UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ

INSTITUTO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E CIENTÍFICA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICAS

JOSÉ AUGUSTO NUNES FERNANDES

ECOLOGIA DO SABER: o ensino de limite em um curso de engenharia

BELÉM - PA

2015

JOSÉ AUGUSTO NUNES FERNANDES

ECOLOGIA DO SABER: o ensino de limite em um curso de engenharia

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas, do Instituto de Educação Matemática e Científica da Universidade Federal do Pará, como requisito para obtenção do título de doutor em Educação Matemática.

Orientador Prof. Dr. Renato Borges Guerra.

BELÉM – PA

2015

Autorizo a reprodução e divulgação total ou parcial deste trabalho, por qualquer meio convencional ou eletrônico, para fins de estudo e pesquisa, desde que citada a fonte.

Dados Internacionais de Catalogação – na - Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da UFPA

Fernandes, José Augusto Nunes, 1956 -
Ecologia do saber: o ensino de limite em um curso de engenharia / José Augusto Nunes Fernandes. - 2015.

Orientador: Renato Borges Guerra.
Tese (Doutorado) - Universidade Federal do Pará, Instituto de Educação Matemática e Científica, Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas, Belém, 2015.

1. Educação Matemática. 2. Didática da Matemática.
3. Engenharia Civil - estudo e ensino. 4. Cálculo infinitesimal.
5. Prática docente. I. Título.

CDD 22. ed. 510.7

JOSÉ AUGUSTO NUNES FERNANDES

ECOLOGIA DO SABER: o ensino de limite em um curso de engenharia

Tese apresentada para obtenção do título de doutor em Educação Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas, do Instituto de Educação Matemática e Científica da Universidade Federal do Pará.

Data da apresentação: 19 de junho de 2015

Conceito: Aprovado com louvor.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Renato Borges Guerra

Instituto de Educação Matemática e Científica da UFPA – Orientador

Prof. Dr. Luiz Carlos Pais

Universidade Federal de Mato Grosso do Sul – Membro Externo

Prof. Dr. Saddo Ag Almoloud

Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – Membro Externo

Prof. Dr. José Messildo Viana Nunes

Instituto de Educação Matemática e Científica da UFPA – Membro Interno

Prof. Dr. João Cláudio Brandemberg Quaresma

Instituto de Ciências Exatas e Naturais da UFPA – Membro Interno

Dedico este trabalho ao meu filho, prof. Dr. José Augusto Lacerda Fernandes, grande amigo e parceiro, incentivador maior na empreitada desta qualificação profissional.

AGRADECIMENTOS

À Universidade Federal do Pará (UFPA), pela formação acadêmica nos cursos de Licenciatura em Ciências, Licenciatura em Matemática e Engenharia Civil, além das oportunidades de realização dos cursos de pós-graduação, e do agradável ambiente laboral;

À minha esposa Cristina Silva Fernandes e minha filha Ana Clara Silva Fernandes pelo companheirismo, incentivo e apoio irrestritos;

Ao professor e amigo Dr. Renato Borges Guerra, pela segura orientação e oportunidade de constante aprendizado, que me foram indispensáveis para o acesso ao curso e realização desta tese;

Aos professores do Instituto de Educação Matemática e Científica (IEMCI) da UFPA, em particular aos professores Dr. Tadeu Oliver Gonçalves, Drª. Terezinha Valin, Dr. Adilson Espírito Santo e Dr. Francisco Hermes, pela possibilidade de realização do curso, aprendizado e saudável convivência;

Aos professores Dr. Luiz Carlos Pais e Prof. Dr. Saddo Ag Almoloud, membros participantes das bancas de qualificação doutoral e de defesa de tese pela disponibilidade e contribuições;

Aos professores das Faculdades de Matemática e de Ciências Naturais da UFPA, Campus de Belém, pelo respeito mútuo e companheirismo;

Aos amigos do Grupo de Pesquisa em Didática da Matemática (GEDIM) do IEMCI/UFPA, em particular ao nosso Coordenador, prof. Dr. Messildo Nunes Viana pelo apoio, aprendizado e incentivo;

Aos professores, dirigentes de subunidades acadêmicas e engenheiros que contribuíram na realização desta pesquisa;

Aos meus amigos que sempre me apoiaram, mas que deixo de citá-los por causa da grande quantidade e para não cometer injustiças;

A minha mãe, meu pai (*in memorian*) e aos meus irmãos pela criação, formação, convivência e incessante incentivo às iniciativas de aprimoramento pessoal, acadêmico e profissional.

RESUMO

Esta pesquisa se insere na linha do Programa Epistemológico em Didática da Matemática, decorrente da obra de Guy Brousseau, tendo como referencial teórico a Teoria Antropológica do Didático, desenvolvida por Yves Chevallard. A questão de pesquisa se estabeleceu a partir de um problema docente real, vivido por um professor de Cálculo Diferencial e Integral de um curso de Engenharia Civil, quando a disciplina Cálculo I foi substituída por outra, com outro nome e mais temas a ensinar, dispondo, no entanto, da metade do tempo de ensino de outrora. Em razão das modificações ocorridas, o ensino de limite de uma função real de uma variável real sofreu modificações, e sua dispensabilidade passou a ser questionada. A investigação de práticas com Matemática se deu em um curso de graduação, e o pesquisador propõe um modelo heurístico para análise didática ecológica, que permita identificar as funcionalidades do objeto matemático pesquisado, ou seja, seus *nichos,* nos *habitat* do ecossistema de ensino de Engenharia Civil. Os componentes empíricos foram obtidos na imersão realizada na instituição de ensino superior, utilizadora da Matemática, quando o Projeto Pedagógico do Curso foi pesquisado, professores entrevistados, obras de referência e práticas analisadas com base no modelo proposto. As praxeologias didáticas envolvendo limite de uma função foram analisadas com base no modelo proposto, encontrando modos de "vida" do objeto matemático pesquisado, permitindo compreensões que justificam a não dispensabilidade do seu ensino no ecossistema investigado, mas que sugerem modificações transpositivas, que se fazem necessárias em razão das diferenças ecológicas entre as instituições produtora e utilizadora desse saber.

Palavras-chave: Educação Matemática. Teoria Antropológica do Didático. Ecologia Didática. Limite de funções. Ensino de engenharia. Praxeologias com matemática.

ABSTRACT

This research falls in line with the Epistemological Program in Didatics of Mathematics from the work of Guy Brousseau, having as theoretical reference Yves Chevallard's Antropological Theory of Didatic. The research question has established itself from a real educational problem, experienced by a professor of Differential and Integral Calculus of a civil engineering course, when the Calculus I course was replaced by another with a different name and more topics to teach, offering However, half the teaching time of old. Due to these modifications, the teaching of the limit of a real function of a real variable suffered changes and its dispensability started being questioned. The investigation of practices with Mathematics in an undergraduate course, and the researcher proposes a heuristic model for ecological educational analysis that enables the identification of the functionalities of the researched mathematical object, such as its niche, in the Civil Engineering teaching ecosystem habitat. The empirical components were obtained from the immersion held in the institution of higher education, user of mathematics, when the course's Pedagogical Project was researched, teachers were interviewed and reference works and practices were analysed based on the proposed model. The didactic praxeologies involving the limit of a function were analysed based on the proposed model. The analysis found the "life forms" of the researched mathematical object, which allowed the understanding that justifies the indispensability of its teaching in the researched ecosystem, but which also suggests transpositives that are necessary because of the ecological differences between the producing and consumer institutions of this knowledge.

Key Word: Education Mathematics. Anthropological Theory of Didactics. Didactics Ecology. Limit functions. Engineering education. Praxeologias with mathematics.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE ABREVIATURAS

AMATYC	Associação Matemática de Faculdades de dois anos
AMS	Sociedade Americana de Matemática
ABENGE	Associação Brasileira de Educação em Engenharia
CDI	Cálculo Diferencial e Integral
CONFEA	Conselho Federal de Engenharia e Agronomia
CONSEPE	Conselho Superior de Ensino e Pesquisa
CREA	Conselhos Regionais de Engenharia e Agronomia
CEP	Controle Estatístico de Processos
FEC	Faculdade de Engenharia Civil
IEEP	Instituto de Ensino de Engenharia Paulista
IES	Instituições de Educação Superior do Brasil
IEMCI	Instituto de Educação Matemática e Científica
ITEC	Instituto Tecnológico da UFPA
LL	Limite de Liquidez
LP	Limite de Plasticidade
MAA	Associação Matemática da América
MPa	Mega Pascal
MSEB	Diretoria de Ensino de Ciências Matemáticas
NCTM	Conselho Nacional de Professores de Matemática
NSF	Fundação Nacional de Ciência
OD	Organizações Didáticas
OM	Organizações Matemáticas
PDI	Plano de Desenvolvimento Institucional
PARFOR	Plano Nacional de Formação dos Professores da Educação Básica
PPC	Projeto Pedagógico de Curso
PPI	Projeto Pedagógico Institucional
TAD	Teoria Antropológica do Didático
UFPA	Universidade Federal do Pará

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO

Nossa pesquisa se insere na linha do Programa Epistemológico em Didática da Matemática, decorrente da obra de Guy Brousseau, que busca construir modelos para estudar a difusão de atividades matemáticas em instituições sociais. Nesse Programa situa-se a Teoria Antropológica do Didático (daqui em frente TAD), proposta por Yves Chevallard (1996, 1999, 2007, 2009, 2013), em que a Matemática é vista como uma atividade de estudos de problemas humanos, e que para nós será o principal referencial teórico.

Este trabalho, quanto aos seus elementos textuais, encontra-se estruturado nesta breve apresentação, seguida de quatro capítulos pelo que passamos a destacar, além das conclusões.

A partir de um problema concreto de um professor de matemática de nível superior, interessado em refletir sua prática docente, confronta-se com uma problemática de ensinar uma disciplina, que costumeiramente ensinava, porém, esta apesar de contemplar os mesmos temas da anterior, mudou de nome e teve a carga horária reduzida à metade. Tal problemática evidenciou uma questão de pesquisa em Didática da Matemática que passou a ser investigada, considerando, fundamentalmente seus aspectos relativos à ecologia didática, sendo descrita no primeiro capítulo desta tese.

No segundo capítulo, trataremos das dimensões de um problema didático, em que explanaremos sobre a epistemológica e a econômica-institucional. Exporemos também os motivos que nos levaram a focar a problematização de nossa questão, sob a ótica da ecologia didática, procurando situá-la no âmbito da TAD. Em seguida, nos reportaremos à ecologia como uma ciência, cujos termos e práticas extrapolaram o campo da biologia e passaram a ser utilizados por outras ciências, e, finalizaremos esse capítulo explanando sobre a ecologia do Cálculo Diferencial e Integral (daqui em diante CDI), que comporta o objeto matemático por nós investigado na instituição de ensino superior, espaço adotado como campo de pesquisa.

O terceiro capítulo dirá respeito ao referencial teórico e à metodologia da pesquisa. A TAD será a nossa base relativa ao referencial teórico em que apoiaremos nossa pesquisa e a base metodológica, por sua vez, apontará nosso percurso de investigação, além de destacar os ecossistemas de ensino de Engenharias, de Engenharia Civil e de Engenharia Civil da UFPA. Trataremos dos *habitat* onde o objeto matemático por nós pesquisado "vive". É ainda nesse capítulo que descreveremos as entrevistas realizadas com membros, os quais denominamos de comunidades docentes, constituídas pelas instituições dos professores, além de apontarmos os demais percursos desta pesquisa.

No quarto capítulo, retornaremos às praxeologias didáticas, que dizem respeito mais diretamente àquelas vivenciadas no ecossistema de ensino de Engenharia Civil. No quinto apresentaremos nosso modelo de análise ecológica didática e no sexto realizaremos análises com base no mesmo, identificando os modos de "vida" do objeto matemático por nós pesquisado, ou seja, "o que faz e como faz" no ambiente por nós considerado, relativamente às suas práticas, que ecologicamente serão seus *nichos*. Nas análises das praxiologias com matemática, consideraremos as do ensino de Engenharia Civil onde limite se apresenta, inclusive aquelas dos livros textos de Cálculo Diferencial e Integral, que também serão analisados, tomando por base o modelo que elaboramos. Ainda no sexto capítulo apresentaremos as falas de nossas pesquisas empíricas que contribuíram para os nossos entendimentos.

Finalizando, apresentaremos as considerações e perspectivas desta pesquisa, com o entendimento que obtivemos a partir dos seus elementos constitutivos, além de apontarmos possibilidade de trabalhos futuros.

1 QUESTÃO DE PESQUISA

Nossa questão de pesquisa, deu-se a partir de uma situação concreta, em que nós, enquanto professor universitário de Matemática que por muitos anos ministrou a disciplina denominada Cálculo I, para cursos de Licenciaturas (em Matemática, Física e Química), e de Bacharelados (em Ciência da Computação, Estatística e Engenharias), fomos designados a ensinar uma “nova” disciplina denominada de Matemática Aplicada à Engenharia I, para o curso de Engenharia Civil da Universidade Federal do Pará (UFPA), campus de Belém. Esse componente curricular continha os principais temas de Cálculo I (limite, derivada e integral de funções reais de uma variável real), mas deveria desenvolver-se na metade do tempo de ensino que se tinha anteriormente.

Preliminarmente, esclarecemos que a disciplina Cálculo I contempla o ensino de Cálculo Diferencial e Integral (CDI) de funções de uma variável real. O CDI, também conhecido como Cálculo Infinitesimal, ou simplesmente Cálculo tornando-se difundido cientificamente a partir do século XVII, com as publicações, quase que simultâneas e independentes, de Newton e de Leibniz.

O sistema de ensino da UFPA é semestral, e o tempo de ensino destinado ao Cálculo I, que até hoje existe como disciplina de outros PPC, exceto o de Engenharia Civil, é de 90 horas por semestre, equivalentes a 6 (seis) horas semanais, em que os temas limite, derivada e integral de uma função real de uma variável real são tidos como a ensinar. Na disciplina Matemática Aplicada à Engenharia I, esses temas também constam para serem ministrados em um semestre letivo, totalizando 51 (cinquenta e uma) horas, correspondentes a 3 (três) horas de ensino por semana, ou seja, a metade do tempo de ensino de Cálculo I[1].

Diante da restrição que o tempo de ensino impunha, temas e questões do Cálculo I, poderiam não “sobreviver” na disciplina agora denominada Matemática Aplicada à Engenharia I, e no caso de manterem-se “vivos”, provavelmente sofreriam modificações transpositivas que, necessariamente, os tornariam distintos daqueles como prescritos a ensinar. No nosso caso, tivemos que fazer escolhas, como por exemplo: “funções” deixou de ser o primeiro capítulo para ser tratada ao longo do curso nas questões em que os conhecimentos mais aprimorados desse

[1] Antes para se saber quantas horas por semana uma disciplina dispunha, dividíamos o total da carga horária por 15, hoje divide-se por 17, em razão do semestre letivo ter 17 semanas.

tema fossem solicitados. Optamos por começar o ensino de cálculo por derivada, sem, no entanto, justifica-la por um limite de uma função real de uma variável real, objeto esse que daqui por diante denominaremos apenas de limite.

Depois do ensino de derivadas de funções (polinomiais, trigonométricas, logarítmicas, compostas, implícitas, inversas), questões de crescimento, decrescimento, determinação, de pontos e problemas de máximos, mínimos e inflexões, nos reportamos, “brevemente”, a limite, pois o mesmo era estabelecido no conteúdo programático como a ser ensinado. Nesse retorno programático, “demonstramos” o porquê de derivadas de algumas funções calcularem-se por meio das “fórmulas” que antes apresentamos sem maiores justificativas, mais especificamente, de funções do primeiro e do segundo graus, em que obtivemos as derivadas partir da definição de limite.

Realizamos ainda outros poucos cálculos de limites de funções, cuja simples substituição da variável pelo valor da tendência (valor numérico) resultava em indeterminações do tipo 0/0 ou ∞/∞, mas desta feita, tendo como técnica de resolução o uso da derivada, que, nesta situação, tinha funcionalidade na aplicação da Regra de L´hospital[2].

Nossa prática docente, aliada à experiência de ex-aluno de Engenharia Civil nos apontavam que, para esse curso, o saber fundamental é o da derivada, tornando-se prioritário, que pode até prescindir da formalização por limite, mas que, devido às múltiplas funcionalidades no restante do curso, se impõe e se torna imprescindível no estudo do tema a ser ensinado em seguida, a integral, que também é muito utilizada e indispensável no ensino de engenharia. Limite, em nossas práticas, parecia ter um papel coadjuvante, que, em última análise, poderia ter seu ensino negligenciado.

Nossa forma de proceder apresentava ligeiros respaldos em alguns livros textos oficiais de Cálculo, quando declaravam que limite podia ser contornado, exposto no apêndice para aqueles que mais se interessassem (BOULOS, 1974), iniciando por taxa de variação e derivada. A obra de Hallett, Gleason, McCallum, et al (2012), por exemplo, trata de limite no segundo capítulo, que chama-se “Conceito

---

[2] Se f(x) e g(x) são funções deriváveis e g’(x). Se f(a) = 0 e g(a) = 0, ou, f(a) = ±∞ e g(a) = ±∞, então $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

Chave: A Derivada”, iniciando com “Como medir velocidade?”, e depois introduzindo o tema “limites”, em que não se detém muito.

Começar o ensino de CDI, em Matemática Aplicada à Engenharia I, por derivada, e depois ensinar limite de uma forma prescritiva, sucinta, como algo pronto e acabado, sem muito nos determos em seus saberes subjacentes, assumindo a continuidade como algo presente, mas não questionada, foi a forma que encontramos, para minimizar a problemática enfrentada em relação à redução do tempo de ensino que vivenciávamos.

A maneira de contornar o problema que se apresentava, levou-nos à seguinte reflexão: se assim é possível fazer, e se alguns livros textos, que epistemologicamente se constituem referenciais teóricos a professores, também o fazem, temos a seguinte questão de pesquisa: O que é que o objeto limite faz nesse curso? Em outras palavras, para que ele serve em outras disciplinas do curso de Engenharia Civil, além daquela que trata do CDI? Enfim: Quais são as funcionalidades de limite no curso de graduação em Engenharia Civil da UFPA?

As respostas a essas perguntas deveriam ser convincentes, no sentido de que limite tem aplicabilidade no curso considerado, não somente nas tarefas da disciplina Matemática Aplicada à Engenharia I, mas também em outras, como ocorre com a derivada e a integral, caso contrário, ficaria caracterizada a dispensabilidade do seu ensino, o que poderia decretar sua “morte” como saber a ser ensinado, afinal, a não ser por puro diletantismo, para que se ensinar algo que não se justifica no lugar de ensino em que “vive”?

Em razão do pouco tempo disponível para o ensino da disciplina Matemática Aplicada à Engenharia I, para nós, o tema limite apresentou-se como o mais suscetível às adaptações transpositivas que se impunham, tornando-se, por essa razão nosso objeto matemático de pesquisa. Dessa forma, não seria por conta das dificuldades de seu ensino, nem de sua aprendizagem, como comumente é recorrente em pesquisas de Educação Matemática, mas devido às suas funcionalidades, suas razões de ser, em uma instituição de ensino, ou seja, por conta de sua ecologia no ambiente em que vive, e que é utilizador da matemática. Isso de que tratamos deve se revelar pelas práticas do curso de bacharelado em Engenharia Civil da UFPA, inclusive naquelas da disciplina que substituiu o Cálculo I.

2 PROBLEMA DIDÁTICO

Para nós a questão de pesquisa estava delineada, no sentido de que nos dispúnhamos investigar a “vida” do objeto limite em um curso de Engenharia Civil, o que se daria por meio de suas práticas, seus modos de vida, suas funcionalidades praxeológicas, que lhes dão razões de ser nessa instituição, precisávamos, no entanto, nos aprofundar na problemática, procurando saber inicialmente: Onde esse problema se situa? Como surgiu? Como pode evoluir?

No nível pedagógico, que determina os saberes a serem ensinados em um curso de graduação de uma instituição de ensino superior brasileiro, é representado pelo Projeto Pedagógico de Cursos (PPC), como instrumento normativo que firma suas diretrizes acadêmicas. Mas o que são esses objetos, de onde vêm, e o que dizem a respeito da disciplina em que o objeto limite é um dos temas a ser ensinado?

Todas as Instituições de Educação Superior do Brasil (IES) têm que possuir um Plano de Desenvolvimento Institucional (PDI), de duração plurianual, com a missão institucional em seu sentido *lato*, além das metas e projetos para o período determinado. Articulado a esse Plano, há um Projeto Pedagógico Institucional (PPI), em que se estabelecem a missão em seu sentido *stricto*, a vocação, os objetivos e princípios educacionais da Instituição. Com base nesses documentos, são elaborados os Projetos Pedagógicos dos Cursos (PPC), que se materializam junto a professores e alunos, principalmente, a partir de seus componentes curriculares, ementas das disciplinas, com seus objetivos, competências e habilidades a alcançar e referências bibliográficas, que são elaborados de modo a atender às Diretrizes Curriculares Nacionais emanadas pelo Ministério da Educação.

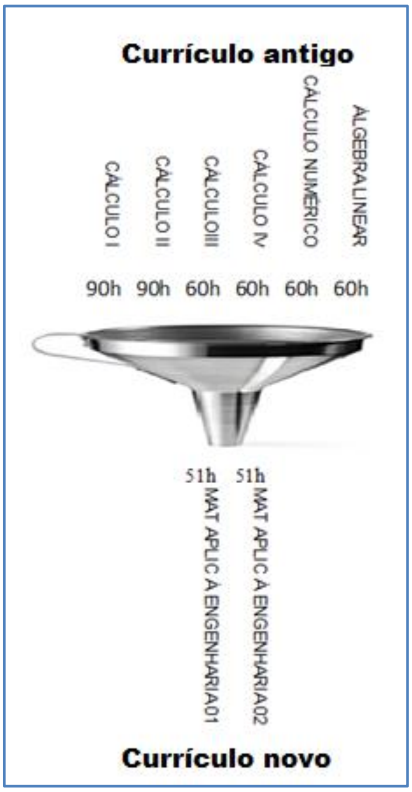
O atual PPC de Engenharia Civil da UFPA[3], Campus de Belém, foi aprovado pela Resolução nº 3.902 do Conselho Superior de Ensino e Pesquisa (CONSEPE), em 21 de setembro de 2009 e promoveu mudanças significativas em relação ao conjunto de disciplinas com matemática, ou seja, aquelas que originalmente eram “ofertadas pelo então Departamento de Matemática. Cálculo I, em que o objeto limite apresenta-se pela primeira vez para o graduando do curso, e Cálculo II com 90h

---

[3] Disponível em: http://www.ufpa.br/sege/boletim_interno/downloads/resolucoes/consepe/2009/Microsoft%20Word%20-%203902.pdf

semestrais cada (correspondentes a seis horas de aulas semanais), Cálculo III, Cálculo IV, Cálculo Numérico e Álgebra Linear com 60h semestrais cada (correspondentes a quatro horas de aulas por semana), foram substituídas por Matemática Aplicada à Engenharia I e Matemática Aplicada à Engenharia II, cada uma com 51h semestrais (correspondentes a três horas de aulas semanais)[4]. A Figura 01 sintetiza esta situação.

FIGURA 01 - Disciplinas com Matemática no curso de Engenharia Civil da UFPA



Fonte: Elaborada pelo autor

A analogia ao funil se dá em razão de seis disciplinas com matemática, transformaram-se em duas e o tempo didático ter reduzido de 420 para 102 horas. Em nossa opinião, houve um “afunilamento”.

As equivalências de disciplinas constam nos anexos do atual PPC de Engenharia Civil da UFPA, e o quadro 01; a seguir; apresenta a existente entre Cálculo I e Matemática Aplicada à Engenharia I:

[4] Antes a quantidade de aulas semanais era calculada dividindo-se o total das aulas do semestre por 15, hoje, divide-se por 17.

QUADRO 01 – Equivalência entre componentes curriculares

SITUAÇÃO ANTERIOR Resolução 2.761/2001/CONSEP	SITUAÇÃO ATUAL Resolução 3.902/2009/CONSEPE
EN-01068 Cálculo I – 90h	EN01197 Matemática Aplicada à Engenharia I – 51h

Fonte: PPC de Engenharia Civil da UFPA

Essas modificações curriculares no PPC de Engenharia Civil tornam-se interessantes em termos de pesquisa em Didática da Matemática, cujos resultados, entre outros benefícios, podem auxiliar o professor a compreender problemáticas como a que nos foi imposta e responder a dois questionamentos: o quê? E como? As questões e temas devem ser ensinados.

O que ensinar é uma das prescrições do PPC, através de suas ementas, e, para melhor entendimento da problemática por nós abordada. A seguir, apresentamos o quadro 02, com os temas das ementas de Cálculo I e de Matemática Aplicada à Engenharia I, nos dois últimos PPC de Engenharia Civil da UFPA.

QUADRO 02 - Temas de Cálculo I e de Matemática Aplicada à Engenharia I

Cálculo I	Matemática Aplicada à Engenharia I
1. Números reais; 2. Funções; 3. Limite; 4. Derivada; 5. Integral.	1. Aplicativo computacional; 2. Funções; 3. Limites; 4. Derivada; 5. Integrais; 6. Operações com Matrizes.

Fonte: Adaptado do PPC de Engenharia Civil da UFPA

Como é possível observar no quadro acima, a disciplina Matemática Aplicada à Engenharia I possui dois temas, o primeiro e o último, que não se encontram entre os de Cálculo I. A ausência de números reais entre os saberes a ensinar em Matemática Aplicada à Engenharia I, denota um certo negligenciamento teórico do CDI, uma vez que os demais temas desse setor da análise matemática têm nesse saber a sua primordial fundamentação.

Antes de tratarmos do como ensinar, que se dará a partir das compreensões desta pesquisa, necessitávamos caracterizar um problema didático e suas formas de pesquisá-los, para então decidirmos sob que ótica focaríamos nossa questão de pesquisa.

2.1 Dimensões de um problema didático

Para Barquero, Bosch e Gascón (2013, p.3), pesquisadores do Programa Epistemológico em Didática da Matemática, uma pesquisa em Educação Matemática deve se dar a partir da existência de um problema docente que a justifique. Problema esse, entendido como aquele que se depara um professor ao ter que ensinar um tema matemático aos seus alunos. Segundo esses autores, esse problema é o P_0 do esquema heurístico representado por

$$\{[(P_0 \oplus P_1) \hookrightarrow P_2] \hookrightarrow P_3\} \hookrightarrow P_\delta$$

em que P_1 é a dimensão epistemológica, P_2 a dimensão econômica, P_3 a dimensão ecológica e P_δ o problema didático propriamente dito, entendido como aquele que diz respeito ao ensino e à aprendizagem de Matemática. (GASCÓN, 2011, p. 205; BARQUERO, BOSCH E GASCÓN, 2013, p. 2)

Para esses autores, P_0 é o possível ponto de partida para uma investigação científica em Didática da Matemática, é a problemática inicial, configurada “de certa forma pré-científica”, também vista como “problema docente”, e o símbolo $\oplus$ refere-se a sua incompletude, no sentido de que, para estabelecer-se como um problema didático, há necessidade de ter, pelo menos, a dimensão epistemológica P_1. Esclarecem ainda que o símbolo $\hookrightarrow$, não significa inclusão, mas uma hierarquização, no sentido de que a dimensão P_{i+1}, mesmo que não explicitamente, necessita da dimensão P_i que a precede. Assumimos a validade desse modelo para introduzir a problemática de nossa pesquisa, tendo, nesse caso, para P_0 uma situação real por nós vivenciada.

O nosso P_0 se deu a partir da nossa prática docente, aqui entendida não somente como a que se efetiva exclusivamente em sala de aula, mas como o conjunto das nossas atividades na posição de professor de Matemática, incluindo o conhecimento e participação na elaboração e execução de projetos pedagógicos, preparação e efetivação dos planos de curso e de aula e, também, naturalmente, a vivência em classe. Além disso, contribuíram também para o entendimento de nossa problemática o fato de, em outras ocasiões, termos nos situado nas posições de aluno e de professor do curso de graduação em que realizamos esta pesquisa.

Como nos propusemos investigar a “vida” de limite em um curso de engenharia, dentre as três dimensões de um problema didático, prescritas por

Barquero, Bosch e Gascón (2013), sem olvidarmos das demais, elegemos a ecológica para focar nesta pesquisa, pois é a que diz respeito, mais de perto, às praxeologias pertinentes às razões de ser de um objeto matemático na instituição em que “vive”; onde buscaremos saber que condições permitem o seu viver e quais restrições dificultam sua subsistência, em outras palavras, pretendemos, por meio das práticas em que se apresenta, investigar como se dão os seus modos de “vida”.

Nos dispusemos pesquisar o desenvolvimento lógico de um saber matemático, procurando entender sua epistemologia, suas razões de ser, que condições dispõe, e que restrições se impõem, em seus processos transpositivos no local onde “vive”, ou seja, tratemos da sua ecologia, perpassando pelas dimensões epistemológica (indispensável a todo problema didático) e econômica-institucional (que antecede e imbrica-se com a ecológica), que serão brevemente abordadas a seguir, com destaque para pesquisas relativas a limite.

2.1.1 Dimensões epistemológica e econômica-institucional de um problema didático

Para Almouloud (2010, p. 156), a análise epistemológica tem por base o desenvolvimento histórico, permitindo identificar as diferentes formas de concepções de um determinado objeto matemático que poderão favorecer a análise didática. Barquero, Bosch e Gascón (2013) indicam que a dimensão epistemológica se faz importante e presente em todo e qualquer problema didático, pois é nela que buscamos entender:

a) A amplitude do âmbito matemático para situar nosso problema didático;
b) Os tipos de problemas oriundos a partir da problemática;
c) As tentativas de abordar e até mesmo solucionar tal problemática;
d) Quais as razões de ser desse objeto matemático e da problemática do seu ensino.

Mesmo nos atendo mais à dimensão ecológica, os entendimentos dos aspectos da dimensão epistemológica (P_1) se fizeram necessários e importantes na compreensão da problemática por nós pesquisada. Verificamos que as epistemologias do objeto matemático limite e do seu ensino, foram investigadas por diversos autores, que se detiveram em busca de pelo menos um dos entendimentos citados anteriormente. Lembrando que as abordagens dos mesmos podem não ser exclusivamente sob a dimensão epistemológica, passaremos em seguida a destacá-las.

Cornu (1983), Sierpinska (1985), precursores no estudo da problemática, trataram-na sob a ótica de obstáculos, cujo conceito na Didática da Matemática foi introduzido por Guy Brosseau, que imputando a ideia inicial do termo a Bachelard (BROUSSEAU, 1998, p. 5), deu-lhe outra conotação e os classificou como sendo de natureza: ontogênica, epistemológica e didática.

Obstáculos de <u>natureza ontogênica</u> são aqueles decorrentes dos aspectos cognitivos, como por exemplo, os oriundos de limitações neurofisiológicas; os de <u>natureza epistemológica</u> são inerentes à constituição do respectivo saber e que podem ser encontrados na história dos próprios conceitos; os de <u>natureza didática</u>, exemplificados por Brousseau (1998, p. 8) através da representação atual de números decimais no nível elementar, são por ele conceituados como obstáculos que "parecem depender apenas de uma escolha ou de um projeto do sistema educativo"[5], em suma: obstáculos didáticos de natureza didática são aqueles que surgem a partir de determinadas opções ou estratégias adotadas no processo que Chevallard chamou de Transposição Didática.

Cornu (1983) destacou os seguintes obstáculos relativos a limite:

> a) A transposição numérica no que diz respeito à capacidade de abstração do contexto geométrico e cinemático;
> b) Aspectos metafísicos no que ele chama de "vertigem ao infinito";
> c) A noção do infinitamente pequeno e do infinitamente grande;
> d) A noção de que limite não pode ser alcançado;
> e) A convergência monótona.

Sierpinska (1985), por sua vez, enfatizou os seguintes:

> a) Horror ao infinito;
> b) Obstáculos relativos ao conceito de função;
> c) Obstáculos geométricos, em que limite não poderia ser visto como um quadro de aproximação numérica;
> d) Obstáculos lógicos; e
> e) Obstáculos provenientes da simbologia.

Como obstáculo, Artigue (1995) também tratou desse tema destacando que eles aparecem no ensino de limite e podem se constituir em uma barreira intransponível, uma vez que

---

[5] *semblent ne dépendre que d'un choix ou d'un projet du système éducatif.*

> Vários trabalhos mostram em particular que este obstáculo não se pode erradicar tão facilmente como se poderia pensar que o faça um ensino que esteja atento a encontrá-lo, em particular no concernente à restrição de convergência monótona. De fato esta concepção se reforça com a prática: a maior parte das sucessões estudadas são monótonas a partir de um certo intervalo, ou se pode separar em subseções que são. E ainda enunciam que a convergência não é necessariamente monótona, os estudantes não podem deixar de pensar que uma sucessão positiva que tende a 0 deve ser decrescente a partir de um intervalo, ou que a derivada de uma função derivável que tem uma assíntota horizontal no infinito deve ter um limite nulo. (ARTIGUE, 1995, p. 111)[6]

Aos posicionamentos desses pesquisadores somam-se os de brasileiros que também evidenciaram obstáculos de aprendizagem no ensino de limite, como por exemplo de Zuchi e Gonçalves (2003), que ilustram essa realidade a partir de situações vivenciadas por estudantes de cursos tecnológicos, em que concluem:

> os obstáculos estão presentes na aprendizagem do conceito de limite. Esses obstáculos são, na maioria das vezes, responsáveis pelas barreiras que os estudantes enfrentam em sua vida acadêmica, principalmente, para os alunos das ciências exatas e afins. (ZUCHI e GONÇALVES, 2003, p. 9)

Zuchi (2005, p. 7) em outra pesquisa que visava “realizar um estudo sobre as dificuldades de ensino-aprendizagem do conceito de limite e propor alternativas para minimizá-las”, aborda a temática via sequência didática, realizando uma revisão nos trabalhos de autores que trataram dessa problemática sob a ótica de obstáculos didáticos, e destaca:

> Apesar de sua grande importância, o conceito de limite muitas vezes constitui-se o grande gargalo do ensino de cálculo. Muitos alunos saem de um curso de cálculo sem entendê-lo e nem sequer relacionar com derivada e integral, que são, geralmente, os conceitos adjacentes, apresentados nos livros didáticos e na grade curricular. (ZUCHI, 2005, p. 7)

A pesquisa de Zuchi (2005) nos pareceu relevante não somente pela abordagem quanto aos obstáculos que surgem no ensino e aprendizagem de limite, quanto pelas dimensões epistemológicas desse objeto matemático na sua “Síntese

---

[6] *Varios trabajos muestran en particular que este obstáculo no se puede erradicar tan fácilmente como podría pensarse que lo hiciera una enseñanza que esté atenta a encontrarlo, en particular en lo concerniente a la restricción de la convergencia monótona. De hecho, esta concepción se refuerza con la práctica: la mayor parte de las sucesiones estudiadas son monótonas a partir de un cierto rango, o se pueden separar con libertaden sub-sucesiones que sí lo son. Y aunque enuncien que la convergencia no es necesariamente monótona, los estudiantes no pueden dejar de pensar que una sucesión positiva que tiende a 0 debe ser decreciente a partir de un rango, o que la derivada de una función derivable que tiene una asíntota horizontal en el infinito debe tener un limite nulo.*

Histórica da Construção do Conceito de Limites”, e no “Ensino do Conceito de Limite na Ótica dos Livros Didáticos”, além da dimensão econômica que se evidencia no “Desenvolvimento da Sequência Didática num ambiente computacional” do qual trata a autora.

Concluindo seu relatório, Zuchi (2005, p. 206), relembra que sua proposta inicial era de que “havia um obstáculo no ensino-aprendizagem do conceito de limite”, destacando que suas hipóteses foram validadas e que

> Os pontos relativos ao obstáculo do conceito de limite ao longo do desenvolvimento histórico evidenciaram que, desde os paradoxos de Zenão à formalização de Weierstrass, foram necessários mais de 2500 anos de história para formalizar o conceito de limite tal como é atualmente, conhecido e aceito pela comunidade científica. Esses obstáculos se fizeram presentes nas etapas do refutamento do infinito, na crise dos incomensuráveis, na inclusão dos infinitesimais e no desenvolvimento da transparência das regras e dos fundamentos teóricos. (ZUCHI, 2005, p. 206)

Essa última afirmação nos parece referendar o porquê de pesquisas a respeito da problemática do ensino e aprendizagem de Cálculo de um modo geral, e particularmente do tema limite, comumente remontarem-se epistemologicamente a aspectos históricos da constituição desses saberes.

Concordamos com a autora quanto à necessidade do entendimento dos desenvolvimentos históricos dos objetos de pesquisa, corroborando com um importante aspecto da dimensão epistemológica já comentado. Igual modo de pensar pode ser verificado também em Brolezzi (1996), Reis (2001), Celestino (2008), Lira (2008), Guerra (2012) e Santos (2013), dentre outros, que em seus relatórios, epistemologicamente levaram em consideração os aspectos históricos.

Ainda na linha epistemológica, a pesquisa de Celestino (2008) teve por objetivo “investigar as concepções de alunos do ensino superior sobre limite e imbricações entre obstáculos epistemológicos relacionados a essas concepções” (CELESTINO, 2008, p. 7). Dentre as imbricações, julgadas por Celestino (2008) como bastante significativas, estão os obstáculos:

> a) de saber se o "limite... atinge ou não" certo valor;
> b) de associar o limite a um movimento físico;
> c) ocasionado pelo símbolo Lim; e
> d) dos significados dos termos cotidianos, que influenciam as percepções dos estudantes sobre esses termos em um contexto matemático. (CELESTINO, 2008, p. 170)

A revisão bibliográfica de Santos (2013) cita as contribuições de Cornu e Sierpinska na linha epistemológica sobre os obstáculos na aprendizagem de limite, assim como as de Jordaan (2005), Juter (2006) e Guerra (2012) a nível internacional, além das de Barufi (1999), Amadei (2005), Celestino (2008), Lira (2008), Barros (2008) e Amorim (2011), dentre outros, a nível nacional, apresentando, epistemologicamente, um diálogo com a história, focando o conceito de limite como objeto matemático em livros didáticos, por meio da análise das praxeologias didáticas de quatro obras de autores nacionais.

Entendemos que os livros didáticos são instituições que compõem epistemologicamente o ensino e a aprendizagem, e corroboramos com a importância que se deva dar aos mesmos, como fizeram Barufi (1999), Zuchi (2005) e Santos (2013), razão pela qual também apresentaremos nosso entendimento de obras no tocante à ecologia didática de nossa pesquisa, procurando nelas identificar os modos de vida do objeto limite.

Em seguida, trataremos da dimensão econômica (P_2) do nosso problema didático, lembrando que para a TAD, ela gira em torno da relação da atividade matemática com as instituições envolvidas nos processos transpositivos institucionais, sendo por essa razão denominada de econômica-institucional. Essa dimensão, comumente busca responder como as organizações matemáticas (OM) e as organizações didáticas (OD) funcionam em uma determinada instituição.

Apesar de a dimensão econômica-institucional não se constituir em um modelo de análise específico em nossa pesquisa, ela permeará a dimensão ecológica que miramos, uma vez que o “nascimento”, a “vida” e a possibilidade de “fenecimento” e/ou “ressurgimento”, que procuraremos enfocar, imprescindem das condições econômicas-institucionais.

Ainda tomando por base o exposto por Gascón (2011) e Barquero, Bosch e Gascón (2013), a dimensão econômica-institucional, dentre outros fatores, deve evidenciar:

> a) Os âmbitos institucionais considerados;
> b) As características de determinadas OM e as OD associadas em uma instituição no período histórico considerado;
> c) Como se consideram e como se interpretam os sujeitos das instituições envolvidas relativas ao objeto pesquisado;
> d) Que práticas matemáticas podem existir em uma determinada instituição em relação a uma atividade matemática;

> e) Qual o modelo epistemológico das matemáticas e o modelo didático associado dominante na instituição;
> f) Quais as dificuldades que surgem ao se tentar modificar as OD em uma determinada instituição.

Apresentaremos agora algumas pesquisas relativas ao objeto por nós pesquisado, que dentre suas abordagens, mesmo que não explicitamente, referem-se à dimensão econômica-institucional da problemática do ensino e da aprendizagem de limite de uma função, por apresentarem uma, ou mais, das evidências acima citadas.

Segundo Baldino (1995, p. 25), os Cálculos "São as disciplinas internacionalmente reconhecidas como as de maior dificuldade para os alunos, onde os índices de reprovação são os mais altos", o que é corroborado por Artigue (1995) ao destacar:

> as dificuldades de acesso ao cálculo são de diversas índoles e se imbricam e reforçam mutualmente em redes complexas. Portanto, é possível reagrupá-las em grandes categorias, isto é o que faremos nesta seção ao examinar sucessivamente três grandes tipos de dificuldades:
>
> 1ª) Aquelas associadas com a complexidade dos objetos básicos do cálculo (números reais, sucessões, funções) e ao fato que estes objetos se conceitualizam plenamente quando se inicia o ensino de cálculo, que contribuirá fortemente a tal conceitualização;
>
> 2ª) Aquelas associadas à conceitualização e à formalização da noção de limite, centro do campo do cálculo;
>
> 3ª) Aquelas vinculadas com as rupturas necessárias com a relação aos modos de pensamento puramente algébricos, muito familiares, e às especificidades do trabalho técnico no cálculo. (ARTIGUE, 1995, p. 107)[7]

O segundo tipo de dificuldade elencado por essa autora, encontra-se estritamente relacionado com os demais, e aponta para a problemática por nós pesquisada, sendo recorrente em educação matemática, mas comumente investigando caminhos para a melhoria do seu ensino e de sua aprendizagem, para

[7] *Las dificultades de acceso al cálculo son de diversa índole y se imbrican y refuerzan mutuamente en redes complejas. Por lo tanto es posible reagruparlas en grandes categorías. Esto es lo que haremos en este apartado al examinar sucesivamente tres grandes tipos de dificultades:*
1ª) Aquellas asociadas con la complejidad de los objetos básicos del cálculo (números reales, sucesiones, funciones) y al hecho de que estos objetos se conceptualizan plenamente cuando se inicia una enseñanza del cálculo que va a contribuir de forma fuerte a tal conceptualización;
2ª) Aquellas asociadas a la conceptualización y a la formalización de la noción de límite, centro del campo del cálculo;
3ª) Aquellas vinculadas con las rupturas necesarias con relación a los modos de pensamiento puramente algebraicos, muy familiares, y a las especificidades del trabajo técnico en el cálculo.

enfrentar o baixo aproveitamento escolar dos alunos. Em seguida, destacaremos algumas pesquisas e seus enfoques.

Juter (2006), em sua tese de doutoramento, teve como objetivo responder à pergunta "Como os estudantes lidam com o conceito de limite no nível universitário básico na Suécia?"[8], apresentou uma coletânea de 6 (seis) artigos seus a respeito da problemática:

> 1º) *Limits of functions – how do students' handle them?* -verifica como os alunos lidam com o conceito de limite;
>
> 2º) *Limits of functions – traces of students concept images* - enfatiza que os conhecimentos prévios dos alunos não são suficientes para a compreensão do conceito de limite;
>
> 3º) *Students' Attitudes to Mathematics and Performance in Limits of Functions* - infere a respeito das atitudes dos alunos para resolver tarefas envolvendo o tema limite;
>
> 4º) *Limits of Functions as They Developed Through Time and as Students Learn Them Today* - aborda a evolução do conceito de limite;
>
> 5º) *Limits of functions – Students' solving tasks* - investiga especificamente a resolução de tarefas relativas a limite e
>
> *6º) Limits and Infinity - A Study of University Students' Performance* - trata do conhecimento de limite e infinito, por meio de um estudo de desempenho de estudantes.

As pesquisas dessa autora enfocam as dimensões epistemológicas, mas não somente essas, atendo-se também às dimensões econômica-institucional (por exemplo no 3º e 6º artigos) e também à ecológica (como, por exemplo, no 4º artigo).

No Brasil, tal preocupação também se dá há algum tempo. Barufi (1999) ao analisar dados do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo (USP), enfatiza que "de fato, verificamos que no ano de 1995, a taxa de não aprovação, isto é, reprovação por nota ou falta, ou desistência - em MAT 135 (Cálculo para funções de uma variável real) foi de 66,9%" (BARUFI, 1999, p. 14). Outros artigos, dissertações e teses nacionais indicam que o Censo da Educação Brasileira, publicado pelo Ministério da Educação e Cultura–MEC, apontava que o índice de reprovação e abandono do ano 2000, nos cursos iniciais de cálculo nas universidades brasileiras era de aproximadamente de 80%[9].

---

[8] *How do students deal with the concept of limits of functions at the basic university level in Sweden?*

[9] Os artigos, dissertações e teses que apontam esse índice, indicam como fonte da informação o endereço eletrônico http://www.inep.gov.br/download/censo/2000/Superior/SinopseSuperior-2000.pdf,

Outro enfoque econômico-institucional por nós identificado encontra-se em Barros (2008, p. 4) que, a partir de um estudo de caso, objetivou verificar a utilização de “metáforas e recursos multimídia na elaboração de material didático de cálculo, visando a melhoria do processo de ensino e aprendizagem desta disciplina”, concluindo que os resultados dessa pesquisa também mostraram que o emprego das metáforas permite uma maior compreensão e maior confiança no aprendizado por parte dos alunos, possibilitando, muitas vezes, que demonstrações formais fiquem em segundo plano no processo de ensino. (BARROS, 2008, p. 120)

2.1.2 Dimensão ecológica de um problema didático

A dimensão econômica-institucional (P_2), permeia a dimensão ecológica (P_3), uma vez que o “nascimento”, a “vida” e a possibilidade de “fenecimento” e/ou “ressurgimento”, imprescindem das condições econômicas. Isso é destacado por Gascón (2011) e Barquero, Bosch e Gascón (2013), quando dizem que a dimensão ecológica, dentre outros fatores, deve evidenciar:

> a) Quais são as condições que permitem dar conta do estado atual (ou de um certo período histórico) das OM e das respectivas OD, em uma determinada instituição;
> b) Que restrições dificultam, ou impedem, que determinadas características das OM e das OD se desenvolvam em uma instituição, e em quais níveis de hierarquias surgem essas restrições;
> c) Que condições deveriam se instaurar, e em que níveis de hierarquia, para que seja possível a vida de certas OM e OD;
> d) Qual o modelo epistemológico específico dominante no âmbito da atividade matemática em uma instituição, e como ele condiciona a forma de se organizar o ensino (e o estudo de um modo mais geral) desse âmbito institucional?

Essas evidências de que falam esses autores, foram por nós pesquisadas com o enfoque ecológico, no sentido de situar, em termos da Didática da Matemática, os *habitat* e *nicho* do objeto matemático por nós investigado no ecossistema de ensino que consideramos. Os termos destacados neste parágrafo serão conceituados ao tratarmos dos aspectos ecológicos desta pesquisa.

---

que hoje não é mais disponibilizado. Os censos da educação brasileira hoje se encontram, no endereço http://censosuperior.inep.gov.br (acesso em 16 de fevereiro de 2012) com informações de 1980 a 2007. Os censos ora disponibilizados, mesmos os mais antigos, não apresentam dados de aprovação e reprovação em disciplinas.

A dimensão ecológica da nossa problemática, também mostrou-se a partir das modificações processadas nos livros textos oficiais de CDI, que passaram a se apresentar de forma distinta das que antes se tinha. As transformações tornaram-se mais comuns a partir do que se chamou de Reforma do Cálculo[10], a qual descreveremos brevemente.

O movimento de Reforma do Currículo de Cálculo iniciou nos Estados Unidos nos anos 80 (oitenta) do século passado, segundo seus precursores, em razão do desinteresse dos professores em ensinar e dos estudantes em aprender, aliada à alta taxa de não aprovação (que chamamos de reprovação). Além dessas razões destacaram também a falta de compreensão dos alunos, especialmente quando se pedia para utilizar um conhecimento ministrado em sala de aula em outra situação que não lhes fosse familiar. (SOLOW, 1994)

No ensino superior daquele país, faculdades que ministravam cursos distintos dos de Matemática, queixavam-se de que seus estudantes não conseguiam aplicar conceitos matemáticos que lhes tinham sido ensinados. Havia casos em que a transposição desse saber para outras instituições levava os alunos a utilizarem conhecimentos de forma distinta de como eles eram tratados na instituição matemática, produzindo dificuldades nas devidas conexões. Citaram a esse respeito, tarefas comuns à otimização (minimização de custos, maximização de lucros, etc...), que no ecossistema da Matemática utilizavam técnicas algébricas, enquanto nos dos cursos de Economia e de Administração, por exemplo, eram tratados na forma gráfica.

Para justificar a necessidade da reforma, seus precursores declararam também que muitos alunos chegavam aos cursos superiores com a crença de que a matemática era centrada fundamentalmente em técnicas de manipulação, em vez de focar na interpretação e compreensão de como utilizá-la em situações não acadêmicas. Segundo seus relatos, os estudantes da época tinham dificuldades em enxergar a possibilidade da Matemática unir campos de distintos saberes.

Por esses tempos, as calculadoras eletrônicas e os computadores pessoais já eram realidades e presumiam que no novo milênio que se anunciava, evoluiriam

[10] *Calculus Reform*

bastante e teriam a utilização popularizada, devendo a reforma prever o ensino de Matemática com uso desses recursos.

O acesso ao ensino superior americano comumente se dava por meio de seleções que privilegiavam a educação geral, com reduzida exigência quanto aos temas e questões matemáticas e nem todos os estudantes seriam profissionais utilizadores da Matemática em suas vidas laborais. Na ocasião, estimava-se que 700.000 (setecentos mil) estudantes americanos estavam matriculados em cursos de Cálculo, desses, 100 mil em cursos avançados de escolas de ensino médio, 125.000 em faculdades com cursos de dois anos de duração, e o restante em cursos de quatro anos em faculdades ou universidades. Verificaram que apenas uma pequena porcentagem dos estudantes tinha a intenção de ter um maior conhecimento matemático, progredindo a partir de uma pós-graduação para tornar-se um matemático (na ocasião correspondiam a um percentual estimado em apenas 2%).

Tais constatações motivaram diversas iniciativas que pretendiam promover modificações no ensino de Matemática. Em 1988 a Fundação Nacional de Ciência[11] deu início ao Desenvolvimento dos currículos de Matemática: programa de Cálculo para apoiar o desenvolvimento do curso em Cálculo[12] (SOLOW, 1994, p. vii). Esse Programa financiou diversos projetos, destacando-se entre eles o Movimento da Reforma do Cálculo[13], as implementações do Conselho Nacional de Professores de Matemática - NCTM[14] e o do movimento Matemática Discreta e Iniciativas de Tecnologias Educacionais[15].(SOLOW, 1994, p. vii).

A Reforma do Cálculo propriamente dita foi lançada oficialmente na conferência realizada na Universidade de Tulane em New Orleans no ano de 1986, com as seguintes conferências “Para um Cálculo leve e interessante” e “Cálculo

---

[11] *National Science Foundation*

[12] *Curriculum development in Mathematics: Calculus program to support course development in calculus*

[13] *Reform Calculus*

[14] NCTM (*National Council of Teachers of Mathematics)* fundado em 1920, é tido como o maior congregador de professores de Matemática do mundo, com mais de 80.000 membros, e apresenta-se como a voz pública da educação matemática de apoio aos professores, para garantir uma aprendizagem equitativa da matemática da mais alta qualidade para todos os alunos, através de visões de liderança, desenvolvimento profissional e de pesquisa– *Principles and Standards for School Mathematics* do NCTM. Disponível em http://www.nctm.org/standards/content.aspx?id=16909

[15] *Discrete mathematics and educational technology initiatives*

para um novo Século"[16]. Essa Reforma na mesma medida que modificou realidades, por elas foi modificada.

A Fundação Nacional de Ciência americana providenciou condições para que em abril de 1993, na Universidade de Illinois fosse realizada a conferência "Preparando para um novo Cálculo", onde projetos, iniciativas e relatos de experiências foram apresentados. A ata da conferência foi organizada por Anita Solow, e publicada na nota de número 36 da MAA - Associação Matemática da América[17]. Nela constam os objetivos e outros escritos a respeito da Reforma do Cálculo. A ocasião contou com a presença de representantes da MAA, do NCTM (Conselho Nacional de Professores de Matemática), da MAS (Sociedade Americana de Matemática)[18], da AMATYC (Associação Matemática de Faculdades de dois anos)[19], da NSF (Fundação Nacional de Ciência)[20] e da MSEB (Diretoria de Ensino de Ciências Matemáticas)[21], além de editores de livros textos. (SOLOW, 1994, p. vii).

A Conferência se desenvolveu através de 4 (quatro) workshops simultâneos em três períodos, com a participação de aproximadamente 20 (vinte) pessoas em cada um, que abordavam uma temática. Os "tópicos", os moderadores e os relatores desses workshops encontram-se no quadro 03:

QUADRO 03 – Workshops da Conferência Preparando para um novo Cálculo

Tópico	Moderador(a)	Relator(a)
Conteúdo	Deborah Hughes Hallett	Sheldon Gordon
Estratégias de ensino	John Dossey	Donald Bushaw
Contexto Institucional	Lee Yunker	Susanna Epp
Contexto do curso	Carolyn Mahoney	John Mc Connell

Fonte: (SOLOW, prefácio, p. x)

Nessa conferência relataram como nos Estados Unidos o ensino de Cálculo era visto antes da reforma, quando se teria:

a) Foco na manipulação algébrica;
b) Livros com intensa abordagem conceitual e abstrata;
c) Muitos problemas apresentados eram ditos "pseudo-reais".

[16] *Toward a lean and lively Calculus and Calculus for a New Century*
[17] *Mathematical Association of America,* criada em 1915
[18] *American Mathematical Society,* criada em 1888
[19] *American Mathematical Association of Two-Year Colleges,* criada em 1974
[20] *National Science Foundation* - instituição federal independente, criada pelo congresso Americano em 1950 para financiar projetos educacionais.
[21] *Mathematical Sciences Education Board* - criada em 1985, órgão de publicações de pesquisas.

Enquanto o novo Cálculo deveria:

a) Reduzir o cálculo algébrico;
b) Conectar a teoria e os problemas a situações reais;
c) Ter calculadoras gráficas e computadores como recursos atuantes no ensino e na aprendizagem;
d) Abordar temas e problemas em três perspectivas: algébrica (também denominada simbólica), numérica e gráfica.

As formas de abordar temas e questões deram origem ao que chamaram inicialmente de “Regra de Três”, com ampliação passou a ser descrita como “Regra de Quatro”, com a inserção de apresentações verbais/aplicadas (HUGHES-HALLETT, GLEASON, McCALLUM, et al, 2012, p. 2) e (STEWART, 2008, prefácio, p. xi). Dessa maneira, as formas de representação de funções seriam:

a) Verbal;
b) Algébrica;
c) Numérica;
d) Gráfica.

Na Conferência foram relatadas experiências de mais de 70 (setenta) projetos que já estavam em curso há pelo menos três anos e tiveram como um dos produtos a edição de novos livros, dentre os quais destacamos: ***Calculus:** single variable*, de autoria de Deborah Hughes-Hallett; Andrew M. Gleason e William G McCallum, et al do *Harvard Calculus Consortium*; ***Calulus:** early transcendentals*, de James Stewart, e ***Calculus:** Early Transcendentals Single Variable*, de Howard Anton, Irl Bivens e Stephen Davis. Esses livros apresentavam propostas diferenciadas para o ensino, com praxeologias distintas das que até então dominantes no ensino do CDI de funções de uma variável, onde o objeto limite “vive” ordinariamente.

Segundo Liu, Lin e Chen (2009), dentre todas as propostas apresentadas quando da Reforma do Cálculo a obra do *Harvard Calculus Consortium*, que deu origem ao livro de Hughes-Hallett e Gleason et al (2012), é a mais amplamente adotada, e que recebeu a maior atenção, razão pela qual essa obra passou a ser conhecida como “o livro de Harvard”[22].

No Brasil, autores como Paulo Boulos e Geraldo Ávila, chamavam à atenção quanto à problemática do ensino de limite de uma função em cursos universitários. O primeiro ao destacar que no tocante a limite, o tema pode “ou ser postergada, ou omitido, conforme o critério do professor” (BOULOS, 1974, p. 28), e o segundo

[22] *The Harvard Book* (MURPHY, 2006, p. 5)

quando afirma no prefácio de seu livro “Mas o Cálculo só inicia no capítulo 4, com o conceito de derivada”. (ÁVILA, 2008, prefácio, p. xv), referindo-se ao capítulo “Derivadas e limites”, onde introdutoriamente reforça:

> As noções de limite e continuidade são apresentadas neste capítulo de modo intuitivo, sem formalismo ou preocupações com o rigor, que seriam prematuras, iriam atrapalhar em vez de ajudar no aprendizado. Primeiro é preciso que o aluno se familiarize com a derivada e com vários exemplos de limites, apresentados intuitivamente. Só assim ele vai adquirindo maturidade, até encontrar-se em condições de bem entender o porquê da definição de limites em termos de épsilons e deltas...”. (ÁVILA, 2008, p. 61)

As modificações pelas quais passava a tradicional sequência do ensino do CDI (Limite, Continuidade, Derivada e Integral), evidenciadas nos livros textos, partícipes de nossa prática docente, fortaleceu ainda mais nosso P_0 como alvo de pesquisa que entendíamos merecedor de atenção para uma melhor compreensão. A seguir, passaremos a tratar da dimensão ecológica, a eleita, prioritariamente, para o olhar de nossa pesquisa.

2.1.2.1 Ecologia e seus principais termos

Na Grécia antiga, embora sem essa denominação, a ecologia já se fazia presente nas obras de Hipócrates, Aristóteles e outros filósofos (ODUM, 1988, p.1), no entanto, o termo “ecologia” só foi utilizado pela primeira vez em 1866, pelo biólogo Ernst Haeckel no livro *Generelle Morphologie der Organismen*, para designar a parte da biologia que estuda as relações entre os seres vivos e o meio ambiente. O domínio público desse termo é mais recente ainda, datando de 1967, quando um “navio derramou óleo ao longo da costa da Inglaterra e o mundo passou a conhecer, através da imprensa, os termos: acidente ecológico, desastre ecológico e catástrofe ecológica”. (COUTO, 2007, p. 25).

O termo ecologia está associado a um processo de luta em busca do necessário equilíbrio para sobrevivência em determinado contexto e, etimologicamente, procede da composição das palavras gregas *oikos*, que significa casa, e *logos*, com o significado de estudo racional (ODUM, 1988, p. 1). Trata-se, portanto, do estudo racional das relações existentes em torno da casa em que se vive, podendo-se considerar o termo “casa” como o ambiente de um modo geral, fazendo com que ecologia sirva para representar o estudo de ambientes específicos em que se vive, que, para fins de estudos, recebe o nome de <u>ecossistema</u>, termo este às vezes confundido com meio ambiente, que representa o conjunto de elementos bióticos (animais, plantas e microorganismos) e abióticos (luz, água, nutrientes e o meio ambiente) que se interrelacionam.

A <u>biocenose</u>, também denominada de <u>comunidade</u>, é constituída pela totalidade dos organismos vivos que fazem parte de um mesmo <u>ecossistema</u> que interagem entre si, correspondendo não apenas à reunião de indivíduos de uma mesma espécie (população) e/ou sua organização social (sociedade), mas também ao nível mais elevado da complexidade das relações existentes.

Além de ecossistema e das relações ecológicas em sociedade, população e comunidade, a ecologia possui outros dois termos bastante utilizados e primordiais para o seu entendimento, que são: <u>*habitat*</u> e <u>*nicho*</u>.

Habitat e *nicho* por tempos foram confundidos como sendo iguais, no entanto, a partir dos trabalhos do ecólogo inglês Charles Elton (1900 - 1991), que muito influenciaram no pensamento ecológico, esses termos passaram a ser vistos como distintos. Por *habitat* se compreende o lugar que um organismo ocupa em um dado ecossistema, ou seja, seu espaço de vida, seu “endereço”, enquanto *nicho* ecológico é a sua função no referido *habitat*, ou seja, o seu “modo de viver”. (ODUM, 1988, p. 254).

Em sentido amplo, nos dicionários de língua portuguesa comumente *nicho* se apresenta como um substantivo masculino, caracterizado por uma cavidade na parede para colocar estátua, urnas funerárias, imagens de santos ou ainda como o local onde comumente as aves colocam seus ovos para chocar, seus ninhos, o que só pode ocorrer mediante certas condições climáticas e de preservação contra predadores (idem). Em Amabis e Martho (1994, p. 339), encontramos que o conceito de *nicho* foi desenvolvido por Charles Elton no final da década de 1920, como ‘o conjunto de relações e atividades próprias de uma espécie, ou seja, o *modo de vida* único e particular que cada espécie explora no habitat’. Segundo esses autores, o conceito de nicho ecológico é abstrato e “engloba desde a maneira pela qual a espécie se alimenta até suas condições de reprodução, tipo de moradia, hábitos, inimigos naturais, estratégias de sobrevivência etc...” (idem), ou seja, seria o papel funcional de uma espécie em relação às outras espécies e ao seu ambiente físico.

