UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E CIENTÍFICA
CURSO DE DOUTORADO DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO
EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICAS

DENIVALDO PANTOJA DA SILVA

A INVARIÁVEL PRÁTICA DA REGRA DE TRÊS NA ESCOLA

BELÉM / PA
2017

Denivaldo Pantoja da Silva

A INVARIÁVEL PRÁTICA DA REGRA DE TRÊS NA ESCOLA

Tese apresentada à banca examinadora do Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas do Instituto de Educação Matemática e Científica da Universidade Federal do Pará – UFPA, como requisito para a obtenção do título de Doutor em Educação em Ciências e Matemáticas. Área de concentração: Educação Matemática.
Orientador: Prof. Dr. Renato Borges Guerra.

.

BELÉM/PA
2017

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP) – Biblioteca do IEMCI, UFPA

Silva, Denivaldo Pantoja da. 1969–
A invariável prática da regra de três na escola / Denivaldo Pantoja da Silva, orientador Prof. Dr. Renato Borges Guerra – 2017.

Tese (Doutorado) – Universidade Federal do Pará, Instituto de Educação Matemática e Científica, Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas, Belém, 2017.

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Professores de matemática – Formação. 3. Aritmética. 4. Modelos matemáticos. I. Guerra, Renato Borges, orient. II. Título.

CDD - 22. ed. 510.7

Denivaldo Pantoja da Silva

A INVARIÁVEL PRÁTICA DA REGRA DE TRÊS NA ESCOLA

Tese apresentada à banca examinadora do Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas do Instituto de Educação Matemática e Científica da Universidade Federal do Pará – UFPA, como requisito para a obtenção do título de Doutor em Educação em Ciências e Matemáticas. Área de concentração: Educação Matemática.
Orientador: Prof. Dr. Renato Borges Guerra.

Local e data da defesa da Tese: Belém-PA, 04/04/2017
Conceito: Aprovado

Banca Examinadora:

____
Prof. Dr. Renato Borges Guerra
Orientador – IEMCI/UFPA

____
Prof. Dr. Iran Abreu Mendes
Membro interno – IEMCI/UFPA

____
Prof. Dr. José Messildo Viana Nunes
Membro interno – IEMCI/UFPA

____
Prof. Dr. Saddo Ag Almouloud
Membro externo – PUC/SP

____
Prof. Dr. Reginaldo da Silva
Membro externo – IFPA

BELÉM/PA
2017

Dedico este trabalho ao Santíssimo e Diviníssimo Senhor Jesus Cristo que, por meio do Espirito Santo, iluminou nossos pensamentos e orientou nossos estudos em direção à elaboração desta obra científica, que se integra em um Tratado da Regra de Três.

AGRADECIMENTOS

À minha esposa, Nívea Cristina, e aos filhos, Victor Felipe e Gabriel Marcos, pela compreensão que tiveram por estar imerso na investigação ou pelas idas e vindas para universidade ou lugares outros necessários para o desenvolvimento da pesquisa. Pelas orações, instrumento de equilíbrio que fizeram e fazem funcionar os desígnios de Deus.

Aos meus pais, Navaldo e Dirce, aos irmãos, Navaldo Filho e Denivânia, e ao sobrinho Mateus, pelo incentivo e apoio incessante nesta importante caminhada.

A todos nossos familiares, que em muito contribuíram para conclusão deste trabalho, em especial ao Prof. Denis, pelo auxílio nas traduções de textos.

Aos professores do curso de Pós-graduação em Educação em Ciências e Matemáticas, do PPGECM/IEMCI/UFPA, pela sublime contribuição para minha formação doutoral por meio do compartilhamento de ideias, debates e orientações acadêmicas.

Aos membros da banca examinadora, por compartilharem ideias para o enriquecimento do caráter científico deste trabalho: Prof. Dr. Renato Borges Guerra (UFPA), Prof. Dr. Iran Abreu Mendes (UFPA), Prof. Dr. José Messildo Viana Nunes (UFPA), Prof. Dr. Saddo Ag Almouloud (PUC/SP) e Prof. Dr. Reginaldo da Silva (IFPA)

À Profa. Dra. Emília Pimenta Oliveira, pelos ensinamentos e contribuições fundamentais no desenvolvimento deste trabalho.

Especialmente ao orientador e amigo, o eminente Prof. Dr. Renato Borges Guerra, pela incansável dedicação ao exercício professoral de orientação e de engenharia que demandou, pela complexidade do tema, esta investigação.

Aos técnicos da secretaria do PPGECM/IEMCI/UFPA, João e Naldo, pelo apoio logístico eficiente aos assuntos do programa.

À Bibliotecária Heloisa Gomes, pelo atendimento profissional, pela orientação e gestão competente do acervo da biblioteca do IEMCI, atributos indispensáveis para o desenvolvimento da pesquisa acadêmica.

Enfim, ao amigo Flavio e seus familiares e a todos que contribuíram de forma direta ou indireta para conclusão deste trabalho. Muito obrigado!

RESUMO

Esta pesquisa trata do porquê da invariabilidade da ação dos professores frente às situações de Regra de Três. Uma compreensão é construida a partir da noção de práticas sociais com matemática que denominamos Praxeologia com Matematica, à luz da Teoria Antropologica do Didático em articulação com a noção de *habitus*.Os resultados apontam implicações para o ensino com base na Modelagem Matemática, no sentido das Organizações Praxeológicas que mobilizam saberes matemáticos e extra matemáticos estruturados segundo uma intenção didática.

Palavras-chave: Regra de Três. *Habitus*. Praxeologia com Matemática. Organização Praxeológica. Modelagem Matemática.

ABSTRACT

This research deals with the reason for teachers' action invariability facing the situations of Rule of Three. A comprehension is built from the notion of social practices with mathematics that we call Praxeology with Mathematics, in the light of the anthropological theory of didactics in articulation with the notion of *habitus*. The results point to implications for teaching based on Mathematical Modelling, in the sense of Praxeological organizations that mobilize mathematical and extra mathematical knowledge structured in accordance with a didactic intention.

Keywords: Rule of Three. Habitus. Praxeology with Mathematics. Praxeological Organization. Mathematical Modelling.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE SIGLAS

IFPA	Instituto Federal do Pará
IEMCI	Instituto de Educação Matemática e Científica
MER	Modelos Epistemológicos de Referencia
MRU	Método da Redução à Unidade
OM	Organização Matemática
OD	Organização Didática
PUC/SP	Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
PPGECM	Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas
RT	Regra de Três
TD	Transposição Didática
TAD	Teoria Antropológica do Didático
UFPA	Universidade Federal do Pará

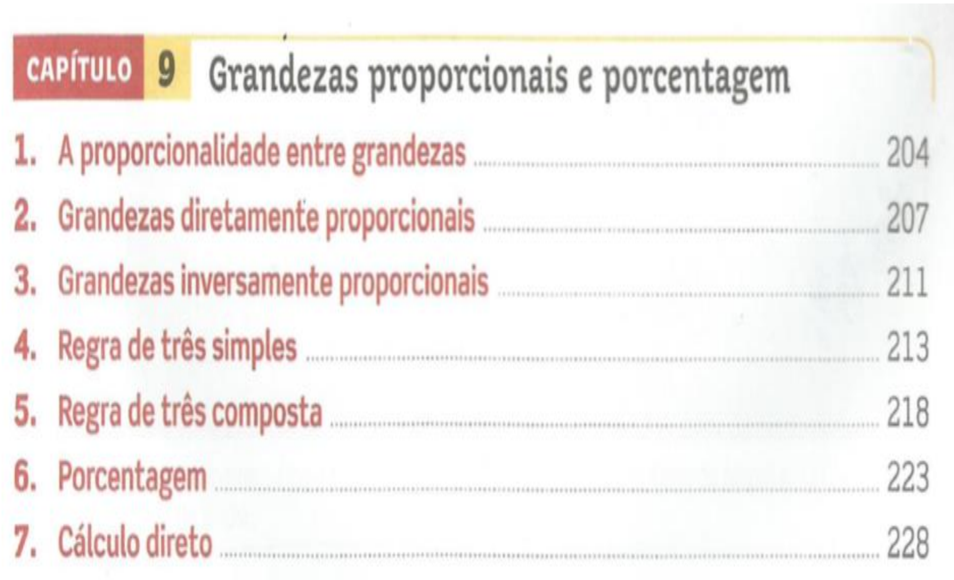
SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO DO PROBLEMA DE INVESTIGAÇÃO

Neste trabalho, apresentamos uma investigação sobre a práxis da Regra de Três, que vive historicamente no seio de diferentes atividades humanas, inclusive na escola, e que se mostra como ferramenta útil no enfrentamento de situações específicas em seus ofícios, tais como: conversões de medidas, cálculos estequiométricos, porcentagem, juros simples e outros campos de práticas científicas.

Nos manuais escolares brasileiros e nas práticas docentes, em geral, a Regra de Três segue compondo as organizações didáticas-matemáticas, sob a compreensão da proporcionalidade (Figura 1), por meio de problemas protótipos, que se caracterizam em determinar o valor de um termo desconhecido, a partir dos valores de uma série de grandezas.

Figura1: Organização da proporcionalidade


CAPÍTULO 9 Grandezas proporcionais e porcentagem

1. A proporcionalidade entre grandezas 204
2. Grandezas diretamente proporcionais 207
3. Grandezas inversamente proporcionais 211
4. Regra de três simples 213
5. Regra de três composta 218
6. Porcentagem 223
7. Cálculo direto 228

Fonte: Bianchini (2011, p,9).

O ensino da Regra de Três tem despertado o interesse de pesquisadores da educação matemática e, inclusive, de matemáticos como Ávila (1986) e Lima (1986; 2001). Ávila recomenda que é preciso que se saiba de antemão que as variáveis do problema sejam, duas a duas, diretamente ou inversamente proporcionais, enquanto Lima (1986, 2001) lembra a necessidade primeira de identificar, por um critério simples, a proporcionalidade, se direta ou inversa, pois "deve-se ressaltar enfaticamente que a *regra de três*, proveniente da proporção, só pode ser legitimamente empregada quando se tem uma proporcionalidade” (LIMA, 2001 p.09, grifo nosso).

Entendendo que Ávila, de algum modo, aponta que o modelo matemático, a *priori*, assume a proporcionalidade pela equação, enquanto que Lima exige a verificação que permita identificar, ou descobrir, as grandezas proporcionais para em seguida pôr em equação, analisamos as praxeologias com a Regra de Três de trinta professores do ensino básico da rede pública do estado do Pará, em uma investigação que resultou na dissertação de mestrado (SILVA,2011).

Essa investigação mostrou que a proporcionalidade podia ou não estar explicitamente presente. Mais precisamente, os problemas escolares e não escolares, em geral, assumem a proporcionalidade a *priori*, por invocação. Em outras situações nem sequer é citada, como acontece nas práticas profissionais, como a de enfermagem. Noutras situações de uso, como as das práxis dos matemáticos, ela é descoberta ou verificada, mas, em situações de Modelagem Matemática de situações reais, em geral, é assumida ou imposta pelo sujeito que enfrenta a situação[1].

Silva e Guerra (2011), Guerra e Silva (2012) e Guerra e Silva (2014) observam que a praxeologia da Regra de Três é engendrada por problemas protótipos (Figura 2) e não propriamente pela proporcionalidade. Nesses problemas protótipos, em geral, a proporcionalidade não pode ser verificada, somente assumida pelo sujeito, aluno e professor, pela e na cultura da prática.

[1] Em Silva (2011, p. 57), encontra-se uma exemplo de Modelagem Matemática no fazer geológico, onde a relação de proporcionalidade é explicitamente tomada como decisão do sujeito em situação.

Figura 2: Praxeologia da Regra de Três Composta

Em 8 horas, 20 caminhões descarregaram 160 m^3 de terra. Em 5 horas, quantos desses caminhões serão necessários para descarregar 125 m^3 de terra?

Para responder a essa pergunta, construímos inicialmente um quadro, em que x representa a quantidade procurada.

Veja:

Tempo (h)	Número de caminhões	Volume (m^3)
8	20	160
5	x	125

Caminhão descarregando terra.

Agora, vamos comparar a grandeza número de caminhões, em que está o x, com cada uma das outras duas grandezas. Observe que o número de caminhões é inversamente proporcional ao tempo, e o número de caminhões é diretamente proporcional ao volume. Assim, podemos escrever:

$$\frac{20}{x} = \underbrace{\frac{5}{8}}_{\text{razão inversa}} \cdot \frac{160}{125}$$

$$\frac{20}{x} = \frac{800}{1000}$$

A seguir, aplicamos a propriedade fundamental das proporções e resolvemos a equação.

$$\frac{20}{x} = \frac{800}{1000}$$

$$800 \cdot x = 20 \cdot 1000$$

$$800x = 20000$$

$$x = \frac{20000}{800}$$

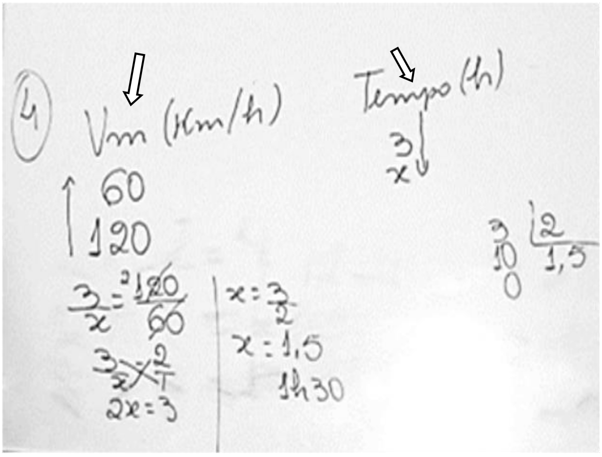
$$x = 25$$

Portanto, serão necessários 25 desses caminhões para descarregar 125 m^3 de terra em 5 horas.

Fonte: Silveira (2015, p.205).

Mas, como evidenciou Silva (2011), os professores frente à situação de Regra de Três engendram um fazer invariante que pode ser descrito do seguinte modo: constroem um esquema gráfico explicitando as grandezas e os dados associados, sempre acompanhado de um discurso supostamente explicativo sobre a variação das grandezas envolvidas, dizendo direta ou inversa, para em continuação, escrever uma equação que produz a resposta procurada, como podemos notar na solução do problema seguinte, apresentada pelos professores:

> 4) Um motorista faz o percurso entre as cidades de Castanhal e Bragança em 3 horas, impondo ao seu carro uma velocidade média de 60 km/h. quanto tempo levará esse motorista para fazer o mesmo percurso se dirigir seu carro a uma velocidade média de 120 km/h?
> [...] “velocidade média” (Vm) e “tempo” (h), são a chave que orientam a organização das grandezas [...]



(SILVA, 2011, p.21).

Essa descrição é, de certo modo, ratificada por Garcia (2005), quando afirma que a técnica da Regra de Três pode ser descrita como um processo de quatro etapas que se engendram para produzir a resposta procurada. Começa por um ostensivo gráfico que, segundo ele, induz a disposição dos dados do problema do modo que ocuparão na proporção. Daí, seguem as manipulações dos ostensivos (BOSCH, 1994), em acordo com a Teoria das Razões e Proporções.

É importante destacar que Garcia (2005) afirma que a disposição dos dados não obedece a razões tecnológicas, mas sim técnicas para induzir a sua realização. Essa observação, sem dúvida, despertou-nos atenção. Precisamente, o fazer invariante, quase ritual, se assim podemos dizer, deflagrado por um tipo de problema, que não apresenta uma tecnologia explícita que o fundamente para a resolução dos problemas de Regra de Três (RT)[2].

Sob essas considerações, torna-se imperativo o questionamento sobre a tecnologia dessa práxis, considerando que o fazer apresentado pelos professores no ensino da Regra de Três toma o esquema gráfico, a organização dos dados e a

---

[2] Daqui em diante, para facilitar a leitura, ocasionalmente utilizaremos a sigla RT no lugar da expressão “Regra de Três”.

construção da equação como objetos inquestionáveis, embora sejam indispensáveis para a realização da práxis da RT, e, portanto, não são objetos de ensino.

Como podemos observar, Garcia (2005) aponta uma função para os elementos descritos da técnica, quando afirma que induzem as etapas seguintes, mas conhecer a função de um ostensivo não é sinônimo de conhecer a tecnologia que o produziu ou que ordena sua manipulação.

Assim, o que nos interessa é encontrar um discurso que explique, justifique ou mesmo produza a técnica frente a problemas protótipos; escrevendo esquemas gráficos de arranjos de dados, murmurando supostas análises, que juntos, levam à equação com suposta inteligibilidade matemática.

Nesse sentido, o objeto de nossa investigação é o fazer invariante da Regra de Três e sobre esse objeto as seguintes questões decorrem, podemos dizer, quase naturalmente:

Q_1: O que explica, justifica ou produz a praxeologia com problemas protótipos e técnica com uso de esquemas gráficos de arranjo de dados e termos técnicos usados na escola?

Q_2: Quais as limitações e alcance dessa praxeologia?

Q_3: o que faz os professores realizarem essa praxeologia de modo invariante?

Esses questionamentos dizem respeito à ação de um professor em situação com matemática e isso nos encaminha ao encontro da Teoria Antropológica do Didático (TAD, daqui em diante).

Nesse sentido, para enfrentar os questionamentos postos, seguimos a linha de investigação[3] proposta por Chevallard (2005), assim anunciada:

[3] Ver também o trabalho de Chevallard (2014).

> Uma linha de investigação que, a meu critério, possui sobretudo, a virtude de ser um “modelo mental” por oposição ao qual se define, consistiria em tentar *delimitar vantajosamente* (particularmente graças a certas economias retrospectivas) a *gênese sócio histórica* do saber designado para ser ensinado. **Tendo em conta os progressos atuais, seria possível constituir uma epistemologia artificial como *resumo melhorado* –ou seja, deixando de lado os becos sem saída, os fracassos, mas reimplantando toda riqueza desenvolvimentos fecundos e as vezes esquecidos- da construção histórica do sabe**r (CHEVALLARD, 2005, p.54, tradução e grifos nossos).

De outro modo, construímos uma trajetória sincrônica da história da Regra de Três, em retrospectiva de fragmentos diacrônicos de sua história de vida como objeto de ensino, desde um tempo suficientemente remoto, em diferentes *habitat* culturais, que possam permitir construir respostas para os questionamentos postos.

Mais especificamente, recorremos à TAD por disponibilizar um modelo geral para modelar as práxis matemáticas institucionais (CHEVALLARD,1999) com “instrumentos suficientemente finos que permitem uma descrição dessas práticas que torna possível o estudo das condições de sua realização” (BOLEA, 2003, p.47).

Sob esse olhar teórico, outras pesquisas envolvem a Regra de Três e, portanto, torna-se necessário as distinguirmos da presente investigação.

No âmbito da TAD, as pesquisas a que tivemos acesso não tratam a Regra de Três como objeto de investigação, mas como objetos entrelaçados com a proporcionalidade em que é apresentada como um dos métodos de resolução de problemas. Entre essas pesquisas, destacam-se as realizadas por Bosch (1994), Comin (2000), Bolea (2003) e Garcia (2005).

Bosch (1994) trata da dimensão ostensiva da atividade matemática no universo matemático da proporcionalidade e situa a Regra de Três para afirmar que a base conceitual dessa regra tem alcance teórico reduzido e que permitiu a criação de técnicas eficazes e confiáveis a baixo custo tecnológico, capazes de se adaptar a situações cada vez mais complexas, contudo, com dificuldades tecnológicas e teóricas profundas, que vieram reluzir com o exame das técnicas do tratamento da proporcionalidade composta.

Comin (2000) faz um estudo sobre a evolução histórica das condições do ensino da proporcionalidade na França que, segundo ele, originou-se quando examinava um livro destinado a instrutores e professores da escola primária e encontrou um uso de vocabulários inadequado da proporcionalidade para descrever relações entre números.

De acordo com Comin (2000), o estudo revelou que esse uso inadequado de vocabulários ligados ao conhecimento matemático levava à perda de sentido, gerava confusão, por exemplo, dos conceitos de razão, proporção e de coeficiente de proporcionalidade.

Ainda, segundo Comin (2000), a teoria das razões e proporções foi ensinada nos níveis primário e secundário francês até 1970; era o quadro teórico que fundamentava a Regra de Três. Os alunos reconheciam as dificuldades com a RT, cujo aspecto algorítmico era criticado pela noosfera. Mas, se certos alunos compreendiam bem a estrutura matemática dos problemas de proporcionalidade com a Regra de Três, outros não tiravam nenhum proveito de uma aprendizagem automatizada por meio do algoritmo.

O contexto de dúvidas relativo ao ensino e à aprendizagem da proporcionalidade, ai se inclui a Regra de Três, segundo Comin (2000), contribuiu para que a reforma da Matemática Moderna propusesse o estudo das funções lineares com a convicção que tornaria mais fácil o estudo da proporcionalidade.

A problemática de que se ocupou Comin (2000) tem base na hipótese de que o uso inapropriado dos conhecimentos matemáticos observados é indício de um fenômeno didático geral, que conduziu a investigar a evolução das condições de ensino da proporcionalidade, guiado por questões do tipo:

> 1) Se novas formas de conhecimento são menos adequados que os antigos ensinamentos elementares, quais são as razões dessas mudanças curriculares?
> 2) Por que estas mudanças não foram satisfatórias? (COMIN,2000, p.7, tradução nossa).

Comin (2000) investigou os efeitos das sucessivas reformas ocorridas no ensino da proporcionalidade no período de 1947 a 1985. Portanto, buscou compreender a difusão da noção de proporcionalidade em diferentes instituições envolvidas no ensino. Nesse sentido, conclui:

> A difusão de um conhecimento na sociedade resulta de interações entre instituições e as leis que os regem e para a qual temos delineados alguns modelos (tensão didática, percolação). Estas tentativas abrem um novo campo de pesquisa. A ignorância de certos fenômenos "macro-didáticos" foi provavelmente uma das causas das dificuldades criadas pelas sucessivas reformas.
> As diversas instituições envolvidas pelo ensino têm que lidar com as questões científicas, técnicas e políticas. O conhecimento da "micro-didática" não é suficiente para dar conta da complexidade da organização social de um objeto de conhecimento. A explicação das condições dessa difusão na sociedade necessita da modelação "macro-didático" das relações entre instituições (COMIN,2000, p.333, tradução nossa).

Bolea (2003) retoma o problema didático da álgebra escolar, considerando a organização matemática clássica como pré-algébrica, que se construiu em torno da proporcionalidade entre grandezas, para tratar do processo de algebrização de organizações matemáticas escolares, incluindo-se a algebrização das relações entre grandezas.

Segundo Bolea (2003), a organização clássica ao redor da proporcionalidade cumpriu o papel de sistema a modelar na descrição que fez do processo de algebrização das organizações escolares por níveis de algebrização. Esse processo de modelização algébrica tinha a intenção de responder, em certo sentido, a um conjunto de questões que foram elaboradas sobre os componentes da organização clássica, tomada como referência. Entre elas, destacamos a seguinte: “como se interpretam e justificam as diferentes técnicas que se utilizam e, em particular, a regra de três?” (BOLEA,2003, p.201, tradução nossa).

Bolea (2003) afirma que o processo de algebrização progressiva segmentado em três níveis conduzirá à inclusão da proporcionalidade em uma organização matemática mais ampla, construída ao redor da modelização funcional e, mais geral, na organização da funções multilineares.

Mas, no caso particular da organização clássica em torno da proporcionalidade, Bolea (2003) afirma que na tentativa de ir mais além dessa organização, as relações estabelecidas entre seus componentes e os das sucessivas organizações algebrizadas que encontrou fragmentadas na escola, são consequências de certas restrições transpositivas gerais, que incidiram sobre algebrização das organizações matemáticas escolares.

As restrições referidas por Bolea (2003) estão contidas nas conclusões de seu trabalho, agrupadas em quatro tipos, das quais a Regra de Três aparece em duas delas, apresentadas em seguida:

> [...] (2) Dado que las técnicas de modelización están entre las técnicas matemáticas menos visibles, menos “algoritmizables”, menos “atomizables” y, en definitiva, más difícilmente evaluables, las restricciones originadas por la necesidad de evaluar la eficacia de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, dificulta de manera muy decisiva aquellas actividades matemáticas involucradas en el proceso de algebrización porque tiende a restringir la utilización sistemática del instrumento algebraico como instrumento de modelización matemática.
> [...] En el caso particular de la organización OM(Pro) esta peyoración del **lenguaje algebraico contribuye a potenciar el curioso fenómeno de la evitación de las técnicas algebraicas que hemos descrito anteriormente y propicia el carácter autotecnológico de la *“regla de tres”* que, al considerarla como una expresión directa del pensamiento, debe expresarse mediante el lenguaje verbal** (oral o escrito).
> [...] (4) El cuarto tipo de restricciones transpositivas inciden también muy directamente sobre el proceso de algebrización en cuanto que éste es un proceso de reorganización de las organizaciones matemáticas. En efecto, la necesidad de que todo saber enseñado aparezca como definitivo e incuestionable impide que éste muestre sus limitaciones y contradicciones y, por tanto, desaparece la necesidad de reestructurar, modificar, corregir e integrar las organizaciones matemáticas estudiadas en otras más amplias y complejas.
> En el caso particular de la organización OM(Pro) **podríamos hablar de dos aspectos del posible cuestionamiento de la “regla de tres” como técnica paradigmática**. El cuestionamiento interno que pondría en entredicho, dentro del propio ámbito de la proporcionalidad, **por qué la “regla de tres” es correcta**, y el externo que debería hacerse desde un ámbito mucho más amplio que la proporcionalidad que incluyera, junto a la relación de proporcionalidad las relaciones “afín”, “cuadrática”, “cúbica” y determinadas relaciones “racionales” elementales.
> **El cuestionamiento interno está protegido por la inteligibilidad cultural de la “regla de tres”, por su carácter aritmético elemental que la hace susceptible de la ilusión del “aprendizaje instantáneo” y, en definitiva, por el fuerte carácter autotecnológico que todo ello comporta**. El cuestionamiento externo es más radical y hace referencia a poner en tela de juicio la adecuación de la relación de proporcionalidad a una situación dada. Este cuestionamiento requeriría romper el aislamiento escolar efectivo de la relación de proporcionalidad para situarla en el ámbito de un conjunto amplio de posibles relaciones funcionales (BOLEA, 2003, pp.229-232, grifos nossos).

Garcia (2005), por outro lado, tomando o modelo epistemológico da Matemática dominante nos sistemas atuais de ensino, pressupõe que a Aritmética precede a Álgebra e, essa, por sua vez, o Cálculo. Nesse sentido, ele afirma que o trabalho desenvolvido por Bolea (2003) propôs uma nova reinterpretação da Álgebra Escolar como ferramenta de modelização que, em particular, questiona o caráter prévio da Aritmética, em relação com a Álgebra.

Diferentemente, a proposta de seu trabalho, segundo afirma, de articulação da proporcionalidade e das relações funcionais, vai mais além dessa compreensão, chegando a questionar o caráter prévio da Aritmética e da Álgebra a respeito do Cálculo.

Nesse trabalho, Garcia (2005) afirma que inicialmente centrou sua atenção na formulação, caracterização e análise dos fenômenos didáticos relacionados ao tratamento das grandezas e da relação de proporcionalidade entre grandezas, no ensino secundário obrigatório espanhol. Mas, durante a investigação esse problema sofreu diferentes ampliações, cristalizando-se no problema do ensino da modelização funcional.

Garcia (2005) tratou a modelização algébrica como ferramenta de articulação da Matemática Escolar com a pretensão de "abordar o fenômeno didático-matemático da desarticulação do currículo do ensino secundário obrigatório" espanhol (GARCIA,2005, p.159, tradução nossa).

Nesse sentido, com base em observações empíricas, Garcia (2005) mostrou que o estudo das relações funcionais no ensino secundário espanhol podia ser interpretado como uma nova manifestação do fenômeno da desarticulação dos conteúdos, sendo assim, propôs-se abordá-lo a partir da problematização dos processos de modelização matemática.

Como se observa, o interesse de Garcia (2005, p.180) estaria "em analisar quais são as razões de ser, no ensino secundário atual, que motivam o estudo da relação de proporcionalidade e de outras relações funcionais".

Sobre esse olhar, Garcia (2005) trata a Regra de Três como método de modelização, apresentando uma versão atual, segundo ele, ainda bastante estereotipada, cuja realização consiste em: primeiramente, ordenar os dados do problema, geralmente em forma de tabela; em seguida, a partir da tabela, escreve-se a equação proporcional, cuja forma fica induzida pela representação tabular utilizada, da qual se deduz por manipulação da tabela a quantidade procurada. A primeira parte corresponde à "criação do modelo" e a segunda ao "trabalho dentro do modelo".

Mas, como os demais pesquisadores supracitados, Garcia (2005) ressaltou o caráter auto tecnológico da Regra de Três que, segundo ele, é uma técnica que se justifica por si mesma por dar respostas corretas. Mas, destaca citando Bosch (1994), que esse aspecto não é exclusivo da RT, pois

> [...] para que uma técnica funcione e possa ser aceita como legítima em um conjunto de instituições, é necessário que adquira certa esteriotipização; uma técnica tem que acabar por parecer natural e de funcionalidade evidente, de maneira que não se apresente constantemente a questão de sua justificação (BOSCH,1994, p.224, apud GARCIA, 2005, p. 122, tradução nossa).

Segundo Garcia (2005), a descrição de Bosch (1994) da organização clássica que envolve a Regra de Três se mostrou dotada de grande robustez no nível técnico, o que explicaria em parte sua perdurabilidade ao longo dos anos no sistema de ensino espanhol. Embora, no nível tecnológico-teórico, tenha apresentado limitações: na justificativa tanto do caráter proporcional (direto e inverso), como na adequação da equação proporcional para novas situações.

Para Bolea (2003), as limitações evidenciadas por Bosch (1994) afetaram a de justificação das técnicas clássicas, como a Regra de Três. Ela segue, explicando essa afirmação:

> [...] o discurso justificador da regra de três, baseado essencialmente em certas evidencias culturais relativas às manipulação de grandezas, **não permitiu propor uma tecnologia adequada para explicar as variações técnicas da regra de três** inversa e composta (BOLEA, 2003, p.204, tradução e grifos nossos).

Observamos que a Regra de Três é tomada como uma técnica de resolução de problemas que encaminha uma limitação ao desenvolvimento do estudo do saber matemático, principalmente por ser considerada por esses autores como uma praxeologia auto tecnológica ou por contar com a limitante dependência da cultura das práticas de manipulação de grandezas.

Nesse sentido, as praxeologias da RT se constituem em praxeologias isoladas das demais praxeologias sobre a proporcionalidade, mas que nela pode ser inseridas, por interpretação do pesquisador, segundo um modelo de organização praxeológica de complexidade evolutiva, como os usados por Garcia (2005, p.124) e Bosch (1994, p.252b), que descrevem resumidamente as técnicas da organização clássica da proporcionalidade.

Em resumo, as pesquisas citadas remetem ao papel que a Regra de Três pode assumir na organização dos objetos matemáticos investigados, em particular sobre a atividade matemática desde a manipulação de ostensivos, que passa pelos níveis de algebrização até o problemas da articulação e integração de objetos matemáticos da escola.

Nessas pesquisas, há descrições das técnicas da Regra de Três, inclusive apresentando os esquemas gráficos de arranjo de dados, como modelo tabular, com diferentes funções, como a de tratar os dados do problema (BOSCH, 1994, p.203) ou mesmo induzir uma nova etapa da resolução do problema (GARCIA,2005, p.215), mas deixam escapar a tecnologia que sustenta esse esquema gráfico, chamado de tabular, em que assumimos a *priori* a não obrigatoriedade de pertencer à instituição Matemática considerando que as praxeologias sobre a RT foram construídas para o ensino da RT e como tal sua transposição didática tem como uma de suas faces a organização didática com intenção de tornar possível o ensino e a aprendizagem.

Assim, o nosso objetivo nesta pesquisa é investigar a invariabilidade da praxeologia da Regra de Três, de modo que possamos chegar a uma compreensão de como essa praxeologia foi construída do jeito que se faz presente em nossas escolas. Para responder às nossas questões, este trabalho está composto da seguinte forma:

O primeiro capítulo trata da noção de *praxeologia com matemática*. Uma compreensão é construída a partir da noção de *práticas sociais com matemática*, cunhada por Chevallard (2005), para subsidiar nossas análises.

O segundo é destinado aos primeiros passos da RT, inclusive sobre o que é Regra de Três. Assumimos aqui que a RT aconteceu na Índia, onde os invariantes das práxis da regra se evidenciam; problemas protótipos, esquemas gráficos de arranjo dos dados e uso de termos técnicos, para adequar os dados ao modelo da quarta proporcional.

O terceiro capítulo é destinado às relações entre as praxeologias da regra hindu tratadas no capítulo anterior e as praxeologias transpostas pelo mundo árabe e europeu. Aqui são reafirmados os invariantes da praxeologia hindu, mas também a introdução de novas técnicas, que podem ser vistas como tecnologias da Regra de Três; o método das relações e da redução à unidade.

O quarto capítulo trata das praxeologias da Regra de Três na Europa dos séculos XVIII e XIX. Mostraremos que as praxeologias dos matemáticos hindus ainda se faziam presentes nas praxeologias europeias nesse período, embora apresentem as mesmas características e funções das praxeologias hindus, não fazem referência à essas praxeologias. Um algoritmo geral pode ser vislumbrado por meio do uso do dispositivo didático dos esquemas gráficos, como orientadores dos arranjos e rearranjos de dados, que por sua vez orientavam a hierarquia de operações a serem realizadas

O quinto capítulo é dedicado à reforma analítica da Regra de Três que, ao contrário do que se assumia anteriormente, considera o método da redução à unidade como promovedor do fazer matemático analítico. Isso reafirma e justifica os esquemas gráficos de arranjo de dados e os problemas protótipos usados na RT.

No sexto capitulo, buscamos construir respostas, mesmo que parcialmente, para nossos questionamentos, destacando no decorrer do tempo, o provento de outras intencionalidades didáticas da Regra de Três, para além de um saber prático destinado aos ofícios urbanos.

Finalmente, na seção destinada às considerações e perspectivas, buscamos pôr em relevo as contribuições teóricas desta investigação a respeito da estrutura praxeológica da Regra de Três, encaminhando futuras investigações sobre a noção de *praxeologia com matemática escolar*, para melhor compreensão desse objeto no domínio da Didática da Matemática.

CAPITULO 1: PRAXEOLOGIAS COM MATEMÁTICA

Partimos para responder às nossas questões, assumindo a hipótese de que as praxeologias da Regra de Três, que se constituem em nosso objeto de investigação, são *práticas sociais com matemática* (CHEVALLARD,2005), que denominamos aqui de *praxeologias com matemática* e que designam as praxeologias que manipulam geralmente saberes que não são matemáticos, entretanto, que fucionam com Matemática.

Essa noção de *praxeologia com matemática* não se confunde com o modelo praxeológico proposto, no âmbito da TAD, por Romo-Vázquez (2009;2014) e Castela e Romo-Vázquez (2011), quando analisam praxeologias matemáticas em instituições tecnológicas. O modelo de análise proposto nessas pesquisas é tomado por elas como o modelo praxeológico "alargado/extendido", de Chevallard (1999),por considerar que o discurso justificativo da práxis é constituído de duas partes, uma da instituição produtora, no caso a Matemática, e outra da instituição utilizadora, no caso, a das tecnologias como engenharia, computação, etc.

No entanto, em nossa compreensão, a noção de *praxeologias com matemática* vai mais além e, portanto, torna-se necessário conformar aqui como compreendemos esse objeto teórico de interesse da Didática da Matemática.

Segundo a Teoria Antropológica do Didático (TAD), quando se fala de saber, está se falando de atividade humana *situada,* ou seja, que é realizada no interior de um espaço social concreto, chamado instituição, em um dado tempo que inclui um modo de pensar e de fazer essa atividade.

Para Chevallard (1999), as atividades humanas podem ser descritas por Organizações Praxeológicas que são engendradas por um jeito de pensar, em sentido amplo, o que inclui saberes procedimentais, a partir de estruturas praxeológicas menos complexas, como as praxeologias pontuais. Essa compreensão emerge do seguinte extrato de texto:

> De fato, encontra-se raramente nas praxeologias pontuais. Geralmente, numa determinada instituição I, uma teoria Θ responde a *várias tecnologias* θ_j, cada uma das quais, por sua vez, justifica e faz inteligível *várias técnicas* $\hat{o}_{ij}$, correspondente a *outros tantos tipos de tarefas* T_{ij}. As organizações pontuais vão assim se agregando, primeiramente como organizações *locais*, $[T_i/\hat{o}_i/\theta/\Theta]$, centradas sobre uma tecnologia θ determinada, em seguida em organizações *regionais*, $[T_{ij}/\hat{o}_{ij}/\theta_j/\Theta]$, formada em torno de uma teoria Θ. (Mais adiante, nomearemos uma organização praxeológica *global* o

> complexo praxeológico [$T_{ijk}/ô_{ijk}/\theta_{jk}/\Theta_k$] obtido em uma determinada instituição pela agregação de várias organizações regionais correspondentes a várias teorias Θ_k). Vemos, então, que a passagem de uma praxeologia pontual [T/ô/θ/Θ] para um praxeologia local [$T_i/ô_i/\theta/\Theta$] destaca a *tecnologia* θ, bem como a posterior passagem para uma praxeologia regional [$T_{ij}/ô_{ij}/\theta_j/\Theta$] posta em primeiro plano a *teoria* Θ. Em ambos os casos, a visibilidade do bloco do saber aumenta, em detrimento do saber-fazer[4] (CHEVALLARD, 1999, p.226, nossa tradução, grifos do autor).

As praxeologias pontuais são constituídas de um tipo de práxis, ou seja, de um tipo de tarefa T, e uma técnica *ô* que diz como se faz tal tarefa T, que vem sempre acompanhada de um logos, ou tecnologia, que explica, justifica ou produz essa técnica. Mas é bom lembrar que a praxeologia pontual é uma unidade indivisível, *práxis* mais *logos*, embora, em geral, seja tomada em metonímia e assim possa ser reduzida apenas à práxis (CHEVALLARD,2005).

De outro modo, o modelo praxeológico de Chevallard (1999) busca abarcar desde situações mais simples que podem ser descritas por *praxeologias pontuais*, que evidenciam sem dúvida a taxionomia das tarefas, segundo as técnicas usadas, até uma taxionomia de praxeologias, segundo a complexidade do saber, e, por isso, pondo em evidência, em definitivo, o saber em detrimento do saber-fazer.

O modelo praxeológico referido acima pretende assim destacar, a partir das organizações praxeológicas, o saber como o engendrador das práticas, mais precisamente as técnicas $ô_{ijk}$ quando é dada uma tarefa T_{ijk}, em uma rede hierarquizada, segundo uma tecnologia θ_{jk} em conformidade com uma teoria Θ_k. Isto não quer dizer que as *práxis* funcionem segundo uma rede fixa e hierarquizada por um único saber, mas que o seu funcionamento pode ser compreendido a partir de uma rede que pode ser constituída como um modelo (não único) epistemológico de um dado saber tomado como referência.

---

[4] De hecho, se encuentra raramente en las praxeologías puntuales. Generalmente, en una institución dada, I, una teoría Θ responde de *varias tecnologías* θj, cada una de las cuales a su vez justifica y hace inteligibles *varias técnicas*, ôij, correspondientes a *otros tantos tipos de tareas*, Tij. Las organizaciones puntuales van así a combinarse, en primer lugar, en organizaciones *locales*, [Ti/ôi/θ/Θ], centradas sobre una tecnología θ determinada, y después en organizaciones *regionales,* [Tij/ôij/θj/Θ], formadas alrededor de una teoría Θ. (Más allá, se denominará organización global el complejo praxeológico obtenido, [Tijk/ôijk/θjk/Θk], en una institución dada, por la agregación de varias organizaciones regionales correspondientes a varias teorías Θk). Ahora bien, el paso de una praxeología puntual [T/ô/θ/Θ] a una praxeología local [Ti/ôi/θ/Θ] pone en marcha la *tecnología* θ, de la misma manera que el paso ulterior a una praxeología regional [Tij/ôij/θj/Θ] llevará al primer plano la *teoría*, Θ. En los dos casos, la visibilidad del bloque del saber aumenta, en detrimento del saber-hacer (CHEVALLARD, 1999, p.226).

As Organizações Praxeológicas, portanto, são obras humanas que respondem a uma ou mais situações que emergem nas atividades que vivem em uma instituição. Essas situações, em um dado tempo desse espaço social institucional, podem até não serem conhecidas dos sujeitos desse espaço, mas fazem parte da história dessas organizações praxeológicas e lhes dão uma racionalidade, que inclui como se pode ou não pode fazer ou pensar, que são os possíveis admitidos dessa instituição, para essa Organização Praxeológica.

Além disso, o suposto saber que sustenta uma práxis em uma unidade praxeológica não se confunde necessariamente com o saber que dá unidade à Organização Praxeológica, pois uma situação em uma dada instituição dificilmente se resumirá a um única práxis ou tipo de tarefa *T*, ou seja, a uma *praxeologia pontual*. Em outras palavras, em geral, uma situação exigirá o engendrar de *praxeologias pontuais* de modo a dar conta da complexidade da situação.

Em primeira aproximação, então, uma *praxeologia com matemática* pode ser compreendida como uma organização praxeológica que conta com praxeologias com objetos matemáticos, não necessariamente para o ensino e a aprendizagem de ideias matemáticas, noções ou conceitos matemáticos, mas para o ensino e a aprendizagem de uma atividade humana institucionalizada que funciona com matemática.

Especificamente, as organizações praxeológicas matemáticas, que aqui são contempladas com a noção de *praxeologias com matemática*, primam em fazer emergir a *práxis* como aplicação do *logos*, objetivo que se propõem tão claramente os livros acadêmicos para um dado saber, por exemplo, os clássicos livros de Álgebra Linear.

Nessas obras acadêmicas, toda tarefa tem uma ou mais técnica sustentadas como corolários de lemas ou teoremas. Esses, integrados e articulados, determinam as construções de novos objetos que constituem as noções chaves que dão unidade ao saber Álgebra Linear. “É por esta razão, que o saber-fazer pode ser convencionalmente apresentado no texto do saber, como uma simples aplicação do “saber””[5] (CHEVALLARD, 1999, p.226, nossa tradução).

Mas, é preciso considerar o que nos diz Chevallard (1999), sobre o saber- fazer preceder o saber em uma organização praxeológica.

---

[5] [...] Por esta razón, se suele presentar clásicamente, en el texto del saber, al saber-hacer [T/ô] como una simple aplicación del “saber” [θ/Θ] (CHEVALLRD,1999, p.226).

> [...] se é verdade que, em muitos casos, o tipo de tarefas *T* precede *geneticamente* o bloco [θ/Θ] (que aparece então como meio de produzir e justificar uma técnica ô apropriada à *T*), não menos certo, que, *estruturalmente*, que o saber [θ/Θ] permite engendrar ô (quando *T* é dada) (CHEVALLARD, 1999, p.226, tradução nossa e grifos do autor)[6].

Essa compreensão de o saber-fazer preceder geneticamente o saber dá ao modelo praxeológico proposto por Chevallard uma natureza generalizadora que permite construir compreensões de uma organização praxeológica que conte com diferentes práxis e discursos, mas que se integram e combinam segundo uma ou mais racionalidades.

Esse modelo nos conduz ao encontro, em definitivo, com a relatividade do saber, segundo o espaço social das instituições. Para deixar isso claro, Chevallard (2005) refere-se à vida dos saberes na sociedade, em que destaca que um dado saber pode viver em diferentes instituições que seriam, em termos da ecologia dos saberes, seus respectivos *habitat*. No entanto, se poderá notar que o saber em questão pode ocupar *nichos* muito diferentes e, portanto, a maneira que os agentes de uma instituição manipularão esse saber também será diferente.

Quando Chevallard (2009a) trata das dinâmicas praxeológicas e cognitivas institucionais que podem ocorrer na construções de uma organização praxeológica em uma instituição I^*, considerando outra organização praxeológica de uma outra instituição I, esse pensar é ratificado como evidencia a seguinte passagem:

> Se [Π ⊕ Λ] denota uma praxeologia [T / τ / θ / Θ] com práxis Π e logos Λ existente em uma instituição I e se $[\Pi \oplus \Lambda]^*$ é a sua transposição para outra instituição **I***, então podemos ter em alguns casos que $[\Pi \oplus \Lambda]^*$ poderá ser escrita aproximadamente na forma $[\Pi \oplus \Lambda^*]$ em que a ***práxis*** será (essencialmente) **a mesma**, mas o ***logos terá mudado***. Noutros casos, a praxeologia transposta $[\Pi \oplus \Lambda]^*$ pode ser da forma [Π * ⊕ Λ] , em que o ***logos*** é ***mantido***, mas a ***práxis alterada***, e às vezes até esvaziada de sua substância quando Π * ≈ ∅. As a***lterações e recombinações praxeológicas são, portanto, um fenômeno no coração da história social das praxeologías***[7](CHEVALLARD, 2009a, p.4, grifos e tradução nossos).

---

[6] [...] si es verdad que, en la mayoría de los casos, el tipo de tarea precede genéticamente el bloque [θ/Θ] (que aparece entonces como medio de producir y de justificar una técnica ô apropiada a T), no es menos cierto, que, estructuralmente, el saber [θ/Θ] permite generar ô (para T dado)[θ/Θ] (CHEVALLARD,1999, p.226).

[7] Si l'on note Π ⊕ Λ une praxéologie [T / τ / θ / Θ] existant en une institution I, sa transposée en une autre institution **I***, qu'on peut écrire (Π ⊕ Λ)*, pourra en certains cas s'écrire (approximativement) Π ⊕ (Λ*) : en un tel cas, la praxis sera bien (essentiellement) la même, mais le logos aura changé. La praxéologie transposée (Π ⊕ Λ)* pourra quelquefois aussi s'écrire (Π*) ⊕ Λ, avec, donc, un logos

É importante notar que a nova organização praxeológica pode contar com novas práxis de uma instituição e discurso de outra instituição. Inclusive, pode haver integração de práxis, de combinações e integrações de praxeologias matemáticas, sobre proporcionalidade, por exemplo, com praxeologias não matemáticas, sobre estequiometria em química, por exemplo.

A instituição não matemática que faz as combinações e integrações de praxeologias, por exemplo, mobiliza as praxeologias matemáticas segundo as condições determinadas nas instituições para a situação em que se deseja encontrar a resposta praxeológica.

Assim, torna-se quase natural, sob a compreensão da TAD, pensar que as *praxeologias com matemática escolar* não podem ser reduzidas às praxeologias dos grupos de matemáticos, como querem nos fazer acreditar. Embora possam ter semelhanças e até congruências, estão longe de se constituírem as mesmas praxeologias.

É preciso ter em conta que as praxeologias com matemática na escola se realizam em condições diversas das praxeologias dos matemáticos. As primeiras acontecem para fins de ensino em sala de aula, mas em conformidades impostas que começam com a Transposição Didática Externa, que caminha ao encontro da transposição didática interna realizada pelo professor, quando ele coloca o saber a ser ensinado em conformidade com o seu discurso, seguindo imposições da escola, da pedagogia, do sistema de ensino, da sociedade e da cultura; todos condicionam e, às vezes, até impedem o ensino ou a produção de uma *praxeologia com matemática* para o ensino na sala da aula.

As dificuldades dos alunos, e não raro de professores, no enfrentamento de problemas em contextos ditos concretos, por exemplo, sob o contraste do modelo proporcionado pela TAD, levam-nos à hipótese de que as praxeologias matemáticas da escola atendem também a condições impostas por outras praxeologias não matemáticas.

---

maintenu, mais une praxis modifiée, qui, parfois, sera même vidée de sa substance (on aura $\Pi^* \approx \emptyset$). Les altérations et recombinaisons praxéologiques sont ainsi un phénomène au cœur de l'histoire sociale des praxéologies (CHEVALLARD, 2009a p.4).

Essa compreensão pode ter implicações a serem consideradas sobre o ensino da Modelagem Matemática[8], já que tal tarefa demandaria saberes outros não matemáticos para o enfrentamento de problemas sobre situações em contextos concretos.

Esse pensar é ratificado quando consideramos que uma praxeologia que é engendrada por um saber erudito pode também demandar, de forma solidária, um saber ou uma práxis não matemática, presente na e com a situação, como o *habitus,* no sentido de produto da história de um campo de práticas, entendido aqui como a instituição. A noção de *habitus* é de um sistema duradouro de disposições transponíveis que funcionam a cada momento, integrando a experiência passada, como uma matriz de percepções, apreciações e ações, que torna possível a realização de diversas tarefas (BOURDIEU, 1977).

Mas, o caráter duradouro do *habitus* em seu campo de práticas não é sinônimo de imutabilidade das práticas. O *habitus* está constantemente sujeito às experiências e por isso é constantemente afetado por elas de algum modo que mantém ou modifica suas estruturas e, portanto, sua capacidade de engendrar novas práticas. O *habitus* é perdurável, mas não é eterno (BOURDIEU; WACQUANT, 2005, p.195, tradução nossa).

De outro modo, uma organização praxeológica, mesmo que engendrada por um saber erudito, demanda uma matriz de percepções e ações que a torne possível de ser realizada do modo que é realizada. Em outras palavras, as organizações praxeológicas, mesmo que dotadas de um discurso erudito, são engendradas por *habitus* (BOURDIEU, 1989), que emergem em presença das situações enfrentadas.

Segundo o que nos diz Bourdieu (1977;1989), podemos assumir que é a dialética entre a situação e o *habitus* que engendra as combinações e integrações praxeológicas. Os saberes e as práxis não matemáticos são mobilizados em situação, com *habitus*. Nesse sentido, as organizações praxeológicas em situação sobre contextos concretos, mesmo que dotadas de um discurso da instituição erudita Matemática, ainda demandam saberes e práxis, não necessariamente explícitas à luz das teorias matemáticas, mas que somente aqueles que conhecem a situação em contexto concreto reconhecem o sentido desses saberes e práxis não matemáticas.

---

[8] Para detalhamento, recomendamos consultar o trabalho de Guerra e Silva (2009b) que tratam do fazer da Modelagem Matemática nas práticas sociais.

Essa compreensão está posta por Chevallard (2005), quando assim afirma: “Mas é preciso insistir de todos os modos sobre o fato essencial de que, em um dado momento, “*qualquer saber científico funciona sobre um estrato profundo de pré-construções*”[9] (CHEVALLARD, 2005, p.107, grifos do autor, tradução nossa).

As *praxeologias com matemática* que vivem no ensino da matemática, por exemplo, as práxis e saberes não matemáticos, são assumidos como pré-construídos, ou seja, dependem de uma situação em contexto e não são algoritimizáveis (CHEVALLARD,2005), mas assertivos de modo indiscutível, como se fossem crenças. Nesse sentido, esses saberes podem até ser aprendidos mas não são ensinados.

