UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E CIENTÍFICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICAS

LUCIANO AUGUSTO DA SILVA MELO

TRADUÇÃO INTERNA E JOGOS DE IMAGENS NA MATEMÁTICA

BELÉM/PARÁ
2018

LUCIANO AUGUSTO DA SILVA MELO

TRADUÇÃO INTERNA E JOGOS DE IMAGENS NA MATEMÁTICA

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ciências e Matemáticas, do Instituto de Educação Matemática e Científica, da Universidade Federal do Pará, como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor em Educação Matemática, sob orientação da Profa. Dra. Marisa Rosâni Abreu da Silveira.

BELÉM
2018

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará
Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

M528t Melo, Luciano Augusto da Silva.
Tradução Interna e Jogos de Imagens na Matemática / Luciano Augusto da Silva Melo. — 2018.
208 f. : il.

Orientador(a): Prof. Dr. Marisa Rosâni Abreu da Silveira
Tese (Doutorado) - Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas, Instituto de Educação Matemática e Científica, Universidade Federal do Pará, Belém, 2018.

1. Educação Matemática. Wittgenstein. Jogo de Linguagem. Tradução Interna. Jogos de Imagens na Matemática. . I. Título.

CDD 510.7

LUCIANO AUGUSTO DA SILVA MELO

TRADUÇÃO INTERNA E JOGOS DE IMAGENS NA MATEMÁTICA

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ciências e Matemáticas, do Instituto de Educação Matemática e Científica, da Universidade Federal do Pará, como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor em Educação Matemática, sob orientação da Profa. Dra. Marisa Rosâni Abreu da Silveira.

Banca Examinadora:

____

Prof.ª Dr.ª Marisa Rosâni Abreu da Silveira
UFPA/PPGECM – Orientadora

____

Prof. Dr. Hélio Simplício Rodrigues Monteiro
UFG – Membro Externo

____

Prof. Dr. Valdomiro Pinheiro Teixeira Junior
UNIFESSPA–Membro Externo

____

Prof. Dr. João Cláudio Brandemberg Quaresma
UFPA/PPGECM – Membro Interno

____

Prof. Dr. Carlos Aldemir Farias
UFPA/PPGECM – Membro Interno

____

Prof. Dr. Paulo Vilhena da Silva
UFPA/ICEN – Membro Suplente

Ao Sr. Laercio Melo (In Memorian), pelos saberes que me foram oportunizados nos raros momentos que sentamos lado a lado, conversamos e refletimos sobre episódios fugidios da vida...Suas últimas palavras foram marcadas por um singelo orgulho de poder dizer: - Ele conseguiu, terminou seu Doutorado.

A Sra. Narciza, que ao contrário do significado que carrega em seu nome, jamais viveu em função de si mesma. A imagem que sempre vê refletida no espelho não foi outra se não a de seus filhos. O amor e as orações dispensadas a cada um de nós, a fé em Deus e Nossa Senhora que ela preza, serão eternizadas em nosso corações. Honradamente, a melhor pessoa do mundo, merecedora de todo o meu respeito, carinho e amor.

Agradeço:

À compreensão de minha família e de meus familiares, pelas inúmeras vezes que me ausentei de suas valorosas companhias em busca de trabalho, estudos e pesquisas.

À minha querida e amada filha Evelyn, que sempre me acolheu com as palavras carinhosas de bom dia, boa noite e da maneira mais terna expressa seu afeto dizendo: te amo pai!

Aos colegas, profissionais e amigos que fiz durante a Pós-Graduação no IEMCI.

De forma merecida e particular, agradeço à Liderança da professora Marisa Silveira, pela confiabilidade, orientações e apoio aos meus projetos de pesquisa no GELIM. Estendo também agradecimentos ao membros do GELIM, que contribuíram com opiniões, críticas e conselhos acerca de meus estudos.

Ao professor Carlos Evaldo dos Santos Silva, integrante do GELIM e um grande amigo que se fez presente em minha estada neste grupo de estudos e pesquisas... Pelas amplas discussões, debates e parcerias na escrita de produções acadêmicas sobre Filosofia, Linguagem e Matemática advindas de nossas conversas nos caminhos da UFPA, dos congressos e eventos relacionados à Educação Matemática.

Aos integrantes da Banca de Doutorado, examinadores cautelosos e altamente profissionais pelos apontamentos que fizeram e pelas contribuições que deram à minha pesquisa, a saber professores: Carlos A. Farias da Silva, Paulo Vilhena, Valdomiro Teixeira Junior, João Brandemberg e Hélio M. da Silva.

Ao professor Arley R. Moreno (*In Memoriam*), agradecimentos em forma de homenagem, a quem tive a felicidade de conhecer pessoalmente no I SENALEM em 2016, por ter honrado o GELIM com sua valiosa participação no evento.

À professora Cristiane Gottschalk, pela inspiração que tive ao ler seus textos acerca da Filosofia de Wittgenstein, cujos desdobramentos aplicam-se na Educação e no Ensino da Matemática.

À SEDUC-PA, por ter me concedido licença remunerada para cursar o Doutorado.

À senhora Eliane T. Araújo, que me recebeu gentilmente em sua residência e me concedeu benefícios para fazer viagens aéreas na companhia em que trabalha, para que eu pudesse estudar e divulgar minhas pesquisas.

À espiritualidade e a Deus pelas reflexões solipsistas que me conduzem pelos caminhos do bem como ser humano, professor e pesquisador.

[...]"Portanto meu propósito não é ensinar aqui o método que cada qual deve seguir para bem conduzir sua razão, mas somente mostrar de que modo me esforcei por conduzir a minha. Os que se aventuram a fornecer normas devem considerar-se mais hábeis do que aqueles a quem as dão; e, se falham na menor coisa, são por isso censuráveis. Mas, não propondo este escrito senão como uma história, ou, se o preferirdes, como uma fábula, na qual, entre alguns exemplos que se podem imitar, encontrar-se-ão talvez também muitos outros que se terá razão de não seguir, espero que ele será útil a alguns, sem ser danoso a ninguém, e que todos me serão gratos por minha franqueza."

....

[...]"Nada direi a respeito da filosofia, exceto que, vendo que foi cultivada pelos mais elevados espíritos que viveram desde muitos séculos e que, apesar disso, nela ainda não se encontra uma única coisa a respeito da qual não haja discussão, e consequentemente que não seja duvidosa, eu não alimentava esperança alguma de acertar mais que os outros; e que, ao considerar quantas opiniões distintas, defendidas por homens eruditos, podem existir acerca de um mesmo assunto, sem que possa haver mais de uma que seja verdadeira, achava quase como falso tudo quanto era apenas provável."

(Descartes, O Discurso do Método, Parte I)

RESUMO

Esta pesquisa tem como fundamentos primordiais a Linguagem e a Matemática no contexto da Educação Matemática. O escopo das reflexões que permeiam o texto se dá na perspectiva da Tradução de Textos Matemáticos, com o objetivo de caracterizar intrateoricamente as noções conceituais de Tradução Interna e Jogos de Imagens no Ensino da Matemática. Para tanto, encaminho as discussões em duas linhas de pensamento: uma filosófica e outra teórica. A primeira enfatiza a expressão *jogo de linguagem* cunhada por Ludwig Wittgenstein nas *Investigações Filosóficas.* A segunda destaca as contribuições epistemológicas de Gilles-Gaston Granger sobre Matemática e Linguagem (forme e conteúdo). Arley Moreno, filósofo brasileiro e discípulo de Granger, elaborou a *Epistemologia do Uso,* teoria que une filosofia e conhecimentos científicos. Busquei subsídios teóricos no Estruturalismo Semântico de Jakobson, na Hermenêutica de Gadamer e nas ilações sobre as práticas tradutórias de Ricoeur, Benjamin e Steiner. No percurso da Tese, destaco a importância de olhar para a constituição de conceitos matemáticos no ensino, como uma atividade intrínseca à Linguagem. Nesse sentido, levanto a hipótese de que os professores, para além de ler e interpretar códigos e simbologias específicas em sala de aula, fazem a passagem da linguagem matemática para a linguagem natural por meio de uma tradução. Por conseguinte, a metodologia empregada na pesquisa lhe confere o *status* de uma Discussão Epistemológica, que se caracteriza em analisar como se dá o papel das imagens na Matemática (estudo de gráficos), observando conexões entre as linguagens da álgebra e da geometria. Uma parte das análises teve como aporte tecnológico o uso das ferramentas do software *GeoGebra* na elaboração de hipóteses e inferências sobre a importância de elucidar conceitos complexos na matemática, em função do tratamento formal e abstrato dispensados no ensino. Inferi, a título de contribuições científicas no campo da Educação, dentre outras observações, que traduzir na Matemática consiste em compreender (dominar) a gramática e a sintaxe dessa linguagem; traduzir na Matemática não é equivalente a interpretar, são jogos de linguagem distintos; os jogos de imagens trazem perspicuidade à compreensão de gráficos e o domínio de regras específicas, explicita o significado de conceitos e simbologias da Matemática; subsiste ainda que oculta na linguagem dos professores, uma espécie de tradução interna no que tange ao ensino de conceitos matemáticos. Assinalo, portanto, que a tradução interna na Matemática pode ser vista como atividade de ensino que amplia o quadro de referência acerca dos jogos de linguagem e pode contribuir com o aprendizado de conceitos matemáticos na Educação.

Palavras-Chave: Educação Matemática. Wittgenstein. Jogo de Linguagem. Tradução Interna. Jogos de Imagens na Matemática.

ABSTRACT

This research has as primordial foundations Language and Mathematics in the context of Mathematics Education. The scope of the reflections that permeate the text comes from the perspective of the Mathematical Texts Translation, aiming to characterize intratheoretically the conceptual notions of Internal Translation and Image Games in Teaching Mathematics. To do so, I direct the discussions in two lines of thought: one philosophical and the other theoretical. The first emphasizes the expression language game coined by Ludwig Wittgenstein in Philosophical Investigations. The second highlights the epistemological contributions of Gilles-Gaston Granger on Mathematics and Language (form and content). Arley Moreno, Brazilian philosopher and disciple of Granger, elaborated the Epistemology of the Use, theory that unites philosophy and scientific knowledge. I sought theoretical support in Jakobson's Semantic Structuralism, in Gadamer's Hermeneutics, and in the lectures on the translator's practices of Ricoeur, Benjamin, and Steiner. In the course of the thesis, I emphasize the importance of looking at the constitution of mathematical concepts in teaching as an activity intrinsic to language. In this sense, I raise the hypothesis that teachers, in addition to reading and interpreting specific codes and symbologies in the classroom, make the transition from mathematical language to natural language through a translation. Therefore, the methodology used in the research gives it the status of an Epistemological Discussion, which is characterized in analyzing how the role of images in Mathematics (graphics study) takes place, observing connections between the languages of algebra and geometry. A part of the analysis had as technological contribution the use of GeoGebra software tools in the elaboration of hypotheses and inferences about the importance of elucidating complex concepts in mathematics, due to the formal and abstract treatment provided in teaching. Inferi, as scientific contributions in the field of Education, among other observations, that translate in Mathematics consists of understanding (master) the grammar and syntax of this language; translate in Mathematics is not equivalent to interpret, they are different language games; the games of images bring perspicuity to the understanding of graphs and the domain of specific rules makes explicit the meaning of concepts and symbologies of Mathematics; it still subsists in the language of teachers, a kind of internal translation in what concerns the teaching of mathematical concepts. I therefore point out that the internal translation in Mathematics can be seen as teaching activity that expands the frame of reference about language games and can contribute to the learning of mathematical concepts in Education.

Keywords: Mathematics Education. Wittgenstein. Language Game. Internal Translation. Image Games in Mathematics.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Os aspectos simbólicos e formais da linguagem matemática possuem características diferentes da gramática da Língua Portuguesa. A linguagem matemática possui propriedades internas cuja sintaxe implica na compreensão de conceitos, palavras e expressões que não figuram tradicionalmente no vocabulário cotidiano das pessoas. Nesse sentido, ler e interpretar um texto em linguagem matemática requer do leitor conhecimentos de uma linguagem específica e técnica que não possui oralidade, a linguagem matemática objetiva-se na escrita.

Ler, interpretar e traduzir um texto matemático não faz parte da forma de vida dos alunos, como faz parte das atividades docentes dos professores, são jogos de linguagens distintos, parafraseando Wittgenstein nas *Investigações Filosóficas* (2009).

Por outro lado, a linguagem matemática, prescinde da língua natural (entenda-se daqui por diante, a Língua Portuguesa), para que seus objetos de estudos se tornem compreensíveis. Tais peculiaridades serão observadas nesta pesquisa, acrescidas ainda de outra linguagem, a saber, a linguagem da Informática. De maneira particular, esta última, será tomada como um terceiro componente no âmbito da linguagem, no intuito de compor esta pesquisa. Para tanto, junta-se ao escopo desta investigação, um tema fundamental que é o contexto da **Tradução**. Porém, traduzir aqui significa traduzir na Matemática e não traduzir uma expressão idiomática de uma língua para outra, assim, o ampliei à esteira da Filosofia da Linguagem e procurei acrescentar aos domínios teóricos da Tradução, uma vertente tradutória com características intrínsecas à Matemática como ciência, aplicada ao campo da Educação.

A investida linguística da qual faço uso nesta tese é ainda recente no contexto educacional e científico e se ampara, por conseguinte, nas pesquisas realizadas por Gonçalves (2011), Galelli (2012) e Silveira (2014) acerca da tradução de textos matemáticos no âmbito da Educação Matemática. O teor destas investigações, impulsionou o meu interesse pela temática a ponto de esboçar o que chamarei de **Tradução Interna**, na perspectiva da Filosofia da Linguagem em Wittgenstein (2009). A partir das ilações do Mestre de Viena, elegi a expressão **Jogo de Linguagem** como um dos elementos centrais desta pesquisa, para configurar por meio de analogias, a expressão **Jogos de Imagens**.

Assim, originou-se, *a priori*, no contexto da Educação e da Matemática, uma discussão epistemológica que consiste, dentre outros aspectos, em mostrar como alguns **conceitos** se constitui na Matemática pelo viés da linguagem. Cumpre ressaltar que o teor das reflexões elencadas no decorrer do texto reserva às **imagens** um papel importante. Procurei desta forma, estabelecer uma relação funcional entre conceitos e imagens na Matemática, destacando dois grandes ramos de estudo, a Álgebra e a Geometria.

Em várias passagens da tese, a tônica das abordagens que faço tem como pano de fundo as noções de jogo e de linguagem, que possuem diversas exemplificações e interpretações filosóficas exploradas por Wittgenstein, a saber, na fase tardia de seus escritos, com a publicação póstuma das *Investigações Filosóficas* em 1953. De posse destas duas palavras, o filósofo cunhou o conceito primitivo de Jogo de Linguagem, a partir do qual faço diversos usos no contexto educacional visando ao Ensino da Matemática desde o ano de 2011.

Vale ressaltar, no entanto, que as reflexões e observações aqui contidas são de cunho teórico, não tem *a priori* propósito didático, a exemplo da Teoria das Situações Didáticas, desenvolvida por Guy Brousseau e da Teoria do Antropológico Didático, elaborada por Yves Chevalard, ambas as teorias da didática provenientes da Matemática francesa. Porém, o que discuto nesta investigação destina-se a professores que ensinam Matemática. Faço este adendo ainda que de forma abrupta, para deixar o leitor ciente de que o jogo e a linguagem aqui, bem como sua imbricação a partir da filosofia wittgensteiniana, não figura no rol das ilações acerca do jogo, quase sempre associado ao caráter lúdico no contexto pedagógico da Educação Infantil.

A visada educacional, aqui, tem como ponto de partida o ensino da Matemática, não se dá, portanto, no contexto da aprendizagem. Esta decisão, por hora pragmática, não impede que as reflexões e observações tecidas possam futuramente ser destinadas ao aprendizado dos alunos, mas esta é, por conseguinte, uma deliberação de cunho profissional a ser engendrada ou não pelos professores em torno de suas práticas.

Com base nas pesquisas realizadas por Duarte (2010) e Gottschalk (2004), o debate pedagógico acerca da aprendizagem significativa e da Pedagogia das Competências, bem como do Construtivismo, dominam hegemonicamente a Educação no Brasil.

Diante deste cenário, esta pesquisa diverge ou se afasta teoricamente das pesquisas de cunho cognitivo, da filosofia da mente e dos pressupostos fenomenológicos amplamente discutidos na Educação Matemática. Assim, as discussões que faço trazem para o campo educacional a perspectiva da Filosofia da Linguagem. Por outro lado, o contexto filosófico não se limita a fazer ilações apenas de cunho reflexivo e argumentativo, deixando o caráter científico para as "ciências duras", como as Engenharias, a Física e a Química. Uma contribuição importante que se expande do cenário filosófico para o cenário da ciência, ganha o *status* de Teoria entre 1995 e 2005 quando o filósofo brasileiro Arley Moreno elabora a *Epistemologia do Uso*. Incialmente, esta teoria recebeu outra denominação, que será esclarecida no decorrer do texto.

No que diz respeito ao Ensino da Matemática, e considerando o caráter simbólico da linguagem matemática, admito que um mesmo signo, usando a nomenclatura cunhada por Charles S. Peirce (1980), a exemplo das letras de nosso alfabeto, pode ser usado tanto no famoso Teorema de Pitágoras, $\mathbf{a^2=b^2+c^2}$, como em fórmulas genéricas acerca da área de um quadrado de lado *"a"* dada por $\mathbf{S=a^2}$. Do mesmo modo, estes caracteres podem ser usados (forma de representação) para calcular volume de um paralelepípedo a partir da expressão $\mathbf{V=a.b.c.}$ Estas fórmulas, mesmo escritas em linguagem algébrica, trazem consigo também significados ligados à Geometria, este é um dos aspectos com o qual me ocupo nesta pesquisa.

Ao analisar expressões como o teorema de Pitágoras e a fórmulas da área e do volume de figuras geométricas conforme o parágrafo anterior, na perspectiva da linguagem[1], pude identificar que a letra *"a"* assume diferentes funções (significados) por meio de uma sintaxe particular, governada por uma espécie de *gramática* no sentido proposto por Wittgenstein (2003; 2009), bem como por Moreno (1995; 2005) e Hebeche (2016).

Os caracteres usados na linguagem natural possuem um significado diferente daqueles usados na linguagem matemática, suas gramáticas, ou seja, as regras de funcionamento que as governam possuem sintaxes que obedecem a vocabulários específicos. Assim, enquanto nos caracteres da linguagem natural têm-se formas, sílabas, palavras e frases, a linguagem matemática, constitui-se de notações, simbologias e fórmulas. Assim, temos o número irracional π (pi) e a seção áurea φ (fhi); as notações de funções $\mathbf{f(x)=x+1}$ **e** $\mathbf{sen(x)}$; o conjunto dos números naturais **N**, os conjuntos vazio Ø e infinito ∞ (expansão matemática não-enumerável); as expressões algébricas $(a+b)^2$; $\mathbf{p^2m+nq^3}$ e a identidade trigonométrica $\mathbf{sen^2x+cos^2x=1}$, dentre outros exemplos.

Os alunos por sua vez, não conseguem fazer a leitura de textos matemáticos facilmente, eles não dominam a gramática da linguagem matemática, como conhecem e usam regularmente o vocabulário da linguagem natural. Silveira (2005) afirma que é importante que se façam analogias entre a linguagem natural e a linguagem matemática, para entender como os conceitos matemáticos se constituem.

A partir destes pressupostos, ressalto que a escrita, a leitura e a interpretação da linguagem matemática possuem conexões internas, que se engendram com as palavras da

[1] Nesta pesquisa, a palavra *linguagem* será extensamente explorada e retomada. Assim, quando me refiro à linguagem há, pelo menos, três usos ou aplicações desta palavra aqui: *linguagem natural*, palavras e expressões da Língua Portuguesa (nossa língua); *linguagem no contexto filosófico*, que nesta pesquisa será abordada na perspectiva wittgensteiniana, pois há outras concepções da linguagem como os estudos da Fenomenologia, do Multiculturalismo e da Semiótica, e a *linguagem matemática*, portanto, uma linguagem técnica e normativa (constituída por símbolos, notações, expressões e gráficos), cujos conceitos e definições podem em determinado momento, ter significados intrateóricos.

linguagem natural, pretende-se compreender como se dão estas conexões a partir da tradução na Matemática.

Diante do exposto, cabem inicialmente algumas indagações como: Até que ponto a linguagem simbólica da Matemática faz sentido para os alunos? Ao ensinar determinados conceitos matemáticos para os alunos, o professor usa técnica(s) linguísticas para decodificar símbolos, notações e gráficos? Estes questionamentos foram tomados a partir de algumas de minhas experiências docentes, em especial, a partir das pesquisas que realizei na Pós-Graduação em Educação Matemática desde o ano de 2011 até o presente, ao estudar de modo específico, o tema Linguagem Matemática.

Procurei nesta pesquisa ampliar os horizontes da linguagem matemática acerca de imagens que permeiam com o campo visual dos interlocutores. Para tanto, estabeleci, quando possível, relações entre algumas imagens cotidianas (quadros e pinturas) de artistas, como Escher e Magritte e as imagens intrínsecas ao contexto da Matemática, de modo particular, curvas e gráficos de funções e equações.

Na perspectiva do jogo de linguagem, que nas *Investigações Filosóficas* (2009, p. 27) significa que "falar uma língua é parte de uma atividade ou de uma forma de vida", esta expressão será mencionada com frequência quase intermitente nesta pesquisa, tal qual aparece nas páginas anteriores, se prolongará até as últimas páginas da Tese. A partir das multiplicidades dos jogos de linguagem, procuro fazer **analogias** entre diferentes contextos da aplicação das palavras, em especial, no ensino da Matemática. Assim, uma primeira feição possível desta expressão pode ser observada acerca da leitura e da interpretação de um gráfico na Matemática, que se assemelha à leitura de uma partitura musical em uma orquestra sinfônica.

Na perspectiva wittgensteiniana interpretar simbolicamente um gráfico ou ler uma partitura musical são atividades que podem ser entendidas a partir do conceito de semelhança de família, nas *Investigações Filosóficas* (2009). Tais semelhanças identificam alguns traços particulares, como as fisionomias presentes no rosto de um pai e de um filho, ou na cor do cabelo e dos olhos da mãe, membros de uma mesma família, mas, ainda que sejam notórios alguns traços fisionômicos entre indivíduos de uma mesma família, tratam-se de pessoas distintas. Da mesma forma, a natureza dos signos que constituem uma partitura musical e os que representam um gráfico na Matemática possuem simbolicamente, algum grau de parentesco.

Na mesma direção, mas em contextos linguísticos distintos, é que na literatura obras famosas, como os textos de Shakespeare e Dostoievsky, são traduzidas de uma língua para outra. É assim, que no campo literário a Hermenêutica de destaca como Teoria da Tradução.

Gadamer, Schleiermacher, Jakobson e Ricoeur são autores conhecidos por desenvolver técnicas de tradução e trazer até os leitores, importantes obras literárias e científicas. Busco, portanto, fazer uma conexão nesta pesquisa entre o campo teórico da tradução e a tradução de textos matemáticos.

Mas, aonde pretendo chegar? Quero ressaltar que para compreender a linguagem matemática há **critérios** e **técnicas**, imbricadas entre a linguagem natural e a linguagem formal da ciência. A linguagem matemática, portanto, uma linguagem escrita é atemporal, objetiva e econômica, possui ora função descritiva e ora função normativa, conforme assinala Gottschalk (2014) à esteira da filosofia de Ludwig Wittgenstein, cujas expressões podem ser constituídas a partir de diferentes jogos de linguagem.

Como profissional da Educação, assinalo que as técnicas ensinadas na sala de aula destinam-se à compreensão de conceitos matemáticos pelos alunos e entendo compreensão como algo mais complexo que aprendizagem, por se tratar de uma característica individual que não é possível mensurar de modo definitivo. Na Educação, correntes pedagógicas construtivistas enfatizam que se deve valorizar a aprendizagem, desta máxima, fica implícito que o ensino vem depois, este é um ponto de vista do qual divirjo e que será debatido no capítulo 2 desta pesquisa.

De acordo com Wittgenstein (2009), o significado das palavras é o seu uso na linguagem. A perspectiva do significado pelo uso das palavras, ou seja, pela funcionalidade que palavra e símbolos possuem no texto foram exploradas intensivamente neste texto, acerca do ensino da Matemática.

Assim, considero ser importante no ensino da Matemática, para além das técnicas e métodos empregados pelos professores, evidenciar o papel da linguagem matemática no aprendizado de conceitos, assim, vale ressaltar que o professor desta disciplina no desempenho de suas práticas, faz uso da tradução. Esta é uma das hipóteses que levanto nesta pesquisa, que se junta à leitura e a interpretação de textos matemáticos no contexto escolar a exemplo do que discutiu Silveira (2014).

Nesse sentido, Wittgenstein (2009) assinala que traduzir é um jogo de linguagem. De posse desta metáfora e de outras expressões cunhadas pelo filósofo, a exemplo das semelhanças de família e do seguir regras toma-se a expressão **ver como** na condição de técnica, a ser aplicada ao ensino da Matemática, juntos, eles farão parte desta pesquisa, para estabelecer conexões entre conceitos, imagens e tradução.

No aforismo 66 desta obra, ele adverte – ‘‘não pense, veja como a linguagem funciona!” O jogo de linguagem wittgensteiniano é uma expressão que traz consigo uma gama de significados, cuja importância é fundamental, no que diz respeito à constituição das expressões tradução interna e jogos de imagens voltadas ao ensino da Matemática nesta pesquisa.

Moreno (1995) assinala que a Matemática é o pano de fundo das preocupações de Wittgenstein com a linguagem. Nesse sentido, concordo com as ilações de Wittgenstein (2009) e Moreno (1995) no sentido de que a compreensão de conceitos matemáticos está intrinsecamente ligada ao **domínio de técnicas**, mas ressalto que os alunos não são ensinados a ler e decodificar simbologias da linguagem matemática como se faz no aprendizado da linguagem natural (Língua Portuguesa).

Os conceitos e notações matemáticas não fazem parte da forma de vida dos alunos, como o fazem para os professores. De modo análogo, um médico teria dificuldade para avaliar um texto matemático escrito na linguagem do cálculo ou da análise real. Nesse sentido, um professor de Matemática não possui domínio técnico na área da Medicina para ler e interpretar um exame de imagem como uma ressonância magnética. No decorrer do texto enfatizo que a tradução na Matemática consiste de uma técnica inerente ao trabalho docente, portanto, uma técnica de ensino, cujos fundamentos encontram-se na linguagem e nas suas aplicações. De modo particular, afirmarei no decorrer do texto, reiteradamente, que traduzir na Matemática é um *jogo de linguagem* a exemplo de Silveira (2014).

No campo da Educação, a partir de minhas experiências docentes, afirmo que ensinar Matemática não se resume apenas à técnica de aula expositiva tradicional baseada no tripé Explicar-Exemplificar-Treinar. Para tanto, enfatizo com base em pesquisas no campo da Educação Matemática, o que foi explicitado por Silveira (2014), que a passagem da linguagem matemática para a linguagem natural é uma espécie de tradução[2]. De modo específico, as atividades aqui esboçadas tiveram como objetivos que se integram à sustentação da tese acerca da constituição dos conceitos de tradução interna e jogos de imagens voltados ao ensino da Matemática.

Ao destacar o papel fundamental da Linguagem na Educação evidenciei o uso de expressões que envolvem a *sintaxe* da linguagem matemática no ensino. Assim, aspectos semânticos da linguagem não farão parte desta pesquisa, por considerar que a linguagem natural

---

[2] Entenda-se por tradução na Matemática (atividade específica interna aos domínios desta ciência, com desdobramentos na área educacional), que difere aqui do significado de tradução tradicional, que é traduzir de uma língua para outra. Porém, isto não impede, por conseguinte, de se fazer uso do campo investigativo das Teorias da Tradução, por serem relevantes a esta pesquisa. Entendemos que, se atualmente, os textos matemáticos encontram-se em nossos livros didáticos e técnicos é porque passaram por um longo e milenar processo de tradução. Apontamos, por exemplo, a obra *Os Elementos*, de Euclides, escrita por volta do séc. III, que foi traduzida por Irineu Bicudo (2009) do Grego para a Língua Portuguesa (EVES, 1997).

possui inúmeras acepções que a tornam polissêmica. Por outro lado, vale ressaltar que a linguagem matemática prescinde da linguagem natural para se fazer comunicar.

Nesse sentido, identifiquei na literatura da Educação Matemática, pesquisas que se coadunam com os objetos de estudo que discuto aqui, a exemplo da tradução de textos matemáticos mencionada por Silveira (2014), a tradução de textos matemáticos provenientes de documentos históricos, como os tabletes de argila da Mesopotâmia, investigados por Gonçalves (2011) e a tradução de obras matemáticas, como *Os Elementos*, de Euclides de Alexandria, analisados à luz de teorias da tradução por Galelli (2012).

Esta pesquisa preserva ainda, alguns aspectos do que foi produzido acerca da Filosofia da Linguagem na perspectiva da Educação Matemática na conclusão da minha Dissertação em 2013. Na ocasião, o destaque das discussões recaiu de forma dominante sobre o uso de tecnologias informáticas na aprendizagem da Matemática com auxílio do software *GeoGebra*, no qual visei o estudo de funções quadráticas. O referencial teórico daquela discussão foi decididamente pensado para atender a dois propósitos: o primeiro foi mostrar algumas contribuições de Pierre Lévy acerca do uso do computador como tecnologias da inteligência na educação e o segundo enfatizou que a Matemática pode ser vista como um jogo de linguagem na perspectiva da filosofia wittgensteiniana.

Atualmente, as discussões percorrem os caminhos da tradução de textos matemáticos, mas preservo de certa forma, o uso de tecnologias informáticas para a visualização, leitura e interpretação de gráficos na Matemática. Para tanto, mantive nesta pesquisa, o uso do software *GeoGebra*, que passou a ser uma ferramenta de análise de textos matemáticos, que tomo como uma condição de possibilidade de tradução, conforme Oliveira (2013).

No entanto, esta atividade tradutória diferentemente da tradução no campo da Hermenêutica conforme o que foi discutido por Gadamer (1999), possui características intrínsecas ao universo da Matemática como linguagem. Este filósofo afirmou, em linhas gerais, que toda tradução é uma interpretação, ou seja, **traduzir** e **interpretar** são atividades equivalentes.

Não obstante, ressalto que a filosofia de Wittgenstein não tinha propósitos científicos, porém, as contribuições do autor foram destinadas em grande parte ao exercício da docência, cuja trajetória pode ser observada em suas passagens nas escolas de Engenharia da Universidade de Manchester e como sucessor de Moore, na Universidade de Cambridge, segundo informação de Chauviré (1991).

Em muitas passagens de seus livros, Wittgenstein dedicou-se aos fundamentos da Matemática, sua tese de doutorado teve como base a lógica matemática, influenciado por matemáticos, como Russel e Frege. Paul Ricoeur foi um dos primeiros tradutores da obra de Wittgenstein na França, bem como o epistemólogo e matemático Granger (HADOT, 2014). No Brasil, um dos maiores comentadores da obra de Wittgenstein foi o filósofo Arley Moreno, da Universidade de Campinas.

Esta pesquisa encontra-se delineada em duas partes, a primeira compreende os capítulos 1 e 2 nos quais faço uma breve explanação sobre o percurso da investigação, reitero, este é um ensaio de cunho teórico. A seguir, discorro nos capítulos 3 e 4 sobre os pontos principais da pesquisa, nos quais abordo os significados e aplicações do jogo de linguagem wittgensteiniano dentre outros conceitos, com destaque para as expressões Tradução Interna e dos Jogos de Imagens na Matemática.

No capítulo 1, denominado *Movimentos de Pensamento,* procuro demarcar o percurso da pesquisa e ressalto que a Matemática é uma invenção humana e não uma descoberta ao caso. Reconheço o valor científico dos experimentos físicos e químicos e dos estudos da Biologia, por exemplo. Considero, no entanto, que a Matemática não é uma ciência empírica. Enfatizo que os contornos, os limites e aplicações da linguagem aqui discutidos, apontam para as contribuições teóricas e pesquisas desenvolvidas nos contextos da Filosofia e da Educação Matemática.

Nesse ínterim, apresento aos leitores uma breve introdução ao pensamento do mestre de Viena, Ludwig Wittgenstein, em que discorro sobre dois momentos ou fases de sua obra: Na primeira, encontra-se a visão de mundo restrita aos limites da lógica no *Tractatus Logico-Philosophicus* (1921), a segunda versa sobre as *Investigações Filosóficas,* publicada postumamente em 1953, na qual o filósofo reflete sobre parte de seus escritos anteriores e amplia o escopo de suas considerações, passando a dotar as expressões *forma de vida* e *jogo de linguagem* como aspectos fundamentais de sua nova empreitada filosófica.

O capítulo 2 concentra os elementos estruturais da tese, como a justificativa, a pergunta de pesquisa, as hipóteses, os objetivos e a metodologia. Nesta parte do texto, para além de enunciar tais aspectos, procuro fazer os primeiros entrelaces entre a filosofia de Wittgenstein, e a Matemática como Linguagem, aponto também para algumas contribuições acerca da temática Tradução de Textos Matemáticos e suas aplicações na educação escolar, em especial, no contexto da Educação Básica.

Ainda neste capítulo, o leitor entra em contato com alguns dos conceitos wittgensteinianos mais discutidos na tese, a exemplo do conceito-chave Jogo de Linguagem, que abre espaço para a inserção de outras expressões do filósofo, como semelhanças de família e os aspectos do **ver** e **ver como**, que serão retomadas ao longo do texto.

A partir destas reflexões e observações, traço o caminho metodológico da pesquisa que se pauta em discussões e análises acerca da tradução de conceitos presentes na filosofia do mestre de Viena, cujas aplicabilidades voltam-se para o ensino da Matemática. Enuncio nessa parte do texto, a pergunta fundamental da pesquisa que versa sobre a maneira pela qual a tradução interna e o jogo de linguagem podem contribuir na educação escolar, com foco no estudo das relações entre Álgebra e da Geometria, de modo particular, no que tange ao papel das imagens (gráficos) e sua importância na compreensão de conceitos matemáticos.

Desenvolvi nessa Tese o que chamei de Abordagem Metodológica, de teor analítico-discursivo, na qual, teci argumentos pautados em pesquisas que versam sobre Linguagem, Tradução e Matemática, apontando para a importância e relevância da produção do conhecimento científico e suas aplicações na Educação. A metodologia da pesquisa assim compreendida, dedica-se a analisar situações de ensino acerca da constituição de conceitos matemáticos. Tomo, portanto, como um dos catalisadores para este propósito o jogo de linguagem wittgensteiniano e os outros conceitos filosóficos na mesma direção.

Neste bojo, passo a interpretar e aplicar conceitos originalmente filosóficos num contexto linguístico como instrumentos de análise da linguagem matemática. Tais conexões foram observadas de modo particular no que diz respeito à sintaxe de notações e simbologias específicas da Matemática como no estudo de Funções e Geometria Analítica. Assim, notei mediante investigações técnicas de cunho epistemológico, que no estudo de funções, notações semelhantes, como $\mathbf{y=x^2}$ e $\mathbf{f(x)=x^2}$ no campo dos números reais, tem como imagem o gráfico de uma parábola, apesar da semelhança, estas curvas pertencem a objetos matemáticos distintos, o primeiro é uma equação cuja origem é uma cônica, o segundo pertence ao estudo das funções.

Diante do exposto, assinalei que a compreensão desta linguagem passa por uma espécie de tradução na Matemática. Este tipo de análise pretende ampliar as possibilidades de compreensão acerca de objetos matemáticos em discussão no ensino. A hipótese que levantei ressalta que o estudo de gráficos com auxílio do software *GeoGebra* amplia a capacidade de compreensão acerca de conceitos, quase sempre considerados como abstratos, é o caso dos gráficos de funções quadráticas das funções trigonométricas, que não necessariamente possuem aplicações na realidade, mas na Matemática sustentam-se intrateoricamente.

No intuito de configurar relações entre a Filosofia da Linguagem e a Matemática, recorro a textos matemáticos encontrados de modo geral, em livros didáticos e técnicos destinados ao ensino de Matemática, postulo, no contexto da Educação Matemática, a seguinte tese: “A tradução interna e os jogos de imagens constituem-se como jogos de linguagem destinados à compreensão de conceitos algébrico-geométricos no ensino da Matemática”.

Ainda no capítulo 2, apresento uma breve discussão sobre Educação, Linguagem e Matemática, que retrata uma parte da trajetória do autor como professor de Matemática. As reflexões e debates que se avolumam nesta parte da pesquisa não tem o perfil de descrições ou de narrativas, o percurso é pautado em experiências docentes, ora vivenciadas por mim, ora compartilhadas com outros professores e pesquisadores. Desta forma, procuro extrair algumas lições tanto da Filosofia quanto da Matemática e que possam ser aplicadas na Educação Matemática. Enfatizo e teço algumas críticas neste capítulo, sobre perspectivas pedagógicas amparadas na Cognição e no Construtivismo, como fundamentos últimos da Educação.

Tais ilações provenientes destas concepções seculares, subsistem no ideário educacional brasileiro, ancoradas mais recentemente em documentos formulados pelo Ministério da Educação (MEC), a exemplo dos PCN's (BRASIL, 2000) e na BNCC (BRASIL, 2017), como diretrizes profícuas. Por outro lado, procuro ressaltar que as diretrizes e os parâmetros adotados nesta perspectiva não surtiram necessariamente os efeitos desejados, em especial, no ensino da Matemática e da Língua Portuguesa.

As estatísticas mais recentes apontadas pelo Censo Escolar da Educação Básica conforme Brasil (2018), divulgado pelo INEP/MEC ano-base 2017, comprovam que no Ensino Médio, os alunos que chegam ao 3º ano não sabem Matemática. De posse destas constatações, como profissional da educação, percebo que seria importante fazer uma nova discussão sobre a reorganização curricular do ensino que evidencie, por exemplo, outras perspectivas de ensino e aprendizagem, como a perspectiva da linguagem, que poderá se juntar às teorias já em curso no intuito de ampliar debates e fomentar novas propostas para contribuir com a Educação.

O capítulo 3 assenta-se em discussões sobre aspectos teóricos da Tradução e suas relações com a Matemática. Após traçar de modo amplo os caminhos da tradução nesta pesquisa, amplia-se o debate específico sobre a tradução de textos matemáticos. Para tanto, fez-se uma imersão acerca das teorias da Tradução no intuito de conhecer como as práticas linguísticas funcionam neste contexto. Recorri às contribuições de pesquisadores e autores, como Walter Benjamin e George Steiner, dentre outros, com a intenção de captar nas reflexões e contribuições destes autores, os meandros da Tradução ao lidar com textos que vão do universo literário ao universo da Matemática.

No ano de 2014 atuei como professor e coordenador do Núcleo de Tecnologia Educacional da Secretaria de Educação do Estado do Pará. Na ocasião, passei a desenvolver atividades para formação de professores e formação de formadores que atuavam nas salas de informática das escolas da rede pública. Numa destas formações, o debate com alguns professores apontou para o meu objeto de pesquisa acerca da tradução de textos matemáticos. Percebi, então, que esta discussão poderia render uma tese voltada ao ensino da Matemática.

Passei a partir destas reflexões a considerar que a tradução de símbolos, notações e conceitos da Matemática, para além de serem interpretadas no contexto escolar, consistem também de uma espécie de tradução interna realizada pelos professores em sala de aula. Esta é uma das ilações sob a qual apoio meus comentários ao longo desta tese, que consiste em ampliar as aplicabilidades do jogo de linguagem wittgensteiniano, como atividade tradutória no ensino da Matemática.

Por questões lógicas e temporais, não aprofundei nesta pesquisa discussões sobre as tarefas do tradutor no sentido bilíngue ou mesmo do tradutor poliglota, por ser este um campo de investigação de natureza linguística, como o que faz Oliveira (2013), mas de posse de algumas das considerações feitas por ele e nas discussões de Silveira (2014) sobre a tradução de textos matemáticos, dentre outras leituras, esbocei as expressões Tradução Interna e Jogos de Imagens, que figuram no título desta tese.

No capítulo 4, as reflexões que fiz giram em torno do papel das imagens e de como se constituem as imagens na Matemática e qual a importância deste conceito na compreensão das imagens que vão da Álgebra à Geometria. Enfatizo que há conexões entre estes dois ramos da Matemática e que alguns conceitos possuem relações diretas e indiretas entre si que podem ser observadas também, com auxílio das tecnologias informáticas. De modo restrito, as discussões que faço evidenciam o estudo e a construção de gráficos no ensino da Matemática, em especial, no ensino de Funções e Geometria Analítica.

Na busca por uma compreensão mais ampla acerca das imagens no ensino da Matemática, adentrei em outros campos do conhecimento, percorri os domínios da Antropologia Visual, para ampliar minhas opções de pesquisa. Diante de alguns conceitos empregados nesse campo de atuação, o meu propósito foi fazer, quando possível, analogias entre as imagens na Matemática e o jogo de linguagem wittgensteiniano.

Nesse sentido, cumpre destacar que o interesse pelas imagens, atravessou o pensamento de Wittgenstein, conforme explicitou Moreno (1995), ao mencionar em alguns trechos de suas reflexões que o mestre de Viena se ocupou em determinada fase de seus escritos com a Psicologia, o que pode ser observado na segunda parte das *Investigações Filosóficas* (2009).

O aspecto imagético da figura pato-lebre de Jastrow, mencionado por Wittgenstein nas *Investigações*, chamou atenção também para a expressão **ver como**, sob a qual dedico especial atenção, a ponto de tomá-la como **técnica** que se aplica à tradução de aspectos residuais da linguagem matemática, conforme o que foi assinalado por Granger (1974).

Conforme as pesquisas realizadas por Melo (2013; 2015) algumas ilações sobre o uso do software *GeoGebra* no ensino da Matemática foram retomadas atualmente com o objetivo de analisar o que chamei de jogos de imagens na Matemática. Penso que esta expressão adquiriu ao longo da tese o caráter de conceito, no sentido de que reuni argumentos e fundamentos teórico-epistemológicos, pautados principalmente nas discussões e pesquisas realizadas por Silveira (2014) acerca da tradução de textos matemáticos.

Da Matemática à Informática, da Filosofia da Linguagem à Tradução, há muitos aspectos que considero como relevantes na constituição desta tese. Busquei, fazer conexões entre diferentes campos conhecimento visando à Educação. Assim, procurei elucidar conceitos, fazer interpretações e tomar como aspecto fundamental da pesquisa traduzir, quando possível, imagens em conceitos e conceitos em imagens. Esta atividade é uma das possibilidades que o jogo de linguagem wittgensteiniano aplicado à Educação visa no ensino da Matemática.

1 MOVIMENTOS DE PENSAMENTO

"Compreender é significar. Alcançar a significação é traduzir".
(G. Steiner)

A Matemática é certamente uma das mais importantes invenções humanas e isso se deve ao espírito inquieto e questionador daqueles que se dedicaram não somente a contemplar a natureza e viver de suas maravilhas, como os pensadores da Grécia Antiga, mas dos que usaram a linguagem como recurso para se comunicar e poder ampliar seu universo para além das comunidades nômades que marcaram o início da história dos hominídeos. Destacam-se na história da humanidade, as contribuições para as teorias do conhecimento a exemplo do pensamento filosófico de Sócrates (maiêutica), o idealismo de Platão, a lógica de Aristóteles, o racionalismo de Descartes e a tese de Kant sobre o idealismo crítico (ARAÚJO, 2012).

Com base nos episódios mencionados no parágrafo anterior é possível afirmar que a Matemática faz parte da história da humanidade, está entre umas das primeiras formas de comunicação oriunda de nossos ancestrais. Os registros desta escrita podem ser observados nas paredes das cavernas pré-históricas (escrita rupestre), provavelmente os desenhos feitos retratam o cotidiano dos hominídeos, que povoaram várias regiões do planeta Terra há milhares de anos. Humboldt (2009) assevera que as imagens já estariam nas bases de ação do mundo bem antes de qualquer linguagem. Com base nesta afirmativa, segue-se outra, da qual advoga Santaella (2005), ao considerar a Semiótica como Teoria Geral da Linguagem, à esteira da Teoria dos Signos de Charles S. Peirce.

Se o universo da Linguística se expande e ganha força com as contribuições da semiótica peirceana e das construções lógicas estruturalistas de Saussure, convém, no entanto, lembrarmos dos entraves linguísticos dos quais ainda seríamos reféns se tomássemos o conhecimento humano somente a partir das ilações defendidas pela escola grega solipsista. Por outro lado, não se teria conseguido progressos na linguagem e se estaria fadado a incompreensões de toda ordem se o mito de Babel não tivesse sido superado na história da humanidade.

Steiner (2005) assinala que depois de Babel houve certo desaparecimento das línguas em função da supremacia homogeneizadora por causa das relações econômicas provocadas pela tecnocracia midiática, mas o universo da linguagem é marcado pelas contribuições de inúmeros autores e concepções filosóficas, por conseguinte epistemológicas a exemplo de Frege, Russel, Austin, Wittgenstein, Quine e Chomsky (PENCO, 2006).

O movimento conhecido como Virada Linguística se desenvolveu no século XX e teve como um dos seus principais idealizadores o filósofo austríaco Ludwig Wittgenstein (1889-1951). Conhecido como o Mestre de Viena, Wittgenstein foi orientado por Gotlob Frege, pelo qual nutria enorme admiração, e o filósofo preserva em seus escritos o princípio do contexto, mas modifica-o dando a este uma abordagem mais ampla (PENCO, 2006).

Outro mestre e amigo de Wittgenstein, a princípio, foi Bertrand Russell, que o orientou e considerava como sua obra-prima, o *Tractatus Logico-Philosoficus* (1921), até que seus pontos de vista filosóficos divergiram, causando instabilidade entre eles. Este fato idiossincrático, não veio afetar a genialidade de ambos na Filosofia e na Matemática.

Após ter publicado o *Tractatus*, considerada obra seminal (bíblia) do Círculo de Viena, Karnap, Schilik e Waissman tiraram proveito da filosofia positivista de Wittgenstein, segundo Chauviré (1991), mas, logo Wittgenstein mostra-se arrependido de ter limitado seus pensamentos à lógica proposicional e atormentado por esta imagem como uma sombra, resolve publicar outra obra, que produzisse mais exemplos, ampliando sua visão de mundo e libertando-se dos domínios da Matemática verifuncional e asséptica engendrada no *Tractatus*. Assim o fez ao escrever as *Investigações Filosóficas*[3] publicada postumamente em 1953.

Na segunda fase de seus escritos, Wittgenstein apresenta o que chama de observações filosóficas, ou seja, um conjunto ou esboços de paisagens, cujas imagens se mostram com base em reflexões e opiniões diferentes daquelas do *Tractatus*, herdeiras das influências de Frege e Russel no Círculo de Viena. Desta forma, Wittgenstein abre caminho para o que chamou de refazimento de seus pensamentos, acerca dos quais queria a todo custo podar, no intuito de se livrar, segundo ele, de ilustrações mal-desenhadas, para isso elabora uma espécie de terapia filosófica, em busca de uma cura para o que chamou de enfeitiçamentos da linguagem. Wittgenstein escreve nas *Investigações*, que seus pensamentos estavam postos ali como ilustrações para que seus interlocutores os apreciassem como o fazem ao movimentar as páginas de um álbum.

Concordo com a metáfora do álbum wittgensteiniano, figura de linguagem que o próprio filósofo aplica às *Investigações Filosóficas* (2009), pois, no percurso da vida me deparei com várias passagens, paisagens, imagens e conceitos que vão se formando ao longo de minha

[3] As expressões e aforismos deste livro serão tomadas a partir da tradução de Marcos G. Nontagnolli (2009). Vale ressaltar que anterior a esta obra, Wittgenstein publicou em vida o livro *Tractatus Logico-Philosoficus* (1921), que resultou de sua tese de doutorado defendida em Cambridge (1929). Não obstante, chamamos atenção para o fato verídico que demonstra a genialidade do filósofo, de ter escrito boa parte do *Tractatus* no front de batalha da Primeira Grande Guerra Mundial.

jornada docente. Esta é uma analogia entre a jornada do filósofo, matemático e professor Wittgenstein que faço, não no intuito de comparação, mas de semelhança familiar com o que acontece em nossas formas de vida, quando imersos no contexto educacional.

A Pós-Graduação *stricto sensu* em Educação Matemática no PPGECM da UFPA, com foco em Linguagem Matemática alertou-me para uma perspectiva de pesquisa, diferente da que eu seguia antes, à luz do Cognitivismo e de teorias pedagógicas pautadas na construção do conhecimento. Por conseguinte, abandonei os primeiros pressupostos teóricos adquiridos durante a graduação e me dediquei a outra perspectiva, que agora encontra-se nos domínios da Filosofia da Linguagem e da Matemática.

Em *Da Certeza* (1998, p. 90), no aforismo 378, Wittgenstein afirma "o conhecimento é, em última instância, baseado no reconhecimento", esta frase vai ao encontro do que Moreno (1995) assevera sobre a empiria e da ostensão no ensino, tratam-se de jogos de linguagem *preparatórios* que funcionam como introdução ao ensino de conceitos mais complexos, desta forma, vão preparando o caminho para adentrar na *gramática profunda*[4] da linguagem.

As passagens ou **movimentos de pensamento** a que me refiro tanto no contexto da filosofia quanto no que tange a teorias educacionais, refletem o quadro atual de minhas incursões no mundo da linguagem e da Matemática. Procurei, portanto, desfazer-me dos preceitos mentais e cognitivos presentes na semântica ilusória da linguagem ordinária, como aponta o projeto wittgensteiniano nas entrelinhas das *Investigações Filosóficas* a exemplo do que menciona Espaniol (1989).

Concordo com Wittgenstein (2009) quando o filósofo afirma que aquilo que dizemos ganha vida no **uso** de nossas palavras. Desta máxima, elaborei a seguinte hipótese no contexto educacional: o pensamento se dá por meio da linguagem, ou seja, não há comunicação efetiva entre interlocutores se não pudermos dispor de algum modo, da linguagem em qualquer que seja o seu formato.

Ainda que as reflexões sejam processadas na mente, para termos acesso a elas prescindimos da linguagem, pois não vivemos num mundo solipsista. Ilari (2003), ao comentar as contribuições do brasileiro Carlos Franchi no campo da Linguística, assinala que a linguagem

---

[4] De acordo com Glock (1998, p. 66), os cálculos formais não revelam a "gramática profunda" da linguagem. O único papel filosófico legítimo que desempenham é o de parâmetros de comparação, como mencionado nas *Investigações Filosóficas* (2009), aforismo 130. Em outro aforismo, o 664, Wittgenstein dá a entender que a gramática profunda se deve à relações internas, do tipo "ter-em-mente", e esta gramática não é *superficial* (plana) como a gramática normativa da linguagem natural, aquela que fixa em nós, que podemos apreender ao escutar palavras e usá-las mesmo sem dominar seu significado. Por exemplo, uma criança usa palavrões, e os profere apenas por ouvi-los constantemente, mesmo sem saber seu significado ou qual o seu emprego.

deve ser reconhecida como uma **atividade constitutiva**[5]. Ilari (2003) reitera que a relevância de não haver, por exemplo, pensamento abstrato sem auxílio da linguagem se deve às pesquisas de David Bloom. Nesse sentido, os objetivos perseguidos por Bloom concentram-se em questões de sintaxe na linguagem conforme o excerto a seguir.

> As pesquisas de Bloom diferiam das de Berlin e Kay e dos outros estudos da época, porque os fatos que ele procurou testar em situação experimental não eram itens lexicais, mas construções sintáticas, e o "pensamento" não era identificado nem com a percepção, nem com a memória, mas com a capacidade de usar certos esquemas lógicos que, por hipótese, só estariam disponíveis para os falantes das línguas que comportam determinadas construções sintáticas (ILARI, 2003, p.57).

Com base nas palavras de Ilari (2003) sustenta-se que a Linguagem não é condição para todo e qualquer tipo de pensamento abstrato, por outro lado, o autor destaca que também não é certo considerar a crença, de que todo pensamento é verbal, e aponta para algo ligado à visualização. A visualização no sentido de compreender o que dizem as imagens é, por sinal, um aspecto que nos interessa nos domínios da compreensão de conceitos matemáticos, o que será discutido de forma oportuna no decorrer deste texto, mas na perspectiva wittgensteiniana da linguagem.

Para Wittgenstein (2009), a Matemática é uma atividade, esta é uma associação que converge teoricamente no contexto da linguagem conforme o que penso nesta pesquisa, visando o ensino da Matemática. No aforismo 217, o mestre de Viena faz alusão à linguagem por meio da metáfora da ferramenta pá, já no *Tractatus,* o filósofo apresenta a metáfora da escada, no aforismo 6.53, que encerra seus escritos juntamente com a expressão "o que não se deve falar, deve-se calar".

Destaco estes dois aforismos como uma espécie de introdução ao pensamento de Wittgenstein, identificando-o em duas fases, consideradas por seus comentadores dentre os quais Spaniol (1989), a fase da juventude, que tem como marco o *Tractatus* e a fase madura ou tardia, conhecida como a fase das *Investigações Filosóficas*.

A primeira metáfora wittgensteiniana adverte que não podemos alcançar o solo mais profundo da linguagem, se o que queremos dizer funciona como uma pá que se deforma ao bater na rocha dura. Este aforismo aborda a expressão *seguir regras*, na qual o filósofo

[5] O autor assinala que a tese da atividade constitutiva (aquisição da linguagem) se ampara em projetos de pesquisa cujas fontes revelam a importância das investigações neurolinguísticas atribuídas a Coudry (1988) e Morato (1986) para além de pesquisas desenvolvidas acerca da análise do discurso, pragmática e didática da língua, dentre outros aspectos.

questiona o fato de que esta ação é seguida sem a devida *explicação*, pois quase sempre não perguntamos pelo conteúdo, damos mais atenção à forma. A segunda metáfora, recomenda que ao alcançarmos no último degrau da escada de nosso propósito linguístico, deveríamos literalmente jogar a escada fora.

Wittgenstein afirma que uma vez feitos os devidos esclarecimentos sobre algo que nos propusemos a afirmar, deveriam até mesmo ser absurdo continuar a falar ou pensar sobre isso. Porém, este é um pensamento do qual não compartilho nesta Tese, por considerar que esta é uma ilação idiossincrática, ressalvando o contexto em que foi elaborada.

Quanto a isso, Moreno (2001, p. 235) adverte, "se o *Tractatus* era a escada necessária que garantiria, por um lado, o consenso lógico a respeito das condições do conhecimento, ainda que devesse ser descartada após seu uso, essa mesma escada condenava, a ética e a estética, ao solipsismo solitário".

No livro *Pensamento e método no segundo Wittgenstein,* Spaniol (1989) ressalta que ao fazer suas considerações sobre linguagem, o filósofo procurava enfatizar que não levava em consideração processos mentais ou psicológicos. Spaniol (1989) procura elucidar as várias passagens das *Investigações* que a expressão alemã *meinem* (ter em mente), não foi usada por Wittgenstein no sentido de saber o que ocorre em nossa cabeça ou no cérebro quando pensamos, mas quando a linguagem está em curso e Spaniol (1989, p. 79) assinala "devemos confessar que também nos sentimos inclinados a supor que, ao usar a expressão ter em mente, referimo-nos a algo que ocorre em nós no momento da fala".

Eis o problema com o qual Wittgenstein se ocupara e tentava incansavelmente esclarecer, pois considerava um engano pensarmos que ter em mente significa de todo modo, tratar-se de um processo mentalista, dizia que isso eram enfeitiçamentos (imagens) torpes de nossa linguagem, pois no aforismo 190, das *Investigações Filosóficas (p. 108)*, Wittgenstein faz a seguinte afirmação: "qual é o critério para o modo como se tem a fórmula em mente? Talvez o modo como a usamos constantemente, o modo como nos foi ensinado a usá-la. Nesse sentido o filósofo reitera incansavelmente, significado é uso.

Spaniol (1989) adverte, com base no que disse Wittgenstein, que o ensino (uso) de uma fórmula não se deve a critérios de adivinhação mental. Na mesma direção penso que não é o professor que leva o aprendiz, por exemplo, a adivinhar a fórmula para o cálculo da área de uma retângulo, pois ele não pode se pôr a imaginar o que se passa em nossa mente. Na escola, o aluno é educado a executar atividades ensinadas pelos professores, mas ressalta-se que os alunos também devem pensar de forma autônoma.

Isso não significa que os alunos passem a elaborar conceitos escolares com base em acordos tácitos e de forma independente dos conhecimentos científicos que foram organizados curricularmente na Escola para esse fim. É importante fazer tais conexões, mas o papel da Escola não é o de que os alunos aprendam sozinhos, seria um contrassenso nesse sentido, ter que ir à escola para aprender algo que se pode aprender só. No aforismo 45, em *Da Certeza* (1998, p. 27), Wittgenstein afirma "aprendemos a natureza do cálculo ao calcular", esta é uma construção que se dá por meio da linguagem, não é um processo empírico e nem mental.

É com base nestes princípios que Wittgenstein age nas *Investigações*, no aforismo 199, ao assinalar que "dominar uma técnica é dominar uma linguagem", ou seja, de posse destas e de outras *lições* do Mestre de Viena, acrescidas às minhas experiências docentes defendo a perspectiva da Linguagem Matemática no ensino de conceitos da Álgebra e da Geometria, por exemplo, estas são situações ou circunstâncias que vem à tona por meio da linguagem, não repousam, portanto, nem na mente do professor e nem na mente dos alunos (SPANIOL, 1989).

O breve escorço que apresentei nos parágrafos anteriores tem como propósito situar o leitor de que a perspectiva da Filosofia da Linguagem em Wittgenstein constitui o referencial teórico desta pesquisa voltada à Educação. Considero que estas passagens funcionam como uma espécie de movimentos de pensamentos, é uma analogia feita com dupla intenção, ou seja, estes movimentos apontam também traços de minhas atividades docentes como professor de Matemática.

Ao mudar o meu referencial de pesquisa para o contexto da Filosofia da Linguagem e da Matemática, procuro me desfazer/livrar de antigas mobílias de pensamento, quase cristalizadas à luz da epistemologia genética, que parecia ter se acomodado pedagogicamente em minhas práticas docentes como um dogma. Recordo da famosa passagem da *Odisseia*, narrada por Ulisses, que precisou ser amarrado ao mastro de um navio e ter seus ouvidos tapados para não sucumbir ao canto mortal e belo das sereias. Uso metaforicamente aqui, tais episódios para ilustrar a força que as teorias pedagógicas exercem na Educação brasileira, ancoradas de forma hegemônica nas concepções cognitivistas e na aprendizagem significativa, a exemplo do que mencionam Duarte (2010) e Gottschalk (2015).

Faço uso neste texto, como parte do referencial de pesquisa, as contribuições teóricas de Gilles-Gaston Granger, linguista, epistemólogo e matemático, conhecedor da obra de Wittgenstein, que discute sobre linguagem e pensamento formal e da matemática (1994; 2013), bem como sobre a *Filosofia do Estilo* (1978) acerca dos diferentes modos de se fazer ciência ao longo da história, destacando obras e autores da Matemática, como Euclides e Descartes. Por sua vez, o pensamento de Granger influenciou as pesquisas do filósofo brasileiro Arley

Moreno, um dos maiores comentadores da obra de Wittgenstein no Brasil. Moreno escreveu em 2005 o livro *Uma Introdução à Pragmática Filosófica*, na qual elabora uma teoria que passou a ser denominada por ele como *Epistemologia do Uso*.

Encontrar-se-ão também, ao longo deste texto, reflexões e contribuições de Popper (1975), contemporâneo de Wittgenstein, ainda que ambos não compartilhassem das mesmas intenções sobre o conhecimento objetivo e seu papel no campo das ciências. Pois, enquanto o Mestre de Viena não era favorável à construção de teses científicas (não impediu que ninguém as fizesse). Popper elaborou a tese do falseamento científico, no intuito de desmistificar o paradigma de que *as ciências* podem ser verdadeiras acima de qualquer suspeita. Ele afirma que se as ciências devem sustentar-se sob o estatuto da verdade científica, elas devem antes passar por um processo de falseabilidade epistemológica e, para isto, seus critérios de certeza devem ser postos à prova e refutações.

Integram-se ainda aos pressupostos filosóficos desta pesquisa, os debates e as pesquisas acadêmicas desenvolvidas no âmbito da Educação Matemática, cujas contribuições seguem a esteira do pensamento wittgensteiniano. Nesse sentido, Silveira (2005; 2013); Gottschalk (2004; 2010) usam de forma ampla em suas pesquisas no contexto da linguagem e da Matemática as expressões wittgensteinianas *jogo de linguagem*, *seguir regras* e *forma de vida*. No contexto da Tradução e da Linguística, Oliveira (2013) assinala algumas conexões entre o pensamento de Wittgenstein a teóricos, como Schleiermacher e Gadamer, para apontar algumas características por meio de **quadros de referência** na linguagem, tendo em vista as **condições de possibilidade** na tradução.

É neste ínterim, que a palavra tradução anunciada nesta tese, se junta às imagens na perspectiva da Linguagem e da Matemática. Nesse sentido, Melo (2015) aponta alguns questionamentos que envolvem tecnologias informáticas no ensino e na aprendizagem da Matemática, assim como procurei caracterizar a Matemática e a Informática como jogos de linguagem (MELO, 2013). Estes são alguns movimentos de pensamento que se entrelaçam no contexto da linguagem com as atividades que desenvolvo no ensino da Matemática.

Para Silveira (2005), o conceito é uma regra interpretada e há um aparente abismo entre a regra e sua interpretação, bem como isso se configura como um problema que subsiste na passagem da linguagem matemática para a linguagem natural (tradução de símbolos). Teixeira Junior (2016) sugere que a tradução de um texto matemático para a linguagem natural estaria de certa forma ligada a um contexto linguístico específico, e que esta pode ser uma tentativa de dar clareza aos conceitos matemáticos ensinados. O autor enfatiza que uma possível tradução dos textos matemáticos se dá na perspectiva de Wittgenstein com base no uso do jogo de linguagem a partir do domínio de técnicas e regras. Concordo em parte com as afirmações de Teixeira Júnior, em especial, sobre a afirmação de que a tradução é um lance no jogo de linguagem.

Por fim, cumpre destacar que esta tese procurou mostrar que a passagem da linguagem natural para a linguagem matemática ou vice-versa, não é somente uma tradução de textos matemáticos. Nessa atividade subsiste de modo restrito uma espécie de **Tradução Interna na Matemática**, que consiste também da constituição de conceitos matemáticos, o que Gottschalk (2004) assinala de forma semelhante como a natureza do conhecimento matemático. De posse destes entrelaçamentos teóricos, filosóficos e linguísticos aponto para as contribuições da linguagem matemática, como um caminho profícuo no ensino da Matemática na Educação Básica.

Composição da pesquisa

Busco nesta pesquisa, por meio de reflexões e discussões teórico-epistemológicas elencar situações de ensino que envolvem a linguagem matemática, consequentemente, espero que os movimentos de pensamento aqui engendrados, possam contribuir de forma relevante para o ensino o aprendizado de conceitos matemáticos e com a disseminação do conhecimento científico.

O caminho metodológico adotado nesta investigação adere à perspectiva da filosofia da linguagem wittgensteiniana, no intuito de apontar ou mostrar aplicações pautadas nas ilações do Mestre de Viena acerca da expressão-chave Jogo de Linguagem, dentre outros conceitos. Nesse sentido, o que proponho aqui, não se enquadra necessariamente em pressupostos de natureza metodológica para o ensino da Matemática, a exemplo do que ocorre nas propostas pedagógicas piagetianas de Kamii (1995) no livro *A criança e o número*.

A autora advoga claramente em suas pesquisas que não se ensina número para crianças, e destaca que ele será aprendido após certo tempo com a devida maturidade, é algo que as crianças vão construindo paulatinamente com base em suas experiências.

No sentido em que aponta Kamii (1995), o papel do ensino da Matemática é relativizado e o que é mais importante não é como o professor ensina, mas como a criança aprende, de tal modo que esta aprendizagem, ora está na empiria, ora está em algum lugar na cognição vinculada à maturação biológica dos aprendizes. Assim, as técnicas e os métodos de manipulação de objetos favorecem a aprendizagem, a referência e o significado estão no objeto em/na interação com este. Esta ilação passa a ser preponderante no aprendizado de conceitos matemáticos, por exemplo, no Construtivismo.

Por conseguinte, a linguagem tem papel secundário, pois as crianças vão aprendendo mesmo antes de saber falar, são os contatos com objetos concretos e com a realidade do seu entorno, que propiciam a aprendizagem que é construída de forma individual com base em seus conhecimentos prévios. Nessa direção, cabe indagar que conhecimentos prévios os alunos trazem de casa ou de suas formas de vida? Eles conseguem fazer inferências sobre o conceito matemático que supostamente dominam? Ressalto que os conhecimentos prévios são de ordem linguística, advém de vocabulário que não é necessariamente de natureza matemática. Este é, conforme Wittgenstein (2009), um **jogo de linguagem primitivo**, que poderá abrir espaço para a constituição de jogos de linguagem mais complexos como o jogo de linguagem da Matemática.

Por outro lado, na perspectiva de que o significado das palavras se dá pelo seu uso, Wittgenstein é categórico ao firmar nas *Investigações Filosóficas* (2009) que a **linguagem é um instrumento**, e não há como pensar sem a linguagem.

Para Moreira e Caleffe (2008), toda pesquisa é guiada por pressupostos e decisões filosóficas que, de certa forma, determinam o modo pelo qual uma pessoa ou um grupo de indivíduos participa e reage acerca da natureza e dos propósitos acadêmicos/científicos. Nesse sentido, o trajeto metodológico a ser desenvolvido na pesquisa, deve organizar e viabilizar as ações do pesquisador e dos sujeitos envolvidos, haja vista o alcance dos objetivos propostos.

Minayo (1999) afirma que a abordagem qualitativa na pesquisa não pretende alcançar o que é certo ou errado, mas deve tomar como relevante a compreensão lógica dos fatos que permeiam a prática que se dá na realidade baseada em certezas, pautadas na ciência e aplicadas na educação escolar. Percebi, então, que há espaço para uma visão mais profunda e valorizada acerca das práticas docentes no ensino da Matemática, considerando transformações vivenciadas no universo educacional pelo viés da linguagem.

Ao considerar a perspectiva da Linguagem no ensino da Matemática, levantei questionamentos inerentes à Educação Matemática em termos de aplicabilidade por meio de práticas docentes, em especial, no que tange à educação pública, universo do qual faço parte. Para tanto, o esforço desta pesquisa se avolumará em meio à discussões e análises teóricas que nos permitam evidenciar a Matemática como ciência que produz conhecimentos, de modo fundamental, também, a partir do jogo de linguagem wittgensteiniano na Educação.

