



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
NÚCLEO DE DESENVOLVIMENTO AMAZÔNICO EM ENGENHARIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM INFRAESTRUTURA E
DESENVOLVIMENTO ENERGÉTICO

FÁBIO DE OLIVEIRA AMORIM

**APLICAÇÃO DE TÉCNICAS DE IDENTIFICAÇÃO DE SISTEMAS PARA PREVISÃO DE
RESISTÊNCIA À PUNÇÃO EM LAJES LISAS DE CONCRETO ARMADO SEM ARMADURA DE
CISALHAMENTO**

Tucuruí-PA
2019

FÁBIO DE OLIVEIRA AMORIM

**APLICAÇÃO DE TÉCNICAS DE IDENTIFICAÇÃO DE SISTEMAS PARA
PREVISÃO DE RESISTÊNCIA À PUNÇÃO EM LAJES LISAS DE CONCRETO
ARMADO SEM ARMADURA DE CISALHAMENTO**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Infraestrutura e Desenvolvimento Energético do Núcleo de Desenvolvimento Amazônico em Engenharia, da Universidade Federal do Pará, como requisito para a obtenção do título de Mestre em Infraestrutura e Desenvolvimento Energético. Área de concentração: Desenvolvimento Energético.

Orientador: Dr. Rafael Suzuki Bayma

Coorientador: Dr. Maurício de Pina Ferreira

Tucuruí-PA

2019

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará
Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a)
autor(a)

A524a Amorim, Fábio de Oliveira
Aplicação de Técnicas de Identificação de Sistemas para
Previsão de Resistência à Punção em Lajes Lisas de
Concreto Armado sem Armadura de Cisalhamento / Fábio de
Oliveira Amorim. — 2019.
119 f. : il. color.

Orientador(a): Prof. Dr. Rafael Suzuki Bayma
Coorientador(a): Prof. Dr. Maurício de Pina Ferreira
Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação em
Engenharia de Infraestrutura e Desenvolvimento Energético,
Núcleo de Desenvolvimento Amazônico em Engenharia,
Universidade Federal do Pará, Tucuruí, 2019.

1. Punção. 2. Concreto armado. 3. Lajes lisas. 4.
Identificação de sistemas. I. Título.

CDD 620.137

FÁBIO DE OLIVEIRA AMORIM

**APLICAÇÃO DE TÉCNICAS DE IDENTIFICAÇÃO DE SISTEMAS PARA
PREVISÃO DE RESISTÊNCIA À PUNÇÃO EM LAJES LISAS DE CONCRETO
ARMADO SEM ARMADURA DE CISALHAMENTO**

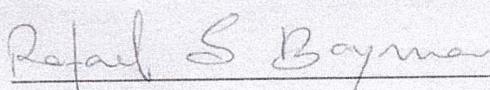
Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Infraestrutura e Desenvolvimento Energético do Núcleo de Desenvolvimento Amazônico em Engenharia, da Universidade Federal do Pará, como requisito para a obtenção do título de Mestre em Infraestrutura e Desenvolvimento Energético. Área de concentração: Desenvolvimento Energético.

Orientador: Dr. Rafael Suzuki Bayma

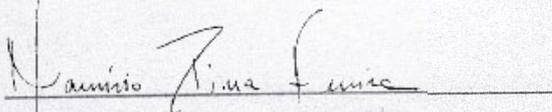
Coorientador: Dr. Maurício de Pina Ferreira

Aprovada em 27 de fevereiro de 2019.

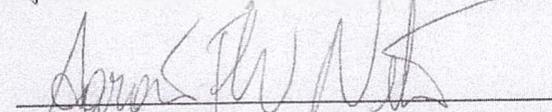
BANCA EXAMINADORA:



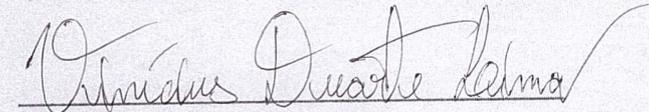
Dr. Rafael Suzuki Bayma – Universidade Federal do Pará – Orientador



Dr. Maurício de Pina Ferreira – Universidade Federal do Pará – Coorientador



Dr. Aarão Ferreira Lima Neto – Universidade Federal do Pará – Examinador Interno



Dr. Vinicius Duarte Lima – Universidade Federal do Pará – Examinador Externo

Dedicatória

Para meus pais, Roosevelt e
Sucirlene, pelo amor, apoio e confiança.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente ao professor Rafael Suzuki Bayma pela orientação do trabalho desenvolvido, concedendo sempre o devido suporte no desenvolvimento do trabalho escrito, na geração de resultados parciais e totais, bem como nas críticas construtivas no decorrer do desenvolvimento deste, contribuindo assim de forma significativa para o tema proposto.

Agradeço também ao professor Maurício de Pina Ferreira no apoio ao trabalho desenvolvido, sobretudo em sanar dúvidas referente a área de Engenharia Civil e ao propor sugestões pertinentes e primordiais para o andamento do trabalho.

Devo agradecer também ao aluno Manoel José Mangabeira Pereira Filho por conceder o banco de dados desenvolvido em sua tese de Mestrado e que serviu de base para o desenvolvimento do meu trabalho. O seu apoio na concessão do banco de dados, bem como em retirar algumas dúvidas a respeito foram fundamentais.

A etapa de geração de resultados parciais via algoritmos foi, sem dúvidas, a mais difícil de ser realizada, uma vez que foram realizadas diversas tentativas para que os resultados propostos fossem suficientemente aceitáveis e interpretados da melhor forma possível.

Agradeço muito aos meus pais pelo apoio incondicional, pela educação que me deram e pelo carinho e paciência com que sempre me trataram. Aos meus irmãos, por todo amor e amizade e pelas palavras de conforto e incentivo, principalmente nos momentos finais da tese. Mas agradeço fundamentalmente a minha esposa Rafaela.

Por fim, gostaria de agradecer a Deus, que mesmo sem eu notar, guiou meus passos em todos os momentos, me permitindo alcançar os objetivos que tracei ainda no início deste trabalho.

RESUMO

Os sistemas estruturais usados em edificações de concreto armado, em que as lajes se apoiam diretamente sobre os pilares, sem o uso de vigas, têm, entre suas características, a existência de tensões concentradas elevadas nas ligações laje-pilar. Tensões estas que podem provocar a ruptura destas ligações e até levar a estrutura a um colapso progressivo. A esse efeito dá-se o nome de punção. Como a ruptura das ligações por punção é do tipo frágil, sem aviso, é extremamente importante que seja feita a verificação da resistência da ligação. Para o estudo em questão, foram coletadas informações de dois bancos de dados de diversos autores que realizaram ensaios experimentais em lajes lisas de concreto armado sem armadura de cisalhamento, contendo nestes diversos parâmetros utilizados nos ensaios, bem como valores de resistência à punção. Muitos estudos foram realizados com o intuito de definir e padronizar procedimentos e funções matemáticas que representassem de forma satisfatória o fenômeno da punção em função de seus diversos parâmetros de influência. Dessa forma, foram desenvolvidos modelos de cálculo e instruções normativas que podem ser utilizadas para o estudo e desenvolvimento da temática. Outrossim, alguns estudos foram desenvolvidos com o auxílio de técnicas numéricas e de identificação de sistemas, resultando em equações que visam representar o fenômeno da punção de forma satisfatória. O presente trabalho tem por meta obter uma função matemática que represente o fenômeno da punção em lajes sem armadura de cisalhamento por meio de sua tensão resistente, ou até mesmo intervalos de funções, se assim for o caso. Assim sendo, abre-se a possibilidade de propor melhorias nas equações presentes nas normas. Os resultados apresentados mostram que é possível prever novos modelos matemáticos que descrevem o fenômeno da punção por meio de técnicas de identificação de sistemas. Os resultados também evidenciam que é possível propor melhores modelos matemáticos ao avaliar melhores métricas de desempenho que as equações provenientes de dados normativos por meio de dados estatísticos. Dessa forma, conclui-se que novos modelos matemáticos podem servir de referência para engenheiros da área de estruturas e pesquisadores de áreas afins.

Palavras-chave: Punção. Concreto armado. Lajes lisas. Identificação de sistemas.

ABSTRACT

The structural systems used in reinforced concrete pavements, in which the slabs rest directly on the pillars, without the use of beams, have, among their characteristics, the existence of high concentrated stresses in the slab-pillar connections. These tensions can cause these connections to rupture and cause the structure to collapse progressively. This is called a punching. As the breakage of the punching bonds is fragile, without warning, it is extremely important that the bond strength is checked. For the study in question, information was collected from two databases of several authors who performed experimental tests on plain slabs of reinforced concrete without shear reinforcement, containing several parameters used in the tests, as well as punching resistance values. A lot of studies were developed with the purpose of defining and standardizing procedures and mathematical functions that satisfactorily represented the phenomenon of punching in function of its various parameters of influence. In this way, calculation models and normative instructions have been developed that can be used for the study and development of the subject. Besides, some studies were developed with the rescue of numerical techniques and systems identification, resulting in equations that aim to represent the punching phenomenon satisfactorily. The present work aims to obtain a mathematical function that represents the phenomenon of punching in slabs without shear reinforcement by means of their strain strength, or even group of functions, if this is the case. Therefore, it was possible to propose improvements in the equations present in the norms. The results show that it is possible to predict new mathematical models that describe the phenomenon of punching by means of systems identification techniques. The results also show that it is possible to propose better mathematical models when evaluating better performance metrics than the equations derived from normative data through statistical data. Thus, it is concluded that new mathematical models can serve as reference for engineers of the area of structures and researchers of related areas.

Keywords: Punching. Reinforced concrete. Plain slabs. Systems identification.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1.1 – Laje lisa em concreto armado	14
Figura 1.2 – Diagrama de blocos básico para identificação de sistemas	15
Figura 2.1 – Zona de ruptura em lajes submetidas à punção sem armadura de cisalhamento	20
Figura 2.2 – Fase pós puncionamento sem armadura contra colapso progressivo	21
Figura 2.3 – Definição da superfície de controle da NBR 6118 (2014)	35
Figura 2.4 – Modelo de bielas e tirantes para a punção	36
Figura 2.5 – Hipótese de ruptura e elemento rígido do modelo mecânico	37
Figura 2.6 – Perímetro de controle segundo o ACI 318 (2014)	38
Figura 2.7 – Perímetro de controle segundo o Eurocode 2 (2004)	39
Figura 2.8 – Perímetro crítico em pilares internos segundo a NBR 6118 (2014)	41
Figura 2.9 – Composição de um sistema	42
Figura 2.10 – Exemplo de Sistema Estático	46
Figura 2.11 – Formas lineares e não lineares de relação entre pares de variáveis	49
Figura 4.1 – Histograma de erros norma ACI (banco de dados 1)	78
Figura 4.2 – Histograma de erros Modelo polinomial proposto (banco de dados 1)	79
Figura 4.3 – Histograma de erros Modelo exponencial proposto (banco de dados 1)	81
Figura 4.4 – Histograma de erros norma ACI (banco de dados 2)	83
Figura 4.5 – Histograma de erros Modelo polinomial proposto (banco de dados 2)	84
Figura 4.6 – Histograma de erros Modelo exponencial proposto (banco de dados 2)	86
Figura 4.7 – Histograma de erros norma EC2 (banco de dados 1)	89
Figura 4.8 – Histograma de erros Modelo polinomial proposto (banco de dados 1)	90
Figura 4.9 – Histograma de erros Modelo exponencial proposto (banco de dados 1)	92
Figura 4.10 – Histograma de erros norma EC2 (banco de dados 2)	94
Figura 4.11 – Histograma de erros Modelo polinomial proposto (banco de dados 2)	95
Figura 4.12 – Histograma de erros Modelo exponencial proposto (banco de dados 2)	96
Figura 4.13 – Histograma de erros norma NBR (banco de dados 1)	99
Figura 4.14 – Histograma de erros Modelo polinomial proposto (banco de dados 1)	101
Figura 4.15 – Histograma de erros Modelo exponencial proposto (banco de dados 1)	103

LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1 – Resultados Analíticos	27
Tabela 3.1 – Banco de dados 1 utilizado para a regressão	63
Tabela 3.2 – Banco de dados 2 utilizado para a regressão	68
Tabela 4.1 – Dados estatísticos Norma ACI x Modelo Proposto (Polinomial)	80
Tabela 4.2 – Dados estatísticos Norma ACI x Modelo Proposto (Exponencial) ...	82
Tabela 4.3 – Dados estatísticos Norma ACI x Modelo Proposto (Polinomial)	84
Tabela 4.4 – Dados estatísticos Norma ACI x Modelo Proposto (Polinomial)	87
Tabela 4.5 – Dados estatísticos Norma EC2 x Modelo Proposto (Polinomial)	91
Tabela 4.6 – Dados estatísticos Norma EC2 x Modelo Proposto (Exponencial) ..	93
Tabela 4.7 – Dados estatísticos Norma EC2 x Modelo Proposto (Polinomial)	95
Tabela 4.8 – Dados estatísticos Norma EC2 x Modelo Proposto (Exponencial) ..	97
Tabela 4.9 – Dados estatísticos Norma NBR x Modelo Proposto (Polinomial) ...	101
Tabela 4.10 – Dados estatísticos Norma NBR x Modelo Proposto (Exponencial)	103

LISTA DE SÍMBOLOS

v_c	tensão resistente à punção
f_c	resistência à compressão do concreto
ρ	taxa de armadura de flexão
d	altura útil da laje
P	tensão resistente à carga
C	comprimento da laje
u_1	perímetro de controle
V_{RcACI}	tensão resistente pela norma ACI (2014)
V_{RcEC2}	tensão resistente pela norma Eurocode 2 (2004)
k	efeito de escala
r	resultante das taxas de armadura de flexão da laje nos sentidos x e y
V_{RcNBR}	tensão resistente pela norma NBR 6118 (2014)
Y	saída do sistema para regressão linear (negrito na forma matricial)
X	entrada do sistema para regressão linear (negrito na forma matricial)
α, b	parâmetros de entrada para regressão linear (negrito na form. matricial)
ε	erro para a regressão linear (negrito na forma matricial)
e_i	fator residual para regressão linear múltipla (negrito na forma matricial)
n	número de elementos da amostragem
Ψ	matriz de regressão
θ	matriz de regressores
W	matriz diagonal
ERR_i	taxa de redução de erro do i-ésimo regressor
α, β	parâmetros de entrada obtidos pela regressão
φ_1	função de base radial
C_d	taxa de corte
T_s	intervalo de amostragem
f_s	frequência de amostragem
τ	tensão resistente em MPa
ξ	efeito de escala
$CRdo$	constante presente na norma NBR 6118 (2014)

SUMÁRIO

1. Introdução	14
1.1. Justificativa	16
1.2. Objetivos	17
1.3. Estrutura do Trabalho	18
2. Revisão Bibliográfica	19
2.1. Conceituação de Lajes sem Armadura de Cisalhamento	20
2.2. Pesquisas Realizadas	22
2.3. Fatores que influenciam a Resistência à Punção	28
2.3.1. Espessura da Laje	28
2.3.2. Dimensão da laje, formato e dimensão do pilar	29
2.3.3. Armadura de punção	30
2.3.4. Resistência do concreto	30
2.3.5. Relação momento fletor / esforço cortante	31
2.3.6. Taxa de armadura de flexão	31
2.3.7. Efeito de escala	31
2.3.8. Tipo de carregamento	32
2.3.9. Armadura contra colapso progressivo	33
2.3.10. Tipos de armadura de punção	33
2.4. Modelos de Cálculo	34
2.4.1. Método da Superfície de Controle	34
2.4.2. Método de Bielas e Tirantes	35
2.4.3. Modelos Mecânicos	36
2.5. Normas Técnicas	37
2.5.1. ACI 318 (2014)	38
2.5.2. Eurocode 2 (2004)	39
2.5.3. NBR 6118 (2014)	40
2.5.4. ETA 0454 (2012)	41
2.6. Conceituação de Identificação de Sistemas	42
2.6.1. Considerações básicas sobre Sinais e Sistemas	44
2.7. Modelos de Sistemas	46
2.7.1. Modelos Estáticos	46

2.7.2. Modelos Lineares e Não Lineares	47
2.7.3. Modelos Determinísticos e Estocásticos	48
2.8. Regressão Linear	48
2.8.1. Regressão Linear Simples	49
2.8.2. Regressão Linear Múltipla	50
2.9. Método dos Mínimos Quadrados	51
2.10. Mínimos Quadrados Ortogonais	57
3. Metodologia	63
3.1. Bancos de dados obtidos na Literatura	63
3.2. Estruturas Matemáticas	70
3.3. Métricas de Desempenho	73
3.3.1. MSE (Erro Médio Quadrático)	73
3.3.2. RMSE (Raiz do Erro Médio Quadrático)	73
3.3.3. NMSE (Erro Médio Quadrático Normalizado)	74
3.4. Algoritmos de Regressão	75
4. Resultados	76
4.1. Análises dos Resultados para a Norma ACI 318 (2014)	76
4.2. Análises dos Resultados para a Norma Eurocode 2 (2004)	88
4.3. Análises dos Resultados para a Norma NBR 6118 (2014)	98
5. Conclusões e Sugestões de Trabalhos Futuros	106
5.1. Conclusões	106
5.2. Sugestões de Trabalhos Futuros	112

1. INTRODUÇÃO

Os sistemas de lajes lisas consistem em lajes apoiadas em pilares dos quais não há estrutura para aumentar a resistência ao cisalhamento da ligação laje-pilar. Dessa forma, esses sistemas estão sujeitos ao fenômeno de punção que, por sua vez, trata-se de ruptura por grandes tensões de cisalhamento. A punção é um efeito relevante nas estruturas de concreto, devido ao seu potencial de afetar a integridade das estruturas atingidas (PEREIRA FILHO, 2016).

As lajes lisas, também denominadas de laje planas, são estruturas laminares horizontais, em concreto armado ou protendido, que se apoiam rígida e diretamente em pilares, não existindo vigas para transferência dos esforços. Quando combinadas com a protensão, as lajes lisas apresentam altura reduzida e permitem uma grande flexibilidade, quer na distribuição de tubulações e dutos, quer na disposição das paredes divisórias, sendo, portanto, indicadas tanto para edifícios comerciais quanto residenciais. No entanto, esse sistema de laje lisa, protendida ou não, apresenta algumas desvantagens, dentre as quais pode-se destacar a possibilidade da ocorrência da punção da laje pelo pilar (CARVALHO, 2008). A figura 1.1 apresenta detalhes de uma laje lisa.

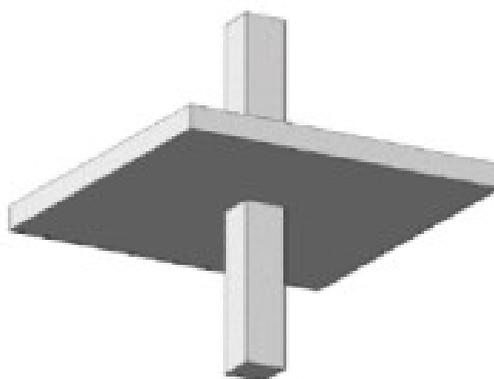


Figura 1.1 – Laje lisa em concreto armado.

Fonte: Carvalho (2008).

Muitos trabalhos foram realizados para explicar o fenômeno da punção e suas previsões, como Regan (1985), Gomes (1991), Shehata (1990), Melo (1994), Monetrey (2002), Muttoni (2008), dentre outros, além de recomendações normativas a serem seguidas, como a Eurocode 2 (2004), ACI 318 (2014) e ABNT NBR 6118

(2014), por exemplo. Dessa forma, muitos autores e estudiosos da área, como os supracitados, realizaram ensaios e propuseram modelos de cálculo e recomendações que explicassem e quantificassem a influência de alguns parâmetros na resistência à punção e que, por sua vez, serviram de base para algumas das normas citadas anteriormente. Como se observa, há muitos autores com estudos já realizados e com suas particularidades definidas, além das características específicas de critérios de análise recomendadas pelas normas.

Assim sendo, é desejável obter um modelo matemático único que possa quantificar todos os parâmetros que influenciam à punção de forma segura, bem como à previsão do fenômeno, respeitando as considerações dos diversos autores que já contribuíram para o tema, bem como atendendo às normas e recomendações vigentes. Vale ressaltar que as normas sempre tiveram um papel importante no dimensionamento das estruturas. Elas são necessárias para garantir a segurança dos dados e criar uma normalização de informações, além de servir como material de ajuda para calculistas e projetistas.

Para projeto voltado à área de identificação de sistemas é usualmente necessário dispor de um modelo da planta. Em alguns casos, estes modelos podem ser obtidos através de leis físicas (enfoque da caixa-branca) (LAGES, 2011). Em outros casos, pode não ser possível obter o modelo desta maneira. Nestes casos, talvez seja possível obter-se um modelo através da observação da resposta do sistema às entradas apropriadas (enfoque da caixa-preta), como mostrado na figura 1.2. Este procedimento é denominado identificação de sistemas.

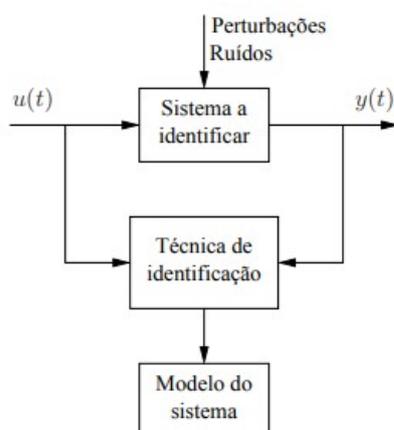


Figura 1.2 – Diagrama de blocos básico para identificação de sistemas.

Fonte: Lages (2011).

Segundo Lages (2011), os principais elementos do problema de estimação paramétrica são a classe de modelo (complexidade, adequação), o critério de desempenho (escolha da estrutura, escolha da ordem, estimação dos parâmetros), condições experimentais (condições de operação, validade do modelo, qualidade do modelo), algoritmo de estimação (*on-line*, *off-line*, garantias, convergência da saída, convergência dos parâmetros, taxa de convergência, robustez, ruído, dinâmica não modelada, erros numéricos) e uso de conhecimento a priori (restrições estruturais, valores de parâmetros, faixa de valores de parâmetros).

No objeto deste trabalho foram desenvolvidos algoritmos utilizando o método dos mínimos quadrados ortogonais, bem como algoritmos de regressão linear exponencial. Portanto, é altamente desejável que o algoritmo seja simples e facilmente implementável.

1.1. Justificativa

Tendo em vista que há na literatura diversos modelos de cálculo para verificar a resistência de uma ligação laje-pilar de lajes lisas de concreto armado com relação à punção, como é o caso do método da superfície de controle, método de bielas e tirantes e modelos mecânicos, bem como diversos fatores que influenciam na resistência à punção, a análise do comportamento da resistência à punção torna a tarefa de prever de forma satisfatória o fenômeno em questão ainda mais difícil. Muitos métodos teóricos foram propostos ao longo dos anos, mas nenhum deles até hoje foi completamente aceito pelo meio técnico-científico por não serem capazes de estimar com precisão a resistência à punção de ligações laje-pilar e ao mesmo tempo explicar o fenômeno com todas as suas variáveis (SACRAMENTO *et al.*, 2012).

Para o caso das recomendações normativas, as mesmas foram desenvolvidas e baseadas em diversos estudos de autores supracitados e que, dessa forma, são susceptíveis às melhorias.

As normas visam padronizar os estudos da temática em determinados países e continentes e servem de base para engenheiros e projetistas realizarem suas atividades de dimensionamento de estruturas (EL SHAFEY *et al.*, 2010).

Entretanto, as recomendações normativas, quando submetidas à estudos experimentais de diversos autores, em muitos casos apresentam excesso de conservadorismo, como é o caso da norma ACI 318 (2014). Em outros casos, apresentam baixa segurança, como é o caso da norma NBR 6118 (2014). Além disso, há normas em que se diferem os parâmetros que influenciam à punção, como é o caso da diferença na quantidade de variáveis nas equações das normas ACI 318 (2014) e Eurocode 2 (2004). Em outros casos, a quantidade de parâmetros pode não ser suficientes para representar o fenômeno de forma satisfatória, como é o caso da própria norma ACI 318 (2014). Assim sendo, é possível haver a necessidade de propor melhorias em algumas recomendações normativas de forma que os dados estatísticos de modelos propostos possam apresentar melhores resultados que os modelos já existentes.

A área de identificação de sistemas tem por objetivo propor modelos matemáticos baseados em dados experimentais com o intuito de representar numericamente um determinado fenômeno físico. Para tanto, são necessários a coleta dos dados experimentais, a formulação do algoritmo, a definição da estrutura do modelo proposto, a utilização dos dados experimentais para obtenção de um modelo proposto, bem como a validação do modelo pelo uso de dados experimentais. Esta área propõe a formulação de modelos matemáticos que objetivam representar um fenômeno com resultados satisfatórios, de forma a prever resultados satisfatórios ao compará-los a resultados experimentais. Dessa forma, a formulação de um algoritmo para obter determinadas funções matemáticas dependem diretamente da técnica de identificação de sistemas empregada.

1.2. Objetivos

Objetivos Gerais:

- Utilizar os conceitos e a aplicação de técnicas de identificação de sistemas que podem ser soluções necessárias para o estudo de previsão de resistência à punção de lajes lisas de concreto armado sem armadura de cisalhamento.

Objetivos Específicos:

- Desenvolver e utilizar algoritmos que implementam a utilização da técnica dos mínimos quadrados ortogonais para geração de resultados numéricos, gráficos e que possam assim descrever matematicamente a previsão de resistência à punção em lajes lisas de concreto armado sem armadura de cisalhamento, de forma a propor previsões normativas seguras. Os trabalhos desenvolvidos em que explicam o fenômeno da punção e possíveis previsões, bem como comparações com recomendações normativas, ainda não são suficientes para descrever de forma segura a influência dos parâmetros que influenciam o fenômeno em questão quando se trata de resultados baseado em dados experimentais;
- Explorar a utilização da validação de dados de forma a obter e avaliar diferentes resultados propostos, enfatizando também a limitação dos modelos obtidos e suas respectivas características, além de servir de comparativo com as estruturas matemáticas provenientes das normas vigentes;
- Avaliar a influência de parâmetros que influenciam na resistência à punção, bem como definir estrutura(s) algébrica(s) de modelagem que venha(m) a representar matematicamente o fenômeno, de acordo com a(s) limitação(ões) do(s) modelo(s) proposto(s);
- Além disso, propor melhorias nas instruções normativas vigentes de forma a garantir resultados satisfatórios e que possam servir de referência para engenheiros e projetistas na elaboração de projetos estruturais.

1.3. Estrutura do trabalho

Este trabalho divide-se em 5 capítulos. O capítulo 1 apresenta uma breve introdução sobre a problemática do tema proposto, bem como as justificativas para elaboração do trabalho e os objetivos gerais e específicos a serem alcançados. O capítulo 2 apresenta a revisão bibliográfica, onde são abordados os conceitos teóricos do problema de previsão de resistência à punção de lajes lisas de concreto armado sem armadura de cisalhamento, além de sintetizar alguns tópicos especiais da área de identificação de Sistemas, com ênfase na técnica dos mínimos quadrados ortogonais e regressão linear exponencial; ainda neste são abordados

alguns estudos desenvolvidos relacionados à obtenção de novas funções matemáticas obtidas a partir de técnicas numéricas e de identificação de sistemas que visam representar o fenômeno da punção. O capítulo 3 apresenta a metodologia do trabalho, onde foram utilizados dois bancos com informações de diversos estudiosos da área presentes na literatura contendo dados experimentais de lajes lisas de concreto armado sem armadura de cisalhamento; neste também são abordados alguns modelos matemáticos e métricas de desempenho que servem de base para o desenvolvimento do algoritmo que utiliza a técnica dos mínimos quadrados ortogonais e regressão linear exponencial. No capítulo 4 são apresentados os resultados numéricos, gráficos e os modelos matemáticos obtidos, bem como suas métricas de desempenho para efeito de comparação; ainda neste capítulo são abordadas as limitações dos modelos propostos, bem como sua relação comparativa com as normas existentes. Por fim, o capítulo 5 apresenta as conclusões do trabalho desenvolvido, os avanços obtidos, as limitações encontradas e sugestões de novos trabalhos a serem desenvolvidos nesta mesma linha de pesquisa.

2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Com a finalidade de nivelar as informações sobre o estágio atual relacionado ao tema, faz-se necessário um levantamento histórico dos estudos relacionados à punção de forma resumida e objetiva nesta seção, bem como dos conceitos e modelos usados para verificar a punção, além de modelos de cálculo e normas abordadas e já mencionadas anteriormente.

Para o estudo de ferramentas a serem utilizadas na identificação de sistemas, é de grande importância descrever na seção em referência as técnicas aplicáveis em métodos numéricos e na identificação de sistemas para o caso de modelos estáticos. Dessa forma, é possível fornecer subsídios suficientes para análise e geração do(s) possível(is) modelo(s) a ser(em) proposto(s).

2.1. Conceituação de Lajes Lisas sem Armadura de Cisalhamento

O fenômeno da punção de uma laje lisa é basicamente a sua perfuração devida às altas tensões de cisalhamento, provocadas por forças concentradas ou agindo em pequenas áreas. Desde que a tensão solicitante de punção seja menor que a tensão resistente, não é necessário a utilização de armadura de transversal. Muitos tipos de armaduras de cisalhamento foram testados para aumentar a eficiência na resistência à punção, com variados tipos de ancoragem e técnicas de montagem, como é o caso do uso de estribos que foram utilizados em ensaios realizados por Oliveira (1998), barras dobradas utilizadas em ensaios por Takeya (1981) e o uso de *shearheads* estudados e aplicados por Alander (2000), dentre outros.