O termo ecologia extrapolou os limites da biologia e passou a ser utilizado também por outras ciências, em 1992, o biólogo americano Eugene Pleasants Odum publicou na revista *Bioscience*, o artigo *Great ideas in Ecology for the 1990’s*, onde declarava que

> Por muitos anos, eu tenho apontado que a Ecologia é maior que uma subdivisão da biologia, mas tem emergido de suas próprias raízes biológicas para tornar-se uma disciplina separada que integra organismos e os ambientes físico e humano – Alinhado com oikos, raiz da palavra ecologia.[23](ODUN,1992, p. 542)

O relacionamento da ecologia com outras ciências, distintas da biologia, vem do início do século XX, tendo sido intensificado a partir dos anos de 1970 quando, por exemplo, o artigo *“The population ecology of organizations”* (HANNAN & FREEMAN, 1977), publicado no volume 82 do *American Journal Sociology*, relacionava a teoria ecológica com os estudos da administração, sob a denominação de “Ecologia Organizacional”, com a pretenção de identificar o motivo da existência de tanta diversidade de organizações administrativas. Essa aproximação inicial impulsionou outros relacionamentos com outras áreas do conhecimento.

Economia tem a mesma raiz etimológica de ecologia, em que o sufixo “*nomia”* significa manejo, gerenciamento, portanto, economia seria o gerenciamento da casa (*oikos*). Não é sem razão que em alguns estudos, como na Didática da Matemática, por exemplo, as dimensões econômicas e ecológicas andem próximas, às vezes uma com o sentido de *habitat* e a outra com sentido de *nicho*, outras o inverso. Silva (1978, p. 31) afirma que “o sucesso de qualquer sistema econômico depende em sua grande parte, da estabilidade ecológica”. A esse respeito Odum (1992, p.1) se posiciona afirmando que “Infelizmente, o ponto de vista de muitas pessoas é que os ecólogos e os economistas são adversários com visões antitéticas”.

Além do relacionamento da ecologia com as teorias da administração e com a economia, outros estudos a relacionaram a outras ciências, dentre os quais destacamos: Ecodesenvolvimento (SACHS, 1986), Ecolinguística (COUTO, 2007), Ecologia do Conhecimento (BICUDO, 2007). Outras atividades também passaram a

[23] *For many yars, I have contended that ecology is longer a subdvision of biology but has emerged from its roots in biology to become a separate discipline that integates organisms the physical environment, and humans – in line with oikos, roots of the Word ecology.*

se agregar a ecologia, como, por exemplo, em: Turismo Ecológico, Arquitetura Ecológica, Ecologia Médica, Ecologia da Dança, Ecologia da Informação, Ecologia Comportamental, Econegócios, Ecologia Cognitiva, Ecologia dos Saberes ou Ecologia do Conhecimento e Ecologia Didática. Para melhor compreeensão de nossa pesquisa destacaremos, em seguida, esses últimos três relacionamentos com a ecologia.

A Ecologia dos Saberes tem em Santos (2005) uma considerável referência, que a define como

> uma forma de extensão ao contrário, de fora da universidade para dentro da universidade. Consiste na promoção de diálogos entre o saber científico ou humanístico que a universidade produz e saberes leigos, populares, tradicionais, urbanos, camponeses, provindo de culturas não ocidentais (indíginas, de origem africana, oriental, etc...) que circulam na sociedade. (SANTOS,2005, p. 76)

A expressão “culturas não ocidentais” é evocada pelo autor como não provindas da academia e remonta à época dos impérios, quando havia um suposto predomínio cultural do ocidente. Tratavam-se de correntes de pensamento, dentre as quais a de que o universalismo era considerado como ideologia do ocidente, que se confrontava com as culturas ditas não ocidentais. Para deixar clara essa dicotomia, é comum a referência a esse assunto da seguinte forma: *os não-ocidentais viam como ocidental o que os ocidentais viam como universal*.

No início eram vistos como Oriente os países do Oriente Médio e Oriente Extremo, Sul e Sudeste da Ásia, Norte da África, dentre outros, hoje isso não mais existe e a divisão entre civilizações ocidentais e orientais não é geográfica e países como Estados Unidos, Canadá, México, Argentina, Japão, Israel, e Brasil, dentre outros, pertencem ao modelo de sociedade de cultura ocidental, que prima pela absorção de suas formas de pensar e agir sobre as outras sociedades mais frágeis, tentando impor seu ritmo, de ideologia e de desenvolvimento, às outras instituições sociais (escola, família, etc.), a arte, a religião, a linguagem, dentre outros domínios. (DOUGLAS, 1998, apud MACHADO 2011, p. 66).

Quanto ao *habitat* dessa ecologia, Santos (2008) estabelece que o lugar de enunciação da ecologia de saberes são todos os lugares onde o saber é convocado a converter-se em experiência transformadora.

A Ecologia do Conhecimento, com foco de interesses nos saberes advindo das práticas, assemelha-se com a Ecologia dos Saberes, e, segundo Almeida (2010, p. 150), "é o coração de uma ciência da complexidade tecida pacientemente por Morin[24]".

2.1.2.2 Ecologia didática

A relação da ecologia com os saberes matemáticos, por sua vez, é referenciada como Ecologia Didática, e, segundo Artaud (2008, p. 107),

> faz explicitamente sua entrada na Didática com uma tese defendida em 1988 por Rajoson (1988), intitulada: A análise ecológica das condições e das restrições no estudo dos fenômenos da transposição didática: três estudos de casos. [25]

A tese de doutorado de Landy Rajoson, a qual a autora se refere, foi defendida em 1988 na *Université d´Aix-Marselle II,* na França, sob a direção de Yves Chevallard, e os três estudos de casos buscavam responder às perguntas:

> 1ª) Por que o problema Moivre não aparece no ensino secundário?
>
> 2ª) Por que o processo de Heron para os cálculos de raízes quadradas, que vive muito bem hoje na noosfera do cálculo, é tão difícil encontrar na sala de aula?
>
> 3ª) Por que a "*symétrie glissante*"[26] é vista de passagem na escola secundário francesa?

A referida tese tomou por base as obras de Chevallard de um modo geral e mais especificamente a Teoria da Transposição Didática. Posteriormente, esse autor deu maiores destaques a essa relação

> Mas acontece que muitos comentaristas, detendo-se mais que em argumentos nos melindres ideológicos destas últimas décadas, não conseguiram entender que o carater acadêmico, ou não (ou semiacadêmico, etc...) dos saberes a ensinar, é uma condição crucial da ecologia didática dos saberes; que existe toda uma patologia didática especificamente associada ao carater mais ou menos não

---

[24] Edgar Morin pseudônimo de Edgar Nahoum, antropólogo, sociólogo e filósofo francês e um dos principais pensadores da Teoria da complexidade.

[25] *L'analyse écologique des conditions et des contraintes dans l'étude des phénoménes de transposition didactique: trois études de cas.*

[26] Simetria deslizante ou de escorregamento.

> sábio do saber que fora eleita como homônima.[27] (CHEVALLARD, 2013, p. 163)

que continua sendo explorada em âmbito internacional nas suas obras e nas de Artaud (1997 e 2008) e de Barquero, Bosch e Gascón (2007 e 2010).

A Ecologia Didática, ao tratar de um dado saber, diz respeito aos questionamentos sobre a sua real existência, ou inexistência, ou possibilidades de ressurgir, na instituição onde se instala, ou instalou, ou seja, sobre como é que ele surge, como se mantém "vivo", como é que deixa de existir, e, nesse caso, se pode voltar a "viver" ali. A ecologia de uma organização praxeológica, associa-se às condições que pesam sobre sua construção e sua "vida", normalizadas tanto nas instituições de ensino como nas de produção, de utilização e/ou transposição de saberes.

A Ata da 9ª Escola de Didática das Matemáticas, realizada na França em 1998, apresenta o curso ministrado por Michèle Artaud, denominado "Introdução ao enfoque ecológico do didático – a ecologia das organizações matemáticas e didáticas"[28]*.* Nesse documento, após a declaração imputada a Lindeman[29], de que uma comunidade biótica não pode ser claramente diferenciada de seu meio abiótico, considerando que o ecossistema deve ser então a unidade ecológica mais fundamental*,* Artaud (1998, p. 102-103), identifica quatro tipos de ecossistemas de ensino, segundo o regime epistemológico ao qual é submetido o saber matemático, que seriam:

> - Ecossistema do saber, onde se produz a matemática;
> - Ecossistema didático escolar, onde se estuda a matemática;
> - Ecossistema profissional, utilizador da matemática para concretizar algumas tarefas; e
> - Ecossistema noosferiano, onde a matemática é manipulada para fins de transposição.

Além de Chevallard (2013) e Artaud (1998), nos balizamos inicialmente quanto ao aspecto ecológico da problemática por nós abordada em dois artigos de

---

[27] *Pero sucede que los numerosos comentadores, enredándose más que en argumentos en los melindres ideológicos de estas últimas décadas, no han sabido entender que el caráter académico, o no (o semiacadémico, etc...) de los saberes a enseñar, es una condicion crucial de la ecologia didática de los saberes; que existe toda una patologia didática especificamente asociada al caráter más o menos no sabio del saber que fuera eligiéndola como epónima.*

[28] ***Introduction à l'approche écologique du didactique*** *– L'écologie des organisations mathématiques et didactiques.*

[29] R.L. Lindeman (1942), *"The trophic-dynamic aspect of ecology*" Ecology n 23, p.415, citado em Acot 1988 p.129.

Berta Barquero, Mariana Bosch e Joseph Gascón, que têm como título ***Ecología de la modelización matemática,*** sobre a dimensão ecológica de um problema docente. O primeiro desses artigos tem o subtítulo *Restricciones transpositivas en las instituciones universitárias,* comunicação do 2º Congresso de TAD, em 2007, e o segundo tem *Los Recorridos de Estudio e Investigación*, e foi apresentado na 3ª Conferência Internacional de TAD em 2010.

Na ecologia didática que consideramos, os <u>ecossistemas</u> de ensino serão os “lugares” onde se produz matemática, onde ela é estudada, utilizada na realização de tarefas, ou manipulada para fins de transposição. De um modo geral os ecossistemas de ensino dizem respeito ao que, nos níveis de determinação, ou codeterminação, que a TAD estabelece, foi denominado de escola.

Os <u>*habitat*</u> serão os ambientes conceituais onde um determinado objeto do saber matemático encontra-se e vivencia suas práticas. Ainda relacionando aos níveis de determinação, os *habitat* serão os setores de um ecossistema onde os componentes curriculares dão guarida às praxeologias com objetos matemáticos. Os *nichos,* por sua vez, contemplarão as suas funcionalidades e praxeologias, que se evidenciam pelas práticas que, em relação a um objeto de ensino, se evidenciam em um dado *habitat* de um certo ecossistema, interagindo com os demais *nichos.*

No Brasil, poucas são as pesquisas que tratam especificamente da ecologia do didático, dentre essas temos a tese de Rodrigues (2009), denominada “O teorema central de limites: Um estudo ecológico do saber e do didático”, apresentada na PUC-SP em 2009. Ressaltamos que o objeto limite pesquisado pela autora não é o mesmo que abordamos, mas aquele existente no *habitat* da inferência, do ecossistema de ensino de Estatística, tendo recebido de Polya o nome de “central” em face de assim o ver na teoria das probabilidades (RODRIGUES, 2009, p.34). A pesquisa dessa autora, por ela classificada como pesquisa-ação, apresenta em seu relatório os ecossistemas onde o teorema central de limite ainda vive.

Em nosso entendimento os trabalhos que dispúnhamos, e continuávamos a encontrar a respeito do ensino do objeto matemático por nós pesquisado, Ensino de limite em um curso de Engenharia, ainda não nos respondiam ao enfoque ecológico a que nos propusemos. Precisávamos nos aprofundar mais na problemática, para verificar quais são as condições que permitem e as restrições que dificultam a vida desse objeto em um curso de Engenharia Civil.

Nesta pesquisa tratamos como ecossistema de ensino de engenharia aquele constituído pela instituição Faculdade de Engenharia da Universidade Federal do Pará. O consideramos como tal, pois nele se produzem, reproduzem e se realizam pesquisas com objetos de ensino de saberes (Ecossistema do Saber), se estudam (Ecossistema didático escolar), se realizam tarefas próprias da profissão de Engenharia (Ecossistema profissional) e se produzem projetos e programas com manipulações para fins de transposição (Ecossistema noosferiano).

Tratar dos *habitat* e *nichos* que o tema limite ocupa e desenvolve no ecossistema de ensino de engenharia por nós considerado, tornou-se um dos objetivos de nossa pesquisa, ou seja, identificar "onde" há praxeologias com esse objeto, quem ali utiliza esse saber, e o como o faz, tendo as disciplinas, teóricas ou práticas, para <u>*habitat*</u> e os <u>*nichos*</u> como suas funcionalidades, que se manifestam através das práticas onde "vivem".

<u>Comunidades,</u> às quais nos referiremos, serão as instituições constituídas por Engenheiros professores de engenharia (7 indivíduos), professores de matemática não Engenheiros (14 indivíduos), professores de matemática Engenheiros (3 indivíduos) e Engenheiros profissionais não professores (4 indivíduos).

A escolha do *locus* de nossa pesquisa pelo ecossistema de ensino da Faculdade de Engenharia Civil da Universidade Federal do Pará (UFPA), a mais antiga das instituições universitárias formadora de Engenheiros no Estado do Pará, com seus *habitat* e *nichos* de limite, se deu em razão deste ter sido um dos cursos de graduação que realizamos na UFPA, além de ali, termos ministrado as disciplinas Cálculo I e Matemática Aplicada à Engenharia I, e vivenciado, profissionalmente, o nosso problema docente.

A seguir trataremos da ecologia do Cálculo Diferencial e Integral, em que práticas com limite são usuais, no ecossistema por nós considerado, no sentido de explorar os cenários das transformações pelos quais as disciplinas com Matemática passaram.

2.1.2.3 Ecologia do Cálculo no ecossistema de ensino de Engenharia Civil da UFPA

Uma das problemáticas que todo professor se defronta no seu ofício é a determinação dos temas e questões que sobrevivem como candidatos a serem ensinados. No ensino superior brasileiro, a resposta ao questionamento do que deve ser ensinado é hipoteticamente normativa, e se apresenta nas ementas das disciplinas que constam nos PPC, mas, face às complexidades das restrições que se impõem, como no caso específico desta pesquisa, a resposta nem sempre é tão trivial.

Para melhor compreensão, a seguir apresentamos o quadro 04 com as ementas de Cálculo I e de Matemática Aplicada à Engenharia I, dos PPC de Engenharia Civil da UFPA.

QUADRO 04 - Ementas de Cálculo I e de Matemática Aplicada à Engenharia I

COMPONENTE CURRICULAR	EMENTA
CALCULO I PPC antigo Resolução 2.761/2001/CONSEP 90 horas semestrais 6 (seis) horas de aula por semana	**1 - <u>Números reais e funções</u>:** 1.1 - Números reais; 1.2 - Módulo: definição, equações e inequações; 1.3 - Subconjuntos dos reais: intervalos, máximo, mínimo, supremo e ínfimo. Propriedade do supremo; 1.4 - Função de uma variável real a valores reais: principais funções elementares, trigonométricas, exponencial e logarítmica. 1.5 - Operações com funções, função composta e função inversa. **2 - <u>Limite e continuidade</u>:** 2.1 - Noção intuitiva; 2.2 - Definições; 2.3 - limites Laterais; 2.4 - Propriedades; 2.5- Teorema do confronto; 2.6 - Limites: infinitos e no infinito; 2.7 - Limites fundamentais: trigonométrico e exponencial. **3-<u>Derivada</u>:** 3.1 - Conceito: interpretação geométrica; 3.2 - Derivada de uma função em um ponto; 3.3 - Derivabilidade e continuidade; 3.4 - Definição da derivada de uma função: regras de derivação e regra da cadeia; 3.5 - Derivação implícita; 3.6 - Derivada da função inversa; 3.7 - Derivada de ordem superior; 3.8 - Teorema do valor médio e teorema de Rolle; 3.9 - Estudo da variação da função. Gráficos; 3.10 - Regra de L'Hospital. **4 - <u>Integral</u>:** 4.1 - Conceito de primitiva; 4.2- Integral indefinida; 4.3 - Técnicas de integração; 4.4 - Integral de Riemann: definição e propriedades; 4.5 - Primeiro teorema fundamental do cálculo; 4.6 -

	Aplicação de integral definida em cálculo de áreas, volumes, comprimento de arco, etc.[30]
MATEMÁTICA APLICADA À ENGENHARIA I PPC atual Resolução 3.902/2009/CONSEPE 51 horas semestrais 3 (três) horas de aula por semana	Introdução ao aplicativo Maple ou similar; Breves noções de Funções e seus Gráficos; Limites; Derivada e suas aplicações; Integrais Indefinidas; Integrais Definidas e suas aplicações; Técnicas de Integração; Integrais Impróprias e Operações com Matrizes.

Fonte: Projetos Pedagógicos do Curso de Engenharia Civil da UFPA

A palavra ementa, provem do latim "*ementum*", significando pensamento, ideia, é um termo muito utilizado na linguagem jurídica, sendo ali considerada como a parte do preâmbulo que sintetiza o conteúdo de uma lei. Nos PPC do Ensino Superior da UFPA, conforme orientações quando de suas elaborações, as ementas hoje têm função análoga à da linguagem jurídica, devendo os saberes a ensinar serem apresentados de forma sintética.

A apresentação das Ementas na forma sintética, como verificada no PPC atual, pode ser um facilitador aos trâmites burocráticos, como, por exemplo, em casos de transferência de alunos, pois atém-se basicamente aos grandes temas. Como visto no quadro anterior a situação nem sempre fora assim, e outrora, mesmo denominada "Ementa", não era tão sintética e detalhava os temas, apresentando questões que os professores deveriam ensinar.

Como exposto no quadro anterior, ao ensino desses temas e questões, antes eram destinadas 90 (noventa) horas semestrais, que equivaliam a uma carga horária semanal de 6 (seis) horas. Além disso, o professor, a partir da ementa, sabia de todos os temas e questões que deveriam ser ensinados e hoje, devido ao sintetismo da mesma, ele é responsável pelas escolhas do quê e como ensinar, que deverão constar no seu planejamento de curso como saberes a transpor. Essa flexibilização curricular permite, por exemplo, que dois professores, ministrando uma mesma disciplina, abordem diferentes questões relativas a um mesmo tema.

A ecologia didática é também verificada nesse caso pelo fato de que as mudanças não ocorreram somente quanto ao nome e carga horária dos componentes curriculares, pois pelo que já foi exposto é possível constatar que a atividade substituta de Cálculo I, com a metade da carga horária semanal dessa

[30] DISCIPLINA: **CÁLCULO I** CH: 90h CR: 06 - CÓDIGO ANTIGO: **EN-0176 -** CÓDIGO ATUAL: **EN-01068**

última, agregou ainda, os objetos: “Introdução ao aplicativo Maple ou similar” e “Operações com Matrizes”. Esses temas que foram viver no *habitat* onde o CDI vive, antes viviam em outros dois *habitat* que foram extintos, portanto “mortos”, para o ecossistema de ensino de engenharia, que, respectivamente, foram: Introdução à Ciências dos Computadores e Álgebra Linear.

No que pese as modificações, extinções e acréscimos, o tema “limites”, conforme pode ser verificado nas ementas, permaneceu como prescrito a ensinar, da mesma forma que os demais grandes temas do Cálculo I (funções, derivadas e integrais). Portanto, o professor de Matemática Aplicada à Engenharia I tem que ensinar limite de uma função real de uma variável real.

A redução do tempo de ensino é citada por Chevallard como o “tempo legal”, imposto por regulamento, que no caso de nossa pesquisa é o PPC de Engenharia Civil da UFPA. A restrição, no caso desse curso, impõe restrições didáticas que podem dificultar a abordagem de todas as questões antes previstas em Cálculo I, aos quais, como já dito e exposto no quadro 02, foram acrescidos mais dois, e isso tudo, dispondo apenas da metade do tempo outrora previsto. A situação que descortinamos relativamente ao ecossistema do ensino de engenharia, mais precisamente ao da Faculdade de Engenharia Civil da UFPA, nos faz concordar com esse autor, quando nos diz que “os objetos de ensino são vítimas do tempo didático” (CHEVALLARD, 2013, p. 79).

Ao apontarmos para a não trivialidade do que ensinar, o fizemos em razão de que as modificações promovidas no PPC do curso de Engenharia Civil da UFPA, nos permitiram conjecturar que o tema limite de uma função de uma variável, mesmo estando prescrito, poderia ter seu ensino modificado, resumido, quiçá preterido, em razão da restrição institucional que o tempo de ensino impunha. Dessa forma, os planos de curso e atividades de sala de aula, estariam passando por modificações transpositivas, que motivariam uma reflexão ecológica mais aprofundada, justificando nosso registro por meio de uma pesquisa científica.

Além de ter que ensinar, outro problema que impõe ao professor é: como ensinar? É apenas mais uma vicissitude trivial na nossa profissão, que é verificar, de acordo com as condições e restrições que se apresentam, a melhor forma de promover o ensino daquilo que nos compete. Isso foi uma das razões que nos motivou a investigar em quais praxeologias limite de uma função “vive”, nos *habitat* do ecossistema considerado, pois acreditamos que, dessa forma, estaríamos contribuindo para encontrar uma significação ao seu ensino no ecossistema do curso de Engenharia Civil. Nessa busca, precisávamos de um apoio científico que nos fornecesse os pressupostos necessários à investigação, e de uma estratégia de ação, que se traduzem no que passaremos a apresentar, quais sejam o referencial teórico e os aspectos metodológicos de nossa pesquisa.

3 BASES TEÓRICAS E METODOLÓGICAS

As teorias que nos referenciaram indicaram o percurso metodológico desta pesquisa, onde os aportes teóricos tiveram papel fundamental e com ele conviveram em todo trajeto. Partimos de nossa experiência vivida, não interpretamos a priori, mas declaramos nossa intenção de pesquisa ao percebermos modificações em uma disciplina de uma faculdade, que dentre seus temas a ensinar tinha limite de uma função. As restrições que a redução do tempo de ensino impôs, nos levaram a questionarmos sobre a ecologia desse tema em um curso de graduação em Engenharia Civil. Procuramos então olhar para a teoria sem perder de vista o amálgama da metodologia adotada, e vice-versa. Essas razões nos levaram a chamá-las de bases: teóricas e metodológicas.

A seguir descreveremos as bases teóricas que serão nossos referenciais, e as metodológicas, que dirão respeito ao desenvolvimento desta.

3.1 Bases teóricas

A Teoria Antropológica do Didático (TAD), proposta por Yves Chevallard (1996, 1999, 2007, 2009, 2013), é o principal referencial teórico desta pesquisa, que se insere no Programa Epistemológico em Didática, onde a Matemática é vista como uma atividade de estudos de problemas humanos e sociais.

Bourdieu constituiu-se em uma das referências que Chevallard se utilizou, tanto para estabelecer os preceitos da Transposição Didática, quanto para firmar a sua Teoria Antropológica do Didático, nós também utilizamos termos aos quais Bourdieu (1974, 1987, 1989, 2008), se reportou e, relacionando-o a TAD, o consideramos também em nossa base teórica.

Além da TAD, principalmente no que concerne à Transposição Didática e à sua abordagem ecológica, o estudo da Ecologia, que tem a Biologia como *habitat* original, se fez necessário para que pudéssemos verificar: como esse saber se estabeleceu, conhecer seus termos e como o relacionamento dessa ciência com a Didática da Matemática poderia aprofundar-se um pouco mais do que se tinha por estabelecido. Em seguida, passaremos alguns aspectos da TAD que fundamentaram nossa pesquisa.

3.1.1 A base da TAD

O pesquisador francês contemporâneo Yves Chevallard é tido como a principal referência no estudo da Teoria Antropológica do Didático (TAD). Para Bosch, Chevallard e Gáscon (2006, p. 4), essa teoria “emerge como consequência natural do desenvolvimento da Teoria das Transposições Didáticas”, cujo termo foi introduzido pelo sociólogo francês Michel Verret, em 1975, na sua tese de doutorado denominada “O tempo de estudo”[31], que buscava compreensão para as funções sociais dos estudantes.

A Transposição Didática foi teorizada, a partir de notas preparatórias de um curso ministrado na primeira Escola de Verão de Didática das Matemáticas, realizado em Chamrousse na França, em julho de 1980 (CHEVALLARD, 1997, p. 1). Em 1982 Yves Chevallard e Joshua Marie-Alberte publicaram no jornal francês de Pesquisa em Didática das Matemáticas [32](RDM), Volume 3.2, o artigo “Um exemplo da análise da transposição didática: A noção de distância”[33]. Em 1985, se teve a primeira edição, em francês, do livro “A Transposição Didática: Do saber sábio ao saber ensinado”[34], que em 1991, acrescido de um posfácio, foi traduzido para o espanhol como segunda edição e republicada como terceira edição em 2013, que é a versão por nós a adotada nesta pesquisa, sendo essa última a que consideraremos em nossas referências.

A Transposição Didática, segundo seu autor, decorre do seguinte processo: o saber sábio, elaborado e/ou reconhecido pela academia, é transposto para um saber a ensinar que, lapidado pelos professores, passa por outra transposição chegando a um saber ensinado, que chega até os alunos. Nessa caminhada, o saber passa necessariamente por transformações e adaptações, existindo diferenças entre o que foi produzido e reconhecido como saber sábio e o que sai da sala de aula como um saber ensinado.

A Transposição Didática constituir-se-ia em duas etapas: uma externa e outra interna. A Transposição Didática Externa ocorre a partir de quando o saber é produzido e/ou reconhecido no meio acadêmico como saber sábio até ser deliberado

[31] *Le temps des études*
[32] *Recherches em Didactique des Mathématiques Journal*
[33] *Un exemple d´analyse de la transposition didactique: La notion de distance.*
[34] *La transposición didáctica: Du savoir savant au savoir ensigné*

como saber a ensinar, passando pelo que chama de noosfera que analisa as razões pelas quais alguns conteúdos, e não outros, são eleitos para serem ensinados, passando a constar em currículos e programas escolares. Portanto, o saber a ensinar é aquele instituído pelos instrumentos normatizadores (Parâmetros e Diretrizes Curriculares, Projetos Pedagógicos, Planos de Curso, dentre outros...), em concordância com os livros didáticos e planos de aulas do professor.

Lembramos que o termo noosfera foi cunhado pelo geoquímico russo Vladimir Ivanovich Vernadsky (1863 a 1945) como sendo a terceira das fases do desenvolvimento da terra, após a geosfera (matéria inanimada) e a biosfera (vida biológica). Mais do que provir das palavras gregas *noos* = mente e *sphera* = corpo limitado por superfície redonda, noosfera seria a esfera das ideias, formada por produtos culturais, pela mente, linguagens, teorias e conhecimentos. Posteriormente, o teólogo e filósofo francês Pierre Teilhard de Chardin (1881 a 1955), na década de 1930, explicou a noosfera como um espaço virtual onde se dá o nascimento da psiquis (noogênesis), o lugar de ocorrência de todos os fenômenos (patológicos e normais) do pensamento e da inteligência.

Noosfera é o lugar em que “se pensa – segundo modalidades talvez muito diferentes – o funcionamento didático”[35], (CHEVALLARD, 2013, p. 28), e onde se encontram políticos, professores, especialistas das disciplinas, autores de livros, os pais dos alunos, enfim todos os partícipes do desenho curricular. A noosfera é, portanto, determinante não somente na definição dos conteúdos, mas também, na indicação da forma como os mesmos serão ensinados, com suas relevâncias e hierarquizações.

O processo de Transposição Didática Interna, por sua vez, preocupa-se com o modo como um saber, que fora eleito como a ensinar, torna-se ensinado e aprendido pelos alunos, ou seja, como desenvolvem-se os processos de ensino e de aprendizagem, também denominados de processos de didatização. Para tal, professores e alunos “negociam” os papéis que cada um deverá assumir no do que se conhece como Contrato Didático, que é um contrato, explícito ou não, definido por Guy Brousseau (1982) como a totalidade de comportamentos do professor esperados pelos alunos e a totalidade dos comportamentos dos alunos que são

---

[35] *“si piensa -según modalidades tal vez muy diferentes- el funcionamiento didáctico”*

esperados pelo professor, incluindo-se o saber e as maneiras como esse é tratado por essas partes.

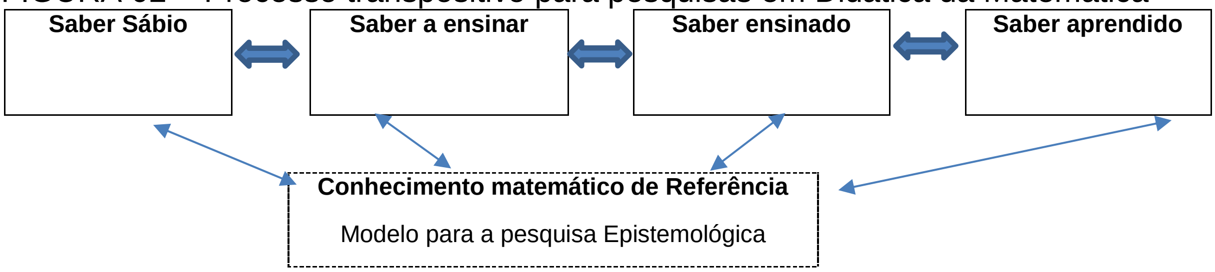
Através das transposições didáticas, externa e interna, e dos consequentes processos de descontextualização, que é a despersonalização que torna o saber anônimo, ocultando os acidentes de percursos ocasionados até que um saber seja tido como tal, e de recontextualização, que se faz necessária para que o professor torne ensinável o objeto do saber que fora descontextualizado como saber a ensinar e o de desincretização que ocorre para que o saber seja tido como autossuficiente, independente e isolado, de outros saberes. Há que se cuidar para que esses saberes não se distanciem tanto a ponto do saber sábio não ser reconhecível no saber ensinado, esse cuidar é chamado por Chevallard (2013, p. 47-50) de Vigilância Epistemológica, ideia essa que, segundo Pais (2010, p. 17), provém da noção de vigilância intelectual introduzida por Gaston Bachelard.

As noções matemáticas são objetos e ferramentas de estudo dessa atividade (números, operações, limites, derivadas, integrais, etc..), enquanto as noções paramatemáticas são aquelas que a matemática se apropria para desenvolver-se, e que, normalmente não são objetos de estudo para os matemáticos. Para Chevallard as noções matemáticas são construídas a partir de uma definição, ou de uma operação, enquanto as paramatemáticas são pré-construídas por “mostração”, destacando que essas noções não são “estanques”, exemplificando com o caso da noção de demonstração, que seria paramatemática em alguns ramos da matemática, mas que atualmente é objeto matemático em lógica matemática (CHEVALLARD, 2013, p. 58)

Quando o saber ensinado se afasta do saber sábio ele sofre um envelhecimento biológico, ou seja, o saber passa a ter sua legitimidade questionada pelo entorno social. Outro envelhecimento que o saber pode sofrer é o envelhecimento moral que ocorre a partir da aproximação a um saber banalizado. O envelhecimento do saber pode levar a sua obsolescência, que é uma crise ocorrida a partir do desgaste ocasionado pelo seu envelhecimento biológico ou moral.

Nesta pesquisa, consideramos o que Bosch, Chevallard e Gáscon (2006, p. 4) apontam como o processo transpositivo aos olhos do pesquisador de Didática da Matemática, que apresentamos na figura 02 a seguir:

FIGURA 02 - Processo transpositivo para pesquisas em Didática da Matemática



Fonte: Bosch, Chevallard e Gáscon (2006, p. 4)

Observamos que esses autores incluem o conhecimento matemático de "referência" como modelo teórico básico para a pesquisa, que é elaborado a partir de dados empíricos das seguintes instituições: a comunidade matemática, o sistema educacional, a sala de aula e as comunidades de estudo. Bosch, Chevallard e Gáscon (2006), destacam também a relatividade do conhecimento, situando os problemas didáticos a nível institucional, além de características individuais dos sujeitos nos processos de Transposição Didática, que estão no cerne de qualquer problema didático.

A questão ecológica, por sua vez, permeia os procesos transpositivos, principalmente quando se dão entre distintas instituições, em que uma delas é tida como produtora do saber e a outra utilizadora desse. O saber pode ser produzido em uma instituição e ser considerado como saber a ensinar em outras, suscitando questões ecológicas, uma vez que as condições ambientais podem ser distintas, e, se isso ocorrer, o saber transposto necessariamente sofrerá mutações adaptativas, podendo modificar-se. Essa situação é a que ocorre no ensino de limite de uma função, constituinte do CDI, que produzido na instituição dos matemáticos é transposto para outras instituições, como a de ensino de engenharia, em que os *nichos* não são os mesmos de onde situa-se a gênese desse saber.

Pelo exposto, entendemos que a Transposição Didática, principalmente no tocante à transposição institucional, apresenta um estreito relacionamento com a ecologia. A propósito, Artaud (2008, 103) afirma que “o questionamento ecológico estava presente nos primeiros estudos sobre os processos transpositivos”. Os “*loci*” dos saberes Sábio, a Ensinar e Ensinado, se constituem *habitat* distintos na esfera do conhecimento, com diferentes *nichos*.

Chevallard (1996) chama de P(S) a instituição produtora do saber e diz que

> um saber S vive, do ponto de vista institucional, antes de mais na instituição P(S), que é o seu *habitat* originário: tal será, pelo menos, a

> única hipótese que examinarei aqui. A sua presença em I pressupõe, pois, que haja, ou tenha havido, 'transporte' de P(S) para I – ou seja, aquilo a que chamo de transposição institucional de P(S) para I. (CHEVALLARD, 1996, p. 150)

A transposição institucional foi pesquisada também na tese de doutorado de Romo Vázques (2009) e apresentada no artigo publicado na RDM[36] por Castela e Vázquez (2011) relativo a estudos que fizeram sobre os efeitos da transposição sobre a Transformada de Laplace na formação de Engenheiros, quando compararam os percursos transpositivos desse tema em três cursos universitários de Engenharia na França, e concluíram que

> as possibilidades oferecidas para o desenvolvimento do modelo praxeológico vão além do contexto da formação profissional. Relativamente ao ensino das matemáticas, a diferenciação das funções tecnológicas permite uma análise dos saberes envolvidos na resolução de problemas matemáticos e poderia equipar os trabalhos consagrados ao discurso dos professores. Além disso, o estilo de questionamento presente aqui nos parece muito apropriado para as pesquisas sobre o ensino das matemáticas no quadro da formação de especialistas em outras disciplinas, como a física.[37] (CASTELA e ROMO VÁZQUEZ , 2011, p. 128)

Similarmente ao cenário de nossa pesquisa, na de Castela e Romo Vázquez (2011), o processo transpositivo analisado por elas tem duas características que o tornam um objeto de grande complexidade: por um lado ele envolve várias áreas dos saberes científicos da matemática e de várias ciências aplicadas, e, por outro lado, há de se prever que a formação científica dos estudantes deve ser conjugada com uma formação prática, que faça referência ao mundo profissional que se depararão quando egressos dos seus cursos universitários. A respeito da pesquisa dessas autoras voltaremos a nos posicionar, principalmente em relação ao modelo de análise que elas propõem.

No posfácio de Chevallard (2013), denominado de "*Didáctica, antropologia, matemáticas*", o autor apresenta justificativas, frente às críticas que teria recebido quando da primeira edição da versão em francês e, mesmo já tendo se remetido a

---

[36] *Recherches em Didactiques des Matnématiques – Vol 31, nº 1, p. 131-134, França, 2011*

[37] *les possibilités offertes par le développement du modèle praxéologique au-delà du contexte de la formation professionnelle. Relativement à l'enseignement des mathématiques, la différenciation des fonctions technologiques permet une analyse des savoirs en jeu dans la résolution de problèmes mathématiques et pourrait outiller les travaux consacrés aux discours enseignants. Par ailleurs, le style de questionnement présenté ici nous paraît très approprié pour des recherches consacrées à l'enseignement des mathématiques dans le cadre de la formation de spécialistes d'autres disciplines, comme la physique.*

aspectos antropológicos no corpo do texto anterior ao posfácio, o encaminha para a Teoria Antropológica do Didático (TAD), situando o estudo das atividades matemáticas no conjunto das atividades humanas e das instituições sociais.

Etimologicamente, antropologia deriva das palavras gregas *antropos* (homem, humano ou humanidade) e *logos* (pensamento ou razão), sendo a ciência que estuda o homem em sua totalidade, abrangendo as dimensões biológicas, sociais e culturais; suas origens, seus agrupamentos e relações sociais, comportamentos, desenvolvimento social, cultural e físico, suas relações com o meio natural, variações biológicas e sua produção cultural. A antropologia, portanto, procura estudar a humanidade em todos os seus aspectos.

Chevallard (1996, p. 127) nos diz que “no universo que estou a considerar, todas as coisas são objetos”, portanto o objeto (O) constitui primitivamente a base da Teoria Antropológica do Didático (TAD). Para esse autor

> objeto é toda entidade, material ou não material, que existe para pelo menos um indivíduo. Então, tudo é objeto, incluindo as pessoas. Os objetos são, assim, o nome sete, e também o símbolo 7, a noção de pai e também de um jovem pai que leva seu filho, ou a ideia de perseverança (ou de coragem, ou de virtude, etc...) e o conceito matemático de derivada, e também o símbolo ∂, etc... Em particular, qualquer prática, ou seja, todo produto intencional da atividade humana é um objeto.[38] (CHEVALLARD, 2009, p.1)

A pessoa (X) constitui o segundo elemento primitivo da TAD, sendo constituída a partir de um indivíduo e de um conjunto de relações institucionais que esse indivíduo mantém. Segundo Bosch (2004, p.10)

> O que vemos como um indivíduo concreto não é nada mais que um ‘corte institucional’ da pessoa, ou seja, aquele que a instituição na qual a situamos, e de onde observamos a pessoa em questão, nos permite perceber em um dado momento.[39] (BOSCH, 2004, p.10)

A instituição referida pela autora, é o terceiro elemento primitivo da TAD, e constitui o ecossistema, onde as pessoas X e objetos O, sob certas condições e/ou restrições, se relacionariam. As Instituições I podem apresentar-se de diversas

---

[38] *est objet toute entité, matérielle ou immatérielle, qui existe pour au moins unindividu. Tout est donc objet, y compris les personnes. Sont ainsi des objets le nombre sept, et aussi le chiffre 7, la notion de père et aussi ce jeune père qui promène son enfant, ou encore l’idée de persévérance (ou de courage, ou de vertu, etc.), et le concept mathématique de dérivée, et aussi le symbole ∂, etc. En particulier, toute oeuvre, c’est-à-dire tout produit intentionnel de l’activité humaine, est un objet.*

[39] *Lo que vemos como un individuo concreto no es más que un “corte institucional” de la persona, es dicir aquelle que la instituición en que la situamos, y desde donde miramos a la persona em cuestión, nos permite percibir en un momento dado.*

formas: não somente locais como Universidades, Institutos, Faculdades e Colégios, mas também programas e livros didáticos, dentre outros.

Um objeto O existe para uma pessoa X, ou para uma Instituição I, se o conjunto de relações, R(X,O) no caso de pessoa e R(I,O) no de Instituição, é não vazio, portanto, um objeto O passa a existir a partir de quando uma pessoa X, ou uma Instituição I, toma conhecimento do objeto O, e passamos a ter uma relação pessoal (de X) e/ou Institucional (de I) com O.

Para a TAD, os objetos, de um modo geral, classificam-se em ostensivos e não ostensivos, e foram pesquisados por Bosch (1994 e 2001), que os caracteriza da seguinte forma:

> Os objetos ostensivos (do latim ‘ostendere’, apresentar com insistência) são aqueles objetos que se percebem: se veem, se tocam, se ouvem, etc. Em suma, são objetos materiais ou objetos dotados de certa materialidade como as escrituras, as imagens, os sons, os gestos, etc. Para utilizar uma expressão geral, falaremos da ‘manipulação’ dos objetos ostensivos embora os ostensivos em questão sejam escrituras, gráficos, gestos ou discursos (...). Os objetos não-ostensivos são, então, todos aqueles objetos que existem institucionalmente, no sentido em que lhes atribui uma determinada existência, mas que não podem perceber, nem mostrar por si mesmos: as ideias, os conceitos, as crenças, etc. O que se podem é "invocar" ou "evocar" mediante a manipulação de certos objetos ostensivos apropriados. (BOSCH, 2001, p. 19)[40].

Esses são os significados que a TAD lhes dá: <u>ostensivo</u> como algo perceptível, palpável e os <u>não ostensivos</u>, por sua vez, como aqueles que existem institucionalmente, mas que não se evidenciam por si mesmos, necessitando do amparo de objetos ostensivos para se significarem. No caso de nosso objeto matemático de pesquisa, o cálculo do limite de uma função em um ponto se impõe praxeologicamente como objeto ostensivo, enquanto a continuidade, que imprescinde de limite, é um objeto não ostensivo.

Praxeologia é uma palavra criada pelo filósofo francês Alfred Espinas (1844-1922) que em 1890 (ou em 1897, há divergências) publicou na “*Revue Philosohique*

[40] *Los objetos ostensivos (del latín “ostendere”, presentar con insistencia) son aquellos objetos que se perciben: se ven, se tocan, se oyen, etc.. Son, en definitiva, los objetos materiales o los objetos dotados de cierta materialidade como las escrituras, los grafismos, los sonidos, los gestos, etc. Para utilizar una expresión general, hablaremos de la “manipulación” de los objetos ostensivos aunque los ostensivos en cuestión sean escrituras, gráficos, gestos o discursos(...) Los objetos no-ostensivos son entonces todos aquellos objetos que existen institucionalmente, en el sentido en que se les atribuye una determinada existencia, pero que no se pueden percibir ni mostrar por sí mismos: las ideas, los conceptos, las creencias, etc. Lo que sí se pueden es “invocar” o “evocar” mediante la manipulación de ciertos objetos ostensivos apropiados.*

de la France et de l'Etranger" o artigo *"Les origines de la technologie*", em que apresentou os objetivos da praxeologia, como uma nova disciplina, entendendo-a como uma ciência das formas e das regras gerais da atuação no mundo (SWIATKIEWICZ, 1997, p. 638). Etimologicamente vem do grego *praxis*, ação, hábito, prática, que na TAD será o saber fazer e de *logos,* que em grego significava inicialmente a palavra escrita ou falada - o verbo, mas que depois passou a ter o sentido de conhecimento, ciência, teoria e na TAD será o saber.

Chevallard (1999) nos fala da existência de dois tipos de relacionamento entre objetos *O* e praxeologias, denominando-os de Praxeologias Matemáticas ou Organizações Matemáticas (OM) que respondem à questão: Que realidade matemática pode-se construir em uma sala de aula de matemática? E de Praxeologias Didáticas ou Organizações Didáticas (OD), as que verificam as maneiras de estudar a realidade matemática encontrada em sala de aula de matemática, e, por conseguinte, o que é necessário para se construir uma determinada praxeologia matemática.

> Os tipos de objetos *O* considerados serão de duas classes: dado um tema de estudo matemático θ, se considerará sucessivamente: a) a realidade matemática que se pode construir em uma aula de matemática onde se estuda o tema θ; b) a maneira como pode realizar-se o estudo do tema θ. O primeiro objeto, -"realidade matemática que ..."- , não é nada além de uma praxeologia matemática ou organização matemática que se denomina OM_θ. O segundo objeto, -"a maneira que..."-, é o que se denominará de uma organização didática, que será indicada, analogamente, por OD_θ. (CHEVALLARD, 1999, p. 9) [41]

Para a TAD, o problema do professor é ensinar, o que significa colocar uma determinada organização matemática em prática, em uma determinada sala de aula, (CHEVALLARD, 2009), para tal ele tem que (re)construir organizações didáticas, que solucionem as tarefas que ele vai submeter aos alunos. Nessa missão, as praxeologias se estabelecem seguindo uma hierarquização de níveis de determinação ou codeterminação, entre as OD e as OM, de modo a organizar seus estudos, que se encontram no quadro 05:

---

[41] *Los tipos de objetos O considerados serán de dos clases: dado un tema de estúdio matemático θ, se considerará sucesivamente: a) la realidad matemática que puede construirse en una clase de matemáticas donde se estudia el tema θ; b) la manera en que puede ser construida esta realidad matemática, es decir la manera como puede realizarse el estudio del tema θ. El primer objeto -"la realidad matemática que..."- no es otra cosa que una praxeología matemática u organización matemática que se denominará por OM_θ. El segundo objeto -"la manera que..."- es lo que se denominará una organización didáctica, que se indicará, de manera análoga por OD_θ.*

QUADRO 05 - Níveis de determinação didática

Civilização⇒Sociedade⇒Escola⇒Pedagogia⇒	⇒ Disciplina⇒Área⇒Setor⇒Tema⇒Questão
Níveis genéricos	***Níveis específicos do âmbito matemático***

Fonte: Barquero, B., Bosch, M. e Gascón 2007, p. 2

Para exemplificar, em relação ao nosso objeto de pesquisa, que trata da ecologia do ensino do tema limite de função de uma variável no curso de Engenharia Civil, esses níveis são por nós identificados como:

a) A Civilização, mais alto nível de determinação, é a ocidental a qual pertencemos.

b) A Sociedade em sentido lato é representada pela comunidade de um modo geral que precisa da atuação de Engenheiros Civis para planejamento, projeção, cálculo, execução, administração e fiscalização de obras. A título de esclarecimento, lembramos que o Brasil tem formado anualmente, aproximadamente 32 mil Engenheiros, quando se divulga necessitar de algo em torno de 80 mil. A maior parte dessa demanda é relativa a Engenheiros Civis.

Em sentido stricto a sociedade no caso de nossa pesquisa é representada pelos sistema CONFEA/CREA[42];

c) A Escola considerada em nossa pesquisa é a Faculdade de Engenharia Civil da Universidade Federal do Pará (UFPA), campus de Belém;

d) A Pedagogia é representada pelo curso de Bacharelado em Engenharia Civil da UFPA, campus de Belém, regulamentada pelo seu Projeto Pedagógico do Curso (PPC), que, elaborado de modo a atender às Diretrizes Curriculares Nacionais, é aprovado pelas instâncias superiores da Instituição.

e) A Disciplina é a Matemática;

f) A Área é a Análise Matemática;

g) O Setor é o Cálculo Diferencial e Integral de Funções de Uma Variável, antes denominado de Cálculo I e agora Matemática Aplicada à Engenharia I.

Na Análise Matemática, além desse setor, dentre outros, temos: Cálculo Diferencial e Integral de Funções de Várias Variáveis, Cálculo de Equações Diferenciais Ordinárias e Cálculo de Funções Vetoriais.

h) O Tema é limite de uma função de uma variável;

[42] Conselho Federal de Engenharia e Agronomia/Conselho Regional de Engenharia e Agronomia

i) Uma Questão, por exemplo, seria verificar a continuidade de uma função em determinado ponto, que teria como uma das tarefas: calcular o limite dessa função nesse ponto.

A área da Análise Matemática congrega o Setor do CDI, *habitat* onde vivem e têm funcionalidades os temas e questões de medidas, limite, derivada, integral, séries, dentre outros, se fazendo presentes, seja nos componentes curriculares denominados Cálculos (I, II, III e IV) dos Projetos Pedagógicos do Curso (PPC) de Engenharia Civil da UFPA que vigoraram até 2008, quanto nos de Matemática Aplicada à Engenharia I e II, que os substituíram no PPC de 2009.

Dentre outras concepções, fazer matemática significa resolver uma questão emblemática, e a TAD, que define a Didática da Matemática como a ciência das condições e restrições da difusão social da praxeologias didáticas, também chamadas de organizações praxeológicas, ou simplesmente praxeologias, nos aponta uma estrutura decorrente da resolução dessas questões, quais sejam: Tarefas, Técnicas, Tecnologias e Teorias, representadas respectivamente por [T, τ, θ, Θ], (CHEVALLARD, 1999, p. 2 - 6).

As tarefas (T) podem agrupar-se em gêneros de tarefas que têm maior amplitude, como por exemplo, "calcular", "demonstrar", e em tipos de tarefas que são mais específicos, como "calcular $\lim_{x\to-1} x+1$" e "demonstrar que $\lim_{x\to-1} x+1=2$". As tarefas normalmente são apresentadas com verbos no infinitivo, (ou solicitação feita pela flexão verbal), como por exemplo: calcular (calcule), somar (some), subtrair (subtraia), resolver (resolva), derivar (derive), integrar (integre), entre outros.

Para resolver uma tarefa t_1, necessitamos de pelo menos uma técnica τ_{1i}. O termo "técnica" provém do latim *tekhnê,* e representa a maneira de realizar uma tarefa. Tarefas e Técnicas [t , τ] constituem o bloco prático-técnico da TAD, dito como "saber fazer", a *práxis*. A Tecnologia e a Teoria [θ , Θ], por sua vez, constituem o bloco tecnológico-teórico, reconhecido simplesmente como "saber", o *logos*.

Para a Chevallard (2009, p. 4) a tecnologia θ é tida como o discurso racional – o *logos* - que justifica a técnica τ, ou seja: o porquê de aplicarmos uma determinada técnica para resolvermos uma tarefa, isto é, a sua explicação científica. Finalizando a descrição dos elementos da organização praxeológica, temos a Teoria (Θ), palavra etimologicamente provinda do grego *theôria* e que Euclides teria usado para a derivativa “Teorema”, como algo a ser demonstrado. A teoria é o fundamento maior que justifica a tecnologia, por isso é tida como a “tecnologia da tecnologia”.

Portanto, a TAD nos fornece elementos suficientes para analisar o saber (logos) e/ou o saber/fazer (práxis) do professor, que são as respostas às seguintes questões: Que tipos de tarefas são propostas por ela? Quais técnicas ele conhece para resolver as tarefas? Qual o alcance dessas técnicas? Qual o domínio que ele tem dessas técnicas? Quais são as suas justificativas tecnológicas? Em que teorias suas justificativas se apoiam?

A respeito da TAD, na medida em que se fizerem necessários, poderemos recorrer a outros elementos constituintes seus que até aqui podem não terem sido abordados, com os esclarecimentos.

3.2 Bases metodológicas

Nossa pesquisa diz respeito a um problema didático P_0, enfrentado em nossa prática docente como explicitado antes. Para transformá-lo em objeto de pesquisa, procuramos inicialmente nos familiarizar com a problemática e suas dimensões: epistemológica, econômica e ecológica, tendo essa última sido eleita por nós para ser priorizada.

A imersão nos estudos da problemática se deu inicialmente através de referências relativas ao tema, quando verificamos que o mesmo era recorrente em pesquisas de Educação Matemática. Havia diversos trabalhos, nacionais e internacionais, abordando as dimensões epistemológica e a econômica. A dimensão ecológica, não tanto explorada, nos pareceu mais fecunda em termos de uma produção científica por dizer respeito diretamente à situação, além de ser uma dimensão suficientemente respaldada pelo nosso aporte teórico, o que nos fez enveredar por ela, sem, todavia, desconsiderar as demais.

A partir da definição do problema didático e da dimensão ecológica que iríamos focar mais de perto, elaboramos um projeto de pesquisa com vistas ao ingresso no Programa de Pós-graduação do Instituto de Educação Matemática e

Científica (IEMCI), que após aprovado, procuramos seguir com os devidos ajustes necessários.

O conhecimento do desenvolvimento histórico do objeto de nossa pesquisa se fez importante para que pudéssemos entendê-lo melhor e buscar uma compreensão para as dificuldades evidenciadas no seu ensino, além disso, com o aporte teórico da TAD, promovemos análises praxeológicas de livros didáticos do *habitat* do CDI, que são referências no ecossistema de ensino da engenharia.

Obtivemos a componente empírica desta pesquisa por meio de entrevistas semiestruturadas, que realizamos com as comunidades dos professores do ecossistema de ensino de Engenharia Civil da UFPA, que denominamos de comunidade dos professores engenheiros que não ensinam Cálculo Diferencial e Integral (CDI), dos não engenheiros que lecionam, ou lecionaram, CDI e de professores de Cálculo Engenheiros, procurando verificar a partir das praxeologias por eles relatadas, quais evidenciavam modos de vida do tema limite.

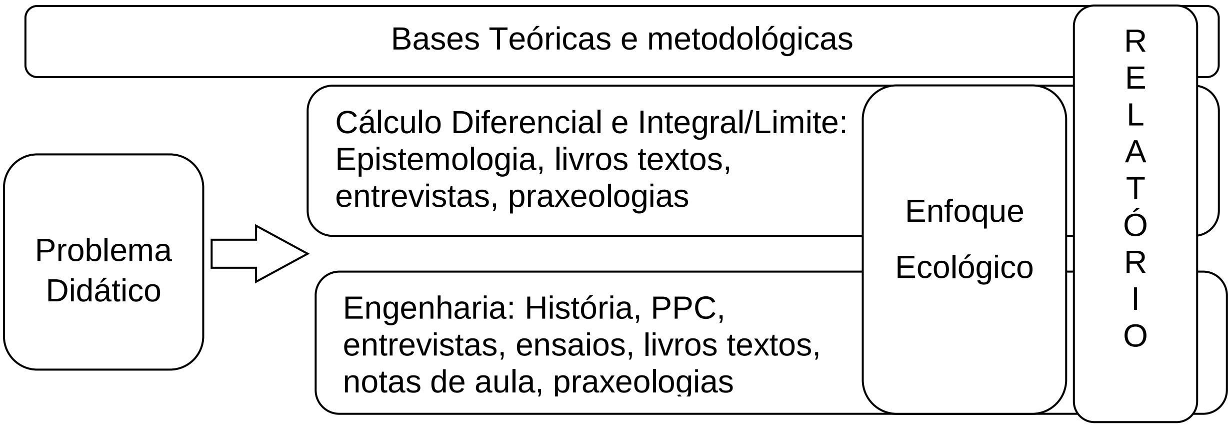
O ecossistema de ensino que se constitui o curso de engenharia também necessitou ser por nós investigado, o que nos propiciou não somente (re)conhecer sua história, principalmente no que concerne aos seus Projetos Pedagógicos de Curso (PPC), mas também retornar a um ambiente que frequentamos como professor e aluno, mas agora nos apresentamos na condição de pesquisador de uma questão didática que ali apresentava.

Retornando ao ecossistema de ensino de engenharia também procuramos conhecer mais de perto outras praxeologias que evidenciassem modos de vida do objeto limite de uma função, por meio de:

a) Ementas dos componentes curriculares, de *habitat* distintos do CDI;
b) Práticas da engenharia com matemática;
c) Livros textos constantes nas ementas do PPC;
d) Notas de aulas de professores do curso.

A praxeologia de nossa pesquisa encontra-se, esquematicamente, representada na figura 03 a seguir.

FIGURA 03 - Praxeologia da pesquisa



Fonte: Elaborada pelo autor

A figura 03 destaca que as bases da pesquisa perpassaram por todo o seu desenvolvimento, uma vez que foi a partir deles que a mesma emergiu, transitou e que após a emissão deste relatório, as mesmas deverão continuar seus percursos.

Gostaríamos de destacar que esta pesquisa é fruto de um trabalho coletivo, pois ela não seria possível sem a participação dos componentes do Grupo de Pesquisa em Didática da Matemática (GEDIM) do IEMCI da UFPA, razão pela qual optamos por escrever seu relatório utilizando a primeira pessoa do plural. Em seguida, nos reportaremos ao percurso desta pesquisa, que trata da ecologia didática considerada.

3.2.1 Percurso ecológico da pesquisa

Buscaremos estabelecer um modelo de análise didática da ecologia de limite, que caracterize os ecossistemas de ensino e seus *habitat,* que dizem respeito, mais diretamente, aos locais onde esse objeto matemático "vive", e, indo mais além, "o que faz", e "como faz", nesses locais, ou seja, relacionamentos pertinentes ao terceiro dos elementos básicos da ecologia que são os *nichos*.

O ecossistema de ensino que consideraremos será o de Engenharia Civil da UFPA, *locus* de nossa pesquisa, e, para o seu melhor entendimento, nos reportaremos a ele, mas não sem antes, nos determos brevemente nos ecossistemas maiores que o contém, quais sejam o de ensino de engenharias como um todo e o de ensino de Engenharia Civil.

3.2.1.1 Ecossistemas de ensino de engenharias

A engenharia é uma prática social de referência como estabelecido por Martinand, quando diz que elas se inscrevem em uma “concepção conjunta, referente à construção e estudo dos currículos de educação científica e tecnológica; concepção que se pode chamar de problemática da referência curricular.” [43] (MARTINAND, 1983, 1986 apud MARTINAND 2003, p. 125)

As práticas de referência foram cunhadas por Martinand da seguinte forma:

> - São atividades objetivas de transformação de um determinado domínio natural ou humano ("prática");
> - Elas envolvem todo um setor social, os papéis não são individuais ("social");
> - A relação com as atividades didáticas não é apenas a identidade há comparação entre elas ("referência").[44] (MARTINAND, 1986, p. 137).

Após tratar da Ecologia Didática, Chevallard (2013, p. 154) fala das relações de um saber S com uma instituição I, e que essa pode ter uma “problemática de utilização”, citando explicitando com o Engenheiro, e todo ‘utilizador’ que manipule as matemáticas. Em seguida, diz que acreditando que o termo pertence a Pierre Bourdieu, cita os “saberes práticos que se põem em funcionamento, se aprendem, se enriquecem, sem, no entanto, utilizá-los, ensiná-los ou produzi-los (CHEVALLARD, idem). Esse autor é conclusivo ao tratar da necessidade de incluir mais um termo primitivo em sua teoria, ao qual denomina de ‘prática social’ (CHEVALLARD, 2006, p. 151)

A engenharia é uma prática social e a palavra engenheiro tem a mesma origem que engenho e engenhoso, do latim *in generare*, cujo significado é engenhar, criar, idear, engendrar, inventar. Considerando que desde os primórdios da humanidade houve a necessidade de os homens construírem um lugar para se abrigar, podemos dizer que desde lá a engenharia existe. As necessidades militares produziram as construções de catapultas, torres, pontes, e os projetistas desses “engenhos” eram denominados de Engenheiros ou Engenheiros militares (NAKAO 2008). A profissão do Engenheiro, por sua vez, nos remete à atividade social, “fora

---

[43] *concernant la construction et l’étude des curriculums d’éducation scientifique et technologique, conception qu’on peut appeler problématique de la référence curriculaire.*

[44] *- ce sont des activités objectives de transformation d'un donné naturel ou humain ("pratique");*
- elles concernent l'ensemble d'un secteur social, et non des rôles individuels ("social");
- la relation avec les activités didactiques n'est pas d'identité il y a seulement termede comparaison ("référence").

da escola", portanto, sua formação acadêmica tem que ser vista dessa maneira, ou seja, de forma que seu aprendizado venha ao encontro do que os estudantes encontrarão profissionalmente, quando egressos da academia.

José Roberto Silva (1997) escreveu na revista de ensino de engenharia de nº 17, da Associação Brasileira de Educação em Engenharia (ABENGE) "Uma definição formal para engenharia" em que apresenta 35 caracterizações e diz considerar como a mais pertinente, a seguinte:

> A engenharia é uma aplicação de conhecimentos científicos e empíricos: é uma atividade que aplica os conhecimentos humanos à resolução de problemas, propondo soluções técnicas utilizando as tecnologias.

Cocian (2011, p. 11) diz que "A engenharia é a arte da aplicação dos princípios matemáticos, da experiência, do julgamento e do senso comum, para implementar ideias e ações em benefício da humanidade e da natureza". Esse autor apresenta as subdivisões da engenharia no Brasil, que se constituiriam em ecossistemas:

1. Engenharia de Agricultura
   - Engenharia Agrícola
   - Engenharia Agronômica
2. Engenharia Ambiental
3. Engenharia Biomédica
   - Engenharia Eletromédica
   - Engenharia Clínica
   - Engenharia Biomecânica
   - Engenharia Bioinformática
   - Bioengenharia
4. Engenharia Civil
   - Engenharia de Transportes
   - Engenheiros Cartográficos
   - Engenheiros de Estruturas
   - Engenheiros Oceanógrafos
5. Engenharia Elétrica
   - Engenharia Eletrônica
   - Engenharia Eletromecânica
   - Engenharia Mecatrônica
   - Engenharia de Computadores - Hardware
   - Engenharia de Computadores - Software
   - Engenharia Telemática
   - Engenharia de Telecomunicações
   - Engenharia de Automação e
6. Controle de Processos
   - Engenharia Eletrotécnica
   - Engenharia de Sistemas de Energia
   - Engenharia Nuclear
7. Engenharia Industrial
   - Engenharia de Manufatura
   - Engenharia de Produção
8. Engenharia de Materiais
   - Engenharia de Cerâmicas
   - Engenharia de Madeira
   - Engenharia de Plásticos
   - Engenharia Metalúrgica
   - Engenharia de Minas
   - Engenharia de Petróleo
   - Engenharia Geológica
9. Engenharia Mecânica
   - Engenharia Automotiva
   - Engenharia Aeroespacial
   - Engenharia Aeronáutica
   - Engenharia Naval
10. Engenharia Química
   - Engenharia de Alimentos
   - Engenharia Têxtil

(CONCIAN, 2011, p. 16 e 17)

Dentre as atividades desenvolvidas por esse profissional, Cocian (2011, p. 11) destaca as de: Engenheiro pesquisador, Engenheiro de projetos, Engenheiro analítico, Engenheiro de testes, Engenheiro de vendas, Engenheiro de desenvolvimento e Engenheiro consultor.