Apresento a seguir os tópicos fundamentais desta pesquisa, a partir de observações, reflexões e experiências docentes sobre o ensino de Matemática, ressaltando que nem sempre os alunos conseguem compreender a linguagem simbólica da Matemática em atividades escolares, e que isso independe dos discursos, técnicas, metodologias ou tecnologias empregadas na educação. Para tanto, elaborei o seguinte questionamento.

Pergunta de pesquisa

De que maneira a tradução interna e os jogos de imagens contribuem para a compreensão de conceitos matemáticos no ensino de Funções e Geometria Analítica? Nesse sentido, cumpre destacar que há nesta indagação dois propósitos, um que destaca o papel das práticas docentes na educação e o outro, de cunho epistemológico, que toma como pressuposto a constituição do conhecimento matemático a partir da linguagem.

Objetivos

Geral:

Caracterizar no contexto educacional a *tradução interna* e os *jogos de imagem* como atividades de ensino a partir da perspectiva wittgensteiniana da linguagem, no intuito de ampliar as possibilidades de aprendizagem da Matemática.

Específicos:

- Definir critérios da *tradução interna* na Matemática, em conexão aos elementos da sintaxe da linguagem natural, mantendo a coerência na passagem de uma linguagem para outra.
- Explicar como se constituem os *jogos de imagem* na Matemática, com ênfase no funcionamento da linguagem e no significado pelo uso, tendo em vista a produção de conhecimentos com sentido na educação.
- Relacionar conceitos da Álgebra e da Geometria com auxílio da informática, no intuito de mostrar que a Matemática é uma atividade que se efetiva a partir de diferentes jogos de linguagem.

Hipóteses

- A Tradução Interna entre os conceitos da Álgebra e da Geometria expandem as possibilidades de ensinar Matemática.

- Os jogos de imagem e os recursos da Informática contribuem para minimizar obstáculos à compreensão da linguagem matemática na educação.

Tese

"A tradução interna e os jogos de imagens constituem-se como jogos de linguagem específicos destinados à compreensão de conceitos algébrico-geométricos no ensino da matemática".

Justificativa

No contexto da sala de aula um cenário peculiar se instala a partir do momento em que solicitamos aos nossos alunos que resolvam determinados problemas e atividades com Matemática e isso ocorre, geralmente, após a explanação de conteúdos que tratam de conceitos, definições e fórmulas escritas em Linguagem Matemática.

Assim, ao lidar com textos matemáticos na escola, considero duas características relevantes: a primeira versa sobre a constituição de conceitos matemáticos pelos alunos enfatizada na tese de Silveira (2005), que agora será discutida na perspectiva docente, como parte de minhas conjecturas. A segunda aborda a tradução de textos matemáticos apontada por Silveira (2014), que em linhas gerais toma a tradução como a passagem da linguagem matemática para a língua natural. O terceiro ponto consiste propriamente de meu objetivo maior na tese, que é a **Tradução na Matemática**, que será tomada aqui sob diferentes enfoques, que vão ao encontro das teorias de Schleiermacher, Walter Benjamin, Lawrence Venuti, e tem como foco a filosofia de Wittgenstein (2009), que aponta a tradução como um jogo de linguagem.

As discussões nesta pesquisa têm como aporte a filosofia wittgensteiniana de forma acentuada, para elaborar e caracterizar o que chamarei de tradução interna e jogos de imagem como conceitos fundamentais desta tese. Nesse sentido, farei uso das múltiplas acepções e dos profundos esclarecimentos feitos por Arley Moreno (1995) que envolvem o conceito de *imagem* em Wittgenstein, cujas conexões atravessam o pensamento do Mestre de Viena, quando ele se dedica em alguns momentos, na segunda parte das *Investigações Filosóficas* (2009), a estudos psicológicos.

Nesse ínterim, busquei outros campos do conhecimento no que diz respeito à imagens e aspectos visuais que tangenciam os domínios da Semiótica e da Antropologia, áreas que auxiliaram minhas reflexões, pois algumas relações que estabeleci, margeiam fronteiras para além da linguagem e da matemática enquanto ciência. Nesse sentido, fiz algumas incursões nos domínios das imagens, que considero importantes, tanto quanto a tradução no contexto da linguagem, com o propósito de estabelecer conexões com as pesquisas realizadas na Educação Matemática, a exemplo do que fizeram Gottschalk (2004) e Silveira (2014).

Juntar-se-ão a este universo, em determinados momentos, questões de natureza tecnológica, sob as quais fiz uso da informática, mais precisamente dos recursos e ferramentas visuais do software *GeoGebra*. Assim, ao dispor de acesso dinâmico aos gráficos (imagens) da Geometria, que engendram partes da discussão sobre a sintaxe da linguagem da Álgebra, no intuito de esclarecer conceitos matemáticos no ensino da Matemática, como no estudo de Funções e Geometria Analítica, em que os gráficos provenientes da linguagem da álgebra são muito explorados. Estes tópicos possuem conexões internas entre duas linguagens (Álgebra e Geometria) e trazem consigo conceitos e definições formais, símbolos e notações, a exemplo do que discute Granger (2013).

O aspecto formal da linguagem matemática no ensino traz consigo implicações no aprendizado[6] dos alunos, pois, as regras e os conceitos matemáticos não são comuns ao linguajar dos alunos nas escolas, a exemplo das palavras da linguagem comum usadas na realidade. Conforme Silveira e Silva (2013), as regras matemáticas não contêm em si mesmas suas aplicações, uma regra sozinha a exemplo dos Trinômios Quadrados Perfeitos e do Discriminante na Equação do 2º grau, não informa como e quando devem ser aplicadas, seus usos não são óbvios, precisam ser ensinados.

Os professores, por sua vez, também sentem a necessidade de tornar regras e conceitos mais compreensíveis, precisam dar sentido ao que ensinam.

Atualmente, os livros de Matemática procuram quase sempre relacionar conceitos algébricos como $\mathbf{(a+b)^2}$ a uma representação geométrica composta de quadrados e retângulos, com o objetivo de que a regra que está por trás do trinômio $\mathbf{a^2+2ab+b^2}$ se torne mais compreensiva e menos abstrata. Percebe-se, então, que o fato de ter imagens associadas a conceitos da Álgebra parece oferecer uma opção mais viável ao entendimento dos alunos e tende a justificar seu ensino. Por outro lado, isso nem sempre é possível, pois, nem toda imagem

---

[6] Esta palavra será usada aqui na perspectiva da linguagem inspirada nas discussões do Grupo de Estudos e Pesquisa em Linguagem Matemática (GELIM-UFPA) como atributo da aprendizagem que (de forma restrita é atribuída à capacidade que os alunos possuem de construí-la em contato com o contexto, papel defendido pelas teorias cognitivistas). Para nós, o *aprendizado* se dá mediante ensinamentos proporcionados pelo professor na escola, pelo viés da linguagem, que se constitui no percurso de nossas formas de vida. A palavra aprendizado adquire, portanto, o sentido de expressão, mas não substitui o significado de aprendizagem no sentido *lato*.

da Geometria possui um equivalente algébrico e vice-versa, e mais: é importante deixar claro para os alunos que as imagens da Matemática não são imagens comuns do cotidiano. Os objetos e conceitos matemáticos não estão em correspondência biunívoca com a realidade. Esta visão, por conseguinte, platônica, possui resquícios também na condição referencial da linguagem agostiniana aos moldes da teoria da iluminação divina, de fundo religioso, que evoca dentre outros aspectos, que a aprendizagem se dá de modo reflexivo independentemente do que ensinam os professores (GOTTSCHALK, 2015).

Compreendo que há simbologias matemáticas que, se pronunciadas sozinhas não possuem oralidade, não possuem relação direta com palavras da linguagem natural, por exemplo: **n(AUB)**; **f: A→B**; **mn^2+2nm^3-p**; **x^2=2py** e **5!**, dentre outras. Estes exemplos da matemática passam não apenas pela interpretação quando o professor os enuncia, defendo que há, ainda, que de modo implícito nesta ação há uma espécie de tradução.

Quando me refiro a **traduzir** aqui, o pressuposto é de que tais expressões ou conceitos da Matemática não gozam das mesmas características da tradução tradicional, na qual as palavras são traduzidas de uma língua para outra. Mesmo de uma língua para outra, há desafios, diferenças e especificidades que implicam em traduzir palavras entre idiomas diferentes. Assim, ainda que se trate de Matemática, os termos de uma língua-fonte para outra precisam passar por um processo tradutório, para que os conceitos matemáticos sejam compreendidos na linguagem natural. As pessoas não conseguem conversar em matematiquês exclusivamente sem fazer uso da sua língua de origem.

No prefácio do texto de Ricoeur (2012), Patrícia Lavele menciona que há certos casos de tradução não adequadas cujas correspondências ocorrem sem a devida *adequação*, ainda que subsista uma estreita ligação entre o ato de interpretar e o ato de traduzir uma expressão ou palavra de uma língua para outra. A autora afirma, com base nesta observação, que se constitui o problema do intraduzível terminal relacionado ao trabalho realizado pelo tradutor, ou seja, Ricoeur assinala que em uma tradução, o sentido não deve ser pressuposto. Não há, portanto, para estes autores, tradução transponível e dissociável que funcione como uma entidade independente das sonoridades e da escrita na linguagem, este tipo de atividade precisa ser elaborado.

De modo amplo, as teorias da tradução privilegiam a tradução pelo sentido em relação à tradução literal conforme Silveira (2014), a autora destaca que em situações de ensino e de aprendizagem o rigor não deve ser abandonado. Por outro lado, Gonçalves (2011) defende, em seu trabalho arqueológico, justamente o oposto, primando pelo rigor literal.

Berman (2009), por exemplo, defende a teoria da Tradutologia como tradução pautada na *reflexão* e na *experiência* do tradutor como uma retomada da atividade tradutória, ele destaca que as duas categorias, reflexão e experiência, nunca deixaram de ser abordadas, Benjamin, Kant, Fichte, Hegel, Husserl e Heidegger são autores que exploram esta dupla relação, um exemplo de que a tradução de uma língua para outra nem sempre tem o mesmo efeito ou equivalência, há palavras que fazem parte exclusiva da língua de um país e não possuem tradução ou não existem em outra, é o caso da palavra saudade no Brasil, que não figura com o mesmo sentido na língua inglesa. Um equivalente na língua inglesa para saudade é *missing* que quer dizer perdido, desaparecido ou que não está presente.

Há nuances polissêmicas na linguagem, que podem ser de diversas ordens, e tendem a se multiplicar se analisadas ou interpretadas sozinhas, fora de um contexto. Na Matemática, a tradução não funciona de forma unilateral, preservando o sentido linguístico, pois, há simbologia e expressões, como vimos no início do parágrafo, que não se adequam a este modelo tradutório, mas há textos matemáticos clássicos, como *Os Elementos*, de Euclides traduzido por Bicudo (2009), traduzido do grego para o português. O que há de matemático neste texto (simbologias e gráficos), supomos, foi mantido fielmente como na obra original, de modo literal, esta é uma das possíveis justificativas, para que a linguagem matemática seja considerada universal.

Se se adota o caminho da tradução de uma língua para outra dificilmente será possível contornar as implicações provenientes de ordem polissêmica ou semântica implicadas neste processo, por isso, a Matemática usa de simbologias para objetivar a escrita de um texto, evitando duplicidade de sentido em suas proposições, mas não é tão simples lidar com a escrita matemática, devido aos aspectos formais que subsistem em seu campo de atuação científico. Nesse sentido, concordo com a expressão **condição de possibilidade,** mencionada por Oliveira (2013), que leva à hipótese de que a tradução pode favorecer no contexto da atuação docente, isso pode ocorrer também no ensino da Matemática, de modo particular, no que diz respeito à constituição de conceitos.

Nesse sentido, chamo atenção para as tarefas ou critérios de Tradução (Hermenêutica) como pano de fundo, com o propósito de fazer usos de seus atributos teóricos, quando possível para estabelecer ou caracterizar critérios próprios de **tradução na matemática**. Para tanto, temos como um de nossos objetivos, destacar a passagem da linguagem matemática para a linguagem natural, na perspectiva de que os textos matemáticos ou parte deles, a exemplo do que fizeram Galelli (2012) e Silveira (2014), podem ser traduzidos.

As traduções priorizadas nesta pesquisa envolvem palavras, expressões, simbologias e notações que pertencem de forma quase exclusiva ao universo intrateórico da Matemática, cujas aplicações serão evidenciadas no ensino. Não obstante, ressalto que algumas expressões ou palavras usadas na Matemática, também são usadas na linguagem natural, o que por vezes causa confusão. Na concepção referencial da linguagem adotada pedagogicamente no Construtivismo, o objeto triângulo (imagem) pode ser observado em uma placa de trânsito nas ruas das cidades ou como instrumento musical, mas na Matemática o conceito do objeto triângulo não possui estes significados.

Assim, a imagem de um triângulo pode funcionar como um símbolo na Teoria dos Signos de Charles S. Peirce (1980), bem como no Multiculturalismo e na Etnomatemática, onde a figura do triângulo aparece em construções de casas de madeira (estrutura do telhado); nas malhas triangulares da geometria em objetos da cultura africana, tema discutido por Paulus Gerdes (1952-2014); nas obras arquitetônicas da Grécia Antiga ou nos miraculosos arranha-céus da atualidade; nas obras artísticas a exemplo do Cubismo, por fim, há uma diversidade de aplicações envolvendo não só os triângulos, mas outras figuras geométricas na História da Humanidade e na História da Matemática ao longo dos tempos.

As palavras triângulo e quadrado, quando usadas no contexto da linguagem natural, quase sempre estão associadas a objetos do cotidiano, mas esta ideia referencial, psicológica ou antropológica, não será objeto de discussão nesta pesquisa. Farei uso de conceitos da Geometria com ênfase na linguagem. Procuraremos desta forma, apontar outro caminho, que não o do sentido referencial agostiniano da linguagem-objeto, elenquei exemplos associados à Geometria neste parágrafo, com a finalidade de mostrar, que apesar do apelo imagético voltado à realidade, o conceito de triângulo estudado nas escolas atualmente é praticamente o mesmo que foi proposto por Euclides no séc. III a. C., de modo convencional, este é o conceito que se encontra nos livros escolares de nosso país.

É nesta ótica, portanto, que apesar das semelhanças ou aproximações que os objetos da Matemática venham a ter com a realidade, a preocupação aqui, refere-se ao ensino de Matemática, a exemplo do que assinala Granger (1994, p. 64), “tais objetos do conhecimento não serão tomados à luz da empiria, os chamarei de conteúdos formais”. Estas ilações têm como alvo, prioritariamente, professores de Matemática, por serem alusivas a conceitos e definições cujas aplicações são de domínio profissional como as funções, a Geometria Analítica e Trigonometria. Não há, portanto, a meu ver uma busca pela justificativa da Matemática em contextos da realidade, este não é o interesse desta pesquisa, isso não quer dizer que as discussões, aqui, têm caráter asséptico, pois a natureza do debate possui finalidades educacionais.

De acordo com Silveira (2014), traduzir textos literários ou textos matemáticos é mais produtivo em termos de aprendizagem para o aluno, desde que o professor evidencie o sentido do texto e não o traduza somente palavra por palavra. Desta forma, o que se ensina não deve ficar subentendido ou preso somente a referências, pois, a linguagem econômica da Matemática reduz o significado de expressões por meio de simbologias. Estas simbologias nem sempre dão conta de expressar por completo o significado do que se pretende ensinar.

Na *Filosofia do Estilo,* Granger (1978) assinala que há uma perda de informações, por exemplo, nas linguagens científicas, como a da Matemática, em função do seu formalismo, ocasionando o surgimento de *resíduos* na linguagem. Entenda-se por resíduos, não o significado empregado no vocabulário da linguagem natural (corpo de fundo, sobra ou material a ser desprezado), ou seja, a interpretação para os resíduos grangerianos versa sobre palavras, expressões ou simbologias que não podem ser traduzidas diretamente de uma linguagem para outra em função das diferenças de sintaxe, de aspectos simbólicos ou notações ligadas a um vocabulário estritamente científico. Assim, certas expressões sobrevivem exclusivamente nos domínios de cada ciência, assim é na Física, com a Teoria da Relatividade; na Química, com os anéis de benzeno; e na Biologia, com o DNA.

Com base em minhas práticas docentes exercidas da Educação Básica ao Ensino Superior, espero contar com a compreensão do leitor para fazer a seguinte afirmação na citação a seguir (memória docente). De modo análogo, é o que o escritor e poeta fazem, usam de licença poética-literária para adequar palavras ao contexto de sua imaginação.

> Percebi, que no ensino da matemática as atividades de leitura e a interpretação textual realizadas pelos professores não são acompanhadas no mesmo ritmo pelos alunos, isso se deve, pelo fato de que eles não conseguiram ainda dominar a linguagem matemática presente nos textos escolares. Esta é uma dificuldade que tem sua origem nas séries iniciais, onde os alunos entram em contato com os fundamentos da aritmética.

Esta afirmação encontra amparo nas palavras de Silveira e Silva (2013) ao destacar que é preciso estar atento para acompanhar as mudanças que ocorrem no ato de ensinar e de aprender dos professores e alunos, estas condições mudam, pois eles não são os mesmos o tempo todo. Há diferenças de linguagem e de competência entre ambos, não há uma equivalência direta entre ensino e aprendizado, não há automatismo na Educação. Os autores destacam, ainda, que os professores apesar de relativizarem o seu linguajar para tentar amenizar o rigor da linguagem matemática, acabam por desencadear certa imprecisão no ensino dos conceitos matemáticos, que passa a ser prejudicial, tanto ao aprendizado dos alunos como nas atividades de ensino subsequentes.

Algumas passagens escritas por Rojano (1994) podem corroborar com o que foi dito no parágrafo anterior, ou seja, que há hierarquias da linguagem cujo reflexo se manifesta na sala de aula, por meio de simbologias que os alunos devem aprender, mas estas simbologias peculiares da Matemática não estão presentes com frequência na linguagem natural, isso implica certamente no ensino e no aprendizado de conceitos e passa por questões de interpretação na Matemática.

Esta discussão se junta a outras com base em observações de minhas práticas docentes, por exemplo, a partir da definição $f(x)=ax^2+bx+c$, para **$a \neq 0$** onde **(a, b e $c \in R$)** percebi que era importante esclarecer aos alunos que há funcionalidades (significados) por trás desta sintaxe (linguagem).

Os termos (a, b e c) da Função Quadrática têm significado exclusivo na Matemática, que não se assemelham com os da Língua Portuguesa, a não ser pela mesma grafia. Na perspectiva da linguagem em Wittgenstein, Melo (2013) revelou que há dois jogos de linguagem, ou seja, o Jogo de Linguagem da Matemática e o Jogo de Linguagem da Informática que se entrelaçam para dar sentido ao ensino e aprendizado da Função Quadrática na Educação Básica.

Diferentemente do que apregoam as correntes empiristas no campo da Educação, um conceito matemático não se constitui exclusivamente a partir da cognição na mente dos alunos ou com base na intuição. Tais justificativas encontram-se também na Linguagem, esta é a perspectiva que defendo à luz dos jogos de linguagem wittgensteinianos.

Silveira (2017) destaca que os gestos ostensivos (ato de apontar ou mostrar um objeto), muito utilizados pelo professor na sala de aula, funcionam como uma espécie de *tradução* para os alunos. O professor aponta para um objeto, por exemplo, um gráfico ou forma geométrica no quadro, os alunos visualizam e usam consequentemente o mesmo gesto em outras ocasiões, a ostensão passa então a fazer parte de seus aprendizados.

Os atos ostensivos são interpretados por Wittgenstein (2009) como jogos de linguagem preparatórios, são os primeiros rudimentos de nomeação, que mais adiante vão se integrar a outras palavras do seu vocabulário e que farão parte de seus estudos, quiçá na Matemática. Visando a tradução de uma expressão, símbolo ou notação em função de compreender o seu significado ou sua aplicação no contexto da Matemática, mas não se trata de tradução de uma língua para outra, ou seja, é **traduzir na Matemática**.

Nesse sentido, o uso de símbolos e regras fazem parte da gramática da Matemática, como aponta Silveira (2017), isto posto, quando necessário, procura-se associar numerais a objetos do mundo físico, cujas associações são correlatas no ensino de Matemática para crianças. A autora afirma que desde cedo as crianças aprendem a contar – um caderno, dois cadernos, três cadernos, assim como passam a usar as primeiras letras do alfabeto para aprender os seus nomes próprios: Ana, Beatriz, Carlos.

Afirmo que o uso referencial da linguagem é parte de uma preparação ou introdução ao universo linguístico. Com base no que afirma Wittgenstein (2009), a relação biunívoca palavra-objeto é **um** jogo de linguagem primitivo. As primeiras palavras pronunciadas pelas crianças são balbuciadas em tom primitivo da fala, os sons que elas produzem não condizem com as palavras que pronunciamos, são sons desconexos que elas adaptam até que possam falar corretamente. Os adultos e outras crianças com maior idade vão corrigindo esta fala ao pronunciar as palavras corretamente, até que o vocabulário da criança se aperfeiçoe e ela possa continuar repetindo palavras erradas. Ela mesma vai aprender outras palavras conforme seus usos e passa a ampliar seu vocabulário. Nesta fase, a criança passa de um jogo de linguagem primitivo para um jogo de linguagem mais complexo, não é necessariamente a maturidade que implica nesse aprendizado, mas o contato com diversos jogos de linguagens que oportuniza novos aprendizados.

O pleito que defendo nesta pesquisa é de que existem para além dos jogos de linguagem primitivos na linguagem natural e na Matemática (primeiras noções de contagem), jogos de linguagem mais complexos que funcionam como uma espécie de tradução específica, **intramatemática**. Esta espécie de tradução não possui necessariamente correspondência linguística biunívoca com as palavras da linguagem natural. Há conceitos que funcionam exclusivamente no universo da Matemática, como a operação de união na Teoria dos Conjuntos, o corpo e anéis na Teoria dos Números.

Não estamos diante de um matematiquês (língua matemática), mas diante de uma linguagem da ciência, que funciona como um **cálculo gramatical** governado por regras funcionais e regras relacionais (propriedades) que compõem, por exemplo, o jogo de linguagem dos conceitos-algébrico geométricos. Wittgenstein une na expressão Cálculo Gramatical, observações sobre língua e linguagem, uma opera na língua natural e a outra vai ao encontro da Matemática.

Para entender o que Wittgenstein quis dizer com cálculo e gramática, observo a explicação fornecida no aforismo 27 da *Gramática Filosófica* (WITTGENSTEIN, 2003, p. 45): “o significado é o papel da palavra no cálculo”, examino também outra acepção semelhante no aforismo 23 (WITTGENSTEIN, 2003, p. 41): “e se 1 centímetro cúbico de água fosse chamado ‘1 grama’ – Bem, o que de fato pesa? – A explicação do significado explica o uso da palavra. O uso de uma palavra na linguagem é o seu significado, A gramática descreve o uso das palavras em uma língua”. Esta afirmação quer dizer que é o emprego das palavras em determinado contexto que dá o sentido do que se quer comunicar.

Não é comum ouvirmos essas expressões na linguagem natural, mas a extensão do **significado** para Wittgenstein é abrangente, assim como o significado de **gramática**. De todo modo, da Filosofia para a Matemática, a interpretação destes conceitos na perspectiva wittgensteiniana sugere que a Matemática possui uma gramática, ela trata da linguagem da Matemática, por conseguinte, subsiste aí uma sintaxe que a governa. Seu funcionamento, difere, portanto, da língua natural por se tratar de outra gramática, àquela que usamos para proferir sentenças do jogo de linguagem ordinário (aqui este significado é semelhante ao da linguagem natural), do uso frequente em nossa forma de vida.

A Matemática é uma ciência que conversa consigo mesma, é esta a função de sua linguagem e para além destas ilações há, ainda, os significados ligados a técnicas tradutórias presentes na Hermenêutica (teoria da compreensão) que se juntam ao escopo da tradução. Estamos diante de uma trama complexa, de natureza epistemológica, cujas técnicas requerem domínio mais profundo, sua finalidade aponta o universo docente, é uma *condição de possibilidade* tradutória, como assinalou Oliveira (2013), é o caminho que vislumbro para a constituição desta tese no campo da Educação Matemática.

Defendo, portanto, nesta pesquisa que a **Tradução na Matemática** pode trazer clareza ao leitor acerca dos conceitos e simbologias que serão decodificados por meio de uma atividade tradutória interna. Este é um jogo de linguagem que congrega duas gramáticas, a da língua natural e a da Matemática, na perspectiva wittgensteiniana do ensino da Matemática. O sentido, ao qual me apego aqui, é mais intenso acerca dos significados da Matemática, por isso, viso a sintaxe desta linguagem, mas não há como desprendê-la da linguagem natural.

A linguagem natural auxilia na comunicação e rege o percurso das palavras, a linguagem matemática dedica-se a estudar e compreender os conceitos internos, por isso, infiro que conceitos e simbologias da Matemática também são traduzidos, ora em função da linguagem natural, ora em função da própria Matemática.

Metodologia

O método aqui assenta-se em pressupostos que não visam fenômenos, diverge de observações da linguagem referencial e da empiria. Minha intenção ao usar a linguagem é buscar no estilo wittgensteiniano, fazer um exercício terapêutico, para tentar dissolver as tentações da referência. Wittgenstein menciona a expressão *terapia* no intuito de se livrar das sombras das suas primeiras imagens, oriundas do *Tractatus*, vinculadas ao mundo da lógica na primeira fase de seus pensamentos, a partir desta reflexão, ele muda o seu método para as *formas de vida* em sua filosofia tardia.

Nesse sentido, Spaniol (1989) afirma que o filósofo desenvolveu um método que se assemelha a uma terapia filosófica, mesmo sem tê-lo feito de próprio punho. O método terapêutico nasce na Filosofia da Linguagem e passa a fazer parte do exercício constante dos escritos wittgensteinianos.

O interesse metodológico desta Tese não é terapêutico aos moldes da empreitada wittgensteiniana, mas preserva o interesse pelas nuances da linguagem. Desta forma, introduziremos alguns comentários acerca de aspectos metodológicos que irão permear tanto a filosofia quanto o contexto da ciência. Consideramos que falar de método a partir de uma filosofia consiste de uma tarefa complexa, em especial, quando se trata de usá-la em contextos científicos, algo que não fazia parte do projeto wittgensteiniano. Por outro lado, o filósofo não impôs qualquer restrição a quem quisesse fazê-lo. De acordo com Araújo (2012), a segunda filosofia de Wittgenstein é uma **Epistemologia Crítica**, dado que o filósofo fez cair por terra o idealismo do céu platônico, as categorias aristotélicas e a crítica da razão em Kant.

Nas *Investigações Filosóficas*, os horizontes da linguagem se ampliam, Wittgenstein passa adotar as *formas de vida* como pano de fundo para instituir o *jogo de linguagem*. O Mestre de Viena adverte já imbuído de uma proposta terapêutica, que visava a cura de problemas filosóficos.

Wittgenstein (2009) adverte que a Linguagem constantemente prega peças e nos coloca em situações de embaraço. Por isso, definir um objeto de pesquisa ou evidenciar um método aqui, consiste num substrato desta terapia, que é desenvolver uma abordagem metodológica para implementar a tese da **Tradução Interna na Matemática**.

O exercício metodológico que desenvolvi transita entre aspectos filosóficos e epistemológicos e se volta ao contexto educacional, visando à constituição do objeto matemático. Cumpre destacar desde já que a técnica por trás desta proposta consiste em estar atento para as armadilhas da linguagem que se instalam em nosso vocabulário, para tanto, é importante nesta perspectiva, sempre que possível evitar o uso da linguagem referencial, ou seja, devido à polissemia da linguagem natural, a noção de objeto no contexto da ciência remete inevitavelmente a pensar em algo concreto. Como escapar desta armadilha? Este foi o objetivo perseguido por Wittgenstein nas *Investigações Filosóficas* (2009).

A palavra objeto é muito presente e viva em nosso linguajar, a ideia de objeto reina no mundo da empiria. Objeto de pesquisa, por conseguinte científico, mas de contorno filosófico, pode vir a transitar ora como objeto inteligível ora como objeto sensível, devido aos anseios de generalidade provocados pelas epistemologias da cognição da Educação. O contexto desta pesquisa adere à gramática dos jogos de linguagem wittgensteinianos, este será o enfoque metodológico aqui empregado.

Os objetos físicos quando assim for imperativo usá-los, serão descritos como parte dos jogos de linguagem primitivos, aqueles da nomeação, como adverte Wittgenstein (2009). Araújo (2012, p. 128), assinala que "o que precisa ser investigado e o que já está pronto e estabelecido vem com o aprendizado da linguagem, o que é parte da atividade humana" e reflete sobre as construções empíricas em situações comuns, que podem ser descritivas ou nomeáveis, mas podem ser inteligíveis como as abstrações, que possuem finalidade meramente matemática, como os corolários.

Os jogos de linguagem wittgensteinianos que emprego nesta abordagem metodológica tendem para discussões intrateóricas, o que não impede, por vezes, suas conexões com o mundo da empiria. Procurei ressaltar que as discussões se fundamentam em proposições lógicas ligadas aos conceitos linguísticos, quando imperativo o caráter descritivo da linguagem entra em jogo para expressar diferentes formas de vida.

Araújo (2012) destaca que as árvores não se movem, mas crescem e é com estes critérios que a gramática dos usos wittgensteinianos conta no jogo de linguagem. Assim, não se precisa de provas para constatar este fato, trata-se de uma informação cuja lógica implica em saberes herdados culturalmente a qual passamos a acatar na sociedade, não precisa, portanto, ser provada cientificamente. Sabemos de antemão que as árvores crescem, ao passo que objetos físicos não crescem naturalmente porque não podem ser plantados, reitera Araújo (2012).

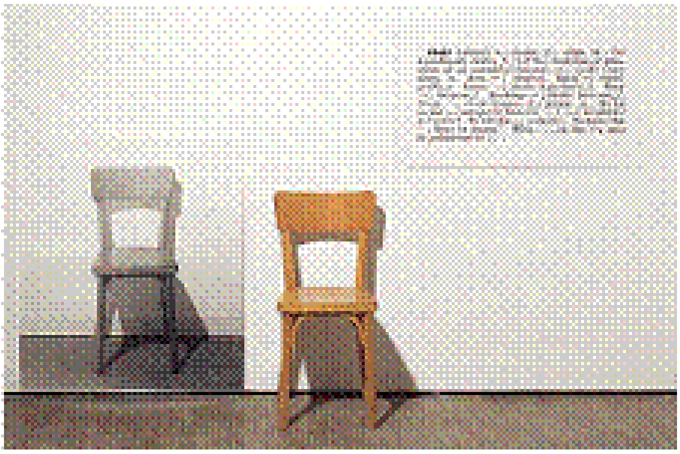
Um edifício cresce porque é construído, não porque uma espécie de genética assim o determina, é que os jogos de linguagem que os evidencia possuem naturezas distintas, este é o perfil *incomensurável* dos jogos de linguagem wittgensteinianos, algumas regras comuns podem ser observadas, outras desprezadas e novos jogos podem se constituir.

Ao observar alguns aspectos e nuances da linguagem procurei traçar um caminho metodológico condizente com o propósito dessa pesquisa, senti a necessidade de ir além das imagens restritas ao domínio da Matemática, como farei em vários momentos na tese. As imagens tomarão formas, ora linguísticas ora numéricas, ora imagens por elas mesmas tal qual se apresentam diante de nossos olhos, até mesmo sem uma definição prévia.

Não há nesta Tese, o interesse imediato pela criação de novos objetos matemáticos, pois compreendo que estes objetos já se encontram bem-definidos no contexto científico e continuam a se expandir. Esta pesquisa visa a interpretação e tradução de alguns conceitos da matemática que nem sempre são compreendidos no contexto educacional, por professores ou alunos. Há, nesse sentido, imagens e conceitos que fogem aos domínios da gramática da linguagem natural, por serem meramente simbólicos como os gráficos da geometria e as notações específicas da linguagem algébrica.

Barros (2016) adverte que um dos conceitos que mais afronta os saberes científicos encontram-se nas artes conceituais, e isso se deve porque os artistas não manifestam a preocupação de querer necessariamente explicitá-los, eles deixam ao público a tarefa de interpretá-las, viajar nas suas cores e formas. O autor menciona em nota de rodapé de seu livro, a obra da arte conceitual de Joseph Kosuth, *Uma e três cadeiras* (1969), que me chamou atenção pelo título ao que parecia, ilógico, ou pelo menos incomum à gramática da linguagem natural. Não é trivial nos expressarmos com a frase uma e três cadeiras. Assim, meu pensamento fugidio foi em busca da imagem das cadeiras de Kosuth, como pode ser visto na figura a seguir.

Figura 1 – Uma e três cadeiras



Fonte: Barros (2008)

A ilustração da figura 1 mostra três versões ou imagens do objeto, a foto, a cadeira e descrição de cadeira por um dicionário. Assim, Kosuth rompe a barreira da linguagem ao escrever uma e três cadeiras e apresenta sua arte conceitual para excluir e, ao mesmo tempo, afrontar a noção imagética tradicional da referência biunívoca objeto-palavra ou vice-versa.

Assim, os objetos desta pesquisa também possuem seus atributos, ora na linguagem ora nas imagens, e mais, há o momento em que elas não são possíveis na Matemática, a exemplo do conceito numérico de infinito. Por outro lado, se não pode ter uma imagem precisa do que é o infinito para além da trivial indicação de olhar para estrelas no firmamento, é possível obter a imagem de assíntotas, ou seja, retas imaginárias que tangenciam curvas.

Que método então usar? Não há resposta imediata para este fim, pois não encontrei um método que pudesse se adequar diretamente ao meu propósito, isso implica necessariamente em elaborar um método? Direi que não. Por conseguinte, esbocei uma Abordagem Metodológica pelo viés da Linguagem. É sobre esta abordagem que os argumentos serão tecidos, assentados em análises e discussões epistemológicas, por lidar com objetos matemáticos já constituídos. Por outro lado, se os liames da ciência exigem uma base de contornos empíricos, elegi para esse fim construções gráficas virtuais com auxílio da informática, cujos exemplo encontrar-se-ão nos capítulos 4 e 5 desta pesquisa, no entanto, uma amostra desta discussão será observada ainda nesta seção.

De acordo com Severino (2016), esta aproximação é necessária para que haja uma conexão ou referência epistemológica, que se adeque ao intento do pesquisador ao visar um trabalho fecundo. Encontrei nas reflexões de Moreno (2005), elementos que permitem ao mesmo tempo adentrar no universo da Filosofia da Linguagem sem perder o rumo das teorias no campo da ciência. As contribuições da *Epistemologia do Uso* vão consubstanciar sempre que possível minhas discussões acerca da pesquisa no âmbito da Educação Matemática. As conexões com o ensino da Matemática serão tecidas por meio de aplicações voltadas à Educação, a exemplo do que fez Teixeira Júnior (2016).

O campo dos conceitos acerca da linguagem é extenso, por isso, Wittgenstein (2009) asseverou que o conceito da palavra conceito por si só é vago, vago no sentido de que um conceito não se aprisiona, não se mede numericamente. Os conceitos não se limitam aos usos das palavras contidas nos dicionários ou no vocabulário do senso comum, eles entram em ação quando a linguagem está em jogo.

Os conceitos e as imagens caminham quase sempre lado a lado, Moreno (1995) adverte que estes foram alguns dos motivos pelos quais as imagens foram uma preocupação, uma nuvem espessa que acompanhou certa fase do pensamento de Wittgenstein. Moreno afirma que as imagens *atravessaram* o pensamento do Mestre de Viena, quando dedicou parte de seu tempo a estudar a Psicologia, a exemplo das ilações que aparecem na segunda parte das *Investigações Filosóficas* (2009). As imagens, portanto, movimentam nossos pensamentos. Nesta tese, darei ênfase às imagens (gráficos) associadas ao Jogo de Linguagem da Matemática.

Araújo (2012) salienta que o jogo de linguagem da Matemática é essencial no sentido de levar a certas implicações e exigir regras próprias de construção. Concordamos com a autora, esta seara é o pano de fundo para minhas discussões. Por isso, Wittgenstein (2009) elabora as proposições gramaticais, que evocam perguntas que não tem ponto fixo como àquelas do conhecimento empírico, o jogo de linguagem wittgensteiniano argui, portanto, pela implicação de certas afirmações, pelo tipo de informações que elas carregam e inquerem sobre a sua pertinência em determinados contextos (ARAÚJO, 2012).

Como definir então onde se situa o meu objeto de pesquisa, na falta de uma palavra melhor digo que é algo que está imerso nos meandros do jogo de linguagem, evocado aqui, por meio de uma Discussão Epistemológica. É assim, em meio a esta trama complexa da linguagem, que situo como dito antes, minha abordagem metodológica. Preferi, então, traçar propriamente um caminho em direção aos conceitos e imagens desta pesquisa, visando o jogo de linguagem da **Tradução Interna na Matemática**.

Severino (2016) destaca que há sempre uma busca incessante ou determinação para caracterizar a pesquisa do ponto de vista científico. Fazer esta distinção é simples quando o alvo está à frente, quando o perímetro está delimitado e o sujeito está confortavelmente adequado. Ajustá-los, tem como propósito enquadramento ou ordenação, caso contrário, nas palavras de Severino (2016), quando definir se uma pesquisa é qualitativa ou quantitativa e qual seu objeto, se os pressupostos de simplicidade acadêmica não estão imediatamente postos ou visíveis?

> Quaisquer que sejam as distinções que se possa fazer para caracterizar as várias formas de trabalhos científicos, é preciso afirmar preliminarmente que todos eles têm em comum a necessária procedência de um trabalho de pesquisa e de reflexão que seja pessoal, autônomo, criativo e rigoroso (SEVERINO, 2016, p. 228).

O autor assinala que nem sempre se encontra algo adequado aos objetivos, e é preciso, portanto, elaborar ou criar uma metodologia que possa articular objetos de natureza teórica, com logicidade e autonomia. Por se tratar de uma discussão epistemológica, as análises técnicas sobre o objeto de estudo desta Tese, penso, se fazem necessárias. Não há um objeto definitivo, ainda que alguns se sobressaiam na maioria das discussões, então, trata-se de um Jogo de Linguagem da Matemática, cujas regras vão ganhando aplicações ao longo do caminho.

Diante do exposto, esta pesquisa tem como objetivo discutir e analisar objetos matemáticos (conceitos) dentre os quais, tópicos de Geometria Analítica, Funções e Trigonometria na perspectiva do jogo de linguagem wittgensteiniano e de outros conceitos como *ver*, *ver como*, *revelação do aspecto*, *formas de representação*, consideravelmente explorados nas *Investigações Filosóficas* (2009), dentre outros textos, acerca das acepções produzidas por comentadores e pesquisadores.

Farei usos das contribuições teóricas de Granger (1994; 2013) e de outros autores acerca da Matemática como linguagem. Nessa trama em que se entrelaçam diferentes jogos de linguagem, o contexto epistemológico rege os movimentos de pensamento aqui evocados numa perspectiva docente.

A abordagem metodológica consiste em revisitar parte do debate que envolve o jogo de linguagem da Matemática explorado em Melo (2013). Nesse sentido, procuro evidenciar o caráter comparativo e a explicação como visão panorâmica do jogo de linguagem, conforme o que destacou Moreno (1995), mas na perspectiva da **constituição** de conceitos matemáticos. Por constituição, compreende-se olhar a partir da perspectiva wittgensteiniana e ver como os conceitos funcionam e se entrelaçam com os demais jogos de linguagem na Educação.

No âmbito da Educação Matemática me ocupo com as aplicabilidades dos conceitos matemáticos, tendo em vista certas implicações na compreensão da linguagem formal no ensino de Matemática. Levantei, portanto, os seguintes questionamentos: de que maneira as definições e as simbologias da Matemática são apresentadas aos alunos? Ao ensinar conceitos como o de função, por exemplo, os professores lidam naturalmente com as notações e simbologias da Matemática como se estas pertencessem ao vocabulário correlato da linguagem natural?

Na mesma direção das perguntas acima, outros questionamentos acerca da linguagem matemática no ensino foram surgindo, a saber: há distinções entre os gráficos de equações e os gráficos de funções no ensino da Matemática? O que dizem estas imagens na Matemática? O estudo da escrita algébrica requer necessariamente o apoio de imagens para elucidar seus conceitos e vice-versa? Em que aspectos o uso do software *GeoGebra* na sala de aula auxilia na compreensão de conceitos matemáticos? Conceitos, notações e simbologias da Matemática carecem de tradução por parte dos professores? Encontrar respostas para estas e outras perguntas é uma condição de possibilidade que vislumbro, levando em consideração o ensino da Matemática. Considero que esta investigação é um **lance** na extensa trama dos jogos de linguagem wittgensteinianos, que pretendo destrinçar no sentido de contribuir com o ensino da Matemática.

Abordagem Metodológica

Não há nesta Tese um roteiro predeterminado, mas um caminho metodológico que consiste na análise de textos matemáticos, de modo mais específico, da linguagem matemática.

No final do ano 2017 foi lançada no Brasil, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), que pretende organizar o currículo das escolas brasileiras, mas, no caso do ensino médio, este documento apresentou muitas divergências por parte da comunidade docente no Brasil, que sugeriu contrapropostas e modificações. Assim, em 2018, a BNCC do ensino médio continua aberta as discussões. As escolas seguem atualmente, os modelos propostos nos PCN's (2000) e nas Orientações Curriculares para o Ensino Médio (2006), para além das inserções e particularidades que cada secretaria Estadual de Educação tem liberdade para ajustar o desenho curricular da disciplina Matemática, em relação à chamada parte diversificada da BNCC.

Os tópicos da Matemática do ensino médio aqui discutidos são aqueles que constam em livros didáticos, conforme o Programa Nacional do Livro Didático (PNLD), adotado pelas editoras brasileiras. Nesse sentido, o objetivo é destacar no ensino da Matemática na Educação Básica, o jogo de linguagem wittgensteiniano, considerando:

- A escrita formal ou normativa da linguagem matemática;
- Notações e simbologias específicas utilizadas na constituição de conceitos e definições;
- O estudo e a construção de gráficos com a utilização do software *GeoGebra* (versão 6.0472.0-offline / maio de 2018).

Pretendo desta forma apresentar pontos de discussão que necessitam de conhecimentos matemáticos específicos, com destaque para minúcias que não se encontram regularmente em livros didáticos, nem sempre detectadas pelos professores. Tratam-se de observações provenientes de pesquisas no campo da Educação Matemática, que tem como finalidade ampliar as possibilidades de ensinar Funções e Geometria Analítica, que podem, futuramente desdobrar-se em atividades voltadas aos alunos.

Ressalto que as discussões feitas não tem a intenção de construir sequências didáticas ou elaboração de uma metodologia ou estimular a construção de recursos para o ensino da Matemática. Ao fazer uso do Jogo de Linguagem da Informática, com base em minhas pesquisas (MELO, 2013; 2015), procurei dar subsídio aos professores de Matemática usando imagens (gráficos) gerados pelo computador a partir do software *GeoGebra*. Para tanto, recorri em determinados momentos à História da Matemática para identificar a evolução e as mudanças que alguns conceitos e definições tiveram ao longo do tempo, com destaque para o estudo de funções e cônicas.

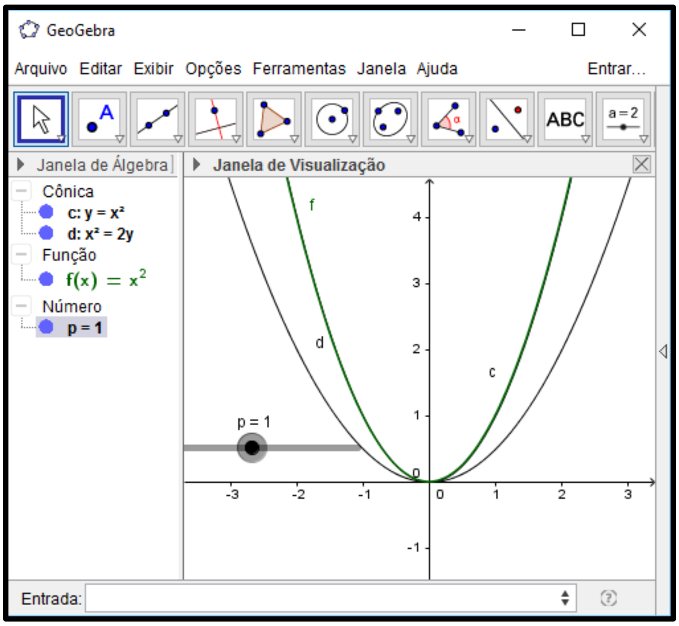
Não se trata de uma historiografia, mas de mostrar que ocorreram mudanças na linguagem matemática de um século para outro, a exemplo da definição do objeto matemático **função** do início do século XIX, conforme o excerto abaixo.

> Dirichlet (1805-1859) escreveu sobre função: uma variável é um símbolo que representa um qualquer dos elementos de um conjunto de números; se duas variáveis *x* e *y* estão relacionadas de maneira que, sempre sem atribui um valor a *x*, corresponde automaticamente, por alguma lei ou regra, um valor a *y*, então se diz que *y* é uma função (unívoca) de *x*. A variável *x*, a qual se atribuem valores à vontade, é chamada de variável independente a variável *y*, cujos valores dependem dos valores de *x*, *é* chamada variável dependente (EVES, 1997, p.611).

Atualmente, a definição de função que pode ser encontrada em textos e livros de Matemática atuais é dada por: $f: A \to B, \forall x\ e\ A\ \exists |\ y \in B / (x,y) \in (AxB)$

Nota-se que houve uma mudança significativa na forma como se escreve, atualmente, a definição simbólica (formal) de função, cuja notação moderna dada por *f(x)* nos livros técnicos e didáticos, foi atribuída aos matemáticos Leibniz, Newton e Euler (EVES, 1997). Esta discussão é subsídio para a outra, que trata especificamente da construção de curvas e gráficos na Matemática, que também evoluíram epistemologicamente. Estas curvas que eram construídas com régua e compasso no estilo da Geometria Euclidiana, passaram a ser construídas com auxílio do computador, como mostrado a seguir, a partir do software *GeoGebra*.

Figura 2 – Parábola e Cônica



Fonte: Elaboração do Autor (2018)

Conforme os exemplos mostrados acima acerca do conceito de função, foi possível notar as diferenças ocorridas nos períodos de evolução da escrita algébrica, em que prevaleciam a escrita retórica e sincopada até chegar à escrita simbólica (EVES, 1997). Destaco que a notação simbólica usada atualmente nos livros é mais difícil de ser interpretada pelos alunos. Os professores fazem geralmente nas aulas expositivas uma leitura literal das simbologias, mas como os alunos não dominam estes códigos, o texto matemático torna-se pouco compreensível.

Nas aulas de Geometria, atualmente, os gráficos não são mais feitos com régua, transferidor e compasso ao estilo euclidiano. Estas noções da Geometria Descritiva ainda ocorrem nas aulas de ensino técnico e de cursos superiores, em que as curvas matemáticas, a exemplo das cônicas, ainda podem ser construídas por essa metodologia. No entanto, as tecnologias informáticas e os softwares, praticamente substituíram as ferramentas antigas, ou seja, régua e compasso, as curvas e figuras geométricas são construídas como o auxílio do *GeoGebra*, de maneira quase automática. Com o uso do computador nas aulas de Matemática, ganha-se tempo e pode-se explorar outros efeitos, como os movimentos dos gráficos (MELO, 2013).

A partir destas pesquisas e de outras discussões acerca da linguagem matemática e a construção de imagens (gráficos) no computador, passei a levantar hipóteses de que esta atividade poderia ser vista como uma forma de traduzir textos matemáticos para a linguagem natural. Nesse sentido, com base na figura 2, mostrada anteriormente, elaborei a seguinte afirmação: “nem toda parábola é proveniente de uma função quadrática, historicamente, as parábolas foram originadas como curvas ou por meio de equações da geometria analítica” (MELO; BRANDEMBERG, 2016, p. 9).

Nesta tese, avancei um pouco mais, aprofundei as discussões no contexto epistemológico para dar sentido às expressões **tradução interna na Matemática** e **jogos de imagens**, como jogos de linguagem intrínsecos ao ensino da Matemática. Outras discussões nesse sentido serão evidenciadas a partir de critérios ou quadros de referência acerca dos jogos de linguagem, para caracterizar conceitualmente objetos matemáticos, com base em outras expressões, como semelhanças de família, seguir regras e os aspectos ver e ver-como, alusivas ao que foi dito por Wittgenstein nas *Investigações Filosóficas* (2009).

2 EDUCAÇÃO, LINGUAGEM E MATEMÁTICA

> *"O mundo das formas simbólicas é o mundo da vida...Que culmina na linguagem matemática. O simbolismo persegue um objetivo supremo, a união de todos os homens." (Ernst Cassirer)*

Polarizações pedagógicas na educação

O debate sobre o ensino de Matemática permeará minhas reflexões neste capítulo, de forma mais acentuada que a aprendizagem, em função de que as discussões que proponho se deem na perspectiva da docência, ainda que na educação escolar o foco se volta quase sempre para a aprendizagem dos alunos. Não obstante, esta afirmação ampara-se em documentos elaborados pelo MEC, a exemplo dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN's), lançados nos anos finais do século XX e início do século XXI.

Pretendo evidenciar nesta parte da pesquisa que o contexto científico acerca do ensino da Matemática não se desvencilha da realidade das escolas, mas se afasta dela pela distinção de objetivos. Na Escola, os professores preocupam-se pedagogicamente em aproximar conceitos da realidade e do cotidiano dos alunos, tarefa que consideramos pertinente. No entanto, ao relativizar tais conceitos na intenção de facilitar a aprendizagem, minimizam o discurso científico e reduzem-no quase ao nível do senso comum. Um discurso constante nas escolas da Educação Básica é o de que os alunos devem aprender com base nos seus conhecimentos prévios, esta é uma característica latente do movimento construtivista na educação escolar.

Não é à toa que os temas realidade e cotidiano são trazidos para a sala de aula quase à exaustão. Desta forma, a linguagem coloquial é preterida em relação a termos formais, quase sempre considerados abstratos e complexos pelos professores, que desta forma optam por abordá-los de modo superficial ou até mesmo não os ensinar. O que parece ser óbvio, mas, não é. Pretendo ressaltar desta forma, que atualmente, os objetivos educacionais a serem alcançados pelas Secretarias de Educação do Brasil, não obstante, destoam entre o discurso pedagógico e a prática efetiva de suas ações. Assim, muitos profissionais da educação (pedagogos e professores de Matemática) encontram razões para não ensinar conteúdos de Álgebra e de Geometria, mas isso traz implicações posteriores.

Ao avançar de um ano para outro, os alunos sentem que certos conceitos não lhes foram ensinados ou ensinados parcialmente, muitas dessas decisões não são tomadas a esmo, amparam-se em discussões pedagógicas locais travadas nas escolas, onde o currículo passa a ser lido como cardápio, ou seja, pretende agradar o freguês. Este discurso é defendido por equipes pedagógicas e ampara-se nas pedagogias do aprender a aprender, como assinala Duarte (2010). Este modelo de ensino apregoa que é o aluno quem deve aprender a estudar, o professor não ensina, apenas media os conhecimentos, daí resulta que as práticas de ensino passam a ser preteridas em função de que é a aprendizagem que interessa, **ensinar** deixa de ser prioridade e passa a ser uma consequência, a meu ver está é uma inversão de valores.

Face a esta concepção, um aspecto relevante abordado nos documentos oficiais do MEC ressalta que o aprendizado dos alunos na Educação Básica deve se consolidar com base nas práticas de leitura e escrita da Língua Portuguesa e no ensino da Matemática de forma mais intensa, neste ponto, estou de acordo. No entanto, certas práticas pedagógicas seculares defendidas à luz das concepções teóricas indicadas mais recentemente na BNCC (BRASIL, 2017) funcionam como uma carta magna da educação, a exemplo do Construtivismo, da Psicogenética Piagetiana, do Escolanovismo em Dewey.

As ideias do escolanovismo em Dewey remontam ao pensamento de Platão e, pedagogicamente, também é possível notar que na Educação, preservam-se ilações da Teoria da Iluminação Divina de Santo Agostinho, bem como na formação da razão nos indivíduos conforme Rousseau (GOTTSCHALK, 2015). Segundo a autora, esta trajetória tem se mantido de forma soberana na educação brasileira desde o lançamento dos PCN’s (2000).

Conforme as estatísticas mais recentes divulgadas pelo MEC em agosto de 2018, acerca dos progressos da educação brasileira, os resultados não são nada animadores, em especial, no ensino da Língua Portuguesa e da Matemática na Educação Básica. Os resultados apresentados pela sinopse do Censo Escolar divulgadas pelo Instituto Anísio Teixeira (INEP) em 2017 mostraram que as metas projetadas para o aprendizado em Português e Matemática encontram-se abaixo dos índices esperados. Os alunos do 3º ano do ensino médio enfrentam dificuldades semelhantes, a proficiência em Matemática está muito aquém do que se esperava e não avançou.

Diante desta realidade, o MEC divulgou em seu site que a educação brasileira se encontra atualmente em estado insatisfatório e isso se deve pelo decaimento no número de matrículas escolares no ensino fundamental e médio de 2016 para 2017.

Assim, há diversos fatores que influenciam no ensino e na aprendizagem, que vão desde os investimentos destinados pela esfera federal, e passam também por questões de infraestrutura e formação docente a nível estadual, até chegar nas decisões que regem a educação por meio de documentos oficiais, pautadas em teorias educacionais. É a partir deste último ponto que pretendo adensar discussões, por estarem diretamente envolvidas no universo da docência em função do exercício de minhas atividades profissionais.

Nesse sentido, o modelo educacional vigente resolve manter em sua proposta curricular de forma preponderante as práticas idealistas da contextualização e dos direitos na aprendizagem dos alunos, à luz das Novas Competências para Ensinar, elaboradas por Perrenout (2000) mediante estudos realizados em Genebra. Atualmente, as concepções teóricas da educação brasileira, são norteadas por este modelo pedagógico, que já se encontrava em documentos anteriores, como os PCN's (2000). As escolas brasileiras passaram a partir de 2017, a serem norteadas pela BNCC.

Por outro lado, se os dados mostram reiteradamente que a educação brasileira não progride, as distorções de idade e série aumentam, bem como as taxas de abandono e evasão escolar, que ainda são demandas insolúveis para o MEC. Logo, cabe a seguinte indagação: Por que, de forma insistente, a Educação brasileira continua a apostar no idealismo pedagógico pautado nestas teorias? Este é um problema relativo à políticas públicas, cujo debate não pretendo alimentar nesta pesquisa, mas pelo que percebo, ao acompanhar as mudanças curriculares e os documentos do MEC desde os PCN's (2000), os educadores que os formularam, amparam-se tão somente no campo teórico da Cognição, com ênfase no Construtivismo, na teoria ausubeliana e na Pedagogias das Competências.

Observo que a BNCC (BRASIL, 2017) consiste em um aglomerado de indicações teóricas que se avolumaram em torno de documentos anteriores do MEC e agora surge como versão ampliada e revistada para ser efetivada na Educação Básica. Não sou contra que a educação brasileira disponha de um documento norteador, no entanto, ao tomar este documento sob os moldes de uma universalidade pactual de cunho também político, engendra teoricamente os mesmos elementos que constituíram as práticas pedagógicas anteriormente pautadas nos PCN's.

Se antes os documentos do MEC apontavam para várias teorias como as supracitadas, regidas por parâmetros, este paradigma agora parece apontar numa só direção que referenda a teoria das competências em Perrenout, como algo fecundo e necessário na educação escolar. Chamo atenção para estes fatos, devido a inúmeras tentativas recorrentes no campo da Pedagogia de encontrar justificativas pautadas na realidade e nas práticas multiculturais, para tentar sanar problemas de natureza abstrata, tomando como referência o ensino e a aprendizagem da Matemática.

Nesse sentido, Gottschalk (2015) ressalta que as abordagens utilitaristas e prescritivas na educação escolar brasileira se sustentam teoricamente em práticas seculares que tomam como pressupostos as ideias das escolas estadunidenses pautadas no Pragmatismo de William James e John Dewey, dentre outros. Um dos efeitos deste paradigma que se incrustou no discurso de professores das escolas brasileiras é a imagem de que o ensino e a aprendizagem da Matemática só têm viabilidade pedagógica se estiverem amparados na realidade e mais: que fique bem-estabelecido, que a realidade da Matemática deve levar em conta de forma preponderante a realidade dos alunos, tornando-os protagonistas no processo educacional, como afirma a BNCC (BRASIL, 2017).

No ensino de Matemática, há inúmeros relatos de práticas e estratégias que os professores adotam na Educação Básica no intuito de buscar exemplos que possam, de alguma forma, justificar o ensino (dar significado) ao aprendizado de figuras geométricas. Quase sempre estas figuras são associadas a objetos do cotidiano. Não são raras, portanto, atividades pautadas na construção do conhecimento, onde os triângulos que aparecem em estruturas arquitetônicas, em torres de energia elétrica e antenas de transmissão de rádio e televisão, ilustram os livros didáticos, a exemplo do que é encontrado em Dante (2008).

Obviamente não há impedimento para que alusões de ordem empírica ocorram no ensino, no entanto, a pratica da dosimetria entre discurso e realidade pode ser usada pelos professores, no sentido de que os alunos sejam levados a concluir com base no senso comum, que o conceito de triângulo na Geometria não é o mesmo observado nos objetos que estão à sua volta (visão platônica). Tratam-se de contextos diferentes, apenas a imagem de um (real) é usada como ilustração (virtual) para o outro, deste fato, não resulta que ao fim e ao cabo, objetos distintos sejam tratados como objetos de mesma natureza.

No entanto, ao que parece, as propostas pedagógicas pautadas no Cognitivismo e no Multiculturalismo parecem ignorar que o conhecimento científico da Matemática é também uma construção humana, tratam-na com o estigma de disciplina meramente abstrata e difícil de ser compreendida pelos alunos.

Desta feita, o discurso hegemônico nas pedagogias do aprender a aprender, advogam que exemplos de natureza prática devem suplantar as questões de ordem conceitual e abstrata no ensino da Matemática. Nestas práticas subsiste a ideia de que a Matemática é inata ou que seus conceitos são construídos naturalmente, por uma espécie de maturação biológica. Desta forma, seguem prescrevendo receituários metodológicos em detrimento de questões teóricas, e mais: passam a depositar nos alunos a confiabilidade e a responsabilidade pela sua aprendizagem, que deve ocorrer de forma autônoma. Por outro lado, isso implica na redução da atuação docente nas escolas, pois é o aluno quem constrói o seu conhecimento, o professor é só mediador (DUARTE, 2010).

Diferentemente da realidade e dos contextos socioculturais, a Matemática tem para si um contexto próprio e objetivo, pautado em conceitos normativos, definidos no campo da ciência. Obviamente, não menosprezo no ensino, as práticas empíricas e as relações socioculturais, elas podem ser utilizadas para estabelecer relações entre teoria e prática, mas esta perspectiva não é a única, ou seja, não goza de um *status* que garanta um aprendizado matemático superlativo.

Por outro lado, a vertente da linguagem no ensino é quase sempre considerada como algo que vem sempre depois. Ao que parece, o aprendizado por ostensão (ato de apontar para ilustrar) muito usado nas escolas, parece não usar de atributos linguísticos para se tornar efetivo, mas esta hipótese falha, pois, nas práticas escolares é a professora quem soletra palavras e ensina a soletrar no processo de alfabetização. Não raro, elas pronunciam palavras incompletas, esperando que o aprendiz intua qual a próxima sílaba ou letra que forma a palavra.

Um exemplo muito comum nas séries iniciais, é quando a professora diz: depois, do 1 vem o ... Esperando que a criança diga 2, e junto com a frase vem a representação simbólica nos dedos das mãos, na qual ela mostra dois dedos. Este é um dos aspectos do **jogo de linguagem** do wittgensteiniano no ensino de conceitos que destaco. Nesse sentido, o aprendizado da Matemática se dá pela linguagem e não apenas pela noção mal-construída (ideia de quantidade) do conceito de número pela criança. Por outro lado, este jogo de linguagem primitivo, como destaca Wittgenstein (2009), não tem a característica de linguagem normativa da Matemática, por isso, é um jogo de linguagem preparatório.

Gottschalk (2004) chama atenção para este tipo de inferência na passagem a seguir, em que as teorias cognitivistas dão pouca importância para a linguagem matemática no ensino.

> Especificamente em relação à linguagem matemática, as reflexões de Wittgenstein sobre a natureza de suas proposições esclarecem, a nosso ver, muitas das confusões decorrentes da crença em uma realidade matemática extralinguística, a qual conteria os seus significados últimos, tribunal supremo de suas verdades, como também as decorrentes da crença em um convencionalismo radical, onde os objetos matemáticos teriam uma natureza essencialmente social, ou seja, seriam passíveis de serem construídos a partir de interações sociais, através de um processo de negociação. (GOTTSCHALK, 2004, p. 306).

A autora ampara-se nas discussões de Wittgenstein para refletir sobre questões educacionais e sobre a Matemática ensinada nas escolas brasileiras e defende que certas práticas tendem a não abordar a perspectiva da linguagem no ensino e no aprendizado da Matemática. De fato, se for feita uma análise no documento mais recente do MEC, a BNCC (BRASIL, 2017), a expressão **linguagem matemática** aparece subentendida em duas ou três menções indiretas no texto.

Vale ressaltar que as práticas com a linguagem cotidiana usada pelos feirantes acerca de operações matemáticas comerciais em seus locais de trabalho, diferem da linguagem matemática usada na escola pelo professor. Enquanto o feirante relativiza termos para facilitar seu trabalho e negocia com base em acordos que "– um pacote de limão é três reais", dois pacotes são cinco reais – grita o vendedor! O mesmo cálculo não é aceito (válido) na sala de aula para justificar tal operação. Na Matemática, 2 x 3 é 6, em nenhuma hipótese, este cálculo resultará em 5. Esta é uma norma, não pode ser negociada como um produto na feira.

Práticas como estas são muito valorizadas no livro *Na vida dez na escola zero* (SCHILIEMANN, 2001), pois nele, a autora defende que estas práticas valorizam a aprendizagem da Matemática mais que as práticas cansativas ensinadas pelos professores na sala de aula que só querem saber de ensinar algoritmos.

Os cálculos "de cabeça", realizados na feira são tão ou mais importantes que aqueles que os alunos fazem na sala de aula, mas abordam situações diferentes: na Escola desenvolvemos atividades pedagógicas, os cálculos da feira fazem parte do ideário do senso comum, das práticas locais com outros em que os usos da Matemática, não são equivalentes. As informações que eles passam podem ser observadas a partir das *semelhanças de família*, que fazem parte do *jogo de linguagem* wittgensteiniano, mas as práticas da feira são ilustrações, enquanto as operações que regem a Matemática da escola são normativas.

Assim, ainda que algumas destas situações possam ser tomadas como exemplo para ilustrar operações matemáticas, o algoritmo empregado na Escola deve ser ensinado conforme as regras da Matemática escolar e não tomar como modelo as regras da Matemática da feira, a primeira é uma proposição válida e pode ser verificada mediante algoritmos matemáticos, a segunda baseia-se em acordos tácitos. É bem certo que uma prática não invalida a outra, mas estas distinções devem ficar claras para os alunos, a fim de que as práticas culturais não os leve a confusões conceituais e a duvidar sobre qual exemplo seguir, o da feira ou o da escola.

Schiliemann (2001) chama atenção para questões sociais e multiculturais no ensino e crítica a Escola Tradicional por não aproximar os alunos da realidade. Em suas análises, ele deixa transparecer que a linguagem formal da Escola poderia ser substituída pela linguagem popular, o que seria mais significativo para os alunos. Para a autora, a Matemática da feira seria mais importante que a ensinada nas escolas, por ser útil em função de seus usos práticos.

A autora ressalta que ensinar Matemática desta forma é mais propício à aprendizagem, porque o excesso de conceitos formais ensinados nas escolas impede que os alunos façam relação entre realidade e a Matemática, este tipo de crítica é muito comum no campo das Ciências Humanas, principalmente na Pedagogia Construtivista.

Gottschalk (2004, p. 307) assinala que as perspectivas antropológicas e construtivistas, "deslocam a posição mentalista dos cognitivistas para o social, ou seja, as verdades dos teoremas emergem no curso da interação social", mas se isso é considerado relevante para estas teorias, como um teorema pode ser demonstrado a partir das práticas do senso comum? Notadamente, aí observam-se equívocos nascidos no discurso das pedagogias da aprendizagem, ao tentar fazer da realidade e do cotidiano a realidade da Matemática. Para Gottschalk (2004), é importante questionar se há uma necessidade premente capaz de dar sentido às proposições da Matemática, deixando de fora a linguagem matemática. A autora ressalta que os processos empíricos podem levar a confusões pedagógicas, nas quais certas práticas procuram buscar na realidade a essência de conceitos da ciência.

O contexto da Matemática enquanto ciência não se baseia exclusivamente na empiria, o conhecimento científico não pode ficar só espiando atrás da porta. A realidade da sala de aula não é a realidade do contexto familiar ou do bairro, são contextos diferentes, os jogos de linguagem empregados naqueles ambientes não podem ser transferidos automaticamente de um para o outro. Há regra que funciona no contexto familiar, não se aplica integralmente nas escolas. A Matemática escolar não pode ser tratada de forma asséptica extramundo e desvinculada da realidade, olhar exclusivamente para a ciência provocou no passado amplos debates e duras críticas ao ensino da disciplina, devido aos rigores da linguagem da Álgebra e da Teoria dos Conjuntos, a exemplo do que ocorreu com a Matemática moderna entre 1960 e 1970 (PINTO, 2005).

Foram os rigores da Matemática moderna e da Matemática tradicional que levaram professores e pesquisadores a repensar o ensino da Matemática e é o que faz a Educação Matemática de modo mais acentuado a partir da década de 1980 no Brasil. O discurso acerca de um ensino criterioso pautado em cânones da ciência passou a ser amenizado, com a aproximação e inserção de aspectos socioculturais na educação escolar.

Na esteira do multiculturalismo e da praticidade no contexto escolar, o aspecto normativo da Matemática sofreu críticas por parte de movimentos pedagógicos, principalmente na Educação Básica. O reflexo desta "alergia" ao tecnicismo e do pensamento avesso à Matemática é visível na elaboração de documentos oficiais do MEC. Por esse caminho, as novas propostas pedagógicas e os discursos da aprendizagem significativa, pautados na facilidade e na mediação de conhecimentos, passaram a ser regidos pelo modismo e ânsia de generalidade acerca da palavra **contexto** na Educação.

