)^2)/(V^2*rn))+m(j)^2*((4*cos(alpha)^2*(3-
4*cos(alpha)^2))/(V^2*rn^2))
C2=(4*cos(alpha)^2*sin(alpha)^2)/(V^2*rnip*rn)

pade3(i,j)=(h(i)^2*C1)/(1+h(i)^2*(-C2/C1))
pade3(i,j)=CO + pade3(i,j)
pade3(i,j)=sqrt(pade3(i,j))
pade3(i,j)=pade3(i,j)+to-(2*rnip/V)

//*****
*****

//ERRO RELATIVO ABSOLUTO

erro_cc(i,j)=100*abs(crs(i,j)-t(i,j))/t(i,j) //SRC HIPERBÓLICO
erro_f(i,j)=100*abs(f(i,j)-t(i,j))/t(i,j) //SRC NÃO HIPERBÓLICO

```

```

erro_germam1(i,j)=100*abs(germam1(i,j)-t(i,j))/t(i,j) //PARABÓLICO SRC QUARTA ORDEM
erro_germam2(i,j)=100*abs(germam2(i,j)-t(i,j))/t(i,j) //QUADRÁTICO SRC QUARTA ORDEM
erro_germam3(i,j)=100*abs(germam3(i,j)-t(i,j))/t(i,j) //DESLOCADO SRC QUARTA ORDEM

erro_pade1(i,j)=100*abs(pade1(i,j)-t(i,j))/t(i,j) //PARABÓLICO SRC PADÉ EXPANSÃO EM h
erro_pade2(i,j)=100*abs(pade2(i,j)-t(i,j))/t(i,j) //QUADRÁTICO SRC PADÉ EXPANSÃO EM h
erro_pade3(i,j)=100*abs(pade3(i,j)-t(i,j))/t(i,j) //DESLOCADO SRC PADÉ EXPANSÃO EM h

erro_pd1(i,j)=100*abs(pd1(i,j)-t(i,j))/t(i,j) //ERRO PARABÓLICO SRC PADÉ EXPANSÃO EM d
erro_pd2(i,j)=100*abs(pd2(i,j)-t(i,j))/t(i,j) //QUADRÁTICO SRC PADÉ EXPANSÃO EM d
erro_pd3(i,j)=100*abs(pd3(i,j)-t(i,j))/t(i,j) //DESLOCADO SRC PADÉ EXPANSÃO EM d

end

end

//FIGURA 0 SRC HIPERBÓLICO *****
scf(0)
f=gcf();
f.color_map=jetcolormap(nc);
surf(m/D,h/D,erro_cc)
xgrid;

a=gca();

a.axes_reverse=["off","on"];

xlabel("d/D");

ylabel("h/D");

zlabel("%)

mex(1)="% ERRO SRC HIPERBÓLICO mo="
di=strcat(mex)
title(di);
a.font_style=8;
at=a.title;
at.font_style=8;
ax=a.x_label;
ax.font_style=8;
ay=a.y_label;
ay.font_style=8;
az=a.z_label;
az.font_style=8;
a.data_bounds=[xm ym zm; xM yM zM]

hh=gce();
cm=hh.data.color;
hh.data.color=((cm-Zmin)/(Zmax-Zmin)).*(nc-1)+1;
hh.cdata_mapping="direct";
hh.color_mode=-1;
//a.view="2d"; //descomentar para vista 2D

```

```

colorbar(0,1);

xs2png(0,'src_hiperbolico.png');

//FIGURA 1 SRC NÃO HIPERBÓLICO *****
scf(1)
f=gcf();
f.color_map=jetcolormap(nc);

surf(m/D,h/D,erro_f)

xgrid;

a=gca();

a.axes_reverse=["off","on"];

xlabel("d/D");

ylabel("h/D");

zlabel("%")

mex(1)="% ERRO SRC NÃO HIPERBÓLICO mo="
di=strcat(mex)
title(di);

a.data_bounds=[xm ym zm; xM yM zM]

hh=gce();
cm=hh.data.color;
hh.data.color=((cm-Zmin)/(Zmax-Zmin)).*(nc-1)+1;
hh.cdata_mapping="direct";
hh.color_mode=-1;