Os ecossistemas de formação do Engenheiro no Brasil possuem Diretrizes Curriculares Nacionais gerais, estabelecidas pela Resolução CNE/CES 11, de 11 de Março de 2002. O Núcleo Básico dos cursos de formação, contemplando 30% da carga horária total, conta com o ensino de Matemática.

As Diretrizes apontam ainda que o egresso desse curso

> compreenderá uma sólida formação técnico científica e profissional geral que o capacite a absorver e desenvolver novas tecnologias, estimulando a sua atuação crítica e criativa na identificação e resolução de problemas, considerando seus aspectos políticos, econômicos, sociais, ambientais e culturais, com visão ética e humanística, em atendimento às demandas da sociedade. (BRASIL 2002, p. 1)

As Diretrizes indicam que os Currículos devem propiciar um conjunto de quatorze condições, de modo que os egressos adquiram competências e habilidades necessárias ao desempenho da profissão (BRASIL 2002, p. 1). Dessas destacamos as que entendemos estejam mais próximas da nossa pesquisa:

> – aplicar conhecimentos matemáticos, científicos, tecnológicos e instrumentais à engenharia;
> – projetar e conduzir experimentos e interpretar resultados;
> – conceber, projetar e analisar sistemas, produtos e processos;
> – identificar, formular e resolver problemas de engenharia;
> – desenvolver e/ou utilizar novas ferramentas e técnicas.

Como foi destacado, os ecossistemas de ensino de engenharia contempla outros, comportando, particularmente, o de Engenharia Civil que destacaremos a seguir.

3.2.1.2 Ecossistemas de ensino de Engenharia Civil

A Engenharia Civil deve ser exercida por profissional formado no respectivo curso de bacharelado, que deve se ocupar com aplicações e habilidades oriundas de conhecimentos da profissão, relativos à construção de estruturas, ruas, fornecimento de água e sistemas de esgoto, incluindo ainda outros projetos para benefício da população civil. Dentre as especialidades da Engenharia Civil temos: estruturas e construções, hidráulica e hidrologia, cartografia, ambiente e sanitária, estradas, urbanismo, gestão, transportes e geotécnica.

No Brasil, a profissão de Engenheiro Civil é regulamentada pela Lei Nº 5194/66 e o exercício desse profissional é fiscalizado pelos Conselhos Regionais de Engenharia e Agronomia (CREA), com competências e atribuições definidas pelo Conselho Federal de Engenharia e Agronomia (CONFEA), e regulamentadas pela Resolução nº 1010/CONFEA, de 22 de agosto de 2005 (MACEDO, 1998).

As referências comumente indicam que o ensino formal de Engenharia Civil, possivelmente, teria iniciado na França, com a criação da *École Nationale des Ponts e Chauseés* (Escola Nacional de Pontes e Estradas) em 14 de fevereiro de 1747. Posteriormente, em 1795, foi criada nesse país a *École Polytechnique,* onde os alunos estudavam três anos e depois eram encaminhados para as escolas especializadas dentre as quais a própria *École Nationale des Ponts e Chauseés* e a *École de Mines* (Escola de Minas). (GOMES 2009, p. 23)

O ensino da engenharia no Brasil tem como precursor a Carta Régia de 15 de Janeiro de 1699[45], que criou a formação de Engenheiros Militares, com a primeira Aula de Fortificação (que correspondia a um curso). Lucena (2005, p. 6) cita que “em 1718, havia, no Recife, uma Aula de Fortificação, na qual se ensinavam as partes essenciais de um curso de matemática.”

Em 1792, houve a implantação, no Rio de Janeiro, da Real Academia de Artilharia, Fortificações e Desenho, que em 1822, foi transformada na Imperial Academia Militar, depois, em 1832, na Academia Militar da Corte, e em 1840 na Escola Militar. (LUCENA , 2005, P. 7)

A formação militar, em 1855, era dividida em duas:

---

[45] Disponível em:
http://www.iuslusitaniae.fcsh.unl.pt/verlivro.php?id_parte=103&id_obra =63& pagina =1088

> Numa, as matemáticas, as ciências físicas, o estudo da Engenharia; na outra, o regime militar rigoroso, a ordem unida, o acampamento, o manejo das armas, a prática do tiro. Os alunos frequentariam uma e outra escola, segundo modalidades que variavam com as suas Armas. A primeira era a Escola Central e a segunda, a Escola de Aplicação da Praia Vermelha. (idem)

Em 1º de janeiro de 1858, o decreto nº 2.116[46] criou a Escola Central para "o ensino das Matemáticas, Ciências Físicas e Naturais, e também das doutrinas próprias da Engenharia Civil", escola essa que através do Decreto 5.600[47], de 25 de abril de 1874, transformou-se na Escola Politécnica do Rio de Janeiro, que possuía um curso geral e os cursos especiais em: Ciências Físicas e Naturais, Ciências Físicas e Matemáticas, Engenheiros Geógrafos, Engenheiros Civis, Engenheiros de Minas e Artes e Manufaturas. Tavares (2000), Lucena (2005) e Gomes (2009) apresentam mais detalhes da criação dessas escolas de Engenharia no Brasil.

Passaremos a detalhar o ecossistema que abriga os *habitat* em que pesquisamos as funcionalidades de limite de uma função, ou seja, os *nichos* do objeto matemático de nossa pesquisa.

3.2.1.3 Ecossistema de ensino da Faculdade de Engenharia Civil da UFPA

No Estado do Pará, o ensino de engenharia iniciou com as Aulas Militares em 1699:

> Naquele ano, a corte portuguesa criou, em nossa região, uma Aula Militar, como então se chamava um centro de ensino de Engenharia-Militar. Naquele período, o Engenheiro-militar Joseph Jorge Velho que atuava em Belém e permaneceria quase 30 anos no Grão-Pará, passou a receber mais mil réis de salário para que, como dizia, um documento assinado pelo Rei de Portugal, ficasse 'obrigado a ensinar aos artilheiros'. Em 1705, outro Engenheiro-militar nomeado para o Grão-Pará, Custódio Pereira, recebeu também um acréscimo de 4 mil réis em sua remuneração para que, como dizia o ato real, pudesse 'ensinar às pessoas que quiserem aprender a serem Engenheiros'. (PPC de Engenharia Civil da UFPA, p. 11).

---

[46] Disponível em: http://legis.senado.gov.br/legislacao/ListaTextoIntegral.action?id=61524&norma=77404

[47] Disponível em: http://www2.camara.leg.br/legin/fed/decret/1824-1899/decreto-5600-25-abril-1874-550207-publicacaooriginal-65869-pe.html

Com o passar dos anos, o ensino de engenharia evoluiu no Brasil como um todo e no Estado do Pará não foi diferente. Para essa permanente evolução, além daquela responsável por seu ensino formal, outras instituições foram, e são, de fundamental importância, como passaremos a destacar.

O Clube de Engenharia do Pará foi fundado em 14 de maio de 1919, não possuindo ainda muitos associados, em razão do baixo número de Engenheiros no Estado, havia então a necessidade de se ter uma instituição que formasse esses profissionais. No dia 07 de abril de 1931 foi fundada a antiga Escola de Engenharia do Pará, que tinha a finalidade de formar Engenheiros para atender às necessidades de desenvolvimento da região. Coimbra (2003) apresenta o histórico da criação dessa escola e relações nominais dos primeiros Engenheiros formados entre os anos de 1936 e 1951. Esse pesquisador, que tivemos a oportunidade de entrevistar nesta pesquisa, ressalta ainda que o Decreto n° 23.569, de 11 de dezembro de 1933 criou o Conselho Federal de Engenharia, Arquitetura e Agrimensura do Pará (CREA-PA), que também se constitui em um órgão normativo da engenharia em nosso Estado.

A Escola de Engenharia, ao longo dos anos passou por transformações de cunho organizacional, resultando na Faculdade de Engenharia Civil da Universidade Federal do Pará que temos atualmente, nosso *locus* de pesquisa e ecossistema de ensino por nós considerado, e tem como objetivo:

> formar Engenheiros civis generalistas, humanistas, críticos e reflexivos, capacitados para absorver e desenvolver novas tecnologias; atuar de maneira crítica e criativa na identificação e resolução de problemas relacionados com as suas atribuições, considerando seus aspectos técnicos, econômicos, políticos, sociais, ambientais e culturais. (UFPA, 2009, p.2)

A Faculdade de Engenharia da UFPA do Campus de Belém é uma das subunidades do Instituto Tecnológico (ITEC) e se constitui em uma das mais antigas instituições universitárias do Norte do Brasil. Após sua criação em 1931, foi reconhecida primeiramente pelo Decreto Lei Nº 7.215 de 24/05/1941, antecedendo à própria criação da UFPA, que só se deu através da Lei de nº 3.191 de 2 de julho de 1957.

O atual PPC do curso de Engenharia Civil da UFPA, Campus de Belém, atendendo às Diretrizes Curriculares previstas, foi aprovado pela Resolução nº 3.902

- Conselho Superior de Ensino e Pesquisa (CONSEPE) da UFPA, em 21 de setembro de 2009. Antes desse, vigorava o PPC que fora aprovado pela Resolução nº 2.761/2001-CONSEP-UFPA e reconhecido pela Portaria nº 1.483/2001 MEC, sendo que os alunos que ingressaram a partir de 2007 promoveram suas integralizações curriculares pelo PPC de 2009, e os que ingressaram em anos anteriores a 2007 puderam optar entre o PPC antigo e o novo PPC.

A primeira das habilidades e competências do curso de Bacharelado em Engenharia Civil da UFPA, estipulada no seu PPC (UFPA, 2009), é “Aplicar conhecimentos matemáticos, físicos, químicos, científicos, tecnológicos e instrumentais à Engenharia Civil”, e o seu egresso deverá

> possuir sólidos conhecimentos científicos e tecnológicos, com formação social e ambiental, que o capacite a dominar tecnologias da Engenharia Civil, com visão sistêmica e espírito empreendedor, permitindo sua atuação crítica e criativa na identificação e resolução de problemas, de forma ética e humanística, considerando seus aspectos econômicos, de qualidade, de segurança do trabalho, sociais e ambientais. (UFPA, 2009, p. 20).

A Faculdade possui grupos de estudo e pesquisas, que na ocasião da aprovação do Projeto Pedagógico eram os seguintes:

- Grupo de Estudos em Estruturas;
- Grupo de Análise Experimental de Estruturas e Materiais (GAEMA);
- Núcleo de Instrumentação e Computação Aplicada à Engenharia (NICAE);
- Núcleo de Habitação da Amazônia (NUHAM);
- Grupo de Pesquisas em Materiais (GPM);
- Grupo de Estudos em Geotecnia;
- Grupo de Estudos em Engenharia dos Transportes;
- Grupo de Estudos em Hidrotecnia;
- Grupo de Estudos em Engenharia Legal (UFPA, 2009).

A duração mínima é de 5 (cinco) anos para os cursos Matutino e Vespertino, e de 6 (seis) anos para o curso ministrado à noite, sendo estruturado em 11 (onze) Módulos de Conhecimentos:

1. Módulo de Ciências Básicas;
2. Módulo de Ciências Básicas da Engenharia Civil;
3. Módulo de Arquitetura e Urbanismo;
4. Módulo de Eletricidade;
5. Módulo de Sistemas Estruturais;
6. Módulo de Geotecnia;
7. Módulo de Materiais;

8. Módulo de Construção Civil;
9. Módulo de Transportes;
10. Módulo de Hidrotecnia; e
11. Módulo de Engenharia Legal (UFPA, 2009).

No primeiro desses módulos, temos a disciplina denominada de Matemática Aplicada à Engenharia I, que, no ecossistema de ensino de Engenharia Civil da UFPA, se constitui *habitat* natural do Cálculo Diferencial e Integral de funções de uma variável, onde o objeto limite “reside”.

O ecossistema por nós considerado nesta pesquisa será o de ensino de Engenharia Civil, mais especificamente o da respectiva Faculdade da Universidade Federal do Pará, Campus de Belém, cujos *habitat,* onde o objeto por nós pesquisado “reside”, passaremos a destacar em seguida.

3.2.1.4 *Habitat* de limite nas disciplinas do ecossistema de ensino de Engenharia Civil da UFPA

Para Odum (1988, p. 254) o termo *habitat* é de uma profusão muito grande, que se dá não somente em ecologia, mas está “por toda a parte”. Como “*habitat* de um organismo é o local onde ele vive, ou o lugar onde alguém irá procurá-lo”, nesta pesquisa de Didática da Matemática, os *habitat* considerados serão as disciplinas, teóricas ou práticas, onde o objeto matemático limite “vive” no ecossistema de ensino considerado.

As ementas das disciplinas do curso nos nortearam quanto àquelas em que deveríamos procurar os lugares onde limite “mora”. Iniciamos a busca naqueles “lugares” que julgamos serem suas “residências” naturais, em razão de sua instituição produtora: Matemática Aplicada à Engenharia I e Matemática Aplicada à Engenharia II.

A ementa de Matemática Aplicada à Engenharia I estabelece que devem ser ensinados os seguintes temas:

> Introdução ao aplicativo Maple ou similar. Breves noções de Funções e seus Gráficos. <u>Limites</u>. Derivada e suas aplicações. Integrais Indefinidas. Integrais Definidas e suas aplicações. Técnicas de Integração. Integrais Impróprias. Operações com Matrizes. (UFPA, 2009, ANEXO I, p. 1)

Enquanto Matemática Aplicada à Engenharia II, em sua ementa apresenta:

> Funções de múltiplas variáveis reais. Derivadas Parciais e suas aplicações. Integrais Múltiplas e suas aplicações. Campos Escalares e vetoriais: Gradiente, Divergente e Rotacional. Integrais de Linha e de Superfície: Teorema de Green, Gauss e Stokes. Noções de Equações Diferenciais Parciais para Engenheiros. (UFPA, 2009, ANEXO I, p. 1 e 2)

Observamos, nessa última, que o tema limite de uma função não é prescrito como a ser ensinado, (mesmo em se tratando de funções de várias variáveis, esse objeto podia se fazer presente, como ocorre em outros “programas” ou livros textos a respeito desse tema). Logo, não distinguimos essa disciplina como um *habitat* para limite, ou seja, pelo exposto em sua ementa, esse objeto matemático não “vive” em Matemática Aplicada à Engenharia II.

Após a verificação em Matemática Aplicada à Engenharia I e II, continuamos pesquisando a existência em outros *habitat,* distintos daqueles que abrigam os temas do CDI, através das ementas e referências bibliográficas, de outras disciplinas, para tal as separamos em dois blocos:

I) <u>Disciplinas com a palavra Limites em suas Ementas</u>, que se encontram no quadro 06 a seguir:

QUADRO 06 - Possíveis *habitat* de limite em disciplinas da Faculdade de Engenharia Civil da UFPA

DISCIPLINA	REFERÊNCIA NA EMENTA
Mecânica dos Solos 01	**Limites** de Atterberg
Mecânica dos Sólidos 02	Estados **Limites** e Hipóteses Simplificadoras
Estruturas de Concreto 01	Estado **Limite** Último (ELU) e Estado **Limite** de Serviço (ELS). **Limites** para dimensões
Estruturas de Concreto 02	Estados **Limites** de Utilização; Esbeltes **limite**; Conceitos básicos relacionados ao estado **limite** último na flexão e cisalhamento.
Estruturas de Aço	Combinações de ações para Estados **Limites** últimos e de utilização.
Concreto Protendido	Critérios de projeto: Estados **Limites** e grau de protensão; Estado **Limite** Último na flexão: pré-alongamento, verificações, armadura mínima. Estado **Limite** Último no cisalhamento: efeito da protensão, modelos de cálculo, armaduras.

Fonte: PPC de Engenharia Civil da UFPA

No grupo de disciplinas do quadro 06, que destacam explicitamente a palavra limite, verificamos a recorrência do termo Estados Limites, presente em Estrutura de Concreto, Estrutura de Aço e Concreto Protendido e em Mecânica dos Solos, o que nos levou buscar seu significado.

Os Procedimentos para Estruturas de Concreto são estabelecidas pela norma brasileira NBR 6118, que no item 3.2, apresenta as definições de Estados Limites, os quais indicam quando uma estrutura, ou uma parte dela, atinge um estado crítico, de modo efetivo ou convencional, tornando-se inutilizável, ou seja, quando ela deixa de satisfazer às condições previstas para sua utilização. Dentre os Estados Limites temos nessa norma:

> a) **Estado Limite Último (ELU)** relacionado ao colapso, ou outra forma de ruína da estrutura, que determine a paralisação do seu uso;
> b) **Estado Limite de Formação de Fissuras (ELS-F):** estado em que se inicia a formação de fissuras;
> c) **Estado Limite de Abertura das Fissuras (ELS-W):** estado em que as fissuras apresentam-se com aberturas iguais aos máximos especificados em norma;
> d) **Estado Limite de Deformações Excessivas (ELS-DEF):** estado em que as deformações atingem os limites estabelecidos para a utilização normal;
> e) **Estado Limite de Descompressão (ELS-D):** estado no qual em um ou mais pontos da seção transversal à tensão normal é nula, não havendo tração no restante da seção;
> f) **Estado Limite de Descompressão Parcial (ELS-DP):** estado no qual, garante-se a compressão na seção transversal;
> g) **Estado Limite de Compressão Excessiva (ELS-CE):** estado em que as tensões de compressão atingem o limite convencional estabelecido;
> h) **Estado Limite de Vibrações Excessivas (ELS-VE):** Estado em que as vibrações atingem os limites estabelecidos para a utilização normal da construção. (ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS – NBR 6118, p. 5)

Pelo exposto na norma NBR 6118, temos: “Estado Limite” é uma situação extrema, que, comumente não deve ser alcançada, pois pode comprometer a construção civil onde se situa (BASTOS 2006, p. 49).

II) <u>Disciplinas sem a palavra limite em suas ementas</u>, mas que nossa experiência na posição de egresso do curso, nos sinalizam como possibilidades de “vida” desse tema, que ali podia se “abrigar”. Apresentamos essas disciplinas no quadro 07 a seguir:

QUADRO 07 - Possíveis *habitat* de limite em outras disciplinas da Faculdade de Engenharia Civil da UFPA

DISCIPLINA	Destaques da Ementa do PPC de Engenharia Civil
Teoria de Estruturas 01	Condições de Equilíbrio. Graus de Liberdade. Tipos de Apoios. Estaticidade e Estabilidade de Estruturas Planas. Esforços Simples. Linhas de Estado.
Ensaios de Estruturas e Materiais	Ensaios de corpos-de-prova de concreto, aço e madeira à compressão e tração simples, flexão, cisalhamento e torção. Estimativa da resistência de solos e rochas “in loco”.
Estruturas de Madeira	Propriedades físicas e mecânicas de algumas espécies. Dimensionamento de peças submetidas aos esforços solicitantes de Tração, Compressão, Flexão e Flexo-Compressão.
Análise Experimental de Estruturas	Ensaios de estruturas ou elementos estruturais sob carregamentos estáticos e dinâmicos. Ensaios de vigas, pilares e placas de concreto armado, aço e madeira. Análise do comportamento de vigas à flexão e ao cisalhamento.
Ensaios de Modelos Estruturais	**Teórica:** Modelagem de estruturas com elementos de barra e placa de concreto armado, aço e madeira. Influência das condições de contorno no comportamento global das estruturas. **Experimental:** Ensaios de modelos reduzidos de treliças planas e espaciais, vigas, pilares e placas de concreto armado, aço e madeira sob carregamentos estáticos e dinâmicos.
Introdução à Dinâmica das Estruturas	Fundamentos da análise dinâmica: carregamento dinâmico, princípio de D'Alambert, equação do movimento, conceitos de frequência e amortecimento. Análise de sistemas de um grau de liberdade. Análise de sistemas de vários graus de liberdade.
Introdução à Ciência e Engenharia dos Materiais	Diagramas de Fase. Propriedades Mecânicas. Materiais Metálicos, Cerâmicos, Poliméricos e Compósitos. Ensaios em Laboratório.
Fundações 01	Provas de cargas; Métodos de cálculo de atrito negativo; Capacidade de Carga de fundações superficiais; Recalque de fundações superficiais.

Fonte: PPC de Engenharia Civil da UFPA

Além dos *habitat* onde limite de uma função poderia ser encontrado e ter funcionalidades, julgamos importante saber o que poderiam dizer os professores que, em suas praxeologias, lidam, ou poderiam lidar, como esse objeto matemático, para tal nos reportamos a eles, dividindo-os em grupos por afinidade de atividade laboral. Em seguida, destacamos esses grupos e detalharemos, sumariamente, as pesquisas que fizemos junto a eles.

3.2.1.5 População do ecossistema de ensino da Faculdade de Engenharia Civil da UFPA

Na ecologia didática que estamos considerando, a população de um ecossistema é constituído pelas comunidades, como as instituições consideradas na tese de Olmos (2008), que nos fala de que papel terá o currículo matemático na estratégia geral de formação de um Engenheiro, complementando que “Para isso o debate está aberto, tanto para as comunidades de professores (de matemática e engenharia), de Engenheiros, assim como para as comunidades de pesquisadores de Educação Matemática”[48]. (OLMOS, 2008, p. 26)

A população do ecossistema de ensino considerado em nossa pesquisa é constituída basicamente por três comunidades: a da instituição docente com 75 (setenta e cinco) componentes, a da instituição dos servidores técnicos administrativos com 10 (dez) e a da instituição dos discentes que possui 2.319 (dois mil trezentos e dezenove) componentes. Os números de componentes das comunidades de professores e de técnicos constam do site da Faculdade[49], enquanto o de componentes da comunidade estudantil é o que consta no Anuário Estatístico da UFPA 2013, ano base 2012.

Sintetizamos no quadro 08 a seguir, a comunidade docente, da Faculdade de Engenharia da UFPA, segundo a titulação acadêmica e regime de trabalho.

QUADRO 08 - Comunidade Docente da Faculdade de Engenharia Civil da UFPA

Reg de Trab / Qualificação	DEDICAÇÃO EXCLUSIVA	QUARENTA HORAS	VINTE HORAS	TOTAL REG TRAB
Doutores	29	2	0	31
Mestres	21	3	1	25
Especialistas	10	2	2	14
Graduados	2	1	2	5
T REG TRAB	62	8	5	75

Fonte: http://www.itec.ufpa.br acesso em março de 2014

[48] *Para estos aspectos el debate está abierto, tanto para las comunidades de professors (de matemáticas e engeniería), de ingenieros, así como para las comunidades de investigadores en matemática educativa.*
[49] http://www.itec.ufpa.br acesso em março de 2014

Junto a essa comunidade de docentes nos propusemos colher informações, que pudessem contribuir no entendimento da problemática por nós pesquisada e nos futuros encaminhamentos. Para que pudéssemos ter uma melhor compreensão de nossa problemática, se fez necessário sabermos o que teriam a dizer as comunidades docentes da Faculdade de Engenharia Civil da UFPA, constituídas por professores:

a) Engenheiros, que não lecionam Cálculo Diferencial e Integral;
b) de Cálculo Diferencial e Integral, não Engenheiros; e
c) de Cálculo Diferencial e Integral, Engenheiros.

A seguir passamos a tratar das pesquisas junto a essas comunidades.

3.2.1.5.1 Comunidade de professores Engenheiros, que não lecionam Cálculo Diferencial e Integral

Inicialmente, nos dirigimos à Faculdade de Engenharia Civil, subunidade do Instituto de Tecnologia da UFPA, para explicar ao seu diretor os motivos deste trabalho, e solicitar a indicação de professores que ali atuam para, sob forma de entrevistas, colaborarem com nossa pesquisa.

A entrevista constitui-se em uma técnica que permite estreitar relacionamentos entre o entrevistador e os entrevistados, podendo ser estruturada, quando se utiliza de um questionário previamente estabelecido, não estruturada quando é totalmente aberta seguindo a um ordenamento que a própria entrevista ditará e semiestruturadas quando o pesquisador possui um roteiro, podendo alterar a ordem, acrescentar ou até mesmo reduzir questionamentos (AGUIAR E MEDEIROS 2009).

Após o aceite, o diretor nos indicou dois professores que tiveram atuação destacada na elaboração do PPC, e, a partir desses, foram indicados mais cinco participantes. Essa técnica de encadeamento de indicações é também conhecida como método da “bola de neve” (*snowball*), caracterizada pelo fato de os participantes iniciais indicarem novos participantes. (FREITAS, 2000, p. 107).

As sete entrevistas realizadas com professores engenheiros, foram no formato semiestruturada e ocorreram no prédio da Faculdade de Engenharia Civil da UFPA, campus de Belém, mais especificamente onde se situam os laboratórios e salas de estudos dos professores, no período de 2 a 23 de maio de 2011. Todos leram, concordaram e assinaram o Termo de Consentimento e Livre Esclarecido (APÊNDICE A), e participaram com o objetivo de obtermos posicionamento a respeito das praxeologias com matemática, mais especificamente com limite de uma função, que os mesmos vivenciam ou vivenciaram.

As entrevistas tinham como roteiro os seguintes questionamentos:

> QE_1: Quais as relações das disciplinas de cálculo diferencial e integral com as demais disciplinas de um modo geral e em particular com a que o professor leciona na Faculdade de Engenharia Civil da UFPA?
> QE_2: Quais as relações do tema limite de uma função com as disciplinas da Faculdade de Engenharia Civil da UFPA de um modo geral e em particular com a que o professor leciona?
> QE_3: Se o docente identificava problemas no ensino, ou na aprendizagem, relativamente ao tema limites de uma função? Se sim quais as possíveis razões?
> QE_4: Quais as possíveis interferências das referências bibliográficas no ensino e aprendizagem de limite?
> QE_5: Se há diferença na abordagem do tema limites na época que o entrevistado era estudante de engenharia e hoje? Se há, quais?
> QE_6: Qual a bibliografia utilizada em CDI quando era estudante do curso de engenharia?
> QE_7: Qual a relevância do tema limites na disciplina lecionada e nas demais do curso da Faculdade de engenharia?
> QE_8: Onde o Engenheiro Civil utiliza o conhecimento de limite de uma função?
> QE_9: Se o ensino desse tema é dispensável ou indispensável à disciplina lecionada e às demais do curso de Engenharia Civil?

As entrevistas foram gravadas e depois, com o auxílio do aplicativo denominado *Express Scribe Transcription Software* [50], as respostas dos sete professores Engenheiros foram digitadas e designadas por PE_1 a PE_7, algumas respostas serão apresentadas ao longo do texto, como reforço do que trataremos, e em um tópico especial designado ao posicionamento dos membros das comunidades docentes.

---

[50] Versão free disponível para dowload em http://www.nch.com.au/scribe/index.html

3.2.1.5.2 Comunidade de professores não Engenheiros, que lecionam Cálculo Diferencial e Integral

Em junho de 2012, houve uma reunião com aproximadamente 120 professores de Matemática da Universidade Federal do Pará que ministrariam, no mês seguinte, disciplinas do curso de Licenciatura em Matemática do Plano Nacional de Formação dos Professores da Educação Básica (PARFOR), destinado à capacitação de professores em exercício nas escolas públicas estaduais e municipais, sem graduação superior, com vistas a atender o estabelecido na Lei de Diretrizes e bases da Educação. Antes da reunião elaboramos um questionário, para ser respondido pelos professores presentes com a condição inicial de que tivessem lecionado Cálculo Diferencial e Integral tanto para cursos de Licenciatura em Matemática quanto para curso de Bacharelado em Engenharia.

Esse tipo de escolha de amostra não probabilística é denominado de “por conveniência” (*convenience*) e ocorre quando os entrevistados estão disponíveis (FREITAS, 2000, p. 106). Por esse processo de entrevista estruturada, conseguimos consultar 14 professores, que designamos por PM_1 a PM_{14}, aos quais submetemos um questionário com 9 perguntas para ser devolvido em no máximo 30 minutos.

A pergunta que antecedia à entrega do questionário dizia respeito à condição necessária para participar da pesquisa, foi realizada de modo oral, assim como a sua resposta, a pergunta era: - Já lecionou ou leciona Cálculo I para Engenharia e para Licenciatura em Matemática?

Os que responderam afirmativamente continuaram na pesquisa, respondendo a um formulário, com os seguintes questionamentos:

> QM_1: Em que curso ensinou o tema limite de uma função?
>
> QM_2: Há diferenças entre ensinar limites para a licenciatura em Matemática e para a engenharia? Se sim, quais?
>
> QM_3: As referências bibliográficas utilizadas por você no ensino de Cálculo Diferencial e Integral, para os cursos de Licenciatura em Matemática e para os de Engenharia, são as mesmas? Diferentes ou não, por favor especifique quais você utiliza?
>
> QM_4: Qual (ou quais) a(s) metodologia(s) você utiliza para ensinar limites?

> QM_5: Como você ensina que $\lim_{x\to 0} \frac{sen(x)}{x} = 1$?
>
> QM_6: Utiliza algum aplicativo computacional para ensinar limites? Se sim, desde quando?
>
> QM_7: É possível ensinar derivadas sem ensinar limites? Justifique por favor.
>
> QM_8: Seria possível ensinar limites sem utilizar-se de Epsilons e Deltas?
>
> QM_9: Você conhece os números hiper-reais? Se sim, como os define?

A seguir trataremos da entrevista que fizemos ao professor Engenheiro que ensina Cálculo Diferencial e Integral.

3.2.1.5.3 Comunidade de professores de Cálculo Diferencial Integral, Engenheiros

Hoje, não são somente os professores Licenciados em Matemática que ensinam Cálculo para os Cursos de Engenharia da UFPA, os docentes dessa disciplina, quase sempre são Engenheiros. Professores de Matemática somente lecionam Cálculo I para cursos de engenharia quando os professores Engenheiros contratados para tal não suficientes para o número de turmas ofertadas.

O Instituto de Tecnologia da UFPA, unidade à qual a Faculdade de Engenharia Civil é subordinada, mediante concurso público, selecionou professores, engenheiros de formação, para lecionar naquele ecossistema de ensino as disciplinas que originalmente eram lecionadas por professores de Matemática. Procuramos os dois professores engenheiros concursados, mas apenas um deles estava em exercício efetivo, sendo por nós entrevistado com perguntas que buscamos focar nos aspectos praxeológicos do ensino de Matemática Aplicada à Engenharia I, de um modo geral, e, particularmente, aos que diziam respeito a limite de uma função.

A entrevista foi semiestruturada, tendo o professor assinado Termo de Consentimento e Livre Esclarecido, e da mesma forma que as outras, foi gravada e transcrita, e terão algumas repostas citadas neste texto. Tomamos por base algumas perguntas feitas aos membros da comunidade dos professores de CDI não

Engenheiros e outras pertinentes ao Projeto Pedagógico do Curso da Faculdade de Engenharia Civil da UFPA, campus de Belém. Nossos questionamentos, inicialmente apresentavam:

> QPE_1: Qual a sua formação acadêmica?
>
> QPE_2: Quais disciplinas já lecionou e para quais cursos?
>
> QPE_3: Já lecionou para o curso de Licenciatura em Matemática?
>
> QPE_4: Há diferença entre lecionar cálculo para engenharia e para Licenciatura em Matemática?
>
> QPE_5: Qual a bibliografia que utiliza no ensino de cálculo no curso de Engenharia Civil?
>
> QPE_6: Qual a sequência de ensino que utiliza no ensino de Matemática Aplicada à Engenharia?
>
> QPE_7: Alguma vez lecionou derivadas sem antes ensinar limites? É possível fazer isso?
>
> QPE_8: Quando leciona limites para Engenharia Civil utiliza exemplos práticos próprios desse curso?
>
> QPE_9: O rigor dos épsilons e deltas é dispensável no ensino de limite para o curso de engenharia?
>
> QPE_{10}: O ensino do limite fundamental da trigonometria sen(x)/x quando x tende a zero, como deve ser ensinado para engenharia?
>
> QPE_{11}: Conhece os números hiper-reais?
>
> QPE_{12}: O ensino de limite pode ser suprimido no ensino de cálculo para Engenharia Civil?
>
> QPE_{13}: O limite que ensina na matemática é o mesmo que ensina na engenharia?

Realizamos mais duas perguntas, que não estavam no roteiro e, por terem sido feitas após o encerramento da gravação, foram anotadas, juntamente com as respostas e encontram-se a seguir:

> QPE_{14}: E a parte computacional da ementa de Matemática Aplicada à Engenharia I, como tem se dado?
>
> QPE_{15}: Como é a distribuição das turmas entre os professores de Cálculo Engenheiros?

Em seguida passaremos a tratar de outros percursos até aqui não relatados.

3.2.2 Percursos complementares da pesquisa

Além dos percursos metodológicos já descritos temos a destacar outros que foram seguidos e tornaram-se importantes à nossa pesquisa:

a) Permanente revisão da literatura

Acreditamos que esse proceder diga respeito a toda e qualquer investigação em Educação Matemática, portanto poderia não ser destacada, mas o que torna diferente foi a diversidade de saberes que nos detivemos.

No referencial teórico, indicamos que a Didática da Matemática, principalmente quanto à Transposição Didática e à Teoria Antropológica do Didático, nortearam esta pesquisa, nesse particular as obras que nos referenciaram foram: Chevallard (1996, 2013), Pais (2005, 2010) e Almouloud (2010).

Para melhorar nossa compreensão, nos detivemos nas obras de Artigue (1995), Astolfi e Develay (1995), Bourdieu (1974, 1987, 1989, 2008), D'Amore (2007), Martiand (1986), Perrenoud (1997) e Poincaré (1963, 1995, 2008), dentre outras. Nos mantivemos em permanente busca de teses, dissertações e artigos e Educação Matemática, que tratassem Didática da Matemática, Ecologia Didática, e da problemática do ensino e da aprendizagem de limite de uma função, muitas das quais são referências desta pesquisa.

b) O objeto limite de uma função e sua epistemologia

Como todo conhecimento, o concernente a limite, epistemologicamente, modificou-se, apresentando funcionalidades distintas com o tempo, ou seja, diferentes *nichos*, o que pode ter contribuído à forma como esse tema é ensinado hoje.

Para se chegar à definição de limite que temos hoje, como um saber sábio, aceito pela comunidade científica, um longo e nem sempre calmo caminho foi trilhado. Essa definição, que comumente se apresenta nos livros textos de Cálculo, é tida como de Cauchy-Weierstrass, também denominada dos "épsilons e deltas", enunciada da seguinte forma:

Definição: Seja $f(x): A \to R$, dizemos que

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \Leftrightarrow \forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0 \text{ tal que } \forall\ x \in A \text{ tem-se que}$$
$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Essa formulação, tida como estática, é reconhecida e aceita academicamente, sendo primordial para o estudo da Análise Matemática.

Limite, quanto à sua formalização, foi por nós pesquisado nas diversas obras que constam em nossas referências, mas dentre elas, destacamos: Anton, Bivens e Davis (2007), Ávila (2008, 2010), Boulos (1974), e Lima (2009). Além dessas, realizamos análise quanto às praxeologias matemáticas e didáticas em Guidorizzi (1997), Hallett, Gleason, McCallum et al (2012) e Munem e Foulis (1978).

Nossa percepção sobre o desenvolvimento histórico do Cálculo Diferencial e Integral, particularmente interessados no que dizia respeito a limite, se deu a partir do que podemos sintetizar dos cursos de Baron e Bos (1985) e dos seguintes livros de história da Matemática: Boyer (1993, 2010), Galarda, Silva e Rossi (1999), Eves (2011), Roque (2012) e Rooney (2012), que fundamentaram nossos percursos históricos e epistemológicos do objeto matemático desta pesquisa.

c) Visita ao ambiente de ensino de engenharia

Essa pesquisa nos oportunizou revisitar o ambiente que se constitui o de ensino de Engenharia Civil, para realizarmos entrevistas com professores, acompanharmos práticas de laboratório, como também para nos vermos novamente calculando vigas, escoamento em canais e tratando de outras situações da engenharia em que o objeto limite de uma função poderia ter funcionalidade. Todas essas experiências nos foram gratificantes como pesquisador de Didática da Matemática, e também como professor e egresso do curso em que realizamos nossa pesquisa.

Em seguida, passaremos a discorrer sobre as praxeologias com matemática no ensino de Engenharia Civil, que fundamentaram a elaboração de um modelo que nos servisse para a análise da ecologia didática do objeto por nós pesquisado, limite de uma função, nos *habitat* do ecossistema que estamos considerando.

4 PRAXEOLOGIAS COM MATEMÁTICA NA ENGENHARIA CIVIL

Para construirmos um modelo que nos possibilite uma análise da ecologia de limite de uma função em um ecossistema de ensino, partimos do entendimento das praxeologias com matemática na Engenharia Civil. Para tal, consideramos pesquisas que diziam respeito a práticas com matemática em ambientes distintos daquele da instituição que produziu os saberes matemáticos envolvidos.

Além disso, nossa vivência laboral, como professor da Faculdade de Matemática, instituição mais próxima da produtora da matemática, e da Faculdade de Engenharia Civil, instituição utilizadora de saberes matemáticos, também nos favoreceu em termos de construção da compreensão a qual nos referimos e que servirá de sustentáculo ao modelo que pretendemos propor.

O modelo que apresentaremos, assim como as análises que se seguirão, levarão em conta, fundamentalmente, as praxeologias com matemática que se apresentam no ensino de Engenharia Civil que apresentamos a seguir.

4.1 Praxeologias com matemática na Engenharia Civil

Castela e Romo Vázquez (2011) destacam o estudo realizado por Romo Vázquez (2009), sobre o trabalho transpositivo de estudantes, em particular sobre o lugar da matemática na construção de uma resposta ao enfrentamento de projetos de engenharia, tomados como decorrentes do mundo profissional, que os confrontam com um problema de um sistema contínuo, que tem como tarefas resolver equações diferenciais lineares, cujas técnicas de resolução devem ter uma forte base matemática, considerando que, no caso da pesquisa delas, envolve resolver equações diferenciais usando a técnica das Transformadas de Laplace.

Essas autoras observam que de acordo com os resultados dos trabalhos de Noss, Hoyles e Pozzi (2000), Bissell (2000, 2002), Kent e Noss (2001) sobre o papel da matemática em situações de trabalho, cujos conhecimentos mais sofisticados em jogo não aparecem explicitamente, pois, o tratamento proposto foi baseado no Matlab[51] que suporta a resolução de equações diferenciais e permite um processo de ajustamento por tentativa e erro.

[51] Software de alto nível para cálculo numérico de funções, versão disponível para download em http://www.mathworks.com/products/matlab/?s_cid=wiki_matlab_2

Castela e Romo Vázquez (2011) afirmam que se tornava necessário à pesquisa, engajamento em um trabalho arqueológico para reconstruir, a partir da cultura de matemáticos, as técnicas incorporadas pela lógica e suas justificativas teóricas. Isso lhes trouxe, no âmbito do estudo de vários cursos pesquisados sobre a Transformada de Laplace, diferenças significativas que sugeriram um trabalho específico.

Assim, um estudo comparativo entre as escolhas feitas por instituições de formação de Engenheiro e técnicos superiores e de matemáticas, sobre o ensino da Transformada de Laplace é tomado por Castela e Romo Vázquez (2011) em que destacam o modelo praxeológico por elas proposto que, segundo as autoras, ampliaria o modelo inicial proposto por Chevallard. Este modelo é identificado por "modelo praxeológico expandido" na tese em Didática da Matemática de Romo Vázques (2009), que se dedicou ao lugar da matemática no ensino de engenharia, a partir do "modelo praxeológico extendido" proposto por Castela (2008a).

> As considerações introduzidas por Castela (2008a) sobre a noção de tecnologia de uma técnica são refinadas graças a diferenciação das funções do saber tecnológico, notadamente de sua componente prática: o "colocar ao lado" provocado pelo reencontro com a utilização de técnicas matemáticas nas ciências de engenharia ou no universo profissional age como revelador da 'razão do saber' que uma centralização sobre as práticas internas ao mundo matemático pode conduzir a amalgamar nos textos fundadores do modelo original praxeológico inicial (CHEVALLARD, 1997) como no de Castela (2008a). A variedade de saberes assim incorporados na tecnologia, certamente de origem empírica, introduz a necessidade de ter em conta uma mesma unidade, não apenas os componentes da praxeologia, mas também as instituições que, em diferentes termos, contribuem para sua produção enquanto objetos socialmente reconhecidos. Esse modelo praxeológico é designado em (Castela 2008b) como «modelo praxeológico extendido» foi investido na tese (ROMO VÁZQUEZ 2009) sob o nome de 'modelo praxeológica expandido'. *(*CASTELA e ROMO VÁSQUEZ ,2011, p. 81)[52]

---

[52] *Les considérations introduites par Castela (2008a) à propos de la notion de technologie d'une technique sont raffinées grâce à la différenciation des fonctions du savoir technologique, notamment de sa composante pratique : le 'pas de côté' provoqué par la rencontre avec l'utilisation de techniques mathématiques dans les sciences de l'ingénieur ou dans l'univers professionnel agit comme révélateur de 'raisons de savoir' qu'une centration sur les pratiques internes au monde mathématique a pu conduire à amalgamer dans les textes fondateurs du modèle praxéologique initial (Chevallard 1997) comme dans Castela (2008a). La variété des savoirs ainsi incorporés dans la technologie, pour certains d'origine empirique, introduit le besoin de prendre en compte dans une même unité, non seulement les composantes de la praxéologie, mais aussi les institutions qui, selon des modalités variables, contribuent à leur production en tant qu'objets socialement reconnus. Ce modèle*

Para Castela e Romo Vázquez (2011), a taxionomia das praxeologias impõe à instituição matemática P(M) o papel de produtora do saber e às demais instituições não matemáticas o papel de utilizadora I_u.

FIGURA 04 - Modelo Praxeológico Expandido

$$\left[T, \tau, \begin{array}{c} \theta^{th}\Theta \\ \\ \theta^{p} \end{array} \right] \begin{array}{l} \longleftarrow \; P(M) \\ \\ \longleftarrow \; I_u \end{array}$$

Fonte: Castela e Romo Vázquez (2011, p. 92)

Uma praxeologia com matemática é considerada mista por Castela e Romo Vázquez (2011), se possuir componentes da instituição produtora matemática que lhe deu origem e, outras oriundas da necessidade de uma unidade praxeológica, devendo incorporar não somente o discurso matemático, como também o da instituição em que vive.

Esse modelo que exclui a teoria Θ das instituições utilizadoras I_u, de certo modo, pode atender nossos propósitos nesta pesquisa, já que parece mostrar-se útil para o estudo dos modos de vida do limite de uma função, mas nos apresenta o inconveniente de tratar as praxeologias com objetos matemáticos como necessitadas, ou subordinadas, a um modelo epistemológico da instituição produtora da matemática P(M), que, em adequação com a instituição utilizadora I_u que lhe dá abrigo, ganha sentido, conformando-se a essa.

Em nossa pesquisa, optamos em analisar os modos de vida do limite a partir de uma instituição ensino de engenharia, ou seja, como e onde acontecem as práticas com esse objeto matemático no curso de Engenharia Civil da UFPA. Isto não implica em desconsiderar as práticas da matemática com limite, desde que tenhamos clareza dos discursos relativo a esse tema, que vivem no ensino desse curso na instituição considerada.

Não assumimos um modelo de praxeologia com matemática a priori, que sempre é dotado de um discurso que conta com justificativas da instituição matemática, com vista a corremos o risco de impor condições que podem dificultar, e

praxéologique, désigné dans (Castela 2008b) par l'expression «modelo praxeológico extendido» a été investi dans la thèse (Romo Vàzquez 2009) sous la dénomination de 'modèle praxéologique élargi' até mesmo impedir, de a percepção das práticas com limites desenvolvidas na instituição ensino de engenharia.

A instituição de ensino de engenharia é coagida pela "profissão engenharia", fundada em um pragmatismo sobre as práticas, o qual institui os modos de pensar-fazer heurísticos, como geradores de suas práticas. Afinal, como fala Bourdieu:

> Os 'sujeitos' são, de fato, agentes que atuam e que sabem, dotados de um *senso prático* (título que dei ao livro no qual desenvolvo essa análise), de um sistema adquirido de preferências, de princípios de visão e de divisão (o que comumente chamamos de gosto), de estruturas cognitivas duradouras (que são essencialmente produto da incorporação de estruturas objetivas) e de esquemas de ação que orientam a percepção da situação e a resposta adequada. O *habitus é* essa espécie de senso prático do que se deve fazer em dada situação - o que chamamos, no esporte, o senso do jogo, arte de *antecipar* o futuro do jogo inscrito, em esboço, no estado atual do jogo. (BOURDIEU, 2008, p.42)

Esse aspecto prático se faz evidenciar no cálculo simbólico quando funciona como uma ferramenta heurística para encontrar a expressão de soluções, por exemplo, em práticas com diferentes ostensivos, nas atividades profissionais e que se constitui em um aspecto marcante das praxeologias com matemática que não se deixa escapar no ensino de Engenharia Civil. Ostensivos esses e os próximos que nos referiremos, nos termos estabelecidos por Bosch (2001), aos quais já nos reportamos.

Assim, para nosso propósito, preferimos explicitar nossa compreensão do modelo praxeológico inicial de Chevallard (1999), que parte primariamente da possibilidade da existência de um discurso para a prática, e afirma:

> *Além disso, o fato de que há em* I *uma técnica canônica, em princípio, a única reconhecida e a única empregada, dá a esta técnica uma virtude "autotecnológica": atuar desta forma não requer justificação, porque é a maneira certa de atuar (*em *I*). [53](CHEVALLARD, 1999, p.224)

Mas, admite inclusive praxeologias sem discursos quando refere àquelas incompletas, constituídas de práticas que se justificam apenas por serem de uma boa conduta ao atuar.

[53] *Por otra parte, el hecho de que exista en I una técnica canónica, en principio la única reconocida y la única empleada, confiere a esta técnica una virtud "autotecnológica": actuar de esta manera no exige justificación, porque es la buena manera de actuar (en I).*

Mais especificamente, o modelo completo proposto pela TAD parte da compreensão do saber como atividades humanas que podem ser descritas, de modo pontual, por meio de praxeologias, que se constituem de uma *práxis* [T/τ], ou seja, de um *saber fazer*, a partir de uma tarefa (T) e um jeito de fazê-la, que denominamos de técnica (τ), práxis quase sempre acompanhada de um discurso, ou *logos,* [θ/Θ], o *saber,* constituído por uma tecnologia (θ) e uma teoria (Θ) que lhes dão razão de ser. É importante destacar, que o saber, tomado por metonímia, consiste em tudo de uma praxeologia, visto que a unidade nela vivida sempre retorna ao saber fazer, ou seja, a prática. (CHEVALLARD, 1999)

As praxeologias são obras humanas, mas não de diletantismos, pois possuem uma razão de ser, ou seja, respondem a alguma questão de interesse de uma ou mais instituições. Questão essa antes se fazia problemática e que, às vezes, pode encontrar-se esquecida pelos sujeitos que vivem nas instituições que lhe dão abrigo. O modelo proposto por Chevallard (1999) para as praxeologias, em que destaca o bloco do saber-fazer [T/τ], *a práxis* e o bloco do saber [θ/Θ], o *logos* ou discurso que dá razão à práxis, não pretende alcançar a complexidade das atividades matemáticas, mas tão somente alcançar uma compreensão de organizações praxeológicas em que essa invariante, assim estruturada, permite a analisar, quiçá desenvolve-las, a partir dessa unidade designada como praxeologia pontual que, em relações com outras praxeologias pontuais, vai ganhando complexidade em busca de pôr em evidência o saber. Isto é desprendido na seguinte citação:

> De fato, muito raramente se encontra nas praxeologias pontuais, isto é (praxeologias) para um único tipo de tarefas T. Geralmente, numa determinada instituição I, uma teoria Θ responde a *várias* tecnologias θ_j, cada uma das quais, por sua vez, justifica e faz inteligível *várias* técnicas τ_{ij}, correspondentes a outros tantos tipos de tarefas T_{ij}. As organizações pontuais vão assim se agregando, primeiramente em organizações *locais*, [$T_i/\tau_i/\theta/\Theta$], centradas sobre uma determinada tecnologia θ, e depois em organizações *regionais*, [$T_{ij}/\tau_{ij}/\theta_j/\Theta$], formadas em torno de uma teoria Θ. (Além disso, se denominará organização praxeológica *global* o complexo praxeológico obtido [$T_{ijk}/\tau_{ijk}/\theta_{jk}/\Theta_k/$] em uma determinada instituição pela agregação de várias organizações regionais correspondentes a várias teorias Θ_k). Vemos, então, que a passagem de uma praxeologia pontual [$T/\tau/\theta/\Theta$] a uma praxeologia local [$T_i/\tau_i/\theta/\Theta$] destaca a tecnologia θ, bem como a posterior passagem para uma praxeologia regional [$T_{ij}/\tau_{ij}/\theta_j/\Theta$] levará ao primeiro plano a teoria Θ. Em ambos os casos, a visibilidade do bloco do saber aumenta, em detrimento do saber-fazer. (CHEVALLARD, 1999, p. 226)

A atenção manifesta da TAD com o saber se deve, principalmente, mas não unicamente, à busca da compreensão do ensino intencional e consciente de práticas matemáticas institucionalizadas. O ensino, que se dá pela mobilização de práticas que não se constituem necessariamente em uma sequência, pode ser quase ou não algorítmico. Com isso, pode ser questionado a partir de um saber, que no momento, ou mesmo a priori, pode não se fazer presente, mas que pode justificar o porquê do "fazer assim" e o "para que se faz" tal prática, ou seja, ser visto como gerador dessas práticas pelo sujeito.

O modelo em sua complexidade busca expressar uma transposição do saber em jogo na organização matemática-didática, tomando-o como engendrador das praxeologias, embora isso não queira dizer que a práxis funcione apenas segundo uma rede determinada e fixa a partir de um único saber específico. Daí porque seu funcionamento pode ser compreendido por sua pertinência a uma rede, ou organização praxeológica, que atende a um, mas não único, modelo, denominado de epistemológico do saber.

Especificamente, o modelo epistemológico se constitui em condição indispensável para análise e desenvolvimento de organizações matemático-didáticas que façam emergir a *práxis* como aplicação do *logos*, tarefa a qual se propõem tão claramente os textos de saber, mais especificamente os livros acadêmicos e, em grau significativamente menor, os livros didáticos do ensino básico, se assim podemos dizer, considerando que o ensino básico de matemática, nesse caso, caracteriza-se por ser quase, senão totalmente, incipiente de saber matemático. O extrato do texto de Chevallard (1999) nos faz assim compreender:

> Pois se é verdade que, em muitos casos, o tipo de tarefas T precede geneticamente o bloco [T/τ] (que se constrói de forma como meio de produzir e justificar uma técnica τ apropriada à T), resta ao menos, estruturalmente, que o saber [θ/Θ] permite gerar a técnica τ (para dada tarefa T). Por esta razão, o saber-fazer [T/τ] pode ser convencionalmente *apresentado* no *texto* do saber, como uma simples aplicação do "saber" [θ/Θ].(CHEVALLARD,1999, p. 226)

É preciso considerar, então, que esse modo de pensar, do saber em primeiro plano em detrimento do saber-fazer, pode ter contribuído para o modelo de ensino teoricista-tecnicista (BOSCH e GASCÓN, 2001), que se caracteriza por trivializar os problemas por meio de sua decomposição em exercícios rotineiros, podendo eliminar não somente a dificuldade principal do problema como também o próprio problema.

O ensino se reduz, assim, a uma mera aplicação, ou até a uma simples exemplificação, de técnicas matemáticas completamente predeterminadas que se utilizam unicamente para resolver um conjunto de problemas prefixados de antemão.

> Os modelos docentes teoricistas e tecnicistas compartilham uma concepção psicologista ingênua do processo didático, que tem no behavorismo sua referência mais clara. Em ambos os casos se concebe o processo de ensino como um processo mecânico e trivial, totalmente controlável pelo professor: o teoricismo tende a conceber o aluno como uma 'caixa vazia' a ser preenchida ao longo de um processo gradual que parte dos conceitos logicamente mais simples de alcançar, passo a passo, até os sistemas conceituais mais complexos; o tecnicismo, por sua vez, considera o aluno como um 'autômata' que melhora o domínio das técnicas mediante a simples repetição que proporciona uma formação aprofundada. (GASCÓN, 2001, 136)[54]

Para o <u>teoricismo</u> "ensinar e aprender matemática" é "ensinar e aprender teorias acabadas", como o processo didático começa, e praticamente acaba, no momento em que o professor "ensina" (no sentido de "mostrar") essas teorias aos alunos. Tal modo de proceder se faz predominante nos cursos formais da matemática, inclusive nos de ensino do Cálculo Diferencial e Integral (CDI), enquanto que, para o <u>tecnicismo</u>, predominante no ensino das ciências aplicadas, em particular no de engenharia, ensinar consiste em levar um aluno hipotético (GASCÓN, 2001) a aprender certas técnicas algorítmicas por meio de exercícios que sirvam como "treinamento" para dominá-las, ou, quem sabe, ir mais além e adquirir conhecimentos necessários para dominar as técnicas básicas para enfrentar uma certa classe de problemas.

A conformidade à instituição traduz-se como sinônimo de aprendizagem, ou seja, do que o sujeito conhece ou "sabe" uma praxeologia quando a realiza em conformidade com o fazer e o pensar instituído por essa instituição, internalizados

---

[54] *Los modelos docentes teoricistas y tecnicistas comparten una concepción psicologista ingenua del proceso didáctico que tiene en el conductismo su referente más claro. En ambos casos se concibe el proceso de enseñanza como un proceso mecánico y trivial totalmente controlable por el profesor: el teoricismo tiende a concebir al alumno como una "caja vacía" que debe llenarse a lo largo de un proceso gradual que parte de los conceptos lógicamente más simples hasta llegar, paso a paso, a los sistemas conceptuales más complejos; el tecnicismo, por su parte, considera al alumno como un "autómata" que mejora el dominio de las técnicas mediante la simple repetición que proporciona un entrenamiento concienzudo.*

pelos sujeitos, podem se constituir em *habitus* (BOURDIEU, 1989), no sentido de uma prática não problematizada.

> O *habitus* se revela —lembrem que consiste em um sistema de disposições, ou seja, de virtualidades, potencialidades e eventualidades— só em relação com uma situação determinada. É só *em sua relação com* certas estruturas que o *habitus* produz determinados discursos ou práticas (BOURDIEU, WAQUANT, 2005, p197)[55]

Entendemos, assim, que o ensino teoricista-tecnicista pode se constituir em condição favorável de levar a práxis institucionalizada a se tornar *habitus,* que passa a se constituir parte do meio institucional (CHEVALLARD, 1996, p. 130), que permite a consecução de outras práticas dessa instituição. Mais precisamente, pertencente ao meio constituído de objetos estáveis, inclusive pré-existentes, para os sujeitos dessa instituição, isto é, que sejam transparentes e/ou que pareçam conhecidos, naturais, ou não problemáticos, para esses sujeitos.

Sob esse pensar, o modelo completo de praxeologia, *práxis+logos* pode fazer supor a existência de tecnologia-teoria para todas as organizações praxeológicas, implicando que todas elas vivam em uma dada instituição e disponham de um discurso que as produzem e as justificam, pode reduzir a *práxis* [T, τ], tarefa-técnica, como uma praxeologia incompleta, não por omissão do *logos*, mas por se justificar em situação, na prática com a prática.

Evidentemente que se pode questionar: Como podemos produzir uma técnica sem uma tecnologia que lhe dê suporte? A resposta a essa questão está nas entrelinhas da TAD e arriscamos explicitar afirmando: A tecnologia pode ser uma *práxis,* que pode viver, inclusive, em outra instituição que permita criar outras práticas. Nesse caso, como um *habitus científico*, espécie de sentido do jogo que não tem necessidade de raciocinar para se orientar e se situar de maneira racional num espaço (BOURDIEU, 1989, p.63), as velhas práticas ganham nova funcionalidade de discurso tecnológico que justifica a nova *práxis*. Especificamente para as ciências aplicadas. A compreensão de Rossini (2006) nos diz:

> Todo discurso tecnológico ou teórico se efetua concretamente pela manipulação de ostensivos, em particular, utilizando os discursivos e

[55] *El habitus se revela —recuerden que consiste en un sistema de disposiciones, es decir, de virtualidades, potencialidades y eventualidades— sólo en relación con una situación determinada. Es sólo en su relación con ciertas estructuras que el habitus produce determinados discursos o prácticas.*

> escritos, que permitem materializar as explicações e justificativas necessárias ao desenvolvimento das tarefas. (ROSSINI, 2006, p. 87)

De outro modo, a objetivação das práticas com matemática inclui a movimentação de ostensivos que podem estar dotados de uma legitimidade cultural em uma instituição que dispensa questionamentos sobre eles. Agem como sendo objetos pré-construídos, cuja força está em que, se achando inscritos ao mesmo tempo nas coisas e nos cérebros, apresentam-se com as características de evidência, que passam despercebidas, porque são perfeitamente naturais (BOURDIEU, 1989, p. 49)

No ensino de engenharia, senão na engenharia enquanto profissão, os ostensivos textuais, gráficos, assim como as tabelas numéricas, são exemplos de parte do meio institucional estável, referido por Chevallard (1999), para a consecução das práticas com matemática. A este respeito vale destacar o que dizem Castela e Romo Vázquez (2011), a respeito das pesquisas de Heaviside[56]:

> Mas, no final do século XIX, Oliver Heaviside (1850-1925), pesquisador físico, desenvolve, no âmbito do que ele chama de computação simbólica, uma técnica formalmente idêntica (transformação de equações diferenciais em equações algébricas). Isto irá permitir-lhe suprir as necessidades matemáticas levantadas pelo estudo dos regimes transitórios dos fenômenos elétricos o que conduz, na maioria dos casos, ao tratamento de tarefa do tipo T. No seu trabalho, Heaviside não está preocupado com questões de validade interna do domínio matemático. O cálculo simbólico funciona como uma ferramenta heurística para encontrar a expressão de soluções, cuja existência é estabelecida do fato de que as equações a serem resolvidas estão modelando fenômenos físicos reais e que a física pode validar, em última análise, retornando aos mesmos fenômenos. (CASTELA E ROMO VÁZQUEZ, 2011, p.86)[57]

A história dos saberes está repleta de exemplos que revelam os papéis dos ostensivos, como objetos estáveis na construção do conhecimento; a evolução

---

[56] O acesso ao trabalho de Heaviside na pesquisa de Castela e Romo Vázquez é, declarado por elas, indireto, e não aparecem nas referências. Para tal, contaram com o apoio dos trabalhos de Carnarena (1999) e Remaud (2004).

[57] *Mais, à la fin du XIXe siècle, Oliver Heaviside (1850-1925), chercheur en physique, développe, dans le cadre de ce qu'il appelle calcul symbolique, une technique formellement identique (transformation des équations différentielles en équations algébriques). Celle-ci lui permettra de répondre aux besoins mathématiques soulevés par l'étude des régimes transitoires dans les phénomènes électriques qui conduit dans la plupart des cas au traitement de tâches du type T. Dans ses travaux, Heaviside ne se soucie pas de questions de validité interne au domaine mathématique. Le calcul symbolique fonctionne comme un outil heuristique permettant de trouver l'expression de solutions dont l'existence est établie du fait que les équations à résoudre modélisent des phénomènes physiques effectifs et que le physicien peut valider en dernier ressort par retour à ces mêmes phénomènes.*

paralela do saber-fazer e do próprio saber no método analítico de Descartes, da geometria analítica à teoria das matrizes e daí à álgebra linear, em que as *práxis* vão se constituindo em tecnologias, por exemplo, e o saber constituído, a posteriori, surge como produtor das práticas.

O desenvolvimento do Cálculo Diferencial e Integral (CDI) não ocorreu de forma diferente, já que se constitui modulador marcante da construção dos números reais, mais precisamente na criação dos objetos limite e continuidade, como fechos fundamentais para lhe dar unidade e justificá-lo, principalmente nos estudos subsequentes: o da derivada e o da integral.

Esse posicionamento é compartilhado por Reis (2001, p. 62), que imputa a Cauchy o refinamento da teoria de limite com o objetivo de consolidar as bases da análise matemática, e reforça que isso fora confirmado por Weiesrtrass e seus seguidores. O modelo “Cauchyano”, até hoje adotado por professores e livros didáticos, inicia o estudo do CDI pela noção de limite de uma função de uma variável, para verificar a continuidade como dependente de um limite, tendo em seguida a derivada como um limite (do quociente incremental), da mesma forma que a integral que é vista como um limite das somas de Riemann. Em outras palavras: há uma epistemologia em que limite é o elemento unificador do CDI, em torno do qual todos os demais objetos matemáticos orbitam.