A contextualização invadiu o discurso e as práticas pedagógicas e reverberou no ensino da Matemática à luz do movimento construtivista e da psicogenética. Na virada do século XXI, o ensino da Matemática passou a ser visto sob a ótica das ações práticas e das aplicações à realidade, diferentes contextos foram trazidos para dentro da Escola. Os PCN's (BRASIL, 2000) alavancaram este discurso e a educação brasileira foi seduzida por ele, muitos professores foram adotados ou adotaram a Pedagogia da Mediação e da construção do conhecimento. Nesse sentido, a Matemática ensinada nas escolas ganhou *status* de metodologia, em que os recursos didáticos e as técnicas dominaram o fazer dos professores. Por esse prisma, não fazia mais sentido ensinar qualquer conceito sem que houvesse uma aplicação imediata ao contexto presente, mesmo que as estratégias simulassem apenas pseudoexemplos da realidade.

Atualmente, a BNCC (BRASIL, 2017) apregoa de forma veemente que os conceitos ensinados devem ser devidamente contextualizados, recontextualizados, contextualizados de novo, quantas vezes se fizerem necessários para que os alunos aprendam. E mais que eles sejam protagonistas de sua própria aprendizagem. Este modelo pedagógico claramente coloca a aprendizagem acima das atividades de ensino, qualifica o aprendizado e minimiza o papel do ensino.

Desde a início do século XXI, os professores passaram a reproduzir sem manifestar objeções a este discurso pedagógico, parecia que a receita de sucesso na Educação estava consolidada. A educação matemática passou a adotar, também, os pressupostos teóricos e as práticas construtivistas no ensino e na aprendizagem da Matemática. Passadas quase duas décadas do lançamento dos PCN's (BRASIL, 2000), a lógica da construção do conhecimento esfriou, no entanto, as práticas educacionais anteriores ficaram incrustradas no ideário docente, assumiram a vestimenta da contextualização, da pedagogia de projetos e metodologias ativas na Educação ancoradas na BNCC (BRASIL, 2017).

O que chama atenção nestas práticas é princípio da parcimônia. Nas escolas, os professores agem pedagogicamente sem esboçar críticas, parece não haver contra-argumentação teórica que resista aos encantos das práticas dominantes da pedagogia das competências. Um exemplo desta influência, foi o questionamento de um coordenador pedagógico que vivenciei ao ensinar matemática no ensino fundamental I (do 6º ao 9° ano). Na ocasião, recebi críticas por colocar no plano de ensino, noções de Estatística conforme o que estava previsto no desenho curricular do 7º ano. Segundo a orientação pedagógica da escola, este tópico não deveria fazer parte das atividades, pois não era coerente com a lógica da aprendizagem na Educação Básica. Estava, portanto, fora da realidade ensinar noções de Estatística para os alunos, segundo a visão prática de alguns educadores.

Fatos, conforme o que mencionei no parágrafo anterior, não são isolados em outras escolas pelo Brasil, há uma grande resistência ao ensino de conteúdos formais, que segundo alguns educadores, nem deveriam fazer parte das avaliações, e mais, não se devia mais avaliar os alunos por meio de provas. Por outro lado, o MEC vem implantando há mais de uma década, desde a Educação Infantil ao Ensino Superior no Brasil, o modelo de avaliações em larga escala proposto pelo BNDE. Eis, portanto, uma grande contradição na Educação brasileira.

As ilustrações da realidade e o contexto são importantes também nas *formas de vida* wittgensteinianas, mas isso não quer dizer que a realidade precisa assumir a todo instante o lugar dos conceitos escolares, em detrimento dos conhecimentos científicos estabelecidos por normas. Quando uso a expressão conhecimento científico aqui, entenda-se que é importante preservar os princípios das Ciências na Educação, ou seja, balizar o conhecimento acadêmico (curricular) do ensino com base em práticas do senso comum implica em descontruir ou desestimular a produção do conhecimento. Insisto: ensinar preservando critérios científicos não se trata do tecnicismo e das práticas tradicionais de repetição mecânica no ensino, manter critérios científicos não é uma prescrição, mas uma **preocupação** do ponto de vista docente.

Atualmente, a realidade do ensino da Matemática no ensino médio é a de que certos conteúdos, como matrizes, determinantes e funções trigonométricas, podem ser excluídos das atividades escolares. Ainda que a palavra exclusão tenha um tom severo, é o que está posto em documentos do MEC, a exemplo das Orientações Curriculares para o Ensino Médio (BRASIL, 2006), conforme a passagem a seguir.

> Alguns tópicos usualmente presentes no estudo da trigonometria podem ser *dispensados*, como, por exemplo, as outras três razões trigonométricas, as fórmulas para sen (a+b) e cos (a+b), que tanto exigem dos alunos para serem memorizadas. O estudo das demais funções trigonométricas *podem e devem ser colocadas em segundo plano*. (BRASIL, 2006, p.74, itálico nosso).
> Quanto à resolução de sistemas de equação 3X3, a regra de Cramer deve ser *abandonada*, pois é um procedimento custoso (no geral, apresentado sem demonstração e, portanto, de pouco significado para o aluno), que só permite resolver os sistemas quadrados com solução única. Dessa forma, fica também *dispensado* o estudo de determinantes (BRASIL, 2006, p.78, itálico nosso).

Cumpre ressaltar que tal decisão é restritiva e para quem ensina Matemática, reitero é preocupante. Tomar tal decisão, ainda que pautada em orientações do MEC, fere a organização curricular interna da disciplina enquanto ciência a ser ensinada nas escolas. Amealhar ou relativizar conceitos matemáticos com base nas premissas de que o conhecimento precisa ser prático e imediato, pode conduzir os alunos a um falseamento da realidade. Esta situação assemelha-se a tratar conhecimentos científicos à luz da teoria do balde mental (senso comum) criticada por Popper (1975). Esvazia-se o sentido da Matemática, para dar vazão a acordos do saber comum, desprovido de rigor, mas viável para atender aos apelos do conhecimento imediato.

O universo da Matemática não se reduz à revelia para atender a critérios exclusivos do cotidiano, a Matemática desenvolve-se também e de forma independente no contexto da ciência. Há conhecimentos complexos, cujas aplicações não estão no nível do senso comum, esta realidade pode ser apresentada os alunos da Educação Básica. Os conhecimentos escolares não são apartados da ciência, foram planejados didaticamente para ser ensinados. A Matemática escolar, não é a Matemática das trocas comerciais realizadas nas feiras livres. Os acordos realizados nas feiras não preservam as mesmas características e os métodos das operações numéricas conforme as normas da ciência Matemática. Confundir acordos consensuais com acordos de comunidades científicas de práticas docentes e científicas traz sérias implicações ao aprendizado discente.

Gottschalk (2015) reitera que as teorias pedagógicas não têm o poder para determinar o papel do professor (mas, alguns agem dessa forma), elas podem ser tomadas como parâmetros no ensino, como sugerem os documentos do MEC com o intuito de propiciar o aprendizado e não agir em função de dogmas que preconizam que os alunos devem aprender por conta própria.

A partir da reflexão da autora formulei o seguinte questionamento: É possível saber se o aluno compreendeu o que foi ensinado de Matemática, se nele deposita-se a capacidade de aprendizado a partir de seus conhecimentos prévios? E mais, deve o aluno decidir pessoalmente o que é melhor para o seu aprendizado? Se isso for verdade, qual o papel do professor na Educação escolar? Tais perguntas refletem parte de minha preocupação com o ensino da Matemática, a Educação brasileira, em especial, a básica, parece atravessar uma inversão de princípios e valores éticos.

Duarte (2010, p. 43) alerta para o fato de que o *multiculturalismo* com suas raízes fincadas no Pragmatismo estadunidense, por exemplo, “tem desempenhado o papel de cavalo de Troia, que trouxe para dentro da educação escolar o pós-modernismo com toda a sua carga de irracionalismo e anticientificismo”.

Seguir cegamente as propostas pedagógicas da Pedagogia das Competências respaldadas pelos modelos educacionais do MEC, tem trazido, principalmente, para o ensino da Matemática, consequências desastrosas como mostram recentemente as últimas estatísticas do MEC. O Brasil é um dos últimos colocados no ranking educacional, conforme o programa internacional de avaliação de estudantes *Programme for International Student Assessment* (PISA), em 2016, ficou no 65º lugar em relação a 70 países que participaram do exame.

Os dados apresentados pelo Ministério da Educação em 2018 referentes ao ano de 2017, reiteram que o ensino da Matemática está “no fundo do poço”, a Educação brasileira está falida e os nossos alunos ao final do 3º ano do Ensino Médio não sabem Matemática.

As estatísticas do Censo Escolar (BRASIL, 2017) comprovaram que 70% dos alunos do ensino médio encontram-se em nível de proficiência inadequado tanto em Língua Portuguesa quanto em Matemática, conforme o INEP[7]. Vale ressaltar que estas informações não refletem tão somente as práticas docentes no ensino da Matemática na Educação Básica, há uma série de outros fatores, como as condições desfavoráveis de aprendizagem relacionadas à infraestrutura nas escolas: acesso à sala de aula, distorção idade-série, alimentação inadequada, problemas sociais e familiares, questões de saúde pública e saneamento básico, remuneração docente inadequada, dentre outros aspectos que influenciem direta e indiretamente no ensino e na aprendizagem, que não se pode furtar de mencionar.

Observações sobre o livre aprendizado escolar

O princípio utilitarista na Educação mencionado por Gottschalk (2015) assinala que estes critérios podem levar a equívocos na Educação, por adotarem pressupostos da concepção referencial da linguagem agostiniana e do pragmatismo em Dewey.

> Para o pragmatismo americano, um conhecimento é verdadeiro se for *útil* para resolver um problema ou demanda da sociedade em que se está inserido. No entanto, podemos nos perguntar, como o faz Wittgenstein, se *um conhecimento é útil porque é verdadeiro, ou é verdadeiro porque é útil* (Wittgenstein, 1998, § 266, itálico nosso). [...] Em outras palavras, o próprio critério de utilidade depende dos jogos de linguagem em que são constituídos nossos conceitos, permeados por valores e princípios que regem os seus usos dentro de diferentes sistemas linguísticos inter-relacionados. Somos nós que os empregamos normativamente, constituindo a gramática que é cristalizada na linguagem. Portanto, o que é útil – e o que não é útil – no campo do empírico, é determinado por esta gramática. E as regras que a constituem estão presentes *na* linguagem, e não fora dela (GOTTSCHALK, 2015, p. 308-309).

Na passagem acima, a autora enfatiza com base na filosofia wittgensteiniana, ou seja, procura esclarecer alguns fatos acerca da face oculta do conhecimento utilitário, e faz contraposições ao pragmatismo da escola progressiva defendida por John Dewey no final do século XIX e que se prolonga para os séculos XX e XXI. Por este princípio, tanto os professores como os alunos apegam-se à ideia da concretude utilitária e passam a agir deixando à margem,

[7] Dados apresentados pelo Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB) no segundo semestre de 2018. Informes disponíveis em: http://portal.mec.gov.br/component/content/article?id=68271.

situações que não estejam associadas à empiria e aos critérios imediatos da aprendizagem. O papel do rigor científico na educação escolar parece ser menos importante, o que interessa é se se pode fazer uso de algo que está ao seu alcance, diante de seus olhos e mãos.

O pensamento pedagógico pautado no escolanovismo reitera, entre outros aspectos, que a democratização da educação deve ser considerada como papel fundamental para o bem do ser humano, a partir de seu desenvolvimento intelectual e moral. O processo educacional deve ser aberto e de crescimento compartilhado, os alunos devem basear-se na construção e reconstrução de suas próprias experiências de forma irrestrita. O papel da Educação escolar deve ser pragmático, a democracia e o livre pensamento de Dewey, adotados pelo educador Anísio Teixeira, um dos criadores da escola pública no Brasil, vem influenciando as inciativas educacionais no Brasil desde 1920, propagando-se na Pedagogia até o presente.

As discussões sobre o ensino pretendem evidenciar que o aprendizado da Matemática não se ampara apenas em aplicações da realidade como defendem as pedagogias da aprendizagem, amplamente adotadas no ideário educacional brasileiro.

Nesta pesquisa, o olhar se volta para a perspectiva wittgensteiniana do jogo de linguagem. Nesse sentido, pretendo mostrar que os conceitos matemáticos se constituem também a partir dos diferentes usos com os quais a linguagem se entrelaça, reiterando o que foi dito por Wittgenstein (2009), que o **significado está no uso.**

A esse respeito, Gottschalk (2014) reflete sobre a possibilidade de que não há aprendizagem sem a linguagem, para provocar o debate entre participantes de um congresso sobre Filosofia da Educação. Em seguida, a autora afirma que a aprendizagem se dá por meio da linguagem inspirando-se nas ideias de Wittgenstein e ressaltando que “toda a aprendizagem possui uma forma de vida, cujos hábitos, instituições e gestos, dentre outros aspectos se entrelaçam com a nossa linguagem” (GOTTSCHALK, 2014, p. 101).

Seguindo a lógica proposta pela autora, ressalto que o ensino também ocorre com base na linguagem, considerando as mais diversas formas de linguagem existentes, mas amparando-se nesta pesquisa na linguagem escrita. Diante do exposto, não tenho dúvidas de que a Linguística tem papel preponderante na educação, ressalvando o caso dos surdos de nascença que tem como primeira língua a Língua Brasileira de Sinais (LIBRAS). Reitero que Wittgenstein discutiu linguagem de forma ampla, e que suas contribuições me inspiraram a produzir estudos e pesquisas no âmbito da Educação Matemática.

Os fenômenos empíricos são importantes no aprendizado da Matemática, mas a abordagem desta pesquisa se pauta nas múltiplas observações sobre o jogo de linguagem wittgensteiniano e nas suas aplicações entre professores e alunos. As interpretações subjetivas do cotidiano sem o devido respaldo científico, serão tomadas aqui como situações do senso comum. Considero nesta Tese, portanto, a importância do conhecimento objetivo a exemplo do que foi discutido em Popper (1975).

Este filósofo e matemático é enfático ao mencionar que agir na ciência com base apenas no senso comum é como participar de uma trapalhada ingênua, ou seja, discutir sem fundamentos epistemológicos. Nesse sentido, é importante destacar que as suposições que não podem ser corroboradas mediante teorias científicas não têm o devido valor. Defendo que este princípio é importante também na educação escolar.

Diante dos desafios enfrentados pelos professores no ensino da Matemática, a busca de respostas e soluções é constante no intuito de minimizar dificuldades no aprendizado dos alunos. A leitura e a interpretação de conceitos matemáticos encontram-se entre as preocupações de pesquisadores, como Nacarato e Lopes (2009). Não obstante, estas pesquisas chegam até nós por meio de congressos nacionais e internacionais, como o Encontro Nacional de Educação Matemática (ENEM) e a Conferência Interamericana de Educação Matemática (CIAEM).

Não é difícil perceber que o que move estes eventos, de modo geral, são as propostas de métodos e técnicas indicados para tentar minimizar os impactos do ensino tradicional, que prioriza os conteúdos em detrimento das suas aplicações práticas voltadas à realidade. A linguagem matemática possui simbologias e notações que não fazem parte do linguajar natural dos alunos, esta característica normativa faz com que os professores tentem relativizar conceitos, adotando metodologias prescritivas e recursos manipuláveis em suas aulas. Esta é a proposta adotada pelo ensino mediador que tem como pressupostos teóricos a mediação do conhecimento teoricamente amparada pela aprendizagem significativa e pelo Construtivismo.

Não obstante, inúmeras discussões pedagógicas na Escola se dão em torno das dificuldades no ensino da Matemática, cujo paradigma construtivista instaurado reitera que os professores têm como tarefa encontrar meios práticos e técnicas mais acessíveis para ensinar conceitos matemáticos voltados à realidade. Na Educação brasileira, de forma hegemônica, os professores são contagiados por esta perspectiva que tem como uma de suas maiores defensoras, Constance Kamii. As pesquisas realizadas pela autora acerca do conceito de número e das operações aritméticas ocorrem com crianças nos primeiros anos escolares, destacando a teoria de Jean Piaget.

Neste campo de investigação, os conceitos ensinados emergem das relações das crianças com os objetos de seu entorno, as operações matemáticas devem ser construídas e descobertas pelos alunos por meio de práticas cotidianas em diferentes níveis de aprendizagem

(GOTTSCHALK, 2004). Desta forma, os professores passam a endossar e partilhar tal discurso no contexto escolar, reproduzindo-o como fundamento maior da Educação, quase sempre como um paradigma que lhes parece incontestável, mas se as práticas educacionais se ancoram nestes pressupostos, idealizando uma aprendizagem mais promissora e credora de fiabilidade pedagógica, cabe indagar que melhorias têm sido realmente efetivadas ano após ano, seguindo esta prescrição, se o Brasil ainda continua nos últimos lugares em Educação, segundo as estatísticas do PISA, como mencionado anteriormente?

Que tipo de conhecimento constrói o aluno na Escola sem dominar conceitos elementares de Matemática por exemplo? Gottschalk (2014; 2015) afirma que a tônica do ensino adotada por estas escolas de pensamento, amparam-se em práticas pedagógicas extralinguísticas, pautadas na crença de que os conhecimentos matemáticos devem ser construídos ou descobertos pelos alunos. Certas práticas pedagógicas adotadas no ensino da Matemática seguem uma lógica contraditória, pois o ensino que é responsabilidade do professor passa a ser visado a partir do aprendizado que o aluno pode conseguir de forma meritocrática. Por trás desta ideologia, há obviamente outros objetivos, que muitas vezes passam despercebidos pelos educadores, que é a lógica das teorias econômicas e mercadológicas capitalistas idealizadas politicamente.

Voltando ao contexto do ensino da Matemática na perspectiva wittgensteiniana ressalto que a Linguagem faz parte de nossas formas de vida, e que o sentido que damos às palavras se mostra no seu *uso,* na sua *aplicação.* Então, optar por deixar a linguagem atrás da porta, para dar vez antecipada às metodologias, como se os conceitos estivessem de férias, tende a acentuar a defesa de propostas educacionais que se pautam na cognição e nas práticas construtivistas.

Para Wittgenstein (2005), a Linguagem é uma atividade regrada gramaticalmente, requer o domínio de técnicas. Para dominar a linguagem matemática, por exemplo, se faz necessário conhecer e fazer uso correto de seu vocabulário, de símbolos e notações. Portanto, o domínio dos conceitos é pré-requisito para o aprendizado de técnicas e metodologias, esta é, portanto, uma característica das atividades docentes. O aprendizado dos alunos é um reflexo do ensino dos professores.

No ensino da Matemática, para nomear figuras geométricas segundo suas características a exemplo dos quadriláteros, os professores usam gestos ostensivos (apontam) para objetos que estão na sala de aula ou fora dela. Usam também recursos visuais e materiais que podem ser manipulados, como os blocos lógicos, mas a ostensão ou denominação de objetos pela referenciação é o que Wittgenstein chamaria de jogos de linguagem preparatórios, como explica Moreno (1995, p. 119), “os nomes são preparações para os usos das palavras”. O autor destaca que não se deve confundir o processo de nomeação que ocorre na concepção referencial da linguagem com a função nominal que as palavras passam a exercer nos mais diversos jogos de linguagem, que não possuem significado específico (único).

O nome (referência) etiqueta o objeto, restringe o uso da palavra ao modo *standard*, a partir daí limitam-se as possibilidades de compreensão, pois a linguagem não mais se movimenta, é o que Wittgenstein chamou de "gramática superficial" (*oberflächengrammatik)*[8]. A gramática superficial da linguagem é limitante, é responsável apenas por uma parcela dos muitos usos que podem ter os nomes em nossos jogos de linguagem (MORENO, 1995). Nesse sentido, para Wittgenstein (2009), os nomes são usados para falar das coisas e não somente para carimbá-las como um selo de bagagem que se despacha nas alfândegas.

Os nomes são importantes na linguagem, mas funcionam quase sempre como descrições superficiais, são lances de nosso vocabulário que tão logo vão se entrelaçar com um linguajar mais complexo. O domínio de outras palavras amplia o vocabulário de uma língua ou de uma linguagem, amplia o aprendizado de novos conceitos, que não se reduzem à ostensividade e aos jogos de manipulação de objetos (experimentações) na Educação.

No Educação Básica, no entanto, os professores procuram quase sempre fazer uma aproximação da linguagem matemática com os termos da linguagem natural, para relativizar o aspecto da linguagem formal da Matemática. As palavras **axioma**, **teorema** e **corolário** por exemplo, possuem significados na Matemática que não fazem parte do vocabulário usual da linguagem natural, não são de conhecimento *lato* como os sinais de maior ou menor, ou como o quadrado na Geometria. Uso o termo *lato*, para indicar que estes símbolos ou figuras são apresentados às crianças desde as séries iniciais, por isso, são mais próximas de seu vocabulário e da representação imagética, mas há simbologias na Matemática que precisam ser traduzidas, cujos significado não estão colados nos objetos como um selo, a exemplo do que apregoa a concepção referencial agostiniana.

O símbolo Ø (vazio) possui um significado complexo na Matemática, que não pode ser facilmente etiquetado a exemplo da palavra cadeira. Este objeto de uso comum cotidiano possui vários modelos, desde cedo aprendemos que cadeira – serve para sentar – sem a menor preocupação em saber qual o significado dela. Segundo a concepção referencial da linguagem

[8] As palavras ou expressões do idioma alemão aqui serão transcritas (grafadas) conforme se encontram no Dicionário Wittgenstein, Glock (1998), em livros do autor traduzidos para a língua portuguesa ou espanhola, ou ainda, quando mencionadas e extraídas de obras escritas por comentadores da obra de Wittgenstein, a exemplo de Moreno, Chauviré, Hintikka que encontram-se citados neste texto. Outrossim, há traduções livres que serão de minha responsabilidade e serão devidamente assinaladas por questões de ética e coerência textual.

ou nas práticas construtivistas, fazer a pergunta: o que é o objeto cadeira? Parece não ter qualquer sentido, o que importa é a relação prática sujeito-objeto, em que o utilitarismo substitui a necessidade da justificativa pelo conceito.

Por outro lado, cumpre ressaltar que é na Linguagem que esta prática, com a nomeação de objetos, tem início, isso se dá por meio da ostensão. Aponta-se para o objeto cadeira e se diz: – isso é uma cadeira. Esta afirmação basta, inicialmente, para que uma criança por exemplo entenda, mesmo sem questionar o que é uma cadeira, este é jogo de linguagem primitivo do aprendizado de palavras que se relaciona em determinado momento com o objeto que começa a ser jogado.

O jogo de compreensão da fala da palavra cadeira se dá com o uso da palavra cadeira em pelo menos dois sentidos, o primeiro é o vocabular descritivo (palavra-objeto), o segundo é o do **uso** pela funcionalidade. Nesse último, a palavra cadeira é objeto de descanso e repouso, cujos significados não são ensinados para a criança, ela não pergunta o porquê da cadeira, ela apenas usa a cadeira. Incialmente, a criança não vê a cadeira como obra de arte, não lhe interessa o *design* da cadeira. Este é um jogo de linguagem posterior, mais complexo que requer o domínio de imagens e de seus conceitos.

De modo análogo, na Matemática, os conceitos parecem seguir a mesma lógica, os significados descritivos não têm a mesma aplicação da Língua Portuguesa, precisam ser traduzidos para o contexto da Matemática, independentemente do contexto relacionado ao texto. A palavra pirâmide, por exemplo, possui uma descrição normativa (conceito) diferente na Matemática do seu uso na Língua Portuguesa. São, portanto, algumas destas ilusões imagéticas, provocadas pela concepção referencial ou pragmática, segundo Dewey, que procuro dissolver nesta pesquisa observando os aspectos da **Tradução Interna na Matemática** na perspectiva do jogo de linguagem wittgensteiniano.

Sobre Linguagem e Matemática

As tramas da Linguagem e da Matemática na perspectiva wittgensteiniana, e que discuto atualmente na educação matemática, são recentes se comparadas a concepções seculares instaladas na Educação, a exemplo dos pensamentos de Platão, Santo Agostinho, Rousseau, dentre outros. No entanto, o Grupo de Estudos e Pesquisas em Linguagem Matemática (GELIM-UFPA), único no Brasil a adotar a Filosofia de Wittgenstein voltada ao ensino e aprendizagem da Matemática, nasceu no ano de 2007. Desde então, as produções em nível de pós-graduação ganharam fôlego e se destinam a estudar efeitos, implicações e desdobramentos da linguagem matemática da Educação Básica ao Ensino Superior.

As discussões e pesquisas que realizo amparam-se nas interpretações das expressões wittgensteinianas contidas nas *Investigações Filosóficas* (2009). Reitero, portanto, que para Wittgenstein significado é uso e dominar uma linguagem é dominar uma técnica. Estes são alguns dos fundamentos filosóficos aplicáveis ao ensino da Matemática, que engendram diferentes aspectos do jogo de linguagem na Educação Matemática.

Para Granger (1974), fazer ciência carrega até certo ponto as idiossincrasias do pesquisador, guardadas as proporções de seu tempo e do momento histórico, no qual a produção intelectual foi pensada a bem do conhecimento. As estruturas científicas carregam consigo também o peso das incertezas de que o tempo lhes reserva, até que outras descobertas e proposições tendam a ser refutadas ou ampliem o espectro de suas aplicações.

Com o passar dos séculos, outros cientistas têm contribuído de forma relevante para constituição de conceitos científicos a ponto de tentar estabelecer uma linguagem universal para o cálculo, a exemplo de Leibniz, bem como o próprio Wittgenstein à época do *Tractatus Logico-Philosophicus (1931).* Ao deparar-se, no entanto, com uma tarefa quase impossível, o de criar uma linguagem científica e asséptica, estes filósofos e cientistas acabaram por ver malogradas suas tentativas de avanços diante de inúmeros paradigmas que se interpõem de forma inexpugnável nos domínios da linguagem.

A tarefa de encontrar uma linguagem perfeita que pudesse explicar os fatos do mundo, em especial, no campo da Matemática, é complexa e remonta à época dos pitagóricos no séc. III a. C. Os matemáticos gregos viram ruir as certezas de um mundo perfeitamente numérico e regular ao se depararem com a incomensurabilidade (medida em unidades inteiras) da diagonal do quadrado (números irracionais), assim como outra relação: a dos números fracionários, que também quebrou paradigmas milenares, como a tarefa realizada pelos esticadores de cordas ao demarcar terras nas margens do rio Nilo, à época dos faraós do Egito Antigo. Somam-se a estes paradigmas, outros problemas ou paradoxos epistemológicos considerados insolúveis na Matemática, como a quadratura do círculo, que foi examinada pelos matemáticos Descartes e Papus no século XVII (EVES, 1997; CRIPPA, 2010).

Há, portanto, uma variedade de jogos de linguagem que se manifestam no percurso de nossas vidas, como visto, uma palavra pode ser entendida com sentidos diferentes e isso quase sempre está atrelado ao contexto em que ela vigora. Na Matemática, no entanto, é preciso que haja objetividade no ensino de conceitos, para que o que for dito pelo professor não se torne transitório, especulativo ou recaía sob os domínios da semântica da linguagem ou do consenso (POPPER, 1975).

Descartes (1596-1650) não poupou esforços tanto na Filosofia quanto na Matemática para enfatizar no *Discurso do Método*, que o que foi escrito nesta obra tinha como objetivo de se tornar agradável, no sentido de satisfazer subjetividades, mesmo aquelas científicas. De modo análogo, Popper (1975) não poupou a comunidade científica, ao tecer duras críticas acerca do mau uso do conhecimento em detrimento de subjetividades e ilações do senso comum, imputando aos adeptos das conjecturas tácitas a condição de *teoria do balde vazio*.

A expressão wittgensteiniana jogo de linguagem deve ser entendida no sentido de ação que ela carrega ao estar associada à palavra jogo e pela diversidade da linguagem de modo amplo. Wittgenstein menciona diversas vezes o jogo de xadrez em seus escritos, procurando mostrar que, assim como as peças do xadrez possuem regras, a Linguagem também funciona por meio de regras que devem ser seguidas, tanto na gramática da linguagem quanto no jogo, para que as ações em ambas os contextos façam sentido para quem as usa. Assim, as expressões contidas no aforismo 23 das *Investigações Filosóficas* (WITTGENSTEIN, 2009, p. 27) constituem extensamente (múltiplas interpretações) o que Wittgenstein chamou de **jogo de linguagem**, a saber: "levantar uma hipótese; resolver uma tarefa de cálculo aplicado; descrever um objeto por sua aparência; traduzir de uma língua para outra; apresentar resultados de experimento por meio de tabelas e diagramas", dentre outras.

Moreno (1995) assinala que a linguagem era pano de fundo para Wittgenstein, pois o Mestre de Viena visava de forma acentuada também a Matemática, para isso, sempre mencionava em suas reflexões a importância de proposições, provas, demonstrações e axiomas. Assim, para além das preocupações de Wittgenstein com a linguagem em sentido *lato*, ele mostrava-se empenhado em elucidar conceitos da Matemática, que causavam, por vezes, confusões quando enunciados livremente, a ponto de afirmar na *Gramática Filosófica* (WITTGENSTEIN, 2003) que não existe uma aritmética das maçãs. Esta situação, por sua vez, é comumente explorada nas teorias da cognição voltadas à aprendizagem da Matemática, nas quais a perspectiva empirista chama para si, a tentativa de encontrar justificativas causais para as práticas correlatas na Educação, que visam construir o significado de operações aritméticas evidenciando, por exemplo que: "2 maçãs mais 3 maçãs, é igual a 5 maçãs".

Wittgenstein mencionou por vezes a empiria e as intuições na Matemática, mas o seu objetivo consistiu em elaborar contraexemplos no intuito de mostrar que os conceitos matemáticos não possuem necessariamente uma **essência**, como apregoa a Fenomenologia, Husselr, por exemplo. De acordo com Marques (1997), os fundamentos rigorosos da ciência amparam-se no desapego à empiria, nesse sentido, a filosofia de Husselr considerava, *a priori*, que o contexto científico deveria ser radicalmente livre de preconceitos. Por outro lado, na fenomenologia husselrliana, a evidência era fundamental na ciência. O estudo da fenomenologia em Husserlr é extenso e complexo, traz consigo fundamentos da filosofia grega e de acepções kantianas, cujas interpretações distinguem-se umas das outras acerca do estado de coisas, investigando os fenômenos em si (MARQUES, 1997).

Nesse sentido, limitarei minhas reflexões nesta pesquisa a esta breve menção acerca do conceito filosófico de **fenômeno** pautado em Husslr. Cumpre destacar, conforme o parágrafo anterior, que esta concepção filosófica se estende para Kant e para Heidegger sob diferentes aspectos. Assim, passarei a analisar alguns conceitos filosóficos à luz da linguagem em Wittgenstein e das suas aplicações na Educação Matemática.

Para o Mestre de Viena, o significado das palavras tem sentido no seu uso, ou seja, é desta maneira que a linguagem ganha vida. Não obstante, as teorias pedagógicas que se amparam no Construtivismo que tentam justificar as operações aritméticas com base em exemplos extraídos de experimentos empíricos, por exemplo, usam para justificar a operação de adição *probleminhas cotidianos,* como os de compra e venda de produtos nas feiras públicas, mas esquecem de destacar que as supostas operações matemáticas realizadas pelos feirantes não levam em consideração as regras e normas da Matemática ensinada nas escolas.

Os acordos públicos quase sempre se pautam em negociações livres, nas quais o conteúdo matemático é transgredido, ou seja, as operações matemáticas são manipuladas sem o rigor normativo. É neste caso, por exemplo, que 2 multiplicado por 3 não é 6, pois, o vendedor exclama – um pacote de limões é três reais, mas, se levar dois pacotes o preço é 5 reais! Estas práticas funcionam neste contexto, em que a linguagem matemática não é requerida, mas na Escola, estes cálculos não são aceitos, apenas ilustram a realidade da feira, que não é a realidade da Matemática.

Quanto a exemplificações empíricas comuns na Aritmética, a exemplo do problema das maçãs no parágrafo anterior, Gottschalk (2014a) levanta o seguinte questionamento: esta é uma afirmação sobre maçãs? Ou uma afirmação matemática? A autora ampara-se em Wittgenstein para elaborar sua resposta e assevera que esta proposição pode ser empírica ou matemática, o que a torna matemática é a fixação da palavra *definição*, que passará a instituir um critério matemático sobre ela. Em outra observação, Gottschalk assinala que situações como estas tornam-se afirmações matemáticas dependendo do *uso* que se faz dela. Se trata de uma proposição matemática, não precisa, portanto, de constatações empíricas que as justifiquem, porque já foram instituídas mediante critérios lógicos e formais, por uma comunidade que lida com a Matemática.

Se a afirmação é uma proposição matemática não carece mais questionar sua veracidade, pois este é um sentido posto pela Matemática como ciência, não se trata de uma operação validada experimentalmente. Wittgenstein (2003, p. 243), de forma irretocável na *Gramática Filosófica*, enuncia: “não existe nenhuma aritmética das maçãs”. O fato de que a proposição empírica e descritiva da linguagem possa existir não invalida a proposição matemática que é normativa.

Nesse sentido, o jogo de linguagem se desdobra e se multifaceta, suas aplicações não tentam fundar um método de ensino, trata-se de uma filosofia (o que nada impede quem queira fazê-lo). O método não era uma das preocupações de Wittgenstein, ainda que Spaniol (1989) compreenda que ele tenha pensado algo desta natureza quando reformula seus pensamentos da primeira para a segunda fase de seus escritos.

Um dos objetivos de Wittgenstein na Filosofia foi difundir o caráter instrumental da linguagem, em que as palavras se descortinam sem reducionismos de natureza meramente experimental. Neste contexto de ação, a máxima wittgensteiniana que afirma **o significado está no uso**, mostra que a gramática filosófica evocada pelo Mestre de Viena se manifesta também na forma de vida da Matemática, como atividade profícua na Educação. É neste sentido, que sugiro outro olhar para a Educação para além das pedagogias do aprender a prender, a exemplo do que assinala Gottschalk (2010), visando diferentes movimentos proporcionados pelos jogos de linguagem entre professores e alunos.

> [...] vislumbramos a possibilidade de uma pedagogia que esteja atenta para as diferentes funções de nossa linguagem, apresentando situações em sala de aula que despertem no aluno a vontade de considerar outras regras, e serem seguidas, ampliando assim o leque de possibilidades de organização de seu mundo empírico, e fornecendo, as condições para se lutar contra o próprio dogmatismo e, consequentemente contra o dogmatismo alheio. Poderíamos denominar esta nova pedagogia de “pedagogia do impasse” (expressão atribuída ao prof. Paulo Oliveira), na medida em que se partiria de obstáculos epistemológicos ou qualquer outra situação de impasse, tendo em vista a mobilização de valores éticos e estéticos, como combate à intransigência e a generalizações indevidas, e a criação de novos aspectos nas mais diferentes áreas do conhecimento. Enfim, uma pedagogia que não se reduza a perseguir fins meramente utilitaristas e pragmatistas, mas que almeje a formação de um espírito crítico e combativo, capaz de se indignar com a injustiça e a desigualdade, como também capaz de imaginação e de reflexão. (GOTTSCHALK, 2010, p.99-100).

Nesta passagem, Gottschalk (2010) elucida a possibilidade de que as atividades pedagógicas na Educação não sejam tomadas de forma definitiva à luz do Cognitivismo ou do

Construtivismo. Os educadores precisam estar atentos ao leque de opções teóricas que se espraiam frente aos desafios da contemporaneidade. Nesse sentido, a autora exclama que, na Educação, as práticas de ensino e de aprendizagem precisam ser menos intransigentes. Com base no que foi dito pela autora, ressalto que algumas concepções teóricas amparadas no pós-modernismo a exemplo dos devires e subjetividades deleuzianas, tomam as ilações filosóficas de Wittgenstein como inaceitáveis, catastróficas, perigosas e maléficas (HEBECHE, 2016).

Em defesa das contribuições de Wittgenstein para a Matemática, Moreno (1995) ressalta que nos seus domínios, ela goza de um *status* privilegiado ao descrever e tornar o uso das palavras mais evidente. Por serem regradas, suas definições preservam rigor e visam à exatidão que não dependem de um estatuto extralinguístico para fazer valer a precisão de seus teoremas, a Matemática é capaz de se autossustentar cientificamente. Outro ponto importante da obra de Wittgenstein abordado intensamente por Moreno (1995), esmiuçado de modo semelhante por Hebeche (2016), aborda uma espécie de *tiefengranmatik* (gramática profunda), cujo significado filosófico será retomado ao longo deste texto, em momento oportuno.

No aforismo 199 das *Investigações Filosóficas,* Wittgenstein, assinala "dominar uma linguagem é dominar uma técnica", desta forma o filósofo condiciona o domínio de técnicas ao que chamou de *lebensform* (forma de vida), esta é uma metáfora anímica que consta na primeira parte das *Investigações Filosóficas,* segundo Moreno (1995). A expressão **forma de vida** não trata, necessariamente, de manifestações mecanicamente repetitivas ou causais, por hora, vou me ater a uma das aplicações dada por Wittgenstein, cujo significado se deve à representação na linguagem como **instituições de sentido** que funcionam em determinado contexto como expressão familiar comum a um grupo de pessoas e que passa a ser seguida.

Assim é que na construção de um prédio (estrutura envolvendo partes de madeira e alvenaria), os trabalhadores ao usar ferramentas, gritam as palavras – martelo! serrote! alicate! – Os demais trabalhadores entendem estes gritos como solicitações do tipo: – Traga-me o martelo, – Passe-me o serrote ou: – Preciso do alicate! O sentido atribuído às ferramentas faz parte das formas de vida dos trabalhadores e ali mantém-se sob certa regularidade, as palavras ganham significado em seus usos, o que é defendido constantemente por Wittgenstein nas *Investigações Filosóficas*.

Cabe destacar por *uso,* inclusive o uso da palavra *uso* para Wittgenstein, não possui o mesmo significado do conceito empregado regularmente no senso comum. Uso significa para o Mestre de Viena, ver como as palavras funcionam no momento em que são empregadas na linguagem. Nesse sentido, ele emprega constantemente a expressão *jogo de linguagem*, que aborda uma diversidade de ações no contexto linguístico. Talvez por dar importância ao contexto amplo da linguagem, alguns autores pós-modernistas consideram-no relativista, ou seja, fazem uma imagem do filósofo que não condiz com o método empregado por ele, segundo Spaniol (1989).

Wittgenstein relativiza conceitos e aplicações da palavra para mostrar como os jogos de linguagem se constituem, o filósofo chama atenção para o fato de que aquilo que dizemos deve ser dito claramente e sem ambiguidades. Relativizar conceitos, por conseguinte, é apenas uma forma de estabelecer jogos de linguagem comparativos, cuja dimensão não se deve a estados de grandeza mensuráveis, como na Estatística Descritiva, ou para destacar aspectos meramente qualitativos com a finalidade de dizer – isto é melhor que aquilo e vice-versa.

Se se relativiza algo em um texto ou discurso é porque se pretende mostrar aspectos que não estão visíveis, ou seja, não puderam ainda ser notados em função dos usos repetidos de vocabulário e da visão superficial que precisa se expandir. Nesse sentido, o Grupo de Estudos e Pesquisas em Linguagem Matemática (GELIM-UFPA) não compactua com a imagem do Wittgenstein relativista, por entender que este é um pressuposto comum nas práticas do Multiculturalismo, nas teorias do Pensamento Complexo, nas visões da Etnociência ou nos devires pós-modernistas, dentre outras vertentes.

Wittgenstein (1998, p. 100) adverte – "porque não se ensina à criança, logo de princípio, o jogo de linguagem 'parece-me vermelho'. Porque não consegue compreender ainda a distinção parece e ser?" Esse jogo de linguagem é mais complexo e assemelha-se com o jogo de linguagem dos porquês? Então os jogos primitivos da ostensão dão lugar ao questionamento – porque isso é um retângulo? Este jogo de palavras da pergunta o que é, agora trata do jogo da justificativa. Este jogo requer o domínio de regras e aplicação de técnicas que faz parte dos jogos de linguagem mais complexos, conforme destaca Moreno (1995).

Para Wittgenstein (1989, p. 65), "as frases servem para descrever como são as coisas, pensamos nós. A frase como imagem", mas as imagens que faço podem estar associadas a conceitos imprecisos ou errôneos. Nesse sentido, defende-se que antes do método, o conceito é fundamental, imprescindível no ensino da Matemática. Para isso, em certa fase do aprendizado, este jogo de linguagem deixa de ser meramente o jogo da explicação causal ou imagético, para se tornar um **jogo de imagens** fundamentado nos conceitos da matemática.

Não pretendo, a partir da lógica do jogo de imagens, impor os rigores da Matemática formal aos alunos da educação básica, isso pode ser estudado mais à frente nos cursos de graduação e pós-graduação em Matemática. Porém, os alunos precisam ser informados de que o **objeto quadrado** é um ente geométrico virtual, definido normativamente na Matemática, portanto, quadrado não é aquela peça dos blocos lógicos mostrada nas séries iniciais, com base no jogo de linguagem da nomeação. O quadrado não é um objeto mental e nem psicológico, ele pode ser construído geometricamente, mas não se encontra na natureza, como as árvores, ou nas ruas, como os automóveis.

Na sala de aula, os professores ressaltam que o cálculo da área de um quadrado é dado pela fórmula $A=l^2$ associando a figura geométrica correspondente. Este recurso didático passa a fazer sentido para os alunos, pois a figura do quadrado é algo comum em seus estudos desde a Educação Infantil. O significado do objeto matemático quadrado é automaticamente associado na Matemática, ao conceito de figura geométrica de quatro lados, mas este conceito é um tanto quanto impreciso, pois, retângulo, losango e trapézio também são quadriláteros e somem-se a estes, os quadriláteros irregulares que não possuem nomenclaturas específicas. É a partir destes jogos de linguagem, que serão analisados aqui, algumas aplicações no ensino da Matemática na perspectiva wittgensteiniana.

Chamo atenção para os diferentes jogos de linguagem usados na escola, a exemplo das aulas de Matemática na Educação Infantil, em que as crianças entram em contato com a Geometria quase sempre a partir de objetos que lhes são mostrados, como quadrado, o triângulo e o retângulo, pelo *ensino ostensivo*. Os blocos lógicos (material didático), por exemplo, são muito utilizados nesta etapa do aprendizado, para que as crianças possam perceber além da forma do quadrado, atributos, como cor, espessura e tamanho. O conceito de quadrado, por exemplo, será explorado em séries posteriores, mas esse jogo de linguagem da nomeação ou primitivo, como foi dito por Wittgenstein (2009), será substituído por outros jogos de linguagem mais complexos, que necessitam da gramática e da sintaxe da Matemática para serem compreendidos.

No Ensino Médio, os alunos precisam saber distinguir um quadrilátero de outro ou que há quadriláteros irregulares cujas áreas e perímetros não são calculadas por fórmulas como $A=l^2$. Há jogos de linguagem específicos que necessitam da linguagem matemática e de conceitos normativos. Assim, algumas imagens, como as de um polígono de 20 lados, não são comuns aos alunos como a imagem de um quadrado.

Há, ainda, figuras tridimensionais, como os poliedros de Platão, que requerem níveis mais elaborados de abstração para serem compreendidos, há entre estas figuras, o que Wittgenstein (2009) chamaria de *semelhanças de família*, ou seja, na Matemática, alguns objetos da Geometria assemelham-se pela forma, como o quadrado e o cubo, mas distinguem-se pelo conceito. Tais semelhanças ou mesmo dessemelhanças serão enfatizadas por meio das imagens na Matemática nesta pesquisa, ou seja, o interesse é ampliar o escopo do jogo de linguagem wittgensteiniano, fazendo uma imersão entre conceitos e imagens na Matemática acerca de conceitos da Álgebra e da Geometria. Nesse sentido, penso ser importante aprofundar as reflexões sobre a incomensurabilidade do jogo de linguagem elaborado por Wittgenstein, para, em seguida, adentrar nos capítulos fundamentais da Tese.

Meandros do "jogo de linguagem"

Uma das expressões mais conhecidas de Wittgenstein chama-se *jogo de linguagem*. No decorrer desta Tese, esta expressão será mencionada inúmeras vezes, por abordar um contexto amplo, abarca, consequentemente, uma variedade de significados e sentidos quando as palavras estão em movimento. De acordo com Penco (2006), o jogo linguístico funciona como ação regulamentada na qual se deve investigar a compreensão de regras, bem como segui-las e aplicando-as em diferentes contextos.

Considero ser relevante, portanto, fazer uma apresentação mais detalhada do *jogo de linguagem* aos moldes do Mestre de Viena, conforme o aforismo 23 das *Investigações Filosóficas* (WITTGENSTEIN, 2009).

> A expressão "jogo de linguagem" deve salientar aqui que falar uma língua é parta de uma atividade ou de uma forma de vida.
> Tenha presente a variedade de jogos de linguagem nos seguintes exemplos, e outros:
> Ordenar, e agir segundo ordens –
> Descrever um objeto pela aparência ou pelas suas medidas –
> Produzir um objeto de acordo com uma descrição (desenho) –
> Relatar um acontecimento –
> Fazer suposições sobre um acontecimento –
> Levantar uma hipótese e examiná-la –
> Apresentar os resultados de um experimento por meio de tabelas e diagramas –
> Inventar uma história; e ler –
> Representar teatro –
> Cantar cantiga de roda –
> Adivinhar enigmas –
> Fazer uma anedota; contar –
> Resolver uma tarefa de cálculo aplicado –
> Traduzi de uma língua para outra –
> Pedir, agradecer, praguejar, cumprimentar, rezar (WITTGENSTEIN, 2009 p.27, aspas e estrutura em formato de diálogo, do autor).

Desta maneira, a passagem descrita pelo autor torna-se elucidativa no sentido de mostrar sua amplitude no campo da Linguagem, que não se limita ao escopo dos verbos (exemplos) relacionados por Wittgenstein. Este é um passo importante para aprofundar as discussões sobre os meandros e contornos da expressão mais extensa elaborada por Wittgenstein no intuito de mostrar aos seus interlocutores, porque a sua segunda filosofia se afasta da primeira e amplia consideravelmente o espectro de sua nova empreitada. Por conseguinte, esta seção é uma preparação para a constituição dos jogos de linguagem na Matemática e suas inserções nas atividades de ensino que proponho, pelo viés conceitual da **Tradução Interna**.

Wittgenstein não se ocupava em restringir ou direcionar expressões linguajeiras ao campo da ciência, por sinal, ele se opunha a formular teses no contexto da Epistemologia por considerar que esta ação limitaria o espectro de suas ilações. Por outro lado, o filósofo deixou livre o caminho para que seus interlocutores pudessem seguir projetos pessoais, advertindo apenas quanto aos dogmas da ciência.

Diferentemente do intento filosófico de Wittgenstein ao elaborar o conceito de jogo de linguagem, o projeto de pesquisa que constituiu esta Tese é voltado à Educação Matemática. Assinalo que as analogias feitas aqui, partir das metáforas wittgensteinianas, são originárias de debates e pesquisas que se acumulam ao longo de algumas de minhas experiências docentes ao ministrar cursos de formação para professores. Durante este percurso, reitero que uma de minhas maiores preocupações foi olhar com mais detalhes para **constituição** de conceitos matemáticos e o sentido que ganham ao serem ensinados com ênfase na linguagem.

Se para Wittgenstein (2009) a linguagem, de modo geral, é um labirinto de caminhos no qual se entra por um lado e, a princípio, sabe nos localizar, a saída é confusa e aponta para diversos caminhos, logo já não sabe mais onde está. O caminho da Matemática seguido aqui, pretende ser mais objetivo, para que os labirintos da linguagem natural não se confundam com as aplicações da Matemática, ainda que certos usos da Matemática requeiram passar pelas tramas da Linguagem. Assim, como Wittgenstein tentava a todo custo livrar-se das ilusões provocadas pela linguagem no seu primeiro projeto filosófico, irei me ocupar em contornar as possibilidades de expansão polissêmica e semântica das palavras e suas relações com o ensino da Matemática.

Desta forma, procurei evidenciar regras e usos normativos da Matemática a exemplo do que fez Granger no contexto da Epistemologia (1974; 2013). Elege-se este princípio, no intuito de minimizar os efeitos polissêmicos das palavras em contextos amplos, destacando a importância conceitual dos objetos matemáticos no ensino. Se o projeto de Wittgenstein nas *Investigações Filosóficas* tinha como propósito elaborar uma terapia para curar-se dos efeitos de seus escritos da juventude e, ao mesmo tempo, precaver seus interlocutores quanto às ilusões da linguagem, como aponta Spaniol (1989), a vertente terapêutica desta Tese pode ser entendida como um afastamento das ilações provocadas no ensino acerca das teorias e concepções pedagógicas que discutem a constituição de conceitos matemáticos de modo superficial.

Se as teses do Pragmatismo, da Epistemologia Genética e do Construtivismo, abordam a Educação sob diferentes aspectos, há similaridades pedagógicas que as conectam ao Cognitivismo. A intercessão entre estas teorias postula que a aprendizagem tende a ser inata, privilegia os processos mentais e se desenvolve nas relações sujeito-objeto-meio. Observo, no entanto, que as práticas adotadas nestas concepções teóricas não priorizam a aprendizagem pela linguagem, nesse sentido, a Linguagem parece sempre estar de férias ou figura ocultamente no reino das simulações empíricas.

Quando afirmo que pedagogicamente as escolas não priorizam a Linguagem, não se trata dos estudos da Língua Portuguesa, pois o estudo da língua-fonte é primordial na formação dos aprendizes. Esta afirmativa tem como base as atividades de ensino nas escolas que tomam como pano de fundo, de maneira exclusiva, a cognição e as práticas decorrentes da construção do conhecimento, esse fato ampara-se nos documentos disseminados pelo MEC.

As abordagens pedagógicas da teoria piagetiana examinam a fundo a relação sujeito-objeto, mas apesar de estipular estágios de aprendizagem no desenvolvimento intelectual das crianças que vão de zero a doze anos, deixam a desejar no que tange à importância da linguagem na produção do conhecimento. Esta é uma crítica que a teoria recebe não só no campo da Filosofia da Linguagem, podendo ser notada também na teoria de Vygotsky. No livro *A Formação Social da Mente* (1991), o autor combate de forma acentuada o deslize piagetiano, ao destacar que o aprendizado das crianças será tão mais relevante se a Linguagem estiver presente no seu desenvolvimento intelectual.

Hebeche (2016) ressalta que teóricos como Quine e Ullian privilegiavam, de certo modo, a aprendizagem da linguagem pelo método ostensivo, ou seja, defendem que aquilo que a criança aprende, *a priori*, pois, não aprende-se em função do aprendizado linguístico, o que leva à seguinte conclusão: a criança aprende por imitação e sua linguagem é, até certa idade, meramente pautada em gestos e não nas palavras. Esta é uma observação válida, mas para Wittgenstein (2009), significado é uso, ou seja, a linguagem é um instrumento para o aprendizado, por isso é importante **ver como** as palavras funcionam. Não há, portanto, como não fazer usos de uma das formas de Linguagem disponíveis no contexto educacional, pois os primeiros aprendizados das crianças se dão quase sempre por meio de gestos ostensivos.

Na perspectiva wittgensteiniana, um jogo de linguagem primitivo ocorre desde que as primeiras palavras são balbuciadas pelas crianças, na forma de jogos com efeitos polifônicos, que em determinado momento não fazem qualquer sentido para quem ouve, mas é comum ouvir que a mãe sempre entende o que o filho quer dizer, pois o convívio entre ambos mostra como este jogo de linguagem funciona. É quando as crianças começam a ensaiar as primeiras palavras cujas pronúncias não se completam, os sons se formam com pouca articulação oral, nesta fase são rudimentares e a pronúncia correta de palavras para que ganhem o tom audível esperado e soem agradavelmente aos nossos ouvidos. Este jogo de linguagem aos poucos vai sendo corrigido por aqueles que fazem, que já se encontram nele, até que o vocabulário se aprimore para a constituição de novos jogos de linguagem.

Dede cedo, todos nós fomos treinados a pronunciar palavras corretamente pelos nossos pais, tutores, professores, e seguimos aperfeiçoando este vocabulário até que avançamos para a fase da palavra escrita, que não tem um fim previsto. Nesta ciranda, seguem os jogos da nomeação evidenciados na concepção referencial da linguagem, o que Wittgenstein menciona nas páginas iniciais das *Investigações Filosóficas* (2009) para tecer críticas às ilações de Santo Agostinho.

Nesse sentido, tais jogos têm algum fundamento em buscar a referência e a ostensividade nos primeiros aprendizados das crianças, são jogos simples, em que elas aprendem a usar as palavras de modo semelhante ao que se faz no reconhecimento de árvores, pássaros, flores e cores, como assinala Hebeche (2016). Na perspectiva wittgensteiniana, a nomeação ostensão é um *lance* do jogo de linguagem que as crianças usam desde cedo. Na Pedagogia da Aprendizagem Significativa ou no Construtivismo, este aprendizado se dá pelos conhecimentos prévios, mas não envolvem necessariamente a Linguagem e sim a partir da relação com objetos e da interação, não é professor quem os ensina, é a criança que desenvolve seu aprendizado com base em orientações mediadas pelo princípio da tutoria.

Para Glock (1998), há quatro acepções ligadas ao jogo de linguagem (*Sprachspiel*) wittgensteiniano, por conseguinte, voltadas as práticas humanas, a saber: práticas de ensino, jogos de linguagem fictícios, atividades linguísticas e a linguagem como jogo. Em cada uma destas, o autor destaca um movimento iniciado por Wittgenstein após 1932, quando o filósofo começa a se desfazer dos conceitos de jogos associados às simbologias oriundas do pensamento formalista no qual os matemáticos tratavam de sistemas axiomáticos da Aritmética, para tratar da expressão jogo de linguagem como um todo, extensivo à visão de mundo.

Das acepções identificadas por Glock, obviamente pelo interesse desta pesquisa, as questões das práticas de ensino e de linguagem como jogo são mais profícuas. O autor ressalta que a preocupação do filósofo se desprende da relação monolítica designativa palavra-objeto, certamente associada ao pensamento agostiniano. Da linguagem como jogo, Wittgenstein extrai as características fragmentárias do jogo de nossas práticas comuns na linguagem e destaca as inter-relações linguísticas como parte de um sistema globalizante (GLOCK, 1998).

Glock (1998) menciona que Wittgenstein passa então a reconhecer em sua segunda filosofia as adjacências da linguagem, desapegando-se da sintaxe lógica tractariana. Esta é, portanto, uma das mais importantes feições das *Investigações Filosóficas*, cujas ilações revelam-se como uma espécie de “armação de fatos” sobre formações conceituais inteligíveis (GLOCK, 1998). Para Glock, há três condições importantes na configuração do **jogo de linguagem**, conforme a seguinte passagem.

> [...] a) as regras gramaticais que constituem um jogo de linguagem, como, por exemplo o jogo de medir algo; b) a aplicação dessas regras em proposições empíricas (medições específicas); c) o quadro de referência ou “armação” que nos permite realizar o jogo de linguagem” (GLOCK,1998, p. 307).

Wittgenstein passa a analisar filosoficamente a gramática da linguagem a partir de seu funcionamento. Glock (1998) adverte que não se trata de abolir com a lógica tractariana de uma vez por todas, mas observar que a linguagem passa de um mero acordo de opiniões, para acordos evidenciados nas formas de vida. É com base na expressão **quadros de referência** que Oliveira (2013) aborda questões da Hermenêutica e da Tradução em Schleiermacher à luz do Wittgenstein tardio, cujas reflexões interessam a esta pesquisa. O autor expõe traços importantes da linguagem e da tradução ao fazer a distinção entre os significados de **interpretação, compreensão** e da própria **tradução** como atividade que mostra “o quão arraigados são certos conceitos que herdamos da tradição e o quão é difícil superarmos as confusões conceituais que eles engendram” (OLIVEIRA, 2013, p. 266).

A mais importante descoberta feita por Hintikka e Hintikka (1994, p. 277) em relação às *Investigações Filosóficas* é “o papel dos jogos de linguagem como os elos semânticos elementares entre linguagem e realidade”. Para além disso, os autores asseveram como se nota na obra de Wittgenstein que a diversidade de jogos de linguagem é tão ampla quanto se queira e pode se dar sob diferentes aspectos. Em contraposição ao conceito agostiniano da linguagem referencial, os autores afirmam que ensinar esses jogos assemelha-se mais a adestrar os aprendizes para a aquisição de habilidades do que a transmissão de palavras ou expressões com ou sem significado verbal. Destacam ainda o papel que um linguista deve desempenhar na linguagem.

> Aquilo que um linguista deve dar conta a fim de entender os significados das palavras de uma linguagem desconhecida são os jogos de linguagem que os falantes dessa linguagem realizam e através dos quais se revelam suas ações elementares linguagem-mundo – revelam, porque e nisso que elas consistem (HINTIKKA, 1994, pp. 278-279).

Nessa passagem, os comentadores de Wittgenstein preservam o seu projeto característico de abordar a linguagem de forma ampla (visão de mundo), cujas possibilidades de ambiguidade das palavras podem levar a ilusões, quando proferidas sem a devida clareza ou fora de um determinado contexto. Porém, o mais importante no jogo de linguagem é observar como as palavras são empregadas em diferentes movimentos linguísticos, pois são os seus **usos** que vão revelar o que se quer dizer, esse é um dos principais fundamentos do pensamento wittgensteiniano nas *Investigações Filosóficas*.

Para Wittgenstein (2009), o jogo de linguagem é uma atividade que se entrelaça, se interliga com as nossas formas de vida. A Linguagem assume papel fundamental e este é o jogo a ser considerado nessa pesquisa, Penco (2006, p. 135) afirma que "um jogo de linguagem é um contexto de ações e palavras no qual uma expressão pode ter um significado". O conceito elaborado pelo autor, elenca dois aspectos importantes do pensamento wittgensteiniano, a *ação* e o *significado* das palavras, o que, de certa forma, capturam parte da intenção do filósofo ao fazer analogia entre linguagem e jogo, cujos desdobramentos levam ao uso de regras e de suas aplicações por meio de uma gramática mais profunda (MORENO, 1995).

Ora, ao falar sobre regras gramaticais, conforme o Wittgenstein tardio, é importante lembrar que **seguir regras** não se trata de acatar ordens comuns, suas interpretações extrapolam a gramática da linguagem natural. O fundo filosófico da aplicação de regras vislumbra descrições imaginárias ou intuitivas, sem que estas estejam totalmente livres das proposições empíricas, que juntas, fazem parte dos jogos de linguagem.

Moreno (1995, p. 51) alerta que "as regras gramaticais que Wittgenstein quer descrever não se justificam através de fundamentos últimos, pela remissão a uma realidade ou finalidade absoluta; são regras convencionais e arbitrárias que independem dos conteúdos aos quais as palavras podem ser aplicadas", isso não quer dizer que a gramática seja livre de qualquer situação mundana, mas que as condições de significação que muitos procuram nos objetos da realidade, figuram inteiramente no interior da linguagem. O autor explica que a realidade se integra ao jogo de linguagem ou que a terapia elaborada por Wittgenstein para tratar (*behandeln*) das imagens ilusórias da linguagem, de certa forma pressupõe que estas imagens preveem, em seu bojo, a objetividade da Matemática e das figurações da realidade.

A Matemática é uma atividade que está inserida no jogo de linguagem wittgensteiniano ainda que, de forma indireta, uma vez que o filósofo não tinha como propósito desenvolver cátedras pedagógicas voltadas ao ensino e a aprendizagem, mas por lidar diretamente com as complexidades da Lógica Matemática Formal em seu projeto de juventude, não abandona estes conceitos na sua obra tardia: "nos jogos de linguagem da matemática, os conceitos se apresentam com roupagem muito atraente, sob a forma de imagens inexoráveis. Mas, através delas julga os usos que o matemático faz das palavras, suas afirmações, as questões que coloca" (MORENO, 1995, p. 58).

As palavras de Moreno (1995) destacam que Wittgenstein, por não lidar diretamente com a Matemática em seus projetos filosóficos, chega até mesmo a descrever os empregos das imagens nesta ciência de forma tediosa, mas o seu intuito é de que se possa livrar dos enfeitiçamentos das palavras (conceitos lançados em um jogo sem uso, determinado, portanto, sem observar a forma de vida que o engendra). Para tanto, o filósofo repetidamente instiga a pensar nos empregos das palavras, já que a semântica anda colada a estes usos, pois somos tentados a todo instante a tropeçar e cair nas armadilhas da gramática da linguagem.

Gottschalk (2014a) adverte que no ensino da Matemática (perspectivas empirista e construtivista), o comum é a busca por fundamentos extralinguísticos que visam legalizar a existência de objetos matemáticos pautados exclusivamente na realidade. No campo das operações aritméticas, Gottschalk (2014a) assinala que há confusões entre aspectos gramaticais e empíricos.

> Não se trata de um experimento, em que verificamos a hipótese de que 25x25=625; esta é uma relação interna: 25x25 deve ser 625. Não descobrimos que 625 é o resultado de 25x25, o que temos aqui é apenas uma conexão interna entre os dois lados da igualdade, estabelecida pela técnica da multiplicação. Provamos que 625 é o resultado de 25 por 25, onde tanto o termo final, como o inicial, faz parte da prova. Em outras palavras, esta expressão uma vez provada, passa a desempenhar a função de regra (GOTTSCHALK, 2014a, p. 63).

A autora assinala que as *proposições* matemáticas não se pautam exclusivamente em aspectos referenciais, as regras matemáticas são invenções que precisam de validações, mas estas verificações não se fazem a partir do senso comum. Ao levar em conta as terminologias wittgensteinianas, afirma-se que:

> [...] as proposições da matemática estabelecem relações *internas*, e são denominadas por ele de gramaticais (devido ao seu caráter convencional) e por terem função normativa); e não *externas* (causais) como são as relações características estabelecidas pelas proposições da linguagem ordinária ou das ciências naturais, de natureza hipotética, e, portanto, com função descritiva. (GOTTSCHALK, 2014a, p. 63).

Para Wittgenstein (2009), esclarecer a gramática de nossa linguagem tem como pressuposto as imagens que fazemos dos conceitos. Nesse é que a palavra *imagem*, atravessa o pensamento de Wittgenstein, como ressaltou Moreno (1995). Para que haja clareza nesse empreendimento sobre as imagens, o autor afirma que o Mestre de Viena não estuda as **imagens**, ele passa a enxergar através delas, para dar continuidade aos seus projetos nas *Investigações Filosóficas*.

Assim, é possível constatar nas *Investigações Filosóficas* que Wittgenstein dedica um bom espaço em seus comentários à causa psicológica das imagens. Seus comentários aqui e acolá miram objetos, cores, flores e pessoas, pois o olhar humano vagueia sobre as coisas do mundo constantemente. Wittgenstein elabora a todo instante, perguntas e exemplos que parecem correlatos, fala para seus interlocutores, mas fala também consigo mesmo, quase sempre, o filósofo apresenta respostas a seus ímpetos.

Nas *Investigações Filosóficas*, Wittgenstein destaca a si mesmo em meio à inúmeras reflexões.

> [...] “Eu olhava a flor, mas pensava em outra coisa, e não estava consciente de sua cor”... “Se tivesse me desviado, não teria podido dizer que cor ela tinha”... “Ele a olha sem vê-la – Isto existe. Mas, qual é o critério para isto? “olhei agora mais para a forma que para a cor” (WITTGENSTEIN, 2009, p. 275).

Entre sequências de perguntas e algumas respostas, o intento de Wittgenstein é o de que não sejamos tentados a cair em rodeios linguísticos. Desta forma, ele segue perguntando nas *Investigações Filosóficas* – o que acontece no momento em que você olha paras coisas? O que se passa na sua cabeça? Suas respostas se dão no intuito de esclarecer que quando se faz isso, nota-se uma semelhança que tão logo se esvai assim que se desvia o olhar, pois, o objeto deixa de figurar no campo visual.

Os meandros da linguagem em Wittgenstein (2009) mostram, por exemplo, que estar atento-a-algo é como operar com as palavras *ver + pensar* e isso não é uma pergunta que possa ser respondida facilmente, pois há muitos conceitos que aí se entrelaçam. Na Matemática, ao fitar determinado objeto cujos contornos lembram uma caixa de papelão, obriga-nos a pensar imediatamente no conceito geométrico de paralelepípedo? A resposta encontra-se na forma de vida dos interlocutores que participam da ação, eles é que podem esclarecer tal jogo de linguagem. Portanto, não se trata exclusivamente de uma observação cognitiva que se forma a partir das imagens captada pelos nossos olhos, faz parte também da gramática da linguagem.

Silveira (2017) destaca que a gramática da Linguagem Natural se constitui a partir de regras vocabulares que orientam os usos de nossas palavras em diferentes contextos, já a gramática da Matemática é regida por cálculos, operações e simbologias para guiar o jogo de linguagem da Matemática, a exemplo do que ocorre com a solução de equações.

> De acordo com o filósofo austríaco, o professor não pode ensinar o aluno por meio da dúvida, e sim, a partir de certezas. Quando ensinamos a criança a contar, não podemos querer que por si só descubra que depois de dezenove vem vinte. Os números são invenções humanas e a técnica de contagem tem que ser ensinada pelo professor. O aluno aprenderá a contar após um certo hábito com a contagem, assim como poderá aprender as operações com os números, mas para que isso aconteça deve ser iniciado na aprendizagem da gramática que rege os textos matemáticos (SILVEIRA, 2017, p. 9).

A autora assinala que a gramática da Matemática tem no jogo de linguagem a função de evitar equívocos ou mal-uso de nossa linguagem, em que algumas palavras podem ter significados comunitários. Assim, é possível que uma palavra funcione em determinado local com um significado e noutro contexto este significado já não seja mais o mesmo. Na frase O terreno é plano, o termo *plano* não tem o mesmo sentido de plano na Matemática, passa do significado de plano em Geografia para a o significado de plano na Geometria.

Uma palavra pode vigorar e sobreviver naquela realidade (geografia do relevo) e não vigorar na realidade da Matemática. Na Escola, tais associações podem ser feitas, mas há de observar que a natureza de uso comunitário das palavras não substitui o uso convencional da Matemática.

Para Chauviré (1991), os jogos de linguagem estão configurados no início das *Investigações Filosóficas* como modelos reduzidos, para exibir de modo simplificado como as palavras funcionam. A autora destaca que estes jogos são artificiais e inventados para identificar ou comparar situações quando a linguagem está em trânsito.

Um exemplo muito utilizado nas *Investigações Filosóficas* (2009) sobre o jogo de linguagem é a analogia que Wittgenstein faz sobre o jogo de xadrez, cujas peças (objetos) nada significam se não para indicar os lances a cada jogada, que demarcam os locais por onde cada ícone/peça (peão, cavalo ou rainha) podem ser movimentados pelos jogadores como base em regras que orientam as jogadas. O efeito comparativo do jogo de xadrez com o jogo de linguagem é apenas uma metáfora filosófica utilizada por Wittgenstein.