//a.view="2d"; //descomentar para vista 2D
colorbar(0,1);
a.font_style=8;
at=a.title;
at.font_style=8;
ax=a.x_label;
ax.font_style=8;
ay=a.y_label;
ay.font_style=8;
az=a.z_label;
az.font_style=8;

xs2png(1,'src_naohiperbolico.png');

//FIGURA 2 PARABÓLICO SRC QUARTA ORDEM
*****
scf(2)
f=gcf();
f.color_map=jetcolormap(nc);

```

```
surf(m/D,h/D,erro_germam1)

xgrid;

a=gca();

a.axes_reverse=["off","on"];

xlabel("d/D");

ylabel("h/D");

zlabel('%')

mex(1)="% ERRO SRC 4° ORDEM PARABÓLICO  mo="
di=strcat(mex)
title(di);

a.data_bounds=[xm ym zm; xM yM zM]

hh=gce();
cm=hh.data.color;
hh.data.color=((cm-Zmin)./(Zmax-Zmin)).*(nc-1)+1;
hh.cdata_mapping="direct";
hh.color_mode=-1;

//a.view="2d"; //descomentar para vista 2D
colorbar(0,1);
a.font_style=8;
at=a.title;
at.font_style=8;
ax=a.x_label;
ax.font_style=8;
ay=a.y_label;
ay.font_style=8;
az=a.z_label;
az.font_style=8;

xs2png(2,'src_parabolico.png');

//FIGURA 3 QUADRÁTICO SRC QUARTA ORDEM
*****
scf(3)
f=gcf();
f.color_map=jetcolormap(nc);
surf(m/D,h/D,erro_germam2)

xgrid;

a=gca();

a.axes_reverse=["off","on"];

xlabel("d/D");
```

```

ylabel("h/D");

xlabel('%')

mex(1)="% ERRO SRC 4° ORDEM QUADRÁTICO  mo="
di=strcat(mex)
title(di);

a.data_bounds=[xm ym zm; xM yM zM]

hh=gce();
cm=hh.data.color;
hh.data.color=((cm-Zmin)./(Zmax-Zmin)).*(nc-1)+1;
hh.cdata_mapping="direct";
hh.color_mode=-1;

//a.view="2d"; //descomentar para vista 2D
colorbar(0,1);
a.font_style=8;
at=a.title;
at.font_style=8;
ax=a.x_label;
ax.font_style=8;
ay=a.y_label;
ay.font_style=8;
az=a.z_label;
az.font_style=8;

xs2png(3,'src_quadratico.png');

//FIGURA 4 DESLOCADO SRC QUARTA ORDEM
*****
scf(4)
f=gcf();
f.color_map=jetcolormap(nc);
surf(m/D,h/D,erro_germam3)

xgrid;

a=gca();

a.axes_reverse=["off","on"];

xlabel("d/D");

ylabel("h/D");

xlabel('%')

mex(1)="% ERRO SRC 4° ORDEM DESLOCADO  mo="
di=strcat(mex)
title(di);

a.data_bounds=[xm ym zm; xM yM zM]

```



```

hh=gce();
cm=hh.data.color;
hh.data.color=((cm-Zmin)/(Zmax-Zmin)).*(nc-1)+1;
hh.cdata_mapping="direct";
hh.color_mode=-1;

//a.view="2d"; //descomentar para vista 2D
colorbar(0,1);
a.font_style=8;
at=a.title;
at.font_style=8;
ax=a.x_label;
ax.font_style=8;
ay=a.y_label;
ay.font_style=8;
az=a.z_label;
az.font_style=8;

xs2png(4,'src_deslocado.png');

//FIGURA 5 PARABÓLICO SRC PADE EXPANSÃO EM h
*****
scf(5)
f=gcf();
f.color_map=jetcolormap(nc);
surf(m/D,h/D,erro_pade1)

xgrid;

a=gca();

a.axes_reverse=["off","on"];

xlabel("d/D");

ylabel("h/D");

zlabel('%')

mex(1)="% ERRO SRC PADE PARABOLICO EXPANSÃO EM h  mo="
di=strcat(mex)
title(di);

a.data_bounds=[xm ym zm; xM yM zM]

hh=gce();
cm=hh.data.color;
hh.data.color=((cm-Zmin)/(Zmax-Zmin)).*(nc-1)+1;
hh.cdata_mapping="direct";
hh.color_mode=-1;