No ensino da matemática escolar do ensino básico, podemos deixar claro o que argumentamos, ao considerarmos o seguinte tipo de tarefa:

T: Calcular a distância entre o ponto $A(x_0, y_0)$ e a reta dada pela equação

r: $ax + by + c = 0$.

Tal tarefa pode ser interpretada como a integração de três tipos de tarefas presentes no texto de saber da educação básica, na seguinte ordem:

(1) Encontrar a equação da reta determinada por s: $a'x + b'y + c' = 0$, que passa pelo ponto $A(x_0, y_0)$ e é perpendicular à reta dada pela equação r: $ax + by + c = 0$;

(2) Encontrar o ponto $B(x_1, y_1)$ de interseção das retas r: $ax + by + c = 0$ e

s: a’x + b’y + c’ = 0;

(3) Calcular a distância entre os pontos $A(x_0, y_0)$ e $B(x_1, y_1)$.

Os cálculos algébricos, a partir das técnicas de cada um desses tipos de tarefas, nos levam à fórmula que permite calcular a distância procurada,

$$d(A,B) = \frac{|ax_0 + ay_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

que, em geral, é apresentada no texto de saber do ensino médio como um dispositivo sem questionamentos. Obviamente que este não é o único modo de chegar à tal fórmula, mas cumpre o papel de lhe dar inteligibilidade e, portanto, o dota de um discurso capaz de produzir e justificar a técnica.

O uso dos três tipos de tarefas para responder à questão anterior exige apenas a arte da prática, que somente é alcançada pela naturalização da mesma, como *habitus* ensinado, no sentido dado ao ensino da fatoração por TONNELLE (1979), em que o professor faz evoluir as regras como componentes de "uma boa conduta", sem dizer que são produzidas a partir do estudo de um problema e da apresentação de uma teoria, pertinentes para atacá-lo. As “boas condutas”, que tornam as tarefas rotineiras em práticas para determinadas ocasiões, se aprendem em situação, por imitação (MERCIER, 2002) sendo, portanto, usadas naturalmente em situação.

Assumirmos essa compreensão que parte, expressivamente, das práticas no ensino das ciências aplicadas, pode ser vista como organização *praxeológica com matemática*, no sentido dado por Chevallard (2013, p.175) para as organizações que articulam e integram práticas não matemáticas, mas que, entretanto, funcionam com práticas matemáticas.

Portanto, essas praxeologias com matemática contam com praxeologias matemáticas, e essas, mesmo que possam contar com um discurso tecnológico-teórico do campo matemático, são adaptadas às condições impostas pelas situações práticas de um campo de práticas. Com isso, passam a funcionar segundo regularidades e regras dessas instituições, em acordo com esse campo de práticas. Para os sujeitos desse campo (a engenharia, por exemplo) a praxeologia matemática é coagida pelo discurso tecnológico do “saber prático”, como um *habitus* racional, ou científico, e, como tal, pode ser entendida como parte integrante do meio institucional estável, determinado pelo campo da prática.

O uso das praxeologias matemáticas, em campo diverso da matemática, pode se dar por sua funcionalidade prática para a praxeologia com matemática no campo considerado, mais precisamente, como um *habitus* racional que age em acordo com o sentido de jogo que somente o jogador desse campo de prática está apto a jogar, como nos diz Bourdieu, é um jogo social incorporado, transformado em natureza, e

> Nada é simultaneamente mais livre e coagido do que a ação do bom jogador. Ele fica naturalmente no lugar em que a bola vai cair, como se a bola o comandasse, mas, desse modo, ele comanda a bola. O *habitus,* como sentido do jogo social inscrito incorporado, no indivíduo biológico, permite produzir uma infinidade de atos de jogo que estão inscritos no jogo em estado de possibilidades e de exigências objetivas; as coações e exigências do jogo, ainda que não estejam reunidas num código de regras, impõem-se àqueles e somente àqueles que, por terem sentido do jogo, isto é, o senso da necessidade imanente do jogo, estão preparados para percebê-las e realizá-las. (BOURDIEU,1987, p.82)

Muito da atividade matemática ensinada na escola, como nos referimos antes, é feito *habitus* aprendido, da educação básica a superior. A álgebra elementar, que se constitui parte do meio institucional para o curso de CDI, no ensino e aprendizagem de certos tipos de tarefas sobre cálculo de limite de uma função, tem seu ensino focado nas manipulações simbólicas como um jogo, cujas “regras” são aprendidas fazendo e vendo outro fazer, ou seja, como um código de conduta, na prática, com a prática e pela prática.

Um jogo desse tipo, como por exemplo, o de resolver uma equação expressa por uma complexa expressão algébrica, inicia com uma ação/esquema, já incorporada à prática, de manipular a expressão para redução dos termos semelhantes, com o propósito de obtermos, dentre as possíveis equações, uma que reduzida poderá nos levar à resposta procurada. Não há, a priori, uma sequência fixa de “regras” a ser seguida, mas que é determinada na ação, segundo as situações que emergem no tempo de realização dessa prática.

> A atividade prática, na medida em que tem sentido, em que é *sensée* razoável, engendrada por um *habitus* ajustado as tendências imanentes do campo, é um ato de temporalização através do qual o agente transcende o presente imediato por meio da mobilização prática do passado e a antecipação prática do futuro inscrito no

> presente em estado de potencialidade objetiva. (BOURDIEU, WAQUANDT, p. 202)[58]

Supomos que essa característica da atividade matemática aprendida na escola elementar se reproduza no ensino do CDI para a engenharia, em particular no ensino, em que o tipo de tarefas “calcular o limite da função representada por expressões algébricas”, se resume a um cálculo numérico que é, frequentemente, “confirmado” por meio de representações gráficas. O objeto matemático limite e o modo de validar seus cálculos são inquestionáveis. O que está em jogo nas práticas com matemática é a funcionalidade dos objetos matemáticos em situações práticas específicas.

Embora as *praxis* matemáticas, no seio daquelas com matemática, (da Engenharia Civil, por exemplo) possam ser discutíveis, isso ocorre somente pelo insucesso, quando não produzem um “bom resultado” para a questão da engenharia em jogo. Via de regra elas são de existência evidente, sem dúvida, mais especificamente, não suscetíveis de dúvidas (CHEVALLARD, 2013, p.106), ou seja, funcionam frequentemente como um objeto pré-construído. É preciso insistir de todos os modos sobre o fato essencial de que, em um dado momento*, qualquer saber científico,* - como podemos pensar a engenharia-, *funciona sobre um estrato profundo de pré-construções*. (CHEVALLARD, 2013, p107, *grifos do autor,* - observação nossa)

Quando uma questão em engenharia remete a uma tarefa matemática, a validação da solução encontrada, mesmo que temporariamente, depende do discurso da prática da engenharia em jogo, e não da tecnologia/teoria matemática que permitiram o uso da técnica matemática utilizada para encontrar a solução da tarefa. São tornadas assim, *práxis* das organizações praxeológicas com matemática da engenharia, que, como tal, devem ser conhecidas, mas não “questionadas” nessa instituição.

Em resumo, parafraseando Chevallard (2013) sobre objetos pré-construídos, a manipulação de praxeologias matemáticas na engenharia está submetida a uma lógica prática, e, portanto, por sua funcionalidade essencial para a consecução de

---

[58] *La actividad práctica, en la medida en que tiene sentido, en que es sensée, razonable, engendrada por un habitus ajustado a las tendencias inmanentes del campo, es un acto de temporalización a través del cual el agente trasciende el presente inmediato por medio de la movilización práctica del pasado y la anticipación práctica del futuro inscripto en el presente en un estado de potencialidad objetiva.*

uma organização praxeológica própria, e, dessa forma, segue um código de conduta próprio da engenharia não explicitado a priori. Para cada situação particular o código define uma conduta, sem que se possa fazer uma lista dessas condutas, de modo que só possuem eficácia quando estão imersas em situações da engenharia em que são pertinentes e indispensáveis para lhe conferirem sentido.

Não nos parece, portanto, pertinente que uma praxeologia com matemática, em qualquer campo ou domínio de realidade, possa ser tomada como mista, ratificando, por conseguinte, a dicotomia entre praxeologias matemáticas *mistas* e *puras* como proposto por Castela e Vasquez (2011). As praxeologias que vivem em uma instituição têm uma identidade institucional, caracterizadas por um jeito de fazer e de pensar, que pressupõem sempre uma ação em situação, no domínio de realidade própria da instituição, em outras palavras, queremos dizer que estão inseridas no universo cognitivo institucional (Chevallard, 2009).

É oportuno destacar, que isso não significa que não compartilhamos inteiramente com o modelo proposto por Castela e Vasquez (2011), mas que questionamos a taxionomia de praxeologias ditas mistas e puras, que confronta com nossa compreensão relativa às com matemática, essenciais à nossa pesquisa. Chevallard (2013), quando cunha o termo praxeologia com matemática, refere-se à toda aquela que mobiliza objetos matemáticos para sua consecução, incluindo entre elas as da instituição produtora, a matemática, pois a *praxis* e o *logos*, não estão em uma relação univocamente determinadas, e, por isso, permitem dinâmicas praxeológicas (CHEVALLARD, 2009).

Castela e Romo Vázquez (2011, p. 81) defendem que uma variedade de saberes é incorporada na tecnologia, alguns desses certamente de origem <u>empírica</u>, introduzidos pela necessidade de ter em conta uma mesma unidade, não apenas dos componentes da praxeologia original, mas também das instituições que, embora de diferentes modalidades, contribuam para a sua produção como objetos socialmente reconhecidos.

Mas, quando uma praxeologia é transposta de uma instituição para outra, esta é adaptada à nova instituição e isso implica em uma desconexão de sua condição normativa original, passando a ser moldada de acordo com as condições normativas da nova instituição de forma idiossincrática. Nesse caso, ecologicamente, poderes, valores e afetos mobilizados por aquelas práticas em seu campo de atividade, também podem ser consideravelmente modificadas (MIGUEL e MENDES, 2010). Essa dinâmica praxeológica torna-se mais clara com a seguinte redução dada por Chevallard (2009).

> Se $\Pi \oplus \Lambda$ denota uma praxeologia [T / τ / θ / Θ] existente em uma instituição I, a sua transposição para outra instituição I*, denotada por $(\Pi \oplus \Lambda)^*$, pode em alguns casos (aproximadamente) se escrita por $\Pi \oplus (\Lambda^*)$; Neste caso, a ***práxis*** será (essencialmente) **a mesma**, mas o ***logos terá mudado***. A praxeologia transposta $(\Pi \oplus \Lambda)^*$ pode ser da forma $(\Pi^*) \oplus \Lambda$, em que o ***logos*** é ***mantido***, mas a ***práxis alterada***, e às vezes esvaziada de sua substância (quando temos $\Pi^* \approx \emptyset$). ***Alterações e recombinações praxeológicas são, portanto, um fenômeno no coração da história social das praxeologías.*** (CHEVALLARD, 2009, p.6, grifos nossos)

Assim, podemos ter na engenharia uma praxeologia com práxis matemática e discurso justificativo da engenharia e, portanto, uma nova praxeologia. Tal praxeologia é da engenharia como instituição utilizadora e não da matemática que a produziu.

Torna-se oportuno relembrar que, segundo Chevallard (1999), entende-se por tecnologia o discurso racional sobre a técnica, cujo primeiro objetivo é justificar "racionalmente" a técnica para assegurar a realização das tarefas que se apresentam. O destaque com aspas é para indicar a relatividade institucional da racionalidade, como demonstra claramente o texto a seguir:

> O estilo de racionalidade posta em jogo varia em acordo com o espaço institucional e, em uma dada instituição, o fio da história desta instituição, de modo que uma dada racionalidade em uma instituição poderá aparecer como pouco racional em outra instituição. (CHEVALLARD,1999, p. 224)

Assim podemos ter na engenharia uma praxeologia com *práxis* matemática, mas com discurso justificativo da engenharia e, portanto, uma nova praxeologia, que passa a ser da engenharia como instituição utilizadora e não mais da produtora matemática.

Além disso, é preciso ter em conta que nas ciências aplicadas, como a Engenharia Civil, por exemplo, também se produzem praxeologias com objetos matemáticos, que à luz dos matemáticos podem ser vistas com estranheza, talvez como uma matemática informal, irmã mais velhas da matemática pura, mas que, embora com ela compartilhem alguns genes, têm modos de vida diferentes.

As praxeologias com matemática na engenharia se desenvolvem em uma dialética com os elementos de seu meio, de modo a tornar possível a construção de uma resposta a uma questão dessa ciência dita aplicada. Portanto, não podem se mostrar inflexivelmente dependente das condições normativas da matemática, pois precisam permitir não somente um fazer exequível sob as condições impostas pela engenharia, como também serem traduzidos em objetos e relações dessa ciência. Essa dialética ocorre em mão dupla e as condições sobre as praxeologias com matemática para a questão em jogo devem se mostrar flexíveis de modo a abrigar os objetos matemáticos essenciais ao seu funcionamento.

Considerar que os matemáticos aplicados se inspiram em uma tecnologia/teoria matemática para o desenvolvimento de métodos de resolução de modelos matemáticos providos pela engenharia, parece como algo certo (ou quase), considerando que nesse campo a validade se ancora nos argumentos teóricos matemáticos. O mesmo não podemos afirmar, necessariamente, quanto aos Engenheiros, que, com relativa frequência, para uma problemática específica, adotam famílias de métodos desenvolvidos a partir de objetos matemáticos conhecidos, principalmente por suas funcionalidades práticas em analogias/homologias em outro campo. Importante frisar que suas validações não se reduzem a argumentos matemáticos, mas à pertinência da solução encontrada para a problemática posta.

Uma dada prática com matemática, de um dado campo de práticas, pode mostrar-se estranha para a instituição matemática, como por exemplo, as que envolvem relações entre grandezas, como a regra de três e a redução à unidade, que manipuladas rotineiramente pelas ciências aplicadas, recebendo inclusive nomes específicos e com isso se legitimando como objetos sociais, tais como velocidade, densidade, taxa de juros, rendimento, etc..., são frequentemente objeto de críticas de matemáticos por violarem uma condição normativa da matemática, necessária para prover um discurso matemático (de proporcionalidade, de relação funcional, etc...).

O método de Nelder-Mead (DINIZ-EHRHARDT, LOPES, PEDROSO, 2010, p. 35) devido sua funcionalidade, praticidade e baixo custo computacional, é muito utilizado em problemas de otimização de forma indiscutível, mas está longe de se constituir em uma prática reconhecida pela instituição produtora da matemática, por não possuir convergência matemática garantida para um ponto ótimo. Sua validação, no entanto, se dá nas ciências aplicadas, como a engenharia, em razão do sucesso que alcança em suas aplicações em situações práticas. O mesmo ocorre quanto às gerações de família de métodos e algoritmos heurísticos, como os desenvolvidos por Sacco (2006, 2009, 2010), que nos confirmou que o sucesso é o que os valida perante seus utilizadores, e que a validação matemática fica para os matemáticos.

As atividades da engenharia incluem considerar as praxeologias desenvolvidas pela matemática, mas com a clareza, às vezes dissimulada, das limitações dessas práticas. Para que as práticas com matemática se tornem exequíveis na engenharia, as teorias do CDI podem se mostrar limitadas, em virtude de condições impostas aos objetos matemáticos como, por exemplo, a necessidade premente do contínuo. Essa exigência de continuidade, ou de diferenciação, por exemplo, de modo destacado no ensino do CDI, levam invariavelmente a não fazer conhecer as problemáticas decorrentes da não continuidade e não diferenciabilidade, por exemplo, muito comuns na engenharia, e que permitiriam revelar as potencialidades do modelo teórico do CDI para suas práticas.

A instituição engenharia atua em campo diverso da matemática, em que uma realidade objetiva, ou potencialmente objetivada, se traduz em função, mas não se confunde com ela, ou seja, a função não está algebricamente definida a espera de ser descoberta pelo Engenheiro, ou mesmo por um matemático. Para tornar claro o que estamos expondo, consideremos os dados da tabela 01 a seguir, referentes a duas grandezas que se deseja pôr em relação por meio de uma expressão algébrica.

TABELA 01 - Função a partir de pontos conhecidos

X	Y = F(X)
1	2
3	4
5	6

Fonte: Produzida pelo autor

A expressão do modelo para tal situação que de imediato podemos estimar seria $F_1(X) = X + 1$, no entanto, nada garante que seja esta, dentre outras, também poderiam ser: $F_2(X) = X^3 - 9X^2 + 24X - 14$ ou (c) $F_3(X) = X + \text{Cos}(X^3 - 9X^2 + 23X - 15)$, pois há uma infinidade de modelos de funções $F_i(t)$ em que $F_i(1) = 2$, $F_i(3) = 4$ e $F_i(5) = 6$.

De outro modo, a função, podemos assim pensar, não pode se reduzir a uma tabela, nem a um gráfico, ela exige uma representação textual, “algo mais”, que permita, de algum modo, expressá-la algebricamente, que pode ser adequada, ou não, à problemática da engenharia em jogo. Isso não se constitui uma tarefa fácil, e daí o interesse da modelação matemática pelas ciências aplicadas e, claro, pela própria Educação Matemática.

A reforma do cálculo (SOLOW, 1994) de certo modo buscou evidenciar essa problemática do ensino do CDI, em que é predominante o ensino de um saber que permite descrever, explicar e até mesmo justificar realidades objetivas, ou potencialmente objetivas, por meio da continuidade, da diferenciação e integração de funções portadoras de tais e tais propriedades.

O modelo epistemológico do CDI assim encaminhado, não pode ser negado por nós, por se constituir em condição imposta pelos níveis de determinação mais externos da atividade do professor e deste trabalho também, mas questionamos limite de uma função para além dessa disciplina, ou seja, para outras do currículo do curso de Engenharia Civil que tenham como objeto de estudo organizações praxeologicas com matemática que contenham em suas estruturas praxeologias com esse objeto matemático. Isto tem por finalidade criarmos condição para responder a nossa questão parcial de pesquisa: Que questões do ensino de Engenharia Civil contam com o objeto matemático limite de funções?

A resposta a tal questão é necessária a quem deseja uma organização didática no sentido posto a priori pela TAD: um conjunto de tipos de tarefas, de técnicas, de tecnologias e teorias mobilizadas para o estudo concreto em uma instituição concreta (CHEVALLARD,1999).

É claro que objetivamos considerar nossa compreensão, ou seja, as problemáticas sobre o cálculo do limite, sob as condições coatoras da Engenharia Civil, que considera, não raro, que certas organizações praxeológicas com matemática somente são exequíveis nessa ciência com auxílio de instrumentos laboratoriais e de computadores, aspecto corriqueiro da atividade matemática, que se constitui em vasto campo de interesse, tanto de Engenheiros como de matemáticos aplicados, na geração de métodos e algoritmos, para enfrentar novas e velhas problemáticas, que, por exemplo, consideram como validadores, a verificação dos sucessos práticos dos mesmos, em certos contextos e situações da engenharia.

Essas considerações a respeito das praxeologias de limite na engenharia serão fundamentais para que possamos constituir um modelo de análise de uma ecologia didática desse objeto matemático. Por se fazerem necessárias às nossas colocações futuras, explanaremos a seguir a respeito das continuidades que podem se apresentar na identificação de *nichos* de limite, nos *habitat* do ecossistema de ensino de engenharia considerados.

4.2 Continuidade matemática, continuidade física e continuidade na engenharia

Nossa experiência, na posição de professor universitário de CDI, vivenciaram o que dito por Bosch, Chevallard e Gascón(2006), quanto às praxeologias de ensino de limite que constam nos livros didáticos, e se restringirem, predominantemente, a dois tipos de estudos. Tratam-se de duas praxeiologias matemáticas completamente desconectadas: uma dita " álgebra de limites", que se reduz ao cálculo do limite em um determinado ponto, e a outra que se atém à " topologia de limites " centrada sobre a problemática da sua existência:

> A ausência de uma ligação entre as duas praxeologias prejudica, senão impede, a interpretação do professor sobre o programa de estudo de qual conhecimento matemático deve ser ensinado sobre os limites e continuidade de funções. Por um lado, a " álgebra de limites " torna-se o bloco prático da praxeologia matemática a ser ensinada , porque está mais próxima do conjunto de tarefas e técnicas que aparecem nos currículos e livros didáticos. Por outro lado, e devido certamente à 'imposição' de uma tecnologia 'erudita' (definição ε - δ de limite , etc), o bloco teórico continua próximo da praxeologia "topologia de limites". O resultado é uma praxeologia híbrida com um bloco teórico que não se encaixa com o bloco prático. (Bosch,Chevallard e Gascón, 2006, p. 6)[59]

Assim, essas praxeologias matemáticas, de "dois lados" ou "híbrida", sobre limite e continuidade são ensinadas sem os elementos tecnológicos necessários

[59] *The absence of a link between both praxeologies hinders the teacher's interpretation of syllabi about what is the mathematical knowledge to be taught concerning the limits and continuity of functions. On the one hand, the "algebra of limits" becomes the practical block of the mathematical praxeology to be taught because it is closer to the set of tasks and techniques that appear in syllabi and textbooks. On the other hand, and due certainly to the "imposition" of a "scholarly" technology (ε−δ definition of limit, etc.), the theoretical block remains close to the "topology of limits" praxeology. The result is a hybrid praxeology whit a theoretical block that does not really fit with the practical block.*

para explicar e justificar os cálculos, bem como os benefícios das definições teóricas desses e, não menos importante, as noções de continuidade de funções. Diante disso, o professor então se vê diante do argumento circular sobre a noção de função contínua em um ponto x = a, posto que a principal técnica para determinar isso, consiste exatamente em comparar o limite de f(x) neste ponto com o valor de f(*a*). A "álgebra de limites" usa, predominantemente, essa técnica para calcular o limite em um ponto e, não raro, após uma série de transformações algébricas sobre f(x), que conduzem ao seu cálculo do valor numérico, em que x é substituído por *a*, o que só é possível se essa for contínua, e cujo saber faz parte da "topologia de limite". (BOSCH, CHEVALLARD e GASCÓN, 2006, p. 6)

Historicamente, desde os paradoxos de Zenão, o estudo e a formalização do conceito de limite evoluíram com a problemática relativa à continuidade de uma função y = f(x), em um ponto em que x = a, que deve ocorrer quando:

- A função é definida nesse ponto, ou seja, existe f(a);
- Existe $\lim_{x \to a} f(x)$; e
- $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

No ecossistema da instituição produtora da matemática, comumente se diz que a continuidade de uma função f(x) em um ponto *a* é intuitivamente visível, quando a curva, estando definida nesse ponto, nele não sofre interrupções ou saltos, e, formalmente dita, quando f(x) se aproxima de f(*a*) quando x tende a *a*, o que significa dizer que para pequenas variações da função próximas a esse ponto, ocorrerão pequenas variações de f(x) no entorno de f(*a*).

Essa formalização é similar a que se tem para limite de f(x) em um ponto x = *a*, relembrando que uma função mesmo não sendo contínua em um ponto *a* pode aí ter limite, mas somente será contínua se, e somente se, o limite nesse ponto existir e for igual a f(*a*).

Dentre as vantagens de se trabalhar com funções contínuas está a de que elas podem ser operadas algebricamente, resultando em funções com a mesma característica, ou seja, se f(x) e g(x) são contínuas, então serão contínuas as funções:

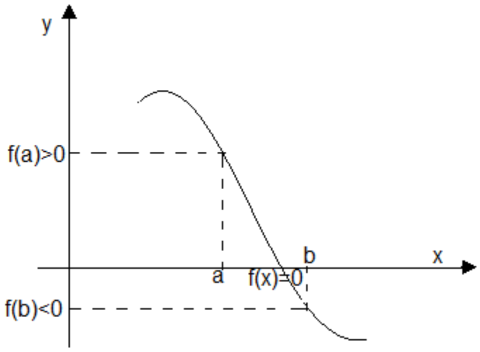
a) f(x) + g(x);
b) f(x) - g(x);

c) f(x)•g(x); e

d) f(x)/g(x) desde que g(x) ≠ 0.

E a última propriedade que nos diz: se f(x) é contínua em um intervalo [a,b] e se f(a) e f(b) possuírem sinais opostos, existe, no mínimo, uma solução para a equação f(x) = 0 nesse intervalo, situação que pode ser observada na figura a seguir:

FIGURA 05 - Zero de uma função y = f(x)



Fonte: Elaborada pelo autor

Esse gráfico busca “mostrar” que se uma função y = f(x) tiver sinais opostos nos extremos de um intervalo [a ; b], implicará que, necessariamente, ela se anulará em pelo menos um ponto desse intervalo, resultado este que é de fundamental importância para métodos de cálculo de raízes de equações, como o da bissecção, por exemplo, que o utiliza para, em cada iteração, identificar o intervalo onde situa-se o zero da função.

Conceitos como o de diferencial e integral, dentre outros do ecossistema do ensino da matemática, imprescindem da continuidade das funções envolvidas, tornando-a primordial também para a vida de diversos objetos no *habitat* do Cálculo Diferencial e Integral. Nesse ecossistema por vezes, a não continuidade é comparada a um buraco em uma estrada, que a torna intransponível.

Muitos fenômenos físicos envolvendo forças, pressões, deslocamentos, velocidades, acelerações, fluxos, dentre outros, via de regra são considerados como contínuos, sendo modelados por funções que, possuidoras dessa característica, podem ser derivadas e integradas, por exemplo. Mas, podemos nos perguntar, essa continuidade matemática seria a mesma continuidade da engenharia?

Poincaré[60] (1963) nos diz que se quisermos saber o que os matemáticos entendem por continuidade não são aos geômetras que devemos perguntar, pois esses tratam de representar aproximações das figuras que estudam. Segundo esse autor, o analista puro, que tem libertado a ciência matemática de estranhos, não teria dificuldades em nos responder o que é exatamente esse contínuo, em torno do qual raciocinam os matemáticos.

Esse autor levanta a possibilidade do que seria um outro tipo de continuidade, nos sugerindo, inicialmente, os seguintes procedimentos:

> Partamos da escala dos números inteiros; entre dois escalões consecutivos intercalaremos um ou vários escalões intermediários, depois, entre esses novos escalões, outros ainda e, assim, indefinidamente. Teremos, desse modo, um número ilimitado de termos, que serão os números chamados fracionários, racionais ou comensuráveis. Mas isso ainda não é suficiente; entre esses termos que já são infinitos, é necessário intercalar ainda outros, que se chamam irracionais ou incomensuráveis. (POINCARÉ, 1963, p. 31)

Enfatiza Poincaré (1963) que o universo da matemática, com o seu poder ilimitado de criar, nos permite introduzir arbitrariamente elementos em um conjunto e, como isso, criar novos conjuntos, sendo o que ocorre, por exemplo, quando introduzimos infinitos termos entre dois números inteiros, fazendo surgirem daí os racionais (comensuráveis) e os irracionais (incomensuráveis).

Os “infinitos indivíduos ordenados e exteriores uns aos outros”, a que Poincaré (1963) refere-se na citação anterior, relacionam-se a que a unidade não pode ser vista como um todo ininterrupto, como ocorre com a ideia de algo contínuo, mas como uma reunião de infinitas partes, que seriam contínuas, de onde procede a noção do contínuo matemático, referendando a expressão de que este é “a unidade na multiplicidade”.

O contínuo matemático, como uma criação pura da mente em que a experiência não teria nenhuma participação, visaria à <u>multiplicidade</u> (as infinitas divisões do todo, mas sem que existissem lacunas), e a que se refere a um contínuo físico, que visaria a <u>unidade</u>, podendo resultar da prática, em que lacunas, se ocorressem, poderiam até ser imperceptíveis, ou desconsideradas, em alguns casos (o todo contínuo). A partir dessas premissas, Poincaré (1963) nos diz que isso já era

[60] Jules-Henri Poincaré (1854-1912), ingressou na École Polytechnique de Paris em 1873, e na École des Mines em 1875, graduando-se em 1876, trabalhou como Engenheiro de Minas e doutorou-se em Matemática pela Universidade de Paris, tornando-se professor da Universidade de Caen.

o bastante para nos advertir que, de modo algum, o contínuo matemático seria o contínuo físico.

Os termos incomensuráveis da divisão do contínuo matemático delimitam sequências de números comensuráveis desse contínuo, sem que intervalos ocorram, e, desse modo os termos incomensuráveis da divisão do contínuo matemático delimitam sequências de números comensuráveis desse contínuo, sem que intervalos ocorram, mas esses termos incomensuráveis também se encontram infinitamente próximos de termos comensuráveis.

O contínuo físico não pode prescindir dos números incomensuráveis, ou seja, dos números que não podem ser expressos pela divisão de dois números inteiros; uma vez que esses serão considerados quando o contínuo físico recorrer a um traçado geométrico. Voltando-se aos geômetras Poincaré (Ibidem, p. 37) nos diz que "Se quisermos imaginar uma linha, não a podemos, a não ser com as características do contínuo físico, ou seja, que não se poderá representar mais do que uma certa largura".

O geômetra puro, por sua vez, sem renunciar à ajuda dos sentidos, faz mais um esforço para poder chegar ao conceito da linha sem largura e do ponto sem extensão, só podendo chegar a essas situações se considerar a linha como o limite, para o qual tende uma faixa, cada vez mais estreita da linha, e tendo o ponto como o limite para o qual tenderá uma área cada vez menor. Para exemplificar cita que se somente os pontos cujas coordenadas são comensuráveis fossem vistos como reais, o círculo inscrito em um quadrado e a diagonal desse não se cruzariam, pois as coordenadas desse ponto seriam incomensuráveis. (Ibidem, p. 37-38)

Em suas explicações quanto a esses contínuos, Poincaré (Ibidem) evocando a lei de Fechner[61] apresenta os argumentos relativos ao que denominou de "fórmula do contínuo físico", referindo-se a uma situação sobre indistinguíveis e continuidade, dizendo que houvera observado que

> um peso A de 10 gramas e um peso B de 11 gramas produziriam sensações idênticas, que o peso B não pode ser distinguido de um peso C de 12 gramas, mas que se distinguiria facilmente o peso A do peso C. Os resultados brutos da experiência podem, pois, ser

[61] Gustav Theodor Fechner (1801—1887) matemático, físico e filósofo alemão. Estabeleceu uma relação segundo a qual a sensação seria proporcional ao logaritmo da excitação.

> expressos pelas seguintes relações: A = B, B = C, A < C, que podem ser vistas como a fórmula do contínuo físico. (Ibidem, p. 35)

Alertando para a intolerável discordância de sua proposição com o princípio de contradição, pois não podemos admitir que duas quantidades iguais a uma terceira sejam distintas, Poincaré (1963) enfatiza que a necessidade de eliminar esse princípio nos forçou a inventarmos o contínuo matemático e que, portanto, fomos levados a concluir que essa noção foi inteiramente criada pela nossa mente, mas ressalta que foi a experiência que nos proporcionou essa oportunidade. (Ibidem, p. 35).

A fórmula da continuidade física de Poincaré (1963), A = B, B = C e A < B, na verdade nos indica que A e B são quantidades indistinguíveis, da mesma forma que B e C, mas que A e C não são. O autor nos fala que A não é exatamente igual a B, nem B a C, eles são aproximadamente iguais, e quem os torna assim são as “imperfeições dos nossos sentidos”, que nos permitem considerá-los indistinguíveis, mas que também nos propiciam a oportunidade de percebermos que A seja menor do que C, ou seja, que esses, ao contrário, são distinguíveis.

A continuidade física nos diz respeito, principalmente, quando ao considerarmos o ecossistema do ensino da engenharia, em cujas práticas comumente se obtém dados discretos, resultados de medições, que podem ser modelados algebricamente, ou até serem expostos em gráficos de funções contínuas, como a situação a seguir.

Retornando ao exemplo em que um conjunto de pontos conhecidos deve ser modelado por uma função algébrica, supomos agora que tenham sido resultantes de um experimento, que em três tempos, medidos em segundos, tenhamos “auferido” as respectivas forças, em MegaPascal, como a seguir:

TABELA 02 – Registro de força em um ensaio

Tempo (s)	Força (MPa)
1	2
3	4
5	6

Fonte: Produzida pelo autor

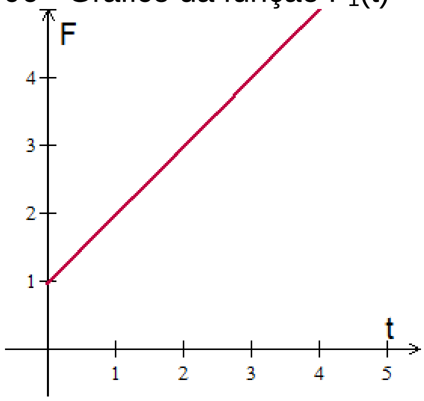
E consideremos a seguir as três possibilidades de modelo, antes apresentadas, em que F(1) = 2, F(3) = 4 e F(5) =6, neste caso:

a) $F_1(t)=t+1$;
b) $F_2(t) = t^3-9t^2+24t-14$ e
c)$F_3(t) = t + Cos\ (t^3-9t^2+23t-15)$

e que estivéssemos interessados em obter uma estimativa para a força, no tempo de um segundo e meio.

a) Se $F_1(t) = t+1$, em um gráfico correspondente fosse esboçada como na figura 06:

FIGURA 06 - Gráfico da função $F_1(t) = t + 1$

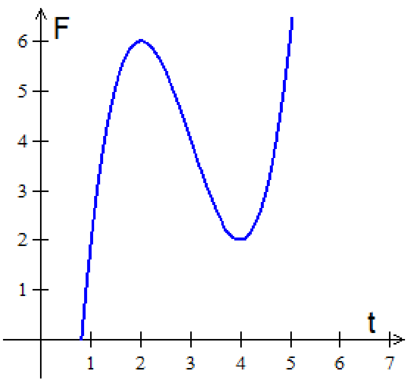


Fonte: Produzidos pelo autor

Com base na expressão algébrica do modelo e do respectivo ostensivo gráfico, podemos até pressupor que quando o tempo tender a 1,5 segundos a força tenderá a 2,5 Mpa.

b) Se $F_2(t) = t^3-9t^2+24t-14$, o gráfico seria o da figura 07:

FIGURA 07 - Gráfico da função $F_2(t) = t^3 - 9t^2 + 24t - 14$

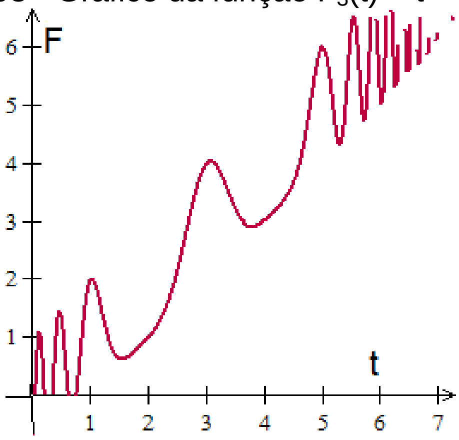


Fonte: Produzido pelo autor

Nesse modelo apresentado para $F_2(t)$, quando o tempo tender a 1,5 s a força tenderá a 5,125 Mpa.

c) Se $F_3(t) = t + \text{Cos}\ (t^3-9t^2+23t-15)$, teria o gráfico da figura 08:

FIGURA 08 - Gráfico da função $F_3(t) = t + \text{Cos}\ (t^3 - 9t^2 + 3t - 15)$



Fonte: Produzido pelo autor

Se $F_3(t) = t + \text{Cos}\ (t^3-9t^2+23t-15)$ for modelo da situação prática, quando o tempo tender a 1,5 segundos a força tenderá a 0,68 Mpa.

Portanto, como poderíamos, a partir de um conjunto de pontos, responder:

- Qual o valor de $\lim_{t \to 1,5} F(t)$?

A resposta, naturalmente, será: “Depende do modelo algébrico que considerarmos”. Para a engenharia e seu ensino, será um modelo que atenda à sua situação prática, que se adeque à realidade vivenciada, que lhe dê respostas “satisfatórias”, e que possa ser utilizado em outras ocasiões similares.

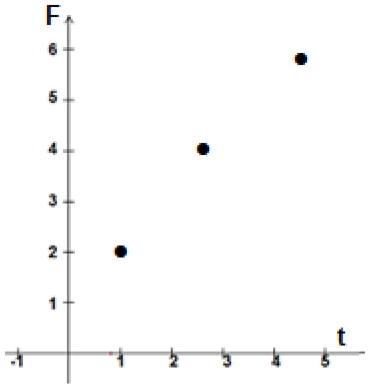
Poincaré (2008, p. 224) nos diz a esse respeito que

> Por maior que seja a nossa timidez, é preciso fazer interpolações; o experimento fornece-nos apenas um certo número de pontos isolados. É preciso uni-los por um traço contínuo: isto é uma verdadeira generalização. Porém fazemos mais do que isso: a curva que traçamos passará entre os pontos observados e perto deles, mas não passará por esses pontos em si. Assim, não nos limitamos a generalizar a experiência, mas a corrigimos.

Foi o que até aqui fizemos, propondo diferentes modelos algébricos, esboçamos seus gráficos e até calculamos limites em um determinado ponto, mas não sabemos, ao certo, se pelo menos um deles realmente representa o experimento em que $F_1(1s) = 2$ MPa, $F_1(3s) = 4$ MPa e $F_1(5s) = 6$ MPa.

O rigor matemático nos diria que a tabela de dados fornecida pelo experimento, representa uma função, e que o seu gráfico seria o da figura 09 a seguir:

FIGURA 09 - Gráfico de função dada por pontos



Fonte: Produzido pelo autor

As práticas da engenharia, por sua vez, diriam que a tabela poderia ser uma função, com modelo e gráfico próprio, desde de que suas aplicabilidades praxeológicas os justificassem, além disso, no caso de um experimento, como em tantos outros desse ecossistema de ensino, a continuidade da função não é questionada, pois o que temos é um conjunto discreto de pontos, e a partir daí a continuidade é admitida, e, se não ocorrer, é idealizada. Por exemplo, no estudo da mecânica dos fluidos, um dos *habitat* de limite no ecossistema do ensino de engenharia, temos situações em que a continuidade pode ser, ou não, considerada, como na que passamos a descrever.

Comumente se tem que os fluidos de um modo geral como substâncias que podem ser divididas infinitamente, um contínuo, sempre mantendo suas propriedades, em que o comportamento individual de suas moléculas não é considerado. Desprezam-se dessa forma os espaçamentos e as atividades moleculares, supondo-se não haver vazios e, como consequência, suas propriedades passam a ter valores definidos em cada ponto do espaço, sendo a densidade, temperatura, velocidade e outras, consideradas como funções contínuas do espaço e do tempo.

A idealização acima considerada, no mesmo *habitat*, falha nos casos de escoamentos dos gases rarefeitos, que ocorrem em altas camadas da atmosfera, onde o livre caminho médio de colisão entre as moléculas não permite que a hipótese de continuidade seja considerada, o que não impede que tratamento adequado seja dado a tal situação. A prática da engenharia indica que nesses problemas, ditos especiais, devemos abandonar o conceito de contínuo em favor dos pontos de vista microscópico e estatístico, sem perder de vista que há uma problemática a ser resolvida. (Apostila CEFET-SP, apud LOUREIRO, s.d, p. 11-13)

Em suma, no ensino da engenharia, uma tabela de dados e um gráfico podem ser considerados funções, desde que estejam de acordo com as condições normativas desse ambiente em que vivem, e, retomando a analogia de que a descontinuidade representaria a existência de um buraco na estrada, que no ecossistema da matemática seria considerado como um fator de intrafegabilidade, podemos dizer que, no ecossistema do ensino da engenharia, se a estrada contiver buracos, mas tiver que ser trafegada, esforços serão envidados para essa realização, e esse será apenas mais um desafio para aqueles que, algumas vezes, terão que construir nas condições muito mais adversas possíveis.

Como diz Poincaré (1963), o espírito tem a faculdade de criar símbolos e, a partir dessa, construiu o contínuo matemático como um sistema particular de símbolos, que tem como único limite para o seu poder a necessidade de evitar a contradição; no entanto, o espírito só se utiliza desse se a experiência lhe fornecer uma razão que a justifique.

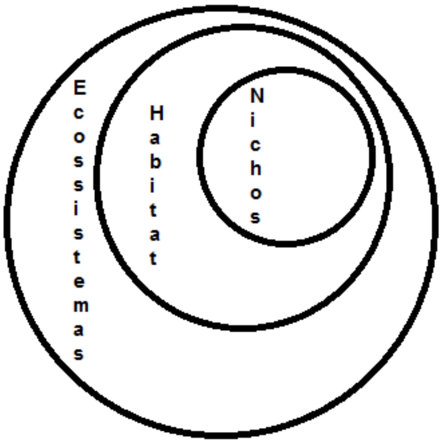
Nossa compreensão até aqui, nos permite caracterizar os principais componentes da ecologia didática de limite de uma função, no universo de ensino por nós considerado. Para estabelecermos um modelo de análise ecológica, como já caracterizamos o ecossistema de ensino, que no caso desta pesquisa é a Faculdade de Engenharia Civil da UFPA, assim como os *habitat* do objeto matemático, que são suas disciplinas e práticas, precisamos agora ter a clareza dos *nichos* por ele desenvolvidos, ou seja, conformados por suas praxeologias, quais são suas funcionalidades, nos h*abitat* do ecossistema de ensino de Engenharia Civil da UFPA.

5. UM MODELO PARA ANÁLISE DA ECOLOGIA DIDÁTICA

Nossa pesquisa propõe um modelo heurístico para análise da ecologia didática de um objeto matemático, em que devemos destacar os principais entes da ecologia, tendo o ecossistema como o grande agregador das práticas que ocorrem nos *habitat* onde “residem”, e se expressam por meio de seus *nichos,* que lhes dão funcionalidades nas práticas com matemática, inclusive naquelas vivenciadas por nós, nas posições de professor e de engenheiro, quando limite de uma função se apresentou, ora como objeto teórico, ora como tecnológico, às vezes quase técnico.

Resumidamente, o diagrama da figura 10 destaca esses constituintes da nossa análise ecológica:

FIGURA 10 - Ambientes da ecologia de ensino de limite



Fonte: Elaborada pelo autor

O relacionamento ecológico que a figura 10 busca representar, se dá no sentido de que os *nichos* somente ocorrem no interior de pelo menos um *habitat*, e esse no de pelo menos um ecossistema.

Os ecossistemas serão os ambientes de ensino que comportam as práticas dos *nichos* de um certo *habitat*. Eles podem não serem disjuntos em relação a outros ecossistemas, ocasionando o que na ecologia se denomina de ecótono (ODUM, 1988, p. 276), que são ambientes fronteiriços que se fazem importante em razão de nele conviverem entes biológicos de distintos modos de vida, podendo ocasionar o surgimento de novos *habitat* e de novos *nichos*.

Os *habitat,* por sua vez, dizem respeito aos locais onde o objeto matemático por nós pesquisado “se encontra”. Já nos reportamos e exemplificamos esses dois componentes da ecologia didática, faltando nos atermos, mais detalhadamente, ao terceiro, que são seus *nichos*, relativos às práticas em que se manifestam, ou seja, “o que fazem”, “como fazem” e “como se apresentam”, nesses “lugares”.

Para a TAD *nicho* é o lugar funcional de um objeto de saber, de suas praxeologias em relações às de outros objetos que com ele convivem, em outras palavras, as especificidades de onde este saber situa-se, e, principalmente, suas funcionalidades, ou seja, em termos de seu ensino, como e para que aquele objeto praxeológico “vive” e a quem ele “serve”.

Como nos referimos ao ecossistema de ensino de engenharia e aos *habitat* onde o objeto pesquisado vive, passaremos agora a tratar dos seus *nichos*, que é o terceiro componente da análise ecológica.

5.1 ***Nichos*** **de limite nos** ***habitat*** **do ecossistema de ensino de engenharia**

Os *nichos* de limite de uma função se expressarão por suas características e funcionalidades nos *habitat* onde “residem”, em um ecossistema de ensino, que, no caso de nossa pesquisa, é o de Engenharia Civil da UFPA. Isso ocorrerá por meio de suas praxeologias com matemática, que, como já dito são aquelas relativas aos demais objetos que com ele convivem nessa instituição. Aqui procuramos identificá-los, ou seja, mostrar como eles se fazem ver, se denunciam, se clarificam, e o modo deles viverem, com quem vivem, de quem se servem, e a quem servem.

Limite de uma função, quanto ao seu ensino, teve suas formas de vida destacadas por Bosch, Chevallard e Gáscon, (2006), que se posicionam ao tipificá-los em praxeologias topológicas, que diziam ser uma tecnologia erudita de épsilons e deltas, e outra que seria algébrica, mais próxima do bloco prático. Os *nichos* de limite apresentarão essas duas maneiras de se exibirem, quais sejam, aquelas em que esse objeto matemático mostra-se em práticas teóricas, para justificar uma técnica ou uma tecnologia, dizendo respeito ao *logos*, bloco do saber constituído pela tecnologia e teoria [θ, Θ], e em práticas tecnológicas (quase teóricas), composto pelas tarefas e suas técnicas de resolução, a *práxis* do bloco do saber-fazer [T, τ,].

Quanto à funcionalidade teórica de limite, vale recordar que um longo tempo se passou entre os primórdios do cálculo, com os paradoxos de Zenão de Eleia, e a sua sistematização científica por Newton (1643-1727) e Leibniz (1646-1716). Após esse período, outro se passou até à formalização teórica da noção de limite, através dessa que ficou conhecida como dos “épsilons e deltas”, que teria sido feita inicialmente em 1817 por Bernard Bolzano (1781-1848), mas que fora consagrado pelo rigor que Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) implementou à Análise Matemática, e pela formatação de Karl Weierstrass (1815-1897). Os livros de história da Matemática, normalmente citam que Cauchy nunca teria definido limite com os argumentos de épsilons e deltas, mas que os teria utilizado, ocasionalmente, como instrumento de prova, como o fez em seu *Cours d'analyse*, livro seminal da teorização de limite[62].

Consensualmente entre os historiadores da matemática, a epistemologia de limite de uma função configurou-se como o objeto do saber matemático e teve a funcionalidade de dar sustentáculo teórico à derivada, de um modo particular, e ao próprio cálculo como um todo. Essas noções matemáticas, embora “*corpus*” reconhecidos social e cientificamente, têm status de objeto, porém são descontextualizados, e, apesar de terem um nome, são despersonalizados, participando, dessa forma, de processos de apropriação dos saberes. Em outras palavras, limite se firmou como um saber teórico utilizado para consolidar outros objetos teóricos.

O *nicho* teórico é aquele em que limite se mostra como ferramenta nas construções de diferentes objetos matemáticos ou com matemática, com funcionalidades de “conceito” ou “noção”, em diferentes *habitat*, de diversos ecossistemas, por meio de práticas que se apresentam em definições, proposições, demonstrações, etc...Esse *nicho* diz respeito, diretamente, ao que Bosch, Chevallard e Gascón (2006, p. 6) denominaram de “topologia de limite”, tendo o saber como objeto maior das praxeologias em que se apresentam.

Os ostensivos utilizados para que o *nicho* teórico se mostre são, fortemente, o verbal e o algébrico, mas nada impede que sejam utilizados outros, principalmente como reforço visual para convencimento do que se está formalizando, o que não é legítimo na instituição produtora da matemática, mas que nas instituições utilizadoras desse saber, como as de ensino de engenharias, é válido.

---

[62] *Given this, if k denotes a finite quantity different from zero and e denotes a variable number that decreases indefinitely with the numerical value of a, the general form of infinitely small quantities of the first order is ka or at least ka (1±ε).* (versão inglesa de Cours d'analyse, p. 22)

Por outro lado, limite se apresenta no Cálculo Diferencial e Integral, de uma forma bastante comum, quando solicitado que se determine o seu valor em um determinado ponto, é o denominado limite funcional. Nossa prática docente aponta que os livros textos de CDI, predominantemente, se detém em tarefas relativas ao cálculo de limite, e mesmo nas questões sobre continuidade de uma função em um dado ponto, o que as obras mais exploram é a tarefa de determinar o limite, para confrontá-lo com o valor numérico na função nesse ponto. Isso é destacado nas análises de livros textos de CDI que Zuchi (2005) e Santos (2013) realizaram, quando apontam que limite se apresenta preponderantemente nas praxeologias matemáticas em forma de tarefas e técnicas. A esse respeito a última dessas autoras diz que

> Técnicas e tarefas acabam, no nosso ponto de vista, sendo os elementos principais dos textos. Há livros que trazem uma quantidade expressiva de exercícios que conseguem fazer com que o aluno compreenda os conceitos sem confundir o representante com o representado. (SANTOS, 2013, p. 237)

Esse seria para nós um *nicho* que denominamos de tecnológico, isto é, constituído por praxeologias relativas às técnicas, utilizadas quando, de alguma forma, esse objeto é chamado a resolver uma tarefa. Seria a álgebra de limite anunciada por Bosch, Chevallard e Gascón (2006, p. 6), a qual se distinguia da abordagem topológica, como já comentado.

Esses *nichos* que se mostram em praxeologias teóricas e tecnológicas, não são estanques, podendo combinar-se, e, além disso, em uma dada situação, podem constituir-se de um modo e, em uma situação distinta, de outro.

5.1.1 Identificação de *nichos*

As práticas denunciam a presença de *nichos* de limite de uma função, em um certo *habitat* de um ecossistema de ensino, mas precisamos destacar ainda como se dá essa “exibição”, ou seja, o que fazem para poderem se mostrar.

A “Reforma do Cálculo” (SOLOW, 1994) influenciou de modo (quase) direto, senão toda a disciplina matemática da área de análise, o setor do Cálculo Diferencial e Integral (CDI), principalmente nos cursos de graduação em engenharia no Brasil. Isso se deu, principalmente, a partir de 1995 quando o Governo Federal brasileiro implantou para as universidades, públicas e privadas, de todo o país, o programa que se denominou de COBENGE, aqui com seus subprogramas REENGE e RECOPE[63]. Inicialmente a Reforma firmou o que chamou de "Regra de três", no sentido de que funções envolvidas no CDI deveriam se apresentar nas formas: algébrica, gráfica e numérica, posteriormente incluíram a forma verbal, transformando-a em "Regra de quatro".

Verônica e Otero (2009, p. 152), em pesquisa que objetivou evidenciar as Organização Didática (OD) de um professor, além de analisar o fenômeno do autismo didático na Universidade, de acordo com as formulações deste fenômeno feitas no âmbito da TAD por Chevallard (2001, p. 6-9) e Gascon (2003, p. 26-33), analisaram e descreveram praxeologias didáticas do professor, relativas ao ensino de limite e continuidade de funções, e, similarmente à Reforma do Cálculo, utilizaram as seguintes formas de representação:

> a) **Verbais** – representações que incluíam "expressões em língua natural, ou seja, falada ou escrita";
> b) **Numéricas** – seriam aquelas representações "associadas a qualquer expressão que envolva números e operações entre eles";
> c) **Algébricas** – referentes à utilização de "expressões que envolvam representações de objetos matemáticos através de letras";
> d) **Pictóricas conceituais** – que seriam as representações geométricas e/ou diagramas que sejam esboços de certos gráficos. (VERÔNICA E OTERO, 2009, p. 165)

Tanto na Reforma do Cálculo como em Verônica e Otero (2009), de um modo geral, parece que as formas ostensivas de representação de funções e, de limite de uma função, não são questionadas ou problematizadas, sendo vistas como <u>instrumentos</u> de conhecimento e não como <u>objetos</u> de conhecimento. Com essa preocupação nos encaminhamos para o objeto limite de uma função em relação ao seu ensino, tendo em conta, inicialmente quanto às formas de suas representações, que são os ostensivos que apresentam, passando em seguida às suas funcionalidades nas praxeologias com matemática.

---

[63] PRODENGE (Programa de Desenvolvimento das Engenharias) do Governo Federal, através da FINEP (Financiadora de Estudos e Projetos), com apoio do CNPq (Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico), SESU (Secretaria de Educação Superior) e CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior), para tornar o Brasil mais competitivo, através de seus Engenheiros e empresas. REENGE, com principal objetivo reestruturar o ensino superior, incentivando a realização de diferentes experiências de ensino como implantação de módulos de aprendizagem virtual, utilização de recursos computacionais, atividades de pesquisa e desenvolvimento experimental, na constante atualização de profissionais. RECOPE (Redes Cooperativas de Pesquisa), envolvendo a interação entre universidades, institutos de pesquisa e empresas para a realização de atividades conjuntas de pesquisa, desenvolvimento experimental e engenharia.

Com isso, esperamos situar o ensino de limite em uma ótica ecológica, caracterizando os ostensivos que se mobilizam nas praxeologias, onde, de algum modo, a tarefa do seu cálculo é solicitada. Algumas vezes, representações gráficas ou em tabelas, por exemplo, são evocadas para justificar práticas de tarefas com representações algébricas, ou seja, servem para criar um discurso convincente a uma *práxis*, isso não nos impede de explorar os papéis que esses ostensivos podem desempenhar nessa organização praxeológica, buscando saber para que servem e a quem respondem, enfim, seus modos de vida na validação do cálculo do limite, nos *habitat* do ecossistema de ensino por nós considerado.

Assim, buscamos os ostensivos das funções e das técnicas que mobilizam, em *nichos,* tanto teóricos quanto tecnológicos, em praxeologias que exigem, de algum modo, respectivamente, o saber ou o cálculo de limite de uma função, nos *habitat* do ecossistema do ensino da engenharia. Os modos em que esses ostensivos são evocadas nessas praxeologias nos leva a assumir inicialmente as denominações usadas para os ostensivos, destacadas na Reforma do Cálculo e nas considerações de Verônica e Otero (2009).

Quando as práticas relativas aos *nichos* se evidenciarem ostensivamente pela utilização de expressões escritas ou verbais, de forma claras ou transparentes, diretas ou indiretas, estaremos diante da forma por nós denominada de <u>textual</u>. Essa é a mesma representação semiótica verbal de Verônica e Otero (2009), e também diz respeito à 4ª “Regra” da Reforma do Cálculo.

As práticas com essa forma ostensiva de representação são evidenciadas ao referir-se a: aproximações, delimitações ou valores que devem ser respeitados, não podendo ser ultrapassados, podendo ser apresentados por meio de expressões como: “Limite”, “Lim”, “Passar ao Limite”, “Limite Máximo”, “Limite Mínimo”, “Tende a”, “Se aproxima de”, “Cota Máxima”, “Cota Mínima”, “Assíntotas”, “Comportamento assintótico”, ou ainda pela exibição de “intervalos de tolerância”.

Uma prática com essa forma de representação textual se apresenta, por exemplo, na seguinte tarefa:

- Determine as assíntotas da função $y = \frac{x^3}{x^2 - 2x}$

O objeto matemático limite também se apresenta em práticas em que seu cálculo é solicitado, ostensivamente, a partir de uma expressão <u>algébrica</u>, o que já ocorrera no exemplo anterior. Com relação às praxeologias didáticas, Bosch, Chevallard, e Gascón (2006) detalharam que o bloco teórico que acompanha uma prática, dita “erudita”, contém definições, propriedades e declarações gerais sobre limites, continuidade, enquanto outra do bloco prático inclui problemas como o “cálculo do limite de funções elementares em um dado ponto e no infinito por meio de diferentes técnicas baseadas em transformações algébricas das expressões de funções”. (BOSCH, CHEVALLARD, e GASCÓN, 2006, p. 5) [64]

A prática algébrica é evidenciada na maioria das tarefas relativamente a limite e continuidade de funções, como anunciado por Verônica e Otero (2009), sendo recorrente em livros didáticos, particularmente na exploração daquelas em que a função não se define no ponto a determinar o limite ou a continuidade, ocorrendo, nesses casos, indeterminações em que manipulações são feitas para substituir a função original, que se apresentava problemática, por outra, que não possui os entraves de cálculo que a função original tinha.

Em relação às manipulações algébricas, Santos (2013, p. 207), analisando livros didáticos com o aporte teórico da TAD, posiciona-se acrescentando que todas as obras que investigou mostram as técnicas que devem ser utilizadas sem as justificar, ou seja, sem apresentar as suas tecnologias. Para a pesquisadora

> Não fica claro que a manipulação algébrica é feita para que possamos trabalhar uma outra função que é semelhante à primeira, mas que, diferente dessa, não possui ‘problemas’ com pontos específicos do domínio que geram a indeterminação” (SANTOS, 2013, p. 207)

Numericamente o limite de uma função em um *nicho*, pode se expor em práticas através de sequências numéricas que, de alguma forma, “sugestione” uma tendência, ou ainda pelo uso de tabelas, como, por exemplo, a seguir:

- Pelos valores da tabela abaixo, “verifique” que $\lim_{x\to 2} \frac{3x^2-4x-4}{x-2}=8$.

Limite nesta prática mostrou-se pela tarefa de sua verificação e mobilizou mais de uma forma ostensiva: textual na enunciação da própria tarefa, algébrica pela

[64] *the calculation of the limit of elementary functions at a given point and at infinity through different techniques based on algebraic transformations of the functions expression.*

expressão apresentada e numérica através das tabelas que sugestionaram o resultado.

As práticas gráficas são aquelas em que a função envolvida no cálculo de limite, apresenta-se dessa forma, como, por exemplo, nas tarefas:

- Esboce o gráfico e mostre que a função $f(x) = \frac{3x^2-4x-4}{x-2}$ não se define em x = 2, mas tem igual a 8 nesse ponto.

Similarmente às tarefas anteriores, nessa prática serão mobilizados mais de um ostensivo, neste caso, o textual, o algébrico e o gráfico.

Nos livros textos de CDI de um modo geral e, particularmente, naqueles tidos como produtos da Reforma do Cálculo (HUGHES-HALLETT, GLEASON, McCALLUM, et al, 2012; STEWART, 2008; e ANTON, Howard. BIVENS, Irl. DAVIS, Stephen, 2007), são predominantes as representações algébricas e gráficas, estas últimas comumente apresentadas como tira-teima das primeiras. Isso ocorre em razão dos ostensivos gráficos mostrarem-se adequados para o modelo epistemológico historicamente assumido pela instituição produtora da matemática, embora essa em seu rigor não os admita como instrumento de prova.

Além das práticas consideradas (textual, algébricas, numéricas e gráficas), há, no entanto, uma outra que se dá a partir de funções construídas por meio de instrumentos em experimentos de laboratórios, ou ainda por observações de eventos não controlados, que não admitem claramente as formas ostensivas anteriores, ou seja, não estão previamente definidas de forma simples.

As similaridades das pesquisas de Castela e Romo Vázques (2011) que antes nos referimos dizia respeito à defesa que essas autoras fizeram de uma variedade de saberes que é incorporada na tecnologia, alguns desses certamente de origem empírica, introduzidos pela necessidade de ter em conta uma mesma unidade, não apenas dos componentes da praxeologia, mas também das instituições que, embora de diferentes modalidades, contribuam para a sua produção como objetos socialmente reconhecidos. (CASTELA e ROMO VÁZQUEZ, 2011, p. 81)

O empirismo indica que todo conhecimento provém da experiência o que é defendido por Mill (1979) [65] , que, dentre outras abordagens a respeito do pensamento científico trata do conhecimento matemático, da indução, da observação e da abstração, e propõe que os princípios geométricos e matemáticos são empíricos. Baseando-se no princípio da indução, esse filósofo nos diz que um evento uma vez ocorrido, voltará a acontecer quando as circunstâncias forem suficientemente semelhantes. Poincaré (1963, p. 133) também referenda o empirismo quando, ao tratar do papel da experiência e da generalização, afirma que a primeira é "a única fonte da verdade", e que só ela pode nos dar a certeza.

As três leis da dinâmica de Newton (resumidamente a da Inércia; a que nos diz que a força é igual ao produto da massa pela aceleração; e a da ação e reação) são reconhecidamente empíricas, no sentido de que foram obtidas por experimentações. De modo análogo, a terceira lei de Kepler, sobre gravitação de planetas, (mas que se aplica para qualquer corpo que orbite em torno de outro), foi estabelecida empiricamente, a partir de teste com rotas conhecidas, estabelecendo que sendo T o período de translação de um planeta e R o raio médio de sua órbita temos que $K=\frac{T^2}{R^3}$, sendo K denominada de constante de Kepler. Essas leis, que se expressam por ostensivos algébricos, são provenientes de práticas empíricas.

Alguns métodos de Matemática Aplicada, principalmente os de Matemática Heurística e de Otimização, fazem uso de processos estocásticos e têm funcionalidade empírica, apresentando parâmetros, que de maneira inversa, isto é, a partir de resultados considerados confiáveis, são obtidos por exaustivas execuções de programas de computadores que garante um valor, ou um intervalo em que valores devem se situar, dentre esses métodos podemos citar os algoritmos heurísticos[66].