Chauviré (1991) afirma que "a linguagem e o jogo de xadrez, diferem, no entanto, na medida em que a primeira se aplica à realidade (do mesmo modo que a matemática pura se aplica ao real) ao passo que o jogo não se aplica à coisa nenhuma" (CHAUVIRÉ, 1991, p. 91). Nesse sentido, Chauviré (1991) adverte que o que está por trás destas comparações é a livre tomada de decisões do espírito e da vontade governados por regras, que tem intenção de mostrar que a capacidade de saber jogar um jogo está atrelada ao domínio de técnicas e ao seguimento de regras.

Wittgenstein (1987, p. 107) declara nas *Observações sobre os Fundamentos da Matemática* (OFM) aforismo 27, "podemos dizer que a licença para jogar jogos de linguagem com números cardinais não tem fim. Isso seria dito, por exemplo, a alguém a quem ensinamos a linguagem natural e os jogos de linguagem com os quais lidamos" (tradução livre), de fato, uma vez ensinada a sequência dos números cardinais, se ela for compreendida pelos alunos, não há limites para composições ou operações a executar. Desde que estas operações, sejam governadas por regras que precisam ser seguidas dali em diante. Esta não é uma decisão arbitrária no sentido de que você pode escolher o cálculo que vai realizar, mas não é arbitrária no sentido de operar sem lógica e à revelia. O autor procura esclarecer, ainda, no mesmo aforismo que há diferenças entre uma proposição gramatical da Linguagem Natural e a realização de um cálculo como 25 x 25 = 625, pois, ambas são de gêneros distintos.

Gosttschalk (2014a, p.64) esclarece que "para Wittgenstein, uma mesma proposição pode ser empírica ou matemática. Torna-se matemática se afixarmos a ela a expressão: por definição". A autora revela que é a definição que distingue de modo categorial as proposições empíricas e matemáticas, cujas práticas passam a cristalizar o resultado de operações na Matemática. Gottschalk (2014a) acrescenta, ainda, que não se deve confundir o processo de contagem, pelo qual identifica-se o número de frutas em uma cesta e o número de raízes de uma equação. Assim, o primeiro processo se realiza pela contagem no cotidiano e pode sofrer alterações, caso alguém retire algumas frutas da cesta o número se altera, ao passo que o segundo, pode ser constatado mediante provas e regras, não há como alterá-las por meio de uma ação física (GOTTSCHALK, 2014a).

Um exemplo comum é o caso da referência à quantidade de estrelas do universo, mas como mensurá-las se não há certeza dessa finitude? No aforismo 60, Wittgenstein (1987) questiona sobre o fato de que não se usa cotidianamente a palavra infinito relacionada à aplicações na Matemática (tradução livre). Para os matemáticos e professores, o significado da palavra infinito pode até ser considerado banal, mas seria cômico, segundo o autor, se procurássemos algo em um cálculo e não encontrássemos nada de infinito (sentido). Os jogos de linguagem das palavras ganham, como visto, dimensões que dependem dos seus usos, esta é uma das *imagens* que movimenta diferentes jogos de linguagem.

Considerando a perspectiva wittgensteiniana ressalto que a Matemática possui regras que não visam constatações empíricas, portanto, seu escopo não se reduz a condições utilitárias. A sintaxe e a gramática de seus cálculos interessam quando da **constituição de conceitos**. Nesse sentido, Wittgenstein (2009) tem razão ao afirmar que o domínio de uma linguagem é o domínio de técnicas, este é um dos focos dessa discussão no ensino da Matemática. Consequentemente, espero que o substrato das ilações possa alcançar o aprendizado dos alunos.

Assim, olho para os conceitos e definições da Matemática a partir do *jogo de linguagem* wittgensteiniano e de outras expressões do filósofo, visando situações de ensino e os significados de conceitos matemáticos, por exemplo, nos tópicos que envolvem o estudo de Funções e Geometria Analítica, analiso o conceito de *imagem* em dois sentidos: o primeiro destaca o papel da visualização no estudo dos gráficos, portanto, trata de imagens no contexto da Matemática. O segundo, aborda o tratamento psicológico que Wittgenstein dá às imagens na segunda parte das *Investigações Filosóficas*, para tanto, as análises que fiz amparam-se nos aspectos teóricos elaborados por Moreno (1995; 2005).

Para Wittgenstein, os jogos de linguagem não são meros artefatos de preparação para a linguagem, declara Hebeche (2016). Assim, não devemos supor que eles são operadores ou figuram como entidades externas e mais, não devemos esperar que o jogo de linguagem antecipe os significados das palavras conforme seus usos. O autor revela que se recorremos constantemente aos jogos de linguagem, o esforço feito pode ser um indicativo para "mapear a complexidade e aspereza da linguagem" (HEBECHE, 2016, p. 45).

Para que compreender a extensão dos jogos de linguagem deve-se considerá-los como objetos de comparação, afirma Wittgenstein (2009) no aforismo 130. É nesse sentido que os Jogos de Linguagem tendem a mostrar como a linguagem funciona, cuja tarefa é complexa devido à grande variedade de suas aplicações, pois há a possibilidade de que elas se tornem ilusórias no contexto linguístico devido à força das imagens provocadas pelo estatuto referencial platônico, uma vez que ela nos acompanha de perto. Os deslizes da linguagem aqui acolá, mergulham no fosso da retórica conceitual. Esta era, por conseguinte, uma das preocupações constantes do filósofo, dissolver tais efeitos fazia parte de sua terapia.

Ressalto que os jogos de linguagem possuem uma enormidade de aplicações, as quais não pretendo esgotar, vamos por hora, fazer uso das noções que Black[9] aponta ao ser mencionado por Hebeche (2016), no intuito de objetivar se é que possível o enredo destas aplicações.

> 1) Jogos de linguagem não são jogos, nem têm a significância linguística igual à dos jogos.

[9] Ver o texto do autor Max Black, mencionado por Hebeche (2016), intitulado *Wittgenstein's language-games*. In: WITTGENSTEIN, L. Critical assessments. Ed. Stuart Shanker. Londres: Routeledge, 1986. v.2

> 2) Os jogos de linguagem, diferentemente dos jogos genuínos, não são autônomos, não são, portanto, jogados sem o domínio de outros jogos de linguagem que lhes são afins.
> 3) Um jogo de linguagem em uma forma de vida particularmente envolve algum "outro" jogo de linguagem – que serve especialmente como crítica e justificação do que se move em seu próprio âmago enquanto jogo. (BLACK, *apud* Hebeche, 2016, p. 54).

Diante do exposto, é possível notar que se pode avançar longamente nas possibilidades da compreensão acerca desta expressão, por outro lado, e por hora, as ilações até aqui levantadas procuraram dar sentido aos Jogos de Linguagem que dela derivam. Para tanto, vamos concordar com o item 2 do excerto acima, que se afina com a nossa perspectiva de constituir jogos de linguagem específicos, voltados ao ensino da Matemática. Assim, se vamos jogar com as regras da Matemática, é importante ressaltar que neste jogo de linguagem, transitam as regras da linguagem natural, pois o domínio de uma implica no domínio da outra. Considero, portanto, que a linguagem natural seja tomada como já conhecida pelos participantes do jogo, para que o propósito desta pesquisa alcance seu intento.

Não é minha intenção fazer aqui uma assepsia na linguagem natural, tampouco de aspectos culturais, sociais e de saberes antropológicos, reconheço que estas construções fazem parte da história humana, herdam-se tais conhecimentos, mas o que discuto privilegia os estudos da linguagem matemática e o seu ensino. Busco afinidades e conexões entre estas duas linguagens, no intuito de mostrar que a linguagem matemática é quem reveste com propriedade os conceitos e definições da Matemática como ciência, bem como de seus usos na Educação.

Não é a realidade empírica, a necessidade genética ou manifestações de nossa mente que configuram conceitos particulares da Matemática. Para Wittgenstein (2009), a linguagem é pública, não é privada, a atenção se volta para o que é dito a partir de nossos jogos de linguagem, que se dão em diferentes níveis e contextos.

A tônica das ilações, ora apresentadas, procura enfatizar que certos conceitos da Matemática podem ser ensinados considerando a lógica dos jogos de linguagem wittgensteinianos, a exemplo do que foi mencionado por Gottschalk (2004) sobre a natureza do conhecimento matemático. Novamente explicito que as observações acerca da Matemática escolar aqui, não devem ser tratadas como metodologia, mas como uma abordagem de ensino.

3 TRADUÇÃO E (NA) MATEMÁTICA

"O domínio dos conceitos é apenas um ponto de passagem na linguagem".

(Schleiermacher)

Ao lidar com textos matemáticos nesta pesquisa evidencio situações com as quais os professores se deparam naturalmente em suas atividades docentes no ensino da Matemática. Assim, posso dizer que a linguagem matemática está presente no discurso, nos gestos ostensivos e na escrita de textos que visam ao aprendizado de conceitos pelos alunos. Para tanto, a tarefa a que me dediquei consistiu em abordar a **Tradução** na perspectiva da Educação Matemática. Essa linha de investigação, por enquanto, concentra-se na pós-graduação devido ao escopo das discussões, cujas características possuem teor mais teórico que metodológico e prático.

Convém ressaltar que o campo de abrangência da tradução é amplo, vai desde tarefas particulares desenvolvidas por tradutores que visam dar vida a textos de uma língua para outra, até a tradução de textos matemáticos no contexto da ciência e da educação, este último campo de atuação é, por conseguinte, o foco dessa Tese.

Antes de adentrar especificamente na tradução de textos matemáticos, apresento um breve escorço sobre algumas concepções teóricas da Tradução no sentido *lato*, a saber: a tradução na perspectiva da literatura no contexto científico, na qual encontram-se Antoine Berman, Paul Ricoeur, Schleiermacher, G. Steiner, Roman Jakobson, Lawrence Venuti, Walter Benjamin, dentre outros. Não obstante, se junta a estas reflexões, o contexto tradução das linguagens formais, da lógica e da Matemática nas acepções de W. O. Quine, Gilles-Gaston Granger e Ludwig Wittgenstein.

Nesse sentido, fiz uso de expressões cunhadas por Wittgenstein, que passaram pela tradução de originais em Alemão para a Língua Portuguesa, principalmente, nas *Investigações Filosóficas* (2009). Assim é que comentadores e especialistas em tradução, como os professores Paulo Oliveira e Arley Moreno, dedicaram-se a traduzir, interpretar e esclarecer ilações filosóficas cunhadas pelo Mestre de Viena. À esteira das contribuições destes pesquisadores, procurei fazer analogias entre o pensamento filosófico de Wittgenstein e o ensino de Matemática.

Traduzir, aqui, diferentemente do sentido *lato* que a palavra tradução é empregada, significa traduzir expressões, notações e simbologias da linguagem matemática para a linguagem natural, a exemplo das discussões e pesquisas realizadas por Silveira (2014).

A expressão Tradução na Matemática, no contexto da educação matemática, a partir daqui passará a ter um sentido mais restrito que aquele encontrado na passagem de uma expressão de uma língua-fonte para outra, explorado nas Teorias da Tradução. No entanto, por se tratar de uma espécie de tradução, preservará algumas características das práticas tradutórias, ou seja, traduzir códigos de uma linguagem para outra. Assim, a tradução na Matemática possui graus de parentesco com o que destacou Hebeche (2016), acerca da expressão *filosofia sub specie gramaticae*, porém, os traços filosóficos que se assemelham com a *sub specie* em Hebeche não necessariamente se mantêm quando trato da tradução na Matemática, assim, emprego esta expressão como uma atividade interna, restrita aos domínios da Matemática com conexões na linguagem natural.

Ressalto que esta orientação se deve ao intuito de me precaver sobre possíveis confusões conceituais ou ambiguidades provocadas pelos aspectos polissêmicos e semânticos da linguagem natural, inclusive, das línguas estrangeiras e em menor grau na Matemática. No ensino da Matemática, faço uso de alguns pressupostos que Oliveira (2013) destaca sobre a tarefa de traduzir à luz do Wittgenstein tardio, ou seja, é preciso inicialmente compreender como seria possível compatibilizar traduções, considerando o jogo de linguagem, assim como dar sentido interpretativo para as expressões: ***percepção de aspectos, ver e ver como*** **e** ***seguir regras*****.**

De acordo com Oliveira (2013, p. 252), “a tradução é uma *forma*, sobre a qual deveríamos pode construir sentidos análogos atribuídos à outra forma, que é o texto original”, cumpre destacar que estas observações chamam para si aspectos teóricos da Tradução. Há nesse sentido, uma especificidade atrelada ao campo da Tradução Literária que envolve a passagem de palavras e expressões idiomáticas de uma língua para outra, quase sempre na perspectiva da tradução fiel. Traduzir fielmente, significa não se impregnar por suas próprias convicções e vivências, o que implicaria distorcer o sentido do texto.

Por outro lado, traduzir fielmente provoca discussões, por deixar de fora aspectos como expressões locais da língua de chegada, costumes e formas de vida que não fazem parte da língua de origem. A tarefa do tradutor é, portanto, complexa e árdua. Este é um exercício de idas e vidas consigo mesmo, uma perturbação que manifesta entre idiossincrasias e as manifestações socioculturais, presentes ou ausentes em diferentes jogos de linguagens.

Assim, conforme Belizário (2010), uma prática tradutória consistente deve atentar para *le trappole della traduzione* (as armadilhas da tradução; tradução livre) no que diz respeito a diferentes idiomas.

> As expressões idiomáticas são as verdadeiras "armadilhas" da tradução. Elas podem tornar temerária a operação do tradutor, sobretudo quando há falta de expressões equivalentes na outra língua. São inúmeras as expressões idiomáticas e os seus significados têm um valor muito particular em cada idioma (BELIZÁRIO, 2010, p. 63).

Nessa passagem, o autor revela o quão temerário pode ser uma tradução idiomática, caso o tradutor despreze por qualquer motivo traços culturais, além de mostrar que nem sempre é possível encontrar expressões de uma língua que possam ser tomadas como equivalentes em outra. Belizário (2010) elege em sua discussão, dez aspectos que podem ser levados em consideração numa prática tradutória, dentre os quais o texto literário, aspectos culturais-etimológicos e gramaticais, palavras polissêmicas e as não menos importantes expressões idiomáticas.

Diante do exposto, observando tais características da tarefa tradutória ainda que em direção mais restrita, procuro estabelecer critérios para lidar com a Tradução na Matemática, usando de artifícios ou argumentos, por meio dos **quadros de referência** mencionados por Oliveira (2013) e por Wittgenstein (2009). Este último, comenta sobre referências externas, àquelas que nos motivam a traduzir por exemplo, um tipo de expressão. Quer seja, por quadros de referências ou por referências externas, nossas impressões visuais ou linguísticas, advém de *formas de vida*, de conhecimentos herdados, dos quais nos apropriamos ao longo do tempo.

Conforme o que assinalou Oliveira (2010) considero importante ressaltar que para traduzir na Matemática, faz-se necessário observar critérios que advém das teorias da tradução.

> [...] lembre-se novamente que, ao lermos e interpretarmos um texto, ao compreendê-lo, portanto, não estamos sozinhos. Nossa leitura dependerá primordialmente de um conhecimento adquirido (da língua, do assunto etc.), que foi obtido junto a fontes que consideramos fidedignas – pois nem tudo aquilo que sabemos provém da experiência direta no mundo (OLIVEIRA, 2013, p. 252).

O autor reitera a partir do excerto acima, que, às vezes, as traduções não são bem-aceitas pelo público especialista, por haver discordâncias com o texto original. Neste caso, não se trata necessariamente de textos originais da Matemática, como fez Galelli (2012), ao considerar em sua pesquisa partes da obra *Os Elementos*, de Euclides, ou como fez Gonçalves (2011), ao investigar a escrita matemática nos tabletes de argila da Mesopotâmia.

Nesta pesquisa, os textos matemáticos que analisei, de modo mais restrito, são *partes* de textos matemáticos em circulação no contexto da matemática escolar, ou seja, textos organizados didaticamente para serem ensinados, prioritariamente na Educação Básica. Os tópicos analisados não se limitam ao livro didático, as fontes consistem de textos técnicos, de História da Matemática e da Informática na Educação Matemática.

Wittgenstein (2009) assinala que existe uma relação interna que se dá a partir da percepção de aspectos (impressões do *ver* e *ver como*), que se tem sobre determinados objetos, isso ocorre quando uma figura geométrica parece retangular, mas vista de outro ângulo, aparenta ser uma figura quadrada. Ora, a relação interna que busco passa pelas imagens, imagens de objetos matemáticos e de seus conceitos, que serão analisados pelo viés da tradução na Matemática. Que relações são essas? Como caracterizá-las? É o que destaco nas seções a seguir e no próximo capítulo, em que algumas concepções da tradução, se conectam a textos matemáticos e se entrelaçam por meio dos jogos de linguagem, visando à interpretação e compreensão conceitos e imagens na Matemática.

Das pesquisas sobre tradução

As reflexões sobre a tradução de textos matemáticos nesta Tese se pautam em pesquisas realizadas na pós-graduação, uma vez que essa temática possui uma forma de vida que não é investigada, de modo geral, em outros níveis de ensino. Me deparei na busca com diversas práticas tradutórias que se destinam traduzir palavras, dialetos e expressões estrangeiras. O tradutor ocupa-se quase sempre em aproximar o leitor das obras traduzidas e desempenha esta tarefa para que ao ler determinado texto, sejamos capazes de entender o que se quis dizer em uma língua que não é a sua língua de origem.

Há nas práticas tradutórias termos que perdem o seu significado de unicidade, como é o caso de alguns numerais, a exemplo do **quatro** em italiano (quatro), como adverte Belizário (2010, p. 64), nas expressões "*fare quattro chiacchiere* (bater um papo); *fare quattro passi* (dar uma voltinha) e *colloquio a quattr'occhi* (conversa em particular)".

Se se leva em consideração que quatro significa 4 em qualquer contexto, devido à natureza quantitativa e universalidade da Matemática, isso não se mantém quando o numeral quatro integra-se as expressões que dizem respeito exclusivo aos costumes de um país. Por mais que a palavra quatro tenha a pretensão universal de exprimir a quantidade 4, este sentido se esvai no jogo de linguagem do idioma italiano. Wittgenstein (2009) ressalta que o significado é o uso e que certas palavras são compreensíveis no contexto em que as formas de vida assim o definem.

O trabalho do tradutor assim aparece quando ele consegue mesmo sem fazer uma tradução literal tornar compreensível uma expressão de uma língua-fonte ou de partida para uma língua-fim ou de chegada. Assim, as traduções de uma língua para outra tomam como exemplo obras literárias, árias de ópera, poemas conhecidos, textos da área jurídica, da história da matemática, dentre outros contextos.

Nos estudos bibliométricos realizados recentemente por Alves e Vasconcellos (2016), os autores procuram fazer um mapeamento sobre as pesquisas que tratam de tradução acerca de dissertações e teses brasileiras no período entre 2006 e 2010. Com propósito semelhante, Pagano e Vasconcelos (2003) fizeram um levantamento sobre os estudos tradutórios entre 1980 e 1990. Os registros analisados mostram que há, pelo menos, um período de 40 anos de pesquisas dedicadas à Tradução no Brasil e, para esta Tese, me valho destas informações como parâmetros, na intenção de situar e pontuar pesquisas que se assemelhassem ao quadro tradutório, objeto desta investigação.

Com base nestes levantamentos, posso afirmar, de antemão, que a tradução de textos matemáticos não figura no panorama analisado nas pesquisas supracitadas. Assinalo ainda que até o ano de 2010, não encontrei pesquisas com esta característica, no entanto, alguns resultados mais detalhados da busca mostraram que alguns pesquisadores já percorreram os caminhos da Tradução e (na) Matemática, como é o caso de Gonçalves (2011), identifiquei também duas outras pesquisas com propósitos que visam à tradução, os estudos de Galelli (2012) e, mais recentemente, a investigação de Silveira (2014).

Destarte, o meu interesse pela Tradução na Matemática teve início ao tomar conhecimento das pesquisas realizadas no Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, do PPGECM, da Universidade Federal do Pará (UFPA) por Silveira (2014). Tais peculiaridades inserem, portanto, esta pesquisa no rol das primeiras pesquisas de uma área que começa a ser explorada no Brasil.

Em se tratando de tradução de textos literários ou científicos não há como deixar de levar em conta aspectos, como o período em que foram escritos, os locais, as culturas envolvidas, os sujeitos envolvidos e principalmente a figura do tradutor. Assim, as tarefas de tradução realizadas pelos tradutores[10] são quase sempre colocadas à prova, seja pelo público leitor ou mesmo pelos teóricos da tradução, cujo debate se dá em torno da busca por uma tradução perfeita, enquanto outros afirmam a impossibilidade de que haja este tipo de tradução a exemplo de Ricoeur (2012), eis algumas das interpretações que povoam o cenário da tradução, quer seja na literatura ou na ciência.

[10] Usarei aqui a palavra tradutor para designar os autores e pesquisadores que se dedicam a traduzir obras científicas. Ressalto que devido a este perfil, a palavra tradutor não se encontra no mesmo patamar da palavra intérprete, alguns destes profissionais acumulam, portanto, as duas funções.

Benjamin (2008), por outro lado, valoriza a língua-fonte na tradução de obras literárias acerca da fidelidade na tradução. Há, por conseguinte, diferentes práticas tradutórias no campo de investigação da tradução, entenda-se por estas práticas, atividades de pesquisa, técnicas e métodos utilizados pelos tradutores no que se refere ao escopo da tradução.

Para Alves e Vasconcellos (2016), há duas vertentes tradutórias a serem consideradas, uma delas toma a tradução como um campo de estudo outra como campo disciplinar. As autoras destacam que, atualmente, a tradução passa a ser vista mais sob o enfoque disciplinar, que consiste numa investigação mais madura no contexto das ciências por delimitar de modo mais preciso os objetos de investigação da tradução, que aqueles abordados nos estudos da tradução. Não é propósito aqui, tomar um dos rumos apontados pelas autoras, esta pesquisa concentra-se em discutir alguns aspectos da Tradução na Matemática, independentemente da atividade tradutória a que ela venha a pertencer.

Frota (2007) ressalta que a tradução de textos literários, poemas, peças teatrais e outras obras se intensificaram no Brasil a partir de 1952 com a publicação do primeiro livro sobre tradução, o *Escola de Tradutores,* de Paulo Rónai. Ao mencionar este marco para a tradução no Brasil, a autora faz um balanço sobre as produções de pesquisas, o que pode ser visto como uma espécie de manual de consultas para auxiliar os leitores na busca por informações nesta área.

Frota (2007) revela que as pesquisas na área de tradução avolumam-se no Brasil nas décadas finais do século XX, com o lançamento dos *Cadernos de Tradução* em 1996 na Universidade de Santa Catarina, que juntamente com a revista *Traduterm* constituíam-se como as únicos periódicos especializados em tradução no Brasil. Frota (2007, p. 148) assinala que "na década de 90 houve um verdadeiro *boom* de trabalhos e pesquisas" envolvendo publicações de livros, coletâneas, periódicos teses e dissertações, bem como os registros que constavam em anais de eventos nacionais e internacionais sobre a tradução.

Pagano e Vasconcellos (2003), ao fazerem um mapeamento sobre pesquisas realizadas no Brasil, destacam que o propósito de realizar um trabalho desta natureza não tem como objetivo cobrir o território mapeado, mas a representação sinóptica de um quadro que visa os construtos da tradução. As autoras ressaltam que este tipo de atividade pretende evidenciar alguns fragmentos de pesquisas realizadas na pós-graduação em diferentes programas que se destinam a essa tarefa no Ensino Superior. Nesse sentido, o mapeamento é apenas um recorte que destaca características temporais, espaciais e teóricas no universo da tradução. Assim, as autoras consideram que os trabalhos de tradução realizados nas universidades mudam de território a todo instante, apresentam-se como pesquisas nômades no contexto nacional.

Nesse mapeamento, elas identificam as pesquisas por diferentes processos, um deles é o agrupamento por **palavras-chave**, nos quais a tradução está correlacionada a diversos campos de investigação. Pelo que pude observar nestes estudos disciplinares, tomando as palavras-chave desta Tese como exemplo, não houve no período investigado palavras-chave que envolvessem tradução interna, jogos de imagens, ensino e a perspectiva do jogo de linguagem em Wittgenstein, portanto, este é mais um indício de que esta pesquisa possui uma característica distinta das que mencionei anteriormente.

A Tradução foi caracterizada inicialmente no Brasil por uma grande diversidade de temas que operavam como atividade intrínseca ligada à tradução de uma língua para outra, levando em conta diferenças culturais, períodos históricos e subjetividades, reitera o balanço realizado por Frota (2007). Nesse sentido, as práticas tradutórias, passaram pela Filosofia, Literatura, Antropologia, Psicologia, Etnografia, dentre uma grande diversidade de temas. Juntaram-se ao escopo da Tradução, outras atividades como interpretação e terminologia que antes eram consideradas áreas sob em perspectivas separadas, os principais eixos da tradução mapeados por esta autora foram Tradução Literária, Tradução Técnica, Terminologia, Interpretação, Discurso, Pós-Estruturalismo, Mídia e Corpora (FROTA, 2007).

Cumpre destacar que assim como outros autores fizeram, a busca sobre a tradução de textos matemáticos não teve o propósito de estado da arte visando mapear ou fazer um balanço sobre os estudos já realizados. De modo mais restrito, fiz um breve escorço acerca destas pesquisas com a finalidade de detectar no cenário da educação matemática a temática Tradução da Linguagem Matemática para a Linguagem Natural.

Assim, o recorte que apresentado se deu com base nos principais meios de consulta e divulgação de pesquisas, a saber: bibliotecas virtuais e bancos de teses, como o portal CAPES, a plataforma SCIELO, a Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD), de diferentes Instituições de Ensino Superior.

Para tanto, consultei também os repositórios que hospedam pesquisas nos bancos de dissertações e teses a exemplo da página virtual da Universidade de Campinas (Unicamp), por meio de um prospecto nas revistas eletrônicas que tratam da Tradução, em busca de textos que abordam o ensino da Matemática em busca de artigos científicos sobre os eixos: *Educação, Matemática e Tradução*, mas pouco foi encontrado com estas características, como dito antes.

Aspectos teóricos da tradução

Ricoeur (2012) defende que a tradução perfeita é teoricamente impossível ao afirmar que a incompreensão sob determinados aspectos é de direito, ou seja, o autor lança desta forma aos tradutores a pecha de que perseguir uma tradução ideal seria como estar acometido de uma esquizofrenia bilíngue. Ao mergulhar nesta empreitada, portanto, os tradutores com suas diferentes visões de mundo procuram representar por meio de recortes linguísticos, relações humanas em que o tradutor de uma língua que não é a sua, procura atribuir ao texto (expressões) características inerentes a si mesmo para compreender e realizar tais atividades.

O autor ressalta que é justamente porque os seres humanos falam línguas distintas que a *tradução* existe ou subsiste, mas, isso não se deve apenas a esta condição: “[...] há um segundo fato que não deve encobrir o primeiro, o da diversidade das línguas: o fato igualmente considerável de que sempre se traduziu; antes dos intérpretes profissionais, houve viajantes, mercadores, embaixadores, espiões, ou seja, muitos bilíngues poliglotas! (RICOEUR, 2012 p. 35).

Nesse sentido, o trabalho do tradutor, tarefa de traduzir ou a tradução como se queira sempre é perseguida por um desejo de tradução, que de modo mais condizente possível, tente dar ao leitor a impressão de que aquilo que foi dito na língua-fonte aproxima-se com o que será lido na língua de chegada. Ricoeur (2012) adverte que o desejo de traduzir se esvai diante de expressões ou frases, nas quais se busca um suposto equivalente, e ressalta que a felicidade de uma tradução perfeita é apenas momentânea, fadada, portanto, ao esquecimento ou abandono.

Schleiermacher (2007) apresenta inúmeras considerações sobre os diferentes métodos de traduzir, atribuindo ao intérprete e ao tradutor genuíno, tarefas distintas. O intérprete teria como propósito intenções comerciais, descrições jornalísticas ou de viagens comuns feitas por guias turísticos, já o tradutor seria aquele que trata de textos artísticos, literários e científicos. Para esta Tese, a característica do **tradutor científico** é a que mais se adapta ao propósito de minhas discussões, nesse sentido, encontram-se, por exemplo, George Steiner, Quine, Francis Henrik Aubert, dentre outros.

A interpretação passa a ser também um dos pontos em que Schleiermacher atribui à dupla atividade dos intérpretes e tradutores, ao afirmar que o tradutor possui papel mais relevante no campo da Literatura, das Artes e das Ciências, em que sua arte é o seu todo, seu universo. Já o trabalho realizado pelo intérprete seria mais voltado à prática da conversação e da oralidade.

Schleiermacher (2007) assinala que interpretação destoa da tradução, pois, independentemente do lugar em que se realiza o trabalho do tradutor, o discurso da tradução não se dá com os mesmos objetivos do intérprete no contexto linguístico.

Benjamin (2008) afirma que a tradução se configura por meio de uma lei da **traduzibilidade**, isso não significa que o autor tenha definido uma essência tradutória, pois, a traduzibilidade se manifesta no intuito de que a tradução em relação à língua original seja sempre uma boa tradução, proporcionando uma aproximação estreita entre leitor e tradutor.

Historicamente, Benjamin reporta-se acerca da pervivência do leitor, ou seja, o autor retrata o fato de que o leitor entra em contato com obras que não fizeram ou fazem parte do seu tempo presente, a exemplo da obra milenar *Os Elementos*, de Euclides, que foi traduzida para a Língua Portuguesa por Irineu Bicudo (2009). Nesta tradução, cujo texto original é em grego, Bicudo adverte que é preciso muita determinação para acompanhar e lidar com as provas matemáticas ali presentes, pois se deve levar em consideração que o idioma grego é uma língua sintética e o português uma língua analítica: "É fácil dar-se conta do grau de afastamento das suas sintaxes, por isso permanecemos o mais possível ligados ao original, prevenimos o leitor estranhar algumas vezes o resultado alcançado" (BICUDO, 2009, p. 21).

Na busca de se manter o mais fiel possível à tradução original, Bicudo aproxima-se do discurso de Benjamim (2008) sobre a **fidelidade** na tradução. O autor reitera que em relação aos elementos euclidianos, foi preciso traduzir palavra por palavra, portanto, uma característica da técnica da tradução literal. Cabe ressaltar que, atualmente, estas práticas tradutórias, são isoladas e pouco recomendadas no contexto amplo das teorias da tradução. Assim, a tradução literal deixou de ser unânime entre os autores e tradutores que realizam trabalhos científicos de tradução, o que é recomendado, atualmente, na tradução de uma língua para outra é a tradução pelo sentido e não a tradução palavra por palavra. Os autores optam, em muitos casos, por dar sentido à tradução com base no que foi escrito originalmente, levando em conta não só o que está escrito no texto, mas dando atenção ao contexto em que ela foi produzida e o contexto em que está sendo lida atualmente (SILVEIRA, 2014).

Silveira (2014) coloca em destaque a tradução de textos literários e científicos no intuito de apontar as perspectivas de diversos autores, como a fidelidade da tradução e a intraduzibilidade discutidas por Ricoeur (2011), a valorização da língua-fonte e liberdade de traduzir defendidas por Benjamin (2008) e a tradução radical de Quine (2008), que se pauta na tradução de frases e não de palavras contidas nos textos. Silveira (2014) procura, portanto, mostrar aproximações e ou distinções entre o ponto de vista destes autores, para caracterizar o seu ponto de vista acerca da tradução de textos matemáticos, no âmbito da Educação Matemática.

Gadamer (1999) aborda a Tradução como um meio em que se realizam **acordos** entre interlocutores e o entendimento sobre a coisa, nisso encerra-se a compreensão como propósito da gramática e retórica à luz da Hermenêutica, assinala o autor. Em seu discurso, Gadamer (1999, p. 559) não deixa claro o que venha a ser o termo **coisa**, ao que parece o seu enfoque se dá na compreensão de diálogos entre as pessoas, ele assinala que traduzir "trata-se de um processo linguístico... A linguagem é o meio em que se realiza o acordo dos interlocutores e o entendimento sobre a coisa".

Para Gadamer (1999), a linguagem e suas formas de expressão não se reduzem ao deslocar-se para o interior do outro (interlocutor), de modo imediato, em busca de certezas acerca do que foi dito. Ele assinala que a compreensão sobre algo que se diz é colocar-se de acordo com a coisa, são as nossas experiências de sentido acerca da compreensão que encerram uma espécie de **aplicação.**

Assim, a perspectiva da tradução em Gadamer (1999) se pauta em translações e interpretações linguísticas para que haja uma espécie de conversão entre expressões idiomáticas diferentes. Interpretação e tradução consistem em uma mesma ação por meio de uma fusão, ou seja, para o autor, toda tradução no fundo é também uma interpretação. O autor adverte que o sentido sobre o que foi dito deve, portanto, ser preservado, para que a tradução se dê por consumada.

Por outro lado, Oliveira (2013) faz ressalvas quanto aos pressupostos tradutórios definidos por Gadamer, ao firmar que tradução e interpretação ocorrem distintamente, então para Oliveira (2013), traduzir e interpretar não são práticas idênticas, não há, portanto, uma homogeneidade entre estas duas atividades. Para ele, a tarefa do tradutor consiste numa **condição de possibilidade** para que o texto traduzido seja compreendido pelo leitor e vai mais adiante, ao afirmar que a compreensão é consequência das outras duas atividades, tradução e interpretação, que juntas se entrelaçam, e é o tradutor quem as conecta no texto (OLIVEIRA, 2013).

Como visto, a tradução no contexto literário e científico vai muito além da tradução pelo entendimento, envolve outras complexidades. Na Educação, por exemplo, deve-se levar em conta que palavras como aprender, apreender e compreender possuem aplicações distintas ainda que figurem num mesmo contexto.

No contexto da tradução, minhas ilações se coadunam com as observações feitas por Oliveira (2013), mas o escopo da minha investigação visa aos textos matemáticos, portanto, consiste de uma tradução entre linguagens. Não obstante, Oliveira (2013) destaca o papel filosófico da linguagem em Wittgenstein e, de forma semelhante, estudo a perspectiva de Wittgenstein no âmbito da Educação Matemática desde o ano de 2011, agora pelo viés da tradução.

As discussões até o presente momento me permitem a título de hipótese destacar que as atividades de tradução e interpretação no ensino da Matemática não consistem nas mesmas práticas, ou seja, até certo ponto, acompanho as observações de Oliveira (2013) e de Silveira (2014). Enfatizo em seção específica nesta pesquisa, que tradução e interpretação podem ocorrer independentemente uma da outra quando se trata de conceitos e objetos matemáticos, ou seja, ainda que possa haver proximidades ou grau de parentesco entre ambas, em determinados contextos e aplicações, elas podem caminhar em separado.

Quine (2010) defende a tradução radical, pois para ele, esta atividade ou tarefa do tradutor estaria ligada ao fato de observações empíricas, ou seja, o princípio de uma tradução está diretamente ligado a informações primitivas advindas de quem investiga e dos falantes em qualquer ocasião, mesmo quando ambos desconhecem completamente o linguajar um do outro. Uma tradução radical passa, então, por questões que significam traduzir não só palavras, mas contextos e culturas e envolve uma trama complexa que mais parece o trabalho desenvolvido pelos antropólogos, que se dá através de uma imersão total nas formas de vida de um povo.

A tese proposta por Quine (2010, p. 51), em *Palavra e Objeto,* assinala, “manuais para traduzir uma língua em outra podem ser estabelecidos de maneiras divergentes, todas compatíveis com a totalidade das disposições verbais, porém incompatíveis entre si”. Nesta passagem, Quine (2010) destaca que há incompatibilidade tradutória entre palavras de línguas diferentes e que isto se deve por não haver relações de equivalência possível entre duas palavras, haja vista que a tradução não condiz com a plausibilidade entre ambas.

De acordo com Martins (2010), Walter Benjamin, André Lefevere e Lawrence Venuti, fazem parte do rol de tradutores contemporâneos e as práticas tradutórias por eles desenvolvidas apresentam em comum a não essencialidade da linguagem e do significado. A autora revela que os tradutores contemporâneos compreendem a tradução como reescrita e transformação, o que difere da tradução para Quine, e da fidelidade tradutória em Benjamin, mas isso não quer dizer que por serem contemporâneos, os autores divirjam totalmente a respeito da tradução, Quine assinala que não se traduz de fato em busca de uma identidade de significados associados a estímulos e sim por uma aproximação expressiva entre significados e estímulos.

Um exemplo bastante conhecido utilizado por Quine (2010), em suas ilações sobre tradução, é o uso da palavra *gavagai* atribuída possivelmente à imagem de um coelho que saltita entre os arbustos de um campo. Quine ressalta que a busca pela compreensão de palavras e dialetos de um povo, o tradutor observa e procura traduzir o significado linguístico daquela palavra ao ser pronunciado por um nativo local. Por ser uma expressão estrangeira, ou seja, desconhecida do vocabulário do tradutor, ele sugere que a palavra proferida tem mais de um significado, constituindo-se numa expressão, ou seja, *gavagai* poderia ser: o coelho em si, a orelha do coelho, o salto do coelho, uma pinta no dorso do coelho ou mesmo o fato de que o coelho foi avistado pulando entre os arbustos.

Diante das suposições apresentadas por Quine acerca da palavra *gavagai* e com base no que disseram anteriormente Pagano e Vasconcellos (2003), a tradução pode ser considerada uma atividade nômade. Se as autoras consideram que a tradução muda de lugar por meio de uma migração em seu próprio país, pode-se dizer que este raciocínio também se estende para palavras e expressões de um continente para outro.

Martins (2010) destaca, por exemplo, que Lefevere aborda a pragmática da tradução e da contextualização, e que sua visão literária aborda aspectos das traduções literária como um sistema. Nesse sentido, os Estudos de Tradução realizados por Lefevere estão relacionados à tradução pura que se opõe ao estudo da tradução aplicada, esta dinâmica tradutória ficou conhecida por *Descriptive Translations Studies* (DTS), da qual surgiria o conceito de **tradução como reescrita** marcante no trabalho do autor.

Martins (2010, p. 63) afirma que “reescrita se refere ao resultado de uma complexa articulação do sistema literário com outras práticas institucionalizadas e outras formações discursivas (religiosas, étnicas e científicas)”, outro conceito abrigado por Lefevere é o de **patronagem** que não será evidenciado neste texto, pois a intenção é fazer um voo panorâmico sobre as perspectivas tradutórias de alguns autores. Logo, não me ocuparei em fazer o escrutínio de conceitos constituídos no âmbito das Teorias da Tradução, por outro lado, farei uso de algumas de suas contribuições em atenção à Linguagem, que é um dos objetos de estudo desta pesquisa.

Venuti (1995) usa o conceito de **invisibilidade** do tradutor para descrever a atividade tradutória realizada na cultura anglo-americana, o que, segundo ele, está associado a dois critérios ou fenômenos mútuos fundamentais: o efeito ilusionista do discurso a partir da manipulação do tradutor para a língua inglesa e a prática avaliativa de leituras traduzidas nos EUA e na Inglaterra com base na cultura destes dois países. Martins (2010) ressalta, com base em Venuti (1995), que a invisibilidade do tradutor no texto se deve à marginalidade a que são submetidos quem realiza a atividade tradutória.

Para Martins (2010), isso se deve à duas frentes: uma textual e estética e outra socioeconômica, que de certa forma interligam-se por meio de uma visão romântica apegada a traços culturais, atreladas ainda ao platonismo. Destarte, Lefevere procura mostrar que a invisibilidade ou apagamento do tradutor no texto se deve ao apego exacerbado a traços culturais, que tendem a domesticar o tradutor, criando uma espécie de tradução narcisista do texto, isso reflete de modo crucial sobre sua invisibilidade na obra (MARTINS, 2010).

É deste modo, portanto, que para dar consistência a uma tradução perfeita, o tradutor procura eximir-se de feições subjetivas e passa a caracterizar inteiramente o texto à luz dos traços da cultura linguística de chegada em detrimento da cultura linguajeira original. A prática tradutória de Venuti sofre influências das práticas de tradução alemã na figura de Schleiermacher, na qual o autor advoga que haja um certo distanciamento entre leitor e tradutor conhecida como estrangeirização, o que contribui sobremaneira para a invisibilidade do tradutor.

Um texto reconhecido na literatura é o livro *Depois de Babel,* de George Steiner (2005), ele se ocupa com a tradução, cujas discussões se pautam em fenômenos linguísticos. O autor tece uma intricada trama de conceitos ao passear por diversos ramos do conhecimento destacando a importância da linguagem e um ponto marcante das reflexões filosóficas de Steiner (2005, p. 56) ressalta as diferentes línguas faladas nas civilizações desde a Antiguidade até a Época Moderna, ele destaca que “não há exagero em dizer que possuímos civilização porque aprendemos a traduzir por sobre o tempo” e revela que o ponto crucial ou ponto de partida de seu ensaio sobre a tradução, é a **interpretação.**

> O que me ocupa é a “interpretação” como aquilo que dá vida à língua para além do momento e lugar da enunciação, ou escrita inéditas. A palavra francesa *interprète* de Racine; um pianista da *une interprétation* a uma sonata de Beethoven. Por meio de do envolvimento de sua própria identidade, um crítico torna-se um *interprète* de (alguém que dá vida a) Montaigne ou Mallarmé. O termo inglês *interpreter* **-** por não incluir o mundo do ator e por incluir o do músico apenas por analogia – é menos forte. No entanto, é congruente, com o termo francês quando se trata de uma outra direção crucial. *Interprète/interpreter* são comumente usados para significar tradutor (STEINER, 2005, p. 53 marcações do autor).

Para Steiner (2005), o modelo esquemático da tradução não é diferente daquele proposto tradicionalmente nas Teorias da Tradução, ou seja, a passagem das palavras e expressões de uma língua-fonte para a língua de chegada. Para o autor, nessa passagem ocorre uma espécie de transformação, ou seja, um processo que tende a modificar as palavras do original, mas Steiner adverte que, obviamente, por se tratar de línguas diferentes, esta é uma barreira que o tradutor deve transpor, pois há, certamente, interferências interpretativas, cuja descrição afeta,por vezes, de forma inadequada o que se quis dizer. Assim, a tradução precisa garantir que a codificação e a decodificação deem conta de que a passagem de uma língua para outra seja feita cuidadosamente.

Steiner (2005) faz uma crítica à forma como as pessoas se dirigem umas às outras, e isso se deve pelo modo como o fazem a si mesmas, assim não se dão conta de que seus discursos podem ser excludentes e severos a ponto de tratar com total indelicadeza aqueles que não frequentam as mesmas classes sociais. Esse jogo de linguagem é um jogo de poder econômico voraz que degrada a quem ouve e ressalta a quem os pronuncia. A expressão jogo de linguagem a que Steiner se refere não é a mesma usada por Wittgenstein (2009), mas é possível fazer uma analogia entre ambas, no sentido que estes jogos de linguagem agregam outra expressão, se compatibilizam com **formas de vida**.

É justamente este jogo comparativo que se traduz em situações diferentes na linguagem quando as palavras, o uso de certas palavras destaca diferenças sociais, que se entrelaçam ao modo de vida quando são proferidas, e é a isso que Wittgenstein (2009) atribui a noção de **ver**, ou seja, veja como o jogo de linguagem se estabelece. De acordo com Steiner (2005), a linguagem estabelece uma espécie de ideologia social, há neste contexto também questões polissêmicas. Para Wittgenstein (2009), a polissemia também está em voga, e é o que justamente enfeitiça nossos pensamentos, por isso, precisamos estar atentos aos usos das palavras. Steiner (2005) expõe com clareza, no excerto a seguir, as diferenças entre os discursos nas classes sociais.

> [...] homens e mulheres da classe baixa não falam com seus patrões e inimigos do mesmo modo como fala entre si, guardando para uso interno a riqueza expressiva de que dispõem. Para um ouvinte de classe alta ou média, o autêntico jogo de linguagem que se dá no porão ou numa casa operária é mais difícil de penetrar do que em qualquer clube. Brancos e negros trocam palavras como fazem soldados da linha de frente ao jogar de volta granadas não detonadas. Assista aos movimentos de responsabilidade fingida, de ameaças e não-informação num diálogo entre um locador e seu locatário ou nas brincadeiras matutinas de um contador com um motorista de caminhão. Observe os subtons cruéis da fala aparentemente cortês trocada entre a patroa e a empregada na peça As criadas, de Genet. Tão pouco está sendo dito, tanto está “sendo significado”, trazendo, para o tradutor problemas quase insolúveis (STEINER, 2005, p.59).

Observando atentamente o jogo de linguagem que fala Steiner, é possível notar relações com o **jogo de linguagem** wittgensteiniano, e é nas diferentes formas de vida que eles ganham notoriedade. É lógico que os significados de jogo de linguagem mencionados por estes autores não estão qualificados no mesmo sentido. Wittgenstein cunhou aquela expressão não com o mesmo propósito de Steiner, mas ambos se prestam a esclarecer como funcionam os jogos de linguagem da tradução, para isso usam as palavras como instrumentos. Para Wittgenstein (2009), traduzir é um jogo de linguagem, já Steiner (2005, p. 72) afirma "entre línguas ou no interior de uma língua, a comunicação humana é igual a tradução. Um estudo da tradução é um estudo da linguagem".

Berman (2009) inicia suas discussões sobre a tradução afirmando que os tradutores não gostam muito de falar sobre teoria, pois esse é o discurso tradicional que remete a este campo de atividade. Para o autor, os tradutores assumem em determinadas situações posturas que lembram **artesãos intuitivos**, para eles, a atividade tradutória é vista à luz do discurso-da-tradução.

O autor afirma que este discurso possui três características: a primeira mostra a disparidade entre questões analíticas e orais; prescritivas; ora poéticas, ora especulativas ora polêmicas, raramente este discurso pode ser teórico. A segunda é a magreza do discurso, no sentido de que as poucas obras agregam muitas notas, cartas e prefácios em seu escopo. A terceira ressalta que o discurso tradicional tem como marca as discordâncias entre aqueles que defendem a tradução da palavra e aqueles que optam por traduzir o sentido do texto (BERMAN, 2009).

Berman (2009) mapeia os discursos da Tradução e elege categorias, sob as quais tece considerações, a saber: os discursos gerais que podem ser entendidos como Teorias da Tradução; os discursos da experiência em que a Filosofia acompanha de perto a Tradução, a exemplo dos entrelaces feitos por Gadamer e Benjamin; a tradução automática (*traductique*), que consiste de um emaranhado tecnológico no qual estão envolvidas teorias da informação, Linguística e Informática.

Berman (2009) considera este discurso como uma espécie de teoria computacional, na qual as nuances da realidade são aprendidas por meio da tecnologia. Nesse sentido, a classificação de Berman (2009) sobre a ***traductique***, aproxima-se por semelhanças de família com o que discuto nesta pesquisa na perspectiva wittgensteiniana por englobar a Informática como um dos recursos à Tradução.

Berman (2009) assinala que este tipo de tradução pode ser aquela utilizada pelos usuários de computador, na qual há a interferência direta dos tradutores eletrônicos via internet ou de plataformas específicas para esse fim. Neste caso, ressalto que a tradução pode ser considerada uma tradução literal, uma vez que não estão envolvidos neste processo, aspectos culturais, sociais, subjetivos ou contextuais. Apenas o jogo de linguagem está em curso, independente de interlocutores e processos orais, é o jogo de linguagem da Informática. Portanto, uma tradução literal de conceitos ora da Matemática ora da Informática.

O que me proponho a fazer nesta Tese ao traduzir e n(a) Matemática, tem um quê de tecnologia, na qual faço uso de um software, esta atividade se funda em traduzir internamente conceitos da Matemática. Não é intenção, por hora, tomar este tipo de tradução aos moldes da tradução tradicional como método ou teoria tradutória, mas dar à tradução o *status* de técnica inerente aos jogos de linguagem wittgensteinianos.

Ainda no contexto das Teorias da Tradução, farei menção sobre algumas contribuições de Roman Jakobson (1989), no livro *Linguística e Comunicação*, que auxiliarão na medida do possível a conhecer e destrinçar aspectos linguísticos da Tradução, visando ao contexto da Educação e da Matemática.

Jakobson (1989) deixa claro que o contexto de sua preocupação na Linguagem aponta para a **Semiótica**, assim, ele toma como base esta teoria para tecer argumentos que possam dar sentido aos signos linguísticos sob os quais deposita a confiabilidade do conhecimento dos códigos verbais. A **comunicação** é, por conseguinte, o objetivo principal a ser atingido por Jakobson. Para tanto, por sua estadia no Círculo Linguístico de Praga (1926), o autor pode ser considerado como um dos formuladores da Teoria Fonológica. Nesse sentido, apesar de estar próximas do Formalismo, as problemáticas que Jakobson estudava rumavam para o Estruturalismo, este é um perfil elaborado por Izidoro Blikstein, que prefacia o livro de Jakobson na edição brasileira.

O ponto que interessa nas discussões de Jakobson é justamente o aspecto linguístico da Tradução, nesse sentido, ele procura claramente extrair o máximo das palavras dando atenção ao significado e ao contexto em que elas são proferidas, um exemplo disso é que, em parte de seu discurso, ele destaca a ostensividade. Jakobson (1995, p. 64) adverte, "será necessário recorrer a toda uma série de signos linguísticos, se se quiser fazer compreender uma palavra nova", ressaltando que não é o fato de apontar simplesmente para o queijo ou para sua embalagem que fará uma pessoa entender se queijo é o nome de uma coisa ou objeto.

Não é de admirar que Jakobson tenha buscado fundamento para suas conjecturas na obra de Peirce, já em seus comentários, ele faz uma aproximação com a tradução:

> Para o linguista como usuário comum das palavras, o significado de um signo linguístico não é mais que sua *tradução*, por um outro signo que lhe pode ser substituído, especialmente um signo "no qual ele se ache desenvolvido de modo mais completo" (JAKOBSON, 1995, p. 64, itálico e aspas do autor).

Observando o que foi dito por Jakobson, nota-se que há uma atenção especial à Semiótica peirceana, é desta forma que ele formula três passagens para a interpretação de um signo, a saber: tradução em signos da mesma língua, tradução em outro idioma, ou tradução por um meio de código não verbal. Jakobson (1995) classifica a tradução em três tipos:

- Tradução *intralingual* ou reformulação, na qual a interpretação dos signos se dá num mesmo idioma ou língua;
- Tradução *interlingual* ou tradução propriamente dita, passagem de uma língua para outra;
- Tradução *intersemiótica* ou transmutação, que versa sobre a interpretação dos signos verbais por meio de outros signos não verbais.

Diante do exposto, ressalto que os níveis de tradução elaborados por Jakobson seguramente gozam de princípios semelhantes aos que foram discutidos por Steiner e Gadamer acerca da **interpretação**, ressalvando-se as peculiaridades de cada autor.

Jakobson (1995, p. 66) recorre ao princípio da equivalência na diferença como problema principal e ser explorado pela Linguagem nos domínios da Linguística ao afirmar que "nenhum espécime linguístico pode ser interpretado pela ciência da linguagem sem uma tradução dos seus signos em outros signos pertencentes ao mesmo ou a outro sistema". A trama linguística proposta por Jakobson procura assegurar que os efeitos comparativos da Linguagem surgem na possibilidade de tradução entre palavras de uma língua e outra. Assim, para o autor, a Tradução deve ser uma preocupação constante da comunicação, sempre atento aos princípios científicos da Linguística.

É possível então fazer uma aproximação das ilações em Jakobson com os jogos de linguagem em Wittgenstein? Sim, assinalo no quesito Tradução, pois esta é palavra comum ao que ambos autores exploram, ressalvando-se suas perspectivas. Para Wittgenstein (2009) a interpretação possui ***ares de tradução***. Não há, a meu ver, critérios que possam legitimar por completo esta afirmação, por outro lado, o que foi dito antes não se mostra contraditório. Penso logicamente que o jogo de linguagem da Tradução em Wittgenstein possui semelhanças familiares e se entrecruza com a Tradução interpretativa de Jakobson.

Cumpre, no entanto, fazer a seguinte ressalva: os dois autores possuem decididamente perspectivas diferentes acerca da Linguagem, enquanto Wittgenstein não está preocupado em formular qualquer teoria voltada à ciência, Jakobson certamente caminhou com esse propósito, tomando a Linguística e a Semiótica com essa finalidade.

Wittgenstein não chamava para si vestimentas que pudessem identificá-lo com esta ou aquela corrente teórica. Não obstante, alguns de seus comentadores é que lhe imputam ter formulado na primeira fase de seus escritos uma possível Teoria Pictórica (CHAUVIRÉ, 1991).

Spaniol (1989), ao referir-se à segunda fase do pensamento de Wittgenstein, faz alusão a uma possível participação do filósofo no movimento conhecido como *Ordinary-language philosophy*, em função do lançamento das *Investigações Filosóficas* em 1953, período em que este movimento se mostrava efervescente. Spaniol (1989) assinala, ainda, que na época do *Tractatus,* Wittgenstein sofre influência da Filosofia Analítica atribuída a Frege e Russel.

Araújo (2004; 2012) destaca que Wittgenstein foi um dos principais precursores do movimento Virada Linguística no século XX e ainda que o filósofo, por suas contribuições à linguagem, se coloca no cenário de uma possível Epistemologia Crítica.

Muito do que há, portanto, sobre uma possível associação de Wittgenstein a correntes teóricas foram ilações atribuídas a ele por comentadores, mas não ditas por ele, pois, uma característica marcante de sua filosofia era ser adogmático. Se não há entre Jakobson e Wittgenstein necessariamente correlações teóricas explícitas, esta discussão é uma menção aos jogo de linguagem implícito nas palavras destes autores e que procurei estabelecer com base nos quadros de referência tradutórios que cada um deles aborda sobre Linguagem.

E mais, não imprimi aqui uma busca desenfreada por uma interseção nas discussões de ambos os autores, este é um dos recursos do jogo de linguagem que uso para mostrar, no sentido *lato,* o que cada um deles mais considerava relevante no universo linguístico. Esta é, por conseguinte, uma possibilidade de aproximação. Assinalo que, para além das profusões linguísticas de Jakobson marcadamente caminharem em direção à Semiótica peirceana, procuro tirar proveito, ou seja, cotejar a ***tradução intersemiótica*** para uma conceituação da **Tradução Interna** como técnica voltada à constituição de conceitos, associada aos Jogos de Imagens na Matemática.

Sobre a tradução de textos matemáticos

Os textos matemáticos contêm, em sua estrutura, uma sintaxe governada por palavras e simbologias que se destinam à elaboração de conceitos e definições, que funcionam como uma espécie de cálculo gramatical. Silveira (2014) chama atenção para a tradução de textos matemáticos em função do sentido das palavras, quando ocorre a passagem da linguagem natural para a linguagem matemática. Nesse sentido, há também a tradução literal que, sozinha, é de natureza técnica e profissional.

Traduzir literalmente um texto matemático é algo semelhante ao que se faz com a leitura de uma frase em Língua Portuguesa, ou seja, é como ler uma expressão numérica **2+3x4** (dois mais três vezes quatro); ler uma equação **3x+5=10** (três "xis" mais cinco é igual a dez) ou uma função **f(x)=x²+4x** (efe de xis é igual a três xis mais cinco). Há nesses jogos de linguagem algo de estranho quando se lê? Sim, em parte deles. Ao que parece, a escrita e a própria leitura das expressões (tradução) parecem empregar palavras de outra linguagem, que mescla o vocabulário da linguagem natural e o da linguagem matemática, uma espécie de matematiquês! Ora, este tipo de tradução linguageira não é comum à linguagem natural, mas na Matemática pode fazer sentido. Tais expressões só farão sentido plenamente se existir um gramatiquês que garanta sua legitimidade, mas esta codificação não possui cânones definidos no contexto das ciências, figura como se fosse um dialeto particular e fugaz, não teórico.

Fazer, portanto, a tradução literal de uma expressão é empregar (fazer uso) dos recursos da língua natural (de origem idiomática) para expressar objetos de conhecimento de uma outra linguagem, como a da Matemática. Nesse sentido, cabe o que Wittgenstein (2009) chamaria de **ver** na perspectiva da Filosofia da Linguagem, ou seja, ver é interpretar! O sentido empregado por Wittgenstein acerca do **ver** não é meramente visual, mas um aspecto da linguagem em funcionamento. Ver, não tem necessariamente, o mesmo significado de olhar para algo que pode ser visto como um lápis ou uma cadeira. O emprego da expressão wittgensteiniana **não pense veja!** É condição de possibilidade para a tradução da linguagem matemática para a linguagem natural e vice-versa, reitero.

Assim, o que ocorreu com os exemplos anteriores sobre a tradução literal de expressões matemáticas foi que usamos de modo automático o emprego das regras do jogo de linguagem da Língua Portuguesa para jogar o jogo de linguagem da Matemática. Por isso, a pronuncia oral três "xis" mais cinco é igual a dez, pode não soar estranho a quem ouve, mas a sua escrita não condiz com a leitura canônica da Língua Portuguesa, pois as regras gramaticais empregadas não mantêm a mesma estrutura que a expressão "dois mais três vezes quatro". Os aprendizes possuem dificuldades em compreender a passagem da linguagem matemática para a linguagem natural, porque o significado de "x ou xis" na linguagem natural não é o mesmo de **x** na Matemática, códigos diferentes ainda que mantenham a mesma grafia (caractere) em linguagens diferentes produzem, portanto, significados diferentes.

A tradução ou passagem da linguagem matemática para a Língua Portuguesa traz implicações de natureza gramatical, uma vez que a sintaxe textual (escrita) não faz parte do mesmo vocabulário. O nível de complexidade aumenta quando se trata de uma expressão ou notação que emprega um texto matemático sem nenhuma regra gramatical explícita, não há nome próprio, substantivo ou verbos de ligação como os que são empregados na leitura de frases da Língua Portuguesa.

O quadro de referência que apresentei nestas análises é análogo ao que foi mencionado por Oliveira (2013) para mostrar que as peças de um jogo de linguagem não se encaixam noutro jogo, as normas ou convenções da Matemática não são **transferidas** diretamente para a Língua Portuguesa, daí a afirmação de que a tradução literal (caractere por caractere ou palavra por palavra) não tem o mesmo significado que as traduções pelo sentido. De posse destas observações, infiro que a tradução literal da linguagem matemática para a Língua Portuguesa não pode ser efetivada sob os mesmos princípios. O contexto amplo dos jogos de linguagem wittgensteinianos aponta para lances e jogadas realizadas em sistemas linguajeiros com códigos distintos.

O jogo de linguagem (tradução) da linguagem matemática para a língua natural se torna ainda mais complexo quando se trata de ler ou interpretar uma expressão que possui notação científica, como no caso das funções polinomiais. Há notações da Matemática, como o termo **f(x)**, que pertence exclusivamente à Matemática, e mais: há simbologias como a seta (→), cuja função lógica recebe o nome de **implicação**, que aparece em **f:A→B**.

Esta notação de função se traduzida literalmente para a linguagem natural (efe de a em B, ou função de A em B), pode não ter nenhum significado para o leitor, até mesmo na Matemática. Para que tenha sentido na Matemática, é preciso, pelo menos, que se saiba quais são as características (elementos dos conjuntos A e B) e qual lei de formação rege este tipo de função.

Traduzir na Matemática não se trata apenas de aplicar regras gramaticais e ler um texto matemático. Não se trata também de interpretar os signos codificados na ordem em que elas aparecem no texto, é preciso compreender como se dá nesse sentido o jogo de linguagem da Matemática, pois "queremos construir uma ordem no nosso conhecimento do uso da linguagem... Para esta finalidade, iremos sempre de novo realçar diferenciações que as nossas formas habituais de linguagem facilmente deixam passar" (WITTGENSTEIN, 2009, p. 76).

Não há, portanto, aos moldes das Teorias da Tradução uma aplicação direta da traduzibilidade de línguas quando o **jogo de linguagem matemática** entra em cena. É este jogo de linguagem que busco elucidar. Cumpre ressaltar que o jogo de linguagem da Matemática requer o que chamo nesta Tese de **Tradução Interna**. Assim, entre a leitura mais simples de um texto matemático, aquela que não requer necessariamente uma tradução entre duas linguagens e aquela que considero como tradução na Matemática, requer o domínio de códigos e símbolos cuja complexidade exige o domínio de uma técnica de uso normativo, assim como empregamos as regras de uso na gramática da linguagem natural.

A Tradução na Matemática nesta pesquisa, portanto, é uma espécie de tradução pelo sentido em que ora o sentido está totalmente associado ao texto que se lê de posse do uso da gramática da Língua Portuguesa, ou seja, uma **pseudotradução,** ora o sentido do que se lê ou do que se escreve está inteiramente ligado a um texto matemático. Minhas considerações acerca da tradução na Matemática, tendem, portanto, a não seguir a linha do método tradutório indicado por Gadamer (1999) que toma tradução e interpretação como atividades equivalentes. Corroboro nessa tese, portanto, com a ilação wittgensteiniana de que traduzir é um jogo de linguagem.

Passo desta forma a caracterizar de maneira não sistemática a tradução na Matemática como técnica inerente ao jogo de linguagem, assim como fez Silveira (2014), ao ressaltar que a interpretação de textos matemáticos requer o conhecimento do vocabulário matemático e que para isso, é necessário seguir regras na Matemática no intuito de elucidar e compreender seus conceitos. Esta afirmação abre espaço para a constituição de critérios conceituais que possam viabilizar a Tese da **Tradução Interna na Matemática** como técnica, cujo funcionamento é intrateórico. Esta proposição, no entanto, não prevê um total afastamento das relações com as Teorias da Tradução.

Concordo com o que foi dito por Silveira (2015), numa perspectiva docente, de que os alunos não interpretam necessariamente conceitos matemáticos a partir da sua enunciação na sala de aula. A palavra altura, por exemplo, identificada em Geometria pela letra “h” nos livros didáticos é posta no triângulo equilátero ou no triângulo retângulo como a projeção em relação à base da figura, que nem sempre está na horizontal. Assim, se a figura for rotacionada, a base muda de posição no plano, bem como a altura do triângulo. A palavra altura não tem o mesmo significado de altura das pessoas e de altura de um prédio, ainda que o conceito matemático de altura seja usado para estes exemplos por analogia. Os aprendizes apenas concordam com o que é dito pelo professor, a interpretação e a relação que eles fazem acerca de uma mesma palavra se dá prioritariamente com base no vocabulário da linguagem natural.

Os conceitos matemáticos não fazem parte do uso cotidiano dos alunos o quão fazem para os professores, seus jogos de linguagem são diferentes, os professores usam em suas aulas conceitos técnicos e científicos, os alunos usam palavras do seu linguajar natural. As palavras que os alunos usam frequentemente são oriundas de sua infância e foram aprendidas em contextos familiares, sociais ou culturais. Na Escola, uma mesma palavra passa a ser empregada com significados diferentes, o jogo de linguagem do ensino muda conforme outros conceitos vão sendo acrescidos ao vocabulário da linguagem natural. Os nossos jogos de linguagem não são estáticos, a própria noção de **jogo** empregada por Wittgenstein nas *Investigações Filosóficas* (2009) traz consigo esta relação.

Há palavras que são usadas tanto na linguagem natural quanto na linguagem matemática, é o caso da palavra **diferença**, que pode significar distinção ora pode significar o resultado da operação de subtração, mas os alunos confundem esta palavra, quando a pergunta é qual a diferença entre 17 e 10, eles podem dizer: é o sete e o zero, tem o 7 no primeiro número e tem zero no segundo. Assim, o contexto influencia na pergunta que o professor fez, com a intenção de obter como resposta o resultado de 17-10. Quando perguntamos que valor deve ser colocado no lugar de "x" na equação x+3=10 para tornar a igualdade verdadeira, os alunos que estão iniciando os estudos de Álgebra confundem letras com números, pois usavam anteriormente a letra "x" para escrever, por exemplo, a palavra xícara, e agora essa letra é uma incógnita com significado numérico numa equação.

Desta forma, a compreensão é de que mesmo sabendo pronunciar palavras e formar frases de posse do vocabulário da Língua Portuguesa ao fazer uso da linguagem matemática, esta condição não é mesma, pois, a gramática da Matemática não tem necessariamente os mesmos objetivos.

Conforme Silveira (2014), a linguagem matemática é codificada, corroboro com a hipótese da autora de que a linguagem matemática não é inata, ou seja, é uma linguagem técnica que foi inventada e ensinada.

Assim, por não dominarem a linguagem técnica da Matemática, tanto os alunos como alguns professores, passam a fazer adaptações e supõem que haja equivalentes linguísticos da linguagem natural que se assemelham a objetos matemáticos, que estão mais próximos de seu cotidiano. Esse é, por conseguinte, um jogo de linguagem que eles começam a usar desde a infância, quando as crianças são treinadas a repetir palavras por silabação. A partir daí, passam a formar frases até que a sua pronúncia seja feita corretamente e entre em consonância com a linguagem escrita, isso se dá incialmente em situações que vão do contexto familiar ao contexto da Escola, mas é nesta última, que seu aprendizado acerca da Matemática tende a se consolidar.

Nesta fase, os pais ou pessoas mais próximas agem como intérpretes, traduzindo sons, gestos e frases desconexas para a linguagem que já conhecemos. Esta é uma tradição social e familiar pela qual somos, de certa forma, treinados desde que nascemos e continuamos a aprender e a lidar com outras palavras no percurso da vida. As frases de nosso linguajar primitivo são lances que funcionam como uma espécie de **tradução**, esse é um jogo de linguagem que continua a ser evidenciado pelos professores nas escolas, em outros campos do conhecimento, na Física, o professor traduz equações do movimento retilíneo uniforme; na Química, faz-se o balanceamento de equações e a leitura de compostos orgânicos dos quais fazem parte os anéis de benzeno. É o professor quem traduz para os alunos o significado da fórmula química da água e da fórmula que calcula a área de um quadrado, dentre outros exemplos.

Wittgenstein (1989, p. 100) alerta: "toda explicação tem o seu fundamento no treino, os educadores deviam lembrar-se disso". A ênfase do autor acerca da frase "lembrar-se" reitera que desde cedo somos treinados a repetir e pronunciar palavras, identificar números e reconhecer figuras geométricas, estas atividades fazem parte dos jogos de ensino e de aprendizado da Matemática. Mais adiante, o *treino*[11] passa das palavras para o uso de símbolos e algoritmos, em que a técnica linguística aos poucos vai dando lugar a técnicas operatórias da Matemática, mas este é um jogo complexo, onde certos símbolos não têm significado imediato como na linguagem natural a exemplo de (∞, Ø, $\leftrightarrow$, Δ, $\|x\|$).

Nesse sentido, ressalto, que o vocabulário simbólico da matemática precisa ser traduzido, pois, estes signos não funcionam como fonemas, silabas ou palavras da Língua Portuguesa, este é o contexto de uma tradução específica (intra teórica) para o qual chamo atenção nessa pesquisa.

Silveira (2014) destaca alguns aspectos da tradução na passagem da linguagem matemática para a linguagem natural, no intuito de mostrar que a aprendizagem dos alunos sofre influências daquilo que é visto por eles, ou seja, estes signos e símbolos não são frequentes na leitura de textos como os signos da linguagem natural.