//a.view="2d"; //descomentar para vista 2D
colorbar(0,1);
a.font_style=8;
at=a.title;
at.font_style=8;

```

```

ax=a.x_label;
ax.font_style=8;
ay=a.y_label;
ay.font_style=8;
az=a.z_label;
az.font_style=8;

xs2png(5,'pade_parabolico_h.png');

//FIGURA 6 QUADRÁTICO SRC PADE EXPANSÃO EM h
*****
scf(6)
f=gcf();
f.color_map=jetcolormap(nc);
surf(m/D,h/D,erro_pade2)

xgrid;

a=gca();

a.axes_reverse=["off","on"];

xlabel("d/D");

ylabel("h/D");

zlabel('%')

mex(1)="% ERRO SRC PADE QUADRATICO EXPANSÃO EM h mo="
di=strcat(mex)
title(di);

a.data_bounds=[xm ym zm; xM yM zM]

hh=gce();
cm=hh.data.color;
hh.data.color=((cm-Zmin)./(Zmax-Zmin)).*(nc-1)+1;
hh.cdata_mapping="direct";
hh.color_mode=-1;

//a.view="2d"; //descomentar para vista 2D
colorbar(0,1);
a.font_style=8;
at=a.title;
at.font_style=8;
ax=a.x_label;
ax.font_style=8;
ay=a.y_label;
ay.font_style=8;
az=a.z_label;
az.font_style=8;

xs2png(6,'pade_quadratico_h.png');

//FIGURA 7 DESLOCADO SRC PADE EXPANSÃO EM h
*****

```

```
scf(7)
f=gcf();
f.color_map=jetcolormap(nc);
surf(m/D,h/D,erro_pade3)

xgrid;

a=gca();

a.axes_reverse=["off","on"];

xlabel("d/D");
ylabel("h/D");
zlabel('%')

mex(1)="% ERRO SRC PADE t(h,d) EXPANSÃO EM h mo="
di=strcat(mex)
title(di);

a.data_bounds=[xm ym zm; xM yM zM]

hh=gce();
cm=hh.data.color;
hh.data.color=((cm-Zmin)/(Zmax-Zmin)).*(nc-1)+1;
hh.cdata_mapping="direct";
hh.color_mode=-1;

//a.view="2d"; //descomentar para vista 2D
colorbar(0,1);
a.font_style=8;
at=a.title;
at.font_style=8;
ax=a.x_label;
ax.font_style=8;
ay=a.y_label;
ay.font_style=8;
az=a.z_label;
az.font_style=8;

xs2png(7,'pade_deslocado_h.png');

//FIFURA 8 PARABÓLICO SRC PADÉ EXPANSÃO EM d
*****
scf(8)

f=gcf();
f.color_map=jetcolormap(nc);
surf(m/D,h/D,erro_pd1)

xgrid;

a=gca();
```

```

a.axes_reverse=["off","on"];

xlabel("d/D");

ylabel("h/D");

xlabel('%')

mex(1)="% ERRO SRC PADE PARABOLICO EXPANSÃO EM d mo="
di=strcat(mex)
title(di);

a.data_bounds=[xm ym zm; xM yM zM]

hh=gce();
cm=hh.data.color;
hh.data.color=((cm-Zmin)/(Zmax-Zmin)).*(nc-1)+1;
hh.cdata_mapping="direct";
hh.color_mode=-1;

//a.view="2d"; //descomentar para vista 2D
colorbar(0,1);
a.font_style=8;
at=a.title;
at.font_style=8;
ax=a.x_label;
ax.font_style=8;
ay=a.y_label;
ay.font_style=8;
az=a.z_label;
az.font_style=8;

xs2png(8,'pade_parabolico_d.png');

