UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E CIENTÍFICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM DOCÊNCIA EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICA – MESTRADO PROFISSIONAL

JULIANA BATISTA MESCOUTO

TAREFAS EXPLORATÓRIO-INVESTIGATIVAS PARA O DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO ALGÉBRICO NOS ANOS INICIAIS: UMA EXPERIÊNCIA PARA SE PENSAR A RELAÇÃO ENSINO-APRENDIZAGEM-AVALIAÇÃO

BELÉM-PA
2019

JULIANA BATISTA MESCOUTO

TAREFAS EXPLORATÓRIO-INVESTIGATIVAS PARA O DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO ALGÉBRICO NOS ANOS INICIAIS: UMA EXPERIÊNCIA PARA SE PENSAR A RELAÇÃO ENSINO-APRENDIZAGEM-AVALIAÇÃO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Docência em Educação em Ciências e Matemática do Instituto de Educação Matemática e Científica, da Universidade Federal do Pará, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Docência em Educação em Ciências e Matemática, área de concentração: Ensino, Aprendizagem e Formação de professores de Ciências e Matemática.

Orientadora: Dra. Isabel Cristina Rodrigues de Lucena

BELÉM-PA
2019

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará
Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

M578t Mescouto, Juliana Batista
Tarefas exploratório-investigativas para o desenvolvimento do pensamento algébrico nos anos iniciais: uma experiência para se pensar a relação ensino-aprendizagem-avaliação / Juliana Batista Mescouto. — 2019.
122 f. : il. color.

Orientador(a): Profª. Dra. Isabel Cristina Rodrigues de Lucena
Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação em Docência em Educação em Ciências e Matemáticas, Instituto de Educação Matemática e Científica, Universidade Federal do Pará, Belém, 2019.

1. Pensamento algébrico. 2. Tarefas exploratório-investigativas. 3. Ensino-Aprendizagem-Avaliação. 4. Anos iniciais. I. Título.

CDD 372

JULIANA BATISTA MESCOUTO

TAREFAS EXPLORATÓRIO-INVESTIGATIVAS PARA O DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO ALGÉBRICO NOS ANOS INICIAIS: UMA EXPERIÊNCIA PARA SE PENSAR A RELAÇÃO ENSINO-APRENDIZAGEM-AVALIAÇÃO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Docência em Educação em Ciências e Matemática do Instituto de Educação Matemática e Científica, da Universidade Federal do Pará, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Docência em Educação em Ciências e Matemática, área de concentração: Ensino, aprendizagem e formação de professores de Ciências e Matemática.

Data da avaliação: ___/____/____.

Banca Examinadora

____

Profa. Dra. Isabel Cristina Rodrigues de Lucena – Orientadora (PPGDOC-IEMCI-UFPA)

____

Profa. Dra. Elsa Isabelinho Barbosa – Membro Externo (CIEP-Universidade de Évora)

____

Profa. Dra. Josete Leal Dias – Membro Interno (PPGDOC-UFPA/EA-UFPA)

Dedico a Deus, à minha mãe Ivanilde, ao meu pai Antônio e ao meu esposo Angelo, por serem luz no meu caminho.

AGRADECIMENTOS

Agradeço em primeiro lugar a Deus por ser minha força, meu refúgio e minha fortaleza, por ter me encorajado nos momentos difíceis e de provações, por ter colocado no meu caminho pessoas maravilhosas que me ajudaram a seguir em frente;

À minha mãe, Maria Ivanilde, por ser amiga de todas as horas e minha principal incentivadora;

Ao meu pai, Antônio Gaia, por ter sido meu conselheiro aqui na Terra e ser meu guardião no plano espiritual;

Ao meu esposo, Ângelo Mescouto, pelo companheirismo, amor e paciência;

Aos meus familiares, que no decorrer dessa caminhada compartilharam momentos de alegria e tristeza e me apoiaram e incentivaram a seguir em frente;

Às amigas que estiveram ao meu lado me incentivando e torcendo pela realização desse sonho, em especial, à Estelita Barros, Franciane Silva, Hosana Aviz, Maria José, Milca Alves e Rita de Cássia, minha eterna gratidão;

Aos meus amigos e companheiros do Mestrado Profissional em Docência em Educação em Ciências e Matemática (PPGDOC), Verena Castro e Batista Moraes, por todos os momentos que vivemos dentro e fora da Universidade;

Ao mestre de yoga Radha Mohan Das e à escola *Amazon Yoga School*, pela oportunidade de melhorar minha saúde física, mental e espiritual por meio da prática do yoga;

A todos os meus professores da pós-graduação, em especial, minha orientadora, Dra. Isabel Cristina de Lucena; e minha incentivadora, Dra. Josete Leal Dias.

Gratidão!

“Aprender Matemática sem forte intervenção da sua faceta investigativa é como tentar aprender a andar de bicicleta vendo o outro andar e recebendo informação sobre como o conseguem. Isso não chega. Para verdadeiramente aprender é preciso montar a bicicleta e andar, fazendo erros e aprendendo com eles”.

(BAUMANN, 2002, p. 5).

RESUMO

Esta pesquisa teve como objetivo investigar as manifestações de alunos dos anos iniciais em relação à potencialidade das tarefas exploratório-investigativas de ensino-aprendizagem-avaliação para o desenvolvimento do pensamento algébrico. O aporte teórico que orienta este estudo está nos debates a respeito da avaliação para a aprendizagem e das tarefas exploratório-investigativas no campo do pensamento algébrico. As atividades investigativas foram desenvolvidas em uma escola pública do ensino regular localizada em um bairro periférico da cidade de Belém/PA, em uma turma do 4º ano composta por 24 alunos, sendo 13 meninos e 11 meninas, com idade entre nove e dez anos. A escolha da turma ocorreu porque os alunos ainda não haviam vivenciado experiências que envolvessem atividades para o desenvolvimento do pensamento algébrico. O percurso investigativo foi de natureza qualitativa. Baseou-se na análise do desenvolvimento de tarefas, tidas como de ensino-aprendizagem-avaliação, realizadas em sala de aula por grupos de estudantes. Temas como avaliação na perspectiva formativa (BLACK; WILLIAM, 1998; FERNANDES, 2009, 2011; VILLAS-BOAS, 2008), tarefas exploratório-investigativas (OLIVEIRA; PONTE,1995) e desenvolvimento do pensamento algébrico (BLANTON; KAPUT, 2005) embasaram o referencial teórico desta pesquisa. Nesse sentido, as tarefas exploratório-investigativas mostraram-se propícias para serem trabalhadas nos anos iniciais, principalmente por impulsionar o espírito investigativo dos educandos, tão necessário para a Matemática, desde sua origem até os dias atuais. Elas mostraram-se satisfatórias para serem trabalhadas nos anos iniciais, principalmente por impulsionar o espírito investigativo dos educandos, também foram pertinentes e essenciais para articular ensino-aprendizagem-avaliação, por meio de *feedback* direcionado para o desenvolvimento do pensamento algébrico.

Palavras-chave: Pensamento algébrico. Tarefas exploratório-investigativas. Ensino-Aprendizagem-Avaliação. Anos iniciais.

ABSTRACT

This research aimed to investigate the manifestations of students in the early years in relation to the potential of exploratory-investigative teaching-learning-assessment tasks for the development of algebraic thinking. The theoretical contribution that guides this study is in the debates regarding the assessment for learning and the exploratory-investigative tasks in the field of algebraic thinking. The investigative activities were developed in a public school of regular education located in a peripheral neighborhood of the city of Belém/PA, in a class of the 4th year composed by 24 students, being 13 boys and 11 girls, aged between nine and ten years. The class was chosen because the students had not yet experienced experiences involving activities for the development of algebraic thinking. The investigative path was of a qualitative nature. It was based on the analysis of the development of tasks, considered as teaching-learning-assessment, carried out in the classroom by groups of students. Themes such as evaluation in the formative perspective (BLACK; WILLIAM, 1998; FERNANDES, 2009, 2011; VILLAS-BOAS, 2008), exploratory-investigative tasks (OLIVEIRA; PONTE, 1995) and the development of algebraic thinking (BLANTON; KAPUT, 2005) the theoretical framework of this research. In this sense, the exploratory-investigative tasks proved to be conducive to being worked on in the early years, mainly because it boosted the investigative spirit of students, so necessary for Mathematics, from its origin to the present day. They proved to be satisfactory to be worked on in the early years, mainly because they boosted the students' investigative spirit, they were also relevant and essential to articulate teaching-learning-assessment, through feedback directed to the development of algebraic thinking.

Keywords: Algebraic thinking. Exploratory-investigative tasks. Teaching-Learning-Evaluation. Early years.

LISTA DE IMAGENS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A dissertação intitulada *Tarefas exploratório-investigativas para o desenvolvimento do pensamento algébrico nos anos iniciais: uma experiência para se pensar a relação ensino-aprendizagem-avaliação* é parte do projeto de pesquisa interinstitucional intitulado *Ensino-aprendizagem-avaliação em matemática nos anos iniciais do ensino fundamental: atividades exploratório-investigativas e formação docente*, desenvolvido entre a Universidade Federal do Pará e o Centro Universitário Univates, do Rio Grande do Sul (CNPq – Edital Universal n. 01/2016), com vigência até março de 2020.

Essa pesquisa, em nível de mestrado profissional, teve atividades investigativas desenvolvidas em uma escola pública de ensino fundamental nos anos iniciais localizada na cidade de Belém-PA. O aporte teórico que a orienta encontra-se entre os debates a respeito da avaliação para a aprendizagem e das tarefas exploratório-investigativas no campo do pensamento algébrico. A motivação para esta pesquisa esteve relacionada com as novas possibilidades que o ensino, aprendizagem e a avaliação passaram a representar para a autora desta dissertação após duas experiências marcantes no seu percurso formativo.

A primeira, foi durante o mestrado profissional no Programa de Pós-Graduação em Docência em Educação em Ciências e Matemática (PPGDOC/UFPA). No decorrer do curso foi ofertada uma disciplina intitulada *Avaliação em aulas de Ciências e Matemática*, que trouxeram discussões, diálogos, estudos teóricos sobre a avaliação na perspectiva formativa (BLACK; WILLIAM, 1998; FERNANDES, 2009, 2011; VILLAS-BOAS, 2008). As leituras e discussões dos textos me levaram a refletir e ao mesmo tempo me inquietavam no sentido de buscar compreender sobre os questionamentos que norteiam a avaliação nas aulas de matemática no ensino fundamental.

Antes da disciplina, a concepção que tinha sobre avaliação era somente classificatória. Como aluna e professora, não percebia que ela estava relacionada diretamente com a melhoria das aprendizagens. Neste tocante, o sentido que a avaliação passou a representar foi um “divisor de águas” na minha formação e desencadeou novas tomadas de decisões em relação as minhas práticas como professora e à pesquisa de mestrado que iria desenvolver.

O segundo momento ocorreu durante o processo de estudos e definição do meu objeto de pesquisa, quando recebi o convite para participar de formações vinculadas ao projeto supracitado junto com professores dos anos iniciais de uma escola pública da periferia de Belém-PA. Nesses estudos, temas como álgebra, tarefas exploratório-investigativas e avaliação me inquietavam.

Em um dos encontros chamou-me atenção os debates sobre o ensino de álgebra nos anos iniciais com ênfase no desenvolvimento do pensamento algébrico, pois considerava que somente a partir dos anos finais, a álgebra pudesse ser ensinada, já que durante minha formação inicial estudei conceitos referentes a esse assunto somente a partir da 6ª série (atual 7º ano).

Inquieta para verificar o porquê do assunto álgebra figurar apenas no currículo dos anos finais do ensino fundamental recorri aos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1997) e percebi que, nos anos iniciais, o ensino de álgebra não era obrigatório e aparecia timidamente dentro do bloco de conteúdo Números e Operações. Nesse sentido, o ensino do assunto só passou a ser obrigatório nos anos iniciais a partir da aprovação da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) em 2017, tendo como principal objetivo “desenvolver o pensamento algébrico”.

De acordo com o documento, é “imprescindível que algumas dimensões do trabalho com álgebra estejam presentes nos processos de ensino e aprendizagem desde o Ensino Fundamental – Anos Iniciais” (BRASIL, 2017, p. 268), pois elas podem potencializar competências e habilidades cognitivas que estão além dos números e operações e assim contribuir para a análise de relações e situações matemáticas necessárias para o entendimento da álgebra nos anos posteriores.

No entanto, a BNCC (BRASIL, 2017) deixa claro que nos anos iniciais, ela não propõe o uso de letras para expressar regularidades, por mais simples que seja, o que evidencia a existência de outras possibilidades para expressar o pensamento algébrico. Nesse sentido, Fiorentini, Miguel e Miorim (1993, p. 88) pontuam que se pode expressar “através da criação de uma linguagem específica para esse fim, isto é, através de uma linguagem algébrica, de natureza estritamente simbólica”.

Diante o exposto, é essencial ter atenção a toda justificativa oral e escrita dos alunos para que não seja perdido nenhum tipo de manifestação do pensamento algébrico.

Como fruto das novas descobertas durante o mestrado e formações no âmbito do projeto, a temática a respeito da avaliação para a aprendizagem e o desenvolvimento do pensamento algébrico foram delineando-se como potenciais, além disso, temas como: tarefas explorátorio-investigativas de ensino-aprendizagem-avaliação, emergiram e se tornaram basilares para o objetivo dessa pesquisa.

Nesta perspectiva, a concepção de avaliação assumida aqui está alinhada à concepção de Fernandes (2009), que considera a avaliação como um momento oportuno para acompanhar e ajudar o aluno a aprender melhorar, ou seja, avaliar "é um processo destinado a compreender os processos de ensino e de aprendizagem e é sempre localizado e situado" (FERNANDES, 2009, p.83).

As ideias sobre avaliação que comumente têm marcado o cenário escolar de professores e alunos ao longo do tempo estão relacionadas com ações que a definem como juizo de valor, ou melhor, avaliar parece ser sinônimo de atribuir uma nota sobre a propriedade de um processo para a aferição da qualidade do seu resultado.

Nesses termos, a compreensão da avaliação do processo de ensino/aprendizagem pauta-se na lógica da mensuração, isto é, associa-se o ato de avaliar ao de medir os conhecimentos adquiridos pelos alunos, por esse motivo a ênfase no uso frequente de instrumentos com vista à aferição, como os testes, provas ou exames, como meio para atribuição de notas, hipoteticamente, medindo o que os alunos sabem, para posteriormente os classificar como aptos ou não aptos para as próximas etapas de estudo.

A esse respeito é notório que conceber a avaliação estritamente como classificação não está coerente com a perspectiva de avaliar para melhorar as aprendizagens, uma vez que não cabe mais considerar a avaliação com função especificamente seletiva, classificatória e controladora que estimula os alunos a memorizar os conteúdos e que esta aprendizagem tende a desaparecer após os testes.

É essencial repensar o significado de avaliação para que seja possivel minimizar possiveis dúvidas, esclarecer equívocos, ampliar conceitos, desenvolver pensamentos críticos, incomodar-se em relação às práticas ortodoxas e tentar algum tipo de transformação que colabore para sua resignificação. Para isso, é essencial que a avaliação melhore as aprendizagens sendo formativa.

A avaliação formativa tem por objetivo realizar práticas a favor das aprendizagens, em que o professor acompanha o trabalho individual e coletivo dos alunos para ajudá-los a melhorar e, ao mesmo tempo, aperfeiçoar sua própria prática de ensino em que ambos os sujeitos são beneficiados. Segundo Fernandes (2011b, p. 1), a avaliação formativa é "comprovadamente, um processo pedagógico que contribui para melhorar muito as formas de aprender e de ensinar".

O desenvolvimento adequado da avaliação formativa pode trazer diversos benefícios para os alunos aprenderem melhor e com mais profundidade, conforme Black e William (1998): as práticas sistemáticas de avaliação formativa melhoram expressivamente as aprendizagens dos alunos, que revelam suas maiores dificuldades e são os mais beneficiados, além disso, os alunos que frequentam aulas em que predomina a avaliação de natureza formativa obtêm melhores resultados nos exames internos e externos.

Nesse contexto, as tarefas são fundamentais para o desenvolvimento do processo de ensino-aprendizagem-avaliação com perspectiva formativa, uma vez que pode encaminhar o ensino para um amplo campo de aprendizagem, que vai dos conhecimentos dos conteúdos específicos das disciplinas até outros aspectos transversais, por exemplo, a comunicação, relações interpessoais, respeito mútuo, entre outros.

A avaliação formativa desempenha um importante papel para a melhoria das aprendizagens e para isso é imprescindível a articulação entre o ensino-aprendizagem-avaliação. Segundo Fernandes (2009), essa articulação pode ser realizada por meio de *feedback* e para isso as escolhas das tarefas, como já referido, têm um importante papel na articulação expressa acima. Dentre as possiblidades, têm-se as investigações matemáticas na perspectiva das tarefas exploratório-investigativas cujo resultado aponta para a maximização da aprendizagem em relação aos conteúdos algébricos, especificamente ao desenvolvimento do pensamento algébrico.

De acordo com Cunha, Oliveira e Ponte (1995, p.1), a realização de investigações em sala de aula por meio de tarefas exploratório-investigativas é relevante pelos seguintes aspectos:

(a) representam uma parte essencial da experiência matemática e assim permitem uma visão mais completa desta ciência;

(b) estimulam o envolvimento dos educandos, primordial para uma aprendizagem significativa;

(c) podem ser trabalhadas por alunos de ciclos e níveis de desenvolvimento diferente;

(d) potencializam um modo de pensamento holístico (ao relacionarem muitos tópicos), algo essencial ao raciocínio matemático.

Nessa perspectiva, tarefas exploratório-investigativas são relevantes para serem trabalhadas em aulas de matemática desde os anos iniciais, pois podem promover situações que motivarão a participação dos educandos e, consequentemente, contribuirá para novas aprendizagens.

Partindo do exposto, essa pesquisa teve a seguinte pergunta norteadora: De que modo as tarefas exploratório-investigativas de ensino-aprendizagem-avaliação potencializam o desenvolvimento do pensamento algébrico de crianças nos anos iniciais? E motivou a formulação do objetivo geral dessa pesquisa: investigar as manifestações de alunos dos anos iniciais de uma escola pública de Belém-PA em relação às potencialidades das tarefas exploratório-investigativas de ensino-aprendizagem-avaliação para o desenvolvimento do pensamento algébrico.

Já os objetivos específicos são o de construir um conjunto de tarefas exploratório-investigativas voltadas para o ensino-aprendizagem-avaliação; possibilitar aos alunos dos anos iniciais momentos de exploração, investigação e justificação oral e escrita de suas descobertas matemáticas; identificar o pensamento algébrico e classificar os níveis de generalizações apresentadas nas estratégias de resolução dos alunos do 4º ano dos anos iniciais do ensino fundamental e apoiar os alunos por meio da avaliação para as aprendizagens.

Desse modo, essa dissertação está organizada em três capítulos. No primeiro tem-se uma revisão teórica da pesquisa.

No segundo capítulo apresenta-se o percurso metodológico da pesquisa, em que são apresentadas as escolhas, os caminhos percorridos durante o desenvolvimento da pesquisa, as etapas de investigação, os procedimentos de recolha e análise dos dados.

No terceiro capítulo são apresentados os resultados e discussões das experiências de ensino desenvolvidas na turma foco da pesquisa.

Por fim, na seção Considerações Finais apresentar-se-á os principais resultados obtidos na pesquisa.

1 REVISÃO TEÓRICA

Nesse capítulo são apresentadas as discussões que apoiam essa pesquisa e que estão organizadas em três seções contendo reflexões a respeito da articulação entre o ensino-aprendizagem-avaliação, avaliação formativa e as tarefas de ensino-aprendizagem-avaliação, tarefas exploratório-investigativas e considerações a respeito do pensamento algébrico nos anos iniciais.

1.1 ENSINO-APRENDIZAGEM-AVALIAÇÃO

A palavra composta ensino-aprendizagem-avaliação surgiu intencionalmente para enfatizar a indissociabilidade desses três momentos. Essa discussão já vinha sendo feita por Frederiksen e Collins (1989 apud GLASSER, 1998), quando enfatizaram que, no futuro, a tendência do ensino, aprendizagem e avaliação era de se tornarem integralmente relacionadas. Para os autores, à medida que a aprendizagem fosse acontecendo haveria evidências suficientes para a avaliação e, a partir da avaliação, o estabelecimento das próximas etapas de ensino.

Apesar das recomendações que apontam caminhos para promover a integração ensino-aprendizagem-avaliação, ainda são escassas as tentativas de mudanças nesse contexto, como afirma Fernandes (2009, p.19): "continuam a prevalecer modelos de avaliação pouco integradas ao ensino e à aprendizagem e, sobretudo, orientado para atribuir classificações".

As dificuldades de mudanças – nas práticas de avaliação – podem estar relacionadas às heranças do chamado Paradigma da Transmissão, segundo Fernandes (2011a, p. 95), que "pressupõe um professor-funcionário ou um professor burocrata que se limita a dizer o currículo, e um aluno a tentar seguir o que lhe é dito".

No Paradigma da Transmissão, a centralidade do ensino, aprendizagem e da avaliação está no professor, ele que tem o poder decisório quanto à metodologia, conteúdo, avaliação, a forma de interação na sala de aula etc. Nesse modelo de ensino, a relação professor-aluno é vertical e está nas "mãos" do professor, já que o conhecimento a ser transmitido, e depois reproduzido pelos alunos durante a realização de provas, geralmente é caracterizado como um momento de medir, por meio de uma escala numérica (notas), a aprendizagem discente.

Assim, é fato afirmar que o ensino somente transmissivo não está preocupado em avaliar o que verdadeiramente o aluno sabe ou precisa saber para melhorar sua aprendizagem, com isso:

> [..] os alunos vão acumulando dificuldades e, assim, caminhando para o fracasso. O verdadeiro ensino, ao contrário, busca a compreensão e assimilação sólida das matérias; para isso, é necessário ligar o conhecimento novo com o que já se sabe, bem como prover os pré-requisitos, se for o caso. A avaliação deve ser permanente, de modo que as dificuldades vão sendo diagnosticadas aula a aula (LIBÂNEO, 2006, p.79).

Quando Libâneo (2006) afirma que os alunos caminham para o fracasso, ele está fazendo referência ao modelo de ensino tradicional, em que o professor conduz sua aula considerando a aprendizagem de seus alunos como um fim em si mesmo. Dessa maneira, os educandos colecionam dificuldades que só serão exteriorizadas durante os resultados insatisfatórios nas avaliações. Neste tocante, Burriasco (2000, p.158) alerta que a "avaliação mal conduzida pode ser, ela mesma, um dos fatores causadores do fracasso escolar".

Seguir modelos de ensino-aprendizagem e, consequentemente, de avaliação na perspectiva do Paradigma da Transmissão, não foi e não será suficiente para os dias atuais, uma vez que "não se pode conceber uma avaliação reflexiva, crítica, emancipatória, num processo de ensino passivo e repetitivo" (VASCONCELLOS, 2005, p. 55). Nesse sentido, discutir sobre o papel da avaliação é pertinente porque a envergadura dessa temática tem mostrado, no campo da pesquisa, inúmeras contribuições para que professores (re)pensem seu trabalho.

Sabe-se que mudar não é fácil, é preciso lançar-se para romper com velhas práticas pedagógicas e dar lugar à avaliação que esteja comprometida com as aprendizagens, que oportunizem aos alunos momentos para expressar suas dúvidas e dificuldades.

Nessa perspectiva, Fernandes (2011a, p.95) considera essencial buscar estratégias voltadas para o "paradigma da interação social, da comunicação e da atividade individual e coletiva", que podem ser alcançados por meio da integração do ensino-aprendizagem-avaliação. Assim, pensar em práticas que articulem ensino-aprendizagem-avaliação tem a ver com essa revisão de paradigmas, em que o papel do aluno, a seleção das tarefas, o *feedback* de qualidade, a diversidade de evidências, a comunicação, a regulação da aprendizagem passam a ser objeto de aprendizagem por parte do docente para melhor compreender a forma de avaliar que resulte em aprendizagem.

Para isso, o papel da avaliação assume um novo significado, ou seja, deixa de ser um momento isolado, que geralmente ocorre no final de uma etapa de ensino, e passa integralmente a fazer parte do ensino-aprendizagem, com o objetivo de apoiar as aprendizagens dos alunos. De acordo com Fernandes (2009, p. 89), sem essa integração "a avaliação aparece como algo externo [...] e como um procedimento cujas funções são de natureza mais certificativa e seletiva e menos para ajudar os alunos a aprenderem".

Para que ocorra a integração da avaliação com o ensino e a aprendizagem, Carvalho (2013) sugere a implementação das seguintes mudanças:

> Uma das formas de se efetivar uma avaliação indissociável do processo de ensino-aprendizagem é entendê-la como um processo natural de se obter informações sobre o que acontece relativamente ao ensino e aprendizagem, utilizando para isso múltiplos recursos e não estabelecendo necessariamente procedimentos formais de avaliar. Dando, enfim, uma estrutura mais informal à avaliação. Mais do que algo que se serve de procedimentos especiais, ela deve ser uma atividade que descansa nas capacidades ─ naturais e adquiridas via formação ─ do professor para compreender a situação, as reações dos alunos, os traços significativos de como executam as tarefas, o nível de suas realizações, as dificuldades que vão encontrando e o esforço que fazem (CARVALHO, 2013, p. 70).

Nesse tocante, não cabe considerar a avaliação estritamente classificatória ou certificativa, pois ela não está coerente com a perspectiva de avaliar para melhorar as aprendizagens dos alunos. Logo, é essencial repensar o significado da avaliação, para que seja possivel esclarecer dúvidas, minimizar equívocos, ampliar conceitos, desenvolver pensamento crítico e refletir a definição de critérios para identificar, no contexto de sala de aula, o que de fato é relevante para avaliar, uma vez que a avaliação não poderá ser confundida como uma ação qualquer que ocorre geralmente após um período em que supostamente se ensina e se aprende ou que, partindo de experiências pessoais do professor, dê-se por suficiente.

> Avaliar é, acima de tudo, um processo pedagógico que tem a ver com a aprendizagem e com o ensino. Um poderoso processo que deve ajudar professores e alunos a ensinar e a aprender melhor, respectivamente. Um processo que, tanto quanto possível, deve estar fortemente articulado com os processos de ensino e de aprendizagem (FERNANDES, 2011, p.86).

O processo de avaliar deve ser compreendido como uma possibilidade de ler a realidade, não de se confundir com ela; tem a ver com assumir que seus resultados não são imutáveis, bem como dela poder ser credível e baseada no rigor pertinente que a literatura promulga, ou seja, deve ser “mais do que uma mera questão técnica, a avaliação tem que ser encarada como um poderoso processo pedagógico cujo propósito primordial é o de ajudar os alunos a aprender” (FERNANDES, 2011, p.83).

Com esse propósito, Buriasco (2000) enfatiza que a avaliação precisa ser vista como um condutor da busca do conhecimento, de modo a evidenciar ao professor o caminho percorrido por seu aluno e onde ele se encontra, para que sirva de orientação do que deve ser revisto ou mantido, para que juntos possam chegar à construção de resultados satisfatórios.

Sobre esse ponto de vista, Hoffmann (2018) considera a avaliação como um ato em que os professores assumem a postura de mediadores e os alunos são construtores de suas aprendizagens. Segundo a autora, avaliar na concepção mediadora, significa:

> a) oportunizar aos alunos momentos para expressar suas ideias, principalmente por meio de tarefas diversificadas, onde os professores poderão debruçar-se sobre as produções dos alunos e observar seus níveis de entendimento;
>
> b) propor situações desencadeadoras de discussões entre professor-aluno e aluno-aluno;
>
> c) propor tarefas (orais e escritas) individuais aos alunos e procurar interpretar as respostas apresentadas por eles;
>
> d) em vez de classificar o trabalho dos alunos como certo ou errado e atribuir notas, deve-se fazer comentários construtivos, para que os alunos percebam suas dificuldades e encontrem melhores soluções;
>
> e) ressignificar os registros de avaliação em anotações significativas sobre o acompanhamento dos alunos em seu processo de construção do conhecimento. (HOFFMANN, 2018, p. 72)

As características da avaliação mediadora citadas acima denotam claramente um cenário em que o aluno tem papel importante, pois ele próprio é construtor de sua aprendizagem, ele tem voz ativa para expressar suas ideias e dúvidas, e o professor tem a intenção de usar todas as ferramentas que estiverem ao seu alcance para apoiar a aprendizagem discente e contribuir, sobretudo, para o desenvolvimento da autonomia perante o conhecimento, isso significa formar cidadãos preparados para fazer uma leitura crítica e consciente das situações dentro e fora de sala de aula.

Nesse cenário, a avaliação deixa de ser um momento de “acerto de contas” (MORETTO, 2002), já que o professor usa a avaliação para recolher informações dos níveis de entendimento dos alunos, interpreta e direciona seu trabalho para ajudar o educando a superar suas dificuldades e para o aprendente orienta-se com base nos sucessivos *feedbacks* que lhes são fornecidos e, enfim, chegar à conclusão do que precisa ser feito para superar dificuldades e compreender o que está sendo estudado.

Alinhado a essa ideia, Fernandes (2009, p.56) aponta que a avaliação deve ser “ [...] mais participativa, mais transparente e integrada nos processos de ensino e de aprendizagem”, ou seja, ser formativa. Perrenoud (1999, p. 78) considera formativa “toda prática de avaliação contínua que pretenda contribuir para melhorar as aprendizagens em curso”, além disso, pensar em práticas que articulem ensino-aprendizagem-avaliação é pensar na perspectiva da avaliação formativa, a que busca, de fato, compreender o que o aluno sabe e precisa saber para melhorar suas aprendizagens.

Por isso, a seguir, será apresentada uma breve discussão acerca da avaliação formativa.

1.1.1 Avaliação Formativa

O termo Avaliação Formativa não é recente e foi introduzido pela primeira vez por Michael Scriven em 1967, mediante a necessidade de mostrar que além da avaliação classificatória e certificativa, era desejável uma avaliação voltada para a melhoria das aprendizagens, ou seja, uma avaliação formativa que estivesse presente em todos os momentos de ensino (FERNANDES, 2009).

Esse termo teve muitas interpretações e, por vezes, ainda é compreendido como um tipo de avaliação destinado a quantificar questões relacionadas ao comportamento estudantil ou relacionado às tarefas que não sejam pontuais e predefinidas.

Para não haver equívocos, é necessário entender o significado de Avaliação Formativa, para que possa ser utilizada adequadamente. Nesse sentido, a visão assumida aqui é a concepção de Fernandes (2009, p. 59), que define avaliação formativa como “um processo eminentemente pedagógico, plenamente integrado ao ensino e à aprendizagem” que tem a intenção de regular e melhorar as aprendizagens dos alunos.

Ao tratar da avaliação para a melhoria das aprendizagens, ou formativa, convém ter consciência do que se espera alcançar com a avaliação, uma vez que ela não pode está centrada em um sistema de medidas que, supostamente, mensura o que os alunos aprenderam dos conteúdos ensinados por meio de notas e classificações. A avaliação que mantém a característica de pontuar por meio de números o que o aluno aprendeu, tem sido denominada de Avaliação Somativa, sendo identificada como avaliação das aprendizagens (FERNANDES, 2009).

De acordo com Borralho, Lucena e Brito (2015) são as práticas de sala de aula que revelam as particularidades da avaliação formativa ou somativa, e os efeitos entre esses tipos de avaliação são diferentes.

> A avaliação somativa tem como resultante descrever a aprendizagem alcançada em um determinado momento para informar resultados aos pais ou responsáveis, a outros professores, aos próprios alunos e, em forma concisa, a outras partes interessadas, tais como direção ou conselhos escolares. Tem um papel importante na educação global no que diz respeito ao progresso dos alunos, mas não no ensino do dia a dia, como faz a avaliação formativa. O desafio maior é articular esses propósitos importantes à educação global com a melhoria de aprendizagens por meio da prática da avaliação formativa. (BORRALHO; LUCENA; BRITO, 2015, p.31).