---

[11] A palavra Treino, para Wittgenstein, não tem o mesmo sentido que seu uso comum na linguagem natural. Faço esta ressalva porque algumas correntes teóricas da Pedagogia sentem verdadeira apatia quando se refere a treino, pois imediatamente, remetem-na à Escola Tecnicista em função da abordagem mecânica do ensino e da aprendizagem. Nesse sentido, esclarecer-se-á, para todos os efeitos, que treino para Wittgenstein é uma asserção ao seguimento de regras na linguagem, que está presente nas primeiras falas da criança. É nesta fase que se manifesta o jogo de imitação em que a pronúncia não condiz com o som e a escrita formal da palavra. Então, antes mesmo de ir à escola, os pais, familiares e amigos intervém com o jogo de palavras da correção. Correção significa ensinar o uso do correto das palavras (pronúncia). Logo, enfatiza-se que treino, para Wittgenstein, não é uma norma, mas uma aplicação, ou seja, a linguagem é um instrumento pelo qual aprendemos a falar, e inicialmente isso se dá pelo treino. É assim, portanto, que se aprende tabuada, e tão logo as operações de multiplicação se consolidam, os princípios operatórios são automatizados. Não mais se precisa fazer uso constante da tabuada, ela passa a ser memorizada. Treinar, para Wittgenstein, é apenas um lance no jogo de linguagem, não é uma imposição a ser seguida como estratégia de ensino e de aprendizagem na Educação. O sentido de aplicação da palavra treino tem na filosofia de Wittgenstein, portanto, uma característica diferente daquela empregada no Construtivismo, utilizada para destacar situações pejorativas na área educativa.

> [...] a tradução de textos matemáticos para a linguagem natural, no ensino e na aprendizagem da matemática, é afetada pelo campo visual do estudante, ou seja, a forma que ele interpreta aquilo que está ao alcance de seu olhar. No entanto, aquilo que ele pode ver, muitas vezes, não captura os resíduos do texto, bem como, não permite que perceba os diferentes contextos de aplicação de uma regra matemática e neste sentido, induzindo a criar novas regras (SILVEIRA, 2014, p. 50).

Silveira (2014) afirma que os alunos não conseguem compreender certos conceitos matemáticos atrelados à regras e normatividades presentes na linguagem matemática. Isso se deve, em função do rigor simbólico e economia de palavras e pela inserção de palavras do vocabulário matemático que não se encontram de modo correlato na Língua Portuguesa. A inserção de simbologias e notações que não fazem parte da linguagem natural dos alunos, é para eles algo estranho (soa como), ou seja, diferente, pois eles não estão acostumados a lidar com símbolos e caracteres provenientes da linguagem técnica da matemática. Por desconhecerem os **significados** dos símbolos apresentados pelos professores a cada novo assunto abordado, os alunos sentem dificuldades em adequar terminologias específicas da Matemática ao seu vocabulário.

Nesse contexto, os conceitos matemáticos podem não fazer sentido para os alunos quando aplicados na solução de problemas, pois eles buscam ligações com a realidade. Assim, o uso de fórmulas matemáticas, como a expressão $n(AUB)=n(A)+n(B) - n(A \cap B)$, pode não ter sentido se for lida literalmente como se faz com os textos da linguagem natural. Dificilmente seu conteúdo será interpretado pelos alunos, haja vista que não há nesta fórmula nenhuma palavra conhecida da Língua Portuguesa, ainda que ela seja composta com letras do alfabeto. E mais, é preciso explicar o significado dos símbolos (**n**, **A**, **B**, **U**, ∩) na Teoria dos Conjuntos, que não possuem os mesmos códigos estabelecidos pela linguagem natural. Aquela fórmula ou expressão matemática precisa passar por uma espécie de tradução da linguagem matemática para a linguagem natural e a equação que nela reside, segue uma regra de aplicação que não é usual como as tradicionais operações aritméticas, cujos sentidos correlatos podem se aplicar ao pagamento de uma passagem de ônibus ou comprar e receber mercadorias em uma loja de departamentos.

Cumpre destacar, portanto, que há no contexto da literatura no que tange à Educação Matemática, diferentes níveis de textos matemáticos em circulação, que vão dos livros didáticos aos livros técnicos, bem como os textos produzidos em publicações científicas oriundas da pós-graduação, cuja divulgação se dá em eventos e congressos nacionais e internacionais. Nesse sentido, com base em minhas experiências e memórias docentes, elenco a seguir alguns exemplos usuais da linguagem matemática no ensino, a saber:

- Palavras que possuem uso tanto na linguagem matemática quanto na linguagem natural: altura, base, lado, igualdade, diferença, maior, união, derivada, integral, limites... Reitero que na Matemática, os significados destas palavras devem ser entendidos intrateoricamente, ou seja, para evitar situações em que o emprego da palavra *triângulo*, possa ser entendido como o ícone usado no trânsito para indicar dê a preferência, ou como instrumento musical;
- Palavras ou frases que possuem significados meramente intrateóricos usadas no contexto específico da Matemática e das Ciências Exatas: teorema, corolário, cevianas, assíntota, conjunto infinito, fatorial, nilpotente, trigonometria, equipolente, cossecante, diâmetro, googolplex, hexadecimal, função sobrejetora, gradiente rotacional, projeção ortogonal, dentre outras;
- Operações, sinais, terminologias e simbologias usadas na Aritmética, Álgebra, Geometria, Lógica, Teoria dos Conjuntos Matemática Financeira: $2+2=4$; $15 \geq 9$; $3 \neq 8$; 5% ; $p \rightarrow q$; $A \cap B$; Ø, φ, ∞; ∫, d(x);
- Notações, Expressões Algébricas, Polinômios, Equações, Fórmulas e Regras a exemplo de: f(x); Im; $a^3+2b-3c$; $3x+5=20$; $S=bxh$; $\Delta=b^2-4.a.c$; $f(x)= x^2-3x+4$; $x^2=2py$; $sen^2(x)+cos^2(x)=1$; $lim_{x\rightarrow\infty}$ $(1/n)$; $\sum_{0}^{5} 2n, n \in N$; $A=(aij)_{(2x2)}$ onde, $aij=2i+j$.

Assim como nestes exemplos, há inúmeras possibilidades de que outras expressões e notações se entrelacem com a linguagem natural, para dar sentido a textos matemáticos que fazem parte do contexto escolar. Por outro lado, algumas das notações simbólicas mencionadas no parágrafo anterior, não fazem parte do vocabulário e do linguajar natural dos alunos (ROJANO, 1994). Segundo este autor, em função desta distinção vocabular, eles não conseguem realizar uma leitura plena dos textos matemáticos, ou seja, há simbologias que eles não conhecem e não conseguem interpretar, como as notações *string*[12] na Matemática. E mais: há gráficos, diagramas e tabelas que precisam do olhar técnico e profissional do professor para serem traduzidas no intuito de auxiliar os alunos na compreensão de conceitos e regras matemáticas.

Diante de simbologias específicas como as usadas na definição da Função Quadrática: $f\left(x\right)= ax^2+bx+c,\ onde\ a,\ b\ e\ c \in R, com\ a \neq 0$, é que o professor faz a passagem da

[12] Tipos de notações mais específicas ou formais como as que são usadas em textos matemáticos, a saber *f(x), cos(x), log(x),* bem como os quantificadores universais ou existenciais, que requerem o uso de símbolos, letras, palavras e conectivos lógicos usados, por exemplo, em definições e teoremas.

linguagem matemática para a linguagem natural (SILVEIRA, 2015), no entanto, este tipo de leitura implica na compreensão do conceito de Função Quadrática, que está por trás da definição formal, pois, a leitura matemática do texto não equivale à leitura e à interpretação feita mediante as normas da gramática da linguagem natural. Esta passagem não é equivalente como a troca de uma palavra por outra (sinônimo) na Língua Portuguesa, a linguagem matemática possui caráter formal, o sentido que se quer mostrar e os significados dos caracteres envolvidos é intrínseco à Matemática.

Farei aqui uma distinção entre as palavras **conceito** e **definição** na Matemática tomando como exemplo o tópico função discutido por Iezzi e Murakami (1977), eles partem do conceito de *relação matemática* usando conjuntos numéricos e representação em diagramas de Euler-Venn para chegar à conclusão de que uma função é uma relação, conforme o excerto a seguir.

> Vamos considerar por exemplo os seguintes conjuntos, A={0,1,2,3}, B={-1,0,1,2,3} se a seguintes relações binárias: T={(x,y) ϵ A X B / y=x}; V={(x,y) ϵ A X B / (x-1)² - 1; W={(x,y) ϵ A X B / y=2. Analisando cada uma das relações, temos: as relações T, V e W apresentam a particularidade "para todo x ϵ A existe um só y ϵ B, tal que (x,y) pertence a relação", recebem o nome de aplicação de A em B ou função definida em A com imagens em B. Definição: "dados dois conjuntos A e B (no campo dos números reais não vazios), uma relação de A em B recebe o nome de aplicação de A em B ou função definida em A com imagens em B se, e somente se, para todo x ϵ A existe um só y ϵ B tal que (x,) ϵ f .
> $$f \text{ é aplicação de } A \text{ em } B \Leftrightarrow (\forall x \in A \exists | \, y \in B \,/\, (x, y) \in f)$$
> (IEZZI; MURAKAMI, 1977, p.73-A,74-A).

O trecho supracitado mostra que os autores diferenciam *conceito* e *definição* na Matemática o que faz sentido, uma vez que se preza pelo rigor da linguagem matemática acerca de notações científicas. Na mesma direção, há também distinções entre o conceito de triângulo e a definição de triângulo. Assim, aqueles aprendizes que têm conhecimento mínimo de Geometria, tomando como base o que lhes foi ensinado desde a educação infantil, aceitam tranquilamente que triângulo seja um polígono de três lados (conceito), mas para o professor de Matemática é mais propício dizer que triângulo é um polígono regular de três lados cuja soma dos ângulos internos é 180º (na Geometria Plana, haja vista a existência das geometrias esférica e hiperbólica).

Considero que a gramática da linguagem matemática não é de simples entendimento para os alunos, eles não conseguem captar de imediato, de um só golpe o conceito que está por trás, por exemplo, da sintaxe e da simbologia do somatório $\sum_{i=0}^{5} 2n$, onde *n* pertence aos números naturais, se antes não lhes foi apresentado os significados simbólicos que dão sentido a este tipo de notação. Aqui se mostra o que chamo de jogo de linguagem da tradução, específico da linguagem matemática, ou seja, um jogo tradutório que decodifica símbolos e notações. Se a leitura desta expressão é feita usando os recursos da linguagem formal e abreviada da Matemática, posso afirmar que se trata de uma soma finita. Porém, esta é uma linguagem técnica que dificilmente os alunos conseguem acompanhar, requer conhecimento matemático mais sofisticado que os encontrados nas ilustrações de objetos do cotidiano, comuns em livros didáticos. Assim, as simbologias específicas que não são comuns na linguagem natural, como a notação simbólica do somatório, precisa ser decodificada, ou seja, é preciso fazer a passagem da linguagem matemática para a linguagem natural.

Afirmo que se os conceitos e simbologias específicos da Matemática podem ser traduzidos pelos professores de modo elucidativo, assim, minimizam-se os efeitos residuais formais da linguagem matemática, a partir do momento que se mostra como estes jogos de linguagem funcionam no contexto da Geometria e da Álgebra.

O Mestre de Viena então exclama no aforismo 66 das *Investigações Filosóficas* (2009): “não pense, veja”! O filósofo adverte, com esta frase, que se você quer saber como se joga, jogue o jogo, se quer aprender a nadar, nade; só se aprende a correr correndo. Tais exemplos descritivos se dão no sentido de mostrar que as palavras ganham vida no ato em que estão em curso, caso contrário, os significados se esvaem.

É assim que no contexto da Linguagem há condições de sentido que levam à compreensão de conceitos e definições na Matemática, parte dessa Tese consiste em afirmar que notações, como $\sum_{i=0}^{5} 2n$, podem ser traduzidas internamente na Matemática.

Essa atividade tradutória visa ao ensino da Matemática e o aprendizado de seus conceitos, cabe daqui por diante definir como se dará este tipo de tradução. Para tanto, farei uso das expressões jogo de linguagem e **ver como** de Wittgenstein, que serão tomadas como técnicas de uso linguístico na Educação Matemática.

Este é um passo considerado complexo, não pretendo dar cabo dos significados e dos sentidos das palavras e de seus empregos na Matemática, mas **ver como** (analisar) de que maneira as conexões repousam nos fundamentos dos conceitos para compreendê-los com mais detalhes. Se no método terapêutico de Wittgenstein, conforme assinalou Spaniol (1989), ele buscava uma cura para os problemas filosóficos, com o objetivo de nos livrar dos enfeitiçamentos da Linguagem, esta pesquisa almeja tratar o pensamento viciado na Educação, que tem como causa as ânsias de generalidade docentes enraizadas na cognição.

O termo **tratar** é análogo a esclarecer, dar sentido a conceitos que na Matemática parecem ser, por demasia, abstratos. A abstração parece ser sempre um empecilho à compreensão de um conceito. A investida, portanto, ampara-se nos usos da linguagem para que se possa escapar dos labirintos e das armadilhas da abstração, quase sempre imputada ao pensamento formal na Educação.

Wittgenstein (2009) afirma que se há problemas filosóficos, estes não são coletivos, mas individuais e se manifestam quando a Linguagem está em ponto morto ou entra constantemente de férias. No ensino de Matemática, este tipo de dieta unilateral pode trazer implicações à compreensão de conceitos pelos alunos, caso a busca pelo significado das palavras, venha a amparar-se nos modelos educacionais utilitaristas.

Iezzi; Murakami (1977) assinalam que a definição de função vem do conceito de função, assim, há conceitos e definições que funcionam na Matemática por convenções, pois partem de uma axiomática intrateórica, este tipo de exemplo difere daqueles usados ostensivamente para associar objetos da realidade, ou seja, uma bola de futebol parece com uma esfera, um chapéu de palhaço parece com um cone. Há nestas duas situações, o uso de linguagens diferentes, a linguagem natural é usada como referência no sentido agostiniano ou platônico, para associar a imagem de objetos reais à Matemática.

Por outro lado, a linguagem matemática é usada para caracterizar objetos que nascem no contexto da Matemática, como é o caso das funções. É neste sentido, visado aqui, da linguagem matemática à luz da filosofia wittgensteiniana, que se pretende enfatizar que é no funcionamento da linguagem que um conceito ou definição tem significado.

Tradução e Matemática é o que fazem os tradutores não especialistas em Matemática, análogo ao que fazem os tradutores linguistas ao traduzir palavra de uma língua para outra, que conhecem pelo menos dois idiomas, por outro lado, não dominam a linguagem matemática.

O trabalho do tradutor especialista versus não especialista, da estética e da beleza nas demonstrações matemáticas é abordada por Galelli (2012). O professor Paulo Oliveira, da Unicamp, na ocasião do I Seminário Nacional de Linguagem e Educação Matemática (SENALEM) realizado na UFPA em 2016, proferiu uma palestra e levantou a seguinte provocação sobre a tradução: há diferenças entre traduzir a Matemática e traduzir na Matemática? Paulo Oliveira publicou em anos anteriores pelo menos três artigos que tratam de tradução para públicos diferenciados, com temáticas dirigidas tanto para especialistas em tradução quanto para educadores, inclusive sobre a Filosofia de Wittgenstein (OLIVEIRA, 2013).

Oliveira (2016) destacou em sua palestra algumas características da linguagem matemática à luz da tradução, na qual sugere que olhemos para o significado das seguintes expressões (adaptadas aqui), de forma ilustrativa sem a perda de sentido, a saber: $E=M.C^2$; $2x+1=10$; $sen^2(x)+cos(x)^2=1$ e $a^2+b^2=c^2$. Em seguida, Oliveira faz os seguintes questionamentos, qual o significado (tradução) destas igualdades no contexto das ciências exatas? Podemos tomar estas questões como tradução na ou (da) Matemática como igualdades, se todas tratam de situações diferentes? O sentido das perguntas elaboradas pelo autor foi levantar a hipótese de que a **Matemática como linguagem** possui intrateoricamente uma polissemia, assim como as demais linguagens.

Diante do exposto, se a tradução for tomada no aspecto de que as igualdades ou identidades matemáticas podem funcionar de modo equivalente, conforme mencionou Oliveira (2016), concordo que haja polissemia na linguagem matemática. Por outro lado, é justamente a característica não polissêmica da Matemática que a torna uma linguagem universal no contexto da ciência, mas, advirto, este é um assunto que precisa ainda ser debatido com mais profundidade.

Gonçalves (2011) é adepto da tradução literal de textos matemáticos. Para o autor, é desta forma que se preserva tanto o contexto da tradução quanto o teor matemático de escritas em documentos milenares, aspectos culturais e sociais, a exemplo dos papiros e tabletes de argila da Mesopotâmia (atualmente, o Iraque).

Ora, há diferentes aspectos da tradução discutidos conforme o objeto preterido pelos autores, o intuito aqui é dar visibilidade à linguagem matemática na perspectiva do jogo de linguagem wittgensteiniano.

A tradução no ensino da Matemática tem maior proximidade com o Jogo de Linguagem de traduzir, ou seja, é também, uma técnica, portanto, uma atividade matemática. Diferencio, portanto, **tradução da Matemática** de **tradução na Matemática**, uma vez que a primeira se pauta em dar sentido a conceitos matemáticos aplicados noutras ciências, a exemplo da Física e da Química. Já a segunda, procura dar significado ou traduzir conceitos e definições no contexto da própria Matemática e fazer conexões com a linguagem natural, não obstante, esta noção se aplica também à outras ciências.

Logo, é importante esclarecer o que significam, por exemplo, letras, expressões e simbologias da Matemática, com base numa tradução interna. Hebeche (2016) atribui à filosofia a condição de *sub especie gramaticae* ao analisar vários aspectos da obra de Wittgenstein. Pretendo tirar proveito da analogia feita por Hebeche (2016), no intuito de estabelecer, nessa direção, um significado para a Tradução na Matemática. Quiçá, a abordagem que proponho aqui, possa levar a uma terminologia que permita constituir a Tradução na Matemática como atividade intrínseca à linguagem matemática, consequentemente, ao ensino da Matemática.

Nas Matemáticas pura e aplicada, os professores do ensino superior, por exemplo, parecem não estar preocupados como este aspecto, pois, tomam a linguagem científica como algo elementar naquele contexto. Conteúdo e forma na Matemática do Ensino Superior não são abordados da mesma maneira que a Matemática da educação básica. Enquanto na primeira, o discurso dos professores se apega às necessidades de justificativas causais ou fenomenológicas acerca do objeto matemático, na outra, o objeto matemático é um ente abstrato por natureza.

Obviamente, a Matemática da Educação Básica tem proposta pedagógica diferente da Matemática dos cursos superiores que lidam com a linguagem Matemática pura, em que as definições são meramente formais e não precisam estar necessariamente atreladas ao contexto empírico. Por se ter clareza de que as discussões acerca da linguagem matemática se dão, principalmente, no contexto das pós-graduações, é que busco com esta pesquisa aproximar diferentes níveis de ensino. Para tanto, adentro nos domínios da Álgebra e da Geometria para discutir e fazer análises sobre diferentes tópicos voltados ao ensino, a da função trigonométrica expressa por $f(x)=senx$, que possui na linguagem da Geometria uma representação imagética (gráfico), chamada curva senóide.

Já as curvas de equação é $x^2=2py$ e $y^2=2px$, da Geometria Analítica, tem como gráfico parábolas, associadas ao estudo das cônicas (MELO, 2015) e estes são alguns dos conceitos matemáticos a serem discutidos aqui, na perspectiva da Tradução na Matemática. Não é minha intenção discutir reformulações ou mesmo refutar conceitos matemáticos do ponto de vista epistemológico, esta é uma tarefa que cabe aos matemáticos puros. Por outro lado, me furto de emitir opiniões técnicas de natureza docente, cujos argumentos e experiências que desenvolvi na Educação apontam para o ensino da Matemática na perspectiva da linguagem à luz das discussões wittgensteinianas.

Observei que certas palavras do vocabulário matemático não possuem um equivalente direto na linguagem natural, a exemplo da palavra **assíntota**, este significado precisa ser ensinado e esclarecido pelos professores, ou seja, precisa ser traduzido de uma linguagem para outra. A palavra assíntota, pertence aos domínios da Matemática e foi cunhada por uma necessidade científica e não por uma necessidade circunstancial voltada à realidade cotidiana.

Caveing (2004) assinala que há invenções que justificam o automovimento da Matemática, ou seja, após a invenção do conjunto dos números naturais, teoricamente outros conjuntos foram inventados para responder perguntas que extrapolavam o contexto epistemológico das operações em **N**. É por esse motivo que o resultado da operação 5 – 7 = –

2, pertence ao conjunto dos números inteiros, posteriormente, outros conjuntos numéricos foram inventados. Esta é uma necessidade que nasce no interior da Matemática como ciência, é parte do desenvolvimento histórico dela ao longo dos tempos.

Cumpre destacar que reconheço a prevalência e a importância da linguagem natural em nossa forma de comunicação, e o fato de que, na realidade as palavras quase sempre são empregadas com significado polissêmico, mas, na Matemática, a linguagem formal tenta eliminar tais confusões e ambiguidades, por isso, a linguagem objetiva da Matemática, é técnica e normativa.

Esta peculiaridade, no entanto, traz consigo implicações de ordem interpretativa na Educação. É nesse ínterim que reconheço a importância de que os signos e códigos da linguagem matemática precisam ser decodificados para que possam estar acessíveis à compreensão dos alunos, mas, ainda assim, persistem os resíduos da linguagem formal, conforme Granger (1974), é por conta destes resíduos que os alunos e alguns professores ainda não conseguem compreender, ou seja, traduzir conceitos da linguagem matemática.

Rojano (1994), ao citar Freudenthal, reitera que as crianças cometem erros de sintaxe ao lidar com expressões matemáticas, e toma como exemplo a confusão que os alunos fazem entre os termos a^2+b^2 e $(a+b)^2$, isso se deve em função de que a Álgebra simbólica possui usos restritos às aulas de Matemática, ou seja, as suas aplicabilidades se justificam no contexto daquela aula, não há justificativa para estes objetos no linguajar usado no contexto familiar ou social. Estas diferenças de sintaxe implicam no aprendizado da linguagem matemática, que se distingue gramaticalmente da linguagem natural.

Os significados de alguns símbolos matemáticos, a exemplo do "*h*" usado para indicar altura de um triângulo; "*x*" para representar a incógnita em uma equação e o traço inclinado "/" (tal que), não possuem o mesmo emprego na linguagem natural. As notações específicas da Matemática, como no estudo de funções, trigonometria e matrizes, são consideradas difíceis de serem ensinadas e de serem aprendidas na Educação.

Os professores, principalmente da educação básica, reforçam constantemente este discurso, que aparece também em documentos do MEC, como as OCEM (BRASIL, 2006). Se o discurso parte dos professores, os alunos o tomam para si na mesma medida, pois confiam na palavra dos professores, desta forma, eles passam a não ver sentido em estudar algo que não lhes é familiar, ou seja, que não lhes é útil e prático.

Não obstante, esta falta de clareza ocorre entre professores e alunos, porque seus parâmetros de comparação estão associados quase sempre ao jogo de linguagem do utilitarismo em maior ou menor proporção. Para Wittgenstein (1998), se os alunos buscam respostas para suas observações com base apenas em pensamentos indutivos, os professores podem começar a pensar que a demora na formulação de um bom argumento se deve ao fato de que eles estão ali parados tentando imaginar descobrir como proceder.

> Seria como se alguém estivesse procurando um objeto num quarto; abre uma gaveta e não o vê ali; depois fecha-a, espera e abre-a mais uma vez para ver se por acaso não está lá agora, e continua assim. Não aprendeu a procurar coisas. E, do mesmo modo, *o aluno não aprendeu a fazer perguntas. Não aprendeu o jogo que queremos ensinar-lhe* (WITTGENSTEIN, 1998, § 315, itálico nosso).

Conforme essa passagem, procuro mostrar que o professor pode ensinar as regras do jogo para que não haja confusões para quem dele participa, o jogo da descoberta e da imaginação não é simples. Parece redundante afirmar que o professor pode (quando o mais apropriado seria deve) ensinar, mas na perspectiva do Construtivismo, o professor não mais ensina, ele apenas media os conhecimentos. Os alunos é quem constroem o seu aprendizado. Na perspectiva da Linguagem, em Wittgenstein, ressalto, o professor tem papel primordial e o ensino é imperativo, esta é uma característica inarredável de sua função.

Ora, qualquer pessoa pode entrar num jogo sem saber ou conhecer suas regras e tentar durante a partida aprendê-las. Por outro lado, faz diferença entrar no jogo e estar ciente do que você pode ou não pode fazer. Na Matemática, as regras enunciadas precisam ser seguidas, o jogo da improvisação e da dúvida não funciona, pois não se trata de uma brincadeira ou descontração, é o jogo do aprendizado que está em curso. É o professor quem orienta e coordena as ações, caso contrário, os alunos podem começar a pensar que a liberdade para sua autossuficiência no aprendizado se baseia em seguir qualquer regra, mas na Educação a regra não é essa.

O jogo de linguagem da Matemática ampara-se nas convenções, ele não se revela a cada lance da jogada por meio de uma regra (espontânea), a jogada válida segue conforme o que foi estabelecido, não se trata de querer procurar por algo que está lá dentro do cérebro ou no jogo de adivinhação da imaginação, consiste em observar como o jogo de linguagem funciona e participar de sua **forma de vida**.

Moreno (1995) destacou que imagens são conceitos. Esta ilação será de fundamental importância nessa pesquisa. Assinalo, portanto, que no ensino da Matemática algumas palavras ou conceitos são quase que imediatamente associados a **imagens**, por exemplo, quando pronunciamos a palavra triângulo para uma pessoa que já teve contato com esta forma geométrica, é pouco provável que o interlocutor pense de imediato no conceito dele, e é mais provável que pense na imagem da figura, porém, a situação muda de sentido quando for lhe perguntado, o que é triângulo?

Procuro mostrar, como disse Wittgenstein em *Zettel* (1989*)*, que traduzir de uma língua para outra é como um exercício matemático, assim como a tradução de um poema literário de uma língua para outra pode assemelhar-se a um problema matemático.

Este é um jogo de linguagem que faz parte da forma de vida dos professores, para jogá-lo é preciso conhecer profundamente a gramática da Matemática (regras) que fazem com que a partida comece e termine de forma correta. Por isso, conhecer e compreender a linguagem matemática é fundamental para entender os conceitos da Matemática, é importante que os professores observem (reflitam) que estes fundamentos não podem ser substituídos de forma arbitrária.

Na Teoria dos Conjuntos, $A\Delta B = \{x / x \in A - B \vee x \in B - A\} = (A - B) \cup (B - A)$ é a fórmula da diferença simétrica entre dois conjuntos não vazios A e B. Conforme Silveira (2008), os alunos apresentam dificuldades em compreender conceitos devido a problemas na interpretação e compreensão de enunciados simbólicos da Matemática. Se for feita a leitura literal do que consta simbolicamente naquela expressão, observa-se que a linguagem usada não faz parte do jogo de linguagem que os aprendizes usam naturalmente. As regras do jogo de leitura e interpretação da fórmula que visa à operação de diferença simétrica entre dois conjuntos é restrita aos domínios da linguagem matemática.

Assim, enquanto Silveira (2014) aponta para a tradução de textos matemáticos da linguagem matemática para a linguagem natural, nessa pesquisa, faço uso do *software GeoGebra* como ferramenta que auxilia na tradução de textos na matemáticos. Compartilho algumas reflexões na mesma direção de Silveira, por outro lado, as análises que fiz centram-se na sintaxe algébrico-geométrica presente na constituição conceitos matemáticos. As discussões iniciais sobre esses aspectos têm como origem os cursos de formação para professores formadores que lidam com tecnologias informáticas na Secretaria de Educação do Estado do Pará (SEDUC-PA) entre os anos de 2014 e 2015, no Núcleo de Tecnologia Educacional (NTE).

Observei que a escrita de conceitos e definições no estudo de funções com auxílio do computador (software *GeoGebra*, por exemplo) não possui a mesma sintaxe da forma escrita que usamos no quadro de escrever. No software, há comandos em linguagem LaTex[13], enquanto

[13] A linguagem LaTex foi desenvolvida no século XX por Leslie Lamport, a partir do programa TEX criado por Donald Knuth. É um conjunto de macros para escrita e diagramação de textos matemáticos e científicos, incorporada ao *GeoGebra* para facilitar a escrita de simbologias e caracteres nos softwares.

na sala de aula fazemos usos de notações *string* (envolvem o uso de simbologias específicas para identificar funções dadas por ***f(x)*** ou de simbologias da Teoria dos Conjuntos e no estudo do cálculo, como as notações de limite (***lim***) e derivadas (***dx***). Ao analisar estas distinções, percebi que tais diferenças podem trazer implicações de ordem conceitual no ensino da Matemática.

Isto posto, cabe a seguinte indagação: como se faz a leitura e interpretação de uma função genérica qualquer, a partir de sua forma gráfica ou de sua lei de formação em linguagem matemática? Do ponto de vista docente, reitero que ensinar Matemática com o *GeoGebra* permite explorar a sintaxe da linguagem matemática usando recursos da informática.

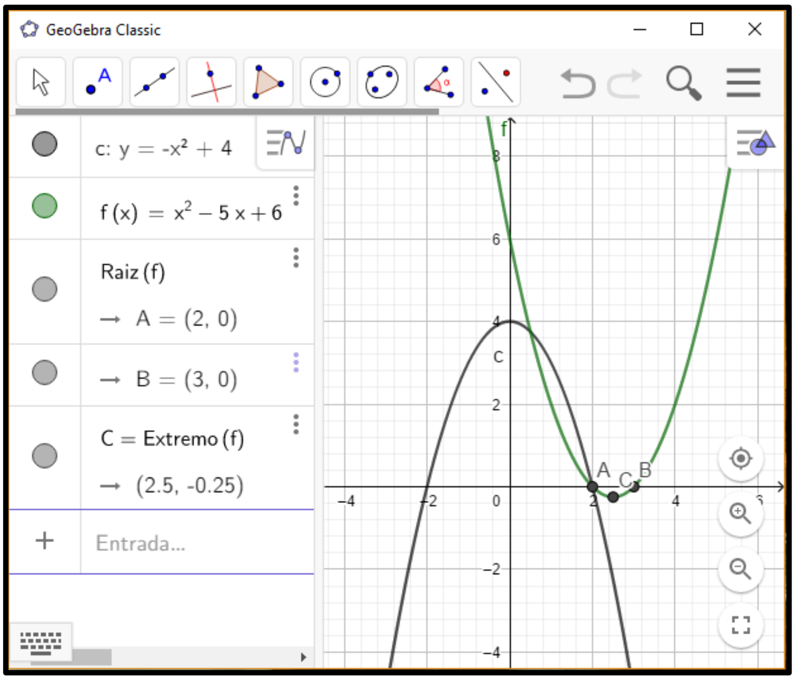
Esta pesquisa aponta para questões de natureza linguística no ensino da Matemática, pois, ao ensinar como os conceitos matemáticos se constituem, os professores podem posteriormente, escolher quaisquer métodos ou recursos para auxiliar suas atividades escolares. Não se trata de usar o software *GeoGebra* no ensino por meio de uma prescrição metodológica a exemplo da perspectiva construcionista[14], que preserva em seus estudos caracteres do desenvolvimento psicológico mediado pela interatividade sujeito-máquina na aprendizagem.

Abordo a natureza conceitual dos objetos matemáticos por meio da linguagem numa perspectiva epistêmica e intrateórica. O meu interesse pelas imagens e gráficos na Matemática se deve em função das dificuldades que os alunos sentem em compreendê-los, pois, estas imagens no fundo remetem a conceitos que nem sempre podem estar associados à realidade. Na figura 3, é possível visualizar objetos matemáticos com leis de formações distintas (escrita algébrica das funções ou notações *string* como se queira) acerca das formas semelhantes envolvendo curvas parabólicas.

---

14 O Construcionismo é uma teoria ligada à inovação pedagógica no âmbito da Informática Educativa. As atividades educacionais deste modelo se pautam no uso de ferramentas computacionais, a exemplo da linguagem LOGO de programação (usada na aprendizagem de crianças) nos anos finais da década de 1960, que ganhou destaque na década de 1980, conforme o que foi proposto pelo matemático Seymour Papert no século XX. O Construcionismo foi influenciado pelas Teorias de Piaget, Vygotsky, Dewey e Paulo Freire aplicadas à Educação. Para saber mais, ver o livro *A Máquina das Crianças: repensando a escola na era da informática*, traduzido e publicado pela Editora Artmed em 2008.

Figura 3 – Parábolas



Fonte: elaboração do Autor (2018)

Assim, ao escrever no campo de entrada do *GeoGebra* a função $f(x)= x^2–5x+6$, o *software* gera o gráfico (curva parabólica com a concavidade voltada para cima) que está exibida na sua janela de visualização identificada pela letra ***f***. Observa-se ainda que na mesma figura, há outra curva parabólica com concavidade oposta à da função ***f***. Na janela de álgebra (lado esquerdo da figura acima), esta curva é indicada por $\boldsymbol{c{:}y = –x^2+4}$, cuja notação representa uma cônica associada ao estudo da Geometria Analítica. Portanto, são objetos matemáticos diferentes por definição, mas semelhantes, na forma.

Tais observações não são simples para os alunos e nem para os professores. Usar os recursos do computador requer atenção que não é necessariamente de natureza metodológica, mas da linguagem matemática. Este estudo envolve fundamentos que precisam ser esclarecidos aos usuários deste tipo de tecnologia. Cumpre destacar que o uso do software aqui não tem como objetivo exclusivo a construção de gráficos, mas para mostrar a relevância de conhecer a linguagem algébrica que dá origem aos gráficos na Geometria. Esta é, portanto, uma aplicação do **jogo de linguagem** wittgensteiniano no ensino da Matemática e que tem como propósito evidenciar a Tradução Interna na Matemática.

Wittgenstein (2009) usa a expressão **semelhanças de família**, para destacar palavras que possuem certa afinidade entre si, como se certas características fossem herdadas por graus de parentesco. Trazendo esta expressão para o contexto da Educação Matemática em situações de ensino, pude concluir que a partir da forma geral da Função Quadrática $f(x)=ax^2+bx+c$ ou da equação $x^2=2py$ da Geometria Analítica, obtêm-se diversos objetos matemáticos, portanto, famílias de funções ou famílias de cônicas. De pose destas observações, elaborei a seguinte afirmação: "a função quadrática tem como gráfico uma curva parabólica, mas, nem toda curva parabólica é proveniente de uma função quadrática". Esta afirmação possui, a meu ver, observações técnicas de cunho epistemológico no campo da Educação Matemática. Nesse sentido, considero que a perspectiva da tradução na Matemática engendra ilações no campo educacional, pautadas em argumentos da Matemática como Ciência.

Watanabe e Galvão (2011) discutem uma situação semelhante ao que foi mencionado anteriormente na figura 3, sobre aspectos imagéticos provenientes da linguagem matemática na interface de softwares. Os autores chamam atenção para a solução geométrica da equação $x^2-7x+10=0$, que não teria como gráfico uma parábola no plano cartesiano, mas, *um par de retas paralelas verticais.* Em resposta a este conflito, foi esclarecido pelos autores que podem ocorrer conjuntos distintos de pontos no plano, o que leva a representações gráficas também distintas no plano. Nesta análise, os conjuntos considerados foram: $A=\{(x, y) \mid y=x^2-7x+10\} \subset R \times R$ *e* $B=\{(x, y) \mid 0=x^2-7x+10\} \subset R \times R$. Esta situação reforça a afirmação feita no parágrafo anterior acerca da constituição de objetos matemáticos provenientes de conceitos algébrico-geométricos.

Adotar, portanto, no ensino as normatividades e aspectos formais da linguagem matemática, é análogo a seguir regras da gramática da linguagem natural, ressalvando as peculiaridades internas de suas gramáticas. Nessas duas linguagens, há um propósito comum, tanto a sintaxe quanto a gramática que as governa devem ser preservadas para garantir não só o aprendizado de conceitos, mas também a produção de conhecimentos, usos e aplicações na Educação.

Traduzir na Matemática, passa por **critérios** que tratam de conceitos e definições matemáticas internamente. Este tipo de atividade não é uma atividade para alunos, é uma técnica de ensino para professores com ênfase na linguagem matemática. Estas atividades podem futuramente, ser destinadas ao aprendizado da Matemática na educação básica. Vale ressaltar, conforme o que assinalou Granger (1994, p. 51), "que toda ciência se produz numa linguagem, ou seja, mais geralmente num sistema simbólico", de modo análogo, o sistema simbólico nesta pesquisa, refere-se à linguagem matemática no ensino da Matemática.

Notas sobre a tradução interna

O caminho percorrido até aqui, engendra a elaboração de alguns critérios para uma Tradução Interna na Matemática. Esta não é uma condição necessária, mas suficiente, no que diz respeito à perspectiva do jogo de linguagem wittgensteiniano. Permito-me, então, afirmar que é um jogo de explicação, que pode ser visto à esteira do pensamento de Wittgenstein (2009) como um **jogo de linguagem preparatório** para a compreensão de conceitos matemáticos mais complexos.

Tais critérios têm como objetivo nesta pesquisa estabelecer conexões entre a tradução de palavras da linguagem matemática para a linguagem natural, por isso, o intuito de formular tais critérios, justifica-se, a meu ver, como um quadro de referência ou condição de possibilidade a exemplo do que foi exposto por Oliveira (2013), acerca da tradução para a compreensão de conceitos na Matemática.

Com elaborar critérios para uma **Tradução Interna na Matemática,** pautados no jogo de linguagem wittgensteiniano? As respostas encontram-se nos exemplos, contraexemplos, sugestões e aplicações evidenciados ao longo desta pesquisa. Não há necessariamente uma lista que descreva critérios, como regras de funcionamento do jogo de linguagem da Matemática. Considero que estes critérios não se encontram finalizados, estão nos movimentos de pensamento que visam elucidar como as peças do jogo de linguagem da tradução, se juntam ao jogo de imagens na Matemática, espero que esta conexão possibilite a quem fizer **uso** da tradução interna, reconhecer formas de vida e semelhanças de família, que se destinam a saber como se constituem os conceitos na Matemática, ao compreender como se dá essa constituição, se compreende como é possível aplicá-la no ensino da Matemática.

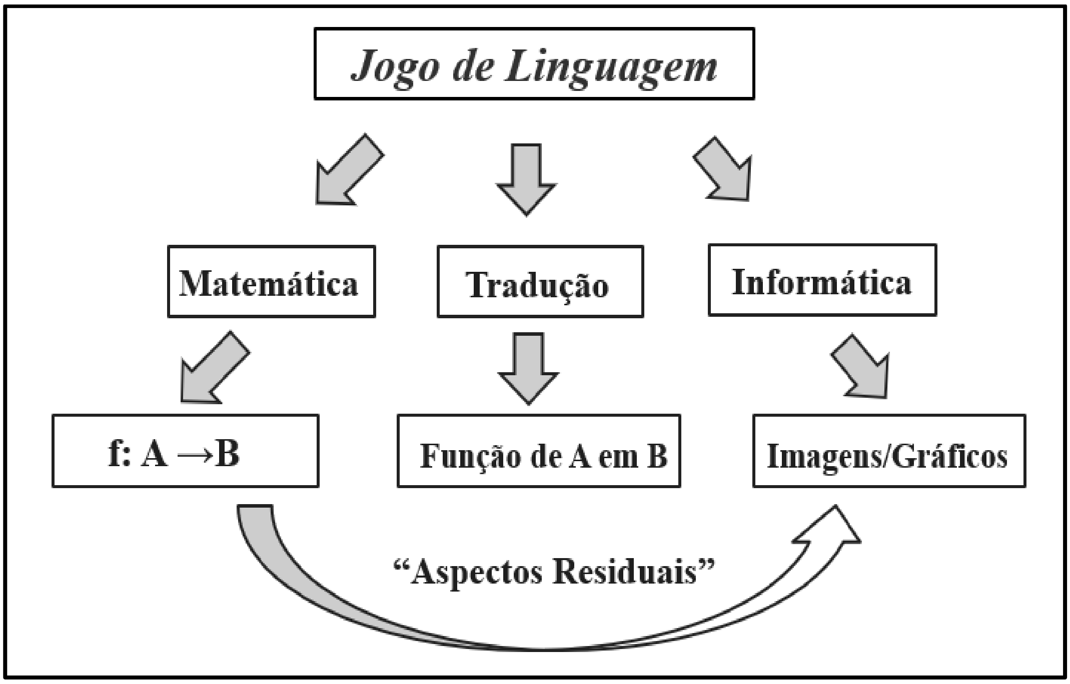
Isto posto, formulo outro questionamento: de que maneira as imagens se entrelaçam entre os conceitos da Álgebra e da Geometria? As respostas encontram-se nas linhas seguintes desta pesquisa.

Nesse sentido, me deparei com diversas imagens no ensino de Álgebra e Geometria, o intuito em dar maior ênfase às imagens na Matemática se deve: ora no sentido de dissolver certas implicações decorrentes de práticas pedagógicas confusas acerca da constituição de conceitos matemáticos na educação básica em função da concepção referencial da linguagem, ora no sentido de corroborar com a educação matemática, investindo na perspectiva dos estudos e pesquisas acerca das aplicabilidades do jogo de linguagem na Educação.

Araújo (2106, p. 122) destaca que os conceitos para o Wittgenstein das *Investigações Filosóficas*, "funcionam em um sistema de pressuposições, longe, portanto, de funcionarem como categorias formais *a priori*, fundadoras de tudo o que há para ser conhecido", apoiando-se nessa hipótese as reflexões aqui apresentadas fazem distinções entre aspectos físicos e abstrações que circundam a noção e a imagem de objeto nas Ciências e na Matemática. Não para dizer o que não deve ser feito, mas para que se olhe para as ações que envolvem o funcionamento da Linguagem, os significados dos conceitos e os sentidos pelos quais os empregamos para saber de algo, interpretar uma expressão, traduzi-la e, principalmente, compreender seus conceitos.

Apresento a seguir uma imagem que formulei com o propósito de concentrar, por um instante, a atenção do leitor, a partir de um esquema visual, preparatório à elaboração de alguns critérios para a Tradução Interna.

Figura 4 – Jogo de Linguagem da Matemática



Fonte: Elaboração do Autor (2018)

A partir desta ilustração, considerando os aspectos filosóficos e teóricos mencionados ao longo do texto, ressalto que há conceitos que nos fornecem imagens, ainda que na Matemática, a presença das imagens é usada quase sempre como um artifício para designar objetos de natureza geométrica. Esta pesquisa, no entanto, observa como estes objetos se constituem a partir de conceitos da Álgebra à esteira do pensamento-forma em Granger. Para esse epistemólogo, "o produto de uma definição é um conceito, o produto de uma descrição é uma imagem (GRANGER, 2013, p. 237).

A descrição de uma figura funciona como um ato de significação para exprimir condições de natureza pragmática na ciência, não trata, portanto, de uma descrição linguajeira usual, mas formal.

A constituição de conceitos na Matemática é também de ordem linguística, assenta-se nos domínios da linguagem. Então, delimitei o campo de ação do Jogo de Linguagem a começar por um dos critérios da gramática[15] da Matemática que é **seguir regras**. A partir desta expressão wittgensteiniana, esbocei o quadro da figura 4 acima, para que os interlocutores possam compreender como funcionam aqui, a tradução interna e o jogo de imagens na Matemática.

Para tanto, discutirei a seguir alguns dos pressupostos da Epistemologia do Uso, que conduzirão as discussões seguinte sobre a Tradução Interna na Matemática.

A Epistemologia do Uso e o Ensino da Matemática

Conforme Hebeche (2016, p. 282), "regras são seguidas não escolhidas", esta é uma interpretação do que foi dito por Wittgenstein, a respeito da expressão *Seguir Regras*, conforme o filósofo, uma regra nada ensina, ela ordena que sigamos uma direção, regras são normas a serem cumpridas. Então, quando se ensina o aprendiz a construir gráficos, inicialmente, sem o auxílio do computador, é porque o jogo de linguagem da explicação, usos descritivos e preparatórios acerca dos conceitos de função estão claros, ou seja, que eles se encontram aptos seguir para uma etapa mais avançada, a de lidar com objetos matemáticos e suas aplicações, por exemplo, construir gráficos.

Nesta fase, segundo Gottschalk (2010) é aquela em que o aprendiz passa da fase das representações empíricas para a fase das representações normativas da linguagem. Nesse sentido, as regras que ensinadas começam a ser questionadas, é quando, eles supostamente, deixam de aceitá-las, passam a perguntar pelo sentido, mas aceitar ou não as regras ensinadas, agora não se trata de um querer individual, subjetivo, é uma condição de possibilidade para o aprendizado, portanto, é uma ação objetiva.

Moreno (2015) ressalta é importante conhecer o papel desempenhado pela Linguagem é pôr em prática os fundamentos da significação, das vivências por meio de expressões linguísticas. Conforme a *Epistemologia do Uso* (2005), o aspecto pragmático destas vivências leva à aplicação de técnicas envolvendo a Linguagem em situações de interlocução. Aqui, a

---

[15] Como esta palavra será de uso frequente no texto, cumpre ressaltar que nesta seção, a palavra gramática estará associada aos aspectos normativos da Matemática, constituídos pela sintaxe desta linguagem, salvo as entradas feita por citação indicando a *gramática wittgensteiniana*.

pragmática não é fenomenológica ou diretamente associada aos usos imediatos como na empiria. Ela ocorre por meio dos nossos jogos de linguagem, para dar sentido ao que é ensinado, no intuito de que se instaura uma prática epistêmica, da constituição de significação.

Moreno (2015, p. 95) explica – “trata-se de conceber o conjunto de *atividades correlativas* de construção de relações internas de sentido e de sua aplicação, sob a forma de regras”, este é um dos fundamentos da sua tese epistemológica, cujo projeto difere do projeto wittgensteiniano que era de não construir teses (o que não impediu qualquer indivíduo de fazê-lo). O objetivo aqui, tem a mesma direção e sentido do que foi esboçado por Moreno (2005), o que difere são as aplicações. Moreno (2005) o fez na Filosofia, aqui aproveita-se destas contribuições para estender suas considerações ao contexto educacional, ambos os propósitos visam constituição epistêmicas.

Existe uma condição lógica, por exemplo, para que as regras da Matemática sejam aprendidas, para que se possam estabelecer comparações, notar familiaridades ou mesmo discrepâncias, são condições de sentido para o uso e domínio de regras no ensino, mas será que ao ensinar, por exemplo, o conceito de função faz-se por meio de regras? Isso fica claro (é compreensível) para os aprendizes na sala de aula? Eles conseguem a partir das técnicas e recursos usados seguir adiante, seguem suas próprias regras ou mesmo abandonam regras matemáticas no percurso? Se vai em busca destas respostas, enfatizando a perspectiva docente.

Penso que no discurso evocado na sala de aula pelo professor subsiste o uso descritivo da linguagem matemática. Esta prática é análoga a ensiná-los a seguir orientações e modelos, para que os aprendizes possam construir o gráfico de uma Função Polinomial, por exemplo. Vale ressaltar que esta é uma atividade complexa que se inicia na educação básica e prossegue até o ensino superior, que pode ser comprovada na empiria, no percurso das práticas docentes do autor desta Tese.

Moreno (2005) revela que a função terapêutica wittgensteiniana mostra os usos possíveis da descrição gramatical, que é descrever o funcionamento da linguagem. Vale ressaltar não se trata de uma descrição cognitiva e nem de um processo mental como ocorre de modo geral na sala de aula. Estas reflexões visam aos professores, quiçá os alunos, portanto, almeja a natureza epistemológica da constituição de conceitos na Matemática, o que leva aos caminhos da Tradução Interna na Matemática.

Ao ensinar o conceito de Função Quadrática, por exemplo, sigo o que Gottschalk (2010) considera como uso descritivo ora normativo na gramática wittgensteiniana. A descrição ocorre quando se enuncia o conceito de função já estabelecido, que não foge às regras da normatividade da Matemática. Usar-se-á, o termo normativo no sentido de *Seguir Regras* wittgensteiniano, o que para Moreno (2015) significa elaborar regras de sentido, criar relações internas no interior de contextos técnicos, como se faz ao ensinar, dispõe-se de práticas e técnicas relacionadas à constituição do objeto matemático, ou seja, de seu conceito. Nestas práticas, subsiste obviamente, a condição de que, por meio da docência, se consiga garantir que os conceitos matemáticos sejam usados em seu aspecto formal, que se possa fazer inferências lógicas e, quando necessário, recorrer à provas e demonstrações, usar mecanismos empíricos é uma consequência da aplicação destas práticas no aprendizado.

Para Moreno (2015), é a gramática wittgensteiniana que proporciona fazer julgamentos sobre a natureza teórica das proposições, já os matemáticos, e seus critérios de utilidade teórica, buscam a certeza dos usos de conceitos, que forneçam segurança para definir critérios pautados em regras normativas e não em escolhas aleatórias. Desta forma, objetiva-se dissolver confusões de natureza didática no ensino com base em ilustrações próximas da realidade e que, no caminho, podem desviar-se do aspecto formal da linguagem matemática. Estes desvios podem limitar o ensino somente a constatações empíricas, *a priori*, importantes aos aprendizes, mas nem sempre se verificam na Matemática, pois, fazê-las desse modo, traz restrições ao aprendizado e ao conhecimento científico.

Na sala de aula, o aprendiz é ensinado a seguir regras na Matemática enunciando conceitos formais? Sabem eles distinguir uma regra de um conceito? Serão analisados os passos que levam à construção do gráfico de uma Função Quadrática no domínio dos números reais, pela técnica de aula expositiva. Considerando já compreendido o conceito desta função, os passos para o esboço do gráfico dada a função $f(x)=x^2+x+1$, são os seguintes:

1) Leitura do enunciado e identificar os valores numéricos dos parâmetros (**a**, **b** e **c**) da função;
2) Determinar se a função é crescente ou decrescente, determinar sua concavidade;
3) Encontrar as raízes ou zeros da função;
4) Determinar o discriminante da função, valor de delta (Δ)
5) Determinar o vértice da função;
6) Desenhar o sistema de eixos coordenados XOY;
7) Marcar no sistema de eixos, as raízes e o vértice da função;
8) Traçar por estes pontos a curva do gráfico (parábola).

De posse dos passos 1 a 8 acima, espera-se que posteriormente ao que foi ensinado, os alunos consigam esboçar o gráfico exigido. Nesse sentido, não se ensina regras, mas uma sequência semelhante a um algoritmo, processo prático. As regras matemáticas estão aí implícitas, ou seja, ocultas na linguagem. Não foram descritas, mas enunciadas. Ler a função e usar corretamente os parâmetros (**a**, **b** e **c**), implica diretamente na determinação correta das raízes, esta é regra que diz se o aprendiz estará diante de uma equação que possui ou não solução no campo dos números reais como enunciamos. Há situações que só podem ser evidenciadas a partir da aplicação correta de cálculo, esta é uma regra interna da Matemática, é a partir dela que poderá se saber se as raízes da função pertencem ao campo dos números reais ou dos complexos, para este conjunto, há outras regras.

A partir do exame do discriminante Delta (Δ), chega-se à conclusão sobre a qualidade das raízes para Δ**=0;** Δ**>0** ou Δ**<0**. Até aqui, propositalmente, usei o processo descritivo, para mostrar que essa construção não é cognitiva, mas uma construção linguística, e é o jogo de linguagem do professor que está em ação. Gottschalk (2010), ao citar aforismos wittgensteinianos indaga: o que é seguir uma regra? Como ter certeza de que a aplicamos corretamente? Nos passos listados anteriormente, há regras ocultas que não foram enunciadas, supostamente já foram aprendidas, tais como: Resolver uma Equação do Segundo Grau, condição intrínseca ao estudo de Funções Quadráticas e não vou listar os outros passos, pois esta prática de resolução é conhecida na Matemática, mais à frente será mostrado como ela se resume, ao fazer uso do *GeoGebra* para esboçar o gráfico da função $\mathbf{f(x)=x^2+x+1}$, já mencionado acima.

Seguir uma regra na Matemática é dominar a técnica de resolução da equação do segundo grau, ou seja, compreender os lances deste jogo de linguagem, o que implica em conhecer antes os conceitos ligados a este tópico de ensino. Seguir uma regra na perspectiva de Wittgenstein (2009) não é como intuir regras por observação, como pode ocorrer quando uma pessoa observa num jogo de xadrez, os movimentos e estratégias dos jogadores mesmo não conhecendo as regras do jogo. Após algum tempo, é possível começar a entender as regras observando os movimentos do “cavalo” (que parecem um “L” para frente e para trás, para esquerda ou para direita, sempre em três passos) ou do “bispo” (sempre na diagonal para frente e para trás, sem pular casas, fixado o seu estado inicial, cor da casa). É a partir dos gestos que fazem os jogadores (forma como eles movem as peças no tabuleiro), que um observador pode aprender estas regras.

Afirmo que o aprendizado das regras do xadrez se dá por imitação e treino, mas não se limitam a estas regras, é um jogo complexo, no qual os jogadores também criam suas estratégias para surpreender o adversário e conseguir o xeque-mate, no entanto, estas jogadas não envolvem a compreensão do conceito de “bispo” ou de “cavalo”, mas das regras a serem seguidas associadas a estas figuras no jogo de xadrez. No jogo de linguagem da Matemática, **seguir regras** difere do jogo de regras do xadrez, o que estes exemplos têm em comum, a palavra jogo, mas seus contextos de ações e regras são distintos. O primeiro pode ser meramente descrito pela gramática da linguagem natural, o segundo é normativo e segue regras da linguagem matemática, trata-se de outra gramática, e o contexto de uso define o significado das jogadas nestes ambientes.

Na Matemática, as regras diferem das regras dos experimentos cognitivos e psicológicos, as regras não são empíricas, não se tornam evidentes a partir da observação, mas do uso normativo dos conceitos e definições que as regem. Tanto o jogo de linguagem wittgensteiniano, quanto a *Epistemologia do Uso,* segundo Moreno (2005; 2015), primam pelo uso de regras, este último, prima como parece subentendido na expressão criada pelo filósofo, pelo uso epistêmico de regras, suas jogadas não são mutuamente excludentes, um jogo complementa o outro.

O termo *Epistemologia do Uso* foi definido posteriormente por Moreno, *a priori*, esta teoria foi chamada de Pragmática Filosófica, que advém da expressão Gramática Filosófica, a partir de textos publicados em congressos entre 1989 e 1996, que culminaram com a escrita do livro *Introdução a uma Pragmática Filosófica* (2005). Vale ressaltar que esta teoria não possui conexões com o termo (Pragmática) usado por outros teóricos que usam a palavra Pragmatismo ou sinonímias, como William James, Charles S. Peirce, Alfred Whitehead, Richard Rorty e John Dewey.

Seguir ou não seguir uma regra matemática pode ser óbvio para o professor, esta ação pressupõe conhecimentos técnicos e epistemológicos, mas isso não necessariamente se verifica para os aprendizes. Nesse sentido, regras matemáticas não fazem parte da forma de vida dos alunos, ao adotar certas metodologias que privilegiam a aprendizagem em detrimento do ensino de conceitos, muitos professores optam por minimizar o uso de fundamentos teóricos na sala de aula. Os conceitos matemáticos que deveriam ser definidos formalmente e não com base em acordos tácitos, passam a ser relativizados no discurso do professor e sofrem desgastes pela adoção de critérios utilitários que se encontram fora da matemática.

De acordo com Gottschalk (2010, p. 93) “é na prática do uso de regra, que se mostra o que é o um erro na sua aplicação”. É desta forma que se ensina a seguir regras, ou seja, dominar o jogo de linguagem da Matemática é colocar em prática suas regras, saber usá-las, inclusive para poder saber quando não as usar. Assim, é possível usar contraexemplos para mostrar que uma regra não se aplica, ou que seu uso é limitado, como mostrar para os alunos, quais as regras válidas no conjunto dos números reais para determinar raízes da Função Quadrática, e quando estas regras não são válidas, ou seja, se o $\Delta<0$ no estudo do discriminante, as raízes da função pertencem aos números complexos e nem sempre os professores diferenciam regras e técnicas de ensino, ao fazer uso da técnica de aula expositiva, passam a tomá-la como regra no ensino da Matemática. E, mais, as regras são aplicadas quase sempre no intuito de que os alunos memorizem conceitos e fórmulas.

A técnica de aulas expositivas faz parte do cotidiano dos professores, trata-se de uma metodologia econômica, de uso coletivo, pois, não há como individualizá-la devido a quantidade de alunos por sala, que varia de 30 alunos, em salas tradicionais, a 250, em cursinhos preparatórios ao vestibular. Os conceitos matemáticos se dão, principalmente, com base na enunciação e repetição de palavras e enunciados, as justificativas pouco são abordadas, talvez porque são tomadas como já provadas. Algumas regras vão sendo apreendidas supostamente durante os lances dos jogos de linguagem entre professores e alunos, com ou sem justificativa, entre acertos e erros.

A lógica implícita nas técnica de aulas expositivas pautadas na cognição, é de que os termos e conceitos ensinados nas escolas precisam ser informados ou transmitidas da melhor forma possível, nesse sentido, a memorização e a identificação de modelos e padrões, tão criticada pedagogicamente por ser cartesiana e tecnicista, assume papel importante à luz da T.R.I (Teoria da Resposta ao Item), teoria pautada na Estatística e usada no modelo de avaliações de larga escala empregado pelo MEC no Brasil, da Educação Infantil ao Ensino Superior.

O uso incorreto das regras pelos aprendizes é quase sempre subjetivo, pois dependem de uma decisão pessoal. Os alunos nem sempre seguem a regra matemática corretamente, eles usam de imaginação e fazem associações com base em suas próprias observações. Não é raro, observar que os alunos confundem, por exemplo, o resultado de 2^5 com 10, isso ocorre, porque eles ainda não compreenderam que **não** se trata da operação multiplicação, mas como a operação de multiplicação lhes é mais familiar, então aplicam as mesmas regras para realizar a operação de potenciação.

O erro que os alunos cometem ao usar as regras da operação de multiplicação na potenciação é semelhante ao que um jogador pode cometer ao jogar damas com as regras do xadrez. Ainda que o tabuleiro nestes jogos seja o mesmo, as regras são distintas, o modo como uma peça do xadrez se movimenta no tabuleiro, é guiado por regras que diferem das regras pelas quais a peça se movimenta no jogo de damas usando o mesmo tabuleiro. Estes jogos possuem regras distintas, assim funciona com o jogo de linguagem das operações na Matemática, são jogos de linguagem com regras específicas que carecem de elucidação no ensino. As regras precisam ser enunciadas e aplicadas, é com a aplicação correta delas que os alunos chegam ao resultado esperado.

Gottschalk (2010) destaca que pensar não é algo restrito ao seguimento de regras, mas compreender que a partir destas se pode criar outras regras, aplicá-las para expandir horizontes. Com base no que foi dito pela autora, a confirmação de que se segue uma regra corretamente pode ser provada pelos seus resultados operatórios. É assim, por exemplo, que ao determinar as raízes ou zeros da equação $\mathbf{x^2+x+1=0}$, ao substitui-las no lugar de **x**, tem-se como resultado uma igualdade matemática válida e a prova de que os cálculos ou regras foram seguidas de modo incorreto, gera uma falsidade.

Ao ensinar Função Quadrática, por exemplo, o professor faz a leitura (enuncia) um texto matemático e interpreta-o para os aprendizes, mas subsiste nesta prática uma **atividade oculta** (tradução), que não é anunciada no jogo de linguagem do professor. Nem sempre o professor traduz completamente um conceito ou faz a leitura de uma expressão da forma mais eficaz. De acordo com Hacker apud Hebeche (2016, p. 255) “regras ocultas não são efetivamente regras, uma vez que elas não podem ser usadas pelos falantes enquanto regras, não podem fazer o papel de correção, guias de conduta ou justificações para o emprego de expressões”. Então, se alguns passos, regras ou definições são omitidos nas aulas de Matemática, a tradução não surte o efeito desejado, que é o da objetividade, ou seja, não deixar dúvidas e Hebeche (2016, p. 282) arremata: “regras são seguidas não escolhidas”.

A tradução literal de símbolos matemáticos não necessariamente está associada a situações do cotidiano ou mesmo a expressões conhecidas na Língua Portuguesa. Quando afirmo que $\mathbf{2 \in N}$, e leio: 2 pertence a N. É importante frisar, que esta tradução só será compreendida se o conceito de números naturais for conhecido, tal qual a relação de pertinência entre um número e o conjunto do qual ele faz parte. A tradução “2 pertence a N” pode nada significar para um aprendiz, que nada vê (não compreende) que há uma relação entre um número e uma letra. A palavra **pertence** neste caso, não está associada ao verbo pertencer da Língua Portuguesa, se trata de uma norma específica da Teoria dos Conjuntos. Por isso, quando menciono o termo espécie de tradução, quero dizer que nesta atividade existe um jogo de linguagem em curso, cujos meandros se encontram no reino da Matemática, responde a uma espécie de gramática como cálculo.

De modo análogo, o que chamo de espécie é uma corruptela do termo *sub specie*, cunhado por Hebeche (2016), ao mencionar que a Filosofia em Wittgenstein pertence a um sub-reino gramatical. Para o autor, a Filosofia faz parte de um jogo de linguagem preparatório que engendra a *filosofia sub specie gramaticae* em substituição à *filosofia sub specie humanitatis.*

Hebeche afirma que desta forma o proceder filosófico afasta-se da noção de contexto e das incursões antropológicas na linguagem, visando dissolver os últimos lampejos da metafísica. Para Hebeche (2016), Wittgenstein teria cometido em sua obra alguns percalços que precisam ser corrigidos, e que estes deslizes também são cometidos por seus discípulos e comentadores. Quanto ao caráter filosófico mais denso desta afirmação, os leitores podem recorrer às ilações de Hebeche em busca de mais detalhes.

Cumpre destacar, que a expressão *sub specie* é de origem latina e seu uso aborda problemas de natureza filosófica. A gramática filosófica difere amplamente das gramaticais tradicionais ensinadas nas aulas de português, alemão e inglês, assim, enquanto a gramáticas das línguas abordam a sintaxe das palavras, a gramática filosófica ocupa-se de problemas filosóficos. (HEBECHE, 2016).

O termo Tradução advém das Teorias da Tradução (Hermenêutica), pode-se dizer que a palavra Tradução não é usual quando se trata do ensino da Matemática, a nomenclatura usada nesta pesquisa, é, portanto, uma constituição de cunho epistemológico aplicada à Educação, pautada na filosofia wittgensteiniana, chamada aqui de Tradução Interna na Matemática. Nesse sentido, procura-se aqui explicitar, como foi mencionado antes, por meio de um arcabouço teórico, uma nova expressão, que figura nos domínios da Tradução, da Filosofia e da Matemática. Portanto, traduzir na Matemática difere intrateoricamente de traduzir de uma língua para outra, como se procura evidenciar ao longo deste texto.

Traduzir faz parte do jogo de linguagem natural, quando não sabemos o significado ou aplicação de uma palavra ou de uma frase, dizemos: traduza o que foi dito para que possa compreender. No ensino da Matemática, esta fala pode ser observada junto aos alunos, quando estão diante de uma expressão simbólica ou de notações específicas que eles não dominam. O professor então, faz a passagem da linguagem natural para a linguagem matemática, como salienta Silveira (2014), e traduz o texto matemático, mas esta prática da tradução não é vista por eles como uma técnica tradutória, esta é uma afirmação de responsabilidade desta Tese, diz-se que está encoberta pela linguagem natural.

Não se trata de analisar o discurso dos professores, o que foge ao objetivo desta pesquisa. Esta é uma discussão teórica, proveniente de leituras, análises e pesquisas que envolvem a produção do conhecimento científico.

Na prática, afirmo que um texto matemático ou parte dele precisa ser traduzido para ser compreendido, a hipótese é de que o professor faz isso primeiro para si, ao ler o texto matemático, decodifica a escrita algébrica, as notações e símbolos da linguagem formal da Matemática, então interpreta-o usando os recursos da linguagem natural para os alunos. Esta afirmação foi observada a partir de minhas memórias docentes ao ensinar Matemática. Nesse sentido, passo a inferir que há uma espécie de Tradução Interna, um *jogo de linguagem específico*, realizado pelo professor, que se assemelha à tarefa do tradutor solitário aos moldes das práticas hermenêuticas (Teoria da Tradução), destacadas por Gadamer (1999) e Schleiermacher (2007).

Traduzir na Matemática consiste de uma técnica tradutória individualizada ou mesmo compartilhada, esta atividade se deve aos professores que ensinam Matemática. Na passagem de uma linguagem para outra, ou seja, da Matemática para a linguagem natural e vice-versa, os professores fazem uma espécie de tradução ainda que esta atividade não seja vista como tradução. Para eles, talvez, traduzir soe como interpretação. Traduzir na Matemática, consiste de uma técnica, não é uma tarefa para alunos. É técnica no sentido de aplicar conceitos e definições de ordem científica, não se trata de uma tradução à revelia, com base em interpretações subjetivas. Requer um conhecimento mais profundo do objeto em estudo. Não há nesse sentido, uma tradução por associação ou similaridade, a linguagem matemática é objetiva, portanto, segue normas e convenções.

Os símbolos matemáticos podem assumir no texto o lugar de conectivos lógicos. A frase Maria e João, pode ser escrita como Maria ∧ João, em que a letra *e*, tem a função de conjunção e é simbolizada pelo conectivo (∧). Assim, **m** de Maria passa a ser uma proposição, de modo análogo **j** passa ser João. No modelo da lógica aristotélica, lógica proposicional, esta frase assume o papel de sentença, e pode ser escrita como **m** ∧ **j**. A conjunção "e" é empregada na sentença, sem mesmo precisar de um complemento, pois, a gramática empregada neste jogo de linguagem não é a gramática da Língua Portuguesa.

Quando enuncio a frase "João e Maria" todos entendem, ainda que falte um complemento para a frase, assim como na frase "martelo e prego" sempre parecem estar associados à construção ou reparo de algo, mas observe que os jogos de linguagem empregados em cada situação diferem entre si. Logo, ainda que a frase João e Maria, possa parecer incompleta na Língua Portuguesa, conforme os princípios da lógica aristotélica este sentido não é obrigatório, mas tem um significado, independentemente de sua veracidade, ou seja, de que a composição da frase (sentença) seja verdadeira ou falsa.

Wittgenstein (2009) assinala que se joga um jogo de linguagem conforme a regra nos orienta a jogar. A regra da lógica, nesse contexto, é quem ordena a sentença. Há, tanto na frase lógica quanto na Língua Portuguesa semelhanças de família e, ao mesmo tempo, são jogos distintos. Nesse sentido, posso dizer que os jogos de linguagem podem ser polissêmicos, mas este cenário será explorado em outra ocasião, pois a tradução na Matemática, pretende evitar estes tipos de desvios.