//FIFURA 9 QUADRÁTICO SRC PADÉ EXPANSÃO EM d
*****
scf(9)

f=gcf();
f.color_map=jetcolormap(nc);
surf(m/D,h/D,erro_pd2)

xgrid;

a=gca();

a.axes_reverse=["off","on"];

xlabel("d/D");

ylabel("h/D");

xlabel('%')

mex(1)="% ERRO SRC PADE QUADRATICO EXPANSÃO EM d mo="
di=strcat(mex)

```

```

title(di);

a.data_bounds=[xm ym zm; xM yM zM]

hh=gce();
cm=hh.data.color;
hh.data.color=((cm-Zmin)/(Zmax-Zmin)).*(nc-1)+1;
hh.cdata_mapping="direct";
hh.color_mode=-1;

//a.view="2d"; //descomentar para vista 2D
colorbar(0,1);
a.font_style=8;
at=a.title;
at.font_style=8;
ax=a.x_label;
ax.font_style=8;
ay=a.y_label;
ay.font_style=8;
az=a.z_label;
az.font_style=8;

xs2png(9,'pade_quadratico_d.png');

//FIFURA 10 DESLOCADO SRC PADE EXPANSÃO EM d
*****
scf(10)

f=gcf();
f.color_map=jetcolormap(nc);
surf(m/D,h/D,erro_pd3)

xgrid;

a=gca();

a.axes_reverse=["off","on"];

xlabel("d/D");

ylabel("h/D");

zlabel('%')

mex(1)="% ERRO SRC PADE DESLOCADO EXPANSÃO EM d mo="
di=strcat(mex)
title(di);

a.data_bounds=[xm ym zm; xM yM zM]

hh=gce();
cm=hh.data.color;
hh.data.color=((cm-Zmin)/(Zmax-Zmin)).*(nc-1)+1;
hh.cdata_mapping="direct";
hh.color_mode=-1;

```

```
//a.view="2d"; //descomentar para vista 2D
colorbar(0,1);
a.font_style=8;
at=a.title;
at.font_style=8;
ax=a.x_label;
ax.font_style=8;
ay=a.y_label;
ay.font_style=8;
az=a.z_label;
az.font_style=8;

xs2png(10,'pade_deslocado_d.png');
```

```
//exit
```

TESTE NUMÉRICO DO SRC

```

from rsf.proj import *

Flow('dome',None,
'''
    math d1=0.01 n1=2001 o1=-5 unit1=km label1=Distance
    output="4-3*exp(-(x1-5)^2/9)"
''')

for g in range(2):
    dome = 'dome%d' % g
    Plot(dome,'dome',
'''
        graph min2=0 max2=4 min1=0 max1=10
        yreverse=y plotcol=%d plotfat=%d
        wantaxis=n wanttitle=n scalebar=y pad=n
        "" % ((7,0)[g],(7,3)[g]))
Flow('vel','dome',
'''
    window min1=0 max1=10 |
    spray axis=1 n=451 d=0.01 o=0 label=Depth unit=km |
    math output="1.5+0.5*x1+0.0*x2"
''')
Plot('vel',
'''
    grey color=j allpos=y bias=1.5 scalebar=y wanttitle=n
    barreverse=y barlabel=Velocity barunit=km/s
''')
Result('dome','vel dome0 dome1','Overlay')

Flow('dip','dome','math output="2/3*(x1-5)*input" ')

# Data

Flow('data','dome dip',
'''
    kirmod cmp=y dip=${SOURCES[1]}
    nh=161 dh=0.025 h0=0
    ns=401 ds=0.025 s0=0
    freq=10 dt=0.004 nt=1001
    vel=1.5 gradz=0.5 gradx=0.0 verb=y |
    put d2=0.0125
''')

xx0 = 4
dx = 2
t0 = 1.345
ft = int((t0-1)/0.004)
fx = int(dx/0.025)
emax = 0.05

Result('data',
'''
    byte |
    transp plane=23 |
    grey3 flat=n frame1=500 frame3=80 frame2=200
    label1=Tempo unit1=s
'''

```



```

label3=h unit3=km
label2=PMC unit2=km
title=Data point1=0.8 point2=0.8
")

Plot('data',
""
byte |
transp plane=23 memsize=1000 |
grey3 flat=y frame1=500 frame3=80 frame2=200
label1=Tempo unit1=s
label3=h unit3=km
label2=PMC unit2=km
title=Data point1=0.8 point2=0.8
")

>window min3=%g max3=%g |

# Extract traveltime

gplot = ""
transp |
graph3 frame1=2 frame3=80 frame2=200
wanttitle=n wantaxis=n min=4 max=0 plotfat=3
point1=0.8 point2=0.8 plotcol=3
""