As distinções entre a avaliação das aprendizagens (somativa) e a avaliação para as aprendizagens (formativa) são claras: a avaliação formativa é contínua e a somativa é pontual; a formativa é interativa, e os alunos são ativos, a somativa tem pouca interação e os alunos podem ficar mais passivos; a avaliação formativa usa diversos métodos contínuos para orientar e melhorar as aprendizagens, a somativa está mais voltada para classificar ou certificar os alunos.

Além disso, a avaliação formativa pode ser considerada orientadora, pois informa os dois principais atores do processo de ensino e aprendizagem, no caso, o professor e o aluno, pois o primeiro perceberá os efeitos de sua ação pedagógica e, a partir disso, traçará novas estratégias, já o segundo entenderá suas dificuldades e possivelmente tornar-se-á capaz de corrigi-las, pois, segundo Black e Wiliam (1998), os alunos que revelam maiores dificuldades são os mais beneficiados com a avaliação formativa.

A avaliação formativa não está preocupada com a padronização de uma aprendizagem comum entre os alunos, no sentido de comparações e classificações, pelo contrário, há o respeito ao ritmo de aprendizagem de cada um e atenção especial para com os erros e dúvidas, que são indicadores para o professor conhecer a realidade de seus educandos e estabelecer medidas coerentes que os ajudem a superar dificuldades e melhorar as aprendizagens e não para pontuar.

Corroborando com a ideia citada acima, Black e Wiliam (2001, p.1) enfatizam que "os professores precisam saber sobre o progresso e as dificuldades dos alunos em aprender, para que eles possam adaptar seu trabalho para atender às suas necessidades".

Sabendo que as necessidades dos alunos são imprevisiveis e variam de um aluno para outro, Black e Wiliam (2001) citam dois exemplos que o professor pode utilizar para descobrir em que aspecto o educando precisa avançar: o primeiro é por meio de discussões realizadas em sala e o segundo, por meio de trabalhos escritos que podem ser feitos no ambiente escolar ou em casa.

Nessa perspectiva, a avaliação formativa é uma possibilidade de melhorar as práticas em sala de aula, assim, Black e Wiliam (2009, p. 7), enfatizam que:

> A prática em uma sala de aula é formativa na extensão em que evidências sobre o aproveitamento dos estudantes é estimulada, interpretada e utilizada pelo professor, pelos alunos, ou seus pares, para tomarem decisões sobre os próximos passos em instrução, que são esperadas para serem melhores, ou seja, melhor fundamentadas do que decisões que eles pudessem tomar na ausência das evidências que foram estimuladas. (BLACK; WILLIAM, 2009, p. 7)

É no contexto da aula, por meio de tarefas, que a avaliação formativa viabiliza registros para o acompanhamento dos alunos a fim de melhorar o ensino e a aprendizagem. Deste modo, Broadfoot (1988) destaca duas das funções principais da avaliação formativa: a) Diagnosticar o progresso do aluno, registrando e apreciando seus pontos fortes e fracos de forma contínua, como parte do processo interativo em sala de aula, de modo a oferecer orientação a ele enquanto aprende; b) Encorajar o estudante, fornecendo *feedback* positivos que orientem seus processos cognitivos, favoreça sua autoavaliação e seu envolvimento e responsabilização pessoal no desenvolvimento de tarefas que o levarão a uma aprendizagem efetiva.

Diante destas considerações percebe-se, por meio da literatura especializada, que a avaliação formativa é contínua, busca conhecer o que os alunos sabem, e precisam saber, para melhorar suas aprendizagens, para tanto, as interações em sala de aula são constantes, os *feedback* são contínuos, os alunos são ativos e os professores usam diversos instrumentos de avaliação com ênfase nos processos. Nessa perspectiva, Fernandes (2006, p. 31) indica algumas características para a avaliação formativa, dentre as quais se destacam:

1. A avaliação é deliberadamente organizada em estreita relação com um *feedback* inteligente, diversificado, bem-distribuído, frequente e de elevada qualidade;
2. O *feedback* é importante para ativar os processos cognitivos e metacognitivos dos alunos, que, por sua vez, regulam e controlam os processos de aprendizagem, assim como para melhorar a sua motivação e autoestima;
3. A natureza da interação e da comunicação entre professores e alunos é central porque os professores têm que estabelecer pontes entre o que considera ser importante aprender e o complexo mundo dos alunos (por exemplo, o que eles são, o que sabem, como pensam, como aprendem, o que sentem e como sentem);
4. Os alunos responsabilizam-se progressivamente pelas suas aprendizagens e têm oportunidades para partilhar o que e como compreenderam;
5. As tarefas propostas aos alunos são cuidadosamente selecionadas, representam domínios estruturantes do currículo e ativam processos complexos do pensamento (por exemplo, analisar, sintetizar, avaliar, relacionar, integrar, selecionar);
6. As tarefas refletem uma estreita relação entre a didática e a avaliação que tem um papel relevante na regulação dos processos de aprendizagem;
7. O ambiente de avaliação das salas de aula induz uma cultura positiva de sucesso baseada no princípio de que todos os alunos podem aprender.

Nesse sentido, a avaliação formativa está integrada ao ensino-aprendizagem e às interações entre professor-aluno são privilegiadas, já que o foco está na melhoria das aprendizagens, assim, a avaliação é realizada no instante da aula, por meio de diversos instrumentos, técnicas e estratégias, sendo os *feedbacks* essenciais, uma vez que, por meio deles, os alunos ficam cientes dos seus níveis de aprendizagem e o que é preciso ser feito para melhorar seus desempenhos.

Dirimir o espaço entre o que o aluno sabe e o que precisa aprender é o foco de práticas avaliativas para as aprendizagens e, de modo pragmático, é falar de tarefas de ensino-aprendizagem-avaliação, como será tratado na próxima seção.

1.1.2 Tarefas de ensino-aprendizagem-avaliação

As tarefas são ferramentas de mediação essenciais no ensino e na aprendizagem de matemática. Sobre esse assunto, Ponte (2014, p.14) enfatiza que as tarefas "são o elemento organizador da atividade de quem aprende", no que Fernandes (2011a, p. 96) reitera "são a pedra de toque de um desenvolvimento do currículo em que alunos e professores estão ativos, sendo por meio delas que se aprende, ensina, avalia e regula as atividades que ocorre nas salas de aula".

A metáfora "pedra de toque" usada por Fernandes (2011a) evidencia que as tarefas podem ser o elemento central do desenvolvimento das atividades realizadas em sala de aula, por meio delas o ensino poderá ser encaminhado para um amplo campo de aprendizagem que vai dos conhecimentos dos conteúdos específicos das disciplinas até outros aspectos transversais, como as comunicações, interações socioafetivas, interpretação, resolução de problemas, espírito investigativo, entre outros.

Além disso, é possível que as tarefas estejam voltadas para articular ensino-aprendizagem-avaliação. Como meio prático para essa articulação, a escolha adequada é essencial e deve contribuir para que a avaliação seja contextualizada, interativa e focada para as aprendizagens. De fato, as tarefas podem facilitar a articulação entre o ensino, aprendizagem e a avaliação, assim como dificultar ou até mesmo impedi-la de ser realizada. Por essa razão, é imprescindível ter cuidado durante a escolha (FERNANDES, 2009).

A esse respeito, Ponte (2014, p. 22) considera que as tarefas devem "proporcionar um percurso de aprendizagem coerente, que permita aos alunos a construção dos conceitos, a compreensão dos procedimentos, o conhecimento das formas de representação relevantes e das conexões de cada conceito".

Para que as tarefas sejam significativas em sala de aula, Fernandes (2009) sugere que elas devem desempenhar uma tripla função: a) integrar as estratégias de ensino utilizadas pelo professor; b) ser um meio para as aprendizagens e c) estar associado a qualquer processo de avaliação.

Em relação o primeiro ponto, considera-se que novas estratégias de ensino vêm sendo discutidas no âmbito educacional para promover a melhoria do ensino e da aprendizagem, por meio de procedimentos diferenciados que fogem do habitual método expositivo com transmissão de conteúdos definidos. Nesse sentido, é essencial o esforço do professor para integrar estratégias que visem a despertar o interesse dos educandos e estimular a reflexão e a construção de saberes, pois somente a exposição de aulas não é garantia de aprendizagem, especialmente nos anos iniciais, quando se precisa de métodos diversificados e dinâmicos.

A esse respeito, a BNCC aponta a necessidade de criar e pôr em prática procedimentos que motivem e engajem os alunos para novas aprendizagens e para isso deixa clara a importância do professor em “Selecionar, produzir, aplicar e avaliar recursos didáticos e tecnológicos para apoiar o processo de ensinar e aprender” (BRASIL, 2017, p.17).

Dentre as metodologias sugeridas para desenvolver o currículo, Fernandes (2009, p. 91) enfatiza a necessidade de propor aos educandos tarefas diversificadas e relacionadas com a realidade, a utilização de materiais manipulativos, a resolução de situações problemáticas e trabalhos em grupo, pois, segundo o autor “a concretização dessas recomendações exige novas formas de avaliar”.

Em relação aos processos de avaliação, Borralho, Lucena e Brito (2015, p.34) falam da importância da diversificação dos instrumentos de avaliação em sala de aula, como a prova escrita em duas fases (normalmente, a primeira fase é realizada na sala de aula, e a segunda fase em casa); os relatórios escritos, em que os alunos produzem textos sobre suas concepções em relação a alguma tarefa matemática realizada em sala de aula; as composições matemáticas, que permitem produções escritas curtas (resposta restrita) ou extensas (ensaios) dos alunos; o portfólio, um instrumento que retrata as aprendizagens dos alunos ao longo de um determinado período de tempo; e por fim, as rubricas de avaliação, uma matriz onde consta os indicadores e respectivos critérios de desempenho dos alunos perante uma tarefa.

Por isso, Ponte, Brocardo e Oliveira (2016) fazem referência ao instrumento de avaliação que pode ser executado durante o desenvolvimento de tarefas investigativas em sala de aula por meio de uma avaliação multifacetada, que é quando “o professor pode fazer correntemente observação direta aos alunos e grupos durante a realização das tarefas e alternar as apresentações orais com a produção de relatórios escritos, individuais ou de grupo.” (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2016, p.126).

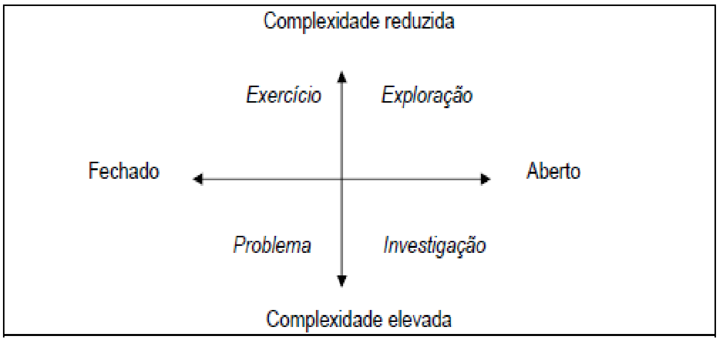
A esse respeito, Lucena, Marques e Giongo (2018) verificaram que tarefas de investigação, ou seja, tarefas exploratório-investigativas se alinham à perspectiva de que ensinar e aprender está integrada à avaliação, pois estimula a capacidade investigativa dos alunos e os conduz a justificar suas respostas e raciocínios. As pesquisadoras também identificaram que as tarefas exploratório-investigativas contribuem para a melhoria da avaliação presente no acompanhamento dos alunos, por meio de discussões em sala de aula, e que podem ser mediadas por *feedback,* que ajuda os alunos a entenderem suas próprias dificuldades, sobre “o que” e “como” melhorar.

Dessa forma, é possível que as tarefas exploratório-investigativas possam proporcionar melhores reflexões a respeito do ensino-aprendizagem-avaliação. Sobre esta proposição serão feitas algumas considerações a seguir.

1.2 TAREFAS EXPLORATÓRIO-INVESTIGATIVAS

As palavras exploração e investigação podem assumir diferentes significados, dependendo do contexto em que estão inseridas. Aqui, essas palavras são usadas para designar uma modalidade de tarefa usada no ensino de conteúdos da disciplina matemática. De acordo com Ponte (2010), as tarefas podem ser classificadas pelo seu grau de complexidade, estrutura, tempo e contextos diversos, considerando aqui as duas primeiras dimensões, o grau de complexidade e a estrutura, as tarefas podem ter níveis de complexidade reduzidos ou elevados e são classificadas como abertas ou fechadas, conforme apresentado a seguir:

Imagem 1 – Tipologia de Tarefas



Fonte: Ponte (2010, p. 21)

As tarefas abertas podem ser explorações (desafio reduzido) ou investigações (desafio elevado), ambas pretendem estimular o desenvolvimento de novos conceitos e o uso criativo de conceitos já existentes.

As tarefas fechadas podem ser os exercícios (desafio reduzido) e os problemas (desafio elevado) e têm por objetivo a aplicação dos conhecimentos que os alunos já possuem, em outras palavras, "é aquela onde claramente se sabe o que é dado ou pedido. A tarefa aberta é a que comporta um grau de indeterminação significativo no que é dado, no que é pedido, ou em ambas as coisas" (PONTE, 2005, p. 6).

As tarefas de exploração e investigação são abertas, a diferença entre elas está no nível de desafio, ou seja, se o aluno iniciar a resolução da tarefa sem grande esforço cognitivo, provavelmente estará diante de uma tarefa de exploração, caso contrário, será mais adequado considerar como tarefa de investigação. Apesar dessas características, Ponte (2010, p. 22) salienta que "muitas vezes não se distingue entre tarefas de investigação e de exploração, chamando-se investigações a todas elas", segundo o autor, isso acontece porque fica difícil estabelecer o grau de dificuldade que uma tarefa pode representar a determinado grupo de alunos. Por esta razão, nessa dissertação, optou-se por utilizar a expressão Tarefas Exploratório-Investigativas.

Atualmente, as tarefas exploratório-investigativas têm se mostrado tema de grande interesse tanto da comunidade científica quanto de professores que buscam motivar a participação dos alunos e, consequentemente, contribuir para novas aprendizagens, além disso, "estas tarefas servem principalmente para promover o desenvolvimento de novos conceitos e para aprender novas representações e procedimentos matemáticos" (PONTE; QUARESMA; BRANCO, 2012, p.2).

Tarefas com o propósito de envolver ativamente os estudantes são propícias, visto que em qualquer disciplina escolar, os alunos aprendem quando mobilizam seus recursos cognitivos e afetivos com vista a atingir um objetivo. Neste sentido, Ponte (2010) enfatiza que atividades abertas de natureza exploratório-investigativa têm ganhado espaço nos currículos escolares, principalmente na disciplina de matemática, uma vez que:

> Aprender Matemática não é simplesmente compreender a Matemática já feita, mas ser capaz de fazer investigação de natureza matemática (ao nível adequado a cada grau de ensino). Só assim se pode verdadeiramente perceber o que é a Matemática e a sua utilidade na compreensão do mundo e na intervenção sobre o mundo. Só assim se pode realmente dominar os conhecimentos adquiridos. Só assim se pode ser inundado pela paixão indispensável à verdadeira fruição da Matemática. Aprender Matemática sem forte intervenção da sua faceta investigativa é como tentar aprender a andar de bicicleta vendo os outros andar e recebendo informação sobre como o conseguem. Isso não chega. Para verdadeiramente aprender é preciso montar a bicicleta e andar,fazendo erros e aprendendo com eles (BRAUMANN, 2002, p. 5).

As investigações e explorações pretendem trazer para a sala de aula o verdadeiro “espírito matemático”, em que o educando é chamado a agir como um matemático, não só na formulação de conjecturas e na realização de provas e refutações, mas também na exposição das suas descobertas para seus colegas e professor, pois o processo investigativo em que os alunos se envolvem durante o desenvolvimento das tarefas potencializa “descobrir novas relações entre conceitos, a ter mais segurança nas suas ideias matemáticas e a desenvolver o raciocínio e a criatividade” (FONSECA; BRUNHEIRA; PONTE, 1999, p.4).

As características citadas acima têm a ver com as especificidades das tarefas exploratório-investigativas. Neste sentido, Ponte (2010) pontua quatro momentos principais que são potencializados durante a realização de investigações em sala de aula.

Imagem 2 – Momentos na realização de uma investigação

Momentos de uma investigação	*Actividades*
Exploração e formulação de questões	Reconhecer uma situação problemática Explorar a situação problemática Formular questões
Formulação de conjecturas	Organizar dados Formular conjecturas
Teste e reformulação de conjecturas	Realizar testes Refinar uma conjectura
Justificação e avaliação	Justificar uma conjectura Avaliar o raciocínio ou o resultado do raciocínio

Fonte: Ponte (2010, p. 2)

As atividades que os alunos se envolvem durante a resolução das tarefas exploratório-investigativas são ricas, inicialmente os educandos podem até chegar a resultados insatisfatórios, mas logo eles têm a oportunidade de perceber seus erros e reorganizar os dados em busca de novas soluções. Algumas vezes, o aluno também pode seguir por caminhos que o professor não tinha pensado e surgem resultados surpreendentes. Assim, o professor precisa estar atento a essas descobertas e disponível para apoiar as aprendizagens dos alunos.

Portanto, o papel do professor diante do trabalho com as tarefas exploratório-investigativas é determinante, no entanto, a relação estabelecida com o discente e a condução da aula é desafiadora:

> No acompanhamento que o professor faz do trabalho dos alunos, ele deve procurar atingir um equilíbrio entre dois polos. Por um lado, dar-lhes a autonomia que é necessária para não comprometer a sua autoria da investigação e, por outro lado, garantir que o trabalho dos alunos vá fluindo e seja significativo do ponto de vista da disciplina de matemática. Com esse duplo objetivo em vista, o professor deve procurar interagir com os alunos tendo em conta as necessidades particulares de cada um e sem perder de vista os aspectos mais gerais de gestão da situação didática. Desse modo, o professor é chamado a desempenhar um conjunto de papéis bem diversos no decorrer de uma investigação: desafiar os alunos, avaliar o se progresso, raciocinar matematicamente e apoiar o trabalho deles. (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2016, p.47).

Como visto, o professor tem um papel muito importante, pois dele se espera criar um ambiente propício para o trabalho com tarefas exploratório-investigativas para que o aluno se sinta motivado para as investigações em sala de aula.

Sobre o trabalho com tarefas exploratório-investigativas, Tudella et al. (1999, p. 1) afirmam que “as aulas com investigação matemática possuem uma dinâmica diferente ao proporcionar aos alunos formulação de conjecturas, testes e reflexões” sobre essas mesmas tarefas. A argumentação e a discussão sobre as hipóteses levantadas tornam-se então fundamentais para a construção da aprendizagem. Sanches e Beline (2013) indicam que tarefas de investigação são favoráveis ao desenvolvimento do pensamento matemático.

Para o sucesso no desenvolvimento de tarefas exploratório-investigativas em sala de aula, alguns autores, como Canavarro, Oliveira e Menezes (2012); Ponte (2010); Brocardo e Oliveira (2016) e Ponte, Nunes e Quaresma (2012), sugerem momentos fundamentais:

(i) O lançamento, quando o professor apresenta as tarefas à turma, podendo ser oralmente, escrita ou da maneira mais conveniente;

(ii) A exploração, os alunos começam explorar e investigar as tarefas propostas. Essa fase pode ser individual, em dupla, em grupos ou com toda turma e o professor poderá acompanhar o desenvolvimento dos alunos, fazendo indagações pertinentes para estimular o raciocínio matemático;

(iii) As discussões, quando os alunos irão compartilhar com toda a turma suas descobertas e o professor terá a missão de mediar às discussões, pois poderá surgir novos conceitos ou aperfeiçoamento de procedimentos já conhecidos.

A apresentação inicial das tarefas é um momento decisivo para o bom andamento da aula, principalmente para os alunos que tem pouca ou nenhuma experiência com esse tipo de atividade. Independentemente do nível etário dos educandos é imprescindível que entendam que, na investigação matemática, eles devem formular suas próprias questões com base na situação apresentada. Um dos fatores importantes é que os alunos compreendam as tarefas propostas e, por isso, o professor deve ser claro durante a apresentação inicial e estar atento para as eventuais dúvidas que podem surgir principalmente em relação a algum termo ou palavra desconhecida, mas no momento em que o professor se deparar com perguntas sobre como resolver as tarefas, da validação das conjecturas ou resultados, será interessante ele responder com outra pergunta, ou seja, indagando os alunos para que eles possam ter mais um tempo para raciocinar. É importante o professor observar o momento oportuno para se posicionar, frente às dúvidas da turma.

> Se o professor perceber que um número significativo de alunos não consegue compreender a situação ou formular estratégias de resolução, pode ser preferível interromper o seu trabalho e realizar desde logo uma pequena discussão coletiva. Uma vez resolvida à dificuldade, os alunos podem retomar então ao seu trabalho (PONTE; NUNES; QUARESMA, 2012, p. 9).

Após esse primeiro momento, inicia-se o desenvolvimento do trabalho e o professor passa a ficar mais na retaguarda, observando a turma para auxiliá-la quando necessário e os alunos deverão se dedicar à resolução das tarefas, que podem ser realizadas individualmente, em duplas ou em grupos, dependendo dos objetivos da aula.

No final da investigação são realizadas as discussões das tarefas, em que os alunos compartilham com seus colegas suas descobertas, estratégias, conjecturas e justificações. Durante essa fase, o professor deve estimular a comunicação em sala de aula, orientando os educandos a explicitar seus resultados e o caminho percorrido durante as investigações.

> A fase de discussão é, pois, fundamental para que os alunos, por um lado, ganhem um entendimento mais rico do que significa investigar e, por outro lado, desenvolvam a capacidade de comunicar matematicamente e de refletir sobre o seu trabalho e o seu poder de argumentação. Podemos mesmo afirmar que, sem a discussão final, se corre o risco de perder o sentido da investigação (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2016, p.41).

As discussões coletivas no final da investigação devem ser valorizadas, pois representam um momento ímpar para os alunos demonstrarem suas capacidades de raciocínio e comunicação matemática. Ao encerrar as discussões, o professor pode promover um momento síntese, sistematizando os pontos principais da aula.

O trabalho com tarefas exploratório-investigativas pode contribuir para o ensino de diversos conteúdos matemáticos, dentre eles, estimular o desenvolvimento do pensamento algébrico nos anos iniciais, o que será discutido a seguir.

1.3 O DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO ALGÉBRICO NOS ANOS INICIAIS

Nos últimos anos foram levantadas discussões a respeito do pensamento algébrico em busca de se chegar a uma definição, pois conforme Lins e Gimenez (1997, p. 89) ainda "[...] não há consenso a respeito do que seja pensar algebricamente". No entanto, essa pesquisa vai apresentar proposições encontradas na literatura em relação a esses questionamentos, assim como uma breve reflexão sobre a álgebra, pois é imprescindível para auxiliar na compreensão do que se entende por pensamento algébrico.

Historicamente, a Álgebra esteve relacionada ao estudo das equações e sua notação evoluiu no decorrer de três estágios: Álgebra Retórica (verbal), Álgebra Sincopada (abreviações de palavras) e Álgebra Simbólica (estado atual da Álgebra). Atualmente, os símbolos tornaram-se a notação convencional da álgebra principalmente envolvendo o uso de letras para a manipulação e obtenção de regras operatórias para resolver equações, o que, na maioria das vezes, é utilizada mecanicamente pelos alunos em sala de aula sem uma devida compreensão.

Nesse tocante, Canavarro (2007, p. 88) afirma que "Em virtude do uso dos símbolos e sistemas simbólicos se ter imposto, a álgebra passou a ser encarada como o estudo ou uso destes sistemas". Pesquisadores como o próprio Canavarro (2007), Kieran (2011) e Blanton e Kaput (2005) têm defendido que a Álgebra não deve ser entendida somente como um conjunto de procedimentos que envolvem símbolos e sim como uma maneira de pensar e raciocinar.

Canavarro (2007) evidencia duas distinções entre a álgebra e o pensamento algébrico. A primeira está relacionada com a ênfase do "uso dos símbolos" e a segunda com "aprender com significado". É notável que, tradicionalmente, para representar ideias algébricas sejam utilizados somente letras e outros símbolos, já no pensamento algébrico esse não é o único meio, pois conforme afirma Ponte, Branco e Matos (2009, p.9): "Este pensamento inclui a capacidade de manipulação de símbolos, mas vai muito além", uma vez que

> [...] o aprendizado algébrico não está restrito exclusivamente à compreensão dos símbolos e manipulação de expressões envolvendo incógnitas e variáveis, mas também deve contemplar formas de pensar mais generalistas, argumentativas e com maior poder de representação de ideias matemáticas, o que amplia consideravelmente o horizonte de contextos nos quais o pensamento algébrico pode desempenhar algum papel importante (BECK; SILVA, 2015, p. 200).

A Álgebra tradicional enfatiza a manipulação de símbolos e como já referido, na maioria das vezes, é feita mecanicamente e sem compreensão, fato que não é típico do trabalho que visa à obtenção do pensamento algébrico, uma vez que a ênfase está no uso dos símbolos como meio para representar resultados do raciocínio com compreensão.

Pesquisadores, como Maria Blanton e James Kaput, têm se dedicado a pesquisas que buscam ampliar as discussões a respeito do pensamento algébrico. Esses dois investigadores conduziram no *National Center for Improving Students Learning and Achievement in Mathematics and Science* (NCISLA) [1], pesquisas pioneiras sobre esse tipo de pensamento nos primeiros anos de escolaridade em Massachusetts, EUA, e para eles o pensamento algébrico é entendido como o

> Processo pelo qual os alunos generalizam ideias matemáticas a partir de um conjunto de casos particulares, estabelecem essas generalizações através de discurso argumentativo, e expressam-nas de formas progressivamente mais formais e adequadas à sua idade (BLANTON; KAPUT, 2005, p. 413).

Essa concepção aproxima-se das ideias de Verschaffel, Greer e De Corte (2007) ao considerar que o pensamento algébrico está relacionado com o reconhecimento do que é geral em uma dada situação matemática e sua representação por meio de generalização. Fiorentini, Miorim e Miguel (1993, p.87) discutem que a existência do pensamento algébrico pode ser caracterizada nas situações em que esteja presente a "percepção de regularidades, percepção de aspectos invariantes em contraste com outros que variam, tentativas de expressar ou explicitar a estrutura de uma situação-problema e a presença do processo de generalização"

A generalização tem se mostrado um caminho propício para o desenvolvimento do pensamento algébrico, Ponte, Branco e Matos (2009, p. 10) afirmam que "um elemento igualmente central ao pensamento algébrico é a ideia de generalização: descobrir e comprovar propriedades que se verificam em toda uma classe de objetos", podendo ser concebida como o cerne do pensamento algébrico e fazendo parte, também, do raciocínio matemático.

[1] Centro nacional para melhorar a aprendizagem e a realização de estudantes em Matemática e Ciências.

Em relação ao raciocínio matemático, Pereira e Ponte (2018, p. 783) consideram que ele consiste em “fazer inferências justificadas”. Os autores ainda salientam que o raciocínio matemático engloba a formulação de questões, a formulação e o teste de conjecturas, justificações e, principalmente, a formulação de generalizações.

Nesse sentido, a generalização é considerada o ponto central do pensamento algébrico e Radford (2006, p. 4) faz uma observação importante ao afirmar que “nem todas são de natureza algébrica”, pois, pensar algebricamente, é mais do que pensar no geral, é pensar de modo que seja possível expressar, por exemplo, a generalização de um padrão algébrico, que consiste em perceber algo comum em determinado elemento de uma sequência e verificar se essa comunhão percebida se aplica aos demais elementos e que, a partir das semelhanças encontradas, seja possível construir uma regra que permita obter qualquer termo dessa sequência. Dessa maneira, o autor caracteriza a generalização algébrica do seguinte modo:

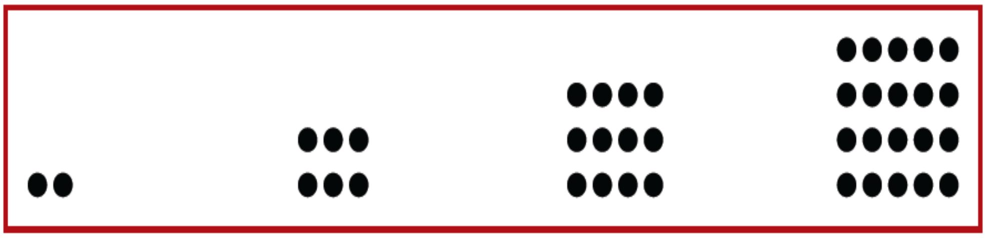
> a generalização algébrica de um padrão repousa na percepção de uma comunalidade que é então *generalizada* para todos os termos da sequência e que serve como uma garantia para construir expressões de elementos da sequência que permanecem além do campo perceptivo (RADFORD, 2006, p. 5)

Corroborando com essa ideia, Ponte, Branco e Matos (2009, p.10) consideram a generalização um caminho para o pensamento algébrico, uma vez que os alunos serão levados a “descobrir e comprovar propriedades que se verificam em toda uma classe de objetos”, além disso, também consideram essencial o trabalho com regularidades, pois representa “uma das vias privilegiadas para promover este raciocínio”. Estudos realizados por Blanton e Kaput (2005, p. 440) indicam que há duas portas de entrada para a promoção do pensamento algébrico: o pensamento funcional e o pensamento relacional.

O pensamento funcional está relacionado à ideia de variação de quantidades, que é a mesma ideia do conceito de função em Matemática, apesar desse conceito ser tratado com mais ênfase nos anos finais do ensino fundamental e ensino médio, Beck e Silva (2015, p. 204) enfatizam que “existem situações-problema e tarefas que podem ser realizadas desde os anos iniciais do ensino fundamental com o objetivo de desenvolver o pensamento funcional nos estudantes”.

Em Portugal, o estudo de funções segundo Ponte, Branco e Matos (2009, p. 116) é pensado desde os primeiros ciclos de ensino e as sequências trabalhadas pelos alunos são “funções de variável natural, que a cada número (ordem) fazem corresponder um dado termo – que pode ser um número, um objeto geométrico ou outro objeto qualquer”, nesse sentido, Souza e Souza (2018, p. 57) propõem um exemplo para desenvolver o pensamento funcional por meio de uma sequência de pontinhos.

Imagem 3 – Exemplo para o desenvolvimento do pensamento funcional



Fonte: Souza; Souza (2018, p. 57)

A partir da observação das figuras iniciais percebe-se um padrão de crescimento, por meio da regularidade encontrada tem-se a descoberta da quantidade de pontinhos na centésima figura, e dessa maneira:

> o pensamento funcional seria evidente se os educandos percebessem que os pontinhos se organizam de modo a formarem retângulos, em que a quantidade de pontinhos que cada retângulo tem de altura é igual ao número natural que representa a posição dessa figura, isto é, a primeira figura tem 1 pontinho de altura, a segunda tem 2 pontinhos de altura e assim por diante, e que a base de cada figura tem um pontinho a mais que a altura. Como a quantidade de pontinhos de uma figura é o produto da quantidade de pontinhos da base pela quantidade de pontinhos da altura, uma forma de expressar o padrão identificado seria dizendo que: *a quantidade de pontinhos é o produto da posição atual pela posição seguinte*. Logo, temos para a primeira figura: 1 x 2 = 2 pontinhos, para a segunda: 2 x 3 = 6, para a terceira: 3 x 4 =12, para a quarta: 4 x 5 = 20, e para a centésima figura temos 100 x 101 = 10100 pontinhos (SOUZA; SOUZA, 2018, p. 58).

Nesse exemplo é necessário enfatizar a relação existente entre a posição de cada figura na sequência com a quantidade de pontinhos, o que representa duas grandezas dependentes, pois a variação de uma implicará na variação da outra. Assim, essa tarefa trata da ideia de função, pois há uma correspondência entre duas grandezas que satisfaz certa condição.

Blanton (2008) considera que o pensamento funcional é caracterizado como um processo de descrever, raciocinar e construir funções e isso envolve o pensamento algébrico, uma vez que inclui fazer generalizações sobre o modo que os dados estão relacionados. Nessa perspectiva, o pensamento funcional consiste em observar como duas ou mais quantidades variam na relação entre elas, sendo que elas podem ter graus de complexidade diferentes podendo ser descritas de modo oral ou escrita por palavras ou símbolos matemáticos.