De posse, portanto, da técnica de tradução na Matemática é possível mostrar ou justificar como os conceitos matemáticos se constituem, essa é uma abordagem metodológica na qual se usa o jogo de linguagem da Matemática com finalidades de esclarecimento. Esclarecer o que fica subentendido na linguagem formal da Matemática é poder, quando possível, explicar como se comportam os **resíduos** grangerianos na condição de conteúdos formais na ciência.

Procuro mostrar ao longo do texto, em algumas pesquisas já realizadas, que traduzir na Matemática trata-se de elucidar conceitos matemáticos que não são discutidos cotidianamente pelos professores, conforme Melo (2015; 2016). Assim, o objetivo da tese se amplia em torno de discussões epistemológicas, para caracterizar a tradução interna no ensino da Matemática.

Traduzir conceitos da linguagem da Álgebra para a Geometria é pôr em prática a expressão **ver como** usada por Wittgenstein (2009), aplicada aqui como técnica e para mostrar que algumas imagens de gráficos na Matemática possuem semelhanças quanto à forma geométrica, mas são distintas quanto à sua sintaxe. Nesse sentido é que existe uma família de parábolas, ou seja, há graus de parentesco entre estas curvas, a característica imagética entre ambas que as identifica no estudo das funções quadráticas (MELO, 2013).

Nesse sentido, analisei outros aspectos conceituais da linguagem matemática a partir de imagens na Geometria (gráficos) produzidas a partir da escrita simbólica da Álgebra, conforme as expressões numeradas de 1 a 4 a seguir.

1) $f(x) = x^2 + 7x + 12$;

2) $x^2 + 7x + 12 = 0$;

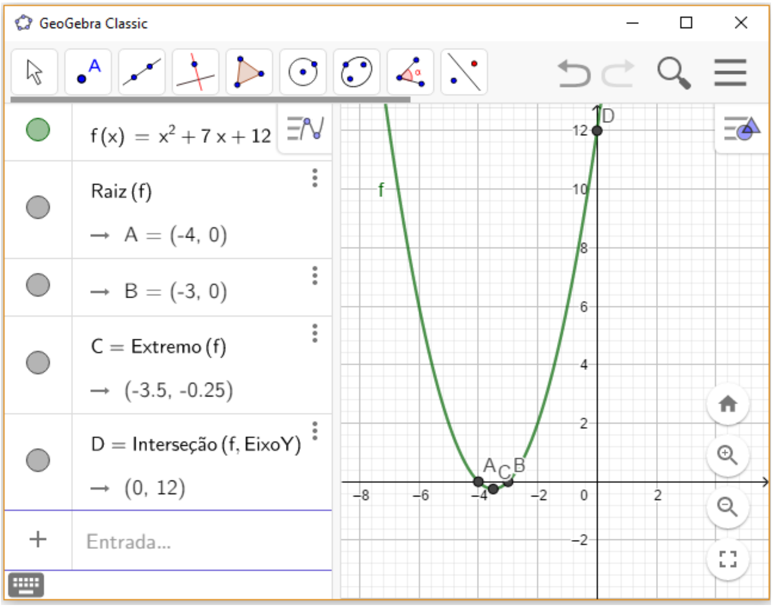
3) $y = x^2 + 7x + 12$;

4) $x^2=2py$ e $y^2=2px$

O que as expressões de 1 a 4 possuem entre si são semelhanças familiares na perspectiva do jogo de linguagem wittgensteiniano, elas podem ser notadas na escrita algébrica, ou seja, as notações matemáticas que as governam têm um grau de proximidade que as coloca quase em nível de identidades pela sintaxe. Vale ressaltar que apenas as expressões do item 4 destoam em termos de sintaxe das demais, no entanto, elas possuem uma característica interna que as coloca no grupo destas curvas, no estudo das cônicas. Qual a importância de mostrar estas distinções? É o que procurei responder ao fazer uso da Informática para destacar os aspectos imagéticos da Tradução Interna na Matemática. Para tanto, farei analogias entre aquelas expressões aos pares, como segue.

Pela proximidade da linguagem algébrica entre as expressões, exibo a seguir os gráficos de 1) e 2) mediante o uso do *GeoGebra*[16].

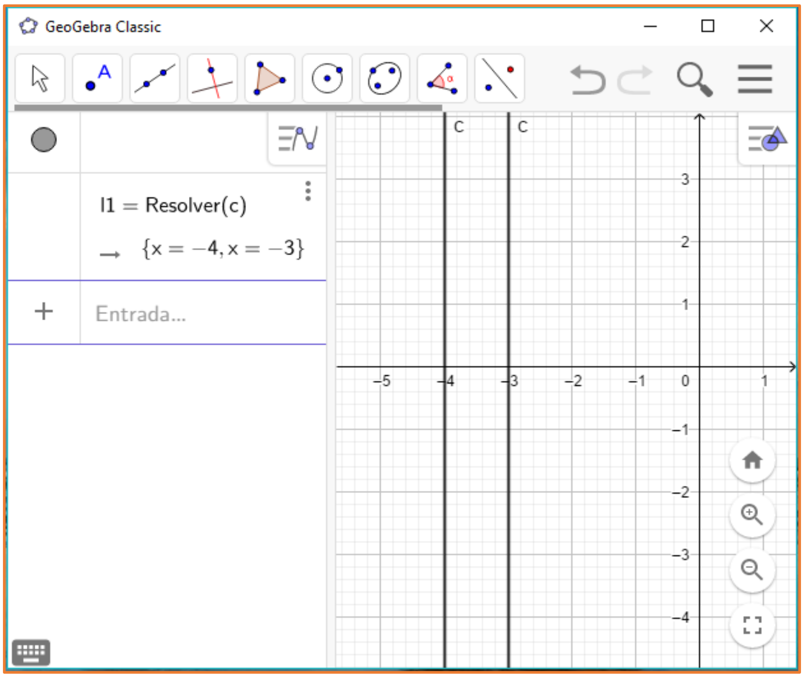
Figura 5 – Gráfico de $f(x)=x^2+7x+12$



Fonte: Elaboração do Autor (2018)

[16] Usei estes recursos para explorar o aspecto visual na constituição das curvas, para ilustrar, explicar e ganhar tempo na construção de gráficos na sala de aula haja vista, que desenhar à mão livre exige uma demanda maior de tempo. Assim, é possível não só explorar vários exemplos, como discutir a construção com os aprendizes, mas nada impede que as técnicas usadas de forma recorrente nas aulas, como seguir os passos de 1 a 8, mencionados anteriormente, sejam feitas no quadro pelo professor. Esta atividade é, portanto, uma sugestão.

Figura 6 – Gráfico da equação $x^2+7x+12=0$



Fonte: Elaboração do Autor (2018)

As expressões das figuras 5 e 6 acima apresentam estreita semelhança de sintaxe entre si, no entanto, as duas imagens geradas pelo *software* mostram que há diferenças entre ambas. Ao analisa-las, é possível notar que na janela de álgebra do *GeoGebra* para a função **f(x)= x^2+7x+12**, o software retorna o gráfico de uma parábola e resolve a equação implícita a esta função (equação $x^2+7x+12=0$), mostrando alguns pontos, como as raízes, os extremos e a interseção com o eixo **Y**.

A solução apresentada é uma simplificação do processo de cálculo, ou seja, uma particularidade do software que não detalha o passo a passo da solução, como se faz no quadro ou no caderno, apenas o resultado é mostrado. Na construção tradicional, sem o uso do *software*, geralmente usa-se os passos de 1 a 8, mencionados anteriormente, para chegar ao produto final, que é exibir o gráfico da função.

Nesse sentido, observando o jogo de linguagem da Matemática presente nestas construções do ponto de vista wittgensteiniano, Granger (2013) ressalta que existe uma espécie de **geometria morfológica** no que diz respeito à Geometria Euclidiana, esta morfologia se verifica na constituição de figuras simples, como os polígonos regulares. Considero a partir da ilação de Granger, que a Geometria Morfológica possui está intrinsecamente ligada a uma espécie de **sintaxe morfológica** proveniente da Álgebra, esta sintaxe é o que define se as curvas pertencem ou não a uma mesma família de equações ou de funções.

Granger (2013) menciona a Geometria Analítica e não o estudo de funções, fiz esta analogia para destacar que o gráfico de uma parábola é proveniente do estudo das equações via Geometria Analítica e só posteriormente passou a ser observado a partir do estudo funções mais recentemente, estas diferenças entre campos ou estilos epistemológicos pode ser verificada no desenvolvimento da História da Matemática conforme Eves (1997).

Na História da Matemática, o objeto parábola passa por uma longa descrição normativas conforme o período em que os matemáticos debatiam sobre a constituição deste conceito, que passa antes pela história das secções cônicas, segundo Vidal e Santos (2015).

Para estes autores, as cônicas receberam tratamentos diversificados que podem ser identificados conforme os seguintes períodos históricos. Na Grécia entre 600 e 300 a. c, sob a ótica de Euclides, Mnaecmus, Arquimedes, Apolônio de Perga, Papus e Eutocius; na alta Idade Média, as cônicas foram mencionadas por Tâbit ibn Qorra (826 - 901), Omar Khayyam (1048 - 1131); na Renascença destacam-se os trabalhos de Johannes Werner (1468-1528); Comandinno (1566) e Maurolico (1654), na Itália; e no período da Matemática Moderna, portanto, mais recentemente dedicaram-se aos estudos das cônicas, Johann Kepler (1571-1630); René Descartes (1596- 1650); Pierre De Fermat (1601-1665); Bleise Pascal (1623-1662); Jan De Witt (1629-1672); John Wallis (1616-1703); Isaac Newton (1642-1727) e Leonhard Euler (1707-1783) (VIDAL; SANTOS, 2015).

Diante do exposto, é possível notar que o estudo das cônicas é milenar e tem como aporte as contribuições de vários matemáticos, a constituição destes conceitos são extensas e não se limitam apenas ao que foi mencionado por Vidal e Santos (2015) no parágrafo anterior. Na história da Matemática, alguns destes períodos são aproximados ou mesmo imprecisos. Documentos foram perdidos ou extraviados e os trabalhos de cada matemático nesta época, amparavam-se em traduções e reescritas de textos formulados por seus antecessores e predecessores. Assim, para Vidal e Santos (2015), o estudo das cônicas começa praticamente com as contribuições de Apolônio de Perga e segue até o século XVII com outros autores mais conhecidos, como o matemático Euler.

Nesta pesquisa não me ocupei em fazer um estudo detalhado, buscando os fundamentos históricos da Matemática acerca de curvas cônicas, mas o panorama apresentado situa os interlocutores na discussão epistemológica em alguns aspectos que menciono na Tese.

Busco uma conexão entre linguagem matemática presente neste contexto e a possibilidade de mostrar que considero como relevante o trabalho da tradução milenar de textos matemáticos, para elucidar como se dão alguns aspectos da Tradução Interna na Matemática que evoco nesta pesquisa.

Assinalo que os estudos que desenvolvi aqui não possuem as mesmas características do que foi apresentado por Vidal e Santos (2015), uma vez que uso o que há de mais recente em tecnologias informáticas para realçar a constituição de conceitos matemáticos com ênfase no jogo de linguagem wittgensteiniano. Cumpre destacar que o estudo das curvas no *GeoGebra* explora uma métrica (construção) diferente da construção (desenho à mão livre ou com os instrumentos régua, compasso e transferidor) usados na Geometria Plana, Espacial e na Geometria Euclidiana, o que há de comum entre estes jogos de linguagem é que eles engendram curvas planas.

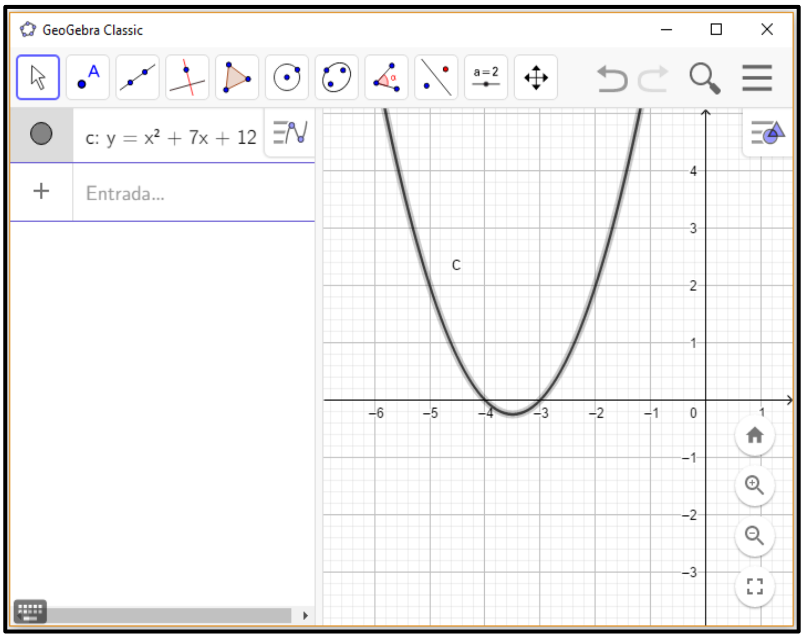
Conforme Wittgenstein (2009), umas semelhanças entre jogos de linguagem se mantêm outras se esvaem, o que os torna completamente diferentes. Jogos de Linguagem não possuem normas fixas, mas as normas internas da Matemática não podem ser modificadas. A gramática wittgensteiniana aborda também a gramática da Matemática, a primeira trata de *forma de vida* dos jogos de linguagem; na segunda, os jogos de linguagem estão associados à forma de vida (atividade do professor de matemática). A linguagem específica usada na Matemática visa à constituição de conceitos teóricos que se entrelaçam com os jogos de linguagem da Língua Portuguesa, dentre outros aspectos.

Voltando à discussão sobre o gráfico da Equação do 2º grau, optei por mostrar que a imagem gerada no *GeoGebra* (Figura 6) não é explorada nos livros didáticos. Os livros não mencionam gráficos de equações no Ensino Fundamental II (6º ao 9º ano). No ensino médio (1º ao 3º ano) estudam-se os gráficos de funções polinomiais; das equações na Trigonometria e na Geometria Analítica e questiono: por se tratar de curvas, os gráficos das equações do 2º grau e das funções do 2º grau não deveriam ser semelhantes quanto à forma?

Penso que essa pergunta pode ser dissolvida com o recurso das **imagens** geradas pelo computador, uma vez que os gráficos de Equações do 2º grau completas “são retas paralelas ao eixo das abscissas” e as Funções do 2º grau ou Quadráticas possuem como gráfico “parábolas” e são, portanto, famílias de curvas de diferentes ainda que a proximidade entre ambas se dê ora pelo grau 2 na Matemática (Equação do 2º grau e Função do 2º grau), ora pelas suas **sintaxes**.

Compreender como se dão esses jogos de linguagem é o que Wittgenstein (2009) chamou de **ver como**, que interpreto como técnica de ampliação do **ver** (olhar apenas para a forma), no sentido de analisar epistemologicamente a linguagem matemática. Infiro que **ver como** é, semelhante a traduzir na matemática. Se consigo traduzir na matemática, consigo ver como se dão as nuances dos jogos de linguagem entre a sintaxe da álgebra e a sua componente imagética na geometria (gráfico). Retomo os itens 3 e 4 (expressões mencionadas anteriormente) para tecer análises sobre a expressão **$y = x^2+7x+12$**, cujo gráfico encontra-se na figura 7, e as expressões **$x^2=2py$** e **$y^2=2px$**, cujos gráficos podem ser vistos na figura 8.

Figura 7 – Gráfico da cônica $y=x^2+7x+12$



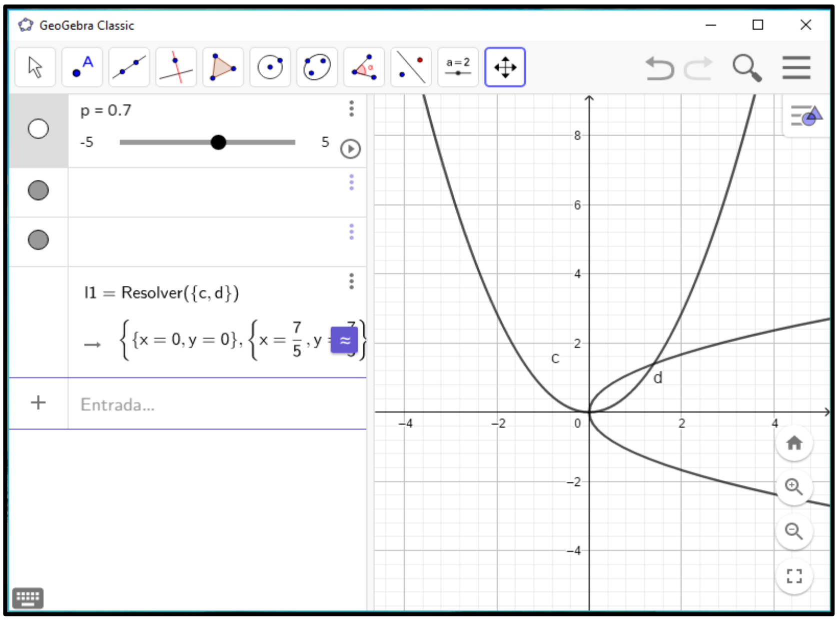
Fonte: Elaboração do Autor (2018)

Afirmo que o gráfico da figura 7 é uma cônica. Faço esta ressalva para chamar atenção de um ponto que passa, muitas vezes, despercebido pelos professores no ensino de Funções. A notação para funções mais utilizada é **f(x)**, mas uma função pode aparecer no livro didático também com a notação **y**, mas o *GeoGebra* distingue estas notações, ou seja, se a expressão usada para construir o gráfico for **$f(x)=x^2+7x+12$**, o software plota o gráfico de uma parábola como função, se a expressão usada for **$y=x^2+7x+12$**, o software plota o gráfico de uma cônica, como a que se vê acima.

O jogo de linguagem (escrita) matemática usada na constituição de um conceito implica também na compreensão da imagem que a ele corresponde. Então, se nos livros didáticos, a exemplo do que ocorre em Dante (2008), uma função é dada tanto pela notação f(x) quanto pela notação y, é importante frisar que as duas notações podem ser usadas, mas o *GeoGebra* interpreta a notação y antes da igualdade como uma curva que pertence ao estudo das cônicas.

Tomando como base o estudo das cônicas, retomo que foi dito neste capítulo, sobre as cônicas dadas pelas equações **$x^2=2py$** e **$y^2=2px$** e apresento a seguir os gráficos na figura 8.

Figura 8 – Cônicas $x^2=2py$ e $y^2=2px$



Fonte: Elaboração do Autor (2018)

Na janela de Álgebra, as informações sobre estas duas curvas foram omitidas, mas esta é uma característica que o software apresenta quando duas curvas são plotadas na mesma tela. Assim, advirto que a curva **$x^2=2py$**, na vertical, é a cônica indicada por "c" e a cônica indicada por "d", **$y^2=2px$**, é a cônica plotada sobre o eixo horizontal, ambas são parábolas que variam em função do parâmetro **p**. Diferentemente da função quadrática, em que as parábolas dependem dos parâmetros (**a, b** e **c**). Nas cônicas é o parâmetro **p** quem controla a concavidade, a abertura dos ramos e a inversão da concavidade das parábolas em torno dos eixos **x** ou **y**. Desta maneira, reitero que este jogo de linguagem é uma **tradução** das funcionalidades do objeto matemático com base no conceito de cônica da Geometria Analítica.

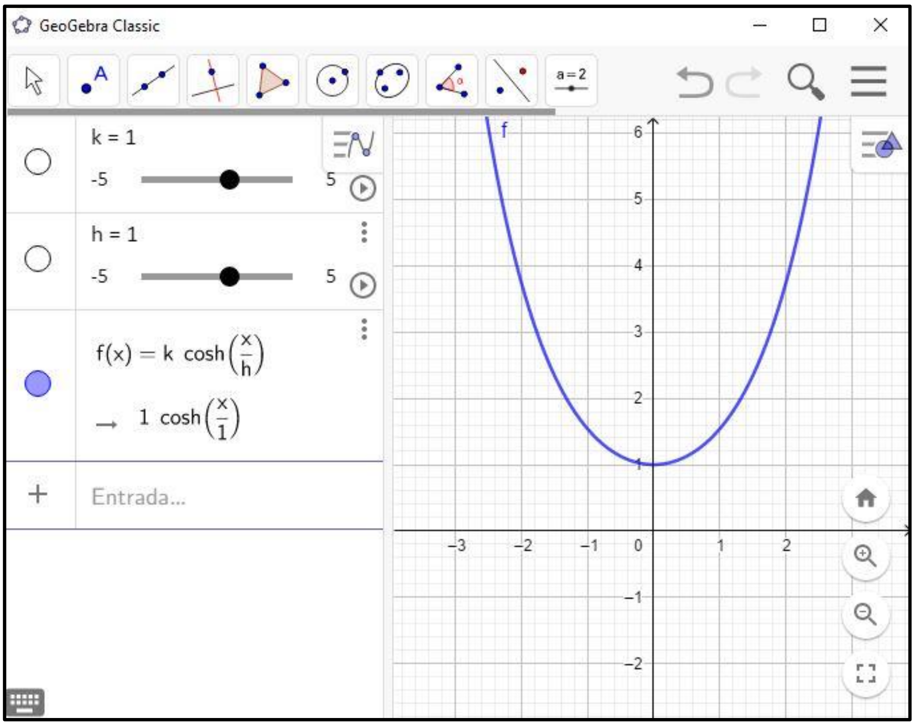
Logicamente, estas imagens são algumas das quais explorei sobre o objeto parábola como cônica, porém, o estudo das cônicas é bem mais amplo e detalhado, há várias outras equações para este objeto e que podem ser exploradas via *GeoGebra*. Ao fazer uso das ferramentas deste *software*, para obter mais informes sobre a curva plotada (gráfico), é possível observar outras propriedades com dois cliques: um clique com o botão esquerdo e outro com o botão direito sobre a curva **"d"**, por exemplo.

O software exibe uma janela de propriedades com algumas informações: parábola **d: $y=2px$**; equação: **$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey=f$** e a equação **$4p(y-k)=(x-h)^2$**. Assim, é possível dar continuidade ao estudo das cônicas, traduzindo o que essas equações querem dizer da linguagem matemática para a linguagem natural. E o mais importante: mostrar como estas equações[17] se aplicam na Matemática e suas conexões com outros ramos do conhecimento, como a Física e as Engenharias, por exemplo.

As imagens sozinhas podem nada informar na Matemática, elas precisam estar devidamente expressas por meio das suas respectivas notações, para evitar ilusões imagéticas tal qual acontece com o cachimbo de Magritte ou no pato-lebre de Jastrow, mencionados neste texto. Wittgenstein (2009, p. 276) ressalta "se interpretamos, então fazemos hipóteses que podem revelar-se falsas", procurei enfatizar nesse sentido, que na Matemática, as ilusões com base em **ilustrações** se desfazem pela linguagem matemática que as define.

Na figura 9 apresento uma curva especial associada ao estudo da Geometria Analítica, ainda no contexto das cônicas. Vale ressaltar, no entanto, que este estudo só é feito no nível superior, mas como o jogo de linguagem desta Tese tem como foco os professores de Matemática, penso não há haver empecilho para a compreensão do leitor.

Figura 9 – Curva Catenária



Fonte: Elaboração do Autor (2018)

Esta curva pertence ao domínio das funções hiperbólicas dada pela notação **f(x)=kcosh(x/h)**, no campo dos números reais. Assim, ainda que geometricamente a curva se pareça com uma parábola pelo formato em "**U**" ela chama-se **catenária**. De acordo com Eves

[17] Um estudo mais avançado sobre Geometria Analítica pode ser obtido em Iezzi e Murakami (1997) nas referências desta pesquisa ou no livro *Geometria Analítica*, de Steinbruch e Winterle (1995), da editora Pearson. Este último é mais usado no ensino superior associado também à Álgebra Linear.

(1997), o estudo das coordenadas polares e retangulares e a dedução do raio de curvatura de uma curva plana devem-se a Jakob Bernoulli (1604-1705). Esta curva consiste, por exemplo, de um fio suspenso e preso na ponta de duas hastes verticais afastadas uma da outra por uma distância “x”. A curva então recebe a ação da força da gravidade provocando um abaulamento central, cujo formato lembra os ramos de uma hipérbole. A figura 9 apresenta o formato de “U” semelhante ao de uma parábola, para **k=1** e **h=1**, esta é uma descrição livre da catenária, portanto, uma ilustração.

Traduzir na Matemática a fórmula da catenária é mostrar como se emprega o jogo de linguagem, que traduz por uma aproximação este conceito para a linguagem natural. Aproximação, por se tratar de uma situação que descreve a gramática do cálculo matemático, observando a sintaxe algébrica e a lei de formação na Matemática para esta curva. Fazer esta descrição é semelhante ao que propôs Granger (1978) na *Filosofia do Estilo.* O estilo grangeriano ressaltava a maneira pela qual os matemáticos discutiam determinado conceito em cada época. O estilo aqui se pauta em observar aspectos da morfossintaxe geométrica da curva, alterações vinculadas aos parâmetros k e h, mencionados anteriormente.

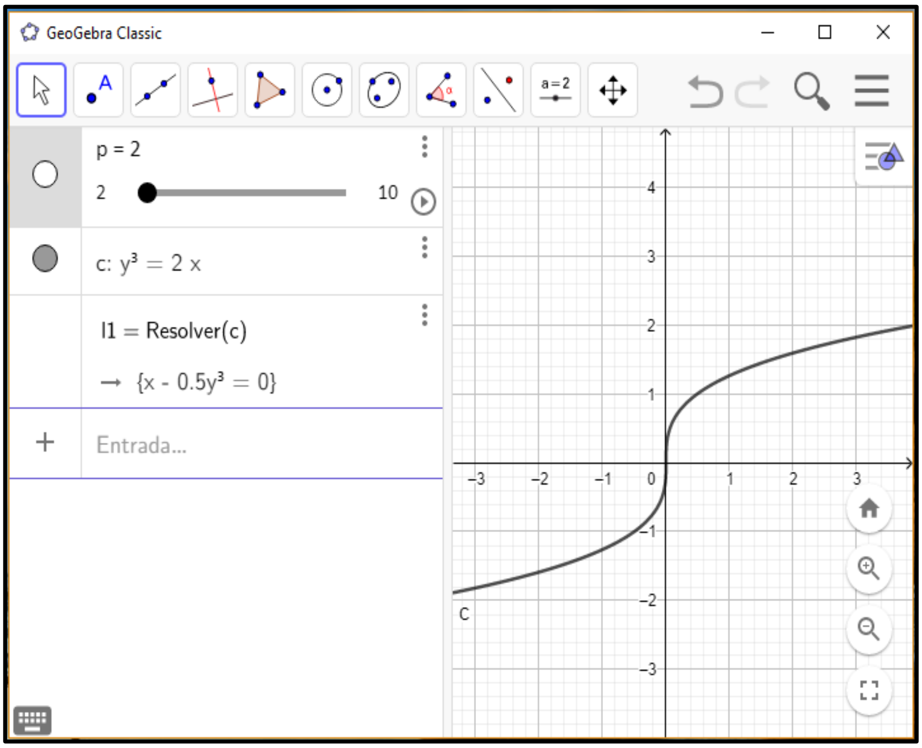
Analisar o jogo de imagem proveniente da alteração dos parâmetros k e h, na curva catenária implica em mostrar **o que dizem as imagens**, ou seja, é **revelar um aspecto** na perspectiva de Wittgenstein (2009). Ao fazer uso do *GeoGebra* para estudar esta curva, ressalto que há ainda, a possibilidade de explorar os movimentos da mesma na tela do computador. São estes movimentos que fornecem informações sobre a constituição do conceito matemático implícito à fórmula da catenária. Fiz algo semelhante em Melo (2103) com as parábolas.

Para Wittgenstein (2009), a visualização implicada nesta atividade é análoga à expressão **ver como**. **Ver como** é, portanto, traduzir na Matemática o significado dos parâmetros k e h da curva **f(x)=kcosh(x/h)**. Traduzindo-os para a linguagem natural ao variar o parâmetro **h** no *GeoGebra,* com auxílio da ferramenta controle deslizante, nota-se que a curva em estilo de “U” se alonga (se abre) ou se fecha e mais, a curva sofre rotações em torno do eixo **y** no sistema cartesiano. Estes movimentos só podem obviamente ser observados no computador, eis uma limitação de construir esta curva apenas no quadro ou no caderno.

Quando se trata do parâmetro **k**, o movimento associado à curva catenária no *GeoGebra* mostra que a curva sofre translações em relação ao eixo **x**, é possível notar ainda que este parâmetro determina também a inversão total em sua concavidade. Descrever estes movimentos não se trata de uma inferência tácita, faz-se necessário o domínio de técnicas inerentes ao jogo de linguagem da Matemática e são critérios de natureza epistemológica definidos a partir de estudos de uma comunidade de matemáticos ao longo de vários séculos, que passaram por diversas interpretações e traduções intrateóricas.

Ao fazer uso do *GeoGebra* no ensino da Matemática evidencio um estilo de fazer geometria conhecido atualmente como Geometria Dinâmica, isso se deve ao uso de ferramentas computacionais (*softwares*) no ensino da Matemática. As análises que faço baseiam-se principalmente na compreensão do conceito matemático via Linguagem, nesse sentido, interpretar e traduzir na Matemática não estão necessariamente no mesmo patamar que as traduções no estilo da Hermenêutica, são Traduções Internas na Matemática.

Figura 10 – Curva implícita do tipo $y^n = px, n>2$



Fonte: Elaboração do Autor (2018)

Usando os princípios dinâmicos da Geometria (ferramentas) presentes no *GeoGebra*, apresento na figura 10 um estilo diferenciado de parábola chamado de **parábola cartesiana** ao exemplo do que é descrito por Eves (1997) como um dos episódios da História da Matemática atribuído a Descartes. Esta curva na Matemática recebe, na área, a denominação de Curva Implícita, por derivar de equações que passam por processos de parametrização, não discutirei a natureza dos cálculos que engendram as curvas implícitas por haver uma série de derivações destas curvas nos domínios da Álgebra.

Para o exemplo da figura 10, no entanto, reservo o aspecto da tradução no sentido de esclarecer que nem todas as curvas que estão no rol das parábolas possuem o mesmo formato geométrico de "U" comum no estudo desta curva plana. Ao mesmo tempo, evoco que os **jogos de imagens** na Matemática têm a possibilidade de mostrar o quanto as imagens rotineiras com as quais lidamos no estudo das parábolas podem sofrer alterações na forma.

Assinalo que o jogo de imagens na Matemática revela noções conceituais que permitem ampliar a compreensão de diferentes jogos de linguagem na Educação, esse é o sentido analítico da tradução que infiro revelar de maneira mais profunda a natureza gramatical da Matemática em relação à sua sintaxe.

As observações e análises epistemológicas que faço amparam-se em aspectos filosóficos wittgensteinianos, como ressalta Moreno (2015):

> O conjunto de conceitos teóricos, que conduz a esta ideia, de condicionamento entre os jogos de linguagem relativamente às suas diferentes maneiras de elaborar o sentido, substitui o modelo lógico, que no Tractatus, conduz à insondáveis ligações elementares entre nome e objeto, entre linguagem e realidade – ao introduzir algo que está excluído do campo da lógica transcendental, a saber, a prática com a linguagem através do *ensino* e do *aprendizado* do sentido, no interior dos jogos – tomados como parâmetros de comparação com a nossa linguagem, e não como normas de como deve ser (MORENO, 2015, p. 105).

Nesta passagem, o autor faz uma breve relação entre as duas fases filosóficas de Wittgenstein, do *Tractatus* às *Investigações*, e mostra que enquanto a primeira tentava expurgar por meio da lógica toda e qualquer outra forma de linguagem que não pudesse ser expressa por meio dela, a outra passa a adotar a imagem de mundo, as formas de vida e os jogos de Linguagem, o que dá a entender que havia uma preocupação do filósofo também com o ensino e aprendizado da Matemática.

Aproveito-me destas ilações para fazer a seguinte inferência: "a Tradução na Matemática se dá por meio de constatações internas acerca da constituição de conceitos que não estavam à nossa vista (na superfície das imagens), estavam ocultos na linguagem complexa da gramática da Matemática".

Compactuo nesse sentido com a conclusão a que chegou Steiner (2005), traduzir é compreender e ainda, com a ilação de Wittgenstein, de que a tradução é um jogo de linguagem. Assim, o **ver como** wittgensteiniano auxilia a compreender como se dão as relações internas entre conceitos da Álgebra e da Geometria, cujos aspectos nem sempre são explicitados pela linguagem da Álgebra, mas se revelam na Geometria por meio das imagens.

Traduzir na Matemática é ler e interpretar, fazer analogias por meio das semelhanças de família e do conceito de seguir regras, são aplicações do jogo de linguagem wittgensteiniano.

Discordo, portanto, das prescrições metodológicas construtivistas de que o método é mais importante que o aprendizado de conceitos, usar este fundamento é como falar sem pensar, incorre-se em erros por ânsias de generalidades pedagógicas que ferem, por vezes, a natureza do conhecimento matemático. Ensinar métodos sem conceitos é como conjugar frases com palavras em qualquer ordem, isso nem sempre é possível. Aí está a confusão.

Quando associo aplicações de origem filosófica ao ensino da Matemática, quero destacar que tanto o método quanto os recursos na Educação podem ser definidos pelo professor e esta é uma decisão que faz parte de suas práticas docentes, mas reitero que os conceitos são tão importantes quanto as imagens, juntos, constituem jogos de linguagens.

4 O QUE DIZEM AS IMAGENS

"As frases servem para descrever como são as coisas, pensamos nós, a frase como imagem" (WITTGENSTEIN,1989 §244).

No contexto educacional, uma das atividades desenvolvidas pelo professor consiste em explicar para os alunos, conceitos da Matemática enquanto ciência, para isso, ele usa técnicas de ensino, estratégias e recursos didáticos que possibilitem aos alunos compreender esta linguagem da melhor forma possível.

A comunicação entre professores e alunos exige de cada um deles diferentes habilidades: o aluno recebe informações, que precisam ter sentido para se consolidar como aprendizado, nesse ínterim, há um questionamento frequente entre os alunos que recai sobre a utilidade e do que lhes é ensinado na escola. Já o professor procura por responder a estas perguntas buscando justificativas que possam fazer sentido frente aos conceitos matemáticos ensinados.

Não obstante, as práticas pedagógicas defendem que a realidade deve ser usada para justificar o caráter abstrato da Matemática, mas isso nem sempre é possível, pois, na Matemática há conceitos intrateóricos que não possuem um referente exclusivo na realidade. Os números irracionais e da noção de infinito são exemplos, assim a Matemática goza de uma independência científica, conforme Santaella (2005a).

> A matemática é uma ciência que não depende de nenhuma outra, todas as outras dependem dela explicita ou implicitamente. É a única ciência puramente hipotética, indiferente quanto a suas premissas expressarem fatos imaginados ou observados. É a ciência das conclusões exatas a respeito de estado de coisas meramente hipotético. Fundada em premissas não assertivas, não requer nenhum suporte experimental além das criações da imaginação. (SANTAELLA, 2005a, p. 34).

O conceito da Matemática como ciência elaborado pela autora é um dos inúmeros encontrados nas pesquisas acadêmicas e científicas dos quais concordo e usarei aqui para desfazer a imagem de que o conhecimento matemático se dá por meio de construções cognitivas ou nasce exclusivamente de situações reais, estas são algumas vertentes do conhecimento matemático.

Defendo a hipótese de que a Matemática se constitui também a partir da linguagem e não há como ensiná-la sem este elemento. É, portanto, a partir da linguagem escrita que os conceitos matemáticos se constituem. O ensino da Matemática é uma atividade inerente ao funcionamento do jogo de linguagem da Matemática, não se limita aos exemplos da realidade.

As imagens se entrelaçam no ensino da Matemática aos conceitos da Álgebra e da Geometria por meio dos jogos de linguagem, compreender como elas se constituem nesta pesquisa é compreender os conceitos que nelas residem.

Sobre imagens, teorias e conceitos

Considero que analisar e compreender o papel das *imagens* [18] ou da falta delas em situações que envolvem conceitos é semelhante ao que fez Moreno (1995), ao mencionar que Wittgenstein não se dedicou a construir teses sobre as imagens, apenas considerou exprimir parte de seu pensamento através delas.

Uma imagem complexa na História da Matemática foi a invenção tardia do zero, ou seja, a representação deste algarismo tornou-se um grande problema para diversas civilizações, justamente por falta de uma imagem que estivesse associada em compreender o conceito abstrato da ausência de quantidade (IFRAH, 1997).

Optei por iniciar esta parte da discussão pela imagem do algarismo zero, para mostrar que a representação na Matemática se fez necessária aos homens, uma das justificativas para isso é a noção de que para lidar com as quantidades seria importante torná-las factível do ponto de vista prático. Mas, conforme mencionei nos capítulos anteriores, não se trata só de valorizar a materialidade, aplicabilidades e aspectos socioculturais, mas a autonomia da Matemática como Ciência.

Ainda que persista na humanidade o desejo de ter algo concreto como as imagens para se apoiar, já é compreensível que nem sempre podemos fazer a transição entre fatos da realidade e o pensamento, há imagens cujos conceitos são inteligíveis, mas improváveis na realidade, a exemplo das imagens surreais do tríptico de H. Bosch[19].

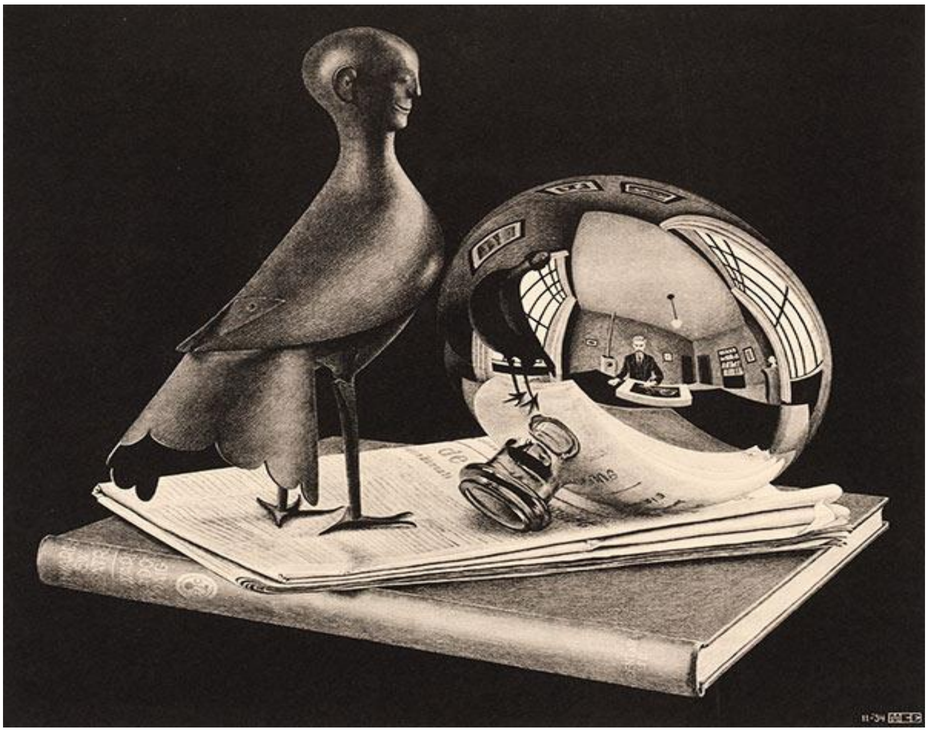
---

[18] Neste capítulo, o papel das imagens se intensifica, considero, portanto, fazer alguns adendos sobre este conceito que terá suma importância ao longo do texto. Não me limito a definir *o conceito de imagem*, por considerá-lo complexo e com muitas aplicações em diversos ramos do conhecimento. Aqui, o conceito de imagem transitará entre as imagens de nosso campo visual, nem sempre aquelas reais. As imagens serão tomadas para efeito de análises de conceitos, a partir do jogo de linguagem wittgensteiniano. Viso de modo específico a constituição de conceitos matemáticos. Os interlocutores terão, portanto, a possibilidade conhecer várias concepções do conceito de **imagem**, nesse sentido, menciono algumas escolas de pensamento que tomam a imagem como objeto de investigação, a saber: a Semiótica peirceana, a Teoria dos Registros de Representação, de Raymond Duval, e da Gestalt do Objeto, pautada em estudos da Psicologia. Por outro lado, reitero que adotei a perspectiva das imagens apontada por Moreno (1995), que amparado em Granger e Wittgenstein, elaborou a *Epistemologia do Uso (2005)* como teoria.

[19] Pintura renascentista do autor Hyeronimus Bosch (1504), denominada Jardim das Delícias Terrenas, localizada no Museu do Prado em Madrid. Para mais detalhes, acessar: https://goo.gl/C7Womg .

No campo das Artes destacam-se os quadros de Escher[20], nos quais há uma prevalência da Geometria em suas criações. Assim como as pinturas de Bosch, as obras de Escher podem ser consideradas impossíveis de ser reproduzidas na realidade, conforme as figuras 11 e 12 a seguir.

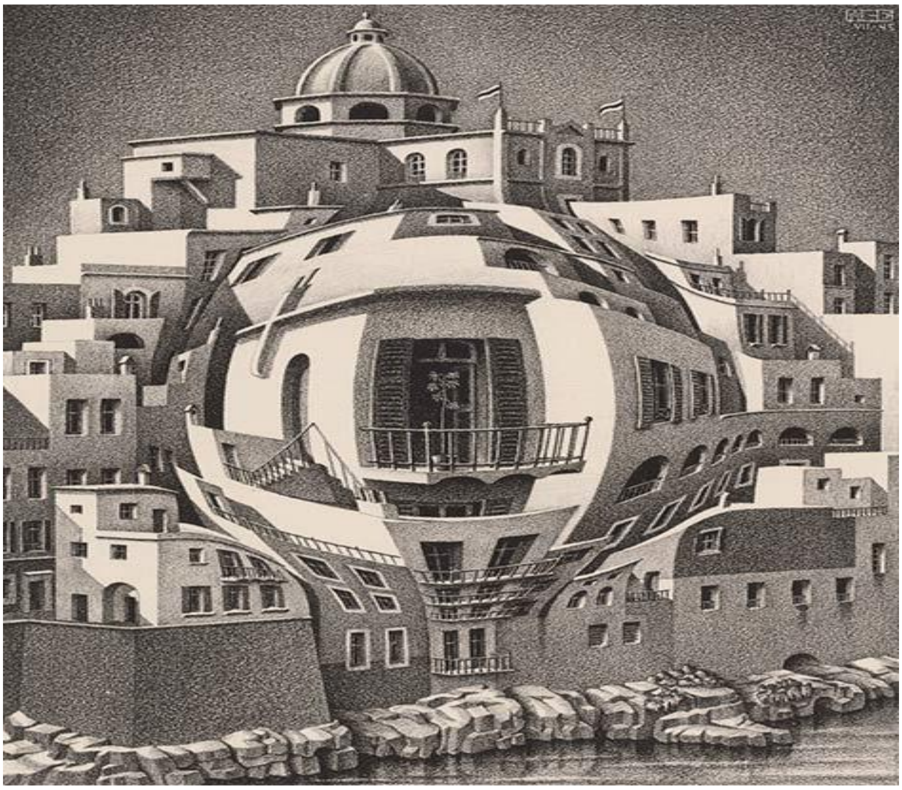
Figura 11 – Ainda vida com espelho esférico



Fonte: Escher (Litografia de 1934)

[20] Algumas obras do pintor holandês Maurits C. Escher (1878-1972) podem ser visitadas virtualmente na página http://www.mcescher.com/gallery/.

Figura 12 – Varanda



Fonte: Escher (Litografia de 1945)

Não é à toa que grande invenções e pinturas chegaram até nós por meio de cientistas, como Galileu e Leonardo Da Vinci. Com isso, se quer chamar atenção para uma forma de comunicação que permeará as discussões deste texto em toda sua extensão, a Linguagem, que se insere neste contexto, à luz da Filosofia e do conhecimento científico para dar ênfase à Matemática, com a finalidade de investigar e responder alguns questionamentos na área da Educação, constituindo assim a presente Tese.

Apresento a seguir algumas contribuições teóricas que envolvem a comunicação por meio das imagens para delimitar o escopo dessa investigação, cujas discussões têm como aporte principal a Filosofia de Ludwig Wittgenstein. Este preâmbulo se faz necessário, em função de que a Semiótica, como teoria geral da linguagem, aborda diversos campos do conhecimento conforme Santaella (2005b). Porém, a autora faz duas ressalvas quanto à abrangência da Linguagem, a primeira versa sobre a definição de Semiótica apresentada que não pretende estar acabada, por considerar que esta ciência estaria morta e assim mataria a inquietação e a curiosidade humana em busca de conhecimento. A segunda, considera a Linguística como outro campo de estudos científicos. As duas ciências cresceram no século XX.

A Semiótica (Ciência dos Signos) desenvolvida por Charles S. Peirce (1839-1914), considerado um dos fundadores do Pragmatismo, juntamente com William James (1842-1910) e John Dewey (1859-1952).

Peirce, cientista com formação eclética, dedicou-se a estudos de Química, Física, Matemática, Astronomia, Linguística, Semântica e Teoria da Comunicação (PEIRCE, 1980). Uma publicação tardia chamada *Obras Escolhidas* dedicada a ele, ressalta que um de seus principais objetivos era apartar-se das formas místicas da Filosofia, se fazendo valer de conceitos experimentais por meio de um método pragmático que pudesse não necessariamente solucionar, mas encaminhar a compreensão de problemáticas de natureza científica. Sua teoria enleia de modo amplo a cognição e assevera que todo pensamento está ligado de forma imprescindível à interpretação e às funções de representação. E esta máxima peirceana deu origem à Teoria dos Signos, de 1931, publicada em Cambridge, pautada na lógica matemática simbólica.

De acordo com Peirce (1980, p. 90) um signo "é entendido como algo que para alguém equivale a alguma coisa, sob algum aspecto ou capacidade", o autor apresenta, assim, uma tríade na qual os signos se dividem em ícones, índices e símbolos sob os quais constrói uma trama extensa e complexa de representações na Linguagem.

A obra de Peirce obviamente não pode ser pretensiosamente resumida em algumas linhas, a ponto de cometer um ato falho, deixando escapar elementos essenciais de seu pensamento. Por outro lado, o *símbolo* é um dos conceitos peirceanos que merece atenção, em especial, por entender que este conceito é parte da vestimenta da linguagem matemática.

Peirce (1980) afirma que símbolo é uma espécie de contiguidade instituída dependente de regras de uso, nesse sentido, pode-se dizer que há aspectos de similaridade entre ele e Wittgenstein, quando o Mestre de Viena destaca em seus escritos que *significado é uso*, ressalvando-se peculiaridades e distinções entre seus campos de atuação na Filosofia.

A Teoria dos Registros de Representação Semiótica[21] foi desenvolvida pelo psicólogo e matemático francês Raymond Duval, publicada em 1995 pelas edições Peter Lang (Suíça), originalmente a obra possui seis capítulos. No Brasil, o capítulo 1 foi publicado por Levy e Silveira (2005), em contribuição às pesquisas na área de Educação Matemática. A teoria de

[21] Título original da obra *Semiosis et Penseé Humaine:* R*egistres Sémiotiques et Apprentissages intellectuels.* A primeira parte do livro foi traduzida do Francês para a Língua Portuguesa, pois, à época, os autores brasileiros que se dedicavam a pesquisas na área da educação matemática, decidiram contribuir com este trabalho para que outras pessoas tivessem acesso às leituras e estudos envolvendo Semiótica e Matemática.

Duval, foi construída sob a égide da semiótica peirceana, mas sua abordagem é voltada à Didática da Matemática mediante estudos e pesquisas desenvolvidos em escolas francesas.

Raymond Duval compõe seus escritos acerca de aspectos cognitivos do pensamento humano, destacando as dificuldades relacionadas à leitura concernente à Matemática em três momentos: no primeiro, ele afirma que não há *noésis* sem *semiósis* para explicitar o paradoxo cognitivo do pensamento matemático e para lembrar que há oposição entre as transformações e as representações semióticas, não obstante, não reconhecer esta diferença causa confusões conceituais. No segundo, Duval passa a evidenciar que sua definição dos Registros de Representação Semiótica é precisa e difere, portanto, da concepção semiótica da Tradução, conforme Jakobson (1969), que versa sobre codificação e decodificação. Para Duval, trata-se de uma **conversão**. Por último, o autor afirma que o que interessa aos que ensinam Matemática é analisar as ferramentas que se destinam à resolução de problemas.

Duval (2005) ressalta há uma especificidade nos registros semióticos que incidem sobre a Linguagem, trata-se particularmente de signos (símbolos), como o da escrita algébrica e de gráficos na Geometria. Essa teoria destaca que um objeto matemático pode ser descrito ou representado por registros diferentes, mas equivalentes e nesse sentido, o autor afirma que é possível fazer conversões de um registro para outro, mas adverte que esta passagem pode ter outros significados ou influenciar na interpretação do sujeito que a usa.

Os registros semióticos constituem-se epistemologicamente de atividades pautadas na cognição, a saber: Formação, Tratamento e Conversão, todas ligadas à aprendizagem intelectual. O autor dedica nessa teoria, considerável espaço para aspectos psicológicos e ressalta que não há regras que deem conta da totalidade de representações semióticas, conforme o excerto a seguir.

> É suficiente considerar a passagem dos enunciados em língua natural a expressões correspondentes em língua formal, ou numa escritura simbólica, assim como a passagem inversa. Ou ainda a passagem de imagem aos textos, e de textos a imagens. E mesmo quando as regras de conversão podem ser claramente definidas, as dificuldades e ambiguidades não são todas para tanto. É o caso, por exemplo, para a passagem entre estrutura simbólica (algébrica) de relações e os gráficos cartesianos correspondentes (DUVAL, 2005, p. 60).

Duval (2005)assinala que a mudança de registro chamada de conversão se dá quando os signos sofrem uma espécie de transformação externa em sua representação de partida (escrita original), por exemplo, a operação de adição entre uma fração e um número decimal 1/4 + 0,25, não pode ser realizada sem que haja a conversão de um de seus **significantes**, ou seja, é necessário que se opere somente com números fracionários (racionais) ou com números decimais e vice-versa, não se pode operar na Matemática com registros diferentes.

É como se tivéssemos escrevendo frase em Língua Portuguesa intercalando-a com palavras da Língua Inglesa. Se os signos e a gramática das línguas diferem, não há como haver tradução. Assim, para realizar uma operação na Matemática, segundo Duval (2005) é imperativo que os códigos linguísticos ou os signos envolvidos pertençam a um mesmo vocabulário, que suas sintaxes sejam semelhantes.

Para Wittgenstein (2009), seria como jogar xadrez com as regras do jogo de damas, o tabuleiro é semelhante, mas as regras que regem os movimentos das peças são distintas. São jogos de linguagem que funcionam em sistemas diferentes, não necessariamente semióticos, como os de Duval. É possível jogar damas usando as peças do xadrez, pois não é a forma das peças que importa, mas as regras que elas carregam consigo dentro de cada jogo. São as regras que definem quão importantes serão os movimentos, jogadas e estratégias que levarão alguém a vencer o jogo. No ensino de Matemática, os alunos sentem dificuldades em operar com signos que não conhecem, principalmente, quando se tratam da escrita algébrica e de gráficos.

Cabe ao professor traduzir a linguagem da Álgebra para a linguagem natural e vice-versa. A Matemática possui códigos que os alunos não dominam. O jogo de linguagem deles é o que faz uso do vocabulário da Língua Portuguesa, não é o jogo de linguagem da Matemática. O jogo de linguagem da Matemática é conduzido pelos professores, os alunos não aprendem sozinhos apenas com a observação, é importante que sejam ensinadas para que eles conheçam suas regras e possam pô-las em prática.

Para Gomes Filho (2009), a Gestalt é uma teoria que se origina na escola de Psicologia Experimental alemã no fim do século XIX e tem como precursor o filósofo austríaco Christian Ehrenfels, que publicou em 1890 o artigo *Über Gestalqualitaten* (Duas Qualidades Gestálticas). O autor reitera que já na primeira década do século XX, esta teoria teve seu nome associado a três autores: Max Werteimer, Wolfang Kholer e Kurt Kofka, todos da Universidade de Frankfurt. O termo *Gestalt* possui várias acepções, descritas de forma resumida em dicionários ou enciclopédias, porém, segundo Engelmann (2002, p. 2) "o que se entende pela palavra "Gestalt" desde a época de Goethe, apresenta dois significados diferentes (1) a forma, (2) uma entidade concreta que possui entre seus vários atributos a forma".

Para o autor, a segunda acepção é a mais aceita e usada pelos gestaltistas do grupo de Berlim. Assim, esta palavra não possui uma tradução para outras línguas, como adverte Engelmann (2002), o termo *Gestalt* deve assim ser usado, pois, esta é a melhor forma de manter sua originalidade. Engelmann (2002) destaca que parte das contribuições que a Gestalt usa são provenientes de experimentos realizados quando da observação de comportamentos luminosos, ou seja, a incidência de luz sobre objetos, em especial, quando o referente ou o referencial estão em movimento. Werteimer observou, por exemplo, o movimento (comportamento luminoso) emitido pelas lâmpadas dos postes de iluminação a partir do vagão em que se encontrava ao viajar de trem de Viena rumo à cidade de Renânia (ENGELMANN, 2002).

No livro *Gestalt do Objeto*, Gomes Filho (2009) apresenta um sistema de leitura (percepção visual) baseada na pregnância da forma, cuja origem dos estudos e pesquisas científicas se devem às escolas da Gestalt. Para o autor, o conteúdo deste sistema não visa somente a forma, trata também sobre vivências e experiências de natureza estética, com a intenção de fazer fruir o sentimento de beleza em diversas manifestações visuais. Este sistema consiste fundamentalmente de **rebatimentos** nas leis da Gestalt, além de outras categorias de organização conceitual sobre objetos. O termo Rebatimento significa para Gomes Filho (2009, p. 14): "traduzir conceituações ou formulações abstratas e geométricas em aplicações conceituais práticas sobre objetos reais, existentes", esta parte das observações presentes na Teoria da Gestalt do Objeto, chama atenção para a presença da **Geometria**, e mais por tratar-se uma espécie de tradução conceitual.

Por outro lado, quando se trata de objeto, este conceito é símile de *coisa* no senso comum, ou seja, um objeto figura na realidade como algo que pode ser tocado ou visualizado a olho nu. Um objeto pode, portanto, ser confundido com a figura geométrica plana do quadrado através dos blocos lógicos (material pedagógico) conhecido nas atividades escolares, mas os objetos da Geometria não se encontram no mesmo plano conceitual dos objetos reais, destacar este aspecto é importante no ensino da Matemática.

Outro ponto que suscita curiosidade sobre as imagens é a perspectiva teórica da Antropologia Visual com inserção das fotografias nas discussões de Etienne Samain, antropólogo francês radicado na Unicamp desde 1984. Os conceitos discutidos por Samain no livro *Como Pensam as Imagens* (2012) amparam-se nas contribuições epistemológicas de vários autores, como Gregory Bateson, Aby Warburg e Georges Didi-Huberman.

A Antropologia Visual traz para o contexto das imagens vários questionamentos sobre o conceito de imagem, o que chamou minha atenção mesmo fora do contexto da Matemática no intuito de ampliar meu arcabouço teórico sobre este conceito. Nessa direção, uma imagem da qual sempre recordo remete aos desenhos rupestres encontrados em cavernas pré-históricas, que para além de contar um pouco das formas de vida daquelas civilizações, contam também uma parte da História da Matemática.

Vale ressaltar que a temática que investigo difere do que é discutido por Samain (2012), mas ao me deparar com a imagem de uma *"caligo beltrao"* vulgo, borboleta-coruja, na capa de seu livro, procurei saber qual conceito de imagem havia sido abordado pela Antropologia Visual naquele contexto. Ao folhear o livro, descobri que as imagens vão muito além do aspecto físico, agora não mais as compreendo como limitadas, transcrevo na passagem a seguir alguns conceitos de imagem mencionados no livro de Samain.

> [...] em outras palavras: como se orientar ante a imagem e dentro da imagem, sendo a nossa dificuldade de orientação decorrente do fato de que a imagem "deve ser entendida ao mesmo tempo como documento e objeto de sonho" [Sigmund Freud], "como obra e objeto de passagem" [Walter Benjamin], "monumento e objeto de montagem" [Sergei Eiseinstein], "não saber" [Georges Bataille] e "objeto de ciência" [Aby Warburg] (SAMAIN, 2012, p. 22).

O conceito de imagem na concepção da Antropologia Visual se deu no contexto desta pesquisa, no sentido de saber como vemos as imagens na Matemática, ou seja, o que elas significam? As imagens na Matemática têm alguma proximidade com os conceitos antropológicos? Na intenção de tentar sanar estas inquietações, ressalto que o jogo de palavras usado pelos autores (conceitos) aproxima-se do que foi dito por Wittgenstein (2009): não pense, observe como as palavras funcionam, o significado está nos seus usos (emprego) e nas formas de vida com as quais elas se entrelaçam, a grafia das palavras é apenas um destes usos na Linguagem.

As imagens que figuram no âmbito da Antropologia Visual, da Semiótica peirceana ou dos registros de representação de Duval foram mencionadas nesta pesquisa, pois constituem-se campos do saber que abordam conceitos. Há diferentes jogos de linguagem na constituição do conceito de imagem, e nenhum deles é igual ao outro. Esta imersão se deu no sentido de captar alguns conceitos fora da Matemática para auxiliar nesta pesquisa, a constituição do jogo de imagens entre Álgebra e Geometria, visando à tradução na Matemática.

Diante do exposto, ressalto: as imagens na Matemática não podem ser visualizadas com imagens no sentido *lato*, elas não figuram como carros, paisagens e fotografia de pessoas que fazem parte de nosso cotidiano. Os sólidos de Platão e as curvas geométricas, por exemplo, fazem parte de conceitos e definições restritas aos domínios da Matemática, outros campos de atuação usam-nas em contextos diferentes para elaborar outros conceitos, como as pinturas do Cubismo e as obras de Escher no século XX.

Como professor, me ocupo em ensinar os aprendizes a interpretar curvas geométricas a partir da linguagem da Álgebra usando recurso da informática (MELO, 2015). Procuro ao discutir e analisar como estes conceitos se constituem, com o propósito de desfazer no contexto educacional ilusões imagéticas enfatizadas na concepção referencial da linguagem e pelo uso imediato de conceitos, de onde se concluiu tacitamente que a natureza das formas geométricas é proveniente das formas encontradas na realidade. Mas, afirmações tácitas estão propensas à dúvidas ou incertezas acerca do que vemos (imagens cotidianas), é o que acontece com o famoso quadro de René Magritte (1929), mostrado na figura 13.

Figura 13 – Tela *A traição das imagens*

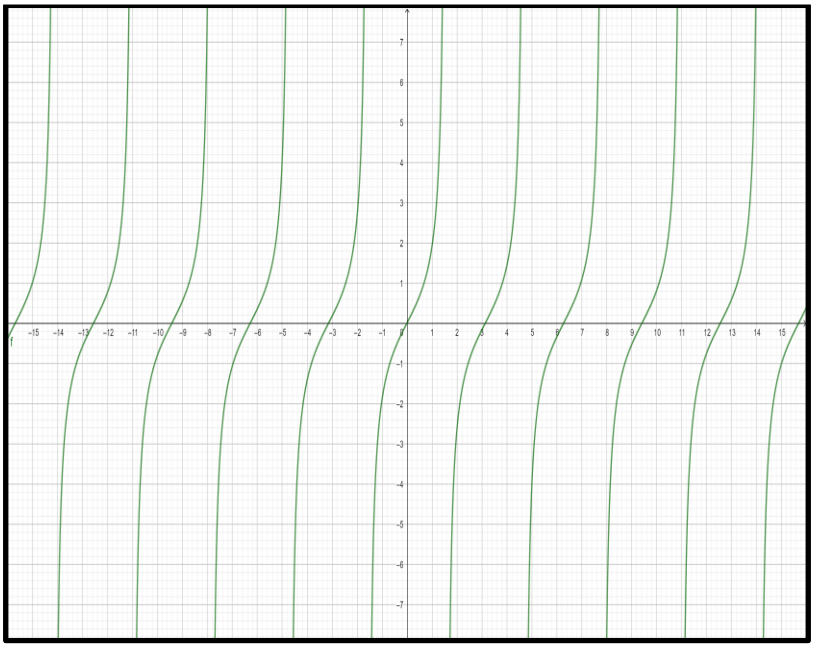
Fonte: René Magritte (1929), adaptada de Barros (2016, p. 10)

Nesse quadro, por mais conhecida que seja a figura de um cachimbo, a frase que compõe a tela pintada pelo artista afirma – *Isto não é um cachimbo* (tradução do francês). O artista pensou a frase com a intenção de chamar a atenção do público instaurando uma dúvida nos observadores, mas, se não é um cachimbo, o que será então? A genialidade da obra repousa sobre os conceitos primitivos que temos de imagens. Mesmo para quem conhece o objeto cachimbo somos levados a duvidar... A mensagem subliminar que o artista deixou foi a de que não se trata de um cachimbo, mas da **imagem** de um cachimbo.

Ressalto que o impacto ou a surpresa gerada pela dúvida não seria o mesmo para quem não consegue traduzir a frase que faz parte do quadro. Talvez a genialidade do artista e o seu reconhecimento pela obra passassem em branco para um observador que não possui qualquer habilidade de tradução ou mesmo por alguém que não se interessa por obras de artes, mas se alguém se dispuser em fazer a tradução da frase para quem observa o quadro, é quase certo que a afirmação instigue a curiosidade do ouvinte. É inevitável, portanto, a pergunta: porque apesar de estarmos diante de algo conhecido, o artista afirma que não se trata de um cachimbo?

Por outro lado, suponha-se para a mesma pessoa que viu o cachimbo no quadro de Magritte, seja apresentada a imagem da figura 14 a seguir, sem nenhuma legenda. O que ela dirá?

Figura 14 – Curva Trigonométrica arctg(x)



Fonte: Elaboração do Autor (2018)

Diante desta imagem, não dá para afirmar ao certo o que o observador pode dizer por se tratar de uma simulação aqui sugerida. A hipótese que levanto é de que, neste caso, por não se tratar de uma imagem tão conhecida, como a de um cachimbo ou cadeira, a pessoa diga que não sabe do que se trata. É possível, ainda, que alguém tente emitir uma opinião por suposição. É difícil, portanto, conceituar ou emitir opinião sobre algo desconhecido. Esta não é uma imagem correlata, não figura na memória visual das pessoas que não fazem parte da forma de vida de quem ensina Matemática. Assim, um leigo no assunto não tem como estabelecer um jogo de linguagem para defini-lo, nem por palavras e nem pela imagem na Matemática.

Logicamente, esta imagem não possui as mesmas características que o cachimbo do quadro de Magritte (1929). Não há, portanto, semelhanças familiares entre estas imagens e esta falta de relação, implica em não ser possível jogar com as palavras para emitir uma opinião razoável sobre o significado que este gráfico carrega consigo, mas no contexto educacional lidar com este gráfico consiste em ensinar a ler, interpretar e traduzir imagens da Matemática na perspectiva do jogo de linguagem wittgensteiniano.

Barros (2016, p. 11) adverte “os saberes científicos que se apoiam em uma ossatura matemática podem reduzir os termos que expressam os seus conceitos a uma fórmula, um algarismo, um símbolo!" e nesta pesquisa, os conceitos têm importância fundamental. Nesse sentido, elaborei com o auxílio do *GeoGebra*, a ilustração anterior da figura 12, e esbocei alguns argumentos sobre a especificidade dos conceitos e das imagens na Matemática, ou seja, só consegue traduzir em imagens a função **arctg(x)** quem possui domínio do conceito matemático que a engendra. Não se trata apenas de dar um nome para o gráfico, existe uma lei de formação e uma definição que rege estas curvas na Trigonometria. Só conhecendo o jogo de linguagem da Matemática é possível dizer conhecer o significado, não se trata de um jogo de adivinhação.

Segundo Moreno (1995), Wittgenstein não estava preocupado em construir uma teoria psicológica das imagens, mas enxergar através delas. Para isso, ele elabora uma espécie de terapia filosófica para que pudesse não deixar ninguém se iludir por usos limitados e unilaterais da Linguagem (imagens), quase sempre atreladas à concepção referencial agostiniana. Moreno procura esclarecer, o que Wittgenstein quis dizer com a palavra *terapia*.

> A terapia filosófica não toca os fatos, mas exclusivamente as imagens que dirigem os nossos pensamentos. Se, entretanto, fica assim assegurada a autonomia do discurso filosófico, a terapia do pensamento por via das imagens incide diretamente sobre a Crítica da Razão, indicando o seu dogmatismo: teoria a respeito das formas legitimas e exclusivas do conhecimento positivo. A terapia filosófica é mais radical do que a crítica transcendental porque está ancorada na linguagem: a descrição gramatical dos usos da linguagem supera o resíduo dogmático da crítica transcendental à medida que desvela a multiplicidade de formas linguísticas que são não apenas o meio de expressão do pensamento, mas, principalmente, formas que constituem e instauram os próprios objetos do pensamento: o que é um objeto do pensamento, afirma, Wittgenstein, é dito pela gramática (MORENO, 1995, p. 12).

Com essa passagem, o autor inicia suas discussões sobre o **papel das imagens** em Wittgenstein no intuito de mostrar que o pensamento se ancora na linguagem. Moreno (1995) adverte que se faz necessário atentar para que as imagens não nos preguem peças e nos iludam, a exemplo do que acontece com a linguagem *standard* em Santo Agostinho.

O debate acerca das imagens de que me ocupei nesta pesquisa visa dar perspicuidade ao ensino de conceitos matemáticos como forma de representação, a exemplo do que foi dito por Wittgenstein nas *Investigações Filosóficas* (2009). Espero, assim, tecer uma configuração imagética que permita dar sentido à constituição de conceitos matemáticos no contexto da Educação.