Por outro lado, parece-nos claro que as *praxeologias com matemática* que são ensinadas em instituições não matemáticas, na engenharia, por exemplo, podem assumir - e assumem em geral - que os saberes matemáticos, são pré-construídos. Por isso, talvez, o conhecimento de uma prática não se confunde com o conhecimento sobre a prática (CHEVALLARD,2005).

Assim, nossa compreensão sobre *praxeologias com matemática* não dispensa a compreensão de praxeologias matemáticas como produto de um saber erudito, mas também considera outros saberes que engendram a organização praxeológica de modo solidário, inclusive os saberes práticos, no sentido dado por Chevallard (2005), referindo Bourdieu (1980), que consiste do sistema institucional de conhecimentos de I que se põem em funcionamentos, que se aprendem, se enriquecem, sem ser entretanto, utilizados, ensinados ou produzidos (CHEVALLARD, 2005, p.154, tradução nossa).

Portanto, nossa compreensão da *praxeologia com matemática* encaminha um olhar para uma organização praxeológica com uma técnica que de ser composta por diferentes técnicas, matemáticas e não matemáticas, que são sustentadas por saberes *infraestruturais*, matemáticos e não matemáticos, inclusive por saberes práticos, que são coordenados segundo uma lógica prática superestrutural (CHEVALLARD,2009c) da atividade institucional em que se insere essa praxeologia.

Essa aproximação, da noção de *praxeologias com matemática* com práticas sociais com matemática, de Chevallard (2005), potencializa o modelo praxeológico de Chevallard (1999) para análises de complexas praxeologias que envolvem saberes

---

[9] Pero es preciso insistir de todos modos sobre el hecho esencial de que, en un momento dado, *cualquier saber científico funciona sobre un estrato profundo de preconstrucción* (CHEVALLARD, 2005, p.107)

matemáticos, mas que não se restringem à instituição Matemática que vivem em diferentes instituições, a engenharia por exemplo, em particular, as *praxeologias com matemática escolar*, como as praxeologias da Regra de Três.

Isso posto, nos capítulos seguintes, em articulação com a noção de *habitus* de Bourdieu (1977; 1980;1989), buscaremos compreender as praxeologias da Regra de Três e sua trajetória ao largo do tempo em diferentes lugares. O capítulo seguinte mostrará as praxeologias da Regra de Três na Índia.

CAPÍTULO 2: AS PRAXEOLOGIAS DA REGRA DE TRÊS NA ÍNDIA

2.1. Introdução

Não há dúvida, entre historiadores da matemática, de que a Regra de Três era conhecida desde o primeiro século (d. C.), na China, que habitava os textos indianos desde o século V, embora com claros vestígios de que viveu nessa região em formas rudimentares muito anteriormente, que chegou ao mundo islâmico por volta do século VIII, por onde atingiu a Europa, a partir do Renascimento, subindo para a fama, vindo a ser chamada de “a regra de ouro” (HØYRUP,2012, p.1, tradução nossa).

As trajetórias percorridas pelas praxeologias da Regra de Três nos despertaram a atenção e nos encaminharam para o estudo das Organizações Matemáticas (OM), que viveram ao longo do tempo em diferentes regiões, tomando emprestadas compreensões de diferentes historiadores, dentre eles, e principalmente, Datta e Singh (1938), Sarma (2002), Høyrup (2007a, 2007b, 2009, 2012) e Heeffer (2007, 2012, 2014), por permitirem profícuas visitas às praxeologias da Regra de Três, em diferentes regiões em diferentes tempos.

Assim, passamos a compreender as praxeologias das Regras de Três como saberes escolares dotados de histórias e isso nos encaminha ao encontro da hipótese de que as praxeologias da Regra de Três que vivem em nossa escola básica se constituem, de algum modo, em fósseis vivos de suas outras formas de vida na história dessas praxeologias.

De outro modo, se são Práticas Sociais com Matemática, que podem se fazer ainda presentes na escola, por essa história que traz consigo mobilizações de objetos culturais[10], que, de algum modo, ainda podem viver nas escolas básicas, e, em geral, em diferentes atividades de nossa sociedade, essa hipótese não se deu por acaso, mas por meio da lente da Teoria Antropológica do Didático sobre o fazer quase inquestionável da praxeologia da Regra de Três.

Essa abordagem teórica assume que toda forma de conhecimento humano pode ser descrita por meio de praxeologias, no sentido da prática como um saber-fazer - uma práxis - que é dotada e um saber - o logos - que lhe dá razão, mesmo que, em geral, ele não se faça explícito.

---

[10] Para aprofundamentos sobre a mobilização de práticas de cultura matemática na escola, recomendamos o trabalho de Miguel e Mendes (2010).

Essa compreensão nos fornece insumos que podem nos permitir construir compreensões sobre as praxeologias da Regra de Três que viveram em diferentes *habitat* escolares, determinados por diferentes condições culturais em diferentes tempos, revelando seus jeitos de fazer e pensar essas praxeologias, e, com isso, promovem nosso encontro com possíveis objetos dessas praxeologias, que ainda podem, de algum modo, se fazer presente nas escolas básicas.

De modo mais específico, recorreremos à noção de Transposição Didática (TD) de um saber, sustentada pelo modelo de Organização Praxeológica de Chevallard (1992), como instrumento para analisar as Organizações Matemático-Didáticas (OMD), que foram usadas no ensino da Regra de Três, em particular, os tipos de tarefas, as técnicas com suas tecnologias, sem esquecer-nos de possíveis condições que não detenham a obrigatoriedade de relações com as teorias matemáticas que podem ter condicionado o ensino e que, de alguma forma, ainda possam influenciar as TD atuais dessas praxeologias nas instituições escolares.

2.2. A Regra de Três como Saber Prático

Nosso objetivo neste capítulo, de modo específico, é o de seguir a história e a epistemologia das praxeologias da Regra de Três, intencionalmente ensinadas com o olhar aguçado para a existência de vestígios fósseis dessas praxeologias, que podem ainda estar vivos em nossas atuais escolas de ensino fundamental. Para isso, buscamos em consonância com nossa hipótese, encaminhar pelo menos respostas para as duas seguintes questões:

> Q_{21}: Existem técnicas didáticas que encaminham o reconhecimento pelo sujeito da escola, professor ou aluno, de uma tarefa como um problema de Regra de Três?

Esse questionamento decorre da reação inconteste de docentes e de alunos frente a certas tarefas de resolução de problemas textualizados com asserções do tipo: “esse problema é de regra de três”.

Q_{22}: Que dispositivos didáticos, no sentido de instrumentos utilizados para encaminhar a solução do problema, inclusive traços discursivos, orientam as práticas em ato?

Esse segundo questionamento decorre do aspecto ritual da praxeologia da Regra de Três observado na escola básica, ou seja, dos discursos e gestos invariantes que se substanciam como atos culturais da escola frente a um tipo específico de situação; uma vez anunciado ou identificado um problema como de “regra de três”, é construído um esquema gráfico de arranjo dos dados das grandezas envolvidas no problema, sempre acompanhado de pequenos discursos, entre eles, “é direta” ou “é inversa”, que se segue para escrever uma equação esquemática que permite ser resolvida por um produto cruzado.

A pertinência da aproximação teórica da TAD para esta investigação se faz mais forte por nos permitir considerar esses aspectos práticos da Regra de Três, pois admite que as tarefas e as técnicas de uma praxeologia possam ser engendradas por um logos não restrito à instituição matemática.

Esse aspecto teórico nos permite encaminhar esta investigação de modo metodologicamente distinto de outras pesquisas realizadas como citadas anteriormente, que envolvem de algum modo nosso objeto de investigação, sob a compreensão da TAD, por não adotar a priori um modelo epistemológico de referência (MER), com base em argumentos puramente matemáticos, que conduzam nossas análises investigativas.

A TAD assume a noção de prática como uma totalidade indissolúvel e a separação, práxis+logos, é somente tomada por necessidades teóricas. Nesse sentido, uma praxeologia da RT que viveu em determinada instituição, em um dado tempo, mesmo que admita um discurso teórico matemático atual, que a justifique, não pode ser considerada como a mesma praxeologia, se for compreendida com esse novo discurso.

Bourdieu (1980), citado por Chevallard (2005), corrobora com essa compreensão, quando afirma que “uma prática não implica, ou exclui, o domínio da lógica que nela se expressa” (CHEVALLARD,2005, p.66, tradução nossa), e, assim, é necessário que nesse campo investigativo se tome o cuidado de não promover separações, ou casamentos, entre discursos e práticas, pois tal descuido pode encaminhar às compreensões que nos fazer tomar, na história, “as crenças modernas sobre o que é - e o que deve ser – matemática” (ROQUE, 2012, p.24); o desatento olhar formal matemático, invariavelmente imporia a Regra de Três como uma simples aplicação de uma teoria matemática.

O modelo praxeológico *lato sensu* de Chevallard (1999) admite a relatividade de um saber e é isso que, quando pertinente, nos permite tomar como “saberes” os “saberes práticos”, no sentido do código de conduta pelo qual se realiza certa lógica prática. No entanto, isso não quer dizer que não consideramos o saber matemático e sim que não o consideramos exclusivamente.

Assim, não devemos excluir de nossa investigação uma praxeologia com a Regra de Três, por não encontrar um discurso matemático que a produza, a explique ou a justifique, pois do ponto de vista antropológico o fato de existir uma praxeologia que se realiza no interior de uma dada instituição é porque, no mínimo, ela possui uma virtude auto tecnológica; atuar dessa maneira não exige justificar, porque é a *boa* maneira de atuar (CHEVALLARD,1999, p.224).

Nesse sentido, nosso olhar sobre a história das praxeologias da RT se distancia, mas sem perder de vista o mito da ciência como saber tipicamente greco-ocidental, que, segundo Roque (2012), serve para exaltar a Matemática Pura com seu caráter teórico-formal, que pode nos levar invariavelmente a contextos que desabonam as matemáticas “estrangeiras”, como a Matemática dos Hindus usadas em problemas práticos, “tidas como um fim menor das ciências” (ROQUE, 2012, p.22). Isso exige delimitar, afinal, o que é Regra de Três.

2.3. O que é Regra de Três

O nome da regra que foi usado pelos escritores sânscritos como Āryabhata, Brahmagupta e Mahāvīra (HØYRUP, 2007b) e também na maioria dos livros de ábacos italianos, que a referem como a *regola delle tre cose*, inclusive no que seria susceptível de ser o segundo mais antigo texto (europeu) sobrevivente, o *Livero de l'abbecho* (de c. 1300).

Para Høyrup (2012), confundir a regra com o tipo de problema, inclusive com o tratamento de problemas de proporcionalidade, em geral, permitiu aos historiadores encontrar a "regra de três" em diferentes locais, como a antiga Mesopotâmia, o antigo Egito e nos epigramas aritméticos da Antologia Grega. Segundo ele, isso não aconteceria se a Regra de Três fosse pensada como regra, mais precisamente, como método; a Regra de Três não é um tipo de problema, mas uma regra e se pode aprender mais sobre essa práxis com o nome dado ao método e os termos em que esse método foi discutido.

Em nossa compreensão, Høyrup (2012) corrobora com a compreensão de Chevallard (1999), quando afirma que de forma inevitável uma Praxeologia em ato sempre se reduz a uma prática *stricto sensu*, mais precisamente ao par Tarefa-

Técnica, de modo que a tarefa ou problema constitui parte inseparável da práxis, ou seja, de algum modo não há como falar do método sem falar em que termos é usado, ou construído, na/ou para a solução de certos tipos de problemas.

Deter o olhar sobre as técnicas e os possíveis discursos desenvolvidos ao longo do tempo, em diferentes espaços socio-culturais escolares, é de vital importância para o desenvolimento desta investigação, considerando que isto constitui a parte substantiva de nossos objetivos. Mais precisamente, a de encontrar os elementos constituintes das Organizações Praxeológicas da Regra de Três, que foram feitas objetos de estudo para o ensino e aprendizagem e, sem esquecer, é claro, dos seus usos como ferramentas da ação do homem no enfrentamentos de certos tipos de tarefas, nesse caso, dos chamados problemas de RT.

Seguimos, assim, a história em diacronia sincrônica dessas praxeologias, sempre que possível sobre seus desenvolvimentos frente às problemáticas no e para o ensino dessas praxeologias, sem a obrigatoriedade de impor um discurso matemático que as justifique; a Regra de Três é tomada, assim, em princípio, como um método com razões humanas para solucionar tarefas de certos tipos.

Com esse entendimento, começamos analisando as praxeologias indianas da Regra de Três, sem desmerecer uma possível origem chinesa, pelos registros históricos disponíveis que evidenciam os inequívocos e importantes desenvolvimento da prática da RT na civilização hindu. Além disso, essa origem constitui parte significativa das praxeologias que atingiram o mundo islâmico e que de lá viajaram para a Europa de onde vieram para se instalar, parece que em definitivo, em nossas escolas.

2.4. A Praxeologia da Regra de Três na Índia

Datta e Singh (1938) afirmam que os hindus usavam o termo *trairâsika* que significa "três termos" e, por isso, a regra passou a ser conhecida como a Regra de Três Termos. Esse nome remonta ao início da era Cristã com ocorrências no Manuscrito Bakhshali (c. 200), no Aryabhatiya I (499) e em todos os outros trabalhos matemáticos hindus. Sobre a origem do nome “Regra de Três”, Bhaskara I (c. 525) faz a seguinte observação: “Aqui três quantidades são necessárias (no enunciado e no cálculo), é por isso que o método é chamado *trairâsika* ("a regra de três termos")” (DATTA; SINGH,1938, p.204, nossa tradução).

De acordo com Sarma (2002), Kuppanna Sastry[11] foi quem percebeu a primeira menção da Regra de Três em versos no texto indiano mais antigo de astronomia, o *Vedanga Jyotisa.* Essa menção pode ser anunciada em nosso português mais ou menos assim:

> "O resultado conhecido é para ser multiplicado pela quantidade para a qual o resultado é procurado, e dividido pela quantidade para a qual o resultado conhecido é dado" (SARMA, 2002, p.135)[12].

Sarma (2002) destaca que esse enunciado da regra, embora seja interpretado por Sastry, a partir do problema de encontrar a quarta proporcional, de modo a permitir explicar o procedimento de sua aplicação, é ainda uma forma rudimentar da Regra de Três, que era necessária, por preconizar os cálculos previstos no enunciado do problema.

Mais precisamente, Sarma (2002) quer dizer que a Regra de Três ocorreu de forma rudimentar no *Vedanga Jyotisa*, em torno de 500 a.C., e que cerca de mil anos mais tarde ela reapareceu em forma desenvolvida com terminologia técnica no texto indiano de Aryabhata I, no livro Aryabhatiya (499 d. C.), que anunciada, foi traduzida mais ou menos assim:

> Agora, tendo multiplicado a quantidade conhecida como fruto (*phala-rasi*) pertencente à regra de três (*trairasika*) pela quantidade conhecida como requisição (*iccha-rasi*), o resultado obtido (*labdha*) deve ser dividido pelo argumento (*pramana*). [que é obtido] desta [operação] é o fruto correspondente à requisição (*iccha-phala*) (SARMA,2002, p. 134)[13].

Aryabhata anuncia a Regra de Três, sob o nome de *Trairasika*[14], com os termos técnicos para as quantidades numéricas envolvidas nos problemas, no caso, *pramana, phala-rasi, iccha-rasi, iccha-phala,* e a forma de como usá-los.

Os escritores subsequentes, particularmente Brahmagupta, em seu *Brahmasphutasiddhanta* (628), e Bhaskara I, em seus comentários (629) sobre o

---

[11] Vedanga Jyotisa = K. V. Sarma, Ed. Vedangaiga Jyotisa of Lagadha in its Rk and Yajus Recensions. With the Translation and Notes of T. S. Kuppanna Sastry (critical edition and English translation). New Delhi: Indian National Science Academy, 1985.

[12] "The known result is to be multiplied by the quantity for which the result is wanted, and divided by the quantity for which the known result is given".

[13] Now having multiplied the quantity known as fruit (*phala-rasi*) pertaining to the Rule of Three (*trairasika*) by the quantity known as requisition (*iccha-rasi*), the obtained result (*labdha*) should be divided by the argument (*pramana*). [What is obtained] from this [operation] is the fruit corresponding to the requisition (*iccha-phala*)

[14] *Trairasika:* é um tipo de operação que consiste em três quantidades numéricas ou termos.

Aryabhatiya, reelaboraram de forma mais breve o estabelecido por Aryabhata, mas continuaram empregando a mesma terminologia com ligeiras modificações.

De acordo com Datta e Singh (1938), os termos chamados respectivamente, p: *pramâna* (argumento), f: *phala* (fruto) e i:*icchâ* (requisição) foram encontrados em todos os tratados matemáticos, referidos frequentemente e simplesmente como primeiro, segundo e terceiro termo, respectivamente. Já Aryabhata II (950) difere dos outros escritores dando os nomes *mâna*, *vinimaya* e *icchâ*, respectivamente, para nomear os três termos técnicos.

Mas, o ensino da RT iniciava por meio de um tipo de problema em que se identificava as quantidades das grandezas com os termos técnicos p:*pramâna* ("argumento"), f: *phala* ("fruto") e i:*icchâ* ("requisição"), para então anunciar a regra para encontrar o *icchaphãla* ("fruto do desejo").

Havia formas variadas de problemas, mas, de algum modo, esses problemas poderiam ser "pensados", sob a seguinte forma, apresentada por Datta e Singh (1938):

Se *p* produzem *f*, quanto *i produzirá*?

A partir desse tipo de problema, Datta e Singh (1938) apresentam diferentes formulações da RT, elaboradas pelos hindus, que podem ser traduzidas mais ou menos da seguinte forma:

> -**Aryabhata I** (499):
> Na Regra de Três, o *phala* ("fruto"), sendo multiplicado pelo *icchâ* ("requisição") é dividido pelo *pramana* ("argumento"). O quociente é o fruto correspondente ao *icchâ*. Os denominadores de um sendo multiplicados com o outro dá o multiplicador (isto é, numerador) e o divisor (isto é, o denominador).
> -**Brahmagupta** (628) dá a regra assim:
> "Na regra de três *pramâna* ("argumento"), *phala* ("fruto") e *icchâ* ("requisição") são os termos (dados), o primeiro e o último termos devem ser similares. O *icchâ* multiplicado pelo *phala* e dividido pelo *pramâna* dá o fruto (da demanda)".
> -**Sridhara** (750) afirma:
> "Das três quantidades, o *pramâna* ("argumento") e *icchâ* ("requisição") que são da mesma denominação são o primeiro e o último termos, o *phala* ("fruto ") que é de uma denominação diferente, situa-se no meio. O produto deste e o último é dividido pelo primeiro "
> -**Mahavira** (850):
> "Na Regra de Três, o *icchâ* ("requisição") e o *pramâna* ("argumento") sendo similares, o resultado é o produto entre *phala* e *icchâ* dividido pelo *pramâna*".
> -**Aryabhata II** (950) introduz uma ligeira variação na terminologia:

> "O primeiro termo é chamado de *mâna*, o termo médio *vinimaya*, e o último um *icch*â. O primeiro e o último são da mesma denominação. O último multiplicado pelo médio e dividido pelo primeiro dá o resultado". Os autores **Bhaskara II** (1150), **Narayana** (1356) e outros dão à regra a mesma forma de Brahmagupta (628) ou Sridhara (c.750). (DATTA; SINGH,1938, pp.204-205, tradução e grifos nossos).

Datta e Singh (1938) ilustram essa praxeologia hindu de trabalhar, a partir do seguinte exemplo, retirado do livro Trisatika[15]:

Exemplo 1. Se um *pala* e um *karsa* de madeira de sândalo são obtidos por dez e meio *pana*, por quanto será obtido nove *pala* e um *karsa*?

> Aqui 1 *pala* e 1 *karsa* = $1\frac{1}{4}$ *pala*, e 9 *pala* e 1 *karsa* = $9\frac{1}{4}$ *pala* são as quantidades similares. O "fruto" $10\frac{1}{2}$ *pana* correspondente à primeira quantidade (*pala* $1\frac{1}{4}$) dada, de modo que:
>
> *pramana* (argumento) = $1\frac{1}{4}$
>
> *phala* (fruto) = $10\frac{1}{2}$
>
> *icchâ* (requisição) = $9\frac{1}{4}$
>
> As quantidades acima são dispostas em ordem como segue:
>
> | | | |
> |---|---|---|
> | 1 | 10 | 9 |
> | 1 | 1 | 1 |
> | 4 | 2 | 4 |
>
> Uma vez convertidas as frações próprias são efetuada as operações:
>
> | | | |
> |---|---|---|
> | 5 | 21 | 37 |
> | 4 | 2 | 4 |
>
> $= \frac{21 \times 4 \times 37}{5 \times 2 \times 4}$ *pala*
>
> = 4 *purâna*, 13 *pana*, 2 *kâkini* e 16 *varâtaka*.
>
> (DATTA; SINGH,1938, pp.204-205, tradução nossa)

[15] Obra do matemático Indiano Sridhara ou Sridharacarya (750 d.C), também conhecido como Patiganitasara, escrito em versos, num total de trezentos sobre vários temas entre eles, fração e regra de três.

Datta e Singh (1938) observam que o objetivo dos trabalhos dos matemáticos hindus era prover um processo que pudesse ser facilmente aprendido por pessoas comuns. Assim, do ponto de vista do didático, o que estaria em jogo era o enunciado da regra que atendesse à essa intencionalidade didática, nesse caso, por meio da técnica didática de uso de termos técnicos como *argumento*, *fruto* e *requisição*, auxiliados por outros termos como *similar/* n*ão similar*, ou outros no mesmo sentido, que tinham a função de encaminhar um rearranjo dos dados das quantidades para realização final da praxeologia referida anteriormente, que consistia em multiplicar primeiro e depois dividir.

Há, portanto, uma imbricação entre o enunciado da regra, a técnica e, claramente, com um tipo de problema enfrentado. Esse último se torna indispensável para o enunciado da regra, pois somente ele permite o encontro com os termos técnicos com funções imbricadas; os termos técnicos *argumento*, *fruto* e *requisição* e os termos auxiliares como *similar* ou outros com mesmo sentido.

2.4.1. Termos Técnicos: Compondo o Arranjo dos Dados

Os enunciados da Regra de Três parecem evidenciar a intenção didática de permitir aos iniciantes o encontro com a praxeologia da Regra de Três, mesmo que esses iniciantes apresentem uma insuficiente relação com os objetos culturais das atividades humanas específicas que são manipulados nessas praxeologias.

Os termos técnicos *argumento, fruto* e *requisição* exprimiam as funções das quantidades de grandezas presente em um problema sobre um contexto concreto, portanto, o anúncio da regra se sustenta sobre essas funções como meio de assegurar que sejam realizadas as operações com as quantidades corretamente.

Vejamos, por exemplo, quando Brahmagupta (628) anuncia sua regra.

> "Na regra de três *pramâna* ("argumento"), *phala* ("fruto") e *icchâ* ("requisição") são os termos (dados), o primeiro e o último termos devem ser similares. O *icchâ* multiplicado pelo *phala* e dividido pelo *pramâna* dá o fruto (da demanda)" (DATTA; SINGH,1938, p.204, tradução nossa).

Como se nota, os termos técnicos, *similar* ou *mesma denominação,* são estratégicos para o uso da regra, uma vez que auxiliam o encontro do sujeito escolar com a taxionomia das quantidades das grandezas. Eles são técnicas didáticas para encaminhar corretamente a taxionomia de *argumento, fruto* e *requisição* por meio do alerta de que o *argumento* e a *requisição* são quantidades de mesma espécie ou natureza.

No exemplo citado anteriormente:

> Se um *pala* e um *karsa* de madeira de sândalo são obtidos por dez e meio *pana*, por quanto será obtido nove *pala* e um karsa?

As grandezas (A) *pramana* (argumento) = 1 ¼, (B) *phala* (fruto) = 10 ½ e (C) *icchâ* (requisição) = 9 ¼, parecem ser distinguíveis por nós mais pela similaridade das grandezas do que pelos termos técnicos.

A preocupação com a taxionomia correta das quantidades é manifestada claramente por Bhaskara I (c.525), quando comenta sobre as implicações do uso da regra no Aryabhatiya, recorrendo a um verso atribuído a um anônimo que pode ser, mais ou menos, traduzido em português assim:

> Na resolução de problemas ligados à regra de três, quando dispomos os números (*sthapana*), é preciso saber que as duas quantidades similares deverão ser fixadas no primeiro e o último lugar, e a quantidade não similar no meio (SARMA,2002, p.137, tradução nossa).

É importante observar que a técnica didática dos termos auxiliares chega a dispensar o uso dos termos técnicos, de natureza mais complexa, para estabelecer a ordenação dos termos.

Segundo Sarma (2002), essa foi a primeira extensão da regra que chamou a atenção para essa necessidade; de as quantidades serem escritas em certa ordem $A \to B \to C$, para então operar com os dados em ordem inversa.

Essa observação, embora fosse estratégica, não foi claramente destacada por Aryabhata para obter o resultado $[(C \times B) \div A]$, preconizado pelo anúncio da regra.

No exemplo considerado acima, as similaridades das grandezas permitem encaminhar a ordem das quantidades, do seguinte modo.

5 4	21 2	37 4

Essa ordem dos dados permite então efetuar as operações de primeiro multiplicar e depois dividir seguindo a ordem inversa desses dados.

$$\frac{\frac{21}{2}\times\frac{37}{4}}{\frac{5}{4}}$$

Embora os termos técnicos pareçam eliminar a dificuldade da taxionomia por encaminhar o olhar para a grandeza e não para as suas funções na situação considerada, parece-nos que essa taxionomia continua a ser suficientemente problemática.

Isso pode ser depreendido do comentário sobre a Regra de Três de um anônimo que está presente no Patiganita, obra composta no século IX ou X, em que destaca claramente as especificidades das contextualizações das praxeologias da Regra de Três.

> [...] Aqui *jati* refere-se à denominação relacionada com as transações comerciais. Sendo de mesma denominação ou de diferentes denominações deve ser entendido neste sentido e não no sentido de castas como aplicável aos Brâmanes etc... Se o argumento é uma mercadoria (*pananiya)* e a requisição é também uma mercadoria, eles são da mesma classe. Em seguida, o termo médio será o preço (*mulya*), por causa da dependência mútua (*parasparapeksitatva*) da mercadoria (*panya*) com o preço. Do mesmo modo, se os primeiros e os últimos termos são os preços, em seguida, o produto irá ser o termo médio. Se os dois [primeiro e último termos] referem-se aos artesãos da mesma denominação, em seguida, seus salários (*bhrti*) é o termo do meio. Ou a quantidade de trabalho realizado pelos artesãos quando é de uma denominação diferente. Portanto, [a afirmação relacionada com a sua quantidade de trabalho] é o termo do meio. Enquanto o primeiro e o último termo são de mesma denominação, o termo médio é de mesma designação como a quantidade que é desejada a ser conhecida (SARMA,2002, p.138, tradução nossa).

Nesse extrato de texto, há explícita recomendação de como devem ou podem ser duas grandezas similares ou de mesma denominação em situações específicas. Essa recomendação manifesta a preocupação com esses aspectos que deixa escapar a problemática da taxionomia, tanto por determinar a função das grandezas (*argumento, fruto* ou *requisição*), quanto por determinar a similaridade.

Assim podemos dizer que, se não havia evidências perceptivas dessa taxionomia em um problema, ele não poderia ser enfrentado por Regra de Três. Se percebida, a solução era dada pelo uso da regra. Mas, essa tarefa de dispor de uma técnica didática para encaminhar a taxionomia correta parecia não ser nada simples.

Nesse sentido, podemos pensar que o ensino e a aprendizagem da Regra de Três dependiam de interpretações em acordo com a especificidade da prática social que albergava o problema, especificidade essa que estava disponível como saber prático àqueles, e somente àqueles agentes praticantes daquelas práxis.

. Talvez por isso a dificuldade de estabelecer tais relações tenha exigido a atenção de diferentes autores para a construção de procedimentos ou algoritmos que, ainda que contemplassem as especificidades da Regra de Três para praxeologias específicas, não perdiam de vista alcançar generalidades.

A ingênua regra, que estabelecia a facilidade de multiplicar a *requisição* pelo *fruto* e dividir esse produto pelo *argumento*, mostrou-se difícil por meio da complexa tarefa de identificar o que eram o *argumento*, o *fruto* e a *requisição*. Assim, a técnica da RT não se restringia somente a multiplicar e dividir, exigia antes arranjar os dados do problema.

Mas, não somente esses dois aspectos estavam presentes nessa questão. É preciso observar que no exemplo1 os cálculos foram expressos como segue:

$$\frac{\frac{21}{2} \times \frac{37}{4}}{\frac{5}{4}}$$

No entanto, nos textos originais da Matemática Hindu, os cálculos são expressos de forma diferente, como mostramos abaixo:

$$\frac{21 \times 4 \times 37}{5 \times 2 \times 4}$$

Os cálculos eram realizados pelos matemáticos hindus somente com números inteiros, evitando o uso de frações que eram deixadas para o cálculo final. Isso nos desperta curiosidades, mais ainda por se constituir em outro aspecto das praxeologias da Regra de Três, que, portanto, precisamos considerar.

Esses aspectos supracitados, que incluem o aspecto dos cálculos apenas com números inteiros, tornaram-se estratégicos no desenvolvimento da praxeologia da Regra de Três na Matemática Hindu. Eles podem encaminhar aspectos outros da técnica dessas praxeologias que buscamos compreender, a partir da aproximação teórica adotada, que busca responder a questões do tipo: como se faz e por que se faz assim tal práxis?

2.4.2. A Ergonomia da Técnica: As Operações com Números Inteiros

O enunciado da Regra de Três aqui apresentado, até então, preconiza a multiplicação primeiro seguida da divisão, mas essa escolha pode não ter se dado por acaso ou por imposição teórica matemática.

A compreensão que parecem nos encaminhar os historiadores da matemática, como Sarma (2002), por exemplo, é de que esse modo atendia à necessidade de evitar a complexa operação de divisão que frequentemente produz frações que são mais difíceis de trabalhar. Isso poderia ser realizado postergando as operações de divisão, o que foi “traduzido” pelo esquema gráfico de arranjo de dados, que privilegia a multiplicação com números inteiros.

Assim, o desenvolvimento da RT devia operar com números inteiros, mesmo que os dados das quantidades fossem fracionários, e isso exigia obedecer à ordem de primeiro multiplicar e depois dividir para obter o resultado procurado $[(C \times B) \div A]$.

Sarma (2002), referindo-se a um problema comercial protótipo, afirma que logicamente B deveria primeiro ser dividido por A para obter o preço de um item (isto é, a taxa) e, em seguida, esse quociente deveria ser multiplicado pela *requisição*, simbolicamente $[(B \div A) \times C]$, para obter finalmente o requerido.

Essa observação de Sarma (2002) remete-nos a um questionamento de modo inevitável: a sequência das operações - multiplicar primeiro e depois dividir - é decorrente do discurso matemático de proporcionalidade, que pode justificar a técnica operatória, ou decorrente de uma ergonomia prática sustentada pela facilidade de operar a multiplicação frente à divisão, que levaria ao trabalho eficaz com menor esforço?

Pois, a afirmação de Sarma de que *logicamente B deveria primeiro ser dividido por A para obter o preço de um item (isto é, a taxa dada pelo preço por unidade)* não segue o fazer com a lógica da praxeologia matemática erudita, tendo em conta que isso acarreta fazer uma divisão entre grandezas distintas que contraria as condições normativas dessa praxeologia.

Parece que esse fazer pode ter sido produzido pela busca de melhor ergonomia para a praxeologia da Regra de Três, o que inclui o seu ensino e sua aprendizagem, e não necessariamente da suposta associação da RT aos problemas da quarta proporcional geométrica, mesmo que isso, do ponto de vista da Matemática, inevitavelmente possa conduzir a multiplicar primeiro e dividir depois, porque a propriedade fundamental das proporções geométricas, que afirma que o produto dos meios é igual ao produto dos extremos, resulta em primeiro multiplicar e depois dividir.

$$\mathrm{A} : \mathrm{B} :: \mathrm{C} : \mathrm{X} \rightarrow \mathrm{X} = (B \times C) \div A$$

Mas, essa ergonomia foi adotada por ter a vantagem da evidente mecânica em execução: um movimento para frente da esquerda para a direita escrevendo as quantidades seguidas de um movimento contrário da direita para a esquerda com os cálculos, em tudo auxiliados com a narrativa do preconizada pela RT.

O esquema de resolução é mostrado abaixo como segue:

Movimento para frete escrevendo: $\mathrm{A} \rightarrow \mathrm{B} \rightarrow \mathrm{C}$.

Movimento para trás com os cálculos: $\mathrm{A} \leftarrow \mathrm{B} \leftarrow \mathrm{C} : [(\mathrm{C} \times \mathrm{B}) \div \mathrm{A}]$.

No entanto, o uso desse algoritmo podia se tornar complexo, quando era recorrido mais de uma vez para resolver um problema. Mais especificamente, os problemas que exigiam uma sequência de Regras de Três, por apresentarem cinco, sete, nove ou mais termos. Para mostrar isso, consideremos o seguinte exemplo de um problema de cinco termos, extraído de Datta e Singh (1938, p.213).

Exemplo 2: "Se o juro de cem *niskas* em um mês faz cinco *niskas*, qual será o juro de 16 *niskas* em 12 meses?

Esse problema pode ser resolvido por uma sequência de duas Regras de Três. A resolução, no entanto, exige a habilidade de “perceber” e tornar explícitos os termos técnicos *argumento, fruto* e *requisição* para cada uma das Regras de Três. Essa fase preliminar, no ensino, poderia se dar por meio da narrativa do professor, expondo o modo de pensar essa praxeologia, que poderia ser, mais ou menos, assim:

“5 niskas é o *fruto* dos *argumentos* 100 niskas em 1 mês. Fixando o *argumento* 100 e variando os meses, podemos procurar quanto 100 produzirá em 12 meses. Uma vez conhecido o quanto 100 produz em 12 meses, procuramos o quanto 16 produzirá nesse mesmo período de 12 meses”.

Isso encaminha a seguinte sequência de Regras de Três:

1ª Regra de Três: Se 100 *niskas* em 1 mês produz 5 *niskas*. Quanto produzirá em 12 meses?

O *argumento* e a *requisição* são similares, nesse caso, o tempo (meses). O *fruto* é o produzido, nesse caso, a grandeza diferente (juro). O esquema gráfico de arranjo de dados então segue nessa ordem.

Argumento=1 mês; Fruto=5 juro; Requisição=12 meses:

1	5	12

$$[(12\text{x}5) \div 1] = 60$$

Dai, o juro para 100 *niska*s em 12 meses é 60 *niskas*.

2ª Regra de Três: Se 100 *niskas* produz em 12 meses 60 *niskas*. Quanto produzirá 16 *niskas* em 12 meses?

De modo análogo, considerando as grandezas similares, encontramos *argumento* e *requisição* (Capital) e o *fruto* é o produzido pelo capital 100, no caso o juro de 60 *niskas*. Isso encaminha a segunda ordem de dados no esquema gráfico, como segue.

Argumento = 100 *niskas*; *Fruto*= 60 *niskas*, Requisição= 16 *niskas*

100	60	16

$$[(16 \times 60) \div 100] = 960 \div 100 = 48 \div 5 = 9 \text{ e } \frac{3}{5}$$

Portanto, para 16 *niskas* é 9 niskas mais a fração $\frac{3}{5}$ de *niska*.

Esses tipos de problemas seriam enfrentados mais tarde por meio de novas regras, específicas para cada tipo/gênero de problemas, propostas pelos matemáticos hindus. No entanto, Sarma (2002) assim questiona:

Q_{23}: Mas é necessário ter uma nova regra e um novo arranjo de dados?

Esse questionamento pode decorrer da invisibilidade da lógica da prática do processo que exige desdobrar o problema original em uma sequência de problemas supostamente mais simples. Isso inclui a habilidade taxionômica de termos técnicos necessária para cada problema simples para o emprego da Regra de Três.

Essa complexidade não é alertada no comentário de Bhaskara I, sobre o Aryabhatiya, segundo Sarma (2002), quando afirma que as regras de cinco, sete e etc., são combinações de Regras de Três:

> A regra de cinco, etc. consiste na combinação de regras de três. Na regra de cinco há duas regras de três, na regra de sete, três regras de três, na regra de nove, quatro regras de três, e assim por diante (DATTA; SINGH 1962, p. 211, apud SARMA,2002, p.145, tradução nossa).

Esse comentário não estabelece como fazer o desdobramento do problema em suas combinações. Talvez, por isso, Sarma (2002) ratifique o texto, questionando em seguida:

Q_{24}: Por que esses problemas não podem ser resolvidos por uma série de Regras de Três?

No entanto, o desdobramento correto da sequência de Regras de Três que resolve o problema fora percebido como difícil, ou até impossível, de ser ensinado, embora a dificuldade seja imputada à aprendizagem. Essa nossa afirmação decorre da observação de um comentário de um anônimo sobre o *Patiganita*, apresentado por Sarma (2002), em resposta a seus questionamentos.

> As regras de cinco, etc., podem ser resolvidas postulando várias sucessivas regras de três. Mas identificar em cada caso corretamente o argumento, fruto e requisição, requer certa habilidade lógica que o aluno pode não ter. Por isso, esta nova regra (SARMA,2002, p.148, tradução nossa).

Assim, para atender ao ensino com propósito de uma aprendizagem eficaz, uma nova regra é criada. É criado um dispositivo didático para orientar os arranjos de dados que permitiria a facilidade dos cálculos, com economia de tempo e espaço, e, sobretudo, que minimizaria a necessidade das habilidades lógicas para o desdobramento do problema.

As novas regras a que se refere o anônimo para enfrentar os problemas com número ímpar de termos constituíam-se o dispositivo didático, um processo algorítmico que, além do arranjo inicial dos dados em acordo com os termos técnicos, orientava o rearranjo de dados de modo a levar às operações finais ficarem restritas a números inteiros.

Como em todo algoritmo, havia um processo geral que podia ser ligeiramente modificado para atender a outras especificidades de tipos de problemas e, com isso, gerar novos algoritmos. Todos esses algoritmos ou procedimentos a que ora referimos são chamados de *variantes da regra*.

O dispositivo a que referimos acima eram esquemas gráficos munidos de regras simples de movimentação de dados em seu interior, de modo que uma pessoa comum pudesse fazer sem dificuldades. Uma vez finalizado os rearranjos de dados, somente números inteiros estavam presentes para perfazer as operações de primeiro multiplicar e depois dividir. Esses esquemas gráficos e as regras associadas se constituem assim no quarto aspecto da técnica das praxeologias da Regra de Três.

2.5. As Variantes da Regra de Três e os Esquemas Gráficos

Os esquemas gráficos foram usados para orientar os rearranjos dos dados de modo a deixá-los prontos para atender à regra com sua ergonomia, que preconizava multiplicar inteiros e ao final dividir para obter o resultado procurado.

Uma vez “identificados” os termos técnicos *argumento, fruto* e *requisição,* os dados eram dispostos em um quadro com duas colunas, uma associada ao *argumento* e outra à *requisição*, por vezes fechados com bordas simples ou duplas e, em geral, com divisões internas que formavam as células.

Esse quadro tinha o papel de orientar a movimentação dos dados no desenvolvimento do processo em diferentes arranjos, de modo a se obter um quadro final somente com números inteiros, que eram encaminhados para o passo derradeiro de efetuar as operações preconizadas pela ergonomia da regra.

Os escritores seguiam as regras gerais, chamadas de Regras de Número Ímpar de Termos, que foram construídas com pequenas variações umas das outras, mas as versões que recorrem aos esquemas gráficos de arranjos de dados se destacaram. Entre elas, a proposta por Brahmagupta, em 628, que prescreve um quadro com dupla coluna vertical (SARMA, 2002), inclusive para a Regra de Três.

Escritores posteriores, como o comentarista anônimo no Patiganita, seguiram o uso desses esquemas gráficos de arranjo de dados e identificaram as duas colunas; a coluna das quantidades pertencentes ao *argumento* foi designada por *pramana-rasi-paksa* e para a coluna das quantidades pertencentes à *requisição* foi designada como *ichhâ-rasi-paksa*.

Esse olhar para os dados do problema como elementos de dois conjuntos parece ser um procedimento definitivo com inequívoco auxílio à construção do quadro para aplicação da ergonomia da regra, como veremos.

Para melhor entendimento do processo, retomemos o seguinte exemplo resolvido anteriormente, com uma sequência de duas Regras de Três.

"Se o juro de cem *niskas* em um mês faz cinco *niskas*, qual será o
juro de 16 *niskas* em 12 meses?

1ª Regra de Três: Se 100 *niskas* em 1 mês produz 5 *niskas*. Quanto produzirá em 12 meses?

Argumento=1 mês; Fruto=5 juro; Requisição=12 meses

1	5	12

$$\frac{12 \times 5}{1} = 60$$

Nessa solução do primeiro desdobramento, deixaremos sem efetuar as operações como dado do segundo desdobramento.

2ª Regra de Três: Se 100 *niskas* produz, em 12 meses, $\frac{12\times5}{1}$ *niskas*. Quanto produzirá 16 *niskas* em 12 meses?

Argumento e *Requisição* (Capital) e o *Fruto* produzido (pelo capital 100), no caso o juro $\frac{12\times5}{1}$. Isso encaminha a segunda ordem de dados como segue:

Argumento = 100 *niskas*; Fruto= $\frac{12\times5}{1}$ juro, Requisição= 16 *niskas*

100	$\frac{12 \times 5}{1}$	16

$$\frac{16 \times 12 \times 5}{100 \times 1}$$

Agora, basta observar que esse procedimento poderia ser realizado dispondo os dados do problema original em duas colunas. A primeira coluna dos dados que estabelecem as condições iniciais do problema e a segunda coluna dos dados incompletos, deixando o lugar do dado requerido vazio.

100	16
1	12
5	

Se permutarmos as duas últimas células do quadro, que são os *frutos*, obtemos o seguinte novo quadro:

100	16
1	12
	5

Calculando o produto dos termos de cada coluna e em seguida dividindo o produto da coluna com maior número de termos pela outra coluna, obtemos a solução encontrada anteriormente:

$$\frac{16 \times 12 \times 5}{100 \times 1}$$

Brahmagupta dá generalidade completa para esse procedimento em três passos, segundo Sarma (2002, p.146, tradução nossa). Mas, para melhor clareza do processo de Brahmagupta, e atender a nossos objetivos, desmembramos o terceiro passo em dois, destacando as operações segundo a ergonomia. Com isso, o processo passa a ser descrito em quatro passos da seguinte forma:

(i) Arranjar os dados fornecidos em duas colunas, a primeira coluna que contém os dados relativos ao *argumento*, a segunda contendo os que dizem respeito à *requisição*;

(ii) Transpor os dois *frutos*;

(iii) Transpor os denominadores.

(iv) O produto dos termos da coluna com o maior número de termos é dividido pelo produto dos termos da coluna com o menor número de termos.

Essa construção podia ser abreviada, observando-se que os termos de mesma denominação deviam ser escritos em células de uma mesma linha horizontal. A célula correspondente ao termo procurado ficava vazia ou com o símbolo “0”, que não se confundia com o número zero e nenhuma operação era feita com ele. Mas era de utilidade estratégica no processo por identificar o lado com menor número de termos.

> Em alguns comentários sobre o *Lilavati* (Asiatic Society of Bengal manuscripts) encontramos os números escritos sem compartimentos, mas em tais casos o símbolo “0” é usado para denotar a ausência de um termo. Após a transposição, o lado em que “0” ocorre contém um número menor de termos do que o outro (DATTA; SINGH,1938, p.213, tradução nossa).

É importante deixar claro que havia variações da Regra de Três com esses esquemas gráficos de arranjo de dados. Ela, a RT, podia ser desenvolvida a partir do dispositivo que seguia a ordem dada pela sequência dos termos técnicos (*argumento, fruto* e *requisição)*, em uma única linha horizontal ou uma única coluna vertical, ou ainda por meio do dispositivo de duas colunas, tendo a célula do procurado vazia ou com o símbolo “0”. Sarma (2002, p.154) exemplifica isso recorrendo ao seguinte problema:

Exemplo 3: Se 5 mangas custam 10 rúpias, quanto 8 mangas custarão?

Os dados das quantidades podiam ser dispostos de diferentes maneiras, como mostrados a seguir:

5	10	8

5
10
8

5	8
10	

5	8
10	0

Mas, as variantes da Regra de Três, como as regras de cinco, sete termos e mais termos, o esquema gráfico de duas colunas se tornou preferível. Em todo caso, fica clara a mecanicidade do processo que fazia, sem dúvida, as variantes da RT, assim como a própria RT, constituírem-se em regras *protoalgébricas,* no sentido de serem “procedimentos ou algoritmos específicos para resolver tipos específicos de problemas” (HEEFFER, 2007, p.6, tradução nossa).

Os diferentes problemas podiam ser ensinados e aprendidos com as novas regras, com seus respectivos esquemas gráficos. Parece-nos, portanto, que essas novas regras atendiam a interesses do ensino da praxeologia da Regra de Três, cujo domínio era desejado pela sociedade para o exercício de diferentes atividades como, por exemplo, fazia o reinado de *Somesvara*, ao exigir que seus contadores reais fossem versados em multiplicação e divisão (com frações) e nos métodos de aplicação da Regra de Três (SARMA, 2002).

Pois, se não há dúvidas entre historiadores da Matemática de que o propósito de Aryabhata, ao enunciar a RT, foi empregá-la em cálculos astronômicos, por exemplo, no cálculo da posição média de um planeta, a partir do número de revoluções em um *kalpa* de 4.320.000.000 anos, parece claro que esse fazer não foi somente para atender às suas próprias necessidades, mas para tornar possível que uma pessoa comum pudesse também dominar a práxis de fazê-la.

Seguindo esse sentido, Bhaskara I (522), de acordo com Sarma (2002), apresentou pela primeira vez sete exemplos de problemas com regras próprias, conhecidas como variantes da Regra de Três, para seus enfrentamentos, inclusive com respeito ao uso ou não de frações, que se tornaram posteriormente tópicos de interesse, em particular, em textos sobre a aritmética prática e comercial. São eles:

(i) o problema do *preço* e a *quantidade* de sândalo;

(ii) o problema do *preço* e o *peso* do gengibre (o problema tem frações e ilustra a regra de Aryabhata para as frações);

(iii) o problema do *preço* e a *quantidade* de almíscar, também com frações;

(iv) o problema da *cobra* ao entrar num buraco;

(v) *o* problema *das quantidades mistas* (misrakardsis);

(vi) o problema de *Sociedade* (praksepakarana);

(vii) o problema da *sociedade* expressa *com frações* (bhinna).

Esses exemplos de Bhaskara I (522) cobriria toda a gama de problemas na qual a Regra de Três podia ser aplicada. De acordo com Sarma (2002), matemáticos posteriores a Bhaskara I, como Sridhara (750) e Mahavira (850), criaram temas independentes com essas variações, como *gati-nivrtti* "movimento para frente e para trás", *praksepa-karana* "sociedade" e vários tipos de *misraka* "quantidades mistas", com formulações de regras específicas para suas resoluções.

Os enfrentamentos desses tipos de problemas envolviam o uso sequencial de Regras de Três que não eram facilmente encontradas por aqueles que não estavam dotados das habilidades lógicas das práticas dos problemas, no entanto, era de poder prático inquestionável.

Para compreendermos esse poder com os esquemas gráficos de arranjos de dados, o seu papel instrumental, torna-se indispensável observarmos o uso da Regra de Três em situações de composição, que dariam origem às denominadas Regras de Três Compostas, a partir das regras de cinco, sete, nove e mais termos, chamadas respectivamente *Pañcarasika*, *Saptardsika*, e *Navarasika*. Entre essas, em destaque, um gênero de problema com cinco termos que ganhou notoriedade com um algoritmo, que veio a ser denominado de Regra de Três Inversa.

Esse nosso pensar é motivado pela observação de que a Regra de Três Composta, que inclui a Regra de Três Inversa, não aparece no manuscrito de Bakhshali (c.200). Esse texto, segundo Sarma (2002), não parece estar ciente de qualquer regra além da RT, inclusive a Regra de Três Inversa. Os problemas que resolveríamos com a RT inversa e que estão disponíveis no trabalho, ora referidos, são nele resolvidos por meio de duas RT simples sucessivas.

Como bem afirmou Høyrup (2007a), a regra não é dada pelo problema. É o método, e, nesse caso, transposto em forma de algoritmo. Assim, os problemas com cinco, sete ou mais termos são resolvidos por regras próprias que aqui denominamos de Regras de Três Compostas e, em particular, Regra de Três Inversa.

2.5.1. As Regras de Três Compostas

Começamos exemplificando, e, para isso, recorremos ao Exemplo 2: Se o juro de cem *niskas* em um mês em um mês faz cinco *niskas*, qual será o juro de 16 niskas em 12 meses?, problema de cinco termos que foi resolvido anteriormente por uma sequência de duas Regras de Três.

O emprego da nova regra começa escrevendo os dados em duas colunas, uma do *argumento* e outra da *requisição*, usando uma linha para cada grandeza, como segue:

100	16
1	12
5	0

Em seguida, escrevemos o novo quadro obtido do quadro anterior, permutando os *frutos*:

100	16
1	12
0	5

Como não há denominadores, o terceiro passo é desnecessário. Segue-se então o quarto e último passo, que consiste em fazer o produto dos números de cada coluna e dividir o produto da coluna com mais termos (não confundir com fatores) pelo produto com menos termos, como segue.

$$\frac{16 \times 12 \times 5}{100 \times 1} = \frac{960}{100} = 9\frac{3}{5}$$

Parece que esse esquema gráfico de arranjo de dados, desenvolvido pelos matemáticos hindus, poderia minimizar a dificuldade de identificar as grandezas com os termos técnicos, pela falta de habilidade dos alunos. O leitor apressado pode até concluir que o esquema gráfico elimina completamente a dificuldade oriunda da falta de habilidade do aluno em fazer a relação entre as grandezas e os termos técnicos.

Essa conclusão pode decorrer da apressada associação da resposta procurada com o *fruto*, um dos passos da mecânica do processo, a que exige permutar os *frutos* entre as colunas. Mas, tal identificação pode levar ao insucesso. É preciso ter clareza de que o *fruto* é determinado pelo contexto do problema.

O exemplo tomado acima pode mostrar isso, se o reformularmos do seguinte modo:

Exemplo 4: 100 *niskas* produz 5 *niskas* em 1 mês. Em quantos meses 16 *niskas* produzira 48/5 *niskas*?