O Pensamento Relacional ou Aritmética Generalizada[2] consiste em olhar para a Aritmética sem focar exclusivamente nos procedimentos de cálculos, é centrar-se segundo Carvalho e Ponte (2017, p. 34), na compreensão e uso de um conjunto de relações existentes entre os números, as propriedades das operações e o sinal de igualdade. É essencial que os alunos desenvolvam desde cedo um pensamento matemático sólido que permita construir, a partir da Aritmética, elementos para o desenvolvimento do pensamento algébrico.

O desenvolvimento do pensamento relacional em sala de aula exigirá uma mudança no foco que é dado durante o trabalho com números e operações, pois como bem enfatizado por Carvalho e Ponte (2017, p. 34), na sala de aula “o foco deixa de estar no cálculo de respostas (foco aritmético) para passar a estar na análise de relações (foco algébrico) importantes para a aprendizagem da álgebra”.

De acordo com Carraher e Schliemann (2007), se o ensino estiver voltado somente para os aspectos centrais da Aritmética, os alunos correrão o risco de conceber a Matemática de modo artificial e sem estímulo para a generalização.

O autor ainda enfatiza que por mais que os números e operações sejam essenciais para os alunos raciocinarem algebricamente, isso não significa que eles estejam atentos a elementos centrais da Matemática, como a generalização, o que, segundo Mason (1996 apud MESTRE, 2014, p. 20), é metaforicamente considerada como o “coração da Matemática”.

Blanton e Kaput (2005) exemplificam alguns aspectos que podem ser usados para trabalhar o pensamento relacional, dentre eles: a) Explorar propriedades e relações dos números inteiros (por exemplo: pode ser proposto aos alunos tarefas

[2] Optou-se por usar o termo pensamento relacional.

para generalizar propriedades, por exemplo, o resultado de uma subtração de um número por si mesmo, como $b - b = 0$; b) Explorar propriedades de operações com números inteiros: lançar tarefas aos alunos que visem explorar a propriedade comutativa da adição, como $(6 + 2 = 2 + 6)$ para que percebam que, mesmo se mudarem a ordem das parcelas da adição, o resultado não será alterado; c) Explorar a igualdade como uma relação entre quantidades, por exemplo: tarefas que façam os alunos perceberem que o sinal de igual = é uma relação de equivalência e não como um símbolo de uma operação a ser feita, como geralmente é encarada.

Em relação ao sinal de igualdade, Carvalho e Ponte (2017, p.34) apontam que "A forma redutora com que os alunos usualmente percepcionam o significado do sinal de igual é um entrave ao desenvolvimento do pensamento relacional e, consequentemente, ao desenvolvimento do pensamento algébrico". (CARVALHO; PONTE, 2017, p. 34)

Para avaliar a compreensão do sinal de igual, Cerca (2014), em sua pesquisa de mestrado, propôs um conjunto de tarefas com cinco expressões de igualdade que envolviam quatro operações aritméticas "20x ___= 20", "$15 = 5 +$ __", "$6 =$ __ $- 12$", "__$: 2 = 9$" , "$16 = 8x$__", para que os alunos preenchessem as lacunas com os números desconhecidos para tornar as expressões verdadeiras.

Para que os alunos sejam estimulados a observarem relações numéricas, Ponte, Branco e Matos (2009, p. 25) sugerem alguns exemplos que podem contribuir para identificar e generalizar regularidades, dessa maneira, promovendo o desenvolvimento do pensamento algébrico, como as relações "inversa entre adição e subtração (39−17= 22, pois 39= 22+17), a relação de compensação (31+9= 30+10; 39−17= 40−18), a composição e decomposição de números (23+11+9= 23+20; 39−17= 39−10−7; 17−8= 17−10+2)", essas questões devem estar acompanhadas de algumas atitudes dos professores, como o estímulo aos seus alunos para que possam identificar as relações existentes, e o questionar constante acerca da validade das relações encontradas.

Trabalhar desde os anos iniciais com a Aritmética como parte integrante do pensamento algébrico e com tarefas para o desenvolvimento do pensamento funcional é de grande relevância, pois tornará a aprendizagem matemática mais rica e interessante. Assim, ela contribuirá significativamente para a transição entre a

Aritmética e a Álgebra, minimizando possíveis dificuldades nos anos posteriores.

Ribeiro e Cury (2015) consideram oportuno que sejam realizadas tarefas que busquem desenvolver o pensamento algébrico desde os anos iniciais, o que poderá representar uma oportunidade para os educandos realizarem abstrações e generalizações que estão na base dos processos de modelagem matemática da vida real e que fazem parte de um conjunto de experiências vindas dos números, de padrões, de entes geométricos e de análise de dados.

Nesse sentido, pesquisadores como Lins e Kaput (2004), Blanton e Kaput (2005), Carraher e Shliemann (2007) e Kieran (2011), também reconhecem e defendem em suas pesquisas a importância do desenvolvimento do pensamento algébrico desde os primeiros anos de escolarização para que os educandos se apropriem dos conhecimentos e habilidades que os auxiliarão quando se depararem com o ensino mais avançado da Álgebra formal.

A BNCC incluiu a Unidade Temática de Álgebra nos anos iniciais com o objetivo de desenvolver o pensamento algébrico, pois considera ser essencial para a compreensão de modelos matemáticos que exigem representações e análises de relações quantitativas de grandezas, situações e estruturas matemáticas, porém, nessa fase não se deve propor o uso de letras para expressar regularidades, por mais simples que sejam (BRASIL, 2017).

Nessa perspectiva, deve-se priorizar que os educandos identifiquem regularidades e padrões de sequências numéricas ou não numéricas que sejam capazes de estabelecer leis matemáticas em diversos contextos que demonstrem relações de interdependência entre grandezas, além de manifestar habilidades de criação, interpretação e consigam transitar nas representações gráficas e simbólicas, bem como compreendam os procedimentos utilizados na resolução de problemas.

2 PERCURSO METODOLÓGICO

Nesse capítulo, o objetivo é apresentar as escolhas metodológicas, os caminhos percorridos durante o desenvolvimento da pesquisa, as etapas de investigação, os procedimentos de recolha e a análise dos dados.

2.1 OPÇÕES METODOLÓGICAS

Esse estudo foi desenvolvido dando ênfase a procedimentos de caráter qualitativo e ocupou-se em estudar mais o contexto e os procedimentos de investigação do que simplesmente os resultados ou produto da pesquisa.

Alinhada a essas ideias, Bogdan e Biklen (1994, p.16) consideram que os dados recolhidos em uma investigação qualitativa são “ricos em pormenores descritivos relativamente às pessoas, locais e conversas [...] em função de um contato aprofundado com os indivíduos, nos seus contextos ecológicos naturais”. Seguindo a abordagem desses autores, abordam-se aqui os seguintes aspectos: a) A fonte principal dos dados é o ambiente natural, e o investigador pode ser considerado como principal instrumento de recolha dos dados; b) É descritiva; c) Há mais interesse pelo processo do que simplesmente pelos resultados finais; d) As análises dos dados são realizadas de forma indutiva.

De acordo com Minayo (2009, p. 22), a “abordagem qualitativa se aprofunda no mundo dos significados”. Nesse nível, a realidade não está clara, ela precisa ser explorada e interpretada pelos pesquisadores e que poderão “enriquecer sua narrativa com trechos de entrevistas, excertos de suas anotações, vinhetas, exemplos de trabalhos de alunos” (MOREIRA, 2011, p. 51). Nesse sentido, durante a efetivação da prática pedagógica, foram interpretadas diretamente as justificativas apresentadas pelos participantes da pesquisa e usados trechos de diálogos para enriquecer as análises dos dados. Essa pesquisa está alicerçada na concepção de tarefas de ensino-aprendizagem-avaliação para o desenvolvimento do pensamento algébrico, foi realizada em uma escola pública que atende às turmas dos anos iniciais do ensino fundamental localizada na periferia da cidade de Belém, Pará, em uma turma do 4º ano do ensino regular composta por 24 alunos, sendo 13 meninos e 11 meninas, com idade entre nove e dez anos. A escolha da turma ocorreu porque os alunos ainda não haviam vivenciado experiências que envolvessem atividades para o desenvolvimento do pensamento algébrico.

É importante salientar que a pesquisadora não era a professora titular da turma e a aproximação com o lócus da pesquisa ocorreu durante encontros formativos realizados periodicamente na escola por meio do projeto *Ensino-aprendizagem-avaliação em matemática nos anos iniciais do ensino fundamental: atividades exploratório-investigativas e formação docente*.

Para iniciar as atividades com os alunos, foi entregue à direção da escola o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (Apêndice A) solicitando autorização e informando os objetivos, a metodologia e as possíveis datas para a realização dos encontros. Em conformidade com a direção da escola e a professora titular da turma foram combinados os dias e horários propícios para a realização das práticas em sala de aula.

As atividades foram desenvolvidas em quatro encontros, no período de março a agosto de 2019 com início às 7h30 e término às 9h45. Os alunos foram organizados em grupos de até cinco componentes de acordo com a afinidade entre os estudantes, quando necessário, houve alteração na composição das equipes. Em cada encontro foi desenvolvida uma tarefa com a finalidade de investigar as manifestações dos alunos em relação às potencialidades das tarefas exploratório-investigativas de ensino-aprendizagem-avaliação para o desenvolvimento do seu pensamento algébrico. No quadro 1 são mostrados os objetivos, as concepções e as tarefas desenvolvidas em cada encontro realizado na turma.

Quadro 1 – Objetivos, concepções e as tarefas realizadas

ENCONTRO	TAREFA	CONCEPÇÃO	OBJETIVO
1º encontro	Frutas típicas	Pensamento funcional	Identificação da relação entre as variáveis dependentes e independentes da sequência para a obtenção de regularidades que se verificam em todos os termos da sequência para construir uma regra geral
2º encontro	Azulejos portugueses	Pensamento funcional	Observação dos aspectos comuns nos casos particulares da sequência para definir uma regra geral e identificar as relações entre os termos da sequência e a ordem ocupada
3º encontro	Pense em um número	Pensamento relacional	Reconhecer propriedades das operações e/ou relações entre as operações
4º encontro	Desvendando igualdades	Pensamento relacional	Compreender a relação de equivalência do sinal de igualdade

Elaboração: da autora, 2019

No primeiro encontro foram formados seis grupos com quatro componentes; no segundo, quatro grupos com quatro componentes; no terceiro, dois grupos com quatro componentes e três com cinco componentes; e no quarto e último encontro, foram formados dois grupos com quatro componentes e três grupos com cinco componentes cada um.

No início de cada encontro, os grupos receberam uma cópia da tarefa impressa em folha de papel A4, e no final as folhas respondidas eram recolhidas, para a verificação das justificativas e possíveis manifestações do pensamento algébrico. Durante o desenvolvimento das tarefas propostas, era dada atenção a todos os grupos, observando atentamente às resoluções das questões para compreender como os grupos estavam pensando, quais dúvidas e dificuldades e o que era possível fazer para ajudá-los a superá-las.

Para evitar a perda de informações importantes durante o desenvolvimento das tarefas, foram distribuídos, de modo estratégico, quatro gravadores de áudio entre os grupos para captar os diálogos e discussões. Salienta-se que os alunos se sentiram incomodados com a presença dos gravadores de áudio, mas, aos poucos, eles se familiarizaram e compreenderam que as falas seriam utilizadas exclusivamente para interesse da pesquisa.

Nesse tocante, para manter preservada a identidade dos participantes, identificou-se cada aluno com a letra A, acompanhada de um número: em um grupo formado com quatro componentes, cada aluno foi identificado da seguinte maneira: A1, A2, A3 e A4. Já os grupos foram identificados com a letra G e um número x, correspondente à quantidade de grupos formados no encontro, por exemplo, no encontro em que foram formados quatro grupos, cada um foi identificado da seguinte maneira: G1, G2, G3 e G4.

Os procedimentos para a análise dos dados foram feitos após cada encontro por meio dos registros escritos e as transcrições dos áudios. De posse do material recolhido nos encontros passou-se a pensar no quadro de análise baseado em primeiro lugar no enquadramento teórico que sustenta essa pesquisa, em seguida com as evidências dos dados recolhidos. Nesse sentido, foram analisadas individualmente as justificativas de todas as alternativas das tarefas de acordo com o

Domínio 1 – Pensamento Funcional e Domínio 2 – Pensamento Relacional, ambos classificados em níveis, conforme apresentado a seguir.

- **Domínio 1 – Pensamento funcional**

Quadro 2 – Níveis de pensamento funcional

Níveis de Pensamento Funcional		
Nível 1	Não Funcional	Não há evidências do reconhecimento das relações entre variáveis
Nível 2	Reconhece relações	Há o reconhecimento da relação entre variáveis
Nível 3	Pensamento Funcional	Há identificação explícita da relação entre a variável independente e dependente

Elaboração: da autora, 2019

O nível 1 é considerado como não funcional, por não identificar qualquer aspecto do pensamento funcional, já no nível 2, reconhecer relações, existe a identificação da mudança em uma das variáveis, mas sem estabelecer uma ligação entre a variável dependente e independente. No nível 3, pensamento funcional, há identificação explícita da relação entre a variável dependente e a variável independente.

- **Domínio 2 – Pensamento relacional**

Quadro 3 – Níveis de pensamento relacional

Níveis de Pensamento Relacional		
Nível 1	Não relacional	Centra-se nos procedimentos de cálculos e não reconhece relações numéricas e/ou propriedades das operações
Nível 2	Uso de exemplos particulares	Reconhece relações numéricas e/ou propriedades das operações em exemplos particulares
Nível 3	Relacional	Reconhece e usa relações numéricas e/ou propriedades das operações, para além dos casos particulares, evidenciando sua generalização

Elaboração: da autora, 2019

No nível 1, não relacional, não há evidências de qualquer aspecto que envolva o pensamento relacional. No nível 2, uso de exemplos particulares, há o reconhecimento de relações numéricas, de propriedades das operações e do sinal de igualdade somente nos casos apresentados. No nível 3, o relacional, as ligações estão além dos casos particulares e revelam o reconhecimento de relações numéricas, propriedades das operações e o sinal de igualdade em casos gerais.

Para a apresentação dos resultados são utilizados recortes dos diálogos estabelecidos durante o desenvolvimento das tarefas, isso inclui as falas dos membros dos grupos e da pesquisadora. Assim, a identificação das manifestações do pensamento algébrico é destacada em negrito e itálico e enriquecida com imagens dos registros escritos dos educandos.

No próximo capítulo, apresentam-se todas as tarefas exploradas e as justificativas decorrentes delas, analisando os dados emergentes segundo o embasamento teórico dessa pesquisa.

3 RESULTADOS E DISCUSSÕES

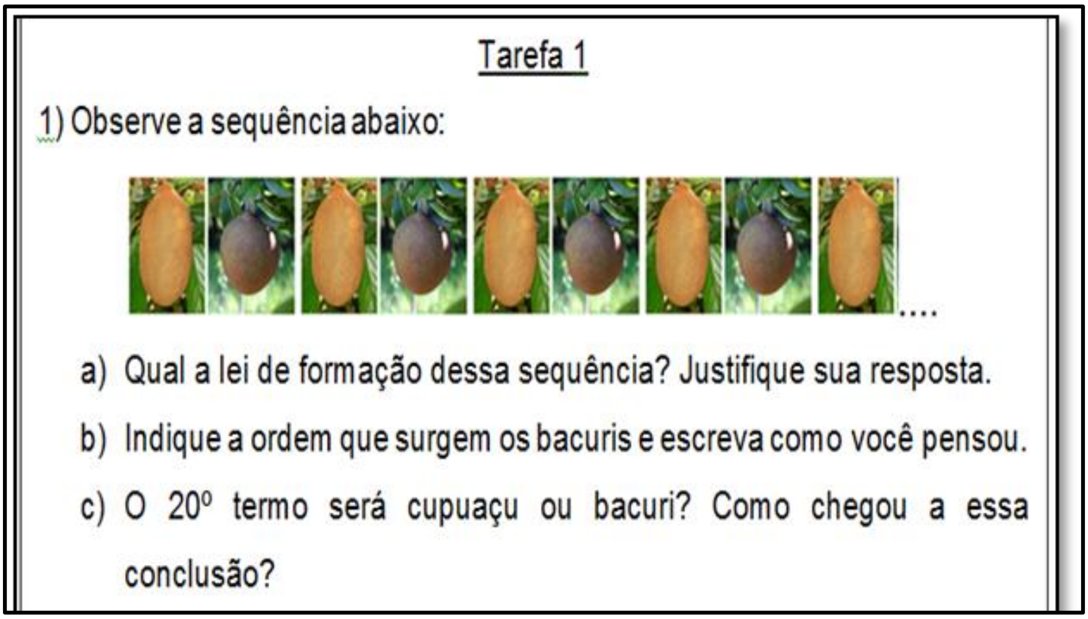
Nesse capítulo são apresentadas e discutidas as experiências de ensino com as tarefas exploratório-investigativas para o ensino-aprendizagem-avaliação. Primeiro, são apresentadas as tarefas para o pensamento funcional (Tarefa 1 – Frutas Típicas e a tarefa 2 – Azulejos portugueses), em seguida, as tarefas para o pensamento relacional (Tarefa 3 – Pensa em um número e a tarefa 4 – Desvendando igualdades), que foram respectivamente analisadas de acordo com os domínios 1 e 2.

3.1 TAREFA 1 – FRUTAS TÍPICAS

A tarefa 1 era composta por um atributo (tipo de objeto) e com apenas dois objetos diferentes: cupuaçu e bacuri. Essa tarefa está na perspectiva do pensamento funcional como contexto para a promoção de generalização, que é considerada uma das vias privilegiadas para o pensamento algébrico.

Nessa perspectiva, o objetivo da tarefa foi a identificação da relação entre as variáveis dependentes e independentes da sequência para a obtenção de regularidades que ocorriam em todos os termos da sequência a fim de pensar em uma regra geral.

Imagem 4 – Tarefa 1


Tarefa 1

1) Observe a sequência abaixo:

....

a) Qual a lei de formação dessa sequência? Justifique sua resposta.
b) Indique a ordem que surgem os bacuris e escreva como você pensou.
c) O 20º termo será cupuaçu ou bacuri? Como chegou a essa conclusão?

Foto: da autora, 2019

O desenvolvimento da tarefa 1 foi realizada logo no primeiro encontro com a turma, que ocorreu em uma sexta-feira do mês de março, com a presença de 24 alunos.

No encontro inicial foram apresentados os objetivos da aula e da tarefa. Em seguida, os alunos foram orientados que a atividade seria realizada em pequenos grupos, por isso, eles precisavam formar seis grupos com quatro componentes. Após a apresentação inicial e a organização da turma, cada grupo recebeu uma cópia da tarefa e iniciou-se a leitura e exploração, conforme apresentado a seguir.

3.1.1 Questão 1 – Alternativa A – Grupo G1

Qual a lei de formação dessa sequência? Justifique sua resposta

O grupo G1 sentiu dificuldade para entender a palavra sequência, sendo um vocabulário de estranhamento para os alunos, conforme o excerto abaixo:

G1A1: O que é uma sequência?

G1A2: Não sei!

G1A3: Acho que é **uma coisa que vai seguindo.**

Pesquisadora: Leiam a alternativa com atenção e observem como estão sendo organizadas essas frutas.

G1A2: Elas estão em **uma ordem de uma atrás da outra.**

G1A4: **Tem cupuaçu, bacuri, cupuaçu, bacuri, cupuaçu, bacuri, cupuaçu, bacuri e cupuaçu é uma atrás da outra, então é uma sequência?**

Pesquisadora: Sim, é uma sequência de frutas, formada por cupuaçu e bacuri, mas vocês acham que essa sequência termina aqui no bacuri?

G1A4: Não, professora, têm esses pontinhos.

Pesquisadora: Que pontinhos?

G1A4: Esses aqui no final.

G1A3: São reticências.

Pesquisadora: Sim, são reticências, e o que elas significam?

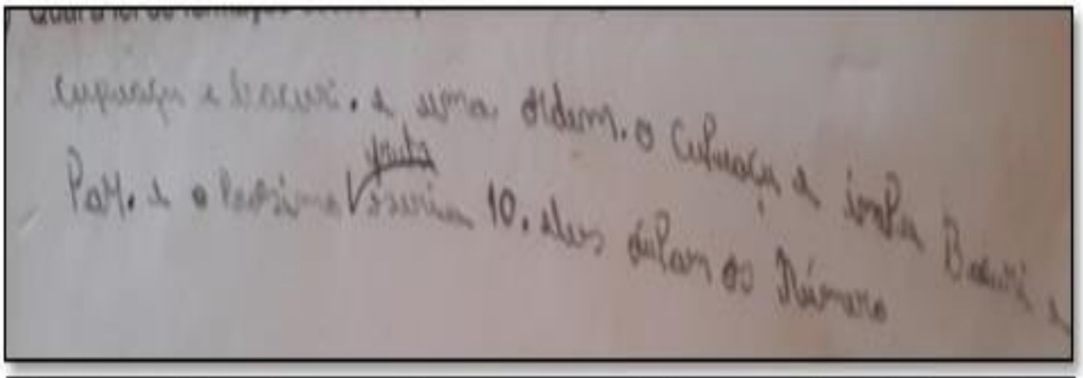
G1A2: **Que vai continuar, nunca vai ter fim.**

G1A1: **É infinito.**

G1A3: **A sequência vai ser primeiro cupuaçu nos números ímpar e depois bacuri nos números pares** [Aluno se refere às posições ocupadas pelas frutas] **e vai se repetindo até o infinito.**

Pesquisadora: Muito bem!

Imagem 5 – Justificativa do grupo G1 em relação à alternativa A da tarefa 1



Cupuaçu e bacuri, uma ordem, o cupuaçu é ímpar e o bacuri é par. E a próximo fruta seria 10. Eles ocupam os número

Foto: da autora, 2019

Inicialmente, os diálogos estabelecidos pelo grupo não estavam relacionados com o pensamento funcional e sim na busca pela definição do conceito de sequência. Somente a partir da fala do membro do grupo: “A sequência vai ser primeiro cupuaçu nos números ímpar e depois bacuri nos números pares [se referindo às posições ocupadas pelas frutas] e vai se repetindo até o infinito” (G1A3), logo, houve o reconhecimento da relação entre as posições da sequência e das frutas.

O grupo estabeleceu uma regra geral para encontrar as frutas na sequência. Nesse sentido, ele reconheceu a relação entre as variáveis correspondentes posição e frutas. De acordo com o padrão de crescimento observado, os alunos perceberam que seria possível encontrar termos mais distantes na sequência.

3.1.2 Questão 1 – Alternativa B – Grupo G1

Indique a ordem que surgem os bacuris e escreva como você pensou.

Inicialmente, o grupo G1 não havia compreendido o que estava sendo solicitado na alternativa, em vez de apresentar a ordem de surgimento dos bacuris, ele indicou a quantidade de frutos que estavam presentes na sequência, como observado nos diálogos a seguir:

G1A1: **Quatro bacuris.**

Pesquisadora: Como vocês pensaram?

G1A2: A gente contou os bacuris da sequência e têm quatro.

Pesquisadora: Vocês encontraram a quantidade de bacuris na sequência ou na ordem em que os bacuris surgem?

G1A3: Foi a quantidade que tinha aqui **[Aluno apontando para a tarefa]**

G1A4: **É para encontrar a ordem de cada bacuri** e não somar.

Pesquisadora: O que significa a ordem?

G1A1: **É o lugar das frutas.**

G1A4: É verdade! Aqui, **os bacuris estão nas posições 2, 4, 6 e 8.**

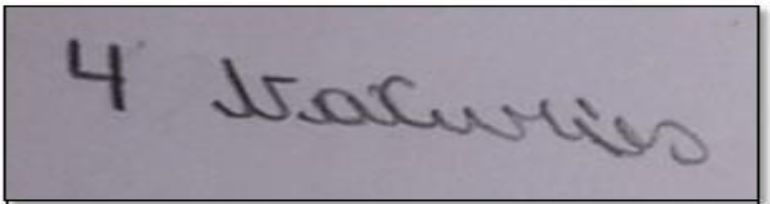
Pesquisadora: O que podemos concluir com essa observação?

G1A1: **Os bacuris estão indo de dois em dois, se continuar vai ser 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22 e assim por diante.**

Pesquisadora: Consideram essa descoberta como uma regra geral para encontrar os bacuris na sequência?

G1A3: Sim, todos os bacuris aparecem em ordens de dois em dois.

Imagem 6 – Justificativa do grupo G1 em relação à alternativa B da tarefa 1



4 bacuris

Foto: da autora, 2019

O grupo G1 não havia compreendido que a questão solicitava a ideia de ordinalidade presente na sequência com os bacuris, por essa razão, os membros do grupo fizeram a contagem que estava inicialmente apresentada na sequência: “quatro bacuris” (G1A1).

Somente após diálogo é que o grupo observou que a resposta anterior não estava condizente com os objetivos da alternativa. Dessa maneira, o grupo teve a oportunidade de verificar a ordem que as frutas estavam organizadas na sequência e chegaram à conclusão que “Os bacuris estão indo de dois em dois, se continuar vai ser 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22 e assim por diante” (G1A1), assim, o grupo reconheceu a relação entre variáveis, ou seja, entre a posição e a ordem dos bacuris. O grupo observou que as frutas surgiam em posições que variavam de dois em dois, o que definia a regra geral.

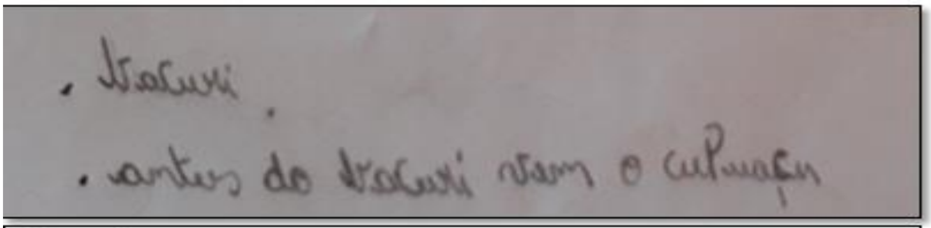
3.1.3 Questão 1 – Alternativa C – Grupo G1

O 20º termo será cupuaçu ou bacuri? Como chegou a essa conclusão?

Por meio da generalização e do pensamento funcional, o grupo encontrou a fruta em termos mais distantes na sequência:

Pesquisadora: Como vocês estão pensando para responder à alternativa?
G1A1: **A gente tem que olhar para a posição dos bacuris.**
G1A2: **Os bacuris aparecem nas posições de dois em dois, igual a gente fez na outra questão.**
G1A3: **É verdade! Então vai ser bacuri na posição 20.**
G1A4**:** Vamos continuar a sequência para ter certeza?
G1A4: Eu já fiz! **Vai ser bacuri, ele vem antes do cupuaçu.**
Pesquisadora: Por que vocês continuaram a sequência até a 20ª posição? [Os alunos desenharam a sequência das frutas, cupuaçu e bacuri até a 20ª posição].
G1A1: Para ter certeza se ia ser bacuri.
Pesquisadora: Vocês definiram uma regra geral válida para encontrar os bacuris, vocês acham que ela poderia mudar no decorrer da sequência? [O grupo ficou por alguns momentos refletindo].
G1A3: **Não! A regra vai continuar.**

Imagem 7 – Justificativa do grupo G1 em relação à alternativa C da tarefa 1



.Bacuri.
. Antes do bacuri vem o cupuaçu

Foto: da autora, 2019

O grupo G1 reconheceu aspectos comuns nos casos particulares da sequência de frutas e identificou que "Os bacuris aparecem nas posições de dois em dois" (G1A2). A partir da regularidade encontrada, o grupo chegou à conclusão que o 20º termo seria bacuri e, para comprovar a veracidade da regra geral encontrada, ele continuou a sequência de frutas e chegou à seguinte conclusão: "É verdade! Então vai ser bacuri na posição 20" (G1A3).

3.1.4 Questão 1 – Alternativa A – Grupo G2

Qual a lei de formação dessa sequência? Justifique sua resposta

O grupo não havia compreendido como a sequência estava sendo construída e por essa razão ainda não era possível perceber a variação entre as frutas:

Pesquisadora: Como vocês estão pensando para responder essa alternativa?

G2A1: Estamos tentando somar tudo pra ver se dá alguma coisa!

Pesquisadora: Tudo bem! Continuem.

G2A2**:** Somamos tudo e deu R$ 45,00, porque as pessoas vendem tudo isso no dia.

Pesquisadora: Qual a intenção de vocês ao numerar as frutas de 1 a 9?

G2A1: A gente as contou [Apontando para a tarefa] aí tem nove frutas, então a gente colocou os números de acordo **com o lugar de cada uma** e no final somamos.

Pesquisadora: Além disso, observaram como as frutas estão organizadas?

G2A4**: Primeiro aparece o cupuaçu, depois o bacuri e repete tudo de novo**.

G2A3: Ah! É verdade, tem **cupuaçu e bacuri e estão sempre repetindo.**

Pesquisadora: Existe uma regra para que essas frutas apareçam?

G2A4: **Elas estão repetindo na sequência de uma atrás da outra, primeiro sempre vai ser cupuaçu e depois bacuri.**

Pesquisadora: Então depois desse cupuaçu [Apontando novamente para a sequência] vai ser qual fruta?

G2A2: Tá fácil!

G2A1: Eu sei, professora, **vai ser bacuri, porque sempre depois do cupuaçu é bacuri**.

Imagem 8 – Justificativa do grupo G2 em relação à alternativa A da tarefa 1

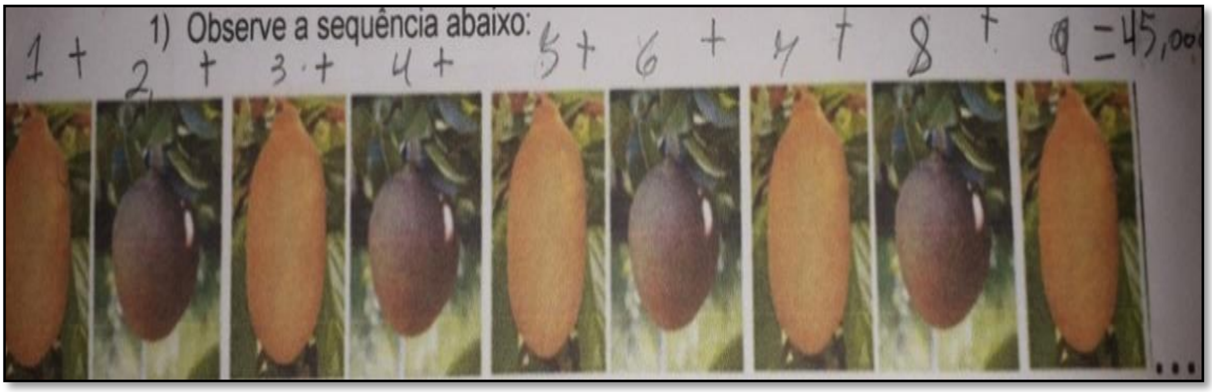


Foto: da autora, 2019

O grupo G2 fez uma correspondência entre cada objeto da sequência a um número de acordo com a posição ocupada pelas frutas. O grupo procedeu da seguinte maneira: numerou as frutas de 1 a 9 e, para cada número, adicionou o sinal de adição (+) dando a ideia de que se tratava de uma operação no campo da Aritmética. Além disso, o grupo transitou no campo do sistema monetário quando relacionou o resultado R$ 45,00, obtido após a soma ao valor total em dinheiro que as frutas poderiam ser vendidas se estivessem disponíveis em supermercados, feiras, entre outros, essa relação faz parte dos saberes cotidianos dos educandos.

De acordo com as justificativas apresentadas pelo grupo, houve o reconhecimento dos aspectos comuns na sequência: “Primeiro aparece o cupuaçu depois o bacuri e repete tudo de novo” (G2A4), portanto, não foi apresentada uma regra geral, logo, não houve evidências do reconhecimento da relação entre as variáveis posição e frutas.

3.1.5 Questão 1 – Alternativa B – Grupo G2

Indique a ordem que surgem os bacuris e escreva como você pensou.

O grupo G2 apontou que os bacuris surgem em uma sequência sempre depois do cupuaçu:

G2A1: **O cupuaçu e o bacuri estão se repetindo na sequência de uma atrás da outra.**

G2A2: **O bacuri é sempre depois do cupuaçu**.