>window min2=%g max2=%g |

def gplot2(title,col,x0):
return ""
>window min2=%g max2=%g |
transp |
graph3 frame1=2 frame3=80 frame2=%d
title="%s" wantaxis=n min=3 max=1 plotfat=3 plotcol=%d
"" % (x0-dx,x0+dx,fx,title,4-col)

Flow('pick','data','envelope | max1 | window n1=1 | real')
Plot('pick',gplot)

def tplot(title):
return ""
grey color=j bias=2 scalebar=y barlabel=Tempo barunit=s barreverse=y
title="%s" label1=h unit1=km label2=PMC unit2=km
"" % title

#####
# NonH-CRS Hessian fitting:#####

#Flow('crs_pick','pick','fitcrspicks')
#Flow('nonhcrs_pick','pick','fitnonhcrspicks A1=%g A2=%g B=%g' % (-6.9287,-0.0000,1.0265))

#Result('pick-crs-pick','pick crs_pick','Overlay')

```

```

#Flow('err-hessian1',['crs_pick','pick'],
# 'add scale=1,-1 ${SOURCES[1]} | math output="abs(input)" ')

#Flow('err-nonh',['nonhcrs_pick','pick'],
# 'add scale=1,-1 ${SOURCES[1]} | math output="abs(input)" ')

#Result('err-hessian1',
# ""
# window min2=%g max2=%g |
# %s bias=0 allpos=y clip=%g minval=0 maxval=%g
# "" % (x0-dx,x0+dx,tplot(' CRS Error (-Inv-Hessian * grad)'),emax,emax))

#Result('err-nonh',
# ""
# window min2=%g max2=%g |
# %s bias=0 allpos=y clip=%g minval=0 maxval=%g
# "" % (x0-dx,x0+dx,tplot(' NonH-CRS Error'),emax,emax))

#####

Result('pick',tplot("TEMPO DE TRANSITO"))
Result('data2','data pick','Overlay')

# Least squares fitting

Flow('zero',None,'spike n1=9 k1=1 mag=%g' % t0)

type = {
  'ncrs': 'ERRO SRC QUARTA ORDEM t2(h,d)'
}

#for x0 in (3,4):
x0=3
datax = 'data%d' % x0
weight = 'weight%d' % x0

Flow(weight,'pick',math output=1/input | cut min2=%g | cut max2=%g | cut min1=%g' % (x0+dx,x0-dx,dx))

Plot(datax,'data',
""
window min3=%g max3=%g min1=1 max1=3 |
byte |
transp plane=23 |
grey3 flat=y frame1=250 frame3=80 frame2=%d
label1=Tempo unit1=s
label3=h unit3=km
label2=PMC unit2=km
wanttitle=n
"" % (x0-dx,x0+dx,fx))

for case in type.keys():
    coef = 'zero'

    for iter in range(110):

```

```

time = '%s-time%d-%d%' (case,iter,x0)
fit = '%s-fit%d-%d' % (case,iter,x0)

Flow([time,fit],[pick',coef],
'''
crs4ordfit coef=${SOURCES[1]} fit=${TARGETS[1]}
type=%s x0=%g
''' % (case,x0))

match = '%s-match%d-%d%' (case,iter,x0)
coef2 = '%s-coef%d-%d%' (case,iter,x0)

Flow('d'+coef2,[pick',time,fit,weight],
'''
add mode=p ${SOURCES[0]} |
add scale=1,-1 ${SOURCES[1]} |
lsfit coef=${TARGET} fit=${SOURCES[2]} weight=${SOURCES[3]}
'',stdout=0)
Flow(coef2,['d'+coef2,coef],'add ${SOURCES[1]}')

coef = coef2
lixo = 'lixo'+'-fit%d' % x0
germam = 'germam'+'-fit%d' % x0
Flow([germam,'lixo'],[pick',coef],
'''
crs4ordfit coef=${SOURCES[1]} fit=${TARGETS[1]}
type=%s x0=%g
''' % (case,x0))

fit = case+'-fit%d' % x0
Flow('germamx',germam,'math output="sqrt(input)" ')
# Result(fit,tplot(type[case]))

err = 'germam'+'-err%d' % x0
Flow(err,['germamx',pick'],
'add scale=1,-1 ${SOURCES[1]} | math output="abs(input)" ')
Result('germamx',
'''
window min2=%g max2=%g |
%s bias=0 allpos=y clip=%g minval=0 maxval=%g
''' % (x0-dx,x0+dx,tplot(type[case]),emax,emax))
Result(err,
'''
window min2=%g max2=%g |
%s bias=0 allpos=y clip=%g minval=0 maxval=%g
''' % (x0-dx,x0+dx,tplot(type[case]),emax,emax))