Apesar das diversas vantagens associadas a este sistema, um cuidado especial deve ser dado à ligação laje-pilar, a qual está sujeita ao fenômeno de punção, caracterizado por um modo de ruptura frágil por cisalhamento, ou seja, sem aviso prévio (PEREIRA FILHO, 2016). A figura 2.1 apresenta em detalhes a zona de ruptura da laje.

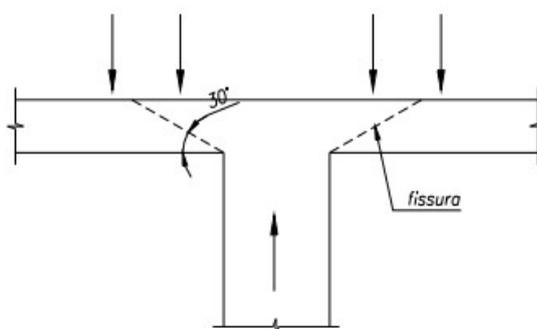


Figura 2.1 – Zona de ruptura em lajes submetidas à punção sem armadura de cisalhamento.

Fonte: Carvalho (2008).

O que se convencionou em chamar de punção em lajes é o efeito de ruptura transversal por cisalhamento em torno de regiões relativamente pequenas submetidas a carregamentos localizados (CARVALHO, 2008). Outrossim, a punção ocorre de forma abrupta e frágil.

Segundo Pinto (1993), a ruptura por punção é geralmente caracterizada pela ausência de escoamento generalizado da armadura, sendo basicamente ocasionada

pela destruição local do concreto da zona comprimida em torno do pilar ou da área carregada. A ruptura, portanto, é súbita, ou seja, acontece sem aviso prévio.

Dentre esses modos de ruptura, os mais comuns são a ruptura por tração diagonal na região da armadura, ruptura por tração diagonal fora da região das armaduras e ruptura por esmagamento da biela de concreto (PEREIRA FILHO, 2016). Na ausência de armaduras de cisalhamento a ruptura pode ocorrer de forma direta por tração diagonal. A figura 2.2 ilustra a perda do cobrimento superior da laje.

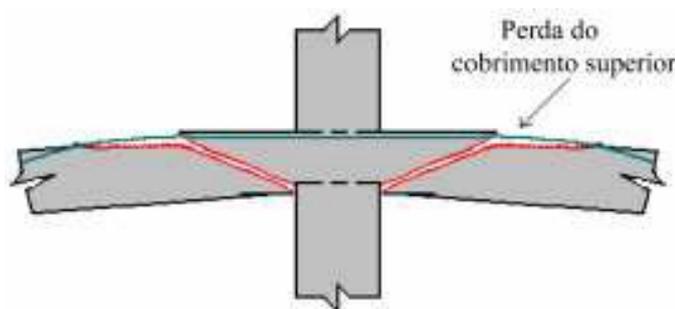


Figura 2.2 – Fase pós puncionamento sem armadura contra colapso progressivo.

Fonte: Lima (2001).

As crescentes inovações técnicas associadas à revisão dos critérios normativos para o esforço transversal de punção em termos do dimensionamento e detalhamento são aspectos importantes para o estudo em questão. Para análise de sistemas estruturais dessa natureza, especificamente sobre o comportamento de lajes sob carga de punção, ensaios realizados por Leonhardt e Mönning (1979) mostram que as deformações circunferenciais são inicialmente maiores que as deformações radiais. Para estes autores, em lajes sem armadura de cisalhamento, a distância da fissura circular varia entre duas a três vezes a altura útil da laje, evidenciando assim a irregularidade acentuada.

Desde os ensaios de Elstner e Hognestad (1956) muitas pesquisas vêm sendo conduzidas buscando entender melhor o comportamento e a resistência à punção de lajes lisas. Para Rabello (2010), muitos métodos teóricos foram propostos ao longo dos anos, mas nenhum deles apresenta aceitação em sua plenitude junto à comunidade científica de tal forma que sejam capazes de estimar com precisão a resistência à punção de lajes de concreto armado sem armadura de cisalhamento e, além disso, sejam capazes de explicar o grau de influência de todas as variáveis à punção. Assim, o dimensionamento à punção de lajes lisas é normalmente feito

utilizando-se recomendações apresentadas por normas para projeto de estruturas de concreto, as quais são fundamentalmente empíricas.

No caso da verificação da punção em lajes de concreto armado, as atuais abordagens das normas como a ACI 318 (2014), NBR 6118 (2014) e Eurocode 2 (2004), são baseadas em uma tensão nominal de cisalhamento, onde a tensão nominal é definida como uma força de reação do pilar das cargas da laje sobre ele, dividido pela área de uma superfície de controle normal ao plano da laje, situada ao redor da área carregada (RABELLO, 2010).

Nas normas mais conhecidas, como as já citadas no parágrafo anterior, percebe-se uma grande disparidade na definição desses parâmetros segundo cada norma, conforme apresentada nas equações da seção 2.5. Deve-se entender que a superfície de controle é considerada como uma grandeza de referência, o que não significa que a ruptura ocorra nessa superfície (CORDOVIL, 1996).

Como há uma grande diferença entre os critérios normativos para o cálculo da punção, ou seja, há diferentes equações para uma mesma grandeza de referência em cada norma, faz-se necessário um breve estudo em que seja possível apresentar e comparar as características apresentados nas diversas normas existentes, para que o engenheiro estrutural possa escolher qual modelo se adapta melhor às suas necessidades e limitações, sejam elas técnicas ou econômicas. Estas considerações são apresentadas na íntegra na seção 2.5.

2.2. Pesquisas Realizadas

El Shafey *et al.* (2010) realizaram estudos de previsão de resistência à punção em lajes sem armadura de cisalhamento, das quais utilizaram técnicas de identificação de sistemas. Foram estimados os resultados por meio do uso de redes neurais artificiais e, assim, obteve-se novas equações e mais simples para descrever o fenômeno da punção. Uma rede neural artificial (RNA) foi utilizada para as previsões dos valores de resistência ao cisalhamento. A análise da rede neural artificial foi realizada usando 244 dados de experimentos disponíveis na literatura e realizados por diversos autores para avaliar os fatores que influenciam à punção. De forma geral, os resultados obtidos a partir da rede neural artificial apresentaram boa convergência em relação aos dados experimentais em estudo. Os resultados dos testes foram utilizados para desenvolver novas equações de resistência à punção de

forma simplificada por meio de técnicas de identificação de sistemas. Dessa forma, as equações também mostraram uma correspondência muito boa com os dados experimentais. Quatro equações já conhecidas de resistência ao cisalhamento foram avaliadas com base nos dados experimentais. Os autores também apresentaram discussões dos parâmetros de resistência ao cisalhamento e suas especificações de acordo com as normas existentes.

As atuais equações que representam o fenômeno da punção são de natureza relativamente empíricas, baseadas em dados estatísticos e adaptações dos resultados de testes realizados quando da sua fase de desenvolvimento. Devido a este fator, diversas equações foram propostas com o intuito de servir de base para predições da resistência de cisalhamento em lajes (EL SHAFEY *et al.*, 2010). As normas de equações usadas na América do Norte são a ACI 318 (2014) e o CSA A23-3 (2004), enquanto na Europa, as normativas mais comuns são o BS 8110 (1997), CEB-FIP (1990) e a Eurocode 2 (2004). As equações norte americanas e europeias diferem no que diz respeito ao cálculo de resistência ao cisalhamento ao utilizar o método da superfície de controle, onde as normas utilizam diferentes valores de definição do perímetro de controle.

Utilizando os dados disponíveis na literatura, El Shafey *et al.* (2010) desenvolveram dois métodos para realizar seus estudos: um deles já citado, ajustes por redes neurais artificiais e o outro por análise de regressão. O método utilizado por redes neurais artificiais foi testado utilizando 60% dos dados de testes disponíveis para avaliação de sua eficácia. Dessa forma, com este método foi possível explicar os parâmetros de influência à punção. Já a análise de regressão foi utilizada para obter equações explícitas que descrevessem a predição à punção. Vale ressaltar que há poucos estudos e publicações que envolvam o uso de redes neurais artificiais para previsão de resistência ao cisalhamento. O estudo disponibilizou e realizou estimativas relacionadas à punção para lajes com espessura de até 500 mm.

Exemplos do uso de redes neurais artificiais na área de estruturas de concreto podem ser encontrados, como é o caso de Bhatt e Agar (2000), onde foram aplicadas as técnicas de redes neurais artificiais para predição de punção no caso de uma junção laje-pilar sem armadura de cisalhamento utilizando mais de 150 dados de testes com placas de espessura que variam de 35 mm a 120 mm. Nesse caso, tais estudos foram realizados com o intuito de obter melhores resultados em

comparação à norma britânica BS 8110 (1997). Dessa forma, também foi desenvolvida uma rede neural artificial que, por sua vez, foi utilizada para prever a capacidade de chumbadores localizados próximos à borda da estrutura para avaliar a resistência ao cisalhamento.

Hola e Schabowicz (2005) usaram uma técnica não destrutiva e uma abordagem de rede neural artificial para avaliar a resistência do concreto. Foram utilizadas redes neurais artificiais para otimizar o custo do projeto de lajes de concreto armado. Foi desenvolvida, utilizando uma abordagem de rede neural artificial, uma metodologia para uma mistura de concreto com menor teor de cimento e água, maior durabilidade, melhor nos aspectos econômico e ecológico.

Choi *et al.* (2007) propuseram uma abordagem alternativa para prever a resistência ao cisalhamento do conjunto laje-pilar carregado concentricamente utilizando a lógica Fuzzy. Para tanto, foram utilizados 178 conjuntos de dados experimentais da literatura e que foram submetidos para testes com um sistema de lógica Fuzzy. Foi verificado que o modelo baseado na lógica Fuzzy apresentou melhores previsões de resistência ao cisalhamento.

Demir (2008) usou uma rede neural artificial para prever módulos elásticos de concreto normal e de alta resistência. Dessa forma, foi utilizado um modelo de rede neural artificial para determinar a resposta de períodos fundamentais, valores máximos de resistência ao cisalhamento, momentos de flexão e deslocamento do último andar de edifícios históricos.

Trtnik *et al.* (2009) utilizaram velocidade de pulso ultrassônico e técnicas de redes neurais para predição da força do concreto. As redes neurais serviram de base para determinar a resistência ao concreto para diferentes períodos de cura do mesmo. A determinação da resistência ao cisalhamento de pilares de concreto armado foi realizada por meio de redes neurais artificiais.

Erdem (2010) aplicou as técnicas de redes neurais artificiais para predição da capacidade máxima de momento das lajes de concreto armado em casos de incêndio. Dessa forma, a rede neural artificial foi aplicada com o intuito de analisar e gerar um modelo capaz de prever a capacidade estrutural de um sistema de vigas ancoradas.

É comumente utilizado para o cálculo de resistência à punção o método da superfície de controle, que será abordado de forma mais detalhada na seção 2.4.1. Todavia, neste método a tensão de cisalhamento é limitada a um valor referente à

secção ao redor do pilar como ponto crítico de ruptura, em que geralmente é considerado uma função da resistência ao concreto e dos parâmetros geométricos do conjunto laje-pilar. Este método é simples e resulta em estimativas razoáveis. Será observado que, para este método, diferentes normas consideram diferentes dimensões e formas da seção crítica de ruptura. Dessa forma, este fator resulta em diferentes valores de resistências ao cisalhamento (CORDOVIL, 1996). Assim sendo, as normas diferem na escolha de parâmetros que afetam o fenômeno. Algumas normas admitem que essa resistência seja proporcional ao valor da raiz quadrada da resistência à compressão. No entanto, o aumento da resistência da ligação, em função do aumento da resistência do concreto, não confere à laje uma melhor ductilidade com relação à ruína (RABELLO, 2010).

Para o caso das normas europeias, as mesmas tratam na prática as tensões de cisalhamento calculadas também pelo método da superfície de controle. No entanto, para o caso da norma CEB-FIP (1990) e Eurocode 2 (2004), a distância de perímetro de controle é de $2d$, onde d é a espessura do pilar. Na ACI 318 (2014), o perímetro de controle é de apenas $0,5d$. Na BS 8110 (1997), é $1,5d$, mas o perímetro tem cantos quadrados em comparação aos cantos arredondados presentes na norma CEB-FIP (1990).

É importante ressaltar que a rede neural artificial é uma ferramenta matemática que tenta imitar o funcionamento de neurônios biológicos do cérebro humano. Pode ser usado para determinar uma relação funcional entre os dados medidos de entrada e saída. Normalmente, a relação é melhor se comparada ao uso de métodos de regressão. Uma rede neural artificial comumente consiste em uma camada de entrada, uma ou mais camadas ocultas e uma camada de saída. O número dos neurônios na camada de entrada é igual ao número de variáveis no experimento adicionados a um. O neurônio extra apresenta um valor constante igual a um. O número das camadas ocultas e o número de neurônios em cada camada é escolhido para fornecer um valor mínimo para o erro entre a saída medida e a saída da rede neural artificial, mantendo-se assim a capacidade da rede de se generalizar (EL SHAFEY *et al.*, 2010).

El Shafey *et al.* (2010) propuseram uma rede neural artificial com duas camadas ocultas, das quais a primeira camada apresenta 50 neurônios e a segunda camada, 10 neurônios. Foram utilizadas como variáveis de entrada para elaboração

da rede neural artificial a resistência à compressão do concreto, o comprimento da laje, a altura útil da laje e a taxa de armadura de flexão. Como subsídio para sua pesquisa, foram utilizados um banco de dados com 244 dados experimentais de lajes sem armadura de cisalhamento submetidas à punção. Os dados experimentais estão disponíveis em El Shafey *et al.* (2010) e foram conduzidos por diferentes pesquisadores. Assim sendo, a rede neural artificial proposta apresenta uma camada de entrada, duas camadas ocultas e uma camada de saída que foi projetada para prever a tensão resistente. Foram utilizadas para desenvolver e treinar a rede neural artificial as funções *trainlm* e *lerngdm* disponíveis no software *Matlab*, especificamente na *toolbox* chamada “*Neural Toolbox*”. Os dados de entrada foram divididos em 3 conjuntos, dos quais o primeiro conjunto consiste em 60% dos dados para ser usado para gerar os parâmetros da RNA, o segundo e terceiro conjuntos consistem em 20% dos dados, respectivamente, para serem usados para validar e testar a capacidade de generalização da rede neural artificial. Vale ressaltar que os conjuntos foram retirados aleatoriamente no banco de dados.

Acerca da utilização de técnicas de regressão linear, El Shafey *et al.* (2010) utilizaram o mesmo banco de dados utilizado na rede neural artificial e obtiveram equações que descrevem a previsão de punção, conforme a equação 2.1.

$$v_c = 0,51(10)^{-3} f_c^{0,41} \rho^{0,38} \left(\frac{250}{d}\right)^{0,1}, \quad (\text{kN/m}^2), \quad (2.1)$$

onde f_c é a resistência à compressão do concreto medido em MPa, ρ é a taxa de armadura de flexão que é adimensional (%), $k = \left(\frac{250}{d}\right)^{0,1}$ é o fator de escala e d é a altura útil da laje em mm.

$$P = 12,3(c + d)^{0,53} f_c^{0,34} \rho^{0,41} \left(\frac{d}{250}\right)^{1,22}, \quad (\text{kN}), \quad (2.2)$$

onde P é a tensão resistente à carga em kN, c é o comprimento da laje em mm, d é a altura útil da laje também em mm, f_c é a resistência à compressão do concreto

medido em MPa e p é a taxa de armadura de flexão que é adimensional (EL SHAFEY *et al.*, 2010).

Para o desenvolvimento do trabalho proposto, El Shafey *et al.* (2010) utilizaram dados estatísticos para análise dos resultados obtidos para fins de comparação com as normas. As proporções de tensão de cisalhamento obtidas de forma experimental e utilizando as redes neurais artificiais e técnicas de regressão numérica apresentaram valores de média, desvio padrão, coeficiente de variação e intervalos de confiança, satisfatórios e até melhores se comparados com os valores aos valores estatísticos na mesma análise para o caso da utilização das normas. Percebeu-se que os valores estimados estão satisfatórios ao comparar com os valores obtidos nos procedimentos experimentais que constam no banco de dados da literatura. Os dados estatísticos estão descritos na tabela 2.1.

Tabela 2.1 – Resultados Analíticos.

Fonte: El Shafey *et al.* (2010).

Equação	Média	Desvio Padrão	Coeficiente de Variação (%)	Intervalo de confiança 95%
V_{exp}/CSA	1,25	0,34	27,2	1,25±0,043
V_{exp}/ACI	1,09	0,29	26,6	1,09±0,036
V_{exp}/CEB	0,95	0,13	13,68	0,96±0,016
V_{exp}/BS	1,02	0,13	12,75	1,02±0,016
$V_{exp}/EC2$	1,16	0,21	18,1	1,16±0,026
V_{exp}/V_{neural}	0,92	0,17	18,48	0,92±0,021
$V_{exp}/V_{regressão}$	1	0,15	15	1±0,019
$P_{exp}/P_{regressão}$	1	0,12	12	1±0,015

Com a comprovação dos dados estatísticos, El Shafey *et al.* (2010) desenvolveram assim uma nova referência para projetistas estruturais ao apresentar formas confiáveis de estimativas e predições de resistência à punção em lajes,

podendo o mesmo utilizar o método das redes neurais artificiais ou as equações resultantes da técnica de regressão aplicada. É importante ressaltar que as equações obtidas são do tipo exponencial e que algumas informações do banco de dados foram desconsideradas por apresentarem valores com alto índice de dispersão dos modelos propostos. No que diz respeito aos modelos propostos, o trabalho em questão apresenta uma seção específica que aborda os possíveis modelos matemáticos existentes e que podem ser utilizados para as aplicações de técnicas de regressão.

2.3. Fatores que influenciam a Resistência à Punção

O efeito da punção em lajes lisas de concreto armado sofre influência de diversos fatores. Segundo Rabello (2010), além do grande problema da ligação laje-pilar estar situada em uma região de nós, a variação na forma, textura, tamanho do agregado, com os fenômenos de micro fissuração, determinantes do comportamento não-linear do concreto, aliada à presença das barras das armaduras de aço estrutural conduzem o material concreto armado a uma heterogeneidade de materiais e comportamentos que agravam a indefinição do sistema. A ocorrência de fissuras na massa de concreto, juntamente com a microfissuração do concreto endurecido da zona de transição, configura um quadro muito complexo. Isso torna muito difícil o estabelecimento de uma teoria geral aceitável para o problema da punção em lajes de concreto armado.

2.3.1. Espessura da laje

Quando se aumenta a espessura da laje com a finalidade de combater o efeito da punção, pode-se optar por duas soluções: aumentar a espessura de toda a laje ou simplesmente na região da sua ligação com o pilar, o que é chamado de capitel ou engrossamento da laje. Ao se modificar a altura útil para toda a laje, aumenta-se a tensão resistente e também as tensões solicitantes, de tal forma que o processo não se torna vantajoso tanto economicamente quanto tecnicamente. Já o uso de capitéis, embora aumente a resistência à punção da ligação, pode também apresentar alguns inconvenientes, como perder as vantagens oferecidas pelo teto

liso e até mesmo prejudicar alguns aspectos arquitetônicos, além de aumentar a distância entre pisos (RABELLO, 2010).

A espessura da laje é um dos principais parâmetros que influenciam na resistência à punção, uma vez que, teoricamente, esse parâmetro influenciaria somente na área de corte da seção transversal. Muito embora seja um ponto de vista generalista, já há a influência de materiais com ruptura frágil (CARVALHO, 2008).

2.3.2. Dimensão da laje, formato e dimensão do pilar

Além da influência direta da área do pilar em contato com a laje, a proporção entre as dimensões também pode ter influência no caso da punção. Segundo Regan (1985), quando comparados a pilares quadrados, os pilares retangulares com relação entre lado maior e lado menor maior que 2 têm uma ruína mais abrupta, o tamanho do cone de punção é menor e a resistência da ligação também é menor pelo fato de terem as tensões concentradas nos lados de menor dimensão. Os autores afirmam ainda que, quanto ao formato, pilares retangulares têm resistência em torno de 15% menor em relação a pilares circulares de mesma área, e isto se deve ao fato de existir uma concentração de tensões nos cantos nos pilares retangulares. No que diz respeito à sua posição na laje, tem-se que para uma mesma dimensão de pilar, por influência da área resistente da laje, pilares internos resistem mais que pilares de borda, sendo os pilares de canto menos resistentes em relação à punção.

Quanto à geometria do pilar, Vanderbilt (1972) avaliou uma série de ensaios com pilares quadrados e circulares, variando a relação do seu tamanho (c) e a altura útil da laje (d). Concluiu-se que lajes apoiadas em pilares circulares apresentam maior tensão resistente que lajes apoiadas em pilares quadrados de igual perímetro, devido à diferença na distribuição das tensões dos pilares.

2.3.3. Armadura de punção

As armaduras de punção proporcionam um aumento na resistência da ligação laje-pilar. Esse tipo de armadura pode ser de vários tipos e formatos, e seu uso permite que se adotem espessuras mais delgadas da laje sem haver necessidade do uso de capitéis e engrossamentos da laje, mantendo, portanto, as principais vantagens do uso de lajes sem vigas. Os principais benefícios do uso da armadura de punção são o aumento da resistência e da ductilidade da ligação laje-pilar. Isso significa que sua ruptura não ocorrerá mais de maneira frágil e sem aviso, permitindo que a estrutura se deforme antes de romper-se. Essa armadura deve equilibrar no mínimo 50% da força de reação proveniente da laje no pilar. Apesar das vantagens, é necessário que haja cuidados especiais no uso da armadura de punção. Folgas na ancoragem e má disposição das armaduras podem provocar escorregamentos e perdendo assim sua função estrutural (RABELLO, 2010).

2.3.4. Resistência do concreto

Um dos principais parâmetros para predição da punção é a resistência à compressão do concreto, onde a resistência à punção está diretamente ligada ao parâmetro em questão. No entanto, essa proporção representa o acréscimo de resistência gerado pelo concreto. Dessa forma, cabe analisar melhor a influência deste parâmetro na saída do modelo, denominada tensão resistente.

A resistência à punção da ligação laje-pilar está relacionada à resistência do concreto à tração. Algumas normas admitem que essa resistência seja proporcional ao valor da raiz quadrada da resistência à compressão. Entretanto, ao aumentar a resistência da ligação aumentando a resistência do concreto, isso não quer dizer que a laje terá um melhor grau de resistência à deformação quando submetido à punção (CARVALHO, 2008).

2.3.5. Relação momento fletor / esforço cortante

Com relação ao efeito do momento fletor na resistência à punção, ensaios experimentais têm mostrado que, quanto maior a excentricidade do carregamento, menor a resistência da ligação (CARVALHO, 2008).

2.3.6. Taxa de armadura de flexão

A importância da taxa de armadura decorre de sua influência sobre o efeito de pino da armadura longitudinal de tração, após a fissuração da borda tracionada da peça e de sua influência sobre a manutenção do engrenamento dos agregados. Para Fusco (1985), uma maior taxa de armadura causa menor incidência de fissuras; uma menor taxa, ao contrário, eleva a fissuração. Conforme resultados experimentais mostrados por Fusco (1985) observam-se que taxas acima de 2% não aumentam a resistência da laje à punção.

A taxa de armadura de flexão, por sua vez, pode controlar melhor a abertura de fissuras, favorecendo a transferência de esforços. Há uma grande dificuldade em definir a área de influência das armaduras de flexão. Regan (1981) sugeriu que a influência da armadura de flexão na resistência à punção seja proporcional à raiz cúbica da taxa de armadura flexão. Esse parâmetro deve ser avaliado, uma vez que há a dificuldade na definição da área de influência da taxa de armadura de flexão, bem como de outros parâmetros existentes. Para tanto, em alguns casos, as normativas divergem quanto à definição de valores limites de influência da taxa de armadura de flexão. Em outros casos, as normativas não consideram limitações de influência.

2.3.7. Efeito de escala

A influência do efeito de escala geralmente é dada em função da altura útil da laje. Este efeito refere-se ao fato de que, em igualdade de outras condições, as lajes de menor altura útil são mais resistentes que as lajes mais espessas (RABELLO, 2010). Este fato é, em princípio, justificável pela possibilidade de maior

heterogeneidade do concreto das lajes mais espessas. Além disso, mesmo com uma mesma taxa de armadura longitudinal, nas lajes de maior espessura, a armadura de tração perde sua capacidade de controlar a abertura das fissuras ao longo de toda a altura da seção fissurada.

Deste modo, a espessura da peça condiciona o engrenamento dos agregados, fazendo com que a altura útil também seja um fator que controla a resistência das lajes à punção. A falta de consideração desse fato pode levar a critérios que superdimensionam as peças estruturais em função da significativa subestimação da resistência ao cisalhamento do concreto (CORDOVIL, 1996).

Resultados experimentais mostram, no entanto, que a partir de uma determinada espessura, a influência da variação da altura útil deixa de ser significativa. Essa limitação da influência da espessura a um determinado valor decorre de um efeito de escala entre a altura útil da peça e o diâmetro máximo dos agregados empregados na fabricação do concreto (RABELLO, 2010).

Deste modo, nas peças usuais de concreto estrutural, com diâmetros máximos do agregado da ordem de 30 mm, o engrenamento dos agregados é mais eficiente em lajes delgadas do que em peças de grande espessura. Todavia, conforme resultados experimentais, a diminuição do efeito do engrenamento dos agregados fica estabilizada ao redor de um determinado valor da altura útil (CARVALHO, 2008).

O efeito de escala se dá, inicialmente, como característica aleatória da resistência do material, ou seja, é possível encontrar com mais facilidade pontos de maior resistência no material em caso de estruturas maiores. Para Bazant (1994) o efeito de escala deve ser explicado a partir da dissipação de energia devido ao crescimento da fissuração.

2.3.8. Tipo de carregamento

No caso das cargas concentradas aplicadas nas lajes, afastadas dos apoios, a resistência média à punção não é mais influenciada por um eventual arqueamento dos esforços, sendo assim, a resistência passa a depender apenas do engrenamento dos agregados, do efeito de pino da armadura de flexão e da própria

resistência do concreto à tração. Esta situação também pode ser relacionada à reação de um pilar sobre uma laje diretamente apoiada nele (RABELLO, 2010).

2.3.9. Armadura contra colapso progressivo

Em um edifício, a ruína localizada de uma ligação aumenta a força e a excentricidade nos pilares próximos, podendo desencadear a ruína generalizada de um pavimento e até de uma estrutura, se os painéis de laje caírem uns por cima dos outros. Essa sucessão de ruínas dos painéis é chamada de colapso progressivo (LIMA, 2001).

A armadura contra o colapso progressivo deve ser localizada na parte inferior da laje na região da ligação laje-pilar. Essa armadura aumenta a ductilidade da ligação na fase pós-puncionamento, redistribuindo os esforços de modo a evitar a ocorrência do colapso progressivo (CARVALHO, 2008).

2.3.10. Tipo de armadura de punção

Além de aumentar a resistência da ligação, alguns tipos de armadura de punção fornecem uma maior ductilidade à ligação, ou seja, uma maior capacidade da ligação em se deformar. Deve-se, no entanto, estudar cuidadosamente o detalhamento da ancoragem dessa armadura de punção, principalmente para lajes mais esbeltas (RABELLO, 2010).

Os principais tipos de armaduras são: estribos, barras dobradas, *shearheads*, fibras, conectores tipo pino, segmentos de perfis metálicos e sistema *shearband* (TAKEYA, 1981). No entanto, não há necessidade de estudo detalhado dos tipos de armadura de punção, uma vez que o objetivo do trabalho está na previsão de resistência à punção de lajes lisas de concreto armado sem armadura de cisalhamento utilizando técnicas de identificação de sistemas.

2.4. Modelos de Cálculo

Os métodos mais conhecidos desenvolvidos para verificar a resistência de uma ligação laje-pilar com relação à punção são apresentados nas seções 2.4.1, 2.4.2 e 2.4.3.

2.4.1. Método da Superfície de Controle

Consiste em se calcular uma tensão uniforme solicitante de punção em uma determinada superfície de controle, perpendicular ao plano médio da laje, localizada a uma determinada distância da face do pilar ou da área carregada e comparar o valor do esforço solicitante com um determinado parâmetro de resistência do concreto para aquele perímetro. (CARVALHO, 2008). Se naquele perímetro o esforço resistente for maior que o solicitante não é necessário o uso de armadura de punção. A área desta superfície é dada pela multiplicação do perímetro pela altura da superfície de controle, dada pela altura útil da laje (d). Esta tensão atuante, geralmente calculada em função da posição do pilar, da força concentrada e da presença ou não de momentos fletores, é então comparada com uma tensão resistente, geralmente calculada em função da resistência do concreto, da taxa de armadura de flexão e da presença ou não de armadura de punção. (RABELLO, 2010). A abordagem baseada na superfície de controle não significa o entendimento de que a ruptura ocorra nessa superfície, como afirma Cordovil (1996).

A superfície real de ruptura é mais parecida com a de um tronco de cone. Cordovil ainda diz que a superfície de controle deve ser considerada como uma grandeza de referência, ou um método que visa calibrar, de maneira prática, a segurança da estrutura. Por isso, a escolha dessa superfície de controle sempre deve estar ajustada com a definição do parâmetro de resistência do concreto. Portanto pode-se concluir que o modelo adotado atualmente pelas normas para o cálculo da punção não representa o fenômeno físico da punção, mas sim uma adaptação para o entendimento e solução do problema (RABELLO, 2010). A figura 2.3 apresenta a definição física de superfície de controle utilizada na norma NBR 6118 (2014).

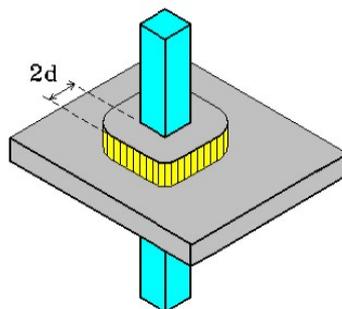


Figura 2.3 – Definição da superfície de controle da NBR 6118 (2014).

