ENSINO DE FUNÇÕES

com o uso do Geogebra

Elizeu C. de Jesus Calandrini Neto

Osvaldo dos Santos Barros

LEMAT

Laboratório de Ensino de Matemática ds Amazônia Tocantina

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E CIENTÍFICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM DOCÊNCIA EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICAS – MESTRADO PROFISSIONAL

PRODUTO DIDÁTICO

Área de Concentração:
Ensino e Aprendizagem de ciências e matemática

Título:
ENSINO DE FUNÇÕES PARA LICENCIANDOS EM MATEMÁTICA COM USO DO SOFTWARE GEOGEBRA

BELÉM
2021

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD Biblioteca do Instituto de Educação Matemática e Científica–Belém-PA

C142e CALANDRINI NETO, Elizeu Cantão de Jesus, 1987-

Ensino de funções para licenciandos em matemática com uso do software Geogebra [Recurso eletrônico] / Elizeu Cantão de Jesus Calandrini Neto, Osvaldo dos Santos Barros. — Belém, 2021.

6, 9 Mb : il. ; ePUB.

Produto gerado a partir da dissertação intitulada: Ensino de funções para licenciandos em matemática com uso do software Geogebra, defendida por Elizeu Cantão de Jesus Calandrini Neto, sob a orientação do Prof. Dr. Osvaldo dos Santos Barros, no Mestrado Profissional em Docência em Educação em Ciências e Matemáticas, do Instituto de Educação Matemática e Científica da Universidade Federal do Pará, em Belém-PA, em 2021. Disponível em: http://repositorio.ufpa.br/jspui/handle/2011/13651

Disponível somente em formato eletrônico através da Internet.

Disponível em versão online via: http://educapes.capes.gov.br/handle/capes/603150

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Tecnologia. 3. Geogebra. I. Barros, Osvaldo dos Santos. II. Título.

CDD: 23. ed. 510.7

Elaborado por Heloísa Gomes Cardoso – CRB-2/1251.

ÍNDICE

APRESENTAÇÃO

Prezado Cursista,

O **CADERNO DE ATIVIDADES VIRTUAL "ENSINO DE FUNÇÕES COM O USO DO GEOGEBRA NO PCNA"** é um produto educacional que foi construído a partir de uma pesquisa realizada para o Mestrado Profissional do Programa de Pós-Graduação em Docência em Ciências e Matemáticas – PPGDOC, realizado no Instituto de Educação Matemática e Científica da Universidade Federal do Pará – IEMCI/UFPA.

Esse caderno de atividades é um material didático em formato e-book destinado ao ensino de funções em nível de graduação contendo conceitos, propriedades, características, tutoriais e exercícios que irão possibilitar um melhor entendimento sobre o comportamento de algumas funções estudadas na matemática, em especial o estudo sobre o domínio e imagem de uma função descrita no $\mathbb{R}^2$.

O Caderno de atividades conta com uma série de tutoriais passo a passo que auxiliam na construção de gráficos de função para poder ser utilizados para aprimorar os estudos. Esse material será disponibilizado de forma digital e acessível no site do LEMAT (https://www.osvaldosb.com/sala-de-estudos-1) como materiais de apoio ao PCNA realizado na UFPA/ Campus Abaetetuba e ainda vídeo aulas explicando o funcionamento do Geogebra e a criação dos gráficos das funções.

Utilizaremos nesse material um recurso tecnológico que irá auxiliar as visualizações e possibilitar uma visão dinâmica do processo de construção gráfica das funções. O recurso tecnologia denominado Geogebra, é um software de geometria dinâmica que permite o estudo de vários conteúdos matemáticos e possibilita a manipulação de ferramentas que modificam o comportamento das funções que podem ser visualizadas de forma dinâmica, revelando características que não ficam bem claras para o aluno quando colocadas de forma fixa em quadro branco ou em material apostilado.

Além do conteúdo relacionado ao estudo de funções, o caderno de atividade conta com um manual de orientação ao uso do Geogebra, são instruções de utilização das ferramentas presentes no Geogebra que serão de fundamental importância para o desenvolvimento das atividades, exercícios e tutoriais presentes nesse caderno.

A motivação para montar um material que tivesse conteúdos de matemática feitos a partir do software Geogebra surgiu durante uma conversar com os bolsistas do Programa de Cursos de nivelamento da aprendizagem – (PCNA), onde analisamos o perfil do aluno que ingressa na universidade e se depara com o desafio de relacionar a matemática que ele aprendeu no ensino médio com a matemática presente na universidade. A utilização do Geogebra como ferramenta de auxílio na construção desse material foi pensada com o intuído de introduzir uma ferramenta que será muito útil para os alunos de graduação, esse software possui muitos recursos que podem ser explorados para exemplificar o comportamento das funções, os gráficos e como são criados.

O caderno de atividades contém quatro capítulos, onde o primeiro capítulo traz alguns tópicos sobre o ensino de matemática e algumas tendências como a tecnologia na matemática e a etnomatemática, o segundo capítulo traz um panorama sobre o Geogebra, mostrando suas ferramentas, modo de instalação, layout e instruções para manuseio desse software, o terceiro capítulo contém noções básicas sobre funções, dando ênfase para o Domínio, Contradomínio e Imagem da função, o quarto capitulo são as aplicações realizadas no Geogebra a partir de conceitos e propriedades das funções (afim, quadrática, modular, exponencial, logarítmica e trigonométrica).

Espera-se que a partir da utilização desse caderno de atividades os alunos possam preencher algumas lacunas deixadas durante sua trajetória no ensino médio escolar, sendo possível explorar possibilidades e aspectos das funções matemáticas através das atividades dinâmicas que serão realizadas no Geogebra. As manipulações no Geogebra são ordenadas e direcionadas para instigar a curiosidade e mostrar características que não ficam muito claras para os alunos quando são expostas em modo estático em quadro branco.

1 – ENSINO DE MATEMÁTICA E TECNOLOGIA

A Matemática é definida por Davis & Hersh (1995), como a "ciência da quantidade e do espaço" sendo conhecidas em sua forma mais simples como: Aritmética e Geometria. A primeira trata das várias espécies de regras de operação sobre números, estudando as várias situações do cotidiano em que são utilizadas. A Geometria, por sua vez, trata parcialmente de questões sobre medidas do espaço, além de tratar, também, de aspectos do espaço que possuem forte apelo estético e sendo ensinada segundo os esquemas apresentados por Euclides (300 a.C.), apresenta-se como uma ciência dedutiva (DAVIS & HERSH, 1995, p.25-26).

1.1 – MATEMÁTICA E TECNOLOGIA

As Tecnologias Digitais da Informação e Comunicação atualmente exercem um grande impacto e influência em relação ao emprego de novos métodos de ensino e aprendizagem. De fato, é preciso compreender que os computadores, notebooks e smartphones já são realidades presentes em muitas escolas no Brasil e no mundo, porém eles por si só não possuem a capacidade de ensinar o aluno, mas podem ser utilizados como recurso para auxiliar o professor nesse processo (SANTOS, 2018, p. 56)

Com a crescente valorização das tecnologias educacionais, agentes como: o aluno, o professor, a escola e a sociedade se beneficiam dessas práticas, uma vez que o conhecimento tecnológico quando aplicado de forma correta transforma o saber e práticas tradicionais de ensino, tornando as aulas dinâmicas e de fácil assimilação (SACCOL; SCHLEMMER; BARBOSA, 2011).

> [...] A escola, mais do que nunca, precisa se apropriar das novas linguagens audiovisuais e informáticas, bem como de suas interfaces, para atender a constantes exigências do mundo contemporâneo que, por sua vez, requer uma sintonia cada vez mais afinada com os conhecimentos, não só cientifico, mas também quanto aos valores étnico-culturais. Pois a escola é, especialmente, o lugar onde tudo isso pode ser sentido e vivido, como reflexo da sociedade em que os jovens estão inseridos (BETTEGA, 2010, p.15).

As constantes transformações ocasionadas pelas tecnologias digitais, tem impacto direto no funcionamento da sociedade, pois a partir da inserção de novas tecnologias em sala de aula, os alunos precisam ser preparados para atuar em um mercado de trabalho em constantes mudanças, onde ele terá que se adequar as profissões que ainda não existem, para usar tecnologias que ainda não foram inventadas e para resolver problemas que ainda não conhecemos, assim sendo, a maioria das futuras profissões envolverá de forma direta ou indireta a computação e tecnologias digitais (BRASIL, 2017, p. 475).

> As tecnologias digitais móveis provocam mudanças profundas na educação presencial e a distância. Na presencial, desenraizam o conceito de ensino/aprendizagem localizado e temporalizado. Podemos aprender desde vários lugares, ao mesmo tempo, *on* e *off-line*, juntos e separados. Na educação a distância permitem o equilíbrio entre a aprendizagem individual e a colaborativa, de forma que os alunos de qualquer lugar podem aprender em grupo, em rede, da forma flexível e adequada para cada aluno. (MORAN, 2013, p. 30).

As tecnologias, com o uso de softwares educacionais contribuem de maneira significativa para a aprendizagem dos alunos, sendo visto como um dos principais agentes de transformação da sociedade pelas modificações que exercem nos meios de produção e por suas consequências no cotidiano das pessoas.

Segundo a BNCC:

> Contudo, também é imprescindível que a escola compreenda e incorpore mais as novas linguagens e seus modos de funcionamento, desvendando possibilidades de comunicação (e também de manipulação), e que eduque para usos mais democráticos das tecnologias e para uma participação mais consciente na cultura digital. Ao aproveitar o potencial de comunicação do universo digital, a escola pode instituir novos modos de promover a aprendizagem, a interação e o compartilhamento de significados entre professores e estudantes (BRASIL, 2017. p. 63)

Os ambientes educacionais propícios à utilização das tecnologias digitais criam situações que induzem os alunos a serem agentes investigativos, conduzindo-os a levantarem hipóteses e buscarem possíveis soluções de problemas, a partir do uso de softwares na educação.

Atualmente existem muitos aplicativos e softwares destinados a promover o ensino de matemática em sala de aula de maneira dinâmica e mais atrativa aos alunos, com o propósito de tornar mais acessível: a compreensão dos conceitos e propriedades dos elementos matemáticos. O software de geometria dinâmica Geogebra é um programa que vem sendo utilizado com muita frequência no ensino de conteúdos matemáticos, os estudos e produções cientificas sobre a utilização desse recurso, aumentam significativamente a cada ano.

Gravina (2012), afirma que:

> A tecnologia digital coloca à nossa disposição diferentes ferramentas interativas que descortinam na tela do computador objetos dinâmicos e manipuláveis. E isso vem mostrando interessantes reflexos nas pesquisas em Educação Matemática, especialmente naquelas que têm foco nos imbricados processos de aprendizagem e de desenvolvimento cognitivo nos quais aspectos individuais e sociais se fazem presentes (GRAVINA, et al., 2012, p.13).

Uma estratégia que visa amenizar algumas dificuldades encontradas, despertar o interesse e facilitar o processo de ensino e aprendizagem é o uso de softwares e aplicativos no ensino de matemática, para realizar as visualizações gráficas, interpretações de propriedades e definições de funções.

Segundo Borba e Penteado (2012):

> O acesso à informática deve ser visto como um direito e, portanto, nas escolas públicas e particulares o estudante deve poder usufruir de uma educação que no momento atual inclua, no mínimo, uma “alfabetização tecnológica”. Tal alfabetização deve ser vista não como um Curso de Informática, mas, sim, como um aprender a ler essa nova mídia. Assim o computador deve estar inserido em atividades essenciais, tais como aprender a ler, escrever, compreender textos, entender gráficos, contar, desenvolver noções espaciais etc. (BORBA e PENTEADO, 2012, p.17).

As relações de reciprocidade na educação vêm sendo mais valorizadas ultimamente. As experiências com os alunos tornam-se fundamentais para proporcional ao professor a oportunidade de deixar de ser um mero transmissor de informação e passar a ter novos olhares para desenvolver novas formas de aprendizagem que possa estimular o aluno a ter um pensamento criativo e um fazer colaborativo. (FREIRE, et. al., 2011, p.84)

A possibilidade de utilizar as tecnologias digitais como via de comunicação entre professor e aluno torna-se cada vez mais relevante, tendo em vista que esse contato acaba despertando o interesse no momento em que os envolvidos possam a compartilhar informações relevantes ao ensino de matemática, possibilitando assim a troca de experiências. (SILVA, 2016, p. 29)

1.2 – ENSINO DE MATEMÁTICA E ETNOMATEMÁICA

A Matemática é definida por Davis & Hersh (1995), como a "ciência da quantidade e do espaço" sendo conhecidas em sua forma mais simples como: Aritmética e Geometria. A primeira trata das várias espécies de regras de operação sobre números, estudando as várias situações do cotidiano em que são utilizadas. A Geometria, por sua vez, trata parcialmente de questões sobre medidas do espaço, além de tratar, também, de aspectos do espaço que possuem forte apelo estético e sendo ensinada segundo os esquemas apresentados por Euclides (300 a.C.), apresenta-se como uma ciência dedutiva (DAVIS & HERSH, 1995, p.25-26).

Para D'Anbrosio (2009), a matemática tem sido conceituada como a ciência dos números e das formas, caracterizada pelas relações e medidas, das inferências e suas características que norteiam a precisão, o rigor e a exatidão. E como tal, muitos professores e alunos ainda preservam esse ponto de vista em relação a matemática como uma matéria altamente rigorosa e cheia de regras.

Segundo Bishop (1999), a matemática é uma das disciplinas mais trabalhadas na escola, ao mesmo tempo em que é uma das menos compreendidas. Para o seu estudo são dispensadas as maiores cargas horárias se comparadas às demais disciplinas, excluindo-se o estudo da língua materna. Essa carga horária é, em muitos casos, pouco ou mal aproveitada em função do grande número de exercícios de repetição que são aplicados aos alunos, voltados à mecanização de suas maneiras de interpretar as relações matemáticas presentes em situações ideais, ou retiradas de um cotidiano "modificado" para a obtenção de resultados que evidenciam processos de manipulação de algoritmos, sem qualquer importância às implicações dessa sistemática sobre a realidade estudada.

Conforme Bishop (1999) essa aprendizagem baseada na mecanização das práticas matemáticas, moldadas em um restrito grupo de situações, envolvendo valores e condições ideais, tem como único propósito suprir as necessidades internas da própria Matemática. Nessa perspectiva, o ensino da Matemática centra-se na aplicação de exercícios, que “preparam” para outras sequências de exercícios, que por sua vez servirão para os seguintes, numa gradual elevação do nível de dificuldades de resolução dos problemas propostos.

A perspectiva, de relacionar os conteúdos matemáticos às representações das práticas culturais é uma forma de estabelecer ligações entre os conceitos e a identidade dos estudantes. Sendo, então, necessário ao ensino da matemática, por seu caráter de contextualização, tratar do uso das tecnologias para impulsionar essa interação entre matemática e cotidiano, como uma maneira criativa de oferecer aos alunos uma nova face do ensino da matemática escolar.

Barros, (2004.a) afirma que:

> No processo de contextualização da matemática escolar, é fundamental uma ampla visão da realidade em estudo. Porém, definir realidade não é uma tarefa muito fácil, haja vista que o próprio conceito é relativo e mutável, concebido, em geral, de forma diferenciada por cada grupo/segmento/individuo, pertencente a um ou mais grupos sociais. (BARROS, 2004.a. p. 30)

Sem liberdade criativa que impulsiona o senso de investigação no ensino da Matemática, o aluno passa a ser secundário no processo de ensino e aprendizagem e o rigor do cumprimento dos conteúdos e dos processos rígidos de avaliação, manifestam-se superiores aos objetivos da aprendizagem (BISHOP, 1999).

No exercício dessa matemática criativa e dinâmica, uma das alternativas é a relação da matemática com as práticas culturais, a partir da qual podemos compreender as dinâmicas da sociedade amazônica, que numa visão geral, observa-se que passa por grandes transformações, onde o desenvolvimento cultural, econômico, tecnológico e social necessita de uma nova postura que adeque o processo de ensino/aprendizagem aos novos mecanismos de apoio as práticas pedagógicas, em especial o ensino de matemática, tendo em vista que os números são tão essenciais, assim como saber ler e escrever e quase sempre está em tudo o que fazemos, implícita ou explicitamente (BRITO, M., LUCENA, I., SILVA, F. 2006, p. 5).

Saberes matemáticos essenciais como quantificar, calcular, fazer operações, medir, analisar gráficos, fazer tabelas, entre outros, proporcionam aos alunos aprenderem a utilizar e a incorporar os mais diversos instrumentos didático-científicos e tecnológicos, entre os quais podemos citar a calculadora, o termômetro, o smartphone e computadores (BRITO, M., LUCENA, I., SILVA, F. 2006, p. 5).

Nesse contexto, faz-se necessário integrar as práticas de ensino com os princípios da Etnomatemática, que procura aproximar conceitos e conteúdos matemáticos às experiências vivenciadas pelas populações identificadas em grupos sociais, criando a possibilidade da utilização da matemática (escolar/cientifica) como uma ferramenta cultural para o seu próprio processo de ensino/aprendizagem permitindo considerar de forma efetiva a inclusão destes grupos na apropriação do conhecimento sistematizado a partir de um processo de globalização (BRITO, M., LUCENA, I., SILVA, F. 2006, p. 6)

> A abordagem etnomatemática vai além do subsídio metodológico para o ensino da Matemática no contexto escolar. Não se trata, apenas, da melhoria do processo ensino/aprendizagem da Matemática, mas de desafiar e contestar o domínio de saberes e a valorização desse domínio por alguns, sob pena de destruir outros de seus próprios valores, gerando desigualdades e desrespeitos na vida das populações, extermínios de uns para ascensão de outros dentro das sociedades. Portanto, a construção ao etnomatemática para o trabalho pedagógico é, sobretudo, uma proposta essencial à ética humana (LUCENA, 2005, p.19).

2 – O SOFTWARE GEOGEBRA

O GeoGebra é um software/aplicativo de geometria dinâmica livre, disponível no endereço eletrônico https://www.geogebra.org/, é destinado a todos os níveis de ensino que reúne geometria, álgebra, planilha de cálculo, gráficos, probabilidade, estatística e cálculos simbólicos em um único pacote. Suas ferramentas são fáceis de se usar e permite a construção de diversos objetos geométricos como: pontos, vetores, segmentos, retas, secções cônicas, gráficos representativos de funções e curvas parametrizadas; esses objetos matemáticos podem ser modificados dinamicamente a partir de uma interface gráfica que permite a interação do usuário com o software a partir de conceitos matemáticos e comandos de programação contidos no software.

O software Geogebra permite a inserção de valores, coordenadas e comandos que podem ser introduzidos diretamente em sua zona gráfica ou a partir da utilização do teclado no campo entrada, além da vantagem de podermos trabalhar utilizando variáveis vinculadas a números, vetores e pontos. Dentre as várias possibilidades que o GeoGebra possui para a criação, podemos citar a facilidade de se trabalhar com funções, desde o nível básico até a determinação de derivadas e integrais, além de oferecer um conjunto de comandos relacionados com análise matemática, álgebra, álgebra linear, geometria analítica, matemática financeira, entre outros (SILVA, 2016, p. 50).

A palavra Geogebra vem da aglutinação das palavras (Geometria e Álgebra), esse software foi criado por Markus Hohenwarter para poder ser introduzido em um ambiente de sala de aula. O projeto piloto do software foi iniciado em 2001, na Universität Salzburg, já seu desenvolvimento foi realizado na Florida Atlantic University, sua característica principal se dá por ser um software/aplicativo, ou seja, é um programa multiplataforma que pode ser usado tanto em comutadores quanto em celulares e tabletes, possui uma matemática dinâmica que combina conceitos de geometria e álgebra.

O software Geogebra permite realizar construções geométricas com a utilização de pontos, retas, segmentos de reta, polígonos etc., assim como permite inserir funções e alterar todos esses objetos dinamicamente, após a construção estar finalizada. Portanto, o software Geogebra é capaz de lidar com variáveis para números, pontos, vetores, derivar e integrar funções, oferecer ainda comandos para se encontrar raízes e pontos extremos de uma função.

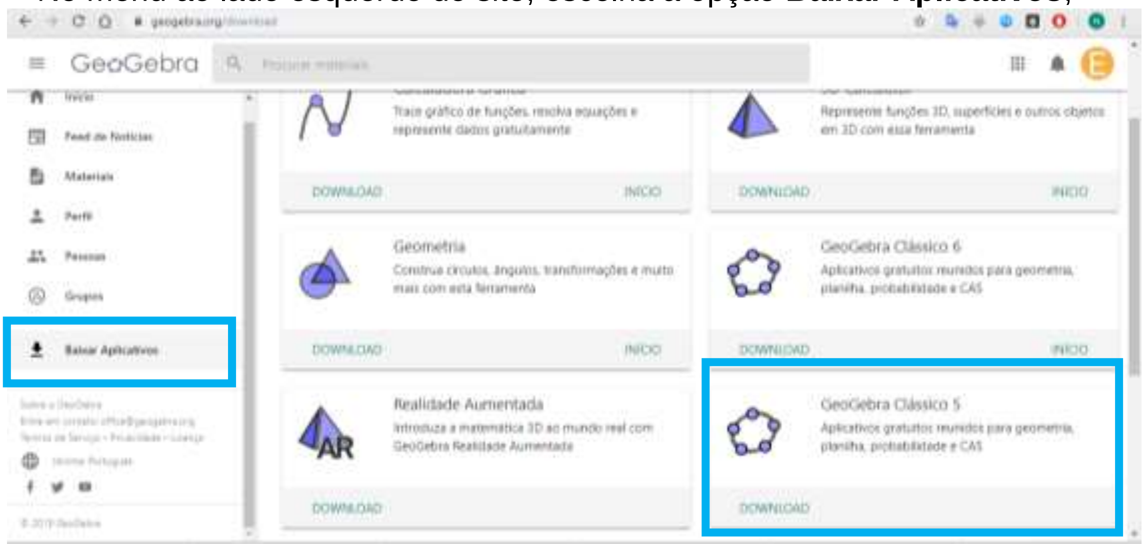
Atualmente o software Geogebra possui uma comunidade de milhões de usuários em praticamente todos os países e se tornou um líder na área de softwares de matemática dinâmica, apoiando o ensino e a aprendizagem em Ciência, Tecnologia, Engenharia e Matemática. Muitos trabalhos têm sido desenvolvidos utilizando o software Geogebra, como o Curso Básico e Avançado de Geogebra promovido pela Universidade Estadual do Paraná (UNESPAR - APUCARANA) disponível no site https://ogeogebra.com.br/cursos/, seu curso básico está na 17ª edição e o curso avançado na 1ª edição.

2.1 – INSTALAÇÃO DO SOFTWARE

A instalação do Geogebra é bem simples e prática, pois trata-se de um software gratuito que está disponível em seu site e pode ser baixado sem nenhum custo ou restrição, então vamos aos procedimentos.

1 – Acesse o site https://www.geogebra.org/;

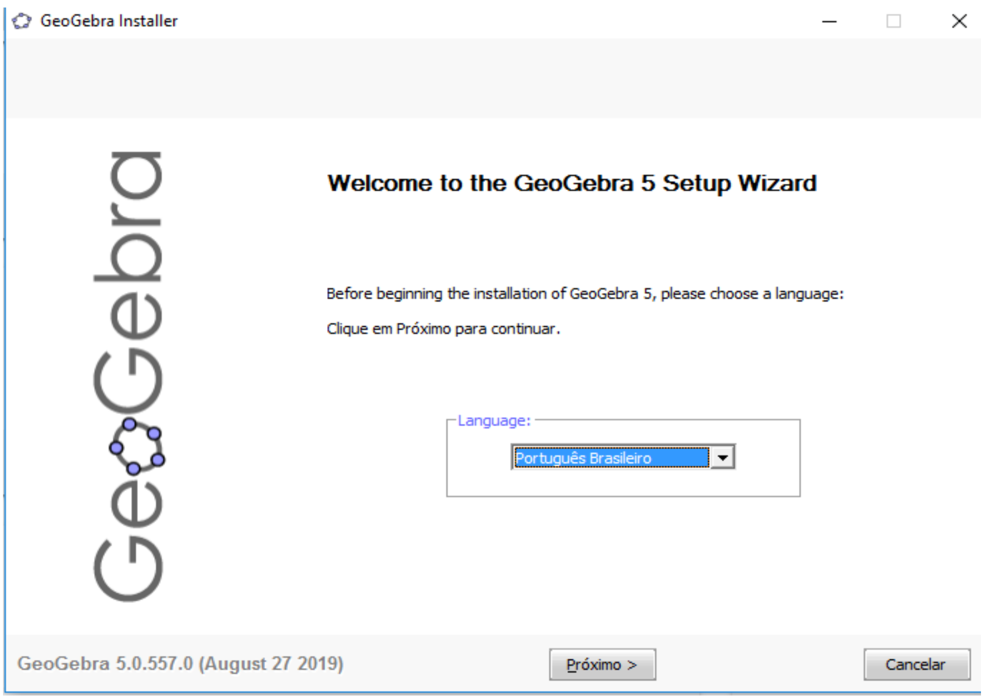
2 – No menu ao lado esquerdo do site, escolha a opção **Baixar Aplicativos**;



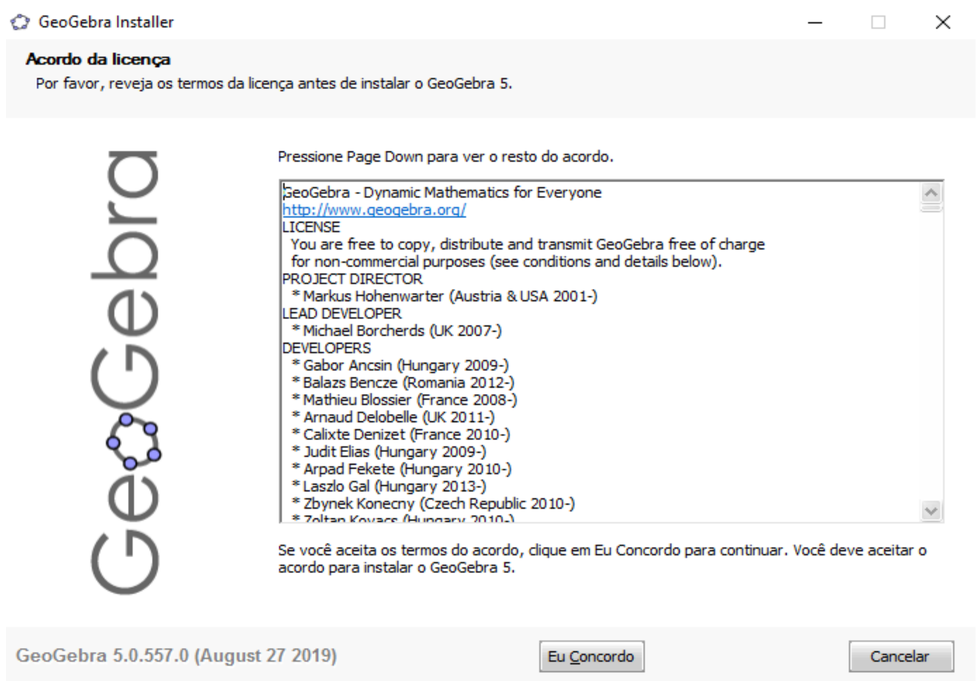
3 – Aparecerá várias opões para download que vai desde uma calculadora gráfica até o Geogebra Clássico 6 que é a última versão desenvolvida pelo site até o momento.

Dentre as opções que aparecem para fazer download, escolha o **Geogebra Clássico 5** e clique em download.