Os dados são:

100 *niska*, 1 mês, 5 *niska* e

16 *niska*, “0” meses, $\frac{48}{5}$ *niska*

Os termos são escritos então em colunas no quadro abaixo, observando que a fração é escrita sem o traço que separa numerador do denominador:

100	16
1	0
5	48 5

Agora, o passo seguinte é permutar os *frutos*. O problema trata do mesmo tipo de situação em contexto que impõe que o interesse (juros) seja o fruto. Assim, os números da última linha são permutados, para obter o seguinte quadro:

100	16
1	0
48 5	5

O passo final para o quadro é a permutação dos denominadores, que produz o seguinte quadro final:

100	16
1	0
48	5 5

A coluna com menos dados é a que contém o símbolo “0”, já que denominadores não eram contados, e, portanto, a coluna com mais termos é a primeira, cujo produto de seus dados é 4800. O produto dos números da coluna menor é 400. Portanto, o resultado é:

$$\frac{4800}{400} = 12 \text{ meses}$$

A generalidade da nova regra permitiu a formulação de variações a partir de alterações pontuais sobre os passos do processo. Essas variações se constituíam em regras específicas para tipos específicos de problemas. Brahmagupta, por exemplo, fornece regras específicas para diferentes tipos de problemas, como para o *problema de troca de comodites*, cuja regra específica pode ser anunciada em português, mais ou menos, assim:

> Na troca de produtos, transposição de preços sendo os primeiros termos a ocuparem lugar; e o resto do processo é o mesmo que foi acima descrito (SARMA, 2002, p.150, tradução nossa).

Essa regra inclui o passo que comanda a permuta dos preços entre as colunas, sem fazer referências aos termos técnicos (*argumento, fruto* e *requisição*), e orienta que ocupem as primeiras células do esquema gráfico de arranjo de dados. Feitas essas considerações, o processo deve ser seguido com o restante dos passos anteriormente prescritos.

Para mostrar esse processo, emprestamos de Sarma (2002, p.150) o seguinte problema de troca:

> Exemplo 5:Se uma centena de mangas é comprada por dez *panas*, e de romãs por oito, quantas romãs (devem ser trocadas) por vinte mangas?
> Sentença:

10	8
100	100
20	

Após a transposição dos preços e também do fruto,

8	10
100	100
	20

Resultado: $\frac{10\times100\times20}{8\times100} = 25$ romãs.

Essa estratégia didática de algoritimizar procedimentos para tarefas específicas é recorrente no Ensino de Matemática e isso leva a um elevado número de procedimentos e fórmulas que poderiam ser evitadas, tendo em conta os gêneros de tarefas. Isso reduziria o encontro prematuro com praxeologias pontuais.

Podemos supor que a diversidade de algoritmos para a diversidade de tipos de problemas, um para cada tipo, proposto pela Matemática Hindu poderia decorrer das carências de saberes matemáticos. Esses se encontrariam ainda em seus primeiros momentos de vida e não permitiam outras e diversificadas criações didáticas.

Mas essa criação didática com esquemas gráficos de arranjo de dados produziu objetos matemáticos de ensino que intrigam pesquisadores, que em manifestações explícitas restringem frequentemente seus estudos reflexivos à Regra de Três adjetivada de "direta" com afirmações do tipo: "Fixaremos nossa atenção na proporcionalidade direta, que chamaremos apenas de "proporcionalidade" (LIMA, 2004, p.94).

Essa nota decorre da observação de que uma das regras variantes da Regra de Três, em princípio para problemas de cinco termos, que podem nem todos serem explícitos, ganhou importância e se estabeleceu como uma praxeologia que chegou a produzir uma taxionomia artificial para a Regra de Três; a Regra de Três padrão, chamada de RT Direta, e essa variante que ganhou a denominação de RT Inversa.

2.5.2. A Regra de Três Inversa: Uma Criação Didática

A RT Inversa, hoje justificada com a estranha proporcionalidade inversa, visto que tal relação não é de proporcionalidade, é uma criação didática para facilitar o ensino, como era característico no ensino hindu da Matemática por meio de algoritmos específicos para tipos de problemas específicos, que envolviam três grandezas em que o *fruto* é constante.

Nesse caso, esse tipo de problema pode ser identificado, observando que quando as variações das grandezas, que sempre dependem do problema, são vistas como em sentidos opostos, ou seja, quando uma grandeza varia de modo crescente a outra grandeza varia de modo decrescente.

Para esse tipo de problema, desenvolveu-se um algoritmo específico, por meio da técnica variante da Regra de Três Composta, como mostraremos, a partir do seguintes exemplos; um contido em Sarma (2002) e outro em Datta e Singh(1938), tomados emprestados, respectivamente, de Bakhshali (c.200) e Trisatikâ (750).

Exemplo 6: "Se uma pessoa pode viver com oito *drammas* por quarenta e dois dias, então quanto tempo pode setenta pessoas viverão com a mesma quantidade de dinheiro?

No Manuscrito de Bakhshali, a solução acontece em duas etapas, usando a Regra de Três, mais ou menos, como segue:

(i) Se 1 pessoa vive com 8 dramas, 70 pessoas vivem com quanto?

Os três termos são:1, 8 e 70 e o resultado é $(70 \times 8) \div 1 = 560$ *drammas*.

(ii) Se (70 pessoas podem viver) com 560 por 42 dias, quantos dias durará 8 *drammas*?

Os termos são: 560, 42 e 8 e resultado $(8 \times 42) \div 560 = \frac{3}{5}$ dias, que é a resposta procurada.

Nesse caso, a terceira grandeza é o total de *drammas* para 70 pessoas para viver um dia que não é explicitado. Essa resolução é abreviada, usando o algoritmo específico da variante da RT, chamada de Regra de Três Inversa. Assim, escrevemos *argumento, fruto* e *requisição*, 1, 42 e 70, e obtemos o resultado operando no sentido inverso da Regra de Três $(1 \times 42) \div 70 = \frac{3}{5}$ dias.

Exemplo 7. "Em vinte colares, cada um contém oito pérolas. Quantos colares, contendo seis pérolas cada um, podem ser feitos?"

O problema é resolvido por uma sequência de Regra de Três. Primeiramente, temos:

1º) Em um colar há 8 pérolas. Quantas pérolas há em 20 colares.

1	8	20

Fazendo as operações da regra de três, encontra-se que há:

$[(8 \times 20) \div 1] = 160$ pérolas.

2ª) Se 6 pérolas produzem um colar, quantos colares poderão ser produzidos com 160 pérolas?

Colocando os números, temos:

6	1	160

Aplicando a regra:

$$[(160 \times 1) \div 6] = \frac{160}{6}$$

Resultado: 26 $\frac{2}{3}$ colares.

Esse tipo de problema apresenta uma grandeza implícita que é a quantidade total de pérolas disponíveis, mas não está explícita no problema que essa quantidade é mantida para a questão posta. Desse modo, este tipo de problema é de cinco termos, mas é, em geral, tomado como um problema de três termos.

Sarma (2002), citando Bhaskara II, afirma que esse tipo de problema pode ser identificado se o aumento da *requisição* diminuir o *fruto*, ou se com sua diminuição aumentar o *fruto*.

Nesse caso, a solução do problema pode ser encontrada pela regra inversa; um algoritmo obtido, alterando o último passo preconizado pela Regra de Três; a direção das operações deve ser tomada em sentido inverso, como mostra o esquema abaixo:

Direção das quantidades: A→B→C. Direção dos Cálculos: A→B→C: (A×B)÷C.

Embora Bhaskara I afirmasse que a Regra de Três Inversa era o reverso da Regra de Três, Brahmagupta, segundo Sarma (2002), foi o primeiro que anunciou essa regra específica na integra: “Na regra de três inversa, o produto do *argumento* pelo *fruto* dividido pela *requisição* é a resposta”. Em ambos os problemas, ora considerados, a solução é abreviada.

Usando essa regra no primeiro problema (Exemplo 6), escrevemos *argumento*, *fruto* e *requisição*, 1 - 42 - 70, obtemos o resultado operando no sentido inverso da Regra de Três:

$$[(1 \times 42) \div 70] = \frac{3}{5}\ dias.$$

De modo análogo, a solução do segundo problema (Exemplo 7) é assim encaminhada:

8	20	6

$$[(8 \times 20) \div 6] = 26\ colares\ e\ \frac{2}{3}.$$

Mas, como em todas as variantes da RT, há claras dificuldades de fazer as relações entre as quantidades das grandezas e os termos técnicos. O dispositivo didático anunciado por Bhaskara II ainda não era suficiente para eliminar as dificuldades de falta de habilidades com as lógicas das práticas. Isso pode ser depreendido do seguinte extrato que Bhaskara II no Lilavati estabeleceu:

> Por exemplo, quando o valor dos seres vivos é regulado por sua idade; no caso do ouro, onde o peso e o toque são comparados; ou quando montes são subdivididos; a regra de três inversa é [utilizada] (Lilavati: 75; trans. COLEBROOKE, 1817, p.34, tradução nossa).

O extrato deixa escapar a dificuldade quando explicitamente aponta tipos de práxis em contextos em que se devia usar a regra inversa. As relações entre as grandezas e os termos técnicos são fundamentais para "verificar" se o aumento de quantidades de uma leva à redução de quantidades de outra.

Para ficar claro o que queremos dizer, consideremos os exemplos a seguir extraídos de Sarma (2002), relativos à venda de mulheres que se tornaram notórios. Sarma, citando Al-Biruni, apresenta o seguinte problema:

> Exemplo 8: Se uma moça de dezesseis anos, com sua voz doce como a de um *grou*, dançando e gorjeando como um *pavão*, recebe 600 moedas, quanto receberia uma de 25 anos? (*Brahmasphutasiddhanta*:769, apud SARMA,2002, p. 150, tradução nossa).

Esse tipo de problema apresenta objetivamente três termos para duas grandezas, o que pode levar ao uso da Regra de Três. Mas, há a notória dificuldade de identificar o tipo de problema com o tipo de variante da RT que o soluciona, nesse caso, a variante reversa da RT.

Essa dificuldade para esse problema pode ser eliminada quando Bhaskara II afirma que preço dos seres vivos, sejam eles escravos ou animais de tração, devem ser tomados como inversamente proporcionais às suas idades. Nesse caso, basta considerar a prostituição como escravidão, que o tipo do problema fica determinado.

Vale observar, então que há a carência de uma informação que somente quem está dotado da lógica dessa prática conhece. Isso fica mais claro quando Bhaskara II destaca que essa relação tem alcance limitado.

> Mas o preço não aumentava indefinidamente com a diminuição da idade. Existe uma idade fixada que recebe o preço máximo. Para o caso das escravas a serem empregadas para o trabalho manual ou para a apreciação sexual era adotada a idade de dezesseis anos. Ganesa Daivajfia observa, "Uma mulher de dezesseis anos alcança o ideal com respeito a seu corpo e qualidades. Portanto, ela recebe o preço máximo nessa idade"(*BUDDHIVILASINT*, Parte 1: 74, apud SARMA,2002, p.151, tradução nossa).

Segue então pelo menos dois questionamentos inevitáveis, por exemplo: Como um aluno, não dotado da habilidade lógica dessa prática, poderia perceber tal relação? Como saberia a idade de preço máximo? Os alunos, ou qualquer pessoa, não dotada da habilidade da lógica dessa prática, necessária para enfrentar uma problemática, teria insucesso.

Portanto, essa variante da Regra de Três goza da dificuldade de estabelecer as relações entre as quantidades das grandezas e os termos técnicos, bem como da dificuldade de perceber a relação inversa entre o *argumento* e o *fruto*.

É claro que outros critérios de identificação desse tipo de problema, embora relacionada a anterior, são úteis para o ensino. Especificamente, se o problema deixar escapar uma terceira grandeza adicional que pode ser atribuída pelo produto de outros termos para o *argumento* e a *requisição*, esses produtos podem ser tomados como *argumento* e *requisição* para o reverso da regra. Isso pode ser mostrado pelo seguinte problema de cinco termos constante em Sridhara (750):

> Exemplo 9: Alguma quantidade de fio foi usada em cobertores de tecelagem de largura 3 e de comprimento 9, os cobertores, assim, tecidos são 200. Com o mesmo fio quantos cobertores podem ser tecidas de largura 2 e 6 unidades de comprimento? (*Patiganita*: exemplo 37, apud SARMA, 2002, p.151, tradução nossa).

Nesse problema, o *argumento* e a *requisição,* que são a quantidade de fio, não estão claramente postos, então para isso é considerado as áreas de cada tipo de tapete - lógica da prática que assegura que a área do tapete é uma medida da quantidade de fio que contém o tapete - e as colocam essas áreas como *argumento* e *requisição*.

Desse modo, é possível inferir - novamente por uma lógica prática - que quanto menor a quantidade de fio, maior será a quantidade de tapete produzida.

> Aqui pela multiplicação da largura e o comprimento, a área é conhecida. Assim o produto de 3 e 9 é 27. O produto de 2 e 6 é 12. A área 27 é a medida da quantidade dada (jhãtameyasamkhyã). Por isso, é o argumento. A quantidade 12 é a requisição por inversão. O número conhecido é o termo médio. Declaração: 27/200 / 12. Ao proceder de acordo com a regra dada, o resultado obtido é 450 (SARMA,2002, p.151, tradução nossa).

O seguinte exemplo de um problema de sete termos reafirma o que queremos destacar:

Exemplo10: De um rubi gigantesco, medindo 4, 9, 8 côvados de comprimento, respectivamente, largura e altura, quantos ícones podem ser esculpidos de Tirthahkaras, cada um medindo 2, 6, 1 côvados de comprimento, largura e altura, respectivamente? (*Ganitasãrasamgraha*, 5.21, apud SARMA, 2002, p.152).

Segundo Sarma (2002), provavelmente, Mahavira (850) iria colocar abaixo os números assim:

4,9,8	1	2,6,1

Levar o produto de cada grupo e proceder como preconiza a Regra de Três inversa:

$$(4 \times 9 \times 8) \times 1 \div (2 \times 6 \times 1) = 288 \div 12 = 24.$$

Como pode ser notado, em alguns casos, por meio de regras ou informações auxiliares, é possível ter sucesso mesmo que não se conheça a lógica da prática. Mas, de modo geral, as variantes inversas da RT são empregadas em situações específicas que devem ser de algum modo, familiares aos alunos para que as habilidades da lógica da prática estejam a eles disponíveis para encaminhar a variante da RT adequada para a solução do problema considerado.

Ainda segundo Sarma (2002), todo arranjo que pode ser utilizado para a Regra de Três, bem como os adotados para as regras com mais termos, foi desenvolvido no século VII, por exemplo, Brahmagupta em 628 prescreveu, de modo geral, a dupla coluna vertical para todas as regras com número ímpar de termos, em particular para a RT.

Entretanto, é importante, por sua generalidade, destacar o seguinte processo descrito em um manuscrito Telugu.

> [...] o que está claro é um método simples de resolver os problemas da regra de cinco, etc. Definir todos os termos horizontalmente em uma sequência. Se existem n termos, tomar o produto do último $\frac{(n+1)}{2}$ e dividir esta pelo produto do primeiro $\frac{(n-1)}{2}$ termos. Assim, no caso de a regra de cinco, o produto dos últimos três termos é dividido pelo produto dos dois primeiros termos; ou, no caso da regra de sete, o produto do quarto, quinto, sexto e sétimo termos é dividido pelo produto do primeiro, segundo e terceiro termos (SARMA,2002, p.149, tradução nossa).

De acordo com Sarma (2002), esse processo Telugu é o último estágio do processo de Brahmagupta com dados sem frações e é o que Bhaskara I havia sugerido antes de Brahmagupta propor o arranjo das duas colunas verticais. Infelizmente, nem data, nem autor desse fragmento de texto é conhecido (SARMA, 2002, p.149, tradução nossa), que permita dar crédito histórico como fundador dessa práxis.

2.6. Outros Usos da Regra de Três

Fica claro pelo exposto até aqui que o mérito da Regra de Três não se reduzia a estabelecer procedimentos de resolução de problemas para um tipo específico, pois a RT, mesmo a forma anunciada por Aryabhata, desempenhou papel importante como tecnologia para o desenvolvimento de outras práxis regradas a partir dela, como as RT compostas e RT inversas, destacadas por Bhaskara I, como casos especiais da Regra de Três, e, em forma mais geral, por Bhaskara II, quando afirmou que as diversas variações da RT permeavam todo o campo da Aritmética.

As variações da Regra de Três foram apresentadas acima, mas o uso como tecnologia vai mais além. A variação com esquema gráfico de arranjo de dados foi usada como tecnologia para justificar a técnica da divisão de frações. Isso está em evidência em Datta e Singh (1938), a partir do apresentado em *Aryabhatiya*. A tradução do extrato desse texto é, mais ou menos, o seguinte:

> A regra de três enuncia o resultado como: $\frac{f \times i}{p}$, (f=*phala*, isto é, “fruto”, i=*iccha*, “demanda ou requisição”, p=*pramâna*, “argumento”).

> Quando essas quantidades são fracionárias, obtemos uma expressão da forma: $\dfrac{\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}}{\frac{m}{n}}$, para avaliação da qual Aryabhata I anunciou:
> "Os multiplicadores e o divisor são multiplicados pelos denominadores uns dos outros."
> Como será explicado mais adiante, as quantidades são escritas como:
>
> | | |
> |---|---|
> | a

b | m

n |
> | c

d | |
>
> Transferindo os denominadores temos:
>
> | | |
> |---|---|
> | a

n

c | m

b

d |
>
> Executando a multiplicação, o resultado é: $\dfrac{anc}{mbd}$.
>
> (DATTA; SINGH,1938, p.197, tradução nossa).

O *Manuscrito Bakhshali* emprega frequentemente a Regra de Três para verificação com as palavras *pratyaya* e *trairasikena*, o mesmo acontece com Ganesa no seu comentário em *Buddhivilasini* sobre o Lilavati (SARMA,2002).

De acordo com Sarma (2002):

> No século IX, *Govindasvamin* tentou relacionar a Regra de Três com as ciências lógicas considerando como um caso de inferência. Ele afirma que do mesmo modo que há uma concomitância invariável entre a fumaça e o fogo, há também entre o argumento e o fruto. Do mesmo modo que é inferido de que há fogo na montanha porque há fumaça nessa montanha, inferimos em relação ao argumento e ao fruto que permite calcular o fruto a partir da requisição (SARMA,2002, p.140, tradução nossa).

Esse olhar dispensa qualquer justificativa para a RT, mas encaminha a necessidade de um sistema de percepção e ação para identificar e enfrentar as situações chamadas de problemas de "regra de três". Nesse sentido, enfrentar tais problemas exige que a pessoa seja dotada de saberes práticos, mais precisamente, dos necessários *habitus* (BOURDIEU, 1989) associados à essas situações.

Assim, qualquer algoritmo ou procedimento usado para resolver uma problemática que podia ser percebida como de Regra de Três, teria sua validade aceita se fosse confirmado com o uso da RT.

2.7. Considerações Sobre as Praxeologias Hindus da Regra de Três

A Regra de Três se impôs na Índia ao longo do tempo, de tal modo que os textos de Bhaskara II, tanto em Lilavati quanto em *Siddhantasiromani*, assumem a Aritmética majoritariamente fundamentada, inclusive tudo o que era ensinado sob essa denominação, pela Regra de Três.

Segundo esses autores, a RT permeava toda a ciência do cálculo, de modo que tudo que era calculado na Álgebra ou Aritmética que envolvesse a multiplicação e divisão poderia ser por ela compreendido (SARMA,2002).

Assim, a maioria dos tópicos podia ser visto como variações da Regra de Três. Isso fica claro, quando observamos a afirmação contida em *Siddhantasiromani,* segundo Sarma (2002), Bhaskhara II reitera que a Aritmética como basicamente aplicações e variações da RT. Essa afirmação pode ser traduzida, mais ou menos, assim:

> Deixando a quadratura, a raiz quadrada, o cubo e a raiz cúbica, o que for calculado é certamente uma variação da regra de três, nada mais. Para a crescente a compreensão dos medíocres intelectos como o nosso, o que foi escrito de várias maneiras para a sagaz aprendizagem com amor no coração como o do pássaro *cakora*, tornou-se aritmética Siddhantasiromani, Goladhyaya Prasnadhyaya, 3-4; trans. (DATTA; SINGH 1962,1: 210, apud SARMA, 2002, p.139, tradução nossa).

É importante notar, então, que nesse extrato de texto a aritmética é posta como criação da escola com base predominante da Regra de Três. Em nossa compreensão, a RT foi um saber criado na escola para a escola, uma Transposição Didática Inversa (CHEVALLARD, 2005), que, como tal, sofrerá incompreensões dos acadêmicos.

Talvez, por isso, as praxeologias atuais da Regra de Três de nossas escolas sejam frequentemente questionadas por acadêmicos nos currículos escolares, recomendando que sejam tratadas como método para resolver problemas de proporcionalidade.

2.7.1. A Tecnologia das Praxeologias da Regra de Três Hindu

Sobre essa fundamentação da proporcionalidade, Sarma (2002) descarta a afirmação de Smith (1925) de que a proporção teria sido escondida sob a forma de uma regra arbitrária e que a conexão fundamental entre as duas somente teria atraído atenção dos matemáticos, a partir do período renascentista.

Smith (1925) afirma que a Regra de Três foi um caso de proporção bem conhecido, mas que não ficava evidente, porque a práxis indiana não expressava a forma (a : b : : c : d), como o Ocidente estava acostumado a ver a proporção.

Esse pensar é demonstrado por *Bhattotpala*, quando afirma que as proporções eram a matemática da Regra de Três. Nessa linha, seguem os comentários de Bhaskara I sobre a regra de Aryabhata. Esses comentários deixam claro essa relação, afirmando que a RT descreve nada mais que os fundamentos da proporção, e que todas as outras, como a regra de cinco, por exemplo, seguem esse fundamento.

> [...] descreveu apenas os fundamentos de *anupâta* (proporção). Todas as outras, como a Regra de Cinco, etc., resultam dessa regra fundamental da proporção (DATTA; SINGH,1938, p.211, tradução nossa).

É claro, entretanto, que não há condições explicitas nos enunciados dos problemas que permitam assegurar que as grandezas neles referidas possam apresentar, arbitrariamente, quantidades proporcionais.

Tendo em conta que uma praxeologia não inclui ou exclui a lógica que nela se expressa, a praxeologia hindu da Regra de Três pode ser compreendida de diferentes modos.

Como matemáticos, podemos pensá-las como métodos de resolução de problemas, em que a proporcionalidade se faz presente de algum modo, mesmo que por imposição da cultura da prática, mas as praxeologias da Regra de Três extrapolam esse aspecto por admitir outros olhares, entre os quais, o de proposição lógica que a tomava como um *habitus* incorporado que permitia resolver problemas ou assegurar a “verdade” sobre outras praxeologias, por estar de acordo como “o modo verdadeiro de pensar”.

Os procedimentos eram mecânicos para oferecer simplicidade, rapidez e confiabilidade para o enfretamento de classes de problemas, em particular destaque, os relacionados às transações comerciais, entre eles, os de tipo consagrados e ainda em uso como *tarefas* da Regra de Três nas salas de aula e que dominam grande parte das atividades no mundo como os relativos à chamada Matemática Financeira.

A simplicidade e a funcionalidade da RT exigiram sua difusão de modo que estivesse disponível provavelmente a todas as civilizações antigas, independentemente de qualquer deliberação teórica originada na China ou na Índia. Simplicidade e funcionalidade dotadas de uma universalidade ou de uma "uma lógica que fazia a regra de três parecer pertencer às primeiras realizações de contagem do homem" (TROPFKE,1930, p.187, tradução nossa).

Nesse sentido, mesmo que se possa insistir em um fundamento para a Regra de Três, é suficientemente claro que a praxeologia da RT na Matemática Hindu não tolerava a descontextualização e, como tal, era ensinada e aprendida como saber prático.

Um saber é no ensino, com frequência, incompleto. Nesse sentido, Datta e Singh (1938) assim se manifestam sobre a Regra de Três:

> Considerado como um método que estimularia o estudante a pensar por si mesmo, o método é certamente incompleto, mas para propósito prático, ele é, em nossa opinião, o melhor que poderia ser produzido (DATTA; SINGH,1938, p.217, tradução nossa).

A incompletude acontece, sem dúvida, por assumir que os saberes pré-construídos, em geral, não disponíveis para os sujeitos escolares, podem ser desnecessários para engendrar a práxis.

Os procedimentos algorítmicos buscam isso, fazer os saberes pré-construídos, inclusive os *protosaberes* da práxis que trata o problema textualizado, como desnecessários para engendrar as praxeologias da Regra de Três.

Mas, em que pese todo o esforço com a criação desses dispositivos regrados, com ajuda dos esquemas gráficos de arranjos de dados, para eliminar a necessária percepção das quantidades das grandezas em suas funcionalidades de *argumento*, *fruto* e *requisição*, o êxito do processo depende de saberes práticos que somente o enunciado do problema não dá a conhecer**.**

Despistando as complexidades introduzidas pelos saberes pré-construídos que habitam e que dão sentido à práxis, mas que sempre estão passíveis de estarem indisponíveis para os que não conhecem a prática, as praxeologias dos hindus para a Regra de Três se tornaram um método de grande valor.

2.7.2. A Técnica da Praxeologia Hindu da Regra de Três

A técnica da praxeologia hindu para a RT, independentemente de ser simples ou composta, pode ser descrita em quatro passos da seguinte forma:

(i) Arranjar os dados fornecidos em duas colunas, a primeira coluna que contém os dados relativos ao *argumento*, a segunda contendo os que dizem respeito à *requisição*;

(ii) Transpor os dois *frutos*;

(iii) Transpor os denominadores.

(iv) O produto dos termos da coluna com o maior número de termos é dividido pelo produto dos termos da coluna com o menor número de termos.

Essa técnica pode ser abreviada, observando-se que os termos de mesma denominação devem ser escritos em células de uma mesma linha horizontal. A célula correspondente ao termo procurado fica vazia ou com o símbolo “0”, que não se confunde com o número zero e nenhuma operação deve ser feita com ele. É de utilidade estratégica no processo por identificar o lado com menor número de termos.

Como se pode notar, o procedimento é um processo mecânico que assegura a simplicidade, a rapidez e a eficácia no enfretamento de certos tipos de problemas, além de encaminhar verificações de certos procedimentos com matemática, supondo que se constituía em um modo verdadeiro de pensar.

Esse processo com essas características é possível por meio do esquema gráfico de arranjo de dados encaminhado no primeiro passo. Esse esquema orienta desde o arranjo inicial até o arranjo final para emprego das operações, contemplando inclusive dados numéricos fracionários. Precisamente, os esquemas gráficos permitem:

1. A Simplicidade: orientar a disposição simples dos dados por meio de duas colunas que permitem movimentos regrados simples, como os de permutação os dois frutos e os denominadores;
2. A Rapidez: com a simplicidade de disposição de dados e dos movimentos regrados desses dados, as operações somente com números inteiros, inclusive com o privilégio do cancelamento de dados entre essas duas colunas, antes de efetuar produtos que encaminharão o quociente como resultado final;

3. A Eficácia: com a simplicidade e a rapidez o cumprimento do enunciado da regra que preconizava o produto do fruto pela requisição devia ser dividido pelo argumento. O esquema gráfico de arranjo de dados permite isso pela simples identificação da coluna com maior número de termos.

O esquema gráfico de arranjo de dados se constituía em um dispositivo didático para facilitar a aprendizagem e o ensino das praxeologias da RT. São passos sequencias sobre ele que levam o sujeito ao encontro da solução do problema. Esses esquemas gráficos eram, assim, usados para organizar e manipular os dados para levar à ergonomia das operações de multiplicar primeiro e depois dividir e ao mesmo tempo assegurar que a solução encontrada era a solução do problema dado pela Regra de Três e suas variantes compostas.

Portanto, o esquema gráfico de arranjo de dados se constituía em uma síntese do procedimento que permitia encontrar a solução do problema por um arranjo posto a priori, pelo algoritmo, dos dados desse problema. Funciona do mesmo modo que uma fórmula e para isso basta que se identifique o termo técnico auxiliar *fruto* entre as grandezas dadas pelo problema.

2.7.3. Funções da Praxeologia Hindu e sua Limitação

A praxeologia hindu foi usada como tecnologia para outras praxeologias, por ser dotada do jeito verdadeiro de pensar como, por exemplo, o da justificativa da divisão de frações. Além disso, foi considerada como a base da Aritmética Prática e Escolar.

A técnica hindu, do ponto de vista da análise didática, é de grande importância também por revelar a Regra de Três inversa como uma criação didática para trivializar o ensino de um tipo problema de cinco termos, ou seja, de uma RT Composta. Isso elimina o incômodo não confessado do tratamento da RT Inversa, a partir da relação de uma grandeza com o inverso da outra. Isso não apresenta sentido matemático, já que a noção de proporcionalidade inversa não está presente na teoria das razões e proporções e, em geral, também não tem sentido segundo uma lógica prática o inverso de uma grandeza.

De modo geral, a técnica permitia que fosse “aprendida” por uma pessoa dotada de pouco conhecimento matemático (DATTA; SINGH,1938), desde que essa pessoa fosse dotada do conhecimento das praxeologias que referiam os tipos de problemas, pois lhe permitiria, sem dificuldade, identificar o dado da grandeza *fruto* que era necessário para encaminhar o rearranjo dos dados. Assim, mesmo que se possa interpretar a técnica como uma fórmula ou algoritmo, há uma dependência do contexto da situação para o emprego da técnica.

No entanto, a potente criação didática desse dispositivo regrado que permite apenas com o uso de um termo técnico auxiliar, dito *fruto*, resolver todos os tipos problemas então considerados sem uso de noções como proporcionalidade direta e inversa hoje empregadas.

Esse dispositivo didático que facilitava a aprendizagem e o ensino por meio do uso de um esquema gráfico se tornou útil para a difusão da praxeologia da Regra de Três e de suas variações para o mundo islâmico e daí para a Europa, após essas atingirem pleno desenvolvimento no século VII na Índia. As relações dessas praxeologias com as praxeologias do mundo islâmico e europeu se constituem, por razões já expostas, no objeto do próximo capítulo.

CAPÍTULO 3: RELAÇÕES ENTRE AS PRAXEOLOGIAS DA REGRA DE TRÊS DOS HINDUS, ÁRABES E EUROPEUS

3.1. Introdução

As várias praxeologias da Matemática e da Astronomia indiana foram disseminadas no mundo islâmico no século VIII, mas somente a partir do século IX em diante é que os matemáticos árabes começam a discutir a Regra de Três e suas regras variantes.

Segundo Sarma (2002), Al-Khwârîzmî (cerca de 850), por exemplo, inseriu em seu livro sobre Álgebra um capítulo sobre problemas comerciais em que discute a RT simples de acordo com o modelo indiano. Outro exemplo é de Al-Biruni (973-1048) que compôs um tratado exclusivo sobre a Regra de Três, intitulado Fi Rashikat al-Hind, em que discute a RT direta e inversa, bem como as regras de cinco, sete e mais termos (JUSCHKEWITSCH, 1964, p. 214, tradução nossa).

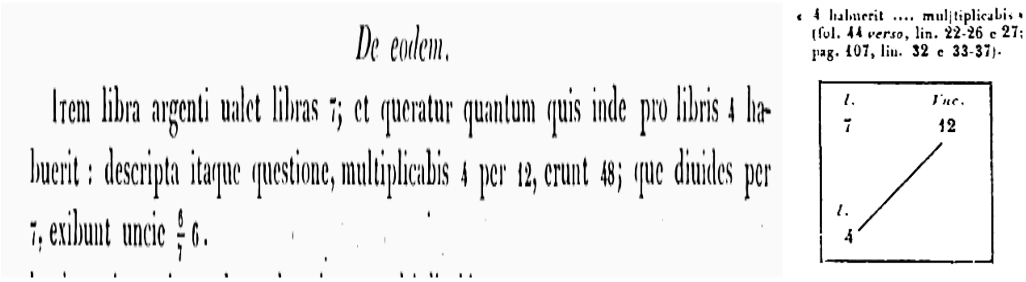
Embora Sarma (2002) não possa precisar se os textos árabes discutiram todas as variações indianas da Regra de Três, ele observa que o arranjo dos dados em duas colunas verticais era adotado até mesmo para a RT.

Quanto à divulgação dos números indianos, bem como dos problemas comerciais, para a Europa, é certo que a história está bem documentada, com particular destaque para a mediação de Leonardo de Pisa, inclusive da consagração da Regra de Três como a Regra de Ouro (TROPFKE,1930, pp. 190-191; JUSCHKEWITSCH,1964, p.120; SMITH,1925, p.486; WAGNER,1988, p.181; apud SARMA,2002).

Na Europa, segundo Smith (1925), dentre as variantes da Regra de Três, somente a RT Inversa alcançaria popularidade, mas parece ser somente um ponto de vista, já que existem obras europeias dedicadas ao ensino da Aritmética e da Álgebra, por exemplo, dos séculos XVIII e XIX, que apresentam regras gerais que podem ser interpretadas como ligeiramente modificadas, senão a mesma, que era adotada pelos matemáticos hindus.

A influência das praxeologias hindus da Regra de Três no mundo europeu nos parece clara, em particular quando admitimos que o esquema gráfico de arranjo de dados usado na RT pelos matemáticos hindus, inclusive com a regra de deixar vazia a célula da quantidade procurada que está presente no Liber Abacci de 1857, mas com primeira edição em 1202, de Leonardo de Pisano, na solução de um problema de proporcionalidade, mas que pode ser identificado como um problema protótipo hindu de RT, como mostramos a seguir.

Figura 3- Praxeologia da Regra de Três de Leonardo Pisano



De eodem.

Item libra argenti ualet libras 7; et queratur quantum quis inde pro libris 4 habuerit: descripta itaque questione, multiplicabis 4 per 12, erunt 48; que diuides per 7, exibunt uncie $\frac{6}{7}$ 6.

« 4 habuerit .... multiplicabis » (fol. 44 *verso*, lin. 22-26 e 27; pag. 107, lin. 32 e 33-37).

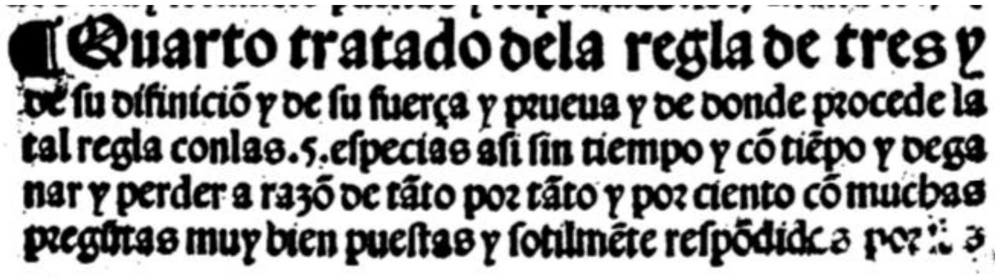
Fonte: Liber Abacci (1857, p.107)

Esse exemplo, oriundo do antigo manual, evidencia claramente a similitude com o esquema gráfico de arranjo de dados das praxeologias da Regra de Três da Matemática hindu, demonstrando que havia praxeologias da RT na Europa em conformidade com as praxeologias da Matemática hindu. Isso nos desperta interesse.

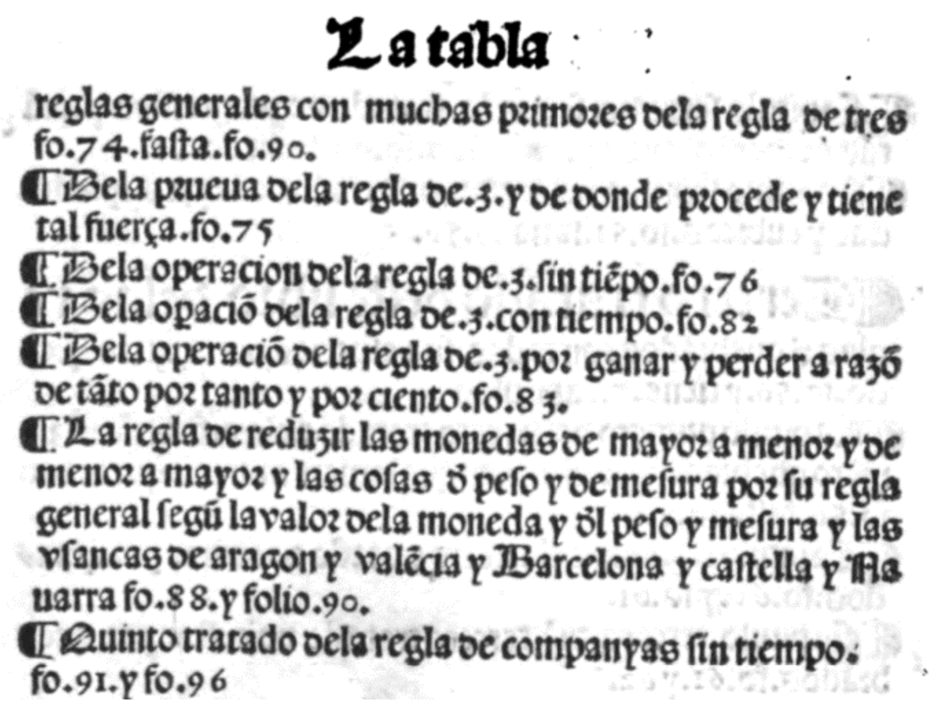
O extrato de texto citado anteriormente, do Liber Abacci, faz parte de um manual que pode ter sustentado a criação de diferentes manuais, conhecidos como manuais de ábacos, que continham as organizações matemáticas para o ensino e, portanto, que podem ser vistos como portadores de aspectos da economia e da epistemologia das praxeologias da Regra de Três na Europa.

Além disso, havia manuais de ábacos com tratados que eram desenvolvidos para o ensino da Regra de Três, considerando o enfrentamento de tipos de problemas específicos com a aplicação da regra que pode ser exemplificado a partir do extrato de texto de Juan Andrés (1515), a seguir.

Figura 4- Organização Matemática da Regra de Três de Juan Andrés



¶ Quarto tratado dela regla de tres y de su difinició y de su fuerça y prueua y de donde procede la tal regla conlas.5.especias asi sin tiempo y có tiépo y de ganar y perder a razó de tãto por tãto y por ciento cõ muchas pregũtas muy bien puestas y sotilmẽte respõdidas por


La tabla

reglas generales con muchas primores dela regla de tres fo.74.fasta.fo.90.
¶ Dela prueua dela regla de.3.y de donde procede y tiene tal fuerça.fo.75
¶ Dela operacion dela regla de.3.sin tiẽpo.fo.76
¶ Dela opaciõ dela regla de.3.con tiempo.fo.82
¶ Dela operaciõ dela regla de.3.por ganar y perder a razõ de tãto por tanto y por ciento.fo.83.
¶ La regla de reduzir las monedas de mayor a menor y de menor a mayor y las cosas d peso y de mesura por su regla general segũ la valor dela moneda y dl peso y mesura y las vsancas de aragon y valẽcia y Barcelona y castella y Nauarra fo.88.y folio.90.
¶ Quinto tratado dela regla de companyas sin tiempo. fo.91.y fo.96

Fonte: Andrés (1515, s/p)

Podemos observar nesse extrato de texto a evidência de uma organização para o ensino da Regra de Três segundo o modelo hindu, que partia do enunciado da RT segundo, e seguindo, tipos de problemas, em que os de cunho mercantilista eram fortemente considerados.

Esses tipos de manuais de ábacos atendiam a intenções didáticas de professores de fato, pois eles tinham o ensino como núcleo de suas atividades nas escolas de ábacos e, portanto, viviam dos ganhos com o ensino que incluía a dedicação especial à produção desses manuais para o ensino, segundo um padrão imposto por essas escolas, como destaca Heeffer (2014):

> Um manuscrito raro do século XV explicitamente trata dos procedimentos pedagógicos de uma escola de ábacos e fornece algumas evidências sobre o material tratado. Um programa típico consistia em sete cursos: 1) numeração, adição, subtração e tabelas de multiplicação, 2) a 4) a divisão em complexidade crescente com números decimais, 5) operações com frações, 6) **a regra de três** com aplicações em negócios e 7) o sistema monetário e o problema de câmbio... (HEEFFER,2014, p.3, tradução e grifos nossos).

Embora os livros de ábacos diferissem um pouco entre si, os professores mantinham o mesmo padrão de *layout* para seus livros, considerando os mesmos temas que podem ser observados em quase todos os tratados de ábaco existentes.

Nos tratados considerados elementares há uma demonstração de preocupação de seus autores com a aprendizagem inteligível dos alunos sobre as operações que podem ser observadas pela recorrência à justificação epistêmica das operações, a partir do uso de esquemas gráficos de arranjo de dados (HEEFFER,2014).

Dos tratados de ábacos, do período de 1300 a 1500, há pelo menos 250 existentes de Aritmética, de Álgebra, de práxis geométricas e de problemas de negócios, em textos em vernáculo, dentre eles, os três mais antigos tratados de ábaco, como o *Colombia algorism* (Columbia X511 AL3, c. 1290; Vogel), Jacopo da Firenze "Tractatus Algorism (Vat. Lat 4826, 1307; HØYRUP 2007a) e Trattato di tutta l'arte dell'abbaco de Paolo dell'Abbaco (1339), que dedicam especial atenção nos capítulos introdutórios para justificar a validade das operações básicas com algarismos hindu-arábicos (HEEFFER,2014).

Há imbricação entre as praxeologias da Regra de Três da Matemática hindu e da Matemática europeia e daí nossos questionamentos como pertinentes à nossa investigação.

Em todo caso, o ensino da Regra de Três se dava por meio das obras de autores professores e, portanto, essas obras se constituem em instituições representativas dos *habitat* em que viviam as praxeologias da RT e de onde, como feito no capítulo anterior, enveredamos nossas investigações.

3.2. As Formas de Vida da Regra de Três na Europa

Heeffer (2014) afirma que até o final do século XV haviam duas tradições independentes de praxeologias matemáticas com princípios metodológicos e epistemológicos completamente separados. A primeira tradição era a das universidades e escolas-mosteiro, onde ensinavam o *quadrivium*[16], caracterizado pelo ensino de quatro disciplinas, entre elas, a Aritmética. Nesse ambiente, a Aritmética era apresentada como uma Aritmética qualitativa com apelo à estética e às aspirações intelectuais, sem qualquer preocupação com o uso prático, sustentada em fundamentos com base na argumentação retórica e nas noções comuns da antiga Matemática grega (HEEFFER, 2014).

A segunda tradição era sustentada na florescente tradição do sul da Europa, que desenvolvia as denominadas "práticas matemáticas sub-científicas" (HØYRUP,1990), particularmente, as ensinadas nas escolas de ábacos. Essas práxis podiam apresentar parcos discursos matemáticos, encaminhando a validade de seus

---

[16] Pertencente ao período medieval, o *quadrivium* era uma disciplina acadêmica composta por um conjunto de conhecimentos de aritmética, geometria, astronomia e música.

procedimentos de resolução de problemas por meio de execução de procedimentos aceitos como corretos pela tradição.

Esse é um dos aspectos particulares das escolas de ábacos que nos chama a atenção, pois coloca o jeito de fazer, e talvez de pensar, às praxeologias desse *habitat*, próximo do jeito de fazer do ensino das praxeologias da Regra de Três presentes nas escolas básicas brasileiras, no sentido da ênfase pedagógica sobre a necessária contextualização no ensino dos saberes supostos matemáticos em aplicações nas práxis do mundo concreto.

As escolas de formação profissional dos séculos XIII e XIV, na Europa Ocidental, como as escolas de ábacos italianas, foram criadas para atender à crescente demanda de profissionais para novos oficios urbanos[17], entre eles, os de mercadores e artesões, que exigiam boa instrução para o exercício profissional.

Em particular, a crescente importância do mercantilismo exigia o ensino das práxis dessa atividade e essas dependiam de noções básicas da Aritmetica Prática, como demonstra Heeffer (2014), citando Ulivi (2002,2006), quando se refere às atividades das escolas de ábacos na preparação de jovens aprendizes.

> [...] cerca de vinte escolas de ábacos estavam em atividade em Florença entre 1340 e 1510. Em volta de 1343, havia nada menos que 1.200 alunos que frequentavam essas escolas de ábacos em Florença. Meninos entre dez e catorze anos foram enviados para as escolas de ábaco depois de terem dominado a escrita em uma escola de gramática. Eles foram essencialmente ensinados nos fundamentos do cálculo com números hindu-arábico, regras da aritmética mercantil e os conceitos básicos de unidades de medida e os valores de moedas. Quando completavam quatorze anos eles começavam como aprendizes no comércio e seguiam com as aprendizagens sobre contabilidade de dupla entrada, seguros e práticas bancárias. Todas estas atividades e a importância crescente do mercantilismo dependiam das noções básicas de aritmética ensinadas nas escolas de ábacos (HEEFFER,2014, p.2, tradução nossa).

Essa passagem ressalta a importância dessas escolas de ábacos para a formação de novos profissionais para atender às demandas dos ofícios urbanos, que, por meio de seus próprios textos, criados por seus professores, segundo Caunedo del Potro (2011; 2007), encaminhavam a garantia de êxito por meio de coleções de problemas em perfeita adequação ao mundo real, com enunciados que refletiam as situações em que os jovens aprendizes haveriam de se envolver.

[17] Para ver detalhes, recomendamos consultar o trabalho de Caunedo del Potro e Córdoba de La Llave (2004).

A importância dessas escolas de ábacos se estende por meio dos novos objetos de ensino considerados em seus manuais de ábacos, como a introdução do ensino e da aprendizagem dos algarismos hindus, em substituição aos algarismos romanos, que foram gradualmente vencendo a resistência e o ceticismo das autoridades ocidentais, frente aos novos algoritmos estudados para adição, subtração, multiplicação e divisão, com o uso de meios materiais para os cálculos com esses algarismos, particularmente com uso de caneta e papel.

Especificamente sobre as praxeologias da Regra de Três, os manuais de ábacos revelam encontros e desencontros com as praxeologias da RT, do mundo hindu, apresentadas no capítulo anterior. Entre eles, estaria o suposto não interesse pela composição da RT ou, ainda, a práxis da verificação da RT, que não é encontrada em nenhum texto hindu.

Esses aspectos podem apontar outras influências sobre as praxeologias da Regra de Três na Europa, em particular, sobre as praxeologias que viviam nas escolas de ábacos, já que elas se dedicavam ao ensino das praxeologias aritméticas com relações claras com as praticadas do mundo hindu e do mundo islâmico. Encontrar os reais motivos dessas diferenças seria importante para nossa investigação, mas sabemos que construir tal compreensão pode exigir recursos históricos *infraestruturais* que não dispomos. Felizmente, embora constitua em condição restritiva dessa pesquisa, ainda encontramos veios de caminhos que podem levar a uma resposta parcial, mas significativa, para nossa investigação.

Esse *habitat* com praxeologias da Regra de Três próximas às praxeologias hindus torna-se indispensável em nossa investigação por disponibilizar condições em que as praxeologias viviam, e que faziam viver, no ensino. Mesmo que se admita a RT como um saber prático, com suas tarefas-técnicas indissociáveis, há possibilidade de se ter distintos discursos interpretativos produzidos por seus mestres em suas próprias organizações didáticas a partir de criações didáticas, como as técnicas didáticas do emprego de esquemas gráficos de arranjo de dados para o ensino com o propósito de facilitar a aprendizagem.

As representações simbólicas usadas para o ensino da Regra de Três, nas escolas de ábacos, em nossa interpretação, podem ser vistas como dispositivos didáticos que buscavam o desejado pela sociedade: a aprendizagem de praxeologias necessárias a seu desenvolvimento por meio da inserção do homem nessas instituições, segundo as condições impostas que preconiza que o tempo para a aprendizagem deve ser igual ao tempo do ensino.

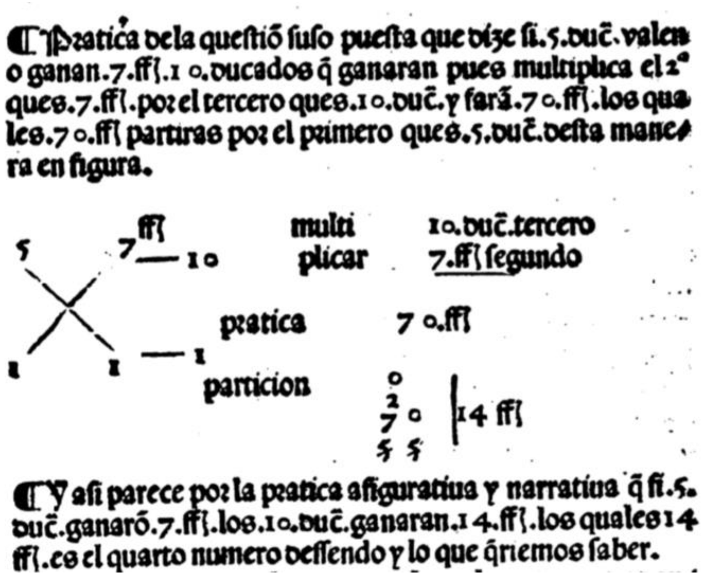
Tais representações simbólicas eram ferramentas indispensáveis, que, em companhia da narrativa, encaminhavam os arranjos dos dados e os cálculos, constituindo-se parte integrante da técnica e tecnologia da praxeologia, como podemos assim interpretar a partir do seguinte trecho:

> Na ordem de compreender, explicar e ensinar eles desenvolveram esquemas gráficos para acompanhar suas explicações discursivas. Nós encontramos nas margens todos os tratados de ábaco: na multiplicação, nas operações com frações, na regra de três, na regra da falsa posição, na multiplicação de binômios e assim por diante. Estes regimes de justificativas compensavam a falta de simbolismo e, finalmente, levaram ao surgimento do simbolismo (HEEFFER,2014, p.4, tradução nossa).

Nesse sentido, destacamos as representações encontradas regularmente nas margens dos livros de ábacos, similar aos encontrados no *Liber Abbaci*, usados por Leonardo Pisano, que deixava a posição vazia para o número desconhecido e indicando a multiplicação por uma linha diagonal como faz Juan Andrés (1515) com a multiplicação em diagonal.

O extrato de texto seguinte de Juan Andrés (1515) deixa claro o que afirmamos quando o autor em narrativa usa o método padrão da Regra de Três, mas opera no esquema gráfico de arranjo de dados, em acordo com o método da redução à unidade.

Figura 5- Esquema gráfico de Juan Andrés



Pratica dela questiõ suso puesta que dize si.5.duc.valen o ganan.7.ffl.10.ducados q̃ ganaran pues multiplica el 2° ques.7.ffl.por el tercero ques.10.duc.y farã.70.ffl.los quales.70.ffl partiras por el primero ques.5.duc.desta manera en figura.

Y asi parece por la pratica afiguratiua y narratiua q̃ si.5.duc.ganarõ.7.ffl.los.10.duc.ganaran.14.ffl.los quales 14 ffl.es el quarto numero deffendo y lo que q̃riemos saber.

Fonte: Andrés (1515).

Esse esquema gráfico de arranjo de dados pode ser descrito como segue, considerando o tipo de problema legitimado ao longo do tempo como problema de RT: Se $\frac{a}{b}$ vale $\frac{c}{d}$, quanto vale e ?