Fonte: (IBRACON, 2014).

Esse método é a base de vários códigos e normas, tais como, por exemplo, a NBR 6118 (2014), o CEB/FIB (1990), o Eurocode 2 (2004), a BS 8110 (1997) e o ACI 318 (2014). Entretanto, a definição da superfície de controle é diferente para cada norma, como será visto na seção 2.5.

2.4.2. Método das Bielas e Tirantes

Os primeiros a usarem o modelo de bielas e tirantes para explicarem a punção sem efeitos de momentos foram Alexander e Simmonds, como menciona McGregor (1997). Segundo Leonhardt e Mönning (1979), ensaios demonstram que as deformações tangenciais são, inicialmente, maiores que as deformações radiais. Por isso, surgem primeiro as fissuras radiais. Somente para elevados estágios de carga aparecem algumas fissuras circulares, a partir das quais se desenvolvem as superfícies de ruptura por cisalhamento do cone de punção com inclinação média da ordem de 30° . Para Rabello (2010), antes da formação das fissuras inclinadas na região da laje próxima ao pilar, os esforços de punção são resistidos também pela tração no concreto. Uma vez que se formam estas fissuras, os esforços de punção não podem mais ser resistidos por tração.

Após a formação das fissuras, os esforços são resistidos pelas bielas A-B e D-C, conforme apresentado na figura 2.4, se estendendo da face inferior da laje no pilar até a armadura de flexão negativa, nos pontos A e D. As bielas são consideradas nos quatro lados do pilar, no caso de pilares retangulares. A componente horizontal dos esforços nas bielas causa mudanças nos esforços da armadura de flexão, nos tirantes A e D. A componente vertical “empurra” a armadura de flexão para cima, e é resistida pela tensão de tração no concreto entre as barras.

Eventualmente, esse concreto rompe no plano das armaduras de flexão, o que resulta em falha por punção, como afirma McGregor (1997). A figura 2.4 apresenta o modelo de bielas e tirantes.

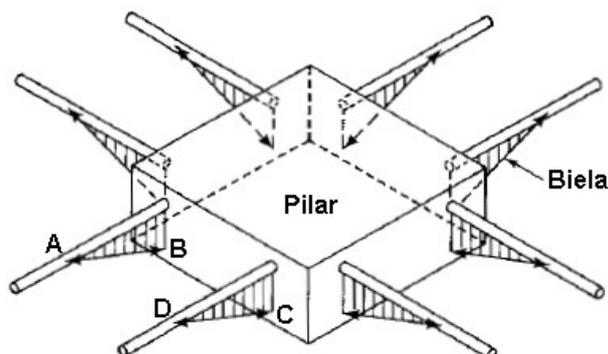


Figura 2.4 – Modelo de bielas e tirantes para a punção.

Fonte: (Rabello, 2010).

2.4.3. Modelos Mecânicos

Os modelos mecânicos, também ditos “racionais”, são fundamentados pelos modelos constitutivos do concreto e do aço e se baseiam no comportamento da ligação, observado em ensaios. A resistência da ligação, nesse caso, é obtida pelo equilíbrio entre as ações aplicadas e os esforços internos. Tem-se o modelo desenvolvido por Kinnunen e Nylander (1960) que, embora complexo, apresentam a grande vantagem de se poder visualizar o comportamento real da ligação laje-pilar.

Esse modelo apresenta uma hipótese para o equacionamento do problema de laje circular, solicitada por um pilar central também com seção circular. Trata-se do modelo em que a ruptura da laje ocorre a partir do pilar, como deslocamento de um sólido interno, conforme se observa na figura 2.5 o modelo mecânico. Esse sólido teria a forma aproximada de um tronco de cone, com a superfície inclinada entre 25° e 30° graus em relação ao plano da laje.

Porém, como o modelo estudado por Kinnunen e Nylander (1960) foi realizado em pilares circulares, quando se tenta estender essa teoria para formas quadradas ou retangulares, a formulação fica pouco confiável. Na zona contígua ao tronco do cone, a laje seria dividida em elementos rígidos iguais, limitados pela superfície inclinada e por fissuras radiais. Cada elemento rígido produziria um

trabalho decorrente da rotação em torno de um ponto chamado “centro de rotação”, denominado CR, conforme apresentado na figura 2.5.

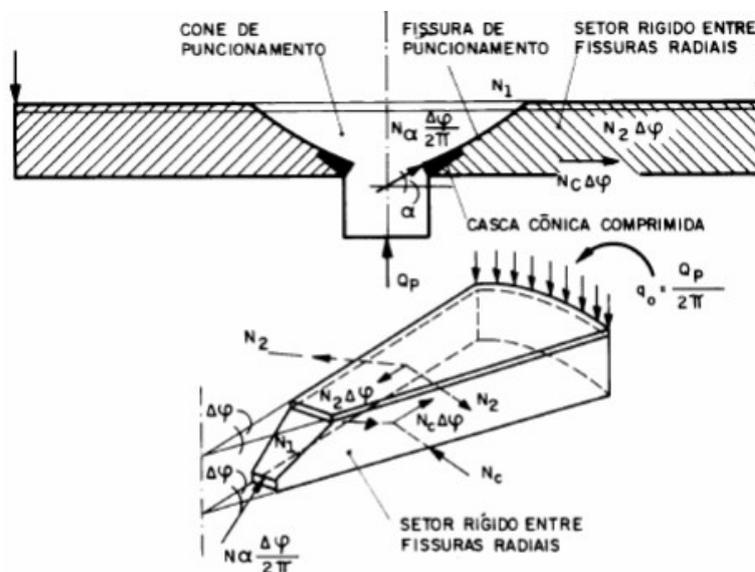


Figura 2.5 – Hipótese de ruptura e elemento rígido do modelo mecânico.

Fonte: Cordovil (1996).

onde esse centro de rotação seria o limite entre dois estágios ideais de fissuração: as fissuras que limitam a superfície inclinada, bem como as fissuras radiais, seriam formadas antes da ruptura da laje, e a fissura localizada entre a periferia do pilar e o CR somente seria formada no instante da ruptura da laje.

A partir dessas hipóteses de funcionamento, é possível estabelecer as condições de equilíbrio entre os esforços externos e internos. Nessas circunstâncias, há condições de se estabelecer uma teoria próxima da realidade, bastando para isso, aplicar o princípio dos trabalhos virtuais, supondo a rotação do elemento (RABELLO, 2010). Porém, quando se tenta estender essa teoria para formas quadradas ou retangulares, Cordovil (1996) afirma que não há como definir uma formulação confiável. Entretanto, atualmente a simulação virtual por Método dos Elementos Finitos (FEM) apresenta bons resultados.

2.5. Normas Técnicas

As formulações que constam nas normas utilizadas, bem como algumas considerações necessárias para a compatibilização dessas normas são

apresentados nos tópicos 2.5.1 ao 2.5.4. Nesta seção serão apresentadas as definições de perímetro de controle utilizadas por cada norma, os cálculos das superfícies de controle, bem como as equações de cálculo de tensão resistente.

2.5.1. ACI 318 (2014)

Para o dimensionamento de lajes lisas a norma ACI 318 (2014) recomenda que a resistência à punção seja determinada a partir de uma tensão resistente aplicada em um perímetro de controle afastado do pilar a uma distância igual a $d/2$, com uma superfície média posicionada no meio da fissura de punção, tendo esta fissura uma inclinação hipotética igual a 45° . A Figura 2.6 mostra o perímetro de controle correspondente ao recomendado pela norma.

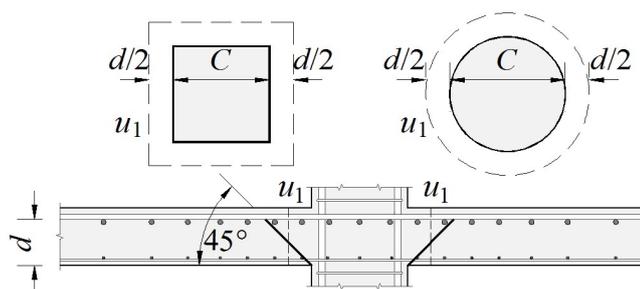


Figura 2.6 – Perímetro de controle segundo o ACI 318 (2014).

Fonte: Pereira Filho (2016).

Para a norma ACI 318 (2014), a tensão resistente à punção é a menor dentre três expressões. A primeira leva em consideração um possível efeito negativo que pilares com dimensões muito pequenas em relação à altura útil da laje e da raiz da resistência à compressão do concreto. A segunda estima uma diminuição na tensão resistente para pilares retangulares devido a concentrações de tensões além da resistência a compressão do concreto. Por fim, a última expressão estima que a tensão resistente à punção seja função apenas da raiz da resistência à compressão do concreto (ACI 318, 2014). Assim a resistência à punção de uma laje sem armadura de cisalhamento pode ser estimada, de forma empírica, pela equação 2.3.

$$V_{RcACI=\min} \begin{cases} 0,083 \cdot \left(40 \cdot \frac{d}{u_1} + 2\right) \cdot \sqrt{f_c} \cdot u_1 \cdot d \\ 0,17 \cdot \left(1 + \frac{2}{b}\right) \cdot \sqrt{f_c} \cdot u_1 \cdot d \\ 0,33 \cdot \sqrt{f_c} \cdot u_1 \cdot d \end{cases} \quad (2.3)$$

onde f_c é a resistência à compressão do concreto limitada ao valor máximo de 69 MPa, u_1 é o perímetro de controle em mm, d é a altura útil da laje em mm, a é a maior dimensão do pilar b a menor dimensão do pilar.

É possível perceber que as recomendações do ACI são conservadoras e que o coeficiente de variação é elevado em relação aos demais métodos, uma vez que o único parâmetro utilizado para estimar a resistência ao cisalhamento é a resistência à compressão do concreto (SACRAMENTO *et al.*, 2012).

2.5.2. Eurocode 2 (2004)

Igualmente ao ACI 318 (2014), a norma Eurocode 2 (2004) prevê a resistência à punção aplicando uma tensão resistente em uma área determinada a partir de um perímetro de controle, porém esse perímetro tem superfície média posicionada na extremidade da fissura de punção, considerando uma inclinação hipotética igual a $26,6^\circ$, ou seja, com um afastamento de $2d$ em relação às faces do pilar, como exemplificado na figura 2.7.

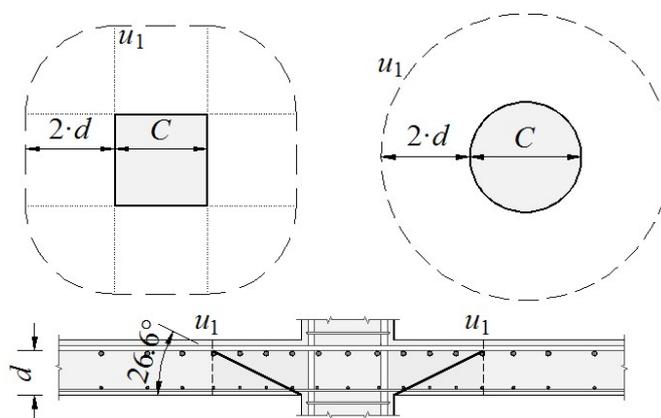


Figura 2.7 – Perímetro de controle segundo o Eurocode 2 (2004).

Fonte: Pereira Filho (2016).

Para encontrar a tensão resistente, a norma Eurocode 2 (2004) utiliza uma recomendação empírica semelhante àquela que prevê a resistência ao cisalhamento de vigas, a qual considera o efeito de escala e a taxa de armadura de flexão, além da resistência à compressão do concreto. A resistência à punção em lajes sem armaduras de cisalhamento pode ser obtida através da equação 2.4.

$$V_{RcEC2} = 0,18 \cdot k \cdot \sqrt[3]{100 \cdot r \cdot f_c \cdot u_1 \cdot d} \quad (2.4)$$

onde k é um parâmetro que considera o efeito de escala, obtido através de

$$k = 1 + \sqrt{\frac{200}{d}} \leq 2, \text{ com } d \text{ em mm, } \rho \text{ é a média geométrica da taxa de armadura de}$$

flexão nas duas direções calculada por $r = \sqrt{\rho_x \cdot \rho_y} \leq 0,02$, onde ρ_x e ρ_y são as taxas

de armadura de flexão da laje nos sentidos x e y , levando em consideração apenas uma faixa de laje igual à dimensão do pilar naquela direção mais $3d$ para cada lado,

f_c é a resistência à compressão do concreto, u_1 é o perímetro de controle afastado a $2d$ das faces do pilar e d é a altura útil da laje.

2.5.3. NBR 6118 (2014)

Igualmente ao Eurocode 2 (2004), na NBR 6118 (2014) suas recomendações têm como base o texto do CEB-FIP MC 90 (1993), onde considera uma tensão resistente em uma área determinada a partir de um perímetro de controle com um afastamento de $2d$ em relação às faces do pilar, conforme apresentado na figura 2.8.

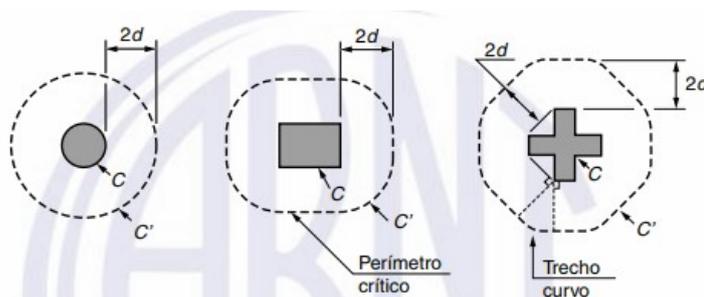


Figura 2.8 – Perímetro crítico em pilares internos segundo a NBR 6118 (2014).

Fonte: Norma NBR 6118 (2014).

Assim, a verificação da resistência de lajes sem armadura de cisalhamento (V_{RC}) deve ser realizada pela equação 2.5, porém sem as limitações para a taxa de armadura de flexão (ρ) e para o efeito de escala recomendadas no Eurocode 2 (2004).

$$V_{RCNBR} = 0,182 \cdot \left(1 + \sqrt{\frac{200}{d}} \right) \cdot \sqrt[3]{100 \cdot r \cdot f_c \cdot u_1} \cdot d \quad (2.5)$$

onde u_1 é o perímetro de controle em mm (também afastado a $2d$ das faces do pilar).

Por apresentar melhores valores de conservadorismo e segurança em aspectos comparativos com dados experimentais, a norma NBR 6118 (2014) é muito bem aceita como referência para engenheiros e projetistas.

2.5.4. ETA 0454 (2012)

Assim como a NBR 6118 (2014), a norma em questão se assemelha bastante com as recomendações do Eurocode 2 (2004), diferenciando-se delas principalmente por suas regras para o dimensionamento das armaduras de cisalhamento. Na verificação da ruptura por punção sem armaduras de cisalhamento utiliza-se a equação 2.6.

$$V_{RCETA} = C_R \cdot k \cdot \sqrt[3]{100 \cdot r \cdot f_c \cdot u_1} \cdot d \quad (2.6)$$

onde C_R é um fator empírico que pode ser obtido através de $C_R = 0,18 \leq \frac{u_0}{d} \leq 4$ ou $C_R = 0,18 \cdot \left(0,1 \cdot \frac{u_0}{d} + 0,6\right)^3$, $0,15 \leq \frac{u_0}{d} \leq 4$, onde k é um parâmetro que considera o efeito de escala, obtido através de $k = 1 + \sqrt{\frac{200}{d}} \leq 2$, ρ é a taxa de armadura de flexão respeitando os limites de $r = \sqrt{r_x \cdot r_y} \leq 0,02$ ou $r \leq 0,5 \cdot \left(\frac{f_c}{f_{ys}}\right)$, onde u_1 é o perímetro de controle em mm (semelhante à figura 2.6).

2.6. Conceituação de Identificação de Sistemas

Identificação de Sistemas é o ramo da engenharia que estuda métodos e projeta ferramentas computacionais para construir modelos matemáticos a partir de dados medidos. Conforme ilustrado na figura 2.9, consiste na determinação de um sistema quando se possui dados de entradas e saídas (MORIYA, 2005).

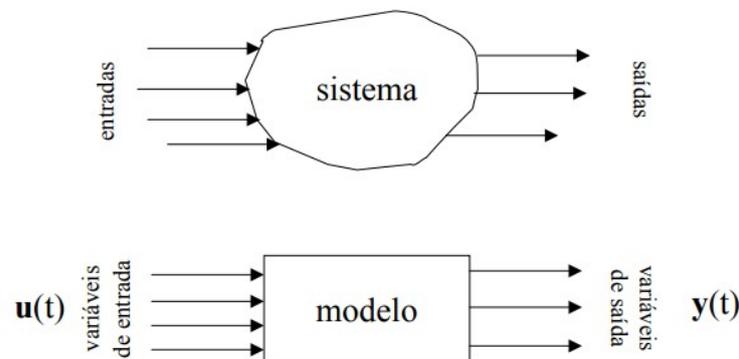


Figura 2.9 – Composição de um sistema.

Fonte: FEE Unicamp (2014).

Os ramos de aplicação do tema são: simulação, previsão, otimização e projetos de sistemas de controle, dentre outras. Os modelos são construídos a partir da análise e determinação de uma relação matemática entre os dados de entrada e saída do sistema (MOREIRA, 2002). Os passos para identificação de sistemas são:

- Testes experimentais e coletas de dados;
- Escolha da representação matemática;

- Determinação da estrutura do modelo;
- Estimação dos parâmetros;
- Validação do modelo.

O resultado ideal esperado está em encontrar um modelo global (que seja válido para os experimentos de todos os autores presentes nos bancos de dados) que seja capaz de prever, dentro de um limite aceitável de erro, o ponto de ruptura de cada laje em função dos parâmetros, fazendo uma análise estatística do erro de predição para validar. É importante destacar que o limite de erro aceitável está diretamente relacionado às métricas de desempenho provenientes das normas. Entretanto, há a dificuldade em obter um modelo global que possa servir para todas as lajes em estudo, entretanto, esta premissa depende diretamente da capacidade de predição do(s) modelo(s) proposto(s).

É importante destacar que a modelagem deverá encontrar limitações por conta dos fatores que influenciam no fenômeno e, até mesmo, a limitação numérica destas variáveis de entrada do sistema. Estas limitações podem estar relacionadas à quantidade de variáveis de influência à punção, às limitações numéricas de determinadas variáveis, além do excesso de conservadorismo ou segurança presentes nas normativas em estudo. Considerações estas devem ser evidenciadas, além de outras, como é o caso do intervalo de amostragem do modelo a ser encontrado. Possivelmente, a geometria do pilar possa influenciar de tal forma que seja interessante dividir o banco de dados em dois grupos de pilares com formatos circulares e retangulares para que possam ser estudados separadamente de forma a se concluir sobre a influência da geometria na modelagem. Também pode-se gerar uma família de modelos baseados em outro parâmetro de entrada qualquer, para que assim seja possível obter modelos locais que possam ser válidos somente em determinados intervalos do sistema, desde que haja resultados satisfatórios nos modelos obtidos.

Outro fator a ser considerado é o grau de influência de cada um dos fatores que contribuem para a punção. Espera-se que sejam obtidos os referidos graus de influência dos mesmos de forma a avaliar sua real necessidade de considerá-los durante a fase de modelagem do modelo, uma vez que os refinamentos e otimizações podem ser aplicados com o objetivo de melhorar o sistema identificado.

Uma vez definidas as métricas de desempenho, é importante ressaltar que as amostras utilizadas para o cálculo dos índices de desempenho normalmente contêm resultados diferentes das amostras utilizadas ao longo do ajuste de parâmetros. Dessa forma, esse fator ajuda a verificar se o modelo realmente generalizou o comportamento do sistema e, por sua vez, não está simplesmente memorizando os dados. Para objeto de estudo e implementação dos algoritmos, será utilizada a última métrica estudada, ou seja, o chamado NMSE.

Quando dos resultados encontrados dos métodos experimentais juntamente com as recomendações normativas, há dispersão de valores, inclusive na análise de influência dos parâmetros inerentes ao fenômeno da punção. Dessa forma, faz-se necessário propor novos modelos matemáticos para o fenômeno da punção.

Tendo em vista a complexidade do problema, faz-se necessário testar diferentes estruturas de modelo. Preferencialmente, deve-se trabalhar com o modelo matemático polinomial que é a mais simples. O problema dessa alternativa é que os polinômios são funções suaves e, caso as características de ruptura da laje possam apresentar algum tipo de descontinuidade, o desempenho será abaixo do desejável. Uma primeira alternativa é usar estrutura trigonométrica, que possui também suas limitações (número elevado de regressores), mas há outras opções também, tais como algumas famílias de *wavelets* (ASSUNÇÃO, 2017).

Outra alternativa que se investigar é o uso de modelos implícitos. Um modelo é implícito quando o valor da saída é descrito em termos dela mesma, como é o caso da equação de uma elipse, por exemplo $y = 1 - x^2 - 2y^2$. Dessa forma, não há como isolar a saída sem resolver a equação. É importante considerar o uso desse tipo de equacionamento porque, em determinadas ocasiões, ela descreve melhor os dados do que um modelo explícito. No trabalho em questão, o uso de modelos implícitos vai depender diretamente do sucesso dos modelos explícitos que serão inicialmente testados.

2.6.1. Considerações básicas sobre Sinais e Sistemas

Pode se definir o conceito de sinal como um conjunto de dados ou informações sobre a natureza de um fenômeno físico (LATHI, 2007). Além do referido conceito, pode também ser entendido como uma quantidade de informações

que podem ser transmitidas (HAYKIN e VAN VEEN, 2001). De forma a enfatizar o conceito em estudo, o sinal é um vetor ou função matemática que carrega algum tipo de informação física (LATHI, 2007).

Um sinal é uma abstração de qualquer quantidade mensurável que é função de uma ou mais variáveis independentes como tempo ou espaço (MORIYA, 2005). Sinais podem ainda ser divididos em sinais de tempo contínuo ou de tempo discreto.

O estudo de qualquer fenômeno, natural ou proveniente de qualquer área de atividade humana, a sua representação por equações e curvas produzidas pelo relacionamento entre as grandezas que o regem constitui, certamente, uma das ferramentas mais eficazes desse estudo (ALMEIDA, 2015).

As técnicas de identificação de sistemas são bastante conhecidos e têm suas bases matemáticas solidamente assentadas, porém há muitos outros fenômenos na vida cotidiana cuja análise será muito mais significativa e ampla se conseguir descrevê-los por meio de modelos matemáticos e com a inclusão de um ou mais termos que relacionam-se, em geral, com erros cometidos ou nas hipóteses do modelo ou na coleta de observações (ALMEIDA, 2015). Será por meio desses modelos que se pode, por exemplo, estimar ocorrências futuras e direcionar tomadas de decisões.

O problema, portanto, consiste em, a partir de um conjunto de dados, obtidos por experimentação ou observação, relacionando grandezas (variáveis) envolvidas na ocorrência de determinado fenômeno, encontrar um modelo matemático que descreva e expresse de maneira satisfatória tal fenômeno (ASSUNÇÃO, 2017).

Para objeto de estudo deste trabalho, as informações coletadas são empíricas, ou seja, a relação entre as variáveis envolvidas é desconhecida. Para tanto, um dos métodos de obtenção de uma função representativa de um determinado fenômeno é a interpolação, que consiste em se obter uma curva suave que contenha um número reduzido de pontos, selecionados dentre um grupo obtido experimentalmente (SPERANDIO; MENDES; SILVA, 2003). A curva pode ser obtida por processo geométrico ou algébrico, devendo passar por todos os pontos selecionados. A seleção baseia-se no intervalo da função que é do interesse e apenas nesse intervalo a função obtida dá representatividade ao fenômeno (SANCHES; JORDAN, 2007).

Segundo Assunção (2017), o método de ajuste de curvas constitui uma alternativa mais adequada que a interpolação na obtenção de uma função

matemática para representar um determinado fenômeno quando se deseja efetuar análises que vão além do intervalo de valores obtidos experimentalmente. O caso do método dos mínimos quadrados, por exemplo, que aqui será estudado, surgiu para dar suporte a esse recurso matemático.

Segundo Guimarães (2013), a escolha da função $f(x)$ a ser usada para ajustar o conjunto de pontos experimentais não é feita ao acaso. Ela envolve um processo de análise que passa, por exemplo, pela identificação das relações de causa e efeito que governam o sistema estudado. O fato dessas relações não serem conhecidas não é empecilho para que se intua a forma de $f(x)$. Uma análise qualitativa do fenômeno e das condições experimentais em que a observação é feita muitas vezes é suficiente para que se possa estabelecer a forma dessa função.

2.7. Modelos de Sistemas

Para o estudo dos principais tipos de modelos de sistemas, é necessário apresentar os conceitos básicos e diferenciá-los, além de propor alguns exemplos, conforme serão apresentados nas seções 2.7.1, 2.7.2 e 2.7.3.

2.7.1. Modelos Estáticos

Para o caso de modelos estáticos, a saída do sistema não depende de valores passados das variáveis de entrada, conforme apresentado pela figura 2.10.

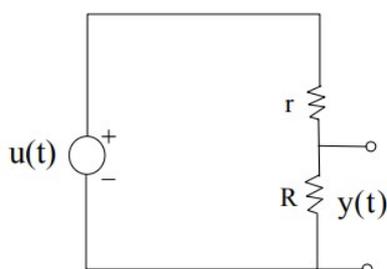


Figura 2.10 – Exemplo de Sistema Estático.

Fonte: FEE Unicamp (2014).

onde a tensão sobre o resistor R, ou seja, $y(t)$ depende exclusivamente de valores da fonte de tensão $u(t)$ em um determinado momento, não tendo qualquer influência de valores passados.

Conceitualmente, um modelo é estático se, e somente se, os valores das saídas não dependem de valores passados das entradas, sendo assim estritamente algébrica (não diferencial) a relação matemática entre eles (AGUIRRE, 2015). O modelo em si trata-se de um conjunto de equações que fornecem medidas que explicam os dados observados.

Mais precisamente, o sistema é dito estático ou sem memória se sua saída em qualquer instante t depender, no máximo, da força de sua(s) entrada(s) no mesmo instante t e não de qualquer valor passado ou futuro da(s) entrada(s). Dessa maneira, para os objetos de estudo deste trabalho, os bancos de dados de dados experimentais de lajes, não há relação de influência em uma laje submetida aos testes de punção com outras lajes dentro dos bancos de dados dentro de uma determinada ordem, ou seja, o sistema é dito estático.

2.7.2. Modelos Lineares e Não Lineares

Um sistema cuja saída seja proporcional a sua entrada é um exemplo de um sistema linear. Entretanto, a linearidade implica também na propriedade aditiva, ou seja, se várias entradas estão atuando em um sistema, então o efeito total do sistema devido a todas estas entradas podem ser determinadas considerando uma entrada por vez e assumindo todas as outras entradas iguais a zero (LATHI, 2007). Dessa forma, o efeito total é, portanto, a soma de todas as componentes de efeito. Esta propriedade pode ser escrita para um sistema linear se uma entrada x_1 está atuando sozinha e possui efeito y_1 , e se a outra entrada x_2 também atua sozinha e possui efeito y_2 . Portanto, se $x_1 \rightarrow y_1$ e $x_2 \rightarrow y_2$, então para todo x_1 e x_2 , $x_1 + x_2 \rightarrow y_1 + y_2$ (MARQUES, 2010).

Além disso, um sistema linear deve satisfazer a propriedade da homogeneidade, a qual afirma que para um determinado número arbitrário k , se

uma entrada aumentar k vezes, seu efeito também aumentará k vezes. Ou seja, se $x \rightarrow y$, então para todo k é válida a relação $kx \rightarrow ky$ (MORIYA, 2005).

Em resumo, a linearidade implica as propriedades de aditividade e homogeneidade. As duas propriedades, se combinadas, resulta em uma propriedade denominada de superposição, a qual é descrita da seguinte forma: se $x_1 \rightarrow y_1$ e $x_2 \rightarrow y_2$, então para todos valores de k_1 e k_2 tem-se que $k_1 \cdot x_1 + k_2 \cdot x_2 \rightarrow k_1 \cdot y_1 + k_2 \cdot y_2$, para todo x_1 e x_2 (MOREIRA, 2002).

Caso as propriedades descritas não sejam obedecidas, o sistema é dito não linear. Para o trabalho em questão, é importante ressaltar que o objetivo está em obter modelos não lineares nos parâmetros baseado em dois bancos de dados obtidos em Pereira Filho (2016) e Ferreira (2010).

2.7.3. Modelos Determinísticos e Estocásticos

Sinais determinísticos são aqueles cujos valores são completamente especificados em um dado instante. Então, um sinal determinístico pode ser modelado por uma função conhecida no tempo t . Assim sendo, podem ser modelados como funções de tempo completamente especificados. Não há incerteza quanto ao seu valor em qualquer instante de tempo (BERTOGNA, 2009). Um exemplo desse modelo é a onda quadrada.

Sinais probabilísticos ou estocásticos são aqueles que assumem valores aleatórios em um dado instante e devem ser caracterizados estatisticamente, ou seja, estudado através de probabilidades. Assim sendo, não podem ser modelados como funções de tempo, pois há incertezas quanto ao seu valor em qualquer instante de tempo (BERTOGNA, 2009). Um exemplo desse modelo é o sinal de eletroencefalograma.

2.8. Regressão Linear

Os modelos de regressão são largamente utilizados em diversas áreas do conhecimento, tais como: computação, administração, engenharias, biologia, agronomia, saúde, sociologia, etc. (GUIMARÃES, 2013). O principal objetivo desta

técnica está em obter uma equação que explique satisfatoriamente a relação entre a variável de saída e uma ou mais variáveis explicativas de entrada, possibilitando fazer previsões. Este relacionamento pode ser por uma equação linear ou uma função não linear.