Plot(germam,'germamx',gplot2(type[case],case=='crs',x0))
Result('germam'+'-data%d' % x0,[datax,germam],'Overlay')

#End()

```

PROGRAMA crs4ordfit.c

```

/* SUPERFICIE SRC QUARTA ORDEM QUADRÁTICA */
/*
Copyright (C) 2017 UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ - UFPa

Este programa é a versão modificada do programa
originalmente desenvolvido por Sergey Fomel e disponibilizado
gratuitamente para uso livre.

Esta versão produz a superfície de reflexão comum (SRC) da aproximação
quadrática do SRC quarta ordem desenvolvida por Germam Hotch (2010) e
calcula as derivadas da aproximação em relação aos parâmetros do SRC, é
parte integrante do script Sconstruct que realiza a inversão dos parâmetros
do SRC através da otimização por mínimos quadrados.

Desenvolvido por: Rodolfo André Cardoso Neves (2017)
*/
#include <rsf.h>

#define NC 9

int main(int argc, char* argv[])
{
    const char *type;
    int nh, nm, ih, im, nc;
    float dh, h0, h, dm, m0, m, f, f0, x0, xp, xm, q;
    float fp0, fp, fm0, fm;
    float c[NC], **t, ***dt;
    sf_file in, coef, fit, out;

    sf_init(argc,argv);
    in = sf_input("in");
    coef = sf_input("coef");
    out = sf_output("out");
    fit = sf_output("fit");

    if (!sf_histint(in,"n1",&nh)) sf_error("No n1= in input");
    if (!sf_histfloat(in,"d1",&dh)) sf_error("No d1= in input");
    if (!sf_histfloat(in,"o1",&h0)) h0=0.;

    if (!sf_histint(in,"n2",&nm)) sf_error("No n2= in input");
    if (!sf_histfloat(in,"d2",&dm)) sf_error("No d2= in input");
    if (!sf_histfloat(in,"o2",&m0)) m0=0.;

    if (!sf_histint(coef,"n1",&nc) || nc != NC)
        sf_error("Need n1=%d in coef",NC);
    sf_putint(fit,"n3",NC);

    sf_floatread(c,NC,coef);
    sf_fileclose(coef);

    if (!sf_getfloat("x0",&x0)) x0=m0;
    /* ponto médio central */

    m0 -= x0;

    if (NULL == (type=sf_getstring("type"))) type="crs";

```

```
t = sf_floatalloc2(nh,nm);
dt = sf_floatalloc3(nh,nm,NC);

for (im=0; im < nm; im++) {
    m = m0 + im*dm;

    for (ih=0; ih < nh; ih++) {
        h = h0+ih*dh;

        /*APROXIMAÇÃO SRC QUARTA ORDEM QUADRÁTICA */

        t[im]
[ih]=c[0]+c[1]*m+c[2]*m*m+c[3]*h*h+c[4]*m*m*m+c[5]*m*h*h+c[6]*m*m*m*m+c[7]*m*m*h*h+c[8]*h
*h*h*h;
        dt[0][im][ih]=1;
        dt[1][im][ih]=m;
        dt[2][im][ih]=m*m;
        dt[3][im][ih]=h*h;
        dt[4][im][ih]=m*m*m;
        dt[5][im][ih]=m*h*h;
        dt[6][im][ih]=m*m*m*m;
        dt[7][im][ih]=m*m*h*h;
        dt[8][im][ih]=h*h*h*h;

    }
}

sf_floatwrite(t[0],nh*nm,out);
sf_floatwrite(dt[0][0],nh*nm*NC,fit);

exit(0);
}
```