Em situações diversas, nas quais o saber se estabelece no ecossistema do ensino da Engenharia, apresentando situações limítrofes, de aplicabilidades práticas, resultantes de experimentações com repetidos ensaios, ou da vivência

[65] John Stuart Mill economista, político, historiador, escritor, editor e filósofo, tido como um dos maiores defensores do empirismo(1806-1873), sendo autor da obra Sistema de Lógica, com de seis livros.
[66] Algoritmos que fornecem soluções que, quanto à qualidade, não se respaldam em formalidades científicas, sendo comumente avaliados empiricamente em termos de suas complexidades e qualidade das soluções obtidas.

profissional, sendo em alguns desses casos, fixado por normas (no Brasil as NBR da ABNT), que, embora prescindam de demonstrações matemáticas que as justifiquem, são consideradas confiáveis pelos usuários devido ao sucesso alcançado, nos deparamos com funcionalidades tecnológicas de limite de uma função de cunho empírico.

A forma de representação empírica se junta, portanto, àquelas relacionadas na Reforma do Cálculo, que se coadunam com as de Verônica e Otero (2009), portanto, nos ecossistemas de ensino, nos *habitat*, os *nichos* de limite se apresentarão ostensivamente com funcionalidades caracterizadas pelas práticas:

a) Textuais;
b) Algébricas;
c) Numéricas;
d) Gráficas; e
e) Empíricas.

Essas, também, podem ocorrer de forma isolada ou combinadas, para mostrar, ostensivamente, o modo de vida do objeto matemático por nós pesquisado nas suas práticas, ou seja, suas funcionalidades, seus *nichos*. Entendemos que o papel tecnológico do limite de uma função no ensino de Engenharia Civil é expresso por uma tarefa que exige seu cálculo, cujo ostensivo pode determinar, ou não, a do ostensivo evocado para sustentar a técnica. Nesse jeito de pensar, teríamos o cruzamento entre os ostensivos mobilizados pelas "técnicas" e os ostensivos mobilizados pelas tarefas nas representações das funções.

Postulamos, assim, que no nicho tecnológico, a *praxis* traduz-se por tarefas e técnicas, que implicam em combinações de ostensivos, tendo em conta aqueles usados, tanto numa quanto outra, nas unidades do bloco praxeológico do saber-fazer.

Portanto, em um ecossistema de ensino, como o de Engenharia Civil da UFPA, a análise ecológica dos *nichos* tecnológicos em um dado *habitat*, relativos ao saber-fazer, implica em determinar em quais tarefas o cálculo do limite é solicitado, e os ostensivos mobilizados pelas técnicas de resolução, os quais podem ocorrer como no quadro a seguir:

QUADRO 09 – Tarefas e técnicas dos *nichos*

TAREFA / TÉCNICA	**Textual**	**Algébrica**	**Numérica**	**Gráfica**	**Empírica**
Textual					
Algébrica					
Numérica					
Gráfica					
Empírica					

Fonte: Elaborado pelo autor

As situações podem ser combinadas, como por exemplo, quando o limite é evocado a calcular em uma dada tarefa algébrica e a técnica de resolução faz uso de ostensivos algébricos, numéricos e/ou gráficos.

Com os componentes de nosso modelo heurístico, passamos a destacar praxeologias com matemática do ecossistema de ensino de Engenharia Civil da UFPA, com as respectivas análises, em relação à ecologia didática da qual estamos tratando.

6 ANÁLISES DA ECOLOGIA DIDÁTICA DE LIMITE DE UMA FUNÇÃO NO ECOSSISTEMA DE ENSINO DE ENGENHARIA CIVIL

Após tratarmos das praxeologias de limite no curso de graduação em engenharia, propusemos um modelo heurístico para analisarmos as funcionalidades desse objeto matemático nos *habitat* do ecossistema de ensino considerado. Nesta seção, apresentamos práticas de ensino de Engenharia Civil, submetendo à análise da ecologia didática de limite de uma função, iniciando com as praxeologias com matemática em que identificamos *nichos* nos *habitat* específicos da instituição utilizadora dos saberes matemáticos. Em seguida, passaremos às praxeologias que “residem” em *habitat* comuns à instituição produtora e a utilizadora da Matemática, por meio da análise ecológica didática de obras do CDI e por último trataremos dos *nichos* de limite que identificamos nas entrevistas que realizamos em nossa pesquisa.

6.1 *Nichos* nos *habitat* específicos do ensino de engenharia

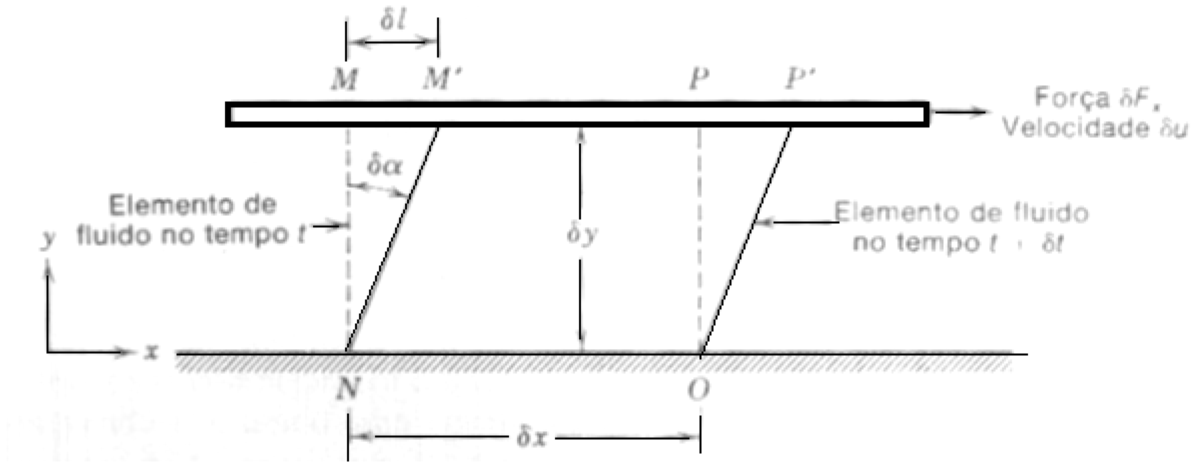
Os *habitat* específicos do ecossistema de ensino de Engenharia Civil, são constituídos pelas disciplinas e práticas próprias do respectivo curso de graduação que destacamos anteriormente, a seguir apresentaremos alguns *nichos* e as formas como o objeto limite de uma função se evidenciou em uma instituição utilizadora da matemática.

6.1.1 *Nichos* de limite no *habitat* de Mecânica dos Fluidos

Nesse habitat, destacaremos duas situações em que identificamos nichos para o tema limite de uma função, o primeiro se refere à tensão de cisalhamento em um meio líquido e o segundo à densidade média.

a) A tensão entre duas placas paralelas, separadas por uma camada líquida, é uma prática do habitat de Mecânica dos Fluidos, nessa, os movimentos e deformações provocados por esforços de cisalhamento, estabelecem-se, como na figura a seguir:

FIGURA 11 - Tensão de cisalhamento entre duas placas em meio fluido



Fonte: Nota de aula do prof. Eduardo Loureiro, NP

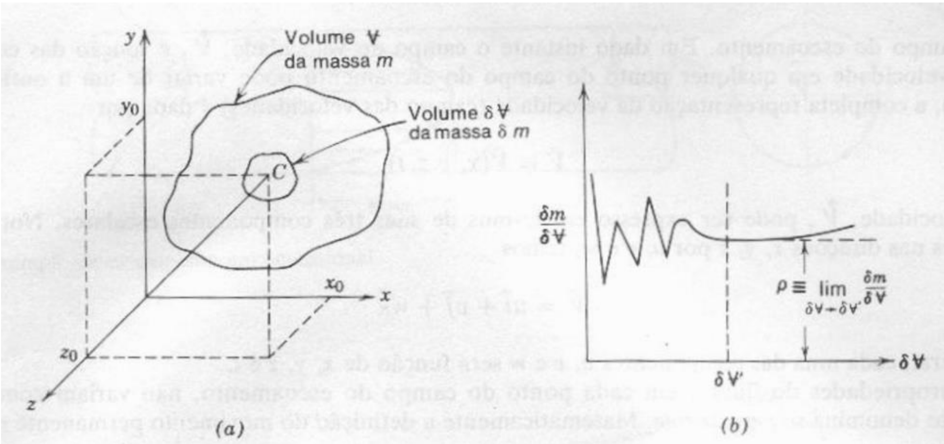
A placa superior move-se com velocidade δu, sob ação da força constante δF_x. Durante um intervalo de tempo δt e a taxa de deformação τ, também denominada de tensão tangencial, ou de cisalhamento, é definida como sendo $\tau = \lim_{\delta\alpha \to 0} \frac{\delta F_x}{\delta\alpha}$.

b) A densidade média, de um corpo de massa *m* em todo o seu volume V é dada por $\bar{\rho} = \frac{m}{V}$, no entanto, em geral, este valor não é o mesmo em todos os pontos e V e a densidade em torno de um ponto C, como na figura abaixo, é dada por $\rho = \frac{\delta m}{\delta V}$. Mas existe um valor limite para o volume a partir do qual ele passa a conter um pequeno número de moléculas, e a densidade δm/δV não mais se justificaria. Com base nessa especificidade e na necessidade do objeto matemático, para o funcionamento dessa praxeologia com matemática, por coação da prática no ensino de engenharia, a densidade é reformulada para:

$$\rho \equiv \lim_{\delta V \to \delta V'} \frac{\delta m}{\delta V}$$

Para melhorar o entendimento a figura 12 é apresentada a seguir:

FIGURA 12 – Densidade média



Fonte: Introdução à Mecânica dos Fluidos. Apresentação do Prof. Eduardo Loureiro, NP.

Esta situação parece se contrapor ao que se prevê na instituição produtora da Matemática, ao nos dizer que, para cada número ε>0, tão pequeno quanto queiramos, podemos indicar um δ > 0 tal que, para todo x diferente de a, verificamos que | *x* -*a* | < *δ* , então a desigualdade | *f(x)* - *b* | < *ε*, fica satisfeita e dizemos que b é o limite de f(x), ou seja: $\lim_{x \to a} f(x) = b$. A situação real exposta nos indica que o volume não pode ser tão pequeno quanto queiramos, pois em alguns casos, como no deste exemplo, a situação perde o sentido físico, uma vez que, abaixo de certo valor para o volume, não tem como existir densidade, não se pode considerar como um corpo.

As duas práticas a) e b) evidenciaram textualmente a presença de *nichos* teóricos, pois se deram a partir de argumentações que algebricamente, definiram $\rho \equiv \lim_{\delta V \to \delta V'} \frac{\delta m}{\delta V}$, no primeiro exemplo, e $\tau = \lim_{\delta \alpha \to 0} \frac{\delta F_x}{\delta \alpha}$ no segundo. Além disso, apesar dos nichos serem teóricos, utilizaram ostensivos gráficos, como “mostração” das situações dos limites, relembrando que, no ensino de engenharia, ao contrário da instituição produtora do saber matemático, gráficos e tabelas podem ser utilizados como formas de convencimento dos pressupostos teóricos.

6.1.2 *Nichos* de limite no *habitat* de Mecânica dos Solos 01

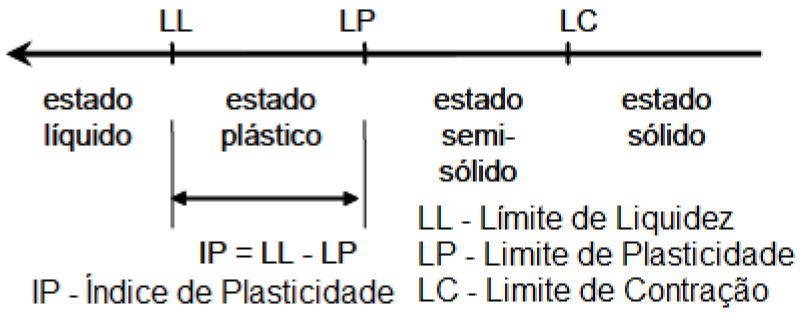
Conforme destacado quando tratamos dos possíveis *habitat* de limite de uma função nas disciplinas que exibiam essa palavra em suas ementas, a de Mecânica dos Solos 01 apresentava “Limites de Atterberg”, que poderia indicar a presença de *nichos* para o objeto matemático por nós pesquisado. Como egresso do curso, fomos relembrar o que esse termo queria dizer, no ecossistema de ensino de engenharia Civil, que passamos a expor.

Um solo argiloso, dependendo do seu teor de umidade, pode apresentar características similares as de um líquido ou de um sólido (GRECO, SD, p. 6). Entre esses “estados limites”, líquido e sólido, o solo passa por um estado intermediário dito plástico e por um outro denominado semissólido. Esses estados são caracterizados a seguir:

> **Estado líquido** - o solo apresenta as propriedades e a aparência de uma suspensão. Não possui forma própria e não apresenta nenhuma resistência ao cisalhamento.
> **Estado plástico** - o solo apresenta a propriedade de plasticidade. Pode sofrer deformações rápidas, sem que ocorra variação volumétrica apreciável, ruptura ou fissuramento.
> **Estado semissólido** - o solo tem a aparência de um sólido, entretanto ainda passa por variações de volume ao ser secado (o solo ainda encontra-se saturado).
> **Estado sólido** - o solo não sofre mais variações volumétricas por secagem.

Esses estados são separados pelo que se conhece de limite, de contração plasticidade e liquidez. A figura 13 a seguir expõe esses estados:

FIGURA 13 – Limites em prática de Mecânica dos Solos



Fonte: Greco (ND, p. 6)

O Limite de Liquidez (LL)**,** definido como o teor de umidade que indica a passagem do estado plástico para o estado líquido, está relacionado com a capacidade do solo em absorver água, sendo obtido experimentalmente a partir de um ensaio realizado com o aparelho de Casagrande (que denominava esse experimento quando éramos aluno de graduação). O ensaio ocorre da seguinte forma:

a) Utilizando-se um cinzel apropriado, faz-se uma ranhura no centro da cuba com o solo;
b) Gira-se a manivela do aparelho com uma rotação constante de 2 golpes por segundo, até a ranhura fecha;
c) Anota-se o número de golpes necessários ao fechamento;
d) Retira-se uma amostra do solo que se uniu, para determinar seu teor de umidade.

A figura 14 a seguir apresenta fotos do aparelho de Casagrande utilizado para determinar o teor de umidade do solo (GRECO, ND, p.7).

FIGURA 14 - Ensaio de limite de liquidez, realizado no aparelho de Casagrande.

Fonte: Greco (ND, p.7)

A foto da esquerda apresenta o aparelho de Casagrande antes do ensaio, tendo na parte inferior direta o cinzel utilizado para efetuar a ranhura; a do meio foi feita após a colocação do solo e de se efetuar a ranhura e a terceira ao final do ensaio.

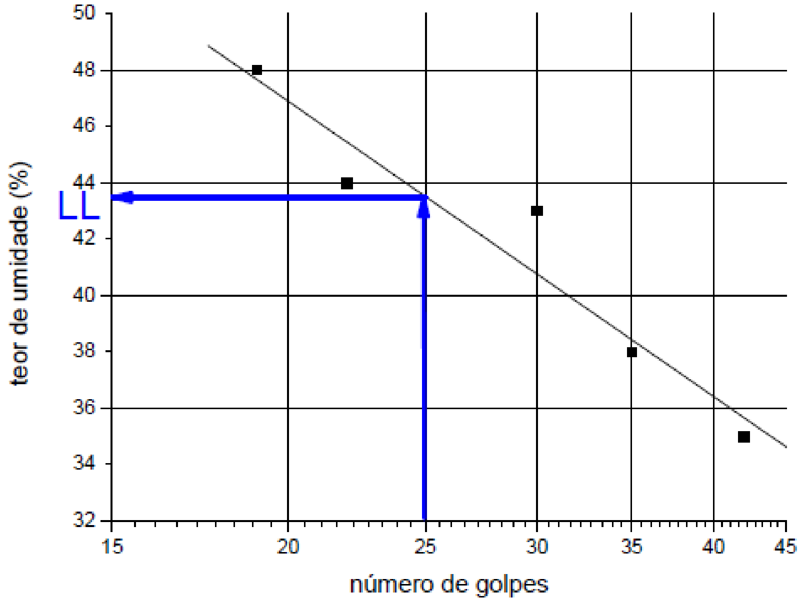
O limite de liquidez é obtido com 25 golpes no aparelho de Casagrande. Para a sua determinação deve-se realizar o ensaio até que se tenha, no mínimo, 4 pontos, 2 acima e 2 abaixo de 25 golpes[67]. Em cada uma dessas situações anota-se o número de golpes e retira-se uma amostra do local onde o solo se uniu, para determinação do teor de umidade (razão ente o peso da água contida em um certo volume de solo e o peso da parte sólida existente nesse mesmo volume, expressa em porcentagem).

Os valores obtidos são lançados em um gráfico semi-logarítmico (aquele com um dos eixos em escala logarítmica), em que o conjunto de pontos é aproximado por uma reta, conforme a figura 15 a seguir:

---

[67] O ensaio de liquidez, ou de Casagrande, completo, pode ser visualizado em https://www.youtube.com/watch?v=iWPVFCSxMzI

FIGURA 15 – Limite de liquidez obtido no ensaio de Casagrande



Fonte: Greco (ND, p. 7)

A obtenção da reta é intuitivamente visual, o que influencia no resultado, mas pode-se ter uma melhor aproximação com a utilização de métodos numéricos, como por exemplo, o dos quadrados mínimos, em que a soma dos quadrados das distâncias dos pontos à reta seria minimizada.

Pelo obtido neste gráfico, o limite de liquidez (LL) seria de, aproximadamente, 43,5%. Matematicamente falando, corresponderia a tendência do teor de umidade para 25 golpes no aparelho de Casagrande.

O índice de plasticidade I_p é obtido pela diferença entre o Limite de Liquidez e o Limite de Plasticidade, $I_p = LL – LP$, sendo que LL e LP são determinados de modo empírico em ensaio de laboratório, como descrito por Greco (ND, p. 8).

O índice de plasticidade, resulta da diferença de dois limites, sendo, portanto, um limite que, neste caso, tem nicho tecnológico, evidenciado a partir de uma prática empírica, em que o ostensivo gráfico é solicitado e os limites chamados a serem calculados, apresentando-se em técnicas algébricas.

A máquina de Casagrande, como não previsto nos ensinos corriqueiros, nos parece ter características de uma função que produz os resultados que serão utilizados. Esse modo de ver a prática, difere, completamente, da definição de função que normalmente vive nos *habitat* de ensino formal de matemáticas.

6.1.3 *Nichos* de limite no *habitat* de Estruturas e Materiais

Nas práticas de compressão do concreto nesse *habitat*, é comum encontrarmos o fator 0,85, inclusive nas normas às quais se referem, como por exemplo, nas duas situações a seguir:

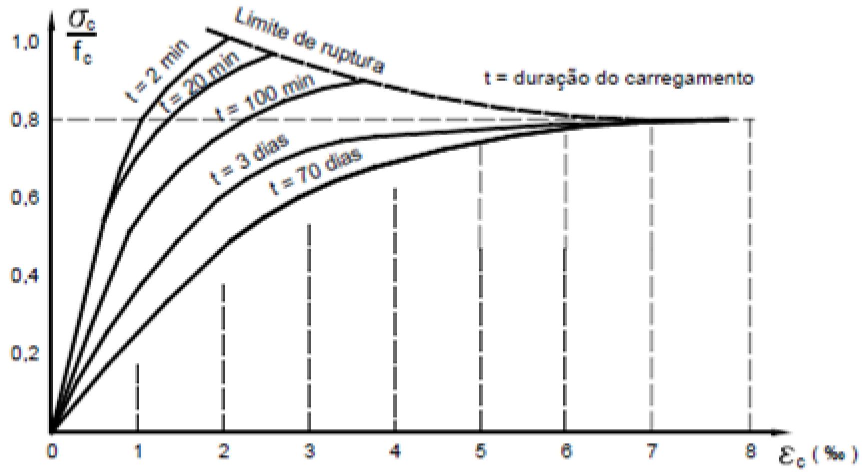
a) Para o dimensionamento de seções transversais de peças de concreto armado no estado limite último, a Associação Brasileira de Normas Técnicas (NBR 6118, p. 24), apresenta o diagrama tensão-deformação à compressão de forma simplificada, composto por uma equação (que a Norma chama de parábola) do 2º grau, que passa pela origem e tem seu vértice no ponto de abscissa 2 ‰ e ordenada 0,85fcd e de uma reta entre as deformações 2 ‰ e 3,5 ‰, tangente à parábola e paralela ao eixo das abscissas, como na figura a seguir. Essa equação do 2º grau tem a forma: $\sigma_c = 0{,}85 f_{cd}\left[1-(1-\frac{\varepsilon_c}{0{,}002})^2\right]$, onde σ_c é a tensão a compressão do concreto, ε_c o coeficiente de deformação específica do concreto e f_{cd} é a resistência de cálculo à compressão do concreto.

O módulo de elasticidade secante, por sua vez, a ser utilizado nas análises elásticas de projeto, especialmente para determinação de esforços solicitantes e verificação de estados limites de serviço, deve ser calculado pela expressão Ecs = 0,85 Eci, onde o fator 0,85 aparece novamente.

À primeira vista poderíamos pensar que esse fator aplicado à f_{cd}[68] seria arbitrário, como uma redução padrão de 15%, mas não é o que ocorre. A utilização desse índice decorre de que, com o passar do tempo, a partir de certo valor da deformação pela compressão ε_c, o limite de ruptura do concreto tem um comportamento assintótico, aproximando-se de 0,85, como a figura a seguir pode querer nos mostrar:

[68] fcd é resistência de cálculo de resistência do concreto à compressão sendo expressa em Mega Pascal (MPa), e 1 MPa = 1.000.000 Pa. Um pascal (1 Pa) equivale à força de 1 newton uniformemente exercida perpendicularmente sobre um quadrado de 1 metro de área. 1MPa = 10,1972 kgf/cm^2. Um fcd de 30 MPa equivale a 305,916 Kgf/cm^2

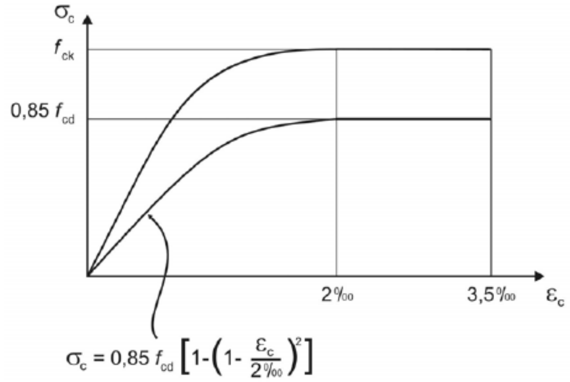
FIGURA 16 – Gráfico Tensão X Deformação do concreto



Fonte: Prof. Dr. Paulo Sérgio dos Santos Bastos UNESP(Bauru/SP) – Apostila Fundamentos de Concreto Armado

Situação essa que é dita idealizada na Norma Brasileira, pela figura 17:

FIGURA 17 - Gráfico Tensão X Deformação idealizado



Fonte: Associação Brasileira de Normas Técnicas. NBR 6118, p. 24

Portanto, há uma legitimação prática do uso do fator 0,85, como limite de ruptura, que comumente consta nas formulações do Cálculo Estrutural. Trata-se de um valor estipulado em serviço, com nicho teórico, pois o comportamento assintótico é utilizado para definir um valor de um limite. Além disso, temos também um nicho tecnológico que se mostrou em tarefa empírica, resultante de vários ensaios, com uso de técnicas: numérica, pois, na obtenção do limite, as deformações foram medidas e registradas de tempos em tempos; algébrica para exprimir a tensão e gráfica como forma de convencimento e “idealização”.

b) Ainda no *habitat* de Estruturas e Materiais, uma das práticas que consideramos mais emblemática vivenciada na posição de aluno do curso de Engenharia Civil foi o ensaio de ruptura de corpos de prova. Esse ensaio, quanto à moldagem e realização, é normatizados pelas normas NBR 5738 e NBR 5739 da ABNT.

A prática de rompimento de corpos de prova se dá a partir de quando, os Engenheiros calculistas do projeto da obra estabelecem as cargas que seus componentes (pilares, vigas e lajes) deverão suportar, que após ser majoradas são indicadas aos produtores de concreto, que, por sua vez, fazem a composição, constituída de cimento, água e agregados, que deva suportar tais cargas.

A verificação se o concreto produzido cumpre com as especificações dos calculistas é feita através da determinação da mais importante característica mecânica do concreto à compressão simples, que é a sua resistência, designada por f_{ck}, que corresponde à tensão (Força/Área), obtida através dos ensaios com corpos de prova com o concreto produzido.

Acompanhamos ensaios para determinação da tensão de ruptura, realizados por alunos a disciplina Ensaios de Estruturas e Materiais do curso de Engenharia Civil (fotos no Apêndice B). Os estudantes utilizaram CP cilíndricos com 15 cm de diâmetro por 30 cm de altura, com 28 dias de idade, o que está de acordo com Pinheiro, Muzardo e Santos (2004, p. 2) “O corpo-de-prova padrão brasileiro é o cilíndrico, com 15cm de diâmetro e 30cm de altura, e a idade de referência para o ensaio é 28 dias”.

A Norma NBR 5738/2003 estabelece que pelo menos dois ensaios devem ser realizados com os corpos de prova: o primeiro com 7 (sete) dias e o segundo com 28 (vinte e oito) dias. Para as realizações dos ensaios, de sete e de 28 dias, os alunos foram divididos em 6 grupos, conforme o quadro a seguir:

QUADRO 10 – Equipes de alunos para ensaio com corpos de prova

GRUPO	CP	Idade	TRAÇO
A	2	7d	1:3,5
	6	28d	
B	2	7d	
	6	28d	
C	2	7d	1:5
	6	28d	
D	2	7d	
	6	28d	
E	2	7d	
	6	28d	
F	2	7d	

	6	28d	1:6,5

Fonte: Ensaio com corpos de prova acompanhado pelo autor

O traço 1:3,5 das equipes A e B, por exemplo, significa dizer que a composição do concreto a ser testado era de: uma porção de cimento para 3,5 porções de agregados, que são constituídos de areia e brita ou seixo. Os traços são diferentes porque as finalidades do concreto também são, por exemplo, um para pilares, outro para lajes e o terceiro para vergas de portas.

Os CP, após 24h de confeccionados são desenformados e aguardam os ensaios em uma câmara úmida, também denominada de câmara de cura, para que não sofram ações das intempéries. Sete dias após a confecção, houve o primeiro ensaio com 2 CP de cada grupo, ao qual não assistimos. Segundo relato dos estudantes, nesse primeiro ensaio, a resistência à compressão variou de 30,8 a 36 MPa (Mega Pascal), o que quer dizer que resistiram a um esforço de compressão entre 308 e 360 Kgf/cm^2, aproximadamente, uma vez que 1 Mpa equivale a 10,19 kgf/cm^2, que na prática considera-se 10.

Após 28 dias do preparo inicial dos CP, assistimos aos ensaios realizados pelos 6 (seis) grupos no Laboratório do curso de Engenharia Civil da UFPA. Cada um dos grupos possuía 6 (seis) CP, sendo 2 (dois) seriam para ensaio de compressão normal, 2 (dois) para o de compressão longitudinal (que corresponde à tração) e 2 (dois) para a verificação do módulo de elasticidade. Nos detivemos em seguir buscando de funcionalidades de limite de uma função nesse *habitat* de práticas do ecossistema de ensino de Engenharia Civil.

Os ensaios de compressão realizados pelos alunos produziram os resultados expostos no quadro 11.

QUADRO 11 – Resultados dos ensaios com corpo de prova

Traço do concreto	Força Mínima (Mpa)	Força Máxima (Mpa)
1:3,5	27,2	36
1:5	28	28,5
1:6,5	19	20,8

Fonte: Ensaio com corpos de prova acompanhado pelo autor

Para obtenção das tensões (Força/área), após os ensaios, os alunos obtiveram as forças médias de ruptura e as dividiram pela área da seção transversal do CP ($S = \pi R^2 = 3{,}14x7{,}5^2 = 176{,}625 \cong 177$ cm^2), devendo o resultado ser expresso em Mpa/cm^2.

Uma das perguntas que fizemos a um dos alunos que realizavam os ensaios buscava saber o entendimento sobre as possíveis razões, para que corpos de provas produzidos, na mesma oportunidade, com as mesmas condições, mesmo material e mesmo traço produzirem resultados diferentes (variantes de 27,2 MPa a 36 MPa para o traço 1:3,5 por exemplo), e obtivemos a seguinte resposta:

> *- segundo o professor, isso poderia ocorrer em razão de algum possível erro na moldagem do corpo de prova, no adensamento do concreto, ou teor de ar no interior do corpo de prova, mas segundo o que sabemos, deve-se considerar o maior valor obtido, uma vez que o erro, devido à montagem, deve ter ocorrido no de menor valor.*

Perguntamos se os valores obtidos estavam dentro dos padrões estabelecidos e um aluno respondeu que

> *- ainda iriam obter essa conclusão após calcular e comparar com os valores estabelecidos*.

Outra pergunta, foi se havia algum limite estabelecido para os valores obtidos nos ensaios? A resposta foi:

> *- sim, são estabelecidos em Norma.*

Perguntamos se havia alguma relação desses limites com aqueles estudados em Matemática Aplicada à Engenharia, ao que ele respondeu negativamente sacudindo a cabeça.

Questionamos se depois que trabalharem os dados poderia haver essa relação, ao que uma aluna respondeu:

> - *acho que não, pois para nós interessa apenas o resultado para poder calcular o traço e ver se estão compatíveis com o traço rico, o traço médio e o traço pobre.*[69]

Esse ensaio foi realizado mais de dois anos após a primeira entrevista que tivemos com o professor da disciplina, e, naquela ocasião, lhe perguntamos:

> - E quanto ao assunto Limites de uma função ministrado em cálculo, o que o senhor pode me dizer em relação à utilização desse conhecimento nas disciplinas desse curso de Engenharia Civil?

A resposta do professor:

[69] O traço rico é o de 1:3,5, traço médio é o de 1:5 e o traço pobre é o de 1:6,5. Concreto com esses três tipos de traços têm aplicações diversas em obras de engenharia.

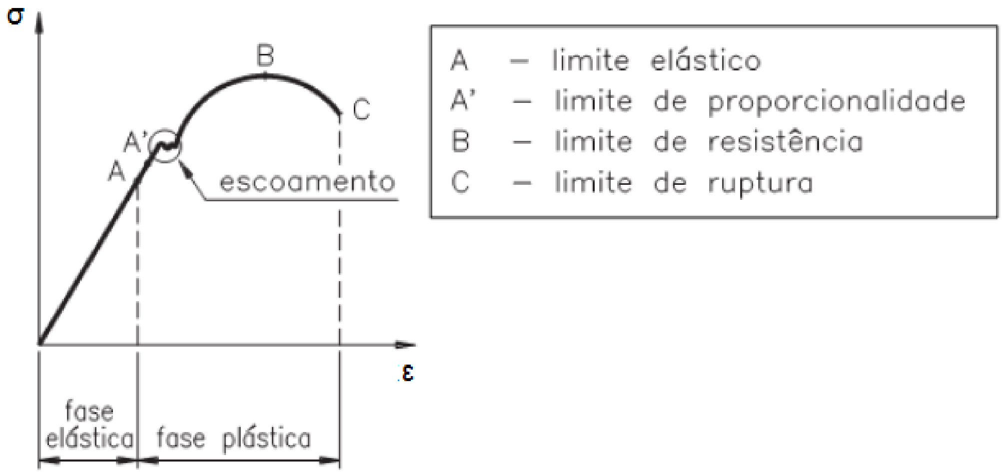
- Eu não sou a pessoa mais indicada pra falar disso, eu pouco trabalho com limites, a parte de cálculo que eu adoto, que eu trabalho é o cálculo mais simples, então eu tenho pouco contato com limite.

Ao ser questionado da relevância do tema para o Engenheiro, o mesmo professor, após afirmar que é um assunto relevante, complementou que:

- não vejo limites desde que eu deixei de estudar cálculo aqui na universidade, eu não trabalho com limite, e não uso limite no dia a dia, não é minha ferramenta de trabalho.

Após os ensaios, é produzido um diagrama denominado de tensão-deformação, similar ao que se encontra na figura 18, em que são registrados alguns “Limites”:

FIGURA 18 – Limites no diagrama Tensão(σ) X Deformação(ε)



Fonte: Dalcin (2007, p. 16)

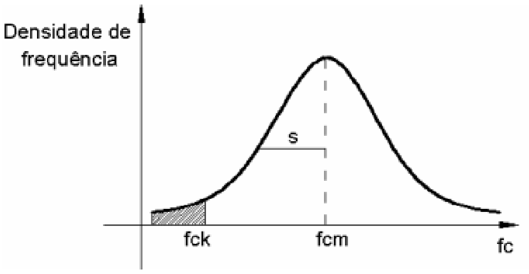
Na Fase Elástica, a tensão (σ) é diretamente proporcional à deformação (ε), obedecendo à Lei de Hooke (a mesma que rege o sistema massa mola), $\sigma = k\varepsilon$, onde a constante k é o módulo de elasticidade, também denominado de módulo de Young, do material. Nessa fase, cessada a tensão o corpo retorna ao seu estado natural. Na fase plástica, que não obedece à lei de Hooke, cessada a tensão o corpo deforma e não volta mais ao seu estado natural.

Segundo a nomenclatura utilizada em ensaios de corpos de prova, o ponto A' da figura anterior, em que o material muda de comportamento passando do estado elástico para o estado plástico, é denominado de Limite de proporcionalidade ou de escoamento. O ponto B representa o Limite de resistência que é o ponto de carga máxima atingida durante o ensaio, enquanto o ponto C, com valor inferior ao do Limite de resistência, é aquele onde a ruptura do material ocorre.

A aceitação dos resultados, para posterior certificação, é feito em duas etapas: a primeira para verificar as condições do concreto fresco na obra e suas demais propriedades; a segunda diz respeito às condições do concreto endurecido. A norma determina a confecção de 2 corpos-de-prova de uma mesma amassada de concreto, para cada idade de rompimento e os lotes em função de controle e da solicitação.

Após ensaio de um grande número de corpos de prova, pode ser feito um gráfico com os valores obtidos de fc versus a quantidade de corpos de prova relativos a determinado valor de fc, também denominada densidade de frequência. A curva encontrada denomina-se Curva Estatística de Gauss ou Curva de Distribuição Normal para a resistência do concreto à compressão, que se encontra na figura a seguir:

FIGURA 19 – Curva de Gauss para estabelecer a resistência do concreto à compressão



Fonte: Pinheiro et ali (S.D)

Nessa curva de Gauss são encontrados dois valores de fundamental importância: a resistência média do concreto à compressão, fcm, e resistência característica do concreto à compressão, fck. O valor de fcm é obtido pela média aritmética dos valores de fc para o conjunto de corpos de prova ensaiados, e é utilizado na determinação da resistência característica, fck, por meio da fórmula: $fck = fcm - 1,65\ S$, onde S é o desvio padrão das medições.

O gráfico da figura 19 indica que desvio padrão S corresponde à distância entre a abscissa de fcm e a do ponto de inflexão da curva. O valor 1,65 refere-se ao quantil de 5 %, ou seja, apenas 5 % dos corpos de prova podem possuir $fc < fck$, ou, de outra forma, 95 % dos corpos de prova têm que ter $fc \geq fck$.

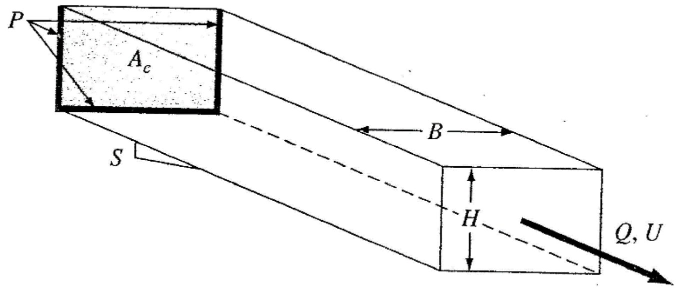
Resumindo: o Engenheiro calculista estima a resistência à compressão que os concretos da obra devem possuir, os ensaístas minoram a média dos resultados obtidos (fck = fcm – 1,65 S), e esperam que mais de 95% dos corpos de prova tenham resistência calculada maior do que a resistência solicitada. Um professor Engenheiro, quando das entrevistas que realizamos, deixou escapar o comentário: “para uma obra cair, em razão da qualidade do concreto, é preciso que ele esteja de fato bem abaixo do que foi solicitado”.

No modelo que propomos, nesse habitat, os limites apresentam nichos tecnológicos, as tarefas foram predominantemente solicitadas de modo empírico, “ensaiar corpos de prova para obtenção dos limites” e as técnicas foram empirícas para obtenção da resistência do concreto à compressão e os ostensivos gráfico e numéricos também foram mobilizados.

6.1.4 *Nichos* de limite no *habitat* de Hidráulica

Uma tarefa peculiar de hidráulica reside na prática de escoamento de líquidos em um canal a céu aberto, em que se conhece sua largura (B) e a vazão de escoamento (Q), e se deseja saber a altura mínima e a velocidade de escoamento do líquido desse canal, de modo a não transbordar. Esta situação problema é apresentada por Chapra e Canale (2008), sendo esboçada na figura a seguir:

FIGURA 20 - Canal a céu aberto



Fonte: Chapra e Canale (2008, p. 165)

Esses autores usam a equação de continuidade, Q = U A_c, que é deduzida a partir do princípio de conservação de massa, onde Q é a vazão do canal em metros cúbicos por segundo (m^3/s), U é a velocidade de escoamento do líquido em metros por segundo (m/s) e A_c é a área da seção transversal do canal em m^2. Como o canal tem a seção retangular A_c = B.H, em que B é a largura e H a altura, substituímos na equação de continuidade e teremos que Q = UBH.

Essa situação apresenta ainda duas incógnitas que são a velocidade U e a altura do canal H. Há a necessidade de mais uma equação que, de alguma forma, relacione essas variáveis de modo a reduzir o problema a apenas uma, e os autores apontam a seguinte técnica.

Para escoamentos uniformes, que não variam no espaço nem no tempo, o Engenheiro irlandês Robert Manning (1816-1897) propôs a fórmula semiempírica $U = \frac{1}{n} R^{\frac{2}{3}} S^{\frac{1}{2}}$ em que *n* é o coeficiente de rugosidade de Manning (um número adimensional usado para parametrizar o atrito do canal), S a inclinação do canal indicada na figura (também adimensional, pois seria a queda em metros, por metro de comprimento) e R = A_c /P, em metros, é o raio hidráulico, sendo P o perímetro molhado, que é a soma dos lados e do fundo que permanecem submersos, no caso do canal da figura P = B + 2H.

A fórmula de Manning acima, é institucionalizada em Hidráulica, e, apesar da origem empírica, que não tem uma teoria matemática que garanta sua validade, é aceita sem restrições na engenharia e no seu ensino, em razão da sua factibilidade e sucesso, nas práticas em que é utilizada, não sofrendo contestações.

Substituindo U e R na equação de continuidade, chegamos ao modelo matemático:

$$Q = \frac{S^{\frac{1}{2}}}{n} \frac{(BH)^{\frac{5}{3}}}{(B+2H)^{\frac{2}{3}}}$$

Portanto, desde que conhecidos S, n e B, para uma dada vazão Q, podemos obter a função f (H) de uma variável:

$$f(H) = \frac{S^{\frac{1}{2}}}{n} \frac{(BH)^{\frac{5}{3}}}{(B+2H)^{\frac{2}{3}}} - Q$$

O zero dessa função nos fornece a altura H do canal, nos permitindo calcular a sua velocidade de escoamento U = Q/BH.

Para tal tarefa, os autores sugerem “um dos métodos descritos nos capítulos 5 e 6” (CHAPRA e CANALE, 2008, p. 166), dentre os quais se destaca o Método da Bissecção. Vale ressaltar que esse saber faz parte, quase naturalizado da versão “”aritmetizada” do Cálculo, se assim podemos dizer, mais precisamente do curso de Cálculo Numérico, que, como já destacamos anteriormente, não vive hoje, no ecossistema de ensino de Engenharia Civil da UFPA, “morreu” ecologicamente.

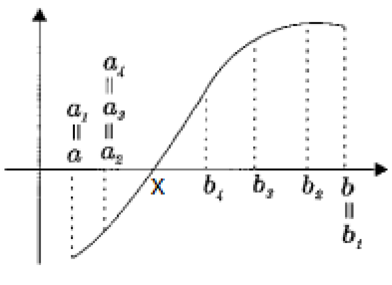
Embora nesse ecossistema não haja o estudo dessa versão aritmética do CDI, continuam havendo questões cuja resolução se dão por processos numéricos, como o Método da Bissecção. Esse método tem como tecnologia o caso particular do Teorema de Bolzano-Cauchy (Valor Intermediário), uma das consequências da continuidade de funções e que, sem restrições, é objeto de estudo do CDI:

> Se f(x) é contínua em um intervalo [a,b] e se f(a).f(b)<0, então existe um valor x^* ϵ [a,b] em que $f(x^*) = 0$.

Assim, se assumirmos que a função f(H) apresentada para calcular a altura do canal é contínua para valores positivos de H, podemos admitir que existe $H = x^*$, zero dessa função, e calcular esse valor, determinando intervalos encaixantes $[a_1;b_1] \supset [a_2;b_2] \supset ... \supset [a_n;b_n] \supset [a_{n+1};b_{n+1}]$ em que $f(a_k).f(b_k)<0$, para inteiros positivos k=1,2,3,...n.

A estratégia para determinar um novo intervalo $[a_{k+1};b_{k+1}]$ a partir de um intervalo $[a_k;b_k]$ é intuitiva e, por meio do ostensivo gráfico da figura a seguir, representando a proposição acima referida, resume-se em dividir esse intervalo ao meio e daí verificar em qual das metades a condição de produto negativo é satisfeita. Essa situação pode ser visualizada na figura 21.

FIGURA 21 - Intervalos encaixantes



Fonte: Produção do autor

Se $f(a_k)*f(b_k)<0$, o zero estimado será $x_k = (a_k+b_k)/2$, e continuando, se $f(x_k).f(a_k)<0$, então $[a_{k+1};\ b_{k+1}] = [a_k\ ;x_k]$, caso contrário $[a_{k+1};\ b_{k+1}]= [x_k\ ;b_k]$. Por observação da figura podemos notar que a amplitude ε_k dos intervalos vai se reduzindo e tendendo para zero, acercando-se do zero da função.

Se na instituição produtora da matemática o uso de gráficos não é admitido como argumento de prova, haja vista que recorre a evidências, que o formalismo não acata, por outro lado, é diferente quando o matemático se faz professor (CHEVALLARD, 2013, p.104), e labuta em instituição com matemática (de ensino, engenharia, por exemplo...), em que ostensivos gráficos são admitidos como sustentação de argumentação de validação. No caso em tela, o argumento textual é sustentado a partir do ostensivo gráfico que permite a construção e a validação do método, independente da proposição matemática antes referida.

No ensino desse método em um curso de matemática a validação acima é tomada como informal e, portanto, outro argumento, dito formal, é exigido. Mais precisamente, por manipulações algébricas elementares, podemos verificar que a k-ésima amplitude do intervalo é dada pela expressão algébrica $\varepsilon_k = b_k - a_k = \frac{1}{2^k}(b_1 - a_1)$ para todo k $\in$ N, ou seja, evidencia uma função exponencial decrescente em k. Isto nos conduz a enfrentar a seguinte tarefa: "*calcular o limite de uma função* definida algebricamente", como do tipo "álgebra de limites" (BOSCH, CHEVALLARD e GASCÓN, 2006, p. 6), ou melhor, calcular o limite da amplitude |b-a|, onde o "zero" se encontra, quando k assume valores crescentes, mais precisamente, como segue.

$$\lim_{k \to \infty} \varepsilon_k = \lim_{k \to \infty} \frac{(b-a)}{2^k}$$

Isso quer dizer que o método torna a amplitude, a partir de um valor de k, indistinguível de zero no sentido da continuidade física de Poincaré (1963), ou, de forma equivalente, torna os extremos do intervalo indistinguíveis, coincidindo com uma "boa" estimativa para o valor do zero da função x^*.

O número de iterações do Método da Bissecção pode ser estimado mesmo que não conheçamos a função que desejamos obter o zero x^*. Como a cada iteração o intervalo tem magnitude igual à metade da anterior, em n iterações espera-se que $\frac{|b-a|}{2^n}$ < tolerância limite (*Tol*), portanto, n > $log_2 \frac{|b-a|}{Tol}$.

Assim, por exemplo, se o intervalo inicial onde o zero da função se encontra for ε_0 = [a;b] = [0;1] e a tolerância limite Tol = 0,001, teremos que $n > \ log_2 \frac{|1-0|}{0{,}001} = log_2 1000 = \frac{\log 1000}{\log 2} = \frac{3}{0{,}3010} = 9{,}64$ e, portanto, segue que o processo deve atingir um valor considerado "adequado", ou indistinguível do zero, da função, em 10 iterações.

A Tolerância limite (Tol) referida acima é um "pequeno" valor arbitrário que indica que |f(x)|, ou a diferença entre os dois extremos do intervalo $\varepsilon_{k+1} = |b_{k+1}\ ; a_{k+1}|$ onde o zero x* se encontra, portanto quando tornam-se indistinguíveis de zero.

i) |f(x)| < Tol;

ii) $\varepsilon_{k+1} = |b_{k+1} - a_{k+1}| < \text{Tol}$.

Na prática esse valor pode vir a ser maior, em decorrência da necessidade do uso de computadores para a árdua tarefa de reiterações do processo e este dispositivo eletrônico, de modo diferente da matemática, conta apenas com a continuidade física.

Para o uso automatizado de computadores o Método da Bissecção, relativo a uma função genérica f(x), pode ser assim textualizado:

```
Início
        função f(x) = função
        Ler os extremos a e b do intervalo
        Ler o número máximo de iterações (Maxit) e
        Ler a tolerância (Tol):
        Se f(a) * f(b) < 0 então
                It=0
                x = ( a + b ) / 2
                Enquanto |a-b|> Tol ou f(x)> Tol e Iter<Maxit faça
                        x = ( a + b ) / 2
                        Se f(x)*f(a) < 0 então b = x
                                senão a = x
                        It= it+1
                Fim (Enquanto);
                Se Iter > Maxit então
                        Escrever “Não atingiu a precisão”
                                Senão
                        Escrever “Zero da função = ”; x
                Fim (Se)
                        Senão
                Escrever “Não existe zero no intervalo considerado”
        Fim (Se)
Fim
```

A exposição dessa representação ostensiva textual do algoritmo da bissecção não é mera alegoria, mas para indicar, que, dependendo do olhar de quem vê um problema, o texto assume formas distintas. Essa prática é corriqueira no habitat de ensino do Cálculo Numérico, e embora ele não mais exista no ecossistema de engenharia da UFPA, se faz presente em práticas com matemática.

Consideremos agora a tarefa anunciada por Chapra e Canale (2008) de determinar a altura e a velocidade de escoamento de líquidos em um canal, que teria largura B = 20m, vazão Q = 5m^3/s, n = 0,03 e S = 0,0002. Para calcular a altura do canal, neste caso, teremos que determinar o zero da função:

$$f(H) = 0{,}471405\,\frac{(20H)^{\frac{5}{3}}}{(20+2H)^{\frac{2}{3}}} - 5$$

Como não dispomos de técnicas algébricas para a determinação do zero desta função, recorremos a uma técnica numérica, optamos pelo Método da Bissecção, já descrito aqui, que se justifica, matematicamente, pois quando H = 0 temos que f(0) = -5 e quando H = 1, f(1) = 3,84767, portanto, como f(0).f(1)<0. Como visto anteriormente, uma das consequências da continuidade de uma função f(x),é que, se f(a)*f(b)<0 então há um zero dessa função no intervalo [a , b], isso é uma condição primeira do método da Bissecção, portanto, há um zero da função f(H) no intervalo [0 ; 1].

Por essa técnica, a primeira estimativa do zero será H_1 = (0+1)/2 = 0,5. Como o valor de f(0) = -5, de f(0,5) = -2,12537 e de f(1) = 3,84767, o zero estará no intervalo [0,5 ; 1] (onde as imagens da função têm sinais contrários, portanto o produto será negativo) e a sua nova estimativa será H_2 = (0,5+1)/2 = 0,75, que avaliado na função resultará em 0,56229, indicando que o zero agora se localizará no intervalo [0,5 ; 0,75].

Continuaríamos com o procedimento até atingir um dos critérios de parada. Considerando, por exemplo, a tolerância limite Tol = 0,001 como critério de parada, a aplicação do método com o uso de um computador pessoal, a tabela 03 nos fornecerá os seguintes dados:

TABELA 03 - Método da Bissecção

			Tol Limite = 0,001		Max Iterações = 100		
Iter	a	b	H	f(a)	f(b)	f(H)	ε_k =|b-a|
0	0	1	0,5	-5	3,84767	-2,12537	1
1	0,5	1	0,75	-2,1254	3,84767	0,56229	0,5
2	0,5	0,75	0,625	-2,1254	0,56229	-0,86313	0,25
3	0,625	0,75	0,6875	-0,8631	0,56229	-0,16984	0,125
4	0,6875	0,75	0,71875	-0,1698	0,56229	0,19148	0,0625
5	0,6875	0,71875	0,70313	-0,1698	0,19148	0,00962	0,03125
6	0,6875	0,70313	0,69531	-0,1698	0,00962	-0,08041	0,01563
7	0,69531	0,70313	0,69922	-0,0804	0,00962	-0,03547	0,00781
8	0,69922	0,70313	0,70117	-0,0355	0,00962	-0,01295	0,00391
9	0,70117	0,70313	0,70215	-0,013	0,00962	-0,00167	0,00195
10	0,70215	0,70313	0,70264	-0,0017	0,00962	0,00397	0,00098

Fonte: Produção do autor

Na construção desta tabela através de uma planilha eletrônica, estabelecemos de forma lógica os cálculos dos valores de a, b e critérios de parada (menor do que o limite de tolerância), enquanto H foi calculado como a média aritmética entre a e b, e os valores de f(a), f(b) e f(H) foram estimados segundo o modelo da função f(H).

Por observação, esta sequência nos indica que a amplitude se reduz cada vez mais, e, a partir da décima iteração (como estimado teoricamente), torna-se indistinguível de zero. Nesse caso, o argumento de validação se dá na forma textual com sustentação do ostensivo “tabela numérica”, que assim como no ostensivo “gráfico”, tem sua análise por “mostração” sustentada no “cálculo do limite” que valida a técnica.

O limite é avaliado a cada reiteração do processo, gerando a sequência decrescente convergente de valores numéricos para a amplitude [a ; b].

$\varepsilon_k = |b - a| = 1$; 0,5; 0,25; 0,125; 0,0625;...;0,00391; 0,00195; 0,00098.

A partir do décimo valor de k, a amplitude do intervalo, onde situa-se o zero da função em análise, torna-se cada vez mais próxima de zero. Isto indica que para o computador o limite indicado é atingido, verificando a desigualdade de tolerância:

$$\varepsilon_{k+1} = |b_{k+1} - a_{k+1}| < \text{Tol}$$

De modo similar podemos concluir a respeito do $\lim_{k\to\infty}|f(H_k)|$, quando observamos a sequência gerada para f(H), podendo ser outro critério de parada:

$$|f(H_k)| < \text{Tol}$$

Da planilha destacamos que a altura do canal será de aproximadamente H = 0,70 metros, tendo em conta o critério de parada estabelecido para |a-b| = 0,00098 que, para tolerância limite por nós estabelecida, os toma indistinguíveis de zero. Consequentemente, a velocidade U = Q/BH seria U = 5/20(0,70) = 0,36 m/s aproximadamente.

Para outras estimativas do limite de tolerância é possível estabelecer valores de H “mais precisos”. Em outras palavras, a fixação do valor de H por meio de empiria poderia mostrá-lo, ou não, mais adequado para as práticas de engenharia em jogo.

Nesta prática, o argumento é sustentado por meio da tarefa de cálculo do limite da função, cujo modelo algébrico foi obtido por métodos empíricos, e o cálculo do zero não era possível por técnicas usuais. Foi utilizada uma técnica numérica, Método da Bissecção, cuja constituição toma por base a topologia de limites (BOSCH, CHEVALLARD e GASCÓN, 2006, p. 6), mais precisamente o teorema de Bolzano-Cauchy, na identificação dos intervalos onde o zero da função se situa. A tarefa do cálculo do limite a cada iteração, até a sucessão tornar-se estacionária

Por observação, esta sequência nos indica que a amplitude se reduz cada vez mais, e, a partir da décima iteração, torna-se indistinguível de zero. Nesse caso, o argumento de validação se dá na forma textual com sustentação do ostensivo "tabela numérica", que assim como no ostensivo "gráfico", tem sua análise por "mostração" sustentada no "cálculo do limite" que valida a técnica. A validação da solução encontrada não implica diretamente no processo, ela é, principalmente, qualitativa (adequada ou inadequada) para a prática da engenharia, segundo as condições normativas dessa prática social.

6.1.5 *Nichos* de limite em outros *habitat* específicos do ensino de Engenharia Civil

Possibilidades de outros nichos, em outros habitat específicos do ensino de Engenharia Civil, foram por nós detectados, e podem ser objetos de análises com base no modelo que propusemos, dentre esses destacamos:

a) No <u>Cálculo Estrutural,</u> a norma NBR 6118 (p. 115) estabelece um índice denominado de Valor Característico de Fissura (W_k) que se apresenta como limite obtido como menor valor numérico calculado entre duas expressões algébricas:

$$w_k = \frac{\phi_i}{12{,}5\eta_1} \frac{\sigma_{si}}{E_{si}} \frac{3\sigma_{si}}{f_{ctm}}$$

$$w_k = \frac{\phi_i}{12{,}5\eta_1} \frac{\sigma_{si}}{E_{si}} \left(\frac{4}{\rho_{ri}} + 45 \right)$$

onde: σ_{si}, φ_i, E_{si}, e ρ_{ri} são definidos para cada área de envolvimento em exame, sendo:

E_{si} o módulo de elasticidade do aço da barra considerada;
φ_i o diâmetro da barra que protege a região de envolvimento considerada;

ρ_{ri} a taxa de armadura passiva ou ativa aderente; σ_{si} a tensão de tração no centro de gravidade da armadura considerada.

Neste caso, a abertura máxima de fissuras deve ser limitada a um valor limite obtido entre duas expressões algébricas, em função dos fatores anteriormente discriminados.

b) Em Construção Civil, o cálculo de Treliças Metálicas a serem usadas em coberturas de telhados, a resistência de cálculo (momento fletor resistente de cálculo), $\boldsymbol{M_{rd}}$, a ser adotada será o menor valor entre os calculados de acordo com as expressões algébricas[70]:

$$M_{rd1} = \frac{W_{ef} f_y}{1{,}1}$$

e

$$M_{rd2} = \frac{X_{fLt} W_c f_y}{1{,}1}$$

Onde:

M_{rd1} - Momento resistente calculado a flexão no início do escoamento da seção efetiva;
$\boldsymbol{M_{rd2}}$ -Momento resistente calculado no estado limite de flambagem lateral por torção;
W_{ef} - Módulo de resistência elástica da seção efetiva em relação à fibra extrema que atinge o escoamento;
f_y - Tensão de resistência ao escoamento do aço, para o aço ASTM-A36 temos $f_y = 2500\ Kg/\ cm^2$;
$\boldsymbol{f_{Lt}}$ - Fator de redução do momento fletor resistente, associado à flambagem lateral por torção;
W_c - Módulo de resistência elástica da seção bruta em relação à fibra extrema comprimida.

Os limites, nesse caso, se apresentam em tarefas algébricas e seus cálculos servem para estabelecer situações limítrofes.

c) Em Construção de Estradas e Vias Urbanas, ao se estudar as classificações das partículas do solo em função de suas granulometrias, que se estabelecem pelas dimensões dos diâmetros dos seus componentes, temos o disposto o que se apresenta no quadro 12:

QUADRO 12 – Granulometria de materiais dos solos

MATERIAL	Diâmetro compreendido entre
Pedregulho	2,0 mm < φ < 76,0 mm

[70] Informações obtidas em http://wwwo.metalica.com.br/calculo-de-tercas-metalicas-de-cobertura-para-telhados. Acesso em fevereiro de 23 de fevereiro de 2015

Areia	0,075 mm < φ < 2,00 mm
Areia grossa	0,42 mm < φ < 2,00 mm
Areia fina	0,075 mm < φ < 0,42 mm
Silte	0,005 mm < φ < 0,075 mm
Argila	φ < 0,005 mm

Fonte: Solos – Conceitos e Ensaios da Mecânica dos Solos Classificação dos Solos para Fins Rodoviários[71]

Os diâmetros dos materiais constitutivos dos solos componentes são obtidos em ensaios com peneiras, e essa tabela apresenta funcionalidade numérica de limite, que evidencia-se pelas cotas máximas e mínimas de granulometria estabelecidas.

Encontramos ainda nos *habitat* de: <u>Resistências dos Materiais</u>, <u>Estruturas de Aço</u>, <u>Estrutura de Madeiras</u>, <u>Concreto Armado e Protendido</u>, e <u>Construção Civil</u>, situações que podem ser pesquisadas em relação às funcionalidades de limite de uma função, quando se apresenta por meio de medições feitas em equipamentos específicos, como por exemplo nas máquinas utilizadas em ensaios de tensão e deformação.

Em alguns *habitat* de um ecossistema de ensino de engenharia, a obtenção de limites se dá a partir de Controle Estatístico de Processos (CEP), que se estabelece através de parâmetros resultantes de experimentos, cujo tratamento estatísticos dos dados fornecem estimativas para a detecção de defeitos e/ou problemas em processos avaliados. Via de regra, os limites obtidos nessas situações empíricas, pertencem aos nichos tecnológicos com tarefas empíricas, movimentando ostensivos numéricos em suas praxeologias.

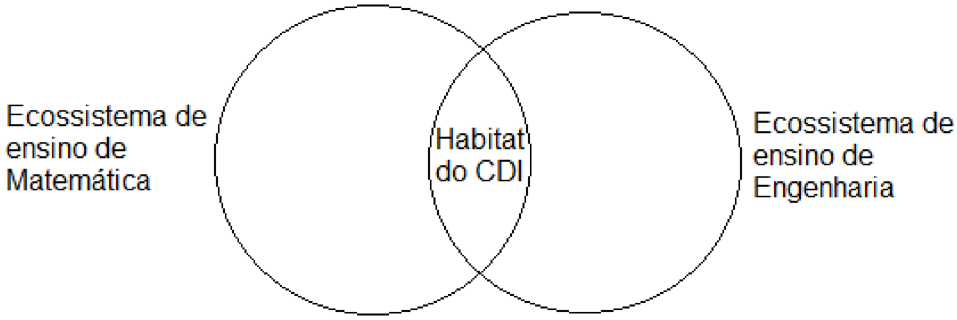
Concluída esta seção, os ecossistemas e habitat já encontram-se delineados, faltando ainda estabelecermos os nichos e as formas como os mesmos se apresentam, o que será abordado a seguir.

[71] Nota de aula da Profa. Jisela Aparecida Santanna Greco, sobre Solos – Conceitos e Ensaios da Mecânica dos Solos Classificação dos Solos para Fins Rodoviários

6.2 *Nichos* de limite no *habitat* do Cálculo Diferencial e Integral

O Cálculo Diferencial e Integral pertence a *habitat* de dois ecossistemas de ensino distintos, o de Matemática como instituição produtora desse saber e ao de uma outra instituição utilizadora desse, no nosso caso o de Engenharia Civil. O diagrama abaixo apresenta esta situação:

FIGURA 22 – *Habitat* do Cálculo Diferencial e Integral



Fonte: Produzido pelo autor

Em ecologia a região de interseção de dois ecossistemas tem um nome próprio: Ecótono. Região fronteiriça, que comumente se impõe como zona de conflito, em razão de nela conviverem, de forma nem sempre harmoniosa, entes biológicos de diferentes modos de vida, podendo, dentre outras consequências, ocasionar o surgimento de novos *habitat* e de novos *nichos*.

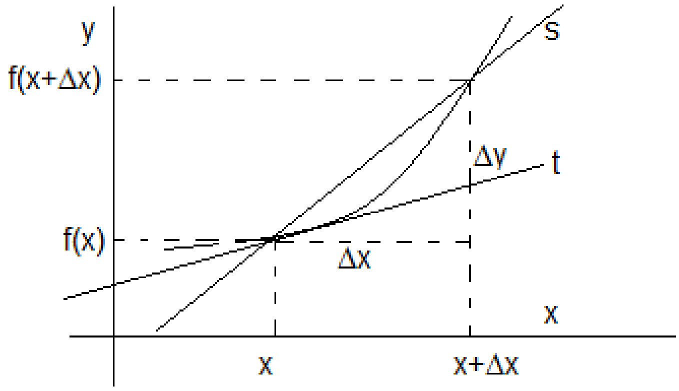
O *habitat* do CDI será por nós agora abordado em relação a seus *nichos*, teórico e tecnológicos, com as formas que se apresentam ostensivamente.