Na figura 2.11, ressalta-se que o gráfico à direita representa uma função não linear ao analisar as entradas x e às saídas y . Em outras palavras, a linearidade neste caso é em relação aos parâmetros (e não às entradas) e, portanto, pode-se aplicar a regressão linear.

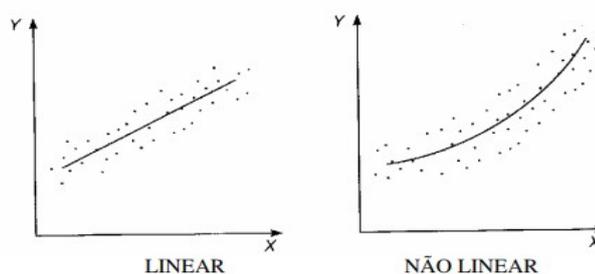


Figura 2.11: Formas lineares e não lineares de relação entre pares de variáveis.

Fonte: Paulo Guimarães (2013).

Conforme mencionado por Aguirre (2015), regressão linear é uma equação para se estimar o valor esperado de uma variável y , dados os valores de algumas variáveis de entrada x . Em geral, tem como objetivo tratar de um valor que não se consegue estimar inicialmente. A regressão linear é chamada linear porque se considera que a relação da resposta às variáveis é uma função linear nos parâmetros.

2.8.1. Regressão Linear Simples

Se uma relação linear nos parâmetros é válida para sumarizar a dependência observada entre duas variáveis quantitativas, então a equação 2.7 descreve esta relação que é dada por.

$$Y = a + bX \quad (2.7)$$

onde, segundo Guimarães (2013), esta relação linear entre X e Y é determinística, ou seja, ela afirma que todos os pontos coincidem exatamente sobre a reta de regressão e a e b são os parâmetros do modelo. No entanto este fato raramente irá ocorrer, ou seja, os valores observados não caem todos exatamente sobre esta linha reta. Existe uma diferença entre o valor observado e o valor fornecido pela equação. Esta diferença é denominada erro e é representada por ε , onde a mesma é uma variável aleatória que quantifica a falha do modelo em ajustar-se aos dados exatamente. Tal erro pode ser devido ao efeito, dentre outros, de variáveis não consideradas e de erros de medição. Incorporando esse erro à equação 2.8.

$$Y = a + bX + \varepsilon \quad (2.8)$$

onde é denominada modelo de regressão linear simples, na qual a e b são os parâmetros do modelo. A variável X , denominada variável regressora, explicativa ou independente, é considerada uma variável controlada e medida com erro desprezível. Já Y , denominada variável saída ou dependente, é considerada aleatória devido ao termo ε , isto é, existe uma distribuição de probabilidade para Y em cada valor possível de X .

2.8.2. Regressão Linear Múltipla

A regressão linear múltipla envolve três ou mais variáveis, ou seja, uma única variável dependente, porém duas ou mais variáveis independentes (explicativas). A finalidade das variáveis independentes adicionais é melhorar a capacidade de predição. Segundo Guimarães (2013) mesmo quando estamos interessados no efeito de apenas uma das variáveis, é aconselhável incluir as outras capazes de afetar Y , para maximizar as capacidades de predição.

Assim sendo, como sugere Guimarães (2013), o ideal é obter o mais alto relacionamento explanatório com o mínimo de variáveis independentes, sobretudo em virtude do custo na obtenção de dados para muitas variáveis e também pela necessidade de observações adicionais para compensar a perda de graus de liberdade decorrente da introdução de mais variáveis independentes. Portanto, a equação da regressão múltipla tem a forma apresentada pela equação 2.9.

$$Y = a + b_1x_1 + b_2x_2 + \dots + b_kx_k + e_i \quad (2.9)$$

onde a, b_1, b_2, \dots são parâmetros a se determinar e e_i é a variável que inclui todos os fatores residuais mais os possíveis erros de medição.

Enquanto uma regressão simples de duas variáveis resulta na equação de uma reta, um problema de três variáveis resulta um plano, e um problema de k variáveis resulta um hiperplano. Para o trabalho em questão, serão abordadas as regressões lineares múltiplas.

Segundo Bertogna (2009), modelos de regressão linear são frequentemente ajustados usando a abordagem do método dos mínimos quadrados, mas que também podem ser estudadas de outras maneiras. Assim, embora os termos mínimos quadrados e modelo linear estejam intimamente ligados, eles não são sinônimos.

2.9. Método dos Mínimos Quadrados

Para estimar os parâmetros do modelo é necessário um método de estimação. O método estatístico utilizado e recomendado pela sua precisão, é o método dos mínimos quadrados que ajusta a melhor equação possível aos dados observados. Por exemplo, o ajuste de uma reta pode ser feito com base em n pares de observações $(y_1, x_1), (y_2, x_2), \dots, (y_n, x_n)$; o método de estimação por mínimos quadrados consiste em escolher a e b de modo que a soma dos quadrados dos erros, ε_i ($i = 1, \dots, n$), seja mínima (GUIMARÃES, 2013).

Dessa forma, trata-se de uma técnica de otimização matemática que procura encontrar o melhor ajuste para um conjunto de dados tentando minimizar a soma dos quadrados das diferenças entre o valor estimado e os dados observados, onde tais diferenças são chamadas de resíduos. Consiste em um estimador que minimiza a soma dos quadrados dos resíduos da regressão, de forma a maximizar o grau de ajuste do modelo aos dados observados (ALMEIDA, 2015).

Um requisito para o método dos mínimos quadrados é que o fator imprevisível, ou seja, o erro, seja distribuído aleatoriamente e essa seja uma distribuição normal. Outro requisito é que o modelo seja linear nos parâmetros, ou seja, as variáveis apresentam uma relação linear entre si (MOREIRA, 2002).

Para o caso de regressão simples, deseja-se estimar valores de determinada variável x que se acredita ter o poder de explicação sobre y , conforme equação 2.10.

$$y = \alpha + \beta x + \varepsilon \quad (2.10)$$

onde α é o parâmetro do modelo denominado constante, b é o parâmetro do modelo denominado de coeficiente da variável x e ε representa a variação de y que não é explicada pelo modelo.

Também se tem uma base de dados com n valores observados de x e de y . Percebe-se usando a base de dados, que y e x são vetores, ou seja, representam uma lista de valores, um para cada observação da base de dados. O método dos mínimos quadrados ajuda a encontrar as estimativas de α e β . Como o nome diz, serão somente estimativas desses parâmetros, porque os valores reais dos parâmetros são desconhecidos. Portanto, ao fazer a estimativa, é mudada a notação de algumas variáveis, ou seja: $\alpha \rightarrow \hat{\alpha}, \beta \rightarrow \hat{\beta}, \varepsilon \rightarrow e$. Deste modo, ao estimar o modelo usando a base de dados, estima-se, na verdade a equação 2.11.

$$y_i = \hat{\alpha} + \hat{\beta}x_i + e_i \quad (2.11)$$

onde i indica cada uma das n observações da base de dados e e passa a ser chamado de resíduo, ao invés de erro.

O método dos mínimos quadrados minimiza a soma dos quadrados dos resíduos, ou seja, minimiza $\sum_{i=1}^n e_i^2$. A ideia por trás dessa técnica é que, minimizando a soma do quadrado dos resíduos, encontraremos a e b que apresenta a menor diferença entre a previsão de y e o y realmente observado. Substituindo e_i por $y_i - a - bx_i$, tem-se a equação 2.12.

$$S(a, b) = \sum_{i=1}^n (y_i - a - bx_i)^2 \quad (2.12)$$

dessa forma, a minimização se dá ao derivar $S(a, b)$ em relação a a e b utilizando a regra da cadeia e então igualar a zero, conforme resoluções e equações 2.13 e 2.14.

$$\frac{dS}{da} = \frac{dS}{dx} \frac{dx}{da}$$

$$\frac{dS}{dx} = 2 \sum_{i=1}^n (y_i - a - bx_i)$$

$$\frac{dx}{da} = -1$$

$$\frac{dS}{da} = -2 \sum_{i=1}^n (y_i - a - bx_i) = 0 \quad (2.13)$$

$$\frac{dS}{db} = -2 \sum_{i=1}^n x_i (y_i - a - bx_i) = 0 \quad (2.14)$$

assim sendo e, distribuindo e dividindo a equação 2.13 por $2n$, tem-se a equação 2.15.

$$\frac{-2 \sum_{i=1}^n y_i}{2n} + \frac{2 \sum_{i=1}^n a}{2n} + \frac{2 \sum_{i=1}^n b x_i}{2n} = \frac{0}{2n}$$

$$\frac{-\sum_{i=1}^n y_i}{n} + \frac{\sum_{i=1}^n a}{n} + \frac{b \sum_{i=1}^n x_i}{n} = 0$$

$$-\bar{y} + a + b\bar{x} = 0$$

$$a = \bar{y} - b\bar{x} \quad (2.15)$$

onde \bar{y} é a média amostral de y e \bar{x} é a média amostral de x .

Substituindo o resultado da equação 2.15 na equação 2.14, obtém-se.

$$-2 \sum_{i=1}^n x_i (y_i - \bar{y} + b\bar{x} - bx_i) = 0$$

$$\sum_{i=1}^n [x_i (y_i - \bar{y}) + x_i b (\bar{x} - x_i)] = 0$$

$$\sum_{i=1}^n x_i (y_i - \bar{y}) + b \sum_{i=1}^n x_i (\bar{x} - x_i) = 0$$

$$b = \frac{\sum_{i=1}^n x_i (y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n x_i (x_i - \bar{x})}$$

eliminando o termo x_i e, multiplicando o numerador e o denominador por $(x_i - \bar{x})$, resultando na equação 2.16.

$$b = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \quad (2.16)$$

No que diz respeito à regressão múltipla, a mesma leva em consideração diversas variáveis explicativas x influenciando y ao mesmo tempo. Dessa maneira, ao usar a base de dados com k variáveis explicativas e n observações, o modelo pode ser escrito na forma matricial.

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & x_{21} & \dots & x_{k1} \\ 1 & x_{12} & x_{22} & \dots & x_{k2} \\ 1 & x_{13} & x_{23} & \dots & x_{k3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_{1n} & x_{2n} & \dots & x_{kn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ \dots \\ e_n \end{pmatrix}$$

onde x_{ij} representa o valor da i -ésima variável da j -ésima observação. A fórmula também pode ser escrita na forma resumida pela equação 2.17.

$$\mathbf{y} = \mathbf{Xb} + \mathbf{e} \quad (2.17)$$

A solução de mínimos quadrados continua sendo alcançada através da minimização da soma do quadrado dos resíduos $\sum_{i=1}^n e_i^2$, que pode ser reescrito como $\mathbf{e}'\mathbf{e}$, onde a apóstrofe significa que a matriz foi transposta. Substituindo \mathbf{e} por $\mathbf{y} - \mathbf{Xb}$, obtém-se a equação (GUJARATI, 2011).

$$S(\mathbf{b}) = (\mathbf{y} - \mathbf{Xb})' \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{Xb}) = \mathbf{y}'\mathbf{y} - \mathbf{y}'\mathbf{Xb} - \mathbf{b}'\mathbf{X}'\mathbf{y} + \mathbf{b}'\mathbf{X}'\mathbf{Xb}$$

A minimização pode ser obtida ao derivar $S(\mathbf{b})$ em relação a \mathbf{b} e igualar a zero. O primeiro termo não depende de \mathbf{b} , os segundo e terceiro termos são iguais e o terceiro termo é uma forma quadrática dos elementos de \mathbf{b} . Ao fazer a derivação, resulta nas equações 2.18 e 2.19 (GUJARATI, 2011).

$$\frac{dS}{d\mathbf{b}} = -2\mathbf{X}'\mathbf{y} + 2\mathbf{X}'\mathbf{Xb} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{X}'\mathbf{Xb} = \mathbf{X}'\mathbf{y} \quad (2.18)$$

$$\mathbf{b} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y} \quad (2.19)$$

Segundo Moreira (2002), o método de mínimos quadrados tem como objetivo encontrar o vetor $\tilde{\beta}$ que minimiza.

$$L = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 = \varepsilon' \varepsilon = (Y - X\beta)'(Y - X\beta) = Y'Y - Y'X\beta - \beta'X'Y + \beta'X'XB = Y'Y - 2\beta'X'Y + \beta'X'XB$$

sendo que $Y'X\beta = \beta'X'Y$ pois o produto resulta em um escalar. A notação X' representa o transposto da matriz X enquanto Y' e β' representam as transpostos dos vetores Y e β , respectivamente (GUJARATI, 2011). Usando a técnica de derivação em termos matriciais, obtém-se a equação 2.10.

$$\frac{\partial L}{\partial \beta} = -2X'Y + 2X'X\beta \quad (2.20)$$

e, igualando a zero e substituindo o vetor β pelo vetor $\tilde{\beta}$, resulta na equação 2.21.

$$(X'X)\tilde{\beta} = X'Y \quad (2.21)$$

Em geral, a matriz $(X'X)$ é não singular, ou seja, apresenta determinante diferente de zero, assim sendo, é invertível (GUJARATI, 2011). Dessa forma, presume-se que os estimadores para os parâmetros β_j , onde $j = 0, \dots, p$ são dados pelo vetor representada pela equação matricial 2.22.

$$\tilde{\beta} = (X'X)^{-1}X'Y \quad (2.22)$$

Portanto, o modelo de regressão linear ajustado e o vetor de resíduos são respectivamente, as equações matriciais 2.23 e 2.24.

$$\hat{Y} = X\hat{\beta} \quad (2.23)$$

$$e = Y - \hat{Y} \quad (2.24)$$

Segundo Gujarati (2011), ao substituir os estimadores de mínimos quadrados, resulta em $\hat{Y} = HY$ no qual $H = X(X'X)^{-1}X'$ é matriz chapéu ou matriz de projeção do vetor de respostas Y no vetor de respostas ajustadas \hat{Y} .

2.10. Mínimos Quadrados Ortogonais

O método serve para resolver sistemas do tipo $Y = \Psi\theta$, onde Y é a matriz de saída do sistema, Ψ é a matriz de entradas de dados e θ são os parâmetros dos regressores. O método é aplicado quando o número de colunas é muito elevado, transformando a matriz de regressão Y e o vetor de parâmetros θ de modo que $Y = Wg$ onde a matriz W é ortogonal, ou seja $W'W$ é diagonal (ASSUNÇÃO, 2017). A transformação pode ser feita utilizando-se várias técnicas disponíveis, tais como método Grand-Schmidt modificado, transformações de Householder e rotações de Givens.

A ortogonalização é útil porque é possível demonstrar que, na forma ortogonalizada pode-se calcular a chamada taxa de redução de erro relativa ao i -ésimo regressor, denominada ERR_i . O valor de ERR_i quantifica o percentual de decréscimo do MSE (Erro Médio Quadrático) quando o i -ésimo regressor é incluído no modelo, podendo ser utilizado como critério de ajuste da estrutura do modelo, através da exclusão de termos que possuem ERR muito baixo (ALMEIDA, 2015). Isso é particularmente útil quando o modelo possui muitos regressores candidatos, mas apenas alguns poucos relevantes, que geralmente é o caso de problemas de modelagem não linear que envolvem muitas entradas.

O algoritmo de estimação ortogonal pode ser obtido de duas formas. Inicialmente uma derivação simples ao qual fica à cargo de implementação computacional. Este é então ampliado e redefinido o algoritmo usando notação matricial (KORENBERG, 1987).

Embora o objetivo seja estimar os parâmetros θ_i , $i = 0, 1 \dots M$, o algoritmo é formulado para auxiliar o modelo, conforme apresentado pela equação 2.25.

$$y(t) = \sum_{m=0}^M g_m W_m(t) + \varepsilon(t) \quad (2.25)$$

onde $W_i(t)$, $i = 0 \dots M$ foram obtidas para ser ortogonal sobre os registros dos dados, de tal forma que.

$$\sum_{t=1}^N W_j(t) W_{k+1}(t) = 0, j = 0, 1, \dots k \quad (2.26)$$

Assim sendo, uma família de polinômios ortogonais pode ser obtida aplicando métodos de Gram-Schmidt, mas este pode se mostrar muito sensitivo para erros de arredondamento (KORENBERG, 1987). Utilizando a equação 2.25 e a ortogonalidade de $W_m(t)$, obtém-se a estimativa de parâmetros pela equação 2.27.

$$\widehat{g}_m = \frac{\sum_{t=1}^N y(t) W_m(t)}{\sum_{t=1}^N W_m^2(t)} \quad (2.27)$$

Com isso, os parâmetros g_m , $m = 0, 1, \dots M$ foram estimados usando a equação 2.27.

Observe que o erro de predição $\varepsilon(t)$ não são conhecidos a priori e podem ser estimados pela equação 2.28.

$$\widehat{\varepsilon}(t) = y(t) - \sum_{m=0}^M \widehat{g}_m W_m(t) \quad (2.28)$$

A estimação ortogonal é fácil de implementar e ainda oferece vantagens consideráveis se comparados com outros métodos de estimação de parâmetros existentes por causa da propriedade de ortogonalidade e, portanto, o vetor de

parâmetros pode ser estimado executando cada parâmetro g_j , $j = 0 \dots M$, um de cada vez (KORENBERG, 1987). Isto simplifica a implementação do processo que, conseqüentemente, as estimativas não serão modificadas ou afetadas pela inclusão de algum termo indesejável. Percebe-se que, para qualquer valor inteiro não negativo $Q < M$ o erro médio quadrático é minimizado pela equação 2.27. Dessa forma, a soma quadrática do erro fica evidenciada pela equação 2.29.

$$\sum_{t=1}^N (y(t) - \sum_{m=0}^Q g_m W_m(t))^2 \quad (2.29)$$

Vale ressaltar que, mesmo sendo uma técnica mais avançada, os mínimos quadrados ortogonais serão indispensáveis para o objeto deste trabalho, uma vez que o número de parâmetros é muito grande. Para a formulação matricial, embora seja provavelmente mais fácil implementar o algoritmo usando a formulação dada anteriormente, os resultados podem ser organizados usando a notação matricial. Considere o sistema matricial presente na equação 2.30.

$$Y = \Psi\theta + \varepsilon \quad (2.30)$$

onde uma vez que $T^{-1}T = I$, onde I é uma matriz identidade e utilizando a equação 2.30, a equação 2.31 é obtida.

$$Y = \Psi(T^{-1}T)\theta + \varepsilon \quad (2.31)$$

e, dessa forma, resulta-se na equação 2.32.

$$Y = Wg + \varepsilon \quad (2.32)$$

onde $W = \Psi T^{-1}$, $g = T\theta$ e W é uma matriz ortogonal, ou seja, $W^T W = D$, onde D é uma matriz diagonal. Definindo assim W como a notação matricial.

$$W = \begin{pmatrix} w_0(1) & w_1(1) & \dots & w_M(1) \\ w_0(2) & w_1(2) & \dots & w_M(2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ w_0(N) & w_1(N) & \dots & w_M(N) \end{pmatrix}$$

e, por conseguinte, a matriz D como.

$$D = \begin{pmatrix} \sum_{t=1}^N w_0^2(t) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sum_{t=1}^N w_1^2(t) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \sum_{t=1}^N w_M^2(t) \end{pmatrix}$$

dessa forma e, utilizando as definições da equação 2.30 juntamente com as matrizes obtidas W e D apresentados, tem-se que $T = D^{-1}W^T\Psi$ e que, na forma matricial fica definida na forma.

$$T = \begin{pmatrix} \frac{\sum_{t=1}^N w_0(t)\Psi_0(t)}{\sum_{t=1}^N w_0^2(t)} & \frac{\sum_{t=1}^N w_0(t)\Psi_1(t)}{\sum_{t=1}^N w_0^2(t)} & \dots & \frac{\sum_{t=1}^N w_0(t)\Psi_M(t)}{\sum_{t=1}^N w_0^2(t)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\sum_{t=1}^N w_M(t)\Psi_0(t)}{\sum_{t=1}^N w_M^2(t)} & \frac{\sum_{t=1}^N w_M(t)\Psi_1(t)}{\sum_{t=1}^N w_M^2(t)} & \dots & \frac{\sum_{t=1}^N w_M(t)\Psi_M(t)}{\sum_{t=1}^N w_M^2(t)} \end{pmatrix}$$

onde $\Psi_i(t), i = 0 \dots M$ foram obtidas para ser ortogonal sobre os registros dos dados.

Portanto, para satisfazer os requisitos de $\Psi^T\Psi = T^TDT$, a matriz T deve ser triangular superior e sua diagonal composta por valor unitário, conforme a matriz T (KORENBERG, 1987).

$$T = \begin{pmatrix} 1 & a_{01} & a_{02} & \dots & a_{0M} \\ 0 & 1 & a_{12} & \dots & a_{1M} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & a_{2M} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{onde } a_{ij} = \frac{\sum_{t=1}^N w_i(t) \Psi_j(t)}{\sum_{t=1}^N w_i^2(t)}$$

Portanto, para $\mathbf{W} = \mathbf{\Psi T}^{-1}$, então $\mathbf{WT} = \mathbf{\Psi}$ ou então a equação 2.33.

$$\mathbf{W} = \mathbf{\Psi} - \mathbf{W}(\mathbf{T} - \mathbf{I}) \quad (2.33)$$

que, por sua vez, pode ser expressada na forma matricial.

$$\begin{pmatrix} w_0(1) & \dots & w_M(1) \\ w_0(2) & \dots & w_M(2) \\ \dots & \dots & \dots \\ w_0(N) & \dots & w_M(N) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Psi_0(1) & \dots & \Psi_M(1) \\ \Psi_0(2) & \dots & \Psi_M(2) \\ \dots & \dots & \dots \\ \Psi_0(N) & \dots & \Psi_M(N) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} w_0(1) & \dots & w_M(1) \\ w_0(2) & \dots & w_M(2) \\ \dots & \dots & \dots \\ w_0(N) & \dots & w_M(N) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & a_{01} & \dots & a_{0M} \\ 0 & 0 & \dots & a_{1M} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \dots 0 \end{pmatrix}$$

Assim sendo, uma estimativa do vetor de parâmetros \mathbf{g} na equação $\mathbf{g} = \mathbf{T}\boldsymbol{\theta}$ pode ser determinado minimizando o erro médio quadrático para equação 2.34.

$$\hat{\mathbf{g}} = (\mathbf{W}'\mathbf{W})^{-1}\mathbf{W}'\mathbf{Y} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{W}'\mathbf{Y} \quad (2.34)$$

ou na forma matricial.

$$\begin{pmatrix} \hat{g}_0 \\ \hat{g}_1 \\ \dots \\ \hat{g}_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sum_{t=1}^N w_0(t)y(t)}{\sum_{t=1}^N w_0^2(t)} \\ \frac{\sum_{t=1}^N w_1(t)y(t)}{\sum_{t=1}^N w_1^2(t)} \\ \dots \\ \frac{\sum_{t=1}^N w_M(t)y(t)}{\sum_{t=1}^N w_M^2(t)} \end{pmatrix}$$

Dessa maneira e, substituindo \mathbf{Y} definido na equação 2.32 para a equação 2.34, obtém-se as matrizes.

$$\hat{\mathbf{g}} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{W}'(\mathbf{W}\mathbf{g} + \boldsymbol{\varepsilon})$$

$$\hat{g} = g + D^{-1}W'\varepsilon$$

$$D(\hat{g} - g) = W'\varepsilon$$

tomando valor esperado, conforme equação matricial 2.35.

$$E[D(\hat{g} - g)] = E[W'\varepsilon] \quad (2.35)$$

Com relação ao estudo do termo ERR_t mencionado anteriormente. Korenberg (1987) afirma que o decréscimo do erro médio quadrático inclui os termos que podem expressar como uma redução no percentual do erro médio quadrático total. Este erro é apresentado pela equação 2.36.

$$ERR_t = \frac{\sum_{t=1}^N g_t^2 w_t^2}{\sum_{t=1}^N y^2(t) - \frac{1}{N}(\sum_{t=1}^N y(t))^2} \cdot 100 \quad (2.36)$$

para $t = 1, 2, \dots, M$. A quantidade ERR_t ao qual será chamado de Taxa de Redução de Erro, fornece uma indicação de quais termos incluir no modelo. Segundo Korenberg (1987), termos insignificantes podem ser descartados pela definição de um valor para ERR_t abaixo dos termos dos quais são considerados a contribuir em uma redução insignificante no erro médio quadrático.

O valor limite de ERR para o modelo implementado é denominado de C_d e, por sua vez, é normalmente definido entre 0,05 a 0,5. Para termos dos quais envolvem erros de predição, o valor limite de ERR deve ser um valor mais baixo, variando de 0,0001 a 0,001 e é selecionado para garantir inclusão de elementos que representam ruídos para que o erro de predição seja reduzido para uma sequência de ruído branco (KORENBERG, 1987).

Outrossim, Korenberg (1987) concluiu que o ERR somente fornece uma indicação de quais termos serão inclusos no modelo. O valor de ERR é, contudo, dependente da ordem na qual os termos entram na equação. Para resolver este problema, é preciso desenvolver um algoritmo de pesquisa do qual fornece um tipo

de teste **ERR** ao qual é independente da ordem de inclusão dos termos que são solicitados.

3. METODOLOGIA

3.1. Bancos de dados obtidos na Literatura

Para o estudo da previsão da resistência à punção em lajes lisas de concreto armado sem armadura de cisalhamento, foram utilizados dois bancos de dados contendo os parâmetros de entrada e saída das lajes relacionadas à punção de acordo com dados experimentais de vários estudiosos da área de estruturas, conforme apresentado por Pereira Filho (2016) e Ferreira (2010). Os autores em questão estão presentes nas tabelas 3.1 e 3.2.

Tabela 3.1 – Banco de dados 1 utilizado para a regressão.

Fonte: Pereira Filho (2016).