Pesquisadora: O modo como as frutas estão se repetindo na sequência vai mudar?

G2A3: Não, professora, é **uma regra.**

Pesquisadora: **De acordo com as observações que vocês fizeram, em qual ordem os bacuris surgem na sequência?**

G2A4: **Vai ser sempre cupuaçu e depois bacuri e assim substantivamente** [Aluno se referiu à palavra sucessivamente].

Imagem 9 – Justificativa do grupo G2 em relação à alternativa B da tarefa 1

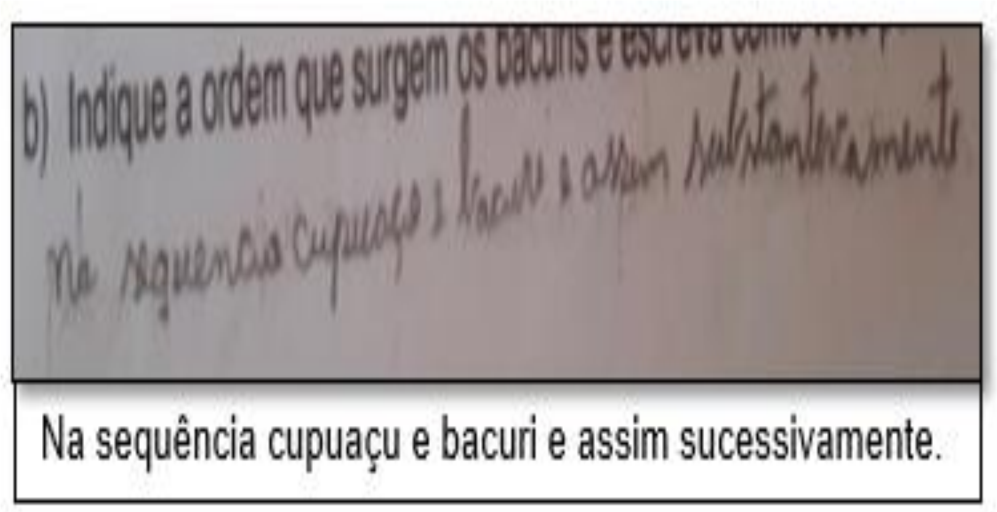


Foto: da autora, 2019

O grupo G2 observou os aspectos comuns no padrão de crescimento da sequência: “O cupuaçu e o bacuri estão se repetindo na sequência de uma atrás da outra” (G2A1), mas não especificou uma regra geral para encontrar qualquer termo na sequência. O grupo também não evidenciou conhecer relações entre as variáveis ordem e frutas.

3.1.6 Questão 1 – Alternativa C – Grupo G2

O 20º termo será cupuaçu ou bacuri? Como chegou a essa conclusão?

O grupo G2 inicialmente estava com dúvidas sobre como descobrir a fruta da 20ª posição, abaixo, é mostrada a solução encontrada pelo grupo:

G2A1: Como vamos fazer?

G2A2: **Vamos continuar a sequência até a posição 20.**

G2A3: **Vai ser sempre cupuaçu e bacuri.**

G2A2: A gente encontra todas as frutas **continuando a sequência**.

Pesquisadora: Essa é uma maneira de encontrar as frutas cupuaçu e bacuri em suas respectivas ordens.

G2A3: Então a gente vai **continuar as frutas** [**Aluno está se referindo a continuar a sequência].**

[minutos depois]

G2A4: **Descobri! Vai ser bacuri na posição 20!**

O grupo G2 reconheceu a existência do padrão de crescimento da sequência: “Vai ser sempre cupuaçu e bacuri” (G2A3), mas não estabeleceu uma regra geral para encontrar qualquer termo na sequência. Para descobrir a fruta pertencente à 20º posição, o grupo não identificou relação entre as posições e as frutas.

3.1.7 Questão 1 – Alternativa A – Grupo G3

Qual a lei de formação dessa sequência? Justifique sua resposta

O grupo G3 discutiu como justificar a alternativa:

G3A1: **A sequência é cupuaçu e bacuri.**

Pesquisadora: Como vocês pensaram?

G3A1: A gente acha que é a **mesma sequência.**

Pesquisadora: Explique melhor o que vocês entendem por “**a mesma sequência**”

G3A2: A sequência é cupuaçu e bacuri e elas estão repetindo sempre da mesma maneira.

G3A3: Primeiro cupuaçu, depois bacuri, cupuaçu, bacuri, cupuaçu, bacuri, cupuaçu, bacuri e cupuaçu.

Pesquisadora: Quais seriam as próximas frutas dessa sequência?

G3A4: Vai continuar a mesma sequência, depois desse cupuaçu [Aluno aponta para a tarefa] vai ser bacuri, depois vai ser cupuaçu, depois bacuri e assim vai continuar.

G3A3: A regra vai ser primeiro cupuaçu e depois bacuri.

Imagem 10 – Justificativa do grupo G3 em relação à alternativa A da tarefa 1

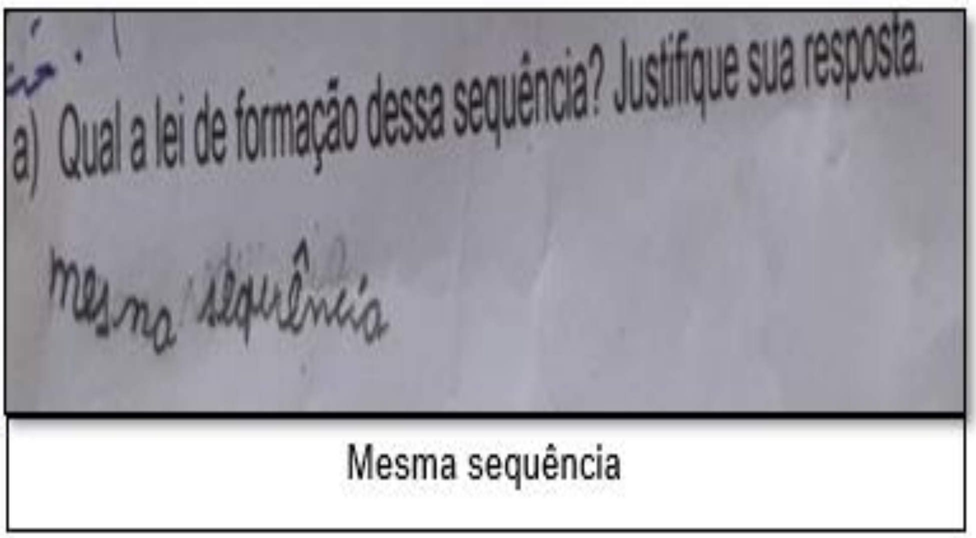


Foto: da autora, 2019

Os membros do grupo reconheceram os aspectos comuns entre os casos particulares: “A sequência é cupuaçu e bacuri e elas estão repetindo sempre da mesma maneira” (G3A2), mas não estabeleceram uma regra geral para encontrar qualquer termo na sequência. E não houve indícios do reconhecimento da relação entre as variáveis posições e frutas.

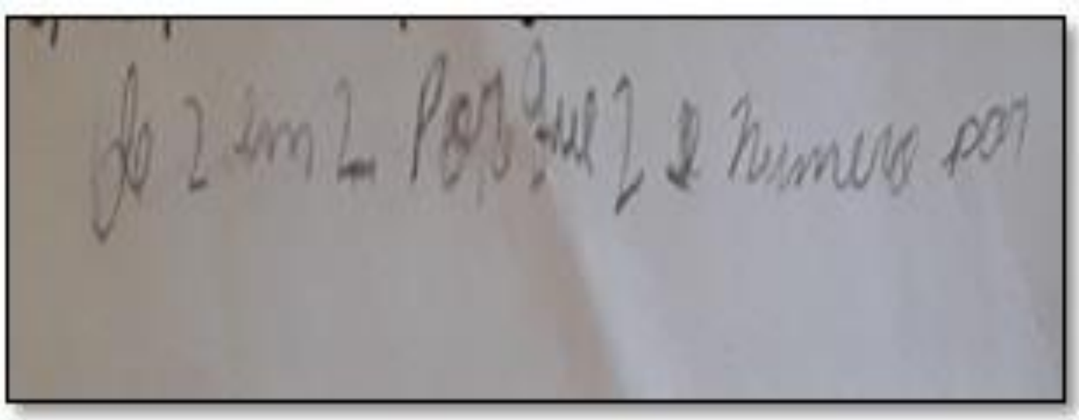
3.1.8 Questão 1 – Alternativa B – Grupo G3

Indique a ordem que surgem os bacuris e escreva como você pensou.

O grupo G3 indicou que os bacuris apareciam em posições pares e que variavam de dois em dois:

G3A1: **O bacuri aparece sempre depois do cupuaçu.**
Pesquisadora: Os bacuris aparecem em quais posições?
G3A2: **Na 2ª, 4ª, 6ª, 8ª posição.**
Pesquisadora: Para por aí?
G3A3: **Vai continuar nas outras posições, de dois em dois.**
G3A4: **O dois é número par, os bacuris aparecem nas posições pares.**

Imagem 11 – Justificativa do grupo G3 em relação à alternativa B da tarefa 1



De 2 em 2 porque 2 e número par

Foto: da autora, 2019

A partir dos casos particulares, o grupo G3 reconheceu aspectos comuns em cada termo da sequência e estabeleceu uma regra geral que possibilitou encontrar todas as posições ocupadas pelos bacuris por meio da identificação da relação entre as variáveis correspondentes posição e frutas: “O dois é número par, os bacuris aparecem nas posições pares” (G3A4). Sabendo que os bacuris ocupam posições pares foi possível encontrar termos mais distantes na sequência.

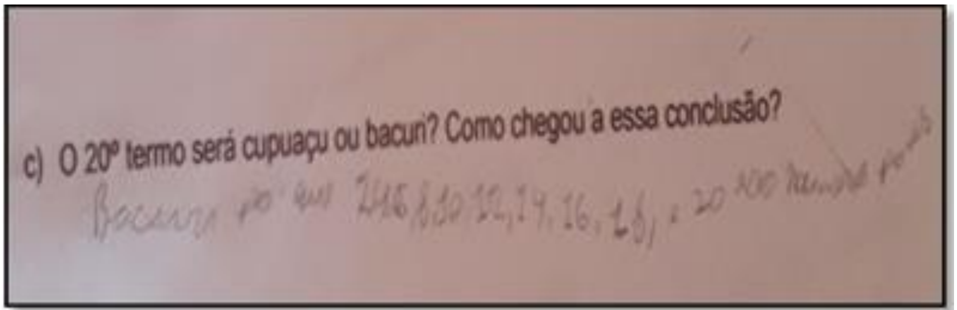
3.1.9 Questão 1 – Alternativa C – Grupo G3

O 20º termo será cupuaçu ou bacuri? Como chegou a essa conclusão?

A partir da generalização e o pensamento funcional estabelecido na questão anterior, o grupo G3 encontrou a fruta pertencente ao 20º termo sem dificuldade:

G3A1: **Está fácil descobrir.**
G3A2: **Vai ser bacuri.**
Pesquisadora: **Como vocês pensaram para descobrir a fruta da 20ª posição?**
G3A3: **Porque a posição 20 é número par, então vai ser bacuri.**
G4A4: **Professora, todos os bacuris aparecem nas posições 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18 e 20, eles são pares.**

Imagem 12 – Justificativa do grupo G3 em relação à alternativa C da tarefa 1



Bacuri porque 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18 e 20 são números pares

Foto: da autora, 2019

Para descobrir a fruta no 20º termo, o grupo G3 fez uma generalização ao perceber que havia algo em comum no decorrer da sequência, ou seja, todos os bacuris estavam em ordens pares. A partir da regularidade encontrada nos casos particulares e a relação entre as variáveis, posição das frutas e frutas, foi possível descobrir termos mais distantes na sequência. Nessa perspectiva, o grupo concluiu que na 20ª posição, a fruta era bacuri: "Porque a posição 20 é número par, então vai ser bacuri" (G3A3).

3.1.10 Questão 1 – Alternativa A – Grupo G4

Qual a lei de formação dessa sequência? Justifique sua resposta

O grupo G4 articulou uma estratégia para determinar qualquer termo na sequência, acompanhe os diálogos a seguir:

G4A1: **Vamos escrever os números em cada fruta.**
G4A2: **Elas estão organizadas na primeira, 2ª, “terça”, 4ª, 5ª, 6ª, 7ª, 8ª e 9ª posição**.
G4A3: **Essas posições são números pares e ímpares.**
G4A4: **Todo cupuaçu é par e o bacuri é ímpar.**
Pesquisadora: Essa regra será válida para toda a sequência?
G4A2: Sim! Porque **é uma sequência que repete as mesmas frutas e as posições sempre vão ser pares e ímpares**.

Imagem 13 – Justificativa do grupo G4 em relação à alternativa A da tarefa 1

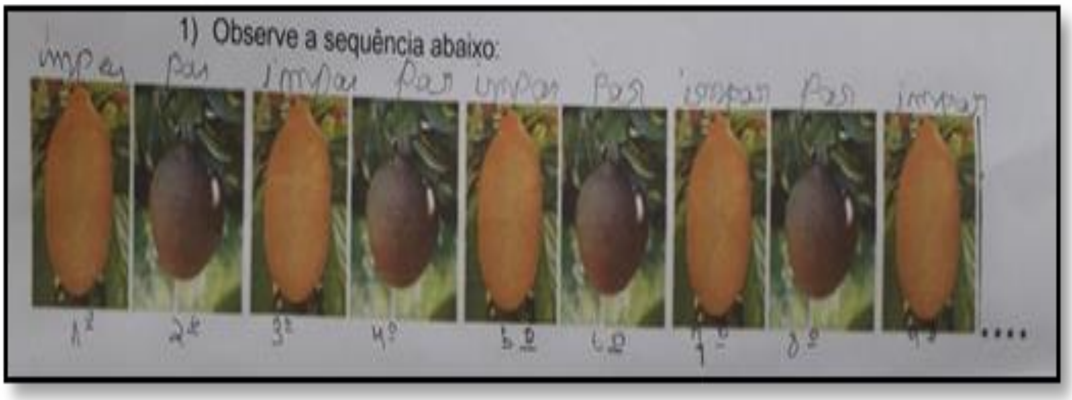


Foto: da autora, 2019

O grupo G4 estabeleceu uma relação entre as variáveis correspondentes à posição ocupada pelas frutas e frutas, por meio dos números ordinais (1º, 2º, 3º, 4º, 5º, 6º, 7º; 8º, 9º), em seguida, esses números foram associados ao conceito de pares e ímpares. A partir da regularidade encontrada, o grupo fez uma generalização ao perceber que “Todo cupuaçu é par e o bacuri é ímpar” (G4A4). A resposta apresentada pelo grupo evidencia a generalização do particular para o geral e assim foi possível encontrar termos mais distantes na sequência por meio da regra geral estabelecida.

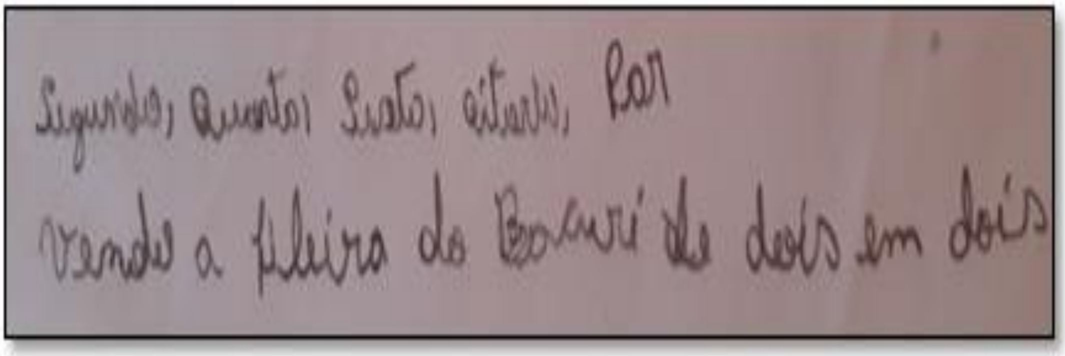
3.1.11 Questão 1 – Alternativa B – Grupo G4

Indique a ordem que surgem os bacuris e escreva como você pensou.

O grupo G4, por meio da generalização e do pensamento funcional, não apresentou dificuldades para indicar a ordem em que surgem os bacuris, conforme se verifica nos diálogos abaixo:

G4A1: Os bacuris estão nessas posições aqui [Aluno aponta para a sequência de frutas em que eles numeraram].
G4A2: Vendo a fileira das frutas fica mais fácil entender que **os bacuris estão na 2ª, 4ª, 6ª e 8ª ordem.**
G4A3: **Cada ordem dos bacuris está aumentando de dois em dois.**
G4A4: **Essas ordens são números pares.**

Imagem 14 – Justificativa do grupo G4 em relação à alternativa B da tarefa 1



Segundo, quarto, sexto, oitavo, par. Vendo a fileira do bacuri de dois em dois.

Foto: da autora, 2019

O grupo G4 identificou explicitamente a relação entre as variáveis correspondentes às posições e às frutas e, por meio da generalização, ele concluiu que os bacuris ocupam as ordens pares da sequência, pois estão situados na 2ª, 4ª, 6ª e 8ª posições.

3.1.12 Questão 1 – Alternativa C – Grupo G4

O 20º termo será cupuaçu ou bacuri? Como chegou a essa conclusão?

O grupo G4 afirmou que o 20º termo seria bacuri:

G4A1: **Vai ser bacuri.**
Pesquisadora: Como vocês pensaram?
G4A1: Simples, professora, a gente viu que **os bacuris sempre aparecem nas ordens pares e como 20 é par, vai ser bacuri.**
Pesquisadora: Muito bem!

Imagem 15 – Justificativa do grupo G4 em relação à alternativa C da tarefa 1

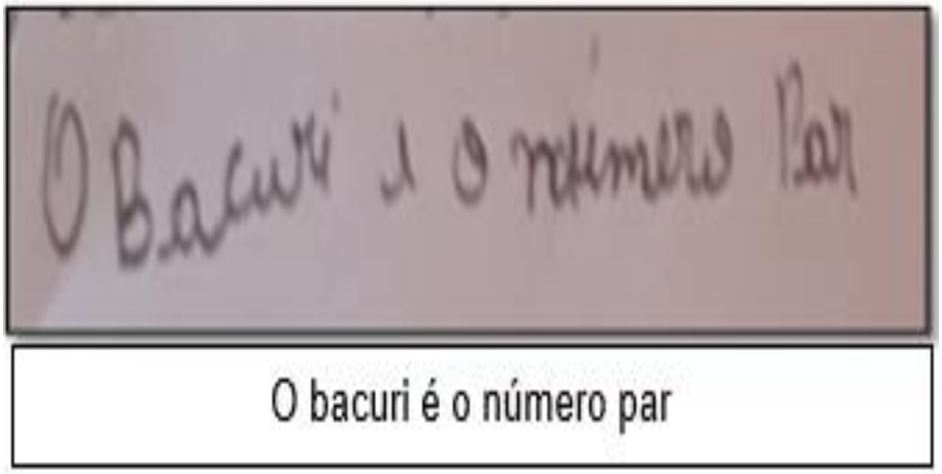


Foto: da autora, 2019

O grupo G4 identificou o padrão de crescimento da sequência por meio da generalização e estabeleceu uma regra geral, ao considerar que os bacuris sempre estavam em posições pares. A partir dos casos particulares, o grupo chegou à conclusão que na 20ª posição haveria um bacuri.

3.1.13 Questão 1 – Alternativa A – Grupo G5

Qual a lei de formação dessa sequência? Justifique sua resposta

O grupo G5 identificou C para o cupuaçu e B para bacuri, conforme os diálogos abaixo:

Pesquisadora: Observem como as frutas estão organizadas.
G5A1: São organizadas em **cupuaçu e bacuri.**
G5A2: **Primeiro é o cupuaçu e depois bacuri e repete tudo de novo na mesma ordem.**
G5A3: **Vamos escrever C para cupuaçu e B para bacuri**.
Pesquisadora: Explique melhor por quê vocês usaram as letras **C** e **B**?
G5A4: **As frutas estão se repetindo** e para não ficar falando toda hora cupuaçu, bacuri, cupuaçu, bacuri [Aluno faz uma expressão de cansaço] achamos mais fácil chamar de C, B, C, B, C, B e assim por diante.
Pesquisadora: A sequência continuará sendo C, B, C, B, C, B?
G5A2: **Sim, a sequência sempre vai ser cupuaçu e bacuri, ou seja, C, B, C, B, C, B, C, B e não vai mudar.**

Imagem 16 – Justificativa do grupo G5 em relação à alternativa A da tarefa 1

Foto: da autora, 2019

O grupo G5 generalizou o padrão de crescimento da sequência: “Primeiro é o cupuaçu e depois bacuri e repete tudo de novo na mesma ordem”, sem estabelecer uma regra geral para encontrar qualquer termo na sequência. O grupo usou as letras C e B para representar, respectivamente, as frutas cupuaçu e bacuri, mas não identificou a relação entre as variáveis posição e frutas.

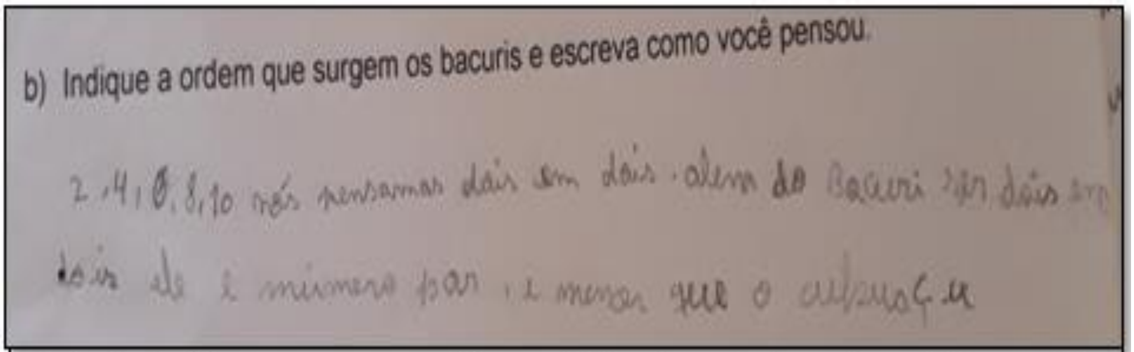
3.1.14 Questão 1 – Alternativa B – Grupo G5

Indique a ordem que surgem os bacuris e escreva como você pensou.

O grupo G5 observou a formação inicial da sequência de frutas e buscou uma justificativa para indicar a ordem que os bacuris surgiam na sequência:

G5A1: **Os bacuris estão na sequência depois do cupuaçu.**
G5A2: O bacuri é menor que o cupuaçu.
Pesquisadora: Em que ordem os bacuris surgem na sequência?
G5A3: **Cupuaçu é um, bacuri dois, cupuaçu três, bacuri quatro, cupuaçu cinco, bacuri seis, cupuaçu sete, bacuri oito e cupuaçu nove.**
G5A4: **Os bacuris são 2, 4, 6 e 8.**
G5A2: **Esses números são pares.**
Pesquisadora: Se continuar a sequência, qual será a ordem dos bacuris?
G5A3: **Vai ser 10, 12, 14 e vai continuar aumentando de dois em dois e são números pares.**

Imagem 17 – Justificativa do grupo G5 em relação à alternativa B da tarefa 1



2, 4, 6, 8, 10 nós pensamos dois em dois. alem do bacuri ser dois em dois ele é número par e menor que o cupuaçu

Foto: da autora, 2019

O envolvimento do grupo em explorar a alternativa para encontrar a regularidade do surgimento dos bacuris foi satisfatório, pois ele estabeleceu uma relação entre as variáveis, posições e frutas: “Cupuaçu é um, bacuri dois, cupuaçu três, bacuri quatro, cupuaçu cinco, bacuri seis, cupuaçu sete, bacuri oito e cupuaçu nove” (G5A3). Dessa maneira, o grupo indicou uma regra geral e chegou à conclusão de que os bacuris são correspondentes às posições pares: “Vai ser 10, 12, 14 e vai continuar aumentando de dois em dois e são números pares” (G5A3).

3.1.15 Questão 1 – Alternativa C – Grupo G5

O 20º termo será cupuaçu ou bacuri? Como chegou a essa conclusão?

O grupo G5 inicialmente estava incomodado com a ideia de encontrar um termo mais distante na sequência, conforme diálogos abaixo:

G5A1: Como a gente vai fazer para encontrar a vinte [vigésima] posição, se vai só até nove?

G5A2: Não é vinte posições! **É vigésimo termo.**

G5A3: **A gente tem que pensar, como se tivesse o vigésimo termo**, **por isso tem reticências.**

G5A4: A sequência vai até o cupuaçu, vamos continuar!

G5A2: **Bacuri, cupuaçu, bacuri, cupuaçu, bacuri, cupuaçu...**

G5A3: É **bacuri** não precisa desenhar.

Pesquisadora: Como você chegou a essa conclusão?

G5A3: **Porque o vigésimo termo é par, então vai ser bacuri.**

O grupo G5 identificou a relação existente entre as variáveis ordem e frutas e estabeleceu uma regra geral para encontrar os bacuris, pois, segundo o grupo, todo bacuri corresponde às posições pares, o que justifica que a fruta correspondente à 20ª posição seja ele: “Porque o 20º termo é par, então vai ser bacuri” (G5A3).

3.1.16 Questão 1 – Alternativa A – Grupo G6

Qual a lei de formação dessa sequência? Justifique sua resposta

O grupo G6 estabeleceu uma relação entre os termos e as posições na sequência.

G6A1: **O cupuaçu aparece primeiro e o bacuri segundo.**

G6A2: **Então o cupuaçu é um e o bacuri é dois.**

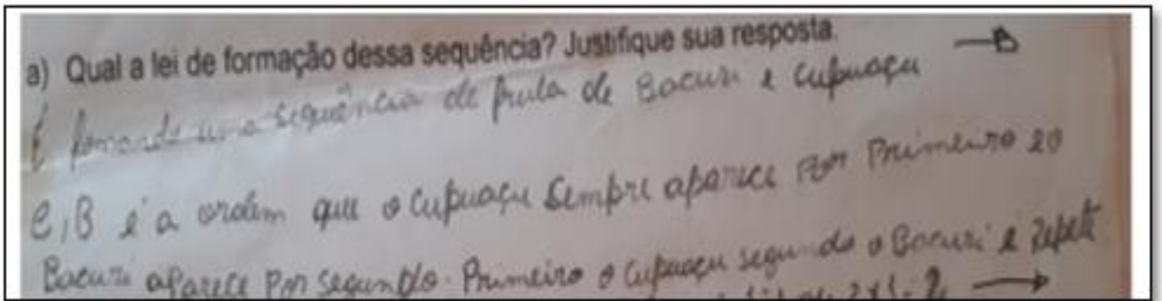
Pesquisadora: Como vocês estão pensando?

G6A1: Todo cupuaçu é um, porque aparece primeiro e o bacuri é dois, porque aparece segundo, depois do um que é o cupuaçu.

Pesquisadora: Percebem alguma relação?

G6A4: **A sequência sempre começa com cupuaçu, um, depois bacuri, dois, e vai se repetindo sempre da mesma maneira.**

Imagem 18 – Justificativa do grupo G6 em relação à alternativa A da tarefa 1



É formada uma sequência de fruta de Bacuri e Cupuaçu C, B é a ordem que o cupuaçu sempre aparece primeiro e o Bacuri aparece por segundo. Primeiro o cupuaçu segundo o bacuri e repete.

Foto: da autora, 2019

Levando em consideração a sequência apresentada na tarefa, o grupo G6 associou cada fruta com os números correspondentes as suas posições iniciais: “A sequência sempre começa com cupuaçu um e depois bacuri dois e vai se repetindo sempre da mesma maneira” (G6A4). O grupo reconheceu que há uma relação entre as variáveis, mas não demonstrou de modo explícito, além disso, o grupo fez generalização, mas não estabeleceu uma regra geral para encontrar os termos na sequência.

3.1.17 Questão 1 – Alternativa B – Grupo G6

Indique a ordem que surgem os bacuris e escreva como você pensou.

Observa-se a seguir como o grupo G6 pensou para indicar como surgem os bacuris:

G6A1: **Como o cupuaçu é um [c=1] e o bacuri é dois [b=2] fica fácil descobrir a ordem dos bacuris.**
G6A2: **Os bacuris sempre estão no b=2.**
Pesquisadora: Como vocês pensaram?
G6A3: **A gente soma os bacuris de dois em dois e vai ser igual a dois, quatro, seis e oito.**
Pesquisadora: O que representam esses números?
G6A4: **É a ordem que os bacuris aparecem na sequência.**
G6A3: **Vai ser sempre de dois em dois e são pares.**

Imagem 19 – Justificativa do grupo G6 em relação à alternativa B da tarefa 1

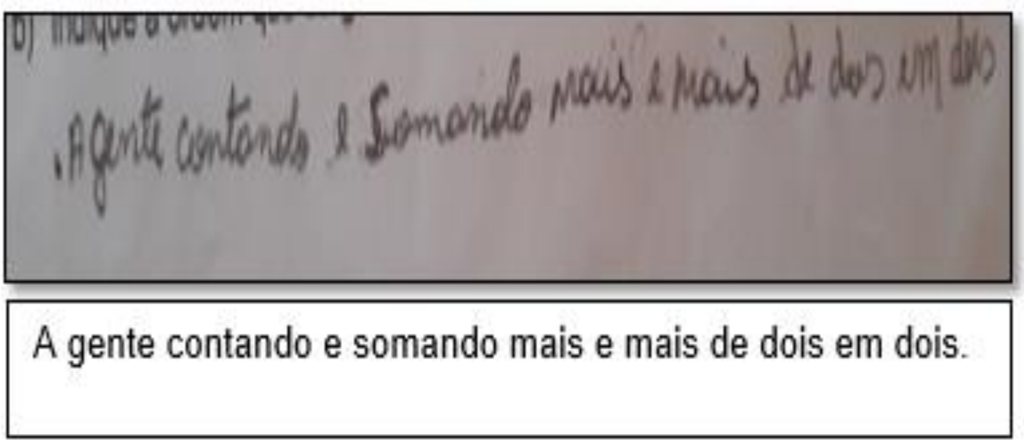


Foto: da autora, 2019

O grupo G6 utilizou a ideia feita na questão anterior A, em que considerou os cupuaçus como c=1 e os bacuris b=2, utilizando essa relação como suporte para encontrar a ordem ocupada pelos bacuris na sequência G6A2: “Os bacuris sempre estão no b=2”.

Nessa perspectiva, o grupo somou as posições de cada bacuri em dois em dois, ou seja, b=2, logo, 2 (2+2= 4, 4+2= 6, 6+2= 8), os resultados dessas operações representam a ordem ocupada pelos bacuris na sequência: “É a ordem que os bacuris aparecem na sequência” (G6A4).

O grupo identificou explicitamente a relação entre as variáveis posição e frutas. Além disso, reconheceu aspectos comuns nos casos particulares e definiu uma regra geral para encontrar os bacuris na sequência: “Vai ser sempre de dois em dois e são pares” (G6A3).

3.1.18 Questão 1 – Alternativa C – Grupo G6

O 20º termo será cupuaçu ou bacuri? Como chegou a essa conclusão?

O grupo G6 encontrou sem dificuldades a fruta ocupada no 20º termo, conforme os diálogos a seguir:

G6A1: O 20º termo é par?
G6A2: Sim!
G6A3: Então está fácil encontrar a fruta.
G6A1: Eu já descobri, **vai ser bacuri.**
Pesquisadora: Como vocês pensaram?
G6A2: Os bacuris estão nas posições 2, 4, 6, 8 e todos são números pares.
G6A4: Está certo, porque **todo bacuri é par e o vinte é par.**
G6A2: E o cupuaçu pode ser maior que o bacuri.