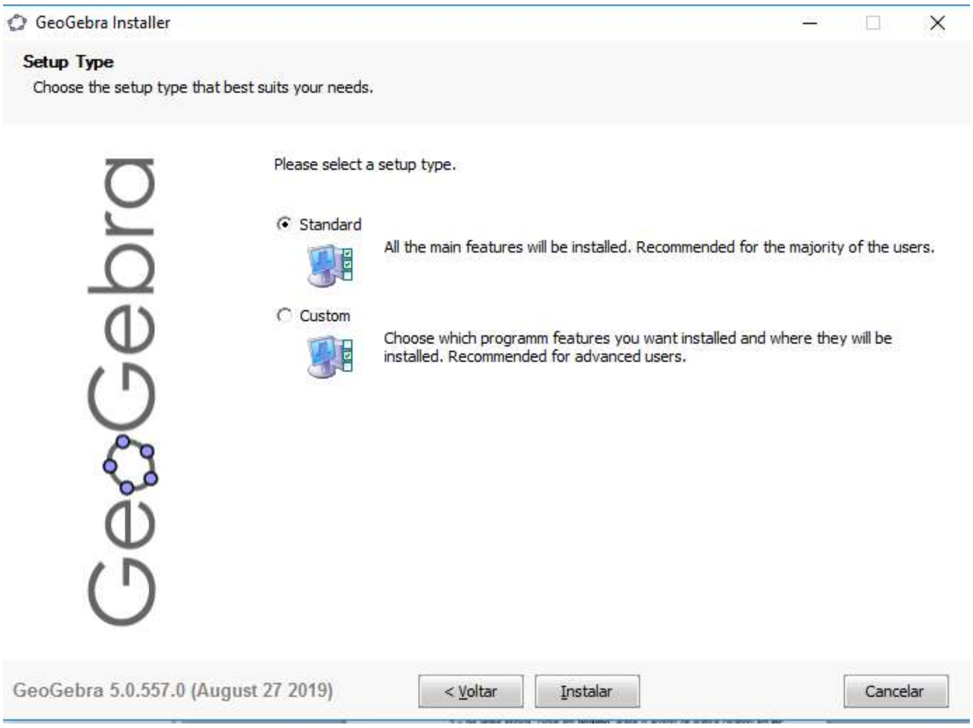
4 – Após terminar o download, acesse a pasta de downloads em seu computador e execute o instalador do Geogebra. Em seguida aparecerá a seguinte tela:



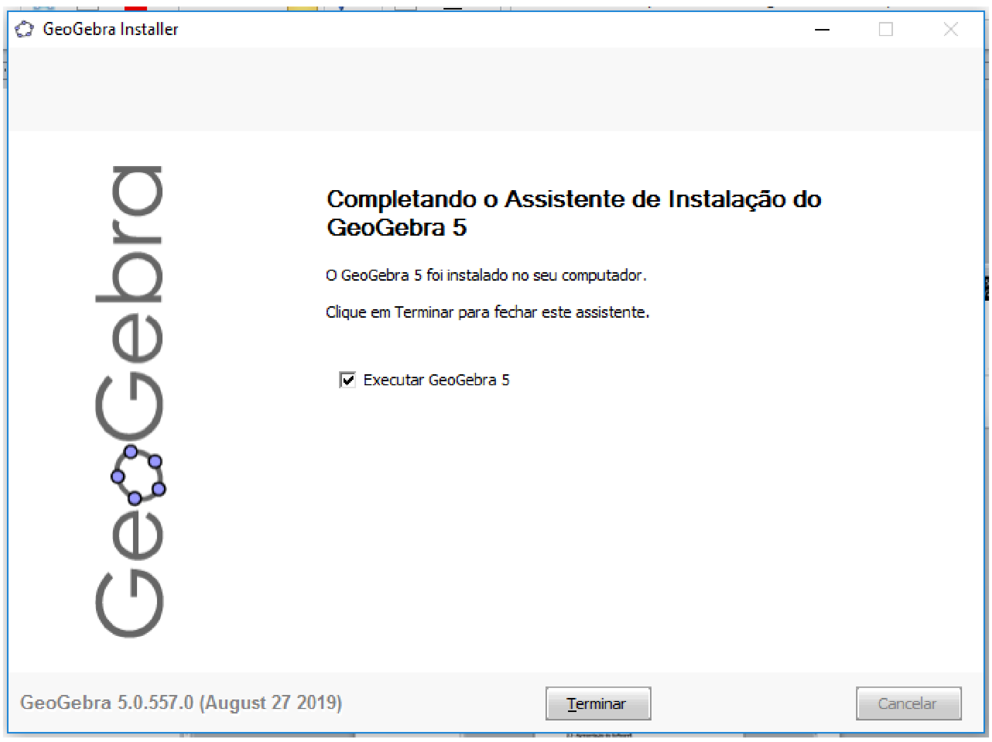
5 – Na janela exibida, clique em **próximo**, aceite o acordo de licença clicando em **eu concordo**



6 – Após aceitar o acordo de licença, clique em instalar



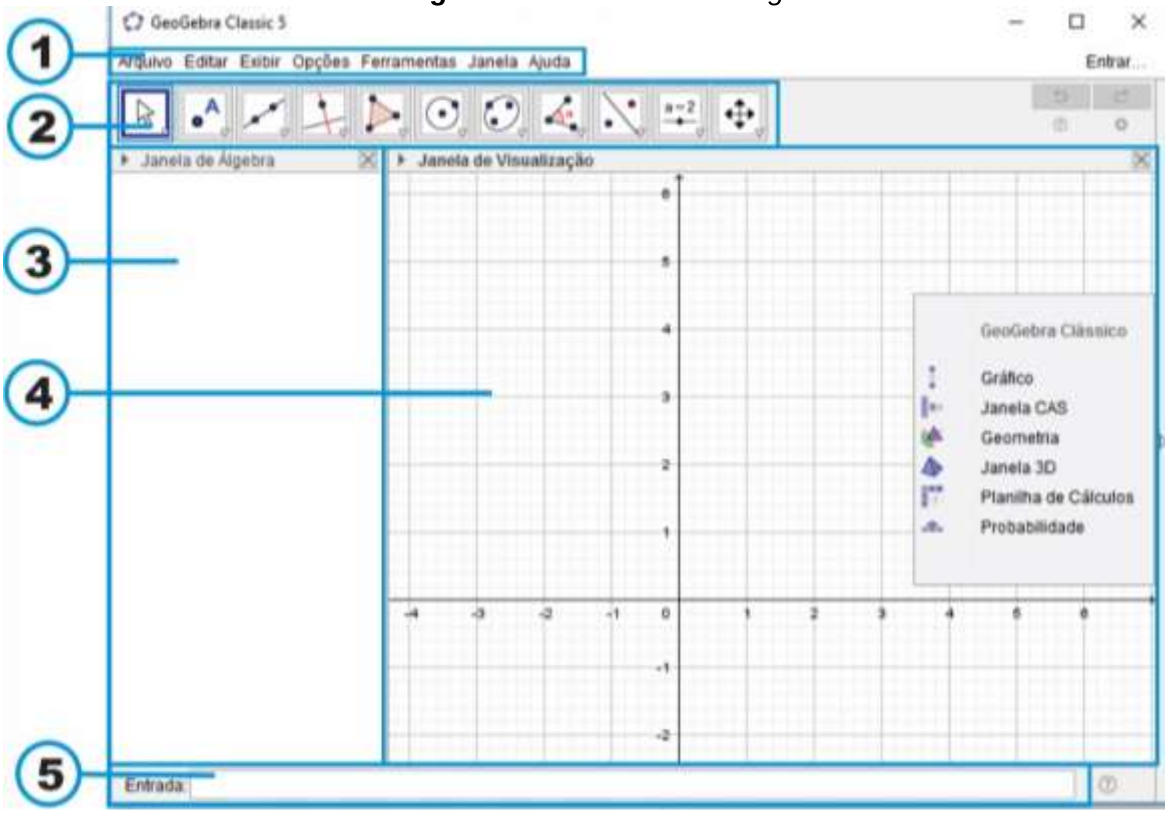
7 – O Sistema Operacional irá instalar o Geogebra no computador, ao final, clique em **terminar** para encerrar a instalação. Pronto, você já pode utilizar os recursos que o Geogebra oferece.



2.2 – APRESENTAÇÃO DO SOFTWARE

Ao inicializar o GeoGebra encontramos uma interface composta pelos seguintes elementos: 1 - Barra de Menus, 2 - Barra de Ferramentas, 3 - Janela de Álgebra, 4 - Janela de Visualização e 5 - Campo Entrada. Esses cinco elementos são fundamentais para poder fazer um bom uso dos diversos recursos disponíveis nesse programa.

Figura 1 – *Interface do Geogebra*

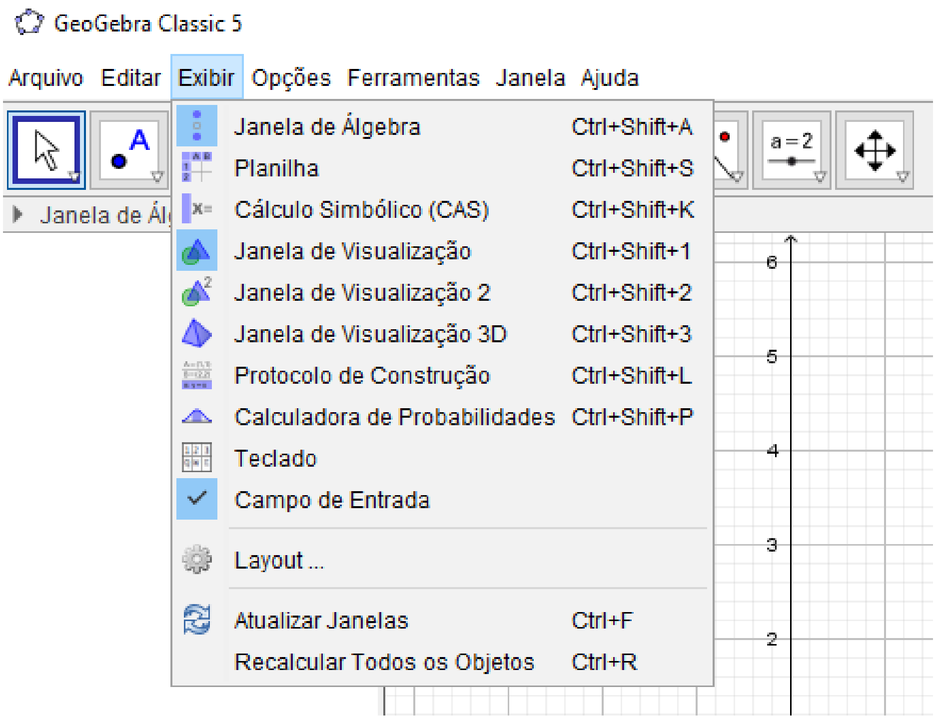


2.2.1 – Barra de Menus

A Barra de menus está localizada na parte superior da zona gráfica, ela é composta pelos menus: Arquivo, Editar, Exibir, Opções, Ferramentas, Janela e Ajuda. Em cada opção existente na Barra de Menus existe uma lista de opções onde é possível manipular e personalizar a interface do Geogebra.

Importante: O *menu Exibir* merece um destaque especial, pois o mesmo possibilita a personalização da interface do Geogebra, é a partir desse menu que podemos exibir ou esconder diferentes elementos a exemplo da Janela de Álgebra, Janela Planilha, Janela Cálculo Simbólico (CAS), Janela de Visualização, Janela de Visualização 2, Janela de Visualização 3D, Protocolo de Construção, Calculadora de Probabilidades, Teclado e Campo Entrada. Para ter acesso a essas opções na interface do Geogebra basta marcar/desmarcar o item no *menu exibir* (FRISKE, Et. al. 2016. p. 7).

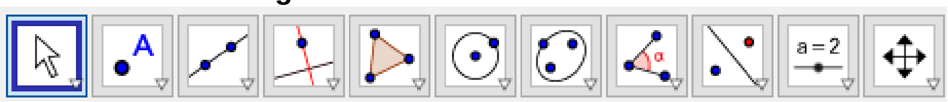
Figura 02 – *Menu Exibir*



2.2.2 – Barra de Ferramentas

Na barra de ferramentas encontramos todas as ferramentas necessárias para fazer as construções de objetos matemáticos, ela está dividida em 11 botões com várias ferramentas auxiliares que serão vistas com mais detalhes a seguir.

Figura 03 – *Barra de Ferramentas*



Cada ícone possui várias ferramentas que possuem uma certa relação entre si. Para acessar essas ferramentas basta clicar ou ficar posicionado com a seta do mouse em cima da seta para baixo localizada no canto inferior direito do ícone, dessa forma aparecera as várias ferramentas disponíveis (FRISKE, Et. al. 2016. p. 7).

2.2.2.1 – Ferramentas do ícone Manipulação 

 **Mover:** Essa ferramenta é utilizada para mover/arrastar objetos livres na *Janela de Visualização*. Com essa ferramenta selecionada pode-se apagar um objeto criado clicando em cima dele e pressionando a tecla *delete*, pode move-lo usando o mouse ou as setas do teclado, também é possível ativar a ferramenta *Mover* pressionando a tecla *ESC*.

 **Rotação em Torno de um Ponto:** Utiliza-se essa ferramenta selecionando primeiro o ponto que será o centro de rotação, depois seleciona o objeto livre que deseja fazer a rotação em torno do primeiro ponto selecionado, arraste o objeto com o mouse e note que ele faz um movimento circular em torno do primeiro ponto selecionado mantendo sempre a mesma distância.

 **Função à Mão Livre:** Desenhe uma função ou objeto geométrico na Janela de Visualização, caso o Geogebra reconheça o objeto criado ele faz uma adaptação do mesmo.

Caneta: Essa ferramenta serva para escrever ou desenhar objetos livre de acordo com o movimento do mouse.

2.2.2.2 – Ferramentas do ícone Pontos

Ponto: Para criar um ponto basta selecionar essa ferramenta e em seguida clicar em qualquer local da *Janela de Visualização*. Pode-se criar um ponto atrelado a um objeto (segmento, reta, polígono, cônica, gráfico ou curva), basta selecionar essa ferramenta e clicar em cima do objeto desejado.

Ponto em Objeto: Esta ferramenta permite criar um ponto dependente de um objeto, o ponto criado só poder a ser movido dentro do objeto. Ao mover o objeto o ponto criado também se movera. No caso de um polígono, para criar um ponto que é fixado a um objeto, clique na ferramenta e depois no objeto, esse novo ponto pode ser movido utilizando a ferramenta Mover, mas apenas dentro do objeto. Para colocar um ponto interior de um círculo ou elipse será necessário aumentar a opacidade (transparência) destes. Se você clicar no perímetro de um objeto (por exemplo: círculo, elipse, polígono), então o ponto será fixado ao perímetro ao invés do interior.

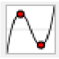
Vincular/Desvincular Ponto: Para anexar um ponto a um determinado objeto, primeiro clique em um ponto livre e em seguida sobre o objeto para o qual você deseja anexar este ponto. O ponto se tornará dependente e só poderá ser movido dentro do objeto.

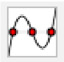
Interseção entre Dois Objetos: Os pontos de interseção de dois objetos podem ser criados selecionando dois objetos, assim todos os pontos de interseção serão criados; ou então, clicando-se diretamente sobre uma interseção de duas linhas, assim apenas um ponto de interseção será criado.

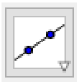
Ponto Médio: Com esta ferramenta pode-se obter o ponto médio entre dois pontos ou de um segmento. Para isso, basta selecionar a ferramenta, e em seguida clicar em dois pontos ou em um segmento para obter o respectivo ponto médio.

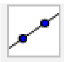
Também é possível clicar numa secção cônica (por exemplo, circunferência) para criar o respectivo centro.

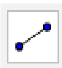
**Número Complexo:** Possibilita criar um ponto no plano imaginário, sendo o eixo das Abcissas (x) o eixo Real (*Re*) e o eixo das Ordenadas (y) o Imaginário (*Im*).

**Otimização:** Com essa ferramenta é possível localizar os pontos de máximo e mínimo de uma função, basta selecionar a ferramenta e clicar em cima da função desejada para obter os pontos otimizados.

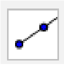
**Raízes:** Essa ferramenta possibilita a inserção das raízes de uma determinada função, para utilizar basta selecionar a ferramenta e clicar em cima da função desejada e note que as raízes da função foram marcadas com um ponto.

2.2.2.3 – Ferramentas do ícone Linhas Retas 

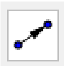
**Reta:** Essa ferramenta serve para criar retas, para isso basta selecionar dois pontos já criados ou duas posições na Janela de Visualização. Essa reta fica atrelada aos dois pontos utilizados em sua criação, ou seja, para movimentar a reta é preciso movimentar os pontos.

**Segmento:** Essa ferramenta serve para criar seguimentos de retas, para isso basta selecionar dois pontos já criados ou duas posições na Janela de Visualização. O seguimento de reta criado fica atrelada aos dois pontos utilizados em sua criação, ou seja, para movimentar o segmento de reta é preciso movimentar os pontos.

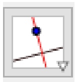
**Segmento com Comprimento Fixo:** Essa ferramenta é utilizada para a criação de seguimento de reta paralelo ao eixo X, para cria-lo basta selecionar um ponto qualquer que será o extremo inicial do seguimento, em seguida especifique o comprimento desejado no campo entrada de texto na janela de diálogo que surge.

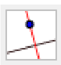
**Semirreta:** Essa ferramenta é utilizada para a criação de semirreta, para isso basta selecionar um ponto qualquer que será a origem da semirreta, em seguida selecione outro ponto que servirá para direcionar a semirreta.

**Caminho Poligonal:** Essa ferramenta é utilizada para a criação uma serie de seguimento de reta interligados, para cria-lo basta selecionar quantos pontos deseja que seu caminho poligonal tenha, em seguida clique no primeiro ponto que você utilizou.

**Vetor:** Essa ferramenta é utilizada para a criação de um vetor na Janela de Visualização, para cria-lo basta selecionar um ponto qualquer que será a origem do vetor, em seguida selecione outro ponto que servirá para dar direção ao vetor.

**Vetor a Partir de um Ponto:** Essa ferramenta é utilizada para a criar um vetor com mesmo tamanho e direção a partir de um ponto, para cria-lo basta selecionar um ponto qualquer que será a origem do vetor, em seguida selecione o vetor que você deseja copiar.

2.2.2.4 – Ferramentas do ícone Posições Relativas 

**Reta Perpendicular:** Com essa ferramenta é possível criar retas perpendiculares a uma reta qualquer, seguimento, vetor, eixo ou lado de um polígono. Para criar uma reta perpendicular, primeiro selecionamos um ponto ou posição na Janela de Visualização, em seguida selecionamos uma reta, seguimento, vetor, eixo ou lado de um polígono.

**Reta Paralela:** Com essa ferramenta é possível criar retas paralelas a uma reta qualquer, seguimento, vetor, eixo ou lado de um polígono. Para criar uma reta paralela, primeiro selecionamos um ponto ou posição na Janela de Visualização, em seguida selecionamos uma reta, seguimento, vetor, eixo ou lado de um polígono.

Mediatriz: Com essa ferramenta é possível criar retas perpendiculares a um seguimento de reta ou a dois pontos quaisquer. Para criar uma mediatriz basta selecionar dois pontos já criados ou selecionar um seguimento de reta.

Bissetriz: Utilizando essa ferramenta é possível definir uma bissetriz a partir de três pontos, para cria-la basta selecionar três pontos já criado e será inserida uma bissetriz no ângulo formado entre os três pontos utilizados.

Reta Tangente: Com essa ferramenta é possível criar retas tangentes a um círculo, cônica ou função. Para criar uma reta tangente, primeiro selecionamos um ponto já criado, em seguida selecionamos um círculo, cônica ou função.

Reta Polar ou Diametral: Utilizando essa ferramenta é possível criar uma reta perpendicular a uma outra reta qualquer passando pela origem de um círculo ou cônica, formando assim o diâmetro. Para cria-la basta selecionar um ponto ou uma reta e sem seguida selecionar um círculo ou cônica.

Reta de Regressão Linear: Com essa ferramenta é possível encontrar a reta que melhor se ajusta a um conjunto de pontos. Para cria-la basta selecionar vários pontos desejados ou uma lista de pontos.

Lugar Geométrico: Utilizando essa ferramenta é possível construir lugar geométrico determinado pelo movimento de um objeto (reta, ponto, etc.) ao longo de uma trajetória.

2.2.2.5 – Ferramentas do ícone Polígonos

Polígono: Essa ferramenta construí polígonos irregulares com quantidades de lados desejada. Para criar polígonos com essa ferramenta basta selecionar sucessivamente pelo menos 3 prontos, os quais serão vértices do polígono, em seguida clique no ponto inicial para fechar o polígono.

Polígono Regular: Essa ferramenta possibilita a construção de um polígono regular a partir de um lado. Para isso selecione dois pontos ou posição na Janela de visualização, em seguida determine o número de vértices desejado no campo entrada de texto da janela de diálogo que surge e aperte no botão ok.

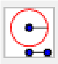
Polígono Rígido: Essa ferramenta construí polígonos irregulares rígidos com quantidades de lados desejada. Para criar polígonos com essa ferramenta basta selecionar sucessivamente pelo menos 3 prontos, os quais serão vértices do polígono, em seguida clique no ponto inicial para fechar o polígono. Note que após criar esse polígono é exibido apenas dois pontos onde um movimenta o polígono pela Janela de visualização e o outro faz a rotação do polígono em torno do primeiro ponto.

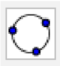
Polígono Semideformável: Essa ferramenta construí polígonos irregulares semideformáveis com quantidades de lados desejada. Para criar polígonos com essa ferramenta basta selecionar sucessivamente pelo menos 3 prontos, os quais serão vértices do polígono, em seguida clique no ponto inicial para fechar o polígono. Note que o primeiro ponto criado não deforma o polígono, ele apenas movimenta a construção pela Janela de Visualização.

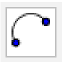
2.2.2.6 – Ferramentas do ícone Formas Circulares

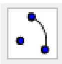
Círculo dados Centro e Um de seus Pontos: Essa ferramenta é utilizada para construir círculos, para isso basta selecionar um ponto ou posição na Janela de Visualização, o que será o centro do círculo, em seguida selecione um ponto ou posição que ficara sobre a circunferência.

Círculo: Centro & Raio: Com essa ferramenta é possível construir círculos fornecendo o tamanho do raio, para isso basta selecionar um ponto ou posição na Janela de Visualização, em seguida digite o tamanho do raio desejado no campo entrada de texto na janela de diálogo que surge e aperte o botão ok.

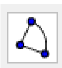
**Compasso:** Com essa ferramenta é possível construir círculos fornecendo o tamanho do raio a partir de um seguimento qualquer, para isso basta selecionar um seguimento ou dois pontos na Janela de Visualização para determinar o tamanho do raio, em seguida selecione um ponto ou posição para determinar o centro do círculo.

**Círculo definido por Três Pontos:** Utilizando essa ferramenta é possível construir círculos fornecendo três pontos de sua circunferência, para isso basta selecionar três pontos ou posições na Janela de Visualização para determinar o tamanho da circunferência.

**Semicírculo:** Essa ferramenta é utilizada para criar um semicírculo, para isso basta selecionar dois pontos ou posições na Janela de Visualização para determinar o tamanho do semicírculo.

**Arco Circular:** Essa ferramenta é utilizada para criar um arco a partir de três pontos, para isso basta selecionar um ponto ou posição na Janela de Visualização que será o centro da região circular, em seguida selecione o segundo ponto que será o tamanho do raio e por último selecione o ponto que será o tamanho do arco circular.

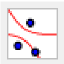
**Arco Circuncircular:** Essa ferramenta é utilizada para criar um arco a partir de três pontos presentes na região circular, para isso basta selecionar três pontos ou posições na Janela de Visualização.

**Setor Circular:** com essa ferramenta é possível criar um setor circular a partir de três pontos, para isso basta selecionar um ponto ou posição na Janela de Visualização que será o centro do setor circular, em seguida selecione o segundo ponto que será o tamanho do raio e por último selecione o ponto que será o tamanho do setor circular.

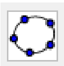
**Setor Circuncircular:** Essa ferramenta é utilizada para criar um setor circular a partir de três pontos presentes na região circular, para isso basta selecionar três pontos ou posições na Janela de Visualização.

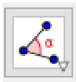
2.2.2.7 – Ferramentas do ícone Cônicas 

**Elipse:** Com essa ferramenta é possível construir elipse utilizando três pontos, para isso basta selecionar dois pontos ou posições na Janela de Visualização, os quais serão os focos da elipse, em seguida selecione um ponto ou posição que pertencera a elipse.

**Hipérbole:** Para fazer a construção de uma hipérbole com essa ferramenta, basta selecionar dois pontos ou posições na Janela de Visualização, os quais serão os focos da hipérbole, em seguida selecione um ponto ou posição que pertencera a hipérbole.

**Parábola:** Utilizamos essa ferramenta para criar parábola, para isso basta selecionar uma reta já existente na Janela de Visualização e em seguida selecione um ponto ou posição para definir a concavidade da parábola.

**Cônica por Cinco Pontos:** Essa ferramenta cria uma seção cônica utilizando cinco pontos, para isso basta selecionar quatro pontos ou posições na Janela de Visualização, em seguida selecione o quinto ponto que definira o formato da seção cônica.

2.2.2.8 – Ferramentas do ícone Ângulos e Medidas 

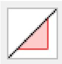
**Ângulo:** Utilizando essa ferramenta podemos determinar um ângulo utilizando três pontos. Para criar um ângulo selecione três pontos no sentido horário (sendo que o segundo ponto vai ser a origem do ângulo) ou duas retas, semirretas, segmentos de reta ou vetores. Com essa ferramenta também é possível determinar todos os ângulos de um polígono, para isso basta selecionar essa ferramenta e selecionar o polígono.

**Ângulo com Amplitude Fixa:** Essa ferramenta é utilizada para criar ângulos com amplitude fixa. Inserimos esse ângulo selecionando dois pontos ou posições (o

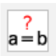
segundo ponto será a origem do ângulo), em seguida indique o tamanho do ângulo no campo entrada de texto na janela de diálogo que aparecerá e aperte o botão ok.

Distância, Comprimento ou Perímetro: Essa ferramenta é utilizada na obtenção da distância entre dois pontos, duas retas ou entre um ponto e uma reta, seguimento, perímetro de polígonos, circunferências e elipses, além do comprimento de arcos, mostrando o valor da distância a partir de um texto dinâmico. Para utilizar essa ferramenta basta selecionar dois pontos, um ponto e uma reta, selecionar um polígono ou uma cônica.

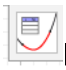
Área: Utilizamos essa ferramenta para determinar o valor numérico da área de um polígono, círculo ou elipse. Para isso, basta ativar essa ferramenta e selecionar um polígono, círculo ou elipse para determinar sua área.


Inclinação: Essa ferramenta mostra a inclinação de uma reta, utilizando um triângulo cuja razão entre a medida do cateto vertical e a medida do cateto horizontal é o valor absoluto da inclinação da respectiva reta. Para utilizar essa ferramenta, basta ativa-la e selecionar uma reta.

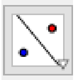
Lista: Utilizando essa ferramenta podemos criar uma lista de objetos selecionados como: pontos, seguimentos de reta, polígonos, cômicas, etc. Para isso, basta ativar a ferramenta, clicar e segurar o botão do mouse em um espaço da Janela de Visualização, em seguida arraste o mouse criando um retângulo marcando os objetos a serem selecionados e inseridos na lista.

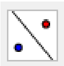


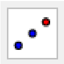
Relação: Essa ferramenta permite saber a relação entre dois objetos, para isso basta clicar nos dois objetos e uma janela de diálogo aparecerá indicando a relação entre eles.

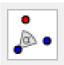

Interpor Funções: Essa ferramenta permite saber de informações mais especificas de uma função em um determinado intervalo como: pontos de máximo e mínimo, integral, reta tangente, círculo osculador, etc. Para utilizar essa ferramenta,

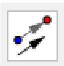
basta selecionar a função na Janela de visualização e observar as informações na janela de diálogo que surgirá.

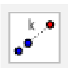
2.2.2.9 – Ferramentas do ícone Transformações 

**Reflexão em Relação a uma Reta:** Com essa ferramenta é possível criar um reflexo de um determinado objeto (ponto, círculo, reta, polígono, etc.) em relação a uma reta. Para isso, basta selecionar primeiramente o objeto à ser refletido e em seguida selecionar a reta de reflexão.

**Reflexão em Relação a um Ponto:** Com essa ferramenta é possível criar um reflexo de um determinado objeto (ponto, círculo, reta, polígono, etc.) em relação a um ponto. Para isso, basta selecionar primeiramente o objeto à ser refletido e em seguida selecionar o ponto de reflexão.

 **Rotação em Torno de um Ponto:** Utilizando essa ferramenta é possível criar o reflexo de um objeto que pode ser rotacionado em relação a um ângulo. Para utilizar essa ferramenta selecione um objeto a ser rotacionado, em seguida clique em um monto para estabelecer o centro de rotação e na janela de diálogo que surge insira o valor do ângulo de amplitude. Note que a medida em que você movimenta o objeto, seu reflexo também é movimentado sem alterar o ângulo de rotação definido.

**Translação de um Vetor:** Essa ferramenta é utilizada para transladar objetos (ponto, seguimento, polígono, cônicas, etc.) para o mesmo sentido de um vetor selecionado. Para utilizar essa ferramenta selecione o objeto que pretende transladar, em seguida selecione o vetor que irá definir a translação. Note que ao movimentar o vetor, também é movimentado o objeto atrelado a ele.

**Homotetia**: Utilizando essa ferramenta é possível criar copias de objetos com um fator de ampliação, para isso basta selecionar um objeto, em seguida selecione um

ponto que será o centro, por último na janela de diálogo que surge digite o fator de homotetia.

2.2.2.10 – Ferramentas do ícone Controles Especiais

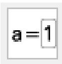
Controle Deslizante: Com essa ferramenta podemos criar um controle deslizante que serve para fazer a alteração de valores de uma determinada variável movimentando apenas um ponto que está atrelado um seguimento de reta. Para utilizar essa ferramenta basta clicar em algum local da Janela de Visualização, onde deseja que o controle fique, em seguida abrira uma janela de diálogo para você preencher com o intervalo de máximo e mínimo, incremento, nome do controle, etc. Após o preenchimento clique no botão ok e será criado o controle deslizantes na sua Janela de Visualização.

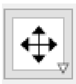
Texto: Essa ferramenta possibilita a criação de textos estáticos, dinâmicos ou em linguagem LATEX inseridos na Janela e Visualização. Para inserir texto, basta clicar no local onde deseja que seu texto seja inserido na Janela de Visualização, em seguida aparecera uma janela de diálogo onde você pode digitar seu texto de três formas. O ***Texto Estático*** não está atrelado a nenhum objeto matemático presente na Janela de Visualização, o ***Texto Dinâmico*** possui valores de objeto que são alterados automaticamente a medida em que o objeto é alterado, o ***Texto Misto*** é uma combinação dos dois textos anteriores. Também podemos inserir um conjunto de textos e fórmulas em linguagem LATEX, para utilizar esse recurso de texto, basta ativar a caixa Fórmula LaTeX na janela de diálogo da ferramenta texto e inserir o texto e as fórmulas.

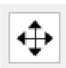
Inserir Imagem: A partir dessa ferramenta é possível inserir figuras na Janela de Visualização. Para utilizar essa ferramenta basta selecionar a mesma, em seguida aparecera uma janela de navegação de pastas, encontre seu arquivo, selecione-o e em seguida clique no botão abrir.

**Botão:** Utilizando essa ferramenta é possível criar um botão e associar a ele um conjunto de ações visíveis na zona gráfica. Para inserir um botão, basta clicar em algum local da Janela de Visualização, onde deseja que o botão seja inserido, em seguida aparecera uma janela de diálogo para você preencher com o nome do botão e a sua respectiva programação de ações desejadas.

**Caixa para Exibir/Esconder Objetos:** Essa ferramenta permite criar uma caixa de marcação onde é possível ativar (mostrar) e desativar (esconder) objetos construídos apenas marcando e desmarcando a caixa. Para utilizar essa ferramenta, basta clicar em um local da Janela de Visualização onde deseja que fique a caixa, em seguida na janela de diálogo que surge, preencha com o nome da caixa e selecione os objetos construídos que deseja que fiquem atrelados a essa caixa.

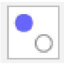
**Campo de Entrada:** Essa ferramenta é utilizada para criar uma caixa de texto que permite a interação com os objetos construídos. Para utilizar essa ferramenta, basta clicar em algum local da Janela de Visualização, onde deseja que fique o seu texto, em seguida na janela de diálogo que surge, digite o nome e selecione o objeto a ser vinculado e clique no botão ok.

2.2.2.11 – Ferramentas do ícone Exibição 

**Mover Janela de Visualização:** Essa ferramenta é utilizada para mover o sistema de eixos da Janela de Visualização, alterar a escala dos eixos, bem como movimentar imagens. Para utilizar essa ferramenta, basta clicar em algum local da Janela de Visualização, segurar o clique e arrastar o mouse para movimentar os eixos, para alterar a escala dos eixos basta clicar em cima o eixo desejado, segurar a tecla shift e arrastar o mouse. É possível movimentar imagens com essa ferramenta também, para isso basta clicar com o botão direito do mouse sobre a imagem, segurar o clique e arrastar.

**Ampliar:** Para ampliar a visualização de objetos criados na Janela de Visualização utilizamos essa ferramenta. Para usa-la, basta clicar em uma região da Janela de Visualização onde deseja ampliar, clique quantas vezes desejar até ficar do tamanho esperado.