Esquema gráfico de arranjo de dados:

$$\begin{array}{ccccc} a & & c & \rightarrow & e \\ b & & d & \rightarrow & 1 \end{array}$$

Solução:

$$\frac{b \times c \times e}{a \times d \times 1} = (\frac{c}{d} \div \frac{a}{b}) \times e = (\frac{c}{d} \times \frac{b}{a}) \times e$$

A técnica contempla o uso de dados inteiros e fracionários, pois, como no exemplo, os números inteiros são tomados como frações com denominadores unitários.

Podemos pensar que essa técnica é distinta da técnica da Matemática hindu, embora recorra ao mesmo esquema gráfico de arranjo de dados, pois o produto cruzado efetuado entre as duas primeiras colunas pode ser visto como a divisão entre as frações dadas nessas colunas. Entretanto, não podemos afirmar que essa técnica, que privilegia a divisão primeiro, é a empregada, pois Juan Andrés anuncia a regra do mesmo modo que é anunciada pelos hindus. Além disso, o arranjo dos dados por meio do esquema gráfico e a ergonomia dos cálculos de adiar a divisão, adotados pela Matemática indiana, são mantidos como deixa claro o extrato de texto de Juan Andrés acima.

Isso exige melhor compreender as técnicas empregadas nas praxeologias da Regra de Três pelos islâmicos e europeus e para isso as apresentamos a seguir em contraste com as praxeologias hindus. As técnicas da RT simples denominamos de modos alternativos das praxeologias da Regra de Três, tendo em vista que os árabes e europeus usaram também praxeologias com a técnica hindu, inclusive recorrendo a seus esquemas gráficos de arranjo de dados como mostrados anterirormente.

3.3. As Praxeologias da Regra de Três: Árabes e Europeias

Segundo Høyrup (2007a), um dos modos de encaminhar os cálculos da Regra de Três é encontrado em duas obras italianas, no *Libro di conti e mercatanzie* de 1395, com palavras alteradas, mas muito semelhantes ao do *Libro di molti ragioni* de 1330, sem ser identificado com um nome específico nas fontes árabes, o que poderia significar que esse modo não foi considerado pelos árabes como um padrão.

3.3.1. Praxeologias da Regra de Três Presentes em Obras Europeias Relativas às Práxis do Mundo Concreto e não Presentes nas Obras Islâmicas

As diferentes praxeologias da Regra de Três são usadas por Høyrup (2007b) para afirmar que um tipo problema não pode ser uma instância da RT, pois o problema pode ser resolvido por diferentes alternativas.

Essa característica sobre o ensino da Regra de Três de envolver “práxis do mundo concreto” parece ter ficado clara em nossa abordagem no capítulo anterior. Mais ainda, quando consideramos que Høyrup (2007a) nos chama atenção sobre as praxeologias específicas da RT, em atendimento às condições culturais dessas “práxis do mundo concreto”, pois essas implicam em condições não matemáticas sobre o ensino e sua aprendizagem. Há uma imbricação de especificidade das praxeologias que condicionam as transposições didáticas da RT.

Pareceu-nos que as condições relativas às instituições concretas poderiam tornar problemático o ensino e, principalmente, a aprendizagem para quem fosse estranho à instituição considerada nos problemas textualizados. Essa problemática foi minimizada pelos matemáticos hindus por meio da criação de procedimentos algorítmicos com ajuda dos esquemas gráficos de arranjo de dados, como mostramos no capítulo anterior.

No entanto, novas técnicas didáticas foram usadas pelos europeus, como demonstra o seguinte extrato de texto de Høyrup (2007a), referindo-se a Jacopo de Firenze, que estabelece uma ergonomia de cálculos distinta da hierarquia operacional hindu para as operações na Regra de Três.

> Se o preço de um quintal de libras N é x soldos, então o preço de 1 libra é $\frac{12x}{N}$ *denari*. Em vez de multiplicar por 12 e dividir por N, Jacopo sugere multiplicar por 3 e dividir por $\frac{N}{4}$. Mas se muitos cálculos tem que ser realizados com o mesmo N, e se $\frac{N}{4}$ é um número inteiro, então, os cálculos se tornarão mais simples. Mais importante, a introdução de uma unidade fictícia dá um significado concreto, tanto para o número de 3x (o preço de uma libra em grãos) e a divisão $\frac{N}{4}$ (uma conversão de unidade monetária); isto certamente é uma vantagem para os mercadores não muito bem treinados em matemática (HØYRUP, 2007a, p.69, tradução nossa).

O extrato deixa claro o condicionamento da instituição ou grupo de práticas, aqui uma práxis específica dos mercadores, sobre a praxeologia da Regra de Três. Em vez de multiplicar diretamente por 12 e dividir por N, que era a forma padrão sânscrita, explorava características da atividade humana em jogo, que implicava nas operações aritméticas para o procedimento, especificamente, multiplicar por 3 e dividir por $\frac{N}{4}$.

Essa hierarquia de operações era óbvia para os praticantes mercadores, a partir dos seus significados; o multiplicar por 3 dizia respeito ao preço de uma libra de grãos, e dividir por $\frac{N}{4}$ dizia a respeito da conversão de unidades monetárias.

As diferentes formas de cálculos para a Regra de Três que foram encaminhadas pela Matemática hindu poderiam até não deixar clara uma razão matemática que as faziam funcionar, mas, nesse caso, essa praxeologia da RT vai muito além. Ela exige, além de um suposto argumento matemático, a experiência da instituição em que ela foi inserida. É esse conhecimento da instituição que permite compreender a técnica como integrada aos *protosaberes* dessa instituição, no sentido do extrato profundo da cultura da prática que torna possível o uso de um dado saber.

Embora se possa mostrar por argumentos aritméticos a equivalência dessa técnica com a da Matemática hindu, ela se distingue da praxeologia hindu por não estar dotada da mesma ergonomia, por antecipar a divisão. Assim, essa praxeologia é uma variante da praxeologia hindu em que se multiplica primeiro e depois divide.

Essa nova praxeologia da Regra de Três, que Høyrup (2007a) insiste em afirmar que não se confunde com um problema, é mostrada do seguinte modo por Jacopo de Firenze:

> VII Tornesi valem VIIII Parigini. Diga-me, quanto valerá 20 Tornesi. Faça assim, a coisa que você quer saber é o que vai valer 20 Tornesi. E a não similar (coisa) é a que vale VII Tornesi, isto é, eles valem 9 Parigini. Portanto, devemos multiplicar 9 Parigini por 20 Tornesi que fazem 180 Parigini, e dividir por 7, o qual é a terceira coisa. Divide 180, que resulta 25 e $\frac{5}{7}$. E 25 Parigini e $\frac{5}{7}$ valerá 20 Tornesi (HØYRUP,2007a, p.59, tradução nossa).

A insistência de Høyrup (2007a) de distinguir a regra do problema é encaminhada, observando que o procedimento hindu inclui uma dificuldade que decorre do resultado intermediário - 9 *parigini* $\times$ 20 *tornesi* - não apresentar uma interpretação concreta para os praticantes mercadores, como poderia ser esperado, considerando o exemplo anterior

Mas, essa preocupação das operações com medidas de grandezas serem dotadas de significados práticos não está presente nos trabalhos hindus, inclusive por eles preconizarem tal produto, e tampouco encontramos algo mencionado nesse sentido nos trabalhos dos pesquisadores da História da Matemática Hindu, a que recorremos nesta pesquisa, como Sarma (2002), Datta; Singh (1938) e Høyrup (1990, 2007a, 2007b; 2009, 2012,).

Seguindo, para deixar claro o que estamos querendo dizer, Høyrup (2007a) mostra que a problemática do significado de operações (se assumida como problemática) poderia ser alternativamente evitada, considerando o procedimento de cálculo adotado pelos "babilônios, egípcios e gregos antigos, que consistia basicamente em dividir primeiro, nesse caso, 9 parigini por 7 tornesi, por ter a óbvia interpretação concreta que é o valor de uma unidade de tornesi em parigini" (HØYRUP,2007a, p.59, tradução nossa).

Em mãos, com este quociente, que é a taxa, basta multiplicá-lo por 20 para encontrar o valor de 20 tornesi, ou seja, 1(um) *tornesi* vale $\frac{9}{7}$ *parigini*, e, portanto, 20 *tornesi* vale $20 \times \frac{9}{7}$ *parigini*.

Essa praxeologia da Regra de Três apresenta, portanto, a seguinte técnica:

Esquema de Gráfico: A → B →C,

de onde se opera com os dados para obter C× (B÷ A).

Embora seja distinta da praxeologia hindu, como observamos no extrato de Juan Andrés (1515), as operações realizadas sobre o esquema gráfico de arranjo de dados levam à mesma ergonomia da técnica hindu.

3.3.2. A Tecnologia da Nova Praxeologia Alternativa

Essa praxeologia alternativa é *aritmeticamente* equivalente à praxeologia hindu, mas não se confunde com essa última, por contrariar o modo de pensar a praxeologia, e que dá razões para dividir primeiro, que é o encontrar a relação entre as unidades das grandezas consideradas. Isso permite, por multiplicação depois, determinar o quanto de unidades de uma grandeza corresponde a uma dada quantidade de unidades da outra grandeza, que é de grande utilidade prática, por exemplo, a mercantilista dos problemas que envolvem tipos de tarefas sobre mercadoria contra moeda ou de moeda contra moeda ou ainda mercadoria contra mercadoria.

Nesse sentido, a tecnologia que fundamenta a Regra de Três é a lógica da prática, pois o cálculo da razão entre as grandezas distintas, que é preconizada pela técnica, não encontra fundamento matemático.

Essa nova praxeologia, como a praxeologia hindu, são julgadas problemáticas matematicamente. A esse respeito, Høyrup (2007b) escreve a seguinte nota de rodapé.

> A maioria dos autores árabes associa a regra de três aos problemas nos quais é aplicado a teoria da proporção euclidiana. Nesta perspectiva, o método *nisbah* é perfeitamente legítimo, uma vez que considera a relação entre entidades do mesmo tipo. Por outro lado, uma razão entre, digamos, *tornesi* e *parigini* , é tão problemática como a regra de três em si mesma com o seu produto, de por exemplo, *tornesi* e *parigini*. Embora as razões pedagógicas possam falar a favor da abordagem *parigini-por-tornesi*, razões de princípios matemáticos podem falar contra. (HØYRUP,2007b, p.3, tradução nossa).

Do ponto de vista matemático da Teoria das Razões e Proporções, o aspecto das grandezas terem o mesmo nome torna-se de fundamental importância para dar sentido a afirmação de que as quantidades são tais, que a menor delas multiplicada pode exceder a maior (NUÑEZ, 1567, p.66).

No entanto, é oportuno observar o que nos diz Nuñez (1567) sobre o uso da noção de proporcionalidade.

> [...] a composição das proporções é imaginária, feita por obra do entendimento, interpondo uma quantidade na fantasia com outras, e não é real, assim como quando dizemos, que a linha de três braças é composta de uma linha de uma braça, e de outra de duas braças, na qual a parte não pode chegar ao todo. E é porém, esta doutrina necessária aos matemáticos nas suas demonstrações da qual nenhum falso se segue, antes por ela inquerimos a verdade, e dela usa Euclides no livro sexto e no sétimo, e em outras partes, Arquimedes nos livros de Esfera e Cilindro, Menelao no terceiro livro de Geometria das esferas… (NUÑEZ, 1567, p.8, tradução nossa) [18]

De outro modo, a noção de proporcionalidade encontra sentido na instituição Matemática pela não necessidade de se substanciar em uma realidade objetiva, pois,

---

[18] O arquivo de texto da obra que consultamos, datada de 1567, assim como as outras obras de aritméticas antigas, encontra-se com a grafia das palavras bastante diferente das atuais. Para tornar mais simples a leitura, optamos por atualizar a grafia nas citações, quando isto não interferir em nossa análise.

nesse caso, a proporcionalidade pode ser apenas imposta, como acontece no inverso da Regra de Três Hindu, que é assumida pela cultura da prática.

Talvez por isso, o árabe Ibn Thabāt trate as questões de negócios separada dos problemas com números puros (HØYRUP,2007b) pois para os números a proporcionalidade é muito clara.

Desse modo, então, o uso da Regra de Três não está sujeita somente às condições normativas das praxeologias matemáticas. A proporcionalidade faz parte do campo de percepção dos pranticantes da praxeologia. De modo mais específico, somente os praticantes eram capazes de perceber as situações que poderiam mobilizar a praxeologia da RT, que envolve razão entre grandezas de natureza diferentes, como se estivessem em “proporcionalidade”.

É importante destacar que, segundo Høyrup (2007b), a referência aos termos técnicos *similar* e *não-similar* introduzidos no enunciado da RT, que é padrão nos ábacos escritos italianos, não indica uma referência ao argumento sobre a proporcionalidade como se pode pensar apressadamente.

> A referência sânscrita rudimentar à semelhança dos escritos dos estudiosos e sábios apontam para uma forma plena em que o similar e o não-similar eram distinções fundamentais. Esta é também a forma que, provavelmente através de contatos comerciais, atingiram o mundo árabe, seus comerciantes, bem como os seus estudiosos (HØYRUP, 2007b, p.7, tradução nossa).

Assim, os termos tecnicos *similar* e *não-similar*, ou outros termos que induzem esses sentidos, não são referências ao uso da noção da proporcionalidade, e sim dispositivos didáticos que funcionavam como orientadores da construção do esquema gráfico de arranjo dos dados.

Essa opacidade de um argumento matemático para uma praxeologia da Regra de Três vai ser considerada pelos árabes, a partir de uma nova praxeologia, como aplicação da Teoria das Razões e Proporções.

3.3.3. As Praxeologias Islâmicas da Regra de Três

A praxeologia que imputamos ao povo islâmico é encontrada em diferentes obras e, em particular, em Ibn Thabat, escrito em 1200, em Baghdad.

Høyrup (2007a) a descreve recorrendo à resolução do problema anterior, dizendo que 20 *tornesi* deve valer $\frac{20}{7}$ vezes mais que 7 *tornesi*, e, portanto, $\left(\frac{20}{7}\right) \times 9$ *parigini*, para em seguida observar que:

> Esta é a maneira que Ibn Thabāt chama de "por relação" (*nisbah*), e que al-Karaji encontrou como preferível em lugar da "multiplicação e divisão". (HØYRUP,2007b, p.2, tradução nossa).

Essa praxeologia é tomada como padrão do mundo islâmico. Høyrup (2007a) afirma que ela foi apresentada por Ibn Thabat sem explicações e com o nome "por *nisbah*", uma palavra que significa "relação" ou "raio" que, quando era conhecida para uma grandeza, a mesma deveria ser imposta para a outra grandeza.

Do ponto de vista aritmético, a técnica dessa praxeologia é equivalente às outras duas praxeologias até aqui apresentadas, embora pareça próxima da técnica da praxeologia alternativa anterior, por dividir primeiro e multiplicar depois. Mas, a divisão é distinta e, portanto, a técnica é também distinta.

Esquema gráfico: $A \rightarrow B \rightarrow C$,

de onde se operam com os dados do seguinte modo $B \times (C \div A)$.

Assim, distingue-se das duas praxeologias, a do padrão hindu e da anterior “europeia”, por apresentar técnica distinta. Além disso, apresenta tecnologia que pode lhe dar uma gênese matemática.

3.3.4. Tecnologia da Praxeologia Islâmica

Segundo Høyrup (2007b), entre os sábios árabes havia uma preocupação em evidenciar a Regra de Três como um método matemático que independia das semelhanças entre os temas tratados ou do contexto considerado nos problemas. Nesse sentido, afirmavam que dependiam tão somente da proporcionalidade como assim anuncia em al-Qalasādī (1475):

> Se um dos extremos é um desconhecido encontra-se o produto dos termos médios e dividi-se o resultado pelo extremo conhecido. E de modo similar, se um dos meios é desconhecido, multiplica-se os extremos e divide-se o resultado que foi alcançado pelo meio conhecido (HØYRUP, 2007b, p.6, tradução nossa).

Essa praxeologia pode ser vista como uma transposição didática da praxeologia hindu, realizada por eruditos árabes preocupados em deixar claro que Regra de Três não é nada mais que aplicação da Teoria das Razões e Proporções. Isso fica claro no extrato de texto a seguir:

> é muito provável que a regra que conhecemos da Itália e de Ibn Thabāt foram a base, a qual teoricamente autores árabes escolarizados, de Al-Khwarizmi em diante, inseriram e a explicaram

> por meio do quadro da teoria da proporção. (HØYRUP, 2007b, p.6, tradução nossa).

Como observamos no capítulo anterior, os matemáticos hindus tinham conhecimento das proporções como fundamentos de suas praxeologias, mas os árabes buscavam uma relação distinta com a RT e isso incluía não usar o nome “regra de três”, não por não conhecer a RT, mas por preferirem sua formulação como explícita aplicação da Teoria das Proporções.

Esse modo de pensar a praxeologia em que as variações de quantidades das grandezas devem se comportar segundo uma homologia abstraída da grandeza com os dados completos, não exigindo a relação de funcionalidade ou de dependência entre as medidas das diferentes grandezas.

De qualquer modo, ao fim e ao cabo, segue a Teoria das Razões e Proporções preconizada pela Matemática Grega, e, portanto, podemos considerar que essa praxeologia, embora com técnica distinta, tem a mesma tecnologia da praxeologia hindu: a proporcionalidade.

Do exposto, podemos pensar que a praxeologia árabe é decorrente do pensamento analítico enquanto a praxeologia hindu pode ser decorrente do pensamento sintético. Pode-se dizer, com a clareza matemática, que a praxeologia árabe está preocupada em analisar a variação de uma grandeza para colocar como variação de outra grandeza, enquanto a praxeologia hindu está preocupada em apresentar o melhor modo de encaminhar a solução do problema.

Isso pode ser o motivo de os hindus evitarem uma técnica do tipo da técnica árabe, pois, como destacam Høyrup (2007a) e Sarma (2002), há vantagem operacional para os cálculos aritméticos, quando se adia a divisão, já que essa operação possui procedimentos complexos que podem levar frequentemente a erros, conduzindo a frações de difíceis manuseios.

3.3.5. Considerações sobre as Praxeologias Árabes e Europeias

3.3.5.1.Sobre a Praxeologia da Regra de Três

As praxeologias da Regra de Três árabes e europeia da redução à unidade são próximas o suficiente das praxeologias hindus da RT, o que permite afirmarmos que são transposições didáticas dessas. Essa afirmação decorre do fato de que:

1- As praxeologias árabes e europeias da redução à unidade recorrerem ao enunciado da regra que se confundem com os enunciados da regra hindu, inclusive com o uso de termos técnicos do tipo *similar* e *não-similar* que encaminham os esquemas gráficos de arranjo de dados do mesmo modo que o proposto pelos matemáticos hindus.

2-As praxeologias da RT, em qualquer modo, podem ser interpretadas como um saber prático caracterizado pelo par tarefas-técnicas indissociável e, em particular, com técnicas que se confundem, mas que eram ensinadas, a partir de discursos interpretativos, as vezes distintos, que eram produzidos pelos mestres em suas próprias organizações didáticas.

3-As organizações didáticas, independentemente do discurso que a justificavam, contavam com criações didáticas com o mesmo objetivo, que era de todo modo despistar a exigência do conhecimento do assunto de que trata o problema.

4-Em todas as praxeologias citadas, as criações didáticas dos termos do tipo *similar*, *não-similar*, ou de *inverso* referenciado em trabalho árabe, são os instrumentos didáticos para encaminhar a construção da outra criação didática, aqui denominada de esquemas gráficos para os arranjos de dados.

5-Em todas as praxeologias citadas, as criações didáticas acima mencionadas, em nossa interpretação, são dispositivos didáticos que buscavam atender à condição imposta pela sociedade, escola e pedagogia da aprendizagem de praxeologias necessárias para inserção do homem em instituições de interesses e que sejam atendidas as condições pedagógicas que impõem que o tempo de aprendizagem deve ser igual ao tempo do ensino.

Em resumo, os *esquemas gráficos* eram ferramentas indispensáveis que em companhia de uma narrativa, encaminhavam os arranjos dos dados e os cálculos, constituindo-se em parte integrante da técnica e da tecnologia da práxis, como podemos depreender do afirmado por Heeffer (2014), sobre os esquemas simbólicos encontrados nos livros de ábacos que são similares aos encontrados no *Liber Abbaci*, usados por Leonardo Pisano, que se confundem com os esquemas gráficos da Matemática Hindu.

As técnicas usadas, independentemente do modo interpretativo, contemplam o uso de dados fracionários e inteiros com mesma ergonomia de cálculo da técnica hindu, ou seja, as praxeologias árabes e europeia da redução à unidade, embora apresentem discursos distintos, se reduzem ao mesmo tipo de esquema gráfico de arranjo de dados, que encaminha a mesma ergonomia de cálculos da técnica hindu.

3.3.5.2.Sobre a Tecnologia das Praxeologias da Regra de Três

As praxeologias hindus, árabes e europeias compartilhavam os *habitat* árabe e romano, de modo que não se pode afirmar que uma seja hierarquicamente superior a outra, considerando as práxis ou os logos de modo isolados ou conjuntamente.

Do ponto de vista da análise didática, as praxeologias árabes e romanas da Regra de Três teriam a suposta vantagem por contemplarem sentido aos passos operacionais da regra, inclusive com significados práticos, que, quando são "executados com frequência, não corriam riscos de serem esquecidos, tal como acontece com o trocar de marchas em um carro", quando estamos aprendendo a dirigir (HØYRUP,2007a, p.59, tradução nossa), por exemplo, e, portanto, que podem ser ensinadas de forma segura como meras habilidades.

Assim, segundo nossa compreensão teórica, as praxeologias da RT seriam ensinadas como saberes práticos, e, como tais, a aprendizagem se dava por incorporação dessas práxis, por repetição da práxis em contextos que permitiria atingir a arte dessas práxis, e ainda estariam dotadas de uma razão para o fazer da práxis e por não seguirem o fazer mecânico proposto pelos hindus para trivializar a suposta aprendizagem.

As praxeologias da RT dos árabes e dos europeus contavam com discursos que acompanhavam o procedimento, o que, de algum modo, poderia evitar o que alerta Christian Wolff (1716), em seu *Mathematisches* Lexikon, citado por Høyrup (2007a):

> [...] uma prática matemática pode ser aprendida sem o raciocínio matemático; mas então algo permanecerá obscuro em todos as questões, nada alcançará a precisão adequada com a melhor forma, e às vezes pode acontecer de não se encontrar um modo geral. Sem mencionar que é fácil esquecer algo aprendido, e que esse algo esquecido não é tão facilmente lembrado, daí tudo dependerá essencialmente da memória (HØYRUP, 2007a, p 59, tradução nossa).

Precisamente, o alerta nos diz que há a necessidade de uma Teoria Matemática para a não limitação da praxeologia, além disso, deixa claro que a falta de um discurso teórico sobre uma praxeologia pode levar ao insucesso de uma pessoa com essa praxeologia, por exemplo, o dos alunos, inclusive dos adultos escolarizados, frente à práxis da divisão entre dois numeros inteiros por não serem dotadas de fundamentos teóricos quando estudadas na escola fundamental.

Mas, é preciso considerar que a *infraestrutura matemática* supostamente necessária pode ser impedida de estar presente no ensino de uma praxeologia. Por não existir uma Teoria Matemática que produza essa praxeologia ou que a justifique ou ainda, por condições impostas pela sociedade, pelo sistema de ensino, pela escola, inclusive pela pedagogia, que podem agir sobre a transposição didática como restrições sobre a forma que deve assumir o saber em jogo para o ensino, por exemplo.

Nesses casos, a dificuldade imposta pelos níveis mais externos de codeterminação didática (CHEVALLARD,2009a), que agem sobre a transposição didática, é supostamente vencida por meio da algoritmização da praxeologia como parece preconizar os matemáticos hindus.

Isso pode permitir a incorporação de uma praxeologia sem a segurança de uma técnologia/teoria matemática, por atos assertivos da praxeologia. O que conta é o ato repetido da praxeologia em contexto que em dialética do pessoal com o institucional encaminha, e é encaminhado, à memorização da praxeologia pela pessoa, ou seja, à incorporação pessoal da praxeologia institucionalizada.

A carência teórica matemática também poderia ser vencida com discurssos explicativos e metafóricos, que supostamente ajudam o não esquecimento da praxeologia. De outro modo, uma praxeologia ensinada com um discurso explicativo para que se faz tais e tais procedimentos, mesmo que não especificamente matemáticos, certamente dota essa *praxeologia com matemática* de uma inteligibildade.

Assim, o ensino da praxeologia da Regra de Três conta com a técnica didática do discurso que acompanha o procedimento para atender à pedagogia que exige a incorporação da praxeologia com uma inteligibilidade mínima para supostamente assegurar a aprendizagem, como os discursos que acompanham os procedimentos das praxeologias da RT árabes e europeia.

O *Libro di Conti e mercatanzie* (Século XV), por exemplo, recorre às praxeologias da RT dos árabes e dos europeus como praxeologias alternativas, após resolver o seguinte exemplo: 7 cúbitos de tecido valem 9 florins, quantos valem 89 cúbitos?

> Pela regra de três mostram-se duas alternativas compreensíveis: a primeira consiste em encontrar o preço de um cúbito, ou seja, $9 \div 7 = 1\frac{2}{7}$ florins que permitirá encontrar o preço de qualquer quantidade de cúbitos, em particular de 89 cúbitos. A segunda alternativa é encontrar o raio da variação entre as quantidades de cúbitos, nesse caso é dado por $89 \div 7 = 12\frac{5}{7}$. Esse raio de variação deve também ser mantido para os preços que permitirá, conhecido um preço, calcular o outro. Em seguida, questiona:7 cúbitos de tecido valem 9 florins, quanto se pode obter com 89 florins? (HØYRUP,2007a, p.60, tradução nossa).

O extrato de texto permite observar que as duas praxeologias alternativas, no caso as praxeologias dos europeus e dos árabes, são invocadas como argumentos para justificar a praxeologia dos hindus. Isso é encaminhado no extrato acima, quando faz referência às duas formas alternativas como *formas compreensíveis* da Regra de Três.

Nesse sentido, as praxeologias dos árabes e dos europeus funcionam como tecnologia da RT hindu, por permitirem suposta inteligibilidade sobre a praxeologia. Essa tecnologia permitiria inclusive alargar o alcance da praxeologia da RT, encaminhando aspectos de generalidade sobre a resolução do tipo de problema, considerado por encaminhar respostas a outros questionamentos, como o do tipo constante no extrato de texto anterior.

Essa forma de organização para o ensino com maior alcance das praxeologias da RT não foi exclusiva da fonte ora citada, pois também é encontrada em uma obra anterior, em Libro *di molte ragioni d'abaco* que apresenta uma confusa combinação das praxeologias da RT com as praxeologias da RT de árabes e europeus, compartilhando uma recomendação didática que permite a Høyrup (2007a) assegurar que essas duas obras possuem uma fonte comum incontestável, pré-datada de 1330.

Em resumo, as praxeologias da Matemática Hindu ganham transposições didáticas com o indispensável esquema gráfico de arranjo de dados, mas com a integração objetiva de narrativas que os acompanham e que tornam as praxeologias mais complexas, pois a narrativa é sobre uma suposta análise da situação de que trata o problema.

No caso da transposição didática com justificativa árabe, o esquema gráfico de arranjo de dados é acompanhado da narrativa, que busca ajustar ao explícito modelo da quarta proporcional, embora a proporcionalidade no contexto seja assumida, suposta ou imposta pela cultura da prática, mas mantida invisível no ensino.

No caso da transposição didática com a justificativa europeia da redução à unidade a narrativa que acompanha o esquema gráfico de arranjo de dados é dado pela cultura da prática de que trata o problema sem referências à teoria das razões e proporções.

Nesse sentido, as narrativas que acompanham os procedimentos para a construção do esquema gráfico de arranjos de dados fazem parte da técnica e da tecnologia dessas praxeologias.

3.4. Limitações das Técnicas e Encaminhamentos

Em todas as praxeologias da RT, o conhecimento da instituição de que trata o problema continua sendo uma dificuldade a ser vencida. A noção de *fruto* na praxeologia hindu, por exemplo, é uma técnica didática para eliminar essa dificuldade, no entanto, persiste a dificuldade de identificar o *fruto*, pois esse demanda o conhecimento da instituição. Isso evidencia de modo incontestável o que afirmamos.

Essa dificuldade não se reduz às noções de *fruto*, *similar* ou *não similar*, por exemplo, visto que o uso da RT supõe que o sujeito perceba a situação como própria da RT, ou seja, perceba as condições relativas às instituições concretas que tratam um tipo de problema. Isso podia tornar problemático o ensino e a aprendizagem da Regra de Três para quem fosse estranho àquela instituição.

Nesse sentido, as praxeologias árabes e europeia da redução à unidade se mostram limitadas tal e qual a praxeologia hindu, ou seja, apresentam baixo alcance de generalidade, por depender de saberes práticos específicos.

Isso foi considerado pelos hindus que foram hábeis em criar técnicas ou dispositivos didáticos para despistar essa dificuldade. Isso foi acompanhado em transposições didáticas posteriores de árabes, com a dada relevância às grandezas de mesma denominação, e, pelos romanos, com evidência ao uso dos termos técnicos do tipo *similar* e *não-similar*.

Em todos os casos, o esquema gráfico de arranjo de dados, do modo introduzido pelos hindus, joga um papel relevante, por orientar a hierarquia das operações e sintetizar o procedimento da técnica, como observamos no extrato de texto de Heeffer (2014).

Na escola, em geral, esse procedimento começa com a identificação realizada pelo enunciado do problema e não pela proporcionalidade verificada, mas tão somente assumida sem questionamentos, na cultura da prática de ajustar um gênero de problemas ao modelo da quarta proporcional, como criado pelos hindus, inclusive o que no decurso do tempo veio a ser conhecida como “inversamente proporcional”.

Assim, despistando o conhecimento da instituição e do contexto do problema, a dificuldade era eliminada e com isso as técnicas alternativas podiam conviver com a praxeologia da RT hindu nas organizações matemáticas, cumprindo papéis que podiam ser distintos e até imbricados, ora como técnica e ora como tecnologia da RT.

As imbricações praxeológicas da Regra de Três até aqui apresentadas ganharam vida ao longo do tempo com novos olhares que vão fundamentar construções de novas transposições didáticas da RT, nas quais os esquemas gráficos de arranjo de dados ainda se mostram necessários para trivializar essas praxeologias.

Essa necessidade dos esquemas gráficos de arranjos e rearranjo de dados nas praxeologias da RT também dizem respeito a hierarquia das operações a serem realizadas. Nesse sentido, o próximo capítulo buscará vestígios das praxeologias hindus na Europa nos séculos XVIII e XIX.

CAPÍTULO 4: AS PRAXEOLOGIAS DA REGRA DE TRÊS NA EUROPA DOS SÉCULOS XVIII e XIX.

4.1. Introdução

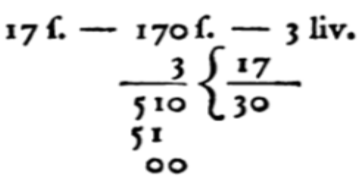
As praxeologias hindus, árabes e europeias se fizeram presentes na Europa no decorrer do tempo, às vezes, uma funcionando como tecnologia da outra, como vimos no capítulo anterior, e também para atender a intenções didáticas, como a de criar condições para estudos mais avançados da matemática. A RT deixa de ficar restrita ao campo dos saberes práticos e galga novo papel no ensino da Matemática.

Em todos os casos, um algoritmo geral pode ser vislumbrado por meio do uso do dispositivo didático dos esquemas gráficos, como orientadores dos arranjo e rearranjos de dados, que, por sua vez, orientavam a hierarquia de operações a serem realizadas. Essa é a pista que seguimos no tempo histórico, em nossa investigação.

4.2. As Praxeologias na Europa do Século XVIII

No século XVIII, ainda encontramos os vestígios das praxeologias do mundo hindu, como se verifica no seguinte fragmento extraído da enciclopédia intitulada *Encyclopédie, ou Dictionnaire Raisonné des Sciences, des Arts et des Métiers, par une Société de Gens de Lettres* (1765, p.21, tradução nossa):

> Três livros são comprados por 17 francos, quantos livros podem ser comprados com 170 franco?
>
> Diga, 17 f. está para 170 f. como 3 livros está para o número de livros procurado:



Como podemos observar, a solução dada segue o esquema gráfico de arranjo dos dados no estilo hindu, dispondo os mesmos em sequência da esquerda para a direita e realizando as operações em ordem inversa, multiplicando primeiro e depois dividindo.

A obra devido a Edmund Wingate (1760) é outro exemplo de que a regra à moda hindu, ainda se fazia presente no final do século XVIII, na Europa. Nessa obra, o autor assim anuncia a regra universal da proporção:

> A Obra, assim ampliada e aperfeiçoada, passou por diversas Edições, até cerca do ano de 1700, quando o Sr. George Shelley, que era Mestre-Escritor do Hospital de Cristo, escreveu um suplemento para isto, contendo diversas práticas, compêndios e métodos fáceis para a execução de casos particulares na maioria das Regras da Aritmética; Juntamente com tabelas decimais úteis no cálculo de juros e câmbios, e algumas regras e observações úteis relativas às práticas de Medição. [....]
>
> [...]Tal era o estado desta obra quando chegou à mão do presente editor, cujos cuidados reuniu sob as seguintes observações e adições: (p.vii) [...]
>
> [...] 7. Uma Regra Universal da Proporção, que responde o propósito de várias Regras de Três, simples, dupla, direta ou inversa, em números inteiros ou fracionários, é dada e ilustrada por muitos exemplos; na qual a grande utilidade do método mencionado acima é de administrar e abreviar frações ordinárias que aparecerá abundantemente. (p.viii) [...].
>
> [...] A Regra Universal da Proporção.
>
> Por *produzir termos*, na regra a seguir, são destinadas a tudo que necessariamente e em conjunto, produz algum efeito; como a causa e o tempo; comprimento, largura e profundidade; o comprador e seu dinheiro; o vendedor e seus bens, etc. e pelos *termos produzidos*, tais como são os efeitos do passado, como compra, produtos, despesa, ganho, perda, juros, valor etc.
>
> Regra
>
> *1- Definir os termos expressando a condição da questão em uma linha, e em qualquer ordem.*
>
> *2- Sob cada termo condicional, fixe seu correspondente único, em outra linha.*
>
> *3- Multiplique os termos produtores de uma linha, e o termo produzido de outra linha, continuamente, e tome o resultado para o Dividendo.*
>
> *4- Multiplique continuamente os termos restantes e deixe seu produto ser o Divisor.*
>
> *5- O quociente desta divisão será o termo requerido.*
>
> Esta Regra é tão geral, que compreende todos os casos que se enquadram nas Regras de Três comuns, seja direta ou inversa; seja simples, ou composta; em números inteiros ou fracionários; de modo que as questões em qualquer das Regras acima, onde a proporção é usada, podem ser facilmente resolvidas por esse modo.
>
> Exemplo 1. Se 4 estudantes gastam 19 libras em 3 meses, quantas libras precisam 8 estudantes em 9 meses?
>
> Os termos que expressam a condição da questão:
>
> Estudante. Libra. Mês.
>
> 4 19 3
>
> Os termos correspondentes a eles colocados abaixo:
>
> 8 A 9

para significar a resposta.
Aqui os estudantes e os meses são os termos produtores, e o dinheiro ou a despesa são os produzidos.
E, portanto, os termos produtores da linha inferior, ou seja, 8 estudantes e 9 meses, devem ser multiplicados por 19 libras o termo produzido da linha superior para o Dividendo: E o produto, dos termos restantes 4 estudantes e 3 meses, é para ser o Divisor: Este Dividendo e Divisor expressos na maneira de uma fração vulgar, pode, pelo Art. 276 estar como expresso abaixo:

$$\frac{8\times9\times19}{4\times3} = A\text{, ou a resposta.}$$

A expressão será abreviada pelo Art. 266 será reduzido da seguinte forma:

$$\frac{8\times9\times19}{4\times3} = \frac{2\times9\times19}{1\times3} = \frac{2\times3\times19}{1\times1} = 6\times19$$
$$= 114\ a\ resposta\ do\ problema.$$

Exemplo. 2 (Sendo o último Exemplo proposto no Art. 145) Se 9 alqueires de alimento servem 8 cavalos 12 dias, quantos dias 24 alqueires servirão 16 cavalos.
Termos condicionais

Alqueires	Cavalos	Dias
9	8	12

Correspondentes:

24	16	A

Onde os cavalos e os dias são produtores e o consumo de alimento o produzido.
Portanto,

$$A = \frac{8\times12\times24}{9\times16} = \frac{8\times4\times24}{3\times16} = \frac{8\times4\times8}{1\times16} = \frac{1\times4\times8}{1\times2} = \frac{1\times2\times8}{1\times1} = 2\times8 = 16$$

Que é a resposta (WINGATE,1760, p.200, tradução nossa).

Esse extrato de texto mostra que essa regra tem aplicação geral, para as Regras de Três simples e compostas, diretas e inversas. No entanto, é a regra ou a técnica anunciada cerca de uma dezena de séculos antes pelos hindus, trocando os termos técnicos (*produtor* e *produzido*). Observe que não há a análise das relações entre grandezas, se direta ou inversa, como procedemos atualmente.

Considera-se a natureza da situação em jogo para, no caso hindu, reconhecer em situação o *fruto*, e, no caso ora exposto, reconhecer em situação o *produtor* e o *produzido*. Essas noções são a chave para o rearranjo dos dados no quase invisível esquema gráfico de arranjo de dados proposto pelos hindus que os organizavam segundo as grandezas, do mesmo modo que o descrito nos passos iniciais do algoritmo constante no extrato de texto de Wingate.

Podemos afirmar que o extrato apresenta a mesma técnica em forma de algoritmo dos matemáticos hindus, com esquemas gráficos de arranjo de dados e uso de termos técnicos culturais para indicar a mesma orientação das operações a serem realizadas.

Aqui, pode parecer que essa praxeologia tem como tecnologia a relação *(nisbah*), do raio, entre os valores das grandezas de mesma espécie. De fato, como vimos na Matemática Hindu, no capítulo anterior, a regra geral pode ser obtida pela solução sequencial de Regras de Três simples e essas podem ser compreendidas como aplicações da quarta proporcional.

A necessidade de evidenciar a praxeologia da RT como produto de uma Teoria Matemática talvez tenha feito o método das relações com proporcionalidade se tornar preferido pelos autores acadêmicos ao longo do tempo.

Essa compreensão é reafirmada nos trabalhos de Lacroix (1839), por exemplo, que constitui um representante significativo da instituição docente do século XIX e que conta com um *habitat* teórico matemático mais fecundo que os *habitat* dos hindus, árabes e de seus antecessores europeus.

4.3. As Praxeologias da Regra de Três no Século XIX

Segundo Schubring (2003), Lacroix foi um autor cuja obra contribuiu de forma decisiva para a constituição da Matemática escolar na França e com inequívoca influência no Brasil, onde teve cinco obras traduzidas para a língua portuguesa.

> Lacroix pode ser visto como protótipo e um primeiro idealizador do programa de livros elementares destinados a reestruturar o conhecimento matemático ensinado de acordo com as invenções científicas mais avançadas (SCHUBRING, 2003, p.108).

Sem dúvida, as obras desse autor, alinham-se aos nossos interesses tanto no sentido da praxeologia da Academia quanto da praxeologia que vive na escola brasileira.

As credenciais de Lacroix o vinculam à Matemática Acadêmica que encaminhará as praxeologias da Regra de Três com fundamentação de uma Teoria Matemática, mas sem evitar de todo as praxeologias vigentes nas escolas, não no sentido do ensino da RT por tipos de tarefas ou problemas, mas por buscar destacar técnicas que poderiam trivializar a praxeologia.

Especificamente, sobre as praxeologias da RT que viviam na escola, ele assim se manifesta:

> [...] regra que nos prescreve um meio certo e seguro de determinar um dos quatro termos de uma proporção sempre que suponhamos conhecidos os outros três, é geralmente conhecida sob os nomes de *regra de três* ou *de proporção*: e ainda que os autores da maior parte dos livros de aritmética tenham dividido em várias espécies, nós olhamos todo esse aparato como inteiramente inútil a quem tenha compreendido bem a natureza da proporção, e tenha entendido com toda clareza a proposta da questão que lhe ocorra resolver (LACROIX,1839, p.288, tradução nossa).

O extrato de texto acima evidencia que Lacroix compartilhava seu modo de pensar a práxis da RT com os matemáticos islâmico, quando afirma que tudo pode ser enfrentado por quem tenha entendido a natureza da proporção, embora deixe escapar a necessidade do conhecimento do assunto da questão, ou seja, da práxis a que se refere o problema.

Mas, em seus Ensaios sobre o ensino das Matemáticas, toma o seguinte exemplo e mostra que a Regra de Três e suas variantes podiam ser enfrentadas apenas com o conhecimento das quatro primeiras operações aritméticas.

> *Um comerciante em sua loja tem tecidos com quatro preços diferentes;*
> 520 medidas do primeiro, valem 27040 francos,
> 215 medidas do segundo, valem 10105 francos,
> 317 do terceiro, valem 12680,
> 59 quarto, valem 2183.
> *A um de seu credores, a quem deve 81600 francos, ele oferece,*
> 9 peças de 49 medidas cada uma, do 1º tecido,
> 3 de 51 do 2º,
> 21 de 37 do 3º,
> 19 de 29 do 4º.
> Perguntamos se ele pagou, ou quanto ele ainda deve?
> (LACROIX, 1838, pp.243-244, tradução nossa).

A solução do problema posto acima é encaminhada por Lacroix do seguinte modo:

> [...] mas isso pode ser facilmente descartado observando que a principal dificuldade consiste em determinar, por meio da divisão, o preço da medida de cada tipo de tecido; e com esses valores, chegamos, pela simples multiplicação (se escolhermos os números do exemplo de maneira a evitar as frações) aos valores de cada tipo das de espécies fornecidas (LACROIX, 2013, p.201).

A praxeologia apresentada por Lacroix acima, que usa apenas as quatro regras operatórias para os números inteiros, era dada a conhecer no estudo da Aritmética e, como tal, não exigia o uso de proporções. Essa era abordada em estudos posteriores de Álgebra.

Continuando, ele afirma que variando os pedidos é possível obtermos esses tipos de problemas, fáceis de preparar, entre eles, os que dizem respeito a Regras de Três simples, diretas ou inversas, e até mesmo as Regras de Três compostas, que podem ser resolvidos sem ajuda de fórmulas ordinárias. Lacroix assim afirma:

> Todos no fundo, independentemente dos números propostos, tomam uma fração ou um múltiplo de um número determinado; também dessa maneira para as regras de interesse simples, desconto, da sociedade, do câmbio, e da comparação de medidas de diversos países (LACROIX, 2013, p.201).

Deste modo, destaca que usando essas práxis aritméticas, poderíamos remover todos os andaimes das proporções. Essas seriam os vestígios da maneira que os antigos consideravam as grandezas. Isso não seria de todo necessário para abordar as questões de comércio, bancos, etc.

Desse modo, essa parte da Aritmética se tornaria muito mais analítica e mais de acordo com os novos métodos que são empregados em outros ramos da matemática (LACROIX, 2013, p.201).

No entanto, embora Lacroix reconheça a potencialidade do método aritmético analítico para as atividades matemáticas, mantém em seu tratado esses tipos de problemas no que concerne às proporções em respeito ao costume e principalmente por sua intenção didática de levar o aluno ao encontro da Teoria das Razões e Proporções, a partir do uso da praxeologia da Regra de Três.

Isso fica claro quando ele anuncia que a questão particular que o leva a fazer se sentir melhor é a ideia de que se deve se concentrar sobre a proporcionalidade, em vez da forma abstrata que a Aritmética é apresentada na maioria dos livros elementares.

Nossa afirmação se depreende da obra intitulada Tratado de Aritmética Elementar, em que Lacroix (1839) assim afirma no começo do capítulo das proporções:

> [...] poderíamos em verdade terminar aqui o nosso tratado (sobre a aritmética), deixando os demais que podem jogar menos com isso, para a Álgebra, donde com todo rigor pertencem. Contudo, vamos resolver algumas questões, nas quais nossos leitores, ao mesmo tempo em que exercitam o que até aqui tenham aprendido, se preparam para análise algébrica e adquiram algum conhecimento da importante teoria das razões e proporções, que tratam geralmente

> todos os livros em aritmética (LACROIX,1839, p. 279, tradução e destaque nossos).

A forma abstrata a que se refere Lacroix (1839) é o método analítico adotado nas práxis aritméticas, como a práxis que ele realiza acima sem denominar. Essa maneira de fazer é a praxeologia da RT, denominada de método da redução à unidade e encontrado nos ábacos italianos do século XIV, conforme afirma Høyrup (2007a; 2007b).

Para ficar claro o que estamos falando, consideramos o seguinte problema apresentado e resolvido por Lacroix:

> Suponhamos em primeiro lugar que havendo conhecimento com inteira certeza que 13 varas de certa tela de linho custam 130 reais, se nos perguntarem, *quantos reais custarão no mesmo preço, 18 varas da mesma tela de linho?* (LACROIX, 1839, p.280, tradução nossa).

A primeira solução para esse problema é apresentada por meio da redução à unidade como segue.

> Claro que será muito fácil determinar o verdadeiro preço de cada vara de tecido, achando o quociente 10 reais que resulta da divisão do valor total 130 reais pelas 13 varas que se supõem compradas inicialmente, e já que sabemos este preço, se o multiplicarmos agora por 18, que é o número de varas da segunda compra, nos resultará por produto 180 reais, verdadeiro valor que nos perguntaram (LACROIX, 1839, p.280, tradução nossa).

Em registros numéricos a resolução de Lacroix pode ser escrita por $\frac{130}{13} = 10$ e então $10 \times 18 = 180.$ Como se pode notar, a solução é realizada sem preocupações com a proporcionalidade, inclusive tomando a relação entre grandezas de espécie distintas, reais e varas, tudo em acordo com a práxis consagrada nas atividades comerciais.

Lacroix (1839) afirma que é através da análise do enunciado precedente que se descobre a quantidade desconhecida, mas os números conhecidos e os números pretendidos dependem uns dos outros de uma forma apropriada que se tem de considerar. Com isso, Lacroix define as grandezas proporcionais ou variações de uma mesma relação, as *relações* propriamente ditas e da proporção; a relação ou a razão de dois números, diz ele, é o quociente de um pelo outro.

Assim, continuando, apresenta a solução em que aborda o problema por meio das proporções. Sob esse fazer normativo da teoria é exigido tomar as razões entre quantidades de grandezas de mesma espécie e assumir que é verdadeiro que “o produto dos meios é igual ao produto dos extremos”. Isto culmina o modo de fazer, como podemos observar a seguir por meio do extrato da solução feita por Lacroix.

> Com efeito, havendo achado de ver na primeira que os valores das duas peças de telas de linho estarão em proporção com os números de varas que cada peça tenha, podemos formar a que segue:
>
> $$13^{v} : 18^{v} :: 130^{r} : x^{r},$$
>
> Representando com a letra *x* ou outra qualquer das últimas do alfabeto, o valor que buscamos das 18 varas, e como este valor seja uso dos extremos da proporção, vê-se facilmente que multiplicando entre si os dois meios 18 e 130, teremos o produto 2340; o qual, dividido pelo extremo conhecido 13, nos dará por quociente 180 que justamente é o outro extremo que desejávamos conhecer (LACROIX, 1839, p.288, tradução nossa).

Esse modo de fazer ratifica o modo hindu de primeiro multiplicar e depois dividir, embora deixe claro a orientação da tecnologia. Isto não é enfatizado no caso da Matemática Hindu.

O esquema gráfico de arranjo dos dados adotado por Lacroix faz uso dos superíndices *v* e *r* para orientar que as razões devem ser tomadas entre as grandezas de mesma espécie. Isso evidencia o papel orientador do esquema gráfico para o arranjo dos dados que permitirá a construção das razões que levará ao encontro do desconhecido. Nesse sentido, seu esquema gráfico de arranjo de dados não difere do esquema da Matemática Hindu.

Mas, a construção da razão não depende somente de distinguir as grandezas, pois poderá exigir a inversão dos dados de uma mesma grandeza, no caso da variante inversa da Regra de Três.

Essa dificuldade não existe com o uso do esquema gráfico do arranjo de dados da RT simples na praxeologia hindu, mas com o uso da quarta proporcional recorrida por Lacroix. Essa dificuldade faz a diferença.

Lacroix reconhece o que afirmamos quando considera que a principal dificuldade de todas as questões desta espécie consiste em ordenar os termos conhecidos do modo conveniente para escrever a proporção. Assim, ele estabelece a seguinte regra que assegura a proporção em todos os casos:

> O menor termo da primeira espécie,
> Está
> para o maior da mesma,
> como
> o menor termo da segunda espécie,
> está
> para o maior da outra.
> (LACROIX, 1839, p.290, tradução nossa).

Essa regra despista as dificuldades da necessidade da análise de variação entre as grandezas, mas pode parecer confusa para os iniciantes, pois não dá indícios se o desconhecido é o maior ou o menor que o valor da grandeza de mesma espécie dada.

Além disso, cria uma dificuldade para os mesmos quando a relação é inversa, pois o desconhecido assume a posição de terceiro termo na quarta proporcional e isso cria uma dificuldade adicional que é atender ao fazer *protomatemático* que exige o desconhecido como o quarto termo da proporção. Isso implica em duplas inversões nas relações nem sempre bem vistas por outros autores.

Por isso, Lacroix e outros sábios mais célebres como Laplace e Lagrange, que não tiveram o inconveniente de ensinar a Regra de Três, receberam críticas de Vallejo (1841), outro ilustre representante da instituição docente do século XIX. Ele observa que esses doutos professores explicavam a RT para sujeitos que já tinham conhecimento e, portanto, “se detinham somente à parte mais sublime” (VALLEJO,1841, p.351, tradução nossa).

Vallejo (1841) alerta que os iniciantes podiam não estar dotados do espírito necessário para compreender a práxis indicada acima por Lacroix. Vallejo assim a considera em contraste com suas praxeologias também sustentadas tecnologicamente pela proporcionalidade:

> Para fazer dito exame se necessita *possuir um espírito de que nem todos estão dotados*; e por isso nossa regra, que não exige mais que *o conhecimento das quantidades de uma mesma espécie para introduzir imediatamente a proporção, está mais ao alcance dos principiantes* (VALLEJO, 1841, p.351, tradução e grifos nossos).

O espírito a que Vallejo (1841) se refere é da capacidade do iniciante com respeito ao raciocínio analítico, que o tratamento sofisticado da academia francesa despistava no ensino da Regra de Três. O extrato de texto a seguir deixa claro o que afirmamos.