6.2.1 *Nichos* teóricos de limite no *habitat* do CDI

Uma das razões alegadas para a legitimação do ensino de limite de uma função no Cálculo Diferencial e Integral é que os demais constituintes desse setor da área da análise Matemática, fundamentam-se por meio de definições, conceitos, noções, que têm em limite o discurso que os justificam. Relembramos apenas que, embora essa razão seja “quase consensual”, dos principais temas do Cálculo (limite, derivada e integral), o primeiro desses foi o último a se constituir como um saber sábio.

A derivada de uma função y = f(x) se dá por meio da noção de limite, e comumente livros e professores “mostram” essa situação a partir de que uma reta secante, que passa por dois pontos (x, f(x)) e (x+Δx, f(x+Δx)), aproxima-se de uma reta tangente, como na figura 23:

FIGURA 23 – Gráfico das retas tangente e secante a uma curva



Fonte: Produzida pelo autor

A derivada da função y = f(x) será o limite da razão incremental $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ quando Δx tender a zero, sendo representada por:

$$f'(x) = Lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

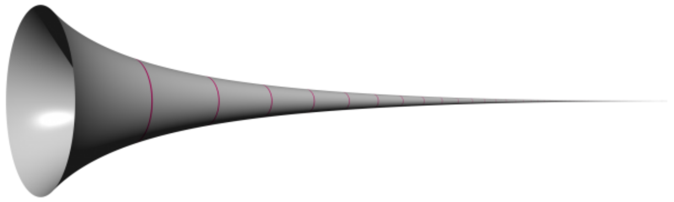
Da mesma forma, a integral definida de uma função f(x), ou integral de Riemann, contínua no intervalo [a;b], é definida como sendo:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{|\Delta x_k| \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k$$

Para validar essa última definição, comumente o professor utiliza o discurso verbal de que essa integral "equivale" à área compreendida entre a o gráfico da função f(x) no intervalo [a;b] e o eixo das abcissas, em seguida, usa o ostensivo gráfico, esboçando um gráfico de uma fictícia função, a divide em k pequenos retângulos, em que $f(x_k)$ e Δx_k representam, respectivamente a altura e o comprimento do retângulo k, e diz que "quando Δx_k tender a zero, a região estará toda coberta". Δy

Uma outra situação que tem limite como *nicho* teórico, apresenta-se no cálculo do volume da Trombeta de Gabriel ou Trombeta de Torricelli, que é obtida graficamente pela rotação da função definida por $f(x) = \frac{1}{x}$ com x ∈ [1, ∞), em torno do eixo das abcissas, com área superficial infinita, mas cujo volume é finito. Ela começa larga e vai afinando rapidamente, mas nunca fecha – ou seja, segue até o infinito, cujo esboço encontra-se na figura a seguir:

FIGURA 24 – Trombeta de Gabriel ou Trombeta de Torricelli



Fonte: Disponível emhttps://www.google.com.br/search?q=Trombeta+de+Gabriel&espv=2&biw=1366&bih=643&source=lnms&tbm=isch&sa=X&ei=ZB2dVYKfH8G6ggT0o5qQCg&ved=0CAYQ_AUoAQ#imgrc=HGIxSociEcG6yM%3A

O volume, finito dessa trombeta infinita, é calculado pela mesma fórmula que calcula o dos demais sólidos de revolução, que tem a integral como técnica:

$$V = \pi \int_1^{\infty} (f(x))^2 dx$$

Esta integral, no entanto, é dita imprópria e no seu cálculo, limite é o discurso teórico que sustenta a técnica do seu cálculo, pela seguinte definição:

Definição: Sendo f uma função integrável em [a ; b], para todo a<b tem-se que

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)dx$$

Se este limite existe e é um número real, dizemos que a integral imprópria converge. No caso de não existir tal limite, ou não ser finito, dizemos que a integral imprópria diverge.

Esta definição, que tem no objeto limite o discurso que sustenta a técnica de resolução da integral imprópria, é utilizada no cálculo do volume da Trombeta de Gabriel ou Trombeta de Torricelli, quando teremos:

$V = \pi \int_1^{\infty} (\frac{1}{x})^2 dx = \pi \lim_{a\to\infty} \int_1^a (\frac{1}{x})^2 dx = \pi \lim\limits_{a\to\infty} (\frac{-1}{x})_1^a = \pi \lim\limits_{a\to\infty} \left(\frac{-1}{a} + \frac{1}{1}\right) = \pi$ unidades de volume.

Limite também vive em praxeologias de determinação se uma série numérica é convergente ou divergente. Dada uma série infinita $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$, e seja { s_n } a sequência das somas parciais que a definem, queremos saber se a mesma converge. A técnica utilizada para tal consiste em saber se $\lim_{n \to +\infty} S_n$ existe, e, nesse caso, se for igual a S, a série será convergente, e S a sua soma, mas se, ao contrário, o $\lim_{n \to +\infty} S_n$ não existir, a série será divergente e não terá soma. Um dos critérios mais comumente utilizados para saber se uma sequência numérica é convergente é o critério de Cauchy, que nos diz:

> Uma sequência (x_n) de números reais é uma sequência de Cauchy quando dado qualquer $\varepsilon > 0$, existe um $n_0 \in$ IN tal que $n > n_0$ e $m > n_0$ implica $|x_m - x_n| < \varepsilon$ (LIMA 2009, p. 34).

Como consequência da definição das sequências de Cauchy, em que limite se faz implícito, demonstramos que a mesma é sempre limitada e que toda e qualquer sequência (x_n) é convergente se, e somente se, for de Cauchy, que se reveste em um importante resultado para análise de convergências.

Limite se faz teórico também em outros testes de convergência de séries, pois é o discurso que os sustenta. Apresentamos esses critérios de convergência, ou divergência, no quadro 13:

QUADRO 13 - Critérios de Convergência e Divergência

TESTE	SÉRIE	CONVERGE SE:	DIVERGE SE:	OBSERVAÇÃO
da Razão	$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$	$\lim_{n \to +\infty} \left\lvert \frac{a_{n+1}}{a_n} \right\rvert < 1$	$\lim_{n \to +\infty} \left\lvert \frac{a_{n+1}}{a_n} \right\rvert > 1$	Se $\lim_{n \to +\infty} \left\lvert \frac{a_{n+1}}{a_n} \right\rvert = 1$ nada se pode afirmar
da Raiz	$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$	$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{\lvert a_n \rvert} < 1$	$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{\lvert a_n \rvert} > 1$	Se $\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{\lvert a_n \rvert} = 1$ nada se pode afirmar
do n-ésimo termo	$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$		$\lim_{n \to +\infty} a_n \neq 0$	Teste utilizado somente para provar divergência
para Séries alternadas	$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} a_n$ n	$0 < a_{n+1} \leq a_n$ e $\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$		

dos Limites da Comparação (a_n , b_n >0)	$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$	$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = C > 0 \ e$ $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n \ converge$	$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = C > 0 \ e$ $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n \ diverge$	

Fonte: Munem e Foulis, Volume 2, (1978)

Tanto na noção de derivada, na definição da integral de Riemann, no cálculo de integrais impróprias, ou nos critérios de convergência de séries numéricas, limite apresenta-se como elemento teórico, definindo outros objetos matemáticos, a partir de si. Temos, portanto, nesses casos nichos teóricos de limite de uma função, que mobilizam ostensivos verbais, algébricos, numéricos e gráficos.

6.2.2 *Nichos* tecnológicos de limite no *habitat* do Cálculo Diferencial e Integral

Nossa prática docente, forjada por anos de ensino de Cálculo Diferencial e Integral (CDI), assim como as pesquisas de Verônica e Otero (2009) e de Santos (2013), nos apontam que a principal funcionalidade de limite em livros textos oficiais desse setor da análise matemática, nos ecossistemas de ensino, é quando o seu cálculo é solicitado. Dessa forma, limite se apresenta no CDI em praxeologias que têm no par Tarefa e Técnica [T, τ], sua razão de ser e de seu modo de viver.

O *nicho* tecnológico se evidencia nas praxeologias em que o cálculo do limite é solicitado, por verbos ou flexões suas, como: calcular (calcule), dar (dê), estimar (estime), demonstrar (demonstre), mostrar (mostre), esboçar (esboce), etc...Comumente nessas situações os ostensivos utilizados são verbais, algébricos, numéricos e gráficos.

A título de exemplificação podemos, para a questão de verificar a continuidade de uma função em um determinado ponto, ter que realizar a tarefa “calcular o limite desta nesse ponto”, uma vez que uma função y = f(x) é contínua em um ponto x = a se, e somente se:

a) f(x) se definir em x = a, ou seja f(a) existir;
b) existir $\lim_{x\to a} f(x)$ e
c) $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Suponhamos que estejamos diante do seguinte questionamento: A função definida por y = f(x) = x + 1 é contínua em x = 1?

Para respondermos a este questionamento temos as seguintes tarefas:

T_1: Verificar se a lei de formação da função f(x) se define em x = 1;

T_2: Determinar o domínio da função f(x);

T_3: Calcular $\lim_{x \to 1}(x+1)$.

T_4: Se os valores de f(1) e $\lim_{x \to 1}(x+1)$, existirem e forem iguais, a função será contínua em x = 1.

Para resolver a tarefa, apresentaremos as técnicas algébrica, numérica e gráfica, além de nos reportarmos a uma possível utilização da teoria como técnica de resolução:

τ_{31} – **Técnica Algébrica**

Constituída pela obtenção do valor numérico de y = x+1 no ponto x =1, ou seja, o cálculo de f(1) = 1+ 1 = 2

τ_{32} – **Técnica Numérica**

O resultado é verificado por uma tabela de valores da variável “próximos” a x = 1 e suas respectivas imagens:

TABELA 04 – Técnica numérica para determinação de limite

x	0,95	0,975	0,99	0,999	1	1,001	1,001	1,025	1,05
y = x+1	1,95	1,975	1,99	1,999	?	2,001	2,001	2,025	2,05

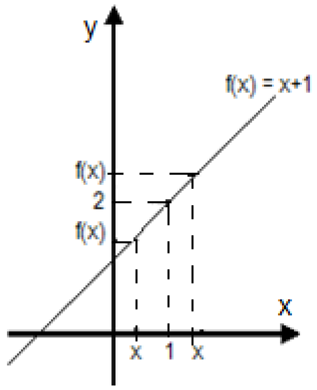
Fonte: Elaborado pelo autor

Na proximidade de x = 1 as imagens aproximam-se de y = 2, que seria o limite solicitado.

τ_{33} – **Técnica Gráfica**

O esboço do gráfico é utilizado para intuir o resultado.

FIGURA 25 – Técnica gráfica para determinação de limite



Fonte: Guidorizzi (1997, p. 69)

Quanto ao *nicho* teórico relativo a essa questão poderia existir a seguinte tarefa: “Demonstre pela definição de limite, que $\lim_{x \to 1}(x+1) = 2$”

Para tal devemos utilizar a tecnologia a partir da definição, dita estática de Cauchy- Weierstrass, a qual nos diz que $\lim_{x \to a} f(x)$ é igual a L, se para cada número positivo ε, existir um número positivo δ tal que $|f(x) – L| < \varepsilon$ sempre que $0<|x-a|<\delta$. (MUNEM-FOULIS,1982, p. 55).

Seja a tarefa “Mostrar que $\lim_{x \to 1}(x+1) = 2$ através da definição formal de limite.

Teríamos neste caso, a = 1 e L = 2 e solicitaríamos que $|x + 1 – 2| < \varepsilon$ sempre que $0< |x – 1|< \delta$.

Portanto $|x – 1| < \varepsilon$ sempre que $0< |x – 1|< \delta$, portanto, se $\varepsilon = \delta$ estarão satisfeitas as duas condições.

Essa tecnologia, utilizada para demonstrar a validade de alguns resultados de limite e continuidade, no entanto, muito raramente, nos permite calcular o valor de limites de uma função em um determinado ponto. Apresentamos a seguir, como seria essa tarefa:

T_4: Calcular $\lim_{x \to 1}(x+1)$ utilizando a definição:

Para calcularmos $\lim_{x \to 1}(x+1)$ teríamos que, para um dado δ, por exemplo igual a 0,001 termos: $0<|x-1|<0{,}001$ que significa que $0{,}999 < x < 1{,}001$.

A imagem da função definida por y = x+1 variaria então entre f(0,999) = 1,999 e f(1,001) = 2,001. Nesse caso poderíamos ter $\varepsilon = (2{,}001-1{,}999)/2 = 0{,}001$, o mesmo valor de δ, e

> $|f(x) - L| = |x+1 - L| < \varepsilon = 0{,}001$ implicaria em $-0{,}001 < x+1 - L < 0{,}001$.

Isolando o valor do limite ao centro, teríamos: $-x - 1 - 0{,}001 < -L < -x - 1 + 0{,}001$ que equivale a $-x - 1{,}001 < -L < -x - 0{,}999$

Para $x = 1$, local em que se quer calcular o limite, teremos $-2{,}001 < -L < -1{,}999$ que corresponde a $1{,}999 < L < 2{,}001$, portanto, $L \cong 2$ seria o limite calculado.

Como dito antes, essa técnica é de pequeníssimo alcance por não se aplicar a uma variedade de funções, razão pela qual não é explorada. A definição formal de limite pertence ao bloco tecnológico, apresenta-se com *nicho* teórico, essa é a razão de não a colocarmos como uma técnica de resolução.

Além dessas considerações caberia nos perguntarmos:

> - Qual a relevância do cálculo de $\lim_{x \to 1}(x+1)$ em um curso de formação de engenheiros?
> - Em quais práticas do curso de graduação de Engenharia Civil o cálculo de $\lim_{x \to 1}(x+1)$ vive?
> - O egresso do curso de Engenharia Civil, em suas praxeologias laborais, utiliza esse limite?

A seguir, apresentamos outros componentes importante às análises feitas a partir do modelo por nós proposto, iniciaremos pelos nichos por nós identificados nos livros de Cálculo Diferencial e Integral e concluiremos com as falas dos professores entrevistados nesta pesquisa.

6.2.3 *Nichos* de limite em obras de Cálculo Diferencial e Integral

A análise que faremos para identificação de nichos e suas formas de representação de limite de uma função, em organizações matemáticas que se apresentam em obras do Cálculo Diferencial e Integral, se deu em razões de que essas instituições:

> a) Interligam os três entes do sistema didático (saber, professor e aluno);
> b) Comumente balizam a prática docente; e
> c) Também serviram de instrumentos de análise a outros pesquisadores.

Tendo o tema Limite como objeto matemático de estudo, sem o referencial teórico da TAD, análises de livros didáticos constaram das pesquisas de Barufi (1999) - 32 (trinta e duas) obras, Reis (2001) - 12 (doze) obras e Zuchi (2005) - 9 (nove) obras. Com o aporte teórico da TAD, Santos (2013), analisou as praxeologias didáticas do objeto Limite em 4 (quatro) obras.

A análise praxeológica relaciona-se intimamente à abordagem ecológica, na medida em que busca conhecer o modo de vida de um objeto matemático nas atividades que motivaram a sua produção, seu “nascer” e justificam o seu ensino, sua aprendizagem e utilização, sua “vida”. Para a TAD, as praxeologias didáticas servem para modelar práticas, e não se reduzem às atividades matemáticas, podendo ser estendidas a quaisquer tipos de atividades humanas, como objeto de estudo de uma situação problemática, ou até mesmo serem utilizadas para a construção de novas praxeologias.

Procuramos identificar estruturas praxeológicas [t, τ, θ, Θ], e as ocasiões em que os processos didáticos se evidenciam, que a TAD estabelece segundo uma estrutura caracterizada por seis momentos, sendo que cada um deles tem "uma função específica a cumprir o que é essencial para a conclusão bem sucedida do processo didático"[72] (BARBÉ et al, 2005, p. 238). Esses momentos são os seguintes:

> 1º) Primeiro momento ou primeiro encontro – o aluno tem o contato inicial com o objeto a estudar;
>
> 2º) Momento exploratório – quando os mesmos tipos de tarefas são exercitadas, necessitando de pelo menos uma técnica para tal;
>
> 3º) Momento do Trabalho da técnica – nesse momento, o trabalho da técnica se dá com a intenção de se verificar a sua extensão, pertinência e consistência. A partir desse momento, a técnica pode ser aperfeiçoada e ampliada novas técnicas podendo fazer surgir novas técnicas. Esse também é o momento que sugere a necessidade de um discurso tecnológico que justifique, porque essa técnica pode ser usada com eficiência para resolver um determinado tipo de tarefa;
>
> 4º) Momento Tecnológico-teórico: quando se desenvolvem os discursos tecnológico-teórico que respaldam a utilização das técnicas envolvidas;
>
> 5º) Momento da Institucionalização – quando a organização praxeológica de fato se estabelece e os blocos práticos-técnicos e tecnológico-teórico interagem de forma lógica e coesa;

---

[72] a specific function to fulfill which is essential for the successful completion of the didactic process

> 6º) Momento da Avaliação – quando se avalia o entendimento da organização praxeológica, através da verificação em questão. Nesse momento, o uso da técnica é colocado à prova, necessitando do conhecimento do bloco tecnológico-teórico envolvido pela técnica.

Para verificarmos os modos de vida de limite nas obras de CDI de funções de uma variável, seu habitat natural, mas que pertencente a ecossistemas distintos, vamos agora à cata das praxeologias didáticas desse objeto matemático. Analisamos as obras de Munem-Foulis (1982), Guidorizzi (1997), e Hughes-Hallett, Gleason, McCallum, et al (2012), esta última conhecida como “o livro de Harvard”. A escolha dessas obras se deu em razão de serem consideradas como referências bibliográficas básicas para cursos de CDI, no ecótono em que esse saber é tido como a ensinar, tanto na instituição matemática como produtora, quanto na utilizadora que é a do ensino de engenharia, além de também constarem das análises feitas por outros pesquisadores como já destacamos anteriormente.

Em seguida, exibiremos os nichos de limite por nós identificados nas praxelogias das obras analisadas segundo o modelo que propusemos além de seus momentos didáticos. Não destacaremos *nichos* tecnológicos, pois, como já frisado, ocorrem na maioria dos casos, só exibiremos a classificação do *nicho* se o mesmo for teórico.

6.2.3.1 *Nichos* de limite na obra de Munem-Foulis

A obra pesquisada é de autoria de **Mustafa A. Munem** (*Macomb County Community College*) e **David J. Foulis** (*University of Massachustts*), sendo a primeira edição americana editada em 1978, com o título *Calculus with Analytic Geometry*, traduzido para o português em 1982 por uma equipe de professores do Instituto Militar de Engenharia, com o nome CÁLCULO nos volumes 1 e 2. Tomaremos como base o volume 1, da versão brasileira de 1982, que trata do objeto matemático por nós pesquisado.

Nessa obra, o primeiro encontro com o tema Limite se dá na apresentação do capítulo 1, “LIMITES E CONTINUIDADES DE FUNÇÕES”, quando os autores declaram que “Neste capítulo, apresentamos a ideia de Limite e a usamos para estudar continuidade" (MUNEM-FOULIS,1982, p. 51). O início do desenvolvimento do tema se dá a partir da seguinte situação motivacional:

> Imagine uma placa metálica quadrada que se expande uniformemente porque está sendo aquecida. Se x é o comprimento do lado, a área da placa é dada por A = x^2. Evidentemente, quanto mais x se avizinha de 3, a área tende a 9. Expressamos isso dizendo que quando x se aproxima de 3, x^2 se aproxima de 9 como um Limite. (MUNEM-FOULIS,1982, p. 51)

Em seguida os autores, a título de exemplo, apresentam a tarefa T_1: Se f(x) = x^2, mostre graficamente que $\lim_{x\to 2} x^2 = 9$ (MUNEM-FOULIS,1982, p. 51).

O *nicho* se apresentou em uma tarefa algébrica e, na sua resolução, os autores solicitaram que se empregue uma técnica que faça uso do ostensivo gráfico, que depois exibem e tecem comentários, chamando à atenção quanto à notação de limite. EM seguida, sugerem uma segunda tarefa:

Tarefa T_2: Determine $\lim_{x\to 4}(5x+7)$ (MUNEM-FOULIS,1982, p. 51)

Apresentado como solução "Quando x tende a 4, 5x tende a 20, e 5x+7 tende a 27. Logo $\lim_{x\to 4}(5x+7) = 27$". A técnica utilizada, a qual denominamos de τ_{21}, foi algébrica, por sugerir o cálculo do valor numérico da função no ponto x = 4.

Em seguida Munem-Foulis (1982) dizem que nem sempre a situação é assim tão elementar, e que "a função pode ser tão complicada que o limite, mesmo que exista, não é evidente por simples inspeção" (MUNEM-FOULIS, 1982, p. 52) exemplificando com a função $y = f(x) = \dfrac{3x^2 - 4x - 4}{x - 2}$, cujo comportamento "não é tão claro quando x tende a 2", mas que "podemos <u>intuitivamente</u> ter a ideia do comportamento, calculando alguns valores de f(x) quando x chega bem perto de 2." (MUNEM-FOULIS, 1982, p. 52) (grifo nosso). A afirmativa quanto à clareza do limite, diz respeito ao fato de que essa função não se define para x igual a 2, e a substituição de x por esse valor resulta em uma indeterminação. O comentário complementar refere-se à ideia de que os valores calculados e representados com o uso do ostensivo gráfico devem sugerir o limite solicitado.

Para resolver T_3: Calcular $\lim_{x\to 2}\dfrac{3x^2-4x-4}{x-2}$ a técnica apresentada pelos autores, que identificamos por τ_{31}, foi numérica por consistir na produção e apresentação ostensiva da seguinte tabela de valores:

TABELA 05 – Técnica numérica para cálculo de limite em Munem-Foulis

X	1	1,25	1,50	1,75	1,90	1,99	1,999
$f(x)=\frac{3x^2-4x-4}{x-2}$	5	5,75	6,50	7,25	7,70	7,97	7,997

e

X	3	2,75	2,50	2,25	2,10	2,01	2,001
$f(x)=\frac{3x^2-4x-4}{x-2}$	11	10,25	9,50	8,75	8,30	8,03	8,003

Fonte: Munem-Foulis (1982, p. 52).

Na tabela 05, os valores tabulados de f(x), tanto pela esquerda (valores inferiores), quanto pela direita (valores superiores) de x = 2, sugestionam que $\lim_{x\to 2}\dfrac{3x^2-4x-4}{x-2}\cong 8$.

Após a técnica com ostensivo numérico, os autores apresentam a técnica por nós identificada como $\tau_{32,}$ em que utilizam ostensivos algébricos, por consistir na manipulação de expressões algébricas, com a finalidade de suprimir a indeterminação que surge ao se determinar o valor numérico da função no ponto em que x é igual a 2. Essa técnica encontra- se a seguir:

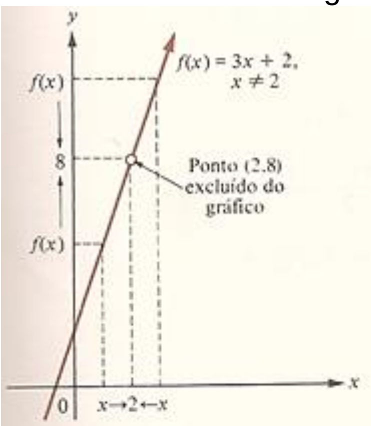
Técnica $\tau_{3,2}$: $\lim_{x\to 2}\dfrac{3x^2-4x-4}{x-2}=\lim_{x\to 2}\dfrac{(3x+2)(x-2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(3x+2)=8$ (MUNEM-FOULIS, 1982, p. 53)

Como forma de “mostrar” visualmente os resultados obtidos pelas técnicas com ostensivos numéricos ($\tau_{3,1)}$ e algébricos ($\tau_{3,2}$), os autores utilizam-se do ostensivo gráfico da função $y=f(x)=\dfrac{3x^2-4x-4}{x-2}$, para a determinação “intuitiva” do limite solicitado na Tarefa T_3.

Tarefa T_3 com técnica $\tau_{3,3}$: Cálculo de Limite a partir do gráfico da função $y = f(x) = \frac{3x^2 - 4x - 4}{x - 2}$ (MUNEM-FOULIS, 1982, p. 53)

Os autores apresentam o ostensivo gráfico a seguir.

FIGURA 26 – Técnica gráfica em Munem-Foulis



Fonte: Munem-Foulis (1982, p. 53)

Observamos que, para uma mesma tarefa T_3, os autores, com a ideia que chamam de intuitiva de limite, apresentaram as técnicas por nós identificadas como: numérica ($\tau_{3,1}$), algébrica ($\tau_{3,2}$) e gráfica ($\tau_{3,3}$). Ato contínuo, a título de "exemplos" no momento de <u>explorar a técnica</u> para o tipo de tarefa, apresentam:

- Determine $\lim_{x\to 2} f(x)$ e trace um gráfico da função para ilustrar o limite envolvido em:

1) f(x) = x+2 2) $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ 3) $f(x) = \begin{cases} x + 2 \; se \; x \neq 2 \\ 6 \; se \; x = 2 \end{cases}$

As tarefas são algébricas e na resolução das duas primeiras, os autores utilizaram as técnicas com ostensivos algébrico e gráfico, enquanto na terceira fizeram uso somente do ostensivo gráfico. Na resolução da terceira tarefa, os autores promoveram o primeiro encontro com continuidade de funções ao declararem que "Em geral, se $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$, dizemos que a função é contínua em a", nos indicando uma possível mudança de *nicho*.

Antecedendo a apresentação formal de limite (L), os autores dizem que "os matemáticos costumam utilizar as letras gregas ε e δ (chamadas épsilon e delta respectivamente) para denotar números reais que indicam o quanto perto de f(x) L está e o quanto x está perto de a", para posteriormente apresentar a:

> Definição 1: Seja f uma função definida em m intervalo aberto qualquer que contenha a, excluindo o valor a. A afirmação $\lim_{x\to a} f(x) = L$ significa que para cada número positivo ε, há um número positivo δ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ sempre que $0<|x-a|<\delta$. (MUNEM-FOULIS,1982, p. 55)

Definição essa conhecida como formulação estática de Cauchy-Weierstrass, e também identificada como dos “épsilons e deltas”, denota a presença do *nicho* teórico. Imediatamente após a apresentação da definição, os autores sugerem a seguinte tarefa:

Tarefa T_4: Dado ε = 0,03, determine um δ positivo tal que |(3x+7 – 1| < ε sempre que 0<|x-(-2)|< δ (MUNEM-FOULIS, 1982, p. 55)

A solução é obtida por meio de manipulações algébricas envolvendo desigualdades, e os autores concluem que “|x+2|<0,01 é válido sempre que |0<|x+2|<δ. Obviamente δ = 0,01 serve, bem como qualquer outro valor positivo menor” (MUNEM-FOULIS,1982, p. 56)

A tarefa T_4, que estabeleceu um valor épsilon e solicitou um valor para delta, é um caso similar à próxima que solicita: “Use a Definição 1 para provar que $\lim_{x\to -2}(3x+7) = 1$ ”. No conjunto de tarefas apresentadas em seguida como trabalho da técnica, os autores solicitam que sejam verificados os resultados em seis oportunidades com um mesmo tipo de tarefas envolvendo limite, em que pedem o uso da sua definição formal.

Como componente praxeológico previsto pela TAD, essa definição não se enquadra como uma técnica propriamente dita, no sentido de calcular o limite, uma vez que não resolve esse tipo de tarefa, mas identifica-se como uma tecnologia, que justifica os resultados obtidos na determinação do limite, portanto, caracteriza um *nicho* teórico.

A definição formal de limite em Munem-Foulis (1982) é utilizada para a formalização de dez “Propriedades básicas de Limites”, seguidas de dez tarefas, como trabalho da técnica, para achar o limite e indicar quais propriedades foram utilizadas.

Continuidade – limites laterais são em seguida apresentados no livro de Munem-Foulis, iniciando com a seguinte definição:

> Dizemos que a função f é contínua em número *a* se, e somente se, as seguintes condições são válidas
>
> i) f(a) é definido;
>
> ii) $\lim_{x \to a} f(x)$ existe, e
>
> iii) $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Em seguida, apresenta o tipo de tarefas que solicita verificar se determinadas funções são contínuas ou não, em um ponto ou em qualquer ponto, onde, conforme a definição de Continuidade, há necessidade de conhecer o limite da função no(s) ponto(s) onde se deseja(m) verificar a continuidade.

Nesse caso, o conhecimento dos limites laterais se faz necessário como condição necessária e suficiente à existência do limite, ou seja:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \iff \lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

De um modo geral, as praxeologias em Munem-Foulis (1982) aglutinaram-se em dois *nichos* bem evidentes. O primeiro diz respeito ao nicho tecnológico e apresenta-se através de tarefas algébricas, explorando técnicas que utilizam predominantemente ostensivos algébricos, por vezes gráficos, e raramente numéricos (somente se evidenciou na resolução da tarefa T_3), O segundo *nicho* que se atém às formalidades matemáticas é o teórico, onde encontram-se as definições de limite e continuidade e as demonstrações das propriedades operatórias. O *nicho* teórico dessa obra se utilizou de ostensivos algébricos, como forma de exibir o que desejam formalizar.

6.2.3.2 *Nichos* de limite na obra de Guidorizzi

Hamilton Luiz Guidorizzi é um brasileiro, autor da obra, “Um curso de Cálculo”, em 4 (quatro volumes), sendo a primeira edição de 1985. Esse autor possui Mestrado em Matemática, Doutorado em Matemática Aplicada pela USP, e tem como interesse a área de Equações Diferenciais.

No prefácio do volume 1 de sua obra é exposto que se baseia nos cursos de Cálculo que ministrara aos alunos do ciclo básico de engenharia da Escola Politécnica da USP (desde 1973) e do IEEP – Instituto de Ensino de Engenharia Paulista (de 1977 a 1984)

O volume I de Guidorizzi (1997) por nós considerado, apresenta-se em 15 capítulos, e o primeiro encontro com o objeto de nossa pesquisa se dá no capítulo 3, “LIMITE E CONTINUIDADE”, da seguinte forma:

> Neste capítulo, vamos introduzir dois conceitos delicados do cálculo: os conceitos de continuidade e de limite. Intuitivamente, uma *função contínua em um ponto p de seu domínio* é uma função que não apresenta ‘salto’ em p. (GUIDORIZZI,1997, p. 68)

Após afirmar que na “próxima seção, tornaremos rigoroso o conceito de continuidade aqui introduzido de forma intuitiva”, o autor apresenta as tarefas, em que pede que sejam verificadas, intuitivamente, se são contínuas as funções:

f(x) = x e g(x) = $\begin{cases} 1 \ se \ x \leq 1 \\ 2 \ se \ x > 1 \end{cases}$, “mostrando”, graficamente, que f(x) é contínua e g(x) não.

Nessas tarefas algébricas, o autor apresentou como técnica ostensivos gráficos. A segunda tarefa que Guidorizzi apresenta é a seguinte:

Tarefa T_5: Utilizando a ideia intuitiva de limite, calcule $\lim_{x \to 1}(x+1)$ (GUIDORIZZI, 1997, p. 69)

Para resolver esta tarefa, Guidorizzi (1997) sugere como “ideia intuitiva de limite”, simultaneamente, as técnicas que identificamos como numérica e a gráfica que apresentamos a seguir.

Técnica numérica $\tau_{5,1}$ Tabulação dos valores da função $y = f(x) = x + 1$ (GUIDORIZZI, 1997, p. 69)

O autor apresenta a solução da tarefa, inicialmente utilizando a técnica numérica:

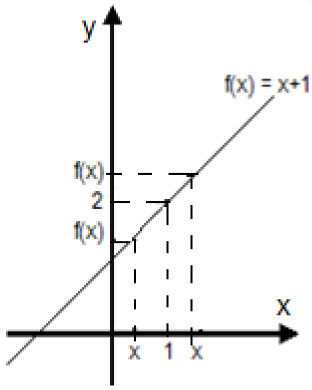
TABELA 06 – Técnica numérica em Guidorizzi

X	x+1	X	x+1
2	3	0,5	1,5
1,5	2,5	0,9	1,9
1,1	2,1	0,99	1,99
1,01	2,01	0,999	1,999
1,001	2,001	↓	↓
↓	↓	1	2
1	2		

Fonte: Guidorizzi (1997, p. 69)

E depois apresenta a técnica $\tau_{5,2}$ esboço de gráfico de $y = f(x) = x + 1$, como o da figura 27.

FIGURA 27 – Técnica gráfica em Guidorizzi



Fonte: Guidorizzi (1997, p. 69)

Com base nas visualizações solicitadas, o autor conclui que $\lim_{x \to 1}(x+1) = 2$.

Guidorizzi (1997) solicita a resolução do seguinte tipo de tarefa “calcular limite”, a título de “ideia intuitiva de limite”, como pode ser visto na tarefa a seguir:

Tarefa T_6: Utilizando a ideia intuitiva de limite, calcule $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ (GUIDORIZZI, 1997, p. 70)

O autor apresenta a solução com a seguinte técnica:

Técnica τ_{61} - Seja f(x) = $\frac{x^2-1}{x-1}, x \neq 1$; f(x) não está definida em x = 1.

Para x≠1 $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1} = x+1$ $\quad \lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x \to 1}(x+1) = 2$

A técnica apresentou ostensivo algébrico, pois o procedimento constou da fatoração da expressão algébrica do numerador e simplificação com o denominador da função racional e depois na aferição do seu valor numérico:

Técnica τ_{61}: $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = x+1$, *f(1) = 1+1 = 2*

Em seguida, como forma de convencimento, o autor apresentou ostensivo gráfico, intuindo o resultado obtido anteriormente.

Visando explorar técnica apresentada, a título de exercícios, o autor estabelece uma sequência de tarefas similares em que pede que se “Utilize a ideia intuitiva de limite” para resolvê-las (GUIDORIZZI, 1997, pp. 71-72).

Após a introdução, dita intuitiva, o autor ilustra através de gráficos a continuidade, ou não, de funções de uma variável, e, mudando de nicho, passa do tecnológico para o teórico, apresentando em seguida a definição formal:

> Definição: Sejam f uma função e p um ponto de seu domínio. F contínua em p $\Leftrightarrow$ Para todo $\varepsilon>0$ dado, existe $\delta>0$ (δ dependendo de ε) tal que, para todo $x \in D_f$, $p - \delta < x < p + \delta \Rightarrow f(p) - \varepsilon < f(x) < f(x) + \varepsilon$ (GUIDORIZZI, 1997, p. 73)

Que é generalizada para todo o domínio da função pelo seguinte acréscimo "Dizemos que f é contínua em $A \subset D_f$ se for contínua em todo $p \in A$. Dizemos, simplesmente, que f é uma função contínua se f for contínua em todo p de seu domínio". Após, estabelece 9 (nove) tarefas de diferentes tipos, solicitando provas e verificações:

1) Prove que $f(x) = 2x + 1$ é contínua em $p = 1$;
2) A função constante $f(x) = k$ é contínua em todo p real;
3) A função afim $f(x) = ax + b$ (a e b constantes) é contínua;
4) Prove que, se para todo $\varepsilon>0$ dado existir um intervalo aberto

   $I =]a , b[$, com $p \in I$, tal que para todo $x \in D_f$,

   $x \in I \Rightarrow f(p) - \varepsilon < f(x) < f(p) + \varepsilon$; então f será contínua em p.
5) Seja $r > 0$ um real dado. Suponha que, para todo $\varepsilon < r$ e $\varepsilon > 0$, existe um intervalo aberto I, com $p \in I$, tal que para todo $x \in D_f$,

   $x \in I \Rightarrow f(p) - \varepsilon < f(x) < f(p) + \varepsilon$. Prove que f é contínua em p.
6) Mostre que $f(x) = x^3$ é contínua em 1;
7) Prove que $f(x) = x^2$ é contínua;
8) A função $f(x) = \begin{cases} 2 \ se \ x \geq 1 \\ 1 \ se \ x < 1 \end{cases}$ é contínua em p = 1? Justifique?
9) Se f é contínua em p e $f(p) > 0$ prove que existe $\delta>0$, tal que $\forall \ x \in D_f, \ p - \delta < x < p + \delta$.

Essas tarefas apresentam do *nicho* teórico, as de número 1, 2, 3, 6 e 7 quanto ao momento didático têm um caráter exploratório, enquanto nas de número 4, 5, 8 e 9 trabalha a técnica, sugerindo a necessidade de um discurso tecnológico que justifique a sua utilização. Na resolução das tarefas de 1 a 5, o autor utilizou ostensivos gráficos; apenas na de número 2 usou também ostensivo numérico, e nas de 6 (seis) a 8 (oito), usou algébrico e gráfico.

Como <u>exploração</u> e <u>trabalho das técnicas</u>, sobre continuidade de funções, o autor conclui com uma lista de vinte e sete tarefas, apresentadas algebricamente, solicitando que se resolva ou exemplifique, em que as técnicas sugestionadas utilizam, predominantemente, ostensivos algébricos.

Para apresentar a definição de limite, o autor lança mão de gráficos de 4 (quatro) funções hipotéticas, assinalando: nas abcissas p - δ, p , p+ δ e nas ordenadas L - ε, L , L + ε, onde L, quando existe, é o limite.

Apresenta então a seguir a definição formal de limite:

> Definição: Seja f uma função e um ponto do domínio de f ou extremidade de um dos intervalos que compõem o domínio de f. Dizemos que f tem limite L, em p, se para todo $\varepsilon > 0$ dado, existir um $\delta > 0$ tal que para todo $x \in D_f$ $0 < |x-p| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$. Tal número L, que quando existe é único, será indicado por $\lim_{x \to p} f(x) = L$ (GUIDORIZZI, 1997, p. 85)

A partir de mais 4 (quatro) gráficos de funções hipotéticas (distintas das anteriores) o autor solicita que se visualize o limite sugestionado. Nas 18 (dezoito) tarefas que se seguem, ainda com nicho teórico, o autor usa o conhecimento da continuidade como tecnologia na resolução das tarefas apresentadas, como, por exemplo, na seguinte tarefa:

Tarefa T_7: Calcule $\lim_{x \to 2}(3x-2)$ (GUIDORIZZI, 1997, p. 86)

A técnica τ_{71} apresentada pelo autor nesta resolução, foi a seguinte: “f(x) = 3x – 2 é uma função afim, logo é contínua, logo, contínua em todo p real, em particular em p = 2, assim: $\lim_{x \to 2}(3x-2) = f(2) = 4$” (GUIDORIZZI,1997, p. 86)

A técnica τ_{71} utilizada na resolução dessa tarefa, e nas demais que a sucedem, quando o autor lançou mão de ostensivo algébrico, por resultar na obtenção do valor numérico, mas teve a continuidade como tecnologia.

Ao contrário da obra de Munem-Foulis (1982), Guidorizzi (1997) antecipou o conceito de continuidade e o utilizou como tecnologia nas tarefas para determinação de limite. Munem-Foulis (1982) ao contrário, usaram limite como tecnologia para determinar a continuidade, tomando por base que essa só se verifica em um determinado ponto, se, e somente se, nesse os limites laterais existirem e forem iguais. Continuidade é o foco maior de Guidorizzi (1997) o que fica evidente no levantamento feito por Santos (2013), ao identificar que nos 290 exercícios dessa obra, dos 27 tipos de tarefas relativas a limite, 48 (16,5%) são referentes à continuidade de funções.

Após limites laterais, o autor ainda aborda no Capítulo 3: Limite de uma função composta; Propriedades Operatórias; Teorema do Confronto; Continuidade de funções trigonométricas; O limite fundamental da trigonometria.

O capítulo 4, denominado de Extensões do Conceito de Limite, trata de limites no infinito; limites infinitos; sequência e limite de sequência; limite de função e sequência; o número e. O Capítulo 5 é denominado e trata dos Teoremas do anulamento, do valor intermediário e de Weierstrass, enquanto o capítulo 6 conclui a abordagem do tema com os limites envolvendo logaritmos e o $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x$.

No restante do capítulo 3 e nos outros três subsequentes, o autor apresenta as tarefas, predominantemente, algébricas, utilizando técnica com ostensivos algébricos e gráficos e, em poucas situações, numéricos como forma de intuir resultados, como por exemplo nos casos de limites no infinito e envolvendo logaritmos.

Quanto aos tipos de tarefas apresentadas em Guidorizzi (1997), identificamos uma menor quantidade que diziam respeito aos gêneros Determinar/Achar/Calcular, que se mostram como *nicho* tecnológico, em relação às dos gêneros Explicar/Justificar, Mostrar/Exemplificar, Provar/Demonstrar que se destacam nichos teóricos de limite de uma função.

As técnicas de resolução utilizaram, predominantemente, ostensivos algébricos e gráfico e, raramente, numéricos. Apesar dessa obra apresentar uma introdução dita “intuitiva”, que poderia sugerir opção pelo nicho tecnológico, explorando a Álgebra de Limite, ela faz uma clara opção pelo *nicho* teórico, por conta dos aspectos formais, o que deve ser interessante para aqueles que irão se aprofundar no estudo de análise real.

6.2.3.3 *Nichos* de limite no “livro de Harvard”

O Consortium Basead at Harvard, produziu 5 (cinco) obras relativas ao CDI, denominadas de: Calculus: single variable; Calculus: Multivariable; Calculus: Single and Multivariable; Applied Calculus e Functions Modelling Change: A preparation for

Calculus. A primeira dessas obras, conhecida como The Harvard Book" (MURPHY, 2006, p. 5) foi por nós analisada quanto aos nichos ocupados por limite, relativo às suas praxeologias.

A obra, que inicialmente foi financiada por uma bolsa da National Science Foundation"[73], tendo a autoria de **Hughes-Hallett, Gleason, McCallum** (nomes que constam na capa) e de mais 9 (nove) profissionais, pode ser considerada como um produto emergente da Reforma do Cálculo[74], sendo precursora do que inicialmente foi chamado de Regra de Três e também determinante na evolução para Regra de Quatro, sendo esclarecido na apresentação que ela usa todas as vertentes da "Regra de Quatro" – para tornar os conceitos mais fáceis de entender – gráfica, numérica, simbólica/algébrica e apresentações verbais/aplicadas.

O livro centra-se na exploração de ideias fundamentais, em vez de uma cobertura abrangente, informando na apresentação que o primeiro capítulo

> termina com uma seção sobre limites, permitindo uma discussão sobre a continuidade em um ponto e em um intervalo. A seção sobre limites é flexível o suficiente para permitir uma breve introdução antes de derivada ou para um tratamento mais extenso. [75] (HUGHES-HALLETT, GLEASON, McCALLUM, et al, 2012, prefacio p. vi)

O "tratamento mais extenso" se dá em "Introdução à continuidade", em que há a declaração de que a mesma "apresenta a ideia de continuidade em um intervalo e em um ponto. Isto leva ao conceito de limite, que é investigado na próxima seção"[76] (HUGHES-HALLETT, GLEASON, McCALLUM, et al, 2012, p. 47).

Mesmo dizendo tratar-se de forma intuitiva, os autores iniciam explorando o *nicho* teórico, <u>através</u>(a partir) do estudo de continuidade, com a apresentação de três ostensivos gráficos de funções como forma de convencimento, em que a primeira delas (uma polinomial cúbica) é contínua, a segunda (uma hipérbole "rotacionada") e a terceira (custo de enviar uma carta) não são, conforme a figura 28 a seguir.

---

[73] *Produced by the Calculus Consortium and initially funded by a National Science Foundation Grant.*

[74] A Reforma do Cálculo foi lançada oficialmente em um evento realizada na Universidade de Tulane em New Orleans, USA, no ano de 1986, com as seguintes conferências *Toward a lean and lively Calculus and Calculus for a New Century*

[75] *concludes with a section on limits, allowing for a discussion of continuity at a point and on an interval. The section on limits is flexible enough to allow for a brief introduction before derivatives or for a more extensive treatment.*

[76] *This section introduces the idea of continuity on an interval and at a point. This leads to the concept of limit, which is investigated in the next section.*

FIGURA 28 – Introdução à continuidade no livro de Harvard

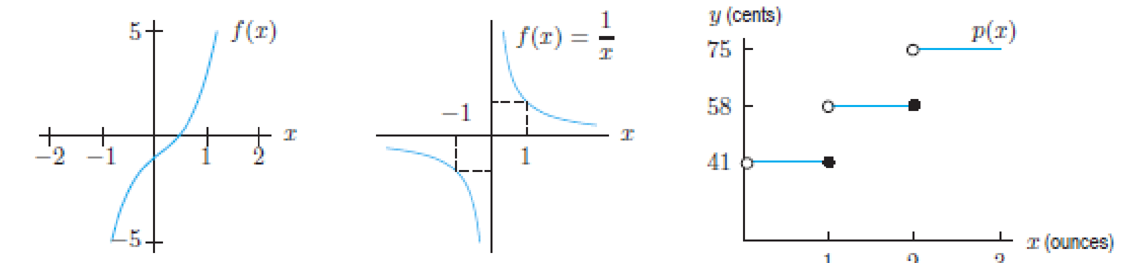


Figure 1.75: The graph of $f(x) = 3x^3 - x^2 + 2x - 1$

Figure 1.76: No zero although $f(-1)$ and $f(1)$ have opposite signs

Figure 1.77: Cost of mailing a letter

Fonte: Hughes-Hallett, Gleason, McCallum, et al, 2012, p. 47

Em seguida, os autores apresentam o Teorema do Valor Intermediário, iniciando pela seguinte tarefa:

Tarefa T_8: O que os valores da tabela lhe dizem a respeito dos zeros de $f(x) = \cos x - 2x^2$ (HUGHES-HALLETT, GLEASON, McCALLUM, et al, 2012, p. 48)

A tabela e o gráfico que a mesma induz, são em seguida apresentados na figura 29.

FIGURA 29 – Técnicas numérica e gráfica no livro de Harvard

Table 1.18

x	$f(x)$
0	1.00
0.2	0.90
0.4	0.60
0.6	0.11
0.8	−0.58
1.0	−1.46

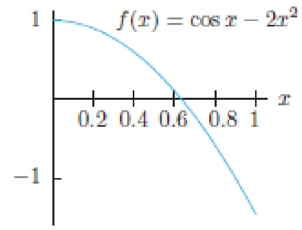


Figure 1.78: Zeros occur where the graph of a continuous function crosses the horizontal axis

Fonte: Hughes-Hallett, Gleason, McCallum, et al, 2011, p. 48

Comentam que o zero da função deve se situar entre os valores 0,6 e 0,8, uma vez que nesse intervalo a função muda de sinal e em seguida apresentam a definição do Teorema do Valor Intermediário:

> Teorema 1.1: “Suponha que f é continua em um intervalo fechado [a , b]. Se k é um número entre f(a) e f(b), então há pelo menos um número c em [a , b] tal que f(c) = k” (HUGHES-HALLETT, GLEASON, McCALLUM, et al, 2012, p. 48).

Continuando, os autores alertam que funções contínuas não podem ter saltos e depois lembram que esse teorema depende da definição de continuidade que será apresentada a seguir em “Continuidade de uma Função em um ponto: ponto de vista numérico”, em que apresentam a tarefa:

Tarefa T_9: Investigue a continuidade $f(x) = x^2$ em $x = 2$ (HUGHES-HALLETT, GLEASON, McCALLUM, et al, 2012, p. 49

As técnicas utilizadas para resolver esta tarefa no livro de Harvard apresentam ostensivos algébricos e numéricos, dispondo nesse último caso, em uma tabela, os valores de x próximos a 2 com os respectivos valores da função nesses pontos.

No momento de exploração da técnica de continuidade, são propostos 30 (trinta) tarefas a título de “exercícios”, sendo que no de número 24 (vinte e quatro) é sugerida a utilização de um ostensivo gráfico relativo a uma função apresentada algebricamente, para discutir a continuidade. Relativamente à continuidade, as tarefas nesses exercícios distinguem-se daquelas das obras anteriormente analisadas, quando os autores buscam apresentar contextualizações de situações supostamente reais ou mesmo matemáticas, como por exemplo:

Tarefa T_{10}: Qual das seguintes são funções contínuas no tempo?

a) A quantidade de gás no tanque de um carro numa viagem entre Nova York e Boston.

(b) O número de alunos matriculados em uma classe durante um semestre.

(c) A idade da pessoa mais velha viva. (HUGHES-HALLETT, GLEASON, McCALLUM, et al, 2011, p. 50):

E o exercício de número 27, apresenta-se por meio da tarefa a seguir:

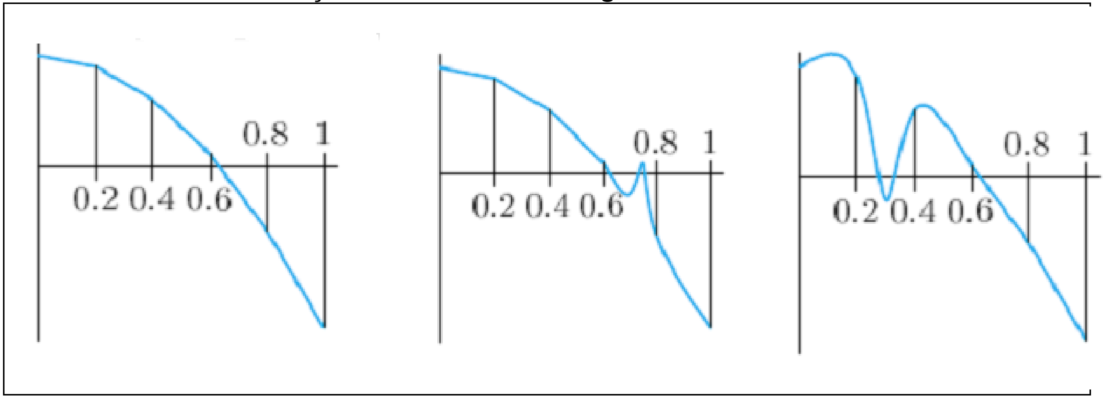
Tarefa $T_{11:}$ Esboçar os gráficos de três funções diferentes que são contínuas em $0 \leq x \leq 1$ com os valores da tabela.

x	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
f(x)	1.00	0.90	0.60	0.11	-0.58	-1.46

A primeira função deve ter exatamente um zero no intervalo [0 ; 1]; a segunda pelo menos dois zeros em [0.6 ; 0.8]; e a terceira pelo menos dois zeros no intervalo [0 ; 0,6]. (HUGHES-HALLETT, GLEASON, McCALLUM, et al, 2011, p. 50)

Esta tarefa admite uma infinidade de respostas, no final do livro, no setor de respostas, os autores sugerem as que se encontram na figura 30.

FIGURA 30 – Resolução com ostensivos gráficos no livro de Harvard



Fonte: Hughes-Hallett, Gleason, McCallum, et al, 2011, p 678

Ainda no Capítulo 1 (Uma biblioteca de funções), após continuidade, há a seção denominada “Limite”, onde são apresentadas, desenvolvidas e aprimoradas as técnicas para resolver tipos de tarefas para determinar limite, algumas das quais passamos a exibir e comentar:

A primeira das tarefas é:

T$_{12}$: Usar gráfico para estimar $\lim_{\theta\to 0}\frac{sen(\theta)}{\theta}$ (HUGHES-HALLETT, GLEASON, McCALLUM, et al, 2011, p. 51)

Os autores apresentam o gráfico de f(θ) = sen(θ)/θ afirmando que $\lim_{\theta\to 0}\frac{sen(\theta)}{\theta} = 1$

Esse tipo de tarefa, envolvendo o que alguns denominam de limite fundamental da trigonometria, é comum em livros de cálculo, o que não se encontra é uma justificativa dessa recorrência. Em seguida, imputando a autoria a Cauchy, os autores apresentam a definição formal de limite, que ilustram com ostensivos numérico e gráfico.

> Definição: Uma função f é definida em um intervalo contendo c, exceto no ponto x = c. Nós definimos o Limite da função f(x) quando x tende a c, escrevendo $\lim_{x\to c} f(x)$ para um número L (se ele existe) tal que f(x) é tão próximo de L quanto nós queiramos, quando x for suficientemente próximo de c (mas x≠c). Se L existe, escrevemos: $\lim_{x\to c} f(x) = L$ (HUGHES-HALLETT, GLEASON, MCCALLUM, et al, 2011, p. 51)

Chamam à atenção que o “tão próximo quanto nós queiramos” e o "suficientemente próximo" passam a ser expressos através de desigualdades, traduzindo a definição em: “Nós definimos $\lim_{x\to c} f(x)$ o número L (se existir), tal que para cada ε>0 (tão pequeno quanto queiramos) existir um δ>0 (suficientemente pequeno) tal que |x – c|< δ e x ≠ c, então |f(x) − L| < ε. Questionando em seguida: “Vamos ver se ela (<u>a definição</u>) está de acordo com a nossa intuição”. (HUGHES-HALLETT, GLEASON, McCALLUM, et al, 2011, p. 52) (grifo nosso).

A tarefa seguinte apresentada como exemplo 3 do livro de Harvard é:

Tarefa T$_{13}$: Use definição de limite para mostrar que $\lim_{x\to 3} 2x = 6$ (HUGHES-HALLETT, GLEASON, McCALLUM, et al, 2011, p. 53)

Os autores exibem a seguinte solução:

> Se |x − 3| < δ e x ≠ 3, então |2x − 6| < ε
>
> Como |2x−6|= 2|x−3| < ε, para que |x−3|<ε/2, basta, portanto, tomarmos δ = ε/2.

Chamam à atenção de que a definição formal (do *nicho* teórico) não se aplica para determinar limite (nicho tecnológico), mas para confirmar sua validade. Em seguida, apresentam as propriedades operatórias de limite seguidas de tarefas para utilizá-las, como por exemplo:

Tarefa T_{14}: Explique como as propriedades operatórias de limite são usadas no seguinte cálculo: $\lim_{x\to 3} \frac{x^2+5x}{x+9}$ 6 (HUGHES-HALLETT, GLEASON, McCALLUM, et al, 2011, p. 53)

Apresentando como solução: $\lim_{x\to 3} \frac{x^2+5x}{x+9} = \frac{3^2+5(3)}{3+9} = 2$. A técnica de resolução apresenta ostensivo algébrico.

As próximas três tarefas são apresentadas para que o usuário do livro, com base na definição, constate a inexistência dos seguintes limites:

$$\lim_{x\to 2} \frac{|x-2|}{x-2}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0} sen\frac{1}{x}$$

Se em alguns aspectos o livro assemelha-se aos demais, a seção de exercícios o torna diferente por apresentar tarefas que utilizam predominantemente as técnicas numérica e gráfica.

Essa obra apresenta elogios, como, por exemplo, Mumform (1997), assim como críticas que podem ser vistas em Klein e Rossen (1997). Os elogios baseiam-se em dados de que a maioria dos utilizadores não precisam se aprofundar muito no formalismo matemático,

> Em resumo, temos cientistas, engenheiros, economistas e pessoas no mundo dos negócios em uma categoria que vamos chamar de P (de "Prática"); e temos a comunidade dos profissionais matemáticos puros do século XX em outro – que vamos chamar de T (de "amantes de Teorema"). Matemáticos aplicados, advogados e matemáticos de outros séculos ficariam no meio. Há muitas pessoas no grupo P de uso do cálculo. Um curso de cálculo é muitas vezes a última interação entre estes dois mundos. Eu diria algo como 99 por cento dos nossos alunos nesses cursos não vão se juntar à categoria T. Então o cálculo é a nossa grande chance de falar com o outro mundo, P. (MUMFORM, 1997, p. 563).

As críticas são exatamente o oposto, entendendo que a mesma apresenta lacunas que poderão prejudicar aqueles que enveredarem pelo estudo mais pormenorizado da Matemática.

> A principal batalha é se a reforma - como a feita em *Harvard Calculus*- elimina praticamente todo o rigor que deve ser usado para a matemática, engenharia e física. O que já está sendo feito em muitas faculdades. (KLEIN e ROSSEN 1997, p. 1324).

Observamos que uma vez que o nicho teórico não é o principal foco dessa obra, o que é declarado pelos autores, parece deslocada a exploração da definição formal de limite como técnica de resolução de tarefas que são apresentadas e exploradas através de exercícios.

Nessa obra, em que as técnicas numérica e gráfica são predominantes, as tarefas evidenciam-se quanto aos gêneros Determinar/Achar/Calcular, com o ostensivo gráfico sendo o mais utilizado nas técnicas de resolução. Um gênero de tarefas não identificado nas outras duas obras, nessa se faz presente em várias situações, que seria: Analisar comportamento, sendo que em algumas situações os autores apresentam a indicação de que para tal se utilize um computador ou calculadora.

6.2.3.4 *Nichos* de limite nas organizações matemáticas nas obras pesquisadas

Bosch, Chevallard e Gáscon (2006) nos falam que identificaram, nas prescrições currículares e em livros didáticos, uma praxeologia mista, constituída, por uma lado pelo que denominaram de "álgebra de limites" pertinente aos cálculos de limites de funções em um determinado ponto (*nicho* tecnológico), e, por outro, por uma "topologia de limites" que se detém na problemática da existência do limite (*nicho* teórico). Essas duas praxeologias que coduzem à mista ou “híbrida” como denominaram, são totalmente desconectadas e como disseram, “não se encaixam”, prejudicando, ou até impedindo uma interpretação do professor sobre o programa de estudo e o conhecimento matemático sobre limite e continuidade de funções que deve ser ensinado.

Destacam esses autores que a "álgebra de limites" torna-se o bloco prático da praxeologia matemática a ser ensinada (*nicho* tecnológico), porque está mais próxima do conjunto de tarefas e técnicas que aparecem nos currículos e livros didáticos, enquanto o bloco teórico, definição ε - δ de limite, continuidade de funções, etc... aproxima-se da praxeologia "topologia de limites" (*nicho* teórico).

As praxeologias algébrica e topológica, evidenciadas por Bosch, Chevallard e Gáscon (2006), foram por nós observadas nas três obras analisadas, quando os autores utilizaram as respectivas denominações de “intuitivas” e “formais”, sendo que as primeiras dessas foram identificadas em tarefas e técnicas do *nicho* tecnológico enquanto as últimas nas do *nicho* teórico[77].

A “Ideia intuitiva de limite”, recorrente como praxeologia desse tema em livros didáticos, é evidenciada nas obras que pesquisamos, em diversas ocasiões, como por exemplo quando dizem que:

> “A ideia de Limite é fácil de ser captada intuitivamente.” (MUNEM-FOULIS, 1982);
>
> “Intuitivamente, uma função contínua em um ponto p de seu domínio, é uma função cujo gráfico não apresenta “salto” em p.” (GUIDORIZZI, 1997).
>
> A primeira etapa no desenvolvimento do pensamento matemático é a aquisição de uma imagem intuitiva clara das ideias centrais. [78] (HUGHES-HALLETT, GLEASON, MCCALLUM, et al, 2011, p. 51)

O que os autores têm como “Ideia intuitiva de limite”, se exibe em praxeologias que, comumente, movimentam ostensivos, com utilização de técnicas textual, gráficas, numéricas e algébricas, ou seja das mesmas preconizadas como “Regra de Quatro” da “Reforma do Cálculo”. (SOLOW, 1994)

A praxeologia dita formal, por sua vez, é caracterizada pela utilização do rigor matemático, presente nos nichos teóricos, comumente fazendo uso de objetos não ostensivos (definições, teoremas, etc...), que movimentam objetos ostensivos, quase sempre algébricos, que embora seja a preferida pelo rigor, quanto ao seu ensino pelo professor ordinário, sofre restrições quando se depara, algumas vezes, com manipulações algébricas não elementares para calcular certos limites, como por exemplo $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ ou $\lim_{x\to 0}\frac{sen(x)}{x}$, que necessitam de conhecimentos mais aprofundados para serem determinados com ostensivos algébricos, fazendo com que sejam assumidos sem maiores questionamentos.

---

[77] Para Bosch (1994) tarefas técnicas, ao contrário das tarefas tecnológicas, são aquelas cujas técnicas de resolução não necessitam da existência de um discurso que as justifiquem para se fazerem inteligíveis.

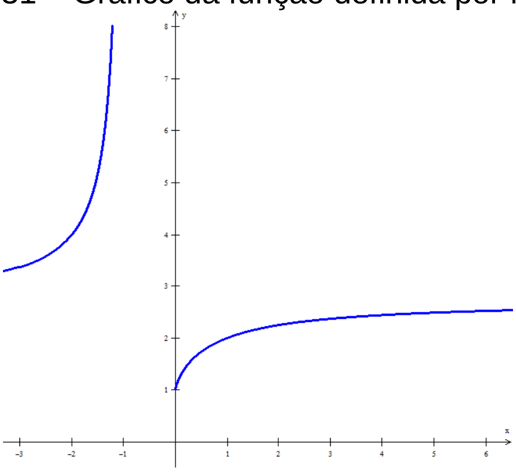
[78] The first stage in the development of mathematical thinking is the acquisition of a clear intuitive picture of the central ideas.