Imagem 20 – Justificativa do grupo G6 em relação à alternativa C da tarefa 1

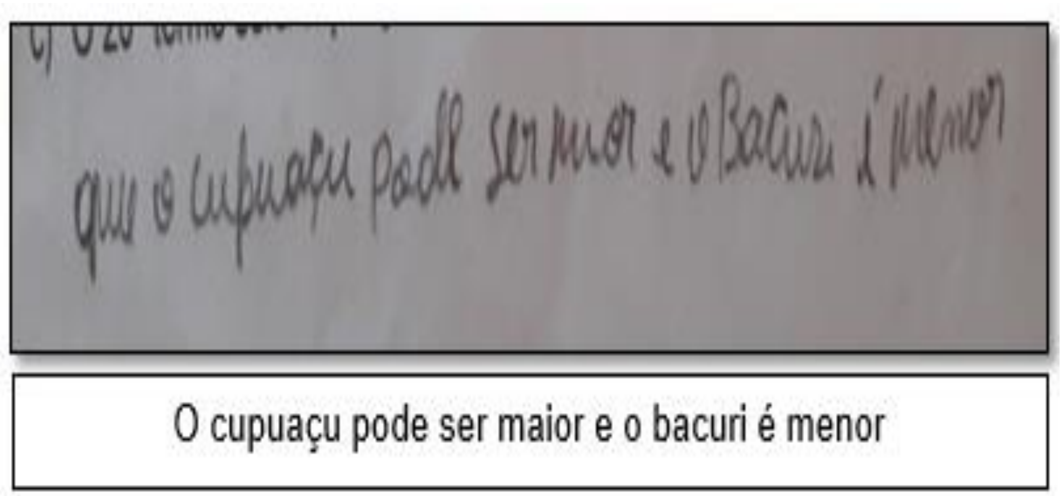


Foto: da autora, 2019

O grupo G6 estabeleceu uma relação explícita entre as variáveis posição e frutas, e por meio das regularidades encontradas no decorrer da sequência estabeleceu uma regra geral para encontrar a fruta correspondente à 20ª posição: “Todo bacuri é par e o vinte é par” (G6A4).

- **Síntese da tarefa 1**

As justificativas apresentadas pelos grupos em relação à tarefa 1 foram distintas, uma vez que as tarefas exploratório-investigativas abertas possibilitaram aos grupos a liberdade de trilhar por caminhos diferentes durante a resolução das alternativas.

De acordo com as respostas de cada grupo, foi possível perceber que houve a emergência de ideias que evidenciaram o pensamento funcional por meio de generalizações. As manifestações apresentadas pelos grupos foram analisadas de acordo com o Domínio 1 – Pensamento Funcional [3], conforme apresentado no quadro a seguir:

Quadro 4 – Análise do nível de pensamento funcional da tarefa 1

	GRUPO E QUESTÕES																		
NÍVEIS	**G1**			**G2**			**G3**			**G4**			**G5**			**G6**			**TOTAL**
	A	B	C	A	B	C	A	B	C	A	B	C	A	B	C	A	B	C	
NF				X	X	X	X						X						5
RR																X			1
PF	X	X	X					X	X	X	X	X		X	X		X	X	12

Elaboração: da autora, 2019

De acordo com as informações apresentadas no quadro acima, os grupos G1 e G4 manifestaram o pensamento funcional em todas as alternativas da tarefa, pois evidenciaram na alternativa A, a relação existente entre as posições ocupadas pelas frutas com a ideia dos números pares e ímpares, a partir dessa relação houve a generalização, e as frutas passaram a ser categorizadas: cupuaçu é ímpar e bacuri é

[3] Nivel 1 – Não funcional (NF); Nível 2 – Reconhece relações (RR); Nível 3 – Pensamento Funcional (PF).

par. Assim, as respostas das alternativas B e C foram facilmente encontradas, uma vez que os grupos já haviam generalizado que os bacuris ocupavam posições pares.

Os grupos G2, G3 e G5 apresentaram, na alternativa A, justificativas que representavam somente o ritmo de crescimento da sequência: “Elas estão repetindo na sequência de uma atrás da outra, primeiro sempre vai ser cupuaçu e depois bacuri (G2A4); “A regra vai ser primeiro cupuaçu e depois bacuri” (G3A3); “Primeiro é o cupuaçu e depois bacuri e repete tudo de novo na mesma ordem” (G5A2).

Já o grupo G6 reconheceu que havia uma correspondência na sequência, mas não reconheceu explicitamente a relação entre a posição e as frutas: “Todo cupuaçu é um, porque aparece primeiro; e o bacuri é dois, porque aparece segundo, depois do um que é o cupuaçu” (G6A1).

Nas alternativas B e C somente os grupos G3, G5 e G6 manifestaram o pensamento funcional após reconhecer e generalizar a relação entre a posição e as frutas.

A mudança de percepção desses grupos foi motivada a partir dos *feedbacks* que contribuíram para refletir sobre o caminho que estava sendo feito, por exemplo, o grupo G3, após receber o *feedback* da pesquisadora: *“*Os bacuris aparecem em quais posições?”, analisou a sequência e percebeu que os bacuris estavam em posições pares: “Na 2ª, 4ª, 6ª e 8ª posição” (G3A2). A partir dos casos particulares, o grupo generalizou e destacou que todos os bacuris estavam em posições pares na sequência.

O grupo G2 continuou com a visão rítmica do crescimento da sequência: “O bacuri é sempre depois do cupuaçu” (G2A2) sem estabelecer uma regra geral eficaz para encontrar os termos. Os *feedbacks* não foram suficientes para o grupo pensar em justificativas mais abrangentes em relação às alternativas B e C da tarefa.

De acordo com o total do nível de pensamento funcional, das 18 respostas apresentadas pelos grupos, 12 evidenciaram o pensamento funcional, ou seja, mais de 65% de aproveitamento.

3.2 TAREFA 2 – AZULEJOS PORTUGUESES

A tarefa 2 possuía um atributo (tipo de objeto) representado, nesse caso, por azulejos iguais. Essa tarefa encontrava-se dentro da perspectiva do pensamento funcional como caminho para a generalização, como via privilegiada para o desenvolvimento do pensamento algébrico.

Nesse tocante, o objetivo desta tarefa foi desenvolver o pensamento algébrico por meio da observação dos aspectos comuns nos casos particulares da sequência, definindo uma regra geral e identificando as relações entre os termos da sequência e a ordem ocupada.

Imagem 21 – Tarefa 2

Tarefa 2

1º) Observe a sequência abaixo:

a) Quantos azulejos terá na 4º posição? Como você pensou?

b) Ao preencher o quadro abaixo é possível perceber alguma relação entre a Posição e a quantidade de azulejos? Qual?

Posição	Quantidade de azulejos
1°	2
2°	4
3°	6
4°	
5°	
6°	
7°	
8°	
9°	
10°	
11°	

c) Em qual posição teremos 34 azulejos? Explique como você encontrou esse resultado.

d) De acordo com seu entendimento, encontre a quantidade de azulejos na posição 100º. Como você pensou?

Elaboração: da autora, 2019

A tarefa 2 foi realizada no segundo encontro com a turma. Ao chegar à sala de aula, os educandos foram organizados em quatro grupos, com quatro componentes cada um. Nesse encontro havia 16 alunos em sala de aula e inicialmente foi enfatizada a importância do trabalho em equipe, em que cada aluno deveria se envolver com a tarefa para que todos os membros pudessem encontrar regularidades, fazer generalizações, continuar a sequência entendendo o sentido da repetição dos objetos, entre tantas outras orientações importantes para o bom desenvolvimento da tarefa.

Após a apresentação inicial dos objetivos da aula, foram entregues as tarefas para os grupos, em seguida, foi feita a leitura coletiva, pontuando os principais objetivos da tarefa e foram esclarecidas as dúvidas existentes. Após esse momento, iniciou-se o trabalho autônomo dos grupos.

A seguir serão apresentados os principais momentos da realização da tarefa.

3.2.1 Questão 1 – Alternativa A – Grupo G1

Quantos azulejos teremos na 4ª posição? Como você pensou?

O grupo G1 encontrou regularidade na sequência e descobriu que na quarta posição seriam oito azulejos:

G1A1: **Está aumentando de dois em dois**
G1A2: **Então vai ter oito azulejos na 4ª posição.**
Pesquisadora: Vocês consideram que em cada posição estão sendo acrescentados mais dois azulejos?
G1A3: **Sim, professora, porque na posição 1 tem dois, na posição 2 têm quatro, na posição 3 têm seis e na 4ª vai ter oito azulejos.**
Pesquisadora: É possível perceber outra relação que justifique o crescimento da sequência?
G1A1: Sempre acrescenta dois azulejos de uma posição para outra.

Imagem 22 – Justificativa do grupo G1 em relação à alternativa A da tarefa 2

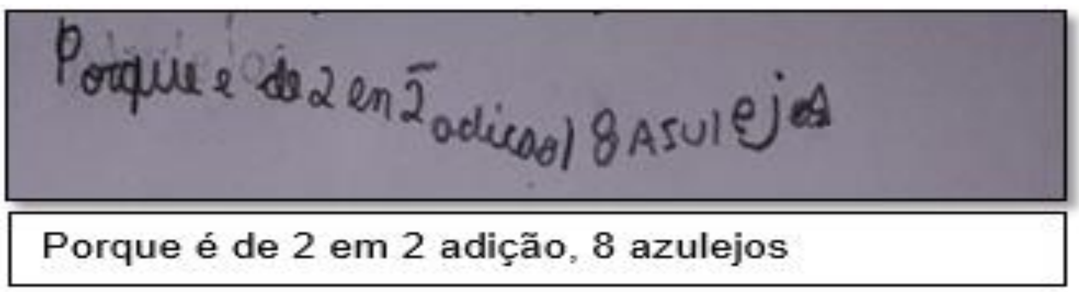


Foto: da autora, 2019

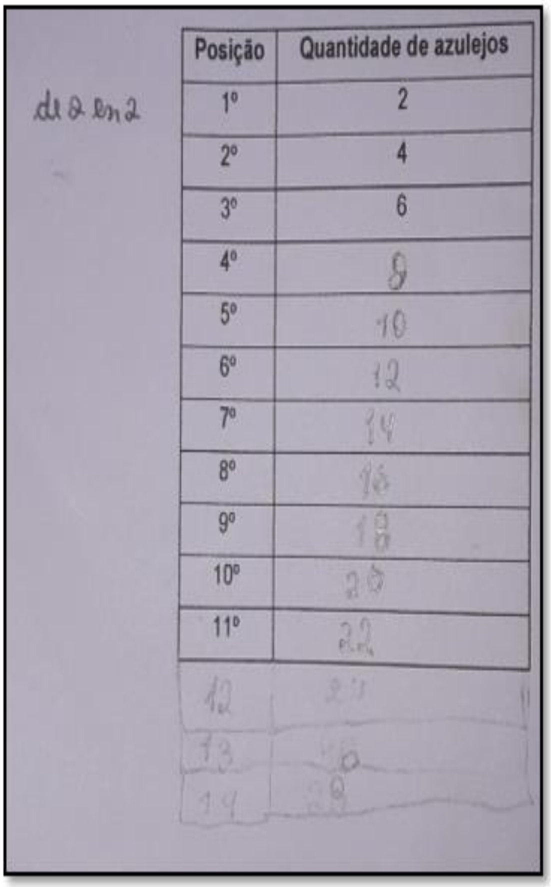
O grupo G1 percebeu que a regularidade entre cada termo da sequência: “Está aumentando de dois em dois” (G1A1), mas não estabeleceu uma regra geral. O grupo também não encontrou relações entre as variáveis posição e quantidade de azulejos.

3.2.2 Questão 1 – Alternativa B – Grupo 1

Ao preencher o quadro abaixo é possível perceber alguma relação entre a posição e a quantidade de azulejos? Qual?

O grupo G1 continuou a tabela até o 22º termo e justificou que a relação entre a posição e a quantidade de azulejos era “de 2 em 2”.

Imagem 23 – Justificativa do grupo G1 em relação à alternativa B da tarefa 2



de 2 em 2

Posição	Quantidade de azulejos
1º	2
2º	4
3º	6
4º	8
5º	10
6º	12
7º	14
8º	16
9º	18
10º	20
11º	22

Foto: da autora, 2019

Para obter maiores informações de como o grupo pensou para chegar a essa resposta, foi solicitada uma explicação.

Pesquisadora: Como vocês pensaram?
G1A1: A gente pensou que **vai de dois em dois.**
Pesquisadora: O que está de **dois em dois?**
G1A2: **Os azulejos. Eles vão crescendo de dois em dois.**
Pesquisadora: E qual seria a relação entre a posição e os azulejos?
G1A3: **A relação é que vai dobrando.**
Pesquisadora: Dobrando? Pode me explicar melhor?

G1A4: **Tem o número da posição, aí a gente repete esse número e soma com ele mesmo, aí vai ser igual à quantidade de azulejos.**

O grupo identificou a regularidade existente em todos os termos da sequência: "Os azulejos. Eles vão crescendo de dois em dois" (G1A2).

A partir da regularidade encontrada, o grupo reconheceu a relação entre as variáveis posição e quantidade de azulejos: "Tem o número dá posição, aí a gente repete esse número e soma com ele mesmo, aí vai ser igual à quantidade de azulejos" (G1A4), assim, o grupo estabeleceu uma regra geral que pode ser usada para encontrar a quantidade de azulejos em qualquer posição.

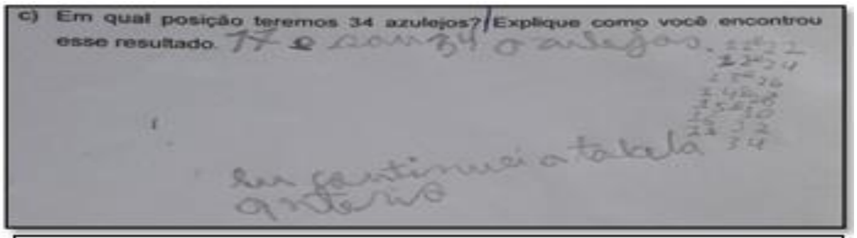
3.2.3 Questão 1 – Alternativa C – Grupo 1

Em qual posição teremos 34 azulejos? Explique como você encontrou esse resultado

O grupo G1 investigou e discutiu as possibilidades para encontrar a posição em que possui 34 azulejos:

G1A1: Como a gente vai fazer?
G14A3: Não sei, vamos pensar.
G1A2: Eu acho que a gente soma 34+2.
Pesquisadora: Por que somar 34 +2?
G1A2: Porque a gente fez isso antes!
Pesquisadora: Avaliem melhor essa estratégia.
G1A4: A gente não pode somar assim.
Pesquisadora: Como deve ser feito?
G1A4: **Devemos procurar a posição e não a quantidade de azulejos.**
G1A3: É verdade.
G1A2: **Vamos continuar o quadro para descobrir, pois lá parou na posição 11, então a gente soma a posição duas vezes e vai encontrar a posição que tem 34 azulejos.**
G1A2: **Vai ser na posição 17.**

Imagem 24 – Justificativa do grupo G1 em relação à alternativa C da tarefa 2



17º são 34 azulejos

Eu continuei a tabela anterior

11º	22
12º	24
13º	26
14º	28
15º	30
16º	32
17º	34

Foto: da autora, 2019

O grupo continuou a sequência, seguindo a relação estabelecida anteriormente na alternativa B: “Vamos continuar o quadro para descobrir, pois lá parou na posição 11, então a gente soma a posição duas vezes e vai encontrar a posição que tem 34 azulejos” (G1A2). De acordo com as justificativas apresentadas pelo grupo, fica explícito o reconhecimento dos aspectos comuns nos casos particulares e a definição de uma regra geral.

3.2.4 Questão 1 – Alternativa D – Grupo 1

De acordo com seu entendimento, encontre a quantidade de azulejos na posição 100. Como você pensou?

O grupo G1 pensou em uma estratégia para encontrar a quantidade de azulejos na 100ª posição, conforme diálogos abaixo:

G1A1: **Os azulejos estão aumentando sempre de dois em dois.**
G1A2: **Em cada posição está dobrando.**
G1A3: Como é dobrando?
G1A4: **É dobrar a posição, se a posição é 100 então vai ser 200 azulejos.**
G1A2: **O dobro é quando é somado duas vezes**.

Imagem 25 – Justificativa do grupo G1 em relação à alternativa D da tarefa 2

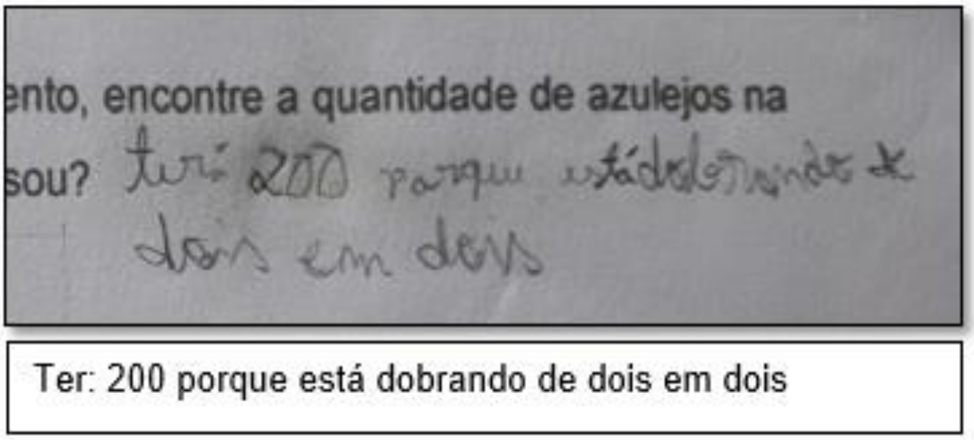


Foto: da autora, 2019

O grupo G1 identificou uma regra geral para encontrar a quantidade de azulejos na sequência a partir do reconhecimento da relação entre as variáveis: “É dobrar a posição, se a posição é 100 então vai ser 200 azulejos” (G1A4), seguindo a regra estabelecida, os membros do grupo descobriram que na 100ª posição haveria 200 azulejos.

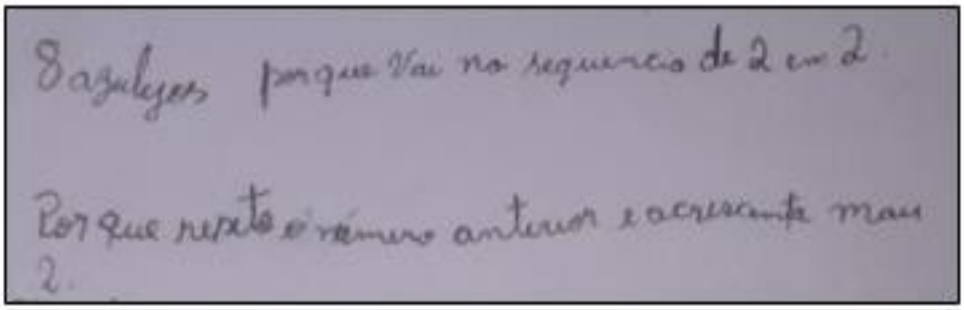
3.2.5 Questão 1 – Alternativa A – Grupo G2

Quantos azulejos teremos na 4ª posição? Como você pensou?

O grupo G2 encontrou uma regularidade na sequência, conforme diálogos abaixo:

G2A1: A gente tem que descobrir quantos azulejos vai ter na 4ª posição.
G2A2: **Na primeira tem dois, na segunda tem quatro, na terceira tem seis, então na quarta vai ter oito.**
Pesquisadora: Como vocês pensaram?
G2A3: **Está aumentando de dois em dois.**
Pesquisadora: Qual a relação de uma posição para outra?
G2A4: **Está dobrando a posição anterior e soma mais dois, então vai ser oito porque na posição 3 a gente dobra e dá seis, aí a gente repete seis e acrescenta mais dois azulejos.**
Pesquisadora: O que significa dobrar a posição anterior?
G2A4: É multiplicar por dois.

Imagem 26 – Justificativa do grupo G2 em relação à alternativa A da tarefa 2



8 azulejos porque vai na sequência de 2 em 2.

Porque repete o número anterior e acrescenta mais 2.

Foto: da autora, 2019

O grupo G2 reconheceu a regularidade entre os termos da sequência e estabeleceu uma regra geral para encontrar a quantidade de azulejos: "Está dobrando a posição anterior e soma mais dois, então vai ser oito porque na posição três a gente dobra e dá seis, aí a gente repete seis e acrescenta mais dois azulejos" (G2A4), ou seja, para descobrir a quantidade de azulejos em uma posição é necessário multiplicar por dois o valor da posição anterior, o resultado soma-se com dois, por exemplo.

Para saber a quantidade de azulejos da 5ª posição, multiplica-se a posição anterior por dois (4x2=8) e o resultado soma com dois (8+2=10), quando se percebe que na 5ª posição existem dez azulejos.

Por meio dessa regra é possível encontrar a quantidade de azulejos em qualquer posição.

3.2.6 Questão 1 – Alternativa B – Grupo G2

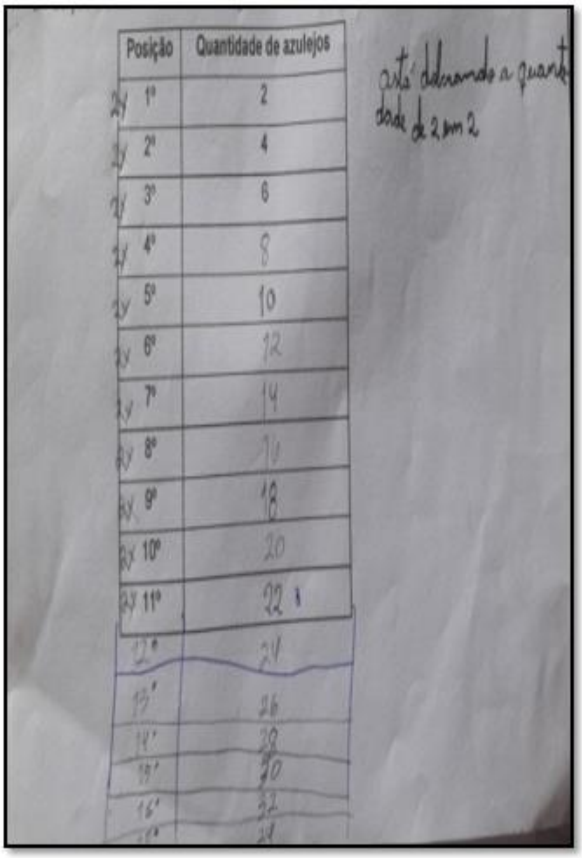
Ao preencher o quadro abaixo é possível perceber alguma relação entre a posição e a quantidade de azulejos? Qual?

O grupo G2 iniciou preenchendo o quadro de acordo com seu entendimento:

G2A1: **Está aumentando de dois em dois.**
G2A2: **Está dobrando a quantidade de dois em dois.**
Pesquisadora: Vocês percebem alguma relação entre a **posição e a quantidade de azulejos?**
G2A3: **Está dobrando a posição e a gente descobre os azulejos.**

Pesquisadora: Como é dobrar?
G2A1: **É multiplicar por dois.**
Pesquisadora: Muito bem!

Imagem 27 – Justificativa do grupo G2 em relação à alternativa B da tarefa 2



Posição	Quantidade de azulejos
1º	2
2º	4
3º	6
4º	8
5º	10
6º	12
7º	14
8º	16
9º	18
10º	20
11º	22
12	24
13	26
14	28
15	30
16	32
17	34

Está dobrando a quantidade de 2 em 2

Foto: da autora, 2019

O grupo G2 evidenciou explicitamente que há uma relação entre a posição e a quantidade de azulejos: “Está dobrando a posição e a gente descobre os azulejos” (G2A3), ou seja, para encontrar a quantidade de azulejos basta multiplicar o número correspondente às posições por dois: “É multiplicar por dois” (G2A1). Por meio da regra geral estabelecida foi possível encontrar a quantidade de azulejos em posições distintas.

3.2.7 Questão 1 – Alternativa C – Grupo G2

Em qual posição teremos 34 azulejos? Explique como você encontrou esse resultado.

O grupo G2 continuou a sequência do quadro até encontrar a posição exata em que constavam os 34 azulejos:

G2A1: **É mais fácil encontrar, é só continuar o quadro.**
G2A2: **A gente continua multiplicando por dois até encontrar os 34 azulejos.**
G2A3: **Vai ser na posição 17, que vai ter 34 azulejos.**
Pesquisadora: Como pensaram?
G2A4: **É porque duas vezes a posição 17 é 34 azulejos.**

Imagem 28 – Justificativa do grupo G2 em relação à alternativa C da tarefa 2

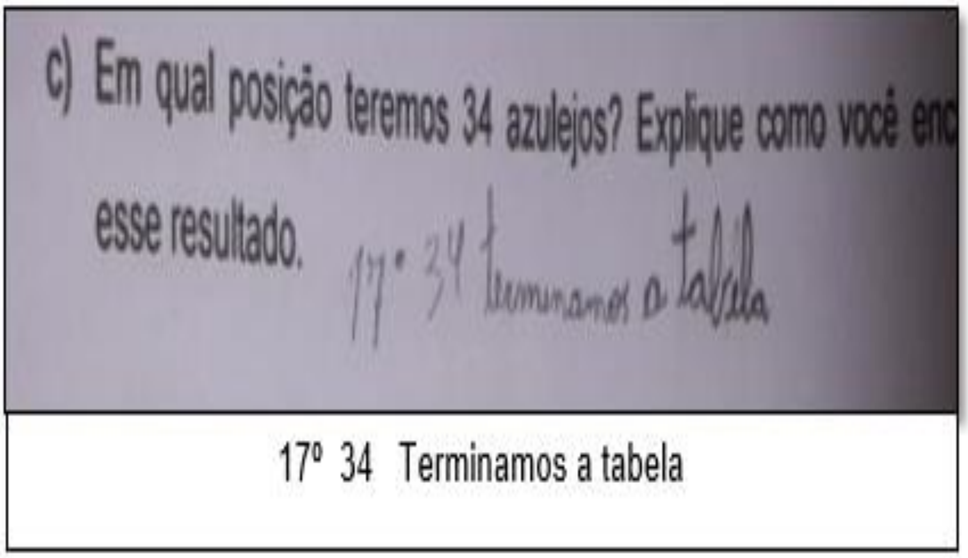


Foto: da autora, 2019

O grupo continuou o quadro da alternativa anterior, B, seguindo a regra geral estabelecida por meio da generalização e pela identificação da relação entre a posição e a quantidade de azulejos, concluindo que os 34 azulejos estavam na 17ª posição, confirmando o raciocínio na fala: “É porque duas vezes a posição 17 é 34 azulejos” (G2A4).

3.2.8 Questão 1 – Alternativa D – Grupo G2

De acordo com seu entendimento, encontre a quantidade de azulejos na posição 100. Como você pensou?

O grupo G2 inicialmente estava confuso para descobrir a quantidade de azulejos na 100ª posição, conforme os diálogos a seguir.

G2A1: Essa posição é muito longe, vai ter muitos azulejos.
G2A2: Vamos ter que continuar o quadro até o 100?
Pesquisadora: É necessário continuar a sequência até a 100ª posição?
G2A3: Não, vai demorar muito.
Pesquisadora: E como pode ser feito?
G2A4: **Cem é a posição, então vamos multiplicar por dois** para **encontrar os azulejos.**
G2A2: É verdade, não precisa escrever até o 100, basta **multiplicar por dois.**
G2A1: **Sim, pois está dobrando em dois em dois** [Aluno está se referindo à multiplicação por dois].
Pesquisadora: Muito bem!

Imagem 29 – Justificativa do grupo G2 em relação à alternativa D da tarefa 2

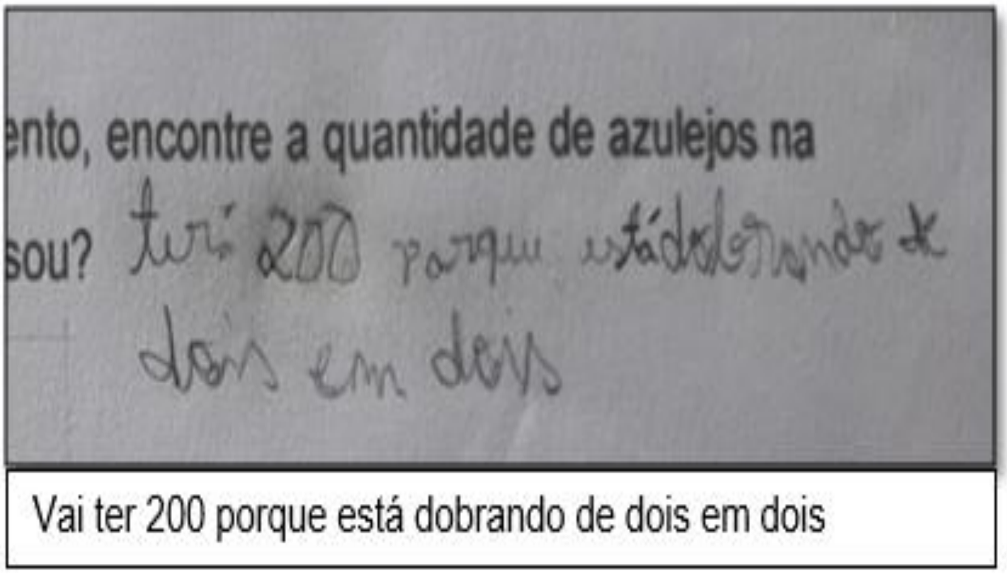


Foto: da autora, 2019

O grupo G2 chegou à conclusão de que não era necessário continuar exaustivamente a sequência até a 100ª posição, pois poderia multiplicar o valor posicional (100) por dois: “Cem é a posição, então vamos multiplicar por dois para encontrar os azulejos” (G2A4).

3.2.9 Questão 1 – Alternativa A – Grupo G3

Quantos azulejos teremos na 4ª posição? Como você pensou?

O grupo G3 identificou que na quarta posição haveria oito azulejos, conforme os diálogos a seguir:

G3A1: **Vai ser oito azulejos.**
Pesquisadora: Como vocês chegaram a essa conclusão?
G3A1: **A gente foi somando o número um da posição 1 com ele mesmo, o número dois da posição 2 com ele mesmo, o número três da posição 3 com ele mesmo e o quatro da posição 4 com ele mesmo e foi dando o número de azulejos.**
Pesquisadora: Vocês fizeram uma relação da quantidade de azulejos com a posição que eles ocupam na sequência?
G3A2: **Sim! Por isso que vai ser oito azulejos na 4ª posição, porque 4 mais 4 são oito.**
Pesquisadora: A maneira que vocês pensaram servirá para encontrar a quantidade de azulejos em outras posições?
G3A3: **Sim, é só a gente somar duas vezes** [Quando o aluno fala em somar duas vezes, ele está se referindo ao valor posicional de cada termo].
Pesquisadora: Bom trabalho!

Imagem 30 – Justificativa do grupo G3 em relação à alternativa A da tarefa 2

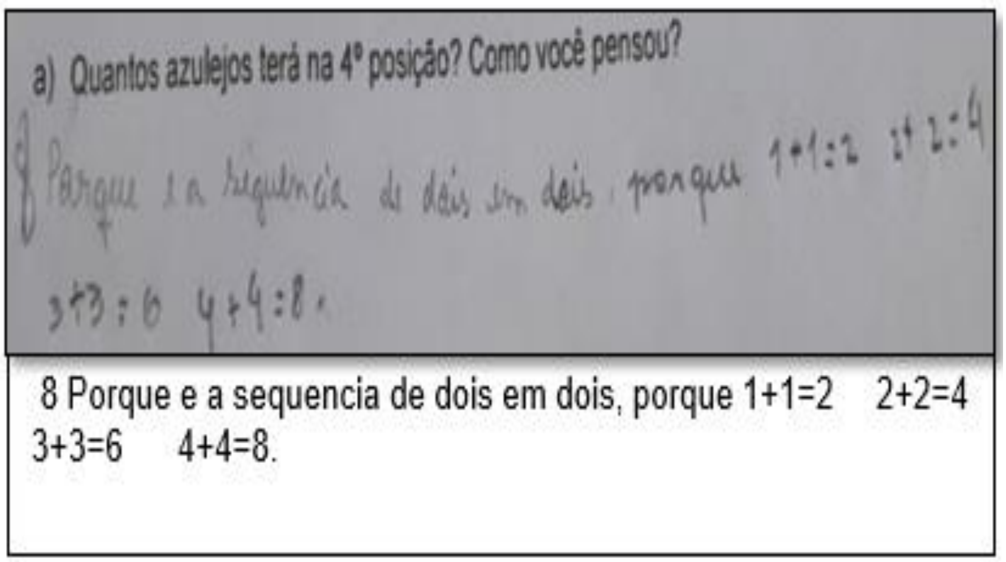


Foto: da autora, 2019

O grupo G3 identificou explicitamente a relação entre o valor posicional da sequência e a quantidade de azulejos: "A gente foi somando o número um da posição 1 com ele mesmo, o número dois da posição 2 com ele mesmo, o número três da posição 3 com ele mesmo e o quatro da posição 4 com ele mesmo e foi dando o número de azulejos" (G3A1), por meio dessa regra geral foi possível descobrir a quantidade de azulejos em qualquer posição na sequência.