**Reduzir:** Para reduzir a visualização de objetos criados na Janela de Visualização utilizamos essa ferramenta. Para usa-la, basta clicar em uma região da Janela de Visualização onde deseja ampliar, clique quantas vezes desejar até ficar do tamanho esperado.

**Exibir/Esconder Objetos:** Com essa ferramenta é possível exibir/esconder objetos criados na Janela de Visualização. Para utilizar essa ferramenta, basta clicar nos objetos que deseja esconder, em seguida selecione outra ferramenta qualquer para poder executar a ação de esconder, da mesma forma fazemos para exibir o objeto novamente.

Exibir/Esconder Rótulo: Com essa ferramenta é possível exibir/esconder o rótulo de objetos criados na Janela de Visualização. Para utilizar essa ferramenta, basta clicar nos objetos que deseja esconder o rótulo, da mesma forma fazemos para exibir o rótulo dos objetos novamente.

**Copiar Estilo Visual:** Essa ferramenta possibilita copiar a formatação (estilo) de um determinado objeto. Para utilizar essa ferramenta, basta clicar no objeto que você deseja copiar o estilo e em seguida clique no objeto que deseja aplicar o estilo.

**Apagar:** Essa ferramenta serve para apagar objetos criados na Janela de Visualização. Para utilizar essa ferramenta, basta clicar o objeto desejado e note que que o objeto é apagado da Janela de Visualização e também da Janela de Álgebra. As

2.2.3 – Janela de Álgebra

A janela de Álgebra é responsável por mostrar informações relacionadas aos dados inseridos pelos usuários na Janela de Visualização e na Caixa de Entrada tais como valores, coordenadas, equações, funções etc. A cada operação feita pelo usuário os dados são registrados em ordem de criação na Janela de Álgebra, facilitando assim a visualização dos dados numéricos e algébricos dos objetos construídos pelo usuário.

2.2.4 – Janela de Visualização

A Janela de Visualização é responsável por representar a parte visual das construções como: os gráficos de pontos, funções, vetores, seguimentos, polígonos, retas, cônicas e espaço no plano 2D e 3D. A alteração nesse ambiente gráfico pode ser feita a partir do toque do mouse, podendo fazer desde simples verificações até modificações na estrutura das construções.

Propriedades da Janela de Visualização: Para configurar a Janela de Visualização do Geogebra clique com o botão direito do mouse em algum espaço em branco da Janela de Visualização, em seguida no menu que aparece, clique na última opção chamada *Janela de Visualização*. A partir da janela (Preferências da Janela de Visualização) podemos alterar inúmeras propriedades como: dimensões, eixos, malha, unidades, distância, entre outras. (FRISKE, Et. al. 2016. p. 8)

2.2.5 – Campo Entrada

A entrada de comandos, conhecida como *Campo Entrada* é responsável por possibilitar a inserção de comandos de criação que fazem a mesma função dos itens da barra de ferramentas utilizando apenas o teclado. Podemos inserir comando específicos como: o comando de criação de funções, de polígonos, de integrais, de derivadas, de área, entre outros.

Características do Campo Entrada: A inserção de comando depende de parâmetros específicos do Geogebra, dessa forma, para facilitar o seu manuseio pelo usuário é disponibilizado uma ajuda na hora de inserir os comandos, ou seja, quando o usuário começa a digitar determinado texto como integral, derivada ou função, uma série de opções é mostrada, indicando os possíveis modos de se utilizar aquele comando e também os elementos necessários para que seja possível fazer a inserção correta do comando.

O Geogebra possui inúmeros comando que podem ser inseridos no Campo Entrada, entre eles estão comando para inserir: funções matemáticas, cálculo de áreas, comando 3D, álgebra, estatística, matemática financeira, probabilidade, transformações, vetores, matrizes, lógica, programação, etc.

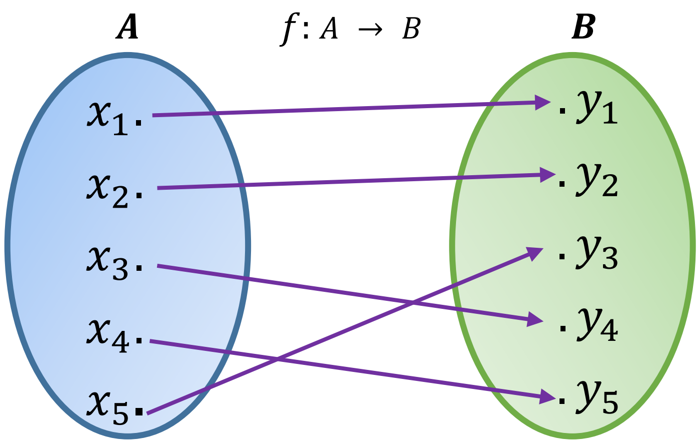
O uso de softwares no ensino de funções vem aumentado a cada ano que passa, as mídias digitais e a facilitação de acesso a trabalhos acadêmicos disponíveis em bibliotecas universitárias digitais e acervos estaduais, nacionais e internacionais tem contribuído para a difusão de trabalhos envolvendo o uso de softwares para favorecer o ensino de funções como: Função Afim, Função Quadrática, Função Modular, Função Exponencial, Função Logarítmica e Funções Trigonométricas.

Segundo Catharina (2016), as principais características que destacam o software Geogebra quando comprado com os demais softwares de geometria dinâmica disponíveis atualmente são: o fato de ser um software gratuito, por ser utilizado por muitos autores e instituições em trabalhos acadêmicos demonstrando uma maior afinidade da academia com esse software, é um software trabalhado em vários idiomas e permite a abordagem de conteúdos matemáticos que vão desde o ensino fundamental, passando pelo ensino médio até a chegada no ensino superior.

3 – NOÇÃO MATEMÁTICA DE FUNÇÃO

O estudo de **funções matemáticas**, de fato é um dos principais assuntos da matemática, pois surge sempre que queremos estabelecer uma relação entre duas grandezas variáveis. Neste caso, vamos abordar um pouco mais o formalismo matemático para definir o que de fato vem a ser uma função matemática e suas estruturas mais importantes.

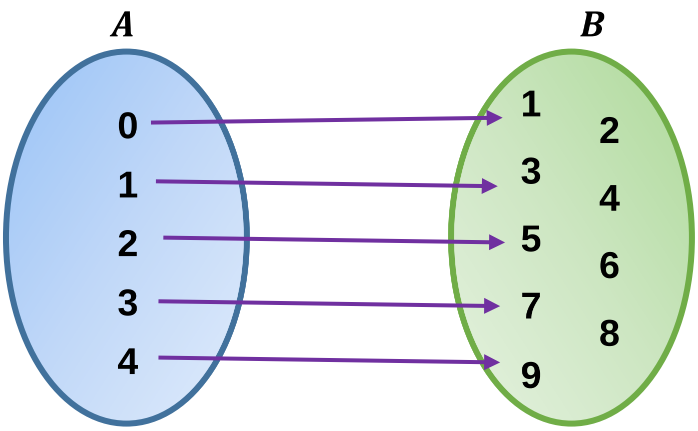
Definição: Dado os conjuntos $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$, não vazios, e uma relação $\boldsymbol{f}$ de $\boldsymbol{A}$ em $\boldsymbol{B}$, dizemos que $\boldsymbol{f}$ é uma função de $\boldsymbol{A}$ em $\boldsymbol{B}$ se para todo $\boldsymbol{x}$ de $\boldsymbol{A}$ existir em correspondência um único $\boldsymbol{y}$ em $\boldsymbol{B}$. (BIANCHINI e PACCOLA, 1989, p. 43).



Exemplo:

Dados os conjuntos $\boldsymbol{A} = \{\boldsymbol{0}, \boldsymbol{1}, \boldsymbol{2}, \boldsymbol{3}, \boldsymbol{4}\}$ e $\boldsymbol{B} = \{\boldsymbol{1}, \boldsymbol{2}, \boldsymbol{3}, \boldsymbol{4}, \boldsymbol{5}, \boldsymbol{6}, \boldsymbol{7}, \boldsymbol{8}, \boldsymbol{9}\}$ e a função $\boldsymbol{f} : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ tal que $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{2x} + \boldsymbol{1}$.

Ao representar $\boldsymbol{f}$ por meio de um diagrama, temos:



Utilizando o exemplo criado, vamos compreender o que são domínio, contradomínio e imagem de uma função.

3.1 – DOMÍNIO

Ao conjunto $\boldsymbol{A}$ dá-se o nome de domínio da função. Indica-se o domínio da função $\boldsymbol{f}$ por $\boldsymbol{D}$ ou $\boldsymbol{D(f)}$. Logo, $\boldsymbol{D(f) = A}$, (BIANCHINI e PACCOLA, 1989, p. 44). É importante lembrar que todos os elementos do domínio devem ter uma relação com o contradomínio.

Então, $\boldsymbol{D(f) = \{0, 1, 2, 3, 4\} = A}$.

Importante

Dependendo da natureza da função, existe algumas situações em que o domínio da função é restringido, ou seja, alguns elementos do conjunto dos números reais não fazem parte desse domínio como nos exemplos a seguir:

a) Função com a variável no denominador: $\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{x}}$

$$\boldsymbol{D(f) = \{x \in \mathbb{R} \,|x \neq 0\}}$$

b) Função com a variável dentro de uma raiz de índice par: $\boldsymbol{f(x) = \sqrt{x - 5}}$

$$\boldsymbol{D(f) = \{x \in \mathbb{R} \,|x \geq 5\}}$$

c) A combinação dos dois primeiros exemplos: $\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-5}}}$

$$\boldsymbol{D(f) = \{x \in \mathbb{R} \,|x > 5\}}$$

3.2 – CONTRADOMÍNIO

Ao conjunto $\boldsymbol{B}$ dá-se o nome de contradomínio da função. Indica-se o contradomínio da função $\boldsymbol{f}$ por $\boldsymbol{CD}$ ou $\boldsymbol{CD}(\boldsymbol{f})$. Logo, $\boldsymbol{CD}(\boldsymbol{f}) = \boldsymbol{B}$, (BIANCHINI e PACCOLA, 1989, p. 44)

Então, $\boldsymbol{CD}(\boldsymbol{f}) = \{\mathbf{1},\mathbf{2},\mathbf{3},\mathbf{4},\mathbf{5},\mathbf{6},\mathbf{7},\mathbf{8},\mathbf{9}\}$.

3.3 – IMAGEM

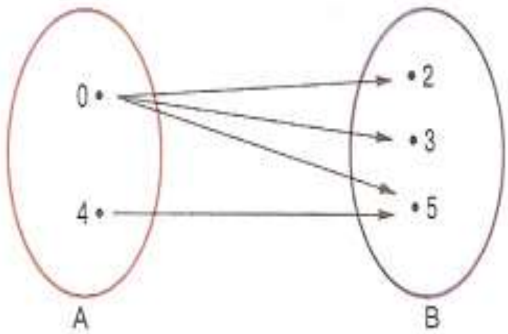
Ao elemento $\boldsymbol{y}$ de $\boldsymbol{B}$, associado ao elemento $\boldsymbol{x}$ de $\boldsymbol{A}$, dá-se o nome de imagem de $\boldsymbol{x}$, pela função $\boldsymbol{f}$. Indica-se que $\boldsymbol{y}$ é a imagem de $\boldsymbol{x}$ pela notação $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ (lê-se: $\boldsymbol{y}$ igual a $\boldsymbol{f}$ de $\boldsymbol{x}$).

Ao conjunto dos elementos $\boldsymbol{y}$ de $\boldsymbol{B}$, que são imagens dos elementos $\boldsymbol{x}$ de $\boldsymbol{A}$, dá-se o nome de conjunto-imagem de $\boldsymbol{x}$, ou simplesmente imagem da função. Indica-se o conjunto-imagem da função por $\boldsymbol{Im}$ ou $\boldsymbol{Im}(\boldsymbol{f})$. Para toda função, $\boldsymbol{Im} \subset \boldsymbol{B}$. (BIANCHINI e PACCOLA, 1989, p. 44)

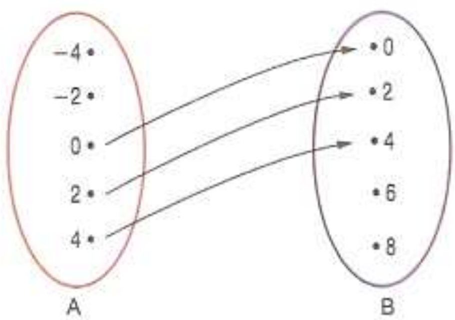
Então, $\boldsymbol{Im}(\boldsymbol{f}) = \{\mathbf{1},\mathbf{3},\mathbf{5},\mathbf{7},\mathbf{9}\}$.

Desafio: Verifique quais relações abaixo representam funções.

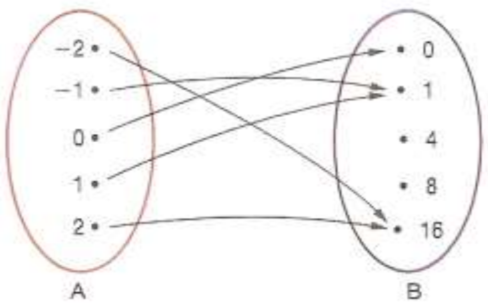
a)



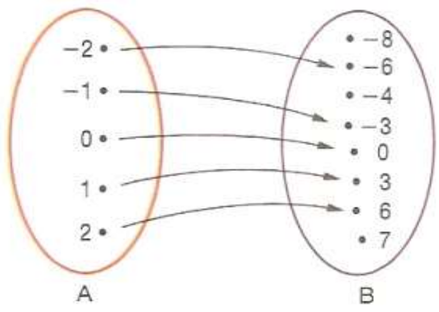
b)



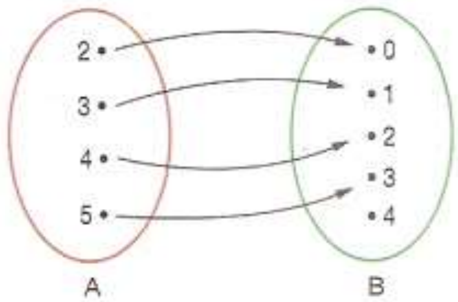
c)



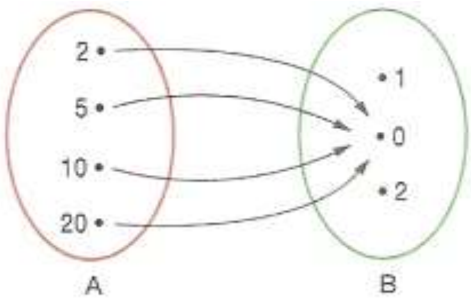
d)



e)



f)



Comente sobre as relações que você não marcou, e porque considera que elas não sejam função:

____

____

____

Importante

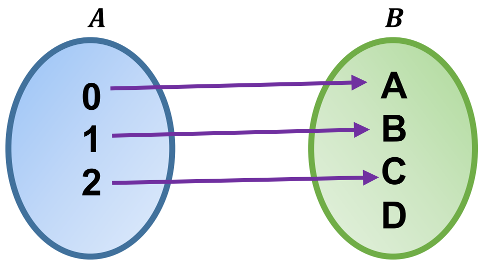
Não existe restrição para o contradomínio, dessa forma pode existir elementos dentro desse conjunto que não terão correspondência com nenhum elemento contido no domínio da função. Note que, por mais que a imagem da função não possua elementos negativos, como na função $f(x) = x^2$, isso não impede que o contradomínio tenha valores negativos.

Existe algumas características que diferenciam com que tipo de função estamos trabalhando. Dessa forma, veremos a seguir quais são essas características que determinam o tipo da função:

3.4 – TIPOS DE FUNÇÃO

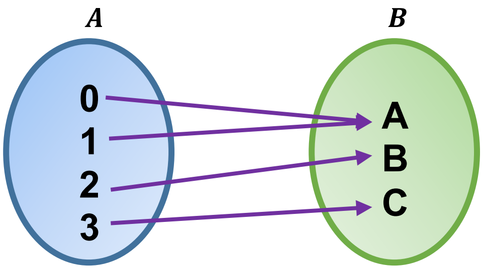
3.4.1 – Injetora ou Injetiva

Cada elemento x do domínio associa-se a um único elemento da imagem $f(x)$. Todavia, podem existir elementos do contradomínio que não sejam imagem.



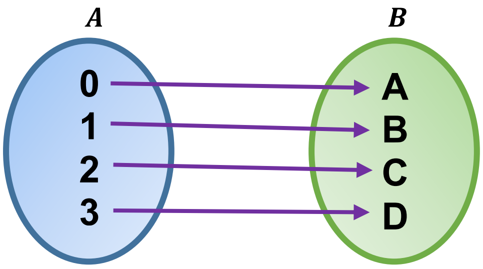
3.4.2 – Sobrejetora ou Sobrejetiva

Todos os elementos do domínio possuem um elemento no contradomínio. Pode acontecer que mais de um elemento do domínio possuam a mesma imagem.



4.4.3 – Bijetora ou Bijetiva

É ao mesmo tempo injetora e sobrejetora, pois, cada elemento de x relaciona-se a um único elemento de $f(x)$.



4 – CONCEITOS E PROPRIEDADES DE FUNÇÃO NO GEOGEBRA

4.1 – FUNÇÃO AFIM

Definição: Dados os números reais $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$, com $\boldsymbol{a \neq 0}$, chama-se função afim ou função do 1º grau, a função $\boldsymbol{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $\boldsymbol{y = f(x) = ax + b}$. Chamamos $\boldsymbol{a}$ de coeficiente angular e $\boldsymbol{b}$ de coeficiente linear. (BIANCHINI e PACCOLA, 1989, p. 68).

$$\boldsymbol{x = Domínio}$$

$$\boldsymbol{f(x) = Imagem}$$

$$\boldsymbol{a = Coeficiente\ Agular}$$

$$\boldsymbol{b = Coeficiente\ Linear}$$

Exemplo1: Utilizando $\boldsymbol{a = 3}$ e $\boldsymbol{b = 4}$, obtemos a função $\boldsymbol{f(x) = 3x + 4}$

Exemplo2: Utilizando com base o exemplo1, dada as seguintes funções de $\mathbb{R}\ em\ \mathbb{R}$, identifique aquelas que são do 1º grau:

a) $f(x) = 2x + 7$

b) $g(x) = 5x$

c) $y = x^2 - 5x$

d) $h(x) = x^2 + 1$

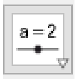
4.1.1 – GRÁFICO DA FUNÇÃO AFIM

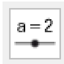
O gráfico de uma função afim ou função do 1º grau é uma reta que não é paralela ao eixo $\boldsymbol{x}$ nem ao eixo $\boldsymbol{y}$. Seu domínio é $\boldsymbol{D(f)} = \mathbb{R}$ e sua imagem é $\boldsymbol{Im(f)} = \mathbb{R}$.

Podemos construir o gráfico da função afim a partir da sua lei de formação (é a equação que representa a função no plano cartesiano) inserida no Geogebra. Veremos agora o passo-a-passo para a construção desse gráfico.

Procedimentos no Geogebra

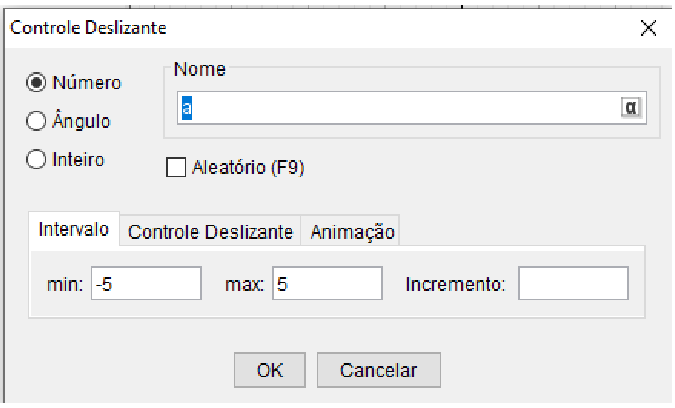
1. Abra o Geogebra.

2. Clique no ícone ***Controles*** 

e selecione a ferramenta ***Controle Deslizante*** 

3. Clique com o botão esquerdo do mouse na ***Janela de Visualização.***

4. Insira o controle deslizante "a" preenchendo com os dados a seguir.



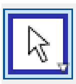
5. Clique no botão "ok".

6. Repita os procedimentos "3", "4" e "5" para inserir o controle deslizante "b".

7. Clique no ***Campo Entrada*** 

.

8. digite: **f(x)=a*x+b** e pressione a tecla **Enter**.

9. Clique no ícone ***Manipulação***  e selecione a ferramenta **Mover** .

10. Clique no botão dos constroles deslizantes "a" e "b", movimente-os e observe o comportamento do gráfico.

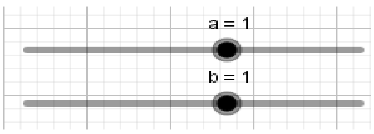
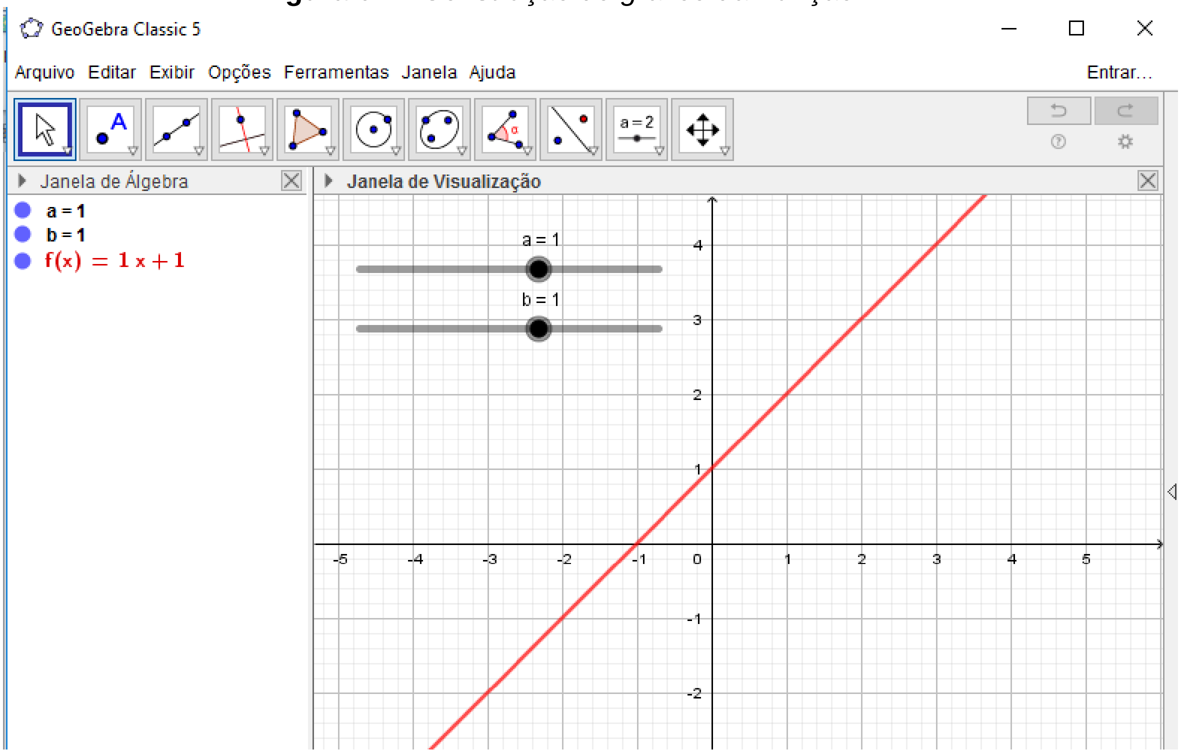


Figura 04 – *Construção do gráfico da Função Afim*



Importante

Note que, à medida que os controles deslizantes “a” e “b” são modificados há uma alteração na função que pode ser visualizada tanto na Janela de Visualização quanto na Janela de Álgebra.

Podemos também alterar as propriedades do gráfico da função clicando sobre sua expressão na ***Janela de Álgebra*** com o botão direito do mouse e selecionando a opção ***Propriedades***. Na guia ***Básico***, podemos modificar o nome da função além de sua forma de exibição e seu rótulo. Na guia ***Cor***, podemos alterar a cor do gráfico e na guia ***Estilo*** podemos alterar a espessura e o estilo da linha.

11. Clique no menu **Arquivo/Gravar Como.**

12. Na janela de diálogo que surge, dei o nome para o arquivo de **“Função Afim”**, escolha um local onde deseja guardar seu documento e clique no botão **Gravar**.

Desafio: Crie e customize os gráficos das funções $f(x) = \frac{1}{2}x + 2$ e $g(x) = x + 3$.

Observação: Para realizar a multiplicação no Geogebra utilizamos o asterisco (*) ou então podemos substituí-lo por um espaço em branco.

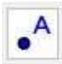
4.1.2 – ESTUDO DO DOMÍNIO E IMAGEM DA FUNÇÃO AFIM

Para fazer o estudo do domínio e imagem da função afim no Geogebra, vamos inserir alguns pontos, retas e seguimentos de retas no gráfico que criamos anteriormente (ver figura 4).

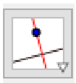
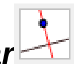
Procedimentos no Geogebra

1. Abra o Geogebra.

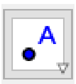
2. Clique no menu **Arquivo/Abrir**, selecione o arquivo **“Função Afim”** e clique no botão **Abrir**.

3. Clique no ícone ***Pontos***  e selecione a ferramenta ***Ponto*** .

4. Clique com o botão esquerdo do mouse em qualquer trecho da reta $f(x)$ criando o Ponto A.

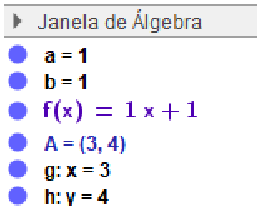
5. Clique no ícone ***Posições Relativas***  e selecione a ferramenta ***Reta Perpendicular*** .

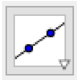
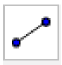
6. Clique no Ponto A e em seguida no eixo X, note que uma reta foi criada perpendicular ao eixo X chamada de “g”, clique novamente no ponto A e em seguida clique no eixo Y e foi criada uma reta perpendicular ao eixo Y chamada de “h”.

7. Clique no ícone ***Pontos***  e selecione a ferramenta ***Intersecção entre dois objetos*** 

8. Clique na reta “g” e depois no eixo X criando assim o Ponto B, em seguida clique na reta “h” e no eixo Y criando o Ponto C.

9. Na ***Janela de Álgebra***, clique na bolinha azul correspondente a reta “g” e “h”, para poder ocultar as duas retas.



10. Clique no ícone ***Linhas Retas***  e selecione a ferramenta ***Segmento*** .

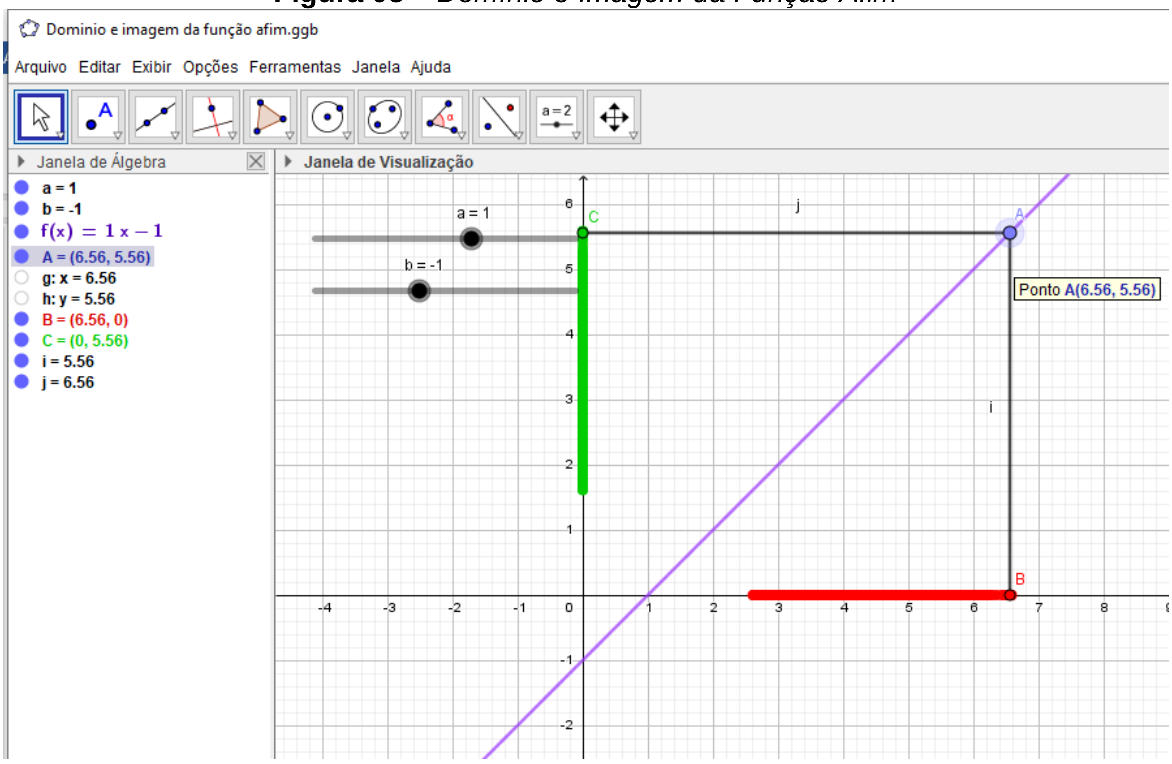
11. Clique no Ponto A e em seguida no Ponto B, repita o processo clicando novamente no Ponto A e em seguida no Ponto C.

12. Clique com o botão direito do mouse em cima do Ponto B e em seguida clique em ***Propriedades***. Na aba ***Básico*** marque a opção **Exibir Rastro**, na aba ***Cor*** mude a cor do Ponto B para Vermelho.

13. Repita o passo 12, agora para o Ponto C, utilize a cor Verde e feche a janela de propriedades.

14. Clique no ícone ***Manipulação***  e selecione a ferramenta **Mover** .

Figura 05 – *Domínio e Imagem da Função Afim*



Movimente o Ponto A e note que é criado um rastro no eixo X na cor vermelha e no eixo Y na cor verde, esses rastros representam o domínio e a imagem da função à medida em que movimentamos o Ponto A.

Importante

Sempre que o Ponto A é movimentado, os Pontos B e C deixam um rastro e para poder retirar esse rastro basta clicar com o botão esquerdo do mouse na Janela de Visualização, segurar o clique e arrastar um pouco, dessa forma os rastros produzidos serão apagados para a criação de novos.