As formalizações, por vezes, apresentam, além dos ostensivos algébricos com relatamos, outros gráficos e numéricos, como forma de convencimento de um resultado que foi, ou até a priori, seria demonstrado. O problema a nosso ver existente nessa praxeologia é que não há garantias de o quê está se querendo formalizar é de fato aquilo que visualmente se apresenta, se há outras soluções que não as expostas visualmente e ainda se essas podem ser aceitas ou não.

Sem nos aprofundarmos quanto à validade da utilização de dispositivos gráficos em formalizações matemáticas[79], por não dizer respeito aos nossos objetivos, que se centram nas funcionalidades das praxeologias, os *nichos*, percebemos que a ideia intuitiva de limite suscitada pelos autores, principalmente traduzida pela utilização de técnicas com ostensivos numéricos e gráficos, tem a vantagem do convencimento visual do resultado requisitado pela tarefa, que a torna atraente e faz o resultado parecer satisfatório, sem recorrer ao rigor matemático, no entanto, essas duas últimas formas de representação usadas nas técnicas também têm suas restrições.

A técnica com ostensivo gráfico, por exemplo, para funções não elementares, necessita da disponibilidade de equipamentos tecnológicos, tais como calculadoras gráficas, programas de computadores, e esses equipamentos, além disso, o resultado gráfico pode não ser preciso. Podemos constatar essa situação, nos esboços das figuras 31 e 32 a seguir:

FIGURA 31 – Gráfico da função definida por $f(x) = (1+1/x)^x$

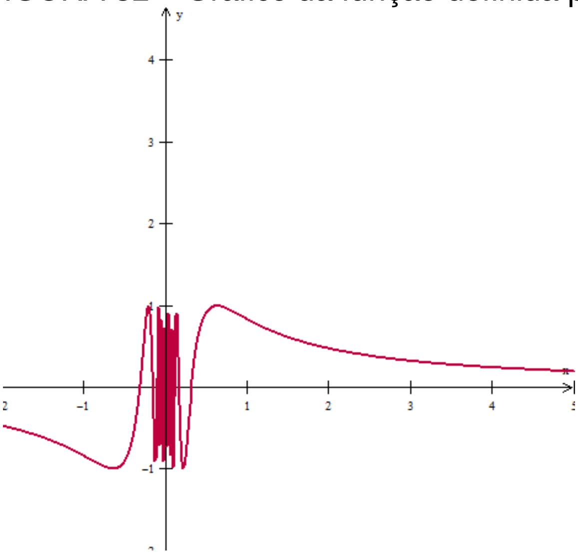


Fonte: Elaborado pelo autor

[79] Em Chevallard (2013, p. 103) encontramos a referência a Cauchy que demonstrara um teorema relativo ao valor médio, com argumentos geométricos, que não seriam aceitos pelo formalismo matemático.

e

FIGURA 32 – Gráfico da função definida por f(x) = sen (1/x)



Fonte: Elaborado pelo autor

Os esboços apresentados foram respectivamente das funções definidas por: $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ e $f(x) = sen(\frac{1}{x})$, mas a simples apresentação desses ostensivos gráficos dificilmente indicariam, que são essas funções, muito menos que respectivamente, $\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ ou que $\lim_{x\to 0} sen(\frac{1}{x})$, não existe.

A técnica com uso de ostensivos numéricos, por sua vez, também apresenta limitações, como o envolvimento de cálculos não elementares, precisão de equipamentos, além da incerteza de que aquele conjunto de pontos obtidos através de cálculos de fato traduzam a situação real, podendo gerar com isso dúvidas sobre o resultado obtido.

Para exemplificar uma situação que sugere a utilização das técnicas numérica e gráfica, tomamos a tarefa T_{10} do livro de Harvard (HUGHES-HALLETT, GLEASON, McCALLUM, et al, 2012), em que os autores sugerem que se obtenha um conjunto de pontos da função definida por f(x) = sen(x)/x e se esboce o seu gráfico, recomendando, pertinentemente, que se "use radianos".

Contando com um aplicativo computacional apropriado para tabelas e gráficos[80], nos colocamos como um suposto estudante, usuário desse livro didático e atendemos ao solicitado pelos autores, avaliando a função definida por f(x)=sen(x)/x,

[80] Planilha Excel do pacote Office da Microsoft

no intervalo de -180º a 180º, em pontos com 15º de espaçamento, obtendo a tabela 07.

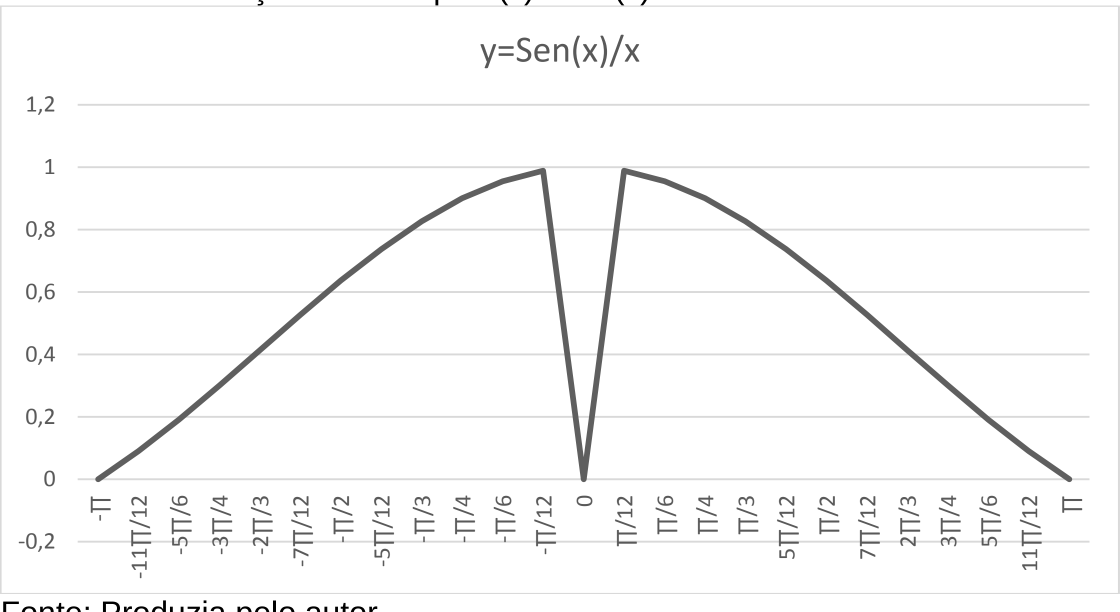
TABELA 07 – Valores para f(x) = sen(x)/x

x(grau)	f(∏)	x (em rad)	sen(x)	Sen(x)/x
-180º	-∏	-3,141596	0,000003	-0,000001
-165º	-11∏/12	-2,879796	-0,258816	0,089873
-150º	-5∏/6	-2,617997	-0,499998	0,190985
-135º	-3∏/4	-2,356197	-0,707105	0,300104
-120º	-2∏/3	-2,094397	-0,866024	0,413496
-105º	-7∏/12	-1,832598	-0,965925	0,527080
-90º	-∏/2	-1,570798	-1,000000	0,636619
-75º	-5∏/12	-1,308998	-0,965926	0,737912
-60º	-∏/3	-1,047199	-0,866026	0,826993
-45º	-∏/4	-0,785399	-0,707107	0,900316
-30º	-∏/6	-0,523599	-0,500000	0,954930
-15º	-∏/12	-0,261800	-0,258819	0,988616
0º	0	0	0	#DIV/0!
15º	∏/12	0,261800	0,258819	0,988616
30º	∏/6	0,523599	0,500000	0,954930
45º	∏/4	0,785399	0,707107	0,900316
60º	∏/3	1,047199	0,866026	0,826993
75º	5∏/12	1,308998	0,965926	0,737912
90º	∏/2	1,570798	1,000000	0,636619
105º	7∏/12	1,832598	0,965925	0,527080
120º	2∏/3	2,094397	0,866024	0,413496
135º	3∏/4	2,356197	0,707105	0,300104
150º	5∏/6	2,617997	0,499998	0,190985
165º	11∏/12	2,879796	0,258816	0,089873
180º	∏	3,141596	-0,000003	-0,000001

Fonte: Produzia pelo autor

Se o equipamento praxeológico do aluno, como conjunto de todas as suas praxeologias (CHEVALLARD, 1999), for insuficiente, para atentar ao fato de que essa função não se define em x = 0, o mesmo aplicativo que produzimos a planilha, apresenta o gráfico da figura 33:

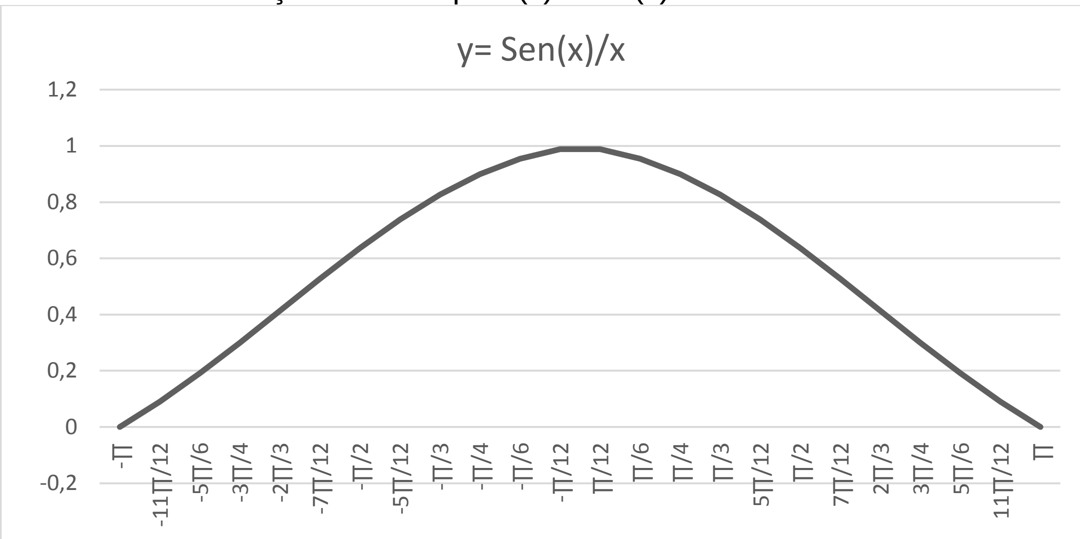
FIGURA 33 – Gráfico da função definida por f(x)= sen(x)/x considerando x = 0



Fonte: Produzia pelo autor

Se o zero for retirado do domínio da função, aí sim o aluno obteria o gráfico da figura 34.

FIGURA 34 – Gráfico da função definida por f(x)= sen(x)/x não considerando x = 0



Fonte: Produzia pelo autor

Sugerindo dessa forma que $\lim_{\theta\to 0}\frac{sen(\theta)}{\theta} = 1$ como os autores do livro pretendiam.

Uma vez que o cálculo desse limite se apresenta em tarefas de todos os livros de Cálculo, inclusive já nos referimos que ele pode ter surgido da necessidade de um cálculo de derivada, perguntamos aos professores que lecionam cálculo, tanto aos não engenheiro quanto ao engenheiro:

- Como você ensina que $\lim_{x\to 0}\frac{sen(x)}{x} = 1$?

Algumas das respostas, dos professores de cálculo não engenheiros, foram:

PM1: Observando que para arcos muitos pequenos “sen x = x”.

PM2: Maneira 01= Usando o Geogebra para fazer o gráfico e maneira 02= Fazendo a demonstração pelo confronto.

PM3: Para a Matemática utilizo o teorema do confronto, para a Engenharia se considere este Limite como 1 e utiliza-se este para provar outros limites trigonométricos.

PM5: Uso a propriedade $\exists$ r>0 tal que 0 < sen x < x < tg x $\forall$ |x| < r e faço a dedução do limite fundamental.

PM8: Geometricamente.

PM9: Principalmente uso o conceito geométrico, no ciclo trigonométrico, depois uso conceito mais teórico.

PM10: Principalmente por motivações geométricas.

> PM11: A primeira abordagem deve ser gráfica, usando o ciclo trigonométrico, por exemplo.
>
> PM14: Para Matemática demonstro resultado, para Engenharia trabalhamos em cima das consequências desse resultado.

Por sua vez, o professor de Cálculo engenheiro, respondeu a essa pergunta da seguinte forma:

> *Eu não vejo como formalidade provar que esse limite é 1. Eu trabalho especificamente nesse caso indicando que para arcos muito pequeno do seno ângulo se aproxima do valor do próprio valor do arco. Mas sem a obrigatoriedade de provar. Mostro que posso precisar desse limite para os cálculos de outros*.

Nas respostas dessas duas comunidades docentes, vemos que as praxeologias refletem prioritariamente *nichos* tecnológicos, embora haja algumas manifestações do teorema do confronto que designa a presença de nicho teórico. Quanto aos ostensivos utilizados verificamos que foram, predominantemente, o algébrico e o gráfico, resultado esse também verificado por Verônica e Otero (2009) e por Santos (2013).

A técnica com ostensivos algébricos, se evidencia tanto nas praxeologias que fazem uso do rigor (nicho teórico), quanto da intuição (nicho tecnológico) sendo essas últimas, comumente, são apresentadas introdutoriamente através de funções normalmente contínuas, cujo limite coincide com o valor numérico. A esse respeito Ávila (2010) manifesta-se dizendo que

> nenhum aluno vai se sensibilizar com exemplo como este: calcular o limite de y = f(x) = 3x, com x tendendo a 2. Ora basta calcular f(2)... ...Alguns autores de livros de Cálculo até se dão ao trabalho de calcular numericamente - e ilustrar graficamente!. (ÁVILA, 2010, p. 175)

De fato, alguns autores, sob a guarda de “Ideia intuitiva de limite”, iniciam apresentando as primeiras tarefas com funções contínuas, como tivemos oportunidade de verificar nas tarefas T_1 e T_2 que se encontram no livro de Munem-Foulis (1982), na tarefa T_5 que consta do livro de Guidorizzi (1997) e na T_9 extraída do livro de Harvard. A pertinência da crítica de Ávila (2010) também se relaciona, de certa forma, ao “argumento circular sobre a noção de função contínua em um ponto” ao qual já nos referimos (BOSCH; CHEVALLARD e GASCÓN, 2006, p. 6).

Nas obras pesquisadas identificamos praxeologias <u>pontuais</u>, que dizem respeito a como resolver um tipo único de tarefas, como por exemplo:

a) $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ quando f(x) é uma função contínua[81];

Verificamos ainda algumas praxeologias locais que integram um conjunto de praxeologias pontuais que utilizam a mesma tecnologia, como por exemplo, nas tarefas de determinação de limite quando se tem:

a) $\lim_{x \to a} \frac{p(x)}{q(x)}$ em que $\frac{p(a)}{q(a)}$ resulta em indeterminação do tipo 0/0 ou ∞/∞ que é contornada por fatoração das expressões algébricas envolvidas;

b) $\lim_{x \to 0} \frac{sen(x)}{x}$;

c) $\lim_{x \to \infty} (1 + \frac{1}{x})^{x}$.

Não identificamos porém, praxeologias regionais, que conseguissem envolver todo um campo da matemática.

Quanto à organização didática proposta pelos autores, relativa à tecnologia que justifica a técnica, identificamos duas praxeologias distintas: Munem-Foulis (1980), primeiramente apresentaram a definição de limite como tecnologia para as técnicas utilizadas na resolução de tarefas envolvendo Continuidade, enquanto Guidorizzi (1997) e o livro de Harvard fazem o contrário, e têm a definição formal dessa como tecnologia para as técnicas de cálculo de limite, conforme pode ser verificado no quadro 14:

[81] Embora seja alvo de contestação é uma praxeologia evidenciada.

QUADRO 14 - Organizações didáticas nas obras pesquisadas

Autor(es)	Títulos	Ordem de apresentação dos conteúdos
Munem-Foulis 40 páginas	1. Limites e Continuidade de Funções p. 51	1 Limites e Continuidade p. 51; 2 Propriedades dos Limites de Funções p. 57; 3 Continuidade – Limites Laterais p. 61; 4 Propriedades das funções contínuas p. 67; 5 Limites envolvendo Infinito p. 71; 6 Assíntotas Horizontais e Verticais p. 78; 7 Demonstração das Propriedades Básicas de Limites e de Funções Contínuas pp. 82-90.
Guidorizzi 71 páginas	3. Limite e continuidade p. 68 4. Extensões do conceito de limite p.114	3.1 Introdução p. 68; 3.2 Definição de função contínua p. 72; 3.3 Definição de limite p. 83; 3.4 Limites laterais p. 95; 3.5 Limite de função composta p. 99; 3.6 Propriedades operatórias p. 105; 3.7 Teorema do confronto p. 106; 3.8 Continuidade de funções trigonométricas p.109; 3.9 O limite fundamental $\lim_{x \to 0} \frac{sen\, x}{x}$ p. 110 4.1 Limites no infinito p. 114 4.2 Limites infinitos p. 118 4.3 Sequência e limite de sequência p. 127 4.4 Limite de função e sequência p. 134 4.5 O número *e* pp. 136-138
Hughes-Hallett, Gleason, McCallum, et al 23 páginas	1 A Library of functions p. 1	1.7 Introduction to continuity p. 47 1.8 Limits p. 51 Review problems p. 60 Check your understanding p. 65 Projects: Matching functions to data, which way is thewind blowing? pp. 67-69

FONTE: Elaborado pelo autor

Nichos tecnológicos, que operam no bloco prático-técnico de limite de uma função, foram facilmente identificados nas obras por nós pesquisadas, já nos nichos teóricos, ocasionados em menor número, as tecnologias, nem tanto recorrentes, puderam ser verificadas algumas vezes de forma implícita, no entanto, a teoria relativa a esse tema, que advém dos números reais, não se fez clara.

O último quadro apresenta que o estudo pormenorizado de limite, deve se fazer presente na obra de Guidorizzi (1997), que abordou o tema em 71 páginas, enquanto o livro de Harvard o evidenciou em 23 páginas, mesmo sem abrir mão do rigor da definição com épsilons e deltas, mas o apresentando, predominantemente, em situações que faziam uso de técnicas com ostensivos algébricos, numéricos e gráficos. Munem-Foulis (1980) seria a obra intermediária entre as outras duas, encaminhando os saberes para uma visão geométrica, condizente com a denominação original da obra: "*Calculus with Analytic Geometry"*.

As praxeologias que identificamos com o objeto limite de uma função nas obras pesquisadas, comumente são adotadas nos dois ecossistemas fronteiriços de ensino, no de engenharia como instituição utilizadora e no de licenciatura em matemática como instituição produtora. Elas nos parecem terem sido talhadas para esse último ambiente, por não encontrarmos problemáticas que pudessem dar funcionalidades ao objeto no ecossistema considerado no primeiro, além do que não contemplam uma das formas de tarefas e técnicas que ali se apresentam, podemos dizer até, de forma usual, que é a por nós denominada de empírica.

Em outras pesquisas de praxeologias de limite em livros, não vimos análises para além do capítulo referente ao desenvolvimento desse objeto, pois normalmente se atém às problemáticas do seu ensino e de sua aprendizagem, como nossa tarefa é descobrir suas funcionalidades, seus modos de "vida", a quem "servem" e de quem se "alimentam", procuramos identificar em que o tema limite de uma função tem funcionalidades além do seu capítulo específico, o que será exposto a seguir.

6.2.3.5 *Nichos* de limite nas obras pesquisadas, além do capítulo específico

Uma das perguntas que frequentemente os alunos fazem ao professor é "Para que que serve isso?", ou seja, querem saber qual a funcionalidade daquilo que o professor está ensinando? É comum, também, o professor do ensino fundamental, por exemplo, apontar o posterior ensino médio como utilizador daquele saber e o desse nível indicar o superior como o local onde o que está sendo ensinado será indispensável ao aluno. Ao professor universitário, a resposta à pergunta do aluno torna-se evasiva se apontar na direção de um nível superior, pois poderá ouvir que esse nível pode não o interessa, ele quer uma resposta que aponte funcionalidades no mesmo nível de ensino, se possível na mesma disciplina. Ecologicamente funcionalidade de um objeto é o *nicho* deste em um determinado *habitat* de certo ecossistema, que se expressa através das praxeologias, que no caso dos objetos matemáticos, evidenciam-se através de seus ostensivos.

O ecossistema por nós pesquisado situa-se em uma instituição de ensino superior, onde os temas estudados podem ter funcionalidades, ou nichos, no próprio nível de ensino ou ainda, quando o estudante se formar, ou em uma pós-graduação, ou ainda na vida laboral. Na universidade as funcionalidades podem dizer respeito à própria atividade acadêmica (disciplina) em que o saber se apresenta, ou em outra que dele necessite.

Em seguida, apresentaremos as funcionalidades que identificamos no seu próprio *habitat* natural que é o Cálculo Diferencial e Integral (CDI), ou seja, no caso da pergunta, "para que serve limite?", em um livro de Cálculo, o professor poderia mostrar seus *nichos* em outras praxeologias na própria obra.

Nos livros didáticos de CDI por n, identificamos anteriormente funcionalidades para o objeto matemático por nós pesquisados. No capítulo que trata de limite e continuidade de funções, a tarefa predominante é "Calcular o limite" que lhe confere a razão de viver no habitat do CDI, quando, comumente, são usados os ostensivos textual, algébrico, gráfico e numérico. Além do capítulo específico, o objeto limite ainda se apresenta em outros, com diferentes funcionalidades por nós identificadas, que passamos a destacar no quadro 15:

QUADRO 15 - Formas de vida de limite nas obras pesquisadas

	OBRAS → / FUNCIONALIDADES ↓	Munem-Foulis	Guidori-zzi	Hughes-Hallett, Gleaso,McCallum, et al
Taxa de variação instantânea	A taxa de variação instantânea de y=f(x) em relação a x é $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$	p. 92	p. 215	p. 70
Coeficiente angular da reta tangente	m=$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$	p. 93	p. 223	p. 79
Definição de derivada	$f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$	p. 97	p. 164	p. 76

Determinação de ponto de inflexão (ponto onde a curva muda de concavidade sem mudar o comportamento quanto ao crescimento)	Se f(x) é contínua em x=a e $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x} = \infty$, então há uma tangente vertical à curva nesse ponto, que é denominado de ponto de inflexão.	p. 165	Utiliza que nesse ponto f´´(x)=0 p. 263	O esboço de gráfico nesta obra remete a uso de calculadora ou computador, não aborda cálculo de ponto de inflexão
Determinação de assíntotas verticais	Se f(x) não se define em x=a e $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$, então x=a é uma assíntota vertical	Trata sem fazer alusão a limite	p. 250	p. 43
Determinação de assíntotas oblíquas e horizontais	Seja f uma função. Se existir uma reta y = mx + n tal que $\lim_{x \to \infty} [f(x) - (mx + n)] = b$ então y = mx + n é uma assíntota oblíqua para f. Se m=0 a reta y = n será uma assíntota horizontal.	Não trata de assínto-tas oblíquas ou horizon-tais	p. 267	Assíntota horizontal p. 43 sem referir-se a limite. Não aborda assíntota Oblíqua
Definição da integral de Riemann	$\int_a^b f(x)dx = \lim_{max \Delta xk \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(ck)\Delta xk$	p. 305	p. 301	Trata sem se referir a limite de uma soma de áreas.

Fonte: Elaborado pelo autor

Nas três obras por nós analisadas quanto às praxeologias didáticas do objeto limite de uma função, foi possível destacar que suas funcionalidades, de um modo geral, evidenciaram-se como elemento unificador do Cálculo, apresentando-se, nessas ocasiões, como tecnologia e não como técnica, ou seja, exibem-se como um discurso necessário a um conceito ou definição (nicho teórico) e não como uma maneira de resolver uma tarefa (nicho tecnológico). Verificamos ainda que a definição formal de limite com épsilon e delta, e até mesmo cálculos mais laboriosos envolvendo esse saber não se fizeram necessários.

A dispensabilidade ou não da funcionalidade de limite em algumas ocasiões nas obras analisadas, também nos chamaram à atenção, principalmente quanto a esboço de gráfico, em que duas situações nos parecem de grande relevância prática, e que foram tratadas de maneiras distintas: a primeira é a determinação do ponto de inflexão e a segunda é a verificação do comportamento assintótico. O ponto de inflexão se faz importante por ser aquele onde a curva, por exemplo, esse ponto nos sinaliza que uma curva crescente continuará crescendo, mas que, no entanto, mais adiante ela será decrescente (ou vice-versa). O comportamento assintótico de curvas, por sua vez, é importante quanto à tendência de aproximação desta a uma reta, quando a variável assume “grandes” valores.

Antes de emitirmos nossas considerações finais apresentamos alguns trechos das entrevistas que também se fizeram importante às nossas compreensões.

6.3 *Nichos* de limite, segundo entrevistas com as comunidades docentes

A hierarquização ecológica nos aponta que não há *nichos* sem que haja *habitat*, da mesma forma que esses últimos precisam situar-se em um ecossistema. O processo ecológico pelo qual passou o curso de Engenharia Civil, a partir de seu atual Projeto Pedagógico, promoveu mudança nos *habitat*, que, naturalmente, influenciaram nos nichos dos objetos de ensino, e, muito provavelmente, na formação dos profissionais.

Ao realizarmos a primeira pergunta (QE1) que tratava do relacionamento das demais disciplinas do curso com o Cálculo Diferencial e Integral, aos professores engenheiros, que não lecionam CDI, o professor que designamos como PE1, participante da elaboração e tramitação para aprovação do PPC, nos diz:

> *Nós estamos mexemos no nosso programa da Engenharia Civil, a gente tinha cálculo I, II, III, VI, cálculo numérico e álgebra linear, e fizemos e encaixamos, fizemos duas Matemáticas Aplicadas para Engenharia, I e II, e a gente teve oportunidade de olhar a forma do engenheiro, como usuário da matemática, que soubesse usar a matemática mais do que se ele fosse realmente se aprofundar na matemática, e ter todos os fundamentos do cálculo. Mas essa experiência parece que não está sendo muito boa, porque a gente reduziu muito o programa, reduziu não, colocou muita coisa para pouco tempo, duas disciplinas com muita coisa.*

O professor engenheiro PE2, que não participou da elaboração do PPC, ainda relativamente ao mesmo questionamento, assim posicionou-se:

> *Eu fui aluno na engenharia civil daqui também, de 1986 a 1990, nessa época havia os cursos na área de matemática, e nós tínhamos cálculo I, cálculo II, cálculo III, cálculo IV, Cálculo Numérico e Álgebra Linear, então no meu entendimento essas matérias são fundamentais para o curso na formação de um Engenheiro Civil. Especialmente os que vão trabalhar com desenvolvimento de projetos. Ocorre que foi dada uma ênfase muito grande nos últimos anos ao ato de construir em si, as atividades da construção civil, mais associadas ao gerenciamento de obras, o planejamento de canteiros, onde essas disciplinas não têm, pelo menos de uma forma mais explícita, uma aplicação direta, e diante disso há uma certa desmotivação dos alunos em estudarem o cálculo e álgebra linear, infelizmente, houve uma pressão, acho que por parte dos alunos, por parte do próprio mercado e dos professores dessa área, mais voltada à construção civil e gerenciamento, que estas disciplinas não seriam importantes. Eu discordo veementemente, principalmente no que diz respeito à elaboração de projetos e tudo mais, aprofundando em problemas na engenharia. É essencial que o aluno tenha o domínio das ferramentas matemáticas para a solução dos problemas, e no que diz respeito ao estudo do comportamento das estruturas por exemplo, e as teorias de estruturas, mecânica dos sólidos, são todas baseadas em conceitos físicos e matemáticos onde o cálculo, o cálculo diferencial, o cálculo integral, são de suma importância e sem esses conceitos é impossível explicar os conceitos e aí sem os fundamentos o aluno acaba não entendendo direito a teoria.*

As modificações do PPC traduzidas pelas “mexidas” e “encaixes”, referidas por PE1 e das quais os professores ordinários, que os vivenciam nos exercícios de suas práticas, não participaram, por aterem-se aos níveis específicos de determinação que atinge no máximo a disciplina, é reconhecida pelo docente entrevistado atuante em toda a sua elaboração, e mostra que a preocupação com a problemática também é sentida por quem atua nos níveis genéricos, a pedagogia, que tem sob si a responsabilidade da atualização curricular.

O “afunilamento” foi sentido pelos professores engenheiros que entrevistamos, principalmente por aqueles cujas disciplinas são *habitat* de temas de Álgebra Linear, em cujas práticas esses saberes têm “vida”, funcionalidades, enfim, êm *nichos.* A esse respeito, o professor PE5, nos diz:

> *eu ministro as disciplinas de mecânica dos sólidos I, que é antiga mecânica técnica e teoria da elasticidade em nível de pós graduação então nessa disciplinas de mecânica dos sólidos I, eu, como ferramenta matemática, utilizo bastante álgebra linear, mais conceitos de produto escalar, produto vetorial, todos, o desenvolvimento como ferramenta para disciplina, e em teoria da elasticidade, eu também*

> *preciso muito de álgebra linear e também de cálculo vetorial, então ações de gradiente, divergente, funções de várias variáveis, funções com campo vetorial são as ferramentas que eu utilizo para ministrar essas disciplinas.*

A Álgebra Linear como disciplina do curso “morreu”, no entanto, uma pequena mostra dos seus temas, ficou na ementa de Matemática Aplicada à Engenharia I, como “Matrizes”, colocada ao final, de forma isolada e desconexa. Quanto aos demais temas aos quais o professor PE5 se referiu (cálculo vetorial, gradiente, divergente, funções de várias variáveis), fazem parte de Matemática Aplicada à Engenharia II, conforme pode ser visto no Anexo A.

Quanto aos nichos de limite de uma função propriamente ditos, que foram explorados nas perguntas QE2, relativa às funcionalidades desse objeto com as disciplinas do curso, a maioria dos professores respondeu, de princípio que nada ou quase nada, mas alguns, em seguida destacaram algumas de suas importâncias, como por exemplo:

> PE_4 - *Eu acho que o limite é pouco utilizado. No curso, nós usamos o limite basicamente pra entender derivada, (...) em alguns poucos momentos, não mais que dois ou três a gente usa o conceito de limite pra explicar pro aluno o que acontece quando uma função tende para um determinado valor.*
> PE_5 – (...) *aí a gente teve que entrar no conceito de limite porque tinha alguns requisitos matemáticos pra existência dessa função e aí a gente falou quais eram os requisitos, e aí a gente abordou o conceito de limite.*
> PE6 – (...) *eu pouco trabalho com limites, a parte de cálculo que eu adoto, que eu trabalho, é o cálculo mais simples, então eu tenho pouco contato com limite.*
> PE7 – (...) *Eu entendo, a principal aplicação de limite seria a própria definição do conceito de derivada e de integrais. (...) especificamente sobre limites, todas às vezes que nós vamos desenvolver equações diferenciais a partir do que governa um determinado problema de análise funcional, a partir do estudo entre pontos que estão próximos ou afastados, digamos de uma distância delta x, essas equações diferencias são obtidas fazendo-se o limite, é quando esse elemento delta x tende a zero então eu, particularmente nas minhas disciplinas, uso isso várias vezes durante o semestre.*

Quanto à relevância e indispensabilidade do tema, as opiniões foram contrastantes, no sentido de que o mesmo seria irrelevante, mas, no entanto, se faz indispensável o seu ensino, opinião essa última de 100% dos entrevistados. Respondendo ao primeiro e segundo desses questionamentos, por exemplo, um mesmo professor responde:

> PE$_3$ - *Não. A gente não utiliza limite em si, mas a gente utiliza as coisas futuras, mais avançadas, mas o limite em si não, ele é mais assunto básico mesmo para um melhor entendimento dos assuntos futuros, mas nós não integramos o limite na engenharia, trabalhamos mais com derivada e integral.*
>
> *PE$_3$* – *(...) seria vergonhoso ter um aluno de Engenharia Civil que não saiba limite, ou que pelo menos o que significa, então não que ele seja indispensável, mas também não precisa dar toda atenção que os matemáticos dão, é o que eu, a gente vê aqui e inclusive nós estamos tentando corrigir e não colocar matemático, mas engenheiro civil que trabalha com matemática, que existem muitos, pra dar aula para os engenheiros porque aí tem uma forma de abordagem diferente.*
>
> PE$_4$ – *(...) Assim entre zero e cem, acredito que cinco por cento. (...) Não, nunca, quase nunca, mesmo no curso de pós-graduação, mestrado, doutorado, docentes pouco usam limites, o que se utiliza o conceito para entender um pouco derivada, porque que uma função tem um valor em um ponto.*
>
> *PE$_4$ - É indispensável, eu ensinaria, eu ensino limite, às vezes falta professor aqui, aí a gente vai para sala de aula ensinar matemática, é o jeito né? E eu mesmo ensino limite, quando faltam professores, eu preciso desse conceito no curso, a gente precisa, agora não se usa no dia a dia.*

Outros posicionamentos foram similares a esses, o que nos faz concluir, que, de um modo geral, para os professores engenheiros, temos que: o tema limite de uma função não tem muitas funcionalidades nas suas praxeologias didáticas, servindo apenas para justificar os demais componentes do Cálculo Diferencial e Integral, no entanto, para esses mesmo docentes, ele é dito indispensável como um saber a ser ensinado. No nosso entendimento, esses docentes querem dizer a nós que, em suas práticas, limite tem nichos, mas que não os daquele objeto matemático que a eles, e aos alunos, se apresenta no CDI.

A distinção de ecossistemas de ensino, mesmo não sabendo dessa terminologia, foi identificada por professores não engenheiros que lecionam/lecionaram CDI, tanto para o curso de licenciatura em Matemática, quanto para o de Engenharia Civil, pois dos quatorze entrevistados, treze afirmaram que há diferenças entre ensinar limite para alunos desses cursos, as quais destacamos em algumas respostas:

> *PM$_1$: Sim. Na Engenharia não há necessidades do rigor matemático, a noção intuitiva é mais importante.*
>
> *PM$_4$: Os cursos de Engenharia primam por aplicações. No curso Matemática o enfoque é mais teórico.*

> *PM_7: Os alunos da Matemática parecem que se preocupam mais com os Limites devido os aspectos de demonstração. Enquanto que os alunos das Engenharias se preocupam mais com as aplicações.*
>
> *PM_{12}: Para a Engenharia, importa é a aplicação e na Matemática, importa o conceito, demonstrações e aplicações.*
>
> *PM_{14}: Em cursos de Matemática temos que dar certa ênfase ao processo de funcionamento das técnicas empregadas (isto é, as demonstrações), já em Engenharias damos mais ênfase às aplicações.*

Quanto às referências bibliográficas, sete concluíram que devem ser as mesmas dos cursos de Licenciatura em Matemática e de Engenharia, enquanto cinco disseram que não. Dos que disseram que deveriam ser distintas, apenas três professores indicaram quais seriam:

> PM_1: *Não. Engenharia – Geraldo Ávila e Licenciatura em Matemática – Guidorizzi.*
>
> PM_2: *Não. Para a Licenciatura uso o Guidorizzi, e para a Engenharia Anton J Howard.*
>
> PM_{12}: *Não necessariamente, pois para as Engenharias usamos livros que tenham aplicações como o "Leithold" e livros da coleção "Schaum".*

Além dessas respostas, tivemos de outros, como por exemplo, do professor PM_{12} disse que "não necessariamente" e PM_4 ao responder que "*Muitas vezes os livros utilizados são diferentes. Inclusive nas referências requeridas nos programas das disciplinas"*, quer dizer, junto com as ementas.

Especificamente quanto aos nichos de limite no ensino em engenharia, cinco professores disseram que utilizam inicialmente a forma intuitiva, o que se caracteriza como nicho tecnológico, e depois o rigor matemático, que seria nicho teórico. Cinco disseram que utilizam ostensivos gráficos, sendo que um deles disse que, para tal, lança mão de recursos computacionais. Os restantes dividiram-se entre: evolução do conceito, aspectos formais (nicho teórico), início por taxa de variação, motivações gráficas e algébricas (nicho tecnológico); e demonstrações e aplicações (nichos teórico e tecnológico).

A terceira comunidade docente que entrevistamos foi a dos engenheiros que lecionam Cálculo Diferencial e Integral aos cursos de engenharia da UFPA, conforme já relatado. Esse professor além de ser engenheiro de formação, realizou mestrado em cálculo numérico de estrutura, nunca ensinou para cursos de Licenciatura em Matemática, e, na UFPA, ministra Cálculos I e II para a FEE

(Faculdades de Engenharia Elétrica), para a FEM (Faculdade de Engenharia Mecânica), para a FEQ (Faculdade de Engenharia Química) e FAESA (Faculdade de Engenharia Sanitária), além de Matemática Aplicada à Engenharia I e II para a FEC (Faculdade de Engenharia Civil).

Apesar de não lecionar para Licenciatura em Matemática, acredita que há diferença entre o lecionar cálculo ali e para engenharia, já que, segundo o mesmo, no ensino de engenharia tem que se ter foco nos conceitos:

> *Você tem que ter uma sensibilidade, em cada uma das coisas, o que significa uma derivada, uma integral em termos de taxa de variação, em termos de tudo que pode ser trabalhado em engenharia. Trabalho vetores que é uma parte muito boa que pode ser trabalhada na Engenharia Civil, por exemplo, como momentos, momentos fletores. Vetores é o torque da matemática para a engenharia. Acho que até mesmo o linguajar é diferente, eu acho que não precisa tanto formalismo matemático, demonstrações, teoremas, eu volto mais para o entendimento.*

A bibliografia básica que utiliza são as obras de Leitold, Munen, e Guidorizzi, mas não os exige, disponibilizando aos alunos, em seu site, suas notas de aula e exercícios. Observamos, que via de regra, esses livros constam das referências dos PPC dos cursos em que o professor ensina, e que são os mesmos livros utilizados quando ensinamos para Licenciatura em Matemática.

Declarou que inicia o curso fazendo uma revisão de função, domínio de função, gráfico, pois acredita que isso é a grande dificuldade e que prejudica todo o restante do curso, “*porque eles não entendem o que é uma função, o que é a imagem, eles não visualizam um gráfico, não entendem nada de um gráfico*”, depois ensina limite, que “*depende muito dessa interpretação, dessa concepção, o que é um caos, depois é derivadas e depois integral*”.

Como declaramos antes, tivemos uma oportunidade, de ensinarmos Matemática Aplicada à Engenharia I para o curso de Engenharia Civil, e, em razão da redução do tempo de ensino, optamos por inverter a sequência antecipando o tema derivadas em relação a limite de uma função, o que nos permitiu, além da otimização do tempo, nos cálculos de limite, quando necessário e possível, utilizar a Regra de L´hospital. Além disso, como também perguntamos aos professores de CDI não engenheiros, fizemos a mesma pergunta ao professor:

- É possível ensinar derivada antes de limite?

Sua resposta foi:

- *Não, porque a definição de derivadas depende de limites*”.

As praxeologias do professor de cálculo engenheiro parecem não diferir daquelas que nos relataram os professores de CDI não engenheiros, quando dos 14 (quatorze) entrevistados 9 (nove) também responderam que não, e dos cinco que responderam que é possível ensinar derivada sem o conhecimento de limite, houve ressalvas em todas as respostas, como por exemplo:

> *PM7: É possível, porém, creio que não é o mais indicado, não sei se isso advém da minha formação (matemático). Nos próprios livros didáticos as aplicações da derivada é dado maior ênfase do que a sua própria “origem”.*
>
> *PM12: Sim, porém, alguns resultados de derivadas são melhor compreendidos, utilizando Limites.*

Quanto à utilização de tarefas de limites em situações práticas da engenharia, respondeu:

> *Prático? Eu trabalho muito mais na compreensão dos gráficos, na leitura dos gráficos, o comportamento da função, das assíntotas. (...) Mas eu acho importante o limite nessa compreensão. O engenheiro trabalha com gráficos e tabelas, ele às vezes só consegue falar desenhando, essa visualização, esse sentimento do gráfico, é o que ele quer dizer.*

O docente apresentou dois aspectos importantes de nossa pesquisa, o primeiro diz respeito às funcionalidades do objeto limite nos demais *habitat* do curso, o que também é solicitado pelos professores engenheiros (PE), mas que as praxeologias do professor de cálculo engenheiro parecem desconhecer. A segunda diz respeito aos *nichos* do objeto pesquisado, ao falar de assíntotas, que é uma funcionalidade de limite no próprio CDI, e também o relato aos ostensivos que se apresentam em gráficos e tabelas.

O professor declarou não adotar a definição formal de limite com épsilons e deltas, usando o que chama de noção intuitiva: “*Porque... não passo por esses cálculos, só dou uma noção desses intervalinhos, do delta mais do épsilon, em termos de aproximação, e trabalho isso graficamente*”. Posicionamento esse que nos aponta numa ênfase com base nos nichos tecnológicos em detrimento dos nichos teóricos. Quando perguntamos aos professores de Matemática não engenheiros se era possível ensinar limite sem a definição estática de Cauchy-

Weierstrass, 13 (treze) responderam que sim, mas sempre com ressalvas, e apenas um disse que “é complicado”.

Nos afirmou que sua visão não é a de mostrar, demonstrar, mas de aplicar naquilo que acredita, e que

> *O melhor do cálculo é quando eu provo que a área do círculo é πr^2. No ensino fundamental, você não pode demonstrar porque a área do círculo é essa. Mas isso não quer dizer que você não vai aplicar essa fórmula no ensino fundamental, o aluno aprende, decora e vai adiante. Nós aqui demonstramos porque o resultado é esse, o que não significa dizer que você vai ter que calcular a área do círculo com integrais toda vez que precisar, você também aprende e decora e usa, mas o que você deve compreender é que o uso de integrais ajuda a calcular diversas áreas.*

Uma das decorrências da Reforma do Cálculo foi o estabelecimento de que computadores deveriam ser utilizados no ensino dessa disciplina. A ementa de Matemática Aplicada À Engenharia I prescreve o uso de computadores:

> Introdução ao aplicativo Maple ou similar. Breves noções de Funções e seus Gráficos. Limites. Derivadas e suas aplicações. Integrais Indefinidas. Integrais Definidas e suas aplicações. Técnicas de Integração. Integrais Impróprias. Operações com Matrizes. (UFPA, 2009, ANEXO I, p. 1)

Além disso, no corpo dessa Ementa, encontramos a ratificação de que se deve utilizar um aplicativo computacional, sendo apresentada a seguinte organização didática:

> Observação: Em cada tópico abordado deverão ser explicados: 1) Os conceitos sobre o conteúdo; 2) Exemplos Conceituais; 3) Exercícios de fixação; 4) Utilização do aplicativo Maple ou similar como ferramenta auxiliar na resolução de problemas.(Idem)

Essa observação determina a utilização de *softwares*, e as referências indicam ainda “Manuais do Usuário de Aplicativos de Matemática”, mas, na pesquisa que realizamos com os professores de Matemática que lecionam/lecionaram Cálculo no Curso de Engenharia Civil, engenheiros ou não, nos apontou uma situação instigante, pois ao perguntarmos:

- Utiliza algum aplicativo computacional para ensinar limite? Se sim, desde quando?

A comunidade dos professores de matemática não engenheiros respondeu conforme o quadro 16:

QUADRO 16 – Utilização de software por professores de Cálculo

Utiliza	Quantidade	Software	Há quanto tempo
Não	4	-	-
Sim	10	06 Mapple, 04 outros aplicativos: (Muppad, Maxima, Mathematica, e Geogebra)	2 desde 2009 2 desde 2010 6 passaram a utilizar "recentemente"

Fonte: Pesquisa realizada pelo autor.

O engenheiro professor de Cálculo por sua vez, posicionou-se:

- Eu não uso, quando muito comento a respeito de que o aluno pode ter uma melhor visão dos gráficos em programas computacionais, mas não faço uso."[82]

As pesquisas que fizemos apontam que, de um modo geral, a prescrição de utilizar computadores, mas que não é contemplada nas praxeologias de ensino dos professores. Quando tivemos oportunidade de lecionar Matemática Aplicada à Engenharia, nos dirigimos à Coordenação do Curso e perguntamos onde seriam as práticas com utilização dos aplicativos, e fomos informados que seria na própria sala, no desenvolvimento das aulas e que, na ementa, não havia previsão de aulas práticas. Em duas situações procedemos de forma monumentalista, apresentando aos alunos os aplicativos WInplot e Derive[83], e os endereços digitais onde poderiam obter esses programas, o primeiro livre e o segundo para um período de testes.

Antes de emitirmos nossas considerações finais, relembramos nossos percursos com incursões no curso de Engenharia Civil da UFPA, estudando seu Projeto Pedagógico, entrevistando docentes, revisitando práticas de estudos e de laboratórios, que nos permitiram propor um modelo de análise ecológica do ensino de limite de uma função de uma variável nesses *habitat,* desse ecossistema. O modelo nos oportunizou analisar essas instituições, além das obras que são adotadas no ensino de Cálculo nos ambientes ecológicos considerados. Essas

[82] A experiência de professor vivida nesse curso nos mostrou que a principal dificuldade que se tem para utilizar recursos computacionais é quanto à alocação de carga horária em Laboratórios de Informática, uma vez que a disciplina Matemática Aplicada à Engenharia, tida como teórica, não prevê essa alocação de Laboratório, que normalmente estão ocupados por alunos e professores de outras disciplinas que têm a prática em Laboratório de Informática prevista.
[83] Derive™6 The Mathematical Assistant for your PC. 2000 years of mathematical knowledge. Da Texas Instruments Incorporated. Copyrigth 1988-2003.

investidas nos forneceram compreensões que agora nos permitem emitir, não uma, mas diversas conclusões desta pesquisa.

CONSIDERAÇÕES E PERSPECTIVAS

Esta pesquisa, na qual investigamos os modos de “vida”, as funcionalidades, *os nichos*, do objeto matemático limite de uma função real de uma variável real, nos *habitat* de ensino do ecossistema de Engenharia Civil da Universidade Federal do Pará (UFPA), foi motivada a partir de um problema concreto de um professor, que, ao iniciar seu período letivo, se deparou com a atribuição de lecionar uma disciplina, que seria similar a Cálculo I, que ensinara antes, mas que teria mudado de nome para Matemática Aplicada à Engenharia I, mas tivera o tempo de ensino reduzido à metade, problemática essa que se constituiu nossa questão inicial e motivadora.

Após o estabelecimento de nossa questão, a problematizamos passando vê-la como o problema inicial P_0, optando em seguida por uma abordagem predominantemente ecológica da problemática vivenciada, em razão das características reveladas pelos processos transpositivos institucionais que se processavam, mas sem desconsiderar as dimensões epistemológica e econômica-institucional. Os pressupostos teóricos considerados foram da Teoria Antropológica do Didático (TAD), com enfoque ecológico, relativamente às formas de vida que se evidenciam nas praxeologias, denominadas de *nichos*, do objeto limite nos *habitat* do ecossistema de ensino considerado.

Investigar os *nichos*, que se denunciam pelas práticas do objeto matemático por nós pesquisado, nos *habitat* em um ecossistema de ensino de Engenharia Civil, constituiu-se um considerável objetivo específico desta pesquisa, pois para verificar a dispensabilidade, ou não, como objetivo maior, precisávamos identificar quais seriam suas razões de ali estar, e caso não existissem, estaríamos na eminência de um quadro de óbito ecológico de um determinado saber no *locus* em que “vive”, e, nesse caso, o ensino de limite de uma função no ambiente pesquisado seria uma das justificativas para a drástica redução do tempo de ensino ocorrido na transformação de Cálculo I para Matemática Aplicada à Engenharia I.

A sequência de apresentação de nossas conclusões, tomará por base os níveis de determinação estabelecidos pela Teoria Antropológica do Didático, iniciando pelos mais altos, ditos genéricos, que vêm da civilização à pedagogia, e são aqueles que, de um modo geral, não contam com a mediação direta do professor comum, aquele cujas tarefas principais são preparar, ministrar e avaliar atividades relativas aos saberes da disciplina sob sua responsabilidade, mas que ao ter de lecioná-la, se defronta com o quê foi por esses níveis estipulado. Depois passaremos aos mais específicos, do âmbito do professor: disciplina, área, setor, tema, questão. Para terminar retomaremos a problemática inicial que motivou essa pesquisa, tentando responder aos nossos questionamentos relativos à dispensabilidade, ou não, do ensino do tema que pesquisamos no ecossistema de ensino de Engenharia Civil da UFPA, tecermos ainda comentários gerais que entendemos pertinentes e indicaremos possibilidades de futuros trabalhos de investigação.

A civilização ocidental, a qual pertencemos, procura impor suas formas de pensar e agir às sociedades ditas “menores”, então, nossa instituição pesquisada (curso de bacharelado em Engenharia Civil da UFPA), que se situa em Belém-Pará, Estado da região amazônica, do norte do Brasil, que é um pais dessa civilização, teria essas características, e não negamos que, em alguns aspectos, talvez, até as tenha, principalmente quando ela olha para o seu entorno. Podemos parafrasear George Orwell quando disse, em “A revolução dos bichos”, que uns seriam mais iguais que outros, dizendo que há civilizações ocidentais mais ocidentais que a nossa.

Nós ocidentais, em termos de modelo de desenvolvimento científico e tecnológico a ser seguido, temos nos países ditos do primeiro mundo nossos principais referenciais, o que é até certo ponto é encarado com normalidade, pois eles detêm mais tecnologias, inclusive educacionais, tendo, por essas razões, maior poder de disseminar suas culturas. Falamos disso para nos referir ao mais alto nível da escala de determinação didática que é a civilização, e uma das possíveis formas de sua atuação na problemática que detalhamos nesta pesquisa.

No final dos anos 80 (oitenta) do século passado, a civilização ocidental empreendeu esforços de modo a fazer frente aos avanços dos orientais, que apesar da pouca produtividade acadêmica em termos de artigos publicados, tinham a competência de transformar em tecnologia as produções científicas que dispunham, em sua maioria produzidas no ocidente, coisa que os ocidentais não conseguiam fazer. O objetivo maior do ocidente seria o domínio da produção tecnológica, para a independência política e econômica dos seus países, tendo como medida não mais a geração de artigos científicos, mas a capacidade de transformá-los em produtos e serviços, o que os fortaleceria frente ao acirramento da competitividade internacional. Foi nesse contexto que se deu o movimento denominado Reforma do Cálculo, com consequências não somente nos Estados Unidos da América, como também nos demais países, como o Brasil.

A Reforma do Cálculo, que tivemos oportunidade de descrever suscintamente neste trabalho, segundo a qual o ensino de Cálculo Diferencial e Integral deveria se dar de forma atraente, a partir de problemas reais, fazendo uso de equipamentos de informática, calculadoras gráficas e computadores, explorando as formas de representações verbais, algébrica, gráfica e numérica para as funções envolvidas. Esse movimento teve na sua principal conferência, também relatada nesta pesquisa, a moderação do principal autor do denominado “Livro de *Harvard”* do Consórcio de Cálculo daquela universidade, coordenando as atividades relativas ao tema “Conteúdos”, que deveriam ser adotados a partir de então. Após o lançamento, a difusão da Reforma, nos Estados Unidos e no exterior, foi intensa, principalmente em relação às obras que dela adviriam, como a que acabamos de nos referir, e que também analisamos nesta pesquisa.

Para que a Reforma se efetivasse na academia, era necessário mais do que divulgação dos seus produtos, e nos cursos de Engenharia do Brasil, ela se deu a partir de um conjunto de proposições de modificações dos currículos de cursos de Engenharia, por iniciativas, principalmente, do Governo Federal com o Programa de Desenvolvimento das Engenharias (PRODENGE), com verbas da agência Financiadora de Estudos e Projetos (FINEP), e apoio do CNPq (Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico), SESU (Secretaria de Educação Superior) e CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior), visando tornar o Brasil mais competitivo, por meio de seus Engenheiros e empresas.

Na efetivação dessas transformações, que o ensino de Cálculo estaria passando (agravada pelos altos índices de reprovação e de evasão escolar), as iniciativas advindas da civilização mexeram, também, com o segundo nível de determinação didática que é a sociedade, no caso dos cursos de Engenharia Civil, representada, principalmente, pelo sistema constituído pelo Conselho Federal de Engenharia e Agronomia (CONFEA) e pelos Conselho Regional de Engenharia e Agronomia (CREA), órgãos normativos e fiscalizadores da profissão de engenheiro, mas que também têm atribuições sobre a formação acadêmica do futuro profissional, pois, não somente são ouvidos, como têm responsabilidades quanto às modificações curriculares dos cursos, e atuam para que os saberes acadêmicos venham ao encontro do que se espera do futuro profissional.

A sociedade espera que a academia lhe apresente um Engenheiro Civil capacitado, que, além do diploma recebido ao colar grau na Universidade, tenha registro profissional junto ao CREA de sua região. O sistema CONFEA/CREA estabelece características do perfil do egresso dos cursos de graduação, em conexão com as estruturas curriculares e os Projetos Pedagógicos dos Cursos, que, por sua vez, devem estar em consonância com as Diretrizes Curriculares Nacionais (DCN), portanto, toda e qualquer modificação curricular de cursos de engenharia, tem que se coadunar com o estabelecido pelos conselhos reguladores, e aquelas que se processaram no curso de Engenharia Civil da UFPA, ao que sabemos, não sofreram restrições desses órgãos, certamente por não contrariarem às DCN e a resolução 1010/2005/CONFEA.

O saber sábio nas práticas da engenharia, além da origem dita científica ou acadêmica, também provém de órgãos reguladores como representantes da sociedade, que, no nosso país, tem como referência a Associação Brasileira de Normas Técnicas (ABNT). Todas as práticas dos engenheiros, e as que são consideradas na sua formação acadêmica, são balizadas pelas NBR (Normas Brasileiras), somente para se ter ideia do que citamos a publicação do Sindicato da Construção Civil de Minas Gerais com as descrições das normas brasileiras para edificações, onde encontramos: total de 881 (oitocentas e oitenta e uma), sendo 13 (treze) de viabilidade, contratação e gestão; 496 de projetos e especificação de materiais e sistemas construtivos; 64 (sessenta e quatro) de execução e serviços; 306 (trezentos e seis) de controle tecnológico e 2 (duas) de manutenção. Essas instituições foram também por nós visitadas, por se revestirem de fundamental importância nos processos transpositivos dos saberes da engenharia.

A Faculdade de Engenharia Civil da UFPA, subunidade do Instituto de Tecnologia da UFPA, campus de Belém, é, entre os níveis de determinação didática, a escola. Essa subunidade do Instituto de Tecnologia da UFPA que também já foi descrita por nós, quanto à sua história e corpos docentes, administrativos e estudantil, é o ambiente que designamos como ecossistema de ensino de engenharia, em que se situam as comunidades docentes, os *habitat* de saberes com os seus respectivos nichos, e cujos professores e dirigentes têm a responsabilidade de elaborar e acompanhar o desenvolvimento do Projeto Pedagógico de Curso (PPC).

O PPC, por sua vez, se reveste na pedagogia dos cursos de graduação, e o estudo que realizamos no de Engenharia Civil da UFPA, também se deu no corpo desse documento e das ementas das disciplinas que a ele se anexam, acompanhadas das referências bibliográficas. Além disso as entrevistas que realizamos com engenheiros professores do curso nos permitiram uma melhor compreensão desse instrumento normativo, e das transformações que nele se processaram.

As modificações que foram realizadas no PPC de Engenharia Civil, pressionadas pelas situações supra expostas, determinaram que um conjunto de seis disciplinas com Matemática, que totalizavam 420 (quatrocentos e vinte) horas semestrais, fosse substituído por outro de apenas duas, que somam 102 (cento e duas) horas por semestre de ensino. Ao longo de nossa pesquisa, percebemos que não há alguns incômodos, para além do professor de Matemática, em relação à essas modificações, e entendemos que o momento pode ser propício para uma rediscussão do Projeto Pedagógico.

O Regimento Geral da UFPA, estabelece que os PPC podem ser revistos, em decorrência de avaliações internas ou externas, devendo o Conselho da Faculdade promover as alterações que julgar necessárias, encaminhar à Congregação do Instituto e essa, após aprovação, direciona ao Conselho Superior de Ensino Pesquisa e Extensão da universidade para que as modificações se constituam formalmente e se processem. Essa situação já se faz necessária, pelo que tratamos em relação ao nosso objeto de pesquisa, e também porque no PPC vigente, ainda consta que o Departamento de Matemática do Instituto de Ciências Exatas e Naturais é responsável pelas disciplinas Matemática Aplicada a Engenharia I e II, como pode ser visto no Anexo A, o que não é verídico há algum tempo.

Além do aspecto formal, seria interessante que dirigentes e demais participantes do Conselho da Faculdade de Engenharia Civil da UFPA tomassem conhecimento do que professores que ali labutam têm a dizer a respeito do PPC, principalmente no tocante às alterações pelas quais passaram as disciplinas com matemática, como constatamos nas falas de professores engenheiros e apresentamos nesta pesquisa, principalmente no que diz respeito à redução do tempo de ensino de Cálculo, e à supressão de Álgebra Linear.

O tempo de ensino de todas as disciplinas e atividades práticas do currículo do Curso de Bacharelado em Engenharia Civil da UFPA é de três aulas de 50 minutos por semana (Anexo B), então reveste-se de razoável complexidade solicitar que o tempo destinado ao ensino de Matemática Aplicada à Engenharia I, e de Matemática Aplicada à Engenharia II sejam maiores, o que dirigentes e professores dessas e das demais disciplinas, se junte e apresentem praxeologias próprias que possam no tempo destinado serem vivenciadas pelos alunos, de modo a favorecer o curso como um todo.

Apesar das transformações que motivaram nossa pesquisa, ressaltamos, que, em relação aos conhecimentos disciplinares, constatamos que, via de regra, as praxeologias de outrora são as mesmas de hoje, a Matemática pela Matemática, seguindo soberana e impoluta, mas completamente desarticulada das demais disciplinas do curso. É preciso olharmos as disciplinas, procurando ver o ecossistema de ensino de Engenharia como um todo, compreendendo que toda prática com matemática tem um quê de matemática. Conforme constatamos no bojo desta pesquisa, algumas vezes, objetos são criados utilizando a matemática para justificar certas práticas da engenharia, que os egressos do curso irão utilizar, portanto os conhecimentos dessa ciência se fazem importantes.

Verificamos que a validação dos modelos matemático das práticas da Engenharia, e nela utilizados, não depende do formalismo matemático, mas do sucesso alcançado nas suas praxeologias. A Engenharia, que se constrói a partir da realidade para atender o mundo real, e nessa, alguns modelos não têm justificação matemática, e outros até têm, mas se consolidaram sem essa legitimação, firmando-se por intermédio de experimentos empíricos, sem a preocupação em atender às condições normativas da Matemática, pois essas não comportam a incerteza de resultados advindos de experimentações, ou que se utilizem de ostensivos gráficos e numéricos em suas formalizações.

No ecossistema de ensino que pesquisamos comumente as praxeologias conduzem em outras direções, a incerteza pode ser um caminho a considerar e os valores, não são precisos como no universo matemático, por exemplo, a aceleração da gravidade pode ser considerada 10 m/s^2 (ao invés de 9,80665 m/s^2), o número pi pode valer 3 (em vez de 3,1415..), a polegada medir 2,5 cm (seria 2,54 cm), dentre outras aproximações corriqueiras, pois o mais importante ali é a funcionalidade dos objetos nas práticas, ou seja, para que servem, e, se com esses valores funcionarem bem, obtendo os resultados ditos “esperados”, então não há porque não adotá-los.

O Cálculo conforma-se na área da análise matemática, que, no ensino de engenharia, também tem suas especificidades, que a difere em relação à Análise Real, a qual o CDI habitualmente se submete, havendo, portanto, a necessidade de termos discursos distintos para as distintas práticas. As práticas da área da Análise Real, consideram ínfimos, supremos, infinitos, limites, continuidade, derivadas, integrais, existência e unicidade de solução, dentre outros, como saberes firmados e estabelecidos, sendo que alguns desses também são imprescindíveis no ensino de Engenharia, em razão das praxeologias em que “vivem”, é o caso, por exemplo, da derivada e da integral. Outros objetos ali se fazem transparentes, e, sendo assumidos, não são questionados, como a continuidade, mas ainda há aqueles, que devido às funcionalidades diversas nos *habitat* de ensino que se apresentam, podem ser alvos de questionamentos, como a existência e unicidade de soluções, que no habitat da Análise se reveste de grande funcionalidade, face as relações biunívocas que permitem aos objetos serem invertíveis, no de ensino de engenharia nem tanto, pois nesse uma problemática tem que ter solução, e se existirem várias é melhor ainda, pois é possível otimizá-las.