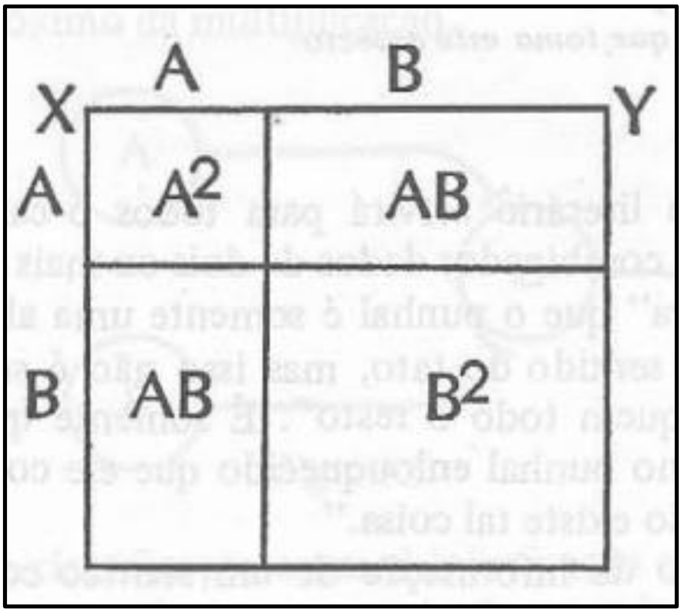
Apresento de forma breve na seção seguinte, alguns conceitos acerca das imagens na Matemática, no intuito de evidenciar a gramática dos jogos de linguagem específicos via tradução. Procuro desta forma estabelecer conexões entre os campos teóricos da Tradução, visando constituir o conceito de tradução interna na Matemática, bem como o conceito de Jogo de Imagem à esteira do pensamento de Ludwig Wittgenstein.

Uma imagem subjetiva da linguagem?

No ensino da Matemática têm sido frequentes por parte dos professores as tentativas de apresentar aos alunos formas que se destinem ao melhor entendimento de conceitos da Matemática, como é o caso de explicar com auxílio da Geometria, a expressão algébrica $\mathbf{(a+b)^2}$ que resulta em $a^2+2ab+b^2$.

Bateson (1986) faz duas afirmações sobre o desenvolvimento da expressão que ele denomina como expansão binomial. A primeira é que qualquer estudante sabe que $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ e a outra é de que esta relação envolve o que o autor considera como Linguagens Sinônimas, no livro *Mente e Natureza* (1986), conforme a figura 15.

Figura 15 – Representação geométrica de $(a+b)^2$



Fonte: Adaptado de Bateson (1986, p. 82)

De acordo com o que Bateson (1986) propôs ao ilustrar a expressão $(a+b)^2$ na figura 15, ressalto como professor de Matemática que é importante considerar a forma de vida com que se aborda o assunto e atentar para o jogo de linguagem empregado na afirmação de precaver os interlocutores quanto ao teor da frase “linguagens sinônimas”. Farei alguns contrapontos sobre a exemplo apresentado pelo autor, com base também noutra afirmação: “todo estudante sabe”.

Bateson (1986) destaca com esta frase que o desenvolvimento desse produto notável é uma regra comum na Matemática.

Nesse sentido, a palavra **sabe** tem a força da expressão de quem sabe algo, domina este conteúdo (saber implica, portanto, em aplicá-lo e poder prová-lo), mas ao contrário de Bateson (1986) ressalto que é importante ter cautela para evocar tal premissa, pois há pesquisas que apontam na mesma direção, a exemplo de Rojano (1994), que os alunos frequentemente confundem $\mathbf{(a+b)^2}$ com $\mathbf{a^2+b^2}$. Silveira (2015) também detectou problemas semelhantes na compreensão e aplicação de regras matemáticas dessa natureza, na mesma direção Baruk (1975; 1996), afirmou que os alunos cometem erros ou falhas clássicas ao lidar com expressões da Matemática em seu aprendizado.

Os relatos das autoras provêm de larga experiência no ensino da Matemática e denotam e podem confirmar que os aprendizes, por não dominarem regras matemáticas, confundem também suas aplicações e mais: confundem uma regra com a outra, por vezes, em função das semelhanças em sua escrita (sintaxe). Assim, a afirmação generalizante de Bateson (1986) é, a meu ver, imprecisa e perde força quando se trata de ensino da Matemática, por não as amparar em argumentos suficientemente consistentes no contexto epistemológico da Matemática. Tal afirmação requer fundamentos que não se pautem apenas na observação, mas na forma de vida dos professores que ensinam Matemática.

Do ponto de vista docente, observei que Bateson (1986) usa caracteres minúsculos na expressão algébrica, mas na figura 15, usa-os em caixa alta e esta diferença na escrita (sintaxe) para um professor de Matemática pode até ser considerada irrelevante, mas para os alunos é passível de confusão. A análise que faço ressalta a importância da linguagem matemática no ensino e isso nem sempre é observado por aqueles que não conhecem as regras desse jogo de linguagem. Assim, Bateson (1986) deixa escapar em sua observação a natureza da constituição do conceito matemático implícita no produto notável $\mathbf{(a+b)^2}$.

Assim, é fácil constatar que os alunos tendem a seguir à risca o que é dito na sala de aula, ou seja, se usamos na expressão $\mathbf{(a+b)^2}$ a letras **a** e **b** e nos exercícios seguintes, bem como nos testes avaliativos e nas provas, e se estas letras forem substituídas por **x** e **y**, os alunos passam a imaginar que se trata de outra expressão ou que esta expressão possui significado diferente daquela que foi ensinada anteriormente. Não se trata apenas de uma troca de variável, a mudança na escrita implica também em atentar para a possibilidade de que esta mudança pode sugerir uma mudança de significados para os aprendizes. Para Wittgenstein (2009), só participa da forma de vida de um jogo quem conhece e aplica corretamente suas regras, situação semelhante se aplica ao jogo de linguagem da Matemática.

Para quem não domina o jogo de linguagem da expressão **$(x+y)^2$**, a mudança de signos para **$(a+b)^2$** pode suscitar que há nessa expressão outro jogo de linguagem, outra regra? Ressalto, o significado da palavra, parece, não é o mesmo da palavra certeza. Logo, é preciso esclarecer que a mudança de letras é como a substituição de uma bola no jogo de futebol por outra. A regra do jogo se mantém, a bola não interfere no sentido da partida. A troca de signos (letras) de uma expressão para outra, não muda "a regra do quadrado da soma de dois termos" na matemática.

Com base no pensamento de Wittgenstein (2009), levanto o seguinte questionamento sobre a possibilidade daquilo que uma regra pode nos ensinar, ou seja, o que diriam ou como reagiriam os alunos diante expressão **$(a+b)^2$**? Para o filósofo, a interpretação por si só não é suficiente, ela não dá suporte para chegar à conclusão de que esta expressão se expande para $a^2+2ab+b^2$, eles podem simplesmente dizer que não sabem do que se trata.

As interpretações que eles fazem se baseia no que já é conhecido, usam de subjetividades que podem pairar no ar. A regra matemática por outro lado é objetiva. O significado dessa expressão só faz sentido por quem a usa, ou seja, para que ela seja conhecida, faz-se necessário ensiná-la. É assim que os alunos aprendem também as regras de acentuação das palavras na gramática da Língua Portuguesa. No aforismo 198, das *Investigações Filosóficas* (WITTGENSTEIN, 2009, p. 112) adverte, "as interpretações por si só não determinam o significado".

Bateson (1986) tenta estabelecer condições de sentido e significado para justificar sua afirmação de que as linguagens da Álgebra e da Geometria são sinônimas, como foi dito anteriormente. Vale ressaltar que na Matemática, estas linguagens são distintas, fazem parte de jogos de linguagens com sintaxes e conceitos diferentes. A gramática que rege a linguagem da Álgebra não é equivalente à gramática que rege a linguagem da Geometria. Na Matemática, usamos, quando possível, os recursos imagéticos da Geometria para dar sentido à linguagem da Álgebra, que é sucinta e econômica, e isso ocorre também na Geometria quando dizemos que a área de um círculo é dada pela fórmula πr^2. A linguagem da Álgebra funciona ou opera no intuito de que os elementos imagéticos da Geometria possam ser visualizados e tornem-se compreensivos para os aprendizes.

A intenção é de que estas imagens auxiliem na compreensão de conceitos matemáticos, mas em outros campos teóricos, a exemplo do Construtivismo no ensino da Matemática, as imagens reais são tratadas como equivalentes ao conceito matemático. A construção do conhecimento se vale de que ensinar Geometria se pauta na manipulação em objetos para chegar ao conceito matemático. É como se conceito estivesse incrustrado na imagem ou nas palavras por uma correspondência, cada palavra denomina um objeto. As observações tácitas e acordos consensuais não se coadunam com a epistemologia do pensamento formal a exemplo do que afirma Granger (1974; 2013).

A afirmativa de Moreno (1995) de que *as imagens* são conceitos, converge com o que penso à luz da filosofia de Wittgenstein. O autor destaca que os conteúdos do mundo chegam até nos por meio de técnicas preparatórias para o uso das palavras, ou seja, de gestos ostensivos e de comportamentos que fazem parte do ensino e da aprendizagem. Tais técnicas são usadas para dar significação conceitual à aplicação das palavras em nosso jogo de linguagem: “são meios de apresentação... linguisticamente elaborados, fixam-se em expressões e palavras e passam, sob esta forma linguística, a estabelecer correlações com outras expressões e palavras” (MORENO, 1995, p.50).

A Álgebra pode assim ter uma representação geométrica em casos particulares, como o que foi apresentado por Bateson (1986), mas esta representação não coloca palavra e conceitos em relação de sinonímia. Suponho que à época do lançamento das ilações de Bateson, o autor ainda não dispunha das informações que temos atualmente. Nesse sentido, suas afirmações carecem de sustentação matemática, pelo que há no texto, as afirmações feitas são de cunho empírico ou baseadas na percepção do autor sobre a Matemática daquela expressão algébrica.

Bateson afirma ainda que não existe linguagem objetiva, este ponto vai de encontro ao que defendo neste texto, com base no que dizem Granger (1974) e Popper (1975) acerca da linguagem formal e do estilo de fazer ciência, bem como pelo atributo de que a Matemática é uma ciência objetiva. Se não existe linguagem objetiva, como foi dito por Bateson (1986), o que representa um texto como este ou uma redação na Língua Portuguesa, que nas provas do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) deve ser escrita em não mais de trinta linhas.

As fórmulas ou notações da Matemática objetivam o pensamento de como as palavras o fazem na Língua Portuguesa. E mais: como podemos objetivar um texto matemático por meio da linguagem natural? Para sanar este problema é que o vocabulário da matemática emprega simbologias próprias, pois não há como realizar cálculos com as mesmas regras que usamos para ler um poema.

Nesse sentido, ressalto que a afirmação universal de Bateson (1986) sobre a não existência de uma linguagem objetiva, possui o caráter de uma afirmação particular aplicado às Ciências da Natureza ou nas Ciências Humanas por exemplo, mas não se adequa às ciências exatas. A linguagem objetiva da Matemática e os conceitos nela engendrados, possuem aplicabilidades que só funcionam em seu sistema, são códigos específicos que precisam ser traduzidos.

Bateson (1986) faz alusão, ainda, ao fato de que os alunos desconheceriam o tipo de relação apresentada por ele, entre a expressão algébrica $(a+b)^2$ e a forma geométrica apresentada na figura 15, e mais: considera que este tipo de estratégia como truque ou mágica usados para estabelecer o efeito da descoberta em Matemática, o que pode, em algum momento, ser considerada uma espécie de relação mútua a bem do esclarecimento subjetivo. Espero ter esclarecido, no entanto, que não há equivalência ou sinonímia entre a linguagem da Álgebra e a Geometria. O que há é um jogo de linguagem de representação de um sistema conceitual para outro. Assim, o jogo de linguagem da Álgebra pode estar associado ao jogo de linguagem da Geometria, e são, para Wittgenstein (2009), formas de representação.

Espero com esta breve argumentação ter dissolvido a imagem de que não existe linguagem objetiva, como afirmou Bateson (1986), ao apresentar as premissas anteriores acerca de experimentações mente/natureza no sentido amplo. Tais afirmações, reitero, necessitam de amparo em formas de vida específicas, trazer conceitos de um campo para outro não funciona por equivalência tácita, são jogos de linguagens distintos.

O objetivo aqui, ao lidar com imagens na Matemática, se deve ao esclarecimento conceitual acerca da visão perspícua em Wittgenstein, conforme Glock (1998). A constituição de conceitos matemáticos será retomada no decorrer deste texto. Não obstante, mencionei o pensamento de Bateson (1986), sobre suas versões múltiplas do mundo, para realçar a importância da Linguagem e da natureza do conhecimento matemático. Por outro lado, assinalo que nos domínios da Antropologia Visual suas contribuições sobre as imagens são relevantes, assim como fez Escher ao usar em suas obras de arte a Geometria.

A força das imagens e o ensino da Matemática

Considerando a perspectiva da linguagem nas aulas de Matemática, notei que certos conceitos da Álgebra, a exemplo do que foi mencionado anteriormente por Bateson (1986), podem ter uma vestimenta (roupagem) na Geometria. Alguns destes conceitos estão interligados, por isso, procurei explorar o que a Geometria traz consigo em abundância, as *imagens*.

Nesse sentido, ressalto que as demonstrações da Geometria euclidiana plana/espacial, os estudos de Funções, a Geometria Analítica e a Trigonometria são eivados de imagens. Como visto, diferentemente das concepções da escola pitagórica e da axiomática euclidiana, atualmente, o ensino de Geometria está amplamente relacionado com a Álgebra. No campo de pesquisas da História da Matemática, são conhecidas as expressões geometria-algébrica e de álgebra-geométrica. Assim, atualmente, dificilmente alguém determina a área de um quadrado, exclusivamente via desenho geométrico, o mais comum é que se associe à figura de um quadrado de lado **x** (medida), a expressão algébrica ou fórmula **S=x²**.

As imagens que fazemos dos conceitos matemáticos nem sempre dependem de observações empíricas ou de intuições, a exemplo do célebre diálogo socrático (PLATÃO, Mênon, 2001). Neste diálogo, Platão descreve uma conversa entre Sócrates, Mênon e o seu escravo Ânito sobre geometria na Grécia Antiga, na qual Sócrates se vale de argumentos indutivos para afirmar, que mesmo sem possuir qualquer fundamento da Geometria, o escravo consegue responder à várias perguntas sobre o assunto. Sócrates emprega o método dialético para induzir conceitos acerca de uma figura geométrica que Ânito supostamente desconhece, por outro lado Sócrates sustenta a hipótese de que tal conceito já existe, é preciso apenas que seja ativado por meio de algumas indagações.

Platão relata em (Mênon, 2001, p. 36), "figura é o limite do sólido" e trechos de um diálogo como esse, ilustram o texto entre outros conceitos, como o de cor e o de superfície quadrada. Ora, não vou adentrar nos liames da discussão filosófica platônica, mas tomar conhecimento de um texto desta natureza, tem como propósito situar o leitor acerca de conceitos de alguns geométricos nesta pesquisa à luz da Linguagem.

De maneira ilustrativa no diálogo Mênon, segundo Sócrates, Platão ressalta a lógica de que conhecimento humano está nalgum lugar da mente humana, basta que para isso, possamos acessá-lo com perguntas e argumentações lógicas, que ele considera como certezas e é assim que Sócrates recorre ao escravo Ânito e pergunta:

> SO (Sócrates). Dize-me aí menino: reconheces que uma superfície quadrada é desse tipo: – ESC (escravo). Reconheço. – SO. A superfície quadrada é <uma superfície> que tem iguais todas estas linhas, que são quatro? – ESC. Perfeitamente. – E também não é uma é <uma superfície> que tem iguais estas <linhas> aqui, que atravessam pelo meio? – ESC. – SO. E não é verdade que pode haver uma superfície deste tipo tanto menor quanto maior? – ESC. Perfeitamente. – SO. Se então este lado for de dois pés e este de dois, de quantos pés será o todo? Examina da seguinte maneira. Se <por este lado> fosse de dois e por este um só pé, a superfície não seria de uma vez dois pés? – ESC. Sim. – SO. Mas, uma vez que por este também é de dois pés, < a superfície> não vem a ser de dois vezes dois? – ESC. Vem a ser. (PLATÃO, *Mênon*, 2001, p. 55). As marcações e legenda do diálogo neste trecho, foram empregados pela tradutora).

Nessa passagem, o Sócrates de Platão emprega o método da indução para dar a Ânito a impressão de que as informações que lhe são mostradas, seguidas de perguntas com tom afirmativo, podem ser respondidas com base em ilustrações convincentes. Subsiste neste diálogo a ideia de que determinado conceito já faz parte da natureza humana, ainda que esteja adormecido e precise ser despertado. Não obstante, os conceitos geométricos de linha, superfície e sólido não necessariamente precisariam ser ensinados, mas mediados por alguém que os domina.

Diante do exposto no diálogo Mênon, revisitado para o campo da Educação, cabe a seguinte indagação: como pode alguém entender a natureza do conhecimento matemático a partir de algo que não foi lhe ensinado? Obviamente, não há interesse aqui em refutar o diálogo socrático, mas fazer uma analogia na perspectiva wittgensteiniana acerca do jogo de linguagem empregado pelo Sócrates platônico. Ora, para um leitor atento, é possível notar que o método dialético empregado por Sócrates é regido pela Linguagem, para estabelecer a comunicação entre os interlocutores. Sócrates habilmente ilustra cada lance do seu jogo de linguagem, com argumentos pautados tanto em certezas aparentes quanto em dúvidas geradas a partir de suas ilustrações, com a finalidade de alcançar seu êxito, provar que Ânito no fundo sabe geometria.

De acordo com a narrativa platônica, um entendimento possível acerca da empreitada de Sócrates em Mênon consiste em tipo de ensinamento, ainda que, o objetivo da conversa fosse mostra que nada ali se tratava de ensino e sim de um aprendizado. Para Sócrates, Ânito foi conduzido a responder coisas que já sabia, ou seja, o que foi lhe mostrado era apenas uma constatação de que o que já se sabe, não precisa necessariamente ser ensinado.

Assim, uma aproximação possível do diálogo Mênon com as teorias pedagógicas atuais na Educação revela que o diálogo socrático sobrevive nas premissas de que é o sujeito que constrói seu conhecimento, assim, para que haja uma aprendizagem significativa por parte do aprendiz, o professor precisa despertar no aluno “competências”. Não obstante, o papel do professor contemporâneo retrata o Sócrates mediador, ou seja, não é o professor quem ensina, é o sujeito que aprende. Os estímulos cognitivos colaboram no aprendizado de conceitos, para que vir à tona, algo que está no campo das ideias, precisa estar conectado à realidade. Essa imagem lembra outro estilo filosófico, aquele que lembra a *Eureka* aristotélica, cuja descoberta vem da intuição. Por este princípio, a descoberta seria uma virtude do aprendiz.

A compreensão de conceitos matemáticos estaria neste bojo, mesmo sem ser ensinados são os indivíduos que intuem habilmente seu aprendizado. A lógica educacional por trás destas ilações, continuam a ser validadas atualmente. A imagem que se tem ao ler o diálogo platônico Mênon, é prova de que as palavras (argumentos) possuem força na história da humanidade, a inspiração filosófica advinda dos mestres gregos perdura.

Na contexto educacional brasileiro, há inúmeras imagens relacionadas ao conhecimento matemático, porém, poucas retratam a Matemática na perspectiva da Linguagem. Não obstante, retomo esta perspectiva, revisitando passagens de obras importantes na Filosofia ligadas à

Matemática, no intuito de relembrar métodos e técnicas empregados na produção do conhecimento ao longo da História.

No intuito de elucidar o papel filosófico das imagens na Linguagem é que Moreno (1995) destaca que elas possuem força.

> A força das imagens, manifesta-se na necessidade que lhes atribuímos. Assim, por exemplo, como diz Wittgenstein, pensamos que "não é possível imaginarmos o contrário" daquilo que a imagem nos sugere: que "minha dor" não seja uma sensação privada, ou que todos os corpos não possuam extensão, ou ainda, que um objeto não seja idêntico a si próprio, [...] uma imagem é, portanto, necessária porque parece-nos não ser possível imaginar sua negação (MORENO, 1995, p. 35).

Para Moreno assim como para Wittgenstein, a palavra imagem tem significado filosófico, ambos consideram que as imagens merecem tratamentos terapêuticos para que venham a nos iludir. Compactuo com o jogo de linguagem dos autores, no intuito de dissolver imagens que levem as falseamento de conceitos matemáticos, quase sempre provenientes de justificativas pautadas numa realidade, que nem sempre é a realidade da matemática. Assim, na maioria das vezes que me refiro a imagens aqui, busco ampliar o significado deste conceito na Matemática, por meio de conexões entre Álgebra e da Geometria.

Se devemos valorizar a ideia e o pensamento abstrato da Matemática, não há como fazê-lo ou torná-lo objetivo se não for por meio da Linguagem. Este é um dos aspectos fundamentais desta pesquisa, que se coaduna com a afirmação feita por Gottschalk (2015), de que é praticamente impossível haver aprendizado sem o uso da Linguagem.

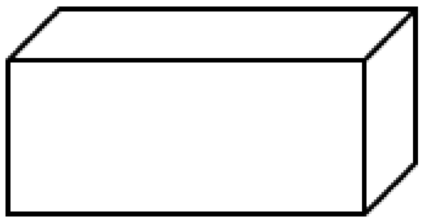
Quanto a esta possibilidade, já no final do século XVIII, a hipótese *weltanschauung* (visão de mundo) de Wilhelm von Humboldt (2009) formulada entre 1795 e 1796, assim como o movimento conhecido como Virada Linguística, no século XX, corroboram como argumentos semelhantes sobre a impossibilidade de haver pensamento sem linguagem.

Na mesma direção, compactuam com a ideia deste autor, Hamann, que afirma – razão é linguagem, sem palavra não há razão e Heder que assinala – linguagem é critério de razão (HUMBOLDT, 2009, p.1).

A Matemática, segundo Wittgenstein (2003), pode ser vista como uma espécie de cálculo gramatical, bem como na segunda parte das *Investigações Filosóficas* (WITTGENSTEIN, 2009), em que algumas destas aplicações são mencionadas pelo filósofo com maior ênfase. Nesse sentido, analiso expressões matemáticas em torno da Álgebra, bem como aspectos imagéticos da Geometria a partir de discussões wittgensteinianas[22] sobre *jogos de linguagem*. Esta expressão significa "a totalidade formada pela linguagem e as atividades com as quais ela vem entrelaçada" (WITTGENSTEIN, 2009, p. 19).

Outros conceitos wittgensteinianos, como semelhanças de família, revelação do aspecto e ver como, integram esta pesquisa no bojo da Filosofia da Linguagem e do contexto da educação matemática. Tais expressões foram analisadas aqui, por vezes, do ponto de vista imagético, buscando relações com a Matemática e parto da permissa de que a percepção está ligada ao modo pelo qual vemos as coisas, a exemplo da figura 16.

Figura 16 – Caixa



Fonte: Imagem adaptada de Wittgenstein (2009, p. 254)

O que representa a figura acima? Nas *Investigações Filosóficas,* Wittgenstein (2009) sugere que se pode imaginar ser esta figura um objeto de vidro, uma caixa, uma estrutura de arame, três peças de madeira que formariam um ângulo entre si.

Cada vez que se olha para uma imagem, segundo o Mestre de Viena, interpretamo-la de forma diferente, o que leva a inferir que, sem um texto ou contexto, que serve para dar suporte à imagem/objeto, ela pode ser qualquer coisa. No entanto, um professor de Matemática, pela vivência visual e técnica que possui com objetos de natureza geométrica, diria, obviamente, se tratar de um paralelepípedo, já um aprendiz ou pessoa que não tem a mesma prática cotidiana, poderia dizer que é uma caixa ou um bloco de madeira.

Para evitar especulações semânticas sobre as imagens que podem ser explicadas à luz das teorias da Gestalt e da Semiótica, vou me deter nos usos e funcionamento da linguagem pautado no jogo de linguagem wittgensteiniano. Para tanto, observei como as palavras se entrelaçam mediante regras de aplicações da Matemática na Educação.

Wittgenstein destaca a importância de estar atento aos movimentos das palavras enquanto elas agem no fluxo de nossas vidas, para evitar confusões ou ilusões gramaticais

[22] Vale ressaltar que ênfase a que me refiro terá como foco o ensino da Matemática. Outrossim, entenda-se que Wittgenstein não tratou em sua obra de aspectos teóricos voltados à Educação, esta abordagem é assumida aqui, portanto, no contexto das pesquisas em Educação Matemática acerca da linguagem.

unilaterais que se acumulam no vocabulário da linguagem superficial, devido ao nosso pensamento viciado (MORENO, 1995).

No jogo de linguagem da Matemática, os conceitos mais usuais apresentam-se com vestimentas atraentes ligadas à concepção referencial da linguagem agostiniana, na qual as palavras são apêndices para os objetos do mundo. Para tanto, procurei me ater ao vocabulário da Matemática como Linguagem, no intuito de tentar eliminar, à medida do possível, ambiguidades e duplas interpretações de significados.

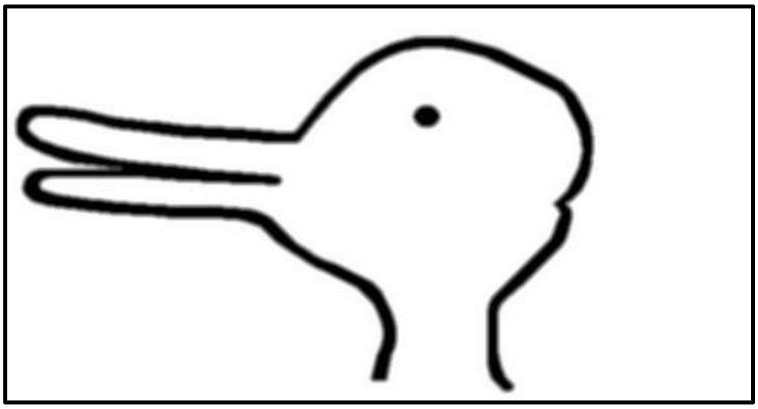
Para Wittgenstein (2009, p. 277), "o conceito 'vejo-o agora como...' é parente de 'represento-me agora isto" e o autor procura explicar que o conceito de aspecto é parente do conceito de representação, ou seja, indica a presença de semelhanças familiares entre estas expressões. Nesse sentido, ele apresenta várias interpretações acerca da figura acima: um tijolo; um bloco de concreto, uma caixa aberta virada para baixo, uma armação feita de arames etc.: "A cada vez o texto interpreta a ilustração" (WITTGENSTEIN, 2009, p. 254). Assim, é a forma de olhar que nos leva a interpretar.

Wittgenstein (2009) adverte que tais denominações ou opiniões sobre palavras e imagens do mundo são emitidas de forma imediata devido a nossas experiências ou vivências visuais. Assim, quase sempre, olhamos mais para a forma das coisas do que para seus usos e significados. Os conceitos e as interpretações não são imediatos e quem olha para a figura 16, vê sempre um objeto matemático? O olhar depende da forma de vida. Para um matemático é razoável pensar em um paralelepípedo, para um filósofo pode ser qualquer um dos exemplos citados por Wittgenstein (2009).

Ao fitar um objeto é a forma de vida do observador que determina como o aspecto visual pode ser interpretado. Ver não é lançar um olhar despretensioso sobre a forma, depende de como fomos educados (treinados) para ver. Analisar características, conhecer usos e saber como uma imagem se constitui, para poder definir sobre qual jogo de linguagem é o mais adequado, dentro e fora da Matemática. Na perspectiva wittgensteiniana, trata-se de observar como funciona o jogo de linguagem no ensino e como se dá o aprendizado em Geometria. O modo de vida é que revela a natureza do aspecto visual e suas aplicações, é desta maneira que se traduz uma imagem num conceito e vice-versa.

O conceito de **ver** para Wittgenstein possui interpretações distintas da maneira como esta palavra é empregada na linguagem natural, mas há o ver físico e imediato, tal qual é explorado por Berkeley (2010) sobre fenômenos ópticos e perspectivas geométricas. Glock (1998) ressalta que Wittgenstein usa a expressão **ver** associada às palavras percepção e aspectos nas *Investigações Filosóficas* (2009). Nesta fase de seus escritos inegavelmente o pensamento de Wittgenstein se volta a questões psicológicas, cujas imagens lembram a teoria da Gestalt, conforme a figura 17.

Figura 17 – Pato-coelho de Jastrow



Fonte: Wittgenstein (2009, p. 255)

A expressão **ver** traz consigo, portanto, uma gama de significados fenomenológicos que segundo Wittgenstein pode causar impressões confusas, pois, se está diante de uma imagem que sugere impressões ambíguas, como a da figura 17. O que realmente ocorre conosco não se deve a uma espécie de imagem privada formada em nossa mente, mas da interpretação que fazemos acerca do aspecto do objeto (percepção visual).

Glock (1998, p. 52) destaca que uma possível explicação para esta condição do **ver**, via Gestalt, remete à seguinte indagação: "notar um aspecto é um caso de visão ou de pensamento?". E isto se deve, principalmente, ao modo pelo qual objetos, imagens ou lugares associados a fatores psicológicos gravados em nossa mente são descritos.

Para Wittgenstein (2009), as imagens mentais pregam peças, ou seja, há uma relação entre o que vemos ao fitar um objeto e as imagens que estariam guardadas em algum lugar de nossa memória. Glock (1998) sugere que Wittgenstein usa diversos argumentos para afirmar que há diferentes tipos de **percepção do aspecto**, conforme a passagem a seguir.

> Em um extremo, temos aspectos conceituais tais como os do coelho-pato, que não podem ser expressos somente apontando-se para as partes do objeto-figurado, mas supõe a posse dos conceitos pertinentes. No extremo oposto, temos os casos "puramente óticos", tais como o da cruz dupla, em que podemos expressar nossa visão do aspecto, sem apelar para conceitos, apenas retraçando certas linhas do objeto-figurado (muito embora, mesmo nesse caso, pareçam estar implicados conceitos como figura e fundo. (GLOCK, 1998, p. 52).

Glock (1998) lança uma suspeita sobre o que foi dito por Wittgenstein, a de que o filósofo poderia ter criado um contraste artificial rígido entre ver e pensar, como um paradoxo que tira proveito da ambiguidade por trás das imagens. Tais interpretações estariam restritas acerca do que uma figura pode ou não representar. Glock (1998) adverte que Wittgenstein, dedica-se a discutir este paradoxo, mas não chega a propor uma solução que impressione o leitor, no entanto, suas intuições e discussões foram importantes para tentar esclarecer as duplas relações que há entre imagens e pensamento.

Assim, o que mudaria quando observamos uma imagem ambígua não é aquilo que se percebe quando uma imagem se forma diante de nossos olhos, pois, o que se vê estaria mais relacionado com nossas atitudes e reações com o que foi visto. De onde se infere que, ao olhar para a imagem do pato-lebre não há como ver duas coisas, ora se vê o pato ora se vê a lebre. Não é a imagem que é dupla, mas a nossa interpretação sobre as imagens, daí surge o conceito. Por isso, **ver** é também interpretar, traduzir, não é exclusivamente, **olhar**.

Wittgenstein (2009, p. 254) assinala "podemos também ver a ilustração uma vez como uma coisa, outra vez como outra coisa. Portanto, nós a interpretamos, e a vemos como a interpretamos", ao tentar explicar o entendimento enigmático sobre imagens, se faz algo análogo ao escutar e como se dão alterações de notas em uma orquestra musical, ou ainda, captar os recursos de entonação da voz de um intérprete ao recitar um poema ou cantar uma ária em uma ópera (GLOCK, 1998).

Nesse sentido, Gianotti (1995) ocupa-se da dicotomia Representação e Significação na filosofia de Wittgenstein e menciona a seguinte passagem do Mestre de Viena:

> "Aprendo o conceito de 'ver' com o descrever daquilo que vejo. Aprendo a observar e a descrever o observado. Mas aprendo o conceito "representação" com outros vínculos. As descrições do visto e do representado são em geral do mesmo tipo realmente do mesmo tipo e uma descrição poderia ser uma ou outra, embora os conceitos sejam totalmente diferentes. O conceito de representação é muito mais de um agir [*Eines Tuns*] do que de um receber. O representar deveria ser chamado de um ato criador. (WITTGENSTEIN, 1989 § 637 apud GIANOTTI, 1995, p. 162).

O autor procura esclarecer que a representação juntamente com a significação encontra-se no contexto geral dos conceitos, com isso, Gianotti (2010) ressalta que neste processo inclui-se a experiência que nem sempre pode ser representá-la com base naquilo que outras pessoas dizem ou sentem sobre a dor, por exemplo.

O autor afirma que se alguém sente uma dor indescritível e outra pessoa tenta representar essa condição, o faz apenas por meio de um estado afigurativo daquilo que realmente a pessoa sente. A dor faz parte de nossas sensações privadas, ao tentar descrever a dor que sinto não é o mesmo que estar sentindo essa dor. Então, um conceito pode ser aprendido com base na observação e descrição daquilo que é vemos, não pelo que pode ser visto pelo olho comum ou pelo olho do espírito, mas pela gramática de nossa linguagem (GIANOTTI, 2010).

Para Glock (1998, p. 375), a expressão *übersichtlice darsterllung* (representação concisa) usada por Wittgenstein está ligada à ideia de que há em nossa linguagem certa *übersehen* (negligência) no uso das palavras, isso conduz a refletir sobre o uso de conceitos e simbologias da linguagem matemática enunciados pelo professor em sala de aula, que nem sempre ficam bem compreendidos por meio da descrição e da ostensividade. Glock (1998) afirma que a expressão *weltanschauung* (modo de ver as coisas, visão de mundo) está associada à linguagem por meio de nossa *übersicht* (visão sinóptica global).

Considero importantes as teorias que abordam conceituações imagéticas, como a Gestalt, a Antropologia Visual e a Semiótica e suas contribuições ao campo de investigação da visualidade no ensino da Matemática. A Gestalt dos Objetos usa ilustrações e exemplos da Geometria para fundamentar seus conceitos, assim como a teoria de Duval (1995) aborda especificamente conceitos visando à aprendizagem da Matemática.

Nesse sentido, a proximidade com os estudos de Semiótica acerca do que se discute aqui é tênue, por isso, se fazem necessários alguns esclarecimentos sobre os limites e amplitudes de cada uma destas teorias, para que eu possa situar meu ponto de vista na perspectiva wittgensteiniana e mostrar que há distinções entre estes campos de investigação.

Se, por um lado, procurei me distanciar do pano de fundo das teorias que preservam a cognição, a Psicologia e os estados mentais, por conseguinte, experimentais, procurei mostrar que a Linguagem é o instrumento que dá sentido aquilo que compreendemos. É o seu uso que nos ensina como os conceitos funcionam, sejam por gestos, palavras ou imagens.

Moreno (1995) assinala que há antecedentes ou preparações para que possamos lidar com imagens, ou seja, a ostensividade, os comportamentos, os meios de representação, as aplicações das palavras, trata-se de uma construção linguística. O autor adverte que "assim surgem as imagens, essas interpretações conceituais marcadas gramaticalmente por elementos do mundo" (MORENO, 1995, p. 50). Neste rol figuram também as imagens que mais conhecemos, aquelas que associam um objeto ao seu nome, a típica imagem referencial.

Com base nesta alusão sobre as imagens é que Moreno (1995) chama atenção para a reflexão de Wittgenstein acerca dos nossos pensamentos que precisam ser externados para que o outro nos compreenda, não se trata do "eu" como solilóquio, argumento privado. Não há como afirmar nada sobre o outro pensa, a linguagem é pública e nas *Investigações Filosóficas* (2009,

p. 287), o Mestre de Viena destaca que "toda filosofia é como uma nuvem carregada, que se condensa numa gota de gramática".

Segundo Hebeche (2016, p. 264) na frase *Eine ganze Wolke von Philosopohie Kondensiert zu einem Tröpchen Sprachlere*, em língua alemã, a palavra gota é usada no diminutivo, Moreno (2016) refaz a frase wittgensteiniana para assinalar que **as imagens** são nuvens de filosofia numa gota de gramática, pois segundo ele, as imagens são importantes em nossas formas de vidas, por isso, precisam ser esclarecidas por meio da gramática, que ocupa lugar central na filosofia de Wittgenstein. O autor revela que isso nos faz questionar sobre o **uso** que fazemos das imagens e das suas aplicações em dado contexto.

Convém destacar que a palavra uso não figura aqui como um objeto ou como entidade, adverte Moreno (2016), é o uso que dá sentido aos nossos jogos de linguagem. Hebeche (2016) assinala que é a gramática que dissolve as miragens ou ilusões produzidas pela linguagem.

Os conceitos e seus usos: conexões

De modo apropriado, o que pretendo neste capítulo é ampliar o conceito da palavra **conceito**, para que as imagens que permeiam as reflexões aqui contidas, possam ser compreendidas de modo mais detalhado, pois como foi visto nas seções anteriores há múltiplas interpretações e aplicações acerca das imagens.

Para Barros (2016) os conceitos possuem um potencial de generalização, mas podem ser usados também de modo específico, pois todas as ciências os têm, com maior ou menor cientificidade e ainda alguns conceitos são emplumados ou obscuros, carecem, portanto, de perspicuidade. O autor salienta que mesmo os discursos tomados por interlocutores sem aparente pretensão na Linguagem, valem-se deles para sustentar seus argumentos. Por esta lógica, é quase impossível não usar conceitos na linguagem. Barros (2016) parte do princípio de que os conceitos são engendrados na Linguagem, ou seja, subsiste como regra que os conceitos são constituídos por expressões ou palavras, ainda que nem todas as palavras possam ser consideradas como conceitos.

Compactuo com a asserção de Barros (2016) quanto à constituição dos conceitos sustentarem-se na e da linguagem para poderem de modo mais simples, comunicar algo, tal qual faz Severino (2016), ao assinalar que a compreensão do conceito é um conjunto de propriedades específicas do objeto pensado, simbolizado ou escrito por palavras e expressões.

Por outro lado, Barros (2016) adverte que devemos considerar que há uma distância que separa os conceitos das palavras comuns, esse espaço é relativamente extenso para ser percorrido, por isso não devemos confundir quando uma palavra é empregada nas conversas despretensiosas, paroquiais e aqueles que empregamos na Filosofia e nas Ciências.

Farei jus ao que Barros (2016) afirma e seguirei aqui a premissa de que os conceitos nos dão apoio sistemático para um tipo de conhecimento, produzido internamente no campo de uma ciência, pensamento semelhante encontra-se em Granger (1974) acerca dos sistemas e das estruturas científicas na *Filosofia do Estilo.*

Barros (2016, p. 27) afirma que "habitualmente a palavra cadeira não é um conceito", mas ela pode ser usada como um quando seu uso na História indica que tomar o poder em um país por um golpe militar é assumir a cadeira, antes ocupada por um presidente eleito democraticamente. O autor assinala que um cientista político poderia interpretar este ato como revolução. Outras aplicações para a palavra cadeira seriam o uso conceitual no sentido que um moveleiro a usa para fabricar o objeto ou que um designer usa para esboçar uma cadeira conceito que teria a função de uma obra de arte.

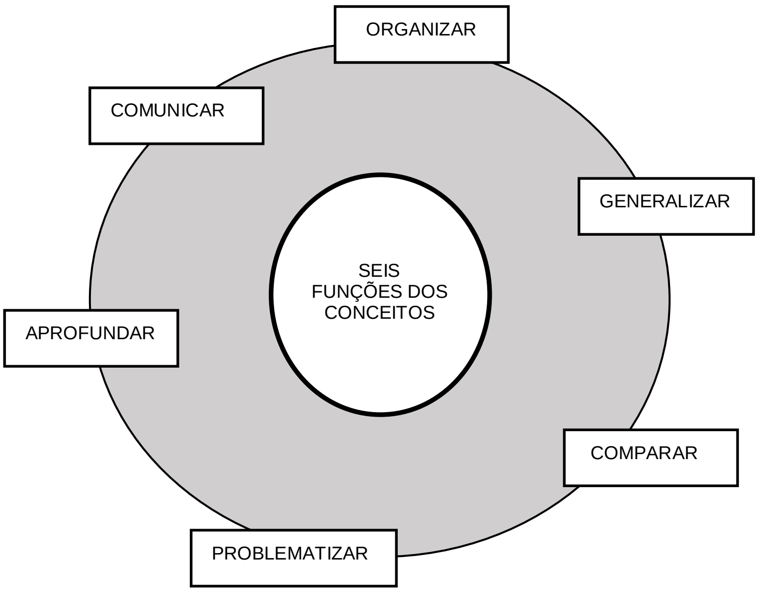
No aforismo 569 das *Investigações Filosóficas,* Wittgenstein (2009) assinala que a Linguagem é um instrumento, seus conceitos são instrumentos. É assim, por exemplo, que o conceito de cadeira possui interpretações que lhe conferem maior ou menor grau de importância em determinado contexto. O objeto cadeira é tão comum aos nosso usos que ao pronunciá-la, apanhamo-la quase que subitamente, ou seja, não precisamos tecer uma rede complexa de argumentos para explicar o que é cadeira, pois, desde nossos primeiros passos na infância, nos é mostrado e o que ela representa é suficiente para que nenhum outro conceito seja acrescido ao nosso entendimento, ou seja, parece não haver necessidade de ampliar o conceito de cadeira.

Mas essa ânsia de generalidade, quase sempre atribuída à cognição é uma das mais consolidadas que existe no contexto educacional, mas não a única. Assim, posso afirmar que objeto cadeira é mais importante pelo seu uso no cotidiano pela sua funcionalidade, do que o próprio significado da palavra cadeira. O critério de utilidade supera o interesse pelo conceito de cadeira, mas para o construtivismo esta concepção é primordial.

Para Wittgenstein (2009) é o uso da palavra cadeira que mostra a aplicação da palavra cadeira, sem qualquer alusão ao uso imediato, concordo, que a escrita gramatical sucede o aprendizado da palavra. Se uma criança não sabe o que é uma cadeira, não explicamos o que é cadeira, diz-se: isto é uma cadeira, apontando para o objeto. O gesto ostensivo (apontar) e depois nomear é, suficiente para que a palavra cadeira passe a integrar o jogo de linguagem da criança. Esta imagem é a que permanecerá, não se trata apenas de uma imagem visual ou mental, mas do jogo de linguagem que se estabelece entre o falante e o interlocutor.

Barros (2016) intensifica suas discussões acerca dos conceitos e destaca que eles são pontes para a elaboração de outros conceitos, há uma porosidade interna que os liga com situações externas. Cumpre destacar, conforme Barros (2016, p. 31), que “os conceitos são pontos móveis sobre os quais se apoiam as linguagens científicas” e ele apresenta um diagrama na tentativa de resumir algumas funções do conceito.

Figura 18 – Funções do Conceito



Fonte: Barros (2016, p. 36), imagem adaptada

De posse dessa imagem, considero que das funções elencadas por Barros (2016), a que mais se aproxima do intento desta pesquisa é a palavra **aprofundar**. As discussões aqui são dirigidas principalmente para profissionais que ensinam Matemática, ou seja, exige-se que haja por parte dos interlocutores (professores) uma expertise, a de dominar os conceitos de uma linguagem técnica como a matemática. Então, aprofundar é o termo mais propício aos leitores, que lidam com definições, notações e simbologias da gramática da Matemática.

Uma das formulações que Barros (2016) fez sobre conceitos parece se adequar ao nosso interesse, é a expressão **construto**. Para o autor, o conceito de construto difere das estruturas mais simples das palavras confinado a elementos apreensíveis imediatos, não permite o estabelecimento de parâmetros diretos ou de propriedades, é um conceito que deriva ou se forma a partir de outros conceitos já conhecidos.

Barros (2016) menciona um conceito muito usado na Física, que é o conceito de Densidade. Nos domínios da Física newtoniana, densidade é definido como uma relação entre *massa* e *volume,* ou seja, é um conceito mais elaborado, requer maior abstração, pode ser expresso pela fórmula **D=m/v** (BARROS, 2016).

Assim é que o conceito de densidade recebe o nome de *construto,* por utilizar-se de outros conceitos, como o de massa e de volume para originar-se. Barros (2016) afirma ainda que é possível estender o conceito de densidade para outro mais complexo, o de *densidade relativa*, que pode ser aplicado a uma substância em particular. Nesse sentido, é comprovado na Ciência que a densidade de alguns líquidos é maior que a densidade da água e que materiais como o diamante possuem uma alta densidade, ou seja, o seu grau de dureza é maior que o do carvão vegetal.

Há entre os conceitos mencionados por Barros (2016), graus de especificidades, tais como os conceitos *generalizadores*, *transversais* e *agrupadores*. Não há como deixar de mencionar, portanto, alguns conceitos já conhecidos, pela potencialidade polissêmica que carregam, sejam eles extensos ou como menciona Barros (2016, p. 67), “noções que são quase conceitos, que funcionam como imagens de aproximação de um determinado objeto de conhecimento, as quais ainda não se acham suficientemente delimitadas”.

Onde pretendo chegar? Ao estabelecimento de uma rede segura de palavras que me permita evidenciar os conceitos que apresento na constituição dos objetivos desta pesquisa. Retomarei, sempre que se fizerem necessárias, as expressões (conceitos) de Tradução Interna e Jogos de Imagens, caros à constituição desta Tese.

Segundo Barros (2016), Aristóteles (384-322 a. C) utilizou a expressão categorias para firmar seus pressupostos conceituais na obra *Organun* e na mesma direção, a filosofia de Kant usa categorias para definir conceitos fundantes sofisticados, como a *Crítica da Razão Pura* (1781).

Barros (2016) assinala, ainda, que outra imagem acerca dos conceitos é a noção de *protoconceito,* que seria um conceito em seu devir inicial, uma gênese, um conceito absoluto ou superconceito. Tais denominações são elucubrações de natureza epistemológica, não pretendo me alongar em buscar exemplos para descrevê-las. Quanto às possibilidades de elaboração de novos conceitos, Barros (2016, p. 67) adverte que “uma palavra não migra para a região de intensa claridade sem ser fustigada por todos os lados, sem ser confrontada em sua legitimidade de ter ultrapassado o limiar”.

Abbagnano (2007) apresenta uma série de descrições para a palavra **conceito**, na passagem a seguir.

> Embora o conceito seja normalmente indicado por um nome *não é o nome*, já que diferentes nomes podem exprimir o mesmo conceito ou diferentes conceitos podem ser indicados, por equívoco, pelo mesmo nome. O conceito além disso, não é um elemento simples ou indivisível, mas pode ser constituído por um conjunto de técnicas simbólicas extremamente complexas, como é o caso das teorias científicas que também podem ser chamadas de conceito (o conceito da relatividade, o conceito de evolução, etc). O conceito tampouco se refere necessariamente a coisas ou fatos reais, já que pode haver conceito de coisas inexistentes ou passadas, cuja existência não é verificável nem tem um sentido específico. Enfim, o alegado caráter de *universalidade subjetiva* ou validade intersubjetiva do conceito na realidade é simplesmente a sua *comunicabilidade* de signo linguístico: a função primeira e fundamental do conceito é a mesma da linguagem, isto é, a comunicação. (ABBAGNANO, 2007, p. 164).

Diante da diversidade de acepções filosóficas ou linguísticas acerca da palavra conceito, tanto Abbagnano (2007) quanto Barros (2016) chegam a conclusões semelhantes, ou seja, o mais importante no conceito são as funções que eles empregam na linguagem para comunicar. Para Wittgenstein (2009) não há como mencionar os limites da palavra conceito, para ele, o conceito de conceito é por si só um conceito vago. Por outro lado, o que importa acerca dos conceitos é que seus usos determinam suas aplicações no jogo de linguagem, assim, Wittgenstein (2009, p. 203) afirma que "os conceitos nos conduzem às investigações. Eles são a expressão de nosso interesse, e conduzem o nosso interesse".

Abbagnano (2007) ressalta que os conceitos filosóficos vêm se constituindo desde a Grécia Antiga, os dicionários mostram algumas dessas possibilidades. Pela sua abrangência os conceitos podem se tornar confusos devido à polissemia da Linguagem, para que se possa evitar equívocos e até mesmo inutilização de conceitos, faz-se necessário, no contexto das Ciências, uma definição rigorosa entre os conceitos, suas relações internas e suas aplicações.

No seu Dicionário Filosófico, Abbagnano (2007, não paginado) destaca alguns conceitos sobre a letra A e usa para isso, o Princípio da Identidade, ou seja, "A é A", simbolicamente esta representação é dada por: "**A=A**, que começou a ser usada por Leibniz como um tipo de verdades idênticas e foi adotada depois por Wolff e por Kant como expressão do chamado Princípio de Identidade, **A** significa um objeto ou um conceito qualquer, mas vou limitar esta busca apenas a este exemplo.

O exemplo mencionado por Abbagnano (2007) fornece algumas explicações acerca do conceito por trás da letra **A** e de suas aplicações na Linguagem, que nem sequer chega à formação de uma palavra. Compreendo nesse sentido, que antes mesmo da formação das palavras é importante conhecermos o significado das letras, procedimento análogo é feito pelos professores alfabetizadores das séries iniciais, mas em direções opostas.

Enquanto Abbagnano (2007) prioriza o significado etimológico e filosófico da letra A, os professores da alfabetização priorizam o uso da gramática e da grafia da letra A. Para estes, o ensino da letra **A** é ostensivo e referencial, não há, portanto, uma busca pelo significado de **A**, informa-se que a letra **A** é parte de nosso alfabeto e mais que **A** é a primeira letra, que recebe o conceito de vogal na Língua Portuguesa.

Quanto ao ensino das vogais, não vejo sentido em informar para crianças que o alfabeto da Língua Portuguesa começa com a letra A, quando poderia começar com qualquer outra letra. Ainda que esta seja uma convenção no contexto da gramática da Língua Portuguesa, não tem o mesmo sentido, por exemplo, do que se faz ao ensinar os números naturais começando pelo algarismo 1 (um). Começar a contagem por 1 tem significado na Matemática, pois, não começamos a contar a partir do zero, se se entende epistemologicamente número como ideia de quantidade, por conseguinte, uma noção platônica do conceito de número.

Schubring (2018) assinala que entre o final do século XVIII e o início do século XIX, a noção de número como quantidade foi posta à prova (ampliada) pelo matemático prussiano Wilhelm A. Förstermann ao sublinhar a diferença entre número e grandeza. Förstermann criticou a noção milenar de número como quantidade e propôs que as operações entre Aritmética e Álgebra fossem entendidas como operações que trata de grandeza e de números.

Schubring (2018) faz um importante apanhado histórico sobre a epistemologia dos números negativos, a partir do qual o autor infere que não convém mais aceitar a noção única de número como quantidade, este é um paradigma superado a partir do século XIX. Amparado na História da Matemática, Schubring assinala que mais um obstáculo epistemológico acerca da compreensão do conceito de número foi contornado.

Diante do exposto, amparado nas afirmações de Schubring ressalto que atualmente, não soa bem iniciar um processo de contagem a partir do zero, a saber: zero pessoas, zero lápis ou zero cadeiras. Para Wittgenstein (2009) são jogos de linguagem distintos, a gramática da Língua Portuguesa e a gramática da Matemática não compartilham do mesmo sistema de códigos, suas sintaxes são diferentes. Não convém, portanto, formar palavras apenas juntando letras, por exemplo na sequência das vogais ou na sequência de letras que compõem o alfabeto como ensinam os professores da alfabetização. Por outro lado, não há implicações para formação dos números a partir dos algarismos. Transferir a regra de uma gramática para outra traz implicações de natureza epistemológica, esta é uma imagem (tratamento pedagógico) que passa despercebida pelos educadores no contexto da alfabetização, a meu ver, requer maior atenção.

Na Alfabetização, tanto professores quanto aprendizes tendem a colar o significado de uma letra na palavra usada para representar um objeto ou nome. Quase sempre há uma imagem (figura ou objeto) pelo qual o aprendizado de nosso vocabulário é ensinando às crianças, ou seja, a letra **A** é de abelha: dizem os alfabetizadores da Língua Portuguesa.

Este significado é muito distante, obviamente, do significado lógico atribuído à letra **A** pelo matemático Leibniz, conforme Abbagnano (2007). Não vou me alongar na constituição das palavras a partir das letras e de seus significados na Linguagem, este é o papel da gramática da Língua Portuguesa, que utilizo aqui para ilustrar como nasce um conceito.

Intensifico, assim, as buscas sobre conceitos e imagens relacionadas ao ensino da Matemática, mediante as considerações gramaticais wittgensteinianas à esteira do que foi dito Moreno (1995).

> [...] As regras gramaticais, ou como diz Wittgenstein, a respeito das proposições matemáticas, *os conceitos* são técnicas que criamos para organizar nossa experiência e não previsões de fatos matemáticos. São *determinações conceituais* (*Begriffsbestimmung*), ou quadros de referência para descrições que introduzem novas formas de organizar a experiência, “novas práticas (MORENO, 1995, p. 97).

Conforme esta passagem, mais uma acepção se junta ao domínio dos jogos de linguagem específicos dos quais menciono aqui, **o conceito como técnica**, que ilustra também o quadro de referência mencionado por Oliveira (2013). Neste quadro, a palavra referência não adota a concepção palavra-objeto, os jogos de linguagem juntamente com outras expressões wittgensteinianas, são eleitos para configurar alguns critérios acerca da expressão tradução interna na Matemática.

Cumpre enfatizar que as duas expressões engendradas por mim nesta tese, a saber: **Tradução Interna** e **Jogos de Imagens**, parecem se aproximar do conceito de construto mencionado por Barros (2016). Tais expressões figuram no contexto epistemológico ou caminham nesse sentido, suas aplicabilidades são educacionais, assentam-se em princípios da Matemática. Os conceitos que elas engendram apoiam-se na Filosofia de Wittgenstein e nos domínios das Teorias da Tradução.

Assim é que nas Ciências ou mesmo na Filosofia, submeto à apreciação dos interlocutores o que chamei no capítulo 1 desta Tese de movimentos de pensamento, ou seja, um jogo de linguagem cujas aplicações visam tanto a Educação como Epistemologia. Ao longo da História e da Filosofia das Ciências, muitos conceitos foram esboçados, teorias foram acatadas ou refutadas, outras tantas estagnaram ou caíram em desuso, mas a dinâmica do conhecimento humano segue produzindo e ressignificando abordagens, testando e aplicando métodos.

Assim, reitero o que foi dito por Wittgenstein (2009), a Linguagem é um instrumento, assim como seus incomensuráveis conceitos e jogos de linguagem.

Sobre a constituição de conceitos na Matemática

Ao mencionar objetos matemáticos no contexto educacional, algumas alusões que fiz inarredavelmente requerem a visualização de imagens, cujas características podem, *a priori*, ser descritas ou interpretadas pelo olhar. Nesse sentido, Berkeley (2010) ressalta que, em primeiro plano, a Geometria faz parte do campo visual humano.

> [...] o uso constante de nossos olhos tanto na parte prática quanto na parte especulativa daquela ciência, induz nos fortemente a essa opinião. Sem dúvida, pareceria estranho a um matemático, que se tentasse convencê-lo de que os diagramas que ele viu no papel, não eram apenas as formas, ou ao menos a aparência das formas, que constituem o assunto da demonstração (BERKELEY, 2010, p. 151).

O autor se refere à Geometria como uma ciência que desperta na forma de ver relações sobre objetos que funcionam como extensões visíveis em si mesmas, mas que não se definem a partir de determinada grandeza. O autor afirma, também, que os homens procuram medir algo que é tangível a partir de parâmetros sobre algo que já existente. No livro *Tratado Sobre a Visão* (2010), Berkeley infere que as formas e as extensões daquilo que vemos não constituem exatamente objetos da Geometria, corroboro com este princípio.

No excerto a seguir, Berkeley faz aproximações da Geometria com a Linguagem.

> [...] É claro, portanto, que as formas visíveis têm na geometria, o mesmo uso das palavras, e estas últimas podem ser consideradas objeto dessa ciência tão bem quanto às primeiras, dado que nenhuma delas está aí envolvida a não ser enquanto representam ou sugerem à mente particulares formas tangíveis que a elas se conectam (BERKELEY, 2010, p.153).

Esta afirmação evidencia a Geometria como uma ciência das formas que pode ser uma representação mental das imagens, ou seja, a mente capta formas e sugere a quem as visualiza um modelo de referência. Esta relação é semelhante à concepção referencial agostiniana da Linguagem, na qual palavra e objeto constituem um só conceito.

No ensino da Matemática a visualização de algumas formas é diretamente relacionada à existência de objetos tangíveis (manipuláveis), e são tratadas como recursos de aprendizagem, é o que ocorre na perspectiva do ensino construtivista. Essa estratégia pedagógica de uso referencial é para Wittgenstein (2009) um jogo de linguagem primitivo.

Descrever as características de uma forma e observar sua estrutura plana ou espacial é, no entanto, apenas um lance na Linguagem. A compreensão de conceitos geométricos não se reduz a este lance do jogo de linguagem no ensino, os demais lances é que vão definir os fundamentos e usos de conceitos no aprendizado escolar, bem como suas aplicabilidades em outros contextos. Mas, é fácil constar na Educação Básica que o ensino da Geometria quase sempre se destina ao reconhecimento de formas e fórmulas, esta é uma prática semelhante como a que se faz ao etiquetar (dar nome) a objetos.

Não obstante, o ensino de Geometria está relacionado a resolver problemas de áreas e volumes que requerem o domínio de alguns conceitos e reside no fato de que a fórmula é quem define sua aplicabilidade. Os acertos ou erros por parte do aprendiz estão condicionados a saber empregar corretamente a fórmula correta para o objeto correspondente, que precisa ser visualizado no problema, uma vez que o texto matemático (problema) não traz a figura em sua composição. Assim, para resolver um problema de Geometria é o aprendiz quem deve imaginar e desenhar (fazer um esboço) da figura geométrica implícita no texto matemático, mas esta é uma habilidade que poucos dominam. Nas escolas não ensinamos técnicas de visualização de objetos geométricos, o que há está mais próximo do que Berkeley (2010) retrata em seus estudos, ou seja, visualizar imagens a partir do olhar físico.

O ensino de Geometria há muito deixou de seguir o estilo dos pitagóricos na Grécia Antiga, resumidamente (régua e compasso). Atualmente, as figuras, antes desenhadas à mão livre e com instrumentos, já estão prontas nos livros didáticos, essa é uma facilidade tecnológica que auxilia o professor nas aulas, economiza tempo e possibilita a exploração de vários exemplos, assim como se faz com o uso do computador, mas os recursos e o jogo de linguagem empregado nestas técnicas diferem entre si. Estas observações retratam realidades e épocas diferentes no ensino da Geometria. Vale ressaltar que entre um período e outro se passaram milênios e o ensino da Geometria evoluiu, mas algo se perdeu no caminho, a meu ver, algumas particularidades e o interesse pela constituição dos conceitos, tanto pelos professores quanto pelos aprendizes.

Talvez, a forma de pensar o ensino da Geometria atualmente considere que se os conceitos estão estabelecidos, não é preciso saber como eles surgiram, deve-se apenas informar ou transferir conhecimentos. A perspectiva que apresento nesta pesquisa tem como propósito discutir e analisar conceitos algébrico-geométricos com base na linguagem matemática que os define.

Nesta pesquisa, procuro fazer o resgate de parte das atividades ensinadas nas aulas de Geometria que tive na graduação, praticamente o último contato que tive com a disciplina Desenho Geométrico e Geometria Descritiva. Atualmente, ao fazer uso do *GeoGebra* em Cursos de Formação de Professores e também com alunos, retomo alguns resquícios das construções geométricas que aprendi. Esta é uma tentativa de ressignificar a importância do conhecimento matemático.

Assim, é possível minimamente na perspectiva do jogo de linguagem wittgensteiniano, esclarecer o papel das imagens na Matemática (gráficos), assinalo que ensinar gráficos é mais complexo do que apresentar uma figura geométrica já conhecida. Nesse sentido, infiro que a inserção de atividades que tomam a Linguagem e a tradução de textos matemáticos no ensino, possam trazer novas contribuições ao aprendizado. Reitero, portanto, que o domínio do jogo de linguagem da Matemática leva os aprendizes (professores e alunos) a **ver como**, parafraseando a expressão de Wittgenstein (2009), a compreender como determinados conceitos se constituem.

Concordo com Maurice Caveing, citado por Silveira (2005), ao afirmar que na Matemática, objetos intangíveis adquirem sentido no automovimento da Matemática por meio de uma linguagem intrateórica. Este fato garante à Matemática, condição de ciência e como tal deve ser respeitado no campo da Epistemologia.

Para Wittgenstein (2009), certos aspectos de maior importância na Linguagem estão ocultos devido à simplicidade e trivialidade de como as coisas são vistas. Assim, nem sempre consegue-se notar certas características que, mesmo diante de nossos olhos, tornam-se imperceptíveis pela vestimenta usual das palavras, quase sempre associadas a imagens cotidianas e dados empíricos.

Moreno (1995) adverte que a concepção de imagem enquanto estado de coisas, é uma dentre as muitas possíveis na Linguagem que se torna limitadora e dogmática devido aos limites que impomos à Linguagem. Para desfazer esta visão limitante, Wittgenstein elabora na segunda fase de seus escritos a terapia filosófica, com a intenção de que se possa tratar ilusões provocadas pelos enfeitiçamentos da Linguagem.

Wittgenstein (2009) propõe na terapia filosófica, que o estado de ver é também um atributo da linguagem, "o que é um objeto é dito pela gramática" (MORENO, 1995, p. 13), pois "Vejo realmente, cada vez algo diferente, ou apenas interpreto o que vejo de uma maneira diferente? Estou inclinado a dizer a primeira coisa. Mas por quê? – Interpretar é pensar, agir; ver é um estado. [...] *"O estado de ver"* significa aqui! Deixe que o uso lhe ensine o significado" (WITTGENSTEIN, 2009, p. 276).

Nesta passagem, Wittgenstein afirma que a representação que fazemos daquilo que é visto está associado com a nossa forma de vida e com as atividades linguísticas que se entrelaçam. Não se trata do olhar súbito com base nas imagens que figuram ante nossos olhos a todo instante, como se pudéssemos apanhar imagens de um só lance, ou seja, captar imagens e traduzi-las em informações equivalentes. Os significados se formam e se instituem conforme seus usos, é assim que uma expressão ou imagem pega (se mantém) na Linguagem ou mesmo torna-se obsoleta e deixar de ser usada.

A representação e a significação estão muito presentes na Linguagem e na Matemática e são conceitos que caminham bem próximos. Na perspectiva cognitivista, por exemplo, a realidade é muito requisitada para dar sentido a conceitos. Para Wittgenstein (2009), esta relação faz parte dos jogos de linguagem primários em que a explicação parece não se fazer necessária, então o significado de alguns conceitos é apenas mostrado via figuração das palavras, mas ensinar um conceito não é apenas repassar ou mediar informação, há argumentos que precisam ser usados para que o jogo de linguagem entre professores e aprendizes se estabeleça. Ensinar é uma atividade que requer um jogo de linguagem mais profundo, a comunicação entre professores e alunos é um lave desse jogo.

Gianotti (1995) esclarece com base no aforismo 301 das *Investigações Filosóficas*.

> A representação não é pois necessariamente, afigurante, no sentido de reproduzir a estrutura do real, como por muito tempo se pretendeu; pode resumir-se unicamente numa única encenação de tipo alegórico. Mas é possível fazer corresponder a ela uma imagem, quando por exemplo, queremos explicar a alguém o que está sendo representado (GIANOTTI, 1995, p.162).

O autor alerta para o fato de que as representações que fazemos não são imagens equivalentes daquilo que se vê, são apenas correspondências. Outra pessoa pode fazer uma imagem diferente da situação nas quais ambas estão presentes, não por questões apenas de opinião ou ponto de vista, é porque seus jogos de linguagem podem não ser os mesmos.

Na matemática como linguagem, espera-se os feitos da polissemia não ocorram, por isso, esta é uma linguagem é objetiva, ou seja, o uso de simbolismos, notações e palavras exclusivas se dá com o propósito de minimizar duplos significados ou ambiguidades. Oliveira (2016) ressalta que a matemática como linguagem não está isenta de polissemia, ainda que seus simbolismos e notações funcionem com o objetivo de torná-la uma linguagem universal e livre de significados extra matemática.

Wittgenstein afirma nas *Investigações Filosóficas* (2009, p.139) "uma representação não é uma imagem, mas uma imagem pode corresponder-lhe". A mensagem deixada por Wittgenstein está bem próxima da mensagem deixada por René Magritte (1929) na tela *A Traição das Imagens.*

No intuito de evitar que a polissemia da linguagem assuma o controle do texto provocando múltiplas interpretações, a linguagem concisa, simbólica, econômica e atemporal da matemática pretende eliminar certas confusões conceituais. Quanto a isso Brandemberg (2010) assinala que de forma amadora alguns professores podem levar os alunos a fazerem associações com problemas da realidade que não condizem com a realidade da matemática das definições formais. O autor destaca ainda, que certos detalhes, por não serem de domínio dos alunos, precisam ser esclarecidos, uns abordam problemas da realidade outros tratam do objeto matemático em si, cuja natureza é pura, nasce no contexto das ciências.

Brandemberg (2010) ressalta que, por mais que a intuição esteja associada à cognição de forma imediata e faça uso também da visualização, esta sequência de ações pode levar a conclusões erradas acerca de conceitos matemáticos. Entram em jogo na constituição de conceitos matemáticos, portanto, o jogo de linguagem dos números e operações da aritmética, tem uma axiomática particular, tais como à da álgebra e da geometria, se juntam no sentido operatório, para que os conceitos formais da Matemática possam ser compreendidos.

De acordo com Brandemberg (2010, p. 133) "a força da matemática associada ao papel das entidades conceituais está atrelada ao papel do simbolismo matemático". Para o autor, estas relações são de ordem cognitiva, este pensamento contrasta com o uso da linguagem na perspectiva wittgensteiniana, no entanto, concordo com Brandemberg sobre as implicações de ordem simbólica na constituição de conceitos complexos provenientes da Matemática. Neste aspecto, as entidades conceituais e os simbolismos da matemática mencionados por Brandemberg (2010) se aproximam do formalismo científico investigado por Granger (1994; 2013) e Popper (1975).

Brandemberg (2010) destaca o papel do sistema notacional na matemática, aqui tomado como um dos aspectos da representação desta linguagem no ensino. O autor assinala que o símbolo **A** em $(A\ .\ B)^{-1} = (B^{-1}.\ A^{-1})$ no estudo das matrizes é considerado um símbolo tácito, no sentido de que A é uma (convenção) na matemática, que serve para dar nomes as coisas, mas sem denotar aspectos de sua estrutura.