15. Clique no menu **Arquivo/Gravar como**.

16. Na janela de diálogo que surge, dei o nome para o arquivo de **"Domínio e imagem da função afim"**, escolha um local onde deseja guardar seu documento e clique no botão **Gravar**.

Desafio: Movimente o controle deslizante "a" para o valor 1 e o controle deslizante "b" para o valor -1. A partir do que foi visto até aqui, utilizando o gráfico criado e seus conhecimentos, qual a imagem da função $f(x)$ quando x variar de 0 até 5.

____

____

____

____

____

4.2 – FUNÇÃO QUADRÁTICA

Definição: Dados os números reais $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{c}$, com $\boldsymbol{a \neq 0}$, chama-se função quadrática ou função do 2º grau a função $\boldsymbol{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $\boldsymbol{y = f(x) = ax^2 + bx + c}$. Chamamos $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{c}$ de coeficientes. (BIANCHINI e PACCOLA, 1989, p. 83).

$$\boldsymbol{x = Domínio}$$

$$\boldsymbol{f(x) = Imagem}$$

$$\boldsymbol{a = Coeficiente}$$

$$\boldsymbol{b = Coeficiente}$$

$$\boldsymbol{c = Coeficiente}$$

Exemplo1: Utilizando $\boldsymbol{a = 3}$, $\boldsymbol{b = 4}$ e $\boldsymbol{c = 1}$, obtemos a função $\boldsymbol{f(x) = 3x^2 + 4x + 1}$

Exemplo2: Utilizando com base o exemplo1, dada as seguintes funções de $\mathbb{R}\, em\, \mathbb{R}$, identifique aquelas que são quadráticas:

a) $f(x) = x^2 + 6x + 9$

b) $y = 2^x + 1$

c) $y = 3x + 2$

d) $h(x) = -x^2$

____

____

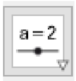
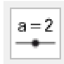
____

4.2.1 – GRÁFICO DA FUNÇÃO QUADRÁTICA

O gráfico de uma função quadrática ou função do 2º grau é uma curva aberta chamada de parábola (BIANCHINI e PACCOLA, 1989, p. 84). Podemos construir o gráfico da função quadrática a partir da sua lei de formação (é a equação que representa a função no plano cartesiano) inserida no Geogebra, veremos agora o passo-a-passo para a construção desse gráfico.

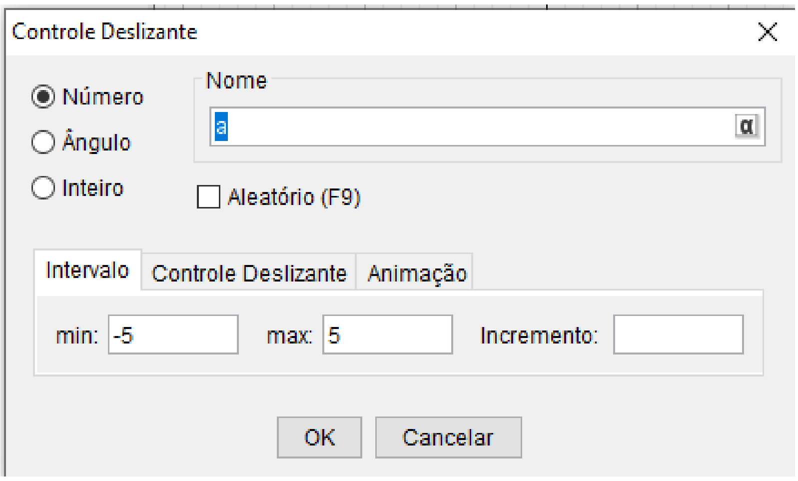
Procedimentos no Geogebra

1. Abra o Geogebra.

2. Clique no ícone ***Controles***  e selecione a ferramenta ***Controle Deslizante*** 

3. Clique com o botão esquerdo do mouse na ***Janela de Visualização.***

4. Insira o controle deslizante “a” preenchendo com os dados a seguir.

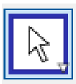


5. Clique no botão “ok”.

6. Repita os procedimentos “3”, “4” e “5” para inserir os controles deslizantes “b” e “c” respectivamente.

7. Clique no ***Campo Entrada*** .

8. digite: **f(x)=a*x^2+b*x+c** e pressione a tecla **Enter**.

9. Clique no ícone ***Manipulação***  e selecione a ferramenta ***Mover*** .

10. Clique no botão dos constroles deslizantes “a”, “b” e “c”, movimente-os e observe o comportamento do gráfico.

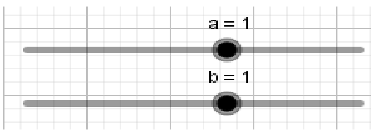
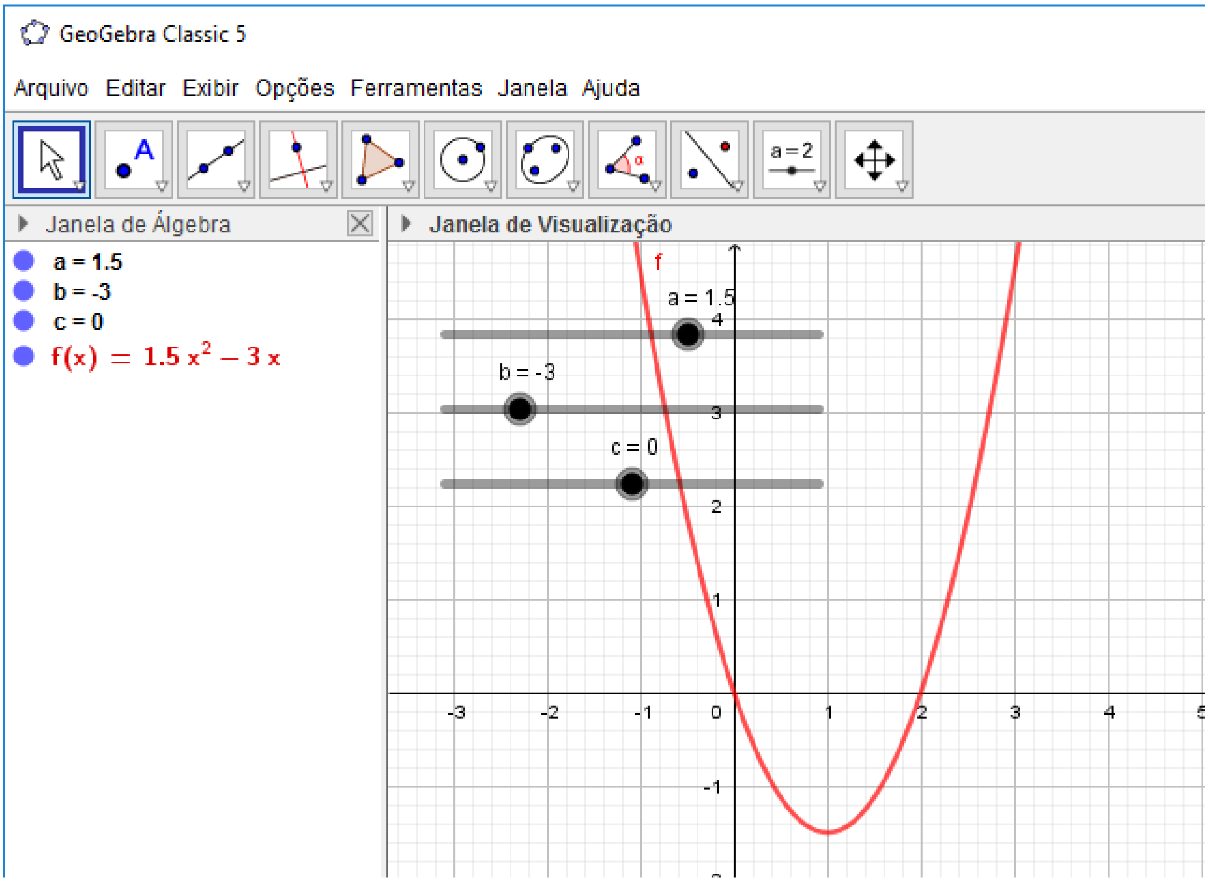


Figura 06 – *Construção do gráfico da Função Quadrática*



Importante

Note que, à medida que os controles deslizantes “a”, “b” e “c” são modificados, há uma alteração na função que pode ser visualizada tanto na Janela de Visualização quanto na Janela de Álgebra. Quando o controle deslizante “a” tem valor 0, a parábola formada pela função vira uma reta, pois nesse momento a função deixa de ser do 2º grau e passa a ser do 1º grau.

11. Clique no menu **Arquivo/Gravar como.**

12. Na janela de diálogo que surge, dei o nome para o arquivo de **"Função Quadrática"**, escolha um local onde deseja guardar seu documento e clique no botão **Gravar**.

Desafio: Crie e customize o gráfico da função $f(x) = 2x^2 - 5x + 2$ e $g(x) = x^2 + 6x + 9$

Observação: Para realizar a potenciação no Geogebra utilizamos o acento circunflexo (^).

4.2.2 – ESTUDO DO DOMÍNIO E IMAGEM DA FUNÇÃO QUADRÁTICA

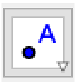
Para fazer o estudo do domínio e imagem da função quadrática no Geogebra, vamos inserir alguns pontos, retas e segmentos de retas no gráfico que criamos anteriormente (ver figura 6).

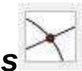
Procedimentos no Geogebra

1. Abra o Geogebra.

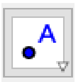
2. Clique no menu **Arquivo/Abrir**, selecione o arquivo **"Função Quadrática"** e clique no botão **Abrir**.

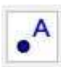
3. Modifique os controles deslizantes para os seguintes valores, a=0.5, b=2.5 e c=2.

4. Clique no ícone ***Pontos*** 

e selecione a ferramenta ***Intersecção entre dois objetos*** 

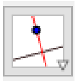
5. Clique com o botão esquerdo do mouse na parábola "f" e depois no eixo X criando assim o Ponto A e o Ponto B, que são também as raízes da função conhecidos como x' e x''.

6. Clique no ícone ***Pontos*** 

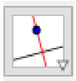
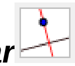
e selecione a ferramenta ***Ponto*** 

.

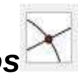
7. Clique com o botão esquerdo do mouse na parábola $f(x)$ no intervalo entre os Pontos A e B, criando o Ponto C.

8. Clique no ícone ***Posições Relativas***  e selecione a ferramenta ***Reta Paralela*** 

9. Clique no Ponto B e em seguida no eixo X, note que uma reta foi criada paralela (também coincidente) ao eixo X chamada de “g”.

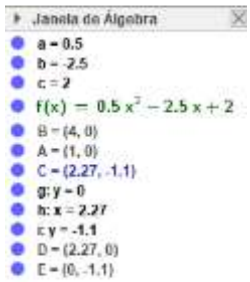
10. Clique no ícone ***Posições Relativas***  e selecione a ferramenta ***Reta Perpendicular*** 

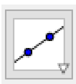
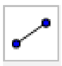
11. Clique no Ponto C e em seguida no eixo X, note que uma reta foi criada perpendicular ao eixo X chamada de “h”, clique novamente no ponto C e em seguida clique no eixo Y e foi criada uma reta perpendicular ao eixo Y chamada de “i”.

12. Clique no ícone ***Pontos***  e selecione a ferramenta ***Intersecção entre dois objetos*** 

13. Clique com o botão esquerdo do mouse na reta “h” e depois no eixo X criando assim o Ponto D, em seguida clique na reta “i” e no eixo Y criando o Ponto E.

14. Na ***Janela de Álgebra***, clique na bolinha azul correspondente as retas “g”, “h” e “i”, para poder ocultar as três retas.



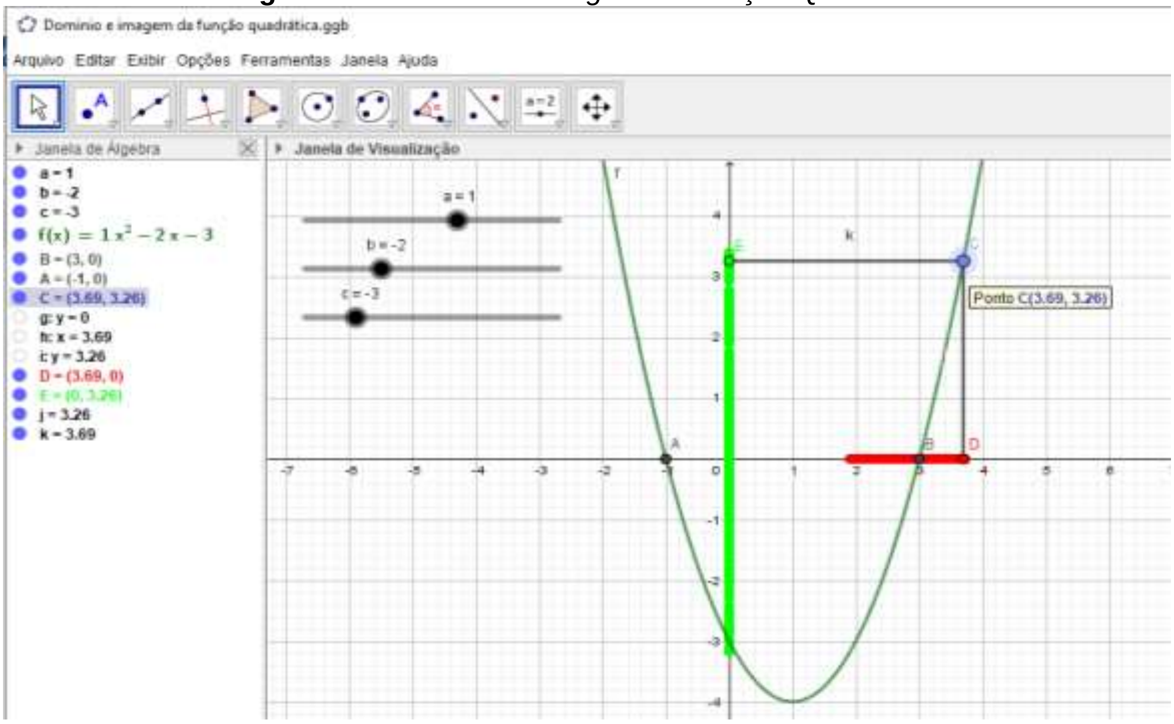
15. Clique no ícone ***Linhas Retas***  e selecione a ferramenta ***Segmento*** .

16. Clique no Ponto C e em seguida no Ponto D, repita o processo clicando novamente no Ponto C e em seguida no Ponto E.

17. Clique com o botão direito do mouse em cima do Ponto D e clique em ***Propriedades***. Na aba ***Básico*** marque a opção **Exibir Rastro**, na aba ***Cor*** mude a cor do Ponto D para Vermelho.

18. Repita o passo 17, agora para o Ponto E, utilize a cor Verde e feche a janela de propriedade.

Figura 07 – *Domínio e Imagem da Função Quadrática*



Movimente o Ponto C e note que é criado um rastro no eixo X na cor vermelha e no eixo Y na cor verde, esses rastros identificam o domínio e a imagem da função à medida em que movimentamos o Ponto C.

Movimentando os controles deslizantes "a", "b" e "c", note que, quando a parábola não toca no eixo X o rastro para de ser criado, mostrando assim que o domínio da função deixa de estar no conjunto dos números reais "$\mathbb{R}$".

19. Clique no menu **Arquivo/Gravar como**.

20. Na janela de diálogo que surge, dei o nome para o arquivo de **"Domínio e imagem da função quadrática"** escolha um local onde deseja guardar seu documento e clique no botão **Gravar**.

Desafio: Movimente o controle deslizante “a” para o valor 1, o “b" para o valor -2 e o “c” para o valor -3. A partir do que que foi visto até aqui e utilizando o gráfico criado, qual a imagem da função $f(x)$ quando x variar de 0 até 4? E qual as raízes reais dessa função?

Importante

Utilize as ferramentas **Ampliar**  e **Reduzir**  para adaptar o tamanho da visualização da função, podendo assim executar a movimentação do Ponto C, obtendo os rastros correspondentes ao domínio e imagem da função no intervalo pedido.

4.3 – FUNÇÃO MODULAR

Para começarmos a falar sobre a função modular é importante relembrar um pouco sobre a definição de módulo e suas principais características. Podemos dizer que módulo pode ser entendido como a distância de um número real ao número zero, pois, o módulo de número real surgiu da necessidade de medir a distância de um número negativo ao zero.

Note que, ao medir a distância de um número negativo qualquer ao zero a distância ficaria negativa, de fato havia um problema a ser resolvido, pois não é usual dizer que uma distância ou comprimento é negativo. Pensando nisso foi criado o módulo de número real que torna o valor positivo ou nulo.

Definição de Módulo de um Número Real: considere no eixo real de origem $\boldsymbol{O}$ um ponto $\boldsymbol{A}$ de abscissa $\boldsymbol{x}$ (PAIVA, 2005. p. 141).

Chama-se de módulo de $\boldsymbol{x}$, e indica-se por $|\boldsymbol{x}|$, é a distância entre os pontos $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{O}$:

$$|\boldsymbol{x}| = \boldsymbol{d_{AO}}$$

Note que, como $|\boldsymbol{x}|$ é a distância entre dois pontos, $|\boldsymbol{x}|$ é um número positivo ou nulo.

Exemplos:

a) 

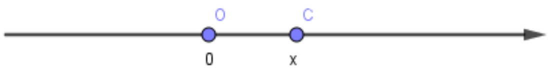
$|5| = d_{AO} = 5 - 0 \Rightarrow |5| = 5$

b) 

$|-5| = d_{BO} = 0 - (-5) \Rightarrow |-5| = 5$

c) 

$|0| = d_{OO} = 0 - 0 \Rightarrow |0| = 0$

d) 

$|x| = d_{CO} = x - 0 \Rightarrow |x| = x$ (sendo $x > 0$)

e) 

$|x| = d_{DO} = 0 - x \Rightarrow |x| = -x$ (sendo $x < 0$)

(**Atenção:** o número $-x$ é positivo, pois x é negativo.)

Sintetizando os resultados obtidos nos itens c, d, e, podemos dar uma definição algébrica para $|x|$ da seguinte maneira:

$$|\boldsymbol{x}| = \boldsymbol{x}, \boldsymbol{se}\ \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}; \boldsymbol{e}\ |\boldsymbol{x}| = -\boldsymbol{x}, \boldsymbol{se}\ \boldsymbol{x} < \boldsymbol{0}, \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{com}\ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}$$

Exemplo:

a) $|5| = 5$ (o módulo de um número positivo é o próprio número)

b) $|-5| = -(-5) = +5$ (o módulo de um número negativo é o oposto desse número)

c) $|0| = 0$ (o módulo de zero é o próprio zero)

Propriedades de módulo

M1. $|x| \geq 0, \forall x, com\ x \in \mathbb{R}$

M2. $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

M3. Sendo $d \in \mathbb{R}_+$, tem-se: $|x| = d \Leftrightarrow x = \pm d$

Exemplo

$|x| = 7 \Leftrightarrow x = \pm 7$

M4. $|x| \cdot |y| = |x \cdot y|, \forall \{x, y\}, com\ \{x, y\} \subset \mathbb{R}$

Exemplo

$|-6| \cdot |5| = |-6 \cdot 5|$

M5. $|x|^n = x^n \Leftrightarrow n\ é\ par, \cdot \forall \{x, n\}, com\ x \in \mathbb{R}\ e\ n \in \mathbb{N}$

Exemplo

a) $|x|^2 = x^2$ b) $|x|^8 = x^8$

M6. $\frac{|x|}{|y|} = \left|\frac{x}{y}\right|, \cdot \forall \{x, y\}, com\ x \in \mathbb{R}\ e\ y \in \mathbb{R}^*$

Exemplo

$$\frac{|-6|}{|3|} = \left|\frac{-6}{3}\right|$$

M7. $|\boldsymbol{x}| = |a| \Leftrightarrow x = \pm a, \cdot \forall \{x, a\},\ com\ \{x, a\} \subset \mathbb{R}$

Exemplo

$|\boldsymbol{x}| = |-3| \Leftrightarrow x = \pm 3$

M8. $|\boldsymbol{x}| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a, \forall a,\ com\ a \in \mathbb{R}_+$

Exemplo

$|\boldsymbol{x}| \leq 6 \Leftrightarrow -6 \leq x \leq 6$

M9. $|\boldsymbol{x}| < a \Leftrightarrow -a < x < a, \forall a,\ com\ a \in\ \mathbb{R}_+^*$

Exemplo

$|\boldsymbol{x}| < 8 \Leftrightarrow -8 < x < 8$

M10. $|\boldsymbol{x}| \geq a \Leftrightarrow x \leq -a\ ou\ x \geq a, \forall a,\ com\ a \in \mathbb{R}_+$

Exemplo

$|\boldsymbol{x}| \geq 3 \Leftrightarrow x \leq -3\ ou\ x \geq 3$

M11. $|\boldsymbol{x}| > a \Leftrightarrow x < -a\ ou\ x > a, \forall a,\ com\ a \in \mathbb{R}_+$

Exemplo

$|\boldsymbol{x}| > 2 \Leftrightarrow x \leq -2\ ou\ x > 2$

Definição de Função Modular: chama-se função modular a função $\boldsymbol{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = |\boldsymbol{x}|$. Como, por definição $|\boldsymbol{x}| = \begin{cases} \boldsymbol{x},\ \boldsymbol{se}\ \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \\ -\boldsymbol{x}, \boldsymbol{se}\ \boldsymbol{x} < \boldsymbol{0} \end{cases}$. (BIANCHINI e PACCOLA, 1989, p. 108).

Temos:

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = |\boldsymbol{x}| = \begin{cases} \boldsymbol{x}, \boldsymbol{se}\ \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \\ -\boldsymbol{x}, \boldsymbol{se}\ \boldsymbol{x} < \boldsymbol{0} \end{cases}$$

A função modular é, portanto, definida por duas sentenças:

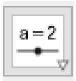
$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}, \text{ se } \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \text{ e } \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = -\boldsymbol{x}, \text{ se } \boldsymbol{x} < \boldsymbol{0}$$

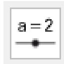
4.3.1 – GRÁFICO DA FUNÇÃO MODULAR

Utilizando o Geogebra faremos a representação da função modular. Para esse procedimento utilizaremos o seguinte artificio para fazer a movimentação da função colocando o coeficiente “a” multiplicando a variável “x” nos procedimentos a seguir.

Procedimentos no Geogebra

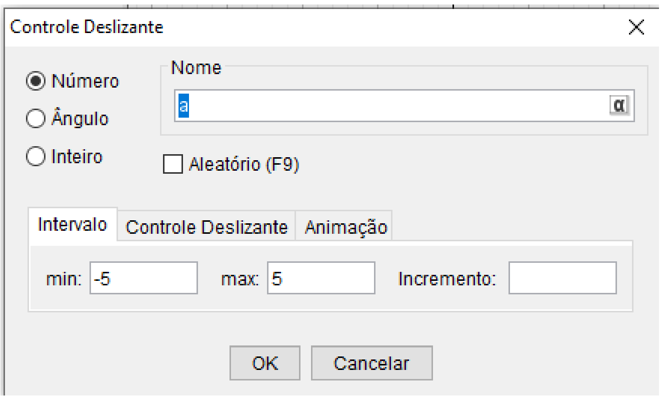
1. Abra o Geogebra.

2. Clique no ícone ***Controles*** 

e selecione a ferramenta **Controle Deslizante** 

3. Clique com o botão esquerdo do mouse na **Janela de Visualização**

4. Insira o controle deslizante "a" preenchendo com os dados a seguir.

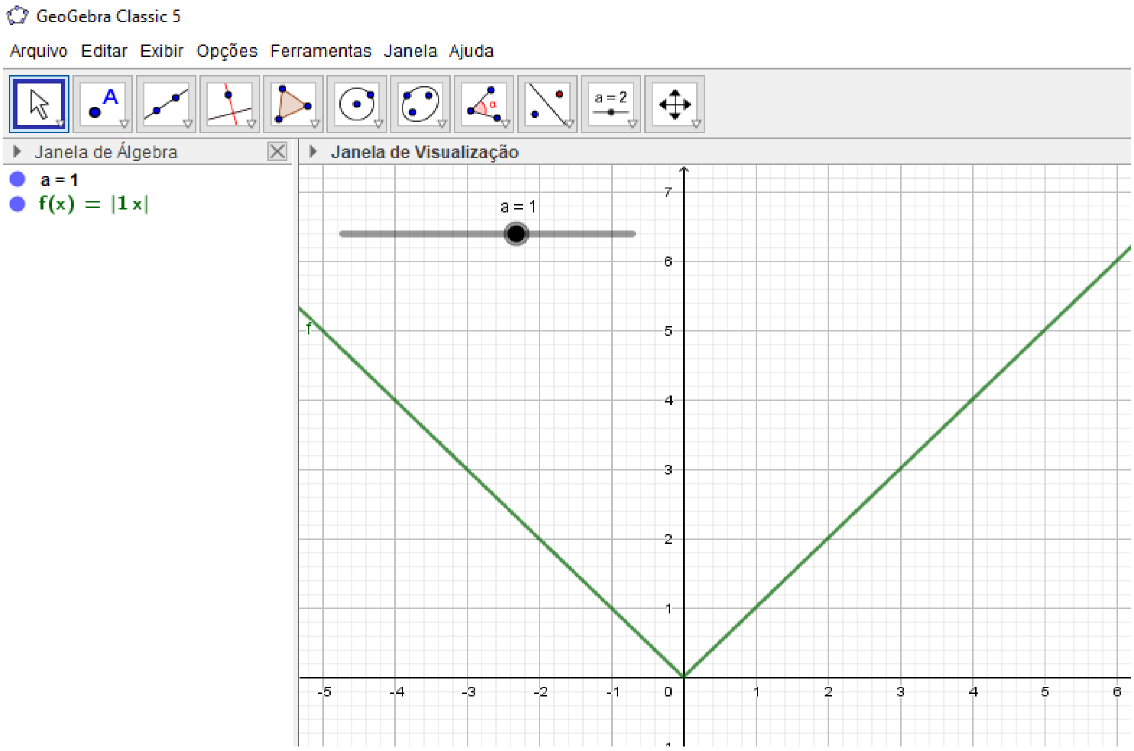


5. Clique no botão "ok".

6. Clique no ***Campo Entrada*** 

e digite **f(x)=abs(a*x)** e aperte a tecla Enter.

Figura 08 – *Construção da Função Modular*



Importante

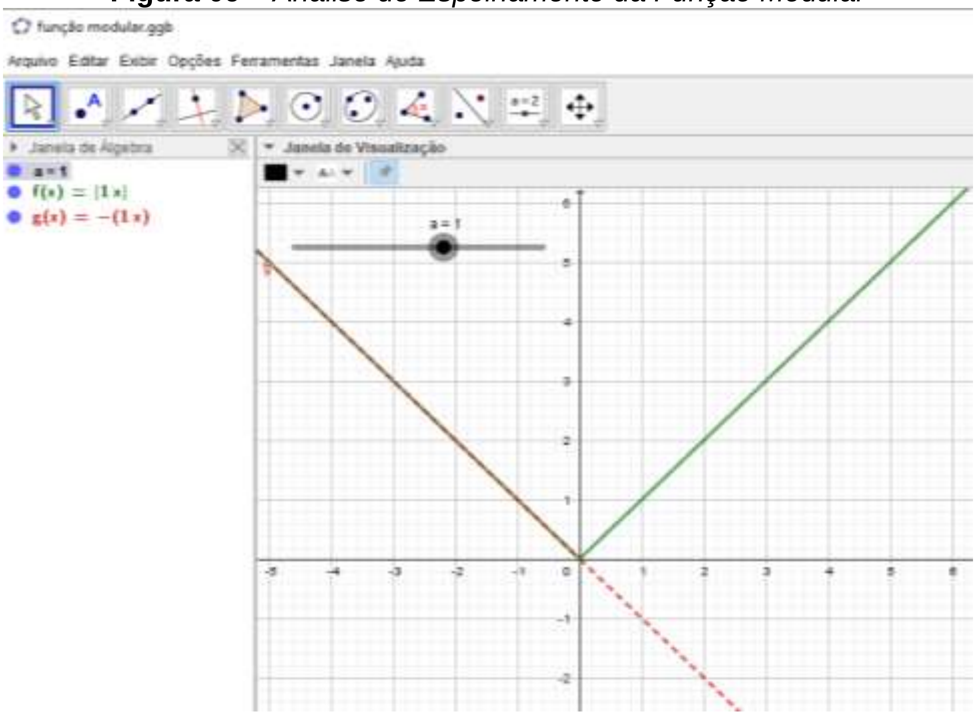
Note que quando x assume valores positivos, a função é crescente e obedece a lei $f(x) = x$ até chegar na origem, a partir do momento em que x assume valores negativos, a função troca de sinal e torna-se $f(x) = -x$, fazendo um espelhamento da função anterior para valores positivos no eixo Y. Vamos inserir a função $g(x) = ax$ para compreendermos melhor esse espelhamento.

7. Clique no ***Campo Entrada*** 

e digite **g(x)=a*x**. e aperte a tecla Enter.

8. Clique com o botão direito do mouse em cima da função g(x) e clique em **Propriedades**. Na aba **Estilo** mude o estilo da linha para **tracejado** e feche a janela de propriedades.

Figura 09 – *Analise do Espelhamento da Função Modular*



9. Clique no menu **Arquivo/Gravar como**.

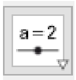
10. Na janela de diálogo que surge, dei o nome para o arquivo de **“Função Modular”** escolha um local onde deseja guardar seu documento e clique no botão **Gravar**.

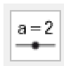
4.3.2 – ESTUDO DO DOMÍNIO E IMAGEM DA FUNÇÃO MODULAR

De acordo com a definição de função, qualquer valor de $x \in \mathbb{R}$ em módulo é uma função modular, logo podemos inserir qualquer uma das funções já estudadas até o momento, contanto que estejam em módulo. Para fazermos o estudo do domínio e imagem da função no Geogebra, vamos utilizar as funções afim e quadrática (em módulo) para podermos observar o comportamento de cada uma delas.

Procedimentos no Geogebra

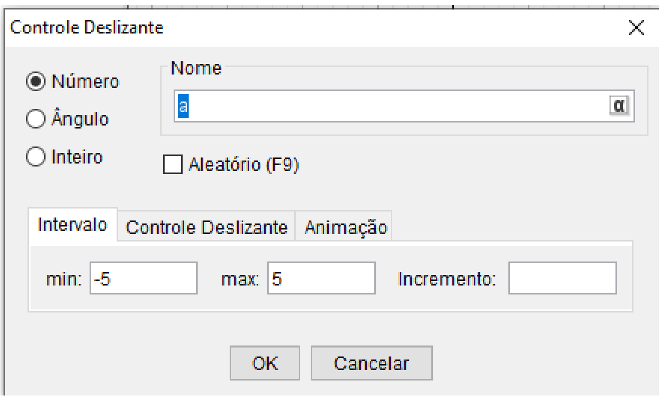
1. Abra o Geogebra.