> Toda dificuldade na solução da regra de três consiste em representá-la; porque, depois de apresentada, tudo está em achar o quarto termo de uma proporção geométrica. Assim, devemos indagar se é possível achar a priori alguma regra que na prática nos possa conduzir a essa apresentação sem equivocar a questão, que é o que acontece majoritariamente quando a regra de três é inversa (VALLEJO,1841, p.350, tradução nossa).

Parece absurdo essa afirmação de Vallejo (1841), considerando que Lacroix (1839) não eliminou a necessidade da análise do enunciado, pois encaminha a compreensão sobre sua regra como uma forma abreviada para assegurar as proporções.

De outro modo, a eliminação da necessidade de verificação do tipo de variação, se diretas ou inversas, é apenas aparente, pois, o lugar de *x* na proporção somente é determinado pelo conhecimento do assunto a ser analisado na situação. Isso fica claro quando exprime em nota de rodapé o seguinte:

> O conhecimento do assunto de que trata a questão proposta é o único que pode indicar ao calculador não só se o número desconhecido há de ser maior ou menor que o conhecido da mesma espécie, mas também qual proporção deverá ou não formar para determiná-lo (LACROIX, 1839, p.290, tradução nossa).

A necessidade do conhecimento do assunto, que é o contexto para a análise da situação, fica mais clara ainda quando Lacroix assumindo a atitude professoral de trivializar o conhecimento, para facilitar a aprendizagem, anuncia e soluciona o seguinte problema:

> *Se 9 diaristas, trabalhando 8 horas ao dia, tem necessitado 24 dias para abrir um foço de 65 varas de comprimento, 13 de largura e 5 de profundidade; 71 diaristas que em igualdade de todas as demais circunstâncias trabalham 11 horas por dia, quantos dias necessitarão para abrir outro foço de 327 varas de comprimento, 18 de largura e 7 de profundidade?* (LACROIX, 1839, p. 301, tradução nossa, grifos do autor).

Lacroix (1839) destaca que esse problema pode ser solucionado por meio de várias proporções simples, ou por meio de uma só composta de todas elas. Isso é o que, de fato, está interessado em mostrar.

Antes de seguirmos, é útil deixar claro outro fazer *protomatemático* que age nas praxeologias de Lacroix (1839), que envolvem uma fração quando essa representa uma razão; “falo constantemente na suposição de que quando vejo representada uma razão em uma fração, observo o denominador como antecedente, e o numerador como consequente”. (LACROIX,1839, p.305, tradução nossa).

Esse fazer protomatemático tem significativas implicações para compreensão do que afirma Lacroix (1839) sobre suas praxeologias. Assim, feita essa observação, seguimos com o longo e necessário extrato de seu texto.

> [...]Com efeito, se nos casos mencionados na proposta da questão não se adverte outra diferença senão a de serem distintos os números de trabalhadores, e, por conseguinte, os dias, sendo iguais as obras que deveriam executar, e todas as demais, a questão ficaria reduzida à seguinte: *se 9 homens tem empregado 24 dias em fazer uma obra, quantos dias necessitarão 71 homens para fazer outra obra inteiramente igual?* A qual resolveremos formando a seguinte proporção:
>
> $$9^{hom} : 71^{hom} :: x^{d} : 24^{d};$$
>
> [...] Representaremos o número de dias que em tais circunstâncias será necessário, pela expressão fracionária seguinte:
>
> $$\frac{24 por 9}{71}$$
>
> Este seria certamente o número de dias que os trabalhadores deveriam empregar se somente trabalhassem 8 horas por dia; mas supondo que eles tem de empregar 11 horas por dia, deverão executar a mesma obra proporcionalmente em menos dias. Formaremos, assim, a segunda proporção:
>
> $$8^{h} : 11^{h} : : x^{d} : (\frac{24 por 9}{71})^{d}$$
>
> [...] E o número de dias será o representado por esta nova expressão fracionária:
>
> $$\frac{24 por 9 por 8}{71 por 11}$$
>
> que nos dá o número de dias necessários para que os 71 diaristas trabalhando 11 por dia, executassem em igualdade de todas as demais circunstâncias uma obra inteiramente igual à que teriam feito 9 diarista trabalhando 8 horas ao dia.
> Como se supõe, comprimentos diferentes para os dois foços, será necessário tanto dias mais para abrir o segundo foco quanto maior seja o comprimento do que foi dado. Daí segue a terceira proporção:
>
> $$65^{v} : 327^{v} : : (\frac{24 por 9 por 8}{71 por 11})^{d} : x^{d}$$

da qual segue que o número de dias necessários para a segunda obra por razão de seu maior comprimento pode ser representado por esta outra expressão:

$$\frac{24 \, por 9 \, por 8 \, por 327}{71 \, por 11 \, por 65}$$

Considerando também as larguras, que são diferentes nos dois foços, e tendo presente que por ser maior que a do primeiro o segundo, deve aumentar por esta razão o número de dias, que leva à quarta proporção:

$$13 \; : 18 \; : : \; (\frac{24 \, por 9 \, por 8 \, por 327}{71 \, por 11 \, por 65})^d : \; x^d$$

cujo termo é representado pela seguinte expressão:

$$\frac{24 \, por 9 \, por 8 \, por 327 \, por 18}{71 \, por 11 \, por 65 \, por 13}$$

que representa o número de dias que seriam necessários para executar a segunda obra com as circunstâncias mencionadas nas quatro proporções que até agora formamos.
Finalmente, tendo que as profundidades dos focos são diferentes e que se tornou maior, a obra deve necessitar por esta razão tanto quanto dias a mais e assim formamos a quinta e última proporção:

$$5^v : 7^v : : \; (\frac{24 \, por 9 \, por 8 \, por 327 \, por 18}{71 \, por 11 \, por 65 \, por 13})^d : \; x^d$$

que dá o número de dias necessários para abrir o segundo foço com todas as circunstâncias que abraça a proposta da questão e será representando pela expressão seguinte:

$$\frac{24 \, por 9 \, por 8 \, por 327 \, por 18 \, por 7}{71 \, por 11 \, por 65 \, por 13 \, por 5}$$

[...] O número de dias que acabamos de achar, que é necessário empregar para abrir o segundo foço, é, segundo temos demonstrado, igual aos 24 dias que se gastaram em abrir o primeiro, multiplicados pela expressão fracionária:

$$\frac{9 \, por 8 \, por 327 \, por 18 \, por 7}{71 \, por 11 \, por 65 \, por 13 \, por 5}$$

Esta expressão [...] está composta ou é o produto das cinco frações, $\frac{18}{13}$ e; e tendo presente as denominações na proposta da questão de cada uma delas, veremos que a primeira $\frac{9}{71}$ é a razão inversa da razão $\frac{71}{9}$ entre os dois números de trabalhadores, sem comparar-lhe a mesma ordem com que foram mencionados na questão. A segunda $\frac{8}{11}$ é outra razão inversa que teriam entre si os dois números de horas de trabalho diário, se considerarmos a mesma ordem das duas quantidades no enunciado. As três frações restantes $\frac{327}{65}$, $\frac{18}{13}$ e $\frac{7}{5}$ são as respectivas razões *diretas* dos comprimentos, das larguras e das profundidades dos foços, respectivamente para a formação dessas três frações, quando observamos a disposição de seus termos na mesma ordem em que são apresentados no enunciado das quantidades representadas por eles.

[...] bem que essas razões poderiam se chamar de *fatores*, e que se chamam *componentes* daquela outra, serão *diretas* ou *inversas*, segundo o que deveria cada uma ser se com ela e a razão do número de dias tivéssemos que formar uma proporção simples. Quando dizemos que estas razões tem de ser *diretas* ou *inversas*, não queremos dizer outra coisa senão que seus termos se tem de colocar na mesma ordem ou em contrário do que se tem no problema proposto[...]multiplicando umas por outras todas as frações que resultam, o produto de todas elas representaria o valor ou expoente da razão do número conhecido ao reconhecido; e de conseguinte esta última razão seria *composta* de todas as outras[...]Por conclusão adicionaremos que se tivéssemos posto em forma de razão a expressão fracionaria

$$\frac{9\,por\,8\,por\,327\,por\,18\,por\,7}{71\,por\,11\,por\,65\,por\,13\,por\,5},$$

seus dois termos, com o número de dias conhecidos 24, e com o desconhecido, poderíamos formar desde logo a única proporção composta das cinco antes feitas.

$$71\,por\,11\,por\,65\,por\,13\,por\,5 : 9\,por\,8\,por\,327\,por\,18\,por\,7 :: 24^d : x^d\ ;$$

O mesmo poderá executar-se em todos os casos semelhantes; e se em vista do que temos praticado, para resolver as questões que temos proposto, temos que estabelecer uma regra geral para o efeito, deveria em nosso conceito estar concebida nestes termos:

Regra geral: *sempre que do exame da proposta de uma questão resulte que para achar o número desconhecido, teremos que* ***formar duas ou mais proporções, e queremos reduzi-las a uma só que produza o mesmo efeito final,*** *haverá de ser o terceiro termo desta última o número conhecido que seja da mesma espécie que o desconhecido; este sendo o quarto termo se obtém, deste modo, a segunda razão da proporção que tentamos formar. Para compor de todos os números restantes dados à primeira razão que nos falta, com cada dois deles, que sejam de mesma espécie, formaremos uma razão simples, considerando para isto, em cada uma, as várias razões que devem assim resultar, como se somente ela tivesse de ser a primeira da proporção, e colocando seus dois termos na mesma ordem de grandeza que em tal caso deveriam guardar com o número*

> *desconhecido e o conhecido da mesma espécie. Formadas todas as razões simples com os números dados que não estejam indicados, multiplicaremos todos os antecedentes, uns pelos outros, e olharemos o produto como o verdadeiro antecedente: multiplicaremos em seguida todos os consequentes delas, para contar com seu produto como o consequente da primeira razão que faltava. E estando já então conhecidos os três primeiros termos da proporção, cujo quarto termo é o que buscamos, poderemos facilmente o determinar pelo método prescrito* (LACROIX,1839, pp.301-307, tradução e grifos nossos).

Como se pode notar no extrato de texto acima, a complexidade da construção da sequência de proporções é substituída por uma regra geral que busca substituir duas ou mais proporções, e reduzi-las a uma só que produza o mesmo efeito final. Isso inclui a análise em situação da variação de cada grandeza para determinar se essa variação é direta ou inversa, tendo sempre em conta a variação da grandeza desconhecida.

O modo de construção da regra de Lacroix (1839) não difere do proposto pela Matemática Hindu que assim procedeu para obter sua regra geral. Do ponto de vista do algoritmo, a regra geral de Lacroix é supostamente mais compreensível que a praxeologia hindu por encaminhar a síntese do processo ainda dependente da quarta proporcional.

No entanto, vale observar, que a análise de variação das grandezas é destacada como uma práxis natural e por isso sem referenciar o conhecimento do contexto da questão que o problema trata.

Mas, isso é aparente, pois a complexidade da análise é tornada implícita pelo anuncio da regra de Lacroix (1839), por sua forma abreviada sobre o rearranjo dos dados para assegurar a proporcionalidade. Mais precisamente, se a relação é inversa é preciso inverter a razão para assegurar a proporcionalidade. Essa complexidade de rearranjar os dados para atender a uma proporcionalidade é o espírito que nem todos estariam dotados, de que reclama Vallejo (1841).

A grande dificuldade, segundo Vallejo (1841), estaria, assim, em como determinar se uma relação deve ou não ser invertida. Isso é fundamental para o emprego da regra. Assim, o esquema gráfico que arranja os dados, seguindo e segundo as grandezas, é proposto por Vallejo como técnica didática para facilitar ao iniciante o encaminhamento das operações sem a complexidade da análise situação, no mesmo estilo hindu.

Isso reduz a praxeologia da Regra de Três a identificar os dados de mesma espécie e relacioná-los segundo a taxionomia de *causas* e *efeitos*, como assim, ensina.

> Regra de três é a que ensina a determinar os efeitos por meio das causas ou as causas por meio dos efeitos[19], quando se conhece a ligação ou dependência que tem entre si.
> A regra de três pode ser de dois modos: simples e composta; a simples é aquela em que para determinar o efeito ou a causa que se busca, só se necessita atender a uma circunstância; e a composta é aquela em que se necessita atender a duas ou mais circunstancias.
> A regra de três simples se subdivide ou pode ser de outros dois modos: direta e inversa; direta é aquela em que se trata de averiguar o efeito que produz uma causa, ou a causa de que provem um efeito, quando se conhece o efeito produzido por uma causa da mesma espécie; e a inversa é aquela em que se trata de averiguar a causa que se necessita para produzir, junto com outra dada, o mesmo efeito que tem produzido as outras duas causas da mesma espécie. (VALLEJO,1841, p.349, tradução nossa).

Assim, para Vallejo, em uma situação que existe uma relação entre *causa* e *efeito*, se tem a relação direta e, se existem em jogo apenas duas *causas*, mesmo que o efeito esteja implícito, a relação é inversa. Essa técnica para encaminhar as inversões ou não de relações é do mesmo tipo da técnica usada pela Matemática Hindu que recorria à noção cultural de *fruto* como o que é produzido.

Aparentemente, os termos técnicos de *causa* e *efeito* parecem eliminar a complexa análise que permite identificar se uma relação deve ser invertida ou não. No entanto, persiste a dificuldade, no caso, de identificar "*causa* e *efeito*", pois exigem conhecer essa ligação ou dependência entre as grandezas em situação.

Mas, a Academia Matemática parece ignorar que "qualquer saber científico funciona sobre um estrato profundo de preconstruções" (CHEVALLARD,2005, p.107, tradução nossa) e teima em insistir que as dificuldades residiam e residem na tecnologia matemática, que justifica a técnica da Regra de Três e novos discursos matemáticos têm sido proposto ao longo do tempo.

A proporcionalidade não parecendo o suficiente leva a um novo jeito de fazer que é encaminhado pela reforma do ensino francês, no século XIX. Esse novo jeito

---

[19] Cuando se ve que una cosa es capaz de producir otra, di la que produce se llama causa y d la producida efecto. Por ejemplo: desde que vemos que a cera se derrite constantemente por la aplicación de cierto grado de calor, danos al calor el nombre de causa » y al derretirse la cera el nombre de efecto; cuando un labrador siembra trigo y coge, el trigo que siembra es la causa, "que produce el trigo que coge, el cual es el efecto (VALLEJO,1841, p.249).

de fazer ainda é dominante nas escolas, nos livros didáticos e nos fazeres dos professores, por meio de equações.

Esse fazer segue como uma práxis canônica, em que se usa um esquema gráfico de arranjo dos dados similar aos aqui expostos, pois dispõe as grandezas, uma em cada coluna, que impõe aos dados serem dispostos de modo a assegurar que as relações sejam formadas por valores de uma mesma grandeza.

Precisamente, começa com o esquema gráfico de arranjo dos dados, já exposto no trabalho Wingate (1760).

$$\begin{array}{cc} v & r \\ 13 & 130 \\ \downarrow & \downarrow \\ 18 & x \end{array}$$

Isso assegura que as razões serão tomadas entre grandezas de mesma espécie e após breve análise de crescimento, decide-se por direta ou inversa, para em seguida por a equação que é resolvida pelo produto cruzado como segue.

$$\frac{13}{18} = \frac{130}{x} \Rightarrow x = \frac{18 \times 130}{13} = 180$$

Essa técnica da Regra de Três faz parecer que o problema é um problema matemático, que demanda a observação das condições que podem assegurar a proporcionalidade e com a necessidade ou não da inversão da relação que formará a equação.

A necessidade de eliminar a complexidade da análise em situação deixaria de ser considerada, embora reconhecida como dificuldade significativa para o uso da regra, como assim revelou Lacroix (1839) e Vallejo (1841), além de autores anteriores, inclusive os matemáticos indianos. Para enfrentar isso, a ênfase na tecnologia matemática parecia a solução.

Mas, o fazer algebrizado das equações gerou insatisfações com a mecanicidade das práxis, sob a teoria da proporcionalidade, pois além de demandar uma precoce práxis algébrica, exigia ainda o uso objetivo de técnicas culturais que deviam ser memorizadas. Gómez (2006) ressalta que:

> Nessa tessitura começou impor-se um método em um estilo de pensamento que não depende das proporções e nem das equações, são da análise para encontrar a solução sem ter que depender de recordar de regras mais ou menos artificiais. Uma das formas desse método analítico será conhecido pelo nome de método de redução à unidade (GÓMEZ, 2006 p.59, tradução nossa).

O método de redução à unidade depende da análise da questão e da dedução das consequências que resultam desta análise, consistindo em buscar o valor da grandeza de mesma espécie da incógnita que corresponda a um valor da outra grandeza igual a um, como assim foi apresentado acima, na primeira resolução de Lacroix (1839).

Smith (1958) refere que, na Inglaterra, essa praxis veio a significar parte da aritmética comercial, na qual eram utilizados processos curtos e cita que Baker (1568) a menciona do seguinte modo:

> Alguns chamam essas regras de práticas, regras breves: por que, muitas perguntas podem ser feitas com uma rápida reação, pela regra de três. Há outros que a chamam a multiplicação de pequeno porte, porque o produto é sempre menor em quantidade, do que o número que será multiplicado (SMITH, 1958 p.493, tradução nossa).

Seguindo, Smith (1958) afirma que essa declaração bastante indefinida deu lugar para definições mais claras com o passar do tempo como a de Greenwood (1729), que fala dessa práxis da seguinte forma:

> Esta regra é uma contração ou melhor, uma melhoria da Regra de três, e executa todos os casos, onde a unidade é o primeiro termo, com a expedição de tal, e de facilidade, que é, de uma maneira extraordinária, montada para a prática do comércio e de Mercadorias, e a partir daí recebe o seu nome (SMITH, 1958 p.494, tradução nossa).

Como uma práxis de atividade específica persiste a antiga praxeologia da Regra de Três em contraposição à práxis canônica, sobretudo pela vantagem peculiar de ficar mais próximo do fazer científico, não matemático, que privilegia a relação entre grandezas de espécies diferentes, pois isso é assim descrito algebricamente.

$$\frac{r}{v} = \frac{130}{13} = 10 \Rightarrow r = 10v$$

Esse argumento pode se mostrar decisivo para rejeitar a práxis canônica e assumir o procedimento que transgride a noção de proporcionalidade como razão entre grandezas de mesma espécie, considerando a legitimidade do saber prático da Regra de Três aperfeiçoada em atividades como o do comércio em geral (SMITH, 1958 p.494), inclusive para o ensino por ser aplicável a todos os problemas de proporcionalidade, como assim nos remete Bourdon (1848).

> O método que é designado sob o nome de redução a unidade, é aplicável a todos os problemas que dependem da teoria da proporcionalidade; [...] Mas, se este método tem a vantagem de ser mais analítico que os nossos, tem, segundo outros, o inconveniente de ser mais prolixo em seus detalhes. De todos os modos, estamos distantes de depreciá-lo; ao contrário o recomendamos aos professores, como um excelente exercício (BOURDON, 1848, p.235, tradução nossa).

Essa praxeologia a que se refere Bourdon (1848) era considerada como uma praxeologia aritmética intuitiva, sem discurso matemático, mas que encontrava e encontra abrigo nos tratados aritméticos mais elementares desde quando se escreveram os primeiros tratados aritméticos. Não era objeto de estudos mais avançados da Matemática.

No entanto, essa praxeologia é “redescoberta” como o método da redução à unidade e ganha força com o incentivo ao uso dos métodos analíticos para o ensino, como assim propôs o Barão de Reynaud (1800).

As obras do Barão de Reynaud (1800, 1810, 1834) mais tarde influenciaram a *reforma analítica da Regra de Três*, encaminhada por Tilmant (1875), tomando a redução à unidade à luz das compreensões do espírito da práxis da Análise dada pelos filósofos-geômetras; Descartes, Pascal e Arnauld.

O barão destaca as qualidades de todos os métodos aritméticos para os iniciantes frente à precoce atividade algébrica da escola, do seguinte modo.

> Clareza dos *métodos aritméticos* adequados para a fragilidade dos iniciantes, e as formas variadas em que eles são suscetíveis, ao exercer o espírito da juventude, lhes dispondo para entender as considerações abstratas da álgebra. Eu penso que os *procedimentos algébricos empregados muito cedo, acostumam os alunos a se deixarem levar cegamente pelo* ***mecanismo*** *de transformações*, enquanto as considerações finas e engenhosas, que exigem as soluções aritméticas, fortificam o raciocínio, e preparam aos brilhantes dispositivos da análise (REYNAUD, 1834, p.v, tradução nossa, grifos do autor).

Com essa compreensão, Reynaud (1810), em sua obra *Élémens D’Algèbre* apresenta um método novo que, segundo ele, depende apenas do conhecimento das quatro regras da Aritmética, relativa as quatro operações aritméticas elementares, e suas combinações para o aprendizado desse método. Essa compreensão está cristalizada no seguinte extrato de texto.

> Esta obra contém um *método completamente novo para resolver problemas, usando apenas as combinações das quatro regras da aritmética* (REYNAUD,1810, p. xxxvi, tradução nossa, grifos do autor).

Para Reynaud, esse método novo é de grande alcance permitindo substituir uma variedade de outros métodos conhecidos, entre eles, a Regra de Três e suas variantes, com a vantagem de estar ao alcance de todas as pessoas que tenham estudado a sua Aritmética, mesmo àqueles dotados de pouca inteligência.

> A simplicidade e clareza deste método, o coloca ao alcance das pessoas menos inteligentes; ele substitui os métodos conhecidos pelos *nomes de regra de três simples e composta, direta e inversa, regras de sociedade, de desconto, de juros, de câmbio, de troca, de liga, falsa posição, dupla falsa posição etc, etc*. (REYNAUD,1810, p. xxxvii, tradução nossa, grifos do autor).

Reynaud (1810) destaca as supostas vantagens didático-pedagógicas do seu método, entre elas, a da eliminação do fazer mecânico que obscurece as ideias dos iniciantes, ainda presente nos dias atuais da matemática escolar, do seguinte modo:

> Eu fiz um duplo serviço para iniciantes, aliviando sua memória e fortalecendo seu espirito: esta enorme estrutura de nomes e regras são próprias para obscurecer as ideias e para perda do julgamento, levando o resultado por longos desvios, e de uma maneira puramente mecânica (REYNAUD,1810, p. xxxvii, tradução nossa).

A mecanicidade referida nesse extrato de texto é exemplificada por ele a partir do seguinte exemplo: 4 trabalhadores fazem 20 jardas de uma obra; quantas jardas farão 9 trabalhadores?

De onde, encaminha a análise de resolução do seguinte modo:

> Chamando x o trabalho desconhecido e colocando a proporção:
>
> 4 trabalhadores: 9 trabalhadores : : 20 jardas : x
>
> O último termo é igual ao produto dos meios, dividido pelo extremo conhecido; o aluno, que aplicou esta regra mecanicamente, multiplicaria 9 trabalhadores 20 jardas, e dividiria o produto por 4 trabalhadores; o que é absurdo. (REYNAUD,1810, p. xxxvii, tradução nossa).

O absurdo que aponta Reynaud é por ele exposto em nota de rodapé da seguinte maneira:

> Eu citarei a este assunto um fato interessante. Em exames públicos, um aluno, tentando explicar esta operação, diz ...

$$x = \frac{20\, jardas \times 9\, trabalhadores}{4\, tarabalhadores}$$

> Removendo o fator trabalhador, comum aos dois termos dessa fração, vem.
>
> $$x = \frac{20\, jardas \times 9}{4} = \frac{180\, jardas}{4} = 45\, jardas$$
>
> Esta maneira de interpretar o cálculo, todo defeituoso como ele mostrou, demonstra a inteligência do aluno, e o vício do método (REYNAUD,1810, p. xxxvii, tradução nossa).

Reynaud (1810) deixa claro que a algebrização precoce encaminha as operações mecanicamente e que isso pode levar a interpretações erradas sobre as operações. Especificamente, Reynaud chama atenção sobre a práxis errônea de se operar com as grandezas.

Em nossa compreensão teórica, uma praxeologia, entendida como um tipo de tarefa que se executa segundo uma técnica, é produto de uma atividade humana e, como tal, pode ser dotada ou não de uma compreensão teórica. É nesse sentido que Reynaud (1810) parece referir a praxeologia como impossível de ser realizada por qualquer pessoa que não a praticasse frequentemente de modo a torná-la parte integrante de seu equipamento praxeológico, permitindo-lhe funcionar de forma naturalizada.

As praxeologias naturalizadas ou saberes práticos, que se engendram apenas frente a uma situação específica, são apreendidos, em geral, por imitação. Não há clareza, nesse caso, das técnicas usadas e tampouco da existência ou não de um discurso teórico que permita produzir essas praxeologias. Aprendemo-las sem inteligibilidade teórica, por meio de situação rotineira ou frequente.

Esse fazer naturalizado que funciona sem o conhecimento do porquê se faz desse ou daquele modo, tal práxis, é o que Reynaud (1810) desejava evitar. Daí segue com sua proposta, a do método que tinha o cálculo dirigido pelo raciocínio, como explicita o seguinte extrato de texto.

> O cálculo, dirigido pelo raciocínio, não está sujeito a nenhum desses inconvenientes; a prática, sem a teoria, é apenas uma rotina cega, que perde o espírito e induz frequentemente ao erro. Facilmente esquecemos as regras que não compreendemos; mas os métodos confiados ao juízo, não se apagam jamais da memória (REYNAUD,1810, p. xxxviii, tradução nossa).

Reynaud (1810) assume o raciocínio como condutor da práxis e propõe o fazer com inteligibilidade objetiva que permitisse certa independência das regras. É preciso ficar claro, no entanto, que Reynaud não está se referindo às regras matemáticas em sua generalidade, pois, sem dúvida, a atividade matemática é regrada. Ele se refere ao uso de regras do jeito que nós nos referimos atualmente, por exemplo, ao uso de um número elevado de fórmulas e algoritmos que poderiam ser substituídas por um número menor de fórmulas e algoritmos com alcance mais geral.

Reynaud (1810) demonstra esse anseio por meio do seguinte exemplo empregando o seu método novo do seguinte modo:

> O raciocínio que eu substituo é mais simples; dizemos:
> Se 4 trabalhadores fazem 20 jardas, um trabalhador fará a quarta parte de 20 jardas, ou seja,5 jardas; os 9 trabalhadores farão, portanto, 9 vezes 5 jardas, ou seja 45 jardas.
> Todas as minhas soluções são fundadas sobre esses princípios rigorosos (REYNAUD,1810, p. xxxvii, tradução nossa).

É comum encontrarmos em diferentes pesquisas sobre Aritmética e proporcionalidade a denominação de Método da Redução à Unidade (MRU), para o método proposto por Reynaud.

No entanto, o MRU apresentado como descoberta de Reynaud, como expressão da Regra de Três, e as obras de Guilmin (1860) e Tombeck (1861, 1873) que considera, incentivaram em definitivo Tilmant (1875) a buscar uma compreensão teórica a partir das noções inspiradoras providas por Descartes, Pascal e Arnauld sobre a Análise Matemática. Essas noções iriam fundamentar essas práxis do MRU, como também um novo esquema gráfico de arranjo de dados para a RT.

4.4. Considerações sobre as Praxeologias Européias da Regra de Três

4.4.1. Sobre as Praxeologias da Regra de Três na Europa

Como mostramos no início deste capítulo, as praxeologias hindus ainda se faziam presente na Europa no século XVIII. Além disso, podemos destacar a praxeologia da RT dos matemáticos hindus como percursora das praxeologias da RT posteriores que viveram nesse continente.

Nossa afirmação decorre das observações sobre as praxeologias europeias aqui analisadas, mas que podem ser tomadas como representativas do continente europeu, são mostradas como derivadas das praxeologias da quarta proporcional, como fora destacada pelos árabes, ou como das praxeologias da redução à unidade, presente em obras italianas. Em todo caso, as apresentações não fazem referências às praxeologias hindus, embora apresentem as mesmas características e funções, como as destacadas a seguir:

1) Ao fim e ao cabo, as praxeologias analisadas seguem as praxeologias hindus que podem ser resumidas, a partir do uso do esquema gráfico de arranjo de dados, mantendo a hierarquia ou ergonomia das operações que postergavam a divisão, multiplicando primeiro após as simplificações dos dados.

2) As praxeologias tinham a mesma função que era o de enfrentamento dos mesmos tipos de tarefas ou problemas. Também eram consideradas como modo verdadeiro de pensar uma técnica para justificar outras praxeologias com outros objetos matemáticos, como mostra Datta e Singh (1938) sobre as praxeologias hindus justificarem a solução de problemas ou o algoritmo da divisão de frações. Nesse sentido, as praxeologias europeias da RT continuaram nesse caminho quando se constituem como *infraestrutura didático-matemática* para o estudo de outros objetos matemáticos, como destacou Lacroix (1839) sobre o ensino da RT para a introdução ao estudo da Teoria das Razões e Proporções.

3) Os hindus deixaram claro que era considerado como objetivo no ensino das praxeologias da RT o de levar qualquer aluno, mesmo os menos dotados de conhecimentos teóricos, ao aprendizado. Para isso, consideraram a necessidade de vencer a dificuldade introduzida pelas peculiaridades dos problemas por meio da criação didática dos termos técnicos, como *argumento*, *fruto* e *requisição*, o que levou a uma técnica da praxeologia dependente da noção de *fruto*. Essa noção, por sua vez, depende do conhecimento prático da relação entre as grandezas presentes no problema considerado, mantendo a dificuldade para situações práticas desconhecidas do aluno.

Esse fazer hindu foi seguido por autores europeus, como Wingate (1760), por exemplo, quando usou no enunciado da RT as noções expressas pelos termos *produtores* e *produzidos*, que dependiam claramente da relação entre as grandezas, sem qualquer referência aos termos técnicos expressos por *direta* e *inversa* que somente mais tarde passaram a ser usados e que levou à taxionomia atual das praxeologias da RT: *regra de três direta* e *regra de três inversa*.

Como aconteceu com as praxeologias hindus, os novos termos técnicos *direta* e *inversa* buscavam despistar, quem sabe esconder, a dificuldade de identificar essas relações. Os matemáticos franceses, por exemplo, concentravam suas atenções em criar técnicas supostamente matemáticas, como fez Lacroix (1839), anunciando a regra como aplicação da quarta proporcional, dispensando os termos técnicos de *direta* e *inversa*. No entanto, o próprio Lacroix (1839) alerta para a inevitável dependência de sua regra com respeito ao enunciado do problema.

Vallejo (1841), reconhecendo a dificuldade do reconhecimento das relações chamadas de inversas, propõe os termos técnicos *causa* e *efeito* que são claramente dependentes das peculiaridades das práticas que tratam os problemas. O uso desses termos encaminharia, supostamente, sem dificuldades a taxionomia das relações em direta e inversa.

As noções identificadas com os termos técnicos de *causa e efeito*, *produtor* e *produzido*, assim como a noção de *fruto*, não são Matemáticas, mas saberes práticos somente emergentes em situação e, portanto, dependentes das peculiaridades do contexto de que trata o problema. Isso significa ao fim e ao cabo, uma espécie de retorno às praxeologias hindus.

Finalmente, observamos que os matemáticos hindus apresentam o inverso da RT como uma criação didática substanciada pelo algoritmo para resolução de um tipo especifico de problema, em que podia ser facilmente aplicado. Esse algoritmo passou a ser interpretado como um ajuste do problema ao modelo da quarta proporcional, com a denominação de RT inversa. Assim, podemos dizer que *a* Regra de Três Inversa é uma *criação didática* que implicou na taxionomia da RT em direta e inversa. A primeira decorre do ajuste direto dos dados do problema, enquanto a segunda exige uma inversão dos dados para que esses ajustes sejam possíveis. Essa praxeologia passou a ser justificada por uma suposta “proporcionalidade inversa”, não existente na Teoria das Razões e Proporções.

4.4.2. Sobre as Tecnologias das Praxeologias da Regra de Três na Europa

Com o avanço do Saber Erudito Matemático, o ensino e aprendizagem das praxeologias da RT, nos séculos XVIII e XIX na Europa, como afirmamos anteriormente, passou a dar maior relevância ao discurso das praxeologias da RT como aplicação do modelo da quarta proporcional, embora isso já tenha sido destacado pelos hindus e islâmicos, mas também considera as praxeologias como oriundas das práxis de ofícios urbanos, em particular, as que recorrem à redução à unidade.

O avançar do ambiente algébrico evidenciou a mecanicidade da praxeologia da RT que demandava a proporcionalidade e isso a mostrou como insatisfatória para alguns estudiosos que preferiam a práxis inteligível, a partir da redução à unidade, pois seguia o método analítico que se fazia cada vez mais presente nas atividades matemáticas.

É importante notar que a redução à unidade não foi dominante nas obras de autores acadêmicos, como Lacroix (1839), por exemplo, que, embora reconhecessem o método como expressão da Análise Matemática, preferiam a transposição didática por relações com a intenção didática de levar os alunos ao encontro de estudos mais avançado da Teoria da Proporcionalidade.

No entanto, a redução à unidade permitiu gerar uma praxeologia da RT, que pode ser enunciada do mesmo modo que a praxeologia gerada sob o argumento da proporcionalidade. Isso foi feito por Tombeck (1861), quando anunciou sua regra usando a redução à unidade.

Em resumo, as transposições didáticas europeias derivadas da proporcionalidade e da redução à unidade legitimam as praxeologias hindus quando buscam dar inteligibilidade às suas práxis e, em certo modo, podem ser mostradas como tecnologias das praxeologias hindus, que se concentraram na criação de técnicas e dispositivos didáticos que trivializassem a práxis. Talvez essa característica tenha feito ficar invisível que a quarta proporcional é a tecnologia das praxeologias hindus.

4.5 Encaminhamentos

Em que pese todos esses aspectos atribuídos às praxeologias da RT, as soluções de um problema seguindo as diferentes regras gerais admitiam invariantes que se caracterizavam por recorrer ao dispositivo didático dos esquemas gráficos para o arranjo dos dados, acompanhados de supostas análises para encaminhar o rearranjo das relações que determinam a expressão numérica que leva ao encontro do desconhecido.

A expressão numérica que é do mesmo tipo da produzida pelo algoritmo hindu, inclusive na hierarquia das operações de primeiro multiplicar e depois dividir, e que se faz automatizar por meio dos esquemas gráficos que somente exigem as inversões das relações que dependem do conhecimento do assunto de que trata o problema.

Assim, as regras gerais são sempre anunciadas por meio de esquemas gráficos, que estruturam e facilitam a identificação dos números dados e necessários para a solução do problema; ordenam os dados em relações que depois podem ser invertidas, ou não, segundo um dado critério, que segue o estilo hindu. Sem esses esquemas gráficos, a tarefa de resolver um problema de RT de cinco ou mais termos seria por demais complexa.

A complexidade foi eliminada, senão reduzida, pelos professores autores mantendo ao longo do tempo os esquemas gráficos de arranjo de dados, para facilitar o ensino e a aprendizagem das praxeologias da RT, por permitirem ações concretas que podiam ser ensinadas, tendo em conta o aspecto tangível das realizações das operações sobre esse esquema gráfico, como um modo de garantir a incorporação cognitiva dos procedimentos regrados envolvidos como destaca Heeffer (2014).

Essa complexidade podia ser sentida mais ainda quando se recorria à redução à unidade e, também, nesse caso, os esquemas gráficos de arranjo de dados vieram jogar um papel importante para os professores autores que passavam a exercer maior controle sobre as praxeologias ensinadas, em paticular, por meio de suas próprias transposições didáticas (CHEVALLARD, 2005). O fazer formal matemático justificado, que já demandara a explicitação da práxis como aplicação de saberes matemáticos, demandou uma inteligibilidade ao esquema gráfico de arranjo de dados que redundou na reforma analítica da Regra de Três, a partir da compreensão analitica da redução à unidade, realizado por Tilmant (1875), objeto do próximo capitulo.

CAPÍTULO 5: A REFORMA ANALÍTICA DA REGRA DE TRÊS: O DISCURSO TECNOLÓGICO PARA O ESQUEMA GRÁFICO

5.1. Introdução

No caminhar das praxeologias da Regra de Três no continente europeu chama-nos a atenção, no século XIX, um aspecto que as envolvem ou as condicionam relacionado às Atividades Matemáticas Acadêmicas, visto que até então suas praxeologias eram de interesse quase restrito ao mundo escolar e profissional.

A respeito das atividades acadêmicas é preciso considerar que existem dois métodos que agem de forma *superestrutural* sobre as praxeologias matemáticas, mas que, em geral, passam despercebidos a todos àqueles que desenvolvem essas atividades. Mais precisamente, o método analítico e o método sintético.

Esses métodos, grosso modo, podem ser ligeiramente entendidos como a arte de dispor uma sequência de pensamentos que, no primeiro, é para descobrir uma verdade que ignoramos, enquanto no segundo método é para provar aos outros algo que já sabemos. Isso é explicitado por Tilmant (1875), em um extrato de texto que pode ser traduzido mais ou menos assim:

> [...] existem dois tipos de métodos, um para descobrir a verdade, chamado de *análise* ou *método de resolução*, e que também pode ser chamado de *método da invenção*, e um para fazer entender aos outros, quando já fora encontrada, chamado *síntese* ou método de*composição*, que também pode se chamar de *método de doutrina* (TILMANT,1875, p.10, tradução nossa, grifos do autor).

Esse olhar encaminha o método da Análise Matemática como método para resolver problemas, como parece ratificar o seguinte extrato de texto, devido a Lacroix (1838), mas com tradução para o português, em 2013.

> Atribui-se a Platão o primeiro uso do método analítico nas pesquisas geométricas. Por esse método, supõe-se que o problema proposto esteja resolvido, resultando daí que certa condição é atendida, ou, em outras palavras, que existe igualdade entre várias grandezas, umas dadas, outras a serem encontradas. É procurando as consequências da condição que se supôs atendida, ou da igualdade que é sua consequência, que se consegue, enfim, descobrir a quantidade desconhecida, ou traçar o procedimento que se deve seguir para executar o que está sendo pedido (LACROIX,2013, p.172).

Essas compreensões são traduzidas por Tilmant (1875), do seguinte modo:

> Assim, o caminho ou método da demonstração, exposto por Pascal tão claramente em seu tratado sobre o espírito matemático, e justamente chamado de síntese, convém fortemente bem à teoria, isto é, demonstrando teoremas, sejam da aritmética ou da geometria ou da álgebra; mas para o que chamamos de prática, ou seja, a solução de problemas de qualquer espécie, seja ele mesmo de aplicação mais simples das quatro regras da aritmética, se deve recorrer à análise (TILMANT,1875, p.37, tradução nossa).

Mais precisamente, o olhar de Lacroix é transposto por Tilmant (1875), para a resolução de problemas de Regra de Três. É assim, com o olhar sobre a atividade matemática que Tilmant se debruça para dar inteligibilidade à praxeologia da RT e faz disso seu principal objetivo, o de "devolver a solução das *regras de três* ao *método geral de resolução*, isto é, a *análise*, que se faz em todos os tipos de problemas de Álgebra e de Geometria" (TILMANT,1875, p.4, tradução nossa, grifos do autor).

Tilmant (1875) tinha motivos didáticos que os encaminhavam à busca de novas organizações praxeológicas para o ensino da Regra de Três, que era a de eliminar a mecanicidade das praxeologias, que supostamente exigiam o conhecimento das propriedades das proporções, e que viviam de modo dominante, além das escolas elementares.

Nessas escolas elementares, as praxeologias eram realizadas pelo método analítico da Aritmética, que era considerado abstrato e evitado pelos matemáticos professores, mas que se constitui em preferência de Tilmant para o ensino da RT.

O interesse em mudar as praxeologias da Regra de Três não estava restrito a Tilmant. A noosfera, por exemplo, que não necessariamente compartilhava de suas compreensões, encaminhou mudanças no ensino com a inclusão da notação fracionária, em lugar da clássica notação da quarta proporcional. Mas, isso parece ter estimulado Tilmant, que se manifestou a respeito dessa nova organização matemática, como segue.

> A proibição, em nossos programas oficiais do antigo algoritmo das proporções, e sua substituição pela igualdade de frações, é um primeiro passo no caminho da reforma que prego; mas se nós tratarmos as proporções escritas nessa nova forma assim mecanicamente como fizemos na forma antiga, não resultará nenhum esclarecimento, e consequentemente nenhum benefício (TILMANT,1875, p.29, tradução nossa).

Essa manifestação de Tilmant admitia as mudanças como legitimação de suas preocupações, mas temia pelo encaminhamento que poderia tomar essas mudanças frente à tradição mecanicista vigente nas praxeologias da Regra de Três.

Considerando a relevância dos condicionamentos existentes sobre as praxeologias da Regra de Três, nós nos ocuparemos em melhor evidenciá-los com possíveis avanços e retrocessos sobre o ensino dessas praxeologias, sob o olhar de nosso referencial teórico, de modo a trilhar novas rotas para a construção das respostas para nossos questionamentos.

5.2. A Condição do Uso das Frações Imposta pela Reforma Oficial do Ensino Francês

Tilmant (1875), para mostrar e avaliar a utilidade de sua proposta de reforma, considera alguns problemas resolvidos por Lacroix (1838,1848) e por Bourdon (1849), tendo em conta as soluções que eles fornecem de onde retiram os insumos para aplicar sua reforma.

O primeiro problema que Tilmant considera é o seguinte exemplo de Lacroix (1848): Um trabalhador faz de modo contínuo 217,5 m de obras em 9 dias, pergunto em quanto tempo faz 423,9 m, assumindo que ele trabalha continuamente da mesma maneira?

A análise de Lacroix (1848), segundo Tilmant (1875, p.30), destaca que "o desconhecido é o número de dias e que esse deve conter os 9 dias empregados pelos trabalhadores para a obra de 217,5 metros tanto quanto a obra de 423,9 metros contém a obra 217,5 metros".

Daí Lacroix conclui que se tem a seguinte proporção:

$$217{,}5 : 423{,}9 :: 9 : x,$$

de onde resulta ter x= 17,54 dias.

Essa praxeologia apresentada por Lacroix tem sua técnica justificada pela tecnologia das proporções que exige o conhecimento da regra: "produto dos meios é igual ao produto dos extremos". E, ainda, é considerada por Tilmant como mecânica e por isso criticada por ele.

A solução do problema por fração, embora com objetivo de evitar as proporcionalidades, tem seu uso explicado considerando que ao se reduzir duas frações a um denominador comum, novos numeradores serão encontrados de onde se observará que o produto dos extremos é igual ao produto dos meios.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \leftrightarrow \frac{ad}{bd} = \frac{bc}{bd}$$

Há um retorno às proporções, sempre relacionadas, segundo Tilmant, por Lacroix, assim como outros autores, à solução da Regra de Três. Daí a preocupação com a manutenção da mecanicidade da praxeologia da RT, quanto ao uso de frações.

De fato, a proporcionalidade dos dados não é discutida. É imposta, ou presumida. Essa situação é assim que se faz. O bom senso diz que é assim. Podemos pensar assim. Não há informações no enunciado do problema que nos permitam afirmar alguma coisa sobre uma proporcionalidade de dados. Mas, essa nossa observação não parece ser de interesse de Tilmant.

Pois, ele segue em caminho de convencer o leitor da utilidade de sua proposta e, considerando a forma oficial e obrigatória das frações, clama:

> Peço a todos os homens de boa fé se a proporção assim escrita, ou mesmo disposta da maneira seguinte, através da aplicação da forma *oficial*,
>
> $$\frac{217{,}5}{423{,}9} = \frac{9}{x},$$
>
> se essa proporção, eu digo, bem resulta do raciocínio precedente e lhe resume: a menos, que se leia da direita para a esquerda, como se fosse em hebraico! (TILMANT,1875, p.30, tradução nossa).

Ao que Tilmant parece estar se referindo é que tanto a forma de frações quanto a de proporção não resultam da análise que a precede. Para deixar claro o que está dizendo, assim continua:

> E se alguém quiser dar uma olhada imparcial sobre o arranjo e a seguinte solução, eu espero que reconheça a superioridade.
>
> *Questão*: É necessário *x* dias para fazer $423^{m},9$.
>
> *Hipótese*: *Se* - 9 - - $217^{m},5$.
>
> A análise de Lacroix pode ser resumida assim:

x conterá 9 dias	tantas vezes quanto	$423^{m},9$ contem $217^{m},5$

> Ao aplicar a definição de divisão que realmente dá um *quociente* (indicando *quotas*, *quantas vezes* o dividendo contém o divisor), encontraremos facilmente.

$$\frac{x}{9d.} = \frac{423{,}9\text{ m}}{217{,}5\text{ m}}$$

De onde escrevemos a forma mais simples ainda:

$$x = 9d \times \frac{423{,}9}{217{,}5}$$

Uma vez que a última expressão significa evidentemente que x contém ou é igual a 9 dias vezes o que 423,9 contém 217,5.
E esse é o problema resolvido, *removendo todo o suporte das proporções*, notadamente *o produto dos extremos e seus meios*, e mesmo sem *afastar o denominador!* (TILMANT,1875, pp.30-31, tradução nossa, grifos do autor).

O longo extrato de texto permite-nos observar que Tilmant (1875), ao sistematizar simbolicamente a análise de Lacroix (1848), no quadro, quer evidenciar a inteligibilidade do que se propõe sobre a inteligibilidade confusa da praxeologia instituída por Lacroix, na forma fracionária ou da quarta proporcional.

Nossa ingenuidade levou-nos a questionar antes o que teria de tão "confuso" na praxeologia de Lacroix. Parece óbvio que não há erros. É assim que ele e outros autores contemporâneos, senão atuais, procediam ao enfrentarem problemas desse tipo.

Para compreender o que Tilmant (1875) quer nos dizer, é preciso considerar que a praxeologia da RT envolve pelo menos as seguintes ações imbricadas entre si e que podem passar despercebidas.

1- Todo problema é constituído de duas partes; uma da questão e outra da hipótese ou suposição, Essas são esquematicamente representadas pelo esquema gráfico de arranjo de dados seguinte:

Questão:	É necessário		*x*	dias para fazer		$423^{m}{,}9$.
Hipótese:	*Se*	-	9	-	-	$217^{m}{,}5$.

2- A análise é realizada sobre o esquema gráfico. Isso envolverá as relações entre o desconhecido e os dados necessários, nem sempre explícitos no enunciado do problema, o que levará a um novo esquema gráfico, que encaminhará os cálculos finais de multiplicação e divisão.

x conterá 9 dias	Tantas vezes quanto	423^{m},9 contem 217^{m},5

Nas escolas básicas atuais, esse quadro final é obtido do quadro inicial, com acréscimo de sinais simbolizando direta e inversa, por meio de ostensivos tais como setas ou outros sinais como + e -, etc., por meio de suposta análise.

3- A noção de relações entre os dados do problema, para Lacroix (1839;1848) e outros autores contemporâneos, é uma comparação entre números, e esses podem intercambiar, segundo a conveniência, para escrever sempre a incógnita x como sendo a quarta proporcional, ou seja, na última posição.

No exemplo anterior, teria que ser assim escrita:

$$217{,}5 : 423{,}9 :: 9 : x$$

que “traduzida”, em forma fracionária:

$$\frac{217{,}5}{423{,}9} = \frac{9}{x}$$

Sobre isso, Tilmant acrescenta que:

> Esta regra, simples e clara, que os escritores mais inteligentes copiaram, como os da álgebra copiaram dos que emprestaram de Bezout (p.44) para definir *a equação* de um problema, é a única que se mantém e que se emprega na prática, com o princípio relativo à igualdade dos produtos dos extremos e dos meios, que ela supõe conhecidos (TILMANT,1875, p.31, tradução nossa).

Essa tradição é interpretada por Lacroix de modo genérico e abreviado.

> "Toda a dificuldade das questões que podem ser encontradas consistem apenas na forma de estabelecer a proporção, aqui a regra assegura a forma em todos os casos:

O menor termo da primeira espécie Está Para o maior termo desta Como O menor termo da segunda espécie Está Para o maior desta.	Seria melhor dizer: O desconhecido x da primeira espécie É Do termo de mesma espécie Que Qualquer um dos termos da segunda espécie É Do último desta espécie.

(TILMANT, 1875, p.31, tradução nossa)

Essas ações são as que Tilmant (1875) quer questionar, pois induziria uma fuga com destino à mecanicidade. Nesse sentido, ele começa observando que uma relação entre dois números é um quociente que indica quantas vezes o dividendo contém o divisor, de modo que não se pode mudá-los livremente de dividendo para divisor e vice-versa. Daí a observação na passagem do quadro de análise para a forma fracionária.

> Ao aplicar a definição de divisão que realmente dá um quociente (indicando quotas, quantas vezes o dividendo contém o divisor), encontrará sem esforço:
>
> $$\frac{x}{9d} = \frac{423{,}9\text{m}}{217{,}5\text{m}}$$
>
> (TILMANT,1875, p.30, tradução nossa).

Isso está de acordo com a análise realizada por Lacroix (1839), mas não seguida por ele, pois destaca que o desconhecido é o número de dias e que esse deve conter os 9 dias empregados, portanto, x contém 9, tanto quanto a obra de 423,9m contém a obra 217,5m.

No entanto, entre as ações consideradas, a primeira é a mais importante por encaminhar todas as ações seguintes e por isso questionada com vigor por Tilmant. Precisamente, o esquema gráfico de arranjo de dados do problema.

5.3. O Esquema Gráfico de Tilmant

O esquema gráfico de arranjos de dados do problema proposto por Tilmant (1875) constituía a peça fundamental de sua reforma inspirada pelas regras dos grandes filósofos. O seguinte extrato de texto esclarece o que queremos dizer.

> A simplicidade e generalidade da regra acima, que depende principalmente da nova *disposição*, dá esperança que esta regra não tardará a ser adotada por todos os autores e professores.
> Já as obras mais recentes e as mais estimadas como as do MM. André Burat, Menu de Saint-Mesmin principalmente, todas mantêm a antiga disposição (x na segunda linha), dizem que, *para obter o desconhecido, é preciso multiplicar a quantidade da mesma espécie com as informações sobre quantidades de outras espécies, tendo o numerador na mesma linha se direta, em outra linha se a relação for inversa.*
> Como observado por outro autor, falando da disposição ordinária: "Podemos ver que a fração *não é invertida* quando a relação é *inversa*, e que deve ter cuidado de *inverter* quando as relações são diretas "

> A nova disposição assinalada por Sr. Guilmin, e inaugurado por Sr. Tombeck e por mim, remedia essa singularidade; como foi em outras aplicações das regras estabelecidas por nossos grandes filósofos, um feliz acordo entre a *teoria* e a *prática* não deverá pouco contribuir para o sucesso imediato e universal desta reforma (TILMANT,1875, p.61, tradução nossa, grifos do autor).

A nova disposição a que se refere Tilmant (1875) é o novo esquema gráfico de arranjo de dados, como deixa claro o extrato de texto. No entanto, esse esquema gráfico de arranjo dos dados não foi obra original de Tilmant, já que também fora adotado por Tombeck (1861) de modo independente, embora sem claro fundamento.