3.2.10 Questão 1 – Alternativa B – Grupo 3

Ao preencher o quadro abaixo é possível perceber alguma relação entre a posição e a quantidade de azulejos? Qual?

O grupo G3, por meio dos diálogos, buscou novas relações entre a posição e a quantidade de azulejos:

Pesquisadora: Como vocês estão pensando?

G3A1: **De uma posição para outra aumenta dois azulejos.**

G3A2: **Na posição 1 têm dois, na posição 2 têm quatro, na três é seis e vai continuando aumentando dois.**

Pesquisadora: De uma posição para outra, aumenta dois azulejos está correto.Observando o número de cada posição e a quantidade de azulejos, existe alguma relação?.

G3A3: **O número dos azulejos** [Aluno está se referindo a quantidade de azulejos] **é maior que o número das posições.**

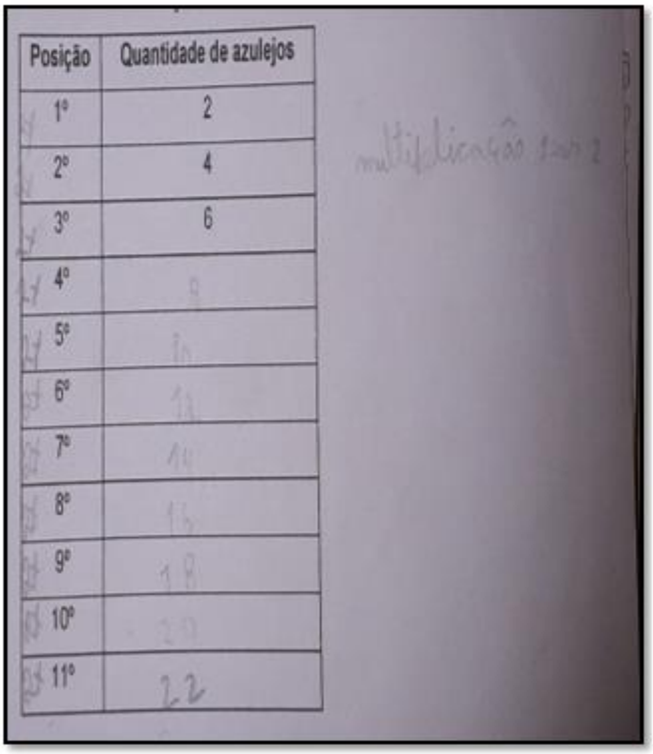
G3A4: **Os azulejos são duas vezes maiores que a posição.**

G3A2: **A gente multiplica por dois.**

Pesquisadora: Pode explicar melhor?

G3A2: **Multiplica os números da posição por dois e o resultado é o número dos azulejos.**

Imagem 31 – Justificativa do grupo G3 em relação à alternativa B da tarefa 2



Posição	Quantidade de azulejos
2x 1º	2
2x 2º	4
2x 3º	6
2x 4º	8
2x 5º	10
2x 6º	12
2x 7º	14
2x 8º	16
2x 9º	18
2x 10º	20
2x 11º	22

multiplicação por 2

Foto: da autora, 2019

O grupo G3 identificou uma nova relação entre a posição e a quantidade de azulejos: “O número dos azulejos [Aluno está se referindo à quantidade de azulejos] é maior que o número das posições” (G3A3). Além disso, o grupo verificou a validade da regra anteriormente estabelecida para encontrar a quantidade de azulejos: “Mutiplica os números da posição por dois e o resultado é o número dos azulejos” (G3A2).

3.2.11 Questão 1 – Alternativa C – Grupo G3

Em qual posição teremos 34 azulejos? Explique como você encontrou esse resultado

Para descobrir em qual posição haviam 34 azulejos, o grupo G3 decidiu continuar a sequência feita na questão anterior usando a regularidade encontrada, conforme podemos verificar nos diálogos a seguir:

G3A1: **Vamos continuar a sequência da questão b.**
G3A2: A gente continua **multiplicando por dois** até encontrar 34 azulejos.
G3A3: 34 é na posição 17.
G3A4: Está certo, porque **duas vezes o 17 é 34.**
G1A3: Multiplicando é mais rápido.

Imagem 32 – Justificativa do grupo G3 em relação à alternativa C da tarefa 2

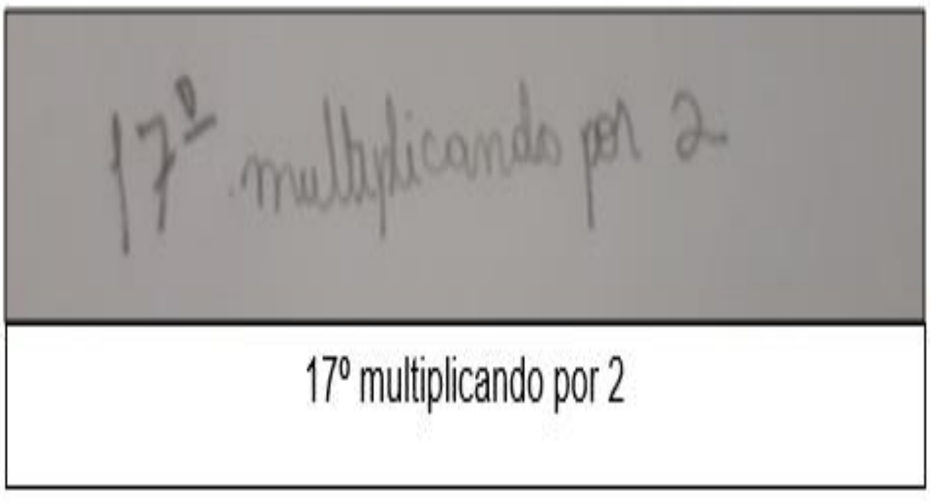


Foto: da autora, 2019

O grupo G3 continuou a sequência da questão anterior, B, levando em consideração a regra geral estabelecida, a partir da relação encontrada entre a posição e a quantidade de azulejos: “A gente continua multiplicando por dois até encontrar 34 azulejos” (G3A2). Dessa maneira, o grupo continuou a sequência até descobrir que na posição anterior havia 34 azulejos.

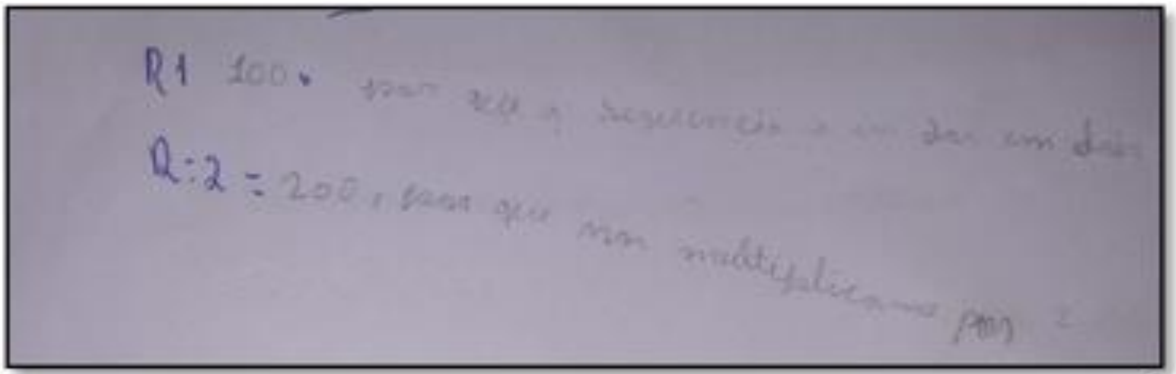
3.2.12 Questão 1 – Alternativa D – Grupo G3

De acordo com seu entendimento, encontre a quantidade de azulejos na posição 100. Como você pensou?

O grupo G3 buscou, por meio do diálogo, chegar a um consenso:

G3A1: É uma posição muito longe.
G3A2: Vamos fazer como a gente fez antes.
Pesquisadora: Como vocês estão pensando?
G3A3: **Vamos multiplicar a posição 100 por dois.**
G3A4: **Então vai ser duzentos, porque duas vezes cem é duzentos.**

Imagem 33 – Justificativa do grupo G3 em relação à alternativa D da tarefa 2



R1: 100 porque a sequência é de dois em dois.

R2: 200, porque nós multiplicamos por 2.

Foto: da autora, 2019

A justificativa apresentada pelo grupo G3 está relacionada com a regra geral estabelecida a partir da observação do padrão de crescimento da sequência e da relação entre a posição e os azulejos: “Vamos multiplicar a posição 100º por dois” (G3A3), a partir da identificação explícita da relação entre as variáveis, o grupo chegou à conclusão que para encontrar a quantidade de azulejos, bastava multiplicar as posições por dois: “Então vai ser duzentos, porque duas vezes cem é duzentos” (G3A4).

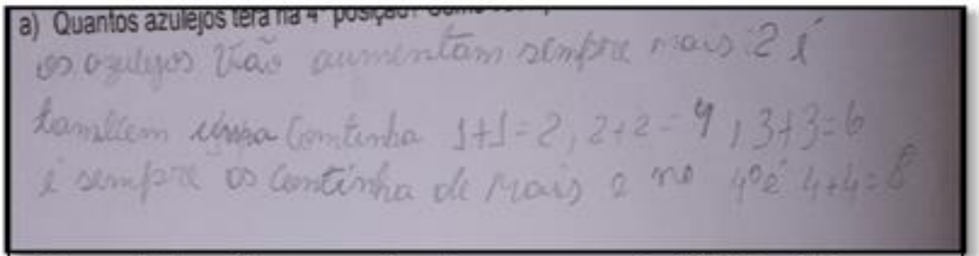
3.2.13 Questão 1 – Alternativa A – Grupo G4

Quantos azulejos teremos na 4ª posição? Como você pensou?

O grupo estabeleceu uma relação entre a posição e a quantidade de azulejos:

G4A1: **Está aumentando de dois em dois.**
G4A2: **Na quarta posição vai ser oito azulejos.**
Pesquisadora: Como vocês pensaram?
G4A2: **Em cada posição aumenta dois azulejos, na primeira é dois, depois aumenta mais dois e fica quatro, depois aumenta dois e fica seis e na quarta posição aumenta mais dois e fica oito.**
G4A3: **Professora, se somar duas vezes a posição quatro vai dar a quantidade de azulejos**.
Pesquisadora: Essa relação acontece somente neste caso?
G4A4: **Não, professora, acontece em todas as posições. Olha aqui, na posição 1 é só somar 1+1 e vai ser dois azulejos; na posição 2, soma 2+2, vai ser quatro azulejos; na posição 3 vai ser 3+3, seis; 4+4 é oito, e assim por diante.**
G4A4: **É verdade! Então se continuar na 5ª posição vai ser dez, porque 5+5 é dez.**
Pesquisadora: Muito bem!

Imagem 34 – Justificativa do grupo G4 em relação à alternativa A da tarefa 2



Os azulejos vão aumentando sempre mais 2 é também uma continha 1+1= 2, 2+2=4, 3+3= 6 é sempre as continhas de mais e no 4º é 4+4= 8

Foto: da autora, 2019

O grupo G4 encontrou a quantidade correta de azulejos na 4ª posição (oito azulejos) após perceber a regularidade presente em todos os termos da sequência: "Em cada posição aumenta dois azulejos, na primeira é dois depois aumenta mais dois e fica quatro depois aumenta dois e fica seis e na quarta posição aumenta mais dois e fica oito" (G4A2).

Além disso, o grupo generalizou explicitamente a relação entre a posição e a quantidade de azulejos: "Não, professora, acontece em todas as posições. Olha aqui, na posição 1 é só somar 1+1 e vai ser dois azulejos, na posição 2, soma 2+2, vai ser quatro azulejos, na posição 3 vai ser 3+3, seis; 4+4 é oito, e assim por diante" (G4A4).

A partir das justificativas apresentadas pelo grupo foi definida uma regra geral para encontrar a quantidade de azulejos em qualquer posição da sequência, para isso bastou somar duas vezes o valor posicional.

3.2.14 Questão 1 – Alternativa B – Grupo G4

Ao preencher o quadro abaixo é possível perceber alguma relação entre a posição e a quantidade de azulejos? Qual?

O grupo G4 preencheu o quadro e buscou relações entre a posição e a quantidade de azulejos:

G4A1: Vamos continuar o quadro.
G4A3: A questão pede para encontrar uma relação entre a posição e os azulejos.
G4A2: **Eu percebo que está aumentando de dois em dois.**
G4A3: **Vamos somar.**
G4A1: **Somar o quê?**
G4A3: **Somar duas vezes a posição para encontrar a quantidade dos azulejos.**
G4A2: **É verdade, 1+1 é dois azulejos, 2+2 é quatro azulejos, 3+3 é seis azulejos, e vai continuar essa regra.**

Imagem 35 – Justificativa do grupo G4 em relação à alternativa B da tarefa 2

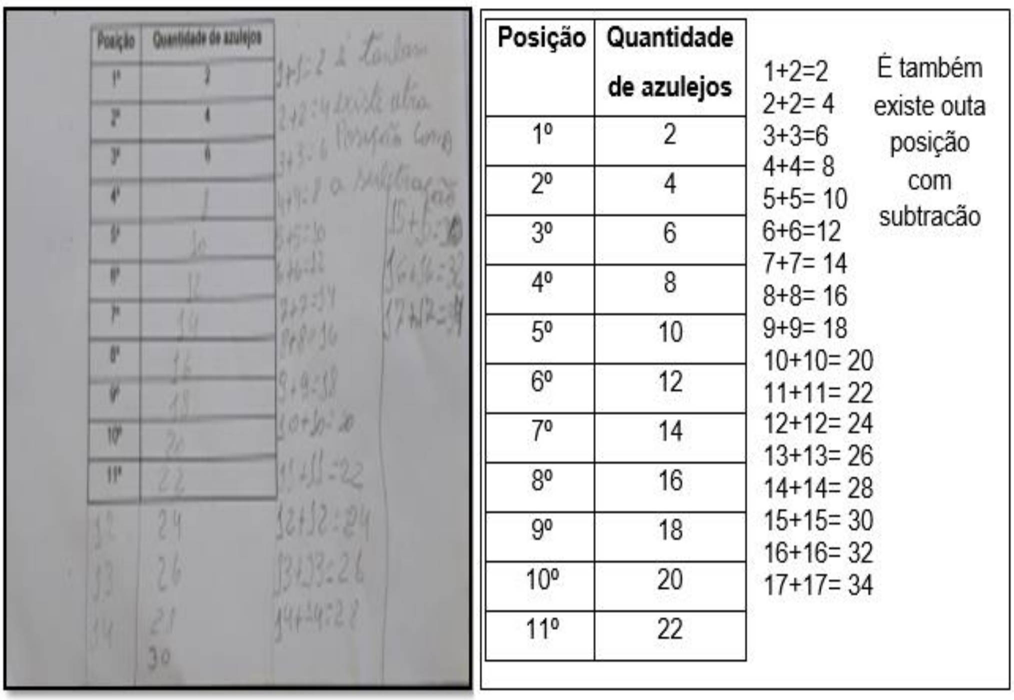


Foto: da autora, 2019

O grupo G4 identificou aspectos comuns nos casos particulares no padrão de crescimento da sequência: “Eu percebo que está aumentando de dois em dois” (G4A2), e estabeleceu uma regra geral por meio do reconhecimento das relações entre a posição e a quantidade de azulejos: “Somar duas vezes a posição para encontrar a quantidade dos azulejos” (G4A3) e, por meio dessa regra, foi possível encontrar termos mais distantes na sequência.

3.2.15 Questão 1 – Alternativa C – Grupo G4

Em qual posição teremos 34 azulejos? Explique como você encontrou esse resultado

O grupo G4 articulou uma estratégia para encontrar a posição na sequência em que há 34 azulejos:

G4A1: **Vai ser 17!**
Pesquisadora: Como vocês chegaram a essa conclusão?
G4A1: **Nas outras questões, sempre a gente somava duas vezes a posição e encontrava os azulejos, então a gente pensou no número 17, porque somando duas vezes vai ser igual a 34 [17 + 17=34].**
Pesquisadora: É possível encontrar a quantidade de azulejos em qualquer posição?
G4A3: **Sim, a gente pode encontrar a quantidade de azulejos somando a posição duas vezes.**
Pesquisadora: Muito bem!

Imagem 36 – Justificativa do grupo G4 em relação à alternativa C da tarefa 2

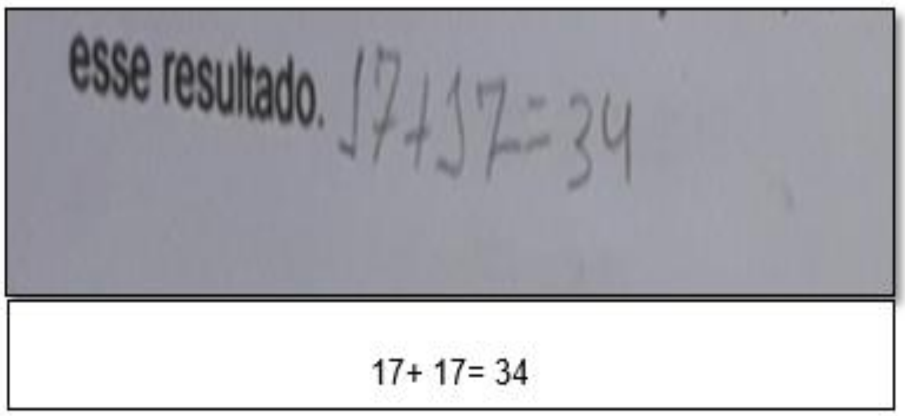


Foto: da autora, 2019

O grupo G4 estabeleceu explicitamente a relação entre a posição e a quantidade de azulejos: “Sim, a gente pode encontrar a quantidade de azulejos somando a posição duas vezes” (G4A3) e descobriu que a posição ocupada pelos 34 azulejos é a 17ª: “Nas outras questões, sempre a gente somava duas vezes a posição e encontrava os azulejos, então a gente pensou no número 17, porque somando duas vezes vai ser igual a 34 [17+17=34]” (G4A1). A partir da generalização foi possível encontrar termos mais distantes na sequência.

3.2.16 Questão 1 – Alternativa D – Grupo G4

De acordo com seu entendimento, encontre a quantidade de azulejos na posição 100. Como você pensou?

O grupo G4 somou o valor posicional duas vezes e encontrou a quantidade de azulejos corretamente:

G4A1: Agora é para encontrar a quantidade de azulejos na posição 100.
G4A2: Está muito fácil, vai ter **200 azulejos.**
Pesquisadora: Como vocês pensaram?
G4A3: **É só somar duas vezes o cem.**
G4A4: **Cem mais cem é duzentos.**
Pesquisadora: Muito bem!

Imagem 37 – Justificativa do grupo G4 em relação à alternativa D da tarefa 2

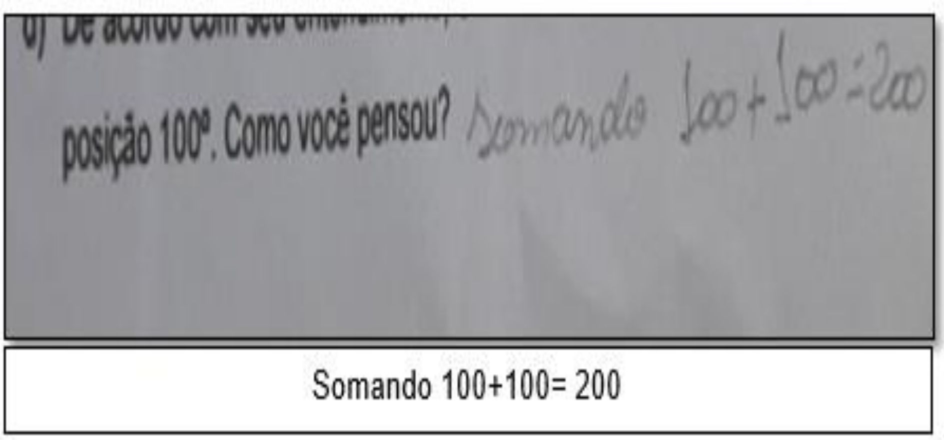


Foto: da autora, 2019

O grupo G4 não teve dificuldade para descobrir que, na 100ª posição, seriam 200 azulejos, pois usou a relação entre as variáveis posição e quantidade de azulejos: "É só somar duas vezes o cem" (G4A3). Por meio dessa generalização foi possível encontrar a quantidade de azulejos em qualquer posição.

- **Síntese da tarefa 2**

Os grupos G1, G2, G3, G4 justificaram suas descobertas de múltiplas maneiras e a maioria apresentou evidências claras do pensamento funcional. Cada grupo conseguiu observar regularidades no padrão de crescimento da sequência (do particular para o geral), além disso, identificaram relações entre as variáveis correspondentes à posição e à quantidade de azulejos.

As manifestações do pensamento funcional foram analisadas de acordo com o domínio 1, já mencionado na página 47 e apresentado no quadro 5:

Quadro 5 – Análise do nível de pensamento funcional da tarefa 2

	GRUPO E ALTERNATIVAS DA TAREFA																
NÍVEIS	G1				G2				G3				G4				TOTAL
	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D	
NF	X																1
RR																	-
PF		x	X	X	x	X	X	x	x	x	x	X	x	x	x	x	15

Elaboração: da autora, 2019

De acordo com o quadro, somente o grupo G1 não manifestou o pensamento funcional na alternativa A, pois a justificativa apresentava somente o ritmo de crescimento da sequência de uma posição para outra: “Então vai ter oito azulejos na quarta posição” (G1A2), sem o estabelecimento da regra geral que indicasse a relação entre a posição e a quantidade de azulejos.

A partir da análise da resposta apresentada pelo grupo buscou-se retornar um *feedback* da pesquisadora que contribuísse para a reflexão de novas possibilidades relacionadas ao crescimento da sequência: “É possível perceber outra relação que justifique o crescimento da sequência?”. Apesar da tentativa, continuava a prevalecer o crescimento rítmico da sequência: “Sempre acrescenta dois azulejos de uma posição para outra” (G1A1).

O grupo G1 conseguiu pensar em novas possibilidades ao preencher o quadro da alternativa B, que solicitava explicitamente as relações entre a posição e a quantidade de azulejos. O grupo percebeu que a quantidade de azulejos estava diretamente ligada à posição ocupada, ou seja, ao somar duas vezes o valor posicional da sequência era possível descobrir a quantidade de azulejos pertencentes a essa posição: “Tem o número dá posição, aí a gente repete esse número e soma com ele mesmo, aí vai ser igual à quantidade de azulejos” (G1A4).

A partir dessa descoberta, o grupo generalizou para todos os casos na sequência e usou a regra estabelecida para justificar as alternativas C e D.

Os grupos G2, G3 e G4 manifestaram o pensamento funcional em todas as alternativas da tarefa por meio de justificativas que apresentavam o estabelecimento de relações entre a posição e a quantidade de azulejos.

Nessa perspectiva, o grupo G2 estabeleceu duas regras para encontrar a quantidade de azulejos na sequência. A primeira regra foi estabelecida na alternativa A: "Está dobrando a posição anterior e soma mais dois, então vai ser oito porque na posição 3, a gente dobra [4] e dá seis, aí a gente repete seis e acrescenta mais dois azulejos" (G2A4), de acordo com a justificativa, o grupo observou a relação de interdependência entre os termos, ou seja, para descobrir a quantidade de azulejos em qualquer posição era necessário multiplicar por dois o valor posicional do termo anterior e o valor resultante somar com dois (n. anterior x 2)+2. Pensar nesse tipo de relação, segundo Ponte, Branco e Matos (2009, p. 42), é considerar que "Cada termo na sequência depende do termo anterior e da sua posição na sequência".

A segunda regra estabelecida pelo grupo G2 ocorreu durante a resolução da alternativa B. Ao preencher o quadro, o grupo descobriu que, para encontrar a quantidade de azulejos em qualquer posição, era necessário multiplicar o valor posicional por dois: "É multiplicar por dois" (G2A1). O grupo generalizou essa regra para encontrar qualquer termo na sequência e a usou para justificar as alternativas C e D.

O grupo G3 estabeleceu duas maneiras diferentes para encontrar a quantidade de azulejos em qualquer posição da sequência. A primeira foi na alternativa A, por meio da soma: "A gente foi somando o número um da posição 1 com ele mesmo, o número dois da posição 2 com ele mesmo, o número três da posição 3 com ele mesmo e o quatro da posição 4 com ele mesmo e foi dando o número de azulejos" (G3A1). A segunda foi por meio da multiplicação: "Multiplica os números da posição por dois e o resultado é o número dos azulejos" (G3A2), utilizada para justificar as alternativas B, C e D.

[4] Para o grupo "dobrar" tem o sentido de multiplicar por dois.

O grupo G4 estabeleceu uma regra geral para encontrar a quantidade de azulejos por meio da adição: “Somar duas vezes a posição para encontrar ***a*** quantidade dos azulejos” (G4A3). A relação estabelecida entre a posição e a quantidade de azulejos foi utilizada para justificar todas as alternativas da tarefa.

A escolha da tarefa 2 foi relevante e assertiva para o desenvolvimento do pensamento funcional, já que das 16 justificativas apresentadas pelos grupos, 15 expressaram a manifestação do pensamento funcional, ou seja, quase 100% de aproveitamento.

3.3 TAREFA 3 – PENSE EM UM NÚMERO

A tarefa 3 tinha como objetivo explorar regularidades numéricas para que os alunos reconhecessem, ainda que intuitivamente, propriedades das operações e/ou relações entre as operações. Nesse sentido, pretendia-se que os alunos reconhecessem a existência dessas relações e enunciassem em linguagem natural, de acordo com seu entendimento.

Imagem 38 – Tarefa 3

Tarefa 3 – Pensa em um número

1) Joana e Marcos estão brincando de calcular e para desafiar Marcos, Joana fez a seguinte pergunta:

a) Marcos pensou no número 7. Descubra qual foi o resultado encontrado por Marcos e em seguida escreva como você pensou.

Foto: da autora, 2019

A tarefa 3 foi denominada de *Pensa em um número* e foi realizada no terceiro encontro com a turma, que ocorreu em uma manhã de terça-feira, com a presença de 23 alunos. Ao chegar à sala de aula, os alunos foram organizados em pequenos grupos, em seguida, foi feita a apresentação dos objetivos da aula. Após esse primeiro momento, cada grupo recebeu uma cópia da tarefa e foi iniciada a leitura e exploração. A seguir apresentam-se os principais momentos da realização da tarefa.

3.3.1 Questão 1 – Alternativa A – Grupo G1

Marcos pensou no número 7. Descubra qual foi o resultado encontrado por Marcos e em seguida escreva como você pensou

Inicialmente, o grupo G1 resolveu a questão por meio da subtração e não da adição, como solicitava a alternativa:

G1A1: A continha é de mais ou de menos?
G1A2: É de menos, temos que subtrair os números.
G1A3: A gente **subtrai o dez menos sete que o Marcos pensou e dá três, depois a gente repete o dez e subtrai pelo resultado três e vai dar sete.**
Pesquisadora: O que vocês concluem dessa resolução?
G1A4: **Quando a gente subtraiu o número dez menos sete (10-7), a gente pega o resultado três (3) e subtrai pelo mesmo número dez (10-3), o resultado vai ser sete, que foi o número que a gente subtraiu a primeira vez.**
Pesquisadora: Muito bem, mas observem: quais as operações matemáticas que Joana está perguntando para Marcos?
G1A4: É de soma e subtração.
Pesquisadora: Muito bem! Quais operações vocês realizaram?
G1A4: Nossa! Fizemos só de subtração, esquecemos da soma.
Pesquisadora: Leiam novamente a questão.
G1A1: Joana pediu para Marcos pensar em um número, **ele pensou no sete**.
G1A3: Ela disse pra ele pensar em um número, depois subtrair por dez e depois somar por dez.
Pesquisadora: Muito bem, então vamos pensar nessa solução?
G1A3: **Se o Marcos pensou no sete, primeiro tem que somar com dez. Dez mais sete é 17 e 17 menos sete é sete (10+7=17; 17-10= 7).**
Pesquisadora: O que vocês concluem em relação esse resultado?
G1A2: **Quando soma e depois tira o mesmo número, o resultado é o número que Marcos pensou.**
Pesquisadora: Isso acontece em outros casos?
G1A3: Eu acho que acontece.
G1A3: Vamos testar.
G1A2: Pode ser o nove?
G1A3: Quero fazer por seis.
G1A4: **Pode ser todos os números.**
G1A2: **Por nove, vai ficar dez mais nove é igual a 19, tira dez e volta para o nove.**
G1A1: **Por seis vai ser da mesma maneira. Vai ficar dez mais seis, que é 16, depois tira dez e vai ficar o mesmo número seis.**
G1A4: Vamos fazer por cinco!
G1A3: **Vai ficar dez mais cinco, 15 e depois subtrai dez e vai ser cinco.**
G1A1: Vamos fazer por sete.
G1A2: **Sete mais dez são 17 e 17 menos dez é sete.**
Pesquisadora: O que vocês concluem?
G1A3: **Quando a gente pensa um número e soma com outro número e depois tira esse número, o resultado vai ser sempre o número que a gente pensou primeiro.**

Imagem 39 – Justificativa do grupo G1 em relação à alternativa B da tarefa 3

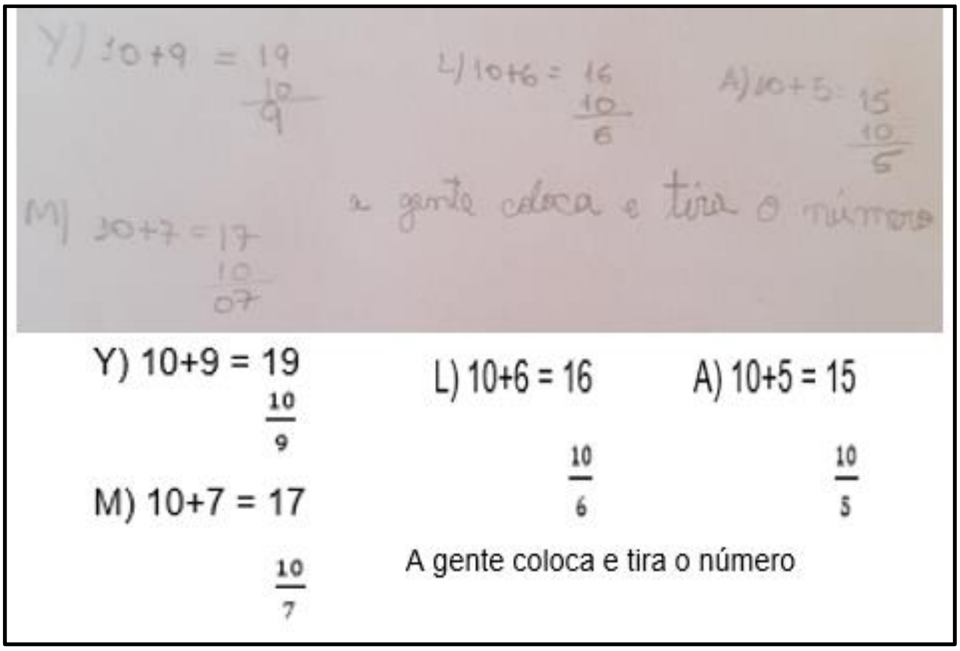


Foto: da autora, 2019

O grupo G1 reconheceu a existência de relações entre as operações e usou exemplos para além dos casos particulares, evidenciando generalização. Além disso, o grupo indicou, em linguagem natural, a propriedade das operações inversas de soma e subtração: “Quando a gente pensa um número e soma com outro número e depois tira esse número, o resultado vai ser sempre o número que a gente pensou primeiro” (G1A3).