2. Clique no ícone ***Controles*** 

e selecione a ferramenta **Controle Deslizante** 

3. Clique com o botão esquerdo do mouse na **Janela de Visualização.**

4. Insira o controle deslizante “a” preenchendo com os dados a seguir.

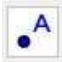


5. Clique no botão “ok”

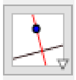
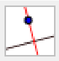
6. Repita os procedimentos “3”, “4” e “5” para inserir os controles deslizantes “b” e “c”

7. Clique no ***Campo Entrada*** 

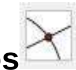
e digite **f(x)=abs(a*x+b)**. e aperte a tecla Enter.

8. Clique no ícone ***Pontos***  e selecione a ferramenta **Ponto** 

9. Clique com o botão esquerdo do mouse em qualquer intervalo da função $f(x)$ criando o Ponto A

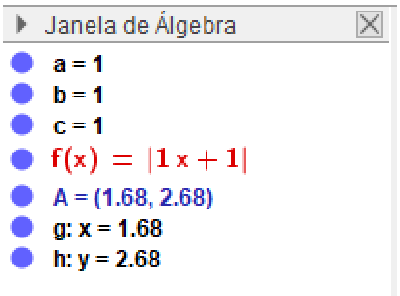
10. Clique no ícone ***Posições Relativas***  e selecione a ferramenta **Reta Perpendicular** 

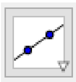
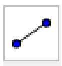
11. Clique no Ponto A e em seguida no eixo X, note que uma reta foi criada perpendicular ao eixo X chamada de “g”, clique novamente no Ponto A e em seguida clique no eixo Y e foi criada uma reta perpendicular ao eixo Y chamada de “h”.

12. Clique no ícone ***Pontos***  e selecione a ferramenta **Intersecção entre dois objetos** .

13. Clique na reta “g” e depois no eixo X criando assim o Ponto B, clique na reta “h” e no eixo Y criando o Ponto C.

14. Na **Janela de Álgebra**, clique na bolinha azul correspondente as retas “g” e “h”, para poder ocultar as duas retas



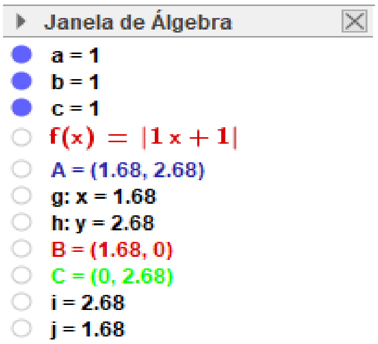
15. Clique no ícone ***Linhas Retas***  e selecione a ferramenta **Segmento** 

16. Clique no Ponto A e em seguida no Ponto B, repita o processo clicando no Ponto A e em seguida no Ponto C.

17. Clique com o botão direito do mouse em cima do Ponto B e clique em **Propriedades**. Em **Básico** marque a opção **Exibir Rastro**, na aba **Cor** mude a cor do Ponto B para Vermelho.

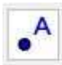
18. Repita o passo 17, agora para o Ponto C, utilize a cor Verde e feche a janela de propriedades.

19. Na **Janela de Álgebra**, clique na bolinha azul correspondente aos pontos A, B, C, aos segmentos de reta “i”, “j” e a função (x), para poder oculta-los, deixando apenas os controles deslizantes “a”, “b”, “c” visíveis.

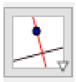
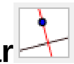


20. Clique no ***Campo Entrada*** 

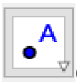
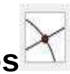
e digite **k(x)=abs(a*x^2+b*x+c)** e aperte a tecla Enter.

21. Clique no ícone ***Pontos***  e selecione a ferramenta **Ponto** 

22. Clique com o botão esquerdo do mouse em qualquer intervalo da função $k(x)$ criando o Ponto D.

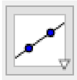
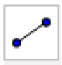
23. Clique no ícone ***Posições Relativas***  e selecione a ferramenta **Reta Perpendicular** 

24. Clique no Ponto D e em seguida no eixo X, note que uma reta foi criada perpendicular ao eixo X chamada de “l”, clique novamente no Ponto D e em seguida clique no eixo Y e foi criada uma reta perpendicular ao eixo Y chamada de “m”.

25. Clique no ícone ***Pontos***  e selecione a ferramenta **Intersecção entre dois objetos** .

26. Clique na reta “l” e depois no eixo X criando assim o Ponto E, em seguida clique na reta “m” e no eixo Y criando o Ponto F.

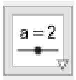
27. Na **Janela de Álgebra**, clique na bolinha azul correspondente as retas “l” e “m”, para poder ocultar as duas retas

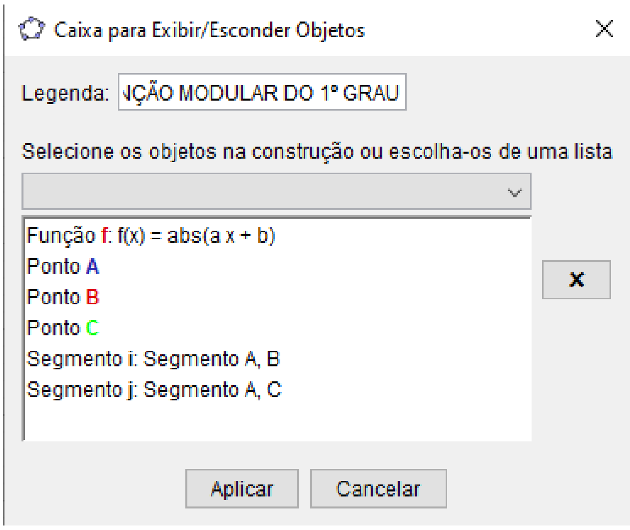
28. Clique no ícone ***Linhas Retas***  e selecione a ferramenta **Segmento** 

29. Clique no Ponto D e em seguida no Ponto E, repita o processo clicando no Ponto D e em seguida no Ponto F.

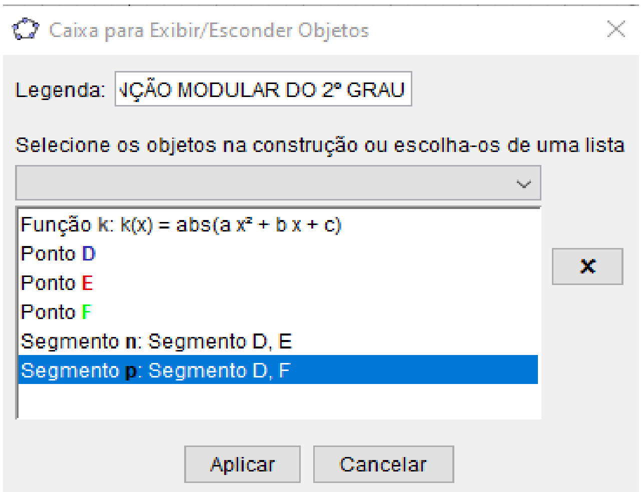
30. Clique com o botão direito do mouse em cima do Ponto E e clique em **Propriedades**. Em **Básico** marque a opção **Exibir Rastro**, na aba **Cor** mude a cor do Ponto E para Vermelho.

31. Repita o passo 30, agora para o Ponto F, utilize a cor Verde e feche a janela de propriedades.

32. Clique no ícone ***Controles***  e selecione a ferramenta **Caixa para Exibir/Esconder Objetos** 



33. Clique com o botão esquerdo do mouse abaixo dos controles deslizantes e na caixa que surge digite em Legenda: **FUNÇÃO MODULAR DO 1º GRAU**, em **Selecione os objetos na construção** clique na seta para baixo, selecione os objetos da figura ao lado e clique em Aplicar.

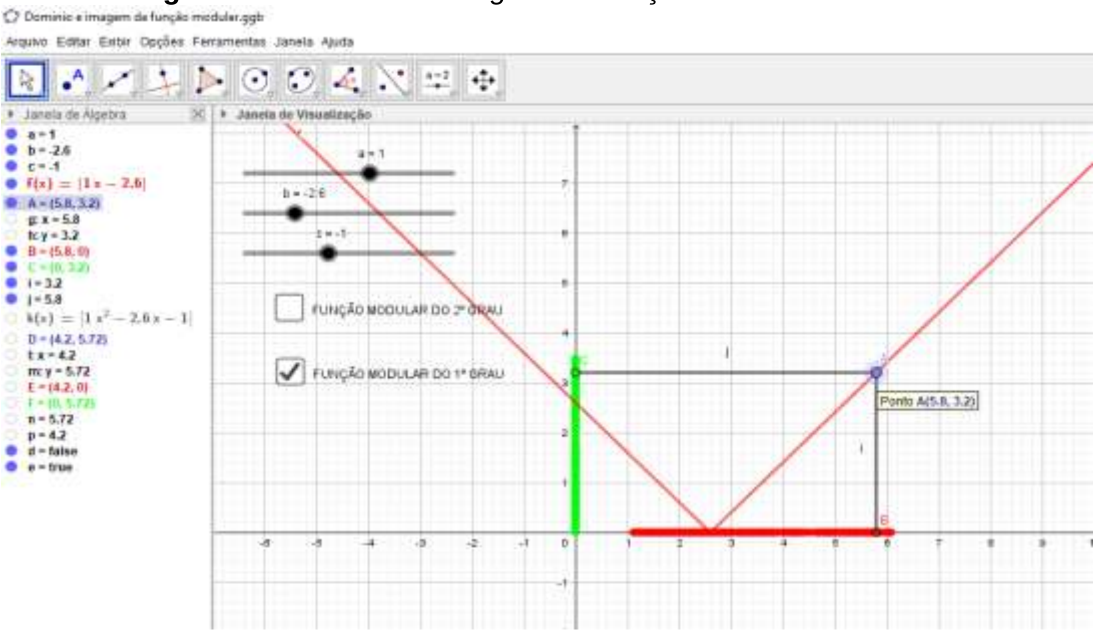


34. Clique abaixo do botão **FUNÇÃO MODULAR DO 1º GRAU**, na caixa que surge digite em Legenda; **FUNÇÃO MODULAR DO 2º GRAU**, em **Selecione os objetos na construção** clique na seta para baixo, selecione os objetos na figura ao lado e clique em **Aplicar**.

35. Clique com o botão direito do mouse em cima do botão criado, segure o clique e arraste os botões para organiza-los um em baixo do outro, em seguida aperte a tecla Esc.

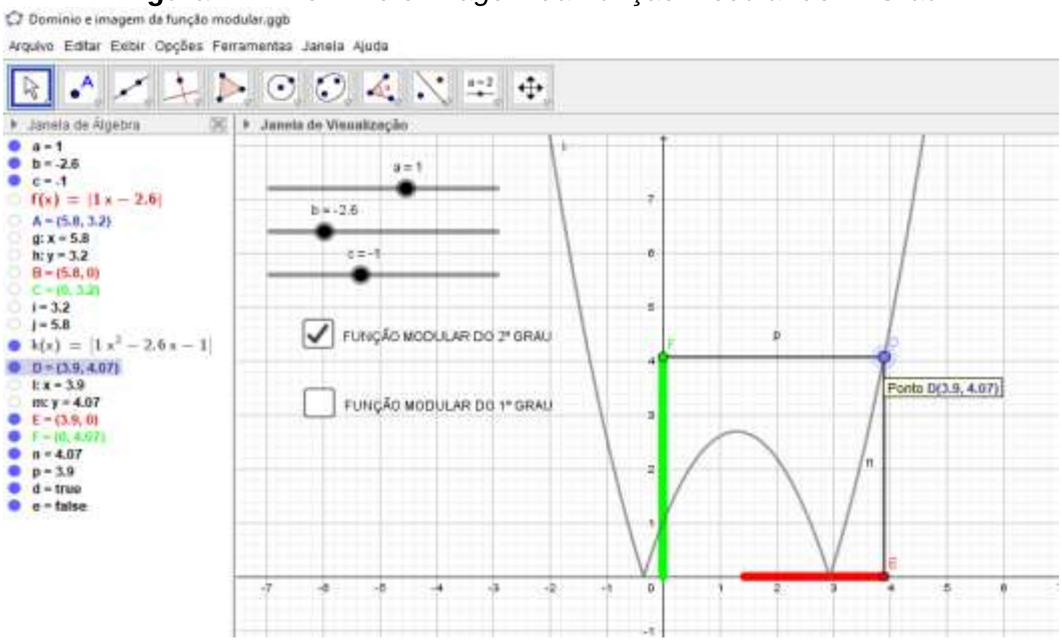
36. Deixe marcada apenas a caixa de diálogo correspondente a função que irá utilizar e desmarque a outra (Ver Figura 10).

Figura 10 – *Domínio e Imagem da Função Modular do 1º Grau*



Movimente os controles deslizantes “a”, “b” e “c”, de tal forma que possa ser perceba as alterações na função e no trecho em que a mesma sofre o espelhamento.

Figura 11 – *Domínio e Imagem da Função Modular do 2º Grau*



Deixe apenas a caixa de diálogo da **FUNÇÃO MODULAR DO 2º GRAU** marcada (Ver Figura 11), movimente os controles deslizantes “a”, “b” e “c”, de tal forma que a função tenha duas raízes reais, em seguida movimente apenas o controle deslizante “a” de tal forma que ele assuma valores positivos e negativos, observe o comportamento da função e movimente Ponto D para fazer a análise do domínio e imagem da função.

37. Clique no menu **Arquivo/Gravar como**.

38. Na janela de diálogo que surge, dei o nome para o arquivo de **“Domínio e imagem da função modular”** escolha um local onde deseja guardar seu documento e clique no botão **Gravar**.

Desafio: A partir do que foi visto até aqui e utilizando o gráfico criado, qual a imagem das funções abaixo em seus respectivos intervalos.

a) $f(x) = |x - 2|$ no intervalo $[0,5]$

____

____

____

b) $f(x) = |x^2 - 4x - 1|$ no intervalo $[0,5]$

____

____

Importante

Utilize as ferramentas **Ampliar**  e **Reduzir**  para adaptar o tamanho da visualização da função, podendo assim executar a movimentação dos Pontos, obtendo os rastros correspondentes ao domínio e imagem da função no intervalo pedido.

4.4 – FUNÇÃO EXPONENCIAL

Para começarmos a falar sobre a função exponencial é importante relembrar um pouco sobre a definição de potenciação e suas principais características. Potenciação é a forma de abreviar a multiplicação de uma sequência de fatores iguais. Dessa forma, quando multiplicamos um número sucessivas vezes, podemos abreviar elevando-o a quantidade de vezes que o número é multiplicado.

Definição de Potenciação: Sendo a um número real e n um número inteiro, tem-se que: (PAIVA, 2005, p.149).

$$\boldsymbol{a^n = \underbrace{a\,.\,a\,.\,a\,.\,\ldots\,.\,a}_{n \text{ fatores}},\, se\ n > 1}$$

$$\boldsymbol{a^1 = a}$$

$$\boldsymbol{a^0 = 1}$$

$$\boldsymbol{a^{-n} = \frac{1}{a^n},\, se\ a \neq 0}$$

Importante

Não há unanimidade entre os matemáticos quanto à adoção do valor 1 para a potência 0^0. Porém, essa controvérsia não vai interferir em nossos estudos. (PAIVA, 2005, p. 149).

Chamamos $\boldsymbol{a}$ de base e $\boldsymbol{n}$ de expoente, e a multiplicação sucessiva após a igualdade chamamos de potência. A base nesse caso é o número que se repete, o expoente é a quantidade de vezes que esse número se repetiu e a potência é o resultado.

Exemplo1:

- $2^2 = 2.2$, com $n = 2$;
- $4^3 = 4.4.4$, com $n = 3$;
- $3^5 = 3.3.3.3.3$, com $n = 5$;

Exemplo2:

Seja a multiplicação $2.2.2.2$, temos uma sequência do número 2 multiplicado 4 vezes. Assim, podemos simplificar da seguinte forma:

$$\mathbf{2^4 = 16}$$

Ler-se: *dois elevado a quatro é igual a dezesseis,* onde, 2 é o número multiplicado e 4 a quantidade de vezes que ele foi multiplicado.

Agora com expoente negativo.

$$\mathbf{2^{-4} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}}$$

Propriedades

Dados os números $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ e os números inteiros $\boldsymbol{m}$ e $\boldsymbol{n}$, obedecidas as condições de existência temos: (PAIVA, 2005. p. 150)

I. $a^m . a^n = a^{m+n}$ (conserva-se a base e somam-se os expoentes)
II. $a^m : a^n = a^{m-n}$ (conserva-se a base e subtraem-se os expoentes)
III. $(a^m)^m = a^{m.n}$ (conserva-se a base e multiplicam-se os expoentes)
IV. $(ab)^m = a^m . b^m$ (distributiva da potenciação em relação à multiplicação)
V. $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$ (distributiva da potenciação em relação à divisão)

Exemplos:

a) $4^5 . 4^4 = 4^{5+4} = 4^9$

b) $5^5 : 5^2 = 5^{5+2} = 5^3$

c) $(3^2)^5 = 3^{2.5} = 3^{10}$

d) $(6a)^2 = 6^2 a^2 = 36a^2$

e) $\left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{5^2}{3^2} = \frac{25}{9}$

Definição de Função Exponencial: seja $\boldsymbol{a}$ um número real positivo e diferente 1 $(\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}_+^* \ \boldsymbol{e} \ \boldsymbol{a} \neq \mathbf{1})$. Chamamos de função exponencial de base $\boldsymbol{a}$ a função $\boldsymbol{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a}^{\boldsymbol{x}}$. (BIANCHINI e PACCOLA, 1989, p. 126).

Exemplos:

Utilizando $a = 3$, obtemos a função exponencial $f(x) = 3^x$

Utilizando $a = \frac{1}{4}$, obtemos a função exponencial $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$

4.4.1 – GRÁFICO DA FUNÇÃO EXPONENCIAL

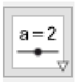
Para compreendermos melhor o comportamento da função exponencial, utilizaremos dois casos para explicar as condições $(com\ a > 0\ e\ a \neq 1)$. Dessa forma podemos construir os gráficos no Geogebra utilizando os procedimentos a seguir:

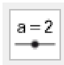
1º CASO: Quando $\boldsymbol{a} > \mathbf{1}$

Para este caso utilizaremos apenas valores maiores que 1 para inserir no controle deslizante "a" no Geogebra, dessa forma será possível obter uma melhor precisão e análise sobre o comportamento da função.

Procedimentos no Geogebra

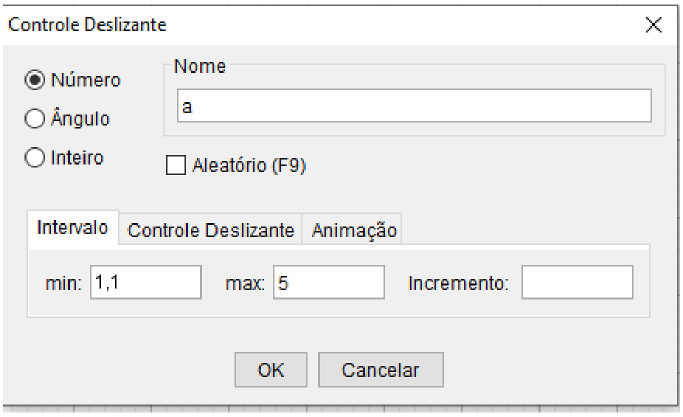
1. Abra o Geogebra.

2. Clique no ícone ***Controles*** 

e selecione a ferramenta **Controle Deslizante** 

3. Clique com o botão esquerdo do mouse na **Janela de Visualização.**

4. Insira o controle deslizante "a" preenchendo com os dados a seguir.

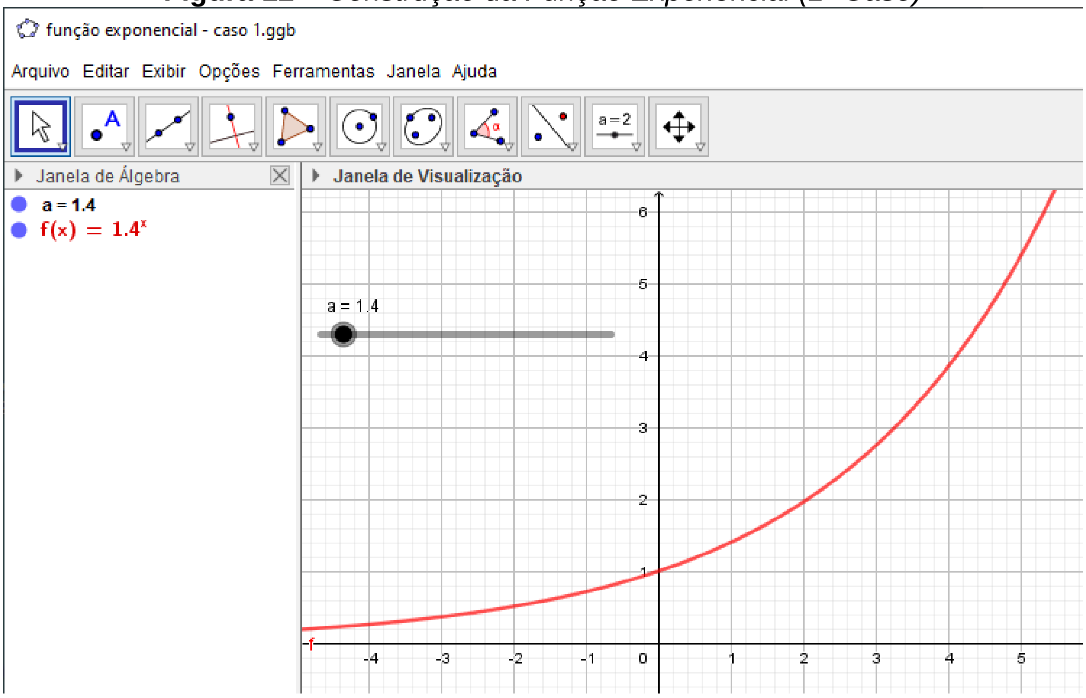


5. Clique no botão “ok”.

6. Clique no ***Campo Entrada*** 

e digite **f(x)=a^x**. e aperte a tecla **Enter**.

Figura 12 – *Construção da Função Exponencial (1º Caso)*



Importante

Note que utilizamos valores maiores que 1, dessa forma movimentando o controle deslizante “a”, a função exponencial que é crescente, torna-se mais acentuada quando os valores se aproximam de 5 e fica mais suave a medida em que se aproxima de 1.

7. Não se engane, o gráfico da função não toca o eixo OX. Para ver isto, Clique no ícone ***Exibição*** e em seguida clique em **Ampliar** . Clique em seguida várias vezes onde o gráfico parece tocar o eixo x.

8. Clique no menu **Arquivo/Gravar como**.

9. Na janela de diálogo que surge, dei o nome para o arquivo de **"Função exponencial – caso 1"** escolha um local onde deseja guardar seu documento e clique no botão **Gravar**.

2º CASO: Quando $0 < a < 1$

Para este caso utilizaremos apenas valores maiores que 0 e menores 1 para inserir no controle deslizante "a" no Geogebra, dessa forma será possível obter uma melhor precisão e análise sobre o comportamento da função.

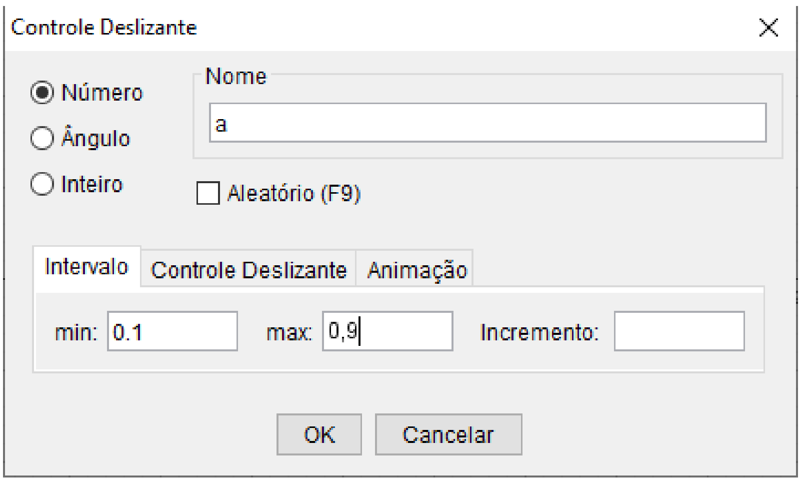
Procedimentos no Geogebra

1. Abra o Geogebra.

2. Clique no ícone ***Controles*** e selecione a ferramenta **Controle Deslizante**

3. Clique com o botão esquerdo do mouse na **Janela de Visualização.**

4. Insira o controle deslizante "a" preenchendo com os dados a seguir.

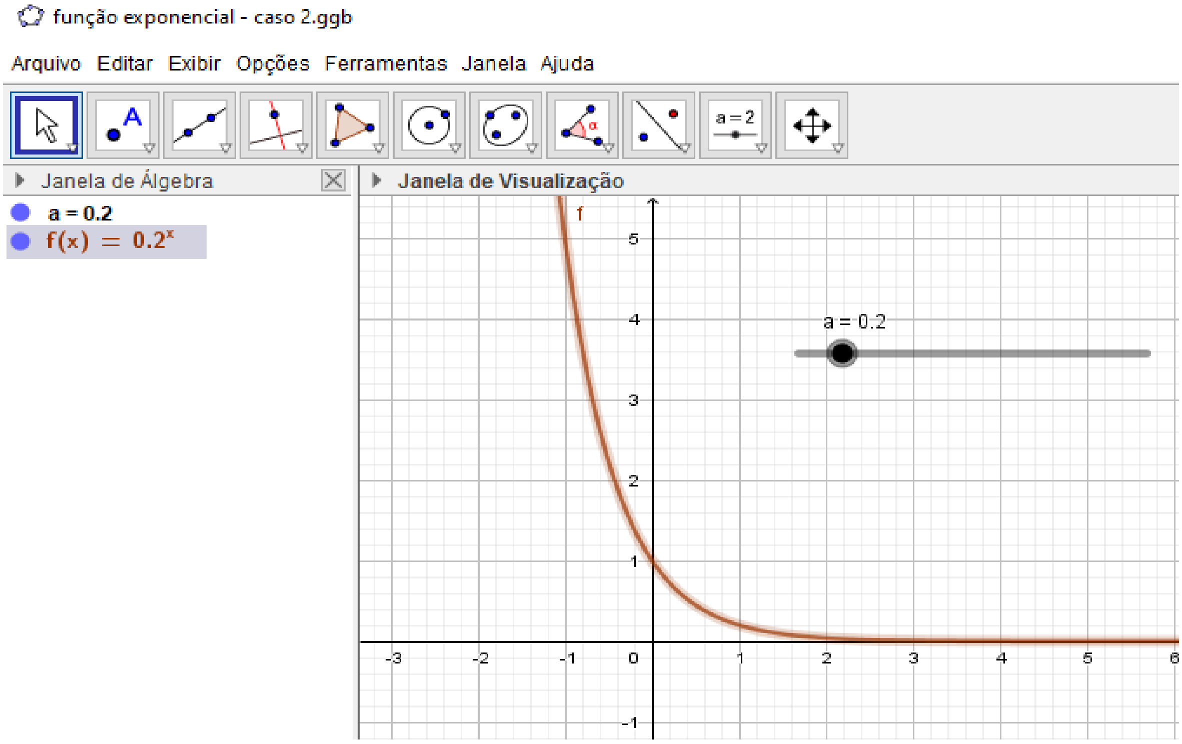


5. Clique no botão “ok”.

6. Clique no ***Campo Entrada*** 

e digite **f(x)=a^x**. e aperte a tecla **Enter**.

Figura 13 – *Construção da Função Exponencial (2º Caso)*



Importante

Note que utilizamos valores maiores que 0 e menores que 1, dessa forma movimentando o controle deslizante “a”, a função exponencial que é decrescente torna-se mais acentuada quando os valores se aproximam de 0 e fica mais suave a medida em que se aproxima de 1.

7. Não se engane, nesse caso em que $0<a<1$ o gráfico da função também não toca o eixo OX. Para ver isto, clique no ícone ***Exibição*** e em seguida clique em **Ampliar** . Clique em seguida várias vezes onde o gráfico parece tocar o eixo x.

8. Clique no menu **Arquivo/Gravar como**.

9. Na janela de diálogo que surge, dei o nome para o arquivo de **“Função exponencial – caso 2”** escolha um local onde deseja guardar seu documento e clique no botão **Gravar**.

4.4.2 – ESTUDO DO DOMÍNIO E IMAGEM DA FUNÇÃO EXPONENCIAL

Para fazermos o estudo do domínio e imagem da função no Geogebra, vamos inserir alguns pontos, retas e segmentos de retas no gráfico que iremos criar e customiza-los, são exercícios que já foram realizados anteriormente e vão possibilitar uma melhor percepção das características do domínio e imagem dessa função.

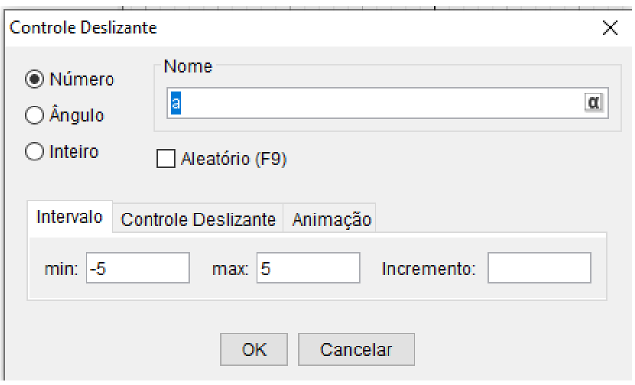
Procedimentos no Geogebra

1. Abra o Geogebra.

2. Clique no ícone ***Controles*** e selecione a ferramenta **Controle Deslizante**

3. Clique com o botão esquerdo do mouse na **Janela de Visualização.**

4. Insira o controle deslizante “a” preenchendo com os dados a seguir.



5. Clique no botão “ok”.

6. Clique no ***Campo Entrada*** Entrada: e digite **f(x)=a^x** e aperte a tecla **Enter**.

7. Movimente o controle deslizante para a=0.5

8. Clique no ícone ***Pontos*** e selecione a ferramenta **Ponto** .

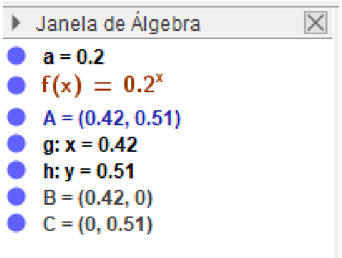
9. Clique com o botão esquerdo do mouse em qualquer intervalo da função $f(x)$ criando o Ponto A.