A obra de Guilmin (1860) que Tilmant (1875) também faz referência, apresenta o método da redução à unidade (MRU), nos estudos sobre a Regra de Três e suas variantes, como a inversa e a composta, incluindo a apresentação de esquemas gráficos que arranjam os dados do problema em duas linhas; o arranjo que permitia o emprego abstrato do MRU, que inclui necessariamente as análises das variações das grandezas, para então escrever diretamente a expressão numérica que, efetuadas as operações de multiplicação e divisão, leva ao valor pedido x.

A obra de Tombeck (1861) pouco difere da obra de Guilmin (1860), nesse aspecto, mas apresenta uma diferença que Tilmant (1875) julga de extrema importância. Enquanto o esquema gráfico de arranjo de dados de Guilmin (1860) apresenta o desconhecido x na segunda linha, ocupando a última posição que lembra a quarta proporcional, o esquema de Tombeck (1861) apresenta o desconhecido x invariavelmente na primeira linha de dados.

Assim, Tilmant (1875) considera as obras de Tombeck (1861,1873) para a construção de seu discurso, mas deixando claro que o seu fazer difere do fazer de Tombeck e o que os unia era terem considerados suas escolhas práticas em Guilmin (1860).

> O autor parece ter sido guiado nessa escolha por considerações práticas semelhantes às que eu emprestei de M. Guilmin (p. 23) e não aquelas que eu aprendi com a lógica, como será constatado pelas seguintes citações que ele me permitiu extrair de seu excelente trabalho. (TILMANT,1875, p.58, tradução nossa).

As citações que refere Tilmant (1875) se tornam indispensáveis para compreendermos o que ele quer dizer. Ele as descreve mais ou menos assim:

Depois de definir as *quantidades diretamente ou inversamente proporcionais*, e *a regra de três*, que é a aplicação, ele resolve *por unidade* os seguintes problemas:
Exemplo 1: 18 metros de tecido custam 45 francos, quanto custará 24 metros do mesmo tecido?

Obtemos, $x = \frac{45\, fr. \times 24}{18} = 60\, fr$.E o autor acrescenta:

Observação. O resultado anterior pode ser escrito:

$$x = 45\, fr \times \frac{24}{18};$$

Agora, se escrevermos as quantidades mencionados nos enunciados sobre duas linhas, como segue:

24 m.. x fr.

18 m..45 fr.

Tendo o cuidado de colocar a primeira linha que contém o desconhecido, o resultado anterior pode ser considerado como obtido multiplicando 45 francos, quantidade de mesma natureza que o desconhecido, pela relação $\frac{24}{18}$ dos dois números de metros, tomadas na ordem em que são escritos acima; que coincide com o fato de que o número de metros e o de preço dos metros variam em razão direta.
2º Exemplo. Uma massa de gás ocupa um volume de 16 litros, sob a pressão de 350 milímetros; que volume vai ocupar sob uma pressão de 200 milímetros?
Ao reduzir à unidade da pressão (milímetros), a lei de Boyle Mariotte fornece:

$$x = \frac{16\, litros \times 350}{200} = 28\, litros$$

Observação. O resultado anterior pode ser escrito:

$$x = 16\, litros \times \frac{350}{200}$$

Agora, se nós escrevermos as quantidades mencionadas no enunciado sobre duas linhas, como se segue, mantendo a primeira linha que contém o desconhecido:
200 milímetros x litros
350 milímetros 16 litros
É fácil de ver que este resultado pode ser considerado como obtido pela multiplicação 16 litros, quantidade da mesma natureza que o desconhecido, pela relação $\frac{350}{200}$ das duas pressões, feita na ordem inversa onde eles são escritos acima, que coincide com o fato, de que as pressões variam em razão inversa dos volumes da massa de gás proposto.

3º Exemplo: 15 trabalhadores, trabalhando 6 horas por dia, empregaram 18 dias para fazer 360 metros de certa obra. Quantos dias 25 trabalhadores, trabalhando 7 horas por dia, empregarão para fazer 420 metros da mesma obra?
Este problema, resolvido *por unidade* como os anteriores, e passando imediatamente de cada unidade ao número correspondente da questão, dá sem esforço:

$$x = \frac{18d \times 15 \times 420 \times 6}{25 \times 360 \times 7} = \frac{54d}{5} = 10d\ \frac{4}{5}$$

Observação. O resultado precedente pode ser assim escrito:

$$x = 18d \times \tfrac{15}{25} \times \tfrac{420}{360} \times \tfrac{6}{7}\ ;$$

Agora, se escrevermos as quantidades mencionadas no enunciado sobre duas linha, a seguinte:
25 trabalhadores...........7h...............420 m........... x d.
15 trabalhadores...........6h...............360m............18 d.
É fácil ver que esse resultado pode ser considerado como obtido pela multiplicação de 18 d, quantidade de mesma natureza que o desconhecido, pelas relações.

$$\frac{15}{25}, \frac{420}{360}, \frac{6}{7}$$

dos números de trabalhadores, de metros da obra e de horas de trabalho por dia; o número de metros da obra a ser feita na ordem em que são escritas acima, que coincide com o fato que o número de metros varia em razão direta do número de dias de trabalho (isto é, o desconhecido); e os números de trabalhadores e de horas de trabalho por dia, na ordem inversa em que são escritos acima, que coincide com o fato de que o número de trabalhadores e do número de horas de trabalho por dia variam em razão inversa do número de dias de trabalho.
Generalizando as observações sobre as soluções de problemas de três anteriores, podemos anunciar a seguinte regra pratica:
REGRA. Para se obter a solução de uma regra de três, comece por escrever as quantidades mencionadas no enunciado sobre duas linhas, de modo a fazer corresponder as quantidades de mesma natureza duas a duas, tendo o cuidado de colocar na primeira linha o desconhecido.
Feito isso, escrevemos que o desconhecido é igual à quantidade conhecida da mesma espécie, multiplicada pelas relações dos números correspondentes dois a dois, tomadas na ordem em que estão escritas se eles representam as quantidades variando na razão direta com o desconhecido; em ordem inversa, se eles expressam quantidades que variam em razão inversa com o desconhecido.
Nós já não temos mais que efetuar os cálculos indicados, após simplificação, se houver (TILMANT, 1875, pp.59-60, tradução nosso, grifos do autor).

Essas citações de Tilmant (1875) sobre as praxeologias, que estão presentes no livro intitulado *Traité d'Arithmétique* de Tombeck (1861), são parciais. Como pode ser notado, ele omite as análises que encaminham a solução pelo método da redução à unidade, explicitando diretamente os desconhecidos x pelas expressões numéricas que os fornecem.

Mas, a omissão tem sua razão. As análises são recuperadas nas notas ou observações que acompanham a solução de cada problema, usando as relações, quando destacam a análise de variação das grandezas, para determinar se deve ser invertida ou não a relação (fração), para escrever a expressão numérica que levará ao encontro do desconhecido x.

Essas análises são favorecidas pelo esquema gráfico de arranjo de dados e que acabam por "demonstrar" que a resolução pelo método da redução à unidade leva a mesma expressão numérica para o desconhecido que a resolução que recorre ao esquema gráfico com arranjo de dados dispostos em duas linhas horizontais empregados pelo método da relação (*nisbah*) com fundamento na proporcionalidade.

Tombeck (1861) anuncia uma regra para a variante composta da Regra de Três e, portanto, também válida para a RT, que podemos dizer que é a forma atual mecanizada da RT em nossas escolas, embora Tombeck não a tenha concebido com esse propósito.

Essa regra é parte integrante da citação acima que é destacada por Tilmant no uso em outra obra de Tombeck (1873), que embora considerasse mais elementar, recomenda aos seus pares pela clareza, concisão e por conter uma variedade de exemplos úteis.

A citação trata da aplicação da regra escrita em Tombeck (1861), mas o interesse de Tilmant (1875) novamente é a *observação ou nota* como o mais importante.

> EXEMPLO. Com 18 kg de fio, foram confeccionados 72 metros de um tecido que tem 90 centímetros de largura. Se tivéssemos usado 24 kg de fios, e se o tecido tivesse apenas 80 centímetros de largura, qual comprimento poderia ser obtido?
> Começa escrevendo as quantidades do enunciado em duas linhas, como segue:
>
> x m.....................24 kil...................80 cent.
>
> 72m......................18 kil....................90 cent.
>
> Isto feito, para ter o valor de x, multiplica-se 72 m, que é a quantidade conhecida de mesma natureza, pela relação $\frac{24}{18}$ dos dois pesos de fio, tomada na mesma ordem porque o comprimento do tecido é proporcional ao seu peso, aliás para todas coisas, e pela relação $\frac{90}{80}$

> dos dois comprimentos, tomada na ordem inversa, porque, para o mesmo peso, a largura do tecido é na razão inversa do seu comprimento; e segue que:
>
> $$x = 72m \times \frac{24}{18} \times \frac{90}{80} = \frac{72m \times 24 \times 90}{18 \times 80} = 108m$$
>
> OBSERVAÇÃO. O método prático anterior se mantém quando os dados são de números fracionários. Assim, propomos este problema: $\frac{5}{6}$ de litro de Álcool pesam $\frac{3}{4}$ kg; quanto $\frac{7}{8}$ de litro de álcool pesará?
> Para resolver o problema pelo método da redução á a unidade, diremos:
> Se $\frac{5}{6}$ de litro de álcool pesam $\frac{3}{4}$ de kilograma,
> $\frac{1}{6}$ pesa 5 vezes menos, ou $\frac{3\,kg}{4\times5}$
> e $\frac{6}{6}$ ou 1 litro pesam 6 vezes mais, ou $\frac{3\,kg\times6}{4\times5}$
> $\frac{1}{8}$ pesa 8 vezes menos que 1, ou seja, $\frac{3\,kg\times6}{4\times5\times8}$
> e $\frac{7}{8}$ pesam 7 vezes mais, ou $\frac{3\,kg\times6\times7}{4\times5\times8} = \frac{63}{80}$
> Ou para aplicar a regra pratica precedente, vamos escrever as quantidades do enunciado como segue:
>
> $\frac{7}{8}$ .... x kg
>
> $\frac{5}{6}$.....................$\frac{3}{4}$ de kg
>
> E se nós observamos que o peso de álcool varia proporcionalmente ao seu volume, todas as coisas são iguais mesmo assim, teríamos:
>
> $$x = \frac{3\,kg}{4} \times \frac{7/8}{5/6} = \frac{3}{4} \times \frac{7}{8} \times \frac{6}{5} = \frac{3kg \times 7 \times 6}{4 \times 8 \times 5}$$
>
> Este resultado é idêntico ao que fornece o raciocínio direto.
> É fácil de compreender a vantagem dessa extensão, aos dados fracionários, das regras estáveis para o caso de dados inteiros.
> O raciocínio direto é certamente bastante complicado no caso de dados fracionários; enquanto que graças à extensão, a regra prática não apresenta mais dificuldades, se os dados são números fracionários ou decimais, ou se eles são números inteiros (TOMBECK,1873; apud TILMANT, 1875, pp.60-61, tradução nossa).

Parece claro que Tilmant (1875) busca evidenciar, por meio de Tombeck (1873), o alcance do emprego do método da redução à unidade, que independe da natureza dos dados, se inteiros ou quebrados, com a economia de raciocínio e com a clareza de que a expressão numérica do desconhecido é facilmente deduzida. Uma abreviação do método que permitia tal proeza, como referia Guilmin (1860, p. 218), ao uso do esquema gráfico de arranjo de dados.

Mas, se Guilmin(1860) já anunciara essa abstração que leva à mesma expressão produzida pelo encaminhamento de Tombeck (1861), podemos questionar

Tilmant assim: qual o interesse sobre esse suposto novo esquema de arranjo de dados que impõe o desconhecido x, sempre na primeira linha de dados, como fizera Tombeck?

A resposta é disponibilizada por Tilmant (1875), mas não está restrita a uma tecnologia da instituição Matemática. Ele considera também as condições impostas pela cultura, a sociedade e a instituição docente, o que inclui a escola, para fazer funcionar sua intenção didática. Em tudo de sua resposta se constitui a tecnologia de sua reforma.

Mas, antes vejamos as razões do ponto de vista de uma antiga práxis, que Tilmant julgava nova, o método da redução à unidade.

5.4. O Método Analítico da Redução à Unidade

Uma das inspirações de Tilmant (1875) é a maneira tão conveniente e universal para resolver as *regras de três* ou a *regra de ouro* dos antigos, que foi descoberta e publicada pelo barão Reynaud, em 1800, sob o título de Introdução à Álgebra[20].

Para mostrar essa maneira e seu alcance Tilmant (1875), recorre a outra obra desse autor intitulada *Traitè de d'arithmétique* (1832), na qual há mais de 80 problemas com Regras de Três, de sociedade, de juros, desconto, de ligas metálicas, etc., todos resolvidos por essa maneira universal, o método da redução à unidade.

Aqui, expomos dois desses problemas, que estão estreitamente relacionados, com Regra de Três com o propósito de deixar clara a técnica de Reynaud e, se possível, sua tecnologia.

> 7º PROBLEMA. *Dois obreiros trabalham 3 horas por dia, fazem em 5 dias 90 metros de uma obra; quantos metros da mesma obra, 3 obreiros trabalhando 7 horas por dia, quantos metros vão fazer em 2 dias?* Obtemos o número de metros procurados utilizando raciocínios análogos [...] aos que foram utilizados, tendo em conta, sucessivamente, o número de obreiros, das horas e dos dias. De fato:
> 1º Conhecendo o trabalho realizado por 2 obreiros, para deduzir o trabalho executado sob as mesmas circunstâncias por 3 obreiros, dizemos:
> Como 2 obreiros fizeram 90 metros da obra,
> um trabalhador fará a metade dos 90m ou 45m.
> Os 3 trabalhadores farão, portanto, três vezes 45m ou 135 m.
> Os 3 trabalhadores trabalhando 3h por dia, durante 5 dias, farão portanto, 135 m.

[20] Econtramos esta observação em nota de rodapé na obra de Reynaud, Traité d'arithmétique, 17e edition, 1834, p. 126.

2 °. Por uma razão absolutamente semelhante, por deduzir que 135 m da obra, foram feitos em 3 horas, o trabalho que será feito em 7 horas, todo restante aliás permanece igual, dizemos:
Como o trabalho feito em 3h é 135m,
A obra feita em 1 hora será um terço de 135m, ou seja, 45m,
A obra feita em 7h será 7 vezes 45m, ou seja, 315m.
Os 3 trabalhadores trabalhando 7h por dia, durante 5 dias, farão, portanto, 315m.
3º. Enfim, para deduzir da obra 315m feito em 5 dias, a obra que será feita em 2 dias, todo restante alias permanece igual, diremos:
Como a obra feita em 5 dias é 315m,
A obra feita em 1 dia será um quinto de 315m, ou seja, 63m.
A obra feita em 2 dias será 2 vezes 63m, ou seja, 126m.
Os 3 trabalhadores, trabalhando 7h por dia, durante 2 dias, farão, portanto, 126m.
OBSERVAÇÃO. Simplificamos os cálculos antes de fazer os cálculos da multiplicação e da divisão indicados, porque muitas vezes essas operações são eliminadas em parte.
Assim, no problema atual, diremos:
2 trabalhadores trabalhando 3 horas por dia, fazem em 5 dias, 90 metros,
1 trabalhador trabalhando 3h por dia fazem em 5 dias a metade de 90m, ou seja, $\frac{90m}{2}$,
3 trabalhadores trabalhando 3h por dia fazem em 5 dias, 3 vezes $\frac{90m}{2}$, ou $\frac{90m\times3}{2}$,
3 trabalhadores trabalhando 1 h por dia fazem em 5 dias um terço de $\frac{90m\times3}{2}$, ou seja, $\frac{90m\times3}{2\times3}$
3 trabalhadores trabalhando 7h por dia fazem em 5 dias, 7 vezes $\frac{90m\times3}{2\times3}$ ou seja, $\frac{90m\times3\times7}{2\times3}$
3 trabalhadores trabalhando 7 h por dia fazem em 1 dia um quinto de $\frac{90m\times3\times7}{2\times3}$, ou seja, $\frac{90m\times3\times7}{2\times3\times5}$
Portanto,
3 trabalhadores trabalhando 7h por dia fazem em 2 dias o dobro de $\frac{90m\times3\times7}{2\times3\times5}$ ou seja, $\frac{90m\times3\times7\times2}{2\times3\times5}$.
Suprimindo os fatores 2 e 3, comuns aos dois termos desta fração, o número de metros procurados se reduz à

$\frac{90\times7}{5}$ ou à 126.

Esta maneira de operar se aplica a todos os problemas que vamos resolver. Vamos efetuar sucessivamente as multiplicações e as divisões, mas os estudantes deverão se limitar a indicar primeiramente todas as operações, afim de aproveitar em seguida as simplificações que possam surgir.
8º PROBLEMA. *Dois trabalhadores trabalhando 3 horas por dia, fazem em 5 dias 90 metros da obra; em quanto dias farão, 3 trabalhadores trabalhando 7h por dia, 126m da mesma obra?*
Encontramos como no problema precedente, que
3 trabalhadores trabalhando 7h por dia durante 5 dias, fazem$\frac{90m\times3\times7}{2\times3}$ ou 315m.
Para deduzir quantos
3 trabalhadores trabalhando 7 h por dia, empregarão de dias para fazer 126 m,

> observando que o número de trabalhadores e das horas de trabalho sendo a mesma, é suficiente para resolver esta questão:
> Os trabalhadores fizeram 315m em 5 dias; quantos dias serão necessário para esses trabalhadores fazerem 126m?
> Como 315 m da obra são feitos em 5 dias,
> 1 metro será feito em $\frac{5j}{315}$ ou seja, $\frac{1j}{63}$.
> Os 126m serão, portanto, feto em 126 vezes $\frac{1j}{63}$ ou em 2 dias.
> Assim, os três trabalhadores trabalhando 7 horas por dia farão os 126 m da obra em 2 dias.
> Quando limitamos apenas a indicar as multiplicações e as divisões, veremos que o número de dias demandado é:
> $\frac{5\times2\times3\times126}{90\times3\times7}$, ou $\frac{5\times2\times126}{90\times7}$, ou 2.
> (REYNAULD,1834, pp.127-128, tradução nossa).

É claro que a técnica acima exposta é a redescoberta do antigo método de redução à unidade, já referido séculos antes, como vimos no capítulo anterior. Inclusive por seus inconvenientes matemáticos por envolver relações com grandezas de naturezas distintas.

Mas, Tilmant (1875) não menciona esse aspecto e sim que é o modo para encontrar os números necessários, quando eles não são dados, e que é o fundamento da reforma proposta. Segundo ele, esse modo de resolver a Regra de Três pode ser considerado como uma aplicação da *Análise* para a solução de um problema numérico. Ele conclui esse seu pensar afirmando que:

> [...] nós sabemos que a *álgebra*, pelos processos de investigação que emprega, é a parte da Matemática mais apropriada à pesquisa, e mereceu, assim, o nome de Análise, que é dado apenas em suas partes mais complexas (TILMANT,1875, p.21, tradução nossa).

Para Tilmant (1875), o barão Reynaud não se deteve no dispositivo didático do esquema gráfico de arranjos de dados. Se o tivesse feito teria poupado três quartos de século de práxis que deviam ser evitadas, pois esse andamento, assim aperfeiçoado, parece de fato o máximo de simplicidade; e não há estudante que, compreendendo a multiplicação e divisão, experimente o menor problema ao empregá-lo.

No entanto, Tilmant (1875) faz as seguintes observações para tornar o procedimento ainda mais fácil:

> 1-reduzir os números dados *a uma unidade pequena o suficiente* para torná-los maior do que 1, ou melhor, reduzi-los à unidade menor que os torne todos inteiros. Se quiséssemos *reduzir a unidade* a *fração* de 0,85m, por exemplo, qual seria o preço, de 3,25m. Suponho que seja

> útil até mesmo necessária para maior clareza de raciocínio, tomar para a unidade, não o metro, mas o decímetro ou centímetro. É inútil insistir sobre este ponto.
> 2- se admite uma proporcionalidade que, na prática, não vai ordinariamente ao limite em que é aplicada. Esta não é uma desvantagem, na maioria das vezes; mas nos casos em que o resultado deve ser inteiro, e em que a redução à unidade daria uma fração, tal como na distribuição de quotas, por exemplo, é preferível preceder as relações; vimos acima outros exemplos onde eles devem ser preferidos, por razões semelhantes (TILMANT, 1875, p. 21, tradução nossa, grifos do autor).

Sob a luz dessas observações, ele afirma que a solução por unidade é certamente muito mais simples do que a solução por relações, particularmente como foi aplicada acima; no caso das Regras de Três Compostas, as relações não são convenientes, pois seríamos forçados a decompor as outras em várias Regras de Três simples, que são propostas e que são resolvidas sucessivamente.

Então, Tilmant (1875) introduz as vantagens da redução à unidade, incluindo o novo esquema gráfico de arranjo de dados. A primeira é de simplificar a escrita, pois a hipótese sendo escrita na segunda linha sob a questão será simultaneamente a primeira linha da solução: “será suficiente para ler esta hipótese para começar a raciocinar, enquanto a disposição antiga obrigará a escrever novamente” (TILMANT,1875, p. 22, tradução nossa).

Continuando, ele reporta a segunda vantagem que seria de uma ordem muito maior, e que somente é possível de reconhecer se o leitor colocar a prova à mão.

Talvez Tilmant (1875) esteja se referindo ao fazer prático que, enquanto se escreve cada novo número no quadro da solução, isso é acompanhado por uma linha de raciocínio por via oral, que deve ser seguido imediatamente escrevendo o mesmo número na expressão do desconhecido. Mas, objetivamente falando, ele está referindo à abreviação.

Essa abreviação, segundo Tilmant (1875), já praticada é independente da reforma proposta; consiste em escrever uma única vez a quantidade do mesmo tipo de x, na última posição da segunda linha, e indicar sob ela, uma por uma, as transformações necessárias para remontar a hipótese à questão por meio da unidade: essas transformações são obtidas geralmente fazendo um quociente maior ou menor, o que é feito multiplicando o dividendo ou divisor, como a Aritmética tem o cuidado de indicar.

No exemplo exposto anteriormente de Reynaud (1834), as vantagens postas são a descrição da técnica de solução do problema, incluindo a disposição dos dados. Ele demonstra isso a partir de exemplos, como os que seguem:

> Aqui está o quadro completo do problema Bourdon (1849), apresentado na página 9 resolvido por unidade.

PROBLÈME	Question proposée :	384 kil.	coûtent	x
	Hypothèse :	si 25	—	650 fr.
SOLUTION	Analyse :	1	—	25 fois moins que 25 k.
	Synthèse :	384	—	384 fois plus que 1 k.

$$\text{Réponse, } x = \frac{650 \text{ fr.} \times 384}{25} = 9.984 \text{ francs.}$$

> Ao comparar os resultados com os dados, vemos facilmente o caminho para deduzir uma regra; mas para não antecipar e possibilitar formular essa regra na íntegra, passamos por uma regra de três composta, que contém um exemplo de uma regra fundamental de três inversa, considerando que o problema anterior continha uma regra direta. Escolhemos outro exemplo de conversão, isto é, uma questão prática, de tirar o cavalo-vapor, em que aquela empresa industrial apenas chamou a atenção geral, para a publicação de uma nota do Sr. Mathias sobre esse assunto.
>
> Na Inglaterra e nos Estados Unidos, nomeia-se cavalo-vapor (cavalos de potência), a força necessária para levantar 33.000 libras a um pé por um minuto. Como essa força é representada em quilogramas por segundo, ou seja, como ela pode levantar 1 kg a um metro em um segundo, sabendo que uma libra inglesa é 453,6 g e um pé 0, 3048m (1).
>
> -Na redução das duas alturas, conforme observado acima, para uma unidade relativamente pequena, o decímetro, pois a libra é em quilo, temos para o problema e a solução tabela seguinte.

Question proposée :	Une force	élève à	10 dm.	en 1 seconde		x kilog.
Hypothèse :	si cette	—	3,048	60	—	14.968, 8
ANALYSE	elle	—	1	60	—	3,048 fois plus.
	—	—	1	1	—	60 fois moins.
SYNTHÈSE	—	—	10	1	—	10 fois moins.

$$\text{Réponse, } x = \frac{14.968 \text{ kil.}, 8 \times 3{,}048}{60 \times 10}, \text{ ou } 14.968, 8 \times \frac{1}{60} \times \frac{3{,}048}{10}$$

> Vê-se que a segunda parte da solução, a síntese ou o retorno às unidades dos números da questão, é simplificada porque um deles é 1. Seu homogêneo é 60 e está no denominador do resultado, 1 é deve

> ser numerador, como o será também qualquer outro número que substituí-lo. (TILMANT,1875, pp. 22-23, tradução nossa).

Tilmant (1875) observa que a resposta, devido ao esquema gráfico de arranjo de dados adotado, constrói-se ligando a hipótese à questão ou à pergunta e isso conduz à seguinte regra:

> Regra. O desconhecido é obtido multiplicando seu homogêneo pelas relações diretas entre as grandezas de mesma espécie que variam, com o desconhecido, em relação direta, e, pelas relações reversas das grandezas de mesma espécie que variam, com o desconhecido, na razão inversa. (TILMANT,1875, p.23, tradução nossa).

A regra incluiu as grandezas de mesma espécie, uma sob a outra, proporcionada diretamente pelo esquema gráfico de arranjo de dados. No entanto, essa regra também anunciada por Tombeck (1861), como vimos a acima, leva a uma dubiedade tecnológica, considerando que parece atender ao método das relações com fundamentos na proporcionalidade.

Embora Tilmant (1875) formule a regra, ele a despista preferindo a solução explícita pela redução à unidade, solucionando um problema similar ao imediatamente anterior.

> Cavalos de potência é chamada a força capaz de levantar em um segundo 75 quilos à 1 m de altura; Em outras palavras, a potência é igual a 75 quilogramas metros por segundo. Questiona-se como uma máquina de 10 cavalos deve ser capaz de levantar, em doze horas um quinto de minérios do fundo de uma mina que tem 60 m de profundidade.
> -O Nova disposição aqui aplicada, em primeiro lugar a análise mostra o que é feito, e que a solução é reduzida pela a síntese por uma multiplicação simples.

Question proposée : 10 chevaux en 43.200 sec. élèvent à 60 m. un poids x
Hypothèse : si 1 cheval en 1 seconde élève à 1 m. — 75 kil.

SYNTHÈSE
10 chevaux en 1 seconde élèveront à 1 m 10 fois plus.
10 — 43.200 — — 1 m. 43.200 fois plus.
10 — 43.200 — — 60 m. 60 fois moins.

$$\text{Réponse, } x = \frac{75 \text{ kil.} \times 10 \times 43.200}{60} = 5.400 \text{ quintaux.}$$

(TILMANT, 1875, p. 25, tradução nossa).

A intenção de Tilmant fica claro, então, quando ele destaca a vantagem da regra, por outro aspecto de grande importância.

> A expressão que fornece este resultado poderia ter sido escrita logo após a regra anterior. As relações são reduzidas aos numeradores, pois os denominadores são unitários, onde se vê facilmente sobre a expressão que começa com o desconhecido, isto é, o peso elevado, varia de acordo com os dados. E se representarmos o peso procurado por P, o peso dado de 75 quilos por p, a força por f, o tempo por t, e, finalmente, a altura por h, e substituirmos estas letras pelos os números correspondentes, encontraremos a fórmula:
>
> $$P = \frac{p \times f \times t}{h} ,$$
>
> o que demonstra que o peso elevado varia diretamente com a força e o tempo, e inversamente com a altura (TILMANT, 1875, 25, tradução nossa).

Independentemente da potencialidade da fórmula, isso mostra, segundo ele, que sua regra pode reduzir pela metade a solução de uma Regra de Três simples e composta, porque basta fazer a análise.

Além disso, é pedagogicamente adequada para preparar os estudantes a lerem e escreverem “leis físicas ou mecânicas mais ou menos simples: basta apontar-lhes que, se cada uma das relações *f, t* e *h*, tem dois termos, a segunda se colocaria naturalmente e necessariamente do lado oposto” (TILMANT,1875, p. 25, tradução nossa).

Esse é um aspecto que consideramos importante por dotar as manipulações de ostensivos, para além das regras estruturais da Álgebra, considerando as relações entre grandezas de naturezas distintas que a Aritmética, sem as restrições da Geometria, estava livre para fazer.

Como se pode notar, o esquema gráfico de arranjo de dados joga um papel importante no exercício da praxeologia da Regra de Três e se mostra como parte indiscutível da redução à unidade, visto que este método parte da hipótese em direção à questão ou pergunta, o que exige antecipá-la.

Parece que a redução à unidade é a aplicação do método analítico à solução do problema e isso suposto leva ao encontro do método analítico como a lógica da prática, que é a *superestrutura* da redução à unidade, como o jeito de pensar indispensável para essa praxeologia da Regra de Três.

5.5. A Superestrutura da Reforma Analítica da Regra de Três

Começamos evidenciando as condições que Tilmant (1875) considera explicitamente, e que, em suas palavras, podem ser mais ou menos expressas do seguinte modo:

> [...] eu venho expor *que a lógica comanda o fazer*; se nós não precisamos ensinar para nossos alunos os preceitos dessa *arte de pensar e raciocinar*, devemos praticar, e seguir as regras em nossas aulas como em nossa conduta, isto é, ensinar por *exemplos*. No entanto, tal é a característica do espírito humano, tal é a força da tradição, que eu tenho medo de ver as razões que há pouco expus, se não combatidas em si mesmas, talvez, pelo menos desdenhadas, sob o pretexto que o objetivo a que atende não vale a pena, e que a mudança proposta é insignificante.
> Bem! não, não é indiferente ensinar nossas crianças a respeitar ou desafiar as regras da lógica e do bom senso, isto é, a raciocinar verdadeiro ou falso; não é indiferente querer submetê-los a exercícios cansativos e desnecessários, quando podemos poupá-los especialmente dos hábitos que nós os fazemos adquirir penosamente que afetam seus estudos ou seus trabalhos.
> O que dizer de um mestre que obriga seus alunos a caminhar sobre suas mãos? (TILMANT,1875, p.11, tradução nossa).

As condições pedagógicas expostas por Tilmant (1875) deixam claro um dos aspectos do entendimento e da necessidade de sua reforma, que vai levar a inclusão do seu esquema gráfico de arranjo de dados para a Regra de Três.

Especificamente, se o esquema gráfico não puder ser ensinado como arte de pensar e raciocinar, então é necessário aprender como conduta, tal como se aprende os saberes práticos de que fala Chevallard (2005), referindo-se a Bourdieu (1980). Como se não fossem intencionalmente ensinados, mas aprendidos, inclusive por imitação, no exercício da prática.

Tilmant (1875) quer criar condições que encaminhem a conduta de pensar e raciocinar de modo conveniente para as resoluções de problemas. Desse modo, ele explicita outras condições que demandam e justificam seu dispositivo didático, se assim podemos pensar, entre os quais, os descritos por ele, como segue:

> [...] do ponto de vista da linguagem, cujo estudo constitui o principal do ensino primário, que por consequência não deve jamais ser negligenciado, eu observo aos meus colegas que a nova disposição fornece *uma construção lógica ou direta*, enquanto o antigo fornece uma *frase inversa*, ao mesmo tempo que é contrário às regras da *lógica* acima expostas.

> Esta maneira de escrever o problema, que ninguém até agora não havia praticado e nem formulado, responde, no entanto, bem às necessidades constatadas e ao desejo expresso pelos autores ou escritores contemporâneos que se ocupam do ensino, especialmente pelos redatores de dois dos nossos melhores jornais pedagógicas...
> Nós temos expostos várias vezes como um princípio, que não é possível repetirmos muitas vezes, *que uma questão bem compreendida, está metade resolvida*". (Lagarrigue, *Journal des instituteurs*, Nº2, 1875, p.27).
> O mestre deve sempre perguntar a criança a *conclusão* do problema; "Esta é outra maneira de fazê-lo refletir, e fazê-lo penetrar no sentido do enigma proposto" (*l'Éducation*, p. 40, No. 5, 1874, 1º ano.) (TILMANT,1875, p.11, tradução nossa, grifos do autor).

Começamos observando que Tilmant (1875) dá respostas às necessidades de sujeitos da noosfera. Ele destaca a palavra *conclusão* presente na nota do jornal *l'Éducation* para afirmar que a palavra usada deveria ser *questão, pois, segundo ele, o uso da palavra conclusão é* a consequência do abuso que ele quer remediar. Especificamente, o abuso de "tratar um *problema* como se fosse um *teorema*, isto é, pela *síntese,* enquanto que todo problema deve ser resolvido pela análise" (TILMANT,1875, p.11, tradução nossa, grifos do autor).

Nesse sentido, Tilmant (1875) encaminha o esquema gráfico de arranjo de dados, segundo o método analítico usado pela Ciência, em particular, a Matemática, sem deixar de destacar os aspectos didáticos, entre eles, os referentes à linguagem que, claro, podem contrapor como condições específicas sobre a compreensão dos enunciados dos problemas.

Referindo-se ao modo de enunciar os problemas de RT, em acordo com o método analítico, Tilmant (1875) chega a ser ríspido em defesa de sua reforma.

> Para aqueles que essas razões não convencem ainda, citarei o que disse Bezout, *da Regra de Três inversa e simples*: eles vão ver que este autor tinha provavelmente previsto a reforma que preconizo.
> Alguns aritméticos têm prescrito, para este caso, uma regra sujeita ao enunciado da questão; nós nem seguiremos o seu exemplo: é a natureza da questão, e não o seu enunciado (que muitas vezes é vicioso), que deve dirigir a resolução.
> Ele poderia ter dito o máximo de todas *as Regras de Três, diretas ou inversas, simples ou compostas*; e veremos pelos exemplos emprestados de sua Aritmética, que faltou uma coisa*, avançar do desconhecido para o conhecido*, ou seja, conformar-se à *análise*, para evitar a seus sucessores um século de erros e o trabalho atual (TILMANT,1875, p.13, tradução nossa, grifos do autor).

Desse modo, para Tilmant (1875) resolver um problema, no caso da Regra de Três, tem no mínimo um obstáculo, que é o modo naturalizado na escola que segue o método da síntese, e esse confronta também com a língua natural francesa, como assim destaca:

> Eu observei ainda quanto a *análise* final é mais o *francês*, ou seja, mais conforme ao gênio de nossa língua e, consequentemente, mais fácil que a de Bourdon, carregada de um verdadeiro **latinismo**, e por essa razão provavelmente que encontramos dificuldade de entrar no espírito e linguagem dos nossos alunos. Isso mostra, para dizer de passagem, que sob a relação *lógica* como um ponto de vista puramente *gramatical*, a língua francesa é analítica, enquanto o latim é uma língua *sintética*, como todos sabem (TILMANT,1875, p.33, tradução nossa, grifos do autor).

Para atender à essa condição didática imposta pela cultura, ele defende em definitivo a criação de dispositivos didáticos que encaminhem a arte de pensar e raciocinar, segundo o método analítico. Isso constitui o cerne de sua reforma e que o novo esquema gráfico de arranjo de dados para a Regra de Três deve promover. Esse esquema gráfico constitui o dispositivo didático para que seu objetivo seja atendido no caso da RT.

Assim, a noção de que um problema tem duas partes, que é introduzida pelo método analítico do modo a que nos referimos no início deste capítulo, é fundamental para compreendermos o papel que jogará o novo esquema gráfico de arranjo de dados defendido por Tilmant (1875). Sobre o novo esquema gráfico de arranjo de dados em conformidade com o método analítico, ele assim se manifesta:

> É precisamente esta disposição de que trata esta reforma: porque é de um *teorema*, que se enuncia e se *demonstra*, que vai do *conhecido ao desconhecido*, ou seja, pela *síntese*; enquanto que um *problema* deve *se resolver* por meio da *análise*, a partir do desconhecido ao conhecido primeiramente, para se escrever ou dispor na mesma ordem. Isso, em efeito, é o que se tem na Lógica de Port-Royal, escrita por Arnauld, há mais de dois séculos (1664); esta passagem é quase uma reprodução da que Pascal havia dito no início de seu tratado *de espirito geométrico*. (TILMANT,1875, pp.9-10, tradução nossa, grifos do autor).

Para deixar claro o que está querendo dizer sobre um problema, ele recorre ao seguinte exemplo, extraído de Bourdon (1849):

> Pedimos o preço de 384 kg de uma determinada mercadoria, supondo que 25 kg da mesma mercadoria custaram 650 francos BOURDON, 1849 apud TILMANT, 1875, p. 9, tradução nossa).

Segundo Tilmant (1875), para resolver facilmente este problema, bem como todos os semelhantes, os autores até então escrevem os dados em duas linhas, os da mesma espécie dispostos um embaixo do outro, com a incógnita x na segunda linha e geralmente no final, como mostrado a seguir.

Se 25 quilos custam 650 francos.
384 - - x

Ele afirma que é precisamente sobre essa disposição dos dados do problema adotada pelos autores das obras estudadas nas escolas, que sua nova proposta de reforma vai mudar. O esquema gráfico de arranjo dos dados exposto acima, que abrevia o problema, segue a forma de um teorema que se enuncia e se demonstra, a partir do conhecido para encontrar o desconhecido, que é modo próprio de uma síntese. Mas, o que se tem na atividade da Regra de Três é um problema e, nesse caso, segundo a compreensão que a Análise disponibiliza, a resolução deve partir do desconhecido para o conhecido, primeiramente, para depois escrever ou dispor na mesma ordem.

Assim, Tilmant afirma que rompe com essa marcha ordinária em sua rotina, quando propõe e passa a abreviar o problema por meio de seu novo esquema gráfico de arranjo de dados, que empregado para o problema acima, pode ser escrito do seguinte modo:

Questão proposta. 384 quilograma custam - x francos
Suposição ou Hipótese. Se 25 quilogramas custam - 650 francos.
(TILMANT,1875, p.10, tradução nossa).

É importante notar que para escrever esse esquema gráfico de arranjo de dados, é necessário encontrar no enunciado primeiro a questão ou pergunta, como esclarece uma passagem de Descartes, sobre os diferentes tipos de questões, especialmente físicas e matemáticas, sobretudo, que, segundo Tilmant (1875), termina assim:

> *"No entanto, de qualquer natureza que seja a questão que propomos para resolver, a primeira coisa que se deve fazer é conceber clara e distintamente o que é exatamente o que estamos pedindo que é o ponto preciso da questão"* (TILMANT,1875, p.10, tradução nossa, grifos do autor).

A necessidade de encontrar primeiro a questão ou pergunta no enunciado do problema é encaminhada pelo esquema gráfico de arranjos dos dados por meio da exigência da sua primeira linha. Isso é a essência da reforma de Tilmant, que se traduz em vantagens para o ensino e aprendizagem da Regra de Três.

5.6. As Vantagens da Reforma para o Ensino e Aprendizagem da Regra de Três

Tilmant (1875) destaca como vantagem para o ensino e para a aprendizagem da RT, em primeiro lugar, que *a disposição dos dados facilita o trabalho do aluno*, se os números necessários para a solução contidos no enunciado são escritos de modo conveniente. Isso quer dizer que o enunciado do problema joga papel importante no uso da praxeologia.

Assim, a escolha do problema de Bourdon, anunciada anteriormente por Tilmant (1875), por exemplo, não foi por acaso. Ele apresenta a questão proposta no início do enunciado. Isso facilita encaminhar o arranjo dos dados com o desconhecido x na primeira linha, atendendo às duas partes constantes do modelo do arranjo de dados, proposto por Tilmant; a Questão proposta e a Hipótese ou Suposto.

Como podemos notar, a escolha tem cunho didático, no sentido de levar o aluno diretamente ao encontro do objeto de ensino, no caso, o esquema gráfico do arranjo de dados do problema, com suas duas partes, na ordem preconizada pelo modelo a ser ensinado.

No entanto, não se deve esperar que todos os problemas desse tipo tenham a questão ou pergunta posta no início do enunciado. Aliás, os problemas são anunciados como teoremas, o que contribui para um encaminhamento natural ao antigo esquema gráfico da quarta proporcional.

> A ordem que eu venho informar é o enunciado ordinário de teoremas que foi mantido para os problemas, pois é fácil de assegurar. Assim Camus escreveu seus enunciados inteiros em duas partes, a *hipótese* primeiro, a *questão* em seguida, sempre separada da hipótese por um parágrafo; Bourdon, sobre 10 exemplos de regras de três, somente dá a questão no início, que eu intencionalmente escolhi no início deste trabalho (p. 9). E o mesmo acontece nos exemplos dados por Lacroix e outros autores; em todos, como em Bourdon, encontramos 9 de 10, enunciados em forma de teorema. A partir daí, da antiga disposição sobre duas linhas *paralelas*, com a incógnita no final da segunda, existe apenas um passo. É justo acrescentar que os outros problemas, dependendo da regra de três, os de interesse, com desconto, a questão muitas vezes precede a hipótese; mas ao voltar às primeiras,

> é naturalmente dada a mesma disposição (TILMANT,1875, p. 38, tradução nossa, grifos nossos).

Frente a isso, Tilmant (1875) recomenda que para escrever a primeira parte, a da hipótese, no início, e fazer os próprios membros da frase facilitarem o raciocínio; o de evidenciar a relação direta ou inversa, por exemplo, é necessário que o aluno previamente reconheça e formule mentalmente a questão ou pergunta, *na ordem conveniente*, e que a reserve no seu espírito, enquanto escreve na mesma ordem essa questão.

Tilmant (1875), no entanto, considera que os seus alunos hipotéticos são pouco capazes desse trabalho mental, pois eles veriam muito melhor pelos olhos do corpo, que em nossa compreensão teórica quer dizer sobre aprender por imitação, do que os olhos do espírito, em que compreendemos para que se faz e por que se faz assim desse modo uma dada praxeologia.

É essa dificuldade dos alunos que o novo esquema gráfico de arranjos de dados deve ajudar a vencer e com isso encaminhar o que Tilmant (1875) deseja para a praxeologia da Regra de Três, que é fundamentá-la como uma praxeologia condicionada pelo método analítico.

Para isso, ele ratifica que se deve seguir o que preconiza Descartes sobre o lugar ocupado pela pergunta ou questão no problema; independentemente da posição que ocupe a questão ou pergunta no enunciado, *a primeira coisa a fazer* é sempre de *reconhecer a questão* que queremos resolver; e acrescentar que, tendo encontrado, é natural escrever: desde então, os números da hipótese vão se dispor, naturalmente também, sob aqueles dados da questão ou pergunta.

Para mostrar essa virtude do emprego de seu esquema gráfico de arranjo de dados, Tilmant recorre a exemplos usados em suas atividades docentes, descritas por ele no fragmento de texto seguinte:

> Permita-me, a este respeito citar eu mesmo, a escolha de meus exemplos em uma coleção de problemas, que eu tenho tentado torná-lo mais prático do que os do mesmo gênero. Eu tomo de forma proposital duas questões inversas uma da outra, e se resolvem usando os mesmos dados.
> Nº 1. A distância do polo ao equador foi encontrado 5.130.740 jardas, que é feito 10 milhões de metros, pedimos o valor de uma jarda em metros, pelo menos metade de um centésimo de milímetro.
> Nº 5. Deduzir dos dados do problema1, o comprimento do metro em pés, polegadas e linhas, a menos da metade de um centésimo de

> linha, sabendo que a jarda vale 6 pés, o pé 12 polegadas, e a polegada 12 linhas.
> Para resolver cada um desses problemas, vamos usar de uma das duas igualdades seguintes:
>
> 5.130.740 jardas = 10.000.000 metros.
>
> 10.000.000 de metros = 5.130.740 jardas.
>
> Mas de qual partirá por primeiro, de qual por segundo?
> É óbvio que pode ser guiado nesta escolha pela ordem em que os números são dados no problema, uma vez que é arbitrária; mas pela questão: a primeira a ser escrita, como propus, é a que se fórmula mentalmente que conserva a ordem no pensamento, por encontrar então a que deve dada à hipótese.
> Vamos colocar a questão sob seu olhar primeiramente: por isso faremos assim uma *construção lógica*, ao ponto de vista *filosófico*, tais como a relação *gramatical*, e o resto executará tudo sozinho.
> Como prova do que já avancei, se dobrarmos a dificuldade reunindo as duas perguntas na mesma linha, da maneira seguinte:
>
> 1 jarda= *x* m. (5). 1 m. = *x,* pés,
>
> não há nenhum aluno que hesite um instante entre as duas igualdades acima, para completar a escrita abreviada de cada enunciado.
> Será necessário apenas advertir que, os dois números situados um sob o outro deve ser sempre da mesma espécie, ele deve no segundo exemplo, reduzir as jardas em pé ou em polegadas, para que o metro seja expresso em unidades desta espécie: porque sabe-se que o resultado da multiplicação ou divisão é da mesma natureza que o primeiro número dado (multiplicando ou dividendo); a menos que esse seja um *quociente* propriamente dito, abstrato então, o que não é o caso aqui.
> Seria o mesmo para *reduzir francos em livros ou livros em francos*, sabendo também que 81 *livros valem* 80 francos. (Concurso Geral do Liceu de Paris, em 1865). Tratado de Aritmética, por E. Burat, p. 185 (TILMANT,1875, pp.13-14, tradução nossa, grifos do autor).

Parece então, pelo o que discorre Tilmant (1875), o esquema gráfico apresenta a vantagem de encaminhar uma disposição de dados que facilita o raciocínio, pois encaminha o aluno primeiro para encontrar a questão.

Outro aspecto importante, encaminhado pelo esquema gráfico de arranjo de dados, mas já presente desde os esquemas gráficos hindus, é a necessária tomada de cuidado de dispor dois números, um em baixo do outro, somente se forem de grandezas de mesma espécie; essa é a segunda principal vantagem anunciada por Tilmant, para o ensino da RT, por promover a facilidade na procura dos números necessários.

Pois, na procura por números necessários, é preciso considerar que corremos o risco de tomar números que não estão ou não são necessários. Do mesmo modo, corremos o risco de não tomar números presentes no enunciado que são necessários; a falta de atenção sobre esse aspecto pode levar à perda de tempo com cálculos desnecessários, o que certamente pode acontecer, pois os números necessários para a solução de um problema de RT podem não estar diretamente ou explicitamente dados no enunciado.

A respeito dessa dificuldade, Tilmant (1875) começa citando a seguinte passagem de Descartes:

> "Ora, embora em qualquer questão haja algo desconhecido, caso contrário, não haveria nada para pesquisar, é, contudo, necessário que essa coisa que se queira saber, que é a incógnita, seja marcada e designada por certas condições que determinam a procurar essa coisa mais que outras, e que pode nos fazer julgar, quando a encontramos, que é o que procuramos."
> Por isso, quando se consideram as condições que designam e marcam o que é desconhecido na questão, devemos em seguida examinar o que há de conhecido, uma vez que devemos chegar ao conhecido por meio do que é desconhecido: porque não devemos imaginar que tivemos de encontrar um novo gênero de ser, e sim que a luz que nos ilumina somente pode estender-se para reconhecer o que procuramos sendo partícipe de tal e tal maneira à natureza das coisas que são conhecidas por nós. (TILMANT,1875, p.15, tradução nossa).

E a seguinte de Arnauld:

> "Ora, é na atenção que prestamos ao que há de conhecido na questão que queremos resolver, que consiste principalmente a análise; toda arte elaborada nesse exame parte das muitas verdades que podem nos levar ao conhecimento do que procuramos" (TILMANT,1875, p.15, tradução nossa).

Para traduzi-las em uma compreensão do seu esquema gráfico de arranjo de dados:

> Na aplicação que fazemos aqui destes princípios, *as condições que designam e marcam o que há de conhecido na questão*, são, como eu indiquei acima, as condições em que os números desconhecidos foram colocados, ou formados, *as condições* segundo as quais eles são combinados, etc., para produzir os números dados; e os números que eu chamo *números necessários*, tirados do que é conhecido, substitui *as verdades que podem nos levar ao conhecimento do que procuramos.* (TILMANT,1875, p.15, tradução nossa, grifos do autor).

A partir dessa compreensão, Tilmant (1875) encaminha os *números necessários como* os *números de mesmas espécies que constam da* questão e acrescenta: “como tenho feito em outros lugares, devem ser *comparáveis*, isto é, formado da mesma maneira, colocado nas mesmas *condições*, etc., etc.” (TILMANT,1875, p.14, tradução nossa, grifos do autor).

O novo esquema gráfico de arranjo de dados do problema, por demandar primeiro a questão ou pergunta, permite encaminhar os números necessários, tomando como referência a primeira linha, que é a abreviação da questão. Portanto, o arranjo dos dados determinado pelo esquema gráfico facilitaria o encontro dos números necessários pelos alunos.

Tilmant (1875) ilustra essa afirmação por meio de exemplos de problemas propostos em Lille, em 1873, aos aspirantes à escola de artes e ofícios de *Châlons*, e os que foram dados para certificação de capacitação, nos cinco departamentos da Academia de Douai, na primeira sessão de 1874.

Aqui, consideramos apenas um dos problemas anunciados por Tilmant, ao mostrar, segundo ele, a utilidade e talvez até mesmo o de fazer reconhecer a necessidade de sua reforma.

> VI. *Aspirantes, patente completa*. Uma pessoa paga, de ano em ano, com um banqueiro, uma soma de 1000 fr., em quatro ocasiões diferentes. No meio da 5ª anuidade, ela retira 850 fr., e ela pede que lhe é devido no final da 5ª anuidade.
> Assumindo que os juros de 5%, e capitalizado no final de cada ano, que valor receberá esta pessoa?
> -Para Resolver este problema, fazemos um investimento comparável a 1000 fr., ou seja, nas mesmas condições (anual, 5 %, etc.), tal que podemos facilmente ver o que fornece após cinco anos: este resultado será o número auxiliar comparável ao número desconhecido, se negligenciarmos a retirada de 850 fr.
> Suponhamos que este pagamento são de 100 fr, ou melhor, de 1 fr. Como no final de cada ano, o primeiro franco é aplicado 4 anos e tornou-se 1.05^4=1.215506
>
> O segundo - 3 - - $1,05^3$ =1,157625
> O terceiro - 2 - - $1,05^2$ =1,1025
> O quarto - 1 - - $1,05^1$ =1,05
> Então, 1 franco aplicado cada ano fornece: =4,525631
> E 1000 francos aplicado do mesmo modo fornecerá =4525,63 f.
> Resta deduzir desta soma os 850 tomadas no meio do quinto ano e os juros por 6 meses.
> Vemos aqui que um dos números comparáveis é a unidade, o problema final se reduz a uma simples multiplicação, e que o pagamento de 1000 fr. em vez de 1 fr, por anuidade, faz de 1.000 francos um *fator comum* dos quatro resultados...
> Enfim, as quatro potências acima, de quem a teoria de juros compostos torna muito mais fácil compreender, formam uma progressão geométrica que pode calcular a soma por uma fórmula (1).
> Como me afastaria do meu objetivo, contentei-me de pegar os resultados, em vez de calcular, *no l'Annuaire du Bureau des longitudes*, que dá imediatamente sua soma.
> Encontramos neste anuário (2) todas as tabelas necessárias para o cálculo rápido das questões de juros compostos, de anuidades e de

> amortização; porque, como todos os resultados são calculados para 1 franco de capital primitivo ou final, ou seja, por 1 franco colocada apenas uma vez, ou anualmente, depois para 1 franco a se realizar em um determinado tempo por um único investimento ou por pagamentos anuais, todas estas questões são resolvidas como a precedente, por uma simples multiplicação (TIMANT,1875, pp.19-20, tradução nossa, grifos do autor).