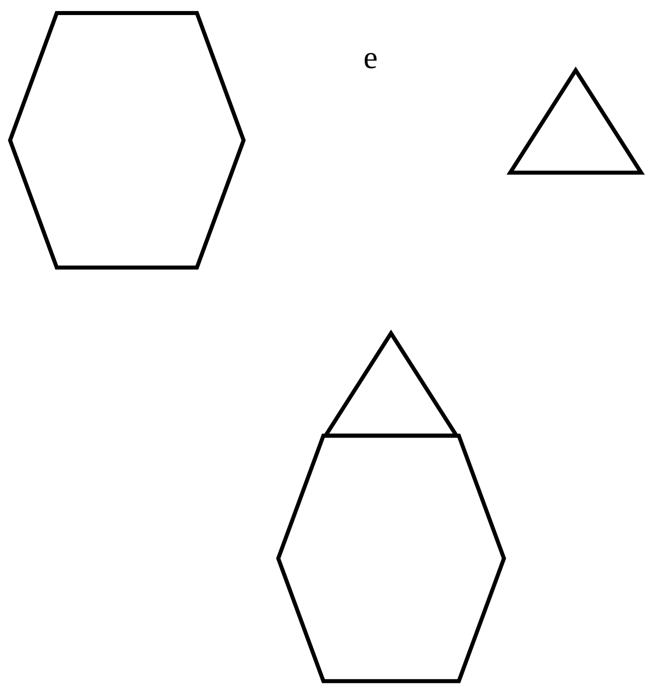
Vale ressaltar, que o sentido da palavra tácito para Brandemberg não tem o mesmo significado da Língua Portuguesa, pois não estamos lidando situações da realidade cotidiano, mas com objetos matemáticos formais. Quanto a isso, o autor ressalta que, um dos inventores das notações matemáticas foi o matemático Leibniz, que as criou não só para seu próprio uso, mas para auxiliar na comunicação de suas ideias (BRANDEMBERG, 2010).

Para tanto, ainda que o emprego da linguagem matemática aqui seja voltado ao ensino é importante ressaltar que estes usos não independem do expediente vocabular da linguagem natural, que está mais próximo do vocabulário dos aprendizes. As notações simbólicas que usamos na matemática em alguns casos estão bem próximas da que usamos na linguagem natural a exemplo da letra **A** no estudo das matrizes, que representa um objeto matemático. Porém, os alunos sentem dificuldades ao interpretar conceitos da Matemática, pois não há equivalência entre o símbolo que eles conhecem na Língua Portuguesa e na Matemática.

Para Wittgenstein (1987, parte VII § 71), "não há na totalidade do jogo de linguagem algo que possa denominar-se conceito. Conceito é algo como uma imagem com a qual os objetos são confrontados" (tradução livre). Os conceitos movimentam diferentes jogos de linguagem, é importante considerar que o aprendizado e seus usos no ensino estejam embasados em certezas e não em dúvidas. Os aprendizes não podem ser levados a inferir por suposição qual operação se aplica à resolução de um problema ou imaginar que gráfico corresponde à uma função. Esses esclarecimentos são feitos pelos professores, não são constatações subjetivas aleatórias.

No aforismo 61, parte VII das *Observaciones sobre los fundamentos de la matemática* (1987), Wittgenstein compõe uma imagem a partir da junção de formas geométricas já conhecidas, figura 19.

Figura 19 - Heptalátero Irregular



Fonte: (OFM, 1987, p. 357) – imagem adaptada

O filósofo afirma que para nossa vida, este tipo de imbricação, não tem muita relevância. Por outro lado, ele adverte que se esta fosse uma operação importante talvez tivéssemos outro conceito da matemática.

Ao observar a composição da feita por Wittgenstein, infiro que ele emprega uma técnica que pertence aos domínios da matemática, não se trata de um experimento correlato como juntar as peças de um quebra-cabeças. A partir desta ilustração, ele indaga (conversa consigo mesmo) sobre a possibilidade de que a figura resultante daquela junção possa ser vista como uma operação. Este movimento segundo o autor pode modificar o nosso modo usual de ver. A partir desta figura, fiz a seguinte análise.

O filósofo toma a sua composição como uma operação aritmética. Ressalto que o mais apropriado seria tomá-la como um construto da geometria. Não julgo a natureza do sistema usado por Wittgenstein, por não ter certeza do que ele quis dizer com operação aritmética. Assinalo que o esquema proposto não se constitui a partir da axiomática da aritmética, este jogo de linguagem, não comporta por exemplo a definição de adição, pois, numericamente a construção imagética proposta por Wittgenstein, *não* pode ser expressa pela operação 1+1=1, como sugere a figura de sete lados acima. Onde o primeiro número 1 teria significado de hexágono e o outro número 1 seria o triângulo.

Por conseguinte, este não é um jogo de linguagem válido para a aritmética ao estilo dos axiomas de Peano[23] acerca dos números naturais. De acordo com Lima (1998) os números naturais são um tipo de modelo ou padrão a ser seguido para que possamos proceder a contagem na matemática. Assim, é possível validar as propriedades dos números naturais como o elemento neutro e o fechamento. Logo, não convém pelos princípios da aritmética ou dos axiomas de Peano tomar como verdadeira a composição imagética (figura 19) como sugeriu Wittgenstein.

Por outro lado, o modelo apresentado pelo filósofo versa sobre uma forma de vida, um jogo de linguagem, o que não o impede mencionar uma outra espécie de aritmética, ou seja, a

---

23 O matemático italiano Giussepe Peano (1858-1932), teve uma participação importante na lógica simbólica da matemática, a exemplo do *"Formulaire de Matheématiques*, publicando em cinco volume com outros colaboradores a partir de 1894" conforme Eves (1997, p. 670). Os axiomas de Peano, são 4, que traduzidos da linguagem formal da matemática para a linguagem natural, em suma podem assim ser descritos, 1- todo número natural possui um sucessor que também é um número natural; 2-números naturais diferentes possuem sucessores diferentes. 3- existe um número natural que não é sucessor de nenhum número natural, representado pelo símbolo 1; 4- se o conjunto de números naturais contém o número 1 e seus sucessores, então esse conjunto coincide com ***N***, e contém todos os números naturais.

aritmética das formas geométricas, na qual o corpo das operações não foi definido a exemplo dos axiomas de Peano. Assim, a operação realizada por Wittgenstein, pode se basear no princípio da cardinalidade, na qual os números naturais são usados para enumerar os elementos de um conjunto finito, conforme Lima (1998). Não me ative aqui, às provas matemáticas dos axiomas de Peano ou da Teoria dos Conjuntos, pois este não é o objetivo desta pesquisa.

Por hipótese, tomo a operação realizada por Wittgenstein como uma operação entre conjuntos finitos não numéricos em que cada figura assume a condição de elemento de um conjunto. Defino então esta operação como operação de União, assim constituída: A é o conjunto de u elemento composto pela figura hexágono, B é o conjunto composto pela figura do triângulo, que resultou no conjunto C formado pela figura de 7 lados, apresentada por Wittgenstein. Nomeio, portanto, a figura wittgensteiniana de **heptalátero irregular**.

Uso esta nomenclatura porque a figura 19 não preserva as características de um polígono regular (heptágono), conforme a geometria euclidiana plana. Formulo, portanto, um conceito. Nesta elaboração, subsiste, por hipoteticamente, uma espécie de operação geométrica. Cumpre destacar, que estas ilações se constituem intra teoricamente na Matemática, não são conceitos empíricos ou ideais ao estilo platônico. Não há, também, referência sobre este conceito nos livros didáticos veiculados pelo MEC indicados no currículo da Educação Básica.

Fiz uso do jogo de linguagem wittgensteiniano, para moldar um conceito ou noção conceitual como assinala Barros (2016), seguindo os princípios da geometria euclidiana e da teoria dos conjuntos. Trata-se de uma análise epistemológica pautada em fundamentos matemática. Moreno (1995, p. 60) afirma que na gramática do jogo de linguagem o esclarecimento toma em consideração a importância que determinadas imagens têm na vida e indaga a respeito do emprego que delas é feito em cada caso".

Posso concluir, ou seja, minha interpretação é de que a operação aritmética da qual falou Wittgenstein, pode ser engendrada à luz da teoria dos conjuntos em relação a operação de união dada por **AUB=C**, onde **n(AUB)=1**. Trata-se de uma operação não usual (abstração), na qual a cardinalidade da união de A com B é igual a 1, onde 1, é a unidade geométrica heptalátero irregular, oriunda da fusão de duas figuras geométricas distintas. Esta seria uma constatação que não precisa de prova matemática por meio de demonstração. É aceitável pela natureza inarredável das premissas apresentadas. Um axioma.

O conceito de prova aqui tem pelo menos dois sentidos, na Matemática é a demonstração formal, objetiva, que segue o rigor das hipóteses/demonstrações, onde as conjeturas e teoremas são submetidos a validações para os casos gerais, com o propósito de evitar conclusões apressadas. Afinal, não é razoável fazer inferências na Matemática com base em ânsias de generalidade, pautadas em acordos tácitos advindos exclusivamente da experimentação. O outro sentido é o da aceitação do axioma como verdade matemática. Este é um acordo tácito entre a comunidade de professores que ensinam matemática. Uso, portanto, os artifícios de um jogo de linguagem pautado na matemática para evidenciar que há um rigor mínimo na constituição do conceito de heptalátero irregular. Esse exemplo, configura a constituição de um jogo de linguagem que opera com as peças da geometria.

Moreno (1995) destaca que a prova estabelece critérios para organizar experiências, cria conceitos. O autor ressalta que a função linguística da prova consiste de uma técnica que se aplica a proposições matemáticas, ora normativas ora descritivas, a partir delas se definem os usos. Assim, Moreno esclarece que somos persuadidos (*Erscheinungen*), por modelos que aparentam ser... E o que nos convence desta persuasão é a estabilidade da prova e de seus resultados, a certeza de poder usá-los.

Que tipos de usos seriam esses? Aplicações no cálculo, processos de contagem, uso de algoritmos, dentre outros, por isso, há na Matemática uma diversidade de provas para um mesmo teorema. O teorema de Pitágoras por exemplo, possui mais de 300 tipos de demonstrações possíveis, quase sempre acompanhadas de imagens, como no livro de Loomis[24]. Moreno (1995) afirma que cada prova permite que vejamos um novo aspecto (*einen neum aspeket finden*) em cada proposição provada.

O exemplo do heptalátero irregular que engendrei aqui a partir de uma ilustração wittgensteiniana é um dentre os exemplos possíveis à luz do jogo de linguagem específico da matemática, um jogo que visa traduzir na matemática imagens e conceitos. Esta espécie de demonstração ainda que hipotética, suscita ilações para a configuração do jogo de imagens mencionado nesta Tese.

Eves (1997) destaca que houve deslizes (erros) na geometria euclidiana, provocada pelas armadilhas do seu sistema dedutivo. Para evitar novos tropeços, assinala o autor, foi necessário substituir os conceitos primitivos do discurso por uma simbologia mais precisa, a exemplo da axiomática de Peano, conforme o excerto a seguir.

> [...] então, os postulados do discurso tornam-se afirmações sobre esses símbolos e se despem assim, de significado concreto; as conclusões são obtidas, portanto, a partir de uma base estritamente lógica, sem a intromissão

---

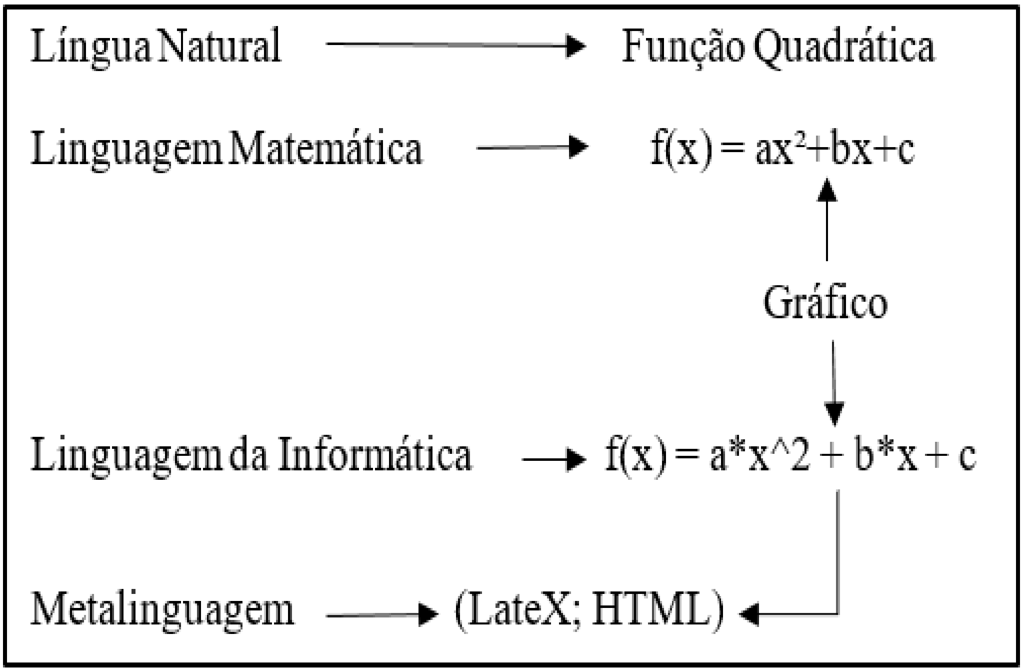
24 Elisha E. Loomis, organizou o livro *The Pythagorean Proposition* que em sua segunda versão (1940), continha 370 demonstrações para este teorema. Para ler mais, ver o artigo de Rosa (1972) disponível em: http://www.rpm.org.br/cdrpm/74/6.html publicado na Revista do Professor de Matemática n. 2 e n.74, publicados pela SBM.

> de fatores intuitivos. A axiomática objetiva o estudo das propriedades de conjuntos de postulados expressos dessa maneira (EVES, 1997, p. 657).

O modelo do heptalátero irregular que proponho não foi preparado para ser ensinado nas escolas, mas nada impede que esta noção conceitual seja posta em discussão. Esse é outro olhar para o ensino da matemática na perspectiva do jogo de linguagem wittgensteiniano.

Ainda sobre geometria, Melo (2013) assinala que existem distinções de sintaxe entre a linguagem natural, a linguagem da Informática e a linguagem da matemática, conforme a figura 20.

Figura 20 - Diferentes formas de linguagem



Fonte: (MELO, 2013, p. 78)

Nesta figura, a palavra **gráfico** assume o lugar genérico do objeto parábola, que está associado à duas notações uma na matemática e outra em linguagem LaTex. Mas, estas diferenças nem sempre são notadas pelos alunos, os professores de matemática por sua vez, consideram-na irrelevante do ponto de vista da matemática formal.

Na linguagem computacional LaTeX usada no *GeoGebra*[25], algumas notações são apresentadas conforme a figura 21.

---

25 Até o ano de 2011 a linguagem (notação) usada no *software* GeoGebra para a forma geral da função quadrática no campo dos números reais podia ser escrita como: f(x)=a*x^2+b*x+c. Este foi um ponto de discussão que levantei na ocasião da 1ª Conferência Latino-Americana de GeoGebra realizada na PUC-SP, sobre a diferença que havia entre a linguagem matemática usada no *software* e a linguagem matemática usada pelos professores em sala de aula, onde esta função aparece como $f(x)=ax^2+bx+c$. Nos anos seguintes, esta notação foi aprimorada pelos

Figura 21 - Linguagem LaTex / Linguagem matemática

Linguagem LaTex	Linguagem matemática
a^2 ou a^(2)	a^2
\frac{a} {b}	$\frac{a}{b}$
\sqrt {x^2+4}	$\sqrt{x^2+4}$
\sin\ alpha + \cos\beta	$\sin\alpha + \cos\beta$
\int_{a}^{b} x dx	$\int_a^b x\,dx$

Fonte: elaboração do Autor (2018)

Ressalto que as diferenças de notação usadas entre a linguagem LaTex e a linguagem matemática, podem ser vistas como uma espécie de **tradução** de uma linguagem para outra. Nesse sentido, o *software GeoGebra* é uma ferramenta que auxilia o professor na identificação das diferenças de sintaxe entre as estas duas linguagens, que possuem gramáticas diferentes, tal qual ocorre com a passagem da linguagem matemática para a linguagem natural.

Nesse sentido, ressalto e que a Tradução na Matemática, não trata apenas da decodificação simbólica ou de notações *string*, envolve também a interpretação de conceitos e definições, uma vez que os conceitos matemáticos precisam ser ensinados com base na linguagem natural. Assim, com base na figura 21 posso afirmar que os textos matemáticos agregam pelo menos três linguagens: a Natural, a Matemática e a Informática. Nesta pesquisa, opto por não investigar a linguagem da informática (códigos em LaTex), usados na programação do *GeoGebra*, bem como, outras linguagens que se destinam a reproduzir efeitos visuais e animações na interface do *software*.

Na matemática, o uso de regras é que define tipos ou famílias de funções, cujas semelhanças são observadas na sintaxe (forma escrita/notações) antes da igualdade a exemplo de: $f(x)=x$; $g(x)=x^2$ e $h(x)=1/x$, no campo dos números reais. Respectivamente, estes gráficos representam: uma reta, uma parábola e uma função recíproca (hipérbole) na qual os eixos X e Y são assíntotas à estas curvas. No entanto, tais semelhanças notacionais não revelam o aspecto

desenvolvedores do software, para que possa ser escrita tal qual se encontra nos livros didáticos, no intuito de evitar possíveis implicações (confusões) entre linguagens no aprendizado da matemática. Atualmente, o software só exibe o gráfico da função quadrática $f(x)=ax^2+bx+c$, se os parâmetros (a, b e c) forem definidos antecipadamente.

imagético de cada uma destas curvas especificamente, isso só pode ser visto a partir da representação geométrica (gráficos) no R^2.

Há ainda os casos em que numa mesma função, as semelhanças são quase idênticas, como é o caso das parábolas $f(x)=x^2$; $g(x)=3x^2$ e $h(x)=(1/2)x^2$, cuja representação gráfica destas curvas semelhantes à letra de "U" distinguem-se apenas pela sua abertura as quais (não exibiremos aqui). Tais semelhanças, só podem ser observadas a partir do gráfico, uma vez que as notações *string* que as identificam, não são as mesmas.

Este reconhecimento não é simples, requer domínio de técnicas e definições matemáticas que fazem parte da forma de vida do professor. Os alunos podem chegar a este aprendizado por meio de estudos mais aprofundados, mas estes conceitos não se encontram nos domínios da linguagem natural, fazem parte da gramática (regras) da linguagem matemática.

Wittgenstein (2005, p. 121) afirma "uma equação é uma regra de sintaxe" e procura deixar claro com esta expressão que, se as equações não forem compreendidas não podem ser explicadas, tornam-se, portanto, sem sentido. Com base nesta reflexão, cabe aqui, outra indagação: o aspecto visual de uma expressão algébrica pode ser caracterizado como uma espécie de *morfossintaxe* da linguagem matemática? procurei uma resposta plausível em Granger (1974; 2013) que aponta para a caracterização de uma espécie de Geometria Morfológica ao afirmar que a produção do conhecimento matemático possui um *estilo* tal qual os que governam a Geometria Analítica cartesiana ou Geometria euclidiana.

Granger (2013) destaca que a geometria sofreu, ao longo dos séculos, influência de tradições jônicas e pitagóricas manifestadas, em especial, pelo espírito platônico de lidar com a Matemática, daí o significado de morfológico atribuído à Geometria como ramo da Matemática que estuda formas, cujos cânones são científicos, o autor assinala, no entanto, que não podemos desprezar os fatos da empiria, pois esta abordagem está relacionada com a produção do conhecimento.

Se, por um lado, a empiria auxilia na obtenção e observação de dados com base em experimentos no sentido da justificação de práticas e registros por meio da descrição com ênfase no cognitivismo, no âmbito filosofia wittgensteiniana, ela é considerada uma prática inerente aos domínios da linguagem.

Wittgenstein (2009, p. 186) afirma no aforismo 496 das *Investigações Filosóficas* "a gramática não diz como a linguagem tem que ser construída para cumprir com sua finalidade, para agir desta ou daquela maneira sobre as pessoas. Ela apenas descreve o emprego dos signos, mas de maneira alguma os elucida". Concordo parte com Wittgenstein, pois, um dos objetivos desta pesquisa é dar sentido à linguagem matemática, para tanto, é importante elucidar ou apresentar justificativas científicas para o uso de simbologias da Matemática, que geralmente são difíceis de ser compreendidos pelos alunos.

Para finalizar esta seção, destacarei uma experiência que vivenciei durante a realização da I Conferência Latino-Americana de *GeoGebra* realizada na PUC-SP em 2011, quando apresentei um trabalho sobre as diferenças mencionadas na figura 21 anterior, recebi críticas da comunidade de programadores lá presente. As críticas se deram no sentido de que programar no *GeoGebra* era uma tarefa complexa e demandava tempo por parte da comunidade de desenvolvedores, por não estra apto para fazer tais modificações eu não deveria me preocupar com este aspecto. Refletindo sobre o ocorrido que na ocasião todos ali estavam empenhados em ressaltar as ferramentas e inovações contidas no software, que o destacava no cenário das tecnologias como algo promissor, em especial por se trata de um *software* livre (gratuito).

Na época da conferência realizada na PUC-SP, o *GeoGebra* estava em ascensão, então pude compreender a advertência. Dois anos após este episódio, ao acompanhar o lançamento de versões atualizadas do *GeoGebra* pude perceber que a crítica que recebi não foi tomada como algo vazio. A linguagem do *software* foi modificada e as diferenças das quais eu chamei atenção no evento puderam ser notadas nas versões seguintes, ou seja, os programadores aproximaram a linguagem do software da linguagem matemática usada em sala de aula como eu havia sugerido. Este fato me fez continuar as pesquisas com a confiança de que ressaltar a linguagem no ensino da matemática deu frutos.

Isto posto, considero que o uso de tecnologias informáticas no ensino da matemática traz algumas implicações de natureza didática que precisam ser observadas do ponto de vista docente. O uso das Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC) na Educação foi bastante disseminado no Brasil desde as duas últimas décadas do século XX, algumas destas informações podem ser obtidas em Melo (2103). Nesse sentido, observei que ao fazer uso de *softwares* no ensino da matemática os professores não davam muita importância para o papel da linguagem e sim para a plotagem de gráficos que trouxe contribuições para o Ensino da Matemática.

Havia e há ainda alguns inconvenientes para o manuseio adequado destas ferramentas, a saber: os comandos em língua estrangeira (geralmente em inglês); as licenças pagas de *softwares* autorais como o Mathematica e Mathcad; os comandos em linguagem LaTex (ver figura 21) e por fim, a falta de domínio dos professores para fazer uso dos *softwares* com os alunos que muitas vezes passa pela recusa pessoal de inserir tecnologias em suas aulas, dentre outros motivos.

Por outro lado, assinalo que atualmente, boa parte das implicações educacionais acerca do uso de *softwares* no ensino da matemática vem sendo superadas. A linguagem está mais acessível, os *softwares* encontram-se disponíveis em vários idiomas, ou seja, os programadores trabalharam também na perspectiva da tradução.

Até o a no de 2012 a maioria dos *softwares* que se destinavam ao ensino da matemática não dispunham de ferramentas de animação, ou seja, os gráficos plotados eram estáticos, o computador gerava as imagens, mas era como se os mesmos tivessem sido desenhados no quadro pelos professores, com maior rapidez e precisão. Na pesquisa que realizei Melo (2015), volto a destacar a importância da linguagem matemática na constituição de conceitos, já na perspectiva da tradução de textos matemáticos com o *GeoGebra*. Exploro desde então, os efeitos visuais e os movimentos para elucidar o significado intrínseco da linguagem matemática no estudo de funções e geometria analítica e trigonometria.

Algumas das experiências que descrevo aqui, provém de interesse particular sobre a importância da linguagem matemática quando da utilização de *softwares* no ensino da matemática. Parte destas reflexões, se devem ao trabalho solitário de professor pesquisador. As desenvolvi na pós-graduação, o que me levou a fazer conexões entre a tradução e o jogo de linguagem wittgensteiniano. Me dediquei a buscar respostas para perguntas que não são feitas tradicionalmente à luz da cognição e dos processos mentais na educação, quase sempre voltadas à aprendizagem. Daí o interesse pelo ensino, mais que pela aprendizagem da matemática no contexto escolar.

Reitero, que a perspectiva wittgensteiniana do jogo de linguagem proporcionou um novo olhar para a educação Matemática. Unir esta filosofia ao ensino às teorias da tradução e ao uso de tecnologias informáticas, ampliaram o meu universo de pesquisa rumo à elaboração dos conceitos de tradução Interna e Jogos de Imagens. Um dos aspectos mais importantes em minha trajetória docente, foi rever a natureza de alguns conceitos matemáticos no sentido de poder explicá-los, quase sem a necessidade que maioria das teorias voltadas à Educação Matemática mantém como prioridade, ou seja, a busca incessante por aplicações que possam ajustar-se à realidade. Entendo como realidade também, a realidade da Matemática, sem qualquer prejuízo para o exercício de minhas práticas docentes.

Desta forma, cumpre ressaltar que a gramática da matemática mencionada por Wittgenstein, condiz com as práticas de ensino da matemática advindas de minhas experiências docentes. Assim, fiz uso das metáforas, expressões e aforismos empregados pelo filósofo na perspectiva da Educação Matemática, ou seja, as hipóteses, inferências e conceitos que elaborei visaram a Tradução na Matemática e os Jogos de Imagens como atividades de ensino inerentes ao jogo de linguagem específico da Matemática.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Os contornos desta pesquisa engendram, por conseguinte aspectos de minha trajetória docente, assim, é que ao longo das atividades educacionais que desenvolvi como professor de matemática da Educação Básica ao Ensino superior, procurei consolidar minha formação com base em pesquisas científicas desenvolvidas no contexto da Pós-graduação em Educação Matemática.

Durante todo o meu Curso de Licenciatura em Matemática iniciado em 1991 na UEPA, bem como, nos anos seguintes até 1999, cursei outras duas pós-graduações ligadas ao Ensino e Aprendizagem da Matemática e ao uso de Tecnologias Informáticas na Educação. Nesse interim, dedicado ao trabalho docente, me afastei da pesquisa, em especial, por motivos de trabalho. Retornei em 2011, ano do meu reingresso na Pós-Graduação.

Já no Curso de Mestrado em Educação Matemática na UFPA, tomei conhecimento da linha de pesquisa que investigava a linguagem matemática no contexto da Educação Matemática. Ingressar em um novo campo e pesquisa foi essencial para que houvesse uma mudança radical em minha formação, até então quase que totalmente tomada pelos pressupostos das teorias cognitivas e pelos idealismo construtivista, que predomina na Educação brasileira. Considero, que os novos rumos, agora pautados na Filosofia da Linguagem com ênfase nas discussões de Ludwig Wittgenstein, ampliaram os meus horizontes e foram preponderantes para novas incursões no que diz respeito ao ensino da Matemática.

Nesse sentido, ao longo de mais de 20 anos de docência, quase sempre voltados à formação de professores na área pedagógica e nas licenciaturas em matemática, empreendi esforços para melhorar a qualidade do ensino e da aprendizagem, sempre atento ao tripé: ensino, pesquisa e extensão. Nesse interim, os temas aos quais me dediquei foram Metodologia e Prática de Ensino da Matemática, sob os quais dediquei especial atenção desde a graduação, juntamente com os fundamentos da matemática na Educação Básica. Passei incialmente a atuar como formador de professores na área pedagógica ingressando imediatamente no Ensino Superior em 1995, assim que recebi o diploma da graduação.

Percorri, portanto, um caminho diferente dos demais professores em início de carreira, que tem como prioridade ensinar matemática na Educação Básica. Não obstante, ao meu ingresso abrupto na Universidade como docente substituto, foi marcado por uma trajetória de atuações à frente do laboratório de Ensino da Matemática da UEPA e de algumas experiências como professor da Educação Básica antes mesmo de obter o grau de licenciado pleno em Matemática.

Encerro as primeiras considerações desta pesquisa, com um breve recorte de minha formação docente, para reiterar que o Ensino da Matemática se consolida em minhas práticas como professor. Assim, as reflexões e discussões preponderantes nesta Tese, voltam-se ao universo dos professores, mais que para os aprendizes (alunos). Tal decisão, se deve em função de que um número elevado de pesquisas no âmbito da Educação Matemática tem como foco a aprendizagem. Compreendo que ensino e aprendizagem são complementares, não há dois extremos, assim, uma das hipóteses que levantei nos capítulos inicias desta pesquisa teórica, considera que o aprendizado é algo peculiar aos sujeitos que passam por diferentes atividades de aprendizagem.

Assim, cumpre destacar que os professores são os maiores responsáveis, ou seja, são eles que decidem que estratégias, técnicas, métodos e recursos empregar, para alcançar de modo mais apropriado e eficaz, o pleno exercício das atividades educacionais. Independentemente das teorias ou concepções que façam uso, a meu ver, algo se mantém no panorama educacional que venho acompanhando desde que era aluno, a saber: a dedicação e o desejo de que o trabalho realizado em sala de aula, visa sempre a melhoria qualitativa do ensino e da aprendizagem da matemática.

Sem qualquer receio de ser prescritivo, defendo que a natureza do conhecimento matemático não é biológica, não nasce de insights, não se encontra nalgum lugar da psiquê, esperando ser ativado. As experiências e as formas de vida, os aspectos sociais e culturais, os conhecimentos herdados historicamente, pautado em pressupostos científicos não poderia sê-lo, de outra forma se não pelo uso da Linguagem. Esta é de modo fundamental, a perspectiva que defendo nesta Tese. Para tanto, me amparo na perspectiva filosófica *jogo de linguagem* wittgensteiniano para sustentar os argumentos desta pesquisa acerca da constituição de conceitos matemáticos.

Procurei estabelecer conexões entre o Ensino da Matemática e os pressupostos epistemológicos desta Ciência, em conjunto com as teorias da Tradução, que me levaram a formular as expressões Tradução Interna e Jogos de Imagens, como eixos fundamentais desta pesquisa.

De antemão, posso afirmar que durante o Curso de Doutorado na UFPA, cheguei às seguintes constatações educacionais de cunho geral: que não há como ensinar matemática sem a linguagem, esta é, portanto, uma das teses que defendo como professor e pesquisador, não se trata porém, de uma verdade a ser seguida por outros, mas de uma certeza; nas escolas, o aprendizado dos conceitos matemáticos pelos alunos é tão fundamental quanto o aprendizados das palavras, que se juntam à experiências cotidianas, sociais, culturais e humanas proporcionais pela Educação Escolar, Acadêmica e Científica.

Esta pesquisa, traz em seu bojo alguns resquícios e ilações do passado no que tange a Educação Matemática, cujo aporte teórico se deu a partir da Filosofia de Wittgenstein, conforme os estudos que realizei no mestrado entre 2011 e 2013. Essa trajetória configurou parte do novo percurso epistemológico que adotei ao investigar as contribuições da Matemática como Linguagem no Ensino. Atualmente, os estudos que desenvolvo versam sobre a Tradução de textos na Matemática, na perspectiva dos jogos de linguagem.

Ressaltei no decorrer do texto que há jogos de linguagem específicos na Matemática, cujas aplicações visam o seu Auto Movimento, tais constatações, se dão por meio ilações intrateóricas. Nessa Tese, as reflexões, as discussões e análises em determinado momento são restritas à objetos matemáticos, visaram, portanto, o trabalho docente e suas aplicabilidades em diferentes níveis de ensino. Mas, nada impede que o teor e o substrato das hipótese e inferências aqui produzidas alcancem os aprendizes, espero, por conseguinte, que este seja um dos desdobramentos desta investigação.

O interesse de tomar como objeto de pesquisa a temática da tradução de textos matemáticos, se deve em parte ao papel das **imagens** e do **jogo de linguagem** wittgensteiniano, que de certa forma permearam alguns trechos das discussões que fiz no Mestrado em 2013. Algumas observações e reflexões extraídas daquela pesquisa, me levaram a intensificar as buscas sobre a constituição de conceitos matemáticos, agora sobre a vestimenta da Tradução na Matemática.

Nesse sentido, os primeiros rudimentos desta pesquisa iniciaram em 2014 e seguiram até o meu ingresso no Doutorado em 2016. Imbuído de novas leituras acerca das aplicabilidade da linguagem matemática, passei a investigar sobre a tradução de textos matemáticos, e cheguei à conclusão de que esta temática era muito recente no Brasil. Havia apenas três pesquisas concluídas no Brasil sobre a tradução de textos matemáticos entre os anos de 2011 e 2014. Destaco, portanto, que nenhuma das pesquisas anteriores apontou especificamente para o que mencionei sobre as expressões **Tradução Interna e Jogos de Imagens**. Esta informação, confere a este estudo, um trabalho pioneiro no campo da Educação Matemática. O estudo aqui desenvolvido, tem como ensejo, contribuir com as pesquisas educacionais, apontando para a tradução na matemática, na perspectiva do ensino.

Procurei evidenciar ao longo do texto a expressão wittgensteiniana jogo de linguagem, no intuito de constituir analogamente o conceito de Jogos de Imagens na Matemática. Nesse sentido, fiz uso (apliquei) alguns aspectos da Filosofia da Linguagem e da Matemática presentes na obra Ludwig Wittgenstein, no âmbito da Educação Matemática, com o propósito de minimizar as dificuldades provocadas resíduos da linguagem formal no contexto das Ciências, a exemplo do que foi mencionado por Granger na *Filosofia do Estilo*.

No campo da Hermenêutica, assinalei que uma das tarefas do tradutor consiste em dar significado linguístico às palavras e expressões de um idioma para outro, atentando para o que foi dito por Paul Ricoeur: que esta passagem é praticamente impossível, pois, traduzir gera infidelidades por parte do tradutor. Assim, por diversos motivos o tradutor sempre trai o texto original. Já o professor tradutor Paulo Oliveira, assinala que as técnicas e práticas tradutórias requerem no mínimo o conhecimento profundo de duas línguas a de origem e a de chegada, para que haja possibilidade de tradução.

Por outro lado, afirmo que a Tradução na Matemática não é equivalente ao traduzir expressões idiomáticas, consiste de uma técnica linguística inerente à tarefa do professor que ensina matemática. Assim, a tradução interna na matemática se fasta também do que foi apregoado por Gadamer, que toma as atividades de interpretação e tradução como equivalentes. Sinalizo que traduzir na matemática é um jogo de linguagem, no qual os conceitos matemáticos nem sempre possuem equivalentes na linguagem natural. Desta forma, ressalto que a tradução literal de simbologias e expressões de textos matemáticos é possível e concentra-se ainda no nível das pesquisas, por ser um trabalho profissional e técnico, ainda não se destina ao ensino e aprendizagem na Educação Básica. Traduzir na matemática, é por conseguinte, uma atividade que se limita á especialistas em Matemática, difere, portanto, das tarefas realizadas pelos tradutores literários e pelos linguistas.

Traduzir na matemática requer o domínio de um especialista, que na Educação Escolar passa pela figura do professor de matemática. Esta é uma ilação que procurei enfatizar nesta pesquisa, ao observar e refletir sobre as atividades que os professores desenvolvem na sala de aula ao ensinar matemática. Esta característica a meu ver subsiste nas práticas docentes, ainda que não figure com as peculiaridades que aponto na pesquisa. Trata-se de uma inferência teórica. No entanto, os argumentos que uso, se dão no sentido de mostrar que esta atividade subsiste no trabalho docente, muitas vezes é tomada apenas como leitura e interpretação de textos matemáticos.

Ao ensinar matemática o professor pode não se dar conta de que ao fazer a passagem da linguagem matemática para a linguagem natural, faz uma espécie de tradução. Passei a inferir nesta pesquisa, que a tradução na matemática está presente sobremaneira, no discurso dos professores. Mas cumpre destacar, que a tradução ao moldes do que evidencio nesta pesquisa consiste de uma prática implícita, oculta-se no jogo de linguagem docente. Um dos meus objetivos, foi mostrar que este tipo específico de tradução é inerente à atividade docente, mas não é uma técnica usual para ser usada de imediato em aulas expositivas, requer estudos de natureza epistêmica acerca da constituição de conceitos matemáticos.

Steiner e Gadamer concordam que traduzir consiste em interpretar. Para Wittgenstein traduzir é um jogo de linguagem. Em seus aforismos o filósofo dá a entender, assim como Steiner e Gadamer, que a tradução tem graus de parentesco e se afina com a interpretação. Michel Le Du (2009) afirma que para Wittgenstein uma **interpretação** é sempre uma **tradução**. De posse do arcabouço filosófico e teórico aqui mencionado, os argumentos que teci, se deram no sentido de elaborar o que chamei de Tradução Interna na Matemática.

Para alcançar este propósito, detalhei aspectos acerca da constituição de conceitos matemáticos que não são debatidos usualmente em livros didáticos e técnicos que se destinam ao Ensino da Matemática. Fiz uso, portanto, de conceitos já existentes na Matemática, para configurar a tradução interna associada ao recurso das imagens (gráficos) no computador, para estabelecer conexões entre Álgebra e Geometria no ensino de Funções e Geometria analítica por exemplo. Não tive a pretensão de criar novos teoremas ou fórmulas à luz do jogo de linguagem wittgensteiniano, por entender que certos conceitos e definições da Matemática estão devidamente consolidados, alguns dos quais, milenares, como os Axiomas da Geometria euclidiana e as equações que se sustentam como idioma da Álgebra.

No percurso entre as Teorias da Tradução e a Filosofia da Linguagem, o objeto de investigação que mais se destacou em minhas observações ganhou definitivamente um *status* relevante na pesquisa, a saber: **as imagens**. Este conceito já se mostrava de mostrara forme mencionei em minhas pesquisas sobre esta temática, iniciada em 2014. O papel das imagens se mostrou com maior intensidade e relevância na constituição de conceitos matemáticos. Concentrei boa parte das discussões nesta Tese com o propósito de elucidar conceitos matemáticos por trás dos conceito de imagem, sempre na perspectiva da linguagem, para tanto, busquei, responder a seguinte pergunta: o que dizem as imagens na matemática? Produzi desta forma argumentos com base na filosofia de Wittgenstein, para caracterizar as imagens na Matemática como elementos constituintes de um jogo de linguagem, por conseguinte, formulei a expressão Jogos de Imagens.

A partir de uma breve jornada epistemológica em busca do conceito de imagem no sentido *lato*, constatei que não é possível descrever imagens apenas por um conceito, há inúmeros conceitos que versam sobre imagens, inclusive na Matemática. A busca pela resposta sobre o que dizem as imagens... Foi minimizada pela afirmação de Arley Moreno ao revelar que as "imagens são conceitos" e mais que os conceitos são técnicas que usamos para elucidar imagens. Amparo-me nesta ilação, para conferir à tradução de textos matemáticos a condição de atividade que auxilia também, na compreensão de imagens na Matemática. De forma objetiva, cheguei à conclusão de que "traduzir na matemática" é fazer uso dos jogos de linguagem para compreender como os conceitos matemáticos se constituem.

Refleti sobre o caráter polissêmico da Linguagem Natural e a maneira pela qual a linguagem matemática tenta objetivar conceitos por meio de símbolos específicos, o que se consegue até certo ponto. Mas, afeito às observações advindas de especialistas em Linguística e tradutores, concordo corroboro a afirmação de Paulo Oliveira que "toda linguagem é polissêmica", não obstante, a linguagem matemática também possui traços de polissemia. Assim, é possível afirmar que há simbologias que podem ser traduzidas para a linguagem natural, mas há conceitos e símbolos específicos que só tem explicação ou significado na Matemática. O conceito de infinito é um exemplo de conceito complexo que não possui imagem.

Diante do exposto, ressalto que nem sempre é possível fazer uma tradução da Matemática para a linguagem natural, pois certas traduções figuram intra teoricamente no corpo desta Ciência. A função da Tradução Interna nessa pesquisa, consiste em minimizar as implicações decorrentes do uso de duas gramáticas no ensino, a da Língua Portuguesa e a da Matemática, que ora convergem ora se distanciam. Para analisar a natureza da gramática da linguagem matemática, intensifiquei as conexões entre conceitos da Álgebra e da Geometria para enunciar que os Jogos de Imagens na Matemática envolvem técnicas de Tradução Interna.

Em determinadas passagens da pesquisa aticei o debate sobre o Ensino de Matemática no contexto educacional brasileiro, para enfatizar a importância e perspectiva da linguagem e da linguagem matemática na educação escolar. Por conseguinte, não me furtei em apresentar contraposições acerca de Teorias da Aprendizagem que se amparam em concepções utilitaristas, respaldadas pedagogicamente em documentos oficias do MEC. Estas abordagens deixam marcas no ensino da matemática por apregoar um falseamento metodológico, cujos fundamentos amparam-se em conhecimentos prévios, em pressupostos experimentais e na maturidade biológica como fundamentos últimos da Educação.

Uma consequência destas abordagens na pedagogia é a opção por atrelar exclusivamente o ensino da matemática a situações do cotidiano, o que afasta tanto professores quanto alunos das discussões que envolvem a natureza conceitual da Matemática como Ciência. Cumpre assinalar, que a Matemática não é uma ciência meramente empírica, não é a realidade que justifica a Matemática, a Matemática pode ser usada para que possamos fazer certas justificativas. Mascarar pedagogicamente a realidade da Matemática nas escolas, tem como consequência o não avanço da ciência e das novas tecnologias.

Uma das ilações propostas por Wittgenstein foi a condição terapêutica da linguagem, no intuito de que pudéssemos desfazer certas ilusões ou confusões filosóficas, as quais atribuo também à Educação e á Matemática. Um possível método ou tratamento via jogos de linguagem nesta perspectiva, amplia as possibilidades de compreensão de conceitos na Matemática. Diferentemente das propostas pedagógicas que defendem uma aprendizagem intelectual por si, Wittgenstein adverte que a Matemática não precisa ser fundada a partir de pressupostos empíricos, é o seu ensino que a institui.

O papel filosófico, por conseguinte, educacional do professor é clarificar conceitos. O professor não descobre conceitos ele os inventa, as proposições matemáticas não figuram num estado de coisas, são convenções definidas por uma comunidade profissional. Se há, portanto, uma essência na matemática ela se deve ao seguimento de regras produzidas ao longo dos tempos, adornadas e produzidas paradigmaticamente por necessidades internas.

Ao investigar a passagem da linguagem da Álgebra para a linguagem da Geometria, procurei estabelecer de modo particular conexões entre imagens e conceitos no intuito de que esta relação auxilie os aprendizes na compreensão do que é ensinado. Nesse sentido, analisei a sintaxe da linguagem matemática e o uso de regras internamente, procurei mostrar que há um confronto entre a gramática da linguagem natural e a linguagem matemática, pois os sistemas que elas operam e as sintaxes que as rege são distintos. Fiz um exame detalhado sobre alguns objetos matemáticos como o estudo de Funções e Geometria Analítica, destacando notações e simbologias, para caracterizar o que chamei aqui de Tradução Interna ou tradução intrateórica.

Neste ínterim, persegui os objetivos propostos e as hipóteses levantadas na pesquisa com o intuito de validar os argumentos da Tese. Inferi que tanto a Tradução interna quanto os Jogos de Imagens na Matemática podem ser considerados como extensões do jogo de linguagem wittgensteiniano. Tais expressões engendram conceitos e imagens, por meio de uma abordagem metodológica, que pode ser entendida como atividade de ensino na Matemática.

Inferi, que os jogos de linguagem entre professores e alunos são distintos, os primeiros estão ligados ao uso de técnicas, dada a sua formação profissional, os alunos por sua vez, jogam esse jogo com as palavras do vocabulário da Língua Portuguesa. A Tese da Tradução Interna e dos Jogos de Imagens destina-se a fazer esta conexão entre estes dois mundos com auxílio dos jogos de linguagem da Informática.

Desta forma cheguei a algumas conclusões sobre o intento desta investigação teórica a saber: que a tradução interna, por mais que se constitua no âmbito da pesquisa com foco no ensino, tem a possibilidade de ser aplicada no Ensino da Matemática em diferentes níveis; os Jogos de Imagens presentes na Matemática possuem conexões com a Linguagem da Informática; há conceitos da álgebra que podem ser traduzidos ou explicados via geometria, mas nem sempre esta passagem de uma linguagem para outra se verifica, a sintaxe da álgebra (conteúdo) não condiz necessariamente com as imagens da geometria (forma). Usei então, para destacar uma possível imbricação entre estes dois campos da Matemática a expressão morfossintaxe da linguagem matemática. Este conceito é uma das peças do jogo de linguagem da matemática, que se estende para o jogo de linguagem da informática e se entrelaçam no ensino. A tradução na Matemática, consiste em elucidar, quando possível estas passagens.

A pesquisa ressalta uma nova imersão no contexto da tradução de textos matemáticos, cujas características se entrelaçam com as ilações de autores contemporâneos citados no texto. Reitero, no entanto, que a discussão epistemológica feita aqui, se pauta em dar consistência à Tradução Interna na Matemática, na condição de atividade subjacente ao ensino. Esta inferência, ampara-se em observações extraídas de minha memórias docentes e de situações de ensino que vivenciei como professor. Afirmo, portanto, que a tradução faz parte do jogo de linguagem do professores que ensinam Matemática.

A tradução na matemática ou tradução interna acontece quando fazemos uso de diferentes jogos de linguagem em função do aprendizados dos alunos. Mas, nem sempre as regras deste jogo são claras (reveladas) a exemplo das traduções que os especialistas fazem ao traduzir documentos históricos como os tabletes de argila da Mesopotâmia ou de Papiros antigos. Não se trata de uma tradução pautada em textos filosóficos e matemáticos como a tradução do francês para o português do Discurso do Método cartesiano e do grego para o português como nos *Elementos* de Euclides. A **Tradução Interna** possui algumas destas características, mas sua natureza é conceitual, destina-se a esclarecer internamente os significados de símbolos e notações da Matemática, tomados no ensino, quase sempre por meio da leitura e interpretação de textos. Traduzir na matemática é, portanto, dar sentido a conceitos matemáticos que já existem, não se trata de uma descoberta ou de invenção, mas de uma ilação teórico-epistemológica, de uma **técnica**.

Apresento, portanto, a Tradução na Matemática como uma técnica de ***ver como***. Esta atividade suscita no ensino a observação de aspectos (imagens) que se entrelaçam aos conceitos e palavras da Linguagem Natural, constitui-se, portanto, como um Jogo de Imagens. O ver como wittgensteiniano, é movimento, é interpretação e elucidação, amplia a possibilidade compreensão de conceitos. A tradução na Matemática, é, por conseguinte, uma espécie de pragmática teórica tal qual a visada proposta por Moreno na *Epistemologia do Uso*.

Traduzir na matemática tem semelhanças familiares com a *traductique* em Berman, não como tradução automática, mas como tradução que faz uso do jogo de linguagem da Informática para traduzir conceitos e imagens da Matemática. Assim, fiz uso de recursos tecnológicos do GeoGebra para traduzir conceitos algébrico-geométricos, e mostrar que esta atividade é uma espécie de morfossintaxe na Matemática. Traduzir na matemática é uma das atribuições do professor, ou seja, o professor explica e mostra como se dá a passagem de conceitos da álgebra para e geometria e vice-versa.

Traduzir na Matemática, consiste também, em dissolver problemas inerentes à polissemia da linguagem natural e da linguagem matemática, é compreender como empregamos diferentes jogos de linguagens para decodificar simbologias e notações científicas na Educação.

Empreguei na construção de gráficos um abordagem metodológica analítica, para compreender como funcionam determinados conceitos, ou seja, construção de gráficos no computador não é uma atividade meramente ilustrativa. Ressalto que, a construção de gráficos não se pauta exclusivamente na cognição, os gráficos não são objetos matemáticos construídos a partir de conhecimentos prévios, a natureza destes conceitos pertence aos domínios da Matemática e se aplica à outras ciências.

Procurei trazer à lume no Ensino da Matemática, a Tradução Interna e os Jogos de Imagem, no intuito de que estas atividades sejam integradas aos demais jogos de linguagem do professor na Educação Escolar. Esta Tese apresenta quadros de referência para Tradução na Matemática como um jogo de linguagem possível. Traduzir na matemática é, portanto, condição de sentido para a compreensão de conceitos ensinados pelos professores.

Por fim, ressaltei a importância da pesquisa e de suas aplicações em diferentes níveis educacionais, no intuito de que as práticas docentes possam ser cada vez mais evidenciadas por meio de estudos e contribuições acerca da linguagem Matemática no contexto escolar. A premissa da tradução nesta pesquisa, pautada no jogo de linguagem wittgensteiniano, enseja e possibilita aos interlocutores ampliar discussões e debates, sobre práticas docentes e produção de conhecimentos científicos evidenciados na Educação Matemática.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABBAGNANO, N. **Dicionário de Filosofia**. São Paulo: Martins Fontes, 2007.

ALVES, Daniel A. de Sousa. VASCONCELLOS, Maria L. Barbosa. **Metodologias de pesquisa em Estudos da Tradução: uma análise bibliométrica de teses e dissertações produzidas no Brasil entre 2006-2010**. Revista D.E.L.T.A: São Paulo, 2016. vol. 32. n.2. pp.375-404. ISSN 0102-4450.

ARAÚJO, I. Lacerda. **Curso de teoria do conhecimento e epistemologia**. Barueri-SP: Minha Editora, 2012

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6023:2018.** 2 ed. Informação e documentação: referências e elaboração. ISBN 978-85-07-07757-2.

BARROS, J. D'Assunção. **Arte e conceito em Joseph Kosuth**. Revista digital arte e conceito [2008]. Disponível em: <http://www.revista.art.br/site-numero-10/trabalhos/32.htm>. Acesso em: 7. set. 2018.

BARROS, J. D'Assunção. **Os conceitos seus usos nas ciências humanas**. Petrópolis-RJ: Vozes, 2016.

BARUK, Stella. ***Échec et maths.*** Paris: Editions du Seiul, 1973.

BARUK, Stella. **Insucesso e matemáticas**. Lisboa: Relógio D'água Editores, 1996.

BATESON, Gregory. **Mente e natureza**. Rio de Janeiro: Francisco Alves Editora, 1986.

BELIZÁRIO, Edvaldo. **Teorias da tradução na prática: as armadilhas da tradução**. Rio de Janeiro: Revista Italiano-UERJ, 2010. Ano 1. v1. n1. pp-51-66.

BENJAMIN, Walter. **A tarefa do tradutor.** In: BRANCO, Lúcia Castello (Org.). A tarefa do tradutor de Walter Benjamin: quatro traduções para o português. Trad. Karlheinz Barck et. al. Belo Horizonte: Fale-UFMG, 2008. p. 51-64.

BERKELEY, Georg. **Tratados sobre a visão**. Trad. José de A. Marques. São Paulo: Editora da Unicamp, 2010.

BERMAN, Antoine. **A tradução e seus discursos**. Trad. Marlova Assef. UFRJ-Rio de Janeiro: ALEA-Revista de Estudos Neolatinos, 2009. ISSN. 1807-0299. vol.11. n.2. jul. /dez. p. 341-353.

BRANDEMBERG, J. Cláudio. **Uma análise histórico-epistemológica do conceito de grupo**. São Paulo: Livraria da Física, 2010.

BRASIL, Secretaria de Educação Básica. **Parâmetros Curriculares Nacionais**. Brasília: MEC/SEB, 2000.

BRASIL, Secretaria de Educação Básica. **Orientações curriculares para o Ensino Médio**. Brasília: MEC/SEB, 2006.

BRASIL, Secretaria de Educação Básica. **Base Nacional Comum Curricular.** Brasília: MEC/SEB, 2017.

BRASIL, Secretaria de Educação Básica. **Censo escolar: notas estatísticas.** Brasília: MEC/SEB, 2018.

CAMACHO, Fernando. A tarefa do tradutor. In: BRANCO, L. Castello (Org.). Trad. Susana Kampff Lages. **A tarefa do tradutor de Walter Benjamin: quatro traduções para o português.** Belo Horizonte: UFMG, 2008. pp. 25-49.

CAVEING, Maurice. **Le problème des objets dans la pensée mathématique**. Paris: Librairie Philosophique J. Vrin, 2004.

CONDURÚ. M. Teles. PEREIRA. J. ALMIR. **Elaboração de Trabalhos Acadêmicos: normas critérios e procedimentos**. 4. ed. _ Belém, 2010.

CHAUVIRÉ. Christiane. **Wittgenstein**. Rio de janeiro: Jorge Zaar Editor, 1991.

CRIPPA, D. **A solução cartesiana da quadratura do círculo.** São Paulo: Scientia Studia, 2010. vol. 8. n. 4. ISSN: 1678-3166.

DUARTE. Newton. MARTINS, L. Márcia. (orgs). **Formação de professores: limites contemporâneos e alternativas necessárias.** São Paulo: Cultura acadêmica, 2010.

ENGELMANN, Arno. **A psicologia da Gestalt e a ciência empírica contemporânea.** Brasília: Psicologia teoria e pesquisa, 2002. jan./abr. vol. 18. n.1. pp. 01-16.

EUCLIDES. **Os Elementos.** Trad. Irineu Bicudo. São Paulo: Ed. UNESP, 2009.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática.** Trad. Hygino H. Domingues. 2. ed. Campinas-SP: UNICAMP, 1997.

FILHO, J. Gomes. **Gestalt do objeto: sistema de leitura visual da forma.** 9. ed. São Paulo: Escrituras, 2009.

FROTA, M. Paula. **Um balanço sobre os estudos da tradução o Brasil**. Florianópolis: Cadernos de tradução. ISSN 2175-7968. v. 1. n.19. 2007. p.135-169

GADAMER, Hans-Georg. **Verdade e Método: traços fundamentais de uma hermenêutica filosófica**. Trad. Flávio Paulo Meurer. 3 ed. Petrópolis-RJ: Vozes, 1999.

GALELLI, R. Descovi. **A matemática pelo olhar da tradução.** 121f. Dissertação (Mestrado em Estudos da Tradução). Universidade Federal de Santa Catarina. 2012. Disponível em:< https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/103400>. Acesso em: 10. fev. 2018.

GEOGEBRA. *Software*. Disponível em: <http://www.GeoGebra.org.br>. Acesso em: 5. fev. 2018.

GONÇALVES. C. H. B. **Observações sobre a tradução de textos matemáticos cuneiformes.** Rio Claro: Bolema, 2011. v. 24 n. 38. p. 1-15.

GOSTTSCHALK, C. M. C. **A natureza do conhecimento matemático sob a perspectiva de Wittgenstein: algumas implicações educacionais**. Campinas-SP: Cadernos de História da Filosofia e Ciências, 2004. série 3, v. 14, n. 2, jul./dez. pp. 305-334.

GOSTTSCHALK, C. M. C. **Critérios, Regras e Certezas: uma reflexão sobre a natureza do pensamento crítico.** In: Wittgenstein- Certeza? MORENO, Arley. (Org.). Campinas- SP: Col. CLE. UNICAMP, 2010. v. 58. pp. 79-101.

GOTTSCHALK, C. M. C. **A compreensão de significados matemáticos: entre o transcendental e o empírico.** In: Compreensão, treinamento, definição. Campinas-SP: Col. CLE-UNICAMP, 2014a. v. 68. pp-56-76.

GOTTSCHALK, C. M. C. Algumas observações sobre a questão da possibilidade de aprendizagem sem linguagem. In.: **Filosofia e Educação: Interfaces.** GOTTSCHALK, Cristiane M. C.; EUZÉBIO-PAGOTTO. Marcos. S.; ALMEIDA, R. São Paulo: Kepós, 2014.

GOTTSCHALK, C. M. C. **A terapia wittgensteiniana como esclarecedora de conceitos fundamentais do campo educacional**. In: IXTLI Revista Latinoamericana de filosofia de La Educación. v. 2. n.4. pp.299-315. 2015.

GLOCK, H. J. **Dicionário Wittgenstein.** Trad. Helena Martins. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 1998.

GRANGER, Gilles-Gaston**. Filosofia do estilo**. Trad. Scarlett Z. Marton. São Paulo: Perspectiva-USP, 1978.

GRANGER, Gilles-Gaston**. A ciência e as ciências**. Trad. Roberto Leal Pereira. São Paulo: Ed. da UNESP, 1994.

GRANGER, Gilles-Gaston**. Filosofia, linguagem, ciência**. Trad. Ivo Storniolo e José L. Cazarotto. São Paulo: Ideias e letras, 2013.

HADOT, Pierre. **Wittgenstein e os limites da linguagem.** São Paulo: É Realizações, 2014.

HEBECHE, Luiz. **A filosofia *sub especie gramaticae*: curso sobre Wittgenstein.** Florianópolis: Ed. da UFSC, 2016.

HINTIKKA, M. B. HINTIKKA. Jaakko. **Uma investigação sobre Wittgenstein.** Campinas-SP: Papirus, 1994.

HOUAISS, A. **Dicionário eletrônico da língua portuguesa**. São Paulo: Nova Fronteira, 2007. 1 CD ROM.

HUMBOLDT. V. W. **Sobre pensamento e linguagem.** Trad. Antonio Ianni Segatto. São Paulo: Trans/Form/Ação, 2009. v. 32. v.1. pp. 193-198.

ILARI, Rodolfo. **Linguagem atividade constitutiva: ideias e leituras de um aprendiz.** Curitiba: Revista Letras-Ed. UFPR, 2003. n. 61 especial. pp.45-76.

IEZZI, Gelson. MURAKAMI, Carlos. **Fundamentos da matemática elementar**. vol. 1. São Paulo: Atual, 1977.

JAKOBSON, Roman. **Linguística e comunicação**. Trad. Izidoro Blikstein/José Paulo Paes. São Paulo: Cultrix, 1969.

KAMII, Constance. **A criança e o número**. São Paulo: Papirus, 1995.

LAVELLE, Patrícia. Prefácio. In: RICOEUR, Paul. **Sobre a tradução**. Belo Horizonte: Editora UFMG, 2012.

LE DU, Michel. **Wittgenstein e o uso jogo de linguagem como cálculo.** Curitiba: Dois Pontos, 2009. v.6. n.1. abr. p.145-166.

LIMA, E. L. O princípio da indução finita. **In: Revista Eureka**. São Paulo: SBM, 1998. n. 3. pp.26-43.

MARQUES, Jordino. O método Fenomenológico em Husselr e Heidegger: diferenças e aproximações. Goiás-UFG: Filósofos, 1997. v. 2. n.1. jan./ jun. pp.41-53.

MARTINS, M. A. P. **As contribuições de André Lefevere e Lawrence Venuti para a as teorias da tradução**. Rio de Janeiro: Cadernos de Letras-UFRJ, 2010. n.27. pp.59-72.

MELO, L. A. S. **Dois jogos de linguagem: a informática e a matemática na aprendizagem de função quadrática**. 2013. 154f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Universidade Federal do Pará. Pará, 2013.

MELO, L. A. S. **Ensino e aprendizagem de conceitos algébrico-geométricos**. III dia de *GeoGebra* Iberoamericano (Resumo). São Paulo: Revista Eletrônica da PUC, 2015. v.4. n.2. p.152.

MELO. L. A. S. BRANDEMBERG, J. C. **Perspectivas da linguagem e da história da matemática acerca do objeto parábola em situações de ensino.** 1º Seminário Nacional de Linguagem e Educação Matemática. Universidade Federal do Pará-UFPA. 2016. Disponível em:< https://goo.gl/fMY94X >. Acesso em:11. set. 2018.

MELO, L. A. S. **Perspectivas da tradução de textos matemáticos no âmbito da educação matemática**. Revista Digital Informação-CEFOR.SEDUC: Belém, 2017. Ano III. v.1. disponível em:< https://issuu.com/cefor/docs/revista_informac__a__o_-_ano_iii_vo >. Acesso em: 01. fev. 2017. ISSN 2248-1106.

MINAYO, M.C.S. **O desafio do conhecimento: pesquisa qualitativa em saúde.** São Paulo: Hucitec, 1999.

MOREIRA, Herivelto. CALEFFE, L. G. **Metodologia da pesquisa para o professor pesquisador**. 2. ed. Lamparina: Rio de Janeiro, 2008.

MORENO. A. R. **Wittgenstein através das imagens.** 2 ed. Campinas-SP: Editora da UNICAMP, 1995.

MORENO. A. R. **Wittgenstein e os valores: do solipsismo à intersubjetividade**. São Paulo: Revista PEPSIC-Natureza Humana, 2001. v.3 n. 2. jul./dez. pp. 233-288. ISSN: 1517-2430.

MORENO. A. R. **Introdução à uma pragmática filosófica.** São Paulo: Ed. Unicamp, 2005.

MORENO. A. R. (Org.). Por uma epistemologia do uso – um aspecto do conceito wittgensteiniano de uso: construção do signo e constituição do sentido. In: **Wittgenstein e seus aspectos**. São Paulo: Ed. Unicamp, 2015. pp. 89-115.

NACARATO, A. M. LOPES. C. E. (orgs). **Escritas e leituras na educação matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2009.

OLIVEIRA, Paulo. **Quadro de Referência e Tradução: Schleiermacher e a hermenêutica à luz do Wittgenstein tardio**. In: Moreno, Arley R. (org.) Wittgenstein e a Epistemologia. Campinas-SP: Coleção CLE, 2013. v. 63. pp.247-272.

OLIVEIRA, G. P; GONÇALVES, M. D; MARQUETTI, Celso. **Reflexões acerca da tecnologia e sua inserção na pesquisa em educação matemática**. São Paulo: Rev. Educação Matemática Pesquisa, 2015. v.17, n.3, pp.472-489.

PAGANO, Adriana; VASCONCELLOS, M. L. **Estudos da tradução no brasil: reflexões sobre teses e dissertações elaboradas por pesquisadores brasileiros nas décadas de 1980 e 1990**. São Paulo: Revista D.E.L.T.A, 2003. vol. 19. Especial. pp.1-25. ISSN 0102-4450.

PLATÃO. **Mênon**. Trad. Maura Iglésias. São Paulo: Edições Loyola, 2001.

PENCO. Carlo. **Introdução à Filosofia da Linguagem**. Trad. Ephrain F. Alves. Petrópolis-RJ: Vozes, 2006.

PEIRCE, C. S. **Peirce: escritos coligidos**. 2 ed. Trad. Armando Mora D’oliveira/Sergio Pomerangblum. São Paulo: Abril Cultural, 1980.

PERRENOUT. Phelippe. **Dez novas competências para ensinar.** Trad. Patrícia C. Ramos. Porto legre: Artmed, 2000.

PINTO, N. B. **Marcas históricas da matemática moderna no Brasil.** Curitiba: Revista Diálogo Educacional, 2005. v. 5, n.16, set./dez. pp.25-38.

POPPER, K. R. **Conhecimento Objetivo: uma abordagem evolucionária.** Trad. Milton Amado. Belo Horizonte: Ed. Itatiaia, 1975.

QUINE, W. V. O. **Palavra e Objeto**. Trad. Sofia Inês A. Stein/Desidério Murcho. Petrópolis-RJ: Vozes, 2010.

RAYMOND. Duval. **Semiósis e pensamento humano: registros semióticos e aprendizagens intelectuais.** São Paulo: Livraria da Física, 2009.

RICOEUR, Paul. **Sobre a tradução.** Belo Horizonte: Editora UFMG, 2012.

ROJANO, T. **La matemática escolar como lenguage: nuevas perspectivas de investigación e enseñanza**. México: Enseñanza de las ciências, 1994. vol. 12 (1). pp. 45-56.

SAMAIN, Etienne (Org.). **Como pensam as imagens**. Campinas-São Paulo: Ed. da UNICAMP, 2012.

SANTAELLA, Lúcia. **Matrizes da linguagem e pensamento: sonora, visual e verbal**. São Paulo: Iluminuras-FAPESP, 2005.

SANTAELLA, Lúcia. **O que é semiótica**. São Paulo: Brasiliense, 2005.

SEVERINO, A. J. **Metodologia do trabalho científico**. 24 ed. São Paulo: Cortez, 2016.

SCHILIEMANN, A. L. et. al. **Na vida dez na escola zero**. 12 ed. São Paulo: Cortez, 2001.

SCHLEIERMACHER. Friedrich. **Sobre os diferentes métodos de traduzir.** Trad. Celso Braida. Natal: Princípios, 2007. v.14. n. 21. jan./jun. p.233-265.

SCHUBRING, Gert. **Os números negativos: exemplos de obstáculos epistemológicos**. São Paulo: Editora livraria da Física, 2018.

SILVEIRA, M. R. A. **Produção de sentidos e construção de conceitos na relação ensino/aprendizagem da matemática.** 2005, 176 f. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2005.

SILVEIRA, M. R. A. SILVA, P. V. **A Compreensão de Regras Matemáticas na Formação Docente: uma pesquisa sob o ponto de vista da linguagem.** Dossiê Formação de Professores e Práticas Culturais. Arquivos Analíticos de Políticas Educativas: Arizona State University, 2013. vol. 21. n. 27. ISSN: 1068-2341.

SILVEIRA, M. R. A. **Tradução de textos matemáticos em língua natural em situações de ensino e aprendizagem**. São Paulo: Educação Matemática Pesquisa, 2014. v.16, n.1, pp. 47-73.

SILVEIRA, M. R. A. Aplicação e interpretação de regras matemáticas**.** In: **Matemática discurso e linguagens: contribuições para a educação matemática.** São Paulo: Livraria da Física, 2015. pp. 155-180.

SILVEIRA, M. R. A. **Compreensão da matemática no uso de símbolos e da gramática**. Rev. Guillermo de Ockham.15(1) In press., 2017. Disponível em:< http://revistas.usb.edu.co/index.php/GuillermoOckham/article/viewFile/3190/2656>. Acesso em: 01. mar. 2018.

STEINER, George. **Depois de Babel: questões de linguagem e tradução.** Trad. Carlos A. Franco. Curitiba: Editora da UFPR, 2005.

TEIXEIRA JUNIOR. V. P. **A terapia de Wittgenstein e o ensino de álgebra.** 2016, 357 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática- IEMCI/PPGECM) – Universidade Federal do Pará – UFPA: Belém, 2016.

VENUTI, Lawrence. ***The Translator´s Invisibilty: a history of translator.*** London-England: Series: Translation studies. Routledge, 1995. EC4P 4EE. ISBN 0-203-36006-0 Master e-book ISBN.

VIDAL, F. A. SANTOS, G. O. **A evolução histórica das seções cônicas**. In: Anais. XI Seminário Nacional de História da Matemática. Natal: SNHM, 2015. p.1-8. ISSN:2236-4102.

WATANABE. R; GALVÃO. M. E. L. Geometria Analítica: uma reflexão. In: **Revista do Professor de Matemática**-SBM: São Paulo. ano 29, n.76, p. 51-52, set./dez.2011.

WITTGENSTEIN, Ludwig. **Investigações Filosóficas**. Trad. Marcos G. Montagnoli. 6ª ed. Petrópolis: Vozes, 2009.

WITTGENSTEIN, Ludwig. ***Observaciones sobre los fundamentos de la matemática***. Madrid: Alianza Editorial S. A., 1987. ISBN: 84-206-2496-9

WITTGENSTEIN, Ludwig. **Observações Filosóficas**. Trad. Adail Sobral & Maria S. Gonçalves. São Paulo: Loyla, 2005.

WITTGENSTEIN, Ludwig. **Gramática Filosófica**. Trad. Luiz Carlos Borges. São Paulo: Loyla, 2003.

WITTGENSTEIN, Ludwig. **Da certeza**. Lisboa: Edições 70, 1998.

WITTGENSTEIN, Ludwig. **Zettel.** Lisboa: Edições 70, 1989.