10. Clique no ícone ***Posições Relativas*** e selecione a ferramenta **Reta Perpendicular**

11. Clique no Ponto A e em seguida no eixo X, note que uma reta foi criada perpendicular ao eixo X chamada de "g", clique novamente no Ponto A e em seguida clique no eixo Y e foi criada uma reta perpendicular ao eixo Y chamada de "h".

12. Clique no ícone ***Pontos*** e selecione a ferramenta **Intersecção entre dois objetos** **.**

13. Clique na reta "g" e depois no eixo X criando assim o Ponto B, clique na reta "h" e no eixo Y criando o Ponto C.



14. Na **Janela de Álgebra**, clique na bolinha azul correspondente as retas "g" e "h", para poder ocultar as duas retas.

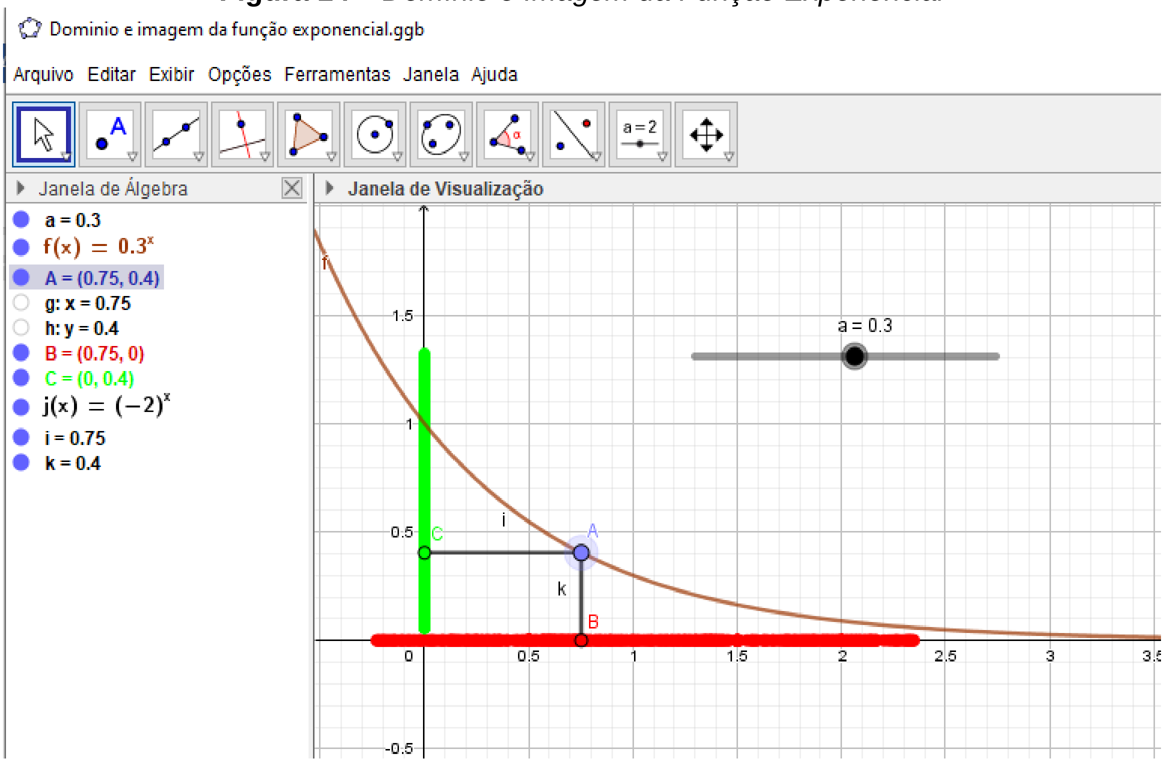
15. Clique no ícone ***Linhas Retas*** e selecione a ferramenta **Segmento**

16. Clique no Ponto A e em seguida no Ponto B, repita o processo clicando novamente no Ponto A e em seguida no Ponto C.

17. Clique com o botão direito do mouse em cima do Ponto B e clique em **Propriedades**. Em **Básico** marque a opção **Exibir Rastro**, na aba **Cor** mude a cor do Ponto B para Vermelho.

18. Repita o passo 17, agora para o Ponto C, utilize a cor Verde e feche a janela de propriedades.

Figura 14 – *Domínio e Imagem da Função Exponencial*



Movimente o Ponto A e note que é criado um rastro no eixo X na cor vermelha e no eixo Y na cor verde, esses rastros identificam o Domínio e a Imagem da função à medida em que movimentamos o Ponto A.

Importante

Note que, quando o valor do controle deslizante $\boldsymbol{a} = \mathbf{0}$ a função é constante e coincidente com o eixo X partindo de 0 até o $+\infty$, e quando $\boldsymbol{a} = \mathbf{1}$ a função é constante.

19. Clique no menu **Arquivo/Gravar como**.

20. Na janela de diálogo que surge, dei o nome para o arquivo de **“Domínio e imagem da função quadrática”** escolha um local onde deseja guardar seu documento e clique no botão **Gravar**.

Desafio: Comente sobre as características do domínio e a imagem da função $f(x) = 2^x - 1$.

____

4.5 – FUNÇÃO LOGARITMICA

Para começarmos a falar sobre a função logarítmica, vamos relembrar um pouco sobre a definição de logaritmo, que é a base para o entendimento relacionado ao comportamento dessa função.

Definição de Logaritmo: Sejam $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ números reais, positivos com $\boldsymbol{a} \neq \mathbf{1}$, ou seja, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}_+^*$ e $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}_+^* - \{\mathbf{1}\}$. Chamamos de logaritmo de $\boldsymbol{b}$ na base $\boldsymbol{a}$ ao número real $\boldsymbol{x}$ tal que $\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{b}$. (BIANCHINI e PACCOLA, 1989, p. 140).

Ou seja,

$$log_a b = x \iff a^x = b, com\ b > 0, a > 0\ e\ a \neq 1$$

Logaritmando

Logaritmo

$$\boldsymbol{log_a b = x \iff a^x = b}$$

Base

Lê-se logaritmo de $\boldsymbol{b}$ na base $\boldsymbol{a}$, sendo $\boldsymbol{a > 0, a \neq 1\ e\ b > 0}$.

Quando a base de um logaritmo for omitida, significa que seu valor é igual a 10. Este tipo de logaritmo é chamado de logaritmo decimal.

Propriedades

Da definição, decorre imediatamente que para números reais positivos, $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ com $\boldsymbol{a} \neq \mathbf{1}$: (PAIVA, 2005. p. 168)

I. $\log_a a = 1$

De fato, fazendo $\log_a a = x$, tem-se: $a^x = a \Rightarrow x = 1$

II. $\log_a 1 = 0$

De fato, fazendo $\log_a 1 = x$, tem-se: $a^x = 1 \Rightarrow x = 0$

III. $\log_a b^y = y.\log_a b\ (\forall y, com\ y \in \mathbb{R})$

De fato, fazendo $\log_a b = x$, tem-se: $a^x = b$. Elevando-se ao expoente y ambos os membros dessa última igualdade: $(a^x)^y = b^y \iff a^{yx} = b^y$.

Pela definição de logaritmo: $a^{xy} = b^y \Leftrightarrow yx = \log_a b^y$. Como $x = \log_a b$, temos, finalmente: $y. \log_a b = \log_a b^y$

IV. $\log_a a^b = b$

De fato, pela propriedade I e III, temos: $\log_a a^x = x. \log_a a = x.1, portanto$: $\log_a a^x = x$

V. $a^{\log_a b} = b$

De fato, fazendo $\log_a b = x$, tem-se: $a^x = b$. Substituindo, nessa última igualdade, x por $\log_a b$,tem-se: $a^{\log_a b} = b$

Exemplo 1:

Encontre o valor de $log_3 27$

Neste exemplo, queremos descobrir qual expoente devemos elevar o 3 para que o resultado seja igual a 27. Usando a definição, temos:

$$log_3 27 = x \leftrightarrow 3^x = 27$$

Para encontrar esse valor, podemos fatorar o número 27, conforme indicado abaixo:

27	3
9	3
3	3
1	3^3

Substituindo o 27 por sua forma fatorada na equação anterior, temos:

$$3^x = 3^3$$

Como as bases são iguais, chegamos à conclusão que $x = 3$.

Exemplo 2:

Calcule os Logaritmos:

a) $\log_7 49 = x$

b) $\log_4 4 = x$

c) $\log_{\frac{3}{2}} \frac{4}{9} = x$

d) $\log_8 1 = x$

Definição de Função Logarítmica: Seja $\boldsymbol{a}$ um número real, positivo e diferente de 1 (quer dizer $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}_+^* - \{\mathbf{1}\}$), Chamamos de função logarítmica de base $\boldsymbol{a}$ à função $\boldsymbol{f}: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ definida por $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{log}_{\boldsymbol{a}}\, \boldsymbol{x}$. (BIANCHINI e PACCOLA, 1989, p. 145).

Importante

Observe que o domínio da função é $\mathbb{R}_+^*$, ou seja, somente valores positivos poderão ser atribuídos a $\boldsymbol{x}$.

Exemplo: Fazendo a=3, obtemos a função $f(x) = \log_3 x$

Fazendo $a = \frac{1}{2}$, obtemos a função $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$

4.5.1 – GRÁFICO DA FUNÇÃO LOGARÍTMICA

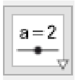
Para compreendermos melhor o comportamento da função logarítmica, utilizaremos dois casos no Geogebra para mostrar a movimentação dessa função.

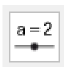
1º CASO: Quando $\boldsymbol{a} > \mathbf{1}$

Para este caso utilizaremos apenas valores maiores que 1 para inserir no controle deslizante "a" no Geogebra, dessa forma será possível obter uma melhor precisão e análise sobre o comportamento da função.

Procedimentos no Geogebra

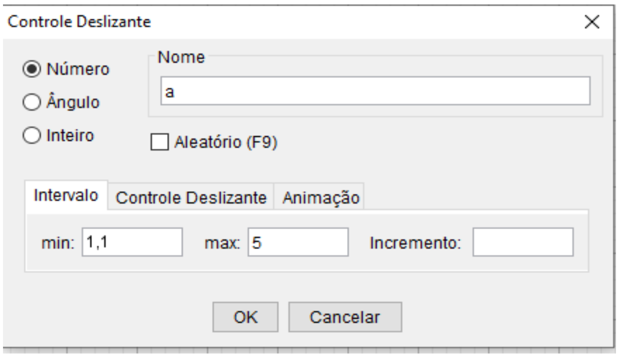
1. Abra o Geogebra.

2. Clique no ícone ***Controles*** 

e selecione a ferramenta **Controle Deslizante** 

3. Clique com o botão esquerdo do mouse na **Janela de Visualização.**

4. Insira o controle deslizante "a" preenchendo com os dados a seguir.

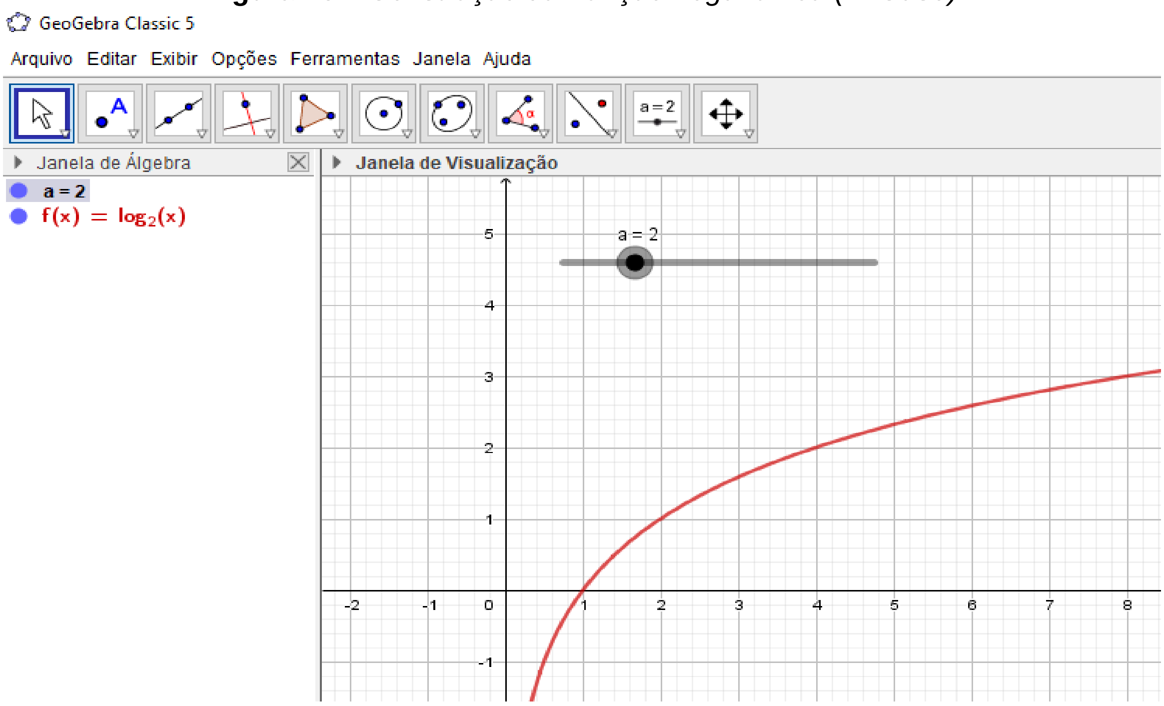


5. Clique no botão “ok”.

6. Clique no ***Campo Entrada*** 

e digite **f(x)=log(a,x)** e aperte a tecla Enter.

Figura 15 – *Construção da Função Logarítmica (1º Caso)*



Importante

Note que utilizamos valores maiores que 1, dessa forma movimentando o controle deslizante “a” a função logarítmica que é crescente torna-se mais acentuada quando os valores se aproximam de 1 e fica mais suave a medida que vai chegando perto de 5.

7. Não se engane, o gráfico da função não toca o eixo OY. Para ver isto, Clique no ícone ***Exibição*** e em seguida clique na ferramenta **Ampliar** . Clique em seguida várias vezes onde o gráfico parece tocar o eixo Y.

8. Clique no menu **Arquivo/Gravar como**.

9. Na janela de diálogo que surge, dei o nome para o arquivo de **"Função logarítmica – caso 1"** escolha um local onde deseja guardar seu documento e clique no botão **Gravar**.

2º CASO: Quando $0 < a < 1$

Para este caso utilizaremos apenas valores maiores que 0 e menores que 1 para inserir no controle deslizante "a" no Geogebra, dessa forma será possível obter uma melhor precisão e análise sobre o comportamento da função.

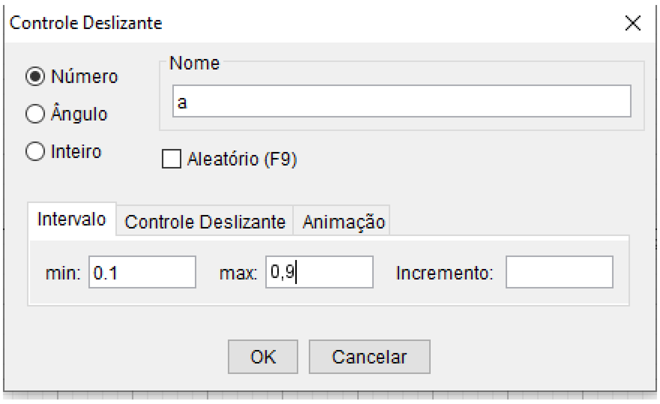
Procedimentos no Geogebra

1. Abra o Geogebra.

2. Clique no ícone ***Controles*** e selecione a ferramenta **Controle Deslizante**

3. Clique com o botão esquerdo do mouse na **Janela de Visualização.**

4. Insira o controle deslizante "a" preenchendo com os dados a seguir.

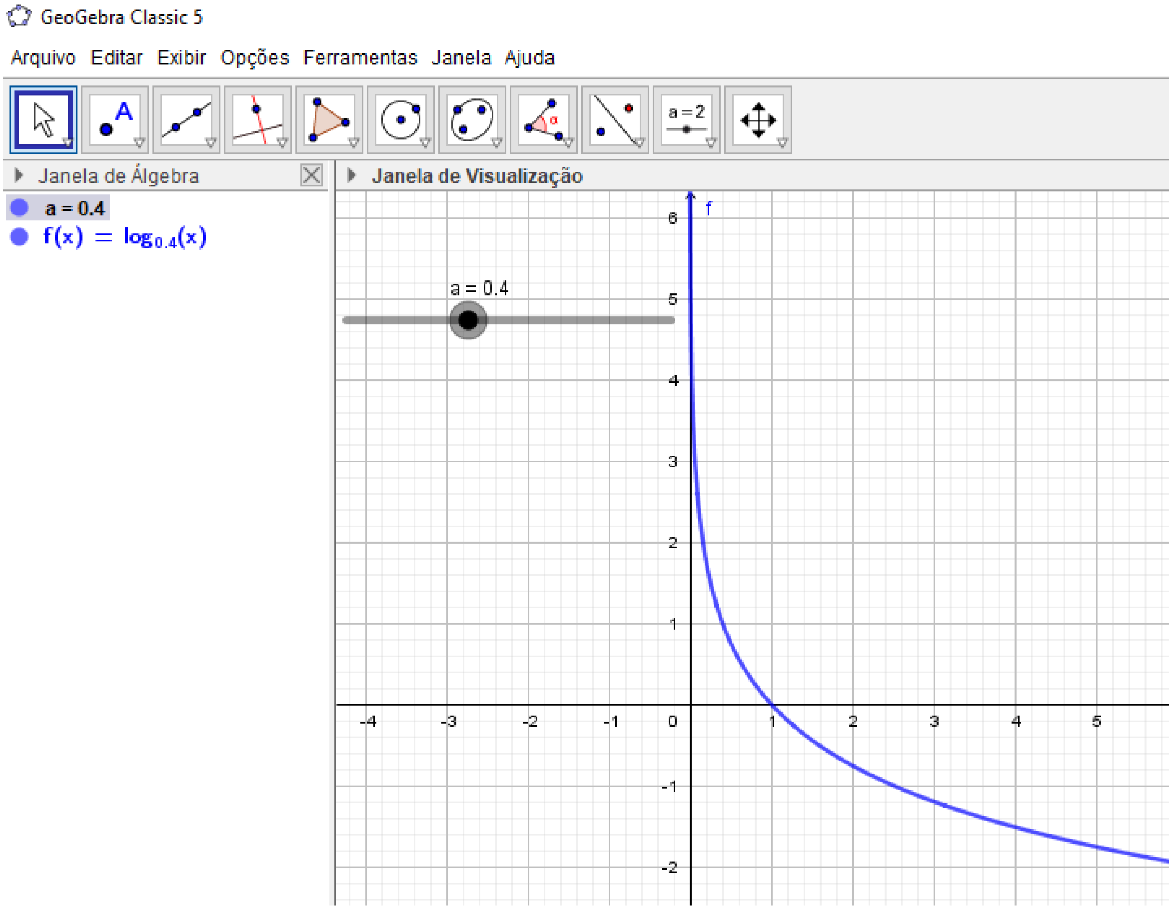


5. Clique no botão "ok".

6. Clique no ***Campo Entrada*** 

e digite **f(x)=log(a,x)**.e aperte a tecla **Enter**.

Figura 16 – *Construção da Função Logarítmica (2º Caso)*



Importante

Note que utilizamos valores maiores que 0 e menores que 1, dessa forma movimentando o controle deslizante “a” a função exponencial que é decrescente torna-se mais acentuada quando os valores se aproximam de 1 e fica mais suave a medida em que se aproxima de 0.

7. Não se engane, nesse caso em que $0<a<1$ o gráfico da função também não toca o eixo OY. Para ver isto, Clique no ícone ***Exibição*** e em seguida clique na ferramenta **Ampliar** . Clique em seguida várias vezes onde o gráfico parece tocar o eixo Y.

8. Clique no menu **Arquivo/Gravar como**.

9. Na janela de diálogo que surge, dei o nome para o arquivo de **"Função logarítmica – caso 2"** escolha um local onde deseja guardar seu documento e clique no botão **Gravar**.

4.5.2 – ESTUDO DO DOMÍNIO E IMAGEM DA FUNÇÃO LOGARÍTMICA

Para fazermos o estudo do domínio e imagem da função no Geogebra, vamos inserir alguns pontos, retas e segmentos de retas no gráfico que iremos criar e customiza-los, são exercícios que já foram realizados anteriormente e vão possibilitar uma melhor percepção das características do domínio e imagem dessa função.

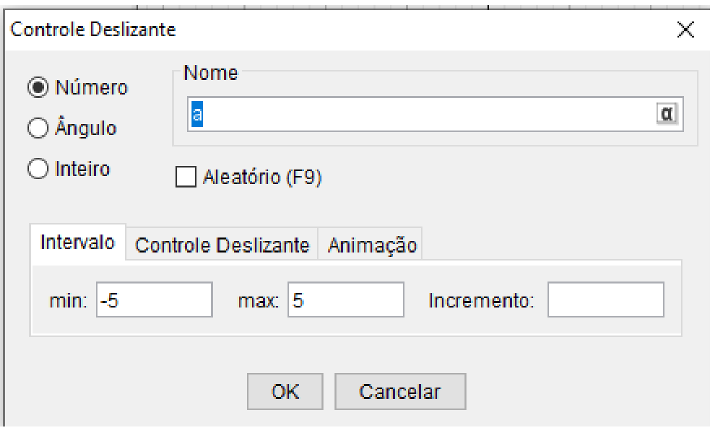
Procedimentos no Geogebra

1. Abra o Geogebra.

2. Clique no ícone ***Controles*** e selecione a ferramenta **Controle Deslizante**

3. Clique com o botão esquerdo do mouse na **Janela de Visualização.**

4. Insira o controle deslizante "a" preenchendo com os dados a seguir.



5. Clique no botão “ok”.

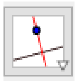
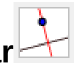
6. Clique no ***Campo Entrada*** 

e digite **f(x)=log(a,x)**. e aperte a tecla **Enter**.

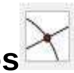
7. Movimente o controle deslizante para a=0.5

8. Clique no ícone ***Pontos***  e selecione a ferramenta **Ponto** .

9. Clique com o botão esquerdo do mouse em qualquer intervalo da função $f(x)$ criando o Ponto A.

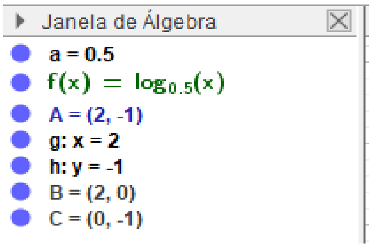
10. Clique no ícone ***Posições Relativas***  e selecione a ferramenta **Reta Perpendicular** .

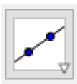
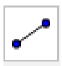
11. Clique no Ponto A e em seguida no eixo X, note que uma reta foi criada perpendicular ao eixo X chamada de “g”, clique novamente no Ponto A e em seguida clique no eixo Y e foi criada uma reta perpendicular ao eixo Y chamada de “h”.

12. Clique no ícone ***Pontos***  e selecione a ferramenta **Intersecção entre dois objetos** .

13. Clique na reta “g” e depois no eixo X criando assim o Ponto B, clique na reta “h” e no eixo Y criando o Ponto C.

14. Na **Janela de Álgebra**, clique na bolinha azul correspondente as retas “g” e “h”, para poder ocultar as duas retas



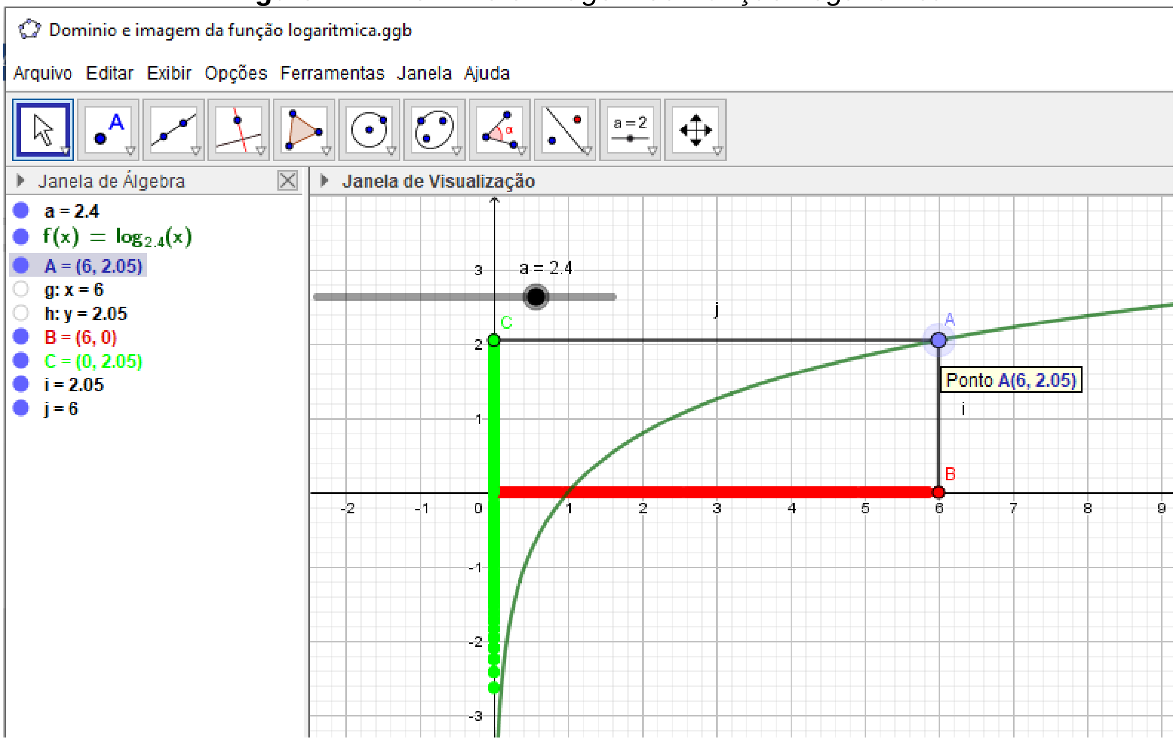
5. Clique no ícone ***Linhas Retas***  e selecione a ferramenta **Segmento** 

16. Clique no Ponto A e em seguida no Ponto B, repita o processo clicando no Ponto A e em seguida no Ponto C.

17. Clique com o botão direito do mouse em cima do Ponto B e clique em **Propriedades**. Em **Básico** marque a opção **Exibir Rastro**, na aba **Cor** mude a cor do Ponto B para Vermelho.

18. Repita o passo 17, agora para o Ponto C e utilize a cor Verde.

Figura 17 – *Domínio e Imagem da Função Logarítmica*



Movimente o Ponto A e note que é criado um rastro no eixo X na cor vermelha e no eixo Y na cor verde, esses rastros identificam o Domínio e a Imagem da função à medida em que movimentamos o Ponto A.

Importante

Note que, quando o valor do controle deslizante a=0, a função é constante e coincidente com o eixo X partindo de 0 até +∞, e quando a=1 a função não existe.

19. Clique no menu **Arquivo/Gravar como**.

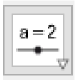
20. Na janela de diálogo que surge, dei o nome para o arquivo de **"Domínio e imagem da função logarítmica"** escolha um local onde deseja guardar seu documento e clique no botão **Gravar**.

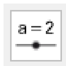
Curiosidade

A Função Logarítmica $\boldsymbol{f(x) = \log_a x}$ é a inversa da Função Exponencial $\boldsymbol{g(x) = a^x}$, portanto temos que o gráfico da função $\boldsymbol{f}$ é simétrico ao gráfico da função $\boldsymbol{g}$ em relação à reta $\boldsymbol{y = x}$. Vejamos essa ilustração no Geogebra.

Procedimentos no Geogebra

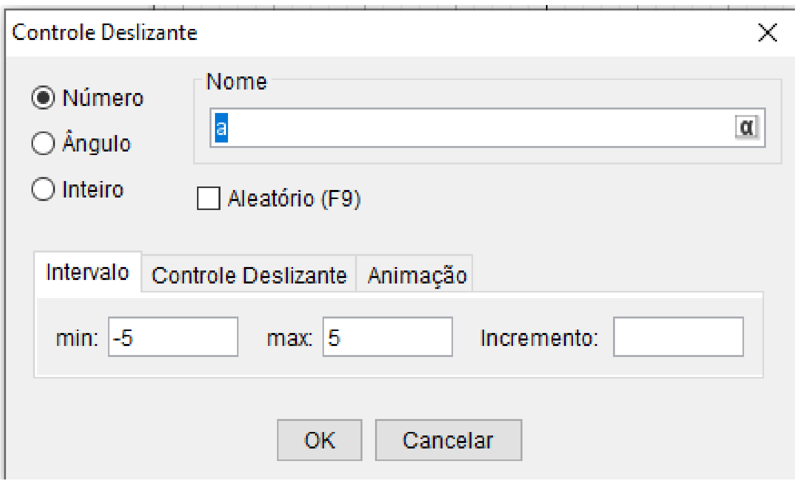
1. Abra o Geogebra.