Como se pode notar, a ênfase se dá sobre o encontro da questão ou pergunta que demanda compreender tomando relações entre o pedido, que é o desconhecido, e os outros dados em combinação com ele. Uma vez posta a questão ou pergunta, os números necessários são encaminhados.

5.7. Considerações sobre a Reforma Analítica da Regra de Três

A praxeologia proposta pela reforma analítica de Tilmant (1875) apresenta ligeiras diferenças quanto às praxeologias contemporâneas que viviam nas escolas europeias, inclusive com as praxeologias que vivem atualmente nas escolas básicas brasileiras.

Os questionamentos de Tilmant (1875) foram dirigidos basicamente aos modos mecânicos das ações que eram realizadas e não à estrutura algorítmica dessas ações. Para isso, introduz um modo de pensar essas ações como produto de uma inteligibilidade, nesse caso, a do método analítico empregado em estudos avançados da atividade matemática.

Para assegurar seus argumentos, recorreu ao pensamento analítico de Pascal, Descartes e Arnauld; além disso, considerou como argumento favorável à sua proposta a suposta estrutura analítica da língua francesa que implicava, sobretudo, em nova ergonomia do esquema gráfico de arranjo de dados, mais favorável para a realização das ações para a resolução do problema de RT.

Mais precisamente, os argumentos de Tilmant (1875) implicaram em mudanças sobre a praxeologia da RT, independente da compreensão dessa praxeologia decorrer da redução à unidade ou da quarta proporcional:

1-O problema passa a ser visto tendo duas partes, uma da questão ou pergunta e outra das condições ou hipóteses.

2-O esquema gráfico de arranjo dos dados tem obrigatoriamente a primeira linha com a da questão e a segunda com a das condições.

3-O desconhecido, no caso a incógnita x, perde a obrigatoriedade de ser o quarto termo da proporção ou equação.

No entanto, embora se esforce para dotar a praxeologia mecânica da RT de um discurso tecnológico *superestrutural*, pois o *infraestrutural* continua o mesmo, ou seja, a quarta proporcional ou a redução à unidade, Tilmant (1875) cai na tentação professoral de trivializar o saber, quando anuncia a regra geral do seguinte modo:

> Regra. O desconhecido é obtido multiplicando seu homogêneo pelas relações diretas entre as grandezas de mesma espécie que variam, com o desconhecido, em relação direta, e, pelas relações reversas das grandezas de mesma espécie que variam, com o desconhecido, na razão inversa. (TILMANT,1875, p.23, tradução nossa).

Como se pode notar, a regra anunciada por Tilmant é um algoritmo, que pode ser empregado a partir de manipulação prévia dos dados sobre o esquema gráfico, independentemente, das considerações de a primeira linha ser a da questão ou pergunta.

> REGRA. Para se obter a solução de uma regra de três, comece por escrever as quantidades mencionadas no enunciado sobre duas linhas, de modo a fazer corresponder as quantidades de mesma natureza duas a duas, tendo o cuidado de colocar na primeira linha o desconhecido.
> Feito isso, escrevemos que o desconhecido é igual à quantidade conhecida da mesma espécie, multiplicada pelas relações dos números correspondentes dois a dois, tomadas na ordem em que estão escritas se eles representam as quantidades variando na razão direta com o desconhecido; em ordem inversa, se eles expressam quantidades que variam em razão inversa com o desconhecido.
> Nós já não temos mais que efetuar os cálculos indicados, após simplificação, se houver (TILMANT, 1875, pp. 59-60, tradução nossa).

Em ambos encaminhamentos, a proporção não está em questionamento, sempre assumida como um pré-construído da situação, assume o papel do elemento de saber que será aplicado. Parte-se do conhecido para o desconhecido.

Esse fazer não exige clareza do que se quer e do que se tem no enunciado de um problema, talvez por isso se torne tão mecânico e chegando ao absurdo de solucionar problemas estranhos, por envolver grandezas sem qualquer possibilidade de relações entre si.

Mas, as praxeologias, seja a da redução à unidade propriamente dita, seja sua forma reduzida pelas relações, pressupõem a clareza do problema em suas duas partes, questão e hipótese, e suas imbricações para a sua solução; trazia consigo a lógica das praxeologias aritméticas que em outros níveis de ensino foram abandonadas pela suposta abstração envolvida, mais precisamente, pela lógica das práticas que podiam ser desconhecidas pelos sujeitos desses níveis de ensino.

Talvez por isso, mesmo quando não tinham uma razão matemática para seu ensino, as praxeologias da Aritmética eram, e ainda o são, objetos de ensino para os iniciantes. Havia uma clareza, hoje perdida, do papel importante das praxeologias aritméticas para todos aqueles que pretendiam se enveredar pelos estudos avançados da Matemática, em particular, o da Álgebra.

Lacroix (1839), um grande representante da Pedagogia Matemática, assim o fazia em sua obra. A Regra de Três, por respeito à tradição, era mostrada a partir da redução à unidade, mas, a despeito das facilidades práticas, era abandonada, por sua obscuridade, dando lugar ao estudo das proporções.

Os saberes eruditos são independentes de uma situação enquanto os saberes práticos não. Os saberes práticos não toleram a descontextualização (CHEVALLARD,2005). Talvez por isso a repulsa em ensinar as praxeologias da redução à unidade, pois essa seria um saber prático; esquecem que a Regra de Três é um saber contextualizado e, como tal, o contexto é essencial para conferir sentido (CHEVALLARD,2005, p.109).

A proposta de Tilmant (1875) tem a virtude de dar um toque do saber matemático às velhas praxeologias da redução à unidade, como aplicação do método analítico. Portanto, a tecnologia da praxeologia está na conduta do método analítico, manifestada na atividade matemática, e não em objeto de ensino da Matemática. Talvez por isso o insucesso frequente dos alunos de graduação frente ao curso de Análise Matemática.

Além disso, a reforma de Tilmant (1875) brinda-nos com a clareza das condições explícitas dos diferentes níveis de codeterminação didática (CHEVALLARD, 2009a), que ele busca atender; desde o nível da disciplina, da escola, da pedagogia, da sociedade e até da cultura.

A praxeologia regrada da Regra de Três, com pequenas variações, que vive nas instituições docentes que investigamos, em geral, é realizada escrevendo como abreviatura de um raciocínio discursivo para concluir com a equação, que é resolvida pelo produto cruzado, parece substanciar inequivocamente as regras anunciadas de Tombeck (1861) e de Tilmant (1875).

Parece que encontramos em definitivo os brotos das raízes das praxeologias da Regra de Três que vivem em nossas escolas, que, por tradição escolar ou por necessidades sociais desse saber prático, ainda teimam viver entre nós.

Claro, o discurso matemático tem mudado ao longo do tempo, pois se mostra inadequado sob diferentes pontos de vistas, mas a proporcionalidade, sempre pré-construída, continua a vagar entre as praxeologias da Regra de Três, embora claramente nunca seja suficiente para enfrentar todo e qualquer problema que se possa julgar como de “regra de três”.

De outro modo, não há como reconhecer o tipo de variação entre duas grandezas em enunciados de problemas sem que essa variação não seja conhecida. Há dependência do conhecimento da situação criada em um contexto. Esse aspecto Tilmant e os autores contemporâneos dele e nossos, deixam escapar: a regra não é suficiente para engendrar a praxeologia!

Como acontece ao longo da vida da Regra de Três, tudo se resume em uma regra geral, fortemente dependente do esquema gráfico de arranjo de dados, que facilita o seu emprego e, claro, que se torna enfático no ensino. Não há como ensinar a RT sem o uso dos esquemas gráficos de arranjo de dados, por tradição da cultura escolar dessas praxeologias e por ser de modo inequívoco um facilitador da praxeologia da RT, sob qualquer fundamento tecnológico, seja ele matemático ou não.

Além disso, como deixa claro Tilmant (1875), os esquemas gráficos de arranjo de dados permitem encaminhar a construção de modelos e fórmulas matemáticas para problemas científicos e situações concretas diversas. Fica claro, nesse sentido, o papel das praxeologias da Regra de Três para a Modelagem Matemática, inclusive para a construção de relações funcionais entre as medidas das grandezas. Isso revela o alcance dessa praxeologia para a construção do conhecimento científico escolar.

Tendo em conta essa toda tessitura até aqui esboçada, no capítulo seguinte, buscamos construir respostas, mesmo que parciais, para nossos questionamentos postos no início deste trabalho.

CAPITULO 6: CONSTRUINDO RESPOSTAS ÀS QUESTÕES DA INVESTIGAÇÃO

6.1. Introdução

Nesta investigação, observamos que o ensino da Regra de Três, no desenrolar do tempo, ganhou outras intencionalidades didáticas, além de saber prático destinado às práticas sociais urbanas específicas. Seu estudo constitui, de algum modo, requisitos para estudos mais avançados da Matemática e isso chega a confrontar com as recorrentes manifestações de matemáticos sobre as praxeologias da Regra Três na escola, como pode ser observado, no Brasil, por meio dos trabalhos de Lima (1986;1988;2001; 2004) e Ávila (1986a, 1986b).

No século XIX, os trabalhos de Lacroix (1839) constituem um bom exemplo do que afirmamos. Lacroix reconhece o potencial do fazer analítico da redução à unidade para a atividade matemática, inclusive por tornar possível o estudo de novos objetos matemáticos, mas por razões didáticas preferia a Regra de Três como aplicação das proporções como condições iniciais para introduzir o estudo da Teoria das Razões e Proporções.

Assim, a transposição didática da RT atendia à intenção de criar uma infraestrutura didática-matemática para o estudo de outros saberes matemáticos e extra matemáticos, por exemplo, como técnica de Modelização Matemática (Figura 6) de problemas extra matemáticos, como ilustra a obra de Tilmant (1875).

Essa intenção parece continuar sendo seguida de modo dominante na escola básica brasileira, pois ainda encontramos vestígios em praxeologias escolares, como se apresentam em textos de química, por exemplo, de Feltre (2004, p.30), mostrado na figura seguinte, e em praxeologias profissionais, como se apresenta na profissão de enfermagem (MARTIN, 1996).

Figura 6- Regra de Três como técnica de Modelização Matemática

Quando temos 3 mols de sal comum em 1kg de água, dizemos que a molalidade da solução é igual a 3 mol/kg, ou ainda que a solução é "3 molal".De forma geral, quando temos n_1 mols de soluto em m_2 gramas de solvente, podemos equacionar:

m_2 g de solvente ———— n_1 mol de soluto

1kg=1000g de solvente ———— w mol de soluto

$$w = \frac{1000n_1}{m_2}$$

Sabemos que n_1 pode ser calculado pela relação $\frac{m_1}{M_1}$; logo, temos

$$w = \frac{1000m_1}{m_2M_1}$$

Fonte: Silva (2011, p.55)

Em todo caso, o fazer mecânico da Regra de Três, marcado por problemas protótipos, esquemas gráficos de arranjos de dados e uso de termos técnicos que orientam a construção adequada das relações, como em atendimento à "lei hindu" de multiplicar primeiro e depois dividir, tornou-se desde cedo dominante no ensino.

A invariância dessa praxeologia levou-nos a questioná-la, principalmente considerando os diferentes discursos matemáticos, anunciados em diferentes pesquisas no âmbito da TAD, como as de Bosch (1994), Comin (2000), Bolea (2003) e Garcia (2005), que podem ser usados para produzi-la ou substancialmente modificá-la.

Para responder as questões Q_1, Q_2 e Q_3, anunciadas na apresentação do problema de investigação no inicio deste trabalho, observamos que elas estão fortemente imbricadas em vista dos elementos teóricos extraídos da noção de organização praxeológica proposta pela TAD, precisamente, as noções de Tarefa, de Técnica, como modo de fazer essa tarefa, e de Discurso Técnico-Tecnológico que explica, justifica ou produz essa técnica.

Desse modo, iniciamos, aqui, destacando esses elementos, para, em seguida, construir as respostas, mesmo que de modo parcial, aos nossos questionamentos.

6.2. As Tarefas: Problemas sobre Contextos Concretos

Sob qualquer aspecto do ensino, geral ou profissional, não há como distanciar a Regra de Três do problema. A associação entre o problema (tarefa) e o modo (técnica) no ensino da RT é inevitável. A RT se mostra em unidade praxeológica, tarefa-técnica inseparáveis, o saber-fazer pontual por dizer respeito a situações em contextos específicos. Como todo saber prático, é um pré-construído que não tolera a descontextualização.

Høyrup (2007b) é esclarecedor da compreensão da relação da prática com situações sobre contextos nas organizações para o ensino, quando afirma que os tratados de ábacos romanos e árabes introduziam o estudo da RT, a partir de problemas que tratavam de assuntos específicos, por exemplo, “moeda contra a moeda”, moeda contra a mercadoria.

Essa abstração, no entanto, não tornou indispensável a taxionomia de situações sobre contextos concretos, pois envolviam diferentes assuntos de interesse das sociedades para atendimento de diferentes atividades desenvolvidas nos centros urbanos. Essa necessidade continuou orientando as transposições didáticas da RT, ao longo do tempo, em diferentes espaços sociais, em diferentes tempos.

No entanto, parece-nos que desde os árabes há um incômodo da Instituição Matemática com o saber prático que caracteriza as praxeologias da RT. O enfrentamento desse incômodo pela Matemática, tem sido, ao longo do tempo, reduzir o papel do assunto que trata o problema sobre a resolução matemática do problema.

Essa compreensão, para nós, decorre da observação que fizemos sobre os escritores árabes. Esses escritores eram incisivos sobre a necessidade de enclausurar a praxeologia da RT na Instituição Matemática, ou seja, como uma praxeologia matemática, inclusive alertando que os tipos de problemas podiam ser resolvidos pela aplicação da quarta proporcional, em que o desconhecido, independentemente do lugar que tomasse, poderia ser encontrado, tendo em conta que o produto dos termos médios é igual ao produto dos termos extremos.

Talvez, por isso, as tarefas dadas por problemas tenham chegado a ser abstraídas, por exemplo, como faz o *Libro de arismética que es dicho Alguarismo* (1393), quando apresenta, segundo Høyrup (2007b), a RT por meio de tipo de problemas abstraídos como "Se tanto vale tanto, quanto é tal valor?", Francesc Santcliment’s *Summa de l'art d'aritmética*(1482) e Francés Pellos’s *Compendion de* *l'abaco* (1492) que se referem ao tipo de problema abstraído "Se muito vale muito, quanto esse tanto vale a pena?". Ou, ainda, os presentes em diferentes obras como dos Ibero-Provençais, que introduziam a RT por meio de problemas não concretos de números puros dos tipos "Se 3 foram 4, o que pode ser cinco?" e "Se $\frac{41}{2}$ valem $\frac{72}{3}$, quanto vale $\frac{133}{4}$? (HØYRUP,2007b, p.4, tradução nossa).

Os tipos de tarefas com problemas de números puros eram convenientes ao discurso matemático da quarta proporcional. Esses tipos de tarefas não exigiam preocupações com a cultura da prática que manipulava grandezas como números.

Mas, a força da nooesfera que impunha e ainda impõe a leitura de mundo também com a Matemática, em que se insere a RT, as situações sobre contextos concretos ou abstratos, continuaram presentes nas organizações praxeológicas de estudo da RT. Além disso, qual o sentido que se pode encontrar em problemas com números puros? Parece que isso põe em definitivo em evidência o papel das tarefas com problemas sobre contextos concretos por meio de enunciados protótipos que envolviam medidas de duas ou mais grandezas em relação.

No entanto, o avançar do discurso matemático, que ganhou força indisfarçável, a partir do século XIX, o aspecto de situações sobre contextos concretos orientarem as transposições didáticas, foi minimizado ao impor às praxeologias da RT um estatuto de praxeologia matemática. As situações sobre contextos concretos perdem importância, mas não o lugar. O que passa a estar em jogo é o modo árabe da aplicação da Teoria das Proporções, mais precisamente da quarta proporcional, para a tarefa de resolução de tipos de problemas sobre contextos concretos.

Assim, embora os tipos de tarefas sobre situações sobre contextos concretos deixem de ser orientadores das transposições didáticas, elas permanecem no ensino da RT, seguindo a trajetória histórica com traços comuns que se revelam por meio de problemas protótipos com enunciados singulares e inequívocos, enfrentados com técnicas claras tomadas em fazer algoritmico que não necessariamente se explicam ou justificam por argumentos matemáticos específicos, mas que com ele se completam para dar inteligibilidade ao fazer prático.

As transposições didáticas sobre a Regra de Três ainda hoje têm como razão maior para seu ensino e sua aprendizagem o uso prático que exige inevitavelmente conformidades com os assuntos de que tratam os problemas sobre as práticas de diferentes atividades que, geralmente, não são alcançadas pelo ensino que comporta a crença de que a técnica está restrita à compreensão dada pela instituição Matemática.

Assim, em nossa compreensão, se assim podemos dizer, não há praxeologia de RT sem problemas que tratem de situações sobre contextos concretos específicos. Os problemas protótipos recorridos no ensino, em geral, são criações didáticas que atendem à essa condição.

6.3. Técnicas: As Criações Didáticas

Destinavam-se às praxeologias, que podiam ser aprendidas sem prover uma justificativa matemática, pois deviam estar ao alcance de todos, mesmo para os menos dotados de conhecimento de praxeologias matemáticas.

A intenção didática em facilitar o emprego da técnica parece ter sido a maior razão das organizações praxeológicas para o ensino da RT. Os hindus, por exemplo, manifestaram objetivamente a preocupação de a técnica de resolução estar ao alcance de todos, mesmo para os menos dotados de conhecimento matemático.

Para atender a esse objetivo, as organizações praxeológicas hindus contavam com criações didáticas de modo a prover uma técnica algorítmica que contemplava a simplicidade, a brevidade e a eficácia, no sentido de munir de modo inequívoco a solução do problema de modo simples e rápido. Isso reduzia o papel do discurso matemático requerido.

As criações didáticas hindus foram replicadas ao longo do tempo, com ligeiras modificações, mas permanecendo praticamente as mesmas até hoje nas salas de aula e que se constituíram em objetos de nossa investigação. São eles:

1-Os esquemas gráficos para o arranjo dos dados.

2-Os termos técnicos para rearranjo de dados, independentemente do assunto de que trata o problema.

3-A Regra de Três Inversa.

Essas criações didáticas imbricadas atendiam à intenção de facilitar o emprego da técnica matemática da quarta proporcional, não exigindo seu conhecimento. Eram anunciadas como regras objetivas com alcance de generalidades que podiam ser empregadas em diferentes tipos de problemas. Bastava que se identificasse os dados do problema, segundo os termos técnicos. Essa é uma característica, com poucas modificações, das praxeologias da RT que se mantém até os dias atuais de nossas salas de aula.

Essas criações didáticas, sem dúvida, escondem a complexidade matemática**,** principalmente na Regra de Três Composta, que age na resolução do problema de RT, mas contribuem para o ensino e a aprendizagem de uso da RT.

6.4. Os Esquemas Gráficos

Os esquemas gráficos de arranjo e rearranjo de dados, independentemente de tempo e lugar, podem ser descritos brevemente do seguinte modo: São quadros construídos, nos quais os dados são arranjados, por grandezas, em linhas ou colunas, uma para cada grandeza, de modo que esses dados fiquem um ao lado do outro ou sob o outro. Apresentamos alguns desses esquemas gráficos como segue:

1-Esquema gráfico hindu, Brahmagupta (628). Tarefa: Se 5 mangas custam 10 rúpias, quanto 8 mangas custarão?

a) Em única linha horizontal ou coluna vertical:

5	10	8

5
10
8

b) Em duas colunas:

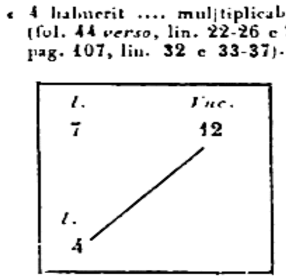
5	8
10	

5	8
10	0

Os esquemas gráficos do modo hindu foram usados de modo dominante no ensino ao longo do tempo, inclusive pelos usuários da RT atuais. Seguem esquemas gráficos de arranjo de dados que viveram nas praxeologias:

2-Liber Abacci (1202). Tarefa: ITem libra argenti ualet libras 7; et queratur quantum quis inde pro libris 4 habuerit.

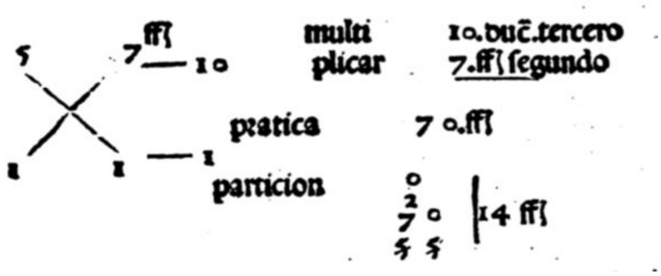
Figura 7- Esquema gráfico de Leonardo Pisano



Fonte: Liber Abacci (1857, p.107)

3-Juan Andrés (1515). Tarefa:[...] Se 5 Ducados valem ou ganham 7 ffs. 10 Ducados quanto valerá? [...] (tradução nossa)

Figura 8- Esquema gráfico de Juan Andrés



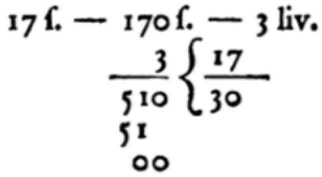
Fonte: Sumario breve de la practica de la Aritméthica

4- Wingate (1760). Tarefa: Se 4 estudantes gastam 19 libras em 3 meses, quantas libras precisam 8 estudantes em 9 meses?

Estudante	Libra	Mês
4	19	3
8	A	9

5-Enciclopédia (1765). Tarefa: Três livros são comprados por 17 francos, quantos livros podem ser comprados com 170 franco?

Figura 9- Esquema gráfico presente na Enciclopédia



Fonte: Encycolopédie, ou Dictionnarire Raisonné des Sciences [...](1765, p.21)

6-Bourdon (1849). Tarefa: Pedimos o preço de 384 kg de uma determinada mercadoria, supondo que 25 kg da mesma mercadoria custaram 650 francos.

Se 25 quilos custam 650 francos,

384 - - x

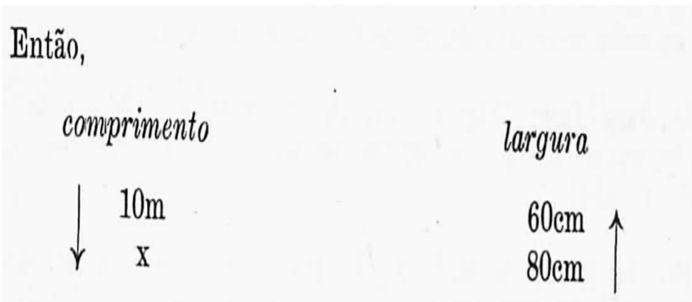
7-[Tombeck (1861) – Tilmant (1875)]. Tarefa: Com 18 kg de fio, foram confeccionados 72 metros de um tecido que tem 90 centímetros de largura. Se tivéssemos usado 24 kg de fios, e se o tecido tivesse apenas 80 centímetros de largura, qual comprimento poderia ser obtido?

x m.....................24 kg....................80 cent.

72m.....................18 kg....................90 cent.

8- Boscolo e Castrucci (1970, p.239). Tarefa: Com certa quantidade de lã fabrica-se uma peça de tecido com 10m de comprimento e 60 cm de largura. Qual seria o comprimento do tecido fabricado se a largura fosse de 80cm?

Figura 10 - Esquema gráfico de Boscolo e Castrucci



Fonte: Boscolo;Castrucci (1970)

9- Dante (2012, p.234). Tarefa: Trabalhando 8 horas por dia, 16 funcionários com a mesma capacidade de trabalho descarregam 240 caixas de um caminhão. Se trabalhassem 10 horas por dia no mesmo ritmo, quantos funcionários seriam necessários para descarregar 600 caixas?

Figura 11- Esquema gráfico de Dante

Horas por dia	Funcionários	Caixas
8	16	240
10	x	600

Fonte: Dante (2012)

A construção desses esquemas gráficos de arranjo de dados eram encaminhados por meio de regras anunciadas, por exemplo, como as seguintes:

1-Praxeologia Hindu, anunciada por Brahmagupta (628):

1º.Arranjar os dados fornecidos em duas colunas, a primeira coluna que contém os dados relativos ao *argumento*, a segunda contendo os que dizem respeito à *requisição*;
2º.Transpor os dois *frutos*;
3º.Transpor os denominadores.
4º.O produto dos termos da coluna com o maior número de termos é dividido pelo produto dos termos da coluna com o menor número de termos.

2- Praxeologia de Wingate (1760):

1º.Definir os termos expressando a condição da questão em uma linha, e em qualquer ordem.
2º.Sob cada termo condicional, fixe seu correspondente único, em outra linha.
3º.Multiplique os termos produtores de uma linha, e o termo produzido de outra linha, continuamente, e tome o resultado para Dividendo.
4º.Multiplique continuamente os termos restantes e deixe seu produto ser o Divisor.
5º.O quociente desta divisão será o termo requerido.

3-Praxeologia de Tilmant (1875):

1º.Comece por escrever as quantidades mencionadas no enunciado sobre duas linhas, de modo a fazer corresponder as quantidades de mesma natureza duas a duas, tendo o cuidado de colocar na primeira linha o desconhecido.

2º.Escrevemos que o desconhecido é igual à quantidade conhecida da mesma espécie, multiplicada pelas relações dos números correspondentes dois a dois, tomadas na ordem em que estão escritas se eles representam as quantidades variando na razão direta com o desconhecido; em ordem inversa, se eles expressam quantidades que variam em razão inversa com o desconhecido.

4- Praxeologia Atual da Regra de Três:

Nas organizações praxeológicas atuais, não são anunciadas as regras. As organizações praxeológicas são encaminhadas por meio da prática mimética, em que os alunos fazem o que viram o professor e ou livro fazer. Mas, qualquer semelhança com a regra anunciada por Tilmant (1875) parece não ser coincidência. O recorte extraído de um manual escolar Dante (2012) mostra o que afirmamos.

Figura 12- Praxeologia Atual da Regra de Três

2º) Trabalhando 8 horas por dia, 16 funcionários com a mesma capacidade de trabalho descarregam 240 caixas de um caminhão. Se trabalhassem 10 horas por dia no mesmo ritmo, quantos funcionários seriam necessários para descarregar 600 caixas?

Horas por dia	Funcionários	Caixas
8	16	240
10	x	600

- A quantidade de horas por dia e o número de funcionários são grandezas *inversamente* proporcionais (considerando o mesmo número de caixas). Precisamos, então, inverter a ordem dos termos da razão $\frac{8}{10}$, colocando $\frac{10}{8}$.
- A quantidade de caixas e o número de funcionários são grandezas *diretamente* proporcionais (considerando o mesmo número de horas por dia).

Montamos a proporção:

$$\frac{16}{x} = \underbrace{\frac{10}{8}}^{\text{razão invertida}} \cdot \frac{240}{600} \Rightarrow \frac{16}{x} = \frac{30}{60} \Rightarrow \frac{16}{x} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 32$$

Assim, seriam necessários 32 funcionários para descarregar 600 caixas em 10 horas.

Fonte: Dante (2012, p.234)

Mas, como podemos notar, em todos os casos, os esquemas gráficos funcionavam com rearranjo dos dados por meio de termos técnicos que dependiam do assunto de que tratava o problema. Esses termos são ferramentas indispensáveis para fazer funcionar a técnica.

6.5. A Regra de Três Inversa

A intenção de facilitar a aprendizagem levou os matemáticos hindus a considerarem os tipos de problemas que podiam ter suas soluções abreviadas com o emprego de suas criações didáticas, construindo novas regras derivadas para esses tipos específicos de problemas.

Uma dessas derivações que destacamos por seu caráter de generalidade é a que se emprega em um gênero de tarefas, ou seja, de problemas. É a técnica desenvolvida para um tipo específico de problemas que envolve, em geral, três ou mais grandezas, em que uma delas, não necessariamente com dados explícitos, pode ser interpretada como produto das demais.

A técnica da RT, quando empregada em problemas com três grandezas, em que uma está implícita, foi denominada pelos matemáticos hindus de Inversa da Regra. Nesse caso, a RT é empregada duas vezes em sucessão e leva a um resultado que pode ser expresso como aplicação direta da RT com a inversão dos dados conhecidos de uma grandeza.

Essa é, talvez, a mais embaraçosa criação didática da Matemática Hindu que foi, mais tarde, denominada de Regra de Três Inversa. Foi essa criação hindu que levou, mais tarde, a taxionomia da RT em *direta* e i*nversa*. É importante lembrar que a Matemática Hindu não menciona esses termos.

O embaraço a que nos referimos é que essa técnica hindu influenciou um novo modo de pensar a proporcionalidade matemática. Especificamente, os hindus teriam influenciado a criação da proporcionalidade inversa para o ensino, embora este tipo de proporcionalidade não tenha existido no mundo matemático sábio.

Essa nova forma de pensar a proporcionalidade, que introduziu a taxionomia da proporção em direta e inversa, passou a integrar, mais tarde, o discurso tecnológico matemático da RT, daí sua incontestável importância em nosso trabalho.

6.6. Os Termos Técnicos

A técnica dominante nas transposições didáticas sobre a RT com o uso ou não de esquemas gráficos de arranjo de dados, em geral, dependia de forma indispensável do conhecimento do assunto de que tratava o problema, para rearranjar os dados do esquema gráfico à aplicação da quarta proporcional que encaminha a “lei hindu” de multiplicar e dividir o produto.

O conhecimento dos assuntos de que tratavam os problemas, em geral sobre práticas sociais correntes, constituía-se em uma dificuldade a ser vencida no ensino da RT. Para superar essa dificuldade, as transposições didáticas hindus usavam uma taxionomia para as grandezas que parecia independer do assunto que o problema tratava.

Essa taxionomia, como mostramos no capítulo 2, era dada pelos termos *argumento*, *fruto* e *requisição*. Esses termos eram usados para arranjar os dados e rearranjá-los pela permuta dos *frutos*.

No entanto, essa dificuldade não foi vencida como mostram as transposições didáticas do século XIX, na Europa, por exemplo, a de Vallejo (1841) e, mesmo que, em nota de rodapé, o conhecimento do assunto de que tratava o problema é destacado pelo eminente matemático Lacroix (1839).

É importante notar que o destaque dado por Lacroix, em nota de rodapé, deve-se à sua intenção de mostrar a praxeologia da RT como uma aplicação da quarta proporcional que não depende de saberes extra matemáticos, como também fizeram anteriormente os autores árabes. Essa intenção tem sido seguida até os dias de hoje.

Em todo caso, os termos técnicos continuaram a ser usados com a finalidade de superar o desconhecimento do assunto. Nesse caminhar, foi introduzida a noção “matemática” de *proporcionalidade inversa*, decorrente da técnica hindu denominada *inversa da regra,* que levou a proporcionalidade a ser adjetivada, passando a ser denominada de *proporcionalidade direta*. Esses termos, *direta* e *inversa*, estão presentes nas praxeologias da RT até os dias de hoje.

No entanto, essas supostas noções matemáticas de *proporcionalidade direta* e *proporcionalidade inversa* também se mostraram insuficientes para vencer o desconhecimento do assunto que tratava o problema. A transposição didática de Vallejo, como mostrada no capítulo 4, alerta sobre a dificuldade de identificar a proporcionalidade direta e, principalmente, proporcionalidade inversa. Para isso, propôs os termos técnicos de *causa e efeito.*

Mas, no decurso do tempo, os termos técnicos *causa e efeito* foram eliminados. Talvez pela intenção da instituição produtora de Matemática em enclausurar as praxeologias da RT em seus diferentes discursos, como proporcionalidade, funcionais lineares, funcionais multilineares, etc. (BOSCH,1994; BOLEA, 2003; GARCIA, 2005). Essa clausura permitiria, como propõe Ávila (1986), encaminhar o fim do ensino da RT.

No entanto, em todos os casos, independentemente de tempo e lugar, o uso dos termos técnicos acaba por encaminhar uma praxeologia que não exige preocupações explícitas com o discurso matemático de proporcionalidades, mas apenas em classificá-las em direta ou inversa, em ato contínuo, para aplicar a derradeira quarta proporcional ou em equação. Isso somente é espontâneo se o assunto que trata o problema for tomado como naturalizado. A dificuldade persiste, pois essa criação didática está aquém da complexidade do assunto de que trata o problema.

6.7. O Discurso Tecnológico/Teórico Infraestrutural

Compreendemos o aspecto de hierarquizar as operações de multiplicar primeiro e depois dividir como parte do *discurso que explica ou justifica* a técnica da praxeologia da RT, com o esquema gráfico de arranjo de dados, pois esses esquemas foram construídos para contemplar a ergonomia das operações.

O fazer mecânico que os esquemas gráficos de arranjo de dados encaminhavam à ergonomia das operações parece ter levado à naturalização da técnica e parece que isso levou a pensarmos a RT como produto da cultura das práticas. No entanto, ficou evidente que há presença de pelo menos dois discursos que podem ser tomados como matemáticos.

Quando se fala em discurso justificativo de uma praxeologia matemática, em geral, fala-se na infraestrutura matemática que a explica, justifica ou a produz. Em nosso caso, observamos nos capítulos precedentes que três discursos se evidenciam nas praxeologias da RT de nosso interesse, ou seja, as que apresentam o uso de: problemas protótipos sobre situações em contextos concretos; esquema gráficos de arranjo de dados; e termos técnicos.

As praxeologias hindus da RT que parecem ter sido as primeiras com influência para o mundo ocidental, primavam pelo caráter prático, como um saber prático. Nesse caso, não se pode afirmar pela observação da práxis qual o discurso matemático que a justifica, somente supô-lo.

No entanto, conforme observamos no capítulo 2, é anunciado nas obras consultadas que a técnica é derivada da quarta proporcional, mas também encontramos referência à técnica como produto da cultura de práticas sociais correntes em diferentes sociedades.

As praxeologias de domínio islâmico, por outro lado, não referem à RT, mas tratam dos mesmos problemas protótipos, explicitamente, em suas transposições didáticas por meio da aplicação da Teoria das Proporções, demonstrados, inclusive por meio de problemas de números puros sem referência a qualquer situação sobre contextos concretos. No entanto, foi encontrado nas obras pesquisadas que os islâmicos, quando frente às situações desses problemas protótipos, também recorriam ao procedimento prático dos matemáticos hindus.

A transposição didática islâmica sobre a Regra de Três como aplicação objetiva das proporções geométricas têm implicações sobre novas transposições didáticas no caminhar do tempo; revela, com a clareza da quarta proporcional, o porquê do esquema gráfico hindu de arranjo de dados consiste em construir as relações entre os dados de uma mesma grandeza, pois isso é exigido pela noção matemática de proporção e, portanto, o modo adequado à quarta proporcional que garante aplicar corretamente a ergonomia final de multiplicar primeiro e dividir depois.

. No entanto, essa praxeologia islâmica de enfrentar situações de contextos específicos de RT hindu objetivamente como aplicação da quarta proporcional que leva ao cuidado de tomar relações entre os dados de uma mesma grandeza para atender à proporção geométrica não se constituiu em unanimidade na Europa.

Assim, as praxeologias da Regra de Três no mundo europeu sofreram diferentes transposições didáticas. As praxeologias podiam apresentar discursos assentados sobre a cultura do assunto de que tratava o problema, como um saber prático, como aplicação da quarta proporcional e ainda com um discurso com base na redução à unidade.

No século XVIII, por exemplo, a obra de Wingate (1760), bem como a enciclopédia (1765), deixam claro a presença da Regra de Três ao estilo hindu. No século XIX, com ligeiras modificações, observamos nas obras de Vallejo (1841) e Lacroix (1839) praxeologias no sentido árabe e, por outro lado, Reynaud (1810) e Tombeck (1861,1873), por exemplo, recorrem à redução à unidade.

É importante destacar que a redução à unidade em diferentes pesquisas no âmbito da TAD, por exemplo, (BOSCH, 1994; COMIN, 2000; BOLEA,2003; GARCIA,2005), é tomada como uma técnica de origem cultural e de natureza discursiva para problemas de proporcionalidade, independentemente da RT.

Esse entendimento é tomado por essas pesquisas, por analisarem a RT à luz de modelos epistemológicos fundados em teorias matemáticas e, nesse caso, a redução à unidade não estaria inserida.

Em nosso caso, é bom lembrar que nos interessa construir um possível percurso sócio histórico das praxeologias da RT que apresentem as características de tarefas compostas de problemas protótipos sobre situações em contextos concretos e técnica com uso explícito de esquemas gráficos e com uso de termos técnicos, em particular, *direta* e *inversa*. E esse é o caso que a reforma analítica da RT que Tilmant (1875) encaminha.

O discurso analítico da redução à unidade dispensava a Teoria das Proporções, sendo orientado e orientando o raciocínio com auxílio de esquemas gráficos de arranjo de dados. Era tomado como intuitivo que seguia o modo da Aritmética Prática e, portanto, exigia raciocínios construídos na análise da situação que impediam sua mecanicidade.

No entanto, como aconteceu com a proporcionalidade, o discurso da redução à unidade não resistiu à tentação da generalidade perseguida pelo fazer matemático, por exemplo, a regra geral anunciada por Tombeck (1861), e encaminhou uma praxeologia que, em termos gerais, pode ser vista como ratificação da praxeologia hindu, com arranjo de dados para atender a uma ou mais quarta proporcional, deixando os cálculos para o final no estilo da “lei hindu”.

A praxeologia da Regra de Três com esses aspectos levava a uma suposta mecanicidade que incomodava alguns autores. Mas, a suposta não mecanicidade da redução à unidade conquistou seguidores que as preferiam em lugar das praxeologias com a tecnologia da proporção.

Entre os seguidores do matemático Reynaud, encontramos Tilmant (1875), como o de maior interesse, por considerar objetivamente como indispensáveis para as praxeologias da Regra de Três os seguintes aspectos, que são nossos objetos de investigação: o esquema gráfico de arranjo de dados e com ele imbricado, o enunciado do problema e, de modo naturalizado, os termos técnicos de *direta* e *inversa*.

Em definitivo, se assim podemos dizer, consolida-se a praxeologia atual da RT, pois Tilmant (1875) estabelece um discurso que justifica a técnica a partir de um modo de pensar usado para produzir Tecnologia/Teorias Matemáticas.

6.8. Construindo Respostas aos Questionamentos

A resposta ao questionamento Q_1:*O que explica, justifica ou produz a praxeologia com problemas protótipos e técnica com uso de esquemas gráficos de arranjo de dados e termos técnicos usados na escola?* pode agora ser esboçada.

Começamos observando que todas as praxeologias das Regras de Três anunciadas que recorrem ao esquema gráfico de arranjo de dados e aos termos técnicos como orientadores do rearranjo dos dados para encaminhar as operações que solucionam o problema seguem, de alguma maneira, ratificando a técnica hindu.

Os enunciados dos problemas são preocupações não objetivamente consideradas em todos os casos estudados que, à moda dos autores islâmicos, seguiam buscando evidenciar a RT como uma aplicação direta da Matemática e, portanto, que independia do assunto de que tratava o problema.

No entanto, em diferentes obras, de tempos e lugares distintos, são encontrados em meio de considerações sobre o emprego da RT a indicação da dificuldade que acarreta ao uso da RT o desconhecimento do assunto que trata o problema, como bem exemplifica a obra de Lacroix (1839), quando deixa escapar em nota de rodapé, que pode até passar despercebida, a observação de que as noções de *direta* ou *inversa* depende do assunto que trata o problema.

Essa dificuldade anunciada desde as obras da matemática hindu até meados do século XIX, talvez tenha sido a razão para o fazer algorítmico, com suposta facilidade de análise alcançada por meio do uso de termos técnicos, que podiam ser de natureza cultural, que permitiria identificar os dados corretamente para o emprego da regra, independentemente do assunto que era tratado pelo problema.

Essa nossa compreensão é ratificada, quando observamos a crítica presente a obra de Vallejo (1841) sobre a praxeologia proposta pelo matemático Lacroix (1839), por exemplo, afirmando que essa praxeologia não era para os iniciantes, pois assumiam como aprendido o que um iniciante ainda havia de aprender para solucionar os problemas de RT. Precisamente, Vallejo referia-se à dificuldade em determinar se a variação de uma grandeza, em relação à grandeza de quantidade desconhecida, era direta ou inversa. Essa dificuldade podia levar a uma inadequada quarta proporcional e isso seria desastroso para a resolução do problema.

Sem qualquer referência à Matemática hindu, uma constante que parecia ser uma práxis dos autores europeus, Vallejo (1841) propõe o uso termos técnicos de *causa e efeito* que podiam também ser traduzidos como *produtor* e *produzido*, como técnica didática para identificar quando uma relação era direta ou inversa.

No entanto, no restante, seguiu os autores anteriores e seus contemporâneos, estabelecendo uma regra geral, em seu caso, introduzindo os termos técnicos de *causa* e *efeito*. Sua regra, podemos assim dizer, corporifica-se na regra geral da Matemática Hindu, preservando, portanto, a “lei hindu” que incomodava pela mecanicidade.

Nesse sentido, em meados do século dezoito e dezenove, o ensino das praxeologias da RT adquire outros olhares para além do saber mecanicista que a quarta proporcional estimulava. Afinal, a quarta proporcional está previamente estabelecida como conhecida para o problema. Daí a preocupação única de escrevê-la corretamente, mesmo de modo independente de qualquer raciocínio matemático.

Novamente, agora sem qualquer referência às praxeologias Gregas, Egípcias e dos Babilônicos, inclusive escritos de ábacos italianos, por exemplo, Reynaud (1810,1834) anuncia a redução à unidade como um novo discurso para os problemas de RT, mas do tipo analítico como os usados pelos matemáticos em seus estudos mais avançados.

As resoluções de problemas, inclusive os de Regra de Três, demandavam métodos analíticos, pois esses partem do desconhecido para, por análise, chegar ao conhecido e, como em retrospectiva, encontrar o pedido do problema. Esse é o fazer das praxeologias apresentadas por Reynaud (1810;1832) e que Tilmant (1875) toma como referência e as fundamenta.

Segundo Tilmant, a praxeologia de Reynaud ratificaria a intenção didática de facilitar a solução do problema com a vantagem de exigir a análise. Mantinha o esquema gráfico de arranjo de dados, mas como produto de procedimentos metodológicos da atividade da Matemática Acadêmica.

Para Tilmant, o esquema gráfico encaminhava uma disposição de dados que facilita o raciocínio analítico nos seguintes aspectos:

1- Encaminha o aluno primeiro para encontrar a questão ou pergunta;

2- Facilita a procura dos números (dados) necessários, dispondo os dados por grandezas, um embaixo do outro, que formam as relações de grandezas de mesma espécie que encaminharão a solução do problema.

Segundo Tilmant, o esquema gráfico de arranjos de dados eliminava os riscos de tomar números que não estão ou não são necessários, do mesmo modo que os riscos de não tomar números presentes no enunciado que são necessários; a falta de atenção sobre esse aspecto pode levar à perda de tempo com cálculos inúteis, o que certamente pode acontecer, pois os números necessários para a solução de um problema podem não estar diretamente ou explicitamente dados no enunciado.

Essa linha de pensamento exigia uma mudança na estrutura para o esquema gráfico de modo a atender ao procedimento do método analítico que sempre começa pelo desconhecido para chegar ao conhecido. Precisamente, a incógnita não deveria mais ser escrita na última posição da segunda linha imposto pelo discurso da proporcionalidade.

No novo esquema gráfico de arranjo de dados, assume o cuidado de pôr a questão ou pergunta em primeiro lugar, ou seja, a incógnita deve aparecer obrigatoriamente na primeira linha do esquema. Os dados das condições assumem, então, a segunda linha.

Essa estrutura permitiria aplicar a redução à unidade pela análise da situação de que trata o problema com a ergonomia prática de iniciar da segunda linha do esquema gráfico, de modo a encaminhar a primeira linha desse esquema.

Essa nova estrutura do esquema gráfico de arranjo de dados, no entanto, expõe outra dificuldade dos iniciantes; a de encontrar a questão ou pergunta no enunciado do problema. Assim, para facilitar aos iniciantes o emprego do novo esquema gráfico, Tilmant propõe que os enunciados dos problemas deviam iniciar com a questão ou pergunta e em seguida com as condições ou hipóteses.

Portanto, os problemas protótipos com esse tipo de enunciado podem ser vistos como criações didáticas para o ensino das praxeologias de Tilmant-Reynaud aos iniciantes.

Tilmant (1875) alerta que sua praxeologia também atendia ao discurso da proporção com a vantagem de eliminar os saberes protomatemáticos, como o de fazer a incógnita assumir a última posição na quarta proporcional. Esse saber protomatemático tornava complexa a atividade de escrever a quarta proporcional em certas situações, em particular quando a relação era inversa.

Mas, a praxeologia de Tilmant, como aconteceu com outros da Regra de Três, independentemente de usar a redução à unidade ou por relações, chegou a uma regra geral que pode ser vista como as formulações gerais anteriores da RT, em particular, como a praxeologia hindu que, como tal, contava com os seguintes aspectos que facilitavam a mecanização:

1- Os problemas protótipos com enunciados sobre práticas sociais com matemática;
2- O uso indispensável dos esquemas gráficos de arranjo de dados;
3- O uso de termos técnicos para orientar o rearranjo dos dados para a construção das adequadas relações que solucionam o problema.

Esses três aspectos são os mesmos presentes nas praxeologias anteriores, de diferentes tempos em diferentes lugares e que constituem a praxeologia dominante sobre a RT em nossas escolas.

Assim, podemos dizer que se consolida a praxeologia atual da RT, pois, como dissemos anteriormente, Tilmant (1875) estabelece um discurso que justifica a técnica, a partir de um modo de pensar usado para produzir Tecnologia/Teorias Matemáticas que não depende da tecnologia, seja ela a quarta proporcional ou por relação.

É importante notar, então, que o discurso que produz a praxeologia de Tilmant pode ser visto como um discurso objetivamente composto de uma parte superestrutural, que é o Método Analítico Matemático, e outra parte infraestrutural, que é a tecnologia recorrida; quarta proporcional ou redução à unidade.

As possíveis dificuldades que podiam surgir pelo problema seriam eliminadas pelos enunciados protótipos e com isso a praxeologia de Tilmant podia ser tomada como uma praxeologia matemática, como se assume nos dias de hoje nas escolas brasileiras.

O questionamento Q_2: *Quais as limitações e alcance dessa praxeologia?* segue da compreensão que construímos até aqui sobre a praxeologia ora investigada.

Observamos que a técnica de Tilmant apenas aparenta se reduzir, agora, a simples aplicação do discurso tecnológico/teórico legitimado pela instituição Matemática, pois, um olhar cuidadoso não deixa escapar que a dificuldade do assunto de que trata o problema é, de algum modo, considerado por Tilmant, quando destaca a dificuldade dos alunos em encontrar a questão ou pergunta do problema.

Além disso, o uso da redução à unidade como técnica se mostra, de todo modo, como prolixa o suficiente para evidenciar a dificuldade do desconhecimento do assunto que trata o problema.

É nesse sentido, da necessidade do conhecimento do assunto que trata o problema, que observamos essa limitação da técnica até hoje presente nos livros escolares. Sem conhecimento do assunto de que trata o problema a técnica não é encaminhada.

Por outro lado, nos capítulos precedentes, mostramos o papel de pensamento lógico da RT para determinar a validade de solução de problemas por outras técnicas, como também de tecnologia para as variantes da RT, como a RT composta, inclusive a RT inversa, operações com frações e, não menos importante, como técnica-tecnologia de modelização matemática, como demonstrou Timant (1875) e, ainda seguido em livros didáticos atuais, por exemplo, por Feltre (2004), que modela fenêmenos químicos com o uso da RT, do mesmo modo realizado por Tilmant (1875).

Portanto, parece que as praxeologias da RT com esquemas gráficos e termos técnicos apresentam a vantagem de tornar possíveis outras *praxeologias com matemática*. Em particular, o seu ensino pode criar condições para o estudo de objetos matemáticos que podem ser providos por meio da modelização de situações de contextos concretos.

Além disso, um estudo de procedimentos usados como o da redução à unidade, como fez Tilmant, pode encaminhar modelos epistemológicos de referência (MER) para a construção de Organizações Matemáticas sobre funções reais, inclusive de suas variações, em um dado dominio real: funções reais de uma variável real, como a função linear, afim e recíproca, que permitem encaminhar as funções logaritimicas e exponenciais; a introdução as funções reais de várias variáveis reais.

Essa potencialidade das praxeologias da RT é embaçada nas pesquisas que envolvem a RT no âmbito da TAD por assumirem a priori um olhar sobre o discurso matemático que impede olhares sobre a lógica da prática.

Esse olhar restrito estranha relações de grandezas, em particular, por não encontrar sentido no produto ou divisão de grandezas, principalmente quando são distintas. Nesse casos, o sentido somente é encontado pela lógica prática, dos saberes práticos a que se refere Chevallard (2005), referindo-se aBourdieu (1980).

No entanto, muito da praxeologia matemática produzida ainda hoje se alimenta das lógicas práticas do mundo concreto, como nas engenharias, por exemplo, que produzem métodos matemáticos, para enfrentar situações a partir de modelos matemáticos, que ainda não contam com discursos matemáticos disponíveis que assegurem que a solução encontrada é solução do modelo; a validação se dá pela instituição Engenharia pela conveniência e relevância para a atividade da engenharia (Ver CASTELA; ROMO VÁZQUEZ, 2011).

As pesquisas que envolvem a Regra de Três, sob a luz da TAD não tratam propriamente das praxeologias da RT e de suas potencialidades para o desenvolvimento de novas praxeologias com outros objetos matemáticos. Em geral, tratam do estudo da proporcionalidade e, desse modo, limitam o estudo das praxeologias da RT como manifestação cultural das práxis da proporção e, como tal, limitadas às organizações clássicas, inclusive não reconhecendo e rejeitando as praxeologias da RT com base na redução à unidade (BOSCH, 1994; BOLEA, 2003; GARCÍA, 2005).

Essas pesquisas supõem que os alunos iniciantes já encontraram o que eles ainda vão encontrar, que são as teorias que justificam suas práxis e que lhes proveem maior alcance técnico-tecnológico. Com isso, ignoram as praxeologias que vivem nas escolas, sobretudo, suas potencialidades como requisito de estudos mais avançados da Matemática, inclusive de outras teorias como das funções multilineares, por exemplo.