Autor	Laje	d (mm)	ρ	f_c (MPa)	C/d	Ms/Mflex	Vu (kN)
Tomaszewicz (1993)	ND65-1-1	275	0,015	64,3	0,727	0,469977387	2050
	ND65-2-1	200	0,017	70,2	0,750	0,459869293	1200
	ND95-1-1	275	0,015	83,7	0,727	0,511690248	2250
	ND95-1-3	275	0,025	89,9	0,727	0,333568948	2400
	ND95-2-1	200	0,017	88,2	0,750	0,418459317	1100
	ND95-2-1D	200	0,017	86,7	0,750	0,494785536	1300
	ND95-2-3	200	0,026	89,5	0,750	0,367186528	1450
	ND95-2-3D	200	0,026	80,3	0,750	0,318129638	1250
	ND95-2-3D+	200	0,026	98,0	0,750	0,365814601	1450
	ND95-3-1	88	0,018	85,1	1,136	0,614342239	330
	ND115-1-1	275	0,015	112,0	0,727	0,55353248	2450
	ND115-2-1	200	0,017	119,0	0,750	0,528767348	1400
	ND115-2-3	200	0,026	108,1	0,750	0,389626046	1550
Marzouk e Hussein (1991)	I. HS1	95	0,004	67,0	1,579	1,314760009	178
	I. HS2	95	0,007	70,0	1,579	1,080960809	249
	I. HS3	95	0,012	69,0	1,579	0,888802446	356
	I. HS4	90	0,021	66,0	1,667	0,664542477	418
	I. HS7	95	0,009	74,0	1,579	1,09413339	356
	II. HS5	125	0,005	68,0	1,200	1,200069793	365
	II. HS6	120	0,005	70,0	1,250	1,675082942	489
	II. HS8	120	0,010	69,0	1,250	0,805560882	436

	II. HS9	120	0,015	74,0	1,250	0,675504251	543
	II. HS10	120	0,021	80,0	1,250	0,575965426	645
	III. HS11	70	0,007	70,0	2,143	1,388583229	196
	III. HS12	70	0,012	75,0	2,143	1,155868824	258
	III. HS13	70	0,016	68,0	2,143	0,914423236	267
	IV. HS14	95	0,012	72,0	2,316	1,242056393	498
	IV. HS15	95	0,012	71,0	3,158	1,397151322	560
	I. NS1	95	0,012	42,0	1,579	0,81183296	320
	II. NS2	120	0,005	30,0	1,250	1,37638056	396
	I/1	77	0,024	32,2	2,597	0,385077862	194
	I/2	77	0,012	29,3	2,597	0,660371256	176
	I/3	77	0,014	34,3	2,597	0,648411488	194
	I/4	77	0,012	40,4	2,597	0,743659102	194
	I/5	79	0,015	35,2	2,532	0,447460008	165
	I/6	79	0,008	27,4	2,532	0,890724475	165
	I/7	79	0,008	38,0	2,532	0,992080112	186
	II/1	200	0,010	43,6	1,250	0,566608354	825
	II/2	128	0,010	41,6	1,250	0,654963492	390
	II/3	128	0,010	42,9	1,250	0,612341528	365
	II/4	64	0,010	41,6	1,250	0,785956191	117
Regan (1986)	II/5	64	0,010	42,9	1,250	0,704612169	105
	II/6	64	0,010	45,2	1,250	0,703422385	105
	III/1	95	0,008	29,0	1,579	0,720869664	197
	III/2	95	0,008	11,9	1,579	0,478848826	123
	III/3	95	0,008	47,3	1,579	0,770660197	214
	III/4	93	0,015	14,9	1,613	0,353459514	154
	III/5	93	0,015	33,5	1,613	0,475238705	214
	III/6	93	0,015	53,3	1,613	0,537773802	248
	V/1	118	0,008	42,9	0,458	0,3160184	170
	V/2	118	0,008	40,2	1,441	0,521744693	280
	V/3	118	0,008	40,5	0,932	0,493655192	265
	V/4	118	0,008	45,3	0,864	0,528802019	285
	A1/M1	114	0,011	16,3	1,781	1,164840653	322
	A1/M2	117	0,015	15,5	1,735	0,814101935	346
	A1/M3	121	0,019	14,2	1,678	0,552023967	307
	A1/M4	124	0,010	14,0	1,637	0,537405195	259
	A1/M5	117	0,012	21,0	1,735	0,65916654	346
	A2/M1	124	0,010	35,4	1,637	1,334063858	409
	A2/M2	117	0,015	32,8	1,735	0,942450858	419
	A2/M3	121	0,019	32,5	1,678	0,722336713	430
	A2/T1	124	0,010	39,3	1,637	0,816869193	419
	A2/T2	124	0,017	41,4	1,637	0,514941801	439
	A3/M1	124	0,010	18,8	1,637	0,821341429	247
	A3/M2	102	0,017	19,3	1,990	0,910975019	336
	A3/M3	117	0,019	27,3	1,735	0,540658107	298
	A3/T1	121	0,010	20,6	1,678	0,692558128	328

	A3/T2	119	0,012	16,0	1,706	0,56258887	298
	A4/M1	114	0,011	38,3	1,781	0,909113145	259
	A4/M2	119	0,015	29,2	1,706	0,74505967	341
	A4/M3	117	0,019	32,2	1,735	0,858324358	541
	A4/T1	114	0,011	32,8	1,781	0,81405914	384
	A4/T2	117	0,012	29,3	1,735	0,749221357	402
Manterola (1966)	P1-S1	107	0,011	25,6	0,935	0,763446411	216
	P2-S1	107	0,011	33,8	2,336	0,900000312	257
	P3-S1	107	0,011	29,7	4,206	1,05828122	301
	P1-S2	107	0,011	24,2	1,121	0,653266155	196
	P2-S2	107	0,011	33,1	2,336	0,93235792	283
	P3-S2	107	0,011	31,9	4,206	1,30948004	397
	P1-S3	107	0,011	39,7	0,935	0,603059374	184
	P2-S3	107	0,014	35,8	0,935	0,525558471	211
	P3-S3	107	0,005	39,2	0,935	1,066789675	165
	P1-S4	107	0,005	26,4	0,935	0,924708984	175
	P2-S4	107	0,005	31,3	2,336	1,294984018	246
	P3-S4	107	0,005	34,2	4,206	1,545009478	294
Moe (1961)	S1-60	114	0,011	23,3	2,228	0,940491259	389
	S2-60	114	0,015	22,1	2,228	0,623823573	356
	S3-60	114	0,020	22,6	2,228	0,491943034	364
	S4-60	114	0,026	23,8	2,228	0,357513935	334
	S1-70	114	0,011	24,5	2,228	0,762280668	393
	S3-70	114	0,020	25,4	2,228	0,426291475	378
	S4-70	114	0,026	35,2	2,228	0,322536999	374
	S4-70A	114	0,026	20,5	2,228	0,293906409	312
	S5-60	114	0,011	22,2	1,781	0,800093495	343
	S5-70	114	0,011	23,0	1,781	0,736461952	378
	R2	114	0,014	27,6	1,333	0,870021016	394
	H1	114	0,011	26,1	2,228	0,996223777	372
	M1A	114	0,015	20,8	2,675	0,63692981	433
	Elstner e Hognestad (1956)	I A-1a	118	0,012	14,1	2,153	0,746370999
I A-1b		118	0,012	25,2	2,153	0,864539794	365
I -1c		118	0,012	29,0	2,153	0,837869638	356
I A-1d		118	0,012	36,8	2,153	0,818804888	351
I A-1e		118	0,012	20,3	2,153	0,853271798	356
I A-2a		114	0,025	13,6	2,228	0,486893676	334
I A-2b		114	0,025	19,5	2,228	0,548129454	400
I A-2c		114	0,025	37,4	2,228	0,600282188	467
I A-7b		114	0,025	27,9	2,228	0,673592083	512
I A-3a		114	0,037	12,8	2,228	0,39998013	356
I A-3b		114	0,037	22,6	2,228	0,429522253	445
I A-3c		114	0,037	26,5	2,228	0,501848055	534
I A-3d		114	0,037	34,5	2,228	0,496508991	547
II A-4		118	0,012	26,1	3,017	0,976664479	400
II A-5		114	0,025	27,8	3,123	0,702769613	534

	V A-9	114	0,069	29,9	3,123	0,250969498	445
	V A-10	114	0,069	29,7	3,123	0,276309325	489
	VII A-13	121	0,005	26,2	2,942	1,394806173	236
	VIII B-1	114	0,005	14,2	2,228	1,094499472	178
	VIII B-2	114	0,005	47,6	2,228	1,211665822	200
	VIII -B4	114	0,009	47,7	2,228	1,200077948	334
	VIII B-9	114	0,020	43,9	2,228	0,749322034	505
	VIII B-11	114	0,030	13,5	2,228	0,355158189	329
	VIII B-14	114	0,030	50,5	2,228	0,608104884	578
Lips (2012)	PL1	193	0,0163	42,5	0,674	0,431483678	1135
	PL3	197	0,0159	36,5	2,640	0,49996031	1324
	PL4	267	0,0158	30,5	1,273	0,352812647	1625
	PL5	353	0,015	31,9	1,246	0,313901529	2491
Birkle (2004)	S1	124	0,0153	36,2	2,016	0,562340409	483
	S7	190	0,0135	35,0	1,579	0,425841319	825
	S10	260	0,015	31,4	1,346	0,26687888	1046
Regan <i>et al.</i> (1979)	SS2	77	0,012	23,3	2,597	0,671465697	176
	SS4	77	0,0082	33,4	2,597	1,037376567	194
	SS6	79	0,0075	21,7	2,532	0,967053607	165
	SS7	79	0,008	31,2	2,532	1,008792128	186
	SS8	200	0,0098	36,3	1,250	0,519735545	825
	SS9	128	0,0098	34,5	1,250	0,6542468	390
	SS10	128	0,0098	35,7	1,250	0,61144135	365
	SS11	64	0,0098	34,5	1,250	0,792905646	117
	SS12	64	0,0098	35,6	1,250	0,710666109	105
	SS13	64	0,0098	37,8	1,250	0,709001072	105
Kevin (2000)	P100	100	0,0097	39,4	2,000	0,905829937	330
	P150	150	0,009	39,4	1,333	0,800815534	583
	P200	200	0,0083	39,4	1,000	0,755348505	904
	P300	300	0,0076	39,4	0,667	0,555104425	1381
	P400	400	0,0076	39,4	0,750	0,542304609	2224
	P500	500	0,0076	39,4	0,600	0,418393858	2681
Guandalini e Muttoni (2004)	PG-1	210	0,015	27,6	1,238	0,518605712	1024
	PG-2	210	0,0025	28,5	1,238	1,275194689	445
	PG-2b	210	0,0025	40,5	1,238	1,254139877	439
	PG-3	464	0,0033	32,4	1,121	0,959177711	2153
	PG-4	210	0,0025	32,2	1,238	1,167771742	408
	PG-5	210	0,0033	29,3	1,238	1,19776412	550
	PG-6	96	0,015	34,7	1,354	0,564048926	236
	PG-7	100	0,0075	34,7	1,300	1,040688827	243
	PG-8	102	0,0033	34,7	1,275	1,298858762	141
	PG-9	102	0,0025	34,7	1,275	1,430641068	118
PG-10	210	0,0033	28,5	1,238	1,17642907	540	
Sundquist e Kinnunen (2004)	C1	100	0,008	24,0	2,500	0,63418566	270
	C2	100	0,008	24,4	2,500	0,586479924	250
	D1	125	0,0064	27,2	1,200	0,4867567	265

Marzouk e Hossin (2007)	NSC1	158	0,0217	35,0	1,582	0,352885635	678
	HSC1	138	0,0248	68,5	1,812	0,452483662	788
	HSC2	128	0,0268	70,0	1,953	0,496627027	801
	HSC3	158	0,0167	66,7	1,582	0,511673038	802
	HSC4	158	0,0113	61,2	1,582	0,755953584	811
	HSC5	113	0,0188	70,0	2,212	0,533649026	480
	NSC2	163	0,0052	33,0	1,534	0,906299374	479
	NSC3	105	0,004	34,0	2,381	1,34312112	228
Marzouk e Rizk (2009)	NS1	105	0,0045	44,7	2,381	1,397408441	219
	NS2	153	0,0055	50,2	1,634	1,208848308	491
	NS3	183	0,0035	35,0	1,366	1,182589552	438
	HS1	183	0,0035	70,0	1,366	1,540693475	574
	NS4	218	0,0073	40,0	1,147	0,813267117	882
	HS2	218	0,0073	64,7	1,147	0,935506692	1023
	HS3	220	0,0043	76,0	1,136	1,340668488	886
	HS4	268	0,0113	75,0	1,493	0,676467769	1721
	HS6	263	0,0144	65,4	1,521	0,675507161	2090
	NS4	313	0,0157	40,0	1,278	0,477613521	2234
	HS7	313	0,0157	60,0	1,278	0,528774301	2513

O banco de dados 1 é composto de ensaios de punção realizados por diferentes autores, como Tomaszewicz (1993), Lips (2012), Marzouk e Rizk (2009), etc. onde podem ser identificados 5 (cinco) parâmetros de entrada e 1 (uma) saída. As variáveis de entrada são a altura útil da laje (d) em mm, taxa de armadura de flexão (ρ), resistência à compressão do concreto (f'_c) em MPa, a proporção C/d que descreve a relação do tamanho pela altura útil da laje e, por fim, M_s/M_{flex} que representa a razão do momento fletor pelo esforço cortante. A variável de saída é a tensão resistente (V_u) em kN. O problema é classificado como de identificação de um sistema estático com múltiplas variáveis.

O banco de dados proveniente da tabela 3.1 utiliza, inicialmente, um grupo de lajes com pilares de seção quadrada, objeto desta análise. Para o caso da variável de saída fornecida pelo banco de dados (tensão resistente), a mesma deve ser obtida na unidade MPa, pois as equações fornecidas pelas normas estão nesta unidade de medida e utilizam o método da superfície de controle como referencial de resultados. Para tanto, alguns cálculos considerando o método da superfície de controle fornecerão essas informações que, por sua vez, servirão de comparativo para as normas vigentes. Detalhes destes cálculos são apresentados nas seções

4.2 e 4.3 com o intuito de apresentar os resultados que representam a saída do sistema. A tabela 3.2 apresenta o segundo banco de dados objeto de estudo do trabalho. O mesmo foi obtido por Ferreira (2010) e contém dados experimentais realizados por diversos autores da área de estruturas, como Elstner e Hognestad, Moe, Regan, etc.

Tabela 3.2 – Banco de dados 2 utilizado para a regressão.

Fonte: Ferreira (2010).

Autor	Laje	d (mm)	ρ	f _c (MPa)	C/d	V _u (kN)
Elstner e Hognestad	A-1 b	118	0,012	25,2	2,1525	365
	A-1 c	118	0,012	29	2,1525	356
	A-1 d	118	0,012	36,6	2,1525	351
	A-1 e	118	0,012	20,3	2,1525	356
	A-2 b	114	0,025	19,5	2,2281	400
	A-2 c	114	0,025	37,4	2,2281	467
	A-7 b	114	0,025	27,9	2,2281	512
	A-3 b	114	0,037	22,6	2,2281	445
	A-3 c	114	0,037	26,5	2,2281	534
	A-3 d	114	0,037	34,5	2,2281	547
	A- 4	118	0,012	26,1	3,0169	400
	A- 5	114	0,025	27,8	3,1228	534
	B- 9	114	0,02	43,9	2,2281	505
	B-14	114	0,03	50,5	2,2281	578
Moe	S1- 60	114	0,011	23,3	2,2281	389
	S1- 70	114	0,011	24,5	2,2281	393
	S5- 60	114	0,011	22,2	1,7807	343
	S5- 70	114	0,011	23	1,7807	378
	H 1	114	0,011	26,1	2,2281	372
	M1 A	114	0,015	20,8	2,6754	433
	Regan	I/ 2	77	0,012	23,4	2,5974
I/ 4		77	0,009	32,3	2,5974	194
I/ 6		79	0,008	21,9	2,5316	165
I/ 7		79	0,008	30,4	2,5316	186
II/ 1		200	0,01	34,9	1,2500	825
II/ 2		128	0,01	33,3	1,2500	390
II/ 3		128	0,01	34,3	1,2500	365
II/ 4		64	0,01	33,3	1,2500	117
II/ 5		64	0,01	34,3	1,2500	105
II/ 6		64	0,01	36,2	1,2500	105
III/ 1		95	0,008	23,2	1,5789	197
III/ 3		95	0,008	37,8	1,5789	214
III/ 5		93	0,015	26,8	1,6129	214

	III/ 6	93	0,015	42,6	1,6129	248	
	V/ 1	118	0,008	34,3	0,4576	170	
	V/ 2	118	0,008	32,2	1,4407	280	
	V/ 3	118	0,008	32,4	0,9322	265	
	V/ 4	118	0,008	36,2	0,8644	285	
Marzouk e Hussein	HS 2	95	0,007	70	1,5789	249	
	HS 3	95	0,012	69	1,5789	356	
	HS 4	90	0,021	66	1,6667	418	
	HS 7	95	0,009	74	1,5789	356	
	HS 8	120	0,01	69	1,2500	436	
	HS 9	120	0,015	74	1,2500	543	
	HS 10	120	0,021	80	1,2500	645	
	HS 11	70	0,015	70	2,1429	196	
	HS 12	70	0,015	75	2,1429	258	
	HS 13	70	0,015	68	2,1429	267	
	HS 14	95	0,012	72	2,3158	498	
	HS 15	95	0,012	71	3,1579	560	
	NS 1	95	0,012	42	1,5789	320	
	Tomaszew icz	65- 1-1	275	0,015	64,3	0,7273	2050
		65- 2-1	200	0,017	70,2	0,7500	1200
95- 1-1		275	0,015	83,7	0,7273	2250	
95- 1-3		275	0,025	89,9	0,7273	2400	
95- 2-1		200	0,017	88,2	0,7500	1100	
95-2 -1D		200	0,017	86,7	0,7500	1300	
95- 2-3		200	0,026	89,5	0,7500	1450	
95-2 -3D		200	0,026	80,3	0,7500	1250	
95-2- 3D+		200	0,026	98	0,7500	1450	
95- 3-1		88	0,018	85,1	1,1364	330	
115- 1-1		275	0,015	112	0,7273	2450	
115- 2-1		200	0,017	119	0,7500	1400	
115- 2-3		200	0,026	108,1	0,7500	1550	

O banco de dados 1 apresenta 178 ensaios experimentais enquanto o banco de dados 2 apresenta 64 ensaios envolvendo lajes com pilares em formato quadrado. É importante salientar que, embora muitos dados apareçam repetidos nos dois bancos de dados, o banco de dados 2 não apresenta dados de entrada denominado *Ms/Mflex* e, para este estudo, é interessante propor modelos matemáticos com diferentes quantidades de variáveis de entrada. Dessa forma, amplia-se as possibilidades na obtenção de modelos de predição. Quanto à obtenção de tensão resistente na unidade MPa, as considerações e orientações são as mesmas para os dois bancos de dados.

Do ponto de vista de identificação, acerca da geometria e formato do pilar, pode ser necessário identificar dois grupos diferentes de modelos matemáticos, ou seja, um para cada tipo de pilar. É interessante também verificar se o perímetro do pilar afeta de alguma forma à modelagem, caso a informação esteja disponível.

Para realizar os cálculos de regressão linear, foi utilizado o *software Matlab* devido sua facilidade para desenvolvimento de algoritmos que trabalham com matrizes. Dessa forma, alguns códigos em *Matlab* foram desenvolvidos, ajustados e implementados para estudos de predição do fenômeno da punção, programando assim os códigos para os algoritmos de regressão.

Na etapa de seleção de dados, com a finalidade de identificar e analisar modelos de predição da punção, foram utilizados 70% dos dados dos dois bancos de dados para uso no processo de modelagem utilizando os algoritmos de regressão para obter propostas de modelos matemáticos. Os outros 30% dos dados foram utilizados para validação dos modelos propostos e para efeito comparativo com as métricas de desempenho provenientes das normas.

Vale ressaltar que a obtenção de uma modelagem requer várias simulações e hipóteses e cabe avaliar o modelo que melhor representa fenômeno por meio das técnicas numéricas de identificação de sistemas. Em todos os casos, o índice de desempenho denominado NMSE é o indicador preponderante para saber se o modelo é satisfatório ou não. Pode-se estudar o grau de influência de cada parâmetro de entrada em relação à saída, ou seja, em relação à tensão resistente à punção. Parâmetros podem (ou não) serem retirados dos modelos, dependendo do grau de influência deste nos modelos a serem obtidos. Deve-se, por fim, comparar os resultados dos modelos propostos com as equações presentes nas normativas existentes, tal qual seja necessário evidenciar a validação dos modelos, propostas de melhorias e possíveis limitações encontradas, bem como satisfazer os requisitos presentes nas estruturas matemáticas e métricas de desempenho.

3.2. Estruturas Matemáticas

Em um problema real as funções matemáticas que descrevem um fenômeno não são conhecidas. Para criar um modelo, então, é usual escolher estruturas adequadas com boas capacidades de aproximação, mediante um ajuste de parâmetros (BERTOGNA, 2009). Há diversas estruturas matemáticas que podem

ser usadas para esse fim, tais como polinômios multivariáveis, modelo exponencial, modelo trigonométrico (como é o caso da série de Fourier), dentre outras estruturas, como é o caso da função de base radial (RBF).

O modelo polinomial quadrático é apresentado pela equação 3.1.

$$y = \theta_1 + \theta_2 x + \theta_3 x^2 \quad (3.1)$$

onde y é a saída, x é a entrada e os regressores são $[1 \ x \ x^2]$.

Já o modelo polinomial multivariável é ilustrado pela equação 3.2.

$$y(x_1, x_2) = \theta_1 + \theta_2 x_1 + \theta_3 x_2 + \theta_4 x_1 x_2 + \theta_5 x_1^2 + \theta_6 x_2^2 + \theta_7 x_1^2 x_2 + \theta_8 x_1 x_2^2 + \theta_9 x_1^3 + \theta_{10} x_2^3 \quad (3.2)$$

onde trata de um modelo estático polinomial de terceiro grau para representar dados de um problema com uma saída y e duas entradas x_1 e x_2 , onde os regressores são $[1, x_1, x_2, x_1 x_2, x_1^2, x_2^2, x_1^2 x_2, x_1 x_2^2, x_1^3, x_2^3]$.

A equação 3.3 apresenta o modelo exponencial.

$$y = k \cdot x_1^{\theta_1} \cdot x_2^{\theta_2} \cdot x_3^{\theta_3} \quad (3.3)$$

onde, no exemplo em questão, o modelo exponencial não é linear. Para encontrar os regressores, é necessário aplicar o logaritmo nos dois lados da equação, na qual a equação 3.4 representa esta aplicação.

$$\log y = \log (k \cdot x_1^{\theta_1} \cdot x_2^{\theta_2} \cdot x_3^{\theta_3})$$

$$\log y = \log k + \theta_1 \log x_1 + \theta_2 \log x_2 + \theta_3 \log x_3 \quad (3.4)$$

onde $\log k$ é uma constante.

No caso do modelo logarítmico, deve basear-se primeiramente em um modelo exponencial, como.

$$y = b_1 x_2^{b_2} \cdot x_3^{b_3} e^{\varepsilon_i}$$

onde y é a saída, x_2 e x_3 são as entradas e ε é o erro. Esta equação mostra claramente que a relação entre a saída e as entradas é não linear. Assim sendo, é obtida a equação 3.5 ao aplicar o logaritmo.

$$\ln y = \ln b_1 + b_2 \ln x_2 + b_3 \ln x_3 + \varepsilon_i \quad (3.5)$$

no qual este modelo agora é linear nos parâmetros e, portanto, um modelo de regressão linear. Observe que é não linear nas variáveis x e y .

Para o caso da série de Fourier, a equação 3.6 apresenta o modelo proposto.

$$y = \theta_0 + \theta_1 \cos\left(\frac{2\pi}{L} x\right) + \theta_2 \sin\left(\frac{2\pi}{L} x\right) + \theta_3 \cos\left(\frac{2 \cdot 2\pi}{L} x\right) + \dots \quad (3.6)$$

onde $L = x_{\max} - x_{\min}$.

Na série de Fourier, não há y em todos os pontos x . Neste caso, pode-se resolver utilizando a técnica dos mínimos quadrados. Dessa forma, os regressores são $\left[1 \cos\left(\frac{2\pi}{L} x\right) \sin\left(\frac{2\pi}{L} x\right) + \dots\right]$.

Outrossim, para a função de base radial (RBF), um exemplo desta função é apresentado pela equação 3.7.

$$\varphi_1 = e^{-\frac{(x-x)^2}{\sigma_i^2}} \quad (3.7)$$

onde uma função de base radial (RBF) é uma função sobre números reais cujos valores dependem apenas da distância a partir da origem, tal que $\varphi(x, p) = \varphi(\|x - p\|)$. A norma é usualmente a distância euclidiana, embora outras funções de distância também sejam possíveis (MOREIRA, 2002).

3.3. Métricas de Desempenho

Uma forma de verificar se o modelo desenvolvido é satisfatório está em avaliar suas métricas de desempenho, como é o caso do Erro Médio Quadrático (MSE), Raiz do Erro Médio Quadrático (RMSE), Erro Médio Quadrático Normalizado (NMSE), dentre outros (CUNHA, 2011).

3.3.1. MSE (Erro Médio Quadrático)

A equação 3.8 apresenta o erro médio quadrático.

$$MSE = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^n (yv(t) - \hat{y}v(t))^2 \quad (3.8)$$

onde, segundo Cunha (2011), em estatística, o erro quadrático médio (MSE) ou o desvio médio quadrado (MSD) de um estimador (de um procedimento para estimar uma quantidade não observada) mede a média dos quadrados dos erros ou desvios, ou seja, a diferença entre o a saída e o que é estimado. Vale ressaltar que, na equação, a divisão por N (número de amostras) é opcional.

3.3.2. RMSE (Raiz do Erro Médio Quadrático)

A equação 3.9 apresenta a métrica de desempenho denominada RMSE.

$$RMSE = \sqrt{MSE} \quad (3.9)$$

onde trata-se de uma medida frequentemente usada das diferenças entre os valores previstos por um modelo ou um estimador e os valores observados. O RMSE representa a raiz quadrada das diferenças entre os valores previstos e os valores observados ou a média quadrática dessas diferenças. Esses desvios são chamados de residuais quando os cálculos são realizados sobre a amostra de dados que foi usada para estimação e são chamados de erros (ASSUNÇÃO, 2017). O RMSE é sempre não negativo e um valor de 0 (quase nunca alcançado na prática) indicaria um ajuste perfeito aos dados.

3.3.3. NMSE (Erro Médio Quadrático Normalizado)

A métrica de desempenho de erro médio quadrático normalizado é apresentada na equação 3.10.

$$NMSE = \frac{RMSE}{\sqrt{\sum_{t=1}^n y^v(t)^2}} \quad (3.10)$$

onde, utilizando o termo NMSE em sua equação, este valor é comumente referido como o desvio ou erro do quadrado médio padrão normalizado (NMSE), e muitas vezes expresso como uma porcentagem, onde os valores mais baixos indicam maior variação residual. Em muitos casos, especialmente para amostras menores, o alcance da amostra provavelmente será afetado pelo tamanho da amostra, o que dificultaria as comparações (MORIYA, 2005).

Para Almeida (2015), esta métrica utiliza o termo NMSE em sua fórmula. Seu valor é limitado superiormente em 1. Essa métrica serve de parâmetro para informar que, quanto maior o valor de NMSE, melhor é o desempenho, ou seja, quanto mais próximo de 1 é o valor de NMSE, melhor é a métrica de um determinado sistema.

3.4. Algoritmos de Regressão

Para o desenvolvimento dos algoritmos de regressão polinomial e exponencial, foi utilizado o *software Matlab* devido ser uma plataforma matemática que permite trabalhar diretamente com dados matriciais, bem como com técnicas de identificação de sistemas por meio de uma linguagem de programação de alto nível. Dessa forma, os códigos assim foram implementados, ajustados e testados utilizando o *Matlab*.

No caso do ajuste a um polinômio, um critério que se mostra bastante eficaz e será utilizado em uma das atividades propostas neste trabalho consiste em se aumentar sistematicamente o grau do polinômio procurado de modo a, baseados em uma avaliação matemática dos ajustes realizados, selecionar aquele que proporciona o melhor resultado. Isto significa implementar diversas vezes o método sobre os dados em mãos, o que não se mostra tão trabalhoso com os recursos computacionais e ferramentas de cálculo existentes nos dias atuais. Para tanto, foi desenvolvido um algoritmo de regressão utilizando o método dos mínimos quadrados ortogonais, com a finalidade de obter modelos polinomiais que possam descrever o fenômeno da punção em lajes lisas de concreto armado. O algoritmo é adequado para o caso do estudo onde há muitas variáveis de influência à punção, em que nele apresenta-se a ortogonalização da matriz W mencionada na seção 2.10, bem como as transformações de Householder como técnica de resolução do problema. Além disso, o algoritmo permite variar o grau do polinômio, conforme mencionado anteriormente, bem como variar a taxa de redução de erro ERR também mencionada na seção 2.10. O grau do polinômio deve ser variado de forma a obter o modelo que se ajusta melhor com os dados experimentais. Já a taxa de redução de erro permite incluir (ou não) elementos na matriz de regressão, de forma a assim influenciar na quantidade de termos no polinômio.

Quanto ao ajuste a uma função exponencial, em alguns casos, a família de funções pode ser não linear nos parâmetros, como, por exemplo, o próprio ajuste de uma função exponencial com uma constante. Para o algoritmo desenvolvido, foi utilizado o método dos mínimos quadrados. Para tanto, foi necessário linearizar a função, aplicando o logaritmo em toda função. Dessa forma, o problema torna-se linear nos parâmetros. O método dos mínimos quadrados pode então ser aplicado

na resolução do problema linearizado. Obtidos os parâmetros deste problema, usam-se estes valores para calcular os parâmetros originais. É importante observar que os parâmetros assim obtidos pelo algoritmo não são ótimos dentro do critério dos mínimos quadrados. Isto porque o que se ajusta é o problema linearizado e não o original.

Para o caso dos dois algoritmos desenvolvidos, os resultados apresentaram modelos polinomiais e exponenciais, bem como comparativos de métricas de desempenho com as normas analisadas. Além disso, vale ressaltar que foram utilizados 70% dos dados fornecidos para elaboração dos modelos matemáticos propostos via algoritmos e os outros 30% foram utilizados na etapa de validação dos modelos propostos, geração de resultados gráficos de percentuais de erro e comparação com dados estatísticos provenientes das normas.

4. RESULTADOS

4.1. Análises dos Resultados para a Norma ACI 318 (2014)

Para proposta de melhoria da norma ACI 318 (2014), é necessário saber o cálculo da tensão resistente de lajes sem armadura de cisalhamento de acordo com a norma em questão já na unidade de MPa, conforme equação 4.1.

$$\sigma_{ACI} = \frac{1}{3} \sqrt{f'_c} \quad (4.1)$$

onde, em resumo, pela equação descrita, a tensão resistente na norma está em função somente da resistência à compressão do concreto.

Para utilização do método da superfície de controle, primeiramente devem ser calculadas as tensões resistentes na unidade MPa considerando o perímetro de controle estabelecido pela norma ACI 318 (2014), qual seja: $d/2$. Considerando este perímetro, a equação 4.2 apresenta a superfície de controle para esta norma.

$$\mu_1 = 4(C + d) \quad (4.2)$$

onde μ_1 é o perímetro de controle definido pela norma. Em seguida, calcula-se a tensão resistente. Assim sendo, a equação 4.3 apresenta a tensão resistente experimental para esta norma.

$$\tau_{ACI} = \frac{1000 \cdot V_u}{\mu_1 \cdot d} \quad (4.3)$$

onde τ_{ACI} é a tensão resistente experimental em MPa obtida pelo método da superfície de controle, V_u é a tensão resistente em kN/m², μ_1 é o perímetro de controle calculado pela equação 4.2 e d é a altura útil da laje.

Percebe-se que, para estes cálculos presentes nas equações 4.2 e 4.3, os bancos de dados fornecem todas estas variáveis. Para o caso do banco de dados 1, as variáveis de entrada são d , ρ , f'_c , C/d e $Ms/Mflex$ e a variável de saída é τ_{ACI} definido na equação 4.3. Após definida a característica do sistema, foram realizados testes submetendo os bancos de dados no algoritmo de regressão polinomial que, por sua vez, utiliza o método dos mínimos quadrados ortogonais para obtenção de um modelo matemático polinomial e, em seguida, submetidos também ao algoritmo de regressão exponencial, respectivamente.

Inicialmente, foi necessário gerar o histograma de erros percentuais da norma ACI para efeito comparativo com os histogramas dos modelos propostos. Para tanto, a figura 4.1 apresenta o histograma de erros percentuais provenientes dos dados de validação submetidos à equação 4.1 da norma ACI.

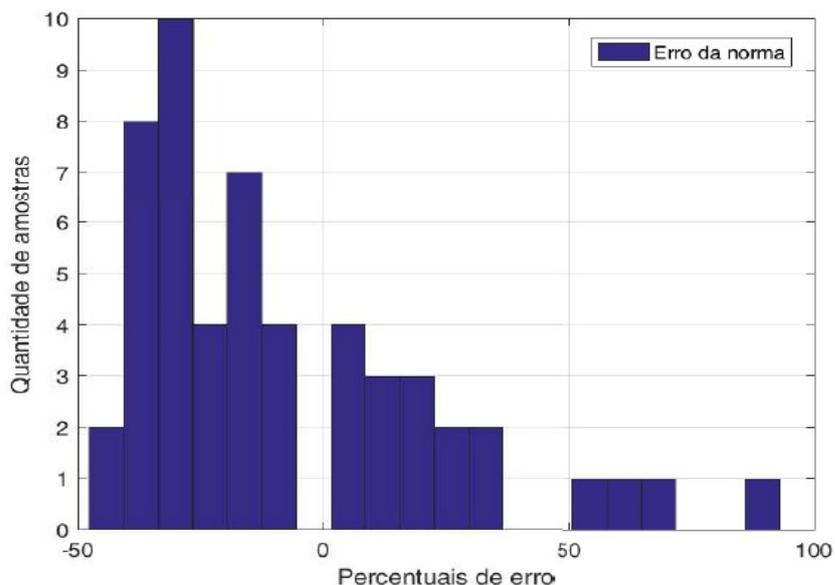


Figura 4.1 – Histograma de erros norma ACI (banco de dados 1).