O infinito é um objeto matemático cuja epistemologia foi forjada por calorosos debates, demandando vários séculos até se firmar como o saber que hoje é reconhecido. Se na Matemática o infinito carrega consigo marcas desse período, no ensino de Engenharia ele se apresenta de uma forma mais simplificada, quase banalizada, quando, por exemplo, o professor em um ensaio vira para os alunos e diz que “o experimento atingiu o limite da máquina”, ou, que a “partir dali o comportamento será assintótico, estacionando em torno de 0,85”, ou ainda, “não adianta colocar mais água, porque o material perde sua plasticidade”, para nós, situações como essas parecem denotar que nas práticas do ensino de engenharia o infinito se expõe, parece palpável, e se apresenta “bem ali”, no sentido de distância em suas praxeologias, e não na conotação de número que se apresenta na Análise Real, portanto são olhares diferentes de para um mesmo objeto matemático.

Função é outro objeto do saber matemático que parece não ser o mesmo no ensino de engenharia, em que, muitas vezes, temos função em ato, idealizada a partir de experimentos, com equipamentos produzindo funções, alguns deles além de registrarem os dados, até os transformam em ostensivos tabulares e gráficos, mas não produzem uma função com modelo algébrico. Há, portanto, diferenças entre essas práticas, desses diferentes *habitat*, havendo, também, a necessidade da existência de discursos distintos para essas distintas “análises”.

O Cálculo Diferencial e Integral (CDI), habitat natural do objeto matemático por nós pesquisado, comumente é ensinado de forma indistinta tanto no ecossistema da instituição produtora desse conjunto de saberes, quanto naquelas que deles se utilizam. Esse é mais um dos problemas que professor de Matemática se depara, quando, não sabendo das praxeologias próprias do ambiente em que ministrará suas aulas, as planeja e ministra de forma indistinta, por não conhecer em que práticas, e com que modos de “vida”, os objetos, matemáticos se apresentam naquele desconhecido ecossistema de ensino.

Quando um professor engenheiro nos diz que estão tentando corrigir distorções, não colocando mais matemáticos, porém engenheiros, para lecionar Cálculo, sob o pretexto de uma abordagem diferente, entendemos que querem nos dizer que o Cálculo Diferencial e Integral, necessário às suas práticas, difere daquele que comumente é prescrito a todos indistintamente e que também se apresenta nos livros didáticos.

O *modus operandi* do ensino de engenharia é outro também, em relação ao CDI da instituição produtora da Matemática. Como exemplos do que estamos dizendo, temos que na engenharia derivada é variação, sendo comum professores em outros *habitat* de ensino, diferentes do de Cálculo, dizerem: “envolveu variação, envolve derivadas”. A instituição matemática também pode considerar assim, mas é muito mais comum ter suas práticas voltadas para o coeficiente angular da reta tangente. Situação similar ocorre com o gradiente de uma função, que é pouco explorado no seu habitat natural como a direção de crescimento máximo, que é a forma como mais se apresenta nas tarefas do ensino de engenharia, porque é disso que outras praxeologias do curso se utilizam.

Ainda no ensino de cálculo para o curso que consideramos, o estudo do conjunto dos números reais reveste-se de fundamental importância, não, simplesmente, como resultante da união dos racionais com os irracionais, mas como um conjunto realizado pelas práticas, cujo domínio se faz necessário. Da mesma forma temos o cálculo de raízes de equações, ou zero de funções, um problema importante que se apresenta ao resolvermos problemas próprios da engenharia, como por exemplo, na problemática de um canal a céu aberto aqui apresentada, e que sendo próprio do CDI, em que limite de uma função, tinha *nichos*, foi deixado de lado nas praxeologias didáticas.

Como comumente no ensino de engenharia, e na profissão de engenheiro, funções de uma variável, a princípio, não se apresentam de forma clara, implícitas nem explicitamente, mas se constituem a partir de pontos discretos, em nossa opinião, essa forma ostensiva poderia assim se apresentar nos cálculos de limite, derivada e integral, para alunos desse curso. Isso não é nenhuma novidade, pois há tratamento numérico para o Cálculo, o problema esbarra, no entanto, na falta de praxeologias didáticas que contemplem esse modo de ensinar, além, naturalmente, de que elas também se fazem ausentes nas obras tidas como de referência. Exemplificando o que dissemos, temos que professores, e livros também, que ao apresentarem a integral definida, ou de Riemann, comumente desenham vários retângulos entre a curva e o eixo das abcissas, e indicam que a integral é o limite de uma soma infinita de áreas, mas raramente calculam a soma de algumas dessas áreas, começando com dois retângulos, depois quatro, oito, para depois comparar com o resultado encontrado. A ausência dessas praxeologias decorre do pouco espaço reservado ao pensamento empírico, experimental, e que nos livros inexiste.

Quando os engenheiros professores dizem que não precisam de limite, que sua utilização nas demais disciplinas do curso é quase nenhuma, para em seguida anunciarem-se contra a sua retirada no ensino de CDI, é porque o que eles veem é um saber dissociado de suas práticas. As ementas de algumas disciplinas, assim como as Normas, explicitamente destacam a palavra “Limite”, nos falam de um objeto desconectado daquele objeto matemático, que, por meio de praxeologias didáticas é ensinado na disciplina que trata do Cálculo Diferencial e Integral. Reverter essa situação não é tarefa elementar, pois o conjunto das praxis dos professores engenheiros não lhes permite outras formas de pensar.

Os modelos epistemológicos que se expressam nos livros didáticos, no nosso entendimento, também não atendem aos interesses do ensino da engenharia como instituição utilizadora de limite de uma função. As obras que indicam que esse saber pode ser deixado de lado, ou jogado para depois, aos que mais se interessarem, não conseguem vê-lo em outras praxeologias além dos discursos de que a derivada e a integral são justificadas por limite, e o tem como objeto unificador do cálculo. De modo contrário, há obras que exploram exaustivamente esse tema, mas que também não levam “em conta em que práticas da engenharia ele se faz importante”, “que respostas a essa prática social o objeto matemático fornece”, ou seja, quais os seus *nichos* nos *habitat* do ecossistema de ensino de engenharia. Quanto a esses livros, acreditamos que seus propósitos não seriam mesmo esses, posto que são genéricos, não especializados no ensino de engenharia, comumente declarando que servem aos estudos tanto do ecossistema de ensino de Matemática quanto do de Matemática, mas que, via de regra, se configuram como uma introdução à Análise Real da instituição produtora desses saberes.

Limite no ensino de engenharia, como instituição utilizadora da matemática, é algo que não pode ser ultrapassado, contrariamente ao universo matemático que o tem como aproximação que deve igualar-se por ambos os lados. O infinito, como já dito, parece não está muito longe, é quase alcançável, o que no da matemática é absurdo. Formalizações de limite com épsilons e deltas, ou até em tarefas para “mostrar”, “justificar”, “provar” o resultado de um certo limite, como corriqueiramente ocorre na instituição produtora do saber matemático, não fazem o menor sentido no ensino de engenharia, nesse o que importa é calcular o limite, se o seu resultado já é conhecido, a descoberta de seu valor perde funcionalidade na instituição utilizadora.

A questão em que situamos o tema limite de uma função em nossa pesquisa, diz respeito à continuidade de uma função em um ponto, na qual a tarefa calcular o limite é solicitada. No ensino de engenharia, a continuidade das funções envolvidas em suas práticas, se faz transparente e inquestionada, não tão restritiva como a que se apresenta no ecossistema de ensino de Matemática, ela, quando necessária é assumida, e quando não se faz presente, e incomoda, tratamentos diferenciados são evocados para superar os entraves, como no caso da ocorrência de gases rarefeitos, a quem nos referimos nesta pesquisa.

O ensino de continuidade de funções algumas vezes, independente do ecossistema em que se realize, comumente é feito de forma monumentalista, as vezes como justificativa para o ensino de limite, as vezes o contrário, isso fica bem claro quando tratamos das propriedades de funções contínuas, as primeiras que dizem respeito à álgebra operatória, são expostas “se duas funções são contínuas a soma, a diferença, o produto... será uma função contínua”, e aquela decorrência de maior aplicabilidade, que serve para identificar intervalos, em que existem zeros de função, mas, que por ser a última das propriedades, ou por ser decorrente do teorema do valor intermediário que é ensinado à parte, às vezes não é sequer apresentada para “visitação”.

No Cálculo Diferencial e Integral as construções de modelos necessitam da continuidade, o que não ocorre, necessariamente, no ensino de engenharia, pois ele se encaminha mais na direção do que apresentamos como “continuidade física”, em que termos “próximos”, seriam considerados indistinguíveis e um conjunto desses levaria às condições que, comumente, são requisitadas para a continuidade matemática. Em razão disso o ensino da continuidade de funções para estudantes de engenharia, quando não negligenciado, pode se dar apenas pelo uso de ostensivos gráficos, como forma de “mostrar” essas situações, lembrando que em ambos os casos devemos evidenciar suas decorrências e consequências em situações práticas.

Com a compreensão que passamos ter nesta pesquisa, retornamos a nossa solução remediativa, em relação ao nosso P_0, em que, ao ministrarmos a disciplina Matemática Aplicada à Engenharia I, quando o tempo de ensino não comportava ensinar todos os temas e questões antes contemplados em Cálculo I, o ensino de limite de uma função foi postergado, em favor da prioridade dada ao de derivada, sendo depois ensinado de forma breve, prescritiva e monumentalista. Tal iniciativa se fez estratégica como forma de poder ministrar os demais temas, derivada e integral, que, nós, e os livros didáticos também, julgamos mais importantes, o que foi ratificado pelas entrevistas de professores. Acreditamos que, apesar de ter sido uma solução para a situação que se apresentava, as praxeologias didáticas poderiam ser melhoradas, se tivéssemos considerado as práticas em que os objetos matemáticos do Cálculo se inserem no Curso de Engenhara Civil.

Não apresentamos um modelo epistemológico de referência a ser adotado no ensino de Matemática Aplicada à Engenharia I, o que seria contraditório com os resultados desta pesquisa, quando o que investigamos e expusemos apontam que muito dificilmente um professor de matemática sozinho, mesmo que também seja Engenheiro Civil, tenha condições de fazê-lo. Esse pode ser um trabalho de uma outra pesquisa, que partindo desta, e reunindo-se com equipes multidisciplinares de professores do ecossistema de ensino considerado, pode ter seu trabalho facilitado.

No que pese o exposto, mas esperando contribuir com pesquisas futuras, deixamos alguns indicativos que podem ser considerados numa próxima empreitada, entendendo que, se um novo modelo epistemológico de ensino for proposto, ele deverá, fundamentalmente, fazer jus ao nome da disciplina "Matemática Aplicada à Engenharia", em que os temas do Cálculo Diferencial e Integral se apresentem nas praxeologias próprias da engenharia, e, dessa forma, o ensino de número reais, funções, limite, derivada e integral devem se dar em serviço, ou seja, inseridos nas demais práticas do curso. Particularmente em relação ao objeto matemático por nós pesquisado, o qual, tendo as práticas como referências, deve ter:

a) como princípio básico que as ditas ciências básicas, em que as disciplinas com matemática se inserem no ensino de engenharia, não devem se ater muito nos aspectos formais dos temas e questões, demonstrar, provar, verificar, isso fica para outros ecossistemas, no de engenharia importa a aplicabilidade prática;
b) os ensinos de limite, derivada e integral a partir das praxeologias da engenharia, em que a matemática numérica e o comportamento assintótico de funções sejam explorados;
c) sua sequência de ensino semelhante à da constituição epistemológica de limite enquanto saber, no sentido de ser ministrado após o tema derivada, quando esse último se constituiria técnica na determinação do limite, em situações em que a regra de L´Hospital se adequar;
d) nas resoluções das tarefas, a mobilização dos ostensivos, textual, algébrico, numéricos, gráficos e empíricos, com maior ênfase nos três últimos, uma vez que são com esses que, comumente, o egresso do curso vai se deparar na sua vida profissional.

Nossa pesquisa centrou-se sobre as funcionalidades de limite de uma função, procurando identificar seus *nichos* nos *habitat* de ensino do ecossistema de engenharia, ou seja, suas formas de "vida", suas funcionalidades, em que se insere.

Quanto à abrangência do modelo de análise didática ecológica por nós apresentado, sem perda de generalidades, pode adaptar-se a outras situações em que se identifiquem os ecossistemas de ensino, os *habitat* dos saberes envolvidos e os seus respectivos *nichos*, sendo esses últimos os de maiores particularidades.

O texto que produzimos mostrou diversas situações em que esse objeto “vive” sim no ambiente considerado, mas que não necessariamente da mesma forma da instituição produtora desse saber. Embora limite seja evocado para justificar uma técnica ou tecnologia da engenharia, quando se constitui no que denominamos de *nicho* teórico, a sua razão de ser nesse ecossistema de ensino se dá mais efetivamente a partir das praxeologias que comumente se manifestam a partir de técnicas de resolução de tarefas, em situações práticas, quando o seu cálculo é solicitado, no que denominamos de *nicho* tecnológico, se exibindo, nessas ocasiões, por ostensivos textuais, algébricos, gráficos, numéricos e empíricos.

REFERÊNCIAS

AGUIAR, Victor Rafael Laurenciano. MEDEIROS, Claudio Melquiades. **Entrevistas Na Pesquisa Social:** O relato de um grupo de foco nas Licenciaturas. IX Congresso Nacional de Educação (EDUCERE) e III Encontro Sul Brasileiro de Psicopedagogia. Paraná, 2009.

ALMEIDA, M. da Conceição de. **Complexidade, saberes científicos, saberes da tradição**. São Paulo-SP: Editora Livraria da Física, 2010.

ALMOULOUD, Ag S. **Fundamentos da didática da matemática**. Curitiba-PR: Editora UFPR, 2010.

AMABIS, José Mariano. MARTHO, Gilberto Rodrigues. Biologia das Populações: Genética, Evolução e Ecologia. São Paulo: Editora Moderna 1994.

AMADEI, Flávio Luiz. **O infinito:** um obstáculo no estudo de Matemática. Dissertação de Mestrado. PUC-São Paulo, 2005.

ANTON, Howard. BIVENS, Irl. DAVIS, Stephen. **Cálculo** volume I. Tradução de ***Calculus****: early Transcendetals Single and Multivariable*. 8ª edição. Porto Alegre – RS: Bookman Companhia Editora, 2007.

ARTAUD, Michèle. ***Introduction à l'approche écologique du didactique*** – *L'écologie des organisations mathématiques et didactiques.* Actes de la *IXième* École d'été de Didactique des Mathématiques. Caen: ARDM&IUFM, 1998. pp. 101-139.

ARTIGUE, Michèle. ***La enseñanza de los princípios del cálculo:*** *problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos*. En Artigue, M.; Douady, R.; Moreno, L. y Gómez, P. (editor). Ingeniería didáctica en educación matemática, p. 97-140. Bogotá: Una Empresa Docente. Grupo Editorial Iberoamérica, 1995.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6118**. Disponível em: http://www.abnt.org.br. Acesso em 04 abril 2013.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 5738**. Disponível em: http://www.abnt.org.br. Acesso em 05 março 2012.

ASTOLFI, Jean-Pierre. DEVELAY, Michel. **A didática das Ciências.** Tradução Magda S.S. Fonseca. 4ª edição. São Paulo: Papirus, 1995.

ÁVILA, Geraldo Severo de Souza. **CÁLCULO** das funções de uma variável. Volume 1. 7ª Edição. Rio de Janeiro: LTC, 2008.

ÁVILA, Geraldo Severo de Souza. **Várias Faces da Matemática**: tópicos para licenciatura e leitura em geral. 2. Ed. São Paulo: Blucher, 2010.

BACHELARD, G. **A formação do espírito científico***. Tradução de: La Formation de l'esprit scientifique : contribution à une psychanalyse de la connaissance.* Rio de Janeiro: Ed. Contraponto, 2003.

BALDINO, R. R. **Cálculo Infinitesimal:** passado ou futuro? Blumenau-SC: Temas e Debates, v. 6, p. 5-21, 1995.

BARBÉ, J. BOSCH, M, ESPINOZA, L e GASCÓN, J. ***Didactic Restrictions on the Teacher's Practice:*** *The case of Limits of Functions in Spanish High Schools. Educational Studies in Mathematics*, nº 59 (1-3): pp. 235–268, 2005.

BARDI, Jason Socrates. A guerra do Cálculo. 2ª Edição. Rio de Janeiro-RJ: Editora Record, 2010.

BARON, Margaret E. BOS, H. J. M. **Curso de História da Matemática:** Newton e Leibniz. Brasília: Editora Universidade de Brasília, 1985.

BARQUERO, B., BOSCH, M. e GASCÓN, J. ***Ecología de la modelización matemática:*** *Restricciones transpositivas en las instituciones universitárias.* communication au 2e congrès TAD, Uzès 2007.

BARQUERO, B., BOSCH, M. e GASCÓN, J. ***Ecología de la Modelización Matemática:*** *los Recorridos de Estudio e Investigación* - III International Conference on the Anthropological Theory of the Didactic, 2010.

BARQUERO, B., BOSCH, M. e GASCÓN, J. ***Las tres dimensiones del problema didáctico de la modelización matemática.*** Educação Matemática e Pesquisa, São Paulo, v.15, n.1, pp.1-28, 2013

BARROS, Rodolfo Miranda de. **Processo de ensino e aprendizagem de cálculo diferencial e integral por meio de metáforas e recursos multimídia**. Cobeng, 2006.

BARROS, Rodolfo Miranda de. **Um Estudo sobre o Poder das Metáforas e dos Recursos Multimídia no Processo de Ensino e Aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral**. Tese de Doutorado. Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação, UNICAMP, Campinas-SP, 2008.

BARUFI, M. C. B. **A construção/negociação de significados no curso universitário inicial de Cálculo Diferencial e Integral**. Tese de Doutorado, FE-USP, São Paulo, 1999.

BASTOS, Paulo Sérgio dos Santos. **Estruturas de Concreto I** - Fundamentos de Concreto Armado. Notas de aula. UNESP – Faculdade de Engenharia, Curso de Engenharia Civil, UNESP - Campus de Bauru/SP, 2006

BERKELEY, George. ***The Analyst* or a *Discourse Addressed to an Infidel Mathematician*.** Disponível em http://www.maths.tcd.ie/pub/HistMath/People/Berkeley/Analyst/Analyst.html). Acesso em 25 de junho de 2012.

BESSA DE MENEZES, Marcus. CÂMARA DOS SANTOS, Marcelo. ***O Saber escolar na perspectiva da Teoria Antropológica do didático***. 2º SIPEMAT – 2008.

BEZERRA, Manoel Jairo. **Didática da Matemática.** Ministério da Educação e Cultura. Rio de Janeiro: CADES, 1962.

BICUDO, Maria Aparecida Viggiani. KLÜBER, Tiago Emanuel. **A questão de pesquisa sob a perspectiva da atitude fenomenológica de investigação.** Conjectura: Filosofia e Educação. Caxias do Sul, v. 18, n. 3, p. 24-40, set./dez. 2013.

BICUDO, Sérgio. **CoLab**: Ecologia do Conhecimento em Ambientes de Convergência Digital. Tese de Doutorado, PUC-SP, São Paulo, 2007.

BOSCH, Marianna. ***La dimensión ostensiva en la actividad matemática el caso de proporcionalidad*.** Tese de Doutorado, Universitat Autònoma de Barcelona, Espanha, 1994.

BOSCH, Marianna; GASCON, Josep. ***Las prácticas docentes del profesor de matemáticas****. XIème École d'Été de Didactique des Mathématiques*. Agosto de 2001.

BOSCH, Marianna. CHEVALLARD, Yves e GASCÓN, Josep. ***Science or magic?*** *The use of models and theories in didactics of mathematics. Proceedings of the Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education,* 2006.

BOSCH, Marianna*.* ***Un Punto de Vista Antropológico****: la evolución de los "instrumentos de representación" en la actividad matemática.* Cuarto Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática. pp. 15-28. Espanha, 2001.

BOS, H. J. M. **Curso de História da Matemática:** origens e desenvolvimento do Cálculo. Brasília: Editora Universidade de Brasília, 1985.

BOS, H. J. M. **Curso de História da Matemática**: origens e desenvolvimento do Cálculo. Brasília: Editora Universidade de Brasília, 1985.

BOULOS, Paulo. **Introdução ao Cálculo.** Volume I. São Paulo: Edgard Blücher, 1974.

BOURDIEU, Pierre. **Coisas ditas**. São Paulo: Editora Brasiliense, 1987.

BOURDIEU, Pierre. **O poder simbólico**. Rio de Janeiro: Editora Bertand Brasil, 1989.

BOURDIEU, Pierre. WACQUANT, Loic. ***Una invitación a la sociología reflexiva***. Buenos Aires: Siglo XXI Editores Argentina, 2005.

BOURDIEU, Pierre. **Razões Práticas**. Sobre a teoria da ação. Campinas-SP: Papirus, 2008.

BOYER, Carl B. **Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula:** Cálculo. 3ª Edição. SP: Ed Atual, 1993.

BOYER, Carl B. **História da Matemática**. 3ª Edição. SP: Ed Edgard Blucher, 2010.

BRASIL 2002. **Diretrizes Curriculares Nacionais dos Cursos de Engenharia**.

BROLEZZI, Antonio Carlos. **A Tensão entre o Discreto e o Contínuo na História da Matemática e no Ensino de Matemática**. Tese de Doutorado, Faculdade de Educação da USP–SP, São Paulo, 1996.

BROUSSEAU, G. ***Ingéniere didactique****. D'un problème à l'étude à priori d'une situation didactique*. Deuxième École d'Été de Didactique des mathématiques, Olivet, 1982.

BROUSSEAU, G. ***Les obstacles épistémologiques, problèmes et ingénierie didactique.*** In Brousseau, G. **Théorie des situations didactiques** (pp. 115-160). Grenoble, France: La Pensée Sauvage, 1998.

CABRAL, Tânia Cristina B, U, Roberto R. **Cálculo Infinitesimal para um curso de Engenharia**. Revista de Ensino de Engenharia, V. 25, nº 1, p 3-16, 2006.

CARMARENA, p. ***Las funciones generalizadas en engenería.*** *Construcción de una alternativa didáctica.* Thèse de doctorat. Cinvestav-IPN. México, 1999.

CARVALHO, Tadeu Fernandes de. ***Sobre o Cálculo Diferencial Para-consistente de da Costa****. Tese de Doutorado. Instituto de Filosofia e Ciências Humanas da UNICAMP, Campinas-SP, 2004.*

CASTELA, Corine. **Travailler avec, travailler sur la notion de praxéologie mathématique pour décrire les besoins d´apprentissage ignorés par les intitutions d´enseignement**. Recherches en Didactique des Mathématiques, 28(2), 138-182, Grenoble, France: La Pensée Sauvage, 2008a.

CASTELA, Corine. **La noción de praxeología**: um instrumento de la Teoria Antropológica de lo Didáctico posiblemente útil para la socioepistemologia? Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. Vol 22, pp. 1195 – 1206, México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, 2008b.

CASTELA, Corine. ROMO VÁSQUES, Avenilde. **Des Mathematiques a L´automatique***:* etude des effets de transposition sur la transformee de Laplace dans la formation des ingénieurs. Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol 31/1, nº 91, pp. 79-130. Grenoble, France: La Pensée Sauvage, 2011.

CELESTINO, M. R. **Concepções sobre limites:** imbricações entre obstáculos manifestos por alunos do ensino superior. Tese de Doutorado, PUC-SP, São Paulo, 2008.

CHEVALLARD, Y. **Conceitos Fundamentais da Didática:** as perspectivas trazidas por uma abordagem antropológica. In Didáctica das Matemáticas. Direção de BRUN, Jean., Lisboa: Editora Piaget, 1996, P 115-152.

CHEVALLARD, Y. ***Familière et problématique, la figure du professeur****. Recherches en Didactique des Mathématiques.* Vol 17/3, p. 17-54. Grenoble, France: La Pensée Sauvage, 1997.

CHEVALLARD, Y. ***Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathematiques:*** *L´approche antropologique. Recherches en Didactique des Mathématiques,* Vol 19, nº 2, pp. 221-266. Grenoble, France: La Pensée Sauvage, 1999.

CHEVALLARD, Y. ***Le développement actuel de la TAD:*** *pistes et jalons.* IIe congrès international sur la TAD qui se tiendra à Uzès du 31 octobre au 3 novembre 2007.

CHEVALLARD, Y. ***La TAD face au professeur de mathématiques.*** UMR ADEF. Toulouse - França, 2009.

CHEVALLARD, Y. ***La Transposición didáctica:*** *Del saber sábio al saber enseñado.* Terceira Edição. Buenos Aires: Editora Aique Educación, 2013.

COCIAN, Luis Fernando Espinosa. **Engenharia***:* uma breve introdução. R.S: COCIAN LFE, 2011. Disponível em http://engeducs.files.wordpress.com /2011/08/engenharia-uma-breve-introduc3a7c3a3o-cocian-l-f-e.pdf.

COIMBRA, Oswaldo. **A aula militar do historiador Antonio Baena.** Engenheiros–Militares em Belém nos anos de 1799 a 1819. Premio Literário Barão de Guajará da Academia Paraense de Letras. Belém-Pará: Editora Imprensa Oficial do Estado do Pará, 2003.

CORNU, B. ***Apprentissage de la notion de limite:*** *conceptions et obstacles.* Tese de doutorado. Universidade de Grenoble - França, 1983.

COUTO, H. H. do. **Ecolingüistica:** estudos das relações entre língua e meio ambiente. Brasília: Thesaurus, 2007.

DALCIN, Gabrieli Bortoli. **Ensaios dos Materiais.** Uri Santo Angelo. Santo Ângelo-RJ, 2007

D'AMORE, B. **Elementos de didática da matemática.** São Paulo: Livraria da Física, 2007.

DASSIE, Bruno Alves. **Os primeiros livros didáticos no Brasil denominados de *matemática*.** XIII CIAEM , Recife-PE 2011.

DINIZ-EHRHARDT, Maria Aparecida. LOPES, Vera Lucia da Rocha. PEDROSO, Lucas Garcia. **Métodos sem derivadas para minimização irrestrita**. Notas em Matemática Aplicada. XXIII CNMAC, 2010. Disponível em http://www.sbmac.org.br/boletim/arquivos2010/Volume-49.pdf Acesso em 10 de janeiro de 2015.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática.** Tradução Hygino H Domingues. 5ª Edição. São Paulo-SP: Editora da UNICAMP, 2011.

FILHO, Olavo Baptista. **O homem e a ecologia:** atualidades sobre problemas brasileiros. São Paulo: Pioneira Manuais de estudos, 1977.

FLOOD, Raymond. WILSON, Robin. **Os grandes Matemáticos**: As descobertas e a propagação do conhecimento através das vidas dos grandes matemáticos. São Paulo: M.Books, 2013.

FONSECA BON, Cecílio. ***Discontinuidades Matemáticas Y Didácticas entre la Enseñanza Secundaria Y la Enseñanza Universitária***. Tesis Doctoral Escuela Universitaria de Ingeniería Técnica Industrial de Vigo, Espanha, 2004.

FREITAS, Henrique, OLIVEIRA, Mírian, SACOL, Amarolina Zanela, MOSCAROLA, Jean. **O método de pesquisa survey**. Revista de administração V. 35, p. 105,112, São Paulo, setembro, 2000.

GALILEI, GALILEU. **Duas novas ciências**. Tradução: L. Mariconda e Pablo Rúben Mariconda. 2. ed. São Paulo: Nova Stella Editorial/Instituto Italiano di Cultura, 1988.

GALLARDA, Lilian J, SILVA, Sophia E. E, ROSSI, Suely M. M. **A evolução do cálculo através da história**. Espírito Santo: Editora da UFES, 1999.

GASCÓN, Josep. ***Incidencia del modelo epistemológico de las matemáticas sobre las prácticas docentes***. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (RELIME), 4(2), 129-159, 2001.

GASCÓN, Josep. ***Las tres dimensiones fundamentales de un problema didáctico:*** *El caso del álgebra elemental. Revista Latinoamericana de investigación en Matemática Educativa*, pp. 203-231, 2011

GEDIN-IEMCI-UFPA. Apresentação do GEDIM. Disponível em : http://www.ppgecm.ufpa.br/index.php/grupos-de-pesquisa/607-grupo-de-pesquisas-em-didatica-da-matematica - Acesso em 27 de janeiro de 2013

GOMES, Gisela Hernandes. **A Matemática em um curso de Engenharia**: vivenciando culturas. Tese de Doutorado. São Paulo: PUC, 2009

GRECO, Jisela Aparecida Santanna. **Solos** – Conceitos e Ensaios da Mecânica dos Solos. Classificação dos Solos para fins Rodoviários. Nota de Aula de Materiais para

Pavimentação. SD. Disponível em http://etg.ufmg.br/~jisela/pagina/Notas%20de%20aula%20solos.pdf. Acesso em abril de 2014.

GUERRA, Renato Borges, FERNANDES, José Augusto Nunes. Eco**logia do Saber:** O Ensino de Limites em um Curso de Engenharia. COBENGE, 2012.

GUERRA, Rita Catarina Correa. **Aprendizagem do conceito de limite.** Dissertação de Mestrado. Departamento de Educação, Universidade de Aveiro, Portugal, 2012.

GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. **Um curso de Cálculo**: VOl. 1. 2ª edição. São Paulo: LTC, 1990.

GUSSI, João Carlos. **O Ensino da Matemática no Brasil:** Análise dos Programas de Ensino do Colégio Pedro II (1837 A 1931). Dissertação de Mestrado. Universidade Metodista de Piracicaba, São Paulo, 2011.

HALLETT, Deborah. GLEASON, Andrew M, McCALLUM, William G, et al. **Calculus:** single variable. 6ª Edição. USA: WILEY, 2012.

HALLETT, Deborah Hughes. ***What Have We Learned from Calculus Reform?*** The Road to Conceptual Understanding. Arizona USA: University of Arizona, s.d. Disponível em http://math.arizona.edu/~dhh/NOVA/calculus-conceptual-understanding.pdf. Acesso em 10 de outubro de 2013.

HANNAN, M., FREEMAN, J. ***The Population Ecology of Organizations.*** *American Journal Sociology,* Vol 82, Issue 5(mar. 1977) 929-964. Disponível em https://www2.bc.edu/~jonescq/mb851/Apr9/ HannanFreeman_AJS_ 1977.pdf . Acesso em 16 de março de 2011.

HOFE, Rudolf vom. ***Epistemological Problems With The Limit Concept:*** *A Case Study on Communication and Argumentation within a computer-based Learning Environment*. Bellaria – Itália: European Research in Mathematics Education III, 2003.

JORDAAN, Tertia. ***Misconceptions of the Limit concept in a Mathematics Course for Engineering students****.* Dissertação de Mestrado. University of South Africa, África do Sul, 2005.

JUTER, K. ***Limits of Functions- University Students:*** *Concept Development.*. Tese de Doutorado. Department of Mathematics, Luleå University of Technology. USA, 2006.

KLEIN, David. ROSEN, Jerry *.* ***Calculus Reform****: For the $Millions*. USA: USA: Notices of the American Mathematical Society, Vol 44, number 10, 1997.

KNILL, Oliver. ***On the Harvard Consortium Calculus****.* Disponível em http://www.math.harvard.edu/~knill///pedagogy/harvardcalculus/index.html. Acesso em 20 de abril de 2013

LIMA, Elon Lages et al. ***Exame de Textos****: Análise de livros de Matemática para o Ensino Médio. Rio de Janeiro: VITAE-IMPA-SBM, 2001.*

LIMA, Elon Lages. ***Análise Real****. Volume 1, Funções de uma variável. Coleção Matemática Universitária, Décima Edição. Rio de Janeiro: Editora IMPA, 2009.*

LINDEMAN, R. L. ***The Trophic-Dynamic Aspect of Ecology. Ecology***, Vol. 23, No. 4. (Oct., 1942), pp. 399-417. Disponível em http://karljaspers.org/files/lindeman.pdf

LIRA, Antonio da Fonseca de. **O processo de construção do conceito matemático de limite pelo aprendiz com utilização de objetos digitais.** Tese de Doutorado. Centro Interdisciplinar de novas tecnologias na educação, Universidade Federal do Rio grande do Sul, 2008.

LIU, Po-Hung. LIN, Ching-Ching. CHEN, Tung-Shyan et al. **A Collaborative Model for Calculus Reform** - A Preliminary Report. Proceedings of the Mathematics Education into the 21st Century Project, p. 372-375, 2009.

LOUREIRO**,** Eduardo. **Introdução à Mecânica dos Fluidos.** Apresentação nota de aula. Disponível em http://eduloureiro.com.br/index_arquivos/mfaula1.pdf. Acesso em dezembro de 2014.

LUCENA, Luis Castelliano de. **Um Breve Histórico do IME** - Instituto Militar de Engenharia. Rio de Janeiro, 2005. Disponível em http://www.ime.eb.br/arquivos/Noticia/historicoIME.pdf . Acesso em 15 de janeiro de 2014.

MACEDO, Edison Flavio. **Sistema CONFEA/CREAs**: Compromissos permanentes e transformações necessárias. Florianópolis: Recorde, 1998.

MANNING, Rob. ***"Reform"*** *Calculus*. A presentation for ED 220: Changing Pedagogies in Math and Science Education. Pennsylvania – USA: Math Department Haverford College, 2004.

MARTINAND, Jean-Louis. ***Connaître et transformer la matiére.*** *Collection Exploration Recherches em Sciences de l´education. New York*: Ed Peter Lang, 1986.

MARTINAND, Jean-Louis. ***La Question de la Référence en Didactique du Curriculum***. Investigações em Ensino de Ciências – V 8(2), pp. 125-130, RS-Brasil, 2003.

MELLO, J. C. B. DE., MELLO, M. H. C. S. DE., FERNANDES, A. J. S. **Mudanças no ensino de Cálculo I:** histórico e Perspectivas. COBENGE 2001.

MERCIER Alain. ***La transposition des objets d'enseignement et la définition de l'espace didactique, en mathématiques.*** Revue Française de Pédagogie, 141, 135-171, 2002

MIGUEL, Antonio, MENDES, Iran Abreu. ***Mobilizing histories in mathematics teacher education:*** *memories, social practices, and discursive games*. In: ZDM Mathematics Education (2010) 42:381–392.

MIRANDA, Gustavo Alexandre de. **Um Livro de Cálculo Intuitivo para Engenheiros.** Bolema, Rio Claro (SP), v. 23, nº 35B, p. 435 a 452, abril 2010

MOREIRA, Antônio Flávio Barbosa**. Multiculturalismo, currículo e formação de professores.** In: MOREIRA, Antônio Flávio Barbosa (Org.). **Currículo:** políticas e práticas. Campinas: Papirus, 1999.

MORIN, Edgar**. Introdução ao pensamento complexo**. Porto Alegre-R.S: Editora Meridional/Sulina. 2006.

MUNEM, M.A; FOULIS, David J. **CÁLCULO** – VOL. 1 e 2. Rio de Janeiro: Editora Guanabara Dois, 1978.

MURPHY, Lisa. **Reviewing Reformed Calculus**. San Antonio, Texas, USA: Trinity University, Mathematics Technical Report #S45, 2006.

MUMFORD, David. **Calculus Reform** — For the Millions. USA: Notices of the American Mathematical Society, Vol 44, Number 5,1997

MURPHY, Lisa. **Reviewing Reformed Calculus**. USA: Trinity University Mathematics, San Antonio, Texas, 2006

NAKAO, Osvaldo. **O que é engenharia**. 2008, apresentação disponível em file:///C:/Users/jos%C3%A9augusto/Documents/TESE/Engenharia/Engenharia_e_engenheiro.pdf. Acesso em março 2014

NASCIMENTO, J. L. **Uma abordagem para o estudo de limites com uso de pré-conceitos do cálculo diferencial e integral**, COBENGE 2001.

NETO, Caminha Muniz Neto. **Tópicos de Matemática Elementar** – Vol. 3. Introdução à Análise. SBM, RJ, 2012.

ODUM, E. P. **Ecologia**. Biblioteca Pioneira de Biologia Moderna, São Paulo, 1977.

ODUM, E. P. **Ecologia**. Rio de Janeiro: Editora Guanabara, 1988.

ODUM, E. P ***Great ideas in Ecology for the 1990’s***. *Bioscience*, 42: 542-545, 1992.

OLMOS, Silvia Elena Ibarra. ***La transposición Didáctica del Álgebra em las Ingenierías****. El caso de los sistemas de Ecuaciones Lineales. Tesis de Doctorado em Matemática Educativa.* Instituto Politécnico Nacioal, México, 2008.

PAIS, L C. **Didática da matemática:** uma análise da influência francesa. 2ª Edição. Belo Horizonte - MG: Ed. Autêntica, 2005.

PAIS, Luiz Carlos. **Transposição Didática** in Educação Matemática – Uma (nova) introdução. p. 11 a 48. São Paulo, Editora Edu, 2010.

PEÇANHA DE ALMEIDA, Geraldo. **Transposição Didática:** por onde começar. São Paulo – S.P: Editora Cortez, 2007.

PERRENOUD, Philippe. **Práticas Pedagógicas Profissão docente e formação: Perspectivas sociológicas**. Lisboa-Portugal: Publicações Don Quixote, 1997.

PINHEIRO, Libânio M. MUZARDO, Cassiane D. SANTOS, Santos, Sandro P., CATOIA, Thiago. CATOIA, Bruna. **Estruturas de Concreto** – Capítulo 2.Disponível em:http://www.set.eesc.usp.br/mdidatico/concreto/Textos/02%20Concreto.pdf

POINCARÉ, Henri. ***La ciência Y la hipótesis***. Terceira Edição. Madri-Espanha: Editora Esparsa-Calpe, 1963.

POINCARÉ, Henri. **O valor da ciência**. Rio de Janeiro: Contraponto, 1995.

POINCARÉ, Henri. **Ensaios Fundamentais**. Rio de Janeiro: Contraponto, 2008.

PURVES, William. K. et al. **Vida**: A Ciência da Biologia. Sexta edição. São Paulo: Artmed, 2002.

RAJOSON, L. ***L'analyse écologique des conditions et des contraintes dans l'étude des phénomènes de transposition didactique****: trois études de cãs.* Tese de doutorado, Université d'Aix-Marseille 2, Marseille, 1988.

REIS, Frederico da Silva. **A tensão entre rigor e intuição no ensino de análise:** a visão de professores-pesquisadores e autores de livros didáticos. Tese de Doutorado. UNICAMP – SP, 2001.

REMAUD, P. ***Une historie de la genèse de l’automatique en France 1850-1950****. De l’école de la régulation française au début du XXe siéle l’émergence de* *l'automatique en France après la seconde guerre mondiale. Thèse de doctorat*, Université de Poitiers, 2004.

REZENDE, W. M. **O ensino de Cálculo:** dificuldades de natureza epistemológica. In MACHADO, N.; CUNHA, M.(org). Coleção Ensaios Transversais: Linguagem, Conhecimento, Ação – ensaios de epistemologia e didática. P. 313 a 336. São Paulo-SP: Escrituras Editora, 2003.

RICHIT, Andriceli. **Tecnologias digitais e formação continuada do professor de cálculo diferencial e integral:** interações em um ambiente virtual de aprendizagem. Curitiba-PR: XI ENEM, 2013

RICIERI, Aguinaldo Prandini. **Cálculo sem Limites**: A Matemática dos destrutivos. São Paulo – SP: Edições Prandiano, 1992.

RICIERI, Aguinaldo Prandini. **O Ensino de Cálculo segundo Ricieri**. São Paulo: Ed Barthô, S.P, s.d.

RODRIGUES, Chang Kuo. **O teorema central de limites:** Um estudo ecológico do saber e do didático. Tese de Doutoramento. PUC-SP, 2009.

ROONEY, Anne. **A história da Matemática**. São Paulo – SP: M. Books do Brasil Editora Ltda., 2012.

ROQUE, Tatiana. **História da matemática:** uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Editora Zahar, 2012.

ROSSINI, Renata. Saberes docentes sobre o tema função: uma investigação das praxeologias. Tese de doutorado, PUC-SP, São Paulo, 2006.

SACHS, I. **Terra dos Homens** – Ecodesenvolvimento – Crescer sem Destruir. São Paulo: Edições Vértice, 1986.

SACCO, W. F. OLIVEIRA, C.R. PEREIRA, C. M. ***Two stochastic optimization algorithms applied to nuclear reactor core design****. Progress in Nuclear Energy*, 48(6):525–539, 2006

SACCO, W.F. HENDERSON, N. RIOS-COELHO, A. ALI, M. PEREIRA, C.. ***Differential evolution algorithms applied to nuclear reactor core design****. Annals of Nuclear Energy*, 36(8):1093–1099, 2009.

SACCO, W. F. RIOS-COELHO, A. HENDERSON, N. ***A Metropolis algorithm combined with Hooke-Jeeves local search method applied to global optimization.*** *Applied Mathematics and Computation*, 217(2):843–853, 2010.

SACCO, W. F, HENDERSON, N. BARUFATTI, E. ALI, M. ***Calculation of critical points of thermodynamic mixtures with differential evolution algorithms.*** *Industrial and Engineering Chemistry Research*, 49(4):1872–1882, 2010.

SANTOS, Boaventura de Sousa. **A universidade no século XXI:** Por uma reforma democrática e emancipatória da Universidade. São Paulo: Editora Cortez, 2005.

SANTOS, Boaventura de Sousa. **A filosofia à venda, a douta ignorância e a aposta de Pascal.** Coimbra – Portugal: Revista Crítica de Ciências Sociais nº 80, p. 11-43, Março 2008.

SANTOS, Maria Bethânia Sardeiro dos. **Um olhar para o conceito de Limite**: constituição, apresentação e percepção de professores e alunos sobre o seu ensino e aprendizado. Tese de doutorado, PUC-SP, São Paulo, 2013.

SIERPINSKA, A. ***Obstacles épistémologiques relatifs à la notion de limites**,* RDM. Vol 6, n. 1, Pg. 5 a 67. 1985.

SILVA, Carlos Eduardo Lins da. **Ecologia enquanto fator político,** in Ecologia e Sociedade. São Paulo: Editora Loyola, 1978.

SILVA, Clóvis Pereira da. **A Matemática no Brasil**: História do seu desenvolvimento. 3ª Edição. São Paulo – SP: Ed Edgard Blücler, 2003.

SILVA, Hilton Barbosa da. **COMPLEMENTOS DE MATERIAIS DA CONSTRUÇÃO CIVIL**. Apostila de CMCC. São Paulo: Unip, N.D, disponível em http://www.wcorpsa.com/arquivos/unip/6%C2%B0%20-%20Semestre/C-MCC/Apostila%20CMCC%20-%20Concretos%20e%20Argamassas-R0.pdf

SOARES, Flávia dos Santos, DASSIE, Bruno Alves e ROCHA, José Lourenço da. **Ensino de matemática no século XX** – da Reforma Francisco Campos à Matemática Moderna. Bragança Paulista- S.P: Revista Horizontes, v. 22, n. 1, p. 7-15, jan./jun. 2004**.**

SOLOW, Anita. ***Preparing for a New Calculus***: Conference Proceedings. New York – USA: The Mathematical Association of America – Notes Number 36, 1994.

SOUZA, Jorge Raimundo da Trindade. **Orientações e normas para elaboração de trabalhos acadêmicos**. Belém: Editora da UFPA, 2013.

STEWART, James. **CALCULUS**: early transcendentals. 6ª Edição. USA: THOMSON, 2008.

SWIATKIEWICZ, Olgierd. **Por que não uma abordagem praxeológica?!** In Análise Psicológica nº 4 (XV): 637-644. Lisboa, 1997.

TALL, David. ***Conflictis in learning of Real Numbers and Limits***. Mathematics Teaching, pp. 44-49. 1978

TALL, David. KATZ, Mikhail**. *A cognitive analysis of cauchy's conceptions of function, continuity, limit, and infinitesimal, with implications for teaching the calculus*.** Educational Studies in Mathematics. USA: Springer, 2014

TONNELLE, Jaques. ***Le monde clos de la factorisation au premier cycle.*** *Etudes en didactique des mathématiques*. Marseille-France: Collection IREM d'Aix-Marseille, 1979.

UFPA. **Resolução nº 3.902 de 21 de setembro de 2009.** Aprova o Projeto Pedagógico do Curso de Engenharia Civil.

VAZ, I do C., LAUDARES, J. B. **A abordagem do conceito de limite, derivada e integral por profesores em um curso de engenharia**. COBENGE 2011

VERÔNICA, Parra. OTERO, Maria Rita. ***Praxeologias Didáticas en la Universidad:*** *un estudio de caso relativo al Límite y Continuidad de funciones.* Campinas-SP: ZETETIKÉ, V.17, p. 151-189, 2009.

ZUCHI, Ivanete. **A Abordagem do conceito de Limite via sequência didática**: do ambiente lápis papel ao ambiente computacional. Tese de Doutorado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção, UFSC, Florianópolis – SC, 2005.

ZUCHI, Ivanete. GONÇALVES, Miriam B. I**nvestigação sobre os obstáculos de aprendizagem do conceito de Limite.** COMBENGE 2003.

APÊNDICE A: TERMO DE LIVRE DE CONSENTIMENTO LIVRE ESCLARECIDO

Título da pesquisa: **ECOLOGIA DO SABER: O ENSINO DE LIMITE EM UM CURSO DE ENGENHARIA**

Pesquisador responsável: José Augusto Nunes Fernandes

Instituição/Departamento: Instituto de Educação Científica e Matemática

Telefone do pesquisador para contato: 988794997

e-mail: jaugusto@ufpa.br

Local da coleta de dados:

Caro(a) Professor(a):

• O(A) Sr(a). está sendo convidado(a) a responder às perguntas deste questionamento de forma totalmente **voluntária**;

• Antes de concordar em participar desta pesquisa e responder às perguntas, é muito importante que você compreenda as informações e instruções contidas neste documento;

• O pesquisador deverá responder todas as suas dúvidas antes que Sr(a). se decida a participar;

• O(A) Sr(a). tem o direito de **desistir** de participar da pesquisa a qualquer momento, sem nenhuma penalidade.

Objetivo do estudo: obter informações históricas acerca do ensino no curso de engenharia civil.

Procedimentos. Sua participação nesta pesquisa semi estruturada consistirá em um diálogo com o pesquisador a respeito do assunto em foco. A entrevista será gravada e depois transcrita para fins de coleta de dados para a pesquisa.

Benefícios. Esta pesquisa trará maior conhecimento sobre o tema abordado, sem benefício direto para o senhor.

Riscos. A participação nesta pesquisa não lhe representará qualquer risco de ordem física ou psicológica.

Sigilo. As informações fornecidas por V.Sª serão confidenciais e de conhecimento apenas do pesquisador responsável e de seu orientador. Os sujeitos da pesquisa não serão identificados em nenhum momento, mesmo quando os resultados forem divulgados em qualquer forma.

Dados do pesquisado:
Nome:
Telefone para contato:
e-mail:

Belém XX de XXXXXXXXXXXX de XXXX.

Assinatura do professor pesquisador

Assinatura do professor pesquisador

APÊNDICE B: FOTOS DO ENSAIO COM CORPOS DE PROVA

Foto 1 – Entrada da Faculdade de Engenharia Civil e do seu Laboratório

Foto 2 – Corpos de prova a serem “ensaiados”

Foto 3 – Máquina para realização dos ensaios

Foto 4 – Operador e aluno realizando ensaio

Foto 5 – Alunos realizando ensaio

ANEXO A: EMENTAS DE MATEMÁTICA APLICADA À ENGENHARIA I E II

1. Disciplinas de Matemática

Disciplina Obrigatória: Matemática Aplicada à Engenharia 01			
CARGA HORÁRIA			
	Teórica	Prática	Total
Semanal	3	0	3
Semestral	51	0	51
Código: EN01197		Pré-requisitos:	Faculdade: De Matemática

EMENTA: Introdução ao aplicativo Maple ou similar. Breves noções de Funções e seus Gráficos. Limites. Derivada e suas aplicações. Integrais Indefinidas. Integrais Definidas e suas aplicações. Técnicas de Integração. Integrais Impróprias. Noções de Equações Diferenciais Ordinárias e suas aplicações na Engenharia. Operações com Matrizes.

Observação: Em cada tópico abordado deverão ser explicados: 1) Os conceitos sobre o conteúdo; 2) Exemplos Conceituais; 3) Exercícios de fixação; 4) Utilização do aplicativo Maple ou similar como ferramenta auxiliar na resolução de problemas.

BIBLIOGRAFIA:

1. Guidorizzi, Hamilton Luiz. **Um Curso de Cálculo**. Vol 1. Livros Técnicos e Científicos Editora S.A.
2. Ávila, Geraldo. **Cálculo I**. Livros Técnicos e Científicos Editora S.A.
3. Simmons, George F. **Cálculo com Geometria Analítica**. Vol 1. Editora McGraw-Hill Ltda.
4. Anton , Howard. **Cálculo um Novo Horizonte** (on line)
5. Andrade, Lenimar Nunes. **Introdução à Computação Algébrica com Maple**. SBM
6. THOMAS e FINNEY. **Cálculo e Geometria Analítica** - Vols. 2 e 3, Ao Livro Técnico e Científico Editora.
7. Santos, Ângela R & Bianchini, Waldecir. **Aprendendo Cálculo com Maple.** Livros Técnicos e Científicos Editora S.A
8. Manuais do Usuário de Aplicativos de Matemática. Maple ou similar como ferramenta auxiliar na resolução de problemas.

ANEXO B – DESENHO CURRICULAR DO CURSO DE BACHARELADO EM ENGENHARIA CIVIL DA UFPA

Bloco I	Bloco II	Bloco III	Bloco IV	Bloco V	Bloco VI	Bloco VII	Bloco VIII	Bloco IX	Bloco X
Matemática Aplicada à Engenharia 01 EN 01197 51/03	Matemática Aplicada à Engenharia 02 EN 01198 51/03	Introdução à Ciência e Engenharia dos TE 09004 51/03	Materiais de Construção Civil TE 09005 51/03	Tecnologia da Construção Civil 01 TE 09066 51/03	Concretos e Argamassas TE 09062 51/03	Estruturas de Concreto 02 TE 09037 51/03	Rodovias e Ferrovias TE 08087 51/03	Transporte Urbano TE 08088 51/03	Legislação e Ética TE 09076 51/03
Física Teórica Aplicada 01 EN 02152 51/03	Física Teórica Aplicada 02 EN 02153 51/03	Mecânica dos Sólidos 02 TE 09009 51/03	Mecânica dos Sólidos 03 TE 09010 51/03	Tecnologia da Construção Civil 02 TE 09067 51/03	Estruturas de Concreto 01 TE 09036 51/03	Estruturas de Madeira TE 09039 51/03	Pavimentação TE 08089 51/03	Transporte Aqüaviário TE 08091 51/03	Impactos Ambientais de Obras Civis 01 TE 09077 51/03
Química Teórica Aplicada EN 03124 51/03	*Física Experimental Aplicada 01* EN 02154 51/03	*Teoria das Estruturas 01* TE 09002 51/03	Teoria das Estruturas 02 TE 09003 51/03	Planejamento e Controle de Obras 01 TE 09069 51/03	Estruturas de Aço TE 09038 51/03	Fundações 01 TE 09055 51/03	Engenharia de Tráfego TE 08090 51/03	Hidrologia e Drenagem TE 03156 51/03	
Estatística Aplicada à Engenharia TE 09001 51/03	Química Experimental Aplicada 01 EN 03125 51/03	Noções de Arquitetura e Urbanismo TE 01071 51/03	Ensaios de Estruturas e Materiais TE 09007 51/03	Gerenciamento na Construção Civil TE 09070 51/03	Análise Computacional de Estruturas TE 09040 51/03	Fundações 02 TE 09056 51/03	Hidráulica Aplicada TE 03153 51/03	Sistemas Prediais Hidro-Sanitários TE 03155 51/03	
Desenho por Computador TE 07016 51/03	Desenho para Engenharia 01 TE 07017 51/03	Geologia de Engenharia TE 09006 51/03	Sistemas de Transportes TE 09011 51/03	Orçamento de Obras TE 09071 51/03	Mecânica dos Solos 01 TE 09053 51/03	Eletricidade Aplicada TE 05227 51/03	Sistemas de Saneamento Ambiental TE 03154 51/03		
Metodologia de Trabalhos Acadêmicos TE 09012 51/03	Mecânica dos Sólidos 01 TE 09008 51/03	Topografia Básica TE 08085 51/03	Mecânica dos Fluidos TE 03125 51/03	Segurança na Construção Civil TE 09068 51/03	Mecânica dos Solos 02 TE 09054 51/03	Projetos Elétricos TE 05228 51/03	Economia Aplicada a Engenharia TE 09079 51/03		
Disciplina Complementar TE 09017 51/03	Disciplina Complementar TE 09018 51/03	Disciplina Complementar TE 09019 51/03	Disciplina Complementar TE 09020 51/03	Disciplina Complementar TE 09021 51/03	Disciplina Complementar TE 09022 51/03	Disciplina Complementar TE 09023 51/03	Disciplina Complementar TE 09024 51/03	Disciplina Complementar TE 09025 51/03	Disciplina Complementar TE 09026 51/03
							TE 09087 - **Trabalho de Conclusão de Curso** - 51/03		
					TE09086 - ESTÁGIO SUPERVISIONADO - mínimo de 380 horas				
Disciplinas Complementares - mínimo de 204 horas-aulas									
TE-09088 - Atividades de Extensão: - mínimo de 380 horas-aulas									
306	**306**	**306**	**306**	**306**	**306**	**306**	**306**	**204**	**153**

Carga Horária mínima para Integralização Curricular do Curso: 3.769 horas

UFPA - Instituto de Tecnologia - Faculdade de Eng. Civil - TURNO NOTURNO - RESOLUÇÃO Nº 3902/09 – 21/09/2009 - CONSEPE

Bloco I	Bloco II	Bloco III	Bloco IV	Bloco V	Bloco VI	Bloco VII	Bloco VIII	Bloco IX	Bloco X	Bloco XI	Bloco XII
EN01197 Matemática Aplicada à Engenharia 01	EN01198 Matemática Aplicada à Engenharia 02	EN02154 Física Experimental Aplicada 01	TE09004 Introdução à Ciência e Eng. dos Materiais	TE09005 Materiais de Construção Civil	TE09066 Tecnologia da Construção Civil 01	TE09036 Estruturas de Concreto 01	TE09037 Estruturas de Concreto 02	TE05227 Eletricidade Aplicada	TE08088 Transporte Urbano	TE03156 Hidrologia e Drenagem	TE09076 Legislação e Ética
EN02152 Física Teórica Aplicada 01	EN02153 Física Teórica Aplicada 02	TE09009 Mecânica dos Sólidos 02	TE09010 Mecânica dos Sólidos 03	TE09062 Concretos e Argamassas	TE09067 Tecnologia da Construção Civil 02	TE09053 Mecânica dos Solos 01	TE09038 Estruturas de Aço	TE05228 Projetos Elétricos	TE08091 Transporte Aqüaviário	TE03155 Sistemas Prediais Hidro-Sanitários	TE09077 Impactos Ambientais de Obras Civis 01
EN03124 Química Teórica Aplicada	EN03125 Química Experimental Aplicada 01	TE09002 Teoria das Estruturas 01	TE09003 Teoria das Estruturas 02	TE09001 Estatística Aplicada à Engenharia	TE09069 Planejamento e Controle de Obras 01	TE09054 Mecânica dos Solos 02	TE09039 Estruturas de Madeira	TE08087 Rodovias e Ferrovias	TE03154 Sistemas de Saneamento Ambiental	Disciplina Complementar ((*))	Disciplina Complementar ((*))
TE09012 Metodologia de Trabalhos Acadêmicos	TE07017 Desenho para Engenharia 01	TE01071 Noções de Arquitetura e Urbanismo	TE09011 Sistemas de Transportes	TE09006 Geologia de Engenharia	TE09070 Gerenciamento na Construção Civil	TE09040 Analise Computacional de Estruturas	TE09055 Fundações 01	TE08089 Pavimentação	TE03153 Hidráulica Aplicada	Disciplina Complementar ((*))	Disciplina Complementar ((*))
TE07016 Desenho por Computador	TE09008 Mecânica dos Sólidos 01	TE08085 Topografia Básica	TE09007 Ensaios de Estruturas e Materiais	TE03125 Mecânica dos Fluidos	TE09071 Orçamento de Obras	TE09068 Segurança na Construção Civil	TE09056 Fundações 02	TE08090 Engenharia de Tráfego	TE09079 Economia Aplicada à Engenharia		
((*))	((*))	((*))	((*))	((*))	((*))	((*))	((*))	((*))	((*))		
									TE09087 – Trabalho de Conclusão de Curso 51/03		
						TE09086 - ESTÁGIO SUPERVISIONADO - mínimo de 380 horas					
Disciplinas Complementares - mínimo de 204 horas-aulas											
TE09088 - Atividades de Extensão - mínimo de 380 horas-aulas											
Carga Horária mínima para Integralização Curricular do Curso : **3.769 horas**											
255	255	255	255	255	255	255	255	255	255	102	102

((*)) – As Disciplinas Complementares poderão ser realizadas em qualquer período letivo

UFPA - INSTITUTO DE TECNOLOGIA - FACULDADE DE ENGENHARIA CIVIL - DISCIPLINAS COMPLEMENTARES POR MÓDULO DE CONHECIMENTO

Ciências Básicas	Ciências Básicas da Engenharia Civil	Arquitetura e Urbanismo	Eletricidade	Sistemas Estruturais	Geotecnia	Materiais	Construção Civil	Transportes	Hidrotecnia	Engenharia Legal/ Diversos
Matemática Aplicada à Engenharia 03	Tópicos Especiais em Mecânica dos Sólidos	Desenho para Engenharia 02	((*))	Concreto Protendido	Introdução à Mecânica das Rochas	Tecnologia dos Revestimentos	Patologias e Terapias das Construções	Portos	Sistema de Abastecimento de Água	Impactos Ambientais de Obras Civis 02
TE090xx 51/03	**TE09033 51/03**	TE090XX		**TE09041 51/03**	**TE09057 51/03**	**TE09063 51/03**	**TE09072 51/03**	**TE08092 51/03**	**TE03157 68/04**	**TE09078 51/03**
Cálculo III	Análise Experimental de Estruturas			Instrumentação de Estruturas	Empuxos e Estabilidade de Taludes	Tecnologia das Tintas e Vernizes	Planejamento e Controle de Obras 02	Aeroportos	Recursos Hídricos	
EN01007 60/04	**TE09034 51/03**			**TE09042 51/03**	**TE09058 51/03**	**TE09064 51/03**	**TE09073 51/03**	**TE08093 51/03**	**TE03158 68/04**	
Cálculo IV	Tópicos Especiais em Mecânica dos Solos			Ensaios de Modelos Estruturais	Barragens	Tecnologia dos Vidros	Gestão da Produção	Geotecnologias para as Engenharias	Sistema de Esgoto Sanitário	Disciplina Complementar 01
EN01008 60/04	**TE09035 51/03**			**TE09043 51/03**	**TE09059 51/03**	**TE09065 51/03**	**TE09074 51/03**	**TE08094 51/03**	**TE03159 68/04**	**TE09017 51/03**
Cálculo Numérico				Estruturas Especiais	Investigação Geotécnica		Engenharia de Avaliações	Batimetria	Gerenciamento de Resíduos Sólidos Urbanos	Disciplina Complementar 02
EN01035 60/04				**TE09044 51/03**	**TE09060 51/03**		**TE09075 51/03**	**TE08095 51/03**	**TE03160 68/04**	**TE09018 51/03**
Álgebra Linear				Projetos de Estruturas de Concreto Armado	Tópicos Especiais em Geotecnia		Gestão Empresarial na Engenharia Civil	Transportes de Cargas	Tratamento de Águas de Abastecimento	Disciplina Complementar 03
EN01083 60/04				**TE09045 51/03**	TE09061 51/03		**TE090XX 51/03**	**TE08096 51/03**	**TE03161 68/04**	**TE09019 51/03**
Funções Especiais para Engenharia				Projetos de Estruturas de Aço				Transporte Rodoviário		Disciplina Complementar 04
EN01054 60/04				**TE09046 51/03**				**TE08097 51/03**		**TE09020 51/03**
Física Fundamental III				Projetos de Estruturas de Madeira				Operação de Transporte Coletivo		Disciplina Complementar 05
EN02081 60/04				**TE09047 51/03**				**TE08098 51/03**		**TE09021 51/03**
Física Fundamental IV				Pontes e Grandes Estruturas				Operação de Rodovias		Disciplina Complementar 06
EN02082 60/04				**TE09048 51/03**				**TE08099 51/03**		**TE09022 51/03**
Laboratório Básico II				Análise Matricial de Estruturas						Disciplina Complementar 07
EN02084 30/02				**TE09049 51/03**						**TE09023 51/03**
				Introdução ao Método dos Elementos Finitos						Disciplina Complementar 08
				TE09050 51/03						**TE09024 51/03**
				Introdução à Dinâmica das Estruturas						Disciplina Complementar 09
				TE09051 51/03						**TE09025 51/03**
				Ações do Vento nas Edificações						Disciplina Complementar 10
				TE09052 51/03						**TE09026 51/03**

((*)) Poderão ser cursadas como Disciplinas Complementares disciplinas que complementem o conteúdo das disciplinas obrigatórias, devendo ser ouvido o Professor