3.3.2 Questão 1 – Alternativa A – Grupo G2

Marcos pensou no número 7. Descubra qual foi o resultado encontrado por Marcos e em seguida escreva como você pensou

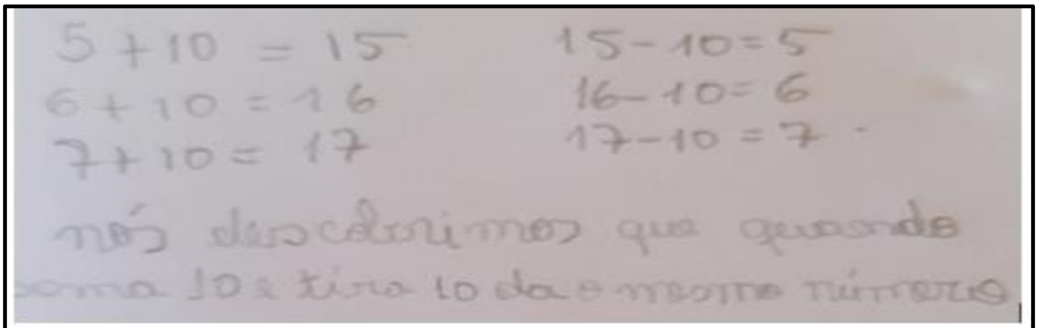
O grupo G2 estava em dúvida como resolver a questão e, por meio das discussões com os membros do grupo, foi possível chegar a um consenso:

G2A1: Temos que pensar em um número?
G2A2: Não, é para colocar o número que o Marcos pensou.
G2A3: Ele pensou no sete.
G2A1: Adicionar é somar ou subtrair?
G2A4: É somar. A gente vai **somar sete mais dez.**
G2A1: Dez mais sete é igual a 17.
G2A4: A questão diz que é para subtrair, é de menos.
G2A2: Vamos subtrair 17 menos dez e vai dar sete.
Pesquisadora: De acordo com o resultado, o que vocês concluem?
G2A4: Vai ser **o mesmo número que o Marcos pensou.**

Pesquisadora: Como vocês justificam essa descoberta?

G2A4: **A gente somou o dez mais sete e deu 17 e depois a gente tirou dez e ficou sete.**
G2A3: **Foi colocado e tirado o dez e voltou para o sete. Quando soma e depois tira o mesmo número volta para o número pensado primeiro.**
Pesquisadora: Experimente com outros números.
G2A1: **Vamos primeiro pensar nos números, depois somar com dez.**
G2A2: Podemos fazer com os números 5, 6 e 7?
G2A3: Primeiro com cinco.
G2A4: **Cinco mais dez é 15, 15 menos dez é cinco.**
G2A1: Agora o número seis.
G2A3: **Seis mais dez é 16, 16 menos dez é seis.**
G2A4: **Por sete, vai ficar sete mais dez, igual a 17 e 17 menos dez é sete.**
G2A2: **Todos os números que a gente somou por dez e depois subtraiu por dez, deu o primeiro número que a gente tinha escolhido antes.**

Imagem 40 – Justificativa do grupo G2 em relação à alternativa B da tarefa 3



5+10 = 15	15-10 = 5
6+10 = 16	16 -10 = 6
7+10 =17	17- 10 = 7

Nós descobrimos que quando soma 10 e tira 10 dá o mesmo número.

Foto: da autora, 2019

O grupo G2 seguiu as orientações do comando da questão, primeiro fez a soma 7+10=17, logo após subtraiu 17-7=7, em seguida experimentou fazer outras operações com números diferentes. O grupo percebeu a relação existente entre as operações e estabeleceu, por meio da generalização, uma regra geral para indicar a propriedade inversa das operações: “Foi colocado e tirado o dez e voltou para o sete. Quando soma e depois tira o mesmo número volta para o número pensado primeiro” (G2A3).

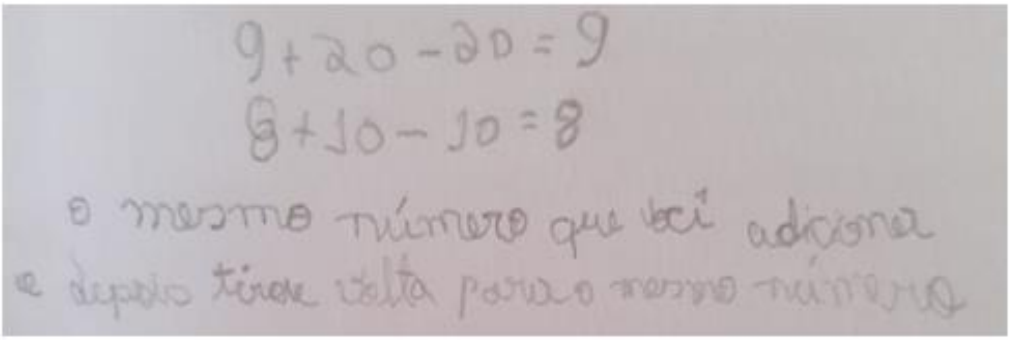
3.3.3 Questão 1 – Alternativa A – Grupo G3

Marcos pensou no número 7. Descubra qual foi o resultado encontrado por Marcos e em seguida escreva como você pensou

O grupo G3 realizou as operações seguindo o comando da questão:

G3A1**: Sete mais dez é igual a 17, 17 menos dez é sete.**
G3A2: **Voltou para o número que Marcos tinha pensado.**
Pesquisadora: Qual a compreensão que vocês tiveram?
G3A3: **Quando a gente pensa em um número e soma com dez, o resultado menos o dez vai dar o número inicial que a gente tinha pensado.**
Pesquisadora: Essa relação só é válida quando somamos e subtraímos por dez?
G3A4: Não, professora!
G3A5: **A gente pode fazer com oito, vinte, quatro, por qualquer número.**
G3A1: A gente pode fazer com 20 e somar com nove e depois tira 20.
G3A2: **Então vai ficar nove mais 20 menos 20, que é igual a nove**.
G3A3: **Não é preciso fazer as contas porque quando a gente soma e subtrai o mesmo número vai dar zero e volta para o número que a gente pensou.**
G3A4: **Então se a gente fizer com oito mais dez e depois subtrair, vai dar oito, porque coloca e tira o dez?**
G3A5: **Isso, eles são números contrários um é de mais e o outro é de menos.**

Imagem 41 – Justificativa do grupo G3 em relação à alternativa B da tarefa 3



9+20-20= 9

8+10-10=8

O mesmo número que você adiciona e depois tirou volta para o mesmo número

Foto: da autora, 2019

O grupo G3 reconheceu a existência de relações numéricas: "Quando a gente pensa em um número e soma com dez, o resultado menos o dez vai dá o número inicial que a gente tinha pensado" (G3A3). O grupo evidenciou que essa relação não acontece somente nos casos particulares: "A gente pode fazer com oito, vinte, quatro, por qualquer número" (G3A5).

O grupo reconheceu a existência da relação entre as operações: "Isso, eles são números contrários um é de mais e outro é de menos" (G3A5). Além disso, evidenciou em linguagem natural a ideia de operações inversas: “Não é preciso fazer as contas porque quando a gente soma e subtrai o mesmo número vai dar zero e volta para o número que a gente pensou” (G3A3).

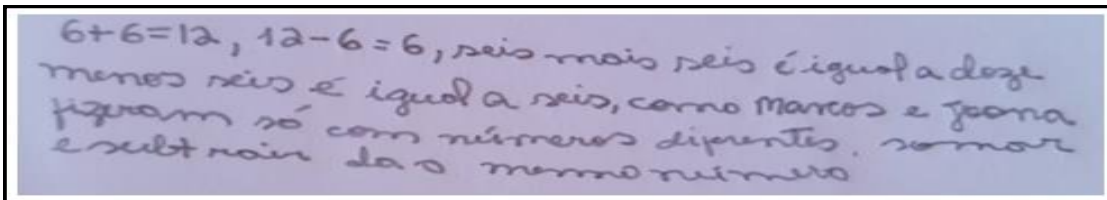
3.3.4 Questão 1 – Alternativa A – Grupo G4

Marcos pensou no número 7. Descubra qual foi o resultado encontrado por Marcos e em seguida escreva como você pensou

O grupo G4 discutiu estratégias para resolver a questão:

G4A1: **Primeiro vamos somar dez depois tirar o dez.**
G4A2: Como vai ficar?
G4A3: **Vai ficar sete mais dez igual a 17 e subtrai dez de 17 e vai ficar sete, o mesmo número que Marcos tinha pensado.**
Pesquisadora: De acordo com esse resultado, o que vocês concluem?
G4A4: **Se somar e subtrair o mesmo número vai dar o primeiro número pensado.**
Pesquisadora: É só neste caso que isso acontece?
G4A5: Pode ser feito com **qualquer número.**
Pesquisadora: Podem exemplificar:
G4A2: Sim!
G4A3: Então vamos fazer por seis?
G4A4: Olha só como é fácil. **Vai ficar seis mais seis igual a 12, 12 menos seis igual a seis**.
G4A5: **Voltou para o seis, o número que a gente pensou primeiro.**
Pesquisadora: O que vocês descobriram?
G4A2: Quando a gente **soma e subtrai pelo mesmo número dá zero**.
Pesquisadora: Por que vai ser zero?
G4A2: **É zero, porque seis menos seis é zero, a gente soma o seis e depois tira o seis.**

Imagem 42 – Justificativa do grupo G4 em relação à alternativa B da tarefa 3



6+6 = 12, 12-6=6, seis mais seis é igual a doze menos seis é igual a seis, como Marcos e Joana fizeram só com números doferentes, somar e subtrair dá o mesmo número.

Foto: da autora, 2019

O grupo G4 segue o comando da questão, primeiro faz a soma (7+10 = 17), em seguida subtrai o resultado (17-10 = 7). É explícita a percepção da relação entre as operações inversas: “Se somar e subtrair o mesmo número vai dar o primeiro número pensado” (G4A4), e a generalização para outros casos: “Pode ser feito com qualquer número” (G4A5). Além disso, o grupo definiu uma regra geral como justificativa: “Quando a gente soma e subtrai pelo mesmo número dá zero” (G4A2), do caso particular para o geral.

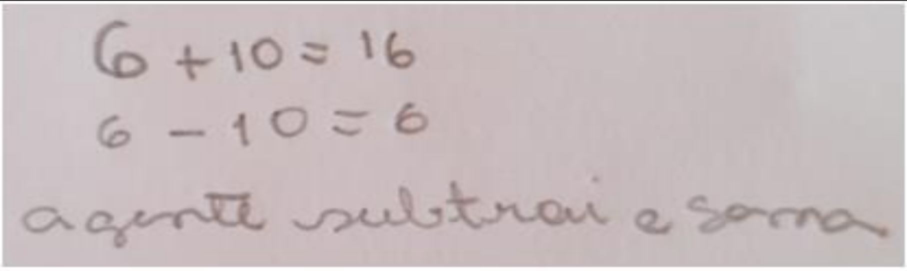
3.3.5 Questão 1 – Alternativa A – Grupo G5

Marcos pensou no número 7. Descubra qual foi o resultado encontrado por Marcos e em seguida escreva como você pensou

O grupo G5 realizou as operações conforme o comando da questão:

G5A1: Vamos seguir a brincadeira de Marcos.
G5A2: Marcos pensou no **sete** e depois **somou com dez,** quanto vai ser?
G5A3: É 17.
G5A4: Agora é pra **tirar dez**.
G5A3: Vai ser **sete**.
Pesquisadora: O que vocês compreenderam?
G5A2: **Foi somado e subtraído pelo mesmo número e eles desapareceram, ficou só o sete.**
Pesquisadora**:** Como desapareceram?
G5A3: **Porque deu zero.**
Pesquisadora: Pode ser feito com outros números?
G5A2: Pode, vamos fazer com seis.
Pesquisadora: Como vai ficar?
G5A4: **Com seis vai ficar seis mais dez que é 16 e depois a gente tira o dez e fica seis**.

Imagem 43 – Justificativa do grupo G5 em relação à alternativa B da tarefa 3



6+10 =16

6-10= 6

A gente subtrai e soma.

Foto: da autora, 2019

O grupo G5 chegou à conclusão que na soma 7+10 e na subtração (7-10), o resultado dessa operação daria sete, para além desse resultado, o grupo concluiu que ao somar sete com dez e, em seguida, subtrair por dez, o resultado seria zero. Ele reconheceu a relação existente entre as operações, tanto que experimentou fazer com outros números: “Com seis vai ficar seis mais dez que é 16 e depois a gente tira o dez e fica seis” (G5A4), os alunos definiram uma regra geral condizente com as operações inversas: “Foi somado e subtraído pelo mesmo número e eles desapareceram, ficou só o sete” (G5A2), reconhecendo que, ao somar e subtrair o mesmo número, o resultado seria zero.

- **Síntese da tarefa 3**

Na tarefa 3 todos os grupos (G1, G2, G3, G4, G5) manifestaram, em linguagem natural, a compreensão relacional das operações aritméticas. As manifestações foram analisadas de acordo com os níveis de pensamento relacional (Quadro 6).

Quadro 6 – Análise do nível de pensamento relacional da tarefa 3

	GRUPOS E QUESTÕES					
Níveis	**G1**	**G2**	**G3**	**G4**	**G5**	**TOTAL**
	A	A	A	A	A	
NR						0
EP						0
R	X	X	X	X	X	5

Foto: da autora, 2019

O grupo G1 inicialmente não seguiu as orientações da alternativa (Pensa em um número. Adiciona 10. Agora subtrai 10), pois ficou em dúvida se iniciava a resolução da questão pela soma ou pela subtração. Quando fez a escolha, optou pela subtração, chegando ao seguinte resultado: “Quando a gente subtraiu o número dez menos sete, a gente pega o resultado, três, e subtrai pelo mesmo número (10-3), o resultado vai ser sete, que foi o número que a gente subtraiu a primeira vez” (G1A4). O caminho de resolução escolhido pelo grupo conduziu à percepção das relações entre as operações.

A justificativa apresentada foi pertinente, mas era necessário propor ao grupo a retomada da leitura da tarefa para que fossem observadas novas relações com as operações de soma e subtração: “Muito bem, mas observem... Quais as operações matemáticas que Joana está perguntando para Marcos?”. O *feedback* contribuiu para que os membros da equipe avaliassem o que estava sendo feito na alternativa e o que deveria ser feito: “Nossa! Fizemos só de subtração, esquecemos da soma” (G1A4).

O grupo G1 realizou as operações conforme solicitado na alternativa “Se o Marcos pensou no sete, primeiro tem que somar com dez. Dez mais sete é 17 e 17 menos sete é sete” (G1A3), chegando à seguinte percepção relacional: “Quando a gente pensa um número e soma com outro número e depois tira esse número, o resultado vai ser sempre o número que a gente pensou primeiro", ou seja, "um número x somado com um número y menos o número y, terá como resultado x (x+y-y=x)" (G1A3).

O grupo G2 seguiu as orientações da questão e chegou ao seguinte resultado: "A gente somou o dez mais sete e deu 17 e depois a gente tirou dez e ficou sete" (G2A4). Nesse sentido, o grupo observou a relação entre operações com números opostos: "Foi colocado e tirado o dez e voltou para o sete. Quando soma e depois tira o mesmo número volta para o número pensado primeiro" (G2A3).

O grupo G2 generalizou para outros casos e experimentou fazer as operações com os números cinco e seis e chegou à conclusão de que a relação encontrada era válida para outros casos: "Cinco mais dez é 15, 15 menos dez é cinco (G2A4), já G2A3 pensou: "Seis mais dez é 16, 16 menos dez é seis", a conclusão proposta por G2A2 foi de que: "Todos os números que a gente somou por dez e depois subtraiu por dez deu o primeiro número que a gente tinha escolhido antes".

O grupo G3 seguiu as orientações da alternativa e realizou as operações de soma e subtração: "Sete mais dez é igual a 17, 17 menos dez é sete" (G3A1), após os cálculos, o grupo observou que o resultado foi o número inicialmente pensado por Marcos, o personagem do problema: "Voltou para o número que Marcos tinha pensado" (G3A2).

Em seguida, o grupo deveria expor seu entendimento em relação às operações realizadas. A resposta apresentada foi de que "Quando a gente pensa em um número e soma com dez, o resultado menos o dez vai dar o número inicial que a gente tinha pensado" (G3A3), demonstrando a percepção da relação entre as operações, pois o grupo generalizou para outros casos e concluiu que "Não é preciso fazer as contas porque quando a gente soma e subtrai o mesmo número vai dá zero e volta para o número que a gente pensou" (G3A3), ou seja, o grupo identificou que as operações com números opostos, como 10-10, o resultado é zero, e a soma de qualquer número com o zero não influencia a soma.

O grupo G4 observou a relação existente entre a soma e a subtração de números opostos por meio da resolução das operações e chegou à conclusão que ao somar e subtrair o número dez, o resultado seria o número sete, pensado inicialmente por Marcos: “Vai ficar sete mais dez igual a 17 e subtrai dez de 17 e vai ficar sete, o mesmo número que Marcos tinha pensado” (G4A3).

A partir do resultado, o grupo percebeu a relação existente entre as operações aritméticas e, em linguagem natural, buscou definir uma regra válida para os casos apresentados: **“**Se somar e subtrair o mesmo número vai dar o primeiro número pensado” (G4A4), pois “Quando a gente soma e subtrai pelo mesmo número dá zero” (G4A2). De acordo com o pensamento relacional das operações realizadas, o grupo experimentou fazer com o número seis e descobriu a validade das relações encontradas.

O grupo G5 seguiu as orientações apresentadas na questão e realizou a soma de sete mais dez, em seguida, subtraiu dez do resultado. O grupo concluiu que somar números opostos não altera a soma: “Foi somado e subtraído pelo mesmo número e eles desapareceram, ficou só o sete” (G5A2), ou seja, o significado da palavra “desapareceram” é entendido como o número zero resultante da operação de dez menos dez.

As descobertas apresentadas pelos grupos evidenciaram o reconhecimento da relação entre as operações aritméticas resultantes do pensamento relacional em que foram destacadas a propriedade dos números opostos e a propriedade da soma. Nessa perspectiva, a manifestação do pensamento relacional entre os grupos chegou a 100%.

3.4 TAREFA 4 – DESVENDANDO IGUALDADES

A tarefa 4 intitulada *Desvendando igualdades* tinha por objetivo trabalhar com expressões aritméticas com foco nas relações de equivalência do sinal de igualdade e não somente nos cálculos e respostas. Para que os grupos tivessem sucesso com a exploração da tarefa era necessário compreender o sentido relacional do sinal de igualdade, que geralmente é concebido como indicador de uma operação e não como uma relação de equivalência. Assim, os alunos poderiam explorar a tarefa para perceber que, nas expressões numéricas, os termos à direita e à esquerda do sinal de igualdade não eram os mesmos, porém, representavam sua equivalência.

Imagem 44 – Tarefa 4

Tarefa 4 – Desvendando igualdades

1) Carlos faz aniversário dia 19 de setembro e está em dúvida se será em uma quinta ou em uma sexta feira e para ter certeza ele pegou um calendário e descobriu que seu aniversário será na quinta feira. Essa não foi a única descoberta feita por Carlos, pois ele observou que se adicionar os números da linha e da coluna conforme destacamos abaixo obterá o mesmo valor.

a) Carlos considera que 12+19+26 = 18+19+20. Será que essa descoberta de Carlos é verdadeira? Justifique sua resposta.

Foto: da autora, 2019

A tarefa 4 foi realizada no 4º encontro, após a organização dos grupos, foram entregues as tarefas e iniciou-se a leitura coletiva. Durante a leitura, os alunos tiveram dificuldades para entender o significado das palavras “Desvendando” e “Igualdades”, para esclarecer, foi feita uma pausa na leitura da tarefa, retomando-a após todas as dúvidas esclarecidas.

Os grupos ficaram atentos durante a explicação de como e o que deveria ser feito. Logo após esse primeiro momento, os grupos iniciaram o desenvolvimento da tarefa, vale ressaltar que cada grupo mobilizou conhecimentos importantes para o desenvolvimento do pensamento relacional. A seguir serão apresentadas as estratégias e análises das resoluções dos grupos.

3.4.1 Questão 1 – Alternativa A – Grupo 1

Carlos considera que 12+19+26 = 18+19+20. Será que essa descoberta de Carlos é verdadeira? Justifique sua resposta.

O grupo iniciou os diálogos para encontrar a solução para a alternativa com os seguintes diálogos:

Pesquisadora: Vocês consideram que 12+19+26 é igual á 18+19+20?

G1A1: **Não, esses números aí são diferentes.**

Pesquisadora: De acordo com o enunciado da questão. Qual foi a descoberta feita por Carlos?

G1A2: Carlos somou os números que estão marcados no calendário e **deu o mesmo resultado.**

Pesquisadora: Será que Carlos tem razão?

G1A2: **Sim, porque quando a gente soma dá o mesmo resultado 57.**

Pesquisadora: Qual o entendimento que vocês tiveram em relação ao sinal de igualdade?

G1A4: 57= 57, **o sinal de igual diz que as respostas são iguais.**

Imagem 45 – Justificativa do grupo G1 em relação à alternativa A da tarefa 4

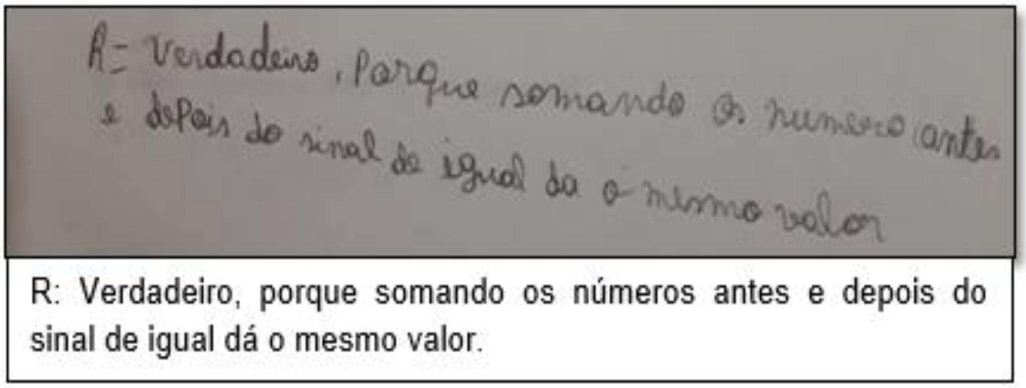


Foto: da autora, 2019

O grupo G1 constatou que a soma dos números destacados no calendário 12+19+26 = 18+19+20 representava o mesmo valor: 57, dessa maneira, 57 = 57.

O grupo centrou-se nos procedimentos de cálculos, sendo questionado pela pesquisadora: “Qual o entendimento que vocês tiveram em relação ao sinal de igual?” e a resposta demonstrou que não houve a compreensão relacional: “Verdadeiro, porque somando os números antes e depois do sinal de igual dá o mesmo valor”.

3.4.2 Questão 1 – Alternativa A – Grupo G2

Carlos considera que 12+19+26 = 18+19+20. Será que essa descoberta de Carlos é verdadeira? Justifique sua resposta.

O grupo G2 inicialmente pensou em somar separadamente ambos os lados da igualdade:

G2A1: A gente vai somar esses números desse lado e depois do outro para descobrir se **antes e depois do igual é o mesmo número.**

G2A2: **Vai dar 57 de um lado e 57 do outro**.

Pesquisadora: O que vocês descobriram além desse resultado?

G2A3: **A gente descobriu que esse sinal de igualdade também é para dizer que o número antes e depois são iguais.**

Pesquisadora: Se **antes do sinal de igualdade fosse oito**, por exemplo, **qual seria o número depois do sinal de igualdade?**

G2A4: É **oito**.

Pesquisadora: O que vocês compreendem ser o mais importante nessas situações em relação ao sinal de igual?

G2A2: **Antes eu pensava que era só para dar uma resposta da conta, mas agora entendi que serve para dizer que o número antes do sinal é igual ao outro depois do sinal.**

O grupo G2 percebeu que o sinal de igualdade está além da "indicação de uma conta a ser feita", o grupo reconheceu o sentido relacional: "Antes eu pensava que era só para dar uma resposta da conta, mas agora entendi que serve para dizer que o número antes do sinal é igual ao outro depois do sinal" (G2A2). O significado do sinal de igualdade passou a representar para o grupo como uma regra válida para outros casos gerais: "A gente descobriu que esse sinal de igualdade também é pra dizer que o número antes e depois são iguais" (G2A3).

3.4.3 Questão 1 – Alternativa A – Grupo 3

Carlos considera que 12+19+26 = 18+19+20. Será que essa descoberta de Carlos é verdadeira? Justifique sua resposta.

O grupo G3 relatou que não estava compreendendo a formação da expressão 12+19+26=18+19+20, principalmente pelos números 18+19+20, que estavam depois do sinal de igualdade:

G3A1: Por que tem esses números aqui no lugar da resposta? [Aluno faz referência ao lado direito da igualdade].

G3A2: Eu também não estou entendendo.

G3A3: Mas aqui está dizendo que Carlos somou esses números de um lado e do outro e deu igual.

G3A4: Vamos resolver para ver no que vai dar.

G3A5: Primeiro, vamos somar esses números 12+19+26 e depois 18+19+20. [Alunos resolvendo as adições]

G3A1: Olha aqui vai ser 57 a soma do 12, 19 e 26.

G3A5: Esse outro lado também vai ser 57 [Aluno está se referindo à soma 20+19+18].

G3A1: Professora, a gente somou os números e deu 57 de cada lado do igual.

Pesquisadora: O que o sinal de igualdade representa para vocês?

G3G2: **Pra dar a resposta.**

Pesquisadora: É só esse o sentido do sinal de igualdade?

G3A4: Sim, porque o resultado foi 57 dos dois lados.

Imagem 46 – Justificativa do grupo G3

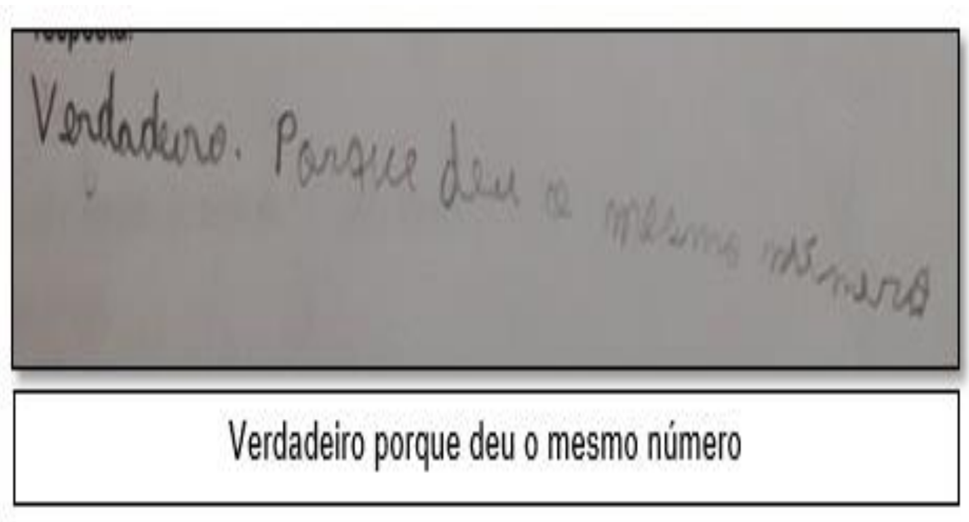


Foto: da autora, 2019

O grupo G3 centrou-se nos procedimentos aritméticos e compreendeu o sinal de igualdade como "a indicação de uma conta a ser feita", conforme verificado na fala de um dos membros do grupo: "Para dar a resposta" (G3G2), logo, o grupo não reconheceu o sentido relacional do sinal de igualdade.

3.4.4 Questão 1 – Alternativa A – Grupo G4

Carlos considera que 12+19+26 = 18+19+20. Será que essa descoberta de Carlos é verdadeira? Justifique sua resposta.

O grupo G4 chegou à conclusão que deveria somar separadamente os números de ambos os lados da igualdade a fim de verificar se tinham ou não o mesmo resultado.

G4A1: Vamos somar os números para saber se Carlos tem razão? Eu vou somar os números antes do sinal de igual 12+19+26, façam o outro lado. [Após alguns minutos].
G4A2: Somei os números 12+19+26 e deu 57.
G4A3: Os números 18+19+20 também deu 57.
Pesquisadora: O que isso representa?
G4A4: **Os dois lados são iguais, 57 é igual a 57, Carlos tem razão.**
Pesquisadora: Qual a compreensão que vocês têm em relação ao sinal de igualdade?
G4A5: **É pra dizer que os números que estão antes e depois do igual são os mesmos.**

Imagem 47 – Justificativa apresentada pelo grupo G4

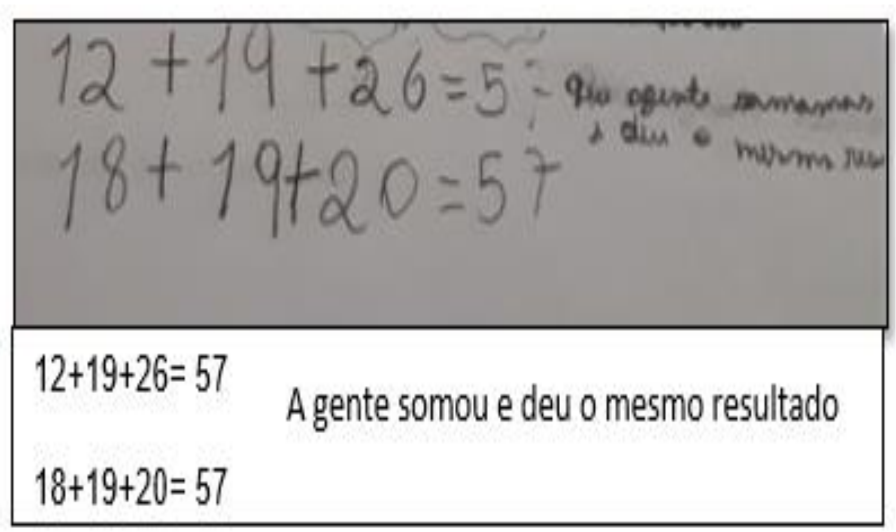


Foto: da autora, 2019

O grupo G4, após realizar as adições, chegou à conclusão que Carlos tinha razão, pois ambos os resultados eram iguais: “Os dois lados são iguais, 57=57, Carlos tem razão” (G4A4). Nesse sentido, o grupo reconheceu a existência de uma relação de equivalência do sinal de igualdade e a generalizaram, afirmando que “É para dizer que os números que estão antes e depois do igual são os mesmos” (G4A5).

3.4.5 Questão 1 – Alternativa A – Grupo G5

Carlos considera que 12+19+26 = 18+19+20. Será que essa descoberta de Carlos é verdadeira? Justifique sua resposta.

O grupo G5 articulou como resolver a alternativa:

G5A1: **Vamos somar todos esses números, pra ver se Carlos tem razão.**

G5A2: Eu já fiz, ele tem razão, dá 57 dos dois lados.

Pesquisadora: O que vocês compreendem em relação ao sinal de igualdade?