Fonte: Autor (2019).

Ao avaliar a figura 4.1, é importante destacar que os valores de percentuais negativos representam resultados conservadores, enquanto os percentuais positivos representam resultados contra a segurança. Os percentuais negativos foram obtidos de tal forma que representam valores de tensão resistente calculados pela norma abaixo da tensão resistente experimental, ao passo que os percentuais positivos apresentam valores de tensão resistente obtidos pela norma e que são superiores às tensões resistentes experimentais. Assim sendo, foi verificado na figura 4.1 que 29 das 53 amostras apresentaram resultados conservadores e 12 amostras contra a segurança. Além disso, 12 amostras ficaram dentro de uma faixa aceitável de erro na distribuição, cerca de $\pm 15\%$, o que representa um percentual de segurança apropriado. Evidencia-se a característica conservadora da norma ACI 318 (2014).

Após a análise do histograma da norma ACI, foram gerados os modelos propostos e seus respectivos histogramas.

Banco de dados 1: Obtenção do Modelo Polinomial

Utilizando a taxa de corte $C_d = 0,2$ e polinômio de grau 2, ao submeter os 30% dos dados de validação, foi obtido o histograma de erros percentuais presente na figura 4.2.

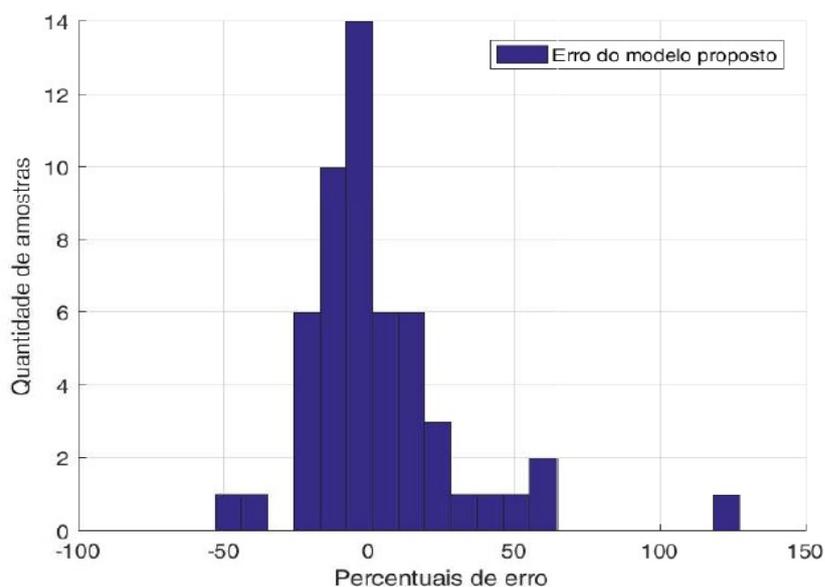


Figura 4.2 – Histograma de erros Modelo polinomial proposto (banco de dados 1).

Fonte: Autor (2019).

Vale ressaltar que foram realizados diversos testes no algoritmo para diferentes valores de taxa de corte e diferentes graus de polinômio, sendo este o melhor resultado obtido. Outrossim, é importante destacar que a taxa de corte se refere ao valor **ERR** mínimo para inclusão de regressores, ou seja, está diretamente relacionada à quantidade de termos no polinômio obtido.

Determinados regressores foram retirados pelo algoritmo automaticamente devido ao seu baixo grau de influência na tensão resistente e este controle, por sua vez, está diretamente relacionado à taxa de corte C_d como parâmetro do algoritmo. Deve-se ter cuidado ao manipular a taxa de corte, pois o algoritmo pode apresentar valores baixos de NMSE para determinadas simulações, bem como modelos propostos com muitos termos dentro do polinômio e que também podem comprometer as estatísticas de desempenho.

Com o modelo gráfico proposto, foi possível obter a função matemática do modelo proposto e que está presente na equação 4.4.

$$\tau_{PROP} = 0,0146d + 0,0382f'_c + 3,5054\rho - 0,005d \left(\frac{c}{d}\right) - 297,114\rho^2 + 137,2153\rho \frac{M_s}{M_{flex}} - 0,00000007d^2 - 0,0066d \frac{M_s}{M_{flex}} - 0,0001df'_c + 0,0924 \left(\frac{c}{d}\right) \quad (4.4)$$

Para validação dos dados e efeito comparativo à norma, a tabela 4.1 evidencia as métricas de desempenho.

Tabela 4.1 – Dados estatísticos Norma ACI x Modelo Proposto (Polinomial).

Fonte: Autor (2019).

Recomendações	$\sigma_{experimental}/\sigma_{ACI}$	$\sigma_{experimental}/\sigma_{proposto}$
Média	1,20	1,03
Desvio Padrão	0,34	0,26
Coefficiente de variação (%)	28,42	24,87

O parâmetro NMSE do modelo proposto é de 0,89, o que é um bom desempenho, uma vez que, quanto mais próximo de 1, melhores são os resultados. Fica também evidenciado pela tabela 4.1 que o modelo proposto possui melhores métricas de desempenho que a própria norma, tanto na média, quanto no desvio padrão e coeficiente de variação. Isso ocorre, pois, a norma em si leva em consideração apenas um fator de influência à punção, a resistência à compressão do concreto. Enquanto o modelo proposto considera cinco variáveis de entrada, resultando assim em uma melhor predição. Do ponto de vista de identificação de sistemas, o modelo polinomial proposto pela equação 4.4 apresenta melhores resultados que a norma. Entretanto, do ponto de vista físico, explicar a equação em referência como a soma de termos polinomiais e a relação física entre as variáveis de entrada torna-se uma tarefa difícil e possivelmente inviável. Assim, para objeto deste estudo, os modelos polinomiais possuem esta limitação, mas que numericamente apresentam resultados satisfatórios.

Ao analisar o histograma de erros da figura 4.2, percebe-se que 33 das 53 amostras apresentaram percentuais de erros dentro da faixa de $\pm 15\%$, o que evidencia uma melhor distribuição e melhor desempenho para o modelo proposto, uma vez que somente 12 amostras na norma estão dentro desta faixa. Entretanto,

somente 9 amostras apresentaram resultados conservadores no modelo proposto, uma vez que na norma este número é 29. Isto evidencia a característica conservadora da norma ACI 318 (2014) e, portanto, com melhores características a favor da segurança do que o modelo proposto. Além disso, o modelo proposto apresentou 11 resultados contra a segurança, enquanto na norma este número é 12.

Banco de dados 1: Obtenção do Modelo Exponencial

Para estudo do modelo exponencial, foi desenvolvido um algoritmo de regressão considerando o logaritmo de todos os valores da matriz regressora e da matriz de saída dos dados, à exceção da constante a ser encontrada no modelo. Dessa forma, o modelo fica linear nos parâmetros, facilitando assim o uso da técnica dos mínimos quadrados presente no algoritmo. O modelo exponencial, além de não apresentar taxa de corte C_D semelhante ao modelo polinomial, deve ter a estrutura matemática semelhante à equação 3.3 mencionada anteriormente. Para os dados simulados para validação, foi obtido o histograma de erros presente na figura 4.3.

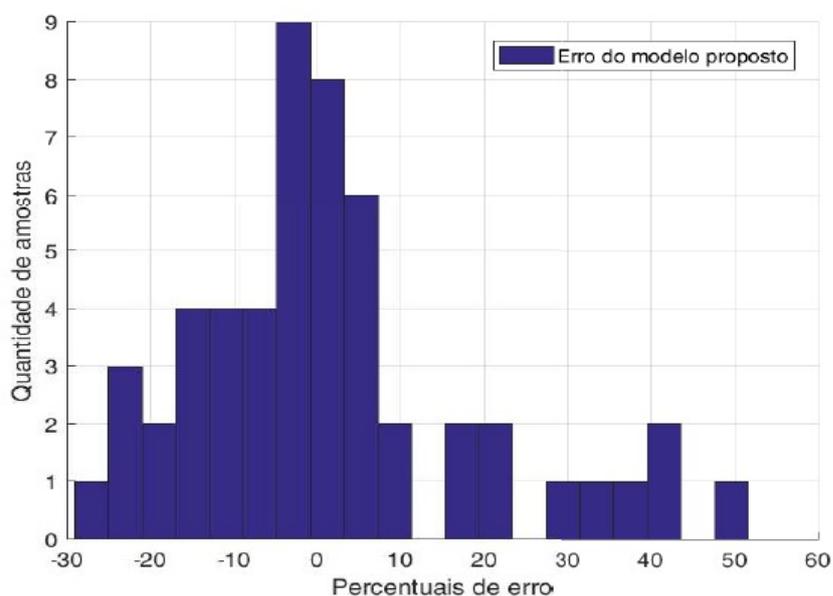


Figura 4.3 – Histograma de erros Modelo exponencial proposto (banco de dados 1).

Fonte: Autor (2019).

onde, também foi obtida a função que representa os dados gráficos na equação 4.5.

$$\tau_{PROP} = 29,6221d^{-0,2127} \rho^{0,5145} f'_c{}^{0,3243} \left(\frac{c}{d}\right)^{-0,4764} \left(\frac{M_s}{M_{flex}}\right)^{0,3428} \quad (4.5)$$

O modelo apresentou métrica de desempenho NMSE = 0,88, praticamente o mesmo valor obtido no modelo polinomial proposto. Trata-se de um valor satisfatório de NMSE e este fato fica evidenciado ao avaliar o gráfico da figura 4.3. Nesta, 36 das 53 amostras estão dentro da faixa de percentual de erro de $\pm 15\%$, enquanto na norma este número é 12. Todavia somente 7 amostras no modelo proposto apresentam resultados conservadores, enquanto na norma este número é 29. Além disso, 10 amostras do modelo proposto apresentaram resultados contra a segurança, onde na norma este número é 12. Estes números mostram que o modelo proposto apresenta melhor distribuição e melhores métricas de desempenho, ao passo que o modelo da norma é mais conservador. A tabela 4.2 apresenta os dados estatísticos de desempenho da norma e do modelo proposto.

Tabela 4.2 – Dados estatísticos Norma ACI x Modelo Proposto (Exponencial).

Fonte: Autor (2019).

Recomendações	$\sigma_{experimental}/\sigma_{ACI}$	$\sigma_{experimental}/\sigma_{proposto}$
Média	1,20	1,01
Desvio Padrão	0,34	0,16
Coefficiente de variação (%)	28,42	15,96

Ao analisar a tabela 4.2, percebe-se que as métricas de desempenho de média, desvio padrão e coeficiente de variação, foram melhores que a norma e, inclusive, melhores que próprio modelo polinomial anteriormente proposto, evidenciando-se assim a proposta de um modelo de equação ainda melhor e que, do ponto de vista físico, torna-se bem mais simples de explicar.

Banco de dados 2: Obtenção do Modelo Polinomial

Para o banco de dados em questão, foram utilizadas 3 variáveis de influência à punção, quais sejam: ξ , ρ e f'_c . A variável de saída do sistema permanece a

mesma, a tensão resistente em MPa (anteriormente calculada). No banco de dados 1, foram utilizadas 5 variáveis de entrada e, assim sendo, é importante testar diferentes cenários de modelos para averiguar qual o mais adequado em termos de métricas de desempenho. Para tanto, é preciso calcular o chamado efeito de escala (ξ) que, por sua vez, está em função de d . Dessa forma, o efeito de escala está presente na equação 4.6.

$$\xi = 1 + \sqrt{\frac{200}{d}} \quad (4.6)$$

Inicialmente, foi gerado o histograma de erros da norma ao submeter o banco de dados 2 à equação 4.1 e representado pela figura 4.4.

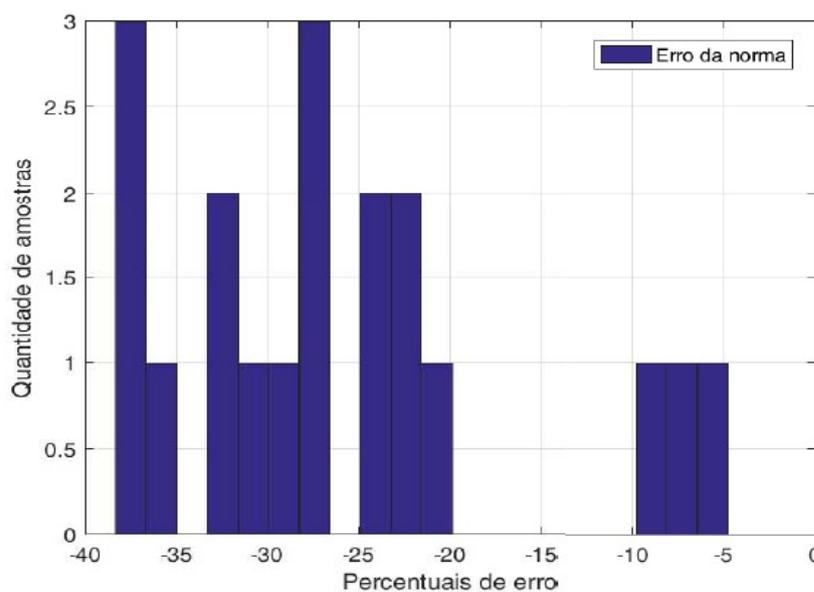


Figura 4.4 – Histograma de erros norma ACI (banco de dados 2).

Fonte: Autor (2019).

Vale ressaltar que o banco de dados 2 apresenta somente 19 amostras de validação, o que representa 30% do seu banco de dados. Para tanto, pela figura 4.4 percebe-se que 16 amostras apresentaram resultados a favor do conservadorismo ao observar os percentuais de erros negativos no gráfico menores que -15%. Entretanto, somente 3 amostras estão dentro da faixa de $\pm 15\%$ de erros, o que

mostra uma distribuição relativamente dispersa. Além disso, não houve nenhum resultado contra a segurança para o modelo submetido pela norma.

Utilizando a taxa de corte $C_d = 0,07$ e polinômio de grau 2, é obtido o gráfico presente na figura 4.5 e que representa o modelo polinomial proposto.

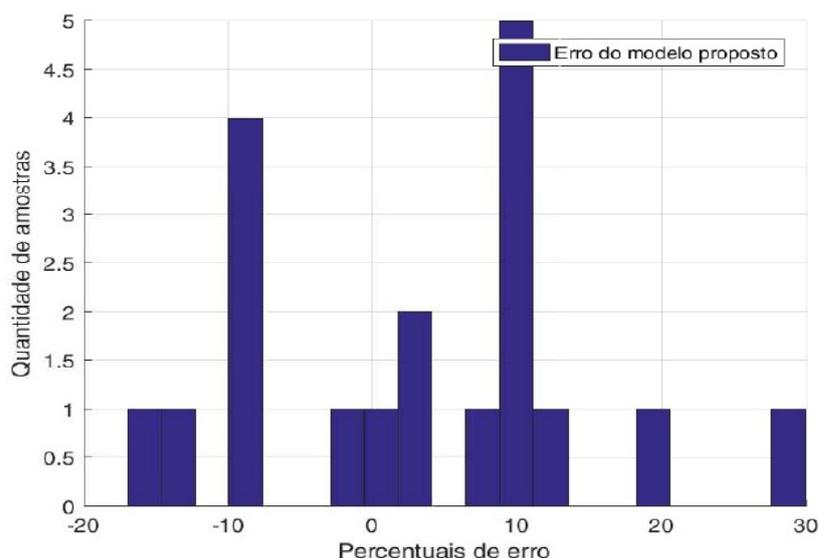


Figura 4.5 – Histograma de erros Modelo polinomial proposto (banco de dados 2).

Fonte: Autor (2019).

onde é apresentado o histograma de percentuais de erro do modelo proposto. Com valor de NMSE = 0,89, o modelo proposto é mostrado pela equação 4.7.

$$\tau_{PROP} = 0,1907\xi + 0,0316f_c^2 + 108,5695\rho - 1705,6627\rho^2 \quad (4.7)$$

O modelo apresenta na tabela 4.3 as seguintes métricas de desempenho.

Tabela 4.3 – Dados estatísticos Norma ACI x Modelo Proposto (Polinomial).

Fonte: Autor (2019).

Recomendações	$\sigma_{experimental}/\sigma_{ACI}$	$\sigma_{experimental}/\sigma_{proposto}$
Média	1,37	0,98
Desvio Padrão	0,17	0,12
Coefficiente de variação (%)	12,58	11,79

Para este banco de dados, ao comparar as métricas de desempenho da norma com o modelo proposto, observa-se que o modelo polinomial proposto na equação 4.7 apresenta melhores resultados que a equação da norma em si, ficando somente restrita a mesma questão da limitação em explicar o fenômeno físico pela função polinomial. O valor de NMSE também é satisfatório. Acerca da equação 4.7, o polinômio apresenta 4 termos, uma vez que as combinações da matriz regressora apresentam menores elementos tendo em vista haver somente 3 variáveis de entrada de influência à punção para esta análise. Pelas métricas de desempenho constantes na tabela 4.3, percebe-se que o modelo proposto apresenta as métricas de desempenho de média, desvio padrão e coeficiente de variação, melhores que a norma. Todavia, é preciso frisar que a métrica de desempenho média do modelo proposto ficou um pouco abaixo de 1, o que significa dizer que este modelo apresenta características contra a segurança em parte das amostras utilizadas na validação do modelo, diferentemente da média da norma que, por sua vez, evidencia o conservadorismo. Ao analisar os histogramas presentes nas figuras 4.4 e 4.5, observa-se que todas as amostras submetidas à norma apresentaram resultados conservadores por meio dos percentuais negativos de erro inferiores a -15%, onde há algumas amostras com excesso de conservadorismo. Já o modelo proposto apresentou 16 amostras dentro da faixa de percentuais de erro de $\pm 15\%$, enquanto este número é somente 3 na norma. Estes resultados evidenciam uma distribuição de resultados melhor ao concentrar todos seus resultados dentro desta faixa de erros. Além disso, para a norma não houve nenhuma amostra contra a segurança, entretanto no modelo proposto foram 2 amostras contra a segurança. Todavia, ao avaliar a segurança e o conservadorismo, a norma apresentou 16 amostras com resultados a favor da segurança, enquanto somente 1 amostra no modelo proposto apresentam resultados conservadores, evidenciando assim o excesso de conservadorismo na norma. Mesmo assim, o excesso de conservadorismo não quer dizer que a norma seja melhor que o modelo proposto, haja vista os dados estatísticos presentes na tabela 4.3 que apresentam melhores métricas de desempenho no modelo proposto, resultando assim na proposta de um melhor modelo de cálculo.

Banco de dados 2: Obtenção do Modelo Exponencial

Para obtenção do modelo em questão, também foram utilizadas as variáveis de entrada ξ , ρ e f'_c , respectivamente. Para tanto, os dados a seguir foram obtidos e estão presentes no gráfico da figura 4.6 que representa o histograma de erros para esta análise.

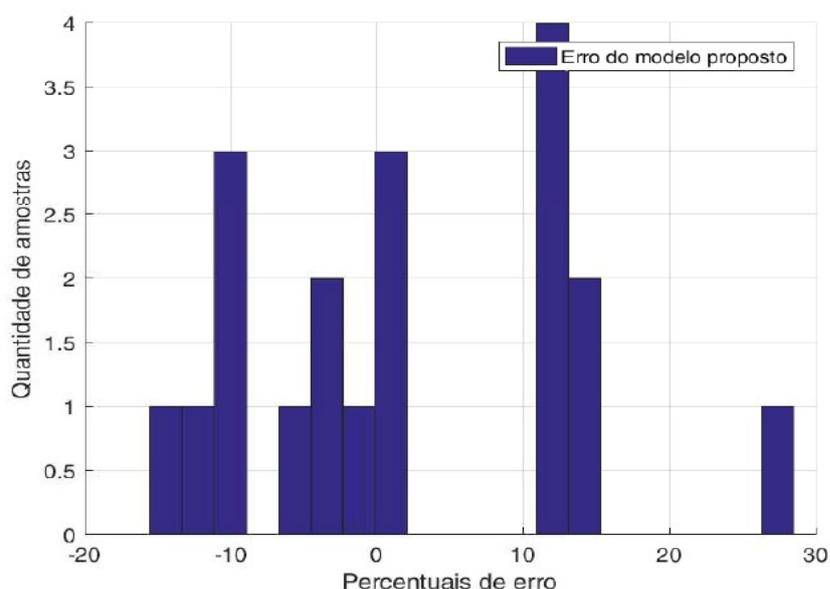


Figura 4.6 – Histograma de erros Modelo exponencial proposto (banco de dados 2).

Fonte: Autor (2019).

Com valor de NMSE = 0,89, o modelo proposto é apresentado pela equação 4.8.

$$\tau_{PROP} = 1,3035 \xi^{0,1389} \rho^{0,2476} f'_c{}^{0,474} \quad (4.8)$$

Assim sendo, através da tabela 4.4, o modelo apresenta as seguintes métricas de desempenho.

Tabela 4.4 – Dados estatísticos Norma ACI x Modelo Proposto (Exponencial).

Fonte: Autor (2019).

Recomendações	$\sigma_{\text{experimental}}/\sigma_{\text{ACI}}$	$\sigma_{\text{experimental}}/\sigma_{\text{proposto}}$
Média	1,37	0,99
Desvio Padrão	0,17	0,11
Coeficiente de variação (%)	12,58	11,14

Dessa forma, o modelo proposto na equação 4.8 também apresenta melhores métricas de desempenho que a norma ACI, evidenciados por melhores índices de média, desvio padrão e coeficiente de variação presentes na tabela 4.4, o que mostra que a equação 4.8 é uma proposta válida para melhoria da norma. É importante frisar que as métricas de desempenho da norma ACI não apresentam bons resultados do ponto de vista de identificação de sistemas pois trabalha em função somente da resistência à compressão do concreto, o que facilitou os estudos de novos modelos matemáticos de predição da punção ao inserir outros fatores de influência à punção. Entretanto, vale ressaltar que, do ponto de vista de conservadorismo e segurança, o modelo proposto apresenta bons índices de desempenho.

É importante destacar que o valor médio obtido no modelo proposto mostra que o mesmo apresenta resultados contra a segurança, enquanto a média consideravelmente superior a 1 representa o conservadorismo da norma. Para efeito de análise e comparação de dados e, conforme observado no histograma da figura 4.6 contendo os índices de erro, 17 das 19 amostras do modelo proposto ficaram dentro da faixa aceitável de $\pm 15\%$ de erro, enquanto que na norma somente 3 amostras ficaram dentro deste percentual, evidenciando assim uma distribuição de erros mais concentrada nesta faixa. Entretanto, 1 amostra do modelo proposto apresentou resultado contra a segurança, em contrapartida nenhuma amostra com esta característica foi apresentada pela norma, evidenciando mais uma vez a característica fortemente conservadora da norma ACI. Além disso, somente 1 amostra no modelo proposto apresentou característica conservadora, já na norma este número é 16. Mesmo assim, os resultados justificam a proposta de um novo modelo de cálculo, uma vez que a análise de segurança e conservadorismo não

necessariamente significa dizer que o modelo seja melhor e sim que prezam por características a favor ou contra a segurança. Assim, o que devem ser avaliados são os dados estatísticos e as métricas de desempenho.

4.2. Análises dos Resultados para a Norma Eurocode 2 (2004)

Para desenvolvimento de uma adequada proposta de melhoria da norma Eurocode 2 (2004), é necessário à priori ter a função da referida norma já na unidade de MPa, de acordo com a equação 4.9.

$$\sigma_{EC2} = 0,18\xi\sqrt{100\rho f'_c} \quad (4.9)$$

onde ξ é calculado conforme equação 4.6.

No entanto, esta norma limita o valor do *size effect* em $\xi \leq 2,0$ e da taxa de armadura de flexão em $\rho \leq 2\%$ buscando retirar algumas tendências de resultados contra a segurança (FERREIRA, 2010).

Na equação 4.9, a tensão resistente na norma está em função da resistência à compressão do concreto, do efeito de escala (que está em função de d) e da taxa de armadura de flexão.

Para o cálculo experimental da tensão resistente em MPa, deve-se considerar o perímetro de controle presente na norma, ou seja, $2d$: o perímetro de controle é igual a duas vezes a altura útil da laje. Dessa forma, a equação 4.10 representa o cálculo da superfície de controle considerando o perímetro de controle para esta norma.

$$\mu_1 = 4(C + \pi d) \quad (4.10)$$

onde μ_1 é a superfície de controle definido pela norma, conforme apresentados os conceitos na seção 2.4.1. Em seguida, calcula-se a tensão resistente experimental para esta norma, ilustrada pela equação 4.11.

$$f_{EC2} = \frac{1000 \cdot V_u}{\mu_1 \cdot d} \quad (4.11)$$

onde f_{EC2} é a tensão resistente experimental em MPa obtida pelo método do perímetro de controle, V_u é a tensão resistente em kN/m², μ_1 é o perímetro de controle calculado pela equação 4.10 e d é a altura útil da laje.

Para efeito comparativo, foi gerado o histograma de erros presente na figura 4.7 e que mostra os percentuais de erro da norma Eurocode 2 para o banco de dados 1.

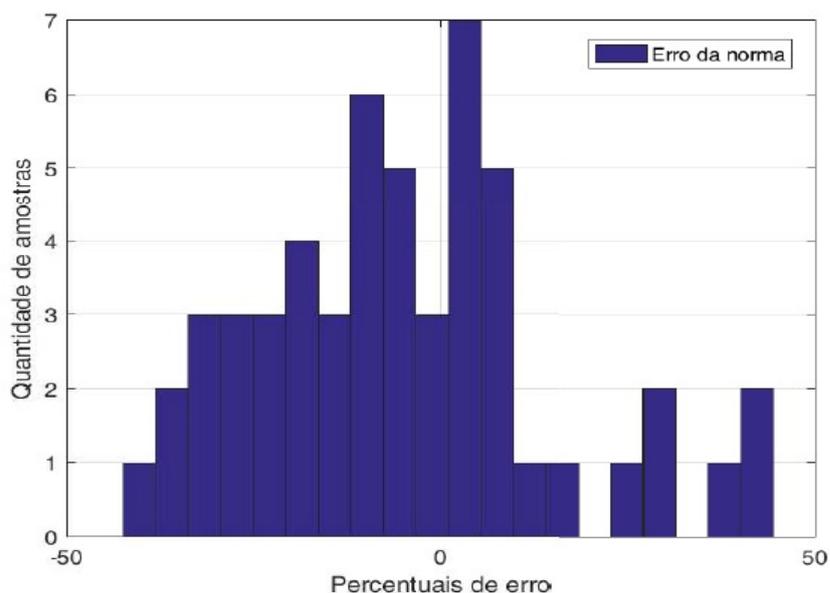


Figura 4.7 – Histograma de erros norma EC2 (banco de dados 1).

Fonte: Autor (2019).

Ao avaliar o histograma de erros presente na figura 4.7, a norma Eurocode 2 apresenta 29 das 53 amostras dentro da faixa aceitável de $\pm 15\%$ de erro, o que remete o uso da equação 4.9 com bons índices de desempenho. As limitações do *size effect* e da taxa de armadura de flexão reduzem os resultados contra a segurança, onde 17 amostras apresentaram resultados conservadores e 7 amostras com resultados contra a segurança. Para tanto, em seguida foram gerados os modelos propostos para análise.

Banco de dados 1: Obtenção do Modelo Polinomial

Para simulação utilizando a taxa de corte $C'd = 0,09$ e polinômio de grau 2, é obtido o gráfico de histograma de erros presente na figura 4.8.

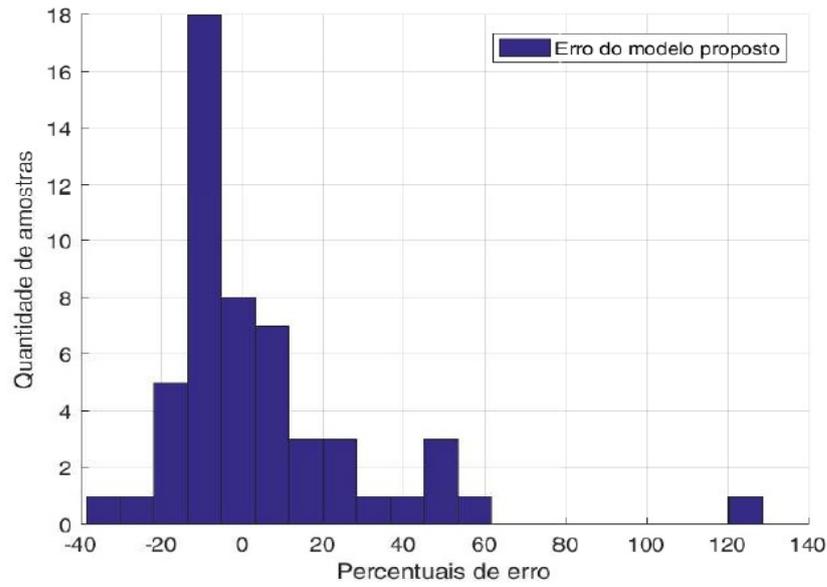


Figura 4.8 – Histograma de erros Modelo polinomial proposto (banco de dados 1).

Fonte: Autor (2019).