A função didática da Regra Três como infraestrutura didática-matemática para estudos mais avançados, como ja destacara Lacroix (1839), é ignorada ou declarada como limitada pelas pesquisas citadas anteriormente, pelo estreito alcance da técnica/tecnologia que suporta sua práxis.

No entanto, como já apontamos, facilmente se observa que as praxeologias da Regra de Três se constituem como técnica/tecnologia de modelização matemática com largo alcance para o ensino de iniciantes como requisito para o estudo de relações funcionais de diferentes tipos, lineares e não lineares, sem depender a priori de tecnologia/teoria que eles poderão ou não encontrar em seus estudos mais avançados em outras posições das instituições escolares.

É preciso ter em conta que caminhamos na escola ao encontro das praxeologias que nos levarão ao encontro do Saber que pode justificar essas praxeologias e não necessáriamente ao contrário.

Essa compreensão esboçada até aqui pode nos fazer compreender que a rejeição dos matemáticos parece residir no fato de que, apesar do vertiginoso desenvolvimento das Teorias Matemáticas, não encontram uma Teoria Matemática que consiga enclausurar as praxeologias da Regra de Três. A necessidade do conhecimento do assunto de que trata o problema não pode ser eliminada pelo fazer matemático.

Há que se destacar a necessidade de estudo da situação que trata o problema para permitir o alcance da técnica, bem como destacar a técnica como condição para a produção de novos objetos matemáticos escolares.

O terceiro questionamento Q_3:*o que faz os professores realizarem essa praxeologia de modo invariante?*

A limitação e o alcance das técnicas postas aqui, por sua vez, sempre ignoradas no ensino da Matemática Escolar, podem nos encaminhar para a resposta ao terceiro e último questionamento considerado.

Lembremos que nas praxeologias sobre a RT, aqui consideradas, os enunciados protótipos, os termos técnicos e o esquema gráfico estão imbricados de modo a criar condição que supostamente elimina as possíveis dificuldades que podem ser encontradas; encontrar a questão ou pergunta e verificar se a relação é direta ou inversa.

Uma vez ignoradas essas dificuldades, como fez Tilmant (1875), quando concentra suas preocupações sobre os métodos usados em atividade da Matemática Acadêmica como superestrutura, podemos dizer que as praxeologia da RT são plenamente automatizadas e seguem a ordem da “lei hindu”.

Essa característica, de suposta independencia dos enunciados do problema, encaminha outras funções para as praxeologias da RT no ensino que extrapolam a resolução de problemas protótipos sobre situações em contextos concretos.

Mas, por outro lado, a percepção didática (CHEVALLARD,2005) adquirida no enfrentamento de problemas protótipos sobre contextos concretos estudados como tarefas da RT, leva-o a engendrar da técnica dos esquemas gráficos de arranjo de dados. Esse engendrar da técnica frente a problemas protótipos como ato espontâneo leva-nos a supor a praxeologia da RT como portadora de *habitus* que em dialética com a situação, engendra a técnica com esquemas graficos.

O *habitus* incorporado na escola, pela escola, no enfrentamento de situações prototípicas. Uma vez identificada a situação, a ação da praxeologia, ou seja, a técnica é realizada. Tudo funciona como um saber prático.

Nesse sentido, a praxeologia da RT, cuja tarefa consiste de problemas sobre situações em contextos concretos não está enclausurada pela matemática, pois o discurso da matemática não está exclusivamente em jogo.

De outro modo, observamos que as praxeologias da RT se caracterizam como atividades regradas tornadas regra que exigem situações para suas realizações, em geral, conformadas por situações prototípicas, ou interpretadas como tais, sobre contextos concretos específicos.

Não temos dúvidas que essa característica, de saber prático, dá um caráter de desafio aos problemas de RT e com isso se apresenta ao longo do tempo como um objeto de ensino sempre novo.

De outro modo, postulamos que no decurso do tempo as praxeologias hindus em seu fazer mecânico induziram um *habitus* da instituição Matemática Escolar, no sentido dado por Bourdieu (1977) para o sistema duradouro de disposições transponíveis que funcionam a cada momento, integrando a experiência passada, como uma matriz de percepções, apreciações e ações, para tornar possível a realização de uma prática, em particular, para fazer viver as transposições didáticas interinstitucionais ao longo do tempo.

A invisibilidade desse *habitus* que se manifesta diante de situações prototípicas, por criações didáticas, alimentam a crença que as dificuldades das praxeologias da RT se encontram nos discursos matemáticos. Assim, as dificuldades encaminhadas pelo assunto de que trata o problema são atribuídas à falta de conhecimento matemático, mais precisamente, da habilidade de identificar se a relação entre grandezas é direta ou inversa.

As Organizações Matemáticas primam por encaminhar tarefas que, em tese, habilitam o aluno a fazer essa identificação. No entanto, os enunciados dos problemas não encaminham dados que permitam essa identificação, evidenciando que essa decisão depende do assunto de que trata o problema enfrentado e esse nem sempre é conhecido pelo aluno.

Compreendemos que a enclasura matemática da praxeologia da Regra de Três poderia levar à sua morte, pois suas praxeologias não seriam alcançadas pelo discurso matemático.

Essa dependencia do assunto de que trata o problema fora notada pelos matemáticos hindus no início do ensino das praxeologias da RT, que de forma dissimulada encaminhava os tipos de tarefas ou problemas por tipos de práticas sociais, como os problemas mercantis mais gerais até os problemas com especificidades, como o problema da troca de mercadorias, da herança e de operações financeiras.

Cada tipo de tarefa tinha suas especificidades que eram exploradas, a partir do conhecimento do assunto, para permitir indicar uma grandeza envolvida por um termo técnico que se tornava indispensável para encaminhar as operações com os dados necessários para a solução do problema.

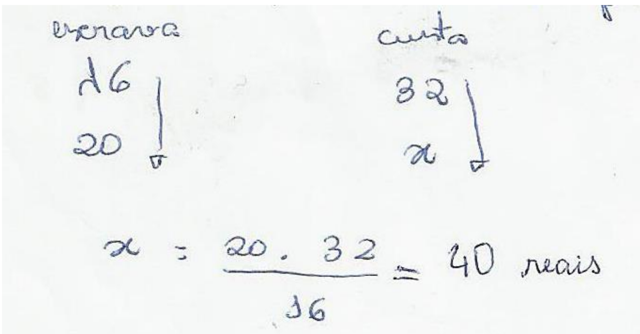
Mas, apesar da clara indicação da necessidade do conhecimento do assunto de que tratava o problema, esse conhecimento foi tomado mais tarde pelos islâmicos como saber transparente, até desnecessário, no ensino das praxeologias ditas de proporcionalidade, embora a RT estivesse presente.

Esse ignorar do assunto de que trata o problema foi seguido ao longo do tempo por diferentes transposições didáticas, embora se mostrasse inevitável presente, mesmo em Organizações Matemáticas formais, como fez Lacroix no século XIX, acrescentando-a em nota de rodapé para impedir o formalismo matemático usado.

A decisão sobre uma relação entre grandezas depende da lógica prática, que está subordinada à cultura da atividade que demanda essa prática, em um dado lugar e em um dado tempo, como ilustra o exemplo a seguir: “Se uma escrava, de 16 anos de idade, custa 32 *nishcas*, quanto custará uma de 20?”[21] (GÓMEZ, 2006).

A resposta dada por Gómez é 25+12/20 *nishcas,* que somente é obtida se a relação for tomada como inversa. No entanto, quando esse problema foi enfrentado por um grupo de professores que participavam de uma atividade de formação que envolvia a resolução de problemas, entre eles, de Regra de Três, quando analisaram a relação entre as grandezas se direta ou inversa, a decisão foi unânime: a relação é direta. A resolução seguinte apresentada mostra essa decisão.

Figura 13- Resolução apresentada pelos professores



Fonte: Do autor

Para melhor compreendermos a resolução apresentada pelos professores, é necessário considerar o contexto que se insere essa situação e nesse sentido é oportuno considerar o que aponta Pérez (1949) sobre o problema V de Bhaskara da coleção Delbus, cujo enunciado é similar ao problema de Gómez (2006).

Perez (1949) afirma que o enunciado do problema mostra a imaginação e fantasia do espírito oriental unidas, expondo condições que estariam em desacordo

[21] “Si una esclava, de 16 años de edad, cuesta 32 *nishcas*, ¿cuánto costará una vieja de 20?” (Lilavati, s. XII).

com os conceitos morais e sociais do mundo ocidental. Esse desacordo torna a questão difícil de ser resolvida por um europeu, que provavelmente perguntará se o valor pecuniário de uma mulher está na razão direta ou inversa à sua idade (PÉREZ, 1949, p.83, tradução nossa)[22].

Há aqui a evidência da relatividade da racionalidade, nesse caso, dependente do contexto cultural que age para conformar situação em acordo com esse contexto. No contexto cultural dos professores, a relação é direta, enquanto no contexto cultural orienta,l a relação é inversa. Embora a regra seja a mesma, os seus usos podem ser distintos, ou pode até ser impossível desenvolvê-la em uma cultura, em determinado tempo e lugar.

No caso dos professores citados acima, não foi explicitado o modo de pensar oriental em sua lógica prática de venda de escravos: a de que uma escrava atinge valor máximo aos 16 anos e ainda como se justificava essa idade de 16 anos como o de valor máximo. Tais condições poderiam levar a outros questionamentos e a outras respostas que poderiam encaminhar inclusive a não aceitação da prática de venda de escravos.

A ausência da racionalidade específica dessa prática não impede o uso da RT, mas não leva à resposta com sentido daquele campo de práticas institucionalizadas. Quando uma prática está em jogo, ela atende a uma racionalidade prática que subordina o uso das práticas que a fazem funcionar do jeito esperado.

Mas, ao longo da história do ensino da Regra de Três, a sua praxeologia com problemas protótipos e esquemas gráficos e termos técnicos, é utilizada como um saber prático, que se põe em funcionamento, que se aprende, se enriquece, sem ser entretato, utilizado, ensinado ou produzido (CHEVALLARD, 2005, p.154), e, talvez por isso, sempre questionada pela instituição Matemática.

Portanto, as praxeologias da RT como *praxeologias com matemática* são engendradas por saberes, inclusive saberes práticos como *habitus* que emergem frente a situações específicas ou do assunto de que trata o problema. Esses saberes coordenam as práxis matemáticas e não matemáticas, em sentido amplo, de modo a dar funcionalidades à essas práxis e estruturtando a organização praxeológica que responderá de modo adequado à instuição a situação enfrentada.

---

[22] "Question difficile à résoudre pour um Européen qui demandera sans doute si la valeur pécuniare d'une fille est en raison directe ou indirecte de son âge" (PÉREZ,1949, p.83).

Especificamente, a estrutura das praxeologias da Regra de Três que articulam o esquema gráfico, distribuindo os dados por grandeza, que, em articulação com os termos técnicos, rearranjam os dados de modo adequado a obter diretamente a derradeira equação ou quarta proporcional que responderá ao problema é fruto da intenção didática de facilitar o desenvolvimento da técnica, supostamente eliminando ou tornando invisível a dificuldade decorrente do assunto que trata o problema.

Há portanto, um técnica didática, marcada pelas criações didáticas mencionadas, que agem estruturando a praxeologia da RT. Essa técnica didática não é uma técnica matemática e tampouco uma técnica relacionada a tecnologias/teorias que dizem respeito ao assunto de que trata o problema. Essa estrutura permitiria, inclusive, ao menos dotados de praxeologias matemáticas, o emprego "correto" das regras da RT.

Nesse sentido, a praxeologia da RT é uma organização praxeológica complexa, que é estruturada por técnicas-tecnológicas didáticas, articulando uma infraestrutura matemática, entendida como técnicas e tecnologias matemáticas, uma infraestrutura do assunto de que trata o problema, em sentido amplo, como os saberes teóricos e procedimentais, inclusive os que denominamos de *protosaberes* e *parasaberes*[23], compreendidos e incluindo-os no mesmo sentido das noções de saberes protomatemáticos e paramatemáticos.

Essa complexidade da praxeologia da RT não seria de todo notada pela naturalização da práxis no ensino como um saber prático pré-construído (CHEVALLARD, 2005), que é caracterizado por não ser algoritimizável e por não tolerar a descontextualização.

Podemos pensar as praxeologias da RT como práticas sociais específicas que se manisfestam em situações específicas, como produto do *habitus* que somente se manifesta em situação prática e que conformam o campo de práticas de grupos sociais específicos que realizam essas práticas, como ressalta Bourdieu:

[23] Para detalhamento, ver-se capitulo "objetos de saber" y otros objetos (CHEVALLARD, 2005, p.57).

> [...] “sistemas de disposições duráveis, estruturas estruturadas pré-dispostas a funcionar como estruturas estruturantes, isto é, como princípio de geração e de estruturação de práticas e de representações [...]”[24] (BOURDIEU, 1974, p.175, apud CHEVALLARD, 1984, p.73, tradução nossa).

Entre os enunciados mais antigos da Regra de Três, que evidenciam suas formas primitivas que deixam clara a dependência do contexto cultural e, portanto, de seus *habitus*, encontra-se a formulação de Āryabhata I (499), que é assim apresentada por Høyrup (2007): “nas três grandezas, depois de se ter multiplicado a grandeza *phala* com a grandeza *icchā*, o resultado intermédiário alcançado é dividido pelo *pramāna*”[25] (HØYRUP, 2007, p.5, tradução nossa).

Embora a prescrição da Regra de Três seja uma abstração, que, de algum modo, poderia afastá-la de um saber prático, a demanda por uma situação se põe como indispensável, inclusive, fazendo confundí-la com um tipo de questão ou problema. Este é um padrão que se mantém até os dias atuais de forma indisfarçável, como faz Lima (1986) quando trata da RT, referindo aos problemas da regra; “uma vez entendido com bastante clareza este conceito, todos os problemas relativos à regra de três e proporções se resolvem naturalmente” (LIMA, 1986, p.21).

O longo extrato de texto a seguir nos serve de apoio para evidenciar a associação inevitável da Regra de Três com tipos de problemas ao longo do tempo em suas variações segundo os diferentes povos que adotaram essa práxis:

> Os tratados de Abbacus italianos introduzem a regra de ambos os modos, como faz Jacopo (moeda contra a moeda) ou como fazem quase todos os escritos em árabe, moeda contra mercadoria (muitos deles tratam moeda contra moeda separadamente). A este respeito, todos os escritos Ibero-Provençal que eu conheço são diferentes, a introdução da regra se dá por meio de problemas de números contrafactuais dos tipos “Se três é 4, o que seria 5?” E “se 4 1/2 valem 7 2 / 3, o que são 13 3/4 ?”. [8] Por conseguinte, é de algum interesse que o castelhano *Libro de arismética que es dicho algarismo* [9] (de 1393, mas cópia de um tratado anterior) apresente a regra (por meio do tipo de problema) de uma maneira diferente: “Se tanto vale tanto, quanto valerá tanto?”. Dois escritos posteriores do tipo Abbacus da área Ibero-Provençal, *Summa de l'art d'aritmética* de 1482 [ed. Malet 1998: 163], de Francesc Santcliment, e *Compendion de l'abaco de 1492* [eds Lafont & Tournerie 1967: 101-103], de Francés Pellos, tem o título “regra de três” (“regla de tres” respectivamente “regula de tres

[24] <<systèmes de dispositions durables, structures structurées prédisposées à fonctionner comme structures structurantes, c'est-à-dire en tant que principe de génération et de structuration de pratiques et de représentations (...) >> (Bourdieu 1974, p. 175) apud Chevallard (1984).

[25] in the three magnitudes, after one has multiplied the magnitude *phala* with the magnitude *icchā*, the intermediate outcome is divided by the pramāna (HØYRUP, 2007, p.5).

> Causas”). Ambos, no entanto, referem depois ao tipo de pergunta “Se tanto vale tanto, quanto esse tanto valerá?” - Santcliment explica que esta é a forma de como é falado *en nostre vulgar*, “em nosso vernáculo”. O fraseado Castelhano é, portanto, representativo de toda a região Ibero-Provençal. Exatamente a mesma frase é usada por al-Qurašī [ed., Trad. Rebstock 2001: 64] para descrever o tipo de problemas a serem tratados pela regra de três, antes que ele se refira à regra (na base euclidiana). É provável que seja significativo que o primeiro exemplo de al-Qurašī (após a referência euclidiana) está em números puros (embora apenas como números em proporção) [10] Possivelmente, há também um link para a maneira persa (pré-islâmica?): de acordo com a A.S. Saidan (Mahdi Abdeljaouad, comunicação pessoal), al-Baghdadi se refere ao modo de ganhos e perdas serem calculados pelas expressões persas *dah yazidah*, “dez (é) onze”, e *dah diyazidah*, “dez (é) doze”[26] (HØYRUP, 2007, pp.3-4, tradução nossa).

O extrato considera os achados históricos de diferentes povos que apresentam enunciados da Regra de Três. Esses enunciados são abstrações das práticas que se realizavam em meio cultural de campos de práticas de mercadores e artesões, cuja necessidade de formação, por exemplo, demandou textos do tipo citados, como os livros de ábacos italianos, a serem usados para o ensino dessas profissões (DEL POTRO; DE LA LLAVE, 2004; DEL POTRO, 2011).

Os termos técnicos que encaminham ações decisórias revelam da praxeologia da RT o seu caráter de uma práxis desafiadora e portanto não algorítmica. Ao longo do tempo, esse caráter não algorítmico da RT foi e continua sendo embaçado pelo modo naturalizado que são tomados o uso dos termos técnicos como *similar* e *não similar*, *fruto*, *produtor* e *produzido*, *causa* e *efeito*, *direta* e *inversa*, etc.

[26] The Italian abbacus treatises introduce the rule, either as does Jacopo (coin against coin) or as do almost all Arabic writings, coin against commodity (many of them treat coin against coin separately). In this respect, all Ibero-Provençal writings I know of are different, introducing the rule by means of counterfactual pure-number problems of the types “If 3 were 4, what would 5 be?” and “if 41 / 2 are worth 72 / 3, what are 133 / 4 worth?”.[8] It is therefore of some interest that the Castilian Libro de arismética que es dicho alguarismo[9] (from 1393, but a copy of an earlier treatise) presents the rule (by way of the problem type) in a different way, “If so much is worth so much, how much is so much worth?”. Two later abbacus-type writings from the Ibero-Provençal area, Francesc Santcliment's Summa de l'art d'aritmética from 1482 [ed. Malet 1998: 163] and Francés Pellos's Compendion de l'abaco from 1492 [eds Lafont & Tournerie 1967: 101–103], have the heading “rule of three” (“regla de tres” respectively “regula de tres causas”). Both, however, refer afterwards to the question type “If so much is worth so much, how much is so much worth?” – Santcliment explaining that this is how it is spoken of en nostre vulgar, “in our vernacular”. The Castilian phrasing is thus representative of the whole Ibero-Provençal region. Exactly the same phrase is used by al-Qurašī [ed., trans. Rebstock 2001: 64] to describe the kind of problems to be dealt with by the rule of three before he refers to the rule (on Euclidean base). It is likely to be significant that al-Qurašī's first example (after the Euclidean reference) is in purê numbers (though only as numbers in proportion).[10] Possibly, there is also a link to Persian (preIslamic?) ways: according to A. S. Saidan (Mahdi Abdeljaouad, personal communication), al Baghdādī refers to the way profit and loss are calculated by the Persian expressions dah yazidah, “ten (is) eleven”, and dah diyazidah, “ten (is) twelve”.[11] (HØYRUP, 2007, pp.3-4).

Esses termos técnicos são tomados de modo naturalizados como termos matemáticos, sem questionamentos, como se fosse possível verificar a proporcionalidade em jogo em um dado problema. Mas, induz aceitar a absurda noção de uma proporcionalidade inversa quando o que se está a fazer é adequar a situação ao modelo da quarta proporcional invertendo a relação.

Esse caráter de saber prático como um saber pré-construído das praxeologia da RT talvez decorra da distância entre o saber sobre a prática e a prática em si nunca esteja inteiramente abolida (CHEVALLARD,2005), que, nesse caso, é evidenciado pelo fato de diferentes teorias matemáticas serem recorridas para construir compreensões das praxeologias da Regra de Três não serem suficientes para que seja enclausurada como uma obra unicamente da Matemática.

Essas caracteristicas de saber pré-construído não impedem de que se tome a Regra de Três em sua forma prática para tornar possível o seu funcionamento em outras práxis. Talvez por isso permita ser tomada no ensino de modo que pareça enclausurada a uma suposta racionalidade pura da Matemática e, com isso, ignore os outros saberes que fazem acontecer suas práxis.

Mas, reafirmamos, o ensino da Regra de Três, mesmo que enclausurada como praxeologia matemática, exige os *habitus*, como destaca Bourdieu (1989), quando se manifesta sobre o ensino de uma prática:

> O ensino de um oficio ou, de uma "arte" entendido como "prática pura sem teoria", exige uma pedagogia que não é de forma alguma a que convém ao ensino dos saberes. Como se vê bem nas sociedades sem escrita e sem escola – mas também é verdadeiro quanto ao que se ensina nas sociedades com escola e nas próprias escolas – numerosos modo de pensamentos e de ação – e muitas vezes os mais vitais – transmitem-se de prática a prática, por modo de transmissão totais e práticos, firmados no contato direto e duradouro entre aquele que ensina e aquele que aprende "faz como eu" (BOURDIEU, 1989, p.22).

É nesse sentido, do "faz como eu", que a secular praxeologia no estilo hindu, proposta para o suposto vencimento das dificuldades de aprendizagem, age com o *habitus* escolar frente a situações prototípicas nas transposições didáticas antes e atuais; construindo o esquema gráfico de arranjo de dados que permitirá por breve análise, de direta e indireta, rearranjar os dados que permitirá escrever, em equação, a derradeira quarta proporcional que produzirá a resposta, obedecendo à "lei hindu" de multiplicar primeiro e dividir depois.

Assim, essa noção de *praxeologia com matemática*, que, por sua complexidade, exigiu técnica-tecnológica didática de modo a facilitar sua aprendizagem, em particular, como um saber prático, ajuda-nos a compreender que os sujeitos da instituição escolar não seguem necessariamente um programa de ação de uma única racionalidade, mas também de outras racionalidades que, parafraseando Bourdieu e Wacquant (2005, p.199), são produtos da história, da história da instituição escolar em seu conjunto e da experiência acumulada por um percurso dentro das praxeologias da RT no ensino da Matemática.

Portanto, se assim podemos dizer, as praxeologias atuais da RT são frutos de um percurso na história de seu uso no ensino da Matemática frente a problemas especificos, com jeitos singulares de fazer, mas que parecem fósseis vivos das praxeologias hindus. Daí, a sua invariância nas práticas docentes. Esses como sujeitos da instituição docente fazem como a instituição faz.

CONSIDERAÇÕES E PERSPECTIVAS

A estrutura da Praxeologia da Regra de Três mobiliza objetos de criação didática, especificamente *um tipo de tarefa com enunciado protótipo*, com finalidade de encaminhar sem dificuldade *um esquema gráfico de arranjo de dados*, para permitir tomar as *relações entre as grandezas, com dados conhecidos diretamente ou as suas inversas* e rearranjar os dados, o que permitirá escrever a equação que produzirá a resposta obedecendo a *lei hindu de multiplicar primeiro e dividir depois.*

Essas praxeologias são apresentadas pela instiuição docente como saberes empíricos, cuja aprendizagem se dá seguindo o professor, no sentido de "faz como eu". Sua estrutura foi arquitetada pela instituição docente, a partir da intenção didática de tornar possível sua aprendizagem, eliminando as dificuldades decorrentes do assunto de que tratava o problema ou tarefa.

A organização da praxeologia como saber empírico, desafiador a cada situação, fez a praxeologia da Regra de Três se mostrar como um objeto sempre novo no ensino e contribui para embaçar o discurso tecnológico matemático e não matemático relativo ao assunto de que tratava o problema. Talvez isso, também decorra da indiferença da Tecnologia Matemática assumida, pois essa vêm para ratificar a praxeologia e não para negá-la.

Essas caracteristicas, talvez, tenham sido decisivas no decorrer da histótria das transposições didáticas, embora ao longo do tempo não tenha havido modificações significativas e no decurso da história tenha se feito como *habitus* escolar na disciplina matemática. E como *habitus* em seu caráter duradouro da Matemática Escolar ainda persista como um fóssil vivo das praxeologias hindus.

Independentemente de sua natureza prática, as praxeologias da Regra de Três, com esquemas gráficos de arranjo de dados e termos técnicos, apresentam alcance nada desprezível por tornar possíveis outras *praxeologias com matemática*, por exemplo, como fez Tilmant (1875), para obtenção de modelos matemáticos sobre situações em contextos concretros, ou para encaminar modelos epistemológicos de referência (MER) para a construção de Organizações Matemáticas sobre funções reais, inclusive de suas variações, em um dado dominio real: funções reais de uma variável real, como a função linear, afim e recíproca, que permitem encaminhar as funções logaritimicas e exponenciais, ou, ainda, a iniciação ao estudo das funções reais de várias variáveis reais.

É importante notar, no entanto, que as dificuldades desafiadoras decorrentes do assunto de que trata o problema persistem, por não serem consideradas de modo objetivo no ensino. É necessário que se faça ver o conhecimento do assunto, parte do discurso técnico-tecnológico da técnica da Regra de Três.

Seguindo a compreensão das *praxeologias com matemática* como praxeologias complexas, no sentido de demandarem técnicas-tecnologias não matemáticas, inclusive saberes empíricos, é que encontramos a dificuldade decorrente do assunto de que trata o problema, embora esse tipo de dificuldade fosse declarado em registros históricos, mas em poucas palavras.

Essa compreensão também nos levou a postular a existência de um discurso técnico-tecnológico, em sentido amplo, que estruturasse as diferentes racionalidades, matemáticas e não matemáticas, da *praxeologia com matemática*.

No caso das praxeologias da Regra de Três aqui investigadas, fica evidente o que postulamos, pois elas foram estruturadas pelos matemáticos hindus para responder à questão didática, que era a de *como fazê-la acessível ao menos dotados de experiências matemáticas*. Essa estrutura, que embora possa ser interpretada como decorrente de um discurso matemático, foi criada para responder à intenção didática, articulando objetos de criação didática e, desse modo, é fruto de técnica-tecnologia didática.

Essa estrutura não foi questionada ao longo do tempo, mas ratificada independentemente dos diferentes discursos matemáticos presentes na técnica da Regra de Três, como fizeram diferentes autores, como está mostrado nos capítulos deste trabalho.

Em particular, Tilmant (1875) foi além: buscou um discurso tecnológico para a estrutura da praxeologia da Regra de Três, com especial dedicação à criação didática do esquema gráfico de arranjo de dados, pois o fazer de decisão que encaminhava os termos técnicos não lhe parecia questionável. Esse discurso não implicou em mudança expressiva nesse tipo de esquema gráfico.

Na verdade, sobre essa criação didática de Tilmant, podemos afirmar que em nada implicou no *design* do esquema gráfico de arranjo de dados, pois apenas permutou as duas linhas que contêm os dados. Mas atribuiu-lhe um discurso tecnológico relacionado com atividade matemática, precisamente, a tecnologia do esquema gráfico seria dado pelo método analítico, usado pelos matemáticos em estudos avançados.

A velha praxeologia da Regra de Três, portanto, ganhara um discurso moderno. No entanto, esse discurso justifica o esquema gráfico de arranjo de dados, mas não justifica a mobilização dos dados, por exemplo, para encontrar a derradeira equação que leva à solução do problema. Essa mobilização seria decorrente de uma outra tecnologia matemática, como a proporcionalidade ou a redução à unidade. No entanto, como alertamos, a mobilização também depende do conhecimento do assunto de que trata o problema e que foi ignorado por Tilmant.

Como se pode notar, há um discurso que busca justificar a estrutura da praxeologia e, portanto, aponta-nos evidências de um discurso superestrutural para a praxeologia da Regra de Três.

Esse olhar nos encaminha à contribuição teórica desta pesquisa, não somente restrita à praxeologia da Regra de Três, ou seja, de maior alcance, sobre a compreensão menos minimalista da noção de *praxeologia com matemática*.

`Podemos anunciar que nossa investigação encaminha a noção de *praxeologia com matemática escolar* como uma organização praxeológica complexa, que é superestruturada por técnicas-tecnologias didáticas que articulam uma infraestrutura matemática, entendida como técnicas e tecnologias matemáticas, e uma infraestrutura a respeito da situação não matemática considerada, em sentido amplo, como os saberes teóricos e procedimentais, inclusive os que denominamos de *protosaberes* e *parasaberes*, compreendidos, incluindo-os no mesmo sentido das noções de saberes *protomatemáticos* e *paramatemáticos,* a que se refere Chevallard (2005)[27].

Essa compreensão tem implicações que julgamos diretas sobre o uso da Modelagem Matemática no ensino, pois, do nosso ponto de vista, a Modelagem Matemática para o ensino são organizações praxeológicas que mobilizam saberes matemáticos e não matemáticos, que são estruturados segundo uma intenção didática. Isso implica em encaminhamento de futuras investigações, que possam permitir melhor compreensão desse objeto da Didática da Matemática.

---

[27] Para detalhamento, veja capitulo que trata de “objetos de saber” y otros objetos (CHEVALLARD, 2005, p.57).

REFERENCIAS

ANDRÉS, J. **Sumario breue de la pratica dela arithmetica & todo el curso de larte merca [n] tiuol bien declarado: el qual se llama maestro de cuento**. Vicent Garcia Editores: Universidad de Salamanca, 1515. Disponível em: https://books.google.com.br/books?id=_JcDDyoH8qwC&printsec=frontcover&dq=Juan+Andr%C3%A9s,+1515&hl=pt-BR&sa=X&redir_esc=y#v=onepage&q&f=false. Acesso em:24/07/207

ÁVILA, G. Razões, proporções e regra de três. **Revista do Professor de** Matemática, Rio de Janeiro, n. 8, p 1-8, 1986a.

ÁVILA, G. Ainda sobre a regra de três. **Revista do Professor de Matemática**, Rio de Janeiro, n. 9, p 1-10, 1986b.

ACARYA, S. **The Patiganita of Sridharacarya: with an ancient Sanskrit commentary**. Department of Mathematics and astronomy, Lucknow University, 1959. Disponível em: https://ia601001.us.archive.org/19/items/Patiganita/Patiganita.pdf.Acesso em: 16/11/2016.

BOLEA, P. El proceso de algebrización de organizaciones matemáticas escolares.**Monografía del Seminario Matemático García de Galdeano**,n. 29. Zaragoza, Spain: Departamento de Matemáticas, Universidad de Zaragoza, 2003.

BOSCH, M. La dimensión ostensiva en la actividad matemática.El caso de la proporcionalidad, **Tesis doctoral**, UAB, Barcelona, 1994.

BOSCOLO, B.; CASTRUCCI, A. **Curso Moderno de Matemática para o ciclo ginasial**. Volume 2. Ed. FTD, São Paulo. 1970.

BOURDIEU, P. Cultural reproduction and social reproduction In: **KARABEL, I., HALSEY, A H. Power and ideology in education**. New York: Oxford University, 1977.

BOURDIEU, P. **Le sens pratique**. Editions de Minuit, París,1980.

BOURDIEU, P. **Poder Simbólico**. Lisboa: Difel, 1989.

BOURDIEU, P. e WAQUANT, L. **Una invitación a la sociología reflexiva**.siglo veintiuno editores, 2005.

BOURDON, M. **Aritmética.** (Traducida por Agustín Gómez Santa Maria.Tratado completo de matemáticas. Tomo I. Según la 21 edición francesa. 1ª edición: 1797). Madrid: Imprenta de D. J. M. Alonso, 1848.

CAUNEDO del Potro, B. **Um manual de aritmética mercantil de mosén Juan de Andrés.** Canedo, 2007. Disponível em: <www.aeca.es/vi_encuentro_trabajo_história_contabilidade>. Acesso em: 20 março. 2011.

CASTELA, C. ROMO-VAZQUEZ, A.Des mathématiques à l'automatique: étude des effets de transposition sur la transformée de Laplace dans la formation des ingénieurs. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, v. 31, n. 1, p. 79-130, 2011.

CAUNEDO del Potro, B.; CÓRDOBA de la Llave, R. C. Oficios urbanos y desarrollo de la ciência y de la técnica en la baja edad media: la corona de castilla. **Revista de Historia, Norba**, v. 17, 41-48, 2004.

CAUNEDO del Potro, B. Algunos aspectos de los manuales de mercaduría.el valor del aprendizaje.la pereza es llave de la pobreza**. ANUARIO DE ESTUDIOS MEDIEVALES**,2011. Disponível em:http://estudiosmedievales.revistas.csic.es/index.php/estudiosmedievales/article/viewFile/372/378>. Acesso em: 10 jun. 2015.

CAUNEDO del Potro, B. **El desarrollo del comercio medieval y su repercusión en lasécnicas mercantiles ejemplos castellanos**. Pecunia, núm.15, pp.201-220, 2012.

CAUNEDO del Potro, B. La Aritmetica Mercantil Castellana em la Edad Media.una breve aproximación. **Llull**, v. 30, p. 5-19, 2007.

CHEVALLARD, Y. Le Passage de l'Arithmetique a l'Algebrique dans l'Enseignement des Mathematiques au College. Premiere partie. In: **Petit x**, nº 5, p. 51-94, 1984.

CHEVALLARD, Y. Fundamental concepts in didactics: Perspectives provided by an anthropological approach. **Research in Didactique of Mathematics, Selected Papers. La Pensée Sauvage, Grenoble**, p. 131-167, 1992.

CHEVALLARD, Y. El análisis de las prácticas docentes en la teoria antropológica de lo didáctico. **Recherches en Didactiques des Mathématiques**, v. 19, n. 2, p. 221-266, 1999. Traducción de Ricardo Campos. Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Sevilla. Com la colaboración de Teresa Fernández García, Catedrática de Francés, IES Martinéz Montañes, Sevilla. Disponível em:

<http://josedesktop.uacm.edu.mx/nolineal/libros/campomedio/El_analisis_de_las_practicas_docentes_en _la_teoria_antropologica_de_los_didactico.pdf>. Acesso em: 10 abr. 2012.

CHEVALLARD, Y. **La Transposición Didáctica:** del saber sabio al saber enseñado. 3. ed. 2. reimp. Buenos Aires: Aique Grupo Editor, 2005.

CHEVALLARD, Y**. La TAD face au professeur de mathématiques.** Toulouse, 29 abr. 2009a. Disponível em: < http://yves.chevallard.free.fr/>. Acesso: em: 12 agosto. 2014.

CHEVALLARD Y. **La notion d'ingénierie didactique, un concept à refonder: questionnement et éléments de réponse à partir de la TAD**. 2009b. Disponível em: <http://yves.chevallard.free.fr/ >. Acesso em: 24 jun. 2013.

CHEVALLARD Y. **Sur les Praxéologies de recherche en didactique – «Méthodologie de la recherche en SHS**». 2014. Disponível em: <http://yves.chevallard.free.fr/ >. Acesso em: 24 mai. 2015.

COLEBROOKE, H. T. **Algebra with Arithmetic and Mensuration from the Sanskrit Texts of Brahmagupta and Bhaskara**, 1817.

COMIN, Eugène. Proportionnalité et fonction linéaire Caractères, causes et effets didactiques des évolutions et des réformes dans la scolarité obligatoire. **Tese de Doutorado**, Université Sciences et Technologies - Bordeaux I, 2000.

DANTE, L. R. **Projeto Teláris: Matemática**. 1 ed. São Paulo: Ática, 2012.

DATTA, B. SINGH, A. N. **History of Hindu mathematics**. Asia Publishing House; Bombay, 1938.

FAULCH, S. E**NCYCLOPÉDIE, OU DICTIONNAIRE RAISONNÉ DES SCIENCES, DES ARTS ET DES MÉTIERS,PAR UNE SOCIÉTÉ DE GENS DE LETTRES**,1765. Disponível: https://books.google.com/books?id=wDMsgMra5r8C.

FELTRE, R.**Quimica**.ed.6.v.3 fisico- quimica,Ensino médio.São Paulo:Moderna,2004.

GARCÍA, F. J. La modelización como herramienta de articulación de la matemática escolar: de la proporcionalidad a las relaciones funcionales**. Doctoral dissertation**. Universidad de Jaén. 2005.

GÓMEZ, B. **Los ritos en la enseñanza de la regla de tres**. En Alexander MAZ, M. T. y Luís Rico (Eds*.). José Mariano Vallejo, El Matemático Ilustrado. Una mirada desde* *la educación matemática*, pp. 47-69. Córdoba. Servicio de Publicaciones de la Universidad de Córdoba, 2006.

GUERRA, R.B; SILVA, F.H.S. Reflexões sobre modelagem matemática crítica e o fazer matemático da escola. **Perspectivas da educação matemática**, Campo Grande, MS, v. 2, n. 3, pp. 95 – 119, 2009b.

GUERRA, R. B; SILVA, D. P. As práticas sociais da regra de três e a proporcionalidade. **REMATEC. Revista de Matemática, Ensino e Cultura** (UFRN), v. 11, p. 111-127, 2012.

GUERRA, R. B. SILVA, D.P**.** As Práticas Sociais da Regra de Tres. In: Iran Abreu Mendes;Carlos Aldemir Farias. (Org.). Praticas Socioculturais e Educação Matemática.1.ed.São Paulo: Editora **Livraria da Física**, 2014.

HEEFFER, A. The tacit appropriation of Hindu algebra in renaissance practical arithmetic. **Gaṇita Bhārāti**, v. 29, n. 1-2, p. 1-60, 2007.

HEEFFER, A. The genesis of the algebra textbook: from Pacioli to Euler. **Almagest**, v. 3, n. 1, p. 26-61, 2012.

HEEFFER, A. Epistemic Justification and Operational Symbolism. **Foundations of Science**, v. 19, n. 1, p. 89-113, 2014.

HØYRUP, J. Sub-scientific mathematics: observations on a pre-modern phenomenon. **History of Science**, v. 28, n. 1, p. 63-87, 1990.

HØYRUP, J. **Jacopo da Firenze's Tractatus algorismi and early Italian abbacus culture.** Springer Science & Business Media, 2007a.

HØYRUP,J. Further questions to the historiography of Arabic (but not only Arabic) mathematics from the perspective of Romance abbacus mathematics.In 9ª **Colloque Maghrébins l' Histoire des Mathématiques Arabes**.Tipaza, 12–13–14, 2007b.

HØYRUP, J. "Proportions in the Liber abbaci." Contribution to the proceedings of the meeting "Proportions: **Arts–Architecture–Musique–Mathématiques**–Sciences", Centre d'Études Supérieures de la Renaissance, Tours, 2009.

HØYRUP, J. Sanskrit-Prakrit interaction in elementary mathematics as reflected in Arabic and Italian formulations of the rule of three–and something more on the rule elsewhere. **Ganita Bharatı** 34, 144–172, 2012. Disponível em: http://pubman.mpdl.mpg.de/pubman/item/escidoc:2274502/component/escidoc:2274500/P435.PDF, acesso em 24/07/2017.

JUSCHKEWITSCH, Adolf Pavlovitch. **Geschichte der Mathematik im Mittelalter**. Leipzig: BG Teubner Verlagsgesellschaft, 1964.

LACROIX, S.F.**Essais sur l'enseignement en général: et sur celui des mathématiques en particulier**. Bachelier, 1838.

LACROIX**,** S. F**.Tratado elemental de aritmética, copuesto em frances para uso de la escuela central de lãs cuatro naciones.** Madrid e na imprenta nacional, 1839. (http://books.google.com.br/).

LACROIX, S.F. **Tratado elemental de aritmética,** 1848.

LACROIX, Sylvestre-François. **Ensaios sobre o Ensino em Geral e o de Matemática em particular**. São Paulo. Editora Unesp. Tradução de Karina Rodrigues. 2013.

LIMA, E. L. Que são grandezas proporcionais. **Revista do Professor de Matemática,** Rio de Janeiro, n.9, pp. 21-29, 1986.

LIMA, E L. Novamente a proporcionalidade. **Revista do Professor de Matemática,** Rio de Janeiro, n.12, p 8-12, 1988.

LIMA. E.L**.Temas e Problemas,** 7ª Edição, ISBN 85-8581810-7, Publicação SBM 2001.

LIMA, E. L. et al. **A matemática do ensino médio**.Sociedade Brasileira de Matemática. Rio de Janeiro, v. 1, 2004.

MARTIN, P. La règle de trois: un cheval de bataille dans la formation infirmière.1996.

MIGUEL, A. e MENDES, I. A.Mobilizing in mathematics teacher education: memories,social practices, and discursive games.**ZDM Mathematics Education**,v.42,381-392, april 2010.

NUÑEZ. P. **Libro de algebra en arithmetica y geometría.**Universidad de coymbra, 1567. (http://books.google.com.br/).

PÉREZ, J. A. S. **La aritmética en Roma, en India y en Arabia**.ESCUELA DE ESTUDIOS ARABES DE MADRID, Madrid:Imprenta y Editorial Maestre, 1949.

REYNAUD, A.A.L.**ELÉMENS D'ALGÈBRE, PRÉCÉDÉS DE L'INTRODUCTION A L'ALGÈBRE.** PREMIERE SECTION, TROISIÈME ÉDITION. Paris, 1810.

REYNAUD, A.A.L. **TRAITÉ D'ARITHIMÉTIQUE A L'USAGE DES ÉLÈVES QUI SE DESTINET A L'ECOLE POLYTECHNIQUE, A LA MARINE, A LÉCOLE MILITAIRE, DE SAINT-CYR ET LÉCOLE FORASTIERE**. DIX-SEPTIÈME ÉDITION, Paris, 1834.

ROMO VÁZQUEZ, A. Les mathématiques dans la formation d'ingénieurs. **Paris: Irem de Paris**, 2009.

ROMO-VÁZQUEZ, A. La modelización matemática en la formación de ingenieros. **Educación Matemática**, 2014.

ROQUE, Tatiana. **História da matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas**. Zahar, 2012.

SARMA, S. R. Rule of three and its variations in India. **From China to Paris: 2000 years transmission of mathematical ideas**, p. 133-56,2002.

SILVA**,** D. P. REGRA DE TRÊS: prática escolar de modelagem matemática. **Dissertação** (Mestrado em Educação em Ciências e Matemáticas) – Universidade Federal do Pará (UFPA), Belém, PA, 2011.

SILVA, D. P; GUERRA, R. B. Para que Ensinar Regra de Três? In: XIII CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA-CIAEM, 2011. Recife. **Anais da XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática**: Recife: Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica da Universidade Federal de Pernambuco, v. ÚNICO, pp. 1-13, 2011.

SILVEIRA, E; M.C. **Matemática: Compreensão e prática**. 3ª Ed.7º ano, Ens. Fundamental. São Paulo: Moderna, 2015.

SCHUBRING, G. Análise histórica do livro didático de matemática: **notas de aula**. (Tradução: Maria Laura Magalhães Gomes). Campinas-SP: Autores Associados, 2003.

SMITH, D.E. **History Of Mathematics**. Vol. 2, 1925.

SMITH, David E. **History of mathematics**. Courier Corporation, 1958.

TILMANT, V. RÉFORME ANALYTIQUE & DE LA RÈGLE DE TROIS OU RÈGLE D'OR ET NOTIONS D'ANALYSE MATHEMATIQUE D'après DESCARTES, PASCAL & ARNAULD. **Gallica**, 1875.

TOMBECK, H.E. **TRAITÉ D'ARITHMÉTIQUE A L'USAGE DES CLASSES DE SCIENCES DES LYCÉES ET DES CANDIDATS AU BACCALAURÉAT ÈS SCIENCES ET AUX ÉCOLES DU GOUVERNEMENT**. LIBRAIRIE DE L. HACHETTE ET Gie. Paris, 1861.

TROPFKE, J. **Geschiclite der Elementarmatliematik in systematischer Daniellung mil besonderer Berucksichligung der Fachwdrter**. 3rd revised edition. Vol.I.Berlin / Leipzig: de Gruyter, 1930.

VALLEJO, J. M. **Tratado Elemental de Matemáticas.** Escrito de orden de S.M. para uso de los caballeros seminaristas del seminario de nobles de Madridy demás casas de educación del Reino. Cuarta edición corregida y considerablemente aumentada. Tomo I. Parte primera, que contiene la Aritmética y Álgebra. Madrid: Imp Garrayasaza, 1841.

WINGATE, E. **A Plain and Familiar METHOD For Attaining the Knowledge and Practice of COMMON ARITHMETIC THE NINETEENTH EDITION**, London, 1760.

Outras Bibliografias consultadas

ARAYA, A. et MATHERON, Y. La problématique de la mémoire: propositions et exemples pour son abord anthropologique en didactique des mathématiques. Actes du 1er Congrès International de la Théorie Anthropologique du Didactique. Universidad Internacional de Andalucía, Baeza (non publié), 2005.

BOSCH, M.; GASCÓN, J. LAS PRÁCTICAS DOCENTES DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS XIème École d'Été de Didactique des Mathématiques, de 2001.

BOURDIEU, P. Coisas Ditas. (tradução Cássia R. da Silveira eDenise Moreno Pegorim) ; revisão técnica Paula Montero.Brasiliense.São Paulo: Editora Brasiliense, 2004.

BOYER, C. B.. História da matemática. São Paulo:Edgard Blücher, 1996.

BRASIL. MEC. SEM. Parâmetros Curriculares Nacionais. Brasília, MEC/SEM, Matemática: Ensino médio, 1998.

BRASIL. MEC. SEF. Guia de livros didáticos — 5ª a 8ª séries. Brasília, MEC/SEF, 2008.

BROOKS, E.**The philosophy of arithmetic as developed from the three fundamental processes of synthesis, analysis, and comparison containing also a history of arithmetic**. Lancaster, PA: Normal publishing company, 1880.

CAUNEDO del Potro, B. El desarrollo del comercio medieval y su repercusión en las técnicas mercantiles. ejemplos castellanos**. Pecunia**, núm.15, pp.201-220, 2012.

CAUNEDO de Potro, B.; DE LA LLAVE, R.C. **El arte del alguarismo**. 2000.

CHEVALLARD, Yves; BOSCH, Mariana; GASCÓN, Josep. **Estudar matemáticas: o elo perdido entre o ensino e a aprendizagem**. Tradução: Daisy Vaz de Moraes. Porto Alegre: Artmed, 2001.

CHEVALLARD Y. La fonction professorale : esquisse d'un modèle didactique. Dans : Noirfalise R. et Perrin-Glorian M.J., **Actes de la VIIIe Ecole d'été de didactique des mathématiques**, Clermont-Ferrand: IREM de Clermont-Fd., 83-122, 1996.

CHEVALLARD Y. Le Passage de l'Arithmetique a l'Algebrique dans l'Enseignement des Mathematiques au College. Deuxieme partie. In: **Petit x**, nº 19, p. 43-72, 1989.

CHEVALLARD Y. Le Passage de l'Arithmetique a l'Algebrique dans l'Enseignement des Mathematiques au College. Troisième partie. In: **Petit x**, nº 23, p. 5-38, 1990.

CHEVALLARD Y. Enseignement de l'algebre et transposition didactique. Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino. Vol. 52, n. 2, 1994. Disponível em: <http://seminariomatematico.dm.unito.it/rendiconti/cartaceo/52-2/175.pdf >. Acesso em: 09 mai. 2012.

CHEVALLARD, Y. Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathematiques: L´approche antropologique. Recherches en Didactique des Mathématiques, vol. 19, nº 2, pp. 221-266. Grenoble, France: La Pensée Sauvage, 1999.

CHEVALLARD, Y.. La notion de PER : problèmes et avancées. 2009b. Disponível em: < http://yves.chevallard.free.fr/ >. Acesso em: 24 jun. 2013.

CHEVALLARD, Y. Introduction à la théorie anthropologique du didactique / Introdução à teoria antropológica do didático. Slides bilíngue: Francês/ português.2011. Disponível em: <http://yves.chevallard.free.fr/>. Acesso em: 24 jun. 2013.

CASTELA, C. Des mathématiques à leurs utilisations, contribution à l'étude de la productivité praxéologique des institutions et de leurs sujets/Le travail personnel au cœur du développement praxéologique des élèves en tant qu'utilisateurs de mathématiques. 2011. **Tese de Doutorado**. Université Denis Diderot Paris VII.

CORTELLA, M. S. A escola e o conhecimento: fundamentos epistemológicos e políticos. 12. ed. rev. e ampl. São Paulo: Cortez, 2008.

DROUIN, F. « Le retour de la « Règle de trois », Bulletin APMEP, n°484, sept-oct 2009.
GARCÍA, F.J. e RUIZ H, L. Reconstrucción y evolución de organizaciones matemáticas en el ámbito de los sistemas de variación de magnitudes. Boletín Del Seminario interuniversitario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas, n. 12. 2002.

FERNANDES, J.A.N. Ecologia do saber: o ensino de limite em um curso de engenharia. (Tese de **Doutorado** em Educação em Ciências e Matemáticas) – Universidade Federal do Pará (UFPA), Belém-PA, 2015.

GHEVERGHESE, G. La cresta del pavo real. Las matemáticas y sus raíces no europeas. Madrid: Pirámide,1996.

GARDING, L. Encontro com a matemática.Trad. de Célio Alvarenga e Maria Manuela Alvarenga.Brasília:Editora Universidade de Brasília,1981.

GUERRA, R. B.; MENDES, M.J.F.; GONÇALVES, T.O (Org.). Fundamentos de matemática. (Obras Completas Educimat). Belém: Edufpa, v. 19, 2006.

JANKVIST, U. T. 'On Empirical Research in the Field of Using History in Mathematics Education'. **ReLIME** 12(1), 67–101, 2009c.

MERCIER, A.La transposition des objets de enseignement et la définition de la espace didactique. **Revue Française de Pédagogie**, n° 141, 135-171, 2002.

RADFORD, L. La arithmetica practica del padre padilla y los inicios de la matemática en centro américa en el período colonial. **Revista Brasileira de História da Matemática** - Vol. 7 no 14 (outubro/2007 - março/2008) - pág. 193-211 Publicação Oficial da Sociedade Brasileira de História da Matemática, 2007. ISSN 1519-955X.

ROMO-VÁZQUEZ, A.; CASTELA, C. Des mathématiques à l'automatique: étude des effets de transposition sur la transformée de Laplace dans la formation des ingénieurs. 2013.

ROSSINI, R. Saberes docentes sobre o tema função: uma investigação das Praxeologias. In: Encontro Brasileiro de Estudantes de Educação Matemática, 9, 2005. São Paulo. Anais... São Paulo: FEUSP, 2005.

TRAJANO, A. Arithmetica Progressiva. 63a edição Livraria Francisco Alves. – Rio de Janeiro: 1928.

WALTHAM, D.**Mathematics:a simple tool for geologists**.blackwell science ltd.second edition,London,2000.

YOUSCHKEVITCH, A. P. Les mathématiques arabes (VIIIe–XVe siécles), 1976.