2. Clique no ícone ***Controles*** 

e selecione a ferramenta **Controle Deslizante** 

3. Clique com o botão esquerdo do mouse na **Janela de Visualização.**

4. Insira o controle deslizante "a" preenchendo com os dados a seguir.



5. Clique no botão "ok".

6. Coloque o controle deslizante a=2.

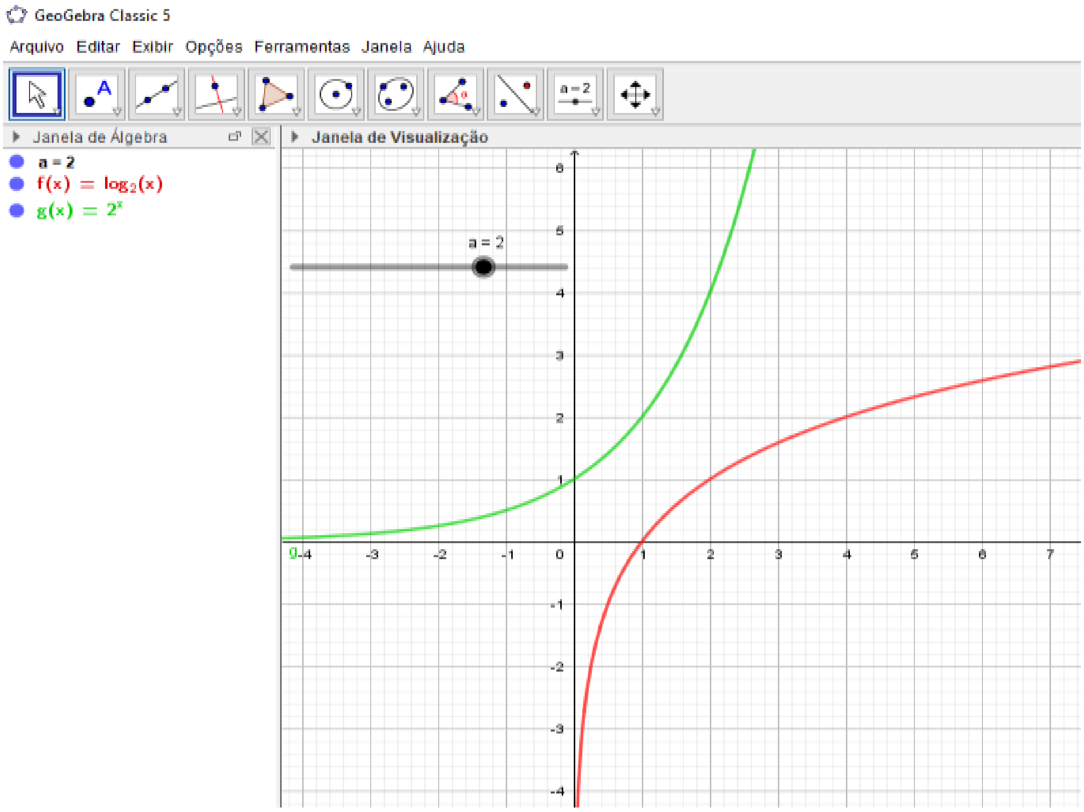
7. Clique no ***Campo Entrada*** 

e digite **f(x)=log(a,x)**. e aperte a tecla **Enter**.

8. Clique novamente no ***Campo Entrada*** 

e digite **g(x)=a^x** e aperte a tecla **Enter.**

Figura 18 – *Comparação das Funções Logarítmica e Exponencial*



Importante

Note que, a medida em que o controle deslizante “a” é movimentado, as funções vão fazendo trajetórias simétricas.

9. Clique no menu **Arquivo/Gravar como**.

10. Na janela de diálogo que surge, dei o nome para o arquivo de **“Comparação das funções exponencial e logarítmica”** escolha um local onde deseja guardar seu documento e clique no botão **Gravar**.

4.6 – FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Para começarmos a falar sobre a funções trigonométricas, vamos relembrar um pouco sobre as razões trigonométricas, que é a base para o entendimento relacionado ao comportamento dessas funções.

4.6.1 – RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS

De acordo com Bianchini e Paccola, (1989), seja o triângulo $\boldsymbol{OMP}$, reto em $\boldsymbol{M}$.

Seja $\boldsymbol{x}$ a medida do ângulo $\boldsymbol{M\hat{O}P}$, podemos estabelecer entre seus lados as seguintes razões:

Seno

Seno de $\boldsymbol{x}$ é a razão entre a medida do cateto oposto ao ângulo $\boldsymbol{\hat{O}}$ e a medida da hipotenusa. Indicando o $\boldsymbol{seno\ de\ x}$ por $\boldsymbol{sen}\ (\boldsymbol{x})$ e considerando $\boldsymbol{OP}$ como unidade de comprimento, temos:

$$\boldsymbol{sen(x) = \frac{MP}{OP} = \frac{MP}{1} = MP}$$

Cosseno

Cosseno de $\boldsymbol{x}$ é a razão entre a medida do cateto adjacente ao ângulo $\boldsymbol{\hat{O}}$ e a medida da hipotenusa. Indicando o $\boldsymbol{cosseno\ de\ x}$ por $\boldsymbol{cos}\ (\boldsymbol{x})$, temos:

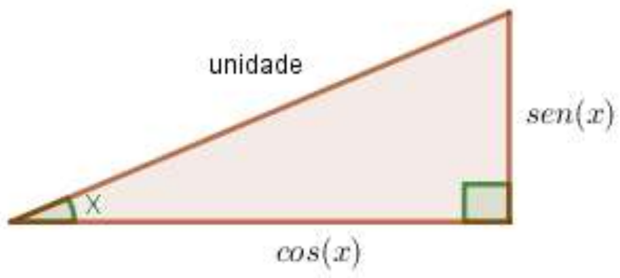
$$\boldsymbol{cos(x) = \frac{OM}{OP} = \frac{OM}{1} = OM \Rightarrow \cos(x) = OM}$$

Tangente

Tangente de $\boldsymbol{x}$ é a razão entre as medidas do cateto oposto e do cateto adjacente ao ângulo $\hat{\boldsymbol{O}}$. Indicando o $\boldsymbol{tangente\ de\ x}$ por $\boldsymbol{tg}\ (\boldsymbol{x})$, temos:

$$\boldsymbol{tg(x) = \frac{MP}{OM}}$$

A essas razões damos o nome de razões trigonométricas.



Observação: com a finalidade de facilitar a memorização, ao falarmos de hipotenusa e em catetos estamos nos referindo às medidas.

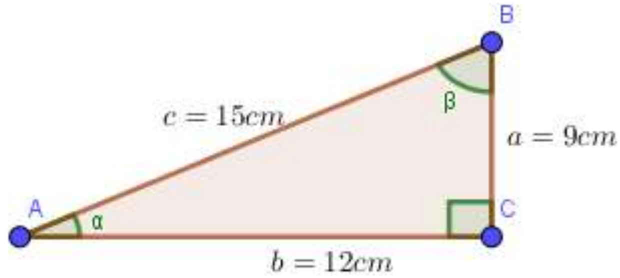
Desse modo, temos:

$$\boldsymbol{sen(x) = \frac{cateto\ oposto\ a\ x}{hipotenusa}}$$

$$\boldsymbol{cos(x) = \frac{cateto\ adjacente\ a\ x}{hipotenusa}}$$

$$\boldsymbol{tg(x) = \frac{cateto\ oposto\ a\ x}{cateto\ adjacente\ a\ x}}$$

Exemplo: De um triângulo retângulo $\boldsymbol{ABC}$ sabemos que $a = 9cm, b = 12cm\ e\ c = 15cm$. Determinar seno, cosseno e tangente de cada ângulo agudo.



Chamando de α a medida do ângulo $\hat{A}$, temos:

$$sen(\alpha) = \frac{a}{c} \Rightarrow sen(\alpha) = \frac{9\cancel{cm}}{15\cancel{cm}} \Rightarrow sen(\alpha) = 0{,}6$$

$$cos(\alpha) = \frac{b}{c} \Rightarrow cos(\alpha) = \frac{12\cancel{cm}}{15\cancel{cm}} \Rightarrow cos(\alpha) = 0{,}8$$

$$tg(\alpha) = \frac{a}{b} \Rightarrow tg(\alpha) = \frac{9\cancel{cm}}{12\cancel{cm}} \Rightarrow tg(\alpha) = 0{,}75$$

Chamando de β a medida do ângulo $\hat{B}$, temos:

$$sen(\beta) = \frac{b}{c} \Rightarrow sen(\beta) = \frac{12\cancel{cm}}{15\cancel{cm}} \Rightarrow sen(\alpha) = 0{,}8$$

$$cos(\beta) = \frac{a}{c} \Rightarrow cos(\beta) = \frac{9\cancel{cm}}{15\cancel{cm}} \Rightarrow cos(\beta) = 0{,}6$$

$$tg(\beta) = \frac{b}{a} \Rightarrow tg(\beta) = \frac{12\cancel{cm}}{9\cancel{cm}} \Rightarrow tg(\beta) = \frac{4}{3}$$

As funções trigonométricas, também chamadas de **funções circulares**, estão relacionadas ao círculo trigonométrico devido terem arcos que realizam várias voltas em seu entorno, considerando que o intervalo do círculo vai de $[0, 2\tau]$. As funções circulares são de fundamental importância para a trigonometria, pois elas são capazes de representar fenômenos naturais periódicos, como o comportamento ondulatório do som, as variações da temperatura, a pressão, os níveis de água dos oceanos, etc.

4.6.2 – PRINCIPAIS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

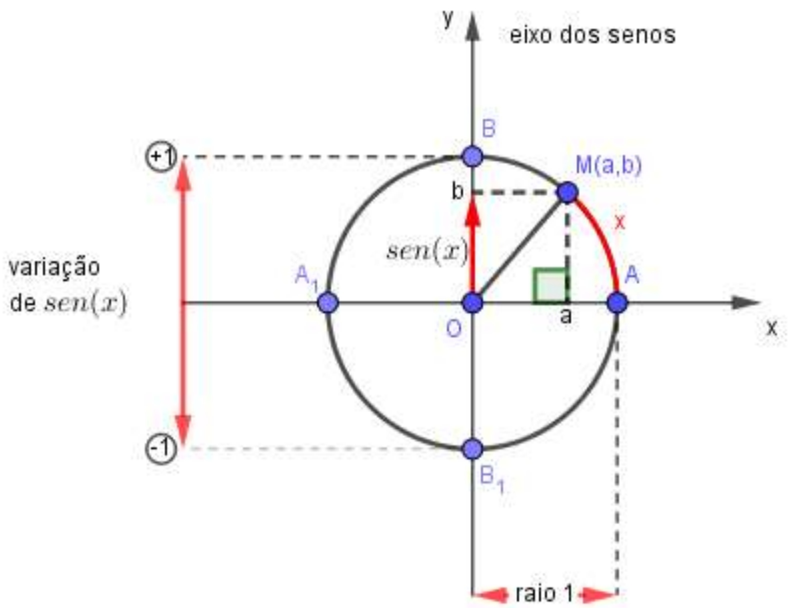
Função Seno

Seja o ciclo trigonométrico de centro $\boldsymbol{O}$ onde $\boldsymbol{A}$ é a origem dos arcos. A cada $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}$ corresponde um ponto $\boldsymbol{M(a,b)}$ do ciclo, tal que $\overline{\boldsymbol{AM}}$ mede $\boldsymbol{x}$. Chamamos de seno de $\boldsymbol{x}$ ao número real $\boldsymbol{b}$ e o indicamos por $\boldsymbol{sen(x) = b}$. (BIANCHINI e PACCOLA, 1989, p. 216).

Definimos **função seno** a função:

$$\boldsymbol{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ tal que } \boldsymbol{f(x) = sen(x)}$$

Figura 19 – *Função Seno no Ciclo Trigonométrico*



Características da função seno

- O domínio da função $\boldsymbol{y = sen(x)}$ é $\mathbb{R}$, ou seja $\boldsymbol{D(f)} = \mathbb{R}$.
- A imagem da função $\boldsymbol{y = sen(x)}$ é $[\boldsymbol{-1; 1}]$, ou seja $\boldsymbol{Im(f)} = [\boldsymbol{-1; 1}]$, ou ainda $\boldsymbol{Im(f)} = \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R} | \boldsymbol{-1 \leq y \leq 1}\}$.

Observação: dizemos que $\boldsymbol{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **é periódica** se para qualquer $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}$ tivermos $\boldsymbol{f(x) = f(x + T)}$, com $\boldsymbol{T} \in \mathbb{R}$. O menor valor positivo de $\boldsymbol{T}$ para o qual isso ocorre é chamado de **período**. (BIANCHINI e PACCOLA, 1989, p. 217).

Então na função seno, temos: $\boldsymbol{sen(x + K \cdot 2\pi), k} \in \mathbb{Z}$ para $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}$. O menor valor positivo de $\boldsymbol{k \cdot 2\pi}$ ocorre quando $\boldsymbol{k = 1}$. Portanto:

$$\boldsymbol{sen(x) = sen(x + \underbrace{1 \cdot 2\pi}_{T})}$$

Dessa forma concluímos que:

A função $\boldsymbol{y = sen(x)}$ é periódica de período $\boldsymbol{2\pi}$.

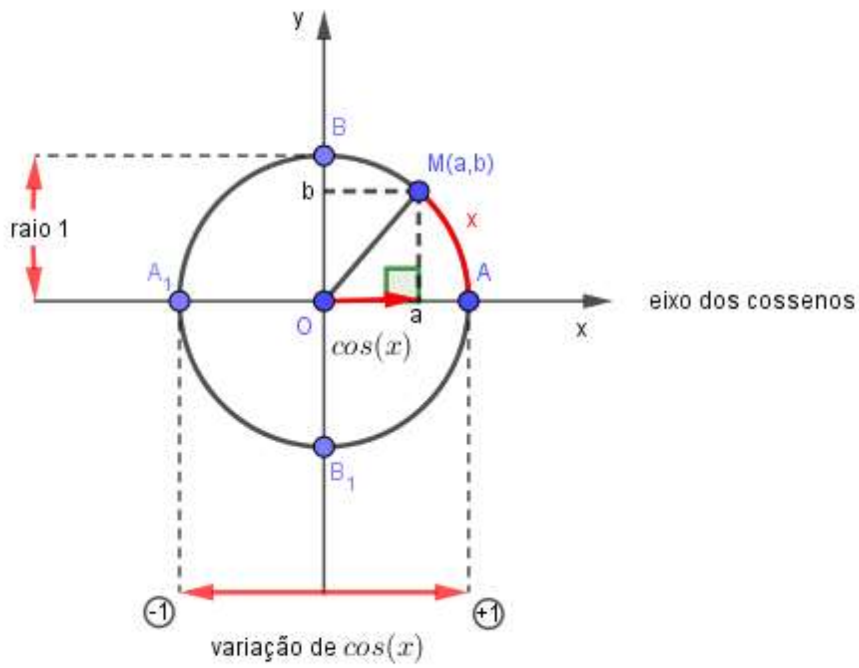
Função Cosseno

Seja o ciclo trigonométrico de centro $\boldsymbol{O}$ onde $\boldsymbol{A}$ é a origem dos arcos. A cada $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}$ corresponde um ponto $\boldsymbol{M(a, b)}$ do ciclo, tal que $\overline{\boldsymbol{AM}}$ mede $\boldsymbol{x}$. Chamamos de cosseno de $\boldsymbol{x}$ ao número real $\boldsymbol{a}$ e o indicamos por $\boldsymbol{cos(x) = a}$. (BIANCHINI e PACCOLA, 1989, p. 224).

Definimos **função cosseno** a função:

$$\boldsymbol{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ tal que } \boldsymbol{f(x) = cos(x)}$$

Figura 20 – *Função Cosseno no Ciclo Trigonométrico*



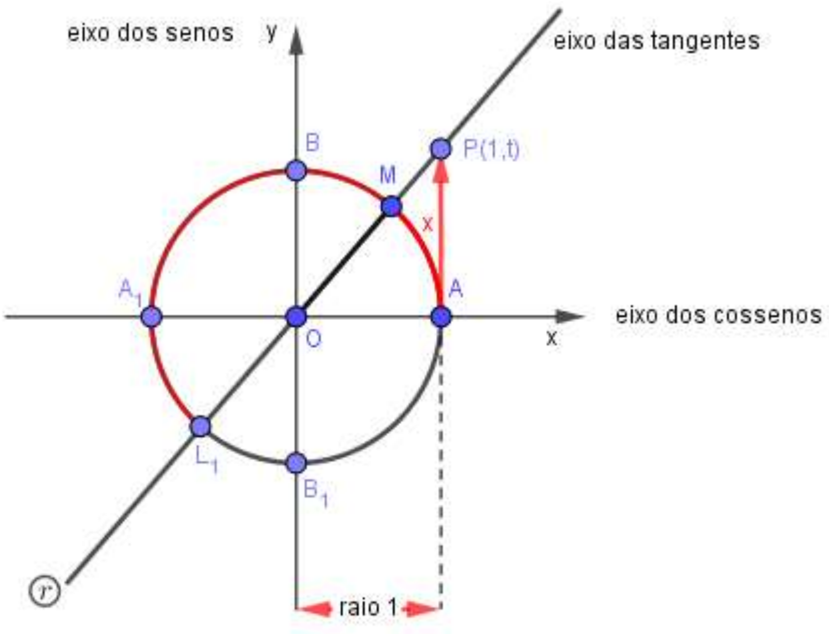
Características da função cosseno

- O domínio da função $y = cos(x)$ é $\mathbb{R}$, ou seja $D(f) = \mathbb{R}$.
- A imagem da função $y = cos(x)$ é $[-1; 1]$, ou seja $Im(f) = [-1; 1]$, ou ainda $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} | -1 \leq y \leq 1\}$.
- O período da função $y = cos(x)$ é 2π, pois $\forall x \in \mathbb{R}$ temos $\cos(x) = cos(x + K \cdot 2\pi)$, com $k \in \mathbb{Z}$ e o menor valor positivo de $k \cdot 2\pi$ tal que isso ocorra, é $1 \cdot 2\pi$.

Função Tangente.

Seja o ciclo trigonométrico de centro O e A, a origem dos arcos. Seja ainda o eixo que passa por A paralelo ao eixo dos senos (o sentido positivo é indicado pela flecha). Esse eixo é chamado eixo das tangentes. (BIANCHINI e PACCOLA, 1989, p. 233).

Figura 21 – *Função Tangente no Ciclo Trigonométrico*



A cada $x \in \mathbb{R}$ tal que $x \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}$, corresponde um único ponto M tal que $\overline{AM}$ mede x.

Nessas condições a reta ⓡ que passa por $\boldsymbol{M}$ e por $\boldsymbol{O}$, sempre encontra o eixo das tangentes.

Seja $\boldsymbol{P}$ o ponto de encontro. Como o raio mede 1, então a abscissa de $\boldsymbol{P}$ é 1. Chamando de $\boldsymbol{t}$ a ordenada do ponto $\boldsymbol{P}$, temos:

$$\boldsymbol{P(1, t)}$$

Chamamos de tangente de $\boldsymbol{x}$ ao número real $\boldsymbol{t}$ e o indicamos por:

$$\boldsymbol{tg(x) = t}$$

Então definimos a **função tangente** à função:

$$\boldsymbol{f}: \boldsymbol{R_1} \to \mathbb{R} \text{ tal que } \boldsymbol{f(x) = tg(x)}$$

Onde $\boldsymbol{R_1} = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R} \middle| \boldsymbol{x} \neq \frac{\pi}{2} + \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}\right\}$

Características da função tangente

- O domínio da função $\boldsymbol{y = tg(x)}$ é $\left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R} \middle| \boldsymbol{x} \neq \frac{\pi}{2} + \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}\right\}$.

  Dessa forma **não fazem** parte do domínio os valores de $\boldsymbol{x}$ correspondentes a **todos os arcos** de extremidade em $\boldsymbol{B}$ e $\boldsymbol{B_1}$ (ver figura 21). Note que para esses arcos, não haveria ponto de intersecção $\boldsymbol{P}$.
- A imagem da função $\boldsymbol{y = tg(x)}$ é $\mathbb{R}$, ou seja $\boldsymbol{Im(f)} = \mathbb{R}$.
- A função é periódica de período $\boldsymbol{\pi}$,

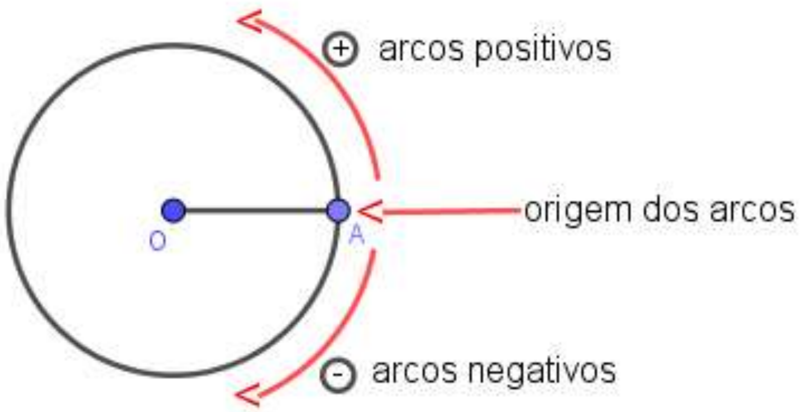
  De modo geral, temos $\boldsymbol{tg(x) = tg(x + k \cdot \pi)}; \boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}$

Para compreender melhor as funções, seno, cosseno e tangente, iremos construir e analisar o ciclo trigonométrico, entender suas características, a medição dos ângulos que podem ser formados, a relação com a funções e mais algumas curiosidades a respeito.

4.6.3 – CICLO TRIGONOMÉTRICO

Consideramos uma circunferência qualquer e fixamos nela um ponto que chamamos de **origem dos arcos**. Fixamos também o sentido positivo sobre ela (o sentido contrário é o sentido negativo) (BIANCHINI e PACCOLA, 1989, p. 212).

Figura 22 – *Arcos positivos e negativos do Ciclo Trigonométrico*



Convencionamos que o ponto A (ver figura 22) é a origem dos arcos e que o **sentido positivo** é o **sentido anti-horário** (sentido contrário ao movimento dos ponteiros do relógio). Nessas condições, a circunferência é chamada de **circunferência orientada.** (BIANCHINI e PACCOLA, 1989, p. 212).

Vamos agora estabelecer que a unidade de comprimento seja o **raio da circunferência orientada**. Nessas condições, a circunferência orientada (de raio 1) é chamada de **ciclo trigonométrico** ou simplesmente **ciclo**. (BIANCHINI e PACCOLA, 1989, p. 212).

Faremos agora a construção do ciclo trigonométrico no Geogebra para visualizar a movimentação dos arcos, ângulos e a relação do eixo X (eixo dos cossenos) com o eixo Y (eixo dos senos).

Procedimentos no Geogebra

1. Abra o Geogebra

2. Clique no ***Campo Entrada*** 

, digite: **Círculo((0,0),1)** e aperte a tecla **Enter**.

3. Clique no ícone ***Exibição*** e em seguida na ferramenta **Ampliar** . Clique no centro a circunferência duas vezes.

4. No ***Campo Entrada*** Entrada: digite: **Segmento((-1.5,0),(1.5,0))** e aperte a tecla **Enter**, criando o segmento "f".

5. No ***Campo Entrada*** Entrada: , digite: **Segmento((0, -1.5),(0, 1.5))** e aperte a tecla **Enter**, criando o segmento "g".

6. No ***Campo Entrada*** Entrada: digite: **O=(0,0)** e aperte a tecla **Enter**.

7. Clique no ícone ***Pontos*** e selecione a ferramenta **Ponto** .

8. Clique com o botão esquerdo do mouse em qualquer trecho do primeiro quadrante da circunferência, criando o Ponto A.

9. No ***Campo Entrada*** Entrada: digite: **B=(1,0)** e aperte a tecla **Enter**.

10. Clique no ícone ***Linhas Retas*** e selecione a ferramenta **Reta** , em seguida clique no Ponto O e no Ponto A, criando a reta "h".

11. Clique no ícone ***Posições Relativas*** e selecione a ferramenta **Reta Perpendicular**

12. Clique no Ponto B e em seguida no eixo X, note que uma reta foi criada perpendicular ao eixo X chamada de "i".

13. Clique no ícone ***Formas Circulares*** e selecione a ferramenta **Arco Circular** , em seguida clique nos pontos O, B e A respectivamente, criando o arco circular "d".

14. No ***Campo Entrada*** Entrada: digite: **C=(x(A),0)** e aperte a tecla **Enter.**

15. No ***Campo Entrada*** Entrada: digite: **D=(0,y(A))** e aperte a tecla **Enter**.

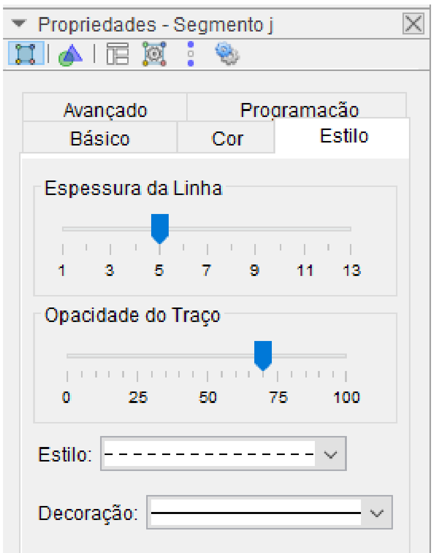
16. Clique no ícone ***Linhas Retas*** e selecione a ferramenta **Segmento**, clique no Ponto D e em seguida no Ponto A, criando o segmento "j", depois clique no Ponto C e em seguida no Ponto A, criando o segmento "k", depois clique no Ponto C e em seguida no Ponto O, criando o segmento "l" e depois clique no Ponto O e em seguida no Ponto D, criando o segmento "m"

17. Clique no ícone ***Pontos*** e selecione a ferramenta **Intersecção entre dois objetos**.

18. Clique na reta "i" e depois na reta "h" criando o Ponto E.

19. Clique no ícone ***Linhas Retas*** e selecione a ferramenta **Segmento**, depois clique no Ponto B e em seguida no Ponto E, criando o segmento "n".

20. Clique no ícone ***Ângulos e Medidas*** e selecione a ferramenta **Ângulo**, em seguida clique nos pontos B, O e A respectivamente, em seguida aperte a tecla Esc.



21. Na **Janela Álgebra**, clique com o botão direito do mouse no seguimento "j" e clique em **Propriedades**, na aba **Estilo,** mude o estilo da linha para **tracejado**.

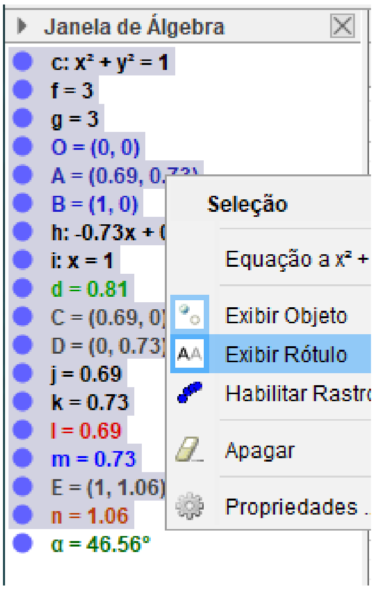
22. Repita o passo 21 para o seguimento "k".

23. Na **Janela de Álgebra**, clique com o botão direito do mouse no seguimento "l" e clique em **Propriedades**, na aba **Cor,** mude a cor para vermelho e na aba **Estilo** mude a espessura da linha para 7.

24. Repita o passo 23 para o seguimento "m" e coloque a cor azul.

25. Repita o passo 23 para o Arco Circular "d" e coloque a cor verde.

26. Repita o passo 23 para o seguimento “n”, coloque a cor laranja e feche a janela de propriedades.



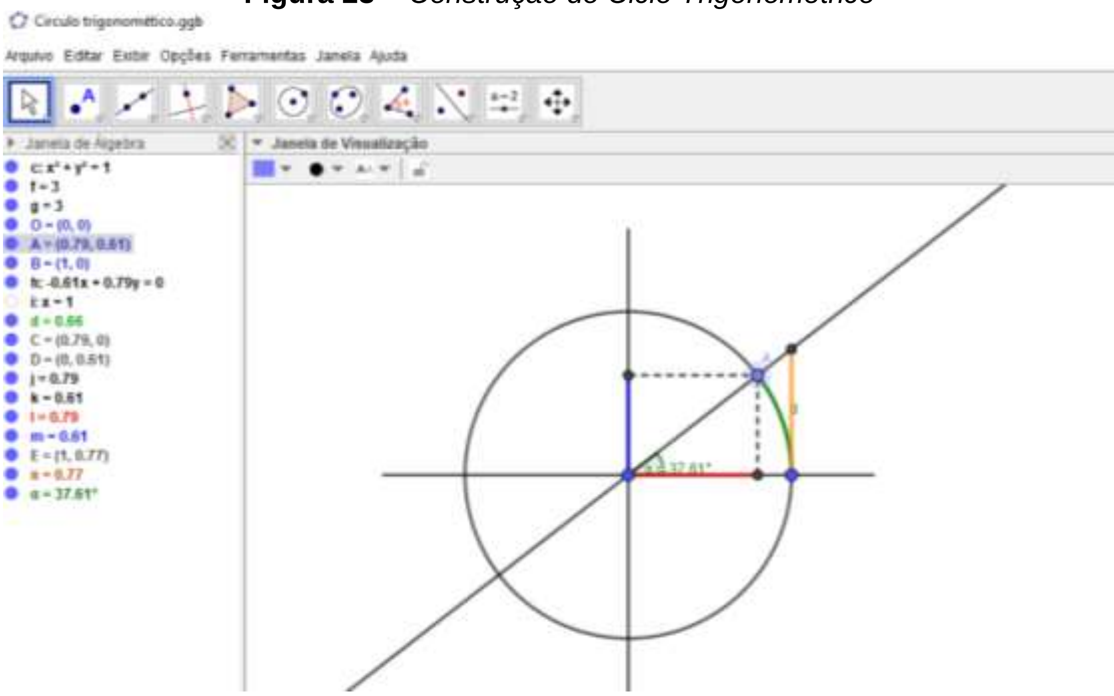
27. Na **Janela de Álgebra**, clique com o botão esquerdo do mouse no círculo “c” segure a tecla Shift e clique no seguimento “n”, clique com o botão direito do mouse sobre a seleção e clique em **Exibir Rótulo** para ocultar todos os rótulos selecionados**.**

28. Clique com o botão esquerdo do mouse na parte em banco da **Janela de Álgebra**, clique com o botão direito do mouse no ponto A e clique em **Exibir Rótulo,** faça o mesmo com o Arco Circular “d” para voltar a exibi-los**.**

29. Na **Janela de Álgebra**, clique na bolinha azul correspondente a reta “i”, para poder ocultar a reta.

30. Clique com o botão esquerdo do mouse na **Janela de Visualização,** em seguida clique na seta para a direita que fica em frente ao nome da janela, nas opções que aparece oculte **os eixos** e **a malha** clicando em cima de seus respectivos botões.

Figura 23 – *Construção do Ciclo Trigonométrico*



Movimente o ponto A, note que ele está preso círculo “c” e à medida que ele é deslocado o ângulo formado entre os pontos B,O e A vai alterando.

Importante

O seguimento “l” em vermelho representa o Cosseno, enquanto que o seguimento “m” em azul representa o Seno e o seguimento “n” em laranja representa a Tangente.

31. Clique no menu **Arquivo/Gravar como**.

32. Na janela de diálogo que surge, dei o nome para o arquivo de **“Ciclo trigonométrico”** escolha um local onde deseja guardar seu documento e clique no botão **Gravar**.