O valor de NMSE obtido foi de 0,87 e a estrutura polinomial proposta é ilustrada pela equação 4.12.

$$\begin{aligned}
 \tau_{PROP} = & 0,0051d + 3,5739\rho + 0,0217 f'_c + 0,0638 \left(\frac{C}{d}\right) - 176,6001\rho^2 + \\
 & 74,6143\rho \left(\frac{Ms}{Mflex}\right) d f'_c - 0,0001d f'_c - 0,0031d \left(\frac{Ms}{Mflex}\right) - 0,0014d \left(\frac{C}{d}\right) + \\
 & 0,000000007d^2
 \end{aligned}
 \tag{4.12}$$

Aplicando a equação 4.12 nos dados de validação, foram gerados os dados estatísticos de desempenho apresentados na tabela 4.5.

Tabela 4.5 – Dados estatísticos Norma Eurocode 2 x Modelo Proposto (Polinomial).

Fonte: Autor (2019).

Recomendações	$\sigma_{\text{experimental}}/\sigma_{\text{EC2}}$	$\sigma_{\text{experimental}}/\sigma_{\text{proposto}}$
Média	1,10	1,00
Desvio Padrão	0,23	0,20
Coeficiente de variação (%)	21,26	19,74

O modelo polinomial descrito na equação 4.12 apresenta melhores resultados estatísticos de desempenho que a norma e apresenta valor de NMSE satisfatório. Percebe-se na tabela 4.5 que as métricas de média, desvio padrão e coeficiente de variação são melhores no modelo proposto. Entretanto, ao tentar aumentar a taxa de corte do algoritmo com o intuito de reduzir a quantidade de regressores do polinômio de nove para seis, as métricas de desempenho caem de forma a ficar pior do que as métricas da norma. Para taxa de corte igual a 0,6, por exemplo, o coeficiente de variação subiu para 26,55%, acima do desempenho da norma. Dessa forma, a equação 4.12 é um modelo adequado e aceitável para esta análise, ficando ainda assim restrito à questão da explicação física do modelo proposto.

Ao avaliar cada amostra de validação submetida à equação 4.12, foi verificado pelo histograma da figura 4.8 que 35 das 53 amostras apresentaram valores dentro da faixa de erros de $\pm 15\%$, enquanto na norma este índice são 29 amostras. Esta comparação mostra uma maior distribuição das amostras dentro desta faixa aceitável de erros e que representa o percentual de segurança apropriado para as amostras. Para a análise do conservadorismo e segurança, os resultados mostraram que a norma apresentou melhores métricas de conservadorismo, onde 17 de suas amostras apresentaram resultados a favor da segurança, número este reduzido a 6 para o modelo proposto. Além disso, no modelo proposto 12 amostras apresentaram resultados contra a segurança, enquanto na norma este número é de 7 amostras, onde este índice é melhor na norma devido às limitações do efeito de escala e da taxa de armadura de flexão presentes na equação 4.9. Outrossim, a equação 4.12 apresenta uma proposta de melhoria para o cálculo da punção ao apresentar melhores métricas de desempenho constantes na tabela 4.5.

Banco de dados 1: Obtenção do Modelo Exponencial

Para simulação do algoritmo de regressão exponencial para este banco de dados, obteve-se os seguintes resultados apresentados no histograma de erros da figura 4.9.

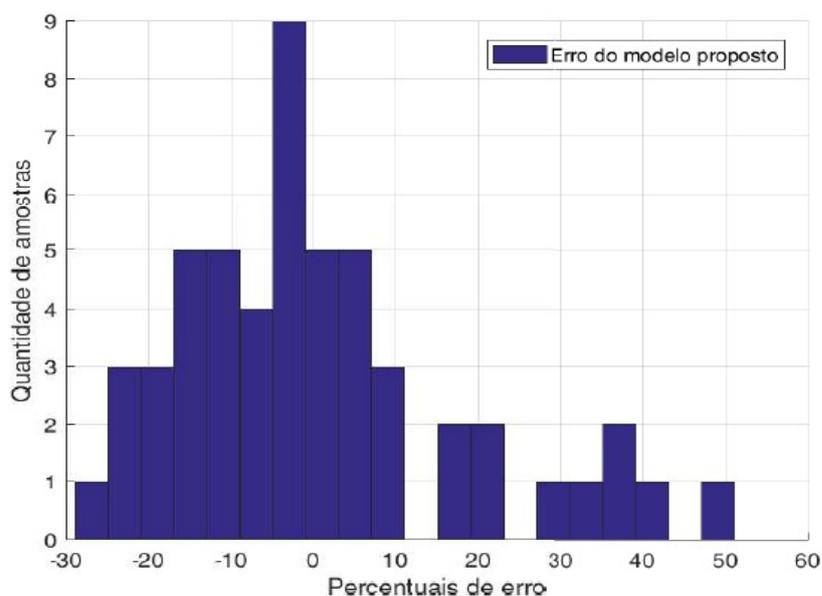


Figura 4.9 – Histograma de erros Modelo exponencial proposto (banco de dados 1).

Fonte: Autor (2019).

O valor de NMSE obtido foi de 0,83 e a estrutura exponencial proposta é ilustrada pela equação 4.13.

$$\tau_{PROP} = 14,3741 d^{-0,2124} \rho^{0,5157} f'_c{}^{0,3246} \left(\frac{c}{d}\right)^{-0,2074} \left(\frac{M_s}{M_{flex}}\right)^{0,3417} \quad (4.13)$$

Ao avaliar estatisticamente o gráfico de histogramas de erro da figura 4.9, percebe-se que o modelo proposto apresenta melhores resultados de percentuais de erro em boa parte dos dados de validação submetidos se comparados aos dados provenientes da norma Eurocode 2.

Em seguida, os dados estatísticos são apresentados na tabela 4.6 ao submeter os dados de validação na equação 4.13.

Tabela 4.6 – Dados estatísticos Norma Eurocode 2 x Modelo Proposto (Exponencial).

Fonte: Autor (2019).

Recomendações	$\sigma_{\text{experimental}}/\sigma_{\text{EC2}}$	$\sigma_{\text{experimental}}/\sigma_{\text{proposto}}$
Média	1,10	1,02
Desvio Padrão	0,23	0,16
Coeficiente de variação (%)	21,26	16,07

As informações presentes no gráfico da figura 4.9 e tabela 4.6 evidenciam resultados de desempenho melhores que a norma em análise, tanto no que diz respeito à média, desvio padrão e coeficiente de variação. O histograma apresenta 35 das 53 amostras dentro do percentual de erros aceitável de $\pm 15\%$, ao passo que este número reduz para 29 amostras nos resultados provenientes da norma. Assim sendo, o histograma do modelo proposto apresenta a maior parte de seus resultados dentro da faixa de erros anteriormente descrito, ou seja, com uma distribuição mais concentrada. Na avaliação de conservadorismo e segurança, os resultados mostraram que 8 amostras do modelo proposto apresentam resultados conservadores, enquanto este número sobe para 17 amostras para a norma, além disso foram 10 amostras no modelo proposto com resultados contra a segurança, enquanto nos resultados da norma este valor cai para 7 amostras. Mesmo com melhores resultados de segurança e conservadorismo da norma, o modelo proposto é melhor ao verificar melhores índices de desempenho pela tabela 4.6, bem como a quantidade de amostras dentro da faixa de $\pm 15\%$ de erro, evidenciando assim a proposta de melhoria da equação da punção.

Banco de dados 2: Obtenção do Modelo Polinomial

Para efeito comparativo, inicialmente foi gerado o histograma de erros percentuais do banco de dados 2 submetido à equação da norma Eurocode 2 presente na figura 4.10.

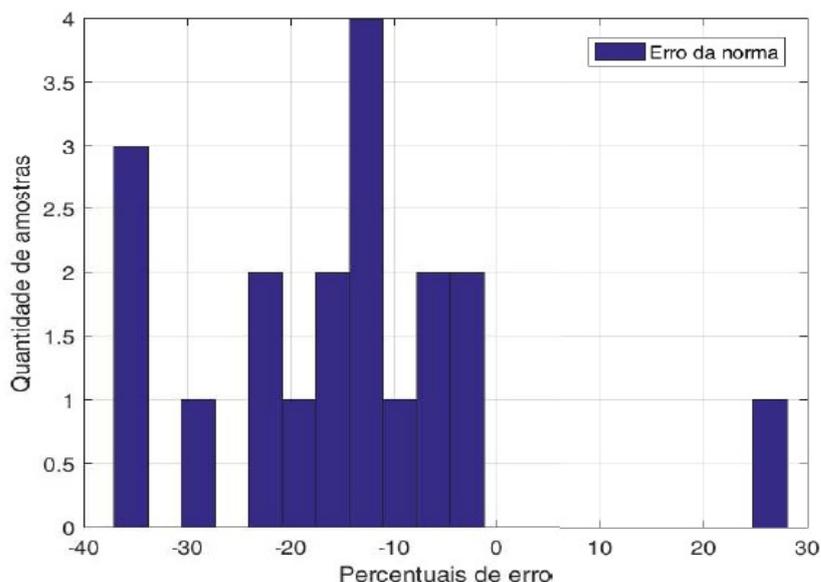


Figura 4.10 – Histograma de erros norma EC2 (banco de dados 2).

Fonte: Autor (2019).

onde, 9 das 19 amostras estão dentro da faixa de percentuais de erro aceitável de $\pm 15\%$. Percebe-se também que 9 amostras apresentaram resultados conservadores, ao passo que somente 1 amostra apresentou resultados contra a segurança. Em seguida, foram obtidos os modelos propostos para comparação com os resultados provenientes das normas.

Para o modelo polinomial, o melhor resultado obtido foi o cenário em que foi utilizado a taxa de corte $C_d = 0,08$ e polinômio de grau 02, conforme apresentado no histograma de erros presente na figura 4.11.

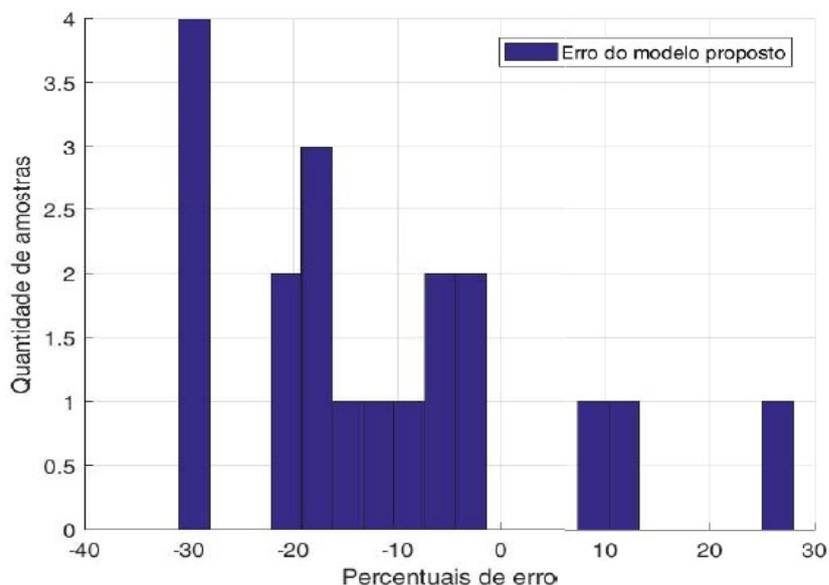


Figura 4.11 – Histograma de erros Modelo polinomial proposto (banco de dados 2).

Fonte: Autor (2019).

O valor de NMSE obtido foi de 0,86 e a estrutura polinomial proposta é apresentada na equação 4.14.

$$\tau_{PROP} = 0,1153\xi + 0,0139f'_c - 21,0745\rho + 38,1919\xi\rho - 988,3703\rho^2 \quad (4.14)$$

Em seguida, ao submeter os dados de validação na equação 4.14, foram gerados os dados estatísticos apresentados pela tabela 4.7.

Tabela 4.7 – Dados estatísticos Norma Eurocode 2 x Modelo Proposto (Polinomial).

Fonte: Autor (2019).

Recomendações	$\sigma_{experimental}/\sigma_{EC2}$	$\sigma_{experimental}/\sigma_{proposto}$
Média	1,21	1,17
Desvio Padrão	0,20	0,19
Coefficiente de variação (%)	16,87	16,55

Assim sendo, de acordo com os dados presentes no histograma de erros da figura 4.11, bem como os dados estatísticos de comparação presentes na tabela 4.7, os dados de média, desvio padrão e coeficiente de variação do modelo proposto

apresentam melhores resultados que as métricas da norma. No histograma da figura 4.11, 9 amostras ficaram dentro da faixa aceitável de $\pm 15\%$ de erro, mesmo número obtido na norma. Isto ocorre pois muito embora os índices de desempenho do modelo proposto são melhores que os resultados provenientes da norma, os valores estão muito próximos ao observar a tabela 4.7. No que se refere à segurança e conservadorismo, o modelo proposto apresentou 9 amostras em favor da segurança, mesmo número obtido pela norma. Já acerca da segurança, o modelo proposto apresentou somente 1 resultado contra a segurança, ao passo que na norma este valor foi o mesmo. Mesmo a norma e o modelo proposto contendo valores iguais de amostras dentro do percentual de $\pm 15\%$, amostras com resultados conservadores e contra a segurança, o modelo proposto obteve melhores resultados ao apresentar melhores índices de desempenho conforme tabela 4.7 com os comparativos de dados estatísticos obtidos. Dessa forma, o modelo polinomial proposto representado pela equação 4.14 apresenta melhorias no cálculo do fenômeno da punção.

Banco de dados 2: Obtenção do Modelo Exponencial

O algoritmo de regressão exponencial para este cenário apresentou os seguintes resultados, de acordo com o gráfico da figura 4.12.

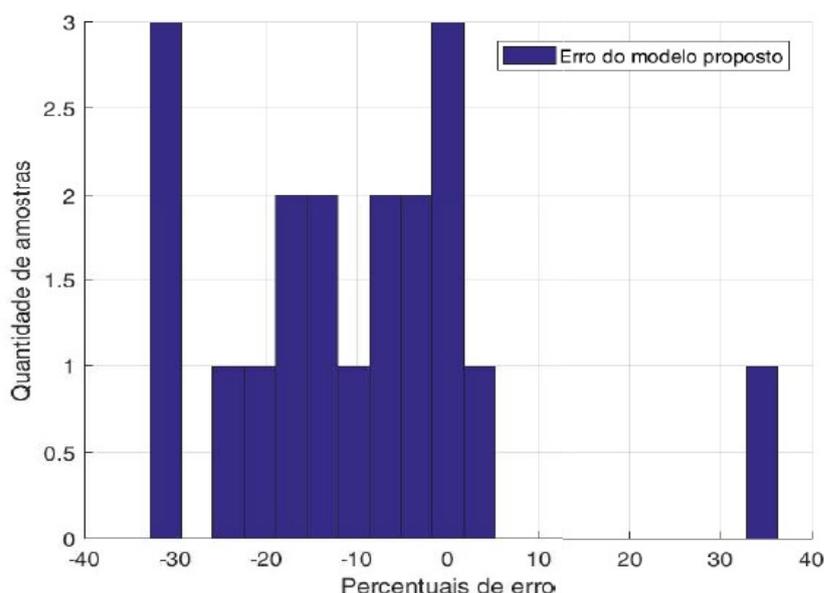


Figura 4.12 – Histograma de erros Modelo exponencial proposto (banco de dados 2).

Fonte: Autor (2019).

O valor de NMSE obtido nesta análise é de 0,85 e a estrutura exponencial proposta é apresentada pela equação 4.15.

$$\tau_{PROP} = 0,8154 \xi^{0,6904} \rho^{0,2906} f_c^{0,3604} \quad (4.15)$$

Em seguida, os dados estatísticos foram gerados e constam na tabela 4.8 ao submeter os dados de validação do modelo na equação 4.15.

Tabela 4.8 – Dados estatísticos Norma Eurocode 2 x Modelo Proposto (Exponencial)

Fonte: Autor (2019)

Recomendações	$\sigma_{experimental} / \sigma_{EC2}$	$\sigma_{experimental} / \sigma_{proposto}$
Média	1,21	1,15
Desvio Padrão	0,20	0,19
Coefficiente de variação (%)	16,87	16,77

O modelo exponencial proposto pela equação 4.15 apresenta melhores métricas de desempenho do que a norma em estudo, face dados gráficos provenientes o histograma da figura 4.12 e tabela 4.8 comparativa dos dados estatísticos, onde os valores de média, desvio padrão e coeficiente de variação são melhores no modelo proposto do que na equação da norma Eurocode 2. Ao avaliar o histograma de erros percentuais da figura 4.12, observa-se que 11 das 19 amostras do modelo proposto estão dentro da faixa de erros percentuais de $\pm 15\%$, valor este reduzido para 9 amostras para a norma. Na avaliação de conservadorismo, os resultados mostraram que 7 amostras do modelo proposto apresentaram resultados conservadores, enquanto na norma foram 9 amostras. Na avaliação contra a segurança, os números mostraram que somente 1 amostra no modelo proposto é contra a segurança, mesmo número obtido pela norma. Desta forma, os índices de segurança e conservadorismo são muito próximos. Mesmo assim, o modelo proposto é melhor que o modelo da norma, uma vez que seus índices de desempenho são melhores conforme observado na tabela 4.8 e contendo maior número de amostras dentro de percentual de erro de $\pm 15\%$. Assim sendo, a equação 4.15 representa uma proposta de melhoria na equação da norma.

Uma observação importante acerca dos testes realizados para elaboração de modelos a serem propostos é que foram também realizados testes no intuito de obter modelos polinomiais de grau 3, entretanto, para este cenário, a melhor métrica de desempenho do NMSE foi de 0,35, inviabilizando a obtenção de sua análise gráfica, modelo proposto e dados estatísticos. Normalmente, na montagem das matrizes de regressão, quando a parte linear é significativa, termos de grau 3 acabam tendo alguma importância maior na função, entretanto isso não ocorreu para os bancos de dados estudados.

4.3. Análises dos Resultados para a Norma NBR 6118 (2014)

A norma Eurocode 2 (2004) também baseia suas recomendações para estimativa da resistência à punção nas recomendações da MC90 (1993), e deste modo, suas recomendações são semelhantes às recomendações da NBR 6118 (2014). No entanto, a norma Eurocode 2 limita o valor do efeito de estala em $\xi \leq 2,0$ e da taxa de armadura de flexão em $\rho \leq 2\%$ buscando a redução de resultados contra a segurança, enquanto a norma NBR 6118 não considera estas limitações. Inclusive, a definição do perímetro de controle são as mesmas, bem como os cálculos utilizados no método para obter a superfície de controle são os mesmos para as duas normas. Dessa forma, não faz sentido propor modelos matemáticos para a Norma NBR 6118 (2014), uma vez que a seção 4.2 apresenta estudos de predição para a norma Eurocode 2 (2004) e que também servem de referência para a norma brasileira. Assim sendo, esta seção fornece estudos de predição para a constante presente na equação da norma, de forma que a mesma possa ser substituída por variáveis de influência à punção. A tensão resistente considerando a norma NBR 6118 (2014) é apresentada pela equação 4.16.

$$\tau_{nbr} = CRd_o \left(1 + \sqrt{\frac{200}{d}} \right) \sqrt[3]{100\rho f'_c} \quad (4.16)$$

onde o $CRd_o = 0,18$. O objetivo está em propor modelos matemáticos que possam substituir esta constante. Para tanto, à nível de identificação de sistemas, a variável

de saída já não é a tensão resistente em unidades de MPa, e sim a constante em referência. Para tanto, a matriz de saída é obtida pela equação 4.17.

$$CRdo = \tau \frac{\text{experimental}}{\left(1 + \sqrt{\frac{200}{d}}\right)^2 \sqrt{100\rho} f'_c} \quad (4.17)$$

Inicialmente, a ideia está em prever os valores obtidos pela equação 4.17 em função das outras variáveis que não constam na norma, quais sejam: C/d e M_s/M_{flex} (as variáveis d , ρ e f'_c estão presentes na equação 4.16). Em resumo, o objetivo está em calibrar a constante $CRdo$ da norma presente na equação 4.17, permanecendo assim todos os outros elementos que compõem a equação 4.16.

Primeiramente foi gerado o histograma de erros percentuais submetendo o banco de dados 1 à equação 4.16 que representa a norma para fins de comparação com os modelos a serem propostos. Os resultados estão presentes no gráfico da figura 4.13.

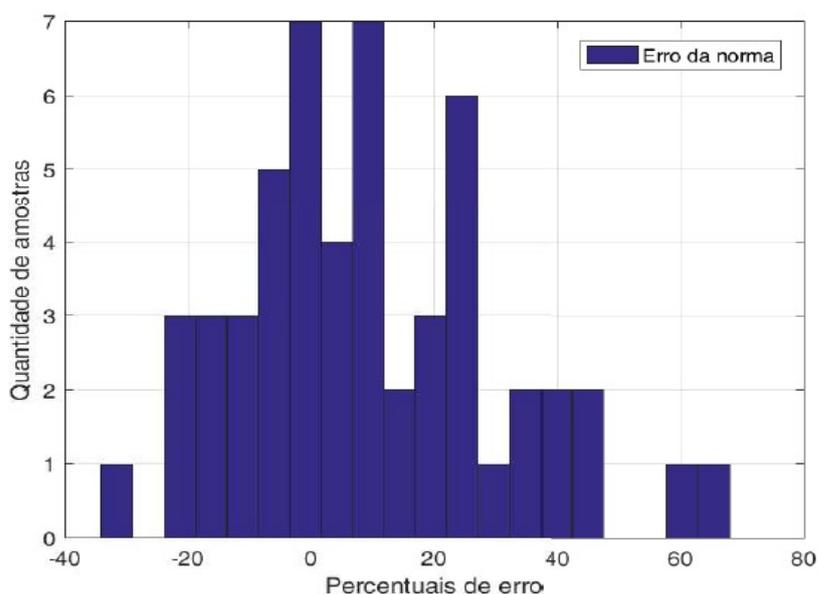


Figura 4.13 – Histograma de erros norma NBR (banco de dados 1).

Fonte: Autor (2019).

Conforme observado na figura 4.13, neste cenário 29 das 53 amostras estão dentro da faixa de aceitação de $\pm 15\%$ de erro. Quanto à questão do

conservadorismo e segurança, 6 amostras apresentaram resultados conservadores e 18 amostras apresentaram resultados contra a segurança. A quantidade de amostras contra a segurança é maior uma vez que não há limitação do efeito de escala e da taxa de armadura de flexão. Em seguida, foram gerados os modelos polinomial e exponencial para proposta de melhoria da constante da norma.

Banco de dados 1: Obtenção do Modelo Polinomial

Para este banco de dados, as variáveis de entrada do sistema são C/d e M_s/M_{flex} , enquanto a saída é o $CRdo$. Para taxa de corte igual a 0,001 e polinômio de grau 2, foram obtidos os seguintes resultados:

O NMSE do $CRdo$ é de 0,60, o que indica um resultado não satisfatório. Ao executar o algoritmo, foi gerada a função proposta para o $CRdo$ e apresentada pela equação 4.18.

$$CRdo_{PROP} = 0,041 \frac{C}{d} + 0,3426 \frac{M_s}{M_{flex}} - 0,0058 \left(\frac{C}{d} \right)^2 - 0,1465 \left(\frac{M_s}{M_{flex}} \right)^2 - 0,0334 \left(\frac{C}{d} \right) \left(\frac{M_s}{M_{flex}} \right) \quad (4.18)$$

Muito embora a métrica NMSE tenha sido relativamente baixa, este valor de NMSE não é muito relevante, pois leva em consideração somente a constante que, por sua vez, é somente parte da equação 4.16. Deve-se, portanto, substituir a função $CRdo$ obtida pela equação 4.18 na equação da norma apresentada na equação 4.16. A partir daí, deve-se avaliar o gráfico e as métricas de desempenho.

Após submeter o modelo proposto na equação da norma NBR 6118 (2014), foi obtido o valor de NMSE do modelo proposto, ficando este em 0,76, o que não é um bom resultado. Os resultados estão presentes no gráfico da figura 4.14, onde apresenta o histograma de erros percentuais relacionados aos dados experimentais.

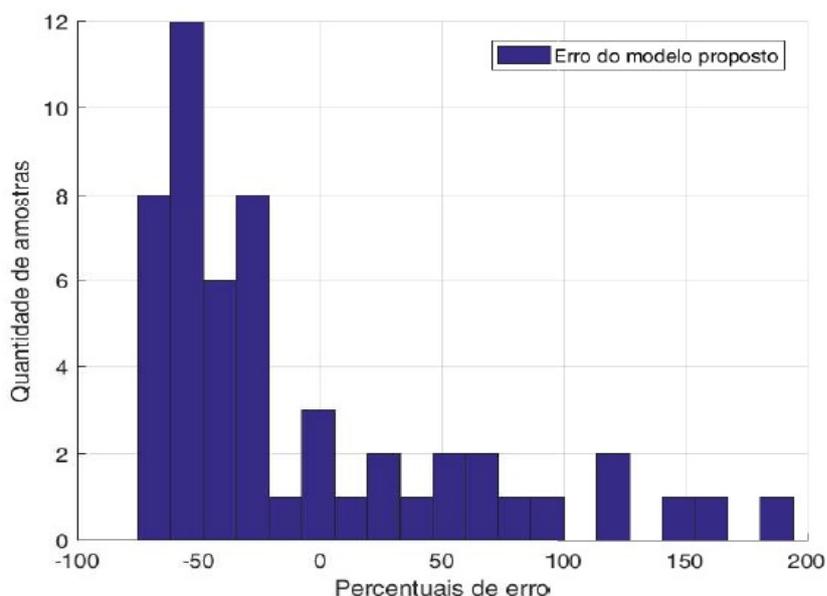


Figura 4.14 – Histograma de erros Modelo polinomial proposto (banco de dados 1).

Fonte: Autor (2019).

Após a etapa de geração do histograma, os dados estatísticos foram apresentados na tabela 4.9 para efeito comparativo do modelo proposto com a norma.

Tabela 4.9 – Dados estatísticos Norma NBR 6118 x Modelo Proposto (Polinomial).

Fonte: Autor (2019).

Recomendações	$\sigma_{\text{experimental}}/\sigma_{\text{NBR}}$	$\sigma_{\text{experimental}}/\sigma_{\text{proposto}}$
Média	0,95	0,91
Desvio Padrão	0,18	0,67
Coeficiente de variação (%)	19,43	73,41

Ao avaliar o histograma da figura 4.14, bem como os dados estatísticos presentes na tabela 4.9, percebe-se que o modelo gerado na equação 4.18 não é adequado para proposta de melhoria da norma NBR 6118 (2018), uma vez que seus dados estatísticos de média, desvio padrão e coeficiente de variação estão abaixo das métricas de desempenho da norma. Ao avaliar os dados de validação, percebe-se no histograma de figura 4.14 que somente 4 das 53 amostras do modelo proposto estão dentro da faixa de percentual de erros de $\pm 15\%$ enquanto nos dados da norma

este número é 29. Nos aspectos de conservadorismo, o modelo apresentou 35 amostras de resultados a favor da segurança, mas com 20 destas amostras com valores extremamente conservadores (menores do que -60%). Já no que se refere aos dados de insegurança, 14 amostras apresentaram resultados contra a segurança, das quais 9 destas amostras contendo resultados extremamente contra a segurança (entre 60% e 180%). Desta forma, o modelo proposto não é adequado e conseqüentemente não é indicado para melhoria na norma. Os resultados de forma geral apresentados no histograma evidenciam forte dispersão dos dados perante os percentuais de erro.

Além destas considerações, para este modelo proposto foram trabalhadas somente duas variáveis de entrada e, como se sabe, é comum a capacidade de predição ficar prejudicada por este fato. Dessa forma, a inserção de mais variáveis aumentaria a capacidade de predição e, possivelmente, melhoraria as métricas de desempenho. Todavia, deve-se avaliar a real necessidade em inserir mais variáveis de entrada para esta análise, uma vez que as variáveis restantes já estão presentes na equação da norma, quais sejam: d , p e f'_c . Outrossim, para este caso, como a norma apresenta melhores métricas de desempenho do que o modelo, a proposta deve ser descartada como sugestão de melhoria, haja vista que os valores nas referências estatísticas ficaram muito dispersos.

Banco de dados 1: Obtenção do Modelo Exponencial

Para esta análise, as variáveis de entrada permanecem sendo C/d e M_s/M_{flex} . Ao executar o algoritmo de regressão, foram obtidos os seguintes resultados.

O NMSE do $CRdo$ é de 0,36, o que já é um indicativo de mau desempenho da constante em estudo. A função que representa o $CRdo$ é ilustrada na equação 4.19.

$$CRdo_{PROP} = \left(\frac{C}{d}\right)^{0,1491} \left(\frac{M_s}{M_{flex}}\right)^{-0,1199} \quad (4.19)$$

Ao inserir o valor de CR_{do} proposto na equação 4.16 da norma, obtém-se o valor de NMSE do modelo proposto que, por sua vez, é igual a 0,54, o que evidencia uma métrica insatisfatória. Os resultados são apresentados no gráfico de histogramas de erro percentuais relacionados aos resultados experimentais que, por sua vez, está presente na figura 4.15.

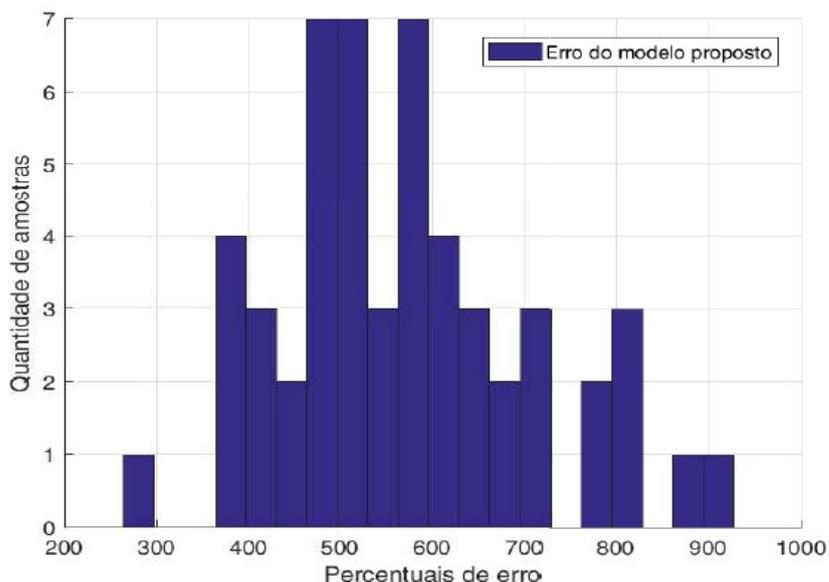


Figura 4.15 – Histograma de erros Modelo exponencial proposto (banco de dados 1).