G5A3: **É para dizer que um número é igual ao outro, como esse aqui: 57=57.**

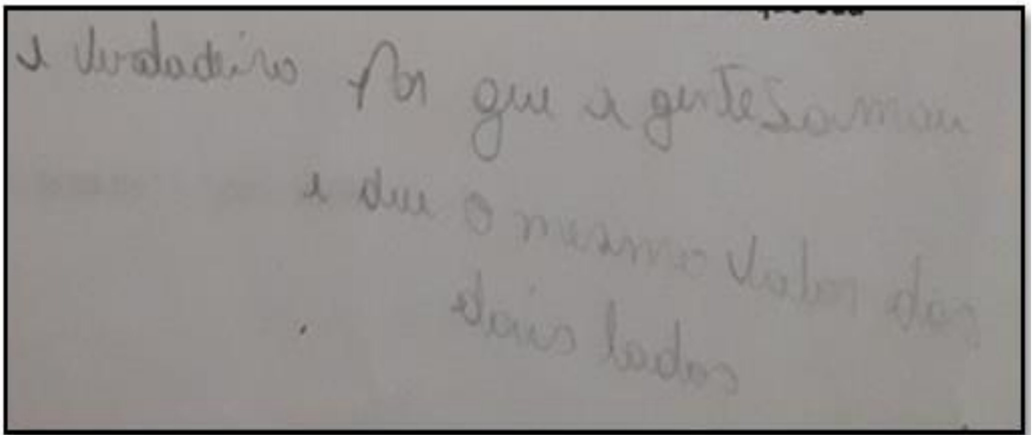
Pesquisadora: Isso é válido para outros casos?

G5A4: **Sim, sempre que a gente quiser dizer que um número é igual a outro.**

Pesquisadora: Podem dizer um exemplo?

G5A5: **Sim , por exemplo três é igual a três, antes e depois do sinal de igualdade é o mesmo número.**

Imagem 48 – Justificativa do grupo G5



É verdadeiro porque a gente somou e deu o mesmo valor dos dois lados.

Foto: da autora, 2019

O grupo G5 reconheceu o sentido relacional do sinal de igualdade: “É para dizer que um número é igual ao outro, como esse aqui 57=57” (G5A3), além disso, o grupo generalizou para outros casos: “Sim, por exemplo, três é igual a três, antes e depois do sinal de igualdade é o mesmo número” (G5A5).

- **Síntese da tarefa 4**

Os grupos G1, G2, G3, G4, G5 evidenciaram relações entre variáveis que foram analisadas de acordo com o nível de pensamento relacional.

Quadro 7 – Análise do nível de pensamento relacional da tarefa 4

	GRUPOS E QUESTÕES										
NÍVEIS	G1		G2		G3		G4		G5		TOTAL
	A		A		A		A		A		
NR	X				X						2
EP											0
R			X				X		X		3

Elaboração: da autora, 2019

O grupo G1 manifestou não reconhecer a relação de equivalência do sinal de igualdade, pois ao ser perguntado sobre a equivalência entre as expressões numéricas, antes e depois do sinal de igualdade, o grupo fez a seguinte afirmativa: “Não, esses números aí são diferentes” (G1A1), somente após o *feedback* da pesquisadora: “De acordo com o enunciado da questão. Qual foi a descoberta feita por Carlos?” é que o grupo analisou a alternativa e pensou na estratégia de somar as expressões numéricas, chegando à conclusão de que os resultados de ambos os lados da igualdade era 57: “57=57, o sinal de igual diz que as respostas são iguais” (G1A4).

De acordo com a justificativa, o grupo reconheceu o sinal de igualdade como a indicação de uma operação a ser feita, sem reconhecer explicitamente a relação de equivalência.

O grupo G2 somou separadamente as expressões que estavam antes e depois do sinal de igualdade e descobriu que o resultado era 57, diante da resposta, o grupo foi questionado a pensar outras possibilidades: “O que vocês descobriram além desse resultado?”. O *feedback* colaborou para o grupo refletir sobre o sinal de igualdade: “A gente descobriu que esse sinal de igualdade também é para dizer que o número antes e depois são iguais” (G2A3), ou seja, o sinal de igualdade passou a ser visto pelo pensamento relacional.

O grupo G3 tinha a ideia do sinal de igualdade como indicação para dar a resposta de uma operação, motivo de estranhamento ao ler a questão: “Por que tem esses números aqui no lugar da resposta?” (G3A1). Em seguida, o grupo chegou à conclusão de que deveria somar ambos os lados da igualdade: “Primeiro, vamos somar esses números 12+19+26 e depois 20+19+18” (G3A5).

Os alunos descobriram que, em ambos os lados da igualdade, o resultado era 57. Ao questionar sobre o significado que o sinal de igualdade passou a representar naquele momento, a resposta do grupo foi enfática: “Pra dar a resposta” (G3G2), nesse sentido, o grupo não encontrou a relação de equivalência do sinal de igualdade.

O grupo G4 somou os números que estavam antes e depois do sinal de igualdade, e chegou à conclusão que ambos os resultados eram 57. Questionado sobre o sentido do sinal de igualdade, o grupo apresentou a justificativa que manifestava o pensamento relacional: “É pra dizer que os números que estão antes e depois do igual são os mesmos” (G4A5).

Por meio da soma das expressões de ambos os lados da igualdade, o grupo G5 descobriu que o resultado era 57. Em relação ao sinal de igualdade, ele manifestou o pensamento relacional ao perceber a relação de equivalência entre os termos que estão antes e depois do sinal de igualdade. Com o objetivo de instigar o grupo foi feita a seguinte pergunta: “Isso é válido para outros casos?”. O grupo enfatizou que sim e exemplificou a relação de equivalência em outro caso: “Sim, por exemplo três é igual a três, antes e depois do sinal de igualdade é o mesmo número” (G5A5).

O objetivo da tarefa foi alcançado, pois 60% das justificativas apresentadas manifestaram o pensamento relacional.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A título de considerações finais apresentam-se aqui as reflexões obtidas durante o desenvolvimento dessa pesquisa como uma síntese sobre os modos como tarefas exploratório-investigativas de ensino-aprendizagem-avaliação potencializam o desenvolvimento do pensamento algébrico de crianças nos anos iniciais. Durante a condução da pesquisa foram elaboradas quatro tarefas, duas para o desenvolvimento do pensamento funcional e duas para o pensamento relacional, consideradas portas de entrada para o pensamento algébrico.

Neste tocante, estas tarefas foram o elemento principal da experiência de ensino com o intuito de se pensar a relação ensino-aprendizagem-avaliação nesta dissertação. Vale ressaltar o entusiasmo e o estranhamento com que os educandos as receberam, questionando a falta de "continhas" e da avaliação, o que, por meio de notas, mediria seu nível de acertos em cada tarefa.

É relevante enfatizar que na fase de exploração das tarefas, os educandos trabalharam em pequenos grupos para articular coletivamente estratégias de resolução e o papel da pesquisadora passou a ser menos central, pois era preciso observar o trabalho autônomo de cada grupo, principalmente, como interagiam e se organizavam para as resoluções. Assim, buscou-se desempenhar o papel de mediadora das aprendizagens, pois havia intenção de estimular as interações construtivas entre os grupos para que, no confronto de ideias, surgissem novas aprendizagens.

Nesta perspectiva, as tarefas mostraram-se pertinentes para verificar, na prática, a indissociabilidade entre ensino-aprendizagem-avaliação, pois foi possível experimentar esses três momentos de modo articulado no instante da aula, por meio da avaliação formativa para as aprendizagens, já que ela foi fundamental para observar o que de fato os grupos sabiam ou precisavam saber para melhorar as aprendizagens. Por isto, a avaliação deixou de ser um momento isolado de classificação ou certificação para assumir um novo significado, que buscou refletir os saberes, dúvidas e dificuldades dos educandos para direcionar os próximos passos.

No decorrer da experiência de ensino, os grupos descobriram diferentes estratégias para resolver as tarefas, pois o caminho percorrido em busca de resposta foi fruto de debates, investigações e experimentações. Como resultado do trabalho coletivo, todos chegaram a respostas coerentes de acordo com o solicitado. Vale ressaltar que, em nenhum momento, os educandos receberam *feedback* negativo, que desvalorizasse ou desqualificasse suas respostas e/ou ideias e, por essa razão, os grupos permaneceram motivados e seguros para expor suas percepções.

Conforme já referido anteriormente, a avaliação formativa busca conhecer o que os alunos sabem ou precisam saber para aprender melhor, para isso, as interações entre professor e aluno são constantes, os *feedbacks* são contínuos e direcionados para ativar a capacidade cognitiva dos educandos. Assim, eles são motivados a refletir e regular suas aprendizagens, pois o verdadeiro sentido do *feedback* de qualidade é encorajá-los a melhorar sua motivação e autoestima.

Desta forma, é oportuno que o feedback seja organizado, diversificado e bem-distribuído entre os alunos, no entanto, durante a experiência para esta pesquisa, surgiram dificuldades na distribuição do *feedback*, decorrente principalmente pela grande quantidade de alunos na turma foco desse estudo. O número de alunos em sala de aula provocou a formação de muitos grupos, dificultando o acompanhamento das equipes na mesma frequência, pois enquanto a pesquisadora acompanhava determinado grupo, outros se dispersavam com facilidade.

Assim, constatou-se que os grupos que receberam menos *feedback* tiveram maiores dificuldades para desenvolver o pensamento algébrico e os grupos que receberam mais *feedback* tiveram melhor desempenho.

Em relação às tarefas, houve inicialmente estranhamento por parte dos alunos, pois, com a ausência de números e de cálculos (operações básicas), eles não reconheciam as tarefas como parte da disciplina Matemática. Além disso, a ideia de justificar por meio da escrita como haviam pensado para resolver as tarefas, parecia ser impossível, pois segundo os relatos: “na Matemática não se escreve, se resolve continhas”. Por isso, foi um desafio desmistificar essas ideias e somente após a exploração das tarefas é que os grupos chegaram à conclusão de que Matemática não era somente números e operações, pois poderia estar relacionada, por exemplo, ao ato de pensar, refletir, explorar, levantar hipóteses, justificar e generalizar.

As tarefas mostraram-se propícias para serem trabalhadas nos anos iniciais, principalmente por impulsionar o espírito investigativo dos educandos, tão necessário para a Matemática desde sua origem até os dias atuais. Além disso, a inclusão desse tipo de atividade na turma apontou um caminho para a construção sólida do verdadeiro sentido da disciplina, ou seja, mostrou aos educandos que a Matemática é uma construção humana, fruto de investigações, tentativas, erros e acertos. E assim contribuiu para que o sentido dessa ciência estivesse além dos números e operações.

Além disso, a escolha de tarefas do tipo exploratório-investigativa foi relevante por serem abertas, sem uma única resposta, assim, os grupos sentiram-se livres para explorar e justificar de acordo com seu entendimento, sem o receio de errar, pois com esse tipo de tarefa não existe certo ou errado, todas as justificativas são ricas de informações e expressam o que o aluno sabe, portanto, o professor usa essa informação para direcionar sua prática de ensino em prol da melhoria das aprendizagens.

Assim, as tarefas abertas do tipo exploratório-investigativas estimularam o interesse dos educandos em desvendar o desconhecido e instigou a curiosidade de encontrar soluções justificáveis, pois a fonte de interesse não era somente “dar uma resposta” e sim justificar, por meio de palavras escritas ou faladas, como eles pensaram e chegaram à determinada solução.

Neste caminho, as tarefas exploratório-investigativas mostraram-se propícias para articular ensino-aprendizagem-avaliação, pois possibilitaram, nesta dissertação, avaliar o processo de construção das aprendizagens, por meio das justificativas apresentadas pelos grupos durante a prática de ensino, já que houve avaliação com objetivo de melhorar as aprendizagens, ensino de conceitos, por exemplo, de regularidades, de padrão de sequências, de relação de interdependência entre grandezas, de generalização de padrões e propriedades da igualdade; e a construção de novas aprendizagens.

Vale dizer que as tarefas puderam contribuir para o desenvolvimento do pensamento algébrico e proporcionar aos educandos a realização de abstrações, generalizações, a capacidade de resolver problemas com termos desconhecidos, estabelecer relações entre duas grandezas, temas que estão na base dos processos de modelagem matemática e da vida real.

Nesse sentido, os excertos apresentados nos resultados dessa investigação ajudaram a inferir que os grupos conseguiram verificar aspectos comuns nos casos particulares e definir uma regra geral, identificar explicitamente relações entre as variáveis independente e dependente, reconhecer e usar relações numéricas, propriedades das operações e o sinal de igualdade para além dos casos particulares.

A conclusão que se chega é que as tarefas foram potenciais para desenvolver o pensamento algébrico, pois das 44 respostas apresentadas, em aproximadamente, 80% houve a manifestação do pensamento algébrico. Portanto, os resultados demonstraram que as estratégias e tomadas de decisões dos grupos em relação às quatro tarefas que fizeram parte da investigação, contribuíram para o desenvolvimento do seu pensamento algébrico por meio do pensamento funcional e relacional.

Pode-se dizer que as tarefas representaram, para os educandos, uma "novidade" e para a autora dessa pesquisa uma experiência nova, pois ainda não havia vivenciado na prática como tarefas poderiam articular ensino-aprendizagem-avaliação e, ao mesmo tempo, trabalhar na perspectiva do pensamento algébrico nos anos iniciais. Logo, o trabalho com tarefas voltadas para o desenvolvimento do pensamento algébrico é promissor e pode estimular a construção sólida de conceitos relacionados à álgebra e minimizar dificuldades futuras nos anos posteriores.

Assim, as experiências em sala de aula representaram momentos ricos de reflexão da própria prática da pesquisadora, uma vez que as dúvidas de como desenvolver esse trabalho com alunos tão jovens, como o dos anos iniciais, por vezes, parecia algo distante de ser realizado, mas ao mesmo tempo se tinha certeza que o papel do professor, baseado na literatura recomendada, nortearia os passos a serem dados.

Por isso, a experiência de ensino possibilitou conhecer o verdadeiro sentido da avaliação, ou seja, de que ela não deve ser um momento isolado do ensino-aprendizagem, pois seu papel é orientar o educador a novas tomadas de decisões que estejam de fato comprometidas com as aprendizagens dos educandos. Daí o professor usar a avaliação com a intenção de conhecer o que o aluno sabe e o que precisa ser feito para ajudá-lo a superar dificuldades e melhorar suas aprendizagens.

Como possibilidade de pesquisa futura, considerando a importância do pensamento algébrico nos anos iniciais, é possível elaborar tarefas abertas que articulem o ensino-aprendizagem-avaliação de conceitos relacionados à noção intuitiva de função por meio de problemas envolvendo a variação proporcional entre duas grandezas, mas sem a utilização de regra de três simples, pois, de acordo com os preceitos da BNCC, nos anos iniciais não é recomendado o uso de letras para expressar generalizações.

Importa dizer também que, nesta pesquisa, as rubricas de avaliação eram potenciais. Porém, dado o limite para conclusão do texto dissertativo, as rubricas não foram exploradas, mas, podem ser um instrumento interessante para a investigação sobre ensino-aprendizagem-avaliação considerando a avaliação criterial e contínua e não somente focada em resultados. As rubricas devem apresentar critérios de avaliação claros, construídos conjuntamente com os alunos que por sua vez tomará envolvimento previamente como o trabalho será avaliado, sendo também partícipe neste processo além de proporcionar ao professor oportunidades de orientação para avaliar de modo transparente e objetivo. Estas são algumas possibilidades de outras investigações a partir da experiência vivenciada nessa pesquisa sobre os modos como tarefas exploratório-investigativas de ensino-aprendizagem-avaliação potencializam o desenvolvimento do pensamento algébrico de crianças nos anos iniciais.

REFERÊNCIAS

BECK, V.C.; SILVA, J.A. O estado da arte das pesquisas sobre o pensamento algébrico com crianças. **Santa Catarina**, ano10, n. 2, p.1-12, 2015.

BLACK, P.; WILIAM, D. Assessment and classroom learning. **Assessment in Education:** principles, policy and practice, ano 5, p.7-74, mar. 1998.

_____. Developing the theory of formative assessment. **Educational Assessment, Evaluation and Accountability**, ano 21, p. 5-31, 2009.

BLANTON, M.L. **Algebra and the Elementary Classroom:** Transforming Thinking, Transforming Practice. Portsmouth: Heinemann, 2008.

_____; KAPUT, J. Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. **Journal for Research in Mathematics Education**, ano 36, n. 5, p. 412-446, 2005.

BLOOM, B.S.; HASTING, T.; MADAUS, G. **Manual de avaliação formativa e somativa do aprendizado escolar**. São Paulo: Editora Pioneira, 1983. 308 p.

BOGDAN, R.; BIKLEN, S. **Investigação qualitativa em educação**. Porto: Porto Editora, 1994.

BORRALHO, A.M.A.; LUCENA, I.C.R.; BRITO, M.A.R.B. **Avaliar para melhorar as aprendizagens em matemática**. Belém: SBEM-PA, 2015.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental**. Brasília (DF): MEC/SEF, 1997.

_____. **Base Nacional Comum Curricular**. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/abase/. Acesso em: 29 mar. 2018.

BRAUMANN, C. Divagações sobre investigação matemática e o seu papel na aprendizagem da matemática. In: PONTE, J.P.; COSTA, C., ROSENDO, A.I.; MAIA, E.; FIGUEIREO, N.; DIONÍSIO, A.F. (Eds.). **Atividades de investigação na aprendizagem da matemática e na formação de professores**. Lisboa: SEM-SPCE, 2002.

BROADFOOT, Patricia. **Introducing Profiling**: A practical manual. Londres: MacMillan Education Ltda, 1988.

BURIASCO, R.L.C. Algumas considerações sobre avaliação educacional. **Avaliação Educacional**, ano 22, p. 155-178, 2000.

CANAVARRO, A.P. **O pensamento algébrico na aprendizagem da Matemática nos primeiros anos**. Disponível em: https://dspace.uevora.pt/rdpc/bitstream/10174/4301/1/_Quadrante_vol_XVI_2-2007-pp000_pdf081-118.pdf. Acesso em: 10 dez. 2018.

CANAVARRO, P.; OLIVEIRA, H.; MENEZES, L. Práticas de ensino exploratório da matemática: o caso de Célia. In: CANAVARRO, P.; SANTOS, L.; BOAVIDA, A.; OLIVEIRA, H. **Práticas de Ensino da Matemática**. Lisboa: [s.e.], 2012.

CARRAHER, D.; SCHLIEMANN, A. Early algebra and algebraic reasoning. In: Lester, F. (Ed.). **Second handbook of mathematics teaching and learning**. Charlotte: Information Age Publishing, 2007. p. 669-705.

CARVALHO, R.B.F. **Avaliação para a aprendizagem**: a articulação entre ensino, aprendizagem e avaliação (Mato Grosso – Brasil). 2013. 329f. Tese (Doutorado em Avaliação em Educação) – Universidade de Lisboa, Lisboa, 2013.

CERCA, M.R. **O desenvolvimento do raciocínio relacional através das relações de igualdade e desigualdade:** uma experiência de ensino no 3º ano. 2014. 227f. Dissertação (Mestrado em Didática da Matemática) – Universidade de Lisboa, Lisboa, 2014.

CUNHA, H.; OLIVEIRA, H.; PONTE, J.P. Investigações matemáticas na sala de aula. In: PINHEIRO, A.; CANAVARRO, A.P. (Eds.). **Actas do ProfMat 95**. Lisboa: APM, 1995. p. 161-168.

FERNANDES, D. Articulação da aprendizagem, da avaliação e do ensino: questões teóricas, práticas e metodológicas. In: ALVES, M.P.; DE KETELE, J.-M. (Orgs.). **Do currículo à avaliação, da avaliação ao currículo**. Porto: Porto Editora, 2011b. p. 131-142.

FERNANDES, D. Para uma teoria da avaliação formativa. **Revista Portuguesa de Educação**, ano 19, n. 2, p. 21-50, 2006.

_____. **Avaliação das Aprendizagens:** uma agenda, muitos desafios. Lisboa: Texto Editora, 2009.

_____. Avaliar para melhorar as aprendizagens: análise e discussão de algumas questões essenciais. In: FIALHO, I.; SALGUEIRO, H. (Eds.). **Turma Mais e sucesso escolar**: contributos teóricos e práticos. Évora: Centro de Investigação em Educação e Psicologia da Universidade de Évora, 2011a. p. 81-107.

GLASER, R. Educação para todos: acesso à aprendizagem e conquista do conhecimento útil. *In:* SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE AVALIAÇÃO EDUCACIONAL, 1997, Rio de Janeiro. **Anais** [...]. Brasília: Inep/Mec/Unesco, 1998.

HAYDT, R.C.C. **Avaliação do processo de ensino-aprendizagem**. São Paulo: Editora Ática,1994. 159 p.

HOFFMANN, J. **Avaliação mediadora**: uma prática em construção da pré-escola à universidade. Porto Alegre: Mediação, 2018. 192 p.

KIERAN, C. Overall commentary on early algebraization: Perspectives for research and teaching. In: CAI, J.; KNUTH, E. (Eds.). **Early algebraization**: A Global Dialogue from Multiple Perspectives. Heidelberg: Springer, 2011. p. 579-593.

LIBÂNEO, J.C. **Didática**. São Paulo: Cortez, 2006.

LINS, R.C.; GIMENES, J. **Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI**. Campinas: Papirus, 1997.

LINS, R.; KAPUT, J. The early development of algebraic reasoning: the current state of the field. In: STACEY, K.; CHICK, H.; KENDAL, K. (Eds.). **The future of teaching and learning of algebra**. Boston: Kluwer, 2004. p. 73-96.

LUCENA, I.C.R.; MARQUES, V.R.; GIONGO, I.M. Tarefas de ensino-aprendizagem-avaliação para o ensino de matemática: uma experiência na formação de professores dos anos iniciais. *In:* V ENCONTRO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA NOS ANOS INICIAIS, 2018, São Carlos. **Anais** [...].

MATA-PEREIRA, J.; PONTE, J.P. Promover o raciocínio matemático dos alunos: Uma investigação baseada em design. **Bolema**, Rio Claro, v. 32, n. 62, p. 781-801, dez. 2018.

FONSECA, H.; BRUNHEIRA, L.; PONTE, J.P. **As actividades de investigação, o professor e a aula de Matemática**. Lisboa: APM, 1999.

MESTRE, C.M.M.V. **O desenvolvimento do pensamento algébrico de alunos do 4.º ano de escolaridade**: Uma experiência de ensino. 2014. 380f. Tese (Doutorado em Didática da Matemática) – Universidade de Lisboa, Lisboa, 2014.

MINAYO, M.C.S. Ciência, técnica e arte: o desafio da pesquisa social. In: DESLANDES, S.F.; GOMES, R.; MINAYO, M.C.S. (Org.). **Pesquisa social**: teoria, método e criatividade. Petrópolis: Vozes, 2009. p. 9-29.

MIZUKAMI, M.G.N. **Ensino**: as abordagens do processo. São Paulo: EPU, 1986.

MOREIRA, M.A. **Metodologias de pesquisa em ensino**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2011.

MORETTO, V.P. **Prova**: um momento privilegiado de estudo, não um acerto de contas. Rio de Janeiro: DP&A, 2002.

PERRENOUD, P. **Avaliação**: da excelência à regulação das aprendizagens-entre duas lógicas. Porto Alegre: Artes Médicas Sul, 1999.

PONTE, J.P. Gestão curricular em Matemática. In: GTI (Ed.). **O professor e o desenvolvimento curricular**. Lisboa: APM, 2005. p. 11-34.

_____. Explorar e investigar em Matemática: Uma actividade fundamental no ensino e na aprendizagem. **Unión – Revista Iberoamericana de Educación Matemática**, n. 21, p.13-30, 2010.

_____. **Práticas profissionais dos professores de matemática**. Lisboa: Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, 2014. p. 13- 27.

; QUARESMA, M.; BRANCO, N. Tarefas de exploração e investigação na aula de Matemática. **Educação Matemática em Foco**, ano 1, n. 1, p. 9-29, 2012.

_____; BRANCO, N.; MATOS, A. **Álgebra no ensino básico**. Lisboa: DGIDC, 2009.

_____; NUNES, C.C.; QUARESMA, M. Explorar, investigar, interagir na aula de Matemática: elementos fundamentais para a aprendizagem. In: SILVA, A.C.; CARVALHO, M.; RÊGO, R.G. (Orgs.). **Ensinar Matemática**: formação, investigação e práticas docentes. Cuiabá: EdUFMT, 2012.

_____; BROCARDO, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações matemáticas na sala de aula**. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2016.160 p.

RADFORD, L. Algebraic thinking and the generalization of patterns: a semiotic perspective. *In:* PROCEEDINGS OF THE TWENTY EIGHTH ANNUAL MEETING OF THE NORTH AMERICAN CHAPTER OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 1., 2006, Mérida. **Anais** [...]. Mérida: Universidad Pedagógica Nacional, 2006. p.1-21.

RIBEIRO, A.J.; CURY, H.N. **Álgebra para a formação do professor**: explorar os conceitos de equação e de função. Belo Horizonte: Autêntica, 2015. 126 p.

SANCHES, E.A.; BELINE, W. Tarefas investigativas promovendo o pensamento matemático em alunos da educação básica. *In:* VIII ENCONTRO DE PRODUÇÃO CIENTÍFICA E TECNOLÓGICA, 2013, Campo Mourão. **Anais** [...]. Campo Mourão: UNESPAR/NUPEM, 2013. Disponível em: http://www.fecilcam.br/nupem/anais_viii_epct/PDF/TRABALHOSCOMPLETO/Anais-CET/MATEMATICA/easanchestrabalhocompleto.pdf. Acesso em: 28 jan. 2019.

SANTOS, C.C.S.; MOREIRA, K.G. O pensamento algébrico nos anos iniciais do ensino fundamental. *In:* EDUCAÇÃO MATEMÁTICA NA CONTEMPORANEIDADE: DESAFIOS E POSSIBILIDADES, 2016. São Paulo. **Anais** [...]. 2016.

SCHLICKMANN, L.; SCHMITZ, L.L. Da escola tradicional à escola contemporânea: algumas considerações sobre a constituição do espaço escolar. *In:* VI SEMIC. 2015. Itapiranga. **Anais** [...]. Disponível em: http://faifaculdades.edu.br/eventos/SEMIC/6SEMIC/arquivos/resumos/RES27.pdf. Acesso em: 29 mai. 2020.

SOUZA, J.S.S.; SOUZA, L.O. **A Matemática nos anos iniciais do ensino fundamental:** práticas de sala de aula e de formação de professores. Brasília, DF: SBEM, 2018. p. 49-70.

TUDELLA, A. et al. Dinâmica de uma aula com investigações. In: ABRANTES, P.; PONTE, J.P.; FONSECA, H.; BRUNHEIRA, L. (Eds.). **Investigações matemáticas na aula e no currículo**. Lisboa: Projecto MPT e APM, 1999. p. 87-96. Disponível em: http://ia.fc.ul.pt/. Acesso em: 19 fev. 2019.

VASCONCELLOS, C.S. **Avaliação da aprendizagem**: práticas de mudança – por uma práxis transformadora. São Paulo: Libertad, 2005.

VERSCHAFFEL, L.; GREER, B.; DE CORTE, E. Whole number concepts and operations. In: LESTER, F.K. (Ed.). **Second handbook of research on mathematics teaching and learning**. Charlotte: Information Age Publishing, 2007. p. 557-628.

VILLAS-BOAS, B. **Virando a escola do avesso por meio da avaliação**. Campinas: Papirus, 2008.

FIORENTINI, D.; MIORIM, M.A.; MIGUEL, A. Contribuição para um Repensar...a Educação Algébrica Elementar. **Pro-posições**, Campinas, ano 4, v. 1, n. 10, p. 78-90, mar.1993.

APÊNDICES

APÊNDICE A – Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE)

Prezado Gestor da Escola X,

A mestranda Juliana Batista Mescouto, do curso de Mestrado Profissional em Docência em Educação em Ciências e Matemática (PPGDOC) da Universidade Federal do Pará - UFPA/Belém- PA, estará desenvolvendo, a Pesquisa intitulada *Ensino-aprendizagem-avaliação de álgebra nos anos iniciais: uma experiência por meio de tarefas exploratório-investigativas* sob a orientação da Prof.ª Dr.ª Isabel Cristina Rodrigues de Lucena.

O objetivo principal da pesquisa é *desenvolver práticas de ensino-aprendizagem-avaliação por meio de tarefas exploratório-investigativas de álgebra em uma turma do 4º ano do Ensino Fundamental*. Por essa razão, solicitamos sua colaboração para podermos realizar Oficinas Pedagógicas para os educandos no espaço escolar e a permissão para fazermos registros de áudio, vídeo e fotografias que constituirão os dados da pesquisa.

Esclarecemos que sua participação é voluntária e, portanto, o senhor não é obrigado a fornecer as informações e/ou colaborar com as atividades solicitadas pela Pesquisadora. Caso decida não autorizar o estudo, ou resolver a qualquer momento desistir do mesmo, não sofrerá nenhum dano. Estaremos à disposição da escola para qualquer esclarecimento que considere necessário em qualquer etapa da pesquisa.

____

Assinatura da pesquisadora

E-mail: jhu.bsousa@gmail.com

Telefone para contato: (91) 985083052

Considerando, que fui informado dos objetivos e da relevância do estudo proposto, de como será minha participação. Declaro o meu consentimento em participar da pesquisa, como também concordo que os dados obtidos na investigação sejam utilizados para fins científicos (divulgação em eventos e publicações). Estou ciente que receberei uma via desse documento.

Belém,__de ___ de 2019.

____

Assinatura do participante ou responsável legal

APÊNDICE B – Tarefa 1

Turma: 4º Ano

Professora: Juliana Mescouto

Alunos (as):

Tarefa 1- Frutas Típicas

1) Observe a sequência abaixo:

a) Qual a lei de formação dessa sequência? Justifique sua resposta.

b) Indique a ordem que surgem os bacuris e escreva como você pensou.

c) O 20º termo será cupuaçu ou bacuri? Como chegou a essa conclusão?

APÊNDICE C – Tarefa 2

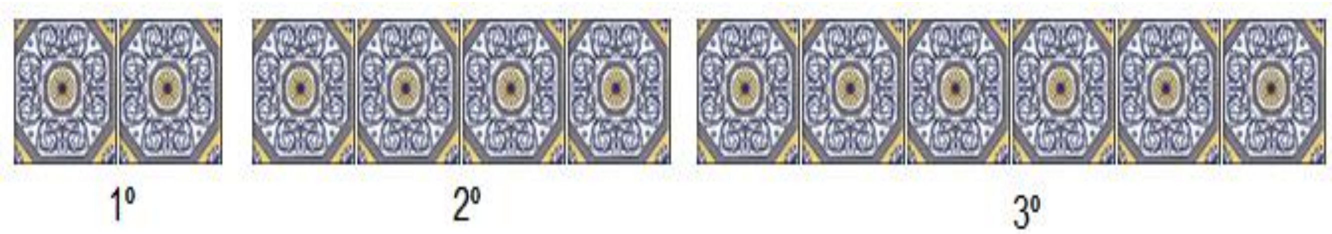
Turma: 4º Ano

Professora: Juliana Mescouto

Alunos (as):

<u>Tarefa 2 – Azulejos Portugueses</u>

1º) Observe as sequencias abaixo:



a) Quantos azulejos terá na 4º posição? Como você pensou?

b) Ao preencher o quadro abaixo é possível perceber alguma relação entre a Posição e a Quantidade de azulejos? Qual?

Posição	Quantidade de azulejos
1º	2
2º	4
3º	6
4º	
5º	
6º	
7º	
8º	
9º	
10º	
11º	

c) Em qual posição teremos 34 azulejos? Explique como você encontrou esse resultado.

d) De acordo com seu entendimento, encontre a quantidade de azulejos na posição 100º. Como você pensou?

APÊNDICE D – Tarefa 3

Turma: 4º Ano

Professora: Juliana Mescouto

Alunos (as):

<u>Tarefa 3 – Pensa em um número</u>

1) Joana e Marcos estão brincando de calcular e para desafiar Marcos, Joana fez a seguinte pergunta:

a) Marcos pensou no número 7. Descubra qual foi o resultado encontrado por Marcos e em seguida escreva como você pensou.

APÊNDICE D – Tarefa 4

Turma: 4º Ano

Professora: Juliana Mescouto

Aluno:

<u>Tarefa 4 – Desvendando igualdades</u>

1) Carlos faz aniversário dia 19 de setembro e está em dúvida se será em uma quinta ou em uma sexta feira e para ter certeza ele pegou um calendário e descobriu que seu aniversário será na quinta feira. Essa não foi a única descoberta feita por Carlos, pois ele observou que se adicionar os números da linha e da coluna conforme destacamos abaixo obterá o mesmo valor.

a) Carlos considera que 12+19+26= 18+19+20. Será que essa descoberta de Carlos é verdadeira? Justifique sua resposta.