Ângulos no círculo trigonométrico

A construção dos ângulos é feita utilizando o vértice no centro dessa circunferência (origem) e seus lados são os seguimentos de reta que vão da origem até a circunferência, também chamados de raios da circunferência. O sentido de abertura do ângulo é anti-horário, ou seja, o primeiro lado é o raio da circunferência que fica sobre o eixo x e o segundo lado é o raio da circunferência que desloca-se em sentido anti-horário formando um ângulo entre os dois raios. (SILVA, 2020).

Radianos do Círculo Trigonométrico

As medidas de arcos presentes no círculo trigonométrico são dadas em graus $(°)$ ou radianos (rad), onde 1º equivale a 1/360 da circunferência, ou seja, a circunferência é dividida em 360 partes iguais ligadas, sendo que cada uma delas apresenta um ângulo que corresponde a 1°. Já 1 radiano corresponde à medida de um arco da circunferência, cujo comprimento é igual ao raio da circunferência do arco que será medido. (GOUVEIA, 2020).

Para auxiliar nas medidas, confira abaixo algumas relações entre graus e radianos:

$$\pi \, rad = 180°$$

$$2\pi \, rad = 360°$$

$$\pi/2 \, rad = 90°$$

$$\pi/3 \, rad = 60°$$

$$\pi/4 \, rad = 45°$$

Importante

Obs: As unidades de medida (grau e radiano) possuem uma relação, onde uma pode ser convertida para a outra utilizando uma regra de três simples.

Exemplo: Qual a medida de um ângulo de 90° em radianos?

$$\pi \_\_\_\_\_\_ 180°$$

$$x \_\_\_\_\_\_\_ 90°$$

Fazendo Meios pelos Extremos temos:

$$x.180° = 90°.\pi$$

$$x = \frac{90°.\pi}{180°}$$

$$x = \frac{\pi}{2} rad$$

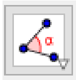
Para poder visualizar melhor as medidas dos arcos em radianos, vamos inserir essas medidas no ciclo trigonométrico criado anteriormente para analisar tato a construção no Geogebra, quanto a conversão de medidas de graus para radiano.

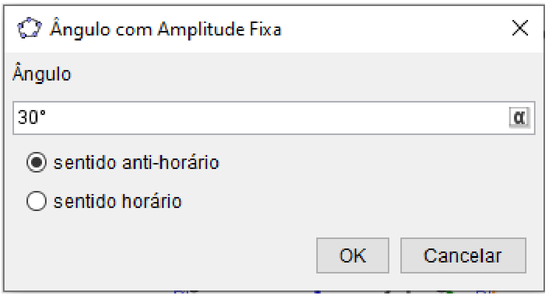
Procedimentos no Geogebra

1. Abra o Geogebra

2. Clique no menu **Arquivo/Abrir**, selecione o arquivo **"Ciclo Trigonométrico"** e clique no botão **Abrir**.

3. Na **Janela de Álgebra** clique com o botão direito do mouse no ponto B e clique em **Exibir Rótulo,** faça o mesmo com o Ponto O para voltar a exibi-los

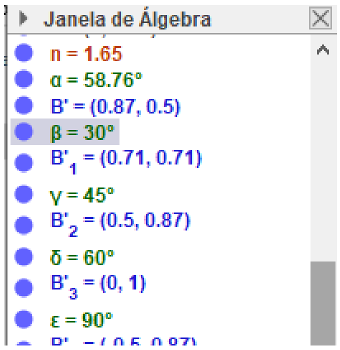
3. Clique no ícone ***Ângulos e Medidas***  e selecione a ferramenta **Ângulo com Amplitude Fixa** 



4. Clique no Ponto B e em seguida no Ponto O, na janela de diálogo que surge digite o ângulo de 30º, selecione o sentido anti-horário e aperte no botão Ok.

5. Repita o passo 4 para os ângulos de 45º, 60º, 90º, 120º, 135º, 150º, 180º, 210º, 225º, 240º, 270º, 300º, 315º, 330º.

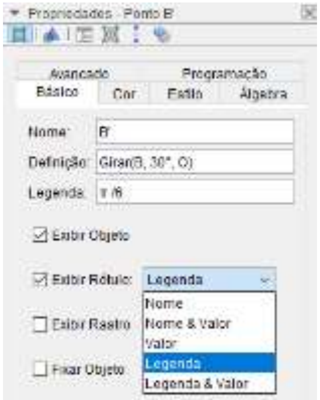
6. Na **Janela de Álgebra**, clique na bolinha azul correspondente aos ângulos criados no "passo 5" para poder ocultar todos os ângulos com exceção do ângulo alfa.



Importante

Os ângulos no Geogebra são destacados na cor verde, assim como mostra a figura acima.

7. Converta os ângulos criados nos “passos 4 e 5” para radianos, assim como foi feito no exemplo anterior.



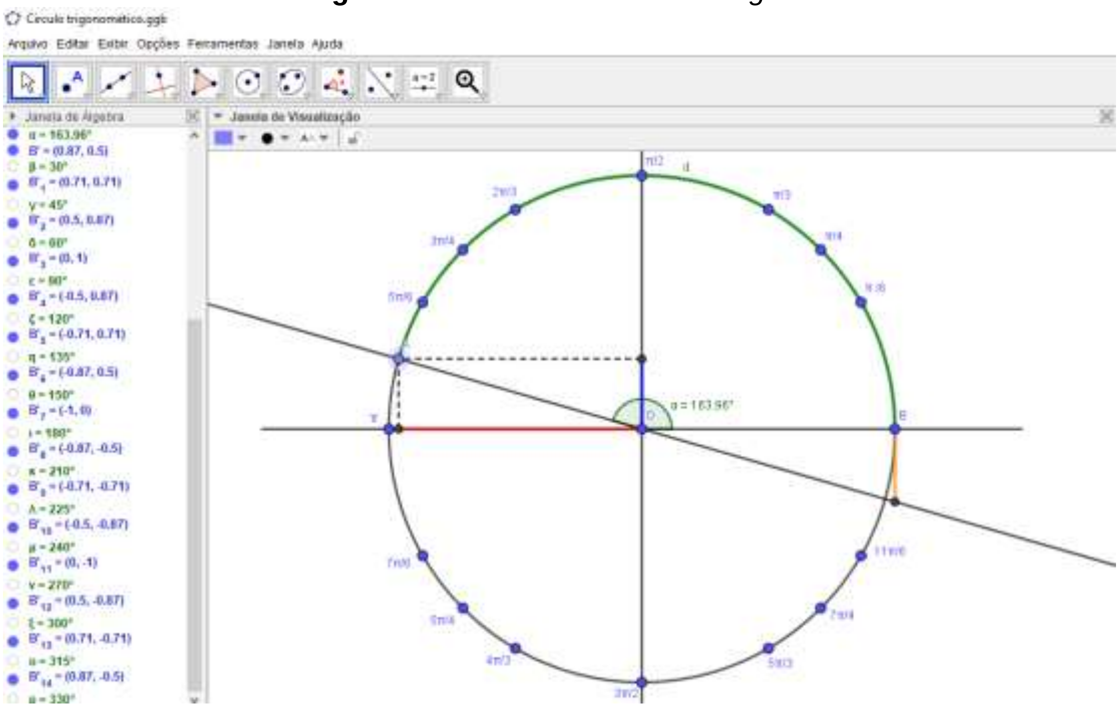
8. Clique com o botão direito do mouse em cima do Ponto B’ e clique em **Propriedades**. Em **Básico** preencha a “legenda” digitando $\pi/6$, em **Exibir Rótulo** selecione a opção Legenda.

9. Repita o “passo 8” em todos os pontos, obedecendo as informações da tabela a seguir.

B’$_1$	**B’$_2$**	**B’$_3$**	**B’$_4$**	**B’$_5$**	**B’$_6$**	**B’$_7$**
$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$3\pi/4$	$5\pi/6$	π
B’$_8$	**B’$_9$**	**B’$_{10}$**	**B’$_{11}$**	**B’$_{12}$**	**B’$_{13}$**	**B’$_{14}$**
$7\pi/6$	$5\pi/4$	$4\pi/3$	$3\pi/2$	$5\pi/3$	$7\pi/4$	$11\pi/6$

10. Clique com o botão esquerdo do mouse sobre um dos rótulos alterados, segure o clique e arraste até que o rótulo esteja fora do círculo, faça isso para que ao final, todos os rótulos estejam fora do círculo, próximos ao seu ponto e visíveis.

Figura 24 – *Radianos no Ciclo Trigonométrico*



Movimente o Ponto A, observe que a medida em que ele se aproxima dos pontos que estão exibindo os ângulos em radianos, o ângulo alfa mostra os valores em graus.

11. Clique no menu **Arquivo/Gravar como**.

12. Na janela de diálogo que surge, dei o nome para o arquivo de **"Radianos no Ciclo trigonométrico"** escolha um local onde deseja guardar seu documento e clique no botão **Gravar**.

Desafio: Utilizando os exemplos e atividades realizados, identifique as medidas dos ângulos de 40°, 70º e 130°.

____

____

____

4.6.4 – GRÁFICO DAS FUNÇÕES SENO, COSSENO E TANGENTE

No **círculo trigonométrico** temos que cada número real está associado a um ponto da circunferência, pensando nisso, para representar o gráfico das funções trigonométricas no Geogebra, utilizaremos o recurso da **Janela de Visualização 2** e o Arquivo "Ciclo trigonométrico" criado anteriormente. Serão feitas modificações em alguns parâmetros necessários para a compreensão das funções trigonométricas.

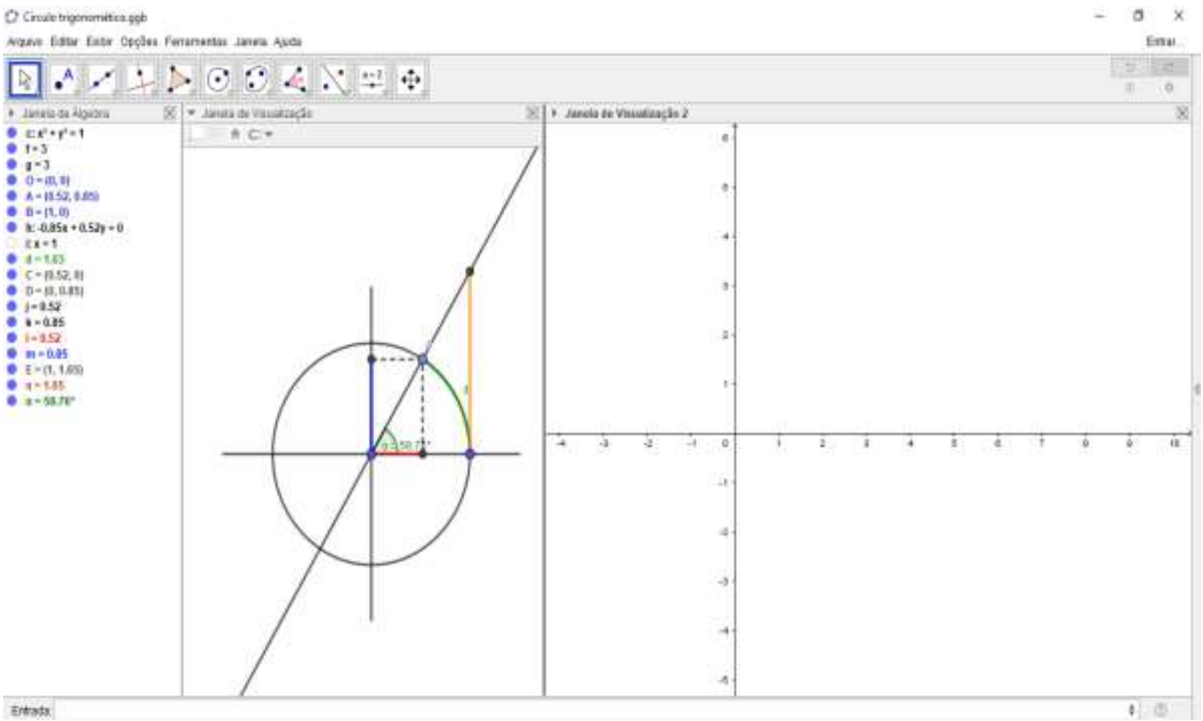
Procedimentos no Geogebra

1. Abra o Geogebra

2. Clique no menu **Arquivo/Abrir**, selecione o arquivo "Ciclo trigonométrico" e clique no botão **Abrir**.

3. Clique no menu **Exibir** depois marque a opção **Janela de Visualização 2**

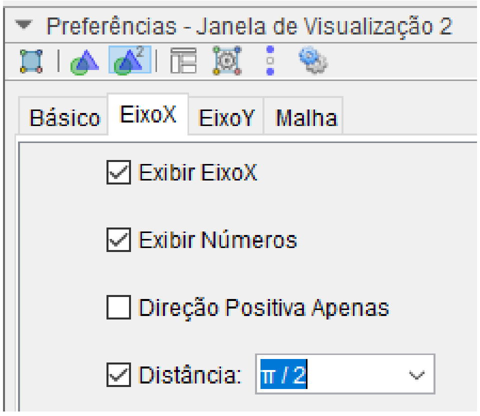
4. Clique com o botão esquerdo do mouse em cima da linha que divide as janelas de visualização, segure o clique e arraste até ficar semelhante ao formato da imagem abaixo.



5. Clique com o botão direito do mouse dentro da **Janela de Visualização 2**, selecione a opção **Janela de Visualização** e selecione a aba **Eixo X**.

6. Marque a Caixa **Distância** e selecione a distância π/2

7. No eixo Y marque a Caixa **Distância** e selecione a distância 1.



8. Feche as propriedades da **Janela de Visualização 2** e clique dentro da **Janela de Visualização 2**, depois clique no ***Campo Entrada*** e digite: **F=(d,0)** e aperte a tecla **Enter**, criando o ponto F na Janela de Visualização 2.

9. No ***Campo Entrada*** 

digite: **segmento((0,0),F)** e aperte a tecla **Enter**, criando o segmento "p"

10. No ***Campo Entrada*** 

digite: **G=(x(F),x(C))** e aperte a tecla **Enter.**

11. **No *Campo Entrada*** 

digite: **H=(x(F),y(D))** e aperte a tecla **Enter,**

12. No ***Campo Entrada*** 

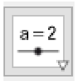
digite: **I=(x(F), y(E))** e aperte a tecla **Enter.**

13. Clique com o botão direito do mouse em cima do Ponto G e clique em **Propriedades**. Em **Básico** marque a opção **Exibir Rastro**, na aba **Cor** mude a cor do Ponto G para Vermelho.

14. Repita o passo 13, agora para o Ponto H e utilize a cor Azul.

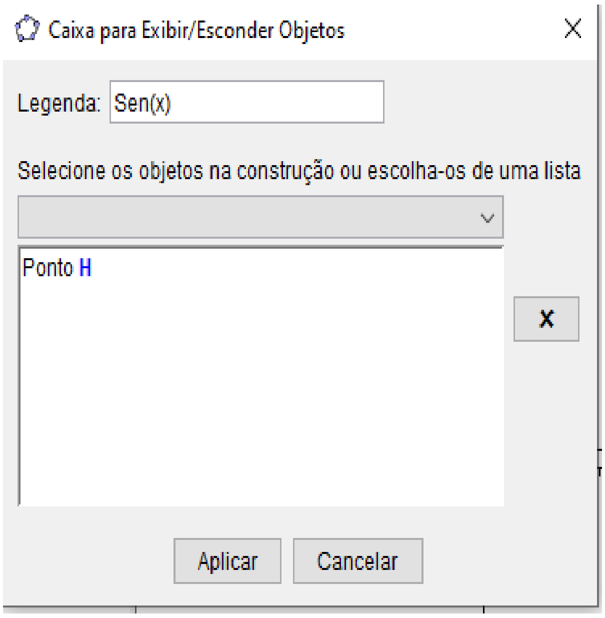
15. Repita o passo 13, agora para o Ponto H e utilize a cor Laranja.

16. Repita o passo 13, agora para o segmento “p”, mas para este aplique apenas à cor Verde, não precisa Exibir o Rastro.

17. Clique na **Janela de Visualização 1**, em seguida Clique no ícone ***Controles*** 

e selecione a ferramenta **Caixa exibir/esconder objetos** 

18. Clique na parte superior ao ciclo trigonométrico e na caixa que surge digite em Legenda; **Sen(x)**, em **Selecionar os objetos na construção** clique na seta para baixo, selecione o Ponto H e clique em **Aplicar**.



19. Clique abaixo do botão Sen(x), na caixa que surge digite em Legenda; **Cos(x)**, em **Selecionar os objetos na construção** clique na seta para baixo, selecione o Ponto G e clique em **Aplicar**.

20. Clique abaixo do botão Cos(x), na caixa que surge digite em Legenda; **Tg(x)**, em **Selecionar os objetos na construção** clique na seta para baixo, selecione o Ponto I e clique em **Aplicar**.

21. Clique com o botão direito do mouse, segure o clique e arraste os botões criados para organiza-los um em baixo do outro.

22. Deixe marcado apenas a função que irá utilizar e desmarque as outras, movimente o Ponto A e veja a função sendo criada.

Figura 25 – *Construção do gráfico da Função Seno*

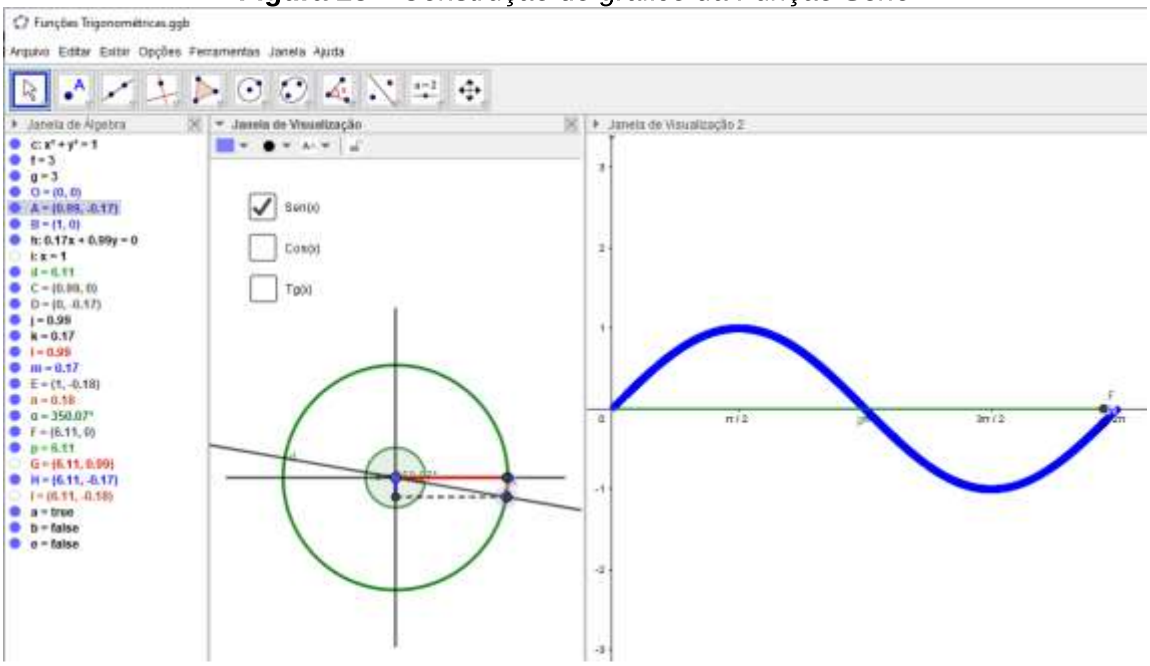


Figura 26 – *Construção do gráfico da Função Cosseno*

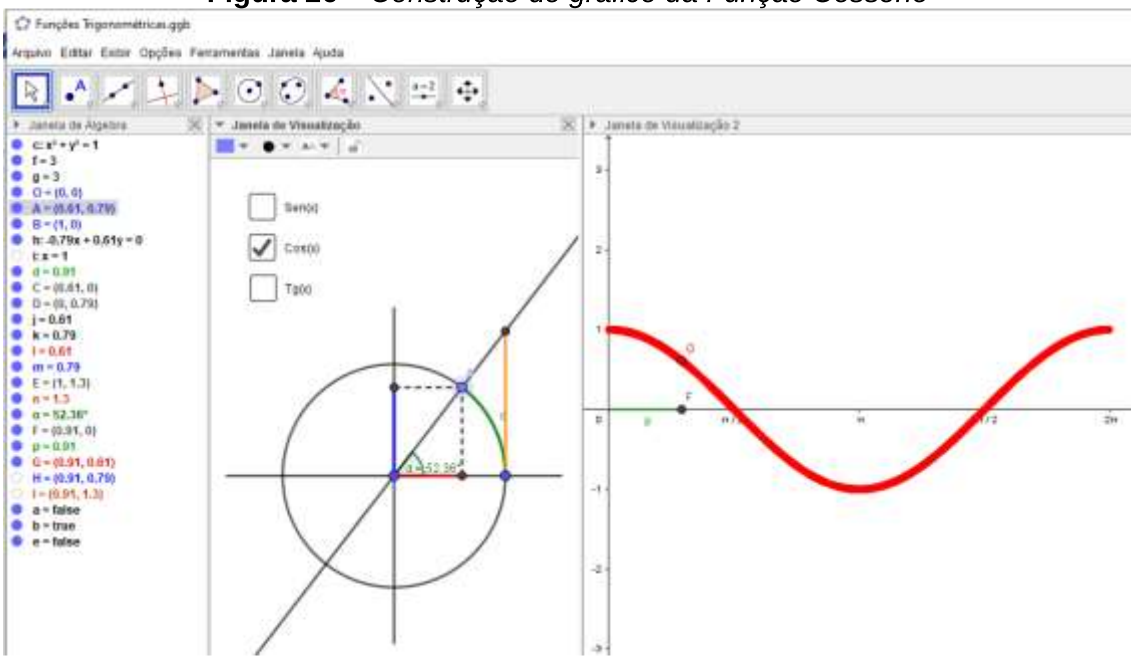
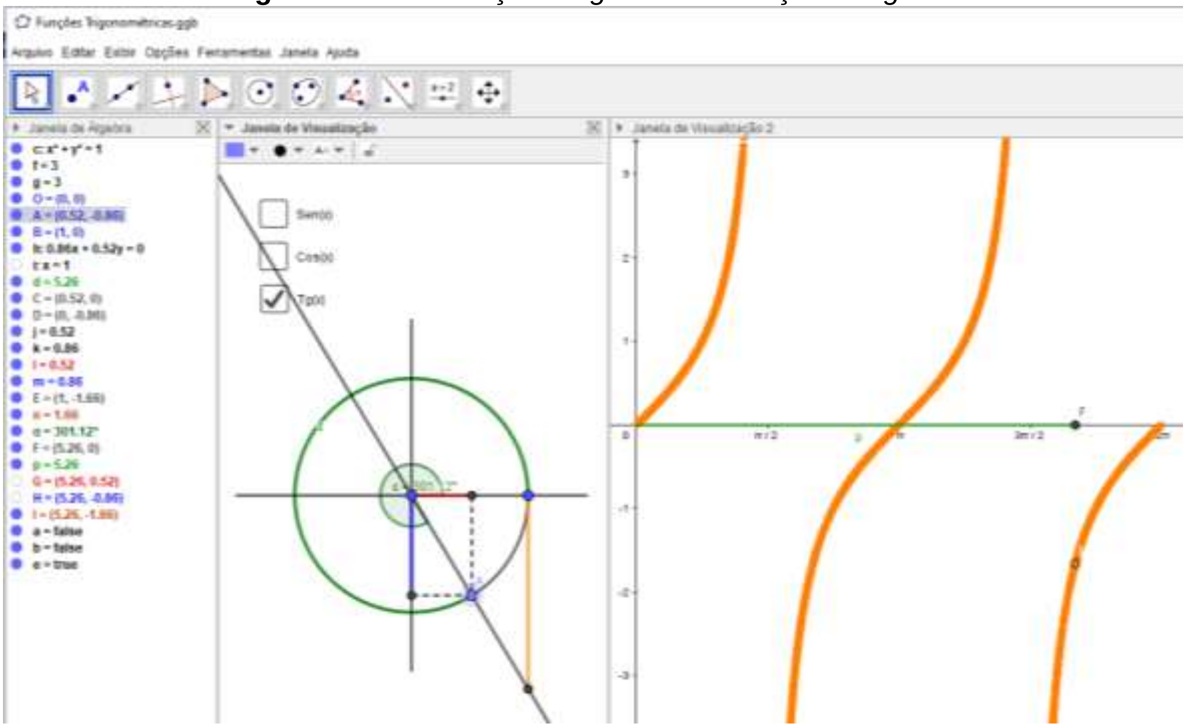


Figura 27 – *Construção do gráfico da Função Tangente*



23. Clique no menu **Arquivo/Gravar como**.

24. Na janela de diálogo que surge, dei o nome para o arquivo de **"Funções Trigonométricas"** escolha um local onde deseja guardar seu documento e clique no botão **Gravar**.

Desafio: Agora é com você caro estudante, utilizando todos os conhecimentos sobre as ferramentas do Geogebra estudadas até aqui e o conhecimento sobre funções trigonométricas, monte um tutorial para a criação dos gráficos das funções Secante, Cossecante e Cotangente, semelhante ao que construímos para Seno, Cosseno e Tangente.

5 – REFERÊNCIAS

BARROS, Osvaldo Santos. **Etnoastronomia Tembé-Tenetehara como Matriz de Abordagem (Etno)Matemática no Ensino Fundamental**. (Monografia – Orientação Iran Abreu Mendes). Belém, UFPA/NPADC, 2004.a.

BETTEGA, Maria H. S. **A educação continuada na era digital**. 2. ed São Paulo: Cortez, 2010. (Coleção questões da nossa época; v.18)

BIANCHINI, Edwaldo e PACCOLA, Herval. **Matemática** – 1. Ed. – São Paulo: Moderna, 1989.

BISHOP, Alan J. **Enculturación matemática: La educación matemática desde uma perspectiva cultural**. Barcelona, Paidós, 1999.

BORBA, Marcelo A. e PENTEADO, Mirian G. **Informática e Educação Matemática** – 5. Ed. – Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2012. p.17.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**/ Secretaria de Educação. Brasília: Disponível em: http://www.basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf

BRITO, M., LUCENA, I., SILVA, F. **Etnomatemática e a Cultura Amazônica: Um Caminho para Fazer Matemática em Sala De Aula**. In Anais do SIPEMAT. Recife, Programa de Pós-Graduação em Educação-Centro de Educação – Universidade Federal de Pernambuco, 2006, 06p.

Davis, P., e Hersh, R. (1995). **A experiência matemática.** 1.ed. Lisboa: Gradiva – 1995.

LUCENA, Isabel. **Educação Matemática, Ciência e Tradição:** Tudo no mesmo barco. Cnetro de Ciencias Sociais Aplicadas, 206f., Tese (Doutorado em Educação). Natal: UFRN/2005. p.9

FREIRE, Wendel. **Tecnologia e Educação: as mídias na prática docente**... [et. al.]. 2. Ed. Rio de Janeiro: Wak Ed,. 2011.

FRISKE, Andréia. L. [et. al.] **Minicurso de Geogebra**. Santa Maria, UFSM, 2016. p. 7 a 10.

GOUVEIA, Rosimar. **Círculo Trigonométrico.** Disponível em: https://www.todamateria.com.br/circulo-trigonometrico/ : Acessado em 08/03/2020.

GRAVINA, Maria A. **Matemática, mídias digitais e didática: tripé para formação de professores de matemática** … [et. al.] Porto Alegre: Evangraf, 2012.

MORAN, José Manuel. **Desafios que as tecnologias digitais nos trazem**, Papirus, 21ª ed, 2013.

OLIVEIRA, Naysa C. N. O. **Função.** Mundo da Educação. Disponível em: https://mundoeducacao.uol.com.br/matematica/funcao.htm: Acessado em 06/03/2020.

O Geogebra, Textos. Disponível em: https://ogeogebra.com.br/site/textos.php: Acessado em 10/03/2020.

PAIVA, Manoel. **Matemática**, volume único. 1. Ed. – São Paulo: Moderna, 2005.

SACCOL A., SCHLEMMER E. e BARBOSA J. **m-learming e u-learning – novas perspectivas da aprendizagem móvel e ubíqua**. São Paulo: Pearson, 2011.

SILVA, Karine, S. P. **A Construção de uma Sequência Didática utilizando o GeoGebra, a Teoria das Situações Didáticas e Modelagem Matemática para o Ensino das Funções Logarítmicas** (Dissertação – Orientador: Dr. Oscar Alfredo Paz La Torre) UNEB, 2016. p. 50.

SILVA, Luiz P. M.. **Círculo Trigonométrico.** Prepara Enem. Disponível em: https://www.preparaenem.com/matematica/circulo-trigonometrico.htm: Acessado em 10/03/2020.

Apresentação dos Autores

ELIZEU CANTÃO DE JESUS CALANDRINI NETO

Mestrando no Programa de Pós-Graduação em Docência em Educação em Ciência e Matemática (PPGDOC/IEMCI/UFPA). Graduado no Curso de Licenciatura Plena em Matemática da Universidade Federal do Pará- Campus Universitário de Abaetetuba (2017). Graduado em Gestão Empresarial pela Universidade da Amazônia – UNAMA (2008) Professor Colaborador do Laboratório de Ensino de Matemática da Amazônia Tocantina (LEMAT) - Universidade Federal do Pará/Campus Universitário de Abaetetuba. Pesquisador do Grupo de Estudo e Pesquisa das Práticas Etnomatemáticas na Amazônia- GETNOMA. Pesquisador do Grupo de Estudos Memória, Formação Docente e Tecnologia – GEPEME. Professor/Administrador do projeto: Cursinho Preparatório para o Enem – SUCESSO VESTIBULARES, Professor de Matemática na modalidade EJA no Instituto Profissionalizante Paradigma.

OSVALDO DOS SANTOS BARROS

Doutor em Educação, na linha Educação Matemática (defesa em 24/06/2010) no Programa de Pós-graduação em Educação do Centro de Ciências Sociais e aplicada (CCSA) da UFRN. Possui graduação em Licenciatura Plena Em Matemática pela Universidade do Estado do Pará (1998) e Mestrado em Educação em Ciências e Matemáticas pela Universidade Fedrela do Pará (2004). Atua como professor adjunto da Faculdade de Ciências Exatas e Tecnológicas, no curso de Licenciatura em Matemática, do campus de Abaetetuba da Universidade Federal do Pará - UFPA, ministrando disciplinas pedagógica relacionadas ao ensino e aprendizagem da Matemática. Atua no Programa de Pós-Graduação em Docência em Educação em Ciências e Matemáticas - Mestrado Profissional.

Prefácio