Fonte: Autor (2019).

Os dados estatísticos para efeito comparativos são apresentados na tabela 4.10, onde os resultados remetem ao modelo proposto pela função de CR_{do} na equação 4.19 ao ser inserido a constante na função da norma NBR 6118 (2014) presente na equação 4.16.

Tabela 4.10 – Dados estatísticos Norma NBR 6118 x Modelo Proposto (Exponencial).

Fonte: Autor (2019).

Recomendações	$\sigma_{experimental} / \sigma_{NBR}$	$\sigma_{experimental} / \sigma_{proposto}$
Média	0,95	0,16
Desvio Padrão	0,18	0,03
Coefficiente de variação (%)	19,43	21,00

O gráfico presente na figura 4.15 mostra claramente que o modelo proposto não é adequado como proposta de melhoria da norma. Os dados propostos obtidos estão altamente dispersos dos valores experimentais, conforme se observa no histograma da figura 4.15. Ao avaliar a tabela 4.10, nota-se que as métricas de desempenho de média, desvio padrão e coeficiente de variação são claramente insatisfatórias do ponto de vista de predição do modelo. Ao avaliar o desempenho individualmente dos resultados simulados na etapa de validação e, conforme consta no histograma da figura 4.15, nenhuma amostra do modelo proposto apresentou resultado dentro da faixa aceitável de erros de $\pm 15\%$ nem com características conservadoras, ou seja, todas as 53 amostras apresentaram resultados contra a segurança. O histograma apresenta extrema dispersão dos dados, nas quais todos as amostras dos modelos propostos estão entre cerca de 250% a 925% de erros percentuais, ou seja, resultados extremamente contra a segurança. Desta forma, o modelo proposto não pode ser considerado como proposta de melhoria da constante presente na norma NBR 6118 (2014).

Resultados com estas características acontecem pois, da mesma forma que no caso polinomial, a capacidade de predição não é recomendada para o uso de apenas duas variáveis de entrada para o caso exponencial, sugerindo-se assim a adição de mais variáveis de influência do fenômeno da punção. Entretanto, conforme já informado anteriormente, deve-se ter cuidado ao inserir novas variáveis de entrada pois pode haver dificuldade em explicar em termos de fenômeno físico um modelo polinomial proposto. Outrossim, é deveras importante destacar novamente que as outras variáveis disponíveis já estão presentes na estrutura matemática da própria norma, de tal forma que, ao qual inseri-las na análise, resultaria em equações das quais modificaria a estrutura matemática presente na norma, e não é este o objetivo desta seção, uma vez que a ideia está em calibrar somente o valor da constante *CRdo* e não a norma de forma geral. Outrossim, numericamente é possível obter melhores métricas de desempenho ao inserir novas variáveis na análise, entretanto fica condicionada às limitações já descritas.

Para a análise do banco de dados 2, este não apresenta a variável *Ms/Mflex*, portanto, o modelo de *CRdo* ficaria em função somente da variável *C/d*. Dessa forma e, sabendo que a capacidade de predição está também relacionada à

quantidade de fatores que influenciam o fenômeno em questão, torna-se inviável trabalhar nestas análises, onde as métricas de desempenho NMSE ficaram em cerca de 0,28. Esta afirmativa torna-se simples de evidenciar ao verificar que, para o banco de dados 1 onde foram utilizadas duas variáveis de influência à punção (e não somente uma), não foi suficiente para a predição de um modelo matemático (polinomial e exponencial) melhor que a própria norma NBR 6118 (2014).

5. CONCLUSÕES E SUGESTÕES DE TRABALHOS FUTUROS

5.1. Conclusões

Considera-se que a metodologia do trabalho foi adequada, uma vez que, ao coletar um número significativo de dados de lajes lisas de concreto armado sem armadura de cisalhamento em dois bancos de dados, foram desenvolvidos algoritmos que utilizam técnicas de identificação de sistemas por meio de mínimos quadrados ortogonais e regressão exponencial, dos quais os bancos de dados foram submetidos para testes, elaboração de modelos matemáticos e validação, respectivamente. Dessa forma, foram obtidas equações matemáticas polinomiais e exponenciais que visam representar a previsão de resistência à punção por meio de sua tensão resistente na unidade de MPa, com a finalidade de melhores previsões que as recomendações normativas vigentes.

Para a análise dos bancos de dados, as previsões apresentaram resultados satisfatórios ao compará-las com as normas ACI 318 (2014) e Eurocode 2 (2004), uma vez que os gráficos e as métricas de desempenho dos modelos propostos evidenciaram melhores resultados que as normas em questão. Especificamente no estudo da norma ACI 318 (2014), foi relativamente mais fácil a obtenção de modelos matemáticos com métricas melhores que a norma, uma vez que esta norma está em função somente de uma variável de influência à punção, facilitando assim a predição.

Para o modelo polinomial obtido pelo banco de dados 1, este apresentou melhores métricas de desempenho que a norma ACI 318 (2014), onde 33 das 53 amostras apresentaram percentuais de erros dentro da faixa de $\pm 15\%$, o que evidencia uma melhor distribuição e conseqüentemente melhor índice de desempenho para o modelo proposto, uma vez que somente 12 amostras na norma estão dentro desta faixa, todavia somente 9 amostras apresentaram resultados conservadores no modelo proposto, uma vez que na norma este número é 29. Para o modelo exponencial obtido pelo banco de dados 1, este apresentou melhores resultados estatísticos de desempenho que a norma, onde 36 das 53 amostras estão dentro da faixa de percentual de erro de $\pm 15\%$, enquanto que na norma este número é 12, entretanto somente 7 amostras no modelo proposto apresentam

resultados conservadores, enquanto que na norma este número é de 29. Para o caso do modelo polinomial proposto por meio do uso do banco de dados 2, os resultados também apontaram melhores métricas de desempenho para o modelo em questão em comparação à equação da norma, na qual apresentou 16 das 19 amostras dentro da faixa de percentuais de erro de $\pm 15\%$, enquanto que este número é somente 3 na norma, resultando assim uma distribuição de resultados melhor ao concentrar todos seus resultados dentro desta faixa de erros, todavia ao avaliar a segurança e o conservadorismo, a norma apresentou 16 amostras com resultados a favor da segurança, enquanto que somente 1 amostra no modelo proposto apresentou resultado conservador, evidenciando assim o excesso de conservadorismo na norma. Já no modelo exponencial proposto ao usar o banco de dados 2, os resultados evidenciaram melhores índices de desempenho que a norma, onde 17 das 19 amostras ficaram dentro da faixa aceitável de $\pm 15\%$ de erro, enquanto que na norma somente 3 amostras ficaram dentro deste percentual, evidenciando assim uma distribuição de erros mais concentrada nesta faixa, entretanto somente 1 amostra do modelo proposto apresentaram resultados contra a segurança, em contrapartida nenhuma amostra com estes resultados foram apresentados pela norma, evidenciando mais uma vez a característica fortemente conservadora da norma ACI. Desta forma, os modelos propostos e apresentados nas equações 4.4, 4.5, 4.7 e 4.8 apresentam melhores métricas de desempenho que a norma ACI 318 (2014) ao avaliar 30% dos dados de validação dos modelos, podendo assim concluir que são modelos válidos para propostas de melhorias da norma. Outrossim, o fato de haver resultados contra a segurança com percentuais maiores nos modelos propostos que a norma não quer dizer que o modelo não seja adequado, apenas é um indicativo de que o modelo proposto não preza por características conservadoras. Vale ressaltar que a norma ACI 318 (2014) é bastante conservadora e isto fica evidenciado nos histogramas com as amostras de percentuais negativos presentes nas figuras 4.1 e 4.4, além dos dados estatísticos de média presentes nas tabelas 4.1, 4.2, 4.3 e 4.4, onde seus valores são bem maiores do que 1. Quanto à análise dos modelos matemáticos propostos, os modelos exponenciais são mais fáceis de explicar do ponto de vista de fenômeno físico, enquanto que nos modelos polinomiais esta tarefa se torna algo mais difícil, todavia estes não podem ser descartados, uma vez que, do ponto de vista de identificação de sistemas, os modelos apresentam resultados satisfatórios.

Para o estudo de caso da norma Eurocode 2 (2004) o grau de dificuldade foi maior para a obtenção de melhores resultados, uma vez que esta norma apresenta melhor desempenho que a ACI 318 (2014) e, além disso, está em função de três variáveis influência do fenômeno. Mesmo assim, foi possível também propor modelos matemáticos com métricas de desempenho melhores que a norma supracitada.

Ao avaliar o modelo polinomial obtido através dos dados provenientes do banco de dados 1, o mesmo apresentou melhores índices de desempenho do que os índices obtidos pela norma Eurocode 2 (2014), onde 35 das 53 amostras apresentaram valores dentro da faixa de erros de $\pm 15\%$, enquanto na norma este índice está em 29 amostras e, para a análise do conservadorismo, os resultados mostraram que apenas 6 amostras do modelo proposto apresentaram resultados a favor da segurança, número este ampliado para 17 na norma, já quanto à segurança, no modelo proposto 12 amostras apresentaram resultados contra a segurança, enquanto que na norma este número está em 7 amostras. Assim, muito embora os índices de conservadorismo e segurança sejam melhores na norma do que no modelo proposto devido às limitações do efeito de escala e da taxa de armadura de flexão presente na norma, o modelo apresentou melhores métricas de desempenho. Para o caso de estudo do modelo exponencial proposto por meio do uso do banco de dados 1, as métricas de desempenho também foram melhores do que as métricas provenientes da norma, onde o modelo proposto apresentou 35 das 53 amostras dentro do percentual de erros aceitável de $\pm 15\%$, ao passo que este número reduziu para 29 amostras nos resultados provenientes da norma, já na avaliação de conservadorismo os resultados mostraram que 8 amostras do modelo proposto apresentaram resultados conservadores, enquanto que este número sobe para 17 amostras para a norma, além disso foram 10 amostras no modelo proposto com resultados contra a segurança, enquanto que nos resultados da norma este valor caiu para 7 amostras. Ao analisar o banco de dados 2 e o modelo polinomial obtido neste cenário, os resultados apontam melhores índices de desempenho no modelo proposto, onde todas 9 das 19 amostras ficaram dentro da faixa aceitável de 30% de erro, mesmo número obtido para os dados da norma dentro desta faixa e, no que se refere ao conservadorismo, o modelo proposto apresentou 9 amostras em favor da segurança, mesmo número também obtido pela norma, já acerca da

segurança, o modelo proposto apresentou somente 1 resultado contra a segurança, ao passo que na norma foi o mesmo valor obtido. Muito embora os dados numéricos para este cenário sejam iguais, deve-se considerar as métricas de desempenho presentes na tabela 4.7. Para o cenário de análise do banco de dado 2 e a obtenção de um modelo exponencial, as métricas de desempenho evidenciaram melhores resultados para o modelo proposto em detrimento ao modelo da norma, na qual 11 das 19 amostras do modelo proposto estavam dentro da faixa de erros percentuais de $\pm 15\%$, valor este reduzido para 9 amostras para a norma, onde na avaliação de conservadorismo os resultados mostraram que 7 amostras do modelo proposto apresentaram resultados conservadores, enquanto que na norma foram 9 amostras, outrossim na avaliação contra a segurança os números mostraram que somente 1 amostra no modelo proposto foi contra a segurança, mesmo número obtido pela norma. Assim sendo, os modelos matemáticos presentes nas equações 4.12, 4.13, 4.14 e 4.15 apresentaram melhores métricas de desempenho do que a norma Eurocode 2 (2004) e, dessa forma, estas equações são modelos válidos para propostas de melhorias da norma. Quanto à questão da análise dos modelos matemáticos propostos, a ressalva informada nos modelos analisados pela norma ACI 318 (2014) também deve ser feita para estes casos, na qual os componentes de um modelo exponencial são mais fáceis de explicar do ponto de vista do fenômeno em si, em contrapartida para um modelo polinomial esta etapa de interpretação de seus termos do ponto de vista físico fica prejudicada, o que não significa dizer que modelos desta natureza são inválidos, uma vez que atendem aos requisitos do ponto de vista de identificação de sistemas. Outrossim, também é importante ressaltar que, ao observar os histogramas de erros percentuais presentes nas figuras 4.8, 4.9, 4.11 e 4.12, percebe-se que não há uma quantidade significativa de amostras com divergências de percentuais relativamente altas, fato este enfatizado ao avaliar os dados estatísticos de desempenho das tabelas 4.5, 4.6, 4.7 e 4.8 em que seus índices comparativos não possuem mudanças tão significativas da norma para o modelo proposto. Isto quer dizer que o grau de dificuldade em obter modelos propostos melhores que a norma Eurocode 2 (2004) foram maiores do que para a norma ACI 318 (2014). Para estes cenários, o fato de haver maiores resultados contra a segurança nos modelos propostos também não quer dizer que estes modelos não sejam adequados, indicando assim somente características em que

estes não prezam pelo conservadorismo em suas métricas para determinados cenários.

Na avaliação de estudo para a melhoria da norma NBR 6118 (2014), onde é desejável obter um modelo matemático que viesse substituir a componente constante da equação presente nesta, os resultados não foram satisfatórios à priori. Isso se deve ao fato da quantidade de componentes de influência da constante da equação de tensão resistente à punção, reduzida para duas variáveis. Dessa forma, as capacidades de predição destes modelos foram comprometidas, tanto para modelos polinomiais quanto exponenciais.

Para o modelo polinomial proposto ao submeter o banco de dados 1 na função que representa a constante da norma NBR 6118 (2014), os resultados de desempenho deste modelo apresentaram métricas consideravelmente baixas, conforme observado na tabela 4.9, ao comparar com as métricas provenientes da norma, onde somente 4 das 53 amostras do modelo proposto estavam dentro da faixa de percentual de erros de $\pm 15\%$ enquanto que nos dados da norma este número foi 29, já nos aspectos de conservadorismo, o modelo apresentou 35 amostras de resultados a favor da segurança, mas com 20 destas amostras com valores extremamente conservadores (aproximadamente -60%) e, por fim, no que se refere aos dados de insegurança, 14 amostras apresentaram resultados contra a segurança, das quais 9 destas amostras contendo resultados extremamente contra a segurança (entre 60% e 180%). Desta forma, o modelo proposto não é adequado e conseqüentemente não é indicado para melhoria na norma, uma vez que os resultados de forma geral apresentados no histograma evidenciaram forte dispersão dos dados perante os percentuais de erro. Para o mesmo cenário, ao gerar o modelo exponencial proposto, os índices de desempenho do modelo em questão também foram insatisfatórios, conforme observado na tabela 4.10, ao comparar estas métricas com os índices da norma, na qual nenhuma amostra do modelo proposto apresentou resultado dentro da faixa de erros de $\pm 15\%$ nem tampouco com características conservadoras, ou seja, todas as 53 amostras apresentaram resultados contra a segurança. O histograma apresentou extrema dispersão dos dados, nas quais todas as amostras dos modelos propostos estavam entre cerca de 250% a 925% de erros percentuais, ou seja, resultados extremamente contra a segurança. Desta forma, o modelo proposto não pode ser considerado como proposta de melhoria da constante presente na norma. Assim sendo, os modelos

propostos pelas equações 4.17 e 4.18 não são válidos como propostas de melhoria da norma NBR 6118 (2014), uma vez que suas métricas de desempenho presentes nas tabelas 4.9 e 4.10 apresentaram resultados insatisfatórios ao compará-los com os mesmos índices da norma. A inviabilidade de tais propostas fica em maior evidência ao avaliar os histogramas de erro percentuais presentes nas figuras 4.14 e 4.15, onde nos modelos propostos há percentuais de erros relativamente altos em boa parte das amostras analisadas, além de uma quantidade significativa de resultados contra a segurança. Esta análise mostra que a constante presente na norma NBR 6118 (2014) está muito bem calibrada e, além disso, as análises de propostas de melhorias da norma não foram favoráveis ao tentar representar a constante em questão em função de apenas duas variáveis.

Na análise dos fatores que influenciam à resistência à punção, as estruturas matemáticas apresentaram a influência de cada variável de entrada, tendo em vista a aplicação da taxa de corte presente no algoritmo dos modelos polinomiais. Isto é importante para efeito comparativo dos modelos propostos com as variáveis de entrada presentes nas normas que, em alguns casos, apresentam poucas variáveis de influência do fenômeno da punção.

Um ponto de relevância significativa para os modelos propostos e que deve ser ressaltado mais uma vez está no fato dos modelos polinomiais propostos apresentarem limitações de explicação das funções do ponto de vista físico, uma vez que a contribuição de variáveis no polinômio, bem como a relação de produto entre variáveis de diferentes naturezas em um mesmo termo torna a tarefa de explicação da equação ainda mais difícil e, em alguns casos, apresentando inconsistências. Entretanto, do ponto de vista numérico e de identificação de sistemas, os modelos propostos são válidos e apresentam resultados satisfatórios em 8 dos 10 cenários de simulação realizados. Para os modelos exponenciais propostos, a contribuição de cada variável de influência à punção nas equações são termos bem mais simples de sintetizar do ponto de vista físico.

Com a validação dos dados, os modelos matemáticos desenvolvidos e aqui registrados podem ser utilizados como propostas de melhorias nas normas, bem como para oferecer novas referências científicas para estudiosos do ramo, pesquisadores de áreas afins e projetistas estruturais.

Com a dissertação consolidada, ou seja, da definição dos modelos propostos, da previsão do fenômeno, da comparação com os resultados experimentais e com

as normas existentes, além da validação dos dados, é possível a publicação do trabalho no acervo do IBRACON – Instituto Brasileiro de Concreto por meio da Revista IBRACON de Estruturas e Materiais, um portal com rico acervo técnico sobre estruturas de concreto, além da revista *Engineering Structures, Journal of Construction Engineering and Management* e acervos voltados à área de identificação de sistemas e aplicações de métodos numéricos. O objetivo está em compartilhar novas soluções matemáticas para o problema de descrição do fenômeno da punção em lajes lisas de concreto armado sem armadura de cisalhamento, bem como da previsão da mesma e, conseqüentemente, para que melhorias nas modelagens obtidas possam ser realizadas por outros estudiosos das áreas de identificação de sistemas e estruturas de concreto.

5.2. Sugestões de Trabalhos Futuros

Como propostas de melhoria do trabalho, bem como continuidade de novos temas ligados à área de estruturas de concreto, as técnicas aplicadas podem ser estendidas para outros grupos de lajes que não necessariamente precisam ser do tipo lisas de concreto armado sem armadura de cisalhamento, como é o caso de dados experimentais realizados por diversos estudiosos da área de estruturas, onde avaliaram a resistência à punção de lajes com armaduras de diversos tipos, ou seja, não necessariamente armaduras de cisalhamento.

Os estudos podem se estender no sentido de avaliar a influência da geometria do pilar para obtenção de novos modelos matemáticos, uma vez que o presente trabalho leva em consideração somente pilares quadrados. Pilares retangulares e circulares, por exemplo, influenciam na tensão resistente de forma diferente dos pilares quadrados e realizar um estudo para estas particularidades seria de importância científica significativa para a área de estruturas.

Além disso, é possível desenvolver e utilizar novas estruturas matemáticas que possam descrever o fenômeno da punção de forma satisfatória, como é o caso de modelos senoidais, logarítmicos e *wavelets*, por exemplo. De forma análoga, outras sugestões estão em aplicar a Lógica Fuzzy e até mesmo as Redes Neurais Artificiais para obtenção de sistemas que forneçam resultados satisfatórios em estudos da área de estruturas de concreto e afins.

Agrupamentos não supervisionados de grupos de lajes, o chamado *clustering*, podem também ser objetos de novos estudos da temática de forma a obter modelos matemáticos específicos em determinados grupos de lajes de forma a propor melhores resultados de predição do fenômeno da punção ao inserir novas sistemáticas de análise em que considera a prospecção de dados visando automatizar agrupamentos segundo o seu grau de semelhança.

Além destas propostas, novas métricas de desempenho podem ser utilizadas para analisar resultados com diferentes pontos de vista, além de serem úteis para submeter modelos propostos à novas métricas de forma a avaliar sua viabilidade. Métricas de desempenho como o erro médio quadrático, raiz do erro médio quadrático e intervalo de confiança de 95%, por exemplo, podem ser utilizadas como referências para avaliar a viabilidade de determinados modelos propostos.

6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- AGUIRRE, Luís. **Introdução à Identificação de Sistemas**, UFMG, 2015.
- ALANDER, C. **Punching Prevention in Flat RC Slabs**. In: INTERNATIONAL WORKSHOP ON PUNCHING SHEAR CAPACITY OF RC SLABS. Sweden, 2000.
- ALMEIDA, R. Neves. **O Método dos Mínimos Quadrados: Estudos e Aplicações**. Universidade Estadual do Norte Fluminense. Rio de Janeiro. 2015.
- AMERICAN CONCRETE INSTITUTE (ACI). **Building code requirements for structural concrete. ACI 318-14**. Farmington Hills, Michigan; 2014.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS (ABNT). **Projeto de Estruturas de Concreto – Procedimento (NBR 6118/2014)**. Rio de Janeiro, 2014.
- ASSUNÇÃO, R. Martins. **Projeção ortogonal e Mínimos Quadrados**. Departamento de Ciência da Computação. UFMG. 2017.
- BAZANT, Zdenek P. **Fracture and Damage in Quasibrittle Structures**. 1994.
- BERTOIGNA, Eduardo G. **Sinais e Sistemas**. UTFPR. 2009.
- BHATT P, AGAR TJA. **A neural network for predicting the punching shear strength of internal column-flat slab junctions without shear reinforcement**. In: International workshop on punching shear capacity of RC slabs. 2000.
- BRITISH STANDARDS ASSOCIATION. **BS 8110-97. Structural use of concrete. Use of concrete. Part 1: Code of Practice for Design and Construction**. BSI. Milton Keynes, BS 8110; 1997.
- CANADIAN STANDARDS ASSOCIATION. **CSA. Design of concrete structures for buildings. CSA-A23.3-04**. Rexdale, Ontario, Canada; 2004.

CARVALHO, A. L., **Resistência ao Puncionamento de Lajes Cogumelo Protendidas com Armadura de Cisalhamento – Comparação com Recomendações da NB1**, Anais do 46º Congresso Brasileiro do Concreto, 2008.

CHOI K, TAHA M, SHERIF A. **Simplified punching shear design method for slab–column connections using fuzzy learning**. ACI Struct J 2007.

COMITÉ EURO–INTERNATIONAL DU BÉTON–FÉDÉRATION DE LA PRÉCONTRAİNTE. **CEB–FIP. Model Code. Bulletin D’Information**. Lausanne, Switzerland; 1990.

CORDOVIL, F.A.B. **Lajos de Concreto Armado – Punção**. Florianópolis, Universidade Federal de Santa Catarina, 1996.

CUNHA, Lilian L. **Estatística Aplicada II: Propriedades dos Estimadores**. USP – São PAulo. 2011.

DEMIR, F. **Prediction of elastic modulus of normal and high strength concrete by artificial neural networks**. Constr Build Mater 2008.

EL SHAFEY, A. A; RIZK, E. C.; MARZOUK, H.; HADDARA, M. A. **Prediction of punching shear strength of two-way slabs**. Engineering Structures. Elsevier. 2010.

ELSTNER, R. C.; HOGNESTAD, E. **Shearing Strength of Reinforced Concrete Slabs**. Journal of the American Concrete Institute, Proceedings. 1956.

ERDEM, H. **Prediction of the moment capacity of reinforced concrete slabs in fire using artificial neural networks**. Adv Eng Software 2010.

EUROPEAN COMMITTEE FOR STANDARDIZATION. **Eurocode 2 (CEN). Design of concrete structures-Part 1.1: general rules and rules for buildings**. Brussels, Belgium; 2004.

EUROPEAN TECHNICAL ASSESSMENT. **ETA 12/0454. Austrian Institute of Construction Engineering.** Áustria, 2012.

FERREIRA, Maurício de P. **Punção em Lajes Lisas de Concreto Armado com Armaduras de Cisalhamento e Momentos Desbalanceados,** Faculdade de Tecnologia/UNB, 2010 (Tese de Doutorado).

FUSCO, Péricles, B. **Ensaio experimentais de lajes armadas com conectores tipo pino.** 1985.

GOMES, R.B. **Punching resistance of reinforced concrete flat slabs with shear reinforcement.** PhD Thesis. The Polytechnic of Central London. London, 1991.

GUIMARÃES, Cláudio. **Regressão Linear Múltipla: Conceitos e Aplicações,** UFRGS, 2013 (TCC Graduação).

GUJARATI, Porter. **Análise de Regressão Linear Múltipla I.** INSPER: Instituto de Ensino e Pesquisa. 2011.

HAYKIN, S.; VAN VEEN, B. **Sinais e Sistemas.** 2001.

HOLA, J; SCHABOWICZ, K. **New technique of nondestructive assessment of concrete strength using artificial intelligence.** NDT&E International 2005.

INSTITUTO BRASILEIRO DE CONCRETO IBRACON. **Prática Recomendada IBRACON: Comentários Técnicos NB-1.** IBRACON, 2014.

KINNUNEN, S. e NYLANDER, H. **Punching of Concrete Slabs Without Shear Reinforcement.** Transactions N° 158, Royal Institute of Technology, Stockholm. 1960.

KORENBERG, M. **An Orthogonal Parameter Estimation Algorithm for Nonlinear Stochastic Systems.** 1987.

LAGES, W. F. **Identificação via Mínimos Quadrados**. Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Departamento de Engenharia Elétrica. 2011.

LATHI, B. P. **Sinais e Sistemas Lineares**. Bookman, 2ª Ed., Porto Alegre. 2007.

LEONHARDT, F.; MÖNIG, E. **Construções de concreto: casos especiais de dimensionamento de estruturas de concreto armado**. Interciência, v.2. Rio de Janeiro, 1979.

LIMA, Juliana Soares. **Verificações da punção e da estabilidade global em edifícios de concreto: desenvolvimento e aplicação de recomendações normativas**. Dissertação de mestrado. EESC-USP: São Carlos, 2001.

MARQUES, Jorge S. **Sinais contínuos e discretos**. 2010.

McGREGOR, J.G. **Reinforced Concrete – Mechanics and Design**. 3.ed. New Jersey:Prentice-Hall Inc.,1997.

MELO, G.S.S.A. **Proposição de item da norma com referência ao cálculo de armadura contra colapso progressivo em lajes cogumelo**. REIBRAC, 36. Anais. Porto Alegre, 1994.

MONETREY, P. H. **Synthesis of punching failure in reinforced concrete**. **Cement & Concrete Composites**. 2002.

MOREIRA, P. **O Método dos Mínimos Quadrados**. UEFN. 2002.

MORIYA, Henrique T. **Análise de Fourier**. 2005.

MUTTONI, A. **Punching Shear Strength of Reinforced Concrete Flat Slabs Without Transverse Reinforcement**. **ACI Structural Journal**. 2008.

OLIVEIRA, D.R.C. **Análise experimental de lajes cogumelo de concreto armado com armadura de cisalhamento ao puncionamento.** Dissertação de mestrado. Faculdade de Tecnologia, Universidade de Brasília. Brasília, 1998.

PEREIRA FILHO, Manoel. **Avaliação dos Métodos Normativos para Previsão da Resistência à Punção de Lajes sem Armadura de Cisalhamento e com Conectores de Aço,** UFPA, 2016 (Dissertação de Mestrado).

PINTO, R.C.A. **Punção assimétrica de lajes.** Dissertação. COPPE,UFRJ. Rio de Janeiro, 1993.

RABELLO, Fernando. **Análise Comparativa de Normas para a Punção em Lajes de Concreto Armado,** UFSC, 2010 (Dissertação de Mestrado).

REGAN, P. E. **Symmetric Punching of Reinforced Concrete Slabs.** Magazine of Concrete Research. 1981.

REGAN P. E. **Tests of connections between flat slabs and edge columns.** School of Architecture and Engineering, University of Westminster. 1985.

SACRAMENTO, P. V. P.; FERREIRA, M. P.; OLIVEIRA, D. R. C.; MELO, G. S. S. A. **Punching strength of reinforced concrete flat slabs without shear reinforcement.** Revista Ibracon de Estruturas de Materiais. 2012.

SANCHES, J. S.; JORDAN, D. L. **Métodos Numéricos.** Curitiba-PR. Universidade Federal do Paraná. 2007.

SHEHATA. **Simplified Model for Estimate the Punching Resistance of Concrete Slabs.** Materials and Structures. França. Vol. 33. 1990.

SPERANDIO, D.; MENDES, J. T.; SILVA, L. H. M. **Cálculo Numérico - Características Matemáticas e Computacionais dos Métodos Numéricos.** São Paulo-SP: Prentice-Hall, 2003.

TAKEYA, T. **Estudo experimental da ruína de ligações laje-pilar em bordas de laje - cogumelo.** Dissertação – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo. São Carlos, 1981.

TRTNIK, G; KAVCIC, F; TURK G. **Prediction of concrete strength using ultrasonic pulse velocity and artificial neural networks.** Ultrasonics 2009.

VANDERBILT, C. K. **Análise experimental de lajes lisas unidirecionais de concreto armado.** 1972.